



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Wilfried Ullenboom

Optimierung von Stäben unter  
nichtperiodischer dynamischer  
Belastung

Heft Nr. 11



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Wilfried Ullenboom**

**Optimierung von Stäben unter  
nichtperiodischer dynamischer Belastung**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.11**

**Juni 1977**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistentenzeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Anregung und Unterstützung bei der Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Dr.-Ing. K. Thermann für wertvolle Ratschläge und Herrn P. Grundmann, der mir beim Aufbau des Versuches half.

Meine Kollegen am Lehrstuhl haben mich in vielfacher Weise unterstützt, wofür ich ihnen herzlich danke.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 25. 5. 1977

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 6. 1977

© 1977 Dipl. Ing. Wilfried Ullenboom

463 Bochum, Hustadtring 151

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

Es wird ein Algorithmus hergeleitet, mit dessen Hilfe Querschnittsflächenverläufe von Stäben beliebiger Auflagerung unter nichtperiodischer dynamischer Belastung von begrenzter Dauer so bestimmt werden, daß die Stäbe minimales Volumen aufweisen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Spannungen einen zulässigen Wert an keiner Stelle und zu keiner Zeit überschreiten. Zur Beurteilung der theoretischen Ergebnisse werden Versuche durchgeführt. Der Vergleich bestätigt die Richtigkeit der verwendeten Theorie.

## Summary

An algorithm for solving the problem of the minimum volume design of any supported elastic beam subjected to non-periodic dynamic load of short duration is presented. The stresses can't exceed a given admissible value at any point and at any time. The optimization problem considered is therefore one with nonlinear inequality constraints. For one particular dynamic load an experiment was performed and the theoretical and experimental results are compared. The measurements are in good agreement with the results of the calculation.

Inhaltsverzeichnis

---

<u>Bezeichnungen</u>	3
1. <u>Einleitung</u>	6
2. <u>Stabmodelle</u>	11
2.1. Der Timoshenko-Stab und der Stab nach der elementaren Theorie	11
2.2. Vergleich der Stabmodelle	16
3. <u>Lösung der Stabgleichungen</u>	19
3.1. Lösungsmethoden	19
3.1.1. Die Charakteristikenmethode	19
3.1.2. Das Differenzenverfahren	20
3.1.3. Entwicklung nach Eigenfunk- tionen, modale Analyse	20
3.1.4. Diskrete Modelle	21
3.2. Die "Lumped Mass"-Methode	21
3.2.1. Diskretisierung in der Orts- koordinate	21
3.2.2. Aufstellung der Matrizen- differentialgleichung	24
3.2.3. Die Lösung der Matrizen- differentialgleichung	28
3.2.3.1. Das Differenzenverfahren	29
3.2.3.2. Numerische Integration	30
3.2.3.3. Die modale Analyse	30
3.2.3.4. Die Matrizenfunktion	31
3.3. Fehlerquellen der numerischen Lösung	34
4. <u>Erregung</u>	40
5. <u>Optimierung</u>	43
5.1. Optimierungsaufgabe	43

5.2. Der Stab gleicher Festigkeit	45
5.2.1. Konvergenzbeschleunigung	48
5.2.2. Nebenbedingungen	49
5.2.3. Abschaltkriterium	49
5.3. Der Stab minimalen Volumens	50
5.3.1. Optimalitätsbedingung	50
5.3.2. Suchalgorithmus für minimales Volumen	53
6. <u>Rechenergebnisse</u>	55
6.1. Vergleich der Stabmodelle	55
6.2. Stäbe mit bereichsweise konstanten Querschnitten	57
6.3. Örtlicher Spannungsverlauf	61
6.4. Optimale Querschnittsverläufe	61
6.5. Näherungslösungen	69
6.6. Bemerkungen zum Problem des globalen Minimums	70
6.7. Rechenprogramm	73
7. <u>Experimentelle Untersuchungen</u>	75
7.1. Versuchsanordnung	75
7.2. Leistungsgrenze der Meßkette	82
7.3. Bestimmung der Werkstoffkenngrößen	82
7.4. Fehlerrechnung	85
7.5. Vergleich der Versuchsergebnisse mit den Ergebnissen der Theorie	86
8. <u>Zusammenfassung</u>	93
<u>Literaturverzeichnis</u>	95

Bezeichnungen

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
a	Beschleunigung
$\underline{a}_i$	Koeffizientenmatrix
$\underline{A}$	matrix
A	Querschnittsfläche
b	Stabbreite
$\underline{b}_i$	Koeffizientenmatrix
$\underline{B}$	Matrix
c	Geschwindigkeit
$\underline{c}_i$	Koeffizientenmatrix
$\underline{d}_i$	Koeffizientenmatrix
$\underline{e}_i$	Einheitsvektor
E	Elastizitätsmodul
f	Frequenz
$\underline{f}$	Erregungsvektor
F	Kraft
g	Erdbeschleunigung
G	Gleitmodul
h	Höhe
J	Flächenträgheitsmoment
l	Länge
L	Stablänge
m	Masse
M	Moment
P	Zahlenwert

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
q	Streckenlast
Q	Querkraft
<u>r</u>	Richtungsvektor
R	widerstand
<u>s</u>	Schnittkraftvektor
t	Zeit
T	Periodendauer
u	Verschiebung
U	Spannung
<u>U</u>	Übertragungsmatrix
V	Volumen
<u>V</u>	Übertragungsmatrix
w	Verschiebung
W	widerstandsmoment
x,y,z	Koordinaten
Z	Zahlenwert
ZF	Zielfunktionswert
$\epsilon$	Verzerrung
$\eta$	Ortskoordinate
$\Theta$	Massenträgheitsmoment
$\lambda$	Wellenlänge
$\lambda_i$	Lagrange'scher Multiplikator, Eigenwert
$\nu$	Querkontraktionszahl

Symbol    Name

---

$\xi$	dimensionslose Koordinate
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Spannung
$\tau$	Zeit
$\omega$	Eigenfrequenz
$(\dot{\phantom{x}})$	partielle Ableitung nach der Zeit
$(\phantom{x})'$	partielle Ableitung nach $\xi$
$(\bar{\phantom{x}})$	dimensionslose Größe

## 1. Einleitung

Seit langem beschäftigen sich Ingenieure mit dem Problem der Optimierung von Konstruktionselementen und ganzen Tragkonstruktionen. Eine Übersicht über die große Anzahl von Veröffentlichungen auf diesem Gebiet geben Sheu und Prager [1] sowie Niordson und Pederson [2].

Beschränken wir uns auf das Problem des optimalen Querschnittsflächenentwurfes dynamisch beanspruchter Stäbe und Platten, so lassen sich im wesentlichen zwei Problemgruppen unterscheiden.

In der einen Gruppe werden Stäbe und Platten minimalen Gewichtes mit vorgegebenen tiefsten Eigenfrequenzen der Längs- bzw. Biegeschwingung gesucht [3-7]. Olhoff bestimmt den optimalen Dickenverlauf einer Kreisplatte [8] und einer Rechteckplatte [9] bei vorgegebenem Volumen und vorgegebener niedrigster Eigenfrequenz. Die Optimierung der Stabquerschnitte bei vorgegebenen höheren Eigenfrequenzen beschreiben Weisshaar [10] und Olhoff [11] und Thermann [12].

In der zweiten Gruppe geht es darum, das Minimum des Stabvolumens zu finden, wenn bei einer gegebenen periodischen Belastung die maximale Durchbiegung vorgeschrieben ist [13-16].

Der Entwurf von Stäben minimalen Gewichtes bei beschränkten Spannungen wurde bisher nur von Thermann [12] für den Lastfall einer axial wirkenden periodisch veränderlichen Kraft durchgeführt.

In dieser Arbeit sollen nun instationär zu Biegeschwingungen angeregte Konstruktionselemente betrachtet werden. Das Problem der Bemessung solcher Elemente gewinnt immer mehr an Bedeutung.

Beispielsweise werden bei harten Landungen von Luft- und Raumfahrzeugen Konstruktionselemente instationär beansprucht. Hier wird die Bemessung nach dem Gesichtspunkt minimalen Gewichtes bei ausreichender Festigkeit durchgeführt (minimal weight design).

Eingespannte Stäbe, die durch Auflagerbeschleunigungen- oder verzögerungen zu instationären Biegeschwingungen angeregt werden, wurden von Lehmann und Ullenboom [17] so bemessen, daß in jedem Querschnitt die Beanspruchung gleich groß ist.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe der Querschnittsflächenverlauf von Stäben mit beliebigen Auflagerreaktionen bei nichtperiodischer Erregung von begrenzter Dauer so bestimmt werden kann, daß die Beanspruchung in keinem Querschnitt einen zulässigen Wert überschreitet und das Stabvolumen minimal wird.

Unter dem Begriff der nichtperiodischen Erregung von begrenzter Dauer fassen wir sowohl sehr kurze stoßartige Einwirkungen als auch länger andauernde Erregungen zusammen. Erregungsformen wollen wir nur dann als stoßartig bezeichnen, wenn der Beschleunigungsverlauf des deformierbaren Körpers an der Stoßstelle unstetig ist.

Die Biegeschwingungen können verursacht werden durch Bewegungs- und Kraftänderungen wie Auflagerbeschleunigungen, Einzelkräfte, Einzelmomente oder Streckenlasten.

Bei den Erregungsformen unterscheiden wir:

- Erregungen ohne Rückwirkung.

Hier wird die äußere Einwirkung explizit

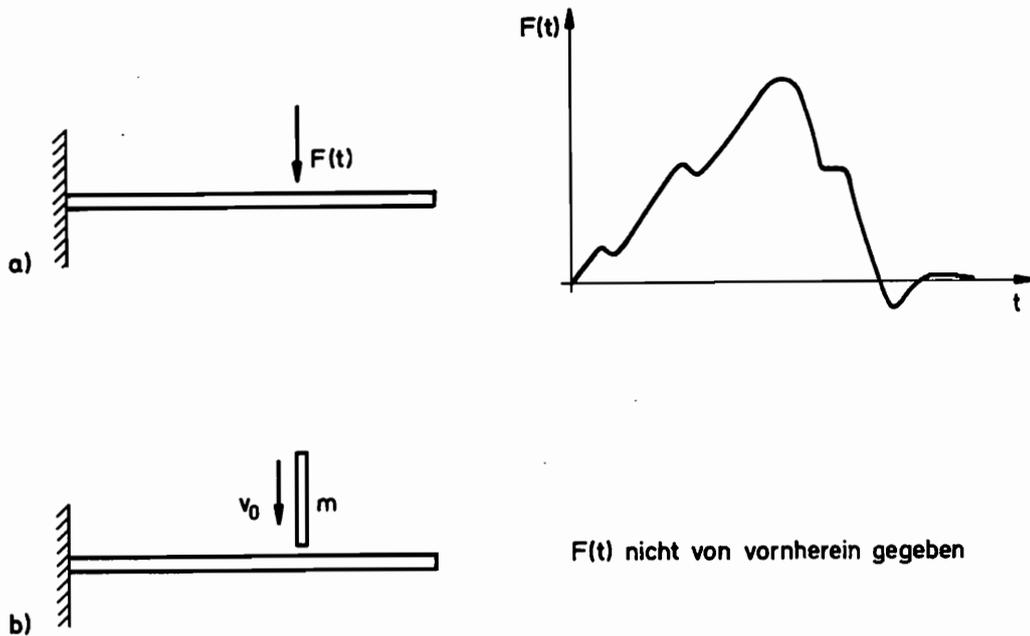


Abbildung 1.1

vorgegeben (Abb. 1.1 a). Die Systemrückwirkungen werden vernachlässigt.

- Erregungen mit Rückwirkung.

Bei ihnen ist der Erregungsverlauf zunächst unbekannt und muß aus der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Systemteilen bestimmt werden (Abb. 1.1 b).

Bei der Behandlung des Problems treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

- Bei dem Konstruktionselement soll es sich um einen linearen Schwinger handeln, dessen Dämpfung vernachlässigbar klein ist.
- Die Biegeschwingungen sollen dadurch zustande kommen, daß Auflager beschleunigt werden, oder Kräfte zeitlich befristet auf das System wirken. Wir befassen uns also mit den wegen ihrer Abstraktion vereinfachten Erregungen ohne Rückwirkung.

Mathematisch stellt sich die zuvor formulierte Aufgabe als Optimierungsproblem mit partiellen Differentialgleichungen und beschränkten Phasenkoordinaten als Nebenbedingungen dar. Zielfunktion ist das Integral über die Querschnittsfläche längs der Stabachse, das einen minimalen Wert annehmen soll. Die partiellen Differentialgleichungen enthalten Ableitungen nach einer Ortskoordinate und der Zeit und repräsentieren die Bewegungsgleichungen des Stabes. Aus der Nebenbedingung, daß die Biegespannung an jeder Stelle und zu allen Zeiten einen zulässigen Wert nicht überschreitet, resultieren die Beschränkungen der Phasenkoordinaten. Eine analytische Behandlung dieses Problems ist nicht möglich, so daß nur iterative Verfahren, bei denen man sich durch schrittweise Verbesserung der Lösung nähert, in Frage kommen.

Zunächst werden in Kapitel 2 die Differentialgleichungen verschiedener Stabmodelle gegenübergestellt und die Modelle in Hinblick auf ihre Brauchbarkeit gewürdigt. Da bei der iterativen Lösung unseres Problem es der Hauptaufwand in der Analyse eines Stabes mit vorgegebenem Flächenverlauf liegt, kommt es wesentlich darauf an, ein schnelles und leistungsfähiges Verfahren zur Bestimmung des Spannungsverlaufes zur Verfügung zu haben. Dazu werden in Kapitel 3 verschiedene Methoden zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen besprochen und verglichen. Als geeignet erweisen sich Verfahren, die durch Diskretisierung in der Ortskoordinate die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit der Zeit als unabhängige Variable reduzieren. Es gelingt, abweichend von den üblichen Verfahren, bei denen das Differentialgleichungssystem in den Verschiebungen angeschrieben

wird, das System direkt in den Kraftgrößen zu formulieren. Das ist hier vorteilhaft, da Beschränkungen bezüglich der Spannungen vorliegen. Verschiedene Formen des Erregungsverlaufes als Funktion der Zeit werden in Kapitel 4 behandelt, mit dem Ziel, Abschätzungen für den Zeitpunkt des Auftretens der maximalen Beanspruchung zu gewinnen.

Die Optimierungsstrategie wird in Kapitel 5 erläutert. Mit dem dort entwickelten Algorithmus kann in einem ersten Schritt der Stab gleicher Festigkeit bestimmt werden. Der Querschnittsflächenverlauf dieses Stabes gleicher Festigkeit wird gegebenenfalls solange weiter verbessert, bis ein relatives Minimum des Stabvolumens erreicht wird.

Numerische Ergebnisse der Theorie für verschiedene Beispiele enthält Kapitel 6.

Um die Güte der theoretisch gewonnenen Ergebnisse überprüfen zu können, werden diese abschließend in Kapitel 7 den Befunden einer experimentellen Untersuchung gegenübergestellt.

## 2. Stabmodelle

### 2.1. Der Timoshenko-Stab und der Stab nach der elementaren Theorie

Wir wollen die beiden bekanntesten eindimensionalen Stabmodelle beschreiben. Der Stab nach der elementaren Theorie ist das einfachere Modell. Die Trägheitskräfte resultieren bei ihm aus der translatorischen Bewegung der Stabelemente. Das Modell des Timoshenko-Stabes [18] baut darauf auf und berücksichtigt zusätzlich die Trägheitsmomente aus der Drehung der Stabelemente, sowie die Schubdeformationen infolge von Querkräften.

Die Timoshenko-Gleichungen gelten unter folgenden Voraussetzungen:

- linear elastischer Körper,
- homogener, isotroper Werkstoff,
- gerade Stabachse (Stabachse = x-Achse),
- y- und z-Achse sind Hauptachsen des Querschnittes,
- Schwerpunkt = Schubmittelpunkt,
- kleine Verschiebungen und Verdrehungen.

Unter diesen Voraussetzungen sind die Schwingungen in y- und z-Richtung sowie die Torsions- und Längsschwingungen entkoppelt.

Betrachten wir nur Schwingungen in der x-z-Ebene, so setzt sich die Gesamtverschiebung  $u_z$  aus zwei Anteilen zusammen:

- der Verschiebung infolge Formänderung durch das Biegemoment:  $u_{(M)z}$
- der Verschiebung infolge Querkraftdeformation:  $u_{(Q)z}$

Es gilt:

$$u_z = u_{(M)z} + u_{(Q)z} \quad (2.1)$$

Abbildung 2.1 zeigt, daß an der Drehung des Stabelementes nur  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  beteiligt ist.

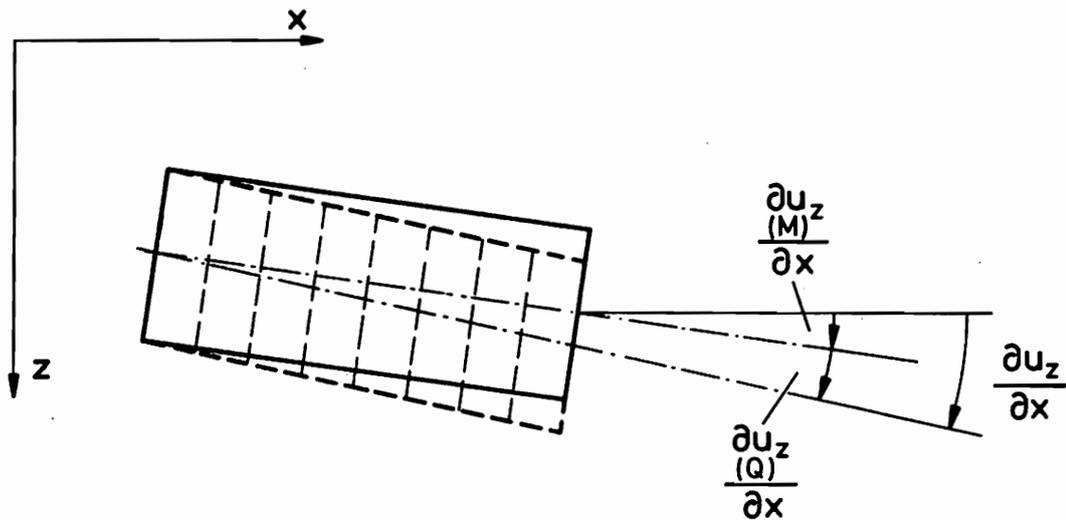


Abbildung 2.1

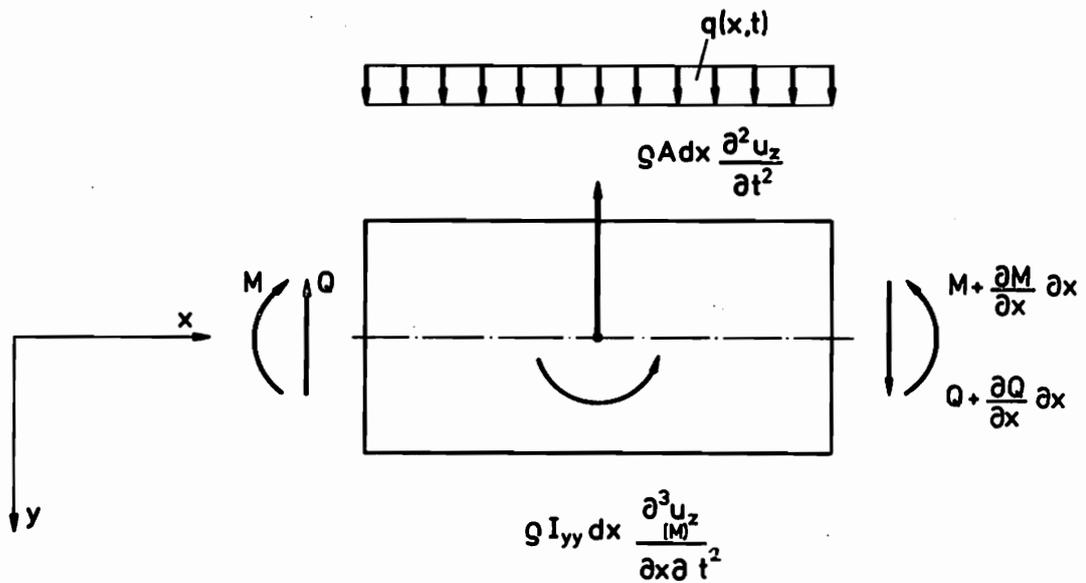


Abbildung 2.2

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Abb. 2.2) und den Formänderungsgesetzen für Biegung und Scherung ergeben sich mittels einfacher Eliminationsprozesse die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EJ_{yy}(x) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right] + \frac{GA(x)}{\kappa} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \rho J_{yy}(x) \frac{\partial^3 u_z}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (2.2)$$

und

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{GA(x)}{\kappa} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.3)$$

die vom hyperbolischen Typ sind.

In den Gleichungen bedeuten  $EJ_{yy}(x)$  die Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse und  $GA(x)/\kappa$  die Schubsteifigkeit in  $z$ -Richtung. Der Koeffizient  $\kappa$  hängt hauptsächlich von der Form des Stabquerschnittes ab. Seine Abhängigkeit von der Schwingungsfrequenz ist vernachlässigbar, was von Mindlin u.a. [19] experimentell nachgewiesen worden ist. Werte für die Größe von  $\kappa$  können der Literatur [20] entnommen werden. In Tabelle 1 geben wir sie für einige Querschnitte an. Anzumerken ist noch, daß Gleichung 2.2 nur für solche Stäbe gültig ist, bei denen die Querschnittsfläche, die zur Drehträgeit beiträgt, identisch ist mit der Querschnittsfläche, die die Biegesteifigkeit beeinflußt.

Wenn in den Gleichungen 2.2 und 2.3 der Einfluß der Drehträgeit und der Schubdeformation vernachlässigt wird, so folgt die Differentialgleichung für den Stab nach der elementaren Theorie:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E J_{yy}(x) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right] + g A(x) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2.4)$$

Wir führen folgende dimensionslose Größen ein:

$$\text{Koordinate:} \quad x = L \xi \quad (2.5)$$

$$\text{Zeit:} \quad t = \sqrt{\frac{L}{g}} \tau \quad (2.6)$$

$$\text{Verschiebung:} \quad u_z = L w \quad (2.7)$$

$$\text{Streckenlast:} \quad q = EL \bar{q} \quad (2.8)$$

$$\text{Querschnittsfläche:} \quad A = L^2 \bar{A} \quad (2.9)$$

mit  $L$  als Länge des Stabes.

Bei vielen Stabprofilen, deren Querschnittsänderung nur von einem Parameter abhängt, können das axiale Trägheitsmoment  $J_{yy}(\xi)$ , sowie das Widerstandsmoment  $W(\xi)$  in vielen Fällen in der Form  $\bar{A}^p$  mit  $p = \text{const}$  ausgedrückt werden [13]:

$$\text{Flächenträgheitsmoment:} \quad J_{yy}(\xi) = \alpha L^4 \bar{A}^r(\xi) \quad (2.10)$$

$$\text{Widerstandsmoment:} \quad W_y(\xi) = \beta L^3 \bar{A}^p(\xi) \quad (2.11)$$

$\alpha, \beta, r, p$  sind Konstanten, die für die einfachsten doppelt-symmetrischen Querschnitte der Tabelle 1 entnommen werden können.

$$\text{Mit} \quad (\dot{\phantom{x}}) = \frac{\partial(\phantom{x})}{\partial \tau} \quad ; \quad (') = \frac{\partial(\phantom{x})}{\partial \xi}$$

wird aus den Gleichungen für den Stab nach der Timoshenko-Theorie

$$\left[ \alpha \bar{A}^0(\xi) W_{(M)}'' \right]' + \frac{G \bar{A}(\xi)}{E \alpha} \left[ W' - W_{(M)}' \right] - \frac{g g L \bar{A}^r(\xi)}{E} W_{(M)}'' = 0 \quad (2.12)$$

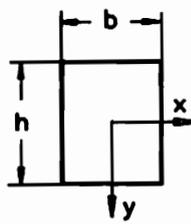
Stabgeometrie		$\alpha$	$r$	$\beta$	$p$	$\kappa$
<b>Rechteckprofil</b> $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ 	$h = \text{const.}$ $b = b(\xi)$	$\frac{h^2}{12L^2}$	1	$\frac{h}{6L}$	1	1,2
	$h = h(\xi)$ $\frac{h}{b} = \epsilon = \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{12}$	2	$\frac{\sqrt{\epsilon}}{6}$	$\frac{3}{2}$	
	$b = \text{const.}$ $h = h(\xi)$	$\frac{L^2}{12b^2}$	3	$\frac{L}{6b}$	2	
<b>Kreisprofil</b> $I = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ $W = \frac{\pi \cdot r^3}{4}$ 	$r = r(\xi)$	$\frac{1}{4\pi}$	2	$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$	$\frac{3}{2}$	1,33
<b>I - Profil</b> $I = 2bh \frac{H^2}{4}$ $W = 2bh \frac{H}{2}$	Steg vernachlässigt $h, H = \text{const.}$ $b = b(\xi)$	$\frac{H^2}{4L^2}$	1	$\frac{H}{2L}$	1	2-5

Tabelle 1

und

$$-\left[ \frac{G\bar{A}(\xi)}{E\kappa} \left( w' - \frac{w'}{(M)} \right) \right]' + \frac{\rho g L \bar{A}(\xi)}{E} \ddot{w} = \bar{q}(\xi, \tau) \quad (2.13)$$

sowie für den Stab nach der elementaren Theorie

$$\left[ \alpha \bar{A}^r(\xi) w'' \right]'' + \frac{\rho g L \bar{A}(\xi)}{E} \ddot{w} = \bar{q}(\xi, \tau) \quad (2.14)$$

Bei Erregungen in Form von translatorischen Auflagerbeschleunigungen kann die Beanspruchung durch

$$\bar{q}(\xi, \tau) = \frac{\rho L}{E} \bar{A}(\xi) a(\tau) \quad (2.15)$$

ausgedrückt werden.

Eine geschlossene analytische Lösung der Differentialgleichungen 2.12 bis 2.14 unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen und beliebig veränderlichem Querschnittsflächenverlauf ist nicht möglich. Wir sind auf numerische Lösungsmethoden angewiesen, die im 3. Kapitel behandelt werden.

## 2.2. Vergleich der Stabmodelle

Es gibt eine Anzahl Veröffentlichungen, in denen die eindimensionalen Modelle mit den Lösungen der Theorie von Pochhammer [21] und Chree [22] für den unendlich langen Stab mit konstantem kreisförmigen Querschnitt (Radius  $r$ ) verglichen werden. Abramson [23] vergleicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit harmonischer Wellen in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$ .

Die Theorie von Pochhammer und Chree liefert unendlich viele Kurvenäste für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Wellenlänge - ein Effekt, der durch die Reflektion der Wellen an den Grenzflächen entsteht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind nicht mehr konstant, sondern hängen von der Wellenlänge ab. Diese Erscheinung wird als Dispersion bezeichnet. In Abb. 2.3 sind nur die unteren beiden Kurvenäste der Pochhammer-Chree-Theorie wiedergegeben. Beim Stab nach der Timoshenko-Theorie ergeben sich nur zwei Kurvenäste, von denen der untere gut mit dem der Pochhammer-Chree-Theorie übereinstimmt, während der obere im Bereich kurzer Wellenlängen davon abweicht [24].

Der Stab nach der elementaren Theorie zeigt auch Dispersion, liefert aber nur einen einzigen Kurvenast, der nur bei großen Wellenlängen mit dem unteren Ast der Pochhammer-Chree-Theorie übereinstimmt. Sehr kurze Wellen breiten sich gemäß der elementaren Theorie unendlich schnell in dem Stab aus, was physikalisch unsinnig ist.

Von dem Stabmodell gemäß der elementaren Theorie können wir dann brauchbare Ergebnisse erwarten, wenn der Stab zu Schwingungen in seinen niedrigen Frequenzen angeregt wird. Das kompliziertere Timoshenko-Modell muß dann verwendet werden, wenn sich in dem Stab hochfrequente Schwingungen infolge kurzzeitiger stoßartiger Erregungen ausbilden. Dies wird durch Untersuchungen von Bartram [25] belegt, der die Ergebnisse der Theorie mit denen des Experimentes vergleicht.

