

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Theodor Lehmann

Große elasto-plastische  
Formänderungen

Heft Nr. 1



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Theodor Lehmann**

**Große elasto-plastische Formänderungen**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 1**

**Dezember 1976  
Nachdruck Februar 1984**

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität  
Bochum

Der vorliegende Beitrag umfaßt eine Reihe von Seminarvorträgen, die der Verfasser an der Universität Nis/Jugoslawien im Juni 1975 gehalten hat.

This paper comprehends a serie of lectures held by the autor at the University of Nis/Yugoslavia in June 1975.

© 1976 Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann  
4630 Bochum 1, Gutenbergstraße 10  
Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

### Zusammenfassung

Zunächst werden einige verschiedene Möglichkeiten der Beschreibung großer Deformationen gegenübergestellt. Sodann wird gezeigt, daß sich elasto-plastische Formänderungen unter gewissen Voraussetzungen sowohl als thermomechanischer Prozeß, als auch als thermodynamische Zustandsänderungen beschreiben lassen. Die Unterschiede und die Zusammenhänge dieser beiden Beschreibungsweisen werden erörtert. Beispielhaft werden einige spezielle Materialgesetze für isotrope und anisotrope elasto-plastische Körper näher betrachtet. Anhand einiger Anwendungsbeispiele werden einige Phänomene aufgezeigt, die bei großen elasto-plastischen Formänderungen zu beobachten sind.

### Summary

At first some different ways of description of large deformations are shown. Secondly it is demonstrated that under certain assumptions elastic-plastic deformations may be treated as well as thermo-mechanical process as by means of thermodynamic state equations. The differences and the connection between these both cases are treated. In the following some special types of material behaviour are considered more detailed comprehending isotropic and anisotropic elastic-plastic material. In connection with some applications some phenomena are discussed observed in large elastic-plastic deformations.

Inhaltsangabe

	Seite
1. Einführung	4
2. Allgemeines zur Darstellungsweise	6
3. Kinematik elasto-plastischer Deformationen	14
3.1 Beschreibung der Deformationen	15
3.2 Beschreibung der Deformations- geschwindigkeit	19
3.3 Aufteilung der Deformationen in einen elastischen und einen plastischen Anteil	21
4. Allgemeines zum Materialgesetz elasto- plastischer Körper; grundlegende Annahmen und Voraussetzungen	26
5. Beschreibung elasto-plastischer Form- änderungen als thermo-mechanischer Prozeß und durch thermodynamische Zustands- gleichungen	32
5.1 Beschreibung elasto-plastischer Form- änderungen als thermo-mechanischer Prozeß	32
5.2 Beschreibung elasto-plastischer Form- änderungen durch thermodynamische Zustandsgleichungen	37
5.2.1 Thermodynamische Zustands- größen elasto-plastischer Elementar-Prozesse	38
5.2.2 Thermodynamische Zustands- gleichungen für elasto- plastische Körper	40
5.2.3 Zusammenhang zwischen Prozeßablauf und Entropie- produktion	44
5.3 Einige ergänzende Bemerkungen	46
6. Beispiele für das Materialgesetz elasto- plastischer Körper	46

	Seite
6.1 Isotroper elasto-plastischer Körper	46
6.2 Beispiel für einen anisotropen elasto-plastischen Körper	53
7. Einige Anwendungsbeispiele	56
7.1 Allgemeines	56
7.2 Reine Scherung und reiner Schub	58
7.3 Reine Blechbiegung	66
7.4 Einige ergänzende Bemerkungen	73
 Literaturhinweise	 75

## 1. Einführung

Wir beschränken uns auf eine phänomenologische Theorie elasto-plastischer Körper. Dabei setzen wir voraus, daß wir diese Körper als klassische Kontinua, d. h. als Punkt-Kontinua betrachten können, deren Kinematik sich vollständig auf die Angabe der Verschiebungen der Körperpunkte gegenüber einem gegebenen Raum als Funktionen des Ortes und der Zeit zurückführen läßt. Vorgänge, die sich im Bereich der atomaren bzw. molekularen Struktur der realen Körper abspielen, werden bei dieser Betrachtungsweise nur global erfaßt.

Die phänomenologische Theorie elasto-plastischer Körper umfaßt

1. die material-unabhängigen Grundgleichungen, nämlich,
  - a) den Impulssatz, aus dem auch das Gesetz über den Austausch mechanischer Energie ableitbar ist,
  - b) die Hauptsätze der Thermodynamik, die den Rahmen für den gesamten Energie-Austausch bestimmen;
2. die material-abhängigen konstitutiven Gleichungen (das Materialgesetz), nämlich
  - a) die thermodynamischen Zustandsgleichungen (thermische und kalorische),
  - b) das Gesetz für den Austausch thermischer Energie (durch Wärmeleitung und Wärmeübertragung)
  - c) das Gesetz für die Entropie-Produktion und
  - d) die sonstigen material-abhängigen funktionalen Beziehungen, die die unabhängigen und abhängigen Variablen

des thermo-mechanischen Prozesses  
miteinander verknüpfen.

Vielfach wird angenommen, daß das Materialgesetz der elasto-plastischen Körper unabhängig vom Zeitmaßstab sei und damit unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der ein Prozeß abläuft. Das ist jedoch nur möglich, wenn wir uns auf sogenannte Elementar-Prozesse, die quasi-statisch und homogen im gesamten Körper verlaufen, oder auf quasi-statische, isotherme Prozesse beschränken. Andernfalls ergibt sich durch den zeitabhängigen Austausch thermischer Energie eine Geschwindigkeitsabhängigkeit selbst bei solchen (quasi-statischen) Prozessen, bei denen wir die Trägheitswirkungen noch vernachlässigen dürfen.

Plastische Deformationen sind mit irreversiblen Zustandsänderungen des Materials verbunden. Darum müssen wir bei der Beschreibung der elasto-plastischen Formänderungen eines Körpers den gesamten thermo-mechanischen Prozeß verfolgen, den die einzelnen Elemente des Körpers durchmachen. Dies zwingt uns dazu, die den Prozeß bestimmenden Größen jeweils den Körperelementen zuzuordnen, d. h. zu einer körperbezogenen Beschreibung dieser Prozesse. Die damit zusammenhängenden Fragen wollen wir im nächsten Kapitel erörtern, soweit es hier erforderlich ist.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir dann zunächst die Kinematik elasto-plastischer Deformationen behandeln. Dabei wollen wir uns besonders auch der Frage widmen, wie sich die Gesamt-Deformation in einen elastischen und in einen plastischen Anteil aufspalten läßt. Eine solche Aufteilung ist allerdings, wie wir noch sehen werden, nur dann sinnvoll, wenn wir annehmen dürfen, daß die Material-Konstanten, die das elastische Verhalten bestimmen, durch die plastischen Formänderungen nicht beeinflußt werden.

Kapitel 4 dient der allgemeinen Erörterung des Materialgesetzes elasto-plastischer Körper sowie der grundlegenden Annahmen, die wir bei der Aufstellung des Materialgesetzes treffen. In Kapitel 5 wollen wir insbesondere untersuchen, in welcher Weise die Beschreibung elasto-plastischer Deformationen als thermomechanischer Prozeß und die Beschreibung durch thermodynamische Zustandsgleichungen miteinander korrespondieren. In Kapitel 6 sollen sodann einige Sonderfälle des Materialgesetzes für elasto-plastische Körper diskutiert und in Kapitel 7 einige Anwendungsbeispiele erörtert werden.

## 2. Allgemeines zur Darstellungsweise

Wir gehen davon aus, daß unser Beobachtungsraum, auf den wir die Verschiebung, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung der Körperpunkte beziehen, ein Inertial-System sei. Zur Beschreibung der Ereignisse in diesem Raum legen wir ein raumfestes Koordinatensystem  $x^\alpha$  und eine Zeitskala  $t$  (mit äquidistantem Zeitmaß) fest. Für ein Linienelement dieses Raumes gilt (vgl. Abb. 1)<sup>1)</sup>

$$d\underline{r} = dx^\alpha \underline{g}_\alpha, \quad (2.1)$$

wobei

$$\underline{g}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^\alpha} \quad (2.2)$$

---

1) Wir benutzen hier und im folgenden stets die Einstein'sche Summationskonvention, nach der über die (von 1 bis 3 laufenden) Indizes stets zu summieren ist, sobald ein Index in einem Term (genau) zweimal auftritt, wie hier der Index  $\alpha$ . Einfach unterstrichene Buchstaben bezeichnen Vektoren, zweifach unterstrichene Buchstaben Tensoren 2. Stufe.

die - im allgemeinen ortsabhängigen - Basisvektoren des raumfesten Koordinatensystems sind.

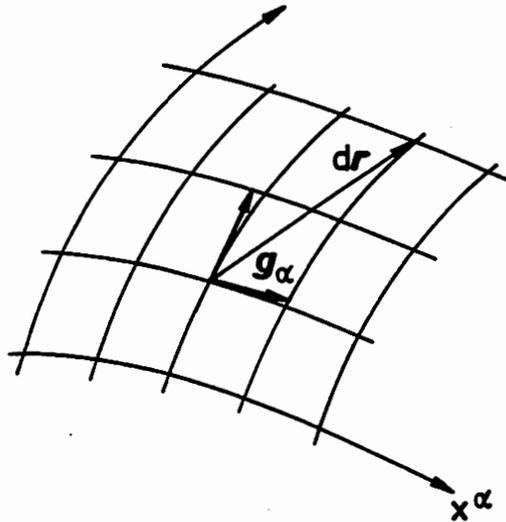


Abb. 1

Die zu diesen Basisvektoren reziproke Basis  $\underline{g}^\alpha$  ist durch

$$\underline{g}^\alpha \cdot \underline{g}^\beta = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{für } \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{(Kronecker-Delta)} \quad (2.3)$$

definiert. Die Metrik dieses raumfesten Koordinatensystems ist durch

$$g_{\alpha\beta} = \underline{g}_\alpha \cdot \underline{g}_\beta \quad (2.4)$$

bestimmt. Die Metrik der reziproken Basis ist

$$g^{\alpha\beta} = \underline{g}^\alpha \cdot \underline{g}^\beta \quad (2.5)$$

und es gilt

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g^{\beta\alpha} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \quad (2.6)$$

Für den gegenüber diesem Beobachtungsraum bewegten Körper führen wir ein körperfestes (konvektives) Koordinatensystem  $\xi^i$  mit den Basisvektoren

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \quad (2.7)$$

ein. Dieses Koordinatensystem bewegt und deformiert sich mit dem Körper, deshalb ist auch die Metrik dieses Koordinatensystems zeitveränderlich (vgl. Abb. 2). Die Metrik im Ausgangszustand ( $t = t_0$ ) bezeichnen wir mit

$$g_{ik}(\xi^r, t_0) = \overset{\circ}{g}_{ik}(\xi^r). \quad (2.8)$$

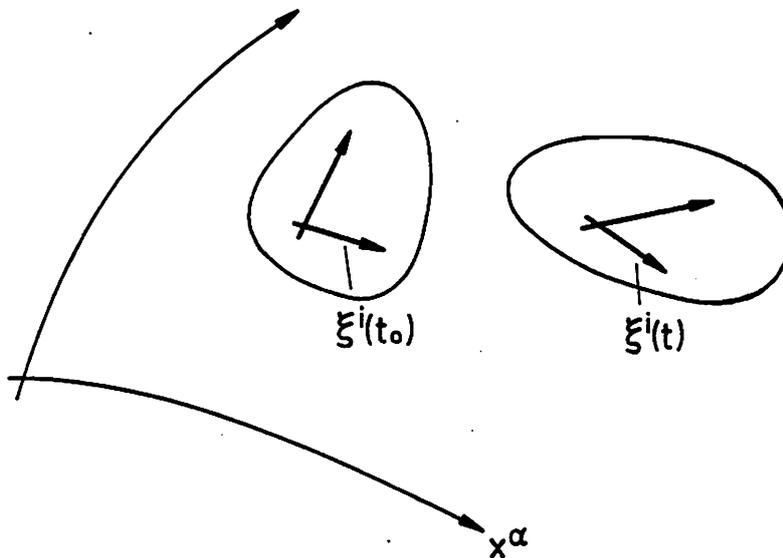


Abb. 2

Die Metrik im verformten Zustand ist

$$g_{ik} = g_{ik}(\xi^r, t). \quad (2.9)$$

Analoges gilt für die Metrik der reziproken Basis.

Die - orts- und zeitabhängige - lineare Transformation zwischen den Koordinatendifferentialen des raumfesten und des körperfesten Koordinatensystems wird durch die Transformationsmatrizen<sup>2)</sup>

$$x^\alpha_{,i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \quad \text{bzw.} \quad \xi^i_{, \alpha} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \quad (2.10)$$

vermittelt:

$$dx^\alpha = x^\alpha_{,i} d\xi^i \quad \text{bzw.} \quad d\xi^i = \xi^i_{, \alpha} dx^\alpha. \quad (2.11)$$

Wir können im übrigen diese Transformation auch formal als Multiplikation mit einem Tensor deuten, indem wir die (Doppelfeld-) Tensoren (oder sogenannte shifter)

$$\underline{\underline{A}} = x^\alpha_{,i} \underline{g}_\alpha \underline{g}^i \quad \text{und} \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \xi^i_{, \alpha} \underline{g}_i \underline{g}^\alpha \quad (2.12)$$

eingeführen. Es gilt dann

$$\underbrace{dx^\alpha}_{d\underline{r}} \underline{g}_\alpha = \underbrace{x^\alpha_{,i} \underline{g}_\alpha \underline{g}^i}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{d\xi^i}_{d\underline{r}} \underline{g}_i = x^\alpha_{,i} d\xi^i \underline{g}_\alpha \quad (2.13)$$

---

2) Partielle Differentiation nach einer der Koordinaten bezeichnen wir hier und im folgenden abkürzend durch ein Komma mit nachgestelltem Index der Koordinate.

bzw.

$$\underbrace{d\xi^i g_i}_{d\underline{r}} = \underbrace{\xi^i_{|\alpha} g_i g^\alpha}_{\underline{A}^{-1}} \cdot \underbrace{dx^\beta g_\beta}_{d\underline{r}} = \xi^i_{|\alpha} dx^\alpha g_i. \quad (2.14)$$

Die physikalischen Größen, die in unsere Problembeschreibung eingehen, können wahlweise

- a) den Raumpunkten (Koordinaten  $x^\alpha$  und  $t$ ),
- b) den Körperpunkten (Koordinaten  $\xi^i$  und  $t$ )

zugeordnet werden, da die  $x^\alpha$  eine eindeutig umkehrbare - allerdings zeitabhängige - Funktion der  $\xi^i$  sind:

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, t). \quad (2.15)$$

Ferner steht es uns frei, die Zahlenwerte (Koordinaten) der (tensoriellen) physikalischen Größen wahlweise auf die Basis des raumfesten Koordinatensystems wie auf die Basis des körperfesten Koordinatensystems (im Ausgangszustand oder im verformten Zustand) zu beziehen. Welche Basis wir jeweils zugrundelegen, kennzeichnen wir durch die Schreibweise der Indizes. So beziehen sich kleine griechische Buchstaben jeweils auf das raumfeste Koordinatensystem, kleine lateinische Buchstaben jeweils auf das körperfeste Koordinatensystem, wobei wir im letzten Falle noch jeweils zu entscheiden haben, ob wir die Basis des verformten Koordinatensystems oder des unverformten Koordinatensystems meinen. Wir legen fest, daß wir uns, falls nicht abweichend ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, bei kleinen lateinischen Indizes jeweils auf die Basis des verformten körperfesten Koordinatensystems beziehen.

Bei der Ableitung eines Tensors nach einer Raumkoordinate - als Beispiel wählen wir einen Tensor zweiter Stufe - erhalten wir in bekannter Weise<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (A^\beta_{\cdot\gamma} \underline{g}_\beta \underline{g}^\gamma) = A^\beta_{\cdot\gamma|\alpha} \underline{g}_\beta \underline{g}^\gamma \quad (2.16)$$

mit der sogenannten kovarianten Ableitung

$$A^\beta_{\cdot\gamma|\alpha} = A^\beta_{\cdot\gamma,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\delta} A^\delta_{\cdot\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} A^\beta_{\cdot\delta} \quad (2.17)$$

Die Größen  $\Gamma^\beta_{\alpha\delta}$  usw. sind die sogenannten Christoffel-Symbole zweiter Art, die durch

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \underline{g}_\beta = \underline{g}_{\beta|\alpha} = \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \underline{g}_\delta = \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} \underline{g}_\delta \quad (2.18)$$

definiert sind. Analoges gilt für die Ableitung nach einer Körperkoordinate  $\xi^i$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} (A^k_{\cdot l} \underline{g}_k \underline{g}^l) = A^k_{\cdot l|i} \underline{g}_k \underline{g}^l \quad (2.19)$$

Bei der Ableitung eines Tensors nach der Zeit haben wir zu beachten, gegenüber welchem Koordinatensystem die zeitliche Änderung verfolgt und ob dabei der Raumpunkt oder der Körperpunkt festgehalten werden soll. Wir kommen so zu verschiedenen definierten zeitlichen Ableitungen. Aus den zahlreichen Möglichkeiten, die sich bei einer allgemeinen Betrachtung ergeben<sup>4)</sup>, seien hier vier Definitionen herausgegriffen, die wir im folgenden benötigen.

