

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Albert Meyers

Ein Beitrag zum optimalen
Entwurf von schnellaufenden
Zentrifugenschalen

Heft Nr. 8



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Albert Meyers

Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von
schnellaufenden Zentrifugenschalen

~~Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mechanik
-Bibliothek-
Inv.-Nr.: 0468 Preis:
Standort: IFH 8
Sachgebiet:~~

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 8

April 1977

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme des Referats. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller für die Übernahme des Koreferats.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 29.10.1976

Tag der mündlichen Prüfung: 21.12.1976

© 1977 Dr.-Ing. Albert Meyers

4630 Bochum, Am Nordbad 78

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikroskopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit wird die Wanddicke der elastischen, rotationssymmetrischen Zentrifugenschale bestimmt. Das Ziel ist die Gewichtsreduzierung des Schalenkontinuums. Als Restriktionen sind maximale Vergleichsspannung und Minimalwanddicke berücksichtigt. Mit einem geeigneten Lösungsalgorithmus wird das Resultat iterativ gefunden. Im zweiten Teil der Arbeit wird der Mittelflächenverlauf der Membranzentrifugenschale diskutiert.

Summary

The object of the present work is the minimisation of the weight of an axisymmetric, elastic centrifugal shell. For a given shape the wall thickness is determined under the restrictions of maximum admissible stress and minimum wall thickness. An iterative algorithm is used to find the optimal solution. In a second part the shape of a centrifugal membrane shell of equal strength is discussed.

Inhaltsverzeichnis

<u>Bezeichnungen</u>	5
<u>Einleitung</u>	9
<u>1. Differentialgleichungen der Zentrifugenschale</u>	13
1.1 Voraussetzungen und Annahmen	13
1.2 Geometrie der Schalenmittelfläche	14
1.3 Belastung durch Schalen- und Füllgutträgheit	17
1.3.1 Belastung durch Schalentragheit	17
1.3.2 Belastung durch Füllgutträgheit	17
1.3.3 Gesamtbelastung	18
1.4 Gleichgewichtsbedingungen	18
1.5 Verformungszustand	19
1.6 Elastizitätsgesetz	20
1.7 Differentialgleichungen der Zentrifugenschale	21
1.8 Zentrifugenmodell	24
1.9 Bestimmung von λ_0	27
<u>2. Bestimmung der Wanddicke</u>	30
2.1 Aufgabenstellung	30
2.2 Iterationsverfahren zum Auffinden einer brauchbaren Lösung	31
2.3 Konvergenzverbesserung	36
2.4 Kontinuierlicher Wanddickenverlauf	43
2.5 Einige Ergebnisse am Zylindermodell	45
2.5.1 Volumen in Funktion der Zahl der Schalenstreifen gleicher Länge	45
2.5.2 Einfluß der Wanddickenbegrenzung	45
2.5.3 Einfluß der zulässigen Spannung	48
2.5.4 Empfindlichkeit gegenüber einer Änderung der Füllhöhe und Fülldichte	48

2.5.5	Empfindlichkeit der Lösung	48
2.5.6	Einfluß von Λ auf die Konvergenzgeschwindigkeit	51
3.	<u>Variation der Streifenlängen</u>	53
3.1	Aufgabenstellung	53
3.2	Untersuchung auf Unimodalität	56
3.3	Iterationsverfahren zum Auffinden einer brauchbaren Lösung	56
3.4	Näherungslösung am Zylindermodell für $n = 2$	59
4.	<u>Anwendung: Zentrifuge Kegel/Zylinder/Kegel</u>	61
4.1	Vorstellung der Zentrifuge und Aufgabenstellung	61
4.2	Beschränkungen	63
4.3	Ergebnis	65
5.	<u>Membrantheorie: Bestimmung des Schalenmittelflächenverlaufs der Zentrifuge konstanter Vergleichsspannung</u>	66
5.1	Differentialgleichungen der Schale konstanter Wanddicke	66
5.2	Differentialgleichung für die Schale gleicher Hauptspannungen	69
5.3	Differentialgleichungen für die Schale gleicher Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese	69
5.4	Differentialgleichungen für die Schale gleicher Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese	73
5.5	Ergebnisse	76
5.5.1	Vergleich der Schalenformen zu den verschiedenen Spannungshypothesen	76
5.5.2	Einfluß der Anfangsspannung $s_1(0)$	79

5.5.3 Form für den Sonderfall $z_F = 0$	82
5.5.4 Einfluß von z_F und α	82
5.5.5 Beschränkung $\alpha \geq r_{\min}$	84
5.6 Einige Bemerkungen	87
6. <u>Anhang: Einige rechentechnische Hinweise</u>	88
6.1 Berechnung der Zentrifugenschale	88
6.2 Das optimale Gradientenverfahren	91
6.3 Das "Powell"-Verfahren	92
6.4 Lineare Suche nach dem Funktionsminimum einer unimodalen Funktion	95
6.5 Lösungssuche nach der Wurzel der alge- braischen Gleichung (2.4)	96
<u>Schlußbemerkungen</u>	99
<u>Literaturverzeichnis</u>	101

Bezeichnungen

Symbol	Name
$a_i^{(k)}$	im k.ten Iterationsschritt im i.ten Bereich erzielte Verbesserungsrate
$\underline{a}_\alpha, \underline{a}$	körperfeste Basisvektoren der Mittel- fläche mit der Metrik $a_{\alpha\beta}$
B	Biegesteifigkeit $E T^3 / 12(1-\nu^2)$
b	dimensionslose Belastung aus z_F, z_W und ε
b_α^β	skalare Größen des Krümmungstensors
D	Dehnsteifigkeit $E T / (1 - \nu^2)$
$\underline{d}^{(k)}$	Vektor der Suchrichtung im k.ten Iterationsschritt
E	Elastizitätsmodul
\underline{e}_i	raumfeste Basisvektoren
f	Füllmaß $(1 - \varepsilon^2) / 2$
g	Erdbeschleunigung
\underline{g}_i	Basisvektoren des Schalenkontinuums mit der Metrik g_{ik}
$H^{\alpha\beta\gamma\lambda}$	skalare Größen des Elastizitätstensors
I	Sprungfunktion zur Füllungsbelastung: 1 für $R \geq R_F$, 0 für $R < R_F$
\underline{l}	Vektor der Längen der Schalenstreifen konstanter Wandstärke; dimensionslose Form: \underline{l}
M_1	Meridianmoment (dimensionslos m_1)
M_2	Ringmoment (dimensionslos m_2)

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
$m^{\alpha/\beta}$	skalare Größen des Momententensors
N_1	Meridiankraft (dimensionslos n_1)
N_2	Ringkraft (dimensionslos n_2)
n	Zahl der zu variierenden Parameter
$n^{\alpha/\beta}$	skalare Größen des Normalkrafttensors
P_F	Belastung der Schale durch Füllgutträg- heit
P_W	Belastung der Schale durch Eigenträg- heit
\underline{p}	Vektor der Belastung
Q	Querkraft (dimensionslos q)
q^α	skalare Größen des Querkraftvektors
\underline{R}	Ortsvektor des Schalenkontinuums
\underline{r}	auf R_0 bezogener Ortsvektor der Scha- lenmittelfläche
R	Entfernung von der Rotationsachse
R_0	größter Radius (i.a. zum Zylinderteil gehörend)
R_F	kleinster Abstand der Füllung von der Rotationsachse
R_1, R_2, R_3	charakteristische Radien der berechne- ten Zentrifuge
S	dimensionsbehaftete körperfeste Meri- diankoordinate
s	dimensionslose Normalspannung

Symbol	Name
s_{10}	Anfangswert der dimensionslosen Normalspannung in Meridianrichtung
T	Wanddicke
T_0	Bezugswanddicke
t	dimensionslose auf T_0 bezogene Wanddicke
U	Mittelflächenverschiebung in Meridianrichtung
V	Schalenbauvolumen (dimensionslos v)
W	Mittelflächenverschiebung in Normalenrichtung (dimensionslos w)
w_α	Verdrehung der Mittelfläche
X	raumfeste Axialkoordinate (dimensionslos x)
Z	körperfeste Koordinate senkrecht zur Mittelfläche
z	Schleuderkenngroße $\Omega^2 R_0^2 \xi_w / \sigma_0$
z_W	dimensionslose Belastung durch Schalen-trägheit
z_F	dimensionslose Belastung durch Füllgut-trägheit
$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Christoffelsymbole
\mathcal{J}_{kp}	skalare Größen des Verzerrungstensors
$\Delta^{(k)}$	mittlere quadratische Abweichung im k .ten Iterationsschritt
δ_α^β	Kroneckersymbol: $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$; $\delta_1^2 = \delta_2^1 = 0$

Symbol	Name
ε	globale Genauigkeitsschranke
θ^α, θ	körperfeste dimensionslose Koordinaten
α	Füllradienverhältnis R_F / R_0
Λ	Schlankheitsbeiwert L_{ges} / R_0
λ	dimensionslose auf R_0 bezogene Wandstärke
μ_α^β	Abkürzung $\delta_\alpha^\beta - \lambda \theta b_\alpha^\beta$
μ	Determinante von $\mu_{\alpha\beta}$
ν	Querkontraktionszahl
ρ_F	Dichte des Füllguts
ρ_W	Dichte des Zentrifugenmantels
σ_v	Vergleichsspannung
$\sigma^{\alpha\beta}$	skalare Größen des Spannungstensors
σ_0	zugelassene maximale Vergleichsspannung
σ_{11}	Normalspannung in Meridianrichtung
σ_{22}	Normalspannung in Ringrichtung
ϱ	Dichteverhältnis ρ_F / ρ_W
χ	Krümmungsänderung der Meridianebene
Ω	Winkelgeschwindigkeit der Rotation

Einleitung

Die Optimierung einer Konstruktion kann unter sehr verschiedenen Kriterien erfolgen. Eines dieser Kriterien, dem freilich in vielen Fällen eine große technische Bedeutung zukommt, ist die Minimierung des Gewichts. Dabei sind als Nebenbedingungen etwa beschränkte Spannungen oder bestimmte geometrische Restriktionen einzuhalten. In diesem Sinne sei hier Optimierung verstanden.

Die zur optimalen Bemessung von statisch bzw. quasi-statisch belasteten Flächentragwerken vorliegenden Arbeiten lassen sich in zwei Problemgruppen einteilen:

- a. Bestimmung der Wanddicke zu vorgegebener Schalenmittelfläche im Rahmen der Schalenbiegetheorie,
- b. Bestimmung des Verlaufs der Schalenmittelfläche bei i.a. gegebenem Wanddickenverlauf im Rahmen der Membrantheorie.

Die Bestimmung der Schalenmittelfläche unter Berücksichtigung der Gesetze der Membrantheorie ist bereits häufig untersucht worden. Der wesentliche Grund hierfür dürfte die recht einfache, i.a. analytische Handhabung der mathematischen Beziehungen sein. Bereits im Jahre 1908 bestimmte Milankovic (1) die Mittelfläche einer Kuppel gleicher Festigkeit. Darunter verstand er Membranschalen, bei denen die Beträge der beiden Hauptspannungen untereinander gleich und gleich einer vorgegebenen Größe sind. Es zeigte sich, daß solche Schalen nur unter bestimmten Bedingungen mit konstanter Wanddicke erzeugt werden können. Weitere Beiträge zur Kuppel gleicher Festigkeit wurden u.a. von Megareus (2), Federhofer (3), Ziegler (4) und Hoffman (5) ge-

leistet. Die von Tölke (6) behandelte Rotationsschale unter Innen- bzw. Außendruck sowie der bei Flüge (15) angegebene Tropfenbehälter stellen andere interessante Beispiele dar.

Einen Schritt weiter ging 1922 Biezeno (7) mit der Bestimmung des Verlaufs eines Kesselbodens ("Biezeno Pressure Vessel Head"). Er läßt für den Spannungszustand einen ganzen Ast des Tresca-Hauptspannungs-Sechsecks zu. Mit dem zusätzlich gewonnenen Freiheitsgrad ist es möglich, die Mittelfläche für konstante Wanddicke unter beliebiger Belastung auszulegen. Ein wesentlicher, vergleichender Beitrag ist 1963 von Issler (8) gebracht worden. Er vergleicht Rotationsschalen gleicher Spannung sowie gleicher Vergleichsspannung nach der Tresca- sowie der v. Mises-Fließbedingung. Schumann und andere ((9) und (10)) erweiterten diese Ansätze auf nichtrotationssymmetrische sowie auf anisotrope Membranschalen.

Wang und Worley (11) variieren zwei die Form der Schale bestimmende Parameter für eine Rotationsschale unter konstantem Innendruck.

Der Wanddickenverlauf biegesteifer Flächentragwerke mit vorgegebener Mittelfläche wird häufig nach der Plastizitätstheorie bemessen. Das Optimierungsproblem besteht darin, eine Schale minimalen Volumens mit vorgegebener Traglast zu ermitteln. Die zahlreichen Arbeiten zu diesem Thema basieren im wesentlichen auf einem von Drucker und Shield ((12) und (13)) 1956 bewiesenen Kriterium, nach dem eine Konstruktion dann optimal ausgelegt ist, wenn die volumenbezogenen Dissi-

pationsrate konstant ist.

Biegesteife, elastische Flächentragwerke, welche so ausgelegt sind, daß eine bestimmte Spannung bzw. Vergleichsspannung nicht überschritten wird, sind bisher kaum untersucht worden. Aristov und Troitskii (14) ermittelten 1973 mit Methoden der Variationsrechnung den Wanddickenverlauf der rotationssymmetrischen Kreisringplatte.

In der vorliegenden Arbeit soll die optimale Bemessung elastischer Rotationsschalen unter drehsymmetrischer Belastung behandelt werden. Für Schalen mit vorgegebener Mittelfläche kann a) die Wanddicke als kontinuierliche Funktion über die Meridianlinie bestimmt werden. Dieses kann z.B. durch Unterteilung der Schale in eine Vielzahl von Streifen mit linear veränderlichem Wanddickenverlauf erreicht werden. Eine solche, oft nicht praxisgerechte Auslegung gibt Auskunft über Richtung und Ziel für den Fall, daß man b) die Schale in Streifen jeweils konstanter, noch zu bestimmender, Wanddicke unterteilt. Man kann die Längen der Streifen vorgeben oder c) variabel halten. Als Entwurfskriterium wird zugrundegelegt, daß die Wanddicke einen vorgegebenen Minimalwert nicht unterschreitet, bzw. so dimensioniert ist, daß die zulässige Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese erreicht wird. Dieses, den Bedürfnissen der Praxis angemessene Entwurfskriterium wird für die optimale Auslegung von Zentrifugenschalen herangezogen.

Die benötigten Grundgleichungen der Schalentheorie sind in Kapitel 1 zusammengestellt. Dabei wurde im wesentlichen auf die Arbeiten von Flügge (15), Hampe

(16), Zerna (17) und Klingbeil (18) zurückgegriffen. Die Optimierungsstrategie wird in den Kapiteln 2 und 3 auf eine eingespannte Zylinderschale, die als Modell einer Zentrifuge betrachtet werden kann, angewendet. Die Lösung der Optimierungsaufgabe erfolgt iterativ, wobei aus dem Schnittkraftzustand zu vorgegebenem Wanddickenverlauf die Verbesserung für den nächsten Iterationsschritt gewonnen wird. Bezüglich des Wanddickenverlaufs ist angenommen, daß die Schale aus n Segmenten (Streifen) jeweils konstanter Wanddicke besteht. Die am Modell der Zentrifugenschale gewonnenen Erkenntnisse werden in Kapitel 4 auf die Auslegung einer realistischen Zentrifuge übertragen. Abschließend werden in Kapitel 5 Möglichkeiten zur Auslegung der Schalenmittelfläche einer Zentrifuge konstanter Wanddicke diskutiert. Rechentechnische Hinweise, sowohl zur Schalenberechnung als auch zu verschiedenen Optimierungsverfahren, befinden sich im Anhang.

1. Differentialgleichungen der Zentrifugenschale

1.1 Voraussetzungen und Annahmen

Es gelten die Annahmen der "technischen Biegetheorie":

- die Schalenwanddicke T sei klein gegenüber den übrigen Schalenabmessungen ($T/R \ll 1$) und (abschnittsweise) schwach veränderlich ($|T_{,\alpha}| < T$);
- es gelte die Normalenhypothese: Punkte, welche auf einer Normalen zur unverformten Mittelfläche (Wanddickenhalbierenden) liegen, liegen auch auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche ($\gamma_{\alpha 3} = 0$) und weisen von der Mittelfläche den gleichen Abstand auf wie vor der Verformung ($\gamma_{33} = 0$);
- Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche werden vernachlässigt ($\sigma_{33} = 0$);
- quadratische Glieder der als klein angenommenen Verzerrungs- und Verschiebungsgrößen werden unterdrückt;
- der Schalenwerkstoff sei homogen und isotrop und gehorche dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz. Die Formänderungen verlaufen isotherm.

Zusätzlich werden folgende Punkte vorausgesetzt:

- es herrsche Rotationssymmetrie in Schalengeometrie und Belastung;
- die Erdbeschleunigung sei vernachlässigbar klein gegenüber der Zentripetalbeschleunigung ($g \ll \Omega^2 R$);
- die Winkelgeschwindigkeit der Zentrifuge sei konstant ($\dot{\Omega} = 0$);
- die Dichte der Füllung sei konstant ($S_{F,R} = 0$).

1.2 Geometrie der Schalenmittelfläche

Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention. Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, griechische von 1 bis 2.

Zur Beschreibung der Geometrie (Abb. 1-1) wird ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren \underline{e}_i und ein die Mittelfläche begleitendes Koordinatensystem mit den dimensionslosen Koordinaten $\theta^1 = S/R_0$, θ^2 und $\theta = Z/T$ sowie den Basisvektoren \underline{a}_α und \underline{a} verwendet. Die Bezugsgröße R_0 sei der größte Abstand der Mittelfläche von der Symmetrieachse.

Der Ortsvektor der Mittelfläche ist gegeben durch

$$R_0 \underline{r} = \underline{e}_1 R \cos \theta^2 + \underline{e}_2 R \sin \theta^2 + \underline{e}_3 X$$

Die Tangentialvektoren an die Mittelfläche berechnen sich zu

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{, \alpha}$$

Der normierte Normalenvektor steht senkrecht zu \underline{a}

$$\underline{a} = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$

Die Koeffizienten des Metriktensors (im weiteren Verlauf wird bequemlichkeitshalber vom Tensor anstelle seiner skalaren Größen gesprochen) errechnen sich zu

$$a_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = 1 \\ a_{22} = R^2 \cdot R_0^{-2} \end{array} \right.$$

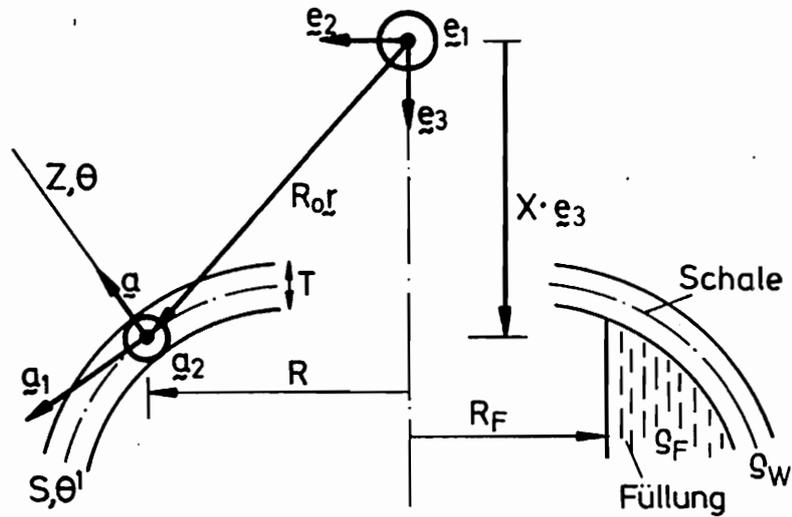


Abb.1-1 Ortsvektor und Basisvektoren eines Punktes der Schalenmittelfläche

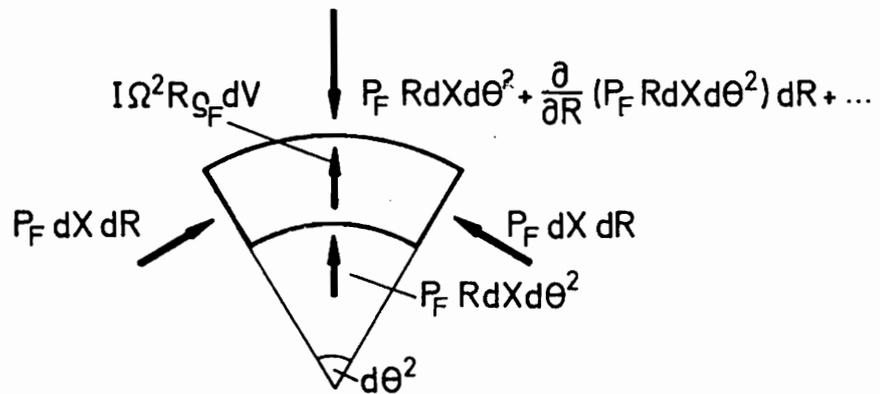


Abb. 1-2 Füllgutelement

Die kontravarianten Werte sind, da $a_{12} = a^{21} = 0$ ist, wegen der Orthogonalität der Zylinderkoordinaten

$$a^{(\alpha\alpha)} = [a_{(\alpha\alpha)}]^{-1}.$$

$(\alpha\alpha)$ kennzeichne hier, daß über α nicht summiert wird.

Die Krümmungstensoren werden ermittelt durch

$$b_{\alpha\beta} = -\underline{a}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_{,\beta}, \quad b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha\gamma} a^{\beta\gamma}.$$

Sie sind nur diagonal besetzt, d.h. die Hauptkrümmungsrichtungen decken sich mit den gewählten Koordinatenrichtungen.

Desweiteren gilt:

Krümmungsradien $R_1 = R_0/b_1^1, \quad R_2 = R_0/b_2^2,$

Mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} / R_0,$

Gaußsches Krümmungsmaß $K = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = b_1^1 \cdot b_2^2.$

Für die kovariante Ableitung benötigt man die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \underline{a}^{\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta,\gamma}.$$

Sie verschwinden alle bis auf

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{R R'}{R_0^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{R'}{R} \quad \text{mit } ()' = ()_{,1}.$$

Mit der dimensionslosen Schalendicke $\lambda = T/R_0$ läßt sich der Ortsvektor zu einem Punkt des Schalenkontinuums in der Form

$$\underline{R} = R_0 (\underline{r}_0 + \lambda \theta \underline{a})$$

schreiben.

Für die Metrik gilt bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in λ, α

$$g_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{, \alpha} \cdot \tilde{R}_{, \beta} = R_0^2 [-a_{\alpha\beta} - 2\lambda \theta b_{\alpha\beta} + \lambda^2 \theta^2 b_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}], \quad (1.1)$$

$$-g_{\alpha 3} = \tilde{R}_{, \alpha} \cdot \tilde{R}_{, 3} = 0, \quad (1.2)$$

$$-g_{33} = \tilde{R}_{, 3} \cdot \tilde{R}_{, 3} = R_0^2 \lambda^2. \quad (1.3)$$

1.3 Belastung durch Schalen- und Füllgutträgheit

1.3.1 Belastung durch Schalentragheit

Da $\lambda \ll 1$ ist, wird die Belastung aus der Schalentragheit durch die Zentripetalbeschleunigung über die Wanddicke integriert als Außenbelastung an der Schalenlaibung angenommen

$$P_w = \rho_w \Omega^2 R T. \quad P_w \text{ wirkt radial.} \quad (1.4)$$

1.3.2 Belastung durch Füllgutträgheit

(Abb. 1-2)

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- ideale reibungsfreie Flüssigkeit,
- Dichte über Füllhöhekonstant ($\rho_F = \text{const.}$),
- zylindrische Füllung ($R_F = \text{const.}$; $g \ll \Omega^2 R$).

Mit der Sprungfunktion I:

$$I = 0 \quad \text{für } R < R_F$$

$$I = 1 \quad \text{für } R > R_F$$

folgt aus dem Kräftegleichgewicht in Radialrichtung am Füllgutelement

$$P_F R dX dR d\Omega^2 + I \Omega^2 \rho_F R dV - \frac{\partial}{\partial R} (P_F R d\Omega^2 dX) dR = 0,$$

$$P_F = I \Omega^2 \rho_F \frac{R^2 \cdot R_F^2}{2} \quad (1.5)$$

P_F wirkt normal zur Mittelfläche.

1.3.3 Gesamtbelastung

$$P = P^\alpha a^\alpha + p a \quad \text{mit} \quad (1.6)$$

$$P_1 = P_w R' / R_0, \quad P_2 = 0,$$

$$p = P_F + P_w X' / R_0.$$

1.4 Gleichgewichtsbedingungen

Aus dem Kräftegleichgewicht am Schalenelement in Normal- und Tangentialrichtung erhält man

$$\mu_\beta^\beta \sigma^{\beta\alpha} - \lambda b_\alpha^\beta \sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.7)$$

$$b_{\beta\alpha} \mu_\beta^\beta \sigma^{\beta\alpha} + \lambda \sigma^{\alpha\beta} |_{,3} = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{mit } y_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \lambda \theta b_\alpha^\beta,$$

$$\text{und } \mu = \det(y_{\alpha\beta}).$$

Die Schnittkräfte als Spannungsresultierende sind

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-1/2}^{1/2} \mu \mu_{\beta}^{\beta} \sigma^{\beta\alpha} d\theta \quad , \quad (1.9)$$

$$q^{\alpha} = \int_{-1/2}^{1/2} \lambda \mu \sigma^{\alpha 3} d\theta \quad , \quad (1.10)$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-1/2}^{1/2} \lambda \theta \mu \mu_{\beta}^{\beta} \sigma^{\beta\alpha} d\theta \quad . \quad (1.11)$$

Die Integration der Gleichungen (1.7) und (1.8) sowie von (1.7) multipliziert mit θ führt zu den Gleichgewichtsbedingungen

$$n^{\alpha\beta} \Big|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + p^{\beta} = 0 \quad , \quad (1.12)$$

$$n^{\alpha\beta} b_{\alpha/\beta} + q^{\alpha} \Big|_{\alpha} + p = 0 \quad , \quad (1.13)$$

$$m^{\alpha\beta} \Big|_{\alpha} - q^{\beta} = 0 \quad . \quad (1.14)$$

1.5 Verformungszustand

Der Verschiebungsvektor eines Schalenpunktes ist nach der Normalenhypothese

$$\underline{v} = R_0 \left[(v_{\alpha} + \lambda \theta w_{\alpha}) \underline{a}^{\alpha} + v \underline{a} \right] \quad . \quad (1.15)$$

Hierbei drücken die Glieder v_{α} , v die Verschiebung der Mittelfläche, w_{α} deren Verdrehung aus.

Der Verzerrungstensor wird in der geometrisch linearen Theorie vereinfachend angesetzt zu

$$y_{ij} = \frac{1}{2} (g_i \cdot v_{,j} + g_j \cdot v_{,i}) . \quad (1.16)$$

Nach Einsetzen von (1.2) sowie (1.12) folgt

$$y_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \lambda R_0^2 (w_\alpha + d_\alpha^F v_F + v_{,\alpha}) . \quad (1.17)$$

Nach der Normalenhypothese ist $y_{\alpha 3} = 0$. Dann folgt aus (1.17) die Verträglichkeitsbedingung

$$w_\alpha + d_\alpha^\beta v_\beta + v_{,\alpha} = 0 . \quad (1.18)$$

Das Einsetzen von (1.18) in (1.16) führt unter Vernachlässigung von quadratischen und kubischen Gliedern in λ zu

$$y_{\alpha\beta} = R_0^2 (\alpha_{\alpha\beta} + \lambda \theta \beta_{\alpha\beta}) . \quad (1.19)$$

Hierbei ist

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2d_{\alpha\beta} v) , \quad (1.20)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (d_\beta^\lambda \alpha_{\lambda\alpha} + d_\alpha^\lambda \alpha_{\lambda\beta}) , \quad (1.21)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (w_\alpha|_\beta + w_\beta|_\alpha) . \quad (1.22)$$

1.6 Elastizitätsgesetz

Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz für isotropes Material lautet mit $y_{33} = y_{\alpha 3} = y^{33} = 0$

$$E y_{\alpha\beta} = [(1 + \nu) y_{\beta\alpha} g_{\lambda\beta} - \nu g_{\alpha\beta} g_{\beta\lambda}] \sigma^{\beta\lambda} . \quad (1.23)$$

Mit den Gleichungen (1.19), (1.8) führt (1.23) nach Integration und weiteren Kürzungen zu dem Elastizitätsgesetz

$$n^{\alpha\beta} = \frac{D}{R_0} H^{\alpha\beta\gamma\lambda} x_{\gamma\lambda} \quad \text{und} \quad (1.24)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{B}{R_0^2} H^{\alpha\beta\gamma\lambda} \omega_{\gamma\lambda} \quad \text{mit} \quad (1.25)$$

$$H^{\alpha\beta\gamma\lambda} = \frac{1-\nu}{2} \left(a^{\alpha\beta} a^{\gamma\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\lambda} \right), \quad (1.26)$$

$$D = \frac{ET}{1-\nu^2} \quad \text{sowie} \quad B = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)} \quad \bullet$$

$$H^{1111} = (a^{11})^2, \quad H^{2222} = (a^{22})^2,$$

$$H^{1122} = H^{2211} = \nu a^{11} a^{22},$$

$$H^{1212} = H^{2121} = H^{2112} = H^{1221} = \frac{1-\nu}{2} a^{11} a^{22},$$

die restlichen Glieder von $H^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ verschwinden.

