



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Knut Schwarze

Einfluß von  
Querschnittsverformungen bei  
dünnwandigen Stäben mit stetig  
gekrümmter Profilmittellinie

Heft Nr. 5



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Knut Schwarze**

**Einfluß von Querschnittsverformungen  
bei dünnwandigen Stäben  
mit stetig gekrümmter Profilmittellinie**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 5**  
**Februar 1976**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme des Referates. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich für die Übernahme des Korreferates.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich

Tag der Einreichung: 24.10.75

Tag der mündlichen Prüfung: 19. 1.76

© 1976 Dr.-Ing. Knut Schwarze  
4630 Bochum, Langendreerstraße 69  
Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Verhalten von dünnwandigen geraden und gekrümmten Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie unter statischen Lasten. Durch kinematische Hypothesen über die Wanddicke und Verschiebungsfunktionen entlang der Profilmittellinie wird das dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales entlang der Stabachse reduziert. Es wird ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem angegeben, welches die Vorgabe von beliebigen Freiheitsgraden für Querschnittsverformungen zuläßt. Als Beispiele werden geschlossene und geschlitzte Rohre gerechnet und die Ergebnisse mit denen aus bekannten Theorien verglichen.

## Summary

In the present work the problem of thin-walled straight and plane curved rods with continuously curved profile line under static load is treated. Kinematic hypotheses across the wall thickness are introduced and displacement functions along the profile line are chosen. This reduces the three-dimensional problem to a one-dimensional problem along the rod axis. The solution can be formulated in a system of ordinary differential equations, which is valid for arbitrary prescribed degrees of freedom of the cross-section deformation. Calculations are presented for closed and slitted tubes. The results are compared with known theories.

## Inhaltsübersicht

	Seite
Zusammenstellung häufig verwendeter Bezeichnungen	3
1. Einführung	6
1.1 Problemstellung und Literaturüberblick	6
1.2 Voraussetzungen	10
1.3 Allgemeine Vorgehensweise	11
2. Aufstellung des allgemeinen Differentialgleichungssystems	12
2.1 Koordinatensysteme	12
2.1.1 Globales System	13
2.1.2 Lokales System der Stabachse	14
2.1.3 Lokales System der Mittelfläche	16
2.1.4 Lokales System der Wandung	19
2.2 Beschreibung des verformten Zustandes	22
2.2.1 Verschiebungen	22
2.2.2 Verzerrungen	24
2.2.3 Spannungen	26
2.3 Herleitung des Differentialgleichungssystems	28
2.3.1 Übergang von der Tensor- zur Matrizenschreibweise	28
2.3.2 Produktansätze für die Verschiebungen der Mittelfläche und Verdrehung der Normalen	29
2.3.3 Virtuelle Verschiebungen	32
2.3.4 Virtuelle Arbeiten	33
2.4 Überlegungen zur Lösung des Differentialgleichungssystems	37
2.5 Varianten zu den kinematischen Hypothesen für die Verschiebungen	39
2.5.1 Normale bleibt Normale	39
2.5.2 Vernachlässigung der Mittelflächen- dehnung in Richtung der Profilmittel- linie	41

	Seite
3. Differentialgleichungen für Sonderfälle und Beispiele	43
3.1 Der gerade Stab	43
3.1.1 Geometrische Größen	43
3.1.2 Kreisquerschnitt	45
3.1.3 Physikalische Spannungen und Schnittgrößen	46
3.1.4 Ansätze für die Formfunktionen	47
3.1.5 Numerische Auswertung für einige Belastungen	48
3.1.5.1 Biegeprobleme	48
3.1.5.2 Bimomentenbelastung	62
3.1.6 Geschlitzter Kreisquerschnitt	74
3.2 Der eben gekrümmte Stab	80
3.2.1 Geometrische Größen	80
3.2.2 Aufstellung spezieller Differential- gleichungen	83
3.2.2.1 Allgemeine Biegeprobleme	83
3.2.2.2 Biegung in der Krümmungs- ebene der Stabachse	88
3.2.2.3 Bekannte Stabtheorien	93
3.2.2.4 Biegung quer zur Krümmungs- ebene der Stabachse	100
3.2.2.5 Numerische Ergebnisse und Vergleiche	104
4. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen	122
Literaturverzeichnis	125

Zusammenstellung häufig verwendeter Bezeichnungen

Symbol	Bedeutung
$\sim$	Kennzeichnung eines Vektors und einer Matrix
$\underline{e}_i$	Basisvektoren des globalen Koordinatensystems
$\underline{g}_i$	begleitendes Dreibein der Stabachse
$\underline{Q}_i$	Basisvektoren der Mittelfläche
$\underline{g}_i$	Basisvektoren der Wandung
$\theta^1$	Koordinate in Richtung der Stabachse
$\theta^2$	Koordinate in Richtung der Profilmittellinie
$\theta^3$	Koordinate rechtwinklig auf der Mittelfläche
$\underline{u}$	Verschiebung der Kontinuumpunkte
$u_i$	$i = 1, 2, 3$ physikalische Komponenten der Mittelflächenverschiebung
$u_u$	Verdrehung der Normalen um die Profilmittellinie
$\underline{u} = \underline{\eta} \underline{V}$	Summe von Produktansätzen für die Verschiebungen
$\underline{V} = \underline{V}(\theta^1)$	Verschiebungsfunktionen entlang der Stabachse veränderlich
$\underline{\eta} = \underline{\eta}(\theta^2)$	Ansatzfunktionen entlang der Profilmittellinie veränderlich
$\underline{v}$	Querschnittsfunktionen von geometrischen Größen und den Ansatzfunktionen $\underline{\eta}$ abhängig

Symbol	Bedeutung
$\underline{K}$	generalisierte Schnittgrößen am Stab
$\underline{P}$	Lastvektor der Mittelfläche
$\underline{\varepsilon}, \underline{\xi}$	Spaltenmatrix mit vier Spannungen bzw. Verzerrungen
$\underline{E}$	spezielle Elastizitäts-Matrix
$E, G, \mu$	Elastizitäts-, Gleitmodul, Querkontraktionszahl
$\delta$	virtuelle Veränderung, erste Variation
für die Sonderfälle	
$\varphi = \frac{\theta^2}{r}$	Bogenmaß der kreisförmigen Profilmittellinie
$\psi = \frac{\theta^2}{R}$	Bogenmaß der kreisförmigen Stabachse
$\alpha = 1 + \frac{r}{R} \sin \varphi$ $\beta = 1 + \frac{r + \theta^3}{R} \sin \varphi$ $\eta = 1 + \frac{\theta^3}{r}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Abkürzungen für Ausdrücke} \\ \text{geometrischer Größen} \end{array}$
$h$	Dicke der Wandung
$A$	Querschnittsfläche
$J + 3J_h$	axiales Trägheitsmoment des Kreisringquerschnittes
	mit $J = \pi r^3 h \gg J_h = \pi r \frac{h^3}{12}$
$\sigma_{ik}$	physikalische Spannungen
$N, T, B$	Normalkraft, Torsionsmoment, Bimoment

Symbol	Bedeutung
$M, Q$	Biegemoment und Querkraft am geraden Stab
$M_E, Q_E$	Biegemoment und Querkraft aus Belastungen in der Krümmungsebene der Stabachse
$M_R, Q_R$	Biegemoment und Querkraft aus Belastungen quer zur Krümmungsebene der Stabachse

Allgemein gebräuchliche Bezeichnungen, z. B. diejenigen aus der tensoriellen Schreibweise der Schalentheorie, sind hier nicht gesondert aufgeführt. Außerdem wurde in dieser Aufstellung auf die Erklärung von Größen, welche nur an einzelnen Stellen der vorliegenden Arbeit auftreten und solchen, die nur als Zwischenbezeichnungen bei den Herleitungen benutzt werden, verzichtet. Alle Bezeichnungen sind aber im Text ausführlich beschrieben.

Der Beginn der Arbeit ist in der üblichen Tensorschreibweise dargestellt. Zur Herleitung des Differentialgleichungssystems wurde ein Übergang zu einer Matrizenschreibweise vollzogen. Diese Darstellung benutzt spezielle, für das vorliegende Problem definierte, Matrizen. Der Leser muß also zum Verständnis der Zusammenhänge die Definitionen der Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2 beachten.

## 1. Einführung

### 1.1 Problemstellung und Literaturüberblick

Allgemein verlangt man von einer Stabtheorie, daß sie die Lösung des an sich dreidimensionalen Problems, unter der Voraussetzung, daß die Abmessungen des zu betrachtenden Körpers senkrecht zur Stabachse klein sind gegenüber denen in Richtung der Stabachse, auf ein eindimensionales reduziert.

Um die obengenannte Reduzierung zu erreichen, bedient man sich verschiedener, insbesondere geometrischer Hypothesen, welche die Freiheitsgrade der Verformungen eines Punktkontinuums einschränken. Die bekannteste und wohl am meisten verwendete ist die Bernoulli-Hypothese: die Querschnitte bleiben eben und rechtwinklig zur verformten Stabachse. Mit Hilfe dieser Hypothese und weiterer Annahmen über den Spannungszustand lassen sich alle Biegeprobleme der Stäbe als gewöhnliche Differentialgleichungen formulieren. Obwohl man in dieser Theorie die Schubverformungen nicht erfassen kann, liefert sie in vielen technisch auftretenden Fällen genügend genaue Ergebnisse. Sollten in Grenzfällen die Schubverformungen nicht mehr zu vernachlässigen sein, so kann man ihren Einfluß durch Gleichgewichtsbetrachtungen abschätzen. In solchen Fällen sollte man aber nicht vergessen, die Zulässigkeit der Bernoulli-Hypothese zu prüfen. Häufig weichen in der Literatur angegebene Lösungen für schwach gekrümmte Stäbe wenig von der Bernoulli-Hypothese ab, ohne daß dieses einen merklichen Einfluß auf die numerischen Lösungen hat und deshalb auch nicht besonders erwähnt wird.

Die Bernoulli-Hypothese versagt bei Torsionsproblemen. Die Aufnahme der Torsionsmomente geschieht vorwiegend durch Schubspannungen und diese bedingen im allgemeinen eine Verwölbung des Querschnittes. Die Verwölbung ist streng

genommen eine Querschnittsverformung, welche aber in der bisherigen Literatur eingehend untersucht wurde und deren Einfluß auf das Tragverhalten der Stäbe damit hinreichend bekannt ist. Erwähnt sei hier nur, daß zur Berechnung der Verwölbungen je nach Querschnittsart sehr unterschiedliche Hypothesen gemacht werden. So ist der Einfluß der Verwölbung bei dünnwandigen Querschnitten wesentlich bedeutsamer als bei Vollquerschnitten. In Berechnungen nach der vorliegenden Arbeit können die Verwölbungen leicht berücksichtigt werden.

Eine weitere Möglichkeit der Querschnittsverformungen ergibt sich, wenn man Verschiebungen der Querschnittspunkte gegeneinander in der Querschnittsebene zuläßt. Es ist anschaulich klar, daß diese Art der Querschnittsveränderung, wenn überhaupt, nur bei dünnwandigen Querschnitten merklichen Einfluß auf das Tragverhalten der Stäbe haben kann und sich in diesen Fällen durch die Veränderung der Profilmittellinie beschreiben läßt.

Nach den bisherigen Veröffentlichungen, welche diese Veränderungen der Profile bei dünnwandigen Stäben untersuchen, muß man zweimal zwei Fälle unterscheiden. Erstens zwischen geraden und gekrümmten Stabachsen und zweitens zwischen polygonförmigen und stetig gekrümmten Profilmittellinien. Die wohl älteste Arbeit auf diesem Gebiet ist 1911 von Kármán [1] erschienen. Sie beschreibt Querschnittsverformungen von Rohren mit kreisförmig gekrümmter Stabachse, belastet durch Randlasten in der Krümmungsebene. Kármán löst das Problem mit Hilfe des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit. Er beschreibt die Querschnittsverformungen durch einen Reihenansatz entlang der Profilmittellinie. Die freien Parameter

dieses Ansatzes bestimmt er so, daß die Formänderungsarbeit am Stabelement ein Minimum annimmt. Damit ergeben sich die Parameter der Querschnittsdeformationen proportional zum Biegemoment und ermöglichen die Berechnung des Rohres mit Hilfe eines reduzierten Trägheitsmomentes. Der Reduktionsfaktor ist nur abhängig von der Wanddicke, dem Durchmesser des Rohres und der Krümmung der Stabachse. Dieses Verfahren liefert zwar sehr einfache Formeln, es kann aber folgende u. U. wesentliche Einflüsse nicht berücksichtigen: 1. Randbedingungen der Querschnittsverformungen, 2. allgemeine Änderung der Querschnittsverformungen entlang der Stabachse, 3. Schnittgrößenermittlung unter Berücksichtigung der Querschnittsverformungen bei statisch unbestimmten Systemen.

Karl [2] hat das Verfahren von Kàrmàn erweitert, indem er stark gekrümmte Rohre zuläßt, die Querkontraktionen berücksichtigt und das Problem der Belastung quer zur Krümmungsebene anschneidet. Auf dem Gedanken von Kàrmàn aufbauend, stellt Berg [3] genauere Spannungsanalysen an. Am stark gekrümmten Träger stellt er fest, daß Querschnittsverformungen am Vollquerschnitt (Rechteck) praktisch keinen Einfluß haben, am I- und Kreisring-Profil hingegen berücksichtigt werden müssen.

Mit einigen Vereinfachungen führen Klöppel/Friemann [4] die von Karl [2] angeschnittene Frage der Belastung quer zur Krümmungsebene numerisch weiter aus und machen einen Versuch dazu. Sie stellen gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung fest, obwohl auch hier die obengenannten Bedenken zur Theorie von Kàrmàn angemeldet werden müssen. Praktische Verfahren zur näherungsweise Berechnung von dünnwandigen Stäben mit zur Biegungsebene flach liegenden Querschnittsteilen findet man im Buch von Kollàr [B1].

In der vorliegenden Arbeit soll nun das Problem der Quer-

schnittsverformungen für eben gekrümmte Stäbe mit stetig gekrümmten Profilmittellinien formuliert werden. Statt des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit bei Kármán wird hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen benutzt. Der wesentliche Unterschied zur Kármán-Theorie besteht aber darin, daß hier die verschwindende virtuelle Arbeit für das ganze System betrachtet wird, während Kármán die Formänderungsarbeit nur für ein Stabelement zum Minimum macht. Die obengenannten Einschränkungen zur Kármán-Theorie entfallen damit.

Prinzipiell ist auch das verallgemeinerte Variationsverfahren von Wunderlich [13] auf die vorliegende Problemstellung anzuwenden. Die vorliegende Arbeit gibt mit der obengenannten Methode ein übersichtliches Verfahren für dünnwandige Stäbe an.

Die Querschnittsverformungen haben beim geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt auf das Tragverhalten im allgemeinen keinen merklichen Einfluß. Eine Ausnahme bildet eine Belastungsart, welche mit dem aus der Theorie der dünnwandigen Stäbe bekannten Bimoment verglichen werden kann. Lösungen hierfür sind aus der Schalentheorie bekannt, z. B. Wunderlich [5]. Diese Lösungen sind in der Theorie der vorliegenden Arbeit enthalten.

Die Kármánschen Gedanken sind von Dziewolski [6] auf eben gekrümmte Stäbe mit Kastenquerschnitt übertragen worden. Mit genaueren Theorien für eben gekrümmte Stäbe mit polygonförmiger Profilmittellinie sind bisher nur einzelne Querschnittsformen untersucht worden. So z. B. von Säckel [7] und Cornelis/Cartilier [8] Kastenquerschnitte und von Friemann [9] I-Querschnitte. Eine Theorie für eben gekrümmte Stäbe mit allgemeinen Querschnittsformen versucht Bejlin [10], indem er die Querschnittsverformungen infolge des Spannungszustandes aus der Theorie der gekrümmten Stäbe mit unverform-

barem Profil bestimmt. Die Ergebnisse sind aber auch sehr stark von der Art und Form der Querschnitte abhängig und werden nur für das I-Profil ausgewertet.

Etwas allgemeiner und dennoch überschaubar kann man das Tragverhalten gerader Stäbe mit polygonförmigem Querschnitt beschreiben. Die Grundgedanken für diese Theorien findet man bei Wlassow [B2]. Eine allgemeine Theorie gibt Sedlacek [B3] in Matrixschreibweise an. Eine näherungsweise Berücksichtigung der Schubdeformationen findet man bei de Boer [11]. Uhrig [15] untersucht auf etwa gleiche Art Schwingungen von mehrfach zusammenhängenden Kastenquerschnitten. In der Dissertation von Kreuzinger [12] werden alle Einflüsse noch genauer untersucht. Alle Arbeiten zeigen, daß bei den geraden Stäben mit polygonförmiger Profilmittellinie die Querschnittsdeformationen nur bei Torsions- und Bimomentenbelastung eine Rolle spielen. Entsprechendes gilt für Stabilitäts- und Schwingungsprobleme dieser Stäbe.

Im Zusammenhang mit den polygonförmigen Profilmittellinien sei auch noch auf die umfangreiche Literatur über Faltwerke hingewiesen.

## 1.2 Voraussetzungen

### 1. Geometrie des Ausgangssystems:

Wanddicke und Querschnittsform sollen längs der Stabachse unveränderlich sein. Im übrigen wird auf die sonst üblichen generellen Voraussetzungen, daß die Querschnittsabmessungen gegenüber der Stablänge und bei dünnwandigen Stäben die Wanddicke gegenüber den Querschnittsabmessungen klein sein müssen, hier verzichtet. Jedoch kann im Einzelfall die Art der Lösung und speziell die Aufwendigkeit der numerischen Rechnung an derartige Voraussetzungen mehr oder weniger streng gebunden sein. In einigen Fällen können auch Vergleiche mit Systemen aus der Schalengeometrie zugelassen werden.

2. Formänderungen:

Das Gleichgewicht wird am unverformten System angeschrieben. Es werden also kleine Verschiebungen vorausgesetzt. Der verwendete Verzerrungstensor enthält nur lineare Glieder der Verschiebungsableitungen, diese müssen also auch hinreichend klein sein.

3. Hypothesen für die Verschiebungen:

Die Hypothese der Schalentheorie "Normale bleibt Normale" wird für die Stabwandung in der vorliegenden Theorie in etwas "milderer" Form benutzt. Es wird hinsichtlich der Verschiebungen in der Querschnittsebene angenommen, daß eine Normale zur Schalenmittelfläche im unverformten Querschnitt auch Normale zu der verformten Profilmittellinie bleibt, dagegen wird hinsichtlich der Verschiebungen in Richtung der Stabachse nur unterstellt, daß eine solche Normale nur eine Gerade bleibt, also nicht unbedingt normal zu der verformten Mantellinie. Die Bernoulli-Hypothese der Stabtheorie wird nur als Lösungshilfe für Teillösungen benutzt.

4. Stoffgesetz:

Die Spannungen seien den Verzerrungen proportional. Es gelte also das verallgemeinerte Hookesche Gesetz. Das Material sei homogen und isotrop. Punkt 5 schränkt diese Voraussetzungen jedoch geringfügig ein.

5. Die Normalspannungen und Dehnungen quer zur Wandung werden vernachlässigt.

6. Temperatureinflüsse bleiben unberücksichtigt.

### 1.3 Allgemeine Vorgehensweise

Wie in der Schalentheorie werden die Verschiebungen der Kontinuumspunkte durch die Verschiebungen der Mittelfläche ausgedrückt. Dabei wird in der vorliegenden Arbeit die spezielle

Art der Schale - gleichbleibende Form entlang einer ebenen Kurve (Stabachse) - berücksichtigt. Verzerrungen und Spannungen lassen sich damit durch die Ableitungen der Verschiebungen der Mittelfläche darstellen. Für diese Verschiebungen werden Summen von Produktansätzen gewählt, dessen einer Faktor jeweils nur eine Funktion der längs der Profilmittellinie laufenden Koordinate und der andere eine Funktion der längs der Stabachse laufenden Koordinate ist. Die erste Variation des zweiten Faktors (Funktion der Stabachse) multipliziert mit einer sinnvoll gewählten Formfunktion (Funktion des Querschnitts) wird als virtuelle Verschiebung gewählt. Die virtuelle Formänderungsarbeit, gebildet aus dem Produkt der wirklichen Spannungen (ausgedrückt durch die wirklichen Verschiebungen) mit den virtuellen Verzerrungen (ausgedrückt durch die virtuellen Verschiebungen), wird gleich gesetzt der virtuellen Arbeit der eingepprägten Kräfte. Das so entstehende Differentialgleichungssystem hat als unabhängige Variable die Bogenlänge der Stabachse und wird geschlossen oder numerisch gelöst.

## 2. Aufstellung des allgemeinen Differentialgleichungssystems

### 2.1 Koordinatensysteme

Wegen der Voraussetzung, daß alle Verschiebungen hinreichend klein bleiben, reicht es, wenn hier nur raumfeste, zum Teil aber krummlinige Koordinatensysteme definiert werden.

Die Wandung des dünnwandigen Stabes wird zunächst als dreidimensionales Kontinuum betrachtet und in der ortsabhängigen orthogonalen Basis  $\underline{g}_i$  beschrieben. Mit Hilfe von kinematischen Hypothesen geschieht die Reduzierung

auf ein zweidimensionales Problem über der Mittelfläche der Wandung, welche in der ortsabhängigen orthogonalen Basis  $\underline{q}_i$  beschrieben wird. Durch Integration entlang der Profilmittellinie (orthogonaler Schnitt durch die Mittelfläche) wird das zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales entlang der Stabachse zurückgeführt. Das begleitende Dreibein der Stabachse ist die ortsabhängige orthonormierte Basis  $\underline{\zeta}_i$ . Die Beschreibung der Stabachse selbst geschieht endgültig in der ortsunabhängigen orthonormierten, also kartesischen Basis  $\underline{e}_i$ .

### 2.1.1 Globales System

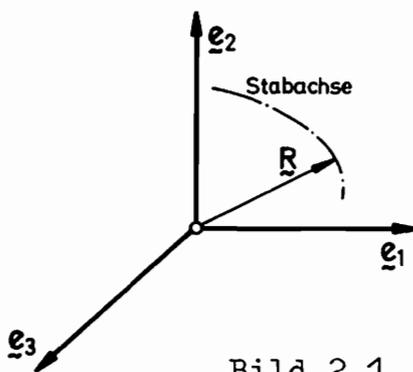


Bild 2.1

$$\underline{R} = R_{(t)}^\alpha \underline{e}_\alpha \quad \alpha = 1,2 \quad (2.1)$$

$t \rightarrow$  beliebiger Parameter

$s \rightarrow$  Bogenlänge

$i = 1,2,3$

Als Stabachse soll eine Linie verstanden werden, entlang welcher eine ebene Kurve, die Profilmittellinie, als Erzeugende die Mittelfläche der Stabwandung beschreibt. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, als Stabachse die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte zu wählen. Sie kann als ebene Kurve in der Ebene  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  des kartesischen Koordinatensystems  $\underline{e}_i$  in Abhängigkeit eines Parameters  $t$  eindeutig beschrieben werden. Im Sonderfall kann dieser Parameter die Bogenlänge  $s$  sein.

### 2.1.2 Lokales System der Stabachse

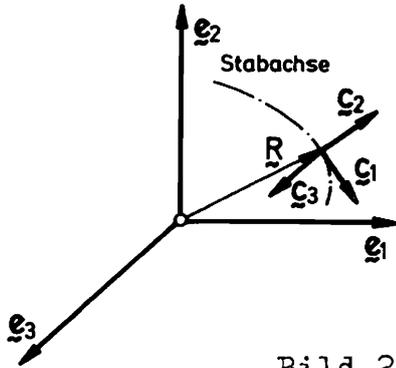


Bild 2.2

Das begleitende Dreibein der Stabachse ist die orthonormierte Basis  $\underline{c}_i$  mit folgenden Richtungen der Einheitsvektoren:

$\underline{c}_1 \rightarrow$  Tangentenrichtung wachsender  $t$

$\underline{c}_2 \rightarrow$  Normalenrichtung nach außen weisend

$\underline{c}_3 \rightarrow$  Richtung von  $\underline{e}_3$

Nach Duschek/Hochreiner [B4] ergeben sich die Basisvektoren für die vorstehende Definition wie folgt:

$$\underline{c}_1 = \frac{dR}{ds} = \underline{R}'$$

$$\underline{c}_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\underline{c}_1}{ds} = -\frac{1}{\rho} \underline{R}'' \quad (2.2)$$

$$\underline{c}_3 = \underline{c}_1 \times \underline{c}_2 = \underline{e}_3$$

mit der Krümmung  $\varrho = \sqrt{\underline{R}'' \cdot \underline{R}''}$ .

Im vorliegenden Fall der ebenen Kurve ist also  $\underline{\zeta}_3 = \underline{e}_3$  bekannt. Damit läßt sich  $\underline{\zeta}_2$  leichter ermitteln:

$$\underline{\zeta}_2 = \underline{\zeta}_1 \times \underline{e}_3. \quad (2.3)$$

Die Basisvektoren  $\underline{\zeta}_i$  sollen nun in Abhängigkeit des Parameters  $t$  im System  $\underline{e}_i$  dargestellt werden.

$$\underline{\zeta}_i = C_i^k \underline{e}_k \quad (2.4)$$

mit  $C_i^k$  als Transformationsmatrix.

Der Zusammenhang zwischen der Bogenlänge  $s$  und dem Parameter  $t$  ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\frac{d\underline{R}}{dt} \cdot \frac{d\underline{R}}{dt}} dt = \sqrt{\dot{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{R}}} dt = v(t) dt \\ \leadsto v &= \sqrt{\dot{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{R}}} = \frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Damit ergibt sich die Krümmung zu:

$$\varrho = \sqrt{\underline{R}'' \cdot \underline{R}''} = \frac{1}{v^3} \sqrt{(\ddot{\underline{R}} \cdot \ddot{\underline{R}})(\dot{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{R}}) - (\ddot{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{R}})^2}.$$

Ist der Ortsvektor  $\underline{R} = \underline{R}(t)$  gegeben, so läßt sich der Basisvektor  $\underline{\zeta}_1$  durch seine Ableitung angeben:

$$\underline{\zeta}_1 = \frac{d\underline{R}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \dot{\underline{R}}. \quad (2.6)$$

In Komponenten von  $\underline{e}_i$  geschrieben heißt das:

$$\underline{c}_1 = C_1^k \underline{e}_k = \frac{1}{V} (\dot{R}^1, \dot{R}^2, 0)$$

$$\underline{c}_2 = \underline{c}_1 \times \underline{e}_3 = C_2^k \underline{e}_k = \frac{1}{V} (\dot{R}^2, -\dot{R}^1, 0) \quad .$$

Die Transformationsmatrix  $C_i^k$  lautet also:

$$C_i^k = \begin{vmatrix} \frac{1}{V} \dot{R}^1 & \frac{1}{V} \dot{R}^2 & 0 \\ \frac{1}{V} \dot{R}^2 & -\frac{1}{V} \dot{R}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Lokales System der Mittelfläche

Die Erzeugende der Mittelfläche ist die unveränderliche Mittellinie des Profils, welche auch ihre Lage im System  $\underline{e}_i$  entlang der Stabachse nicht ändert.

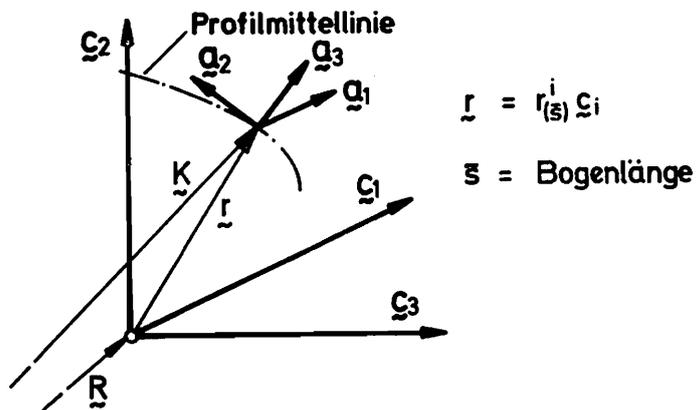


Bild 2.3

Die Profilmittellinie liegt wegen der Definition des Querschnittes ( $\perp$  zur Stabachse) in der Ebene  $\underline{\xi}_2, \underline{\xi}_3$ .

Der Ortsvektor  $\underline{K}$  weist zu einem Punkt der Mittelfläche und ergibt sich zu:

$$\underline{K} = \underline{R} + \underline{r} = R^i \underline{e}_i + r^i \underline{\xi}_i .$$

Mit (2.4) ergibt sich:

$$\underline{K} = (R^i + r^k C_k^i) \underline{e}_i \quad (2.8)$$

mit  $R^3 = 0$  und  $r^1 = 0$ .

Die Basis  $\underline{\alpha}_i$  wird wie bei der Schalentheorie in Green/Zerna [B5] definiert. Damit ergeben sich folgende Richtungen:

$\underline{\alpha}_1 \rightsquigarrow$  Tangentenrichtung der Stabachse

$\underline{\alpha}_2 \rightsquigarrow$  Tangentenrichtung der Profilmittellinie

$\underline{\alpha}_3 \rightsquigarrow$  Normalenrichtung der Profilmittellinie  
nach außen weisend.

Seien  $\theta^1, \theta^2$  die Parameterlinien auf der Mittelfläche und der Ortsvektor  $\underline{K} = \underline{K}(\theta^1, \theta^2)$  gegeben, so ergeben sich die Basisvektoren  $\underline{\alpha}_i$  wie folgt:

$$\underline{\alpha}_\alpha = \underline{K}_{, \alpha} \text{ mit } \alpha = 1, 2 ; \underline{\alpha}_3 = \frac{\underline{\alpha}_1 \times \underline{\alpha}_2}{|\underline{\alpha}_1 \times \underline{\alpha}_2|} . \quad (2.9)$$

Für das Folgende sei vereinbart:

lateinische Indizes laufen von 1 bis 3,  
griechische Indizes laufen von 1 bis 2.

Als Parameter werden gewählt

$$\theta^1 = s ; \quad \theta^2 = \bar{s} \quad (2.10)$$

und die partiellen Ableitungen wie folgt geschrieben

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \theta^\alpha} = (\dots)_{,\alpha} .$$

Die Ableitungen des Ortsvektors  $\underline{K}$  lauten also:

$$\underline{K}_{,\alpha} = (R_{i,\alpha}^i + r_{i,\alpha}^k C_k^i + r^k C_{k,\alpha}^i) \underline{e}_i . \quad (2.11)$$

Nach (2.10) ist  $R^i = R^i(\theta^1)$  und  $r^k = r^k(\theta^2)$  und damit  $R_{i,2}^i = 0$  und  $r_{k,1}^k = 0$ . Mit (2.7) auch  $C_{k,2}^i = 0$ . (2.12)

Die Basisvektoren  $\underline{a}_i$  lassen sich also im globalen System  $\underline{e}_i$  angeben

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (R_{i,1}^i + r^k C_{k,1}^i) \underline{e}_i \\ \underline{a}_2 &= r_{k,2}^k C_k^i \underline{e}_i \\ \underline{a}_3 &= \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Eine Komponentenschreibweise in der Basis  $\underline{e}_i$  wird mit folgender Definition erreicht.

$$\begin{aligned} \underline{a}_k &= A_k^i \underline{e}_i \quad \text{mit:} \\ A_1^i &= R_{i,1}^i + r^k C_{k,1}^i \\ A_2^i &= r_{k,2}^k C_k^i \\ A_3^i &= \frac{\varepsilon_{kl}^i A_1^k A_2^l}{\sqrt{(\varepsilon_{kl}^i A_1^k A_2^l)(\varepsilon_{jmn}^i A_1^m A_2^n)}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Metrik zu dieser Basis ist

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} A_{1i}^i A_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2i}^i A_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

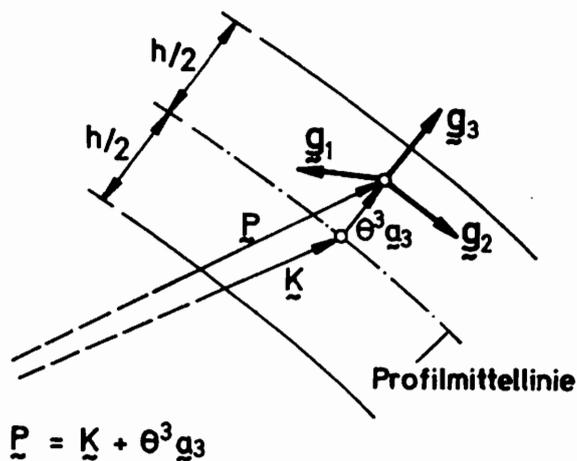
Wegen  $\underline{a}_\kappa = A_{\kappa i}^i \underline{e}_i = A_{\kappa i} \underline{e}^i$  und  $\underline{e}_i = \underline{e}^i$  gilt  $A_{\kappa i}^i = A_{\kappa i}$ .

