

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Hubert Sommer

Ein Beitrag zur Theorie des  
ebenen elastischen  
Verzerrungszustandes bei  
endlichen Formänderungen

Heft Nr. 6



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Hubert Sommer**

**Ein Beitrag zur Theorie  
des ebenen elastischen Verzerrungszustandes  
bei endlichen Formänderungen**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 6**  
**Januar 1977**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme des Referates. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. K.-H. Schrader für die Übernahme des Koreferates.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinrich Schrader

Tag der Einreichung: 1. 7.76

Tag der mündlichen Prüfung: 6.12.76

© 1977 Dr.-Ing. Hubert Sommer

5000 Köln 50, Pflasterhofweg 70

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Verschiebungsfeld und vollständiger Spannungszustand stark verformter Bleche bestimmt. Diese können durch Vergrößerung der Dicke die Rolle eines kurzen Kragarms übernehmen, der überwiegend einer Scherbeanspruchung unterworfen ist. Die Berücksichtigung des Gleichgewichtes am verformten Element führt bei isotropem elastischen Material auf zwei gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Um deren Lösungen unter Einhaltung der Randbedingungen zu finden, bedarf es der Verwendung eines numerischen Iterationsverfahrens. Eine Vielzahl von Beanspruchungsarten erweist sich einer Lösung zugänglich, doch lassen sich Grenzen aufzeigen, die von mehreren Faktoren, wie zum Beispiel der Größe der Verformung oder der Querkontraktionszahl, abhängig sind.

## Summary

In the present work the field of displacements and the complete state of stresses are calculated for largely deformed metal sheets. By increasing the thickness these can take the part of a short cantilever, which is chiefly subjected to stresses of shear. Considering the equilibrium at the deformed element and taking isotropic elastic material leads to two coupled non-linear partial differential equations. In order to find the solutions to them without violating the boundary conditions, one must apply a method of numerical approximation. For many modes of deformation a solution can be found, but there can be shown limits which depend on several factors - e.g. largeness of deformation or Poisson's ratio.

## Inhaltsverzeichnis

---

<u>Bezeichnungen</u>	3
1. <u>Einführung</u>	6
2. <u>Allgemeine Grundlagen</u>	10
2.1 Koordinatensysteme	10
2.2 Transformationsbeziehungen	11
2.3 Metrik-Tensor	13
2.4 Christoffel-Symbole	14
3. <u>Gleichgewichtsbedingung</u>	16
4. <u>Stoffgesetz</u>	19
5. <u>Verzerrungstensoren</u>	22
5.1 Henckyscher Verzerrungstensor	22
5.2 Almansi-Hamelscher Verzerrungstensor	24
5.3 Green-Cauchyscher Verzerrungstensor	26
5.4 Weitere gemischt-variante Verzerrungstensoren	27
6. <u>Differentialgleichungen für die Verschiebungen der Feldpunkte</u>	29
6.1 Cauchyscher Spannungstensor und Almansi-Hamelscher Verzerrungstensor	29
6.2 Kirchhoffscher Spannungstensor und Almansi-Hamelscher Verzerrungstensor	37
7. <u>Randbedingungen</u>	39
8. <u>Spannungsermittlung</u>	41

9.	<u>Differenzengleichungen</u>	44
9.1	Allgemeines	44
9.2	Feldpunkte	47
9.3	Randpunkte	53
10.	<u>Numerisches Verfahren</u>	54
10.1	Ausgangslösung	54
10.2	Iterationsschleife	60
10.3	Kontrollen des Programms	62
11.	<u>Lösungen</u>	65
11.1	Bezeichnungen	65
11.2	Analytische Lösungen für Scherung	65
11.3	Reine Biegung	73
11.4	Zug- und Druckbeanspruchung	79
11.5	Scherung	83
11.6	Einfluß der Rastergröße	95
11.7	Konvergenzbereich	103
12.	<u>Schlußbemerkungen</u>	107
	<u>Literaturverzeichnis</u>	109

Bezeichnungen

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
$(^\circ)$	Kennzeichnung eines Ausgangszustandes
$(\sim)$	Kennzeichnung eines Vektors
$(\approx)$	Kennzeichnung eines Tensors 2. Stufe
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$e_\alpha, e^\alpha$	Basisvektor einer raumfesten kartesischen Basis
$\underline{g}_i$	Basisvektor einer mitbewegten körperfesten krummlinigen Basis
$\underline{g}^i$	Kontravarianter Basisvektor von $\underline{g}_i$
$x^\alpha$	Koordinate der raumfesten kartesischen Basis
$\xi^i$	Koordinate der mitbewegten körperfesten krummlinigen Basis
$\delta_j^i$	Kronecker-Symbol
$g_{ij}, g^{ij}$	Maßzahlen des ko- bzw. kontravarianten Metriktensors
$g^{(ii)}$	keine Summation über $i$
$g$	Determinante von $g_{ij}$
$\Gamma_{ij}^k$	Christoffel-Symbole 2. Art
$C_i^\alpha$	Transformationsmatrix

Symbol	Name
$\bar{c}_\alpha^i$	Inverse von $c_i^\alpha$
$a_j^i, a_\beta^\alpha$	Maßzahlen eines Tensors 2. Stufe
$\sigma_j^i$	Maßzahlen des Cauchyschen Spannungstensors
$\sigma_j^{*i}$	Physikalische Komponenten von $\sigma_j^i$
$S_j^i$	Maßzahlen des Kirchhoffschen Spannungstensors
$\left( \begin{smallmatrix} \\ R \end{smallmatrix} \right)$	Raumbezogene Maßzahlen
$\left( \begin{smallmatrix} \\ K \end{smallmatrix} \right)$	Körperbezogene Maßzahlen
$\sigma_1, \sigma_2$	Hauptspannungen
$\varphi$	Winkel zur Angabe der Hauptspannungsrichtung
$F$	Kraft
$\mathcal{L}$	Volumenkraft pro Masseneinheit
$\underline{a}$	Beschleunigung
$\underline{t}, \underline{T}$	Spannung
$\underline{A}$	Fläche
$\rho$	Stoffdichte
$V$	Volumen
$w$	Spezifische Verzerrungsarbeit
$E_{js}^{ir}$	Maßzahlen des Elastizitätstensors
$\lambda, \mu$	Lamèsche Konstanten
$K$	Kompressionsmodul
$G$	Schubmodul

Symbol	Name
$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\varepsilon_j^i$	Maßzahlen eines Verzerrungstensors
$\varepsilon_D^i$	Deviator von $\varepsilon_j^i$
$\varepsilon_T$	Spur von $\varepsilon_j^i$
$\underline{u}$	Verschiebung
$U_H, U_V$	Vorzugebende horizontale bzw. vertikale Verschiebung
$( \dot{\phantom{x}} )$	Partielle Ableitung nach der Zeit
$( \phantom{x} )_{,i}$	Partielle Ableitung nach $\xi^i$
$( \phantom{x} ) _i$	Kovariante Ableitung nach $\xi^i$
$S_1, S_2$	Blech-Ausgangsabmessungen
$l_1, l_2$	Maschenweiten des Rasters
$n_1, n_2$	Nummern von Rasterlinien
$m_1, m_2$	GröÙte Nummern von Rasterlinien
$\gamma_1, \gamma_2$	Auf $S_1$ bzw. $S_2$ bezogenes $\xi^1$ bzw. $\xi^2$
$A, M, D$	Zweireihige Matrizen
$U, R, H$	Einreihige Matrizen

Einige aufgeführte Symbole werden örtlich auch anderweitig verwendet. Weitere Bezeichnungen gehen aus dem Zusammenhang hervor oder werden an der betreffenden Stelle beschrieben.

## 1. Einführung

Die Theorie großer elastischer Formänderungen und ihre Anwendung bei numerischen Berechnungen bilden Gegenstand dieser Arbeit. Während die Grundlagen hierzu schon lange bekannt sind (GREEN-ZERNA [1]), so kommt es erst allmählich zu Lösungen für spezielle Problemstellungen. In Arbeiten aus den 50er Jahren erkennt man das Bestreben, die gebräuchlichen Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie weiter zu entwickeln, um dadurch unmittelbar anwendbare Formen zu finden. Ein Beispiel dafür sind die Untersuchungen von KOPPE [2], der die erforderlichen Beziehungen für eine dünne Platte mit endlicher Durchbiegung aufstellt. Aus dieser Zeit liegen allgemeine Lösungen vor allem für Grundprobleme vor - genannt sei die reine Scherung - doch aus der speziellen Anwendung sich ergebende zahlenmäßige Ergebnisse sind selten.

Die Entwicklung elektronischer Rechenmaschinen und der numerischen Berechnungsverfahren ermöglichen in den 60er Jahren eine Reihe von Veröffentlichungen. Durch numerische Integration eines Systems von nichtlinearen Differentialgleichungen konnte der vollständige Spannungszustand eines tordierten Vollzylinders (WETZELL [3]) bzw. Hohlzylinders (SEITZ [4]) oder eines reiner Biegung unterworfenen Bleches (DE BOER [5]) bestimmt werden. Es handelt sich in diesen Arbeiten um Problemstellungen, bei denen ganz bestimmte geometrische Zusammenhänge (geometrical constraints) auch während der Verformung eingehalten werden müssen. Dadurch hängt die Metrik - obwohl ein mehrdimensionales Problem gelöst wird - nur noch von einer Veränderlichen ab. Eine Weiterentwicklung analytischer Methoden, bei denen nicht selten mit komplexen Variablen gearbeitet wird, stellt u.a. das Buch von GREEN-ADKINS [6] dar.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, auf numerischem Wege Lösungen für ebene elastische Verzerrungszustände unter Einhaltung komplizierterer Randbedingungen zu finden. Insbesondere wird angestrebt, den Einfluß der Querkraft bei auf Biegung beanspruchten Blechen zu erfassen. In dieser Hinsicht schließt die Arbeit an DE BOER [5] an, doch lassen sich die geometrischen Bindungen der reinen Biegung, wie sie dort, bei BRUHNS - THERMANN [7] oder LÜCKE [8] formuliert worden sind, und die geometrischen Bindungen der reinen Scherung, wie sie bei GREEN - ZERNA [1] oder LEHMANN [9] zu finden sind, einzeln nicht verwenden, da das Problem nichtlinear ist.

In dieser Arbeit muß die Lösung zweier gekoppelter nichtlinearer partieller Differentialgleichungen gefunden werden. Die Randbedingungen sind so zu wählen, daß das Blech - an beiden Enden fest eingespannt - reiner Biegung, reinem Zug oder Druck, Scherung oder einer Kombination von Scherung mit Zug oder Druck unterworfen werden kann. Dafür muß die Möglichkeit vorgesehen werden, an einer Einspannstelle eine beliebige Verschiebung vorzugeben.

Die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Element, das Stoffgesetz und der Verzerrungstensor führen nach Diskretisierung der Differentialgleichungen für Feld- und Randpunkte auf ein nichtlineares Gleichungssystem für das Verschiebungsfeld. Aus diesem lassen sich die körperbezogenen und nach Transformation mit Hilfe des Deformationsgradienten die raumbezogenen Spannungen ermitteln. Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtun-

gen sind ebenfalls angebar. Durch Berücksichtigung der entsprechenden Gleichgewichtsbedingung können die Spannungen wahlweise über die Näherung  $\dot{\xi}/\xi \approx 1$  als physikalische Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors oder exakt als physikalische Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors ermittelt werden.

Die Art der Berechnung unterscheidet sich beträchtlich von derjenigen DE BOERS [5]. Zwangsläufig rücken Fragen nach Konvergenz des Verfahrens und ausreichender Genauigkeit des Rechenrasters mehr in den Vordergrund, während die Frage nach Effekten zweiter Ordnung nicht mehr gestellt wird. In der linearen Elastizitätstheorie hat sich eine ganz ähnliche Entwicklung vollzogen, die ausgehend von analytischen Lösungen über das Differenzenverfahren zur Methode der finiten Elemente führte, wobei das Problem der Anpassung an spezielle Randbedingungen mehr und mehr an Aufmerksamkeit gewann. Da in der vorliegenden Arbeit die Randbedingungen noch relativ übersehbar sind, schien die Wahl des Differenzenverfahrens geraten, um den unmittelbaren Bezug zur vorher aufgestellten Differentialgleichung zu behalten.

Außerdem sollen die Berechnungen unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt werden:

1. Homogenität und Isotropie des Werkstoffes auch während der Verformung.
2. Kompressibilität des Werkstoffes.
3. Beschreibung des Stoffverhaltens mit dem Almansi - Hamelschen Verzerrungstensor (1. Reihenglied des Henckyschen Verzerrungstensors ).
4. Behandlung als statisches isothermes Problem.

Die folgenden Ausführungen zeigen einen Weg, wie die Theorie endlicher Formänderungen auch bei partiellen Differentialgleichungen, die an Randbedingungen in zwei unabhängigen Koordinatenrichtungen angepaßt werden müssen, mit Hilfe numerischer Methoden zu Lösungen führt.

## 2. Allgemeine Grundlagen

### 2.1 Koordinatensysteme

Zur Beschreibung endlicher Verzerrungen eignet sich in der Kontinuumsmechanik besonders gut ein körperfestes Koordinatensystem, und daher soll es auch hier benutzt werden. Gegenüber anderen Koordinatensystemen zeichnet es sich dadurch aus, daß die Basisvektoren  $\underline{g}_i$  mit der Zeit - oder dem Grad der Verformung des Kontinuums - sich derart ändern, daß die zu einem Element des Kontinuums gehörigen Koordinaten  $\xi^i$  stets die gleichen bleiben (siehe KÄSTNER [10] oder PRAGER [11]).

Das Problem der Eulerschen bzw. Lagrangeschen Betrachtungsweise, der Darstellung in raumbezogenen bzw. körperbezogenen Größen, untersuchte LEHMANN [12].

Wählt man eine raumfeste kartesische Basis  $\underline{e}_\alpha$  und eine dazugehörige Koordinate  $x^\alpha$ , so durchläuft jeder Punkt  $\xi^i$  während der Deformation verschiedene Positionen  $x^\alpha$  des Raumes:

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, t). \quad (2.1)$$

Ist

$$\underline{\tau} = x^\alpha \underline{e}_\alpha \quad (2.2)$$

ein zu einem Körperelement führender Ortsvektor, so lautet sein vollständiges Differential in raumfesten Koordinaten

$$d\underline{\tau} = \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (2.3)$$

und in krummlinigen Koordinaten

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i . \quad (2.4)$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt für den raumfesten kartesischen Basisvektor

$$\underline{e}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^\alpha} \quad (2.5)$$

und aus (2.4) entsprechend für den krummlinigen Basisvektor

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} . \quad (2.6)$$

## 2.2 Transformationsbeziehungen

Aus (2.2) und (2.6) ergibt sich

$$\underline{g}_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (x^\alpha \underline{e}_\alpha) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \underline{e}_\alpha \quad (2.7)$$

als Transformationsbeziehung für die Basisvektoren. Die Transformationsmatrix soll zur Abkürzung

$$c_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \quad (2.8)$$

genannt werden. Im Ausgangszustand  $t = t_0$  fällt das körperfeste Koordinatensystem mit dem raumfesten zusammen,  $c_i^\alpha$  wird zur Einheitsmatrix und der Basisvektor  $\underline{g}_i$  wird zu  $\underline{\dot{g}}_i = \underline{e}_\alpha$ . Mit

$$\delta_\beta^\alpha = c_i^\alpha \bar{c}_\beta^i \quad (2.9)$$

gilt für die Rücktransformation

$$\underline{e}_\alpha = \bar{c}_\alpha^i \underline{g}_i \quad (2.10)$$

Die Definition

$$\delta_j^i = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j \quad (2.11)$$

führt mit (2.7) auf die entsprechenden Beziehungen der kontravarianten Basen:

$$\underline{g}^i = \bar{c}_\alpha^i \underline{e}^\alpha \quad (2.12)$$

$$\underline{e}^\alpha = c_i^\alpha \underline{g}^i \quad (2.13)$$

Da sich die Maßzahlen von Tensoren 1. Stufe genauso transformieren wie die Basisvektoren (KLINGBEIL [13]), sind hier nur noch die Transformationsbeziehungen der Maßzahlen von Tensoren 2. Stufe aufzuführen.

Habe ein Tensor die gemischtvariante Form

$$\underline{T} = a_j^i \underline{g}_i \underline{g}^j = a_\beta^\alpha \underline{e}_\alpha \underline{e}^\beta, \quad (2.14)$$

so lauten die Transformationsbeziehungen

$$a_j^i = \bar{c}_\alpha^i a_\beta^\alpha c_j^\beta \quad (2.15)$$

bzw.

$$a_\beta^\alpha = c_i^\alpha a_j^i \bar{c}_\beta^j \quad (2.16)$$

Lateinische Indizes sollen von nun an Zuordnung der

Maßzahlen zu einer körperbezogenen Basis, griechische Indizes Zuordnung zur raumbezogenen, hier stets kartesischen Basis, anzeigen.

### 2.3 Metrik - Tensor

Ein Tensor 2. Stufe habe die Form

$$\underline{T} = a_{ij} \underline{g}^i \underline{g}^j = a_{\alpha\beta} \underline{e}^\alpha \underline{e}^\beta \quad (2.17)$$

Dann erhält man mit (2.13)

$$a_{ij} = c_i^\alpha a_{\alpha\beta} c_j^\beta \quad (2.18)$$

Setzt man hier für  $a_{\alpha\beta}$  die Einheitsmatrix  $\delta_{\alpha\beta}$ , so ergibt die Transformation nach (2.18) die kovarianten Maßzahlen des Metriktensors oder Maßtensors

$$g_{ij} = c_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} c_j^\beta \quad (2.19)$$

$$= (c_i^\alpha \underline{e}_\alpha) \cdot (c_j^\beta \underline{e}_\beta)$$

$$= \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j \quad (2.20)$$

Für die kontravarianten Maßzahlen gilt entsprechend

$$g^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j \quad (2.21)$$

Wegen (2.11) gilt ferner

$$\delta_j^i = g^{ir} g_{rj} \quad (2.22)$$

Die Maßzahlen des Metriktensors werden später zur Bestimmung der Christoffel-Symbole und zur Definition von Verzerrungstensoren benötigt.

#### 2.4 Christoffel - Symbole

Gleichung (2.7) nach  $\partial \xi^i$  differenziert ergibt

$$\underline{g}_{i,j} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \underline{e}_\alpha \quad (2.24)$$

Gleichung (2.10) in (2.24) eingesetzt, führt auf

$$\underline{g}_{i,j} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \underline{g}_k \quad (2.25)$$

Zur kürzeren Schreibweise dient das Christoffel - Symbol

$$\underline{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \underline{g}_k \quad (2.26)$$

Über Differentiation von  $\delta_j^i = \text{const.}$  in (2.11), d.h.

$$(\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j)_{,k} = 0, \quad (2.27)$$

folgt analog

$$\underline{g}^i{}_{,j} = -\Gamma_{jk}^i \underline{g}^k \quad (2.28)$$

Gleichung (2.26) und (2.28) führen die Ableitungen der Basisvektoren auf die Basis zurück.

Aus (2.26) und (2.11) folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \underline{g}_{i,j} \cdot \underline{g}^k, \quad (2.29)$$

doch läßt sich das Christoffel-Symbol 2. Art auch als Funktion der Maßzahlen des Metriktensors angeben. Nach einigen Umformungen, (s. KÄSTNER [10]), folgt aus (2.11), (2.20), (2.21), (2.28) und (2.29)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (g_{j\ell,i} + g_{i\ell,j} - g_{ij,\ell}) . \quad (2.30)$$

Auf diese Beziehung wird später zurückgegriffen.

### 3. Gleichgewichtsbedingungen

Ein Spannungsvektor  $\underline{t}$ , der die Spannung auf der Deckfläche eines von der Basis  $\underline{g}_i$  aufgespannten infinitesimalen Tetraeders repräsentiert, setze sich aus den Komponenten  $\underline{t}^i$  zusammen, die die Spannungen der drei übrigen Begrenzungsflächen wiedergeben. Dann mögen folgende Beziehungen gelten:

$$\underline{t}^i = \sigma_j^i \frac{\underline{g}^j}{\sqrt{g^{(ii)}}} \quad (3.1)$$

$$\underline{t}^i = \overset{*}{\sigma}_j^i \frac{\underline{g}^j}{\sqrt{g^{(jj)}}} \quad (3.2)$$

$$\underline{t}^i = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{g}} S_j^i \frac{\underline{g}^j}{\sqrt{g^{(ii)}}} \quad (3.3)$$

Gleichung (3.1) definiert gemischt-variant die Maßzahlen des Cauchyschen Spannungstensors

$$\underline{T} = \sigma_j^i \underline{g}_i \underline{g}^j \quad (3.4)$$

Gleichung (3.3) läßt erkennen, wie der Kirchhoffsche Spannungstensor aus dem Cauchyschen über die Beziehung

$$S_j^i = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} \sigma_j^i = \frac{\overset{\circ}{S}}{g} \sigma_j^i \quad (3.5)$$

hervorgeht. Die Größen  $\overset{*}{\sigma}_j^i$  der Gleichung (3.2) sind die physikalischen Komponenten der Spannungen. Sie sind dem Einheitsvektor zugeordnet, genügen aber nicht den tensoriellen Transformationsgesetzen. Aus Gleichung (3.1) und (3.2) folgt

$$\overset{*}{\sigma}_j^i = \sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}} \sigma_j^i \quad (3.6)$$

Die zu  $\underline{\sigma}_j^{*i}$  gehörige Kraftkomponente zeigt in Richtung von  $\underline{g}^j$ , die zu ihr gehörige Flächennormale der Begrenzungsfläche in Richtung von  $\underline{g}^i$ .

$\underline{\sigma}_j^{*i}$  kann als Grenzwert von  $\frac{d\underline{F}_j^*}{d\underline{A}_i^*}$ ,  
 $\underline{\sigma}_j^i$  als Grenzwert von  $\frac{dF_j}{dA_i}$  aufgefaßt werden,

wobei 
$$\underline{F}_j^* = \sqrt{g^{(jj)}} F_j$$

und 
$$\underline{A}_i^* = \sqrt{g^{(ii)}} A_i \quad \text{gilt.}$$

Durch den Übergang von Spannungen  $\underline{t}^i$  zu Kräften  $\underline{t}^i dA_i$  (nicht über  $i$  summieren) durch Multiplikation mit infinitesimalen Flächen

$$dA_i = \sqrt{g g^{(ii)}} d\xi^j d\xi^k \quad (\text{vgl. [1]}) (3.7)$$

und der Abkürzung

$$\underline{T}^i = \underline{t}^i \sqrt{g g^{(ii)}} \quad (3.8)$$

erhält man die drei Gleichgewichtsbedingungen ( $i=1$  bis 3) an einem infinitesimalen Parallelepipet, das von der Basis  $\underline{g}_i$  aufgespannt wird:

$$\underline{T}_{,i}^i + \sqrt{g} f_j \underline{g}^j = \sqrt{g} a_j \underline{g}^j \quad (3.9)$$

(nicht über  $i$  summieren)

Auf Grund der Voraussetzungen des Abschnittes 1 ergibt sich für die weiteren Betrachtungen  $f_j = a_j = 0$ . Mit (3.8) und (3.1) entsteht

$$\begin{aligned} \underline{T}_{,i}^i &= (\sqrt{g} \underline{\sigma}_j^i \underline{g}^j)_{,i} \\ &= \sqrt{g} (\underline{\sigma}_j^i \underline{g}^j)_{,i} + (\sqrt{g})_{,i} \underline{\sigma}_j^i \underline{g}^j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aus Gleichung (2.28) und der Beziehung (vergl.[1])

$$(\sqrt{g})_{,i} = \Gamma_{ki}^k \sqrt{g} \quad (3.11)$$

folgt

$$\underline{T}_{,i}^i = \sqrt{g} \sigma_j^i |_{,i} \underline{g}^j. \quad (3.12)$$

In den Maßzahlen des Cauchyschen Spannungstensors lauten die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten Körper in körperbezogener Darstellung demnach

$$\sigma_j^i |_{,i} = 0 \quad (3.13)$$

$$\sigma_{j,i}^i - \sigma_{\tau}^i \Gamma_{ij}^{\tau} + \sigma_j^{\tau} \Gamma_{i\tau}^i = 0.$$

Analog zum eben gezeigten Weg entsteht aus (3.8) und (3.3)

$$\underline{T}_{,i}^i = (\sqrt{g}^{\circ} s_j^i \underline{g}^j)_{,i} \quad (3.14)$$

Produktregel und (2.28) liefern

$$\underline{T}_{,i}^i = \sqrt{g}^{\circ} (s_{j,i}^i \underline{g}^j - s_j^i \Gamma_{ik}^j \underline{g}^k) \quad (3.15)$$

$$= \sqrt{g}^{\circ} (s_j^i |_{,i} - s_j^{\tau} \Gamma_{i\tau}^i) \underline{g}^k. \quad (3.16)$$

In den Maßzahlen des Kirchhoffschen Spannungstensors lauten die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten Körper in körperbezogener Darstellung demnach

$$s_j^i |_{,i} - s_j^{\tau} \Gamma_{i\tau}^i = 0 \quad (3.17)$$

$$s_{j,i}^i - s_{\tau}^i \Gamma_{ij}^{\tau} = 0.$$

Später werden Berechnungen mit Gleichung (3.13) und (3.17) durchgeführt.

#### 4. Stoffgesetz

Stoff- bzw. Materialgesetze beschreiben allgemein das Materialverhalten bei physikalischen Vorgängen. Die gewöhnlich als Formänderungsgesetz bezeichnete Beziehung

$$\sigma_j^i = \sigma_j^i (\dot{\sigma}_j^i, \varepsilon_j^i, \dot{\varepsilon}_j^i, T) \quad (4.1)$$

beschränkt sich darauf, das thermo-mechanische Verhalten des Materials wiederzugeben. Wegen der in Abschnitt 1 getroffenen Voraussetzung, daß alle Vorgänge genügend langsam und isotherm verlaufen und keine Verzerrungsarbeit dissipiert wird, ist für die vorliegenden Untersuchungen ein Stoffgesetz der Form

$$\sigma_j^i = \sigma_j^i (\varepsilon_j^i) \quad (4.2)$$

anzunehmen. Die Verzerrungsarbeit läßt sich als eindeutige Funktion des Verzerrungstensors darstellen. Es gilt also für die spezifische Verzerrungsarbeit

$$w = w (\varepsilon_j^i) . \quad (4.3)$$

Das totale Differential von  $w$  muß die Form

$$Dw = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_i^j} D\varepsilon_j^i \quad (4.4)$$

annehmen. Für endliche Formänderungen wird gefordert, daß die bei kleinen Formänderungen verwendete Definition für das Inkrement der spezifischen Verzerrungsarbeit

$$Dw = \frac{1}{\rho} \sigma_j^i D\varepsilon_j^i \quad (4.5)$$

gültig bleibt. Bildet man aus (4.4) und (4.5) die Beziehung

$$\sigma_j^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_i^j} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^j} \sigma_j^i = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^j} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_i^j} , \quad (4.6)$$

so erhält man hiermit ganz bestimmte Spannungstensoren  $\sigma_j^i$ , wenn man die Verzerrungstensoren  $\epsilon_j^i$  meist aus geometrischen Überlegungen heraus vorher festlegt und für die Beziehung (4.3) einen geeigneten Zusammenhang aufstellt. Führt man für die hier betrachteten isotropen Stoffe die spezifische Verzerrungsarbeit als Funktion der drei Invarianten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  des Verzerrungstensors ein, so kann das Stoffgesetz zum Beispiel in der Form eines Minimalpolynoms

$$\frac{1}{\rho} \sigma_j^i = \frac{\partial w}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_i^j} + \frac{\partial w}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_i^j} + \frac{\partial w}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_i^j} \quad (4.7)$$

dargestellt werden. Bei dem bekannten Ansatz

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} \sigma_j^i = E_{js}^{ir} \epsilon_s^r \quad (4.8)$$

entsteht bei Beschränkung auf tensorlineare Beziehungen unter Beachtung der drei Symmetrieeigenschaften

$$E_{js}^{ir} = E_{is}^{jr} = E_{jr}^{is} = E_{sj}^{ri} \quad (4.9)$$

folgende Besetzung des Elastizitätstensors im Falle der Isotropie:

$$\begin{aligned} E_{11}^{11} &= E_{22}^{22} = E_{33}^{33} = \lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3} G \\ E_{12}^{12} &= E_{13}^{13} = E_{23}^{23} = \lambda = K - \frac{2}{3} G \quad (4.10) \\ E_{22}^{11} &= E_{33}^{11} = E_{33}^{22} = \mu = G \end{aligned}$$

oder

$$E_{js}^{ir} = \lambda \delta_j^i \delta_s^r + \mu (\overset{\circ}{g}^{ir} \overset{\circ}{g}_{js} + \delta_s^i \delta_j^r) \quad (4.11)$$

Mit der Spur des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{\tau}^{\tau}$  ergeben sich aus (4.7), (4.8) und (4.11) einfachere Darstellungsmöglichkeiten für das Stoffgesetz, nämlich

$$S_j^i = \frac{\overset{\circ}{S}}{S} \sigma_j^i = 2\mu \varepsilon_j^i + \lambda \varepsilon_{\tau}^{\tau} \delta_j^i \quad (4.12)$$

$$= 2G \varepsilon_{\mathcal{D}}^i + K \varepsilon_{\tau}^{\tau} \delta_j^i \quad (4.13)$$

wobei

$$\varepsilon_{\mathcal{D}}^i = \varepsilon_j^i - \frac{1}{3} \varepsilon_{\tau}^{\tau} \delta_j^i \quad (4.14)$$

den Deviator des Verzerrungstensors darstellt. Mit der Querkontraktionszahl

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K + 2G} \quad (4.15)$$

läßt sich schreiben

$$S_j^i = \frac{\overset{\circ}{S}}{S} \sigma_j^i = 2G \left( \varepsilon_j^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\tau}^{\tau} \delta_j^i \right) \quad (4.16)$$

Für  $\nu \rightarrow -1$  wird nach (4.15) bei endlichem  $K$   $G \rightarrow \infty$  streben, der deviatorische Spannungsanteil spaltet sich unter der Bedingung  $\varepsilon_{\mathcal{D}}^i = 0$  ab. Für  $\nu \rightarrow 1/2$  wird ebenfalls nach (4.15) bei endlichem  $G$   $K \rightarrow \infty$  streben, der hydrostatische Spannungsanteil spaltet sich unter der Bedingung  $\varepsilon_{\tau}^{\tau} = 0$  ab. Gelingt es nicht,  $\varepsilon_{\mathcal{D}}^i = 0$  für  $\nu \rightarrow -1$  oder  $\varepsilon_{\tau}^{\tau} = 0$  für  $\nu \rightarrow 1/2$  einzuhalten, so versagt das Stoffgesetz (4.16) an diesen Grenzen von  $\nu$ . Ein isotroper Werkstoff mit den Werten  $\nu = 0$  und  $E = 2G = 3K > 0$  ist jedoch vom mathematischen Standpunkt aus kein Sonderfall (s. FUNG [15]). Physikalisch gesehen besteht hier aber offensichtlich eine Grenze, denn Stoffe mit  $\nu < 0$  sind nicht bekannt. Die Beziehung (4.13) oder (4.16) findet man bereits bei HENCKY [16]. Sie wird auch in dieser Arbeit verwendet.

