



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ekkehard Großmann

Kovarianzanalyse mechanischer
Zufallsschwingungen bei
Darstellung der
mehrfachkorrelierten Erregungen
durch stochastische
Differentialgleichungen

Heft Nr. 24



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Herrn Professor Th. Lehmann

zur Erinnerung an meine Bochumer Instituts-
zeit und mit herzlichem Dank für die
Begutachtung dieser Arbeit.

Mit freundlichem Gruß überreicht

29.4.81

Ek. Goßmann

Ekkehard Goßmann

Kovarianzanalyse mechanischer
Zufallsschwingungen bei
Darstellung der mehrfachkorrelierten
Erregungen durch stochastische
Differentialgleichungen

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 24

Februar 1981

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, der diese Arbeit wohlwollend gefördert hat. Er war jederzeit zu fachlichen und persönlichen Diskussionen bereit und unterstützte diese Arbeit mit wertvollen Anregungen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann, der freundlicherweise das Korreferat übernahm, bin ich für das große Interesse an dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Meinen Kollegen am Institut für Mechanik danke ich für die angenehme, stets freundliche und hilfsbereite Zusammenarbeit.

Schließlich danke ich Frau K. Wagener sehr herzlich für die sorgfältige und in kurzer Zeit fertiggestellte Reinschrift des Manuskriptes.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 10.12.1980

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 2.1981

© 1981 Ekkehard Goßmann

Bergstraße 32, 5800 Hagen 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden mehrfachkorrelierte, wirklich in der Natur vorkommende Zufallserregungen durch stochastische Differentialgleichungen beschrieben. Dazu muß zunächst die Leistungsspektralmatrix bestimmt und anschließend müssen die einzelnen Spektren durch rationale Funktionen angenähert werden. Dann kann durch eine Folge von Transformationen aus der Leistungsspektralmatrix eine Matrix von Übertragungsfunktionen wiedergewonnen werden. Hieraus wird mit Hilfe von Minimalrealisierungsverfahren der Regelungstechnik die zugehörige Differentialgleichung gefunden, die es gestattet, den wirklichen Erregervorgang mit dem Modellprozeß "weißes Rauschen" zu verknüpfen.

Die Berechnung der Varianzen von Schwingungsantworten, die wichtige Kennzahlen für die Beanspruchung sind, wird wesentlich einfacher und rechenzeitgünstiger als bei der Spektralmethode.

Summary

In the following paper multi correlated stochastic processes that can be found in nature are described using stochastic differential equations. To do this the power spectral density matrix has to be evaluated first, then all of the power spectra must be approximated by rational functions. By a series of transformations of the power spectral density matrix a matrix of the transfer functions can be restored. Then by means of minimal realisation methods known in control theory the differential equation is evaluated that connects the real excitation process with so called "white noise".

The calculation of variances of dynamic responses of structures can be simplified and less calculation time is necessary as with methods using power spectral densities.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
VERZEICHNIS HÄUFIG BENUTZTER GRÖSSEN UND SYMBOLE	1
1. EINLEITUNG	5
2. DIE BEHANDLUNG VON ZUFALLSSCHWINGUNGEN	12
3. DIE BESCHREIBUNG ZUFÄLLIGER PROZESSE DURCH STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	34
3.1 Der stochastische Prozeß	34
3.2 Das weiße und das farbige Rauschen	35
3.3 Die stochastische Differentialgleichung	36
3.4 Das stochastische Integral	40
3.4.1 Der Erwartungswert und die Varianz des stochastischen Integrals	42
3.4.2 Die Kovarianzmatrix mehrfachkorrelierter stochastischer Prozesse	44
3.5 Einige Bemerkungen zur Theorie und Anwendung stochastischer Differentialgleichungen	48
4. DIE REALISIERUNG MEHRFACHKORRELIERTER STATIONÄRER STOCHASTISCHER PROZESSE	51
4.1 Das mathematische Übertragungsmodell	51
4.2 Einige Bemerkungen zur Zerlegung einer Leistungs- spektralmatrix	59
4.3 Die Zerlegung der spektralen Dichtematrix in eine Summe gebrochen rationaler Funktionen zur Bestimmung der Matrix-Übertragungsfunktion	65
4.4 Die Zerlegung der spektralen Dichtematrix in ein Produkt konjugiert komplexer Übertragungsmatrizen	80
4.5 Die Minimalrealisierung einer Matrix- Übertragungsfunktion	97
4.6 Die Schlußbetrachtung zur Realisierung mehrfach- korrelierter stochastischer Prozesse	124

	Seite
5. DIE KOVARIANZANALYSE VON SCHWINGUNGEN MECHANISCHER STRUKTUREN DURCH ANREGUNG MEHRFACHKORRELIERTER ZUFÄLLIGER PROZESSE	126
5.1 Die Bedeutung der Kovarianzmatrix bei der Untersuchung zufallserregter mechanischer Strukturschwingungen	126
5.2 Die Kopplung von mathematischen Übertragungsmodellen zur Beschreibung stochastischer Erregerprozesse mit mechanischen Strukturmodellen	127
5.3 Einige algebraische Methoden zur Berechnung der Kovarianzmatrix	132
5.4 Einige numerische Algorithmen zur Berechnung der Kovarianzmatrix	139
6. DIE ANWENDUNG DER KOVARIANZANALYSE AUF FAHRBAHN-ERREGTE FAHRZEUGSCHWINGUNGEN	148
6.1 Die dynamische Erregung von Fahrzeugen durch Straßenunebenheiten und ihre Behandlung	148
6.2 Die Kovarianzanalyse als Hilfsmittel zur Berechnung zufallserregter Fahrzeugschwingungen	152
6.3 Die Berechnung der Kovarianzmatrix am Beispiel fahrbahnerregter Fahrzeugschwingungen	157
7. DIE ANWENDUNG DER KOVARIANZANALYSE AUF BAUWERKE UNTER AERODYNAMISCHER BELASTUNG	172
7.1 Die dynamische Erregung von Bauwerken durch den natürlichen Wind und ihre Behandlung	172
7.2 Die Kovarianzanalyse als Hilfsmittel zur Berechnung winderregter Bauwerksschwingungen	179
7.3 Die Darstellung gemessener mehrfachkorrelierter Windgeschwindigkeitsverläufe durch stochastische Differentialgleichungen	186
7.4 Die Berechnung der Kovarianzmatrix am Beispiel aerodynamisch belasteter Turmtragwerke	199

	Seite
7.5 Die Abschätzung maximaler Beanspruchung aerodynamisch belasteter Turmtragwerke unter Zuhilfenahme der Kovarianzanalyse	209
8. ZUSAMMENFASSUNG	215
9. LITERATUR	218
ANHANG	225
A Statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe	
B Numerische Berechnung von Leistungsspektren	

Verzeichnis häufig benutzter Größen und Symbole

\underline{I}	Einheitsmatrix
\underline{M}	Massenmatrix eines mechanischen Systems
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix eines mechanischen Systems
\underline{D}	Dämpfungsmatrix eines mechanischen Systems
$\underline{\Phi}$	Modalmatrix (Matrix der Eigenvektoren)
\underline{T}	Transformationsmatrix
$\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$	Realisierung einer Matrix-Übertragungsfunktion
$\{\underline{F}, \underline{G}, \underline{J}\}$	Realisierung einer Matrix-Übertragungsfunktion für ein Hilfssystem
$\underline{H}(s)$	Matrix-Übertragungsfunktion
$\underline{W}(s)$	Matrix-Übertragungsfunktion eines Hilfssystems
$\underline{S}(s)$	Leistungsspektralmatrix (spektrale Dichtematrix)
$\underline{F}(\omega)$	Frequenzgangmatrix eines mechanischen Systems
$\underline{P}_{xx}, \underline{P}$	Kovarianzmatrix
$\underline{f}(t)$	Vektor der Erregungen
$\underline{\xi}(t)$	(vektorielles) weißes Rauschen
$\underline{q}(t)$	modaler Systemantwortvektor
$\underline{x}(t)$	Vektor der Systemantworten

$S_{xx}(\omega)$	Auto-Leistungsspektren
$S_{xy}(\omega)$	Kreuz-Leistungsspektren
$\phi_{xx}(\tau)$	Auto-Korrelationsfunktion
$\phi_{xy}(\tau)$	Kreuz-Korrelationsfunktion
$G(x)$	Wahrscheinlichkeitsfunktion
$g(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$\frac{x_a}{x_e}(s)$	Übertragungsfunktion
$\delta(\)$	Delta-Dirac-Funktion
σ_{xx}^2	Varianzen
σ_{xy}^2	Kovarianzen
δ_i	modaler Dämpfungsfaktor
T	Zeitlänge, Nutzungszeitraum
t	Zeit
τ	Korrelationszeit
N	Anzahl der Datenpunkte einer Messung
$N_x(\)$	Anzahl von Niveauüberschreitungen
ω_i	Eigenfrequenzen ($2 \pi f_i$)
ω	Frequenzen

$P\{ \}$	Wahrscheinlichkeit von ...
$E\{ \}$	Erwartungswert von ...
ξ	Extremwerte
\underline{A}	Matrix \underline{A}
\underline{A}^T	Transponierte der Matrix \underline{A}
\underline{A}^{-1}	Inverse der Matrix \underline{A}
$\tilde{\underline{A}}()$	konjugiert komplexe Matrix der Matrix \underline{A}
\bar{x}	Mittelwert von x
Δt	Zeitdifferenz, Abtastzeit
$\Delta \omega$	Frequenzrate, -abtastung
$Y(\omega)$	FOURIER-Transformierte von $y(t)$
$Y(s)$	LAPLACE-Transformierte von $y(t)$
$\text{diag}[\]$	Diagonalmatrix
\wedge	Amplituden
$*$	Faltungssymbol
$\bullet \text{---} \circ$	FOURIER-Transformation

\leftarrow

inverse FOURIER-Transformation

Σ

Summation

Π

Produktbildung

FFT

Fast-FOURIER-Transformation

j

imaginäre Einheit ($\sqrt{-1}$)

$s = j\omega$

1. Einleitung

Die Ansprüche an Konstruktionen des Maschinenbaus und an Tragwerke des konstruktiven Ingenieurbaus nehmen laufend zu. Das Bestreben, kostengünstig und gewichtssparend zu bauen, erfordert zunehmend Leichtbauweisen. Während früher für die Auslegung massiver Bauteile eine statische Berechnung mit ihren Sicherheitsfaktoren dynamische Beanspruchungen weitgehend mit abdeckte, ist der Konstrukteur heute gezwungen, dynamische Berechnungen schon beim Entwurf mit in sein Bemessungskonzept aufzunehmen.

Aus allgemeinen Aufgaben ergeben sich Erregungen, die oft periodisch oder stoßförmig einzelne Bauteile belasten. Derartige Lastfälle können mit den Methoden der klassischen Schwingungslehre bearbeitet werden. Hierzu wird das Schwingungsverhalten einer mechanischen Struktur durch eine deterministische, meist numerische Rechnung im Zeitbereich simuliert.

Neben periodischen oder stoßförmigen Erregungen sind Konstruktionen des Maschinenbaus oder des konstruktiven Ingenieurbaus häufig Belastungen aus der Natur ausgesetzt, die sich nicht in einfacher Form behandeln lassen. Hierzu zählen Windbelastungen von Bauwerken ebenso wie die Schwingungserregung von Automobilen bei Fahrt auf unebener Straße. Man denke auch an die Anregung von Schiffen und Bohrinseln durch Meereswellen, an die Landung von Flugzeugen oder die Fahrt von Schienenfahrzeugen. Der von Strömungstriebwerken verursachte Körperschall ist genauso wenig wie die Erdbebenerregung von Bauwerken durch einfache Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben. Allen diesen Erregungen ist gemeinsam, daß sie durch eine große Zahl von Ursachen und Einflüssen erzeugt werden. Da eine deterministische eindeutige Darstellung solcher Vorgänge physikalisch und mathematisch bislang nicht möglich ist, behandelt man diese Erregungen als Zufallsprozesse. Hierunter wird aber nicht nur eine einzelne Erregung (z. B. eine Messung), sondern eine Vielzahl "vergleichbarer" Erregungen verstanden. Die Untersuchung von Zufallsvorgängen in der Natur, wie z. B. die Windkrafterregung oder Straßenunebenheiten, zeigen, daß diese Belastungen nicht vollkommen unterschiedlich sind. Sie besitzen

vielmehr statistische Gesetzmäßigkeiten, die sich in bestimmten Kennwerten und -funktionen ausdrücken lassen. Diese Tatsache ermöglicht eine statistische Behandlung zufälliger Erregungen und deren Einwirken auf die dynamisch belasteten Bauteile. Man spricht von Zufallsschwingungen mechanischer Strukturen und versteht hierunter die deterministisch nicht vorhersagbaren Schwingungserscheinungen.

Für eine optimale Bauteilauslegung ist die Kenntnis der maximalen Beanspruchungen vor dem Entwurf erwünscht, um die Zuverlässigkeit einer Konstruktion zu gewährleisten. Höchstbeanspruchungen können aber bei zufälligen Erregungen, wie z. B. der Windbelastung, nur unter Wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten ermittelt werden, da Zufallserregungen nicht einmalig, sondern wiederholt oder permanent einwirken. Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen widerstreben dem Konstrukteur, da im Gegensatz zu erzwungenen periodischen Schwingungen für Zufallsschwingungen keine eindeutig sicheren Angaben zur Vorhersage z. B. eines Gewaltbruchs möglich sind. Forschungen auf dem Gebiet mechanischer Zufallsschwingungen sind motiviert, Zufallserregungen beschreibbar zu machen und das durch die Natur vorgegebene Risiko bei angemessener Bauweise klein zu halten.