Die Basis ist orthogonal aber nicht normiert. Der Krümmungstensor der Mittelfläche ergibt sich zu

$$b_{\alpha\beta} = -\underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_{3,\beta} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}_3 \quad (2.16)$$

$$b_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta}^i A_3^j \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = A_{\alpha,\beta}^i \cdot A_3^j \delta_{ij} = A_{\alpha,\beta}^i \cdot A_{3i}.$$

#### 2.1.4 Lokales System der Wandung



$$(2.17)$$

Bild 2.4

Der Ortsvektor  $\underline{P}$  zeigt zu einem beliebigen Punkt der Wandung. Die Basis der Wandung ist definiert als

$$\underline{g}_i = \underline{P}_{,i} \quad (2.18)$$

Mit (2.17) und (2.9) ergibt sich

$$\underline{g}_\alpha = \underline{a}_\alpha + \theta^3 \underline{a}_{3,\alpha} \quad \text{und} \quad \underline{g}_3 = \underline{a}_3 \quad (2.19)$$

Die Metrik der Wandung läßt sich in Abhängigkeit der Metrik der Mittelfläche angeben.

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \underline{g}_i \cdot \underline{g}_k \\ g_{\alpha\beta} &= (\underline{a}_\alpha + \theta^3 \underline{a}_{3,\alpha}) \cdot (\underline{a}_\beta + \theta^3 \underline{a}_{3,\beta}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Mit (2.16) und dem daraus folgenden Ausdruck  $b_\beta^\alpha \underline{a}_\alpha = -\underline{a}_{3,\beta}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_\alpha^\sigma \underline{a}_\sigma \cdot b_\beta^\rho \underline{a}_\rho \\ g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_\alpha^\sigma b_\beta^\rho a_{\sigma\rho} \\ g_{\alpha 3} &= 0, \quad g_{33} = 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Berücksichtigt man die Orthogonalität der Basis  $\underline{g}_i$ , so muß gelten

$$g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} g_{(\alpha\alpha)} &= a_{(\alpha\alpha)} - 2\theta^3 b_{(\alpha\alpha)} + (\theta^3)^2 b_{(\alpha)}^{(\mu)} b_{(\alpha)}^{(\nu)} a_{(\mu\nu)} \\ g_{(\alpha\alpha)} &= a_{(\alpha\alpha)} (1 - \theta^3 b_{(\alpha)}^{(\mu)})^2, \quad g_{33} = 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

(über  $\alpha$  soll nicht summiert werden).

Die kontravarianten Metrik-Koeffizienten sind also:

$$g^{(ii)} = \frac{1}{g^{(ii)}} , \quad g^{i\kappa} = 0 \quad \text{für } i \neq \kappa . \quad (2.23)$$

Nun sollen noch die Christoffel-Symbole der Wandung, also für die Basis  $g_i$  angegeben werden. Allgemein gilt

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{kl,j} + g_{lj,\kappa} - g_{jk,l}) .$$

Für die orthogonale Basis ergibt sich mit (2.22) und (2.23) vereinfacht:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{(ii)} (g_{ki,j} + g_{ij,\kappa} - g_{jk,i}) . \quad (2.24)$$

Berücksichtigt man

$$g_{i\kappa} = g^{i\kappa} = 0 \quad \text{für } i \neq \kappa \quad \text{und} \quad g_{33} = g^{33} = 1 ,$$

so ergeben sich die Christoffel-Symbole wie folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \begin{vmatrix} g_{11,1} & g_{11,2} & g_{11,3} \\ g_{11,2} & -g_{22,1} & 0 \\ g_{11,3} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \Gamma_{ik}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \begin{vmatrix} -g_{11,2} & g_{22,1} & 0 \\ g_{22,1} & g_{22,2} & g_{22,3} \\ 0 & g_{22,3} & 0 \end{vmatrix} \\ \Gamma_{ik}^3 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -g_{11,3} & 0 & 0 \\ 0 & -g_{22,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.2 Beschreibung des verformten Zustandes

### 2.2.1 Verschiebungen

Der Verformungszustand des Kontinuums wird durch die drei Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes der Wandung eindeutig beschrieben.

$$\underline{u} = u_i g^i \quad (2.26)$$

Diese Verschiebungen sollen nun durch die Verschiebungen der Mittelfläche und je einer Verdrehung der Normalen in  $\theta^1$  und  $\theta^2$ -Richtung ausgedrückt werden.

Die Verschiebungen der Mittelfläche seien angeschrieben zu:

$$\underline{u}_M = \bar{U}_i \underline{\alpha}^i, \quad (2.27)$$

mit  $\bar{U}_i$  als Tensor-Komponenten.

Die physikalischen Komponenten sind dann

$$U_i = \bar{U}_i \sqrt{\alpha^{(ii)}} \quad (2.28)$$

Mit der Umkehrung von (2.28) ergibt sich die Verschiebung der Mittelfläche

$$\underline{u}_M = U_i \sqrt{\alpha^{(ii)}} \underline{\alpha}^i \quad (2.29)$$

Wegen  $\alpha_{33} = 1$  läßt sich (2.29) auch wie folgt schreiben

$$\underline{u}_M = U_\alpha \sqrt{\alpha^{(\alpha\alpha)}} \underline{\alpha}^\alpha + U_3 \underline{\alpha}^3 \quad (2.30)$$

Für die Verschiebungen des Kontinuums soll nun ein linearer Ansatz über die Wanddicke gemacht werden

$$\underline{u} = \underline{u}_M + \theta^3 \underline{w} \quad (2.31)$$

Die Verdrehung der Normalen auf der Mittelfläche wird hier in folgender spezieller Form gewählt:

$$\underline{w} = w_\alpha \underline{g}^\alpha = -(\overline{W}_\alpha + b_\alpha^\lambda \overline{U}_\lambda) \underline{g}^\alpha . \quad (2.32)$$

Die Verdrehungen  $w_\alpha$  setzen sich also aus zwei Teilen zusammen. Der erste  $\overline{W}_\alpha$  sind zwei zunächst von den Verschiebungen der Mittelfläche unabhängige Funktionen, während der zweite Anteil durch die Krümmung bedingt aus den Verschiebungen der Mittelfläche entsteht. Setzt man  $\overline{W}_\alpha = \overline{U}_{3,\alpha}$ , so entsteht aus (2.32) die Normalen-Hypothese der Schalentheorie. Hier bedeutet dieser Ansatz zunächst "Normale bleibt Gerade".

Wegen der orthogonalen Basis gilt  $b_\alpha^\lambda = 0$  für  $\lambda \neq \alpha$ . Mit den physikalischen Komponenten der Verschiebungen der Mittelfläche ergeben sich die Komponenten von (2.31) bezogen auf die Basis  $\underline{g}^i$  zu:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sqrt{\alpha_{(\alpha\alpha)}} (1 - \theta^3 b_{(\alpha\alpha)}^{(\alpha\alpha)}) U_\alpha - \theta^3 W_\alpha \\ u_3 &= U_3 \end{aligned} \quad (2.33)$$

und auf die Basis  $\underline{g}^i$  bezogen:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}} \alpha^{(\alpha\alpha)} \left[ \sqrt{\alpha_{(\alpha\alpha)}} (1 - \theta^3 b_{(\alpha\alpha)}^{(\alpha\alpha)}) U_\alpha - \theta^3 W_\alpha \right] \\ u_3 &= U_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

mit (2.22)

$$\begin{aligned} u_\alpha &= (1 - \theta^3 b_{(\alpha\alpha)}^{(\alpha\alpha)}) \left[ \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}} U_\alpha - \theta^3 W_\alpha \right] \\ u_3 &= U_3 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Schalennormale verdreht sich also um einen Anteil, der aus den Mittelflächenverschiebungen  $U_\alpha$  entsteht und für diese Verschiebungen allein die Normalenhypothese erfüllt. Diesem Anteil addieren sich die zunächst noch offenen Verdrehungen  $W_\alpha$ .

Es zeigt sich in der weiteren Rechnung, daß es zweckmäßig ist, über die Verdrehungen wie folgt zu verfügen.

$$\begin{aligned} W_1 &= U_4 \\ W_2 &= U_{3,2} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Damit ist die Normalen-Hypothese nur in der Richtung der Profilmittellinie erfüllt. Die unabhängige Funktion  $U_4$  erlaubt in der weiteren Rechnung einen sehr übersichtlichen Formalismus, erhöht aber nicht den Grad des Dgl.-Systems gegenüber dem Fall  $W_1 = U_{3,1}$ , welcher die Normalen-Hypothese auch in der anderen Richtung erfüllt und an einem Beispiel zum Vergleich gerechnet werden soll.

Die Verschiebungen des Kontinuums schreiben sich also im einzelnen wie folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 - \theta^3 b_1^2) [\sqrt{g_{11}} U_1 - \theta^3 U_4] \\ u_2 &= (1 - \theta^3 b_2^2) [\sqrt{g_{22}} U_2 - \theta^3 U_{3,2}] \\ u_3 &= U_3. \end{aligned} \tag{2.37}$$

### 2.2.2 Verzerrungen

Nach Green/Zerna [B5] ergeben sich die Verzerrungen für kleine Verschiebungsableitungen zu:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{2} (U_{ik} + U_{ki}). \tag{2.38}$$

Der senkrechte Strich bezeichnet die kovariante Ableitung. Auf eine Namensgebung des Verzerrungstensors sei hier verzichtet, weil die Verschiebungen so klein sein sollen, daß der Bezug auf eine raum- oder körperfeste Basis nicht

zu unterscheiden ist. Verwendet man die Definition der kovarianten Ableitung

$$u_{i|k} = u_{i,k} - \Gamma_{ik}^j u_j \quad (2.39)$$

mit  $u_{i,k}$  als partieller Ableitung, so schreiben sich die Verzerrungen wie folgt:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i} - 2 \Gamma_{ik}^j u_j). \quad (2.40)$$

Setzt man für  $u_i$  die Ansätze (2.37) ein, so ergibt sich wegen der einseitigen Normalen-Hypothese  $\delta_{33} = \delta_{32} = 0$  und zusätzlich  $\delta_{33} = 0$ .

Die übrigen Verzerrungen ergeben sich mit (2.25) wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= u_{1,1} - \Gamma_{11}^i u_i \\ &= u_{1,1} - \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1} u_1 + \frac{1}{2} g^{22} g_{11,2} u_2 + \frac{1}{2} g^{33} g_{11,3} u_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1} - 2 \Gamma_{12}^i u_i) \\ &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1} - g^{11} g_{11,2} u_1 - g^{22} g_{22,1} u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{13} &= \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1} - 2 \Gamma_{13}^i u_i) \\ &= \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1} - g^{11} g_{11,3} u_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= u_{2,2} - \Gamma_{22}^i u_i \\ &= u_{2,2} + \frac{1}{2} g^{11} g_{22,1} u_1 - \frac{1}{2} g^{22} g_{22,2} u_2 + \frac{1}{2} g^{33} g_{22,3} u_3. \end{aligned}$$

Setzt man die Ansätze (2.37) ein, so ergeben sich die Verzerrungen zu:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & -\theta^3 b_{1,1}^1 \sqrt{g_{11}} U_1 + g_{11} \sqrt{a^{11}} U_{1,1} + \frac{1}{2} g_{11,2} \sqrt{a^{22}} U_2 + \frac{1}{2} g_{11,3} U_3 \\ & - \frac{1}{2} \theta^3 g_{11,2} \sqrt{g^{22} a^{22}} U_{3,2} \\ & - \frac{1}{2} \theta^3 a_{1,1}^{11} \sqrt{g_{11} a_{11}} U_4 - \theta^3 \sqrt{g_{11} a^{11}} U_{4,1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} a_{1,2}^{11} \sqrt{a_{11}} g_{11} U_1 + g_{11} \sqrt{a^{11}} U_{1,2} + \frac{1}{2} a_{1,1}^{22} \sqrt{a_{22} g_{22}} U_2 \right. \\ & \left. + g_{22} \sqrt{a^{22}} U_{2,1} - \theta^3 (\theta^3 b_{2,1}^2 + a_{1,1}^{22} \sqrt{g_{22} a_{22}}) U_{3,2} - \theta^3 \sqrt{g_{22} a^{22}} U_{3,2,1} \right. \\ & \left. - \theta^3 (\theta^3 b_{1,2}^1 + a_{1,2}^{11} \sqrt{g_{11} a_{11}}) U_4 - \theta^3 \sqrt{g_{11} a^{11}} U_{4,2} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{2} (U_{3,1} - U_4) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} = & \frac{1}{2} g_{22,1} \sqrt{a^{11}} U_1 - \theta^3 b_{2,2}^2 \sqrt{g_{22}} U_2 + g_{22} \sqrt{a^{22}} U_{2,2} \\ & + \frac{1}{2} g_{22,3} U_3 - \frac{1}{2} \theta^3 a_{1,2}^{22} \sqrt{g_{22} a_{22}} U_{3,2} - \theta^3 \sqrt{g_{22} a^{22}} U_{3,2,2} \\ & - \frac{1}{2} \theta^3 g_{22,1} \sqrt{g^{11} a^{11}} U_4 . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Verformungsgrößen  $U_i$  sind nach (2.29) und (2.30) physikalische Größen, weil dieses die praktische Wahl der Ansatzfunktionen nach Abschnitt 2.3.2 vereinfacht.

### 2.2.3 Spannungen

Voraussetzungsgemäß sollen hier lineare Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen gelten. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz lautet dann:

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} \gamma_{kl} . \quad (2.45)$$

Für homogenen und isotropen Werkstoff hat der Elastizitätstensor  $E^{ijkl}$  nur die zwei unabhängigen Konstanten: Elastizitätsmodul  $E$  und Querdehnungszahl  $\mu$ .

Mit dem Schubmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.46)$$

läßt sich der Elastizitätstensor relativ einfach schreiben:

$$E^{ijkl} = G \left( g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\mu}{1-2\mu} g^{ij} g^{kl} \right). \quad (2.47)$$

Trotz des Ergebnisses  $\delta_{33} = 0$  aus den Ansätzen (2.37) für die Verschiebungen soll hier auch

$$\tau^{33} = 0 \quad (2.48)$$

gesetzt werden. Dieser Widerspruch zum Hookeschen Gesetz sei hier als unwesentlich hingenommen, zumal der Arbeitsausdruck aus  $\delta_{33} \tau^{33}$  sowieso verschwindet.

Für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gilt dann:

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} \delta_{kl} \quad (2.49)$$

mit  $E^{ijkl} = G \left( g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\mu}{1-\mu} g^{ij} g^{kl} \right).$

Berücksichtigt man  $g^{ik} = 0$  für  $i \neq k$  und definiert

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\mu^2} \quad (2.50)$$

so ergeben sich die im weiteren interessierenden Komponenten des Elastizitätstensors wie folgt:

$$\begin{aligned} E^{1111} &= \bar{E} g^{11} g^{11}, \quad E^{1122} = E^{2211} = \mu \bar{E} g^{11} g^{22}, \\ E^{1212} &= E^{1221} = E^{2112} = E^{2121} = G g^{11} g^{22}, \\ E^{1313} &= E^{1331} = E^{3113} = E^{3131} = G g^{11} g^{33}, \\ E^{2222} &= \bar{E} g^{22} g^{22}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Damit berechnet man die Spannungen zu:

$$\begin{aligned}\tau^{11} &= \bar{E}(g^{11}g^{11}\delta_{11} + \mu g^{11}g^{22}\delta_{22}) = \bar{E}g^{11}g^{11}[\delta_{11} + \mu g_{11}g^{22}\delta_{22}] \\ \tau^{12} &= 2Gg^{11}g^{22}\delta_{12} = Gg^{11}g^{22}[2\delta_{12}] \\ \tau^{13} &= 2Gg^{11}g^{33}\delta_{13} = Gg^{11}g^{33}[2\delta_{13}] \\ \tau^{22} &= \bar{E}(g^{22}g^{22}\delta_{22} + \mu g^{11}g^{22}\delta_{11}) = \bar{E}g^{22}g^{22}[\delta_{22} + \mu g^{11}g_{22}\delta_{11}].\end{aligned}\tag{2.52}$$

### 2.3 Herleitung des Differentialgleichungssystems

#### 2.3.1 Übergang von der Tensor- zur Matrizen Schreibweise

Für die weiterhin zu verknüpfenden Größen  $\delta_{ik}$  und  $\tau^{ik}$  sind nur noch je vier von Null verschiedene Komponenten vorhanden. Es bietet sich hier also an, diese Größen als Spaltenmatrizen zu definieren. Damit wird die weitere Rechnung wesentlich übersichtlicher und die Schreibweise sehr vereinfacht.

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ 2\delta_{12} \\ 2\delta_{13} \\ \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^{11} \\ \tau^{12} \\ \tau^{13} \\ \tau^{22} \end{bmatrix}\tag{2.54}$$

Der Zusammenhang (2.52) ergibt sich damit zu:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\delta}} \quad (2.55)$$

mit der speziellen Elastizitäts-Matrix

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \bar{E} g^{11} g^{11} & 0 & 0 & \mu \bar{E} g^{11} g^{22} \\ 0 & G g^{11} g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G g^{11} g^{33} & 0 \\ \mu \bar{E} g^{11} g^{22} & 0 & 0 & \bar{E} g^{22} g^{22} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Indizes enthalten in dieser Schreibweise keine Summationsvorschrift mehr, sie bezeichnen nur einzelne Komponenten oder Koeffizienten.

### 2.3.2 Produktansätze für die Verschiebungen der Mittel- fläche und Verdrehung der Normalen

Zur Erzielung eines linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems entlang der Stabachse werden für die Verschiebungen der Mittelfläche und die Verdrehung  $u_4$  folgende Produktansätze gemacht:

$$u = \underline{\underline{\eta}} \underline{\underline{V}} \quad (2.57)$$

Dabei sind  $\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\eta}}(\vartheta')$  dimensionslose, für jeden Querschnitt gleiche, Formfunktionen und  $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}(\vartheta')$  entlang der Stabachse veränderliche Verformungsfunktionen.

Die einzelnen Matrizen haben folgende Form:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_{11} \dots \eta_{1N}, 0 \dots 0, 0 \dots 0, 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0, \eta_{21} \dots \eta_{2M}, 0 \dots 0, 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0, 0 \dots 0, \eta_{31} \dots \eta_{3L}, 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0, 0 \dots 0, 0 \dots 0, \eta_{41} \dots \eta_{4R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\eta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\eta}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\eta}_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1N} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ \vdots \\ v_{2M} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ \vdots \\ v_{3L} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} v_{41} \\ \vdots \\ v_{4R} \end{bmatrix}.$$

Die Art der Funktionen  $\underline{\eta}$  und die einzelnen Zahlen  $N, M, L, R$  müssen je nach der Problemstellung sinnvoll gewählt werden. Für den Verdrehfreiheitsgrad  $u_4$  sei hier eine Einschränkung erlaubt. Da es in vielen Fällen genügt,  $u_4 = u_{3,1}$  zu setzen, sei hier darauf verzichtet, für  $\underline{\eta}_4$  separate Ansatzfunktionen zuzulassen. Es wird also immer

$$\underline{\eta}_4 = \underline{\eta}_3 \quad (2.59)$$

gesetzt. Damit ist  $L = R$ .

Für die auftretenden Ableitungen der Verschiebungen ergibt sich dann mit dem Ansatz (2.57):

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \underline{\eta} \underline{v}_{1,1} \\ u_{1,2} &= \underline{\eta}_{,2} \underline{v} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Setzt man (2.57) und (2.60) in die Ausdrücke für die Verzerrungen (2.41) bis (2.44) ein, so kann man die Verzerrungen wie folgt darstellen:

$$\underline{\gamma} = \underline{v} \underline{V} + \underline{\bar{v}} \underline{V}_{,1} \quad (2.61)$$

mit den Querschnittsfunktionen:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} & \underline{v}_{12} & \underline{v}_{13} & \underline{v}_{14} \\ \underline{v}_{21} & \underline{v}_{22} & \underline{v}_{23} & \underline{v}_{24} \\ \underline{v}_{31} & \underline{v}_{32} & \underline{v}_{33} & \underline{v}_{34} \\ \underline{v}_{41} & \underline{v}_{42} & \underline{v}_{43} & \underline{v}_{44} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \underline{v}_{i1} &= [v_{i11} \quad \cdot \quad \cdot \quad v_{i1N}] \\ \underline{v}_{i2} &= [v_{i21} \quad \cdot \quad \cdot \quad v_{i2M}] \\ \underline{v}_{i3} &= [v_{i31} \quad \cdot \quad \cdot \quad v_{i3L}] \\ \underline{v}_{i4} &= [v_{i41} \quad \cdot \quad \cdot \quad v_{i4L}] \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für  $\underline{\bar{v}}$ .

Darin sind die von Null verschiedenen Werte, unter Berücksichtigung von (2.59):

$$\begin{aligned} \underline{v}_{11} &= -\theta^3 b_{1,1}^1 \sqrt{g_{11}} \underline{\eta}_1 \\ \underline{v}_{12} &= \frac{1}{2} g_{1,2} \sqrt{a^{22}} \underline{\eta}_2 \\ \underline{v}_{13} &= \frac{1}{2} g_{1,3} \underline{\eta}_3 - \frac{1}{2} \theta^3 g_{1,2} \sqrt{g^{22} a^{22}} \underline{\eta}_{3,2} \\ \underline{v}_{14} &= -\frac{1}{2} \theta^3 a_{,1}^n \sqrt{g_{11} a_{nn}} \underline{\eta}_3 \\ \underline{v}_{21} &= \frac{1}{2} a_{,2}^n \sqrt{a_{nn}} g_{11} \underline{\eta}_1 + g_{11} \sqrt{a^{nn}} \underline{\eta}_{1,2} \\ \underline{v}_{22} &= \frac{1}{2} a_{,2}^{22} \sqrt{a_{22}} g_{22} \underline{\eta}_2 \\ \underline{v}_{23} &= -\theta^3 (\theta^3 b_{2,1}^2 + a_{,1}^{22} \sqrt{g_{22} a_{22}}) \underline{\eta}_{3,2} \\ \underline{v}_{24} &= -\theta^3 (\theta^3 b_{1,2}^1 + a_{,2}^{11} \sqrt{g_{11} a_{11}}) \underline{\eta}_3 - \theta^3 \sqrt{g_{11} a^{11}} \underline{\eta}_{3,2} \\ \underline{v}_{34} &= -\underline{\eta}_3 \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{v}_{41} &= \frac{1}{2} g_{22,1} \sqrt{a^{11}} \underline{\eta}_1 \\
 \underline{v}_{42} &= -\theta^3 b_{2,2}^2 \sqrt{g_{22}} \underline{\eta}_2 + g_{22} \sqrt{a^{22}} \underline{\eta}_{2,2} \\
 \underline{v}_{43} &= \frac{1}{2} g_{22,3} \underline{\eta}_3 - \frac{1}{2} \theta^3 a_{2,2}^{22} \sqrt{g_{22} a_{22}} \underline{\eta}_{3,2} - \theta^3 \sqrt{g_{22} a^{22}} \underline{\eta}_{3,22} \\
 \underline{v}_{44} &= -\frac{1}{2} \theta^3 g_{22,1} \sqrt{g^{11} a^{11}} \underline{\eta}_3 \\
 \\ 
 \overline{v}_{11} &= g_{11} \sqrt{a^{11}} \underline{\eta}_1 \\
 \overline{v}_{14} &= -\theta^3 \sqrt{g_{11} a^{11}} \underline{\eta}_3 \\
 \\ 
 \overline{v}_{22} &= g_{22} \sqrt{a^{22}} \underline{\eta}_2 \\
 \overline{v}_{23} &= -\theta^3 \sqrt{g_{22} a^{22}} \underline{\eta}_{3,2} \\
 \\ 
 \overline{v}_{33} &= \underline{\eta}_3 .
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

### 2.3.3 Virtuelle Verschiebungen

Die virtuelle Verschiebung kann als erste Variation der Verschiebung  $\underline{u}$  betrachtet werden. Damit die bisher gemachten Voraussetzungen auch für die Variationen der Verschiebungen gelten, werden nur die Verschiebungen der Mittelfläche und die Verdrehung  $U_4$  variiert. Nach (2.37) ergeben sich also die variierten Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned}
 \delta u_1 &= (1 - \theta^3 b_1^2) (\sqrt{g_{11}} \delta U_1 - \theta^3 \delta U_4) \\
 \delta u_2 &= (1 - \theta^3 b_2^2) (\sqrt{g_{22}} \delta U_2 - \theta^3 \delta U_{3,2}) \\
 \delta u_3 &= \delta U_3 .
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Unter der Variation der Verformungsgrößen soll nun folgendes verstanden werden:

$$\delta \underline{u} = \underline{\eta} \delta \underline{V} . \tag{2.64}$$

Bei genügend großer Anzahl der Ansatzfunktionen  $\underline{\eta}$  ist dieses sicher eine ausreichende Näherung.

### 2.3.4 Virtuelle Arbeiten

Zur Aufstellung des allgemeinen Differentialgleichungssystems soll das Prinzip der virtuellen Arbeiten benutzt werden:

$$\delta W = \delta A \quad (2.65)$$

$\delta W$  ist die virtuelle Formänderungsarbeit,  $\delta A$  ist die virtuelle Arbeit aller eingepprägten Kräfte. Bezeichnungen und Definitionen nach Lehmann [B6].

Die virtuelle Formänderungsarbeit ergibt sich als Integral über dem Produkt der wirklichen Spannungen mit den virtuellen Verzerrungen, erstreckt über das Volumen des Stabes plus spezieller Randterme, z. B. aus federnder Lagerung.

$$\delta W = \int_{(V)} \underline{\underline{\tau}}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}} dV + \delta W^R \quad (2.66)$$

$$\delta W = \delta W^V + \delta W^R$$

Das Volumenintegral wird aufgespalten in die Integration über die Stablänge  $L$  und den Querschnitt  $Q$ .

$$\delta W^V = \int_{(L)} \int_{(Q)} \underline{\underline{\tau}}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}} \sqrt{q} d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \quad (2.67)$$

Mit (2.61) ergibt sich  $\delta \underline{\underline{\epsilon}}$  zu:

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{v}} \delta \underline{\underline{V}} + \bar{\underline{\underline{v}}} d \underline{\underline{V}}_1 \quad (2.68)$$

mit  $\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_1 \\ \underline{\underline{V}}_2 \\ \underline{\underline{V}}_3 \\ \underline{\underline{V}}_4 \end{bmatrix}$ .

$\int W^V$  läßt sich also schreiben zu:

$$\int W^V = \int_{(L)} \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\tau}^T (\underline{v} \delta \underline{u} + \underline{\bar{v}} \delta \underline{v}_{,n}) d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \quad (2.69)$$

und nach der partiellen Integration

$$\int W^V = \left[ \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\tau}^T \underline{\bar{v}} d\theta^3 d\theta^2 \right]_0^L + \int_{(L \times Q)} \left[ (F \sqrt{g} \underline{\tau}^T \underline{\bar{v}})_{,n} + \sqrt{g} \underline{\tau}^T \underline{v} \right] d\theta^3 d\theta^2 \int \underline{v} d\theta^1. \quad (2.70)$$

Analog zu  $\int W$  wird auch  $\int A$  zerlegt in die virtuelle Arbeit der Flächenlasten verteilt über die Mittelfläche und Randterme, z. B. aus Einzellasten.

Die Matrix der Belastung enthält die Tensorkomponenten

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Dabei ist  $p_4$  ein flächenhaft verteiltes Moment, welches versucht, die Mittelfläche in Längsrichtung zu verbiegen. Diese Belastung kommt wohl kaum vor, so daß

$$p_4 = 0 \quad (2.72)$$

gesetzt werden kann.

Das Integral über die Mittelfläche wird als Doppelintegral über die Stablänge  $L$  und die Profilmittellinie  $P$  geschrieben:

$$\int A = \int_{(L)} \int_{(P)} \sqrt{a} \underline{p}^T \underline{\eta} \delta \underline{v} d\theta^2 d\theta^1 + \int A^R$$

$$\int A = \int A^P + \int A^R. \quad (2.73)$$

Setzt man den Ansatz (2.57) ein, so ergibt sich:

$$\int A^P = \int_{(L)} \int_{(P)} \sqrt{a} \underline{p}^T \underline{\eta} \delta \underline{v} d\theta^2 d\theta^1. \quad (2.74)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (2.65) lautet also mit den zuvor ausgerechneten Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 & \delta W^V + \delta W^R - \delta A^P - \delta A^R = \\
 & \left[ \iint_{(\Omega)} \sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{\bar{v}} d\theta^3 d\theta^2 \delta \tilde{V} \right]_0^L \\
 & + \int_{(L)} \iint_{(\Omega)} \left[ -(\sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{\bar{v}})_{,1} + \sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{v} \right] d\theta^3 d\theta^2 \delta \tilde{V} d\theta^1 \\
 & + \delta W^R - \iint_{(L)(P)} \sqrt{a} \tilde{p}^T \tilde{\eta} \delta \tilde{V} d\theta^2 d\theta^1 - \delta A^R = 0.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Bei Einhaltung mechanisch sinnvoller Randbedingungen auch für die Variationen muß gelten

$$\left[ \iint_{(\Omega)} \sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{\bar{v}} d\theta^3 d\theta^2 \delta \tilde{V} \right]_0^L + \delta W^R - \delta A^R = 0. \tag{2.76}$$

Es bleibt also von (2.75)

$$\begin{aligned}
 & \int_{(L)} \left[ -\iint_{(\Omega)} (\sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{\bar{v}})_{,1} d\theta^3 d\theta^2 + \iint_{(\Omega)} \sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{v} d\theta^3 d\theta^2 \right. \\
 & \left. - \int_{(P)} \sqrt{a} \tilde{p}^T \tilde{\eta} d\theta^2 \right] \delta \tilde{V} d\theta^1 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Berücksichtigt man, daß die Variationen  $\delta \tilde{V}$  beliebig sein müssen, so muß der Integrand von (2.77) verschwinden, und zwar auch für jede Variation  $\delta V_{11}, \delta V_{21}, \delta V_{31}, \delta V_{41}$  allein. Es entsteht also folgende Differentialbeziehung

$$-\iint_{(\Omega)} (\sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{\bar{v}})_{,1} d\theta^3 d\theta^2 + \iint_{(\Omega)} \sqrt{g} \tilde{\Sigma}^T \tilde{v} d\theta^3 d\theta^2 - \int_{(P)} \sqrt{a} \tilde{p}^T \tilde{\eta} d\theta^2 = 0. \tag{2.78}$$

Nach (2.55) ist die transponierte Matrix der Spannungen

$$\tilde{\Sigma}^T = \tilde{J}^T \tilde{E}^T = \tilde{J}^T \tilde{E} \tag{2.79}$$

mit  $\underline{x}^T$  nach (2.61)

$$\underline{x}^T = \underline{V}^T \underline{x}^T + \underline{V}_{,n}^T \underline{\bar{x}}^T. \quad (2.80)$$

Setzt man dieses in (2.78) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} & - \int_{(Q)} \int_{(Q)} [\sqrt{g} (\underline{V}^T \underline{x}^T + \underline{V}_{,n}^T \underline{\bar{x}}^T) \underline{\varepsilon} \underline{\bar{x}}]_{,1} d\theta^3 d\theta^2 \\ & + \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} (\underline{V}^T \underline{x}^T + \underline{V}_{,n}^T \underline{\bar{x}}^T) \underline{\varepsilon} \underline{v} d\theta^3 d\theta^2 - \int_{(P)} \sqrt{a} \underline{p}^T \underline{\eta} d\theta^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Um ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu erzeugen, sein die Einzelwerte des Ausdruckes

$$\underline{K}^T = \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} (\underline{V}^T \underline{x}^T + \underline{V}_{,n}^T \underline{\bar{x}}^T) \underline{\varepsilon} \underline{\bar{x}} d\theta^3 d\theta^2 \quad (2.82)$$

als neue Systemgrößen eingeführt. Diese Funktionen kann man als generalisierte Schnittgrößen deuten.

Das Differentialgleichungssystem erster Ordnung läßt sich dann wie folgt schreiben, wenn man nach den Systemfunktionen  $\underline{V}, \underline{K}$  und ihren Ableitungen sortiert

$$\underline{V}_{,n}^T \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\bar{x}}^T \underline{\varepsilon} \underline{\bar{x}} d\theta^3 d\theta^2 = - \underline{V}^T \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{x}^T \underline{\varepsilon} \underline{\bar{x}} d\theta^3 d\theta^2 + \underline{K}^T \quad (2.83)$$

$$\underline{V}_{,n}^T \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\bar{x}}^T \underline{\varepsilon} \underline{v} d\theta^3 d\theta^2 - \underline{K}_{,n}^T = - \underline{V}^T \int_{(Q)} \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{x}^T \underline{\varepsilon} \underline{v} d\theta^3 d\theta^2 + \int_{(P)} \sqrt{a} \underline{p}^T \underline{\eta} d\theta^2.$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind nach (2.76)

$$\left[ \underline{K}^T \delta \underline{V} \right]_0^L + \delta W^R - \delta A^R = 0. \quad (2.83)$$

Die Integrationen über  $d\theta^3$  und  $d\theta^2$  lassen sich ausführen, wenn die Formfunktionen  $\eta_{i2}$  vorgegeben werden. Dieses muß je nach Problemstellung sinnvoll geschehen. Werden diese Funktionen wie in (2.58) angenommen, so ergibt das System (2.83)

$$J = 2(N+M+2L)$$

lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $J$  unbekannte Funktionen  $\underline{y}$  und  $\underline{z}$ .

