



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Hans-Albert Lauert

Optimierung von Stäben unter
dynamischer periodischer
Beanspruchung bei Beachtung von
Spannungsrestriktionen

Heft Nr. 15



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Hans -Albert Lauert

Optimierung von Stäben unter dynamischer
periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.15

August 1979

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller sowie Herrn Dr.-Ing. K. Thermann danke ich für die Anregung und Unterstützung bei der Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 14.3.1979

Tag der mündlichen Prüfung: 12.6.1979

© 1979 Dipl.-Ing. Hans-Albert Lauert

Geisecker Talstraße 95 · 5840 Schwerte

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Es wird das minimale Volumen von Stäben bestimmt, die einer dynamischen harmonischen Belastung durch eine Einzelkraft unterworfen sind. Der Querschnittsflächenverlauf wird so bestimmt, daß die maximal auftretenden Biegespannungen zu keiner Zeit und an keiner Stelle einen vorgegebenen Wert überschreiten. Weiterhin ist berücksichtigt, daß die Querschnittsabmessungen durch einen kleinsten und einen größten Wert eingeschränkt sind. Experimentelle Untersuchungen zeigen im Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen gute Übereinstimmung und bestätigen die Leistungsfähigkeit des verwendeten Rechenverfahrens.

Summary

In this paper the minimum volume of beams is determined, which are excited by a singular harmonic force. The shape of the beam is determined such that the maximum bending stresses at no time and no point exceed a given value. The cross sectional area is limited by minimum and maximum values. Experimental results are in good agreement with theoretical results and prove the efficiency of the analytical procedure, which has been used.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	3
1. Einleitung	5
2. Problemstellung	7
2.1. Das Optimierungsproblem	7
2.2. Spannungsanalyse	8
2.2.1. Integration der Schwingungsgleichung	9
2.2.2. Diskretisierung des Stabes	10
2.3. Stabmodell	13
3. Der Sonderfall des Stabes gleicher Festigkeit	15
3.1. Unterkritische Erregung	18
3.2. Überkritische Erregung	22
4. Optimierung bei rein dynamischer Belastung	30
4.1. Lösungsmethoden	30
4.1.1. Methode der Lokalschnitte	30
4.1.2. Unbeschränkte Suche bei diskretisierten Stäben	39
4.2. Eingeschränkte Querschnittsformen	43
4.3. Uneingeschränkter Querschnittsverlauf	48
4.4. Bemerkungen zum optimalen Querschnittsverlauf	51
4.4.1. Egalisierung stark schwankender Querschnitte	52
4.4.2. Ersatz eines großen Endquerschnittes	52
5. Optimierung unter Einbeziehung von Zusatzlasten	54
5.1. Stab mit zusätzlicher statischer Einzelkraft	55
5.2. Einbeziehung des Eigengewichts	68
5.3. Diskrete Massen als Zusatzlasten	70
6. Weitere Abschätzungen und Näherungen	74
6.1. Stab konstanten Querschnitts mit Zusatzlasten	75
6.2. Stab konstanten Querschnitts ohne Zusatzlasten	79
6.3. Konstante Querschnittsbereiche variabler Länge	82

	Seite
7. Experimentelle Untersuchungen	86
7.1. Versuchsanlage	86
7.2. Einfluß der Einspannung auf die Schwingung	88
7.3. Einfluß der Krafteinleitung in den Stab	90
7.4. Fehlerabschätzung der Meßkette	94
7.5. Versuchsergebnisse	94
8. Zusammenfassung	103
Literaturverzeichnis	104

Bezeichnungen

A	Querschnittsfläche
b	Stabbreite
E	Elastizitätsmodul
F_0	statische Einzelkraft
F_1	dynamische Einzelkraft
f	bezogene Querschnittsfläche
g	Faktor
H, H^*	Hilfsfunktion
h	Stabhöhe
I	Flächenträgheitsmoment
i	bezogenes Flächenträgheitsmoment
k	Proportionalitätsfaktor
l	Stablänge
M	Biegemoment
m	bezogenes Biegemoment
N	Anzahl der Unterteilungen
p	Faktor
Q	Querkraft
q	bezogene Querkraft
t	Zeit
u, u^*	bezogene Querschnittsfläche
V	Volumen
v	bezogene Durchbiegung
W	Widerstandsmoment
w	Durchbiegung
x	Längenkoordinate
\underline{z}	Vektor der Zustandsgrößen (Phasenkoordinaten)

$\bar{v}, \bar{y}, \bar{m}, \bar{q}$	Hilfsfunktionen
$\beta, \bar{\beta}$	Frequenzparameter
ε	Genauigkeitsschranke
χ	Belastungsverhältnis
ξ, ξ^*	bezogene Längenkoordinaten
ρ	Dichte
ρ_i	Hilfsfunktion
σ	mechanische Spannung
σ_0	vorgegebene Bezugsspannung
φ	Biegewinkel
ψ_i	Hilfsfunktionen
Ω	Erregerfrequenz
$()'$	Ableitung nach x
$()\cdot$	Ableitung nach ξ

1. Einleitung

Im Bereich der Statik ist die Ermittlung optimaler Bauelemente unter Berücksichtigung einer vorgegebenen maximalen Beanspruchung seit langem bekannt. Der "Stab gleicher Festigkeit" ist z. B. im statischen Falle zugleich ein Element, welches das Tragvermögen des Materials optimal ausnutzt und deshalb minimales Gewicht besitzt. Ganz anders sieht es bei der Optimierung bei dynamischer Belastung aus. Nur wenige Veröffentlichungen beziehen Spannungsrestriktionen in die Optimierung mit ein /3, 4/. Dagegen liegen andere Arbeiten vor, die im wesentlichen zwei Aufgabengebiete bzw. deren duale Formulierung behandeln.

1. Bei vorgegebenem Materialaufwand wird die optimale Gestalt eines Stabes gesucht, die die erste oder eine höhere Eigenfrequenz zum Maximum macht /5-9/.
2. Bei vorgegebenem Materialaufwand wird die optimale Gestalt eines Stabes gesucht, die die Durchbiegung an einem Punkt des Systems zum Minimum macht /10-12/.

Überwiegend wird der Rayleigh-Quotient zur Bestimmung der Eigenfrequenz herangezogen. So beschränkt sich Niordsen /9/ auf unterkritisch erregte Stäbe und erweitert diese Arbeit zusammen mit Karihaloo /7/ durch aufgebrachte Einzelmassen. Olhoff /5, 6/ maximiert Eigenfrequenzen höherer Ordnung und benutzt für die tieferen Eigenfunktionen orthogonale Ansatzfunktionen, die den kinematischen Bedingungen genügen, um die Gültigkeit des Rayleighschen Prinzips zu gewährleisten. Darüber hinaus läßt er Einzelmassen zu und legt eine untere Querschnittsfläche fest, wobei er durch die Substitution

$$Q(x) = a_{min} + u^2(x)$$

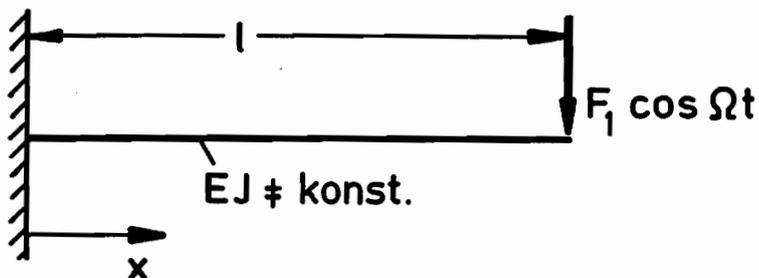
die beschränkte Variable $a(x)$ durch die unbeschränkte $u(x)$ ausdrückt. Die gleiche Variablensubstitution benutzt Pierson /8/ in seiner Arbeit, um sein "gradient-projection"-Verfahren günstig anwenden zu können. Zur Minimierung des Materialaufwandes bei vorgegebener Eigenfrequenz integriert er die Gleichung der Stabschwingung und findet auch Lösungen zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz des optimierten Stabes. Dagegen greifen Icermann /11/ und Plaut /12/ wieder auf Rayleigh

zurück und beschränken sich auf unterkritische Erregung.

Weitere umfassendere Angaben über Veröffentlichungen über dieses Thema geben Sheu und Prager /13/ sowie Niordsen/Pedersen /14/.

Den bisherigen Veröffentlichungen ist gemeinsam, daß Einschränkungen - sofern sie existieren - unabhängig von den Schnittgrößen im Stab sind und das Optimierungsziel ohne Rücksicht auf die auftretenden Beanspruchungen angestrebt wird. Weiterhin sind stets energetische Ansätze in Form des Rayleighschen Prinzips möglich, um zu einer Lösung zu gelangen. Gerade diese energetischen Aussagen reichen aber nicht mehr aus, um bei Spannungsrestriktionen das Optimierungsproblem zu beschreiben.

In der vorliegenden Arbeit wird - in Analogie zum "Stab gleicher Festigkeit unter statischer Beanspruchung" - zunächst der "Stab gleicher Festigkeit unter dynamischer Beanspruchung" behandelt, wobei als Belastung eine harmonisch veränderliche Einzelkraft angenommen wird.



Das Ziel dieser Betrachtung ist es, herauszufinden, ob ein in dieser Weise dimensionierter Stab wenigstens näherungsweise als optimale Lösung hinsichtlich der Gewichtsminimierung angesehen werden kann, wie das bei instationärer Erregung vielfach möglich ist /17/. Es zeigt sich jedoch, daß bei periodischer Erregung dieser Weg im allgemeinen nicht zu einer Optimierung führt. Deshalb wird das Problem allgemeiner angegangen werden.

Der allgemeine Fall, der eine Beschränkung der Biegespannung in der Form

$$\frac{|M(x)|}{W(x)} \leq \sigma_0$$

vorsieht, ermöglicht die Formulierung eines Optimierungsproblems mit dem unbekanntem Querschnittsverlauf als Steuergröße des Systems. Dabei wird der Querschnitt in seiner minimalen und maximalen Abmessung eingeschränkt.

Die verwendeten Lösungsmethoden umfassen alle Erregerfrequenzen, schließen also unter- und überkritische Erregung mit ein.

Mit Hilfe des von Boltjanski /1/ angegebenen "Verfahren der Lokalschnitte", welches auf dem Maximumprinzip von Pontryagin basiert, gelingt die analytische Formulierung bei Einschluß der Querschnittsrestriktionen. Neben dem Differentialgleichungssystem der Stabschwingung tritt ein formal ähnliches System von Hilfsfunktionen auf. Beide sind über die Steuerfunktion gekoppelt.

Tragen die zu optimierenden Stäbe statische Zusatzlasten in Form von Einzelkräften oder diskreten Massen, so ist die Methode der Lokalschnitte nicht mehr anwendbar. In diesen Fällen wird auf eine physikalische Diskretisierung des Stabes zurückgegriffen, bei der die kontinuierliche Steuerfunktion durch N unabhängige Variablen beschrieben wird. Vorteilhaft sind somit rechnerangepaßte Methoden anwendbar, die eine schnelle Spannungsanalyse gestatten; zusätzlich stehen erprobte Suchalgorithmen für N-dimensionale Probleme bereit, in denen die geforderten Restriktionen relativ einfach einzuarbeiten sind.

2. Problemstellung

2.1. Das Optimierungsproblem

Im Sinne der mathematischen Optimierungstheorie führt die Formulierung des Problems in der allgemeinen Form auf eine Zielfunktion mit zusätzlichen Nebenbedingungen, die z. T. als Differentialgleichung vorliegen.

Zielfunktion:

$$V = \min \int_0^l A(x) dx \quad (2.1)$$

Nebenbedingungen:

- a) $[E(x) w''(x)]'' - \rho A(x) w(x) \Omega^2 = 0$
- b) $\frac{|M(x)|}{W(x)} = \sigma(x) \leq \sigma_0$ (2.2)
- c) $A_{min} \leq A(x) \leq A_{max}$

Zur ersten Nebenbedingung gehören noch die aus der Lagerungsform und der Belastung herrührenden Randbedingungen. Bei optimalem Volumen ohne Querschnittsrestriktionen ($A_{min} \rightarrow 0$; $A_{max} \rightarrow \infty$) muß die Spannung in mindestens einem Punkt der Randfaser den Grenzwert σ_0 erreichen.

Liegen Querschnittsrestriktionen vor, so ist nur die untere Schranke frei wählbar. Wird die obere Schranke zu klein, treten - abhängig von der Erregerfrequenz und der unteren Schranke - Spannungsüberschreitungen auf, und das Optimierungsproblem besitzt keine Lösung.

Die Einführung der Querschnittsbeschränkungen ist erforderlich, da neben den Normalspannungen die üblicherweise vernachlässigbaren Schubspannungen aus der Querkraft vorhanden sind. Der Minimalquerschnitt verhindert erstens eine Spannungsüberschreitung bei der Übertragung von Querkraften und sorgt zweitens dafür, daß der Stab im Ruhezustand sein eigenes statisches Gewicht tragen kann.

Die Optimierungsaufgabe (2.1) mit den Nebenbedingungen (2.2) stellt den Fall eines veränderlichen Steuerbereiches dar, der durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen bestimmt wird, wobei die Steuerfunktion der eingeschränkte Flächenverlauf des Stabes ist.

2.2. Spannungsanalyse

Die Einhaltung der Spannungsbedingung (2.2b) erfordert die Kenntnis des Spannungsverlaufes längs der Stabachse. Da analytische Lösungen nur für bestimmte Querschnittsverläufe bekannt sind, müssen numerische Methoden herangezogen werden.

2.2.1. Integration der Schwingungsgleichung

Durch einfache Substitution wird die Differentialgleichung der Biegeschwingung in ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt

$$\begin{aligned}w' &= \varphi \\ \varphi' &= -\frac{M}{EJ} \\ M' &= Q \\ Q' &= -\rho A w \Omega^2\end{aligned}\tag{2.3}$$

in dem w , φ , M und Q nacheinander Durchbiegung, Biegewinkel, Biegemoment und Querkraft darstellen. Bei vielen technisch interessierenden Querschnitten existiert ein Zusammenhang zwischen der Fläche und dem Flächenträgheitsmoment J in der Form

$$J = c A^p\tag{2.4}$$

Das sei hier vorausgesetzt. Als Beispiel sei auf die Tabelle 2.1 verwiesen. Nach Einführung von

$$\xi = \frac{x}{l} \quad u = \frac{A}{A_0} \quad v = \frac{w}{w_0} \quad ()' = \frac{d}{d\xi}\tag{2.5}$$

läßt sich die Differentialgleichung der Biegeschwingung in dimensionsloser Form anschreiben

$$\begin{aligned}[u^p(\xi) v''(\xi)]'' - \beta^4 u(\xi) v(\xi) &= 0 \\ \beta^4 &= \frac{\rho \Omega^2 l^4}{E c A_0^{p-1}}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Hieraus ergibt sich das dimensionslose System

$$\begin{aligned}v' &= \varphi \\ \varphi' &= -\frac{m}{u^p} \\ m' &= q \\ q' &= -\beta^4 u v\end{aligned}\tag{2.7}$$

Als Bezugsgrößen w_0 und A_0 werden Durchbiegung und Querschnittsfläche

eines durch F_1 statisch belasteten Stabes konstanter Biegesteifigkeit festgelegt, bei dem die maximale Spannung gerade der vorgegebenen entspricht.

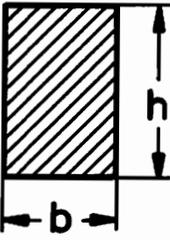
$J = cA^p$ $W = kA^g$ 		p	c	g	k
	h = konst b = b(ξ)	1	$\frac{h^2}{12}$	1	$\frac{h}{6}$
	h = h(ξ) $\frac{h}{b} = \epsilon = \text{konst}$	2	$\frac{\epsilon}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{\epsilon}}{6}$
	h = h(ξ) b = konst	3	$\frac{1}{12b^2}$	2	$\frac{1}{6b}$

Tabelle 2.1
 Kenngrößen für den Rechteckquerschnitt

Die Gleichungen (2.3) bzw. (2.7) sind so aufbereitet, daß eine direkte numerische Integration mit Hilfe bekannter Integrationsverfahren wie Runge-Kutta, Simpson, Euler-Cauchy oder anderer Verfahren ohne weitere Umrechnungen möglich ist. Zur Einhaltung der Randbedingungen wird das Gleichungssystem zweimal - mit unterschiedlichen Anfangswerten - durchgerechnet. Wegen der vorhandenen Linearität bei festem $u(\xi)$ lassen sich die Lösungen superponieren und daraus diejenigen Anfangswerte errechnen, die auch die restlichen Randbedingungen erfüllen. Eine erneute Durchrechnung mit den richtigen Anfangswerten liefert dann den gesuchten Spannungsverlauf.

2.2.2. Diskretisierung des Stabes

Eine andere Möglichkeit, den Spannungsverlauf zu ermitteln, ist die physikalische Diskretisierung des Stabes. Dazu wird der kontinuierliche Querschnittsverlauf $A(x)$ durch N gleichlange Teilstücke ersetzt, in denen der Querschnitt konstant bleibt.

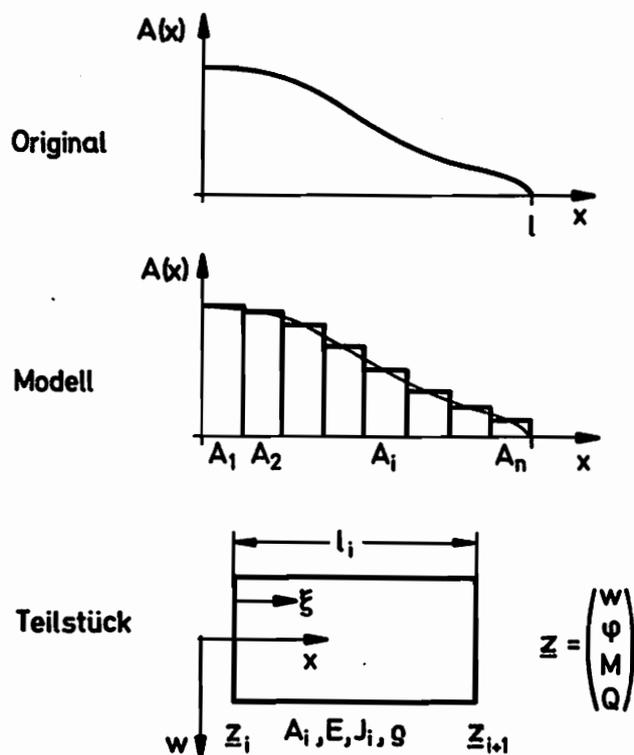


Abb. 2.1

Diskretisierung des Stabes

Der Zusammenhang der Schnittgrößen am Anfang und Ende des Teilstücks ist durch die Differentialgleichung der Biegeschwingung vorgegeben. Sie läßt sich bei konstantem Querschnitt lösen und liefert im vorliegenden Fall:

$$w_{i+1} = a \sin \beta + b \cos \beta + c \sinh \beta + d \cosh \beta$$

$$\varphi_{i+1} = (a \cos \beta - b \sin \beta + c \cosh \beta + d \sinh \beta) \frac{\beta}{l_i} \quad (2.8)$$

$$M_{i+1} = -(-a \sin \beta - b \cos \beta + c \sinh \beta + d \cosh \beta) \frac{E J_i \beta^2}{l_i^2}$$

$$Q_{i+1} = -(-a \cos \beta + b \sin \beta + c \cosh \beta + d \sinh \beta) \frac{E J_i \beta^3}{l_i^3}$$

Die Konstanten hängen von den z_i und der Geometrie ab

$$a = \frac{l_i}{2\beta} \left(\varphi_i + \frac{Q_i l_i^2}{E J_i \beta^2} \right) \quad b = \frac{1}{2} \left(w_i + \frac{M_i l_i^2}{E J_i \beta^2} \right)$$

$$c = \frac{\varphi_i l_i}{\beta} - a \quad \beta^4 = \frac{8 A_i \Omega^2 l_i^4}{E J_i} \quad (2.9)$$

$$d = w_i - b$$

Diese in z_i linearen Gleichungen sind den aus der Literatur /15, 16/ bekannten Übertragungsmatrizen äquivalent. Sind die Anfangswerte z_0 an der Stelle $x = 0$ bekannt, so kann der Stab abschnittsweise durchgerechnet werden. Innerhalb eines Teilstückes wird der Spannungsverlauf durch die Gleichung

$$\sigma(\xi) = \frac{M(\xi)}{W_i} = - \frac{E J_i \beta^2}{W_i l_i^2} (-a \sin \beta \xi - b \cos \beta \xi + c \sinh \beta \xi + d \cosh \beta \xi)$$

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.10)$$

beschrieben, aus der die maximale Spannung bestimmt wird. Da im allgemeinen kein Anfangswertproblem vorliegt, müssen die z_0 auch hier vorab bestimmt werden. Wegen der vorliegenden Linearität bereitet dieses jedoch keine Schwierigkeiten.

Neben dem Spannungsverlauf interessieren die Eigenfrequenzen des Stabes. Sie können aus der Lösung des Randwertproblems mit Hilfe der Übertragungsmatrix durch systematisches Verändern des Frequenzparameters gewonnen werden. Jedoch ist das Verfahren aufwendig und führt bei höheren Eigenfrequenzen zu numerischen Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde wurde ein von Ullenboom /17/ verwendetes Unterprogramm benutzt, welches in sehr kurzer Zeit für die Steifigkeitsmatrix auch die höheren Eigenwerte des Stabes berechnet.

2.3. Stabmodell

Es sollen Stäbe untersucht werden, die im Sinne der elementaren Theorie linear elastisch und hinreichend schlank sind /18/. Die Ortsabhängigkeit der Biegelinie $w(x)$ wird durch die Differentialgleichung (2.2a) beschrieben, deren Herleitung der Literatur /19, 20/ entnommen werden kann. Zu dieser Differentialgleichung vierter Ordnung gehören noch vier Randbedingungen, die die Lagerung des Stabes beschreiben. Als Erregung setzen wir stets die Einzelkraft

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (2.11)$$

an. Demgemäß zeigen alle Zustandsgrößen des Stabes wegen der vernachlässigten Dämpfung zeitgleiches Verhalten mit der Erregerfrequenz.

Gleichung (2.2a) läßt sich bei Stäben konstanter Biegesteifigkeit exakt lösen. Bei massiven oder hohlen kegelförmigen Stäben gelingt zwar noch die Bestimmung der Eigenfrequenzen /21/, jedoch ist es bei erzwungener Schwingung nicht mehr möglich, eine analytische Lösung anzugeben. Dies gilt umsomehr für beliebigen Verlauf der Biegesteifigkeit. Die bei der Optimierung erforderliche Spannungsanalyse des Stabes beinhaltet daher stets die numerische Lösung der Differentialgleichung der Biegeschwingung unter Einhaltung der Randbedingungen.

Um einen Anhalt zu gewinnen, wie weit die elementare Lösung mit der des Timoshenko-Stabes übereinstimmt, kann man die Verhältnisse bei konstanter Biegesteifigkeit betrachten. Weigand /20/ errechnet für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab mit Rechteckquerschnitt der Höhe h Eigenwerte nach der Timoshenko-Theorie, die in Tafel 2.2 mit den elementaren Ergebnissen verglichen werden (siehe hierzu auch /32/).

Eigenwert \ $\frac{h}{T}$	0,1	0,05	0,01
1	0,986	0,998	0,999
5	0,867	0,954	0,998
10	0,714	0,866	0,992

Tafel 2.2 Verhältnis der Eigenwerte $\beta_{Timo} / \beta_{elementar}$

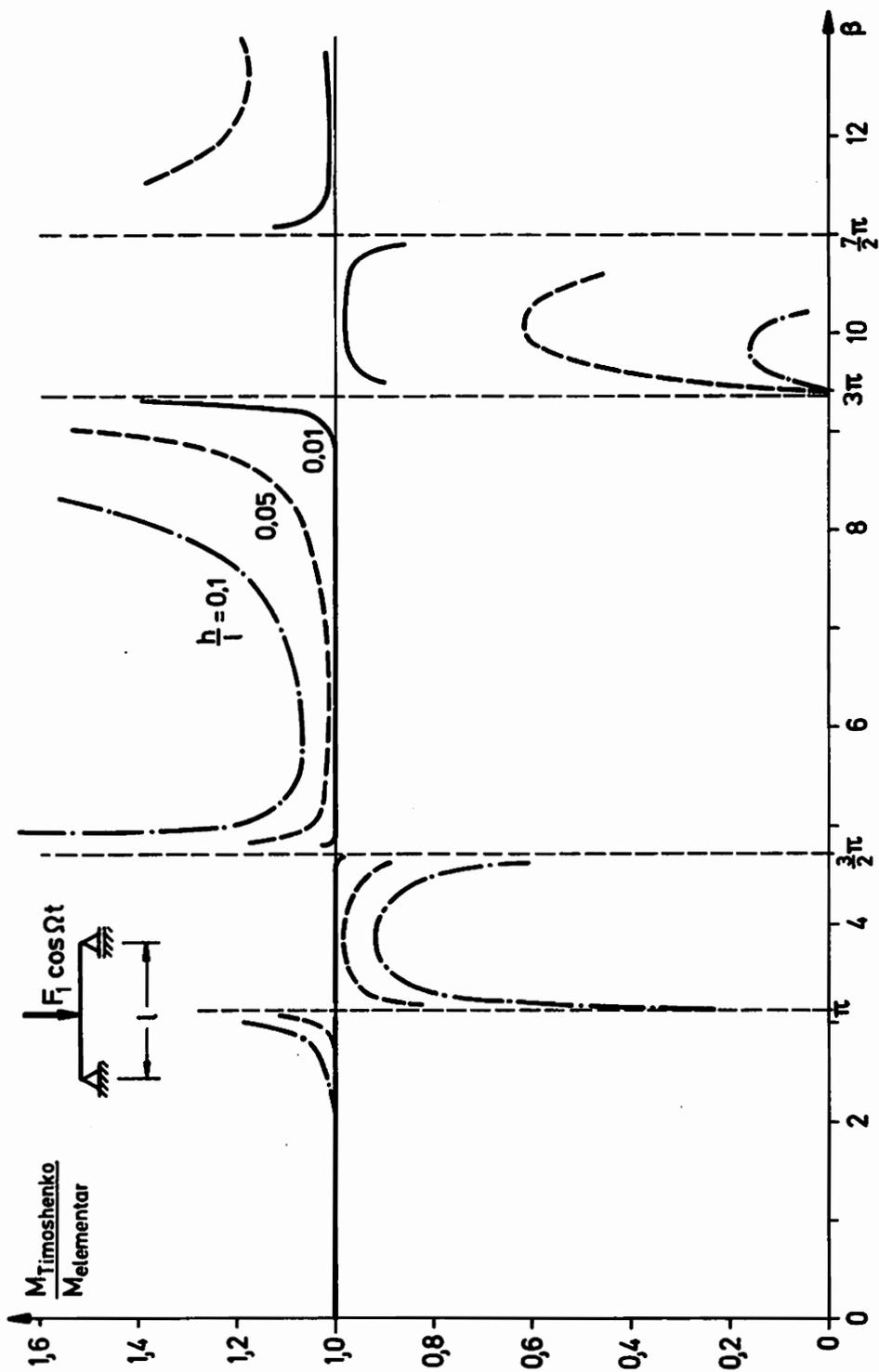


Abb. 2.2 Vergleich der elementaren Theorie mit der von Timoshenko

Deutlich zeichnet sich der Einfluß von Drehträgheit und Schubverformung bei höheren Eigenwerten ab, wobei nur Stabhöhe und Stablänge ausschlaggebend sind. Diese für die Eigenschwingungen geltenden Aussagen sind im vorliegenden Falle der erzwungenen Schwingung nicht ausreichend, um zu einer abschließenden Beurteilung zu gelangen, da jetzt die maximal auftretenden Spannungen bzw. die dazu proportionalen Biegemomente von Bedeutung sind. Das Verhältnis der maximalen Biegemomente aus beiden Theorien läßt sich nach einiger Umformung aus den bekannten Lösungen herleiten und ist in Abbildung 2.2, ebenfalls für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab mit Rechteckquerschnitt, dargestellt.

Auffallend sind die beachtlichen Unterschiede, die bereits bei Erregungen zwischen der zweiten und dritten Eigenfrequenz zu Tage treten. Während dieses Ergebnis beim gedrungenen Stab mit einem Höhen/Längenverhältnis von 0,1 nicht überrascht, kann das ungünstige Verhalten bei $h/l = 0,05$ nicht ohne weiteres vorhergesehen werden, da bei Betrachtung der Eigenwerte gemäß Tafel 2.2 erst ab dem fünften Eigenwert größere Abweichungen zu erwarten sind. Lediglich bei $h/l = 0,01$ tritt hinreichende Übereinstimmung beider Theorien auf, wenn man von den Polstellen einmal absieht.

Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse entstammen der elementaren Theorie und haben daher nur für hinlänglich schlanke Stäbe Gültigkeit. Die Anwendung der Timoshenko-Theorie bringt keine wesentlichen Vorteile, da auch sie bei gedrungenen Stäben ungenau wird /32/.

3. Der Sonderfall des Stabes gleicher Festigkeit

Statisch bestimmt belastete Bauteile sind hinsichtlich ihres Gewichtes optimal dimensioniert, wenn in allen Querschnitten die gleiche maximale Beanspruchung herrscht. Geht man von homogenem Material aus, so bedeutet minimales Gewicht gleichzeitig auch minimales Volumen. Ein in dieser Weise bemessener "Stab gleicher Festigkeit bei dynamischer periodischer Beanspruchung" wird sich bei tieffrequenter - quasistatischer - Erregung dem "Stab gleicher Festigkeit bei statischer Beanspruchung" nähern und ihm bei $\Omega = 0$ entsprechen. Der Sonderfall des Stabes gleicher Festigkeit wird beispielhaft am einseitig eingespannten Stab behandelt. Der rechteckige Querschnitt sei längs der Stabachse in der Höhe konstant. Der Breitenverlauf soll den Biegespannungen angepaßt werden. Die

Differentialgleichung der Biegeschwingung wird durch die Ansätze

$$\xi = \frac{x}{l} \bar{\beta} \quad f(\xi) = \frac{A(\xi)}{A_0} \quad (3.1)$$

$$v(\xi) = \frac{E h_0 \bar{\beta}^2}{\sigma_0 l^2} w(\xi) \quad i(\xi) = \frac{J(\xi)}{J_0}$$

normiert. $\bar{\beta}$ ist mit dem Frequenzparameter β durch den Zusammenhang

$$\bar{\beta}^4 = \frac{1}{2} \beta^4 = \frac{g A_0 \Omega^2 l^4}{2 E J_0} \quad (3.2)$$

verbunden. Die Differentialgleichung geht über in die Form

$$[i(\xi) v''(\xi)]'' - 2f(\xi) v(\xi) = 0 \quad (3.3)$$

in der der Frequenzparameter nicht mehr in Erscheinung tritt. Die Bedingung gleicher Festigkeit längs der Stabachse lautet

$$\frac{|M(x)|}{W(x)} = \frac{|-E \frac{b(x)h_0^3}{12} w''(x)|}{\frac{b(x)h_0^2}{6}} = \frac{1}{2} E h_0 |w''(x)| = \sigma_0 = \text{konstant} \quad (3.4)$$

und geht nach Normierung über in

$$|-v''(\xi)| = 2 \quad (3.5)$$

Hieraus läßt sich vorab die Biegelinie errechnen und in (3.3) einsetzen. Beachtet man noch, daß im Falle variabler Breite $i(\xi) = f(\xi)$ ist, so erhält man für den Flächenverlauf bei $v'' > 0$ und $v'' < 0$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(\xi) - f(\xi) (a + b\xi + \xi^2) = 0 \quad (3.6)$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind:

a) das Moment am freien Stabende verschwindet

$$M(x=l) = -E J(l) w''(l) = 0$$

Da $w'' \neq 0$ ist, muß das Flächenträgheitsmoment und damit die Fläche verschwinden.

$$A(x=l) = 0 \rightarrow f(\xi = \bar{\beta}) = 0 \quad (3.7)$$

b) Die Querkraft am freien Ende entspricht der angreifenden Kraft

$$Q(x=l) = [-E I(x) w''(x)]'_{x=l} = -E I'(l) w''(l) - \underbrace{E I(l) w'''(l)}_{=0} = F_1$$

Nach der Normierung liefert das

$$f'(\xi = \bar{\beta}) = -\frac{1}{\bar{\beta}} \quad (3.8)$$

Die Konstanten a und b sind durch die Bedingungen an der Einspannstelle

$$\begin{aligned} v(\xi=0) &= 0 \\ v'(\xi=0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

leicht zu ermitteln. Um eine Differentialgleichung zu erhalten, deren analytische Lösung bekannt ist, wird das Koordinatensystem verschoben.

$$\xi^* = \xi + \frac{b}{2} \quad (3.10)$$

Das lineare Glied der Biegelinie verschwindet, und es verbleibt eine bekannte Gleichung.

$$f''(\xi^*) - f(\xi^*) \left(a - \frac{b^2}{4} + \xi^{*2} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Kamke /22/ bezeichnet die Differentialgleichung

$$f'' - (d + \xi^{*2}) f = 0 \quad (3.12)$$

als Sonderfall einer konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung und gibt die Gesamtheit aller Lösungen mit

$$f(\xi^*) = C_1 \xi^* e^{-\frac{1}{2}\xi^{*2}} F\left(\frac{3+d}{4}, \frac{3}{2}, \xi^{*2}\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}\xi^{*2}} F\left(\frac{1+d}{4}, \frac{1}{2}, \xi^{*2}\right) \quad (3.13)$$

an. Darin ist F die für alle x konvergente Pochhammersche Reihe, die durch

$$F(a, b, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) x^n}{b(b+1) \cdots (b+n-1) n!} \quad b \neq 0, -1, \dots \quad (3.14)$$

definiert ist. Zur Erfüllung der Randbedingungen wird noch die Ableitung benötigt, die sich nach der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} \frac{df(\xi^*)}{d\xi^*} = f'(\xi^*) = e^{-\frac{1}{2}\xi^{*2}} & \left\{ C_1 \left[\xi^* F\left(\frac{3+d}{4}, \frac{3}{2}, \xi^{*2}\right) + (1-\xi^{*2}) F\left(\frac{3+d}{4}, \frac{3}{2}, \xi^{*2}\right) \right] \right. \\ & \left. + C_2 \left[F\left(\frac{1+d}{4}, \frac{1}{2}, \xi^{*2}\right) - \xi^* F\left(\frac{1+d}{4}, \frac{1}{2}, \xi^{*2}\right) \right] \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

ergibt und in der

$$F'(a, b, \xi^{*2}) = \frac{dF(a, b, \xi^{*2})}{d\xi^*} = 2\xi^* \frac{a}{b} F(a+1, b+1, \xi^{*2}) \quad (3.16)$$

die Ableitung der Pochhammerschen Reihe darstellt.

3.1. Unterkritische Erregung

Bei unterkritischer Erregung existieren keine Schwingungsknoten längs der Stabachse. Infolgedessen besitzt auch die Biegelinie keinen Wendepunkt, und man erhält aus den Anfangsbedingungen (3.9), daß die Koeffizienten a und b der Biegeparabel verschwinden. Somit bleibt $v(\xi) = \xi^2$, und es gilt zudem $\xi^* = \xi$ und $d = 0$. Bezeichnet f_0 den Querschnittswert an der Einspannstelle, so liefert Gleichung (3.13) mit den Bedingungen

$$f(\xi=0) = f_0$$

$$f(\xi = \xi_0) = 0$$

für den Querschnittsverlauf

$$\frac{f(\xi)}{f_0} = -\frac{1}{\xi_0} \frac{F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^2\right)}{F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^2\right)} F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \xi^2\right) + F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \xi^2\right) \quad (3.17)$$

Die Konstante f_0 wird mit der Bedingung

$$f'(\xi = \xi_0) = -\frac{1}{\xi_0} = -\frac{1}{\beta}$$

aus der Gleichung (3.15) bestimmt und ergibt sich zu

$$f_0 = \frac{f'(\xi_0)}{\xi_0 e^{-\frac{1}{2}\xi_0^2}} \left[-\frac{F(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \xi_0^2)}{F(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^2)} F(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^2) - \frac{1}{\xi_0^2} F(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^2) + F(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^2) \right]^{-1} \quad (3.18)$$

Abbildung 3.1 zeigt den Querschnittsverlauf in Abhängigkeit von der Erregung. Auskunft über das erforderliche Stabvolumen gibt der Vergleich mit einem statisch belasteten Stab konstanter Biegesteifigkeit, dessen erforderliches Volumen

$$V_0 = \frac{6 F_1 l^2}{\sigma_0 h} \quad (3.19)$$

beträgt. Ausgehend von der statischen Lösung ist der Verlauf $\frac{V}{V_0}(\beta)$ in Abbildung 3.2 dargestellt. $\beta = 0$ ist der statische Fall, bei dem die Stabbreite längs der Stabachse linear abnimmt. Hinsichtlich des erforderlichen Materialaufwandes ist dies die optimale Lösung.

