



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Jürgen Güldenpfennig

Anwendung eines Modells der  
Vielkristallplastizität auf ein  
Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen

Heft Nr. 12



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Jürgen Güldenpfennig

Anwendung eines Modells der  
Vielkristallplastizität auf ein Problem  
gekoppelter elasto-plastischer Wellen

~~Ruhr-Universität Bochum  
Institut für Mechanik  
-Bibliothek-  
Inv.-Nr.: 1509 Preis: —  
Standort: IFM G  
Sachgebiet:~~

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.12

Juli 1977

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Studienaufenthaltes an der Brown University, Providence R. I., USA und während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum. Sie wurde von der Abteilung für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. R.J. Clifton, Brown University, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Bruhns danke ich für ihre Unterstützung sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Otto Bruhns

Tag der Einreichung: 15.6.1977

Tag der mündlichen Prüfung: 11.7.1977

© 1977 Dr.-Ing. Jürgen Güldenpfennig  
Biermannsweg 22b, 4630 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

Ein Berechnungsverfahren wird entwickelt um das makroskopische inelastische Verhalten eines vielkristallinen Werkstoffes durch die Betrachtung von Gleitvorgängen in einer großen Anzahl regellos verteilter Einzelkristalle zu bestimmen. Dieses Verfahren, das auf der Simplex Methode der Linearen Programmierung beruht, wird angewendet zur Bestimmung einfacher Wellenlösungen für gekoppelte plastische Längs- und Scherwellen in einem dünnwandigen Rohr. Lösungen für verschiedene Ansätze der Einzelkristallverfestigung werden mit bekannten experimentellen Ergebnissen verglichen. Es zeigt sich, daß die Übereinstimmung mit den Experimenten besser ist, als bei den bekannten Lösungen nach der phänomenologischen Theorie.

## Summary

A computational procedure is presented for computing the macroscopic stress-strain behavior of polycrystalline metals from consideration of slip on the slip systems of a large number of randomly oriented single crystals. This procedure, based on the simplex method of linear programming, is applied to the computation of simple wave solutions for combined longitudinal and torsional plastic wave propagation in thin-walled cylindrical tubes. Solutions based on several single crystal hardening models are compared with known experimental results. These comparisons indicate better agreement between theory and experiment than has been obtained previously for solutions based on a phenomenological theory of plasticity.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenstellung häufig verwendeter Bezeichnungen	3
<u>1. Einführung</u>	6
<u>2. Stoffgesetz für den Einzelkristall</u>	11
2.1 Allgemeines	11
2.2 Elastische Formänderungen	12
2.3 Plastische Formänderungen	13
2.3.1 Allgemeines	13
2.3.2 Fließbedingung	15
2.3.3 Formänderungsgesetz	25
2.3.4 Verfestigungsgesetz	28
2.4 Eindeutigkeit des Stoffgesetzes	30
<u>3. Stoffgesetz für den Vielkristall</u>	35
<u>4. Numerische Behandlung des Stoffgesetzes</u>	39
4.1 Formulierung als Problem der Linearen Programmierung	39
4.2 Reduktion der Anzahl der Gleitsysteme von 24 auf 12	48
<u>5. Numerische Ergebnisse für statische Belastungen und Vergleich mit Experimenten</u>	53
5.1 Allgemeines	53
5.2 Zugversuch	53
5.3 Makroskopische Fließfläche	58
5.4 Zug-Torsionsversuch	67

	Seite
<u>6. Gekoppelte Längs- und Scherwellenausbreitung</u>	
<u>im dünnwandigen Rohr</u>	70
6.1 Problemstellung	70
6.2 Grundlegende Gleichungen	72
6.3 Zur Lösung des Differentialgleichungs- systems	74
<u>7. Numerische Ergebnisse für einfache Wellen</u>	80
7.1 Bestimmung der Stoffkennwerte	80
7.2 Das vortordierte Rohr	81
7.3 Das vorgezogene Rohr	96
<u>8. Schlußbemerkungen</u>	102
<u>Literaturverzeichnis</u>	104

Zusammenstellung häufig verwendeter Bezeichnungen

Bezeichnungen am Einzelkristall :

$\sigma_{ij}$	Spannungstensor
$S_{ij}$	Spannungsdeviator
$\sigma_1, \sigma_2$	Hauptspannungen
$\tau^{(n)}$	bezogene Schubspannung
$\tau_0^{(n)}$	Fließspannung
$F^{(n)}$	Fließbedingung
$h^{mm}, h$	Verfestigungsparameter
$\epsilon_{ij}$	Verzerrungstensor
$\gamma^{(n)}$	Gleitung
$\underline{m}^{(n)}$	Normalen-Einheitsvektor der Gleitebene
$\underline{n}^{(n)}$	Einheitsvektor in Gleitrichtung
$d_{ij}^{(n)}$	Orientierungsmatrix
$C_{ij}$	Transformationsmatrix
$\beta, \eta, \varphi$	Euler Winkel

Bezeichnungen am Vielkristall :

$\bar{\sigma}_{ij}$	Spannungstensor
$\bar{s}_{ij}$	Spannungsdeviator
$\bar{\epsilon}_{ij}$	Verzerrungstensor
$\sigma_0$	Fließspannung
$\sigma$	Spannung im Zugversuch
$\tau$	Spannung im Torsionsversuch
$\epsilon$	Dehnung im Zugversuch
$\epsilon_0$	Dehnung an der Fließgrenze
$\gamma$	Scherwinkel im Torsionsversuch
$\gamma_0$	Scherwinkel an der Fließgrenze
$U$	Geschwindigkeit in Längsrichtung
$V$	Geschwindigkeit in Umfangsrichtung
$\Delta Q_{ij}$	Belastungszuwachs
$C$	Wellengeschwindigkeit
$C_1$	Geschwindigkeit elastischer Längswellen



$C_2$	Geschwindigkeit elastischer Scherwellen
$E_{ijrs}$	Elastizitätstensor
$M_{ijrs}$	Nachgiebigkeitstensor
$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Gleitmodul
$K$	Kompressionsmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\rho$	Dichte

## 1. Einführung

Die verschiedenen Modelle, die zur Beschreibung inelastischen Werkstoffverhaltens verwendet werden, können in zwei Gruppen eingeteilt werden.

1. 'phänomenologische Modelle', in denen lediglich die äußeren, makroskopischen Erscheinungen beschrieben werden und Vorgänge im atomaren, mikroskopischen Bereich, wie z.Bsp. die Veränderungen des Kristallgitters nur insoweit erfaßt werden, als sie die makroskopischen Vorgänge summarisch beeinflussen.

2. 'physikalische Modelle', in denen Ansätze gemacht werden, um makroskopische Erscheinungen aus bekanntem Verhalten im mikroskopischen Bereich zu erklären.

Bei der Lösung von technischen Problemen werden die auftretenden inelastischen Formänderungen fast immer mit Hilfe einer phänomenologischen Theorie beschrieben, da sie auf relativ einfache Gleichungen führt, deren Auflösung entweder geschlossen oder ohne allzu großen numerischen Rechenaufwand möglich ist. Die Modelle dieser Art haben jedoch mehrere Nachteile. Sie sind für einachsige Spannungszustände einfach aufstellbar; beim Übergang zu mehrachsigen Spannungszuständen müssen allerdings einige physikalisch ungesicherte Annahmen gemacht werden. Außerdem werden die Kenntnisse über das Materialverhalten im mikroskopischen Bereich nicht verwertet.

Die physikalischen Modelle besitzen diese Nachteile nicht; jedoch sind für die Beschreibung des Materialverhaltens selbst bei einfachen Belastungsvorgängen

sehr umfangreiche, große Speicherkapazität erfordernde Berechnungen notwendig. Dies rührt daher, daß das Verhalten eines jeden einzelnen Kristalles, aus denen ein Vielkristall sich aufbaut, über die ganze Belastungsgeschichte verfolgt werden muß.

Trotz dieses Nachteils wird in der vorliegenden Arbeit ein solches Modell verwendet, um zu sehen, ob mit ihm gewisse Effekte, die in Experimenten beobachtet wurden, besser erklärt werden können, als es durch die übliche phänomenologische Theorie möglich ist.

Die ersten Modelle zur physikalischen, geschwindigkeitsunabhängigen Plastizitätstheorie wurden von TAYLOR [1], BISHOP und HILL [2] und BATDORF und BUDIANSKY [3] vorgeschlagen. Während in [1,2] sowohl für jeden als starrplastisch angenommenen Einzelkristall wie auch für den Vielkristall die gleiche homogene plastische Formänderung angenommen wird, wird in [3] der Spannungszustand als homogen vorausgesetzt. Diese Ansätze erfüllen entweder nicht die Gleichgewichtsbedingungen am Vielkristall [1,2] oder sie verletzen die Kompatibilität zwischen den einzelnen Kristallen [3]. Dies führt zu einer oberen bzw. unteren Grenze für das wirkliche Fließverhalten.

Eine wesentliche Verbesserung liefert das sogenannte selbst-konsistente Modell, das von KRÖNER [4] und BUDIANSKY und WU [5] entwickelt wurde und in dieser Arbeit verwendet wird. Dieses Modell läßt unterschiedliche Spannungen und Deformationen in jedem einzelnen Kristall zu und bestimmt die makroskopischen Größen des Vielkristalls durch Mittelwert-

bildung. Der Einzelkristall wird als ein sphärischer Einschluß in einer elasto-plastischen Matrix gesehen, deren Spannungs-Dehnungsverhalten dem Durchschnittsverhalten der einzelnen Kristalle entspricht.

Wegen des großen numerischen Aufwandes wurden bisher mit diesem Modell lediglich Berechnungen durchgeführt für reine Zug- bzw. reine Scherbeanspruchung, [5,6] . In [7] hat der Verfasser eine effiziente Berechnungsmethode vorgeschlagen und für ideal-plastische Einzelkristalle am Zugversuch angewendet. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode, die auf dem Simplex Algorithmus der Linearen Programmierung beruht, erweitert, um mehrachsige Spannungszustände und verschiedene Arten der Einzelkristallverfestigung betrachten zu können.

In den Kapiteln 2 und 3 wird das Stoffgesetz des Einzelkristalls beschrieben und der Übergang zum Vielkristall entsprechend [5] erläutert. Das numerische Verfahren wird in Kapitel 4 dargestellt. Anschließend werden in Kapitel 5 einige hiermit mögliche numerische Berechnungen für einen ebenen Spannungszustand durchgeführt und die Ergebnisse zur Beurteilung des Stoffgesetzes mit experimentellen Resultaten von NAGHDI u.a. [8] verglichen. Hier ist die Anisotropie der Fließbedingung des Vielkristalls bei ansteigender Belastung von besonderer Bedeutung.

Als wesentliche Anwendung des Stoffgesetzes und als Test seiner Gültigkeit für komplexe Belastungsgeschichten werden in den Kapiteln 6 und 7 gekoppelte plastische Längs- und Scherwellen in einem dünnwandigen Rohr untersucht und mit experimentellen Ergebnissen und theoretischen Lösungen nach der phänomenologischen Theorie verglichen.

Dieses Problem ist eines der wenigen in der dynamischen Plastizität, das sowohl analytischer als auch experimenteller Behandlung zugänglich ist und wurde daher von einer Vielzahl von Autoren untersucht.

LIPKIN und CLIFTON [9] führten Experimente an Rohren aus Aluminium durch. Für die Belastungsbedingungen, bestehend aus einem statischen Torsionsmoment, gefolgt von einem Impuls in Längsrichtung des Rohres, wurden zwei Arten von plastischen Wellen beobachtet. CLIFTON [10] nannte in seiner analytischen Lösung für geschwindigkeitsunabhängiges, isotropes, arbeitsverfestigendes Werkstoffverhalten diese zwei Wellenarten schnelle und langsame Wellen, je nachdem ob die Wellengeschwindigkeit größer oder kleiner als die elastische Scherwellengeschwindigkeit ist. Diese Lösung wurde von LIPKIN und CLIFTON [11] erweitert auf allgemeine Klassen von stetigen Fließbedingungen. Speziell für kinematische Verfestigung wurden numerische Ergebnisse erhalten. GOEL und MALVERN [12] gaben Lösungen für das gleiche Problem an für ein Material, das sowohl isotrop als auch kinematisch verfestigt.

Die theoretischen Aussagen [10,11,12] stimmen mit den Experimenten insofern überein, als sie zwei Arten von gekoppelten Wellen vorhersagen, die die allgemeinen charakteristischen Merkmale der beobachteten Wellen haben. Es zeigen sich jedoch wesentliche qualitative und quantitative Unterschiede. Insbesondere ergeben die analytischen Lösungen einen zeitlichen Bereich zwischen den schnellen und den langsamen Wellen, in dem die Spannungen und Verzerrungen konstant sind, was in den Experimenten nicht beobachtet werden konnte. Als mög-

liche Erklärung für die Unterschiede wurde in [9,11] einmal die Art der verwendeten Verfestigungsgesetze genannt, die möglicherweise nicht geeignet sind, wirkliches Werkstoffverhalten längs des komplexen dynamischen Belastungsweges zu beschreiben. Weiterhin wurde das Fehlen des konstanten Bereiches im Experiment auf die in der Theorie nicht berücksichtigte Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materials zurückgeführt. Diese Erklärung ist jedoch nicht ganz befriedigend, da sich gerade Aluminium relativ geschwindigkeitsunabhängig verhält. Die Spannungs-Dehnungskurve (Änderung des Tangentenmoduls) zeigt selbst bei größeren Schwankungen der Belastungsgeschwindigkeit qualitativ nur geringe Veränderungen. (LINDHOLM [13])

Vor kurzem haben WU und LIN [14] das gleiche Problem unter Verwendung der 'endochronischen' Theorie gelöst - einer zeitunabhängigen Theorie, die nicht das Konzept einer Fließbedingung benutzt. In ihren Ergebnissen ist der Bereich konstanter Spannungen und Verzerrungen in Übereinstimmung mit den Experimenten praktisch vernachlässigbar.

Die vorliegende Arbeit soll nun ein weiterer Beitrag zu der Frage sein, ob ein geschwindigkeitsunabhängiges Stoffgesetz geeignet ist, die experimentellen Beobachtungen in [9] für einen weiten Bereich von Torsionsmomenten und Stoßgeschwindigkeiten vorherzusagen.

## 2. Stoffgesetz für den Einzelkristall

### 2.1. Allgemeines

Das Stoffgesetz stellt die Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten dar.

Die makroskopisch beobachteten Formänderungen eines kristallinen Werkstoffes sind das Ergebnis zahlloser reversibler und irreversibler Prozesse im mikroskopischen Bereich der einzelnen Kristalle.

Ein Kristall ist dadurch gekennzeichnet, daß die einzelnen Atome oder Moleküle streng in einem Raumgitter geordnet sind. Zwei im wesentlichen unabhängige atomistische Mechanismen tragen zu den Formänderungen eines Kristalles bei:

1. eine reversible (elastische) Verzerrung des Raumgitters
2. eine irreversible (plastische) Gleitung von Teilen des Kristalles, durch die die Geometrie des Raumgitters nicht verändert wird.

Eine theoretische Beschreibung dieser Prozesse ist nur möglich nach Einführung entscheidender Annahmen und Vereinfachungen. So wird im weiterem auf eine Erklärung der atomistischen Vorgänge ganz verzichtet. Ausgangspunkt ist vielmehr ein von der Versetzungstheorie nahegelegtes Modell zur Beschreibung des Stoffverhaltens eines Einzelkristalls.

In dieser Arbeit werden die Verschiebungen und Verzerrungen als klein angesehen; das Gleichgewicht

wird für das unverformte Element angeschrieben;  
Temperatureinflüsse bleiben unberücksichtigt.  
Die Darstellung der Tensoren erfolgt in einem raum-  
festen kartesischen Koordinatensystem mit den Basis-  
vektoren  $\underline{e}_i (i = 1, 2, 3)$ .

## 2.2 Elastische Formänderungen

Wir wollen annehmen, daß der Einzelkristall sich  
elastisch isotrop verhält. Der Zusammenhang zwischen  
den Spannungen  $\underline{\sigma}_{ij}$  und den elastischen Verzerrungen  $\underline{\varepsilon}_{ij}^e$   
ist dann durch die umkehrbar eindeutige Beziehung  
(verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz )

$$\underline{\sigma}_{ij} = 2G \left( \underline{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \underline{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \right) + K \underline{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \quad (2.1)$$

gegeben.

$\delta_{ij}$  ist das Kronecker - Symbol. Für den Kompressions-  
modul gilt

$$K = 2G \frac{1 + \nu}{3(1 - 2\nu)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.2)$$

wobei E den Elastizitätsmodul, G den Schubmodul und  $\nu$   
die Querkontraktionszahl beschreibt.

Die Annahme der elastischen Isotropie des Einzel-  
kristalls stimmt in guter Näherung für Aluminium-  
kristalle. Der maximale Wert des Elastizitätsmoduls  
beträgt  $E_{max} = 7,7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ , der minimale Wert be-  
trägt  $E_{min} = 6,4 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ , d.h.  $E_{max} / E_{min} \approx 1,2$  [15].  
Für Eisen ist das Verhältnis 2,2 , für Kupfer 2,8.  
Da im Vielkristall (Kapitel 3) die Verteilung der  
Einzelkristalle als regellos vorausgesetzt wird und



über alle Orientierungen gemittelt wird, bedeutet die Vernachlässigung der elastischen Anisotropie keine wesentliche Einschränkung.

## 2.3 Plastische Formänderungen

### 2.3.1 Allgemeines

Der Einzelkristall zeigt im Bereich plastischer Verformung stark anisotropes Verhalten. Zugversuche zeigen, daß bei Erreichen einer kritischen Spannung, ganz bestimmte Ebenen im Kristall in ganz bestimmten Richtungen voneinander abzugleiten beginnen. Die Größe der Gleitungen ist abhängig von der in Gleitrichtung auf der Gleitebene wirkenden Schubspannung und ist im wesentlichen unabhängig von der Spannung senkrecht zur Gleitebene.

Dieses Verhalten des Einzelkristalls wird in der Versetzungstheorie beschrieben. Versetzungen sind Inhomogenitäten im Aufbau eines Kristalls in der Form von Gitterfehlern; sie spielen für das plastische Verhalten die entscheidende Rolle. Die beobachteten Gleitebenen sind die Versetzungsebenen (im allgemeinen die Ebenen größter Atombichte), die Gleitrichtungen sind die Richtungen des Burgers - Vektors. Die Kraft, die notwendig ist, um eine Versetzungslinie zu bewegen, wird direkt proportional der Schubspannung auf der Gleitebene in Richtung des Burgers - Vektors angenommen.

Es ist jedoch nicht einfach möglich, das so durch die Versetzungstheorie beschriebene Verhalten und

schon gar nicht die am Einzelkristall gemessenen Stoffparameter auf Kristalle zu übertragen, die miteinander verbunden einen Vielkristall bilden.

Die Korngrenzen zwischen den Kristallen haben einen wesentlichen Einfluß auf das plastische Verhalten. Sie begrenzen die Größe der Versetzungen, ändern dadurch die Verfestigung und bewirken die Ausbildung von Eigenspannungen im Inneren des Vielkristalls, durch die sich die Einzelkristalle gegenseitig beeinflussen. Oberflächenkristalle verhalten sich demnach anders als Kristalle im Inneren des Materials.

Über die genauen Auswirkungen der Korngrenzen auf das Verhalten des Einzelkristalles ist wenig bekannt. Es ist deshalb üblich, vereinfachende Annahmen über das Fließen des Kristalls zu treffen, die nicht im Widerspruch zur Versetzungstheorie stehen, und die Stoffparameter wie Fließgrenze und Verfestigungsparameter für den Einzelkristall so zu bestimmen, daß das im Experiment am Vielkristall ermittelte Spannungs-Dehnungsverhalten möglichst gut angenähert wird.

Das Stoffgesetz der plastischen Deformation besteht wie in der phänomenologischen Theorie im einzelnen aus :

1. der Fließbedingung mit der Belastungsbedingung
2. dem Formänderungsgesetz
3. dem Verfestigungsgesetz

### 2.3.2 Fließbedingung

Grundlage für die Aufstellung der Fließbedingung ist das auf beliebige Spannungszustände erweiterte Schmidt'sche Schubspannungsgesetz ( SCHMIDT [16] , KOCKS [17] ): In einem Kristall treten Gleitungen längs eines möglichen Gleitsystems auf, wenn die auf Gleitebene und Gleitrichtung bezogene Schubspannung den kritischen Wert  $\tau_0$  , d.h. die Fließspannung des Gleitsystems erreicht.

Die Anzahl und Lage der möglichen Gleitsysteme ist von der Kristallstruktur ( kubisch-raumzentriert, kubisch- flächenzentriert u.s.w.) abhängig.

Im kartesischen Koordinatensystem wird die Orientierung des n-ten Gleitsystems festgelegt durch den Normalenvektor der Gleitebene  $\underline{m}$  und dem in der Gleitebene liegenden Einheitsvektor in Gleitrichtung  $\underline{n}$  ( Abb. 2-1 ).

Wir setzen einen homogenen Spannungszustand  $\sigma_{ij}$  im Kristall voraus. Die auf das n-te Gleitsystem bezogene Schubspannung beträgt

$$\tau^{(n)} = \sigma_{ij} m_i^{(n)} n_j^{(n)} \quad (2.3)$$

oder mit

$$d_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} ( m_i^{(n)} n_j^{(n)} + m_j^{(n)} n_i^{(n)} ) \quad (2.4)$$

$$\tau^{(n)} = \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)} \quad (2.5)$$

Ein hydrostatischer Spannungszustand erzeugt keine

bezogene Schubspannung, da  $d_{ii}^{(n)} \equiv 0$ .

Es gilt daher auch

$$\tau^{(n)} = s_{ij} d_{ij}^{(n)} \quad (2.6)$$

wobei  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  der Spannungsdeviator ist.

Ist N die Anzahl der möglichen Gleitsysteme eines Kristalles, so ergeben sich N Fließbedingungen der Form

$$F^{(n)} = \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)} - \tau_o^{(n)} = 0 \quad n=1,2,\dots,N \quad (2.7)$$

Das n-te Gleitsystem heißt aktiv, wenn der Spannungszustand die n-te Fließbedingung erfüllt und zugleich die Spannungsänderung der Belastungsbedingung

$$\dot{F}^{(n)} = \dot{\sigma}_{ij} d_{ij}^{(n)} - \dot{\tau}_o^{(n)} = 0 \quad (2.8)$$

genügt.

Ein Gleitsystem heißt passiv, wenn  $F^{(n)} < 0$

oder  $F^{(n)} = 0$  und  $\dot{F}^{(n)} < 0$  ist.

Die Änderung der kritischen Schubspannung  $\dot{\tau}_o^{(n)}$  wird durch das Verfestigungsgesetz ( Abschnitt 2.3.4. ) bestimmt.

Viele Metalle ( z. Bsp. Aluminium, Kupfer ) bilden kubisch-flächenzentrierte ( KFZ ) Kristalle. Diese Kristallart wollen wir hier ausschließlich betrachten.

In Abb. 2-2 ist eine Elementarzelle eines KFZ-Kristalles dargestellt. Eine Elementarzelle gibt die Anordnung einer Gruppe von Atomen an, durch deren periodische

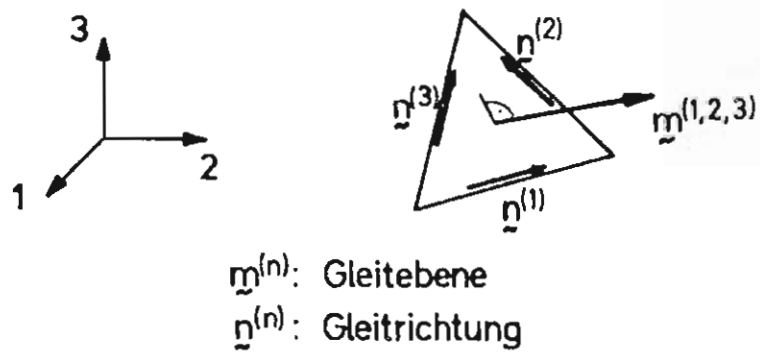


Abb. 2-1 Beschreibung von Gleitsystemen

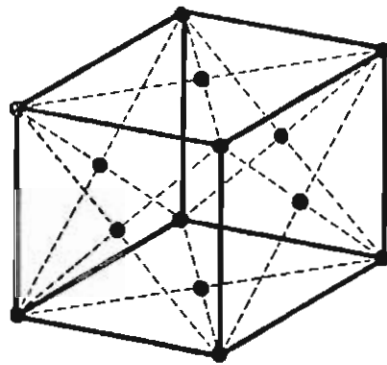


Abb. 2-2 Elementarzelle des KFZ - Kristalls

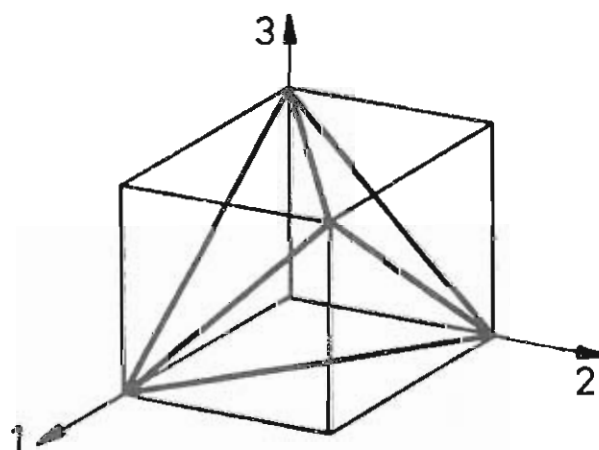


Abb. 2-3 Gleitebenen im KFZ - Kristall

Wiederholung ein Kristall aufgebaut wird. Kennzeichnend für die KFZ-Zelle ist, daß neben den Atomen in den Ecken auch jede Seitenfläche ein Atom besitzt. Die Ebenen mit der dichtesten Atomlagerung, d.h. der größten Versetzungsdichte, sind die möglichen Gleitebenen. Sie bilden die Flächen eines regelmäßigen Tetraeders, der in den Kubus des Gitters einbeschrieben wird. (Abb. 2-3; je 6 Atome)

Zu jeder Ebene gehören drei parallel zu den Kanten gerichtete Gleitrichtungen (je 3 Atome). Die sich ergebenden 12 Gleitsysteme und die auf sie bezogenen Schubspannungen  $\tau^{(n)} = \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)}$  sind in Tabelle 2-1 zusammengestellt.

Da zur Bestimmung des Spannungsdeviators lediglich fünf Maßzahlen benötigt werden, können nur fünf der 12 Schubspannungen  $\tau^{(n)}$  unabhängig voneinander gewählt werden.

Ist der Kristall anders als in Abb. 2-3 orientiert, fallen also die Kristallachsen nicht mit dem Koordinatensystem  $\xi_i$  zusammen, müssen die Orientierungsmatrizen  $d_{ij}^{(n)}$  entsprechend transformiert werden.

$$\hat{d}_{ij}^{(n)} = c_{mi} d_{mn}^{(n)} c_{nj} \quad (2.9)$$

Die  $c_{ij}$  sind die Elemente der Transformationsmatrix, die bestimmt werden durch den Richtungskosinus

$$c_{ij} = \hat{e}_i \cdot \xi_j \quad (2.10)$$

wobei  $\hat{e}_i$  die Einheitsvektoren der Kristallachsen sind.

Äquivalent zur Transformation (2.9) ist es jedoch, wenn wir die Orientierung des Kristalles festhalten und den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  transformieren.