## 5. Verzerrungstensoren

### 5.1 Henckyscher Verzerrungstensor

In der Literatur ist eine Vielzahl von verschiedenen Verzerrungstensoren eingeführt worden. Es sei hier auf MACVEAN [17] verwiesen, der unter 16 verschiedenen Möglichkeiten eine Systematik herauszufinden sucht. Der dort als "  $E_4$  " aufgeführte Henckysche (logarithmische) Verzerrungstensor ist in seiner Bedeutung bereits von RICHTER [18] und LEHMANN [19] hervorgehoben worden. Bei endlichen Formänderungen läßt er sich auf einfache Weise in Volumendehnungen und Gestaltänderungen aufspalten. Mit seiner Definition

$$\varepsilon_{(H)j}^i = \frac{1}{2} \ln (\overset{\circ}{g}^{ir} g_{rj}) \quad (5.1)$$

repräsentiert seine Spur die Volumendehnung und berechnet sich auch bei nicht coaxialen Verzerrungen einfach aus

$$\varepsilon_{(H)}^T = \frac{1}{2} \ln \frac{g}{\overset{\circ}{g}} = \ln \frac{V}{\overset{\circ}{V}} \quad (5.2)$$

Nach Gleichung (4.13) vollzieht sich der Grenzübergang zu endlichen hydrostatischen Spannungen inkompressiblen Werkstoffes gerade für  $K \rightarrow \infty$  (oder  $\nu \rightarrow 1/2$ ).

Da aber der Henckysche Verzerrungstensor als Matrizenfunktion zu behandeln ist, bleibt wegen der schwierigen Handhabung bei nicht coaxialen Problemen (vergl. WETZELL [3] und THERMANN [20]) sein Anwendungsbereich beschränkt. Während WETZELL auf diese Schwierigkeiten näher eingeht, gelingt THERMANN eine Lösung für Torsion eines Voll-

zylinders unter Anwendung erheblicher analytischer Kunstgriffe.

Da für das hier zu lösende Problem ganz bestimmte, für die Dauer des Verformungsvorganges gleichbleibende geometrische Zusammenhänge nicht angegeben werden können, scheint es fraglich, ob zum Beispiel der Weg über die Wurzeln des Minimalpolynoms oder über andere analytische Methoden überhaupt zum Ziel führen kann. Mit der Reihenentwicklung des Logarithmus über das erste Glied hinaus,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(H)j}^i &= \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{g}^{im} g_{mj} - \delta_j^i \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{g}^{im} g_{mn} \overset{\circ}{g}^{nr} g_{rj} - 2 \overset{\circ}{g}^{im} g_{mj} - \delta_j^i \right) \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left( \overset{\circ}{g}^{im} g_{mn} \overset{\circ}{g}^{nr} g_{rs} \overset{\circ}{g}^{st} g_{tj} \right. \\
 &\quad \quad \left. - 3 \overset{\circ}{g}^{im} g_{mn} \overset{\circ}{g}^{nr} g_{rj} + 3 \overset{\circ}{g}^{im} g_{mj} - \delta_j^i \right) \\
 &\quad - \dots + \dots \quad , \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

dürfte grundsätzlich ein Weg aufgezeigt sein, Approximationen des Henckyschen Verzerrungstensors zu erhalten. Für jedes Reihenglied, das hinzugenommen wird, müssen die Differentialgleichungen - hier in den Verschiebungen - neu aufgestellt werden.

Schreibt man für den in Richtung von  $\underline{g}_1$  durchgeführten Zugversuch

$$\varepsilon_1^1 = \frac{l_0 + u}{l_0} = \frac{l}{l_0} \quad (5.4)$$

vor, so entsteht aus (2.19) und (5.1) folgende Reihenentwicklung

$$\varepsilon_{(H)}^1 = \frac{u}{l_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{u}{l_0} \right)^3 - \dots - \dots, \quad (5.5)$$

wobei  $u$  die Verschiebung in Zugrichtung ist und  $l_0$  bzw.  $l$  die Längen vor bzw. nach der Verformung sind.

### 5. 2 Almansi - Hamelscher Verzerrungstensor

Berücksichtigt man nur das erste Reihenglied des Henckyschen Verzerrungstensors, so erhält man die in der modernen Elastizitätstheorie übliche Definition (vergl. LEHMANN [19]). In gemischt-varianter Schreibweise hat sich hierfür die Benennung nach „Almansi-Hamel“ eingebürgert. Bei WETZELL [3] und MACVEAN [17] wird unter diesem Namen der gemischt-variante Cauchy-Greensche Verzerrungstensor verstanden. Auf der Suche nach einem Namen für das erste Reihenglied des Henckyschen Verzerrungstensors entschließt sich MACVEAN zu der Bezeichnung „Karni-Reiner“. In dieser Arbeit wird der Name „Almansi-Hamel“ beibehalten, doch auf ein untergesetztes „A“ verzichtet:

$$\varepsilon_j^i = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{g}^{ir} g_{rj} - \delta_j^i \right) \quad (5.6)$$

Es besteht folgender Zusammenhang mit dem Henckyschen Verzerrungstensor:

$$\varepsilon_{(H)}^i = \frac{1}{2} \ln \left( \delta_j^i + 2 \varepsilon_j^i \right) \quad (5.7)$$

Im Folgenden muß noch der Zusammenhang mit den Verschiebungen hergeleitet werden. Ist  $\overset{\circ}{\mathcal{I}}$  ein Ortsvektor, der zu einem materiellen Volumenelement eines beliebigen Körpers hinführt, bevor die Verformung stattgefunden hat, und ist  $\mathcal{I}$  der entsprechende Ortsvektor nach der Ver-

formung, so ist eine Verschiebung definiert als

$$\underline{u} = \underline{r} - \underline{\dot{r}} \quad , \quad (5.8)$$

wobei 
$$\underline{u} = u^\alpha \underline{e}_\alpha \quad (5.9)$$

gelten soll. Mit (2.2) und dem Ortsvektor  $\underline{\dot{r}}$  in körperbezogener Darstellung

$$\underline{\dot{r}} = \xi^i \underline{\dot{g}}_i = \xi^\alpha \underline{\dot{g}}_\alpha \quad (5.10)$$

folgt nach Differentiation von (5.8) nach  $d\xi^j$

$$c_j^\alpha = \delta_j^\alpha + u^\alpha |_{,j} \quad (5.11)$$

Somit entsteht über (2.19)

$$\overset{\circ}{g}^{ir} g_{rj} = \delta_j^i + \overset{\circ}{g}^{ir} \left[ \delta_{r\alpha} u^\alpha_{,j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,j} \right] \quad (5.12)$$

und es läßt sich  $\varepsilon_j^i$

als Funktion der Verschiebungen ausdrücken:

$$2 \varepsilon_j^i = \overset{\circ}{g}^{ir} \left[ \delta_{r\alpha} u^\alpha_{,j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,j} \right]. \quad (5.13)$$

Differentiation nach den Körperkoordinaten führt auf

$$2 \varepsilon_{j,i}^i = \overset{\circ}{g}^{ir} \left[ \delta_{r\alpha} u^\alpha_{,ji} + u^\alpha_{,ri} \delta_{\alpha j} + (u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,j})_{,i} \right] \quad (5.14)$$

Die Spur ergibt sich zu

$$2 \varepsilon_r^r = 2 \delta_\alpha^r u^\alpha_{,r} + \overset{\circ}{g}^{rs} u^\alpha_{,s} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,r}. \quad (5.15)$$

Nach Differentiation entsteht

$$2 \varepsilon_{r,j}^r = 2 \delta_\alpha^r u^\alpha_{,rj} + (\overset{\circ}{g}^{rs} u^\alpha_{,s} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,r})_{,j}. \quad (5.16)$$

Für den Zugversuch entsteht mit (5.4), (2.19) und (5.6):

$$\varepsilon_1^1 = \frac{u}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^2 \quad (5.17)$$

### 5.3 Green-Cauchyscher Verzerrungstensor

Der Green-Cauchysche Verzerrungstensor in gemischt-  
varianter Form

$$\varepsilon_{(c)j}^i = \frac{1}{2} \left( \delta_j^i - g^{ir} \overset{\circ}{g}_{rj} \right) \quad (5.18)$$

liefert für den Zugversuch bei Annahme von (5.4)

$$\varepsilon_{(c)1}^1 = \frac{u}{l_0} - \frac{3}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^2 + \frac{4}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^3 - \frac{5}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^4 + \dots - \dots \quad (5.19)$$

und weicht damit, sofern man nur auf das zweite Reihenglied achtet (s. (5.5)), vom Henckyschen Verzerrungstensor um den gleichen Betrag ab wie  $\varepsilon_j^i$  nach Gleichung (5.17), aber die Richtung der Abweichung ist entgegengesetzt. Ob dieser Tensor dem Almansi-Hamelschen vorzuziehen ist, muß die praktische Anwendbarkeit entscheiden. Seine Abhängigkeit von den Verschiebungen ergibt sich aus

$$\varepsilon_{(c)j}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left( g_{rj} - \overset{\circ}{g}_{rj} \right) \quad (5.20)$$

zu

$$\varepsilon_{(c)j}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left( \delta_{r\alpha} u^\alpha_{,j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,j} \right), \quad (5.21)$$

wobei mit (5.11) über die Transformationsvorschrift (2.19)

$$g_{rj} = \overset{\circ}{g}_{rj} + \delta_{r\alpha} u^\alpha_{,j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha j} + u^\alpha_{,r} \delta_{\alpha\beta} u^\beta_{,j} \quad (5.22)$$

ermittelt wurde. Die Inversion von  $g_{rj} = g_{rj}(\delta_{r\alpha} u^\alpha_{,j}, \dots)$  zur Ermittlung von  $g^{ir} = (g^{ir}(\delta_{\alpha}^i u^\alpha_{,r}, \dots))$  ist für ebene Probleme mit nur einem besetzten Nebenplatz zwar leicht

allgemein durchführbar, doch die im Nenner stehende Determinante läßt es vom Arbeitsaufwand her als unmöglich erscheinen, in den Gleichgewichtsbedingungen (3.13) oder (3.17) nach Einsetzen von  $\xi_{(c)j}^i$  die Verschiebungsableitungen nach linearen und nicht-linearen Gliedern zu trennen. Mit dem Almansi-Hamelschen Verzerrungstensor treten in dieser Hinsicht jedoch keine Schwierigkeiten auf.

#### 5.4 Weitere gemischt-variante Verzerrungstensoren

In Anlehnung an die Begriffe MACVEANS [17] soll kurz der Übergang der unter 5.2 und 5.3 diskutierten Verzerrungstensoren auf symbolische Schreibweise gezeigt werden. Dafür müssen die körperbezogenen Größen über (2.16) auf raumbezogene Größen transformiert werden.

Für den Almansi-Hamelschen Verzerrungstensor gilt:

$$\varepsilon_{\beta}^{\alpha} = c_{i}^{\alpha} \varepsilon_{j}^{i} \bar{c}_{\beta}^{j} = \frac{1}{2} c_{i}^{\alpha} (\bar{g}^{im} g_{mj} - \delta_{j}^{i}) \bar{c}_{\beta}^{j}$$

Mit (2.19), d.h.

$$g_{mj} = c_{m}^{\alpha} \delta_{\alpha\beta} c_{j}^{\beta}$$

folgt schließlich

$$\varepsilon_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} (c_{i}^{\alpha} c_{i}^{\beta} - \delta_{\beta}^{\alpha}).$$

MACVEAN schreibt dafür

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{2} (F \overset{*}{F} - I) \\ &= \frac{1}{2} (L^2 - I) \end{aligned}$$

und führt den Namen „Karni-Reiner“ ein, da diese beiden Autoren  $E_{12}$  „Greensches Verzerrungsmaß im Endzustand“ genannt hatten. Gleichzeitig bezweifelt MACVEAN aber die Gültigkeit dieser Bezeichnung.

Für den Green-Cauchyschen Verzerrungstensor gilt:

$$\varepsilon_{(c)\beta}^{\alpha} = c_i^{\alpha} \varepsilon_{(c)j}^i \bar{c}_{\beta}^j = \frac{1}{2} c_i^{\alpha} (\delta_j^i - g^{im} \overset{\circ}{g}_{mj}) \bar{c}_{\beta}^j$$

Mit

$$g^{im} = \bar{c}_{\alpha}^i \delta^{\alpha\beta} \bar{c}_{\beta}^m$$

folgt schließlich

$$\varepsilon_{(c)\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\delta_{\beta}^{\alpha} - \bar{c}_{\alpha}^i \bar{c}_{\beta}^i)$$

MACVEAN schreibt dafür

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} (I - \overset{*}{F}^{-1} F^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (I - L^{-2}) \end{aligned}$$

und führt seinen Ursprung auf Almansi zurück.

Aus Tabelle 1 bei MACVEAN dürften die Verzerrungstensoren  $E_6 = L^{-2}$  (Cauchy) und  $E_{10} = L^2$  (Finger) noch von Interesse sein. In tensorieller Indexschreibweise wären das

$$\varepsilon_j^i = g^{im} \overset{\circ}{g}_{mj}$$

bzw.

$$\varepsilon_j^i = \overset{\circ}{g}^{im} g_{mj}$$

## 6. Differentialgleichungen für die Verschiebungen der Feldpunkte

### 6.1 Cauchyscher Spannungstensor und Almansi - Hamelscher Verzerrungstensor

Die Näherung  $\frac{\dot{s}}{s} \approx 1$  für das Stoffdichteverhältnis während des Formänderungsvorganges ist schon oft angenommen worden (vgl. [7], [9], [20] Anhang, [22]). In diesem Abschnitt soll entsprechend verfahren werden, so daß das Stoffgesetz (4.16) nach partieller Differentiation nach den Körperkoordinaten lautet:

$$\sigma_{j,i}^i = 2G \left( \varepsilon_{j,i}^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\tau,j}^{\tau} \right). \quad (6.1)$$

Nach Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung (3.13) und Umordnen folgt zunächst

$$2G \left[ \varepsilon_{j,i}^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\tau,j}^{\tau} \right] = \Gamma_{ij}^{\tau} \sigma_{\tau}^i - \Gamma_{i\tau}^i \sigma_j^{\tau}. \quad (6.2)$$

Die Spannungen neben den Christoffel-Symbolen werden ebenfalls über das Stoffgesetz (4.16) durch Verzerrungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 2G \left[ (1-2\nu) \varepsilon_{j,i}^i + \nu \varepsilon_{\tau,j}^{\tau} \right] = \\ (1-2\nu) \Gamma_{ij}^{\tau} \left[ 2G \left( \varepsilon_{\tau}^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_s^s \delta_{\tau}^i \right) \right] \\ - (1-2\nu) \Gamma_{i\tau}^i \left[ 2G \left( \varepsilon_j^{\tau} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_s^s \delta_j^{\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die entstandene Beziehung wird vom Gleitmodul unabhängig, so daß nach Ausmultiplizieren der eckigen

Klammern entsteht:

$$\begin{aligned}
 (1-2\nu) 2 \varepsilon_{j,i}^i + \nu 2 \varepsilon_{r,j}^r = \\
 (1-2\nu) 2 \Gamma_{ij}^r \varepsilon_r^i + 2\nu \Gamma_{ij}^r \varepsilon_s^s \delta_r^i \\
 - (1-2\nu) 2 \Gamma_{ir}^i \varepsilon_j^r - 2\nu \Gamma_{ir}^i \varepsilon_s^s \delta_j^r .
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mit  $\Gamma_{ij}^r \delta_r^i \equiv \Gamma_{ir}^i \delta_j^r$  läßt sich schließlich schreiben:

$$\begin{aligned}
 (1-2\nu) 2 \varepsilon_{j,i}^i + \nu 2 \varepsilon_{r,j}^r = \\
 (1-2\nu) (2 \Gamma_{ij}^r \varepsilon_r^i - 2 \Gamma_{ir}^i \varepsilon_j^r) .
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Mit (5.14) und (5.16) werden zunächst die 1. Ableitungen der Verzerrungen durch die 2. Ableitungen der Verschiebungen ersetzt und anschließend die quadratischen Anteile auf die rechte Seite vom Gleichheitszeichen gebracht. Dieses Umgruppieren wäre - wie in Abschnitt 5.3 bereits erwähnt - für den gemischt-varianten Green-Cauchyschen Verzerrungstensor nur möglich, wenn mit einer mindestens 3stelligen Zahl von Summanden auf der rechten Seite die Rechnung fortgeführt würde.

Da die Basis der Verschiebungsmaßzahlen  $u^\alpha$  orthogonal und orthonormiert ist, tritt das kovariante Differentiationszeichen nicht auf. Es werden mögliche Überschiebungen unterlassen, um stumme Summationsindizes stets auf einem oberen und einem unteren Platz und um Indizes, die Ableitungen von  $u^\alpha$  kenntlich machen, stets auf einem unteren Platz zu erhalten.

Gleichung (6.5) nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 & \overset{\circ}{g}^{i\tau} \delta_{\tau\alpha} u^{\alpha}_{,ji} + \overset{\circ}{g}^{i\tau} u^{\alpha}_{,\tau i} \delta_{\alpha j} - \underline{2\nu \overset{\circ}{g}^{i\tau} \delta_{\tau\alpha} u^{\alpha}_{,ji}} \\
 & \quad - \underline{2\nu \overset{\circ}{g}^{i\tau} u^{\alpha}_{,\tau i} \delta_{\alpha j} + \nu 2 \delta_{\alpha}^{\tau} u^{\alpha}_{,\tau j}} \\
 & = -(1-2\nu) \overset{\circ}{g}^{i\tau} (u^{\alpha}_{,\tau} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta}_{,j}),_i \\
 & \quad - \nu (\overset{\circ}{g}^{\tau s} u^{\alpha}_{,s} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta}_{,\tau}),_j \\
 & \quad + (1-2\nu) (2\Gamma_{ij}^{\tau} \varepsilon_{\tau}^i - 2\Gamma_{i\tau}^i \varepsilon_j^{\tau}) . \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Da die Reihenfolge der Differentiation beliebig ist, heben sich die beiden unterstrichenen Terme auf.

Endgültig lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 & (1-2\nu) \overset{\circ}{g}^{i\tau} u^{\alpha}_{,\tau i} \delta_{\alpha j} + \delta_{\alpha}^i u^{\alpha}_{,ji} \\
 & = -(1-2\nu) (\overset{\circ}{g}^{i\tau} u^{\alpha}_{,\tau} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta}_{,ji} + \overset{\circ}{g}^{i\tau} u^{\beta}_{,j} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta}_{,\tau i}) \\
 & \quad - 2\nu \overset{\circ}{g}^{\tau s} u^{\alpha}_{,s} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta}_{,\tau j} \\
 & \quad + (1-2\nu) (2\Gamma_{ij}^{\tau} \varepsilon_{\tau}^i - 2\Gamma_{i\tau}^i \varepsilon_j^{\tau}) . \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Die links vom Gleichheitszeichen stehenden beiden Terme entsprechen den Navierschen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie (vgl. BIEZENO - GRAMMEL [23]). Wäre die rechte Seite von (6.7) identisch Null, läge ein Problem der linearen Elastizitätstheorie vor, das bei Verwendung des Differenzenverfahrens über eine Gauß-Elimination gelöst werden könnte. Auf diesen Eliminationsprozeß soll hier als ersten Näherungsschritt nicht verzichtet werden, so daß die iterative Behandlung nur die rechte Seite von (6.7) betreffen wird.

Für den gemischt-varianten Green-Cauchyschen Verzerrungstensor wären auch Verfahren in Erwägung zu ziehen,

die von vornherein iterativ nach einer Lösung suchen. Über nötige Konvergenzkriterien findet man bei ORTEGA-RHEINBOLD[24] Näheres.

Die Annahme des ebenen Verzerrungszustandes, wobei die Richtung der Ebenennormalen den Index 3 erhält, führt auf

$$\left. \begin{array}{l} u^i_{,3} = 0 \\ u^i_{,33} = 0 \end{array} \right\} i = 1 \text{ bis } 2 \quad \left. \begin{array}{l} u^3_{,i} = 0 \\ u^3_{,i3} = 0 \end{array} \right\} i = 1 \text{ bis } 3 \quad (6.8)$$

Daraus folgt, daß die Gleichgewichtsbedingung (6.7) für  $j = 3$  identisch erfüllt ist. Da wieder die Reihenfolge der Differentiation beliebig ist und stets  $\Gamma_{ij}^T = \Gamma_{ji}^T$  gilt, ergeben sich nach einigen Umformungen für  $j = 1$  und  $j = 2$  :

$$\begin{aligned} \underline{j=1}: & \quad 2(1-\nu)u^1_{,11} + (1-2\nu)u^1_{,22} + u^2_{,21} = \\ & \quad -2(1-\nu)(u^1_{,1}u^1_{,11} + u^2_{,1}u^2_{,11}) \\ & \quad -2(1-2\nu)(u^1_{,1}u^1_{,22} + u^2_{,1}u^2_{,22}) \quad (6.9a) \\ & \quad - (u^1_{,2}u^1_{,12} + u^2_{,2}u^2_{,12}) \\ & \quad + (1-2\nu)[2\Gamma_{21}^2(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^1) + 2\Gamma_{11}^2\varepsilon_2^1 - 2\Gamma_{22}^2\varepsilon_1^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{j=2}: & \quad (1-2\nu)u^2_{,11} + 2(1-\nu)u^2_{,22} + u^1_{,12} = \\ & \quad -2(1-\nu)(u^2_{,2}u^2_{,22} + u^1_{,2}u^1_{,22}) \\ & \quad - (1-2\nu)(u^2_{,2}u^2_{,11} + u^1_{,2}u^1_{,11}) \quad (6.9b) \\ & \quad - (u^2_{,1}u^2_{,21} + u^1_{,1}u^1_{,21}) \\ & \quad + (1-2\nu)[2\Gamma_{12}^1(\varepsilon_1^1 - \varepsilon_2^2) + 2\Gamma_{22}^1\varepsilon_1^2 - 2\Gamma_{11}^1\varepsilon_2^1] \end{aligned}$$

Bereits bei Gleichung (6.7) und anschließend bei den Gleichungen (6.9) ist bisher der Übersichtlichkeit halber darauf verzichtet worden, die Christoffel - Symbole und die Verzerrungen auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen durch Verschiebungen und deren Ableitungen auszudrücken. Unter den Voraussetzungen des ebenen Verzerrungszustandes nach (6.8) ergibt sich über (2.30) für (6.9a)

$$2 \Gamma_{ij}^2 = \begin{bmatrix} g^{12} g_{11,1} + g^{22} (2 g_{12,1} - g_{11,2}) \\ g^{22} g_{22,1} + g^{12} g_{11,2} \\ 0 \\ \\ g^{22} g_{22,1} + g^{12} g_{11,2} & 0 \\ g^{22} g_{22,2} + g^{12} (2 g_{12,2} - g_{22,1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10a)$$

und für (6.9b)

$$2 \Gamma_{ij}^1 = \begin{bmatrix} g^{11} g_{11,1} + g^{12} (2 g_{12,1} - g_{11,2}) \\ g^{11} g_{11,2} + g^{12} g_{22,1} \\ 0 \\ \\ g^{11} g_{11,2} + g^{12} g_{22,1} & 0 \\ g^{12} g_{22,2} + g^{11} (2 g_{12,2} - g_{22,1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10b)$$

Die Christoffel-Symbole berechnen sich also aus der kontravarianten Metrik und den Ableitungen der kovarianten Metrik. Aus (5.12) folgt für die kovarianten Metrikkoeffizienten:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + 2u^1_{,1} + u^1_{,1}u^1_{,1} + u^2_{,1}u^2_{,1} \\ u^2_{,1} + u^1_{,2} + u^1_{,1}u^1_{,2} + u^2_{,1}u^2_{,2} \\ 0 \\ u^1_{,2} + u^2_{,1} + u^1_{,1}u^1_{,2} + u^2_{,1}u^2_{,2} & 0 \\ 1 + 2u^2_{,2} + u^1_{,2}u^1_{,2} + u^2_{,2}u^2_{,2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Mit den auch später im Rechenprogramm zur Vermeidung von Doppelberechnungen verwendeten Abkürzungen

$$\begin{aligned} q_1^1 &= u^1_{,1}u^1_{,11} + u^2_{,1}u^2_{,11} \\ q_2^2 &= u^1_{,2}u^1_{,22} + u^2_{,2}u^2_{,22} \\ q_2^1 &= u^1_{,1}u^1_{,21} + u^2_{,1}u^2_{,21} \\ q_1^2 &= u^1_{,2}u^1_{,21} + u^2_{,2}u^2_{,21} \\ p_2^1 &= u^1_{,1}u^1_{,22} + u^2_{,1}u^2_{,22} \\ p_1^2 &= u^1_{,2}u^1_{,11} + u^2_{,2}u^2_{,11} \end{aligned} \quad (6.12a-f)$$

ergeben sich aus (6.11) die Ableitungen der kovarianten

Metrikoeffizienten zu:

$$g_{ij,1} = \begin{bmatrix} 2 u^1_{,11} + 2 q^1_1 \\ u^2_{,11} + u^1_{,21} + q^1_2 + p^2_1 \\ 0 \\ u^1_{,21} + u^2_{,11} + q^1_2 + p^2_1 & 0 \\ 2 u^2_{,21} + 2 q^2_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

$$g_{ij,2} = \begin{bmatrix} 2 u^2_{,12} + 2 q^1_2 \\ u^2_{,12} + u^1_{,22} + q^2_1 + p^1_2 \\ 0 \\ u^1_{,22} + u^2_{,12} + q^2_1 + p^1_2 & 0 \\ 2 u^2_{,22} + 2 q^2_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13b)$$

Die kontravarianten Metrikoeffizienten müssen aus (6.11) über Inversion gefunden werden:

$$g^{ij} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} & 0 \\ -g_{21} & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Die in den beiden partiellen Differentialgleichungen (6.9) auftretenden Christoffel-Symbole sind somit über (6.10) bis (6.14) eindeutig bestimmt.

Ferner liefert (5.13) für die Differentialgleichungen (6.9) folgende Verzerrungen:

$$\varepsilon_j^i = \begin{bmatrix} u_{,11}^1 + \frac{1}{2}(u_{,11}^1 u_{,11}^1 + u_{,11}^2 u_{,11}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,11}^2 + u_{,12}^1) + \frac{1}{2}(u_{,11}^1 u_{,12}^1 + u_{,11}^2 u_{,12}^2) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(u_{,12}^1 + u_{,11}^2) + \frac{1}{2}(u_{,11}^1 u_{,12}^1 + u_{,11}^2 u_{,12}^2) & 0 \\ u_{,12}^2 + \frac{1}{2}(u_{,12}^1 u_{,12}^1 + u_{,12}^2 u_{,12}^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

6.2 Kirchhoffscher Spannungstensor und Almansi -  
Hämscher Verzerrungstensor

Da die Herleitung der Differentialgleichungen für die Verschiebungen ganz analog zu Abschnitt 6.1 erfolgen kann, werden nur die sich ergebenden Abweichungen aufgeführt, die durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingung (3.17) anstelle von (3.13) entstehen. Ohne die Näherung  $\frac{\sigma}{s} \approx 1$  einführen zu müssen, ist das nach den Körperkoordinaten differenzierte Stoffgesetz (4.16) Ausgangspunkt der Betrachtung:

$$s_{j,i}^i = 2G \left( \varepsilon_{j,i}^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\tau,j}^{\tau} \right) \quad (6.16)$$

Bei Verwendung von (3.17) fehlt schließlich die letzte Zeile von (6.4):

$$\begin{aligned} (1-2\nu) 2 \varepsilon_{j,i}^i + \nu 2 \varepsilon_{\tau,j}^{\tau} = \\ (1-2\nu) 2 \Gamma_{ij}^{\tau} \varepsilon_{\tau}^i + 2\nu \Gamma_{\tau j}^{\tau} \varepsilon_s^s \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nach Übergang zu Verschiebungen ist die letzte Zeile von (6.7) durch

$$(1-2\nu) 2 \Gamma_{ij}^{\tau} \varepsilon_{\tau}^i + 2\nu \Gamma_{\tau j}^{\tau} \varepsilon_s^s$$

zu ersetzen.

In (6.9a) bzw. (6.9b) muß es in der letzten Zeile daher abweichend heißen:

$$\begin{aligned} (1-2\nu) (2 \Gamma_{11}^1 \varepsilon_1^1 + 2 \Gamma_{11}^2 \varepsilon_2^1 + 2 \Gamma_{21}^1 \varepsilon_1^2 + 2 \Gamma_{21}^2 \varepsilon_2^2) \\ + \nu (2 \Gamma_{12}^1 + 2 \Gamma_{22}^2) (\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2) \end{aligned} \quad (6.18a)$$

$$(1-2\nu)(2\Gamma_{22}^2 \varepsilon_2^2 + 2\Gamma_{22}^1 \varepsilon_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \varepsilon_2^1 + 2\Gamma_{12}^1 \varepsilon_1^1) \\ + \nu(2\Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2)(\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2) \quad (6.18b)$$

Um diese Terme durch Ableitungen der Verschiebungen auszudrücken, gelten wieder die Beziehungen (6.10) bis (6.15).

Vergleichsrechnungen mit dem Kirchhoffschen Spannungstensor lassen sich also recht einfach durchführen, nur muß die Frage offen bleiben, wie weit ein sich ergebender Unterschied auf die verschiedenen Definitionen der Spannungstensoren oder auf die Näherung  $\frac{\xi}{\xi} \approx 1$  bei Verwendung des Cauchyschen Spannungstensor zurückzuführen ist.

