



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Wolfgang Krings

Beitrag zur Finiten Element
Methode bei linearem,
viskoelastischem Stoffverhalten

Heft Nr. 3



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Wolfgang Krings

Beitrag zur Finiten Element Methode bei
linearem, viskoelastischem Stoffverhalten

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 3
Januar 1976

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität
Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1973 bis
1975 am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
und ist von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen
als Dissertation angenommen worden.

Herrn Prof. Lehmann und Herrn Prof. Waller möchte ich
für die Übernahme der Gutachten recht herzlich danken.

Tag der Einreichung: 30. 6.1975

Tag der mündlichen Prüfung: 13.11.1975

Berichter: Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann
Prof. Dr.-Ing. H. Waller

© 1976 Dr.-Ing. Wolfgang Krings
464 Wattenscheid, Gertrudenhof 3
Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Finiten Element Methode für beliebig linear viskoelastisches Stoffverhalten bei kleinen Verzerrungen. Durch Diskretisierung mit Finiten Elementen in den Ortskoordinaten wird das viskoelastische Anfangsrandwertproblem auf die Lösung eines Anfangswertproblems zurückgeführt. Das Vorgehen ist zur Lösung von Schwingungs- und Kriechproblemen geeignet. Mehrere Beispiele zeigen die unterschiedlichen Anwendungsmöglichkeiten.

Summary

This paper deals with the finite element method for any linear viscoelastic material behaviour and small strains. The initial-boundary value problem is reduced to an initial value problem by discretisation with finite elements. The method can be used for the solution of vibrational and creeping problems. Several examples demonstrate different possible applications.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

Kapitel		Seite
	Literaturverzeichnis	4
	Notation	9
1.	Einleitung	12
2.	Linear-viskoelastisches Werkstoffgesetz	15
2.1.	Definition	15
2.2.	Dreidimensionales Stoffgesetz	15
2.3.	Rechenregeln für das Rechnen mit Operatoren	19
2.4.	Kriech- und Relaxationsfunktionen	20
3.	Finite Element Methode (FEM)	21
3.1.	Das dreidimensionale Kontinuum	22
3.1.1.	Allgemeiner Fall	22
3.1.2.	Inkompressibles Stoffverhalten	32
3.2.	Ableitung mit dem "Korrespondenzprinzip"	36

Kapitel		Seite
3.3.	Ebener Verzerrungszustand	38
3.3.1.	Allgemeiner Fall	38
3.3.2.	Inkompressibles Stoffverhalten	42
3.4.	Ebener Spannungszustand	43
4.	Aufstellen der Matrizenbewegungsgleichung für das Gesamtsystem	49
4.1	Berücksichtigung der Randbedingungen in den Ortskoordinaten	56
5.	Anmerkungen zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen	57
6.	Lösung der Bewegungsgleichung	58
6.1.	Lösungsverfahren	60
6.2.	Auswahl des Verfahrens	63
7.	Spannungsberechnung	65
8.	Berücksichtigung von unstetigen Laständerungen bei Kriechproblemen	68
9.	Berechnung von Endzuständen	72

Kapitel		Seite
10.	Fehlerquellen der numerischen Lösung	73
11.	Rechenbeispiele	75
11.1.	Dreiecksintegration bei FE	76
11.2.	Beispiele	77
12.	Zusammenfassung	110

LITERATURVERZEICHNIS

- | 1 | Argyris J.H. and Scharpf D.W.: "Finite Elements in Time and Space" Nuclear Eng. and Design 10 (1969), S. 456-464
- | 2 | Argyris J.H. and Chan A.S.L.: "Applications of Finite Element in Space and Time" Ing. Archiv 41 (1972), S. 235 -257
- | 3 | Bazant Z.P.: "Matrix Differential Equation and Higher-Order Numerical Methods for Problems of Non-Linear Creep, Viscoelasticity and Elasto - Plasticity". Int. J. Num.Meth. Eng., Vol. 4, 11-15 (1972)
- | 4 | Buck K.E., Scharpf D.W., Stein E. und Wunderlich W.: "Finite Elemente in der Statik" Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf 1973
- | 5 | Carpenter W.C.: "Viscoelastic Stress Analysis" Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 4, 357-366 (1972)
- | 6 | Crandall S.H.: "Engineering Analysis " Mc Graw-Hill Book Company, New York - Toronto - London
- | 7 | Christian J.T. and Watt B.J.: "Undrained viscoelastic analysis of soil deformations". Application of the finite element method in geotechnical engineerings. May 1972
- | 8 | Chan S.P., Cox H.L. und Benfield W.A.: "Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical Systems" J. of the Royal Aeron. Soc. Vol. 66, p. 457-460

- | 9 | Clough R.W. und Bathe K.J.: "Finite Element Analysis of Dynamic Response" Advances in Comp. Meth. in Struct. Mechanics and Design UAH Press, Huntsville, Alabama 1972

- | 10 | Flügge W.: "Viscoelasticity". Blaisdell Publishing Company Waltham Massachusetts, Toronto, London 1967

- | 11 | Fried I.: "Finite-Element Analysis of Time-Dependent Phenomena" AIAA Journal, Vol. 7, No. 6 (1969), p. 1170 - 1173

- | 12 | Greenbaum G.A., M.F. Rubinstein: "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements" Nuclear engineering and design 7 (1968)

- | 13 | Grigorieff R.D.: "Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Band 1: Einschrittverfahren, Band 2: Mehrschrittverfahren". B.G. Teubner Studienbücher, Stuttgart 1972 und 1975

- | 14 | Healey M.: "Study of Methods of Computing Transition Matrices" Proceedings Control & Science Institution of Electrical Engineerings

- | 15 | Holzlöhner U.: "A Finite Element Analysis for Time - Dependent Problems". Int. J. Num.Meth. Eng., Vol. 8, 55-69 (1974)

- | 16 | Hult J. Editor: "Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies". IUTAM Symposium Gothenburg/Schweden 1974, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York
- | 17 | Krätzig W.B., Papenhausen V.: "Finite Elemente in der Elastostatik Eine Einführung". Finite-Element-Methoden. Seminar an der Ruhr-Universität Bochum WS 1973/1974
- | 18 | Krings W.: "Manual von STO. Stochastische Schwingungen" Mai 1975, unveröffentlicht
- | 19 | Krings W., Waller H.: "Numerisches Berechnen mechanischer Einschwingvorgänge. Eine Anwendung der schnellen Fourier-Transformation". VDI-Z, Band 116, 1974, Nr. 17, Seite 1385 - 1392
- | 20 | Krings W., Waller H.: "Numerisches Berechnen linearer diskreter Schwingungssysteme mit der LAPLACE-Transformation. Eine Anwendung der Fast FOURIER Transformation". Eingereicht beim Ing. Archiv
- | 21 | Krings W.: "Die finite Elementmethode für linear, viskoelastisches Werkstoffverhalten". Vortrag auf GAMM 1975 in Göttingen
- | 22 | Lee E.H., Radok J.R.M. an Woodward W.B.: "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials". Trans. of the Soc. of. Rheo. III, 41-59 (1959)
- | 23 | McHenry D.: "A new aspect of creep in concrete and its application to design". Proc. Am. Soc. Test. Mater. 43, p. 1069 - 1087 (1943)

- |24| Pestel E.C., Leckie F.A.: "Matrix Methods in Elastomechanics" McGraw-Hill Book Company, New York - San Francisco - Toronto - London 1963
- |25| Read jr. W.T.: "Stress Analysis for Compressible Viscoelastic Materials" J. of applied Physics, Vol. 21, July 1950
- |26| Schaefer G.: "Ein Beitrag zum Schwingungs -und Dämpfungsverhalten von Werkstoffmodellen". Dissertation Technische Hochschule Hannover 1966
- |27| Schiffner K.: "Die numerische Behandlung des viskoelastischen Randwertproblems". ZAMM 53, T77 - T79 (1973)
- |28| Schlichting H.: "Grenzschicht-Theorie" Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965
- |29| Schrader K.H.: "Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierten Sprache" B.I. - Hochschulschriften, Mannheim - Zürich 1968
- |30| Trost H.: "Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton". Beton, Herstellung, Verwendung (1966) Heft 6, S. 233 - 248
- |31| Waller H., Krings W.: "Matrizenmethoden in der Maschinen -und Bauwerksdynamik". B.I. - Wissenschaftsverlag, Mannheim - Wien - Zürich 1975

- | 32 | Yamada Y., Takabatake H. and Sato T.: "Effect of time-dependent Material Properties on Dynamic Response".
Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 8, 403-414 (1974)
- | 33 | Zienkiewicz O.C., Watson M. und King I.P.: "A numerical method of visco-elastic stress analysis".
Int. J. mech. Sci. 1968, Vol. 10, S. 807 - 827
- | 34 | Zienkiewicz O.C.: "Introductory Lectures on the Finite Element Method" Course held of the Department of Mechanics of Solids,
July 1972, Udine, Springer-Verlag, Wien - New York
- | 35 | Zienkiewicz O.C.: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics".
McGraw-Hill Book Company, London 1967
- | 36 | Zurmühl R.: "Praktische Mathematik"
Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1968
- | 37 | Bosshard W.: "Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung".
Abhdl. der IVBH 28. 1968. S. 27-40

Notation

In der gesamten Arbeit wird fast ausschließlich die Matrixschreibweise verwandt. Matrizen werden durch große unterstrichene und Vektoren durch kleine unterstrichene Buchstaben dargestellt.

ω	Kreisfrequenz
t, τ	Zeit
V	Volumen, Elementvolumen
O	Oberfläche
σ	Spannung
$\underline{\sigma}_{xx}, \underline{\sigma}_{yy}, \underline{\sigma}_{zz}$	Normalspannungen
$\underline{\sigma}_{xy}, \underline{\sigma}_{yz}, \underline{\sigma}_{zx}$	
$S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_D$	Deviatorspannungen
S	hydrostatische Spannung
ϵ	Verzerrung
$\underline{\epsilon}_{xx}, \underline{\epsilon}_{yy}, \underline{\epsilon}_{zz}$	Normalverzerrungen
$\underline{\epsilon}_{xy}, \underline{\epsilon}_{yz}, \underline{\epsilon}_{zx}$	
$\underline{\epsilon}_{xx}, \underline{\epsilon}_{yy}, \underline{\epsilon}_{zz}, \underline{\epsilon}_D$	Deviatorverzerrungen
e	Dilatation
u, v, w, x	Verschiebungen
k	Federsteifigkeit
c	Dämpferkonstante
ρ	Dichte
P	Flächen- oder Volumenkraft
E	Elastizitätsmodul
G	Gleitmodul
K	Kompressionsmodul
ν	Querdehnung
s, f, F	Kraft
p	Druck
$V(\omega)$	Vergrößerungsfunktion

i, j, l, m, n	Zählvariable
$P_{0i}, P_{1i}, P_i, Q_{0i}, Q_{1i}, Q_i$	Parameter von Differentialoperatoren
$H(\omega)$	Frequenzgang
J, i	Impuls, Impuls pro Fläche
r	Radius
x, y, z	Kartesische Koordinaten
$f(t)$	Kriechfunktion
$Y(t)$	Relaxationsfunktion
W_i	innere Arbeit
W_a	äußere Arbeit
a_i	Koeffizient

mathematische Symbole

\dots^*	virtuell
$\dots^{(i)}$	i-te totale Ableitung
$\frac{d\dots}{dt} = \dots^{\circ}$	totale Ableitung nach der Zeit
$\frac{\partial \dots}{\partial x}$	partielle Ableitung nach x
$\underline{D}, \underline{d}$	Differentialoperatormatrix und -vektor mit Ortsdifferentialen
$P, Q, P_D, P_H, PL, Q_D, Q_H, Q1, Q2$	lineare Differentialoperatoren mit Zeitdifferentialen
∞	unendlich
$s = \delta + j\omega$	komplexe Zahl
$j = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$\Delta t, \Delta \tau$	Zeitschritt

symbolische Schreibweise der Matrizen und Vektoren

$\underline{0}$	Nullmatrix
\underline{I}	Einheitsmatrix
\underline{M}	Massenmatrix
\underline{C}	Dämpfungsmatrix
$\underline{K}, \underline{K}_1, \underline{K}_2$	Steifigkeitsmatrix
\underline{A}_i	Matrix
$\underline{\Phi}_u$	Matrix der Ansatzfunktionen
$\underline{G}, \underline{\Phi}, \underline{H}_u, \underline{E}_1, \underline{E}_2$	Matrizen
\hat{u}	Parametervektor
\underline{u}	Elementverschiebungsvektor
$\tilde{\underline{\epsilon}}, \underline{\tilde{\epsilon}}, \underline{\epsilon}$	Elementverzerrungsvektor
$\underline{\epsilon}_D$	Deviatorverzerrungsvektor
$\tilde{\underline{\sigma}}, \underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\sigma}$	Elementspannungsvektor
$\underline{\sigma}_D$	Deviatorspannungsvektor
\underline{s}	Elementknotenkraftvektor
\underline{s}_V	Knotenkraftvektor der Volumenkräfte
\underline{s}_σ	Knotenkraftvektor der Oberflächenkräfte
$\underline{s}_a = \underline{s}_V + \underline{s}_\sigma$	
\underline{v}	Elementknotenverschiebungsvektor
$\underline{X}, \underline{Q}_1, \underline{Q}_2$	Diagonalmatrizen
\underline{f}	globaler Kraftvektor
\underline{Y}	Transformationsmatrix
$\underline{\Sigma}$	Spannungstensor
$\underline{e}, \underline{h}_u, \underline{a}$	Vektoren
\underline{z}	Zustandsvektor
\underline{U}	Übertragungsmatrix
\underline{x}	globaler Verschiebungsvektor

1. Einleitung

Seit langem ist bekannt, daß bei gewissen Werkstoffen - wie z.B. Kunststoff, Beton usw. - auch bei geringen, konstanten Belastungen zeitveränderliche Verschiebungen auftreten. Diese Vorgänge werden als Kriechen oder viskoses Fließen bezeichnet. Da bei geringen Belastungen Nichtlinearitäten oft vernachlässigbar sind, können die entsprechenden Werkstoffgesetze in guter Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Verhalten durch lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden.

Bis in die 50er Jahre wurden solche Probleme fast ausschließlich analytisch behandelt, wobei die gewöhnlichen Differentialgleichungen sehr oft durch LAPLACE-Transformationen gelöst wurden [22]. Bei komplizierten geometrischen Strukturen sind diese analytischen Verfahren nicht mehr anwendbar, und die Aufgabe ist nur noch numerisch lösbar.

Mit der Entwicklung der Finiten Element Methode sind in den 60er Jahren erste Rechnungen für viskoses Stoffverhalten durchgeführt worden. ZIENKIEWICZ und Mitarbeiter [33] berechnen Kriechvorgänge für einen zeitkonstanten Kompressionsmodul, also für ein spezielles Stoffverhalten. Sie verwenden eine inkrementelle Formulierung des Stoffgesetzes. CARPENTER [5] löst die Differentialgleichungen des Stoffgesetzes durch ein RUNGE-KUTTA-Verfahren und berechnet mit seiner FEM einfache Kriechvorgänge. SCHIFFNER [27] schließlich ersetzt die Ableitungen nach der Zeit durch finite Differenzen und diskretisiert in den Ortskoordinaten durch Finite Elemente. Er kann jedes Stoffgesetz, welches durch Hintereinanderschaltung von KELVIN-Elementen darstellbar ist, berücksichtigen. Auch SCHIFFNER wendet sein Verfahren nur auf Kriechvorgänge an. Bei jedem Zeit-

schritt muß er iterativ ein Gleichungssystem lösen. BAZANT [3] schlägt eine Formulierung in gewöhnlichen Differentialgleichungen und numerische Integration der Systemgleichungen vor und wendet seinen Lösungsweg auf Kriech- und Fließprobleme an.

Einen völlig anderen Weg gehen BRILLA und Mitarbeiter [16], die die gesamten kontinuumsmechanischen Gleichungen LAPLACE-transformieren und im Bildbereich durch eine FEM lösen. Die Zeitlösung erhalten sie durch eine numerische inverse LAPLACE-Transformation. BRILLA beschäftigt sich mit orthotropen viskoelastischen Platten und untersucht praxisnahe Kriechprobleme.

Finite Element Berechnungen für viskoelastisches Stoffverhalten und für Schwingungsvorgänge sind von YAMADA und Mitarbeiter [32] und von HOLZLÖHNER [15] durchgeführt worden. YAMADA behandelt harmonische Balkenschwingungen. HOLZLÖHNER geht von einem Stoffgesetz in Differentialformulierung aus und zeigt, daß die Elementbewegungsgleichung eine Matrizendifferentialgleichung ist. Er berechnet transiente Schwingungen elastischer Körper. Die Differentialgleichungen behandelt er mit der LAPLACE-Transformation.

Das hier behandelte viskoelastische Problem ist in den Ortskoordinaten ein Randwert- und in der Zeitkoordinate ein Anfangswertproblem. Für Anfangswertprobleme sind schrittweise arbeitende Algorithmen günstig und der Natur der Aufgabe angepaßt. Randwertprobleme hingegen lassen sich numerisch mit Differenzen-, Gitterrost-, Variations- und Finiten Element Verfahren gut behandeln.

Ortskoordinaten	Zeitkoordinate
Randwertproblem	Anfangswertprob.
F E M	Übertragungsverf.

Bild 1

In dieser Arbeit ist die Diskretisierung in den Ortskoordinaten durch Finite Elemente gewählt worden (Bild 1). Für ein beliebiges, lineares, viskoses Stoffgesetz sind die Elementgleichungen mit dem Weggrößenverfahren formuliert worden. Viskoses Kompressionsverhalten ist ohne zusätzliche Schwierigkeiten zu berücksichtigen. Das Werkstoffgesetz enthält keine einschränkenden Vereinfachungen, sondern geht von den vollständigen Differentialbeziehungen aus. Die dann erhaltenen globalen Bewegungsgleichungen sind gewöhnliche, lineare Matrizendifferentialgleichungen. Kriech-, Schwingungs- und einfache Strömungsvorgänge lassen sich berechnen. In [21] hat der Autor eine spezielle Fassung der Methode kurz dargestellt.

2. Linear- viskoelastisches Werkstoffgesetz

2.1. Definition

Konstitutive Gleichungen geben im isothermen Fall einen mathematischen Zusammenhang zwischen Spannungsgrößen (σ) und Verzerrungsgrößen (ϵ) an. Erfolgt diese Verknüpfung durch eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Form (eindimensionaler Fall) :

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} + \dots, \quad (1)$$

so wird das dadurch charakterisierte Werkstoffverhalten **l i n e a r , v i s k o e l a s t i s c h** genannt.

Dieses Verhalten kann auch durch ein diskretes Feder - Dämpfer - Modell beschrieben werden, wenn für die Verzerrung die Verschiebung und für die Spannung die Kraft gesetzt wird (Bild 2). Untersuchungen zum Verhalten dieser Modelle sind an vielen Stellen wiedergegeben. Hier soll nur auf einige verwiesen werden [10,26,30].

2.2. Dreidimensionales Stoffgesetz

Das im vorigen Kapitel definierte Stoffgesetz galt für eine Spannungsgröße und eine zugeordnete Verzerrungsgröße. In einem dreidimensionalen Kontinuum treten aber mehrere Spannungen und Verzerrungen auf, so daß noch eine allgemeinere Beziehung aufgestellt werden muß. Einige Autoren, wie z.B. ZIENKIEWICZ [33,23] verwenden Formulierungen, welche sich an die üblichen elastischen Konstanten wie Elastizitätsmodul und Querdehnungszahl halten. Hier wird der Weg eingeschlagen, die dreidimensionalen Zustände in den **D e v i a t o r** zustand (**G e s t a l t ä n d e r u n g**) und den **K u g e l -** bzw. **h y d r o s t a t i s c h e n** Zustand (**V o l u m e n ä n d e r u n g**) aufzuspalten. Diese Darstellung ist z.B. in [10] gewählt worden und soll hier kurz aufgezeigt werden. Sie erfolgt in den kartesischen Koordinaten x, y und z .

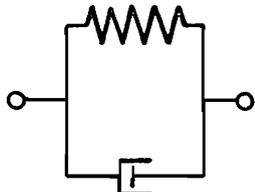
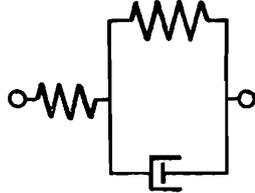
Modell	Name	- 16 - konstitutive Gleichung	Kriechfunktion $J(t)$ $\epsilon(t) = J(t) \cdot \sigma_0$	$\frac{1}{J(0)}$
	Hooke- Körper	$\sigma = q_0 \epsilon$	$\frac{1}{q_0}$	q_0
	Newton- Flüssigkeit	$\sigma = q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{t}{q_1}$	∞
	Maxwell- Flüssigkeit	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{(p_1 + t)}{q_1}$	$\frac{q_1}{p_1}$
	Kelvin- Körper	$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}),$ $\lambda = \frac{q_0}{q_1}$	∞
	3-Parameter Körper	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}),$ $\lambda = \frac{q_0}{q_1}$	$\frac{q_1}{p_1}$
		$q_1 > p_1 q_0$		
$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} + \dots$ $P_\sigma = Q_\epsilon$				

Bild 2 einige linear-visko-elastische Stoffgesetze

Die verschiedenen Normal- und Schubspannungen in einem Kontinuum (Bild 3) lassen sich als symmetrischen Spannungstensor schreiben (BOLTZMANN-Axiom). Durch die folgende

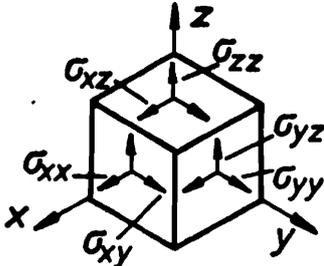


Bild 3: Volumenelement mit Spannungen

Zerlegung in Deviator- und Kugeltensor werden die Normal- und Schubspannungen durch eine hydrostatische Spannung und fünf voneinander unabhängige Deviatorspannungen dargestellt.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix}}_{\text{Kugeltensor}} + \underbrace{\begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ & s_{yy} & s_{yz} \\ \text{sym} & & s_{zz} \end{vmatrix}}_{\text{Deviatortensor}} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} s &= (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 \\ s_{xx} &= (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})/3 \\ s_{yy} &= (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz})/3 \\ s_{zz} &= (-\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{zz})/3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ & s_{yy} & s_{yz} \\ \text{sym} & & s_{zz} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & s_{xy} & 0 \\ s_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{yz} \\ 0 & s_{yz} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & s_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} s_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

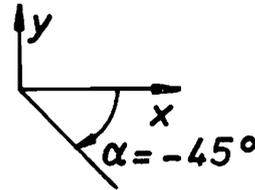
Die ersten drei Spannungstensoren auf der rechten Seite von (4) stellen reine Schubspannungszustände dar ; aber auch die beiden letzten sind reine Schubspannungszustände, und zwar der 4. Tensor in einem um -45° gedrehten Koordinatensystem in der x - y -Ebene und der letzte in der um $+45^\circ$ gedrehten y - z -Ebene.

Wendet man z.B. auf den 4. Tensor das Transformationsgesetz für Tensoren (in Matrixschreibweise) an

$$\underline{\underline{\bar{\Sigma}}} = \underline{A}^T \underline{\underline{\Sigma}} \underline{A} \quad (5)$$

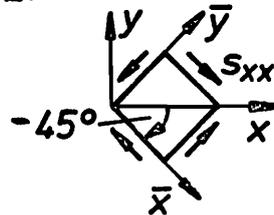
mit der Transformationsmatrix

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6)$$



so folgt für das neue Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{\bar{\Sigma}}} = \begin{vmatrix} 0 & s_{xx} & 0 \\ s_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$



Der Verzerrungstensor für kleine Verzerrungen mit Normal- und Schubverzerrungen läßt sich aufgrund seiner Tensoreigenschaften ebenfalls wie der Spannungstensor zerlegen.

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} e & & \\ & e & \\ & & e \end{vmatrix}}_{\text{Kugeltensor}} + \underbrace{\begin{vmatrix} e_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & e_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & e_{zz} \end{vmatrix}}_{\text{Deviatortensor}} \quad (8)$$

Kugeltensor Deviator-tensor

$$\left. \begin{aligned} e &= (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})/3 \\ e_{xx} &= (2\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})/3 \\ e_{yy} &= (-\epsilon_{xx} + 2\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})/3 \\ e_{zz} &= (-\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} + 2\epsilon_{zz})/3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bei isotopem Stoffverhalten und kleinen Verzerrungen verursacht ein hydrostatischer Spannungszustand nur Volumenänderungen und keine Gestaltsänderungen. Entsprechend ändern Deviatorspannungen nur die Gestalt und nicht das Volumen. Es läßt sich deshalb ein linear viskoses Stoffgesetz für den hydrostatischen

Zustand und eins für den Deviatorzustand angeben:

hydrostatischer Zustand $s + p_H \dot{s} + \dots = q_{H_0} e + q_{H_1} \dot{e} + \dots$ (10)

$$\boxed{P_H s = Q_H e} \quad (11)$$

linearer Differentialoperator $P_H = 1 + p_{H_1} \frac{d \dots}{dt} + p_{H_2} \frac{d^2 \dots}{dt^2} + \dots$

Deviatorzustand $\sigma_D + p_{D_1} \dot{\sigma}_D + \dots = q_{D_0} \epsilon_D + q_{D_1} \dot{\epsilon}_D + \dots$ (12)

$$\boxed{P_D \sigma_D = Q_D \epsilon_D} \quad (13)$$

Die in den konstitutiven Beziehungen (11) und (13) benutzten linearen Differentialoperatoren reduzieren sich im rein elastischen Fall auf die Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} P_H &= P_D = 1 \\ Q_H &= 2 \cdot G \\ Q_D &= 3 \cdot K \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Mit dem Gleitmodul G und dem Kompressionsmodul K . Diese sind mit den geläufigeren elastischen Konstanten E (Elastizitätsmodul) und ν (Querdehnungszahl) folgendermaßen verknüpft:

$$2 \cdot G = \frac{E}{1 + \nu}$$

$$3 K = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

2.3. Rechenregeln für das Rechnen mit Operatoren

Ein linearer Ausdruck der Form

$$q_0 x + q_1 \dot{x} + q_2 \ddot{x} + \dots + q_n x^{(n)}$$

kann auch durch die Operatorschreibweise

(Linearer Differentialoperator ist dick geschrieben!)

$$Q x = \left(q_0 + q_1 \frac{d \dots}{dt} + q_2 \frac{d^2 \dots}{dt^2} + \dots + q_n \frac{d^n \dots}{dt^n} \right) x$$

ersetzt werden. Formal kann die Operation $Q \cdot x$ wie eine Multiplikation ausgeführt werden. Durch Einsetzen lassen sich direkt die nachfolgenden Regeln auf ihre Richtigkeit überprüfen:

Linearität: $\alpha Q x + \beta P x = (\alpha Q + \beta P) x$

Kommutativität: $Q(Px) = (QP)x = (PQ)x$

Assoziativität: $Q(PR)x = (QP)Rx$

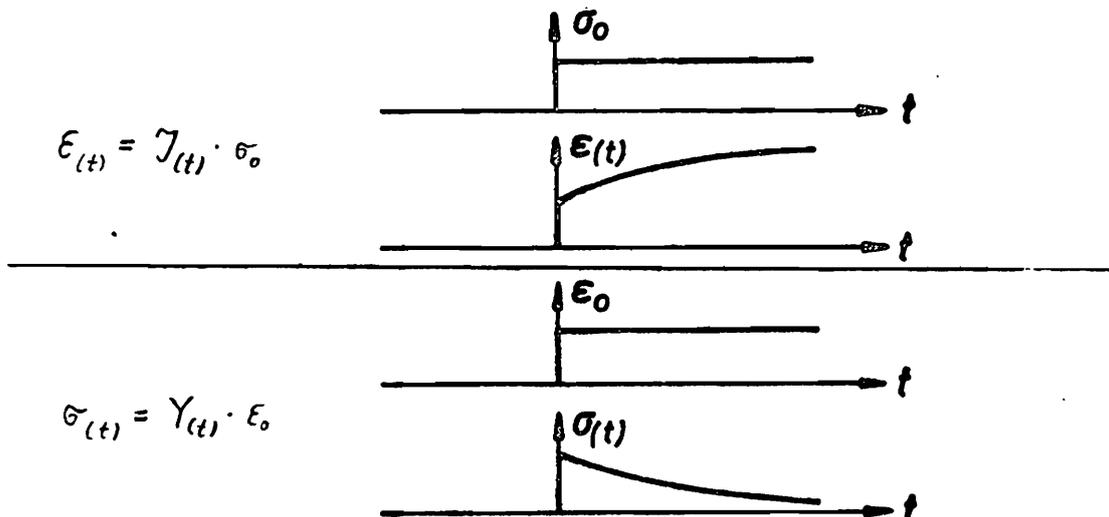
Distributivität: $Q(P+R)x = QPx + QRx$

Man kann also mit den Operatoren wie gewohnt mit Zahlen rechnen; allerdings ist eine Division nicht definiert!

Ebenso sind diese Operatoren als Matrizenelemente zulässig. Für diese Operatormatrizen gelten dann die Rechenregeln der linearen Algebra bei denen keine Divisionen auftreten, also Matrizenaddition, - subtraktion und -multiplikation.

2.4. Kriech- und Relaxationsfunktionen

Anstelle der Differentialdarstellung des linear-viskosen Stoffgesetzes (1) wird auch oft das Stoffverhalten durch Kriech- bzw Relaxationsfunktionen angegeben. Diese Funktionen sind die Lösungen der Gleichung (1) für gewisse Bedingungen. Die Kriechfunktion $J_{(t)}$ ist definiert als der zeitliche Verlauf der Verzerrungen infolge eines Einheits-sprunges der Spannung, und die Relaxationsfunktion $Y_{(t)}$ gibt den zeitlichen Spannungsverlauf infolge eines Einheits-sprunges der Verzerrung an.



Mittels des DUHAMEL-Integrals kann nun für beliebigen vorgegebenen Spannungsverlauf $\sigma_{(t)}$, mit der Kriechfunktion $\mathcal{J}_{(t)}$ der Verzerrungsverlauf bestimmt werden.

$$\epsilon_{(t)} = \sigma_{(0)} \cdot \mathcal{J}_{(t)} + \int_0^t \mathcal{J}_{(t-\tau)} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$$

Ebenso läßt sich für einen gegebenen Verzerrungsverlauf $\epsilon_{(t)}$ mit der Relaxationsfunktion $\mathcal{Y}_{(t)}$ der zugehörige Spannungsverlauf berechnen.

$$\sigma_{(t)} = \epsilon_{(0)} \cdot \mathcal{Y}_{(t)} + \int_0^t \mathcal{Y}_{(t-\tau)} \frac{d\epsilon}{d\tau} d\tau$$

Liegt ein allgemeineres Problem vor, bei dem nicht direkt der Spannungs- bzw. Verzerrungsverlauf gegeben ist, so ist der Gebrauch der vollständigen Differentialbeziehung (1) vorzuziehen, weil in ihr ja die volle Information über das Stoffverhalten steckt. Außerdem ist auch aus numerischer Sicht ein Arbeiten mit Differentialbeziehungen gegenüber Integralbeziehungen vorteilhafter, da die meisten Lösungsverfahren fast immer von Differentialformulierungen ausgehen (z.B. RUNGE-KUTTA-Verfahren).

In Bild 2 sind für einige Werkstoffmodelle die Kriechfunktionen $\mathcal{J}_{(t)}$ angegeben. Sie lassen sich analytisch leicht mit der LAPLACE-Transformation berechnen.