Gleitsystem	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	bezogene Schubspannung
1	1 1 1	0 1 -1	$\tau_{(1)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{22} - \sigma_{33} + \sigma_{12} - \sigma_{31})$
2	1 1 1	-1 0 1	$\tau_{(2)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{12} + \sigma_{23})$
3	1 1 1	1 -1 0	$\tau_{(3)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{23} + \sigma_{31})$
4	-1 -1 1	0 -1 -1	$\tau_{(4)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{22} - \sigma_{33} + \sigma_{21} + \sigma_{12})$
5	-1 -1 1	1 0 1	$\tau_{(5)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{12} - \sigma_{23})$
6	-1 -1 1	-1 1 0	$\tau_{(6)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + \sigma_{23} - \sigma_{31})$
7	-1 1 1	0 1 -1	$\tau_{(7)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{21} + \sigma_{31})$
8	-1 1 1	1 0 1	$\tau_{(8)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{33} - \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{23})$
9	-1 1 1	-1 -1 0	$\tau_{(9)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{23} - \sigma_{31})$
10	1 -1 1	0 -1 -1	$\tau_{(10)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{12} - \sigma_{31})$
11	1 -1 1	-1 0 1	$\tau_{(11)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{33} - \sigma_{11} + \sigma_{12} - \sigma_{23})$
12	1 -1 1	1 1 0	$\tau_{(12)} = 1/\sqrt{6} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + \sigma_{23} + \sigma_{31})$

Tabelle 2-1

$$\begin{aligned} \tau^{(n)} &= \delta_{ij} C_{mi} d_{mn}^{(n)} C_{mj} \\ &= C_{im} \delta_{mn} C_{jn} d_{ij}^{(n)} = \hat{\delta}_{ij} d_{ij}^{(n)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Orientierung des neuen Koordinatensystems  $\hat{e}_i$  wird hier zweckmäßig gegenüber den alten  $e_i$  durch die Angabe der Euler - Winkel  $\beta, \eta, \varphi$  ( Abb. 2-4) beschrieben.

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix zu

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \sin \eta ; & -\sin \varphi \sin \beta - \cos \varphi \cos \beta \cos \eta ; & \cos \varphi \sin \beta - \sin \varphi \cos \beta \cos \eta \\ \sin \beta \sin \eta ; & \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta \cos \eta ; & -\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta \cos \eta \\ \cos \eta ; & \cos \varphi \sin \eta ; & \sin \varphi \sin \eta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Um alle möglichen unterschiedlichen Orientierungen des Kristalls zu erhalten, ist es nicht nötig, die Euler - Winkel alle Werte von  $0 - 2\pi$  durchlaufen zu lassen. Wegen der Symmetrie des KFZ - Kristalles genügt es die Winkel  $\beta$  und  $\eta$  über eines der 24 ähnlichen sphärischen Dreiecke zu variieren, die in stereographischer Projektion in Abb. 2-5 dargestellt sind (TAYLOR and ELAM, [18] ).

Die Dreiecke sind begrenzt durch die Großkreise, gebildet aus dem Schnitt der Halbkugeloberfläche ( $r = 1$ ) mit den Koordinatenebenen des Koordinatensystems  $e_i$  und den Ebenen, die einen Winkel von  $\pi/4$  zu den Koordinatenebenen bilden.

Somit ist die Begrenzung des Dreiecks ABC gegeben durch:



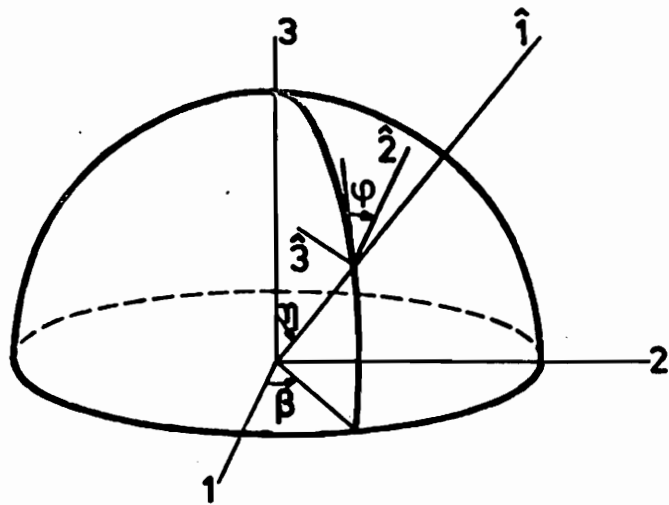


Abb. 2-4 Euler - Winkel zur Orientierung der Kristalle im 1,2,3 - System

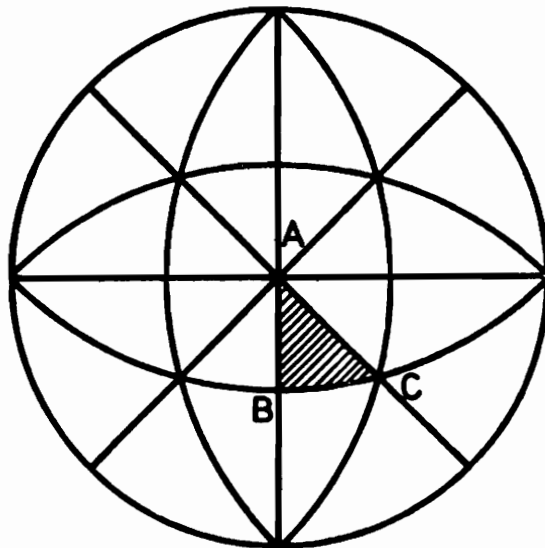


Abb.2-5 Stereographische Projektion des KFZ - Kristalls

$$A B : \quad \beta = 0$$

$$A C : \quad \beta = \pi/4$$

$$B C : \quad \tan \eta = 1/\cos \beta$$

$$A : \quad \beta = 0 \quad \eta = 0$$

$$B : \quad \beta = 0 \quad \eta = \pi/4$$

$$C : \quad \beta = \pi/4 \quad \eta = \arctan \sqrt{2} = 0,304 \pi$$

Den Winkel  $\mathcal{Y}$  müssen wir von  $0 - \pi$  variieren.

Um die Anisotropie eines Kristalles zu verdeutlichen, wird in Abb. 2-6 die Fließbedingung (2.7) für einen ebenen Hauptspannungszustand  $\sigma_1, \sigma_2$  für fünf verschiedene Kristallorientierungen dargestellt. Zum Vergleich ist die Tresca'sche Fließbedingung für einen isotropen Werkstoff eingezeichnet. Es wird hierbei angenommen, daß die kritische Schubspannung für alle Gleitsysteme identisch ist und den gleichen Wert hat wie die kritische Schubspannung des isotropen Werkstoffs. Bemerkenswert ist die starke Festigkeitssteigerung, die für ein festes Spannungsverhältnis durch die Wahl der Orientierung eines Kristalls erreicht werden kann. (Texturverfestigung)

Zu jedem Spannungsverhältnis  $\mathcal{X} = \sigma_2/\sigma_1$  gibt es zwei ausgezeichnete Orientierungen. Die eine liefert einen unteren, die andere einen oberen Grenzwert für den Fließbeginn.

Die Gesamtheit der unteren Grenzwerte bildet die

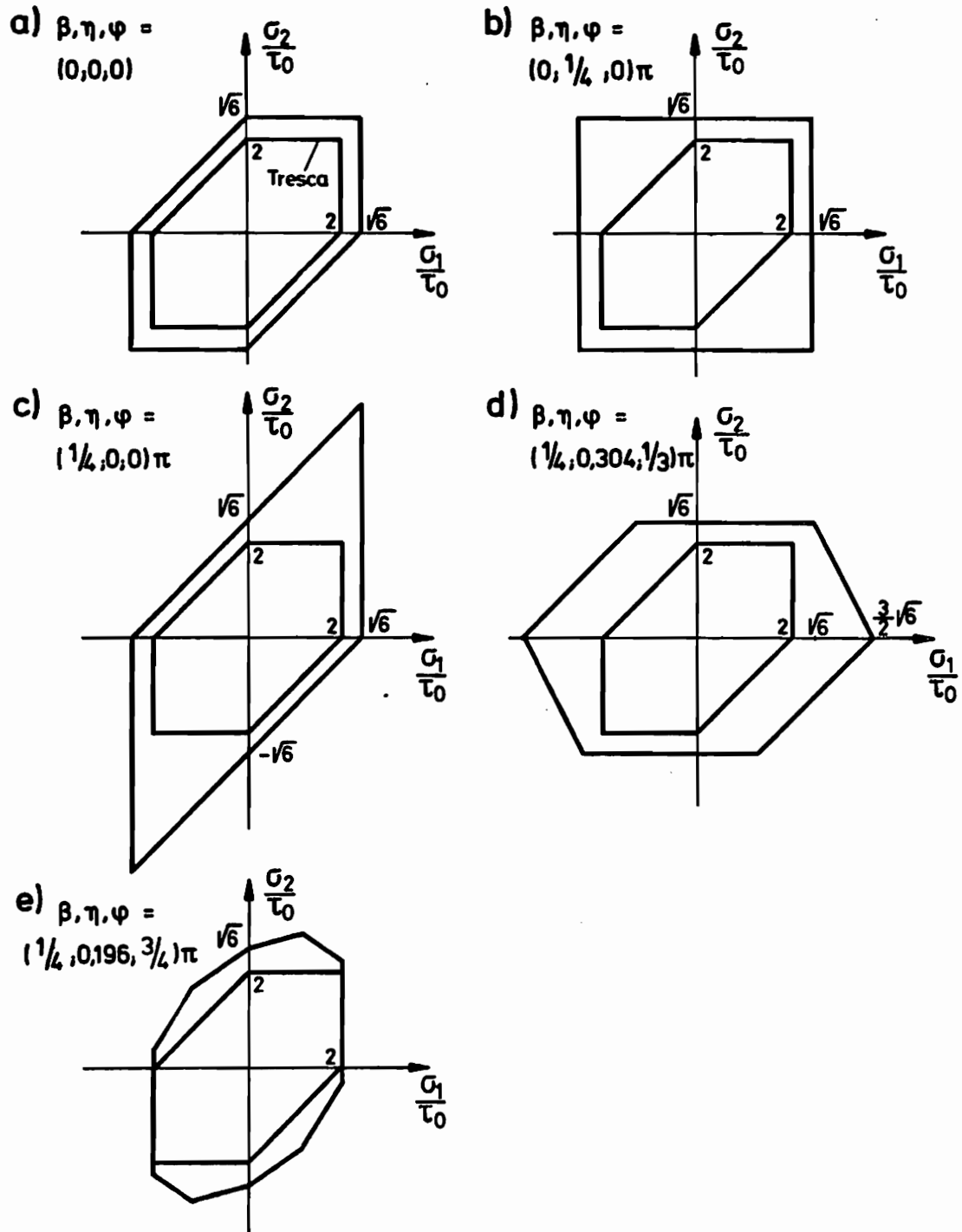


Abb. 2 - 6 Fließbedingungen für einige Kristallorientierungen

Tresca'sche Fließbedingung ( $|\tau_{max}| = \tau_0$ )

Abb. 2-7. Kein Gleitsystem kann aktiv werden, wenn die größte im Kristall auftretende Schubspannung kleiner als  $\tau_0$  ist.

Die Gesamtheit der oberen Grenzwerte liefert eine Kurve, die numerisch berechnet wird.

Mit

$$\tau^{(n)} = \sigma_1 d_{11}^{(n)} + \sigma_2 d_{22}^{(n)} = \sigma_1 (d_{11}^{(n)} + \mathcal{H} d_{22}^{(n)}) \quad (2.13)$$

$$n = 1, \dots, 12$$

ist der Fließbeginn  $\sigma_{10}$  bei festem  $\mathcal{H}$  für einen Kristall bestimmt durch

$$|\sigma_{10}| = \frac{\tau_0}{\max_n |d_{11}^{(n)} + \mathcal{H} d_{22}^{(n)}|} \quad (2.14)$$

Der obere Grenzwert  $|\sigma_{10}|_{max}$  wird gefunden, indem man den Kristall alle möglichen Orientierungen annehmen läßt.

$$|\sigma_{10}|_{max} =$$

$$\max_{\beta, \eta, \gamma} \frac{\tau_0}{\max_n |c_{m1} d_{mn}^{(n)} c_{n1} + \mathcal{H} c_{m2} d_{mn}^{(n)} c_{n2}|} \quad (2.15)$$

$$\beta = 0 \div \pi/4, \quad \eta = 0 \div 0,304 \pi, \quad \gamma = 0 \div \pi$$

$$n = 1, \dots, 12$$

aus Symmetriegründen gilt:  $1 \geq \mathcal{H} \geq -1$

Für jeden Wert  $\alpha$  wurde (2.15) für diskrete Werte der Euler-Winkel ausgewertet. Als Schrittweite wurde

$$\Delta \beta = \Delta \eta = \Delta \gamma = \frac{\pi/4}{40}$$

gewählt. Das Ergebnis ist in Abb. 2-7 dargestellt. Eine Halbierung der Schrittweite brachte keine in der Darstellung bemerkbare Veränderung. Jeder Punkt der Kurven gehört zu einer anderen Kristallorientierung, der jeweils günstigsten bzw. ungünstigsten.

### 2.3.3 Formänderungsgesetz

Wir nehmen an, daß im Kristall ein homogener Verzerrungszustand herrscht.

Bezeichnen wir mit  $\dot{\gamma}^{(n)}$  die plastische Schergeschwindigkeit des n-ten Gleitsystems, dann ergibt sich die plastische Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  als Summe der Schergeschwindigkeiten aller Gleitsysteme bezogen auf das Koordinatensystem  $\underline{x}_i$ .

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_{n=1}^{12} \dot{\gamma}^{(n)} d_{ij}^{(n)} \quad (2.16)$$

Einer positiven oder negativen bezogenen Schubspannung entspricht eine positive oder negative Schergeschwindigkeit  $\dot{\gamma}^{(n)}$ .

Es erweist sich als zweckmäßig lediglich nicht-negative  $\dot{\gamma}^{(n)}$  und nicht-negative  $\tau^{(n)}$  zuzulassen. Um dies zu erreichen, verdoppeln wir die Anzahl der möglichen Gleitsysteme auf 24, indem wir

$$d_{ij}^{(n+12)} = -d_{ij}^{(n)} \quad (2.17)$$

$$n = 1, \dots, 12$$

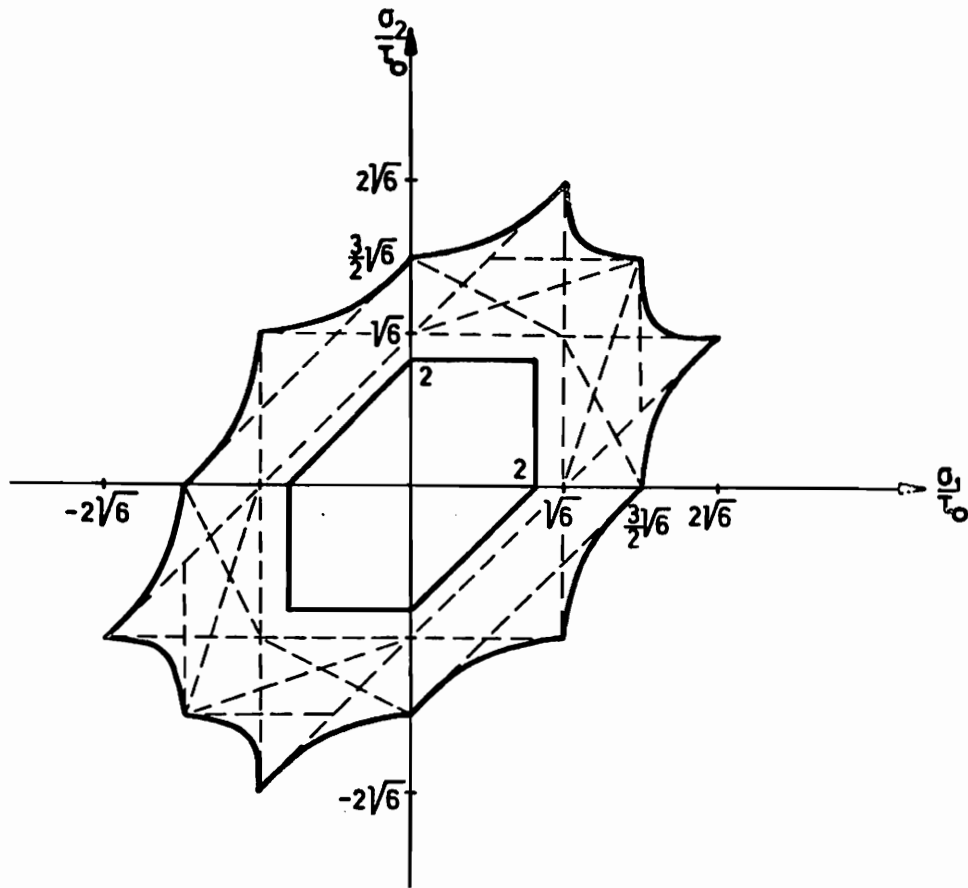
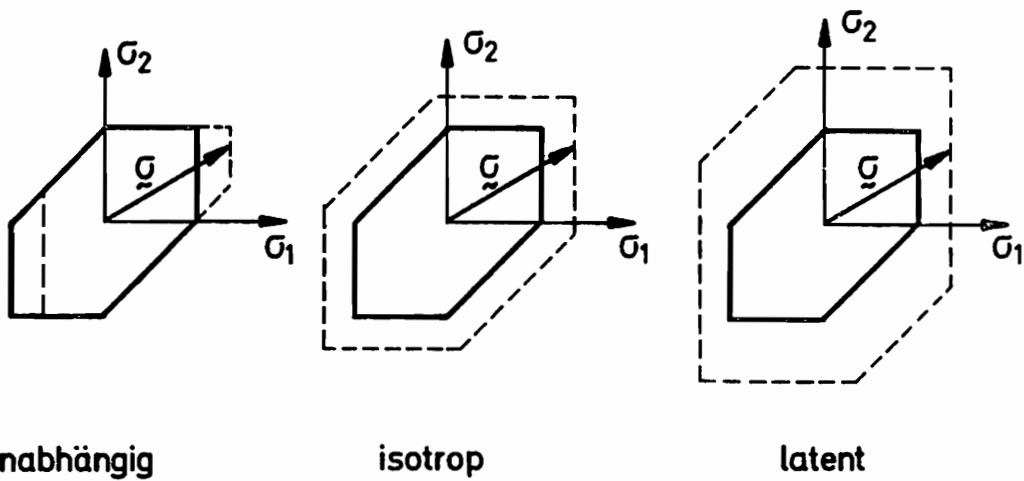


Abb.2-7 Untere u. obere Grenze für den Fließbeginn



unabhängig

isotrop

latent

Abb.2-8 Verfestigungsansätze (schematisch)

bilden. Damit wird aus (2.16)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_{n=1}^{24} \dot{\gamma}^{(n)} d_{ij}^{(n)} \quad (2.18)$$

oder mit (2.7)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_{n=1}^{24} \dot{\gamma}^{(n)} \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.19)$$

Die  $\dot{\gamma}^{(n)}$  sind nicht-negative skalarwertige Faktoren. Jeweils eine der beiden Schergeschwindigkeiten  $\dot{\gamma}^{(n+12)}$  oder  $\dot{\gamma}^{(n)}$  ist identisch null. Wir können die einzelnen  $\dot{\gamma}^{(n)}$  aus der Forderung bestimmen, daß die n-te Fließbedingung während der plastischen Deformation stets erfüllt bleibt.

$$\dot{F}^{(n)} = 0 \quad (2.20)$$

Das Formänderungsgesetz (2.19) mit (2.20) hat die allgemeine Form wie sie von KOITER [19] unter Zugrundelegung der Theorie des verallgemeinerten plastischen Potentials für Fließbedingungen, die sich aus mehreren Funktionen zusammensetzen, angegeben wurde. Geometrisch bedeutet dies, daß der Vektor der Verzerrungsgeschwindigkeit bei einem aktiven Gleitsystem in die äußere Normale der zugehörigen Fließfläche weist, während er bei Aktivierung mehrerer Gleitsysteme in dem Kegel liegt, der von den äußeren Normalen der entsprechenden Fließflächen aufgespannt wird.

### 2.3.4 Verfestigungsgesetz

Die experimentellen Erkenntnisse über die Verfestigung eines Einzelkristalls, der in einen Vielkristall eingebettet ist, sind bisher sehr unbefriedigend und keinesfalls einheitlich. ( KOCKS und BROWN [20] , JACKSON und BASINSKY [21] )

Wir wollen uns deshalb hier mit sehr einfachen Ansätzen begnügen.

Nach HILL [22] nehmen wir als ein allgemeines Verfestigungsgesetz des Kristalles

$$\tau_0^{(n)} = \tau_0 + \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \gamma^{(m)} \quad (2.21)$$

oder

$$\dot{\tau}_0^{(n)} = \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \dot{\gamma}^{(m)}$$

$\tau_0$  bezeichnet die anfängliche Fließspannung. Die Elemente der Matrix  $h^{nm}$  sind im allgemeinen Funktionen der Deformationsgeschichte. Sie sollen hier aber als konstant angenommen werden.

Dieser Ansatz ermöglicht eine Kopplung zwischen der Gleitung eines Systems und der Verfestigung eines anderen; ein Zusammenhang, der im Experiment beobachtet wurde. [21]

In dieser Arbeit werden Berechnungen mit drei einfachen typischen Formen von (2.21) durchgeführt.



1. 'Unabhängige' Verfestigung (KOITER [19] )

Die Matrix  $h^{nm}$  ist eine Diagonalmatrix

$$h^{nm} = h \delta^{nm}, \quad h = \text{const.} \quad (2.22)$$

und  $\dot{\tau}_o^{(n)} = h \dot{\gamma}^{(n)}$

Die Fließspannung eines Gleitsystems steigt proportional zu seiner Gleitung und ist unabhängig von der Gleitung der anderen Systeme.

2. 'Isotrope' Verfestigung (TAYLOR [1] )

$$h^{nm} = h = \text{const.} \quad \text{für alle } n, m$$

$$\dot{\tau}_o^{(n)} = h \sum_{m=1}^{24} \dot{\gamma}^{(m)} \quad (2.23)$$

Die Fließspannungen aller Gleitsysteme eines Kristalles bleiben gleich und wachsen linear mit der Summe der Gleitungen der einzelnen Systeme.

3. 'Latente' Verfestigung

$$h^{nm} = c^{(n)} \cdot h, \quad h = \text{const.}$$

$$\dot{\tau}_o^{(n)} = c^{(n)} \cdot h \sum_{m=1}^{24} \dot{\gamma}^{(m)} \quad (2.24)$$

$$c^{(n)} = \frac{1}{2}$$

für aktive Gleitsysteme  
und alle nichtaktiven  
Gleitsysteme, die koplanar  
mit den aktiven sind.

$$c^{(n)} = 1$$

für die übrigen nicht-  
aktiven Systeme.

Neuere experimentelle Untersuchungen [21] deuten darauf hin, daß dieser Ansatz, bei dem die Verfestigung auf Gleitebenen mit nicht-aktiven Systemen stärker ist als auf Ebenen mit aktiven Systemen, dem wirklichen Verhalten am nächsten kommt.

Ein ' Bauschinger - Effekt ' für die einzelnen Gleitsysteme kann leicht für ' unabhängige ' Verfestigung berücksichtigt werden, und zwar so, daß ein Anwachsen der Fließspannung auf dem n-ten System um  $h \cdot \gamma^{(n)}$  eine Reduzierung auf dem entgegengesetzten System um den gleichen Betrag bewirkt.

Bei ' isotropem ' bzw. ' latentem ' Verfestigungsansatz würde ein solcher Bauschinger - Effekt im Widerspruch zur Annahme der Gleichheit der Fließspannungen aller Systeme bzw. aller koplanarer Systeme stehen und wird daher nicht berücksichtigt. Der hier genannte Bauschinger - Effekt ist nicht zu verwechseln mit dem Bauschinger - Effekt, der bei gegensinniger Belastung eines Vielkristalls auftritt und durch Eigenspannungen zwischen den einzelnen Kristallen hervorgerufen wird.

In Abb. 2-8 sind die Merkmale der Verfestigungsansätze schematisch dargestellt.

#### 2.4 Eindeutigkeit des Stoffgesetzes

Fragen zur Eindeutigkeit der Lösungen, die sich aus dem Stoffgesetz des Einzelkristalls ergeben, sind von HILL [22] untersucht worden. Wir wollen hier die für die folgenden Berechnungen wesentliche Frage untersuchen, ob für die drei gewählten Verfestigungsansätze durch eine vorgegebene Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ij}$

die Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}_{ij}$  eindeutig bestimmt wird.

Es gilt

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.25)$$

Dann folgt aus dem Stoffgesetz für die elastischen Formänderungen mit  $E_{ijrs}$  als Elastizitätstensor

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijrs} (\dot{\epsilon}_{rs} - \dot{\epsilon}_{rs}^p) \quad (2.26)$$

oder

$$\dot{\sigma}_{ij} + E_{ijrs} \dot{\epsilon}_{rs}^p = E_{ijrs} \dot{\epsilon}_{rs}$$

Nehmen wir an, daß zwei verschiedene Lösungen existieren und bezeichnen wir mit  $\Delta (\dots)$  die Differenzen der entsprechenden Größen der beiden Lösungen, dann erhalten wir für vorgegebenes  $\dot{\epsilon}_{rs}$

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} + E_{ijrs} \Delta \dot{\epsilon}_{rs}^p = 0 \quad (2.27)$$

Skalarmultiplikation mit  $\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p$  ergibt

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p \Delta \dot{\sigma}_{ij} + \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p E_{ijrs} \Delta \dot{\epsilon}_{rs}^p = 0 \quad (2.28)$$

Da  $E_{ijrs}$  positiv definit ist, gilt für den rechten Term

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p E_{ijrs} \Delta \dot{\epsilon}_{rs}^p > 0 \quad (2.29)$$

für jede Matrix  $\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p$ , deren Elemente nicht alle Null sind. (z. Bsp. ZURMÜHL [23])

Für den linken Term folgt aus dem Formänderungsgesetz (2.18)

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p \Delta \dot{\sigma}_{ij} = \sum_{n=1}^{24} \Delta \dot{\gamma}^{(n)} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \lambda_{ij}^{(n)} \quad (2.30)$$

Wird das n-te Gleitsystem durch beide Spannungsgeschwindigkeiten aktiviert, dann ergibt die Belastungsbedingung (2.8)

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} \lambda_{ij}^{(n)} - \Delta \dot{\tau}_o^{(n)} = 0 \quad (2.31)$$

Wird das System nur durch eine der beiden  $\dot{\sigma}_{ij}$  aktiviert, gilt

$$\Delta \dot{\gamma}^{(n)} (\Delta \dot{\sigma}_{ij} \lambda_{ij}^{(n)} - \Delta \dot{\tau}_o^{(n)}) \geq 0 \quad (2.32)$$

und schließlich ist

$$\Delta \dot{\gamma}^{(n)} = 0 \quad , \quad (2.33)$$

wenn das System durch keine der beiden  $\dot{\sigma}_{ij}$  aktiviert wird.

Da nach (2.21)

$$\Delta \dot{\tau}_o^{(n)} = \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \Delta \dot{\gamma}^{(m)} \quad \text{ist,}$$

können wir mit (2.31 - 2.33) schließen

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p \Delta \dot{\sigma}_{ij} \geq \sum_{n=1}^{24} \sum_{m=1}^{24} \Delta \dot{\gamma}^{(n)} h^{nm} \Delta \dot{\gamma}^{(m)} \quad (2.34)$$

Ist die Matrix  $h^{nm}$  positiv semi - definit,

dann ist die rechte Seite nicht-negativ für alle  $\Delta \dot{\gamma}^{(n)}$   
d.h.

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p \Delta \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \quad (2.35)$$

Gleichung (2.28) ist also unter Beachtung von (2.29)  
nur erfüllt für

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (2.35a)$$

und damit folgt aus (2.27) auch

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (2.35b)$$

Die Gleichungen (2.35) zeigen, daß für eine positiv  
semi - definite Matrix  $h^{nm}$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}$  und  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$   
eindeutig durch  $\dot{\epsilon}_{ij}$  bestimmt werden.