---

3) vgl. [1, 2]

4) siehe hierzu [2-5]



Differentiation nach der Zeit  $\xi^i = \text{konst.}$  gehalten werden soll, so z. B. bei der Definition der Geschwindigkeit der Körperpunkte gegenüber dem Beobachtungsraum. Für sie gilt

$$v^\alpha = \frac{\partial}{\partial t_{(\xi^i = \text{konst.})}} x^\alpha = (\dot{x}^\alpha). \quad (2.24)$$

c) Substantielle Differentiation eines raumbezogenen Tensors ( $\xi^i = \text{konst.}$ )

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} (A^\alpha{}_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta) &= (A^\alpha{}_\beta \dot{\underline{g}}_\alpha \underline{g}^\beta) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (A^\alpha{}_\beta) + v^s A^\alpha{}_\beta |_{\underline{g}} \right\} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

$(x^s = \text{konst.})$

Speziell gilt

$$\frac{D}{dt} \underline{g}_\alpha = v^s \underline{g}_{\alpha|s} = v^s \Gamma^\beta{}_{\alpha s} \underline{g}_\beta. \quad (2.26)$$

d) Konvektive Differentiation eines körperbezogenen Tensors ( $\xi^i = \text{konst.}$ )

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} (A^i{}_k \underline{g}_i \underline{g}^k) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (A^i{}_k) + d^i{}_r A^r{}_k - d^k{}_r A^i{}_r \right\} \underline{g}_i \underline{g}^k. \\ &= \underbrace{\left( A^i{}_k \right)}_{(A^i{}_k)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} d^i{}_k &= \frac{1}{2} \left\{ v^i |_{\underline{g}^k} + v_k |^i \right\} \\ &= \frac{1}{2} \dot{g}^{i+r} (g_{rk}) = -\frac{1}{2} (\dot{g}^{i+r}) g_{rk} \end{aligned} \quad (2.28)$$

die Verzerrungsgeschwindigkeit der Körperelemente.

Die unter d) definierte Ableitung wird auch materielle Ableitung oder mitrotierende Ableitung genannt. Ihre Definition geht auf Zaremba [6] und Jaumann [7] zurück. Es läßt sich jedoch zeigen, daß wir diese Ableitung auch als kovariante Ableitung nach der Zeit bezeichnen können, sofern wir die Zeit in geeigneter Weise als vierte Koordinate ( $t = \xi^0$ ) einführen [8]. Deshalb schreiben wir abkürzend

$$\frac{D}{dt} (A^i_k \underline{g}_i \underline{g}^k) = A^i_k|_0 \underline{g}_i \underline{g}^k. \quad (2.29)$$

Für symmetrische Tensoren zweiter Stufe ist  $A^i_k|_0$  gleich dem symmetrischen Teil der partiellen Ableitung nach der Zeit

$$A^i_k|_0 = \frac{1}{2} \left\{ (\dot{A}^i_k) + g^{ir} (\dot{A}^s_r) g_{sk} \right\}. \quad (2.30)$$

Bei raumbezogener Darstellung eines Tensors gilt für die unter d) definierte (substantielle, körperbezogene) Ableitung nach der Zeit

$$\frac{D}{dt} (A^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (A^\alpha_\beta) + v^s A^\alpha_\beta|_s - \omega^\alpha_s A^\rho_\beta + \omega^\rho_\beta A^\alpha_s \right\} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta, \quad (2.31)$$

( $x^s = \text{const.}$ )

wobei

$$\omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2} \left\{ v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha \right\} \quad (2.32)$$

die Rotationsgeschwindigkeit der Körperelemente bezeichnet.

### 3. Kinematik elasto-plastischer Deformationen

Die Deformationen eines Körpers können wir erfassen,

indem wir

- (I) die Bewegung des Körpers im Raume verfolgen oder
- (II) die Veränderungen des körperfesten Koordinatensystems  $\xi^i$  betrachten.

Bei der ersten Vorgehensweise ist zu beachten, daß bei der Beschreibung der Deformationen die Starrkörper-Rotationen, die zu den Deformationen der Körperelemente nicht beitragen, eliminiert werden müssen. Im zweiten Falle geschieht dies bereits im Ansatz, da bei dieser Betrachtungsweise auf die Bewegung gegenüber dem Raum nicht Bezug genommen wird. Wir wollen im folgenden einige verschiedene Möglichkeiten der Beschreibungsweise gegenüberstellen, ohne dabei allerdings eine vollständige Darstellung aller Möglichkeiten anzustreben<sup>5)</sup>.

### 3.1 Beschreibung der Deformationen

#### Methode (I):

Die Lage der Körperpunkte  $\xi^i$  im raumfesten Bezugssystem  $x^\alpha$  sei im Ausgangszustand durch

$$x^\alpha(\xi^i, t_0) = x_0^\alpha(\xi^i) = X^k(\xi^i) \quad \alpha = k \quad (3.1)$$

festgelegt. Im allgemeinen ist es vorteilhaft, die Körperkoordinaten  $\xi^i$  mit den Raumkoordinaten  $X^k$  im Ausgangszustand zu identifizieren<sup>6)</sup>, doch ist dies keineswegs notwendig. Für ein Linienelement  $d_s^0$  des Körpers im Ausgangszustand gilt (vgl. Abb. 3)

$$d_s^0 = d X^k \underline{g}_k. \quad (3.2)$$

---

5) Umfangreichere Darstellungen finden sich in [9 bis 14].

6) Im Hinblick auf diese Möglichkeit verwenden wir bei  $X^k$  kleine lateinische Indizes.

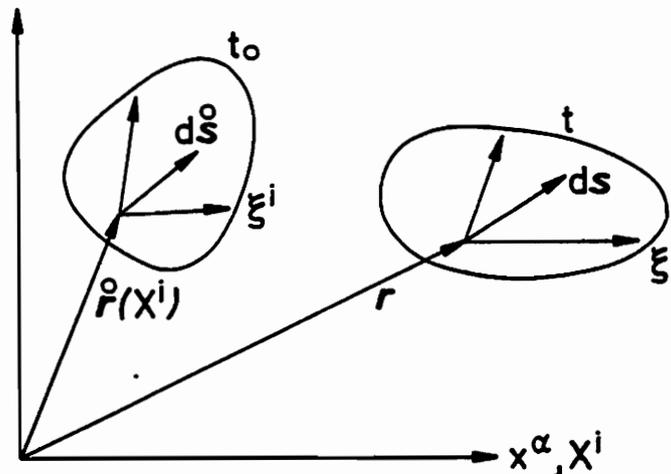


Abb. 3

Im verformten Zustand ist

$$d\underline{s} = dx^\alpha \underline{g}_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^k} dX^k \underline{g}_\alpha. \quad (3.3)$$

Die Größe

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^k} = X^{\alpha}_{,k} \quad (3.4)$$

bezeichnen wir als Deformationsgradient, den wir auch als einen (Doppelfeld-) Tensor zweiter Stufe einführen können:

$$\underline{\underline{F}} = X^{\alpha}_{,k} \underline{g}_\alpha \underline{\underline{g}}^k. \quad (3.5)$$

Die in dem Deformationsgradienten noch enthaltene Starrkörper-Rotation können wir in bekannter Weise etwa dadurch eliminieren, daß wir z. B.  $\underline{\underline{F}}$  skalar von links mit dem transponierten Tensor  $\underline{\underline{F}}^t$  multiplizieren. Wir erhalten dann den Tensor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^t \cdot \underline{\underline{F}} = X^{\alpha}_{,i} g_{\alpha\beta} X^{\beta}_{,k} \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^k, \quad (3.6)$$

der auch als der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor bezeichnet wird. Er ist auf die reziproke Basis des Raumpunktes bezogen, an dem sich der Körperpunkt  $\xi^i$  zur Zeit  $t_0$  befindet. Analog erhalten wir durch skalare Multiplikation mit  $\underline{\underline{F}}^t$  von rechts

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^t = x^{\alpha}_{,i} \overset{\circ}{g}^{ik} x^{\beta}_{,k} \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}_{\beta} \quad (3.7)$$

den sogenannten linken Cauchy-Green Verzerrungstensor, der auf die Basis des Raumpunktes bezogen ist, an dem sich der Körperpunkt zur Zeit  $t$  befindet.

Aus dem rechten bzw. linken Cauchy-Green Verzerrungstensor lassen sich mittels isotroper Tensorfunktionen auch alle sonstigen Verzerrungstensoren ableiten, die man definieren kann unter der Bedingung, daß sie den Anforderungen der Invarianz gegen Starrkörper-Rotationen genügen müssen.

#### Methode (IIa):

Eine zweite Möglichkeit, die Deformationen eines Körpers zu beschreiben, erhalten wir, indem wir die Differenz der Quadrate eines Linienelementes des Körpers im verformten und im unverformten Zustand bilden. Das führt auf

$$ds^2 - d\overset{\circ}{s}^2 = (g_{ik} - \overset{\circ}{g}_{ik}) d\xi^i d\xi^k. \quad (3.8)$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, zur Beschreibung der Verzerrungen entweder den Tensor

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (g_{ik} - \overset{\circ}{g}_{ik}) \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^k = e_{ik} \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^k \quad (3.9)$$

oder den Tensor

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2} (g_{ik} - \overset{\circ}{g}_{ik}) \overset{\circ}{\underline{\underline{g}}}^i \overset{\circ}{\underline{\underline{g}}}^k = \overset{\circ}{e}_{ik} \overset{\circ}{\underline{\underline{g}}}^i \overset{\circ}{\underline{\underline{g}}}^k \quad (3.10)$$

einzuführen. Obwohl beide Tensoren bei dieser (kovarianten) Schreibweise die gleichen Zahlenwerte haben, sind sie doch keineswegs identisch, da sie auf verschiedene Basen bezogen sind, nämlich  $\underline{\underline{E}}$  auf die Basis des körperfesten Koordinatensystems im verformten Zustand und  $\underline{\underline{E}}^0$  auf die Basis dieses Koordinatensystems im Ausgangszustand. Den Unterschied erkennt man sofort, wenn man die beiden Tensoren gemischt-variant schreibt. Dann wird

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\delta_k^i - g^{ir} g_{rk}) \underline{g}_i \underline{g}^k = e_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (3.11)$$

bzw.

$$\underline{\underline{E}}^0 = \frac{1}{2} (g^{ir} g_{rk} - \delta_k^i) \underline{g}_i^0 \underline{g}^k = e_k^i \underline{g}_i^0 \underline{g}^k \quad (3.12)$$

### Methode (IIb):

Eine dritte Möglichkeit, die Deformationen des Körpers zu beschreiben, geht davon aus, daß wir die Änderung der Metrik des körperfesten Koordinatensystems auch durch die Größen

$$g_k^i = g^{ir} g_{rk} \quad \text{bzw.} \quad (g^{-1})_k^i = g^{ir} g_{rk} \quad (3.13)$$

erfassen können. Es ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= g^{ir} g_k^r = g_i^r g_{rk} \\ \text{bzw.} \\ g_{ik}^0 &= g^{ir} (g^{-1})_k^r = (g^{-1})_i^r g_{rk} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Es steht uns nun wiederum - wie bei der Methode (IIa) - frei, diese Größen zur Definition eines (symmetrischen) Tensors heranzuziehen, indem wir etwa

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} &= q_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k \\ \text{bzw.} & \\ \underline{\underline{Q}}^{-1} &= (q^{-1})_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k. \end{aligned} \quad (3.15)$$

setzen, also  $q_k^i$  bzw.  $(q^{-1})_k^i$  auf die Basis des verformten körperfesten Koordinatensystems beziehen. Wir können aber  $q_k^i$  bzw.  $(q^{-1})_k^i$  auch der Basis des unverformten Koordinatensystems zuordnen und erhalten dann

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}}^o &= q_k^i \underline{g}_i^o \underline{g}^{o k} \\ \text{bzw.} & \\ \underline{\underline{Q}}^o{}^{-1} &= (q^{-1})_k^i \underline{g}_i^o \underline{g}^{o k}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die beiden Definitionen (3.15) bzw. (3.16) ergeben natürlich unterschiedliche Tensoren, wie unmittelbar einzusehen ist.

### 3.2 Beschreibung der Deformationsgeschwindigkeit

Die Deformationsgeschwindigkeit der Körperelemente ist - wie schon in (1.23) angegeben - durch

$$\underline{\underline{D}} = d_\beta^\alpha \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta = \frac{1}{2} (V^\alpha|_\beta + V_\beta|^\alpha) \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \quad (3.17a)$$

bzw.

$$\underline{\underline{D}} = d_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k = \frac{1}{2} \dot{g}^{ir} \underline{g}_{r+k} \underline{g}_i \underline{g}^k = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ir} \underline{g}_{r+k} \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (3.17b)$$

definiert. Dabei ist die Definition (3.17a) auf die Beobachtung der Bewegung der Körperelemente gegenüber dem

Bezugsraum (Methode (I)), Definition (3.17b) auf die Verfolgung der Veränderungen der Metrik des körperfesten Koordinatensystems (Methode (II)) abgestellt. Der Zusammenhang mit den Größen, die wir - den verschiedenen Methoden entsprechend - zur Beschreibung der Deformationen eingeführt haben, ist durch folgende Beziehungen gegeben:

Methode (I):

$$\begin{aligned}
 d_{\beta}^{\alpha} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} &= \text{sym} \left\{ \underbrace{\frac{D}{dt} (x^{\alpha}_{,k} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^k)}_{\underline{\dot{F}}} \cdot \underbrace{X^i_{, \beta} \underline{g}_i \underline{g}^{\beta}}_{\underline{F}^{-1}} \right\} \\
 &= \text{sym} \left\{ \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \right\} \\
 &= \text{sym} \left\{ v^{\alpha}{}_{\beta} \right\} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ v^{\alpha}{}_{\beta} + v_{\beta}{}^{\alpha} \right\} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\text{sym} \{ \}$  den symmetrischen Anteil des betreffenden Tensors.

Methode (IIa):

$$\begin{aligned}
 d_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k &= \frac{1}{2} g^{ir} \dot{e}_{rk} \underline{g}_i \underline{g}^k \\
 &= \frac{1}{2} g^{ir} \frac{D}{dt} \left\{ g_{rk} - \overset{\circ}{g}_{rk} \right\} \underline{g}_i \underline{g}^k.
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Methode (IIb):

$$d_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k = \frac{1}{2} (g^{-1})^i_{, +} \dot{g}^{\cdot +}{}_{\cdot k} \underline{g}_i \underline{g}^k = -\frac{1}{2} (g^{-1})^i_{, +} \dot{g}_k^{\cdot +} \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (3.20)$$

Bei Methode (IIa) und (IIb) soll dabei die Deformations-Geschwindigkeit - wie aus der Schreibweise hervorgeht - auf die Basis des verformten körperfesten Koordinatensystems bezogen sein. Auf die an sich mögliche Zuordnung zur Basis des unverformten körperfesten Koordinatensystems gehen wir hier nicht mehr weiter ein, da wir davon im folgenden keinen Gebrauch machen.

### 3.3 Aufteilung der Deformationen in einen elastischen und einen plastischen Anteil

Wir gehen davon aus, daß wir die Gesamt-Deformation eines Körperelementes aufteilen können in einen elastischen und in einen plastischen Anteil. Dazu stellen wir uns vor, daß die Körperelemente aus dem Ausgangszustand, der ein natürlicher Zustand sei (Verzerrungen und Spannungen gleich Null, Temperatur  $T = T_0$ ) zunächst in einen Zwischenzustand (Koordinaten  $\bar{x}_M$ ) plastisch verformt seien und daß dann eine Überlagerung der elastischen Deformationen erfolge, die den Körper in den Endzustand bringt (s. Abb. 4). Der angenommene Zwischenzustand ist dabei fiktiv; denn die Deformationen erfolgen in Wirklichkeit nicht nacheinander, sondern gleichzeitig. Darum brauchen auch nur die Gesamt-Deformationen kompatibel zu sein, während die Teil-Deformationen in der Regel inkompatibel sind. Zu beachten ist ferner, daß die Spannungen und Kräfte jeweils auf den Körper im Endzustand einwirken. Dies macht noch einmal die fiktive Bedeutung des Zwischenzustandes klar.

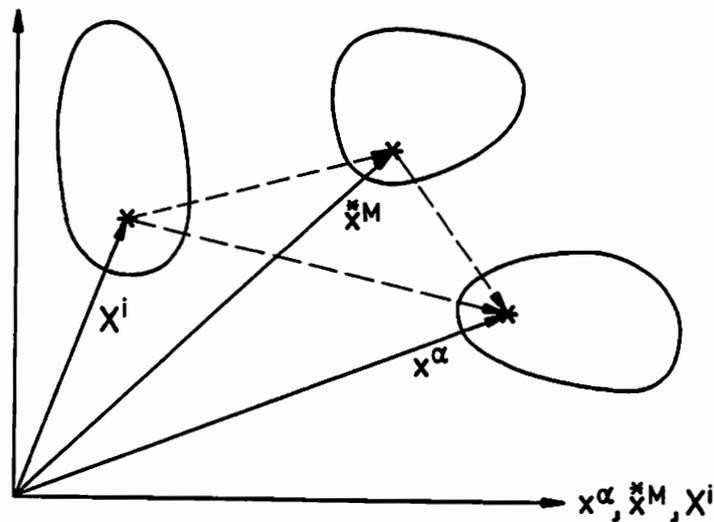


Abb. 4

Entsprechend den unterschiedlichen Methoden der Beschreibung der Deformationen und der Deformations-Geschwindigkeit der Körperelemente erhalten wir unterschiedliche Aufteilungsweisen in den elastischen und in den plastischen Anteil. Dies sei im folgenden kurz erörtert.