3. Finite Elemente Methode (FEM)

Zur Berechnung eines Kontinuums nach der FEM wird dieses in Teile endlicher Größe - sogenannte finite Elemente - zerlegt. In diesen Elementen werden die Differentialgleichungen des zu lösenden Problems näherungsweise durch Ansatzfunktionen gelöst. Anschließend werden diese Elementlösungen unter Beachtung gewisser physikalischer Bedingungen zu einem Systemgleichungssystem zusammengesetzt. Es verbleibt dann noch die Lösung dieser Systemgleichungen - oder auch Bewegungsgleichungen genannt. Werden die Ansatzfunktionen für Verschiebungsgrößen gewählt, so ist es möglich, im Element die geometrische Kompatibilität zu erfüllen, das Gleichgewicht aber nur näherungsweise (kompatibles Modell).

Im umgekehrten Fall, bei Ansatzfunktionen für Spannungen, kann das Gleichgewicht, aber nicht überall die geometrische Kompatibilität erreicht werden (Gleichgewichtsmodell).

In dieser Arbeit wird nicht auf sämtliche Details von Finiten Element Methoden eingegangen, sondern es sei aus der Vielzahl der einführenden Literatur nur [4,17,31] genannt. Hier wird das Weggrößenverfahren (displacement - method) zur Formulierung benutzt. Die weiter unten stehende Ableitung einer FEM für linear-viskoses Werkstoffverhalten erfolgt zuerst für das dreidimensionale isotrope Kontinuum für kleine Verzerrungen. Später folgen dann noch der ebene Verzerrungs- und ebene Spannungszustand.

Um die Darstellung nicht unnötig zu komplizieren wird als Beispiel ein einfaches Kontinuumselement, das CSTh (constant strain tetrahedron) für die Ableitung gewählt. Es approximiert die Verschiebungen linear im Element. Grundsätzlich kann natürlich auch jedes andere Element genommen werden. Das CSTh ist kompatibel, d.h. an der Grenzfläche zwischen zwei Elementen ist ein stetiger Übergang der Verschiebungen gewährleistet.

3.1. Das dreidimensionale Kontinuum

3.1.1. Allgemeiner Fall

Die drei Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z sind als Vektor u aufgelistet. Für einen linearen Verschiebungsansatz in allen drei Richtungen lassen sich diese mit der Matrix ϕ_u der Ansatzfunktionen und dem Spaltenvektor \hat{u} der noch zu bestimmenden Parameter berechnen.

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(x, y, z, t) &= \underline{\phi}_u(x, y, z) \cdot \hat{u}(t) \\
 \left. \begin{array}{l} |u| \\ |v| \\ |w| \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \cdot \left. \begin{array}{l} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{u}_{12} \end{array} \right| \quad (15)
 \end{aligned}$$

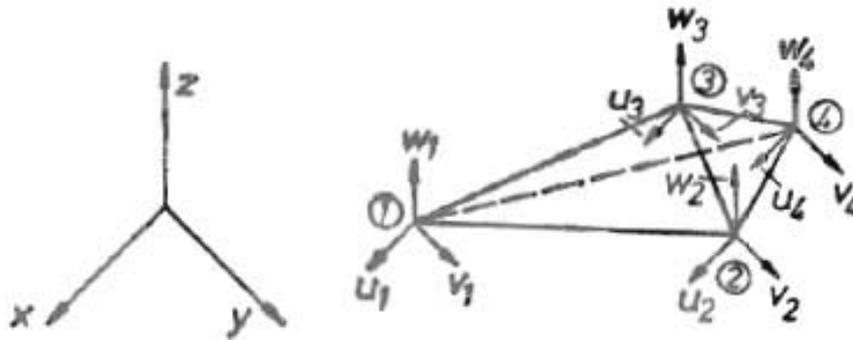


Bild 4: Tetraederelement CSTh

Wird (15) nacheinander für die vier Eckpunkte des Elements - die Knoten - angewandt, so gelangt man zu einer Matrixgleichung für den Spaltenvektor \underline{v} der Knotenpunktverschiebungen:

$$\underline{v}(t) = \underline{\Phi} \cdot \underline{\hat{u}}(t) \quad (16)$$

u_1	=	$1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$	0	0	·	\hat{u}_1				
u_2		$1 \ x_2 \ y_2 \ z_2$				0	0	\hat{u}_2		
u_3		$1 \ x_3 \ y_3 \ z_3$						0	0	\hat{u}_3
u_4		$1 \ x_4 \ y_4 \ z_4$								0
v_1		$1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$	0	0						
v_2		$1 \ x_2 \ y_2 \ z_2$				0	0			
v_3		$1 \ x_3 \ y_3 \ z_3$						0	0	
v_4		$1 \ x_4 \ y_4 \ z_4$								0
w_1		$1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$	0	0						
w_2		$1 \ x_2 \ y_2 \ z_2$				0	0			
w_3		$1 \ x_3 \ y_3 \ z_3$						0	0	
w_4		$1 \ x_4 \ y_4 \ z_4$								0

Aufgelöst nach $\underline{\hat{u}}$ und eingesetzt in (15):

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \underline{\phi}(x, y, z) \underline{\Phi}^{-1} \cdot \underline{v}(t) = \underline{\phi}(x, y, z) \underline{G} \cdot \underline{v}(t) \quad (17)$$

$$\underline{G} = \underline{\Phi}^{-1}$$

Gleichung (17) gibt den Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen \underline{v} und den Verschiebungen im Elementinnern für den gewählten Ansatz an. Aus den Verschiebungen können die Verzerrungen durch die nachfolgende bekannte Beziehung errechnet werden:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (18)$$

Diese Gleichung lautet in Matrixschreibweise:

$$\tilde{\underline{\epsilon}}(x, y, z, t) = \underline{D} \underline{u}(x, y, z, t) \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Mit Rücksicht auf das Werkstoffgesetz von Kapitel 2.2. wird auch noch ein zweiter Spaltenvektor der Verzerrungen definiert (siehe (9)):

$$\underline{\epsilon}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \dots \\ e \end{pmatrix} = \underline{\epsilon}_D \quad (20)$$

Dieser Spaltenvektor enthält die fünf unabhängigen Deviatorzustände $\underline{\epsilon}_D$ und die Volumenänderung e . Zwischen den beiden Verzerrungsvektoren $\underline{\epsilon}$ und $\tilde{\underline{\epsilon}}$ besteht der lineare Zusammenhang:

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\underline{\epsilon}} = \underline{Y} \tilde{\underline{\epsilon}} \quad (21)$$

$$\tilde{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{Y}^{-1} \underline{\epsilon} \quad (22)$$

Mit (17), (21) und (19) können die Verzerrungen $\underline{\epsilon}$ im Element durch die Knotenverschiebungen \underline{v} ausgedrückt werden:

$$\underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y} \tilde{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y} \underline{D} \underline{\phi}_u \underline{G} \underline{v}(t) \quad (23)$$

Mit

$$\star \underline{H}_u(x,y,z) = \underline{D} \underline{\phi}_u(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (24)$$

folgt dann schließlich:

$$\underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y} \underline{H}_u(x,y,z) \underline{G} \underline{v}(t) \quad (25)$$

Auch hier sind die Verzerrungen - wie vorher schon die Verschiebungen - im Element durch die Knotenverschiebungen ausgedrückt.

Das linear viskose Werkstoffverhalten wird durch die Differentialoperatorbeziehung (11) und (13) ausgedrückt. Vorher muß aber noch der Spaltenvektor der Spannungen definiert werden. Analog zu den Verzerrungsvektoren sind die Spannungsvektoren definiert:

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{tz} \\ \sigma_{tz} \end{vmatrix} = \underline{Y}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ s_{xx} \\ s_{yy} \\ s \\ s \end{vmatrix} = \underline{Y}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \underline{\sigma}_0 \\ \dots \\ s \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{Y} \cdot \underline{\tilde{\sigma}} \quad (27)$$

In diesem Fall (dreidimensionales Kontinuum) ist die lineare Transformation zwischen den beiden Verzerrungsvektoren $\underline{\epsilon}$ und $\tilde{\underline{\epsilon}}$ und den Spannungsvektoren $\underline{\sigma}$ und $\tilde{\underline{\sigma}}$ durch dieselbe reguläre Matrix \underline{Y} gegeben.

* Obwohl die Koeffizienten von \underline{H}_u hier konstant sind, wird weiter $\underline{H}_u(x,y,z)$ geschrieben, weil für andere Ansatzfunktionen diese Matrix von den Ortskoordinaten abhängen kann!

Die zugeordneten Größen in den Spannungs- und Verzerrungsvektoren sind in derselben Reihenfolge angeordnet. Die konstitutiven Gesetze lauten nun:

$$P_D \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = Q_D \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} \quad (28)$$

$$P_H \underline{s}_{(x,y,z,t)} = Q_H \underline{e}_{(x,y,z,t)} \quad (29)$$

Oder in Matrixdarstellung:

$$\left| \begin{array}{c|c} \overset{r}{\mathbb{I}} P_D & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & P_H \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \underline{\sigma}_D \\ \hline \underline{s} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \overset{r}{\mathbb{I}} Q_D & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & Q_H \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \underline{\epsilon}_D \\ \hline \underline{e} \end{array} \right| \quad (30)$$

Nach einer Multiplikation der oberen Matrixzeile mit dem Operator P_H und der unteren Zeile mit P_D wird aus (30):

$$P_D P_H \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = Q_1 Q_D P_H \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} + Q_2 Q_H P_D \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} \quad (31)$$

$$Q_1 = \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0] \quad ; \quad Q_2 = \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (32)$$

Mit (25) läßt sich dann auch im Element eine Beziehung (hier lineare Matrizendifferentialgleichung) zwischen den Knotenverschiebungen \underline{v} und den Spannungen $\underline{\sigma}$ herleiten:

$$P_D P_H \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = Q_1 \underline{v} \underline{H}_{u_{(x,y,z)}} \underline{G} Q_D P_H \underline{v}_{(t)} + Q_2 \underline{v} \underline{H}_{u_{(x,y,z)}} \underline{G} Q_H P_D \underline{v}_{(t)} \quad (33)$$

Von den drei Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, nämlich

der kinematischen Beziehungen zwischen

Verschiebungen und Verzerrungen,

dem Zusammenhang zwischen den Spannungen und

Verzerrungen (konstitutives Gesetz)

und der dynamischen Verträglichkeit (Gleichgewicht)

fehlt noch die letztere in den hergeleiteten Gleichungen.

Anstelle dieser Gleichgewichtsbedingungen wird hier ein

Prinzip, und zwar das Prinzip der

virtuellen Arbeiten, angewandt. Die

virtuellen Arbeiten können berechnet werden, indem dem

Spannungszustand ein virtueller Verschiebungszustand über-

lagert wird. Berechnet man mit diesem Spannungszustand und

dem virtuellen Verschiebungszustand die "äußere" virtuelle

Arbeit der Knotenkräfte, der Volumenkräfte, der Oberflä-

chenkräfte und der DE'ALEMBERT'schen Trägheitskräfte

und die innere virtuelle Arbeit der inneren Spannungen;

so ist die Forderung, daß diese beiden virtuellen Arbeiten gleich sind, äquivalent mit dem Gleichgewicht des Elements.

Die zulässigen virtuellen Verschiebungen müssen den kinematischen Bedingungen im Inneren und an den Grenzen des Elements genügen. Die Ansatzfunktionen erfüllen diese Forderungen und werden deshalb an dieser Stelle gewählt. Im folgenden sind virtuelle Größen durch einen Stern gekennzeichnet. Die "äußere" virtuelle Arbeit der Knotenkräfte, der Volumenkräfte, der Oberflächenkräfte und der DE'ALEMBERT'SCHEN Trägheitskräfte beträgt dann:

$$W_a^* = \underline{v}^{*T} \underline{s}(t) + \int_V \underline{u}_{(x,y,z)}^{*T} \underline{p}_V(x,y,z,t) dV + \int_\sigma \underline{u}_{(x,y,z)}^{*T} \underline{p}_\sigma(x,y,z,t) d\sigma - \int_V \underline{u}_{(x,y,z)}^{*T} \underline{\ddot{u}}_{(x,y,z,t)} dV \quad (34)$$

Im Spaltenvektor \underline{s} sind die Knotenkräfte in entsprechender Reihenfolge wie die Knotenverschiebungen im Spaltenvektor \underline{v} aufgelistet. \underline{p}_V und \underline{p}_σ sind Spaltenvektoren, in denen die Volumenkräfte und die Oberflächenkräfte (der freien Oberflächen) in x , y und z Richtung angegeben sind.

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte des Elementes beträgt:

$$W_i^* = \int_V \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,z)}^{*T} \underline{X} \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,z,t)} dV \quad (35)$$

mit der Diagonalmatrix

$$\underline{X} = \text{diag} [2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (36)$$

Durch Gleichsetzen der beiden virtuellen Arbeiten folgt die Bewegungsgleichung des Elements.

$$W_a^* = W_i^* \quad (37)$$

Mit den Beziehungen für die

virtuelle Verschiebung: $\underline{u}_{(x,y,z)}^* = \underline{\phi}_u(x,y,z) \underline{v}^*$ (38)

Beschleunigung: $\underline{\ddot{u}}_{(x,y,z,t)} = \underline{\phi}_u(x,y,z) \underline{\ddot{v}}(t)$ (39)

virtuelle Verzerrung:
$$\underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,z)}^* = \underline{H}_{u(x,y,z)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{v}^* \quad (40)$$

Spannung
$$\underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y}^{-1} \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)}$$

und (34) bis (37) folgt:

$$\underline{v}^{*T} \cdot \left(\underline{s}(t) + \underline{G}^T \int_V \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{p}_v(x,y,z) dV + \underline{G}^T \int_{\sigma} \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{p}_\sigma(x,y,z) d\sigma - \underline{G}^T \int_V \rho_{(x,y,z)} \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{\phi}_{u(x,y,z)} dV \underline{G} \ddot{\underline{v}}(t) - \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y,z) \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} dV \right) = 0 \quad (41)$$

Die virtuellen Verschiebungen im Vektor \underline{v}^{*T} sind beliebig, so daß die Klammer der linken Seite von (41) für sich den Wert Null haben muß. Der virtuelle Verschiebungsvektor kann also weggelassen werden. Mit den Bezeichnungen

$$\underline{s}_v(t) = \underline{G}^T \int_V \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{p}_v(x,y,z,t) dV \quad (\text{Volumenkraftvektor})$$

$$\underline{s}_\sigma(t) = \underline{G}^T \int_{\sigma} \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{p}_\sigma(x,y,z,t) d\sigma \quad (\text{Oberflächenkraftvektor})$$

$$\underline{M} = \underline{G}^T \int_V \rho_{(x,y,z)} \underline{\phi}_{u(x,y,z)}^T \underline{\phi}_{u(x,y,z)} dV \underline{G} \quad (\text{Massenmatrix})$$

und Anwendung des Differentialoperators $\underline{P}_D \underline{P}_H$ auf die Gleichung (41) ergibt sich:

$$\underline{P}_D \underline{P}_H (\underline{s}(t) + \underline{s}_v(t) + \underline{s}_\sigma(t) - \underline{M} \ddot{\underline{v}}(t)) = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y,z) \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{P}_D \underline{P}_H \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} dV \quad (42)$$

Wird nun noch die konstitutive Gleichung (33) eingesetzt und werden die Abkürzungen:

$$\underline{E}_1 = \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_1 \underline{Y} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ \text{sym} & & & 2 & -1 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (43)$$

$$\underline{E}_2 = \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_2 \underline{Y} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{sym} & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (44)$$

verwandt, so läßt sich (42) schreiben:

$$\underline{P}_D \underline{P}_H (\dots) = \underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{v}(t) + \underline{K}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{v}(t) \quad (45)$$

Elementbewegungsgleichung:

$$\underline{M} \underline{P}_D \underline{P}_H \ddot{\underline{v}}(t) + \underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{v}(t) + \underline{K}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{v}(t) = \underline{P}_D \underline{P}_H \cdot (\underline{s}(t) + \underline{s}_v(t) + \underline{s}_\sigma(t)) \quad (46)$$

$$\underline{K}_1 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y,z) \underline{E}_1 \underline{H}_u(x,y,z) dV \underline{G} \quad (47)$$

$$\underline{K}_2 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y,z) \underline{E}_2 \underline{H}_u(x,y,z) dV \underline{G} \quad (48)$$

Die Elementbewegungsgleichung (46) ist die allgemeine Bewegungsgleichung für linear-viskoses Stoffverhalten bei kleinen Verzerrungen. Im bekannten rein elastischen Fall reduziert sich diese zu:

$$\underline{M} \ddot{\underline{v}}(t) + \underline{K} \underline{v}(t) = \underline{s}(t) + \underline{s}_v(t) + \underline{s}_\sigma(t) \quad (49)$$

$$\underline{K} = \underline{K}_1 \underline{Q}_D + \underline{K}_2 \underline{Q}_H = \underline{K}_1 \cdot 2 \cdot G + \underline{K}_2 \cdot 3 \cdot K \quad (50)$$

Die Elementbewegungsgleichung (46) ist eine lineare Matrixdifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen.

Da die verwendeten Differentialoperatoren alle linear sind, kann (46) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{i=0}^m \underline{A}_i \underline{v}^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (\underline{s}(t) + \underline{s}_v(t) + \underline{s}_\sigma(t))^{(i)} \quad (51)$$

Für ein spezielles Werkstoffgesetz soll dieses hier vor-
geführt werden.

Werkstoff: Volumendehnung elastisch, also ein "HOOKE-Körper"

$$\text{---} \quad 1 \cdot s = 3K \cdot e$$

Schubverhalten nach einer "MAXWELL-Flüssigkeit"

$$\text{---} \quad 1 \cdot \sigma_D + p_1 \dot{\sigma}_D = q_1 \dot{\epsilon}_D$$

Differentialoperatoren:

$$P_H = 1 \quad ; \quad Q_H = 3K$$

$$P_D = 1 + p_1 \frac{d \dots}{dt} \quad ; \quad Q_D = q_1 \frac{d \dots}{dt}$$

$$P_D P_H = 1 \cdot \left(1 + p_1 \frac{d \dots}{dt}\right) = 1 + p_1 \frac{d \dots}{dt}$$

$$Q_D P_H = 1 \cdot q_1 \frac{d \dots}{dt} = q_1 \frac{d \dots}{dt} \quad (52)$$

$$Q_H P_D = 3K \cdot \left(1 + p_1 \frac{d \dots}{dt}\right) = 3K + 3K p_1 \frac{d \dots}{dt}$$

Mit diesen expliziten Differentialoperatoren wird aus (46)

$$\begin{aligned} \underline{M} \left(1 + p_1 \frac{d \dots}{dt}\right) \ddot{v}(t) + \underline{K}_1 q_1 \frac{d \dots}{dt} \dot{v}(t) + \underline{K}_2 \cdot (3K + 3K p_1 \frac{d \dots}{dt}) v(t) \\ = \left(1 + p_1 \frac{d \dots}{dt}\right) \cdot (\dot{s}(t) + \dot{s}_v(t) + \dot{s}_o(t)) \end{aligned}$$

$$p_1 \underline{M} \ddot{v}(t) + \underline{M} \ddot{v}(t) + (q_1 \underline{K}_1 + 3K p_1 \underline{K}_2) \dot{v}(t) + 3K \underline{K}_2 v(t)$$

$$= \dot{s}(t) + \dot{s}_v(t) + \dot{s}_o(t) + p_1 (\dot{s}(t) + \dot{s}_v(t) + \dot{s}_o(t)) \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \underline{A}_0 &= 3K \underline{K}_2 & a_0 &= 1 \\ \underline{A}_1 &= \rho_1 \underline{K}_1 + 3K \rho_1 \underline{K}_2 & a_1 &= \rho_1 \\ \underline{A}_2 &= \underline{M} \\ \underline{A}_3 &= \rho_1 \underline{M} \end{aligned}$$

läßt sich (53) dann in Gestalt der Matrizendifferentialgleichung (51) darstellen.

Die Matrix \underline{A}_0 ist die Steifigkeitsmatrix, \underline{A}_1 die viskose Dämpfungsmatrix und \underline{A}_2 die Massenmatrix. Für \underline{A}_3 ist dem Verfasser keine spezielle Bezeichnung bekannt.

In diesem Kapitel wurde die allgemeine Bewegungsgleichung eines Finiten Elements für ein isotropes, linear-viskoses Stoffgesetz und kleine Verzerrungen hergeleitet. Bei dieser Herleitung wurde ein besonderes Gewicht auf eine übersichtliche und formalisierbare Darstellung der Gleichungen gelegt. Mit der Bewegungsgleichung in der Formulierung als Matrizendifferentialgleichung läßt sich - wie später noch gezeigt werden wird - durch leicht programmierbare Algorithmen die Systemgleichung eines gesamten Tragwerks aufstellen. Auch diese Systemgleichungen sind lineare Matrizendifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizientenmatrizen.

Ist der Werkstoff inkompressibel, so wird dieses häufig bei Berechnungen dadurch näherungsweise berücksichtigt, daß der Kompressionsmodul sehr hoch angesetzt wird. Also

$$\begin{aligned} Q_H &= \text{const} \gg \text{Koeffizienten von } Q_D \\ P_D &= 1 \end{aligned}$$

Dann läßt sich das Problem - natürlich nur angenähert - mit den zuvor angegebenen Beziehungen lösen.

Im folgenden Kapitel wird ein Weg aufgezeigt, welcher diesen Einfluß exakt berücksichtigt. Dieser Weg lehnt sich an die Darstellung [7]. an.

In dieser ist für ein viskoelastisches Stoffgesetz (Deviatorzustand) und kompressibles Verhalten eine FEM-Formulierung angegeben. Allerdings ist in der dortigen Darstellung die konstitutive Beziehung mit der Relaxationsfunktion und dem DUHAMEL-Integral angesetzt worden, und eine genäherte, inkrementelle Formulierung für einen kurzen Zeitschritt verwandt. Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise wird hier das Stoffgesetz durch Differentialoperatoren angesetzt, also keine Vereinfachungen bezüglich des Stoffgesetzes in die Gleichungen eingeführt.

3.1.2. Inkompessibles Stoffverhalten

Anstelle des Stoffgesetzes (29) für den hydrostatischen Zustand tritt bei inkompessiblem Stoffverhalten die sogenannte Inkmpessibilitätsbedingung.

$$3 e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (54)$$

Oder in Matrizendifferentialdarstellung mit (19)

$$\underline{d} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \underline{e}^T \underline{D} \quad (55)$$

und (17)

$$\begin{aligned} \underline{d} \underline{u}(x, y, z, t) &= 0 \\ \underline{e}^T \underline{H}_u(x, y, z) \underline{G} \underline{v}(t) &= 0 \\ \underline{h}_u(x, y, z) \underline{G} \underline{v}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\star \underline{h}_u(x, y, z) = | 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 | \quad (57)$$

$$\underline{e}^T = | 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 | \quad (58)$$

Mit (20), (21), (32) und (54) gilt für die Verzerrungsvektoren:

$$\underline{\epsilon}_{(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} \underline{\epsilon}_0 \\ \underline{e} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\epsilon}_0 \\ \underline{0} \end{vmatrix} = \underline{Q}_1 \underline{Y} \cdot \tilde{\underline{\epsilon}}_{(x, y, z, t)} \quad (59)$$

★ siehe Fußnote auf Seite 25 .

Und für den umgekehrten Zusammenhang:

$$\tilde{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y}^{-1} \left| \begin{array}{c} \underline{\epsilon}_0 \\ \dots \\ e \end{array} \right| = \underline{Y}^{-1} \left| \begin{array}{c} \underline{\epsilon}_0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right| = \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_1 \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} \quad (60)$$

Für die Spannungsvektoren gelten die Beziehungen:

$$\underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y} \tilde{\underline{\sigma}}_{(x,y,z,t)} \quad (61)$$

und mit (32)

$$\tilde{\underline{\sigma}}_{(x,y,z,t)} = \underline{Y}^{-1} \underline{\sigma} = \underline{Y}^{-1} \left| \begin{array}{c} \underline{\sigma}_0 \\ \dots \\ s \end{array} \right| = \underline{Y}^{-1} (\underline{Q}_1 + \underline{Q}_2) \underline{\sigma} = \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_1 \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} + \underline{e} s_{(x,y,z,t)} \quad (62)$$

Als Stoffgesetz gilt hier nur ein Gesetz für den Deviatorzustand (28). Dieses kann auch geschrieben werden:

$$\underline{Q}_1 \underline{P}_0 \left| \begin{array}{c} \underline{\sigma}_0 \\ \dots \\ s \end{array} \right| = \underline{Q}_1 \underline{Q}_0 \left| \begin{array}{c} \underline{\epsilon}_0 \\ \dots \\ e \end{array} \right| \quad (63)$$

$$\underline{Q}_1 \underline{P}_0 \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = \underline{Q}_1 \underline{Q}_0 \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} \quad (64)$$

Mit den hergeleiteten Beziehungen und dem Prinzip der virtuellen Arbeiten folgt:

innere virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned} W_i^*(t) &= \int_V \tilde{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)}^{*T} \underline{X} \tilde{\underline{\sigma}}_{(x,y,z,t)} dV \\ W_i^*(t) &= \underline{V}^{*T} \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{X} \cdot (\underline{Y}^{-1} \underline{Q}_1 \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} + \underline{e} s_{(x,y,z,t)}) dV \end{aligned} \quad (65)$$

äußere virtuelle Arbeit:

(inklusive Volumen-, Oberflächen- und Trägheitskräfte)

$$W_a^*(t) = \underline{V}^{*T} \cdot (\underline{j}(t) + \underline{j}_V(t) + \underline{j}_\sigma(t) - \underline{M} \underline{\dot{v}}(t)) \quad (66)$$

Nach Gleichsetzen der virtuellen äußeren und inneren Arbeiten und Eliminieren der virtuellen Knotenverschiebungen lautet die Gleichung:

$$\underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{X} (\underline{Y}^{-T} \underline{Q}_1 \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} + \underline{e} s_{(x,y,z,t)}) dV = \underline{\dot{z}}(t) + \underline{\dot{z}}_V(t) + \underline{\dot{z}}_O(t) - \underline{M} \underline{\ddot{v}}(t) \quad (67)$$

Wird (67) mit dem Differentialoperator \underline{P}_D multipliziert, so kann das noch fehlende Stoffgesetz (64) in die Gleichung eingebaut werden.

$$\left. \begin{aligned} \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{X} (\underline{Y}^{-T} \underline{Q}_1 \underline{Q}_D \underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} + \underline{e} \underline{P}_D \underline{\epsilon}_{H(x,y,z,t)}) dV = \\ \underline{P}_D \cdot (\underline{\dot{z}}(t) + \underline{\dot{z}}_V(t) + \underline{\dot{z}}_O(t) - \underline{M} \underline{\ddot{v}}(t)) \end{aligned} \right\} (68)$$

Mit (25) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{X} \underline{Y}^{-T} \underline{Q}_1 \underline{Y} \underline{H}_{u(x,y,z)} dV \underline{G} \underline{Q}_D \underline{v}(t) + \\ \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{X} \underline{e} \underline{P}_D s_{(x,y,z,t)} dV = \underline{P}_D \cdot (\underline{\dot{z}}(t) + \underline{\dot{z}}_V(t) + \underline{\dot{z}}_O(t) - \underline{M} \underline{\ddot{v}}(t)) \end{aligned}$$

Die Abkürzungen (43)

$$\underline{E}_1 = \underline{X} \underline{Y}^{-T} \underline{Q}_1 \underline{Y}$$

und (47)

$$\underline{K}_1 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)}^T \underline{E}_1 \underline{H}_{u(x,y,z)} dV \underline{G}$$

können auch hier verwandt werden. Nun folgt aus (57) :

$$\underline{M} \underline{P}_D \underline{\ddot{v}}(t) + \underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{v}(t) + \underline{G}^T \int_V \underline{h}_{u(x,y,z)}^T \underline{P}_D s_{(x,y,z,t)} dV = \underline{P}_D (\underline{\dot{z}}(t) + \underline{\dot{z}}_V(t) + \underline{\dot{z}}_O(t)) \quad (69)$$

Die Bewegungsgleichung (69) des Elementes und die Inkompressibilitätsbedingung (56) müssen für jedes Element erfüllt sein. Störend für den Aufbau von Systemgleichungen ist das Vorhandensein der hydrostatischen Spannung s in (69). Wenn für diesen Spannungsverlauf ein Ansatz für das Element gemacht wird, so kann mit den dann erhaltenen Gleichungen weitergearbeitet werden.

Es ist also ein Ansatz in den Ortskoordinaten x, y und z für die Verschiebungen (15) und ein weiterer für den Verlauf der hydrostatischen Spannung $s(x, y, z, t)$ im Element erforderlich. Finite Elemente dieser Art werden allgemein als hybride Elemente (hybrid model) bezeichnet. An dieser Stelle soll nur mit dem einfachsten Ansatz, nämlich mit ortskonstanter hydrostatischer Spannung im Element weitergearbeitet werden. Dann wird aus (69) :

Bewegungsgleichung:

$$\underline{M} \underline{P}_D \ddot{\underline{v}}(t) + \underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{v}(t) + \underline{a} \underline{P}_D s(t) = \underline{P}_D (\underline{\varepsilon}(t) + \underline{\varepsilon}_v(t) + \underline{\varepsilon}_\sigma(t)) \quad (70)$$

$$\underline{a} = \underline{G}^T \int_V \underline{h}_u(x, y, z) dV \quad (71)$$

Die Inkompressibilitätsbedingung (56) läßt sich nach einer Integration über das Elementvolumen auch mit (71) schreiben:

$$\underline{a}^T \cdot \underline{v}(t) = 0 \quad (72)$$

Faßt man die Unbekannten des Elements - die Knotenverschiebung $\underline{v}(t)$ und die hydrostatische Spannung $s(t)$ - zu einem Vektor zusammen, so lautet die Elementgleichung für inkompressibles Stoffverhalten:

$$\left| \begin{array}{c|c} \underline{M} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right| \underline{P}_D \left| \begin{array}{c} \ddot{\underline{v}} \\ \hline s \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c} \underline{K}_1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right| \underline{Q}_D \left| \begin{array}{c} \underline{v} \\ \hline s \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{a} \\ \hline \underline{a}^T & \underline{0} \end{array} \right| \underline{P}_D \left| \begin{array}{c} \underline{v} \\ \hline s \end{array} \right| = \underline{P}_D \left| \begin{array}{c} \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}_v + \underline{\varepsilon}_\sigma \\ \hline \underline{0} \end{array} \right| \quad (73)$$

Diese Matrizendifferentialgleichung des Elementes kann wie auch die allgemeine Elementbewegungsgleichung (46) eines kompressiblen Stoffes mit demselben übersichtlichen Formalismus zum Aufbau der Gesamtsystemgleichung verwandt werden. Die hydrostatische Spannung ist hier ein Freiheitsgrad des Elementes.

3.2. Ableitung mit dem "Korrespondenzprinzip"

In der einschlägigen Fachliteratur über linear, viskoelastisches Stoffverhalten ist das **K o r r e s - p o n d e n z p r i n z i p** weit verbreitet [10,22].

FLÜGGE formuliert dieses Prinzip folgendermaßen:

"Wenn die Lösung eines elastischen Problems bekannt ist, dann kann die LAPLACE-Transformierte der Lösung des korrespondierenden viskoelastischen Problems gefunden werden, indem die elastischen Konstanten K und G durch die entsprechenden Quotienten der Operatorpolynome und die aktuelle Belastung durch ihre LAPLACE-Transformierte ersetzt werden".