Die Schergeschwindigkeiten  $\dot{\gamma}^{(n)}$  müssen jedoch nicht  
eindeutig bestimmt sein, da der Satz der aktiven  
Gleitsysteme lineare Abhängigkeiten enthalten kann.  
Sind mehr als fünf Systeme aktiv, besteht immer eine  
Abhängigkeit (Abschnitt 2.3.2). Die Eindeutigkeit ist  
nach HILL [22] nur gesichert, wenn  $h^{nm}$  positiv definit  
ist.

Für alle drei Verfestigungsansätze ist  $h^{nm}$  positiv  
semi - definit, wie leicht gezeigt werden kann. Hin-  
reichende Bedingung ist, daß alle Hauptunterdeterminan-  
ten  $\geq 0$  sind.

unabhängige Verfestigung :

$$\det \begin{vmatrix} h & & 0 \\ 0 & h & \\ & & h \dots \end{vmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{positiv definit}$$

isotrope und latente Verfestigung:

$$\det \begin{vmatrix} c^1 h & c^1 h \dots \\ \vdots & \vdots \\ c^m h & c^m h \dots \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^m c^i \det \begin{vmatrix} h & h \dots \\ h & h \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$  positiv semi - definit

### 3. Stoffgesetz für den Vielkristall

In diesem Abschnitt werden die Beziehungen zwischen den 'makroskopischen' Größen des Vielkristalls und den 'mikroskopischen' Größen des Einzelkristalls, wie sie in [4,5] von KRÖNER und BUDIANSKY und WU verwendet wurden, erläutert. Diese Beziehungen können das wirkliche Verhalten nur näherungsweise beschreiben.

Als Vielkristall wird ein idealisiertes vielkristallines Kontinuum angesehen, das eine sehr große Zahl von Kristallen enthält, deren Orientierungen statistisch regellos über das Kontinuum verteilt sind. Werkstoffe, die eine bevorzugte Kristallorientierung (Textur) haben, werden also ausgeschlossen. Ferner wird angenommen, daß die Anzahl der Oberflächenkristalle klein ist gegenüber der Anzahl der Kristalle im Inneren und daß der Einfluß der Korngrenzen zwischen den einzelnen Kristallen vernachlässigbar gering ist.

Das verwendete Modell beruht im wesentlichen auf einem Ergebnis, das von ESHELBY [24] erhalten wurde. ESHELBY betrachtet einen kugelförmigen isotropen Einschuß in einer unendlich ausgedehnten elastisch isotropen Matrix mit den gleichen elastischen Konstanten.

Erfährt der Einschuß die homogene plastische Deformation  $\varepsilon_{ij}^p$ , dann sind die Spannung  $\sigma_{ij}$  und die gesamte Formänderung  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$  homogen in dem Einschuß. Wenn  $\bar{\sigma}_{ij}$  der im Unendlichen aufgebraachte Spannungszustand ist, dann gilt

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \hat{G} \varepsilon_{ij}^p \quad (3.1)$$

$$\hat{G} = G \frac{2}{15} \frac{7 - 5\nu}{1 - \nu}$$

BUDIANSKY, HASHIN und SANDERS [25] haben diese Beziehung zur Beschreibung des plastischen Verhaltens des Vielkristalls verwendet. Der Einzelkristall wird als kugelförmiger Einschluß aufgefaßt, da die Kugelform der Mittelwert aller möglichen Kristallformen ist. Die Homogenität der plastischen Formänderung wurde bereits für das Stoffgesetz des Einzelkristalls angenommen. Die Beziehung (3.1) ist unter den genannten Voraussetzungen exakt gültig, solange nur ein Kristall plastisch deformiert wird, und als Näherung nur solange wie der Abstand zwischen den fließenden Kristallen groß ist und sie sich nicht wesentlich gegenseitig beeinflussen.

Bei stärkerem plastischen Fließen ist die gegenseitige Beeinflussung der Kristalle jedoch nicht mehr vernachlässigbar. Das Fließen eines Kristalles ruft in diesem Kristall die Eigenspannungen  $\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}$  hervor, die bestrebt sind das weitere Ansteigen der plastischen Formänderung zu behindern, während sie andererseits den Eintritt des Fließens in den Kristallen der Umgebung begünstigen.

Dies hat zur Folge, daß die plastischen Formänderungen das Bestreben zeigen, sich möglichst gleichmäßig über die Matrix zu verteilen.

In [4,5] wird diese Tatsache durch folgende Näherung berücksichtigt :

Die den Kristall umgebende unendliche Matrix verhält



sich weiterhin isotrop; sie erfährt jedoch zusätzlich zur elastischen Deformation die homogene plastische 'makroskopische' Deformation  $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ , wobei  $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$  der räumliche Mittelwert der plastischen Deformation der einzelnen Kristalle ist.

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^p dV \quad (3.2)$$

Mit dieser Annahme folgt aus (3.1)

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \hat{G} (\varepsilon_{ij}^p - \bar{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (3.3)$$

Dies ist die Grundgleichung des Modells von KRÖNER, BUDIANSKY und WU.

Das Modell ist selbstkonsistent, da sich nach (3.2) und (3.3) die Spannungen  $\sigma_{ij}$  in den Kristallen so einstellen, daß der räumliche Mittelwert gleich der von außen angelegten Spannung ist. ( HILL [26] )

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (3.4)$$

In inkrementeller Form lautet (3.3)

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \hat{G} (\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p) \quad (3.5)$$

Bei bekanntem Stoffgesetz für den Einzelkristall ist mit (3.2) und (3.5) die Beziehung zwischen  $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}$  und  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p$  gegeben. Die makroskopischen, elasto-plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten erhalten wir zu:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^e + \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p = (E_{ijrs})^{-1} \dot{\bar{\sigma}}_{rs} + \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p \quad (3.6)$$

Zur besseren Übersicht sind hier nocheinmal alle Beziehungen, die zusammengenommen das Stoffgesetz für den Vielkristall ergeben, aufgeführt :

Für einen Kristall mit gegebener Orientierung gilt :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_{n=1}^{24} \dot{\gamma}^{(n)} d_{ij}^{(n)} \quad (3.7)$$

wobei

$$\dot{\gamma}^{(n)} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)} < \tau_0^{(n)} \quad \text{oder}$$

$$\text{für} \quad \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)} = \tau_0^{(n)} ; \quad \dot{\sigma}_{ij} d_{ij}^{(n)} < \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \dot{\gamma}^{(m)}$$

$$\dot{\gamma}^{(n)} \geq 0 \quad \text{für} \quad \sigma_{ij} d_{ij}^{(n)} = \tau_0^{(n)} ; \quad \dot{\sigma}_{ij} d_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \dot{\gamma}^{(m)}$$

und

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \hat{G} (\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p) \quad (3.8)$$

Die makroskopische Verzerrungsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = (E_{ijke})^{-1} \dot{\bar{\sigma}}_{ke} + \frac{1}{V} \int_V \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \quad (3.9)$$

#### 4. Numerische Behandlung des Stoffgesetzes

##### 4.1 Formulierung als Problem der Linearen Programmierung

In [7] hat der Verfasser gezeigt, wie für ideal plastisches Verhalten der Einzelkristalle die Gleichungen des Stoffgesetzes als ein Standardproblem der Linearen Programmierung formuliert werden können.

Diese Überlegungen werden im folgenden auf das Stoffgesetz (3.7-3.9), das Verfestigung der Kristalle einschließt, erweitert.

Multiplizieren wir (3.8) mit  $d_{ij}^{(n)}$ , so folgt nach Einsetzen von (2.17) und (2.5)

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} d_{ij}^{(n)} = \dot{\tau}^{(n)} + \hat{G} \left( d_{ij}^{(n)} \sum_{m=1}^{24} \dot{\gamma}^{(m)} d_{ij}^{(m)} - \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^p d_{ij}^{(n)} \right) \quad (4.1)$$

oder mit  $\dot{\bar{\sigma}}_{ij} d_{ij}^{(n)} = \dot{S}_{ij} d_{ij}^{(n)}$

und  $\dot{Q}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \hat{G} \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^p \quad (4.2)$

$$\hat{G} d_{ij}^{(n)} \sum_{m=1}^{24} \dot{\gamma}^{(m)} d_{ij}^{(m)} + \dot{\tau}^{(n)} = \dot{Q}_{ij} d_{ij}^{(n)} \quad (4.3)$$

Die Größe  $Q_{ij}$  ist ein Maß für die makroskopische Belastung. Solange sich das Material elastisch verhält, ist  $\dot{Q}_{ij}$  gleich der Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{S}_{ij}$ ; wenn hingegen starke plastische Deformationen auftreten

ten, dann ist  $\dot{\hat{S}}_{ij}$  relativ klein gegenüber  $\hat{G} \dot{\hat{\epsilon}}_{ij}^p$  und  $\dot{Q}_{ij}$  wird im wesentlichen durch  $\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}^p$  bestimmt. Für die Rechnung ist es zweckmäßig  $Q_{ij} = Q_{ij}(t)$  als vorgegebene 'Belastungsgeschichte' längs des Parameters  $t$  zu betrachten.

Nach (3.8) und (4.2) gilt

$$\dot{Q}_{ij} = \dot{\hat{G}}_{ij} + \hat{G} \dot{\hat{\epsilon}}_{ij}^p \quad (4.4)$$

und entspricht damit dem Ausdruck aus Gleichung (2.26)

$$E_{ijrs} \dot{\epsilon}_{rs} = \dot{\hat{G}}_{ij} + E_{ijrs} \dot{\hat{\epsilon}}_{rs}^p$$

Eine Vorgabe von  $\dot{Q}_{ij}$  führt daher ebenso wie die Vorgabe von  $\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}$  auf eindeutige  $\dot{\hat{G}}_{ij}$  und  $\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}^p$  in jedem einzelnen Kristall (Abschnitt 2.4)

Durch die Integration aller  $\dot{\hat{G}}_{ij}$  und  $\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}^p$  sind dann auch die makroskopischen Größen  $\hat{G}_{ij}$  und  $\hat{\epsilon}_{ij}^p$  eindeutig bestimmt.

Ist  $\dot{Q}_{ij}(t)$  gegeben, dann stellt Gleichung (4.3) für jeden Wert von  $t$  und jeden Kristall unterschiedlicher Orientierung ein System von 24 linearen Gleichungen für die 48 unbekanntenen Größen  $\dot{\gamma}^{(n)}$  und  $\dot{\tau}^{(n)}$  dar. Integrieren wir (4.3) über ein Intervall  $\Delta t$ , so erhalten wir zusammen mit den Belastungsbedingungen (3.7) folgendes System aus Gleichungen und Ungleichungen.

$$\hat{G} d_{ij}^{(n)} \sum_{m=1}^{24} \Delta \gamma^{(m)} d_{ij}^{(m)} + \tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} = \quad (4.5)$$

$$\tau_{(t)}^{(n)} + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)}$$

$$\Delta \gamma^{(n)} \geq 0$$

$$\tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} \leq \tau_0 + \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \gamma^{(m)}$$

$$\sum_{n=1}^{24} \left( \tau_0 + \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \gamma^{(m)} - \tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} \right) \Delta \gamma^{(n)} = 0 \quad (4.6)$$

Die letzte Gleichung hat die Bedeutung der Zielfunktion in der Linearen Programmierung. Die Standardform eines Linearen Programms ergibt sich nach Einführung von

$$\hat{\tau}^{(n)} = \tau_0 + \sum_{m=1}^{24} h^{nm} \gamma^{(m)} - \tau^{(n)} \quad (4.7)$$

zu

$$\sum_{m=1}^{24} \left( \hat{G}_{ij}^{(n)} d_{ij}^{(m)} + h^{nm} \right) \Delta \gamma^{(m)} - \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} = \quad (4.8)$$

$$- \hat{\tau}_{(t)}^{(n)} + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)}$$

$n = 1, \dots, 24$

mit den Nebenbedingungen :

$$\Delta \gamma^{(n)} \geq 0$$

$$\hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} \geq 0 \quad (4.9)$$

und der Zielfunktion :

$$Z = \sum_{n=1}^{24} \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} \Delta \gamma^{(n)} = \text{Min.} = 0 \quad (4.10)$$

Die Zielfunktion ist nichtlinear, jedoch ist sie von so einfacher Form, daß ihre Forderung an die Variablen sofort gesehen werden kann. Sie kann den Wert 0 nur dann annehmen, wenn für jedes n entweder  $\hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)}$  oder  $\Delta \gamma^{(n)}$  verschwinden.

Die Gleichungen (4.8. ÷ 4.10) gelten jeweils für eine Kristallorientierung. Die Lösung kann für eine gegebene rechte Seite von (4.8) mittels der Simplex Methode gefunden werden. ( z. Bsp. [27] )

Zur Beschreibung der einzelnen Rechenschritte führen wir die Matrizen Schreibweise ein.

Mit den Vektorkomponenten

$$\begin{aligned} x^n &= \Delta \gamma^{(n)} \\ y^n &= \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} \quad ; \quad \bar{y}^n = \hat{\tau}_{(t)}^{(n)} \\ c^n &= -\bar{y}^n + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

und  $a^{mn} = \hat{G} d_{ij}^{(m)} d_{ij}^{(n)} + h^{mn}$

läßt sich (4.8 ÷ 4.10) schreiben in der Form

$$\underline{\underline{A}} x - \underline{\underline{B}} y = \underline{\underline{B}} c \quad (4.12)$$

$$x^n \geq 0$$

$$y^n \geq 0$$

$$x \cdot y = 0$$

$x$ ,  $y$  und  $C$  sind 24 dimensionale Spaltenvektoren,  $\underline{A}$  und  $\underline{\beta}$  sind  $24 \times 24$  Matrizen, definiert durch

$$\underline{A} = [a^{mn}] = [A_1, A_2, \dots, A_{24}] \quad (4.13)$$

$$\underline{\beta} = [\delta^{mn}] = [U_1, U_2, \dots, U_{24}]$$

$A_n$  und  $U_n$  sind Spaltenvektoren;  $U_n$  ist ein Einheitsvektor mit der Komponente 1 in der n-ten Zeile.

Zu Beginn der Belastung, solange der Kristall sich elastisch verhält, sind alle Komponenten  $(\underline{\beta} C)^m \leq 0$ . Die Lösung des Systems (4.12) ist leicht zu erkennen

$$y^n = (\underline{\beta} C)^n$$

$$x^n = 0$$

Die  $y^n$  werden Basisvariablen genannt, da sie Werte  $\geq 0$  annehmen können, die  $x^n$  heißen Nicht-Basisvariablen, da sie nur ihren Grenzwert 0 annehmen können. Die Form des Systems wird kanonisch genannt, da die Basisvariablen  $y^n$  den Koeffizienten 1 in der n-ten Reihe und 0 in den übrigen Reihen haben.

Nach jedem Schritt  $\Delta Q_{ij}$  wird die rechte Seite von (4.12) entsprechend (4.11) geändert.

Wenn bei fortschreitender Belastung nach einem Schritt  $\Delta Q_{ij}$  eine oder mehrere Komponenten von  $(\underline{\beta} C)$  größer als Null werden, dann werden Gleitsysteme aktiv und die Basis von (4.12) muß geändert werden.

Zur Änderung der Basis wird die sogenannte Pivot-Operation durchgeführt. Ist z. Bsp.  $(\underline{\beta} C)^m$  die

größte Komponente von  $(\underline{\beta} \underline{c})$ , so wird zunächst damit begonnen  $\underline{y}^m$  durch  $x^{\tilde{m}}$  in der Basis zu ersetzen. Hierzu betrachten wir die Elementarmatrix

$$\underline{D} = [U_1, \dots, A_m, \dots, U_{24}]$$

und bilden die Inverse

$$\underline{D} = [U_1, \dots, K_m, \dots, U_{24}] \quad (4.14)$$

wobei der Vektor

$$K_m = - \frac{1}{a_{mm}} \begin{bmatrix} a^{1m} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ a^{24m} \end{bmatrix}$$

ist.

Dann multiplizieren wir (4.12) mit  $\underline{D}^{-1}$

$$\underline{D}^{-1} \underline{A} x - \underline{D}^{-1} \underline{\beta} y = \underline{D}^{-1} \underline{\beta} c \quad (4.15)$$

oder

$$\bar{\underline{A}} x - \bar{\underline{\beta}} y = \bar{\underline{\beta}} c$$

$\bar{\underline{\beta}}$  ist bis auf die Spalte m identisch mit  $\underline{\beta}$ . Der Spaltenvektor  $\bar{\underline{A}}_m$  ist der Einheitsvektor  $U_m$ . Sind jetzt noch Komponenten von  $(\underline{\beta} \underline{c})$ , z. Bsp.  $(\underline{\beta} \underline{c})^m$  größer als Null, dann wird die Pivot-Operation wiederholt, diesmal mit der Elementarmatrix

$$\underline{D} = [U_1, \dots, \bar{\underline{A}}_n, \dots, U_{24}]$$

vorausgesetzt, daß  $\bar{\underline{A}}_n \neq U_n$  ist.

Wenn nämlich  $\bar{\underline{A}}_n = U_n$  ist, dann ist das n-te Gleit-system bereits aktiv und muß entlastet werden. In die-



sem Fall wird die Rechnung mit der Matrix

$$\underline{D} = [u_1, \dots, \bar{B}_n, \dots, u_{24}]$$

ausgeführt.

Hierdurch wird dann  $x^m$  durch  $y^m$  in der Basis ersetzt.

Wenn schließlich alle Komponenten  $(\bar{\beta}_c)^m \leq 0$  sind, ist das System wieder in kanonischer Form. Die Basisvariablen haben den Wert der entsprechenden Komponente von  $(\beta_c)$ , die Nichtbasisvariablen haben den Wert Null.

Der nächste Schritt beginnt mit der Vorgabe eines neuen  $\Delta Q_{ij}$  und der entsprechend geänderten rechten Seite des Systems.

Nach jedem Schritt ergibt sich der Zuwachs der plastischen Formänderung zu

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \sum_{n=1}^{24} x^n d_{ij}^{(n)} \quad (4.16)$$

Für jedes  $\Delta Q_{ij}$  ist die oben beschriebene Prozedur für alle betrachteten verschiedenen Kristallorientierungen durchzuführen. Anschließend können wir den makroskopischen Zuwachs der plastischen Formänderung ausrechnen.

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \Delta \varepsilon_{ij}^p dV \quad (4.17)$$

Die Auswertung des Integrals erfolgt für insgesamt 120 verschiedene Orientierungen. Diese werden möglichst gleichmäßig über den Bereich der Euler - Winkel

$\beta$ ,  $\eta$  und  $\gamma$  verteilt (Abschnitt 2.3.2, Abb. 4-1)  
 Das Integral (4.17) lautet ausgedrückt in den Euler -  
 Winkeln :

$$\Delta \bar{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\int_0^\pi \int_{\Delta(ABC)} \int_{\Delta(ABC)} \sin \eta \Delta \epsilon_{ij}^p d\eta d\beta d\gamma}{\underbrace{\int_0^\pi \int_{\Delta(ABC)} \int_{\Delta(ABC)} \sin \eta d\eta d\beta d\gamma}_{\frac{\pi^2}{12}}} \quad (4.18)$$

Die numerische Integration erfolgt nach der Simpson-  
 Regel für jede Richtung getrennt; der Reihe nach für  
 $\eta$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , (ISAACSON und KELLER [28] ).

Schließlich erhalten wir den Zuwachs des Spannungs-  
 deviators

$$\Delta \bar{s}_{ij} = \Delta Q_{ij} - \hat{G} \Delta \bar{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.19)$$

und den Zuwachs der gesamten Verzerrung

$$\Delta \bar{\epsilon}_{ij} = \Delta \bar{\epsilon}_{ij}^e + \Delta \bar{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.20)$$

mit  $\Delta \epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \Delta \bar{s}_{ij} + \frac{1}{9K} \Delta \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$

Im Allgemeinen wird jedoch nicht die Geschichte von  
 $Q_{ij}$  vorgegeben sein, sondern von  $\bar{\sigma}_{ij}$  bzw.  $\bar{s}_{ij}$ .  
 In diesem Fall muß  $\Delta Q_{ij}$  iterativ bestimmt werden.  
 Ein erstes  $\Delta Q_{ij}$  wird 'geraten' und dann solange va-  
 riiert, bis Gleichung (4.19) das vorgegebene  $\Delta \bar{s}_{ij}$   
 ergibt. Für jede Variation ist die gesamte beschrie-  
 bene Rechnung durchzuführen. Lediglich für einachsige

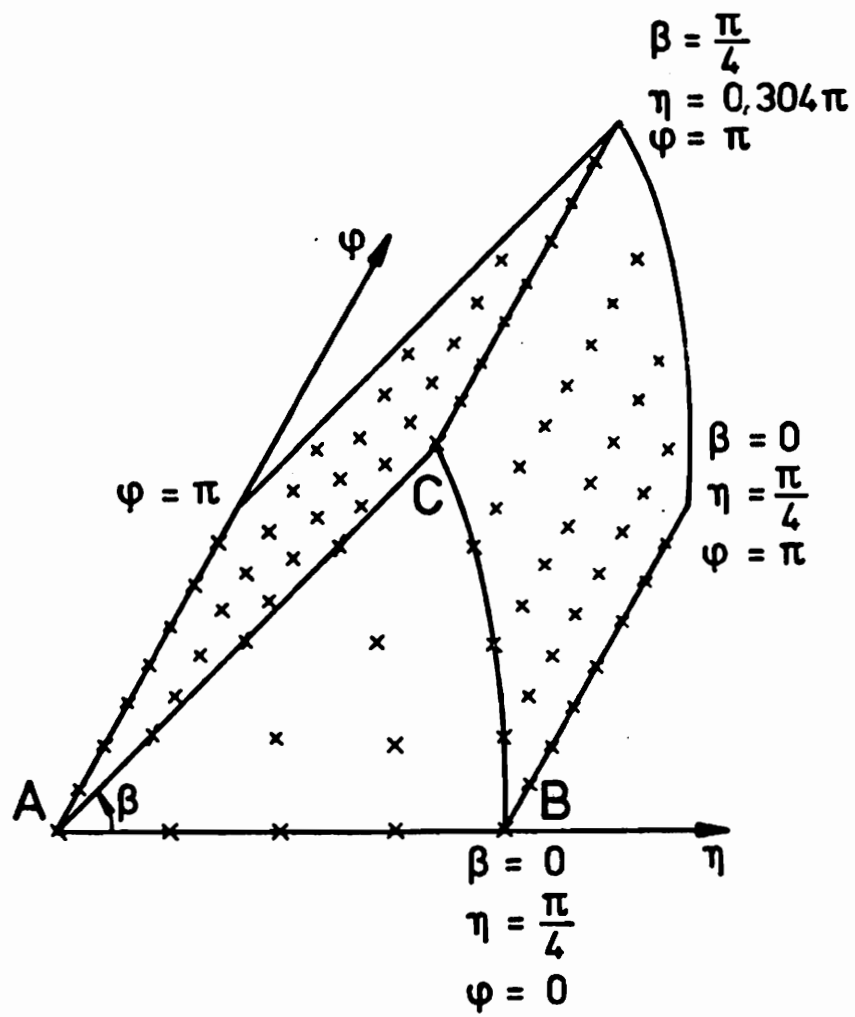


Abb.4 -1 Kristallorientierungen

Zug- bzw. Schubbeanspruchung kann diese Iteration umgangen werden, da für diese Spannungszustände nur jeweils eine Komponente von  $\Delta Q_{ij}$ ,  $\Delta Q_{11}$  bzw.  $\Delta Q_{12} = \Delta Q_{21}$  ungleich Null ist und damit das im allgemeinen Fall iterativ bestimmbare Verhältnis der einzelnen Komponenten von  $\Delta Q_{ij}$  zueinander von vornherein bekannt ist.

#### 4.2 Reduktion der Anzahl der Gleitsysteme von 24 auf 12

Um den numerischen Aufwand, insbesondere den Bedarf an Speicherkapazität zu reduzieren, wollen wir für die drei speziellen Verfestigungsgesetze des Einzelkristalls die Anzahl der Gleitsysteme halbieren. Diese Reduktion geschieht, indem wir jeder Gleitrichtung ein festes Vorzeichen,  $+\eta$  oder  $-\eta$  geben und den Algorithmus zur Lösung von (4.5) so ändern, daß positive  $\tau^{(n)}$  positive  $\Delta \gamma^{(n)}$  und negative  $\tau^{(n)}$  negative  $\Delta \gamma^{(n)}$  erzeugen. Für 'unabhängige' Verfestigung kann die Reduktion leicht durchgeführt werden, während sie für 'isotrope' und 'latente' Verfestigung nur näherungsweise möglich ist.

'unabhängige' Verfestigung :

Die Inkremente der Gleitungen  $\Delta \gamma^{(n)}$  und die bezogenen Schubspannungen  $\tau^{(n)}$  genügen den Ungleichungen

$$\tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} \Delta \gamma^{(n)} \geq 0 \quad n = 1, \dots, 12 \quad (4.21)$$

und  $\tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} \leq \tau_0 + h \gamma^{(n)}$  mit  $\gamma^{(n)} \geq 0$

$$\tau_{(t+\Delta t)}^{(n)} \leq -\tau_0 + h \gamma^{(n)} \quad \text{mit} \quad \gamma^{(n)} \leq 0 \quad (4.22)$$

Mit der Substitution

$$\hat{\tau}^{(n)} = \tau^{(n)} - h \gamma^{(n)} \quad (4.23)$$

wird aus (4.5)

$$\sum_{n=1}^{12} (\hat{G} d_{ij}^{(n)} d_{ij}^{(n)} + h \delta^{nn}) \Delta \gamma^{(n)} + \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} \quad (4.24)$$

$$= \hat{\tau}_{(t)}^{(n)} + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)}$$

$$-\tau_0 \leq \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)} \leq \tau_0$$

$$Z = \sum_{n=1}^{12} (\tau_0 - |\hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(n)}|) \cdot |\Delta \gamma^{(n)}| = 0$$

Diese Formulierung beinhaltet einen Bauschinger - Effekt des Einzelkristalles, wie in (4.22) gesehen werden kann. Ein Anwachsen der Fließspannung in der einen Ungleichung bewirkt eine Verminderung um denselben Betrag in der anderen.

'isotrope' und 'latente' Verfestigung :

Der Zuwachs der Fließspannung des n-ten Systems bis zum Zeitpunkt t beträgt :

$$\int_0^t |\Delta \tau_0^{(n)}| = h \int_0^t c^{(n)} \sum_{m=1}^{12} |\Delta \gamma^{(m)}| \quad (4.25)$$

Die Substitution

$$\hat{\tau}_{(t)}^{(n)} = \tau_{(t)}^{(n)} + h \int_0^t c^{(n)} \sum_{m=1}^{12} |\Delta \gamma^{(m)}| \quad (4.26)$$

führt hier auf

$$\sum_{m=1}^{12} (\hat{G} d_{ij}^{(m)} l_{ij}^{(m)} \Delta \gamma^{(m)}) + \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(m)}$$

$$= \hat{\tau}_{(t)}^{(m)} + h c^{(m)} \sum_{m=1}^{12} |\Delta \gamma^{(m)}| + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(m)} \quad (4.27)$$

$$-\tau_0 \leq \hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(m)} \leq \tau_0$$

$$z = \sum_{m=1}^{12} (\tau_0 - |\hat{\tau}_{(t+\Delta t)}^{(m)}|) |\Delta \gamma^{(m)}| = 0$$

Die Näherung besteht nun darin, daß der Zuwachs der Fließspannung während des Schrittes  $\Delta Q_{ij}$  d.h.

$\Delta \tau_0^{(m)} = h c^{(m)} \sum_{m=1}^{12} |\Delta \gamma^{(m)}|$  geschätzt werden muß, damit die rechte Seite von (4.27) bestimmt ist. Bei hinreichend kleiner Schrittweite wird es als genau genug angesehen, wenn in einer ersten Annahme der Anstieg der Fließspannung vom vorhergehenden Schritt übernommen und dann die Rechnung mit dem neu erhaltenen Wert noch einmal wiederholt wird.

Der im vorigen Abschnitt beschriebene Lösungsweg muß für die Systeme (4.24) und (4.27) modifiziert werden.