#### 2.4 Überlegungen zur Lösung des Differentialgleichungssystems

Das Gleichungssystem (2.83) besteht aus  $J$  linearen Differentialgleichungen für  $J$  unbekannte Funktionen im allgemeinen mit nicht konstanten Koeffizienten. Es liegt in der Form

$$\underline{B} \underline{y}' = \underline{C} \underline{y} + \underline{D} \quad (2.84)$$

vor, mit

$$\begin{aligned} \underline{y}^T &= (y_1, y_2, y_3, \dots, y_k, \dots, y_J) \\ &= (V_{11} \dots V_{1N}, V_{21} \dots V_{2M}, V_{31} \dots V_{3L}, V_{41} \dots V_{4L}, K_{11} \dots K_{1N}, K_{21} \dots K_{2M}, K_{31} \dots K_{3L}, K_{41} \dots K_{4L}). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Multipliziert man dieses System von links mit der inversen Matrix von  $\underline{B}$ , so erhält man

$$\underline{y}' = \underline{B}^{-1} \underline{C} \underline{y} + \underline{B}^{-1} \underline{D}. \quad (2.86)$$

Dieses System kann man im einfachsten Fall geschlossen lösen, oder aber bei großer Zahl der Gleichung elektronisch mit den bekannten Näherungsverfahren.

Die Umformung von (2.84) nach (2.86) muß bei nicht konstanten Koeffizienten in der elektronischen Rechnung für jeden Iterationsschritt zur Lösung des Dgl.-Systems neu erfolgen. Dieses

erfordert bei großen Systemen sehr viel Rechenzeit.

In vielen praktischen Fällen enthalten die Matrizen  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  aber konstante Koeffizienten. Dieses ist bei konstanter Streckenlast immer der Fall, wenn die Krümmung der Stabachse unabhängig von der Bogenlänge  $s = \theta'$  ist. Die obengenannte Umformung läßt sich dann vor der Iteration zur Lösung des Dgl.-Systems elektronisch durchführen. Das System liegt dann in folgender Form vor

$$\underline{y}' = \underline{C} \underline{y} + \underline{D} \quad (2.87)$$

und läßt sich unmittelbar z. B. mit der Romberg-Integration lösen.

Zur Vermeidung von numerischen Schwierigkeiten sei noch folgendes bemerkt. Im allgemeinen treten unter den Fundamentallösungen Ausdrücke der Form  $e^{\alpha \theta}$  mit reellem  $\alpha$  auf. Die Anpassung dieser Funktionen an die Randbedingungen führt oft schon bei geringen Stablängen zur numerischen Überforderung des Rechners. Wegen der konstanten Koeffizienten der Gleichung (2.87) reicht es aus, wenn die Romberg-Integration für einen hinreichend kleinen Abschnitt  $\Delta L$  der Stablänge  $L$  und für das homogene Dgl.-System mit den  $J$  Anfangsbedingungen

$$\underline{A} = \underline{1} \quad (2.88)$$

$J$ -mal durchgeführt wird. Es ergibt sich dabei eine Übertragungsmatrix, welche folgenden Zusammenhang zwischen den Schnitten  $n$  und  $n+1$  beschreibt.

$$\underline{y}_{n+1}^{\text{hom}} = \underline{F} \underline{y}_n \quad (2.89)$$

Addiert man dazu die Integration  $\underline{R}$  des inhomogenen Systems mit der Anfangsbedingung

$$\underline{y}_n = \underline{0}, \quad (2.90)$$

so ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Unbekannten in den Schnitten  $n$  und  $n+1$  wie folgt:

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{F} \underline{y}_n + \underline{R} \quad (2.91)$$

Teilt man den Stab in  $T$  Teile, so erhält man  $J(T-1)$  Unbekannte in den Schnitten plus  $2 \cdot \frac{J}{2}$  an den Rändern als Randbedingungen. Es entsteht also ein lineares Gleichungssystem für  $J \cdot T$  Unbekannte, dessen Lösung die Lösung des Randwertproblems

$$\underline{y}' = \underline{C} \underline{y} + \underline{D}, \quad \underline{A} \underline{y}(R) = \underline{G} \quad (2.92)$$

ist.

## 2.5 Varianten zu den kinematischen Hypothesen für die Verschiebungen

### 2.5.1 Normale bleibt Normale

Die in der Schalentheorie mit viel Erfolg angewendete Hypothese "Normale bleibt Normale" soll hier in die Theorie eingearbeitet werden, um an einigen Beispielen Vergleiche zu rechnen.

Ausgang der Überlegungen ist die Gleichung (2.32) für die Verdrehungen der Normalen. Die Normalen-Hypothese fordert für diesen Ansatz

$$\underline{w} = w_\alpha \underline{a}^\alpha = -(\bar{u}_{3,\alpha} + b_\alpha^1 \bar{u}_1) \underline{a}^\alpha \quad (2.93)$$

Mit (2.36) wird also

$$u_4 = u_{3,1} \quad (2.94)$$

Dieser Zusammenhang kann so in die Verzerrungen (2.41)

bis (2.44) eingesetzt werden. Es ergibt sich als wesentliche Änderung

$$\delta_{13} = 0 \quad \text{und} \quad \tau^{13} = 0. \quad (2.95)$$

Die Gleichung  $\tilde{\tau} = \underline{E} \underline{\delta}$  (2.55) gilt nun mit folgenden Matrizen

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ 2 \delta_{12} \\ \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{\tau}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tilde{\tau}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^{11} \\ \tau^{12} \\ \tau^{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \bar{E} g^{11} g^{11} & 0 & \mu \bar{E} g^{11} g^{22} \\ 0 & G g^{11} g^{22} & 0 \\ \mu \bar{E} g^{11} g^{22} & 0 & \bar{E} g^{22} g^{22} \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

Der Vektor  $\underline{V}$  in (2.58) ergibt sich jetzt zu

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 = \underline{V}_{3,1} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Wegen (2.96) entfällt in den Matrizen  $\underline{y}$  und  $\underline{\bar{y}}$  nach (2.61) die dritte Zeile, statt dessen erhält die vierte die Nummer drei. Entsprechend sind die Zuordnungen (2.62) umzudeuten.

Entsprechend (2.97) entstehen jetzt nur drei Gruppen von unabhängigen Variationen, dafür aber wegen des Auftretens von  $\underline{V}_{3,1}$  eine zweimalige partielle Integration. Es entstehen also wieder vier Gruppen von generalisierten Schnittgrößen:

$$\underline{K}_\alpha^T = \int \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\tau}^T \underline{\bar{v}}_\alpha \, d\theta^3 d\theta^2 \quad \alpha = 1, 2, 4$$

$$\underline{K}_3^T = -\underline{K}_{4,1}^T + \int \int_{(Q)} \sqrt{g} \underline{\tau}^T \underline{\bar{v}}_3 \, d\theta^3 d\theta^2.$$

Das vollständige Dgl.-System entsprechend (2.83) lautet dann

$$\begin{aligned}
 \underset{(Q)}{V}_{,1}^T \iint \sqrt{g} \bar{v}^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_\alpha d\theta^3 d\theta^2 &= -\underset{(Q)}{V}^T \iint \sqrt{g} \chi^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_\alpha d\theta^3 d\theta^2 + \underline{K}_\alpha^T ; \alpha = 1, 2, 4 \\
 \underset{(Q)}{V}_{,1,1}^T \iint \sqrt{g} \bar{v}^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_3 d\theta^3 d\theta^2 - \underline{K}_{4,1}^T &= -\underset{(Q)}{V}^T \iint \sqrt{g} \chi^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_3 d\theta^3 d\theta^2 + \underline{K}_3 \quad (2.98) \\
 \underset{(Q)}{V}_{,1}^T \iint \sqrt{g} \bar{v}^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_i d\theta^3 d\theta^2 - \underline{K}_{i,1}^T &= -\underset{(Q)}{V}^T \iint \sqrt{g} \chi^T \underline{\varepsilon} \bar{v}_i d\theta^3 d\theta^2 + \int \sqrt{a} p_i \bar{v}_i d\theta^2 ; i = 1, 2, 3 \\
 \underline{V}_{3,1} &= \underline{V}_4 .
 \end{aligned}$$

Man sieht, daß das System (2.83) wesentlich schematischer aufgebaut ist. Es soll deswegen im folgenden in der Regel benutzt werden, wenn auch gegenüber dem System (2.98) einige Querschnittswerte der Form  $\iint_{(Q)} (\dots) d\theta^3 d\theta^2$  mehr auszuwerten sind, da diese in den Gleichungen  $\underline{V}_{3,1} = \underline{V}_4$  entfallen.

### 2.5.2 Vernachlässigung der Mittelflächendehnung in Richtung der Profilmittellinie

Diese Einschränkung der Verformungsfreiheitsgrade ist in den meisten Fällen sicher eine brauchbare Näherung. Sie ist auch geeignet, die Ordnung des Dgl.-Systems herabzusetzen. Da jedoch der größte numerische Aufwand in der Integration der Querschnittswerte nach (2.83) liegt und deren Anzahl durch die obengenannte Näherung nicht abnimmt, sei hier auf eine allgemeine Herleitung des Dgl.-Systems verzichtet.

Die Bedingung für die Forderung

$$\delta_{22}(\theta^3=0) = 0 \quad (2.99)$$

ergibt sich aus (2.44) wie folgt:

$$0 = \frac{1}{2} g_{22,1} \sqrt{a^{21}} U_1 + g_{22} \sqrt{a^{22}} U_{2,2} + \frac{1}{2} g_{22,3} U_3 .$$

Berücksichtigt man (2.22), so ergibt sich:

$$0 = \frac{1}{2} a_{22,1} \sqrt{a^{21}} U_1 + \sqrt{a_{22}} U_{2,2} - b_{22} U_3 . \quad (2.100)$$

Diese Bedingung soll in den Beispielen nur benutzt werden, wenn dadurch ein Dgl.-System entsteht, welches mit tragbarem Aufwand geschlossen zu lösen ist.

Für eine gerade oder kreisförmige Stabachse geht die Bedingung (2.100) in

$$0 = \sqrt{a_{22}} U_{2,2} - b_{22} U_3 \quad (2.101)$$

über. Diese Bedingung wurde von Kàrmàn [1] in der Form

$$-\frac{1}{r} U_3 = U_{2,2} \quad (2.102)$$

für Kreisquerschnitte benutzt.

### 3. Differentialgleichungen für Sonderfälle und Beispiele

---

#### 3.1 Der gerade Stab

##### 3.1.1 Geometrische Größen

Die Stabachse liege in Richtung des Basisvektors  $\underline{e}_1$  und der Parameter  $t$  sei die längs der Achse laufende Koordinate  $\theta'$ . Die Gleichung der Stabachse lautet dann

$$\underline{R} = \theta' \underline{e}_1. \quad (3.1)$$

Das begleitende Dreibein ist

$$\underline{\xi}_i = \underline{e}_i \quad (3.2)$$

und damit die Transformationsmatrix

$$C_k^i = \delta_k^i. \quad (3.3)$$

Die Basis der Mittelfläche ergibt sich nach (2.13) zu:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (R_{,1}^i + r^k C_{k,1}^i) \underline{e}_i = \underline{e}_1 \\ \underline{a}_2 &= r^k_{,2} C_k^i \underline{e}_i = r^i_{,2} \underline{e}_i \quad ; \text{ mit } r^1 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\underline{a}_3 = -r^3_{,2} \underline{e}_2 + r^2_{,2} \underline{e}_3$$

$$a_{ik} = \delta_{ik}. \quad (3.5)$$

Der Krümmungstensor weist nur eine Krümmung auf:

$$b_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & -r^3_{,2} r^2_{,22} + r^2_{,2} r^3_{,22} & \end{vmatrix} = b_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.6)$$

Die Metrik der Wandung ergibt sich nach (2.22):

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\theta^3 b_2^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

$$g^{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\theta^3 b_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

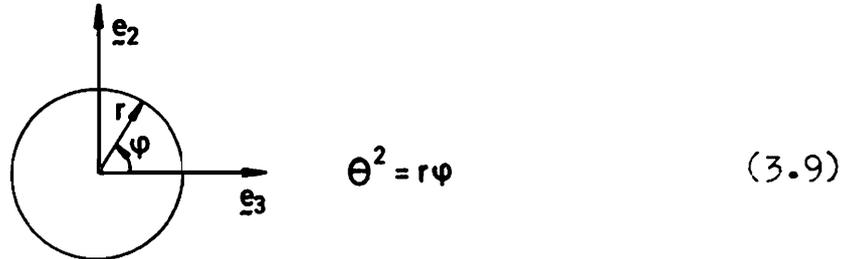
Die Christoffel-Symbole sind nach (2.25):

$$\Gamma_{ik}^1 \equiv 0$$

$$\Gamma_{ik}^2 = \frac{1}{(1-\theta^3 b_2^2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta^3 b_{2,2}^2 & -b_2^2 \\ 0 & -b_2^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{ik}^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2(1-\theta^3 b_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

### 3.1.2 Kreisquerschnitt



Die Komponenten des Vektors  $\underline{r}$  und deren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} r^2 &= r \sin \varphi, & r^2_{,2} &= \cos \varphi, & r^2_{,22} &= -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ r^3 &= r \cos \varphi, & r^3_{,2} &= -\sin \varphi, & r^3_{,22} &= -\frac{1}{r} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Damit ergibt sich nach (3.6)

$$b_2^2 = -\frac{1}{r} \quad (3.11)$$

und  $b_{2,2}^2 = 0$ .

Die von Null verschiedenen Koeffizienten  $\underline{v}$  und  $\bar{v}$  sind nach (2.62):

$$\begin{aligned} \underline{v}_{21} &= \underline{\eta}_{1,2}; & \underline{v}_{24} &= -\theta^3 \underline{\eta}_{3,2}; & \underline{v}_{34} &= -\underline{\eta}_3; \\ \underline{v}_{42} &= \left(1 + \frac{\theta^3}{r}\right)^2 \underline{\eta}_{2,2}; & \underline{v}_{43} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\theta^3}{r}\right) \underline{\eta}_3 - \theta^3 \left(1 + \frac{\theta^3}{r}\right) \underline{\eta}_{3,22}; \\ \bar{v}_{11} &= \underline{\eta}_1; & \bar{v}_{14} &= -\theta^3 \underline{\eta}_3; & \bar{v}_{22} &= \left(1 + \frac{\theta^3}{r}\right)^2 \underline{\eta}_2; \\ \bar{v}_{23} &= -\theta^3 \left(1 + \frac{\theta^3}{r}\right) \underline{\eta}_{3,2}; & \bar{v}_{33} &= \underline{\eta}_3; \end{aligned} \quad (3.12)$$

Im folgenden wird die Abkürzung

$$\delta = 1 + \frac{\theta^3}{r} \quad (3.13)$$

benutzt.

### 3.1.3 Physikalische Spannungen und Schnittgrößen

Die physikalischen Spannungen ergeben sich mit (2.52) und (2.54) zu:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \tau^{11} \sqrt{g_{11} g_{11}} = \tau_1 g_{11} \\
 \sigma_{12} &= \tau^{12} \sqrt{g_{11} g_{22}} = \tau_2 \sqrt{g} \\
 \sigma_{13} &= \tau^{13} \sqrt{g_{11} g_{33}} = \tau_3 \sqrt{g_{11}} \\
 \sigma_{22} &= \tau^{22} \sqrt{g_{22} g_{22}} = \tau_4 g_{22} .
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Die physikalischen Schnittgrößen ergeben sich aus den Spannungen:

#### a) Normalkraft

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{(Q)} \sigma_{11} dQ ; \text{ mit } dQ = \sqrt{g_{22} g_{33}} d\theta^2 d\theta^3 = \sqrt{g_{22}} d\theta^2 d\theta^3 \\
 N &= \iint_{(Q)} \sigma_{11} \sqrt{g_{22}} d\theta^2 d\theta^3 = \iint_{(\theta)} \tau_1 g_{11} \sqrt{g_{22}} d\theta^2 d\theta^3 \\
 N &= \iint_{(Q)} \sqrt{g} \tau_1 \sqrt{g_{11}} d\theta^2 d\theta^3 \text{ mit } \sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \sqrt{g_{11} g_{22}} .
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

#### b) Biegemoment

$$M = \iint_{(Q)} \sigma_{11} z \sqrt{g_{22}} d\theta^2 d\theta^3$$

mit  $z$  = Abstand des Querschnittselementes von der jeweiligen Biegeachse.

Für die Biegung um die Achse  $\varphi = 0$  ist

$$z = \delta r \sin \varphi
 \tag{3.16}$$

$$M = \iint_{(Q)} \sqrt{g} \tau_1 \sqrt{g_{11}} z d\theta^2 d\theta^3 .
 \tag{3.17}$$

c) Torsionsmoment

$$T = \iint_{(Q)} \sigma_{12} \cdot r \cdot \sqrt{g_{22}} \, d\theta^2 d\theta^3$$

$$T = \iint_{(Q)} \sqrt{g} \, \tau_2 \cdot r \cdot \sqrt{g_{22}} \, d\theta^2 d\theta^3 \quad (3.18)$$

d) Querkraft

Für die Biegung um die Achse  $\varphi=0$  ist die zugehörige Querkraft

$$Q = \iint_{(Q)} (\sigma_{12} \cos \varphi + \sigma_{13} \sin \varphi) \sqrt{g_{22}} \, d\theta^2 d\theta^3$$

$$Q = \iint_{(Q)} (\tau_2 \sqrt{g} \cos \varphi + \tau_3 \sqrt{g_{11}} \sin \varphi) \sqrt{g_{22}} \, d\theta^2 d\theta^3 \quad (3.19)$$

Bei der Varianten "Normale bleibt Normale" ist die Querkraft wegen  $\sigma_{13} = 0$  aus der Bedingung  $M_{,1} = Q$  zu bestimmen.

3.1.4 Ansätze für die Formfunktionen

Für das Biegeproblem um die Achse  $\varphi=0$  und das Torsionsproblem werden folgende Reihenansätze gemacht. Sie lassen die Lösungen der üblichen Biegetheorie und Querschnittsverformungen zu.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1 &= \eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1N} \\ \tilde{\eta}_1 &= 1, \sin \varphi, \sin(2\varphi), \dots, \sin(N\varphi) \\ \tilde{\eta}_2 &= \eta_{20}, \eta_{21}, \eta_{22}, \dots, \eta_{2M} \\ \tilde{\eta}_2 &= 1, \cos \varphi, \sin(2\varphi), \sin(3\varphi), \dots, \sin(M\varphi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_3 &= \eta_{30}, \eta_{31}, \eta_{32}, \dots, \eta_{3M} \\ \tilde{\eta}_3 &= 1, \sin \varphi, \cos(2\varphi), \cos(3\varphi), \dots, \cos(M\varphi) \quad (3.20) \\ \tilde{\eta}_4 &= \tilde{\eta}_3\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß für den geraden Stab mit Kreisquerschnitt gilt:

$$\sqrt{g_{11}} = 1; \sqrt{g} = \sqrt{g_{22}} = r; \quad (3.21)$$

und vergleicht die Ausdrücke für die physikalischen mit denen für die generalisierten Schnittgrößen (2.82) unter Verwendung der Ansätze (3.20), so stellt man folgende Identitäten fest:

$$\begin{aligned}N &\equiv K_{10}; \quad M \equiv rK_{11} - K_{41}; \quad T \equiv r \cdot K_{20}; \\ Q &\equiv K_{21} + K_{31}.\end{aligned} \quad (3.22)$$

Ein Beispiel für Wölbkrafttorsion ist im Abschnitt 3.1.6 behandelt.

### 3.1.5 Numerische Auswertung für einige Belastungen

#### 3.1.5.1 Biegeprobleme

Wie schon im Abschnitt 3.1.4 angedeutet, soll hier die Biegung um die Achse  $\varphi=0$  untersucht werden. Dieses ist aber bei einem doppelsymmetrischen Querschnitt keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Es hat sich durch viele Vergleichsrechnungen gezeigt, daß es hier völlig ausreicht, sich auf folgende Ansatzfunktionen zu beschränken

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1 &= \eta_{11} = \sin \varphi \\ \tilde{\eta}_2 &= \eta_{21} = \cos \varphi \\ \tilde{\eta}_3 &= \eta_{31} = \sin \varphi.\end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Abweichungen der Rechnungen mit mehr Ansätzen zu denen mit den vorgenannten sind nur wenige  $^{\circ}/_{\infty}$ .

Mit den Ansätzen (3.23) ergibt sich außerdem für Rotationschalen mit Abmessungen, welche einen Stab charakterisieren, also etwa  $\frac{2r}{L} < \frac{1}{3}$ , daß die Lösungsfunktionen in folgenden Relationen zueinander stehen:

$$\begin{aligned} V_{21} &\approx V_{31} \\ V_{41} &\approx V_{31,1} \\ \frac{1}{r} V_{11} &\approx -V_{21,1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

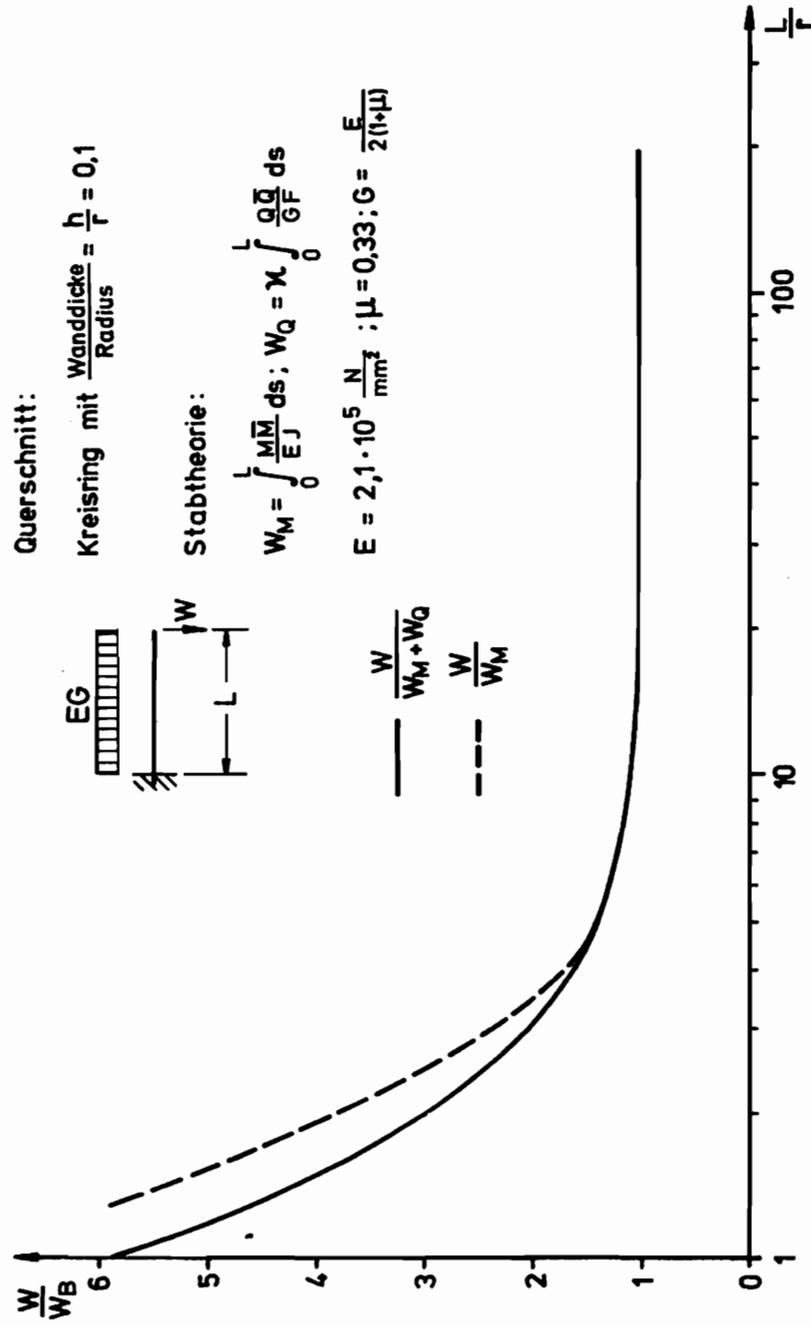
Nimmt man die Ansätze (3.23) hinzu, so stellt man fest, daß die so gewonnene Lösung die Bernoulli-Hypothese der Stabtheorie erfüllt, wenn in (3.24) das Gleichheitszeichen steht. Dieses ist eine Bestätigung der herkömmlichen Stabtheorie auch für dünnwandige Stäbe.

### Abweichungen von der Biegetheorie der Stäbe

#### 1. Verformungen

Die bekannte Biegelinie der Stabtheorie findet sich hier in der Verschiebung  $u_z = V_{21} \cos \varphi$  für  $\varphi = 0$  wieder. Sie ist also gleich der Funktion  $V_{21}(\theta)$ . Diese so nach der vorliegenden Theorie ermittelte Biegelinie enthält automatisch Verformungen aus den Schubspannungen. Einen Vergleich mit der Stabtheorie zeigt Bild 3.1. Diese Ergebnisse, wie auch viele der weiteren Beispiele, wurden mit Hilfe der Schalentheorie nach Wunderlich [14] überprüft. Die Abweichungen zur vorliegenden Theorie waren in den Bereichen der Gültigkeit der Schalentheorie (s. auch Bild 3.4) unwesentlich.

Die Querschnittsverformungen selbst sind für gerade stabähnliche Schalen so unwesentlich, daß sie hier nicht



näher untersucht werden sollen.

## 2. Schnittgrößen

Die Schnittgrößen der Schalentheorie, also Integrationen der Spannungen über die Wanddicke, werden in der vorliegenden Theorie nicht explizit benötigt und auch nicht ermittelt.

Gemeint sind hier die Schnittgrößen der Stabtheorie, wie sie in Abschnitt 3.1.3 in (3.15) bis (3.19) definiert sind. Bei statisch bestimmten Systemen treten bei diesen Schnittgrößen zur Stabtheorie natürlich keine Unterschiede auf. Bei statisch unbestimmten Systemen ergeben sich jedoch geringe Abweichungen, weil die vorliegende Theorie Verformungen aus Schubspannungen berücksichtigt.

Wesentliche Unterschiede treten bei statisch unbestimmten Systemen mit kurzen Stäben auf, da das Tragverhalten dann nicht mehr der Stabtheorie entspricht. Ein sinnvoller Vergleich mit der Stabtheorie ist dann auch bei den Spannungen nicht mehr möglich.

## 3. Spannungen

Es treten in dünnwandigen Stäben zum Teil erhebliche Abweichungen der Spannungen gegenüber denen nach der Biegetheorie der Stäbe auf. Für einige häufig auftretende Fälle sollen diese Abweichungen hier in Abhängigkeit von Systemparametern auf die Spannungen nach der Biegetheorie bezogen werden. Der entsprechende Quotient sei im folgenden Überhöhungsfaktor genannt. Die so entstehenden Diagramme können dann als Bemessungshilfen benutzt werden, ohne daß die vorliegende Theorie oder die Schalentheorie herangezogen werden muß.

Die Abweichungen sind zunächst bei kurzen Stäben im ganzen System wesentlich. Dieses ist aber ein Problem

der Schalentheorie und nicht primär Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Ab welcher Länge die Schalen sinnvoll mit Stäben zu vergleichen sind, hängt vom Problem ab und ist aus den folgenden Diagrammen zu ersehen.

In diesem Fall sind die Abweichungen nur noch an Krafteinleitungs- und Einspannstellen wesentlich. Da Krafteinleitungen von Fall zu Fall verschieden und schlecht zu normieren sind, sollen hier nur Einspannstellen untersucht werden.

An einer Einspannstelle eines dünnwandigen Stabes sind die Verschiebungen aller Punkte des Endquerschnittes behindert. In der vorliegenden Theorie heißt das

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{v}_3 = \underline{v}_4 = 0. \quad (3.25)$$

Dagegen können die Ableitungen dieser Funktionen wegen der Verformungen aus Schubspannungen von Null verschieden sein.

Ein freies Ende hat die Randbedingung

$$\underline{k}_1 = \underline{k}_2 = \underline{k}_3 = \underline{k}_4 = 0. \quad (3.26)$$

Für die folgenden Diagramme wurden folgende Querschnittsbezeichnungen und Werkstoffkenngrößen benutzt:

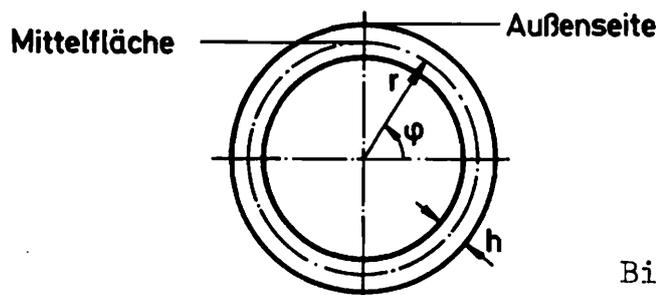


Bild 3.2

Werkstoff: Stahl: spezifisches Gewicht  $\rho = 7,85 \cdot 10^{-5} \frac{N}{mm^3}$

Elastizitätsmodul  $E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$

Querkontraktionszahl  $\mu = 0,33$

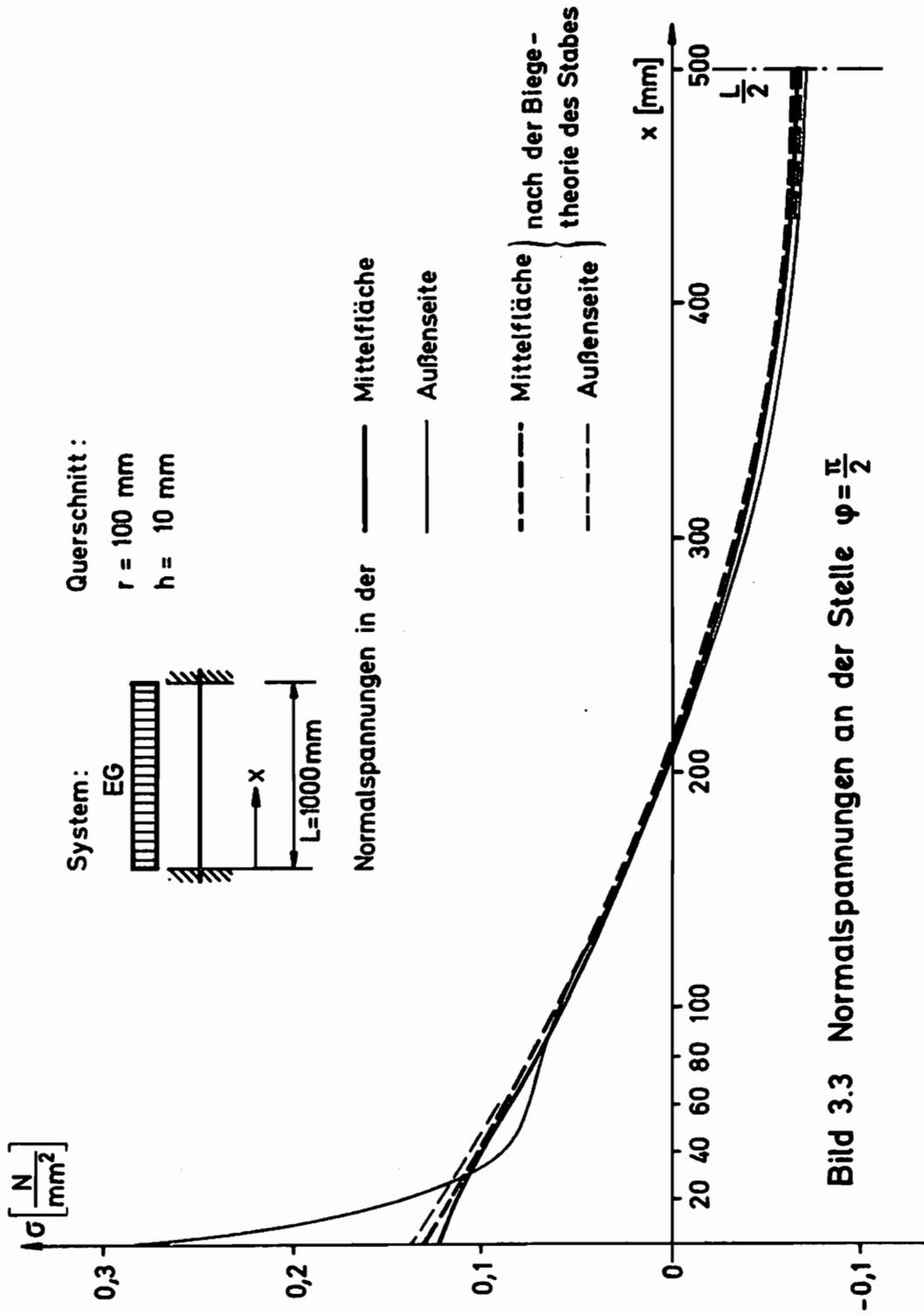
Gleitmodul  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Im Bild 3.3 ist der Normalspannungsverlauf an der Oberseite, also  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , eines beidseitig eingespannten Rohres unter Eigengewicht entlang der Stabachse aufgetragen. Vergleicht man die Spannungen in der Mittel­fläche und mit Ausnahme des Bereiches der Einspannstelle auch die der Außenseite, so sieht man, daß die Kurven der Biegetheorie des Stabes im ganzen Bereich etwas über denen der vorliegenden Theorie liegen. Dieser Unterschied entsteht durch die Vernachlässigung der Querkraftverformungen bei der Ermittlung der statisch Unbestimmten nach der Stabtheorie. Die Abweichungen sind aber unbedeutend.