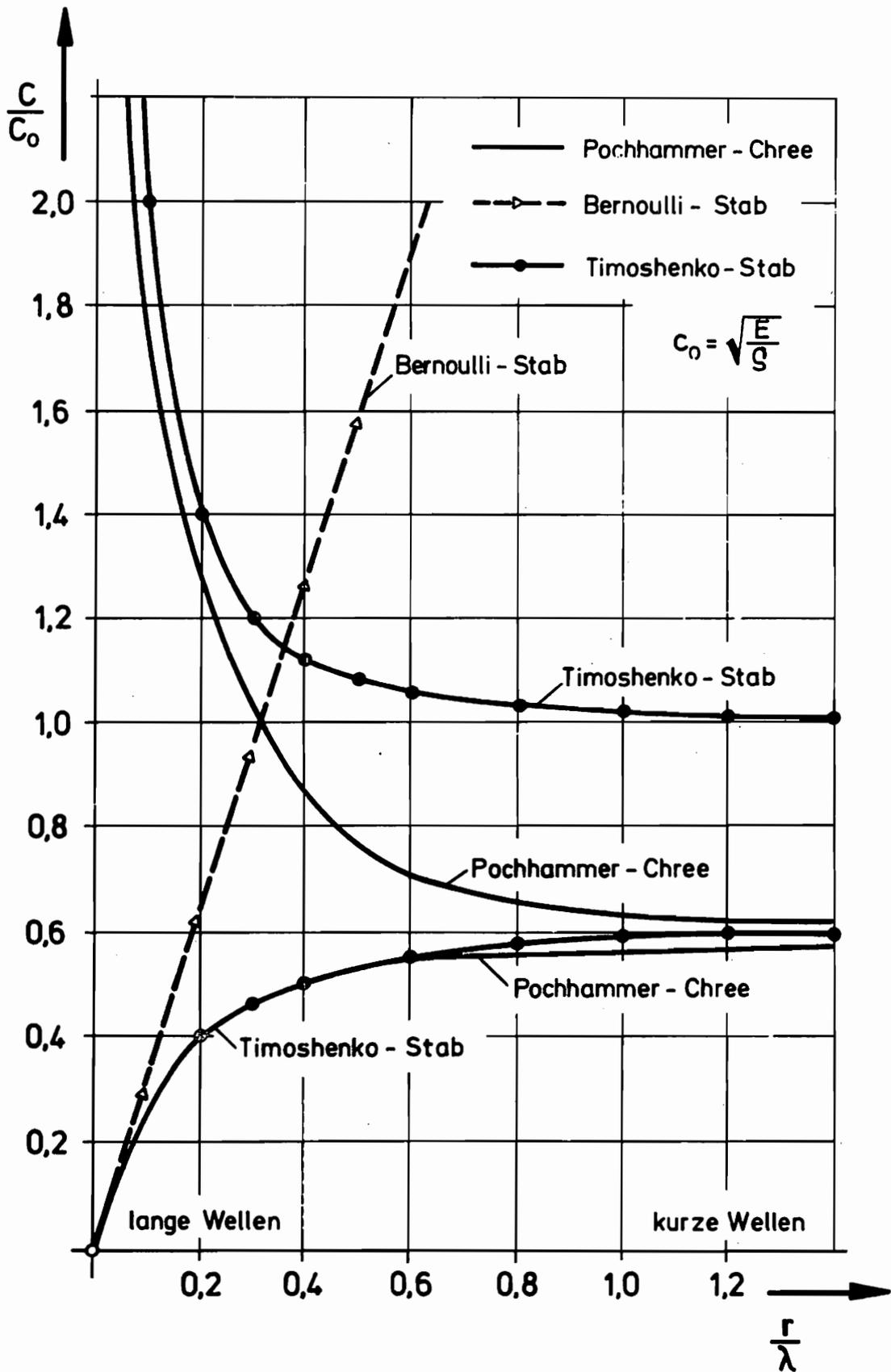


Abbildung 2.3

### 3. Lösung der Stabgleichungen

Die partiellen Differentialgleichungen für den Timoshenko-Stab und den Stab nach der elementaren Theorie beschreiben die Bewegung eines Schwingers mit kontinuierlicher Massenverteilung. Ihre Lösung unter vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen ist im allgemeinen nur auf numerischem Wege möglich.

#### 3.1. Lösungsmethoden

Wir wollen auf vier bekannte Lösungsmethoden näher eingehen:

- die Charakteristikenmethode
- das Differenzenverfahren
- die Entwicklung nach Eigenfunktionen, Modale Analyse
- die diskreten Modelle

##### 3.1.1. Die Charakteristikenmethode

Die Charakteristikenmethode führt, wenn das System der partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ ist, und man längs reeller Charakteristiken rechnet, auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Nach Bartram [25] bietet diese Methode besonders dann Vorteile, wenn Stäbe mit veränderlichen Querschnittsflächen auf sehr kurzzeitige Erregungen hin untersucht werden sollen. Wir haben diese Methode nicht in Betracht gezogen, da sie nicht auf die Differentialgleichung des Stabes nach der elementaren Theorie anwendbar ist.

### 3.1.2. Das Differenzenverfahren

Mit dem Differenzenverfahren werden die exakten Differentialgleichungen in mathematischer Hinsicht näherungsweise gelöst. Dabei ersetzt man die Differentiale durch endliche Differenzenquotienten. Damit die Lösung stabil bleibt, müssen sehr kleine Rasterweiten vornehmlich in der Zeitkoordinate gebildet werden, was zu großen Rechenzeiten und zu hohem Speicherbedarf führt [25] .

### 3.1.3. Entwicklung nach Eigenfunktionen, Modale Analyse

Die orts- und zeitabhängige Lösung  $w(x,t)$  der partiellen Differentialgleichungen kann nach Eigenfunktionen entwickelt werden in der Form

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) c_i(t) \quad (3.1)$$

Für die Entwicklungskoeffizienten  $c_i(t)$  ergeben sich unter Verwendung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen  $w_i(x)$  einfache Differentialgleichungen, die durch Quadraturen gelöst werden können. Der Anwendung dieses Verfahrens steht allerdings entgegen, daß die Eigenfunktionen für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt nicht mehr analytisch bestimmbar sind und ihrerseits durch numerische Näherungsverfahren ermittelt werden müssen. Da auf numerischem Wege ohnehin nur eine endliche Anzahl der unendlich vielen Eigenformen bestimmt werden können, liegt es nahe, von vornherein den Stab mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch einen Schwinger von endlichem Freiheitsgrad zu approximieren.

### 3.1.4. Diskrete Modelle

Bei Verwendung diskreter Modelle wird der Stab physikalisch idealisiert, was zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen führt. Wir unterscheiden die "Lumped Mass"- und die "Finite Element"-Methoden. Bei der ersteren wird die kontinuierlich verteilte Masse und Biegesteifigkeit durch ein System von masselosen Federn und Einzelmassen ersetzt. Bei der "Finite Element"-methode wird der Stab in Elemente endlicher Größe zerlegt. In diesen Elementen werden die Differentialgleichungen näherungsweise durch Ansatzfunktionen gelöst und die Lösungen unter Berücksichtigung der Verträglichkeit und des Gleichgewichtes zu einem Gleichungssystem zusammengesetzt.

Wir benutzen in dieser Arbeit die "Lumped Mass"-Methode, die auf eine Massenmatrix in Diagonalf orm führt und physikalisch besonders anschaulich ist.

## 3.2. Die "Lumped Mass"-Methode

### 3.2.1. Diskretisierung in der Ortskoordinate

Wir wollen den Stab mit seiner kontinuierlich verteilten Masse, Biegesteifigkeit und Schubsteifigkeit durch ein mechanisch möglichst gleichwertiges Modell ersetzen, das nur noch aus Einzelmassen und masselosen Federn besteht. Dazu teilen wir den Stab gemäß Abb. 3.1 in  $n$  äquidistante Abschnitte mit der Länge  $l = L/n$  auf und unterscheiden an  $n+1$  Knotenpunkten die Querschnittsflächen  $A_i$ . Zwischen den Knotenpunkten linearisieren wir den Flächenverlauf:

$$\bar{A}_i(\eta) = \bar{A}_{i-1} + \frac{\bar{A}_i - \bar{A}_{i-1}}{l} \eta \quad (3.2)$$

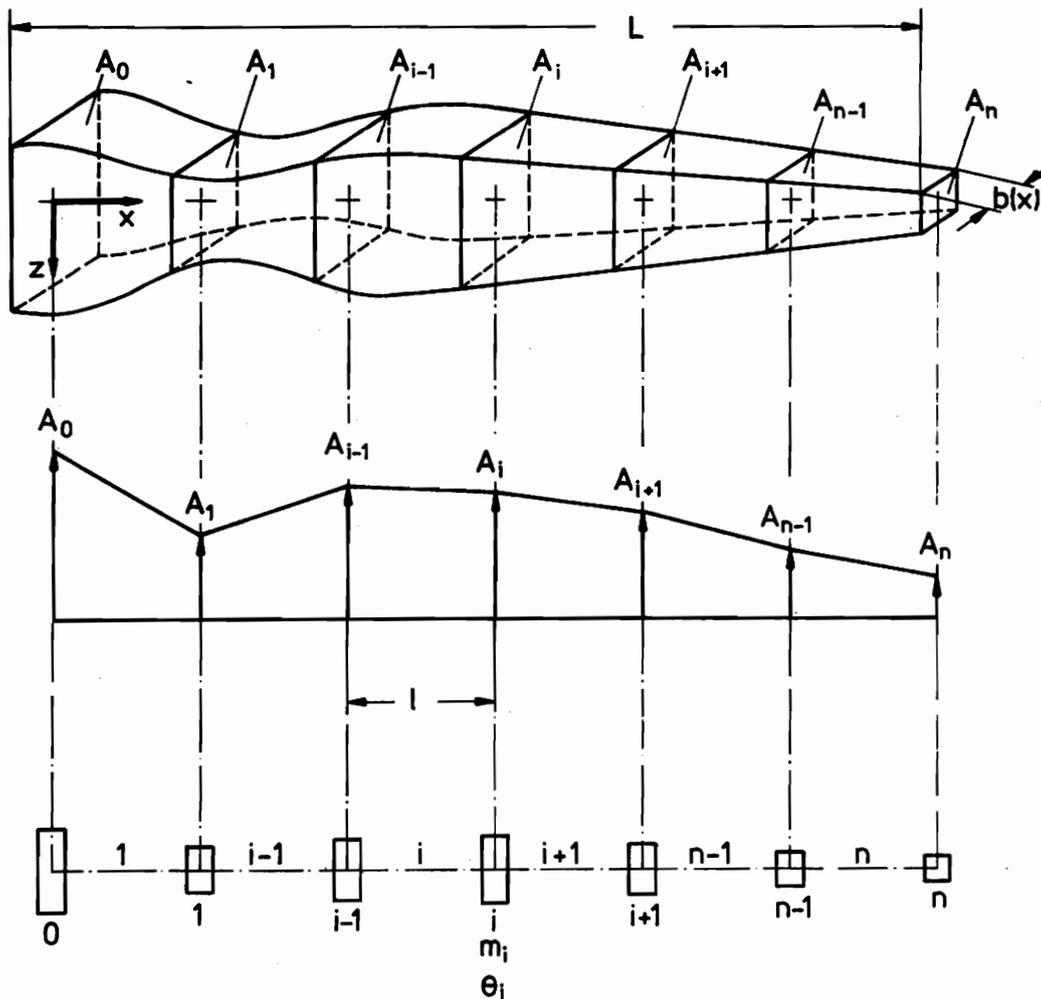


Abbildung 3.1

Den Knotenpunkten werden Massen  $m_i$  zugeordnet:

$$m_i = \frac{S \cdot L^2}{8} (\bar{A}_{i-1} + 6\bar{A}_i + \bar{A}_{i+1}), \text{ für } i = 1(1)n-1 \quad (3.3)$$

An den Rändern erhalten wir ähnliche Ausdrücke. Zur Bestimmung der Massenträgheitsmomente idealisieren wir die kontinuierlich veränderliche Masse durch einen Quader. Für den Stab mit konstanter

Breite und veränderlicher Höhe erhalten wir das Massenträgheitsmoment

$$\Theta_{yy_i} = \frac{8l L^6}{6144 b^2} (\bar{A}_{i-1} + 6\bar{A}_i + \bar{A}_{i+1})^3 \left[ 1 + \frac{64 L^2 b^2}{L^4 (\bar{A}_{i-1} + 6\bar{A}_i + \bar{A}_{i+1})} \right] \quad (3.4)$$

für  $i = 1(1)n-1$

Wir definieren eine Ersatz-Biegesteifigkeit  $E\hat{J}_i$  für die Feder  $i$ , bei der ein über die Länge konstantes Schnittmoment  $M_i$  die gleiche Durchbiegung  $\max u_{(M)}$  am Ende hervorruft wie bei dem Stab mit veränderlichem Querschnitt

$$\max u_{(M)} = \int_0^l \frac{M_i \eta}{E \hat{J}_i(\eta)} d\eta = \int_0^l \frac{M_i \eta}{E \hat{J}_i} d\eta \quad (3.5)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. 2.9 führt dies bei einem Rechteckprofil konstanter Breite und veränderlicher Höhe zu den Trägheitsmomenten

$$\hat{J}_i = \begin{cases} \frac{L^6}{12 b^2} \bar{A}_{i-1}^2 \bar{A}_i & \text{für } \bar{A}_{i-1} \geq \bar{A}_i, \\ \frac{L^6}{12 b^2} \bar{A}_{i-1} \bar{A}_i^2 & \text{für } \bar{A}_{i-1} < \bar{A}_i, \end{cases} \quad \text{für } i = 1(1)n \quad (3.6)$$

An freien Rändern mit verschwindenden Querschnittsflächen rechnen wir mit einem Schnittmomentenverlauf, wie er sich aus der Belastung durch Eigengewicht ergibt.

$$\hat{J}_1 = 0,4 L^4 \bar{A}_1^3, \quad \hat{J}_n = 0,4 L^4 \bar{A}_{n-1}^3 \quad (3.7)$$

Zur Bestimmung der Ersatz-Schubsteifigkeit  $G\hat{A}_i$  nehmen wir an, daß der Stab durch eine konstante Querkraft beansprucht wird. Unter der Bedingung

gleicher Verschiebung  $\max u_{(Q)}$  am Ende des Stabelementes erhalten wir für alle hier betrachteten Stabprofile

$$\hat{A}_i = \begin{cases} L^2(\bar{A}_{i-1} - \bar{A}_i) / \ln \frac{\bar{A}_{i-1}}{\bar{A}_i} & \text{für } \bar{A}_{i-1} > \bar{A}_i \\ L^2(\bar{A}_i - \bar{A}_{i-1}) / \ln \frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_{i-1}} & \text{für } \bar{A}_{i-1} < \bar{A}_i \end{cases} \quad (3.8)$$

sowie

$$\hat{A}_i = L^2 \bar{A}_i \quad \text{wenn } \bar{A}_i = \bar{A}_{i-1} \quad (3.9)$$

Bei verschwindenden Querschnittsflächen an den Rändern nehmen wir einen Querschnittsverlauf an, der aus dem Eigengewicht resultiert:

$$\hat{A}_0 = \frac{2}{3} L^2 \bar{A}_1, \quad \hat{A}_n = \frac{2}{3} L^2 \bar{A}_{n-1}. \quad (3.10)$$

### 3.2.2. Aufstellung der Matrizendifferentialgleichung

Zur Bemessung der Stabquerschnitte benötigen wir den Schnittmomentenverlauf. Wir werden deshalb Bewegungsgleichungen aufstellen, in denen die Schnittmomente  $M_i$  als Koordinaten erscheinen. Dazu betrachten wir das masselose Stabelement mit der zuvor ermittelten konstanten Biege- und Schubsteifigkeit und die Knotenmasse  $m_i$  in Abb. 3.2, an denen äußere Kräfte  $F_{Ai}$ , äußere Momente  $M_{Ai}$ , Trägheitskräfte, Trägheitsmomente, sowie Schnittkräfte  $Q_i$  und Schnittmomente  $M_i^l$  und  $M_i^r$  angreifen. Der hochgestellte Index kennzeichnet die Schnittstelle links bzw. rechts der Masse  $m_i$ .

Mit Hilfe elementarer Methoden erhalten wir den Zusammenhang zwischen Kraft- und Weggrößen.

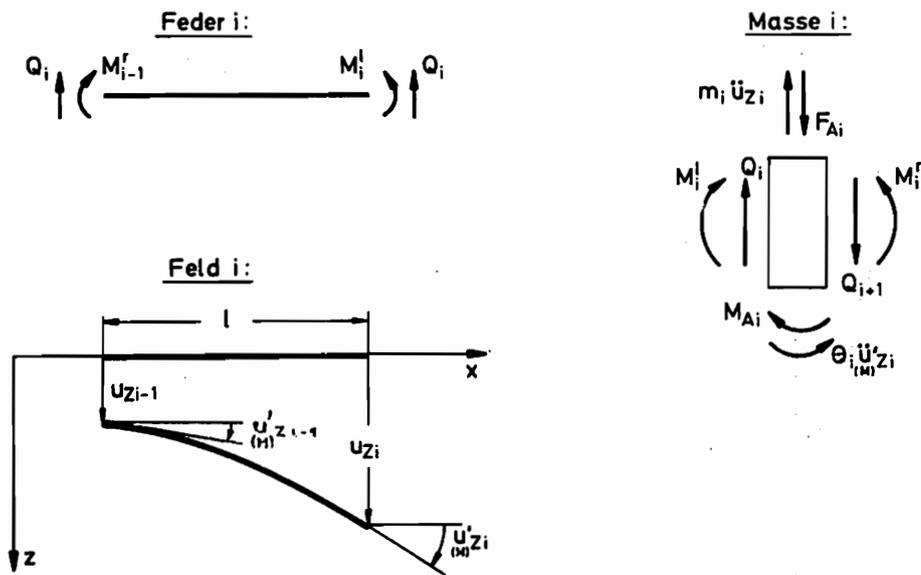


Abbildung 3.2

$$u'_{(M)zi} = -\frac{l}{2EJ} (M_{i-1}^r - M_i^l) + u'_{(M)zi-1} \quad (3.11)$$

und

$$u_{zi} = -\frac{l^2}{2EJ} (2M_{i-1}^r + M_i^l) + \frac{\alpha l}{GA_i} Q_i + l u'_{(M)zi-1} + u_{zi-1} \quad (3.12)$$

Wenn wir die drei Gleichgewichtsbedingungen für die Feder \$i\$ und die Masse \$m\_i\$ berücksichtigen, so können wir \$u\_{zi}\$, \$u'\_{(M)zi}\$ und \$M\_i^r\$ aus den Gleichungen eliminieren:

$$\left. \begin{aligned} (2b_i + a_i) l \ddot{u}_i - 3b_i \ddot{M}_i^l - c_{i-1} l Q_{i-1} + d_{i-1} M_{i-1}^l + (c_{i-1} + c_i + d_{i-1}) l Q_i \\ - d_{i-1} M_i^l - c_i l Q_{i+1} = -d_{i-1} M_{Ai-1} - c_{i-1} l F_{Ai-1} + c_i l F_{Ai} \end{aligned} \right\} (3.13)$$

und

$$\left. \begin{aligned} -3b_i l \ddot{u}_i + 6b_i \ddot{M}_i^l - d_{i-1} M_{i-1}^l - d_{i-1} l Q_i + (d_i + d_{i-1}) M_i^l \\ + d_i l Q_{i+1} - d_i M_{i+1}^l = d_{i-1} M_{Ai-1} - d_i M_{Ai} \end{aligned} \right\} (3.14)$$

mit den Abkürzungen

$$a_i = \frac{\alpha l}{G \bar{A}_i}, \quad b_i = \frac{l^3}{6 E J_i}, \quad c_i = \frac{1}{m_i}, \quad d_i = \frac{l^2}{\Theta_i} \quad (3.15)$$

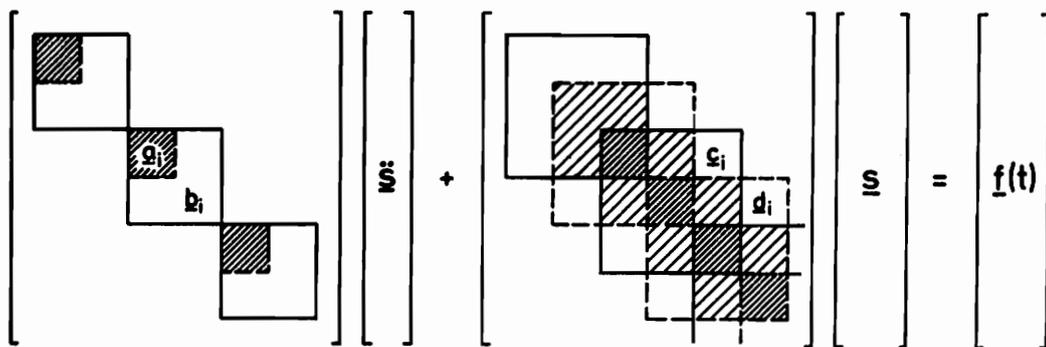
Die Gleichungen gelten für ein Stabelement im Innern des Systems. An den Rändern sind die Beziehungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen gesondert herzuleiten. Für ein links eingespanntes Stabende ergibt sich beispielsweise:

$$(2b_1 + a_1) l \ddot{Q}_1 - 3b_1 \ddot{M}_1^l + c_1 l Q_1 - c_1 l Q_2 = c_1 l F_{A1} \quad (3.16)$$

und

$$-3b_1 l \ddot{Q}_1 + 6b_1 \ddot{M}_1^l + d_1 M_1^l + d_1 l Q_2 - d_1 M_2^l = -d_1 M_{A1} \quad (3.17)$$

Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen, die, wenn wir sie richtig geordnet untereinander schreiben, die in Abb. 3.3 wiedergegebene Bandstruktur zeigen.



$$a_i = a_i \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$$

$$b_i = b_i \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c_i = c_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_i = d_i \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.3

Es zeichnen sich Elementmatrizen  $\underline{a}_i$ ,  $\underline{b}_i$ ,  $\underline{c}_i$  und  $\underline{d}_i$  ab, in denen die Eigenschaften des  $i$ -ten Elementes als Koeffizienten erscheinen. In den durch Schraffur gekennzeichneten Bereichen werden die Koeffizienten der sich überschneidenden Elementmatrizen summiert. Die entstehende Matrixdifferentialgleichung schreiben wir in der Kurzform

$$\underline{A} \ddot{\underline{s}} + \underline{B} \dot{\underline{s}} = \underline{f}(t) \quad (3.18)$$

Die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  sind quadratisch, da die Anzahl der unbekanntes Kraftschnittgrößen  $\underline{s}_i$  der Anzahl der Knotenpunktfreiheitsgrade entspricht.  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  sind symmetrisch.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung bleiben Dämpfungskräfte unberücksichtigt. Dies ist zu rechtfertigen, wenn wir davon ausgehen, daß bei den hier betrachteten nichtperiodischen Erregungen der Maximalwert der Beanspruchung nach sehr kurzer Zeit erreicht wird, bevor die Dämpfung viel Energie aus dem Konstruktionsteil absorbiert hat. Auf diese Annahme werden wir in Kapitel 4 näher eingehen.

Streckenlasten werden durch statisch äquivalente Einzelkräfte ersetzt, die auf die Knotenpunkte wirken. Vorgegebene Auflagerbeschleunigungen sind bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen an den Rändern zu berücksichtigen.

Wenn wir in den Bewegungsgleichungen für den Stab nach der Timoshenko-Theorie die Terme mit der Drehträgheit und der Schubdeformation streichen und die beiden Gleichungen addieren, so erhalten wir die Bewegungsgleichung für den Stab nach der elementaren Theorie:

$$\begin{aligned}
 & b_i \ddot{M}_{i-1} + 2(b_i + b_{i+1}) \ddot{M}_i + b_{i+1} \ddot{M}_{i+1} + c_{i-1} M_{i-2} - 2(c_{i-1} + c_i) M_{i-1} \\
 & + (c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1}) M_i - 2(c_i + c_{i+1}) M_{i+1} + c_{i+1} M_{i+2} = \\
 & -c_{i-1} M_{Ai-2} + (c_{i-1} + 2c_i) M_{Ai-1} - c_{i-1} l_{FAi-1} - (2c_i + c_{i+1}) M_{Ai} \\
 & - 2c_i l_{FAi} + c_{i+1} M_{Ai+1} - c_i l_{FAi+1} - b_i \ddot{M}_{Ai-1} - 2b_{i+1} \ddot{M}_{Ai}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \\ & \\ & \\ & \end{aligned}} \right\} (3.19)$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich wieder zu einer Matrizendifferentialgleichung in der Form von Gl. 3.18 zusammenstellen. Die Matrizen A und B sind wiederum quadratisch. Sie haben ein viertel der Größe der Timoshenko-Beziehungen, da der Stab nach der elementaren Theorie bei gleicher Knotenpunktzahl nur halbsoviele Freiheitsgrade aufweist. Die Matrizen sind ebenfalls symmetrisch.

### 3.2.3. Die Lösung der Matrizendifferentialgleichung

Die Lösung der linearen gewöhnlichen Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen stellt ein Anfangswertproblem in der Zeitkoordinate dar. Eine Übersicht über die numerischen Lösungsmethoden ist in [26] zu finden. Wir haben die folgenden Methoden näher untersucht:

- das Differenzenverfahren
- die numerische Integration
- die Modale Analyse
- die Matrizenfunktionen.

Die Auswahl der Lösungsmethode erfolgt nach folgenden Gesichtspunkten:

- kurze Rechenzeit
- geringer Kernspeicherbedarf
- geringer Fehler.

### 3.2.3.1. Das Differenzenverfahren

Auf das Differenzenverfahren wurde bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen in Kapitel 3.1.2. bereits eingegangen. Bei den vorliegenden gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzen wir die zeitlichen Ableitungen durch endliche Differenzenquotienten. Die erste Ableitung der Schnittgröße nach der Zeit wird in der eigenen Rechnung durch einen vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten

$$\dot{\underline{s}}^{(i)} = \frac{1}{\Delta t} (\underline{s}^{(i+1)} - \underline{s}^{(i)}), \quad (3.20)$$

die zweite Ableitung durch den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten

$$\ddot{\underline{s}}^{(i)} = \frac{1}{\Delta t} (\dot{\underline{s}}^{(i)} - \dot{\underline{s}}^{(i-1)}) \quad (3.21)$$

ersetzt. Mit dem hochgesetzten Index in runden Klammern kennzeichnen wir den Zeitschritt.

Setzen wir die Ausdrücke 3.20 und 3.21 in die Matrixdifferentialgleichung 3.18 ein, so erhalten wir bei der Wahl gleicher Zeitdifferenzen  $\Delta t$  einen einfachen Mehrstellenalgorithmus:

$$\underline{s}^{(i+1)} = (2\underline{I} - \Delta t^2 \underline{A}^{-1} \underline{B}) \underline{s}^{(i)} - \underline{s}^{(i-1)} + \Delta t^2 \underline{A}^{-1} \underline{f}^i \quad (3.22)$$

Nach einer Startrechnung sind pro Zeitschritt zwei Multiplikationen einer quadratischen Matrix mit einem Vektor erforderlich. Die Zeitschrittweite muß sehr klein gewählt werden, um zu einer stabilen Lösung zu gelangen. Daraus resultieren lange Rechenzeiten.

### 3.2.3.2. Numerische Integration

Die Matrizendifferentialgleichung 2. Ordnung 3.18 überführen wir durch die Substitution  $\dot{\underline{s}} = \underline{z}$  in eine Matrizendifferentialgleichung 1. Ordnung. Zu ihrer Lösung gibt es eine Vielzahl numerischer Integrationsverfahren. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren [27] kommt zwar ohne Startrechnung aus, es führt jedoch je Zeitschritt vier Multiplikationen einer Matrix mit einem Vektor aus, was zu langen Rechenzeiten führt.

### 3.2.3.3. Die Modale Analyse

Sind die Matrizen A und B in der Matrizendifferentialgleichung 3.18 reell, symmetrisch und positiv definit, dann können die dazugehörigen reellen Eigenfrequenzen und Eigenformen aus bekannten Programmen [28] bestimmt werden.

Die Ausgangsgleichung 3.18 können wir wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren mit Hilfe der Modalmatrix  $\underline{\phi}$  auf generalisierte Koordinaten der Eigenformen transformieren. Es entstehen entkoppelte Differentialgleichungen, die sich auf reale Koordinaten s zurücktransformieren lassen.