Gebräuchliche Methoden zur Behandlung von Zufallsschwingungen sind:

1. TIME-HISTORY-Verfahren
2. Spektralmethode
3. Kovarianzanalyse

TIME-HISTORY-Verfahren werden zur Untersuchung zufällig belasteter Strukturen mit gemessenen Mustererregungen herangezogen und dienen z. B. zur Ermittlung eines dynamischen Überhöhungsfaktors. Die Wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagekraft ist beschränkt, falls nur wenige statistisch vergleichbare Messungen zufälliger Erregungen zur Verfügung stehen. Als numerische Verfahren sind Zeitverlaufsberechnungen zudem für die Auslegung neuer Konstruktionen aufgrund hoher Rechenzeiten wirtschaftlich nicht zu vertreten.

Für die zahlreichen Zufallserregungen ist die Behandlung linearer mechanischer Systeme bei stationärer Erregung mit Gaußscher Amplitudenverteilung am weitesten fortgeschritten. Auf derartige Erregungen beschränkt sich auch diese Arbeit. Die wichtigsten Kennwerte von Zufallsschwingungen sind der Mittelwert und die Varianz. Während die mittlere Schwingungsantwort eines zufällig belasteten mechanischen Systems durch statische Berechnungen mit dem (stationären, zeitinvarianten) Mittelwert der Erregung bestimmt werden kann, benötigt man zur Berechnung der Schwingungsvarianzen bislang statistische Kennfunktionen für die Erregung. Eine mögliche Funktion ist das Leistungsspektrum, das über die harmonischen Anteile und deren Gewichte einer Zufallsfunktion informiert. Die Leistungsspektren der Systemschwingungsamplituden berechnen sich durch Multiplikation der Leistungsspektralmatrix der Zufallserregung mit der Systemfrequenzgangmatrix. Man gewinnt aus den Spektren der Systemantwort durch Integration die Schwingungsvarianzen. Da Gauß-verteilte Erregungen bei linearen Systemen zu Gauß-verteilten Schwingungsamplituden führen, liegt mit deren Verteilungsdichtefunktion ein Kriterium zur Abschätzung der maximalen Beanspruchung unter Wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten fest. Das Verfahren ist heute allgemein unter dem Namen Spektralmethode bekannt und findet in der Praxis vielfältige Anwendung. Es läßt sich in der Regel nur numerisch anwenden und ist sehr rechenzeitintensiv, falls eine ausreichende Genauigkeit gefordert wird.

Neben diesem Verfahren wird die von Mathematikern entwickelte Theorie stochastischer Differentialgleichungen allmählich in das Ingenieurwesen übertragen. Hierbei handelt es sich um Differentialgleichungen mit zufälligen zeitabhängigen Koeffizienten oder um gewöhnliche Differentialgleichungen, die als Störgröße einen regellosen Vorgang enthalten, der als weißes Rauschen bezeichnet wird. Einen solchen Prozeß mit konstantem Leistungsspektrum gibt es in der Praxis nicht. Er erweist sich aber als mathematisch nützliche Idealisierung, da mit ihm die Theorie der Zufallsfunktionen ermöglicht wird. Diese rein theoretische Behandlung von Zufallsvorgängen gestattet dem Mathematiker, die Theorie auszubauen und Zufallsvorgänge zu klassifizieren.

Die Theorie ermöglicht darüber hinaus eine sehr einfache Bestimmung der Kovarianzen stochastischer Prozesse. Da keine Aufbereitung für Zufallsvorgänge aus der Natur vorliegt und Meßergebnisse zufälliger Erregungen schwer in die Theorie stochastischer Differentialgleichungen eingearbeitet werden können, wurde die Theorie zunächst für ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen nicht genutzt.

SCHIEHLEN und WEDIG weisen 1974 nach Wissen des Verfassers erstmals auf diese Theorie hin und stellen ihre vorteilhafte Anwendung zur Behandlung mechanischer Zufallsschwingungen dar [78,92]. Unter dem Begriff Kovarianzanalyse wird gezeigt, wie einfachkorrelierte Erregungen, deren Darstellung durch stochastische Differentialgleichungen ebenfalls theoretisch erdacht ist, mit der gewöhnlichen Differentialgleichung einer mechanischen Struktur gekoppelt werden können. Hierdurch ergibt sich eine stochastische Differentialgleichung, deren Koeffizientenmatrizen sowohl das mechanische System, als auch die Erregung beschreiben. Da als Störgröße dieser Differentialgleichung weißes Rauschen dient, können die Schwingungsvarianzen des zufällig erregten mechanischen Systems sehr einfach berechnet werden. Die Überlegungen verbleiben bis zum Jahre 1979/80 akademischer Natur, da sie sich nicht an Messungen zufälliger Erregungen orientieren. Zu diesem Zeitpunkt zeigen MÖLLER, POPP und SCHIEHLEN eine Anwendung für zeitverzögerte Wegerregungen eines Personenkraftwagens auf [60].

Trotzdem bleibt die mathematische Theorie stochastischer Differentialgleichungen weiterhin einer breiten praxisorientierten Anwendung verschlossen. Die Mehrzahl aller bekannten Zufallserregungen greifen als Streckenlasten (z. B. Wind auf Bauwerke) oder an verschiedenen Kraftangriffspunkten eines technischen Bauteils an. Für solche mehrfach-korrelierten Erregungen kann die Theorie stochastischer Differentialgleichungen bislang nicht angewendet werden, da geeignete Methoden zur Herleitung der Koeffizientenmatrizen stochastischer Differentialgleichungen aus Meßergebnissen fehlen.

Hier versucht die vorliegende Arbeit anzuknüpfen und die Lücke zwischen Theorie und Praxis zu schließen. Die Arbeit verfolgt das Ziel, Methoden zur Herleitung stochastischer Differentialgleichungen für in der Natur

vorkommende mehrfachkorrelierte Zufallserregungen zu entwickeln. Hierdurch wird eine sehr einfache Berechnung der Schwingungsvarianzen zufällig erregter Strukturen ermöglicht, die numerische Vorteile in Rechenzeit und Genauigkeit gegenüber der Spektralmethode liefert. Darüber hinaus können stochastische Differentialgleichungen zur numerischen Simulation beliebiger mehrfachkorrelierter Zufallserregungen genutzt werden, um zur Klärung von Sonderfragen (z. B. nichtlineares Werkstoffverhalten) beizutragen. Ferner darf erwartet werden, daß sich durch die mathematisch noch nicht abgeschlossene Theorie stochastischer Prozesse neue Möglichkeiten in der Behandlung mechanischer Zufallsschwingungen (Extremwerttheorie) ergeben werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in die folgenden Teile:

1. Überblick über die Behandlung von Zufallsschwingungen,
2. Theorie stochastischer Prozesse,
3. Methoden zur Herleitung stochastischer Differentialgleichungen für mehrfachkorrelierte Erregungen,
4. Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen,
5. Anwendung auf Fahrzeugschwingungen und aerodynamisch belastete Tragwerke.

Nach einem Überblick über die heute übliche Behandlung von Zufallsschwingungen in der Praxis und einer kurzen Darstellung der Theorie stochastischer Prozesse beginnt die Arbeit mit der Herleitung stochastischer Differentialgleichungen für mehrfachkorrelierte Zufallserregungen. Ausgangspunkt ist die Leistungsspektralmatrix, deren Elemente als konsistente Schätzfunktionen von Messungen verstanden werden und die durch gebrochen rationale Funktionen approximiert werden können.

Aus der Leistungsspektralmatrix mehrfachkorrelierter zufälliger Erregungen wird durch Zerlegung das Übertragungsverhalten eines linearen Modellsystems bestimmt. Hiermit findet sich die Beschreibung eines mathematischen Modells, welches den stochastischen Prozeß des weißen Rauschens in einen farbigen Zufallsprozeß überträgt, der die

vorgegebene Leistungsspektralmatrix besitzt. Zur Herleitung der Koeffizientenmatrizen stochastischer Differentialgleichungen muß das Übertragungsverhalten des mathematischen Modells als Zustandsraumdarstellung identifiziert werden.

In der (regelungstechnischen) Systemtheorie ist seit langem das Problem der Systemidentifikation bekannt. Dort wird aus einer definierten Systemerregung (z. B. Sprung- oder Dirac-Funktion) und der kausalen Systemantwort das Übertragungsverhalten eines realen Systems vermessen. HO/KALMAN gelang es im Jahre 1966, ein Verfahren zu entwickeln, das dem Übertragungsverhalten eines linearen Systems eine gewöhnliche Differentialgleichung zuordnet und somit das meßbare Ein/Ausgangsverhalten um die Kenntnis des inneren Systemzustandes erweitert.

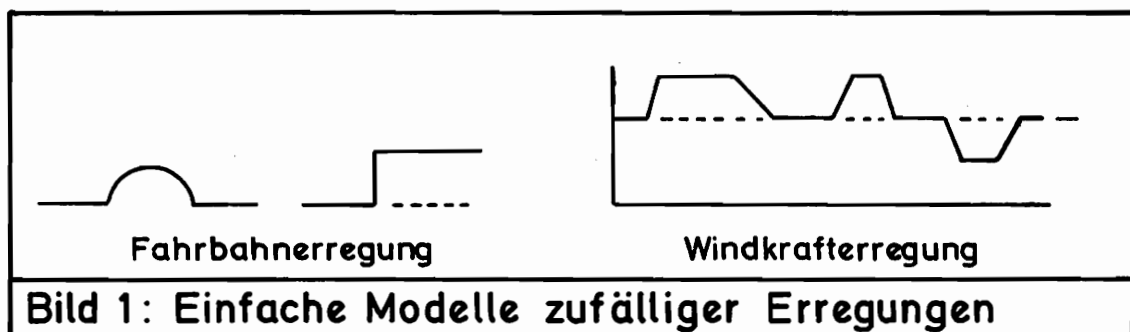
Das bekannte Verfahren eignet sich auch zur Bestimmung einer Differentialgleichung für das aus der Leistungsspektralmatrix mehrfachkorrelierter Zufallserregungen abgeleitete Übertragungsverhalten eines mathematischen Modellsystems. Durch Realisation der zugehörigen Matrix-Übertragungsfunktion wird eine lineare Differentialgleichung gefunden, die mit der Störgröße des weißen Rauschens den Zustand eines linearen Systems beschreibt, das auf weißes Rauschen mit einem farbigen Zufallsprozeß antwortet, der die statistischen Merkmale (Mittelwert, Varianzen, Leistungsspektren, Amplitudenverteilungen) der zu beschreibenden Zufallserregung (z. B. Wind, Fahrbanerregung) besitzt. Durch diese Darstellung können mehrfachkorrelierte Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden.

Fügt man zum mathematischen Erregungsmodell das mechanische System hinzu, so wird ein System beschrieben, das auf weißes Rauschen mit einer mechanischen Zufallsschwingung antwortet. Diese Schwingungen entsprechen der Systemantwort des mechanischen Bauteils bei Erregung mit dem entsprechenden mehrfachkorrelierten Zufallsprozeß. Die zusammengefaßten Differentialgleichungen für die Erregung und für das mechanische System ergeben wieder eine stochastische Differentialgleichung, die die Anwendung der Kovarianzanalyse ermöglicht.

Nach den theoretischen Abhandlungen wird die analytische und numerische Aufbereitung der Kovarianzanalyse gezeigt. Hieran schließt sich eine praxisnahe Anwendung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen. Aus Messungen von Fahrzeugerregungen und Windgeschwindigkeitsverläufen werden über die statistischen Kennfunktionen für verschiedene Beispiele stochastische Differentialgleichungen abgeleitet. Im Vergleich mit der Spektralmethode werden Vor- und Nachteile einer Kovarianzanalyse für stochastisch belastete Automobile und für aerodynamisch belastete Turmtragwerke herausgearbeitet, wobei die Abschätzung maximaler Beanspruchungen berücksichtigt wird.

2. Die Behandlung von Zufallsschwingungen

Seit jeher müssen sich Ingenieure mit dynamischen Problemstellungen auseinandersetzen. Man denke an Unwuchten rotierender Wellen und deren Erregung von Lagern und Fundamenten, an bewegte Kolben oder an stoßförmige Belastungen beim Schmieden. Für diese periodischen oder transienten Erregungen wurden im Laufe der Zeit geeignete Lösungsansätze entwickelt, die sich an den jeweiligen Rechenmöglichkeiten orientierten und von einer weitgehend analytischen Betrachtungsweise ausgingen. Vorrangiges Ziel war es immer, einfache Erregermodelle zu finden. Dies gilt auch für die heute unter dem Begriff "Zufallsschwingungen" zusammengefaßten mechanischen Strukturschwingungen infolge physikalisch nicht (oder schwer) beschreibbarer Erregungen. Hierzu zählen die Erdbeben- und Windbelastung von Bauwerken ebenso wie die Fahrbahnerregung von Automobilen oder die Schwingungsanregung von Flugzeugstrukturen durch turbulente Strömung. Zufällige Erregungen von Fahrzeugen durch Straßenunebenheiten wurden lange Zeit [54] durch Sinushalbwellen oder Sprungfunktionen (Bild 1) angenähert. Mit mechanischen Modellen aus Ein- oder Zweimassenschwingern konnte analytisch eine Schätzung der maximalen Beanspruchung gefunden werden.