In Matrizenform lauten die Gleichungen

$$\tilde{A} x + \tilde{B} y = \tilde{B} c \quad (4.28)$$

$$-\tau_0 \leq y^n \leq \tau_0 \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=1}^{12} (\tau_0 - |y^n|) x^n = 0$$

$$\text{mit } \underline{\underline{A}} = [a^{mn}] \quad \underline{\underline{\beta}} = [\delta^{mn}]$$

$$\left. \begin{aligned} a^{mn} &= \hat{G} d_{ij}^{(m)} d_{ij}^{(n)} + h \delta^{mn} \\ c^n &= \bar{y} + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{'unabhängige'} \\ \text{Verfestigung} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} a^{mn} &= \hat{G} d_{ij}^{(m)} d_{ij}^{(n)} \\ c^n &= \bar{y} + h c^n \sum_{m=1}^{12} |\Delta \gamma^{(m)}| + \Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{'isotrope'} \\ \text{'latente'} \\ \text{Verfestigung} \end{array}$$

Zu Beginn der Belastung sind wiederum alle  $y^n$  Basisvariablen, während die  $x^n$  Nicht-Basisvariablen sind; d.h.

$$y^n = (\underline{\underline{\beta}} c)^n \quad x^n = 0$$

Verletzt nach einem Schritt  $\Delta Q_j$  eine oder mehrere Komponenten von  $(\underline{\underline{\beta}} c)^n$  die Bedingung (4.29), dann muß die Basis von (4.28) geändert werden. Eine dieser Komponenten  $(\underline{\underline{\beta}} c)^n$  wird gewählt und  $\tau_0$  addiert, wenn  $(\underline{\underline{\beta}} c)^n \leq -\tau_0$  bzw. subtrahiert, wenn  $(\underline{\underline{\beta}} c)^n \geq \tau_0$  ist.  $y^n$  wird gleich dem Grenzwert  $+\tau_0$  bzw.  $-\tau_0$  gesetzt. Dann wird die Pivot-Operation durchgeführt, um  $y^n$  in der Basis durch  $x^n$  zu ersetzen.

Entlastung des n-ten Gleitsystems findet statt, wenn die Komponente  $(\underline{\underline{\beta}} c)^n$  das Vorzeichen ändert. In diesem Fall wird zuerst  $x^n$  durch  $y^n$  in der Basis ersetzt und dann  $\tau_0$  addiert oder subtrahiert, je nachdem ob das System entlastet wird von negativem oder positivem Gleiten.

Zur Verdeutlichung ist der prinzipielle Ablauf der Rechnung für ein gegebenes Inkrement  $\Delta \bar{s}_j$  in Abb. 4-2 in einem 'vergrößerten' Flußdiagramm dargestellt.

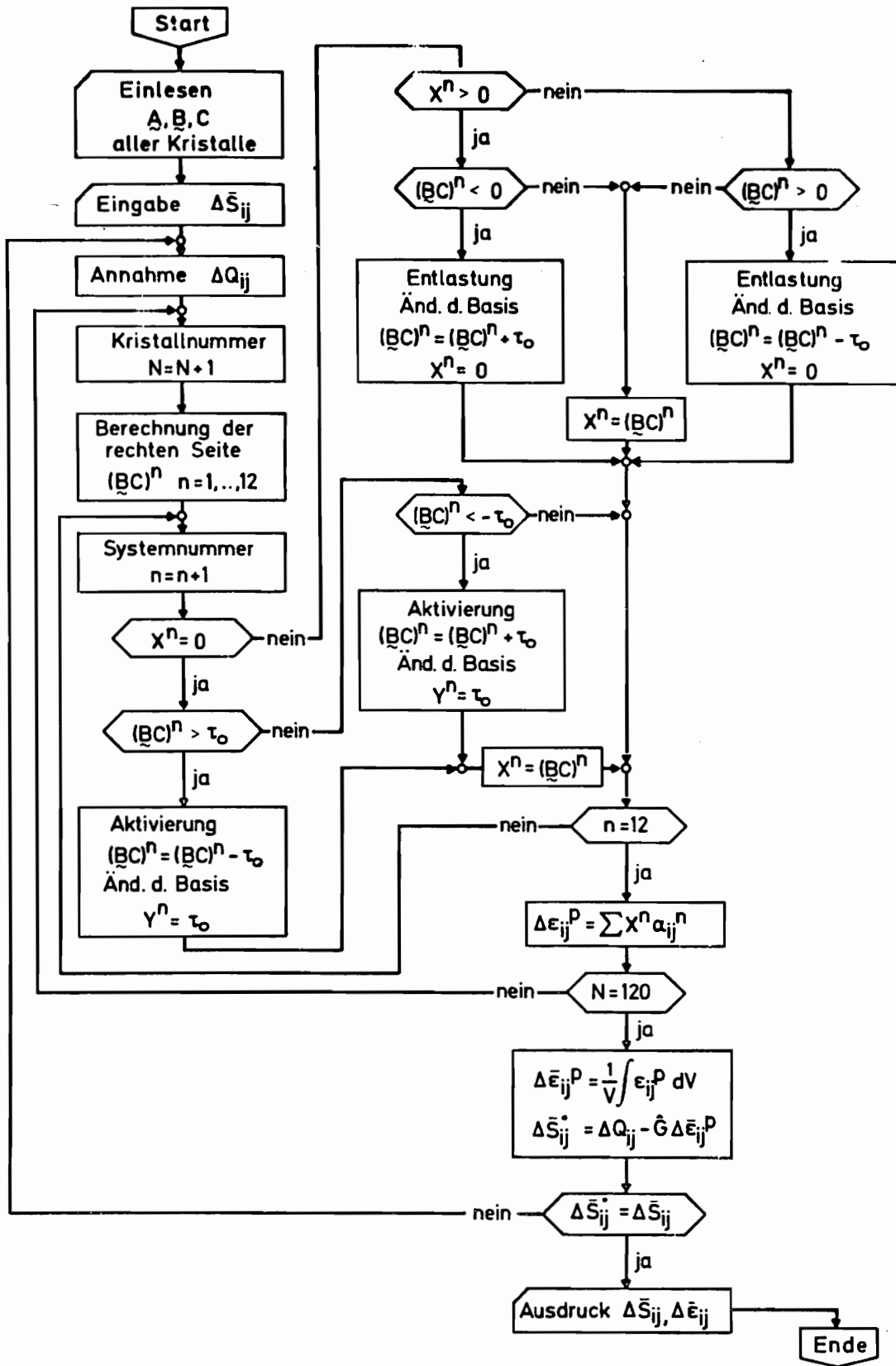


Abb. 4-2 Programmablauf



## 5. Numerische Ergebnisse für statische Belastungen

### und Vergleich mit Experimenten

#### 5.1 Allgemeines

Allgemeine theoretische Eigenschaften von Stoffgesetzen für ein vielkristallines Material wurden von einer Vielzahl von Autoren diskutiert; z. Bsp. HILL [29] , MANDEL [30] und RICE [31] .

Numerische Berechnungen mit dem hier verwendeten Modell wurden von BUDIANSKY und WU [5] und HUTCHINSON [6,32] durchgeführt. Ihre Untersuchungen beschränken sich jedoch auf einfache Zug- und Scherbeanspruchung, sowie auf ideal-plastische oder isotrop-verfestigende Einzelkristalle. In diesem Kapitel wollen wir als Erweiterung dieser Rechnungen das Verhalten des Vielkristalles vor allem bei kombinierter Zug- und Scherbeanspruchung untersuchen und mit experimentellen Ergebnissen vergleichen.

#### 5.2 Zugversuch

Um die Aussagen des Stoffgesetzes mit Experimenten vergleichen zu können, müssen wir die Stoffparameter so bestimmen, daß sie das reale Werkstoffverhalten möglichst gut beschreiben. Konsequenter wäre es, wenn wir die Parameter des Einzelkristalls, wie die Fließspannung  $\tau_0$  und die Verfestigung  $h$  , aus einem Spannungs - Dehnungsversuch am Einzelkristall bestimmen würden. Solche Versuche zur Bestimmung der quantitativen Größen sind nicht bekannt; sie sind auch nur schwer denkbar, da sie auch den Einfluß der Korngrenzen erfassen müßten. Wir müssen hier deshalb

so verfahren, daß wir die Stoffparameter des Einzelkristalls aus dem Zugversuch am Vielkristall bestimmen.

Die einzige von Null verschiedene Spannung ist

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma \quad (5.1)$$

und daher

$$\bar{s}_{11} = \frac{2}{3} \sigma$$

$$\bar{s}_{22} = \bar{s}_{33} = -\frac{1}{3} \sigma$$

Weiter gilt für die plastischen Formänderungen

$$\bar{\epsilon}_{11}^p = \epsilon^p \quad (5.2)$$

$$\bar{\epsilon}_{22}^p = \bar{\epsilon}_{33}^p = -\frac{1}{2} \epsilon^p$$

Damit wird nach (4.2)

$$\Delta Q_{11} = \frac{2}{3} \Delta \sigma + \hat{G} \Delta \epsilon^p$$

$$\Delta Q_{22} = \Delta Q_{33} = -\frac{1}{2} \Delta Q_{11}$$

und wir erhalten für den Ausdruck  $\Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)}$

$$\Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)} = \frac{3}{2} \Delta Q_{11} d_{11}^{(n)} \quad (5.3)$$

Beim einachsigen Spannungszustand genügt es aus Symmetriegründen, von den Euler - Winkeln der Kristallorientierungen nur  $\eta$  und  $\beta$  zu variieren; die Lösung ist unabhängig von  $\varphi$ .

Es wurde mit 91 verschiedenen über das Dreieck ABC (Abb. 2-5) gleichmäßig verteilten Orientierungen gerechnet.

Die Belastung wurde in 50 Schritten  $\Delta Q_{11}$  aufgebracht.

Für jedes  $\Delta Q_{11}$  und jede Orientierung muß je nach der Art des Verfestigungsgesetzes entweder das Gleichungssystem (4.24) oder (4.27) gelöst werden. Nach jedem Schritt wird mit (4.18, 4.19) zunächst  $\Delta \xi^p$  und  $\Delta \bar{\sigma}$  und schließlich  $\Delta \varepsilon = \Delta \bar{\sigma} / E + \Delta \xi^p$

ermittelt.

Die Spannungs - Dehnungskurve ist für ideal-plastische und verfestigende Einzelkristalle in Abb. 5-1 dargestellt. Die Größen sind auf die Fließspannung  $\bar{\sigma}_0 = 2 \tau_0$  und die dazugehörige elastische Dehnung  $\xi_0 = \bar{\sigma}_0 / E$  bezogen.

Die Querkontraktionszahl ist  $\nu = 0,33$ .

Bei ideal-plastischen Einzelkristallen ( $h=0$ ) nähert sich die Spannung asymptotisch dem Wert  $\bar{\sigma} / \bar{\sigma}_0 = 1,53$  und ist damit identisch mit der von BISHOP und HILL [2] angegebenen Fließspannung für einen starr-plastischen Vielkristall.

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit der Lösung zu bekommen, wurde eine Vergleichsrechnung mit nur 15 Orientierungen durchgeführt. Die Anzahl 15 entspricht der Aufteilung des Dreiecks ABC bei mehrachsigen Spannungszuständen (Abb. 4-1).

Es zeigte sich, daß die Abweichungen beider Lösungen voneinander nicht größer als  $\approx 3\%$  sind.

In den Abschnitten 5.3 und 5.4 werden numerische Ergebnisse mit experimentellen Resultaten von NAGHDI u.a. [8] verglichen. Dazu muß die von ihnen gemessene Spannungs-Dehnungskurve durch Wahl des Verfestigungsparameters approximiert werden.

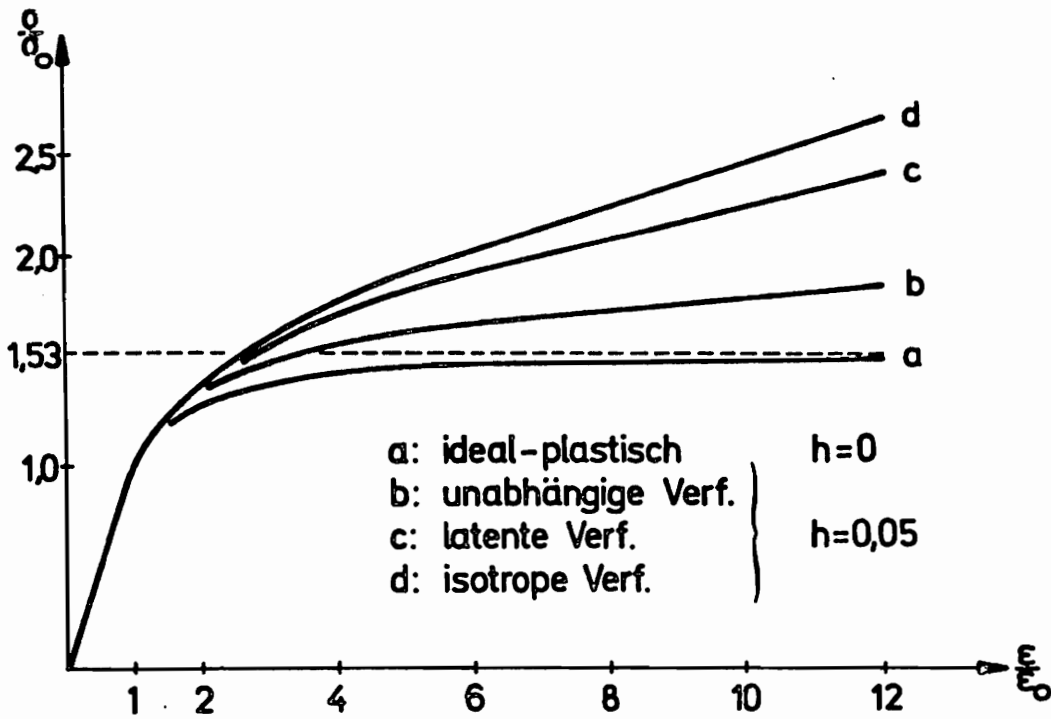


Abb. 5-1 Spannungs - Dehnungskurve

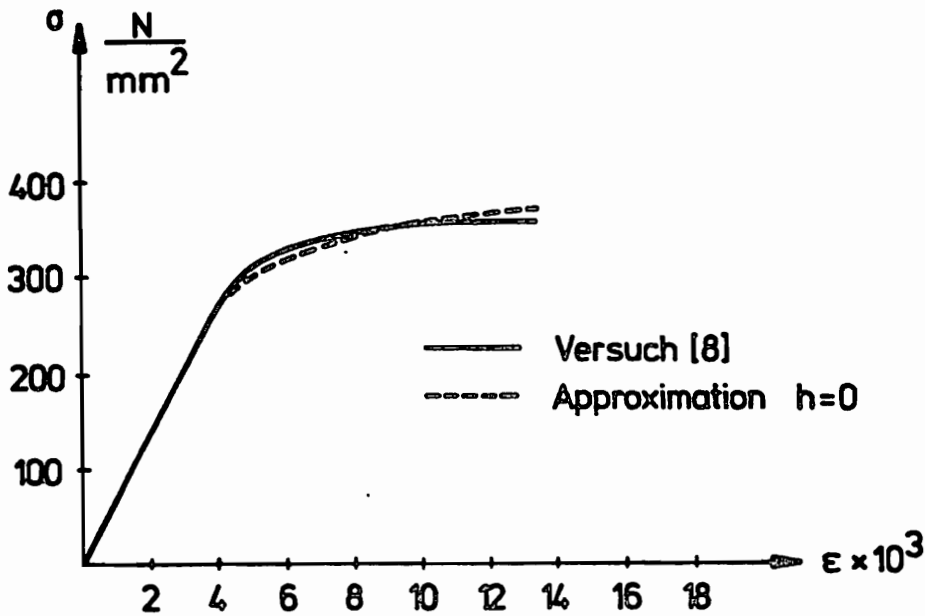


Abb. 5-2 Spannungs - Dehnungskurve für 24 S-T-4 Aluminium [8]

Mit

$$\sigma_0 = 275 \frac{N}{mm^2}, \quad E = 6,8 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}, \quad \nu = 0,33$$

gelingt dies am besten für  $h = 0$  (Abb. 5-2) .

Die Aktivierung von Gleitsystemen in einzelnen Kristallen ( $h = 0$ ) bei ansteigender Belastung ist in Abb. 5-3 für 4 der 91 Orientierungen zu sehen. Maximal werden 8 Systeme aktiv, von denen aber nur 5 linear unabhängig sind.

	$\sigma_{11} / \sigma_0$	$\epsilon_{11}^p / \epsilon_0$	Anzahl der aktiven Sys.	davon linear unabhängig
$\eta = 0,21 \pi$ $\beta = 0,15 \pi$	1,092	0	1	1
	1,108	0,045	2	2
	1,152	0,262	4	3
	1,175	1,524	6	4
	1,183	11,389	8	5
$\eta = 0$ $\beta = \frac{\pi}{4}$	1,225	0	4	4
	1,838	3,06	8	5
$\eta = 0,304 \pi$ $\beta = \frac{\pi}{4}$	1,837	0	6	5
$\eta = 0,2 \pi$ $\beta = \frac{\pi}{4}$	1,225	0	8	5

Abb. 5-3 Aktivierung von Gleitsystemen

Der Einfluß des Bauschinger - Effektes wird bei Belastungsumkehr deutlich. In Abb. 5-4 ist ein voller Belastungszyklus dargestellt. Für ideal-plastische und unabhängig verfestigende Kristalle wird die Fließspannung des Vielkristalls bei der Belastung in Gegenrichtung um den gleichen Betrag verringert, um den sie bei der ersten Belastung erhöht wurde. Da bei der isotropen Verfestigung kein Bauschinger - Effekt des Einzelkristalles berücksichtigt wird, ist die Verringerung der Fließspannung des Vielkristalls bei Belastungsumkehr nicht so groß wie der Anstieg bei der ersten Belastung.

### 5.3 Makroskopische Fließfläche

In [29,31] wurde gezeigt, daß das Druckersche Postulat [34] sowohl für den Einzelkristall, als auch für allgemeine geschwindigkeitsunabhängige Vielkristallmodelle Gültigkeit hat. Es gilt auch für die makroskopischen Größen die Beziehung

$$(\bar{\sigma}_{ij}^A - \bar{\sigma}_{ij}^B) \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P \geq 0 \quad (5.4)$$

$\beta$  gibt einen 'Spannungspunkt' im elastischen Bereich des 9-dimensionalen Spannungsraumes,  $A$  einen Punkt auf der makroskopischen Fließfläche an. Folgerungen dieser Ungleichung sind die Konvexität der Fließfläche und die Normalenregel. Das Inkrement der plastischen Verzerrung  $\dot{\tilde{\epsilon}}^P$  hat die Richtung der äußeren Normalen der Fließfläche im Spannungsraum, sofern diese Normale eindeutig an der Stelle des Spannungspunktes definiert ist (die Fließfläche also glatt ist). Befindet sich der Spannungspunkt an einer Ecke oder Spitze der Fließfläche, dann liegt die

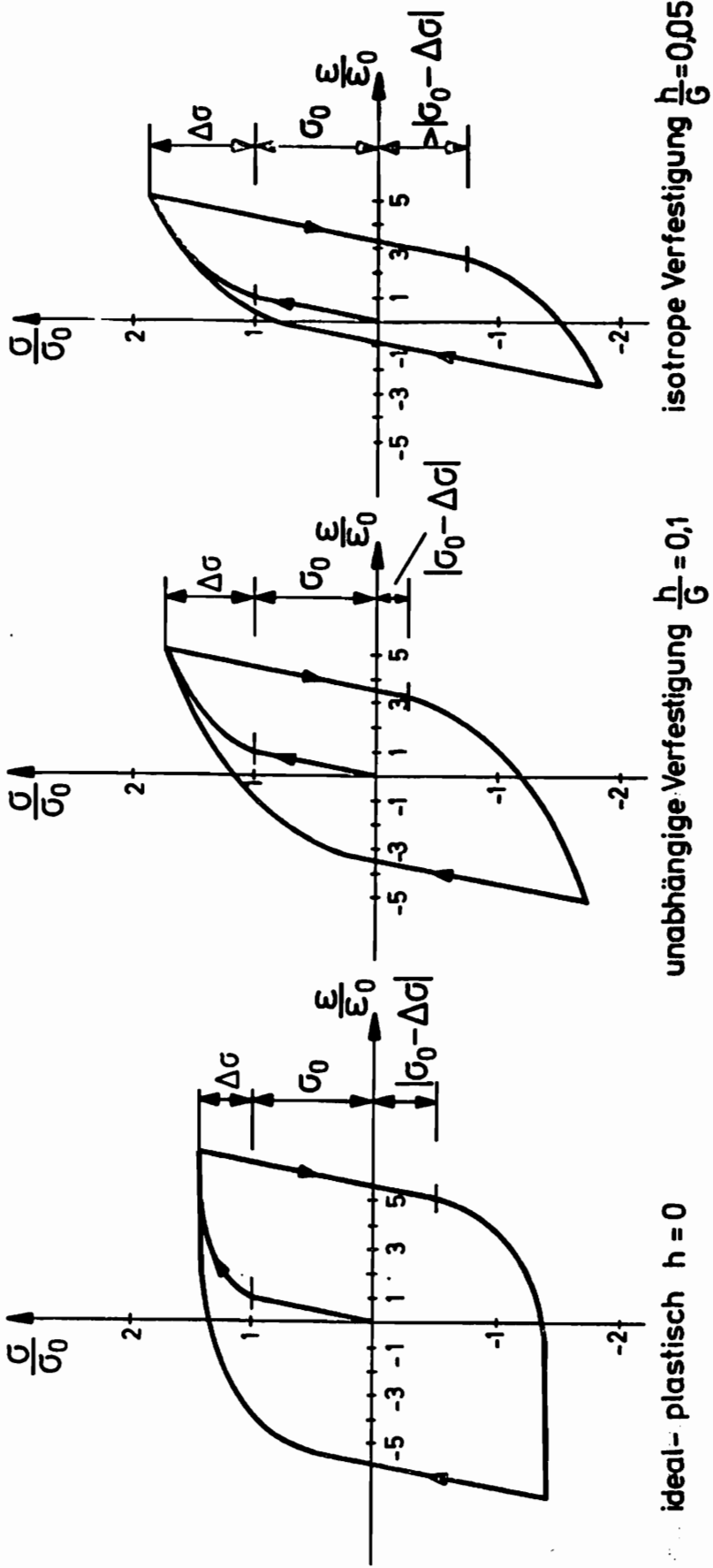


Abb. 5-4 Spannungs-Dehnungskurve bei Belastungsumkehr

Richtung von  $\dot{\xi}^p$  in dem von den Normalen der zusammenstossenden Flächen gebildeten Kegel.

Die makroskopische Fließfläche ist die Einhüllende einer unendlichen Zahl von Ebenen im Spannungsraum. Diese Fließebenen haben die gleiche Orientierung wie die Gleitebenen der 'unendlich' vielen Einzelkristalle.

Die anfängliche Fließfläche ist identisch mit der Trescaschen Fließbedingung und daher stückweise glatt (Abschnitt 2.3.2).

Bei einer Belastung über den elastischen Bereich hinaus, verschieben sich die einzelnen Ebenen translatorisch, behalten jedoch ihre Orientierung bei. Jede Ebene, die einem aktiven Gleitsystem entspricht, muß durch den momentanen Spannungspunkt im Spannungsraum führen. Dies führt dazu, daß sich an dieser Stelle eine Spitze der Fließfläche ausbildet [29]. Das Entstehen einer Spitze bei anwachsender Belastung ist ein typisches Merkmal aller vielkristallinen Modelle. Der Zusammenhang zwischen den Inkrementen der plastischen Verzerrung und Spannungen, der allgemein durch

$$\dot{\xi}_{ij}^p = M_{ijrs} \dot{\sigma}_{rs} \quad (5.5)$$

beschrieben werden kann, ist grundsätzlich nicht-linear [29]. Dies steht im Gegensatz zu den phänomenologischen Plastizitätstheorien, in denen im allgemeinen die Beziehung (5.5) als linear angenommen wird (wobei einzelne singuläre Fälle, z. Bsp. bei der Trescaschen Fließbedingung, zugelassen werden). Der Nachgiebigkeitstensor  $M_{ijrs}$  ist also nicht nur eine Funktion der Spannungen, Verzerrungen und der Formänderungsgeschichte, sondern auch eine



Funktion der Richtung der Spannungsinkremente  $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$  im Spannungsraum.

In einer Reihe von Experimenten wurde versucht, die Existenz einer Spitze in der Fließfläche zu zeigen. Die Durchführung derartiger Experimente ist jedoch schwierig und die Ergebnisse sind trotz vieler Versuche noch keineswegs eindeutig. Die experimentelle Technik macht es prinzipiell unmöglich zu entscheiden, ob sich an der Fließfläche eine exakte Spitze oder nur eine stark gekrümmte Stelle ausbildet. Die meisten Versuche wurden für kombinierte Zug- und Torsionsbelastung an dünnwandigen Rohren durchgeführt. Beispielsweise schließen PHILLIPS und GRAY [35] aus ihren Versuchen auf die Existenz einer Spitze, während NAGHDI u. a. [8] lediglich einen stark gekrümmten Bereich bei Belastung durch ein Torsionsmoment beobachten.

Wir wollen hier zunächst die Ausbildung der Spitze bei ansteigender Zugbeanspruchung in der  $\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{12}$ -Ebene für verschiedene Verfestigungsansätze untersuchen und anschließend die Veränderung der Fließfläche bei Scherbeanspruchung mit den experimentellen Ergebnissen in [8] vergleichen.

Wir betrachten den ebenen Spannungszustand

$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

mit dem Spannungsdeviator

$$\bar{s}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

und den Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2/4 + \tau^2} \quad (5.7)$$

Die Trescasche Fließbedingung

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \tau_0 \quad (5.8)$$

charakterisiert den Anfangszustand. Setzen wir (5.7) in (5.8) ein, so erhalten wir in der  $\sigma - \tau$  - Ebene die Ellipse

$$\left(\frac{\sigma}{2\tau_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2 = 1 \quad (5.9)$$

Mit dem Tensor der plastischen Verzerrung

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{pmatrix} \varepsilon^p & \frac{1}{2} \gamma^p & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma^p & -\frac{1}{2} \varepsilon^p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon^p \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

ergibt sich der Ausdruck  $\Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)}$  zu

$$\Delta Q_{ij} d_{ij}^{(n)} = \frac{3}{2} \Delta Q_{11} d_{11}^{(n)} + 2 \Delta Q_{12} d_{12}^{(n)} \quad (5.11)$$

Zunächst bringen wir eine Zugbelastung durch Vorgabe von  $\Delta Q_{11}$  ( $\Delta Q_{12} \equiv 0$ ) auf, bis  $\sigma = 1,2 \sigma_0$  bzw.  $\sigma = 1,4 \sigma_0$  ist. Anschließend wird entlastet, d.h.  $\Delta Q_{11} = -1,2 \sigma_0$  ( $-1,4 \sigma_0$ ) ;  $\Delta Q_{12} = 0$ .

Ein Punkt der Fließfläche wird nun ermittelt durch Wahl eines festen Wertes von  $\Delta Q_{11}$  und Steigerung von  $\Delta Q_{12}$  bis die Schubspannung  $\tau^{(n)}$  auf dem ersten Gleitsystem die Fließspannung  $\tau_0^{(n)}$  erreicht. Bei elastischem Verhalten ändert sich die Basis des Gleichungssystems (4.8) nicht ( $\Delta \gamma^{(n)} \equiv 0$ ). Daher braucht dort die Belastung  $\Delta Q_{ij}$  nicht in kleinen Schritten aufgebracht werden. Da  $\dot{\epsilon}_{ij}^p \equiv 0$  ist, gilt  $\Delta Q_{11} = \Delta \sigma$  und  $\Delta Q_{12} = \Delta \tau$ .