Methode (I):

Diese Methode geht von einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten aus und setzt<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{F}} &= X^{\alpha}_{,k} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^k = \underbrace{X^{\alpha}_{,M} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^M}_{\underline{\underline{F}}^E} \cdot \underbrace{X^N_{,k} \underline{g}_N \underline{g}^k}_{\underline{\underline{F}}^P} \\
 &= X^{\alpha}_{,M} X^N_{,k} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^k \\
 &= \underline{\underline{F}}^E \cdot \underline{\underline{F}}^P.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

7) s. z. B. [10-13]

Dementsprechend erhalten wir für die Aufteilung der Deformations-Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 D &= \text{sym} \left\{ \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \right\} \\
 &= \text{sym} \left\{ \frac{D}{dt} \left( x^\alpha_{,M} \overset{*}{X}^M_{,k} \underline{g}_\alpha \overset{\circ}{g}^k \right) \cdot X^i_{,B} \overset{\circ}{g}_i \underline{g}^B \right\} \\
 &= \text{sym} \left\{ \frac{D}{dt} \left( x^\alpha_{,M} \underline{g}_\alpha \overset{*}{g}^M \right) \cdot \overset{*}{g}_N \overset{*}{X}^N_{,i} X^i_{,B} \underline{g}^B \right\} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{d^\alpha}{d\beta} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta} \\
 &\quad + \text{sym} \left\{ x^\alpha_{,M} \underline{g}_\alpha \overset{*}{g}^M \cdot \frac{D}{dt} \left( \overset{*}{g}_N \overset{*}{X}^N_{,i} \right) X^i_{,B} \underline{g}^B \right\} \\
 &= \left\{ \frac{d^\alpha}{d\beta} + \frac{d^\alpha}{p} \right\} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \cdot \frac{d^\alpha}{p} \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Methode (IIa):

Diese Methode legt eine additive Aufspaltung der Metrikänderung nahe. Diese ergibt<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned}
 e_{ik} &= \frac{1}{2} \left\{ g_{ik} - \overset{\circ}{g}_{ik} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ g_{ik} - \overset{*}{g}_{ik} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \overset{*}{g}_{ik} - \overset{\circ}{g}_{ik} \right\} \quad (3.23) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{4em}}_{\frac{e_{ik}}{F}} \quad \underbrace{\hspace{4em}}_{\frac{e_{ik}}{P}}
 \end{aligned}$$

Für die Aufspaltung der Deformations-Geschwindigkeit resultiert daraus, wenn  $e_{ik}$  auf die Basis des verformten körperfesten Koordinatensystems bezogen wird,

---

8) vgl. hierzu z. B. [2, 15, 16]

$$d_{ik} = \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \dot{g}_{ik} - \overset{*}{\dot{g}}_{ik} \right\}}_{d_{ik}^E} + \underbrace{\frac{1}{2} \overset{*}{\dot{g}}_{ik}}_{d_{ik}^P}$$

bzw.

$$d_k^i = \underbrace{\frac{1}{2} g^{i\alpha} \left\{ \dot{g}_{\alpha k} - \overset{*}{\dot{g}}_{\alpha k} \right\}}_{d_k^i{}^E} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{i\alpha} \overset{*}{\dot{g}}_{\alpha k}}_{d_k^i{}^P} \quad (3.24)$$

Methode (IIb):

Bei dieser Methode liegt es nahe, von einer multiplikativen Aufspaltung der Metrik-Transformation auszugehen. Wir erhalten dann zunächst<sup>9)</sup>

$$\begin{aligned} g_k^i &= g^{i\alpha} g_{\alpha k} \\ &= \underbrace{g^{i\alpha} \overset{*}{g}_{\alpha m}}_{g_{P,m}^i} \underbrace{\overset{*}{g}^{ms} g_{sk}}_{g_k^m{}^E} \end{aligned} \quad (3.25)$$

bzw.  $(g^{-1})_k^i = g^{i\alpha} g_{\alpha k}$

$$= \underbrace{g^{i\alpha} \overset{*}{g}_{\alpha m}}_{(g^{-1})_m^i{}^E} \underbrace{\overset{*}{g}^{ms} g_{sk}}_{(g^{-1})^m{}^P \cdot k}$$

Das führt zu der folgenden additiven Aufspaltung der Deformations-Geschwindigkeit

---

9) vgl. [14]

$$\begin{aligned}
 d_k^i &= \underbrace{\text{sym} \frac{1}{2} \left\{ \left( \underset{E}{q}^{-1} \right)^i \underset{E}{\dot{q}}^+ \cdot k \right\}}_{d_k^i \underset{E}{}} + \underbrace{\text{sym} \frac{1}{2} \left\{ \left( \underset{P}{q}^{-1} \right)^i \underset{P}{\dot{q}}^+ \cdot m \underset{E}{q}^m \right\}}_{d_k^i \underset{P}{}} \\
 &= - \underbrace{\text{sym} \frac{1}{2} \left\{ \left( \underset{E}{q}^{-1} \right)^i \underset{E}{\dot{q}}^+ \cdot k \right\}}_{d_k^i \underset{E}{}} - \underbrace{\text{sym} \frac{1}{2} \left\{ \left( \underset{E}{q}^{-1} \right)^i \left( \underset{P}{q}^{-1} \right)^+ \cdot m \underset{E}{q}^m \right\}}_{d_k^i \underset{P}{}}. \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Dabei ordnen wir  $d_k^i$  der Basis des verformten körperfesten Koordinatensystems zu. Von der Möglichkeit,  $d_k^i$  auf die Basis des unverformten Koordinatensystems zu beziehen, machen wir hier und im folgenden keinen Gebrauch. Das gilt zugleich auch für die Zerlegung nach Methode (IIa).

Allen drei hier betrachteten Aufspaltungsmöglichkeiten ist gemeinsam, daß sie zu einer additiven Aufspaltung der Deformations-Geschwindigkeit führen. Der fiktive Zwischenzustand ist allerdings bei den verschiedenen Methoden unterschiedlich definiert. Praktisch bleiben jedoch diese Unterschiede bedeutungslos, da der Zwischenzustand nur fiktiven Charakter hat. Wir werden im folgenden uns der Methode (IIb) bei der Beschreibung der Kinetik des elasto-plastischen Kontinuums bedienen, da diese Methode in der Regel einfacher zu handhaben ist. Das rührt daher, daß isotrope Tensor-Funktionen ihre einfachste Form annehmen, wenn die Tensoren gemischt-variant dargestellt werden, wie dies bei dem Metrik-Transformations-Tensor  $q_k^i$  der Fall ist.

#### 4. Allgemeines zum Materialgesetz elasto-plastischer Körper; grundlegende Annahmen und Voraussetzungen

Wir wollen uns vorerst auf sogenannte Elementar-Prozesse elasto-plastischer Körper beschränken, die quasi-statisch und homogen im gesamten Körper verlaufen und somit auch geschwindigkeitsunabhängig sind. Solche Prozesse können wir als eine Folge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen betrachten. Damit werden sie einer Beschreibung durch thermodynamische Zustandsgleichungen zugänglich, obwohl es sich um irreversible Prozesse handelt<sup>10)</sup>. Wir können also in diesem Falle der üblichen Beschreibung der elasto-plastischen Formänderungen als thermo-mechanischer Prozeß eine korrespondierende Beschreibung mittels thermodynamischer Zustandsgleichungen gegenüberstellen. Dies soll im folgenden Kapitel geschehen. Hier wollen wir zunächst noch einige weitere grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen erörtern, die für die Formulierung des Materialgesetzes wesentlich sind.

Die erste Annahme bzw. Voraussetzung betrifft den elastischen Anteil der Formänderungen. Wir setzen voraus, daß das thermoelastische Verhalten durch die plastischen Formänderungen nicht beeinflusst werde, genauer: daß die drei Materialkonstanten (z. B. Schubmodul  $G$ , Poisson'sche Querkontraktionszahl  $\nu$  und linearer Wärme- und Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$ ), die das isotrope thermo-elastische Verhalten festlegen, durch die plastischen Deformationen

---

10) Bei der thermodynamischen Betrachtung irreversibler Prozesse geht man in der Regel (z. B. bei elasto-viskosen Körpern) davon aus, daß diese Prozesse wesentlich mit Nicht-Gleichgewichtszuständen verknüpft sind. Dieser Sachverhalt scheint die Ursache dafür zu sein, daß die Einordnung elasto-plastischer Elementarprozesse in die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse mancherlei Schwierigkeiten bereitet.

nicht verändert werden sollen. Anisotropes thermo-elastisches Verhalten schließen wir hier aus; denn wir müssen annehmen, daß die Materialstrukturen, die das anisotrope thermo-elastische Verhalten bedingen, sich bei großen plastischen Deformationen verändern. In solchen Fällen können wir elastische und plastische Deformationen nicht mehr separieren, da sie sich gegenseitig unmittelbar beeinflussen. Die Aufteilung in die beiden Anteile, die wir in Abschnitt 3.3 erörtert haben, wird in diesem Falle also sinnlos. Wir müssen dann bei der Aufstellung des Materialgesetzes anders vorgehen. Das bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Es kann jedoch in diesem Rahmen nicht näher darauf eingegangen werden.

Im Rahmen der oben getroffenen Voraussetzung können wir den elastischen Anteil formal getrennt betrachten. Den Ausgangspunkt bildet dabei die Feststellung, daß das thermo-elastische Verhalten durch eine eindeutige Beziehung zwischen dem elastischen Anteil der Formänderungen, den Spannungen und der Temperatur beschrieben werden kann:

$$s_k^i = s_k^i(\varphi_s^i, T) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_s^i = \varphi_s^i(s_k^i, T) \quad \text{bzw.} \quad T = T(s_k^i, \varphi_k^i). \quad (4.1)$$

$s_k^i$  bezeichnet dabei den sogenannten Kirchhoff'schen Spannungstensor, der mit dem wahren Spannungstensor  $\sigma_k^i$  durch die Beziehung

$$s_k^i = \frac{\rho}{\rho^0} \sigma_k^i \quad (4.2)$$

verknüpft ist.  $\rho$  bedeutet hierin die Dichte des Materials im verformten Zustand,  $\rho^0$  die Dichte im Ausgangszustand.

Die integrale Form des Formänderungsgesetzes (4.1) haben wir in eine inkrementelle Form zu überführen im Hinblick darauf, daß auch die plastischen Formänderungen nur durch ein inkrementelles Gesetz zu beschreiben sind. Wir erhalten die inkrementelle Form für die thermo-elastischen Formänderungen, indem wir (4.1) nach der Zeit differenzieren. Dies führt in jedem Falle auf Ausdrücke von der Form

$$d_{\underline{E}}^i = d_{\underline{E}}^i \{ s_k^i, s_k^i|_0, T, \dot{T}, g_{ik}, d_{\underline{E}}^i \}. \quad (4.3)$$

Dies möge an einem Beispiel demonstriert werden. Definieren wir in bekannter Weise den Verzerrungstensor durch (vgl. (3.11) und (3.23))

$$\underline{\underline{\epsilon}}_k^i = \frac{1}{2} \left\{ \delta_k^i - \left( \underline{\underline{q}}^{-1} \right)_k^i \right\} = e_k^i \quad (4.4)$$

und benutzen wir ein tensor-lineares Formänderungsgesetz in der Form

$$\underline{\underline{\epsilon}}_k^i = \frac{1}{2G} \left\{ s_k^i - \frac{\nu}{1+\nu} s_r^r \delta_k^i \right\} + \alpha (T - \overset{\circ}{T}) \delta_k^i \quad (4.5)$$

so erhalten wir durch Differentiation nach der Zeit

$$d_{\underline{E}}^i = \frac{1}{2G} \left\{ \text{sym} \left[ \underline{\underline{q}}_k^r \left( s_r^i|_0 - d_{\underline{E}}^m s_r^m + d_{\underline{E}}^m s_m^i \right) \right] - \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{q}}_k^i s_m^m|_0 \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{q}}_k^i. \quad (4.6)$$

Die Gleichung (4.6) bestätigt, daß wir im allgemeinen das inkrementelle Formänderungsgesetz für die thermo-elastischen Formänderungen in der Form (4.3) erhalten. Daraus ist zugleich zu entnehmen, daß  $d_{\underline{E}}^i$  nicht nur von  $s_k^i$  und  $s_k^i|_0$ , sondern auch von der Gesamt-Formänderungsgeschwindigkeit  $d_{\underline{E}}^i$  abhängt und damit auch

von den gleichzeitig stattfindenden plastischen Formänderungen. Die Unabhängigkeit der elastischen Formänderungen drückt sich also nur darin aus, daß die thermo-elastischen Konstanten  $G$ ,  $\nu$  und  $\alpha$  durch die plastischen Formänderungen unbeeinflusst bleiben.

In den Fällen, in denen die elastischen Formänderungen klein bleiben, wie z. B. bei fast allen Metallen, können wir  $\frac{q_{ik}^i}{E} \approx \frac{i}{k}$  setzen. Dann vereinfacht sich das inkrementelle Formänderungsgesetz (4.6) zu (vgl. [14])

$$\frac{d_k^i}{E} = \frac{1}{2G} \left\{ s_k^i|_0 - \frac{\nu}{1+\nu} s_m^m|_0 \delta_k^i \right\} + \alpha \dot{T} \delta_k^i. \quad (4.7)$$

Bezüglich der plastischen Formänderungen treffen wir die folgenden Annahmen:

- (a) Wir nehmen an, daß plastische Formänderungen nur auftreten, wenn die Spannungen  $s_k^i$  und die Temperatur  $T$  die Fließbedingung

$$F(s_k^i, T, q_{ik}, k^2, \dots, \alpha_k^i, \dots, A_k^i s^i, \dots) = 0 \quad (4.8)$$

und wenn zugleich die Inkremente der Spannungen und der Temperatur die Belastungsbedingung

$$\frac{\partial F}{\partial s_k^i} s_k^i|_0 + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad (4.9)$$

erfüllen. Die Fließbedingung (4.8) begrenzt in dem 10-dimensionalen Raum der Spannungen und der Temperatur den Bereich des elastischen

Verhaltens. Die internen Parameter  $k^2$ ,  $\alpha_k^i$  usw., die in diese Fließbedingung eingehen, hängen vom Verlauf des Formänderungsvorganges ab. Sie bestimmen den Verfestigungszustand des Materials. Zu bemerken ist hierzu noch, daß die Metrik  $g_{ik}$  des körperfesten Koordinatensystems implizit in die Fließbedingung mit eingeht, da sie die Bezugs-Basis für alle tensoriellen Größen bestimmt.

- (b) Wir nehmen, wie üblich, an, daß die Inkremente der plastischen Verzerrungen, der Spannungen und der Temperatur eindeutig und linear miteinander verknüpft sind:

$$d_k^i = D_k^i s^s + H_k^i T. \quad (4.10)$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Annahme der Eindeutigkeit wesentlich dafür ist, daß wir einen eindeutigen Prozeßablauf erhalten<sup>11)</sup>. Die Annahme der Linearität dient hingegen lediglich der Vereinfachung.

- (c) Wir nehmen weiterhin an, daß

$$d_k^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_k^i} + R_k^i s^s \quad (4.11)$$

sei. Der erste Term der rechten

---

11) Einzelne singuläre Fälle können dabei zugelassen werden.

Seite entspricht dem üblichen Ansatz, der auch als Normalen-Regel<sup>12)</sup> oder als Theorie des plastischen Potentials bezeichnet wird. Der zweite Term hat im allgemeinen nur die Bedeutung einer kleinen Korrektur, auf die man in vielen Fällen verzichten kann. Es gibt jedoch einige grundsätzliche Überlegungen, die dazu drängen, diesen zweiten Term wenigstens im allgemeinen Ansatz mitzunehmen.

Die Normalen-Regel bzw. die Theorie des plastischen Potentials wird im allgemeinen mit prinzipiellen Aussagen über die Dissipation mechanischer Energie bei plastischen Formänderungen begründet [17 bis 23]. Nun wird aber bei plastischen Formänderungen nur ein Teil der mechanischen Arbeit unmittelbar dissipiert. Der restliche, allerdings wesentlich kleinere Teil wird zu einer - im Prinzip reversiblen - Änderung des Verfestigungszustandes gebraucht. Deshalb können die genannten Überlegungen nur den ersten, unmittelbar dissipierten Anteil der mechanischen Arbeit betreffen. Ferner ist zu bedenken, daß wir die Spannungskremente als die Größen auffassen können, die den jeweiligen Gleichgewichtszustand stören. Dieser Sachverhalt

---

12) Die Inkremente der plastischen Verzerrungen, die von diesem ersten Term herrühren, fallen in die Richtung des Gradienten in den 3-dimensionalen Unterraum der Spannungen, den man erhält, wenn man in der Fließbedingung (4.8) die Temperatur  $T$  als Parameter betrachtet.

legt es nahe, wenigstens einen Teil der Antwort des Materials, bei dieser Betrachtungsweise also die plastischen Verzerrungskinkremente, in "Richtung" der Störgrößen anzusetzen. Dies aber ist die Aufgabe des zweiten Terms, der jedoch - wie gesagt - meist relativ klein bleibt.

- (d) Schließlich werden wir im allgemeinen annehmen, daß der plastische Anteil der Formänderungen inkompressibel, also

$$d_i^i = 0 \quad (4.12)$$

ist, doch ist diese Annahme nicht wesentlich für die folgenden allgemeinen Überlegungen.