1.7 Differentialgleichungen der Zentrifugenschale

Die Rückführung von Schnittgrößen und Verschiebungen auf ihre physikalischen Werte erfolgt durch

$$n^{11} = a^{11} N_1 / R_0, \quad n^{22} = a^{22} N_2 / R_0, \quad \sqrt{a^{11}} Q / R_0,$$

$$m^{11} = \frac{a^{11}}{R_0^2} M_1, \quad m^{22} = \frac{a^{22}}{R_0^2} M_2,$$

$$v^1 = \frac{\sqrt{a^{11}}}{R_0} U, \quad v = -\frac{1}{R_0} W, \quad w^1 = \sqrt{a^{11}} \chi.$$

Mit (1.24), (1.12) bis (1.14) und (1.6) erhält man nach einigen Umrechnungen das Gleichungssystem der

Zentrifugenschale

$$U' = -\nu \frac{R'}{R} U + \left(\frac{R R''}{1-R'^2} - \nu \right) \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} W + \frac{N_1}{D}, \quad (1.27)$$

$$W' = -\frac{R''}{\sqrt{1-R'^2}} U + \chi, \quad (1.28)$$

$$\chi' = -\nu \frac{R'}{R} \chi + \frac{M_1}{B}, \quad (1.29)$$

$$N_1' = ET \frac{R'}{R^2} (R'U + \sqrt{1-R'^2} W) - (1-\nu) \frac{R'}{R} N_1 - \frac{R''}{\sqrt{1-R'^2}} Q - \Omega^2 \int_w T R R', \quad (1.30)$$

$$Q' = -ET \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R^2} (R'U + \sqrt{1-R'^2} W) + \left(\frac{R R''}{1-R'^2} - \nu \right) \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} N_1 - \frac{R'}{R} Q + \Omega^2 \left(\int_w T R \sqrt{1-R'^2} + I \int_F \frac{R^2 - R_F^2}{2} \right), \quad (1.31)$$

$$M_1' = B(1-\nu^2) \frac{R'^2}{R^2} \chi + Q - (1-\nu) \frac{R'}{R} M_1 \text{ sowie} \quad (1.32)$$

$$N_2 = \nu N_1 + \frac{ET}{R} (R'U + \sqrt{1-R'^2} W), \quad (1.33)$$

$$M_2 = \nu M_1 + B(1-\nu^2) \frac{R'}{R} \chi. \quad (1.34)$$

Beim Membranspannungszustand ist voraussetzungsgemäß M gleich 0. Damit folgt aus (1.27) bis (1.34)

$$N_1' = \frac{R'}{R} \left(\frac{R R''}{1-R'^2} - 1 \right) N_1 + I \Omega^2 \int_F \frac{R^2 - R_F^2}{2} \cdot \frac{R'}{\sqrt{1-R'^2}}, \quad (1.35)$$

$$U' = -\nu \frac{R'}{R} U + \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} \left(\frac{R R''}{1-R'^2} - \nu \right) W + \frac{N_1}{D}, \quad (1.36)$$

$$W' = -\frac{R''}{\sqrt{1-R'^2}} U \text{ sowie} \quad (1.37)$$

$$N_2 = \frac{RR''}{1-R'^2} N_1 + \Omega^2 R \left(S_w T R + I \rho_F \frac{R^2 - R_F^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-R'^2}} \right). \quad (1.38)$$

Die Hauptspannungen im Schnitt $Z = \text{const.}$ werden wie üblich vereinfachend berechnet zu

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{T} + 12 \frac{M_1}{T^3} Z, \quad (1.39)$$

$$\sigma_{22} = \frac{N_2}{T} + 12 \frac{M_2}{T^3} Z. \quad (1.40)$$

Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese liefert für zäh-elastische Werkstoffe ein brauchbares Beanspruchungskriterium. Sie soll einen zulässigen Wert σ_0 nicht überschreiten. In bezug auf die Hauptspannungen gilt

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22}} \leq \sigma_0.$$

Nach Einsetzen von (1.39) und (1.40) folgt

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 = \frac{1}{T^2} \left\{ \left(12 \frac{Z}{T^2} \right)^2 \cdot (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2) + \right. \\ \left. \left(12 \frac{Z}{T} \right) \cdot (2 N_1 M_1 + 2 N_2 M_2 - N_1 M_2 - N_2 M_1) + \right. \\ \left. (N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2) \right\}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_v^2}{\partial Z^2} = 288 \cdot \frac{M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2}{T^6} \geq 0.$$

Da einerseits die zweite Ableitung von σ_v^2 nach Z nicht kleiner Null wird, andererseits σ_v immer größer Null ist, hat σ_v bezüglich Z kein Maximum im Bereich der Wanddicke, d.h. die maximale Vergleichsspannung an der Stelle $S = \text{const.}$ muß sich an einer der Schalenaibungen befinden. Die größte Vergleichsspannung im Schnitt $S = \text{const.}$ ist somit

$$\sigma_v = \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{36}{T^2} \cdot (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2) \right. \quad (1.41) \\ \left. + \frac{6}{T} \cdot |2N_1 M_1 + 2N_2 M_2 - N_1 M_2 - N_2 M_1| \right. \\ \left. + (N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2) \right]^{1/2}.$$

1.8 Zentrifugenmodell

Der am stärksten beanspruchte Schalenteil einer üblichen Zentrifuge ist in der Regel der Zylindermantel. Ausreichende Vergleichsmöglichkeiten sind daher gegeben, wenn man in den folgenden zwei Kapiteln bei der beispielhaften Anwendung der vorgestellten Verfahren auf ein Modell entspr. Abb. 1-3 zurückgreift.

Das Modell besteht aus einer biegesteifen Zylinderschale, welche jeweils an ihren Enden über zwei starre Platten abgeschlossen ist. Von den zwei Platten ist mindestens eine axial verschiebbar, so daß der sich über den Plattenradius aufbauende Füllungsdruck infolge Zentrifugalwirkung den Zylinderteil zusätzlich zur Radialbelastung (aus Trägheit der Wand und der Füllung) axial belastet.

Die Axialzugkraft im Zylinder berechnet sich aus der Integration des Füllungsdruckes über den Radius

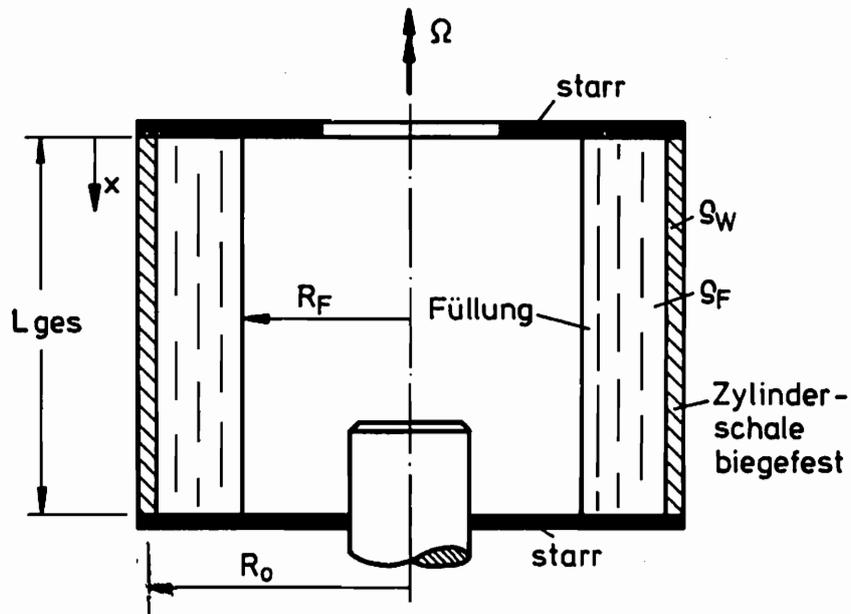


Abb. 1 - 3 Zentrifugenmodell

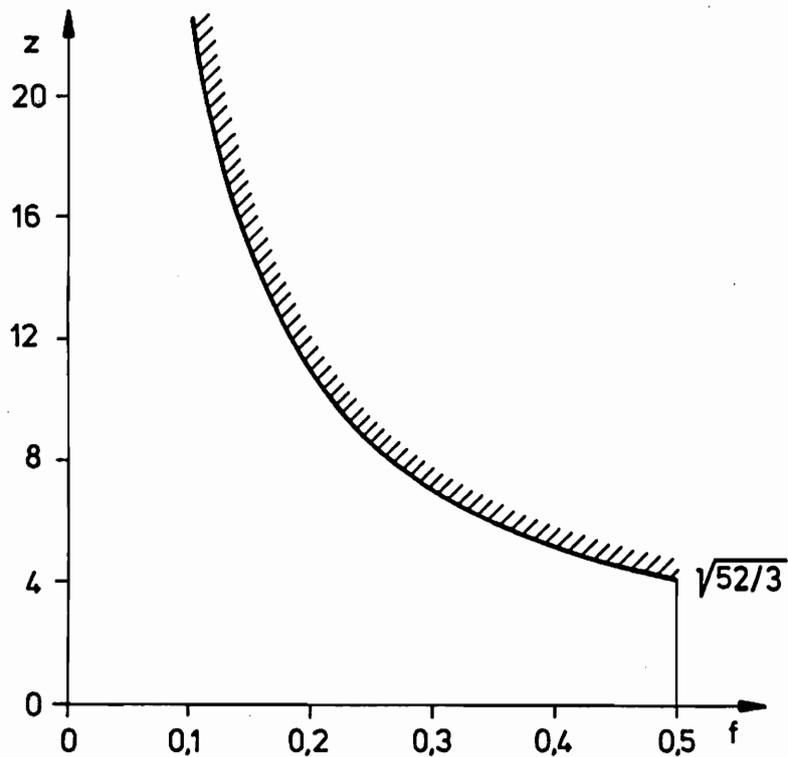


Abb. 1-4 Einschränkung für $z = \Omega^2 R_0^2 \sigma_w / \sigma_0$
in Funktion von $f = [1 - (R_F/R_0)^2] / 2$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{R_F}^{R_0} P_F \cdot 2\pi R dR = \frac{\Omega^2 \rho_F R_0}{8} \left[1 - \left(\frac{R_F}{R_0} \right)^2 \right]^2. \quad (1.42)$$

Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu erhalten, werden folgende dimensionslose Größen eingeführt:

Schlankheitsbeiwert	$\Lambda = L_{\text{ges}}/R_0$
Axialkoordinate	$x = X/L_{\text{ges}}$
Wanddicke aus Membranspannung (vgl. Abschnitt 1.9)	$\lambda_0 = T_0/R_0$
Wanddicke	$t = T/T_0$
Dichteverhältnis	$\varnothing = \rho_F/\rho_W$
Füllradienverhältnis	$\alpha = R_F/R_0$
Füllungsmaß	$f = (1 - \alpha^2)/2$
Spannung	$s = \sigma/\sigma_0$
Moment	$m = M/\sigma_0 T_0^2$
Querkraft	$q = Q/\sigma_0 T_0$
Normalkraft	$n = N/\sigma_0 T_0$
Radialverschiebung	$w = W \cdot E/\sigma_0 R_0$
Schleuderkennzahl	$z = \Omega^2 R_0^2 \rho_W/\sigma_0$
Volumen der Schale	$v = V/(2\pi R_0 T_0 L_{\text{ges}})$.

Mit (1.42) folgt aus (1.27) bis (1.34)

$$w' = \chi, \quad (1.43)$$

$$\chi' = 12 \frac{\Lambda^2 (1 - \nu^2)}{\lambda_0} \cdot \frac{m_1}{x^3}, \quad (1.44)$$

$$q' = \Lambda \left\{ t w + \left[\nu n_1 - \frac{z}{\lambda_0} (\varnothing f + x \lambda_0) \right] \right\}, \quad (1.45)$$

$$m_1' = -\frac{\Lambda}{\lambda_0} q \quad \text{sowie} \quad (1.46)$$

$$n_1 = \frac{\varnothing z f^2}{2 \lambda_0}, \quad (1.47)$$

$$n_2 = \nu n_1 + t w, \quad (1.48)$$

$$m_2 = \nu m_1. \quad (1.49)$$

Das Gleichungssystem führt für w auf die Differentialgleichung

$$w'''' + 4 k^4 w = 4 k^4 w_{sp} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k = \Lambda \sqrt{\frac{z(1-\nu^2)}{\lambda_0^2 t^2}}, \\ w_{sp} = z \left(\frac{\phi f}{\lambda_0 t} + 1 \right). \end{cases}$$

Daraus läßt sich die Übertragungsmatrix für den Zylinderteil der Wanddicke t_1 und der Länge l_1 ermitteln. Sie ist in Abb. 1-5 angegeben.

Wenn nicht anders angegeben, werden folgende Vergleichswerte, welche aus einer praktischen Anwendung stammen, eingesetzt:

$$\phi = 0,1875 \quad f = 0,21875 \quad z = 0,0853 \quad \nu = 0,3 \quad \Lambda = 1.$$

Wegen der symmetrischen Einspannung wird die Rechnung über die halbe Zylinderlänge, welche, wenn nicht anders angegeben, in n Streifen gleicher Länge unterteilt sein wird, durchgeführt.

1.9 Bestimmung von λ_0

Als Bezugswanddicke wurde in Abschnitt 1.8 die Wanddicke T_0 gewählt, die sich für reinen Membranspannungszustand ergibt, wenn die Vergleichsspannung genau den Sollwert σ_0 erreicht.

$$\begin{pmatrix} w \\ \chi \\ \varphi \\ m \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} f_1 & \frac{1}{2k} f_3 & -\frac{k}{\lambda_0 l} f_4 & \frac{2k^2}{l \Lambda^2} f_2 \\ -k f_4 & f_1 & -\frac{2k}{l \Lambda} f_2 & \frac{2k^3 \lambda_0}{l \Lambda^2} f_3 \\ \frac{l \Lambda}{2k} f_3 & \frac{l \Lambda}{2k^2} f_2 & f_1 & \frac{k \lambda_0}{\Lambda} f_4 \\ -\frac{l \Lambda^2}{2k^2 \lambda_0} f_2 & -\frac{l \Lambda^2}{4k^3 \lambda_0} f_4 & -\frac{\Lambda}{2k \lambda_0} f_3 & f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ \chi \\ \varphi \\ m \end{pmatrix}_i$$

$f_1 = \cosh kl_i \cdot \cos kl_i$ $f_2 = \sinh kl_i \cdot \sin kl_i$ $f_{3,4} = \cosh kl_i \cdot \sin kl_i \pm \sinh kl_i \cdot \cos kl_i$

Abb. 1-5 Übertragungsmatrix für den Zylinderabschnitt der Länge l_i

Aus (1.47) und (1.48) folgt

$$n_{1M} = \frac{\emptyset z f^2}{2 \lambda_0} ,$$
$$n_{2M} = z \frac{\emptyset f + \lambda_0}{\lambda_0} .$$

Eingesetzt in (1.41) führt das unter Berücksichtigung der dimensionslosen Größen zur Bestimmung von λ_0

$$\lambda_0 = \frac{z^2 \emptyset f}{1 - z^2} \left[1 - \frac{f}{4} + \sqrt{\frac{1}{4z^2} (f^2 - 2f + 4) - \frac{3}{16} f^2} \right]$$

Der Radikand muß größer gleich Null sein, d.h.

$$z \leq \sqrt{\frac{4}{3} \frac{f^2 - 2f + 4}{f^2}}$$

Da brauchbare Werte von z weit kleiner als eins sind, wird diese Einschränkung (Abb. 1-4) nicht weiter verfolgt. Für die in Abschnitt 1.8 angegebenen Werte berechnet sich λ_0 zu $\lambda_0 = 3,6338 \cdot 10^{-3}$.

2. Bestimmung der Wanddicke

2.1 Aufgabenstellung

Gesucht ist das minimale Volumen einer aus n Streifen gegebener Länge und jeweils konstanter Wanddicke zusammengesetzten Zentrifugenschale mit vorgegebener Mittelfläche unter den genannten Voraussetzungen ($g/\Omega^2 R \ll 1$, technische Biegetheorie) mit den zusätzlichen Einschränkungen, daß in keinem Punkt der Schale die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese den zulässigen Wert σ_0 überschreitet und daß die Wanddicke T den Minimalwert T_{\min} nicht unterschreitet:

$$\text{Gesucht: } \min V(\underline{T}) = \min \sum_{i=1}^n T_i c_i = \min \underline{T}^T \cdot \underline{c} \quad (2.1)$$

$$\text{mit } \begin{cases} \max \sigma_i \leq \sigma_0, \\ T_i \geq T_{\min}, \end{cases}$$

wobei die Konstante c_i berechnet wird zu

$$c_i = \int_0^{L_i} 2\pi R \, dS_i$$

Die Punkte $V(\underline{T}) = \text{const.}$ werden durch Hyperebenen im n -dimensionalen T -Raum dargestellt.

Da die Lösung für $\sigma_0 \rightarrow \infty$ $T_i = T_{\min}$ lautet, da für $\underline{T} \rightarrow 0$ die maximale Vergleichsspannung bei nicht verschwindenden Schnittkräften gegen ∞ strebt - aus (1.27) bis (1.34) und (1.41) folgt für $T \rightarrow 0$

$$\max \sigma_v = \left(6 \left| \frac{M_1}{T^2} \right| + \left| \frac{N_1}{T} \right| \right) \sqrt{1 + \nu^2 - \nu}$$

- und da ein stetiger Zusammenhang zwischen σ und T zu erwarten ist, so enthält die allgemeine Lösung

der Aufgabenstellung mindestens eine der 2n Beschränkungen.

Für den zweidimensionalen Fall am Zylindermodell wurden die Linien konstanter Maximalspannung aufgetragen (Abb. 2-1). Hierbei fällt eine starke Parallelität der höheren Spannungen zu den Koordinatenachsen auf.

Es wird vermutet, daß eine Konstruktion, welche den Forderungen entspricht

$$\begin{aligned} & \left(\max \sigma_i = \sigma_0 \wedge T_i \geq T_{\min} \right) \vee \\ & \left(\max \sigma_i \leq \sigma_0 \wedge T_i = T_{\min} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

eine sinnvolle, aber nicht unbedingt die optimale Lösung darstellt.

Es wurde durch Wahl geeigneter Parameter versucht, eine Lösung entsprechend Abb. 2-2 herzustellen. Es ist dies für $n = 2$ am Modell nicht gelungen ! Für $n = 3$ wurde zufällig eine sehr empfindliche Lösung gefunden (Abb. 2-3). Sie entspricht dem Abbau der Einspannungsmomente durch Fließgelenke, ist volummäßig sehr günstig, konstruktiv aber von geringem Interesse, da bereits kleinste Waddickenänderungen sehr große Spannungsänderungen hervorriefen.

2.2 Iterationsverfahren zum Auffinden einer brauchbaren Lösung

Es wird ein Verfahren angegeben, welches zur Auffindung einer Lösung nach der Bedingung (2.2) erfolg-

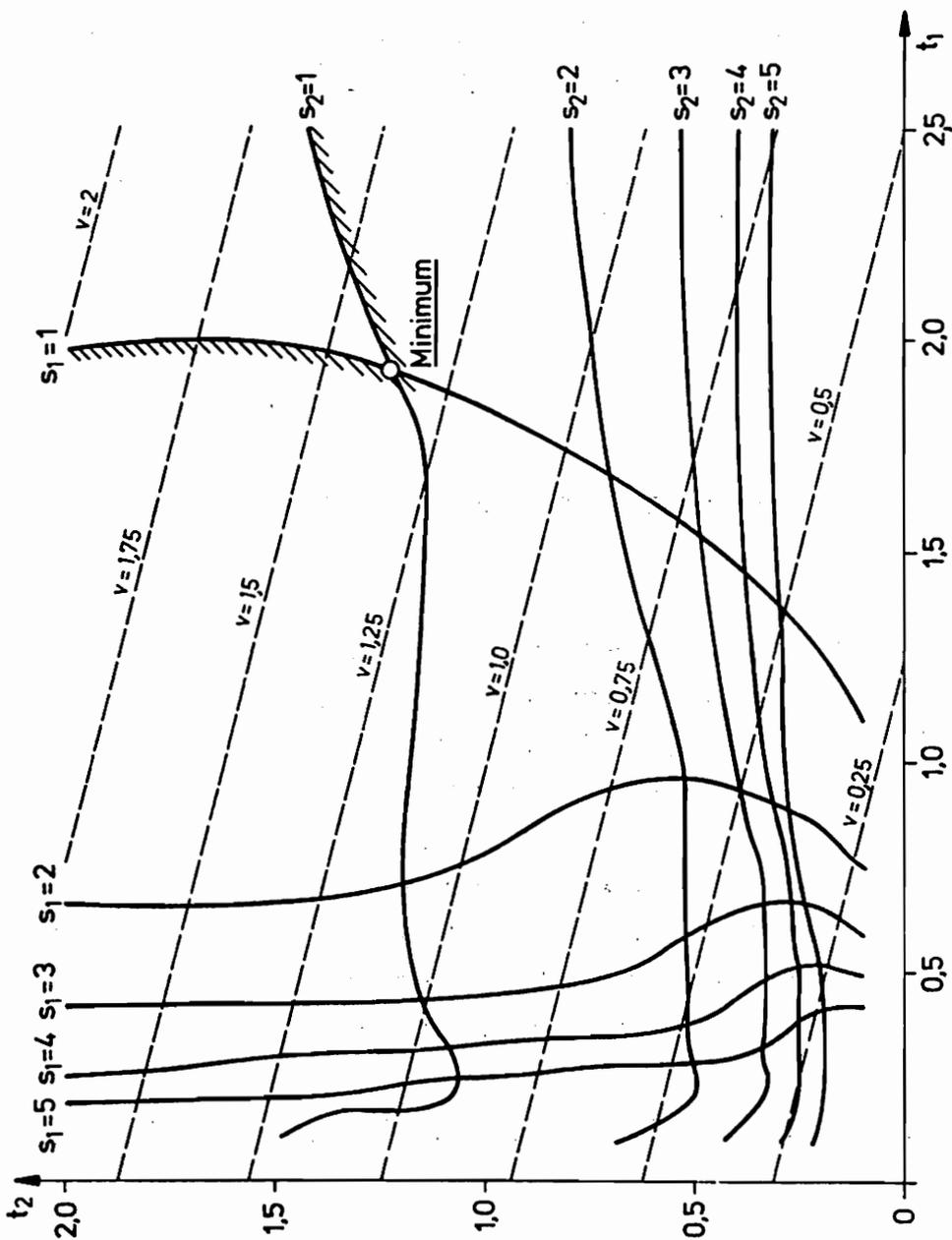


Abb. 2-1 Linien konstanter Maximalspannung und konstanten Volumens beim Zylindermodell
[$n = 2, \Lambda = 1/4, l_1 = 0, l_2 = 0,4$]

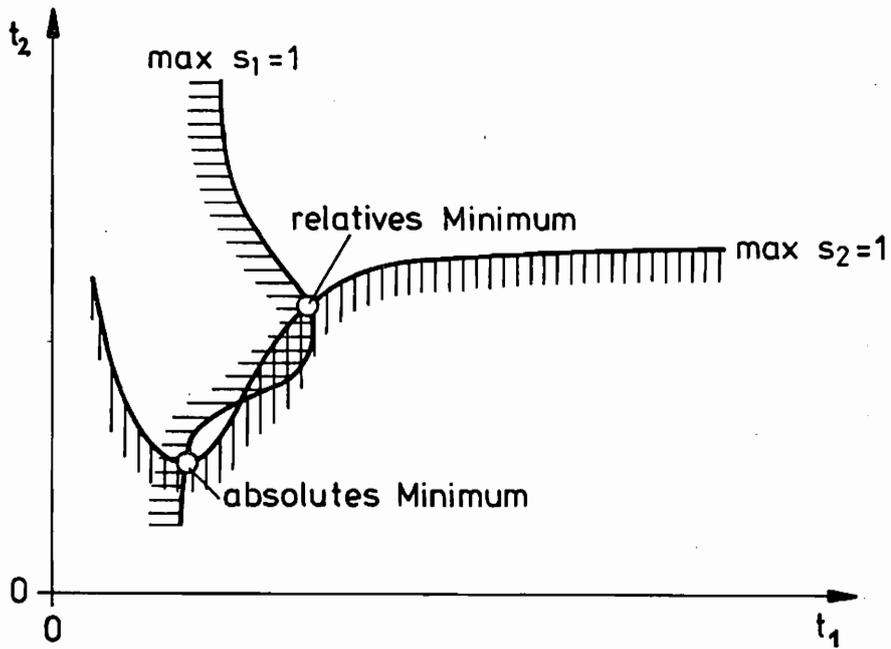


Abb. 2-2 Denkbarer Lösungstyp zu Abb. 2-1

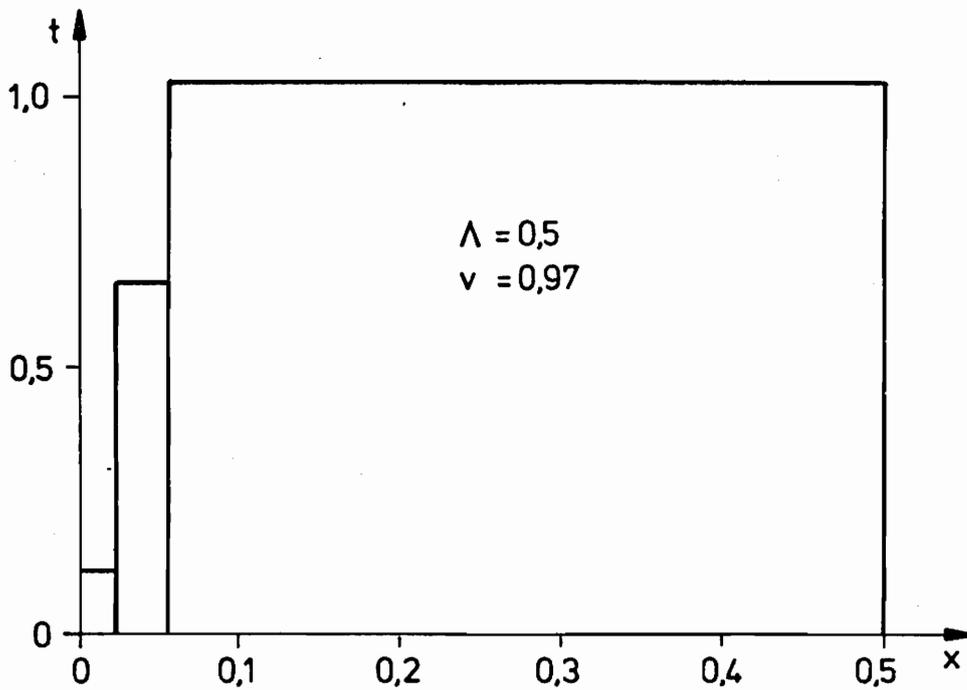


Abb. 2-3 Zentrifugenmodell: Abbau der Einspannmomente durch Fließgelenke

reich arbeitet. Hierbei ist die Anzahl der notwendigen Iterationen im Gegensatz zu konventionellen Verfahren wie z.B. Gradientenverfahren klein, und zwar unterlinear abhängig von der Anzahl der Parameter n .

Beim Membranspannungszustand ist es möglich, die Schnittkräfte unabhängig von den Verformungen zu bestimmen ((1.35) und (1.38)). Sie sind außerdem, solange die Belastung unabhängig von der Wanddicke ist, auch unabhängig von der Wanddicke. Die Lösung unter der Bedingung (2.2) ist in diesem Fall festgelegt durch

$$T = \max \left\{ T_{\min}; \max_s \sqrt{N_1^2(s) + N_2^2(s) - N_1 N_2} / \sigma_0 \right\}.$$

Sind die Belastung und somit auch die Schnittkräfte N_1 und N_2 von T abhängig, so kann die angegebene Formel als Iterationsformel aufgefaßt werden

$$T^{(k+1)} = \max \left\{ T_{\min}; \max_s \sqrt{N_1^2(s, T^{(k)}) + N_2^2(s, T^{(k)}) - N_1 N_2} / \sigma_0 \right\} \quad (2.3)$$

Konvergenzbedingung ist, daß der Betrag der Ableitung des Wurzelausdruckes nach $T^{(k)}$ kleiner als eins ist.

Im vorliegenden Fall (Gleichungen (1.35) und (1.38)) ist N_1 unabhängig, N_2 linear abhängig von $T^{(k)}$. Nach Durchführung der Ableitung von (2.3) nach $T^{(k)}$ sieht man, daß die Konvergenzbedingung dann erfüllt ist, wenn

$$\frac{2 \sigma_0}{\Omega^2 R^2 S_w} > \sqrt{4 - \frac{3}{1 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 - \frac{N_2}{N_1}}},$$

oder nach Einsetzen des größtmöglichen Wertes für den Wurzelausdruck

$$\frac{\Omega^2 R^2 S_w}{\sigma_0} < 1.$$

Dieses war bereits in Abschnitt 1.9 (Abb. 1-4) vorausgesetzt.

Es wäre hier anzumerken, daß es möglich ist, die benötigte Wanddicke in einem Schritt zu erhalten, wenn man N_2 durch (1.38) ersetzt. Es sollte jedoch lediglich gezeigt werden, daß ein Iterationsverfahren, welches so arbeitet, daß in erster Näherung bei einer Wanddickenänderung keine Änderung des Schnittkraftzustands N_1, N_2 erfolgt, konvergieren muß.

Es liegt nahe, bei der biegesteifen Schale ähnlich vorzugehen. Obwohl der formale Beweis der Konvergenz aussteht, wird in erster Näherung angenommen, daß der Schnittkraftzustand N_1, N_2, M_1 und M_2 bei einer Änderung der Wanddicke erhalten bleibt, zumal der Biegespannungseffekt dem Membranspannungszustand in der Regel nur in kleinen Bereichen überlagert ist.

Löst man (1.41) nach T auf, so erhält man

$$\begin{aligned} T^4 \sigma_0^2 - T^2 (N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2) & \quad (2.4) \\ - 6 T \left[2 N_1 M_1 + 2 N_2 M_2 - N_1 M_2 - N_2 M_1 \right] \\ - 36 (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2) & = 0. \end{aligned}$$

Gleichung (2.4) ist die Bestimmungsgleichung für $T^{(k+1)}$ aus dem $T^{(k)}$ zugeordneten Schnittkraftzustand. Der Maximalwert aus T_{\min} und $T^{(k+1)}$ über die Meridiankoordinate S ist ausschlaggebend.