Bleibt der Frequenzparameter klein, so weichen die gefundenen Querschnittsverläufe nur unwesentlich von einer Geraden ab. In diesem quasistatischen Bereich sind die gewonnenen Lösungen als optimale Lösungen anzusehen. Wie weit dieser optimale quasistatische Bereich geht, wird später näher untersucht. Eine Grenze ist bereits in Abbildung 3.2 zu erkennen. Dort ist neben dem Stab gleicher Festigkeit auch das Volumenverhältnis eines Stabes konstanter Biegesteifigkeit dargestellt, bei dem die Breite so gewählt wurde, daß an der Einspannstelle die maximale Biegespannung gerade der des Stabes gleicher Festigkeit entspricht. Beide Stäbe haben ansonsten gleiche geometrische und physikalische Werte und sind der gleichen Belastung unterworfen. Das Volumenverhältnis des Stabes konstanter Biegesteifigkeit fällt nach Durchlaufen der ersten Eigenfrequenz stark ab und unterschreitet schließlich die Werte für den Stab gleicher Festigkeit. Ab dem Wert $\beta = 2,38$ ist folglich der Stab konstanter Biegesteifigkeit (im einfachsten Fall der Stab gleichen Querschnitts) vom Materialaufwand her günstiger als der Stab gleicher

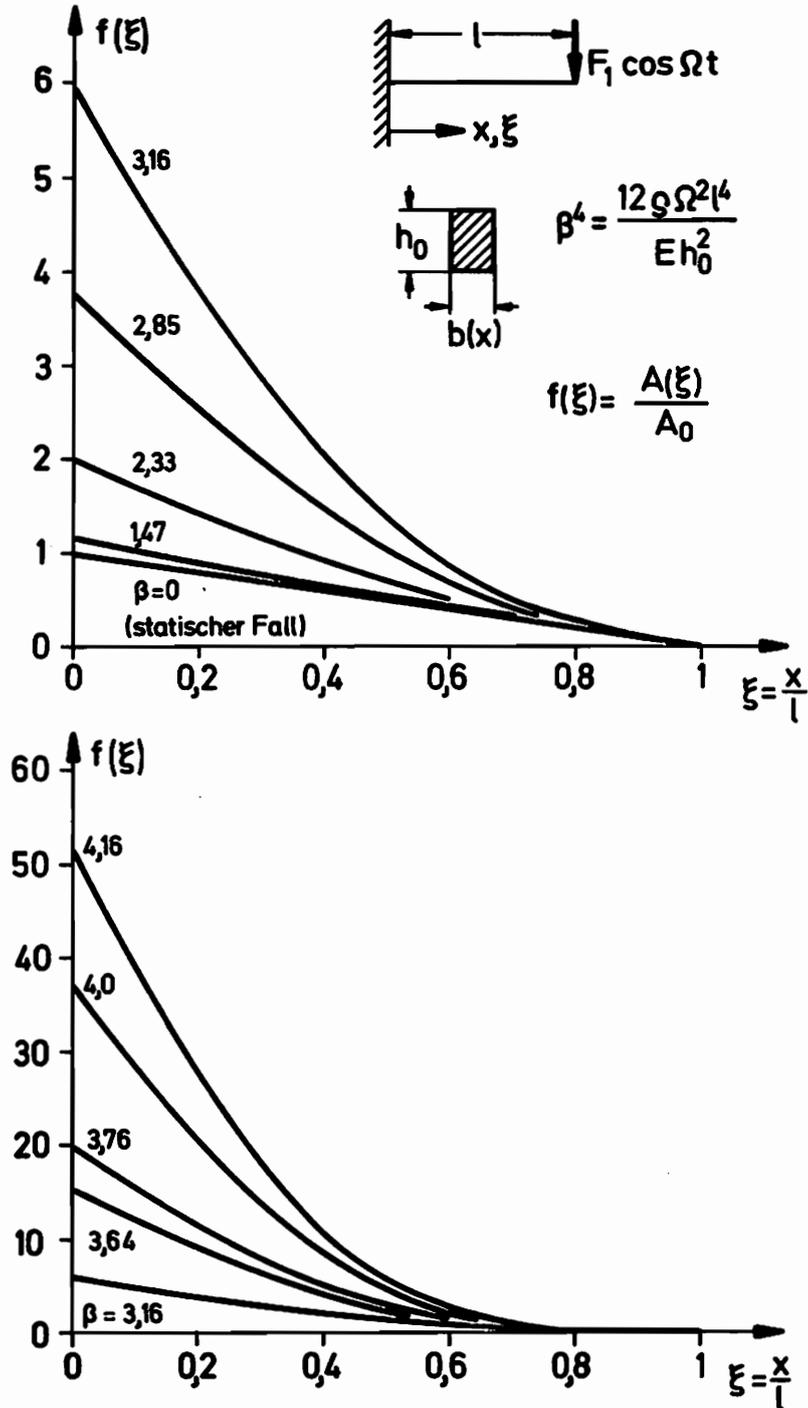


Abb. 3.1 Querschnittsverlauf bei unterkritischer Erregung

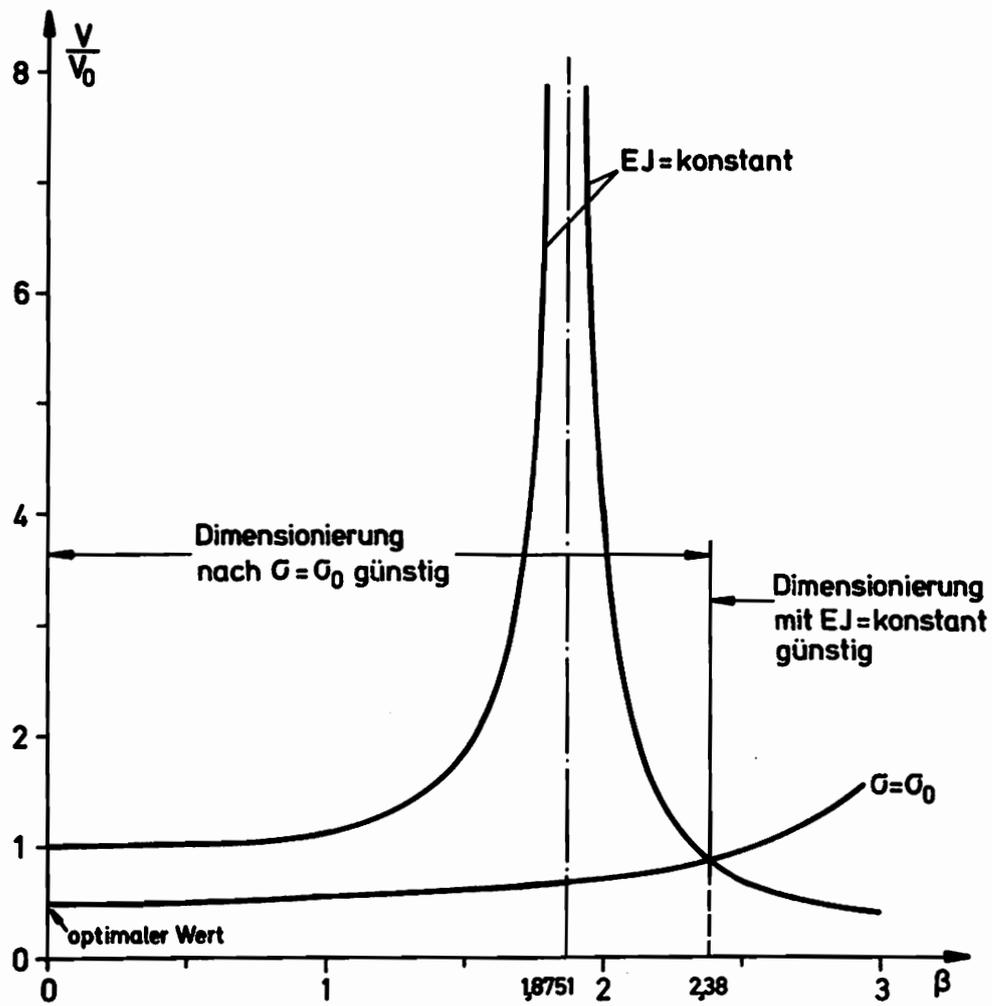


Abb.3.2 Unterkritische Erregung

Festigkeit. An dieser Stelle kann festgehalten werden, daß die Forderung $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$ für alle Querschnitte bei dynamischer Beanspruchung nicht immer ein optimales Volumen liefert.

3.2. Überkritische Erregung

Längs der Stabachse befinden sich Schwingungsknoten, die den Stab in mehrere Bereiche teilen, wie es in Abbildung 3.3 bei Vorliegen eines Schwingungsknotens dargestellt ist.

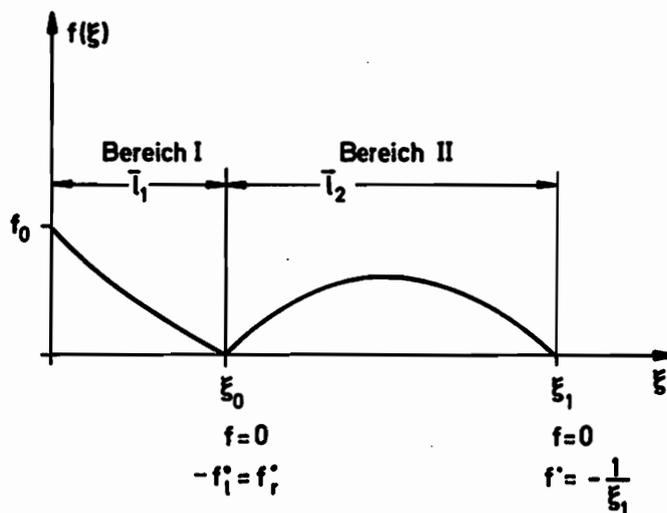


Abb. 3.3

Die angegebenen Übergangsbedingungen an der Stelle ξ_0 folgen aus den Forderungen, daß im Knotenpunkt zum einen die Momente verschwinden und zum anderen die Querkräfte rechts und links vom Knotenpunkt dem gleichen Wert zustreben. Im Bereich II erhält man die Koeffizienten der Biegelinie aus den Bedingungen $v_x(\xi_0) = v_x(\xi_0)$ und $v_x'(\xi_0) = v_x'(\xi_0)$. Die Koordinatenverschiebung ist $\xi^* = \xi - 2\xi_0$ und der Faktor in der Differentialgleichung (3.12) wird $d = -2\xi_0^2$. Die Funktion $f(\xi^*)$ geht an den Stellen

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 &\longrightarrow \xi^* = \xi_0^* = -\xi_0 \\ \xi = \xi_1 &\longrightarrow \xi^* = \xi_1^* \end{aligned}$$

durch Null, woraus sich das homogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \xi_0^* F\left(\frac{3-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^*\right) & F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^*\right) \\ \xi_1^* F\left(\frac{3-2\xi_1^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_1^*\right) & F\left(\frac{1-2\xi_1^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_1^*\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{II1} \\ C_{II2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

für die Konstanten C_{II1} und C_{II2} entwickeln läßt. Eine nichttriviale Lösung des Systems existiert, wenn die Determinante der ersten Matrix verschwindet. Dies liefert die Bestimmungsgleichung für ξ_1^* :

$$\xi_0^* F\left(\frac{3-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^*\right) F\left(\frac{1-2\xi_1^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_1^*\right) - \xi_1^* F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^*\right) F\left(\frac{3-2\xi_1^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_1^*\right) = 0 \quad (3.21)$$

Gelingt die Bestimmung eines ξ_1^* , welches die Determinante zu Null macht, so liefert Gleichung (3.20) einen Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten C_{II1} , C_{II2} , mit dessen Hilfe der Flächenverlauf im Bereich II die Form

$$f_{II}(\xi^*) = C_{II2} e^{-\frac{1}{2}\xi^*} \left[-\frac{1}{\xi_0^*} \frac{F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^*\right)}{F\left(\frac{3-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^*\right)} F\left(\frac{3-2\xi_1^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_1^*\right) + F\left(\frac{1-2\xi_1^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_1^*\right) \right] \quad (3.22)$$

annimmt. Die Konstante C_{II2} ist durch die Bedingung

$$f'(\xi^* = \xi_1^*) = -\frac{1}{\xi_1^*} = -\frac{1}{\xi_1^* + 2\xi_0^*}$$

festgelegt und hat den Wert

$$C_{II2} = \frac{f'(\xi_1^*)}{e^{-\frac{1}{2}\xi_1^*}} \left\{ -\frac{1}{\xi_0^*} \frac{F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_0^*\right)}{F\left(\frac{3-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_0^*\right)} \left[\int_{\xi_1^*}^{\xi_1^*} \frac{3-2\xi_0^*}{3} F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_1^*\right) \right. \right. \quad (3.23)$$

$$\left. \left. + (1-\xi_1^*) F\left(\frac{3-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_1^*\right) \right] + \xi_1^* (1-2\xi_0^*) F\left(\frac{5-2\xi_0^*}{4}, \frac{3}{2}, \xi_1^*\right) - \xi_1^* F\left(\frac{1-2\xi_0^*}{4}, \frac{1}{2}, \xi_1^*\right) \right\}^{-1}$$

Durch die Übergangsbedingungen $f_I(\xi_0) = 0$ und $f'_I(\xi_0) = -f'_{II}(\xi_0)$ liegt der Querschnittsverlauf im Bereich I fest und wird durch die Gleichungen (3.17) und (3.18) beschrieben.

Das hier an zwei Bereichen gezeigte Vorgehen ist auf drei und mehr Bereiche ausdehnbar. Auf einer Tischrechenmaschine sind die vorliegenden

Gleichungen noch gut auswertbar. Hinsichtlich des Frequenzbereiches ist die Lösung bei einem Bereich eindeutig. Bei zwei Bereichen treten zwei Lösungen auf, wie aus Abbildung 3.4 zu ersehen ist.

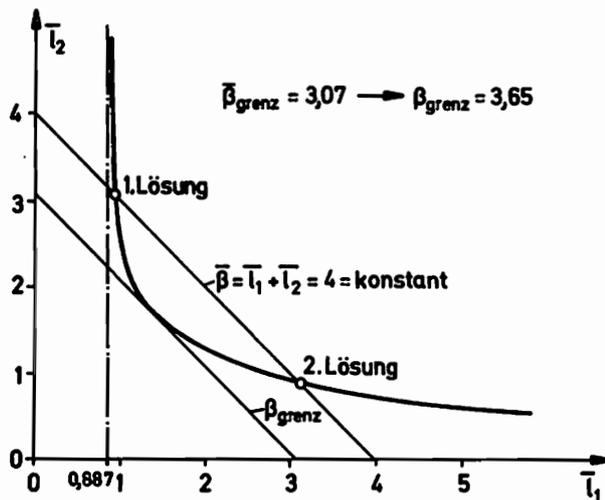


Abb. 3.4

Lösungsgesamtheit bei zwei Bereichen

Die Abbildung eines Frequenzparameters $\bar{\beta} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \text{konstant}$ ist eine Gerade. Diese Gerade schneidet die Lösungskurve in zwei Punkten, die zwei verschiedene Lösungen des Problems zum gleichen Frequenzparameter darstellen. Der Abbildung 3.4 ist außerdem zu entnehmen, daß unterhalb eines kritischen Wertes von \bar{T}_1 keine Lösungen mit zwei Bereichen existieren. Die Linie $\bar{\beta} = \text{konstant}$, die die Lösungskurve tangiert, liefert den Grenzwert $\bar{\beta}_{\text{grenz}}$, ab dem neben der Lösung mit einem Bereich auch Lösungen mit zwei Bereichen möglich sind. Dieser Grenzwert wurde zu $\beta = 3,65$ ermittelt.

Für den einseitig eingespannten Stab konstanter Höhe und variabler Breite können im wesentlichen folgende Aussagen festgehalten werden:

1. Bis zu einem Wert $\beta = 3,65$ treten für $0 \leq \xi < 1$ keine Schwingungsknoten auf, so daß die Lösung stets aus einem Bereich besteht. Mit zunehmendem Frequenzparameter steigt die Querschnittsfläche an der Einspannstelle überproportional an, wie aus Abbildung 3.1 zu ersehen ist. Der erforderliche Querschnitt wird sprunghaft geringer, wenn Lösungen mit zwei Bereichen möglich sind. Lösungen mit drei Bereichen treten ab $\beta = 6,26$ auf, vier

Bereiche existieren ab $\beta = 9,45$. Einzelne Querschnittsverläufe sind in den Abbildungen 3.5 bis 3.7 festgehalten.

2. Bei mehr als einem Bereich gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Lösungen mit der gleichen Zahl von Bereichen bei gleichem Frequenzparameter. An den unter 1 genannten Stellen gehen diese beiden Lösungen ineinander über und erscheinen als Doppellösung. Geringerer Querschnitt, d. h. auch geringeres Volumen, ist bei dem Stab zu beobachten, bei dem der erste Nulldurchgang der Fläche näher an der Einspannstelle liegt. Allen gefundenen Lösungen ist gemeinsam, daß ihr maximaler Querschnitt an der Einspannstelle liegt. Bei drei und vier Bereichen existieren Lösungen, bei denen der maximale Querschnitt im dritten Bereich größer als in den benachbarten Bereichen ist. Eine Systematik ist darin nicht zu erkennen.
3. Abbildung 3.8 gibt das Eigenfrequenzverhalten des Stabes wieder. Mit zunehmender Erregerfrequenz wächst die erste Eigenfrequenz an, was auch der Form der Stäbe mit einem Bereich zu entnehmen ist. Die Stäbe werden gedrungener und biegesteifer. Demgegenüber werden Stäbe mit zwei und mehr Bereichen stets überkritisch erregt. Die erste Eigenfrequenz der zweiten Lösung nähert sich asymptotisch der Erregerfrequenz, wodurch das starke Anwachsen der Querschnitte dieser Lösungen erklärlich wird. Höhere Eigenfrequenzen liegen oberhalb der Erregerfrequenz, die folglich bei zwei Bereichen zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz liegt.
4. Über größere Bereiche des Frequenzparameters gesehen wechseln die günstigen Lösungsformen einander ab. Es gibt viele Bereiche, in denen der Stab konstanter Biegesteifigkeit überlegen ist. Jedoch ist insbesondere in der Nähe der Resonanzstellen der mit $\bar{v} = \bar{v}_0$ bemessene Stab von Vorteil. Deutlich sind in Abb. 3.9 die jeweils zwei Lösungen zum gleichen Frequenzparameter erkennbar. Unterschiede zwischen den beiden Lösungen sind umso gravierender, je mehr Bereiche der Stab hat und je weiter man sich vom Grenzfall der Doppellösung entfernt.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß auch Stäbe mit Rechteckquerschnitt untersucht wurden, bei denen die Querschnittsbreite längs der Stabachse konstant gehalten und die Höhe variabel angenommen wurde.

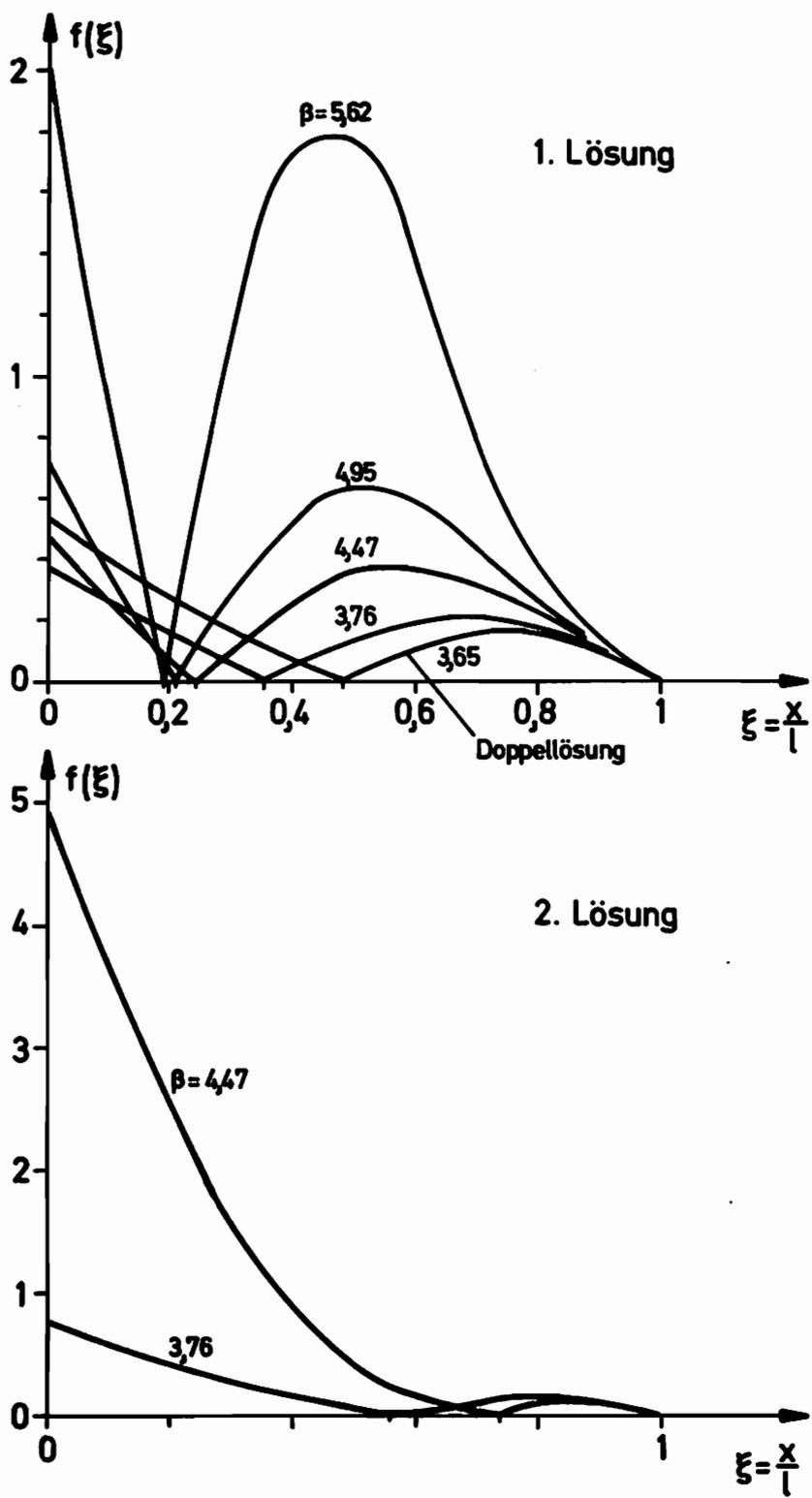


Abb. 3.5 Flächenverlauf bei zwei Bereichen

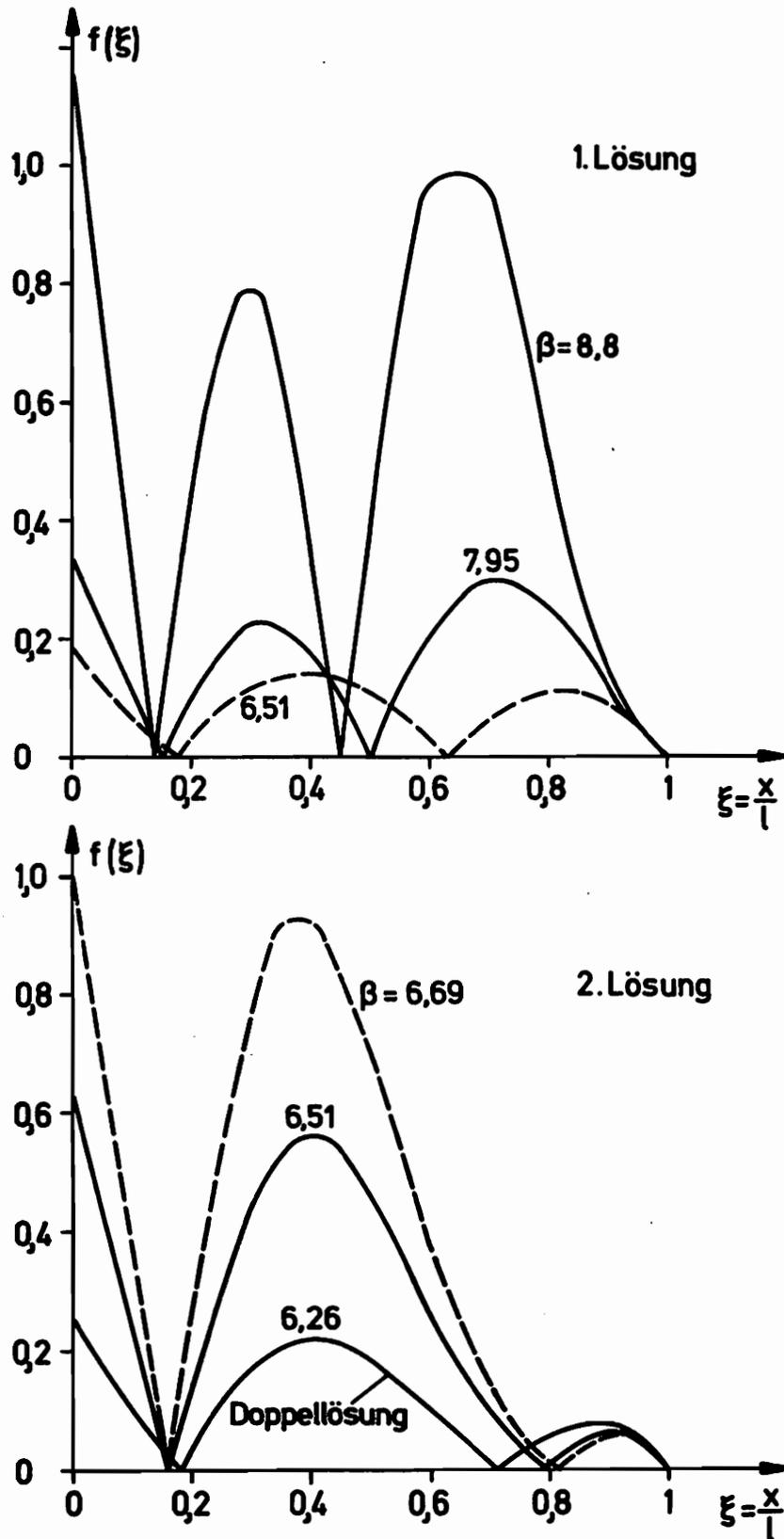


Abb. 3.6 Flächenverlauf bei drei Bereichen

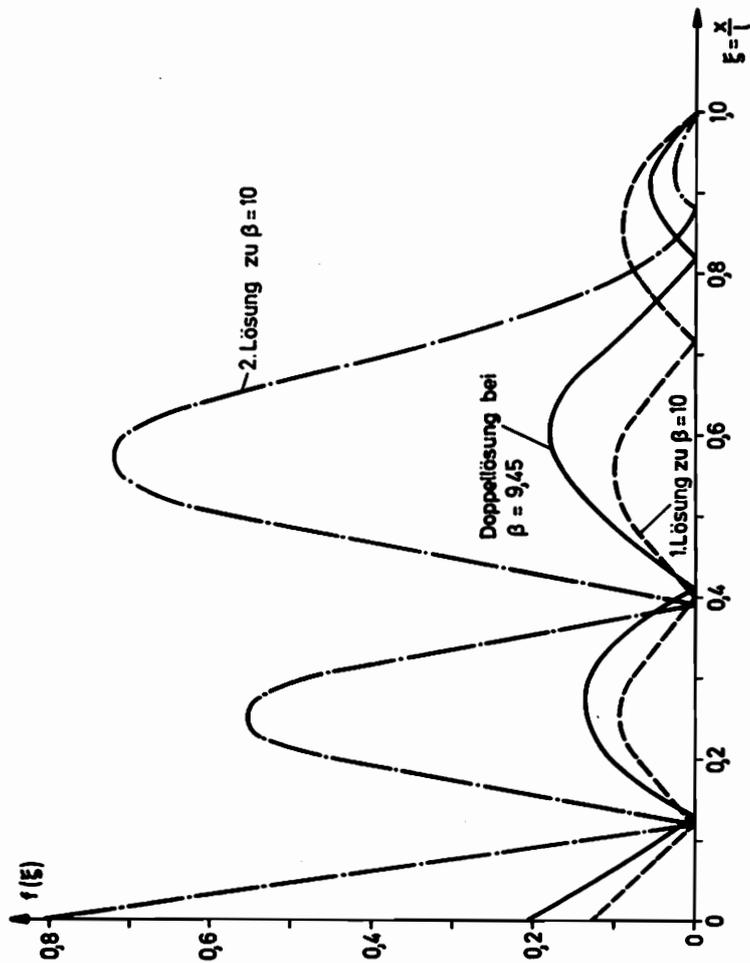


Abb. 3.7 Flächenverlauf bei vier Bereichen

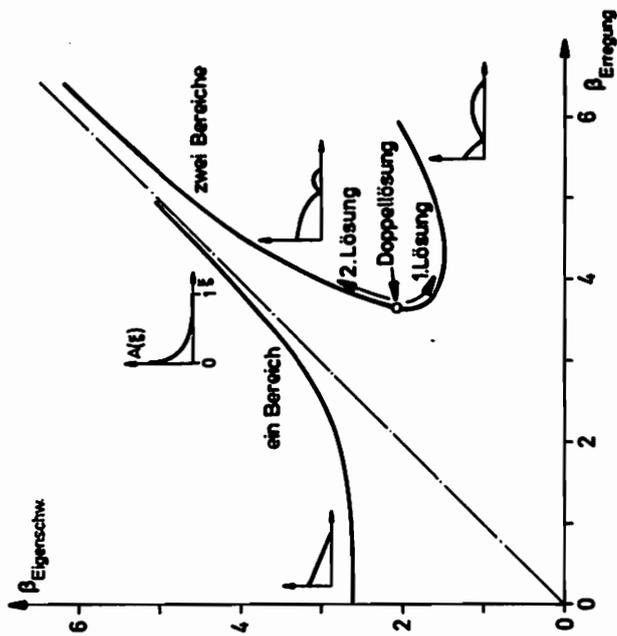


Abb. 3.8 Erste Eigenfrequenz bei einem und zwei Bereichen

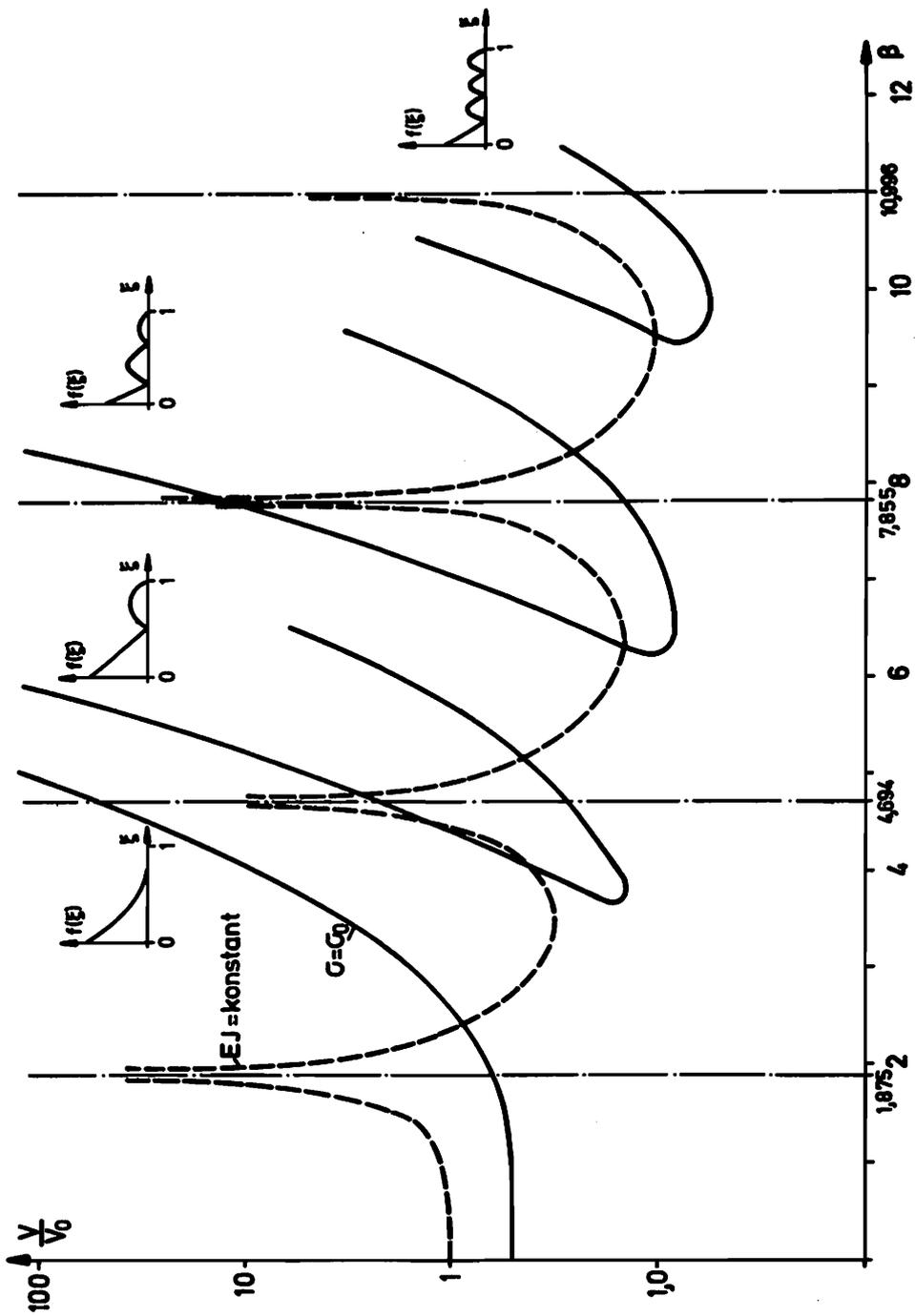


Abb. 3.9 Volumenverhältnisse in Abhängigkeit vom Frequenzparameter

Prinzipiell ergaben sich dabei keine neuen Erkenntnisse. Die erhaltenen Lösungen ähneln den bisher besprochenen.

4. Optimierung bei rein dynamischer Belastung

4.1. Lösungsmethoden

Nach Behandlung des Sonderfalles, der im eigentlichen Sinne keine Optimierung darstellt, werden für das durch die Gleichungen (2.1) und (2.2) beschriebene Problem zwei verschiedene Lösungsverfahren angegeben.