Dagegen sieht man deutlich den Einspanneffekt der Wandung. Die schnell abklingenden Biegemomente der Wandung, wie sie aus der Schalentheorie bekannt sind, treten auch hier auf. Die damit verbundenen Spannungen nehmen gemessen an denen nach der Biegetheorie der Stäbe relativ große Werte an, welche auch bei sehr langen Stäben von beachtlicher Bedeutung bleiben.

Das Beispiel in Bild 3.4 zeigt, daß die Normalspannungen an der Einspannstelle auch bei Rohren, welche mehr als 100mal so lang wie dick sind, etwa 50 % höher sind als diejenigen aus der Stabtheorie.

Die Berechnung nach Wunderlich [14] zeigt hier im Bereich der Schalenabmessungen gute Übereinstimmung mit der vor-



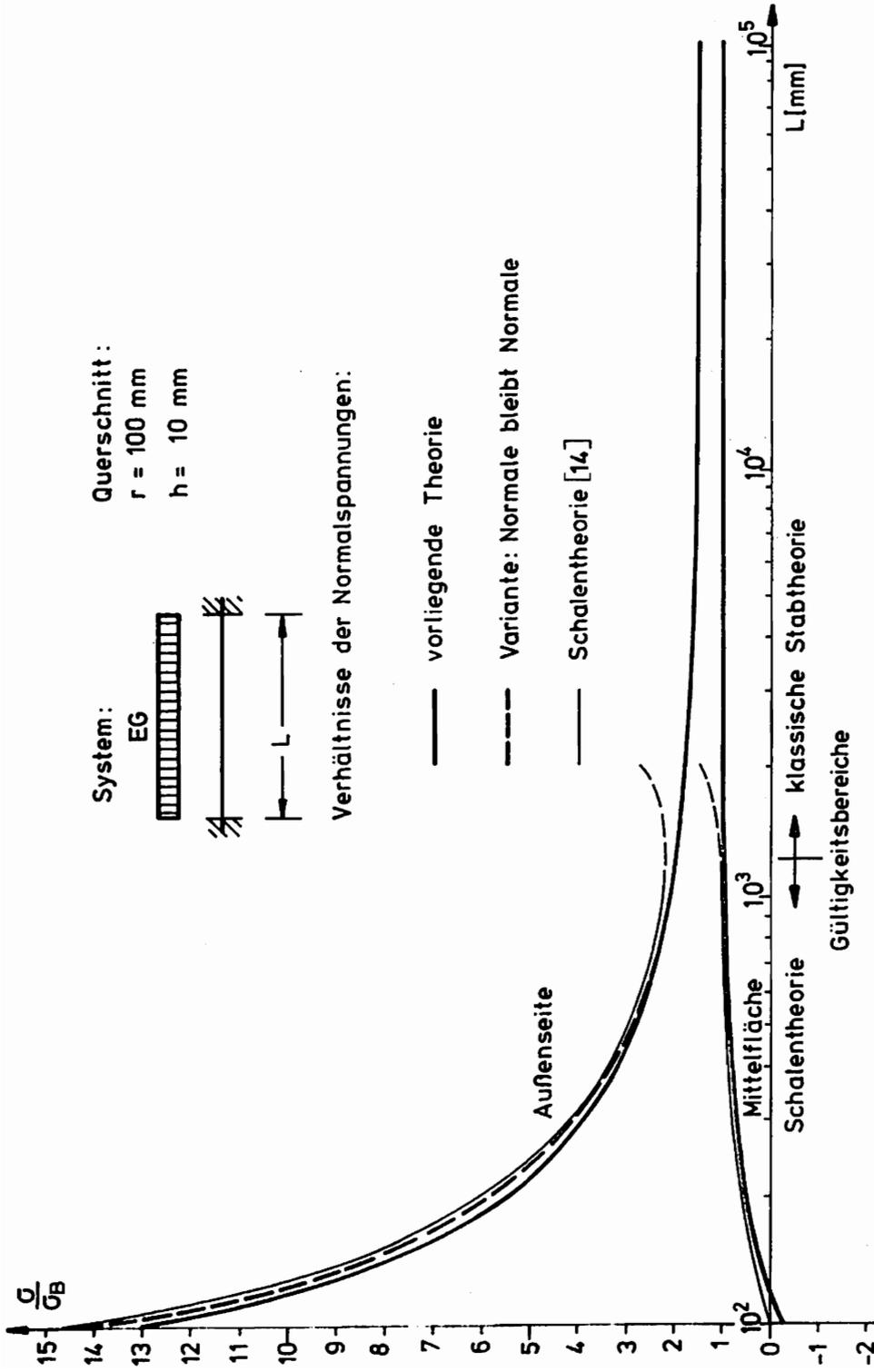


Bild 3.4 Normalspannungen an der Einspannstelle bezogen auf diejenigen aus der Biegetheorie der Stäbe

liegenden Theorie. Bei größeren Rohrlängen wird der Gültigkeitsbereich der linearen ersten Approximation der Schalentheorie überschritten, wie verschiedene Vergleichsrechnungen bestätigten. Die Variante der vorliegenden Theorie "Normale bleibt Normale" nähert sich jedoch bei großen Längen der Theorie mit dem weiteren Freiheitsgrad "Normale bleibt Gerade" in Stablängsrichtung (2.36) immer mehr an. Die Unschärfe der Schalentheorie liegt also nicht in der kinematischen Hypothese, sondern in der Bildung der Verzerrungs- und Schnittgrößen-Tensoren. Diese Fehler werden in der vorliegenden Arbeit durch numerische Integration der Querschnittsgrößen in dem Dgl.-System (2.83) vermieden. Diese Methode beinhaltet zwar einen größeren programm- und rechentechnischen Aufwand, sie liefert aber sowohl im Schalen- als auch im Stabbereich zuverlässige Ergebnisse.

Bei der genaueren Betrachtung des Überhöhungsfaktors  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$  der Normalspannungen in Stabachsrichtung an der Einspannstelle stellt man folgendes fest:

1. Die Schnittgrößen nach (3.15) bis (3.19), welche sich auch aus Ergebnissen nach der Schalentheorie ermitteln lassen, stimmen bei kurzen statisch unbestimmt gelagerten Stäben nur schlecht oder überhaupt nicht mit denen aus der Stabtheorie überein. In diesen Fällen ist es nicht sinnvoll, einen Überhöhungsfaktor anzugeben.
2. In den übrigen Fällen, also bei statisch bestimmt gelagerten oder entsprechend langen Stäben, beeinflussen drei statische Größen und die Querkontraktionszahl den Überhöhungsfaktor. Diese drei Größen und die anschaulichen Deutungen ihres Einflusses sind:
  - a) Das Biegemoment.  
Die Normalspannungen in Richtung der Stabachse rufen wegen der behinderten Querdehnung an der

Einspannstelle und in ihrer Umgebung Normalspannungen in Richtung der Profilmittellinie hervor. Wegen der Krümmung der Profilmittellinie haben diese Spannungen Komponenten quer zur Wandung, welche Längsbiegung in der Wandung bedingen.

b) Querkraft

Die Aufnahme der Querkraft geschieht im wesentlichen durch aufrecht stehende Wandteile (Richtung der Querkraft). Durch die Gleitungen in diesen Wandteilen entstehen in endlicher Entfernung von der Einspannstelle Verschiebungen, welche auch den flachliegenden Wandteilen aufgezungen werden. Die flachliegenden Wandteile reagieren darauf mit Biegespannungen in Achsrichtung.

c) Belastung auf der Mittelfläche

Dieser Einfluß ist nur bei sehr kurzen Stäben von Bedeutung.

Um die Anteile der einzelnen Einflüsse darzustellen, wurde der Überhöhungsfaktor für verschiedene Fälle in Bild 3.5 in Abhängigkeit des Parameters

$$\frac{M_0}{r Q_0} = \alpha \quad (3.27)$$

mit  $M_0$  und  $Q_0$  als Schnittgrößen an der Einspannstelle nach der Stabtheorie aufgetragen.

Den Einfluß des Biegemomentes  $M_0$  (nach 2a) erhält man, wenn man ein System ohne Querkraft, also für  $\pm \alpha \rightarrow \infty$  rechnet. Der Überhöhungsfaktor für die Außenseite ergibt sich für den Querschnitt mit  $\frac{h}{r} = 0,1$  zu  $1,479$ . Für andere Verhältnisse  $\frac{h}{r}$  ist dieser Faktor in Bild 3.6 für  $\mu = 0,33$  dargestellt. Für  $\mu = 0$  ist dieser Faktor identisch  $1,0$ . Für kleinere negative  $\alpha$  wächst der Einfluß der Querkraft (nach 2b) allmählich an. Ein Grenzwert für  $\alpha = 0$  existiert nicht, da für  $M_0 = 0$

die Spannung nach der Stabtheorie  $G_3 = 0$  wird. Für positive  $\alpha$  kehrt sich der Einfluß der Querkraft um. Es entsteht eine zur Asymptote  $\frac{\sigma}{G_3}$  für  $\frac{M_0}{r Q_0} \rightarrow +\infty$  antisymmetrische Kurve. Diese Abhängigkeit ergibt sich aus Bild 3.5, wenn man die rechte Teilung auf die Kurve "ohne Streckenlast" anwendet. Die Überhöhungsfaktoren für die Spannungsverhältnisse an der Außenseite können in Abhängigkeit von den Parametern des Querschnittes  $\frac{h}{r}$  und der Schnittgrößen  $\frac{M_0}{r Q_0}$  der Kurvenschar in Bild 3.7 entnommen werden.

Für konkrete Lastfälle ist dem Parameter  $\frac{M_0}{r Q_0}$  jeweils eine bezogene Länge  $\frac{L}{2r}$  zugeordnet. Für drei häufige Fälle sind diese Zuordnungen in den drei unteren Teilungen des Bildes 3.5 angegeben. Man sieht, daß der Einfluß des Eigengewichtes (nach 2c) für einen Kragarm erst bei einem Verhältnis Länge zur Querschnittshöhe, also  $\frac{L}{2r}$ , von kleiner als 2,0 merklich auffällt. Auch bei einem statisch unbestimmten System (z. B. beidseitig eingespanntes Rohr) unter Eigengewicht ist die Kurve "ohne Streckenlast" schon für ein Längenverhältnis von  $\frac{L}{2r} > 5$  brauchbar.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß es bei genügend langen Feldern unabhängig vom System und von der Belastung ausreicht, den Überhöhungsfaktor aus den Diagrammen 3.6 und 3.7 in Abhängigkeit von den Schnittgrößen an der Einspannstelle und den Querschnittswerten zu entnehmen. Aus Bild 3.6 ist zu erkennen, daß die vorliegende Theorie bei numerischer Integration der Querschnittsgrößen (2.83) mit endlicher Genauigkeit nicht nur für dünnwandige Profile gültig ist. Der Überhöhungsfaktor geht für  $\frac{h}{r} \rightarrow 2.00$ , also für den Vollquerschnitt, recht gut gegen 1. Dieses ist auch zu erwarten, da außer der Hypothese "Normale bleibt Gerade" keine weiteren Näherun-

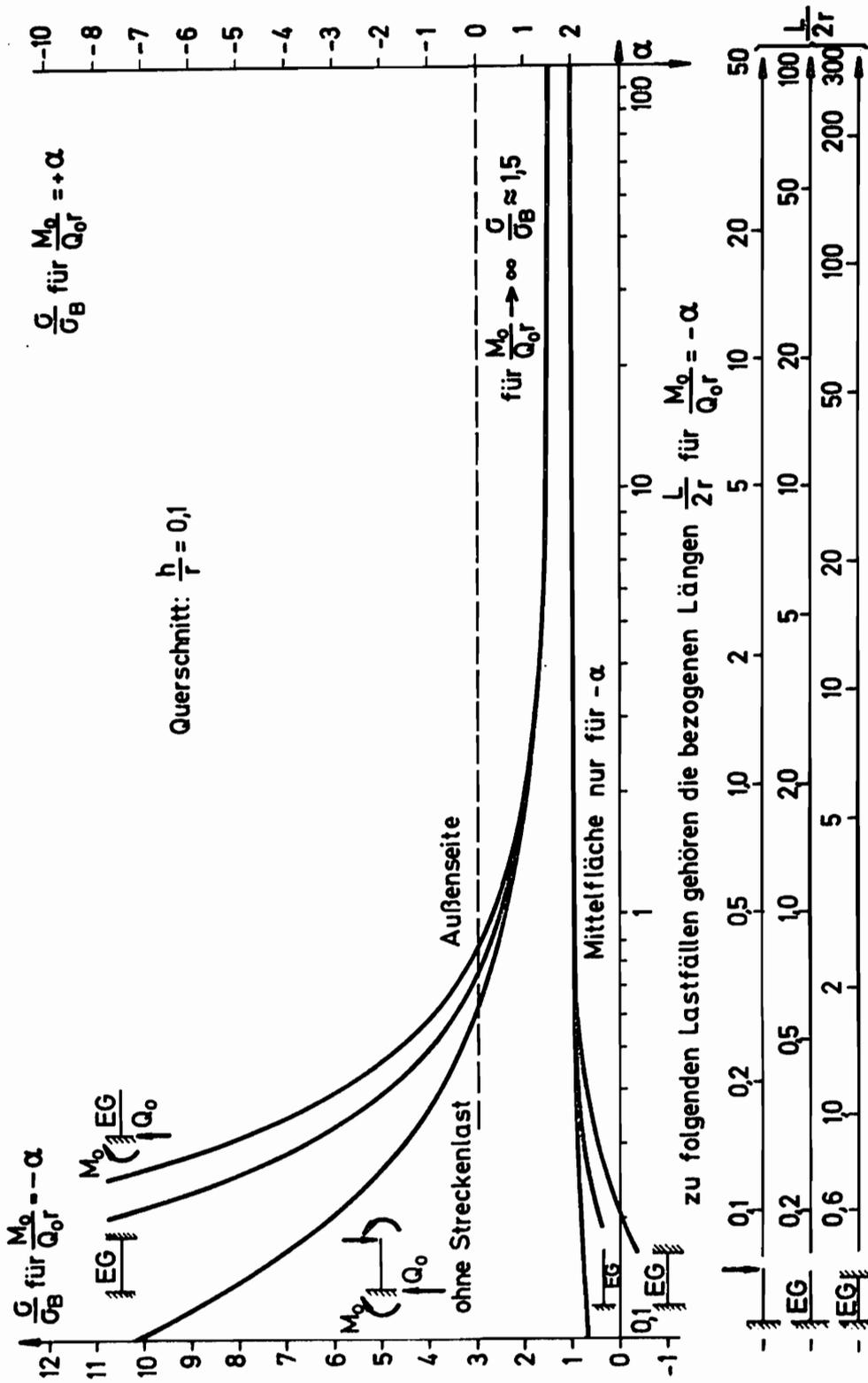
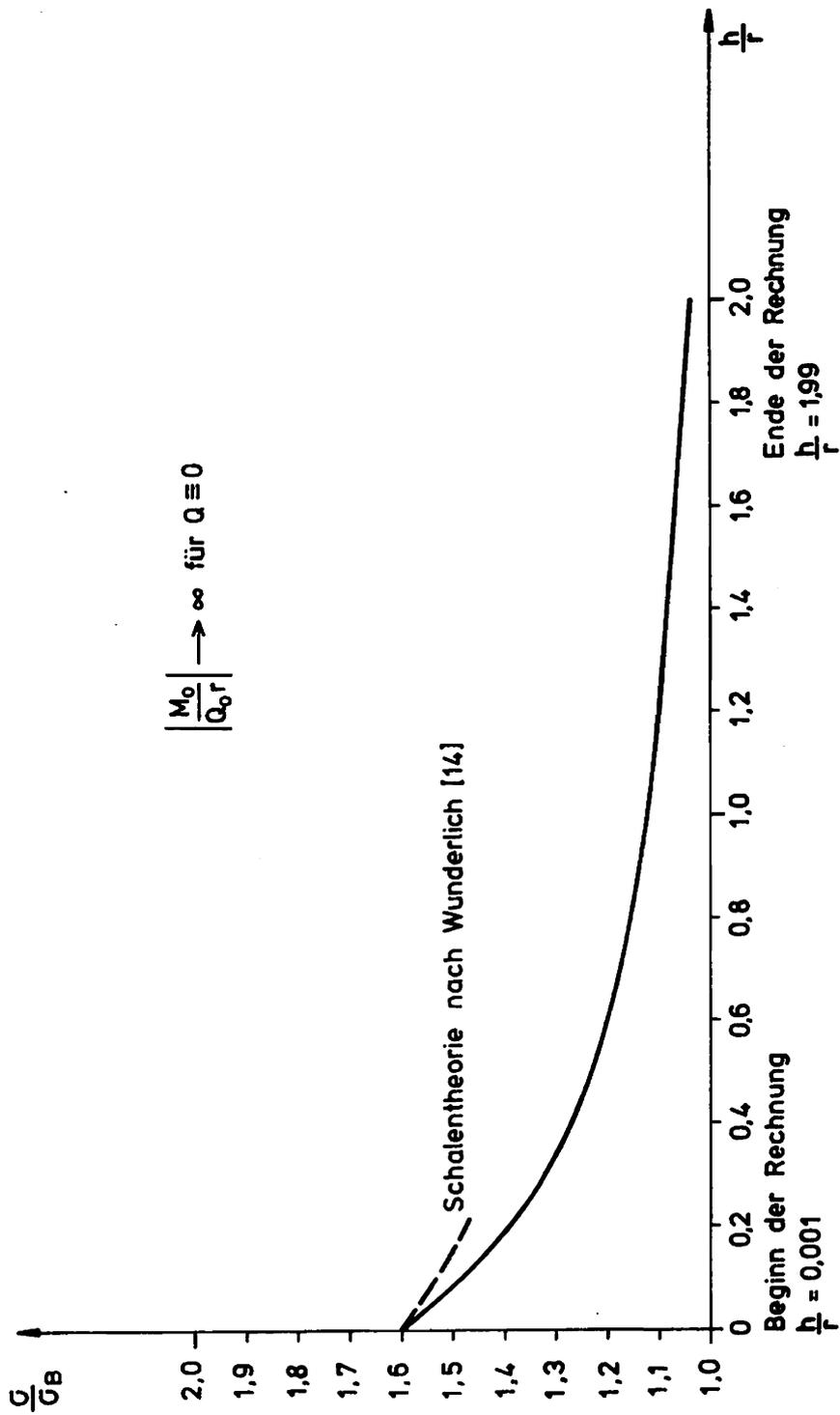
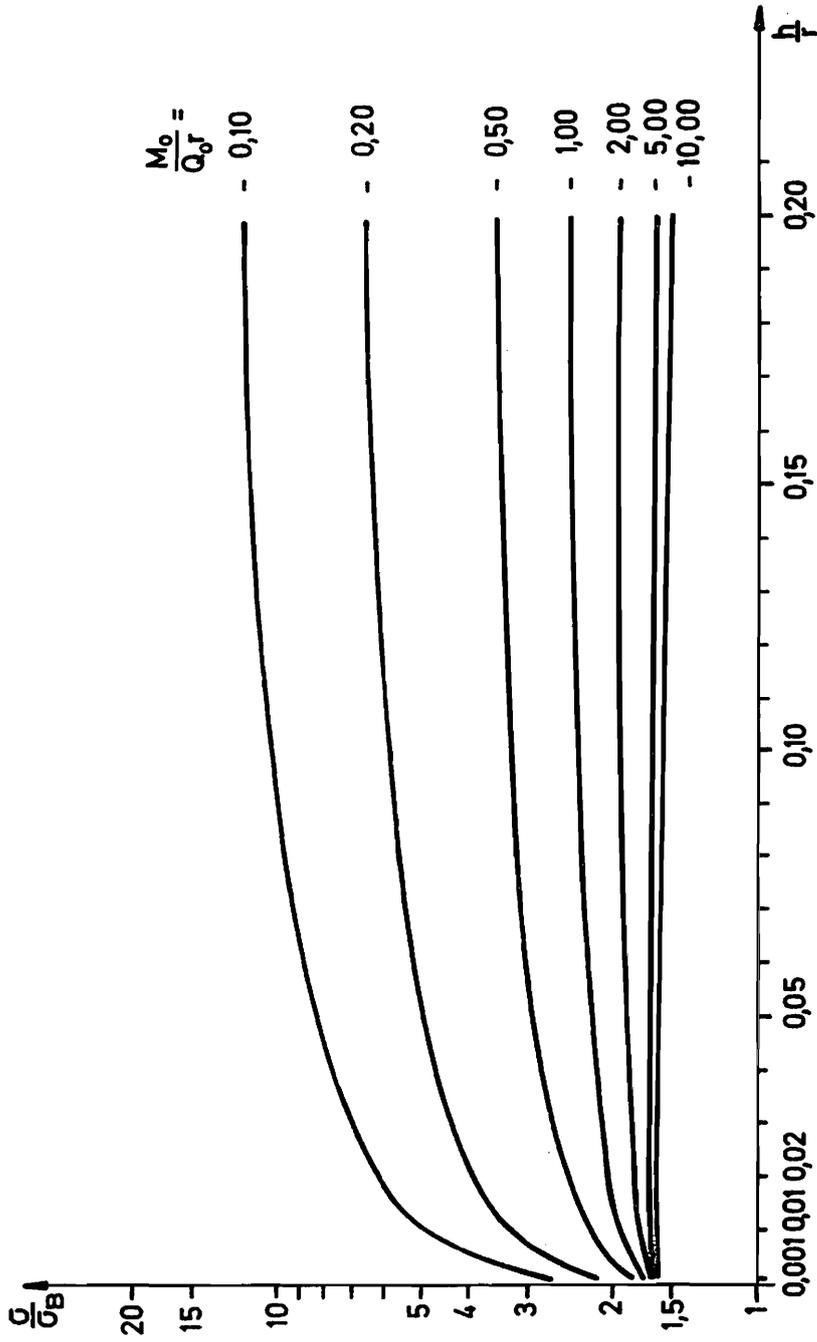


Bild 3.5 Auf die Stabtheorie bezogene Normalspannungen an der Einspannstelle in Abhängigkeit des Parameters  $\frac{M_0}{Q_0r} = \pm\alpha$



**Bild 3.6** Auf die Stabtheorie bezogene Normalspannungen der Einspannstelle an der Außenseite



**Bild 3.7 Bezogene Normalspannungen an der Außenseite für Systeme ohne Streckenlast**

gen gemacht wurden. Diese Hypothese bedeutet aber für den Vollquerschnitt das Ebenbleiben der Querschnitte. Bemerkenswert ist noch, daß die numerische Integration der Querschnittswerte für  $\frac{h}{r} = 2,00$  wegen der auftretenden Division durch Null nicht möglich ist. Die Rechnung wurde bei  $\frac{h}{r} = 1,99$  abgebrochen.

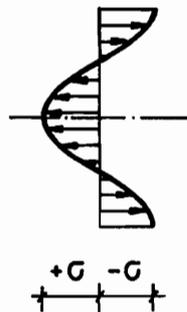
### 3.1.5.2 Bimomentenbelastung

Als Belastung des geraden Rohres sei an einem Ende eine Spannungsverteilung der Form

$$\sigma_{nn} = \sigma \cos(2\varphi) \quad (3.28)$$

aufgebracht. Diese Belastung bildet eine Gleichgewichtsgruppe.

Die Spannungsverteilung hat also folgende Form



Die Verschiebungsansätze seien hier

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \cos(2\varphi) \\ \eta_{22} &= \sin(2\varphi) \\ \eta_{32} &= \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Als Bimoment sei nun folgender Ausdruck verstanden

$$\begin{aligned} B &= \int_{(Q)} \sigma_{nn} r \cos(2\varphi) dQ = \iint_{(Q)} \tau_{11} g_{11} r \cos(2\varphi) \sqrt{g_{22}} d\theta^3 d\theta^2 \\ B &= \sigma r \iint_{(Q)} r^2 \cos^2(2\varphi) d\theta^3 d\theta^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Wie allgemein bekannt ist, bildet die Gleichgewichtsgruppe eine Ausnahme zum Prinzip des schnellen Abklingens dieser Einflüsse (Prinzip von de Saint-Venant).

Um die Lösung für diesen einfachen Fall übersichtlich darzustellen und im speziellen auch geschlossen zu lösen, sei hier die Theorie kurz aufgerollt.

Die Verschiebungen nach (2.37) sind:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 - \Theta^3 U_4 &= (V_{12} - \Theta^3 V_{42}) \cos(2\varphi) \\ u_2 &= \delta(\delta U_2 - \Theta^3 U_{3,2}) &= \delta(\delta V_{22} + 2\Theta^3 V_{32}) \sin(2\varphi) \quad (3.31) \\ u_3 &= U_3 &= V_{32} \cos(2\varphi) . \end{aligned}$$

Daraus die Verzerrungen nach (2.41) bis (2.44)

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (V_{12,1} - \Theta^3 V_{42,1}) \cos(2\varphi) \\ \delta_{12} &= \frac{1}{2}(-2\frac{\delta}{r} V_{12} + \delta^2 V_{22,1} + 2\frac{\Theta^3}{r} \delta V_{32,1} + 2\frac{\Theta^3}{r} V_{42}) \sin(2\varphi) \\ \delta_{13} &= \frac{\delta}{2} (V_{32,1} - V_{42}) \cos(2\varphi) \\ \delta_{22} &= \frac{1}{r} (2\delta^2 V_{22} + \delta(1 + 4\frac{\Theta^3}{r}) V_{32}) \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (3.32)$$

und die Spannungen aus (2.52)

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \bar{E} \left[ \delta_{11} + \mu \frac{1}{\delta^2} \delta_{22} \right] \\ \tau^{12} &= G \frac{1}{\delta^2} 2 \delta_{12} \\ \tau^{13} &= G 2 \delta_{13} \\ \tau^{22} &= \bar{E} \frac{1}{\delta^4} \left[ \delta_{22} + \mu \delta^2 \delta_{11} \right] . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die von Null verschiedenen Koeffizienten  $\underline{v}$  und  $\bar{v}$  sind nach (2.62):

$$\begin{array}{l|l}
 v_{212} = -2 \frac{1}{r} \sin(2\varphi) & \bar{v}_{112} = \cos(2\varphi) \\
 v_{242} = 2 \frac{\theta^3}{r} \sin(2\varphi) & \bar{v}_{142} = -\theta^3 \cos(2\varphi) \\
 v_{342} = -\cos(2\varphi) & \bar{v}_{222} = \delta^2 \sin(2\varphi) \\
 v_{422} = 2 \frac{1}{r} \delta^2 \cos(2\varphi) & \bar{v}_{232} = 2 \frac{\theta^3}{r} \delta \sin(2\varphi) \\
 v_{432} = \frac{1}{r} \delta (1 + 4 \frac{\theta^3}{r}) \cos(2\varphi) & \bar{v}_{332} = \cos(2\varphi)
 \end{array} \quad (3.34)$$

Damit ist die elektronische Rechnung vorbereitet. Ähnlich wie (3.22) ergibt sich hier folgende Identität:

$$B \equiv r K_{12} - U_{42} \quad (3.35)$$

Um eine geschlossene Lösung zu erhalten, sollen hier die Varianten nach Abschnitt 2.5 angewandt werden.

Es ist also wegen:

$$\begin{array}{l}
 \text{"Normale bleibt Normale"} \quad U_4 = U_{3,1} \\
 \text{und } \delta_{22}(\theta^3=0) = 0 \quad -\frac{1}{r} U_3 = U_{2,2}
 \end{array} \quad (3.36)$$

Daraus folgt hier

$$\begin{array}{l}
 V_{42} = V_{32,1} \\
 -V_{32} = 2 V_{22}
 \end{array} \quad (3.37)$$

Setzt man diesen Zusammenhang in (3.32) ein und nimmt zur Schreiberleichterung folgende Umbenennungen vor

$$\begin{array}{l}
 V_{12} = U \\
 V_{22} = W
 \end{array} \quad (3.38)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (U_{,1} - \theta^3 W_{,11}) \cos(2\varphi) \\ \delta_{12} &= \left(-\frac{2}{r} U + \left(\frac{3}{4} \delta^2 - 1\right) W_{,1}\right) \sin(2\varphi) \\ \delta_{22} &= 3 \frac{\theta^3}{r} \frac{1}{r} \delta W \cos(2\varphi) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Außerdem sei hier der Einfluß der zweiten Ableitung der Wandverschiebung  $W$  vernachlässigt. Die Einschränkung erscheint gerechtfertigt, weil die Krümmung in Längsrichtung der verformten Wandung sicher klein sein wird, zumal sie in dem entscheidenden Ausdruck noch mit kleinen Werten  $\theta^3$  multipliziert wird. Es wird also

$$(U_{,1} - \theta^3 W_{,11}) \approx U_{,1} \quad (3.40)$$

gesetzt.

Unter Vernachlässigung der Querdehnung, also für  $\mu = 0$  ergeben sich nun endgültig Verzerrungen und Spannungen zu:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= U_{,1} \cos(2\varphi) \\ \delta_{12} &= \left(-\frac{2}{r} U + \left(\frac{3}{4} \delta^2 - 1\right) W_{,1}\right) \sin(2\varphi) \\ \delta_{22} &= 3 \delta \frac{\theta^3}{r^2} W \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= E \delta_{11} = E U_{,1} \cos(2\varphi) \\ \tau^{12} &= E \frac{1}{r^2} \delta_{12} = E \frac{1}{r^2} \left(-\frac{2}{r} U + \left(\frac{3}{4} \delta^2 - 1\right) W_{,1}\right) \sin(2\varphi) \\ \tau^{22} &= E \frac{1}{r^4} \delta_{22} = E 3 \frac{1}{r^3} \frac{\theta^3}{r} W \cos(2\varphi) . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Bildet man nun die erste Variation der Formänderungsarbeit nach (2.66), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W^v = \int E \iint_{(L) (\Theta)} & \left[ \cos^2(2\varphi) U_{,1} \delta U_{,1} \right. \\ & + 2 \frac{1}{r^2} \left( -\frac{1}{r} U + \left(\frac{3}{4} \delta^2 - 1\right) W_{,1} \right) \left( -\frac{1}{r} \delta U + \left(\frac{3}{4} \delta^2 - 1\right) \delta W_{,1} \right) \sin^2(2\varphi) \\ & \left. + 3 \frac{1}{r^3} \frac{\Theta^3}{r} \cdot 3 \delta \frac{\Theta^3}{r^2} \cos^2(2\varphi) W \delta W \right] r d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Wertet man die Querschnittsintegrale aus und führt ähnlich wie in (2.82) generalisierte Schnittgrößen ein, so ergibt sich folgendes Dgl.-System:

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{1}{2} EA U_{,1} \\ K_{U,1} &= \frac{1}{4} EA \left[ \frac{4}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{r^2} \right) U + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{r^2} \right) W_{,1} \right] \\ K_W &= \frac{1}{4} EA \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{r^2} \right) U + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{r^2} \right) W_{,1} \right] \\ K_{W,1} &= \frac{1}{2} EA \frac{1}{r^2} \frac{3}{4} \frac{h^2}{r^2} W \end{aligned} \quad (3.44)$$

mit der Querschnittsfläche  $A = 2\pi r h$ .

Berücksichtigt man  $\frac{h^2}{r^2} \ll 1$  für dünnwandige Rohre und eliminiert aus (3.44) drei der Funktionen derart, daß man eine Dgl. für  $W$  erhält, so ergibt sich:

$$r^4 W_{,1111} - 6 r^2 \rho W_{,11} + 12 \rho W = 0 \quad (3.45)$$

mit  $\rho = \frac{h^2}{r^2}$ .