Gleichung (2.4) ist eine algebraische Gleichung 4. Ordnung und hat nach der Descartesschen Regel höchstens eine reelle positive Wurzel. Wie in Abschnitt

6.5 gezeigt wird, kann immer eine positive Wurzel gefunden werden.

Die Wirkung dieses Iterationsverfahrens wird am besten in den Abbildungen 2-4 und 2-5 illustriert. Hierbei werden die Wanddicken nach jedem Funktionsaufruf, d.h. nach jeder Schalenberechnung, in allen Bereichen gleichzeitig variiert. Als Abbruchkriterium wird gewählt

$$|\max \sigma_i - \sigma_0| \leq \varepsilon .$$

2.3 Konvergenzverbesserung

Als Maß für die im k.ten Iterationsschritt im i.ten Streifen erzielte Annäherung an die Sollspannung σ_0 kann das Verhältnis

$$a_i^{(k)} = \frac{\max \sigma_i^{(k)} - \max \sigma_i^{(k-1)}}{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(k-1)}}$$

angesehen werden. $a_i^{(k)}$ sollte gegen eins tendieren.

Es sei $\max \sigma_i^{(0)}$ die zum Startwert $T_i^{(0)}$ gehörende Maximalspannung (Abb. 2-6). Mit dem zuvor beschriebenen Verfahren ist die Wanddicke $T_i^{(1)}$ zu bestimmen. Dazu gehört nach Funktionsauswertung die Maximalspannung $\max \sigma_i^{(1)}$. Nach dem gleichen Verfahren kann $T_i^{*(2)}$ gewonnen werden. Geht man davon aus, daß die Annäherung an die Sollspannung im zuvor beschriebenen Verfahren in zwei aufeinanderfolgenden Schritten etwa gleich groß ist, so gilt

$$\frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{*(2)}}{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(1)}} \approx \frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(1)}}{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(0)}} \approx \text{const.}$$

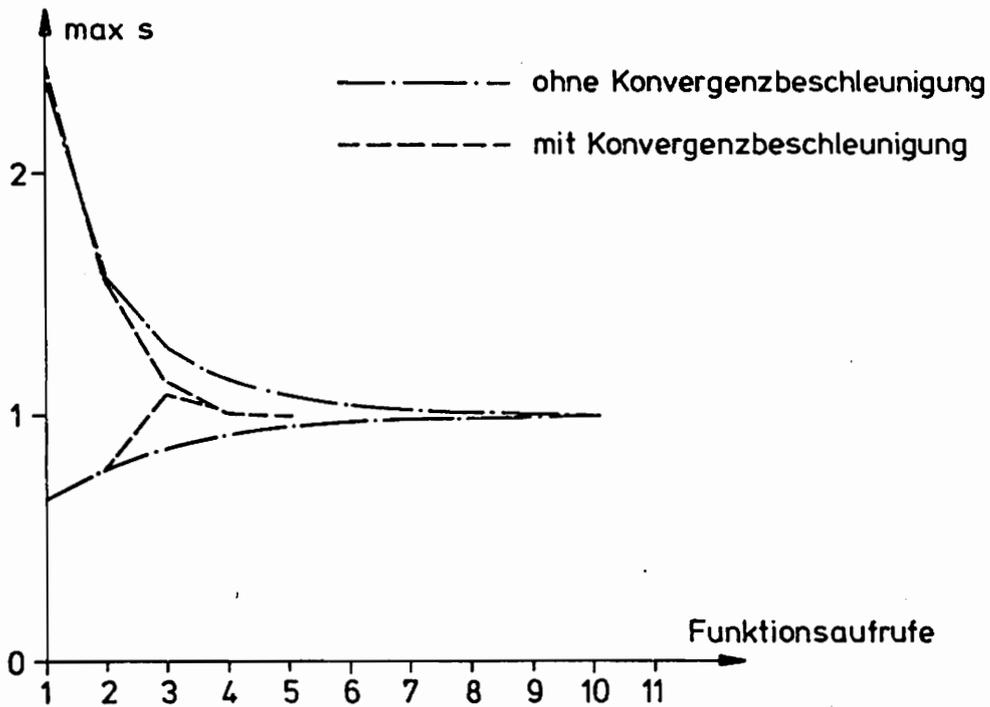


Abb. 2-4 Annäherung an $\max s=1$ von 2 verschiedenen Startpunkten ($n=1$)

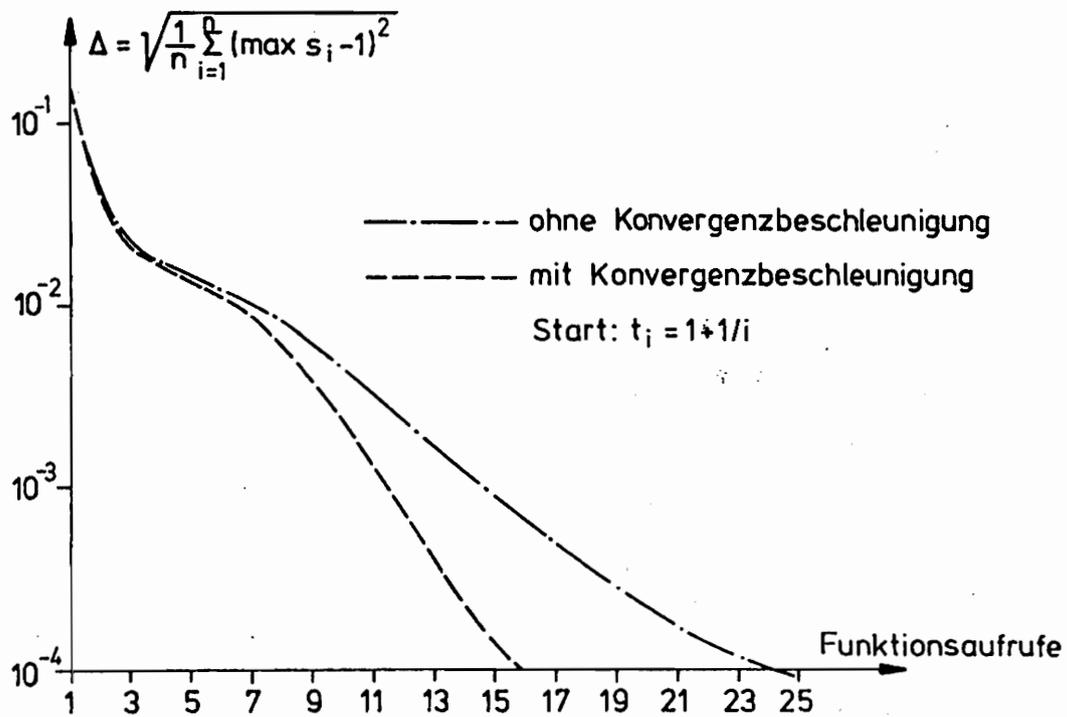


Abb. 2-5 Annäherung an $\max s_i=1$ ($n=20$)

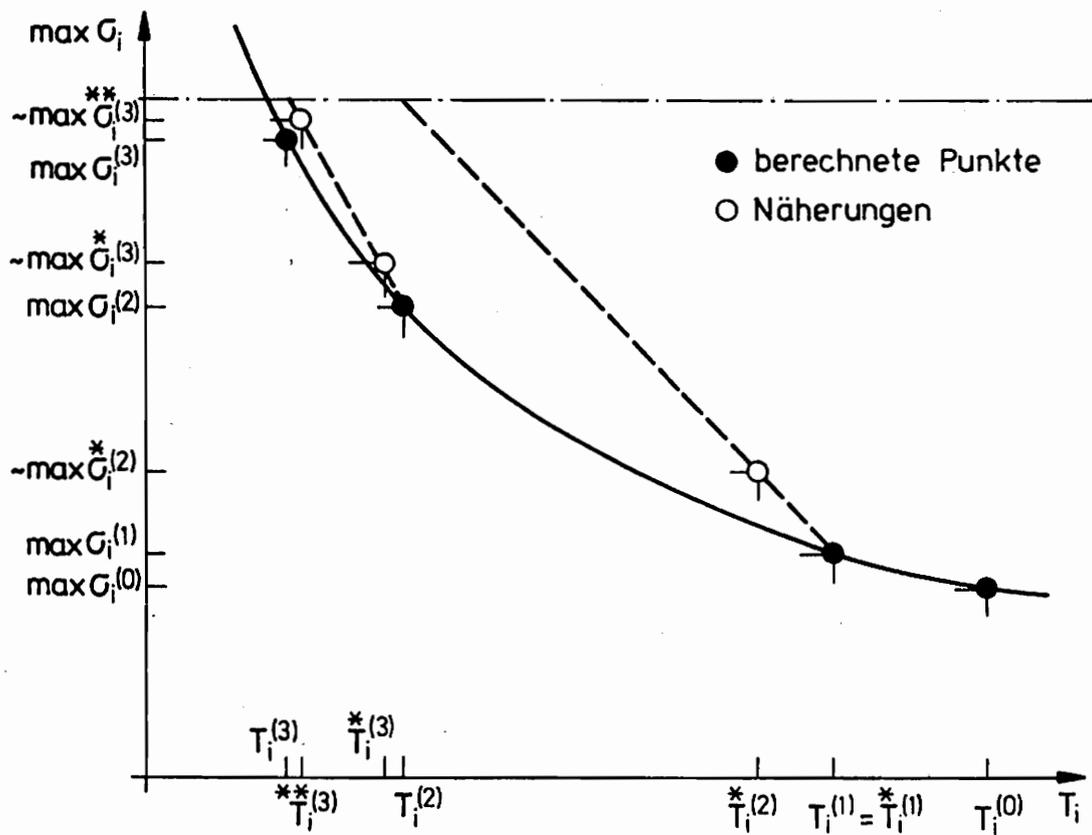


Abb. 2-6 G - T - Darstellung im i .ten Schalenstreifen

Es ist hieraus näherungsweise $\max \overset{*}{\sigma}_i^{(2)}$ zu bekommen. Extrapoliert man linear zur Sollspannung, so erhält man

$$T_i^{(2)} = T_i^{(1)} + \left(\overset{*}{T}_i^{(2)} - T_i^{(1)} \right) \frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(1)}}{\max \overset{*}{\sigma}_i^{(2)} - \max \sigma_i^{(1)}}$$

bzw. $T_i^{(2)} = T_i^{(1)} + \left(\overset{*}{T}_i^{(2)} - T_i^{(1)} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_i^{(1)}}$

Nach Funktionsauswertung erhält man die zugehörige Maximalspannung $\max \sigma_i^{(2)}$. Nach dem Verfahren von Abschnitt 2.2 erhalte man im nächsten Iterationsschritt $\overset{*}{T}_i^{(3)}$. Mit gleicher Korrektur wie bei Schritt $T_i^{(2)}$ bestimmt sich die Wanddicke in erster Verbesserung

$$\overset{**}{T}_i^{(3)} = T_i^{(2)} + \left(\overset{*}{T}_i^{(3)} - T_i^{(2)} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_i^{(1)}}$$

Ist auch die Annäherung an die Sollspannung mit dieser Verbesserung etwa gleich groß wie beim vorherigen Schritt, so gilt

$$\frac{\sigma_0 - \max \overset{**}{\sigma}_i^{(3)}}{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(2)}} \approx \frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(2)}}{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(1)}} \approx \text{const.}$$

Hieraus ist näherungsweise $\max \overset{**}{\sigma}_i^{(3)}$ zu bekommen. Extrapoliert man wiederum linear zur Sollspannung, so erhält man

$$T_i^{(3)} = T_i^{(2)} + \left(\overset{**}{T}_i^{(3)} - T_i^{(2)} \right) \cdot \frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(2)}}{\max \overset{**}{\sigma}_i^{(3)} - \max \sigma_i^{(2)}}$$

bzw. $T_i^{(3)} = T_i^{(2)} + \left(\overset{*}{T}_i^{(3)} - T_i^{(2)} \right) \frac{1}{\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_i^{(2)}}$

In Erweiterung erhält man für den k-ten Iterationsschritt

$$T_i^{(k+1)} = T_i^{(k)} + \left(\overset{*}{T}_i^{(k+1)} - T_i^{(k)} \right) \cdot \frac{1}{\prod_{r=1}^k \alpha_i^{(r)}}$$

$T_i^{*(k+1)}$ ist hierbei wiederum die nach Abschnitt 2.2 ermittelte Wanddicke.

Es kann folgendes Iterationsschema benutzt werden

$$F_i^{(0)} = 1 ,$$

$$\alpha_i^{(k)} = 1 - \frac{T_i^{*(k+1)}}{T_i^{(k)}} ,$$

$$p_i^{(k)} = \begin{cases} \sqrt[n]{a_i^{(k)}} & \text{für } k > 1 \text{ und } \begin{cases} G_0 \neq \max G_i^{(k-1)} , \\ T^{(k)} \neq T_{\min} , \\ a_i^{(k)} < 1 , \end{cases} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$F_i^{(k)} = \max \begin{cases} F_i^{(k-1)} \cdot p_i^{(k)} , \\ \alpha_i^{(k)} \cdot (1 + |\delta|) \text{ mit } |\delta| \ll 1 , \end{cases}$$

$$T_i^{(k+1)} = \max \begin{cases} T_i^{(k)} + (T_i^{*(k+1)} - T_i^{(k)}) \frac{1}{F_i^{(k)}} \\ T_{\min} \end{cases}$$

Es zeigte sich als vorteilhafter, für $p_i^{(k)}$ die n-te Wurzel von $a_i^{(k)}$ zu benutzen. Obwohl bei linearer Annäherung ($p_i^{(k)} = a_i^{(k)}$) bei großem n zuerst eine schnellere Approximation an die Sollspannung erfolgte, wurden bei enger Nachbarschaft zur Sollspannung störende Schwankungen der Wanddicke, bedingt einerseits durch die numerische Ungenauigkeit bei der

Division sehr kleiner Zahlendifferenzen, andererseits durch die bei gleichzeitiger Waddickenänderung für kurze Schalensegmente besonders stark auftretenden gegenseitigen Randeinflüsse, festgestellt. Die n.te Wurzel schwächt das Konvergenzbeschleunigungsverfahren mit n ab.

$F_i^{(k)}$ darf $\alpha_i^{(k)}(1+|\delta|)$ nicht unterschreiten. Wenn keine Beschränkung T_{\min} vorliegt, wird hierdurch vermieden, daß $T_i^{(k+1)}$ kleiner als Null wird.

Die erreichte verbesserte Konvergenz ist in den Abbildungen 2-4, 2-5, 2-7 und 2-8 dargestellt. Als Vergleichsgröße wurde die mittlere quadratische Abweichung, definiert zu

$$\Delta^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max \sigma_i^{(k)} - \sigma_0)^2}$$

gewählt. Die im k.ten Iterationsschritt erzielte Verbesserung kann ausgedrückt werden durch das Verhältnis $\Delta^{(k)} / \Delta^{(k-1)}$. Das Mittel der Verbesserungen strebt mit wachsendem n einer konstanten Größe zu. Die Anzahl der Iterationen (= Funktionsaufrufe) ist daher bei größerem n kaum noch von n abhängig.

Es wurde versucht, mit geeigneten Iterationsverfahren (Gradientenmethode, optimale Gradientenmethode, Normalverteilung mit variabler Streuung) ähnlich schnell zum Ziel zu kommen. Bei guter Startstellung gelang dies nur für $n \leq 3$ mit einfacher linearer Extrapolation:

$$T_i^{(k+1)} = T_i^{(k-1)} + (T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}) \cdot \frac{\sigma_0 - \max \sigma_i^{(k-1)}}{\max \sigma_i^{(k)} - \max \sigma_i^{(k-1)}}$$

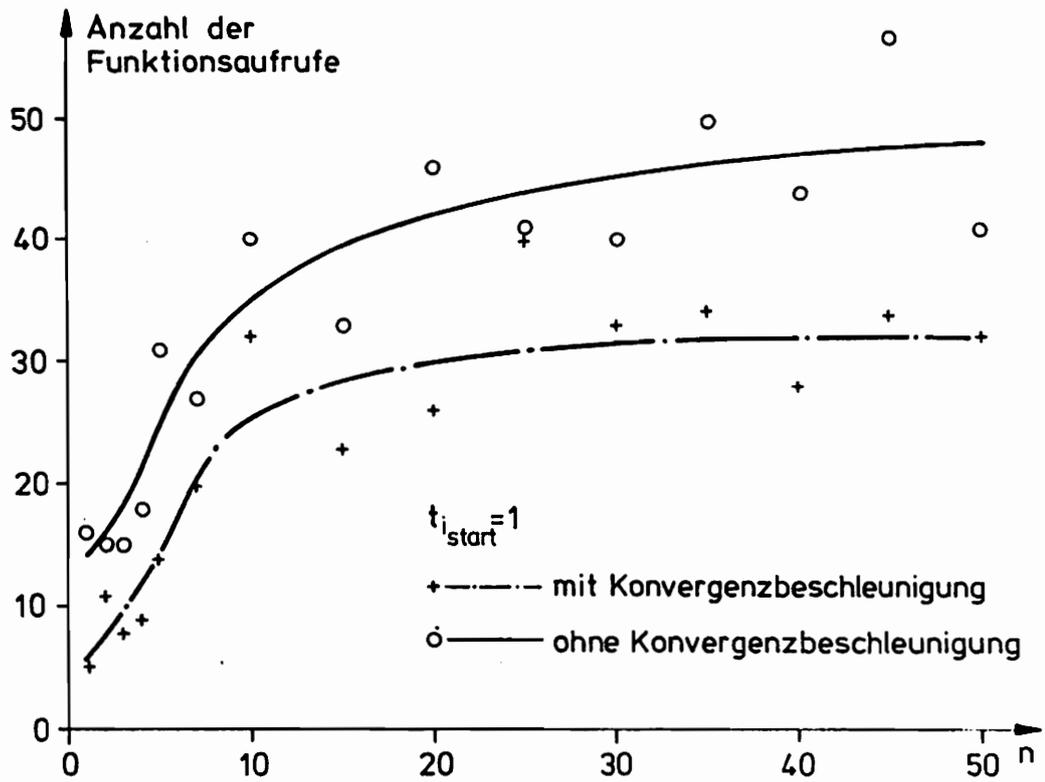


Abb.2-7 Konvergenzgeschwindigkeit für $|\max s_i - 1| \leq 10^{-4}$

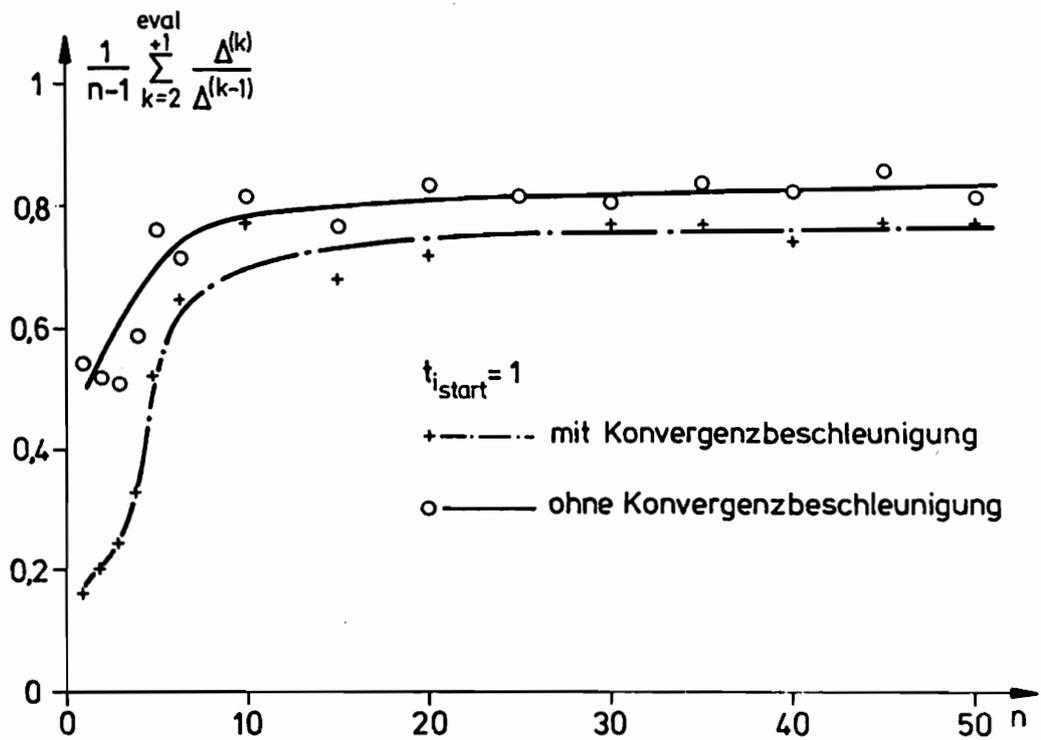


Abb.2-8 Mittlere Konvergenzverbesserung für $|\max s_i - 1| \leq 10^{-4}$

Eine gute Ausgangsnäherung ist im allgemeinen Fall nicht vorhanden !

Gradientenmethode und gradientenbezogene Verfahren, wie konjugierte Gradientenmethode, variable Metrikmethode etc. benötigen allein schon zur Aufstellung eines numerisch zu berechnenden Gradienten mindestens n Aufrufe und sind daher hier kaum vergleichbar.

2.4 Kontinuierlicher Wanddickenverlauf

Die aufgestellten Differentialgleichungen der Zentrifugenschale gelten auch bei geringen Wanddickenänderungen. Dieser Sachverhalt kann ausgenutzt werden, um auf gleiche Art und Weise wie beim diskontinuierlichen Wanddickenverlauf den Wanddickenverlauf der Zentrifuge, welche aus n Streifen mit linear veränderlichem Wanddickenverlauf besteht, zu ermitteln. Hierzu werden die Spannungen und Zustandsgrößen an den Knickstellen ermittelt. Die Wanddicken an den Knickstellen werden entsprechend dem besprochenen Verfahren variiert. Da keine Abfrage über den Spannungszustand zwischen den Knickstellen der Wanddicke erfolgt, muß n sehr groß gewählt werden. n kann dann als ausreichend groß angenommen sein, wenn sich der Wanddickenverlauf zu $n/2$ mit demjenigen zu n im Rahmen der geforderten Genauigkeit deckt. Der kontinuierliche Wanddickenverlauf kann eine gute Aussage darüber geben, welches minimale Volumen für die gegebenen Parameter möglich ist.

Abb. 2-9 zeigt vergleichsweise kontinuierlichen und diskontinuierlichen Wanddickenverlauf.

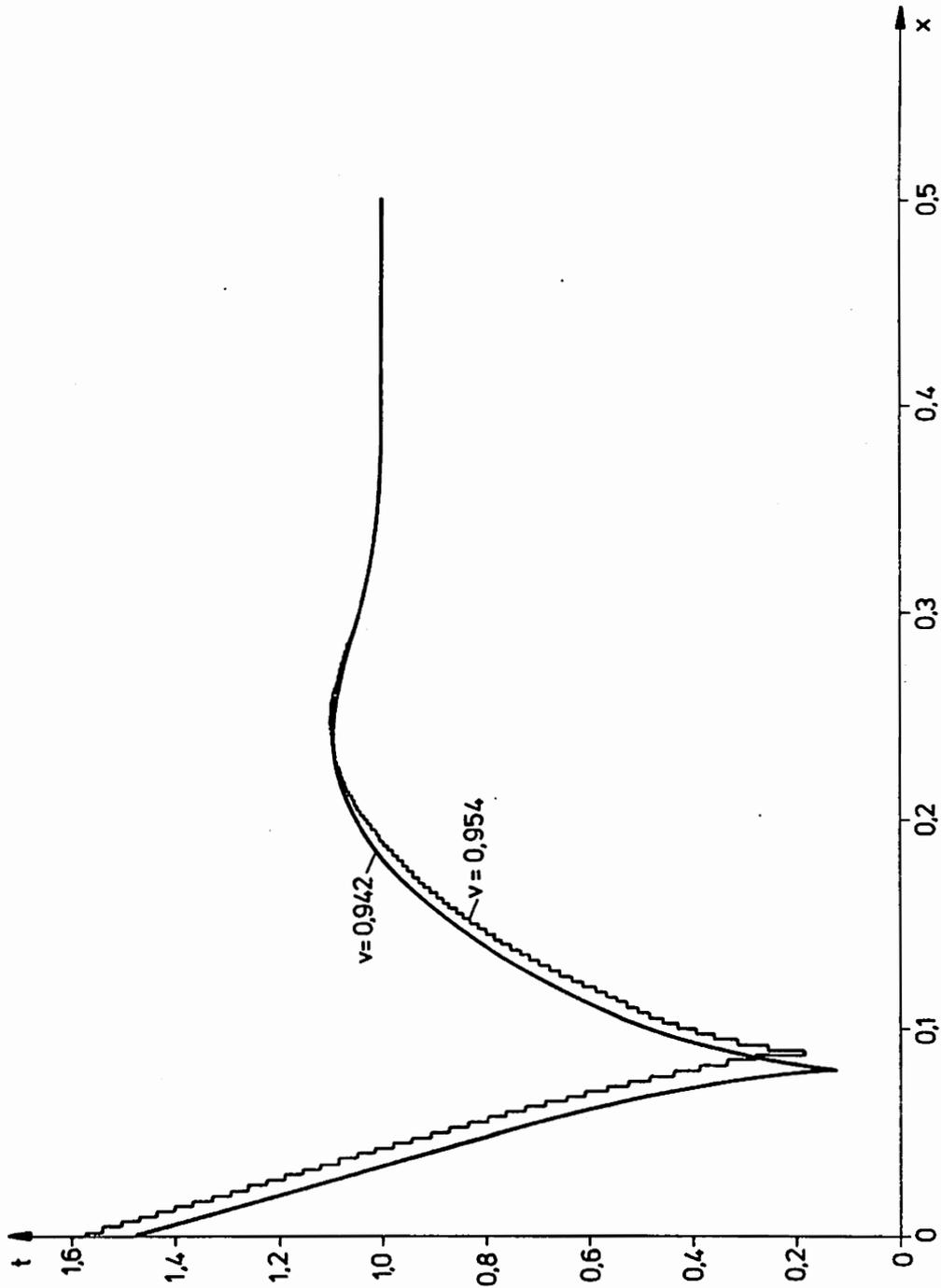


Abb. 2-9 Wandstärkenverlauf der optimierten Zylinderschale ($\Lambda = 0,5$)
Vergleich diskontinuierlicher und kontinuierlicher Verlauf

2.5 Einige Ergebnisse am Zylindermodell

2.5.1 Volumen in Funktion der Zahl der Schalenstreifen gleicher Länge

(Abb. 2-10)

Das Ergebnis spiegelt zwei interessante Details wieder:

- a) Eine ungünstigere Aufteilung und entsprechende Verteilung der Zustandsgrößen bringt bei vier Teilen gleicher Länge ein größeres Volumen als bei drei Teilen.
- b) Bei einer hohen Anzahl von Streifen geht das benötigte Schalenvolumen unterhalb des Volumens der biegespannungsfreien Schale. Durch die Einspannung können bei konstanter Wanddicke über die Zylinderlänge unweit der Ränder die Momente (wellenartiger Abbau) und die Normalkraft in Umfangsrichtung (wellenartiger Aufbau) sehr klein sein. Hieraus resultiert in diesem Bereich bei der optimierten Schale eine geringere Wanddicke als bei der Membranschale.

2.5.2 Einfluß der Wanddickenbegrenzung

Der Wanddickenverlauf der Zylinderschale mit Wanddickenbegrenzung ist in den Abb. 2-11 und 2-12 dargestellt. Wie aus Gleichung (2.2) zu ersehen ist, kann die Maximalspannung im Bereich der Wanddickenbegrenzung den zulässigen Wert unterschreiten. Die Wanddicken in den angrenzenden Bereichen werden in der Regel kleiner sein als im nichtbegrenzten Fall. Das erzielte Volumen (Abb. 2-13) ist im Bereich $t_{\min} < 1$ nur unwesentlich von der Wanddickenbegrenzung betroffen.