4.1.1. Methode der Lokalschnitte

Eine analytische Lösung erhält man mit der "Methode der Lokalschnitte", ein Verfahren, welches von Boltjanski /1/ vorgestellt wurde. Im wesentlichen wird das von Pontryagin gefundene Maximumprinzip /2/ angewendet, bei dem die Einschränkungen des Steuerbereiches in die Differentialgleichungen des Hilfssystems eingearbeitet werden. Die Zustandsgrößen des Stabes werden Phasenkoordinaten genannt und in normierter Form zu einem Vektor zusammengefaßt

$$\underline{z} = (v, \varphi, m, q) \quad (4.1)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.7) lautet die Optimierungsaufgabe in normierter Form:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u \, d\mathcal{F} &= \min \\ \dot{z}_i &= f_i(z, u) \quad i = 1, \dots, 4 \\ -1 &\leq \frac{m}{u^3} \leq 1 \\ u_{\min} &\leq u \leq u_{\max} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wie beim Maximumprinzip üblich, wird mit den Hilfsveränderlichen die Funktion

$$\begin{aligned}
 H(\underline{\psi}, \underline{z}, u) &= \sum_{\alpha=0}^4 \psi_{\alpha} f_{\alpha}(\underline{z}, u) \\
 &= \psi_0 u + \psi_1 \varphi - \psi_2 \frac{m}{u^p} + \psi_3 q - \psi_4 \beta^k u v
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

gebildet, wobei f_0 durch die Zielfunktion festgelegt ist und ψ_0 ohne Beschränkung der Allgemeinheit -1 gesetzt werden kann. Die von den Phasenkoordinaten abhängigen Restriktionen liefern zwei Nebenbedingungen

$$b_1 = \frac{m}{u^p} - 1 \leq 0 \tag{4.4}$$

$$b_2 = -\frac{m}{u^p} - 1 \leq 0$$

Für die Hilfsveränderlichen läßt sich unter Einschluß der Nebenbedingungen ein Differentialgleichungssystem nach der Vorschrift

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial z_i} + \varrho_1 \frac{\partial b_1}{\partial z_i} + \varrho_2 \frac{\partial b_2}{\partial z_i} \quad i=1, \dots, 4 \tag{4.5}$$

aufstellen. Wird diese Vorschrift ausgeführt und nimmt man die Umbenennungen

$$\psi_1 = -\bar{q} \quad \psi_2 = \bar{m} \quad \psi_3 = -\bar{\varphi} \quad \psi_4 = \bar{v} \tag{4.6}$$

vor, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \bar{v}^{\cdot} &= \bar{\varphi} \\
 \bar{\varphi}^{\cdot} &= -\frac{\bar{m}}{u^p} - \frac{\varrho_1}{u^p} + \frac{\varrho_2}{u^p} \\
 \bar{m}^{\cdot} &= \bar{q} \\
 \bar{q}^{\cdot} &= -\beta^k u \bar{v}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

die bis auf die zweite Zeile formal mit (2.7) übereinstimmen. Für die nichtnegativen Funktionen ϱ_1 und ϱ_2 existieren die Bedingungen

$$\varrho_1 b_1 = 0$$

$$\varrho_2 b_2 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \varrho_1 \frac{\partial b_1}{\partial u} + \varrho_2 \frac{\partial b_2}{\partial u} \quad (4.8)$$

aus denen sich für den Fall

$$\frac{m}{u^g} = 1$$

die Lösungen

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \left(1 - \rho \frac{\bar{m}}{u^{\rho-g+1}} + \beta^4 v \bar{v} \right) \frac{u}{g} \\ \varrho_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

und für den Fall

$$\frac{m}{u^g} = -1$$

die Lösungen

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 0 \\ \varrho_2 &= \left(1 + \rho \frac{\bar{m}}{u^{\rho-g+1}} + \beta^4 v \bar{v} \right) \frac{u}{g} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ergeben. In allen anderen Fällen ist

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0 \quad (4.11)$$

Im folgenden muß noch auf die Randbedingungen eingegangen werden. Beim Hauptsystem (4.2b) bestimmt die Lagerung des Stabes die Randbedingungen. Für das Hilfssystem (4.7) muß an den Stellen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ die Transversalitätsbedingung

$$\underline{\psi} \cdot \delta \underline{z} = 0 \quad (4.12)$$

für alle δz , die den Randbedingungen genügen, erfüllt sein. Im Falle des einseitig eingespannten Stabes erhält man für $\xi = 0$:

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \cdot (0, 0, \delta m, \delta q) = \psi_3 \delta m + \psi_4 \delta q = 0 \quad (4.13)$$

Da δm und δq beliebig gewählt werden können, ist diese Bedingung nur durch

$$\psi_3 = \psi_4 = 0 \longrightarrow \bar{p} = \bar{v} = 0 \quad (4.14)$$

zu erfüllen. An der Stelle $f = 1$ erhält man analog

$$\psi_1 = \psi_2 = 0 \longrightarrow \bar{q} = \bar{m} = 0 \quad (4.15)$$

Der Übersichtlichkeit wegen seien die notwendigen Gleichungen und Bedingungen zur analytischen Lösung kurz zusammengefaßt.

Zielfunktion $\int_0^1 u df = \min$	(4.16)
-------------------------------------	--------

Hauptsystem	Randbedingungen		
$\dot{v} = \varphi$	$v(0) = 0$	$v(1) = 0$	(4.17)
$\dot{\varphi} = -\frac{m}{u^p}$	$\varphi(0) = 0$	$m(1) = 0$	
$\dot{m} = q$	$m(0) = 0$	$\varphi(1) = 0$	
$\dot{q} = -\beta^4 u v$	$q(0) = 1$	$q(1) = \frac{1}{2}$	

Hilfssystem	Randbedingungen		
$\dot{\bar{v}} = \bar{\varphi}$	$\bar{v}(0) = 0$	$\bar{v}(1) = 0$	(4.18)
$\dot{\bar{\varphi}} = -\frac{\bar{m}}{u^p} - \frac{S_1}{u^q} + \frac{S_2}{u^q}$	$\bar{\varphi}(0) = 0$	$\bar{m}(1) = 0$	
$\dot{\bar{m}} = \bar{q}$	$\bar{m}(0) = 0$	$\bar{\varphi}(1) = 0$	
$\dot{\bar{q}} = -\beta^4 u \bar{v}$	$\bar{q}(0) = 0$	$\bar{q}(1) = 0$	

$S_1 = \begin{cases} (1 - p \frac{\bar{m}}{u^{p-q+1}} + \beta^4 v \bar{v}) \frac{u}{q} \geq 0, & m = u^q \\ 0 & m \neq u^q \end{cases}$
$S_2 = \begin{cases} (1 + p \frac{\bar{m}}{u^{p-q+1}} + \beta^4 v \bar{v}) \frac{u}{q} \geq 0, & m = -u^q \\ 0 & m \neq -u^q \end{cases}$

Die Steuerfunktion $u(f)$ ist nach der Maximumbedingung festzulegen. Sie fordert, daß die Hilfsfunktion H bezüglich u auf dem durch die Querschnitts- und Spannungsrestriktionen definierten Steuerbereich ein Maximum annimmt.

$$H = -u - \bar{q} \varphi - \frac{m \bar{m}}{u^p} - \bar{p} \bar{q} - \beta^4 u v \bar{v} = \max_u \quad (4.19)$$

Die Lage des Maximums ist von den Gliedern, die keinen u Anteil tragen, unabhängig. Ändert man noch alle Vorzeichen, so erhält man die äquivalente Bedingung

$$H^* = (1 + \beta^4 v \bar{v}) u + \frac{m \bar{m}}{u^p} = a u + \frac{b}{u^p} = \min_u \quad (4.20)$$

aus der sich die in Abbildung 4.1 dargestellten vier typischen Fälle herleiten lassen.

Aus der Spannungs- und Querschnittsrestriktion ergibt sich der erforderliche Mindestquerschnitt zu

$$u^* = \max (u_{\min}, \sqrt[p]{|m|}) \quad (4.21)$$

In den ersten beiden Fällen ($a \cdot b > 0$) liegt ein Extremum der Funktion H^* an der Stelle

$$u_{\text{Ext}} = \begin{cases} \sqrt[p+1]{\frac{pb}{a}} & \text{falls } u^* \leq \sqrt[p+1]{\frac{pb}{a}} \leq u_{\max} \\ u^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.22)$$

Den optimalen Querschnittswert liefert nun die Zuordnung

1. $ab > 0$

$$u = \begin{cases} u^* & \text{falls } H^*(u_{\text{Ext}}), H^*(u_{\max}) > H^*(u^*) \\ u_{\text{Ext}} & \text{falls } H^*(u^*), H^*(u_{\max}) > H^*(u_{\text{Ext}}) \\ u_{\max} & \text{falls } H^*(u^*), H^*(u_{\text{Ext}}) > H^*(u_{\max}) \end{cases} \quad (4.23)$$

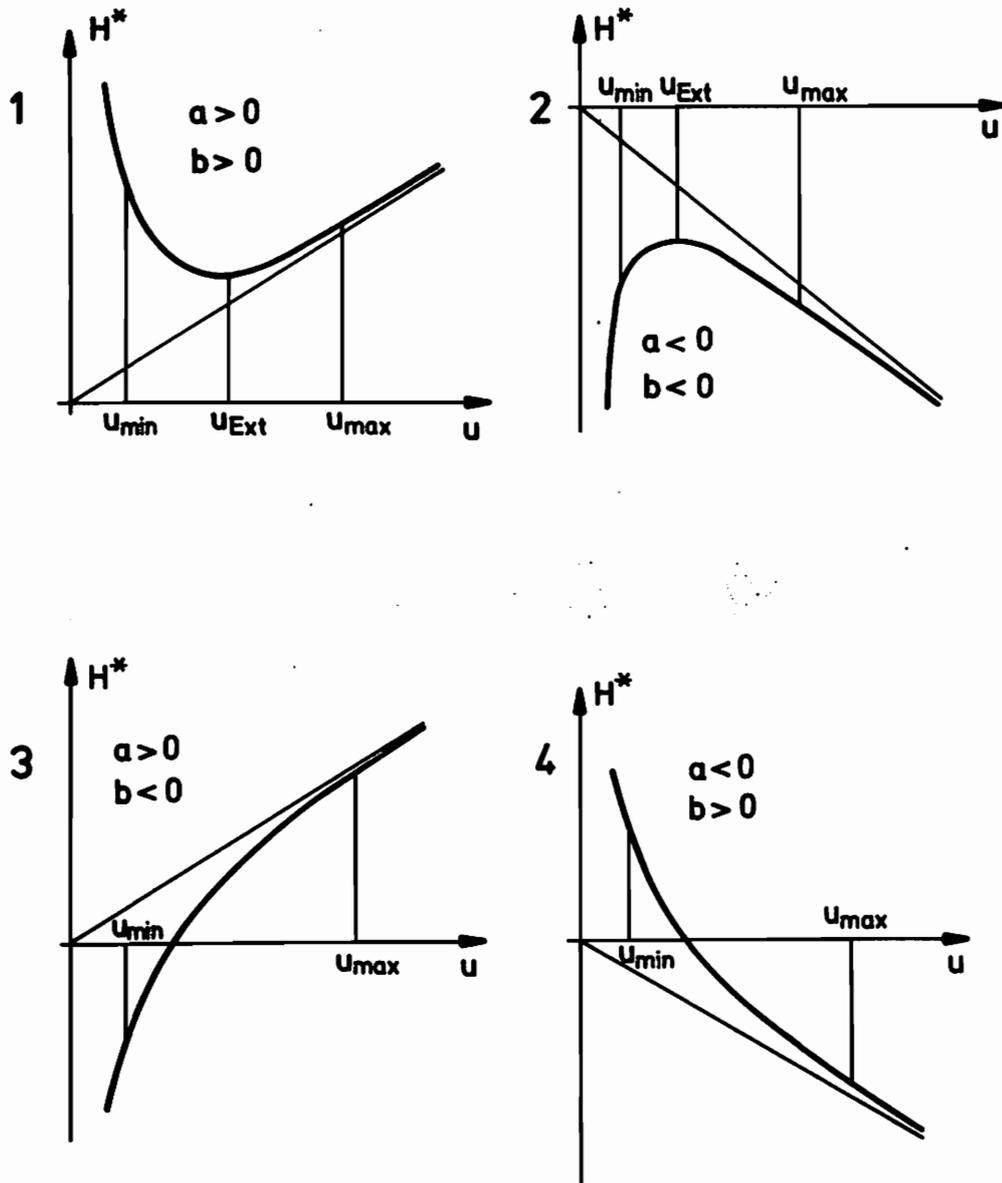


Abb. 4.1 Hilfsfunktion $H^*(u)$

$$2. u = u_{max} \quad \text{falls} \quad a \leq 0, b > 0 \quad \text{oder} \\ a < 0, b = 0 \quad (4.23)$$

3. $u = u^*$ in allen anderen Fällen

Wird $\sqrt[3]{|m|} > u_{max}$, so wird an diesen Stellen gegen die Spannungsrestriktion verstoßen, und man erhält nicht den geforderten optimalen Verlauf. Am Beispiel des einseitig eingespannten Stabes unter rein statischer Last können die Gleichungen (4.16) bis (4.23) überprüft werden. Das Hauptsystem liefert wegen $\beta^4 = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= 0 \\ q &= 1 \\ m &= -(1-\xi) \end{aligned}$$

Aus dem Hilfssystem erhält man

$$\begin{aligned} \bar{q}' &= 0 \\ \bar{q} &= C_1 \\ \bar{m} &= C_1 \xi + C_2 = 0 \quad \text{wegen} \quad \bar{q}(1) = \bar{m}(1) = 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Gleichung (4.20) erhalten die Werte

$$\begin{aligned} a &= 1 + \beta^4 v \bar{v} = 1 \\ b &= m \bar{m} = 0 \end{aligned}$$

und liefern gemäß Gleichung (4.23)

$$u = \max(u_{min}, \sqrt[3]{1-\xi})$$

Läßt man u_{min} gegen Null gehen, so erhält man

$$u = \sqrt[3]{1-\xi}$$

Dies ist gerade der Querschnittsverlauf des Stabes gleicher Festigkeit im statischen Fall. Bei konstanter Höhe und variabler Breite wird mit

$$p = q = 1 \longrightarrow u = 1 - \xi$$

und das Hauptssystem liefert damit

$$\dot{\varphi} = \ddot{v} = - \frac{-(1-\xi)}{1-\xi} = 1 = \text{konstant}$$

Dieser Ausdruck stimmt ebenfalls mit dem des statischen Falls überein. Das nichtlineare Gleichungssystem (4.16) bis (4.23) ist einer analytischen Lösung nicht zugänglich. Zur numerischen Lösung wurde ein sehr einfaches Integrationsverfahren (Polygonzug nach Euler) gewählt, da bei Mehrschrittverfahren die Kriterien der Gleichung (4.23) den Rechenaufwand stark heraufsetzen. Die Erfüllung der Gleichungen und Randbedingungen wurde durch zwei Iterationsverfahren erreicht. Es sei darauf hingewiesen, daß das System linear wird, wenn die Funktionen $u(\xi)$ und $g_i(\xi)$ fest vorgegeben werden.

Verfahren I

Es gelten die Bezeichnungen:

- \underline{x} Vektor der freien linken Randwerte,
- \underline{r}^* Vektor der vorgegebenen rechten Randwerte,
- $\underline{r} - \underline{r}^* = \underline{f}(\underline{x})$ nichtlinearer Zusammenhang zwischen den rechten und linken Randwerten.

Eine Lösung des Randwertproblems liegt vor, wenn die Forderung

$$\underline{r} - \underline{r}^* = \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$$

erfüllt ist. Das Verfahren benutzt eine Linearisierung nach Taylor in der Form

$$\underline{f}(\underline{x} + \Delta \underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}) + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}} \Delta \underline{x}$$

und läuft in folgenden Schritten ab:

1. Festlegen des Startvektors $\underline{x}^{(0)}$.
2. Bestimmung des zugehörigen $\underline{r}^{(0)}$.
3. Bilden der Ableitungsmatrix $\partial \underline{f} / \partial \underline{x} \big|_{\underline{x}^{(0)}}$
4. Festlegen der Suchrichtung $\Delta \underline{x}^{(0)} = - \left(\partial \underline{f} / \partial \underline{x} \big|_{\underline{x}^{(0)}} \right)^{-1} \underline{r}^{(0)}$
5. Schrittweise Suche mit $\underline{x}_k = \underline{x}^{(0)} + 0,05 k \Delta \underline{x}^{(0)}$, $k=1,2,\dots$
6. Abbruch bei vorgegebenem ε , wenn $|\underline{f}(\underline{x}_k)| < \varepsilon$
7. Falls $|\underline{f}(\underline{x}_k)| > |\underline{f}(\underline{x}_{k-1})|$, wird $\underline{x}^{(0)} = \underline{x}_{k-1}$ gesetzt und die Rechnung ab Punkt 2 wiederholt.

Verfahren II

Das nichtlineare Gleichungssystem wird durch Änderung der Steuerfunktion $u(\xi)$ iterativ erfüllt. Die Randbedingungen werden in jedem Iterationsschritt eingehalten.

1. Festlegen der Ausgangsfunktion $u^{(0)}(\xi)$.
2. Lösen des linearen Hauptsystems einschließlich Randbedingungen.
3. Festlegen der Bereiche, in denen die Spannungsrestriktionen greifen.
4. Lösen des nun linearen Hilfssystems einschließlich Randbedingungen.
5. Bestimmung von $u(\xi)$ gemäß Gleichung (4.23).
6. Abbruch, falls in allen Integrationspunkten $|u(\xi) - u^{(0)}(\xi)| < \varepsilon$ wird.
7. Mit Näherung $u^{(1)}(\xi) = u^{(0)}(\xi) + k(u(\xi) - u^{(0)}(\xi))$ ab Punkt 2 fortfahren.

Beide Verfahren wurden auf den einseitig eingespannten Stab angewendet. Sie bestätigen eindeutig, daß der in Abbildung (3.9) von $\beta = 0$ ausgehende Kurvenzug mit nur einem Bereich die Maximumbedingung erfüllt. Jeder Punkt des Kurvenzuges ist folglich mindestens ein lokales Minimum. Ob gleichzeitig auch ein globales Minimum vorliegt, ist der Theorie von Boltjanski nicht zu entnehmen. Das globale Minimum ist aus der Zahl der lokalen Minima auszuwählen.

Versuche, bei $\beta = 3$ ein anderes Minima als das mit $\bar{b} = \bar{b}_0$ zu

finden, schlugen bei beiden Verfahren fehl, obwohl der Stab konstanter Biegesteifigkeit günstiger liegt. Verfahren I endete entweder bei der bekannten Lösung gleicher Beanspruchung oder es versagte numerisch (Gleichungssysteme nicht lösbar wegen Zahlenüberlauf). Die bei Abbruch erreichten Näherungen waren noch weit von der Erfüllung der Randbedingungen entfernt. Verfahren II scheiterte an der Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte. Um die Lösung mit $\bar{v} = \bar{v}_0$ zu finden, waren - abhängig von der Genauigkeitsschranke - zwischen 15 und 30 Iterationen erforderlich, während eine zweite Lösung nach 1000 Iterationen noch nicht mit befriedigender Genauigkeit gefunden wurde. Der Grund ist in dem sprunghaften Verhalten des optimalen Querschnitts zu finden. Nähert sich der Querschnitt dem optimalen Verlauf, so springen in einigen Bereichen die Querschnitte von ihrem maximalen auf ihren zulässigen minimalen Wert und umgekehrt. Bei Annäherung an die neue Form springt der Verlauf fast in den alten Ausgangszustand zurück. Die Stabvolumen in den Sprungpunkten gleichen sich mit zunehmender Iterationszahl immer mehr an, so daß der so gefundene Querschnittsverlauf als grobe Näherung angesehen werden kann.

4.1.2. Unbeschränkte Suche bei diskretisierten Stäben

Wendet man die in Abschnitt 2.2.2 beschriebene Diskretisierung an, so geht das zu minimierende Integral (2.1) in eine Summe über. Die Lösung des Optimierungsproblems ist dann das globale Minimum einer Funktion mit N Variablen. Aufgaben dieser Art lassen sich mit herkömmlichen Verfahren einfach bearbeiten, wenn die Variablen keiner Beschränkung unterliegen. Dazu wurden im vorliegenden Falle die Nebenbedingungen umformuliert und das Stabvolumen zusätzlich auf das frequenzunabhängige Volumen eines statisch belasteten Stabes konstanten Querschnitts bezogen, dessen maximale Beanspruchung mit der des zu optimierenden Stabes identisch ist.

Unter diesen Voraussetzungen lautet das Optimierungsproblem mit den N freien unbeschränkten Variablen y_i :

Zielfunktion:

$$\frac{V}{V_0} = \min \frac{1}{V_0} \left[\sum_{i=1}^N A_i \frac{\rho}{N} + \bar{V}_i \right] \quad (4.24)$$

Nebenbedingungen:

$$a) \quad [E \int_i w''(x)]'' - \varrho A_i w(x) \Omega^2 = 0 \quad (4.25)$$

$$b) \quad A_i = A_{min} + g(y_i) \{A_{max} - A_{min}\}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad 0 \leq g(y) \leq 1$$

Die Spannungsbedingung wurde als Straffunktion

$$\bar{V}_i = \bar{k} \begin{cases} \frac{|v_i| - v_0}{v_0} & \text{falls } |v_i| > v_0 \\ 0 & \text{falls } |v_i| \leq v_0 \end{cases} \quad (4.26)$$

der Zielfunktion zugeschlagen. Ist an allen Punkten des Stabes die Bedingung $|v_i| \leq v_0$ erfüllt, wird die Zielfunktion mit dem tatsächlichen Volumen gebildet. Verstößt man jedoch gegen diese Forderung, so wird zur "Strafe" die Zielfunktion vergrößert und dem Suchverfahren damit signalisiert, dieses unzulässige Gebiet zu verlassen. Dabei ist durch den Faktor \bar{k} das Maß der "Strafe" dem vorhandenen Volumen anzupassen und zugleich die Dimension richtig zu stellen.

Die Funktion $g(y)$ ist in den folgenden Rechnungen stets wie in Abbildung 4.2 definiert und garantiert somit für die Einhaltung der Querschnittsrestriktionen

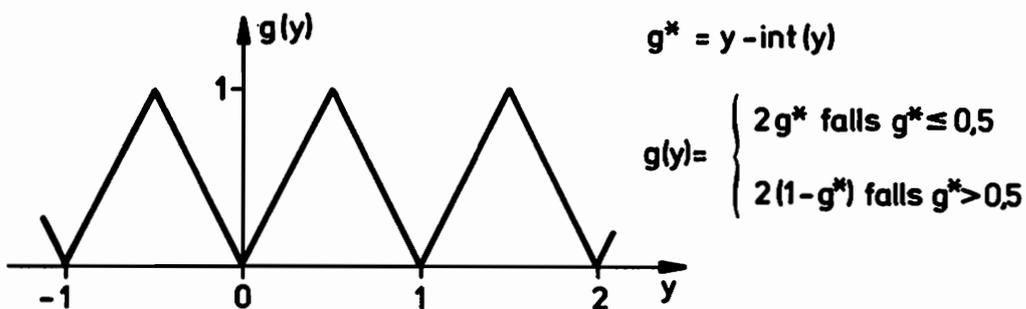


Abb. 4.2

Liegen keine Querschnittsrestriktionen vor, gilt also $A_{\min} \rightarrow 0$ und $A_{\max} \rightarrow \infty$, gelingt die Reduktion des N-dimensionalen Problems auf eines mit der Ordnung N-1. Zur Reduzierung löst man zunächst das duale Problem, welches bei vorgegebenem Volumen V^* die betragsmäßig größte Spannung σ_{\max}^* zu einem Minimum macht. Es stellt sich nun die Frage, welcher Zusammenhang zwischen dem frei wählbaren Volumen und der Maximalspannung besteht. Dazu ändern wir das Volumen in

$$V = k V^* \quad (4.27)$$

Beim einseitig eingespannten Stab variabler Breite ändern sich Querschnitt, Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment

$$\begin{aligned} A(x) &= k A^*(x) & W(x) &= k W^*(x) \\ I(x) &= k I^*(x) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Diese neuen Werte führen zu keiner Änderung der Differentialgleichung der Biegeschwingung, da der Faktor herausfällt. Von den vier Randbedingungen bleiben allerdings nur drei unverändert, nämlich $w(0) = \varphi(0) = M(1) = 0$. Die vierte Bedingung lautet wegen $w''(1) = 0$:

$$Q(1) = F_1 \quad \longrightarrow \quad w'''(1) = -\frac{F_1}{E k I^*(1)} \quad (4.29)$$

$w'''(x)$ und somit auch $w''(x)$ sind mit $1/k$ zu multiplizieren, wenn eine Querschnittsänderung $A(x) = k A^*$ vorgenommen wird. Die sich ergebende neue maximale Spannung bestimmt sich nun zu

$$\sigma_{\max} = \max \frac{|M(x)|}{W(x)} = \max \frac{|-E k I^*(x) \frac{1}{k} w''(x)|}{k W^*(x)} = \frac{1}{k} \sigma_{\max}^* \quad (4.30)$$

Verlangt man, daß σ_{\max} eine vorgegebene Spannung σ_0 erreicht, so ist (4.30) die Bestimmungsgleichung für k . Einsetzen in (4.27) und Beziehen auf das Vergleichsvolumen V_0 liefert letztlich

$$\left(\frac{V}{V_0} \right)_{\sigma_{\max} = \sigma_0} = \frac{\sigma_{\max}^*}{\sigma_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)_{\sigma_{\max} \neq \sigma_0} \quad (4.31)$$

Da nicht nur die Maximalspannung, sondern der gesamte Spannungsverlauf gemäß (4.30) transformiert wird, ist auch der neue Querschnittsverlauf eine Lösung des dualen Problems, in dem die maximale Spannung gerade $\bar{\sigma}_0$ beträgt. Einerseits führt jeder andere Querschnittsverlauf bei gleichem Volumen auf größere Spannungen, andererseits führt eine Volumenminderung mit $k < 1$ wegen Gleichung (4.30) ebenfalls auf eine größere Spannung; folglich ist $A(x)$ auch eine Lösung des Optimierungsproblems (4.24), (4.25), das sich nun in einer einfachen Form darstellt.

Zielfunktion

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V^*}{V_0 \bar{\sigma}_0} \min \bar{\sigma}_{\max}^* \quad (4.32)$$

Nebenbedingung

$$[E]_i^* w''(x)]'' - g A_i^* w^*(x) \Omega^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Der wesentliche Vorteil bei verschwindenden Querschnittsrestriktionen ist der, daß auf eine Straffunktion verzichtet werden kann, da die Spannungsrestriktion in die Zielfunktion eingearbeitet ist. Ein weiterer Vorteil ist die bereits angekündigte Reduzierung um einen Freiheitsgrad, wie aus Abbildung 4.3 an einem Stab mit zwei variablen Bereichen zu ersehen ist.

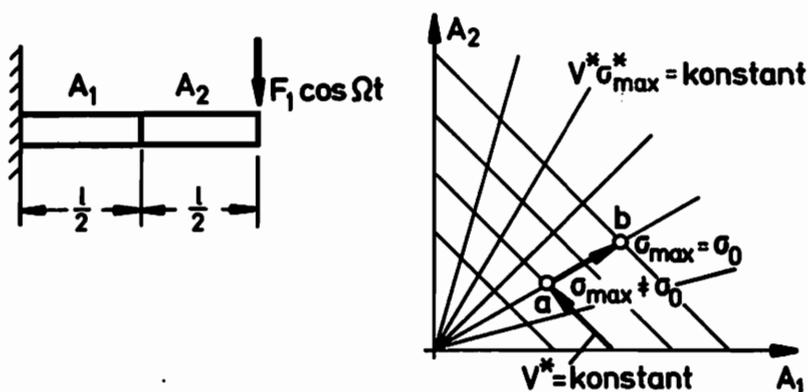


Abb. 4.3

Längs einer Linie $V^* = \text{konst.}$ sucht man die betragsmäßig kleinste Maximalspannung. Dies ist eine eindimensionale Suche für die zwei variablen Querschnitte. Im erhaltenen Punkt a ist $\bar{\sigma}_{\max} \neq \bar{\sigma}_0$. Das gesuchte Optimum im Punkt b erhält man durch direkte Umrechnung aus Gleichung (4.32).

4.2. Eingeschränkte Querschnittsformen

Die Wahl der Querschnittsrestriktionen ist nicht völlig frei. Eine zu große untere Schranke führt in der Regel auf einen Stab konstanten Querschnitts, während eine zu kleine obere Schranke zu einer nicht lösbaren Aufgabenstellung führt. In jedem Falle engt eine zu geringe Differenz der beiden Schranken die für die Optimierung erforderliche Bewegungsfreiheit so stark ein, daß keine zulässigen Lösungen mehr existieren. Letzteres tritt besonders dann auf, wenn die Erregung in der Nähe einer Eigenfrequenz des Stabes konstanten Querschnitts liegt.

Für einen einseitig eingespannten Stab mit rechteckigem Querschnitt bei variabler Breite seien die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt.

1. Ausgehend von der statischen Lösung existiert ein Bereich des Frequenzparameters, in dem die Klasse der Lösungen mit $|\bar{\sigma}| = \bar{\sigma}_0$ in allen Randfaserpunkten optimale Querschnittsverläufe ergibt. Lediglich im Bereich der Krafteinleitung greift wegen des verschwindenden Momentes die untere Querschnittsrestriktion.
2. Diesen ersten Bereich überschneidend ergeben sich Lösungen, die durch einen Vorzeichenwechsel des Biegemomentes gekennzeichnet sind. Danach, sich wiederum überschneidend, schließen sich Lösungen mit zwei Vorzeichenwechsel des Momentes an. Die zugehörigen Erregerfrequenzen liegen unterhalb der ersten, zwischen der ersten und der zweiten bzw. zwischen der zweiten und der dritten Eigenfrequenz des Stabes.
3. Beim Übergang vom ersten in den zweiten Lösungstyp treten am freien Ende große Querschnitte auf, die in der Regel durch die obere Schranke begrenzt sind. Von der Einspannung ausgehend und von dem Ansprechen der unteren Querschnittsschranke begrenzt,

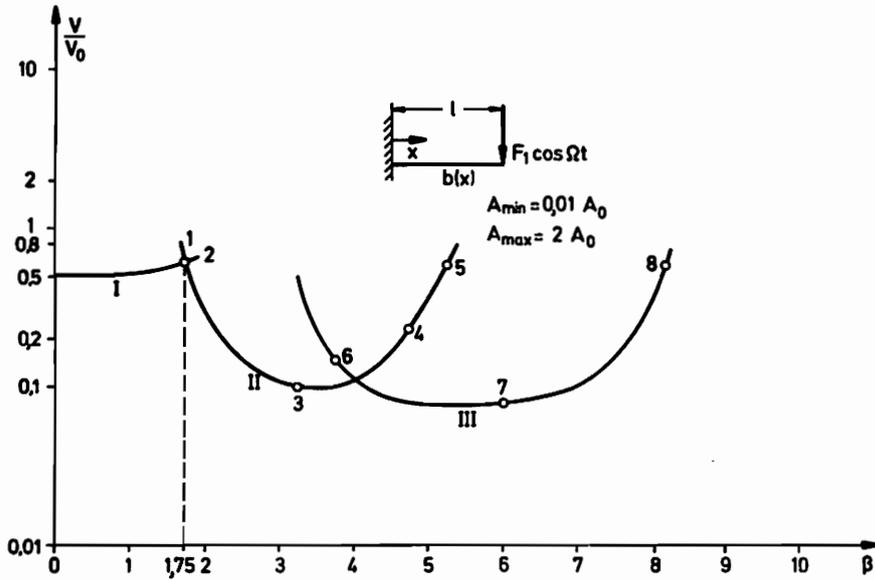


Abb. 4.4 Eingeschränkter Querschnittsverlauf

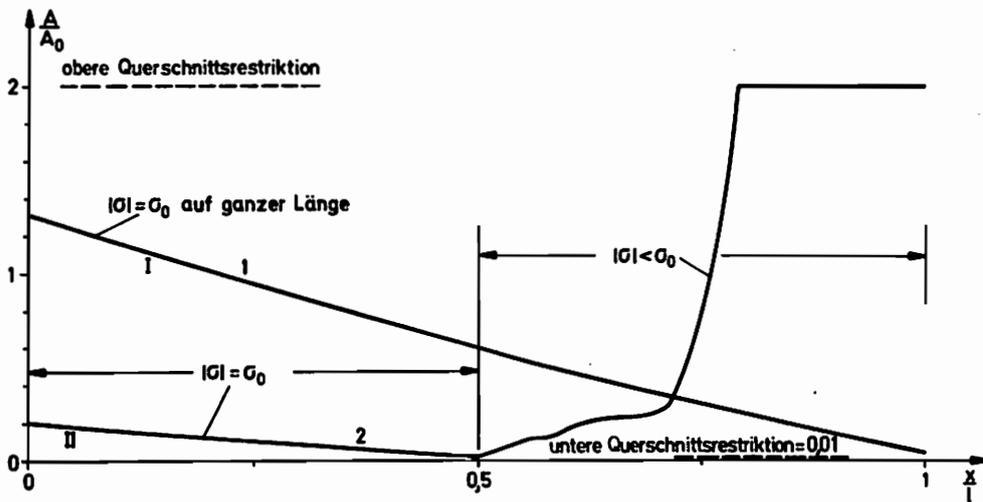


Abb. 4.5 Lösungstyp I und II bei gleichem optimalen Volumen ($\beta = 1,75$)