Die Windbelastung hoher Bauwerke bearbeitete RAUSCH [72] 1933, indem er mit bekannten Eigenschwingzeiten von Türmen und Häusern Einmassenschwingermodelle bildete und diese durch definierte Erregungen (Bild 1) belastete. Die Ergebnisse seiner Rechnungen konnte er als Reaktionsfaktoren veröffentlichen. Die Erregungsfunktionen leitete er aus eigenen Beobachtungen stürmischer Wittertage ab. Diese, der damaligen Vorstellungskraft entsprechenden Problemlösungen wurden lange Zeit weiterverfolgt. Noch 1966 schlägt SCHLAICH [79] für die Windbelastung vergleichbare Ansätze vor. Bemerkenswert ist, daß sich diese Modellfunktionen im Vergleich zu den heute gebräuchlichen Rechenverfahren keineswegs als unrealistisch erweisen [83].

Mit der um 1955 einsetzenden Entwicklung leistungsfähiger Rechenhilfsmittel konnten einerseits die mechanischen Methoden zur Modellbildung von Bauteilen (FINITE-Elemente) verfeinert werden, andererseits konnten auch kompliziertere Erregungsmodelle Berücksichtigung finden. Mit der Abbildung kontinuierlicher Schwinger auf diskrete Schwinger

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$$

sowie der Aufbereitung numerischer Lösungsverfahren für diese gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen besteht die Möglichkeit zu Zeitverlaufsberechnungen (TIME-HISTORY-METHODEN). Zudem gestattete die Entwicklung der Elektronik [95], Zufallserregungen zu vermessen. Obwohl die numerischen (TIME-HISTORY) Methoden weiter verfeinert wurden, bleibt noch heute die Anwendung dieser Verfahren aufwendig. Eine realistische Behandlung von Zufallsschwingungen erfordert große Datenmengen und viele Messungen. Somit liegt eine statistische Betrachtungsweise von Zufallserregungen nahe, um zu einer geeigneten Datenreduktion zu gelangen. Da aus der Signalanalyse [80] mit regelungstechnischem Verständnis die Beschreibung von Zufallsvorgängen bekannt ist, bedient man sich dieser Methoden auch für mechanische Zufallsschwingungen. Die Entwicklung in der Behandlung zufällig erregter mechanischer

Strukturen führte zur Spektralmethode. Dieses auch in der Praxis weitverbreitete Verfahren arbeitet im Frequenzbereich. Die meisten Zufallserregungen erweisen sich als stationär und ergodisch (s. Anhang) und können statistisch durch Leistungsspektren gekennzeichnet werden. Diese Funktionen beschreiben, welche Frequenzen in einem Zufallsprozeß auftreten und wie sie gewichtet sind. Da ein stochastischer Vorgang nicht durch eine FOURIER-Transformation beschrieben werden kann, weil gewöhnlich keine Konvergenz vorliegt, erweiterte WIENER die harmonische Analyse durch Definition des Leistungsspektrums.

Wirken als Erregungen n stationäre Zufallsfunktionen $f_i(t)$ auf ein Schwingungssystem, so ist für jede dieser Zufallsvorgänge das Leistungsspektrum $S_{f_i f_i}(\omega)$ und für alle $f_i(t)$ und $f_k(t)$ das Kreuzleistungsspektrum $S_{f_i f_k}(\omega)$ definiert. Die n^2 Leistungsspektren (spektrale Dichten) lassen sich zu einer Leistungsspektralmatrix $S_{ff}(\omega)$ der mehrfach korrelierten Erregungen zusammenfassen. Es gilt (siehe auch Anhang):

$$S_{ff}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[f_T(\omega) \tilde{f}_T^T(\omega) \right]$$

$$f_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f_T(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Aus der Behandlung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$$

ist die Lösung mittels Integraltransformationen bekannt:

$$\hat{\underline{x}}(\omega) = (-\omega^2 \underline{M} + \underline{K} + i\omega \underline{D})^{-1} \hat{\underline{f}}(\omega)$$

In dieser Gleichung beschreibt

$$(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K} + i\omega \underline{D})^{-1} = \underline{F}(\omega)$$

den Frequenzgang des mechanischen Systems. Mit der konjugiert komplexen, transponierten Darstellung läßt sich die Leistungsspektralmatrix der mechanischen Zufallsschwingungen bestimmen.

Diagramm eines linearen Systems mit den Eingangs- und Ausgangsgrößen:

$$\underline{x}(\omega) = \underline{F}(\omega) \underline{f}(\omega)$$

$$\underline{\tilde{x}}(\omega) = \underline{\tilde{F}}(\omega) \underline{\tilde{f}}(\omega)$$

$$\underline{x}(\omega) \underline{\tilde{x}}^T(\omega) = \underline{F}(\omega) \underline{f}(\omega) \underline{\tilde{f}}^T(\omega) \underline{\tilde{F}}^T(\omega)$$

$$\underline{S}_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\underline{x}(\omega) \underline{\tilde{x}}^T(\omega) \right] = \underline{F}(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\underline{f}(\omega) \underline{\tilde{f}}^T(\omega) \right] \underline{\tilde{F}}^T(\omega)$$

Diagramm eines linearen Systems mit den Eingangs- und Ausgangsgrößen:

$$\underline{S}_{xx}(\omega) = \underline{F}(\omega) \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{\tilde{F}}^T(\omega)$$

Aus diesen Antwortspektren wird anschaulich das Schwingungsverhalten einer zufallserregten mechanischen Struktur erkannt. Die Spektren dienen zudem zur Berechnung von Schwingungsvarianzen. Mit einer einfachen Multiplikation berechnen sich die Mittelwerte der Schwingungsantworten über die Frequenzgangmatrix

$$\bar{\underline{x}} = \underline{F}(0) \bar{\underline{f}} \quad \bullet$$

$\underline{E}_{(0)}$ entspricht der Flexibilitätsmatrix, \bar{x} ist der Mittelwertvektor der Ausgänge und \bar{f} der entsprechende Vektor der Erregung. Bei Abspaltung der Mittelwerte erhält man die Varianzen der Schwingungsantwort aus den Leistungsspektren der Systemantworten mit

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{x_i x_i}(\omega) d\omega \quad .$$

Die Gleichung folgt aus dem WIENER-CHINTCHIN-Theorem (s. Anhang). Mit dieser Darstellung sind sowohl die Übertragung der Mittelwerte, als auch der Varianzen von der Erregung zur Antwort eines zufällig erregten mechanischen Systems möglich.

Zufallsvorgänge sind oft schmalbandige Prozesse, d.h. ihre Frequenzen treten in einem begrenzten Bereich auf. Liegen die Eigenwerte mechanischer Schwinger weit auseinander, so werden nur wenige Eigenformen des Systems angeregt. In diesem Fall eignet sich eine rechnergerechte Formulierung der Spektralmethode in modalen Koordinaten. Mit der bekannten Transformation

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi} \underline{q}(t) \quad , \quad \underline{q}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{x}(t) \quad , \quad \underline{f}_q(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t)$$

entkoppelt sich das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{q}_i(t) + 2 \delta_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t)$$

so daß mit

$$\underline{S}_{f_q f_q}(\omega) = \underline{\Phi}^T \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{\Phi}$$

und

$$\underline{F}_q(\omega) = \text{diag} [F_{q_i}(\omega)] , F_{q_i}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\delta_i\omega + \omega_i^2}$$

die Leistungsspektren der Systemantwort in modalen Koordinaten berechnet werden können:

$$S_{q_i q_j}(\omega) = F_{q_i}(\omega) \tilde{F}_{q_j}(\omega) S_{f_{q_i} f_{q_j}}(\omega) .$$

Der Übergang zum Antwortspektrum in physikalischen Koordinaten erfolgt durch Rücktransformation:

$$\underline{x}(\omega) = \underline{\phi} \underline{q}(\omega) \rightarrow \underline{S}_{xx}(\omega) = \underline{\phi} \underline{S}_{qq}(\omega) \underline{\phi}^T .$$

Dieser Weg bietet den Vorteil, rechenzeitsparend zu sein, falls mit rechteckigen Modalmatrizen $\underline{\phi}$ (Beschränkung auf wenige Eigenformen) gearbeitet werden darf. Für die Berechnung der Schwingungsvarianzen folgt mit obigen Transformationen:

$$\underline{P}_{xx} = \underline{c}_{x_i x_j}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{x_i x_j}(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\phi} \underline{S}_{qq}(\omega) \underline{\phi}^T d\omega$$

$$\underline{P}_{xx} = \frac{1}{\pi} \underline{\phi} \underline{P}_{qq} \underline{\phi}^T .$$

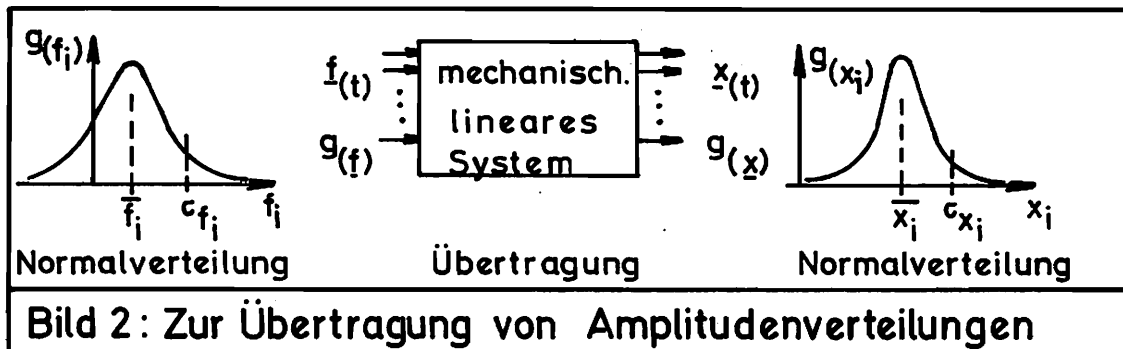
Die Theorie stochastischer Schwingungen gestattet es unter bestimmten Voraussetzungen, wie Ergodizität und Stationariät, eine Klasse von zufälligen Zeitfunktionen durch statistische Kennfunktionen zu

beschreiben. Mit Hilfe der linearen Systemtheorie läßt sich im statistischen Sinn auf den stochastischen Antwortprozeß schließen. Man erhält als wesentliches Ergebnis Mittelwert und Streuung der Systemantwort. Bei einer großen Zahl zufälliger Erregerprozesse sind die Amplituden normalverteilt. In diesem Sonderfall kann bei linearen Systemen direkt auf die Verteilungsdichte der Schwingungsamplituden geschlossen werden [25].

Ziel mechanischer Schwingungsanalysen ist, ein Versagen durch Bruch der mechanischen Struktur auszuschließen. Das einfachste Verfahren nutzt die Übertragbarkeit GAUSSscher Verteilungsdichtefunktionen:

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_f} \exp\left\{-\frac{f-\bar{f}}{2 \sigma_f^2}\right\}$$

$$\longrightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left\{-\frac{x-\bar{x}}{2 \sigma_x^2}\right\} .$$



Ist die normalverteilte Amplitudendichte bekannt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Amplituden vom Mittelwert absolut genommen um mehr als dem 3-fachen Betrag der Streuung unterscheiden, weniger als 0.01. Diese Eigenschaft GAUSS-verteilter Zufallsgrößen wird häufig als DREI-SIGMA-REGEL bezeichnet. Aus der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung [26] resultiert:

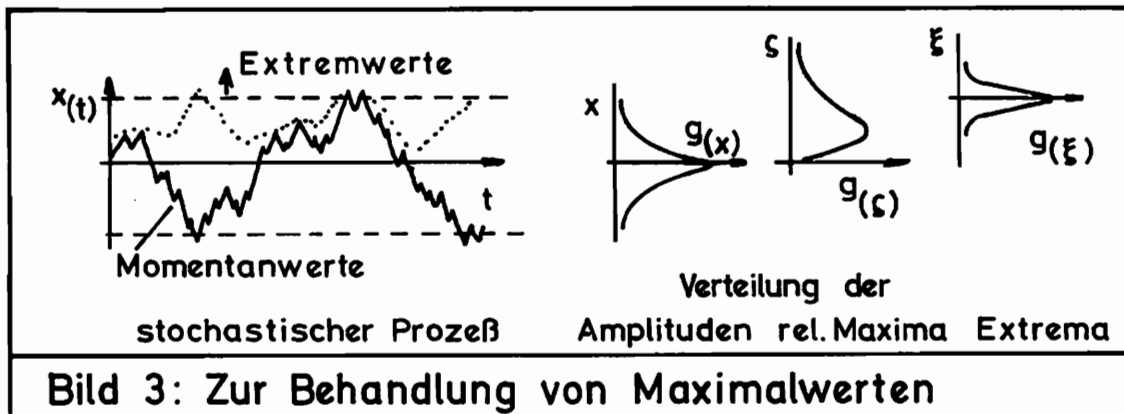
$$P \{ |x - \bar{x}| > a c_x \} \leq \frac{1}{a^2 c_x^2} c_x^2 = \frac{1}{a^2}, \quad a > 0 \quad .$$