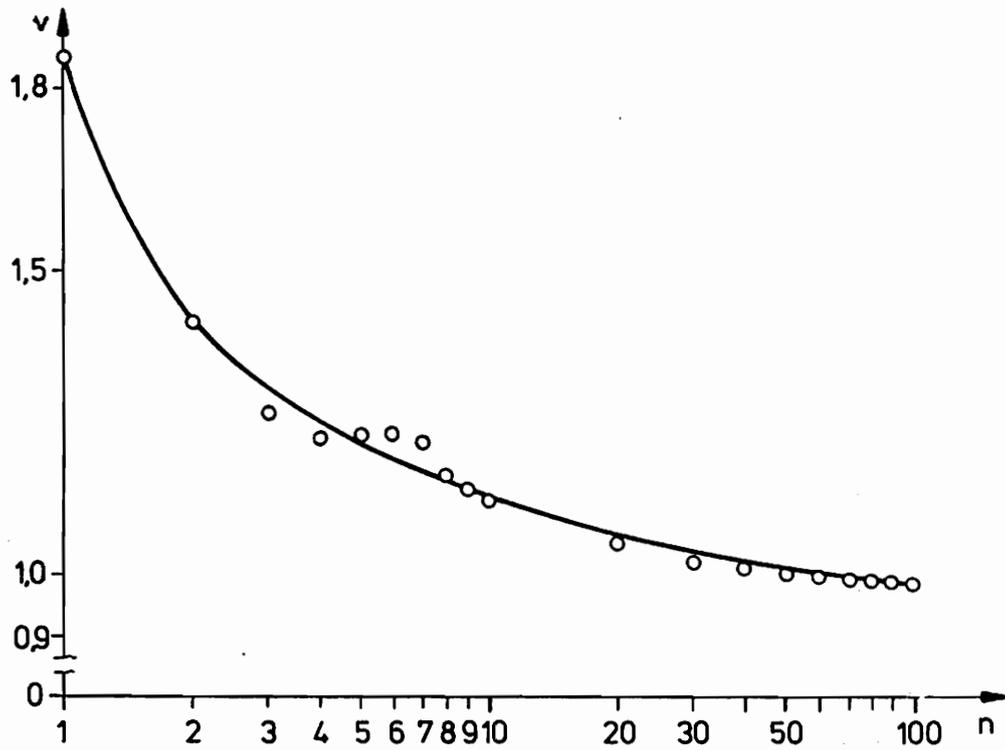


Abb. 2-10 Volumen in Abhängigkeit der Anzahl von gleichlangen Streifen

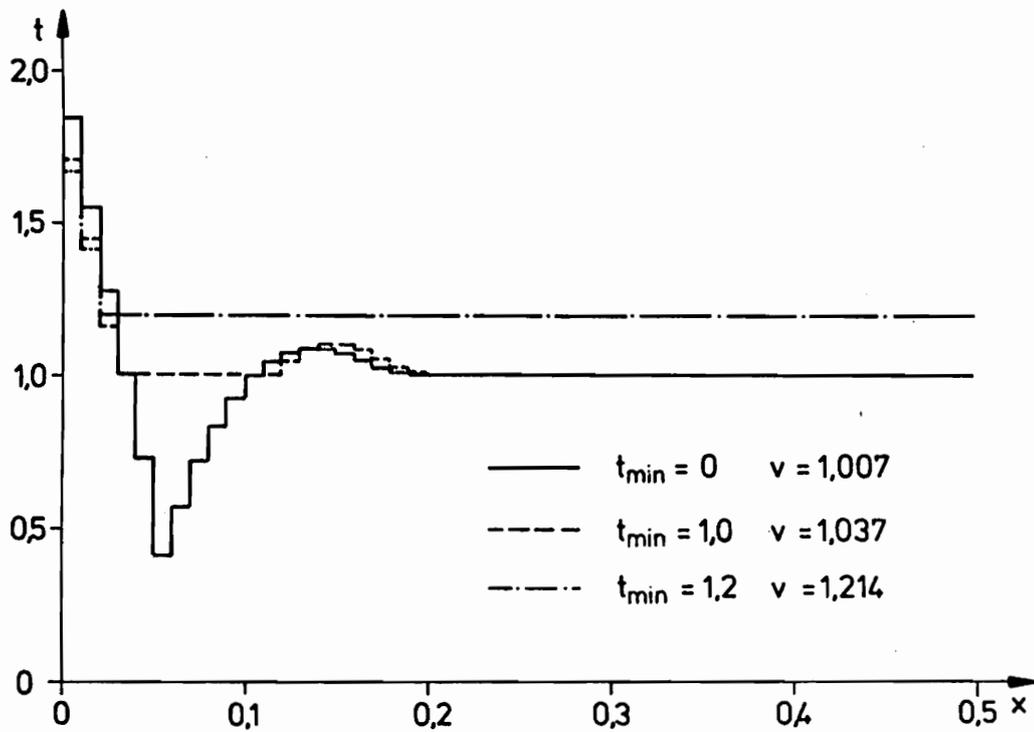


Abb. 2-11 Wandstärkenverlauf bei Begrenzung $t \geq t_{\min}$ (diskontinuierlicher Verlauf) $n = 50$

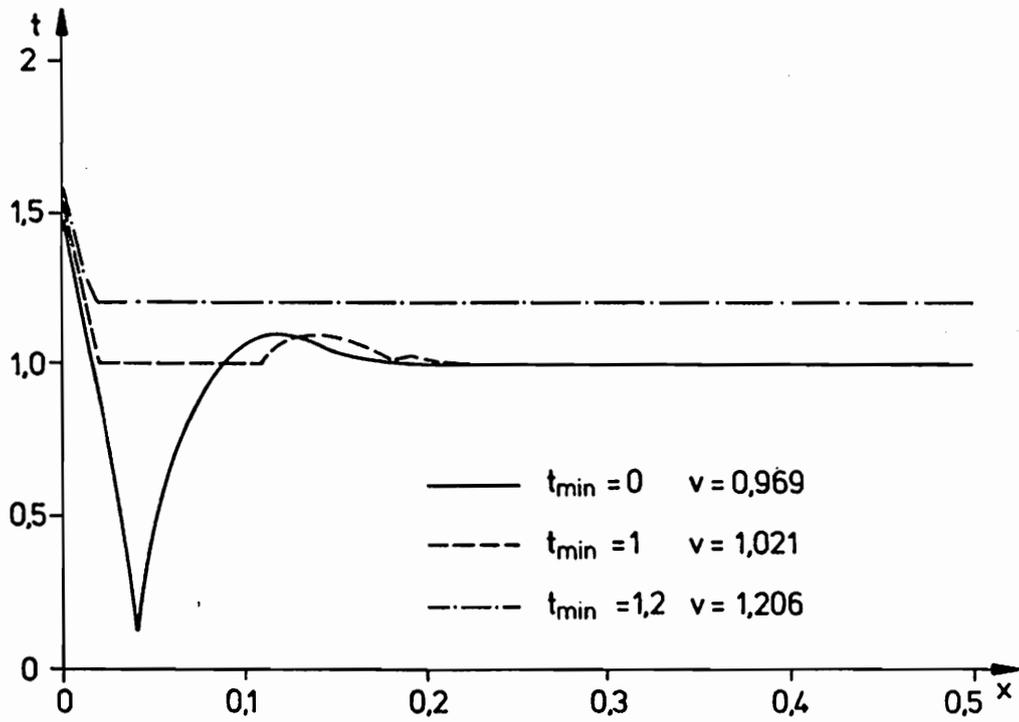


Abb.2-12 Wandstärkenverlauf bei Begrenzung $t \geq t_{\min}$
(kontinuierlicher Verlauf, $n = 50$)

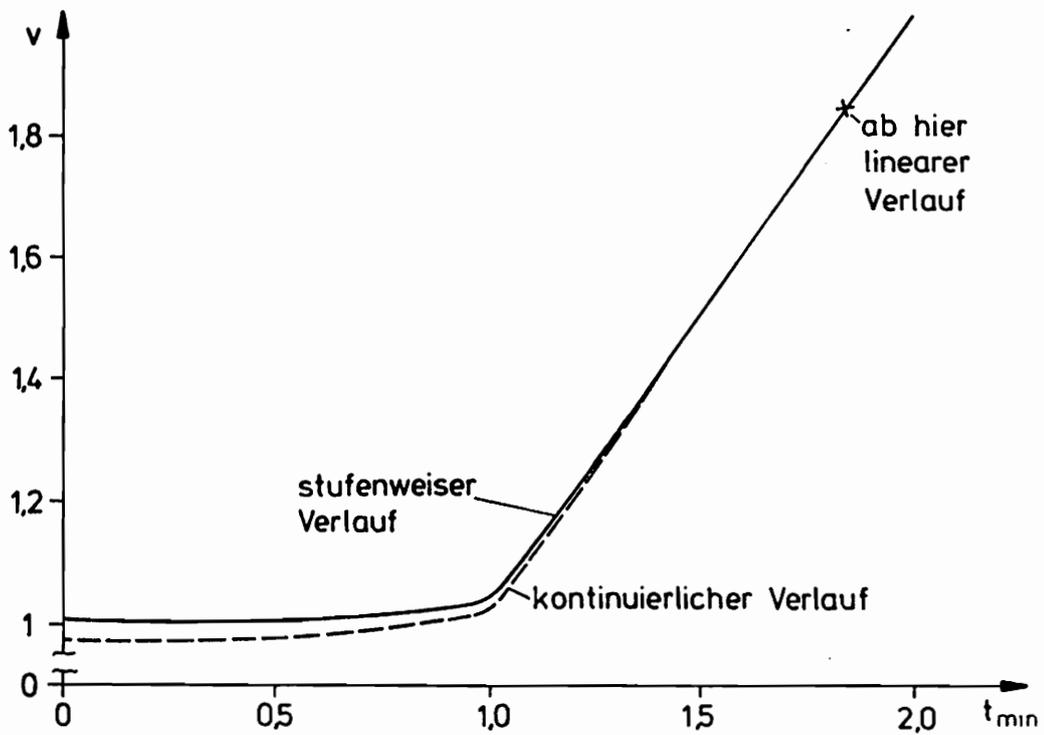


Abb.2-13 Minimalvolumen in Abhängigkeit von t_{\min} ($n=50$)

2.5.3 Einfluß der zulässigen Spannung

Eine Reduzierung der zulässigen Spannung bedingt eine Erhöhung der Wanddicke an der Einspannung. Durch die erhöhte Wanddicke klingen die Randmomente weicher ab; dies bewirkt wiederum ein Verrutschen der minimalen Wanddicke von der Einspannung ab (Abb. 2-14).

2.5.4 Empfindlichkeit gegenüber einer Änderung der Füllhöhe und der Fülldicke

Da die maßgebliche Belastung diejenige aus der Füllung ist, interessieren die Änderung der Wanddicke in Funktion der beiden Parameter f und \emptyset .

In einem weiten Bereich ist die Lösung T/T_{Membran} unempfindlich gegenüber einer Änderung des Dichteverhältnisses \emptyset (Abb. 2-15).

Die Änderung des Radienverhältnisses $R_F/R = \varepsilon$ bewirkt lediglich eine Veränderung der Wanddicke in dem Bereich, der besonders durch die auftretenden Biegemomente gekennzeichnet ist. Da diese bei allen ε von der Einspannung her ähnlich schnell abklingen, ändert sich die Wanddicke im restlichen Bereich (nahezu Membranspannungszustand) kaum (hier Änderung kleiner als Strichstärke) (Abb. 2-16).

2.5.5 Empfindlichkeit der Lösung

Eine Untersuchung auf Empfindlichkeit der Lösung gegenüber einer Störung, d.h. Veränderung der Wanddicke, wurde in der Art durchgeführt, daß abwechselnd

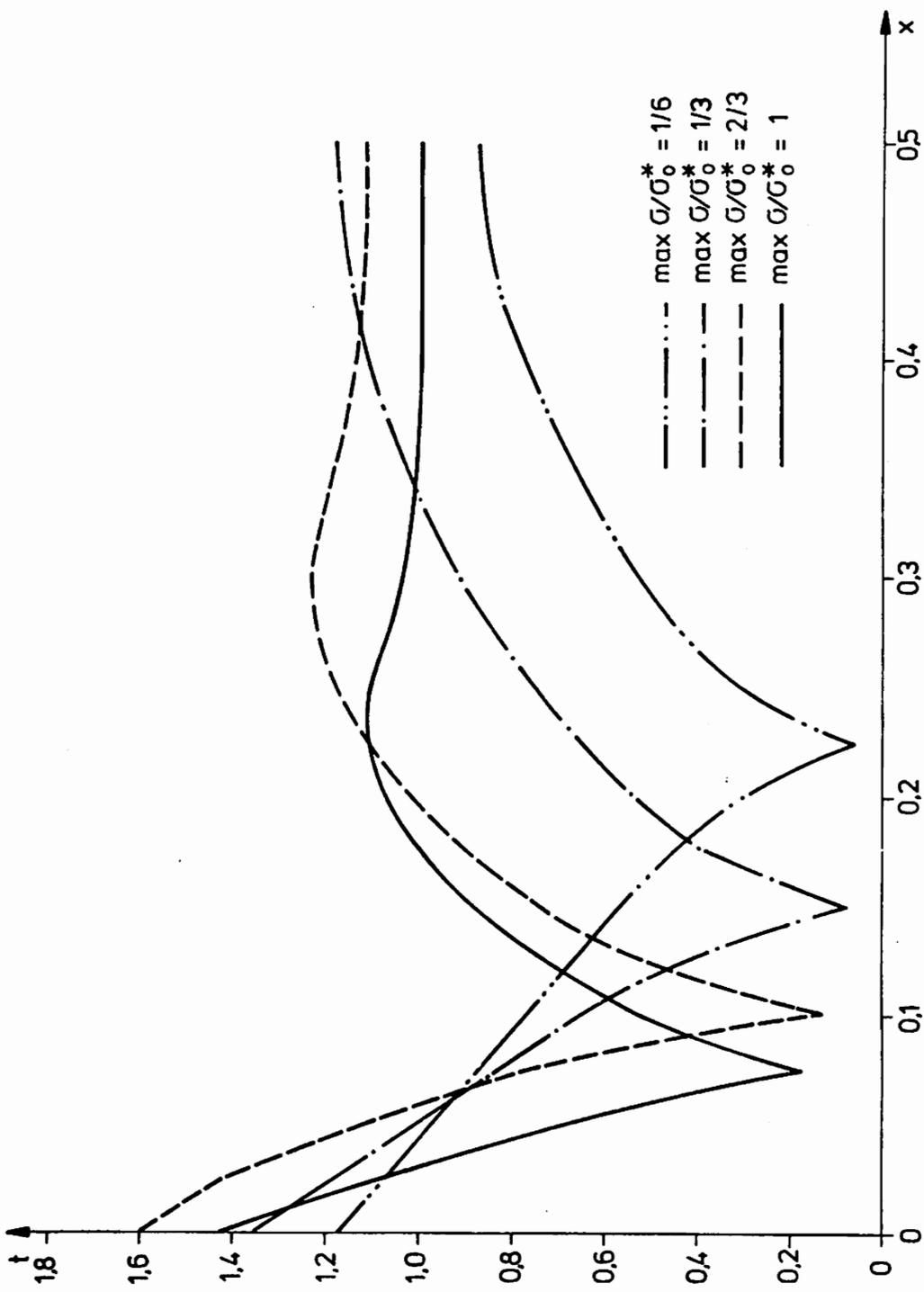


Abb. 2 - 14 Veränderung der zulässigen Spannung ($\sigma_0^*/E = 2,8571 \cdot 10^{-3}$, $\Lambda = 0,5$, $n = 20$)

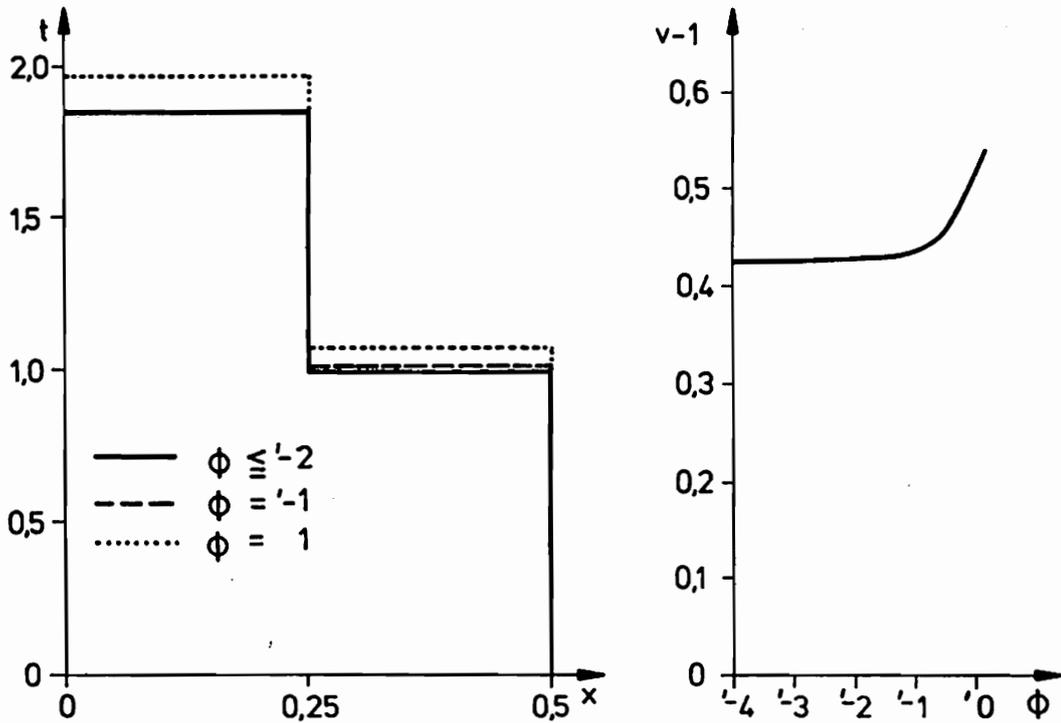


Abb. 2-15 Abhängigkeit der Wandstärkenkonfiguration gegenüber einer Änderung des Dichteverhältnisses $\phi = \rho_F/\rho_W$ ($n = 2$)

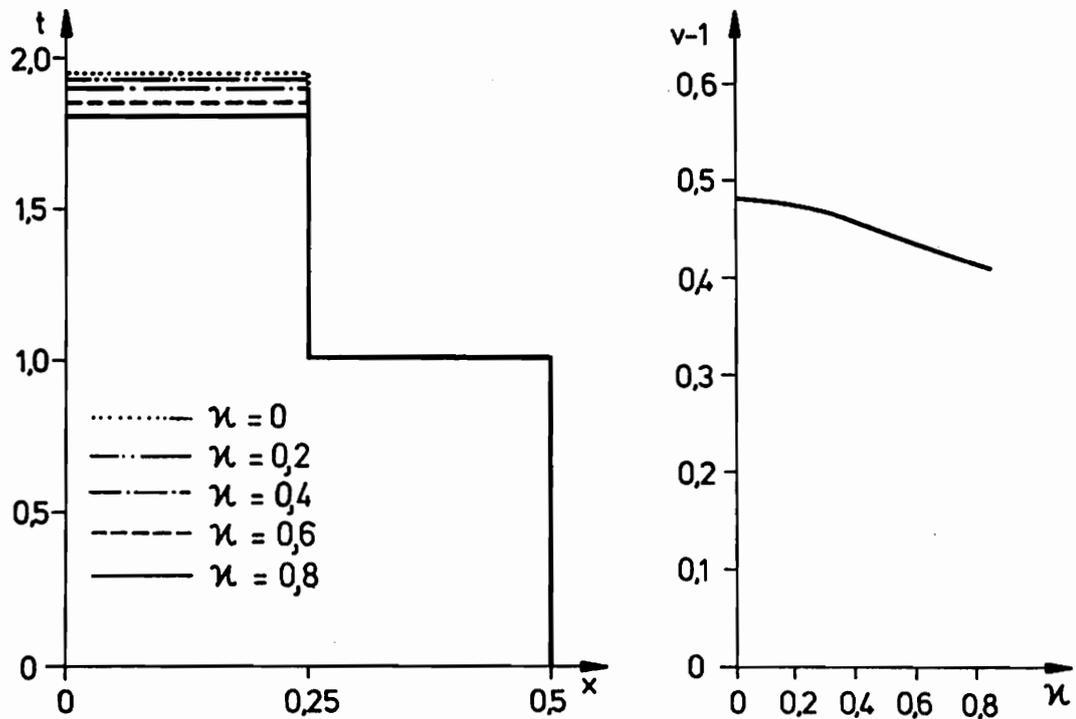


Abb. 2-16 Abhängigkeit der Wandstärkenkonfiguration gegenüber einer Änderung des Radienverhältnisses $\kappa = R_F/R_0$ ($n = 2$)

die optimierten Wanddicken um $\pm 1\%$ verändert wurden. Es zeigte sich, daß sich die Maximalspannung ungefähr im selben Maße entgegengesetzt proportional verändert. Es wird wegen dieser weitgehenden Unempfindlichkeit auf eine Darstellung verzichtet.

2.5.6 Einfluß von Λ auf die Konvergenzgeschwindigkeit

Sehr kurze Schalen ändern ihre Schnittkräfte kaum noch bei einer Änderung der Wanddicke, da die Verformungen nur geringfügig sind. Ihr Verhalten ist daher "stärker statisch bestimmt" als dasjenige von langen Schalen. Die Konvergenzgeschwindigkeit dürfte sich daher mit kleiner werdendem Λ langsam der Konvergenzgeschwindigkeit der Membranschale anpassen (Abb. 2-17).

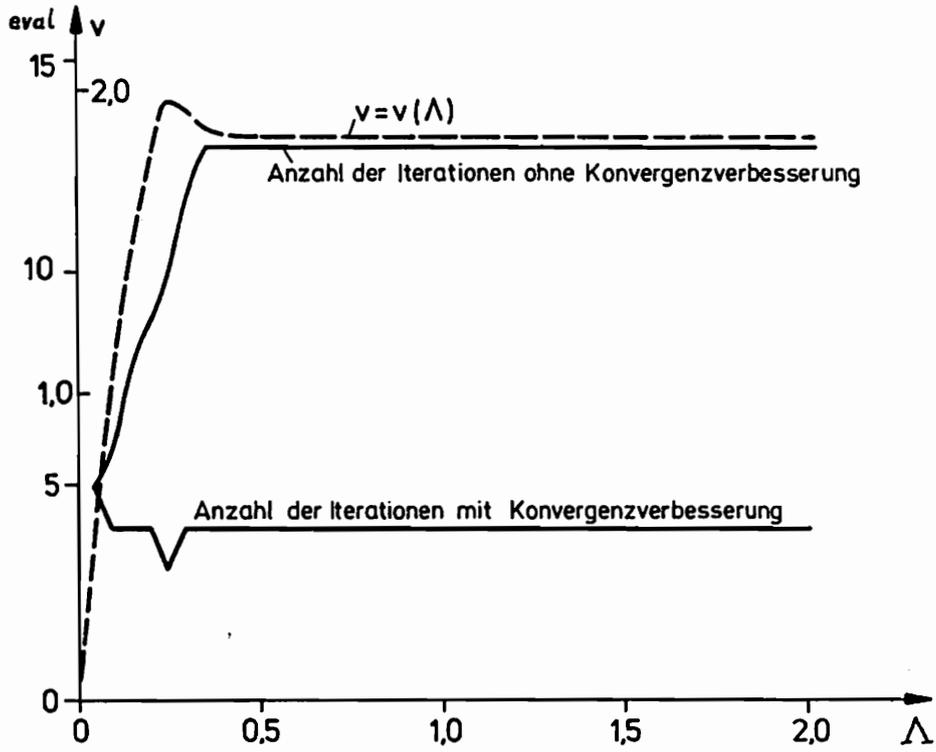


Abb.2-17 Einfluß einer Änderung von Λ auf das Konvergenzverhalten ($t_0=2, n=1, \epsilon=1/4$) und das erzielte Volumen

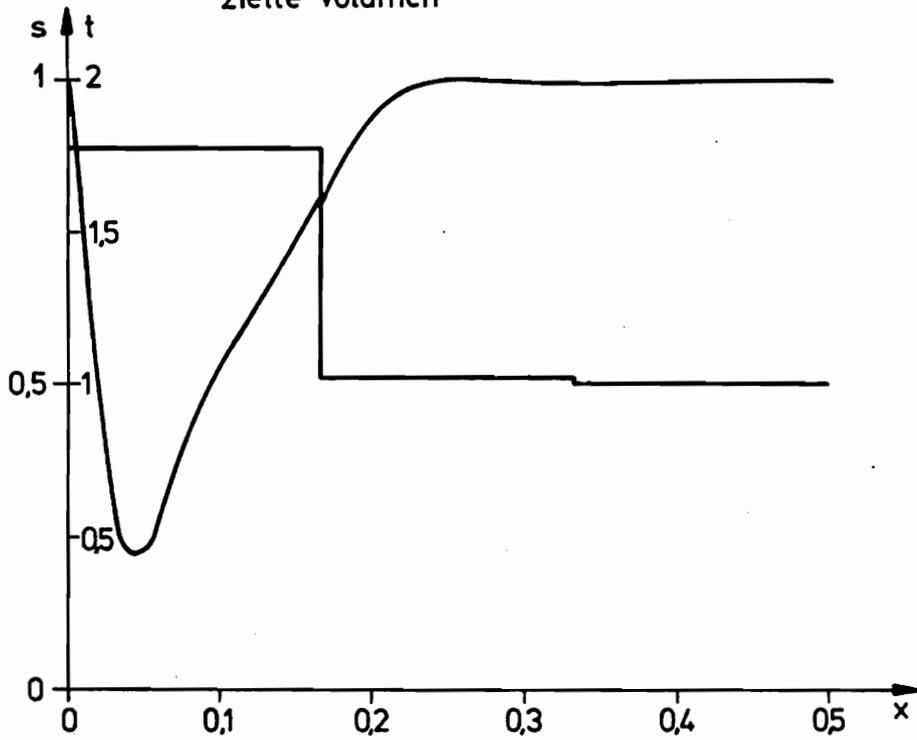


Abb.2-18 Spannungsverlauf bei einer optimierten Schale ($n=3$)

3. Variation der Streifenlängen

3.1 Aufgabestellung

Gesucht ist

$$\min V(\underline{L}, \underline{T}) = \min \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} 2\pi R_i T_i dS_i ,$$

wobei die Beschränkungen gelten

$$\max \sigma_i \leq \sigma_0 ,$$

$$T_i \geq T_{\min} ,$$

$$L_i \geq L_{\min} ,$$

und die Gleichung gilt mit $\underline{1} = (1, 1, 1, \dots, 1)$

$$\underline{L}^T \cdot \underline{1} = L_{\text{Ges}} . \quad (3.1)$$

Geht man davon aus, daß nach der in Kapitel 2 beschriebenen Methode zu jeder Spaltenmatrix \underline{L} die optimale Waddickenkonfiguration leicht bestimmbar ist, und löst man (3.1) nach L_n auf, so reduziert sich die Problemstellung zu:

Gesucht ist

$$\min V(\underline{L}) = \min \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{L_i} 2\pi R_i T_i dS_i , \quad (3.2)$$

mit den Beschränkungen

$$L_i \geq L_{\min}$$

$$\underline{L}^T \cdot \underline{1} \leq L_{\text{Ges}} - L_{\min} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (3.3)$$

Der Schnittpunkt einer Beschränkung mit der Suchrichtung des k-ten Iterationsschrittes $\underline{d}^{(k)}$ kann beschrieben werden durch $\underline{L}^{(k)} + m \underline{d}^{(k)}$. Hierbei

ist m festgelegt (Abb. 3-1) durch

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \frac{L_{\min} - L_i^{(k)}}{d_i^{(k)}} \\ m_n &= \frac{L_n^{(k)} - L_{\min}}{\underline{L}^{(k)T} \cdot \underline{1}} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Bei Suche mit gleichem Richtungssinn wie $\underline{d}^{(k)}$ dürfen nur positive Werte von m akzeptiert werden. Der kleinste Wert von m ist maßgebend.

Da alle Beschränkungen in \underline{L} linear sind, entfällt eine aufwendige Suche nach brauchbaren Richtungen (feasible directions). Der Richtungsvektor muß lediglich auf die Beschränkung umgeklappt werden. Dies geschieht bei den $(n-1)$.ten Beschränkungen durch Nullsetzen der entsprechenden Richtungsgröße ($d_i^{(k)} = 0$). Bei der n .ten Beschränkung wird die neue Richtung bestimmt durch

$$d_i^{(k)} := d_i^{(k)} - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} d_j^{(k)} \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{d}^{(k)} := \underline{d}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \underline{1} \left(\underline{d}^{(k)T} \cdot \underline{1} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Eine Weitersuche auf der Richtung $\underline{d}^{(k)}$ ist nicht mehr möglich, wenn $\underline{d}^{(k)} = \underline{0}$ ist oder für $n-2$ Richtungen $d_i^{(k)} = 0$ gilt und

$$\underline{L}^{(k)T} \cdot \underline{1} = L_{\text{ges}} - L_{\min} .$$

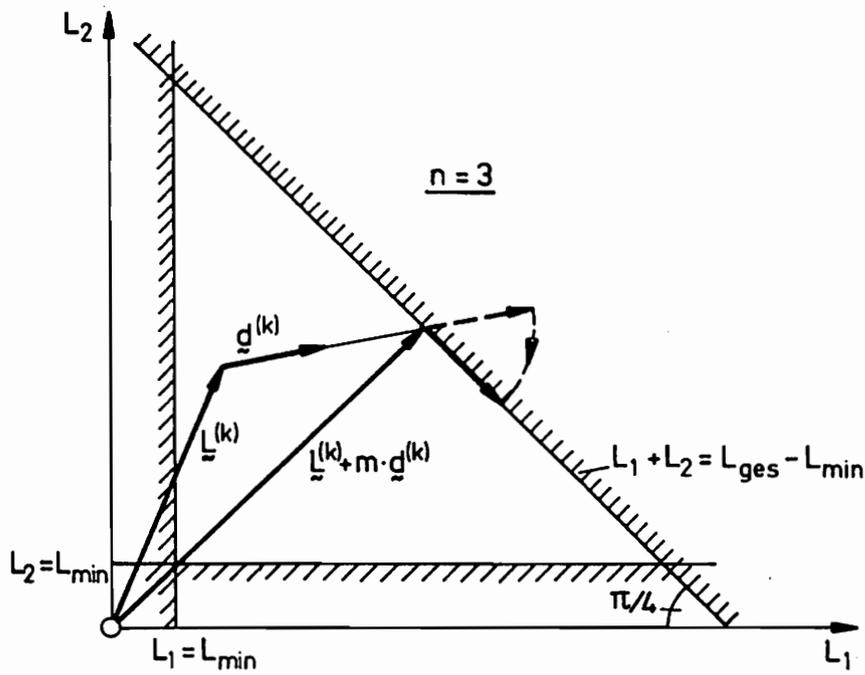


Abb.3-1 Beschränkungen für die reduzierte Problemstellung

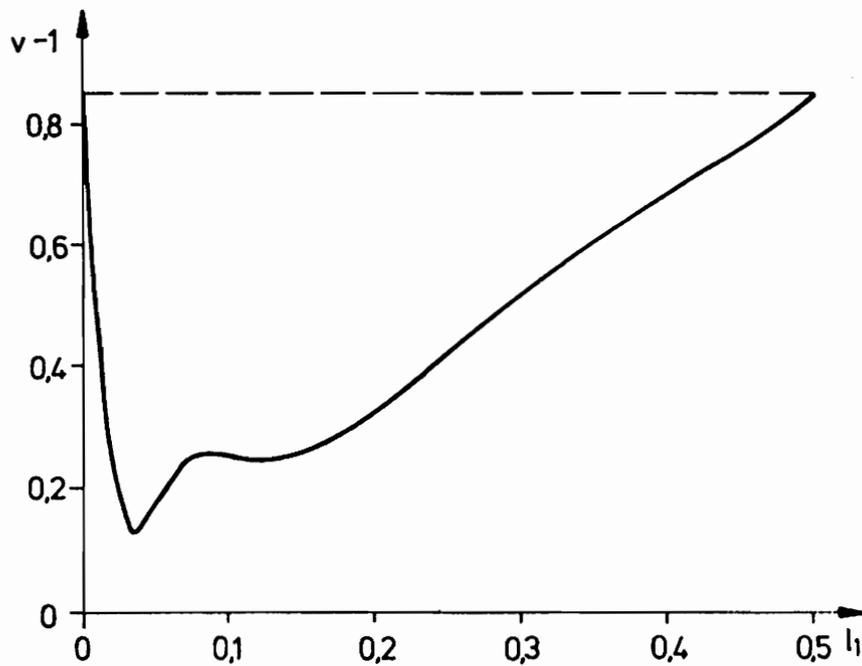


Abb. 3-2 Volumen in Funktion der Streifenlänge ($n=2$)

3.2 Untersuchung auf Unimodalität

Wie man den Abbildungen 3-2 und 3-3 entnehmen kann, ist die Funktion $V(\underline{L})$ nicht unimodal, das heißt, es sind mehrere Minima vorhanden! Das absolute Minimum ist daher nicht mit deterministischen Optimierungsverfahren, welche sich auf die Suche relativer Extrema beschränken, zu erhalten.