Es ergeben sich die in Abb. 5-5 dargestellten Fließflächen. Charakteristisches Merkmal ist die Spitze, deren Öffnungswinkel sich mit zunehmender Vorbelastung verringert. Außerdem zieht sich die Fließfläche in der  $\tau$  - Richtung stark zusammen. In der negativen  $\sigma$  - Richtung entspricht die Verringerung der Fließspannung dem in Abb. 5-4 gezeigten Bau-schinger - Effekt. Die Einzelkristallverfestigung bewirkt eine geringe Abnahme der Fließspannung in  $\tau$  - Richtung und eine schwächer ausgeprägte Spitze. Der Effekt der Verkleinerung des elastischen Bereiches steht in deutlichem Gegensatz zur Aufweitung der Fließfläche bei isotroper Verfestigung in der phänomenologischen Theorie.

Die Experimente in [8] wurden an dünnwandigen zylindrischen Proben aus Aluminium durchgeführt. In dem Versuch wurden die Anfangsfließfläche und die Fließfläche nach der Belastung durch ein Torsionsmoment ( $\max \tau = 210 \frac{N}{mm^2}$ ) gemessen.

In Abb. 5-6a sind die gemessenen Größen aus [8] übernommen und den theoretischen Ergebnissen gegenübergestellt. Die Anfangsfließflächen stimmen recht gut überein, jedoch würde die v. Misesche Fließbedingung ( $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$  anstatt  $\tau_0 = \sigma_0 / 2$ ) die gemessene Kurve besser wiedergeben.

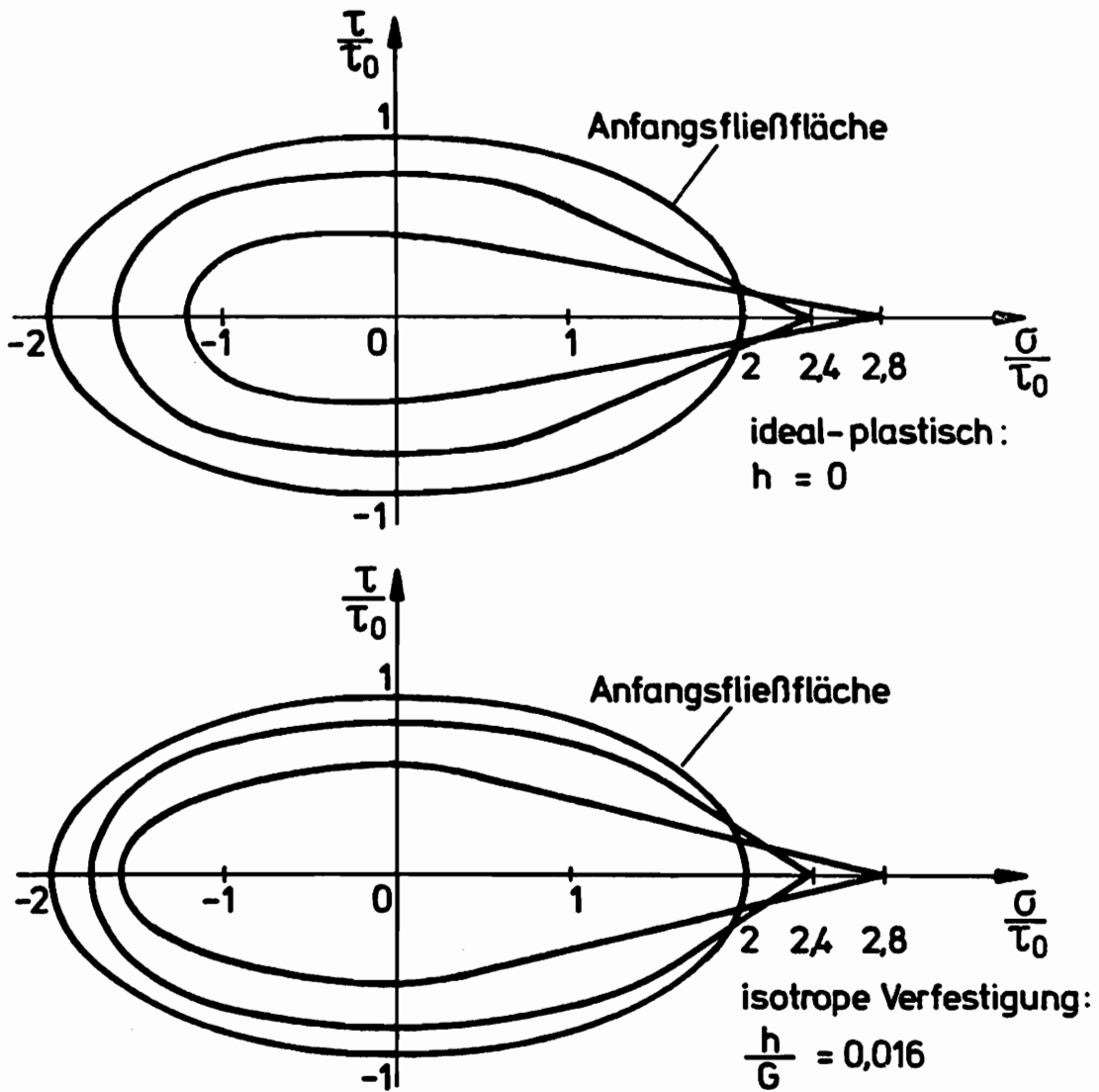


Abb. 5 - 5 Veränderung der Fließfläche bei Zugbelastung

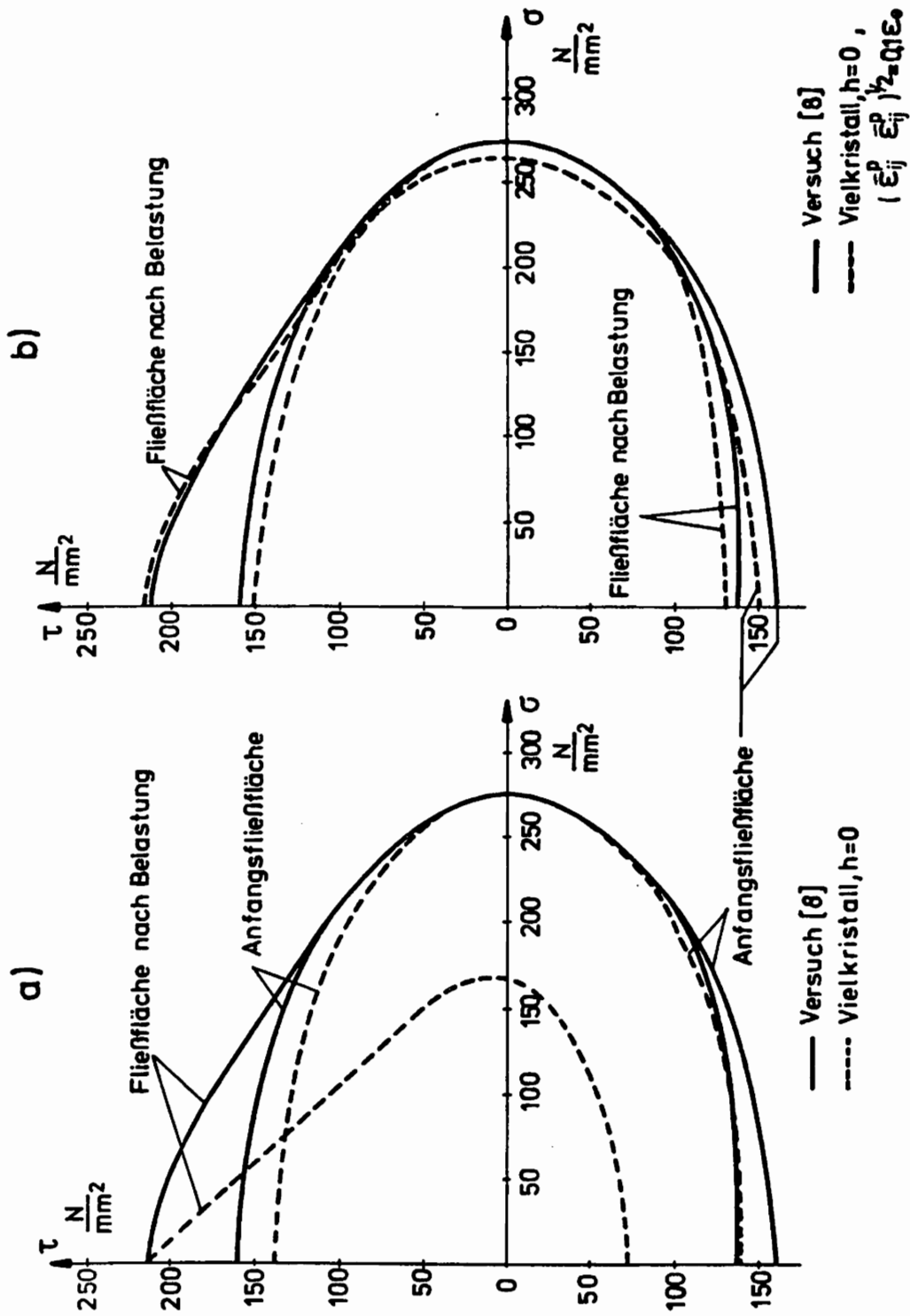


Abb. 5-6 Vergleich der Fließflächen aus Theorie und Versuch [8]

Wesentliche Unterschiede ergeben sich jedoch für die Fließflächen nach Belastung durch ein Torsionsmoment. Im Experiment wird an der Stelle der Belastung keine Spitze beobachtet sondern lediglich eine starke Krümmung. Ein Zusammenziehen der Fließfläche in der  $\bar{5}$  - Richtung wird nicht festgestellt und die Verringerung der Fließspannung bei entgegengesetzter Belastungsrichtung ist wesentlich geringer als der theoretische Wert.

In einem Experiment können die plastischen Formänderungen nicht beobachtet werden, bevor sie nicht eine meßbare Größe erreicht haben. Es kann daher nicht erwartet werden, daß die gemessene und die theoretische Fließfläche, die gegeben ist durch die Aktivierung des ersten Gleitsystems, gut übereinstimmen. Definieren wir als Fließfläche die Kurve, die sich ergibt, wenn die Summe der plastischen Verzerungen einen kleinen Wert, z. Bsp.  $0,1 \varepsilon_0$ , erreicht

$$\left( \bar{\varepsilon}_{ij}^p \bar{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2} (\varepsilon^p)^2 + (\gamma^p)^2} = 0,1 \varepsilon_0 \quad (5.12)$$

so erhalten wir die in Abb. 5-6b dargestellten Kurven. Beim Zugversuch ergibt sich für (5.12) eine plastische Dehnung von  $\approx 0,1 \%$ . Sie liegt damit unter dem üblichen Wert der definierten Streckgrenze von  $0,2 \%$  bleibender Verformung.

Die Übereinstimmung in Abb. 5-6b ist sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gut. Die errechnete Anfangsfließfläche liegt näher an der gemessenen Kurve als in Abb. 5-6a. An der Fließfläche nach der Torsionsbelastung entsteht keine Spitze mehr, sondern wie im Experiment ein Bereich stärkerer

Krümmung. Die Fließfläche zieht sich nur wenig in der  $\bar{\sigma}$  - Richtung zusammen und die Verringerung der Fließspannung bei entgegengesetzter Belastung stimmt ungefähr mit den gemessenen Werten überein.

Es zeigt sich also, daß das hier verwendete Stoffgesetz die Veränderung der Fließfläche bei plastischen Formänderungen gut beschreiben kann, sofern man als Fließspannung eine Spannung definiert, bei der die plastischen Formänderungen einen bestimmten kleinen Betrag erreichen.

#### 5.4 Zug - Torsionsversuch

Zur weiteren Beurteilung des Stoffgesetzes werden die berechneten und gemessenen Formänderungen bei einer Zug-Torsionsbelastung gegenübergestellt. In der Rechnung wurde der gleiche Belastungsweg gewählt wie im Versuch in [8], Probe Nr. 114. Die anfängliche reine Zugbelastung beansprucht die Probe über die Fließgrenze ( $\bar{\sigma}_0 = 275 \text{ N/mm}^2$ ) hinaus bis zu einer Spannung von  $\bar{\sigma} = 332 \text{ N/mm}^2$ . Anschließend erzeugt eine gleichzeitig aufgebrachte Zug- und Torsionsbelastung den in Abb. 5-7 dargestellten Spannungsweg. Der Scherwinkel  $\gamma$  (plastischer Anteil  $\gamma^p$ ) und das Anwachsen des plastischen Anteils der Längsdehnung  $\Delta \epsilon^p$  sind als Funktion der Schubspannung  $\tau$  dargestellt. Die Bilder zeigen qualitativ eine gute Übereinstimmung. Während für kleine Schubspannungen die gemessenen Formänderungen weniger stark anwachsen als in der Theorie, ist es für die größeren Schubspannungen gerade umgekehrt. Der Tangentenmodul  $G^* = \frac{d\tau}{d\gamma}$  zu Beginn der Torsionsbelastung liegt im Versuch nur geringfügig unter dem

Wert des elastischen Gleitmoduls  $G$  , nämlich  $G^* = 2,48 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$  gegenüber  $G = 2,55 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$  . Die Rechnung liefert hier den wesentlich kleineren Wert von  $G^* = 1,8 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$  .



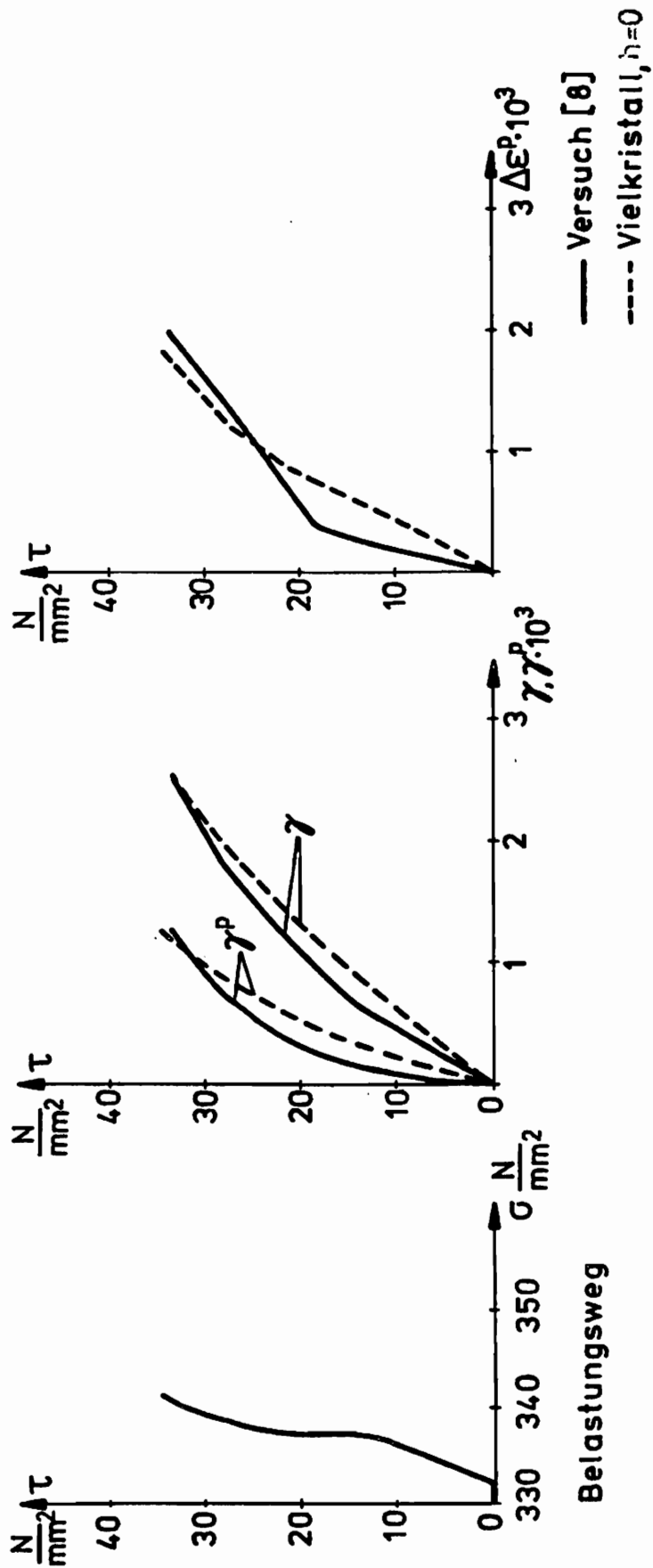


Abb. 5-7 Zug - Torsionsversuch

## 6. Gekoppelte Längs- und Scherwellenausbreitung im dünnwandigen Rohr

### 6.1 Problemstellung

Wir betrachten das in Abb. 6-1 dargestellte dünnwandige Rohr. Seine Beanspruchung soll durch eine Längs- und eine Torsionsbelastung erfolgen, die sowohl statisch als auch impulsartig an der Stelle  $x = 0$  aufgebracht werden kann. Die impulsartige Belastung wird durch eine Sprungfunktion beschrieben. Es werden entweder konstante Spannungen oder konstante Verschiebungsgeschwindigkeiten in Längs- und Umfangsrichtung an der Stelle  $x = 0$  aufgebracht (Abb. 6-2). Im einzelnen wollen wir die folgenden zwei charakteristischen Belastungsvorgänge untersuchen.

1. statische Scherbeanspruchung gefolgt von dynamischer Belastung in Längs- und Umfangsrichtung
2. statische Beanspruchung durch eine Längskraft gefolgt von dynamischer Belastung in Umfangsrichtung

Die Belastungen werden jeweils so groß gewählt, daß die Fließgrenze des Materials überschritten wird. In den Experimenten und theoretischen Untersuchungen von CLIFTON [9,10] wird das Rohr wie im ersten Fall beansprucht. Wir wollen diesen Fall daher ausführlich behandeln und die Ergebnisse vergleichen. Zur Lösung des Problems treffen wir folgende Annahmen und Vereinfachungen :

- a) das Rohr ist axialsymmetrisch, d.h. es gibt lediglich zwei voneinander unabhängige Variable, die

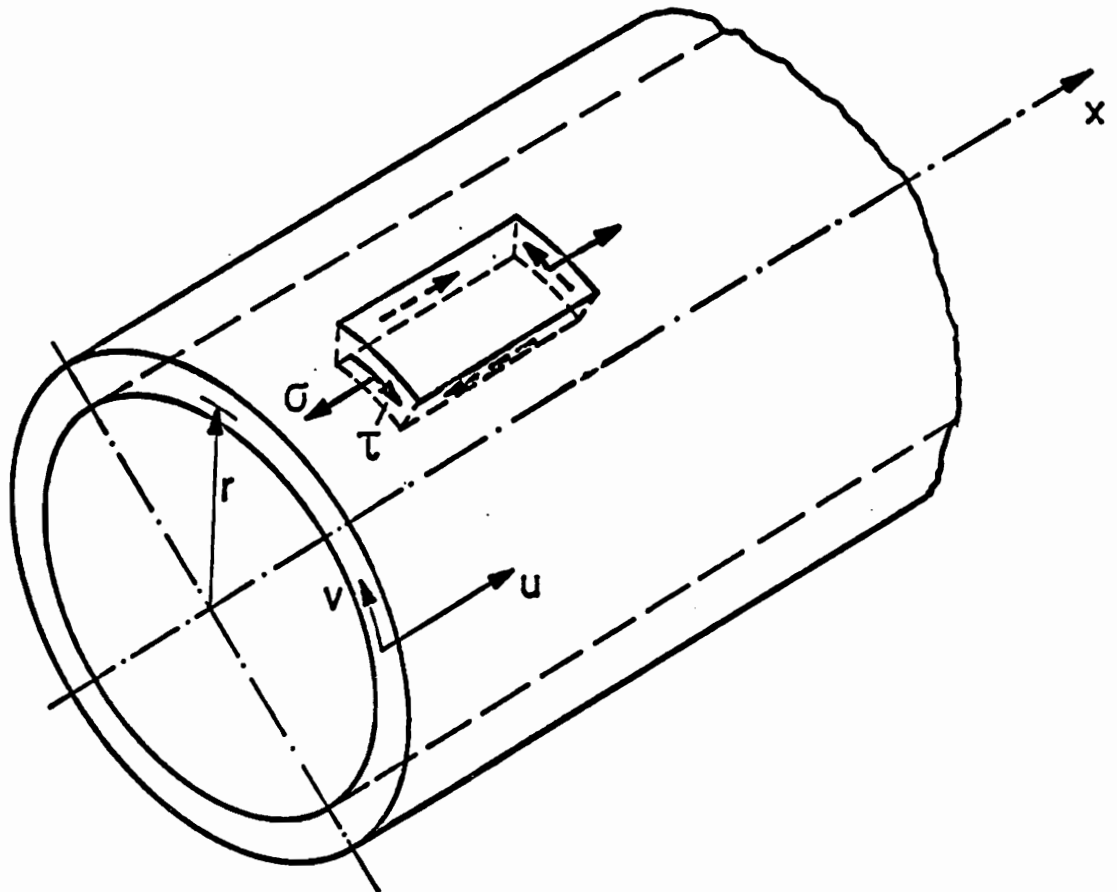


Abb. 6 - 1 Spannungs - und Geschwindigkeitszustand im Rohr

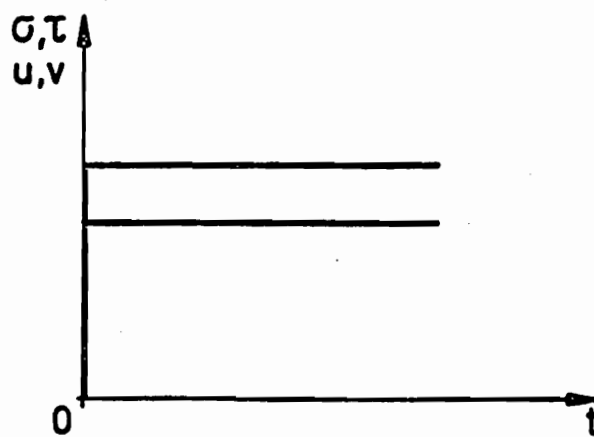


Abb. 6 - 2 Dynamische Belastung an' der Stelle  $x = 0$

Koordinate  $x$  längs der Achse und die Zeit  $t$ .

- b) das Rohr ist dünnwandig. Die makroskopischen Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen sind definiert als die Mittelwerte über die Wanddicke. Die in [9] verwendeten Proben aus weichgeglühtem Aluminium haben eine Wandstärke von  $\approx 5$  mm. Bei einem durchschnittlichen Kristalldurchmesser von 0,1 mm, wie er von RONAY [36] an Aluminiumrohren gemessen wurde, sind ca. 50 Kristalle über die Wanddicke verteilt. Die dem Stoffgesetz zugrundeliegende Annahme von einer sehr großen Anzahl in einer 'unendlichen' Matrix eingebetteten Kristalle trifft daher wohl in guter Näherung zu.
- c) das Rohr ist 'halb-unendlich' lang, d.h. wir betrachten keine Reflexionswellen.
- d) Trägheitskräfte in radialer Richtung werden vernachlässigt. Daher tritt keine Normalspannung in Umfangsrichtung auf und es gibt lediglich zwei nicht-verschwindende Spannungen, die Normalspannung in Längsrichtung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$ .

## 6.2 Grundlegende Gleichungen

Die Gleichgewichtsbetrachtung am Körperelement liefert

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \tau(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \quad (6.1b)$$

wobei  $\rho$  die Dichte und  $U$  bzw.  $V$  die Geschwindig-

keit der Körperelemente in Längs- bzw. Umfangsrichtung ist.

Ist  $\varepsilon$  die Längsdehnung und  $\gamma$  die Winkeländerung des Elementes, so gilt

$$\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (6.2b)$$

Das Stoffgesetz vervollständigt das System von Gleichungen. Verwenden wir seine allgemeine Form (5.5)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijrs} \dot{\sigma}_{rs}$$

so können wir mit

$$M_{1111} = \tau, \quad M_{1112} = \frac{\varphi}{2}, \quad M_{1212} = \frac{\rho}{4}$$

wie in [11,37] schreiben.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \tau \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (6.3a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (6.3b)$$

Die Koeffizienten  $\tau$ ,  $\rho$  und  $\varphi$  sind im allgemeinen Funktionen der Spannungen, der Formänderungsgeschichte und der Richtung  $\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)$  des Spannungsvektors in der  $\sigma - \tau$  - Ebene.

Sind die Formänderungen elastisch, dann ist

$$\tau = \frac{1}{E}, \quad \rho = \frac{1}{G}, \quad \varphi = 0 \quad (6.4)$$

Die Gleichungen (6.1÷3a) und (6.1÷3b) sind dann ent-

koppelt.

Nach Elimination der Verzerrungen können wir das System der Gleichungen (6.1 ÷ 6.3) in der Matrizenform

$$L(w) \equiv \underset{\sim}{A} w_t + \underset{\sim}{B} w_x = 0 \quad (6.5)$$

schreiben, mit

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & q \\ 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\dots)_x$  und  $(\dots)_t$  bedeuten partielle Ableitungen nach  $x$  bzw.  $t$ .

(6.5) ist ein System hyperbolischer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung des Vektors  $w$ .

### 6.3 Zur Lösung des Differentialgleichungssystems

Lösungsverfahren für ein lineares oder quasi-lineares System der Form (6.5) sind vielfach behandelt worden (z. Bsp. COURANT und HILBERT [38]). Hier ist das System nichtlinear, da die Matrix  $\underset{\sim}{A}$  eine Funktion von  $w_x$  und  $w_t$  ist. Da diese Funktion homogen von nulltem Grade ist, wird das Auffinden einer Lösung bei den speziellen Anfangs- und Randbedingungen wesentlich gegenüber einem allgemeinen nichtlinearen System erleichtert. Unter der Voraussetzung des zeitunabhängigen Materialverhaltens und der impulsartigen Belastung an der Stelle  $x=0$  lassen sich Lösungen von (6.5) finden, deren Abhängigkeit von  $x$  und  $t$  lediglich durch die eine

unabhängige Variable  $\xi = \frac{x}{t}$  beschrieben werden kann. In der  $x-t$  - Ebene bilden die Werte von  $\xi$  eine durch den Ursprung gehende Schar von Geraden (Abb. 7-3). Die Lösungen  $w(\xi)$ , die längs dieser Geraden konstant sind, werden 'zentrale einfache Wellenlösungen' (simple waves) genannt. Setzen wir  $\xi$  in (6.5) ein, so erhalten wir ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left( -c \underline{A} + \underline{B} \right) \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (6.6)$$

Hierin ist  $c = -\frac{\xi_t}{\xi_x} = \frac{x}{t}$  die zur Gerade  $\xi = \text{const.}$  gehörende Ausbreitungs- oder Wellengeschwindigkeit.  $[-c \underline{A} + \underline{B}]$  wird die charakteristische Matrix genannt, die Schar der Geraden  $\xi = \frac{x}{t}$  sind die Charakteristiken. Geeignete Anfangs- und Randbedingungen sind an der Stelle  $x=0$  zur Zeit  $t=0$  und  $t \geq 0$  anzugeben. Sie können entweder in den Spannungen  $\sigma, \tau$  oder den Geschwindigkeiten der Körperelemente  $u, v$  formuliert sein. Im Abschnitt 7 werden die Lösungen von (6.6) den Ergebnissen von LIPKIN und CLIFTON [9] gegenübergestellt. Für das dort verwendete isotrope arbeitsverfestigende Material ist (6.6) quasi-linear, da die Matrix zwar abhängig vom Lösungsvektor  $w$ , jedoch unabhängig von seinen Ableitungen ist. Für das quasi-lineare System lassen sich im Gegensatz zum nichtlinearen System auch ohne numerische Rechnung einige charakteristische Eigenschaften angeben. Um einen besseren Vergleich der Lösungen zu ermöglichen, werden sie hier kurz aufgeführt:  
 (6.6) hat eine nicht-triviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\det \left| -c \underline{A} + \underline{B} \right| = 0 \quad (6.7)$$

Aus dieser Bedingung ergeben sich die charakteristischen Geschwindigkeiten zu

$$\rho c^2 = \frac{\tau + \rho \pm [(\tau - \rho)^2 + 4q^2]^{1/2}}{2(\tau - \rho - q^2)} \quad (6.8)$$

Die Geschwindigkeiten, die dem + bzw. - Zeichen in (6.8) entsprechen, werden in [10] mit  $c_s$  (schnelle Wellen) bzw.  $c_e$  (langsame Wellen) bezeichnet. Sie genügen der Ungleichung

$$c_2 \leq c_s \leq c_1 \quad ; \quad c_e \leq c_2 \quad (6.9)$$

wobei  $c_2 = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$  und  $c_1 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$  die Geschwindigkeiten elastischer Scher- und Längswellen sind. Bei elastischen Formänderungen sind  $c_s = c_1$  und  $c_e = c_2$ .