READ [25] gibt eine Formulierung an, die die FOURIER-Transformation benutzt. Das Prinzip läßt sich aber auch ohne Integraltransformationen anwenden, dann sind anstelle der elastischen Konstanten K und G (Kompressions- und Gleitmodul) die zugeordneten Differentialoperatorformulierungen (11,13)

$$3K \rightarrow \frac{Q_H}{P_H} \quad (74)$$

$$2G \rightarrow \frac{Q_D}{P_D} \quad (75)$$

zu benutzen.

Für Differentialoperatoren ist keine Division definiert. Man kann aber formal mit den Beziehungen (74) und (75) rechnen, wenn man zum Schluß Gleichungen erhält, in denen keine Differentialoperatoren im Nenner stehen, d.h. durch Multiplikation mit den im Nenner stehenden Differentialoperatoren werden diese "gekürzt".

Häufig sind in der einschlägigen Literatur der elastischen Kontinuumsmechanik die Probleme aber in den Konstanten E (Elastizitätsmodul) und ν (Querdehnung) definiert. Mit den bekannten Umrechnungen :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{9KG}{3K+G} \\ \nu &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3K-2G}{3K+G} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ist immer eine Umformulierung auf den Kompressionsmodul K und den Gleitmodul G möglich.

Für das dreidimensionale Kontinuum lautet das konstitutive Gesetz (elastisch, isotrop)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E \cdot (1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \text{sym.} & & & & & \\ 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (77)$$

Mit den Beziehungen (76) folgt nach einigen Zwischenrechnungen das konstitutive elastische Gesetz mit K und G :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(2G \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{sym} & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\underline{\epsilon}} \quad (78)$$

Wird auf diese Gleichung das Korrespondenzprinzip für die Differentialoperatorform angewandt - also

$$3K \quad \text{durch} \quad \frac{Q_H}{P_H}$$

und

$$2G \quad \text{durch} \quad \frac{Q_D}{P_D}$$

ersetzt - und anschließend mit dem Operator $P_D P_H$ multipliziert, so folgt:

$$P_D P_H \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{E}}_1 Q_D P_H + \underline{\underline{E}}_2 Q_H P_D) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (79)$$

Die Matrizen \underline{E}_1 und \underline{E}_2 sind in (43) und (44) angegeben. Die innere virtuelle Arbeit eines Elements ist dann nach (35)

$$W_{i(t)}^* = \underline{v}^{*T} \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y,z)} \underline{X} \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,z,t)} dV. \quad (80)$$

(80) ist nun mit den Differentialoperatoren $\underline{P}_D \cdot \underline{P}_H$ zu multiplizieren, und das Stoffgesetz (79) ist einzusetzen.

Mit (47) und (48) erhält man:

$$\underline{P}_D \underline{P}_H W_{i(t)}^* = \underline{v}^{*T} \cdot (\underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{v}_{(t)} + \underline{K}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{v}_{(t)}) \quad (81)$$

Diese Beziehung ist aber - bis auf die dort schon eliminierte virtuelle Verschiebung \underline{v}^{*T} - mit der rechten Seite von (45) identisch, so daß hier gezeigt ist, daß das Korrespondenzprinzip zu gleichen finiten Elementbeziehungen führt, wie die direkte Verwendung der Differentialoperatoren. In vielen Fällen ist die Verwendung des Korrespondenzprinzips sinnvoll, weil die elastischen Lösungen meist aus der Literatur bekannt sind.

3.3. Ebener Verzerrungszustand

3.3.1. Allgemeiner Fall

Ist in einem Kontinuum die Verschiebung in einer Koordinatenrichtung an jeder Stelle identisch Null und ändern sich die restlichen Verschiebungen in dieser Richtung nicht, so verschwinden einige Verzerrungs- und Spannungsgrößen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll hier die Verschiebung W in z -Richtung Null sein:

$$\epsilon_{iz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0 \quad (82)$$

Bei isotropem Stoffverhalten gilt ebenfalls:

$$\tilde{\sigma}_{iz} = \tilde{\sigma}_{zy} = 0 \quad (83)$$

Soll ein ebener Verzerrungszustand mit der Finiten Element Methode gelöst werden, so könnte grundsätzlich von den in Kapitel 3.1. beschriebenen Formeln für das dreidimensionale Kontinuum ausgegangen werden. Einfacher und ökonomischer ist es allerdings einen ähnlichen Formelapparat wie dort abzuleiten, der aber schon die Gleichungen (82) und (83) enthält. Die Größen, die ohnehin immer Null sind, können gleich weggelassen werden. Dadurch reduziert sich die Größe der Matrizen und Vektoren, die an dieser Stelle angegeben werden sollen. Die Ableitung ist schematisch die gleiche, wie beim dreidimensionalen Kontinuum. Für die jetzt benötigten Matrizen und Vektoren sind deshalb dieselben Bezeichnungen wie vorher gewählt worden! Als Elementbeziehung wird auch hier das einfachste Element, das CST (constant strain triangle), gewählt. Es ist kinematisch kompatibel. Die Verzerrungen werden im Element konstant approximiert. Der Verschiebungsansatz ist linear.

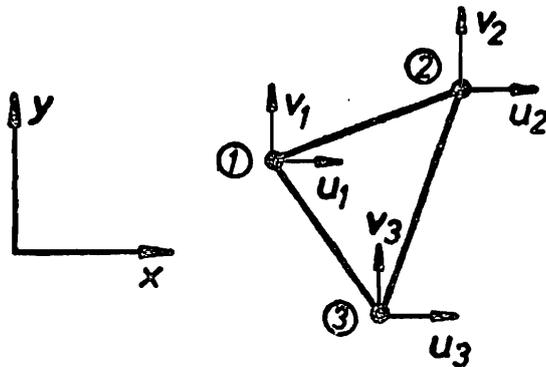


Bild 5: Dreieckselement
CST

Verschiebungsvektor:
$$\underline{u}_{(x,y,t)}^T = | u \quad v | \quad (84)$$

Ansatzfunktionsmatrix:
$$\underline{\phi}_u(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (85)$$

Parametervektor: $\underline{\hat{u}}^T = |\hat{u}_1 \dots \hat{u}_6|$ (86)

$$\underline{\Phi} = \begin{vmatrix} \underline{\phi}_u(x_1, y_1) \\ \underline{\phi}_u(x_2, y_2) \\ \underline{\phi}_u(x_3, y_3) \end{vmatrix} \quad (87)$$

$$\underline{G} = \underline{\Phi}^{-1} \quad (88)$$

Differentialoperatormatrix: $\underline{D} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (89)
 (Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen)

$$\underline{D} \underline{\phi}_u(x, y) = \underline{H}_u(x, y) \begin{matrix} \star \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (90)$$

Transformationsmatrizen:

$$\underline{Y} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \underline{Y}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (91)$$

Diagonalmatrizen:

$$\left. \begin{aligned} \underline{X} &= \text{diag} [2 \ 1 \ 1 \ 1] \\ \underline{Q}_1 &= \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 0] \\ \underline{Q}_2 &= \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

* siehe Seite 25 .

Knotenverschiebungsvektor: $\underline{v}(t) = |u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3|$ (93)

Knotenkraftvektoren: $\underline{s}(t) = |s_{x_1} \ s_{y_1} \ s_{x_2} \ s_{y_2} \ s_{x_3} \ s_{y_3}|$

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_v(t) &= \underline{G}^T \int_V \underline{\phi}_{u(x,y)}^T \cdot \underline{p}_v(x,y,t) \, dV \\ \underline{s}_o(t) &= \underline{G}^T \int_V \underline{\phi}_u^T(x,y) \cdot \underline{p}_o(x,y,t) \, dV \end{aligned} \right\} (94)$$

Verzerrungsvektoren: $\underline{\tilde{\epsilon}}(x,y,t) = | \epsilon_{xy} \ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ 0 |$

$$\left. \begin{aligned} \underline{\epsilon}(x,y,t) &= | \epsilon_{xy} \ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} | \epsilon \\ \underline{\epsilon}(x,y,t) &= \left| \begin{array}{c} \underline{\epsilon}_o \\ \dots \\ \epsilon \end{array} \right| \end{aligned} \right\} (95)$$

Spannungsvektoren: $\underline{\tilde{\sigma}}(x,y,t) = | \sigma_{xy} \ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} |$

$$\left. \begin{aligned} \underline{\sigma}(x,y,t) &= | \sigma_{xy} \ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ s | \\ \underline{\sigma}(x,y,t) &= \left| \begin{array}{c} \underline{\sigma}_o \\ \dots \\ s \end{array} \right| \end{aligned} \right\} (96)$$

Elementgleichungen:

Verschiebung: $\underline{u}(x,y,t) = \underline{\phi}_u(x,y) \underline{G} \underline{v}(t)$ (97)

Verzerrungen: $\underline{\epsilon}(x,y,t) = \underline{Y} \underline{Q}_1 \underline{\tilde{\epsilon}}(x,y,t)$ (98)

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(x,y,t) = \underline{Q}_1 \underline{Y}^{-1} \underline{\epsilon}(x,y,t) \quad (99)$$

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(x,y,t) = \underline{D} \underline{u}(x,y,t) = \underline{H}_u(x,y) \underline{G} \underline{v}(t) \quad (100)$$

Spannungen:

$$\underline{\sigma}(x,y,t) = \underline{Y} \underline{\tilde{\sigma}}(x,y,t) \quad (101)$$

$$\underline{\tilde{\sigma}}(x,y,t) = \underline{Y}^{-1} \underline{\sigma}(x,y,t) \quad (102)$$

Konstitutives Gesetz: $\underline{P}_D \underline{\epsilon}_D = \underline{Q}_D \underline{\epsilon}_D$ (103)

$$\underline{P}_H s = \underline{Q}_H e \quad (104)$$

$$\underline{P}_D \underline{P}_H \underline{\epsilon}_{(x,y,t)} = \underline{P}_D \underline{P}_H \left| \frac{\underline{\epsilon}_D}{s} \right| = \underline{Q}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{\epsilon}_{(x,y,t)} + \underline{Q}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{\epsilon}_{(x,y,t)} \quad (105)$$

virtuelle innere Arbeit:

$$W_i^*(t) = \int_V \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y)}^{*T} \underline{X} \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,t)} dV \quad (106)$$

virtuelle äußere Arbeit:

$$W_a^*(t) = \underline{v}_{(t)}^{*T} (\underline{z}_{(t)} + \underline{z}_V(t) + \underline{z}_\sigma(t) - \underline{G}^T \int_V \rho_{(x,y)} \underline{\phi}_{u(x,y)}^T \underline{\phi}_{u(x,y)} dV \underline{G} \underline{\ddot{v}}_{(t)}) \quad (107)$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$W_i^*(t) = W_a^*(t) \quad (108)$$

Bewegungsgleichung des Elements:

$$\underline{M} \underline{P}_D \underline{P}_H \underline{\ddot{v}}_{(t)} + \underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{v}_{(t)} + \underline{K}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{v}_{(t)} = \underline{P}_D \underline{P}_H (\underline{z}_{(t)} + \underline{z}_V(t) + \underline{z}_\sigma(t))$$

Massenmatrix:

$$\underline{M} = \underline{G}^T \int_V \rho_{(x,y)} \underline{\phi}_{u(x,y)}^T \underline{\phi}_{u(x,y)} dV \underline{G} \quad (110)$$

Steifigkeitsmatrizen:

$$\underline{K}_1 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y)}^T \underline{E}_1 \underline{H}_{u(x,y)} dV \underline{G} \quad (111)$$

$$\underline{K}_2 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_{u(x,y)}^T \underline{E}_2 \underline{H}_{u(x,y)} dV \underline{G} \quad (112)$$

$$\underline{E}_1 = \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_1 \underline{Y} \underline{Q}_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \underline{E}_2 = \underline{X} \underline{Y}^{-1} \underline{Q}_2 \underline{Y} \underline{Q}_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (113)$$

3.3.2. Inkompressibles Stoffverhalten

Wie auch schon im vorigen Kapitel wird hier für den ebenen Verzerrungszustand nur eine kurze Formelaufstellung wiedergegeben. Die grundsätzliche Ableitung ist wie in Kapitel 3.1.2.

Die hier benutzten Matrizen sind im vorigen Kapitel größtenteils definiert worden. Es werden noch die Vektoren

$$\underline{e}^T = |0 \ 1 \ 1 \ 1| \quad (114)$$

$$\underline{h}_{u(x,y)}^T = |0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1| = \underline{e}^T \underline{H}_u(x,y) \quad (115)$$

$$\underline{a} = \underline{G}^T \int_V \underline{h}_{u(x,y)}^T dV \quad (116)$$

benötigt.

Elementgleichung:

$$\begin{bmatrix} \frac{M}{0} & \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} & \frac{0}{0} \end{bmatrix} \underline{P}_D \begin{bmatrix} \overset{\circ}{v} \\ \overset{\circ}{s} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \frac{K_1}{0} & \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} & \frac{0}{0} \end{bmatrix} \underline{Q}_D \begin{bmatrix} \frac{v}{s} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{a^T} \\ \frac{a^T}{0} & 0 \end{bmatrix} \underline{P}_D \begin{bmatrix} \frac{v}{s} \end{bmatrix}_{(t)} = \underline{P}_D \begin{bmatrix} 3+3v+3\sigma \\ 0 \end{bmatrix}_{(t)} \quad (117)$$

3.4. Ebener Spannungszustand

Treten in einem Kontinuum nur Spannungen in einer Ebene auf, so spricht man von einem ebenen Spannungszustand. Es lassen sich auch in diesem Fall gewisse Vereinfachungen - ähnlich wie beim ebenen Verzerrungszustand - gegenüber der dreidimensionalen Lösung einführen. Liegt der ebene Spannungszustand in der x-y-Ebene eines kartesischen Koordinatensystem, so gilt:

$$\sigma_{z\bar{z}} = \sigma_{x\bar{z}} = \sigma_{y\bar{z}} = 0 \quad (118)$$

und bei isotropem Stoffverhalten:

$$\epsilon_{x\bar{z}} = \epsilon_{y\bar{z}} = 0 \quad (119)$$

Auch an dieser Stelle werden die Matrizen und Vektoren für die FEM nur kurz in der Art einer Formelsammlung wiedergegeben. Auf eine längere Ableitung dieser Formeln wird aus Platzgründen verzichtet. Als Element wird auch für diese Zusammenstellung wieder das CST (siehe Bild 5) gewählt.

Die Formeln (84) bis (88) des ebenen Verzerrungszustandes gelten auch hier, ebenso die Transformationsmatrizen (91), die Knotenkraftvektoren und der Knotenverschiebungsvektor (94). Als unterschiedliche Matrizen und Vektoren muß hier noch definiert werden:

Differentialoperatorenmatrix:

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (120)$$

$$\underline{H}_u(x,y) = \underline{D} \underline{\phi}_u(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (121)$$

Diagonalmatrizen:

$$\left. \begin{aligned} \underline{X} &= \text{diag} [2 \quad 1 \quad 1] \\ \underline{Q}_1 &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \\ \underline{Q}_2 &= \text{diag} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Verzerrungsvektoren:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,t)}^T &= | \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} | \\ \underline{\epsilon}_{(x,y,t)}^T &= | \epsilon_{xy} \quad e_{xx} \quad e_{yy} | e \\ \underline{\epsilon}_{(x,y,t)} &= \left| \frac{\underline{\epsilon}_D}{e} \right| \\ \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,t)}^T &= | \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} | \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Spannungsvektoren:

$$\underline{\underline{\sigma}}^T(x, y, t) = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^T(x, y, t) = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} & s_{xx} & s_{yy} & s \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, t) = \begin{vmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_D \\ \underline{\underline{s}} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, t) = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$$

(124)

Elementgleichungen:

Verschiebungen:

$$\underline{u}(x, y, t) = \underline{\phi}_u(x, y) \underline{G} \underline{v}(t) \quad (125)$$

Verzerrungen:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x, y, t) = \underline{Y} \underline{\tilde{\epsilon}}(x, y, t) \quad (126)$$

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(x, y, t) = \underline{Y}^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}(x, y, t) \quad (127)$$

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(x, y, t) = \underline{H}_u(x, y) \underline{G} \underline{v}(t) \quad (128)$$

Spannungen:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, t) = \underline{Y} \underline{Q}_1 \underline{\tilde{\sigma}}(x, y, t) \quad (129)$$

$$\underline{\tilde{\sigma}}(x, y, t) = \underline{Q}_1 \underline{Y}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}(x, y, t) \quad (130)$$

konstitutives Gesetz:

$$\underline{P}_D \underline{\sigma}_D = \underline{Q}_D \underline{\epsilon}_D$$

$$\underline{P}_H \underline{s} = \underline{Q}_H \underline{e}$$

(131)

$$\begin{vmatrix} \underline{P}_D & & & \\ & \underline{P}_D & & \\ & & \underline{P}_D & \\ & & & \underline{P}_H \end{vmatrix} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(x, y, t) = \begin{vmatrix} \underline{Q}_D & & & \\ & \underline{Q}_D & & \\ & & \underline{Q}_D & \\ & & & \underline{Q}_H \end{vmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}(x, y, t) \quad (132)$$

$$\begin{vmatrix} P_D & & & \\ & P_D & & \\ & & 0 & \\ & & & P_D \\ & & & & P_H \end{vmatrix} \cdot \underline{Y} \underline{Q}_1 \tilde{\sigma}_{(x,y,t)} = \begin{vmatrix} Q_D & & & \\ & Q_D & & \\ & & 0 & \\ & & & Q_D \\ & & & & Q_H \end{vmatrix} \underline{Y} \tilde{\epsilon}_{(x,y,t)} \quad (133)$$

Die letzte Zeile der Matrizengleichung (133) lautet:

$$P_H \cdot \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = Q_H \frac{1}{3} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$$

Oder nach ϵ_{zz} aufgelöst:

$$Q_H \epsilon_{zz} = P_H (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - Q_H (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (134)$$

Aus (133) wird nun die letzte Zeile eliminiert. Ausgeschrieben ergibt sich sodann:

$$P_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{vmatrix} = Q_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{vmatrix} + Q_D \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \epsilon_{zz} \quad (135)$$

Nach einer Multiplikation von (135) mit dem Differentialoperator Q_H kann (134) in (135) eingesetzt werden:

$$Q_H P_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{vmatrix} = Q_H Q_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{vmatrix} + Q_D P_H \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{vmatrix} + Q_H Q_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{vmatrix} \quad (136)$$

$$\left(Q_H P_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + Q_D P_H \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right) \tilde{\sigma}_{(x,y,t)} = Q_H Q_D \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} \tilde{\epsilon}_{(x,y,t)} \quad (137)$$

Wird die zweite Zeile von (133) zur dritten addiert und anschließend diese dritte mit -1 multipliziert, so folgt:

$$\left(\mathbf{Q}_H \mathbf{P}_D \left| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right| + \mathbf{Q}_D \mathbf{P}_H \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \right) \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,t)} = 3 \mathbf{Q}_H \mathbf{Q}_D \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,t)} \quad (138)$$

Für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten benötigt man eine konstitutive Beziehung wie (138), bei der aber der Spannungsvektor $\underline{\tilde{\sigma}}$ auf einer Seite allein steht. Nach einigen Umrechnungen kann (138) dann zu

$$\mathbf{P}_D (\mathbf{P}_D \mathbf{Q}_H + 2 \mathbf{Q}_D \mathbf{P}_H) \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,t)} = \left(\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \mathbf{P}_D \mathbf{Q}_H + \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right| \mathbf{Q}_D \mathbf{P}_H \right) \mathbf{Q}_D \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,t)} \quad (139)$$

geschrieben werden. Diese Matrizendifferentialgleichung (139) ist die konstitutive Gleichung für den ebenen Spannungszustand.

virtuelle innere Arbeit:

$$W_i^*(t) = \int_V \underline{\tilde{\epsilon}}_{(x,y,t)}^{*T} \underline{\tilde{\sigma}}_{(x,y,t)} dV \quad (140)$$

virtuelle äußere Arbeit: (inkl. Trägheitsterme usw.)

$$W_a^*(t) = \underline{v}_{(t)}^{*T} \cdot \left(\underline{s}_{(t)} + \underline{s}_v(t) + \underline{s}_o(t) - M \underline{\ddot{v}}_{(t)} \right) \quad (141)$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$W_i^*(t) = W_a^*(t)$$

Bewegungsgleichung des Elements:

$$\underline{M} \underline{P} \underline{L} \ddot{\underline{v}}_{(t)} + \underline{K}_1 \underline{Q} \underline{1} \underline{v}_{(t)} + \underline{K}_2 \underline{Q} \underline{2} \underline{v}_{(t)} = \underline{P} \underline{L} \cdot (\underline{\varepsilon}_{(t)} + \underline{\varepsilon}_{v(t)} + \underline{\varepsilon}_{\sigma(t)}) \quad (142)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{P} \underline{L} &= \underline{P}_D (\underline{P}_D \underline{Q}_H + 2 \underline{Q}_D \underline{P}_H) \\ \underline{Q} \underline{1} &= \underline{Q}_D^2 \underline{P}_H \\ \underline{Q} \underline{2} &= \underline{Q}_D \underline{Q}_H \underline{P}_D \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

$$\underline{K}_1 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underline{H}_u(x,y) dV \underline{G} \quad (144)$$

$$\underline{K}_2 = \underline{G}^T \int_V \underline{H}_u^T(x,y) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underline{H}_u(x,y) dV \underline{G} \quad (145)$$

Abschließend noch einige Anmerkungen zum ebenen Spannungszustand: Die zuletzt angeführten Gleichungen sind für das Weggrößenverfahren aufbereitet worden, d.h., die direkten Unbekannten $\underline{v}_{(t)}$ in der Bewegungsgleichung (142) sind Weggrößen. Der ebene Spannungszustand ist aber durch die Vorgabe einer Spannungsgröße, nämlich $\sigma_{zz} = 0$, definiert. In den Gleichungen wurde diese Spannungsgröße und die zugeordnete Verzerrungsgröße $\varepsilon_{zz} \neq 0$ eliminiert. Die Gleichungen, besonders die Matrizenbewegungsgleichung (142), sind von hoher Ordnung. Sie sind komplizierter, als die entsprechenden Gleichungen des ebenen Verzerrungszustandes. Aus diesem Grund vermutet der Verfasser, daß nun umgekehrt beim Kraftgrößenverfahren - die direkten Unbekannten sind Kraftgrößen - der ebene Verzerrungszustand gegenüber dem ebenen Spannungszustand sich durch komplizierte Gleichungen darstellt, und der ebene Spannungszustand sich durch einfachere Bewegungsgleichungen auszeichnet.

Der Vermutung wurde nicht weiter nachgegangen.

Die Verzerrung ϵ_{zz} wurde aus den Gleichungen eliminiert. Zur Bestimmung dieser Größe kann von Gleichung (134) ausgegangen werden. Dazu müssen zuerst die Normalverzerrungen ϵ_{xx} und ϵ_{yy} und die Normalspannungen σ_{xx} und σ_{yy} bestimmt werden (siehe auch Kapitel 7 !).

4. Aufstellen der Matrizenbewegungsgleichung für das Gesamtsystem

In den vorigen Kapiteln wurden für ein Finites Element die Elementbeziehungen hergeleitet. Für ein in Finite Elemente zerlegtes Tragwerk gelten dann für jedes dieser Elemente Bewegungsgleichungen wie z.B. (46). Diese Gleichungen enthalten innerhalb der Elemente die Verträglichkeitsbedingungen, das Werkstoffgesetz und das sogenannte integrale Gleichgewicht für die gewählten Ansatzfunktionen.

Im Gesamttragwerk ist auch an der Grenze zwischen den Elementen das Erfülltsein dieser Bedingungen zu fordern. Hier muß also noch die Verträglichkeit oder Kompatibilität und das Gleichgewicht berücksichtigt werden. Bei der Formulierung der FE-Beziehung wurden alle kinematischen Größen (z.B. Verschiebungen, Verzerrungen) durch die Knotenpunktverschiebungen ausgedrückt. Wenn also an den Knotenpunkten zwischen mehreren Elementen Kompatibilität herrscht, so hängt es von den Ansatzfunktionen in den einzelnen Elementen ab, ob auch an jeder Berührungsstelle zwischen den Elementen Kompatibilität in allen kinematischen Größen herrscht. Über diesen Problemkreis ist schon in vielen Arbeiten, welche sich mit statischen Finiten Elementen beschäftigten, geschrieben worden. Sinngemäß gelten diese Ausführungen auch hier. Die Bewegungsgleichungen des Finiten Elementes geben einen Zusammenhang in Form einer Matrizendifferentialgleichung

zwischen den Knotenverschiebungen \underline{v} und den Knotenkräften \underline{s} an. Aus diesen Gründen genügt es, nur an den Knoten die kinematischen und dynamischen Verträglichkeitsbedingungen zu erfüllen. Für ein einfaches Beispiel soll das Vorgehen hier demonstriert werden. Die in Bild 6 dargestellten zwei ebenen Finiten Elemente und eine Feder sind zu einem Gesamttragwerk zusammenzufügen. Das Stoffverhalten der dreieckigen Elemente sei linear viskos. Die Feder ist elastisch. Die Bewegungsgleichung der Finiten Elemente kann als lineare Matrizendifferentialgleichung (51) geschrieben werden. Der Einfachheit halber werden die Volumen- und Knotenkräfte zu einem Kraftvektor zusammengefaßt:

$$\underline{s}_v(t) + \underline{s}_\sigma(t) = \underline{s}_a(t) \quad (146)$$

Elementbewegungsgleichungen:

$$\text{Element } \textcircled{1} \quad \sum_{i=0}^n \underset{\textcircled{1}}{A}_i \underset{\textcircled{1}}{v}^{(i)}(t) = \underset{\textcircled{1}}{PL} \cdot \left(\underset{\textcircled{1}}{s}(t) + \underset{\textcircled{1}}{s}_a(t) \right) \quad (147)$$

$$\text{Element } \textcircled{2} \quad \sum_{i=0}^n \underset{\textcircled{2}}{A}_i \underset{\textcircled{2}}{v}^{(i)}(t) = \underset{\textcircled{2}}{PL} \cdot \left(\underset{\textcircled{2}}{s}(t) + \underset{\textcircled{2}}{s}_a(t) \right) \quad (148)$$

$$\text{Feder} \quad k v_F(t) = s_F(t) \quad (149)$$

Die lokalen Knotenverschiebungen des Elementes sind mit v , die lokalen Knotenkräfte mit s bezeichnet. Für das Gesamttragwerk sind die globalen Knotenverschiebungen mit X und die globalen Knotenkräfte mit f bezeichnet. Für jede Knoten müssen die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein. Zum Beispiel für den Knoten 3 in horizontaler Richtung:

kinematische Verträglichkeit:

$$\underset{\textcircled{1}}{v}_5(t) = \underset{\textcircled{2}}{v}_6(t) = v_{F(i)} = X_5(t) \quad (150)$$

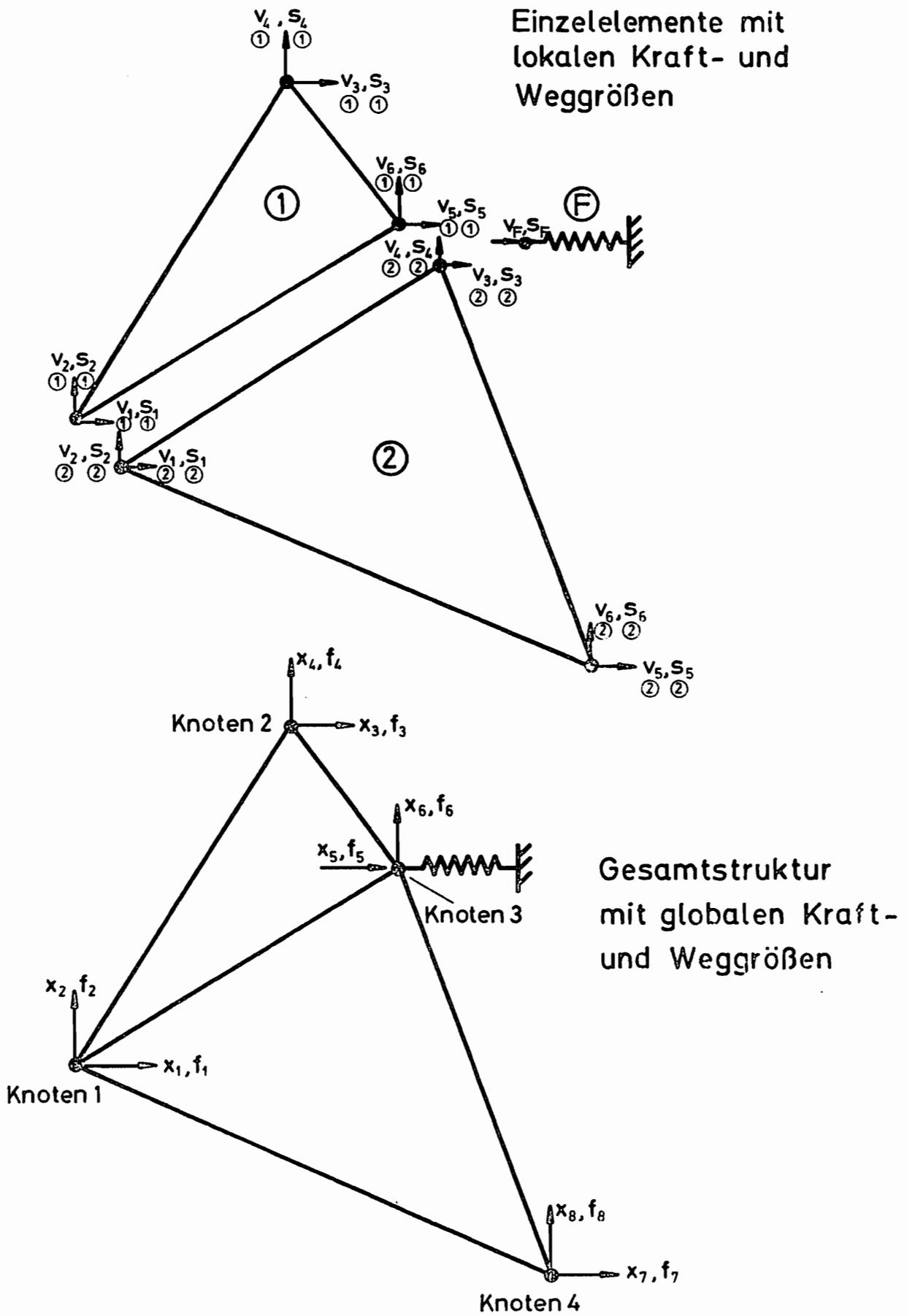


Bild 6

dynamische Verträglichkeit (Gleichgewicht):

$$\underset{\textcircled{1}}{s_5(t)} + \underset{\textcircled{2}}{s_6(t)} + s_F(t) = f_5(t) = \underset{\textcircled{1}}{s_{a5}(t)} + \underset{\textcircled{2}}{s_{a6}(t)} \quad (151)$$

Entsprechende Gleichungen müssen für alle Freiheitsgrade des Systems erfüllt sein. Leitet man (150) und (151) nach der Zeit ab, so folgt:

$$\underset{\textcircled{1}}{\overset{(i)}{V_5(t)}} = \underset{\textcircled{2}}{\overset{(i)}{V_6(t)}} = \overset{(i)}{V_F(t)} = \overset{(i)}{X_5(t)} \quad (152)$$

$$\underset{\textcircled{1}}{\overset{(i)}{s_5(t)}} + \underset{\textcircled{2}}{\overset{(i)}{s_6(t)}} + \overset{(i)}{s_F(t)} = \overset{(i)}{f_5(t)} \quad (153)$$

Mit den dynamischen Verträglichkeitsgleichungen (151) und (153) gilt für den Differentialoperator PL aus (147)

$$PL f_5(t) = PL \left(\underset{\textcircled{1}}{s_5(t)} + \underset{\textcircled{2}}{s_6(t)} + s_F(t) \right) \quad (154)$$

Entsprechende Gleichungen wie (154) gelten natürlich auch für sämtliche globale Freiheitsgrade. Im speziellen Beispiel von Bild 6 lassen sich so 8 Gleichungen angeben. Werden in diese 8 Gleichungen die Elementbewegungsgleichungen (147) bis (149) eingesetzt, und die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen (150), (152) beachtet, so folgt die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems:

$$\sum_{i=0}^n \underline{A}_{i_{ges}} \overset{(i)}{X}(t) = PL \underline{f}(t) \quad (155)$$

$$\sum_{i=0}^n \begin{matrix} \text{Matrix grid with diagonal hatching and some zero entries} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{Vector } \underline{x}^{(i)} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Vector } \underline{f}^{(i)} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{matrix} \quad PL \quad (156)$$

$+k \cdot p_{Li}$

Die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ist eine lineare Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen. Im Sonderfall rein elastischen Verhaltens entfallen die Zeitableitungen, und es verbleibt das bekannte lineare Gleichungssystem.