Die charakteristische Gleichung lautet also

$$r^4 \lambda^4 - 6 \rho r^2 \lambda^2 + 12 \rho = 0 \quad (3.46)$$

oder mit  $\alpha = r^2 \lambda^2$

$$\alpha^2 - 6\beta\alpha + 12\beta^2 = 0 \quad (3.47)$$

Dessen Lösung ist

$$\alpha_{1,2} = 3\beta \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\beta}{\beta}} \right)$$

wegen  $\beta \ll 1$

$$\alpha_{1,2} \approx 3\beta \left( 1 \pm i \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\beta}{\beta}} \right) \quad (3.48)$$

Mit (3.46) ergibt sich

$$r \lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt[4]{3\beta} (1 \pm i) \quad (3.49)$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. zu diesen vier Wurzeln laute mit der Abkürzung

$$\sqrt[4]{3\beta} = \lambda \quad (3.50)$$

$$W = a \cdot \operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) \cos(\lambda \frac{x}{r}) + b \cdot \operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r}) + c \cdot \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \cos(\lambda \frac{x}{r}) + d \cdot \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r})$$

Für die Randbedingungen sei folgender Fall angenommen.  
An der Stelle  $x=0$  wirke das Bimoment

$$B = \int_{(Q)} \sigma r \cos(2\varphi) dQ = \int_{(Q)} \tau^m r \cos(2\varphi) dQ$$

$$B = \int_{(Q)} E U_{,11} r \cos^2(2\varphi) dQ = \frac{1}{2} E A r U_{,11} = r K_u$$

und die Verschiebung  $W$  sei Null.

Der Rand  $x=l$  sei kräftefrei.

$$\begin{aligned} x=0 &\leadsto W=0 \\ &K_u = \frac{4}{r} B \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} x=l &\leadsto K_u = 0 \\ &K_w = 0 \end{aligned}$$

Reduziert man diese Randbedingungen auf die Verschiebung  $W$ , so ergibt sich:

$$x=0 \leadsto W=0; W_{,11} = -\frac{8B}{r^2 EA} \tag{3.51}$$

$$x=l \leadsto r^2 W_{,11} - 6PW = 0; r^2 W_{,111} - 6PW_{,1} = 0$$

Diese vier Randbedingungen ergeben mit der Dgl. (3.50) und unter Berücksichtigung von

$$\lambda^4 \ll \lambda^2 \ll 1$$

folgende Konstanten

$$a = 0$$

$$b = -\frac{4B}{EA \lambda^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2(\lambda \frac{l}{r})}{\cos(\lambda \frac{l}{r}) \sin(\lambda \frac{l}{r}) - \operatorname{ch}(\lambda \frac{l}{r}) \operatorname{sh}(\lambda \frac{l}{r})} = d \bar{b} \tag{3.52}$$

$$c = -\frac{4B}{EA \lambda^2} \cdot \frac{\cos^2(\lambda \frac{l}{r})}{\cos(\lambda \frac{l}{r}) \sin(\lambda \frac{l}{r}) - \operatorname{ch}(\lambda \frac{l}{r}) \operatorname{sh}(\lambda \frac{l}{r})} = d \bar{c}$$

$$d = -\frac{4B}{EA \lambda^2} .$$

Die gesuchte Biegelinie der Wandung und ihre erste Ableitung lauten also:

$$W = d (\bar{b} \operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r}) + \bar{c} \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \cos(\lambda \frac{x}{r}) + \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r})) \quad (3.53)$$

$$W_{,1} = d \lambda \frac{x}{r} [(\bar{b} - \bar{c}) \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r}) + (\bar{b} + \bar{c}) \operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) \cos(\lambda \frac{x}{r}) + \operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) \sin(\lambda \frac{x}{r}) + \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r}) \cos(\lambda \frac{x}{r})]$$

Für kleine Argumente  $\lambda \frac{x}{r}$ , also etwa  $\frac{x}{r} < 1$ , lassen sich diese Funktionen durch Polynomreihen auf folgende Form bringen:

$$W \approx -d \frac{3 \lambda \frac{x}{r}}{2 (\lambda \frac{x}{r})^3} = \frac{B r^3}{\pi E h^3 l^3} x^3 \quad (3.54)$$

$$W_{,1} \approx \frac{B r^3}{\pi E h^3 l^3} \cdot$$

Für große Argumente  $\lambda \frac{x}{r}$ , also für sehr lange Rohre, ergeben sich die Konstanten  $\bar{b}$  und  $\bar{c}$  zu

$$\bar{b} \approx -1; \quad \bar{c} \approx 0.$$

Die Biegelinie der Wandung ergibt sich dann zu

$$W \approx -d (\operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) - \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r})) \sin(\lambda \frac{x}{r}) \quad (3.55)$$

$$W_{,1} \approx d \lambda \frac{x}{r} [(\operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) - \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r})) \sin(\lambda \frac{x}{r}) - (\operatorname{ch}(\lambda \frac{x}{r}) - \operatorname{sh}(\lambda \frac{x}{r})) \cos(\lambda \frac{x}{r})]$$

oder

$$W \approx -d e^{-\lambda \frac{x}{r}} \sin(\lambda \frac{x}{r}) \quad (3.56)$$

$$W_{,1} \approx d \lambda \frac{x}{r} e^{-\lambda \frac{x}{r}} (\sin(\lambda \frac{x}{r}) - \cos(\lambda \frac{x}{r})),$$

sie ist also die Funktion einer gedämpften Schwingung.  
Die Länge einer Halbwelle ergibt sich zu

$$l_H = \frac{\pi r}{\lambda} . \quad (3.57)$$

Die maximale Verschiebung tritt an der Stelle

$$l_w = \frac{\pi r}{4\lambda} \quad (3.58)$$

auf und hat den Wert

$$\max |W| = d e^{-\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} d . \quad (3.59)$$

Die Ableitung der Biegelinie der Wandung an der Last-  
einleitungsstelle, also für  $x=0$ , ist

$$W_{,x(0)} = \frac{1}{r} \lambda d . \quad (3.60)$$

Die Brauchbarkeit dieser Lösung soll im folgenden durch  
ein Beispiel kurz dargestellt werden.

Ein gerades Rohr aus Stahl mit

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} ; \mu = 0,33 \quad (3.61)$$

mit dem Querschnitt

$$r = 100 \text{ mm} ; h = 1 \text{ mm} \quad (3.61)$$

soll am Ende  $x=0$  mit dem Bimoment

$$B = 10^6 \text{ Nmm} \quad (3.62)$$

belastet werden.

Es ergeben sich folgende Systemwerte

$$A = 628,3 \text{ mm}^2 ; \lambda = 0,1316 . \quad (3.63)$$

Verformung und Ableitung für kleine Argumente:

$$W = 1,516 \cdot 10^6 \frac{x}{l^3} \quad [\text{mm}]$$
$$W_{,1} = 1,516 \cdot 10^6 \frac{1}{l^3} \quad [-]$$

(3.64)

Diese Näherung stimmt bis zu einer Rohrlänge von  $l = 400 \text{ mm}$  mit der geschlossenen Lösung nach (3.53) gut überein. Jedoch ist für diese kurzen Rohrlängen die Vereinfachung (3.40), wie genauere numerische Untersuchungen gezeigt haben, kaum noch zulässig (s. Bild 3.8).

Für große Argumente ergibt sich:

$$l_H = 2387 \text{ mm}$$
$$l_w = 597 \text{ mm}$$
$$\max W = 0,5643 \text{ mm}$$
$$W_{,1}(x=0) = 2,303 \cdot 10^{-3}$$

(3.65)

Diese Werte stimmen sehr gut mit denen in den Diagrammen 3.8 und 3.9 überein. Mit geringen Fehlern sind die Werte (3.65) schon für Rohrlängen von  $l \geq 2000 \text{ mm}$  ausreichend.

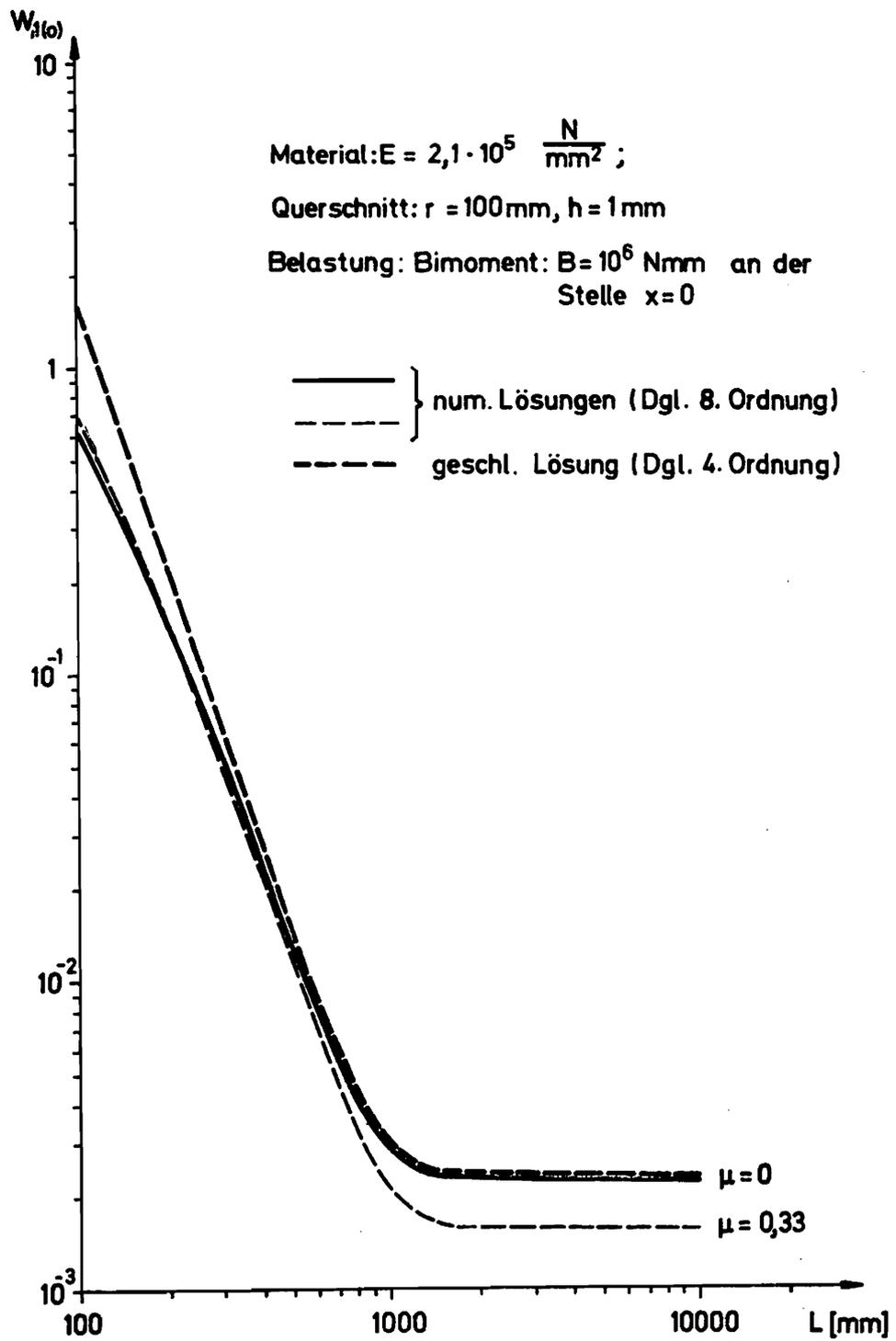


Bild 3.8 Neigungswinkel der Wandung an der Lasteinleitungsstelle

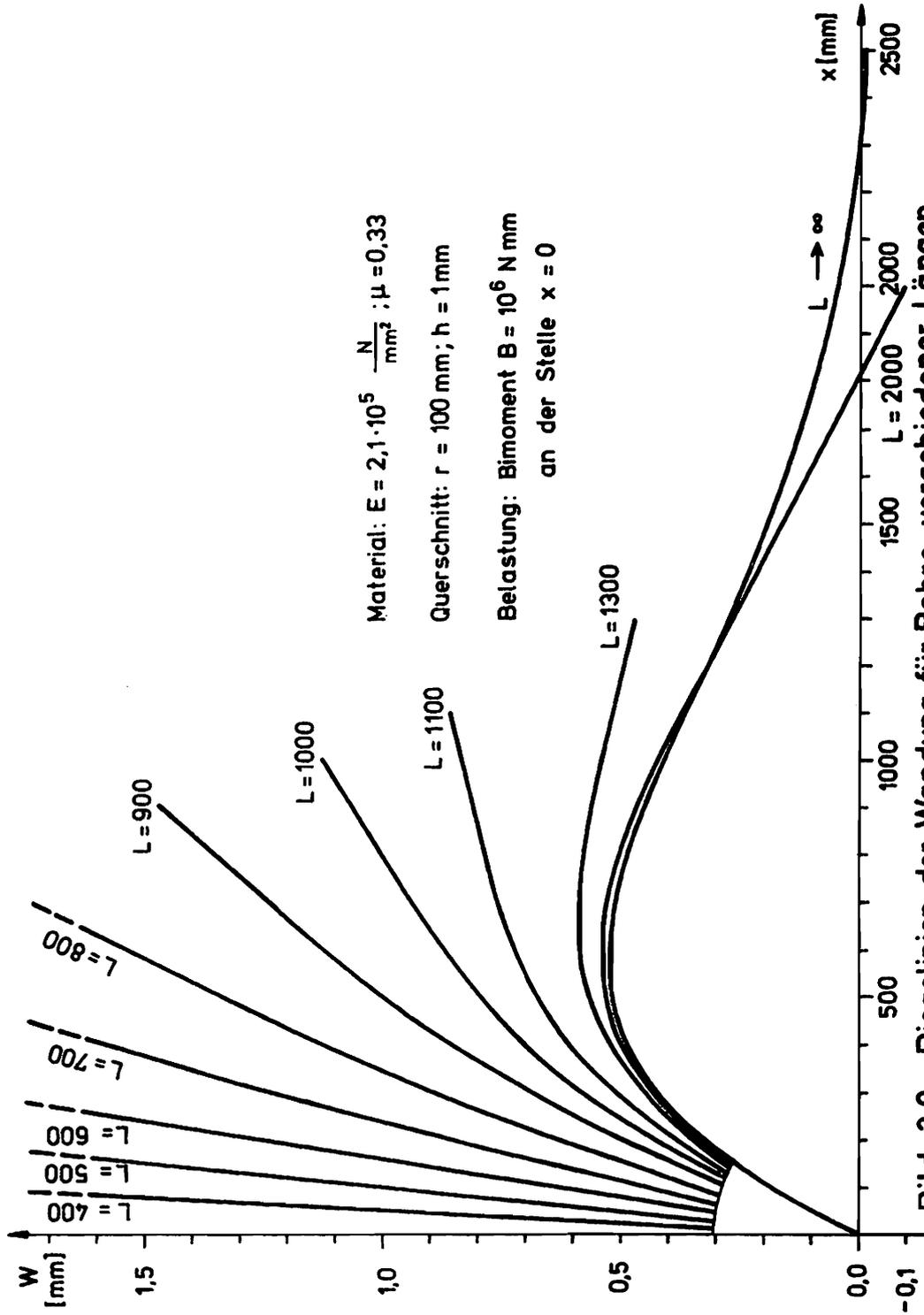
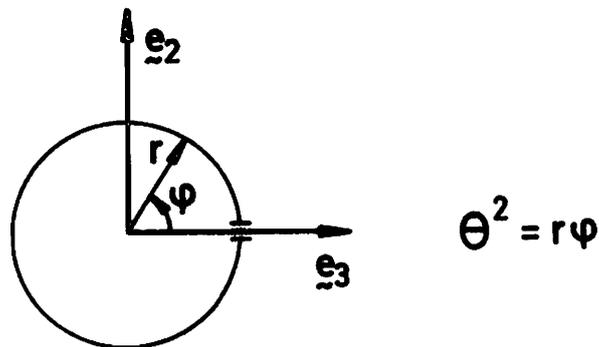


Bild 3.9 Biegelinien der Wandung für Rohre verschiedener Längen

### 3.1.6 Geschlitzter Kreisquerschnitt



An diesem Querschnitt soll ein Beispiel für die Wölbkraft-torsion gezeigt werden. Als Ansätze werden folgende Funktionen gewählt:

$$\begin{aligned} u_1 &= V_{10} + V_{11} \varphi + V_{12} \sin \varphi \\ u_2 &= V_{20} \quad \quad \quad + V_{22} \cos \varphi \\ u_3 &= \quad \quad \quad V_{32} \sin \varphi \\ u_4 &= \quad \quad \quad V_{42} \sin \varphi . \end{aligned}$$

Der Anteil  $V_{11}\varphi$  ergibt die Verwölbung des Querschnittes. Mit dem Ausdruck  $V_{10} + V_{11}\varphi$  kann man über die Normalkraft verfügen. Die übrigen Ansätze lassen eine Verdrehung des Querschnittes um einen beliebigen Punkt auf der  $e_3$ -Achse zu. Führt man mit diesen Ansätzen die numerische Lösung des Gleichungssystems (2.83) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2.83) aus, so erhält man Lösungen für die Wölbkrafttorsion, die auch im beschränkten Umfang Querschnittsverformungen enthalten.

Hier soll nun gezeigt werden, wie man durch Beschränkung der Verschiebungsfreiheitsgrade mit der vorliegenden Theorie die herkömmliche Theorie der Wölbkrafttorsion für dünnwandige offene Querschnitte herleiten kann.

Zu diesem Zweck werden kinematisch die Normalenhypothese der Schalentheorie und die Erhaltung der Querschnittsform des Stabes vorausgesetzt. Dieses bedeutet:

$$\begin{aligned} V_{42} &= V_{32,1} \\ V_{32} &= V_{22} \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen erhält man die Verzerrungen und Spannungen nach (2.41) bis (2.42) bzw. (2.52) für  $\mu = 0$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= V_{10,1} + V_{11,1} \varphi + V_{12,1} \sin \varphi - \theta^3 V_{22,11} \sin \varphi \\ \delta_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} V_{11} + \frac{1}{r} V_{12} \cos \varphi + \delta^2 V_{20,1} + \delta^2 V_{22,1} \cos \varphi - \frac{\theta^3}{r} (1 + \delta) V_{22,1} \cos \varphi \right] \\ \tau^{11} &= E \delta_{11} \\ \tau^{12} &= 2 G \frac{1}{\delta^2} \delta_{12} \end{aligned}$$

mit  $\delta = 1 + \frac{\theta^2}{r}$ .

Die Beschränkung auf Torsion fordert nun, daß die Schnittgrößen  $N, M$  und  $Q$  identisch verschwinden müssen. Nach (3.15), (3.17) bzw. (3.19) ist:

$$\begin{aligned} N &= \iint_{(Q)} \delta \tau^{11} d\theta^3 d\theta^2 \\ M &= \iint_{(Q)} \delta \tau^{11} \delta r \sin \varphi d\theta^3 d\theta^2 \\ Q &= \iint_{(Q)} \delta \tau^{12} \delta \cos \varphi d\theta^3 d\theta^2 \end{aligned}$$

Setzt man diese Schnittgrößen gleich Null, so erhält man die folgenden Beziehungen zwischen den Verformungsfunktionen

$$\begin{aligned} N = 0 &\leadsto V_{10,1} + \pi V_{11,1} = 0 \\ M = 0 &\leadsto 2 \left( r^2 + \frac{b^2}{12} \right) V_{11,1} + r \left( r^2 + \frac{b^2}{4} \right) V_{22,11} = 0 \\ Q = 0 &\leadsto V_{12} + r V_{22,1} = 0 \end{aligned}$$

Wählt man weitere nichtlineare Ansatzfunktionen, so erhält man hier umfangreichere Beziehungen, welche eine verfeinerte Theorie ergeben.

Schließt man Starrkörperverschiebungen aus und berücksichtigt  $r^2 \gg h^2$ , so kann man die Verschiebungen in Richtung der Stabachse durch die Funktion  $V_{22,1}$  ausdrücken:

$$V_{10} = \frac{1}{2} \pi r V_{22,1}$$

$$V_{11} = -\frac{3}{2} r V_{22,1}$$

$$V_{12} = -r V_{22,1} .$$

Die Verschiebungen lauten damit:

$$U_1 = r \left( \frac{3}{2} \pi - \frac{3}{2} \varphi - \sin \varphi \right) V_{22,1}$$

$$U_2 = V_{20} + V_{22} \cos \varphi$$

$$U_3 = V_{22} \sin \varphi$$

$$U_4 = V_{22,1} \sin \varphi .$$

Für die Verzerrungen und Spannungen errechnet man daraus:

$$\delta_{11} = \frac{3}{2} r (\pi - \varphi - 2 \delta \sin \varphi) V_{22,1,1}$$

$$\delta_{12} = \frac{3}{2} \left( \delta^2 V_{20,1,1} - \frac{3}{2} V_{22,1,1} \right)$$

$$\tau_{11} = E \frac{3}{2} r (\pi - \varphi - 2 \delta \sin \varphi) V_{22,1,1}$$

$$\tau_{12} = G \left( V_{20,1,1} - \frac{1}{2 \delta^2} V_{22,1,1} \right) .$$

Für den lastfreien Bereich erhält man die virtuelle Formänderungsarbeit nach (2.67) zu:

$$\delta W = \int_{(L)} \iint_{(\Omega)} (\tau^{11} \delta r_{,11} + 2 \tau^{12} \delta r_{,12}) \delta \alpha \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 = 0.$$

Ausgeschrieben heißt das hier:

$$\delta W = \int_{(L)} \iint_{(\Omega)} \left[ \frac{1}{4} E r^2 (\pi - \varphi - 2 \delta \sin \varphi)^2 V_{22,11} \delta V_{22,11} + G (V_{20,11} - \frac{1}{2 \delta^2} V_{22,11}) (\delta^2 \delta V_{20,11} - \frac{1}{2} \delta V_{22,11}) \right] \delta \alpha \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1.$$

Für die Variation  $\delta V_{20,11}$  entsteht daraus die Euler-Gleichung

$$G \left[ V_{20,11} \iint_{(\Omega)} \delta^3 \alpha \, d\theta^3 d\theta^2 - V_{22,11} \iint_{(\Omega)} \frac{1}{2} \delta \alpha \, d\theta^3 d\theta^2 \right] = 0.$$

Ausintegriert entsteht daraus

$$2 \pi (h + \frac{1}{4} \frac{h^3}{r^2}) V_{20,11} - \pi h V_{22,11} = 0$$

oder

$$(1 + \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}) V_{20,11} - \frac{1}{2} V_{22,11} = 0. \quad (3.66)$$

Der Rest der virtuellen Formänderungsarbeit lautet unter Berücksichtigung der vorstehenden Beziehung:

$$\int_{(L)} \left[ E \iint_{(\Omega)} \frac{1}{2} r^2 \delta (\pi - \varphi - 2 \delta \sin \varphi)^2 (1 + \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}) \, d\theta^3 d\theta^2 V_{20,11} \delta V_{22,11} - G \iint_{(\Omega)} \frac{1}{2 \delta^2} (\delta^2 - 1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}) \, d\theta^3 d\theta^2 V_{20,11} \delta V_{22,11} \right] d\theta^1 = 0 \quad (3.67)$$

Für dünnwandige Querschnitte ergeben sich die Querschnittsintegrale zu:

$$\iint_{(\Omega)} r^4 \delta (\pi - \varphi - 2 \delta \sin \varphi) (1 + \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}) \, d\theta^3 d\theta^2 \approx r^5 h^{\frac{2}{3}} \pi (\pi^2 - 6) = C_M$$

$$- \iint_{(\Omega)} r^2 \frac{1}{\delta^2} (\delta^2 - 1 - \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}) \, d\theta^3 d\theta^2 \approx \frac{2}{3} \pi r h^3 = J_T$$

mit  $C_M$  = Wölbwiderstand um den Schubmittelpunkt

$J_T$  = Torsionsträgheitsmoment für offene Querschnitte.

Damit entsteht das Wölbmoment als

$$T_w = - E C_M \frac{2}{r} V_{20,11}$$

dessen erste Ableitung das sekundäre Torsionsmoment  $T_{II}$  ist. Die Gleichung (3.67) lautet also

$$\int_{(L)} [E C_M V_{20,11} \delta V_{22,11} + G J_T V_{20,1} \delta V_{22,1}] d\theta^1 = 0.$$

Nach einmaliger partieller Integration entsteht

$$[-r T_w \delta V_{22,11}]_0^L + \int_{(L)} [-E C_M V_{20,11} + G J_T V_{20,1}] \delta V_{22,1} d\theta^1 = 0.$$

Der Ausdruck

$$-E C_M \frac{2}{r} V_{20,11} + G J_T \frac{2}{r} V_{20,1} = T$$

ist das gesamte Torsionsmoment. Nach der zweiten partiellen Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} & [-r T_w \delta V_{22,11}]_0^L + [r T \delta V_{22,1}]_0^L \\ & - \int_{(L)} [-E C_M V_{20,11} + G J_T V_{20,1}] \delta V_{22} d\theta^1 = 0. \end{aligned}$$

Dieses ist die vollständige Beschreibung der Wölbkraft-torsion mit der Differentialgleichung für die Verdrehung

$$\mathcal{V}^{IV} - \lambda^2 \mathcal{V}'' = 0$$

mit  $\mathcal{V} = \frac{2}{r} V_{20}$

und  $\lambda^2 = \frac{G J_T}{E C_M}$ .

Die Lage des Drillruhepunktes (Schubmittelpunktes) gewinnt man aus der Beziehung (3.66)

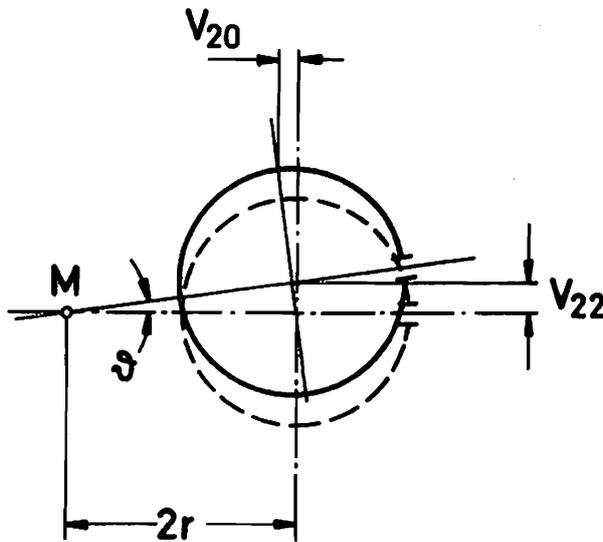
$$\left(1 + \frac{1}{4} \frac{h^2}{r^2}\right) V_{20,1} - \frac{1}{2} V_{22,1} = 0$$

und mit  $\frac{h^2}{r^2} \ll 1$

$$V_{22,1} = 2 V_{20,1} .$$

Unter Ausschluß von Starrkörperverschiebungen bedeutet das auch

$$V_{22} = 2 V_{20} .$$



### 3.2 Der eben gekrümmte Stab

#### 3.2.1 Geometrische Größen

Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf Stäbe mit Kreisring-Querschnitt, deren Achse kreisförmig ist, beschränken. Grundsätzlich können aber nach der vorliegenden Theorie Stäbe mit beliebig gekrümmter Querschnitts- und Achsform behandelt werden. Ob die jeweilige Form zu behandeln ist, hängt vom Anwendungsfall ab.

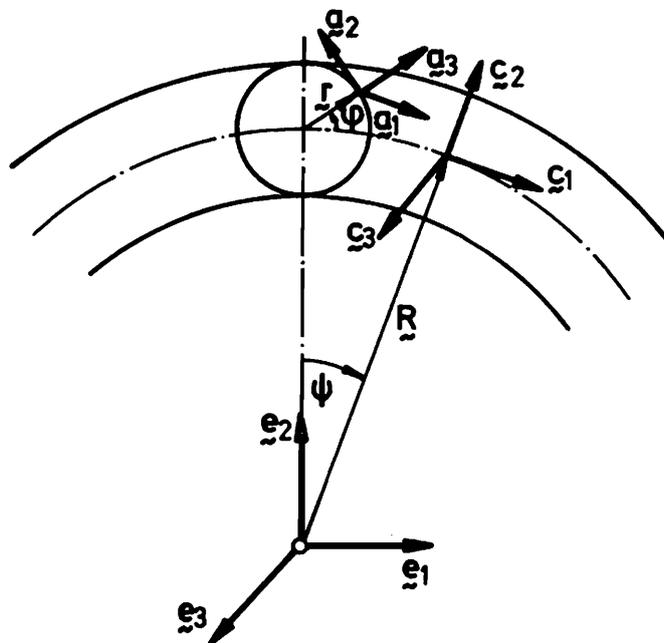


Bild 3.10

Als Parameter werden gewählt:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\theta^1}{R} && \text{mit } \theta^1 = \text{Koordinate in Richtung der} \\ &&& \text{Stabachse} \\ \varphi &= \frac{\theta^2}{r} && \text{mit } \theta^2 = \text{Koordinate in Richtung der} \\ &&& \text{Profilmittellinie} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Gleichung der Stabachse ergibt sich nach Bild 3.10:

$$\underline{R} = R(\sin \nu \underline{e}_1 + \cos \nu \underline{e}_2). \quad (3.69)$$

Das begleitende Dreibein ist nach (2.4) und (2.7)

$$\underline{\xi}_i = C_i^k \underline{e}_k$$

mit

$$C_i^k = \begin{vmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.70)$$

Die Profilmittellinie stellt sich im begleitenden Dreibein wie folgt dar:

$$\underline{\zeta} = r(\sin \varphi \underline{\xi}_2 + \cos \varphi \underline{\xi}_3). \quad (3.71)$$

Nach (2.14) ergibt sich die Basis der Mittelfläche

$$\underline{a}_k = A_k^i \underline{\xi}_i$$

und dessen Metrik nach (2.15) zu:

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad a^{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.72)$$

mit  $\alpha = 1 + \frac{r}{R} \sin \varphi$ .

Der Krümmungstensor nach (2.16)

$$b_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{R} \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{vmatrix}, \quad b_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R\alpha} \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{vmatrix}. \quad (3.73)$$

Für das lokale System der Wandung erhält man nach (2.22) und (2.23) den Metriktensor:

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.74)$$

mit  $\beta = 1 + \frac{r + \theta^3}{R} \sin \varphi$ ;  $\gamma = 1 + \frac{\theta^3}{r}$ .

Die Christoffel-Symbole sind in der vorliegenden Theorie durch die Ableitungen der  $g_{ik}$  ersetzt. Sie werden hier also nicht explizit benötigt. Statt dessen seien hier die Ableitungen der vorgenannten geometrischen Größen angegeben.

$$\alpha^{\alpha\beta}_{,2} = \begin{vmatrix} -2 \frac{1}{R\alpha^2} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.75)$$

$$b_{\beta,2}^{\alpha} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{Rr\alpha^2} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.76)$$

$$g_{ik,2} = \begin{vmatrix} 2 \frac{\beta \delta}{R} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_{ik,3} = \begin{vmatrix} 2 \frac{\beta}{R} \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\delta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.77)$$

### 3.2.2 Aufstellung spezieller Differentialgleichungen

Auf das Aufstellen einer allgemeinen Dgl. nach (2.83) mit den Größen (2.62) sei hier verzichtet. Die formale Programmierung dieses Systems erfordert nicht nur viel Schreibarbeit, sondern scheitert auch in der numerischen Auswertung am großen Zeitbedarf für die vielen Doppelintegrale der Querschnittswerte.

#### 3.2.2.1 Allgemeine Biegeprobleme

Um unnötige numerische Operationen zu vermeiden und vereinfachte Lösungen zu erarbeiten, soll die Dgl. hier so weit wie möglich aufbereitet werden.

#### Verzerrungen und Spannungen

Nach (2.41) bis (2.44) sind die Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \beta \left( \frac{\beta}{\alpha} U_{1,1} + \frac{\delta}{R} \cos \varphi U_2 + \frac{1}{R} \sin \varphi U_3 - \frac{\theta^3}{R} \cos \varphi U_{3,2} - \frac{\theta^3}{\alpha} U_{4,1} \right) \\ \delta_{12} &= \frac{1}{\delta} \left\{ -\frac{\beta^2}{\alpha^2 R} \cos \varphi U_1 + \frac{\beta^2}{\alpha} U_{1,2} + \delta^2 U_{2,1} - \theta^3 \delta U_{3,2,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta^3}{R \alpha^2} (2\beta + \frac{\theta^3}{r}) \cos \varphi U_4 - \frac{\theta^3 \beta}{\delta \alpha} U_{4,2} \right\} \\ \delta_{13} &= \frac{1}{\delta} \left\{ U_{3,1} - U_4 \right\} \\ \delta_{22} &= \delta \left( \delta U_{2,2} + \frac{1}{r} U_3 - \theta^2 U_{3,2,2} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

und nach (2.52) die Spannungen

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \bar{E} \frac{1}{\beta^4} \left[ \delta_{11} + \mu \frac{\beta^2}{\gamma^2} \delta_{22} \right] \\
 \tau_{12} &= G \frac{1}{\beta^2 \gamma^2} \left[ 2 \delta_{12} \right] \\
 \tau_{13} &= G \frac{1}{\beta^2} \left[ 2 \delta_{13} \right] \\
 \tau_{22} &= \bar{E} \frac{1}{\gamma^4} \left[ \delta_{22} + \mu \frac{\gamma^2}{\beta^2} \delta_{11} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

### Virtuelle Arbeit

Der Ausdruck (2.67) ergibt sich hier zu:

$$\delta W^v = \int \int \int_{(L)(Q)} \tau^{ik} \delta \gamma_{ik} \beta \gamma d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1.
 \tag{3.80}$$

Es soll die Abkürzung

$$D_{ik} = \tau^{ik} \delta \gamma_{ik} \quad (\text{nicht summieren})
 \tag{3.81}$$

eingeführt werden.