## 7. Randbedingungen

Um das zu untersuchende Blech den in Abschnitt 1 geforderten Beanspruchungen unterwerfen zu können, sind an der Einspannstelle entsprechende Verschiebungen vorzugeben. Die Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen (6.9) muß also zum einen an der Einspannstelle diese Verschiebungen aufweisen, zum anderen an den beiden Oberflächen des Bleches die Spannungsrandbedingung  $\underline{t} = 0$  erfüllen. Dabei soll unter  $\underline{t}$  der Spannungsvektor verstanden werden, der bei einer Gleichgewichtsbetrachtung eines an der Oberfläche liegenden Elementes die dieser Fläche zugeordneten Spannungen repräsentiert. Weisen  $\underline{g}_1$  und  $\underline{g}_3$  in Richtung der Oberfläche des betrachteten verformten Elementes und ist  $\underline{g}^2$  somit Normalenvektor des Randes ( $|\underline{g}^2| \neq 0$ ), so muß der Spannungstensor  $\underline{T}$  an dieser Stelle der Bedingung

$$\underline{g}^2 \cdot \underline{T} = \underline{t} = 0 \quad (7.1)$$

genügen. Mit (3.4) folgt daraus

$$\sigma_j^2 \underline{g}^j = 0 \quad (7.2)$$

Im einzelnen muß also

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0 \quad (7.3)$$

erfüllt sein, wobei  $\sigma_3^2 \neq 0$  durch die Voraussetzung des ebenen Verzerrungszustandes ohnehin nicht auftreten darf. Über das Stoffgesetz (4.16) folgt aus  $\sigma_1^2 = 0$  bei  $G > 0$  und  $\delta_1^2 = 0$ :

$$\varepsilon_1^2 = 0 \quad (7.4)$$

Gleichung (5.13) liefert den Übergang zu Verschiebungsableitungen

$$u^2|_1 + u_1|^2 + u^s|_1 u_s|^2 = 0 \quad (7.5)$$

Wie in Abschnitt 6.1 näher ausgeführt, läßt sich die Bedingung des Schubspannungsfreien Randes, der durch  $\xi^2 = \text{const}$  definiert ist, hier endgültig schreiben als

$$u^1_{,2} + u^2_{,1} = -u^1_{,1} u^1_{,2} - u^2_{,1} u^2_{,2} \quad (7.6)$$

Mit der Bedingung  $\epsilon^2_2 = 0$  folgt über das Stoffgesetz (4.16) und  $G > 0$ :

$$\epsilon^2_2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon^T_r = 0 \quad (7.7)$$

Da  $\epsilon^3_3 = 0$  und somit  $\epsilon^T_r = \epsilon^1_1 + \epsilon^2_2$  ist, entsteht

$$\nu \epsilon^1_1 + (1-\nu) \epsilon^2_2 = 0 \quad (7.8)$$

Für den Almansi-Hamelschen Verzerrungstensor (5.13) muß also gelten:

$$\begin{aligned} & \nu (2u^1|_1 + u^s|_1 u_s|^1) \\ & + (1-\nu) (2u^2|_2 + u^s|_2 u_s|^2) = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Entsprechend (7.6) läßt sich die Bedingung des normalspannungsfreien Randes, der durch  $\xi^2 = \text{const}$  definiert ist, hier endgültig schreiben als

$$\begin{aligned} \nu u^1_{,1} + (1-\nu) u^2_{,2} &= -\frac{\nu}{2} (u^1_{,1} u^1_{,1} + u^2_{,1} u^2_{,1}) \\ &- \frac{1-\nu}{2} (u^1_{,2} u^1_{,2} + u^2_{,2} u^2_{,2}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

In (7.6) und (7.10) ist durch Verwendung des Almansi-Hamelschen Verzerrungstensors wie in Gleichung (6.7) oder (6.9) Ordnen nach linearen und höheren Termen in einfacher Weise gelungen. Die 2. Ableitungen der Verschiebungen treten dieses Mal nicht auf.

## 8. Spannungsermittlung

Mit den beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen (6.9) und den Randbedingungen (7.6) und (7.10) für die Blechoberseite und -unterseite läßt sich auf die in den beiden folgenden Abschnitten beschriebene Weise je nach vorgegebenen Verschiebungen an der Einspannstelle ein vollständiges Verschiebungsfeld in einer zur Richtung von  $e_3$  senkrechten Ebene des Bleches näherungsweise ermitteln. Die daraus zu berechnenden Spannungen sind außerdem von besonderem Interesse. Sie lassen sich über den Verzerrungstensor (5.13) und das Stoffgesetz (4.16) als Maßzahlen des körperbezogenen Cauchyschen Spannungstensors, wobei  $\frac{\sigma}{3} \approx 1$  angenommen wird, oder als Maßzahlen des Kirchhoffschen Spannungstensors leicht bestimmen. Eine anschauliche Interpretation wäre nach Umwandlung über (3.6) in physikalische Komponenten möglich, doch wäre die Zerlegung in Normal- und Schubspannung an jeder durch den Normalenvektor  $\underline{g}^i$  definierten Schnittfläche erforderlich.

Einfacher verfährt man, wenn der körperbezogene Spannungstensor über das Transformationsgesetz (2.16) in eine raumbezogene Größe mit kartesischer Basis transformiert wird. Maßzahlen des Spannungstensors und physikalische Komponenten sind dann identisch. Als Nachteil dieser Vorgehensweise mag angesehen werden, daß randparallele Spannungen erst nach einer Hauptachsentransformation und an den körperbezogenen Koordinatenlinien orientierte Spannungen erst nach einer Koordinatentransformation zu erhalten sind.

Die Spannungstransformation wird entsprechend (2.16)

über  $\sigma_\beta^\alpha = c_i^\alpha \sigma_j^i \bar{c}_\beta^j$  durchgeführt.

Mit (5.11) ergibt sich  $c_j^\alpha$  zu:

$$c_j^\alpha = \begin{bmatrix} 1 + u_{,1}^1 & u_{,2}^1 & 0 \\ u_{,1}^2 & 1 + u_{,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Inversion entsprechend (2.9) führt auf die Transformationsmatrix  $\bar{c}_\beta^j$ :

$$\bar{c}_\beta^j = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \begin{bmatrix} 1 + u_{,2}^2 & -u_{,2}^1 & 0 \\ -u_{,1}^2 & 1 + u_{,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \det(c_j^\alpha) \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Dabei ist:

$$\det(c_j^\alpha) = 1 + u_{,1}^1 + u_{,2}^2 + u_{,1}^1 u_{,2}^2 - u_{,2}^1 u_{,1}^2 \quad (8.3)$$

Im einzelnen entstehen folgende Beziehungen zwischen raum- und körperbezogenen Spannungen:

$$\sigma_{R^1}^1 = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \left\{ (1 + u_{,2}^2) \left[ (1 + u_{,1}^1) \sigma_{K^1}^1 + u_{,2}^1 \sigma_{K^1}^2 \right] - u_{,1}^2 \left[ (1 + u_{,1}^1) \sigma_{K^2}^1 + u_{,2}^1 \sigma_{K^2}^2 \right] \right\} \quad (8.4)$$

$$\sigma_{R^2}^2 = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \left\{ (1 + u_{,1}^1) \left[ (1 + u_{,2}^2) \sigma_{K^2}^2 + u_{,1}^2 \sigma_{K^2}^1 \right] - u_{,2}^1 \left[ (1 + u_{,2}^2) \sigma_{K^1}^2 + u_{,1}^2 \sigma_{K^1}^1 \right] \right\} \quad (8.5)$$

$$\sigma_{R^2}^1 = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \left\{ -u_{,12}^1 [(1+u_{,11}^1)\sigma_{K^1}^1 + u_{,12}^1 \sigma_{K^1}^2] \right. \\ \left. + (1+u_{,11}^1)[(1+u_{,11}^1)\sigma_{K^2}^1 + u_{,12}^1 \sigma_{K^2}^2] \right\} \quad (8.6)$$

$$\sigma_{R^1}^2 = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \left\{ -u_{,11}^2 [(1+u_{,12}^2)\sigma_{K^2}^2 + u_{,11}^2 \sigma_{K^2}^1] \right. \\ \left. + (1+u_{,12}^2)[(1+u_{,12}^2)\sigma_{K^1}^2 + u_{,11}^2 \sigma_{K^1}^1] \right\} \quad (8.7)$$

Mit (5.13) und (4.16) ergibt sich für die Schubspannung kürzer:

$$\sigma_{R^2}^1 = \sigma_{R^1}^2 = \frac{1}{\det(c_j^\alpha)} \left\{ u_{,11}^2 (1+u_{,12}^2) [(1+u_{,11}^1)^2 - (u_{,12}^1)^2] \right. \\ \left. + u_{,12}^1 (1+u_{,11}^1) [(1+u_{,12}^2)^2 - (u_{,11}^2)^2] \right\} \quad (8.8)$$

Aus den raumbezogenen Spannungen lassen sich über

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_1^1 + \sigma_2^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 + 4(\sigma_2^1)^2} \quad (8.9)$$

die Hauptspannungen und über

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_2^1}{\sigma_1^1 - \sigma_2^2} \quad (8.10)$$

die Hauptspannungsrichtungen ermitteln.

## 9. Differenzgleichungen

### 9.1 Allgemeines

Die beiden unter (6.9) aufgeführten partiellen Differentialgleichungen gelten an jedem Punkt im Inneren des Kontinuums, also auch an beliebig naher Stelle zum freien Rand oder zur festen Einspannung. Die Differentialquotienten werden nun durch Differenzenquotienten, die mit Stützstellen in einem bestimmten Raster gebildet werden, ersetzt. Dies kann als rein mathematisches Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung betrachtet werden, wobei eine Genauigkeitsangabe für das Ergebnis nach COLLATZ [25] im allgemeinen nicht möglich ist. Indem aber das gleiche Problem mit unterschiedlich feinen Rechenrastern untersucht wird, kann aus der Veränderung der Ergebnisse die Größenordnung abgeschätzt werden, in der die erhaltene Lösung von derjenigen, die zu einem sehr engen Raster gehören würde, abweicht. Es wird sich herausstellen, daß diese Abweichungen außer an Punkten hoher Spannungskonzentrationen gering sind, sofern nicht allzu grobe Raster verwendet werden.

Das hier zu untersuchende eingespannte Blech wird mit einem Rechenraster nach Abb. 9-1 überzogen. Die vertikal verlaufenden Rasterlinien beginnen stets mit der Zählung 0 am linken Rand und enden - in Richtung von  $e_1$  äquidistant fortschreitend - mit der Linie  $m_1$  am rechten Rand. Am linken Rand werden die antimetrischen Übergangsbedingungen für Scherung bzw. symmetrischen Bedingungen für reine Biegung formuliert, am rechten Rand hingegen die Verschiebungen je nach Aufgabenstellung vorgegeben. Dort wird stets von einer Einspannstelle gesprochen. Die horizontal verlaufenden Rasterlinien

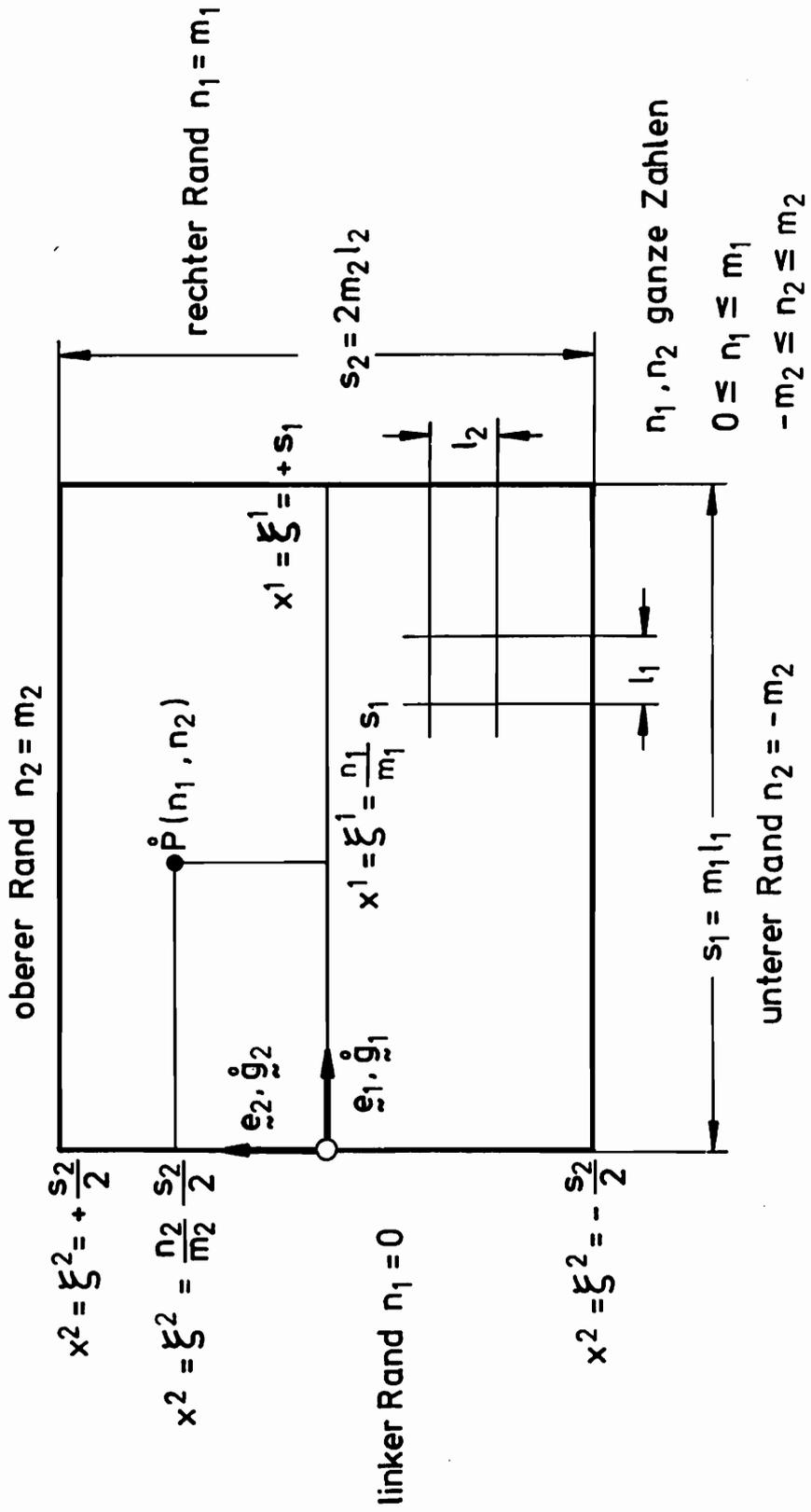


Abb. 9 - 1 Unverformtes System

werden mit dem Index  $(-m_2)$  am unteren Rand - in Richtung von  $e_2$  äquidistant fortschreitend - bis zum Wert  $m_2$  am oberen Rand durchnummeriert. Unterer und oberer Rand sind normal- und schubspannungsfrei und repräsentieren die Blechunter- bzw. -oberseite.

Gebiete mit erhöhten Spannungskonzentrationen sind in Abb. 9-1 bei den beschriebenen Randbedingungen lediglich die rechte obere und untere Ecke. Für diese Zonen stellt sich das gewählte Rechenraster besonders deutlich nur als Näherung für die exakte Lösung dar.

Auch bei einer noch so eng gewählten Teilung bleibt man bei der Festlegung der Differenzenquotienten der rechten Eckpunkte auf Hypothesen angewiesen, die entweder die Randbedingungen des starren rechten Randes oder des spannungsfreien unteren bzw. oberen Randes berücksichtigen. Beide Bedingungen lassen sich in einem Differenzenstern nur dann vereinigen, wenn dieser die exakte Lösung der rechten Eckpunkte wiedergibt. Diese besteht aber für den Normalfall  $\nu > 0$  aus der trivialen Lösung vollkommener Spannungs- und Verzerrungsfreiheit. Eine Verfeinerung des Rechenrasters in den rechten Eckzonen könnte lediglich dazu dienen, den Trend zur trivialen Lösung für die Eckpunkte numerisch nachzuweisen, sofern alle an den Differenzensternen der rechten Eckpunkte selbst beteiligten Stützstellen relativ zum eingespannten Rand als unverschieblich angenommen werden.

Hier sollen die Differenzensterne der rechten Eckpunkte die Randbedingungen der Einspannstelle, d.h.  $\varepsilon_2^2 = 0$ , erfüllen und damit eine Ausrundung der beiden Kehlen wiedergeben, die bei der Befestigung des Bleches

an einem noch größeren starren Block entstünden. Die praktische Ausführung einer angenommenen starren Einspannung findet auf sinnvolle Weise Berücksichtigung. Auf eine lokale Verfeinerung des Rechenrasters wird verzichtet, da das Herausfinden von Spannungsgrenzwerten, die von den Hypothesen des Eck-Differenzensterns abhängen, eine hier zu spezielle Frage bedeuten würde. Hingegen soll das gewählte einfache Raster unterschiedlich fein angenommen werden können. Bei Vergleichen untereinander muß bedacht werden, daß die Ausrundungsradien in den Ecken bei feiner werdender Teilung kleiner werden.

## 9.2 Feldpunkte

Zur Beschreibung der ersten und zweiten Ableitungen der Verschiebungen nach den Ortskoordinaten wird der jeweils nur auf die direkt benachbarten Rasterlinien übergreifende zentrale Differenzenstern gewählt. Zum einen lassen sich an ihm bequem 2. Ableitungen bilden, zum anderen trägt er dazu bei, die Bandbreite des Gleichungssystems klein zu halten, da übernächste Rasterlinien nicht mit eingeschlossen werden. Alle komplizierteren Differenzensterne würden mindestens eine Verdopplung der Bandbreite des Gleichungssystems bedeuten, so daß bei gleichem Rechenaufwand die Zahl der Rasterpunkte, d. h. die Zahl der Gleichungen, auf die Hälfte zurückgenommen werden müßte. Rasterweiten wären  $\sqrt{2}$ -fach größer als bei dem gewählten einfachen zentralen Differenzenstern.

Mit den in Abb. 9-1 eingeführten Zählvariablen  $n_1$  und  $n_2$ , die sich innerhalb der durch  $m_1$  und  $m_2$  festgelegten Grenzen bewegen, und den Rasterweiten  $l_1$  und  $l_2$  ergeben

sich für die Differentialquotienten der Gleichungen (6.9) folgende Differenzenquotienten für den Rasterpunkt  $P(n_1, n_2)$ :

1. Ableitungen:

$$u_{,1}^i(n_1, n_2) = \frac{1}{2l_1} \left[ u^i(n_1+1, n_2) - u^i(n_1-1, n_2) \right]$$

$$u_{,2}^i(n_1, n_2) = \frac{1}{2l_2} \left[ u^i(n_1, n_2+1) - u^i(n_1, n_2-1) \right]$$

(9.1a-b)

2. Ableitungen:

$$u_{,11}^i(n_1, n_2) = \frac{1}{(l_1)^2} \left[ u^i(n_1+1, n_2) - 2u^i(n_1, n_2) + u^i(n_1-1, n_2) \right]$$

$$u_{,22}^i(n_1, n_2) = \frac{1}{(l_2)^2} \left[ u^i(n_1, n_2+1) - 2u^i(n_1, n_2) + u^i(n_1, n_2-1) \right]$$

$$\begin{aligned} u_{,12}^i(n_1, n_2) &= u_{,21}^i(n_1, n_2) \\ &= \frac{1}{4l_1l_2} \left[ u^i(n_1+1, n_2+1) + u^i(n_1-1, n_2-1) \right. \\ &\quad \left. - u^i(n_1+1, n_2-1) - u^i(n_1-1, n_2+1) \right] \end{aligned}$$

(9.2a-c)

Für (9.1) und (9.2) gilt stets  $i=1$  oder  $i=2$ .

Die bereits in Abschnitt 9.1 erwähnten Übergangsbedingungen am linken Rand dienen dazu, den numerischen Aufwand für die in Abschnitt 1 geforderten Lösungen verschiedener Beanspruchungsarten zu halbieren. Bei Beanspruchung des Bleches auf Scherung werden für die Rasterpunkte mit  $n_1=0$  und  $n_2 \geq 0$  folgende Übergangsbedingungen zur links antisymmetrisch anschließenden Systemhälfte benötigt:

$$u_{,1}^i(0, n_2) = \frac{1}{2l_1} \left[ u^i(1, n_2) + u^i(1, -n_2) \right] \quad (9.3)$$

$$u_{,11}^i(0, n_2) = \frac{1}{(l_1)^2} \left[ u^i(1, n_2) - 2u^i(0, n_2) - u^i(1, -n_2) \right]$$

$$\begin{aligned} u_{,12}^i(0, n_2) &= u_{,21}^i(0, n_2) \\ &= \frac{1}{4l_1l_2} \left[ u^i(1, n_2+1) - u^i(1, -n_2+1) - u^i(1, n_2-1) + u^i(1, -n_2-1) \right] \end{aligned} \quad (9.4a-b)$$

Während bei Antimetrie  $u^i(0,0)=0$  angenommen wird, wie Abb. 9-2 es zeigt, sind die Verschiebungen für  $n_1=0$  und  $n_2 < 0$  keine weiteren Unbekannten. Die Übergangsbedingungen werden daher für  $n_2 < 0$  auf der Rasterlinie  $m_1=1$  formuliert:

$$u_{,1}^i(1, n_2) = \frac{1}{2l_1} \left[ u^i(2, n_2) + u^i(0, -n_2) \right] \quad (9.5)$$

$$u_{,n_1}^i(1, n_2) = \frac{1}{(l_1)^2} \left[ u^i(2, n_2) - 2u^i(1, n_2) - u^i(0, -n_2) \right]$$

$$\begin{aligned} u_{,n_2}^i(1, n_2) &= u_{,n_2}^i(1, n_2) \\ &= \frac{1}{4 l_1 l_2} \left[ u^i(1, n_2+1) - u^i(0, -n_2+1) - u^i(1, n_2-1) + u^i(0, -n_2-1) \right] \end{aligned}$$

(9.6a-b)

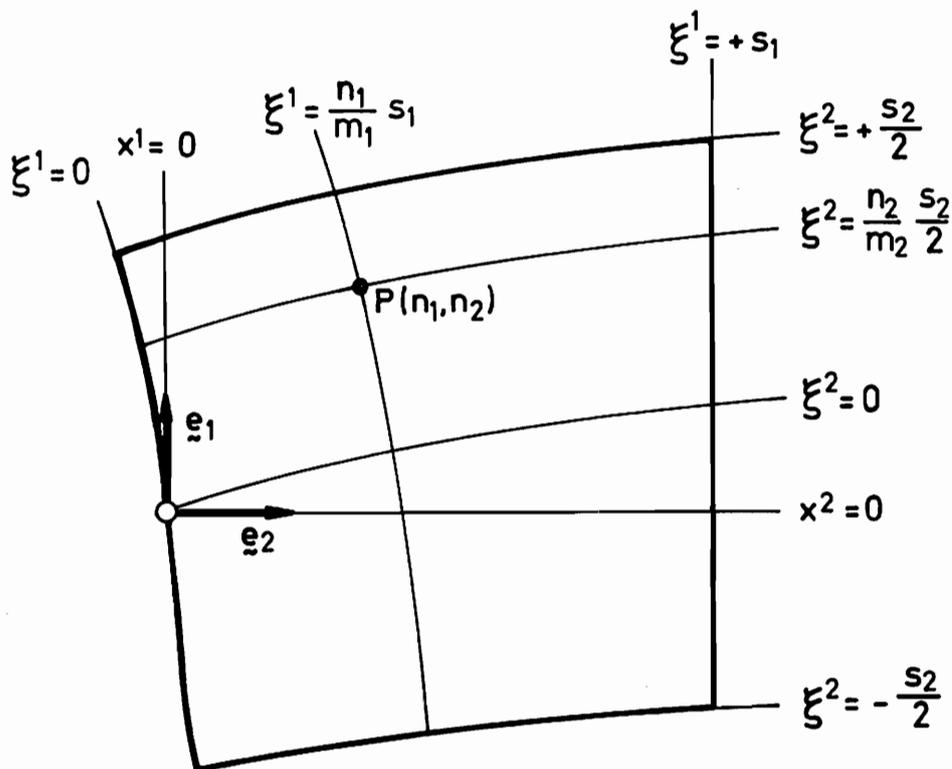


Abb. 9-2 Verformtes System

1. Ableitungen der Form  $u^i_{,2}(0, n_2)$  für  $n_2 \geq 0$  und  $u^i_{,2}(1, n_2)$  für  $n_2 < 0$ , ferner 2. Ableitungen der Form  $u^i_{,22}(0, n_2)$  für  $n_2 \geq 0$  und  $u^i_{,22}(1, n_2)$  für  $n_2 < 0$  gelten bei Antimetrie allgemein nach (9.1b) bzw. (9.2b). Der Index  $i$  kann in (9.3) bis (9.6) den Wert 1 oder 2 annehmen.

Für den Fall der Symmetrie sind auf der Rasterlinie  $n_1=0$  alle horizontalen Verschiebungen  $u^1(0, n_2) = 0$ , und es treten sämtliche vertikalen Verschiebungen  $u^2(0, n_2)$  als Unbekannte auf. Die Übergangsbedingungen zur linken Systemhälfte lauten für reine Biegung:

$$u^1_{,1}(0, n_2) = \frac{1}{l_1} u^1(1, n_2) \quad (9.7)$$

$$u^2_{,11}(0, n_2) = \frac{1}{(l_1)^2} \left[ 2 u^2(1, n_2) - 2 u^2(0, n_2) \right]$$

$$\begin{aligned} u^1_{,12}(0, n_2) &= u^1_{,21}(0, n_2) \\ &= \frac{1}{4 l_1 l_2} \left[ 2 u^1(1, n_2 + 1) - 2 u^1(1, n_2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (9.8a-b)$$

$u^2_{,2}(0, n_2)$  und  $u^2_{,22}(0, n_2)$  gelten bei Symmetrie uneingeschränkt nach (9.1b) bzw. (9.2b), während

$$u^1_{,11}(0, n_2) = u^2_{,12}(0, n_2) = u^1_{,22}(0, n_2) = 0$$

aussagen, daß die Gleichgewichtsbedingung in Richtung von  $\underline{e}_1$  nach (6.9a) auf der Rasterlinie  $n_1=0$  in den

linearen Termen identisch erfüllt ist. Die gemischten 1. Ableitungen verschwinden ebenfalls.

Am rechten Rand mit  $n_1 = m_1$  werden

$$u^1(m_1, n_2) = UH(n_2)$$

$$u^2(m_1, n_2) = UV(n_2) \quad (9.9a-b)$$

als bekannte Größen vorgegeben. Dies wird bei Bildung der 1. Ableitungen für die Linie  $n_1 = m_1 - 1$  nach (9.1) berücksichtigt, doch dadurch entstehen vor allem durch Verschiebungen, die in den Beziehungen (9.2) das Argument  $n_1 + 1$  aufweisen, für die 2. Ableitungen der Rasterlinie  $n_1 = m_1 - 1$  keine neuen Unbekannten. Die auftretenden Größen  $UH(n_2)$  und  $UV(n_2)$  werden auf die rechten Seiten der Gleichungen (6.9) gebracht, so daß aus den linken Seiten von (6.9) eine Matrix aufgebaut werden kann, bei der die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der unbekanntenschiebungen übereinstimmt.

Spannungen lassen sich ohne Extrapolation für die Linie  $n_1 = m_1 - 1$  berechnen, Beanspruchungen am rechten Rand selbst entweder durch Vergrößerung des gewählten Rasters um eine Linie, so daß das neue  $n_1 = m_1 - 1$  dem alten  $n_1 = m_1$  entspricht, oder durch Einführen von Außenpunkten bei  $n_1 = m_1 + 1$  und Hinzunahme von Gleichgewichtsbedingungen bei  $n_1 = m_1$ . Letztere Möglichkeit bedeutet programmtechnisch Mehraufwand, doch kann man nicht behaupten, daß sie richtiger wäre als die erstgenannte. Es ist leicht einzusehen, daß für ein unendlich dichtes Raster beide Ergebnisse gleich werden. Der Unterschied macht deutlich, wie die eine oder die andere Diskretisierung eben stets nur eine Approximation der exakten Lösung darstellen kann.

### 9.3 Randpunkte

Bei der Angabe der Differenzensterne für die Feldpunkte wurde vorausgesetzt, daß am unteren und oberen Rand jeweils noch eine außen liegende Rasterlinie vorhanden ist. Jeder Punkt einer derartigen Linie enthält zwei unbekannte Verschiebungen, so daß die beiden Randbedingungen (7.6) und (7.10) gerade die erforderlichen weiteren Gleichungen stellen, die zur Bestimmung aller Unbekannten erforderlich sind. Ersetzt man in den Gleichungen (9.1) die allgemeine Größe  $n_2$  durch  $-m_2$  bzw.  $m_2$ , so erhält man die erforderlichen Differenzenquotienten für die Bedingungen (7.6) und (7.10) des unteren bzw. oberen Randes. Bei antisymmetrischen Übergangsbedingungen gelten die Differenzenquotienten nach (9.3) für den oberen und nach (9.5) für den unteren Rand, wobei  $n_2$  durch  $m_2$  ersetzt werden muß. Bei symmetrischen Übergangsbedingungen ist mit der Gleichung (9.7) entsprechend zu verfahren, und am rechten Rand werden die vorzugebenden Verschiebungen  $UH(m_2)$ ,  $UV(m_2)$  bzw.  $UH(-m_2)$ ,  $UV(-m_2)$  an Stelle neuer Unbekannter verwendet.

Angemerkt sei noch, daß im Gegensatz zum rechten Rand bei der Formulierung der Spannungsrandbedingungen am unteren bzw. oberen Rand eine außen liegende Rasterlinie eingeführt werden muß, wenn die ersten Ableitungen zentral über zwei Rasterweiten gebildet werden sollen.

## 10. Numerisches Verfahren

### 10.1 Ausgangslösung

Wie bereits in Abschnitt 6.1 erwähnt, wird als Ausgangslösung für den Iterationsprozeß das Verschiebungsfeld gewählt, das sich bei zu Null angenommenen rechten Seiten der Gleichungen (6.9), (7.6) und (7.10) ergibt. Nach Einführung von Differenzensternen für jeden Rasterpunkt entsprechend Abschnitt 9 entsteht daraus ein lineares Gleichungssystem, das lediglich durch die an der Einspannstelle vorzugebenden und auf die rechte Seite gebrachten Verschiebungen  $UH(n_2)$  und  $UV(n_2)$  inhomogen wird. Eine erste Näherung des Verfahrens stellt demnach die Lösung der linearen Elastizitätstheorie dar, und es ist zu erwarten, daß sie erst für große Formänderungen zu ungenau wird, um dem anschließenden Iterationsprozeß noch als Ausgangspunkt dienen zu können. Während die quadratischen Terme der ersten Ableitungen auf den rechten Seiten der Randbedingungen (7.6) und (7.10) für kleine Formänderungen sicherlich unbedeutend werden, läßt sich für die Feldpunkte aus den dafür maßgebenden Beziehungen (6.9) bis (6.15) nur schwer ablesen, ob die rechten Seiten von (6.9) gegen Null streben. Hier weiß man jedoch, daß für kleine Formänderungen die kovariante Ableitung in die partielle und der Almansi-Hamelsche Verzerrungstensor in das lineare Verzerrungsmaß übergehen müssen.

Bei Festlegung der Reihenfolge, in der die Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Rasterpunkte angeschrieben werden, ist nach WALLER-KRINGS [26] darauf zu achten, daß die Bandbreite der entstehenden Matrix möglichst klein bleibt. Ein rechteckiges Raster sollte

nicht mäandrierend und nicht schneller laufend über die Linien mit größerer Punktezahl durchnummeriert werden. Hier wird auf der Linie  $n_1 = 0$  mit steigendem  $n_2$  begonnen und auf der Linie  $n_1 = m_1 - 1$  beim Außenpunkt  $n_2 = m_2 + 1$  nach zunehmendem  $n_2$  aufgehört. Die sich ergebende Bandbreite

$$B = 8m_2 + 19 \quad (10.1)$$

wird somit für alle Probleme mit  $m_1 \geq 2m_2 + 3$  so klein wie möglich.