Unter der Voraussetzung, daß sich das System im Anfangszustand in Ruhe befindet, lautet die Lösung [29]

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{m} \underline{\phi} \left[ \underline{\cos}(t) \underline{\phi}^T \underline{A} \underline{s}(t=0) + \int_0^t \underline{\sin}(t-\tau) \underline{\omega}^{-1} \underline{\phi}^T \underline{f}(\tau) d\tau \right] \quad (3.23)$$

mit dem Normalisierungsfaktor:

$$m = 1(Nm)^{-1}$$

der Modalmatrix:

$$\underline{\phi}$$

} (3.24)

und den Diagonal-  
matrizen:

$$\underline{\omega} = \text{diag} [\omega_i]$$

$$\underline{\cos}_{(t)} = \text{diag} [\cos \omega_i t]$$

$$\underline{\sin}_{(t-\tau)} = \text{diag} [\sin \omega_i (t-\tau)]$$

(3.24)

Die Systemantwort kann auf beliebige Erregungen mit Hilfe des Duhamel-Integrals bestimmt werden. Die Methode der Modalen Analyse bietet folgende Vorteile:

- Mit ihr können wir uns auf Eigenformen beschränken, die für die Beschreibung der Systemantwort relevant sind.
- Es gibt keine Stabilitätsprobleme, die von der Rechenschrittweite abhängen.

Dem stehen folgende Nachteile gegenüber:

- Die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenformen bei Stäben mit stark veränderlichen Biegesteifigkeiten ist aufwendig.
- Wenn der Stab Starrkörperverschiebungen ausführen kann, so ist die Matrix A semidefinit. Es sind zusätzliche Eliminationsprozesse notwendig.
- Die Auswertung der Gleichung 3.23 erweist sich als rechenzeitintensiv, wenn der Schnittmomentenverlauf in kleinen Zeitintervallen abgetastet werden muß, um das Momentenmaximum zu finden.

Wegen dieser Nachteile hatten wir bereits in Kapitel 3.1.3. die Methode der Modalen Analyse für den hier verfolgten Zweck verworfen.

#### 3.2.3.4. Die Matrizenfunktionen

Die Lösung der Matrizendifferentialgleichung 3.18 kann analytisch exakt mit Hilfe von Matrizenfunk-

tionen angegeben werden:

$$\underline{s}(t) = \cos(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}t) \underline{s}_{(t=0)} + (\underline{A}^{-1}\underline{B})^{-\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}t) \dot{\underline{s}}_{(t=0)} + \int_0^t (\underline{A}^{-1}\underline{B})^{-\frac{1}{2}} \sin[\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}(t-\tau)] \underline{A}^{-1} \underline{f}(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

Da es bei unserem Problem notwendig ist, den Schnittmomentenverlauf in kleinen Zeitintervallen  $\Delta t$  abzutasten, können wir obige Lösung im Zeitintervall  $\Delta t$  durch eine Näherungslösung ersetzen. Wir nähern die wirkliche Erregungsfunktion  $\underline{f}(t)$  durch eine Treppenfunktion mit konstanter Erregung im  $i$ -ten Zeitintervall an (vgl. Abb. 3.4)

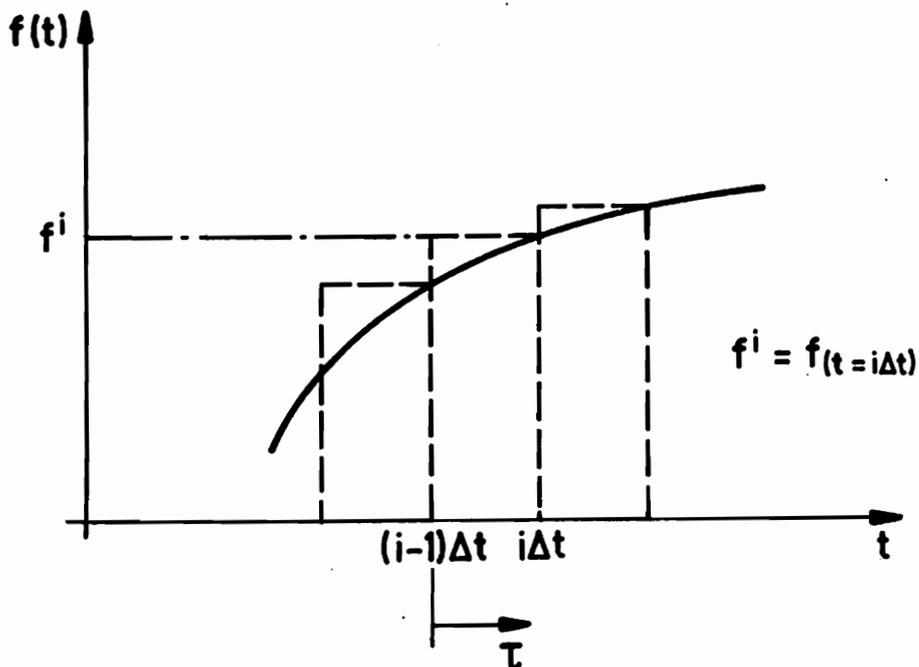


Abbildung 3.4

Wir beschreiben hier einen besonders effizienten Algorithmus, der von Waller und Krings [30] angegeben wurde und dort als reduziertes Übertragungsverfahren bezeichnet wird.

Die Lösung im  $i$ -ten Zeitintervall lautet:

$$\underline{s}(\tau) = \cos(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}\tau)\underline{C} + \sin(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}\tau)\underline{D} + \underline{B}^{-1}\underline{f}^i \quad (3.26)$$

Die Vektoren  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  sind aus den Übergangsbedingungen

$$\underline{s}^i(\tau=0) = \underline{s}^{i-1}(\tau=\Delta t) = \underline{s}^{(i-1)} \quad (3.27)$$

und

$$\dot{\underline{s}}^i(\tau=0) = \dot{\underline{s}}^{i-1}(\tau=\Delta t) = \dot{\underline{s}}^{(i-1)} \quad (3.28)$$

zu bestimmen. Nach der Elimination der Zeitableitungen entsteht ein einfacher mehrstellenalgorithmus

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}^{(i+1)} &= \underline{U}\underline{s}^{(i)} - \underline{s}^{(i-1)} + \underline{V}[f^{i+1} + f^i] \\ \text{mit} \\ \underline{U} &= 2 \cos(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}\Delta t) \\ \text{und} \\ \underline{V} &= [\underline{I} - \cos(\sqrt{\underline{A}^{-1}\underline{B}}\Delta t)]\underline{B}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Der Mehrstellenalgorithmus macht eine Startrechnung notwendig. Wenn wir berücksichtigen, daß der Stab am Anfang in Ruhe ist, erhalten wir die Gleichung

$$\underline{s}^{(1)} = \frac{1}{2}\underline{U}\underline{s}^{(0)} + \underline{V}\underline{f}^1 \quad (3.30)$$

Die Matrizen  $\underline{U}$  und  $\underline{V}$  brauchen bei der Wahl äquidistanter Zeitschritte  $\Delta t$  nur einmal bestimmt zu werden. Die darin auftretenden Matrixfunktionen lassen sich aus ihren Reihenentwicklungen bestimmen.

Das hier beschriebene reduzierte Übertragungsverfahren kommt mit einem Viertel des Speicherplatzbedarfes des Runge-Kutta-Verfahrens aus. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren macht bei jedem Rechenschritt einen Fehler, der in der Größenordnung des 5. Reihengliedes der Taylor-Reihe liegt. Die gleiche Fehlerordnung wird mit dem reduzierten Übertragungsverfahren bereits bei der Berücksichtigung von 3 Reihengliedern der Matrizenfunktion erreicht.

Jeder Zeitschritt macht beim reduzierten Übertragungsverfahren zwei Multiplikationen einer Matrix mit einem Vektor notwendig. Die Rechenzeit pro Zeitschritt ist ähnlich groß wie beim Differenzenverfahren. Gegenüber dem Differenzenverfahren sind jedoch zehnmal größere Zeitschrittweiten möglich.

Die Methode der Matrizenfunktionen ist auch für die Behandlung von Stäben geeignet, die Starrkörperverschiebungen ausführen.

Zusammenfassend können wir sagen, daß das reduzierte Übertragungsverfahren, das Matrizenfunktionen benutzt, für unser Problem am günstigsten ist, wenn die Antwort von Systemen mit vielen Einzelmassen gesucht wird, die in ihren hohen Eigenfrequenzen zu Schwingungen angeregt werden.

### 3.3. Fehlerquellen der numerischen Lösung

In diesem Abschnitt betrachten wir die Fehler, die durch die "Lumped Mass"-Diskretisierung und die anschließende numerische Lösung entstehen.

Da bei der Aufstellung der Matrizendifferentialgleichung die dynamischen und kinematischen Verträglichkeitsbedingungen an den Knotenpunkten erfüllt werden, erhalten wir im Bereich der Stabtheorie

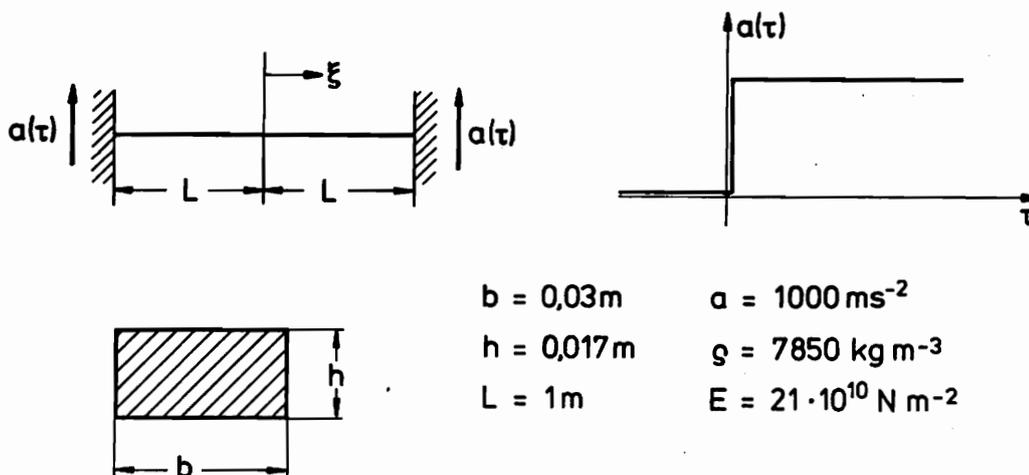
eine genaue Lösung, wenn unendlich viele Einzelmassen berücksichtigt werden. In Wirklichkeit berücksichtigen wir eine endliche Anzahl von Einzelmassen. Bei der Bestimmung ihrer Größe machen wir vereinfachende Annahmen bezüglich des Querschnittsverlaufes. Schließlich müssen bei der Verteilung der Einzelmassen längs der Stabachse die Randbedingungen berücksichtigt werden. Die genannten Diskretisierungsfehler sind durch Veränderungen in der Ortskoordinate beeinflussbar.

Diskretisierungsfehler in der Zeitkoordinate hängen bei allen erwähnten Lösungsmethoden außer der Modalen Analyse von der Zeitschrittweite  $\Delta t$  ab. Dieser Fehler fällt bei den verschiedenen Lösungsmethoden unterschiedlich groß aus. Zu einem weiteren Fehler trägt die näherungsweise Berücksichtigung des Erregungsverlaufes bei.

Neben den Diskretisierungsfehlern treten Rundungsfehler bei jeder numerischen Auswertung in einer Rechenanlage auf.

Die Größe des Gesamtfehlers können wir abschätzen, wenn wir die exakte Lösung der partiellen Differentialgleichung für den Stab nach der elementaren Theorie mit der numerischen Lösung des diskretisierten Stabmodelles vergleichen. Da wir die exakte Lösung nur für den Stab mit konstantem Querschnitt angeben können, bleibt der Einfluß des veränderlichen Querschnittsflächenverlaufes auf den Diskretisierungsfehler unberücksichtigt.

In einem Beispiel betrachten wir einen beidseitig eingespannten Stab mit Rechteckquerschnitt, der in seinen Auflagern beschleunigt wird (vgl. Abb. 3.5).



$b = 0,03\text{m}$        $a = 1000\text{ms}^{-2}$   
 $h = 0,017\text{m}$        $\rho = 7850\text{kg m}^{-3}$   
 $L = 1\text{m}$              $E = 21 \cdot 10^{10}\text{N m}^{-2}$

Abbildung 3.5

Das eindimensionale Schwingungsmodell der elementaren Theorie wird in einem mitbewegten Koordinatensystem durch die bekannte Differentialgleichung 2.14 beschrieben. Bei konstantem Querschnittsverlauf lautet sie:

$$\alpha \bar{A}^r w'''' + \frac{\rho g L \bar{A}}{E} \ddot{w} = \frac{\alpha \rho L \bar{A}}{E} \quad (3.31)$$

Wir suchen die Lösung unter den Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \tau=0) &= 0 \\ \dot{w}(\xi, \tau=0) &= 0 \end{aligned} \right\} (3.32)$$

und den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} w(\xi=1, \tau) &= 0 \\ w'(\xi=1, \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} (3.33)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form:

$$W(\xi, \tau) = W^{(0)}(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} W_i(\xi) [R_i \sin \omega_i \tau + S_i \cos \omega_i \tau] \quad (3.34)$$

wobei  $w^{(0)}(\xi)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und die anderen Terme die allgemeine Lösung des selbstadjungierten und volldefiniten Eigenwertproblems darstellen [31]. Wenn wir die spezielle Lösung nach den Eigenfunktionen  $w_i(\xi)$  entwickeln, so machen wir von der Orthogonalitätsbedingung Gebrauch:

$$\int_0^1 w_i(\xi) w_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (3.35)$$

Wir erhalten als Ergebnis, wenn wir die Krümmungen durch die Spannungen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta(\xi, \tau) = \frac{\alpha g L}{24 \beta \bar{A}^{p-1}(\xi)} & \left\{ 4 - 12 \xi^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{48}{\lambda_i^3} \frac{\cosh \lambda_i \sin \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i}{\cos^2 \lambda_i + \cosh^2 \lambda_i} \right. \\ & \cdot \left. \left[ \cosh \lambda_i \cos(\lambda_i \xi) + \cos \lambda_i \cosh(\lambda_i \xi) \right] \cos(\omega_i \tau) \right\} \quad (3.36) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_i^4 = \frac{8 g L \omega_i^2}{E \alpha \bar{A}^{(r-1)}} \quad (3.37)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_i$  bestimmen wir aus der Bedingungsgleichung

$$\cos \lambda_i \sinh \lambda_i + \sin \lambda_i \cosh \lambda_i = 0 \quad (3.38)$$

Die Entwicklung nach Eigenfunktionen wurde beim 21. Eigenwert abgebrochen, da bei Hinzunahme weiterer Eigenfunktionen die Abweichung im Ergebnis weniger als 1 % beträgt.

Die numerische Vergleichslösung wird mit der Methode der Matrizenfunktionen ermittelt. In der Ortskoordinate wird der Stab in 21 Einzelmassen aufgeteilt. Bei der aufstellung der Matrizenfunktionen werden 8 Reihenglieder für die Entwicklung der cos-Funktion berücksichtigt. Die Diskretisierung in der Zeitkoordinate geschieht in Schrittweiten von  $\Delta t = 10^{-4}$  s.

In Abb. 3.6 sind die errechneten Spannungen bezogen auf eine fiktive Spannung  $\sigma_{ul} = 18,2 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}$  zu verschiedenen Zeitpunkten über der Stablänge aufgetragen.

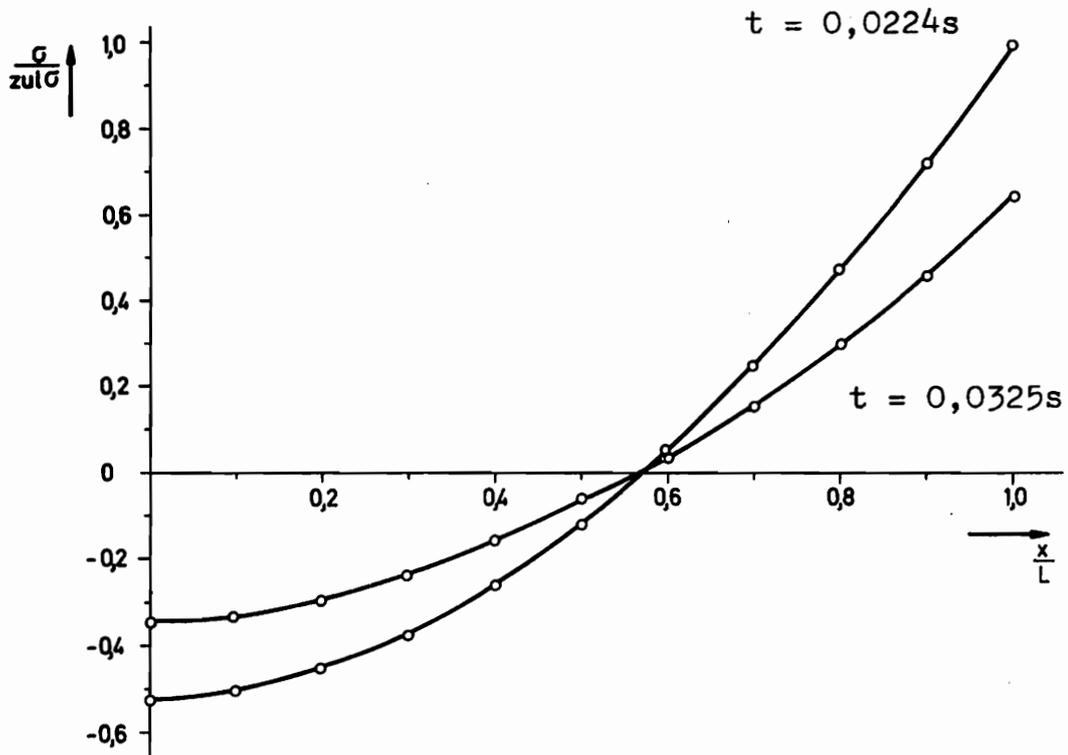


Abbildung 3.6

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit ist kein Unterschied zwischen den beiden Lösungen festzustellen. Die maximalen Abweichungen betragen ca. 1 %. Der durchgezogene Kurvenverlauf gibt die analytische Lösung wieder, während die Kreismittelpunkte Lösungspunkte des numerischen Verfahrens angeben.

#### 4. Erregung

Die Optimierung des Querschnittsflächenverlaufes von Stäben kann grundsätzlich für jede beliebige Erregungsform vorgenommen werden. Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Reaktion von Stäben auf einfache Erregungsformen:

- den Rechteckimpuls,
- den Dreieckimpuls und
- den sinusförmigen Impuls.

Eine Veränderung des Impulsmaximums hat eine proportionale Spannungsänderung zur Folge, da es sich bei dem Stab um ein lineares System handelt. Der Frage, welcher Zusammenhang zwischen der Impulswirkungsdauer und der Systemantwort besteht, sind wir bei mehreren Stäben mit unterschiedlicher Auflagerung, unterschiedlicher Belastungsart und unterschiedlichen Querschnittsflächenverläufen nachgegangen. Dabei fielen einige Merkmale auf, die allen hier betrachteten Systemen gemeinsam ist. Diese Merkmale werden an zwei verschiedenen Stäben exemplarisch dargestellt:

- a) einem einseitig eingespannten Stab, der an der Stelle  $x/L = 0,7$  durch eine Einzellast beansprucht wird,
- b) einem beidseitig drehbar gelagerten Stab, der in seinen Auflagern beschleunigt wird.

Beide Stäbe haben konstante Querschnittsabmessungen. In Abb. 4.1 tragen wir die in dem Stab auftretenden maximalen Biegespannungen in Abhängigkeit von dem Verhältnis Impulsdauer  $t_I$  zur Periode der Grundschwingung  $T_1$  auf. Die Bezugsgröße  $\sigma_{zul}$  dient der Normierung.

Wenn man das Maximum der Erregung, nicht aber den Impuls konstant hält, fällt bei den Antwortspektren besonders auf, daß

- die durch Rechteckimpulse hervorgerufene System-

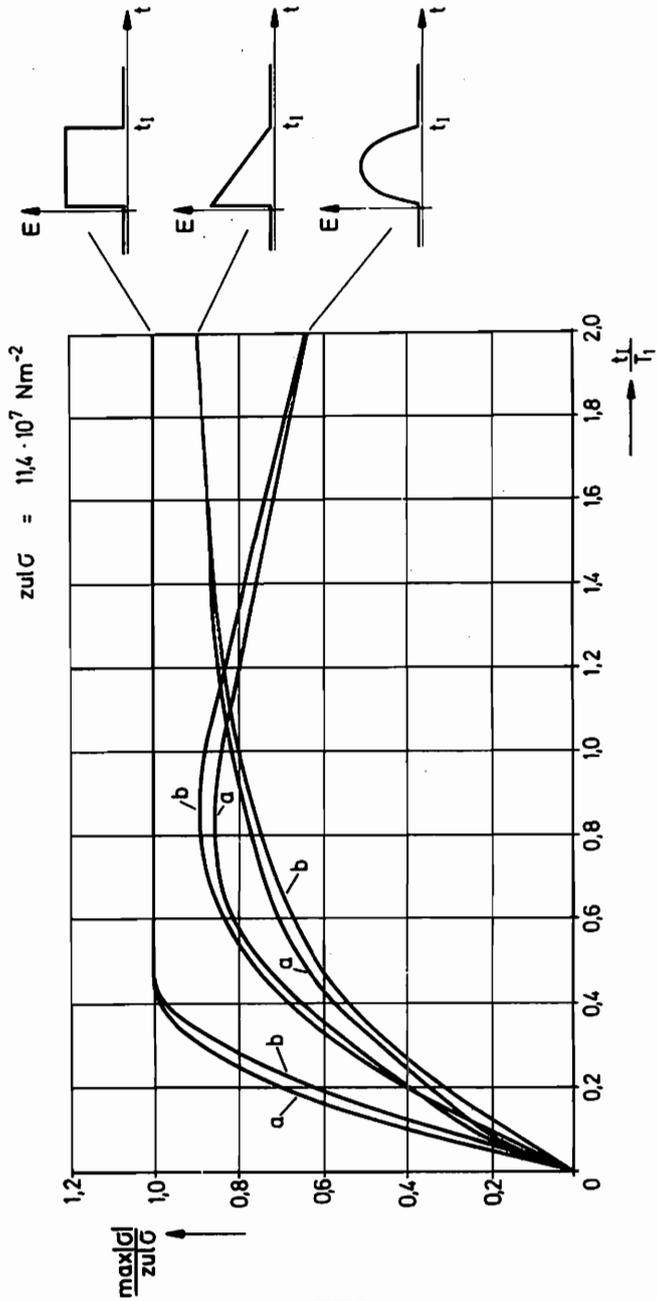
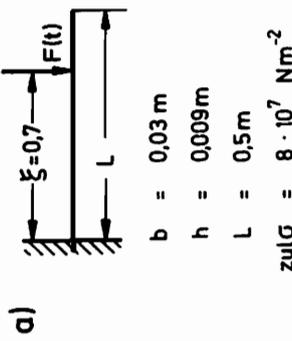
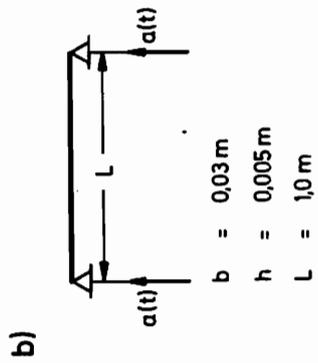
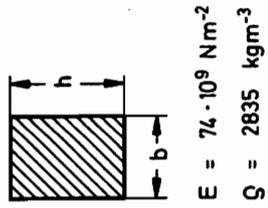


Abbildung 4.1

antwort eine obere Schranke für alle Erregungsformen bildet,

- die durch Rechteckimpulse mit den Verhältnissen  $t_I/T_1 > 0,5$  hervorgerufene Maximalspannung am größten ist und im Bereich  $t_I/T_1 < 0,5$  eine Vergrößerung der Grundperiode zu kleineren Spannungen führt.

Die Untersuchung zeigt weiterhin, daß der Maximalwert der Biegespannung bei allen drei Erregungsformen bei Verhältnissen  $t_I/T_1 > 0,5$  immer vor dem Ende der Impulseinwirkung in dem Stab auftritt, während er bei Verhältnissen  $t_I/T_1 < 0,5$  erst während der freien Schwingung auftritt. Diese Erscheinungen, die am Einmassenschwinger analytisch leicht nachzuvollziehen sind [34], können auch für den Mehrmassenschwinger mit Hilfe des Duhamel-Integrals in Gleichung 3.23 theoretisch erklärt werden.

Die Optimierung des Querschnittsflächenverlaufes von Stäben werden wir bei den in Kapitel 6 aufgeführten Beispielen für Rechteckimpulse mit Verhältnissen  $t_I/T_1 > 0,5$  vornehmen. Die so bemessenen Stäbe halten dann allen einfachen Impulsformen mit beliebiger Einwirkungsdauer stand, wenn das Impulsmaximum, das der Bemessung zugrunde liegt, nicht überschritten wird. Da das Maximum der Biegespannung in diesen Fällen bereits nach kurzer Zeit in dem Stab erreicht wird, kann die Dämpfung bis dahin nur wenig Energie absorbieren.

## 5. Optimierung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der funktionale Zusammenhang zwischen den Schnittmomenten und den Querschnittsabmessungen des Stabes aufgezeigt. Im folgenden werden die Querschnitte bemessen. Hierbei nehmen wir an, daß die veränderlichen Stabquerschnitte keinen nennenswerten Einfluß auf die Verteilung der Biegespannung  $\sigma_{xx}$  ausüben. Dieses Vorgehen ist zulässig, wenn es sich um schwach veränderliche Querschnittsflächen handelt, bzw. wenn die betrachteten Querschnitte genügend weit von denen großer Querschnittsveränderungen entfernt liegen. Wenn wir die zeitliche Veränderung des Biegemomentes berücksichtigen, erhalten wir die Biegespannung aus der Beziehung:

$$\sigma_{xx}(\xi, \tau) = \frac{|M_y(\xi, \tau)|}{W_y(\xi)} = \frac{|M_y(\xi, \tau)|}{\beta \bar{A}^p(\xi) L^3} \quad (5.1)$$

Die Bemessung der Stabquerschnitte bei vorgegebener Erregung ist eine Optimierungsaufgabe, die dem Optimierungsziel entsprechend formuliert wird.

### 5.1 Optimierungsaufgabe

Wie in der Einleitung bereits ausgeführt, ist unser Optimierungsziel der Stab minimalen Volumens mit Biegespannungen  $\sigma(x, z) \leq \text{zul } \sigma$ . In einem ersten Schritt bestimmen wir den Stab gleicher Festigkeit, der durch

$$\max_t \sigma(x) = \text{zul } \sigma \quad (5.2)$$

definiert ist.

Diese auch an sich interessante Lösung wird dann im folgenden Ausgangspunkt weiterer Verbesserungen im Sinn der eigentlichen Optimierungsaufgabe. Für das zugrunde gelegte diskrete Stabmodell lautet dann die

1. Optimierungsaufgabe: Stab gleicher Festigkeit  
Suche diejenigen Zahlenwerte der Querschnittsflächen

$$A^{[k]} = \{ A_i^{[k]} ; i = 1(1)n \} \quad (5.3)$$

für die der Wert der Zielfunktion

$$ZF = \sum_{i=1}^n \left| \text{zul } \sigma - \max_t |\sigma_i| \right| \quad (5.4)$$

zu einem Minimum wird und die Ungleichheitsnebenbedingung

$$\min A_i - A_i \leq 0 \quad (5.5)$$

für alle  $i = 1(1)n$  erfüllt ist,

und die

2. Optimierungsaufgabe: Stab minimalen Volumens  
Suche diejenigen Zahlenwerte der Querschnittsflächen

$$A^{[k]} = \{ A_i^{[k]} ; i = 1(1)n \} \quad (5.6)$$

für die der Wert der Zielfunktion

$$V = \sum_{i=1}^n l_i A_i \quad (5.7)$$

ein Minimum annimmt unter der Spannungsnebenbedingung

$$\left| \text{zul } \sigma - \max_t |\sigma_i| \right| \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1(1)n \quad (5.8)$$

und der geometrischen Nebenbedingung

$$\min A_i - A_i \leq 0 \quad \text{für alle } i = 1(1)n \quad (5.9)$$

Hierin bedeuten  $\sigma_6$  eine vorzugebende zulässige Spannung, die innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Hooke'schen Gesetzes liegt und  $\min A_i$  minimale Querschnittswerte, die nicht unterschritten werden dürfen. Derartige Minimalquerschnitte können sich beispielsweise aus der Tragfähigkeitsbemessung des Stabes für statische Vorlasten ergeben. Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Stabvolumen und den veränderlichen Querschnittsflächen ist linear:

$$V(A) = \sum_{i=1}^n l_i A_i \quad (5.10)$$

Die Nebenbedingung (Gl. 5.8) ist nichtlinear. Das zu lösende Problem besteht darin, das Minimum einer linearen Funktion mit nichtlinearen Nebenbedingungen zu finden.