Mit folgenden Umbenennungen stellen sich die  $D_{ik}$  etwas einheitlich dar:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{11} &= \frac{1}{\beta} \delta_{11}; \quad \bar{\gamma}_{12} = \frac{2}{\delta} \delta_{12}; \quad \bar{\gamma}_{13} = 2 \delta_{13}; \quad \bar{\gamma}_{22} = \frac{\beta}{\gamma^2} \delta_{22}; \\
 \bar{\sigma}_{11} &= \bar{\gamma}_{11} + \mu \bar{\gamma}_{22}; \\
 \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\gamma}_{12}; \quad \bar{\sigma}_{13} = \bar{\gamma}_{13}; \\
 \bar{\sigma}_{22} &= \mu \bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22};
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \delta \bar{\gamma}_{11} \\
 D_{12} &= G \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{12} \delta \bar{\gamma}_{12} \\
 D_{13} &= G \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{13} \delta \bar{\gamma}_{13} \\
 D_{22} &= \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{22} \delta \bar{\gamma}_{22} .
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

Bleiben Belastungen entlang der Mittelfläche ausgeschlossen, so läßt sich hier analog zu (2.69) bis (2.83) ein Dgl.-System erzeugen.

$$\begin{aligned}
 \underline{K}_1 &= \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \frac{\beta}{\alpha} \underline{\eta}_1 d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_2 &= \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{12} \delta \underline{\eta}_2 d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_3 &= \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} [\bar{\sigma}^{12} (-\theta^3) \underline{\eta}_{3,2} + \bar{\sigma}^{13} \underline{\eta}_3] d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_4 &= \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} (-\frac{\theta^3}{\alpha}) \underline{\eta}_4 d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_{1,1} &= \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{12} (-\frac{\beta^2}{\alpha^2 r} \cos\varphi \underline{\eta}_1 + \frac{\beta^2}{r\alpha} \underline{\eta}_{1,2}) d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_{2,1} &= \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} [\bar{\sigma}^{11} \frac{\delta}{R} \cos\varphi \underline{\eta}_2 + \bar{\sigma}^{22} \beta \underline{\eta}_{2,2}] d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_{3,1} &= \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} [\bar{\sigma}^{11} (\frac{\alpha}{R} \sin\varphi \underline{\eta}_3 - \frac{\theta^3}{R} \cos\varphi \underline{\eta}_{3,2}) + \bar{\sigma}^{22} (\frac{\beta}{r} \underline{\eta}_3 - \frac{\theta^3 \beta}{r} \underline{\eta}_{3,2,2})] d\theta^3 d\theta^2 \\
 \underline{K}_{4,1} &= \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} [\bar{\sigma}^{12} (\frac{\theta^3}{R\alpha^2} (2\beta + \frac{\theta^3}{r}) \cos\varphi \underline{\eta}_4 - \frac{\theta^3 \beta}{r\alpha} \underline{\eta}_{4,2}) + \bar{\sigma}^{13} (-\underline{\eta}_4)] d\theta^3 d\theta^2
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$

Physikalische Spannungen und Schnittgrößen

Analog zu (3.14) ergeben sich hier die physikalischen Spannungen durch die  $\bar{\sigma}^{ik}$  ausgedrückt.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= \bar{E} \frac{1}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \\ \bar{\sigma}_{12} &= G \frac{1}{\beta} \bar{\sigma}^{12} ; \quad \bar{\sigma}_{13} = G \frac{1}{\beta} \bar{\sigma}^{13} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \bar{E} \frac{1}{\beta} \bar{\sigma}^{22}\end{aligned}\tag{3.85}$$

Schnittgrößen der Biegung in Krümmungsebene:

$$\begin{aligned}N &= \iint_{(Q)} \bar{\sigma}_{11} \delta \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \, d\theta^3 d\theta^2 \\ M_E &= \iint_{(Q)} \bar{\sigma}_{11} r \delta \sin\varphi \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} r \delta \sin\varphi \, d\theta^3 d\theta^2 \\ Q_E &= \iint_{(Q)} (\bar{\sigma}_{12} \cos\varphi + \bar{\sigma}_{13} \sin\varphi) \delta \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} (\bar{\sigma}^{12} \cos\varphi + \bar{\sigma}^{13} \sin\varphi) \, d\theta^3 d\theta^2\end{aligned}\tag{3.86}$$

Schnittgrößen der Biegung quer zur Krümmungsebene

$$\begin{aligned}M_R &= \iint_{(Q)} \bar{\sigma}_{11} r \delta \cos\varphi \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} \bar{E} \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} r \delta \cos\varphi \, d\theta^3 d\theta^2 \\ Q_R &= \iint_{(Q)} (\bar{\sigma}_{22} \sin\varphi + \bar{\sigma}_{13} \cos\varphi) \delta \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} (\bar{\sigma}^{22} \sin\varphi + \bar{\sigma}^{13} \cos\varphi) \, d\theta^3 d\theta^2 \\ T &= \iint_{(Q)} \bar{\sigma}_{22} r \delta \, d\theta^3 d\theta^2 = \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{22} r \delta \, d\theta^3 d\theta^2\end{aligned}\tag{3.86}$$

Wahl der Ansätze für Biegeprobleme

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \alpha V_{10} + \sin \varphi V_{11} + \cos \varphi V_{12} \\
 U_2 &= \cos \varphi V_{20} + \sin(2n\varphi) V_{2n} + V_{2(n+1)} + \sin \varphi V_{2(n+2)} + \cos(2m\varphi) V_{2(n+2+m)} \\
 U_3 &= \sin \varphi V_{31} + \cos(2n\varphi) V_{3(n+1)} + \cos \varphi V_{3(n+2)} + \sin(2m\varphi) V_{3(n+2+m)} \\
 U_4 &= \underbrace{\sin \varphi V_{41} + \cos(2n\varphi) V_{4(n+1)}}_{\text{Biegung in der Krümmungsebene mit } n = 1, 2, 3, \dots} + \underbrace{\cos \varphi V_{4(n+2)} + \sin(2m\varphi) V_{4(n+2+m)}}_{\text{Biegung quer zur Krümmungsebene } m = 1, 2, 3, \dots}
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

Es zeigt sich, daß die orthogonalen Krümmungsebenen auch orthogonale Verformungsfunktionen bedingen, welche sich gegenseitig nicht beeinflussen, wenn man die, durch die Krümmung der Stabachse bedingte, nichtlineare Spannungsverteilung über den Querschnitt unberücksichtigt läßt. Ist der Stab stärker gekrümmt, so daß obige Vernachlässigung nicht mehr zulässig ist, so muß man für die Biegung quer zur Krümmungsebene den vollständigen Ansatz (3.87) wählen.

Setzt man diese Ansätze in das System (3.84) ein und vergleicht die generalisierten Schnittgrößen  $K$  mit den physikalischen, so stellt man folgende Identitäten fest:

$$\begin{array}{l|l}
 N \equiv K_{10} - \frac{r}{R} K_{11} + \frac{1}{R} K_{41} & T \equiv r K_{2(n+1)} \\
 M_E \equiv r K_{11} - K_{41} & M_R \equiv r K_{12} - K_{4(n+2)} \\
 Q_E \equiv K_{20} + K_{31} & Q_R \equiv -K_{2(n+2)} + K_{3(n+2)}
 \end{array}
 \tag{3.88}$$

Durch Vergleichsrechnung kann man feststellen, daß

folgende Gleichgewichtsbedingungen auch im System (3.84) erfüllt sind:

$$\begin{array}{l|l}
 N_{i,1} = -\frac{1}{R} Q_E & Q_{R,1} = 0 \\
 Q_{E,1} = \frac{1}{R} N & T_{i,1} = \frac{1}{R} M_R \\
 M_{E,1} = Q_E & M_{R,1} = -\frac{1}{R} T + Q_R
 \end{array} \quad (3.89)$$

Man kann nun die Gleichungen (3.88) und (3.89) unter Streichung der entsprechenden Gleichungen in das System (3.84) aufnehmen. Unternimmt man dieses wegen der Störung des Schemas für die elektronische Berechnung nicht, so muß man aber bei den Randbedingungen die Zusammenhänge (3.88) berücksichtigen.

### 3.2.2.2 Biegung in der Krümmungsebene der Stabachse

Die im Abschnitt 3.2.2.1 angegebenen Ansätze für Biegung in der Krümmungsebene beinhalten, mit den Worten der Stabtheorie ausgedrückt, eine Einschränkung der Verformungsfreiheitsgrade: die Profilmittellinie des Querschnitts bleibt eben. Diese Ebene steht aber nicht zwingend rechtwinklig auf der verformten Stabachse.

Da für die Verschiebungsgrößen  $U_i$  nach (2.29) und (2.30) die physikalischen Komponenten gewählt werden, lassen sich hier die Ansatzfunktionen leicht anschaulich deuten.

$\alpha V_{10}$  ist eine Verschiebung in Achsrichtung, derart, daß der Querschnitt auch nach der Verformung auf den ursprünglichen Krümmungsmittelpunkt zeigt.  $\sin \varphi V_{11}$  ist eine zusätzliche Verdrehung des Querschnitts. Der separate Ansatz für  $U_4$  läßt eine Verdrehung der Schalennormalen um die Profilmittellinie zu. Die Ansätze  $U_2$  und  $U_3$  lassen Querschnittsverformungen im eigentlichen Sinne zu.

Diese Freiheitsgrade sollen nun eingeschränkt werden, um ein Dgl.-System zu erhalten, dessen Koeffizienten (Querschnittswerte) mit erträglichem Aufwand der Handrechnung zugänglich sind.

Es werden folgende Einschränkungen gemacht:

1. Normale bleibt Normale nach Abschnitt 2.5.1.

$$u_4 = u_{3,1}$$

2. Dehnungslose Verformung in  $\theta^2$ -Richtung nach Abschnitt 2.5.2.

$$\delta_{22}(\theta^2=0) = 0 \rightsquigarrow u_{2,2} = -\frac{1}{r} u_3$$

3. Querschnitte bleiben eben und rechtwinklig zur verformten Stabachse.

4. Für die Querschnittsverformungen wird in (3.87) nur  $n=1$  zugelassen.

5. Berücksichtigung der Glieder bis  $h^3$  in den Querschnittswerten.

6. Querkontraktion  $\mu = 0$ .

Die folgenden Ansätze berücksichtigen die Punkte 1 bis 4.

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \alpha V_{10} - r \sin \varphi V_{31,1} \\
 u_2 = \quad \quad \quad \cos \varphi V_{31} \quad - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) V_{32} \quad (3.90) \\
 u_3 = \underbrace{\quad \quad \quad \sin \varphi V_{31}}_{\text{zwei Freiheitsgrade der Stabtheorie}} \quad + \underbrace{\quad \quad \quad \cos(2\varphi) V_{32}}_{\text{ein weiterer Freiheitsgrad für Querschnittsverformung}}
 \end{array}$$

Der Punkt 6 ergibt mit (3.82)

$$\bar{\sigma}^{ik} = \bar{\sigma}^{ik} . \quad (3.91)$$

Mit den Ansätzen (3.90) und deren Ableitungen ergeben sich die modifizierten Verzerrungen nach (3.82) und (3.78) zu:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \beta V_{10,1} + \frac{1}{R} V_{31} - r \delta \sin \varphi V_{31,11} \\ &\quad + \frac{1}{R} \sin \varphi \left( 3 \frac{\theta^3}{r} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \right) V_{22} - \frac{\theta^3}{\alpha} \cos(2\varphi) V_{32,11} \\ \bar{\sigma}_{12} &= \frac{1}{R\alpha} \left[ \left( -\beta \left( 1 - 7 \frac{\theta^3}{r} \right) - \frac{\theta^3}{r} \left( 1 - 3 \frac{\theta^3}{r} \right) \right) \sin \varphi + \frac{\theta^3}{\alpha R} \left( 2\beta + \frac{\theta^3}{r} \right) \cos(2\varphi) \right] \cos \varphi V_{32,1} \\ \bar{\sigma}_{13} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{22} &= 3 \frac{\beta \theta^3}{R r^2} \cos(2\varphi) V_{32} . \end{aligned} \quad (3.92)$$

Die Gleitung  $\bar{\sigma}_{13}$  verschwindet wegen Punkt 1 identisch und  $\bar{\sigma}_{12}$  ist wegen Punkt 3 nur von der Querschnittsverformung abhängig. Die Dehnung  $\bar{\sigma}_{22}$  ist ebenfalls nur von der Querschnittsverformung abhängig und nach Punkt 2 nur für  $\theta^3 \neq 0$  vorhanden.

Das Dgl.-System erzeugt man nun in Analogie zu (2.98).

Der Teil der herkömmlichen Stabtheorie lautet

$$\begin{aligned} K_{10} &= \iint_{(Q)} E \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \beta d\theta^3 d\theta^2 \\ K_{41} &= \iint_{(Q)} E \frac{\theta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} (-r \delta \sin \varphi) d\theta^3 d\theta^2 \\ K_{31} &= -K_{41,1} \\ K_{10} &= 0 \\ K_{31} &= \iint_{(Q)} E \frac{\delta}{\beta} \bar{\sigma}^{11} \frac{1}{R} d\theta^3 d\theta^2 \\ V_{31,1} &= V_{41} . \end{aligned} \quad (3.93)$$

Die physikalischen Schnittgrößen ergeben sich damit zu:

$$N = K_{10} + \frac{1}{R} K_{41}; \quad M = K_{41}; \quad Q = K_{31}; \quad (3.94)$$

Diese Schnittgrößen und die Gleichgewichtsbedingungen nach (3.89) sollen hier Bestandteil des Dgl.-Systems werden. So erreicht man eine Reduktion auf wenige Querschnittswerte und einfache Randbedingungen.

Das Dgl.-System ist von 10.-Ordnung und lautet vollständig:

$$N = \iint_{(Q)} E \frac{\beta}{\rho} \bar{v}^m d\theta^3 d\theta^2$$

$$M = \iint_{(Q)} E \frac{\beta}{\rho} \bar{v}^m r \sin\varphi d\theta^3 d\theta^2$$

$$V_{31,1} = V_{41}$$

$$N_{1,1} = -\frac{1}{R} Q$$

$$M_{1,1} = Q$$

$$Q_{1,1} = \frac{1}{R} N \quad (3.95)$$

$$K_{42} = \iint_{(Q)} E \frac{\beta}{\rho} \bar{v}^m \left( -\frac{\theta^3}{\alpha} \cos(2\varphi) \right) d\theta^3 d\theta^2$$

$$K_{32} = -K_{42,1} + \iint_{(Q)} G \frac{\beta}{\rho} \bar{v}^{12} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \cos\varphi \left( \sin\varphi \left( \beta \left( 1 - 7 \frac{\theta^3}{r} \right) - \frac{\theta^3}{r} \left( 1 - 3 \frac{\theta^3}{r} \right) \right) + \frac{\theta^3}{\alpha R} \left( 2\beta + \frac{\theta^3}{r} \right) \cos(2\varphi) \right] d\theta^3 d\theta^2$$

$$K_{32,1} = \iint_{(Q)} E \frac{\beta}{\rho} \left[ \bar{v}^m \frac{1}{R} \sin\varphi \left( \frac{3\theta^3}{r} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \right) + \bar{v}^{22} 3 \frac{\beta\theta^3}{\rho r^2} \cos(2\varphi) \right] d\theta^3 d\theta^2$$

$$V_{32,1} = V_{42}$$

Beim Integrieren der Querschnittswerte treten folgende Größen auf:

$$A = 2\pi r h ; J = \pi r^3 h ; J_h = \pi r \frac{h^3}{12} ; \quad (3.96)$$

Dabei ist  $A$  die Querschnittsfläche und  $(J + 3J_h)$  das axiale Trägheitsmoment.

Mit diesen Abkürzungen schreibt sich das System (3.95) in etwas abgewandelter Reihenfolge:

$$\begin{aligned} N &= E \left[ A V_{10,1} + \frac{1}{R} A V_{31} + \frac{1}{R} J V_{31,11} + \frac{3}{8} \frac{r}{R^2} A V_{32} + 3 \frac{r}{R^2} J_h V_{32,11} \right] \\ M &= -E \left[ \frac{1}{R^2} J V_{31} + J V_{31,11} + \frac{3}{8} \frac{r}{R} A V_{32} + \frac{5}{8} \frac{r}{R} J_h V_{32,11} \right] \\ K_{42} &= E \left[ \frac{1}{2} \frac{r}{R^2} J_h V_{10,1} + 3 \frac{r}{R^2} J_h V_{31} + \frac{5}{2} \frac{r}{R} J_h V_{31,11} + \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} J_h V_{32} + J_h V_{32,11} \right] \\ K_{32} &= -K_{42,1} + G \frac{1}{8} A V_{32,1} \\ K_{32,1} &= E \left[ \frac{3}{4} \frac{1}{r R^2} J V_{31} + \frac{3}{4} \frac{1}{r R} J V_{31,11} + \left( \frac{5}{8} \frac{1}{r^2 R^2} J + 9 \frac{1}{r^4} J_h \right) V_{32} + \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} J_h V_{32,11} \right] \\ V_{31,1} &= V_{41} \\ N_{1,1} &= -\frac{1}{R} Q \\ M_{1,1} &= Q \\ Q_{1,1} &= \frac{1}{R} N \\ V_{32,1} &= V_{42} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Dieses System ist der elektronischen Lösung nach Abschnitt 2.4 leicht zugänglich.

Ein System 8. Ordnung erzeugt man, indem man die Glieder  $V_{32,11}$  streicht. Die Gleichung  $V_{32,1} = V_{42}$  kann damit entfallen und die Schnittgröße  $K_{42}$ , welche durch die partielle Integration  $\int V_{32,11}$  entstanden ist, existiert nicht. Dieses System 8. Ordnung enthält die durch die Querschnittsverformung bedingte Längsbiegung der Wandung

nicht mehr. Obwohl sich diese Einbuße nur bei der Spannungsanalyse an einer Einspannstelle bemerkbar macht, soll dieses System nicht weiter verfolgt werden. Ein Überblick über das Lösungsverhalten einer geschlossenen Lösung ist auch hier nicht zu erwarten. Dieses System kann aber Ausgangspunkt für weitere Vereinfachungen sein.

### 3.2.2.3 Bekannte Stabtheorien

Das Dgl.-System 8. Ordnung, dessen Erzeugung im vorigen Abschnitt beschrieben wurde, lautet

$$\begin{aligned}
 N &= E \left[ A V_{10,1} + \frac{1}{R} A V_{3,1} + \frac{1}{R} J V_{31,11} + \frac{3}{8} \frac{r}{R^2} A V_{32} \right] \\
 M &= -E \left[ \frac{1}{R^2} J V_{3,1} + J V_{31,11} + \frac{3}{8} \frac{r}{R} A V_{32} \right] \\
 K_{32} &= G \frac{1}{8} A V_{32,1} \\
 K_{32,1} &= E \left[ \frac{4}{3} \frac{1}{r R^2} J V_{3,1} + \frac{4}{3} \frac{1}{r R} J V_{31,11} + \left( \frac{5}{8} \frac{1}{r^2 R^2} J + 9 \frac{1}{r^4} J_h \right) V_{32} \right] \\
 V_{31,1} &= V_{4,1} \\
 N_{1,1} &= -\frac{1}{R} Q \\
 M_{1,1} &= Q \\
 Q_{1,1} &= \frac{1}{R} N.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Vernachlässigt man bei der virtuellen Formänderungsarbeit den Anteil aus der Gleitung, indem man den Gleitmodul gleich Null setzt, so entfällt auch der Term mit  $V_{32,1}$ . Hier werden also nicht, wie üblich, durch kinematische Hypothesen die Schubspannungsverformungen vermieden, sondern durch ein spezielles Stoffgesetz die zu den Gleitungen gehörenden Spannungen. Inwieweit sich diese und die weiter vorn gemachten Einschränkungen auf die Ergebnisse auswirken, soll theoretisch und numerisch später untersucht werden. Zunächst sei die Theorie weiterverfolgt.

$G=0$  heißt in (3.98)  $K_{32} = 0$  und auch

$$K_{32,1} = 0 = E \left[ \frac{4}{3} \frac{1}{rR^2} J V_{31} + \frac{4}{3} \frac{1}{rR} J V_{31,11} + \left( \frac{5}{6} \frac{1}{r^2 R^2} J + 9 \frac{1}{r^4} J_h \right) V_{32} \right]. \quad (3.99)$$

Multipliziert man (3.99) mit  $\frac{4}{3} \frac{rR}{J}$ , so entsteht

$$0 = \frac{1}{R^2} V_{31} + V_{31,11} + \left( \frac{5}{6} \frac{1}{rR} + 12 \frac{R}{r^3} \frac{J_h}{J} \right) V_{32}$$

und mit  $\frac{J_h}{J} = \frac{h^2}{12r^2}$  nach (3.96)

$$0 = \frac{1}{R^2} V_{31} + V_{31,11} + \frac{1}{rR} \left( \frac{5}{6} + \frac{R^2 h^2}{r^4} \right) V_{32}. \quad (3.100)$$

Mit der Abkürzung

$$\left( \frac{5}{6} + \frac{R^2 h^2}{r^4} \right) = \frac{1}{\lambda} \quad (3.101)$$

läßt sich nun nach (3.100) die Querschnittsverformungsgröße  $V_{32}$  durch die Verschiebungsgröße des unverformten Querschnittes ausdrücken

$$V_{32} = -rR\lambda \left( \frac{1}{R^2} V_{31} + V_{31,11} \right). \quad (3.102)$$

Setzt man (3.102) in die Gleichungen 1 und 2 von (3.98) ein, so erhält man

$$N = E \left[ A V_{10,1} + \frac{1}{R} A \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{r^2}{R^2} \lambda \right) V_{31} + \frac{1}{R} J \left( 1 - \frac{3}{4} \lambda \right) V_{31,11} \right] \quad (3.103)$$

$$M = -EJ \left( 1 - \frac{3}{4} \lambda \right) \left[ \frac{1}{R^2} V_{31} + V_{31,11} \right].$$

Der Faktor

$$\left( 1 - \frac{3}{4} \lambda \right) = \alpha = 1 - \frac{9}{10 + 12 \frac{R^2 h^2}{r^4}} \quad (3.104)$$

ist identisch mit der Berichtigungsziffer  $\alpha$ , in der Theorie nach v. Kármán [1] nach der ersten Näherung.

Der Wertevorrat von  $\lambda$  ist für

$$0 \leq \frac{R^2 h^2}{\gamma^4} \leq \infty \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{6}{5} . \quad (3.105)$$

Für den Fall eines schwach gekrümmten Stabes mit  $\frac{\gamma^2}{R^2} \ll 1$  ist also in der ersten Gleichung von (3.103)

$$1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma^2}{R^2} \lambda \approx 1 .$$

Das folgende Dgl.-System 6. Ordnung enthält also die Beziehungen nach v. Kármán.

$$\begin{aligned} N &= E \left[ A V_{10,1} + \frac{1}{R} A V_{31} + \frac{1}{R} \alpha J V_{31,11} \right] \\ M &= -E \alpha J \left[ \frac{2}{R^2} V_{31} + V_{31,11} \right] \\ N_{,1} &= -\frac{1}{R} Q \\ M_{,1} &= Q \\ Q_{,1} &= \frac{1}{R} N \end{aligned} \quad (3.106)$$

Vergleicht man die Gleichung für  $M$  in (3.106) mit (3.102), so erkennt man, daß die Querschnittsverformungsgröße  $V_{32}$  proportional dem Biegemoment ist. Dieser Zusammenhang ist auch in der Arbeit [1] von v. Kármán zu lesen. Kármán erreicht dieses, indem er den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit mit den Voraussetzungen, welche auch hier bis zum System (3.106) gemacht wurden, auf das Stabelement beschränkt. Diese Beschränkung ist sicher zulässig, wenn von Stabelement zu Stabelement, also entlang der Stabachse, keine Änderungen in den entsprechenden Systemgrößen auftreten. Wie numerische Beispiele zeigen werden, ist dieses bei einem durch ein konstantes Biegemoment beanspruchten

Stab dann der Fall, wenn auch die Randbedingungen eine Proportionalität zwischen Biegemoment und Querschnittsverformung zulassen. Letzteres ist aber bei einem fest eingespannten Ende schon nicht der Fall. Den Einfluß dieser Widersprüche zeigen die Diagramme 3.14 und 3.15.

Das Gleichungssystem (3.106) enthält für  $\alpha=1$  auch eine klassische Biegetheorie schwach gekrümmter Stäbe.  $\alpha=1$  heißt  $\lambda=0$  und unterdrückt damit in (3.100) den Einfluß von  $V_{3,2}$ . Es findet also keine Querschnittsverformung statt.

Mit  $J$  = axiales Trägheitsmoment des Stabquerschnittes beschränkt sich das System (3.106) nicht nur auf dünnwandige Stäbe. Wenn auch in (3.96) der Ausdruck  $(J+3J_h)$  als axiales Trägheitsmoment angegeben wird, so ist dieses kein Fehler der vorliegenden Theorie, sondern nur eine Näherung für dünnwandige Stäbe. Bei korrekter Durchrechnung stünde in (3.106) das genaue axiale Trägheitsmoment. Es ist also das System (3.106) unter konsequenter Beachtung der hier getroffenen kinematischen Hypothesen, ebene und zur verformten Stabachse rechtwinklige Querschnitte, Lösung auch für Stäbe mit Vollquerschnitt.

In der Lehrbuch-Literatur sind sich die Autoren über diese Lösung allerdings nicht einig. Das Durcheinander in den Ableitungen und Näherungen für schwach und stark gekrümmte Stäbe soll hier kurz entzerrt werden.

Die folgende Ableitung für die Biegung stark gekrümmter Stäbe in ihrer Krümmungsebene geht, wie üblich, davon aus, daß die Querschnitte eben und rechtwinklig zur verformten Stabachse bleiben.

Es werden zunächst die Verzerrungen und Spannungen durch die Verschiebungen, welche obige kinematische Vorausset-

zungen erfüllen, ausgedrückt.

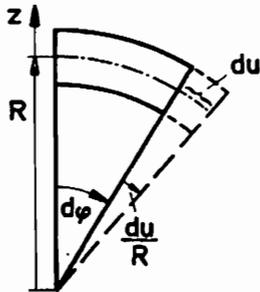


Bild 3.11a

$$\epsilon_u(z) = \frac{(R+z) \left( d\varphi + \frac{du}{R} \right) - (R+z) d\varphi}{(R+z) d\varphi}$$

$$\epsilon_u(z) = \frac{du}{R d\varphi} = \frac{du}{ds} = u' \quad (3.107)$$

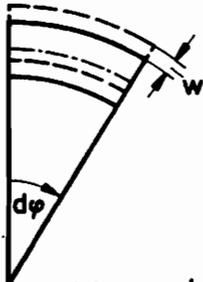


Bild 3.11b

$$\epsilon_w(z) = \frac{(R+z+w) d\varphi - (R+z) d\varphi}{(R+z) d\varphi}$$

$$\epsilon_w(z) = \frac{w}{R+z} \quad (3.108)$$

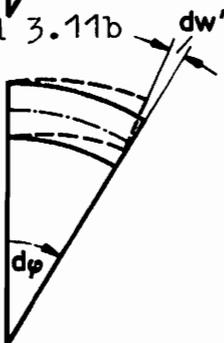


Bild 3.11c

$$\epsilon_w(z) = \frac{(R+z) d\varphi - dw' z - (R+z) d\varphi}{(R+z) d\varphi}$$

$$\epsilon_w'(z) = \frac{-dw' z}{(R+z) d\varphi} = -R w'' \frac{z}{R+z} \quad (3.109)$$

Die Normalspannung in Achsrichtung ergibt sich nach dem einfachen Hookeschen Gesetz zu:

$$\sigma(z) = E(\epsilon_u + \epsilon_w + \epsilon_w') \quad (3.110)$$

$$\sigma(z) = E \left( u' + \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \frac{w}{R} - \frac{z}{1 + \frac{z}{R}} w'' \right).$$

Die Schnittgrößen ergeben sich hieraus durch die üblichen Integrationen:

$$N = \int_{(A)} \sigma \, dA$$
$$M = \int_{(A)} \sigma \cdot z \, dA$$

(3.111)

Es treten folgende Integrale auf:

$$\int_{(A)} dA = A; \quad \int_{(A)} z \, dA = 0; \quad \int_{(A)} \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \, dA = A + \frac{1}{R^2} J^*;$$

(3.112)

$$\int_{(A)} \frac{z}{1 + \frac{z}{R}} \, dA = -\frac{1}{R} J^*; \quad \int_{(A)} \frac{z^2}{1 + \frac{z}{R}} \, dA = J^*;$$

Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich die Schnittgrößen wie folgt:

$$N = EA \left[ u' + \left( 1 + \frac{J^*}{R^2 A} \right) \frac{w}{R} + \frac{J^*}{RA} w'' \right]$$

(3.113)

$$M = -E J^* \left[ \frac{1}{R^2} w + w'' \right].$$

(3.114)

Mit den bekannten Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich hieraus ein vollständiges Dgl.-System. Ohne die getroffenen Vereinfachungen bei der Auswertung der Querschnittsintegrale von (3.95) nach (3.97) ergäben sich die Schnittgrößen  $N$  und  $M$  in (3.106) wie oben.

Für den Übergang zum schwach gekrümmten Stab ist es sicher zulässig, in Gleichung (3.113)

$$\left( 1 + \frac{J^*}{R^2 A} \right) \approx 1$$

zu setzen. Im Regelfall ist es auch zu vertreten, das Glied

$$\frac{J^*}{R A} W''$$

ganz zu streichen. Sicher ist die Streichung nicht mehr zulässig, wenn

$$\frac{W}{R^2} \ll W''$$

ist. Beispiele hierfür fallen im allgemeinen aber nicht in den Anwendungsbereich.

Die Gleichungen für  $N$  und  $M$  am schwach gekrümmten Stab sind also:

$$N = EA \left[ u' + \frac{1}{R} W \right] \quad (3.115)$$

$$M = -EJ^* \left[ \frac{1}{R^2} W + W'' \right]. \quad (3.116)$$

Häufig wird die Verschiebung  $u$  in Bild 3.11a konstant über den Querschnitt angesetzt. Damit werden die Schubverzerrungen ungleich Null. Um aber trotzdem den Querschnitt rechtwinklig auf der verformten Stabachse zu behalten, wird dann die kinematische Hypothese

$$u' = -\frac{1}{R} W \quad (3.117)$$

aufgestellt, welche man auch über die Forderung

$$\epsilon(z=0) = 0 \quad (3.118)$$

erhält.

Dieses ist aber, wie oben gezeigt, eine unnötige Forderung und führt auch zu Widersprüchen in der Berechnung. So ist danach in (3.115)

$$N \equiv 0 \quad . \quad (3.119)$$

Dieser Umstand verführt z. B. Reckling [B7] dazu, für den Fall  $M=0$  und  $N \neq 0$  für einen Querschnitt eine neutrale Faser im Krümmungsmittelpunkt auszurechnen, obwohl er die Spannung für diesen Fall mit

$$\sigma_{(z)} = \frac{N}{A}$$

angibt. Marguerre [B8] rechnet aus diesem Grunde die Normalkraft über Gleichgewichtsbedingungen aus und Lehmann [B6] erwähnt diese in der Näherung (I) überhaupt nicht. Flügge [B9] gibt nur eine Theorie für  $N \equiv 0$  an.

Offensichtlich geht die Forderung (3.118) auf Love [B10] zurück. Federhofer [B11] greift die vektorielle Darstellung des gekrümmten Stabes nach Love [B10] auf, läßt aber wegen der auch zu behandelnden Dehnungsschwingungen die Forderung (3.118) fallen und findet so die hier entwickelten Zusammenhänge. Daß es aber nicht nur bei Schwingungsproblemen mit der Theorie nach Love Schwierigkeiten gibt, zeigt das Beispiel bei Reckling [B7].

Eine konsequente Durcharbeitung der hier gegebenen Gleichungen (3.113) bis (3.116) findet man auch bei Lehmann [B6] in der Näherung (II) für schwach gekrümmte Stäbe und in der Theorie für stark gekrümmte Stäbe.