Die Eigenvektoren der charakteristischen Matrix

$$\tau_s = \begin{bmatrix} q c_s \\ \frac{1}{\rho} c_s - \tau c_s \\ -q \rho c_s^2 \\ \tau \rho c_s^2 - 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tau_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} c_e - \rho c_e \\ q c_e \\ \rho \rho c_e^2 - 1 \\ -q \rho c_e^2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

sind orthogonal zueinander und proportional dem Vektor  $\frac{dw}{d\zeta}$ . Außerdem sind die zwei-dimensionalen Vektoren, gebildet aus den ersten beiden und den letzten beiden Komponenten von  $\tau_s$  orthogonal zu den entsprechenden aus  $\tau_e$  gebildeten Vektoren. Hieraus folgt, daß

$$\left(\frac{d\bar{v}}{d\tau}\right)_s = - \frac{1}{(d\bar{v}/d\tau)_e} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dv}{dv}\right)_s = - \frac{1}{(dv/dv)_e} \quad (6.11)$$

ist. Die Spannungs- und Geschwindigkeitstrajektorien der schnellen und langsamen Wellen stehen also je-



weils senkrecht aufeinander.

Diese wesentliche Eigenschaft der Lösung in [10] kann im vorliegenden Fall für das nichtlineare System (6.6) nicht vorhergesagt werden. Wir sind ganz auf numerische Rechnungen angewiesen.

Hierzu benutzen wir eine Eigenschaft der Spannungs-, Verzerrungs- und Geschwindigkeitstrajektorien von einfachen Wellen, die unabhängig vom Stoffgesetz ist. Setzen wir die Variable  $\xi$  in (6.1) und (6.2) ein, so erhalten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} = -\rho c \frac{dU}{d\xi} \qquad \frac{d\tau}{d\xi} = -\rho c \frac{dV}{d\xi} \qquad (6.12a)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = -c \frac{d\varepsilon}{d\xi} \qquad \frac{dV}{d\xi} = -c \frac{d\gamma}{d\xi} \qquad (6.12b)$$

Elimination der Geschwindigkeiten  $U$  und  $V$  führt zu der folgenden Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsimkrementen :

$$d\bar{\sigma} = \rho c^2 d\varepsilon \qquad , \qquad d\tau = \rho c^2 d\gamma \qquad (6.13)$$

Hieraus ergibt sich die Wellengeschwindigkeit zu

$$\rho c^2 = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{d\tau}{d\gamma} \qquad (6.14)$$

Außerdem folgt aus (6.12)

$$\frac{d\tau}{d\bar{\sigma}} = \frac{d\gamma}{d\varepsilon} = \frac{dV}{dU} \qquad (6.15)$$

Die Trajektorien haben in der Spannungs-, Verzerrungs- und Geschwindigkeitsebene die gleiche Steigung. Wir benutzen diese Beziehung zusammen mit dem Stoffgesetz (6.3) um iterativ Spannungstrajektorien für einfache Wellenlösungen zu berechnen, die den Anfangs- und Randbedingungen genügen. Längs einer Trajektorie spielt  $\xi$  die Rolle eines Parameters. Für jedes festgehaltene  $x$  gibt eine Spannungstrajektorie den zeitlichen Verlauf der Spannungen vom Anfangs- bis zum Endzustand an. Dies bedeutet, daß  $\xi$  und damit die Wellengeschwindigkeit  $c$  längs einer Trajektorie absinkt.

Zunächst wird wie in Abschnitt 5 beschrieben, die statische Belastung durch Vorgabe von Belastungsinkrementen  $\Delta Q_{12}$  bzw.  $\Delta Q_{11}$  aufgebracht, bis der vorgegebene Wert  $\tau_s$  bzw.  $\delta_s$  erreicht ist. Die Spannungstrajektorie der Wellenlösung wird dann schrittweise iterativ bestimmt. Der Anfangspunkt der Trajektorie ist der Punkt  $(\delta_s, \tau_s)$  in der  $\delta$ - $\tau$ -Ebene. Nach Wahl der Schrittweite für eines der Inkremente  $\Delta Q_{11}$  oder  $\Delta Q_{12}$  wird ein erstes Verhältnis  $\kappa$  zwischen den Inkrementen 'geraten' und die Rechnung für alle 120 Kristallorientierungen wie in Abschnitt 4 beschrieben durchgeführt. Die so erhaltenen Inkremente von Verzerrungen und Spannungen werden im allgemeinen die Bedingung (6.15), die jetzt in inkrementeller Form geschrieben wird,

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta \delta} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta \varepsilon} \quad (6.16)$$

nicht erfüllen. Die Berechnung wird für verbesserte Verhältnisse  $\kappa$  so lange wiederholt, bis (6.16) mit vorgeschriebener Genauigkeit erfüllt ist. Als erstes  $\kappa$  wird das Verhältnis des vorhergehenden Schrittes

gewählt. Für eine hinreichend kleine Schrittweite ist (6.16) dann bereits angenähert erfüllt. Die Rechnung wird fortgesetzt, indem ein zweites  $\kappa$  so gewählt wird, daß der exakte Wert zwischen beiden Näherungen liegt. Anschließend wird das Ergebnis mit Hilfe der Newton'schen Regel verbessert.

Die Berechnung der Trajektorie wird so lange fortgesetzt, bis der vorgeschriebene Endspannungszustand  $(\sigma_D, \tau_D)$  erreicht ist. Sind die Geschwindigkeiten an der Stoßstelle vorgegeben, wird die Rechnung fortgesetzt, bis die Geschwindigkeiten, die durch Integration von (6.12a) erhalten werden, den Endwert  $(u_e, v_e)$  erreichen. Gleichung (6.16) kann für mehrere Verhältnisse von  $\kappa$  erfüllt werden. Verzweigungen der Spannungstrajektorien sind deshalb möglich und eine weitere Iteration ist nötig, um den Zweig der Trajektorie zu finden, der durch den Endzustand  $(\sigma_D, \tau_D)$  führt. Diese Verzweigungsmöglichkeiten werden im nächsten Abschnitt zusammen mit den numerischen Ergebnissen näher erläutert.

## 7. Numerische Ergebnisse für einfache Wellen

### 7.1 Bestimmung der Stoffkennwerte

Um die numerischen Lösungen mit den experimentellen und theoretischen Ergebnissen in [9] vergleichen zu können, approximieren wir durch Wahl des Verfestigungsparameters die dort dargestellte quasi-statische Spannungs-Dehnungskurve.

Für das weichgeglühte 3003 Aluminium sind

$$\sigma_0 = 23,83 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad E = 7,03 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\rho = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3 \quad , \quad \nu = 0,33$$

In Abb. 7-1 sind die gemessene und die mit den ver-

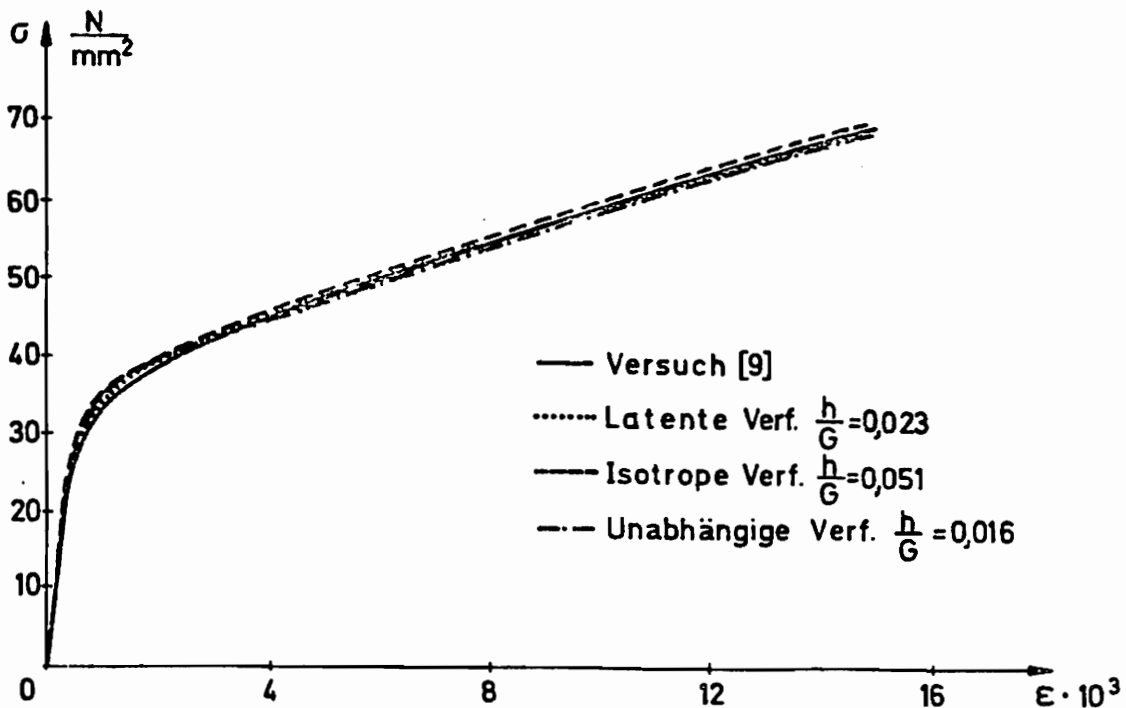


Abb. 7-1 Spannungs-Dehnungskurve für geglühtes  
3003 Aluminium

schiedenen Verfestigungsansätzen berechneten Spannungs-Dehnungskurven dargestellt. Für alle drei Ansätze kann die gemessene Kurve gut approximiert werden. Für große Dehnungen über  $\approx 0,6$  % sind die berechneten Kurven praktisch gerade Linien, während die experimentelle Kurve auch in diesem Bereich eine leichte Krümmung aufweist.

## 7.2 Das vortordierte Rohr

Als statische Belastung wird zunächst ein Torsionsmoment aufgebracht, das die vorgegebene Schubspannung  $\tau_s$  erzeugt. Dann erfolgt die impulsartige Belastung, gegeben durch  $\sigma_0$  und  $\tau_0^* = \tau_0 - \tau_s$ , bzw.  $U_0$  und  $V_0$ .

Qualitative Eigenschaften der einfachen Wellenlösung sind in Abb. 7-2, 7-3 dargestellt.

Die Lösung besteht für jeden Wert  $x$  aus mehreren zeitlich aufeinanderfolgenden Bereichen.

1. einem konstanten Anfangszustand mit  $\sigma = 0$  und  $\tau = \tau_s$ ,
2. einer 'schnellen' einfachen Welle, für die der Spannungsverlauf durch den Zweig AB der Trajektorie (Abb. 7-2) gekennzeichnet ist.
3. einer 'langsamen' einfachen Welle, gekennzeichnet z. Bsp. durch den Zweig BC der Trajektorie
4. einem konstanten Endzustand mit  $\sigma = \sigma_0$  und  $\tau = \tau_0$ .

In Abb. 7-2 sind mehrere Spannungstrajektorien für langsame Wellen eingezeichnet. Jede führt zu einem anderen Endzustand. An jedem Punkt B der Trajektorie der schnellen Welle gibt es drei Möglichkeiten die Lösung fortzusetzen. Alle drei genügen der Gleichung (6.16) und der Bedingung, daß die Wellengeschwindigkeit  $C$  abnimmt (Abb. 7-4) :

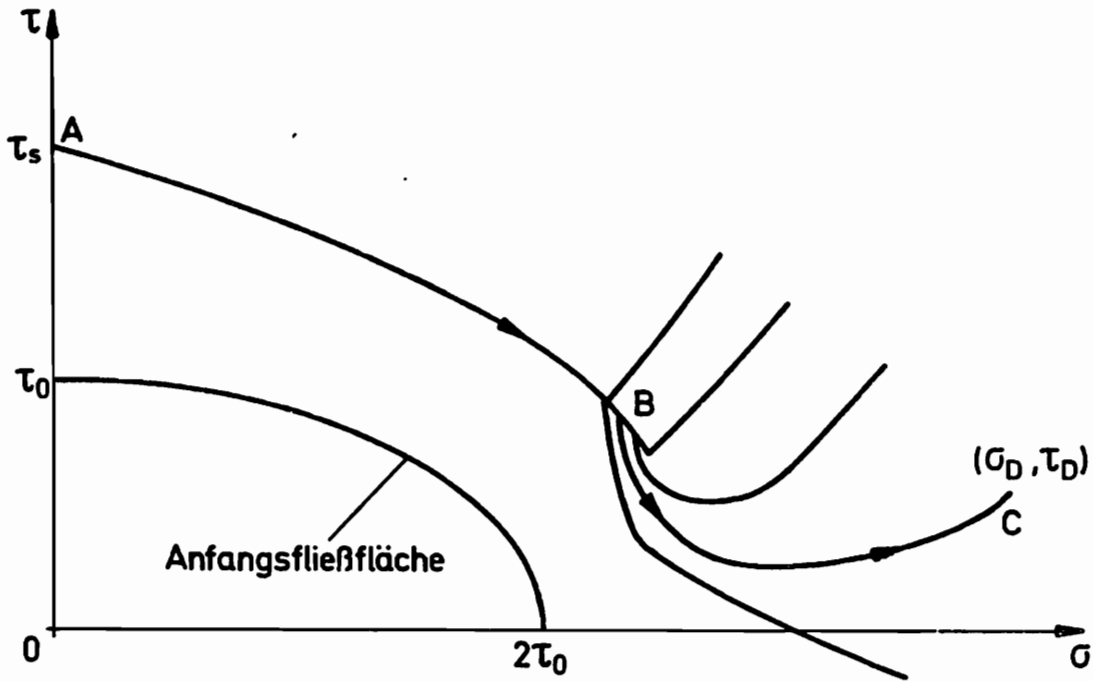


Abb. 7-2 Spannungstrajektorien für das vortordierte Rohr

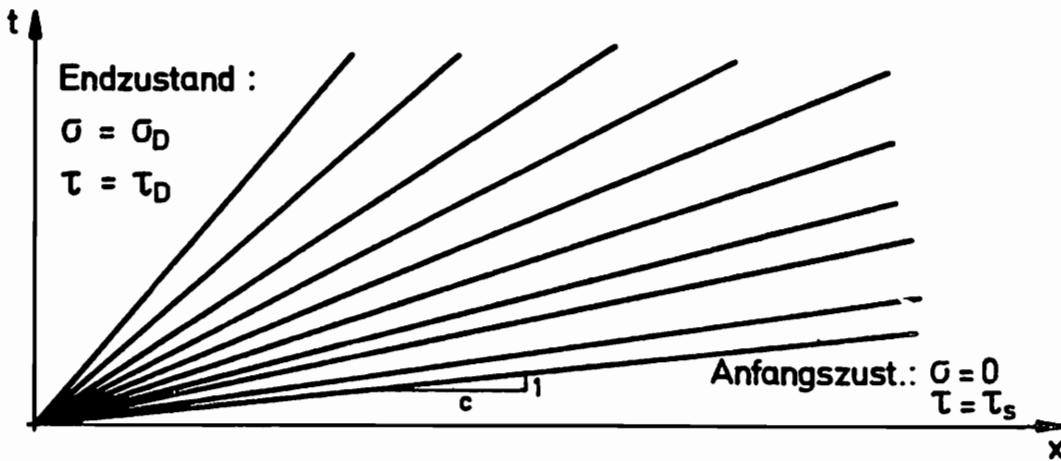


Abb. 7-3 Charakteristiken für das vortordierte Rohr

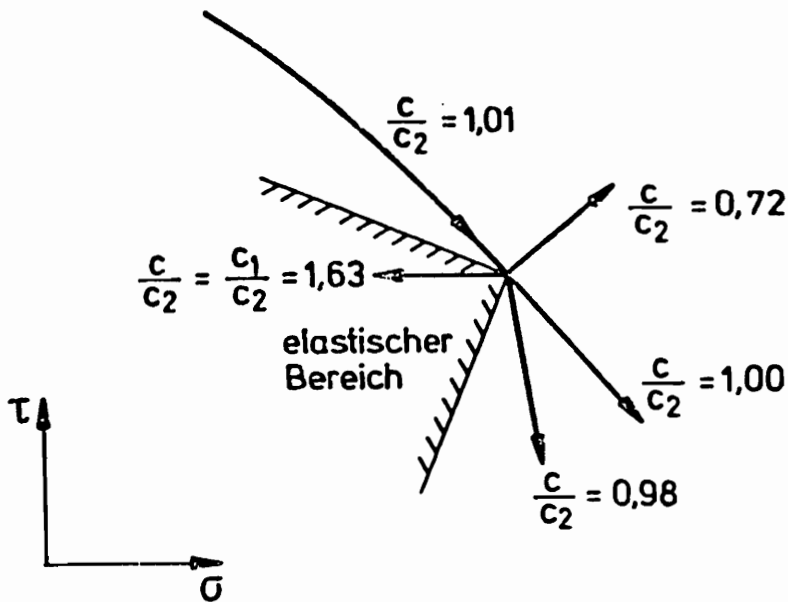


Abb. 7-4 Mögliche Verzweigung der Spannungstrajektorie an der Stelle B

1. Fortsetzung der schnellen Welle :  
In diesem Fall erreicht die Spannungstrajektorie schließlich einen Punkt über den hinaus die Bedingung (6.16) nicht mehr erfüllt werden kann. Die Lösung kann nur fortgesetzt werden mit einer langsamen Welle.
2. Eine langsame Welle beginnt mit positiver Steigung der Spannungstrajektorie.  
In diesem Fall entsteht an der Stelle B ein zeitlicher Bereich mit konstantem Spannungszustand, da die Wellengeschwindigkeit einen Sprung hat. Die Trajektorien der langsamen und schnellen Wellen stehen ungefähr senkrecht aufeinander. Wie wir in (6.11) gesehen haben, sind die Trajektorien bei Verwendung des Stoffgesetzes der phänomenologischen Theorie exakt orthogonal.

3. Eine langsame Welle beginnt mit negativer Steigung der Spannungstrajektorie.

In diesem Fall ist der Sprung in der Wellengeschwindigkeit nur sehr gering. Deshalb ist der Bereich konstanter Spannungen verschwindend gering.

Eine vierte Möglichkeit die Gleichung (6.16) zu erfüllen, ergibt eine horizontale Trajektorie, die in den elastischen Bereich zurückführt. Die zugehörige Wellengeschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit der elastischen Längswellen und damit größer als die Geschwindigkeit der schnellen Welle an der Stelle B. Diese Trajektorie gehört daher nicht zu einer einfachen Wellenlösung.

Die Endspannungszustände  $\sigma_D, \tau_D$ , die in den Experimenten erreicht wurden, erfordern alle die Betrachtung einer Trajektorie der Art BC. Die Lage des Punktes B, an dem der zum Endspannungszustand gehörende Zweig BC beginnt, ist nicht von vornherein bekannt, sondern muß durch wiederholtes Berechnen dieses Zweiges iterativ ermittelt werden.

In [9] sind die Ergebnisse von drei Versuchen für verschiedene Anfangsschubspannungen  $\tau_i$  und verschiedene Stoßgeschwindigkeiten  $u_0$  und  $v_0$ , mit den entsprechenden theoretischen Lösungen für isotropes arbeitsverfestigendes Material verglichen worden.

Für die gleichen Randbedingungen wurden hier die numerischen Lösungen ermittelt. In den Abb. 7-5 bis 7-10 sind der zeitliche Verlauf der Verzerrungen und die dazugehörigen Verzerrungstrajektorien an einer festen Stelle  $x$  (Meßstelle im Versuch) zusammen mit den Ergebnissen aus [9] dargestellt.



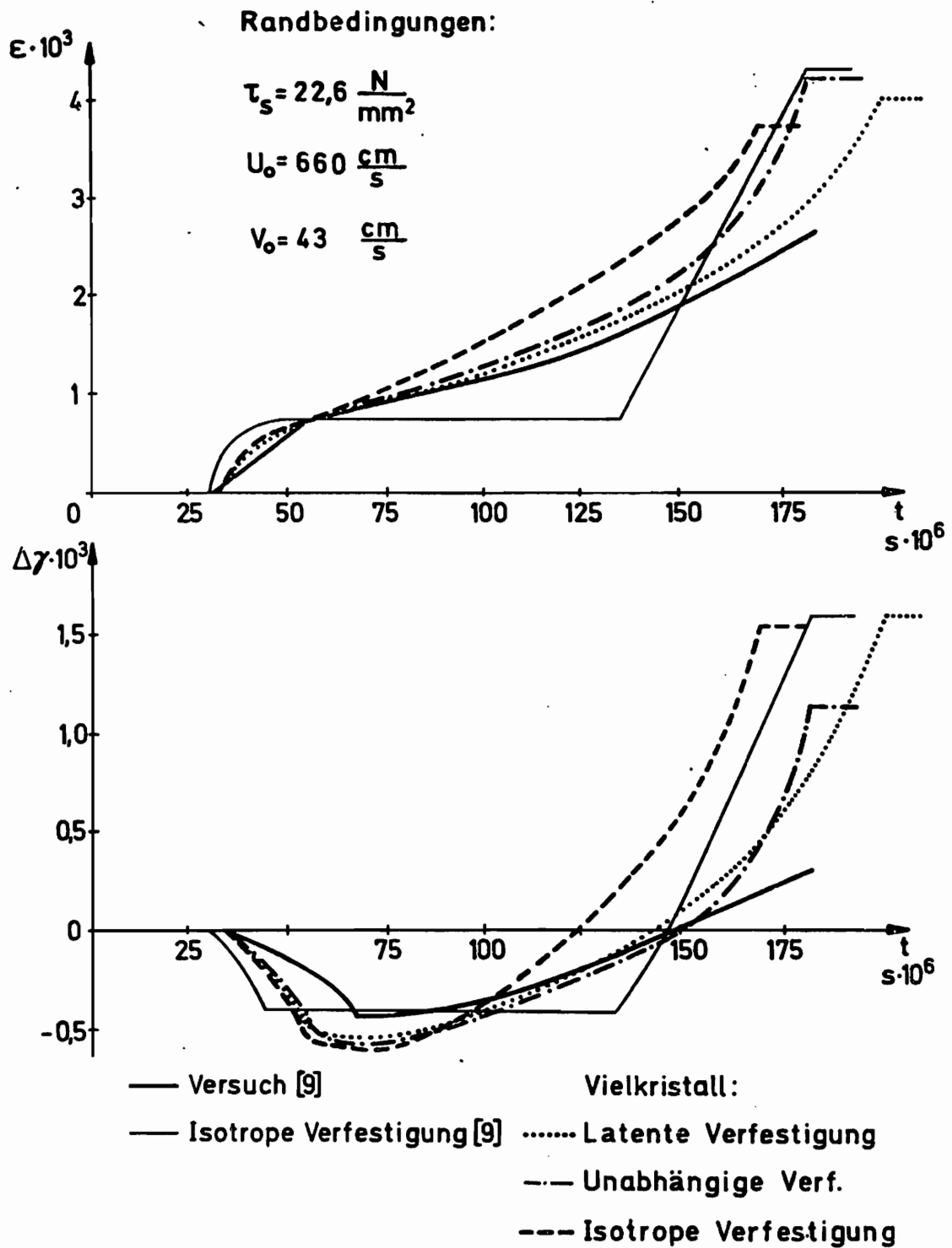
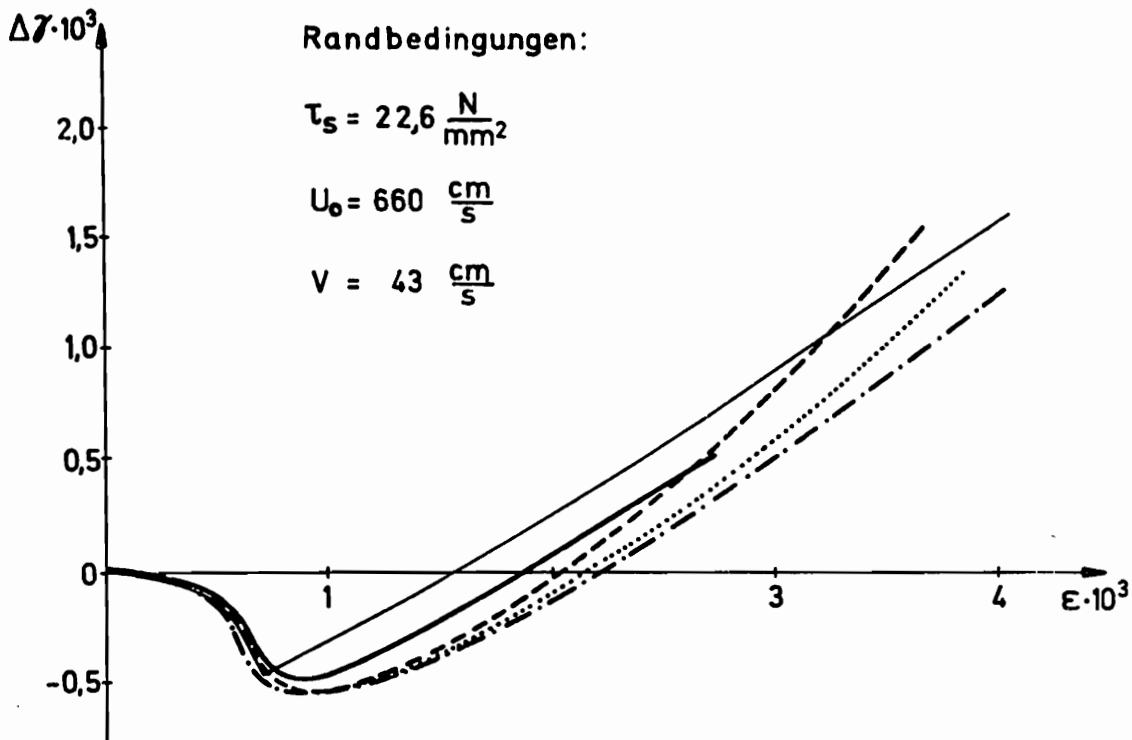


Abb. 7 - 5 Verzerrungs - Zeitprofil (  $x = 15,9 \text{ cm}$  )



Endspannungszustand

	$\sigma_D$	$\tau_D$	$\frac{N}{mm^2}$
—	46,0	11,5	Versuch [9]
—	48,7	10,9	Isotrope Verfestigung [9]
Vielkristall:			
.....	45,7	11,1	Latente Verfestigung
- - -	45,6	11,0	Unabhängige Verf.
----	45,3	11,3	Isotrope Verfestigung

Abb. 7 - 6 Verzerrungstrajektorien (x = 15,9 cm)

( $\Delta\gamma$  gibt die Differenz zwischen dem aktuellen und dem durch  $\hat{\tau}_s$  hervorgerufenen Scherwinkel an). Die Randbedingungen sind in jeder Abb. angegeben; sie unterscheiden sich im wesentlichen durch die verschiedenen Stoßgeschwindigkeiten in Längsrichtung. Die Abbildungen der Verzerrungstrajektorien enthalten außerdem die Werte der gemessenen und errechneten Endspannungszustände. Für alle drei Stoßgeschwindigkeiten wurden Lösungen für 'unabhängige' und 'isotrope' Einzelkristallverfestigung berechnet; für die kleine Stoßgeschwindigkeit  $U_0 = 660 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  zusätzlich für 'latente' Verfestigung.