Gleichgewichtsbedingungen in Richtung von  $e_1$  bzw. die Forderung nach Schubspannungsfreiheit für  $n_2 = \pm(m_2 + 1)$  führen auf die Gleichungen mit ungerader Nummer

$$i = (4m_2 + 6)n_1 + 2n_2 - 1 \quad (10.2)$$

Gerade Nummern  $j = i + 1$  entstehen entsprechend am gleichen Rasterpunkt für die Richtung von  $e_2$  bzw. die Forderung nach Normalspannungsfreiheit. Bei antisymmetrischen Übergangsbedingungen erhält man die erste Gleichung  $i = 1$  für  $n_1 = 0$  und  $n_2 = 1$ , während sich die Anzahl der Gleichungen  $N = i(n_1 = m_1 - 1, n_2 = m_2 + 1) + 1$  über (10.2) zu

$$N = 4m_1m_2 + 6m_1 - 2m_2 - 4 \quad (10.3)$$

ergibt. Bei Symmetrie gilt abweichend auf der Linie  $n_1 = 0$ , daß auch Gleichungen mit ungerader Nummer durch Gleichgewichtsbedingungen in Richtung von  $e_2$  bzw. die Forderung nach Normalspannungsfreiheit entstehen, die für Punkte mit  $n_2 < 0$  angeschrieben werden. Die Numerierung wird dort über

$$i = -2n_2 - 1 \quad (10.4)$$

festgelegt.

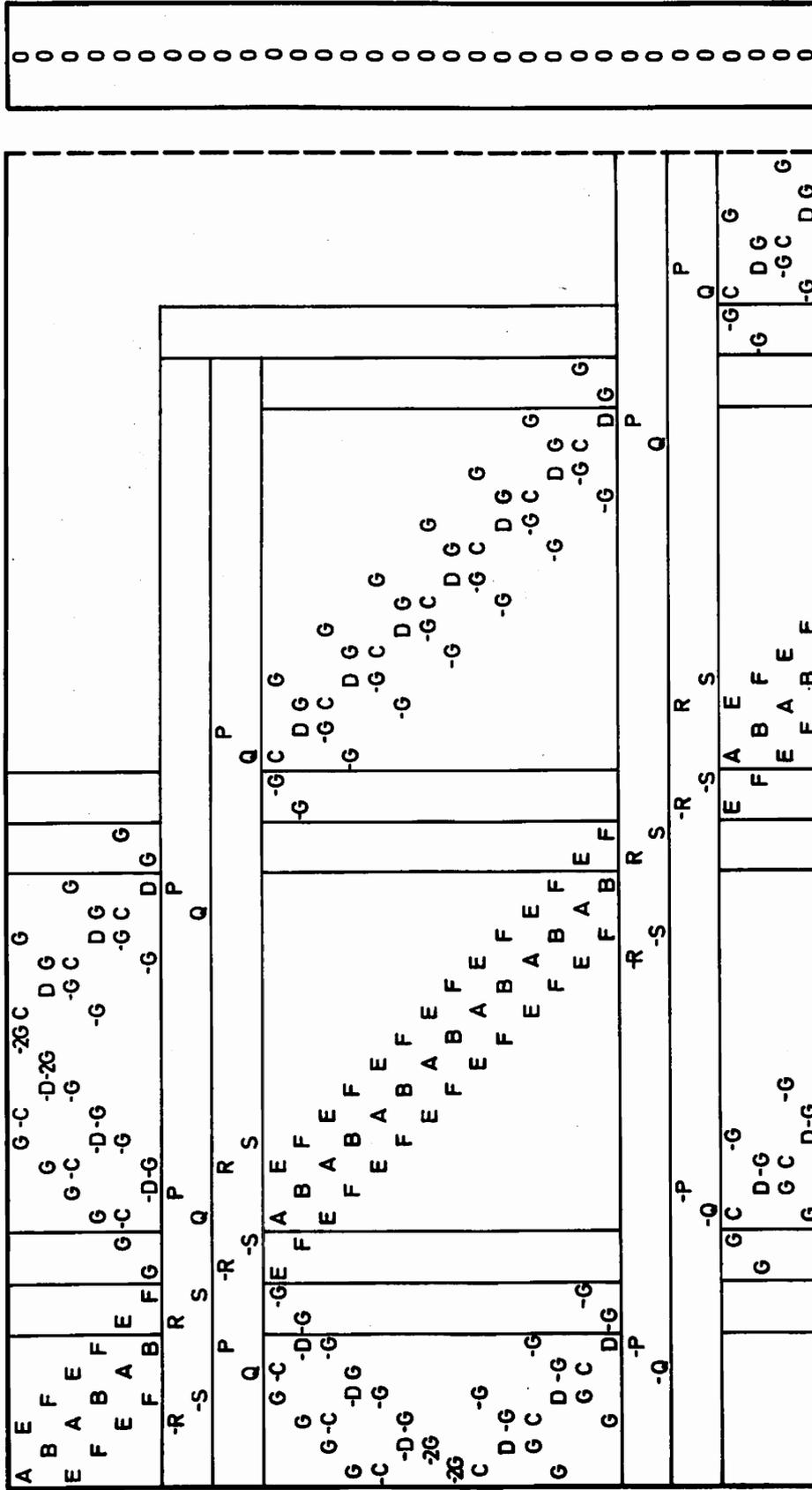


Abb. 10 - 1 Anfang des Gleichungssystems bei antisymmetrischen Übergangsbedingungen und  $m_2 = 3$





Das entstehende lineare Gleichungssystem ist zur Verdeutlichung am Beispiel  $m_2 = 3$  in Abb. 10-1 bis 10-3 dargestellt worden. Es gelten die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A &= -2(C + E) & B &= -2(D + F) \\ C &= \frac{1}{(l_1)^2} 2(1 - \nu) & D &= \frac{1}{(l_1)^2} (1 - 2\nu) \\ E &= \frac{1}{(l_2)^2} (1 - 2\nu) & F &= \frac{1}{(l_2)^2} 2(1 - \nu) \\ G &= \frac{1}{4l_1l_2} \\ P &= \frac{1}{2l_1} & Q &= \frac{\nu}{2l_1} \\ R &= \frac{1}{2l_2} & S &= \frac{1-\nu}{2l_2} \quad (10.5a-k) \end{aligned}$$

Die durch die Spannungsrandbedingungen entstehenden Gleichungen mit den Koeffizienten P bis S sind durch waagerechte Linien besonders hervorgehoben worden, um zu zeigen, wie die Matrix in Abb. 10-1 durch sie unsymmetrisch wird.

Übereinstimmung zwischen Abb. 10-1 und 10-2 liegt ab Rasterlinie  $n_1 = 2$ , d.h. nach der 26. Zeile, vor.

Nicht verschwindende Werte auf der rechten Seite entstehen erst, sobald auf der letzten Rasterlinie  $n_1 = m_1 - 1$  die entsprechenden Bedingungen angeschrieben werden (s. Abb. 10-3). Im Beispiel wurde  $UH(n_2) = UH = \text{const.}$  angenommen und  $UV(-m_2)$  mit  $UV[3]$  bzw.  $UV(m_2)$  mit  $UV[15]$  bezeichnet.

Betragsmäßig große Unterschiede zwischen den Matrixkoeffizienten führen wegen beschränkter Genauigkeit

durch den Eliminationsprozeß zu falschen Ergebnissen. Für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  streben D und E (nach (10.5)) gegen Null. Wie sich später zeigen wird, versagt hier tatsächlich die Lösungsmethode. Die Funktionsfähigkeit des Algorithmus wird jedoch durch das Verschwinden von Q bei  $\nu = 0$  nicht in ähnlich starkem Maße beeinträchtigt.

## 10.2 Iterationsschleife

Wie bereits erwähnt, gestatten die Gleichungen (6.9), (7.6) und (7.10) den Iterationsprozeß auf mehrmaliges Lösen eines Gleichungssystems  $AU = R$  für verschiedene rechte Seiten  $R$  zu beschränken. Die Vorwärtselimination der Bandmatrix  $A$  wird, sobald ein betragsmäßig das zugehörige Hauptdiagonalelement übertreffender Koeffizient in der darunterliegenden Teilspalte angetroffen wird, mit Zeilentausch entsprechend „procedure bandet I“ aus WILKINSON-REINSCH [27] durchgeführt. Die erforderlichen Multiplikatoren von Zeilen, um durch Zeilenaddition Koeffizienten zu eliminieren, müssen als untere Dreiecksmatrix  $M$  zusätzlich zur entstehenden Halbinversen von  $A$ , auch obere Dreiecksmatrix  $D$  genannt, gespeichert werden, da nicht alle zur Iterationslösung benötigten rechten Seiten  $R$  vorher bekannt sind. Mit

$$AU = MDU = R \quad (10.6)$$

wird für jede rechte Seite zunächst die Spaltenmatrix

$$DU = M^{-1}R \quad (10.7)$$

und anschließend die Lösung

$$U = D^{-1} M^{-1} R \quad (10.8)$$

ermittelt. Wegen der Dreiecksstrukturen von  $M$  und  $D$  müssen  $M^{-1}$  und  $D^{-1}$  nicht explizit vorliegen, um (10.7) und das Rückwärts-Einsetzen (10.8) durchzuführen. Die hier gezeigte Methode ist der Ermittlung von  $A^{-1}$  vorzuziehen, solange die Zahl der Iterationen kleiner ist als die Zahl  $N$  der Gleichungen. Dieses Verhältnis wird später im Normalfall bei 1:20, maximal bei 1:5 liegen.

Bezeichnet man mit

$$A U_1 = H + f(U_0) = R_1 \quad (10.9)$$

das Gleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie nach Abschnitt 10.1, in welchem die rechten Seiten  $f(U_0)$  der Beziehungen (6.9), (7.6) und (7.10) zu Null angenommen wurden, so kann eine erste Verbesserung  $U_2$  der Lösung über

$$A U_2 = H + f(U_1) = R_2 \quad (10.10)$$

gewonnen werden. Durch Differenzbildung von (10.10) und (10.9) läßt sich die rechte Seite  $H = R_1$  eliminieren. Es entsteht

$$A (U_2 - U_1) = f(U_1) - f(U_0) \quad (10.11)$$

Die Lösung

$$U_2 - U_1 = D^{-1} M^{-1} [f(U_1) - f(U_0)] \quad (10.12)$$

liefert durch Addition von  $U_1$  das gesuchte  $U_2$  und somit über (6.9) bis (6.15), (7.6) bzw. (7.10) und den in Abschnitt 9 definierten 1. Ableitungen der Verschiebungen auch  $f(U_2)$ . Verallgemeinert man (10.11) in

$$A(U_{i+1} - U_i) = f(U_i) - f(U_{i-1}), \quad (10.13)$$

so läßt sich hiernach für wachsende  $i$  der Iterationsprozeß fortsetzen. Als Kriterium zum Abbruch der Rechnung dient neben einer vorzugebenden oberen Schranke die Bedingung, daß die vorhandene Quadratsumme

$$\sum_{j=1}^N [f(U_i) - f(U_{i-1})]_j^2 \quad (10.14)$$

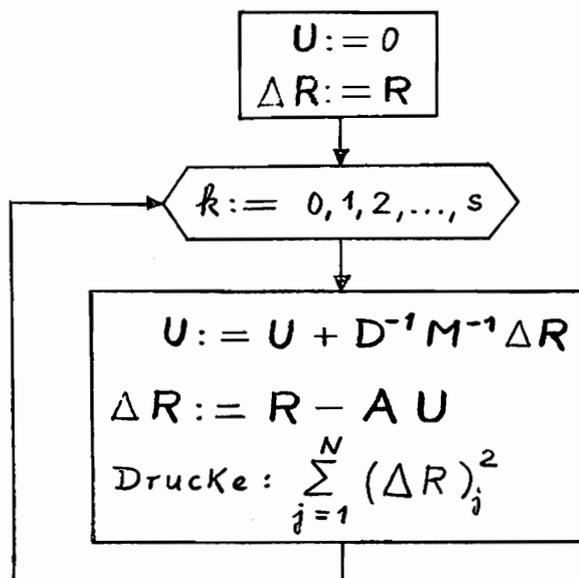
größer wird als die vorausgegangene. Bei einsetzender Divergenz bricht das Verfahren somit ab, entweder, weil die Lösung wegen bereits sehr geringer Größen nicht mehr verbessert werden kann, oder, um bei schwierigen Konvergenzverhältnissen die erreichte Lösung nicht wieder zu verschlechtern. Eine absolute Genauigkeitsschranke erweist sich als überflüssig, da man unnötige Schleifendurchläufe dadurch vermeidet, daß bei aus vorausgegangenen Berechnungen mit ähnlichen Parametern bekanntem Konvergenzverhalten die Anzahl zulässiger Iterationen entsprechend herabgesetzt wird.

### 10.3 Kontrollen des Programms

Da die Lösungen  $U_1$  der linearen Elastizitätstheorie bei Scherung antimetrisch zur horizontalen mittleren Rasterlinie  $n_2 = 0$  sein müssen, besteht wegen doppelter Programmierung die Möglichkeit, lokale Programmfehler

beim Aufbau der Matrix zu finden. Diese Antimetrie gilt für die nichtlineare Lösung zwar nicht mehr, doch haben dann weiterhin Ergebnisse für vorgegebenes positives UV den Werten mit gleichem negativen UV spiegelbildlich zu entsprechen. Für reinen Zug oder Druck müssen nichtlineare Lösungen bei antimetrischen und symmetrischen Übergangsbedingungen am linken Rand übereinstimmen. Schubspannungen und zum Rand senkrechte Normalspannungen an Blechunter- und -oberseite, die aus dem Verschiebungsfeld zunächst als körperbezogene, anschließend mit (8.4) bis (8.7) als raumbezogene Größen gewonnen werden, müssen nach der Hauptachsentransformation (8.9) verschwinden, und der Transformationswinkel  $\varphi$  nach (8.10) muß der Neigung des jeweiligen Randes an der zugehörigen Stelle entsprechen.

Da bei einem Eliminationsprozeß nie ausgeschlossen werden kann, daß die erhaltene Lösung nicht noch durch eine Nachiteration verbesserungsfähig ist, wird diese wahlweise  $s$ -mal nach jeder für  $i$  entsprechend (10.12) durchgeführten Lösung des Systems (10.13) vorgesehen. Bezeichnet man mit  $A U = R$  das System (10.13), so zeigt folgende Schleife, wie vorgegangen wird:



Es zeigt sich an mehreren Beispielen, daß für  $k = 1$  zwar die Fehlerquadratsumme der Defekte noch um eine Zehnerpotenz kleiner wird als die vorausgegangene, die Lösungen  $U$  aber nur noch äußerst geringfügig abweichen. Für alle  $k > 1$  bleibt  $\sum_{j=1}^N (\Delta R)_j^2$  mit einer bestimmten Streuung konstant. Im Regelfall erweist sich also die Berechnung ohne Nachiteration, d.h.  $s = 0$ , als ausreichend. In solchen Fällen kann das zusätzliche Abspeichern der Matrix  $A$ , die bei der Vorwärtselimination von  $D$  überschrieben wird, eingespart und das zeitaufwendige Bilden der Defekte  $\Delta R = R - AU$  umgangen werden.

## 11. Lösungen

### 11.1 Bezeichnungen

In diesem Abschnitt werden zur graphischen Darstellung aller Ergebnisse, um von absoluten Längenangaben unabhängig zu sein, folgende auf die Ausgangsmaße bezogenen Körperkoordinaten eingeführt (vergl. Abb. 9-1 und 9-2):

$$1. \quad y_1 = \frac{\xi^1}{s_1} \quad (11.1)$$

mit  $y_1 = 0$  am linken Rand und  $y_1 = 1$  am rechten Rand (Einspannstelle)

$$2. \quad y_2 = \frac{\xi^2}{s_2} \quad (11.2)$$

mit  $y_2 = -0,5$  am unteren Rand und  $y_2 = +0,5$  am oberen Rand. Bei dem nach Abb. 9-1 gewählten Rechenraster gilt somit zur Beschreibung des Punktes  $P(n_1, n_2)$ :

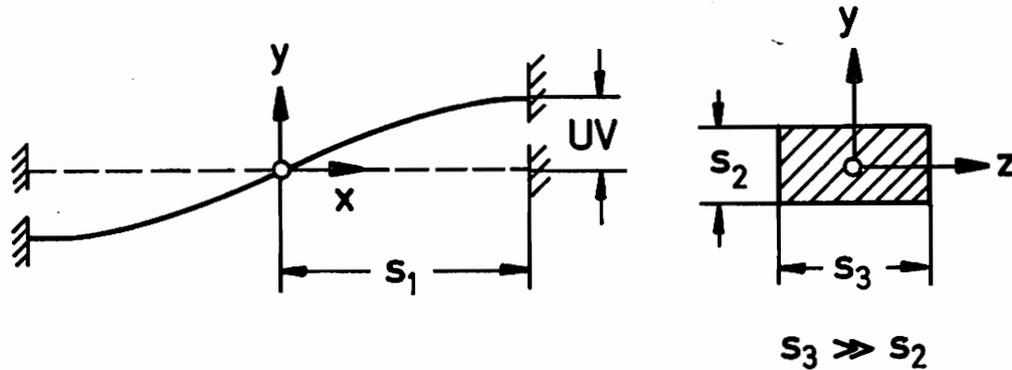
$$y_1 = \frac{n_1}{m_1} \quad y_2 = \frac{n_2}{2m_2} \quad (11.3a-b)$$

Der rechte Rand ist für alle Beispiele an einem „starrten Block“ befestigt (vgl. Abschnitt 9.1), dessen horizontale Verschiebung mit UH und vertikale Verschiebung mit UV bezeichnet wird, solange keine Verdrehungen vorzugeben sind. Nur bei reiner Biegung sind linear veränderliche, indizierte Größen  $UH(n_2)$  und  $UV(n_2)$  erforderlich, um Rotation und Translation des rechten Randes herbeizuführen, die zum gewünschten Krümmungsradius der Blechmittelfläche gehören.

### 11.2 Analytische Lösungen für Scherung

Im Unterschied zu den bisherigen Koordinatensystemen wird hier bei gleicher Lage des Nullpunktes die 1-Richtung

mit x, die 2-Richtung mit y und die 3-Richtung mit z bezeichnet.



Die Balkentheorie liefert für die Biegelinie:

$$u_y(x) = \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{s_1^2} \right) \frac{x}{s_1} UV \quad (11.4)$$

Für den ebenen Verzerrungszustand gilt (s. LEHMANN [28]):

$$\frac{E}{1-\nu^2} J_{zz} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = M_z(x) \quad \text{mit} \quad J_{zz} = \frac{s_3 s_2^3}{12} \quad (11.5), (11.6)$$

Bildet man aus (11.4) bis (11.6) die Querkraft

$$Q_y = - \frac{dM_z}{dx} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{s_2}{4} \left( \frac{s_2}{s_1} \right)^3 UV, \quad (11.7)$$

so läßt sich die bei LEHMANN [29] angegebene Airysche Spannungsfunktion  $F(x,y)$  durch  $UV$  ausdrücken. Es entsteht als Lösungsansatz für Spannungen:

$$F_i(x,y) = C_i \frac{E}{1-\nu^2} \frac{3}{8} \frac{UV}{s_1^3} \left( \frac{4}{3} x y^3 - s_2^2 x y \right) \quad (11.8)$$

Der Index  $i$  dient zur Unterscheidung 4 verschiedener Arten der Einspannung, die über die Konstanten  $C_i$  auf die Funktion  $F_i$  Einfluß nehmen. Die Spannungen lauten:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = C_i \frac{3E}{1-\nu^2} \frac{UV}{s_1^3} x y$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} = 0$$

$$\sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} = C_i \frac{3}{8} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{UV}{s_1^3} (s_2^2 - 4y^2) \quad (11.9a-c)$$

Analog zu Berechnungen für den Kragarm, wie sie bei GIRKMANN [30] und WORCH [31] zu finden sind, führt hier das verallgemeinerte Hookesche Gesetz unter der Bedingung  $\varepsilon_{zz}=0$  und den Gleichungen (11.9) über Integration auf

$$u_x(x, y) = C_i UV \frac{y}{s_1} \left( \frac{3}{2} \frac{x^2}{s_1^2} + \frac{3\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2} - \frac{4\nu}{8(1-\nu)} \frac{y^2}{s_1^2} \right) + K(y) \quad (11.10)$$

und

$$u_y(x, y) = C_i UV \frac{x}{s_1} \left( \frac{-3\nu}{2(1-\nu)} \frac{y^2}{s_1^2} + \frac{3\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2} \right) + L(x). \quad (11.11)$$

Die Funktionen  $K(y)$  und  $L(x)$  ergeben sich unter Einhaltung der Randbedingung

$$u_y(s_1, 0) = UV$$

zu

$$K(y) = C_i UV \frac{y}{s_1} \left[ -\frac{3}{2} + \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{s_2^2}{s_1^2} + \frac{y^2}{s_1^2} \right]$$

$$L(x) = C_i UV \frac{x}{s_1} \left[ +\frac{3}{2} - \frac{3}{8} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{s_2^2}{s_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{s_1^2} \right] \quad (11.12a-b)$$

und unter Einhaltung der Randbedingung

$$u_x(s_1, \pm \frac{s_2}{2}) = 0$$

zu

$$K(y) = C_i UV \frac{y}{s_1} \left[ -\frac{3}{2} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{s_2^2}{s_1^2} + \frac{y^2}{s_1^2} \right]$$

$$L(x) = C_i UV \frac{x}{s_1} \left[ +\frac{3}{2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{s_2^2}{s_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{s_1^2} \right]. \quad (11.13a-b)$$

Endgültig findet man für die Verschiebungen:

$$u_x(x,y) = C_i UV \frac{y}{s_1} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x^2}{s_1^2} - 1 \right) - \frac{2-\nu}{8(1-\nu)} \left( \frac{s_2^2}{s_1^2} - 4 \frac{y^2}{s_1^2} \right) + E_x \right]$$

$$u_y(x,y) = C_i UV \frac{x}{s_1} \left[ \frac{-3\nu}{2(1-\nu)} \frac{y^2}{s_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{s_1^2} + \frac{3}{2} + E_y \right]$$

(11.14a-b)

Die Konstanten  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$  oder  $4$ ) sind bei Verwendung von (11.9) und (11.14), die Größen  $E_x$  und  $E_y$  bei Verwendung von (11.14) je nach Randbedingung der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	$u_y(s_1, 0) = UV$ $u_y(s_1, \pm \frac{s_2}{2}) < UV$	$u_y(s_1, \pm \frac{s_2}{2}) = UV$ $u_y(s_1, 0) > UV$
$\frac{\partial u_y(s_1, 0)}{\partial x} = 0$ $u_x(s_1, 0) = 0$	$C_1 = 1$ $E_x = \frac{4+\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2}$ $E_y = 0$	$C_2 = \frac{8(1-\nu)}{8(1-\nu) - 3\nu \frac{s_2^2}{s_1^2}}$ $E_x = \frac{4+\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2}$ $E_y = 0$
$u_x(s_1, \pm \frac{s_2}{2}) = 0$ $u_x(s_1, 0) = 0$	$C_3 = \frac{8(1-\nu)}{8(1-\nu) + (4+\nu) \frac{s_2^2}{s_1^2}}$ $E_x = 0$ $E_y = \frac{4+\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2}$	$C_4 = \frac{8(1-\nu)}{8(1-\nu) + (4-2\nu) \frac{s_2^2}{s_1^2}}$ $E_x = 0$ $E_y = \frac{4+\nu}{8(1-\nu)} \frac{s_2^2}{s_1^2}$

Die hier angegebenen Lösungen gelten für homogene, isotrope und linear-elastische Körper. Die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen wird vorausgesetzt, so daß die äußeren, die Scherung hervorrufenden Spannungen an der Einspannstelle als Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  linear veränderlich und als Schubspannungen  $\sigma_{xy}$  parabelförmig über die Höhe  $s_2$  verteilt eingeleitet werden müssen. Die vier angegebenen Arten der Einspannung verletzen nicht die Kompatibilitätsbedingungen. Keiner der vier Fälle darf weiteren Randbedingungen, als denen, die angegeben worden sind und den entsprechenden Fall kennzeichnen, unterliegen.

Abb. 11-1 a-d stellt die auf UV bezogenen Abweichungen der Verschiebungen  $u_y$  für die vier Fälle nach (11.14b) von denjenigen der numerischen Ausgangslösung gemäß Abschnitt 10.1 ( $m_1 = 16$ ,  $m_2 = 8$ ) dar. Dabei gilt  $UV/s_1 = 1/16$  und  $\nu = 0,4$ . Bilder a und b gelten für stabartige ( $s_2/s_1 = 1$ ), Bilder c und d für scheibenartige Verhältnisse ( $s_2/s_1 = 1$ ), wobei der Faktor 50 im Ordinatenmaßstab zu beachten ist. Erwartungsgemäß findet man in Bild a Fall 2, in Bild b Fall 1, in Bild c Fall 4 und in Bild d Fall 3 als beste Approximation.

Abb. 11-2 a-d gibt die auf G bezogenen Abweichungen der Spannungen  $\sigma_{xx}$  bzw.  $\sigma_{xy}$  für die vier Fälle nach (11.9) von denjenigen der numerischen Ausgangslösung gemäß Abschnitt 10.1 wieder. Dabei handelt es sich um die entsprechenden Beispiele aus der Abbildung davor. Bei scheibenartigen Verhältnissen (Bild c und d) führt der Zwang zum „Ebenbleiben des Querschnittes“ an der Einspannstelle zur Erhöhung der Normal- und Verminderung der Schubspannung, sofern die Fälle 3 und 4 („Scheibentheorie“) zum Vergleich herangezogen werden.