#### 3.2.2.4 Biegung quer zur Krümmungsebene der Stabachse

Um für diesen Fall auch eine geschlossene Näherungslösung zu erhalten, müssen wir noch etwas weitergehende Einschränk-

kungen als im Fall der Biegung in der Krümmungsebene treffen.

Es sei folgender einfacher Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -r \cos \varphi V_{33,1} \\
 U_2 &= V_{22} - \sin \varphi V_{33} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) V_{34} \\
 U_3 &= \underbrace{\cos \varphi V_{33}}_{\text{zwei Freiheitsgrade der Stabtheorie}} + \underbrace{\sin(2\varphi) V_{34}}_{\text{ein weiterer Freiheitsgrad für Querschnittsverformung}}.
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Der erste Teil dieses Ansatzes läßt außer einer Verdrehung um die Stabachse nur eine Verschiebung quer zur Krümmungsebene mit der zugehörigen Schrägstellung des unverformten Querschnittes zu. Wie schon bei der Beschreibung des vollständigen Ansatzes erwähnt, ist dieses nicht ausreichend. Durch die Krümmung der Stabachse ist eine nichtlineare und zu der Querschnittsachse rechtwinklig auf der Krümmungsebene unsymmetrische Spannungsverteilung bedingt. Durch diese Unsymmetrie entsteht ein Biegemoment um diese Querschnittsachse. Aus Gleichgewichtsgründen muß dieses Moment aber Null sein. Es ist also ein weiterer Freiheitsgrad für eine Verschiebung in der Krümmungsebene erforderlich, welcher ein entgegengesetztes Moment hervorruft. Diese zusätzliche Unbekannte läßt sich dann zwar durch die Bedingung  $M = 0$  wieder eliminieren. Es entsteht aber ein wesentlich größerer Aufwand als bei der Biegung in der Krümmungsebene, bei welcher dieser Effekt durch genauere Auswertung der Querschnittswerte zu berücksichtigen war.

Im folgenden soll ein schwach gekrümmter Stab vorausgesetzt werden und die o. g. Auswirkung der Stabkrümmung unterdrückt

werden. Damit ist auch die Vernachlässigung der folgenden Erscheinung gerechtfertigt.

Die verformte Stabachse ist eine Raumkurve. Dadurch entstehen trotz des ebenen und rechtwinklig zur verformten Stabachse stehenden Querschnittes Gleitungen  $\delta_{12}$ . Die dazu gehörigen Schubspannungen bleiben unberücksichtigt. Die Gleitungen  $\delta_{12}$  könnten im Falle des stark gekrümmten Stabes durch eine zusätzliche Verdrehung des Querschnittes wieder rückgängig gemacht werden. Nun entstehen dadurch wieder Normalspannungen. Es müßte dann untersucht werden, welches der kleinere Zwang für das System ist. Mit diesen Voraussetzungen und denen im vorigen Abschnitt läßt sich analog zur Biegung in der Krümmungsebene des Stabes folgende Theorie entwickeln.

Mit den Ansätzen (3.120) ergeben sich die modifizierten Verzerrungen zu:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{11} &= \frac{\delta}{R} \cos \varphi V_{22} - r \delta \cos \varphi V_{33,11} + \frac{r}{R} \left( \frac{3}{2} \delta - (\delta + 2 \frac{\rho}{r}) \right) \cos^2 \varphi \cos \varphi V_{34} \\ \bar{\delta}_{12} &= \delta V_{22,1} + \frac{r}{R} \delta V_{33,1} \\ \bar{\delta}_{22} &= 3 \frac{\rho}{r} \frac{\theta^3}{r} \sin(2\varphi) V_{32}.\end{aligned}\tag{3.121}$$

Mit  $\bar{G}^{\alpha\beta} = \bar{\delta}_{\alpha\beta}$  nach (3.91) ergibt sich für den lastfreien Bereich folgendes Dgl.-System:

$$\begin{aligned}M &= \iint_{(Q)} E \frac{\delta}{R} \bar{G}^{11} r \delta \cos \varphi d\theta^3 d\theta^4 \\ T &= \iint_{(Q)} G \frac{\delta}{R} \bar{G}^{22} r \delta d\theta^3 d\theta^4 \\ \bar{T}_{1,1} &= \frac{1}{R} M \\ M_{1,1} &= -\frac{1}{R} T + Q \\ Q_{1,1} &= 0\end{aligned}\tag{3.122}$$

und analog zu (3.99)

$$\iint_{(a)} \frac{d}{\beta} E \bar{v}^{11} \frac{1}{R} \left( \frac{1}{2} r - (r + 2 \frac{\theta^2}{r}) \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi d\theta^3 d\theta^2 + \iint_{(b)} \frac{d}{\beta} E \bar{v}^{22} \left( 3 \frac{\rho}{r} \frac{\theta^3}{r} \sin(2\varphi) \right) d\theta^3 d\theta^2 = 0. \quad (3.123)$$

Nach der Integration der Querschnittswerte mit entsprechenden Vereinfachungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &= E \left[ \frac{1}{rR} J V_{22} - J V_{33,11} + \frac{3}{8} \frac{F}{R} A V_{34} \right] \\ T &= G \left[ \frac{1}{r} J_p V_{22,11} + \frac{1}{R} V_{33,11} \right] \\ \text{mit } J_p &= 2\pi r^3 h \end{aligned} \quad (3.124)$$

und aus (3.123)

$$V_{34} = r R \lambda \left[ -\frac{1}{rR} V_{22} + V_{33,11} \right] \quad (3.125)$$

mit  $\lambda$  nach (3.101).

Setzt man (3.125) in (3.124) ein, so ergibt sich

$$M = E J \left( 1 - \frac{3}{4} \lambda \right) \left[ \frac{1}{rR} V_{22} - V_{33,11} \right]$$

und mit (3.104)

$$M = E J \alpha \left[ \frac{1}{rR} V_{22} - V_{33,11} \right]. \quad (3.126)$$

Dieses Ergebnis haben Klöppel/Friemann [4] auf anschauliche Weise auch erhalten, wobei die ganze Konsequenz der Vereinfachungen nicht so offensichtlich wird. Auch hier gelten für die Brauchbarkeit der Ergebnisse dieselben Bedenken wie für die Theorie nach v. Kármán, weil die Lösungen dieselben Merkmale aufweisen. Die obige Lösung

ist für  $\nu = 1$  die Biegetheorie der quer zur Krümmungsebene belasteten Stäbe ohne Querschnittsverformungen.

### 3.2.2.5 Numerische Ergebnisse und Vergleiche

Anders als beim geraden Stab haben hier die Querschnittsverformungen wesentlichen Einfluß auf das gesamte Tragverhalten des gekrümmten Stabes. Sowohl Verschiebung der Stabachse als auch Spannungen haben nur geringe Ähnlichkeit mit der Biegetheorie des Stabes mit starrem Querschnitt. Aus diesem Grunde sei hier für die Biegung in der Krümmungsebene als Vergleichsmaß die Theorie von v. Kármán [1] benutzt. Wie schon früher beschrieben, ist Übereinstimmung der vorliegenden Theorie mit derjenigen nach v. Kármán zu erwarten, wenn keine anderen Schnittgrößen als das Biegemoment, also  $M = \text{const.}$ , den Stab beanspruchen und die Randbedingungen für die Querschnittsverformung nicht vorgeschrieben sind. Dieser Fall ist in (3.98) mit  $V_{32} = \text{const.}$  als Lösung enthalten, ohne daß die Einschränkungen bis zu (3.106) gemacht werden. Auch die umfangreiche numerische Auswertung des Systems (3.84) erbringt dasselbe Ergebnis.

Im folgenden soll anhand eines Beispiels der Einfluß von  $M \neq \text{const.}$  und von der Behinderung der Querschnittsverformungen am Rande untersucht werden.

Als Beispiel soll folgendes System untersucht werden:

Querschnitt:  $r = 52 \text{ mm}$ ;  $h = 3,75 \text{ mm}$

Radius der Stabachse:  $R = 308 \text{ mm}$

Werkstoff: Stahl:  $E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  (3.127)

$$\mu = 0,3$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

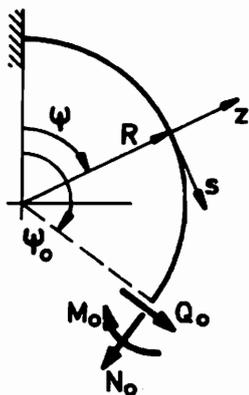
Dieser Querschnitt wurde von Klöppel/Friemann [4] in einem Versuch für Biegung quer zur Krümmungsebene benutzt.

Der Kehrwert der Berichtigungsziffer nach v. Kármán ist für dieses System:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Näherung} \quad \alpha_1 &= 3.82 \\ 2. \text{ Näherung} \quad \alpha_2 &= 3.91 \end{aligned} \tag{3.128}$$

Für die nachfolgenden Vergleiche ist es gleichgültig, ob die 1. oder 2. Näherung verwandt wird, wenn dieses nur in den zu vergleichenden Theorien gleich geschieht.

Statisches System und Belastung:



Bezeichnungen der Verformungsgrößen

Verschiebung in Richtung  $z$  :  $w$

Verschiebung in Richtung  $s$  :  $u$

Verdrehung des Querschnitts :  $\vartheta$

Bild 3.12

Die Bilder 3.13 zeigen einen Vergleich der Endverschiebungen und -verdrehungen der vorliegenden Theorie mit den Ergebnissen nach v. Kármán. Die Normierung der Kurven wurde wie folgt vorgenommen.

Die Unterschiede der Verformungsgrößen zu denen aus der Biegetheorie ohne Querschnittsverformungen ergeben sich zu

$$\Delta V = V - V_B . \tag{3.129}$$

Bezieht man diesen Wert auf  $V_B$ , so ergibt sich mit dem von v. Kármán definierten Wert  $\frac{1}{\mathcal{H}}$

$$\frac{\Delta V}{V_B} = \frac{V}{V_B} - \frac{V_B}{V_B} = \mathcal{H} - 1. \quad (3.130)$$

Indiziert man  $\mathcal{H}$  mit  $\kappa$  für v. Kármán und  $s$  für die vorliegende Theorie und bildet den folgenden Quotienten

$$\eta = \frac{\mathcal{H}_s - 1}{\mathcal{H}_\kappa - 1} = \frac{\Delta V_s}{\Delta V_\kappa} \quad (3.131)$$

so erhält man für  $\eta = 1$  die Werte nach v. Kármán und für  $\eta = 0$  die nach der Biegetheorie ohne Querschnittsverformungen.

Die Bilder 3.14 zeigen dieselben Vergleiche für den Fall, daß die Querschnittsverformungen an der Einspannstelle behindert sind. Vergleicht man die Bilder 3.13 und 3.14, so erkennt man, daß der Einfluß der Randbedingungen für die Querschnittsverformungen wesentlich größer ist und schematischer erscheint als der Einfluß des veränderlichen Momentes.

Die Kurven in den Bildern 3.14 streben für kleine Stablängen alle gegen Null. Die Behinderung der Querschnittsverformungen an der Einspannstelle wirkt sich also auf den ganzen Stab aus und man erhält die Ergebnisse der Biegetheorie ohne Querschnittsverformung. Das scheinbar unmotivierte Ansteigen einiger Kurven für  $\psi_0$  gegen Null ist eine Folge der für diese Fälle zu kurzen Stäbe für die Stabtheorie.

Die Ergebnisse für nicht behinderte Querschnittsverformungen an der Einspannstelle zeigen im wesentlichen keine größeren Abweichungen als 20 % zur Theorie nach v. Kármán. Kurze Stäbe, nur mit einer Normalkraft belastet, bilden hier allerdings eine Ausnahme. Die Verschiebung  $u_0$  wird im

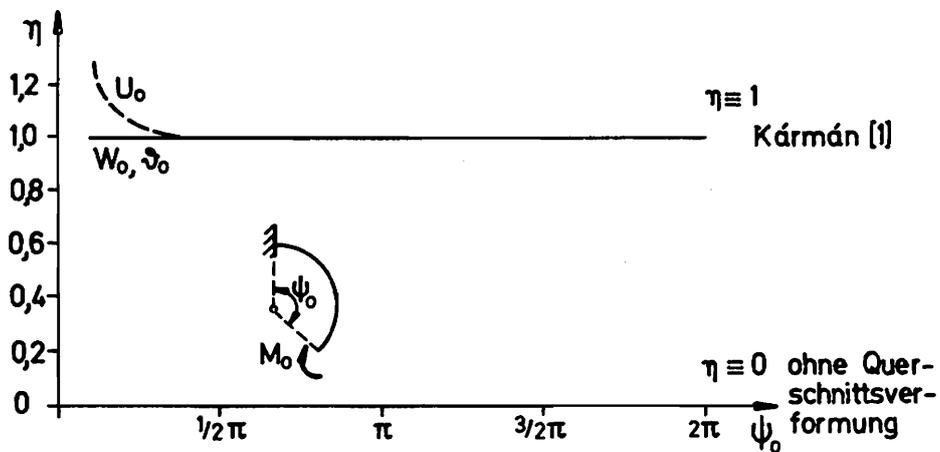


Bild 3.13a

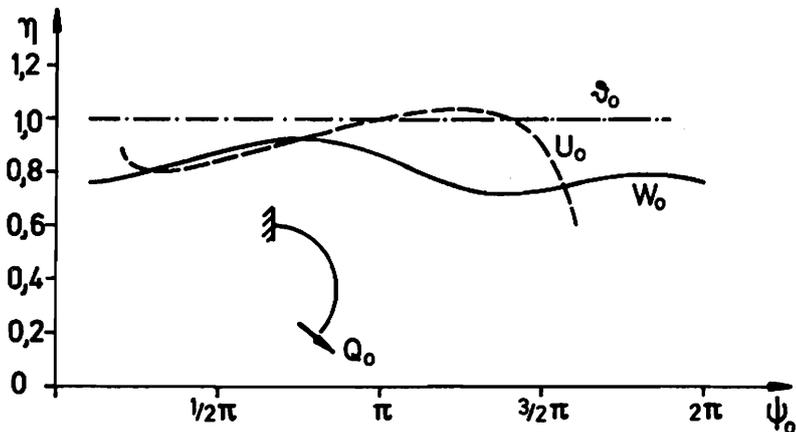


Bild 3.13b

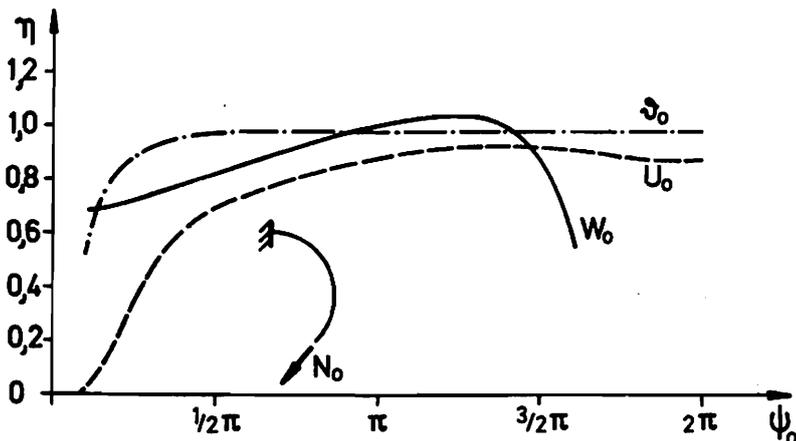


Bild 3.13c

Vergleich der Verformungsgrößen mit Kármán [1] für nicht behinderte Querschnittsverformungen an der Einspannstelle

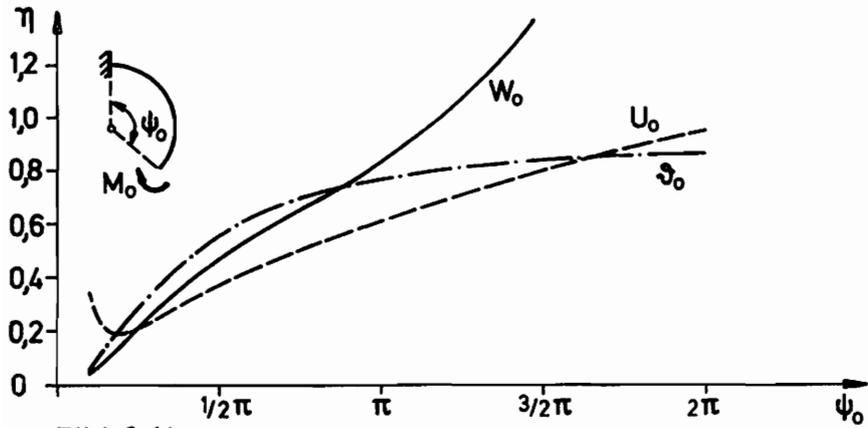


Bild 3.14 a

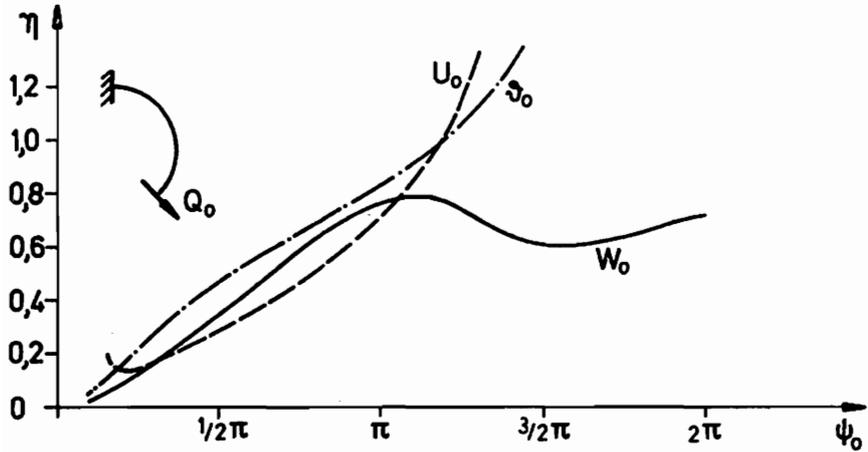


Bild 3.14 b

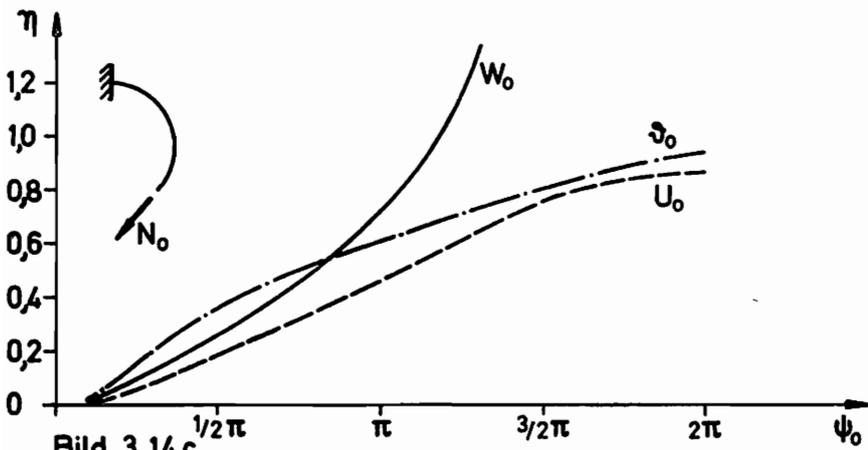


Bild 3.14 c

Vergleich der Verformungsgrößen mit Kármán [1] für behinderte Querschnittsverformungen an der Einspannstelle

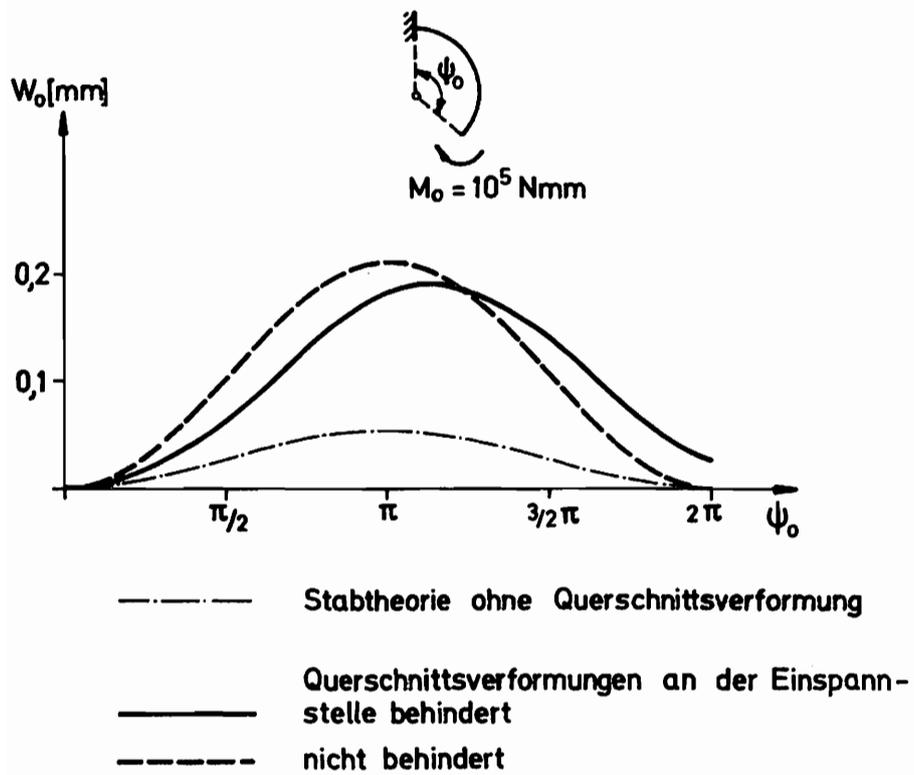


Bild 3.15 Wirkliche Verschiebung  $w_0$

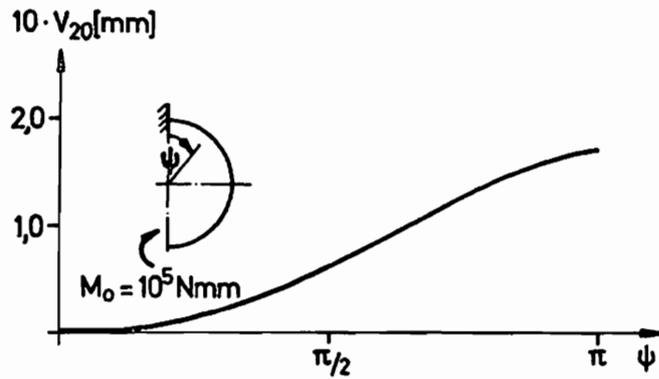


Bild 3.16a Biegelinie (Verschiebung der Stabachse)

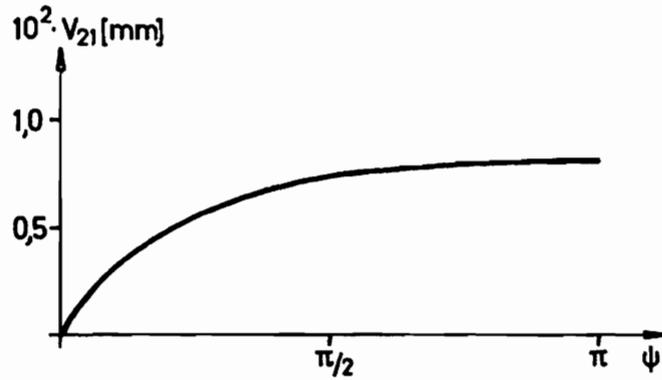


Bild 3.16b Querschnittsverformung:  $\sin(2\psi)$

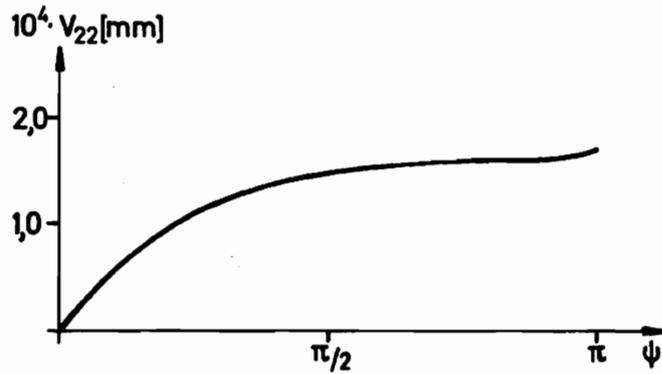


Bild 3.16c Querschnittsverformung:  $\sin(4\psi)$

wesentlichen durch Normalkraftverformungen hervorgerufen, welche kaum Querschnittsverformungen bedingen.

Erläutert sei noch das Verhalten einiger Kurven in den Bildern 3.13 und 3.14 im Bereich  $\psi_0 > \frac{3}{2}\pi$ . Durch bestimmte Symmetrien in den Schnittgrößen werden einige Verformungsgrößen nach der Stabtheorie ohne Querschnittsverformungen für  $\psi_0 = 2\pi$  zu Null. In der Nähe dieses Bereiches werden dann die Nebeneffekte, z. B. die nicht-lineare Spannungsverteilung, bestimmend. Da diese Auswirkungen in den einzelnen Theorien unterschiedlich behandelt wurden, verlassen die entsprechenden Kurven den Vergleichsbereich.

Ein Beispiel dafür ist im Bild 3.15 dargestellt. Es sind dort die wirklichen Endverschiebungen  $w_0$  aufgetragen. Der Einfluß der einseitigen Behinderung der Querschnittsverformungen ist gut zu erkennen.

In den Bildern 3.16b und c sind die Funktionen der Querschnittsverformungen 1. und 2. Ordnung aufgetragen. Zum Vergleich stellt Bild 3.16a die Verschiebung der Stabachse in Richtung des Krümmungsradiuses (Biegelinie) für den durch ein konstantes Biegemoment belasteten Halbkreisträger dar. Man sieht deutlich den Einfluß der Randeinspannung auf die Querschnittsverformungen. Die Behinderung der Querschnittsverformungen ist also keine Randstörung, welche schnell abklingt. Dieses zeigen auch die Ergebnisse über die Verschiebungen am freien Ende in den Bildern 3.13 bis 3.15.

Nach den Verformungen seien nun auch die Spannungen an dem Stab, welcher in seiner Krümmungsebene belastet ist, untersucht. Einige Informationen über die Normalspannungen in Richtung der Stabachse sind im Bild 3.17 dargestellt. Oben links ist der Verlauf der Spannungen in der Mittelfläche

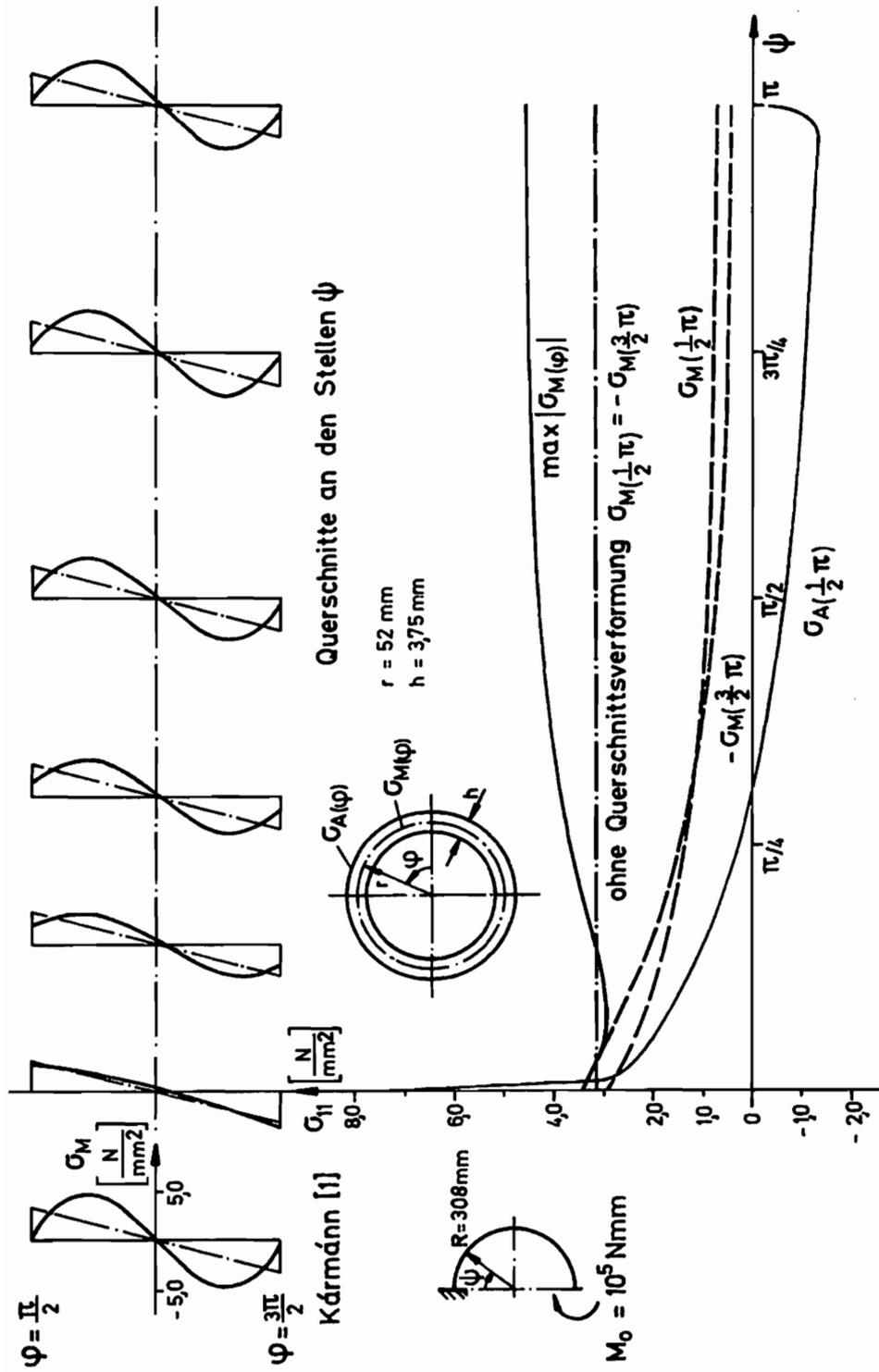
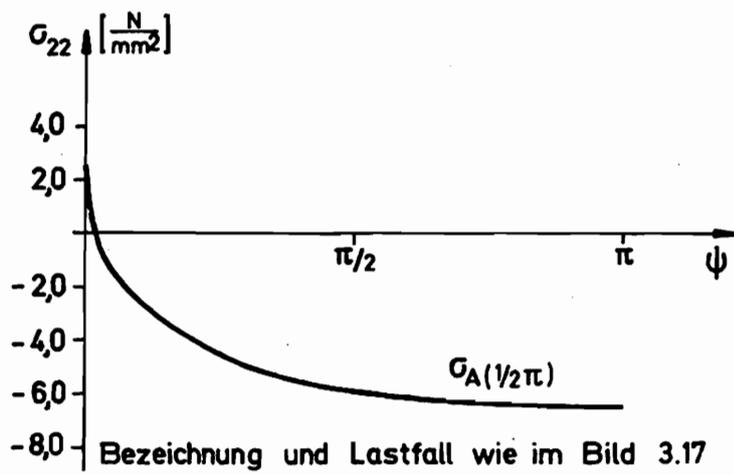
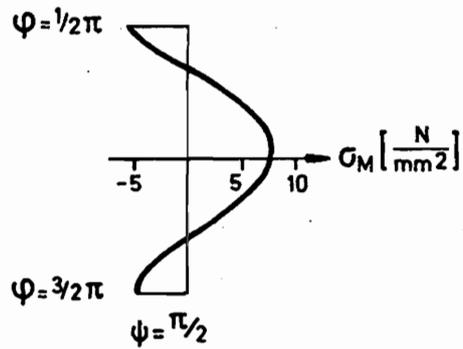


Bild 3.17 Normalspannungen in Richtung der Stabachse



**Bild 3.18** Normalspannungen in Richtung der Profilmittellinie

über den Querschnitt nach der Biegetheorie für schwach gekrümmte Stäbe ohne Querschnittsverformungen und nach v. Kármán [1] aufgetragen. Diese Spannungsverteilung ist nach beiden Theorien entlang der Stabachse gleichbleibend. Die hier errechnete Spannungsverteilung zeigt dagegen wegen der Behinderung der Querschnittsverformungen an der Einspannstelle einen allmählichen Übergang von der einen zur anderen Theorie. An der Einspannstelle ergibt sich im wesentlichen die Spannungsverteilung nach der Biegetheorie. Die geringen nichtlinearen Abweichungen entstehen durch die Krümmung der Stabachse, welche in der vorliegenden Theorie in erster Näherung mitgenommen wurde. Erst in der Nähe des freien Endes ist der Unterschied zur Spannungsverteilung nach v. Kármán unwesentlich.

Die maximale Spannung, welche nicht in den äußersten Fasern auftritt, ist ca. 50 % größer als die nach der Biegetheorie. Dieser Wert ist im Vergleich zu der fast 200 % größeren Durchbiegung überraschend klein, jedoch in keinem Fall vernachlässigbar.