Mit dieser Regel kann eine einfache Maximalwertabschätzung der Schwingungsamplituden vorgenommen werden.

$$\underline{x}_{\max} = \bar{x} + a c_{ii}, \quad 2.5 \leq a \leq 4.5$$

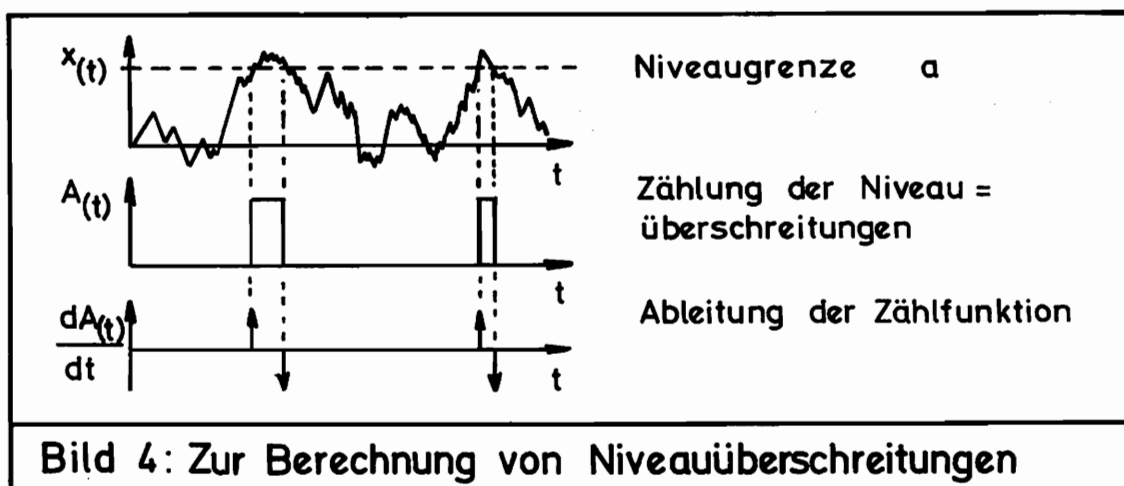
Anhand von TIME-HISTORY-Berechnungen von Turmtragwerken [38] unter gemessener Windbelastung fand der Verfasser die DREI-SIGMA-REGEL mit Werten von 2.8 bis 4 bestätigt. Die grobe Abschätzung maximaler Beanspruchung ist ein Anhalt, durch den der Praktiker dem Zufall nicht grenzenlos ausgeliefert ist. Die maximale Beanspruchung eines Bauteils unter stochastischer Belastung ist nicht als deterministische Größe berechenbar. Sie ist eine Schätzung unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten. Aus diesem Grunde befriedigt die DREI-SIGMA-REGEL nicht. Man versucht daher, die maximale Beanspruchung mathematisch enger einzugrenzen.

Bei der Untersuchung einer (zeitabhängigen) Zufallsgröße wird unterschieden [66] zwischen den Verteilungen der momentanen Amplituden, der relativen Maximalwerte (Einhüllenden) und den über einen langen Zeitraum möglichen Extremwerten. Letztere sind in Messungen nur vereinzelt anzutreffen.



Den Konstrukteur interessiert die Verteilung der Extremwerte, aus der er die zur Auslegung benötigte maximale Beanspruchung geeignet abschätzen muß. Diese Verteilungsdichtefunktion ist zeitabhängig. Sie hängt von der Nutzungsdauer eines Bauteils ab.

Um Extremwertverteilungen berechnen zu können, geht man von dem Begriff der Niveauüberschreitung [43,82] aus. Zur Veranschaulichung dient das folgende Bild.



Für den stochastischen Prozeß $x(t)$ (z. B. mechanische Strukturschwingung) wird eine Amplitude a festgelegt, deren Überschreitungshäufigkeit durch

die zufällige Variable $x_{(t)}$ von Interesse ist. Zur Ermittlung allgemeiner Beziehungen wird die Funktion

$$A_{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{für } x_{(t)} \geq a \\ 0 & \text{für } x_{(t)} < a \end{cases}$$

sowie deren Ableitung

$$\frac{dA_{(t)}}{dt} = \dot{x}_{(t)} \delta(x_{(t)} - a)$$

betrachtet. Beide Gleichungen zählen die Überschreitungen des Niveaus a durch den stochastischen Prozeß. Im deterministischen Sinne gilt für die Anzahl der Überschreitungen:

$$N_{x(a,T)} = \sum \dot{x}_{(t)} \delta(x_{(t)} - a) \Delta t$$
$$N_{x(a,T)} = \int_0^T \dot{x}_{(t)} \delta(x_{(t)} - a) dt \quad \bullet$$

Diese Gleichung verbindet die Anzahl der Niveauüberschreitungen innerhalb eines definierten Zeitintervalls mit der Zufallsfunktion. Löst man sich von einer deterministischen Vorstellung dieser Zufallsvorgänge, so kann die Anzahl der Überschreitungen nur statistisch betrachtet werden. Die Zufallsfunktion ist eine Musterfunktion aus einem Ensemble statistisch gleichwertiger Prozesse, so daß für obige Gleichungen der Erwartungswert gebildet werden muß.

$$E\{N_x(a,T)\} = E\left\{\int_0^T \dot{x}(t) \delta(x(t) - a) dt\right\}$$

$$= \int_0^T E\{\dot{x}(t) \delta(x(t) - a)\} dt$$

Als Erwartungswert einer zufälligen Funktion $z(t)$ mit der Amplitudendichteverteilung $g(z)$ bezeichnet man den Ausdruck

$$E\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z} g(z) dz$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich:

$$E\{\dot{x}(t) \delta(x(t) - a)\} = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{x}(t) \delta(x(t) - a)) g_{x\dot{x}}(x=a, \dot{x}, t) dx d\dot{x} \right] dt$$

Für stationäre, ergodische Zufallsprozesse gilt [26,82]

$$g(x, \dot{x}) = g(x) g(\dot{x})$$

und unter Berücksichtigung normalverteilter Amplituden:

$$g(x, \dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} \exp\left\{-\frac{(\dot{x} - \bar{\dot{x}})^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right\}$$

Hiermit ergibt sich der Erwartungswert der Anzahl der Niveauüberschreitungen zu

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \delta(x-a) da = g(a) \right), \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} x dx = \frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned} E\{N_x(a,T)\} &= T \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left\{-\frac{(a-x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} \exp\left\{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right\} d\dot{x} \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{1}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \exp\left\{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x} \exp\left\{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right\} d\dot{x} \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right\} \end{aligned}$$

Wird die Niveaugrenze variabel gehalten und ist der Zufallsprozeß von seinem Mittelwert befreit, so folgt die von RICE (1954) erstmals aufgezeigte Nullstellendichte:

$$N_x(\xi, T) = \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right\}, N_x(0, T) = \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}$$

An dieser Stelle ist nach der Verteilung der Extremwerte gefragt. Die Wahrscheinlichkeit, daß hohe Niveaugrenzen überschritten werden, ist gering. Zur Charakterisierung seltener Ereignisse bedient sich der Statistiker einer POISSON-Verteilung:

$$P_r = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

Diese Gleichung besagt, daß das r -malige Eintreten eines seltenen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit P_r besitzt. λ ist eine positive Zahl, die aus dem Stichprobenumfang und der Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses gebildet wird. Im vorliegenden Fall wird aus einem großen Zeitintervall T die wahrscheinliche Anzahl von Überschreitungen einer hohen Niveaugrenze gesucht, deren Wahrscheinlichkeit im infinitesimalen Bereich $(t, t + \Delta t)$

$$N_x(\xi) = N_\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{c\dot{x}}{\sigma_x} \exp\left\{-\left\{\frac{\xi}{2\sigma_x^2}\right\}\right\}$$

beträgt. Mit der POISSON-Verteilung lautet die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Zeitintervall T der stochastische Prozeß $x(t)$ die (hohe) Niveaugrenze a k -mal überschreitet:

$$P_k = \frac{(TN_x(a))^k}{k!} \exp\{-TN_x(a)\} .$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable den gewählten Extremwert nicht erreicht:

$$P_0 = \exp\{-TN_x(a)\} = \exp\left\{-\frac{T}{2\pi} \frac{c\dot{x}}{\sigma_x} \exp\left\{-\left\{\frac{a}{2\sigma_x^2}\right\}\right\}\right\} .$$

Aufgrund der variablen Niveaugrenze ist die Einzelwahrscheinlichkeit P_0 als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion zu schreiben:

$$G(\xi) = \exp\left\{-\frac{T}{2\pi} \frac{c\dot{x}}{\sigma_x} \exp\left\{-\left\{\frac{\xi}{2\sigma_x^2}\right\}\right\}\right\} = \exp\{-TN_\xi\} .$$

Durch Differentiation erhält man die gesuchte Extremwertverteilungsdichtefunktion:

$$g(\xi) = \frac{T \sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x^3} \xi \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right\} - T \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right\} .$$

Die Funktion stellt die Verteilung von Extremwerten der Zufallsgröße $x(t)$ im Zeitintervall T dar. Sie darf nicht als Verteilungsfunktion der relativen Maxima (Bild 3) gedeutet werden. Mittelwert und Streuung der Verteilungsdichtefunktion erhält man in bekannter Weise:

$$\bar{\xi} = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi g(\xi) d\xi$$
$$\sigma_{\xi}^2 = E\{(\xi - \bar{\xi})^2\} .$$

Zur expliziten Berechnung dieser statistischen Kennwerte wird die variabel gehaltene Niveaugrenze ξ benötigt. Mit

$$TN_{\xi} = \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right\} = TN_0 \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

folgt

$$\xi = \sigma_x \sqrt{2 \ln TN_{\xi} + 2 \ln TN_0}$$

und hiermit

$$\left(\xi g(\xi) d\xi = \xi \frac{dG(\xi)}{d(TN_\xi)} d(TN_\xi) \right)$$

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x \sqrt{2 \ln TN_\xi + 2 \ln TN_0} \exp\{-TN_\xi\} d(TN_\xi) \cdot$$

Durch Reihenentwicklung folgt für den Mittelwert

$$\bar{\xi} = \sigma_x \left\{ \sqrt{2 \ln TN_0} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln TN_0}} - \frac{0.9862}{\sqrt{2 \ln(TN_0)^3}} + \dots \right\}$$

und entsprechend für die Streuung:

$$\sigma_\xi = E\{(\xi - \bar{\xi})^2\} = \sigma_x \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2 \ln TN_0}} + \dots \right\} \cdot$$

Vernachlässigt man Glieder höherer Ordnung, so erhält man eine Näherung, die zur Abschätzung maximaler Beanspruchung eines mechanischen Systems unter zufälliger Erregung geeignet ist. PETERSEN stellt in [66] die Verteilungsfunktionen für verschiedene Werte TN_ξ graphisch dar (Bild 5).

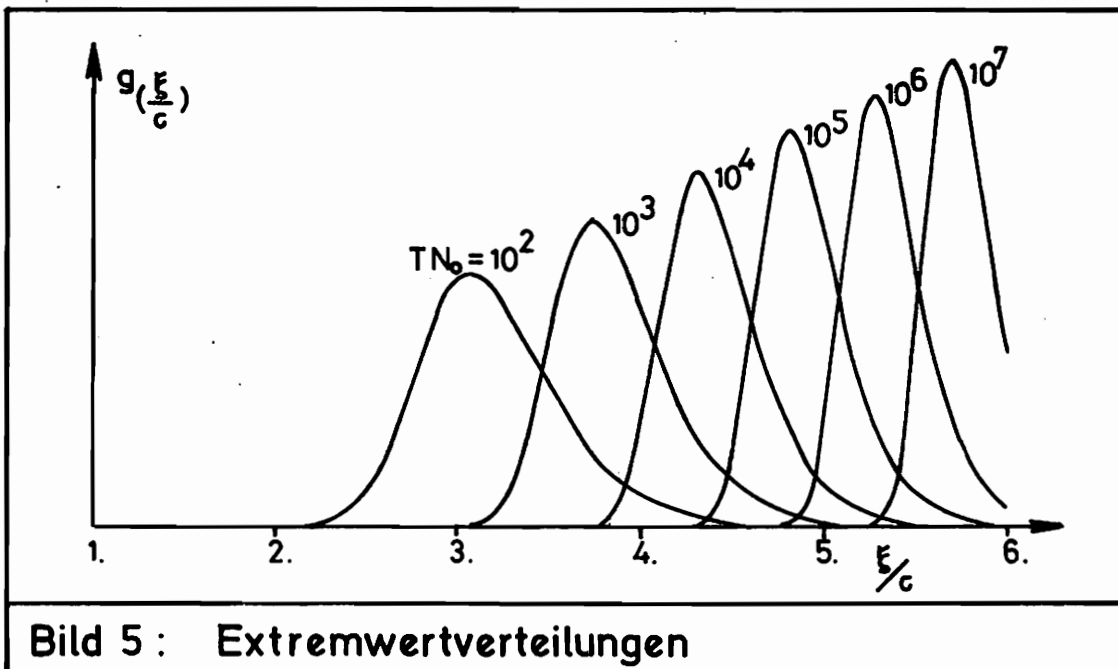


Bild 5 : Extremwertverteilungen

Man erkennt, wie sich die Verteilungsdichtefunktionen mit zunehmender Intervallzeit T enger um den Mittelwert gruppieren. Diese Tatsache nutzt DAVENPORT bei der aerodynamischen Belastung von Bauwerken [22] zur Entwurfsgrundlage, indem er den Mittelwert der Verteilungsdichtefunktion dem zu erwartenden Maximalwert der Berechnung zugrundelegt.