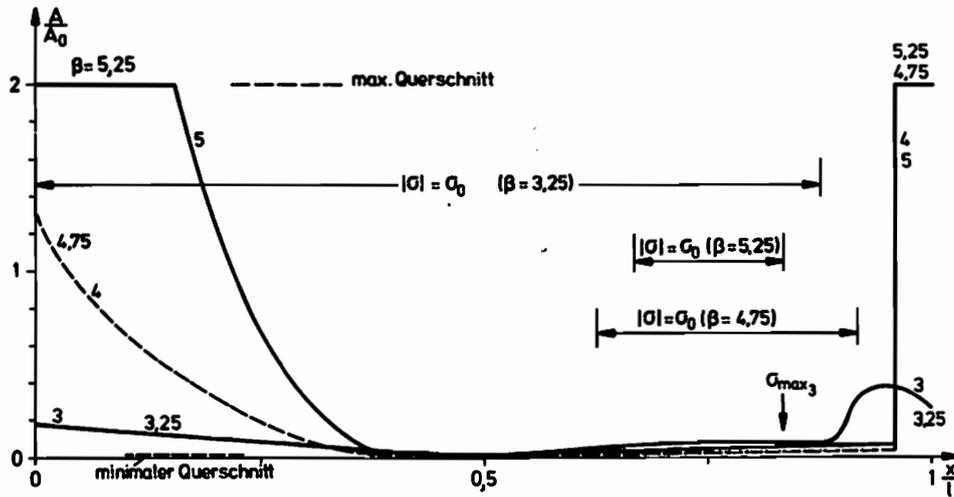


Abb. 4.6 Verhalten des Lösungstyps II

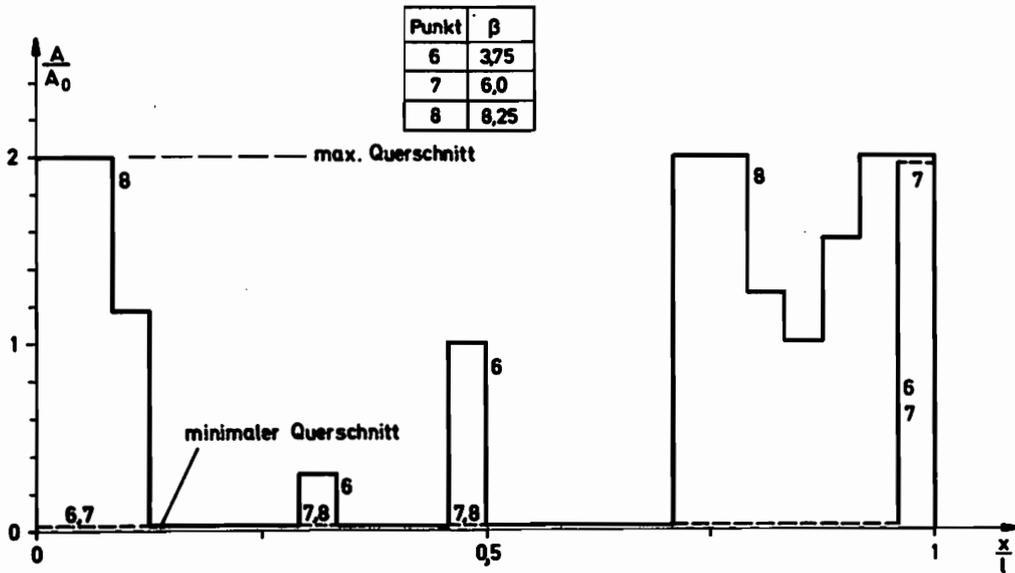


Abb. 4.7 Verhalten des Lösungstyps III

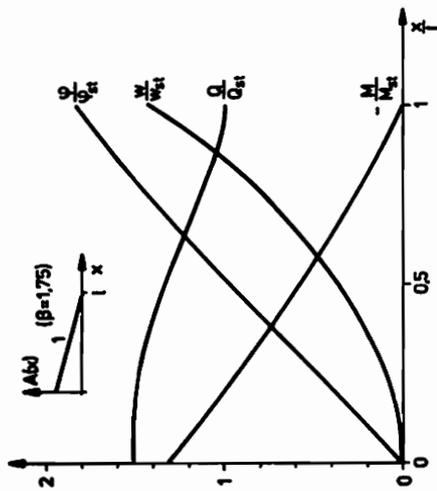
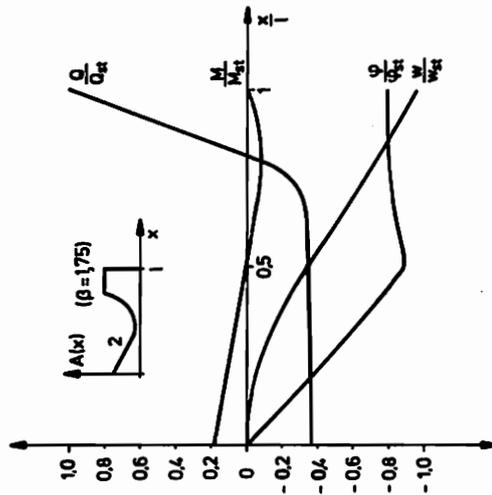
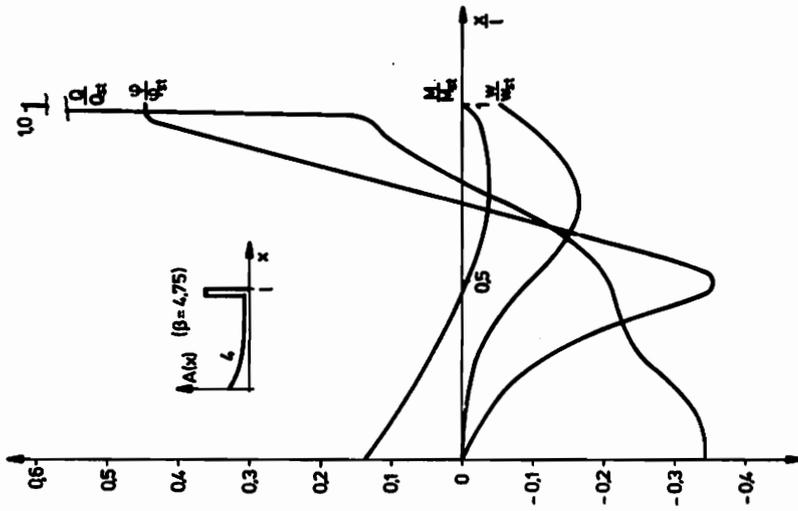


Abb. 4.8 Zustandslinien einiger Stäbe

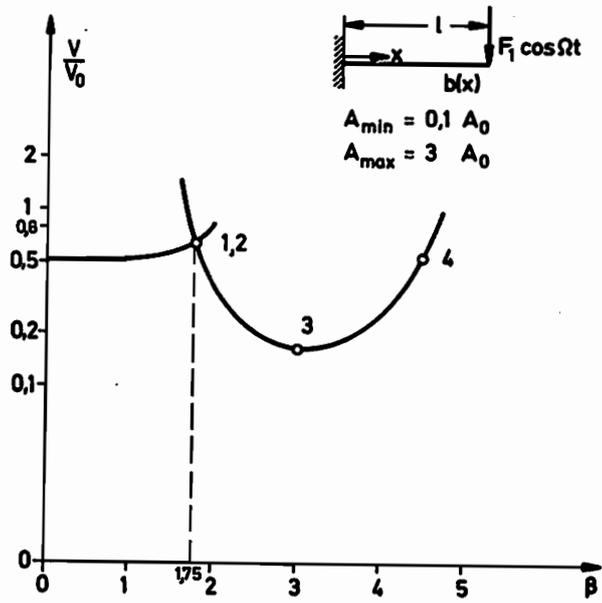


Abb. 4.9 Eingeschränkter Querschnittsverlauf

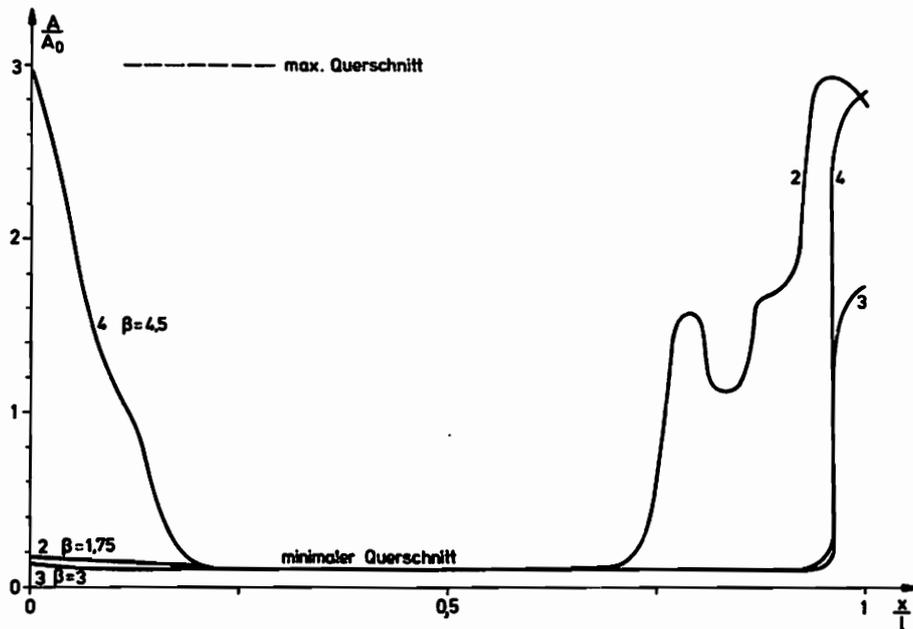


Abb. 4.10 Querschnitte bei größerer unterer Grenze

existiert ein Bereich mit konstanter Maximalspannung in den Randfasern.

4. Mit wachsendem Frequenzparameter verschiebt sich beim 2. Lösungstyp die Volumen- bzw. Massenhäufung von der Krafteinleitung zur Einspannstelle, wobei eine mehr oder weniger ausgeprägte Häufung am freien Ende verbleibt. Gleichzeitig tritt eine Einschränkung und Verlagerung der Bereiche konstanter Spannung auf.
5. Die in Abbildung 4.4 dargestellten Kurvenzüge der Lösungstypen II und III stellen die Hüllkurve der gefundenen lokalen Minima dar. Lösungen mit drei und mehr Nulldurchgängen des Momentes existieren und wurden vereinzelt nachgewiesen.
6. Hinsichtlich der Zustandslinien treten starke Änderungen in der Querkraft und im Biegewinkel auf, wenn lediglich am Kraftangriffspunkt ein kurzer Bereich mit großem Querschnitt liegt. Ist dieser Bereich ausgedehnter, so verschwinden diese ausgeprägten Änderungen.
7. Größere Mindestquerschnitte heben das optimale Volumenverhältnis an. Auch bei quasistatischer Erregung existieren Bereiche, in denen die Tragfähigkeit des Stabes nicht voll ausgenutzt ist.

4.3. Uneingeschränkter Querschnittsverlauf

Läßt man die untere und obere Einschränkung der Querschnittsgröße weg, so vereinfacht sich die Rechnung erheblich. Wegen der in 4.1.2 beschriebenen Normierung kann auch auf eine Straffunktion zur Einhaltung der Spannungsbedingung verzichtet werden. Darüber hinaus wurde auf eine mögliche Reduzierung des Systems um einen Freiheitsgrad durch Einführung eines konstanten Volumens verzichtet. Dies ist bei der benutzten Aufteilung in vierzig Stababschnitte zulässig, da sich außer einer geringfügigen Verbesserung in der Rechenzeit keine weiteren Vorteile ergeben.

An dieser Stelle sei vermerkt, daß durch die Eigenarten der Diskretisierung bestimmte Phänomene nicht erfaßt werden können. Eine zur Erreichung des optimalen Volumens erforderliche Einzelmasse müßte als sehr kurzer Abschnitt mit sehr großem Querschnitt dargestellt werden.

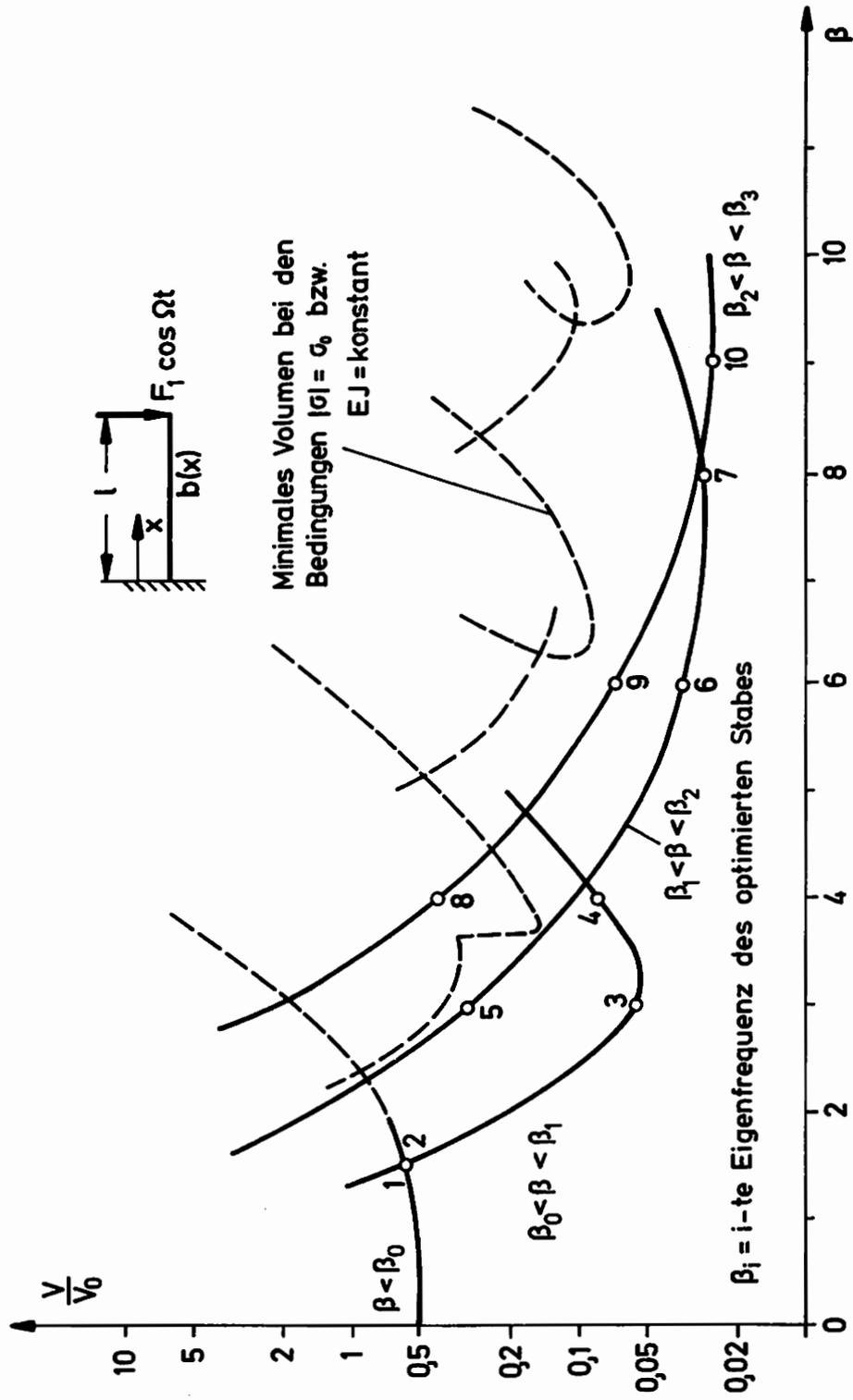


Abb. 4.11 Optimales Volumen bei uneingeschränktem Querschnittsverlauf

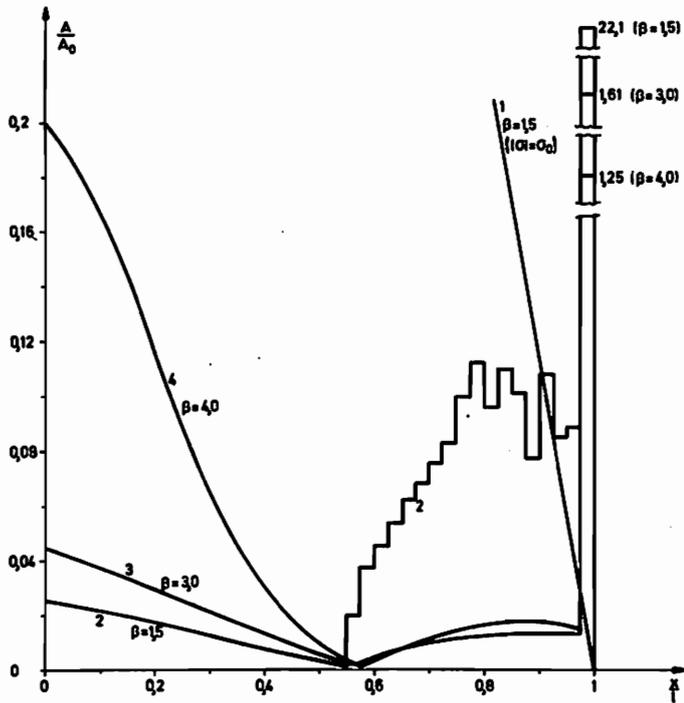


Abb.4.12

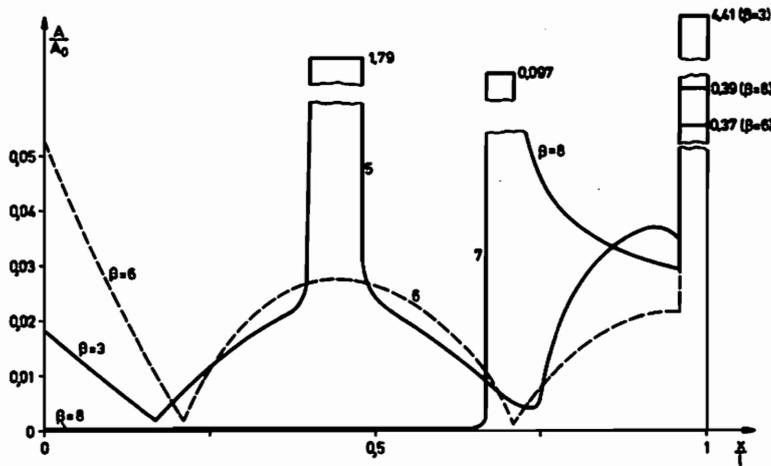


Abb.4.13

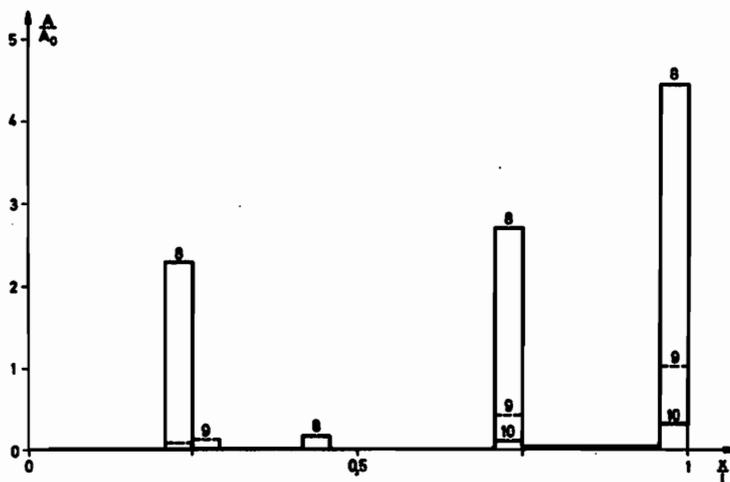


Abb.4.14

Optimale Querschnittsverläufe

Die äquidistante Teilung des Verfahrens erlaubt jedoch nur die Darstellung als Abschnitt mit der Länge l/N und einem entsprechenden Querschnitt. Ebenso werden keine beliebig kleinen Querschnitte erreicht, da die Dimensionierung nach dem betragsmäßig größten Moment vorgenommen wird, welches innerhalb eines Abschnitts auftritt.

Die Abbildung 4.11 zeigt, daß auch hier der vom statischen Zustand ausgehende Lösungszweig mit konstanter Beanspruchung längs der Stabachse zu Beginn optimale Lösungen darstellt. Ab einem Frequenzparameter $\beta = 1,5$ ist dann eine Lösung mit einem Nulldurchgang des Momentes optimal. Weitere neue optimale Lösungstypen treten bei höheren Frequenzparametern auf. Der Vergleich der Volumen, die bei $EJ = \text{konst.}$ sowie bei der Bedingung $|G| = G_0$ erforderlich sind, zeigt, daß die im allgemeinen Fall gewonnenen Volumen stets besser ausfallen oder - im quasistatischen Bereich - identisch sind. Die Stabformen selbst zeichnen sich durch einen geringen Querschnitt an der Einspannstelle aus. Alle Lösungstypen besitzen einen sehr kurzen Bereich mit relativ großem Querschnitt am Krafteinleitungspunkt. Dieser kurze Bereich beinhaltet in extremen Fällen (z. B. bei $\beta = 1,5$) über 90 % des gesamten Stabvolumens und ist ein deutlicher Hinweis, daß dünne Stäbe mit einer Einzelmasse am Stabende ebenfalls geringe Volumen besitzen.

Mit abnehmender Querschnittseingrenzung ergibt sich ein deutliches Ausweiten und Überschneiden der einzelnen Lösungsbereiche. Besonders die Lösungsformen mit zwei und drei Momentennulldurchgängen überstreichen einen großen Frequenzbereich bei relativ geringen bezogenen Volumina.

4.4. Bemerkungen zum optimalen Querschnittsverlauf

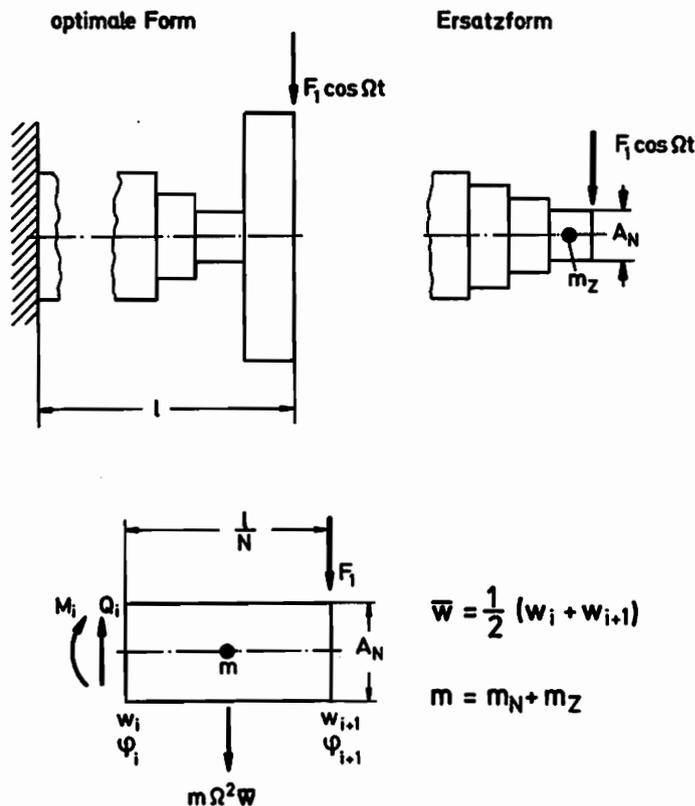
Prinzipiell liefern die gefundenen Querschnittsverläufe minimales Volumen bei vorgegebener Belastung. Jedoch sind hinsichtlich der Berechnung mittels der einfachen Stabtheorie sowie der eventuellen Fertigung solcher Stäbe Grenzen gesetzt, die vielfach von den optimalen Stabformen überschritten werden. Insbesondere soll im folgenden gezeigt werden, welchen Einfluß konstruktive Maßnahmen zur Beseitigung der aufgeführten Mängel haben.

4.4.1. Egalisierung stark schwankender Querschnitte

Zunächst betrachten wir den Querschnittsverlauf eines Stabes mit $\beta = 1,5$ (s. Abb. 4.15), der einen Nulldurchgang des Momentes besitzt. Den stark schwankenden Verlauf im hinteren Viertel ersetzen wir durch einen gleichmäßigen Kurvenzug, wobei der extrem große Endquerschnitt noch beibehalten wird. Diese Maßnahme garantiert die Anwendbarkeit der Stabtheorie und einfache Fertigung - vom Endstück abgesehen. Das optimale Volumenverhältnis sinkt dabei bei Einhaltung der Spannungsrestriktionen von 0,599 auf 0,612 ab, bleibt also in seiner Größenordnung erhalten. Wird auch das Stabende egalisiert, so erhält man wegen der nun fehlenden "ausgleichenden" Masse den sehr großen Wert von $V/V_0 = 6,34$ und liegt somit schlechter als bei einem Stab konstanten Querschnitts, der ein Volumenverhältnis von 1,9 aufweist.

4.4.2. Ersatz eines großen Endquerschnittes

Der Querschnittssprung am Stabende kann egalisiert werden, indem man im letzten Diskretisierungsabschnitt einen geringen Querschnitt mit einer zusätzlichen Einzelmasse einführt.



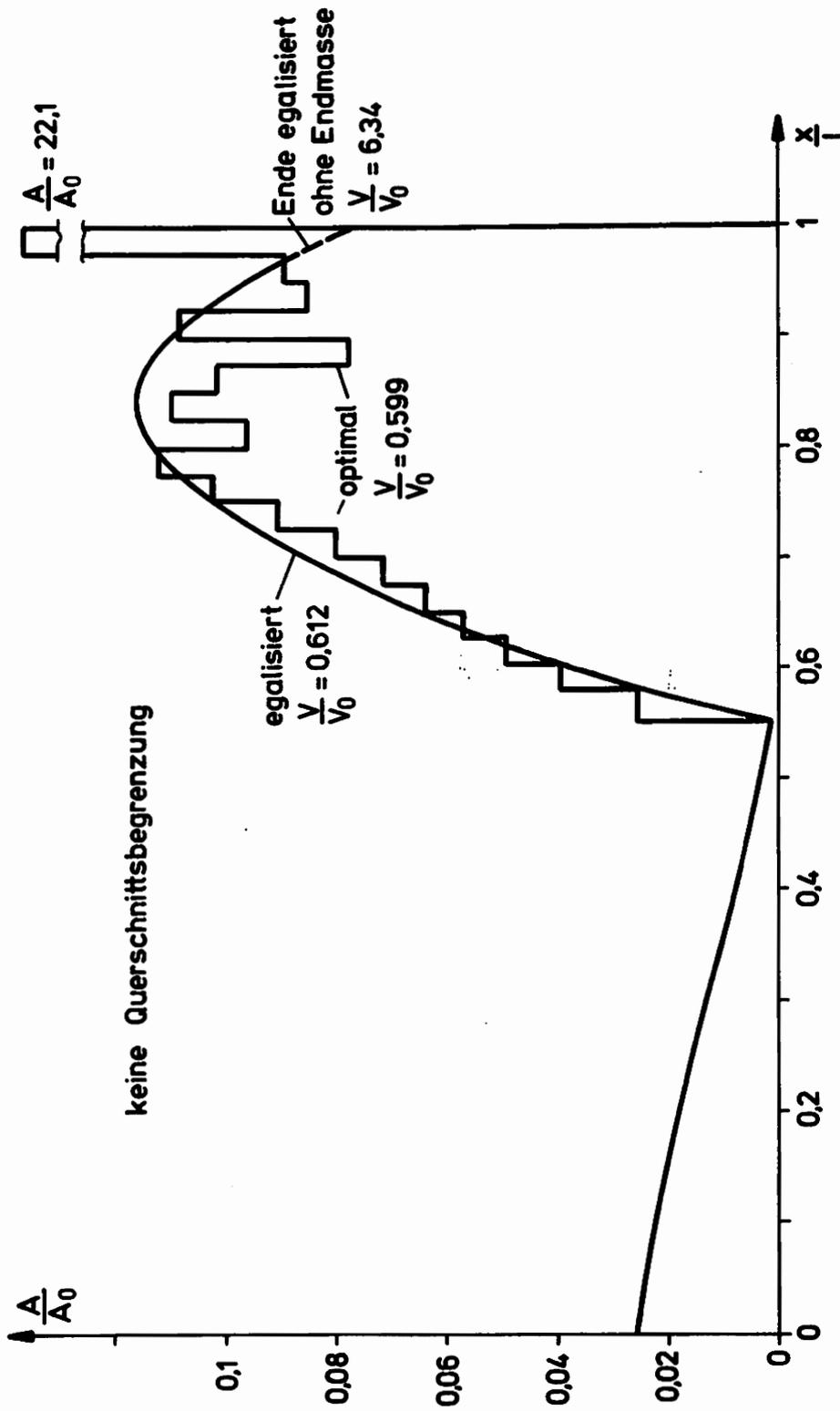


Abb. 4.15 Egalisierter Querschnittsverlauf bei $\beta = 1,5$

Bedingung für dieses Ersetzen ist gleiches dynamisches Verhalten oder anders formuliert, die Zustandsgrößen an der Stelle i bleiben unverändert und die rechten Randbedingungen müssen nach wie vor erfüllt sein. Läßt man alle Massenkräfte des Stababschnittes in einem Punkt angreifen, so ist aufgrund der kurzen gedrunghenen Form dieses Elementes näherungsweise eine statische Betrachtung zulässig. Bezeichnet m_z die zusätzliche Masse und m_N die neue Masse des Abschnitts, so kann das Momentengleichgewicht in der Form

$$M_i + Q_i \frac{l}{N} - (m_N + m_z) \Omega^2 \bar{w} \frac{l}{2N} = 0$$

angeschrieben werden. Für den unveränderten Abschnitt mit der Masse m_A erhält man

$$M_i + Q_i \frac{l}{N} - m_A \Omega^2 \bar{w} \frac{l}{2N} = 0$$

Der Vergleich liefert

$$m_A = m_N + m_z$$

d. h. die Gesamtmasse des Stabes bleibt unverändert. Nach Wahl des Endquerschnittes liegt dessen Masse und somit auch die Zusatzmasse fest. Der Endquerschnitt wird so gewählt, daß sich insgesamt ein kontinuierlicher Verlauf ergibt. Bei unveränderter Stabmasse ändert sich auch das erforderliche Volumen nicht, wenn Stab und Zusatzmasse gleiche Dichte besitzen. Von Vorteil ist bei dieser Egalisierung jedoch, daß zwei Materialien verschiedener Qualität verwendet werden können, die Stabkontur relativ einfach ist und keine Bedenken hinsichtlich der Anwendbarkeit der Stabtheorie bestehen.

5. Optimierung unter Einbeziehung von Zusatzlasten

In den bisherigen Untersuchungen wurde als einzige Belastung eine harmonisch wechselnde Kraft angesetzt. In der Praxis müssen die Bauteile jedoch zusätzliche Lasten tragen. Dies können Maschinen sein, die ihrerseits durch Unwucht den dynamischen Anteil erzeugen oder einfache Massen, die aus Fundamenten oder Spannvorrichtungen resultieren. Ebenso zählt das Eigengewicht des Bauteils und sonstige statisch wirkende Kräfte zu den Zusatzlasten. Damit ergibt sich die Notwendigkeit, aus der statischen

Belastung heraus einen Querschnittsverlauf $A_{\min}(x)$ festzulegen, der bei der Optimierung des Volumens nicht unterschritten werden darf. Verfahren, die es gestatten, das vorliegende Optimierungsproblem analytisch zu lösen, sind nicht bekannt. Die gefundenen Ergebnisse wurden durch Diskretisierung des Stabes erhalten.

5.1. Stab mit zusätzlicher statischer Einzelkraft

Die Optimierung wird beispielhaft am einseitig eingespannten Stab durchgeführt, der durch eine statische und eine dynamische Kraft an seinem freien Ende belastet ist. Aufgrund der Linearität können der statische und dynamische Anteil getrennt behandelt und anschließend überlagert werden.

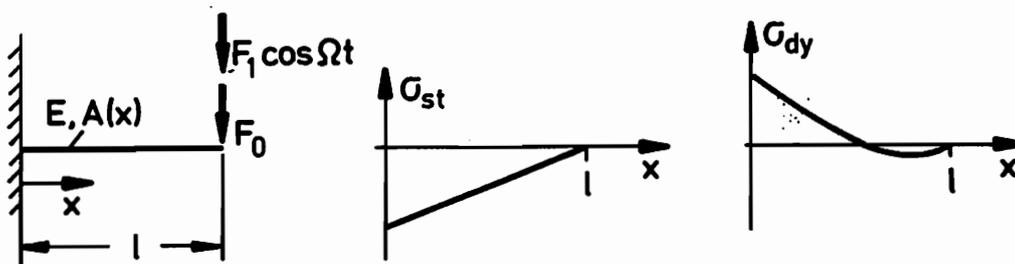


Abb. 5.1
Belastung und Spannungsaufteilung

Die maximal auftretende Spannung in einem Querschnitt ist somit

$$|\sigma_{\max}(x)| = |\sigma_{st}(x)| + |\sigma_{dyn}(x)| \quad (5.1)$$

Dieser Wert soll einen vorgegebenen Betrag σ_0 nicht überschreiten, um eine Überlastung des Werkstoffes zu vermeiden. Das Optimierungsproblem kann nun in folgender Form geschrieben werden:

Zielfunktion ist das Erreichen eines minimalen relativen Volumens

$$\frac{V}{V_0} = \min \frac{1}{V_0} \int_0^l A(x) dx$$

Nebenbedingungen sind

a) Erfüllen der Differentialgleichung

$$[E(x) w''(x)]'' - \rho A(x) w(x) \Omega^2 = 0 \quad (5.2)$$

einschließlich der Randbedingungen,

b) Einhalten einer oberen Spannungsgrenze

$$|\sigma_{\max}(x)| = \frac{|M_{st}(x)|}{W(x)} + \frac{|M_{dyn}(x)|}{W(x)} \leq \sigma_0$$

Das Vergleichsvolumen V_0 ist das erforderliche Volumen des Stabes, wenn nur die statische Last F_0 auftritt. Im weiteren wird noch das Belastungsverhältnis

$$\chi = \frac{F_1}{F_0} \quad (5.3)$$

eingeführt, welches die dynamischen und statischen Kräfte verbindet.

Das Problem (5.2) wurde beispielhaft für einen Stab mit konstanter Höhe und variabler Breite in der Programmiersprache FORTRAN IV formuliert und auf dem am Institut für Mechanik vorhandenen Rechner MODCOMP gerechnet. Die Suche des optimalen Wertes der Zielfunktion wurde nach dem von Hooke und Jeeves entwickelten Verfahren DIRECT SEARCH /23/ durchgeführt. Um unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, wurden einige Testrechnungen mit verschiedenen Unterteilungen vorgenommen. In den Abbildungen 5.2 bis 5.4 ist klar erkennbar, daß sich ab $N = 20$ ein fast horizontaler Verlauf in der Zielfunktion und im Verhältnis der statischen und dynamischen Anteile ausbildet. Ebenso zeigt der optimale Querschnittsverlauf bei $N = 10$ bereits das typische Verhalten, welches bei $N = 30$ nur noch feiner aufgefächert wird. Die anschließenden Rechnungen wurden daher alle mit $N = 25$ durchgeführt. Die Genauigkeits-schranke wurde auf 0,001 festgelegt. Sie dient dem Verfahren als Abbruchkriterium. Liegt die Größe aller Suchschritte unter dieser

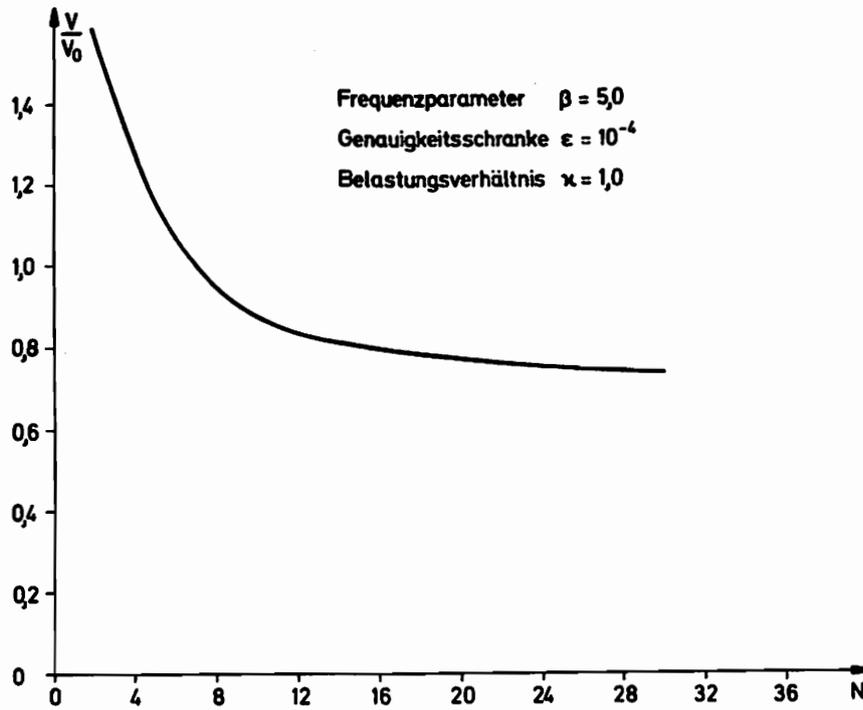


Abb. 5.2 Optimales Volumen in Abhängigkeit von der Unterteilung

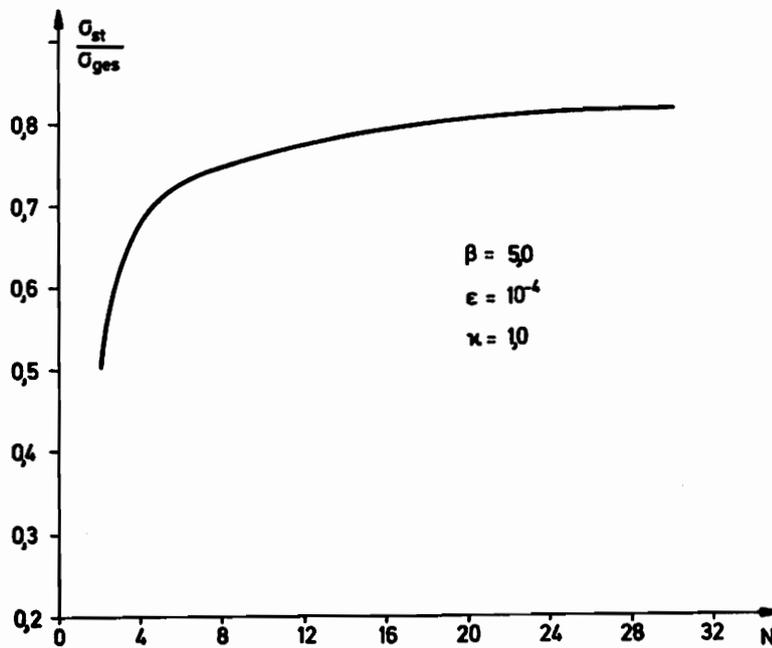


Abb. 5.3 Spannungen an der Einspannstelle

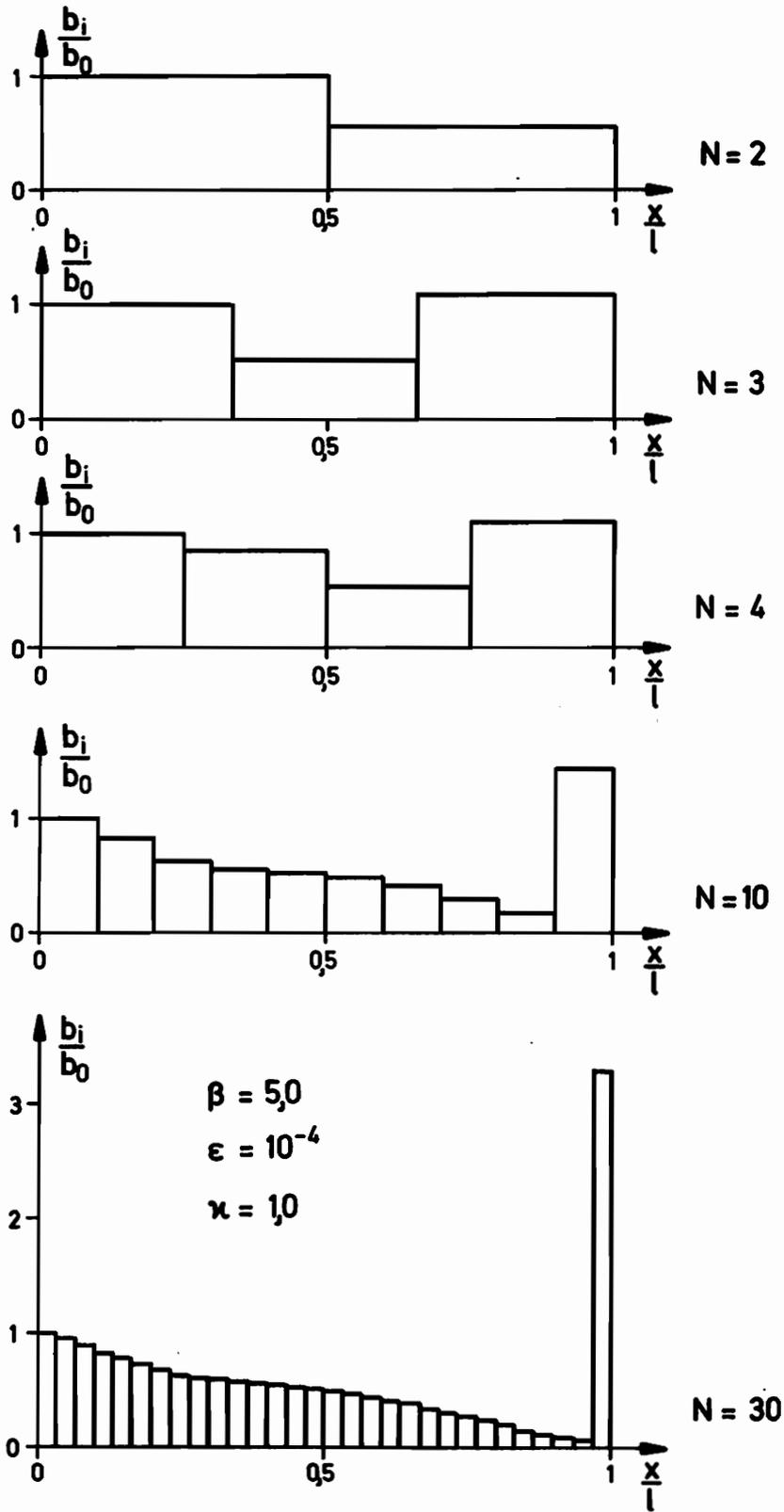


Abb. 5.4 Querschnittsverlauf bei wachsender Unterteilung

Grenze, dann bricht das Verfahren ab. Der Einfluß der Genauigkeits-
schranke auf die Zielfunktion und auf die Anzahl der erforderlichen
Aufrufe sind in der folgenden Zusammenstellung aufgeführt, die für
 $\beta = 5$ und $N = 15$ Unterteilungen bei $\kappa = 1$ gültig ist.