Bemerkenswert verläuft auch im Bild 3.17 die Kurve  $\bar{\sigma}_A(\frac{1}{2}\pi)$  für die Normalspannung in der äußersten Faser der Wandung an der Stelle  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ . In den letzten zwei Dritteln des Stabes herrscht hier Druck, obwohl man Zug erwartet. Die Erklärung dafür ist die hohe Druckspannung  $\bar{\sigma}_{22}$  in diesem Bereich (s. Bild 3.18). Die Differenz zwischen  $\bar{\sigma}_{MA}(\frac{1}{2}\pi)$  und  $\bar{\sigma}_{MM}(\frac{1}{2}\pi)$  ist ungefähr  $\mu \bar{\sigma}_{22 A}(\frac{1}{2}\pi)$ . Dieses entspricht dem Hookeschen Gesetz bei behinderter Querdehnung. Am freien Ende des Stabes klingt dieser Effekt deswegen auch stark ab. An der Einspannstelle ist zunächst die Einspannwirkung an der Wandung dominant. Diese Erscheinung ist bereits bei den geraden Stäben genauer untersucht worden. Diese auch hier entstehende hohe Spannungsspitze ruft nun wegen der behinderten Querdehnung in Richtung der Querschnittskordinate an der

Einspannstelle eine entsprechende Spannungsspitze

$\sigma_{\max}(z) = \mu \sigma_{\max}(z)$  hervor. Dieses ist im Bild 3.18 gut zu erkennen.

Bei der Berechnung von eben gekrümmten Rohren, welche quer zur Krümmungsebene der Stabachse belastet sind, bietet sich ein Vergleich mit Klöppel/Friemann [4] an. Nach der dort angegebenen Theorie ergibt sich z. B. die Endverschiebung eines Halbkreisrohres mit einer Einzellast am Ende zu:

$$w_0 = Q_0 R^3 \pi \left[ \frac{1,5}{G J_p} + \alpha \frac{0,5}{E J} \right] \quad (3.132)$$

Dabei repräsentiert der erste Teil in der eckigen Klammer die Formänderung aus dem Torsionsmoment und der zweite diejenige aus dem Biegemoment. Der Faktor  $\alpha$  ist hier derselbe wie in (3.128) und vergrößert also nur den Anteil aus dem Biegemoment. Vergleichsrechnungen nach der vorliegenden Theorie haben, wie auch der Versuch von Klöppel/Friemann [4], ergeben, daß sich ein Rohr, welches nur durch Torsionsmomente belastet ist, so verhält, wie nach der Theorie ohne Querschnittsverformungen. Berücksichtigt man dieses bei der Bildung des Vergleichswertes für die Verformungsgrößen

$$\eta = \frac{\Delta v_s}{\Delta v_k}$$

nach (3.131), so ergibt sich auch hier:

$$\eta = \frac{\alpha_s - 1}{\alpha_k - 1} \quad (3.133)$$

Die Kurven der Bilder 3.19 und 3.20 sind also analog zu denen der Bilder 3.13 und 3.14 aufgetragen. Auch hier ist der Einfluß der behinderten Querschnittsverformungen an der Einspannstelle deutlich zu sehen. Der Einfluß des veränderlichen Biegemomentes und der Querkraft kann hier nicht,

wie in Bild 3.13a eliminiert werden, weil es keinen Lastfall für Randlasten gibt, welcher ein konstantes Biegemoment erzeugt.

Die Bilder 3.19 und 3.20 weisen viele Kurven auf, welche sehr steil verlaufen und den Vergleichsbereich bei  $\psi_0 = \pi$  und  $\psi_0 = 2\pi$  verlassen. Dieses heißt aber nicht, daß die Theorie nach Klöppel/Friemann für diese Verformungsgrößen völlig unbrauchbar ist. Vielmehr ist hier die gewählte Normierung  $\eta$  unbrauchbar. Ist nämlich der mit  $\alpha$  behaftete Teil in (3.132) oder entsprechenden Gleichungen gleich Null, so sind die Verformungen nach Klöppel/Friemann und der Biegetheorie ohne Querschnittsverformungen identisch und damit der Nenner in (3.133) gleich Null. Die wirklichen Verformungen können sich aber trotzdem in vergleichbaren Größenordnungen befinden. Für ein Beispiel ist dieses in den Bildern 3.21 und 3.22 gezeigt. Im Bild 3.22 sind die Endverschiebungen  $w_0$  durch die Endverschiebung  $w_{0s}$  nach der Biegetheorie ohne Querschnittsverformung dividiert.

Für  $\psi_0 \rightarrow 0$  geht die Kurve nach Klöppel/Friemann und die für nicht behinderte Querschnittsverformungen an der Einspannstelle gegen den Wert  $\alpha = 3,91$ . Dieses ist der Fall, weil ein sehr kurzer Stab bei dem gegebenen Lastfall nur ein fast konstantes Biegemoment aufweist. Für behinderte Querschnittsverformungen an der Einspannstelle geht die Kurve bei  $\psi_0 \rightarrow 0$  gegen 1,0. Die Querschnittsverformungen stellen sich also bei dem kurzen Stab nicht ein.

In der Nähe von  $\psi_0 = \pi$  verlaufen alle Kurven bei  $\approx 1,0$ . Es herrschen hier also die von den Querschnittsverformungen unabhängigen Einflüsse der Torsionsmomente vor.

Für  $\psi_0 = 2\pi$  ist auch hier kein sinnvoller Vergleich möglich, da die Verschiebungen nach der Biegetheorie ohne

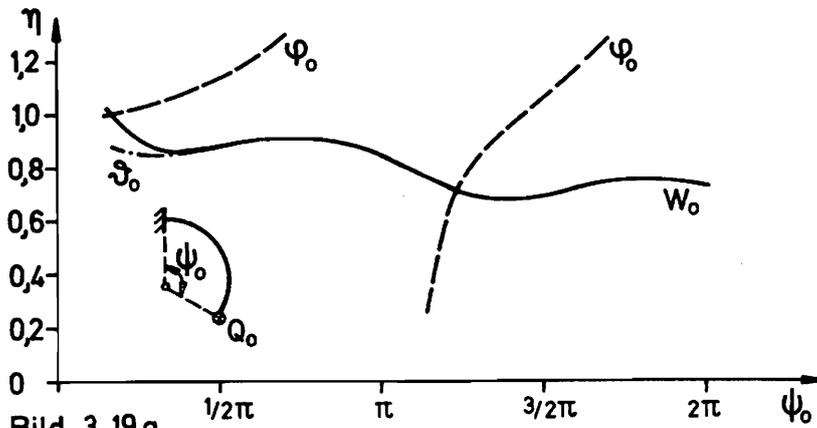


Bild 3.19 a

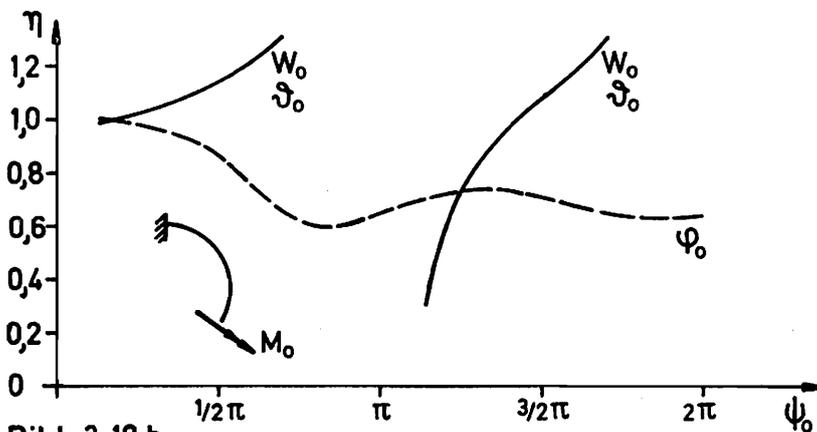


Bild 3.19 b

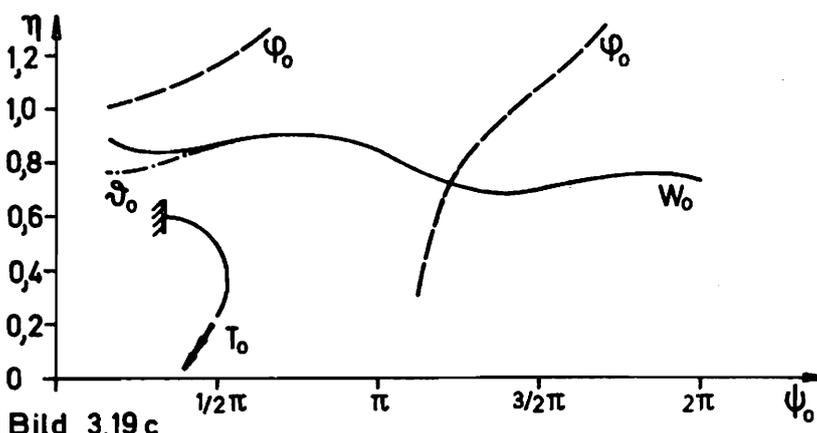
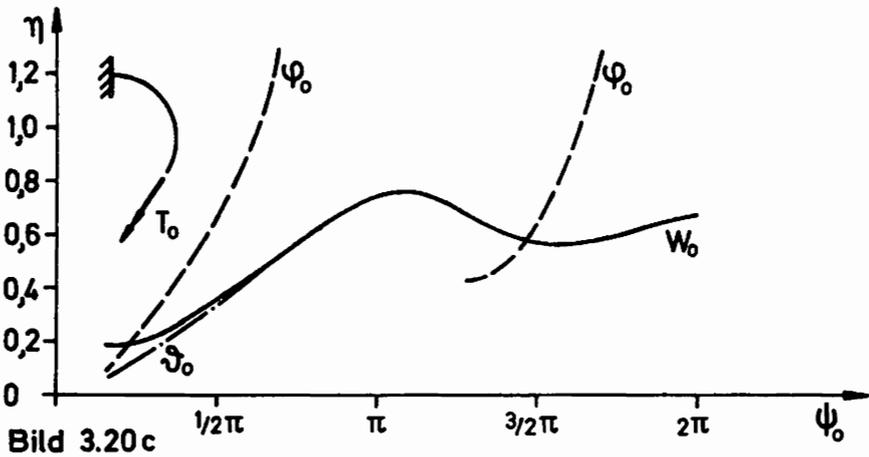
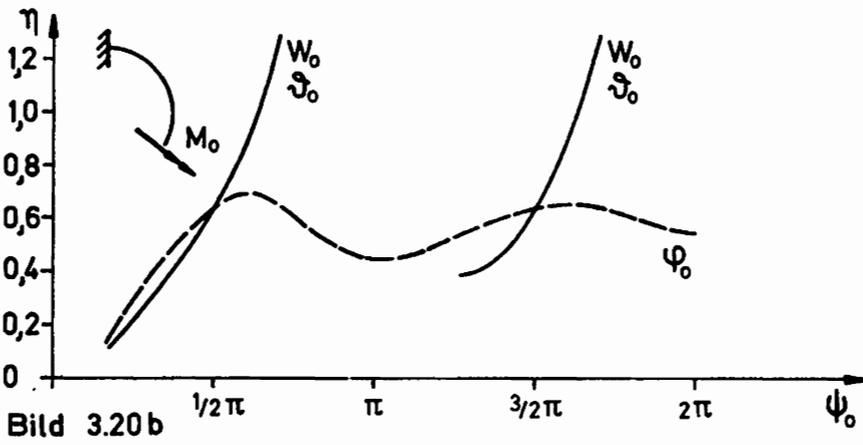
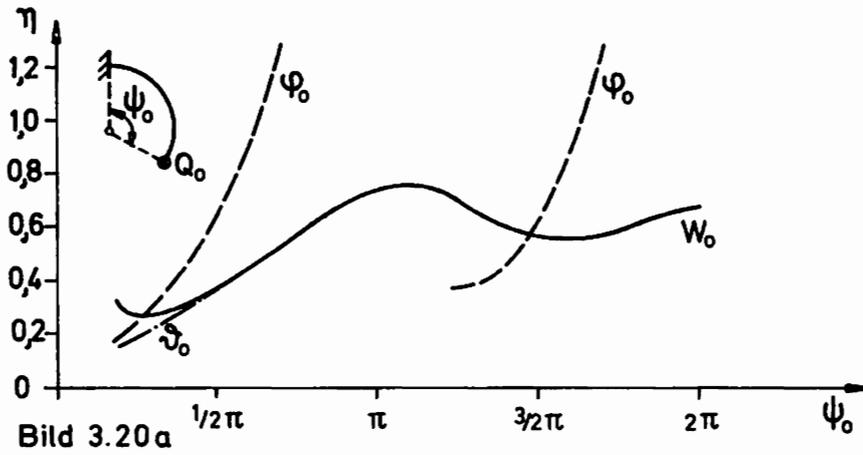


Bild 3.19 c

Vergleich der Verformungsgrößen mit Klöppel/Friemann[4]  
für nicht behinderte Querschnittsverformungen an der  
Einspannstelle



**Vergleich der Verformungsgrößen mit Klöppel/Friemann[4]  
für behinderte Querschnittsverformungen an der  
Einspannstelle**

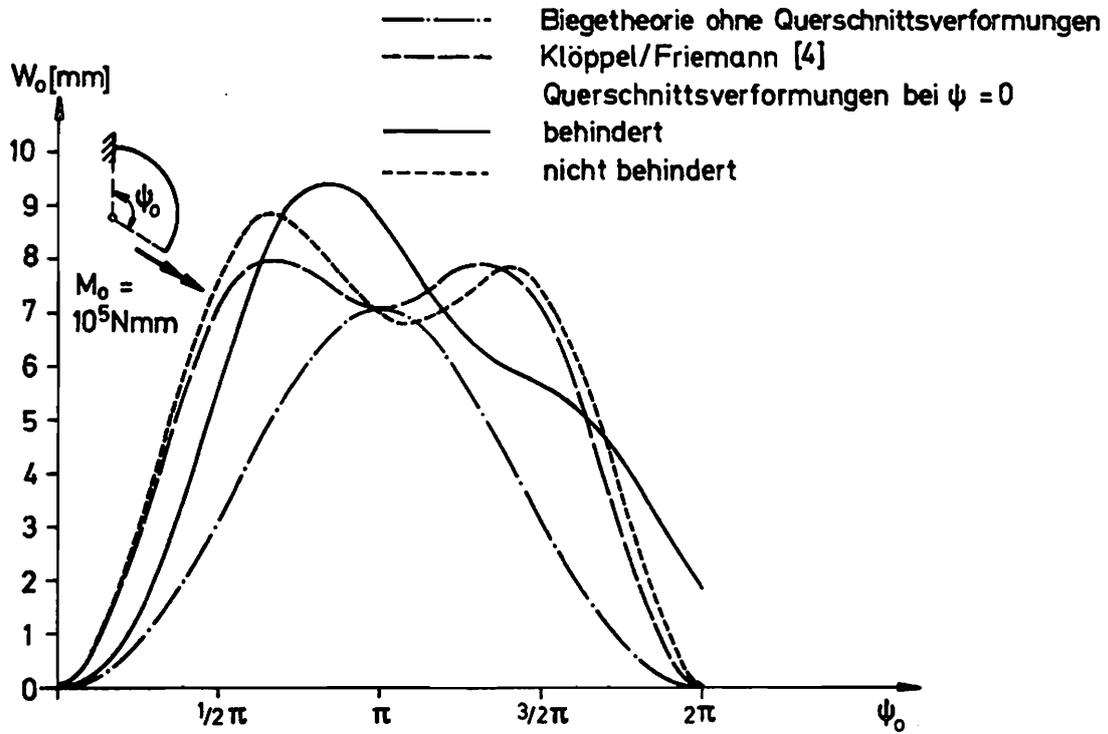


Bild 3.21 Endverschiebungen

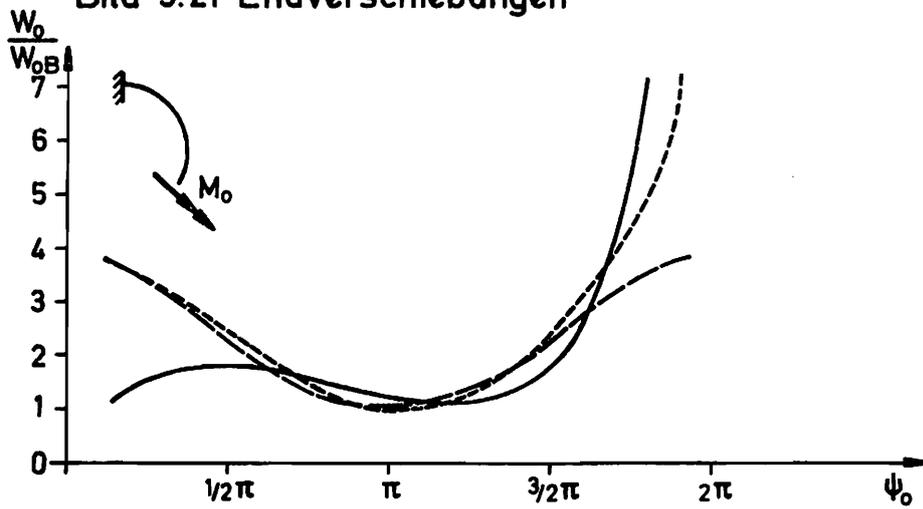


Bild 3.22 Auf die Biegetheorie ohne Querschnittsverformungen bezogene Endverschiebungen

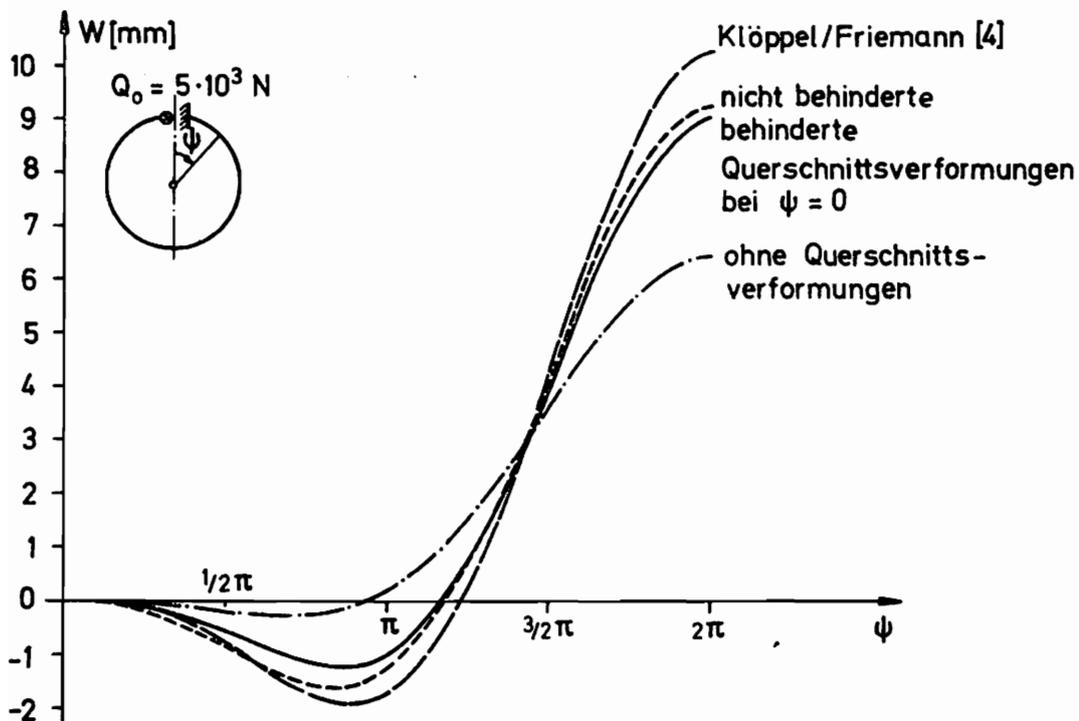


Bild 3.23 Biegelinie

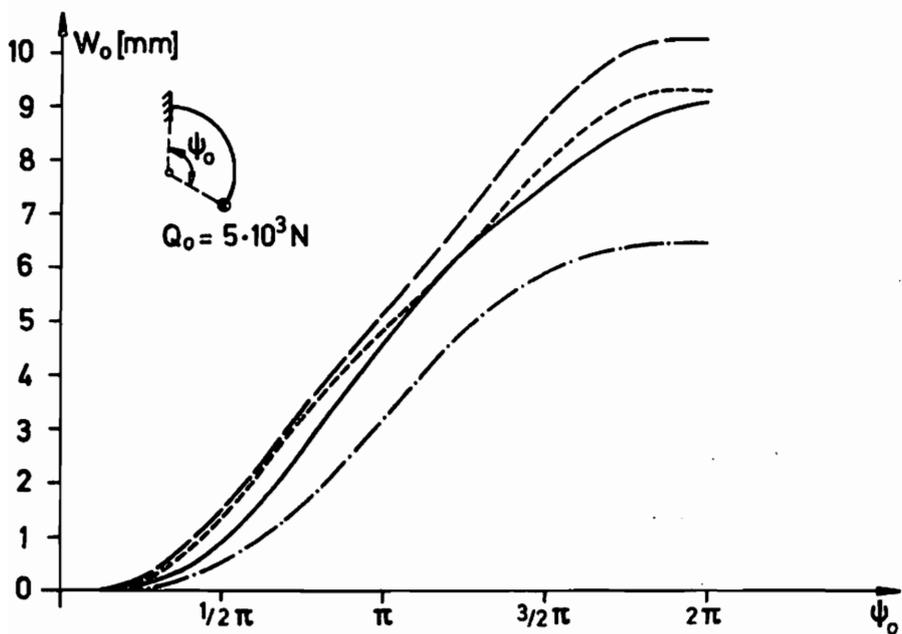


Bild 3.24 Endverschiebungen

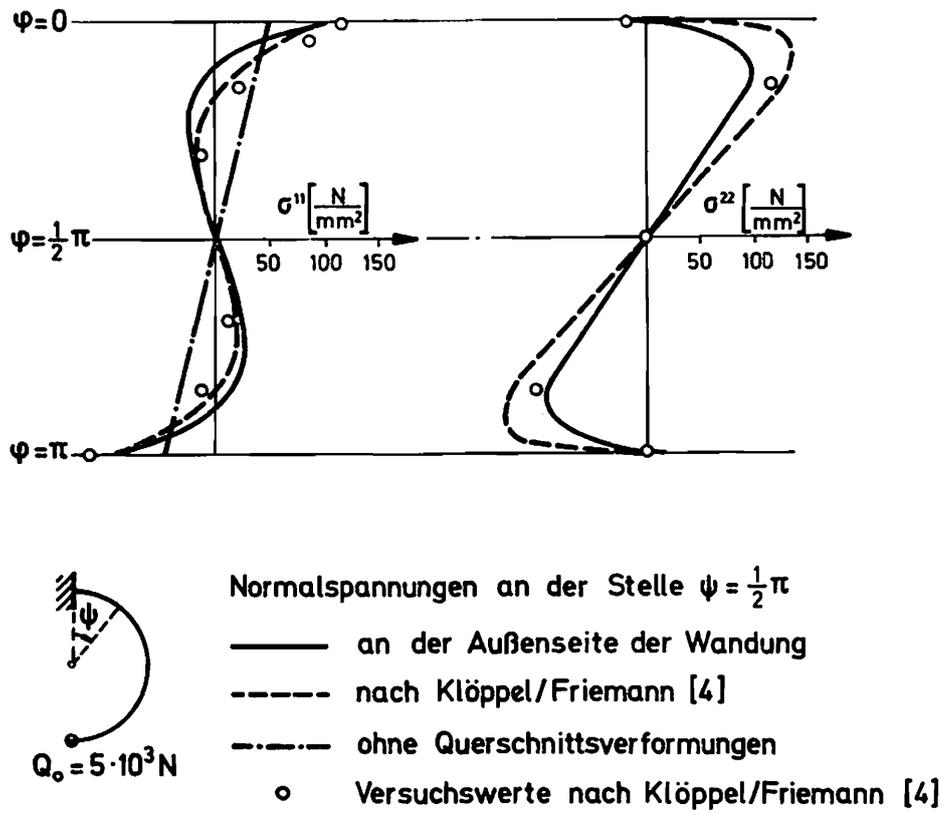


Bild 3.25 Vergleich von Normalspannungen

Querschnittsverformungen und nach Klöppel/Friemann auf Null zurückgehen. Dagegen verbleiben nach der vorliegenden Theorie an dieser Stelle Verschiebungen. Der Einfluß der behinderten Querschnittsverformungen an der Einspannstelle ist hier besonders deutlich. Dieser Einfluß ist bei dem Versuch von Klöppel/Friemann [4] nicht vorhanden. Bei einer Einzellast am freien Ende eines einseitig eingespannten Halbkreises ist das Biegemoment an der Einspannstelle Null und damit auch nach der dortigen Theorie die Querschnittsverformung. Dadurch stimmt das Versuchsergebnis mit der Theorie gut überein.

Die Bilder 3.23 und 3.24 zeigen für einen anderen Lastfall Vergleiche der wirklichen Biegelinien bzw. Endverschiebungen verschieden langer Stäbe der einzelnen Theorien. Bei den Spannungsanalysen zeigt sich, wie in Bild 3.17 für die Biegung in der Krümmungsebene dargestellt, daß die Spannungsverteilung auch hier von derjenigen nach der Biegetheorie ohne Querschnittsverformungen an der Einspannstelle auf die nach Bild 3.25 übergeht. Jedoch kann dieser Effekt für den bei Klöppel/Friemann [4] ausgewerteten Lastfall (nach Bild 3.25) nicht gezeigt werden, weil, wie schon erwähnt, die Biegespannungen an der Einspannstelle zu Null werden. Die von Klöppel/Friemann [4] errechneten und gemessenen Spannungen sind in die Spannungsverteilungen des Bildes 3.25 eingearbeitet. Man erkennt für diesen Fall recht gute Übereinstimmung. Auf die Darstellung anderer Lastfälle sei hier verzichtet, da sich im wesentlichen der Eindruck von Bild 3.17 mit veränderten Spannungsverteilungen wiederholt.

#### 4. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Verhalten von dünnwandigen geraden und eben gekrümmten Stäben mit stetig

gekrümmter Profilmittellinie unter statischen Lasten. Das an sich dreidimensionale Problem wird durch kinematische Hypothesen über die Wanddicke und Ansatzfunktionen für die Verschiebungen entlang der Profilmittellinie auf ein eindimensionales entlang der Stabachse reduziert. Es wird ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem angegeben, welches beliebige Krümmungen der Stabachse und der Profilmittellinie sowie vorgegebene Querschnittsverformungen berücksichtigt.

Als Beispiele werden Rohre mit Kreisquerschnitt gerechnet und die Ergebnisse mit bekannten Theorien verglichen. Dabei zeigt sich, daß die vorliegende Theorie sowohl im Bereich der als Schalen zu betrachtenden Körper als auch für sehr lange Stäbe gute Näherungen liefert. Bei den geraden Rohren wird z. B. festgestellt, daß Spannungsspitzen an Einspannstellen bei gebräuchlichen Rohrquerschnitten etwa 40 bis 60 % höher als der Wert  $\bar{\sigma} = \frac{M}{W}$  sind. Gekrümmte Rohre zeigen Querschnittsverformungen, welche im wesentlichen durch Biegespannungen hervorgerufen werden. Es wird gezeigt, daß die Behinderung dieser Querschnittsverformungen an Einspannstellen keine unbedeutende Randstörung ist, wie es die Theorien von v. Kármán [1] und Klöppel/Friemann [4] implizit voraussetzen.

Zur praktischen Durchführung des gefundenen Verfahrens sei folgendes kritisch angemerkt. Die Koeffizienten des gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssystems entstehen durch Integration geometrischer Größen über den Querschnitt des Stabes. Sie sind also reine Querschnittswerte. Diese Werte sind für einige Fälle geschlossen ausgewertet worden. Das Randwertproblem ist damit der numerischen Berechnung, z. B. durch eine Romberg-Integration, leicht zugänglich. Dabei auftretende numerische Schwierigkeiten lassen sich beseitigen, indem man die Systemgrößen an Zwischenpunkten

als zusätzliche Unbekannte einführt und das so entstehende lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren löst. Für die vorliegende Arbeit wurden auf der TR 440 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum auch sehr große Systeme mit vielen Ansatzfunktionen entlang der Profilmittellinie gerechnet. Die dabei erforderlichen Querschnittswerte wurden numerisch integriert. Die Ergebnisse dieser zeitintensiven Rechnung zeigten, daß sich der große Aufwand im Regelfall nicht lohnt und die o. g. Handrechnung für die Querschnittswerte ausreicht. Nur bei dem gekrümmten Rohr, quer zur Krümmungsebene belastet, wurde auf eine Handrechnung verzichtet.

Für gerade Stäbe ist es in der vorliegenden Arbeit gelungen, parameterabhängige Darstellungen zu finden, welche eine Wiederholung der Lösung des Randwertproblems im konkreten Fall erübrigen. Für gekrümmte Rohre ist dieses unzweckmäßig, da hier charakteristische Werte u. a. vom Lastfall abhängen.

Literaturverzeichnis

Bücher sind mit [B ..] gekennzeichnet

- [1] v. Kármán, Th.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre.  
VDI 55 (1911) Nr. 45
  
- [2] Karl, H.: Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre.  
ZAMM 23 (1943) Nr. 6
  
- [3] Berg, S.: Querspannungen im gekrümmten Balken.  
Konstruktion 6 (1954) Nr. 7
  
- [4] Klöppel, K. u. Friemann H.: Der Spannungs- und Verformungszustand rechtwinklig zu ihrer Krümmungsebene belasteter Rohre.  
VDI-Z. 105 (1963) Nr. 23 - August (II)
  
- [5] Wunderlich W.: Vergleich verschiedener Approximationen der Theorie dünner Schalen (mit numerischen Ergebnissen).  
Seminar: Allgemeine Schalentheorie im WS 1972/73 am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum
  
- [6] Dzierwolski, R.: Flexion des tubes rectangulaires courbes à petit rayon de courbure.  
Construction métallique 1 (1964) Nr. 4,  
2 (1965) Nr. 1
  
- [7] Säckel, R.: Beitrag zur Spannungsverteilung in Kastenprofilen gekrümmter Träger.  
Wiss. Zeitschrift d. Hochschule f. Verkehrswesen Dresden 7 (1959/60) Nr. 1

- [8] Cornelis u. Cartilier: Etude théorique de la flexion des poutres courbes à parois minces. Bulletin du Centre d'Etudes de Recherches et d'Essais Scientifiques du Génie Civil, Université de Liège 11 (1960)
- [9] Friemann, H.: Berechnung des stark gekrümmten dünnwandigen I-Trägers auf Biegung und Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung. Dissertation, D17, Darmstadt, 1968
- [10] Bejlin, E. A.: Zur Theorie der dünnwandigen krummlinigen Stäbe mit offenem, verformbarem Profil. Arbeiten der Leningrader Hochschule für Bauwesen in Zusammenarbeit mit dem Leningrader Projektinstitut, Ausgabe 49, 1966
- [11] de Boer, R.: Der gerade Stab mit geschlossenem dünnwandigen Profil unter näherungsweise Berücksichtigung der Schub- und Querschnittsdeformationen. Ing.-Archiv 39 (1970) Nr. 1
- [12] Kreuzinger, H.: Der Einfluß der Querverformung auf die Berechnung gerader dünnwandiger Stäbe. Der Stahlbau 2 (1974)
- [13] Wunderlich, W.: Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. Ing.-Archiv 39 (1970)

- [14] Wunderlich, W.: Zur Berechnung von Rotationsschalen mit Übertragungsmatrizen.  
Ing.-Archiv 16 (1967)
- [15] Uhrig, R.: Untersuchung des Einflusses der Querschnittsdeformationen auf das Schwingungsverhalten eines Hubschrauberblattes mit Hohlquerschnitt.  
Ing.-Archiv 39 (1970)
- [B1] Kollár: Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken.  
Verlag W. Ernst u. Sohn 1973
- [B2] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1 und 2.  
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964
- [B3] Sedlacek, G.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung.  
Fortschritt Berichte VDI-Z, Reihe 4, Nr. 8, 1968
- [B4] Duschek u. Hochreiner: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, II. Teil.  
Springer-Verlag, Wien 1950
- [B5] Green u. Zerna: Theoretical Elasticity.  
Clarendon Press, Oxford 1968
- [B6] Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik.  
Band II: Elastostatik  
Vieweg 1975

- [B7] Reckling, K.-A.: Mechanik II Festigkeitslehre.  
Vieweg 1969
- [B8] Marguere: Technische Mechanik. Zweiter Teil  
Springer-Verlag 1967
- [B9] Flügge, W.: Festigkeitslehre  
Springer-Verlag 1967
- [B10] Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität.  
Leipzig u. Berlin 1907
- [B11] Federhofer, K.: Dynamik des Bogenträgers und  
Kreisringes.  
Springer-Verlag 1950



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 5**