Auf der rechten Seite von (156) steht der globale Knotenkraftvektor $\underline{f}^{(t)}$ auf den der Operator PL anzuwenden ist. Die linke Seite besteht aus quadratischen Matrizen welche mit dem globalen Knotenverschiebungsvektor $\underline{x}^{(t)}$, bzw. dessen Zeitableitungen, multipliziert werden. Es fällt auf, daß alle benötigten Matrizen $A_{i_{ges}}$ in gleicher Weise zusammengesetzt sind. Und zwar sind die einzelnen Elementmatrizen in die Gesamtmatrizen hineinaddiert worden. Überlappungsbereich in (156) deuten ein zuaddieren der Elementmatrizen an. Diese Erzeugung der einzelnen Matrizen des Gesamtsystems ist aus der herkömmlichen FEM-Literatur unter dem Namen "Direct Stiffness Method" bekannt. Allerdings wurde diese Methode - wie schon der Name andeutet - zur Aufstellung der statischen Gesamtsteifigkeitsmatrix benutzt.

Es ist bekannt, daß sie auch zum Zusammenbau der Massenmatrix genommen werden kann.

Durch die oben stehende Ableitung ist gezeigt worden, daß sich alle Matrizen der Bewegungsgleichung des Gesamtsystems für linear, viskoses Stoffverhalten durch die "Direct Stiffness Method" erzeugen lassen. Diese Tatsache bringt rechen-technisch enorme Vorteile, da mit einem Algorithmus alle Matrizen $A_{i ges}$ in einem Rechenprogramm aufgestellt werden.

Einige herkömmliche FEM-Programme benutzen zum Aufstellen von Gesamtsteifigkeitsmatrizen das sogenannte Standardverfahren mit den bekannten Inzidenzmatrizen [17]. Natürlich kann dieses Verfahren auch zum Erzeugen der Matrizen von (156) dienen. Der Verfasser benutzt für seine Programme einen Algorithmus zum Aufstellen der Gesamtmatrizen, welcher koeffizientenweise arbeitet. Dieser Algorithmus wurde dem Programmsystem MESY entnommen. Auf Einzelheiten wird hier nicht weiter eingegangen, sondern es sei auf [29] verwiesen.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

"Die Bewegungsgleichung eines durch Finite Elemente approximierten linear viskosen Problems läßt sich als Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen darstellen. Diese Koeffizientenmatrizen können mit schon bekannten Verfahren erzeugt werden".

Für das spezielle Stoffverhalten (siehe auch Seite 30):

hydrostatischer Zustand: $s = q_H e$

Deviatorzustand: $\sigma_D + \beta \dot{\sigma}_D = q_1 \dot{\epsilon}_D$

der beiden Elemente ① und ② in Bild 6 ist die Gesamtbewegungsgleichung in Bild 7 angegeben.

Elementbewegungsgleichungen:

Element ① : $\sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{1} \ddot{v}^{(i)}(t) = (1 + P_1 \frac{d}{dt}) (\frac{s}{1}(t) + \frac{s}{2} a(t))$

Element ② : $\sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{2} \ddot{v}^{(i)}(t) = (1 + P_1 \frac{d}{dt}) (\frac{s}{2}(t) + \frac{s}{2} a(t))$

Element ③ : $k \cdot v_F = s_F$

globale Vektoren:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_8 \end{pmatrix}$$

Knotenverschiebungs-
vektor

Knotenkraft-
vektor

Bewegungsgleichung der Gesamtstruktur:

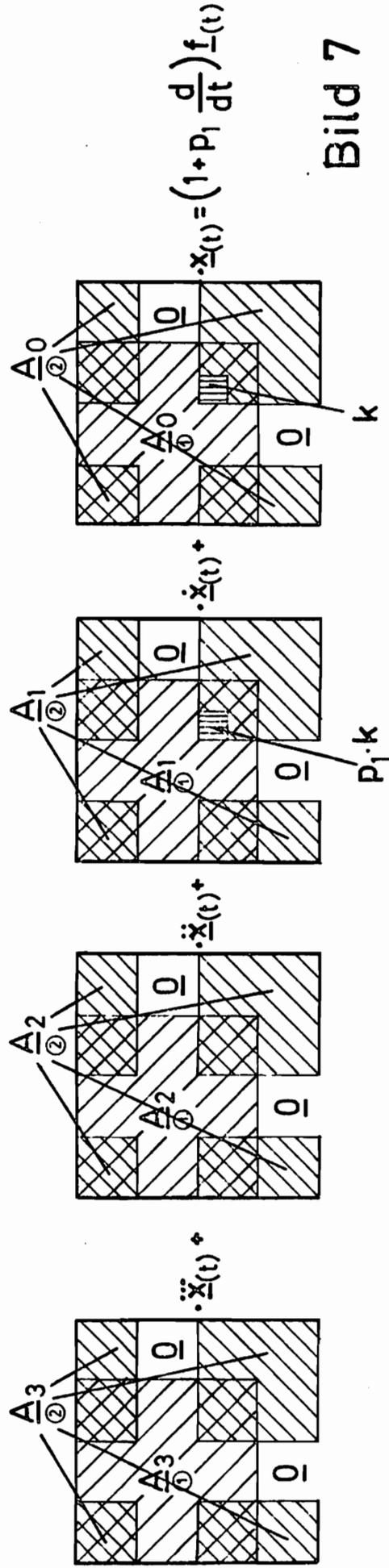


Bild 7

In den Bewegungsgleichungen für inkompressibles Verhalten, z.B. (73), stehen in den Vektoren der linken Seite auch Spannungsgrößen und nicht nur Weggrößen wie bislang. Der Lastvektor auf der rechten Seite enthält wie bisher Kraftgrößen und eine Null. Wählt man für das Gesamtsystem auch globale Kraftgrößen als Freiheitsgrade, z.B. für jedes Element die hydrostatische Spannung $s_{(t)}$, so gelten auch für diese Freiheitsgrade formal dieselben Verträglichkeitsbedingungen wie zuvor. Für den Freiheitsgrad $s_{(t)}$ in (73) sei dies hier kurz vorgeführt:

analog zur kinematischen Verträglichkeit:

$$\underbrace{s_{(t)}}_{\text{Elementkoordinate}} = \underbrace{x_r(t)}_{\text{globale Koordinate}} \quad (157)$$

analog zur dynamischen Verträglichkeit:

$$\underbrace{0}_{\text{Komponente im lokalen Lastvektor}} = \underbrace{0}_{\text{Komponente im globalen Lastvektor}} \quad (158)$$

Da die entsprechenden Gleichungen auch hier formal mit den kinematischen und dynamischen Verträglichkeitsbedingungen des Weggrößenverfahrens übereinstimmen, können die Matrizen des Gesamtsystems natürlich auch mit den gleichen Verfahren - z.B. der "Direct Stiffness Method" - wie zuvor bestimmt werden.

4.1 Berücksichtigung der Randbedingungen in den Ortskoordinaten

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Berechnung eines linear visko-elastischen Problems setzt voraus, daß die kontinuumsmechanischen Gleichungen in den Ortskoordinaten durch FE algebraisiert werden.

Das Einbauen der Randbedingungen bei herkömmlichen FEM ist bekannt und soll hier nicht weiter angegeben werden. Die Gesamtbewegungsgleichung enthält hier auch Zeitableitungen des Weggrößenvektors. Ist z.B. an einer Stelle die homogene Randbedingung:

$$X_{(t)} = 0 \quad (159)$$

vorgeschrieben, so gilt auch :

$$X_{(t)}^{(i)} = 0 \quad (160)$$

Daraus folgt, daß die homogenen Randbedingung in allen Matrizen der Gesamtbewegungsgleichung in gleicher Weise wie in die Steifigkeitsmatrix bei einer statischen Rechnung eingebaut werden können.

Bei der Vorgabe inhomogener Randbedingungen für Weggrößenverfahren empfiehlt es sich die vorgeschriebenen Randbedingungen zuerst als frei zu betrachten und auch entsprechende Freiheitsgrade einzuführen. Im sechsten Kapitel ist das weitere Vorgehen aufgezeigt.

5. Anmerkungen zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Weg zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen für ein durch FE in den Ortskoordinaten diskretisiertes Kontinuum mit isotrop, linear, viskosem Stoffverhalten bei kleinen Verzerrungen hat die folgenden Vorteile:

1. Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems sind keine Vereinfachungen der Stoffgesetze erforderlich. Insbesondere sind keine inkrementellen Formulierungen für diese verwendet worden.

2. Elementweise verschiedenes Stoffverhalten kann berücksichtigt werden.
3. Die Methode eignet sich für beliebige, linear viskose Stoffgesetze welche in der Form (11) und (13) darstellbar sind. Inkompressibles Stoffverhalten ist erfaßbar.
4. Es lassen sich beliebige FE mit Verschiebungsansätzen (compatible model) verwenden.
5. Mit der Methode lassen sich Kriech- und Schwingungsprobleme berechnen.
6. Die Gesamtbewegungsgleichung ist eine linear gewöhnliche Matrizen-differentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen. Diese Matrizen sind mit schon bekannten Verfahren der FEM und bestehenden Programmen aufstellbar (z.B. "Direct Stiffness Method").
7. Die Auswahl des Lösungsalgorithmus für die Gesamtbewegungsgleichung braucht erst nach Aufstellen dieser Gleichungen zu erfolgen und erlaubt so eine gute Anpassung an spezielle Eigenschaften und Problemklassen von Lösungen. Außerdem werden so Fehleruntersuchungen vereinfacht.

6. Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung der Gesamtstruktur hat die Form:

$$\sum_{i=0}^n \underline{A}_i \underline{X}_{(t)}^{(i)} = \underline{PL} \underline{f}_{(t)} \quad (161)$$

In diesem Gleichungssystem sind die Matrizen \underline{A}_i bekannt, ebenso soll ein Teil der Knotenverschiebungen $\underline{X}_{1(t)}$ als Funktionen der Zeit gegeben sein, die entsprechenden $\underline{f}_{2(t)}$ sind unbekannt. Die restlichen $\underline{f}_{1(t)}$ sollen bekannt sein, dann sind die zugehörigen $\underline{X}_{2(t)}$ unbekannt. Durch Ummummern der Komponenten im Verschiebungsvektor läßt es sich immer erreichen, daß die unbekanntes Verschiebungen an erster Stelle im Gesamtverschiebungsvektor $\underline{X}_{(t)}$ stehen und danach die gegebenen Verschiebungen.

Der Verschiebungsvektor wird also partitioniert.

$$\underline{x}(t) = \begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{vmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{vmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{vmatrix} \quad \underline{A}_i = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix}_i \quad (162)$$

Für (161) kann dann auch geschrieben werden:

$$\sum_{i=0}^n \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix}_i \cdot \begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{vmatrix}_i^{(i)} = PL \begin{vmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{vmatrix}_{(t)} \quad (163)$$

In Gleichung (163) sind $\underline{x}_1(t)$ und $\underline{f}_2(t)$ unbekannt und $\underline{x}_2(t)$ und $\underline{f}_1(t)$ bekannt. Der obere Teil von (163) lautet:

$$\sum_{i=0}^n \underline{A}_{11_i} \underline{x}_1(t)^{(i)} = PL \underline{f}_1(t) - \sum_{i=0}^n \underline{A}_{12_i} \underline{x}_2(t)^{(i)} = \underline{h}(t) \quad (164)$$

Der rechte Teil dieser Gleichung ist bekannt. Nach einem weiter unten angegebenen Verfahren kann (164) gelöst werden.

Durch Einsetzen des so bestimmten Vektors $\underline{x}_1(t)$ und dessen zeitlichen Ableitungen in den unteren Teil von (163) erhält man eine Differentialgleichung für den Kraftvektor $\underline{f}_2(t)$, welche dann noch zu lösen ist.

$$PL \underline{f}_2(t) = \sum_{i=0}^n \left(\underline{A}_{21_i} \underline{x}_1(t)^{(i)} + \underline{A}_{22_i} \underline{x}_2(t)^{(i)} \right) \quad (165)$$

6.1. Lösungsverfahren

Lineare Matrizendifferentialgleichungen der Form (161) bzw. (164) können durch folgende Verfahren numerisch gelöst werden:

1. Matrizenfunktionen
2. Numerische Integration
3. Finite Differenzen
4. Finite Zeitelemente (Raum-Zeit-Element)
5. Gewichtete Residuen
6. Integraltransformationen (LAPLACE, FOURIER)
7. Modale Analyse

Zu 1.:

Das Verfahren der Matrizenfunktionen ist z.B. in [31] ausführlich behandelt und wird hier nur kurz gestreift. Mit diesem Verfahren können die analytisch exakten Lösungen als Matrizenfunktionen angegeben werden. Aus ökonomischen Gründen wird die Lösung als Übertragungsverfahren geschrieben, um die rechenzeitintensive Bestimmung der Matrizenfunktionen nur einmal vornehmen zu müssen. Bei kommutativen Matrizen A_i lassen sich analytisch einfache Mehrstellenalgorithmen angeben, welche auch als "reduzierte Übertragungsverfahren" bekannt sind [31]. Eine Übersicht von Verfahren zur numerischen Bestimmung von Matrizenfunktionen ist auch in [14] zu finden.

Zu 2.:

Aus der Vielzahl der numerischen Integrationsverfahren sei hier nur das bekannte RUNGE-KUTTA-Verfahren genannt. Von der reichhaltigen Literatur zu diesen Verfahren soll nur [13, 36] erwähnt werden. Mit numerischen Integrationsverfahren lassen sich auch nichtlineare Gleichungen lösen. Man unterscheidet Einschnitt- und Mehrschrittverfahren.

Zu 3.:

Werden die Differentialquotienten in der Matrizen-differentialgleichung durch Differenzenquotienten ersetzt, so läßt sich die Matrizendifferentialgleichung als algebraische Gleichung schreiben. Je nach Wahl von mittleren, hinteren oder vorderen Differenzensternen ergeben sich leicht unterschiedliche Algorithmen. Einige mögliche Algorithmen sind z.B. in [34] beschrieben.

Ein anderer Weg um ähnliche algebraische Gleichungen zu erhalten geht von einem Ansatz für die höchste vorkommende Ableitung der Unbekannten $X^{(n)}$ aus. Häufig wird ein linearer oder konstanter Verlauf der höchsten Ableitung in einem kleinen Zeitintervall gewählt. Auch hier erhält man lineare algebraische Gleichungen für einen kurzen Zeitschritt. Über diese Methode ist eine umfangreiche Literatur bekannt. Hier seien nur [8,9] angegeben.

Zu 4.:

Zeitelemente gehen von einem Ansatz für den Verlauf der Unbekannten in der Zeitkoordinate aus. Diese Ansätze enthalten als Parameter Werte der Unbekannten am Anfang und am Ende des betrachteten Zeitintervalls. Häufig werden deshalb HERMITE-Polynome als Ansätze gewählt. Mit der Finiten Element Methode und unter Benutzung des HAMILTON'schen Prinzips läßt sich so die zu lösende Matrizen-differentialgleichung algebraisieren. In [1,11] wird die Methode vorgestellt.

Zu 5.:

Bei der Methode der gewichteten Residuen werden für einen Zeitschritt die Parameter gewählter Ansatzfunktionen so bestimmt, daß der Fehler (Residuum) nach gewissen Kriterien möglichst gering ist. Ohne weiter auf dieses Verfahren einzugehen soll hier nur erwähnt werden, daß man je

nach Art dieses Kriteriums folgende Methoden unterscheidet:

Kollokationsmethode,
Unterbereichsmethode,
GALERKIN-Methode und
"kleinster quadratischer Fehler"-Methode.

Für weitere Einzelheiten sei auf [6] verwiesen.

Zu 6.:

Wird die zu lösende lineare Matrizendifferentialgleichung durch eine Integraltransformation nach FOURIER oder LAPLACE vom Zeitbereich in den Bildbereich transformiert, so ist im Bildbereich statt der Matrizendifferentialgleichung nur eine lineare Matrizengleichung zu lösen. Durch eine inverse Transformation wird die Lösung zurück in den Zeitbereich transformiert. Mit der "FAST FOURIER TRANSFORMATION" lassen sich die erforderlichen Transformationen in kurzer Rechenzeit numerisch ausführen. Einzelheiten für die FOURIER-Transformation können [19] und für die LAPLACE-Transformation [20] entnommen werden. Der Verfasser hat auf der Rechenanlage TR 440 der Ruhr-Universität Bochum ein Programm implementiert, welches diese Integraltransformationen ausführt [18].

Zu 7.:

Ist das zugehörige Eigenwertproblem der Matrizendifferentialgleichung gelöst und sind die Eigenwerte und -formen bestimmt, so kann die ursprüngliche Gleichung durch eine lineare Transformation auf die generalisierten Koordinaten der Eigenformen transformiert werden. Die Gleichungen sind dann entkoppelt. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es nur einen Teil der Eigenformen zu berücksichtigen. Der Rechenaufwand wird hierdurch reduziert. Das Verfahren der modalen Analyse ist - nach Wissen des Verfassers - bis heute nur korrekt für reelle Eigenwerte und -formen bei größeren Matrizen angewandt worden [24,31].

Eine Anwendung mit komplexen Eigenwerten und -formen ist denkbar. Allerdings stehen noch keine leistungsfähigen Eigenwertprogramme für größere Matrizen zur Verfügung.

Die vom Verfasser bearbeiteten Beispiele in dieser Arbeit wurden mit den Methoden der Matrizenfunktionen, der numerischen Integration und vereinzelt mit finiten Differenzen berechnet. Einige analytische Kontrollösungen wurden auch mit Integraltransformationen ermittelt.

Grundsätzlich können alle zuvor beschriebenen Verfahren für jedes Problem benutzt werden. Allerdings sollten bei der Auswahl der Lösungsart für ein spezielles Problem gewisse ökonomische Gesichtspunkte beachtet werden, welche im nächsten Kapitel angesprochen werden.

6.2. Auswahl des Verfahrens

Die zuvor angegebenen Verfahren können bis auf die Integraltransformationen als Übertragungsverfahren in der Zeitkoordinate oder auch als sogenannte "step by step" - Verfahren angewandt werden. Methoden dieser Art gehen von einem bekannten Zustand zum Zeitpunkt t aus und ermitteln aufgrund ihres Algorithmusses alle Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ und so weiter. Da die zu lösende Matrixgleichung ein Anfangswertproblem in der Zeitkoordinate darstellt, sind diese schrittweise arbeitenden Verfahren grundsätzlich vorteilhaft. Außerdem benötigen sie nur einen geringen Speicherbedarf.

Ist die Lösung einer Matrizendifferentialgleichung für einen langen Zeitraum mit vielen Zeitschritten zu bestimmen und ist die rechte Seite des Systems - also der Lastvektor - konstant, so sollte die Übertragungsmatrix des Systems bestimmt werden. Die Übertragungsmatrix des Systems enthält

die gesamte Lösung für einen Zeitschritt Δt . Bei bekanntem Zustandsvektor zum Zeitpunkt t erhält man den Zustand zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch eine Multiplikation der Übertragungsmatrix mit dem Zustandsvektor. Die Rechenzeit für eine solche Matrizenmultiplikation ist bei vielen Systemen geringer als entsprechende Rechenzeit für andere "step by step" -Algorithmen. Die Berechnung der Übertragungsmatrix ist dafür aufwendiger.

Sind allerdings nur wenige Zeitschritte zu berechnen, z.B. bei stark gedämpften Stoßvorgängen, so ist der Rechenzeitaufwand bei Verfahren ohne Ermittlung einer Übertragungsmatrix geringer.

Die Übertragungsmatrix läßt sich mit beliebiger Genauigkeit durch Matrizenpotenzreihen [31] ermitteln. Allerdings ist eine Berechnung auch mit jedem anderen "step by step"-Verfahren möglich, wenn die Spaltenlösungen für alle möglichen "Einheitsanfangswerte" nebeneinander geschrieben werden.

Beispiel: Matrizendifferentialgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t)$$

Lösung: $\underline{z}(\Delta t) = e^{\underline{A} \Delta t} \underline{z}(0) = \underline{U} \underline{z}(0)$

$$\underline{U} \hat{=} \text{Übertragungsmatrix}$$

i-ter "Einheitsanfangsvektor"

$$\underline{z}_{(0) i}^T = | \underset{1}{0} \quad \underset{2}{0} \quad \underset{3}{0} \quad \dots \quad \underset{i}{1} \quad \dots \quad \underset{n}{0} |$$

Lösung dafür mit beliebigen numerischen Verfahren :

$$\underline{u}_{(\Delta t) i} = \underline{u}_i$$

numerische Übertragungsmatrix:

$$\underline{\tilde{U}} = \left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{array} \right|$$

Bei der Auswahl eines numerischen Lösungsverfahrens ist auch die Stabilität der numerischen Lösung und die Genauigkeit zu beachten. Diese Fragen sind zum Teil in den Literaturstellen in denen diese Verfahren beschrieben sind behandelt, so daß der Verfasser an dieser Stelle auf diesen Punkt nicht weiter eingehen möchte.

Die Wahl der Schrittweite Δt bei jedem Verfahren ist von entscheidender Wichtigkeit für die Stabilität und Genauigkeit der Ergebnisse. Oft wird Δt intuitiv für das zu lösende Problem bestimmt. Auch bei linear viskosen Problemen treten sogenannte "steife Differentialgleichungen" (stiff equation) [13] auf. Diese Gleichungen sind durch stark unterschiedliche Eigenwerte charakterisiert. Die Schrittweite muß sehr klein gewählt werden, um stabile Ergebnisse zu erhalten. In Beispiel 5 (Seite 91) wird dieses Phänomen angesprochen.

7. Spannungsberechnung

Der hier vorgeschlagene Lösungsweg für ein linear,viskoses Problem geht von einer Weggrößenformulierung aus, d.h. die direkten Unbekannten in den Bewegungsgleichungen sind Weggrößen (Bei inkompressiblem Stoffverhalten allerdings auch hydrostatische Spannungen.). Nach Lösung der Bewegungsgleichung sind nur die Weggrößen bekannt. Die auch interessierenden restlichen Größen wie Verzerrungen und Spannungen müssen noch berechnet werden.

Zu jedem Zeitpunkt t kann aus den globalen Weggrößen $X_{(t)}$ (bzw. dessen Zeitableitungen) für jedes Element der lokale Knotenverschiebungsvektor $u_{(t)}$ (bzw. dessen Zeitableitungen) bestimmt werden. Mit dem bekannten Zusammenhang zwischen Knotenverschiebungen und Verzerrungen lassen sich auch die Verzerrungen im Element und die Verzerrungsableitungen zu jedem Zeitpunkt t bestimmen.

Mit den Verzerrungen können nun die Spannungen aus den konstitutiven Gleichungen ermittelt werden. Da die konstitutiven Gleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen sind, muß im allgemeinen eine gewöhnliche Differentialgleichung für die zu bestimmende Spannungsgröße gelöst werden. Für das schon in Kapitel 3.1.1 angeführte Beispiel des elastischen hydrostatischen Stoffverhaltens und des Deviatorverhaltens wie eine MAXWELL-Flüssigkeit soll der zuvor beschriebene Lösungsweg kurz gezeigt werden:

Zum Zeitpunkt "t" :

Aus Lösung der Bewegungsgleichung folgt der lokale Knotenvektor und dessen Ableitung:

$$\underline{V}(t) , \dot{\underline{V}}(t)$$

Mit (25) folgen Verzerrungen und Verzerrungsableitungen an der Stelle x, y, z im Element:

$$\underline{\epsilon}_{(x,y,z,t)} = \left| \frac{\underline{\epsilon}_0}{e} \right| = \underline{Y} \underline{H}_{u(x,y,z)} \underline{G} \underline{V}(t) \quad (166)$$

$$\underline{\dot{\epsilon}}_{(x,y,z,t)} = \left| \frac{\dot{\underline{\epsilon}}_0}{\dot{e}} \right| = \underline{Y} \underline{H}_{u(x,y,z)} \underline{G} \dot{\underline{V}}(t) \quad (167)$$

konstitutive Gleichung (30):

$$\underline{P}_D \underline{\sigma}_{(x,y,z,t)} = \underline{Q}_D \underline{\epsilon}_{D(x,y,z,t)}$$

$$\underline{\sigma}_{D(x,y,z,t)} + p_1 \dot{\underline{\sigma}}_{D(x,y,z,t)} = q_1 \dot{\underline{\epsilon}}_D(x,y,z,t) \quad (168)$$

$$\underline{P}_H s_{(x,y,z,t)} = \underline{Q}_H e_{(x,y,z,t)}$$

$$s_{(x,y,z,t)} = 3K \cdot e_{(x,y,z,t)} \quad (169)$$

Die hydrostatische Spannung s läßt sich aus (169) direkt ermitteln. Die im Vektor $\underline{\sigma}_0$ aufgelisteten fünf Deviatorspannungen können aus (168) nach Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmt werden.

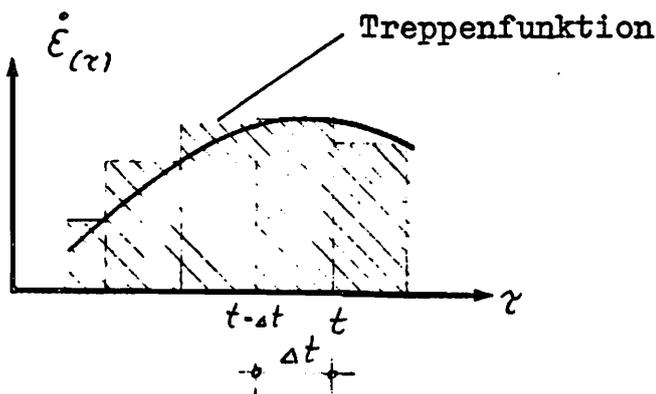
Für eine Komponente σ von (168) gilt die Differentialgleichung

$$\sigma(t) + p_1 \dot{\sigma}(t) = q_1 \dot{\epsilon}(t)$$

mit bekannter rechter Seite aus (167). Die Lösung lautet:

$$\sigma(t) = e^{-\frac{\Delta t}{p_1}} \cdot \sigma(t-\Delta t) + \frac{q_1}{p_1} e^{-\frac{t}{p_1}} \int_{t-\Delta t}^t e^{\frac{\tau}{p_1}} \cdot \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (170)$$

Da die Funktion $\dot{\epsilon}(\tau)$ nur an den Stützstellen $\tau = t - \Delta t$ und $\tau = t$ bekannt ist, muß eine Annahme über den Verlauf dieser Funktion in dem Zeitintervall der Länge Δt gemacht werden. Die einfachste Annahme ist ein konstanter Verlauf im Intervall:



Für einen konstanten Verlauf von $\dot{\epsilon}(\tau)$ im Intervall wird aus (170):

$$\sigma(t) = e^{-\frac{\Delta t}{p_1}} \cdot \sigma(t-\Delta t) + \frac{q_1}{p_1} \cdot (1 - e^{-\frac{\Delta t}{p_1}}) \cdot \dot{\epsilon}(t) \quad (171)$$

Für kleine Intervalle liefert (171) genügend genaue Ergebnisse. Eine höhere Genauigkeit erzielt man mit linear veränderlichem Verlauf im Intervall für $\dot{\epsilon}(\tau)$ oder für den arithmetischen Mittelwert zwischen den Werten an den Stellen $t - \Delta t$ und t .

Nachdem alle fünf Deviatorspannungen nach (171) und die hydrostatische Spannung nach (169) ermittelt sind, kann der Vektor $\underline{\sigma}_{(x, y, z, t)}$ aufgestellt werden und mit (26) die noch fehlenden Normalspannungen ermittelt werden:

$$\underline{\tilde{\sigma}}_{(x, y, z, t)} = \underline{Y}^{-1} \underline{\sigma}_{(x, y, z, t)} \quad (172)$$

Damit sind alle Größen berechnet.

Im allgemeinen müssen die Spannungen als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung berechnet werden. Diese wird schrittweise gelöst. Die Anfangswerte der Lösung sind die Spannungen des letzten Schrittes. Wird nur die Spannung zu einem bestimmten Zeitpunkt als Lösung gewünscht, so müssen trotzdem für den gesamten Verlauf die Differentialgleichungen der Spannungen integriert werden. Für den Zeitpunkt $t = \infty$ gelingt eine direkte Bestimmung der Spannung ohne die gesamte Integration der Differentialgleichung. Ein kurzer Hinweis hierzu wird in Kapitel 9 gegeben.

8. Berücksichtigung von unstetigen Laständerungen bei Kriechproblemen

Der in Kapitel 6 vorgeschlagene Weg zur Lösung der Bewegungsgleichung bedarf noch einiger Zusatzüberlegungen, z.B. wenn die Belastung zum Zeitpunkt $t = 0$ von 0 auf einen endlichen Wert unstetig springt. Hier wird nur dieser Lastsprung näher betrachtet, da er bei Kriechproblemen sehr häufig auftritt. Kriechprobleme sind dadurch charakterisiert, daß die Änderungen von Verschiebungen und Spannungen gering sind und die Trägkeitsterme vernachlässigt werden können. Die weiteren Betrachtungen sollen für das schon früher einmal behandelte spezielle Werkstoffverhalten, nämlich Volumendehnung elastisch (HOOKE-Körper) und Schubverhalten als "MAXWELL-Flüssigkeit", durchgeführt werden. Die Elementbeziehungen,

aber auch die Gesamtbewegungsgleichung, hat dann die Form (46, 53) aber ohne Trägheitsterme, d.h. die Massenmatrix \underline{M} wird zu $\underline{0}$ gesetzt. Diese Gleichung lautet nun:

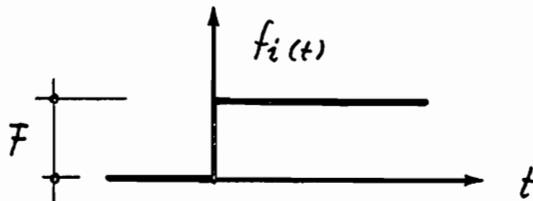
$$\underline{K}_1 \underline{Q}_D \underline{P}_H \underline{v}(t) + \underline{K}_2 \underline{Q}_H \underline{P}_D \underline{v}(t) = \underline{P}_D \underline{P}_H \underline{s}(t) \quad (173)$$

$$\underline{A}_1 \dot{\underline{x}}(t) + \underline{A}_0 \underline{x}(t) = \underline{f}(t) + \underline{P}_1 \dot{\underline{f}}(t) \quad (174)$$

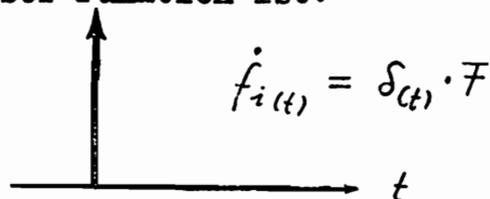
$$\underline{A}_0 = 3K \underline{K}_2$$

$$\underline{A}_1 = q_1 \underline{K}_1 + 3K \underline{P}_1 \underline{K}_2$$

Die Belastungsfunktion des i -ten Elements des Spaltenvektors $\underline{f}(t)$ soll den Zeitverlauf eines Einheitssprunges haben:



Die Ableitung dieser Funktion ist:



$\delta(t) \hat{=} \text{DIRAC - Funktion}$

$$\delta(t) = \begin{array}{l} 0 \quad ; \quad t \neq 0 \\ \infty \quad ; \quad t = 0 \end{array} \quad \left| \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \right.$$

Mit einer herkömmlichen numerischen Integration ist in (174) der Schritt von $t = 0$ zu $t = +0$ nicht zu vollziehen, weil an der Stelle $t = 0$ der Term $\dot{f}_i(t)$ gegen ∞ geht.