ε	$\frac{V}{V_0}$	Aufrufe
10^{-2}	0,804	1 103
10^{-3}	0,8008	1 502
10^{-4}	0,8006	1 845

Während die Zielfunktion für $\varepsilon < 10^{-2}$ nahezu unabhängig von ε wird,
steigt die Zahl der erforderlichen Suchschritte - und damit die ver-
brauchte Rechenzeit - weiter an.

Für einige Belastungsparameter sind über einen größeren Bereich des
Frequenzparameters die Ergebnisse in Abbildung 5.5 dargestellt. Bei
 $\beta = 0$ liegt der statische Fall vor, an dem sich ein quasistatischer
Bereich anschließt. Die Größe dieses Bereiches hängt direkt vom
Belastungsparameter κ ab. So weichen bei $\kappa = 0,1$ die Lösungen für
 $\beta \leq 2$ nur unwesentlich von der statischen Lösung ab. Bei $\kappa = 0,75$
ist der Bereich auf $\beta \leq 1,5$ und bei $\kappa = 1,0$ auf $\beta \leq 1,0$ einge-
schränkt. Eine typische Lösung für diesen Bereich ist in Abbildung 5.6
dargestellt. Die optimale Lösung weicht nur unwesentlich von einer
Graden ab. Der für die statische Zusatzlast erforderliche Anteil beträgt
63,5 % des Volumens. Gegenüber dem "fast statischen" Fall mit extrem
geringer Erregerfrequenz liegen folglich kaum Abweichungen vor. Bei
 $\beta = 4$ beträgt an der Einspannstelle der statisch erforderliche
Querschnitt 74 % vom Gesamtquerschnitt, um dann linear zur Kraftein-
leitung abzunehmen. Diesem statischen Anteil ist der dynamisch erfor-
derliche überlagert. Ähnliche Querschnittsverläufe sind auch bei $\beta = 7$
und $\beta = 10$ erkennbar. Hauptunterscheidungsmerkmal ist jeweils die
Anzahl der Punkte, an denen sich die Kurven des statischen und

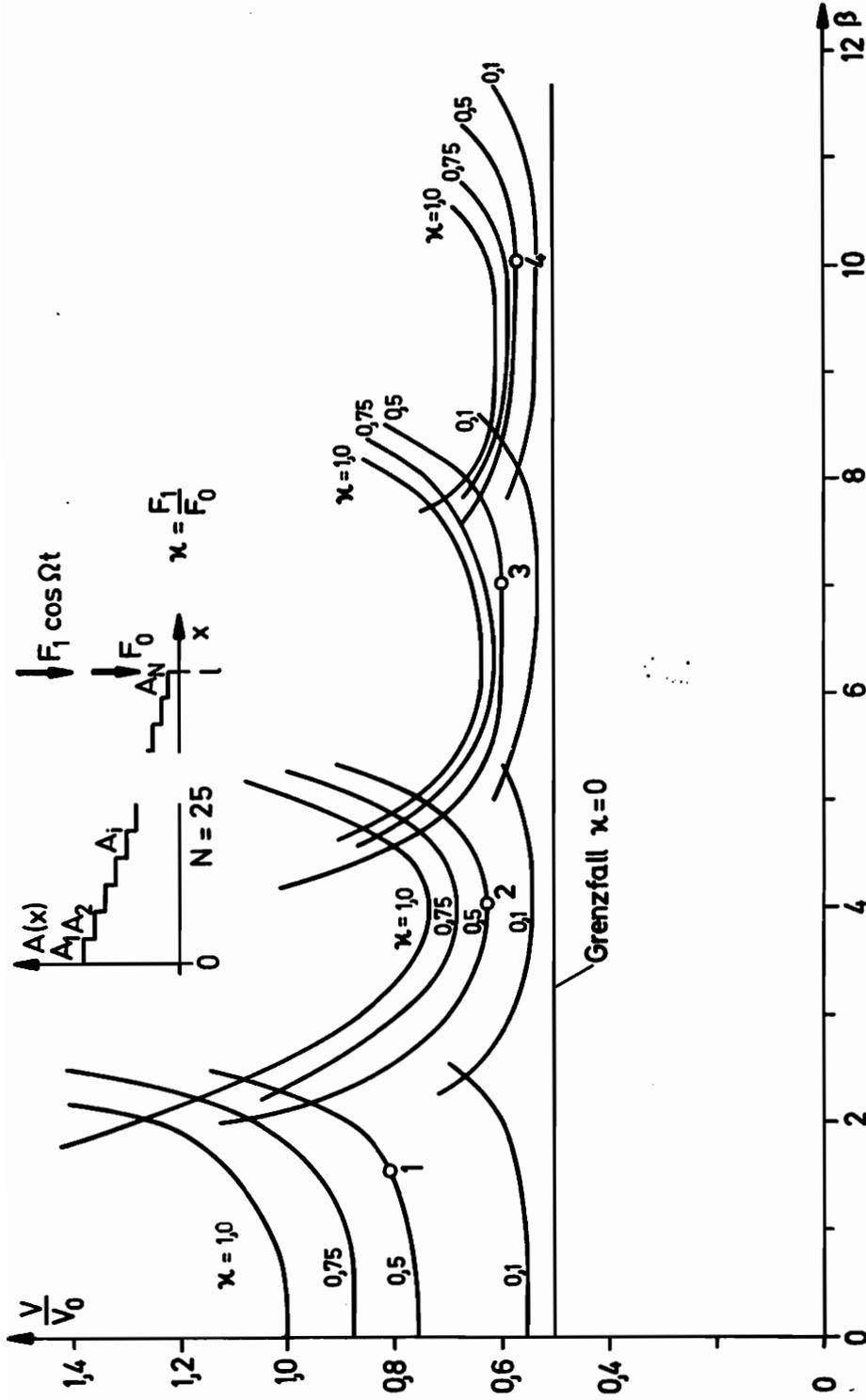


Abb. 5.5 Optimales Volumen bei statischer Zusatzlast

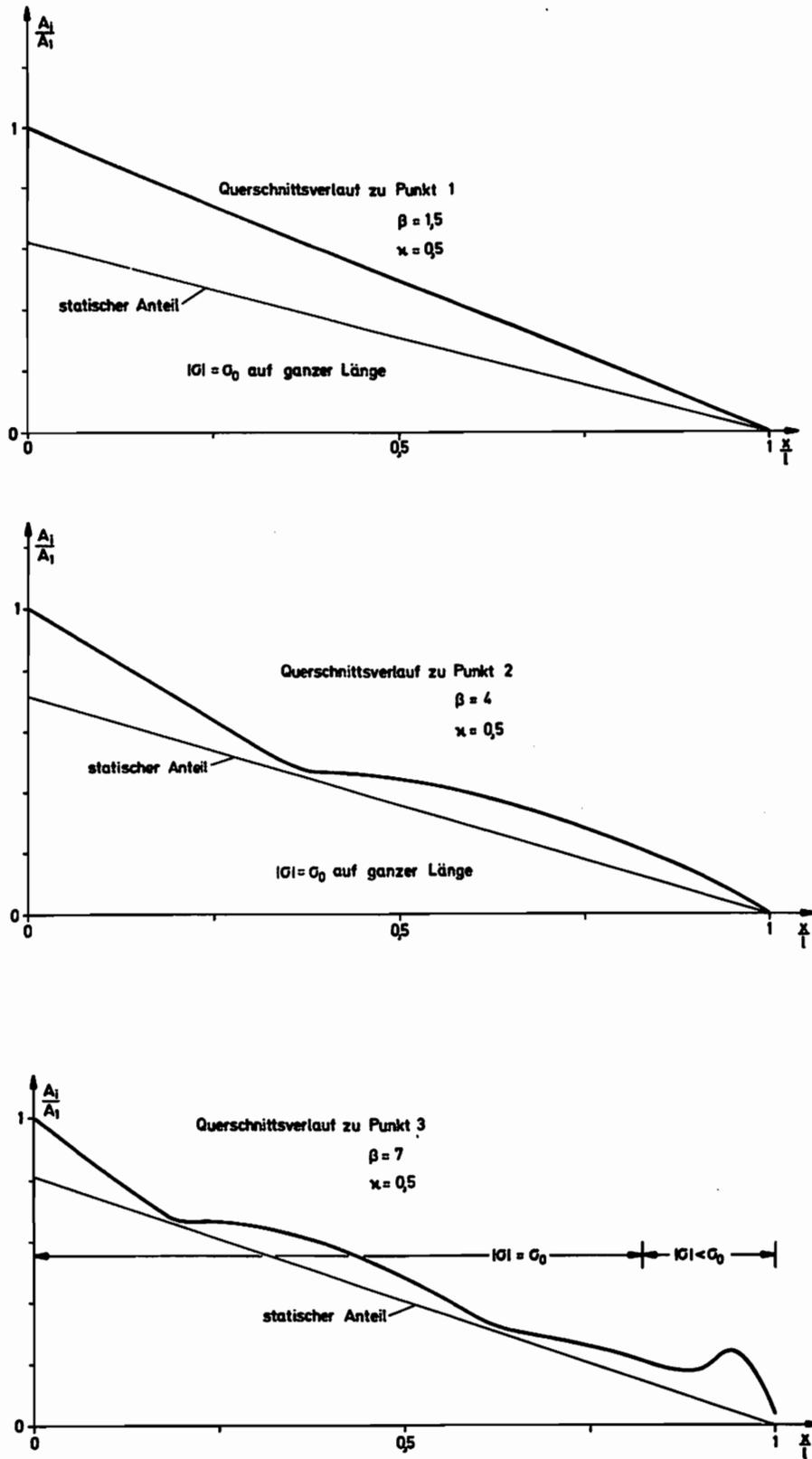


Abb. 5.6

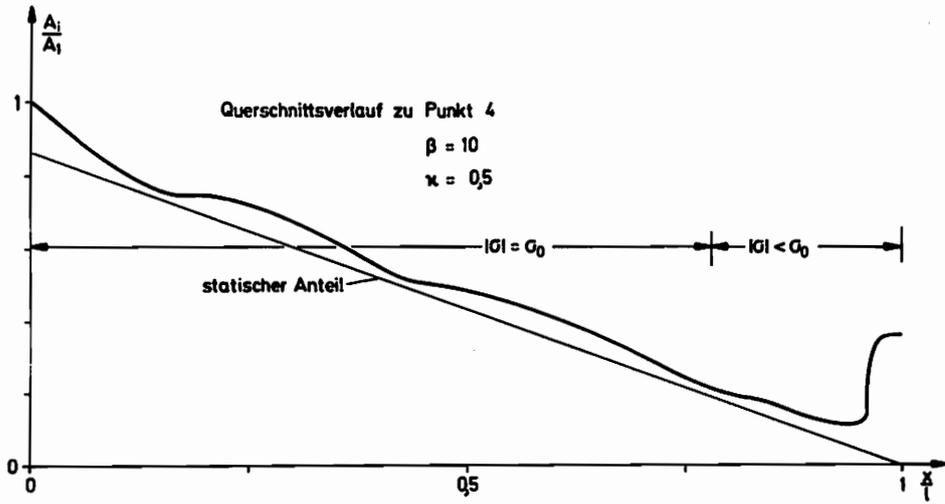


Abb. 5.7

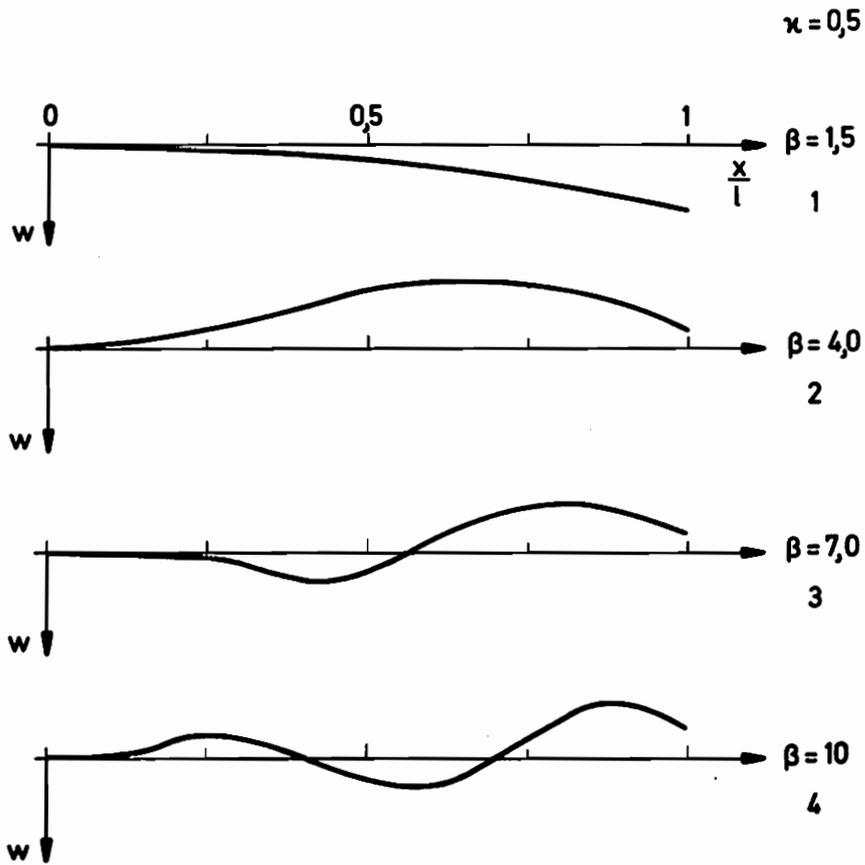


Abb. 5.8 Biegelinien zu den Punkten 1 bis 4

dynamischen Anteils sehr nahe kommen. Anhand der Biege- und Momentenlinien erkennt man schnell, daß bei kleinem β der optimierte Stab unterhalb seiner ersten Eigenfrequenz erregt wird. Bei Übergang auf den nächsten Kurvenzug der Abbildung 5.5 liegt die Erregerfrequenz zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz. Jeder weitere Übergang verschiebt dementsprechend die Erregung im Verhältnis zu den jeweiligen Eigenfrequenzen des optimierten Stabes. Allgemein ist über das Verhalten mit wachsendem Frequenzparameter folgendes zu sagen:

1. Bei quasistatischer Erregung ist der optimale Stab derjenige, der unterhalb seiner ersten Eigenfrequenz erregt wird und in allen Punkten seiner Randfaser die gleiche maximale Beanspruchung erfährt.
2. Mit steigendem Frequenzparameter erhöht sich ebenfalls die erste Eigenfrequenz des optimierten Stabes.
3. Ab einem bestimmten, vom Belastungsparameter χ abhängenden Wert des Frequenzparameters wird der optimierte Stab zwischen seiner n -ten und $n + 1$ -ten Eigenfrequenz erregt, wobei n die Werte 1, 2, 3, ... annimmt.
4. Die Lösungsbereiche überschneiden sich, so daß bei einem Frequenzparameter zwei mögliche Lösungen existieren, von denen nur eine optimal ist.
5. Innerhalb eines Lösungsbereiches sind bei hohem Frequenzparameter nur optimale Stäbe zu finden, die in allen Randfaserpunkten die gleiche maximale Beanspruchung erfahren. Bei tieferen Werten des Frequenzparameters gibt es am Ende des Stabes in unmittelbarer Nähe der Krafteinleitung eine Stabverdickung, in der die maximale Spannung nicht erreicht wird.
6. Die Massenanhäufung drückt die Eigenfrequenzen des optimierten Stabes nach unten, während der Entwurf mit $|\delta| = \delta_0$ die Eigenfrequenzen anhebt.

Für die Behandlung des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes sind in der Optimierungsaufgabe 5.2 lediglich die Randbedingungen entsprechend zu ändern. Das optimale Volumen eines solchen Stabes ist in Abhängigkeit vom Frequenzparameter in Abbildung 5.9 dargestellt. Typische Querschnitts-

verläufe für $\beta = 4, 7$ und 10 sind ebenfalls dargestellt. Grundsätzlich treffen für den beidseitig gelagerten Stab die gleichen Aussagen wie für den einseitig eingespannten Stab zu.

Längs der Lösungskurven kann man gut das Verhalten des Stabquerschnittes beim Herunterdrücken der Eigenfrequenzen erkennen. Ausgehend von der bei hohem Frequenzparameter stets optimalen Lösung mit $|\bar{\sigma}| = \bar{\sigma}_0$ bildet sich stets an der Krafteinleitungsstelle eine Massenanhäufung aus. Liegt die Erregerfrequenz zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz des optimalen Stabes, so bleibt dies die einzige Anhäufung. Bei Erregung zwischen der zweiten und dritten Eigenfrequenz erscheint eine zweite Massenanhäufung. Im betrachteten Punkt 6 weist der optimale Querschnittsverlauf bereits drei Massenanhäufungen auf. Betrachtet man die in Abbildung 5.11 maßstäblich dargestellten Querschnittsverläufe, so erhält man den Eindruck eines schlanken Stabes, dem an einigen Stellen diskrete Massen aufgesetzt sind. Die Grundform des Querschnittsverlaufes ist annähernd linear, ein Zeichen für den dominierenden Anteil der statischen Zusatzlast. Die letzten Ergebnisse werfen die Frage auf, ob ein einfach herzustellen-der Stab mit konstantem Querschnitt durch Aufbringen diskreter Massen möglicherweise ein Volumen besitzt, welches dem optimalen Stab sehr nahe kommt. Dieser Frage wird noch gesondert nachgegangen werden.

Eine andere Frage, die sich ebenfalls sofort stellt, ist die nach der Gültigkeit der Stabtheorie bei solch extremen Querschnittssprüngen. Beachtet man, daß sich der Querschnitt auf einer kurzen Länge bis um das dreißigfache vergrößert, so muß man davon ausgehen, daß die einfache Stabtheorie nicht mehr genügend exakte Ergebnisse liefert. Dies gilt besonders für den Spannungsverlauf, der auf keinen Fall über die volle Stabbreite konstant ist. Andererseits sind Lösungen mit solchen Querschnittssprüngen im allgemeinen nicht die optimalen Lösungen. Betrachtet man die Abbildungen 5.9 bzw. 5.5, so liegen zwischen den Schnittpunkten der einzelnen Lösungskurven optimale Lösungen mit "gutartigen" Querschnittsverläufen. Erst weit auf den nach links aufsteigenden Ästen tauchen diese extremen Lösungen auf.

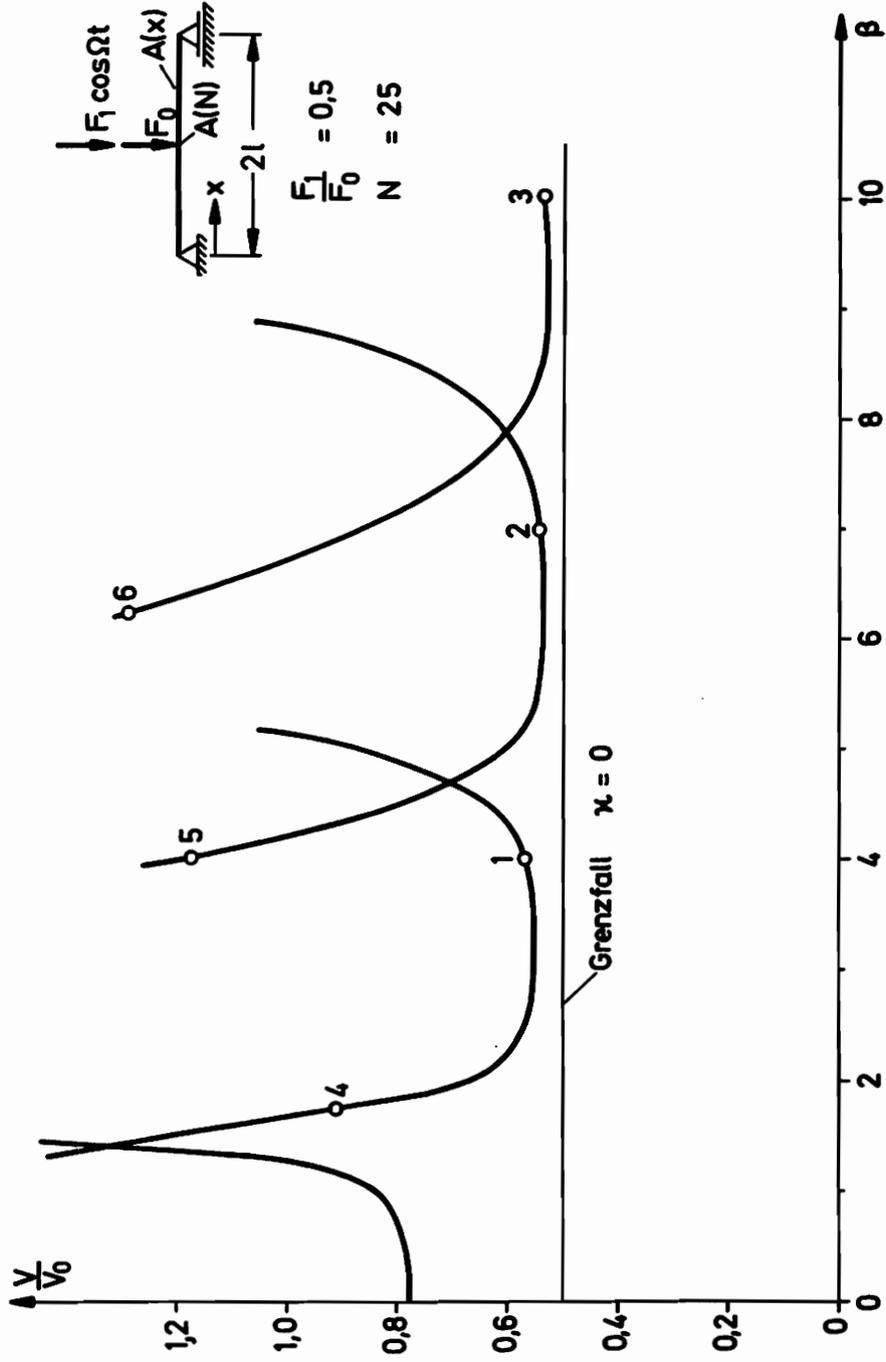


Abb. 5.9 Beidseitig gelagerter Stab unter statischer Zusatzlast

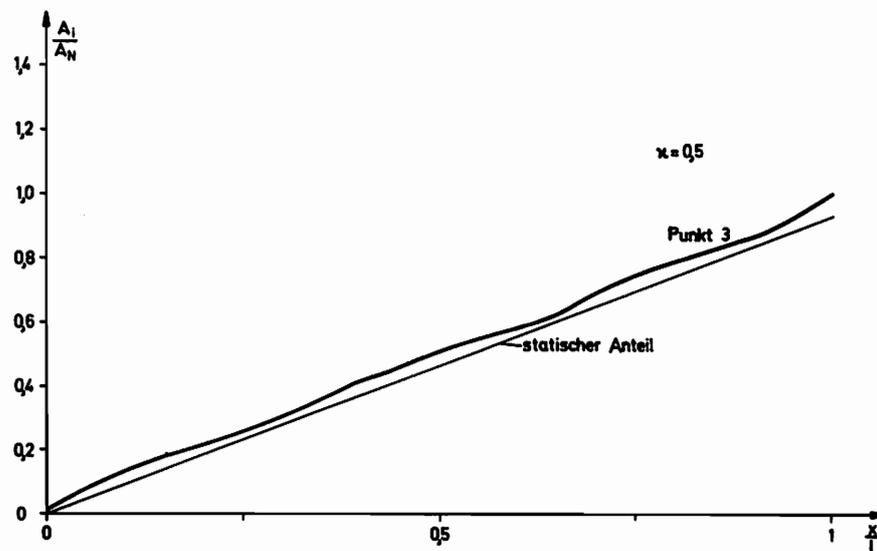
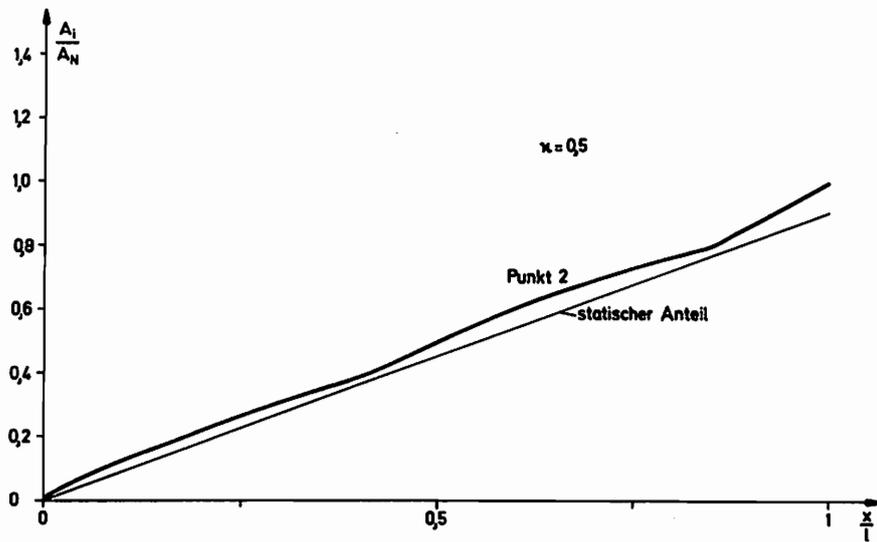
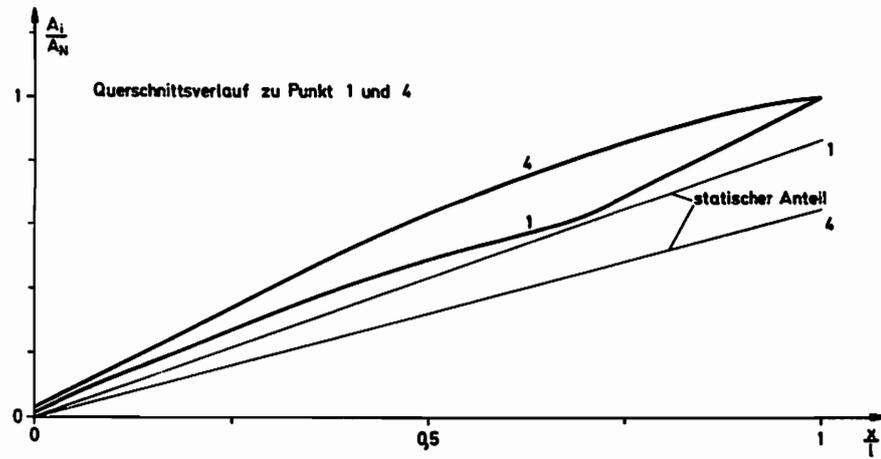


Abb. 5.10 Querschnittsverläufe zu den Punkten 1 bis 4

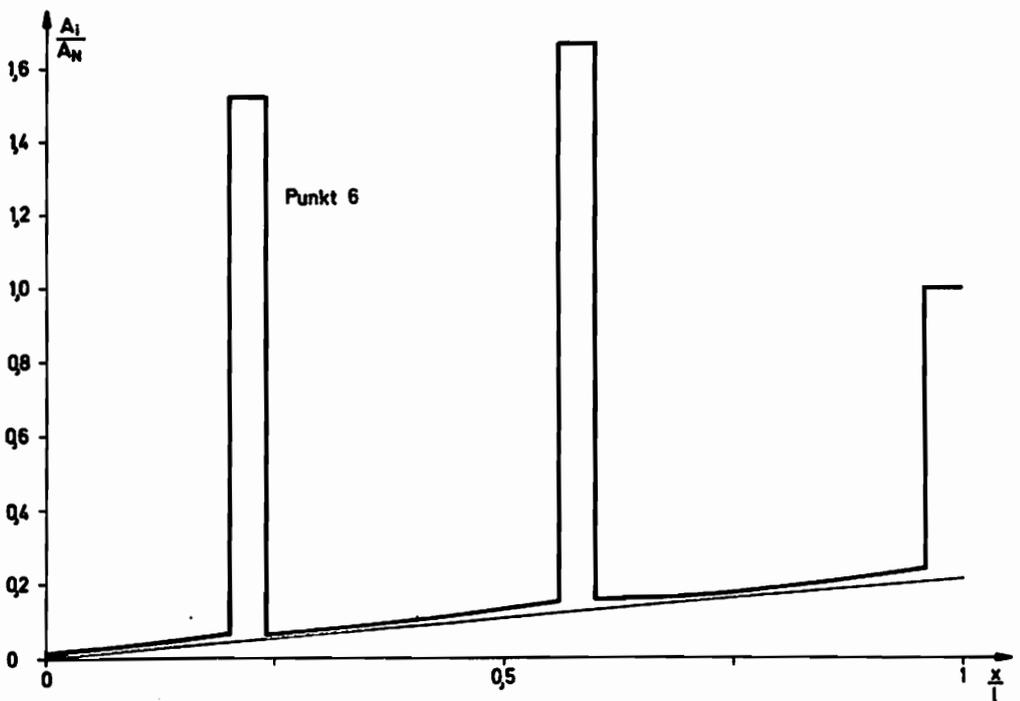
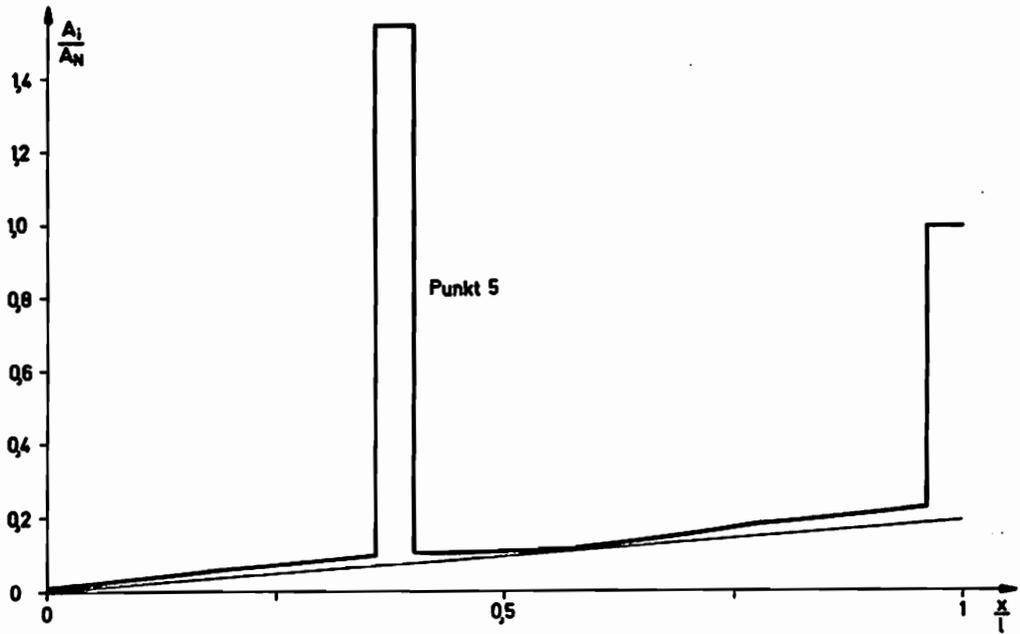


Abb. 5.11 Querschnittsverläufe zu den Punkten 5 und 6

5.2. Einbeziehung des Eigengewichts

Wirkt das Eigengewicht des Stabes in Richtung der angreifenden Erregerkraft, so kann es am diskretisierten Stab innerhalb eines Feldes als konstante Streckenlast angesehen werden.