Für dieses Parameteroptimierungsproblem stehen prinzipiell Lösungsalgorithmen zur Verfügung. Bei der Anwendung dieser Verfahren sind häufige Auswertungen der Zielfunktion als auch der Nebenbedingungen erforderlich. Ein jeder dieser "Funktionsaufrufe" bedeutet aber eine vollständige Spannungsanalyse eines Stabes mit vorgegebenem Flächenverlauf. Wegen der daraus resultierenden großen Rechenzeiten sind diese Verfahren nicht auf unser Problem anwendbar.

## 5.2. Der Stab gleicher Festigkeit

Hohe Konvergenzraten können wir bei der Lösung

der ersten Optimierungsaufgabe erzielen, wenn wir die nichtlineare Zielfunktion (5.4) selbst für die Bestimmung erfolgversprechender Suchrichtungen heranziehen. Wir gehen von einem beliebigen Startpunkt

$$\bar{A}^{[0]} = \left\{ \bar{A}_i^{[0]} ; i = 1(1)n \right\} \quad (5.11)$$

aus. Die betragsgrößte Spannung in den Querschnitten  $\bar{A}_i^{[0]}$  erhalten wir aus

$$\max |\sigma_i^{[0]}| = \frac{\max |M_i^{[0]}|}{\beta L^3 (\bar{A}_i^{[0]})^p} \quad (5.12)$$

Wenn keine Nebenbedingungen der Form (5.5) vorliegen, nimmt die Zielfunktion (5.4) im Minimum den Wert 0 an. In jedem Querschnitt wird dann gerade die zulässige Spannung erreicht:

$$\text{zul } \sigma = \max |\sigma_i^{[k]}| = \frac{\max |M_i^{[k]}|}{\beta L^3 (\bar{A}_i^{[k]})^p} \quad (5.13)$$

Bilden wir den Quotienten aus (5.12) und (5.13) und lösen nach  $\bar{A}_i^{[k]}$  auf, so erhalten wir eine Beziehung der Form

$$\bar{A}_i^{[k]} = \left( \frac{\max |M_i^{[k]}|}{\max |M_i^{[0]}|} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{\max \sigma_i^{[0]}}{\text{zul } \sigma} \right)^{\frac{1}{p}} \bar{A}_i^{[0]} \quad (5.14)$$

die es bei bekannten  $\max |M_i^{[k]}|$  erlauben würde, den optimalen Querschnitt in einem Suchschritt zu finden. Da wir aber die Größe von  $\max |M_i^{[k]}|$  nicht kennen, sind wir gezwungen, einen willkürlichen Wert zu wählen. Damit erhalten wir eine Rekursionsformel, die eine Näherungslösung liefert:

$$\bar{A}_i^{[j]} = c_i^{[j,j-1]} \left( \bar{\sigma}_i^{[j-1]} \right)^{\frac{1}{p}} \bar{A}_i^{[j-1]} \quad (5.15)$$

mit

$$\bar{\sigma}_i^{[j-1]} = \frac{\max |\bar{\sigma}_i^{[j-1]}|}{\text{zul } \sigma} \quad (5.16)$$

Die Güte der Näherung hängt nur noch von der Wahl des Wertes  $c_i^{[j,j-1]}$  ab. In den meisten Fällen wird eine befriedigende Konvergenzgeschwindigkeit erzielt, wenn wir  $c_i^{[j,j-1]} = 1$  setzen für alle  $i = 1(1)n$  und alle  $j = 1(1)k$ .

Die Suchrichtung wird durch die Beziehung

$$\text{sign} \left( \bar{\sigma}_i^{[j]} - 1 \right) \quad (5.17)$$

gegeben. Die Schrittweite ist dem Betrag

$$\left| \left( \bar{\sigma}_i^{[j]} - 1 \right)^{\frac{4}{p}} \right| \quad (5.18)$$

proportional. Wenn nur ein Querschnittswert je Zielfunktionsaufruf verändert wird, dann ist jeder Iterationsschritt erfolgreich. Wir wenden die Rekursionsformel (5.15) gleichzeitig auf alle Querschnittswerte an. Damit gehen wir das Risiko ein, nicht jeden Wert der Zielfunktion verbessern zu können, da jede einzelne Flächenänderung die Spannungen in allen Querschnitten beeinflusst. In den Fällen, in denen der Wert der Zielfunktion nicht verbessert wird, ändern wir die Iterationsvorschrift. Wir berechnen einen neuen Flächenwert aus den Informationen des vorangegangenen erfolglosen Schrittes gemäß der Gleichung

$$\bar{A}_i^{[j+1]} = \frac{\bar{A}_i^{[j]} (\bar{\sigma}_i^{[j-1]} - 1) - \bar{A}_i^{[j-1]} (\bar{\sigma}_i^{[j]} - 1)}{\bar{\sigma}_i^{[j-1]} - \bar{\sigma}_i^{[j]}} \quad , \quad (5.19)$$

wobei ein linearer Zusammenhang zwischen der Flächenänderung und der Spannungsänderung an der Stelle i angenommen wird. In Abb. 5.1 zeigen wir eine typische Folge von Iterationsschritten und die Skizze für die Herleitung von Gleichung 5.19.

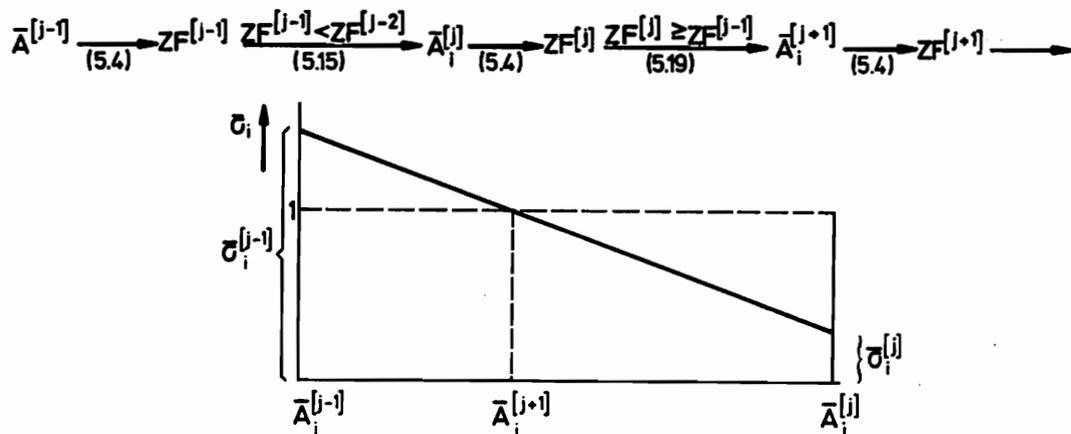


Abbildung 5.1

### 5.2.1. Konvergenzbeschleunigung

Die beschriebene Optimierungsstrategie hat den Nachteil, daß sie in der Schlußphase, nahe dem gesuchten Optimum sehr langsam konvergiert. Diesen Mißstand können wir beseitigen, wenn wir Informationen über die Topologie der Zielfunktion sammeln und diese im Sinne eines Modells der Zielfunktion interpretieren. Wir nehmen an, daß die Zielfunktion in der Umgebung des Minimums, definiert durch

$$0 \leq |\bar{\sigma}_i^{[j]} - 1| \leq \varepsilon \quad (5.20)$$

quadratisch verläuft. Das Minimum der Zielfunktion falle mit dem Scheitelpunkt der Parabel

$$|\bar{\sigma}_i - 1| = p_i (\bar{A}_i - z_i)^2 \quad (5.21)$$

zusammen. Wenn in der Umgebung des Minimums zwei Punkte  $P_1(\bar{A}_i^{[j-1]}, \bar{\sigma}_i^{[j-1]})$  und  $P_2(\bar{A}_i^{[j]}, \bar{\sigma}_i^{[j]})$  der Parabel bekannt sind, die entweder die Bedingung  $\bar{\sigma}_i^{[j-1]} < \bar{\sigma}_i^{[j]} < 1$  oder die Bedingung  $\bar{\sigma}_i^{[j-1]} > \bar{\sigma}_i^{[j]} > 1$  erfüllen, dann liegt der Scheitelpunkt der Parabel bei

$$\bar{A}_i^{[j+1]} = \frac{\sqrt{\frac{\bar{\sigma}_i^{[j-1]} - 1}{\bar{\sigma}_i^{[j]} - 1}} \bar{A}_i^{[j]} - \bar{A}_i^{[j-1]}}{\sqrt{\frac{\bar{\sigma}_i^{[j-1]} - 1}{\bar{\sigma}_i^{[j]} - 1}} - 1} \quad (5.22)$$

In den meisten Fällen ist dieser Schritt erfolgreich.

### 5.2.2. Nebenbedingungen

Führen die Iterationsschritte (5.15), (5.19) oder (5.22) zu Flächenwerten, die die Ungleichheitsnebenbedingungen der Form (5.5) verletzen, so werden statt dessen die Flächenwerte  $\min \bar{A}_i$  berücksichtigt. Das Verfahren konvergiert auch dann gut, wenn einzelne Flächenwerte festgehalten werden.

### 5.3.3. Abschaltkriterium

Als Abschaltkriterium wird die Differenz der Beträge zweier aufeinander folgender Spannungen benutzt

$$|\bar{\sigma}^{[j]} - \bar{\sigma}^{[j-1]}| < \varepsilon \quad (5.23)$$

von der wir fordern, daß sie unter einen vorgegebenen Grenzwert sinkt.

Zu welcher Endlösung die Strategie hinführt, hängt alleine von der Wahl des Startpunktes zu Beginn der Suche ab. Die einzige Möglichkeit, ein absolutes Minimum zu finden, besteht darin, hinreichend oft von verschiedenen Anfangswerten der Variablen auszugehen und jeweils so lange zu iterieren, bis das Abschaltkriterium erfüllt ist.

### 5.3. Der Stab minimalen Volumens

Wir beabsichtigen nicht, das Problem des Stabes mit minimalem Volumen umfassend zu lösen. Einfache Rekursionsformeln, die von einem beliebigen Startpunkt ausgehend schnell konvergieren, können nicht angegeben werden. Da die Vermutung naheliegt, daß der Stab gleicher Festigkeit auch minimales Volumen aufweist, wollen wir diesen Zusammenhang zunächst untersuchen.

#### 5.3.1. Optimalitätsbedingung

Wir wenden die Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingung [32] auf unser Optimierungsproblem mit nichtlinearen Ungleichheitsnebenbedingungen an. Dabei setzen wir voraus, daß stetige partielle Ableitungen für das Volumen  $V$  und die Spannungen  $\bar{\sigma}_i - 1$  in der Umgebung des Punktes  $\bar{A}^{[k]} = (\bar{A}_i^{[k]}, i = 1(1)n)$  existieren. Wenn  $\bar{A}^{[k]}$  das Volumen  $V$  zu einem Minimum macht, unter Einhaltung der Nebenbedingungen  $\bar{\sigma}_i - 1 \leq 0$ , die ihrerseits Bedingungen genügen, dann existieren nichtnegative Lagrangesche Multiplikatoren  $\lambda_i, i = 1(1)n$  so, daß gilt:

$$\underline{\nabla V(\bar{A}^{[k]})} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{\nabla \{ \bar{G}_i(\bar{A}^{[k]}) \}}, \quad (5.24)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \{ \bar{G}_i(\bar{A}^{[k]}) - 1 \} = 0, \quad (5.25)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1(1)n, \quad (5.26)$$

Die Bedingung 5.25 ist für beliebige  $\lambda_i$  erfüllt, da im Punkt  $\bar{A}^{[k]}$  alle Nebenbedingungen aktiv sind. Mit  $\nabla V$  bezeichnen wir den Gradientenvektor der Zielfunktion 5.7

$$\underline{\nabla V} = \sum_{i=1}^n l_i \underline{e}_i \quad (5.27)$$

wobei  $\underline{e}_i$  Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen  $\bar{A}_i$  sind. Die Gradientenvektoren schreiben wir in der Form

$$\underline{\nabla \bar{G}_i^{[k]}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{G}_i^{[k]}}{\partial \bar{A}_j^{[k]}} \underline{e}_j \quad (5.28)$$

Das Kuhn-Tucker-Theorem setzt voraus, daß die Gradientenvektoren linear unabhängig voneinander sind.

Die partiellen Ableitungen können mittels Tastschritten aus Differenzenquotienten approximiert werden:

$$\frac{\partial \bar{G}_i^{[k]}}{\partial \bar{A}_j^{[k]}} = \frac{\bar{G}_i(\bar{A}^{[k]} + \delta \bar{A}_j^{[k]}) - \bar{G}_i(\bar{A}^{[k]})}{\delta \bar{A}_j^{[k]}} + O(\delta^2) \quad (5.29)$$

Zur Wahl geeigneter Zuwächse  $\delta \bar{A}_j^{[k]}$  ist zu berücksichtigen, daß bei zu kleinen  $\delta \bar{A}_j^{[k]}$  die Subtraktionen zu Rundungsfehlern, bei zu großen Tastschritten die Vernachlässigung des Gliedes  $O(\delta^2)$  zu unkorrekten Werten führt.

Die Lagrangeschen Multiplikatoren erhalten wir als Lösungen des Gleichungssystems

$$\left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{A}} \right)^T \underline{\lambda} = \underline{l} \quad (5.30)$$

Werden alle  $\lambda_i$  nichtnegativ, so entspricht die optimale Lösung des Stabes gleicher Festigkeit einem Stab minimalen Volumens. Wie bei den Suchmethoden üblich, kann keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich dabei um ein relatives oder ein absolutes Minimum handelt.

Die Optimalitätsbedingung ist zunächst nur eine notwendige Bedingung für ein Minimum. Hinreichend ist sie unter der Voraussetzung, daß die Zielfunktion und das zulässige Gebiet konvex, die Nebenbedingungen also konkav sind.

Die von Kuhn-Tucker benutzten Optimalitätsbedingungen lauten geometrisch gedeutet: Die Menge der nichtnegativen Kombinationen der  $-\nabla \bar{b}_i$  bilden einen Kegel, der in Abbildung 5.2 schraffiert dargestellt wird.

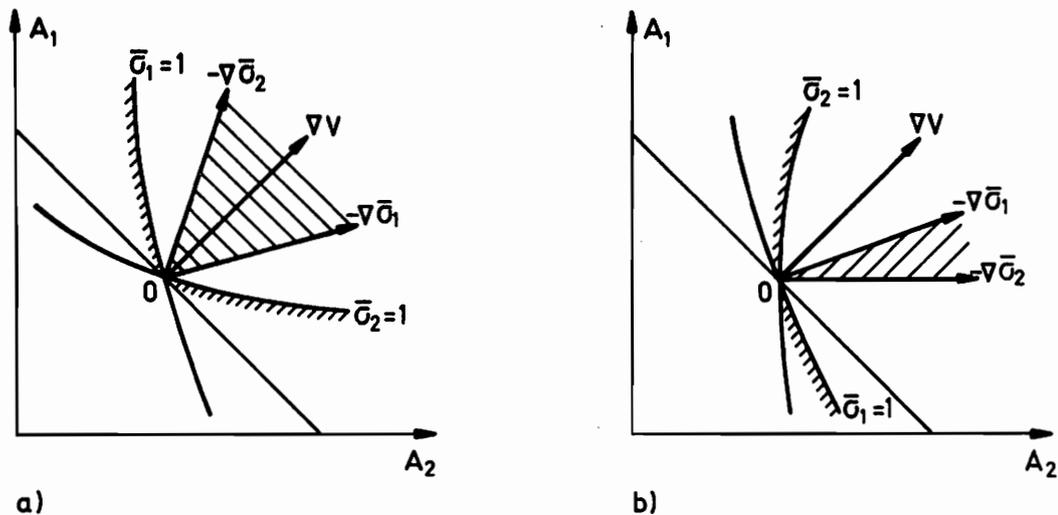


Abbildung 5.2

Im Minimum liegt der Gradientenvektor der Zielfunktion innerhalb des Kegels, der aus den Gradienten der aktiven Restriktionen im Punkt 0 gebildet wird. Falls dies nicht der Fall ist (vgl. Abb. 5.2 b), müssen wir davon abgehen, alle Nebenbedingungen identisch zu erfüllen.

### 5.3.2. Suchalgorithmus für minimales Volumen

Ausgehend von den Entwurfsvariablen  $\bar{A}_i^{[k]}$ , den dazugehörigen Spannungen  $\bar{\sigma}_i^{[k]}$  und Spannungsgradienten  $\frac{\partial \bar{\sigma}_i^{[k]}}{\partial \bar{A}_j}$  bestimmen wir einen neuen Satz von Entwurfsvariablen  $\bar{A}^{[k+1]} = \bar{A}^{[k]} + \delta \bar{A}^{[k]}$ . Von dem Zuwachs  $\delta \bar{A}^{[k]}$  fordern wir, daß er die Bedingung

$$\bar{\sigma}_i^{[k+1]} \approx \bar{\sigma}_i^{[k]} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\sigma}_i^{[k]}}{\partial \bar{A}_j^{[k]}} \delta \bar{A}_j^{[k]} \leq \text{zul } \bar{\sigma} \quad (3.31)$$

erfüllt. Wir linearisieren die nichtlinearen Spannungsnebenbedingungen in einer durch  $|\delta \bar{A}_j^{[k]}| \leq \epsilon_j$  festgelegten Umgebung, was für genügend kleine  $\epsilon_j$  zulässig ist. Dann können wir das folgende lineare Optimierungsproblem formulieren:

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{j=1}^n \delta \bar{A}_j^{[k]} \quad (3.32)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\sigma}_i^{[k]}}{\partial \bar{A}_j^{[k]}} \delta \bar{A}_j^{[k]} \leq 1 - \bar{\sigma}^{[k]} \quad (3.31a)$$

wobei die  $\delta \bar{A}_j^{[k]}$  beschränkt sind:

$$|\delta \bar{A}_j^{[k]}| \leq \epsilon_j \quad (3.33)$$

Mit einem Programm, das die duale Simplexmethode nach C.W. Lemke [33] benutzt, können wir die  $\delta \bar{A}_j^{[k]}$  bestimmen. Die Spannung  $\bar{\sigma}_i^{[k+1]}$  wird umso besser approximiert, je kleiner die Werte  $\varepsilon_j$  sind. Auf der anderen Seite kann die Konvergenzgeschwindigkeit bei größerem  $\varepsilon_j$  besser sein. Wir steuern die Werte  $\varepsilon_j$  so, daß die maximale Differenz zweier aufeinanderfolgender Spannungen

$$\bar{\sigma}_i^{[k+1]} - \bar{\sigma}_i^{[k]} < 0,05 \quad (5.34)$$

nicht überschritten wird.

Das Verfahren konvergiert gut. Es hat den Nachteil, daß je Iterationsschritt die Zielfunktion  $(n+1)$ -mal für die Bestimmung der Gradienten ausgewertet werden muß. Die Differenz zweier aufeinander folgender Zielfunktionswerte

$$|V^{[k+1]} - V^{[k]}| \leq \varepsilon \quad (5.35)$$

nutzen wir als Abschaltkriterium für die Suche nach dem minimalen Volumen.

## 6. Rechenergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse der Numerik dar. Mit Hilfe eines Rechenprogrammes kann das Stabvolumen, der Querschnittsverlauf sowie die örtliche und zeitliche Spannungsverteilung in Abhängigkeit von

- den Auflagerbedingungen und
- der Belastung

bestimmt werden. Wegen der Vielzahl der Möglichkeiten beschränken wir uns auf einige Beispiele.

### 6.1. Vergleich der Stabmodelle

Zunächst untersuchen wir die unterschiedlichen Systemantworten der beiden Stabmodelle nach der Timoshenko-Theorie und der elementaren Theorie. In einem Beispiel betrachten wir den in Abb. 6.1 dargestellten eingespannten Stab, der an seinem freien Ende plötzlich entlastet wird.

Die kontinuierliche Massenverteilung wird durch elf Einzelmassen diskretisiert. Die Biegespannungen ermitteln wir mit der Methode der Matrizenfunktionen. Optimierungsziel ist der Stab gleicher Festigkeit. Unter Verwendung des Timoshenko-Modells erhalten wir den als durchgezogene Linie dargestellten Querschnittsverlauf. Wegen der geringen Abweichung haben wir den Querschnittsverlauf gemäß der elementaren Theorie durch Kreise angedeutet. Für den Stab nach der elementaren Theorie ergibt sich ein geringfügig größeres Volumen. In Abb. 6.2 geben wir die Spannungsverläufe wieder, die sich in dem durchgezogenen Stab aus Abb. 6.1 an der Stelle  $x/L = 0,1$  ausbilden, wenn man

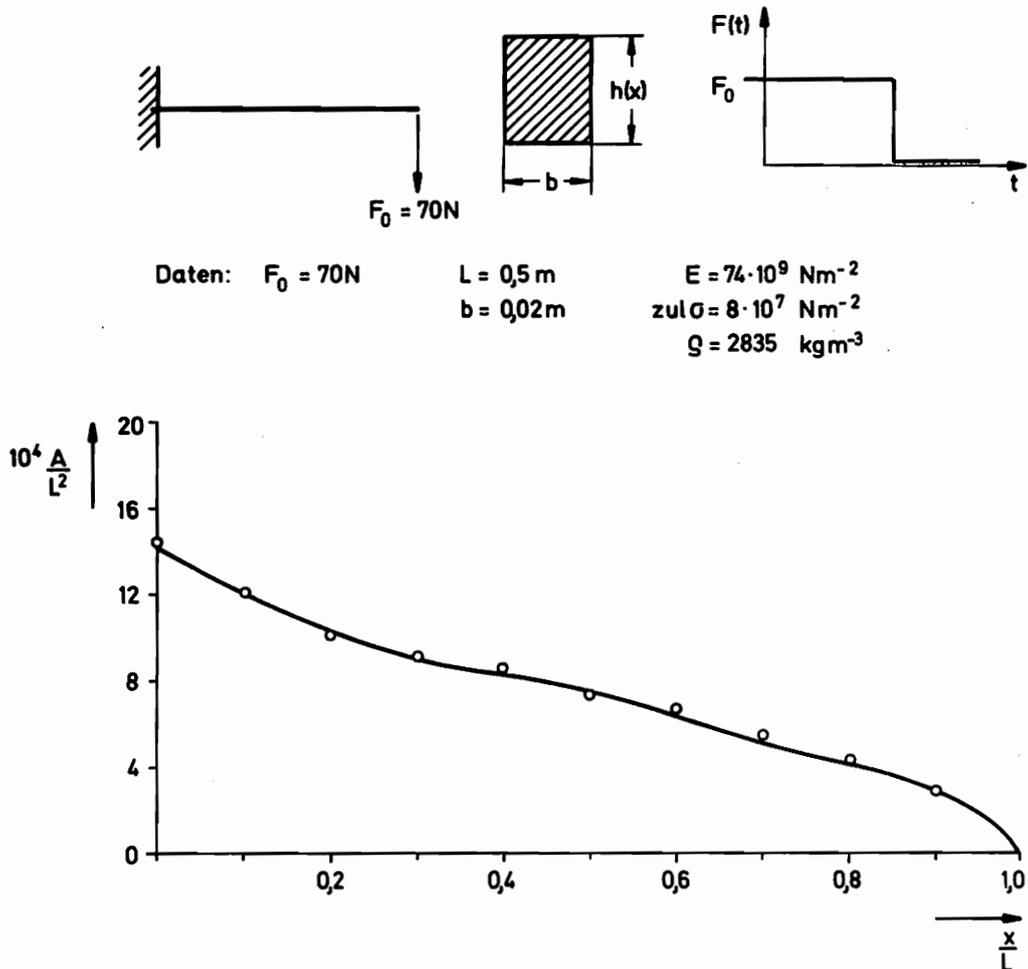


Abbildung 6.1

- das Timoshenko-Modell oder
- das Modell der elementaren Theorie

zugrunde legt.

Der Spannungsverlauf nach dem Timoshenko-Modell weist höherfrequente Anteile auf, da bei ihm doppelt so viele Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Die für die Bemessung maßgeblichen Spannungsmaxima werden

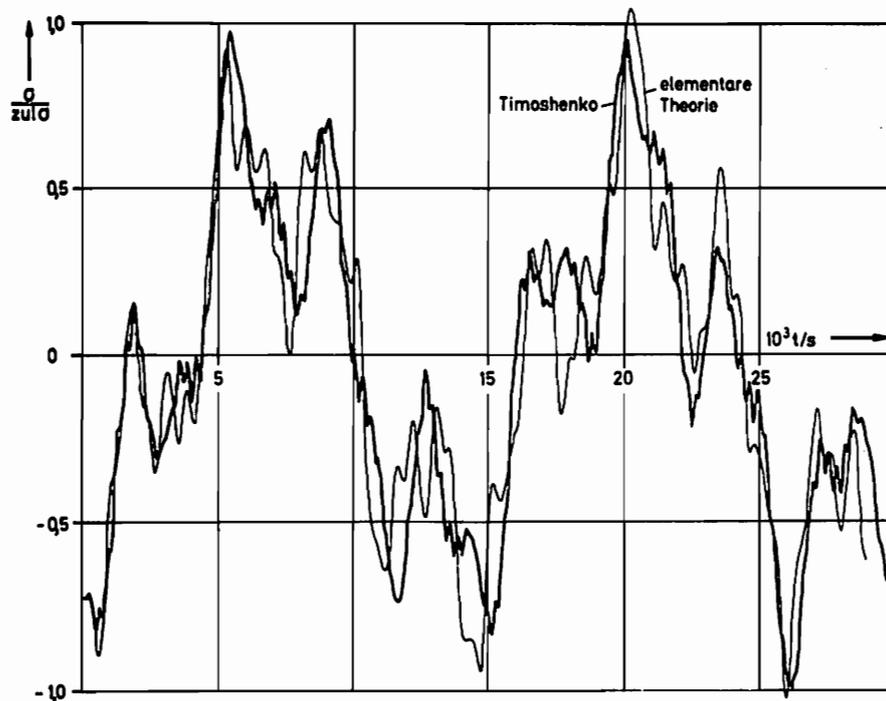


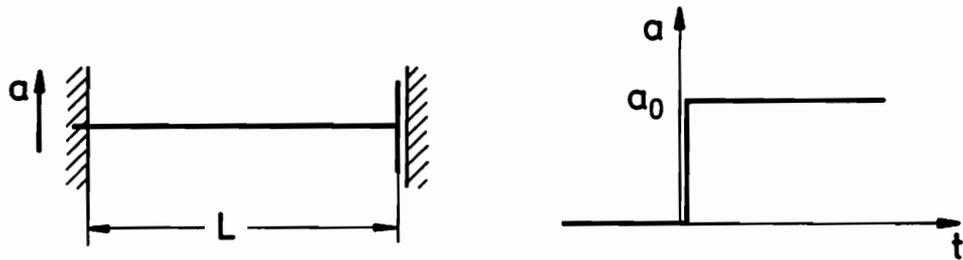
Abbildung 6.2

von diesen hohen Frequenzen bei der hier vorliegenden Erregungsform nur wenig beeinflusst. Wir legen deshalb den folgenden Beispielen das Stabmodell der elementaren Theorie zugrunde.

### 6.2. Stäbe mit bereichsweise konstanten Querschnitten

Auch wenn wir den Stab aus zwei Abschnitten mit jeweils konstanten Querschnittsabmessungen zusammensetzen, kann eine große Volumensparnis erzielt werden.