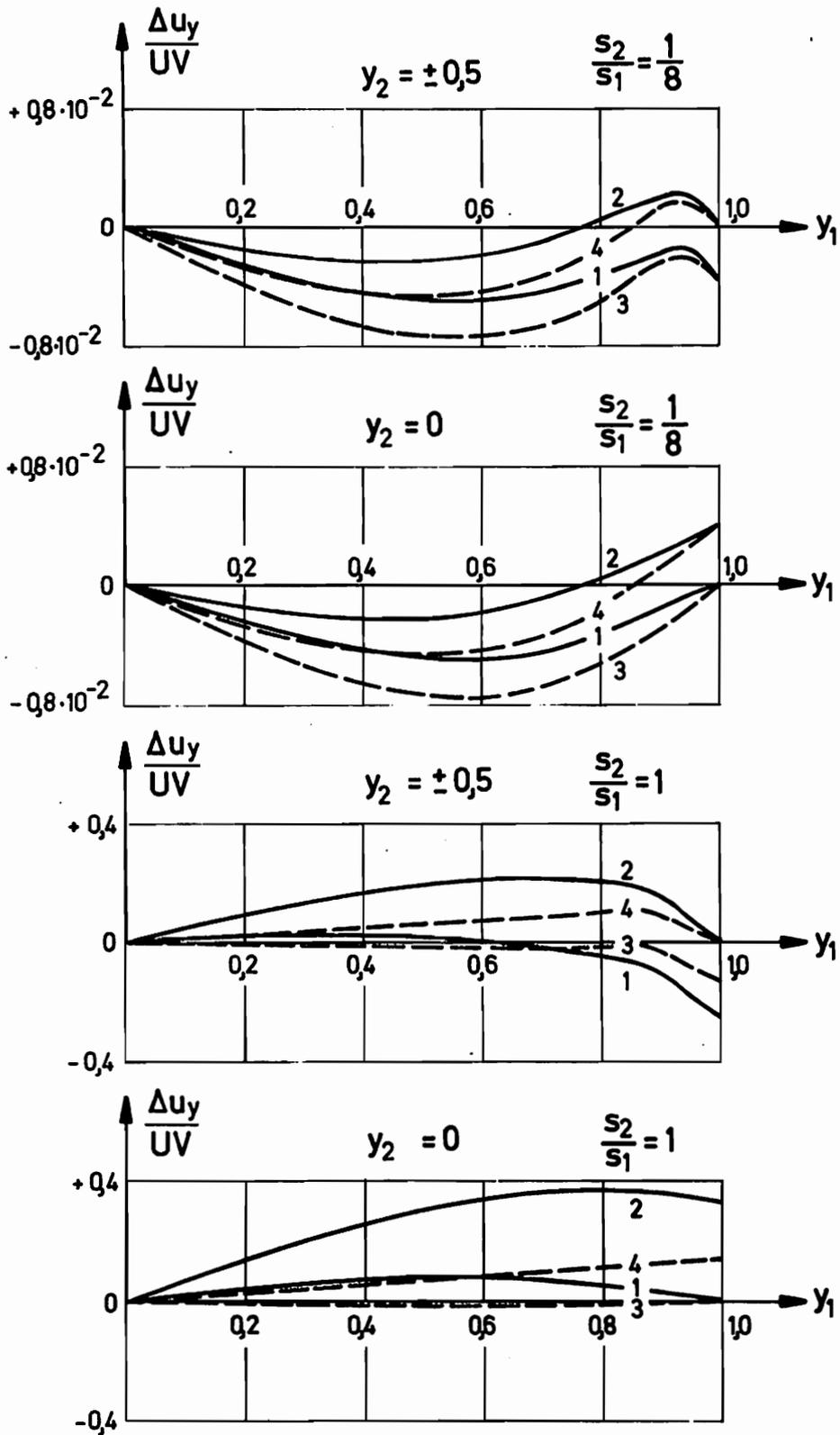


Abb. 11-1a-d Verschiebungsdifferenzen

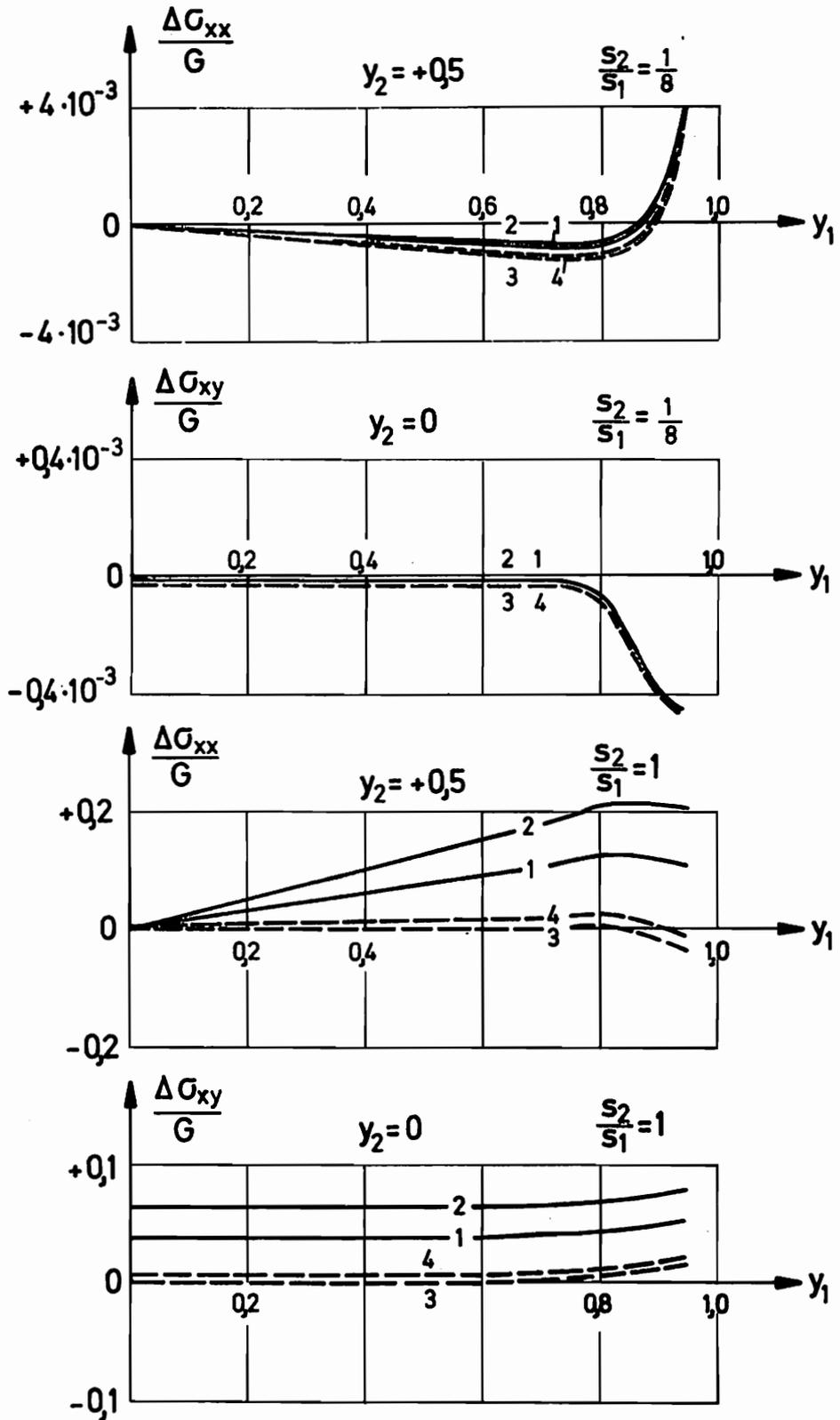


Abb. 11 - 2 a-d Spannungsdifferenzen

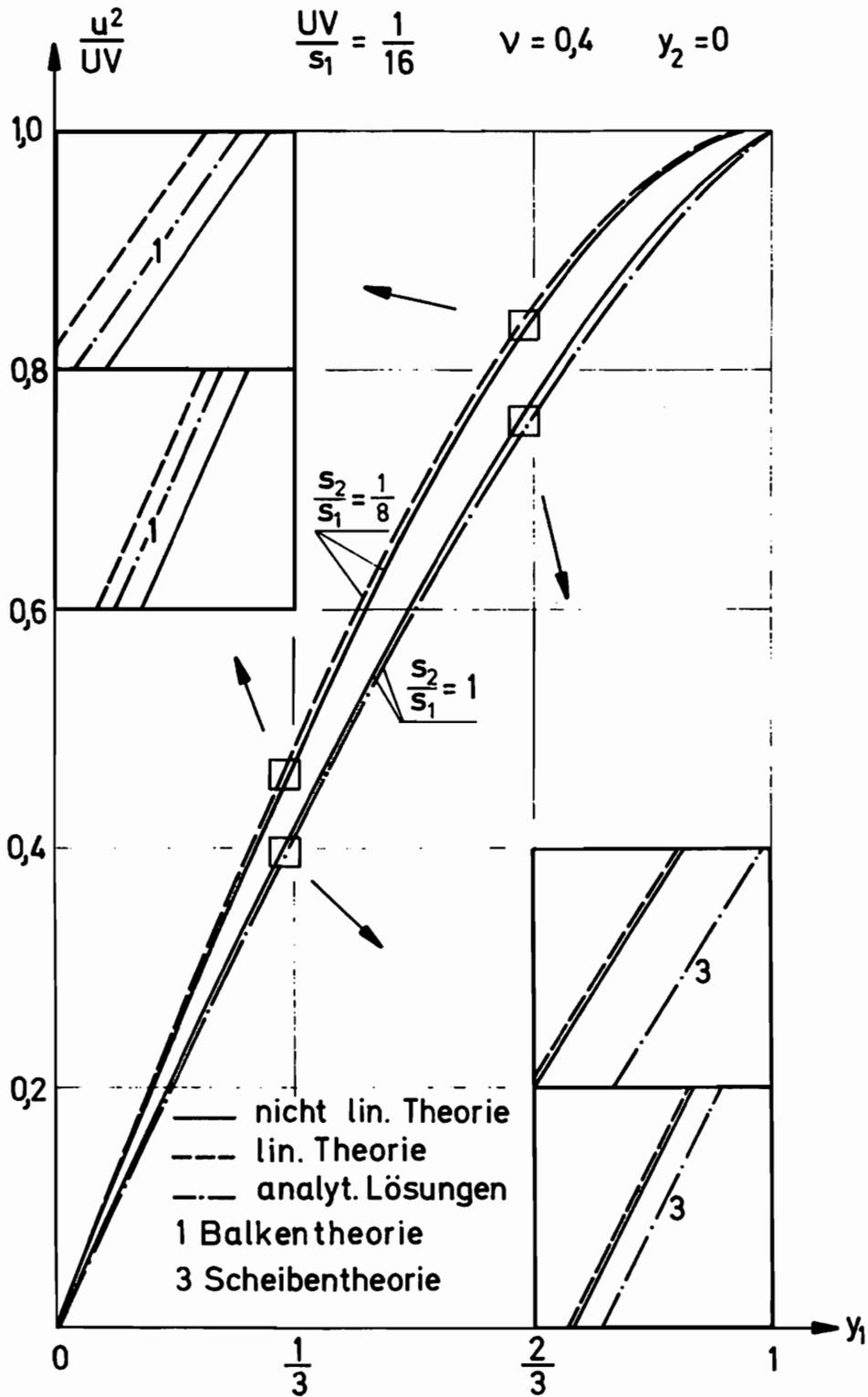


Abb. 11-3 Biegelinien

Die anders gelegenen Verhältnisse bei Bild a und b sind mit einem bis zu 250mal größerem Maßstab dargestellt.

Abb. 11-3 stellt nicht mehr auf UV bezogene Verschiebungsabweichungen, sondern auf UV bezogene Verschiebungen dar. Die Vergleiche erschwerenden unterschiedlichen Ordinatenmaßstäbe entfallen. Da auch die numerische Lösung der nichtlinearen Theorie gemäß Abschnitt 10.2 eingetragen ist, wird zur Bezeichnung „  $u^2$  „ übergegangen. Es lassen sich zwei Gruppen von Biegelinien unterscheiden, die eine Gruppe mit  $s_2/s_1 = 1/8$  und nahezu waagerechter Tangente bei  $y_1 = 1$ , die andere mit  $s_2/s_1 = 1$ . Die Ziffern „1“ und „3“ beziehen sich auf die analytischen Lösungen Fall 1 bzw. Fall 3.

### 11.3 Reine Biegung

Die Abbildungen 11-4 bis 11-7 geben die bei reiner Biegung interessierenden Lösungen wieder und sind von besonderem Interesse, da sie den Ergebnissen DE BOERS [ 5 ] für große Formänderungen gegenübergestellt werden können. Wie bei [ 5 ] erfolgt die Berechnung für  $\nu = 0, 0,2$  und  $0,4$ , doch muß zusätzlich über das Verhältnis Höhe zu Länge  $s_2/s_1$  eine Annahme getroffen werden. Es stellt sich heraus, daß die Behinderung der Verschiebung  $u^2$  an der Einspannstelle bei verwendetem  $s_2/s_1 = 1$  nur noch einen kleinen Einfluß auf die am linken Rand  $y_1 = 0$  entstehenden Verschiebungen und Spannungen hat. Dies zeigen numerische Ergebnisse der linearen Theorie, die an Stelle von  $\sigma_2^2 = 0$  für  $s_2/s_1 = 1$  einen Maximalwert von  $\sigma_2^2/G = +0,004$  ( $\nu = 0,4$ ), d.h. rund 10 % des Betrages in Abb. 11-7, aufweisen.

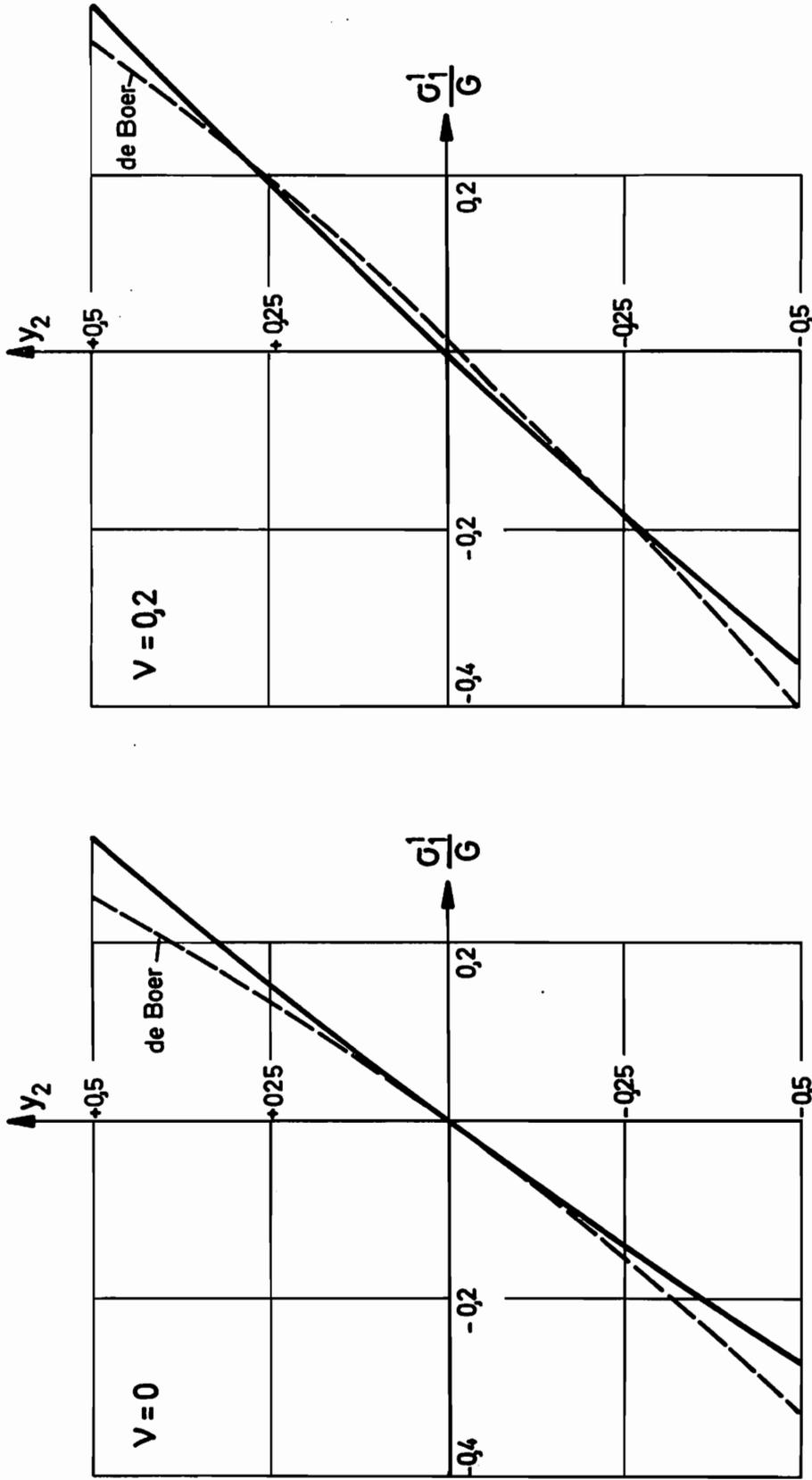


Abb. 11 - 4 Normalspannungen bei reiner Biegung

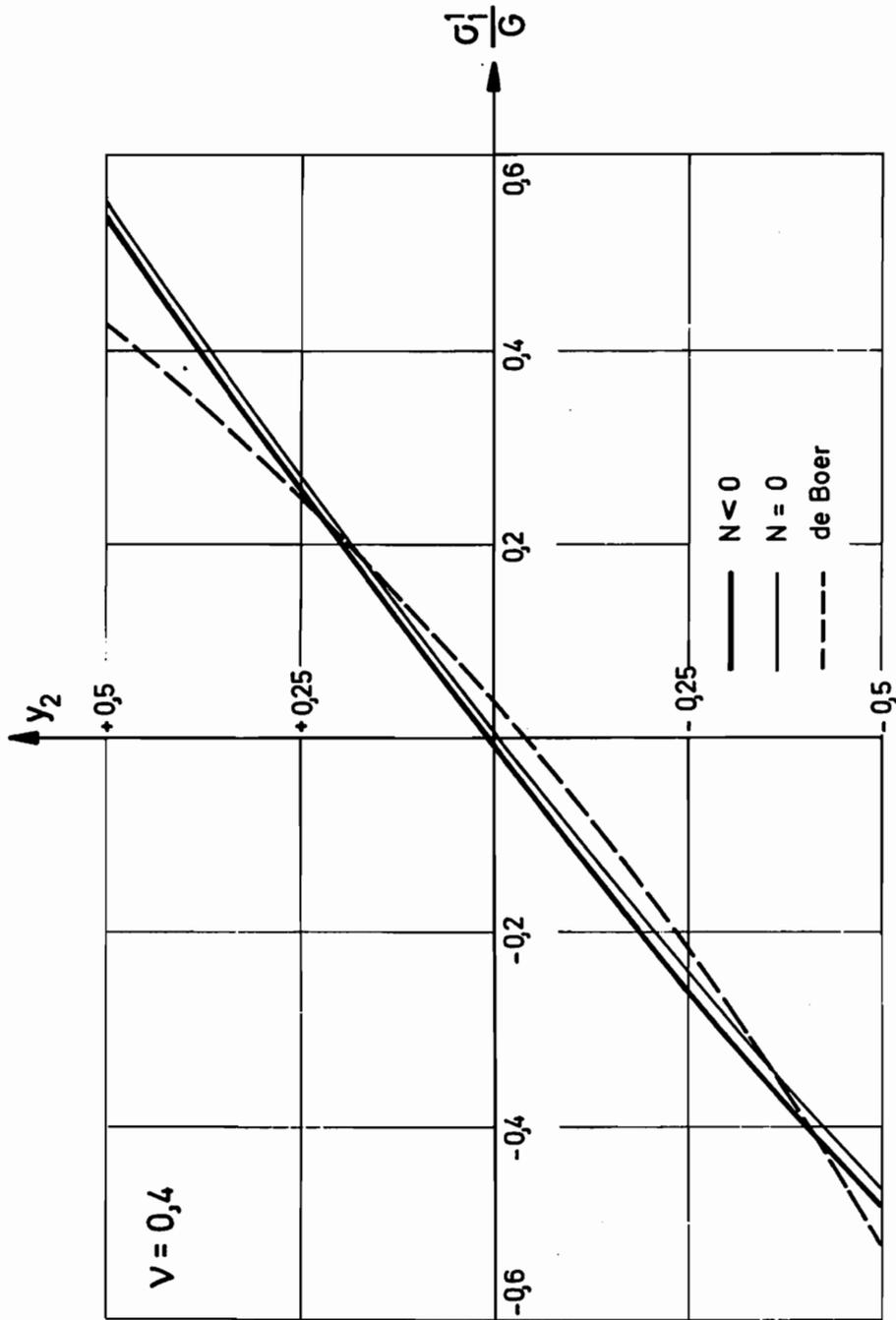


Abb. 11-5 Normalspannungen bei reiner Biegung

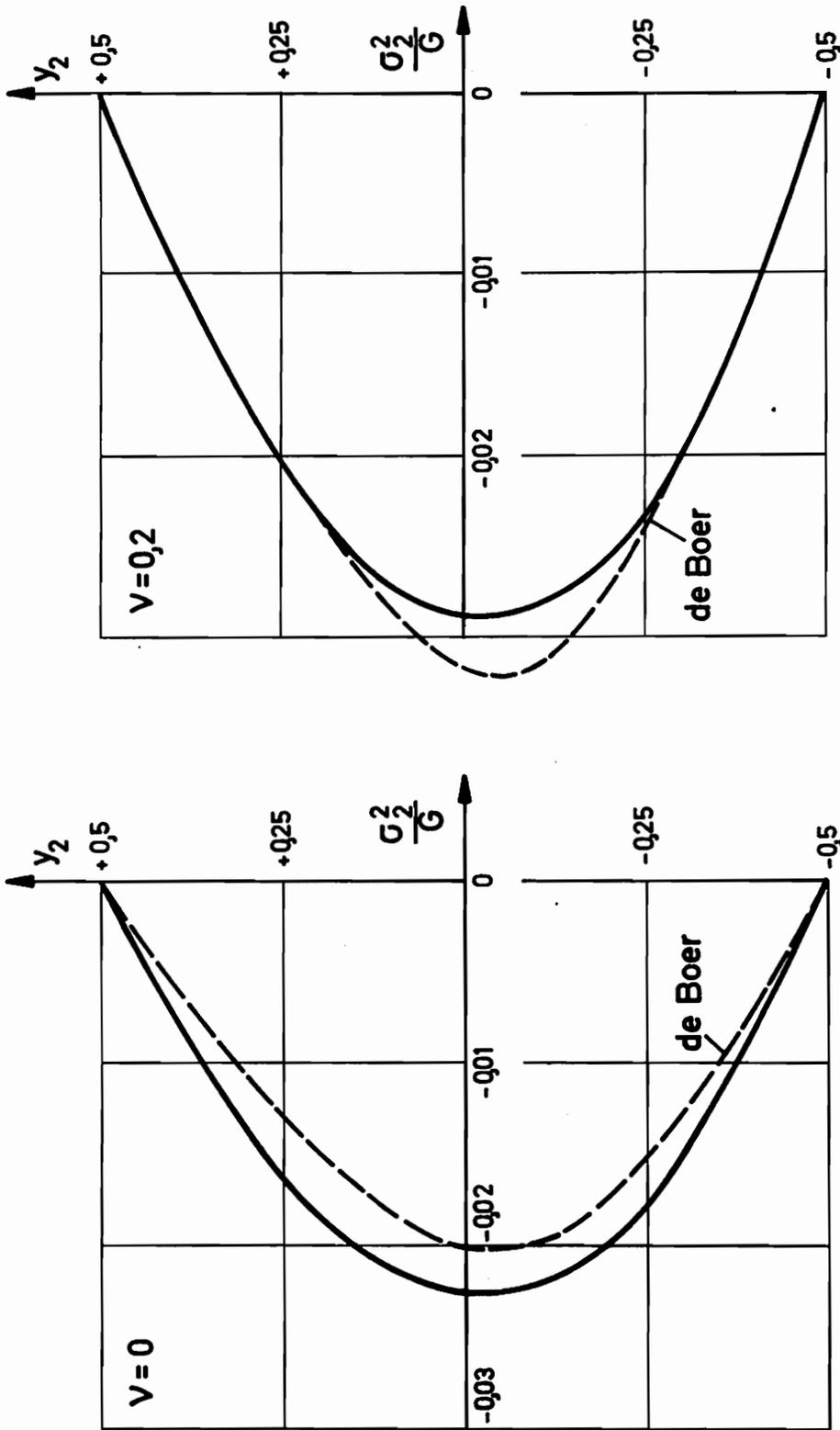


Abb. 11 - 6  $\sigma_2^2$  - Spannungen bei reiner Biegung

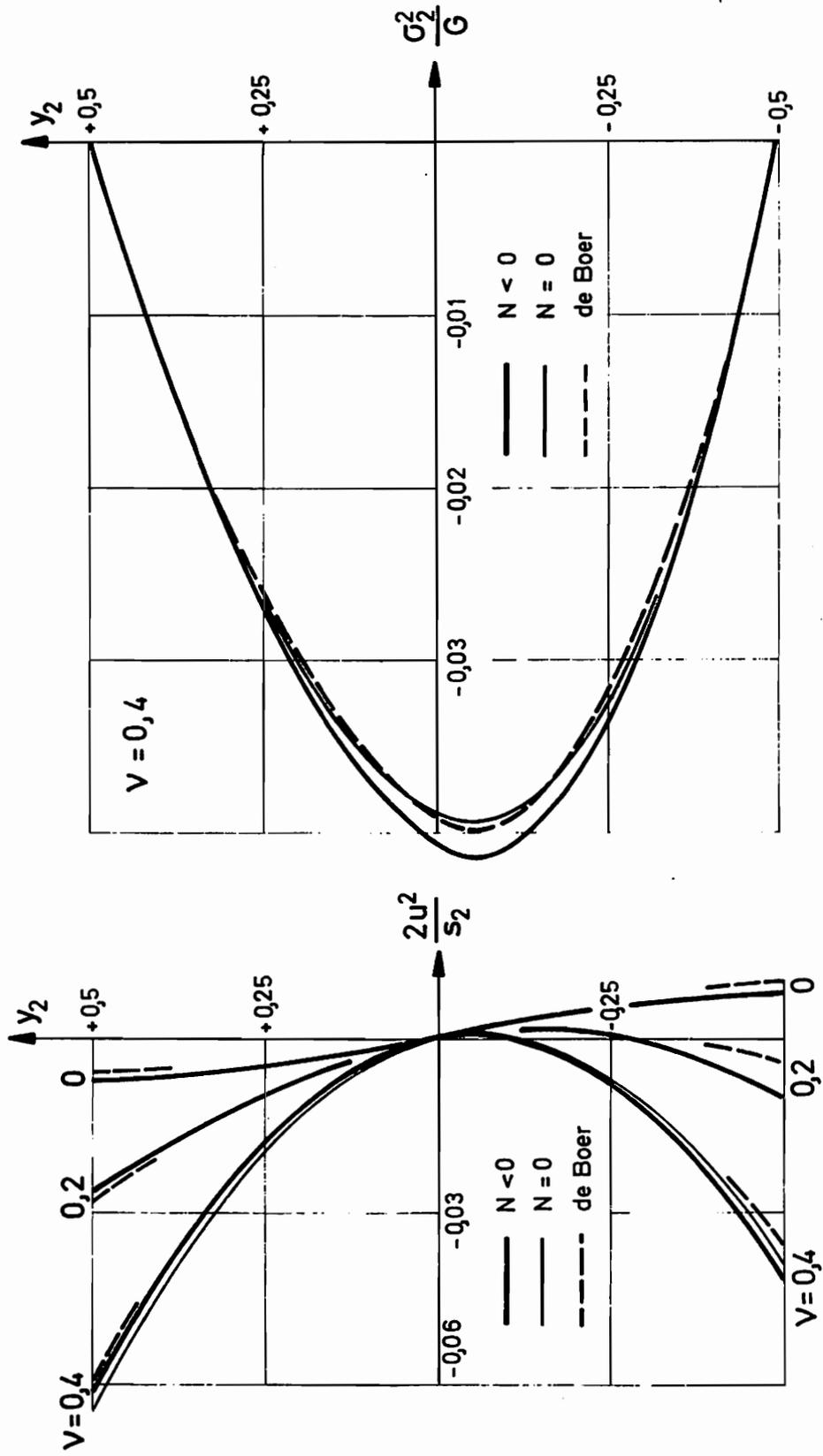


Abb. 11 - 7 Verschiebungen und  $\sigma_2^2$  Spannungen bei reiner Biegung

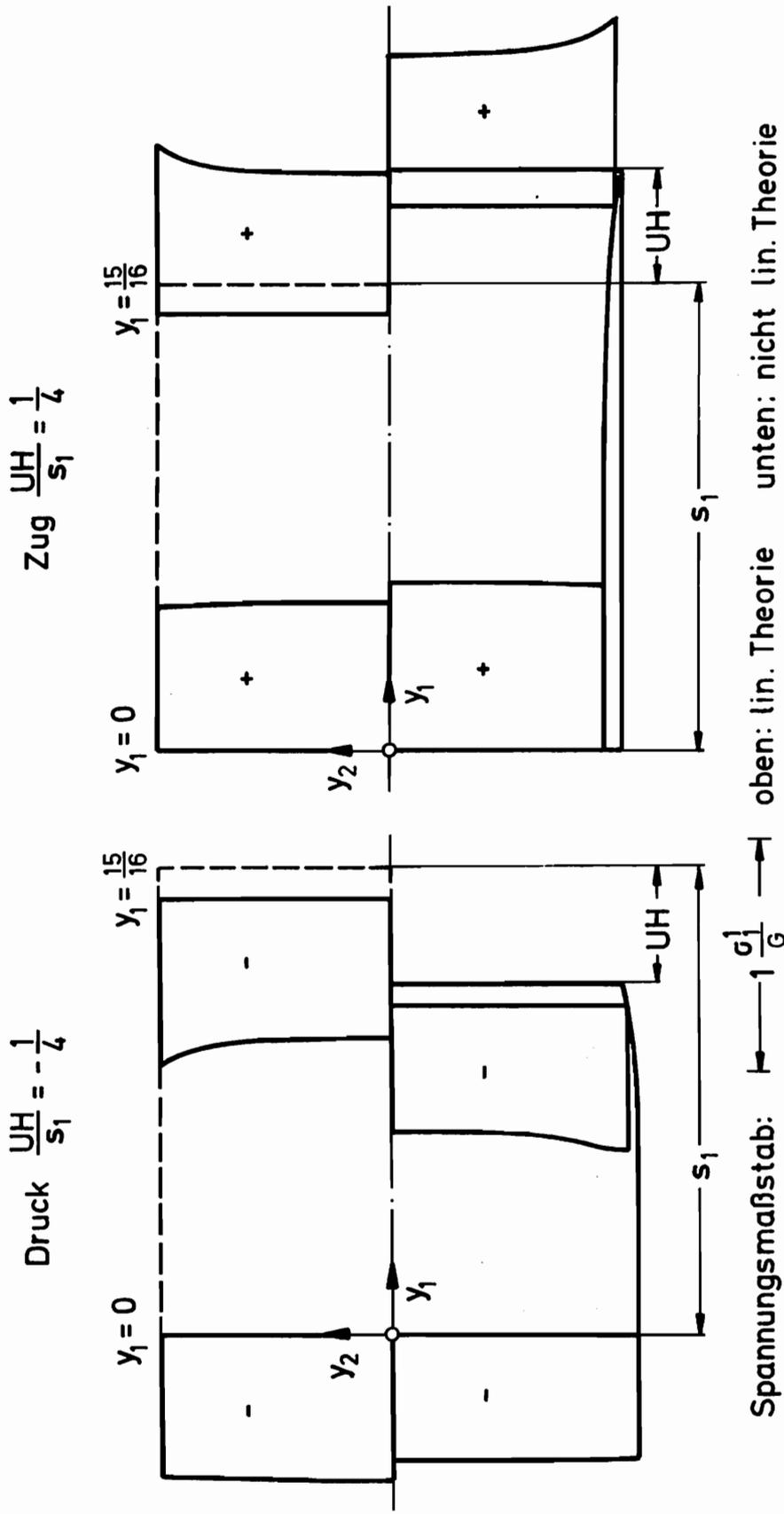
Bei allen Berechnungen für reine Biegung ( $m_1=16$ ,  $m_2=8$ , symmetrische Übergangsbedingungen) wird der rechte Rand so verschoben und verdreht, daß die Rasterlinie  $n_2 = 0$  ihre Länge beibehalten und kreisförmige Gestalt mit  $R = \frac{10}{3} s_2$  annehmen kann. Dies führt zu einer resultierenden Druckspannung in 1-Richtung ( $N < 0$ ), die für  $\nu = 0,4$  am größten ist. Die Funktionen  $N = 0$  in Abb. 11-5 und 11-7 zeigen, daß die Veränderung von  $\sigma_2^2$  nur gering ist, wenn durch entsprechendes Auseinanderrücken von rechtem und linkem Rand die resultierende Normalkraft bei  $y_1 = 0$  zum Verschwinden gebracht wird.

Die Abweichungen der Spannungen  $\sigma_1^1$  von den Werten DE BOERS in den Abbildungen 11-4 und 11-5 sind darauf zurückzuführen, daß DE BOER den Henckyschen Verzerrungstensor (5.1) verwendet, während hier vom Almansi-Hamel'schen Verzerrungstensor (5.6) ausgegangen wird. Das bekannte unterschiedliche Verhalten beider Verzerrungstensoren im Zugversuch (vgl.(5.5) und (5.19)) ließ erwarten, daß es zu diesen Abweichungen in Zug- und Druckzone kommt, doch überrascht die gute Übereinstimmung der durch die nichtlineare Theorie erst erfaßbaren radialen Druckspannung  $\sigma_2^2$ , deren Maxima wie bei DE BOER [5] in Richtung Druckzone wandern. Da in [5] keine weiteren Querkontraktionszahlen behandelt werden, muß eine Antwort auf die etwas unregelmäßige Veränderlichkeit von  $\sigma_2^2$  in Abhängigkeit von  $\nu$  in den Abbildungen 11-6 und 11-7 offen bleiben. In Abb. 11-7 (links) sind von DE BOER nur die Werte  $u^2$  an den Rändern bekannt.

#### 11.4 Zug- und Druckbeanspruchung

In Abb. 11-8 wird bei der Darstellung der Ergebnisse die bei reiner Zug- oder Druckbeanspruchung vorhandene Symmetrie zur Rasterlinie  $n_2 = 0$  ausgenutzt. Die obere Bildhälfte stellt gestrichelt die Ausgangsabmessungen für  $s_2/s_1 = 1$  dar, die untere Bildhälfte gibt den verformten Zustand für  $UH/s_1 = \mp 1/4$  maßstäblich wieder. Ferner sind die Spannungen  $\sigma_1'/G$  in Abhängigkeit von  $y_2$  an zwei Stellen von  $y_1$  eingetragen, oben die der linearen Elastizitätstheorie, unten die der hier verwendeten Theorie endlicher Verzerrungen. In der Ecke, die von Einspannstelle und freiem Rand gebildet wird, sind Spannungserhöhungen zu beobachten, sobald  $\nu > 0$  (hier  $\nu = 0,2$ ) ist. Die durch Multiplikation mit der verformten Fläche resultierende Normalkraft  $\int \sigma_1' dA$  bleibt von  $y_1$  unabhängig. Dies kann als weitere Kontrolle für die richtige Funktion des Programmes angesehen werden.

Die Abbildungen 11-9 und 11-10 geben über Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  Auskunft, die bei reinem Zug oder reinem Druck entstehen. Die Lösungen für Druck sind aus dem 3. Quadranten durch Spiegelungen um die beiden Achsen im 1. Quadranten zu finden und durch die Bezeichnung „Druck“ erkenntlich. Die unmittelbar durch vorgegebenes UH entstehende Hauptspannung wird mit  $\sigma_1$ , die indirekt über die Querkontraktion auftretende Hauptspannung mit  $\sigma_2$  bezeichnet. Für die beiden oberen Bilder gilt  $\nu = 0,2$ , für die beiden unteren  $\nu = 0,4$ , wobei unten der Maßstab in beiden Richtungen doppelt so groß ist. Die durchgehend ausgezogenen Kurven enden jeweils, sobald Konvergenz des Verfahrens ausbleibt, während die unterbrochenen Kurven linear veränderlich sind und zur linearen Elastizitätstheorie gehören.