## 5. Die Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen als thermo-mechanischer Prozeß und durch thermodynamische Zustandsgleichungen

### 5.1 Die Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen als thermo-mechanischer Prozeß

Elasto-plastische Formänderungen können wir als einen thermo-mechanischen Prozeß betrachten<sup>12)</sup>. Jeder derartige thermo-mechanische Prozeß wird durch einen Satz unabhängiger Prozeß-Variabler bestimmt. Welche Variable dies sind, hängt von dem jeweiligen Prozeß ab. So sind beispielsweise beim isothermen reinen Schub die Temperatur

---

12) Eine ausführliche Darstellung der folgenden Überlegungen findet sich in [24].

und die Spannungen die unabhängigen Prozeß-Variablen; bei der adiabatischen Scherung sind es hingegen die Verzerrungen und die zugeführte Wärmemenge. In andern Fällen mögen teils die Verzerrungen, teils die Spannungen neben der Temperatur oder der zugeführten Wärme vorgegeben sein und somit die unabhängigen Prozeß-Variablen darstellen. In jedem Falle erhalten wir einen Satz von 10 (unter Beachtung der Symmetrie von Spannungen und Verzerrungen sind es 7) unabhängigen Prozeß-Variablen, die nicht thermodynamische Zustandsgrößen zu sein brauchen, aber voneinander unabhängig und zur eindeutigen Festlegung des Prozesses geeignet sein müssen, d. h. die einen vollständigen Satz bilden müssen.

Beispielhaft wählen wir für unsere weiteren Betrachtungen als unabhängige Prozeß-Variable die Spannungen  $s_k^i$  und die Temperatur  $T$ . Die unabhängigen Prozeß-Variablen können wir in zwei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe umfaßt jene Variablen, deren Änderungen wir verfolgen müssen, um den Ablauf des Prozesses beschreiben zu können. Zu dieser Gruppe gehört in unserem Falle - mit  $s_k^i$  und  $T$  als unabhängigen Variablen - zunächst der Metriktensor  $g_{ik}(\xi^r, T)$ , dessen Kenntnis wir benötigen, um alle tensoriellen Größen überhaupt zahlenmäßig festlegen zu können. Er bildet eine Untergruppe für sich. Zu der anderen Untergruppe der ersten Gruppe gehören in unserem Falle die internen Parameter  $k^2, \alpha_k^i$  usw., deren Kenntnis zur Erfassung des Verfestigungszustandes des Materials erforderlich ist [25]. Der physikalische Unterschied zwischen dem Metriktensor und den internen Parametern besteht darin, daß der Metriktensor im Gegensatz zu den internen Parametern nicht den Charakter einer thermodynamischen Zustandsgröße haben muß, wie wir noch sehen werden; doch gehört er in jedem Falle zum notwendigen Rahmen der Prozeßbeschreibung.

Der zweiten Gruppe der abhängigen Variablen gehören alle jenen Prozeß-Variablen an, deren Kenntnis wünschenswert sein mag, aber im Prinzip nicht erforderlich ist. Dazu gehören in unserem Falle beispielsweise der Wärmefluß  $q_i$ , die spezifische Formänderungsarbeit  $w$ , die innere spezifische Energie  $u$  usw. Die Anzahl der Variablen, die zu dieser Gruppe gehören, ist völlig offen im Gegensatz zu der Anzahl der Variablen der ersten Gruppe, da wir beliebig viele weitere abhängige Prozeß-Variablen definieren können.

Aufgrund der vorstehenden Überlegungen und unter Berücksichtigung der allgemeinen Annahmen, die wir in Kapitel 4 getroffen haben, kommen wir mithin zu folgender Prozeß-Beschreibung.

Prozeß-Größen:

- unabhängige Variable:  $S_k^i, T$
- abhängige Variable
1. Gruppe: a)  $g_{ik}(q_s^+)$   
b)  $k^2 \dots, \alpha_k^i \dots, A_k^i s^+ \dots$
2. Gruppe:  $q_i, w, u, \dots$

Materialgesetz:

Wenn

Fließbedingung  $F(s_k^i, T; q_{ik}, k^2 \dots, \alpha_k^i \dots, A_{ks}^{i+}) = 0$

und

Belastungsbedingung  $\frac{\partial F}{\partial s_k^i} s_k^i|_0 + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0$

erfüllt sind, dann ist

$$d_k^i = d_k^i + d_k^i = \frac{1}{2} q^{ir} \dot{q}_{rk} = \frac{1}{2} (q^{-1})^i_r \dot{q}^r_k$$

$$= d_k^i \{ s_k^i, s_k^i|_0, T, \dot{T}; q_{ik}; k^2 \dots, \alpha_k^i \dots, A_{ks}^{i+} \dots \}$$

$$(\dot{k}^2) = (\dot{k}^2) \{ \dots \}$$

.....

$$\alpha_k^i|_0 = \alpha_k^i|_0 \{ \dots \}$$

.....

$$A_{ks}^{i+}|_0 = A_{ks}^{i+}|_0 \{ \dots \}$$

.....

(5.1a)

Andernfalls ist

$$d_k^i = d_k^i \{ s_k^i, s_k^i|_0, T, \dot{T}; q_{ik} \}$$

Dieses Schema ist gegebenenfalls noch um die Gleichungen zu ergänzen, die die Veränderungen der abhängigen Prozeß-Variablen der zweiten Gruppe bestimmen, also z. B.

$$\left. \begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{\sigma} s_k^i d_i^k = \dot{w} \{ \dots \} \\ \dots \end{aligned} \right\} (5.1b)$$

Das vorstehende Gleichungssystem wird von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gebildet, von denen in der Regel zumindest einige nicht-linear sind. Die rechten Seiten enthalten die laufenden Werte der unabhängigen Variablen und die der ersten Gruppe der abhängigen Variablen (wobei nicht in jeder Gleichung alle Größen aufzutreten brauchen) sowie die Inkremente der unabhängigen Variablen (diese in jedem Falle).

Führen wir andere Größen als  $s_k^i$  und  $T$  als unabhängige Prozeß-Variable ein, so bedeutet das eine Umorganisation des Gleichungssystems, die zu einer Substitution von  $s_k^i$  und  $T$  durch die Inkremente der neuen unabhängigen Variablen führt. Diese Substitution ist natürlich nur möglich, wenn das entsprechende Gleichungssystem eindeutig ist. Im übrigen können wir die Größen  $s_k^i$  und  $T$  selbst auf der rechten Seite nur dann durch die neuen Variablen ersetzen, wenn die neuen unabhängigen Prozeß-Variablen - wie  $s_k^i$  und  $T$  - zugleich auch thermodynamische Zustandsgrößen sind. Dieser Sachverhalt läßt bereits erkennen, daß den thermodynamischen Beziehungen wesentliche Bedeutung im Hinblick auf die Struktur des Gleichungssystems der Prozeß-Beschreibung zukommt.

## 5.2 Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen durch thermodynamische Zustandsgleichungen

Die elasto-plastischen Elementarprozesse, auf die wir uns vorerst beschränken, können wir als eine Folge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen betrachten, die sich durch thermodynamische Zustandsgleichungen beschreiben lassen. Diese Zustandsgleichungen verknüpfen in eindeutigen Funktionen die thermodynamischen Zustandsgrößen untereinander. Aus der Gesamtheit aller Zustandsgrößen, die einem bestimmten thermodynamischen Zustand eindeutig zuzuordnen sind, können wir einen Satz von unabhängigen thermodynamischen Zustandsgrößen auswählen, durch die sich alle übrigen thermodynamischen Zustandsgrößen ausdrücken lassen. Für die Beschreibung des thermodynamischen Zustandes eines Körpers genügt es deshalb, die Zahlenwerte dieser unabhängigen thermodynamischen Zustandsgrößen anzugeben, sofern im übrigen die Zustandsgleichungen bekannt sind. Um die Zustandsänderungen mit dem thermo-mechanischen Prozeß in Zusammenhang bringen zu können, bedarf es allerdings noch der Kenntnis weiterer Beziehungen. Hierzu gehört insbesondere jene Beziehung, die die Dissipation mechanischer Energie im Verlaufe eines thermo-mechanischen Prozesses beschreibt.

Insgesamt ergeben sich somit drei Fragenkreise:

- a) Welches sind die unabhängigen thermodynamischen Zustandsgrößen?
- b) Wie lauten die Zustandsgleichungen?
- c) Welche Beziehung besteht zwischen Prozeßablauf und den Zustandsänderungen, insbesondere hinsichtlich der Dissipation (Entropie-Produktion)?

Wir wollen uns diesen Fragen der Reihe nach zuwenden.

### 5.2.1 Thermodynamische Zustandsgrößen elasto-plastischer Elementar-Prozesse

---

Unter den Voraussetzungen, die wir hier getroffen haben, können wir davon ausgehen, daß sich für jeden beliebigen Ausgangszustand gewisse Prozesse angeben lassen, die rein elastisch, d. h. reversibel verlaufen. Als thermodynamische Zustandsgrößen lassen sich bekanntlich für solche Prozesse, z. B. die Spannungen  $s_k^i$  und die Temperatur  $T$  oder auch die elastischen Verzerrungen, repräsentiert durch  $\frac{q_k^i}{E}$ , und die Temperatur  $T$  als unabhängige Zustandsgrößen einführen. Wir ziehen hier - aus später ersichtlichen Gründen - die zweite Möglichkeit vor.

Dehnen wir nun unsere Betrachtungen auf solche Prozesse aus, die mit plastischen Deformationen verbunden sind, so erkennen wir, daß solche Prozesse zu Zustandsänderungen führen, die sich nicht mehr allein durch die Änderungen von  $\frac{q_k^i}{E}$  und  $T$  beschreiben lassen. Wir sind deshalb gezwungen, weitere unabhängige thermodynamische Zustandsgrößen einzuführen, die skalare Größen oder Tensoren gerader Stufe sein können<sup>13)</sup>. Wir bezeichnen diese weiteren thermodynamischen Zustandsgrößen mit  $h \dots, \beta_k^i \dots, B_{ks}^{ir} \dots$ , ohne sie vorerst im einzelnen zu definieren. Wir können jedoch sofort sagen, daß ihre Anzahl mit der Anzahl der internen Variablen übereinstimmen muß, die wir in der Prozeßbeschreibung als Untergruppe  $b$  der ersten Gruppe der abhängigen Variablen eingeführt haben (vgl. Gl. (5.1a)). Es brauchen freilich die dort verwendeten internen Variablen  $k^2 \dots, \alpha_k^i \dots, A_{ks}^{ir} \dots$  nicht mit den hier benutzten Zustandsgrößen  $h \dots, \beta_k^i \dots, B_{ks}^{ir} \dots$  identisch zu sein, doch müssen die beiden Sätze physikalisch äquivalent sein.

---

13) Da wir als unabhängige Prozeß-Variable im Rahmen einer phänomenologischen Theorie nur skalare Größen (z. B.  $T$ ) und Tensoren 2. Stufe kennen, können auch die entsprechenden Zustandsgrößen nur Tensoren gerader Stufe oder Skalare sein.

Vielfach (vgl. z. B. [15, 16, 26 bis 32]) wird der plastische Anteil der Verzerrungen, der sich nach Gl.(12) durch  $q_{\mathbf{P}}^i$  kennzeichnen läßt, bzw. die Gesamtverzerrung als thermodynamische Zustandsgröße eingeführt. Das läßt sich jedoch, zumindest in der Allgemeinheit, wie es in den zitierten Arbeiten geschieht, kaum rechtfertigen. Das folgt sowohl aus der Betrachtung der Vorgänge im atomaren Bereich, die zu plastischen Deformationen führen, wie aus makroskopischen phänomenologischen Beobachtungen. So läßt sich zeigen, daß eine Versetzung, die einen Kristall vollständig durchwandert hat, wohl eine plastische Verzerrung, aber keine Zustandsänderung hinterläßt. Andererseits können wir z. B. feststellen, daß nach einem Kreisprozeß, bei dem am Ende  $s_{\mathbf{k}}^i$ ,  $T$  und  $q_{\mathbf{k}}^i$  (und damit auch  $q_{\mathbf{P}}^i$ ) wieder die Anfangswerte annehmen (einfaches Beispiel: zyklischer Zug-Druck-Versuch), der Zustand des Materials im allgemeinen anders als am Anfang sein wird.

Eher gerechtfertigt scheint es zu sein, etwa als skalare Zustandsgröße die in den Gitterfehlern (Versetzen und Disklinationen) gespeicherte Energie zu betrachten und die tensoriellen Zustandsgrößen mit gewissen Anisotropien in Verbindung zu bringen, die die Anordnungen der Gitterfehler infolge des plastischen Deformationsprozesses erfahren. Wie dies im einzelnen zu verstehen und zu interpretieren ist, muß hier offen bleiben. Die Kenntnisse, die wir über die Vorgänge im Kristallgitter (oder in anderen Strukturen) bei plastischen Verzerrungen haben, reichen nicht aus, um eine tragfähige Brücke von der Festkörperphysik des atomaren Bereiches zur phänomenologischen Theorie zu schlagen. Wir müssen uns hier mit der Feststellung begnügen, daß die plastische Verzerrung (bzw. die Gesamtverzerrung) im allgemeinen als Zustandsgröße nicht geeignet ist, und daß wir statt dessen andere Zustandsgrößen einzuführen haben. Wie diese Zustandsgrößen mit den Prozeß-Variablen zusammenhängen, wird später an einigen Beispielen erläutert.

### 5.2.2 Thermodynamische Zustandsgleichungen für elasto-plastische Körper

Bevor wir die Zustandsgleichungen für elasto-plastische Körper im einzelnen erörtern, seien einige allgemeine Betrachtungen vorausgeschickt. Sie betreffen insbesondere die allgemeinen Beziehungen für den Energieaustausch. Dabei wollen wir alle Energien, Arbeiten usw. jeweils auf die Masseneinheit beziehen, d. h. spezifische Energien usw. einführen.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik liefert für die zeitliche Änderung der spezifischen inneren Energie die Aussage

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} q^i |_{,i} + r. \quad (5.2a)$$

Hierin bezeichnet

$q^i$  die Wärmestrom-Dichte,  
 $r$  die Intensität der Wärmequellen  
pro Masseneinheit<sup>14)</sup>.

Für Elementarprozesse können wir die durch Wärme zugeführte Energie auch zusammenfassen zu

$$\dot{q} = - \frac{1}{\rho} q^i |_{,i} + r. \quad (5.2b)$$

---

14) Wir betrachten die Intensität der Wärmequelle als fest gegeben. Deshalb haben wir sie nicht unter den unabhängigen Prozeß-Variablen aufgeführt. Wo wir aber Prozesse mit variablen Wärmequellen haben, die möglicherweise auch vom Prozeßverlauf abhängen können (z. B. bei Prozessen mit exothermen oder endothermen Gefügeumwandlungen), müssen wir  $r$  als (unabhängige oder abhängige) Variabel in die Prozeßbeschreibung einführen.

Die Verzerrungsleistung  $\dot{w}$  läßt sich unter den getroffenen Voraussetzungen zunächst aufteilen in ihren elastischen und ihren plastischen Anteil:

$$\dot{w} = \dot{w}_E + \dot{w}_P = \frac{1}{\rho} s_k^i d_i^k + \frac{1}{\rho} s_k^i d_i^k. \quad (5.3)$$

Für den elastischen Anteil können wir bei der hier vorausgesetzten Isotropie des elastischen Verhaltens auch schreiben (vgl. (3.26))

$$\dot{w}_E = \frac{1}{\rho} s_k^i \left( q^{-1} \right)_+^k q^+_{i|_0}. \quad (5.4)$$

Der plastische Anteil von  $\dot{w}$  ist noch einmal aufzuteilen, und zwar in einen Anteil  $\dot{w}_D$ , der dissipiert wird, und in einen Anteil  $\dot{w}_H$ , der zur Änderung der inneren Struktur des Materials, also zur Änderung der internen Parameter bzw. der entsprechenden Zustandsgrößen verbraucht wird, und sich als latente (gespeicherte) Energie im Material wiederfindet. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{\rho} s_k^i d_i^k = \dot{w}_P = \dot{w}_D + \dot{w}_H. \quad (5.5)$$

Wenn auch der weitaus überwiegende Anteil der plastischen Arbeit dissipiert wird - nach experimentellen Ergebnissen [33] sind es etwa 90 % - so darf doch der Anteil der Arbeit, der für die Strukturänderungen erforderlich ist, keineswegs übersehen werden; denn gerade dieser Anteil steht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit den Zustandsgleichungen.

Für die Änderung der spezifischen Entropie gilt

$$T \dot{s} = - \frac{1}{\rho} q^+_{i|_0} + r + \dot{w}_D. \quad (5.6a)$$

Für Elementarprozesse können wir dafür auch abgekürzt schreiben (vgl. Gl. (5.2b))

$$T \dot{s} = \dot{q} + \dot{w}_D \quad (5.6b)$$

Die Dichte der Entropiequellen, die nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht negativ werden kann, ist

$$T \dot{s} + \frac{T}{s} \left( \frac{\dot{q}^i}{T} \right) |_{i} - r = - \frac{1}{sT} \dot{q}^i T |_{i} + \dot{w}_D \geq 0 \quad (5.7)$$

Dieser Satz zerfällt in die beiden Teilaussagen

$$\dot{q}^i T |_{i} \leq 0 \quad (5.7a)$$

und

$$\dot{w}_D \geq 0 \quad (5.7b)$$

Für Elementarprozesse ist voraussetzungsgemäß  $T |_{i} = 0$ . Deshalb hat für diese Prozesse nur die Aussage (5.7b) praktische Bedeutung.