Die dargestellte Methode führt im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne zur Verteilung extremer Schwingungsamplituden einer mechanischen Struktur unter stochastischer Belastung. Aus dieser Verteilung muß der Praktiker die maximal zulässige Beanspruchung zur Auslegung seines Bauteils geeignet abschätzen. Da es keine deterministische Höchstbelastung gibt, bleibt auch die Frage der Sicherheit offen. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen sind von Annahmen geprägt, deren Überprüfung durch Meßdaten [40, 28, 89] andauern. Daß diese Vorgehensweise erst zum jetzigen Zeitpunkt möglich ist, liegt an der verfeinerten Meßtechnik und der Verfügbarkeit von Meßdaten. Zur Verbesserung der Extrem- und Maximalwerttheorie werden Meßergebnisse als Zeitrealisierungen herangezogen. Nun stellt aber jede dieser Messung allenfalls eine Musterfunktion eines Ensembles dar, mit der nur wenig Statistik betrieben werden kann. Extremwerte sind nur vereinzelt in Meßreihen

zu finden. Um das Angebot von Meßdaten stochastischer Prozesse zu erweitern, bedient man sich häufig der numerischen Simulation von Zufallsvorgängen [36,86,98]. Hierbei handelt es sich um die Filterung von stochastischen Rauschprozessen, die bandbegrenzt eine konstante spektrale Dichte aufweisen und untereinander unkorreliert sind. Einen solchen Zufallsvorgang nennt man auch weißes Rauschen (s.u.). Physikalisch kann man sich solche Prozesse durch eine regellose Folge von sehr kurzen, dicht aufeinanderfolgenden Impulsen entstanden denken. Derartige Folgen werden pseudozufällig bezeichnet, wenn sie durch einen deterministischen Algorithmus numerisch erzeugt werden. Sie besitzen bei hinreichend großer Zahl gewöhnlich die für den gewünschten Zweck charakteristischen Eigenschaften echter Zufallsfolgen. Dies sind Stationarität und Ergodizität sowie Normalverteilung der Amplituden.

Für den zu simulierenden stochastischen mehrfachkorrelierten Prozeß wird dessen spektrale Dichtematrix in Form von Meßwerten oder analytischen Funktionsverläufen als bekannt vorausgesetzt.

Aus der Theorie linearer Systeme ist die Übertragung von Leistungsspektralmatrizen bekannt (s.o.):

$$\underline{S}_{xx}(\omega) = \underline{F}(\omega) \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{F}^T(\omega) \cdot$$

Die Problemstellung bei der numerischen Simulation unterscheidet sich von der obigen, da sowohl die Leistungsspektralmatrix der Erregung (weißes Rauschen) als auch des zu simulierenden Prozesses bekannt ist.

$$\underline{S}(\omega) = \underline{E}(\omega) \underline{I} \underline{E}^T(\omega)$$

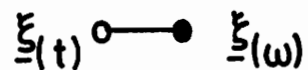
Unbekannt ist die Matrix $\underline{E}(\omega)$, die bei linearen mechanischen Systemen den Frequenzgang des Systems beschreibt. Bei der numerischen Simulation

kennzeichnet diese Matrix ein Filter, über das die weißen Rauschprozesse zu einem mehrfachkorrelierten stochastischen Prozeß mit gegebener spektraler Dichtematrix geformt werden. Aufgrund der positiven Definitheit hermitescher Leistungsspektralmatrizen lassen sich diese stets in der Form

$$\underline{S}(\omega) = \underline{E}(\omega) \underline{\tilde{E}}^T(\omega)$$

darstellen. Die numerisch einfachste Methode ist eine Zerlegung in obere und untere Dreiecksmatrix nach dem CHOLESKY-Verfahren an diskreten Stützstellen.

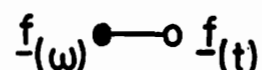
Mit der FOURIER-Transformation weißer Rauschvorgänge


$$\underline{\xi}(t) \text{ --- } \underline{\xi}(\omega)$$

erhält man durch Übertragung im Frequenzbereich

$$\underline{f}(\omega) = \underline{E}(\omega) \underline{\xi}(\omega)$$

und anschließender Rücktransformation in den Zeitbereich


$$\underline{f}(\omega) \text{ --- } \underline{f}(t)$$

einen stochastisch mehrfachkorrelierten Prozeß mit den gewünschten statistischen Eigenschaften. Dem Verfasser gelang mit dieser Methode die Simulation von Windgeschwindigkeitsverläufen [36], wobei gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und simulierten Zeitreihen festzu-

stellen sind. Vergleichbare Simulationstechniken findet der Leser in [36,86,98].

Da die obigen Gleichungen zur numerischen Simulation von Zufallsprozessen aus der linearen Systemtheorie abgeleitet wurden, muß theoretisch eine Realisierbarkeit der Filterfunktionen möglich sein. Unter Realisierbarkeit wird die Herleitung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung aus der Filtermatrix verstanden. Die lineare Systemtheorie kennt die inverse Fragestellung durch Bestimmung der Systemfrequenzgänge aus der Differentialgleichung.

<p>gegeben :</p> $\underline{E}(\omega)$ <p>aus $\underline{S}(\omega) = \underline{E}(\omega) \underline{E}^T(\omega)$</p> <p>gesucht:</p> $\underline{E}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad \text{für}$ $\underline{x}(t) = \underline{C} \underline{y}(t)$ $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)$ <p>Simulationstechnik</p>	<p>gegeben :</p> $\underline{x}(t) = \underline{C} \underline{y}(t)$ $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{f}(t)$ <p>gesucht:</p> $\underline{F}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$ <p>lineare Systemtheorie</p>
<p>Bild 6: Inverse Fragestellungen in der Simulationstechnik und in der linearen Systemtheorie</p>	

In der Regel wird in der Simulationstechnik die Realisierbarkeit der Filtermatrix nicht gefordert, da numerisch im Frequenzbereich gefiltert wird. Obwohl bei dieser Methode eine den stochastischen Prozeß beschreibende Differentialgleichung bisher nicht von Interesse war, verschafft die erweiterte Problemstellung Zugang zu einer modernen Theorie in der Behandlung zufälliger Vorgänge.

Neben den beschriebenen Methoden ist die mathematische Theorie stochastischer Differentialgleichungen bekannt [4,24], die auf

grundlegende Arbeiten von ITÖ [46] (1951) aufbaut und von einer Differentialgleichung zur Beschreibung stochastischer Prozesse ausgeht. Es sind formal gewöhnliche Differentialgleichungen mit weißem Rauschen als Störfunktion (s.u.)

$$\dot{w}(t) = f(t, w(t)) + G(t, w(t)) \xi(t)$$

und entsprechen im linearen Fall der oben angesprochenen Realisierung von Filtermatrizen zur numerischen Simulation stochastischer Prozesse. Da diese Theorie bislang wenig anwendungsorientiert verfaßt ist, wird die Spektralmethode in der Praxis vorgezogen. Setzt man aber die Kenntnis einer stochastischen Differentialgleichung voraus, so ermöglicht diese Theorie eine wesentlich vereinfachte Berechnung von Varianzen, da diese direkt aus der Lösung einer bilinearen Matrixgleichung der Form (s.u.)

$$P A + A^T P = -B B^T$$

gefunden werden können. Seit 1975 versucht man daher, diese mathematische Theorie auch auf mechanische Strukturschwingungen infolge zufälliger Erregungen anzuwenden. Unter dem Begriff Kovarianzanalyse existieren eine Reihe von Arbeiten [57,78,93] zu diesem Problemkreis. Die Verwertung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen gelingt für theoretisch erdachte Problemstellungen. Erst in jüngster Zeit (1979/80) werden Fahrzeugschwingungen infolge Fahrbahnerregung [59,60] mit dieser Methode bearbeitet. Hierbei handelt es sich um skalare stochastische Prozesse. In der Natur treten Zufallserregungen zum überwiegenden Teil (z. B. Windbelastung) als mehrfachkorrelierte stochastische Prozesse auf. Zur Lösung derartiger Probleme trägt diese Arbeit bei. Vor dem angesprochenen Hintergrund einer erweiterten Simulationstechnik werden Filtermatrizen realisiert, so daß mehrfachkorrelierte Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen

beschrieben werden können. Da von Meßdaten stochastischer Vorgänge ausgegangen wird, können die bisher vereinzelt behandelten Sachgebiete Signalanalyse, Spektralmethode, Realisation von Filtermatrizen, numerische Simulationstechnik, Theorie stochastischer Differentialgleichungen, Kovarianzanalyse und Maximalwertabschätzung als gemeinsame Theorie zur Behandlung mechanischer Zufallsschwingungen angesehen werden. Die Anlehnung an systemtheoretische Gesichtspunkte ermöglicht den Übergang von der Signalanalyse zur modernen Theorie stochastischer Differentialgleichungen. Hierdurch entsteht eine anwendungsorientierte Kovarianzanalyse mehrfachkorrelierter Zufallsschwingungen, deren Ergebnisse direkt mit der vorgestellten Extremwerttheorie weiterverarbeitet werden können. Einen Beitrag zur numerischen Simulation stochastischer Prozesse leistet die Zerlegung von Leistungsspektralmatrizen in Filtermatrizen und deren Realisation durch stochastische Differentialgleichungen. Hierdurch kann z. B. die Theorie der Maximalwertabschätzung praxisnah überprüft werden, da beliebig viele Daten zu TIME-HISTORY-Rechnungen numerisch mit bestimmten statistischen Merkmalen erzeugt werden können. Ferner können Sonderfragen wie nichtlineares Werkstoffverhalten oder Ermüdungsprobleme mit dieser Methode bearbeitet werden.

Einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung und Behandlung von Zufallsschwingungen vermittelt Bild 7.

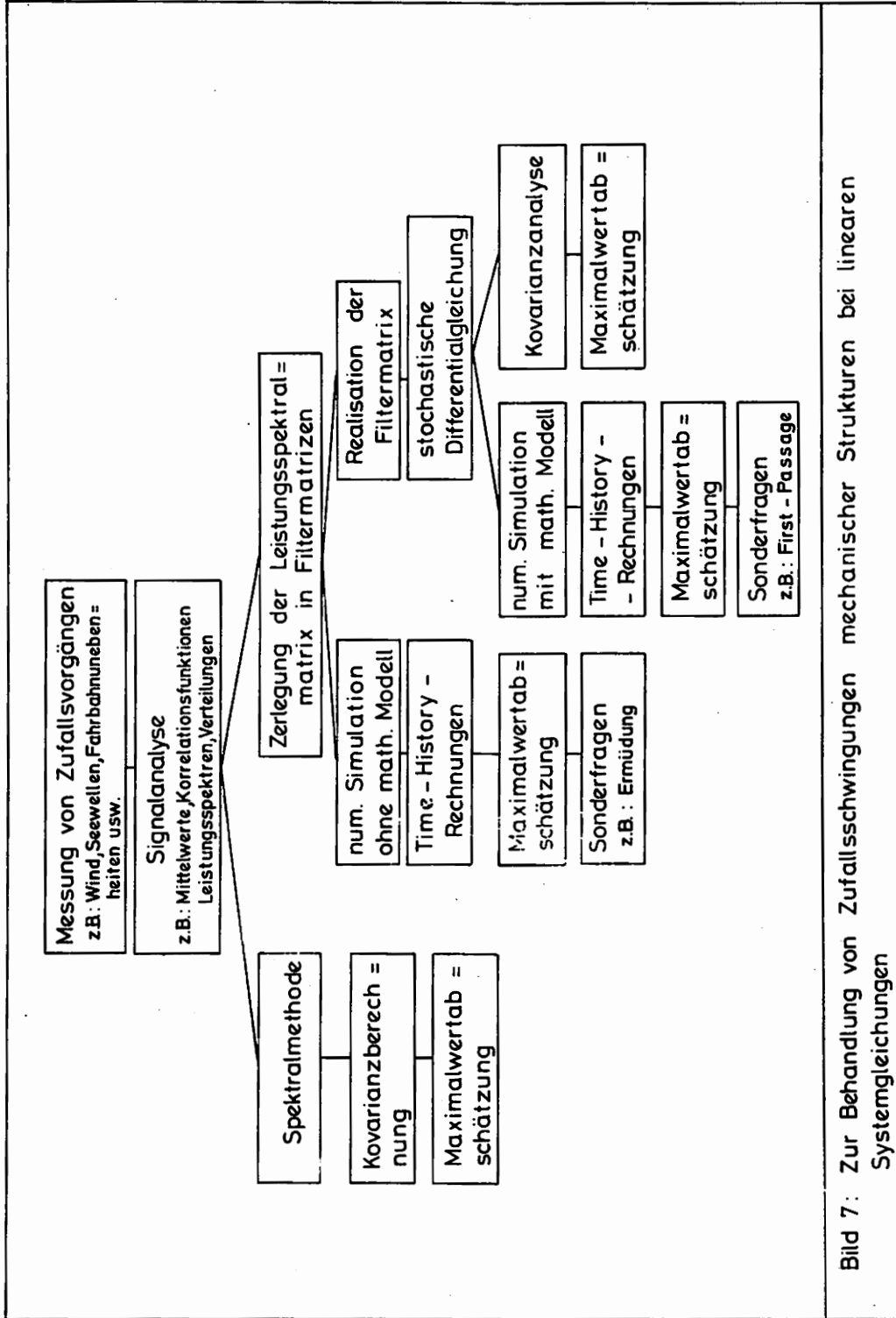
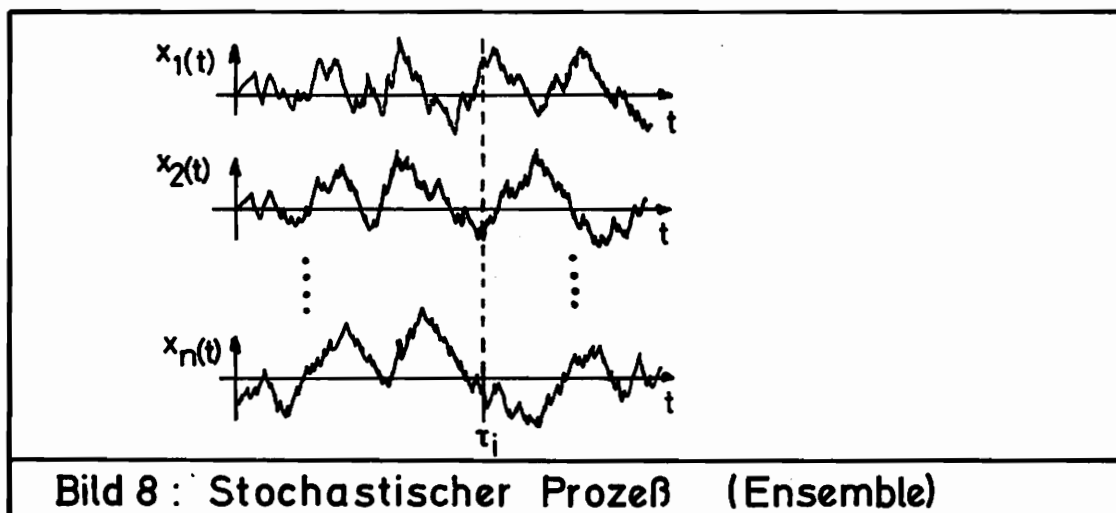