Spannungsmaßstab:  $1 \frac{\sigma_1}{G}$  oben: lin. Theorie unten: nicht lin. Theorie

Abb.11-8 Spannungen bei Druck und Zug  $v = 0,2$

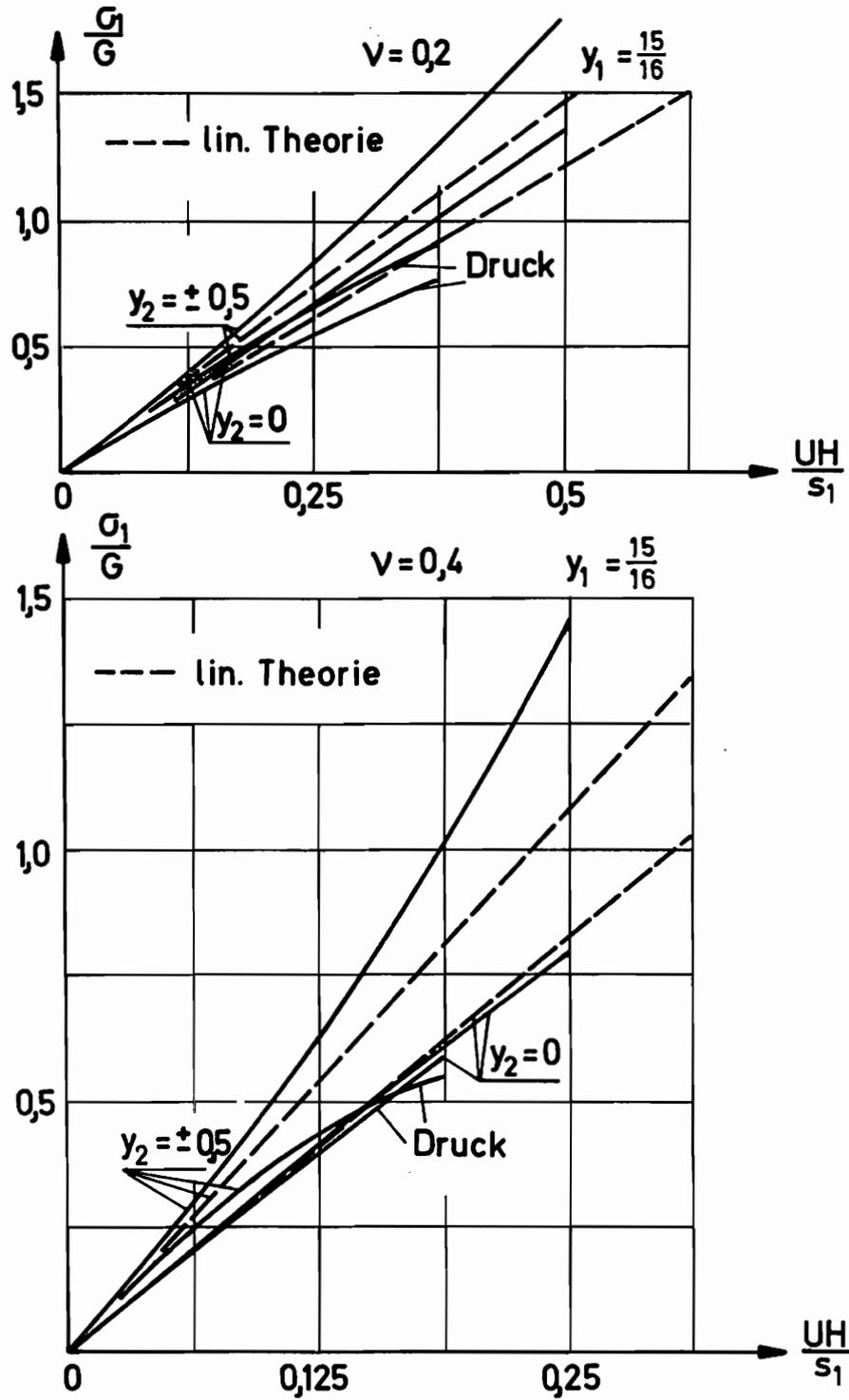


Abb. 11-9 Hauptspannungen  $G_1$

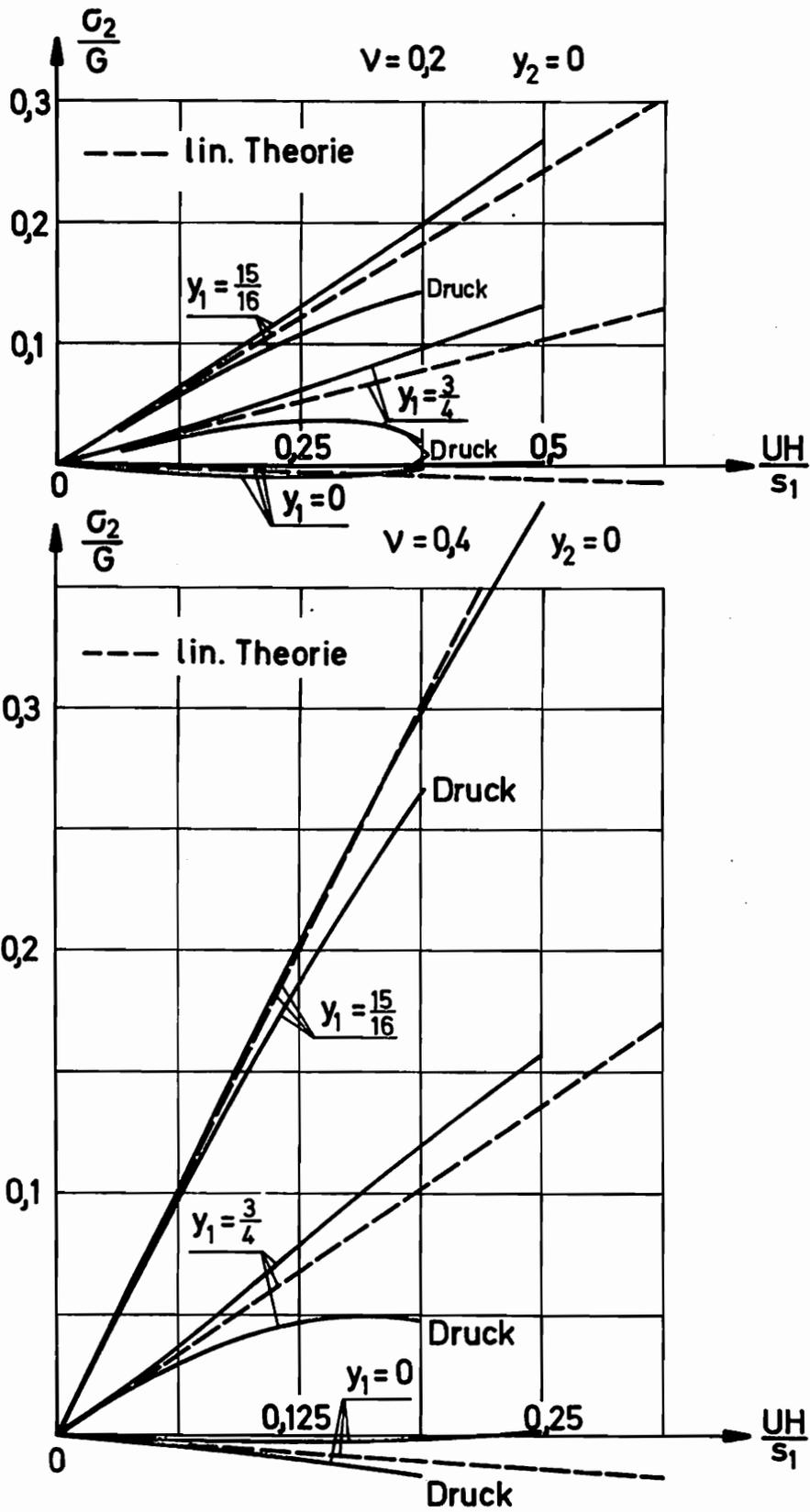


Abb. 11 - 10 Hauptspannungen  $G_2$

### 11.5 Scherung

Die Abbildungen 11-11 bis 11-16 geben die vollständige Lösung wieder, die zu einem mit  $UV/s_1 = 1/4$  gesicherten Kontinuum der Abmessung  $s_2/s_1 = 1$  und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0,4$  gehört. Die unterbrochenen Kurven stellen dabei die Lösungen der linearen Elastizitätstheorie dar. Die Abweichungen von diesen Kurven sind bereits beträchtlich, und es ist mit  $UV/s_1 = 1/4$  bei  $\nu = 0,4$  von der Konvergenz des Verfahrens her nahezu der Größtwert des Schermaßes erreicht. Mit  $m_1 = 32$  und  $m_2 = 16$  kommt ein Rechenraster zum Einsatz, das mit hohem numerischen Aufwand auch Lösungen in der Nähe der Einspannstelle wiedergibt. Die Kurven für  $y_1 = 31/32$  weichen in Bild 11-11 bis 11-15 deutlich von denen für andere dargestellte  $y_1$ -Werte ab.

In den Abbildungen 11-11 bis 11-15 handelt es sich um raumbezogene Größen entsprechend den Gleichungen (8.4) bis (8.9). Es ist also zu beachten, daß in den Abbildungen 11-11 bzw. 11-12  $\sigma_1^1$  bzw.  $\sigma_2^2$  für jeden Punkt am raumfesten Koordinatensystem  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  orientiert ist. Die in Abb. 11-13 dargestellten Spannungen berechnen sich wegen  $\varepsilon_3^3 = 0$  aus  $\sigma_3^3 = \nu(\sigma_1^1 + \sigma_2^2)$ . Abb. 11-14 zeigt, wie die Schubspannungen  $\sigma_2^1$  in der Nähe der Einspannstelle ihre Maximalwerte nicht mehr bei  $y_2 = 0$ , sondern am oberen bzw. unteren Rand aufweisen (vgl. Text zu Abb. 11-2). In Abb. 11-15 sind jeweils die algebraisch kleineren Spannungsordinaten (linke Kurven) diejenigen Größen, die entlang der nach Abb. 11-16 fallenden Trajektorien wirken. Die Differenzen in Abb. 11-15 zeigen, daß für die maximale Schubbeanspruchung  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  das gleiche gilt wie für  $\sigma_2^1$ .

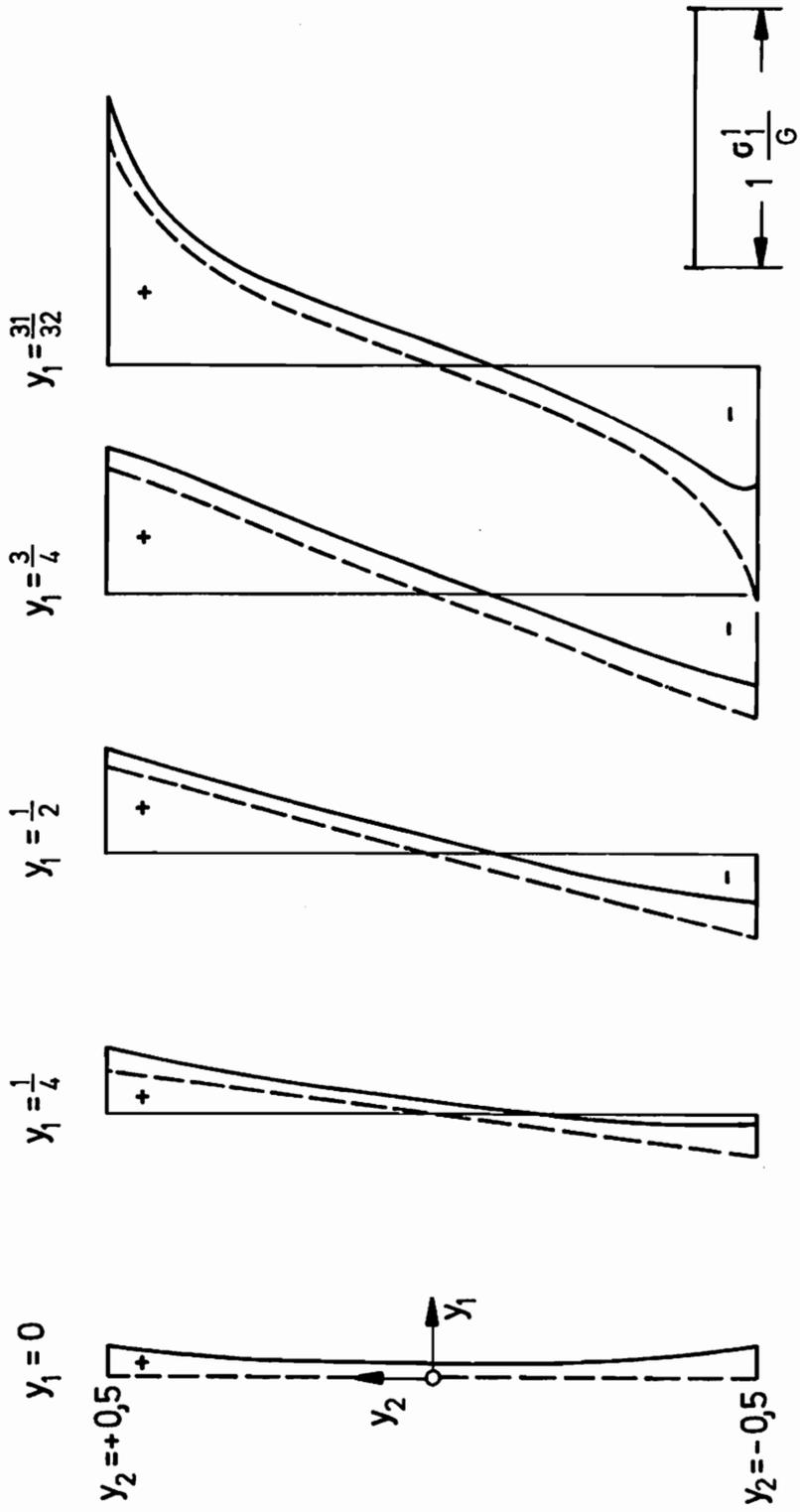


Abb. 11 - 11 Normalspannungen  $\sigma_1$  bei Scherung

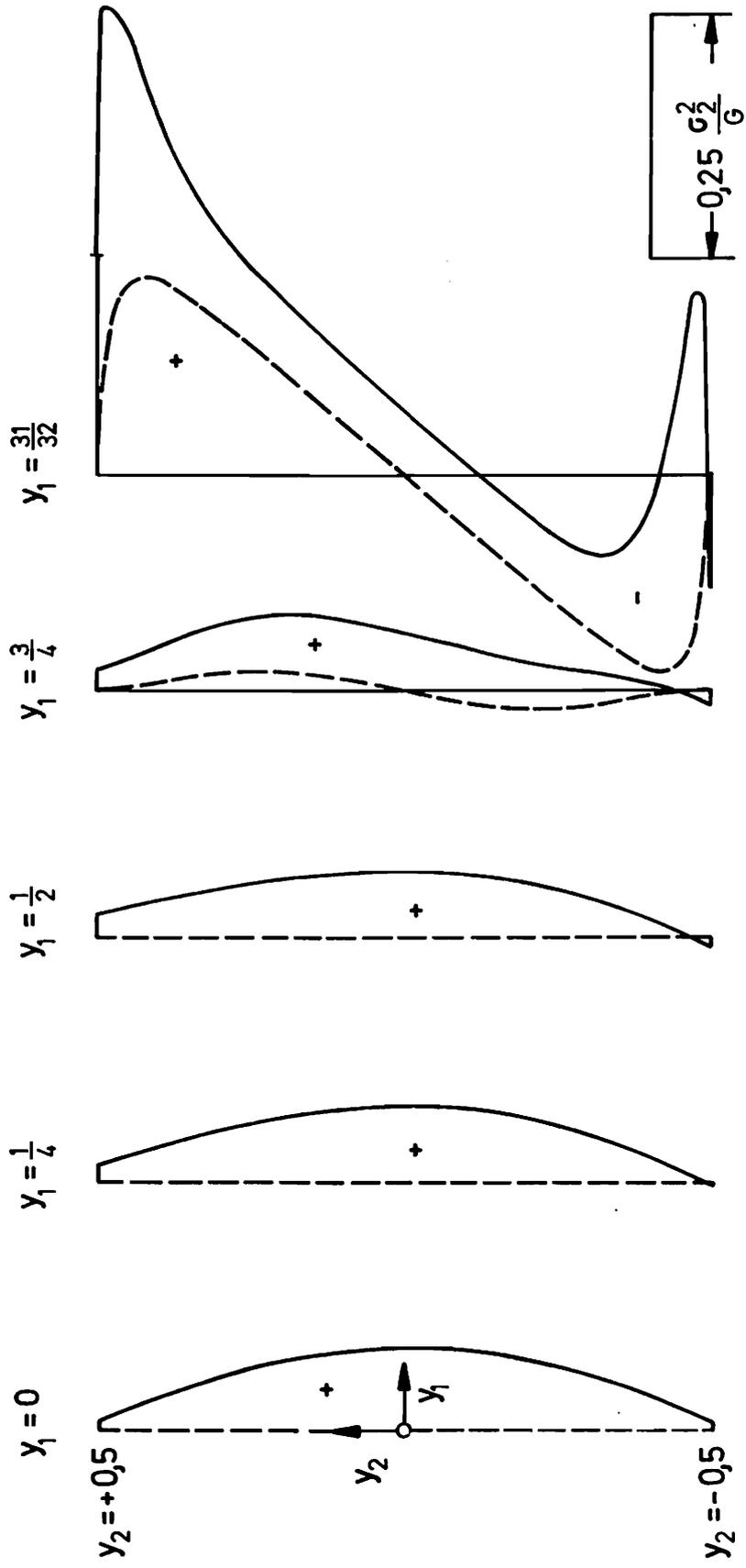


Abb. 11 - 12 Normalspannungen  $\sigma_2^2$  bei Scherung

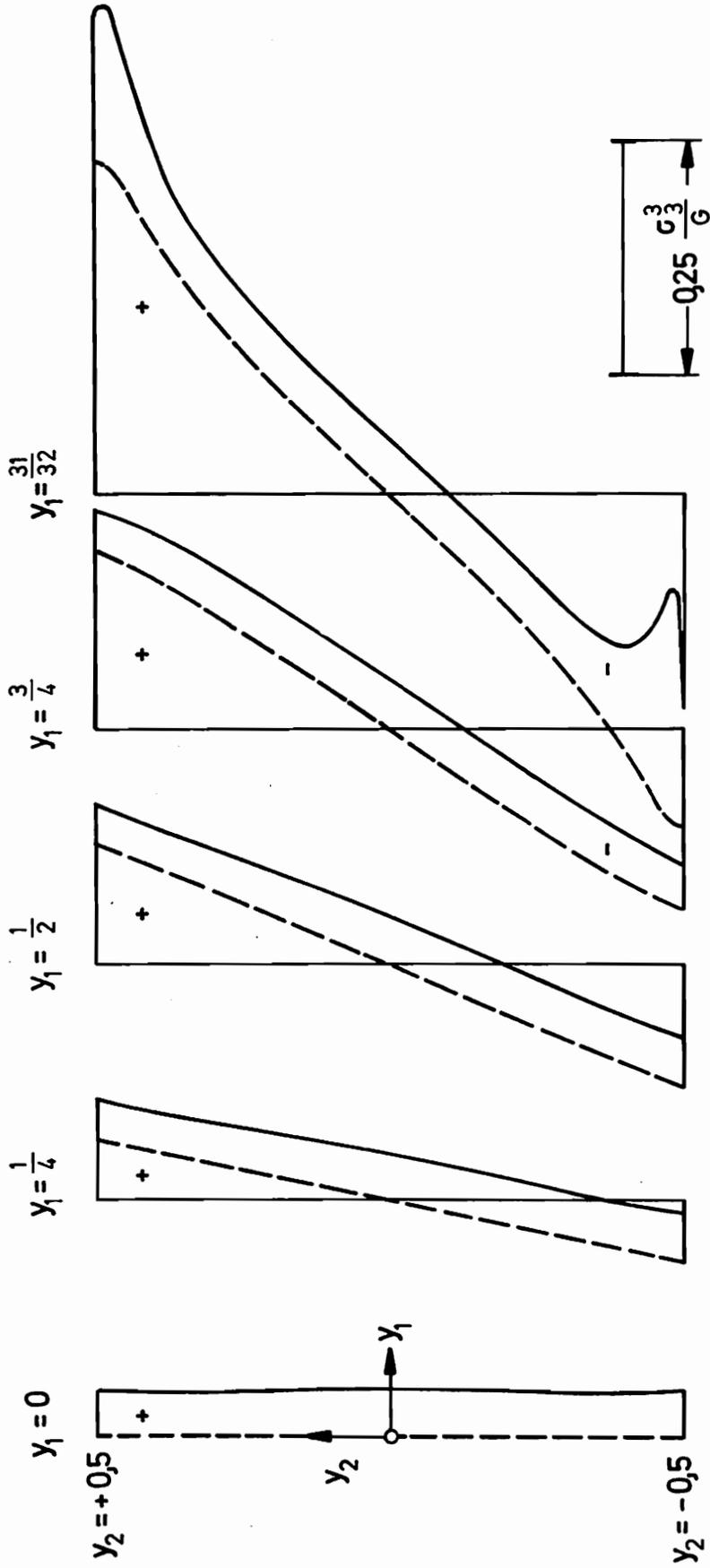


Abb. 11-13 Normalspannungen  $G_3^3$  bei Scherung

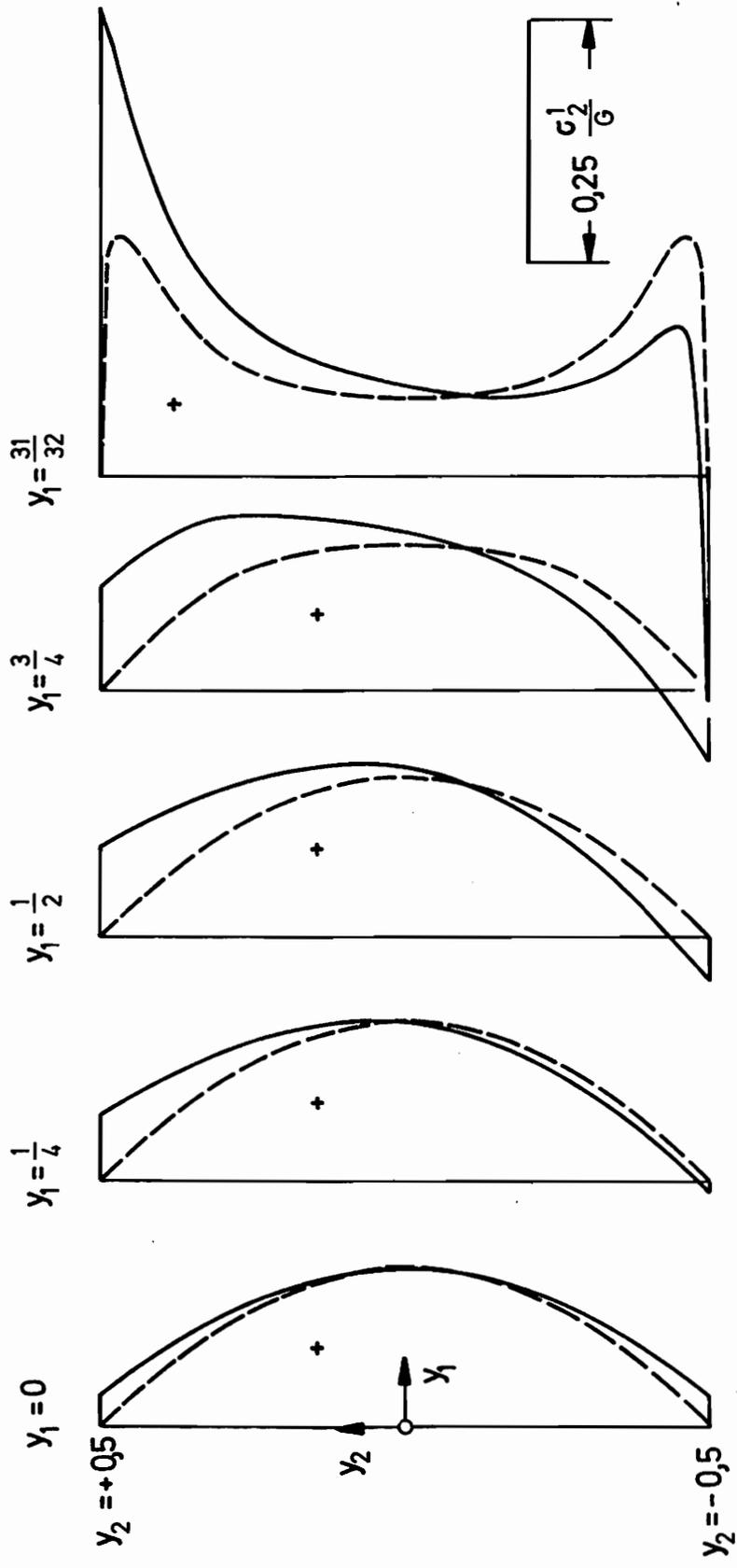


Abb. 11 - 14 Schubspannungen  $G_2^1$  bei Scherung

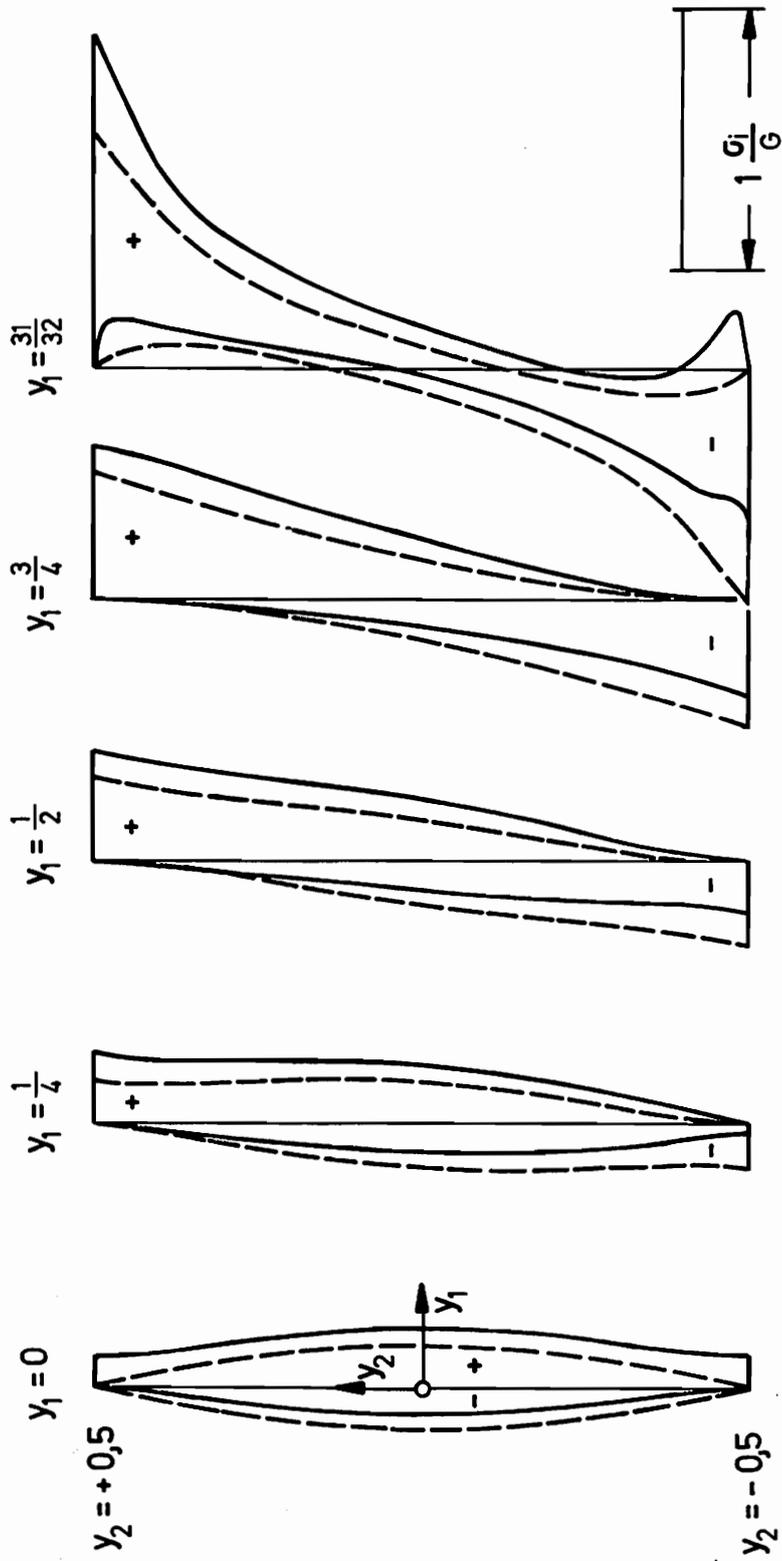


Abb. 11 - 15 Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bei Scherung

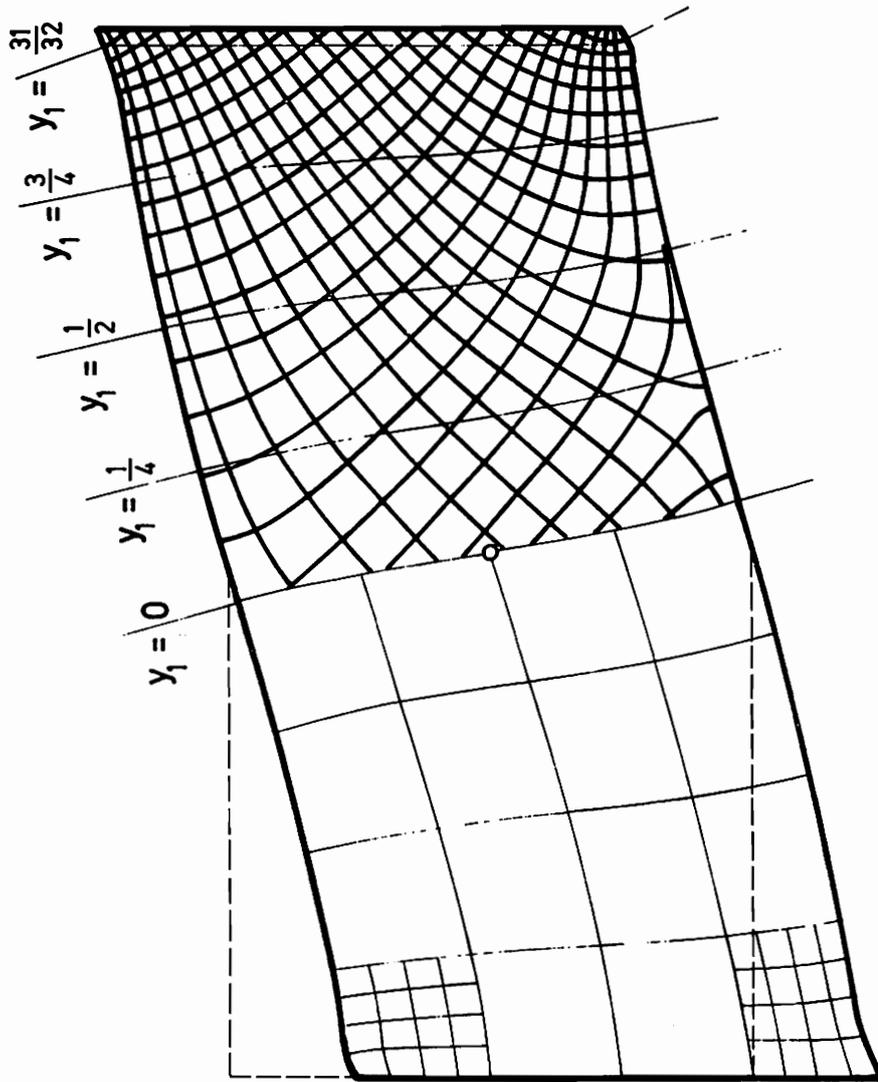


Abb.11 - 16 Verschiebungen und Hauptspannungstrajektorien  
bei reiner Scherung

Die Abbildungen 11-17 und 11-18 geben ein Bild von der Zunahme der randparallelen Hauptspannungen  $\sigma_1$  bzw. der maximalen Schubspannung  $\sigma_2^1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  für einige repräsentative Rasterpunkte bei Steigerung des Schermaßes  $UV/s_1$ . Für die beiden oberen Bilder gilt  $\nu = 0,2$ , für die beiden unteren in 2-fach überhöhtem Maßstab beider Achsen  $\nu = 0,4$ . Das Verfahren konvergiert außerhalb der dargestellten Bereiche nicht. Die Ziffern „3“ und „4“ beziehen sich auf die analytischen Lösungen nach der Tabelle in Kapitel 11.2. Die gestrichelte Kurve stellt die Lösung der linearen Theorie dar und ist wie die Kurven „3“ und „4“ linear veränderlich. Genau wie bei reinem Zug oder Druck nach Abb. 11-9 und 11-10 zeigt sich für Scherung in Abb. 11-17 und 11-18 mit zunehmender Verschiebung der Einspannstelle auch zunehmende Abweichung der sich ergebenden Spannungen von den Werten, die die lineare Elastizitätstheorie bei Erfüllung des Gleichgewichtes am unverformten Element liefert.