Ein Vergleich der theoretischen Lösungen mit den Experimenten zeigt qualitative Übereinstimmung in wesentlichen Eigenschaften, allerdings auch einige charakteristische Unterschiede.

Alle theoretischen Lösungen stimmen mit den Experimenten insofern überein, als sie qualitativ richtig ein Absinken der Schubverzerrung  $\Delta\gamma$  beim Durchlaufen der schnellen Wellen und einen Anstieg beim Durchlaufen der langsamen Wellen an der Stelle  $x$  vorhersagen. Ebenso wird der Anstieg der Längsdehnung  $\epsilon$  während des ganzen betrachteten Zeitraumes qualitativ richtig beschrieben. Im Bereich kleiner Verzerrungen unterscheiden sich die hier berechneten Lösungen wesentlich von den theoretischen Ergebnissen in [9]. Die Lösungen mit dem Vielkristallmodell zeigen in Übereinstimmung mit den Experimenten keinen Bereich konstanter Verzerrungen zwischen den schnellen und den langsamen Wellen, wie ihn die Theorie in [9] vorhersagt. In [9] wurde vermutet, daß das Fehlen des konstanten Zwischenzustandes auf die Geschwindigkeitsabhängig-

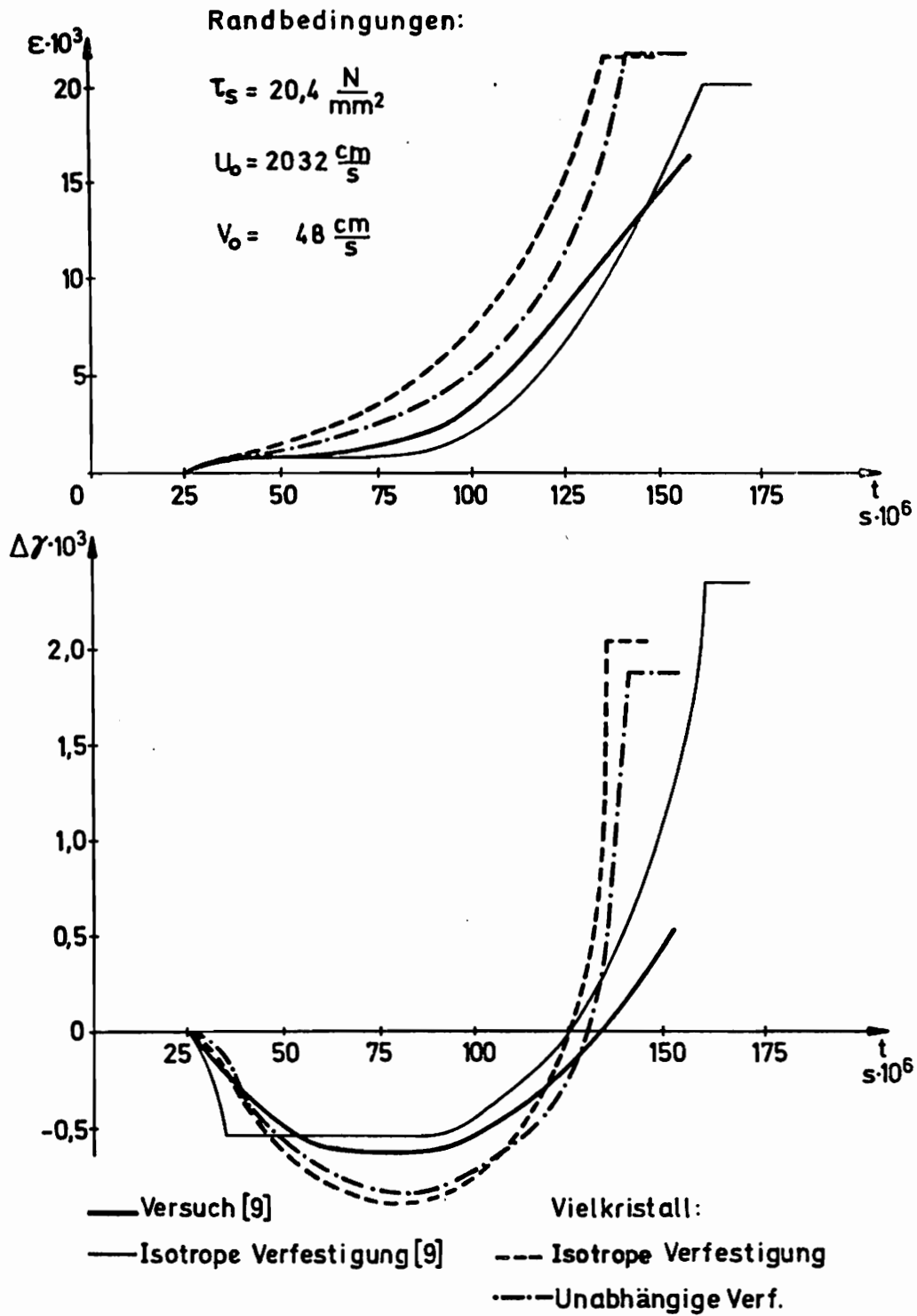
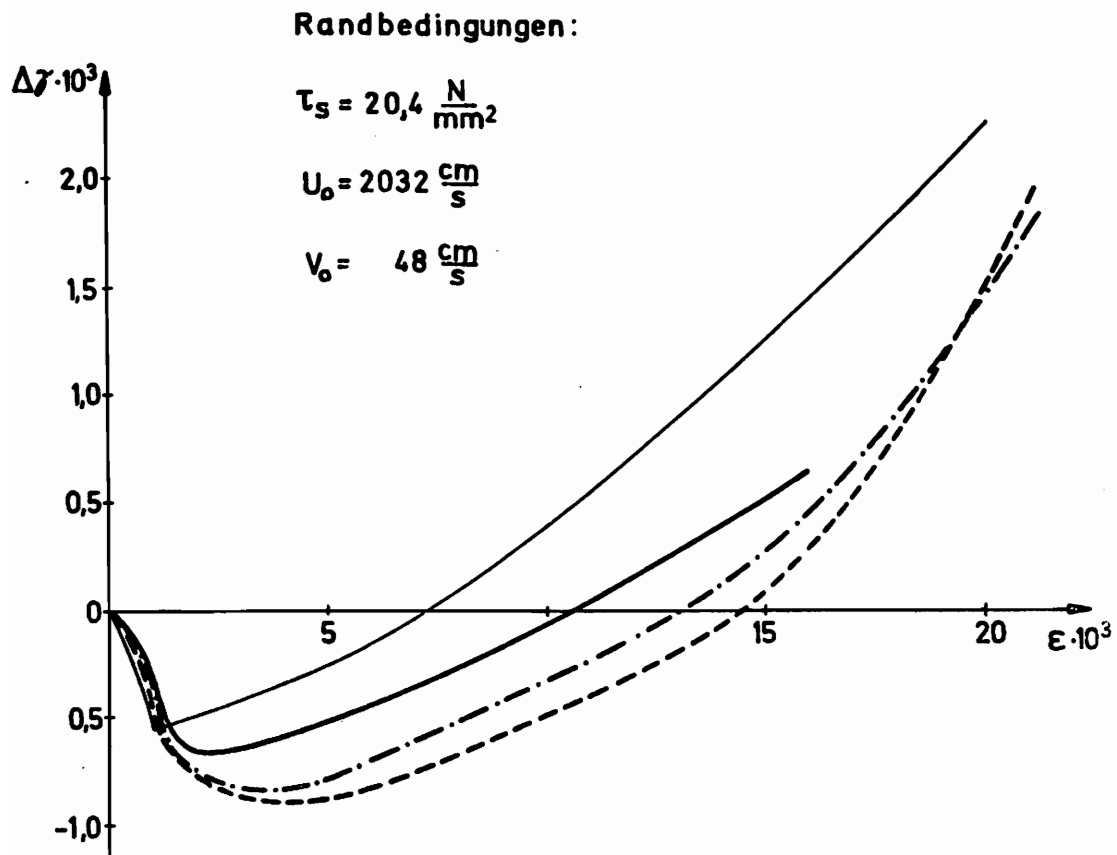


Abb. 7-7 Verzerrungs - Zeitprofil (  $x = 11,4 \text{ cm}$  )



Endspannungszustand

	$\sigma_D$	$\tau_D$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
—	108,2	7,8	Versuch [9]
—	80,3	6,0	Isotrope Verfestigung [9]
Vielkristall:			
- · -	76,8	6,7	Unabhängige Verf.
- - -	75,2	6,8	Isotrope Verfestigung

Abb. 7 - 8 Verzerrungstrajektorien ( $x = 11,4 \text{ cm}$ )

keit des Materials, die in der Theorie nicht berücksichtigt wurde, zurückzuführen ist. Die hier vorgestellte Lösung zeigt aber, daß auch eine geschwindigkeitsunabhängige Theorie geeignet ist, die experimentelle Lösung in dem betrachteten Bereich richtig wiederzugeben.

Während der zeitliche Verlauf der Längsdehnung besonders für die kleine Stoßgeschwindigkeit  $u_0 = 600 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  zumindest für kleine  $\xi$  auch quantitativ recht gut beschrieben wird, zeigt der Verlauf der Schubverzerrung bereits zu Beginn des Wellenprofils größere Unterschiede.  $\Delta\gamma$  sinkt schneller und weiter ab, als im Experiment gemessen wurde. Die Unterschiede in diesem Bereich sind mit der Tatsache zu erklären, daß die Belastung im Experiment nicht, wie in der Theorie angenommen, sprungartig, sondern während eines kurzen Zeitraumes  $\Delta t \approx 10^{-5}$  erfolgte. Das Eintreffen der ersten Störung an der Stelle  $x$  wird in der Theorie in [9] bestimmt durch die Geschwindigkeit  $c_1$  der elastischen Längswellen. In den hier berechneten Lösungen beträgt die Anfangsgeschwindigkeit der schnellen Welle nur ungefähr 85 % von  $c_1$ . Die erste Störung trifft daher je nach der Entfernung  $x$  von der Stoßstelle etwas später ein, was gut mit dem Experiment übereinstimmt.

Für die großen, spät an der Stelle  $x$  ankommenden Verzerrungen sagt keine der Theorien die gemessenen Werte gut voraus. Diese Verzerrungen breiten sich wesentlich schneller aus als im Experiment und erreichen nach kurzer Zeit den Endzustand. In den Versuchen ist der Zeitraum der Messung begrenzt durch das Eintreffen der Reflexionswelle vom Ende des Rohres. Deshalb wurde der konstante

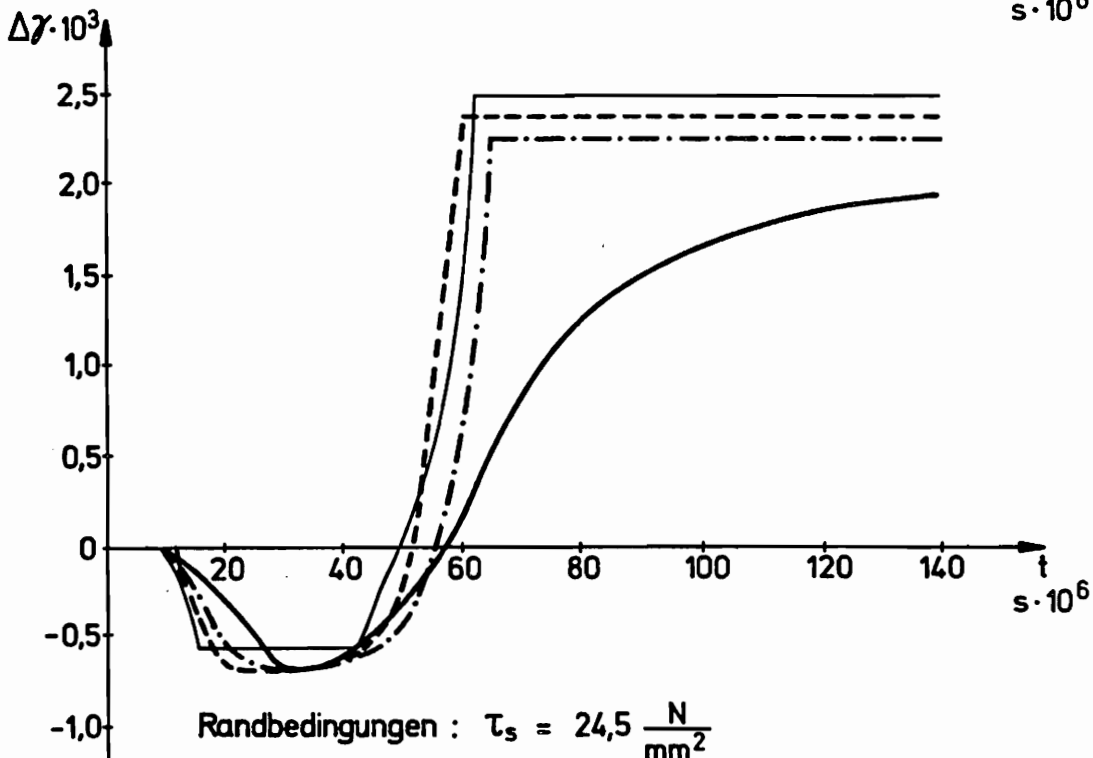
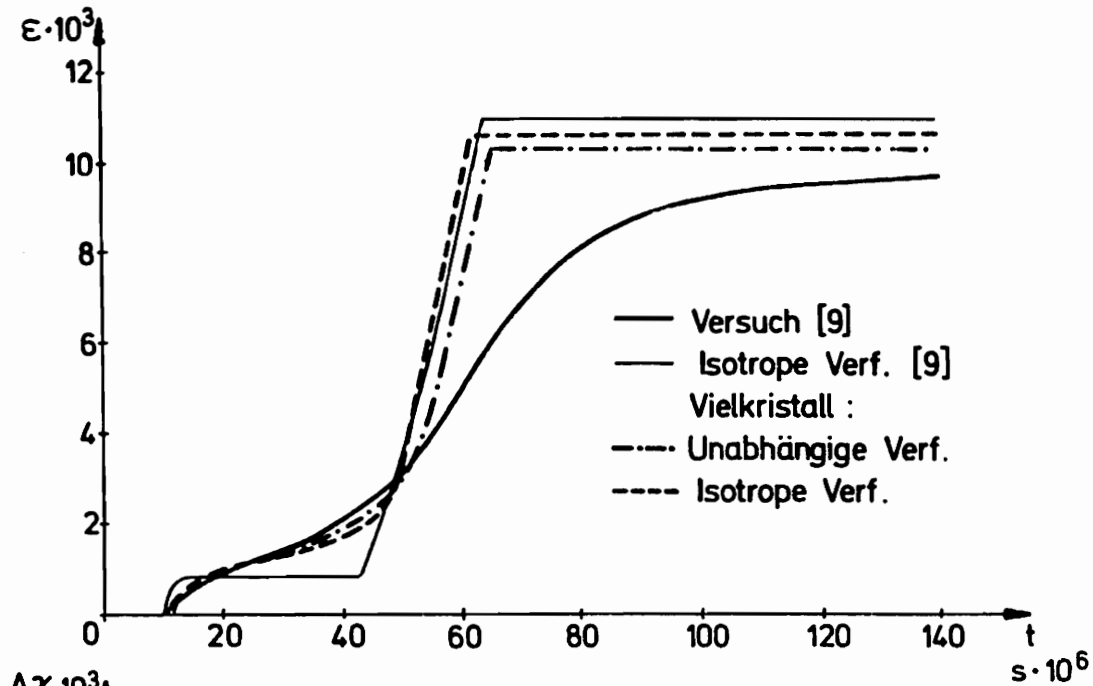
Endzustand lediglich an der nahe der Stoßstelle liegenden Meßstelle  $x = 4,8$  cm beobachtet, während die Messungen für  $x = 11,4$  cm und  $x = 15,9$  cm vorher abgebrochen werden mußten. Die gemessenen Verzerrungen des Endzustandes sind geringer als die berechneten. Die Endspannungszustände stimmen dagegen gut überein.

Die Wahl der Einzelkristallverfestigung führt zum Teil auf erhebliche quantitative Unterschiede zwischen den Lösungen. Die 'unabhängige' Verfestigung führt in allen drei Fällen zu besserer Übereinstimmung mit den Experimenten als die 'isotrope' Verfestigung. Besonders im Fall der langsamen Stoßgeschwindigkeit  $v_0 = 660 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  ist die Übereinstimmung für die 'unabhängige' Verfestigung über einen weiten Bereich sehr gut. Die 'latente' Verfestigung stellt hier ebenfalls eine gute Näherung dar. Die Qualität der errechneten Lösungen sinkt mit wachsender Stoßgeschwindigkeit. Der Grund hierfür ist wohl der Geschwindigkeitseinfluß auf das Materialverhalten bei hohen Stoßgeschwindigkeiten.

In den Abb. 7-11 und 7-12 sind die errechneten Spannungs- und Geschwindigkeitstrajektorien für den Fall  $v_0 = 1270 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ,  $x = 4,8$  cm zusammen mit den theoretischen Lösungen in [9] dargestellt. Die Spannungstrajektorien zeigen die gleichen Eigenschaften, die qualitativ in den Erläuterungen zu Abb. 7-2 beschrieben wurden.

Die Geschwindigkeitstrajektorien haben die gleichen Merkmale wie die Verzerrungstrajektorien in Abb. 7-10. Die Geschwindigkeit  $v$  wird zunächst stark negativ und steigt dann mit wachsendem  $v$  auf den vorgegebenen Wert  $v_0$  an.

In Abb. 7-11 sind die errechneten Spannungsvertei-



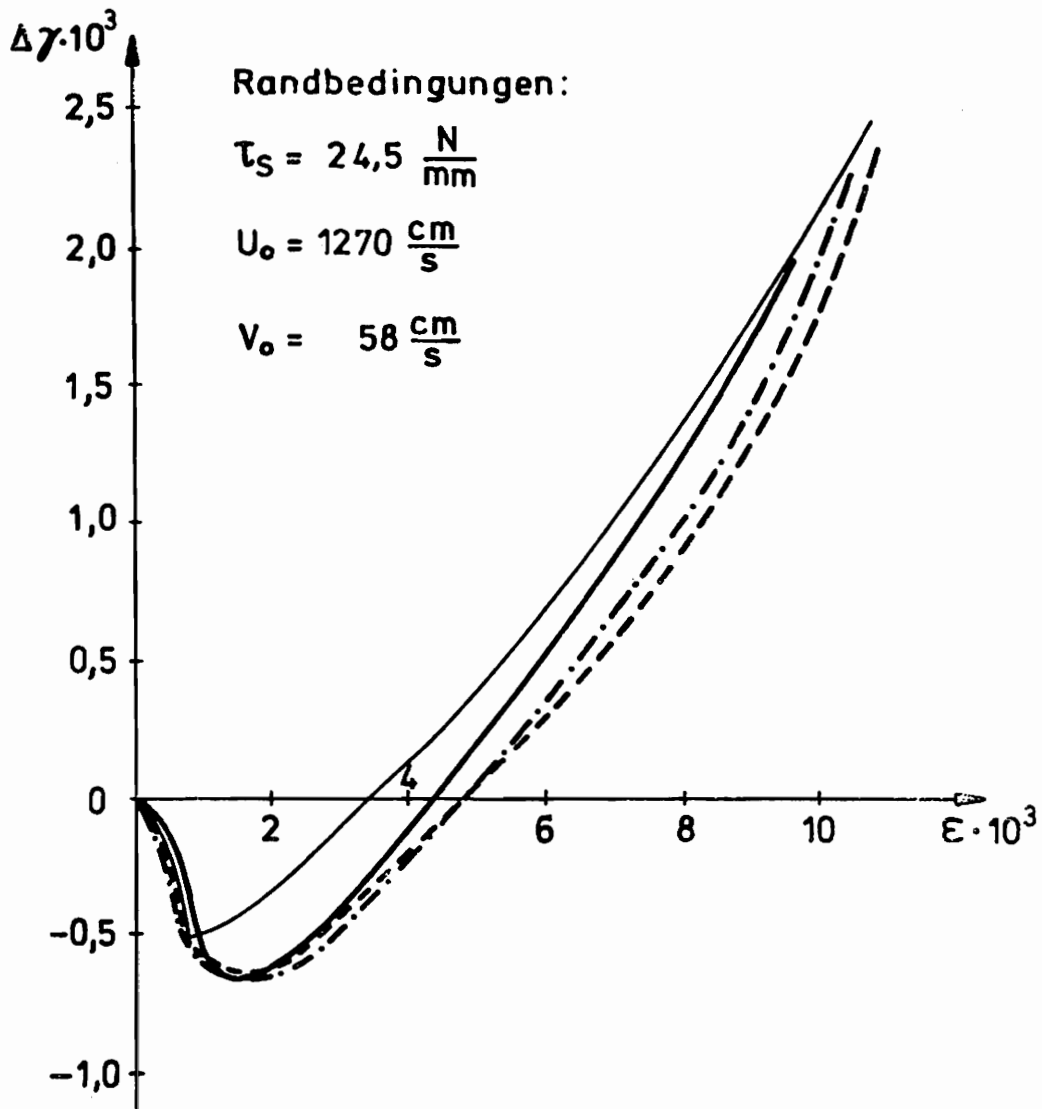
Randbedingungen :  $\tau_s = 24,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$$u_0 = 1270 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$v_0 = 58 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Abb. 7 - 9 Verzerrungs - Zeitprofil ( $x = 4,8 \text{ cm}$ )





Endspannungszustand

	$\sigma_D$	$\tau_D$	$\frac{N}{mm^2}$
—	72,1	10,0	Versuch [9]
—	66,6	8,9	Isotrope Verf. [9]
— · —	65,8	9,5	Vielkristall: Unabhängige Verf.
- - -	66,4	8,5	Isotrope Verf.

Abb. 7 - 10 Verzerrungstrajektorien ( x = 4,8 cm )

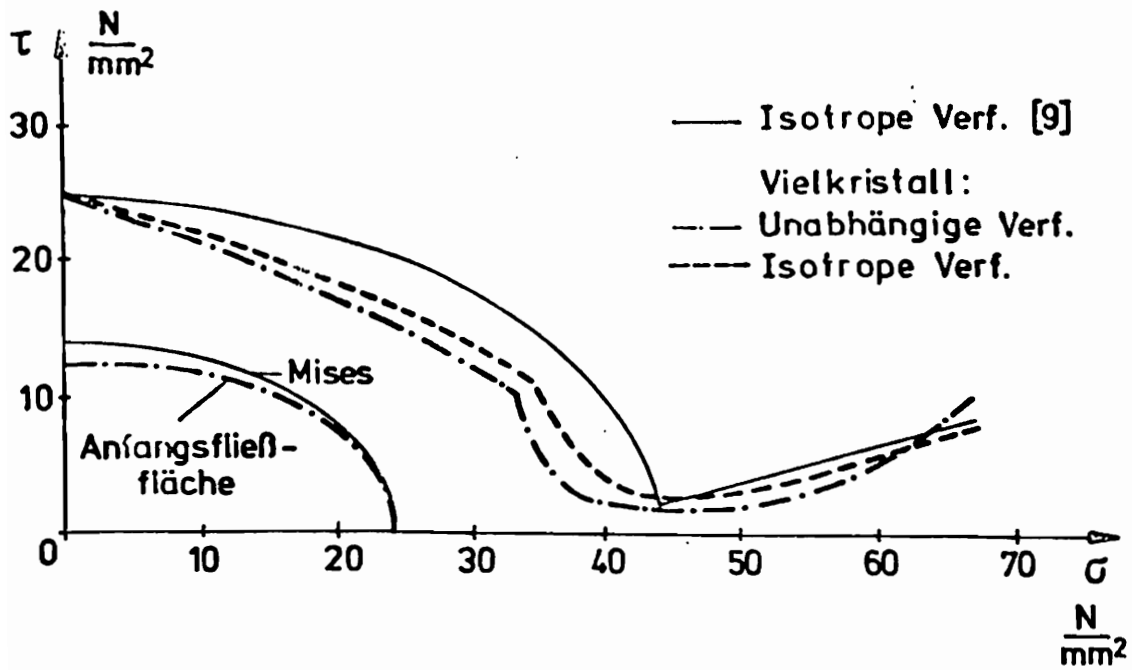


Abb. 7 - 11 Spannungstrajektorien ( $x = 4,8$  cm)

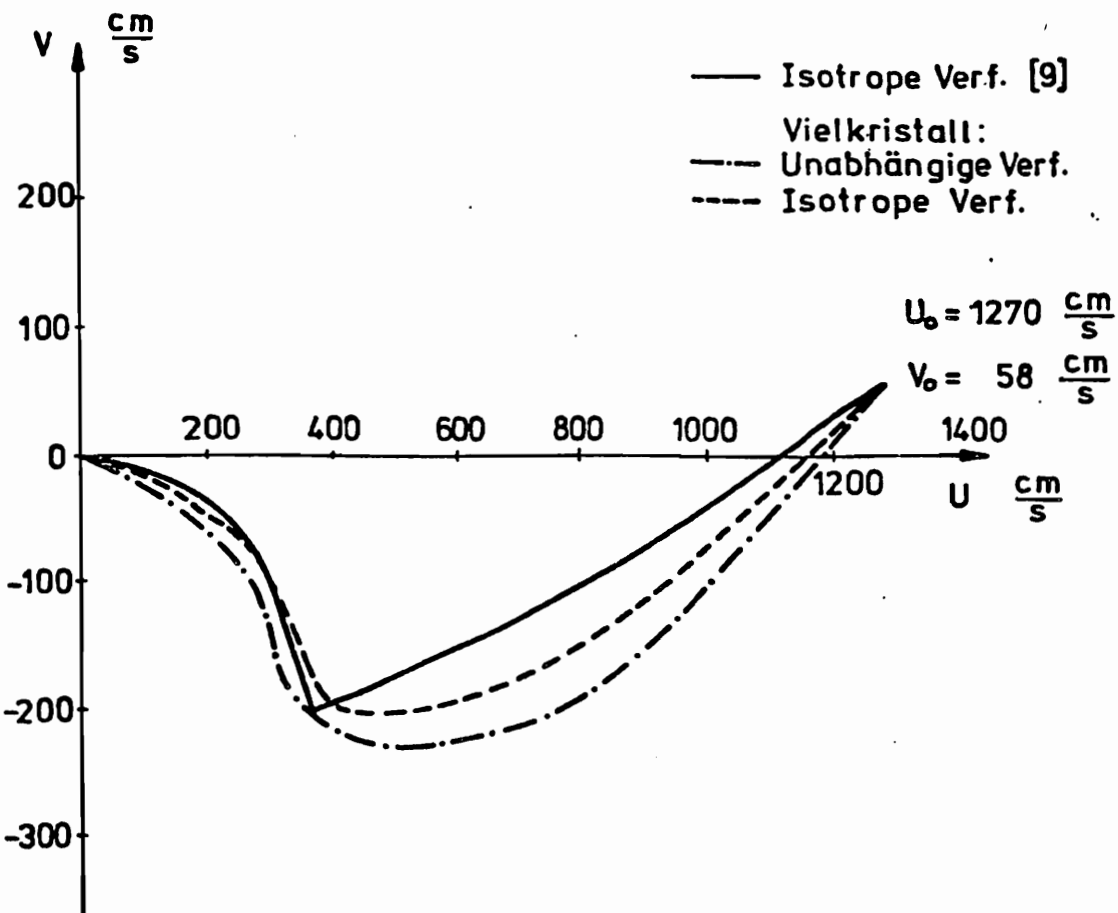


Abb. 7 - 12 Geschwindigkeitstrajektorien ( $x = 4,8$  cm)