Bild 7: Zur Behandlung von Zufallsschwingungen mechanischer Strukturen bei linearen Systemgleichungen

3. Die Beschreibung zufälliger Prozesse durch stochastische Differentialgleichungen

3.1 Der stochastische Prozeß

Bei vielen ingenieurwissenschaftlichen Problemen läßt sich der zeitliche Erregungsverlauf einer mechanischen Struktur nicht als deterministische Muster-Zeitfunktion definieren. Denkt man an die Fahrt eines Automobils über unebene Straßen oder an die aerodynamische Belastung von Gebäuden durch Wind, so erkennt man, daß die Einzelbelastungen nur als Teil einer Menge klassengleicher Zufallserregungen zu verstehen sind. Die unter gleichen Voraussetzungen zusammengefaßten zeitvarianten Realisierungen von Zufallsvorgängen bilden ein Ensemble oder einen stochastischen Prozeß. Bild 8 veranschaulicht einen solchen zufälligen Vorgang



Zur Kennzeichnung stochastischer Prozesse dienen statistische Parameter, wie Mittelwert, Varianz, oder als Funktionen spektrale Leistungsdichten, Korrelationsfunktionen und Amplitudenverteilungen (s. Anhang). Die in dieser Arbeit zu behandelnden stochastischen Prozesse und ihre Beschreibung durch stochastische Differentialgleichungen werden auf die Klasse der in der Natur am häufigsten vorkommenden stationären ergodischen Zufallsvorgänge mit Gaußscher Amplitudenverteilung beschränkt. Hierunter

werden Prozesse mit zeitinvarianten, statistischen Kenngrößen (Stationarität) und untereinander gleichen Kennwerten aller Zufallsgrößen (Ergodizität) eines Ensembles (Bild 8) verstanden.

3.2 Das weiße und das farbige Rauschen

Die Begriffe "weißes" und "farbiges" Rauschen kennzeichnen allgemein zwei Typen stochastischer Gauß-Prozesse mit verschiedenen Frequenzverteilungen. Bild 9 zeigt Korrelationsfunktionen und Leistungsspektren von weißem und farbigem Rauschen.

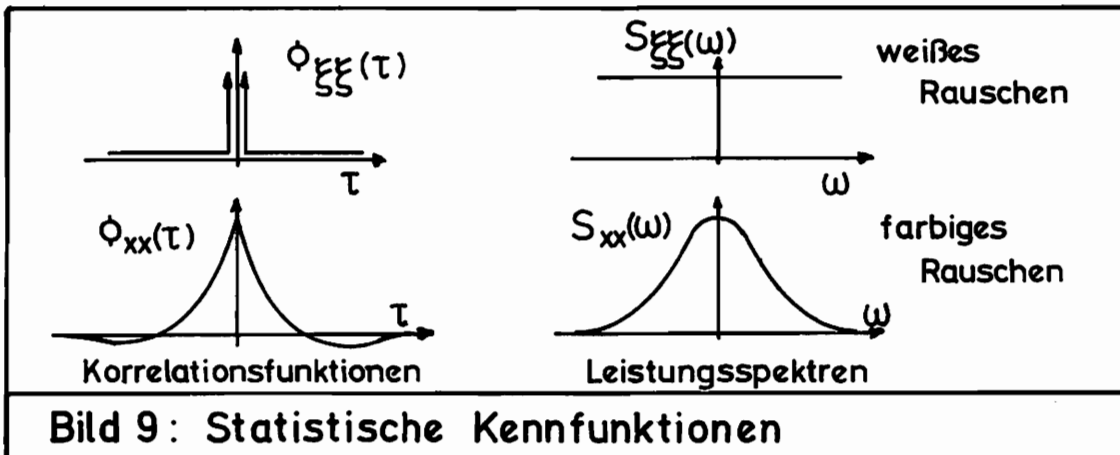


Bild 9 : Statistische Kennfunktionen

Der als sogenanntes "weißes Rauschen" bezeichnete stationäre stochastische Gauß-Prozeß wird durch einen verschwindenden Mittelwert und einer auf der gesamten Frequenzachse (ω -Achse) konstanten spektralen Dichte sowie einer Gaußschen Amplitudenverteilung charakterisiert. In Anlehnung an den Begriff vom "weißem Licht", welches alle Frequenzen des sichtbaren Lichtes mit gleicher Intensität enthält, kennzeichnet das gleichmäßige Auftreten "aller" Frequenzen in einem stochastischen Prozeß das weiße Rauschen. Daß ein solcher Prozeß im physikalischen Sinne nicht existiert, wird bei Betrachtung der Korrelationsfunktion (Bild 9) deutlich, die der Dirac-Funktion entspricht. Der Prozeß ist zu allen Zeitpunkten $\tau > 0$ statistisch unabhängig und besitzt im Grenzübergang zu $\tau = 0$ eine unendlich große Streuung. Der Zufallsvorgang besitzt also unendliche Energie und ist physikalisch unrea-

listisch. Trotzdem stellt das "weiße Rauschen" einen mathematischen Modellprozeß dar, der sich für die Beschreibung schnell schwankender und zu verschiedenen Zeiten unkorrelierter Ereignisse eignet. Er wurde schon 1908 von LANGEVIN beim Studium der Brownschen Bewegung von Molekularpartikeln in Flüssigkeiten als Denkhilfe benutzt.

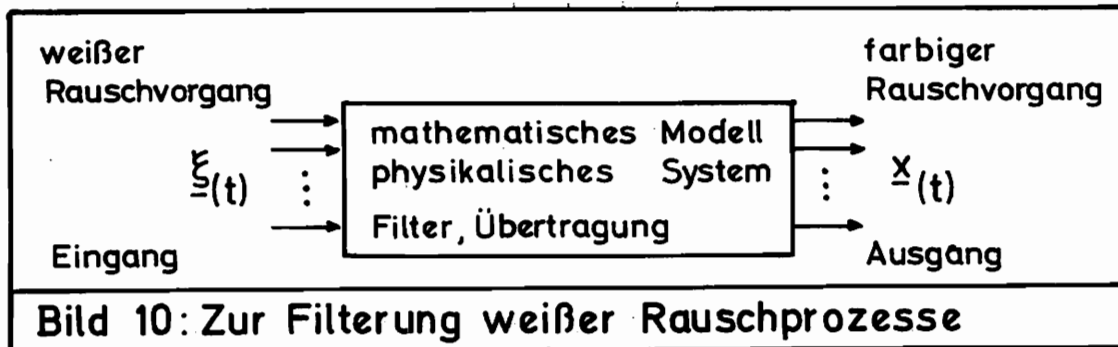
Zur Eingliederung in eine strengere Theorie führt man den WIENER-Prozeß ein, der einer Integration des weißen Rauschen über einen endlichen Zeitraum entspricht. Hierdurch ergibt sich formal ein Prozeß mit Gaußscher Amplitudenverteilung, verschwindendem Mittelwert, aber endlicher Varianz. Ein stationärer Prozeß W_t mit Gaußscher Amplitudenverteilung wird im Zeitintervall $(0 < t < \infty)$ bei unabhängigen Zuwächsen ($E \{ w_t - w_\tau \} = 0$), einer Normalverteilung der Zuwächse mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz $(t - \tau)$ sowie mit einem Anfangswert ($w_0 = 0$) als WIENER-Prozeß bezeichnet.

Während das weiße Rauschen einen Zufallsprozeß charakterisiert, dessen Frequenzen gleichmäßig über den vollen $(-\infty \div +\infty)$ Frequenzbereich verteilt sind und dessen Ereignisse "quasi" unabhängig voneinander bleiben, sind die meisten Naturvorgänge mit dem Begriff des "farbigen Rauschens" zu umschreiben. Physikalisch realisierbare Prozesse sind immer differenzierbare Prozesse mit ungleichmäßig verteilter Spektralintensität und endlicher Streuung. Bild 9 zeigt typische statistische Kennfunktionen dieser Prozesse.

Die große Bedeutung des Modellprozesses "weißes Rauschen" wird im nächsten Abschnitt bei der Herleitung farbiger Zufallsvorgänge aus dem Dirac-Delta-korrelierten Prozeß sichtbar.

3.3 Die stochastische Differentialgleichung

Jedes Einwirken weißer Rauschvorgänge auf dynamische Systeme (z. B. ein Regelsystem oder eine mechanische Struktur) führt zu einer farbigen Antwort desselben. Der rauhe Eingangsprozeß wird geglättet. Betrachtet man einen solchen dynamischen Vorgang (Bild 10), so sind die statistischen Ein- und Ausgangskennfunktionen mit denen in Bild 9 vergleichbar.



Man kann in diesem Zusammenhang auch von einer Filterung der Eingangsfrequenzen oder einer Transformation der Spektralintensität sprechen. Betrachtet man das Zeitverhalten derartiger dynamischer Systeme, so läßt es sich durch die folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$\frac{d \underline{X}(t)}{dt} = \underline{f}(t, \underline{X}(t)) + \underline{g}(t, \underline{X}(t)) \underline{\xi}(t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq T \leq \infty$$

Da in dieser Differentialgleichung der mathematische Modellprozeß des weißen Rauschens $\underline{\xi}(t)$ als Störgröße vorkommt, spricht man auch von einer stochastischen Differentialgleichung. Mit dem oben verbal eingeführten WIENER-Prozeß

$$dW_{(t)} = \underline{\xi}(t) dt$$

schreibt sich die obige Gleichung wie folgt:

$$d\underline{X}(t) = \underline{f}(t, \underline{X}(t)) dt + \underline{g}(t, \underline{X}(t)) dW_{(t)} \\ \text{für } t_0 \leq t \leq T \leq \infty$$

Es sei vermerkt, daß Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Form

$$\underline{X}^{(n)}(t) = \underline{f}(t, \underline{X}(t), \dots, \underline{X}^{(n-1)}(t)) + \underline{g}(t, \underline{X}(t), \dots, \underline{X}^{(n-1)}(t)) \underline{\xi}(t)$$

mit den Anfangswerten $\underline{X}_{t_0}^{(i)} = \underline{m}_i$; $i = 0, 1, \dots, n-1$ und dem m -fachen Vektor des weißen Rauschens $\underline{\xi}_t$ wie üblich in eine (stochastische) Differentialgleichung 1. Ordnung überführt werden können:

$$d\underline{X}(t) = d \begin{bmatrix} \underline{X}(t) \\ \vdots \\ \underline{X}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}(t) \\ \vdots \\ \underline{f}(t, \underline{X}(t), \dots, \underline{X}^{(n-1)}(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underline{g}(t, \underline{X}(t), \dots, \underline{X}^{(n-1)}(t)) \end{bmatrix} d\underline{W}(t)$$

Formuliert man diese Gleichung als integrale Vektorgleichung, so folgt:

$$\underline{X}(t) = \underline{m} + \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{X}(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{g}(\tau, \underline{X}(\tau)) d\underline{W}(\tau)$$

für $t_0 \leq t \leq T \leq \infty$

Derartige Gleichungen heißen stochastische Differentialgleichungen [4, 5] und sind mit den zufälligen Anfangswerten $\underline{X}_{(t_0)} = \underline{m}$ eine symbolische Schreibweise der stochastischen Integralgleichung. $\underline{X}(t)$ stellt im Intervall $[t_0, T]$ einen stochastischen Prozeß dar, wenn er die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. Die Gleichungen gelten ohne Einschränkung für alle $t \in (t_0, T)$.