Abb. 11-19 gibt nähere Auskunft über die Spannungen der Abb. 11-17 und 11-18, wenn die Querkontraktionszahl verändert wird. Stark zu- oder abnehmende Ordinaten für  $\nu > 0,4$  deuten bereits an, daß sich ab  $\nu > 0,45$  Divergenz einstellt. Die gestrichelten zur linearen Elastizitätstheorie gehörenden Kurven zeigen ebenfalls starke Veränderlichkeit ab  $\nu > 0,4$ , wobei die Ursache hierfür bereits am Ende des Abschnittes 10.1 auf numerische Schwierigkeiten zurückgeführt wurde. Um die Untersuchung der Bereichsgrenzen von  $\nu$  noch etwas zu vertiefen, sind in Abb. 11-20 für den einfachen Fall der Zugbeanspruchung  $UH/s_1 = 1/4$  die beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auch für negative  $\nu$ -Werte bis zur in Abschnitt 4 angegebenen Grenze  $\nu = -1$  aufgetragen. Ein vorzeitiges Versagen stellt sich dort nicht ein.

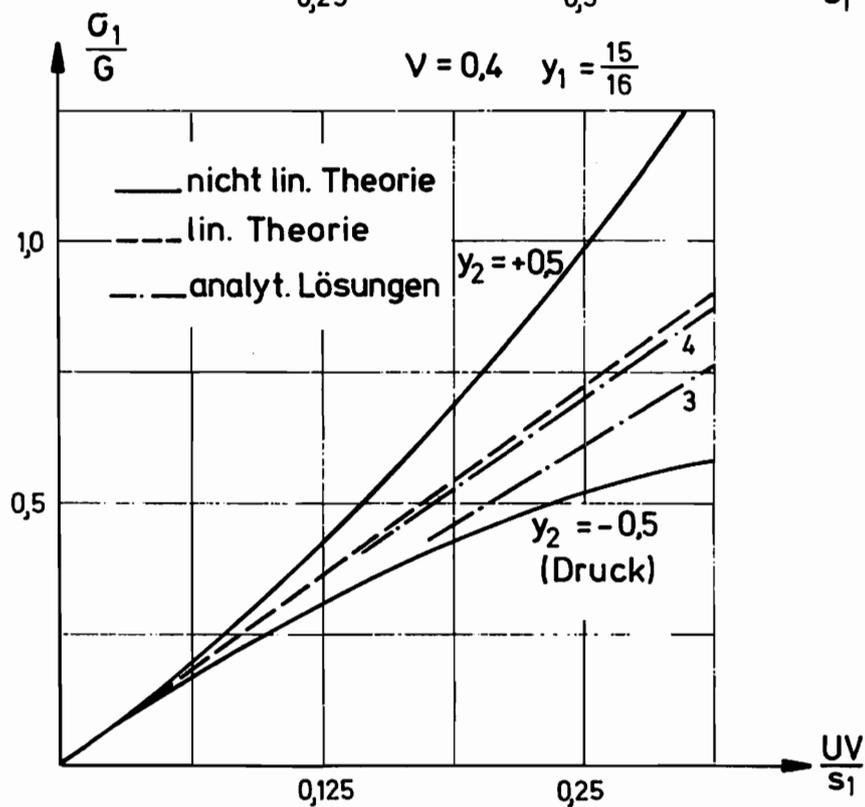
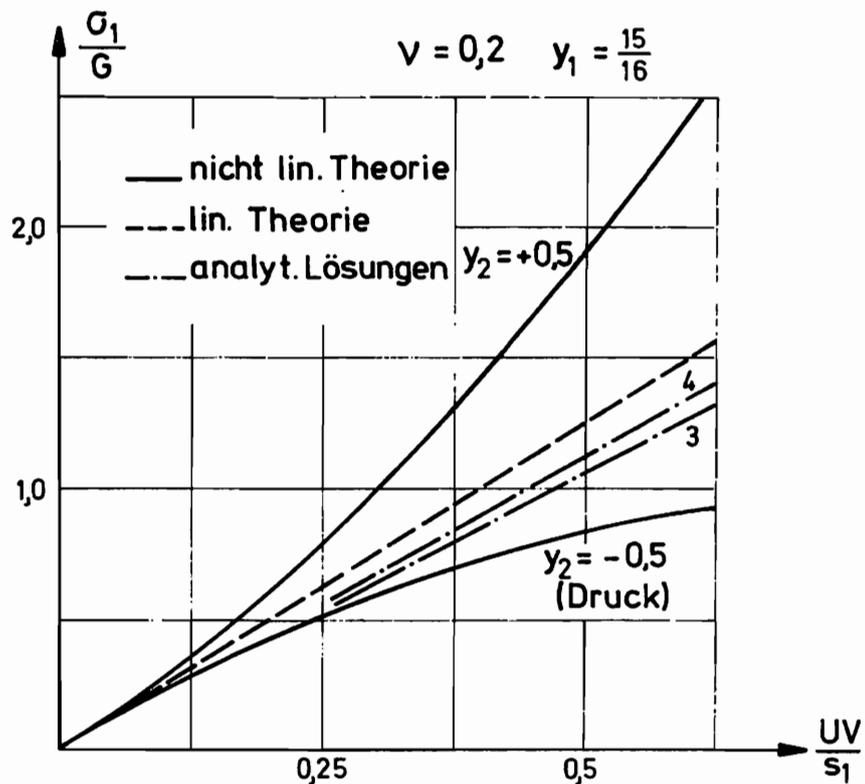


Abb. 11 - 17 Hauptspannungen

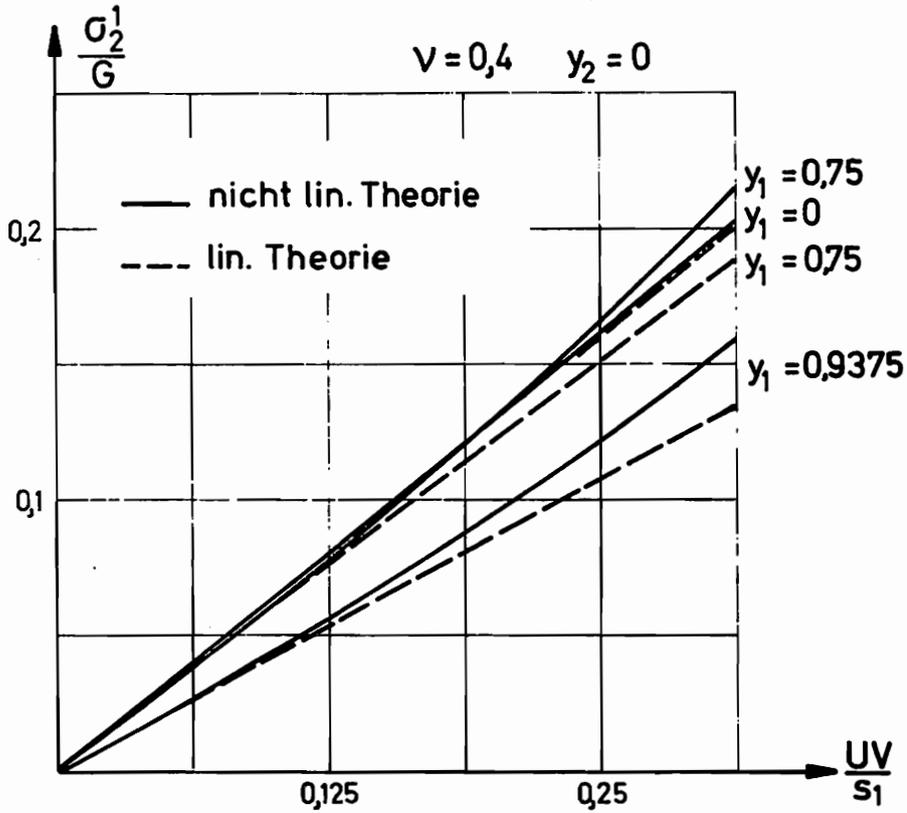
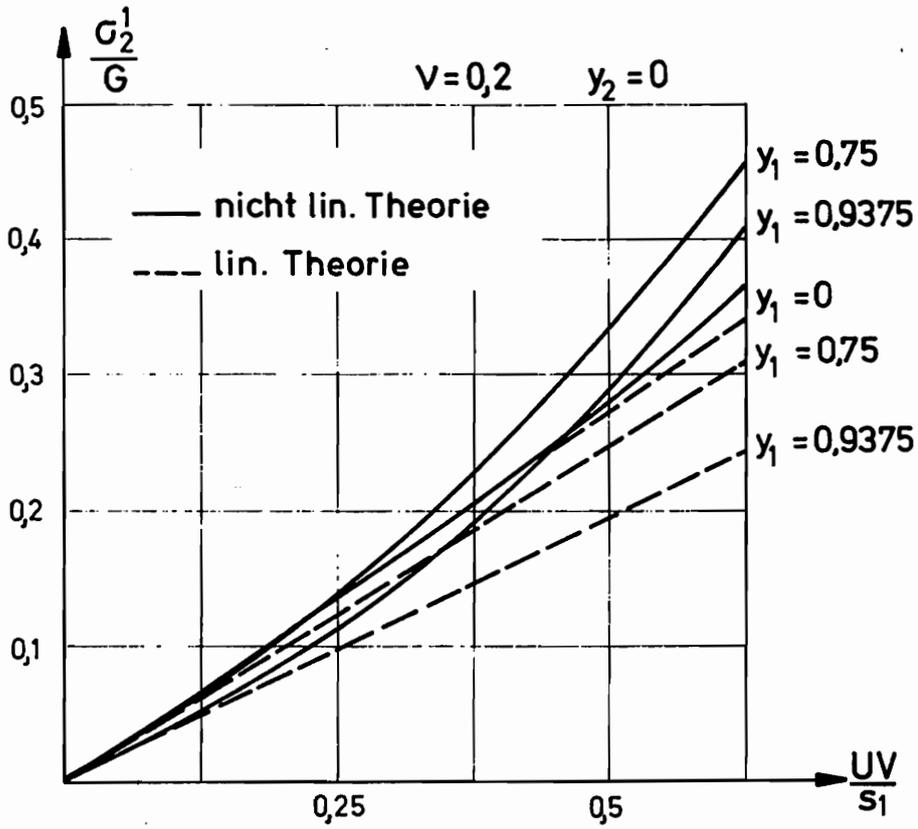


Abb. 11-18 Max. Schubspannungen

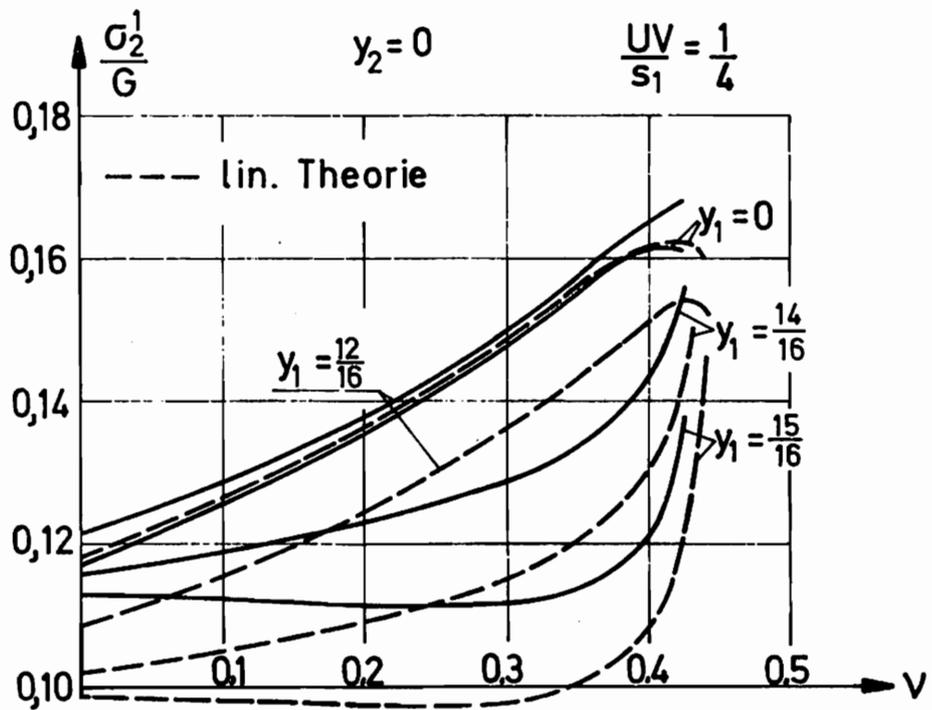
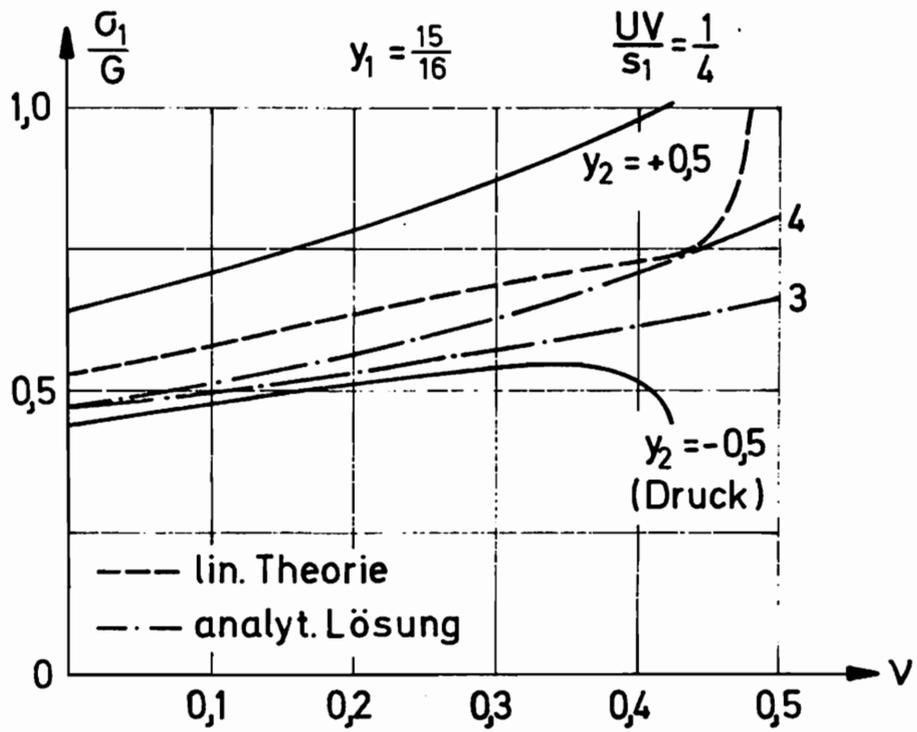


Abb. 11-19 Spannungen bei Steigerung von  $v$

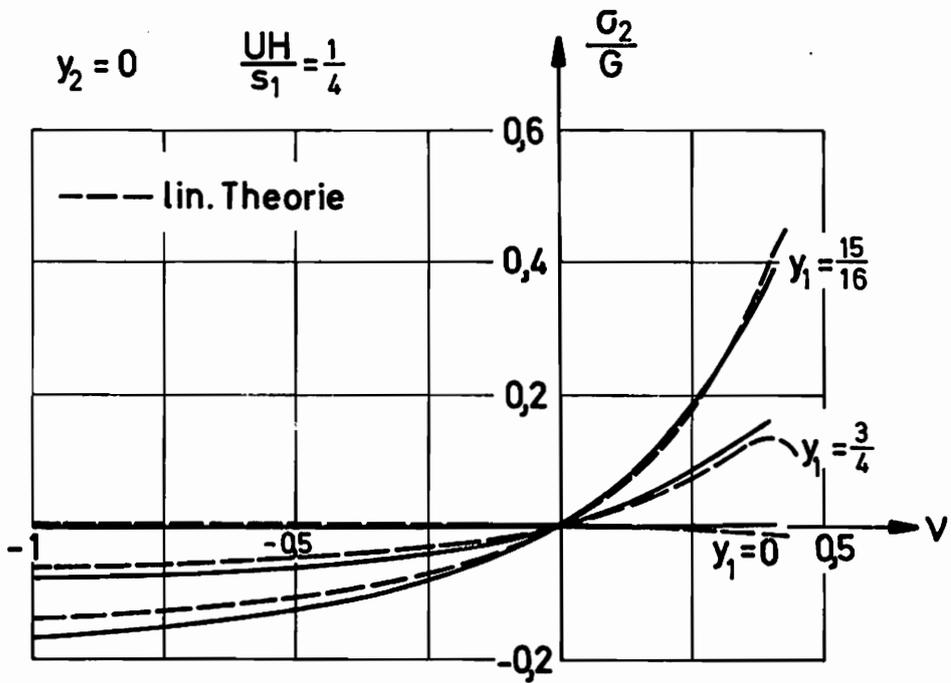
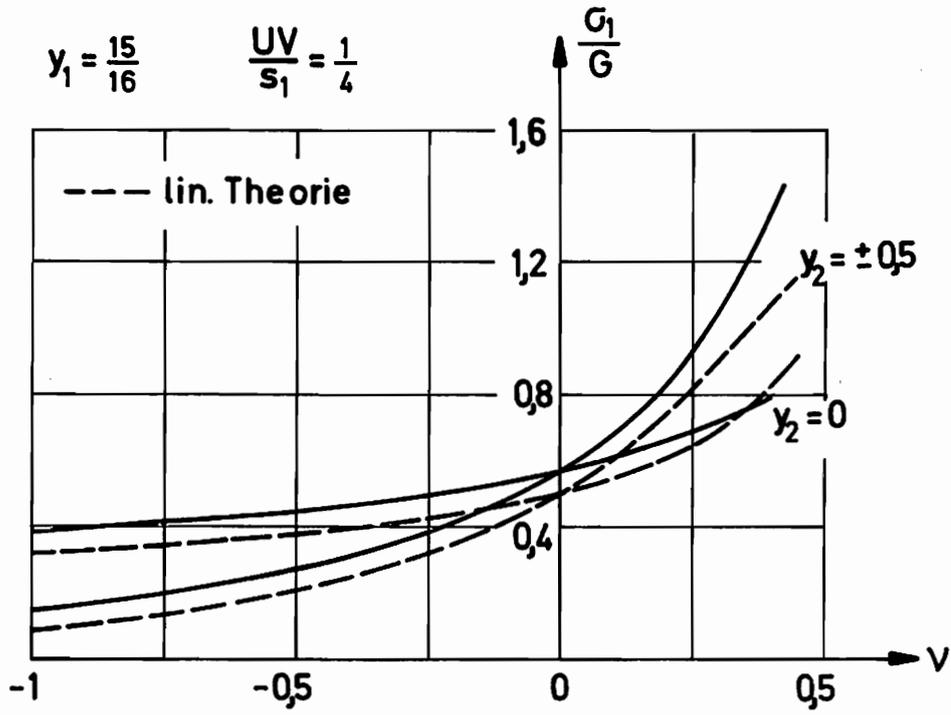


Abb: 11 - 20 Mathematische Grenzen von  $v$

Abb. 11-21 (oberes Bild) stellt die sich nach Abschnitt 6.2 aus dem Kirchhoffschen Spannungstensor  $S_{ij}^i$  ergebende randparallel wirkende Hauptspannung derjenigen des Cauchy-schen Spannungstensors nach Abschnitt 6.1 und Abb. 11-19 (oberes Bild) gegenüber. Im unteren Bild der Abb. 11-21 wird entsprechender Vergleich für Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bei  $\nu = 0,2$  und  $0,4$  über die Höhe des Bleches in der Nähe der Einspannstelle durchgeführt. Die Abweichungen halten sich in Grenzen; teilweise decken sich die zu vergleichenden Funktionen. Es liegt die Vermutung nahe, daß weder die Näherung  $\frac{2}{3} \approx 1$  noch der Umstand, sich für einen der beiden genannten Spannungstensoren entscheiden zu müssen, zu großen Fehlern führt.

Die Abbildungen 11-22 und 11-23 zeigen, welche Veränderungen für Verschiebungen und Hauptspannungstrajektorien nach Abb. 11-16 eintreten, wenn  $UV/s_1$  um  $1/16$  auf  $3/16$  verringert und  $UH/s_1 = -1/16$  bzw.  $UH/s_1 = +1/16$  zusätzlich aufgebracht wird. Die sich bei reiner Scheurung in Abb. 11-16 wegen der Nichtlinearität der Theorie am unteren Rand bei  $y_1 \approx +3/16$  - und nicht bei  $y_1 = 0$  - befindliche singuläre Stelle für Hauptspannungsrichtungen wandert in Abb. 11-22 nach links bis  $y_1 \approx -4/16$  und in Abb. 11-23 nach rechts bis  $y_1 \approx +9/16$ . Die Ausstülpung des Materials (s. Ecke links oben) in Abb. 11-22 verstärkt sich gegenüber Abb. 11-16, die Einschnürung (s. Ecke links unten) in Abb. 11-23 ebenfalls.

### 11.6 Einfluß der Rastergröße

Mit den Bildern 11-24 und 11-25 wird der Frage nachgegangen in welchem Maße sich Spannungen ändern, wenn die Rasterteilung verfeinert wird. Mit  $y_1 = y_2 = 0$  erfolgt

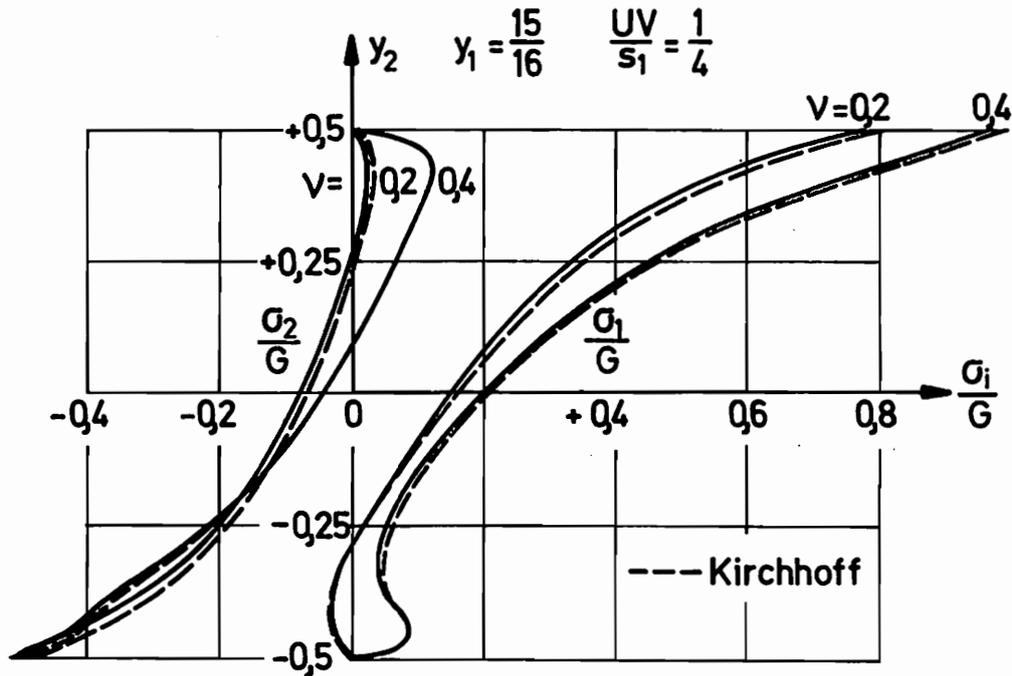
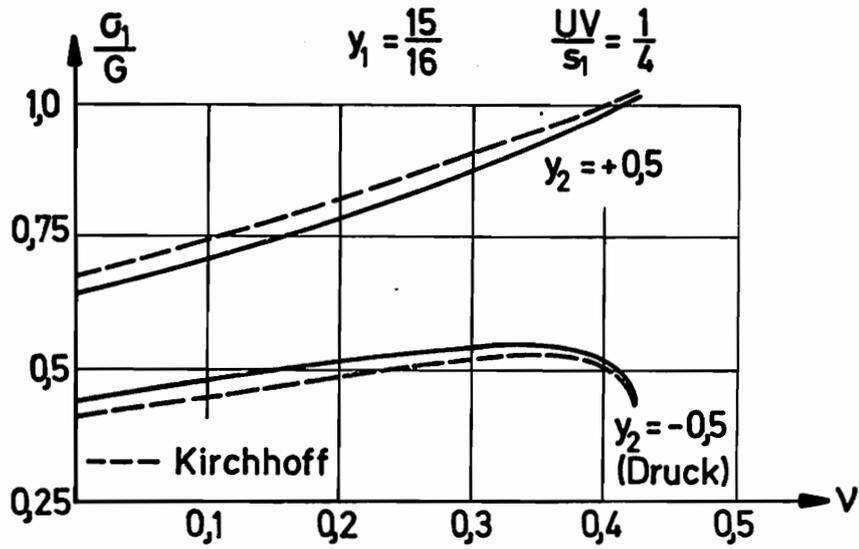


Abb. 11 - 21 Vergleich mit Kirchhoffschen Spannungen

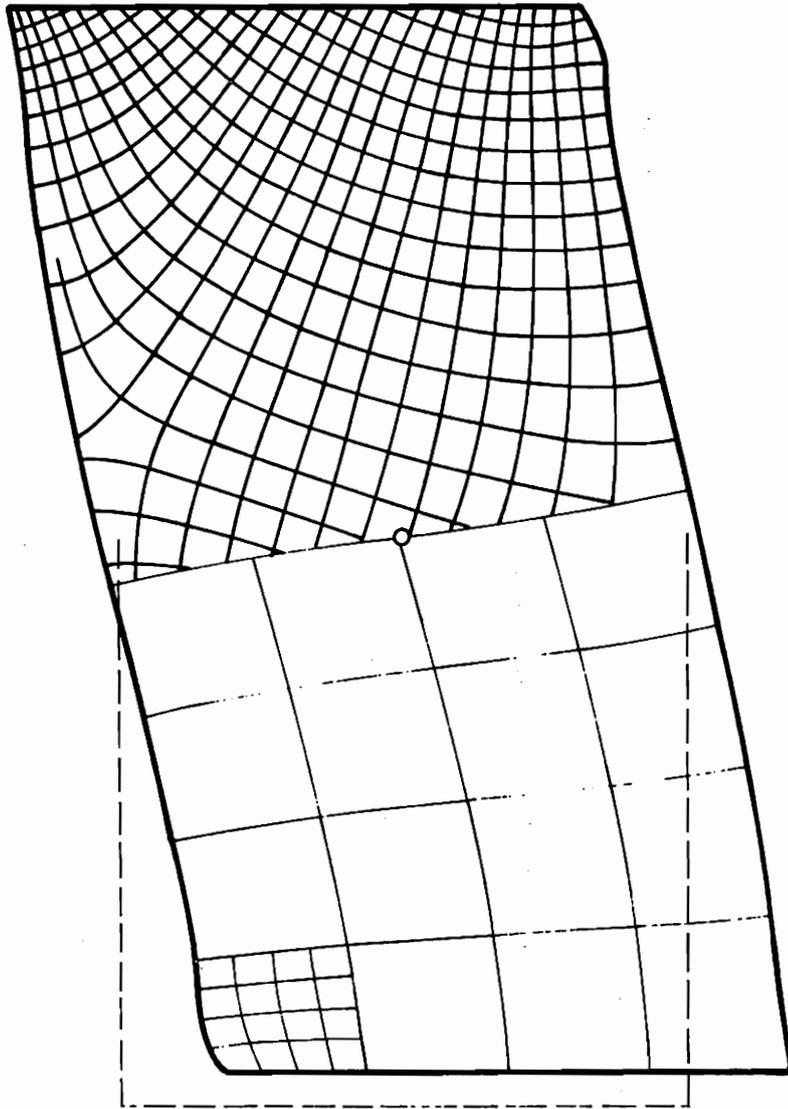


Abb. 11 - 22 Verschiebungen und Hauptspannungstrajektorien  
bei Scherung und Druck