Wir betrachten den in seinen Auflagern beschleunigten Stab gemäß Abb. 6.3. Der Stab wird so bemessen, daß in jedem konstanten Querschnittsbereich die zulässige Spannung mindestens einmal gerade erreicht wird. In Abb. 6.4 geben wir den Querschnittsverlauf und das Volumen des Stabes mit einem Querschnittsprung in Abhängigkeit vom Ort des Sprunges



$$\begin{array}{lll}
 L = 1\text{m} & \text{zul } \sigma = 5,2 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2} & \rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3} \\
 b = 0,03\text{m} & E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2} & a_0 = 1000 \text{ m s}^{-2}
 \end{array}$$

Abbildung 6.3

wieder. In der Nähe des Querschnittssprunges werden die Flächenverläufe durch Schraffur kenntlich gemacht. Der Stab mit einem Querschnittssprung an der Stelle  $x/L = 0,45$  hat das geringste Volumen. Die Volumeneinsparung gegenüber dem Stab mit konstantem Querschnitt beträgt 51,4 %. Die Forderung, daß die zulässige Spannung in jedem Querschnittsbereich mindestens einmal erreicht wird, führt bei Querschnittssprüngen im Bereich  $0,8 < x/L < 1$  zu nicht volumenoptimalen Lösungen. Abbildung 6.4 zeigt, daß in diesem Bereich der Stab mit konstanter Querschnittsfläche ein kleineres Volumen aufweist.

Mit zunehmender Zahl der Querschnittssprünge wird das Stabvolumen zwar kleiner, die Volumeneinsparung wird jedoch geringer bis sich ein charakteristischer Querschnittsflächenverlauf abhebt (Abb. 6.5).

Entsprechend strebt das Stabvolumen einem Grenzwert zu. In Abb. 6.6 wird das Stabvolumen über der Zahl der Querschnittssprünge aufgetragen. Die größte Volumensparnis von 77,6 % gegenüber dem Stab konstanten Querschnitts erhalten wir für einen Stab

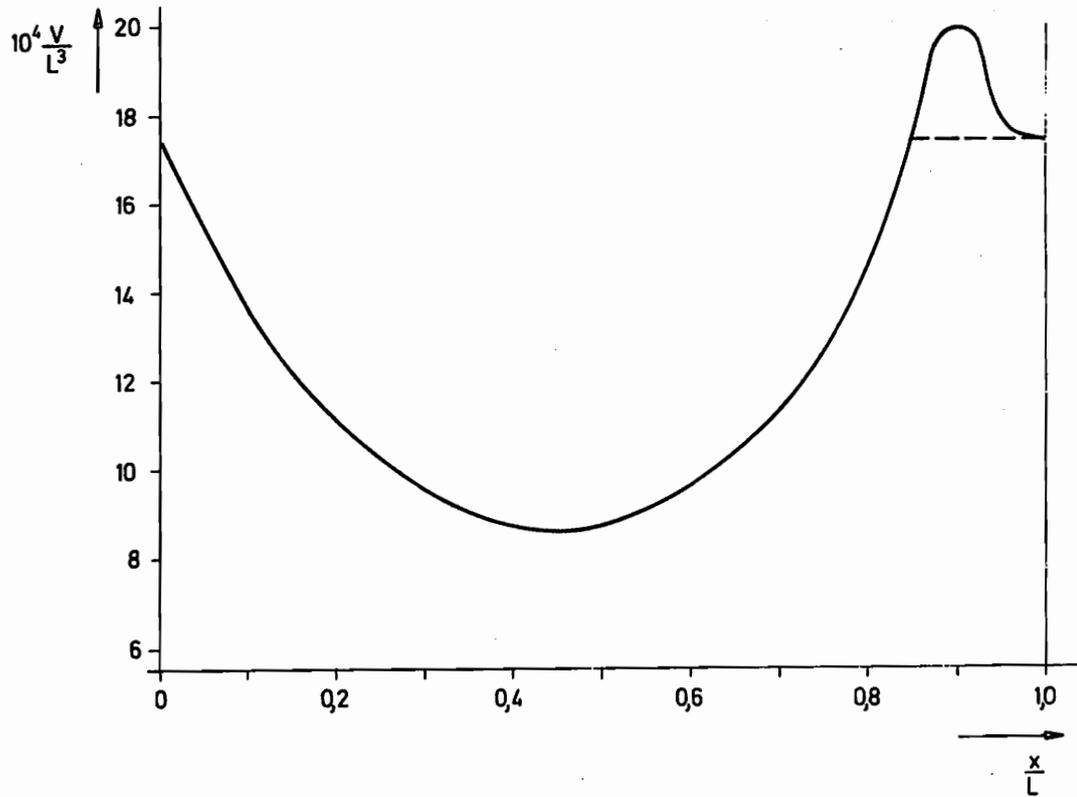
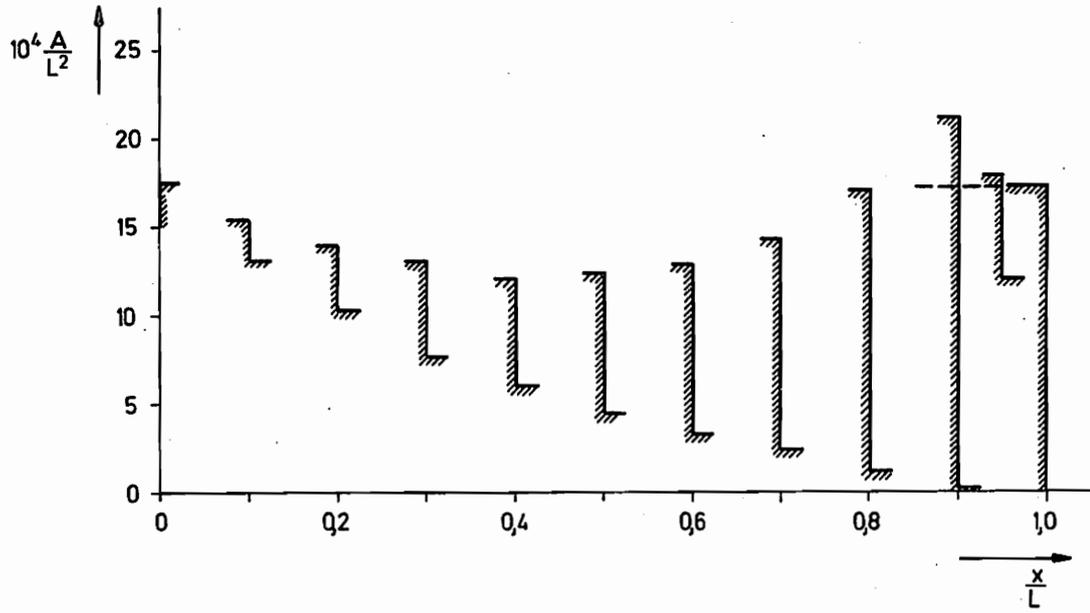


Abbildung 6.4

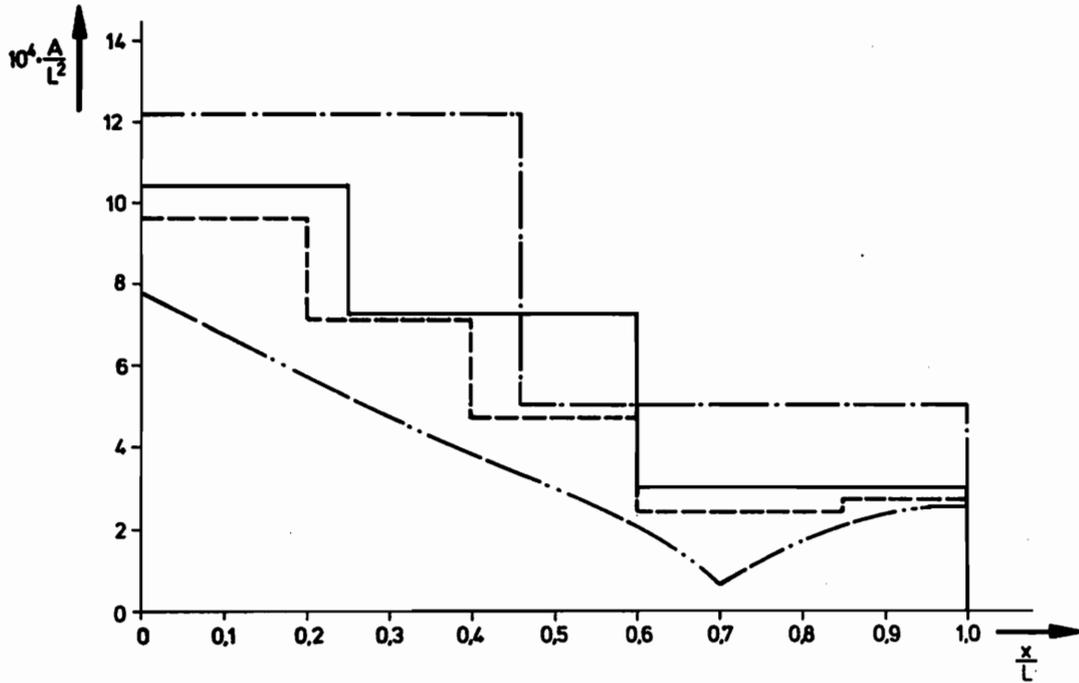


Abbildung 6.5

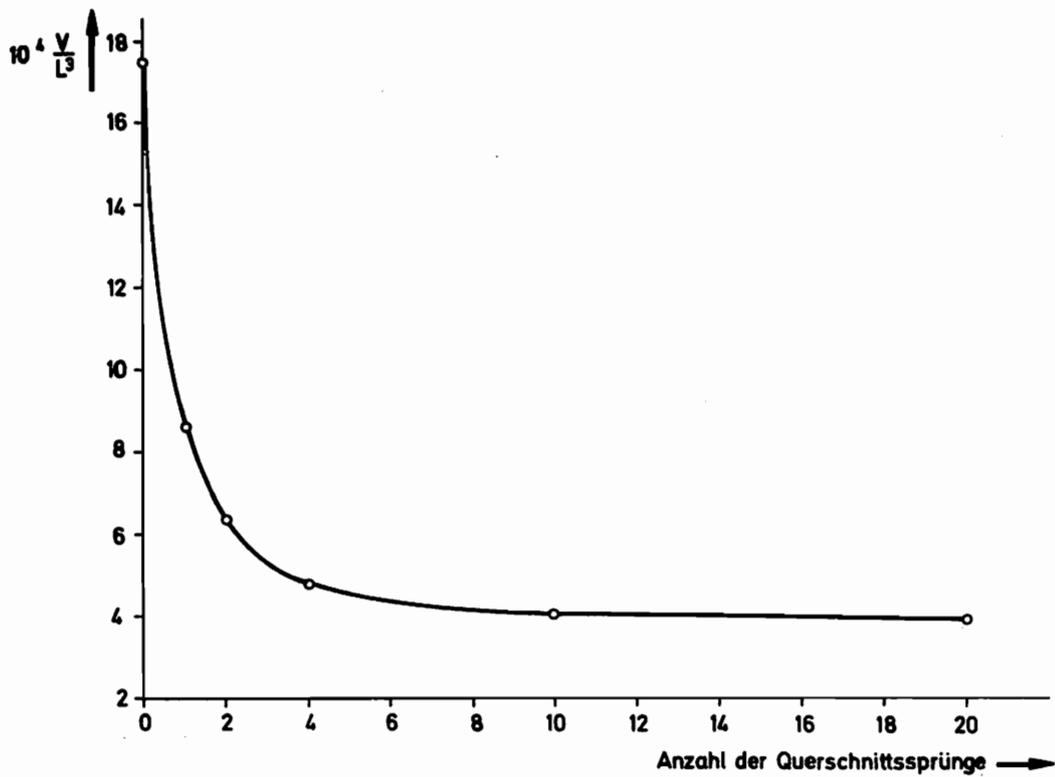


Abbildung 6.6

mit 40 Querschnittssprüngen. Das Volumen des Stabes mit 40 Querschnittssprüngen unterscheidet sich um weniger als 1 % von dem mit 20 Sprüngen und um ca. 3 % von dem mit 10 Querschnittssprüngen. Wir können deshalb davon ausgehen, daß wir bei Berücksichtigung von nur 11 Stabelementen eine gute Näherung für den Stab mit minimalem Volumen erhalten, sofern für den Stab gleicher Festigkeit die Volumenoptimalitätsbedingung erfüllt ist, was noch zu überprüfen ist.

### 6.3. Örtlicher Spannungsverlauf

In Abb. 6.7 geben wir den momentanen Spannungsverlauf in einem Stab wieder, der in 41 Querschnitten auf gleiche Festigkeit bemessen wurde, und dessen Auflager- und Erregungsbedingungen wir in Abb. 6.3 beschrieben haben. Die Momentaufnahme zeigt den Spannungsverlauf längs der x-Achse zum Zeitpunkt  $t = 0,0158$  s. Die Spannung ändert ihren Nulldurchgang, da alle Eigenformen zu Schwingungen angeregt werden. Dies hat zur Folge, daß die Querschnittsfläche an keiner Stelle längs der x-Achse verschwindet.

### 6.4. Optimale Querschnittsverläufe

Die im folgenden dargestellten Querschnittsverläufe wurden unter Verwendung eines Stabmodells nach der elementaren Theorie berechnet. Die kontinuierliche Massenverteilung wird dabei durch 11 Einzelmassen diskretisiert. Wir suchen die Querschnittsverläufe für den Stab gleicher Festigkeit und den Stab minimalen Volumens.

Der in Abb. 6.8 wiedergegebene beidseitig eingespannte, in seinen Auflagern beschleunigte Stab zeichnet sich dadurch aus, daß es

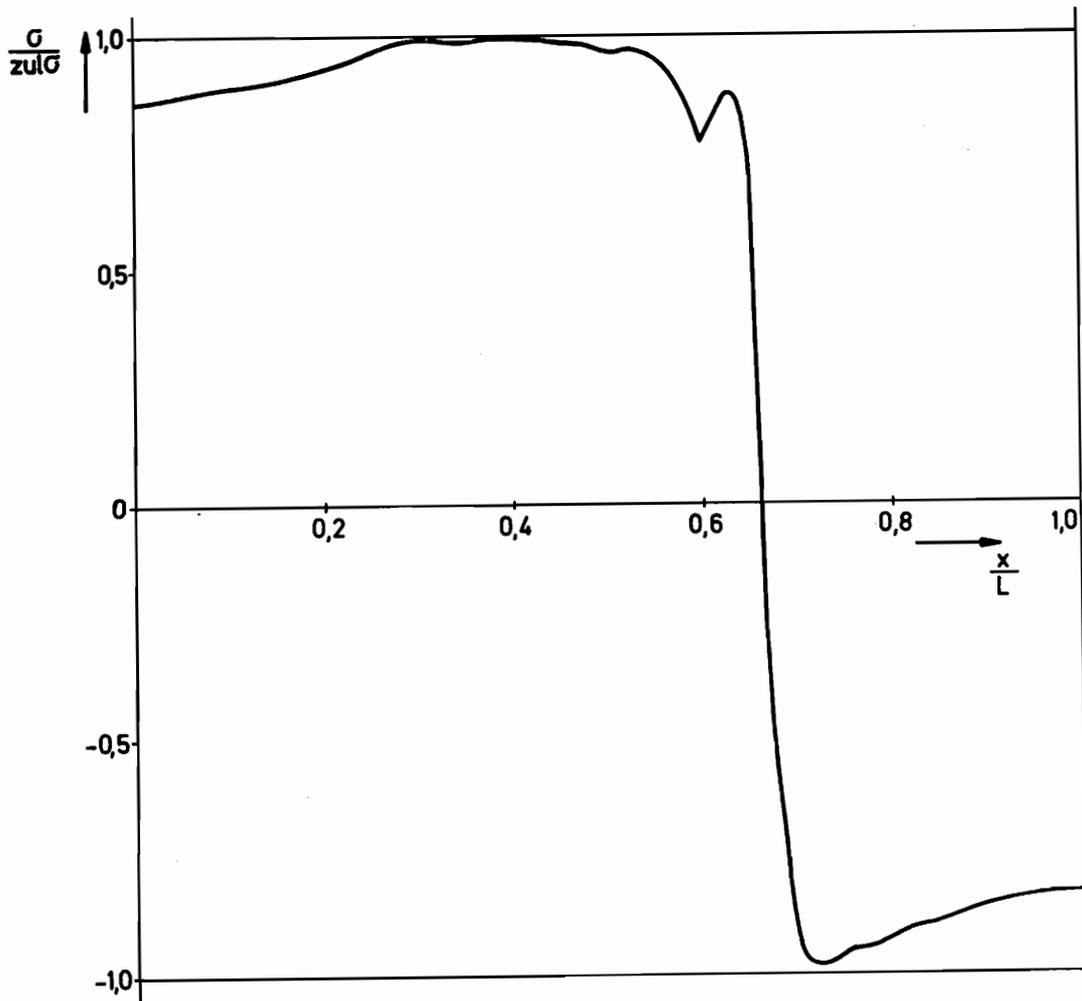


Abbildung 6.7

für ihn zwei Querschnittsverläufe gibt, die die Bedingung gleicher Festigkeit erfüllen. Die beiden Querschnittsformen finden wir mit dem Suchalgorithmus für gleiche Festigkeit nur, wenn wir von verschiedenen O.Näherungen ausgehen. Wählen wir beispielsweise die in Abb. 6.8 mit a) und b) bezeichneten O.Näherungen als Startpunkte, so liefert der Algorithmus die entsprechenden Querschnittsformen a und b. Zu welchem Minimum die Suchstrategie hinführt,

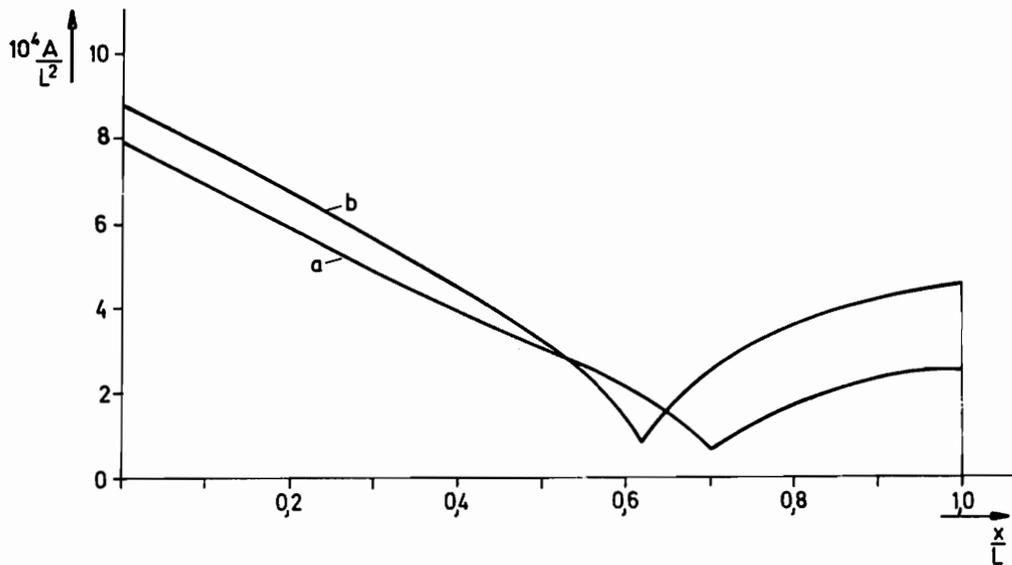
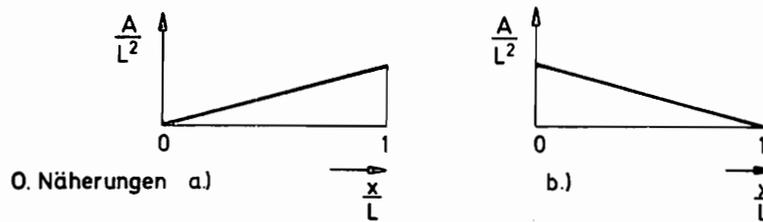
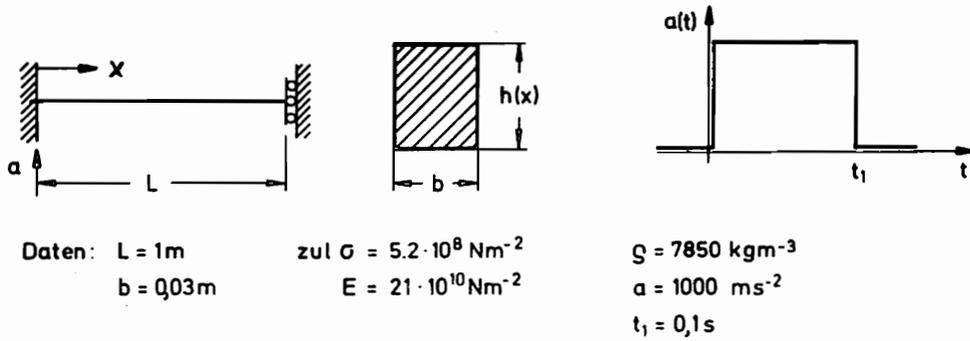


Abbildung 6.8

hängt alleine von der Wahl des Startpunktes  $\bar{A}^{[0]}$  ab. Der mit b bezeichnete Querschnittsverlauf erfüllt die Optimalitätsbedingung von Kuhn-Tucker für minimales Volumen nicht. Ausgehend von der Querschnittsform b findet der Suchalgorithmus für minimales

Volumen in 12 Tastschritten die Querschnittsform a, die dann auch der Optimalitätsbedingung für minimales Volumen genügt.

Der einseitig eingespannte, an seinem freien Ende plötzlich entlastete Stab besitzt Querschnittsverläufe, wie sie in Abb. 6.9 wiedergegeben sind.

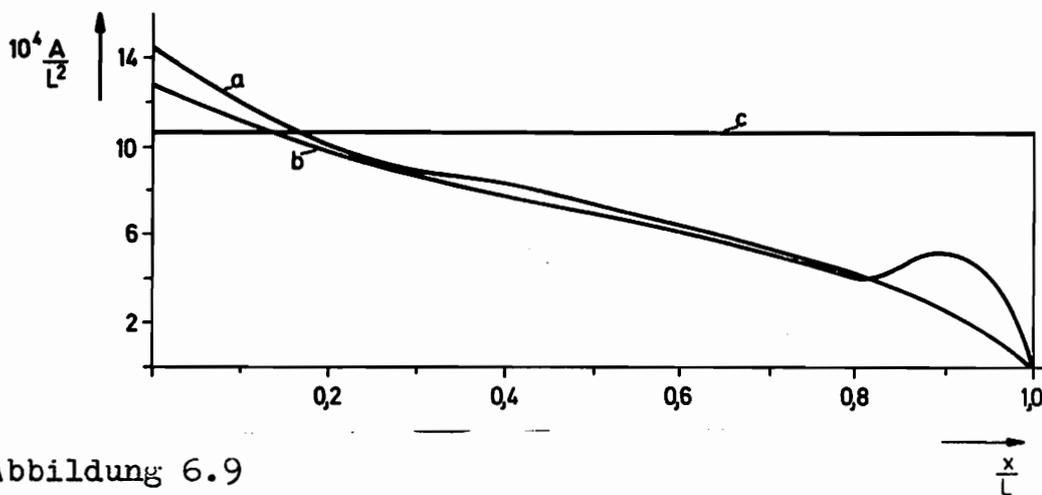
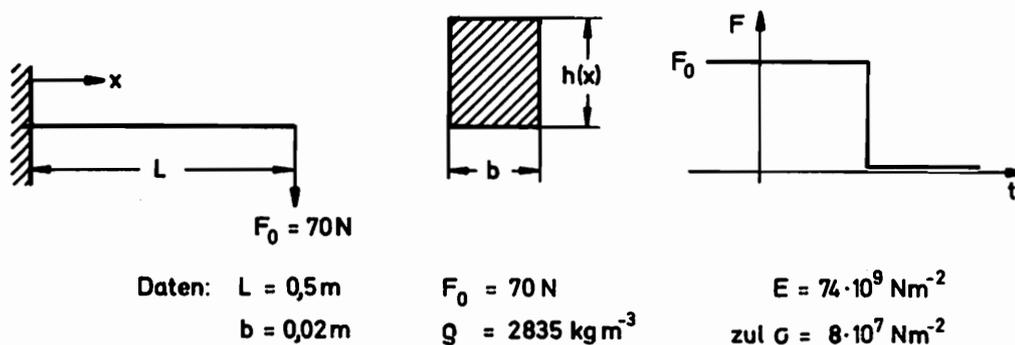
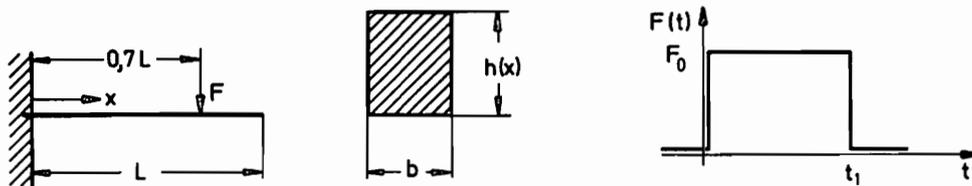


Abbildung 6.9

Der Stab gleicher Festigkeit a genügt auch der Optimalitätsbedingung für minimales Volumen. In der Umgebung dieser Lösung gibt es jedoch eine weitere Lösung, die ein geringeres Volumen aufweist. Den Querschnittsverlauf b findet der Suchalgorithmus für minimales Volumen, nachdem der Querschnittsverlauf a an der Stelle  $x/L = 0,9$  vergrößert worden ist. Der Stab b weist ein geringeres Volumen auf, obwohl bei

ihm die zulässige Spannung nicht an jeder Stelle erreicht wird. Dies ist auf die Massenanhäufung an seinem freien Ende zurückzuführen, durch die die Schwingungsperiode  $T_1$  vergrößert wird, was gemäß Abb. 4.1 eine Verkleinerung der maximalen Spannung zur Folge haben kann. Bei der Querschnittsform a handelt es sich demnach um ein relatives Minimum in Bezug auf den Stab minimalen Volumens. Bei dem in Abb. 6.10 dargestellten Stab erfüllt der Querschnittsverlauf a des Stabes gleicher Festigkeit die Optimalitätsbedingung des Kuhn-Tucker-Theorems nicht.



Daten:  $L = 0,5\text{m}$   
 $b = 0,02\text{m}$

$F_0 = 70\text{ N}$   
 $t_1 = 0,02\text{ s}$

$E = 74 \cdot 10^9\text{ Nm}^{-2}$   
 $\text{zul } \sigma = 8 \cdot 10^7\text{ Nm}^{-2}$   
 $\rho = 2835\text{ kg m}^{-3}$

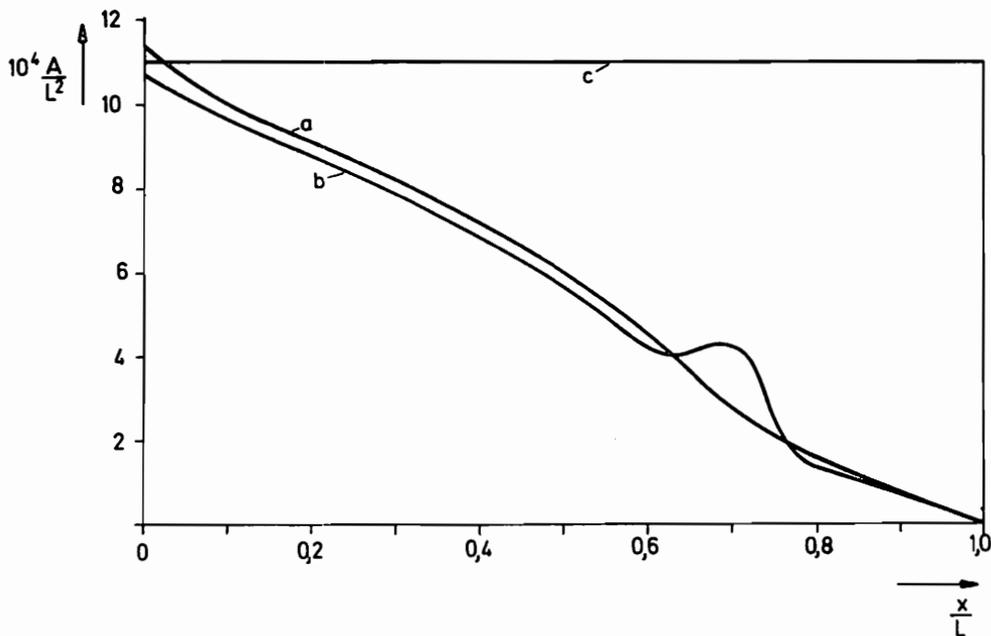


Abbildung 6.10

Ausgehend von der Lösung a findet der Suchalgorithmus für minimales Volumen den Querschnittsverlauf b, der ein um 3.5 % geringeres Volumen aufweist. Offensichtlich führt eine Massenanhäufung an der Stelle des Kraftangriffs dazu, daß der Stab weniger elastische Formänderungsenergie speichert. Die Volumensparnis gegenüber dem Stab konstanten Querschnittes c beträgt hierbei 49 %.