3.3 Iterationsverfahren zum Auffinden einer brauchbaren Lösung

Da jeder Funktionsaufruf, d.h. das Auffinden der optimalen Wandstärkenkonfiguration zu gegebener Längskonfiguration, einige Rechenzeit erforderlich macht, ist es sinnvoll, mit einem groben Gitterverfahren das Gebiet nach lokalen Minima abzusuchen. Anschließend können die mit einem deterministischen Verfahren bestimmten lokalen Minima miteinander verglichen werden. Als deterministisches Verfahren erscheint das Powell-Verfahren (Abschn. 6.3) besonders geeignet, da es ohne Gradientenbestimmung auskommt und doch recht schnell konvergiert (bei quadratischen Funktionen in n Iterationsschritten). Benötigt man nur eine gröbere Genauigkeit, so ist die optimale Gradientenmethode, wie sich anhand von Rechnungen hier zeigte, allerdings vorzuziehen.

Als Ergebnis bei dem Zentrifugenmodell kann aus Abbildungen 3-4 und 3-5 ersehen werden, daß der große Sprung in der Volumenersparnis von $n=1$ nach $n=2$ erfolgt. So ist zum Beispiel die Volumenersparnis von $n=1$ nach $n=2$ für den bekannten Parameterzustand 39,2 %, von $n=2$ nach $n=100$ (Gleichteilung) nur noch 12 %. $n=100$ soll hier für $n \rightarrow \infty$ stehen. Von $n=2$ nach

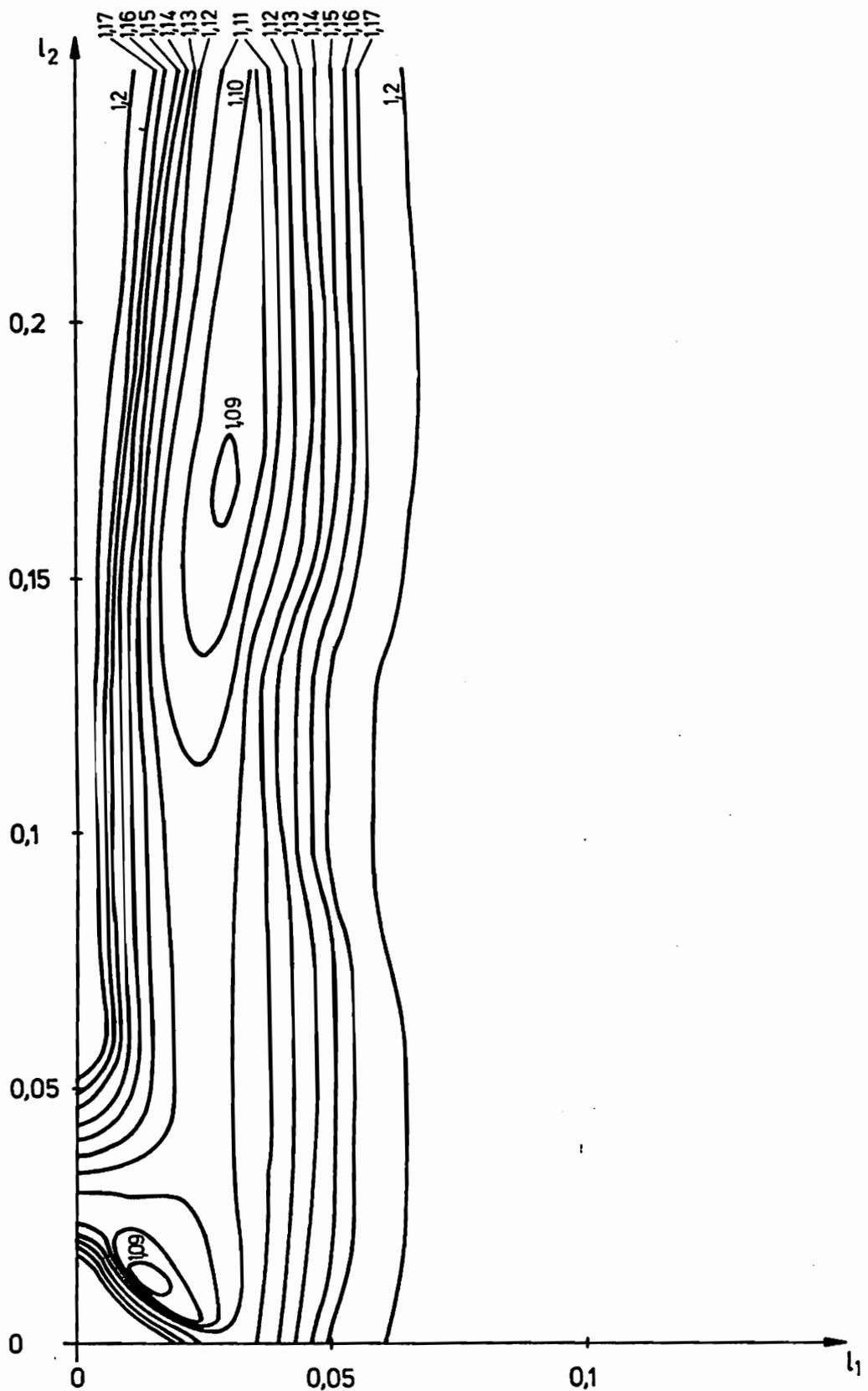


Abb.3-3 Höhenlinien des Volumens über die Streifenlängen (n=3)

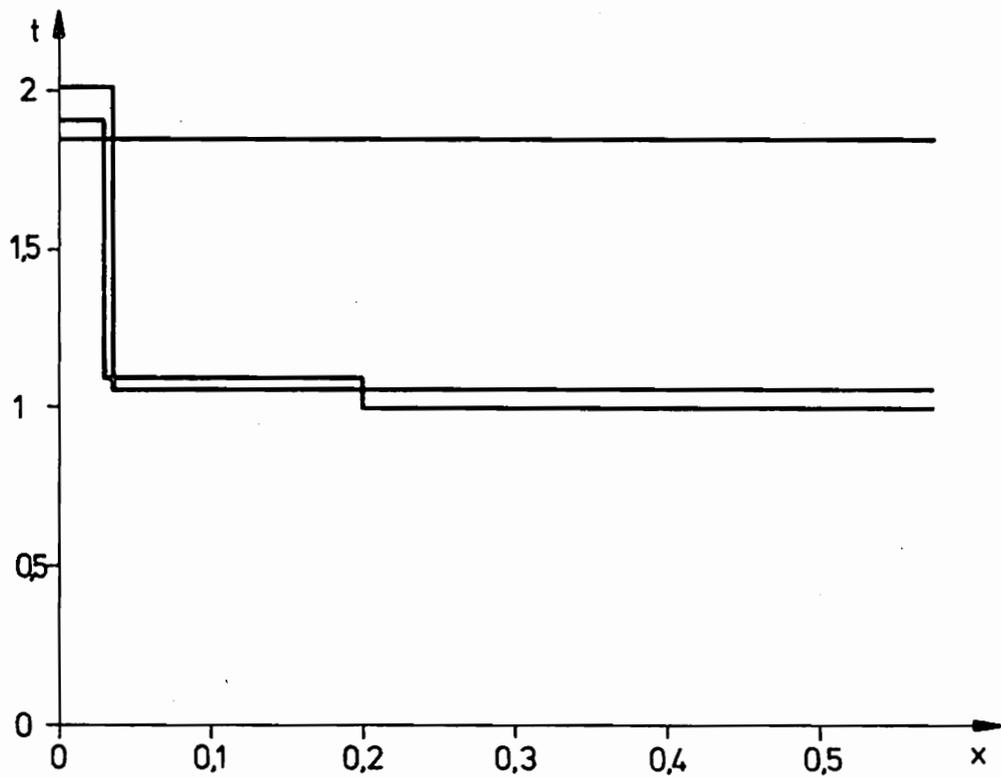


Abb.3-4 Wandstärkenverlauf für $n=1, n=2, n=3$

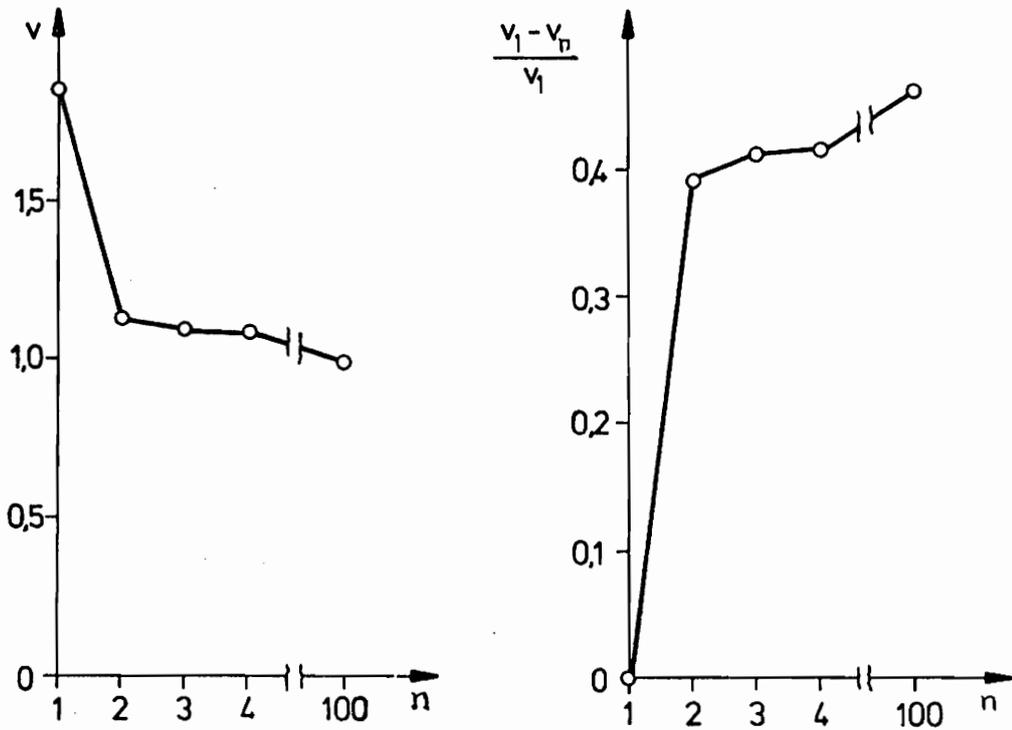


Abb. 3-5 Volumen und -ersparnis in Abhängigkeit von n

$n=3$ gewinnt man nur noch 3,2 %.

3.4 Näherungslösung am Zylindermodell für $n=2$

Wie im vorhergegangenen Abschnitt gezeigt wurde, ist es ohne großen Nutzen, mehr als zwei Streifen zu wählen. Man muß bedenken, daß jeder zusätzliche Streifen zusätzliche Herstellungskosten erfordert.

In Abb. 3-6 ist der Spannungsverlauf für die optimierte zweistreifige Schale dargestellt. Es zeigte sich in einem weiten \wedge -Bereich, daß die Minimalspannungen in beiden Streifen grob gleich groß sind. Diesen Umstand kann man ausnutzen, um eine Näherungslösung zu erhalten, die, wie sich zeigte, in der Regel ca. 1 % bei Betracht des Volumens neben der optimalen Lösung liegt. Die Anzahl der Schalenberechnungen ist aber wesentlich beschränkter. Um keine "falschen relativen Minima" bezüglich der Streifenlängen zu erhalten, muß die Genauigkeit der Wanddickenermittlung erheblich hochgeschraubt werden (Verhinderung von "Rauschen"). Diese erhöhte Genauigkeit ist für die Näherungslösung nicht erforderlich.

Der verwendete Algorithmus ist:

$$l_i^{(k+1)} = l_i^{(k)} + \min(l_i^{(k)}) \cdot \left[\frac{\min \sigma_i^{(k)}}{\max \sigma_i^{(k)}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\min \sigma_j^{(k)}}{\max \sigma_j^{(k)}} \right]$$

Die Streifenlängenänderung erfolgt hierbei linear mit dem Verhältnis aus Minimal- zur Maximalspannung. Am günstigsten erwies sich die sukzessive Iteration Wandstärke/Länge.

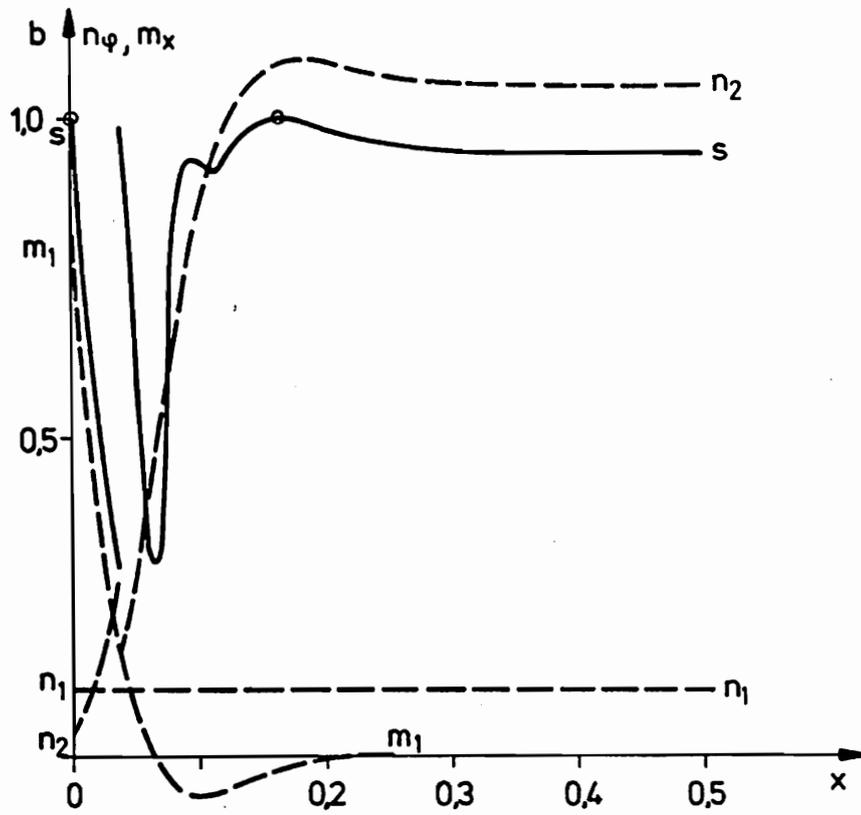


Abb.3-6 Spannungsverlauf der optimierten Zylinderschale ($n=2$)

4. Anwendung: Zentrifuge Kegel/Zylinder/Kegel

4.1 Vorstellung der Zentrifuge und Aufgabenstellung

Der Großteil der Zentrifugen ist vom Typus nach Abb. 4-1. Eine Kegelschale ist auf einer Welle fest eingespannt. Daran schließt sich die eigentliche Zentrifugenschale, eine Zylinderschale, an. Als abschließender Deckel wird eine offene Kegelschale verwendet. Die oft verwendeten Scheiben/Platten sollen hierbei als Sonderfälle der Kegelschale ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0$) nicht ausgeschlossen sein.

Eine sinnvolle Optimierungsaufgabe stellt sich folgendermaßen dar:

Gesucht ist das minimal mögliche Gewicht der dargestellten Zentrifuge mit bereichsweise konstanten Wanddicken T_1, T_2, T_3 , wenn

- 1) eine bestimmte Schleuderleistung, bestimmt durch Ω und R , erzielt werden soll,
- 2) ein bestimmtes Füllvolumen $V_{\text{Füllung}}$ zentrifugiert werden soll,
- 3) die Gesamtbaulänge der Zentrifuge L_{max} nicht überschreiten soll,
- 4) eine bestimmte Vergleichsspannung σ_0 nicht überschritten werden soll und
- 5) die Baugrößen R_1, R_2, R_3 und L_{zyl} vorgegeben sind.

Die Variablen sind: T_1, T_2, T_3, α_1 und α_3 .

Die Rechnung wurde mit folgenden Größen durchgeführt:

$$\begin{aligned} L_{\text{zyl}}/R &= .5, \quad R_1/R = .25, \quad R_3/R = .5, \quad L_{\text{max}}/R = 2, \\ V_{\text{Füllung}}/\pi R^3 &= 7/32, \quad \Omega^2 R^2 \rho_w / \sigma_0 = 2.56/30, \quad \rho_f / \rho_w = 3/16, \\ \sigma_0 / E &= 2/7000, \quad \nu = .3. \end{aligned}$$

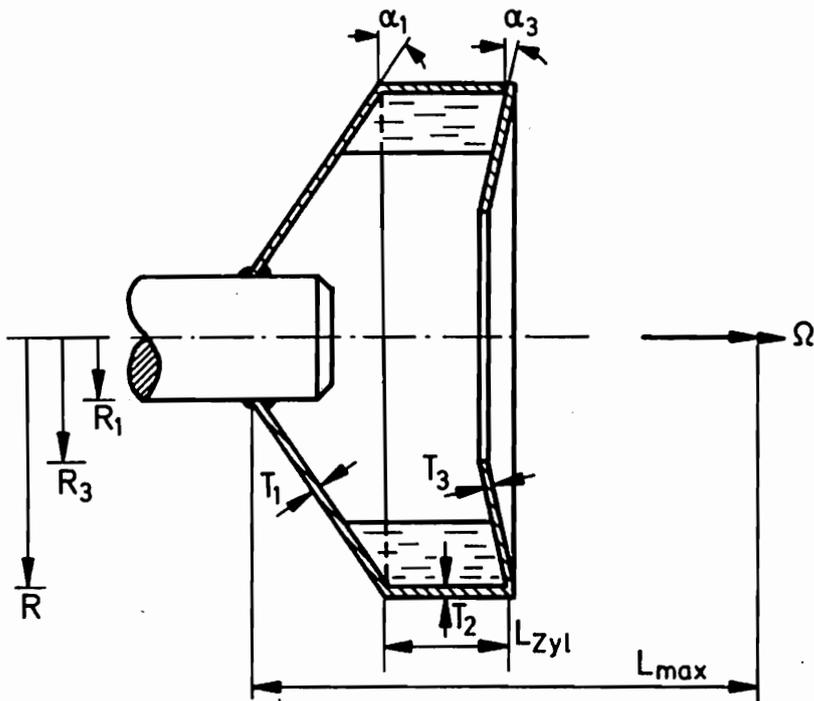


Abb. 4-1 Berechnete Zentrifuge, vorgegebene Größen:

$R_1, R, R_3, L_{Zyl}, L_{max}, V_{Füllung}$

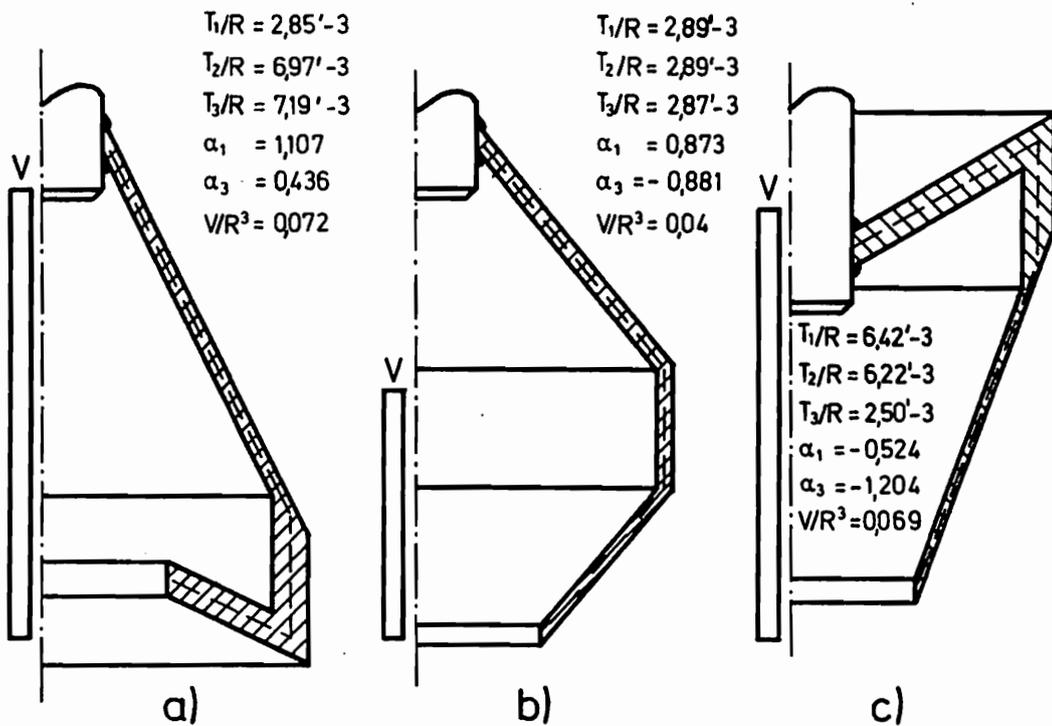


Abb. 4-2 Gefundene Minima (aufgetragen jeweils halbe Schale. Wandstärke stark verzerrt)

4.2 Beschränkungen

(Abb. 4-3)

Für gegebene Winkel α_1 und α_3 sei das Volumen bezüglich der Wandstärken nach der in Kapitel 2 vorgestellten Methode optimal ermittelt. Somit ist die Aufgabenstellung auf die zwei Parameter α_1 und α_3 reduziert.

Die Einschränkungen für die Parameter erhält man

a) aus der Baulänge:

$$\alpha_1 < 0 : \quad \alpha_3 \geq - \arctan \frac{L_{\max} - L_{\text{Zyl}}}{R - R_3} \quad ,$$

$$\alpha_3 > 0 : \quad \alpha_1 \leq \arctan \frac{L_{\max} - L_{\text{Zyl}}}{R - R_1} \quad ,$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_3 < 0 \end{array} \right\} : \quad (R - R_1) \tan \alpha_1 - (R - R_3) \tan \alpha_3 = L_{\text{ges}} - L_{\text{Zyl}} .$$

b) aus der Bedingung, daß die Füllung nicht auslaufen darf, d.h. $R_F \geq R_3$.

R_F ist die Wurzel der kubischen Gleichung:

$$2R_F^3 - 3R_F^2 \left(R + \frac{L_{\text{Zyl}}}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_3} \right) + R^3 + 3 \frac{L_{\text{Zyl}} R^2 - V_{\text{Füllg}} / \pi}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_3} = 0 .$$

Setzt man $R_F = R_3$ so erhält man als Trennungslinie:

$$\tan \alpha_1 - \tan \alpha_3 = -3 \frac{L_{\text{Zyl}} (R^2 - R_3^2) - V_{\text{Füllg}} / \pi}{(R - R_3)^2 \cdot (R + 2R_3)} .$$

c) Eine zusätzliche Beschränkung bei kurzen Zentrifugen ist die Bedingung, daß die beiden Kegelschalen sich nicht berühren. Geht man davon aus, daß $R_3 > R_1$ gilt, so wird die Beschränkung folgendermaßen angeschrieben:

$$\alpha_1 > \arctan \left(\tan \alpha_3 - \frac{L_{\text{Zyl}}}{R - R_3} \right) .$$

Diese Beschränkung ist hier ohne Bedeutung.

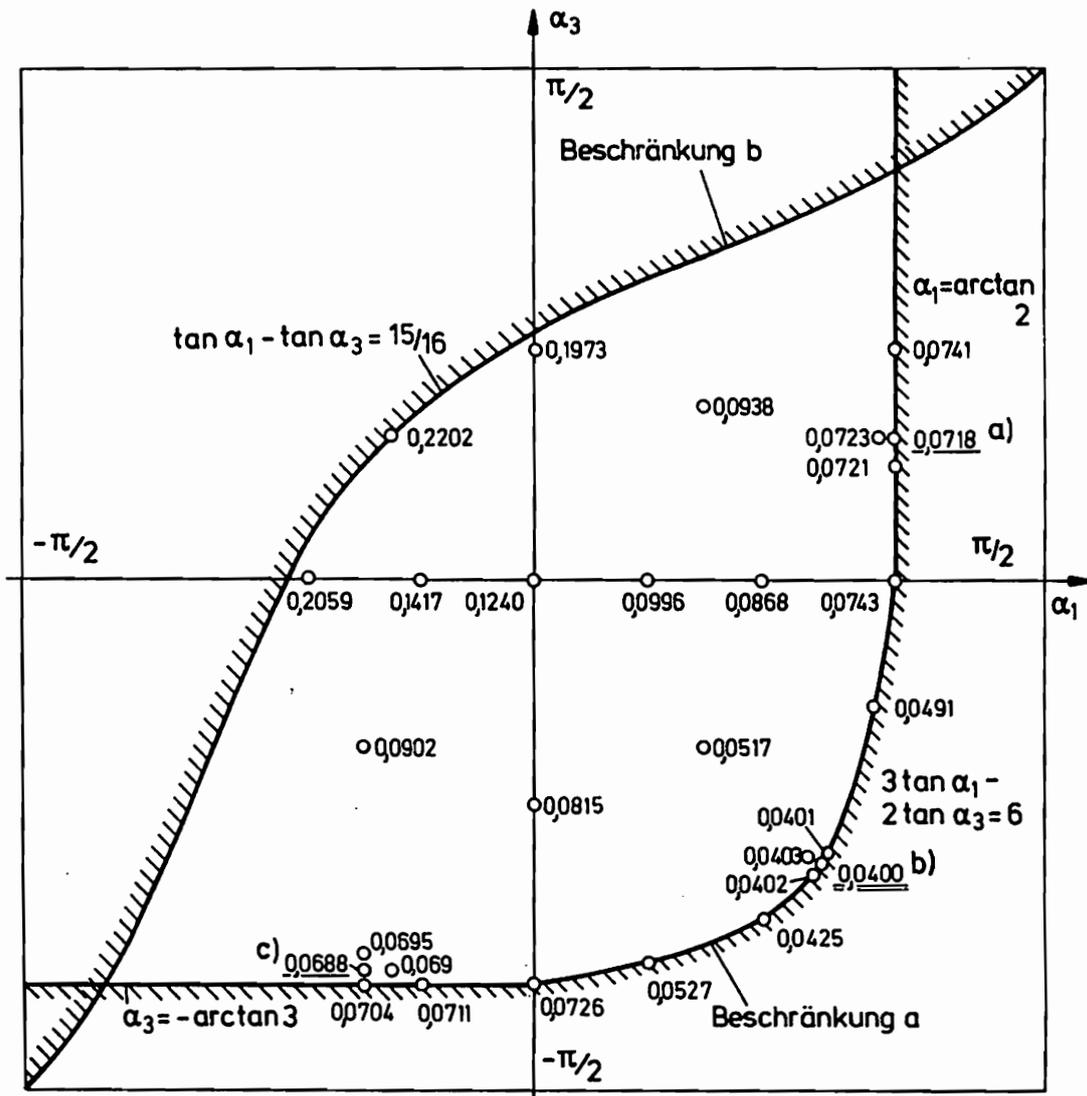


Abb.4-3 Einige Volumenpunkte (V/R^3) sowie die Beschränkungen

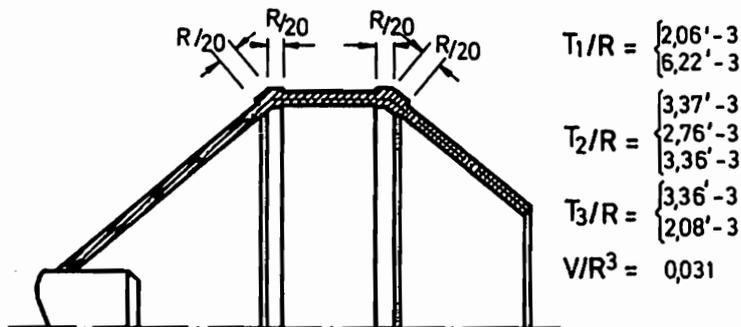


Abb.4-4 Unterteilung der Schalenteile bei willkürlich gewählter Segmentlänge $R/20$.

Die Schnittpunkte der Begrenzugslinien a) und b) berechnen sich zu

$$\left(\arctan \frac{L_{\max} - L_{zy1}}{R - R_1}, \arctan \left[\frac{L_{\max} - L_{zy1}}{R - R_1} + 3 \cdot \frac{L_{zy1}(R^2 - R_3^2) - \frac{V_F}{\pi}}{R^3 + 2R_3^3 - 3R_3^2 R} \right] \right) \text{ und}$$

$$\left(-\arctan \frac{L_{\max}(R^2 + R_3 R - 2R_3^2) + L_{zy1}(2R^2 - RR_3 - R_3^2) - 3V_F/\pi}{R^3 + 2R_3^3 - 3R_3^2 R}, -\arctan \frac{L_{\max} - L_{zy1}}{R - R_3} \right).$$

4.3 Ergebnis

In Abb. 4-2 ist das zu untersuchende Gebiet dargestellt. Mit einem groben Raster wurden die Stellen möglicher Minima eingegrenzt. Die Suche nach den relativen Minima wurde dann mit dem "Powell"-Verfahren durchgeführt. Es wurden drei relative Minima entdeckt. Die Darstellung der hierzu gehörenden Zentrifugen kann Abb. 4-3 entnommen werden.