Eine kurze mechanische Betrachtung des Werkstoffverhaltens, bzw. der Feder-Dämpfer-Modelle, bei un stetigen Kraftänderungen hilft hier weiter.

Werkstoffmodelle: hydrostat.Zustand

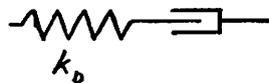
HOOKE-Körper



$$s = 3K e$$

Deviatorzustand

MAXWELL-Flüssigkeit



$$\sigma_d + \rho_1 \dot{\sigma}_d = q_1 \dot{\epsilon}_d$$

Bei sprunghaft ändernder Belastung σ_d verformt sich die Feder des Werkstoffmodells der MAXWELL-Flüssigkeit in der Zeitspanne $\Delta t = 0$, also mit unendlich großer Geschwindigkeit. Der Dämpfer verformt sich dabei nicht, er wirkt als starrer Körper. Die Steifigkeit k_d dieser Feder kann aus Bild 2 entnommen werden:

$$k_d = \frac{1}{J_{(s)}} = \frac{q_1}{\rho_1} \quad (175)$$

Der Belastungssprung hat also Verzerrungssprünge für den Schub- und den hydrostatischen Zustand zur Folge. Für diese Sprunggrößen gelten die konstitutiven Beziehungen

$$P_{H_0} \quad s_0 = s_0 = 3K e_0 = Q_{H_0} e_0 \quad (176)$$

$$P_{D_0} \quad \sigma_{d_0} = \sigma_{d_0} = \frac{q_1}{\rho_1} \epsilon_{d_0} = Q_{D_0} \epsilon_{d_0} \quad (177)$$

Die Verschiebungssprünge in der Gesamtbewegungsgleichung (173) können nun durch eine statische Rechnung mit den elastischen Stoffgrößen Q_{H_0} und Q_{D_0} ermittelt werden.

Der Lastvektor \underline{f}_0 enthält die Lastenänderung F in der i -ten Komponente. Aus (173) und mit (176) und (177) folgt:

$$\begin{aligned} Q_{D_0} \cdot P_{H_0} &= \frac{q_1}{p_1} & Q_{H_0} \cdot P_{D_0} &= 3K \\ P_{D_0} \cdot P_{H_0} &= 1 \\ \left(\frac{q_1}{p_1} \underline{K}_1 + 3K \underline{K}_2 \right) \underline{x}_0 &= \underline{f}_0 \end{aligned} \quad (178)$$

Nach Lösen der linearen Gleichung (178) ist der Anfangswertvektor \underline{x}_0 bekannt, der für eine weitere Berechnung des Lösungsverlaufs von (174) nach irgendeinem Verfahren notwendig ist.

Natürlich treten auch in den Verzerrungen und Spannungen zum Zeitpunkt $t = 0$ Sprünge auf, welche sich aber aus den globalen Anfangsverschiebungen \underline{x}_0 ermitteln lassen. Die Verzerrungen berechnen sich aus den Verschiebungen nach (25). Aus diesen kann mit (176) und (177) der Sprung der Spannungen ermittelt werden.

Bei komplizierten Stoffgesetzen müssen zur Lösung der Bewegungsgleichung nicht nur Sprünge der Verschiebungen, sondern auch Sprünge in deren zeitlichen Ableitungen ermittelt werden. Durch ein ähnliches Vorgehen, lassen sich auch diese bestimmen. Ist z.B. für den "3-Parameter-Körper" (siehe Bild 2) die Stoffkonstante für die Bestimmung der 1. Ableitung der Verzerrung infolge eines Einheitssprungs der Belastung gesucht, so geht man von der Kriechfunktion $J(t)$ aus. Es gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= J(t) \cdot \sigma_0 \\ \dot{\epsilon}(t) &= \dot{J}(t) \cdot \sigma_0 \\ \lambda = \frac{q_0}{p_1} \quad \Bigg| \quad J(t) &= \frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{(t)} = -\frac{\rho_1 q_0}{q_1^2} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\rho_1} e^{-\lambda t}$$

$$\dot{\gamma}_{(0)} = \left(1 - \frac{\rho_1 q_0}{q_1}\right) / q_1$$

$$\dot{\epsilon}_{(t=0)} = \dot{\gamma}_{(0)} \cdot \sigma_0$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\dot{\gamma}_{(0)}} \dot{\epsilon}_{(t=0)} = \dot{Q}_0 \cdot \dot{\epsilon}_0 \quad (179)$$

Mit der Stoffkonstanten \dot{Q}_0 kann nun eine quasistatische Rechnung zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeiten vorgenommen werden.

9. Berechnung von Endzuständen

Die Lösungen vieler visko-elastischer Probleme nähern sich nach längerer Zeit asymptotisch einem Endzustand, wenn die Belastung sich ebenfalls nicht ändert. Ist nur dieser Endzustand zu berechnen, so gelingt es bei einem ähnlichen Vorgehen wie im letzten Kapitel durch eine quasistatische Rechnung das Problem zu lösen. Ein kurzes Beispiel soll dieses erläutern:

Stoffverhalten: hydrostatischer Zustand

HOOKE-Körper



$$s = 3 \lambda e$$

Deviatorzustand

KELVIN-Körper



$$\sigma = q_0 + \lambda \dot{\epsilon}$$

Bei konstanter Belastung nach der Zeit $t = \infty$ nimmt nur die Feder des KELVIN-Körpers die konstante Belastung σ_∞ auf.

Es gilt für diesen stationären Zustand:

$$P_{D\infty} \cdot \epsilon_{\infty} = q_0 \epsilon_{\infty} = Q_{D\infty} \cdot \epsilon_{\infty} \quad (180)$$

Für den elastischen HOOKE-Körper gilt

$$P_{H\infty} = 1 \quad ; \quad Q_{H\infty} = 3K \quad (181)$$

Damit ergibt sich die lineare Bewegungsgleichung des Endzustandes aus (173) mit (181) und (180) :

$$P_{D\infty} \cdot P_{H\infty} = 1$$

$$Q_{D\infty} \cdot P_{H\infty} = q_0$$

$$Q_{H\infty} \cdot P_{D\infty} = 3K$$

$$(q_0 \underline{K}_1 + 3K \underline{K}_2) \underline{x}_{\infty} = \underline{f}_{\infty} \quad (182)$$

10. Fehlerquellen der numerischen Lösung

Der hier vorgeschlagene Lösungsweg diskretisiert die Feldgleichungen des viskoelastischen Problems in den Ortskoordinaten durch FE. Die dann nach dem Weggrößenverfahren erhaltenen Gleichungen sind Matrizendifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizientenmatrizen. Diese werden nach einem numerischen Verfahren gelöst. Damit sind die Weggrößen des Systems bestimmt. Aus diesen Weggrößen lassen sich mit den gewählten Ansatzfunktionen die Verzerrungen berechnen. Im allgemeinen sind die

konstitutiven Gleichungen Differentialgleichungen, so daß zur Bestimmung der Spannungen noch diese gelöst werden müssen.

Die numerische Lösung des Problems ist daher mit folgenden Fehler behaftet:

1. Diskretisierungsfehler in den Ortskoordinaten durch FEM
2. Fehler aus numerischer Lösung der Gesamtmatrizenbewegungsgleichung
3. Fehler aus numerischer Lösung der Differentialgleichungen für die Spannungen

Zu 1.: Diese Fehlerquelle ist in der einschlägigen Literatur zur FEM hinreichend beschrieben und diskutiert [4], so daß hier nur einige kurze Hinweise gegeben werden. Es sollten nur kompatible Ansatzfunktionen gewählt werden, dann sind diese im Sinne des RITZ-Verfahrens zulässige Ansatzfunktionen. Durch feinere Unterteilung der Gesamtstruktur in FE ergeben sich verbesserte Lösungen, allerdings steigen dadurch Speicher- und Rechenaufwand. An den Stellen großer Verzerrungsgradienten ist eine feine FE-Unterteilung zu wählen.

Zu 2.: Die im 6. Kapitel bei der Beschreibung der Lösungsverfahren angeführte Literatur beschäftigt sich intensiv mit Genauigkeits- und Stabilitätsfragen der numerischen Lösung.

Zu 3.: Die Spannungen werden im allgemeinen numerisch mit Ein- oder Mehrschrittverfahren bestimmt. In die zu lösenden Differentialgleichungen gehen die aus den Weggrößen berechneten Verzerrungen ein. Da diese Verzerrungen schon mit den Fehlern 1 und 2 behaftet sind, ergeben sich die berechneten Spannungen nicht so genau wie die Weggrößen.

11. Rechenbeispiele

Die ersten drei Rechenbeispiele bestimmen viskoelastische Lösungen für einfache Kriechprobleme, deren analytische Lösungen aus der Literatur bekannt sind. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den analytischen und den numerischen Lösungen. Das vierte Beispiel - auch ein Kriechproblem - wurde einmal mit der FEM und zur Kontrolle analytisch mit dem Korrespondenzprinzip berechnet. Die inversen LAPLACE-Transformation wurden numerisch mit der "Fast FOURIER Transformation" durchgeführt. Im sechsten und siebenten Beispiel wird die Anwendung auf dynamische Fälle demonstriert. Es wird die Antwort auf einen Stoßimpuls und die Vergrößerungsfunktion bestimmt.

Die Möglichkeit auch kompressibles viskosen Stoffverhalten zu erfassen, wird im achten Beispiel gezeigt. Hier wird für dasselbe System und dieselbe Belastung wie in Beispiel vier, aber mit anderen Stoffgrößen eine Berechnung durchgeführt.

Einfache inkompressible Strömungsvorgänge werden in den Beispielen neun und zehn berechnet. Hier sind nur stationäre Lösungen angegeben. Die verwandte FEM ist nur für lineare Strömungsgleichungen zu verwenden, d.h. in den NAVIER-STOKE-Gleichungen müssen die konvektiven Ableitungen Null sein.

Im letzten Beispiel ist für einen ebenen Spannungszustand ein Kriechproblem durchgerechnet. Im Gegensatz zu den anderen Beispielen wird in Beispiel elf ein kompatibles Dreieckselement mit linear veränderlichen Verzerrungen (LST) angewandt. Zuvor waren die Beispiele nur mit konstantem Verzerrungsverlauf im Element (CST) berechnet worden.

Bei allen durchgerechneten Beispielen wurde kein großer Wert darauf gelegt, mit möglichst feiner Elementaufteilung und komplizierten FE ein Höchstmaß an Genauigkeit der Ergebnisse zu erhalten; sondern es wurden verschiedenartige

Problemklassen behandelt, um die Anwendungsgebiete der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zu demonstrieren.

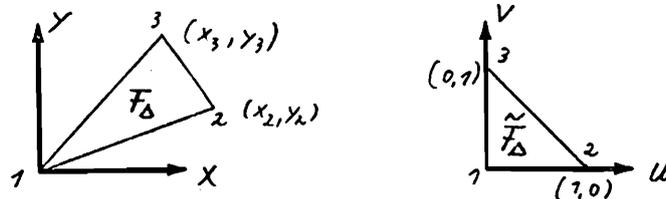
11.1. Dreiecksintegration bei FE

CST - Element:

Die Integranden für die Ermittlung der Matrizen K_1 und K_2 (112,111) sind Konstanten, so daß dort die Dreiecksintegration trivial wurde. Die Integranden der Massenmatrix (110) sind bei konstanter Dichte im Element Potenzen von x und y bis zur zweiten Ordnung. Die Integrationsformeln für diese Fälle wurden aus [35] Anhang 3 entnommen.

LST - Element:

Bei diesem Element treten Glieder bis zur vierten Potenz für die Massenmatrix auf, für welche eine Integration über das dreieckige Elementgebiet erforderlich ist. Nach einer Koordinatentransformation sind die Integrale mit einer geschlossenen Formel auswertbar:



zu berechnen:

$$I = \int_{F_{\Delta}} x^i y^k dx dy$$

Koordinatentransformation:

$$x = x_2 u + x_3 v$$

$$y = y_2 u + y_3 v$$

Funktionaldeterminante:

$$\det(D) = x_2 y_3 - y_2 x_3 = 2 F_{\Delta} > 0$$

$$I = 2 \cdot \tilde{F}_{\Delta} \int_{\tilde{F}_{\Delta}} (x_2 u + x_3 v)^i (y_2 u + y_3 v)^k du dv$$

Dieser Integral enthält Terme der Form:

$$J = \int_0^1 v^m \int_0^{1-v} u^n du = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+2)!}$$

Siehe auch [37].

11.2. Beispiele

1. Beispiel

Für den dickwandigen Zylinder sind in [10] analytische Lösungen für viskoelastisches Stoffverhalten angegeben. Diese Lösungen wurden dort mit dem "Korrespondenzprinzip" erhalten. Da die Spannungen σ_r und σ_θ nicht von Werkstoffkonstanten abhängen - also statisch bestimmt sind - ändern sie sich auch bei einem viskoelastischen Stoffgesetz nicht. Für den Zylinder aus Bild 8 mit einer Sprungfunktion

ebener Verzerrungszustand, dickwandiger Zylinder

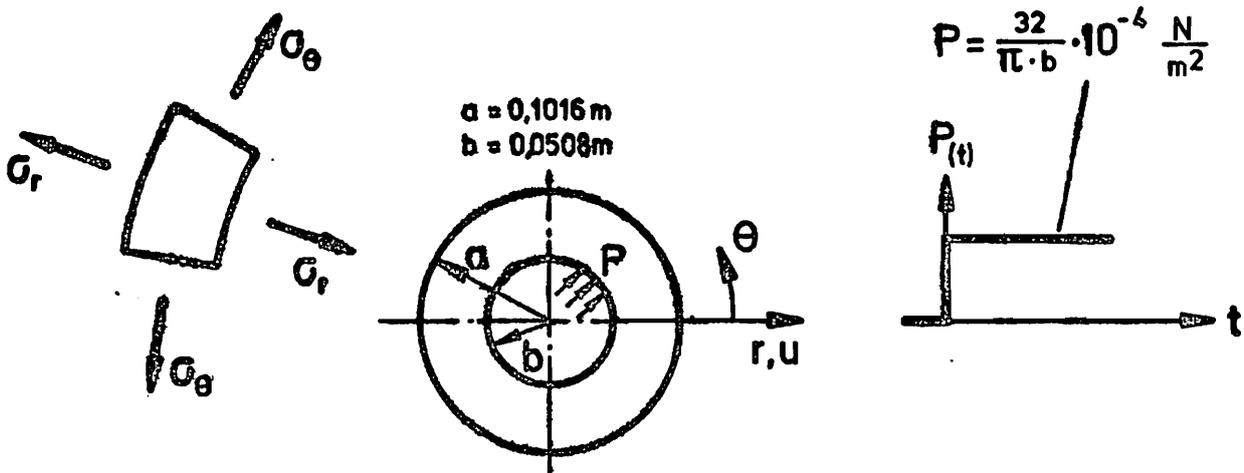
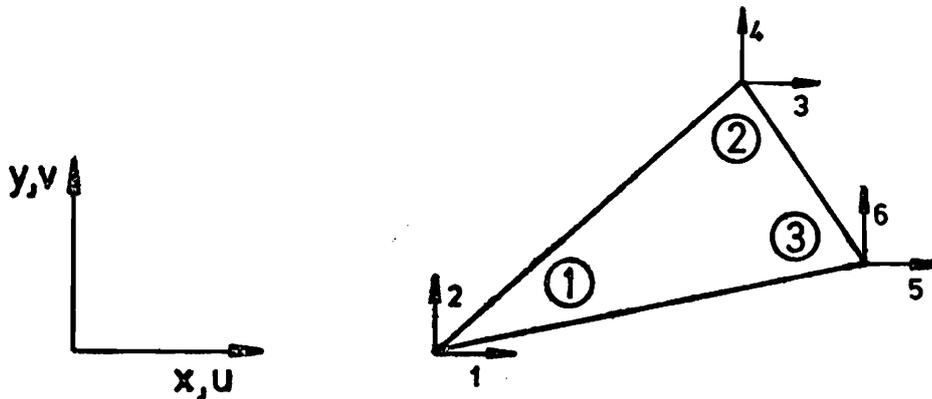


Bild 8

als Innendruckbelastung folgt die analytische Lösung aus [10] für elastischen hydrostatischen Zustand und MAXWELL-Deviatorzustand:

$$\star u(r,t) = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{r}{2K} \left[1 - \frac{q_2}{6Kp_1 + q_2} \cdot e^{-\frac{6Kt}{6Kp_1 + q_2}} \right] + \frac{a^2 \cdot (p_1 + t)}{q_2 \cdot r} \right\}$$

$$\sigma_r = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \sigma_\theta = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$



Elementtyp: CST (Constant Strain Triangle)

Bild 9

- Mit dem Elementtyp nach Bild 9 und der Elementaufteilung eines Sektors des Zylinders nach Bild 10 wurde eine numerische Lösung ermittelt. Die Gesamtbewegungsgleichung hat die Form von (53), allerdings mit verschwindender Massenmatrix, da Trägheitsterme bei diesem Beispiel vernachlässigt wurden. Der Belastungssprung zu Beginn der Belastung wurde durch eine statische Rechnung nach (178) berücksichtigt.

★ In [10] Formel (8.46) ist ein Rechenfehler enthalten. Hier ist die richtige Lösung angegeben.

Aufteilung des Gesamtsystems

20 CST-Elemente
22 Freiheitsgrade

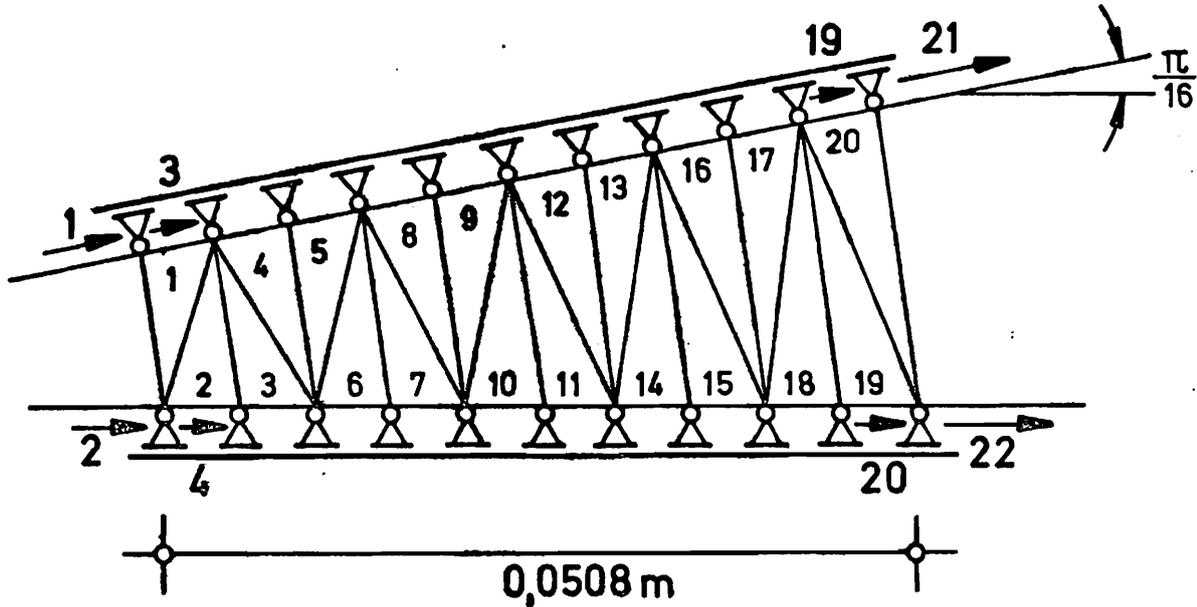


Bild 10

Die Spannungen schließlich und speziell die Deviatorspannungen sind mittels (171) ermittelt.

Die numerische Lösung der Gesamtbewegungsgleichung ergibt sich mit Matrizenfunktionen als Übertragungsverfahren

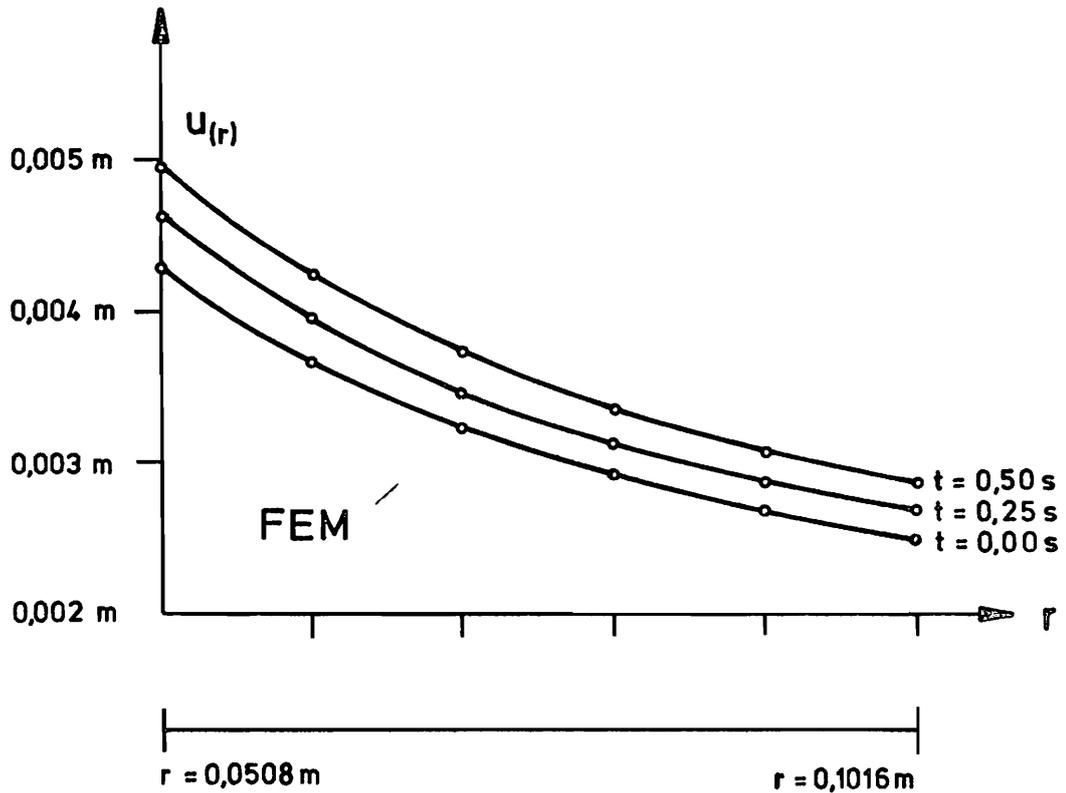
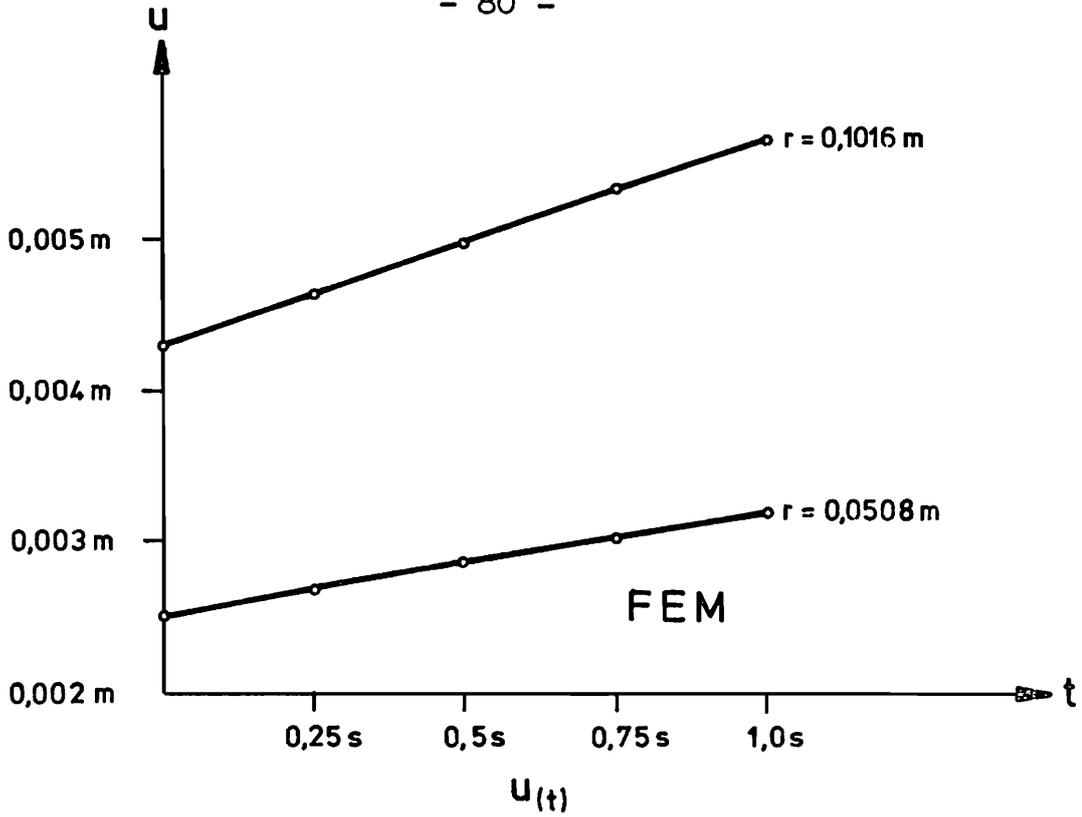
$$\underline{A}_1 \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{A}_0 \underline{x}(t) = \underline{f}$$

$$\dot{\underline{z}}(t) = \begin{vmatrix} \overset{0}{\underline{x}} \\ \hline \underset{1}{\underline{1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_0 & \underline{A}_1^{-1} \underline{f} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{x} \\ \hline \underline{1} \end{vmatrix} = \tilde{\underline{A}} \cdot \underline{z}(t)$$

$$\text{Lösung: } \underline{z}(t+\Delta t) = e^{\tilde{\underline{A}} \cdot \Delta t} \cdot \underline{z}(t) = \underline{U} \cdot \underline{z}(t)$$

$$\text{Rechenaten: } \Delta t = 10^{-3} \text{ s}$$

10 Reihenglieder zur Bestimmung
der Übertragungsmatrix



Werkstoffgesetze

$$s = 3K e$$

HOOKE

$$3K = 2 \text{ N/m}^2$$

$$p_1 = 3 \text{ s}$$

$$\tau + p_1 \dot{\tau} = q_1 \dot{\epsilon}$$

MAXWELL

$$q_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$$

Bild 11

In Bild 11 sind die Verschiebungen $u(r,t)$ aufgetragen. Kreise geben FEM-Lösungen und Striche die analytische Lösung an. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit ist kaum ein Unterschied zwischen beiden Lösungen zu bemerken. Auf eine Wiedergabe der Spannungen wird verzichtet, da sie sich zeitlich nicht ändern.

2. Beispiel

Für den Zylinder aus Beispiel 1 (Bilder 8, 9, 10) wurde eine Berechnung mit dem Deviatorstoffgesetz als KELVIN-Körper durchgeführt. Zur Integration der Bewegungsgleichung sind auch in diesem Beispiel Matrizenfunktionen als Übertragungsmatrizen mit den Rechenaten:

$$\Delta t = 0,005 \text{ s}$$

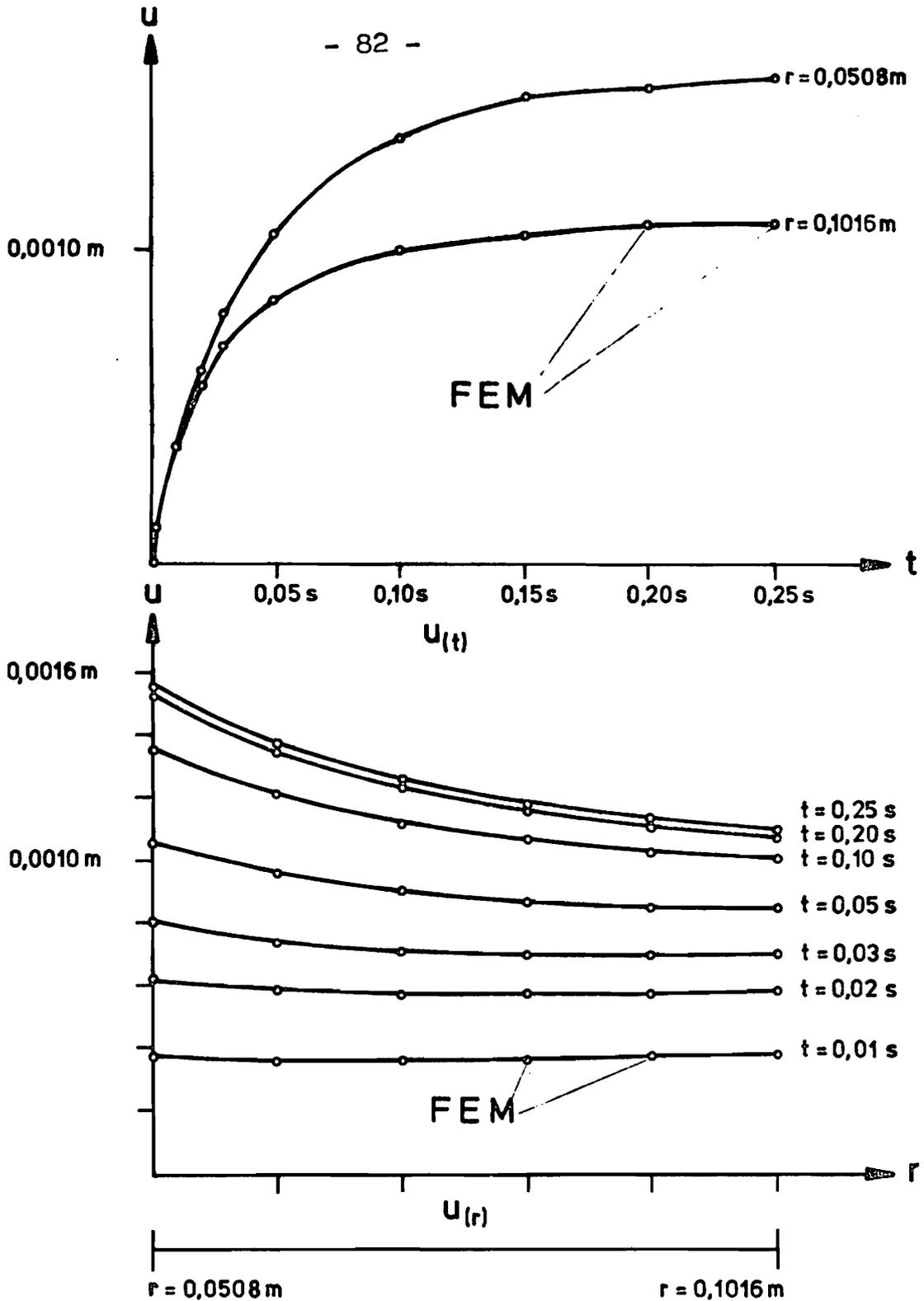
8 Reihenglieder zur Bestimmung der Übertragungsmatrix.

benutzt worden.