Beim Stab in Abb. 6.11 stimmt der Querschnittsverlauf a für den Stab gleicher Festigkeit mit dem für den Stab minimalen Volumens überein.

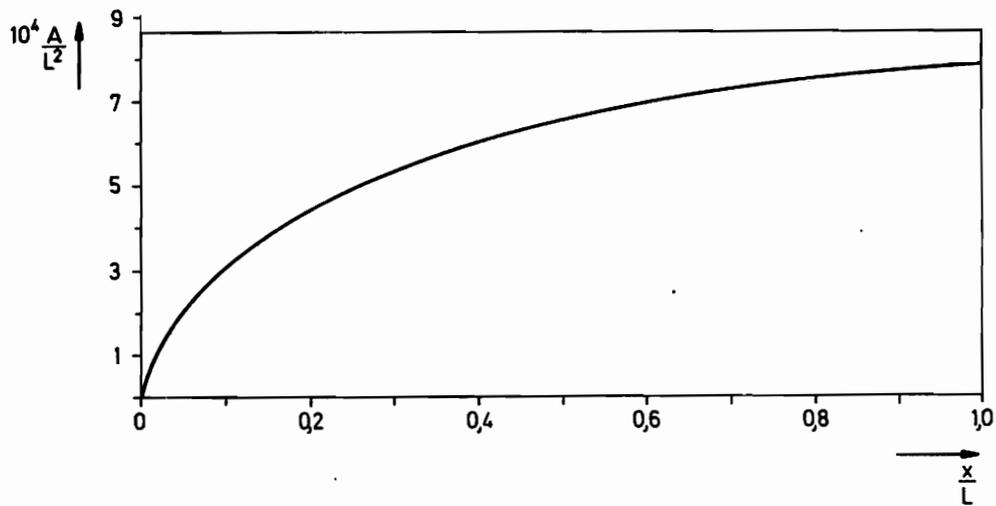
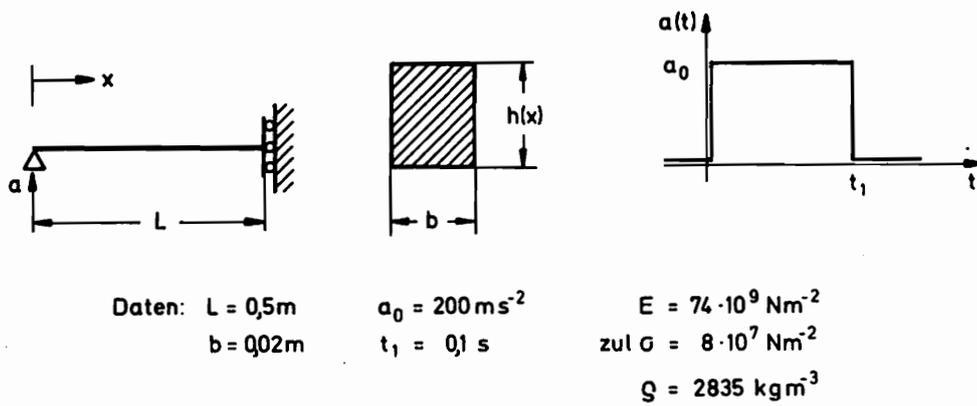
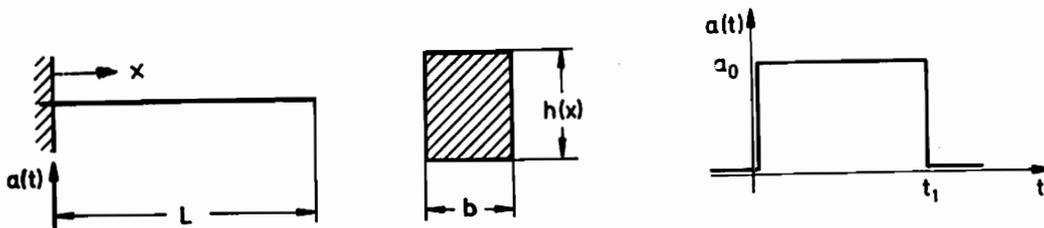


Abbildung 6.11

Es kann auch in der Umgebung kein Stab mit geringerem Volumen gefunden werden. Die Volumenersparnis gegenüber dem Stab mit konstantem Querschnitt  $b$  beträgt 31,6 %.

Für den einseitig eingespannten, in seinem Auflager beschleunigten Stab von Abb. 6.12 ist der Stab gleicher Festigkeit ebenfalls volumenoptimal. Der Querschnitt  $a$  weist ein um 87 % geringeres Volumen auf als der Stab mit konstantem Querschnitt.



Daten:  $L = 0,5\text{m}$        $a_0 = 500\text{ms}^{-2}$        $E = 74 \cdot 10^9\text{Nm}^{-2}$   
 $b = 0,02\text{m}$        $t_1 = 0,05\text{s}$        $\text{zul } \sigma = 8 \cdot 10^7\text{Nm}^{-2}$   
 $\rho = 2835\text{kgm}^{-3}$

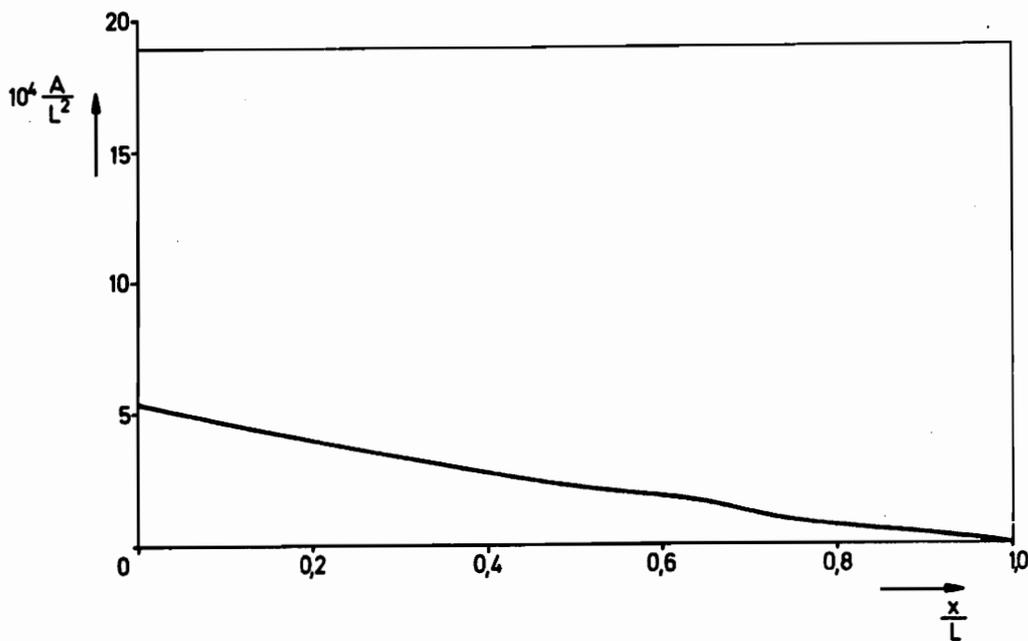
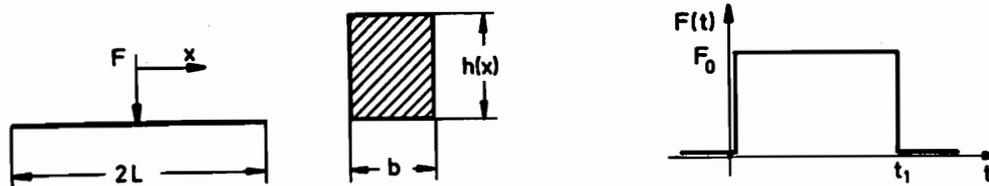


Abbildung 6.12

Der in der Mitte durch eine Einzelkraft beanspruchte freie Stab von Abb. 6.13 hat ein minimales Volumen, das um ca. 1 % kleiner ist als das Volumen des Stabes gleicher Festigkeit. Der Unterschied in den Querschnittsflächenverläufen ist so gering, daß er innerhalb der Zeichengenauigkeit liegt. Die Volumendifferenz gegenüber dem Stab konstanter Querschnittsfläche macht 61,7 % aus.



Daten:  $L = 0,5\text{m}$   
 $b = 0,02\text{m}$

$F_0 = 40\text{N}$   
 $t_1 = 0,05\text{s}$

$E = 74 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$   
zul  $\sigma = 8 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$   
 $\rho = 2835 \text{ kgm}^{-3}$

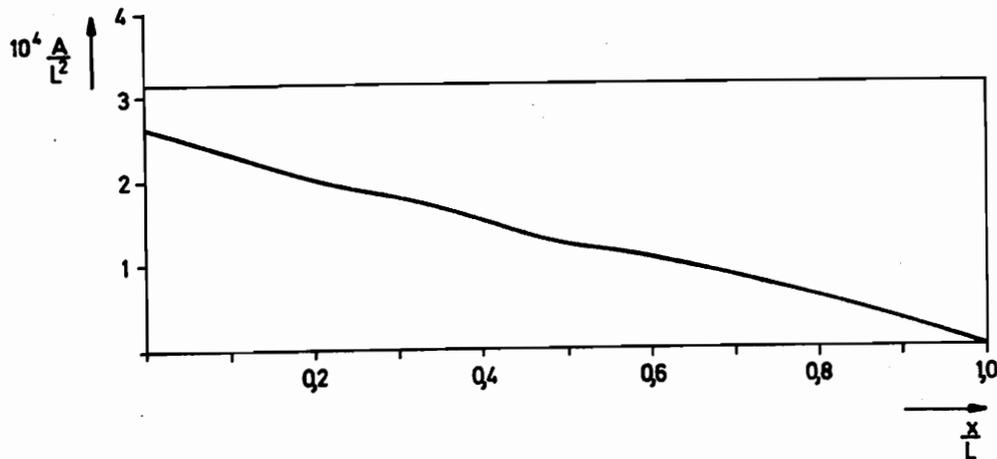


Abbildung 6.13

Der Stab gleicher Festigkeit stimmt im allgemeinen dann nicht mit dem Stab minimalen Volumens überein, wenn an ihm eine Einzelkraft angreift. Der Volumenunterschied zwischen den beiden Lösungen ist so gering, daß wir den Stab gleicher Festigkeit als gute Näherung für den Stab minimalen Volumens betrachten können.

### 6.5. Näherungslösungen

Die Spitzenwerte der Schnittmomente wurden bisher bei der Beobachtung des Momentenverlaufes über einen längeren Zeitraum - der Zeitlösung - gefunden. Dieses Vorgehen ist rechenintensiv. In vielen Fällen reicht es aus, eine obere Schranke für die Spitzenwerte zu bestimmen.

Dazu ziehen wir die Amplituden der einzelnen Schwingungsformen heran. Ihre unterschiedliche Phasenlage lassen wir unberücksichtigt.

In einem Beispiel betrachten wir den links eingespannten Stab, der an seinem freien Ende plötzlich entlastet wird. Mit Hilfe des Verfahrens der Modalen Analyse können wir die Zeitlösung für den Schnittmomentenverlauf angeben:

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{m} \underline{\phi} \text{diag} [\cos \omega_i t] \underline{\phi}^T \underline{A} \underline{s}(t=0) \quad (6.1)$$

Wir haben dabei berücksichtigt, daß sich der Stab anfangs in Ruhe befindet und während der Schwingung keine Erregung wirkt.

Der Vektor der Entwicklungskoeffizienten  $c_i$  lautet:

$$\underline{c} = \underline{\phi}^T \underline{A} \underline{s}(t=0) \quad (6.2)$$

Die quadratische Modalmatrix  $\underline{\phi}$  enthält die Eigenformen  $\underline{\phi}_i$ . Unter der Voraussetzung, daß der schwingende Stab ungedämpft ist, ergibt sich eine obere Schranke für die maximalen Schnittmomente aus der Amplitudensumme der Schwingungsformen:

$$\max \tilde{S}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left| \phi_{ik} c_i \right| \quad (6.3)$$

Eine zweite Abschätzungsformel, die bei der Bemessung von Konstruktionen gegen Erregung durch Erdbeben häufig Verwendung findet [34], lautet:

$$\max \tilde{\tilde{S}}_k = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\phi_{ik} c_i)^2} \quad (6.4)$$

Die Anwendung dieser Näherungsformeln 6.3 und 6.4 auf unser Beispiel führt für den Stab gleicher Festigkeit zu den in Abb. 6.14 dargestellten Verläufen der Querschnittsfläche. Es zeigt sich, daß diese Näherungen durchaus brauchbar sind und obere bzw. untere Schranken für den aus der Zeitlösung bestimmten Stab darstellen. Allerdings ergeben sich bei der zweiten Näherung Spannungsüberschreitungen. Bei Verwendung der Näherungsformeln wird nur etwa ein Zehntel der Rechenzeit gegenüber der Zeitlösung benötigt. Es sei allerdings betont, daß alle diese Angaben an diesem Beispiel gewonnen wurden.

#### 6.6. Bemerkungen zum Problem des globalen Minimums

Bei den Ausführungen der vorherigen Abschnitte dürfte deutlich geworden sein, daß von den ermittelten Optimal-Lösungen mit Sicherheit nur behauptet werden kann, daß sie relative Minima des Stabvolumens darstellen. Tatsächlich wären wir natürlich am globalen Optimum interessiert. Es ist eine

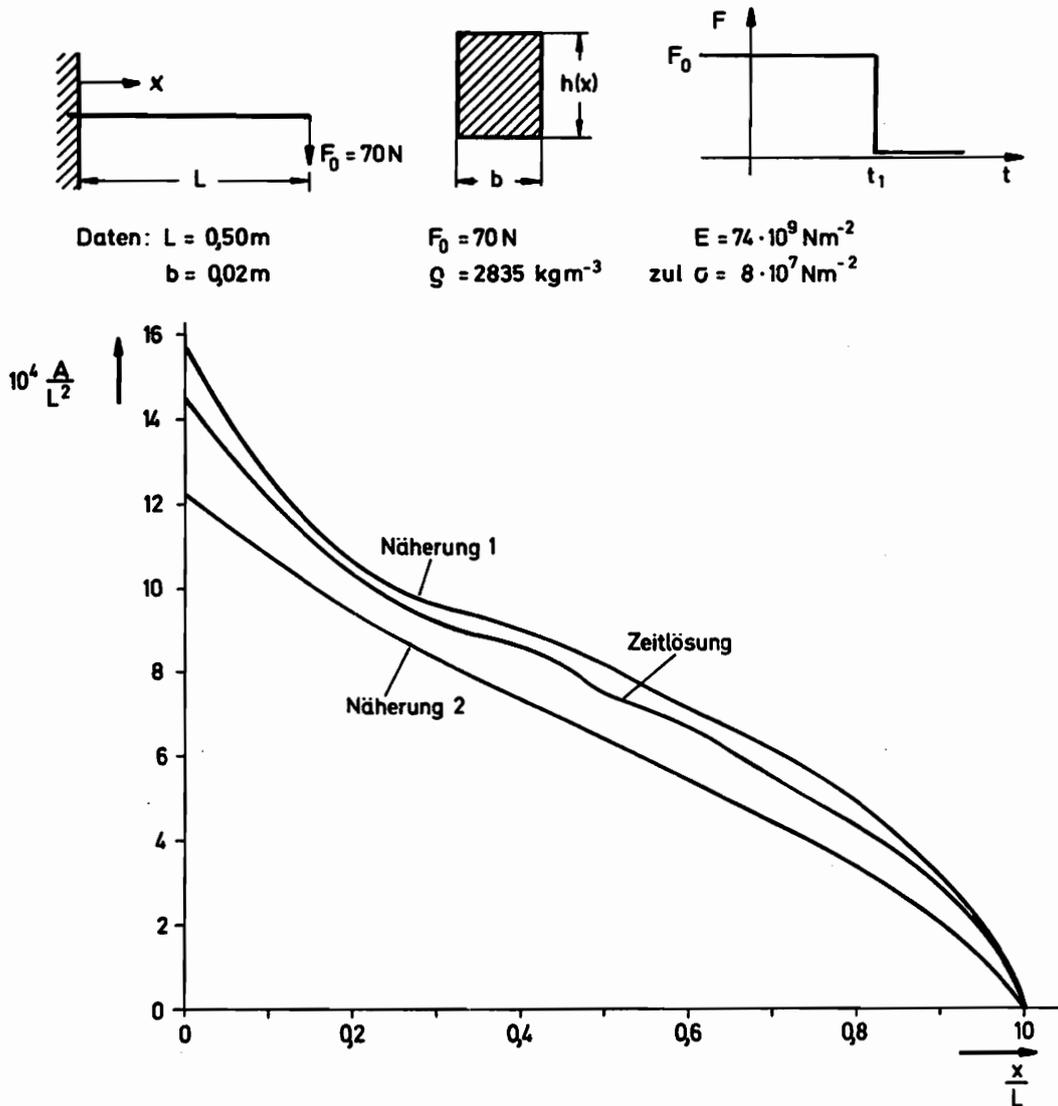


Abbildung 6.14

Schwäche der zur Zeit vorliegenden Optimierungsalgorithmen - nicht nur der hier verwendeten Strategie -, daß sie nur zum Auffinden relativer Extrema in der Lage sind. Nur in Spezialfällen, wie etwa den konvexen Optimierungsproblemen stimmt ein solches relatives Minimum mit dem absoluten überein.

In dieser Situation besteht nur die Möglichkeit die Suche von verschiedenen Startpunkten aus, wie es hier geschehen ist, zu beginnen, und falls mehrere relative Optima gefunden werden, das günstigste auszuwählen.

Für das hier behandelte Parameter-Optimierungsproblem gibt es zwar grundsätzlich die Möglichkeit, den gesamten Parameterraum systematisch (Rastersuche) oder hinreichend lange auf stochastische Weise (Zufallssuche) abzutasten, praktisch scheitert jedoch dieses Vorgehen am Aufwand an Rechenzeit und Speicherbedarf.

Für einen Stab mit zwei Abschnitten gemäß Abb. 6.3 wollen wir abschließend die Ergebnisse einer systematischen Suche in der jetzt zweidimensionalen Parameterebene mitteilen. Der Stab hat zwei veränderliche Querschnittsflächen  $A_1$  und  $A_2$  mit dem Querschnittssprung in Stabmitte. Wählen wir ein äquidistantes Gitternetz mit je 14 diskreten Werten von  $A_1$  und  $A_2$ , so sind 256 Zielfunktionsauswertungen notwendig, um die Spannung  $\max \sigma_i$  zu bestimmen. Durch Interpolation ermitteln wir die Kurven konstanter maximaler Spannung  $\max \sigma_i / \text{zul} \sigma = \text{const}$ , die in Abb. 6.15 wiedergegeben sind. Dort sind auch die Kurven konstanten Volumens als Geraden wiedergegeben, die die Koordinatenachsen unter einem Winkel von  $45^\circ$  schneiden.

In diesem Fall zeigt sich, daß nur ein Optimum vorliegt.

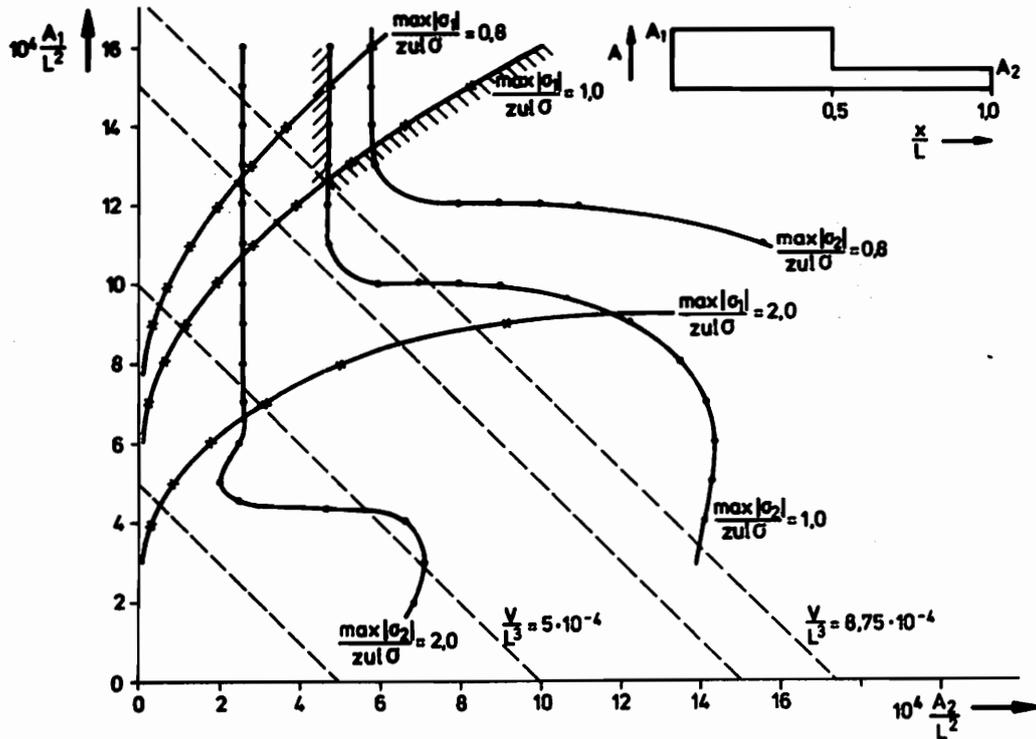


Abbildung 6.15

### 6.7. Rechenprogramm

Die umfangreichen numerischen Berechnungen wurden auf der TR 440 im Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt. Das Rechenprogramm wurde in der Programmiersprache ALGOL 60 abgefaßt. Über den prinzipiellen Ablauf der Rechnung gibt das Ablauf-Diagramm in Abb. 6.16 Auskunft.

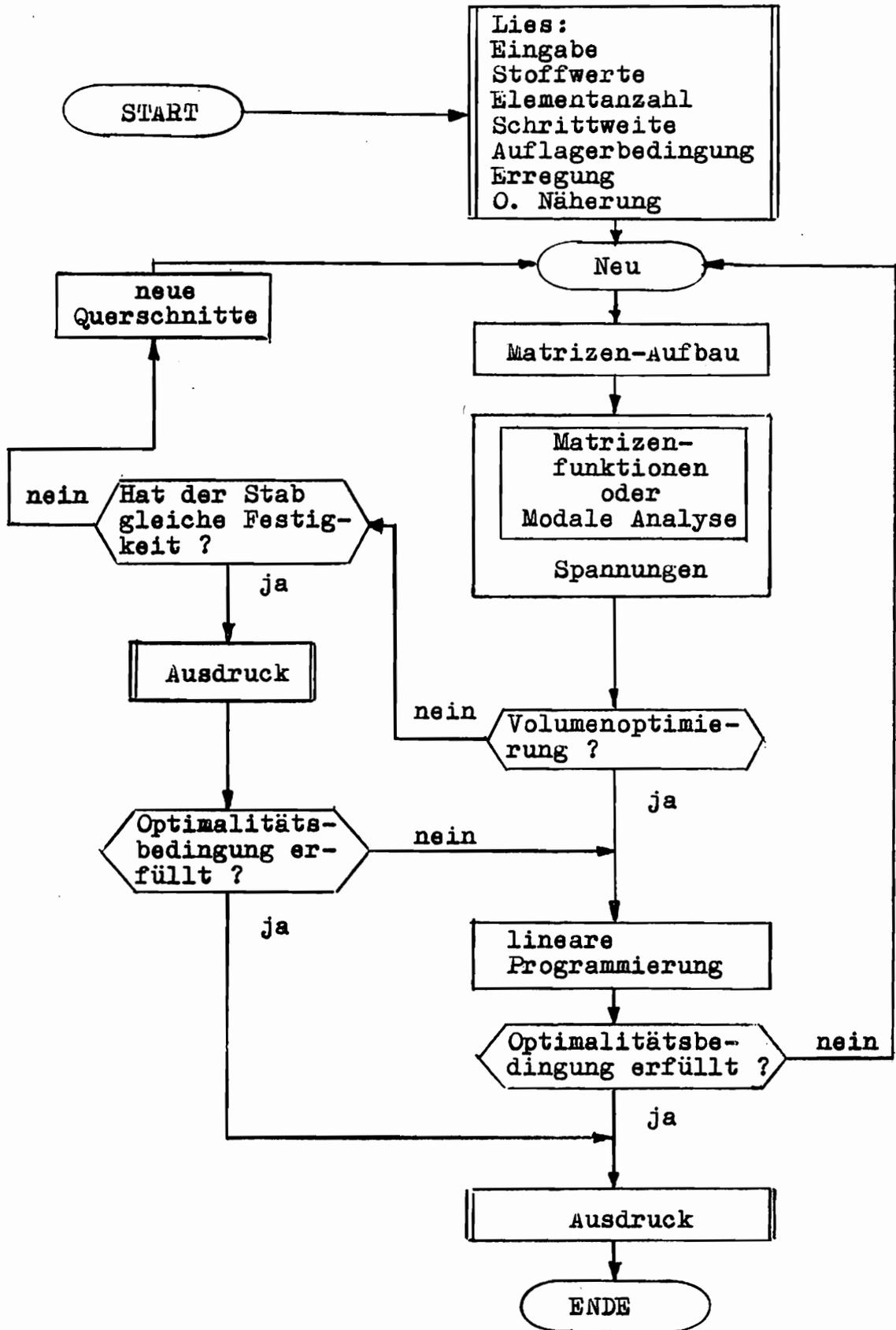


Abbildung 6.16

## 7. Experimentelle Untersuchungen

Die unterschiedlichen Stabmodelle und Lösungsmethoden führen zu theoretischen Ergebnissen, die zufriedenstellend übereinstimmen. Um festzustellen, ob die vereinfachenden Modelle und die verwendete "Lumped Mass"-Methode die Reaktion von Stäben bei nichtperiodischer Beanspruchung von begrenzter Dauer richtig wiedergeben, wurden die Biegedehnungen an den Stäben gemessen und mit den berechneten verglichen.

### 7.1. Versuchsordnung

Die Dehnungsmessungen werden an zwei Stäben  $S_1$  und  $S_2$  durchgeführt. Stab  $S_1$  hat konstanten quadratischen Querschnitt (20 x 20 mm) und ist 0,965 m lang. Stab  $S_2$  weist den in Abb. 6.9 wiedergegebenen Querschnittsflächenverlauf  $a$  mit konstanter Breite  $b = 20$  mm, veränderlicher Höhe  $0 \leq h(x) \leq 18,03$  mm und der Länge  $L = 0,5$  m auf. Stab  $S_2$  wurde absichtlich breiter als hoch bemessen, damit die  $x$ - $z$ -Ebene als Schwingungsebene bevorzugt wird.

Beide Stäbe bestehen aus dem Werkstoff AlCuMgPb F 35 im Zustand kalt ausgehärtet [35]. Der Werkstoff läßt sich auf einer Fräsmaschine gut bearbeiten. Es wurden nach der Bearbeitung von Stab  $S_2$  maximale Abweichungen in der Stabhöhe von 5/100 mm gegenüber den Sollwerten gemessen.

Abb. 7.1 zeigt den Versuchsstand. Die Anordnung der Meßkette wird in dem Blockschaltbild 7.2 wiedergegeben.

Die Stäbe werden mittels sechs M 8-Schrauben zwischen zwei 15 mm dicken Stahlplatten aus St-52 eingespannt.