Das absolute Minimum entspricht der möglichst momentenfreien Zentrifuge. Es stellt sich die Frage, inwiefern ihr Mittelflächenverlauf demjenigen der momentenfreien Membranschale gleicht, insbesondere, da die optimale Lösung das Bild einer mit Einschränkungen symmetrischen ($\alpha_1 \approx \alpha_3$) Zentrifuge mit in allen Bereichen ähnlich großen Wanddicken widerspiegelt.

Anmerkung: Durch eine Unterteilung der Kegelschalen in jeweils zwei Abschnitte, des Zylinderteils in drei Abschnitte (Abb. 4-4), könnte das Bauvolumen für die Winkelstellung b) aus Abb. 4-2 noch einmal um ca. 25 % gedrückt werden ($V/R^3 = 0.031$). Die Meridianlängen der Segmente konstanter Wanddicke wurden dabei willkürlich gewählt.

5. Membrantheorie: Bestimmung des Schalenmittelflächenverlaufs der Zentrifuge konstanter Vergleichsspannung

5.1 Differentialgleichungen der Schale konstanter Wanddicke

Die Differentialgleichungen der Membranschale wurden in Kapitel 1 hergeleitet. Zur Bestimmung der Schalenform ist es günstiger, raumfeste Koordinaten X, R zu wählen (Abb. 5-1).

Die Transformation der Gleichungen (1.35) und (1.38) erfolgt durch

$$\frac{d(\quad)}{dS} = \frac{d(\quad)}{dX} \cdot \frac{dX}{dS} \quad . \quad (5.1)$$

Es ist: $dR^2 + dX^2 = dS^2 \quad . \quad (5.2)$

Schließt man mehrfache Lösungen R(X) aus, so folgt:

$$\frac{dX}{dS} = \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{dS}\right)^2} \quad . \quad (5.3)$$

Leitet man in (5.1) R nach S ab, so erhält man:

$$1 - \left(\frac{dR}{dS}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dR}{dX}\right)^2\right]^{-1} \quad . \quad (5.4)$$

Mit (5.4) und (5.3) kann (5.1) geschrieben werden:

$$\frac{d(\quad)}{dS} = \frac{d(\quad)}{dX} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dX}\right)^2}} \quad . \quad (5.5)$$

Es ist somit auch:

$$\frac{d^2R}{dS^2} = \frac{d^2R}{dX^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dR}{dX}\right)^2\right]^2} \quad . \quad (5.6)$$

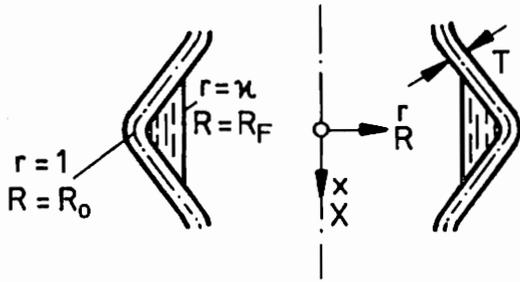


Abb. 5-1 Koordinaten

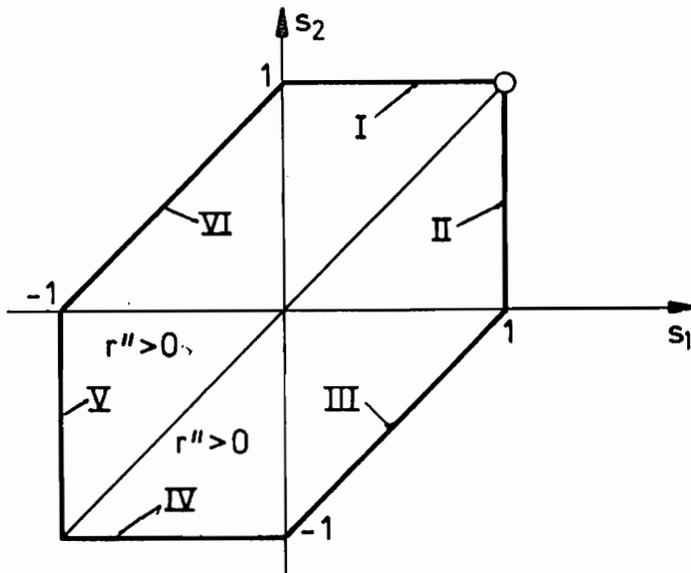


Abb. 5-2 Bereiche der Schubspannungshypothese

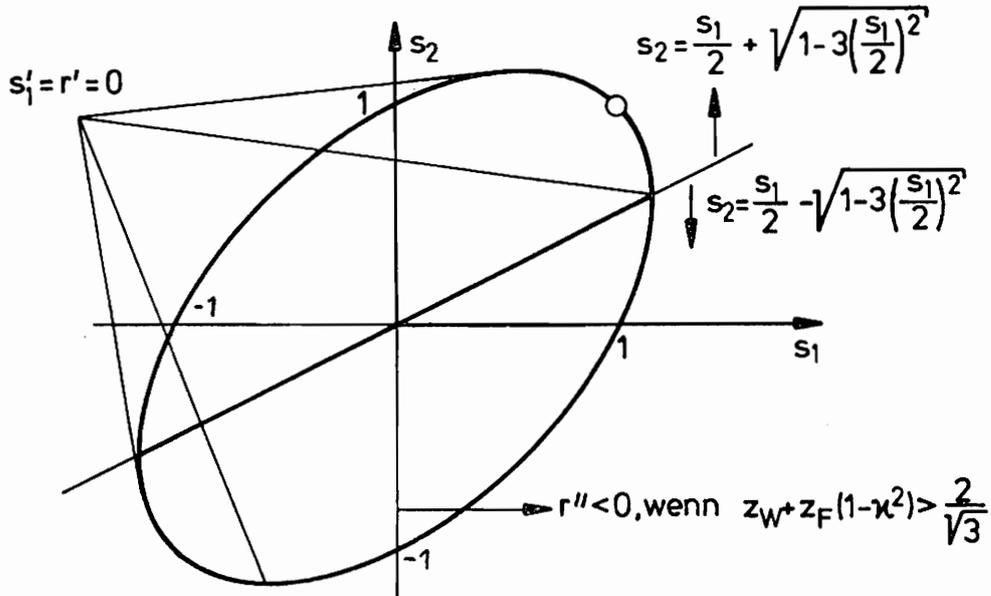


Abb. 5-3 Ellipse der Gestaltänderungsarbeitshypothese

Um zu allgemeineren Aussagen zu kommen, werden dimensionslose Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} x &= X / R_0, & z_w &= \Omega^2 R_0^2 s_w / \sigma_0, \\ r &= R / R_0, & z_F &= \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^3 s_F / G_T, \\ s &= \sigma / \sigma_0. \end{aligned}$$

Mit $d()/dx = ()'$ und unter Berücksichtigung von $\sigma = N/T$ erhält man die Differentialgleichungen für den Verlauf der Schalenmittelfläche:

$$s_1' = \frac{r'}{r} (s_2 - s_1 - z_w r^2), \quad (5.7)$$

$$r'' = \frac{1+r'^2}{r s_1} (s_2 - b) \quad \text{mit} \quad (5.8)$$

$$b = z_w r^2 + I z_F r \sqrt{1+r'^2} \cdot (r^2 - x^2).$$

Gibt man eine Beziehung zwischen den beiden Hauptspannungen vor $[s_2 = s_2(s_1)]$, so kann (5.7) umgeschrieben werden zu:

$$\frac{\partial s_1}{\partial r} = \frac{1}{r} (s_2 - s_1 - z_w r^2), \quad (5.9)$$

Da (5.9) die Spannung s_1 in Funktion vom Abstand r der Mittelfläche von der Symmetrieachse und der Schaleneigenbelastung z_w beschreibt, ist es möglich, zu jedem Belastungszustand z_w von vornherein obere und untere Schranken für r durch die Spannungsbegrenzungen anzugeben.

Die Form der Mittelfläche $r(x)$ kann aus (5.8) gewonnen werden. Die Rechnungen erfolgen über die Hälfte der um die Ebene $x = 0$ symmetrischen Schalen. Die

Anfangsbedingungen lauten:

$$r'(0) = 0, \quad r(0) = 1, \quad s_1(0) = s_{10}. \quad (5.10)$$

5.2 Differentialgleichung für die Schale gleicher Hauptspannungen

Es gilt: $s_1 = s_2 = 1$; $s_1' = 0$.

Aus (5.7) und (5.10) ist ersichtlich, daß nur eine Lösung existiert, wenn z_w verschwindet.

Aus (5.8) erhält man:

$$r'' = \frac{1+r'^2}{r} (1-b) \quad \text{mit} \quad z_w = 0. \quad (5.11)$$

Für die Anfangskrümmung gilt:

$$r''(0) \leq 0 \quad \text{für} \quad z_f(1-\alpha^2) \geq 1.$$

Anmerkung: Der Fall $s_1 = s_2 = -1$ führt zu r'' größer 0 im gesamten Bereich $r > 0$ und ist für eine weitere Betrachtung nicht geeignet.

5.3 Differentialgleichungen für die Schale gleicher Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese

Die Differentialgleichungen werden bereichsweise angegeben (Abb. 5-2).

Da ein Knick in der Schalenform bei nichtverschwindenden Schnittkräften in der Membrantheorie ausgeschlossen ist (Entstehung von Querkräften), ist

auch der Übergang von einem Bereich zum anderen (Gleichung (5.7)) nicht erlaubt.

Bereich 1: $0 \leq s_1 \leq 1$, $s_2 = 1$.

Aus (5.9) und (5.10) erhält man (Abb. 5-4):

$$s_1 = \frac{1}{r} \left[s_{10} - (1-r) + \frac{1}{3} z_w (1-r^3) \right] \quad (5.12)$$

Die untere Schranke für r ist gegeben durch (Abb. 5-5):

$$r = 0 \text{ für } s_{10} = 1 - \frac{1}{3} z_w \text{ und } z_w \leq 3,$$

$$r = \sqrt{1 - 3/z_w} \text{ für } s_{10} = 0 \text{ und } z_w \geq 3.$$

$$\text{Aus (5.8): } r'' = \frac{1+r'^2}{r s_1} (1-b). \quad (5.13)$$

Die Anfangskrümmung ist kleiner Null, falls:

$$z_w + z_f (1 - \alpha^2) \geq 1.$$

Für die Belastung $z_w = 0$ und die Anfangsspannung $s_{10} = 1$ erhält man die Gleichungen von Abschnitt 5.2!

Bereich 2: $s_1 = 1$, $0 \leq s_2 \leq 1$.

$$\text{Aus (5.7): } s_2 = 1 + z_w r^2.$$

Eine Lösung in diesem Bereich ist nur möglich, wenn $z_w = 0$ und $s_2 = 1$ ist.

Damit ist man auf Abschnitt 5.2 zurückgeführt!

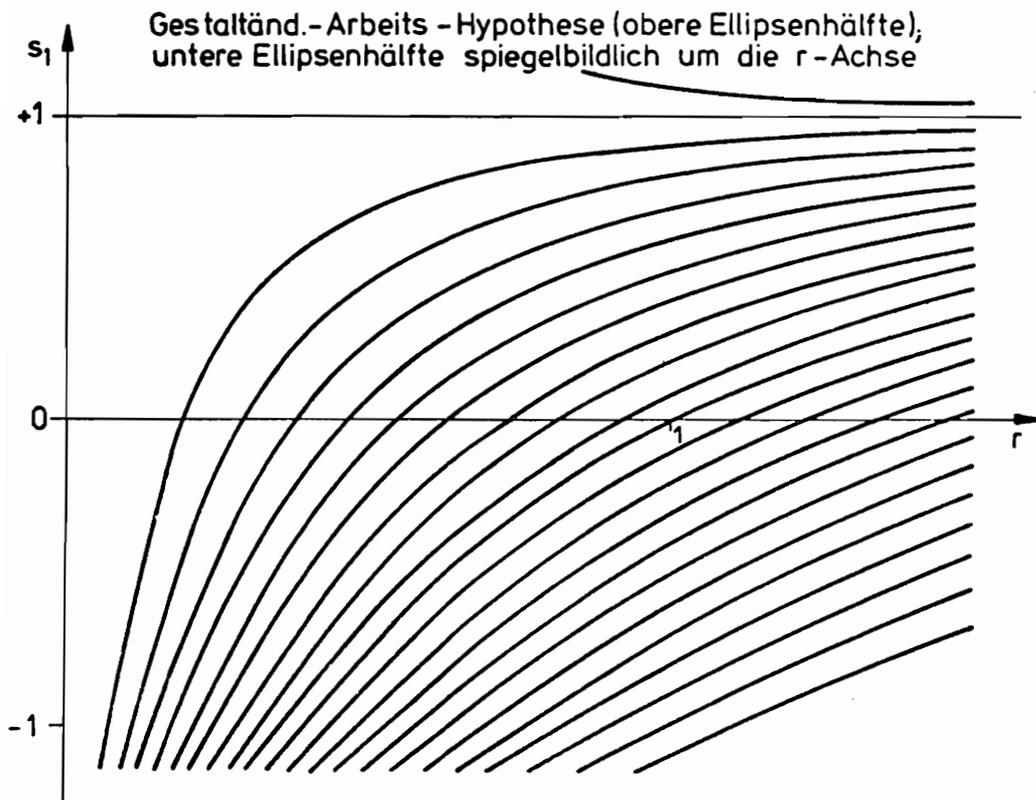
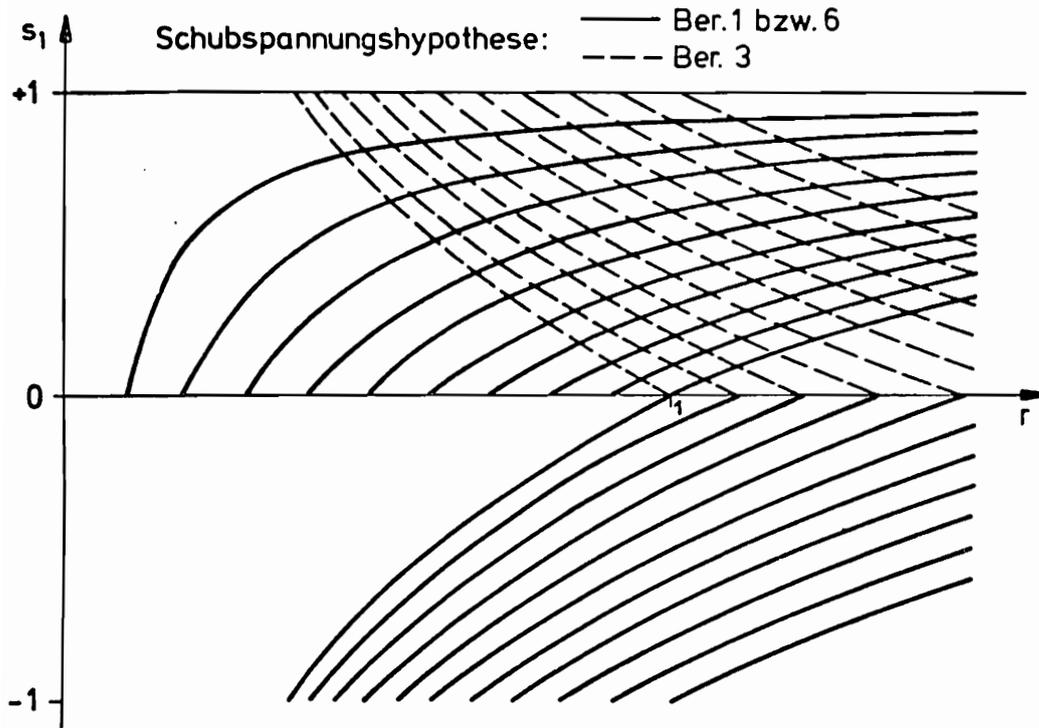


Abb. 5-4 Spannungsverläufe, z.B. für $z_W=0$

Bereich 3: $s_2 - s_1 = -1$, $0 \leq s_1 \leq 1$ ($-1 \leq s_2 \leq 0$).

Aus (5.9) und (5.10):

$$s_1 = s_{10} - \ln(r) + \frac{1}{2} z_w (1-r^2). \quad (5.14)$$

Die untere Schranke für r ist gegeben durch:

$$\frac{1}{2} z_w (1-r^2) - \ln r - 1 = 0 \quad \text{für} \quad s_{10} = 0.$$

Aus (5.8):

$$r' = \frac{1+r^{12}}{r} \left(1 - \frac{1+b}{s_1}\right). \quad (5.15)$$

r'' ist im gesamten zu untersuchenden Bereich kleiner als Null!

Bereich 4: $-1 \leq s_1 \leq 0$, $s_2 = -1$.

Aus (5.8):

$$r'' = \frac{1+r^{12}}{r} \left(1 + \frac{1+b}{|s_1|}\right). \quad (5.16)$$

Da r'' nicht kleiner als Null werden kann, ist eine weitere Betrachtung uninteressant!

Bereich 5: $s_1 = -1$, $-1 \leq s_2 \leq 0$.

Aus (5.8):

$$r'' = \frac{1+r^{12}}{r} (|s_2| + b) \quad (5.17)$$

Da r'' nicht kleiner als Null werden kann, ist eine weitere Betrachtung dieses Bereiches uninteressant!

Bereich 6: $s_2 - s_1 = 1$, $-1 \leq s_1 \leq 0$ ($0 \leq s_2 \leq 1$).

Aus (5.9) und (5.10):

$$s_1 = s_{10} + \ln(r) + \frac{1}{2} z_w (1-r^2). \quad (5.18)$$

Die unteren Schranken für r sind gegeben durch:

$$\ln r + \frac{1}{2} z_w (1 - r^2) + 1 = 0 \quad \text{für } s_{10} = 0 \text{ und } z_w \leq 1,$$

$$r = -\sqrt{\frac{0.0524691^*}{z_w}} \quad \text{für } s_{10} = \frac{1}{2} (\ln z_w + 1 - z_w) \\ \text{und } 1 \leq z_w < 4.5052415^* ,$$

$$\ln r + \frac{1}{2} z_w (1 - r^2) = 0 \quad \text{für } s_{10} = -1 \text{ und} \\ z_w \geq 4.5052415^* .$$

* diese Zahlen sind die Lösungen der Gleichung $\ln(x) - x + 3 = 0$.

Aus (5.8)

$$r'' = \frac{1 + r'^2}{r} \left(1 + \frac{1-b}{s_1} \right) . \quad (5.19)$$

Die Anfangskrümmung $r''(0)$ ist kleiner Null für:

$$z_w + z_f (1 - x^2) \leq 1 + s_{10} .$$

r'' ist kleiner Null falls $b < 1 + s_1$.

Da s_1 auch kleiner Null ist, bedeutet dies, daß praktikable Lösungen nur für sehr kleine Belastungen möglich sind.

5.4 Differentialgleichungen für die Schale gleicher Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese

Es gilt:

$$s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad s_2 = \frac{s_1}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} s_1^2} . \quad (5.20)$$

Das Vorzeichen vor der Wurzel ist abhängig davon, ob man sich auf der oberen bzw. unteren Hälfte der Spannungsellipse, geteilt durch die Linie $s_1 = \pm 2/\sqrt{3}$

befindet (Abb. 5-3). An den Extremstellen für s_1 ($s_1 = \pm 2/\sqrt{3}$) verschwindet der Wurzelausdruck. Es gilt außerdem $s_1' = s_2' = 0$. Nach Gleichung (5.7) muß, wenn die Ellipse (5.21) nicht verlassen werden soll, $r' = 0$ sein. Da die Rechnungen grundsätzlich wegen des wellenartigen Charakters der Lösungskurve an der Stelle $r' = 0$ abgebrochen wurden, wurde spätestens im Punkte $s_1 = \pm 2/\sqrt{3}$ abgebrochen. Das Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck wurde zu Beginn des Rechenvorganges gewählt und beibehalten!

Das Differentialgleichungssystem der Schalenmittelfläche wird aus (5.7) und (5.8) gewonnen:

$$s_1' = \frac{r'}{r} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} s_1^2} - \frac{s_1}{2} - z_w r^2 \right), \quad (5.21)$$

$$r'' = \frac{1+r'^2}{r} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} s_1^2} - b}{s_1} \right]. \quad (5.22)$$

Die Schranken für r können nach numerischer Integration von (5.9) ermittelt werden (Abb. 5-5).

Die Anfangskrümmung ist negativ für:

$$z_w + z_F (1 - \alpha^2) \geq s_2(0) \quad \text{und} \quad s_{10} > 0,$$

$$z_w + z_F (1 - \alpha^2) \leq s_2(0) \quad \text{und} \quad s_{10} < 0.$$

Im Fall $s_2(0) < 1/\sqrt{3}$ und $s_1(0) < -1$ ist $s_1'(0) < 0$ und $r'' > 0$. Dieser Fall ist für weitere Untersuchungen uninteressant.

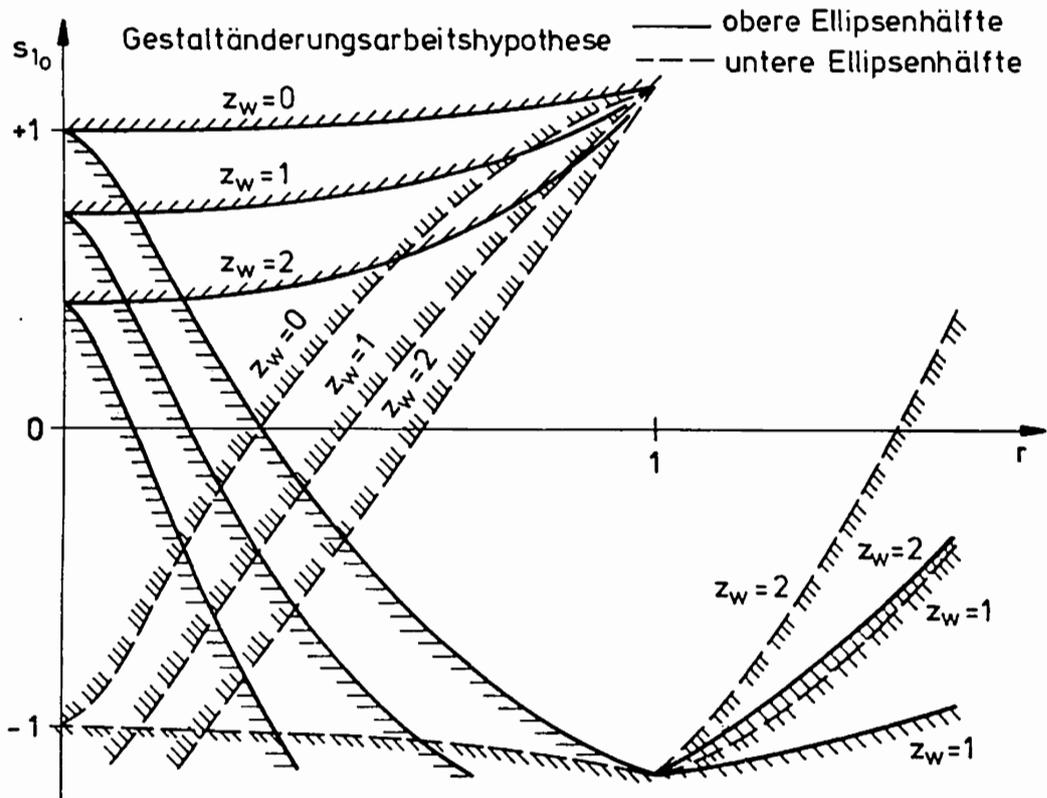
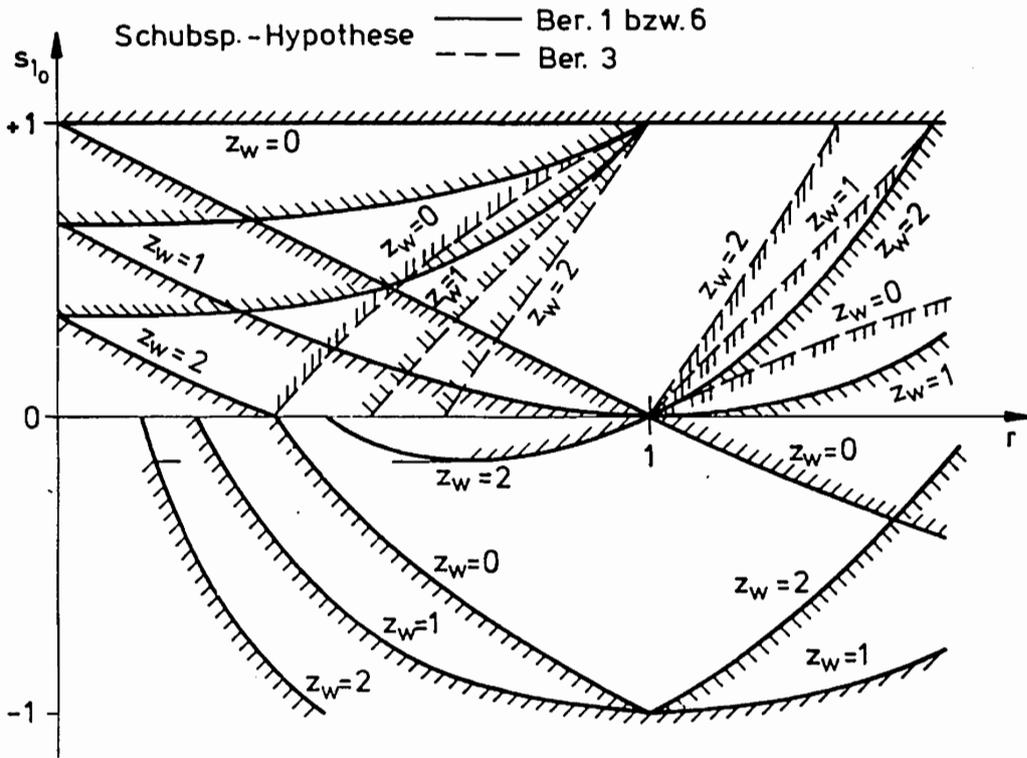


Abb.5-5 Schranken für r durch den Spannungsverlauf $s_1(r)$

Im Fall $z_W = 0$ läßt sich die Lösung von (5.22) angeben in der Form:

$$r = \left[\begin{array}{c} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} s_{10}^2} - \frac{1}{2} s_{10} \\ \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} s_1^2} - \frac{1}{2} s_1 \end{array} \right]^{\lambda} \cdot e^{\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_{10} \right)} \quad (5.23)$$

Die Umkehrung der Funktion $s_1 = s_1(r)$ muß numerisch vorgenommen werden und ist wegen des periodischen Charakters der Kreisfunktionen nicht unproblematisch, so daß es u.U. günstiger ist, die Differentialgleichungen numerisch zu integrieren.

Ist zusätzlich zu $z_W = 0$ noch $s_{10} = s_2(0) = 1$, so ist man wieder auf Abschnitt 5.2 zurückgeführt!