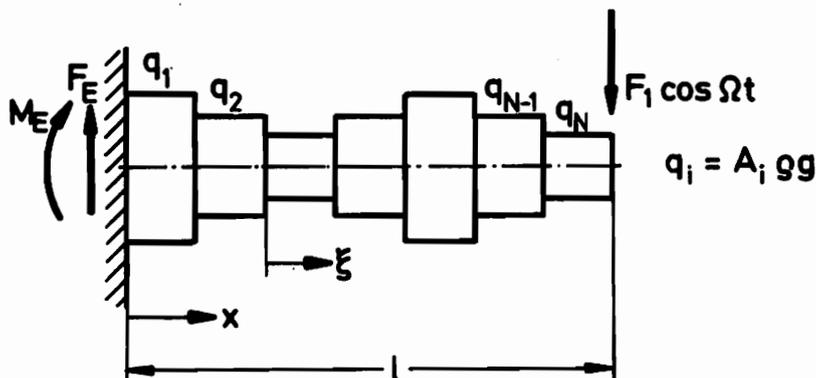


Abb. 5.12

Diskretisierter Stab unter Eigengewicht

Nach der elementaren Stabtheorie erhält man die Lagerreaktionen

$$F_E = \frac{l}{N} \sum_{i=1}^N q_i \quad (5.4)$$

$$M_E = -\left(\frac{l}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N q_i \left(i - \frac{1}{2}\right)$$

Bezeichnen Q_a und M_a die Schnittgrößen am Anfang eines Bereiches, so gelten innerhalb des Bereiches i die Beziehungen

$$Q_i(\xi) = Q_a - \frac{q_i l}{N} \xi \quad (5.5)$$

$$M_i(\xi) = M_a - \frac{1}{2} \frac{q_i l^2}{N^2} \xi^2 + F_a \frac{l}{N} \xi \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Damit ist es möglich, den Verlauf des statischen Biegemomentes aus Eigenlast längs der Stabachse zu bestimmen. Die Untersuchungen werden auch hier exemplarisch am einseitig eingespannten Stab durchgeführt, wobei das Bezugsvolumen in der Aufgabenstellung 5.2 das Volumen eines durch die Kraft F_1 statisch belasteten prismatischen Stabes ist. Im

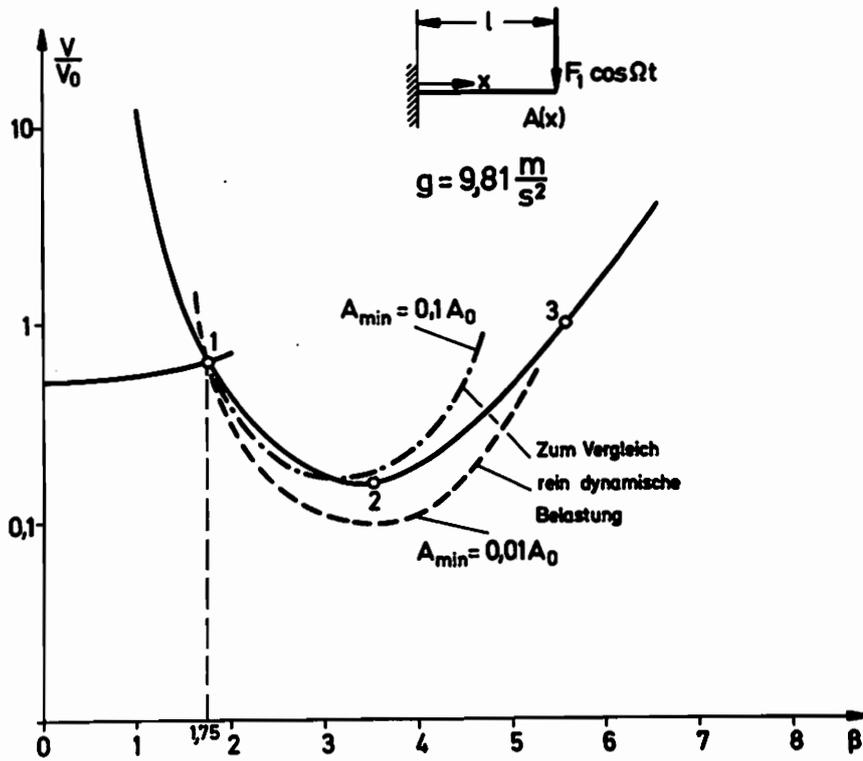


Abb. 5.13 Eigengewicht als Zusatzlast

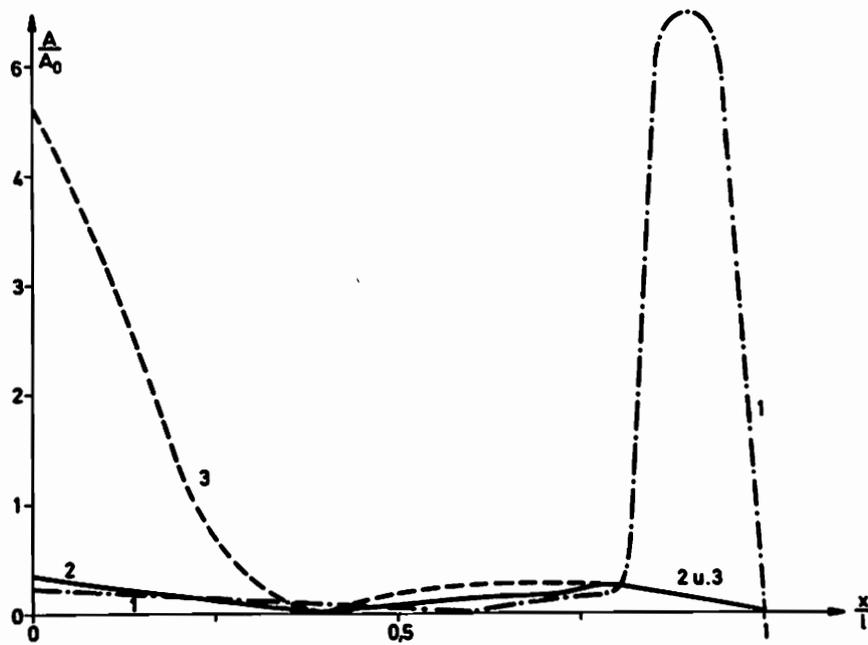


Abb. 5.14 Querschnittsverlauf bei Beachtung des Eigengewichts

übrigen behalten die Nebenbedingungen ihre Gültigkeit.

Die sich ergebenden Lösungen sind mit denen bei rein dynamischer Belastung im allgemeinen Fall gefundenen zu vergleichen. Eine Querschnittsrestriktion ist hier jedoch nicht erforderlich.

Wie zu erwarten war, werden die Volumenverhältnisse durch die Zusatzlast Eigengewicht ungünstiger gegenüber der rein dynamischen Belastung. Bei nur einem Bereich ist der Unterschied verschwindend gering und ist zeichnerisch in Abbildung 5.13 nicht darstellbar. Jedoch sind im ungünstigsten Fall 55 % Volumen mehr erforderlich, wenn optimale Lösungen mit zwei Bereichen verglichen werden ($b_{\min}/b_0 = 0.01$). Der Übergang auf zwei Bereiche erfolgt wieder in der Nähe von $\beta = 1,75$. Der an dieser Stelle vorliegende Querschnittsverlauf zeichnet sich durch eine Anhäufung am Stabende bei sonst geringen Abmessungen aus. Mit wachsendem Frequenzparameter geht diese Anhäufung zurück, um dann an der Einspannstelle zu erscheinen. Dabei bildet sich ein großes Querschnittsverhältnis b_{\max}/b_{\min} heraus, weil nur die Forderung des sich selbst tragenden Stabes in die Querschnittsrestriktion einfließt. Erwähnenswert ist noch, daß von der Einspannung bis zum ersten Nulldurchgang des Momentes der Stab in seiner Randfaser der gleichen maximalen Beanspruchung unterworfen ist. Erst bei höheren Erregerfrequenzen treten davon Abweichungen auf, die aber auf das Versagen der benutzten Suchstrategie zurückzuführen sind.

5.3. Diskrete Massen als Zusatzlasten

Befinden sich auf dem Stab Massen - die im übrigen punktförmig anzusehen sind - so muß im Ruhezustand diese Zusatzlast getragen werden. Darüber hinaus treten bei dynamischer Erregung Massenträgheitskräfte auf, die zusammen mit den statischen Kräften in keinem Punkt des Stabes eine größere als die zulässige Beanspruchung hervorrufen sollen. Es stellt sich wiederum die Frage, wie unter diesen Bedingungen der Querschnittsverlauf des Stabes gewählt werden muß, damit der Stab ein minimales Volumen erhält.

Zweckmäßigerweise läßt man Zusatzmassen nur an den Grenzen der Diskretisierungsabschnitte des Stabes zu. Bei genügend feiner Unterteilung bedeutet dies keine Einschränkung. Prinzipiell können die Massen an

beliebigen Punkten vorkommen, jedoch erfordert das zusätzlichen Rechenaufwand. Für die Spannungsanalyse benötigt man den statischen und den dynamischen Biegemomentenverlauf

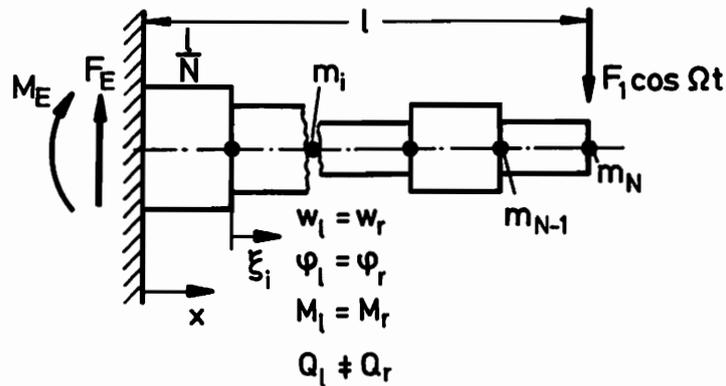


Abb. 5.15

Stab mit Zusatzmassen

Das statische Moment im i-ten Bereich läßt sich elementar zu

$$M_i(\xi_i) = -\frac{q l}{N} \sum_{j=N, N-1, \dots}^i [j-i + (1-\xi_i)] m_j \quad \begin{matrix} i=1, \dots, N \\ 0 \leq \xi_i \leq 1 \end{matrix} \quad (5.6)$$

bestimmen. Von vier Übergangsbedingungen an den Bereichsgrenzen bleiben drei unverändert, während für die Querkräfte die Beziehung

$$Q_r = Q_l - m_i w_i \Omega^2 \quad (5.7)$$

gilt. Es kann nun die Maximalspannung in jedem Querschnitt gemäß Gleichung 5.1 ermittelt werden. Das Stabvolumen ist auf das Volumen des durch die diskreten Massen statisch belasteten Stabes mit konstantem Querschnitt bezogen. Ansonsten gelten die Nebenbedingungen in der Formulierung 5.2 unverändert.

Nähere Untersuchungen, bei denen eine Masse am Stabende angebracht wurde, zeigen, daß die dynamischen Einflüsse stark unterschiedlich sind. Solange unterkritische Erregung vorliegt, wächst das optimale Volumen stark an, um beim Übergang auf überkritische Erregung schnell auf einen

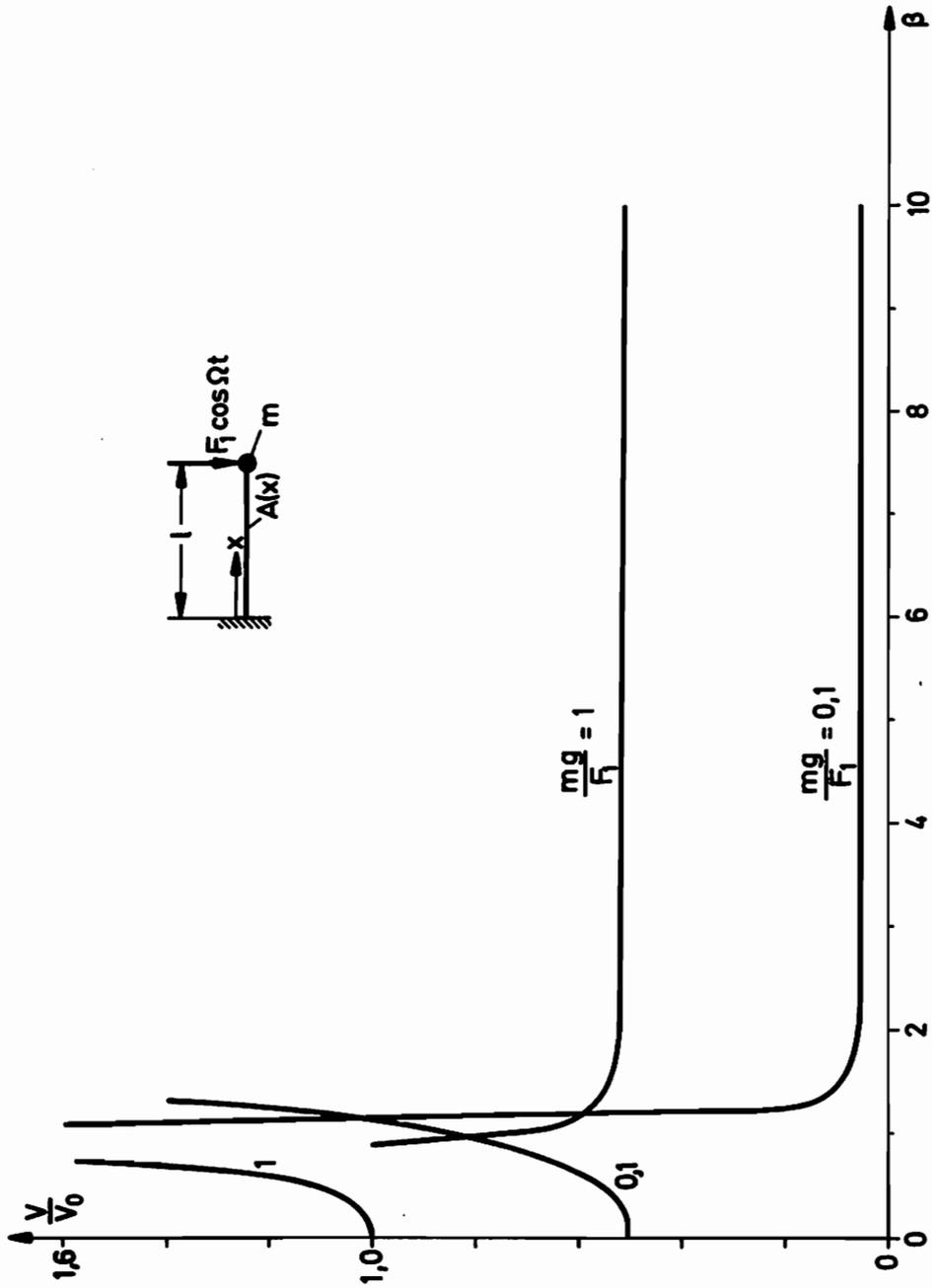


Abb. 5.16 Endmasse als Zusatzlast

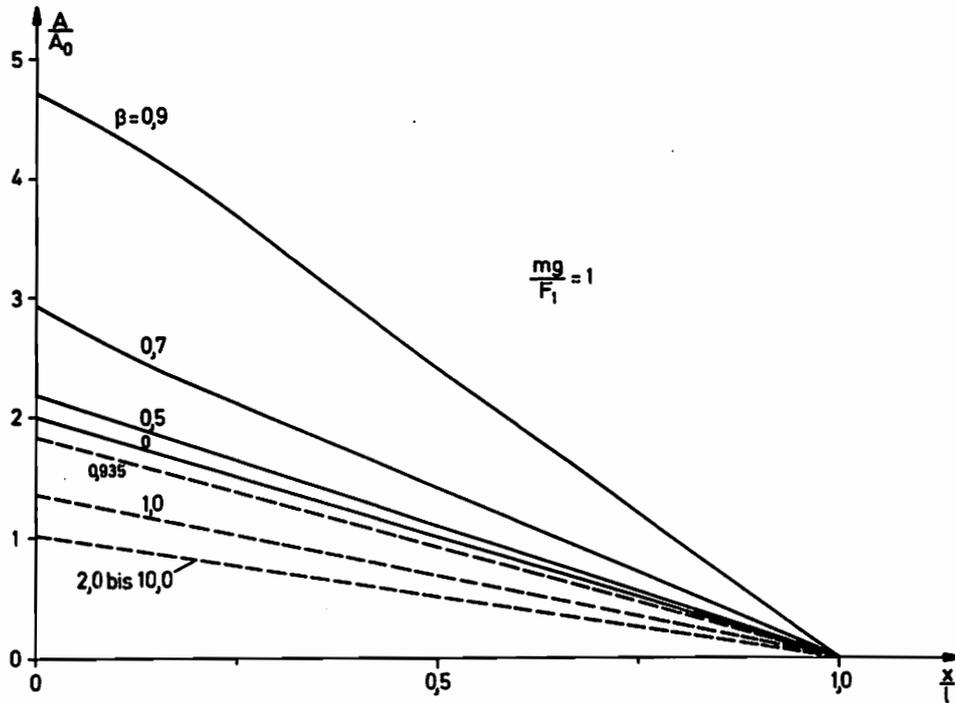


Abb. 5.17 Querschnittsverläufe bei zusätzlicher Endmasse

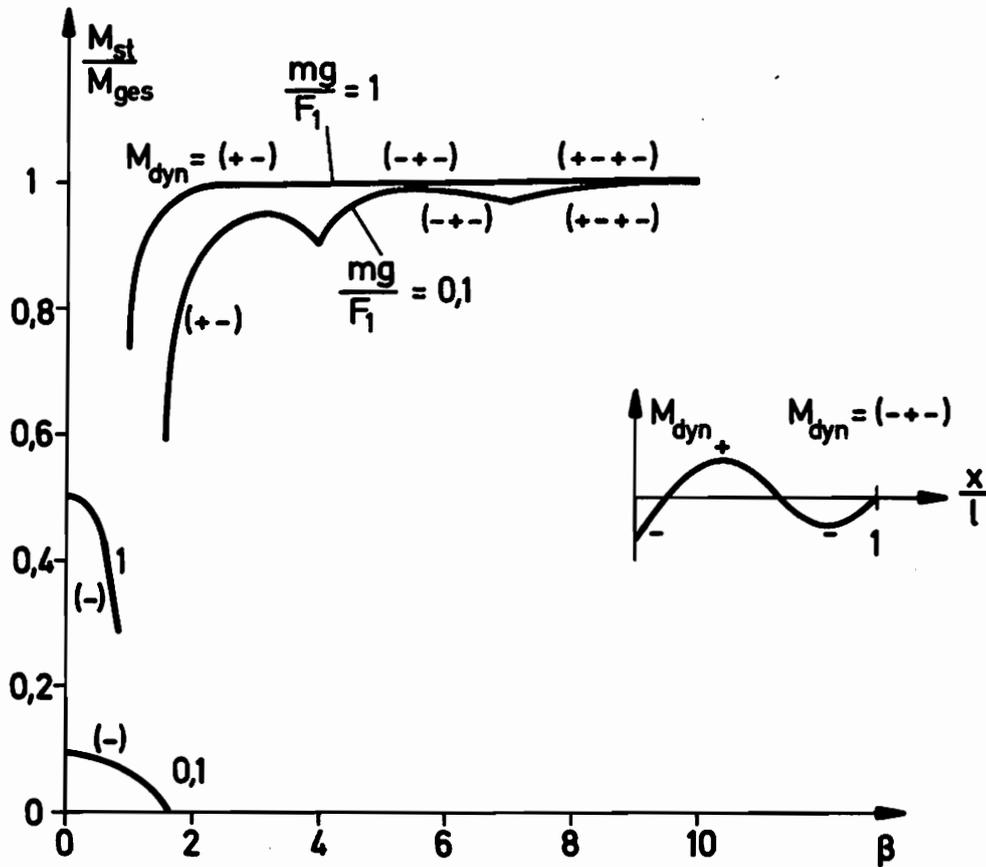


Abb. 5.18 Biegemomente an der Einspannstelle bei zusätzlicher Endmasse

fast konstanten Wert abzufallen. Das optimale Volumen wird nahezu unabhängig von der Erregung. In diesem Bereich überwiegt die statische Belastung durch das Gewicht der Masse. Resonanzstellen im eigentlichen Sinne existieren nicht, sondern die Kurven in Abbildung 5.16 setzen sich aus mehreren, sich überschneidenden Bereichen zusammen, wobei jedoch nur die erste Überschneidung erkennbar ist und die anderen zeichnerisch nicht dargestellt werden können. Ihre Existenz zeigt sich aber in Abbildung 5.18 sehr deutlich an der unteren Kurve.

Der dynamische Momentenverlauf längs der Stabachse ändert sich zwar mit zunehmender Erregerfrequenz, wie dies bei dem Verhältnis $mg/F_1 = 0.1$ gut zu sehen ist, hat aber auf das optimale Volumen nur geringfügigen Einfluß. Entsprechend ist der Querschnittsverlauf optimaler Stäbe in diesem Bereich von dem statischen Anteil geprägt. Der Verlauf ist linear und in jedem Querschnitt liegt die gleiche maximale Spannung vor. Lediglich im Übergangsbereich von unter- zu überkritischer Erregung treten Abweichungen vom linearen Verlauf durch die dynamischen Anteile der Stabmasse auf.

6. Weitere Abschätzungen und Näherungen

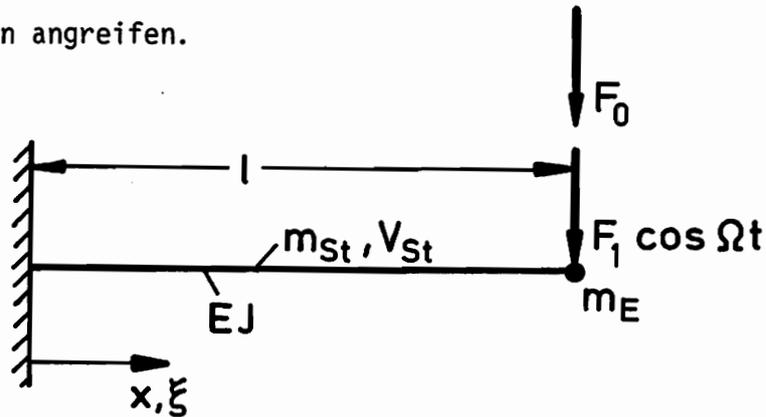
In den vorhergehenden Kapiteln wurden optimale Querschnittsformen für Stäbe gefunden, die bestimmten vorgegebenen Bedingungen genügen. Hinsichtlich der Berechnung und Herstellung solcher Stäbe ist jedoch ein relativ großer Aufwand erforderlich. Es sollen an dieser Stelle daher zwei wesentliche Fragen untersucht werden.

1. Gibt es Stäbe mit einfachen geometrischen Formen, die die Spannungsrestriktion erfüllen und den optimalen Volumenwerten nahekommen?
2. Inwieweit sind die gefundenen Näherungen realisierbar?

Einen Hinweis auf möglichst einfache Formen findet man in der Abbildung 5.11. Ersetzt man diese "optimale" Form durch einen Stab mit konstanter Biegesteifigkeit und bringt an diskreten Punkten des Stabes Massen an, so ist zumindest von der Anschauung her ein ähnlich geringes Volumen unter Einhaltung der Spannungsrestriktion zu erwarten.

Es wird im folgenden der einseitig eingespannte Stab mit rechteckigem Querschnitt betrachtet, an dessen freiem Ende die Erregung und die

Zusatzlasten angreifen.



6.1. Stab konstanten Querschnitts mit Zusatzlasten

Aus der Überlagerung der dynamischen und statischen Spannungsanteile erhält man mit der vorgegebenen maximalen Spannung $\bar{\sigma}_0$ die Bedingung

$$\bar{\sigma}_0 \geq \frac{1}{W} \max (|M_{st}(\xi)| + |M_{dy}(\xi, \beta)|) \quad (6.1)$$

Den statischen Momentenverlauf erhält man sofort zu

$$M_{st}(\xi) = (F_0 + m_E g) l (1 - \xi) \quad (6.2)$$

Für den dynamischen Momentenverlauf hat man entweder die Differentialgleichung der Biegeschwingung zu lösen - unter Einbeziehung einer Einzelmasse am Stabende - oder man bedient sich der in der Literatur angegebenen Übertragungsmatrizen /15/. Beides führt nach einiger Rechnung zu dem Ergebnis

$$M_{dy}(\xi, \beta) = \frac{E_A l}{2\beta} \cdot \frac{(\operatorname{rim}h\beta + \operatorname{rim}\beta)(\operatorname{cosh}\beta + \cos\beta)}{1 + \operatorname{cosh}\beta \cos\beta + \frac{m_E}{m_{St}} \beta (\operatorname{rim}h\beta \cos\beta - \operatorname{cosh}\beta \operatorname{rim}\beta)} f(\xi, \beta) \quad (6.3)$$

mit

$$f(\xi, \beta) = \frac{\operatorname{rim}h\beta\xi + \operatorname{rim}\beta\xi}{\operatorname{rim}h\beta + \operatorname{rim}\beta} - \frac{\operatorname{cosh}\beta\xi + \cos\beta\xi}{\operatorname{cosh}\beta + \cos\beta}$$

$$\beta^4 = \frac{SA \Omega^2 l^4}{EJ}$$

Das Maximum der Funktion $f(\xi, \beta)$ liegt ebenso wie das von $M_{st}(\xi)$ an der Stelle $\xi = 0$. Damit erhält man aus Gleichung 6.1 unter Verwendung des Bezugsvolumens

$$V_0 = \frac{6 F_0 l^2}{E_0 h} \quad (6.4)$$

für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt letztlich die Bestimmungsgleichung für das bezogene Volumen

$$\frac{V_{st}}{V_0} \geq 1 + \frac{m_E g}{E_0} + \frac{F_1}{E_0 \beta} \frac{\sinh \beta + \sin \beta}{1 + \cosh \beta \cos \beta + \frac{m_E}{m_{st}} \beta (\sinh \beta \cos \beta - \cosh \beta \sin \beta)} \quad (6.5)$$

Gilt das Gleichheitszeichen, so ist die maximale Spannung im Stab gerade E_0 . Die einzelnen Glieder der rechten Seite beschreiben nacheinander den Einfluß von F_0 , den statischen Anteil von m_E sowie den dynamischen Anteil von F_1 und m_E . Der von den Absolutzeichen eingeschlossene Ausdruck ist identisch mit der Frequenzgleichung eines einseitig eingespannten Stabes mit einer Einzelmasse am freien Ende.

Gleichung 6.5 ergibt gegenüber dem optimalen Volumen nach Abbildung 5.5 stets eine Verschlechterung. Andererseits gibt es die Möglichkeit, durch Verändern der Endmasse einen Minimalwert für das Stabvolumen zu finden. Untersucht man diese Abhängigkeit, so kann man in verschiedenen Fällen ein globales Minimum finden. Entsprechend ist die Endmasse auf diesen Wert zu bringen. Liegt die Erregung sehr nahe unter einer Eigenfrequenz des Stabes mit $m_E = 0$, wie dies in Abbildung 6.1 der Fall ist, so wird das Stabvolumen nach Überschreiten einer kritischen Masse wieder kleiner. Der erste Kurvenzug gehört zu einem Stab, der unterkritisch erregt wird. Vermehrung der Endmasse bewirkt Vermehrung der Stabmasse. Der zweite Kurvenzug gehört zu einem Stab, der zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz erregt wird. Auf dieser Kurve ist das globale Minimum dieses Stabvolumens zu finden. Wird ein Stab ohne Endmasse kurz oberhalb der ersten Eigenfrequenz erregt, so erhält man nur eine Lösungskurve mit einem ausgezeichneten Wert für m_E , bei dem das Minimum des Stabvolumens erreicht wird.

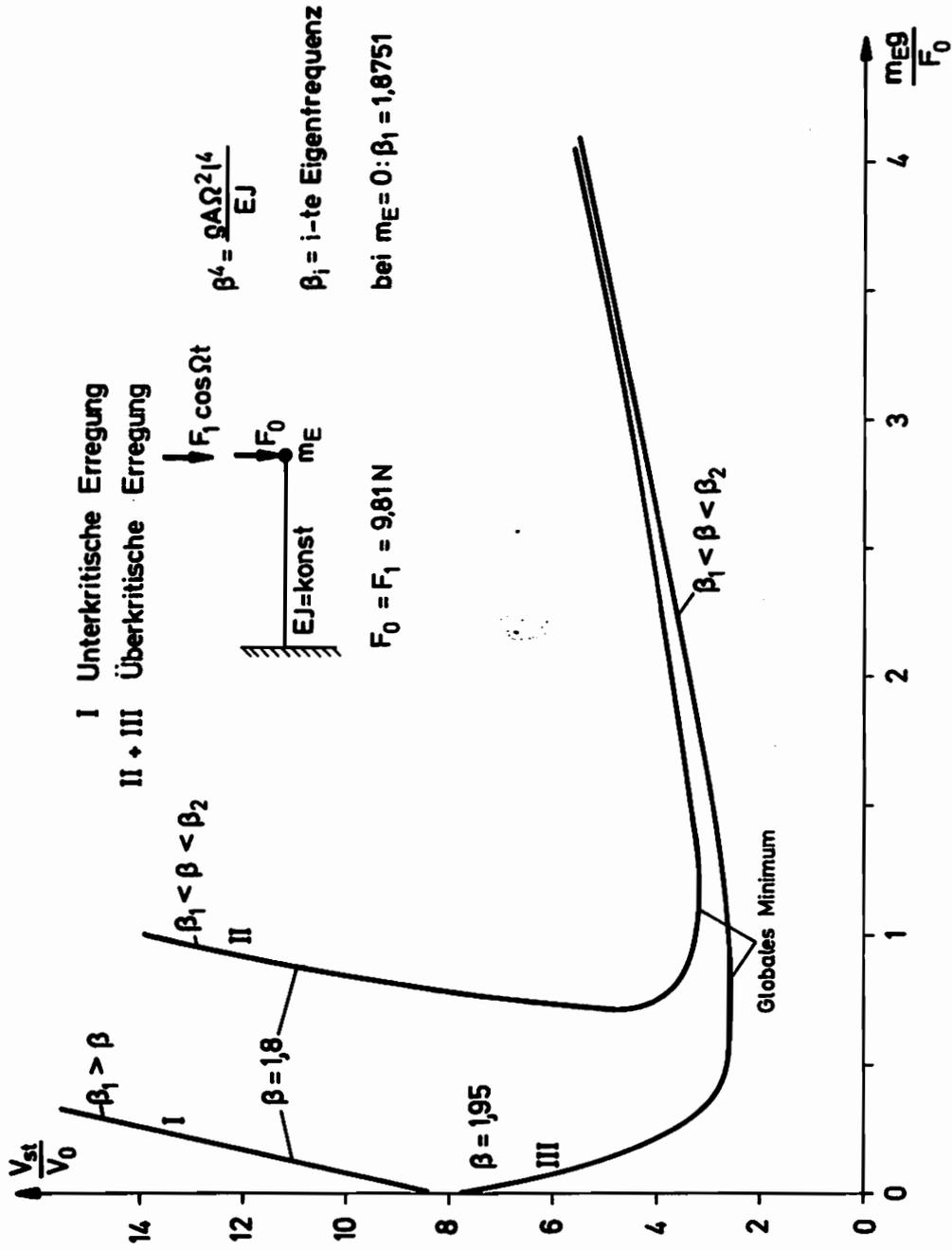


Abb. 6.1 Massenabhängigkeit nahe der ersten Eigenfrequenz

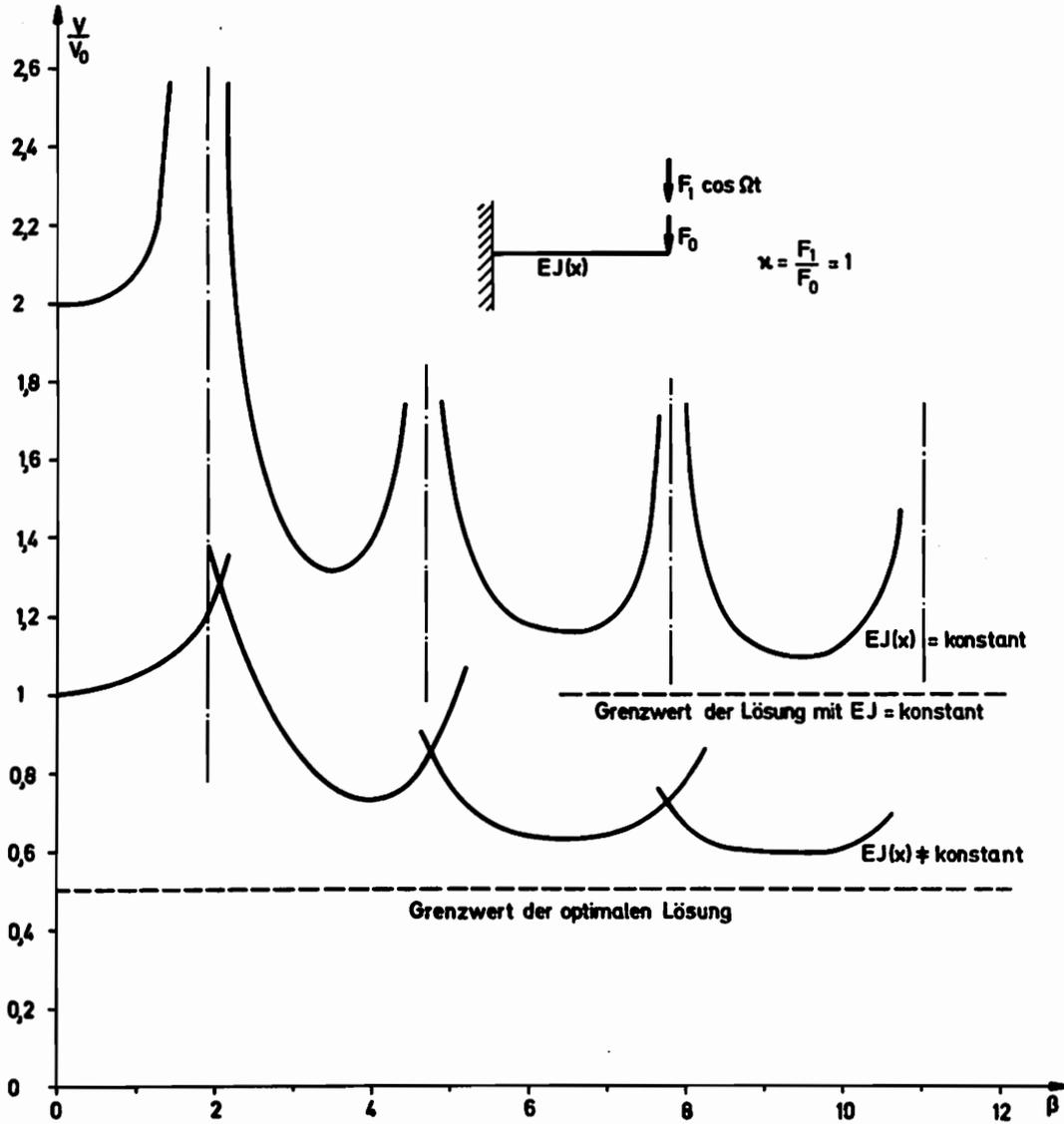


Abb. 6.2 Konstanter und variabler Querschnitt bei zusätzlicher statischer Einzellast

Global gesehen wird durch die Massenvermehrung die Eigenfrequenz des Gesamtsystems verändert, wobei ein geringes Stabvolumen nur erreicht wird, wenn die Eigenfrequenz des Systems ohne zusätzliche Endmasse in unmittelbarer Nähe der Erregerfrequenz liegt. Bei einigem Abstand von den Eigenfrequenzen überwiegt die Volumenzunahme durch statische Belastung, und man erhält $m_E = 0$ als Ort für ein globales Minimum. Verzichtet man vollständig auf eine Endmasse, so geht Gleichung 6.5 über in die Form

$$\frac{V_{st}}{V_0} \geq 1 + \frac{F_1}{F_0 \beta} \frac{\sinh \beta + \sin \beta}{|1 + \cosh \beta \cos \beta|} \quad (6.6)$$

Auch hier überwiegt zwischen den Resonanzstellen der starke statische Anteil, so daß diese Lösungen noch einen weiten Abstand zu den optimalen Lösungen besitzen, wie dies aus Abbildung 6.2 hervorgeht.