Eine analytische Lösung dieser Aufgabe ist wiederum in [10] gegeben:

$$u(r,t) = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{3r}{6k + q_0} \left[1 - e^{-\frac{(6k + q_0)t}{q_1}} \right] + \frac{a^2}{q_0 \cdot r} \left[1 - e^{-\frac{q_0 \cdot t}{q_1}} \right] \right\}$$

In Bild 12 sind die Rechenergebnisse aufgetragen, und zwar durchgezogene Linien für die analytische Lösung und Kreise für die FEM-Lösung. Wie auch beim 1. Beispiel sind hier im Rahmen der Zeichengenauigkeit kaum Differenzen zwischen beiden Lösungen bemerkbar.



Werkstoffgesetze

$$s = 3K e$$

HOOKE

$$3K = 2\text{ N/m}^2$$

$$q_0 = 1\text{ N/m}^2$$

$$\tau = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$$

KELVIN

$$q_1 = 0,05\text{ Ns/m}^2$$

Bild 12

3. Beispiel

ebener Verzerrungszustand, ummantelter Zylinder

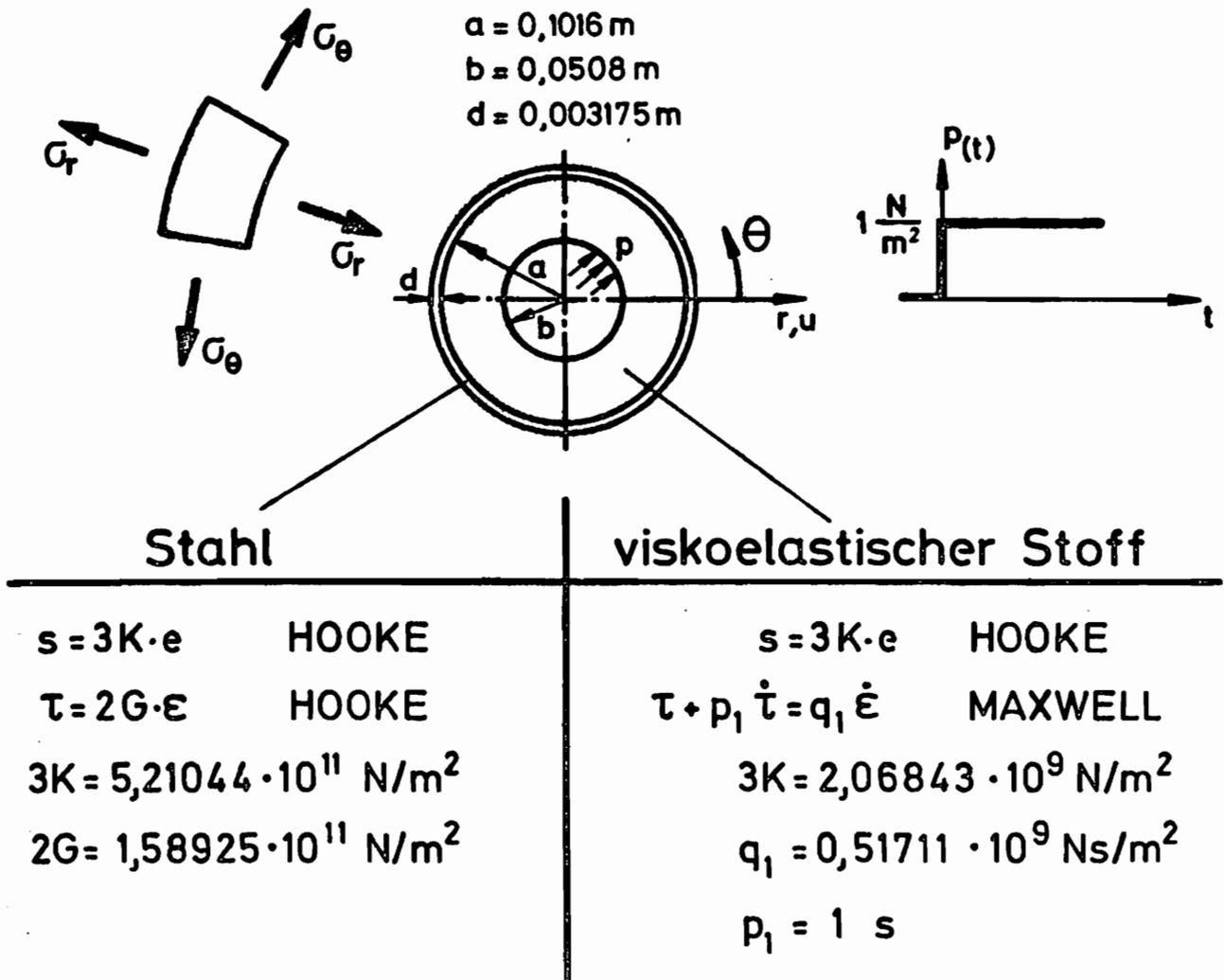


Bild 13

In [22] ist für einen ummantelten Zylinder eine analytische Lösung mit dem Korrespondenzprinzip und der LAPLACE-Transformation erhalten worden. Der Kern besteht aus einem viskoelastischem Stoff und der Mantel aus dem rein elastischen Werkstoff Stahl. Aus Bild 13 sind die Geometrie, die Belastung und die Stoffkennwerte ersichtlich.

20 + 2 CST-Elemente

24 Freiheitsgrade

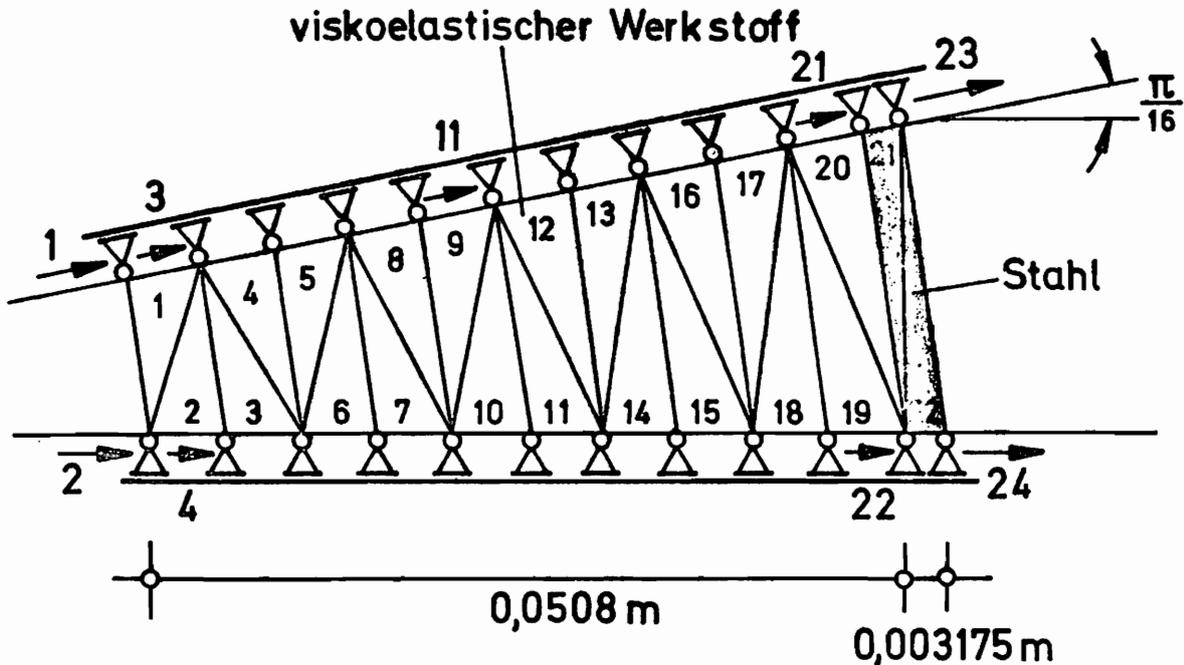


Bild 14

Im Gegensatz zu [22] sind die Stoffkennwerte im Internationalen Einheitensystem angegeben. Für die Elementaufteilung nach Bild 14 mit dem CST-Element (Bild 9) ergibt sich die Gesamtbewegungsgleichung zu:

$$\underline{A}_1 \dot{\underline{x}}(t) + \underline{A}_0 \underline{x}(t) = \left(1 + p_1 \frac{d}{dt} \right) \underline{f}(t)$$

Diese wurde mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung in Zeitschritten von $\Delta t = 0,04 s$ integriert. In Bild 15 ist die numerische Lösung nach RUNGE-KUTTA durch Punkte und die analytische Lösung nach [22] durch einen durchgezogenen Strich für die Spannung $\sigma_r(r=0,025, t)$ und die Verschiebung $u(r=0,0508, t)$ dargestellt.

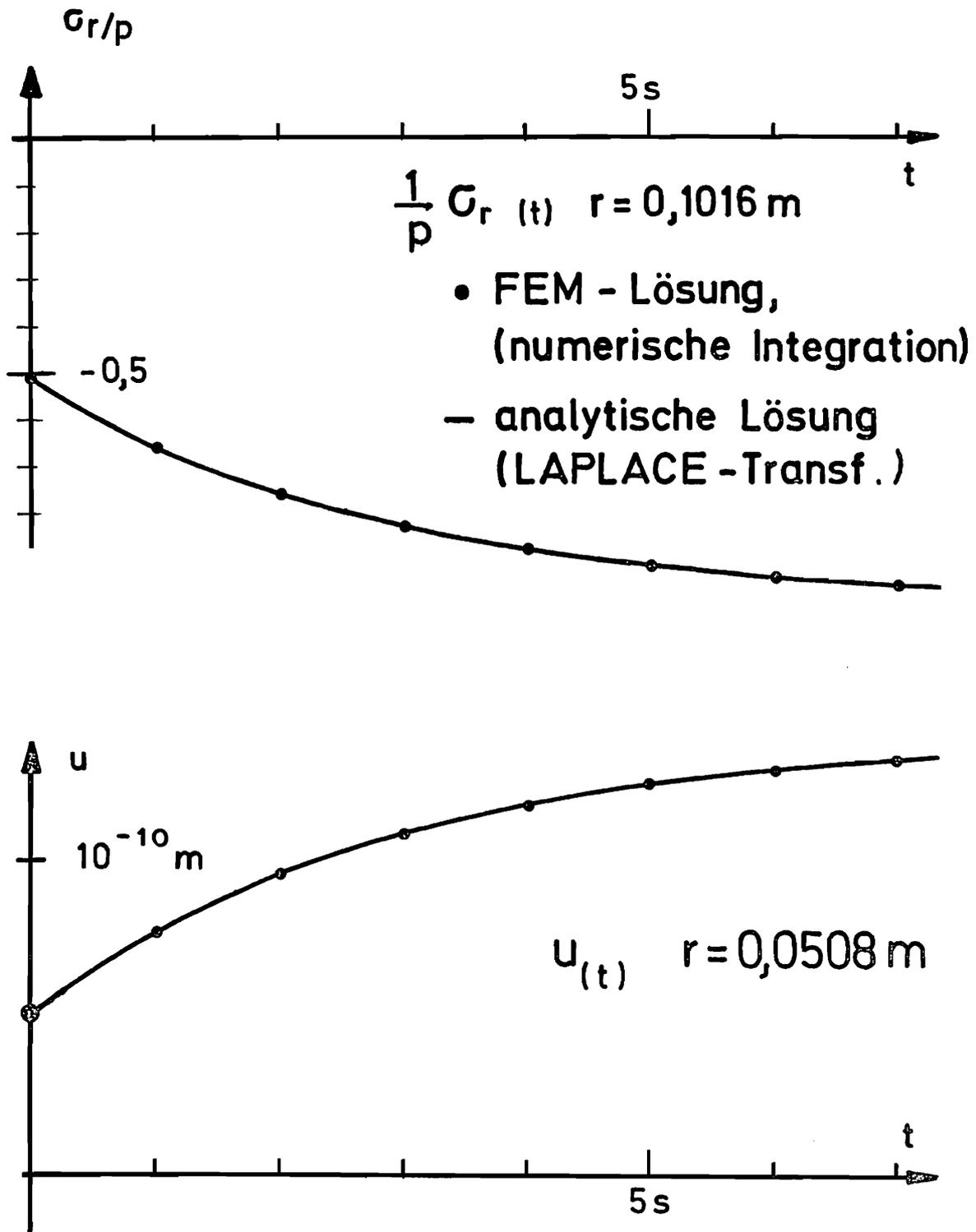


Bild 15

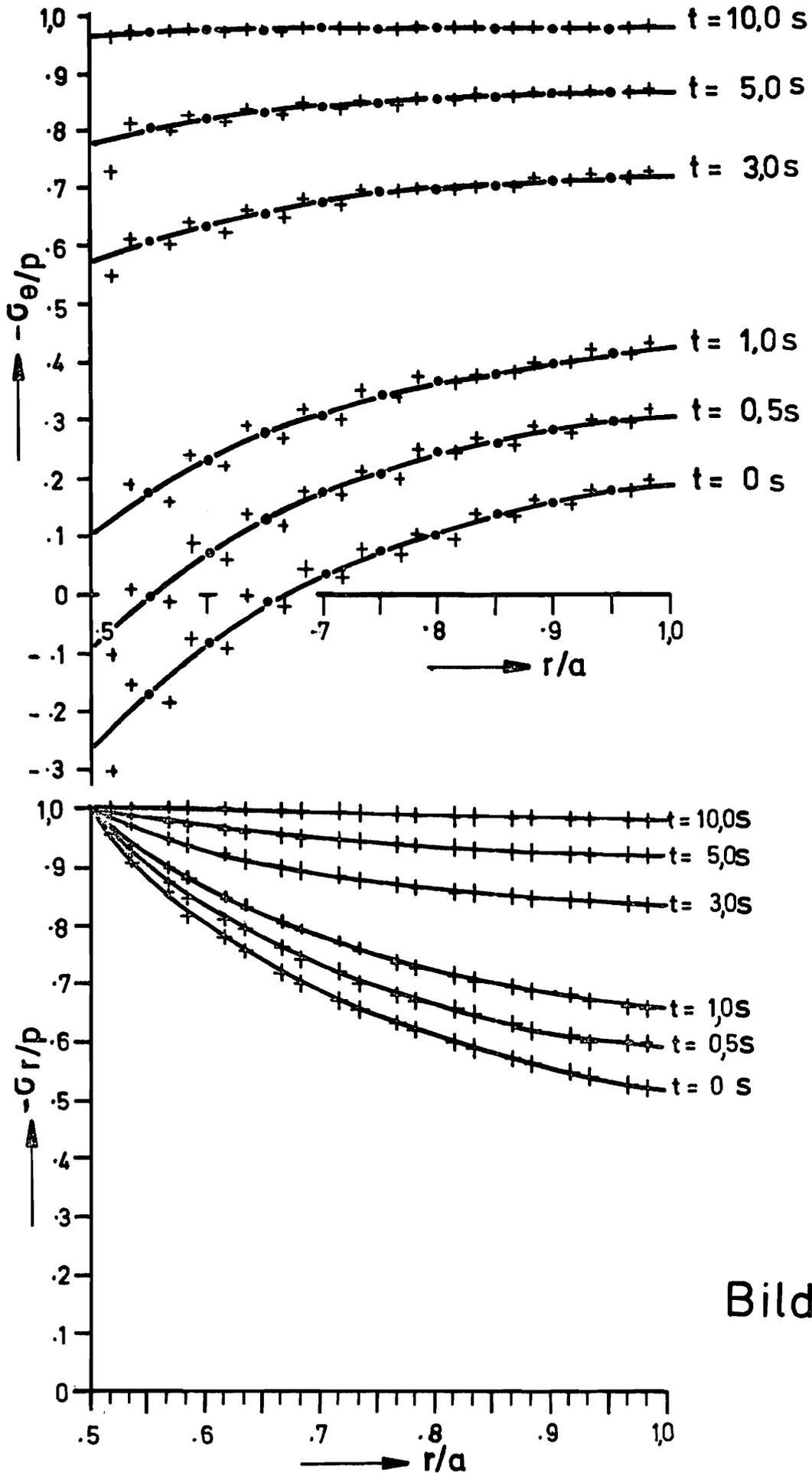


Bild 16

Bild 16 gibt den Verlauf der Spannungen σ_r und σ_θ in der Darstellung nach [22] wieder. In Bild 16 ist die FEM-Lösung durch Kreuze und die analytische Lösung mit einer durchgezogenen Linie markiert.

4. Beispiel

Der gleiche Zylinder wie im 3. Beispiel wurde für einen zeitlich veränderlichen Innendruckverlauf (Bild 17) berechnet. Auch hier wurde die Integration mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung in Zeitschritten von $\Delta t = 0,04$ durchgeführt.

Elementaufteilung

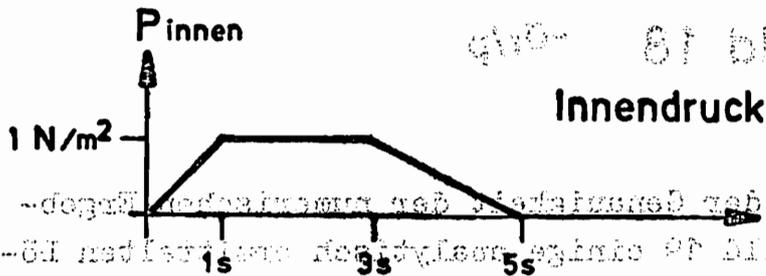
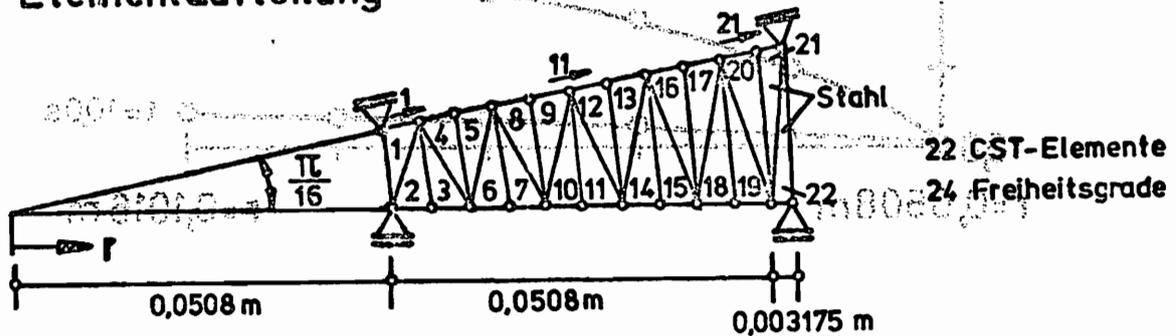


Bild 17

Im 18. Bild ist der numerisch berechnete Verlauf der Spannung σ_r aufgetragen.

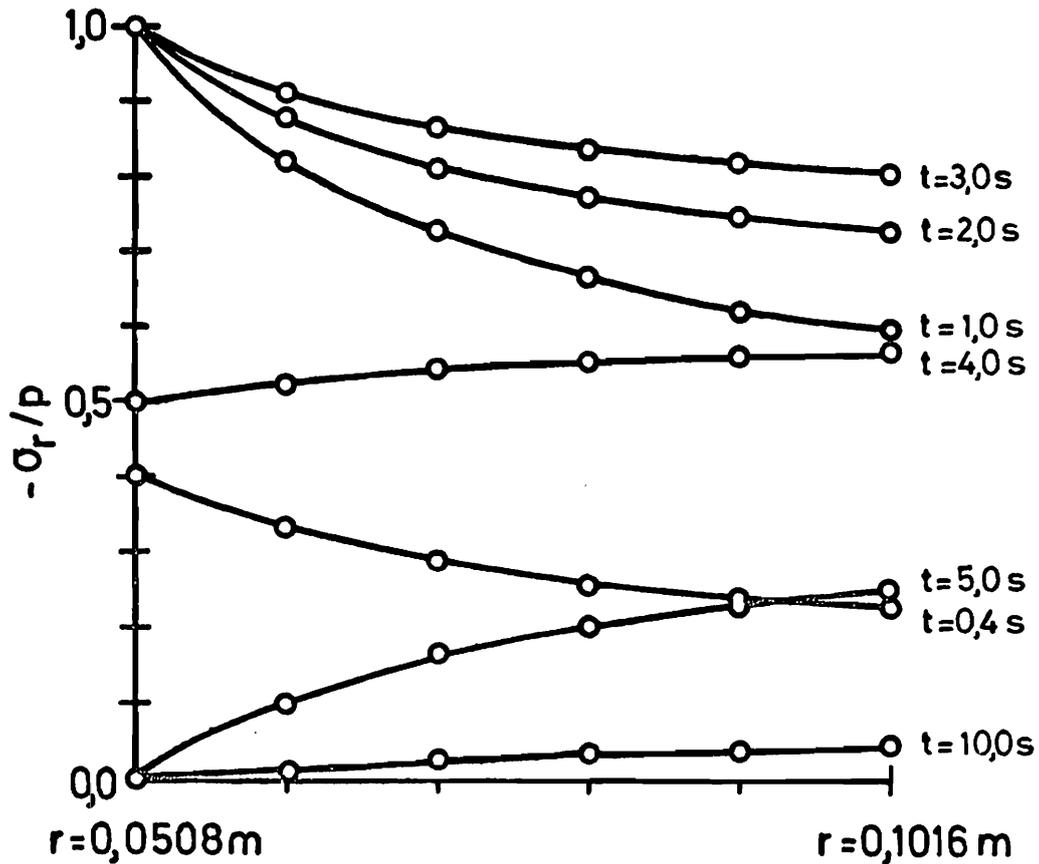


Bild 18 $-\sigma_r/p$

Zur Abschätzung der Genauigkeit der numerischen Ergebnisse sind in Bild 19 einige analytisch ermittelten Lösungskurven und nach dem FEM-Verfahren erhaltenen Werte aufgetragen. Die analytische Lösung wurde vom Verfasser nach dem in [22] beschriebenen Weg aufgestellt. Die dabei notwendigen LAPLACE-Transformationen wurden numerisch mit der "Fast FOURIER Transformation" durchgeführt [18]. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

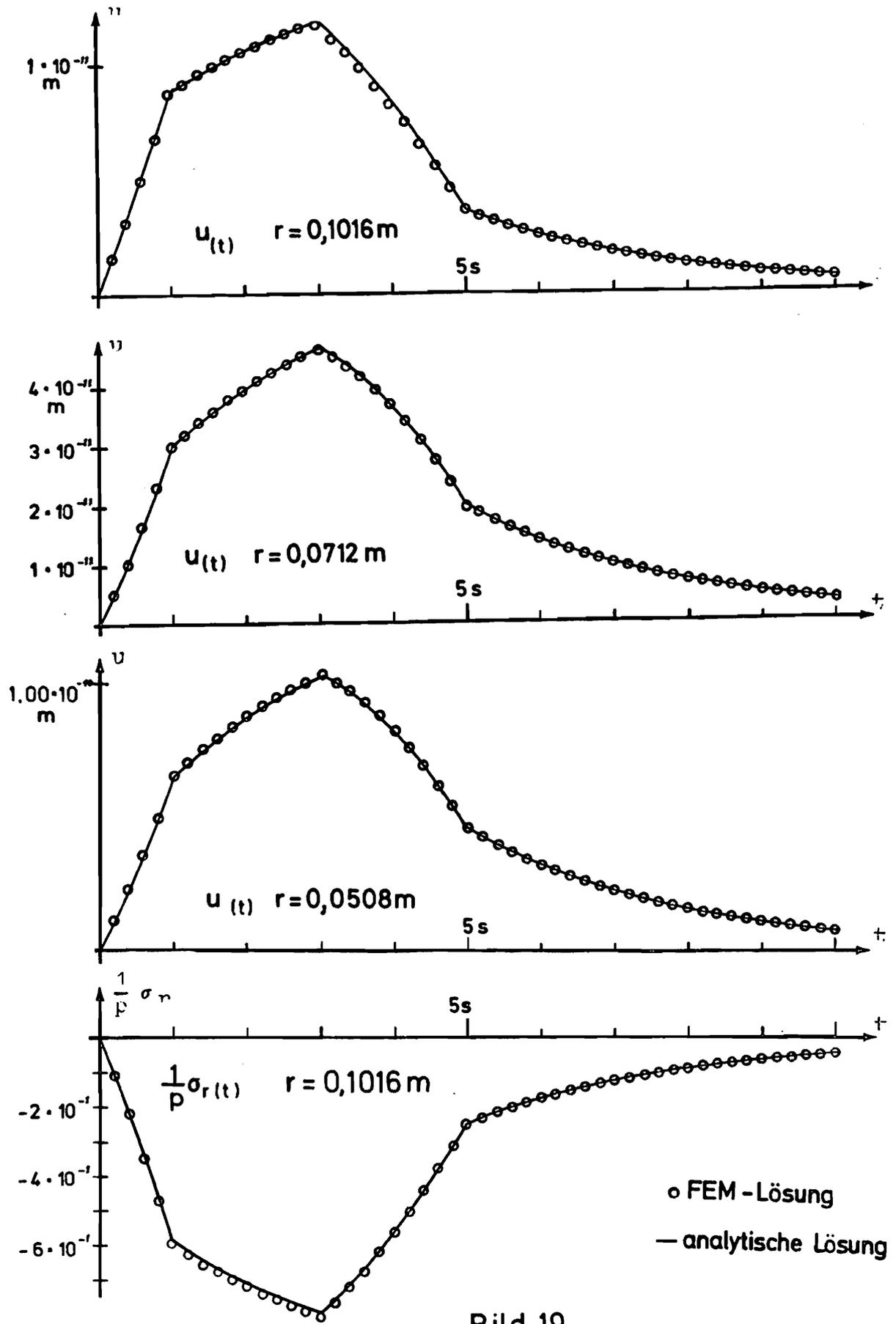


Bild 19

5. Beispiel

Der ummantelte Zylinder nach Bild 13 wurde auch noch für den Fall einer Anfangsauslenkung und verschwindenden Innendruck berechnet. Es wurde angenommen, daß der Zylinder solange durch konstanten Innendruck belastet war, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hatte. Danach (zum Zeitpunkt $t = 0$) erfolgt die Entlastung (siehe auch Bild 20).

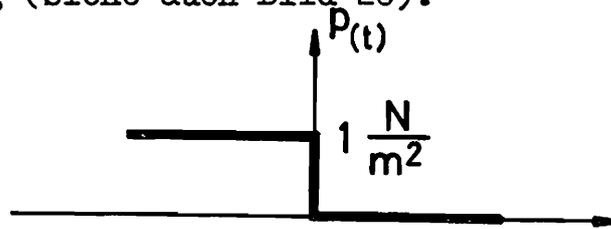


Bild 20

Der Zustand des Zylinders zum Zeitpunkt $t = -0$ wurde nach Kapitel 9 ermittelt. In einer ersten Rechnung wurden die Massenmatrix vernachlässigt. Die FEM-Lösung ist in Bild 21 wiedergegeben.

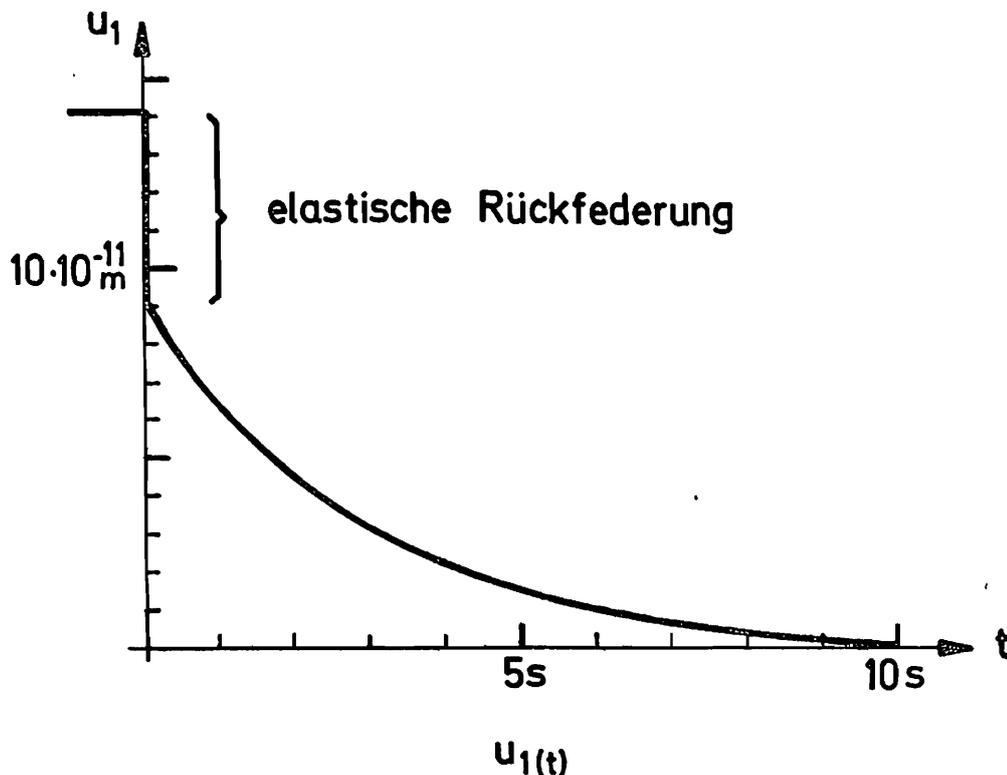


Bild 21 Anfangsauslenkung

Diese Lösung ergibt sich bei einer RUNGE-KUTTA-Integration und einer Schrittweite von $\Delta t = 0,05 \text{ s}$. In einer zweiten Rechnung wurden die Massenterme berücksichtigt ($\rho_{\text{Kern}} = 7000 \text{ kg/m}^3$). Um eine numerisch stabile Lösung zu erhalten, mußte mit einer 200 000 mal kleineren Schrittweite als zuvor gerechnet werden. Die Berechnung wurde daraufhin abgebrochen.

6. Beispiel

Mit der gröberen FE-Unterteilung nach Bild 22 ist der Zylinder von Bild 13 für eine Schockbelastung berechnet worden. Dazu wurde ein gleichmäßig verteilter Innenimpuls aufgebracht. Dieser verteilte Innenimpuls ist durch äquivalente Einzelimpulse der Knoten 1 und 2 ersetzt worden. Mit der Relation:

$$\underline{M} \cdot \underline{\dot{x}}_0 = \underline{i} \quad \rightarrow \quad \underline{\dot{x}}_0 = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{i}$$

läßt sich diese Erregung in Anfangsgeschwindigkeiten umrechnen und dann die Gesamtbewegungsgleichung der Form

$$\underline{A}_3 \underline{\ddot{x}}(t) + \underline{A}_2 \underline{\dot{x}}(t) + \underline{A}_1 \underline{x}(t) + \underline{A}_0 \underline{x}(t) = \underline{0}$$

nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren lösen. In Bild 23 sind die Ergebnisse für einige Verschiebungen und eine Spannung aufgetragen. Der Zeitschritt für eine RUNGE-KUTTA-Integration ist $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-7}$.