Die spezifische freie Energie (die sogenannte Helmholtz-Funktion) ist definiert durch

$$\varphi = u - T s \quad (5.8)$$

Aus den Gleichungen (5.2) und (5.6) folgt, daß

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= -s \dot{T} + \dot{w} - \dot{w}_D \\ &= -s \dot{T} + \dot{w}_E + \dot{w}_H \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

ist. Die freie Energie muß eine eindeutige Funktion der thermodynamischen Zustandsgrößen sein, also

$$\varphi = \varphi \left\{ q_{E^k}^i, T, h \dots, \beta_k^i \dots, B_{ks}^{i+} \dots \right\}. \quad (5.10)$$

Unter der hier getroffenen Voraussetzung, daß das elastische Verhalten unabhängig von den vorausgegangenen plastischen Deformationen sein soll, läßt sich die freie Energie additiv aufspalten in einen Anteil  $\varphi_E$ , der nur von  $q_{E^k}^i$  und  $T$  abhängt, und in einen Anteil  $\varphi_H$ , der unabhängig von  $q_{E^k}^i$  ist:

$$\varphi = \varphi_E(q_{E^k}^i, T) + \varphi_H(T, h \dots, \beta_k^i \dots, B_{ks}^{i+} \dots). \quad (5.11)$$

Für die zeitliche Änderung der freien Energie erhalten wir somit

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi_E}{\partial q_{E^k}^i} \dot{q}_{E^k}^i + \frac{\partial}{\partial T} (\varphi_E + \varphi_H) \dot{T} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial h} \dot{h} + \dots \quad (5.12)$$

Vergleichen wir (5.12) mit (5.9) und berücksichtigen zugleich (5.4), so folgt daraus

$$S = - \frac{\partial \varphi}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial T} (\varphi_E + \varphi_H) \quad (5.13a)$$

$$\frac{1}{\rho} S_m^i (q^{-1})_k^m = \frac{\partial \varphi}{\partial q_{E^k}^i} = \frac{\partial \varphi_E}{\partial q_{E^k}^i} \quad (5.13b)$$

$$\dot{w}_H = \frac{\partial \varphi_H}{\partial h} \dot{h} + \dots + \frac{\partial \varphi_H}{\partial \beta_k^i} \dot{\beta}_k^i + \dots \quad (5.13c)$$

Ist also  $\varphi$  als Funktion der Zustandsgrößen bekannt, so liefert uns Gl. (5.13a) die Entropie als Zustandsfunktion (kalorische Zustandsgleichung). Ferner liegt dann mit Gl. (5.13b) auch das Materialgesetz für den elastischen (reversiblen) Anteil der Formänderungen fest (thermische Zustandsgleichung). Schließlich liefert uns Gl. (5.13c) noch eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Änderungen der Zustandsgrößen  $h$  usw. mit dem nicht dissipierten Anteil der plastischen Arbeit. Diese Aussage reicht jedoch nicht hin, um daraus das Materialgesetz für den plastischen Anteil der Verzerrungen abzuleiten. Dazu bedarf es weiterer Angaben. Diese betreffen insbesondere den Zusammenhang zwischen Entropie-Produktion und Prozeßablauf, der im nächsten Abschnitt erörtert werden soll.

### 5.2.3 Zusammenhang zwischen Prozeßablauf und Entropie-Produktion

Für die (irreversible) Entropie-Produktion  $\dot{s}_{iw}$  gilt (vgl. (5.7))

$$\dot{s}_{iw} = - \frac{1}{\rho T} q^i T|_i + \dot{w}_D. \quad (5.14)$$

Beide Terme dürfen nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht negativ werden. Das ist bei der Definition des Materialgesetzes zu berücksichtigen.

Für den ersten Term ist diese Bedingung beispielsweise erfüllt, wenn wir für die Wärmeleitung das (isotrope) Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz

$$q_i = -\lambda T|_i \quad (5.15)$$

als gültig annehmen<sup>15)</sup>, wobei die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$

---

15) Das Wärmeleitungsgesetz ist noch zu ergänzen durch ein Wärmeübergangsgesetz, das den Wärmeaustausch des Körpers mit seiner Umgebung beschreibt. Darauf gehen wir hier jedoch nicht weiter ein.

noch von den Zustandsgrößen abhängen kann. Wir können aber auch ein anderes (anisotropes oder nicht-lineares) Wärmeleitungsgesetz ansetzen.

Bei der Beschreibung der Dissipation mechanischer Energie, also bei der Formulierung des zweiten Termes auf der rechten Seite von (5.14), können wir davon ausgehen, daß dieser Anteil der Entropie-Produktion an das Auftreten plastischer Deformationen gebunden ist. Es liegt deshalb nahe, dafür

$$\dot{w}_D = \frac{1}{\varrho} \mu_k^i \frac{d^k}{P^i} \quad (5.16)$$

anzusetzen. In welcher Weise  $\mu_k^i$  von den Zustandsgrößen bzw. von den Prozeß-Variablen abhängt, bleibt dabei zunächst offen.

Mit (5.16) erhalten wir

$$\dot{w}_H = \dot{w}_P - \dot{w}_D = \frac{1}{\varrho} \left\{ s_k^i - \mu_k^i \right\} \frac{d^k}{P^i} \quad (5.17)$$

Setzen wir das in (5.13c) ein, so folgt

$$\frac{1}{\varrho} \left\{ s_k^i - \mu_k^i \right\} \frac{d^k}{P^i} = \frac{\partial \psi}{\partial h} \dot{h} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \beta_k^i} \beta_k^i \dot{\phantom{h}} + \dots \quad (5.18)$$

Diese Gleichung stellt - neben Gleichung (5.15) und den daraus ableitbaren Beziehungen, die den Wärmeaustausch regieren - eine weitere Beziehung für den Energieaustausch dar, die den Prozeßablauf (linke Seite von (5.18)) mit den Änderungen der Zustandsgrößen in Zusammenhang bringt und den Austausch mechanischer Energie betrifft.

### 5.3 Einige ergänzende Bemerkungen

Die Zustandsgleichung (5.10), die die spezifische freie Energie als Funktion der Zustandsgrößen angibt, und die Gleichungen (5.15) und (5.18), die die Entropie-Produktion bestimmen, reichen allein nicht aus, um das Materialgesetz, das den Prozeßablauf regiert, eindeutig festzulegen. Es bedarf dazu weiterer Angaben, die das Materialverhalten spezifizieren. Dazu gehören beispielsweise Aussagen über die spezielle Form der Fließbedingung oder über die spezielle Form der Beziehungen, die die plastischen Deformationen mit den Inkrementen der Spannungen und der Temperatur verknüpfen. Bei der Definition dieser - ebenfalls zum Materialgesetz - gehörenden Aussagen haben wir jedoch darauf zu achten, daß der Rahmen, der durch die materialunabhängigen Grundgleichungen sowie durch die Zustandsgleichung (5.10) sowie die Beziehungen (5.15) und (5.18) gesteckt ist, nicht verletzt wird. Wie dabei vorzugehen ist, soll im folgenden Kapitel an Beispielen erörtert werden.

## 6. Beispiele für das Materialgesetz elasto-plastischer Körper

### 6.1 Isotroper elasto-plastischer Körper

Wir setzen hier voraus, daß nicht nur das elastische Verhalten des Körpers, sondern auch das plastische isotrop sei und damit auch das gesamte Materialgesetz. Ferner wollen wir annehmen, daß der Verfestigungszustand des Materials nur von der Temperatur  $T$  und von einem weiteren skalaren Parameter  $h$  abhängt. Wir können die physikalische Bedeutung von  $h$  etwa so interpretieren, daß  $h$  die Energie darstellt, die in jenen Versetzungen und Distorsionen gespeichert ist, die durch die plastischen Defor-

mationen neu erzeugt und an den Kerngrenzen oder auch im Innern der Kristallite aufgestaut sind.

Mit diesen Voraussetzungen und Annahmen erhalten wir für die spezifische freie Energie den allgemeinen Ansatz (vgl. (5.11))

$$\varphi = \varphi_E(q_k^i, T) + \varphi_H(T, h). \quad (6.1)$$

Dabei wollen wir zunächst den Sonderfall betrachten, daß sich  $\varphi_H$  weiter in zwei Anteile aufspalten läßt, von denen der eine nur von T, der andere nur von h anhängt. Dies führt auf <sup>16)</sup>

$$\varphi = \varphi_E(q_k^i, T) + f(T) + h. \quad (6.2)$$

Hinsichtlich der Entropie-Produktion wollen wir zunächst den einfachen Fall betrachten, daß

a) die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \text{konst.}, \quad (6.3)$$

also unabhängig vom Zustand sei und wir

b) für die Dissipation mechanischer Energie

$$\dot{w}_D = \int_V \frac{1}{S} s_k^i d_k^i = \int_V \dot{w}_P \quad (\xi = \text{const.}) \quad (6.4)$$

ansetzen, d. h. in Gleichung (5.16)

$$\mu_k^i = \int_V s_k^i \quad (6.5)$$

setzen können.

---

16) Wir können den von h abhängenden Anteil von  $\varphi_H$  mit h selbst identifizieren, ohne dadurch die Allgemeinheit weiter einzuschränken.

Aus der Gleichung (5.17) folgt sodann mit  $\dot{w}_D$  nach (6.4) unmittelbar

$$\dot{w}_H = \dot{w}_P - \dot{w}_D = (1 - \xi) \dot{w}_P, \quad (6.6)$$

ferner aus (5.18) mit  $\dot{\varphi}_H$  nach (5.1)

$$\dot{w}_H = \dot{h}. \quad (6.7)$$

Vergleichen wir (6.6) und (6.7), so ergibt sich daraus, daß

$$h - h^0 = (1 - \xi) w_P \quad (6.8)$$

wird. Daraus ziehen wir den Schluß, daß in diesem Sonderfall die plastische Arbeit  $w$  und die Temperatur  $T$  als interne Parameter in die  $P$  Fließbedingung (4.8) eingeführt werden können, da  $h$  und  $w_P$  eindeutig voneinander abhängen.

Damit ist der Rahmen für das Materialgesetz, das der Prozeßbeschreibung zugrundeliegt, gegeben. Wir haben jetzt nur noch festzulegen

- a) die allgemeine Form der Fließbedingung (4.8), womit dann auch die Belastungsbedingung gegeben ist, wenn wir dafür den Ansatz (4.9) übernehmen, und
- b) die allgemeine Form der Beziehung zwischen den Inkrementen der Spannungen, der Verzerungen und der Temperatur, also das sogenannte Formänderungsgesetz entsprechend etwa (4.11).

Mit diesen Angaben erhalten wir dann eine geschlossene Theorie der thermo-mechanischen Prozesse elasto-plastischer Körper.

Wählen wir z. B. die folgenden Ansätze:

Fließbedingung:  $F = t_k^i t_i^k - k^2(w, T) = 0$  (6.9)

mit  $t_k^i = s_k^i - \frac{1}{3} s_r^r \delta_k^i$ ,

Formänderungsgesetz:

$$d_k^i = \frac{1}{2G} \left\{ s_k^i |_0 - \frac{\nu}{1+\nu} s_r^r |_0 \delta_k^i \right\} + \alpha \dot{T} \delta_k^i \quad (6.10a)$$

$$d_k^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_k^i} \quad (6.10b)$$

so erhalten wir die folgende Prozeßbeschreibung (vgl. 5.1a)

Prozeß-Größen

Unabhängige Prozeß-Variable:

$$s_k^i, T$$

Abhängige Prozeß-Variable, 1. Gruppe: a)

$$g_{ik}$$

b)  $w$   
 $p$

2. Gruppe: . . . . .

Material-Gesetz

Wenn

Fließbedingung

$$t_k^i t_i^k - k^2(w, T) = 0$$

und

Belastungsbedingung

$$2 t_k^i t_i^k |_0 - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} > 0$$

erfüllt sind, dann ist

$$d_k^i = \frac{1}{2G} \left\{ s_k^i |_0 - \frac{\nu}{1+\nu} s_{+}^+ |_0 s_k^i \right\} + \alpha \dot{T} s_k^i$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{d_k^i \text{ E}}$

$$+ \underbrace{\frac{2 t_s^+ t_s^- |_0 - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\frac{k^2}{s} \frac{\partial k^2}{\partial w_P}}}_{d_k^i \text{ P}} t_k^i$$

$$\dot{w}_P = \frac{1}{s} s_k^i d_k^i \text{ P}$$

.....

Andernfalls ist

$$d_k^i = d_k^i \text{ E}$$

$$\dot{w}_P = 0 .$$

(6.1)

Die vorstehende Prozeßbeschreibung ist noch zu ergänzen durch Aussagen über den Wärmeaustausch, sofern dies für die Festlegung des Prozeßablaufes erforderlich ist (z. B. bei adiabatischen Prozessen, für die nicht  $T$  als unabhängige Prozeß-Variable gegeben ist, sondern  $q^i = 0$  und  $r = 0$ ) oder sofern die Kenntnis dieser Vorgänge aus anderen Gründen notwendig ist. Wir erhalten dafür unter Zugrundelegung von (5.6a), (5.13a), (5.15) sowie (6.2), (6.3), (6.4)

$$\frac{\lambda}{\xi} T \left| \dot{r} \right|_i + r + \xi \dot{w}_p = -T \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k^i \partial T} q_k^i \Big|_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h \partial T} h}_0 \right\}. \quad (6.12a)$$

Für Elementar-Prozesse können wir wiederum einfacher schreiben

$$\dot{q} + \xi \dot{w}_p = -T \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k^i \partial T} q_k^i \Big|_0 \right\}. \quad (6.12b)$$

Hierin ist

$$-T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = c_v, \quad (6.13)$$

d. h. gleich der spezifischen Wärmekapazität bei konstanter Verzerrung<sup>17)</sup>. Den zweiten Term der rechten Seite können wir im übrigen bei Metallen meist vernachlässigen, da dieses sogenannte Koppelglied der Thermo-Elastizität in der Regel nur eine geringe Bedeutung hat. Bei rein

---

17) Unter den hier getroffenen Annahmen können wir  $c_v$  auch als spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen interpretieren.

elastischen Formänderungen wird in (6.12a) bzw. (6.12b)  $\dot{w}_P = 0$ , und wir erhalten dann die aus der Thermo-Elastizität bekannte Beziehung.

Wir können die vorstehenden Überlegungen ohne wesentliche Änderung auch auf den Fall ausdehnen, daß der Koeffizient  $\xi$ , der den dissipierten Anteil der plastischen Arbeit festlegt, nicht konstant ist, sondern von  $h$  abhängt. Wir erhalten dann anstelle von (6.6), (6.7)

$$\frac{\dot{h}}{1 - \xi(h)} = \dot{w}_P \quad (6.14)$$

Die Interpretation dieser Gleichung führt wiederum auf

$$h = h(w_P) \quad \text{bzw.} \quad w_P = w_P(h). \quad (6.15)$$

Deshalb kann auch in diesem Falle die plastische Arbeit als interner Parameter in die Fließbedingung eingeführt werden.

Gehen wir jedoch zu allgemeineren Ansätzen

$$\varphi = \varphi_E(q_k^i, T) + \varphi_H(h, T) \quad (6.16)$$

und

$$\xi = \xi(h, T) \quad (6.17)$$

über, so ist es im allgemeinen nicht mehr möglich, die plastische Arbeit als internen Parameter bzw. als thermodynamische Zustandsgröße einzuführen, weil  $w_P$  dann nicht mehr eine eindeutige Funktion von  $h$  ist. Die Beziehung

zwischen  $w$  und  $h$  wird dann abhängig vom Prozeßverlauf  $P$  (vgl. hierzu [24, 34]). Wir müssen deshalb in solchen Fällen  $w$  durch eine andere Größe (etwa durch  $h$  selbst oder eine eindeutige Funktion von  $h$  und  $T$ ) ersetzen.