6.2. Stab konstanten Querschnitts ohne Zusatzlasten

Ein völlig anderes Bild erhält man, wenn eine rein dynamische Belastung vorliegt, d. h. die Zusatzlast F_0 verschwindet und die Masse m_E führt zu keinem statischen Biegemoment, wie es bei senkrecht angebrachten Stäben und im schwebelosen Zustand der Fall ist. Beanspruchungen durch Normalkräfte werden vernachlässigt. Zum Vergleich bezieht man wieder auf den durch F_1 statisch belasteten Stab, dessen Volumen

$$V_0 = \frac{6 F_1 l^2}{\sigma_0 h} \quad (6.7)$$

ist. Gleichung 6.5 liefert unter diesen Voraussetzungen und für den Fall, daß die Maximalspannung gerade erreicht wird, den Zusammenhang

$$\frac{V_{st}}{V_0} = \frac{\sinh \beta + \sin \beta}{\beta |1 + \cosh \beta \cos \beta|} \quad (6.8)$$

In Abbildung 6.3 ist dieser Kurvenzug gestrichelt dargestellt. In keinem Punkt ist der so dimensionierte Stab günstiger als der optimale Stab. Wichtig ist, daß die erhaltenen Querschnitte durchaus realisierbar sind. So hat z. B. der kleinste gefundene Querschnitt bei $\beta = 9$ immer noch 10 % des im quasistatischen Fall erforderlichen Wertes. Solche Stäbe sind

in der Herstellung und Berechnung problemlos. Andererseits haben sie gegenüber den optimalen Stäben auch in günstigsten Fällen noch den zwei- bis vierfachen Materialbedarf. Dies wird naturgemäß ungünstiger, wenn man sich einer Resonanzstelle nähert.

Bringt man am freien Stabende eine Masse an, so verschiebt man die Lage der Eigenfrequenzen und man erhält günstigere Werte. Der mathematische Zusammenhang ist wiederum durch Gleichung 6.5 in der Form

$$\frac{V_{St}}{V_0} = \frac{\sinh \beta + \sin \beta}{\beta / (1 + \cosh \beta \cos \beta + \frac{m_E}{m_{St}} \beta (\sinh \beta \cos \beta - \cosh \beta \sin \beta))} \quad (6.9)$$

festgelegt. Besteht die Endmasse aus dem gleichen Material wie der Stab, so ist das gesamte aufzuwendende Volumen

$$V = V_{St} + \frac{m_E}{\rho_E} = V_{St} + V_E \quad (6.10)$$

Die Auswertung führt auf Stäbe mit extrem geringem Stabvolumen (durchgezogene Linie in Abbildung 6.3), die gegenüber dem Volumen der Endmasse verschwindend klein sind ($V_{St}/V_E \approx 10^{-3}$ bis 10^{-5}). Aufgrund des geringen Querschnittes wirkt das System wie ein Feder-Masse-System mit sehr weicher Blattfeder. Energieaustausch und Kräftegleichgewicht beschränken sich daher überwiegend auf die Endmasse und der daran angreifenden Kraft. Der Stab übernimmt lediglich die Aufgabe, die Masse zu führen, wobei die Spannungsbedingung die zulässige Schwingungsamplitude beschränkt. Hier liegt auch die Begründung für die "Pseudo-Resonanzstelle" bei $\beta = 0$. Wird die Erregerfrequenz nämlich kleiner, so kann die Amplitudenbeschränkung nur durch entsprechend größere Endmasse erreicht werden, die bei $\beta = 0$ über alle Grenzen wächst.

Durch Anbringen weiterer diskreter Massen ist es möglich, die Resonanzstellen - außer bei $\beta = 0$ - zu verschieben und somit über den ganzen Frequenzbereich Lösungen zu erhalten. Dies erscheint jedoch nicht sinnvoll, da gerade in diesen Bereichen der Stab ohne Endmasse günstige Werte besitzt.

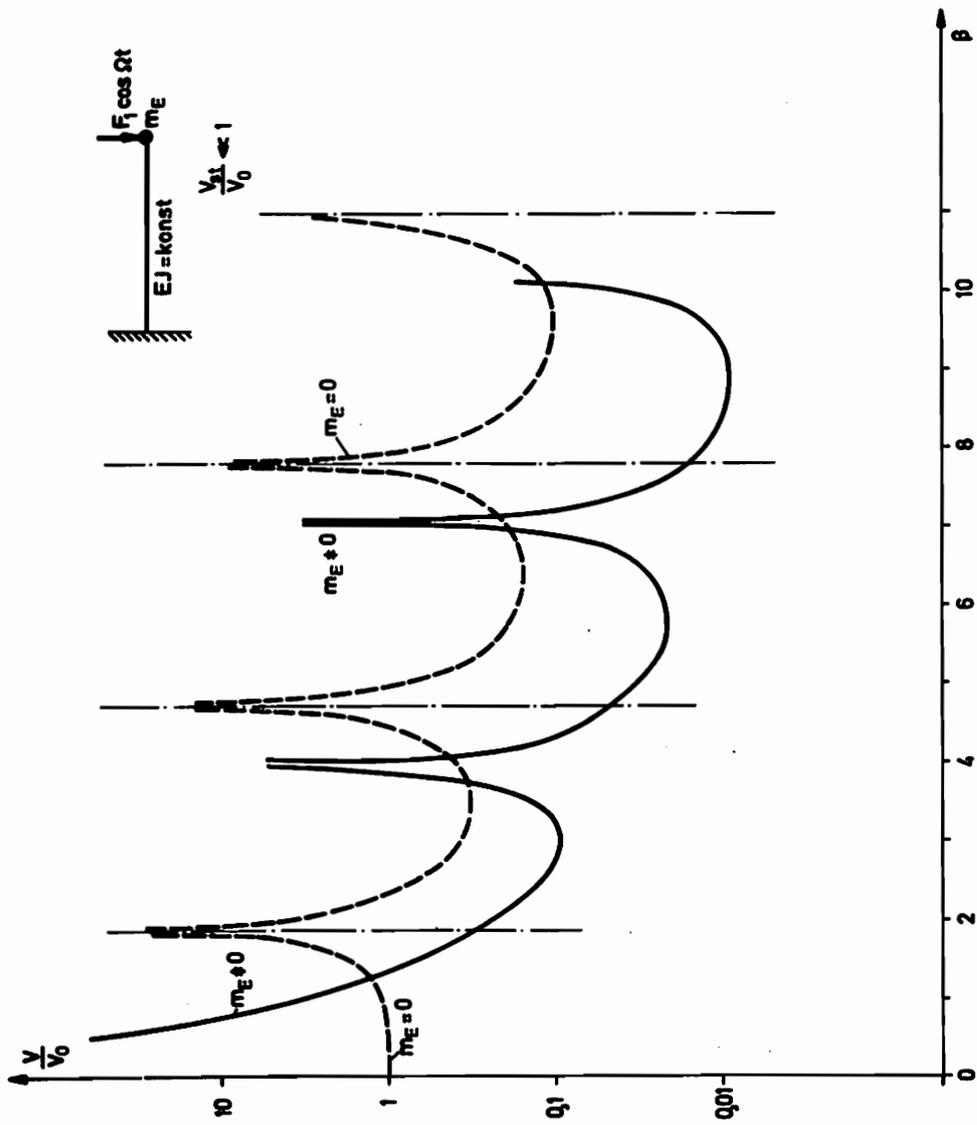


Abb. 6.3 Konstanter Querschnitt ohne Biegevorspannung durch Zusatzlast

6.3. Konstante Querschnittsbereiche variabler Länge

Es soll an dieser Stelle geprüft werden, welche Volumeneinsparungen möglich sind, wenn der kontinuierliche Querschnittsverlauf durch einige wenige Stabquerschnitte konstanter Biegesteifigkeit ersetzt wird. Dabei können die einzelnen Abschnitte unterschiedlich lang sein. Der in Abbildung 6.4 dargestellte Stab mit statischer Vorlast ohne jede Querschnittsbeschränkung wird zu dieser Untersuchung herangezogen.

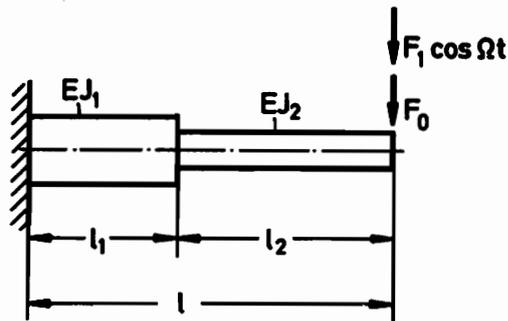


Abb. 6.4

Wegen der Ausführungen in Abschnitt 4.1.2 kann das durch die Variablen b_1 , b_2 und l_1 (l_2 liegt durch $l_2 = l - l_1$ fest) beschriebene Problem auch durch zwei unabhängige Variablen beschrieben werden. Dazu bieten sich die bezogenen Variablen $0 \leq \frac{l_1}{l} \leq 1$ und $0 \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \infty$ an. Den zweiten unbegrenzten Variablenbereich kann man durch eine zweckmäßige Beziehung zwischen b_1 und b_2 in einen begrenzten Bereich transformieren. Eine solche Beziehung erhält man beispielsweise durch die Forderung, daß im Fall $l_1 = l_2$ das Stabvolumen für alle Werte von b_1 konstant ist und gerade dem Stab konstanter Biegesteifigkeit entspricht, der durch F_0 statisch belastet ist und dessen maximale Spannung σ_0 beträgt. Dann gilt

$$\frac{1}{2} h (b_1 + b_2) = V_0 = b_0 h l = \frac{6 F_0 l^2}{\sigma_0 h} \quad (6.11)$$

Daraus erhält man

$$b_2 = 2b_0 - b_1 \quad 0 \leq b_1 \leq 2b_0 \quad (6.12)$$

und letztlich als zweite Variable $0 \leq \frac{b_1}{b_0} \leq 2$.

In der Abbildung 6.5 sind neben dem Volumenverhältnis auch die zugehörigen optimalen Breiten b_{1opt} über dem Längenverhältnis aufgetragen. Für Erregerfrequenzen zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz des geraden Stabes ergeben sich Kurvenverläufe mit einem oder zwei Extremalwerten. Auffallend ist der Querschnittssprung in der ersten Darstellung.

Noch deutlicher treten solche Sprünge hervor, wenn die Erregung in unmittelbarer Nähe der zweiten Eigenfrequenz erfolgt. Im Volumenverlauf tritt hier ein Knick auf. Diese Sprünge und Knicke werden erklärbar, wenn man Linien konstanter Volumenverhältnisse in die $\frac{b_1}{b_0}, \frac{l_1}{l}$ -Ebene einzeichnet. Es existieren fünf lokale Minima, von denen das zweite das gesuchte globale ist.

Minima	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{b_1}{b_0}$	$\frac{v}{v_0}$
1	0,195	0,741	2,931
2	0,248	1,46	1,306
3	0,475	1,73	6,364
4	0,842	1,66	1,563
5	0,980	0,152	1,488

Tafel 6.1

Lage der Minima bei zwei Bereichen $\beta = 4,73$

Zu jedem Minima gehört eine mehr oder weniger ausgedehnte Talsohle. Die Sprünge in der Abbildung 6.5 treten an den Stellen auf, an denen das globale Minimum eben diese Talsohle wechselt. Die Knicke in den Volumenkurven kommen durch die unterschiedlichen Neigungen dieser Talsohlen zustande. Hinsichtlich der Volumenersparnis gegenüber einem Stab konstanten Querschnitts erhält man in der Nähe einer Eigenfrequenz 81,6 %. Zwischen den Eigenfrequenzen sind immerhin noch 15,8 % bzw. 28,3 % Ersparnis zu vermerken.

Einen besseren Überblick liefert die Erweiterung auf mehr als zwei Bereiche. In dem gewählten Beispiel - nahe einer Eigenfrequenz - zeigt sich in Abbildung 6.7 deutlich die größte Ersparnis beim Übergang vom Stab konstanten Querschnitts auf einen Stab mit zwei Bereichen. Die weiteren Unterteilungen bringen nur kleine Verbesserungen.

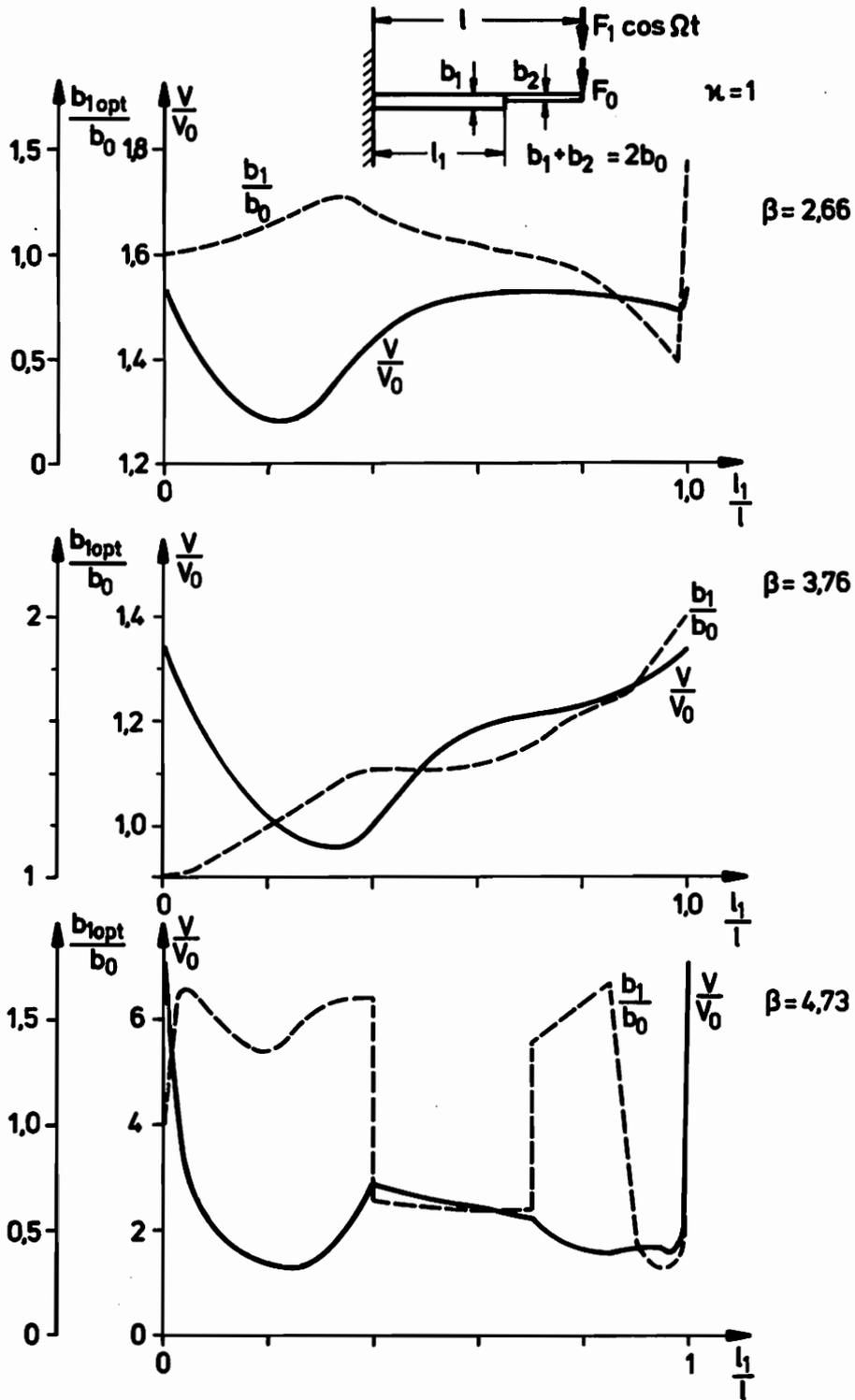


Abb. 6.5 Erregung weit ab und nahe der zweiten Eigenfrequenz

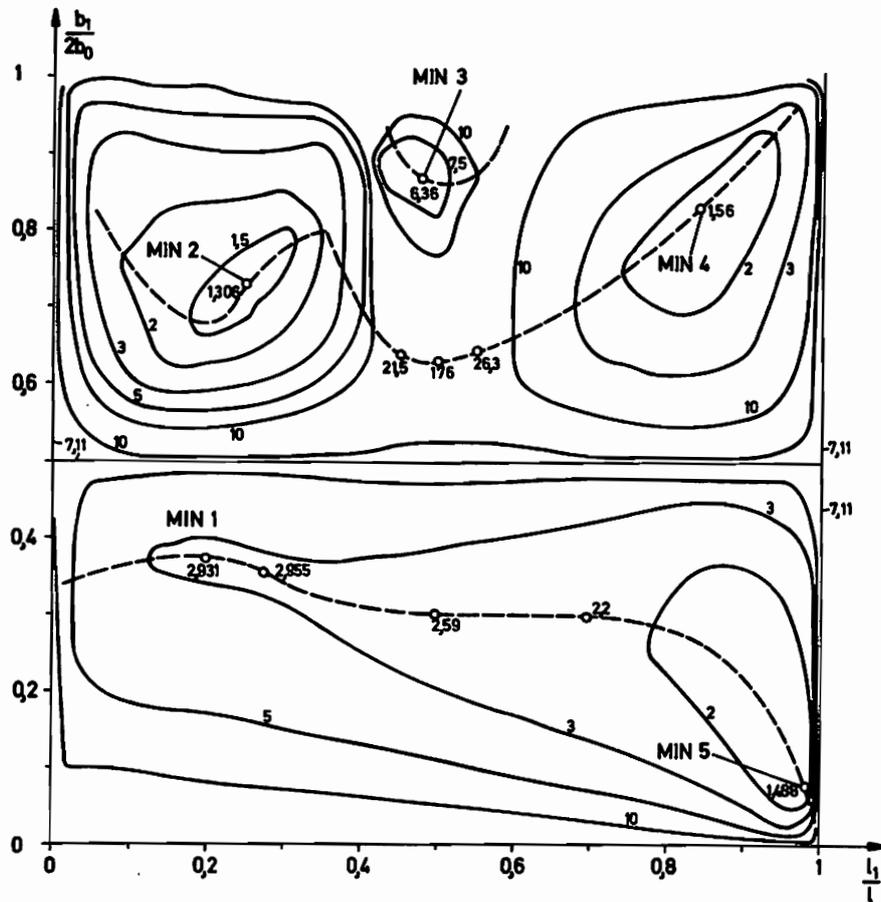


Abb. 6.6 Linien gleicher Volumenverhältnisse bei $\beta = 4,73$

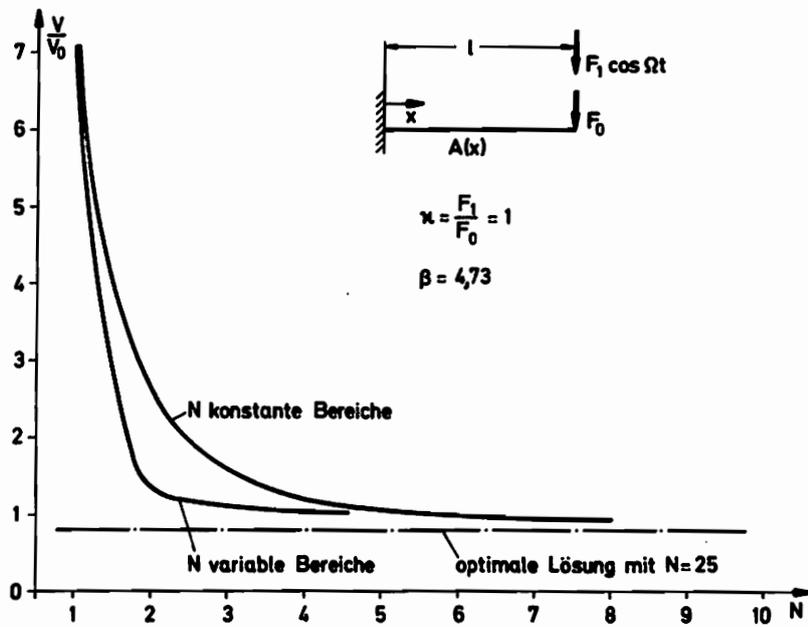


Abb. 6.7 Äquidistante und variable Unterteilung

Deutlich erkennbar ist, daß ein Stab mit zwei Bereichen variabler Länge günstiger ist als ein Stab mit drei gleichlangen Bereichen. Dieser Vorteil verliert sich jedoch rasch, denn ab $N = 5$ sind keine nennenswerten Unterschiede mehr feststellbar. Diese Aussagen bleiben bestehen, wenn die Erregerfrequenz einen größeren Abstand von der benachbarten Eigenfrequenz hat, jedoch fallen die prozentualen Ersparnisse geringer aus.

Weitere durchgeführte Berechnungen mit anderen Lagerungsformen sowie variabler Höhe des Rechteckstabes führten prinzipiell zu den gleichen Aussagen.

7. Experimentelle Untersuchungen

An drei optimierten Stäben wurden einzelne theoretische Ergebnisse überprüft. Dabei interessierte besonders die Einhaltung der Spannungen und das Spannungsverhalten bei Fehlanpassung der Stabgeometrie und bei Verschiebung der Erregerfrequenz.

7.1. Versuchsanlage

Der Versuchsstand wurde so konzipiert, daß einseitig eingespannte Stäbe untersucht werden können. Abbildung 7.1 gibt dazu einen Überblick. Auf einer Graugußplatte mit einer Masse von 420 kg ist eine aus Vierkantrohr und Stahlplatten bestehende Einspannvorrichtung aufgeschraubt. Der zu prüfende Stab wird darin zwischen zwei gehärteten und plangeschliffenen Spannplatten verspannt. Auf diese Art werden Abflachungen an den hochbeanspruchten Kanten weitgehend reduziert. Am freien Ende des Stabes ist als Schwingungserreger ein elektrodynamischer Schwingtisch angekoppelt, der eine maximale Kraft von 44,5 N erreicht. Die gesamte Schwingererregung wurde mit Geräten der Firma Brüel & Kjaer verwirklicht und ist in Abbildung 7.2 schematisch dargestellt.

Der im Schwebungssummeer erzeugte sinusförmige Wechselstrom wird im nachgeschalteten Verstärker auf max. 4 Ampere verstärkt und der Spule im Schwingtisch zugeführt. Über einen piezoelektrischen Impedanzmeßkopf, der eine phasentreue Messung von Kraft und Beschleunigung gestattet, und über einen kurzen Koppelstab wird die Bewegung des Schwingtisches auf das freie Stabende übertragen. Das Signal des Kraftgebers wird auf

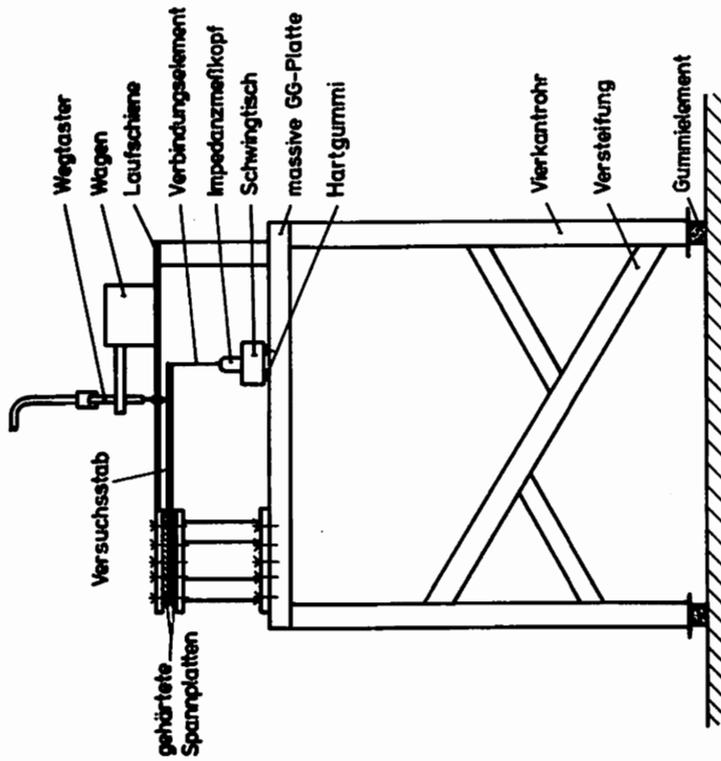


Abb. 7.1 Versuchsstand

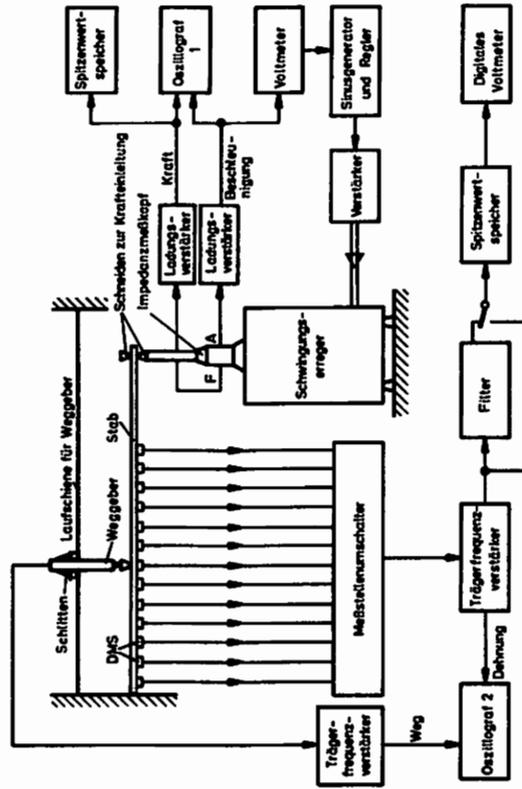


Abb. 7.2 Meßkette

den Ladungsverstärker gegeben, an dessen Ausgang zur direkten Beobachtung ein Oszillograf und zur Messung ein Spitzenwertanzeiger angeschlossen sind. Ebenso wird das Signal des Beschleunigungsaufnehmers behandelt. Parallel dazu wird das Beschleunigungssignal in einem Verstärker normiert und dem im Schwebungssummeer eingebauten Regler zugeführt. Dieser regelt den Strom zum Schwingtisch in der Weise, daß die Beschleunigung der Schwingtischplatte konstant ist. Besonders bei der Untersuchung von Frequenzbereichen ist dies ein Vorteil.

Zur Erfassung der mechanischen Dehnungen des schwingenden Stabes wurde das Trägerfrequenzverfahren benutzt. Alle dazu benötigten Geräte stammen von der Firma Hottinger. Der auf der Oberfläche des Stabes applizierte Dehnungsmeßstreifen (DMS) ändert seinen elektrischen Widerstand annähernd proportional zur Dehnung und liefert somit ein elektrisches Signal. Dies wird durch den Meßstellenumschalter an den Trägerfrequenzverstärker geführt und steht an dessen Ausgang als proportionale Gleichspannung zur Verfügung. Die Wahl der jeweils durchgeschalteten Meßstelle erfolgt vom Steuergerät aus. Das Signal kann über ein nachgeschaltetes Filter von Störfrequenzen gereinigt und anschließend wie gewohnt behandelt werden. Eine Verwendung des Filters ist nur in der Nähe eines Schwingungsknotens erforderlich. Dort liegen die Amplituden des Nutzsignals in der Größenordnung des Grundrauschens der Meßkette. Als Filter wurde ein kleiner Analogrechner benutzt, der eine gedämpfte Schwingung simulierte. Die Eigenfrequenz des Schwingkreises wurde mit der Frequenz des Nutzsignals (Erregerfrequenz) in Übereinstimmung gebracht, so daß Resonanz mit begrenzter definierter Amplitude auftrat. Wie die Filterkennlinie in Abbildung 9.3 zeigt, wird das Nutzsignal um 39 dB, also etwa um den Faktor 90, heraufgesetzt. Bei Abweichung von $\pm 2,5\%$ von der Nutzfrequenz fällt dieser Faktor bereits auf etwa 11 herab. Auf diese Weise kann auch ein stark verrauschtes Signal noch einwandfrei analysiert werden, wenn die Störfrequenzen genügenden Abstand von der Nutzfrequenz haben.

7.2. Einfluß der Einspannung auf die Schwingung

Auch mit großem Aufwand läßt sich im Versuch eine ideale starre Einspannung, wie sie in der Theorie stets vorausgesetzt wird, nicht verwirklichen. Die Größe dieses Einflusses läßt sich jedoch an den

Abweichungen der gemessenen Eigenfrequenzen von den errechneten ermitteln. Dazu wird ein Stab mit konstanter Biegesteifigkeit in die Spannvorrichtung eingesetzt. Mit seinen geometrischen und physikalischen Daten erhält man als niedrigste Eigenfrequenz aus der bekannten /24/ Gleichung

$$\omega_0 = \left(\frac{1,875}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho}} \quad (7.1)$$

den Wert $\omega_0 = 246,1 \text{ s}^{-1}$. Im Experiment erhielt man den Wert $\bar{\omega}_0 = 239,8 \text{ s}^{-1}$, folglich eine Abweichung von 2,6 %. Eine Rückrechnung ergibt, daß sich der untersuchte Stab so verhält, als wäre er 6 mm länger. Diese scheinbare Verlängerung ist auf die Elastizität der Einspannung und das Mitschwingen der Grundplatte zurückzuführen. Zum letzten Problem haben Weidenhammer /25/ und Wauer /26/ einige Untersuchungen angestellt. Sind die Eigenfrequenzen der weich gelagerten Grundplatte klein gegenüber der ersten Eigenfrequenz des Stabes, so ergibt sich die Verfälschung der ersten Eigenfrequenz des Stabes näherungsweise zu

$$\Delta \omega_0 = 0,312 \frac{m_{St}}{m_{ges}} + \left(0,1628 + 0,4507 \frac{a}{l} + 0,312 \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{l^2 m_{St}}{\Theta_{zzPl}} \quad (7.2)$$

Darin bezeichnet m_{St} die Stabmasse, m_{ges} die gesamte schwingende Masse und Θ_{zzPl} das Massenträgheitsmoment der Platte um die betrachtete Kippachse. l ist die Stablänge, während a der Abstand zu dem Punkt ist, an dem die Kräfte angreifen, welche die Grundplatte zu einer Kippschwingung anregen.

Am vorhandenen Versuchsstand wurde ermittelt:

Eigenfrequenz in vertikaler Richtung $\omega_v = 33,25 \text{ s}^{-1}$

Eigenfrequenz um die Kippachse $\omega_D = 40,3 \text{ s}^{-1}$

erste Eigenfrequenz des Stabes $\omega_{St} = 239,8 \text{ s}^{-1}$

Das System ist mit

$$\left(\frac{\omega_v}{\omega_{St}} \right)^2 = 0,0192 \quad \left(\frac{\omega_D}{\omega_{St}} \right)^2 = 0,028$$

genügend tief abgestimmt, um Gleichung 7.2 anwenden zu dürfen. Sie liefert

$$\Delta \omega_0 = 0,6 \text{ ‰}$$

Dieser Wert ist so gering, daß er ohne Bedenken vernachlässigt werden kann. Entscheidend für die Verfälschung der Eigenfrequenz bleiben daher die elastischen Verformungen in der Einspannung.

Um zu überprüfen, wie weit die gemessenen mechanischen Spannungen beeinflusst werden, wurde der Teststab mit zwei verschiedenen Kräften jeweils bei 50 Hz überkritisch erregt. Bezeichnet x den Abstand der Meßstelle vom Angriffspunkt der Erregerkraft, so nimmt der Fehler gegenüber den rechnerisch bestimmten Spannungen σ_{ger} mit wachsendem x ab. Dies ist z. T. durch die Art der Krafteinleitung bedingt, die sich auf die erste Meßstelle noch stark auswirkt. Andererseits werden mit größer werdenden Meßwerten die Fehler der Meßkette bedeutungsloser.

	$F_1 = 1,72 \text{ N}$			$F_1 = 2,14 \text{ N}$		
X [m]	σ_{gem} [$\frac{N}{mm^2}$]	σ_{ger} [$\frac{N}{mm^2}$]	$\frac{\sigma_{ger} - \sigma_{gem}}{\sigma_{ger}}$	σ_{gem} [$\frac{N}{mm^2}$]	σ_{ger} [$\frac{N}{mm^2}$]	$\frac{\sigma_{ger} - \sigma_{gem}}{\sigma_{ger}}$
0,019	- 0,422	- 0,40	- 5,5 %	- 0,568	- 0,498	- 14 %
0,146	3,00	2,98	- 0,67 %	3,61	3,71	2,7 %
0,280	13,18	13,24	0,45 %	16,4	16,47	0,42 %

Tabelle 7.1

Gegenüberstellung der gerechneten und gemessenen Spannungen

7.3. Einfluß der Krafteinleitung in den Stab

Der auf der Erregerseite befindliche Punkt B in Abbildung 7.4 kann nur längs der z-Achse verschoben werden. Eine mögliche Verschiebung wegen elastischer Verformung der Hartgummistützen des Schwingungserregers

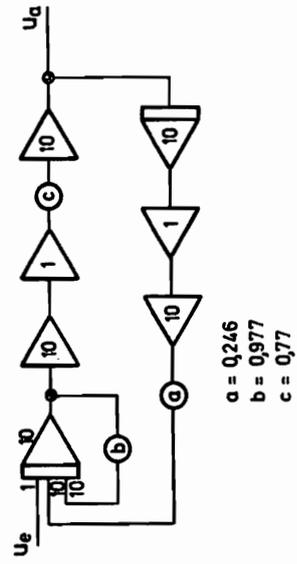
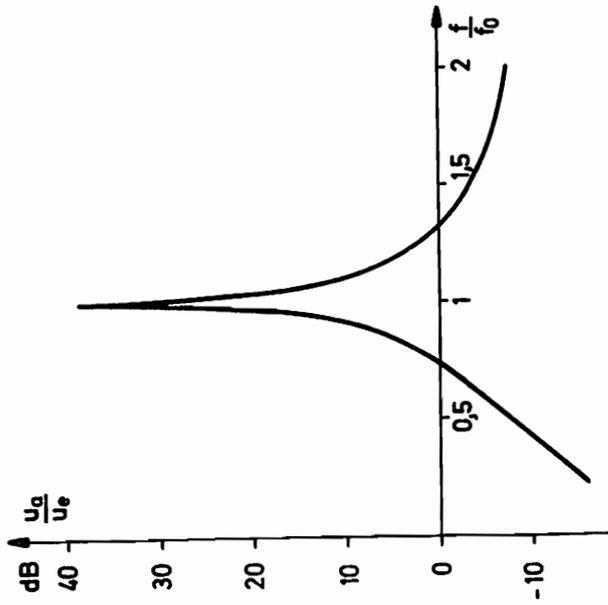


Abb. 7.3 Filterkennlinie

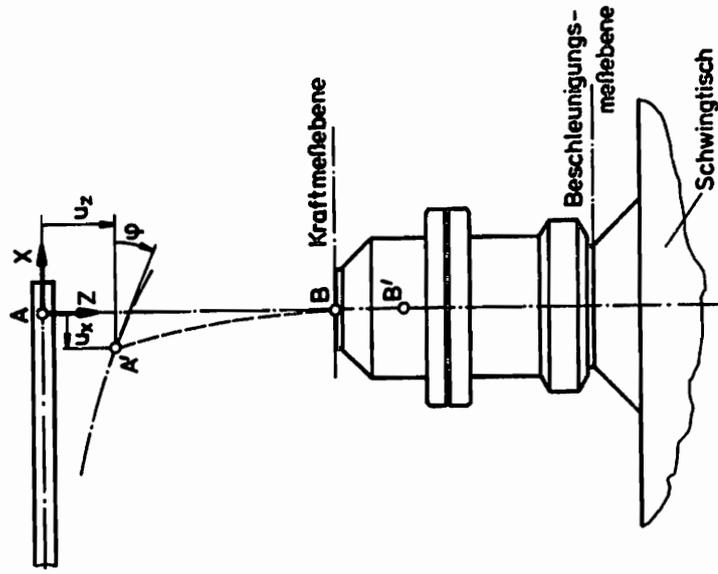


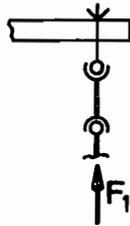
Abb. 7.4 Kräfteinleitung und Messung

konnte im Experiment nicht festgestellt werden. Demgegenüber unterliegt der Anlenkpunkt A am freien Stabende den Verschiebungen u_x und u_z sowie der Verdrehung φ . Geringe Durchbiegungen und fehlende Normalkraft im Stab erlauben es, die Verschiebung u_x als Effekt zweiter Ordnung anzusehen und zu vernachlässigen. Das erforderliche Verbindungselement zwischen den Punkten A und B sollte in der Lage sein, diesen Bewegungen zu folgen, ohne daß zusätzliche verfälschende Kräfte oder Momente in den Stab eingeleitet werden. Darüber hinaus sollte das Verbindungselement wenig Masse und eine hohe Längssteifigkeit besitzen, um seinerseits das Schwingungsverhalten des Systems möglichst wenig zu beeinflussen.