7. Beispiel

Für den Zylinder aus dem 6. Beispiel ist auch noch die bei dynamischen Betrachtungen wichtige Vergrößerungsfunktion berechnet worden. Dazu werden in die Bewegungsgleichung

$$\underline{A}_3 \underline{\ddot{x}}(t) + \underline{A}_2 \underline{\dot{x}}(t) + \underline{A}_1 \underline{x}(t) + \underline{A}_0 \underline{x}(t) = \underline{f}(t) + \underline{p}_0 \underline{\dot{f}}(t)$$

die harmonischen Ansätze:

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{x}} e^{j\omega t}$$

10+2 CST-Elemente
14 Freiheitsgrade

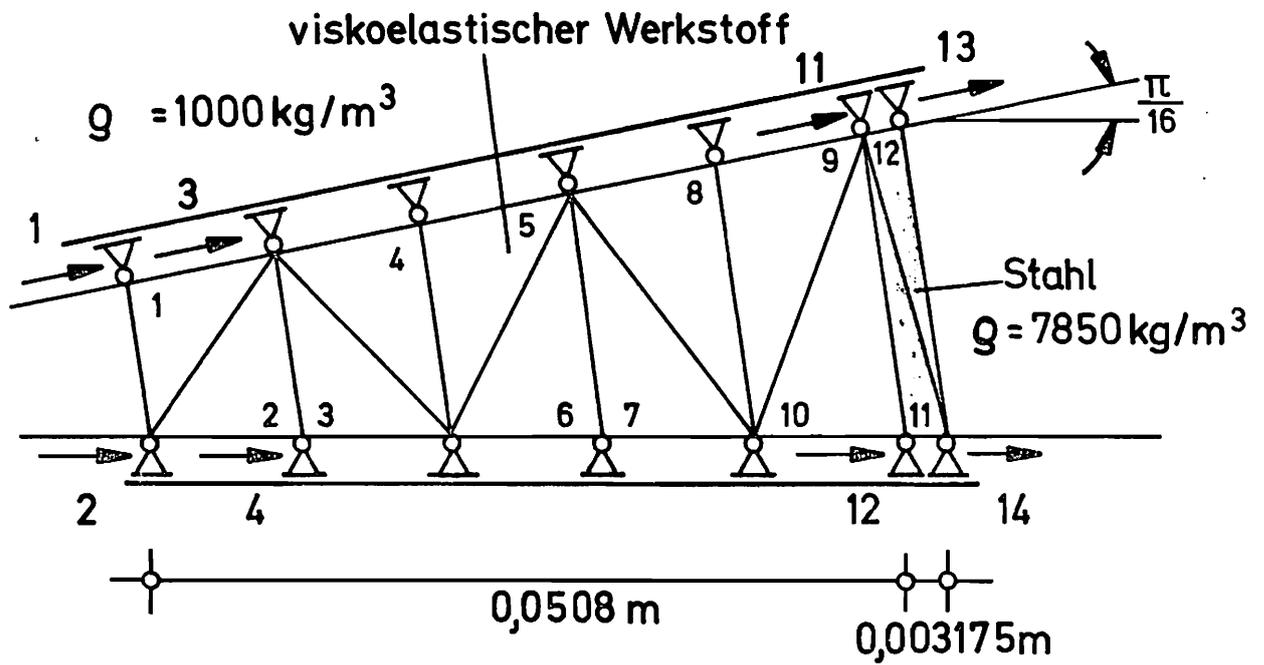
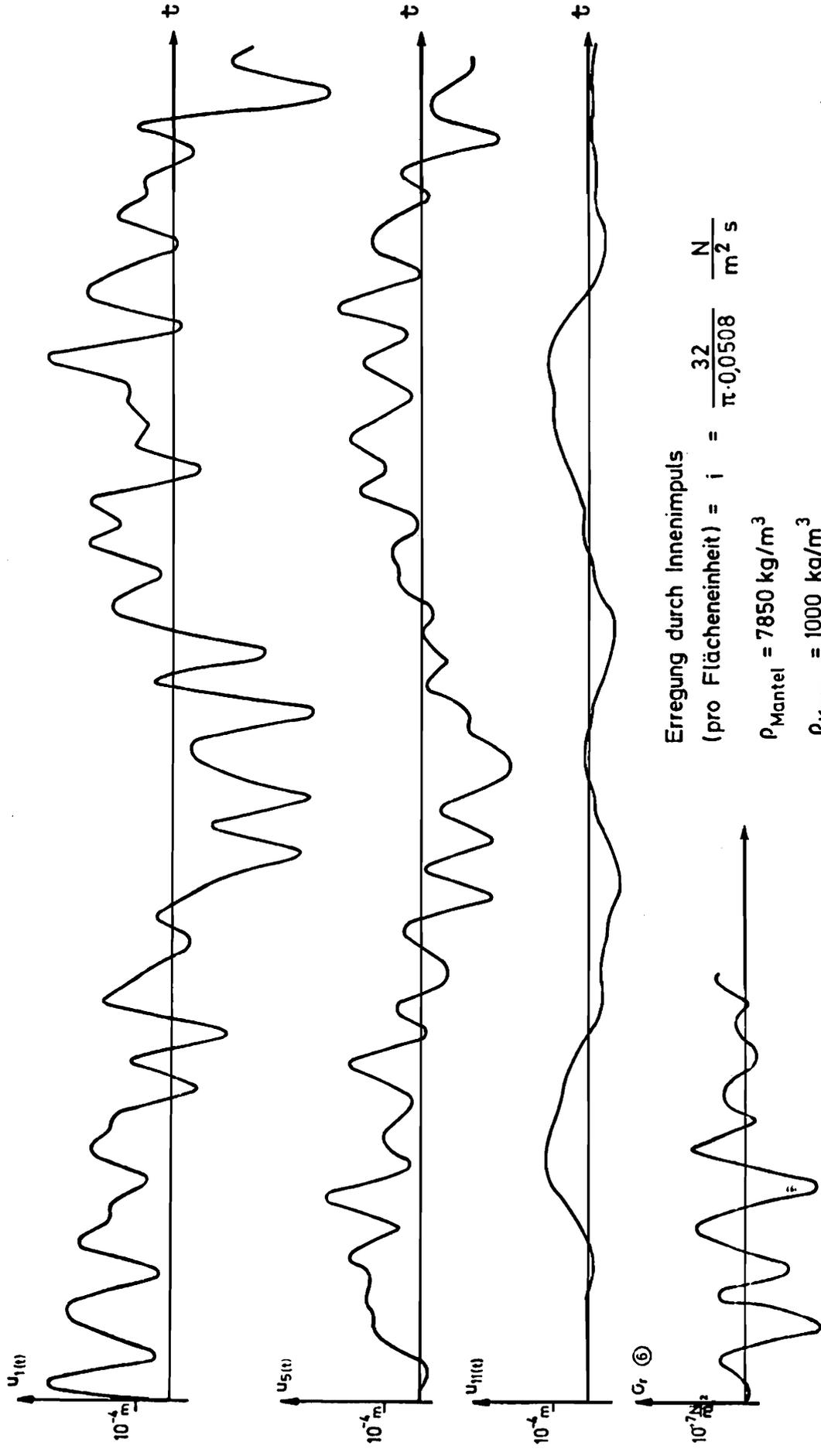


Bild 22



Erregung durch Innenimpuls
 (pro Flächeneinheit) = $i = \frac{32}{\pi \cdot 0,0508} \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \text{ s}}$
 $\rho_{\text{Mantel}} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 $\rho_{\text{Kern}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

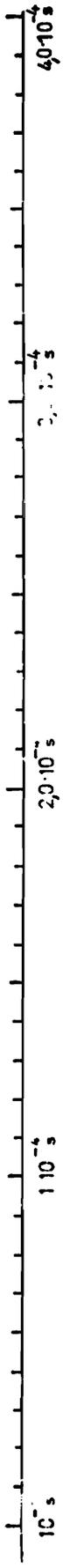


Bild 23

und
$$\underline{f}(t) = \underline{\hat{f}} \cdot e^{j\omega t}$$

eingesetzt, und das Zeitgesetz $e^{j\omega t}$ daraus gekürzt:

$$(-j\omega^3 \underline{A}_3 - \omega^2 \underline{A}_2 + j\omega \underline{A}_1 + \underline{A}_0) \underline{\hat{x}} = (\gamma + j\omega) \underline{\hat{f}}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}} &= \underline{\hat{x}}_r + j \underline{\hat{x}}_j \\ \underline{\hat{f}} &= \underline{\hat{f}}_r + j \underline{0} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$[\underline{A}_0 - \omega^2 \underline{A}_2 + j\omega (\underline{A}_1 - \omega^2 \underline{A}_3)] \cdot (\underline{\hat{x}}_r + j \underline{\hat{x}}_j) = \underline{\hat{f}}_r + j\omega \underline{\hat{f}}_r$$

Diese komplexe Matrixgleichung wird nun in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\left| \begin{array}{c|c} \underline{A}_0 - \omega^2 \underline{A}_2 & -\omega (\underline{A}_1 - \omega^2 \underline{A}_3) \\ \hline +\omega (\underline{A}_1 - \omega^2 \underline{A}_3) & \underline{A}_0 - \omega^2 \underline{A}_2 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \underline{\hat{x}}_r \\ \underline{\hat{x}}_j \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \underline{\hat{f}}_r \\ \omega \underline{\hat{f}}_r \end{array} \right|$$

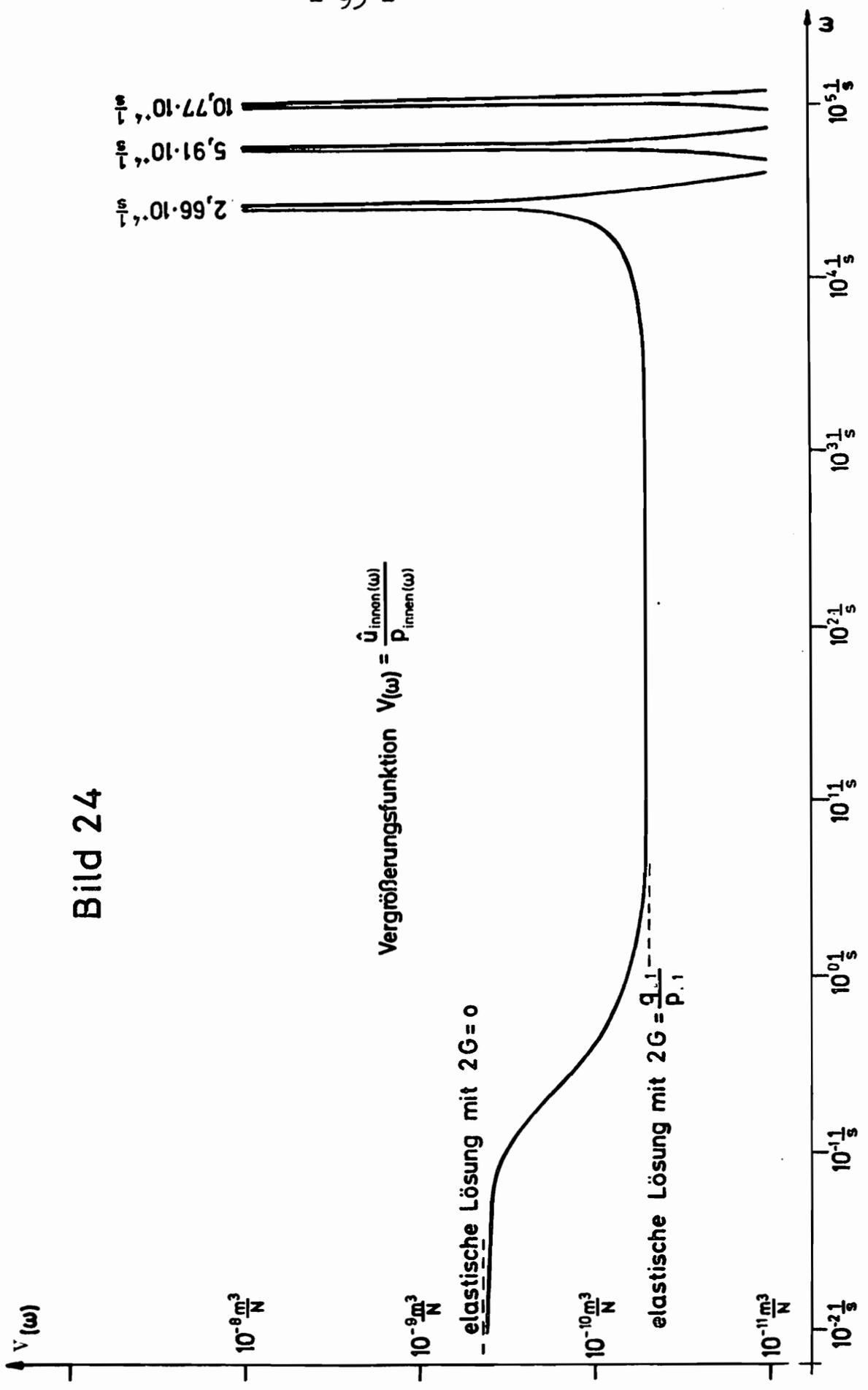
$$\underline{\hat{f}}_r = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad f_1 = f_2 = \gamma \cdot \frac{0,0508 \cdot \pi}{32} \frac{N}{m}$$

Für einen vorgegebenen Wert ω kann das letzte, reelle, lineare Gleichungssystem gelöst werden. Die Vergrößerungsfunktion

$$V(\omega) = \sqrt{\hat{x}_r^2 + \hat{x}_j^2}$$

ist in Bild 24 aufgetragen. Für kleine Werte von ω - also kleine Geschwindigkeiten - setzt der Dämpfer des Werkstoffmodells des Schubzustandes (MAXWELL-Flüssigkeit)

Bild 24



keinen Widerstand entgegen. Das entspricht bei einer elastischen Rechnung dem Gleitmodul $G=0$. Bei größerem ω etwa ab $\omega = 40 \frac{1}{s}$, sind die Geschwindigkeiten so groß, daß der Dämpfer als starrer Körper wirkt. Im Bereich von $\omega = 40 \frac{1}{s}$ bis $\omega = 1000 \frac{1}{s}$ ist der Einfluß der Massenträgheit noch so gering, daß die Lösung fast einer elastischen Rechnung, nun aber mit

$$2G = \frac{q_0}{p_0} = Q_0 \infty$$

sehr nahe kommt. Erst ab $\omega = 1000 \frac{1}{s}$ ist der Einfluß der Trägheitskräfte von merkbarem Einfluß auf die Ergebnisse.

8. Beispiel

Da bislang nur elastisches Stoffverhalten für den hydrostatischen Zustand angesetzt wurde, ist in diesem Beispiel mit den viskoelastischen Stoffkennwerten für den Kern:

Deviatorzustand: $\tau = 2G \epsilon$ HOOKE

hydrost. Zustand: $s + p_1 \dot{s} = q_1 \dot{e}$ MAXWELL

$$2G = 0,57777 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$q_1 = 2,06843 \cdot 10^9 \text{ N/s/m}^2$$

$$p_1 = \quad \quad \quad 1 \text{ s}$$

der Zylinder mit der Geometrie, Aufteilung und der veränderlichen Belastung von Beispiel 4 berechnet worden. Bild 25 gibt einige Ergebnisse an.

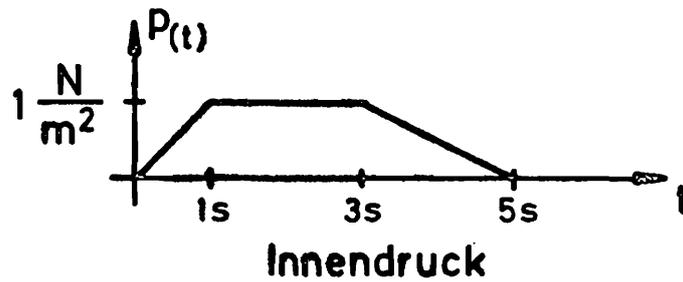
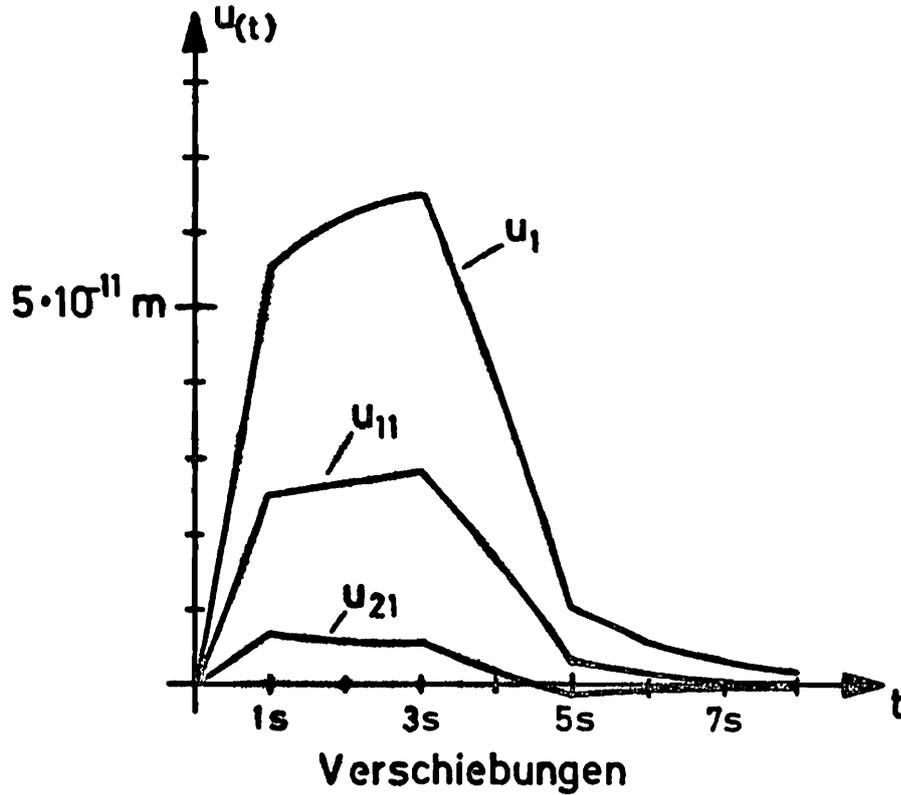


Bild 25

9. Beispiel

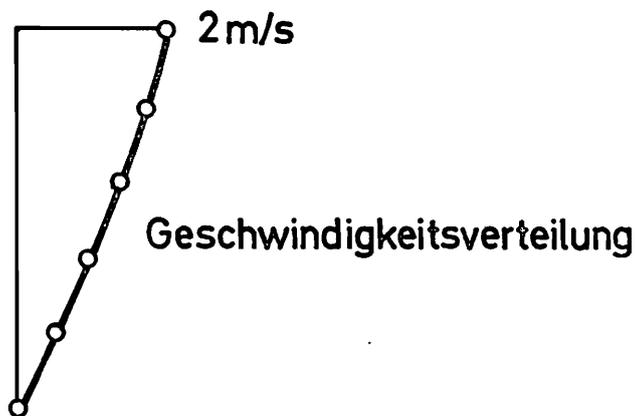
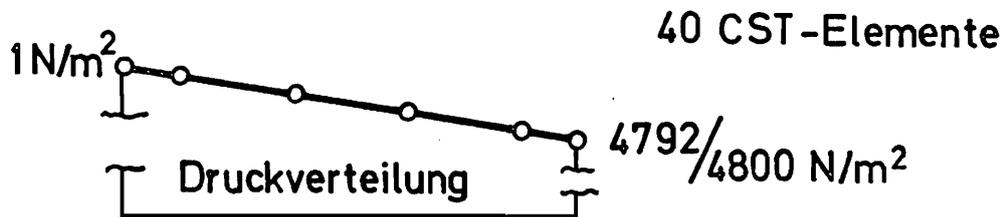
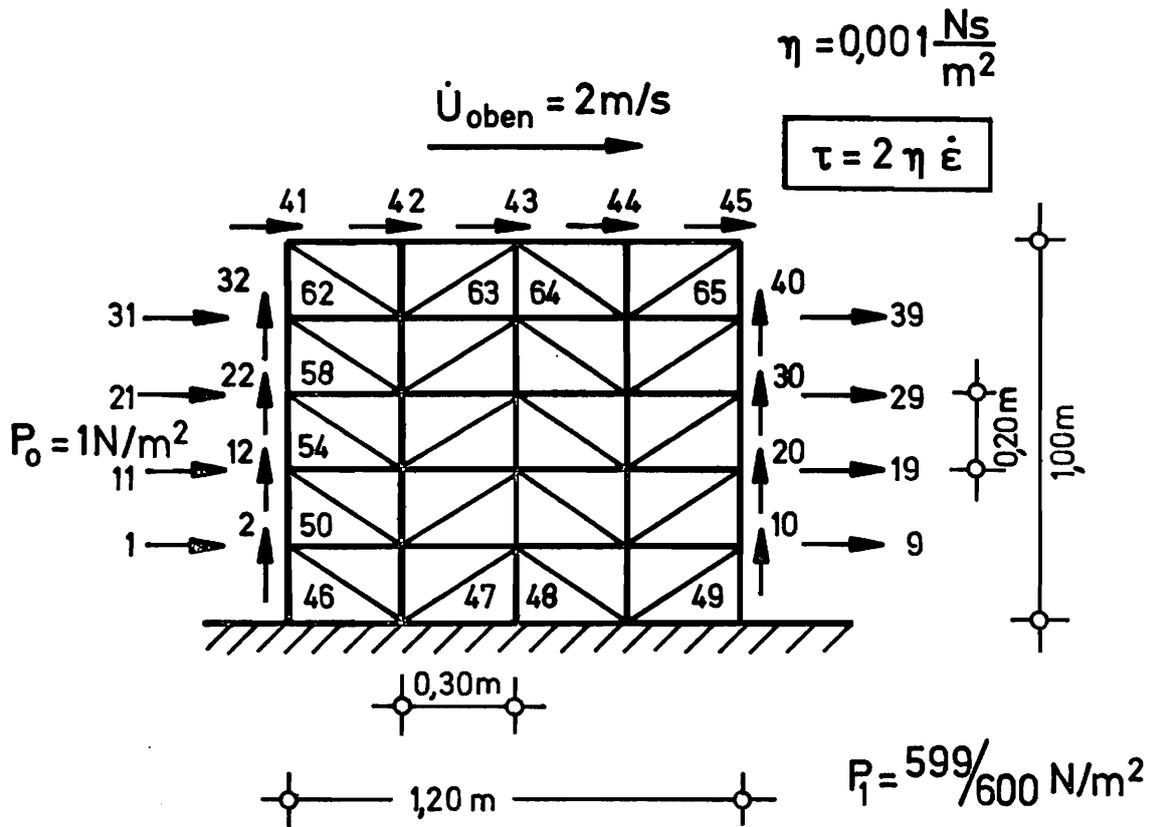
Eine inkompressible NEWTON'sche Flüssigkeit genügt dem Stoffgesetz:

$$\tau = 2\eta \dot{\epsilon} = Q_D \cdot \epsilon$$

$$Q_D = 2\eta \cdot \frac{d\dots}{dt}$$

Sind in einer Strömung die konvektiven Ableitungen gleich 0, so lassen sich diese Strömungen nach dem hier geschilderten Verfahren berechnen (Kapitel 3.3.2).

Beispiel: COUETTE - Strömung (stationäre Lösung)



— analytische Lösung
 ◦ FEM - Lösung

Bild 26

Für eine COUETTE-Strömung ist diese Bedingung erfüllt. Mit (117) folgt die Bewegungsgleichung des Elements für eine stationäre Strömung, also verschwindender Massenmatrix:

$$\begin{vmatrix} \underline{K_1} \cdot 2\eta & \underline{\alpha} \\ \underline{0} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{v} \\ s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{0} & \underline{\alpha} \\ \underline{\alpha}^T & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{v} \\ s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Leitet man die letzte Zeile der Matrixgleichung nach t ab, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \underline{K_1} \cdot 2\eta & \underline{\alpha} \\ \underline{\alpha}^T & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{v} \\ s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{1} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (183)$$

Da die Strömung stationär ist, entfällt auch die Zeitabhängigkeit. (183) ist die Bewegungsgleichung für eine lineare, stationäre Strömung. Diese lineare Gleichung entspricht formal derjenigen einer statischen Aufgabe. In Bild 26 ist die Elementaufteilung für eine laminare Strömung zwischen einer unteren ruhenden Platte und einer oberen - mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s bewegten - Platte aufgetragen. Am linken Rand beträgt der Druck 1 N/m² am rechten Rand 599/600 N/m². Aus diesen Druckverläufen sind in horizontaler Richtung Knotenkräfte ermittelt worden und als äußere Lasten aufgebracht worden. Die Verschiebungen am oberen Rand von 2 m/s sind als vorgegebene Verschiebungen eingeführt. Die vertikalen Verschiebungsfreiheitsgrade am linken und rechten Rand (2,12,22,32 und 10,20,30,40) sind zu Null gesetzt. Für jedes aus zwei Dreieckselementen gebildete Viereck ist ein sogenannter Druckfreiheitsgrad eingeführt (Freiheitsgrade 46 bis 65). Das numerische Ergebnis zeigt nur eine Druckänderung in horizontaler Richtung. Die numerische Lösung stimmt exakt mit der analytischen aus [28] überein.

Beispiel: ebene Spaltströmung (stationäre Lösung)

80 CST-Elemente

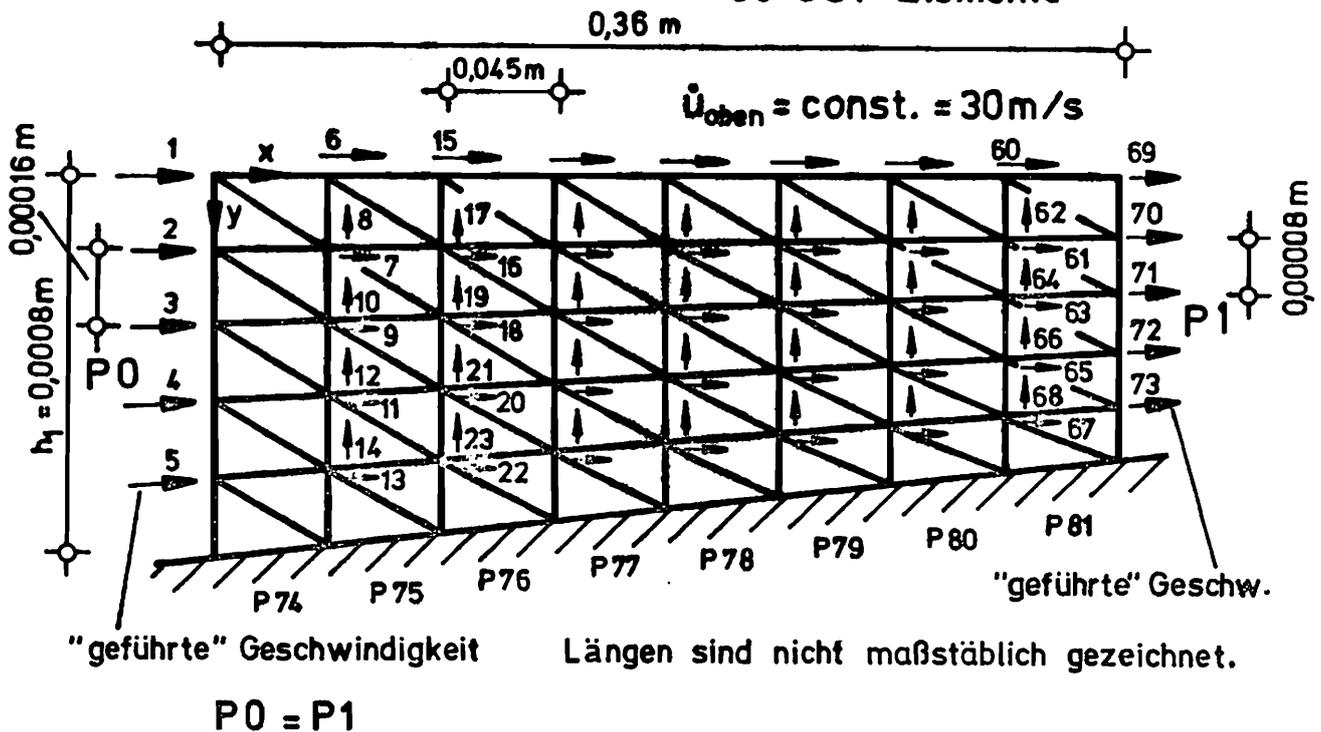


Bild 27

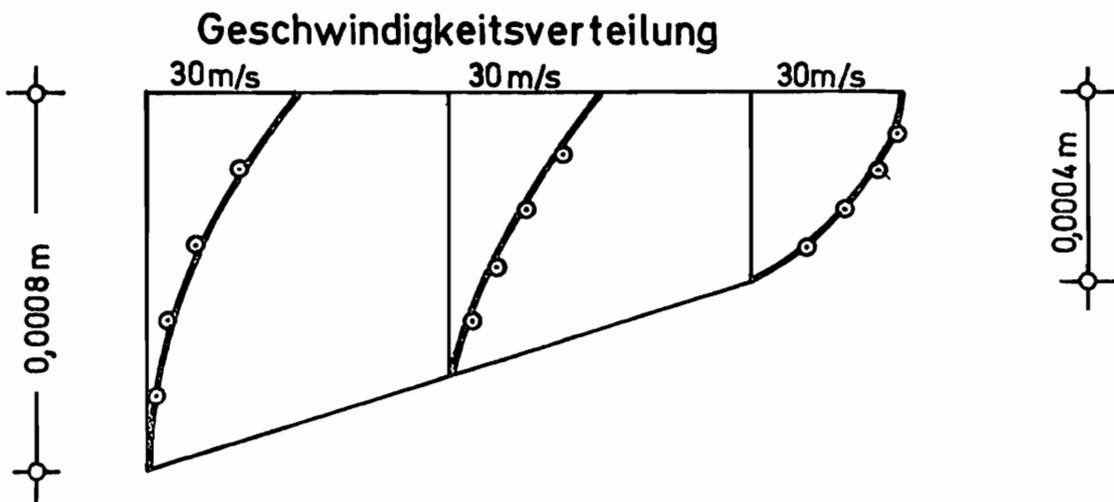
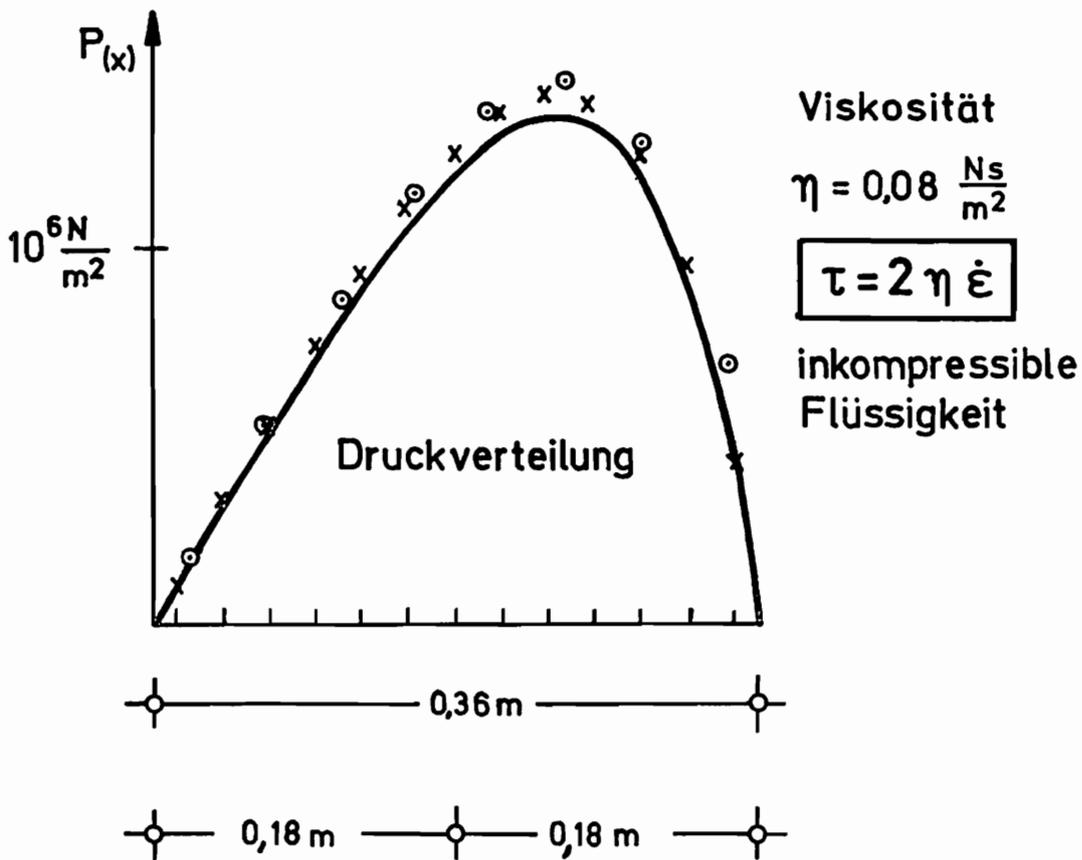
10. Beispiel

Für eine ebene Spaltströmung wurde ähnlich wie in Beispiel 9 die stationäre Lösung numerisch mit der FEM ermittelt. Bild 27 gibt die Abmessungen und die Elementaufteilung in 80 CST-Elemente an. Die Randbedingungen sind entsprechend Beispiel 9 eingebaut. In diesem Fall ist nur für jede lotrechte Elementreihe je ein Druckfreiheitsgrad eingeführt worden (74 - 81). In Bild 28 sind die Ergebnisse mit einer analytischen Lösung aus [28] verglichen. Für eine feinere Aufteilung in 130 Elemente ist eine weitere Berechnung angestellt worden. Diese Ergebnisse der Druckverteilung sind auch in Bild 28 aufgetragen.