5.5 Ergebnisse

5.5.1 Vergleich der Schalenformen zu den verschiedenen Spannungshypothesen

Abb. 5-6 stellt vergleichend den Verlauf der Schalenmittelfläche in den verschiedenen Bereichen der Spannungshypothesen dar. Es zeigen sich grundsätzlich zwei Lösungstypen:

- a) der offene, langgestreckte Lösungstyp. Beide Hauptspannungen sind größer als Null. Dieser Typ geht hervor aus
 - 1) gleichen Hauptspannungen,
 - 2) Schubspannungshypothese, Bereich 1,
 - 3) Gestaltänderungsarbeitshypothese, entsprechender Bereich,
- b) der geschlossene Lösungstyp (negative Axialspannung). Dieser Typ geht hervor aus

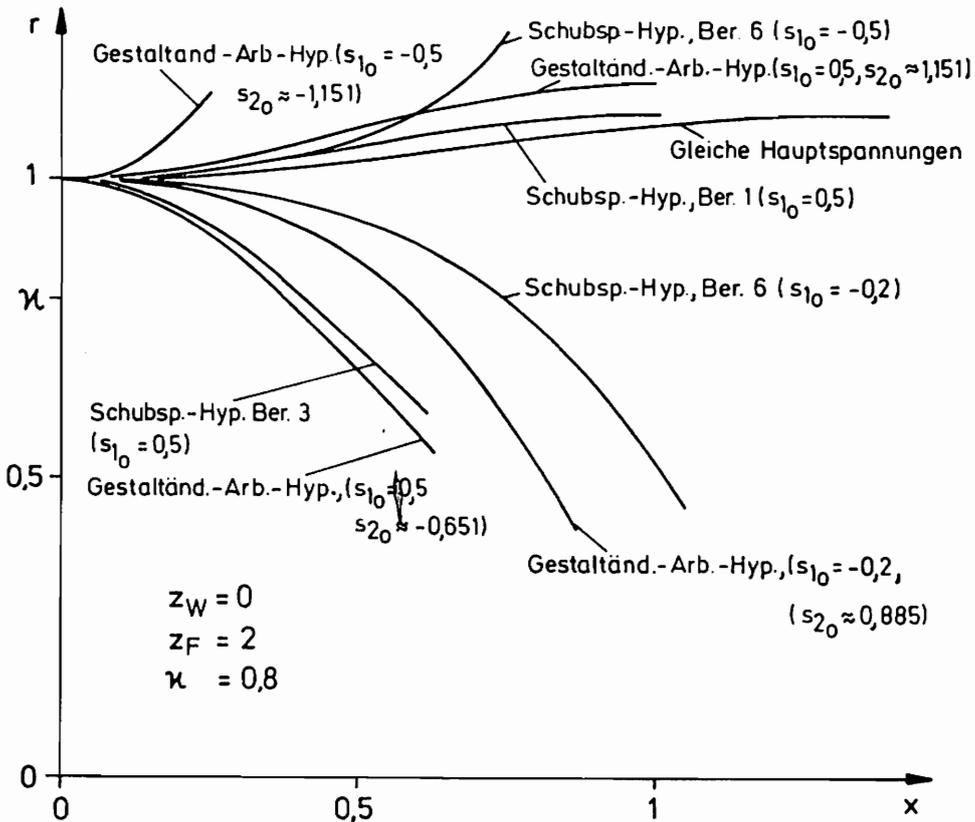
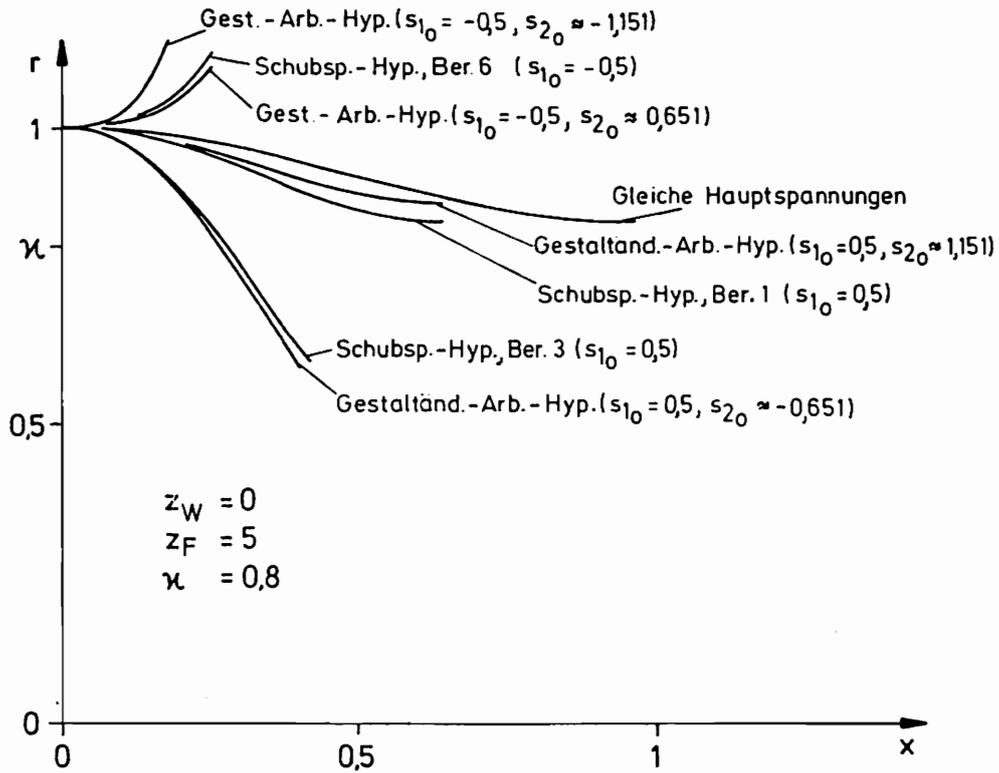


Abb.5-6 Verlauf der Mittelfläche zu verschiedenen Spannungshypothesen

Tabelle der Differentialgleichungen zum Verlauf der Schalenmittelfläche							
	s_1	s_2	s_1'	r''	$r''(\theta) < 0$, falls	Bemerkungen	
Gleiche Hauptspannungen	1	1	0	$\frac{1+r^2}{r}(1-b)$	$z_F(1-\alpha^2) > 1$	$z_W = 0$	
Ber. 1	$\frac{1}{r}[s_0(1-r) + \frac{1}{2}z_W(1-r^2)]$ $0 < s_1 \leq 1$	1		$\frac{1+r^2}{r s_1}(1-b)$	$z_W + z_F(1-\alpha^2) > 1$	Sonderfall: $s_0=1, z_W=0$ $\hat{=}$ Gl. Hauptsp.	
Ber. 2	1	$1+z_W r^2$ $0 \leq s_2 \leq 1$	0	$\frac{1+r^2}{r}(1-b) + z_W r^2$	$z_F(1-\alpha^2) < 1$	nur gültig mit: $z_W=0, s_2=1$ $\hat{=}$ Gl. Hauptsp.	
Ber. 3	$s_0 - (1-r) + \frac{1}{2}z_W(1-r^2)$ $0 < s_1 \leq 1$	$s_1 - 1$		$\frac{1+r^2}{r}(1-\frac{1+b}{s_1})$	immer		
Ber. 4	$\frac{1}{r}[s_0(1-r) + \frac{1}{2}z_W(1-r^2)]$ $-1 \leq s_1 < 0$	-1		$\frac{1+r^2}{r}(1-\frac{1+b}{s_1})$	nie	$r' > 0$	
Ber. 5	-1	$-(1-z_W r^2)$ $-1 \leq s_2 \leq 0$	0	$\frac{1+r^2}{r}(1-s_1-b)$	nie	$r' > 0$	
Ber. 6	$s_0 + (1-r) + \frac{1}{2}z_W(1-r^2)$ $-1 \leq s_1 < 0$	$s_1 + 1$		$\frac{1+r^2}{r}(1+\frac{1-b}{s_1})$	$z_W + z_F(1-\alpha^2) \leq 1 + s_0$		
Gestaltungsänderungshypothese	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq s_1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{s_1}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}s_1^2}$	$\frac{r'}{r} \left[\frac{\pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}s_1^2}}{1 - \frac{3}{4}s_1^2} - \frac{s_1}{2} - z_W r^2 \right]$	$\frac{1+r^2}{r s_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}s_1^2}}{s_1} - b \right)$	a) $s_0 > 0: z_W + z_F(1-\alpha^2) \geq s_2$ b) $s_0 < 0: z_W + z_F(1-\alpha^2) \leq s_2$ c) $z_W + z_F(1-\alpha^2) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}: s_0 > 0$		

Stressspannungshypothese

- 1) Schubspannungshypothese, Bereich 3,
- 2) Gestaltänderungsarbeitshypothese, entsprechender Bereich.

Für sehr kleine Belastungen kann zusätzlich für negative Umfangsspannung ein weiterer Lösungstyp gefunden werden, der sich etwa zwischen beiden Lösungstypen eingliedert.

Die Lösung hat entweder wellenartigen oder auf- bzw. abklingenden Charakter. Es ist bei der Durchspielung mit den verschiedensten Parametern nicht gelungen, eine andere Lösung zu erzeugen. Es ist daher im weiteren Verlauf uninteressant, Fälle zu untersuchen mit $r''(0) > 0$, da sie entweder beim wellenartigen Charakter durch Wahl einer anderen Bezugslänge R_0 auf den Fall $r''(0) < 0$ rückführbar sind oder im Fall der aufklingenden Lösung unakzeptabel für eine Zentrifugenkonstruktion sind.

5.5.2 Einfluß der Anfangsspannung $s_1(0)$.

(Abb. 5-7 und 5-8)

Wie auch aus den Differentialgleichungen zu entnehmen ist, ist der Betrag von r'' kleiner bei größerem Betrag der Axialspannung s_1 , da diese bei r'' im Nenner steht. Außerdem ist, wie bei den Lösungen für s_1' in der Schubspannungshypothese ersichtlich, die Spannung s_1 betragsmäßig größer bei größerem Betrag der Anfangsspannung $s_1(0)$.

Es ist daher möglich, die Formgebung der Schale durch Wahl von $s_1(0)$ in der Art zu beeinflussen, daß ein größeres $s_1(0)$ eine gestrecktere Gestalt der Zentrifuge bewirkt.

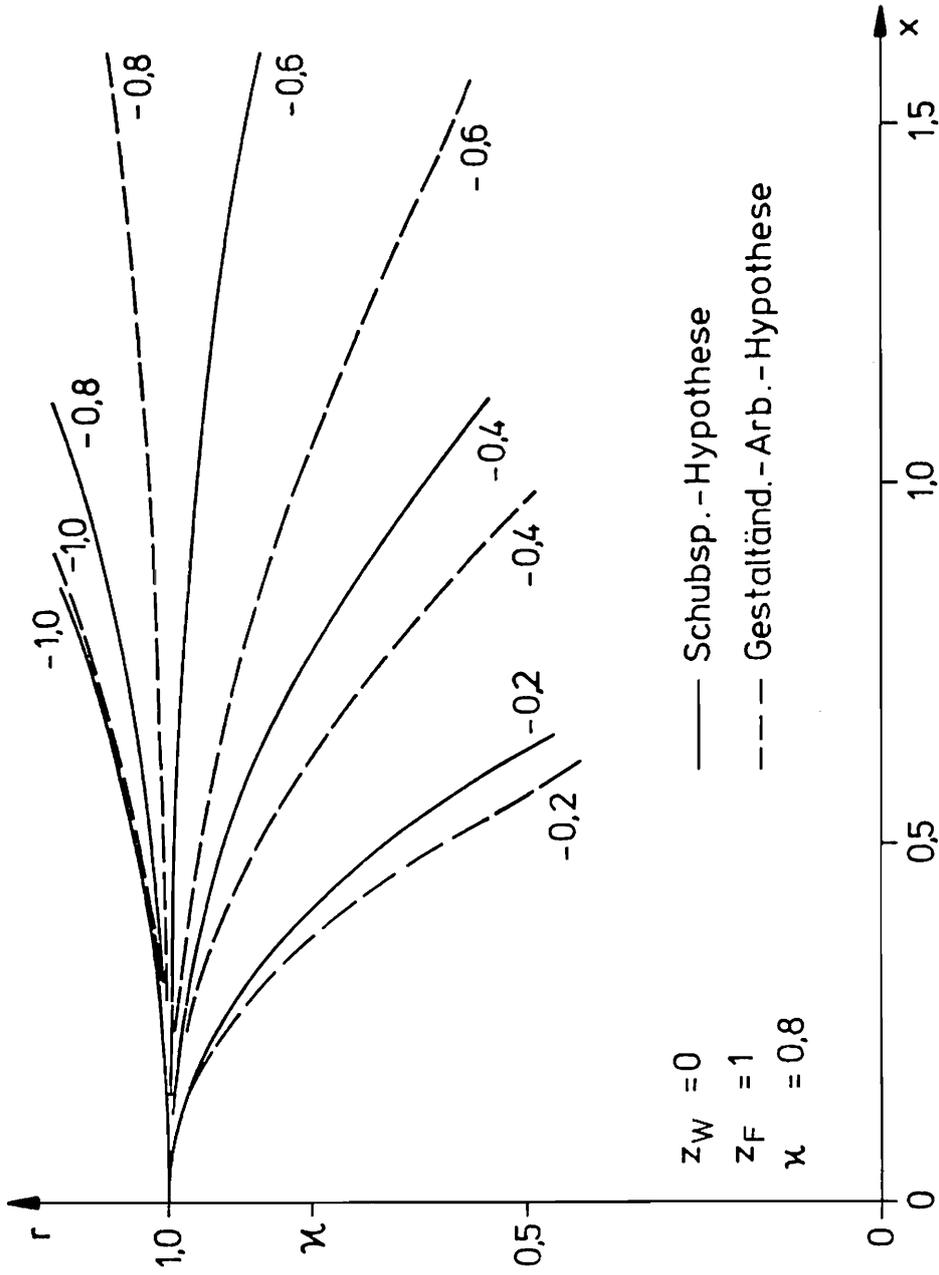


Abb.5-8 Einfluß der Anfangsspannung s_{1_0} ($s_{1_0} < 0$)

5.5.3 Form für den Sonderfall $z_F = 0$

Der Sonderfall $z_F \approx 0$ tritt auf bei Zentrifugen mit Füllgut von vernachlässigbarer spezifischer Masse, z.B. bei hochdrehenden Gasseparatoren.

Bei der Lösung mit gleichen Hauptspannungen muß gelten: $z_W = 0$. Die Lösung der Differentialgleichung (5.11) ist dann für den Grenzfall der unbelasteten Zentrifuge: $r = \cosh(x)$. Eine Zentrifuge mit einer solchen Schalenmittelfläche ist durch ihre offene Form unbrauchbar.

Da z_W in der Regel kleiner eins ist, sind in Abb. 5-9 die Lösungstypen für die Schubspannungshypothesenbereiche 3 bzw. 6 sowie entspr. der Gestaltänderungshypothese eingezeichnet. Für den Fall $z_W \rightarrow 0$ fallen die Kurven bei gleichem Betrag der Anfangsspannung $s_1(0)$ für die beiden Bereiche sowohl bei der Schubspannungs- als auch bei der Gestaltänderungshypothese überein.

Bei größer werdender Belastung z_W öffnet sich die Schale stärker [$s_2(0) > 0$] bzw. sie schließt mehr [$s_2(0) < 0$].

5.5.4 Einfluß von z_F und α

(Abb. 5-10 und 5-11)

Bei stärkerer Belastung (z_F größer bzw. α kleiner) schließt die Form stärker.

In Abb. 5-10 sind die Kurven für variierendes z_F in der Schubspannungshypothese, Bereich 3, sowie

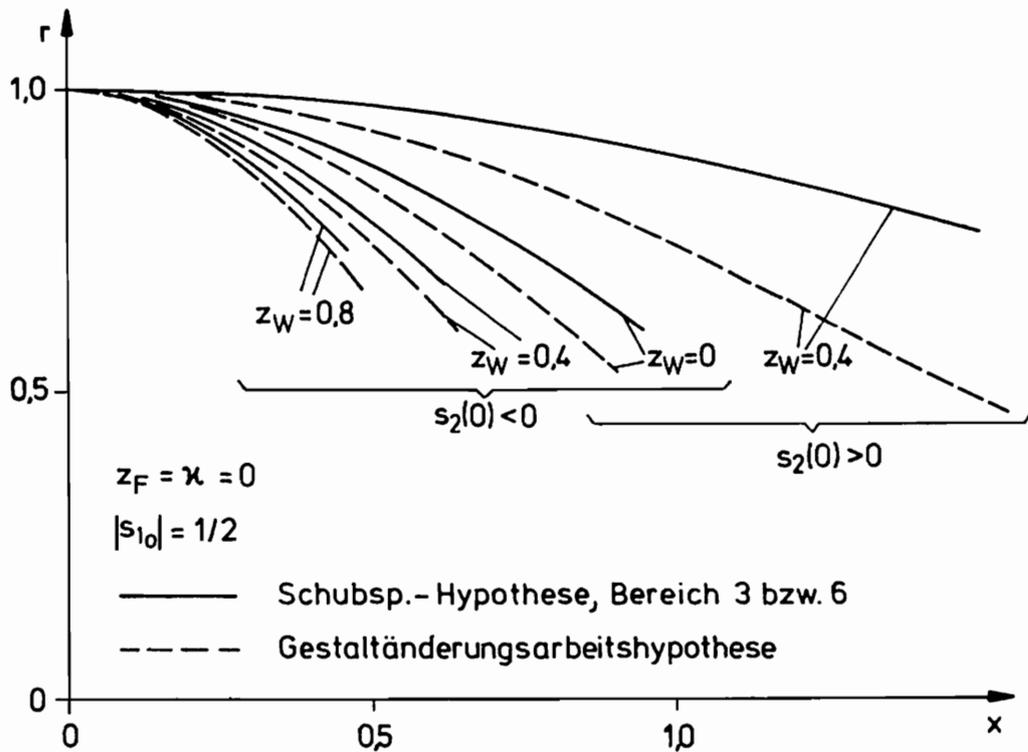


Abb. 5-9 Verlauf der Mittelfläche bei reiner Eigenbelastung Z_W

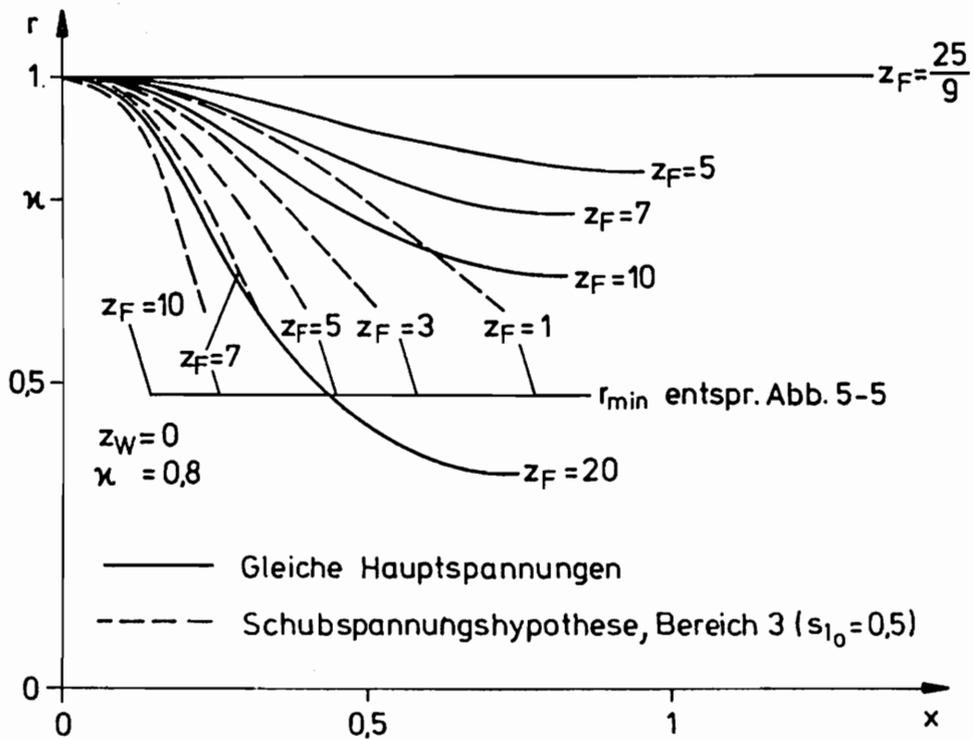


Abb. 5-10 Veränderung von Z_F

für die Rechnung mit gleichen Hauptspannungen dargestellt. Es wurde auf eine Darstellung mit $z_w \neq 0$ bzw. $s_1(0) \neq 1$ für $s_2 > 0$ verzichtet, da die Kurven qualitätsmäßig vergleichbar sind.

In Abb. 5-11 wird z_F festgehalten und α variiert. Wie in dieser und vorhergehenden Abbildungen zu sehen ist, gibt es Lösungen für α kleiner als der kleinste Radius r_{\min} . Solche Lösungen sind unbefriedigend, da sie bedeuten würden, daß die Füllung auslaufen würde. Hierbei wäre die Entstehung von Querkräften konstruktiv nur schwer zu vermeiden, so daß dann kein Membranspannungszustand mehr vorliegen würde. Es muß daher gefordert werden:

$$\alpha \geq r_{\min} .$$

5.5.5 Beschränkung $\alpha \geq r_{\min}$

Exemplarisch soll hier die Beschränkung für den Fall gleicher Hauptspannungen gezeigt werden ($z_w = 0$).

Durch iterative Rechnung wurde die Kurve in Abb. 5-12 erzeugt. Sie zeigt, daß $\alpha \geq r_{\min}$ eine weitergehende Einschränkung ist als $r''(0) < 0$.

Da die Schale, wie in Abschnitt 5.5.4 gezeigt, für stärkere z_F kürzer wird, gehört zur Abb. 5-12 eine Schalenlängenbegrenzung. Sie ist in Abb. 5-13 dargestellt. Hier ist die größte Schalenlänge für $\alpha \approx 0,5$ und $z_F \approx 3,6$ möglich.

Vergleichend ist in Abb. 5-12 die Kurve $\alpha = r_{\min}$ für die Schubspannungshypothese, Bereich 3, eingetragen. Sie ist, wie aus (5.14) hervorgeht, nur von z_w und $s_1(0)$ abhängig und gibt eine obere Schranke

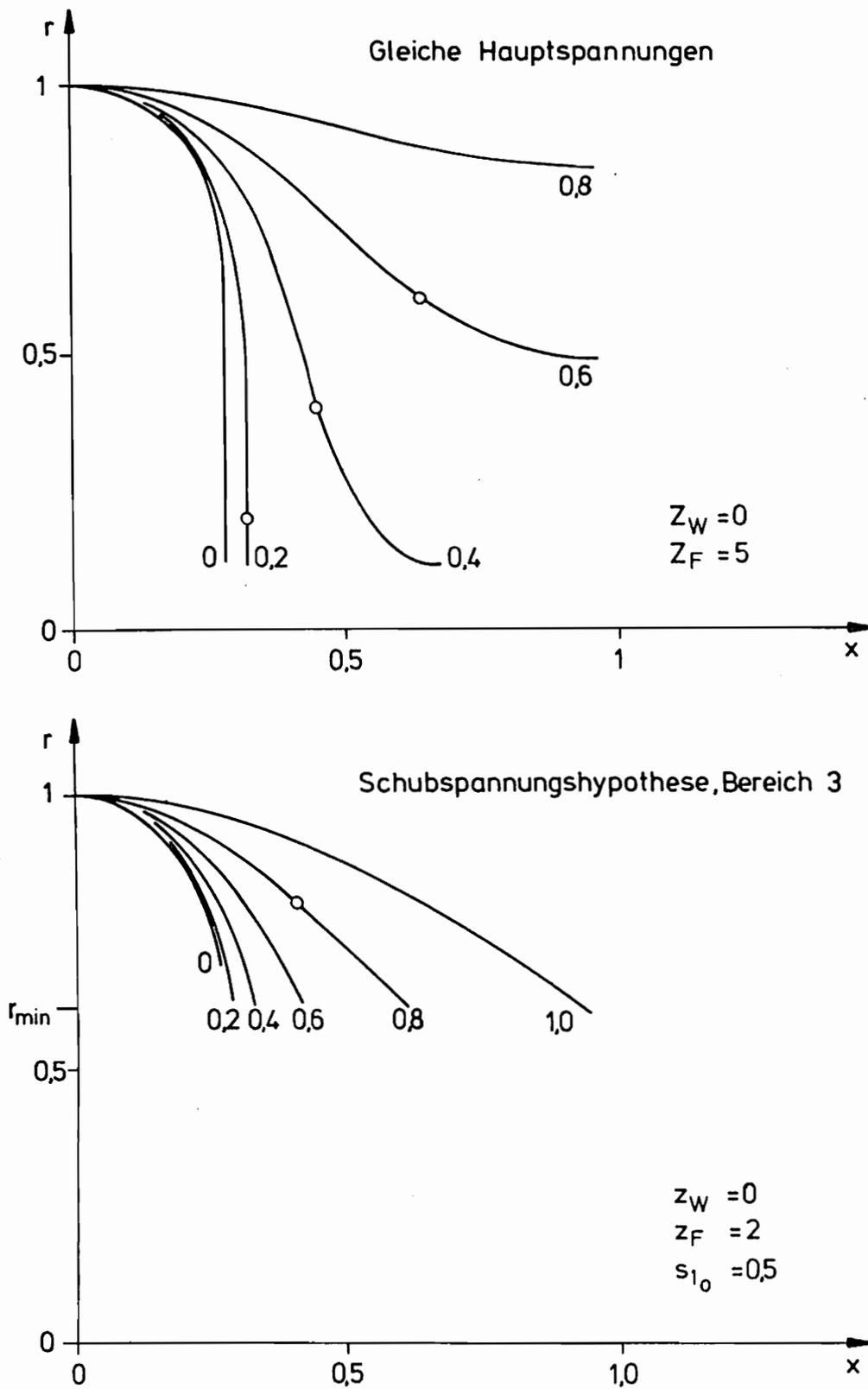


Abb.5-11 Einfluß von κ

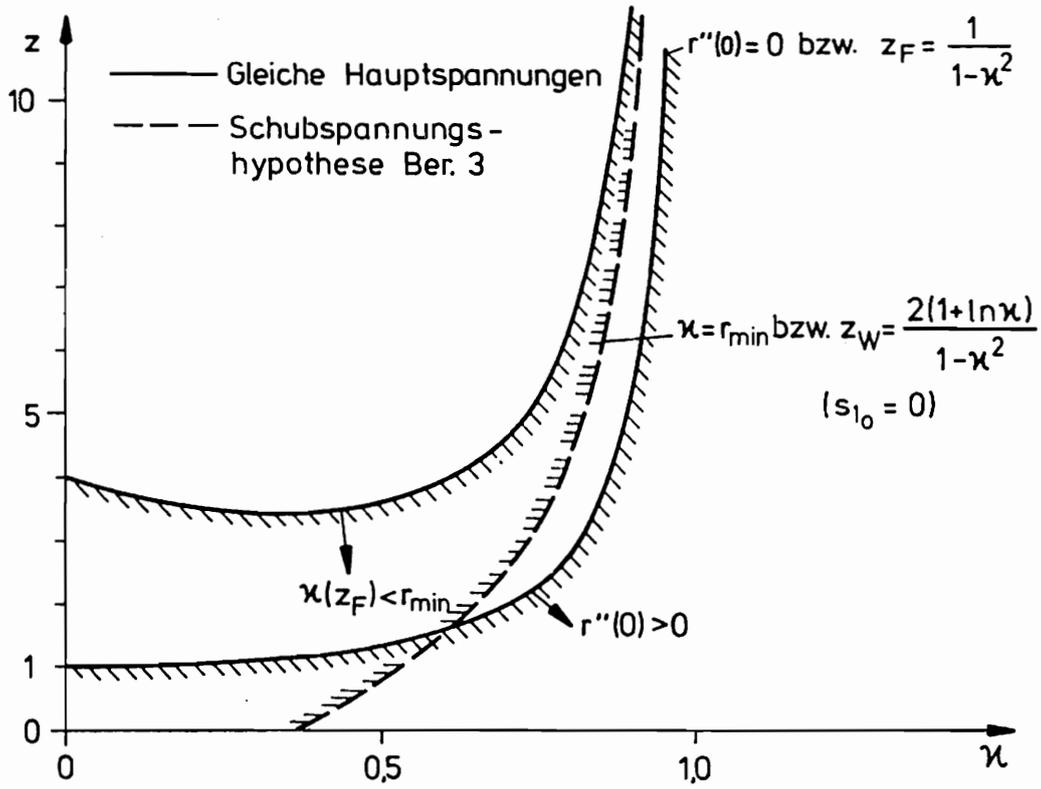


Abb. 5-12 Begrenzungen $\kappa > r_{\min}$

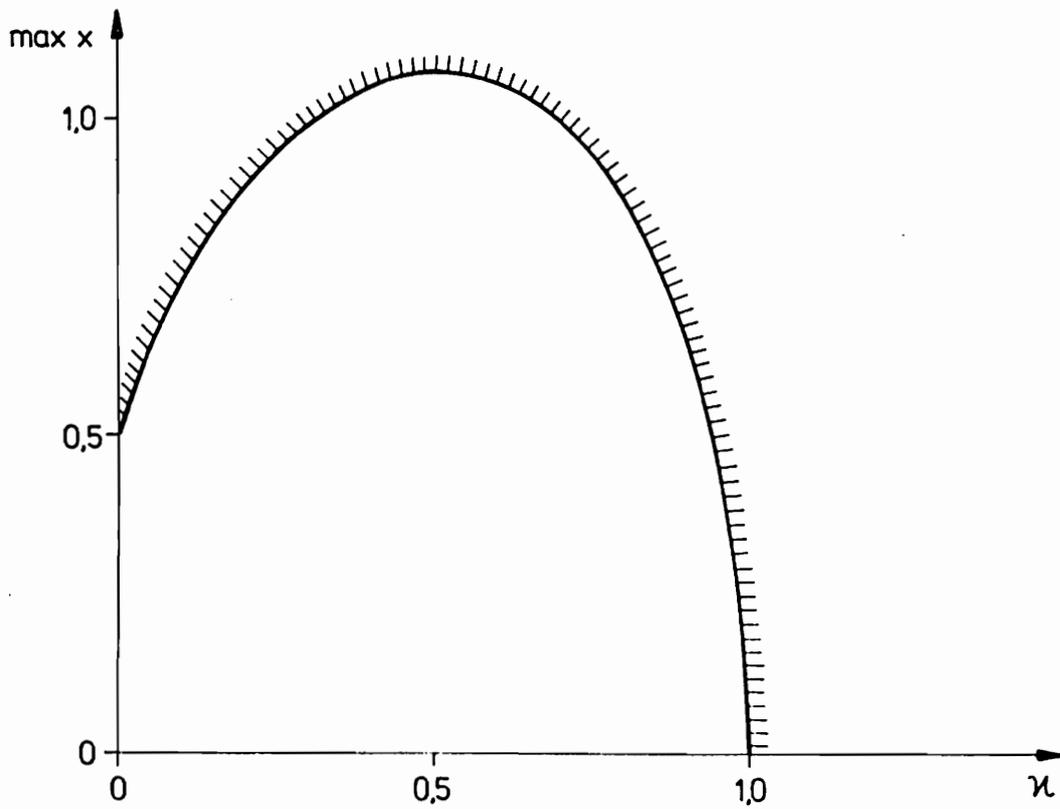


Abb. 5-13 Begrenzungen der Schalenlänge

für z_W bei gegebenem \varkappa an.