## 6.2 Beispiel für einen anisotropen elasto-plastischen Körper

Wir bleiben dabei, daß das elastische Verhalten des Körpers weiterhin isotrop und unabhängig von den vorausgegangenen plastischen Deformationen sei, wollen jetzt aber plastische Anisotropie zulassen. Dabei wollen wir uns hier auf einfache Fälle beschränken, Dementsprechend setzen wir an:

Spezifische freie Energie (mit  $\beta_k^i$  als reiner Zahl):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_E(q_k^i, T) + \varphi_H(T, h, \beta_k^i) \\ &= \varphi_E(q_k^i, T) + f(T) + h + c \frac{G}{S} \underbrace{\beta_k^i \beta_j^k}_{g(\beta_k^i)}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

Wärmeleitfähigkeit:

$$\lambda = \text{const} \quad (6.19)$$

Dissipation mechanischer Energie:

$$\dot{w}_D = \frac{1}{S} \underbrace{\xi (t_k^i - G \beta_k^i)}_{\mu_k^i} \frac{d\beta_j^k}{P} \quad (\xi = \text{const.}) \quad (6.20)$$

Wir erhalten damit

$$\dot{w}_H = \dot{w}_P - \dot{w}_D = (1 - \xi) \dot{w}_P + \xi \frac{G}{S} \beta_k^i d_P^k. \quad (6.21)$$

Andererseits ist in diesem Falle (vgl. (5.13c))

$$\dot{w}_H = \dot{h} + c \frac{G}{S} \underbrace{2 \beta_k^i \beta_{i0}^k}_{\dot{q}}. \quad (6.22)$$

Die Gleichungen (6.21) und (6.22) sind miteinander kompatibel, wenn wir etwa

$$\dot{h} = (1 - \xi) \dot{w}_P \quad (6.23a)$$

und

$$\beta_{k0}^i = \frac{1}{2} \frac{S}{c} \frac{d_P^i}{d_P^k} = \xi \frac{d_P^i}{d_P^k} \quad (6.23b)$$

setzen. Daraus folgt

$$h - \dot{h} = (1 - \xi) \frac{w}{P} \quad (6.24)$$

und (vgl. (2.27))

$$\dot{\beta}_{i,k}^i = \xi \frac{d_P^i}{d_P^k} - d_P^i \beta_k^+ + d_P^k \beta_i^+. \quad (6.25)$$

Eine damit korrespondierende Prozeßbeschreibung erhalten wir bei analogem Vorgehen wie in Abschnitt 6.1 durch den Ansatz:

Unabhängige Prozeß-Variable:  $s_k^i, T$

Abhängige Prozeß-Variable, 1. Gruppe: a)  $q_{ik}$

b)  $w_P, \beta_k^i$

2. Gruppe: . . . . .

Material-Gesetz

Wenn

Fließbedingung  $F = (t_k^i - G\beta_k^i)(t_i^k - G\beta_i^k) - k^2(w, T) = 0$

und

Belastungsbedingung  $2(t_k^i - G\beta_k^i)t_{i|0}^k - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} > 0$

erfüllt sind, dann ist

$$d_k^i = \frac{1}{2G} \left\{ s_{k|0}^i - \frac{\nu}{1+\nu} s_{i|0}^r \delta_k^i \right\} + \alpha \dot{T} \delta_k^i$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{d_k^i}{E}}$

$$+ \frac{2(t_s^i - G\beta_s^i)t_{r|0}^s - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2\sum k^2 G + \frac{1}{S} \frac{\partial k^2}{\partial w_P} (t_n^m - G\beta_n^m)t_m^n} (t_k^i - G\beta_k^i)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{d_k^i}{P}}$  (6.26)

$$\dot{w}_P = \frac{1}{S} s_k^i \frac{d_k^i}{P}$$

$$\beta_{k|0}^i = \sum \frac{d_k^i}{P}$$

$$\underbrace{\frac{1}{S} \lambda T|_{i+r}}_{\dot{q}} + \sum \frac{1}{S} (t_k^i - G\beta_k^i) \frac{d_k^i}{P} = c_v \dot{T} - T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k^i \partial T} q_{k|0}^i$$

Andernfalls ist

$$d_k^i = d_k^i$$

$$\dot{w}_P = 0$$

$$\dot{q} = c_v \dot{T} - T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k^i \partial T} q_k^i \Big|_E .$$

Die vorstehenden Überlegungen können wir wie bei isotroper Verfestigung ohne wesentliche Änderungen auf solche Fälle ausdehnen, in denen der Koeffizient  $\xi$ , der die Dissipation mechanischer Energie bestimmt, nicht konstant, sondern eine Funktion von  $h$  ist. Auch dann bleibt die plastische Arbeit noch als interner Parameter verwendbar. Dies ändert sich jedoch wiederum, wenn wir zu anderen Verallgemeinerungen übergehen, die hier im einzelnen nicht mehr diskutiert werden sollen.

## 7. Einige Anwendungsbeispiele

### 7.1 Allgemeines

Die in den Kapiteln 5 und 6 erörterten Überlegungen zum Materialgesetz lassen sich unmittelbar auf alle Elementar-Prozesse anwenden, also auf solche Prozesse, die quasi-statisch und homogen im gesamten Körper verlaufen bzw. auf quasi-statische, isotherme Prozesse. Denn in diesen Fällen können wir für jedes Element den Prozeßablauf als eine Folge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen betrachten. Wir können jedoch unsere Überlegungen auch auf andere Prozesse anwenden, sofern wir uns der üblichen Hypothese anschließen, daß man auch bei solchen Prozessen, die durch thermodynamische Nicht-Gleichgewichtszustände des Körpers führen, den einzelnen

Elementen des Körpers dennoch jeweils einen definierten thermodynamischen Zustand zuordnen kann (Theorie vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht). Im Hinblick auf solche Anwendungsmöglichkeiten haben wir das Materialgesetz bereits etwas allgemeiner formuliert und darum z. B. die Wärmeleitung mit eingeschlossen.

Soweit wir es bei den Anwendungen mit Metallen zu tun haben, können wir im allgemeinen im Materialgesetz den Kirchhoff'schen Spannungstensor  $s_k^i$  durch den wahren Spannungstensor  $\sigma_k^i$  (Spannungs-Deviator  $\tau_k^i$ ) ersetzen. Die Rechnung wird dadurch wesentlich vereinfacht. Auf der andern Seite bleibt der dadurch entstehende Fehler im allgemeinen sehr klein, vielfach sogar unter der üblichen Rechengenauigkeit (vgl. [14]). Ferner können wir im allgemeinen das inkrementelle Gesetz für den elastischen Anteil der Deformationen in der approximativen Form ansetzen, wie in Gleichung (4.7) angegeben ist. Physikalisch bedeutet das, daß wir anstelle eines hyper-elastischen Verhaltens ein hypo-elastisches annehmen. Es bleibt bei diesem Vorgehen dann zunächst auch gleichgültig, von welchem Dehnungsmaß wir bei der Ableitung der inkrementellen tensor-linearen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen ausgehen. Erst bei der Darstellung der Ergebnisse wirkt es sich aus, welches Dehnungsmaß wir benutzen.

Im folgenden wollen wir nun zunächst die reine Scherung und den reinen Schub als Beispiele für einfache Elementar-Prozesse betrachten. Dabei wollen wir nur bei der reinen Scherung auf die Ergebnisse etwas näher eingehen. Als Beispiel für einen inhomogenen Prozeß wollen wir sodann die reine Biegung eines Bleches erörtern, uns dabei aber auf quasi-statische, isotherme Vorgänge beschränken. Abschließend folgen dann noch einige ergänzende Bemerkungen.

## 7.2 Reine Scherung und reiner Schub

Wir betrachten einen Stahl (C 45 nach DIN 1720), der im Zugversuch bei kleinen und mäßigen Deformationsgeschwindigkeiten ( $\dot{\epsilon} < 1$ ) das in Abb. 5 dargestellte temperaturabhängige Verhalten zeigen möge.

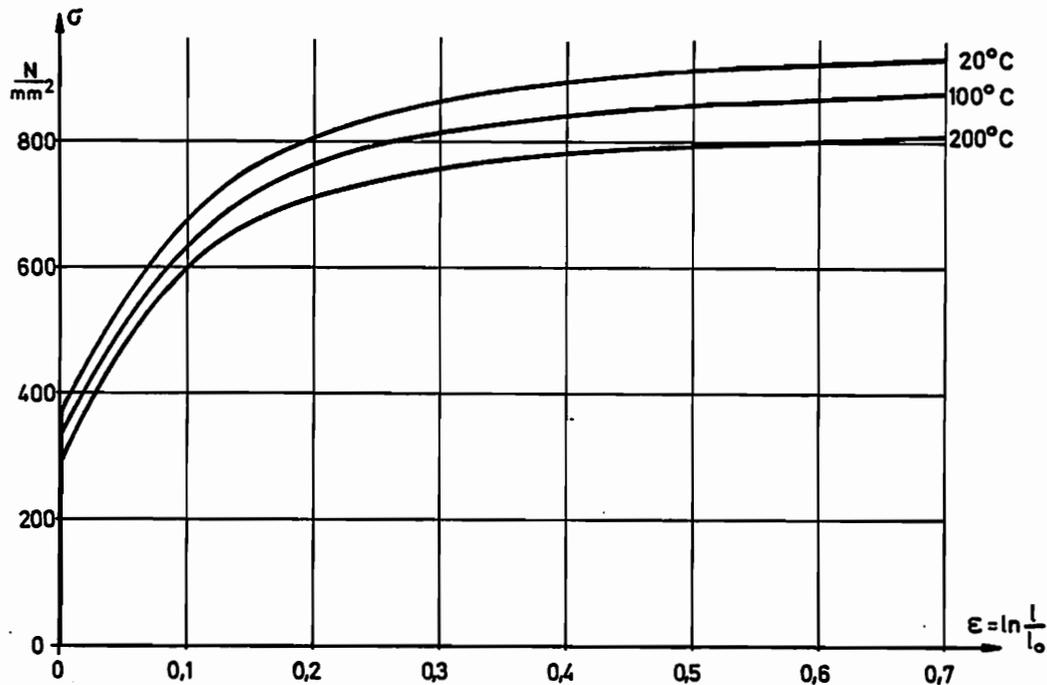


Abb. 5

Wir wollen dieses Materialverhalten durch ein Gesetz beschreiben, wie wir es in Abschnitt 6.1 abgeleitet haben, mit den soeben erläuterten näherungsweise Annahmen, setzen also an

$$\text{Fließbedingung: } \tau_k^i \tau_i^k - k^2(\omega, T) = 0$$

$$\text{Belastungsbedingung: } 2 \tau_k^i \tau_i^k|_0 - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} > 0$$

Verzerrungsgeschwindigkeit:

$$d_k^i = \underbrace{\frac{1}{2G} \left\{ G_k^i |_0 - \frac{\nu}{1+\nu} G_r^s |_0 S_k^i \right\}}_{\frac{d_k^i}{E}} + \alpha \dot{T} S_k^i$$

$$+ \underbrace{\frac{2 \tau_s^r \tau_r^s |_0 - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\frac{k^2}{\sigma} \frac{\partial k^2}{\partial w}}}_{\frac{d_k^i}{P}}$$

(7.1)

Plastische Arbeit:  $\dot{W}_P = \frac{1}{\sigma} G_k^i d_P^k$

Zugeführte Wärme:  $\dot{q} + \sum_P \dot{W}_P = c_v \dot{T}$

Aus dem Verhalten im Zugversuch leiten wir ab

$$k^2 = \frac{2}{3} \left\{ G_0(T) + \frac{c_1(T) \sigma_w}{c_2(T) + \sigma_w} \right\}^2 \quad (7.2)$$

mit

$$G_0(T) = 494,1 - 389 \cdot 10^{-3} T \quad \frac{N}{mm^2}$$

$$c_1(T) = 724,2 - 360,3 \cdot 10^{-3} T \quad \frac{N}{mm^2}$$

$$c_2(T) = 73,5 - 80,4 \cdot 10^{-3} T \quad \frac{N}{mm^2}$$

Ferner rechnen wir mit folgenden Materialkonstanten

Wärmeausdehnungs-Koeffizient:  $\alpha = 11.9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Dissipations-Koeffizient:  $\xi = 0.9$

spez. Wärmekapazität:  $c_v = 465 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Die Tensoren  $d_k^i$ ,  $\tau_k^i$  usw. können wir, wie im Gleichungssystem (7.1) zunächst angeben, auf die Basis  $\xi^i$  des deformierten körperfesten Koordinatensystems beziehen. Im vorliegenden Falle werden die Ausdrücke jedoch einfacher, wenn wir die Zahlenwerte dieser Tensoren auf die Basis des raumfesten Koordinatensystems  $x^\alpha$  rücktransformieren. Wir erhalten dann im allgemeinen Fall des ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_1^3 = \sigma_2^3 = \sigma_3^3 = 0$ ) mit (vgl. Abb. 6)

$$\varepsilon_1^1 = \ln \frac{b}{b_0} ; \varepsilon_2^2 = \ln \frac{h}{h_0} ; \varepsilon_3^3 = \ln \frac{s}{s_0} ;$$

$$\nu_3 = \tan \gamma$$

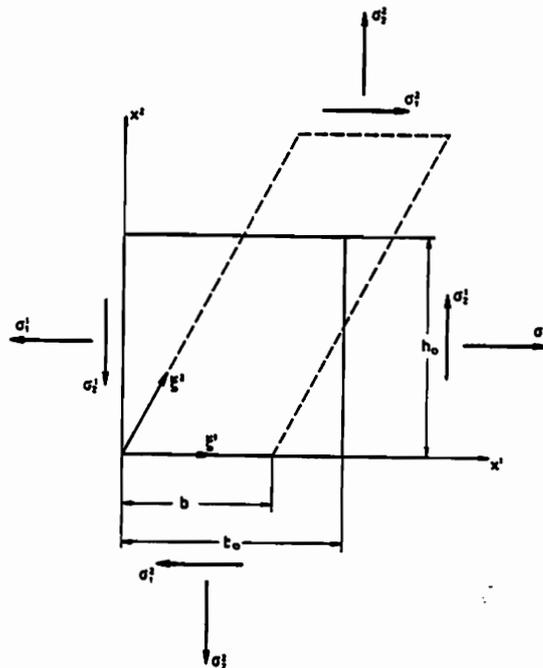


Abb. 6

folgende Ausdrücke für die Tensor-Komponenten:

$$d_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^1 & \frac{\mathcal{N}}{2} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & 0 \\ \frac{\mathcal{N}}{2} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & \dot{\varepsilon}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3^3 \end{bmatrix} \quad (7.3a)$$

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathcal{N}}{2} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & 0 \\ -\frac{\mathcal{N}}{2} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3b)$$

$$\tau_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \{ 2G_1^1 - G_2^2 \} & \tau & 0 \\ \tau & \frac{1}{3} \{ 2G_2^2 - G_1^1 \} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \{ G_1^1 + G_2^2 \} \end{bmatrix} \quad (7.3c)$$

$$\tau_{\beta}^{\alpha}|_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \{ 2G_1^1 - G_2^2 \} - \tau \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & \dot{\tau} + \frac{\mathcal{N}}{2} (G_1^1 - G_2^2) \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & 0 \\ \dot{\tau} + \frac{\mathcal{N}}{2} (G_1^1 - G_2^2) \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & \frac{1}{3} \{ 2G_2^2 - G_1^1 \} + \tau \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} - \dot{\varepsilon}_1^1 + \dot{\varepsilon}_2^2 \right\} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \{ \dot{G}_1^1 + \dot{G}_2^2 \} \end{bmatrix} \quad (7.3d)$$

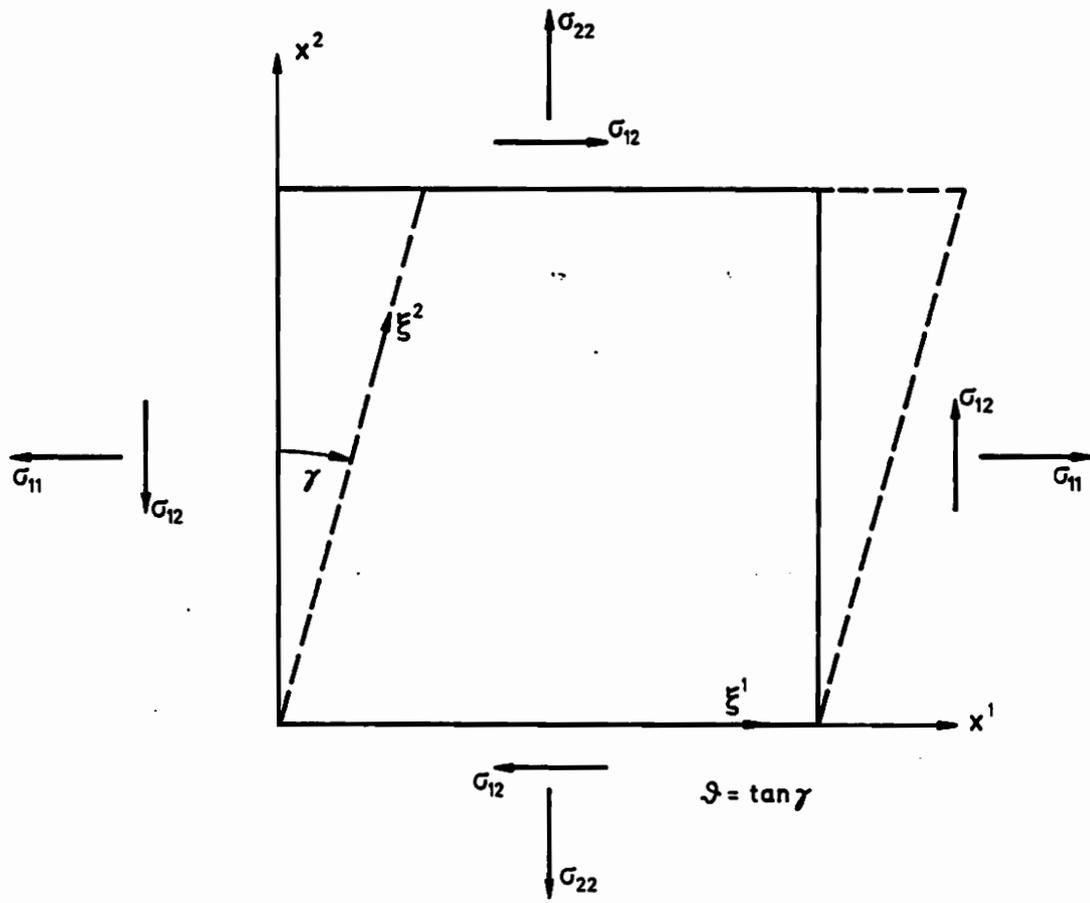


Abb. 7

Bei reiner Scherung (vgl. Abb. 7) ist

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_2^2 = 0 \quad (7.4)$$

zu setzen. Damit sind für Probleme dieser Art bereits 7 Größen vorgegeben, nämlich die 5 Spannungen  $\sigma_3^1 = \sigma_1^3$ ,  $\sigma_3^2 = \sigma_2^3$ ,  $\sigma_3^3$  und ferner  $\varepsilon_1^1$  und  $\varepsilon_2^2$ . Erfolgt die Scherung isotherm, so ist weiterhin

$$T = T_0 \quad (7.5a)$$

bzw. bei der adiabatischen Scherung

$$\dot{q} = 0 \quad (7.5b)$$

vorgegeben. Als unabhängige Prozeß-Variable verbleiben dann nur noch

entweder die Schubspannungen  $\sigma_2^1 = \sigma_1^2 = \tau \quad (7.6a)$

oder die Scherungen  $\varepsilon_2^1 = \varepsilon_1^2 \quad (\text{repräsentiert durch } \gamma = \tan \varphi) \quad (7.6b)$

Durch entsprechendes Arrangement des Gleichungssystems (7.1) können wir es erreichen, daß diese unabhängigen Variablen jeweils auf der rechten Seite erscheinen, so daß die Auflösung keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereitet. Wir erhalten dann die in den Abb. 8 und 9 dargestellten Ergebnisse.