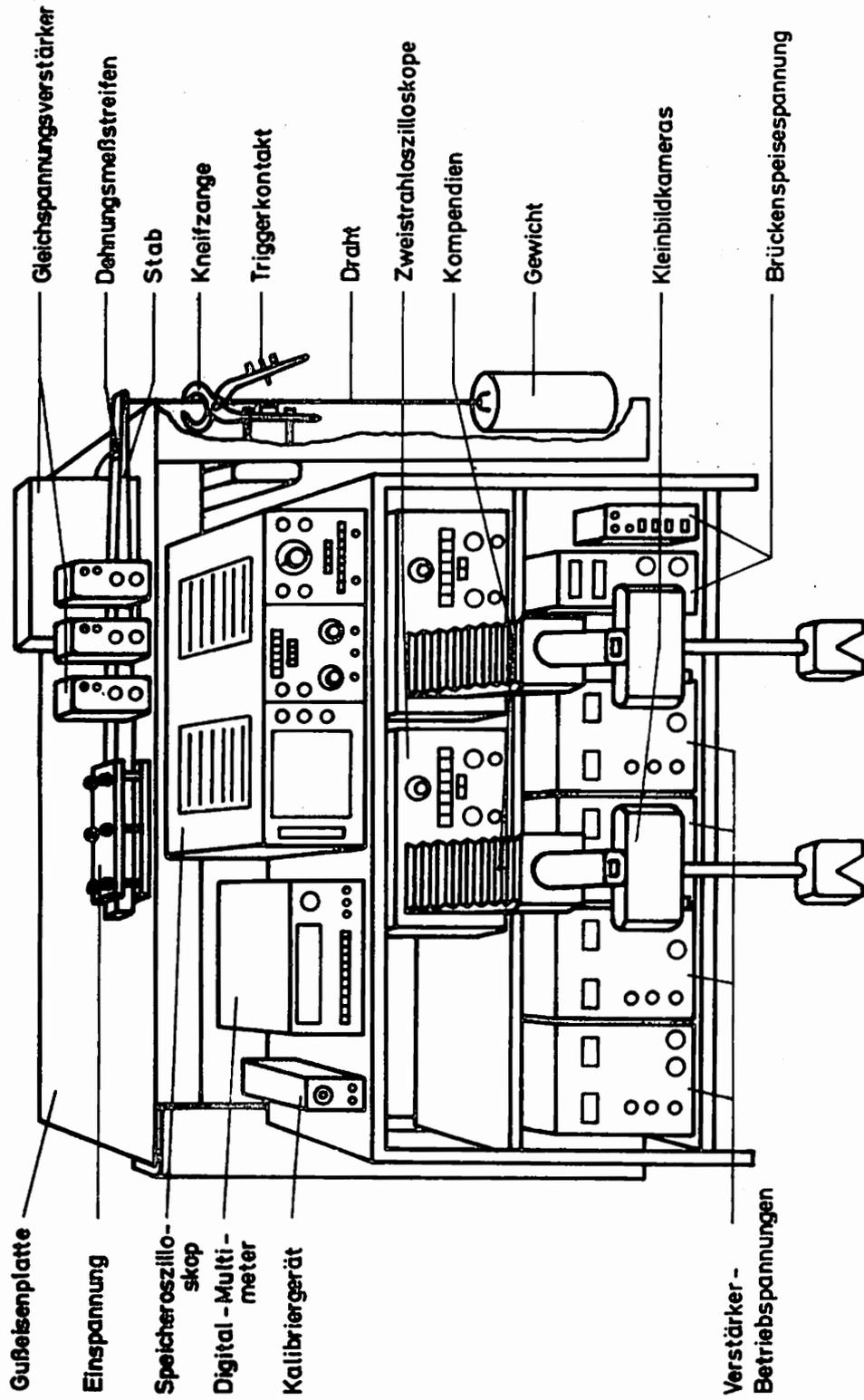


Abbildung 7.1

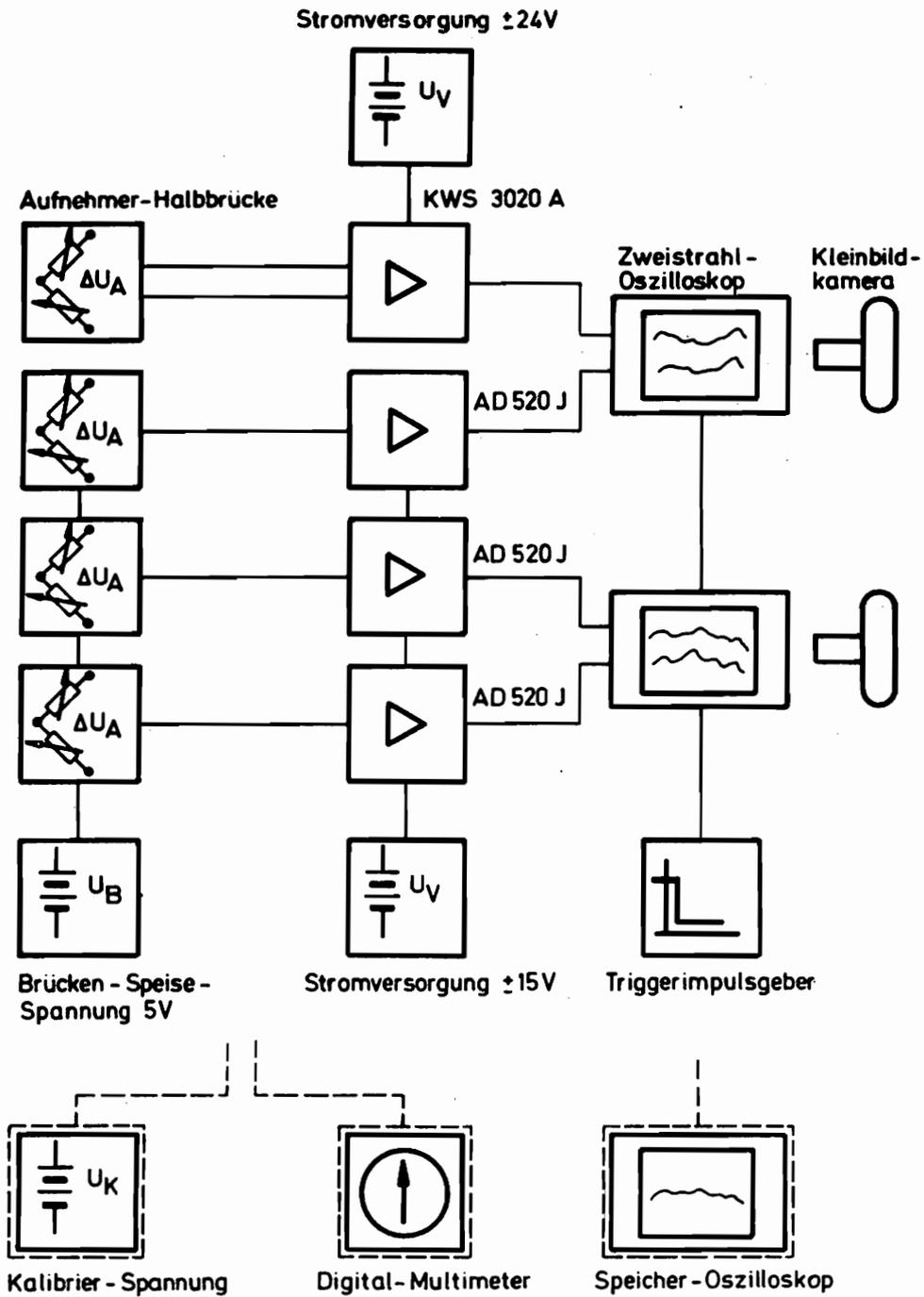


Abbildung 7.2

Der um den Faktor 2,5 größere Elastizitätsmodul von St-52 gegenüber dem von Duraluminium soll die Einhaltung der Einspannbedingung gewährleisten.

Die Stahlplatten sind auf einer Graugußplatte mit einem Gewicht von 412 kg befestigt. Stab  $S_1$  wiegt 1,8 kg, Stab  $S_2$  nur 0,26 kg. Die Platte hat eine nach [36] berechnete Grundfrequenz von 343 Hz. Stab  $S_1$  und Stab  $S_2$  haben Grundfrequenzen von 17 Hz bzw. 70 Hz. Die Gefahr, daß die Platte in ihrer Grundfrequenz zu Schwingungen angeregt wird, kann durch die außermittige Anbringung der Stäbe vermindert werden.

Die Stäbe werden an ihrem freien Ende durch die Gewichtskraft  $F_0 = 70 \text{ N}$  statisch belastet. Das Gewicht ist an einem Draht befestigt. Über einen Metallsteg, der lose auf dem Stabende ruht, wird die Kraft gleichmäßig in den Stab eingeleitet.

Mit einer gewöhnlichen Kneifzange können wir den Draht durchtrennen. Der Metallsteg samt einem Drahtrest (Gesamtmasse: 1,6 g) verbleibt für kurze Zeit ( $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ) auf dem Stabende, bevor er von horizontal wirkenden Federn herabgerissen wird.

Die bei den Biegeschwingungen auftretenden Dehnungen werden mit Dehnungsmeßstreifen (DMS) der Firma Tokyo Sokki Kenkyujo vom Typ FLA-2-11 mit einer Basisbreite von 2 mm, einem ohmschen Widerstand von  $R = 120 \Omega$  und einem k-Faktor von 2,1 aufgenommen. Zwei aktive Dehnungsmeßstreifen werden so gegenüberliegend oben und unten auf dem Stab befestigt und in Halbbrückenschaltung betrieben, daß die Wärmedehnung und die Dehnung infolge Normalkraft kompensiert werden.

Die an den DMS anfallende Spannungsänderung  $\Delta U_A$  ist

der Dehnung  $\varepsilon$  proportional:

$$\Delta U_A = \frac{k}{2} U_B \varepsilon \quad (7.1)$$

Mit  $U_B$  bezeichnen wir die Brückenspeisespannung. Zur Verstärkung dieser Spannungsänderung werden Gleichspannungsverstärker vom Typ KWS 3020 A der Firma Hottinger Baldwin Meßtechnik, sowie 3 Eigenbauten benutzt, die sich beim heutigen Stand der Elektronik leicht unter Benutzung des monolithisch integrierten Meßverstärkers AD 520 J der Firma Analog Devices zusammenbauen lassen. Den elektrischen Aufbau dieses Verstärkers zeigt Abb. 7.3.

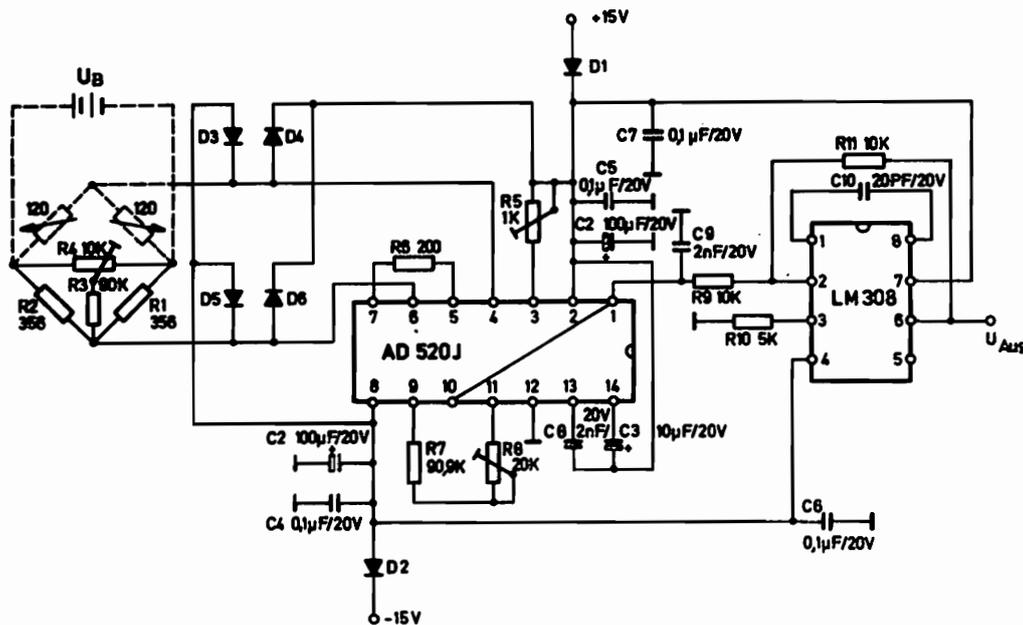


Abbildung 7.3

Um Störeinflüsse langer Kabelleitungen zwischen den DMS und den Verstärkereingängen zu vermeiden, wurden die Verstärker so nahe wie möglich an die aufnehmer

herangebracht.

Während der Verstärker KWS 3020 A über eine interne hochkonstante Spannungsquelle verfügt, wurde für die übrigen Verstärker aus einem Spannungskonstanter des Typs 34 K 160 R 0,8 der Firma Gossen mit Hilfe eines Spannungsteilers eine Gleichspannung von  $U_B = 5\text{ V}$  mit einer Restwelligkeit von  $90\ \mu\text{V}_{SS}$  erzeugt.

Die Meßsignale der DMS werden von den Verstärkern mit dem Faktor 500 V/V verstärkt und auf zwei Zweistrahl-oszilloskopen vom Typ PM 3232 der Firma Philips sichtbar gemacht. Alle vier Signale können von zwei Kleinbildkameras gleichzeitig aufgenommen werden.

Den Triggerimpuls  $KO_{Tr}$  für die Oszilloskope liefert ein Stromkreis, der in Abb. 7.4 dargestellt ist.

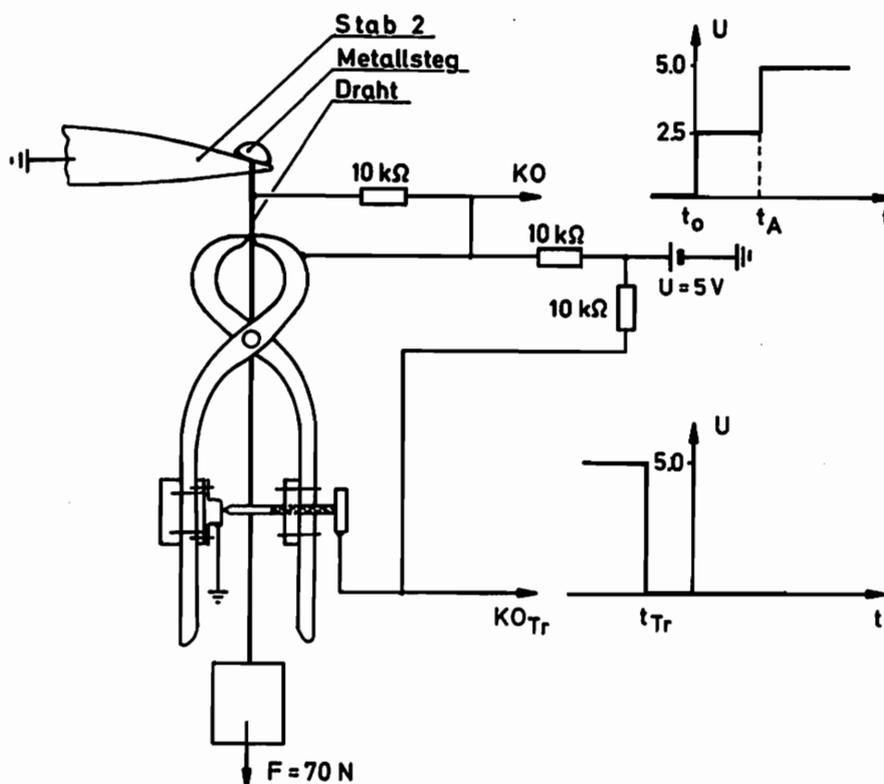


Abbildung 7.4

An den Griffen der Kneifzange befestigte Kontakte bilden einen Schalter, der beim Zusammendrücken der Zange einen Stromkreis schließt. Der Zeitpunkt dafür kann mittels einer Stellschraube so eingestellt werden, daß der Triggerimpuls ausgelöst wird, bevor der Draht durchtrennt ist.

Die Zeitpunkte  $t_0$ , zu dem der Draht durchtrennt wird, und  $t_A$ , zu dem der Metallsteg von dem Stab abhebt, werden mit dem zweiten in Abb. 7.4 dargestellten Schaltkreis markiert. Zum Zeitpunkt  $t_0$  springt die Spannung von 0 auf 2,5 Volt, zum Zeitpunkt  $t_A$  von 2,5 auf 5 Volt. Beide Signale werden auf dem Zweistrahl-speicheroszilloskop 184 A in Verbindung mit den Einschüben 1805 A und 1825 der Firma Hewlett Packard sichtbar gemacht. Auf diese Weise kann die Berührzeit des Metallsteges mit dem Stab als Differenz  $t_A - t_0$  bestimmt werden.

Eine Kalibrierspannungsquelle, die mit Anodenbatterien betrieben wird, liefert konstante Spannungen im Bereich von 1,5 mV bis 15 mV. Mit Hilfe dieses Gerätes kann in Verbindung mit einem Digital-Voltmeter der Firma Keithley Typ 171 eine Kalibrierung der Gleichspannungsverstärker vorgenommen werden.

Der Nullabgleich der DMS-Brücke in Verbindung mit den Gleichspannungsverstärkern AD 520 J sowie die Eliminierung der Offsetspannung gelingt mit Hilfe des Digitalvoltmeters bis auf  $\pm 8 \mu\text{V}$  Genauigkeit.

Die Überprüfung der Übertragungseigenschaften der gesamten Meßkette bei statischer Belastung des Stabes zeigte gute Übereinstimmung im Rahmen der abgeschätzten Fehlergrenze, auf die wir noch eingehen werden.

### 7.2. Leistungsgrenze der Meßkette

Die Auswahl der einzelnen Glieder der Meßkette wurde nach den Gesichtspunkten

- große Bandbreite,
- hohe Grenzfrequenz und
- geringe Kosten

vorgenommen.

Die Dehnungsmeßstreifen sind infolge ihrer geringen Trägheit geeignet, dynamische Vorgänge, die mit hoher Frequenz ablaufen, zu erfassen. Bei Verwendung des flüssigen Klebstoffes Z 70 zu ihrer Applikation wird die Grenzfrequenz auf weit über 50 kHz geschätzt [37].

Die Entscheidung bezüglich der Wahl des Meßverstärkers fiel bei den gestellten Forderungen zugunsten des Gleichspannungsverstärkers aus. Der verwendete Gleichspannungsverstärker KWS 3020 A weist in dem Frequenzbereich  $0 \leq f \leq 10$  kHz einen Amplitudenabfall von 1 dB auf. Bei den Eigenbauten gibt der Hersteller der IC's vom Typ AD 520 J im Frequenzbereich  $0 \leq f \leq 60$  kHz bei einem Verstärkungsfaktor von 500 V/V einen Amplitudenabfall von 3 dB an. Die maximalen Linearitätsabweichungen betragen 0,7 ‰.

Die Zweistrahloszilloskope weisen einen weitaus besseren Frequenzgang auf, so daß die Gleichspannungsverstärker bezüglich der Grenzfrequenz das schwächste Glied der Meßkette bilden.

### 7.3. Bestimmung der Werkstoffkenngrößen

Die in der Literatur angegebenen Werte für die Streckgrenze, den Elastizitätsmodul und die Dichte der industriell gefertigten Aluminiumstangen können nicht übernommen werden, da sie von Stange zu Stange

unterschiedlich ausfallen.

Es wurden aus dem im Versuch verwendeten Material Proben hergestellt und Zugversuche gemäß DIN 50114 und DIN 50143 [38] auf einer Prüfmaschine der Firma Zwick vom Typ 1362 des Institutes für Werkstoffkunde an der RUB durchgeführt. Das Spannungsdehnungsdiagramm zeigt Abb. 7.5.

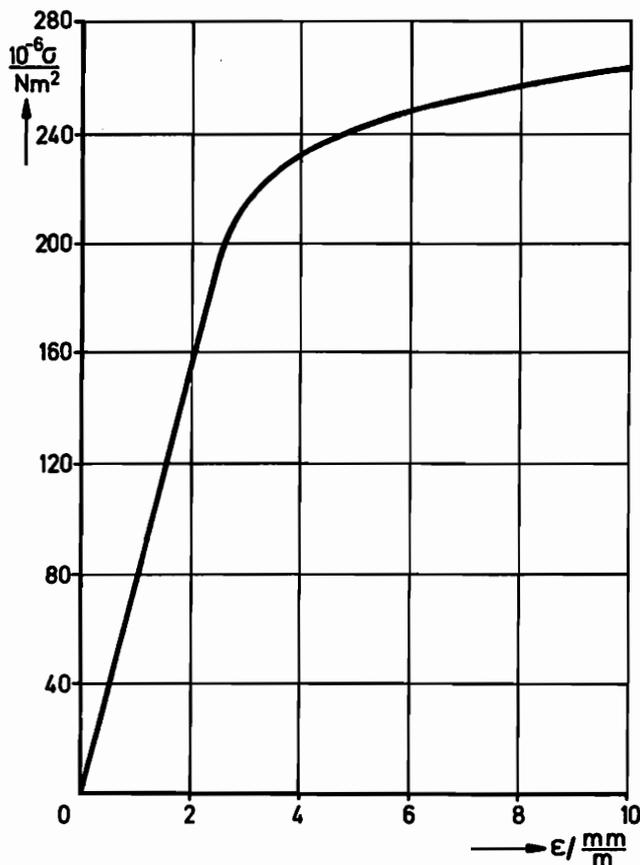


Abbildung 7.5

Der lineare Hooke'sche Bereich erstreckt sich bis zu einer Spannung von  $18 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$ . Die bei den Versuchen auftretenden maximalen Spannungen liegen bei  $8 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$ , so daß bleibende Formänderungen ausgeschlossen werden können.

Die Dichte des Stabwerkstoffes wird nach dem bekannten Archimedischen Prinzip aus dem Auftrieb

eines 0,6 N schweren vollständig in Wasser eingetauchten Werkstoffstückes zu  $\rho = 2835 \text{ kgm}^{-3}$  bestimmt.

Den Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes erhalten wir auf zwei voneinander unabhängigen Wegen:

- a) durch Messung der Laufzeit einer Wellenfront
- b) durch Messung der Frequenz der Longitudinalschwingung

in dem betrachteten Werkstoff.

Dabei wird ein beidseitig freier Stab der Länge  $L = 1,15 \text{ m}$  mit dem Querschnitt  $20 \times 20 \text{ mm}$  an einem Ende mit einem Hammer zentral angestoßen. In dem Stab breiten sich Longitudinalwellen aus. Die Dehnungen an den Längsseiten des Stabes werden mittels Dehnungsmeßstreifen aufgenommen, verstärkt und auf dem Speicheroszilloskop sichtbar gemacht.

Zur Bestimmung der Laufzeit der Longitudinalwellenfront werden die Dehnungen an zwei in einem Abstand von  $L_M = 20 \text{ cm}$  angebrachten DMS aufgenommen. Aus der Zeitdifferenz  $\Delta t$  zwischen den Ankunftszeiten der Wellenfront kann auf den Elastizitätsmodul gemäß der Beziehung

$$E = \rho \left( \frac{L_M}{\Delta t} \right)^2 \quad (7.2)$$

geschlossen werden.

Wenn sich in dem Stab eine stationäre Longitudinalschwingung ausgebildet hat, messen wir auf dem Speicheroszilloskop die Zahl der Grundschrwingungen  $n$  pro Zeitintervall  $\Delta t$ . Aus einer von Flügge [39] angegebenen Beziehung für die Frequenz von Longitudinalschwingungen in Stäben bestimmen wir den Elastizitätsmodul:

$$E = 4 \rho \left( \frac{L \cdot n}{\Delta t} \right)^2 \quad (7.3)$$

Aus beiden Messungen ergibt sich übereinstimmend der Wert  $E = 74 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$ .

#### 7.4. Fehlerrechnung

Die Versuche haben das Ziel, die Biegedehnung  $\epsilon$  zu bestimmen. Zur Berechnung der Schnittmomente benötigen wir außerdem die Werkstoffkennwerte Elastizitätsmodul  $E$  und Dichte  $\rho$ . Die gesuchten Größen  $y_i$  können nicht direkt gemessen werden. Sie hängen von fehlerbehafteten physikalischen Meßgrößen  $x_j$  ab:

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.4)$$

Wenn der maximale Fehler  $\Delta x_j$  der einzelnen Meßgröße bekannt ist, kann der größtmögliche Fehler der zu bestimmenden Größe  $y_i$  mit Hilfe des totalen Differentials [40] berechnet werden:

$$\Delta y_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots \quad (7.5)$$

Den wahrscheinlichen Fehler, der unter den üblichen Meßbedingungen zu erwarten ist, bestimmt man mit Hilfe der Beziehung:

$$\Delta \bar{y}_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots} \quad (7.6)$$

Die Auswertung der Gleichungen 7.6 und 7.7 ergibt, daß mit den folgenden Fehlern gerechnet werden muß:

	max. Fehler	wahrscheinlicher Fehler
Dehnung	8,4 %	4,7 %
Dichte	0,14 %	0,1 %
E-Modul		
Frequenzmessung	6 %	3,6 %
Laufzeitmessung	13,1 %	9,5 %

### 7.5. Vergleich der Versuchsergebnisse mit den Ergebnissen der Theorie

In einem Vorversuch wollten wir durch Dehnungsmessungen an dem Stab  $S_1$  feststellen, ob die Rechnung mit ihren vereinfachenden Annahmen das reale Schwingungsverhalten des Stabes mit konstantem Querschnitt wiedergeben kann. In Abb. 7.6 wird der gemessene und berechnete Verlauf der Biegespannung während der Zeitdauer, die der Grundperiode entspricht, an einer 9,8 cm von der Einspannung entfernten Stelle wiedergegeben.

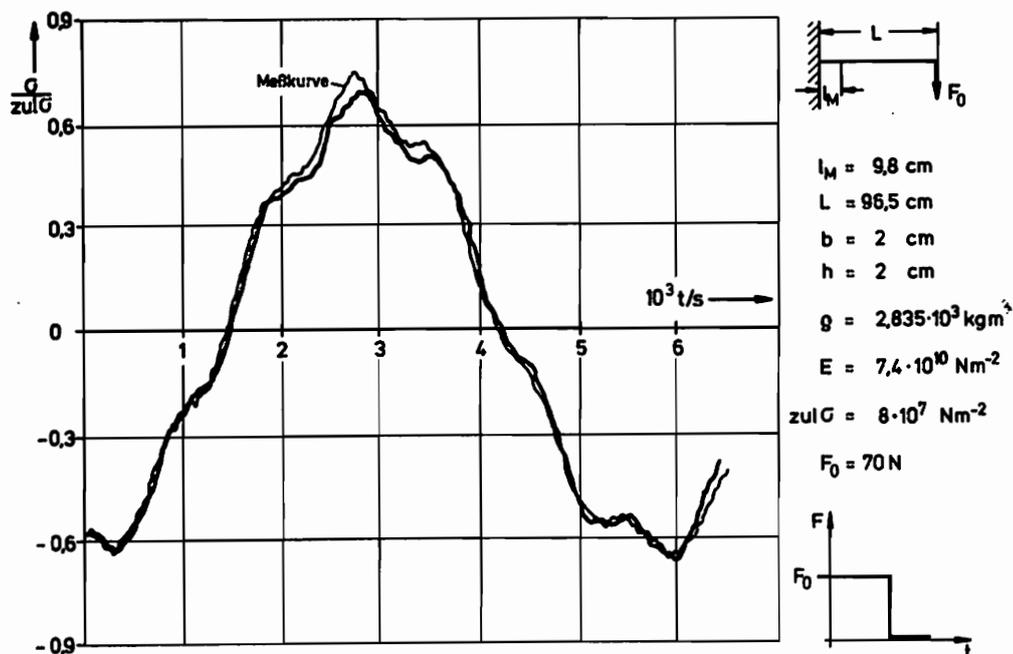


Abbildung 7.6

Der dicke ausgezogene Kurvenverlauf entspricht dem Ergebnis der Theorie, bei der die kontinuierliche Massenverteilung durch 11 punktförmige Massen ersetzt wurde. Die Meßkurve gibt die bezogene Spannung wieder, die der Dehnung proportional ist:

$$\frac{\sigma}{\text{zul } \sigma} = \left( \frac{E}{\text{zul } \sigma} \right) \varepsilon \quad (7.7)$$

Aus der guten Übereinstimmung der beiden Spannungsverläufe in Abb. 7.6 kann geschlossen werden, daß die Modellvorstellung mit Einzelmassen ohne Berücksichtigung der Dämpfung den realen Spannungsverlauf quantitativ richtig wiederzugeben vermag.

Der Stab  $S_2$  weist den in Abb. 6.9 wiedergegebenen optimalen Querschnittsverlauf a gleicher Festigkeit auf. Auf dem Stab wurden an vier Stellen in verschiedenen Entfernungen von der Einspannstelle jeweils ein DMS auf der Stabober- und auf der Stabunterseite aufgeklebt (vgl. Abb. 7.7).