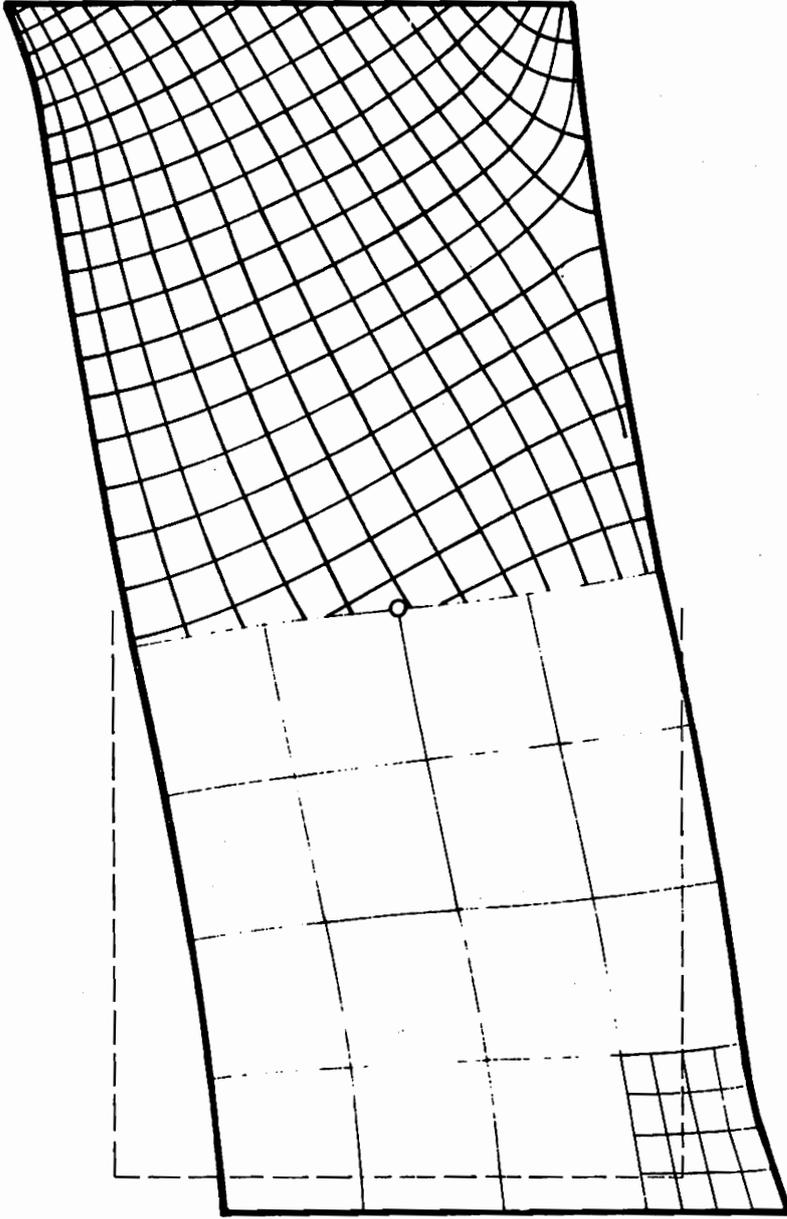


Abb. 11-23 Verschiebungen und Hauptspannungstrajektorien  
bei Scherung und Zug

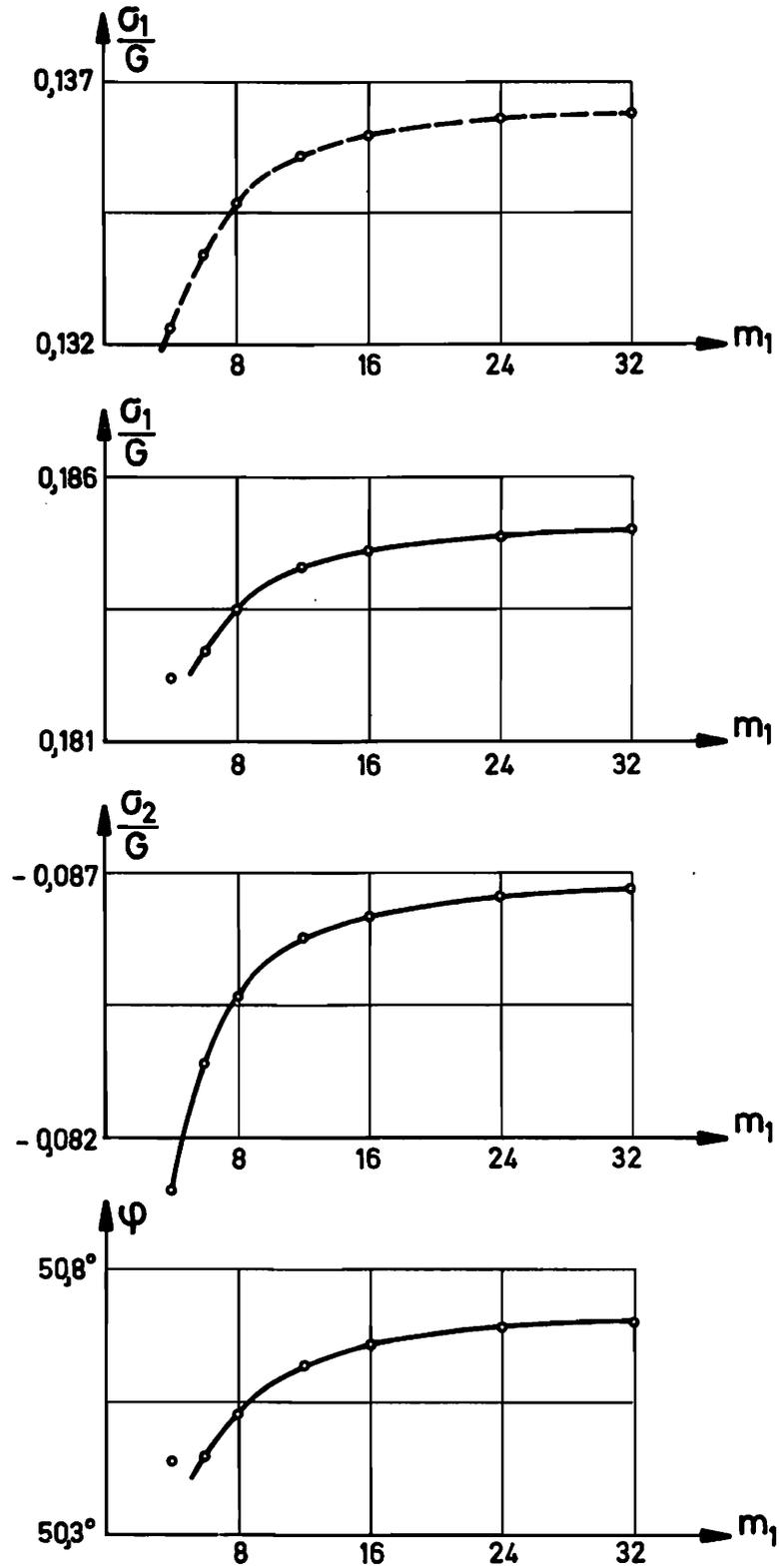


Abb. 11 - 24 Einfluß der Rastergröße ( $\nu = 0,2$ )

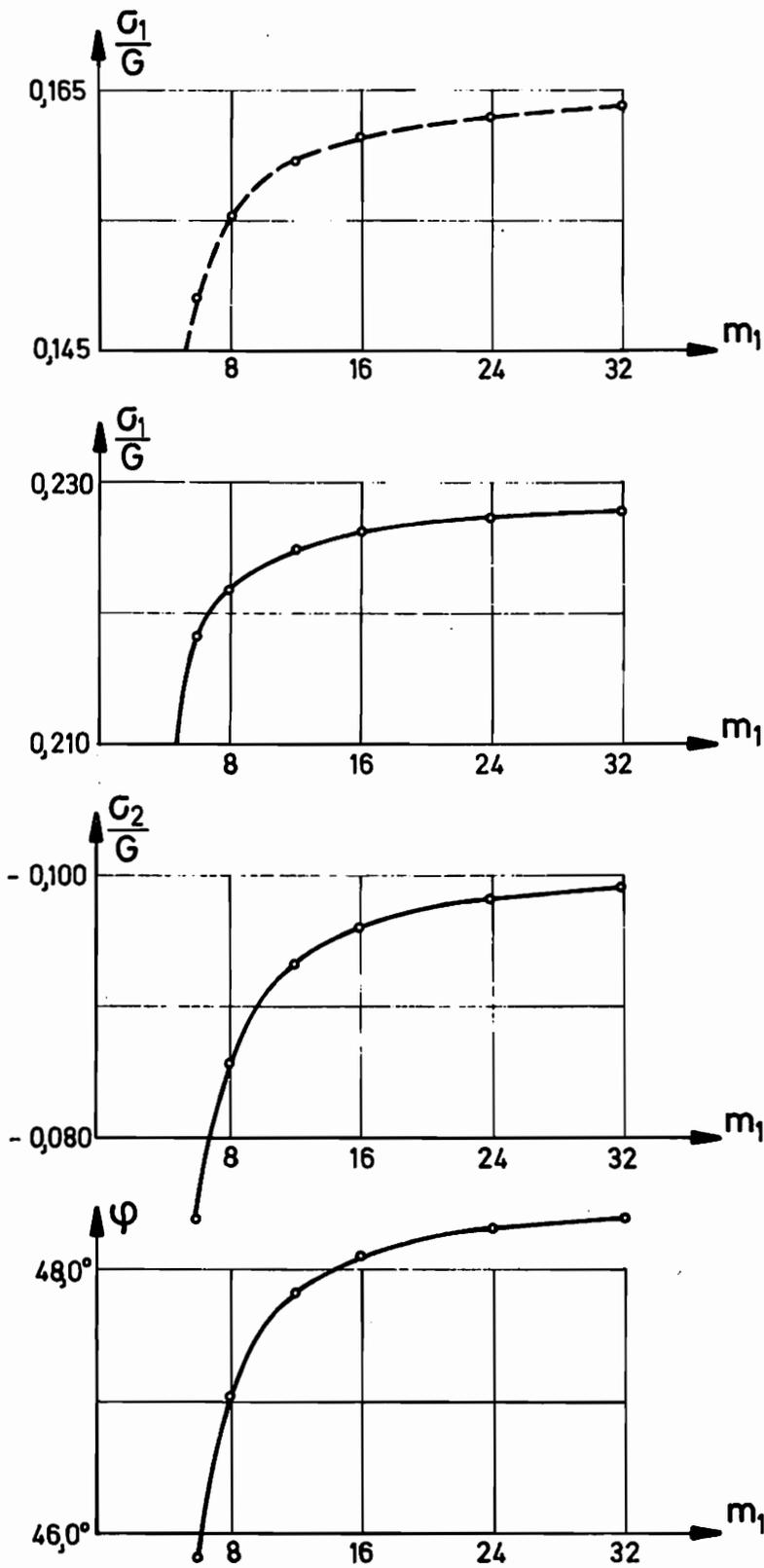


Abb. 11 - 25 Einfluß der Rastergröße ( $\nu = 0,4$ )

die Untersuchung für einen Punkt, der wegen seiner großen Entfernung von freien Rändern noch von relativ groben Rastern gut beschrieben wird. In Abhängigkeit von  $m_1$  sind die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  und der Winkel  $\varphi$  zwischen der Horizontalen und der Richtung von  $\sigma_1$  dargestellt. Für alle Rechnungen gilt gemeinsam:

$$\begin{aligned} s_2/s_1 &= 1 \quad , \quad l_1 = l_2 = 1 \quad , \quad m_2 = m_1/2 \quad , \\ UV/s_2 &= 1/4 \quad , \quad UH = 0 \quad . \end{aligned}$$

Bild 11-24 zeigt die Lösungen für  $\nu = 0,2$  , Bild 11-25 in einem 4mal groberen Maßstab die Lösungen für  $\nu = 0,4$ . Die oberste Kurve beider Bilder ist gestrichelt dargestellt und repräsentiert die Lösung der linearen Theorie mit  $\sigma_1 = -\sigma_2$  und  $\varphi = 45^\circ$  . Die hierzu ähnlichen Steigungsverhältnisse der darunter befindlichen Kurven zeigen, daß die Größe des Rechenrasters für die nichtlineare Theorie die gleiche Bedeutung hat wie für die lineare.

Das Rechenraster mit  $m_1 = 4$  stellt sich als zu grob heraus, so daß die Lösungen teilweise weit unterhalb des Darstellungsbereiches liegen oder, wie Bild 11-24 zeigt, schwer mit den übrigen Ergebnissen in Einklang zu bringen sind. Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, daß bei  $m_1 = 4$  und  $m_2 = 2$  34 Gleichungen Rand- und Übergangsbedingungen, 14 Gleichungen aber nur Gleichgewicht innerhalb des Kontinuums beschreiben. Während der Quotient  $34/14 = 2,43$  noch weit über 1 liegt, sinkt er für  $m_1 = 6$  bereits auf 1,04 und endet für  $m_1 = 32$  bei 0,13.

Die Bilder 11-24 und 11-25 zeigen, daß mit dem Raster  $m_1 = 16$ ,  $m_2 = 8$  eine recht gute Näherung für die exakten Lösungen erzielt wird. Der Rechenaufwand hält sich noch

Rechenzeiten

Rasterteilung $m_1 =$	4	6	8	12	16
Gleichungen N	48	98	164	344	588
Bandbreite B	35	43	51	67	83
N.B	1680	4214	8364	23048	48804
Blocklänge	30	76	138	200	200
Anzahl d. Blöcke	1	1	1	2	3
Speicherbedarf in K	32	36	42	55	60
Sekunden für Vorwärtselimination					100
Sekunden für 20 Nachiterationen					70
Gesamtzeit in Sek.	6	13	25	70	170

Rasterteilung $m_1 =$	20	24	32
Gleichungen N	896	1268	2204
Bandbreite B	99	115	147
N.B	88704	145820	323988
Blocklänge	130	100	38 172
Anzahl d. Blöcke	7	13	57 13
Speicherbedarf in K	57	58	60 88
Sekunden für Vorwärtselimination		260	735 740
Sekunden für 20 Nachiterationen		200	450 470
Gesamtzeit in Sek.	283	460	1185 1210

Anmerkung: 29 K benötigt das Programm ohne Felder.

Die zur kleineren Blocklänge (bei  $m_1 = 32$ )  
gehörenden Rechenzeiten liegen wegen Versions-  
wechsel noch unter denen der größeren.

in Grenzen, wie der Tabelle über Rechenzeiten entnommen werden kann. Um den Kernspeicherbedarf von 60K nicht zu überschreiten, wird ab  $m_1 = 12$ ,  $m_2 = 6$  ein blockweises Behandeln der Bandmatrix und dazugehöriges Zwischenspeichern auf externen Datenträgern erforderlich. Ein schnelles Ein- und Ausgeben von Feldern besorgt ein für die verwendete Rechenanlage TR 440 von BUCHMANN [32] entwickeltes System „BODAT“, so daß erst für  $m_1 = 32$  und  $m_2 = 16$  mit 20 Minuten Rechenzeit aus Kostengründen einer Vergrößerung des Rasters Grenzen gesetzt sind.

### 11.7 Konvergenzbereich

Die Abbildungen 11-26 bis 11-29 informieren über die Anzahl der Iterationen, die sich einstellen, wenn der Abbruch wegen nicht mehr verbesserungsfähiger sehr geringer Größen erfolgt. Für jede dargestellte Kurve gibt es eine Asymptote; rechts von dieser setzt vorzeitige Divergenz ein, die für

Abb. 11-26 bei  $UH/s_1 = 2,25/8$  bzw.  $= 1/2$ ,

für Abb. 11-27 bei  $UH/s_1 = 1,675/8$  bzw.  $= 3,5/8$ ,

für Abb. 11-28 bei  $UV/s_1 = 3/8$  bzw.  $= 5/8$

und für Abb. 11-29 bei  $\nu = 0,425$  bzw.  $= 0,45$

nachgewiesenermaßen eintritt. Der Abb. 11-29 liegt  $UH/s_1 = 1/4$  bzw.  $UV/s_1 = 1/4$  zugrunde.

Bereits in Abb. 11-3 ist eine „Biegelinie“ - so genannt wegen  $y_2 = 0$  - für  $s_2/s_1 = 1/8$  dargestellt, die die nichtlineare Theorie für große Formänderungen liefert. Berechnungen für  $s_2/s_1 < 1$  zeigen, daß, je mehr man zu blechartigen Verhältnissen übergeht, d.h. je kleiner man  $s_2/s_1$  wählt, sich umso mehr Übereinstimmung mit der Bal-

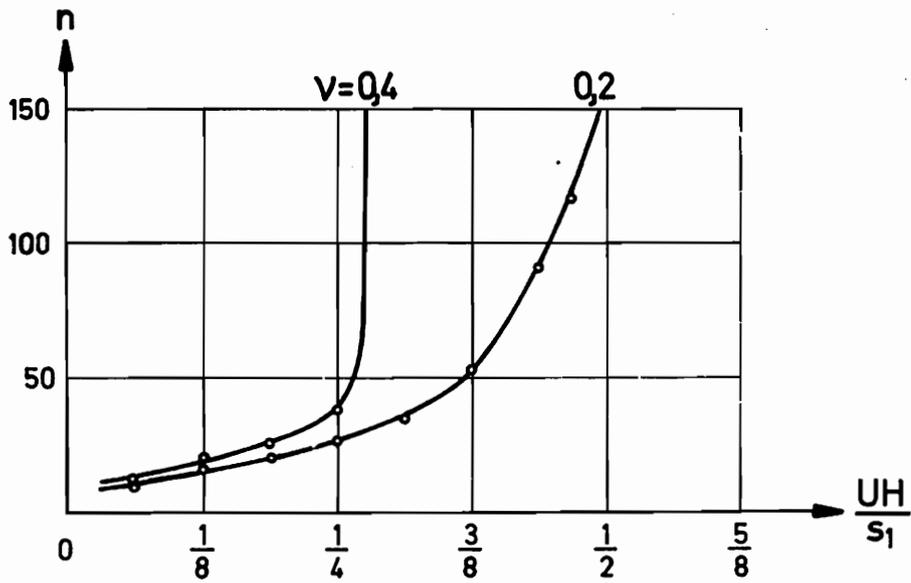


Abb.11 - 26 Anzahl der Iterationen bei Zug

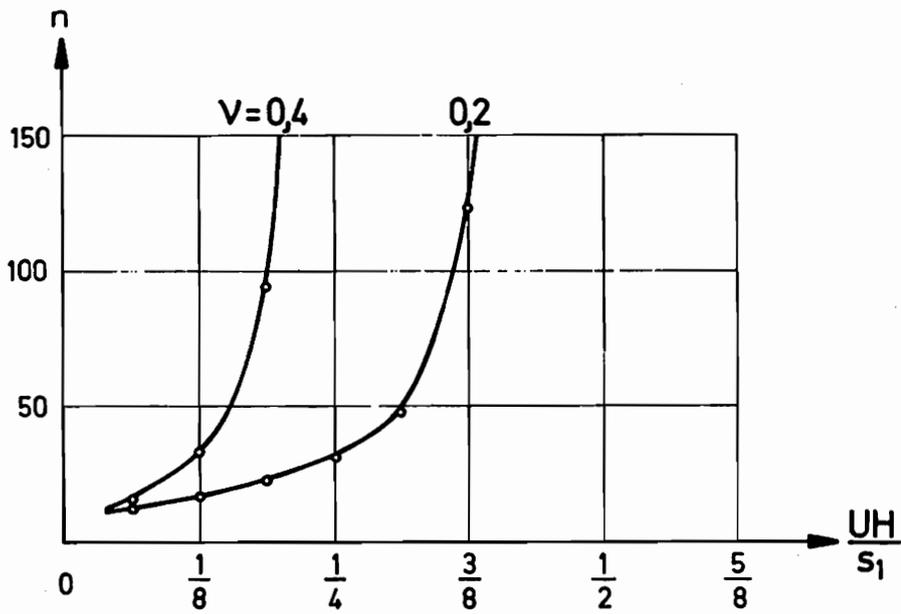


Abb.11 - 27 Anzahl der Iterationen bei Druck

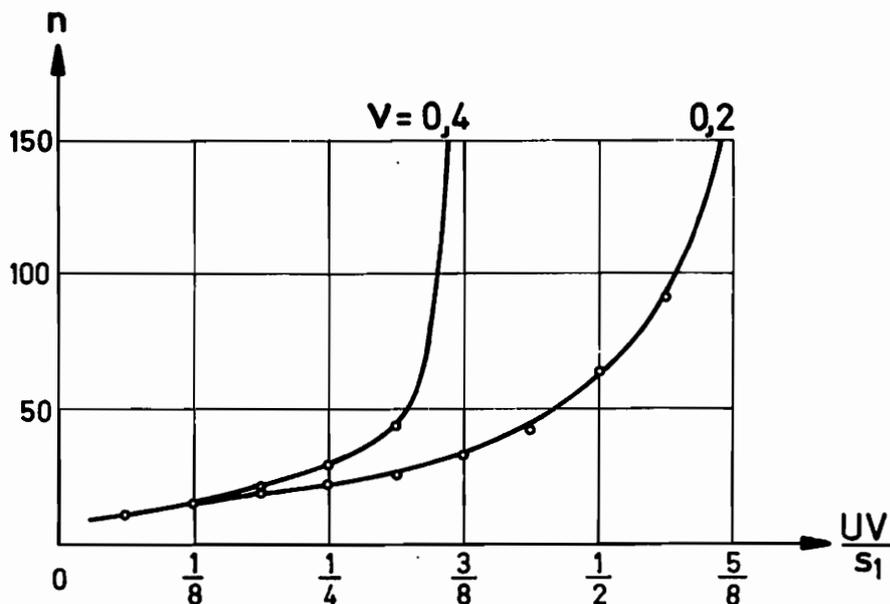


Abb. 11 - 28 Anzahl der Iterationen bei Scherung

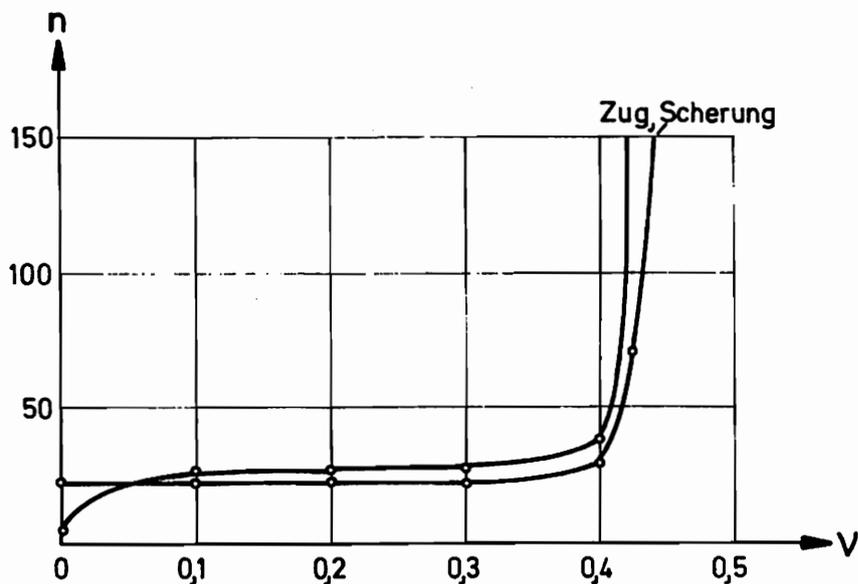


Abb. 11 - 29 Anzahl der Iterationen als Funktion von  $V$

kentheorie feststellen läßt. Da die Schubspannungen gegenüber den Normalspannungen an Bedeutung verlieren, werden die Spannungsbilder als weitere Beispiele für einen allgemeinen ebenen Verzerrungszustand nicht mehr aufgeführt. Der Konvergenzbereich des Iterationsverfahrens erfährt Einschränkungen. Während für  $s_2/s_1 = 1/2$  noch  $UV/s_1 = 1/4$  möglich ist und bei  $s_2/s_1 = 1/4$  noch  $UV/s_1 = 1/8$  als Lösung vorliegt, muß man sich bei  $s_2/s_1 = 1/8$  mit  $UV/s_1 = 1/16$  und für  $s_2/s_1 = 1/16$  mit noch weniger begnügen. Eine Verdoppelung von  $m_1$ , d.h. der Rasterlinien in einer Richtung, um die Beträge der Matrixkoeffizienten einander anzugleichen, führt zu keiner Änderung des Konvergenzbereiches.

## 12. Schlußbemerkungen

Die Lösungen des Abschnittes 11 zeigen, daß das nicht-lineare Gleichungssystem zur Ermittlung des Verschiebungsfeldes eines großen Formänderungen unterworfenen Bleches für einen weiten Bereich praktisch interessierender Fälle gelöst werden kann. Mit zunehmender Querkontraktionszahl wird es schwieriger, Konvergenz des Iterationsverfahrens zu erreichen. Auch bei dünneren und längeren Blechen wachsen die Schwierigkeiten, wobei die vom Verfahren her gleichberechtigte Behandlung von Länge und Höhe letztlich als Ursache anzusehen ist.

Für viele Werkstoffe setzt plastisches Fließen ein, bevor die zur Konvergenzgrenze gehörige Verformung erreicht ist. Als weitere Aufgabe bietet sich an, die Ermittlung plastischer Zonen bei Überschreitung einer vorzugebenden Fließspannung programmtechnisch zu verwirklichen. Die erforderliche Systematik und Sorgfalt, ferner die Rechenzeiten dürften dabei eine nicht zu unterschätzende Rolle spielen.

Wenn auch aus der vorliegenden Arbeit exemplarisch hervorgeht, daß der allgemeine ebene elastische Verzerrungszustand für große Formänderungen einer Lösung zugänglich ist, so bleibt doch der Nachteil, in der Anpassung an spezielle Randbedingungen nicht allzu flexibel zu sein. Vielleicht bringt hier ein Verfahren, das finite Elemente verwendet, Verbesserungen.

Wegen festgestellter numerischer Schwierigkeiten empfiehlt es sich nicht, auf die hier gezeigte Weise unter Mitnahme weiterer Reihenglieder den Henckyschen Verzerrungstensor besser zu approximieren und den Grenzüber-

gang zu inkompressiblem Material bei  $\nu = 0,5$  zu versuchen. Es zeigt sich nicht zum ersten Mal trotz theoretisch einwandfreier Ansätze die überragende Bedeutung, die der Wahl des Verzerrungstensors zukommt. Bei großen Formänderungen muß bedacht werden, daß die Geschlossenheit des Problemkreises, wie man sie von linearen Theorien her gewohnt ist, nicht in gleicher Weise möglich sein kann.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß geometrische Nichtlinearität und breit angelegte numerische Behandlung einer Aufgabe, die den Rahmen eines Grundproblems sprengt, miteinander verträglich sind.

Literaturverzeichnis

---

- [1] Green, A.E.      Theoretical Elasticity, Oxford  
and W. Zerna:      (1954), 2nd. ed. (1968),  
Clarendon Press
- [2] Koppe, E.:      Methoden der nichtlinearen  
Elastizitätstheorie mit Anwen-  
dung auf die dünne Platte  
endlicher Durchbiegung, Z. angew.  
Math. Mech. 36 (1956) S. 455/62
- [3] Wetzell, O.:      Beitrag zur Theorie der elasti-  
schen Torsion des Vollzylinders  
bei endlichen Formänderungen,  
Diss. (1965) TH-Hannover
- [4] Seitz, H.:      Ein Beitrag zur Theorie endlicher  
Formänderungen elastischer Körper  
unter Zug- und Schubbeanspru-  
chungen, Diss. (1967) TH-Hannover
- [5] De Boer, R.:      Ein Beitrag zur Theorie der  
elastischen Biegung von Streifen  
bei endlichen Formänderungen,  
Diss. (1966) TH-Hannover und  
Acta Mech. 4 (1967) S.1/12
- [6] Green, A.E.      Large Elastic Deformations, 2nd.  
and J.E.Adkins: ed. Oxford (1970), Clarendon  
Press

- [7] Bruhns, O. und K. Thermann : Elastisch-plastische Biegung eines Plattenstreifens bei endlichen Formänderungen, Ing.-Archiv 38 (1969) Nr. 3, S. 141/52
- [8] Lücke, B.: Die Berücksichtigung von Entlastungszonen und Zonen erneuter Belastung bei der elastisch-plastischen Blechbiegung mit endlichen Formänderungen, Ing.-Archiv 43 (1973) S. 34/43
- [9] Lehmann, Th.: Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen, Ing.-Archiv 41 (1972) S. 297/310
- [10] Kästner, S.: Vektoren, Tensoren, Spinoren, 2. Auflage, Berlin (1964), Akademie-Verlag
- [11] Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Basel und Stuttgart (1961), Birkhäuser Verlag
- [12] Lehmann, Th.: Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik, Ing.-Archiv 29 (1960) S 316/30
- [13] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Mannheim (1966), B.I.-Hochschul-taschenbücher

- [ 14 ] Hansson, V.: Zur praktischen Berechnung von Scheiben mit beliebiger Geometrie und allgemeinem Materialgesetz, Berichte aus dem Inst. f. Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhruniversität Bochum, Heft 14 (1973)
- [ 15 ] Fung, Y.C.: Foundations of solid Mechanics, Englewood Cliffs N.J.(1965), Prentice Hall Inc.
- [ 16 ] Hencky, H.: Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen, Z. techn. Physik 9 (1928) Nr. 6, S. 215/20 und Nr. 11, S. 457
- [ 17 ] Macvean, D.B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren ZAMP 19 (1968) S. 157/85
- [ 18 ] Richter, H.: Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen, ZAMM 29 (1949) S. 65/75
- [ 19 ] Lehmann, Th.: Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik, Ing.-Archiv 29 (1960) S.1/21
- [ 20 ] Thermann, K.: Zur elasto-plastischen Torsion kreiszylindrischer Körper bei endlichen Verzerrungen, Diss. (1969) TU-Hannover

- [ 21 ] Krätzig, W.B.: Einführung in die Thermodynamik der Deformationen I,  
Seminarberichte des Lehrstuhls für Baumechanik der TU-Hannover,  
Bericht-Nr. 73-S1 (1973) S.95/115
- [ 22 ] Bruhns, O.: Ein Beitrag zur Theorie der elasto-  
plastischen Biegung von Scheiben  
bei endlichen Formänderungen,  
Diss. (1969) TU-Hannover
- [ 23 ] Biezeno, C.B. Technische Dynamik, 2. Aufl.,  
und R. Grammel: Berlin/Göttingen/Heidelberg (1953),  
Reprint (1971), Springer-Verlag
- [ 24 ] Ortega, J.M. Iterative solution of nonlinear  
und W.C. Rhein- equations in several variables,  
bold: New York/London (1970),  
Academic Press
- [ 25 ] Collatz, L.: The numerical treatment of diffe-  
rential aquations,  
Berlin /Heidelberg/New York (1966)  
Springer-Verlag
- [ 26 ] Waller, H. und Matrizenmethoden in der Maschinen-  
W. Krings: und Bauwerksdynamik,  
Mannheim/Wien/Zürich (1975)  
Bibliographisches Institut
- [ 27 ] Wilkinson, J.H. Linear Algebra,  
and C.Reinsch: Berlin/Heidelberg/New York (1971)  
Springer-Verlag

- [28] Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik, Band I:  
Einführung,  
Düsseldorf (1974),  
Bertelsmann Universitätsverlag
- [29] Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik,  
Band II: Elastostatik,  
Braunschweig (1975),  
Vieweg-Verlag
- [30] Girkmann, K.: Flächentragwerke,  
6. Aufl., Wien (1963),  
Springer-Verlag
- [31] Worch, G.: Elastische Scheiben,  
Beton-Kalender, II. Teil  
(1963) S. 355/470
- [32] Buchmann, R.: BODAT, ein schnelles und platz-  
sparendes System zur Datenmanipu-  
lation und -speicherung in Algol 60  
und Fortran,  
Arbeitsbericht des Rechenzentrums  
der Ruhruniversität Bochum  
Nr. 7303 BO.CO.09 (1973)



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 6**