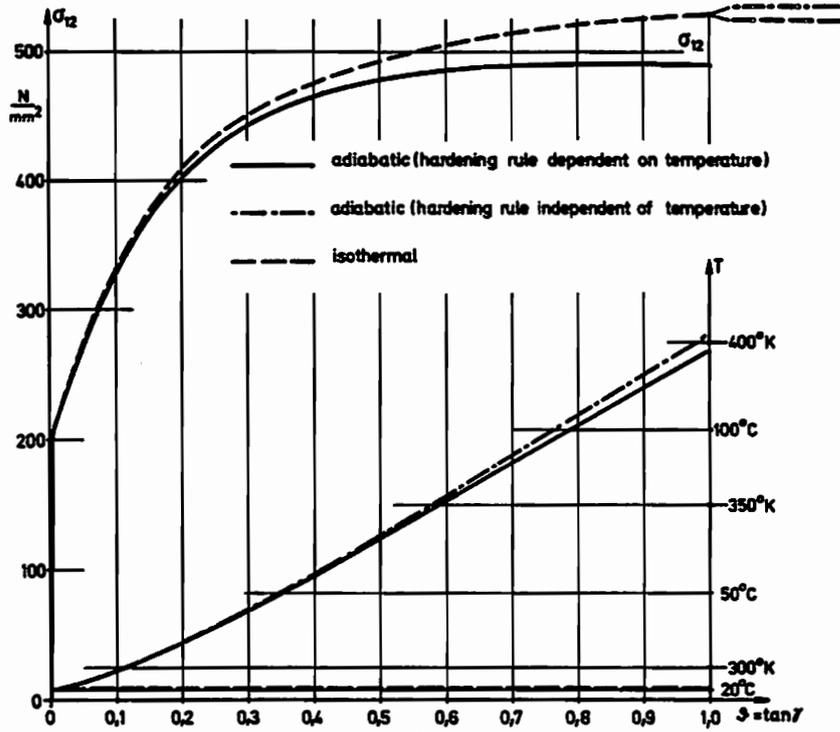


Abb. 8

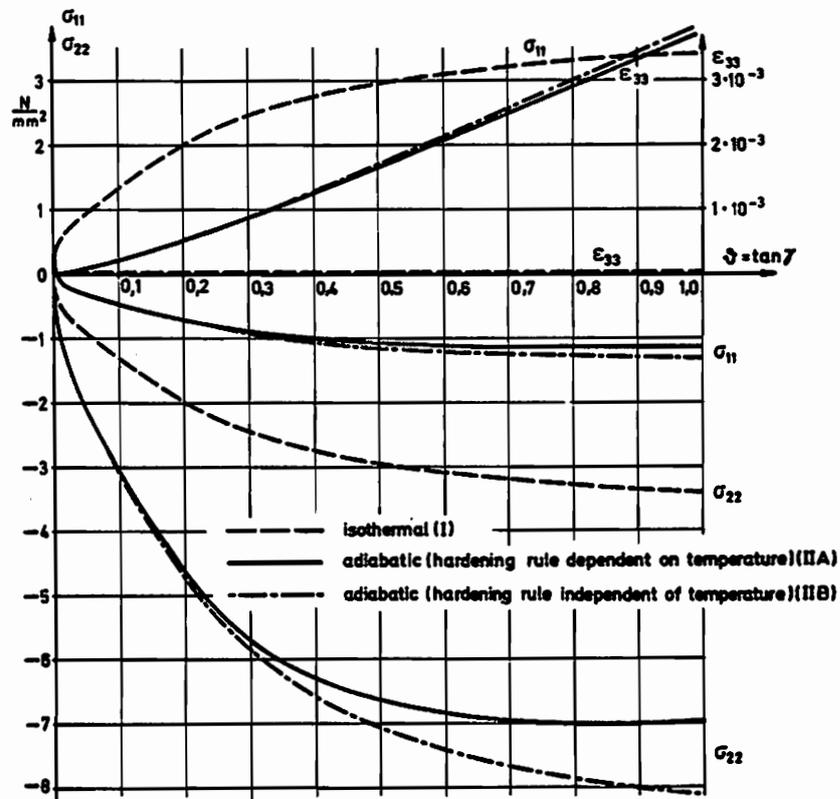


Abb. 9

Zum Vergleich haben wir in diese Abbildungen noch das Verhalten eines hypothetischen Materials aufgenommen, dessen Fließbedingung unabhängig von der Temperatur ist ( $k^2 = k^2(w, T_0)$ ), im übrigen aber das gleiche

elastische Verhalten aufweist wie das wirkliche Material. In isothermen Prozessen verhält sich dieses hypothetische Material (mit B bezeichnet) genauso wie das reale Material (mit A bezeichnet). Aber bei adiabatischen Prozessen ergeben sich Unterschiede. Bei dem realen Material A wirken sich die Temperaturänderungen auf das elastische und das plastische Verhalten aus, bei dem hypothetischen Material B hingegen (unmittelbar) nur auf den elastischen Anteil der Deformationen. Wir haben deshalb drei Fälle zu unterscheiden:

- (I) Isotherme Prozesse für Material A und B
- (IIA) Adiabatische Prozesse für Material A
- (IIB) Adiabatische Prozesse für Material B

Der Vergleich zeigt, daß die Differenzen in den Schubspannungen  $\tau$  zwischen adiabatischen und isothermen Prozessen im wesentlichen durch die Temperaturabhängigkeit der Fließbedingung verursacht sind (s. Abb. 8); denn die Kurven  $\tau(\lambda)$  für (I) und (IIB) unterscheiden sich kaum. Hingegen werden die Unterschiede in den Effekten 2. Ordnung, die relativ viel größer sind, im wesentlichen durch den thermoelastischen Anteil der Deformationen hervorgerufen, wie der Vergleich zwischen den Prozessen (I) und (IIA) bzw. (IIA) und (IIB) lehrt.

Ferner ist noch zu beachten, daß bei adiabatischer Scherung die Schubspannung für  $\lambda = 0.87$  ein Maximum erreicht. Der Prozeß wird also an dieser Stelle instabil im Sinne von Druckers Stabilitäts-Postulat [19]. Dennoch bleibt der Prozeß auch über diesen Punkt hinaus eindeutig. Das Drucker'sche Postulat wird deshalb hinsichtlich seiner

Begründung neu überdacht werden müssen.

Die in der Abb. 9 dargestellten Effekte 2. Ordnung sind kleiner als sie im Experiment zu beobachten sind [34]. Eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erreichen wir, indem wir eine anisotrope Verfestigung in das Materialgesetz einbeziehen und zugleich den Ansatz für den plastischen Anteil der Deformationen im Sinne von Gleichung (4.11) erweitern [35]. Es verschiebt sich damit allerdings auch die Differenz zwischen dem isotropen und dem adiabatischen Prozeß. Der Einfluß des thermoelastischen Anteils tritt dann an Bedeutung etwas zurück. Das soll hier aber nicht mehr im einzelnen erörtert werden.

Bei reinem Schub wird

$$\sigma_1^1 = \sigma_2^2 = 0 \quad (7.7)$$

Als Effekte 2. Ordnung treten in diesem Falle die Dehnungen  $\varepsilon_1^1$  und  $\varepsilon_2^2$  auf. Dementsprechend ändert sich das Gleichungssystem (7.1). Die Auflösung des Gleichungssystems bereitet aber auch in diesem Falle keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Auf eine ins einzelne gehende Diskussion müssen wir jedoch hier verzichten.

Die vorstehenden Überlegungen lassen sich im übrigen ohne grundsätzliche Schwierigkeiten auch auf allgemeinere ebene Elementar-Prozesse sowie auf räumliche Elementar-Prozesse ausdehnen. Der Rechenaufwand kann dabei jedoch unter Umständen erheblich anwachsen.

### 7.3 Reine Blechbiegung<sup>16)</sup>

Im Ausgangszustand habe das Blech die Länge  $l_0$  und die Dicke  $s_0$ . Die Breite  $b_0$  sei sehr groß gegenüber der

---

16) vgl. hierzu [37]

Dicke, so daß wir bei der Biegung einen ebenen Verzer-  
 rungslzustand annehmen dürfen ( $\varepsilon_3^3 = 0$ ). Wir führen ein  
 körperfestes Koordinatensystem  $\xi^i$ , wie es Abb. 10 zeigt,  
 ein.  $\xi^2$  sei dabei so festgelegt, daß auf den Rändern  
 $\xi^2 = \pm 0,5$  wird. Die Biegung beschreiben wir durch den  
 bezogenen Biegewinkel

$$\beta = \alpha \frac{s_0}{l_0} . \quad (7.8)$$

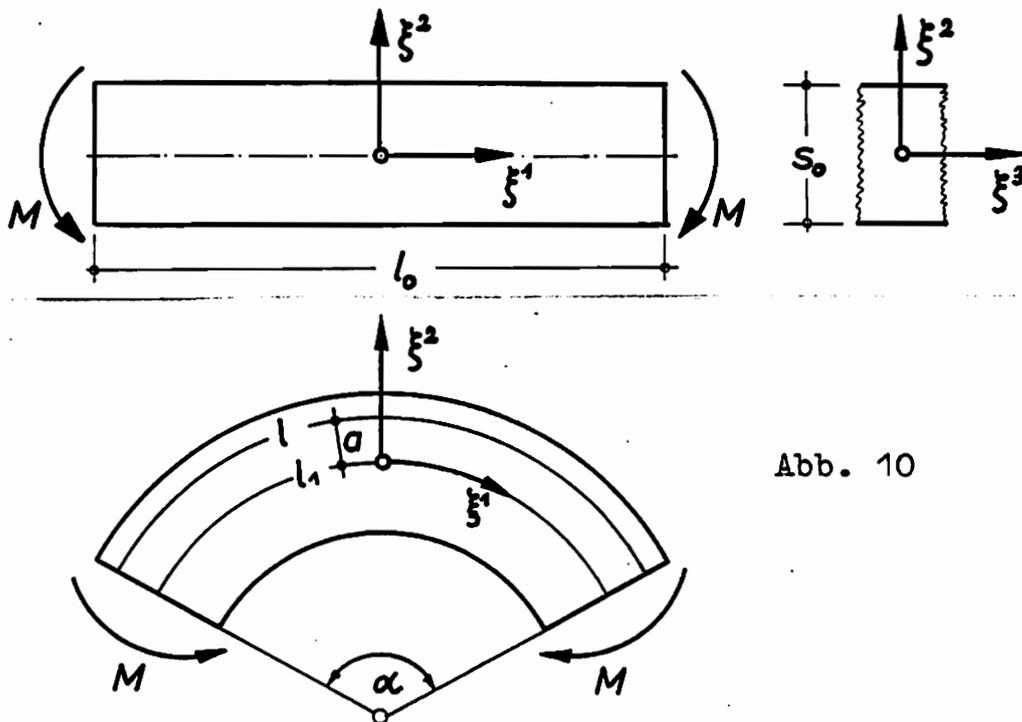


Abb. 10

Die auf die Ausgangslänge  $l_0$  bezogene Länge einer Faser  
 im verformten Zustand ist

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_1 + \alpha a}{l_0} , \quad (7.9)$$

wobei  $l_1$  die Länge der Faser  $\xi^2 = 0$  im verformten  
 Zustand ist. Als Dehnungsmaß führen wir den Hencky'schen  
 (logarithmischen) Verzerrungstensor

$$\varepsilon_k^i = \frac{1}{2} \ln(q_k^i) \quad (7.10)$$

ein, wobei  $\ln$  als Matrizenfunktion zu verstehen ist. Da die Hauptachsen des Verzerrungstensors ihre Lage im Körperelement während des ganzen Prozesses beibehalten (sie fallen stets mit den Koordinatenrichtungen zusammen), nimmt der Verzerrungstensor die einfache Form

$$\varepsilon_k^i = \begin{bmatrix} \ln \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ln \frac{\lambda'}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

an. Dabei bedeutet

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\xi^2} \quad (7.12)$$

Auch im folgenden wollen wir die Ableitung nach  $\xi^2$  stets durch einen Strich kennzeichnen. Den Tensor  $\varepsilon_k^i$  können wir, da die Hauptachsen sich im körperfesten Koordinatensystem nicht drehen, additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen:

$$\varepsilon_k^i = \varepsilon_k^i \underset{E}{\phantom{E}} + \varepsilon_k^i \underset{P}{\phantom{P}} \quad (7.13)$$

Ferner erhalten wir die Verzerrungsgeschwindigkeit in diesem Falle in einfacher Weise durch substantielle Differentiation nach der Zeit:

$$\dot{\varepsilon}_k^i = \dot{\varepsilon}_k^i = \dot{\varepsilon}_k^i \underset{E}{\phantom{E}} + \dot{\varepsilon}_k^i \underset{P}{\phantom{P}} \quad (7.14)$$

Es erweist sich als vorteilhaft, bei dem vorliegenden Problem die Tresca'sche Fließbedingung einzuführen. Sie nimmt hier die einfache Form

$$\left( G_1^1 - G_2^2 \right)^2 - k^2 (W) = 0 \quad (7.15)$$

an.

Für den plastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit leitet sich daraus nach der Theorie vom plastischen Potential ab

$$d_{P^1}^1 = \dot{\varepsilon}_{P^1}^1 = \pm \frac{\dot{S}^0 \dot{W}}{k(W)} ; \quad (7.16)$$

$$d_{P^2}^2 = -d_{P^1}^1 ; \quad d_{P^3}^3 = 0 .$$

Die vorstehenden Gleichungen sind geschlossen integrierbar, solange keine Belastungsumkehr auftritt. Wir erhalten in diesem Falle

$$|\varepsilon_{P^1}^1| = |\varepsilon_{P^2}^2| = S^0 \int \frac{D_W}{k(W)} ; \quad \varepsilon_{P^2}^2 = -\varepsilon_{P^1}^1 ; \quad \varepsilon_{P^3}^3 = 0 . \quad (7.17)$$

Als Verfestigungsgesetz können wir ansetzen

$$k(W) = k^0 \sqrt[n+1]{1 + (n+1) \frac{B S^0 W}{k^0 2}} . \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.18)$$

Setzen wir  $n = 1$ , so erhalten wir eine lineare Verfestigung, für  $n > 1$  wird die Verfestigung unterlinear. Mit diesem Ansatz folgt aus (7.17)

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon_{P^1}^1| = |\varepsilon_{P^2}^2| &= \frac{k^0}{n B} \left\{ \left[ 1 + (n+1) \frac{B S^0 W}{k^0 2} \right]^{\frac{n}{n+1}} - 1 \right\} ; \\ \varepsilon_{P^2}^2 &= -\varepsilon_{P^1}^1 ; \quad \varepsilon_{P^3}^3 = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Für den elastischen Anteil der Verzerrungen gilt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_E^1 &= \frac{1}{2G(1+\nu)} \left\{ G_1^1 - \nu(G_2^2 + G_3^3) \right\} \\ \varepsilon_E^2 &= \frac{1}{2G(1+\nu)} \left\{ G_2^2 - \nu(G_3^3 + G_1^1) \right\} \\ \varepsilon_E^3 &= \frac{1}{2G(1+\nu)} \left\{ G_3^3 - \nu(G_1^1 + G_2^2) \right\} = 0. \end{aligned} \right\} (7.20)$$

Die Summe der elastischen und der plastischen Dehnungen, also die Gesamt-Deformation, ist (unter Beachtung des jeweiligen Vorzeichens von  $\varepsilon$ ) nach (7.11)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \varepsilon_E^1 + \varepsilon_P^1 = \ln \lambda \\ \varepsilon_2^2 &= \varepsilon_E^2 + \varepsilon_P^2 = \ln \frac{\lambda'}{\beta}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Drücken wir hierin die Dehnungen durch die Spannungen aus, so erhalten wir für die Spannungen

im elastischen Bereich:

$$\left. \begin{aligned} G_1^1 &= \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \ln \lambda + \nu \ln \frac{\lambda'}{\beta} \right\} \\ G_2^2 &= \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ \nu \ln \lambda + (1-\nu) \ln \frac{\lambda'}{\beta} \right\} \\ G_3^3 &= \frac{2G\nu}{1-\nu} \ln \frac{\lambda\lambda'}{\beta}. \end{aligned} \right\} (7.22a)$$

im plastischen Bereich:

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= \frac{G}{1-2\nu} \ln \frac{\lambda \lambda'}{\beta} \pm \frac{k^0 n}{2} \sqrt{1 - \frac{nB}{4G} \pm \frac{B}{2k^0} \ln \frac{\lambda \beta'}{\lambda'}} \\ \sigma_2^2 &= \frac{G}{1-2\nu} \ln \frac{\lambda \lambda'}{\beta} \mp \frac{k^0 n}{2} \sqrt{1 - \frac{nB}{4G} \pm \frac{B}{2k^0} \ln \frac{\lambda \beta'}{\lambda'}} \end{aligned} \quad (7.22b)$$

$$\sigma_3^3 = 2G \frac{\nu}{1-\nu} \ln \frac{\lambda \lambda'}{\beta}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung lautet

$$\sigma_2^{2'} - \frac{\lambda'}{\lambda} (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) = 0. \quad (7.23)$$

Setzen wir darin für den elastischen Bereich die Ausdrücke (7.22a) und in den beiden plastischen Bereichen die Ausdrücke (7.22b) ein, so erhalten wir jeweils eine nicht-lineare Differentialgleichung für  $\lambda$  mit  $\beta$  als Parameter. Die Lösung dieser Differentialgleichung hat den Randbedingungen

$$\xi = \pm \frac{1}{2} : \quad \sigma_2^2 = 0 \quad (7.24)$$

zu genügen. Ferner ist zu beachten, daß die Grenzen des elastischen Bereiches durch die Bedingung

$$|\sigma_1^1 - \sigma_2^2| = k^0 \quad (7.25)$$

festgelegt sind und daß sich die Spannungen beim Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich stetig ändern. Mit diesen Bedingungen ist die Lösung vollständig bestimmt. Einige Ergebnisse sind in den Abbildungen 11 und 12 dargestellt.