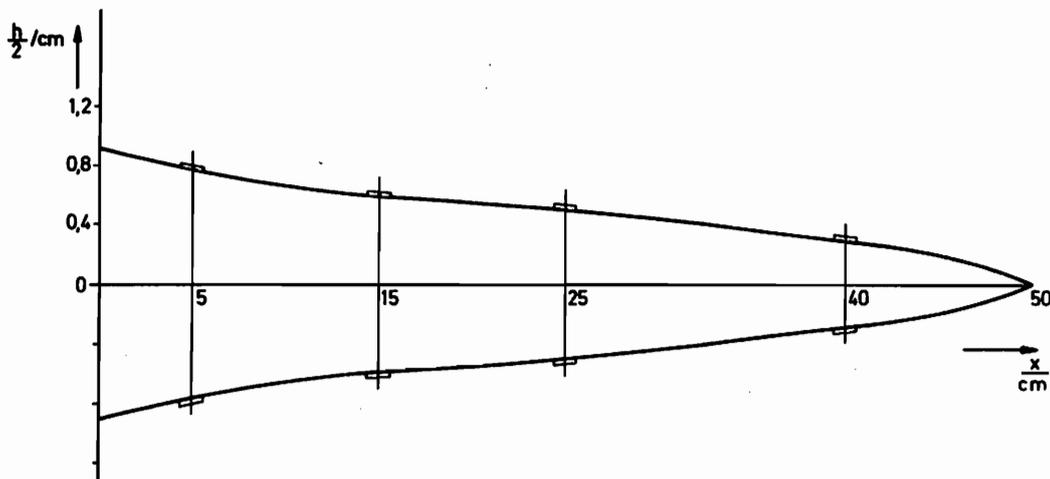
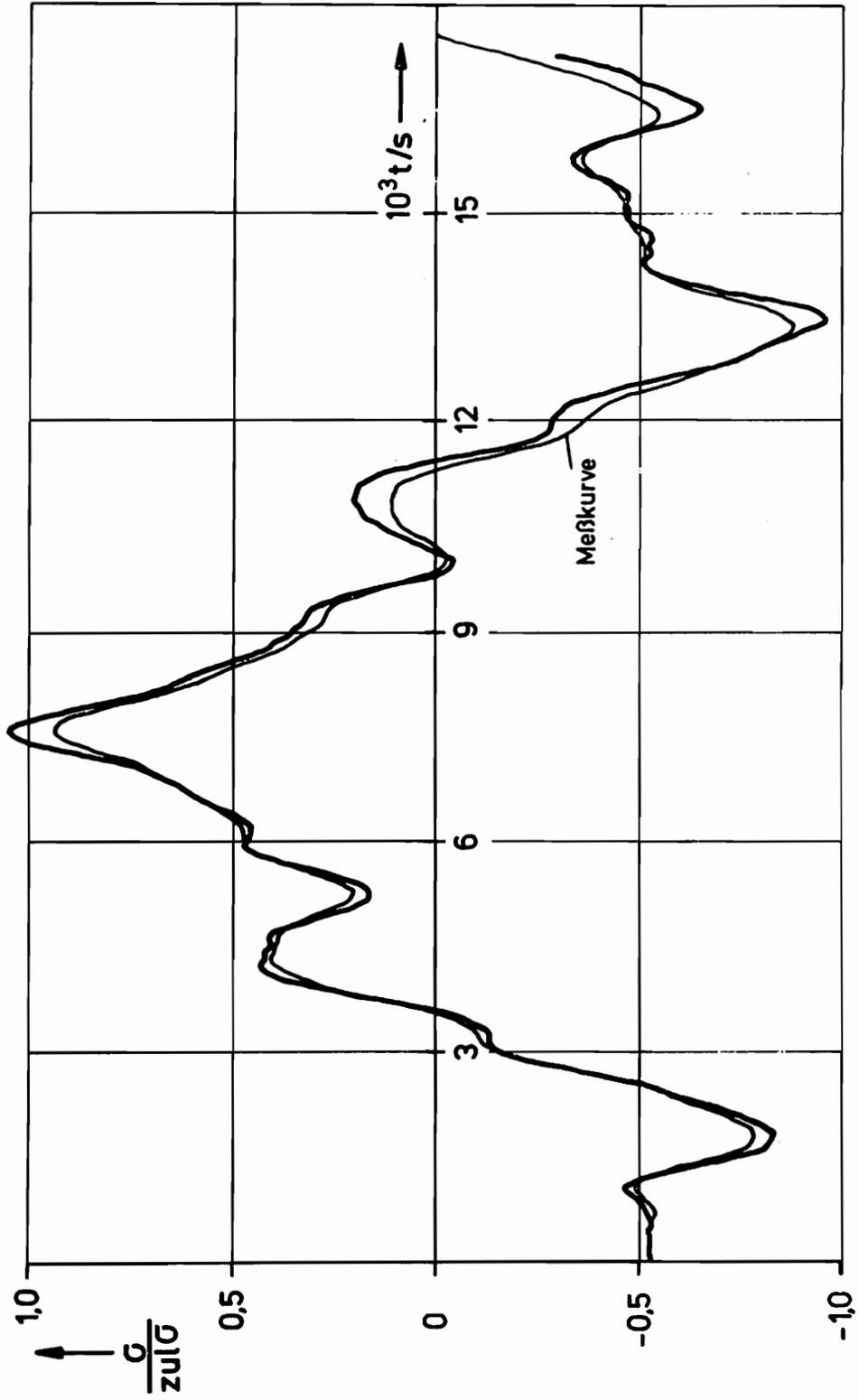


Abbildung 7.7

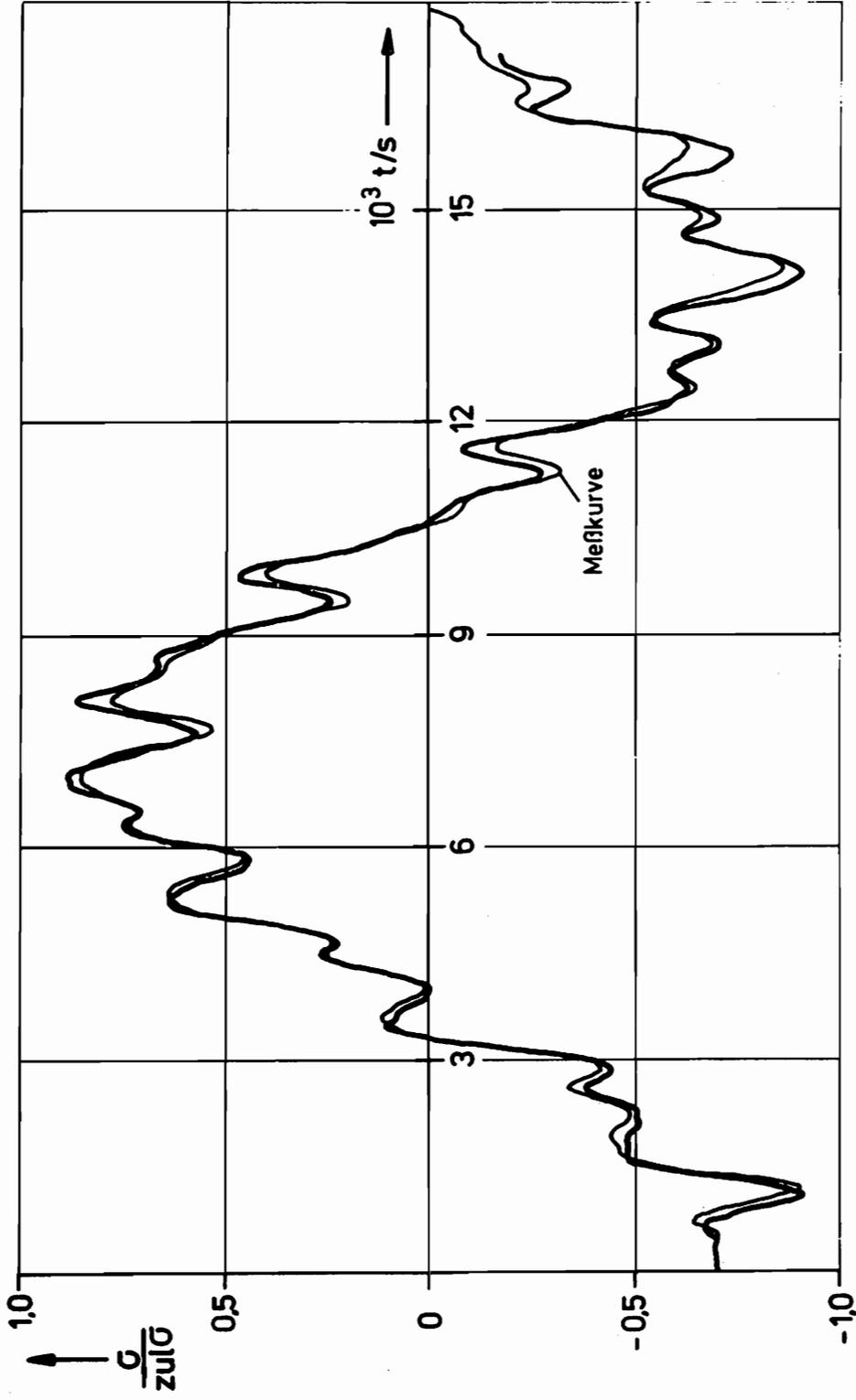
Der gemessene Spannungsverlauf an den vier meßpunkten wird in den Abbildungen 7.8 bis 7.11 durch dünne Linien wiedergegeben.

Es zeigt sich, daß die zulässige Spannung in keinem Querschnitt erreicht wird. Diese Abweichungen werden durch den Metallsteg verursacht, dessen Verweilzeit auf dem Stab  $5 \cdot 10^{-4}$  s beträgt. Die geringe Masse des Steges war bei der Bestimmung des Querschnittsflächenverlaufes nicht berücksichtigt worden.



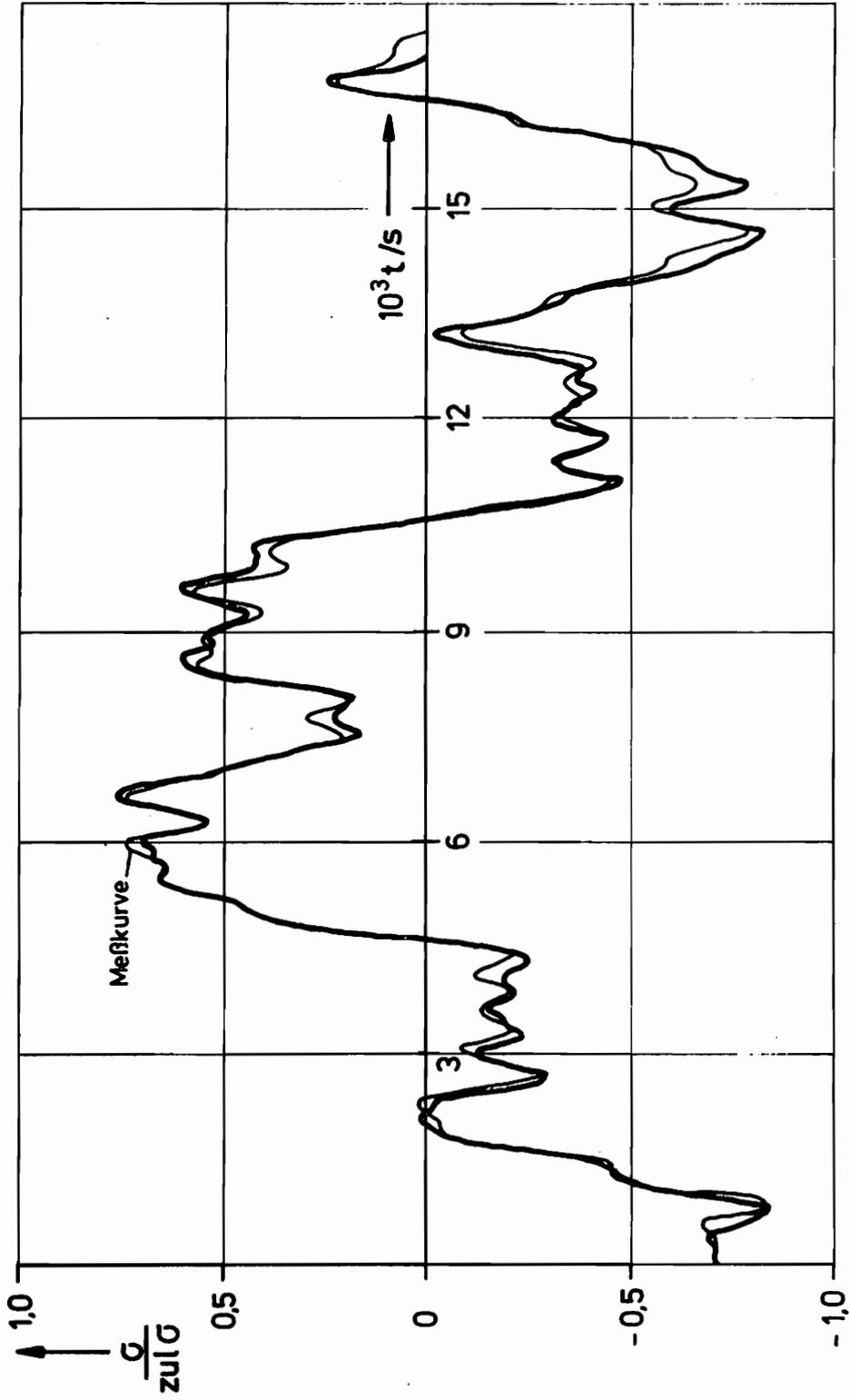
Spannungsverlauf an der Stelle  $x = 5 \text{ cm}$

Abbildung 7.8



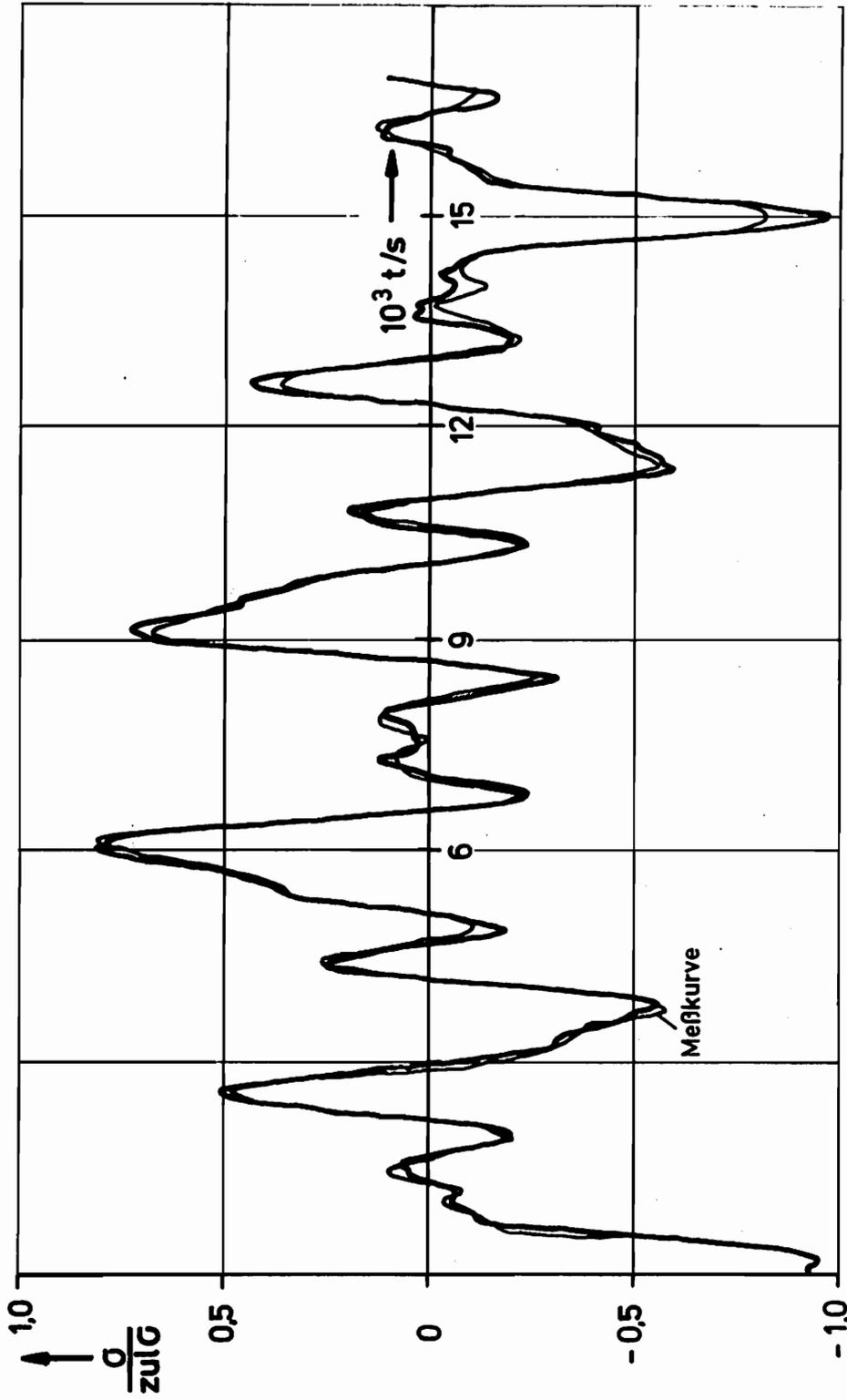
Spannungsverlauf an der Stelle  $x = 15 \text{ cm}$

Abbildung 7.9



Spannungsverlauf an der Stelle  $x = 25 \text{ cm}$

Abbildung 7.10



Spannungsverlauf an der Stelle  $x = 40 \text{ cm}$

Abbildung 7.11

Eine Kontrollrechnung, bei der die kontinuierlich verteilte Stabmasse durch 31 Einzelmassen diskretisiert und die Stegmasse berücksichtigt wird, ergibt die dick gezeichneten Kurvenverläufe.

Die von der plötzlichen Entlastung des Stabendes ausgehende Störung breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit in dem Stab aus. Mit zunehmender Entfernung des Stabquerschnittes von der Störungseinführung wird die Totzeit bis zur ersten Reaktion des Stabes größer. Es fällt auf, daß die Druckspannung an der Stabunterseite zunächst größer wird als bei der statischen Belastung. Dieser Effekt wird durch die bereits beschleunigten Stabteile hervorgerufen, deren Trägheitskräfte die Schnittmomente beeinflussen.

Abschließend wollen wir noch einige Aspekte aufzählen, die zu berücksichtigen sind, wenn wir die theoretisch gewonnenen Ergebnisse mit den Befunden des Experimentes vergleichen.

Auf der einen Seite haben wir das Experiment, bei dem wir die Reaktion des realen Kontinuums auf Kräfte aufzeichnen. Der Fehlerrechnung im Kapitel 7.5. zufolge ist die Messung der Dehnung  $\epsilon$  mit einem wahrscheinlichen Fehler von 4,7 % behaftet. Auf der anderen Seite müssen wir bei der Beurteilung der theoretisch gewonnenen Ergebnisse drei Gruppen von Fehlerquellen berücksichtigen:

- Fehler, bedingt durch die Abweichung der Modelltheorie vom realen Verhalten des Kontinuums,
- Diskretisierungsfehler und
- Rundungsfehler.

Wenn wir daraufhin die experimentell und numerisch gewonnenen Ergebnisse an den vier Stabpunkten uns vergleichend ansehen, ist der Grad der erreichten Übereinstimmung erstaunlich gut.

## 8. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Querschnittsverläufe von Stäben mit beliebigen Auflagerreaktionen bei nicht periodischer Erregung von begrenzter Dauer so bestimmt, daß die Stäbe minimales Volumen aufweisen. Dabei ist als nichtlineare Nebenbedingung zu berücksichtigen, daß die Spannungen einen zulässigen Wert an keiner Stelle und zu keiner Zeit überschreiten.

Der Stab wird, ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen für die Modelle des Timoshenko-Stabes und des Stabes nach der elementaren Theorie mit Hilfe der "Lumped Mass"-Methode in der Ortskoordinate  $x$  physikalisch diskretisiert. Unter Verwendung von Kraftgrößen als Systemparameter leiten wir eine Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen her. Die Lösung dieser Matrizendifferentialgleichung stellt ein Anfangswertproblem in der Zeitkoordinate dar. Das reduzierte Übertragungsmatrizenverfahren, das Matrizenfunktionen benutzt, erweist sich als effektivste Lösungsmethode für die schnelle und genaue Bestimmung der Systemantwort.

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird in einem ersten Schritt der Stab gleicher Festigkeit mit Hilfe eines einfachen schnell konvergierenden Algorithmus bestimmt. Die Optimalität dieses Querschnittsflächenverlaufes im Sinne eines lokalen Minimums für das Stabvolumen kann mit Hilfe des Kuhn-Tucker-Theorems für einige Stäbe nachgewiesen werden. Es wird ein Suchalgorithmus hergeleitet, der ausgehend vom Querschnittsflächenverlauf des Stabes gleicher Festigkeit volumenoptimale Lösungen finden kann, bei denen die Spannungen die zulässigen Werte nicht

mehr in jedem Querschnitt erreichen. Die dadurch erzielbare Volumensparnis ist so gering, daß wir den Stab gleicher Festigkeit als gute Näherung für den Stab minimalen Volumens betrachten können.

Zur Beurteilung der theoretisch gewonnenen Ergebnisse messen wir an einem geraden Stab mit optimiertem Querschnittsverlauf die Dehnung in der Randfaser bei instationärer Beanspruchung. Ein Vergleich der Ergebnisse der Theorie mit denen des Experimentes bestätigt die Brauchbarkeit der hier verwendeten Modelle und numerischen Verfahren.

Literaturverzeichnis

---

- [1] Sheu, C.Y. und W. Prager      Recent developments in optimal structural design, Appl. Mech. Rev. 21, (1968), S. 985 - 992
- [2] Niordson, F.I. und P. Pederson      A review of optimal structural design, Theoretical and applied mechanics, Proceedings of the 13. international congress of theoretical and applied mechanics, Moskau 1972, Springer Verlag, Berlin, (1973) S. 264 - 278
- [3] Niordson, F.I.      On the optimal design of a vibrating beam, Quart. Appl. Math. 23, (1965), S. 47 - 53
- [4] Prager, W. und I.E. Taylor      Problems of optimal structural design, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E 35, (1968), S. 102 - 106
- [5] Turner, M.J.      Design of minimum stress structures with specified natural frequencies, AIAA J. 5 (1967), S. 406 - 412
- [6] Cardou, A. und W.H. Warner      Minimum-mass design of vibrating cantilevers, J. Optim. Theory Appl. 14 (6), (1974), S. 633 - 647

- [7] Karihaloo, B.L. und F.I. Niordson Optimum design of vibrating cantilevers, J. Optim. Theory Appl. 11 (6), (1973). S. 638 - 654
- [8] Olhoff, N. Optimal design of vibrating circular plates, Int. J. Solids Struct. 6, (1970), S. 139 - 156
- [9] Olhoff, N. Optimal design of vibrating rectangular plates, Int. J. Solids Struct. 10, (1974), S. 93 - 109
- [10] Weisshaar, T.A. Optimization of simple structures with higher mode frequency constraints, AIAA J. 10 (5), (1972), S. 691 - 693
- [11] Olhoff, N. Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies, J. Struct. mech. 4 (1), (1976), S. 87 - 122
- [12] Thermann, K. Optimal design criteria of dynamically loaded elastic structures, Optimization in structural design, IUTAM Symposium, Warschau 1973, Springer Verlag, Berlin, (1975), S. 152 - 167
- [13] Brach, R.M. Minimum dynamic response for a class of simply supported beam shapes, Int. J. mech. Sci. 10 (1968), S. 429 - 439

- [14] Icerman, L.J. Optimal structural design for given dynamic deflection, Int. J. Solids Struct. 5 (1969), S. 473 - 490
- [15] Mroz, Z. Optimal design of elastic structures subjected to dynamic, harmonically varying loads, ZAMM 50 (1970), S. 303 - 309
- [16] Plaut, R.H. Optimal structural design for given deflection under periodic loading, Quart. Appl. Math. 29, (1971), S. 315 - 318
- [17] Lehmann, Th. und W. Ullenboom Optimierung des Querschnittsverlaufes dynamisch beanspruchter Stäbe und Platten, ZAMM 53, (1973), S. 72 - 74
- [18] Timoshenko, S.P. On the correction of shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. The London, Edinburgh, Dublin Philosophical Magazine and J. of Science, Ser. 6, Bd. 41, (1921), 245, S. 744 - 746
- [19] Mindlin, R.D. und H. Dereziewicz Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams, Proc. 2<sup>nd</sup> Nat. Congr. Appl. Mech., 2, (1954) S. 175 - 178

- [20] Lehmann, Th. Elemente der Mechanik II, Elastostatik, Studienbücher Naturwissenschaft und Technik, Vieweg, Braunschweig, (1975), S. 192
- [21] Pochhammer, L. Über Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder, J. für reine und angew. Math. (Crelle), 81 (1876) S. 324 - 336
- [22] Chree, C. The equations of anisotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application, Trans. Cambridge Philosoph. Soc., 14, (1889), 12, S. 250 - 369
- [23] Abramson, H.N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section, J. Acoust. Soc. Am., 29, (1957), S. 42 - 46
- [24] Schmidt, B. Kontaktkraft und Biegespannungen in quergestoßenen Balken, Dissertation, Darmstadt (1966)
- [25] Bartram, R. Näherungsweise Berechnung der Verformung und Beanspruchung von impulsförmig belasteten Balken und Rahmen unter Berücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Stoßwellen, Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 1, Nr. 31 (1971)

- [26] Krings, W. Beitrag zur Finite Element  
methode bei linearem, visko-  
elastischem Stoffverhalten,  
Mitteilungen aus dem Institut  
für Mechanik, 3, Ruhr-Univer-  
sität Bochum, (1976)
- [27] Jordan-Engeln, Numerische Mathematik für  
G. und F. Reuter Ingenieure, B.I.-Wissenschafts-  
verlag, Mannheim-Wien-Zürich,  
104, (1973)
- [28] Wilkinson, J.H. Linear Algebra, Springer Ver-  
und C. Reinsch lag, Berlin-Heidelberg-New  
York (1971)
- [29] Waller, H. und Matrizenmethoden in der Ma-  
W. Krings schinen- und Bauwerksdynamik,  
B.I.-Wissenschaftsverlag,  
Mannheim-Wien-Zürich (1975)
- [30] Krings, W. und Instationäre Schwingungen  
H. Waller linearer Systeme, Technisch-  
Wissenschaftliche Mitteilungen  
des Institutes für konstruktivi-  
ven Ingenieurbau, Nr. 74-1,  
Ruhr-Universität Bochum (1974)
- [31] Collatz, L. Eigenwertaufgaben mit tech-  
nischen Anwendungen, Akad.  
Verlagsanstalt, Leipzig (1963)
- [32] Aoki, M. Introduction to optimization  
techniques, Macmillan, New  
York, (1971)

- [33] Zoutendijk, G.      Methods of feasible directions  
Elsevier, Amsterdam (1960)
- [34] Clough, R.W. und      Dynamics of structures, Mc Graw-  
J. Pentien              Hill Book Company, (1975)
- [35] Aluminium-              Aluminium-Merkblätter, Düssel-  
Zentrale                  dorf, Aluminium-Verlag GmbH
- [36] Weigand, A.              Einführung in die Berechnung  
mechanischer Schwingungen,  
Bd. 3, VEB Fachbuchverlag,  
Leipzig (1962), S. 131
- [37] Hottinger              Die DMS-Technik, Daten und  
Baldwin Meß-              Hilfsmittel, Darmstadt,  
technik GmbH              (1970)
- [38] DNA (Deutscher      DIN-Taschenbuch 19, Material-  
Normenausschuß)      prüfnormen für metallische  
Werkstoffe, Berlin-Köln-  
Frankfurt (1973), Beuth-Ver-  
trieb GmbH
- [39] Flügge, W.              Handbook of engeneering, New  
York, usw., Mc Graw-Hill (1962)
- [40] VDE/VDI-Richt-      Fehlerfortpflanzung bei  
linien 2620              Messungen, VDI-Verlag,  
Düsseldorf (1973)

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Seminarberichte zur Thermomechanik (in Vorbereitung)
- Nr. 3 Wolfgang Krings: Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl: Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz: Introduction to the non-linear theory of shells



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 11**