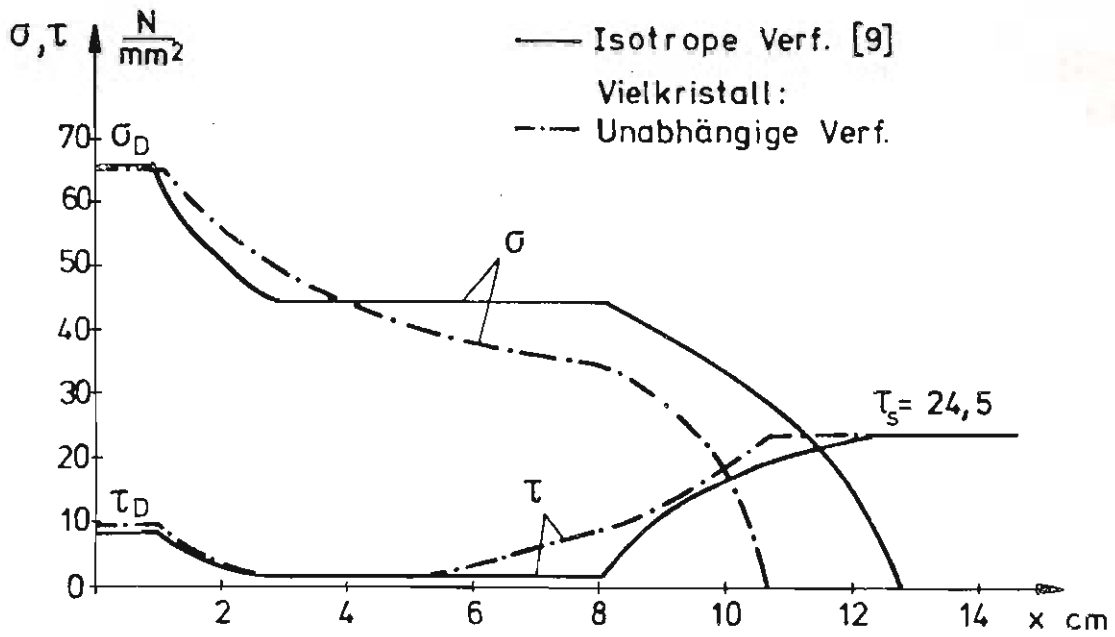


Abb. 7-13 Spannungsverteilung zur Zeit  $t = 25 \cdot 10^{-6}$  s

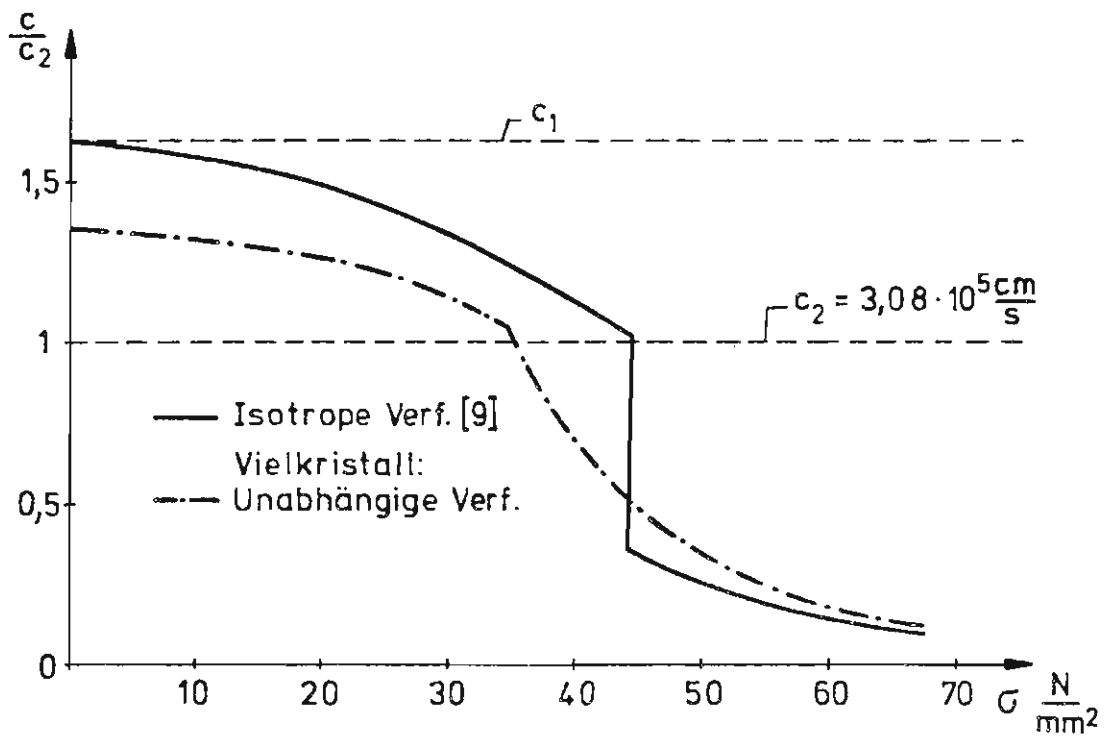


Abb. 7-14 Wellengeschwindigkeit ( $x = 4,8$  cm)

lungen im Rohr zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  dargestellt. Bemerkenswert ist wiederum das Fehlen des Bereiches konstanter Spannung ( $x = 3$  bis  $x = 8$  cm). Außerdem ist zu sehen, daß sich die Störung langsamer ausbreitet als aus der Theorie in [9] folgt.

Der Verlauf der Wellengeschwindigkeit bei wachsender Normalspannung (Abb. 7-12) zeigt ebenfalls diesen Unterschied. Während sich nach [9] die Störung mit der Geschwindigkeit  $C_1$  ausbreitet, ist nach der hier berechneten Lösung der Wert nur ungefähr  $0,85 \cdot C_1$ . Für den Endzustand sind die Geschwindigkeiten ungefähr gleich groß. Sie betragen nur annähernd 10 % von  $C_2$ .

### 7.3. Das vorgezogene Rohr

Für dieses Problem liegen keine Versuchsergebnisse vor, mit denen wir die theoretische Lösung vergleichen können. Dennoch ist dieser Belastungsfall von Interesse, da die Lösung einen charakteristischen Unterschied zur vorher besprochenen Lösung für das vortordierte Rohr aufweist.

Als statische Belastung wird zunächst eine Längskraft aufgebracht, die die Normalspannung  $\sigma = 1,5 \sigma_0$  erzeugt. Dann wird durch ein Torsionsmoment die impulsartige Belastung an der Stelle  $x = 0$  erzeugt. Sie ist gegeben durch die Spannung  $\tau_0 = \tau_0$ . Wir nehmen die gleichen Materialeigenschaften wie im vorhergehenden Abschnitt an und führen die Berechnung für unabhängige Einzelkristallverfestigung durch.

Die einfache Wellenlösung erfordert wiederum die Erfüllung der Gleichung (6.16)

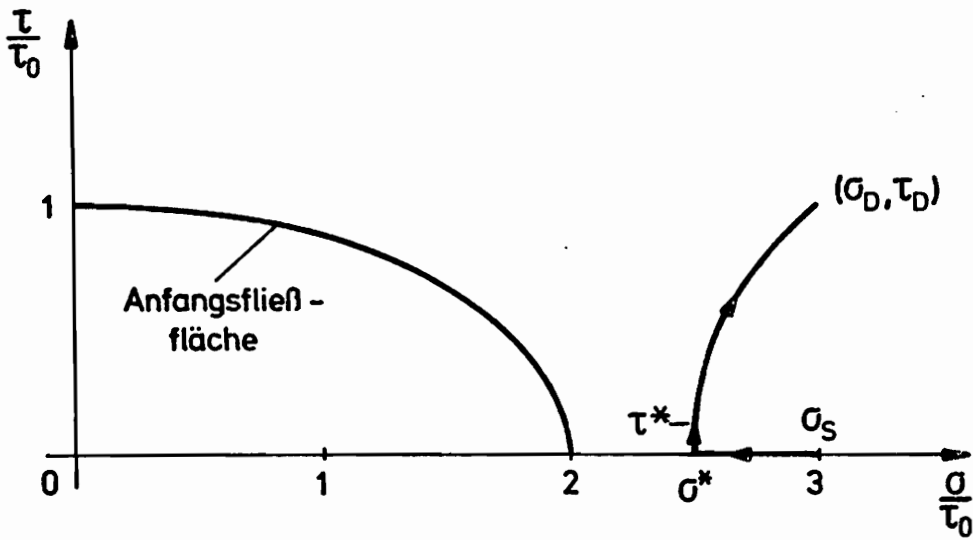
$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\gamma}{\Delta\xi} \quad (6.16)$$

und der Bedingung, daß die Wellengeschwindigkeit längs der Trajektorien vom Anfangs- bis zum Endzustand absinkt. In den Abb. 7-15, 7-16 sind der Verlauf der Spannungstrajektorie vom Anfangszustand  $(\sigma_s, 0)$  bis zum Endzustand  $(\sigma_p = \sigma_s, \tau_p)$  und die dazugehörigen Charakteristiken dargestellt.

Ein wesentliches Merkmal der Lösung ist die Entlastung von  $\sigma_s$  nach  $\sigma^*$  und das daraus resultierende elastische Verhalten des Materials im Bereich

$\sigma_s - \sigma^* - \tau^*$ . In diesem Bereich sind die Gleichungen des Stoffgesetzes (6.3) entkoppelt. Längs- und Scherwellen breiten sich unabhängig voneinander mit den unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $c_1 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$  bzw.  $c_2 = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$  aus. Gleichung (6.16) ist bei elastischem Verhalten ein unbestimmter Ausdruck; er ist nur erfüllt für  $\Delta\tau = 0$  oder  $\Delta\sigma = 0$ . Die Spannungstrajektorien können also nur parallel zur  $\sigma$  bzw.  $\tau$ -Achse verlaufen.

Die Abb. 7-16 zeigt die verschiedenen zeitlich aufeinanderfolgenden Zustände. Wir betrachten eine feste Stelle X. An dieser Stelle trifft die erste Störung mit der Geschwindigkeit  $c_1$  ein. Die Normalspannung ändert sich sprunghaft um den Wert  $\Delta\sigma = \sigma^* - \sigma_s$ , die Schubspannung bleibt  $\tau = 0$ . Bis zum Eintreffen der Scherwelle ( $c = c_2$ ) ist der Spannungszustand konstant. Dann steigt die Schubspannung sprunghaft auf den Wert  $\tau^*$ , während  $\sigma^*$  sich nicht ändert. Der Punkt  $(\sigma^*, \tau^*)$  ist ein Punkt der aktuellen Fließfläche. Nach Verlassen des elastischen Bereiches sind die Längs-



Randbedingungen :

$$\frac{\sigma_S}{\tau_0} = 3 \quad , \quad \frac{\sigma_D}{\tau_0} = 3 \quad , \quad \frac{\tau_D}{\tau_0} = 1$$

Abb. 7-15 Spannungstrajektorie für das vorgezogene Rohr

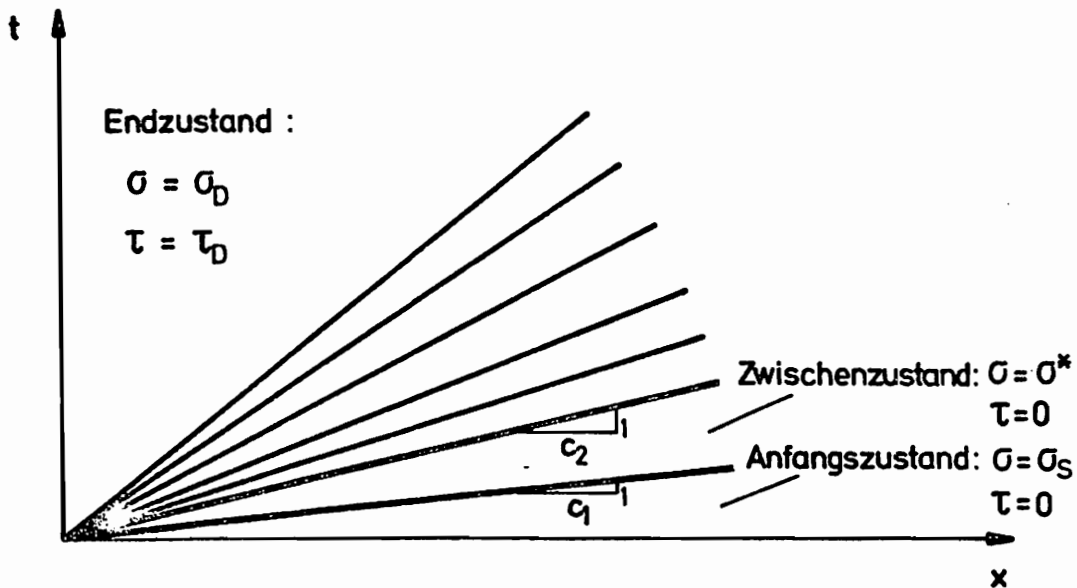


Abb. 7-16 Charakteristiken für das vorgezogene Rohr

und Scherwellen gekoppelt und der weitere Verlauf der Spannungstrajektorie muß, wie in Abschnitt 7.2 beschrieben mit der Gleichung (6.16) gefunden werden. Die Lage des Punktes  $(\sigma^*, 0)$ , an dem der zum Endspannungszustand  $(\sigma_D, \tau_D)$  gehörende Zweig der Trajektorie beginnt, ist nicht von vornherein bekannt, sondern muß durch wiederholtes Berechnen des Zweiges iterativ ermittelt werden.

In Abb. 7-17 ist für einen festen Zeitpunkt  $t$  der Verlauf der Spannungen längs der  $x$  - Achse in dimensionslosen Größen dargestellt. Neben der Tatsache, daß sich durch dynamisches Aufbringen einer Schubspannung  $\tau_D$  auf ein vorgezogenes Rohr eine Längswelle in dem Rohr ausbreitet, ist die sprungartige Veränderung der Spannungen an den Wellenfronten  $x = c_1 \cdot t$  und  $x = c_2 \cdot t$  bemerkenswert. Dies ist ein prinzipieller Unterschied zur Lösung des in Längsrichtung dynamisch belasteten vortordierten Rohres ( Abb. 7-13 ).

Abb. 7-18 zeigt den zeitlichen Verlauf der Verzerungen bei festem  $x$ . Die Längsdehnung sinkt zum Zeitpunkt  $t = x/c_1$  sprungartig um den Wert  $(\sigma_s - \sigma^*)/E$ , bleibt dann konstant bis  $t = x/c_2$ , und steigt schließlich an auf einen Endwert, der über dem Wert der durch  $\sigma_s = \sigma_D$  hervorgerufenen Dehnung liegt. Der Scherwinkel steigt zum Zeitpunkt  $t = x/c_2$  sprungartig auf den Wert  $\tau^*/G$  und ändert sich dann stetig, bis der Endwert erreicht ist.

Die Verformung der Fließfläche durch die statische Beanspruchung  $\sigma_s$  hat einen großen Einfluß auf die Lösung, denn durch sie wird der Wert  $\tau^*$  und damit die Größe des Spannungssprunges an den Wellenfronten

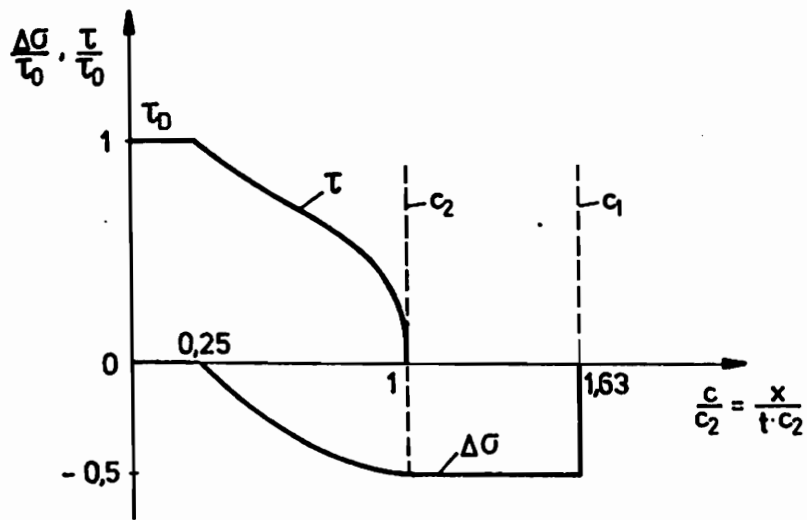


Abb. 7-17 Spannungs - Wegprofil

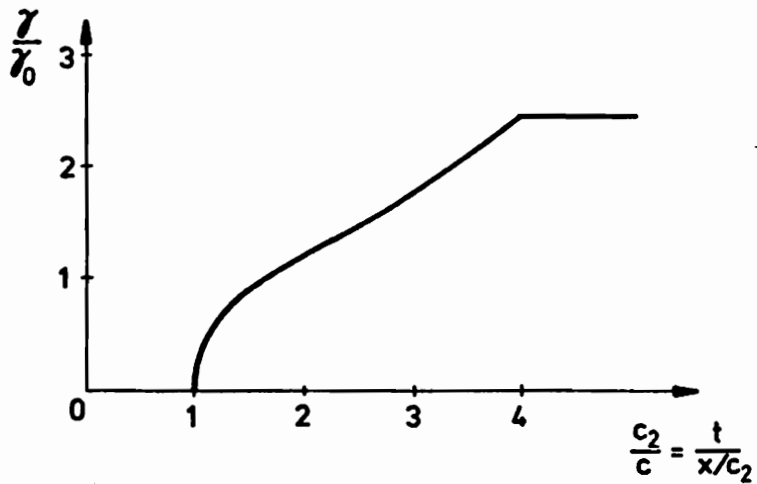
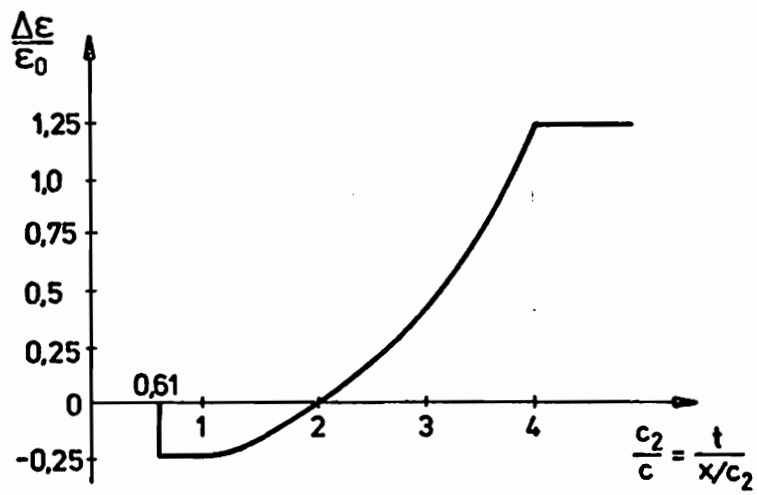


Abb. 7 - 18 Verzerrungs - Zeitprofil



der elastischen Wellen bestimmt. Eine qualitative Lösung dieses Problems in [10] mit einem Stoffgesetz der phänomenologischen Theorie ( arbeitsverfestigendes, isotropes Material ) zeigt wesentliche Unterschiede zur hier dargestellten Lösung. Es wäre interessant in Experimenten zu klären, welcher Theorie der Vorzug zu geben ist.

## 8. Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit werden inelastische Formänderungen eines vielkristallinen Werkstoffes mit einem Modell der physikalischen Plastizitätstheorie beschrieben. In diesem Modell wird das Verhalten eines Vielkristalls näherungsweise aus den Gleitvorgängen in den einzelnen Kristallen bestimmt.

Es wird gezeigt, daß das Stoffverhalten durch die Standardform eines Problems der Linearen Programmierung beschrieben werden kann. Hieraus wird ein auf der Simplex Methode beruhendes Berechnungsverfahren entwickelt, das es ermöglicht, Probleme mit mehrachsigen Spannungs- und Verzerrungszuständen zu behandeln.

Zur Beurteilung des Stoffgesetzes werden zunächst Lösungen für den ebenen Spannungszustand berechnet und mit Versuchsergebnissen verglichen. Es zeigt sich, daß das Stoffgesetz geeignet ist, die Verformung der Fließfläche bei plastischen Formänderungen angenähert richtig wiederzugeben.

Sodann werden 'einfache' Wellenlösungen für ein impulsartig in Längs- und Umfangsrichtung belastetes Rohr ermittelt. Die Lösungen zeigen, daß die wesentlichen Eigenschaften experimenteller Ergebnisse qualitativ richtig beschrieben werden können. Unterschiede treten besonders bei größeren Verzerrungen und hohen Belastungsgeschwindigkeiten auf. Eine mögliche Erklärung hierfür ist zum einen die sehr einfache Form der Verfestigungsansätze für den Einzelkristall, zum andern die Vernachlässigung

des Geschwindigkeitseinflusses auf das Materialverhalten. Die Lösungen zeigen jedoch in einem großen Bereich bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Werten, als Lösungen, die sich für ein Stoffgesetz nach der phänomenologischen Theorie ergeben.

Abschließend kann festgestellt werden, daß das entwickelte Berechnungsverfahren für das hier zu Grunde gelegte Modell der Vielkristallplastizität auch bei komplexen Belastungsvorgängen praktikabel ist. Demgegenüber mußte man sich bei bisherigen Untersuchungen auf einfache Formänderungsvorgänge, wie Zug oder Scherung beschränken. Die gewonnenen neuen Ergebnisse bestätigen die Brauchbarkeit des Modells auch für den erweiterten Anwendungsbereich. Die Verwendung des Modells zur Lösung technischer Probleme scheint jedoch nur begrenzt möglich zu sein, da der Rechenaufwand nach wie vor hoch ist. Erfolgversprechende Bemühungen könnten jedoch darin bestehen, eine phänomenologische Theorie zu entwickeln, in die wesentliche Eigenschaften der physikalischen Theorie eingearbeitet sind.

Literaturverzeichnis

---

- [1] Taylor, G. I. Plastic Strain in Metals  
J. Inst. Metals, 62 (1938)  
S.307
- [2] Bishop, J.F.W. A Theoretical Derivation  
and Hill, R. of the Plastic Properties  
of Polycrystalline Face-  
Centered Metal  
Phil. Mag. 42 (1951)  
S.1298
- [3] Batdorf, S.B. A Mathematical Theory of  
and Budiansky, B. Plasticity Based on the  
Concept of Slip  
NACA TN 1871 (1949)
- [4] Kröner, E. Zur plastischen Verformung  
des Vielkristalls  
Acta Metallurgica 9 (1961)  
S.155
- [5] Budiansky, B. Theoretical Prediction  
and Wu, T.T. of Plastic Strains of  
Polycrystals  
Proc. 4th U.S. Nat. Congr.  
Appl. Mech. (1962) S.1175
- [6] Hutchinson, J.W. Plastic Stress-Strain  
Relations of F.C.C. Poly-  
crystalline Metals Harden-  
ing According to Taylor's  
Rule  
J. Mech. Phys. Solids 12  
(1964) s.11

- [7] Güldenpfennig, J. and Clifton, R.J. On the Computation of Plastic Stress-Strain Relations for Polycrystalline Metals  
Comp. Meth. Appl. Mech. and Engineering 10 (1977) S.141
- [8] Naghdi, P.M., Essenburg, F. and Koff, W. An Experimental Study of Initial and Subsequent Yield Surfaces in Plasticity  
J. Appl. Mech. 25 (1958) S.201
- [9] Lipkin, J. and Clifton, R.J. Plastic Waves of Combined Stresses due to Longitudinal Impact of a Pretorged Tube, Part I and II  
J. Appl. Mech. 37 (1970) S.1107
- [10] Clifton, R.J. An Analysis of Combined Longitudinal and Torsional Plastic Waves in a Thin-Walled Tube  
Proc. 5th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1966) S.465
- [11] Lipkin, J. and Clifton, R.J. An Experimental Study of Combined Longitudinal and Torsional Plastic Waves in a Thin-Walled Tube  
Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech. (1968) S.292

- [12] Goel, R.P. and Malvern, L.E.      Biaxial Plastic Simple Waves with Combined Kinematic and Isotropic Hardening  
J. Appl. Mech. 37 (1970) S.1101
- [13] Lindholm, U.S.      Some Experiments with the Split Hopkinson Pressure Bar  
J. Mech. Phys. Solids 12 (1964) S.317
- [14] Wu, H.C. and Lin, H.C.      Combined Plastic Waves in a Thin-Walled Tube  
Int. J. Solids Structures 10 (1974) S.903
- [15] Hornbogen, E.      Werkstoffe  
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973
- [16] Schmid, E.      Neuere Untersuchungen an Metallkristallen  
Proc. 1st. Int. Congr. Appl. Mech. (1924) S.342
- [17] Kocks, U.F.      The Relation Between Polycrystal Reformation and Single-Crystal Reformation  
Met. Trans. 1 (1970) S.1121
- [18] Taylor, G.I. and Elam C.F.      The Plastic Extension and Fracture of Aluminum Crystals  
Proc. Roy. Soc. A 108 (1925) S.28

- [19] Koiter, W.T.                      Stress-Strain Relations,  
Uniqueness and Variational  
Theorems for Elastic-Plastic  
Materials with a Singular  
Yield Surface  
Quart. Appl. Math. 11 (1953)  
S.350
- [20] Kocks, U.F. and                      Polyslip in Single Crystals  
Brown, T.J.                              Acta Met. 14 (1966) S.87
- [21] Jackson, P.J. and                      Latent Hardening and the Flow  
Basinsky, Z.S.                              of Stress of Copper Single  
Crystals  
Can. J. Phys. 45 (1967) S.707
- [22] Hill, R.                                  Generalized Constitutive  
Relations for Incremental  
Deformation of Metal Crystals  
by Multislip  
J. Mech. Phys. Solids 14 (1966)  
S. 95
- [23] Zurmühl, R.                              Matrizen  
Springer-Verlag, Berlin (1964)
- [24] Eshelby, J.D.                              The Determination of the Elastic  
Field of an Ellipsoidal In-  
clusion, and Related Problems  
Proc. Roy. Soc. A 241 (1957)  
S.376
- [25] Budiansky, B.,                              The Stress Field of a Slipped  
Hashin, Z. and                              Crystal and the Early Plastic  
Sanders, J.L.                                  Behaviour of Polycrystalline  
Materials  
Proc. 2nd Symp. Naval Struc.  
Mech. (1960) S.239

- [26] Hill, R. Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals  
J. Mech. Phys. Solids 13  
(1965) S.89
- [27] Dantzig, G.B. Linear Programming and Extensions  
Princeton Univ. Press,  
Princeton (1963)
- [28] Isaacson, E. and Keller, H.B. Analysis of Numerical Methods  
Wiley, New York, N.Y. (1966)
- [29] Hill, R. The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals  
J. Mech. Phys. Solids 15 (1967)  
S.79
- [30] Mandel, J. Contribution théorique à l'étude de l'écroutissement et des lois de l'écoulement plastique  
Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. (1964) S.502
- [31] Rice, J.R. Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in Relation to Microscale Deformation Mechanisms  
Technical Report No. 28,  
Brown University (1974)



- [32] Hutchinson, J.W. Elastic-Plastic Behaviour of Polycrystalline Metals and Composites  
Proc. Roy. Soc. Lond. 319, Ser. A (1970) S.247
- [33] Ivey, H.J. Plastic Stress-Strain Relations and Yield Surfaces for Aluminum Alloys  
J. Mechanical Engr. Sci. 3 (1961) S.15
- [34] Drucker, D.C. A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations  
Proc. 1st U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. (1951) S.487
- [35] Phillips, A. and Gray, G.A. Experimental Investigation of Corners in the Yield Surface  
J. Basic Engineering, Trans. A.S.M.E. 83, Ser. D (1961) S. 275
- [36] Ronay, M. Second-Order Elongation of Metal Tubes in Cyclic Torsion  
Int. J. Solids Structures 4 (1968) S.509
- [37] Clifton, R.J. Plastic Waves: Theory and Experiments  
Mechanics Yearbook 1972 S.102 ed. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press

- [38] Courant, R. and Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics II, Partial Differential Equations Interscience Publishers New York (1962)

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Seminarberichte zur Thermomechanik (in Vorbereitung)
- Nr. 3 Wolfgang Krings: Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl: Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewics: Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom: Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 12**