Die in Abbildung 7.5 schematisch dargestellten und im Versuch getesteten Verbindungselemente erfüllen nur teilweise die gestellten Forderungen. Es zeigte sich, daß Verbindungselemente mit geringer Masse trotz fehlender Anpassung an die Verschiebungsforderungen günstiger sind. Während bei den Elementen a) bis c) wegen Resonanzerscheinungen keine günstigen Ergebnisse erzielt wurden, brachten die Verbindungen d) und f) recht gute Näherungen an den theoretischen Schwingungsverlauf. Die besten Ergebnisse lieferte jedoch das Verbindungselement g). Hier wurde ein Stahlstab von 2,5 mm Durchmesser und 70 mm Länge in einem Punkt weich an das Stabende angelötet und das andere Ende starr im Kraftaufnehmer befestigt. Dieser Stab besitzt eine hohe Längssteifigkeit. Andererseits ist er relativ biegeweich und kann so die Verschiebung und Verdrehung ausgleichen. Unterstützt wird dieser Effekt durch die punktförmige Lötstelle, die bei Verdrehung sehr nachgiebig reagiert, Normalkräfte aber vollständig überträgt. Bei der elastischen Verspannung e) konnte die Bewegung durch Verwendung eines Stroboskopes sichtbar gemacht werden. Die Verdrehungen wurden zwar gut ausgeglichen, jedoch traten wegen der Elastizität und der Dämpfung der Gummielemente Phasenverschiebungen und Amplitudenverzerrungen auf, die zudem frequenzabhängig waren.

In der Kraftmeßebene entsteht das Signal F_{anz} der durchgehenden Kraft. Dieses muß um die Trägheitskräfte des Verbindungselementes und der anteiligen Masse des Impedanzmeßkopfes berichtigt werden. Faßt man diese Massen zu der Größe m zusammen, so erhält man die auf den Stab wirkende Erregerkraft

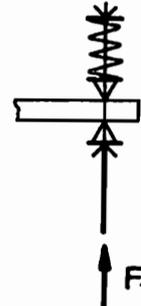
$$F = F_{anz} + m a \quad (7.3)$$



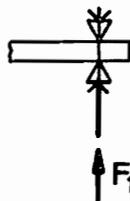
a) Doppelkugelgelenk



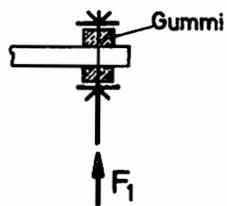
b) Kugelgelenk



c) bewegliche Schneiden



d) feste Schneiden



e) elastische Verspannung



f) starr verschraubt



g) gelötet

Abb. 7.5 Möglichkeiten zur Krafteinleitung

Neben der Kraftmessung ist folglich noch eine Beschleunigungsmessung erforderlich. Kraft und Beschleunigung werden mit dem Impedanzmeßkopf nach Vorzeichen und Phase richtig erfaßt.

7.4. Fehlerabschätzung der Meßkette

Von Ullenboom /17/ durchgeführte Messungen des E-Moduls aus dynamischen Größen /27/ zeigen wahrscheinliche Fehler von $\pm 3,6 \%$ bzw. $\pm 9,5 \%$, je nach verwendeter Methode. Selbst bei der statischen Bestimmung unter reiner Biegung /28/ treten wahrscheinliche Fehler von $\pm 1,5 \%$ auf. Bei dem verwendeten Material St 50 k DIN 6880 der Stabmodelle sind die in der Literatur /29, 30/ angegebenen Werte für die physikalischen Größen verwendet worden. Legt man zur Fehlerfortpflanzung die VDI-Richtlinien /31/ zugrunde, so muß man für die interessierende mechanische Spannung und für die Erregerkraft mit folgenden Fehlern rechnen:

	wahrscheinlicher Fehler
Spannung σ	1,46 %
Kraft F	3,2 %

Der geringe Fehler bei der mechanischen Spannung ergibt sich nach einer statischen Kalibrierung der Meßkette. Ohne Kalibrierung muß mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 5,2 \%$ gerechnet werden.

7.5. Versuchsergebnisse

An drei Stäben wurden die theoretischen Ergebnisse experimentell überprüft. Geometrische und physikalische Werte der Stäbe sind in Tabelle 7.2 festgehalten.

	Stab 1	Stab 2	Stab 3	Dimension
Länge	620	500	408	mm
Breite an der Einspannung	5,94	11,97	19,82	mm
Höhe	11,98	11,37	8,08	mm
1. Eigenfrequenz	11,4	9,4	62,9	Hz
2. Eigenfrequenz	133	16,6	275,5	Hz
3. Eigenfrequenz	365	230,8	736,4	Hz
Erregerfrequenz	90	200	506	Hz
E-Modul	2,06 10^{11}			$\frac{N}{m^2}$
Dichte	7850			$\frac{kg}{m^3}$
	für alle Stäbe			
Frequenzparameter	3,5	4,32	6,65	-

Tabelle 7.2
Daten der Versuchsstäbe

Unterschiede zwischen der theoretisch ermittelten Geometrie und der tatsächlich vorhandenen lassen sich aus fertigungstechnischen Gründen nicht vermeiden. Besonders am freien Stabende ergeben sich große Schwierigkeiten. Gute Formanpassung und hohe Oberflächengüte wurde durch Fräsen und anschließendes manuelles Nacharbeiten erreicht.

Abbildung 7.6 zeigt den Querschnittsverlauf der untersuchten Stäbe mit folgenden Kriterien:

- Stab 1
- veränderliche Höhe bei konstanter Breite
 - Auslegung nach $|b(x)| = b_0 = \text{konstant}$
 - Mindestquerschnitt $h_{\min} = 3 \text{ mm}$

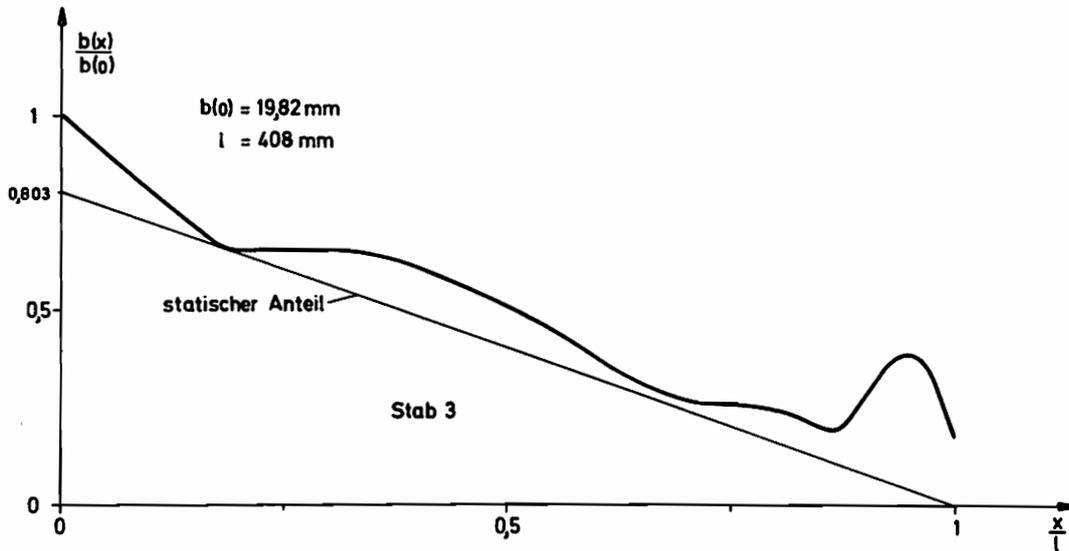
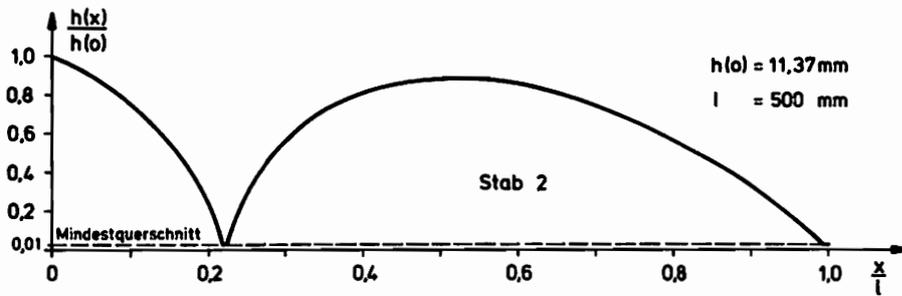
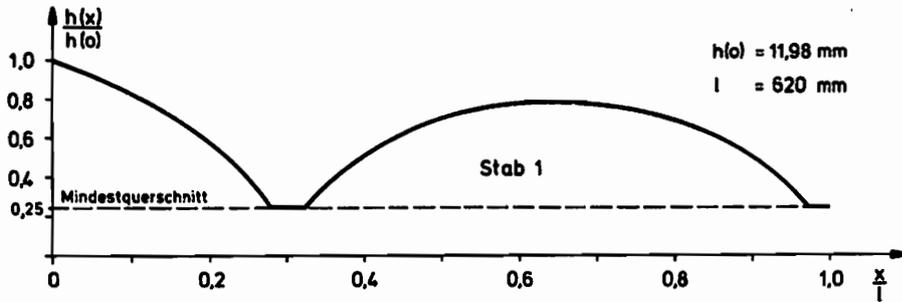


Abb. 7.6 Querschnitte der Teststäbe

Stab 2 - Mindestquerschnitt $h_{\min} = 0,1 \text{ mm}$, durch eine Federstahl-
folie verwirklicht

Stab 3 - veränderliche Breite bei konstanter Höhe
- Auslegung nach $|\sigma(x)| \leq \sigma_0$
- Stab trägt statische Vorlast

Der in den Abbildungen 7.8 bis 7.11 wiedergegebene Spannungsverlauf längs der Stabachse läßt folgende Schlüsse zu:

1. Die theoretische Rechnung stimmt mit den gemessenen Werten im Rahmen der zu erwartenden Meßgenauigkeit überein.
2. Einflüsse der Querschnittsrestriktionen werden annähernd richtig erfaßt.
3. Vom Auslegungswert abweichende Werte sind auf das nicht exakte Einhalten der vorgeschriebenen Geometrie bei der Stabherstellung zurückzuführen.
4. Der äquidistante Verlauf der gemessenen und gerechneten Kurven weist auf einen systematischen Fehler hin, der möglicherweise durch die Einspannung bzw. die Krafteinleitung hervorgerufen wird.
5. Im Bereich der Querschnittsrestriktionen treten Spannungsüberschreitungen auf, die bei kleinem Mindestquerschnitt größer sind.
6. Die Spannungsüberschreitungen im Stab 1 haben keine ausgeprägte Spitze - wie etwa Kerbspannungen - sondern verteilen sich über einen größeren Bereich.
7. Kleine Formabweichungen in der Nähe des Momentennulldurchganges beeinflussen den örtlichen Spannungsverlauf relativ stark.

Weicht die Erregerfrequenz vom vorgegebenen Wert ab, so sind diese Auswirkungen unter anderem von der Nähe der benachbarten Eigenfrequenz abhängig. Sehr deutlich ist dies bei den ersten beiden Stäben zu sehen. Frequenzveränderungen bis zu 5 % haben bei Stab 1 etwa 14 % Spannungs-

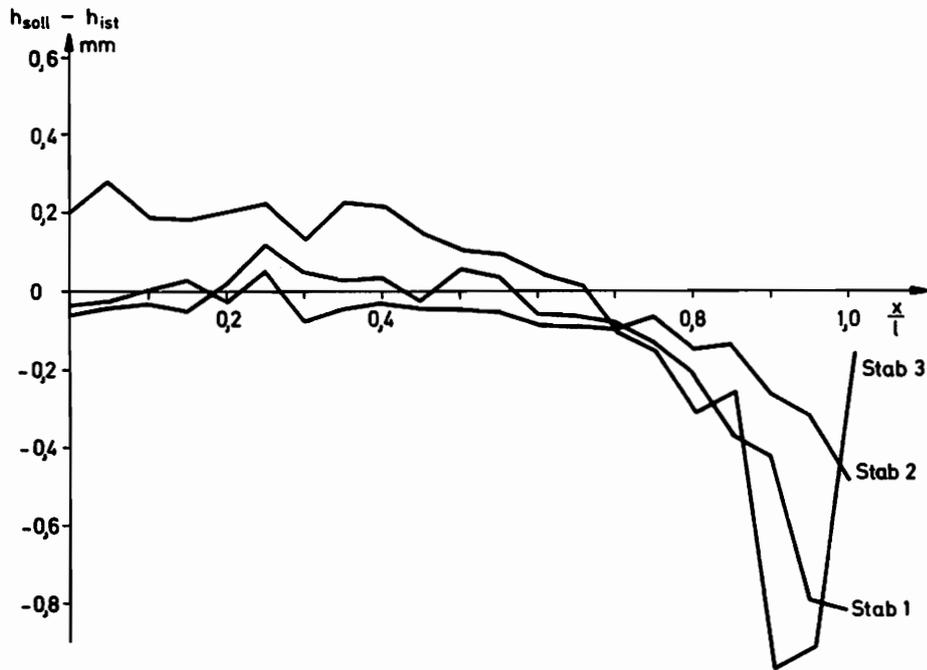


Abb. 7.7 Fertigungsfehler der Stäbe

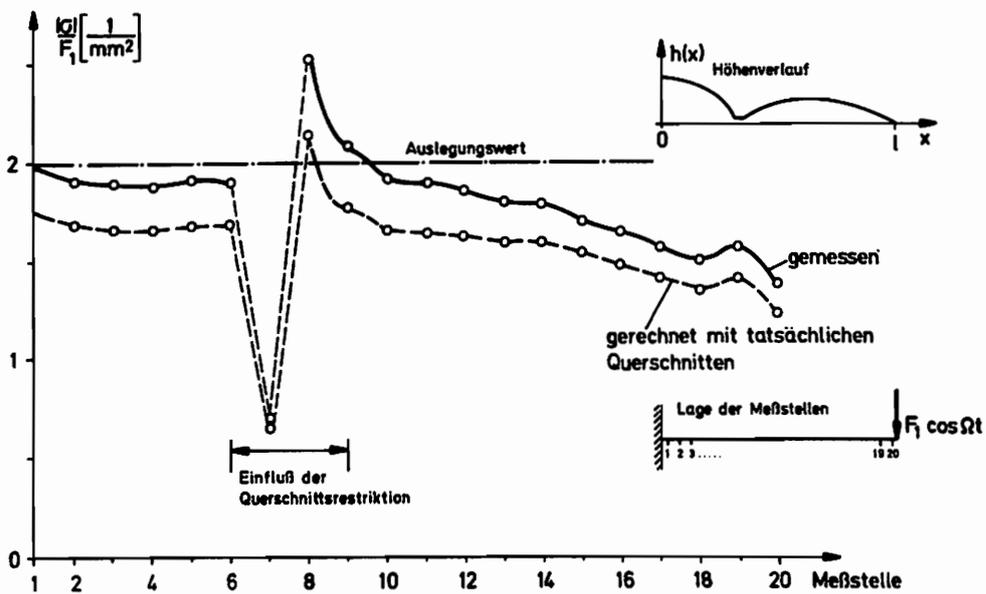


Abb. 7.8 Spannungsverlauf von Stab 1

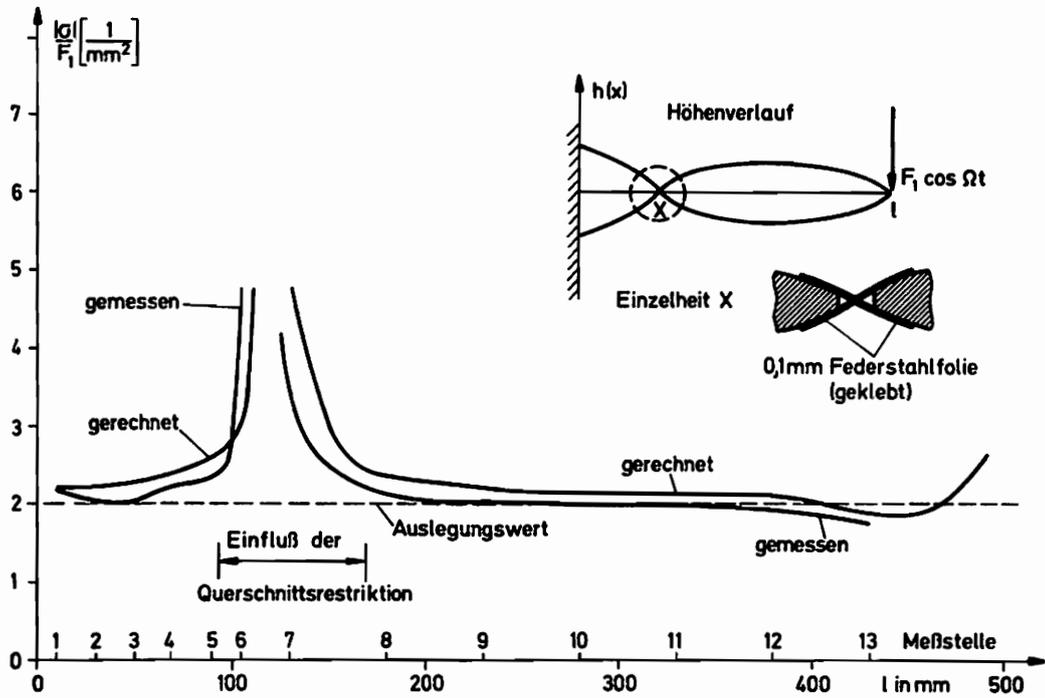


Abb. 7.9 Spannungsverlauf von Stab 2

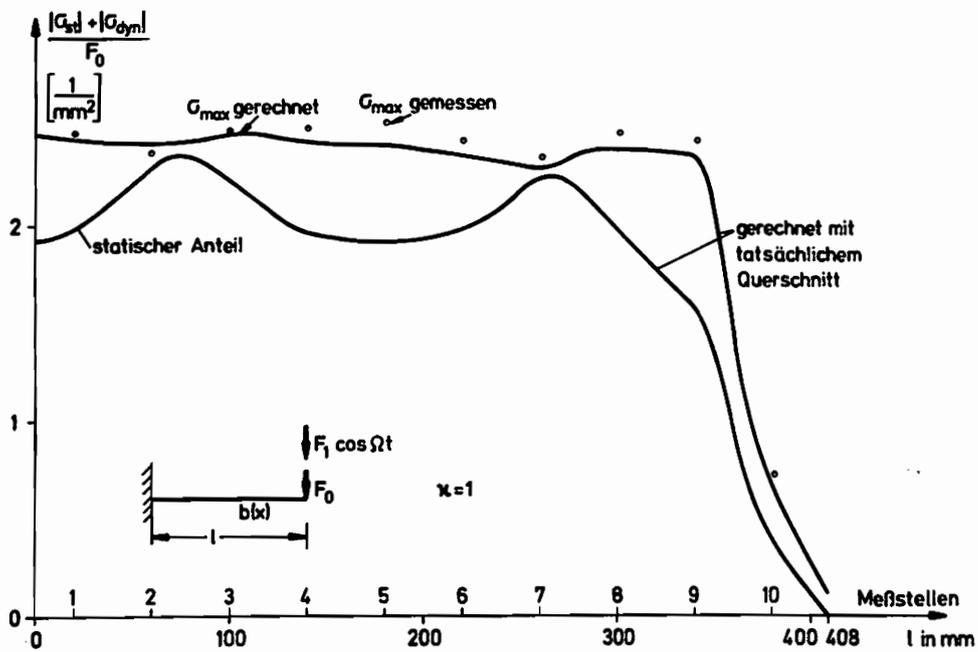


Abb. 7.10 Spannungsverlauf von Stab 3

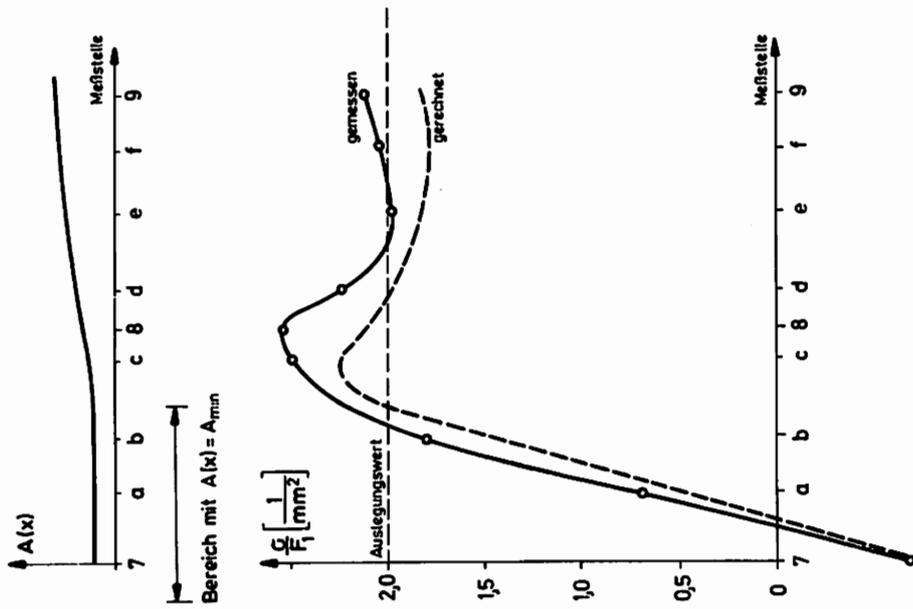


Abb. 7.11 Spannungen im Bereich der Querschnittsrestriktion (Stab 1)

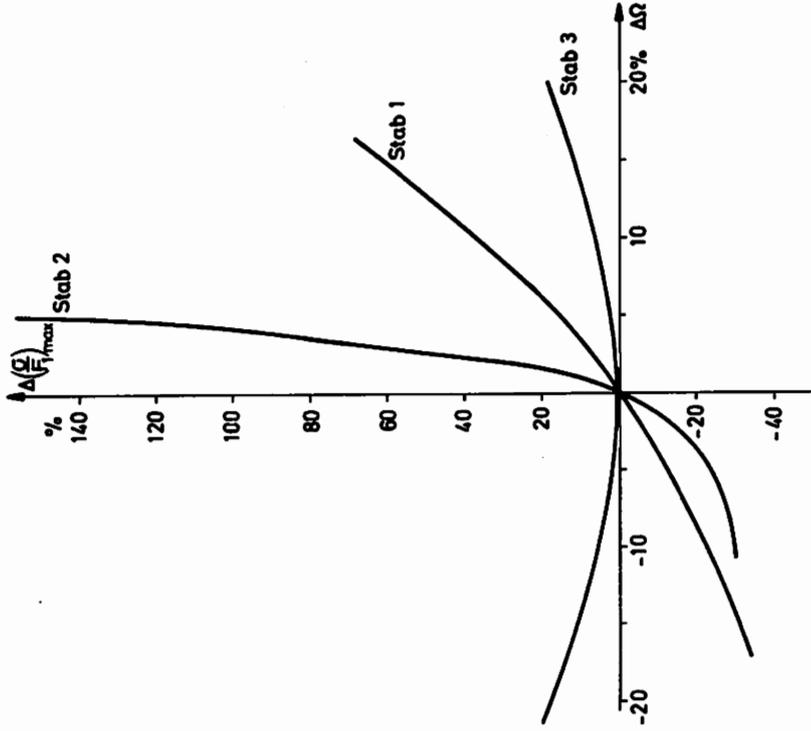


Abb. 7.12 Spannungsverhalten bei Frequenzabweichungen

änderung zur Folge, wogegen bei Stab 2 sich die Spannung mehr als verdoppelt. Solche Effekte sind zwar sehr unschön, andererseits aber bei den vorhandenen Entwurfskriterien des Stabes nicht vermeidbar. In keiner Bedingung wird etwas über den Abstand der Erregerfrequenz zu den benachbarten Eigenfrequenzen ausgesagt, so daß optimale Lösungen oder wie hier Lösungen mit $|\xi(x)| = \text{konstant}$ unmittelbar neben Eigenfrequenzen herauskommen können.

Lediglich Stab 3 zeigt symmetrisches Verhalten gegenüber positiven und negativen Frequenzabweichungen, wobei die Spannungsüberhöhungen klein gegenüber den anderen Stäben sind. Erklärlich ist dieses Verhalten durch die günstige Lage innerhalb des Lösungsbereiches, wie aus Abbildung 5.5 für $\beta = 6,65$ und $\chi = 1,0$ zu ersehen ist.

Um den Einfluß geometrischer Abweichungen systematisch erfassen zu können, hätte eine größere Anzahl exakt gleicher Stabmodelle systematisch verändert werden müssen. Dies bereitete insbesondere bei der Fertigung Schwierigkeiten. Angesichts der guten Übereinstimmung von Rechnung und Versuch hinsichtlich der Spannungen wurden diese Untersuchungen durch eine Simulation auf dem digitalen Rechner TR 440 ersetzt. Dazu wurde die Kontur des Stabes 1 näherungsweise in drei Bereiche aufgeteilt und durch Polynome zweiter bzw. dritter Ordnung angeglichen. Dieser Grundkontur konnten in dem variablen Bereich von $x = l_1$ bis $x = l_2$ geometrische Abweichungen der Form

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[1 + \sin\left(\frac{x-l_1}{l_2-l_1} 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right] & , l_1 \leq x \leq l_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.4)$$

überlagert werden, wobei ε_0 die maximale Abweichung war. Wird längs des Stabes eine konstante Abweichung von $\pm 0,05$ mm angenommen - etwa untere Grenze der Fertigungsgenauigkeit - so bedeutet dies eine Spannungsabweichung von + 3,32 % bzw. - 3,12 %, wobei das Spannungsmaximum nahe dem Mindestquerschnitt liegt. Im wesentlichen ergab die Simulation:

1. Geometrische Abweichungen bis $\varepsilon_0 = \pm 0,1$ mm haben nur geringen Einfluß auf die Spannung, wenn sie örtlich beschränkt sind ($l_2 - l_1 \leq 0,1$ m). Die Lage des Spannungsmaximums bleibt dabei fast

σ_0 = maximale Spannung der ungestörten Kontur

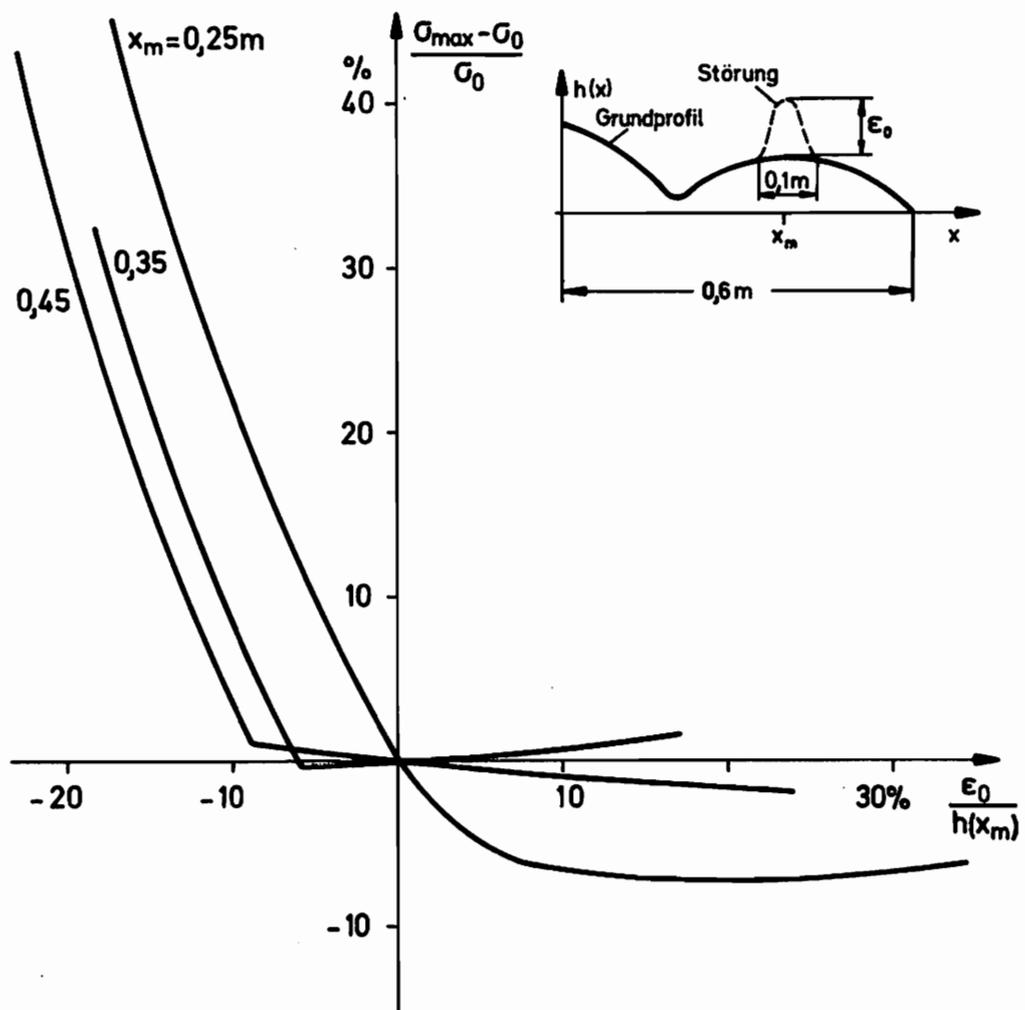


Abb. 7.13 Spannungsverhalten bei geometrischen Störungen

unverändert.

2. Ausgedehnte Abweichungen ändern die Spannung auch bei kleinem ε_0 relativ stark.
3. An den Knickpunkten der Funktion $\Delta \bar{\sigma} = f(\Delta h)$ (Abbildung 7.13) springt die Lage des Spannungsmaximums von der Querschnittsrestriktion in die unmittelbare Nähe der größten Abweichung.

8. Zusammenfassung

Ausgehend vom Stab gleicher Festigkeit bei dynamischer harmonischer Erregung wurden Stäbe optimalen Volumens bestimmt, die sowohl Spannungs- als auch Querschnittsrestriktionen unterworfen sind. Die Ausweitung des Pontryaginschen Maximumprinzips durch Boltjanski erlaubt eine analytische Darstellung des Problems durch ein nichtlineares Randwertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches bei niedriger unterkritischer Erregung den Stab gleicher Festigkeit als optimal identifiziert. Überkritische Erregung, Einbeziehung des Eigengewichts sowie Zusatzlasten in Form von statischen Einzelkräften oder diskreten Massen erfordern eine physikalische Diskretisierung des Stabes und die Anwendung eines leistungsstarken Suchalgorithmus, der durch "pattern search" nach Hooke/Jeves gegeben ist.

Es zeigte sich bei überkritischer Erregung, daß der Stab konstanter Biegesteifigkeit teilweise günstigere Volumen aufweist als der "Stab gleicher Festigkeit unter dynamischer Beanspruchung".

Die oftmals stark schwankenden und sprunghaft veränderlichen optimalen Querschnittsverläufe konnten in bestimmten Fällen angeglichen bzw. durch einen angepaßten Querschnitt mit Zusatzmasse so ersetzt werden, daß hinsichtlich des erforderlichen Volumens kaum Änderungen auftraten.

Der Vergleich des Spannungsverlaufes von diskretisiert berechneten Stäben mit gemessenen Verläufen an ausgeführten Stäben zeigte deutlich die Güte und Brauchbarkeit des verwendeten Rechenverfahrens.

Literatur

- /1/ BOLTJANSKI: Mathematische Methoden der optimalen Steuerung. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1972)
- /2/ TOLLE: Optimierungsverfahren für Variationsaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen. Springer-Verlag (1971)
- /3/ LEHMANN, Th. und W. ULLENBOOM: Optimierung des Querschnittsverlaufes dynamisch beanspruchter Stäbe und Platten. ZAMM 53 (1973), S. 72-74
- /4/ THERMANN, K.: Optimal design criteria of dynamically loaded elastic structures. IUTAM Symposium, Warschau 1973, Springer-Verlag Berlin (1975), S. 152-167
- /5/ OLHOFF, N.: Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies. J. Struct. Mech. 4 (1) (1976), S. 87-122
- /6/ OLHOFF, N.: Maximizing higher order eigenfrequencies of beams with constraints on the design geometry. J. Struct. Mech. 5 (2) (1977), S. 107-134
- /7/ KARIHALOO/NIORDSEN: Optimum design of vibrating cantilevers. J. Optimization Theory Applications 11 No. 6 (1973)
- /8/ PIERSON, B.L.: An optimal control approach to minimum-weight vibrating beam design. 14. Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Delft (1976)
- /9/ NIORDSON, F.I.: On the optimal design of a vibrating beam. Quart. Appl. Math. 23 (1965), S. 47-53
- /10/ BRACH, R.M.: Minimum dynamic response for a class of simply supported beam shapes. Int. J. Mech. Sci. 10 (1968), S. 429-439

- /11/ ICERMANN, L.J.: Optimal structural design for given dynamic deflection. Int. J. Solids Structures 5 (1969), S. 473-489
- /12/ PLAUT, R.H.: Optimal structural design for given deflection under periodic loading. Quart. Appl. Math. 29 (1972), S. 315-318
- /13/ SHEU, C.Y. and W. PRAGER: Recent developments in optimal structural design. Appl. Mech. Rev. 21 (1968), S. 985-992
- /14/ NIORSEN and PEDERSEN: A review of optimal structural design. Theoretical and Applied Mechanics, Springer-Verlag Berlin (1973)
- /15/ PESTEL and LECKI: Matrix methods in elastomechanics. McGraw-Hill 1963
- /16/ WALLER, H. und W. KRINGS: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. B.I. Wissenschaftsverlag 1975
- /17/ ULLENBOOM, W.: Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 11 (1977)
- /18/ LEHMANN, Th.: Elemente der Mechanik I: Einführung. Bertelsmann Universitätsverlag 1974
- /19/ KOZESNIK, J.: Maschinendynamik. Carl Hanser Verlag, München 1966
- /20/ WEIGAND, A.: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, Band III. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1962
- /21/ MONONOBE, N.: Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt. ZAMM 1, Heft 6, S. 444-451

- /22/ KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967
- /23/ AOKI, M.: Introduction to optimization techniques. Mcmillan, New York 1971
- /24/ BIEZENO-GRAMMEL: Technische Dynamik. Springer-Verlag 1971
- /25/ WEIDENHAMMER: Eigenfrequenzverfälschung im Schwingversuch durch mitschwingende Fundamentmasse. Konstruktion 23 (1971) Heft 9
- /26/ WAUER: Eigenschwingungen von Systemen aus Kontinua und endlich vielen Starrkörpern. ZAMM 51 (1974)
- /27/ FLÖGGE, W.: Handbook of engineering. McGraw-Hill 1962
- /28/ MÖLLER, K.: Fehlerrechnung, Einführung in die Meßtechnik mechanischer Größen. VDI-Seminar Nr. 37-74
- /29/ DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer-Verlag 1963
- /30/ STOFFHÖTTE. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/München 1967
- /31/ VDE/VDI-Richtlinien 262o, Fehlerfortpflanzung bei Messungen. VDI-Verlag, Düsseldorf 1963
- /32/ CUNTZE, R.: Beitrag zur Berechnung von Eigenfrequenzen dünner Rechteckscheiben unter Berücksichtigung von randparalleler Orthotropie. Dissertation an der Technischen Hochschule Hannover (1968)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 15**