Da mit dem hier angegebenen FE-Verfahren nur sehr simple Strömungsvorgänge berechenbar sind, haben die Beispiele 9 und 10 nur rein akademischen Wert.

Der Versuch des Verfassers diese Rechenmethode durch eine Iteration auch für Strömungen mit konvektiven Gliedern zu verwenden schlug fehl.

ebene Spaltströmung



- analytische - Lösung
- FEM - Lösung 80 Elemente
- x FEM - Lösung 130 Elemente

Längen sind nicht maßstäblich gezeichnet

Bild 28

11. Beispiel

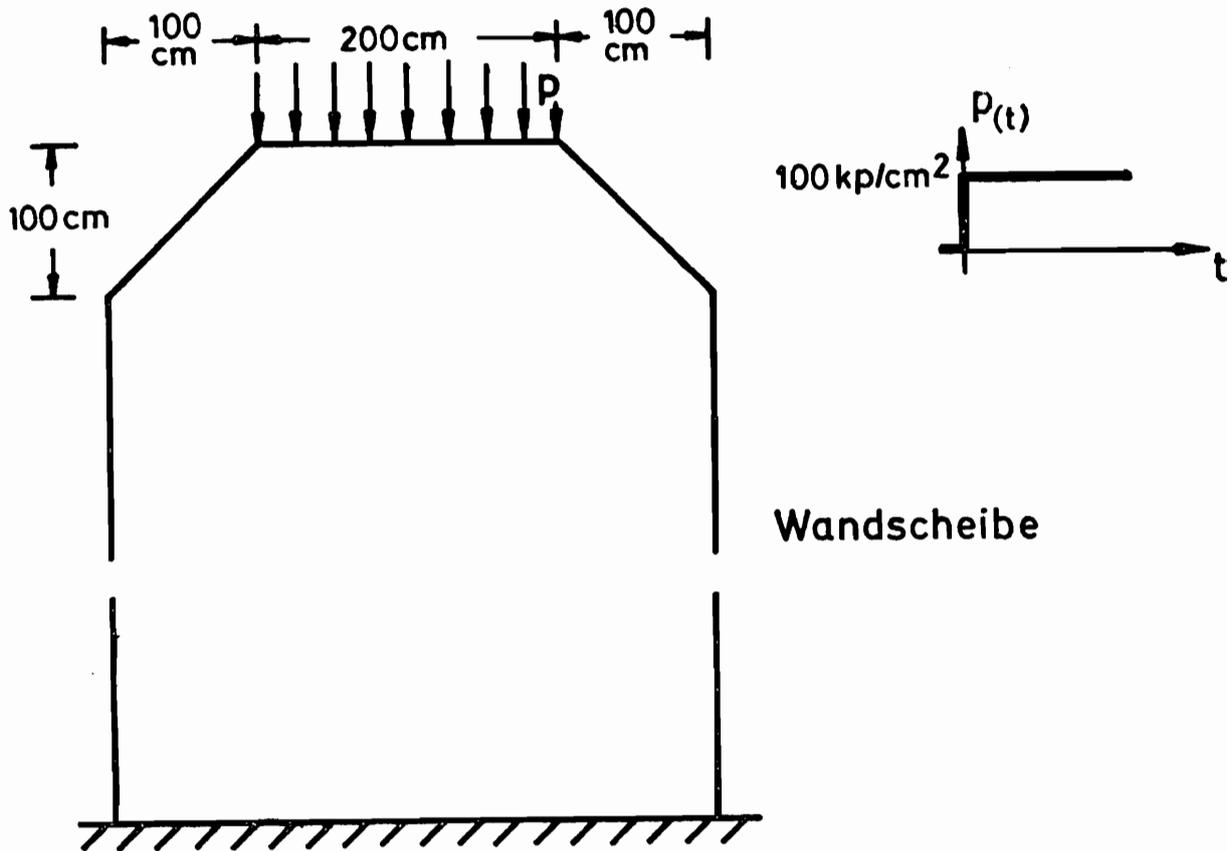


Bild 29

ebener Spannungszustand

Eine Wandscheibe (Bild 29) aus viskoelastischem Material wird durch eine konstante Spannung $p(t)$ belastet. Der zeitliche Verlauf der Auslenkungen und Spannungen ist zu berechnen. Die konstitutiven Beziehungen lauten:

hydrostatischer Zustand:

HOOKE-Körper

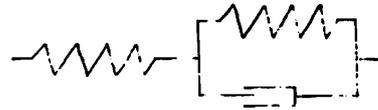
$$\sim \text{WZ} \checkmark$$

$$s = 3 \cdot \epsilon$$

$$K = 4 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Deviatorzustand:

3-Parameter-Körper



$$\tau + p_1 \dot{\tau} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}$$

$$p_1 = 16,6 \text{ Tage}$$

$$q_0 = 85.774,29 \text{ kp/cm}^2$$

$$q_1 = 4.285.714,29 \text{ kp} \cdot \text{Tage/cm}^2$$

Die obigen Stoffgrößen entsprechen den gebräuchlichen elastischen Konstanten:

$$t = 0 : E_{(0)} = 300.000 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu_{(0)} = 0,15$$

$$t = \infty : E_{(\infty)} = 117.997,3 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu_{(\infty)} \approx 0,17$$

Als Element ist diesmal das LST (Linear Strain Triangle) gewählt worden (Bild 30).

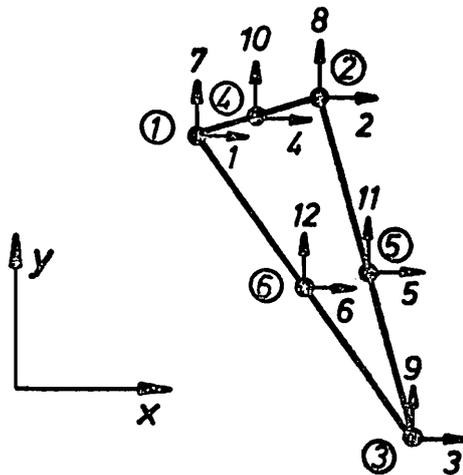


Bild 30 LST-Element

Aus Symmetriegründen genügt es nur eine Hälfte der Wandscheibe zu berechnen.

Die Aufteilung in FE und die Knotenfreiheitsgrade sind in Bild 31 eingezeichnet. Die Gesamtbewegungsgleichung nach (142) des Systems hat bei Vernachlässigung der Trägheitsterme die Gestalt:

$$\underline{K}_1 \underline{Q1} \underline{x}_{(t)} + \underline{K}_2 \underline{Q2} \underline{x}_{(t)} = \underline{PL} \underline{f}_{(t)} \quad (184)$$

$$\underline{Q1} = \underline{Q}_D^2 \underline{P}_H = q_0^2 + 2q_0 q_1 \frac{d\dots}{dt} + q_1^2 \frac{d^2\dots}{dt^2}$$

$$\underline{Q2} = \underline{Q}_D \underline{Q}_H \underline{P}_D = 3K [q_0 + (q_1 + p_1 q_0) \frac{d\dots}{dt} + p_1 q_1 \frac{d^2\dots}{dt^2}]$$

$$\underline{PL} = \underline{P}_D (\underline{P}_D \underline{Q}_H + 2 \underline{Q}_D \underline{P}_H) = 3K + 2q_0 + (6K p_1 + 2p_1 q_0 + 2q_1) \cdot \frac{d\dots}{dt} + p_1 (3K p_1 + 2q_1) \frac{d^2\dots}{dt^2}$$

Für (184) sind zum Zeitpunkt $t = + 0$ die Anfangswerte \underline{x}_0 und $\dot{\underline{x}}_0$ zu bestimmen (Kapitel 8):

Anfangsauslenkung:

$$\underline{P}_{H_0} = 1 \quad ; \quad \underline{Q}_{H_0} = 3K$$

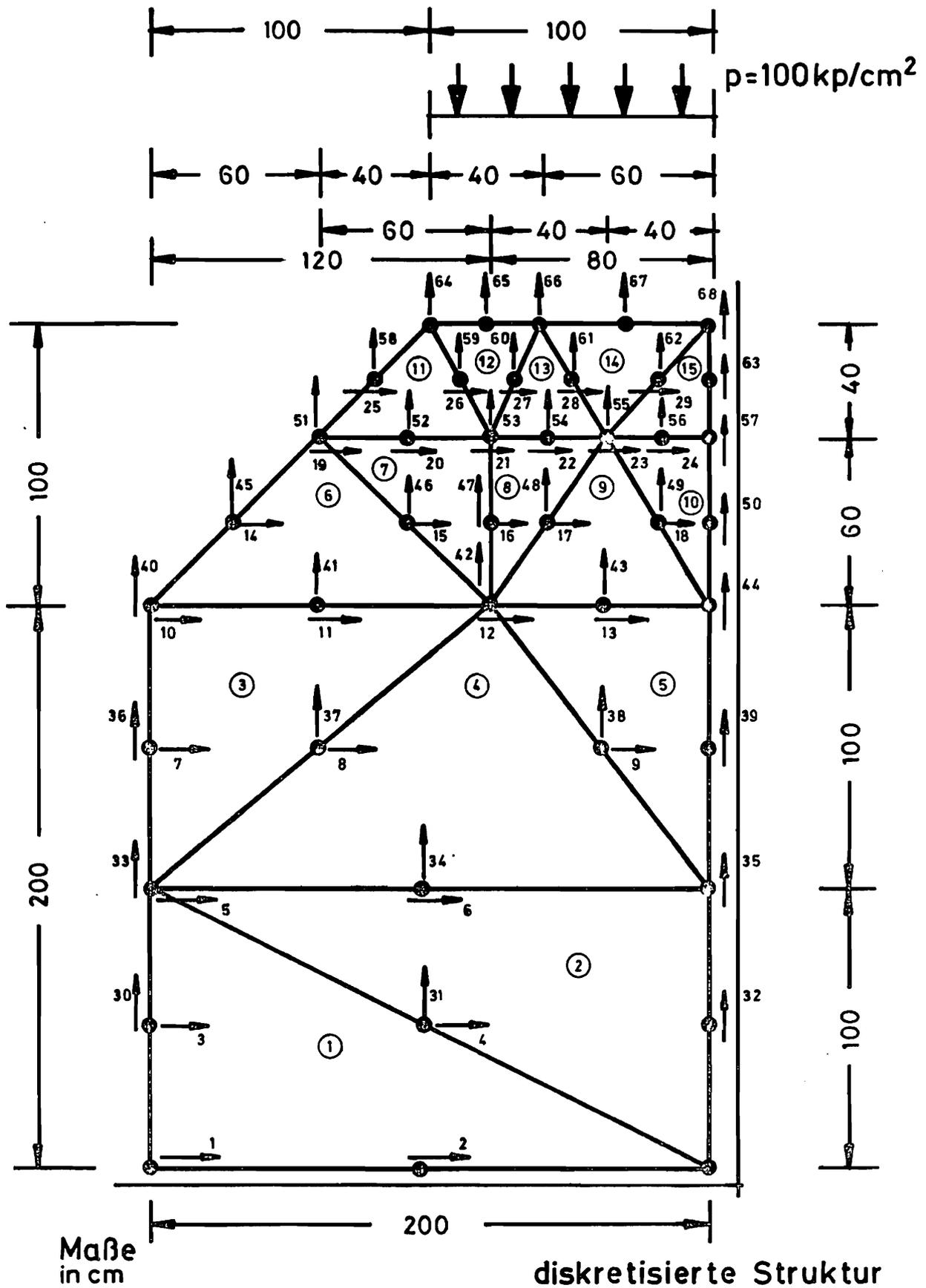
$$\underline{P}_{D_0} = 1 \quad ; \quad \underline{Q}_{D_0} = \frac{q_1}{p_1} \quad (\text{siehe Bild 2})$$

$$\underline{Q1}_0 = \frac{q_1^2}{p_1^2}$$

$$\underline{Q2}_0 = 3K \frac{q_1}{p_1}$$

$$\underline{PL}_0 = 3K + 2 \frac{q_1}{p_1}$$

$$\left(\underline{K}_1 \frac{q_1^2}{p_1^2} + \underline{K}_2 \cdot 3K \frac{q_1}{p_1} \right) \underline{x}_0 = (3K + 2 \frac{q_1}{p_1}) \underline{f}_0 \quad (185)$$



68 Freiheitsgrade
15 Elemente

Bild 31

Anfangsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{H_0} &= 1 ; & \dot{Q}_{H_0} &\rightarrow \infty \\ \dot{P}_{D_0} &= 1 ; & \dot{Q}_{D_0} &= \frac{q_1}{1 - \frac{p_1 q_0}{q_1}} \end{aligned} \quad (\text{siehe (179)})$$

$$(\underline{K}_1 \dot{Q}_{D_0}^2 + \underline{K}_2 \dot{Q}_{D_0} \cdot \dot{Q}_{H_0}) \cdot \dot{x}_0 = (\dot{Q}_{H_0} + 2 \dot{Q}_{D_0}) \cdot \underline{f}_0$$

Division durch \dot{Q}_{H_0} und anschließend Grenzübergang mit $\dot{Q}_{H_0} \rightarrow \infty$

ergibt: $\underline{K}_2 \dot{Q}_{D_0} \dot{x}_0 = \underline{f}_0$ (186)

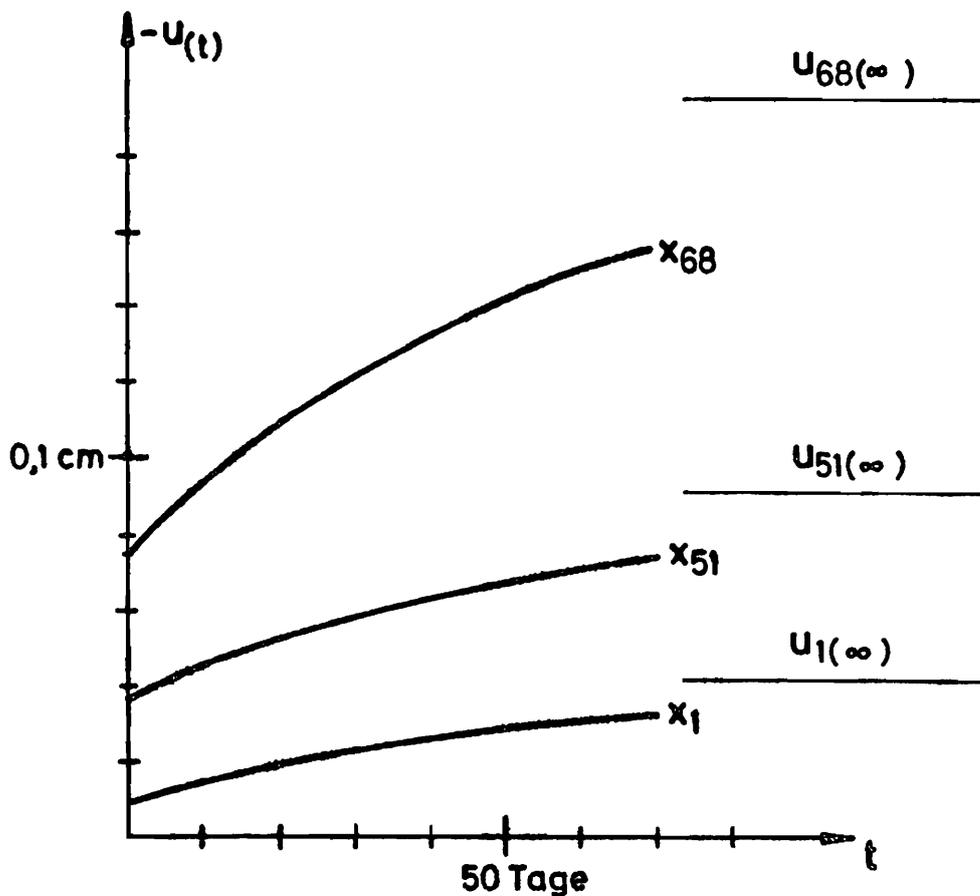


Bild 32 Verschiebungen

Durch Lösen der linearen Gleichungen (135) und (136) werden die Anfangswerte bestimmt. Die Matrizendifferentialgleichung zweiter Ordnung (184) ist mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren für eine Schrittweite von $\Delta t = 1$ Tag integriert worden. Einige Verschiebungsverläufe sind in Bild 32 aufgetragen.

Verschiebung 500fach
überhöht dargestellt

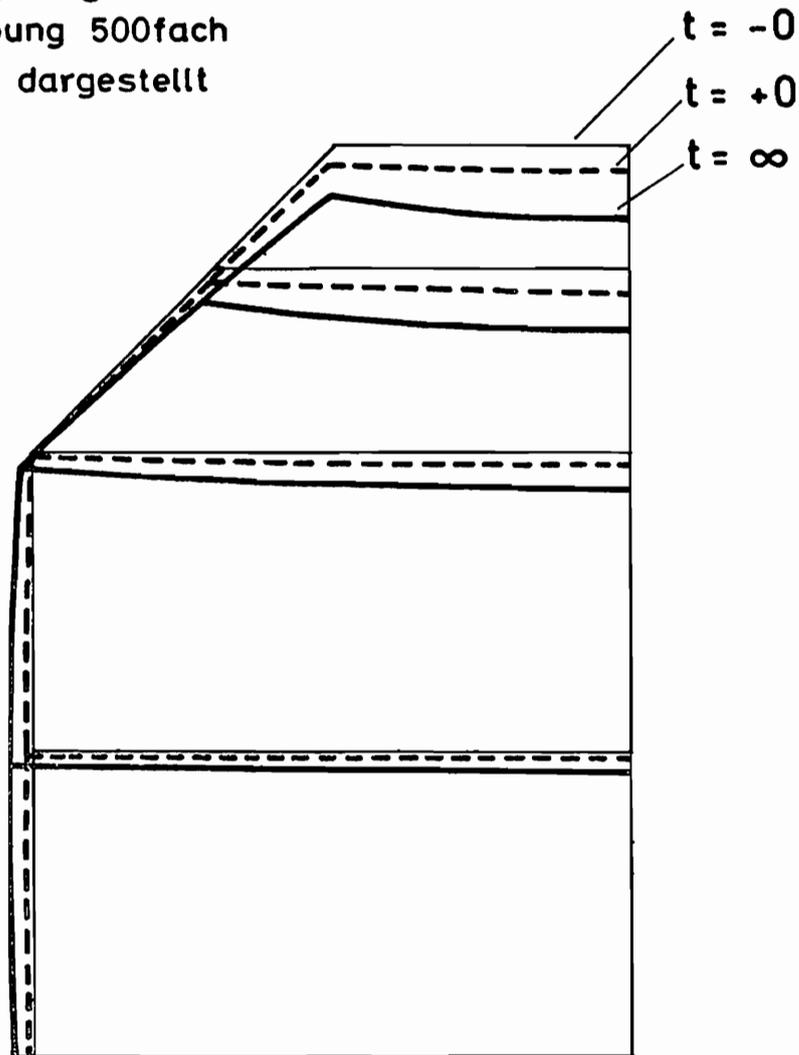


Bild 33 Anfangs- und Endauslenkung

Eine Berechnung des Endzustandes wurde nach der in Kapitel 9 beschriebenen Methode durchgeführt.

Die Bewegungsgleichung lautet für diesen Fall:

$$P_{H\infty} = 1 \quad ; \quad Q_{H\infty} = 3K$$

$$P_{D\infty} = 1 \quad ; \quad Q_{D\infty} = \frac{1}{f_{(\infty)}} = q_0 \quad (\text{siehe Bild 2})$$

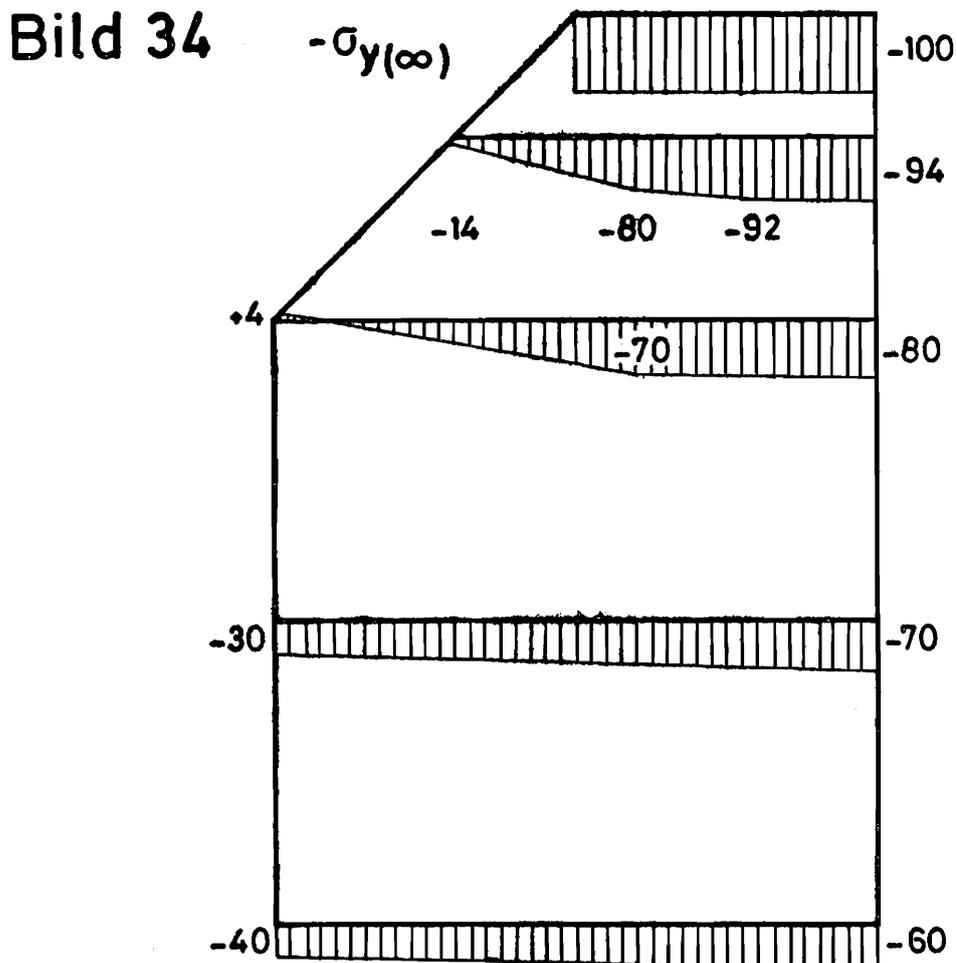
$$Q1_{\infty} = q_0^2$$

$$Q2_{\infty} = 3K q_0$$

$$PL_{\infty} = 3K + 2q_0$$

$$(\underline{K}_1 q_0^2 + \underline{K}_2 \cdot 3 \cdot K \cdot q_0) \underline{x}_{\infty} = (3K + 2q_0) \cdot f_{\infty} \quad (187)$$

Die Verschiebungen zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = \infty$ sind in Bild 33, der Spannungsverlauf $-\sigma_y(\infty)$ in Bild 34 wiedergegeben.



Für eine langsam ansteigende Belastung und anschließende Entlastung $p(t)$ entsprechend dem in dem unteren Teil von Bild 35 eingetragenen Verlauf ist eine weitere Rechnung durchgeführt worden. Auch diesmal ist die Bewegungsgleichung mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren bei einer Schrittweite von $\Delta t = 1$ Tag integriert worden. Die berechnete, vertikale Verschiebung des oberen mittleren Punktes x_{68} ist ebenfalls in Bild 35 eingetragen. Von diesem Verschiebungsverlauf der Scheibe ist ein zeitgeraffter Trickfilm angefertigt worden.

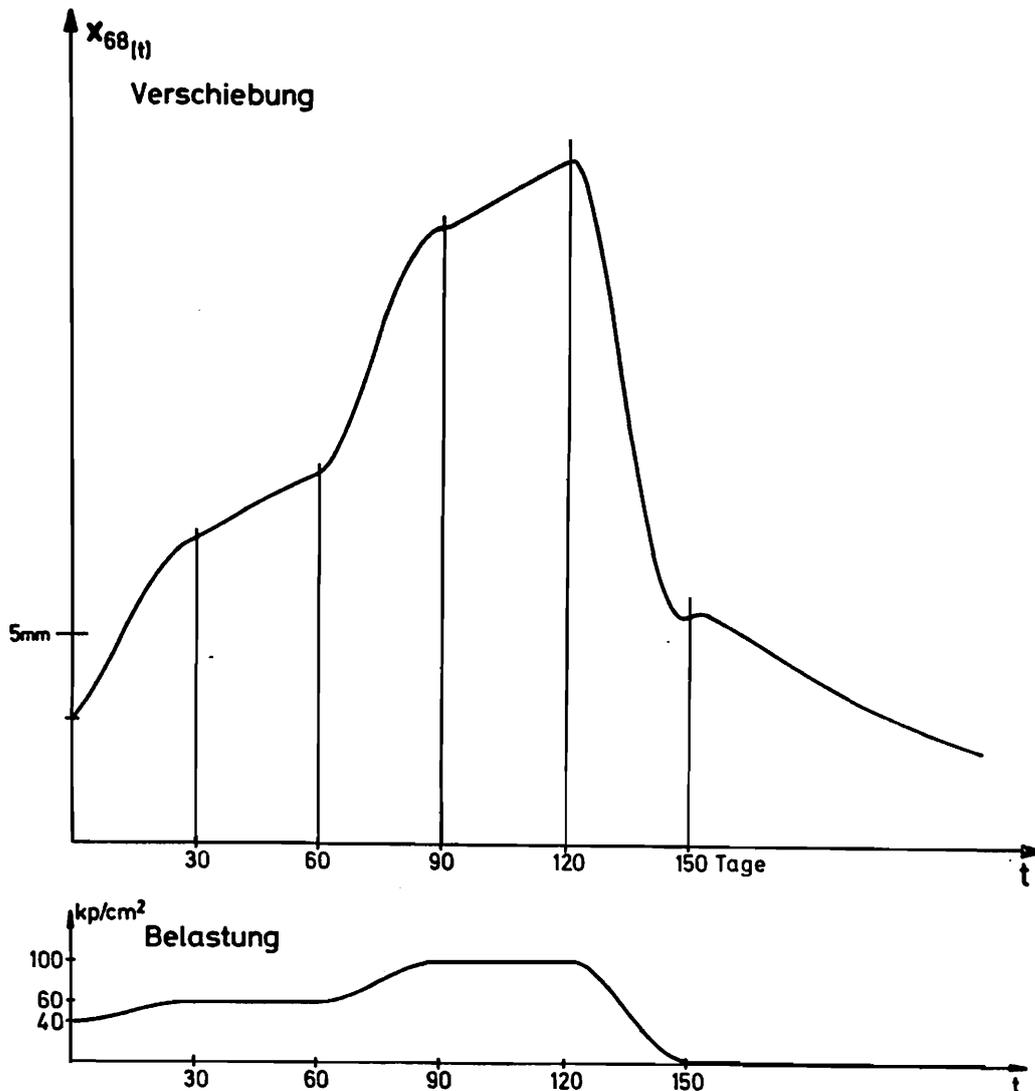


Bild 35

12. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das sogenannte Weggrößenverfahren der Finiten Element Methode für linear viskoelastisches Werkstoffverhalten und kleine Verzerrungen angewandt und für die numerische Berechnung aufbereitet. Das isotrope, kontinuumsmechanische Problem, das durch partielle Differentialgleichungen in den Ortskoordinaten x , y und z und der Zeitkoordinate t beschrieben ist, wird in den Ortskoordinaten durch FE diskretisiert. Diese Elementgleichungen sind als Matrizendifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizientenmatrizen formuliert. Die globale Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ergibt sich ebenfalls als lineare Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen. Diese Matrizen für die Gesamtstruktur lassen sich mit den gebräuchlichen Algorithmen der FEM aufstellen. Nach dem Aufstellen der Gesamtbewegungsgleichung verbleibt noch die Lösung der Matrizendifferentialgleichung als Anfangswertproblem in der Zeitkoordinate.

Es können beliebige FE (compatible model) für das hier vorgestellte Verfahren verwendet werden. Es eignet sich zur Berücksichtigung beliebiger, linear viskoser Stoffgesetze. Auch für inkompressibles Stoffverhalten kann eine Berechnung durchgeführt werden. Die konstitutiven Beziehungen sind für die Gestaltsänderung und die Volumenänderung durch Werkstoffmodelle aus linearen Federn und viskosen Dämpfern charakterisiert.

Schwingungs-, Kriech- und einfache Strömungsvorgänge lassen sich mit dem hier vorgestellten FE-Verfahren berechnen. Die Gleichungen für den ebenen Verzerrungszustand und ebenen Spannungszustand, sowie für den dreidimensionalen Fall sind angegeben. Ebenso sind die Gleichungen für inkompressibles Stoffverhalten abgeleitet.

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 3**