2. Die Integrale

$$\int_{t_0}^T |f(\tau, X(\tau))| d\tau \quad , \quad \int_{t_0}^T |g(\tau, X(\tau))|^2 d\tau$$

bleiben endlich.

3. Der stochastische Prozeß X_t ist meßbar für alle t im Intervall $[t_0, T]$, d.h. antwortet auf $\xi(t)$ kausal und nicht vorgreifend.

Eine stochastische Differentialgleichung beschreibt also einen farbigen Zufallsprozeß, der aus weißen Rauschvorgängen hervorgeht. Hierbei kann der stochastische Prozeß sowohl als Antwortprozeß eines realen technischen Systems, aber auch als ein mathematischer Modellprozeß verstanden werden.

Im Unterschied zur (klassischen) gewöhnlichen Differentialgleichung enthält eine stochastische Differentialgleichung als Störgröße das weiße Rauschen und kann allgemein zufällige Funktionen, Koeffizienten und Parameter enthalten. Das weiße Rauschen ist zwar ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß, der durch Integration zum WIENER-Prozeß wird, doch stellt das Integral

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} \xi(\tau) d\tau$$

einen mathematischen Ausdruck mit stetigen, aber zu keinem Zeitpunkt differenzierbaren Funktionswerten dar. Der Integralausdruck bedarf einer gesonderten theoretischen Untersuchung und rechtfertigt den Begriff stochastische Differentialgleichung.

3.4 Das stochastische Integral

Da der WIENER-Prozeß $W_{(t)}$ zwar stetig, jedoch zu keinem Zeitpunkt differenzierbar ist, sind Integrale der Form

$$J_{(t)} = \int_0^t G_{(\tau)} dW_{(\tau)}$$

keine gewöhnlichen RIEMANN-STIELTJES Integrale. Der Begriff des stochastischen Integrals findet sich bei ITÜ [46], der im Jahre 1951 derartige Integrale für eine Vielzahl von Funktionen $G_{(\tau)}$ definierte und somit die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen begründete.

Transformiert man den WIENER-Prozeß nichtlinear mit T , so lautet die TAYLOR-Entwicklung:

$$T(W_{(t+\Delta t)}) = T(W_{(t)}) + T'(W_{(t)}) \Delta W_{(t)} + T''(W_{(t)}) \frac{\Delta W_{(t)}^2}{2} + \dots$$

mit $\Delta W_{(t)} = W_{(t+\Delta t)} - W_{(t)}$

Mit den unabhängigen Realisierungen des WIENER-Prozesses folgt

$$E \{ \Delta W_{(t)} \} = 0 \quad , \quad E \{ \Delta W_{(t)}^2 \} = \Delta t$$

Formal erhält man also aus der Differentiation von $T(w(t))$

$$dT(W_{(t)}) = T'(W_{(t)}) dW_{(t)}$$

und aus der TAYLOR-Reihe

$$dT(W_{(t)}) = T(W_{(t+\Delta t)}) - T(W_{(t)}) = T'(W_{(t)}) \Delta W_{(t)} + T''(W_{(t)}) \frac{\Delta W_{(t)}^2}{2} + \dots$$

Bildet man nun in beiden Fällen die Erwartungswerte, so ergibt sich ein Widerspruch, wenn die TAYLOR-Reihe ohne Berücksichtigung höherer Ableitung gebildet wird:

$$E \left\{ \frac{d}{dt} T(W_{(t)}) \right\} = \frac{1}{2} E \left\{ T''(W_{(t)}) \right\} + \dots$$

$$E \left\{ dT(W_{(t)}) \right\} = E \left\{ T'(W_{(t)}) \right\} E \left\{ dW_{(t)} \right\} = 0$$

Um diese Diskrepanz zu beheben, die eine übliche Vernachlässigung der Terme höherer Ableitungen in der TAYLOR-Reihe nicht gestattet, führte ITÖ die folgende spezielle Differenzierregel für transformierte WIENER-Prozesse ein.

Nach ITÖ gilt:

$$dT(W_{(t)}) = T'(W_{(t)}) dW_{(t)} + \frac{1}{2} T''(W_{(t)}) dt$$

und somit:

$$\int_{t_0}^{t_1} T'(W_{(t)}) dW_{(t)} = T(W_{(t_1)}) - T(W_{(t_0)}) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} T''(W_{(t)}) dt$$

Bei den in dieser Arbeit vorkommenden Formen von stochastischen Integralen

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau) dW(\tau)$$

kann vorausgesetzt werden, daß mit $t_i - t_{i+1}$ gegen Null die Funktion $G(t)$ als Treppenfunktion, also als konstant zwischen t_i und t_{i+1} , angesehen werden darf. Somit läßt sich der Integralausdruck als Grenzwert einer Summe formulieren:

$$\int_{t_0}^T G(\tau) dW(\tau) = \lim_{\min(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} G(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

Hinsichtlich allgemeinerer Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen, wie $G(\tau) = W(\tau)$ sei auf die Literatur [4,5,24,47,65] verwiesen.

3.4.1 Der Erwartungswert und die Varianz des stochastischen Integrals

Die Definition eines stochastischen Integrals ist von tragender Bedeutung für die weiteren Ableitungen zur direkten Berechnung von Kovarianzmatrizen zufällig erregter mathematischer Modelle oder physikalischer Systeme. Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, daß das Hauptanliegen dieser Arbeit nicht in einer deterministischen Schwingungsberechnung, sondern in einer stochastischen Berechnung zufallserregter mechanischer Strukturen besteht. Daher ist die Bestimmung von Erwartungswert und Varianz des oben definierten Integralausdrucks für die weiteren Abhandlungen von großer Wichtigkeit.

Für den Erwartungswert des stochastischen Integrals gilt:

$$E \left\{ \int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right\} = \sum_{i=1}^N E \left\{ G_{(t_{i-1})} [W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})}] \right\} .$$

Die statistische Unabhängigkeit von $G(\tau)$ und $\Delta W(\tau)$ bewirkt

$$E \left\{ \int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right\} = \sum_{i=1}^N E \left\{ G_{(t_{i-1})} \right\} E \left\{ W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})} \right\} .$$

Da die Schwankungen eines WIENER-Prozesses per Definition voneinander unabhängig sind, folgt der gesuchte Erwartungswert mit

$$E \left\{ W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})} \right\} = 0$$

$$E \left\{ \int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right\} = 0 .$$

Für die Kovarianzmatrix des stochastischen Integrals folgt:

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right] \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right]^T \right\} = \\ & E \left\{ \left[\sum_{i=1}^N G_{(t_{i-1})} (W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})}) \right] \left[\sum_{i=1}^N G_{(t_{i-1})} (W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})}) \right]^T \right\} = \\ & \sum_{i=1}^N E \left\{ G_{(t_{i-1})} (W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})}) (W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})})^T G_{(t_{i-1})}^T \right\} + \\ & + 2 \sum_{i < j} E \left\{ G_{(t_{i-1})} (W_{(t_i)} - W_{(t_{i-1})}) (W_{(t_j)} - W_{(t_{j-1})})^T G_{(t_{j-1})}^T \right\} . \end{aligned}$$

Mit der Varianz des normalverteilten Zuwachses $W_t - W_\tau$ des WIENER-Prozesses (s.o.) und der Unabhängigkeit der Terme ΔW_{t_i} , ΔW_{t_j} für $i < j$ sowie $G(\tau)$, $\Delta W(\tau)$ folgt:

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right] \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right]^T \right\} &= \\ \sum_{i=1}^N E \left\{ G(t_{i-1}) \right\} \{ t_i - t_{i-1} \} I & E \left\{ G^T(t_{i-1}) \right\} + \\ + 2 \sum_{i < j} E \left\{ G(t_{i-1}) \right\} \{ 0 \} & E \left\{ G^T(t_{j-1}) \right\} = \\ \sum_{i=1}^N E \left\{ G(t_{i-1}) G^T(t_{i-1}) \right\} (t_i - t_{i-1}) &= \int_0^t E \left\{ G(\tau) G^T(\tau) \right\} d\tau \end{aligned}$$

Da die Funktionen $G(\tau)$ in dieser Arbeit keine stochastischen Ausdrücke darstellen, berechnet sich die Kovarianzmatrix des stochastischen Integrals zu:

$$E \left\{ \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right] \left[\int_{t_0}^t G(\tau) dW(\tau) \right]^T \right\} = \int_{t_0}^t G(\tau) G^T(\tau) d\tau$$

3.4.2 Die Kovarianzmatrix mehrfachkorrelierter stochastischer Prozesse

Die Theorie der stochastischen Differentiale und Integrale nach ITÜ gestattet eine direkte Berechnung von Varianzen und Kovarianzen stochastischer farbiger Prozesse, die aus der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit stochastischer "weißer" Störgröße hervorgehen.

Dabei soll im weiteren eine Beschränkung auf lineare stochastische Differentialgleichungen des Typs

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{\xi}(t)$$

erfolgen. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich formal zu:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(\tau) d\underline{W}(\tau)$$

$\underline{x}(t)$ ist hierbei stetig und verhält sich zur Störgröße kausal, bleibt aber wie der WIENER-Prozeß nicht-differenzierbar. Die Fluktuationen von $\underline{x}(t)$ bleiben unabhängig. Da das stochastische Integral nicht von dem Term $e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}(t_0)$ abhängt, besitzt der Prozeß eine Gaußsche Verteilung, solange der Anfangswertvektor $\underline{x}(t_0)$ konstant oder selbst Gaußverteilt ist.

Von besonderer Bedeutung ist die Kovarianzmatrix $\underline{P}(t)$ des stochastischen Prozesses $\underline{x}(t)$. Sie berechnet sich mit den oben aufgeführten Definitionen direkt aus der Lösung der stochastischen Differentialgleichung, ohne daß der Zeitverlauf bestimmt werden muß.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \underline{P}(t) &= E \left\{ \underline{x}(t) \underline{x}^T(t) \right\} = \\ &E \left\{ \left(e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(\tau) d\underline{W}(\tau) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(\tau) d\underline{W}(\tau) \right)^T \right\} = \\ &E \left\{ \left[e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0) e^{\underline{A}^T(t)t} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(\tau) d\underline{W}(\tau) e^{\underline{A}^T(t)t} \underline{x}^T(t_0) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}_{(t_0)} \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} d\underline{W}_{(\tau)} \right] \\
 & + \left[\left(\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} d\underline{W}_{(\tau)} \right) \left(\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} d\underline{W}_{(\tau)} \right)^T \right] \\
 & = E \left\{ e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}_{(t_0)} \underline{x}_{(t_0)}^T e^{\underline{A}^T(t)t} \right\} + E \left\{ \underline{0} \right\} E \left\{ e^{\underline{A}^T(t)t} \underline{x}_{(t_0)} \right\} \\
 & + E \left\{ e^{\underline{A}(t)t} \underline{x}_{(t_0)} \right\} E \left\{ \underline{0} \right\} + E \left\{ \left(\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} d\underline{W}_{(\tau)} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left(\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} d\underline{W}_{(\tau)} \right)^T \right\} .
 \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit von $e^{\underline{A}(t)t}$ mit \underline{x}_{t_0} sowie dem Erwartungswert $E \{ e^{\underline{A}(t)t} \} = e^{\underline{A}(t)t}$ und der Kovarianzmatrix des stochastischen Integrals nach ITÜ ergibt sich die Kovarianzmatrix des stochastischen Prozesses $\underline{x}_{(t)}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_{(t)} & = e^{\underline{A}(t)t} E \left\{ \underline{x}_{(t_0)} \underline{x}_{(t_0)}^T \right\} e^{\underline{A}^T(t)t} + \\
 & + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}_{(t)} \underline{B}_{(t)}^T e^{\underline{A}^T(t)(t-\tau)} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\underline{P}_{(t_0)} = E \left\{ \underline{x}_{(t_0)} \underline{x}_{(t_0)}^T \right\} .$$

Eine wesentliche Vereinfachung, insbesondere bei zeitunabhängiger Lösung, erhält man durch Zeitdifferentiation obiger Gleichung.

Mit

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\underline{A}(t)t} \right] = \underline{A}_{(t)} e^{\underline{A}(t)t}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{P}(t)}{dt} = \dot{\underline{P}}(t) &= \left[\underline{A}(t) e^{\underline{A}(t)t} \right] \underline{P}(t_0) e^{\underline{A}^T(t)t} + \\ &+ e^{\underline{A}(t)t} \underline{P}(t_0) \left[e^{\underline{A}^T(t)t} \underline{A}^T(t) \right] + \\ &+ \int_{t_0}^t \underline{A}(t) e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(t) \underline{B}^T(t) e^{\underline{A}^T(t)(t-\tau)} d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t)(t-\tau)} \underline{B}(t) \underline{B}^T(t) e^{\underline{A}^T(t)(t-\tau)} \underline{A}^T(t) d\tau + \\ &+ e^{\underline{A}(t)(t-t)} \underline{B}(t) \underline{B}^T(t) e^{\underline{A}^T(t)(t-t)} \end{aligned}$$

oder:

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{A}(t) \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \underline{A}^T(t) + \underline{B}(t) \underline{B}^T(t) .$$

Diese Gleichung stellt eine (zeitabhängige) bilineare Differentialgleichung zur Bestimmung der Kovarianzmatrix instationärer Prozesse dar^{*)}. Zur Beschreibung stationärer, normalverteilter Gauß-Prozesse gilt als notwendige und hinreichende Bedingung

$$E \{ \underline{X}(t) \} = \text{const.} , \quad \underline{P}(t, \tau) = \underline{P}(\tau - t)$$

bei Zeitinvarianz der ersten beiden Momente.