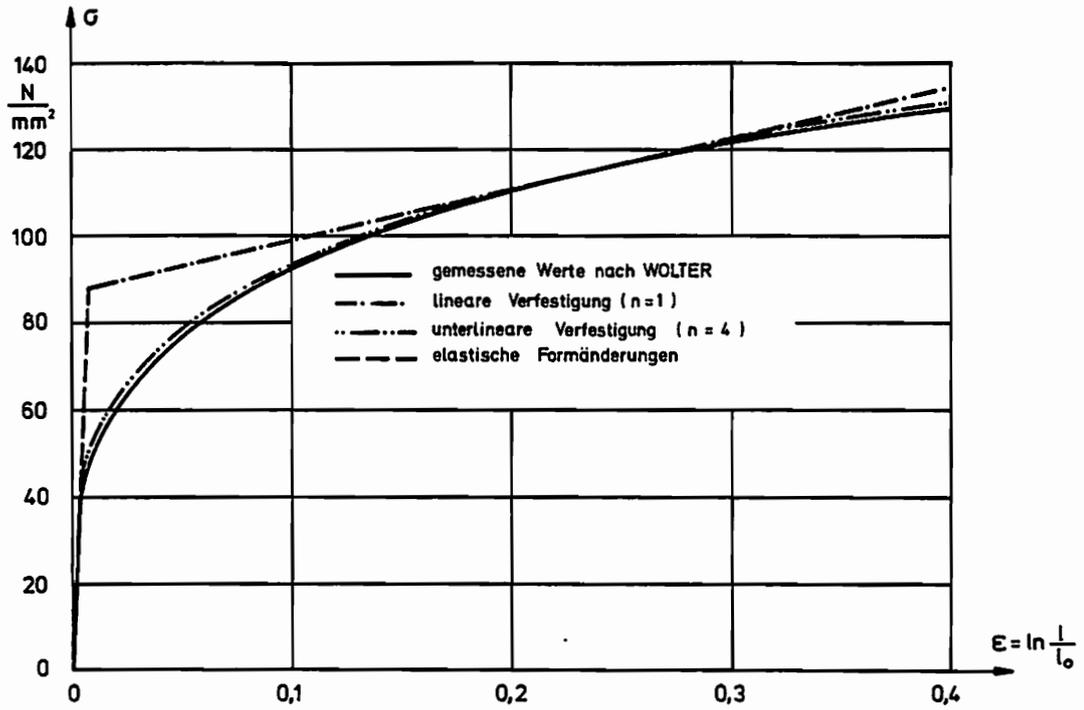


Abb. 11

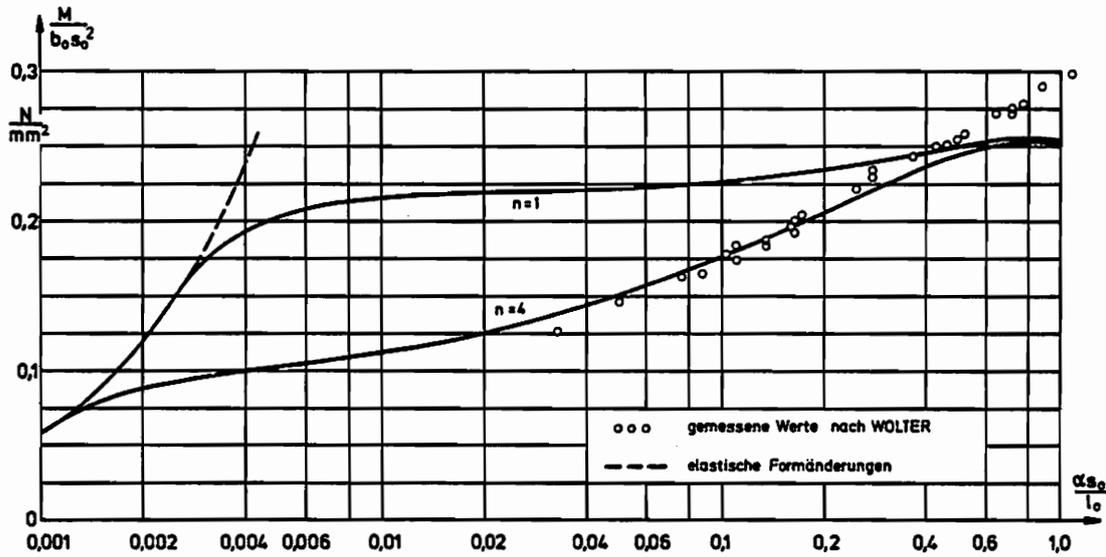


Abb. 12

Die elastische Zone wandert bei zunehmender Biegung nach der Innenseite. Infolgedessen treten im weiteren Verlauf der Biegung Entlastungen von zuvor plastisch verformten Fasern und ferner Wiederbelastungen in umgekehrter Richtung auf, wie der schematischen Darstellung in Abb. 13 entnommen werden kann. In diesem Falle werden die Zusammenhänge komplizierter. Es muß dann das Schicksal der einzelnen Fasern verfolgt werden, wie in [38] gezeigt wird.

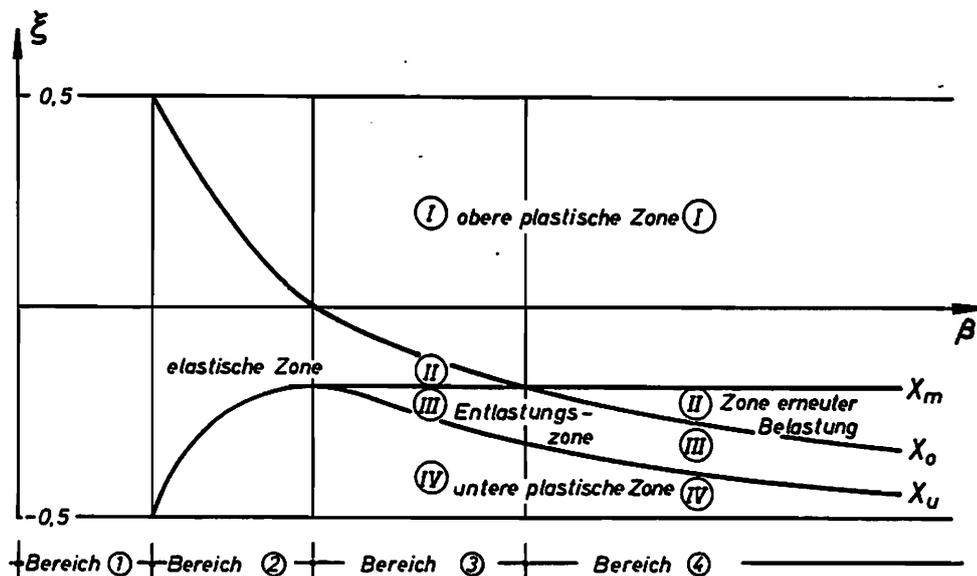


Abb. 13

Wird das elastisch-plastisch gebogene Blech entlastet, so federt es ein wenig zurück. Zugleich aber bildet sich ein Eigenspannungszustand im Innern des Bleches aus. Auf diese Probleme kann hier nicht näher eingegangen werden. Es sei dazu auf [37, 38] verwiesen.

#### 7.4 Einige ergänzende Bemerkungen

Die theoretischen Ansätze, die wir in den Kapiteln 5 und 6 entwickelt haben, lassen sich auch auf andere Probleme anwenden. So läßt sich damit z. B. die Torsion eines Stabes mit Kreisquerschnitt behandeln [39 bis 41].

Ein anderer interessanter Problembereich betrifft die Phänomene, die bei zyklischen Prozessen auftreten. Hierbei kann es zu einer Akkumulation der Effekte 2. Ordnung kommen [42 bis 45]. Ein weiterer Problembereich, auf den abschließend noch hingewiesen werden soll, betrifft die Verzweigungsprobleme. Sie sind dadurch charakterisiert, daß sich im Verlaufe eines Deformationsprozesses - er sei zunächst homogen oder inhomogen - Zustände ergeben, in denen der weitere Verlauf des Prozesses mehrdeutig wird. Ein bekanntes Problem dieser Art ist z. B. das Einschnürproblem beim Zugversuch [46], doch ergeben sich auch bei anderen Prozessen derartige Verzweigungsprobleme. Eine allgemeine theoretische Einführung und einen guten Überblick mit einigen neuartigen Lösungen gibt Bruhns [47].

Mit diesen Hinweisen ist die Fülle der Anwendungsmöglichkeiten der Theorie endlicher, elasto-plastischer Formänderungen natürlich keineswegs erschöpft. Der vorliegende Beitrag will auch nur eine Einführung in den gesamten Problembereich darstellen.

Literaturverzeichnis

- [1] A. E. Green and W. Zerna: Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford 1954
- [2] L. I. Sedov: Introduction to the mechanics of a continuous medium. Addison-Wesley Publ. Comp. 1965 (Translation from the Russian ed. 1962)
- [3] Th. Lehmann: Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik. Ing. Arch. 29 (1960), 316/30
- [4] Th. Lehmann: Einige ergänzende Bemerkungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik. Ing. Arch. 31 (1962), 371/84
- [5] G. Zhong-Heng: Time derivatives of tensor fields in non-linear continuum mechanics. Arch. Mech. Stos. 15 (1963), 131/63
- [6] M. S. Zaremba: Sur une forme perfectionnée de la theorie de la relaxation. Anz. Akad. Krakau, math.-naturwiss. Klasse 1903, 594/614
- [7] G. Jaumann: Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze. Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 120 (1911), 385/530

- [8] Th. Lehmann: Formänderungen eines klassischen Kontinuums in vierdimensionaler Darstellung. Proc. XI. Int. Congr. Appl. Mech. München 1964, 376/82. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/ New York 1966
- [9] D. B. Maevan: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. ZAMP 19 (1968), 157/
- [10] E. H. Lee: Elastic-plastic deformation at finite strains. J. Appl. Mech. 36 (1969), 1/6
- [11] L. B. Freund: Constitutive equations for elastic-plastic materials at finite strain. Int. J. Sol. Struct. 6 (1970), 1193/1209
- [12] F. Sidoroff: The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain. Arch. Mech. 25 (1973), 299/309
- [13] M. Kleiber: Kinematics of deformation processes in materials subjected to finite elastic-plastic strain. Int. J. Eng. Sci. 13 (1975), 513/25
- [14] Th. Lehmann: On large elastic-plastic deformations. In: Proc. of Int. Symp. on Foundation of Plasticity, Warsaw 1972. Noordhoff Int. Publ. Leyden 1974

- [15] A. E. Green and P. M. Naghdi: A general theory of an elastic-plastic continuum. Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965), 251/81
- [16] A. E. Green and P. M. Naghdi: A thermodynamic development of elastic plastic continua. In: Proc. IUTAM Symp. on irreversible aspects of continuum mechanics, Wien 1966. Springer-Verlag Wien/New York 1968
- [17] J. B. Haddow and T. M. Hrudehy: A finite strain theory for elastic-plastic deformations. J. Non-Lin. Mech. 6 (1971), 435/50
- [18] D. C. Drucker: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proc. 1. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1951), 487/91
- [19] D. C. Drucker: A definition of stable inelastic materials. J. Appl. Mech. 22 (1955), 101/6
- [20] A. A. Iljushin: Grundlagen der allgemeinen mathematischen Theorie der Plastizität. In: Fragen der Plastizitätstheorie, Moskau 1961 (orig. russisch)
- [21] L. M. Kachanov: Foundations of the theory of plasticity. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam/London 1971

- [22] H. Ziegler: Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics. In: Progress in solid mechanics (Sneddon, J.N. and R. Hill, eds.), Vol. 4, Amsterdam 1964
- [23] H. Ziegler: Thermodynamic der Deformationen, Proc. XI. Intern. Congr. Appl. Mech. München 1964, 99/108. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1966
- [24] Th. Lehmann: Einige Betrachtungen zur Thermodynamik großer elasto-plastischer Formänderungen. Acta Mech. 20 (1974), 187/204
- [25] B. D. Coleman: Thermodynamics with internal state variables. Journ. Chem. Phys. 47 (1967), 597/613
- [26] E. C. Ting: A thermodynamic theory for finite elastic-plastic deformations. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 22 (1971), 702/13
- [27] J. R. Rice: Inelastic constitutive relation for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity. J. Mech. Phys. Sol. 19 (1971), 433/55
- [28] G. A. Kluitenberg: Thermodynamical theory of elasticity and plasticity. Physica 28 (1962), 217/32

- [29] H. Ziegler: Plastizität ohne Thermodynamik?  
Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 21  
(1970), 798/805
- [30] H. Ziegler: Systems with internal parameters  
obeying the orthogonality condition.  
Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 23  
(1972), 553/66
- [31] A. Phillips: Yield surfaces of pure aluminium  
at elevated temperatures. Proc. of  
the IUTAM- Symposium on Thermo-  
inelasticity, East Kilbridge 1968,  
241/58. Springer-Verlag Berlin/  
Heidelberg/New York 1970
- [32] P. M. Naghdi and J. A. Trapp: Restrictions on  
constitutive equations of finitely  
deformed elastic-plastic bodies.  
Quart. J. Mech. appl. Math. 28  
(1975), 25/46
- [33] W. S. Farren and G. T. Taylor: The heat developed  
during plastic extention of metals.  
Proc. Roy. Soc. London A 107 (1925),  
422/51
- [34] Th. Lehmann and G. Zander: Non-isothermic large  
elastic-plastic deformations.  
Arch. Mech. Stos. 27 (1975)
- [35] F. W. Hecker: Die Wirkung des Bauschinger-  
Effektes bei großen Torsions-  
Formänderungen. Dissertation  
TH Hannover 1967

- [36] Th. Lehmann: Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen. Ing. Arch. 41 (1972), 297/310
- [37] O. Bruhns: Die Berücksichtigung einer isotropen Werkstoffverfestigung bei der elastisch-plastischen Blechbiegung mit endlichen Formänderungen. Ing. Arch. 39 (1969), 63/72
- [38] B. Lücke: Die Berücksichtigung von Entlastungszonen und Zonen erneuter Belastung bei der elastisch-plastischen Blechbiegung mit endlichen Formänderungen. Ing. Arch. 43 (1973), 34/43
- [39] W. Preuß: Beitrag zur Theorie der plastischen Torsion des Vollzylinders mit isotroper Werkstoffverfestigung bei endlichen Formänderungen. Dissertation TH Hannover 1967
- [40] C. Hartung: Zur plastischen Torsion eines Vollzylinders mit isotroper Werkstoffverfestigung bei endlichen Formänderungen. Ing. Arch. 38 (1969), 119/25
- [41] K. Thermann: Zur elasto-plastischen Torsion kreiszylindrischer Körper bei endlichen Verzerrungen. Dissertation TU Hannover 1969

- [42] Z. Mroz: An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general work hardening model. Acta Mech. 7 (1969), 199/212
- [43] O. Bruhns: Vergleich einiger elastisch-plastischer Stoffgesetze bei Formänderungsprozessen mit Be- und Entlastung. ZAMM 52 (1972), T40/T42
- [44] O. Bruhns: On the description of cyclic deformation processes using a more general elasto-plastic constitutive law. Arch. Mech. Stos. 25 (1973), 535/46 and in Problems of Plasticity (ed. by A. Sawczuk). Noordhoff Int. Publ. Leyden 1974, 496/500
- [45] A. Mioduchowski und K. Thermann: Zur zyklischen elasto-plastischen Torsion des Kreiszylinders bei endlichen Verzerrungen. Ing. Arch. 42 (1973), 309/18
- [46] J. W. Hutchinson and J. P. Miles: Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic-plastic cylinder under uniaxial tension. J. Mech. Phys. Solids 22 (1974), 61/71
- [47] O. Bruhns: Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elasto-plastisch deformierter Kontinua. Techn.-wiss. Mitteilungen Nr. 74-9, IKIB, Ruhr-Universität Bochum, 1974

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite  
Elastic-Plastic Deformations.  
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen  
elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen  
Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-  
zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden  
Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-  
wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinemato-graphischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear  
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei  
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch  
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value  
Problems in the Theory of Plasticity and Application to  
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-  
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-  
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger  
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen  
Kontaktproblem

- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und  
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and  
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre  
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische  
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-  
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik  
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-  
funktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung  
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-  
tigung großer Rotationen



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 1**