5.6 Einige Bemerkungen

- a) Die Rechnungen haben gezeigt, daß generell im Bereich $s_1 > 0$ eine Lösung möglich ist.
- b) Die Unterschiede zwischen den Lösungen unter Einbeziehung der Schubspannungshypothese oder Gestaltänderungsarbeitshypothese sind nicht gravierend. Bei der Schubspannungshypothese hat man den Vorteil, daß durch Auflösung das Differentialgleichungssystem um einen Rang reduzierbar ist. Es läßt sich somit schon auf relativ kleinen Rechnern (etwa besseren, programmierbaren Taschenrechnern) behandeln.
- c) Die gewollte Schalenform kann durch eine Vielzahl von Parametern nach Wunsch erzeugt werden. Bei gegebenem \varkappa und z_W kann z.B. eine offene Schalenform gefunden werden durch
- 1) Bereichswahl (etwa Bereich 1),
 - 2) Wahl der Anfangsspannung (großes s_1),
 - 3) Veränderung von z_F (z_F kleiner etwa durch größere Wandstärke).
- d) Die Lösung für $s_1 = s_2 = 1$ ist auch für $z_W \neq 0$ möglich, wenn von der Forderung $T = \text{const.}$ Abstand genommen wird. Aus (5.7) folgt dann die Gleichung für $t = T/T_0$, wobei T_0 die Wanddicke an der Stelle $x = 0$ darstellt:

$$t = e^{\frac{1}{2} z_W (1-r^2)}$$

Aus (5.8) erhält man mit nunmehr $z_F = \frac{1}{2} \Omega^2 R_0^3 \frac{S_F}{G_0 T_0}$:

$$r'' = \frac{1+r'^2}{r} \left[1 - z_W r^2 - I \frac{z_F}{t} r \sqrt{1+r'^2} (r^2 - \varkappa^2) \right] .$$

6. Anhang: Einige rechentechnische Hinweise

6.1 Berechnung der Zentrifugenschale

Die Berechnung der Zentrifugenschale geschieht durch Integration der Differentialgleichungen der Schale unter Einflechtung der Rand- und Zwischenbedingungen. Wenn das Differentialgleichungssystem reelle Eigenwerte besitzt, kann es zu numerischer Instabilität kommen. Dies tritt bei der Schalenberechnung insbesondere dann auf, wenn der gegenseitige Einfluß der benachbarten Rand- bzw. Zwischenbedingungen klein ist. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, werden in kurzen Integrationsschritten die Zustandsgrößen als zusätzliche Unbekannte eingeführt, d.h. die Integration erfolgt stückweise über kurze Schalenabschnitte; die Lösung wird mit der Berechnung eines linearen Gleichungssystems gekoppelt.

Die Zentrifuge wurde unterteilt in n Schalenteile (bei der Zentrifuge von Kapitel 4 sind es drei, nämlich Kegel, Zylinder und Kegel). Jeder Schalenteil ist unterteilt in n_1 Streifen unterschiedlicher Wanddicke und Länge. Jeder Streifen ist noch einmal unterteilt in n_{ik} Segmente. Hierdurch soll zum einen eine numerisch stabile Lösung zustandekommen, zum anderen gestattet es die feine Unterteilung, die Spannungen an den Schnittstellen ohne weitere Rechenschritte zu bestimmen. Auf eine genauere Bestimmung der auftretenden Maximalspannung, etwa durch Ausgleichskurve, wurde verzichtet.

Durch Benutzung der Unbekannten N_1, Q, M_1, U, W und

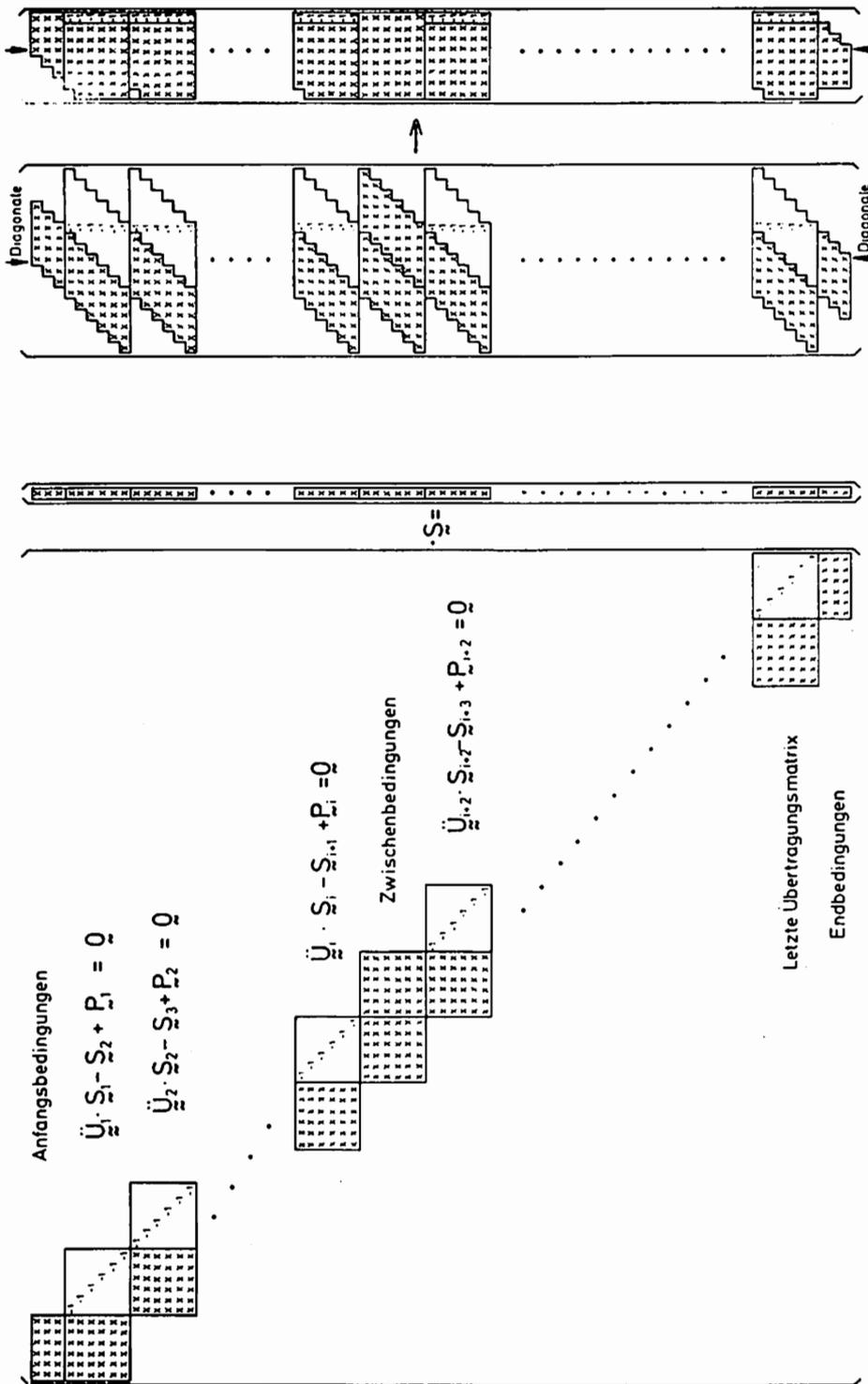


Abb. 6-1 Aufbau des Gleichungssystems der Zentrifugenschale

Abb. 6-2 Umformung der Gleichungsmatrix in Bandform

ist es nur nötig, die Zwischenbedingungen zwischen zwei Schalenteilen zu formulieren.

Die Übertragungsmatrix für ein Segment wurde numerisch nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (klassischer Runge-Kutta) aus dem Differentialgleichungssystem der Schale gewonnen. Bei der Zylinderschale konstanter Wandstärke wurde sie exakt aufgestellt. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ Q \\ M_1 \\ U \\ W \\ X \end{pmatrix}_{i+1} = \underset{\approx}{\underline{\underline{U}}}_i \cdot \begin{pmatrix} N_1 \\ Q \\ M_1 \\ U \\ W \\ X \end{pmatrix}_i + P_i, \text{ bzw. } \underline{\underline{S}}_{i+1} = \underline{\underline{U}}_i \underline{\underline{S}}_i + \underline{\underline{P}}_i$$

oder $\underline{\underline{U}}_i \underline{\underline{S}}_i - \underline{\underline{I}} \underline{\underline{S}}_{i+1} = -\underline{\underline{P}}_i$.

Das gesamte Gleichungssystem sieht wie in Abb. 6-1 dargestellt aus. Um das Gleichungssystem bequem in Form einer Bandmatrix umzuordnen, sind die Hälfte der Randbedingungen als lineare Anfangsbedingungen zu Beginn des Gleichungssystems, die restlichen linearen Endbedingungen zu Ende des Gleichungssystems formuliert.

Die Gleichungsmatrix wurde umgeordnet in Form einer Bandmatrix, wobei, um Kernspeicher bei der Berechnung zu sparen, in jedem Block (Anfangsbedingungen/ Übertragungsmatrix/ Zwischenbedingungen/ Endbedingungen) bereits vor der Berechnung eine Gaußsche Triangulisation vorgenommen wurde (Abb. 6-2).

Die Berechnung des so stark reduzierten Bandgleichungssystems wurde mit der Gaußschen Eliminationsmethode (mit Pivotisierung) durchgeführt.

Die Rechenzeiten sind sehr gering. So dauerte die Berechnung des Zylindermodells, bestehend aus 50 Teilen unterschiedlicher Wandstärke, an der Rechenmaschine TR 440 (Telefunken) bei Durchführung erster Optimierungsschritte weniger als 1,4 Sekunden. Die benutzte Bandbreite war 6+1.

6.2 Das optimale Gradientenverfahren

Das optimale Gradientenverfahren sucht iterativ ein relatives Minimum bzw. Maximum einer Funktion $f(\underline{x})$.

Es gilt für das absolute Differential der Funktion:

$$df(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \underline{\text{grad}}(f)^T \cdot \underline{dx}$$

$$\text{oder } df = |\underline{\text{grad}}(f)| \cdot |\underline{dx}| \cdot \cos[\underline{\text{grad}}(f), \underline{dx}] .$$

Die größte lokale negative Änderung wird erreicht, wenn

$$\cos[\underline{\text{grad}}(f), \underline{dx}] = -1 ,$$

d.h. wenn $\underline{\text{grad}}(f)$ und \underline{dx} negativ parallel sind.

Das optimale Gradientenverfahren sucht in der Richtung des größten Abstiegs mit Hilfe der linearen Suche das relative Minimum, bestimmt an dieser Stelle wieder den größten Abstieg etc.

Der Vorteil des Verfahrens ist die relativ einfache Programmierung. Der Nachteil ist die Erfordernis, den Gradienten zur Hand zu haben (bzw. hier rechnerisch zu bestimmen) und die schlechte Konvergierung von ungünstigen Startpunkten.

Methoden, die mit dem Gradienten operieren und je nach geforderter Genauigkeit und zu berechnender Funktion schneller rechnen, sind:

- a) die Parallele-Tangentenmethode,
- b) die konjugierte Gradientenmethode,
- c) die variable Metrikmethode (beinhaltet b)),
- d) die Huangsche Matrizenmethode (beinhaltet c)).

Für die im Rahmen dieser Arbeit geforderte Genauigkeit erschien es nicht ratsam, auf eine dieser aufwendigeren Methoden zurückzugreifen. (Es reichten in der Regel drei bis vier Iterationsschritte; den Großteil der Rechenzeit raubte die lineare Suche!)

6.3 Das "Powell-Verfahren"

Das Powell-Verfahren findet für eine quadratische Funktion der Art $f(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{b}^T \underline{x} + c$, deren Konstantenmatrizen $\underline{A}, \underline{b}, c$ nicht gegeben sind, nach spätestens n Iterationsschritten das Funktionsminimum, ohne daß auf den Funktionsgradienten zurückgegriffen werden muß. \underline{A} muß positiv definit sein. Für ähnlich geartete Funktionstypen soll das Verfahren vergleichbar der variablen Metrikmethode sein. Da das Powellverfahren ohne die aufwendige künstliche Berechnung eines Gradienten auskommt, bietet es sich für die Optimierungsprobleme der Kapitel 3 und 4 an.

Das Verfahren baut auf zwei Theoremen auf :

Theorem 1:

Man habe m ($m \leq n$) zueinander \underline{A} -konjugierte Richtungen \underline{q}_i . Die Funktionsminimumstelle in dem von den Vektoren \underline{q}_i aufgespannten m -dimensionalen Raum sei $\underline{x}_m = \underline{x}_0 + \alpha_i \underline{q}_i$, wobei die α_i zu bestimmende Konstanten sind und \underline{x}_0 ein Startpunkt ist.

Das Minimum ist:

$$\min f = f\left(\underline{x}_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i\right) = f(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \underline{q}_i^T \underline{A} \underline{q}_i + \alpha_i \left[\underline{x}_0^T \underline{A} \underline{q}_i + \underline{q}_i^T \underline{A} \underline{x}_0 + \underline{b}^T \underline{q}_i \right].$$

Es treten keine gemischten Glieder $\alpha_i \alpha_j$ wegen der \underline{A} -Konjugiertheit der Richtungsvektoren auf. Es reicht daher α_i so zu bestimmen, daß

$$\alpha_i^2 \underline{q}_i^T \underline{A} \underline{q}_i + \alpha_i \left[\underline{x}_0^T \underline{A} \underline{q}_i + \underline{q}_i^T \underline{A} \underline{x}_0 + \underline{b}^T \underline{q}_i \right]$$

minimal wird, d.h. einmaliges Suchen nach dem Minimum in jeder Richtung.

Theorem 2:

Sind \underline{x}_0 und \underline{x}_1 Minima in einem Raum, welcher die Richtung \underline{q} beinhaltet, so sind $(\underline{x}_1 - \underline{x}_0)$ und \underline{q} \underline{A} -konjugiert:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} [f(\underline{x}_0 + \lambda \underline{q})] = 2\lambda \underline{q}^T \underline{A} \underline{q} + \underline{x}_0^T \underline{A} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{A} \underline{x}_0 + \underline{q}^T \underline{b} = 0 \text{ bei } \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} [f(\underline{x}_1 + \lambda \underline{q})] = 2\lambda \underline{q}^T \underline{A} \underline{q} + \underline{x}_1^T \underline{A} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{A} \underline{x}_1 + \underline{q}^T \underline{b} = 0 \text{ bei } \lambda = 0.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$(\underline{x}_1 - \underline{x}_0)^T \underline{A} \underline{q} = 0 \quad (\text{q.e.d.}).$$

Verfahren:

- 1) Start mit beliebigen nicht-parallelen Richtungen \underline{g}_i im Punkt \underline{x}_0
- 2) für $i = 1 \dots n$ wird λ so berechnet, daß $f(\underline{x}_{i-1} + \lambda \underline{g}_i)$ minimal wird. $\underline{x}_i = \underline{x}_{i-1} + \lambda \underline{g}_i$
- 3) für $i = 1 \dots n-1$ wird \underline{g}_i durch \underline{g}_{i+1} ersetzt,
- 4) $\underline{g}_n = \underline{x}_n - \underline{x}_1$,
- 5) λ wird so berechnet, daß $f(\underline{x}_n + \lambda \underline{g}_n)$ minimal wird. $\underline{x}_0 = \underline{x}_n + \lambda \underline{g}_n$,
zurück nach 2)

Induktionsbeweis: Nach k Iterationsschritten seien die Richtungen $\underline{g}_{n-k+1}, \underline{g}_{n-k+2}, \dots, \underline{g}_n$ für die $k+1$.te Iteration \underline{A} -konjugiert. Nach Theorem 1 ist im $k+1$.ten Schritt das Minimum in dem von den k Richtungen aufgespannten Raum zu finden. Der aus der $k+1$.ten Iteration hervorgehende Punkt \underline{x}_n ist ebenfalls nach Theorem 1 ein solcher Minimumpunkt, so daß nach Theorem 2 die neu gewählte Richtung konjugiert zu den Richtungen $\underline{g}_{n-k+1}, \dots, \underline{g}_n$ ist.

Der Punkt \underline{x}_0 der 2.ten Iteration sowie der Punkt \underline{x}_n sind beide Minima in der Richtung \underline{g}_n . Die 2.te Iteration bringt also zwei \underline{A} -konjugierte Richtungen als Induktionsbeginn. Nach n Iterationen sind alle Richtungen \underline{A} -konjugiert und nach Theorem 1 ist das Minimum im n -dimensionalen Raum gefunden.

6.4 Lineare Suche nach dem Funktionsminimum einer unimodalen Funktion

Gesucht ist das Minimum der unimodalen konkaven Funktion

$$f(s) = f(\underline{x}_0 + s \cdot \underline{d}_0) \quad \text{im Bereich} \quad s \geq 0.$$

Folgende Größen seien gegeben:

$$f_0 = f(\underline{x}_0),$$

$$\underline{g}_0 \hat{=} \text{Gradient an der Stelle } \underline{x}_0,$$

$$f^* \hat{=} \text{geschätzter Minimumwert mit } f^* \leq f_{\min},$$

$$\varepsilon \hat{=} \text{globale Genauigkeitsschranke für } s.$$

Die Funktion wird angenähert durch eine Parabel der Form

$$f(s) \approx \alpha s^2 + \beta s + \gamma.$$

1. Schritt: $a = 0, f(a) = f_a = f_0.$

2. Schritt: Lineare Extrapolation; mit der Anfangssteigung

$$f'_0 = f'(0) = \underline{g}_0^T \cdot \underline{d}_0 \text{ folgt}$$

$$b = -2(f_0 - f^*) / f'_0, \quad f_b = f(b).$$

3. Schritt: Quadratische Interpolation (bzw. Extrapolation):

$$c = \frac{1}{2} f_0 b^2 \cdot \frac{1}{f_0 + f'_0 b - f_b}, \quad f_c = f(c)$$

k.ter Schritt: ($k > 3$):

$$s^* = \frac{1}{2} \frac{f_a(b^2 - c^2) + f_b(c^2 - a^2) + f_c(a^2 - b^2)}{f_a(b - c) + f_b(c - a) + f_c(a - b)}, \quad f^* = f(s^*).$$

$$\text{Ist } \min \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - s^* \right| \leq \varepsilon, \text{ so folgt } f_{\min} \approx \min \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix}$$

sonst $\max \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix}$ und entsprechende Abszisse

durch f^* bzw. s^* ersetzen.

Auf eine kubische Interpolation in der Nähe der Minimumstelle wurde wegen der geforderten größeren Genauigkeit und der numerischen Unsicherheit (Rauschen infolge Lösung des Differentialgleichungssystems, Berechnung von Exponentialfunktionen, Abarbeitung eines großen Gleichungssystems etc.) verzichtet.

6.5 Lösungssuche nach der Wurzel der algebraischen Gleichung (2.4)

Gesucht ist die reelle positive Wurzel des Polynoms

$$f(x) = x^4 - bx - cx - d \quad \text{mit} \quad \begin{cases} b, c, d \geq 0, \\ c = \alpha \sqrt{bd - \frac{27}{4} (N_1 M_2 - N_2 M_1)^2}. \end{cases}$$

Man kann sich die Funktion zusammengesetzt denken aus den Teilfunktionen

$$\begin{aligned} g_1 &= x^4, \\ g_2 &= -(bx^2 + cx + d) \end{aligned} \quad (\text{siehe Abb. 6-3}).$$

Beide Funktionen haben im Bereich $x > 0$ nur definierte Werte mit einem Vorzeichen, so daß die zusammengesetzte Funktion bei nicht verschwindendem d in diesem Bereich eine reelle Nullstelle besitzt.

Die Nullstelle kann eingeschränkt werden durch:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x^* \leq x_2 \quad \text{mit} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + d}} \hat{=} \text{positive Nullstelle von } x^4 - bx^2 - d, \\ x_2 &= \sqrt{b} + \sqrt[4]{d} \hat{=} \text{zusammengesetzte Lösung aus reiner Momenten- bzw. reiner Normalkraftbeanspruchung,} \end{aligned}$$

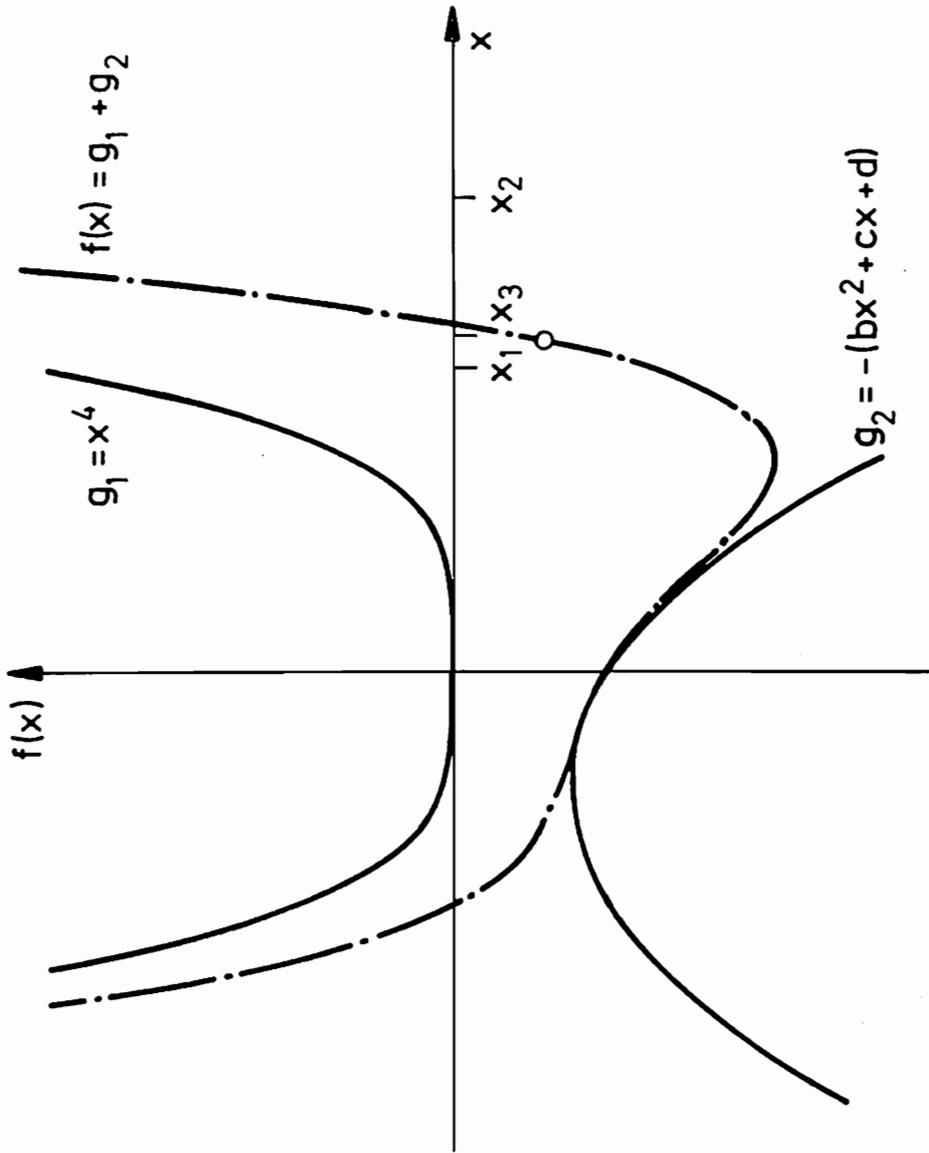


Abb. 6-3 Nullstellenermittlung des Polynoms

denn es gilt:

$$f(x_1) = -x_1 \cdot c < 0,$$

$$f(x_2) = 2\sqrt{b^3} \sqrt[3]{d} + \sqrt{b} (5\sqrt{bd} - c) + \sqrt[3]{d} (4\sqrt{bd} - c) > 0,$$

$$\text{da } 4\sqrt{bd} - c > 0.$$

Anmerkung: Eine kleinere obere Schranke ist durch

$\bar{x}_2 = \sqrt{b + \sqrt{d} + \sqrt{b\sqrt{d}}}$ gegeben, wird aber wegen der unbequemen Berechnung übergangen.

Die Wurzel kann mit Regula falsi zwischen diesen Werten gesucht werden.

Es zeigte sich, daß mit dem gewöhnlichen Newtonverfahren schneller gearbeitet werden konnte. Als Ausgangsnäherung wurde der Wert $x_3 = \sqrt{b + \sqrt{d}}$ gewählt.

Es gilt:

$$x_1 \leq x_3 \leq x_2.$$

An diesem Punkt (x_3) ist die Steigung bereits positiv, so daß das Verfahren nicht mehr zum negativen Wurzelwert konvergieren kann:

$$f'(x_3) = 2x_3(b + 2\sqrt{d}) - c > 0.$$

Die geforderte hohe Genauigkeit $|x - x_{\min}| \leq 10^{-9}$ konnte in der Regel nach 3 bis 5 Schritten erreicht werden.

Die exakte Auflösung der Gleichung 4. Ordnung war zum einen nicht annähernd vergleichbar schnell, zum anderen war die Lösung durch die wiederholten Aufrufe von Kreisfunktionen bzw. Exponentialfunktionen sowie Wurzelberechnungen nicht genau genug.

Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde am Beispiel der Zentrifugenschale ein Iterationsverfahren vorgestellt, welches es gestattet, für rotationssymmetrische, statisch belastete, elastische, biegesteife Schalen mit kontinuierlichem und diskontinuierlichem Wanddickenverlauf die Wanddicke so zu bestimmen, daß in keinem Punkt des Schalenkontinuums die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese einen vorgegebenen Maximalwert überschreitet. Als Zielfunktion ist das Minimum des Schalenvolumens gesetzt. Die konstruktiv wichtige Beschränkung eines Minimalwertes für die Wanddicke ist in die Betrachtung einbezogen. Das problemorientierte Verfahren ist den üblichen Verfahren der mathematischen Programmierung weit überlegen. So liegt die Anzahl der Aufrufe (= Schalenberechnungen) oft unterhalb der benötigten Zahl zur einmaligen Gradientenermittlung.

Das im Zusammenhang mit der Wanddickenbestimmung entwickelte Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung läßt sich auch auf andere Problemstellungen übertragen, etwa die Nullstellenermittlung eines nichtlinearen Gleichungssystems.

Es wurde gezeigt, daß die Bestimmung der Längen von Schalenstreifen jeweils konstanter Wanddicke (Ziel: größtmögliche Reduzierung des Bauvolumens) an der am meisten beanspruchten Zentrifugenzyinderschale durch das Vorhandensein mehrerer relativer Minima nur erschwert über globale Extremumsuchverfahren möglich ist, daß es hingegen nicht nötig ist, die Zahl der

Streifen hoch anwachsen zu lassen, da die Volumener-
sparnis mit wachsender Streifenzahl stark degressiv
ansteigt.

Die gewonnenen Erkenntnisse aus der **Wanddickenermitt-**
lung wurden an der in der Praxis vorwiegend angewand-
ten Zentrifuge, bestehend aus Zylinderschale mit zwei
Kegelschalen als Deckel, beispielhaft demonstriert.

In einem weiteren Teil der Arbeit wurde unter Zugrun-
delegung der Membrantheorie der Verlauf der Mittelflä-
che einer Zentrifugenschale konstanter **Wanddicke** ver-
gleichend für im gesamten Schalenbereich konstante
Hauptspannung, konstante Vergleichsspannung nach der
Schubspannungshypothese sowie konstante Vergleichsspan-
nung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese be-
stimmt. Es wurde darauf hingewiesen, daß der Spannungs-
verlauf über den Radius den möglichen Minimal- bzw.
Maximalwert des Schalenradius vorgibt. Außerdem ist
die Schalenform geprägt von der Wahl der Anfangsspan-
nungen sowie von der Belastung. Es wurde auf die ge-
ringfügigen Differenzen bei der Lösung nach den diver-
sen Spannungshypothesen hingewiesen und empfohlen, die
rechnerisch einfachere Schubspannungshypothese zu ver-
wenden.

Literaturverzeichnis

- (1) Milankovic, M., Arbeiten der Jugoslawischen
 Akademie der Wissenschaften
 (Agram),
 175 (1908) S. 140
- (2) Megareus, G., Die Kuppel gleicher Festig-
 keit,
 Bauingenieur 20 (1939) S. 232
- (3) Federhofer, K., Über Schalen gleicher Festig-
 keit,
 Bauingenieur 20 (1939) S. 366
- (4) Ziegler, H., Kuppeln gleicher Festigkeit,
 Ing.-Archiv 26 (1958) S. 378
- (5) Hoffman, G.A., Minimum-Weight Proportions
 of Pressure Vessel Heads,
 J. Appl. Mech. 29 (1962) S. 662
- (6) Tölke, W., Über Rotationsschalen gleicher
 Festigkeit für konstanten In-
 nen- und Außendruck,
 ZAMP 19 (1939) S. 338
- (7) Biezeno, C.B., Bijdrage tot de berckhenning
 van ketelfronten,
 De Ingenieur 39 (1922) S. 781
- (8) Issler, W., Membranschalen gleicher Festig-
 keit,
 Ing.-Archiv 33 (1963) S. 330

- (9) Schumann, W. Über Schalen gleicher Festig-
und W. Wüthrich, keit,
Acta Mech. 14 (1972) S. 189
- (10) Sayir, M. Zu den anisotropen Membranschalen
und W. Schumann, mit gegebenenfalls gleicher
Festigkeit,
ZAMP 23 (1972) S. 815
- (11) Wang, H.-C. An Approach to Optimum Shape
and W.J. Worley, Determination for a Class of
Thin Shells of Revolution,
J. Appl. Mech. 35 (1968) S. 524
- (12) Drucker, D.C. Design for Minimum Weight,
and R.T. Shield, Proc. 9th Intern. Congr. Appl.
Mech. (1956) Brüssel
- (13) Drucker, D.C. Bounds on Minimum Weight Design,
and R.T. Shield, Quarterly Appl. Mech. 15 (1957)
S. 269
- (14) Aristov, M.V. Minimal-Weight Elastic Annular
and V.A. Troitskii, Plate,
Mekhanika Tverdogo Tela 10/3
(1975) S. 172
- (15) Flügge, W., Statik und Dynamik der Schalen,
Springer-Verlag (1962)
- (16) Hampe, E., Statik rotationssymmetrischer
Flächentragwerke,
VEB-Verlag (1968)

- (17) Zerna, W., Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen,
Abh. der Braunschw. Wiss. Ges.
19 (1967) S. 52
- (18) Klingbeil, E., Tensorrechnung für Ingenieure,
BI-Verlag (1971)
- (19) Tolle, H., Optimierungsverfahren,
Springer-Verlag (1971)
- (20) Aoki, M., Introduction to Optimization
Techniques,
Macmillan (1971)
- (21) Zurmühl, R., Praktische Mathematik,
Springer-Verlag (1965)
- (22) Jordan-Engeln, G. Numerische Mathematik für
und F. Reutter, Ingenieure,
BI-Verlag (1973)

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Seminarberichte zur Thermomechanik (in Vorbereitung)
- Nr. 3 Wolfgang Krings: Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H.Stumpf/F.J.Biehl: Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 8**