*) Sie ist in der Regelungstheorie in etwas verallgemeinerter Form als RICCATI-Differentialgleichung bekannt.

Diese Bedingungen werden mit

$$E \{ \underline{X}(t_0) \} = \underline{0} , \quad \underline{A}(t) = \underline{A} , \quad \underline{B}(t) = \underline{B}$$

erfüllt, womit sich die folgende zeitinvariante Gleichung ergibt:

$$\underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T + \underline{B} \underline{B}^T = \underline{0} .$$

Diese bilineare Gleichung besitzt die positiv definite Lösung

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} e^{\underline{A}t} \underline{B} \underline{B}^T e^{-\underline{A}^T t} dt$$

und ist eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix \underline{A} nur Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt.

Der stochastische Prozeß $\underline{X}(t)$ ergibt sich als Lösung der stochastischen Differentialgleichung normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und besitzt die aus der bilinearen Matrizengleichung berechneten Varianzen und Kovarianzen.

3.5 Einige Bemerkungen zur Theorie und Anwendung stochastischer Differentialgleichungen

Es konnte gezeigt werden, daß stochastische (farbige) Prozesse mit nicht-konstanter Spektralintensität durch stochastische Differentialgleichungen zu beschreiben sind, die als Störgröße den mathematischen Modellprozeß des weißen Rauschens enthalten. Ein mathematisches oder technisches System antwortet auf weißes Erregungsrauschen mit einem

farbigen stochastischen Prozeß. Durch Anwendung des ITÜ-Kalküls werden die Varianzen des zufälligen Antwortprozesses direkt ohne Bestimmung des Zeitverlaufs berechnet. In diesem Zusammenhang soll nicht unerwähnt bleiben, daß die abgeleitete bilineare Matrizengleichung sowohl in der Regelungstechnik als RICATTI-Gleichung beim Entwurf optimaler Filter, aber auch in der Stabilitätstheorie als LJAPUNOV-Gleichung bei der Untersuchung der Stabilität dynamischer Systeme eine Rolle spielt. In der vorliegenden Arbeit dient die Ljapunov-Gleichung ausschließlich zur direkten Berechnung von Varianzen und Kovarianzen zufällig erregter mechanischer Strukturen.

Als Voraussetzungen stationäre Erregungen mit Gaußscher Amplitudenverteilung und durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen beschreibbare diskrete mechanische Schwinger zu wählen, liegt nicht an der Beschränktheit der Theorie stochastischer Differentialgleichungen. Vielmehr zeigten die Ableitungen, daß die Matrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{G} zeitvariant zugelassen werden konnten, womit zeitabhängige Kovarianzmatrizen und entsprechende instationäre Zufallsprozesse berechenbar sind. Bei vollständiger Anwendung des ITÜ-Kalküls sind neben nichtlinearem Systemverhalten auch nicht-normalverteilte Amplitudendichten möglich. Schwierigkeiten bereitet die Beschreibung zufälliger Prozesse jedoch bei praktischer Anwendung dieser Theorie. Dies gilt mit Ausnahme deterministischer TIME-HISTORY-BERECHNUNG für alle in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren. Sinn dieser Arbeit ist es, die zu beschreibenden Zufallsprozesse nicht an theoretisches Gedankenspiel, sondern an Naturvorgänge anzulehnen, die durch Zeitreihenmessungen zu belegen sind. Derartige Zufallsvorgänge sind im allgemeinen stationär und besitzen Gaußsche Amplitudenverteilung. Daß nach Wissen des Verfassers bisher die Theorie stochastischer Differentialgleichungen nicht auf mehrfachkorrelierte Naturvorgänge (wie Windbelastungen) angewendet werden konnte, liegt an den Koeffizientenmatrizen \underline{A} und \underline{B} , die aus der aufgeführten Theorie nicht bestimmt werden können. Handelt es sich beim stochastischen Antwortprozeß um die durch weißes Rauschen veranlaßte Zufallsschwingung eines diskreten mechanischen Schwingers, so sind die Koeffizientenmatrizen (s.u.) mit der Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix der mechanischen Struktur identisch. Entspricht der Zufallsprozeß jedoch einem Naturvorgang, so müssen diese Matrizen,

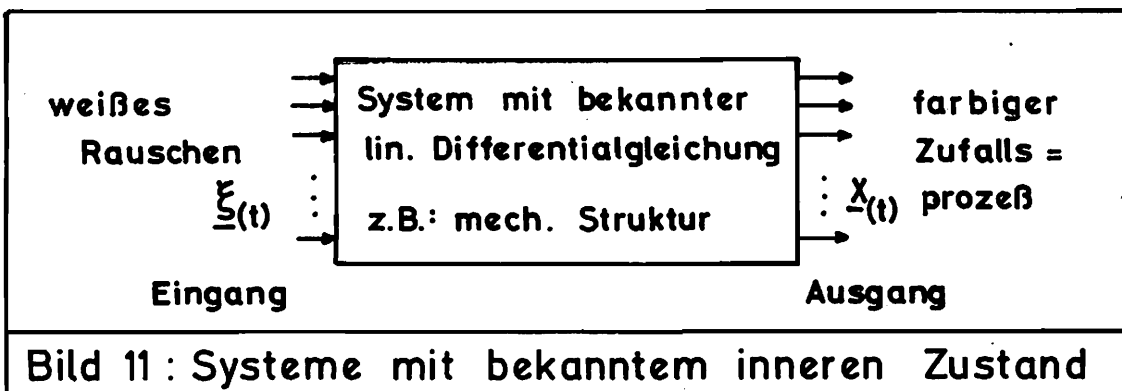
die im folgenden auch Filtermatrizen genannt werden, aus einer jeweils eigenen Theorie oder Messung hervorgehen. Im folgenden Kapitel wird daher die Realisierung eines mehrfachkorrelierten stochastischen Prozesses im Sinne eines Naturvorganges behandelt.

4. Die Realisierung mehrfachkorrelierter stationärer stochastischer Prozesse

4.1 Das mathematische Übertragungsmodell

Ziel dieser Arbeit ist es unter anderem, eine stochastische Differentialgleichung als mathematisches Modell für einen zeitlichen Zufallsvorgang abzuleiten, von dem nur die statistischen Parameter und Kennfunktionen bekannt sind. Unter der Realisierung eines mehrfachkorrelierten stationären stochastischen Prozesses wird die rechnerische Bestimmung der Koeffizientenmatrizen einer linearen stochastischen Differentialgleichung verstanden. Da durch diese Differentialgleichung der weiße Rauschprozeß zu einem farbigen Zufallsvorgang geformt wird, sollen diese Matrizen auch als Formfilter oder als Übertragungsmodell bezeichnet werden. Zunächst soll das Problem einer Realisierung bzw. die Ableitung eines Übertragungsmodells an physikalisch-technischen Systemen mit bekannter und unbekannter innerer Struktur verdeutlicht werden, da die Beziehungen die Grundlage für die Realisierung der ausschließlich statistisch beschreibbaren Zufallsvorgänge bilden.

Zu den Modellen mit bekannter Struktur zählen physikalisch-technische Systeme, deren innerer Zustand weitgehend erforscht ist. Ein solches Übertragungsmodell kann z. B. ein mechanisches System sein.



Erregt man eine mechanische Struktur, die als linearer, diskreter Schwinger beschrieben werden kann, mit dem Idealprozeß des weißen

Rauschens, so entsteht aus der bekannten gewöhnlichen Differentialgleichung eine stochastische.

Mit der Massenmatrix \underline{M} , der Steifigkeitsmatrix \underline{K} sowie der Dämpfungsmatrix \underline{D} und dem Erregungsvektor $\underline{\xi}(t)$ des weißen Rauschens wird:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t) \stackrel{\text{hier}}{=} \underline{\xi}(t)$$

oder als Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\underline{z}(t) = \underline{G} \underline{z}(t) + \underline{h}(t)$$

$$\dot{\underline{z}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1} \underline{\xi} \end{bmatrix}_{(t)}$$

Innerhalb der stochastischen Differentialgleichung stellt das Matrizen-tripel \underline{M} , \underline{K} , \underline{D} das Formfilter dar, mit dem der weiße Erregerprozeß zum stochastischen (Schwingungs-) Antwortprozeß übertragen wird. An diesem Formfilter läßt sich die Theorie der linearen Übertragung weißer Rauschvorgänge verdeutlichen, da die Struktur des Systems bekannt ist.

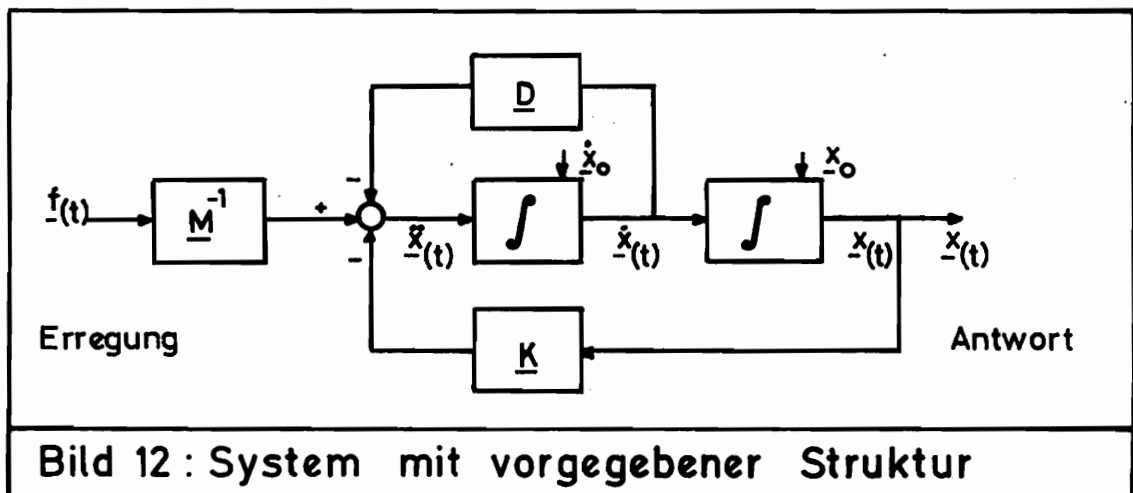


Bild 12 : System mit vorgegebener Struktur

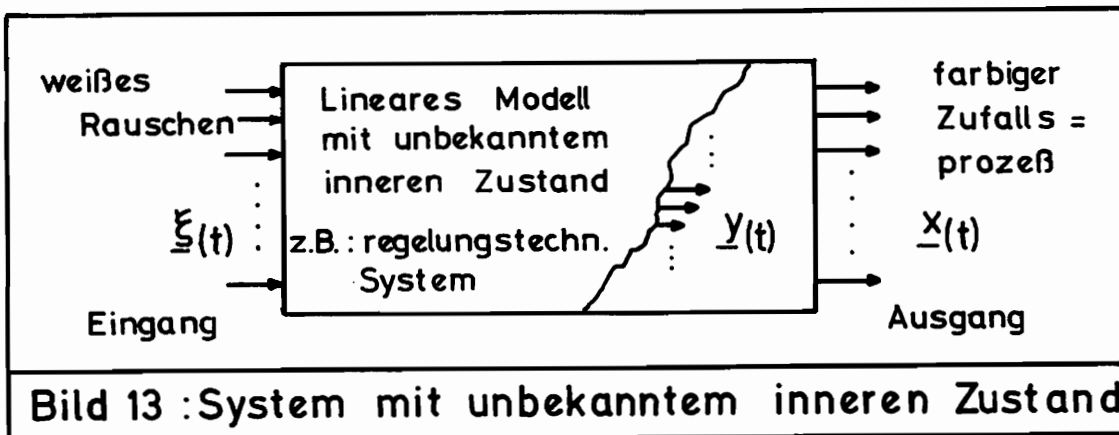
Die Kovarianzmatrix der Schwingungsantwort berechnet sich, wie im vorherigen Kapitel abgeleitet, aus der bilinearen Matrixgleichung:

$$\underline{G} \underline{P} + \underline{P} \underline{G}^T = -\underline{Q}$$

Für eine mechanische Struktur folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{\bar{M}}^{-1} \underline{K} & -\underline{\bar{M}}^{-1} \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{x\dot{x}} \\ \underline{P}_{\dot{x}x} & \underline{P}_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{\dot{x}x} \\ \underline{P}_{x\dot{x}} & \underline{P}_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & (-\underline{\bar{M}}^{-1} \underline{K})^T \\ \underline{I} & (-\underline{\bar{M}}^{-1} \underline{D})^T \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{M}}^{-1} (\underline{\bar{M}}^{-1})^T \end{bmatrix}$$

Übertragungssysteme mit unbekannter Struktur sind unter anderem physikalisch-technische Systeme mit meßbarem Ein/Ausgangsverhalten.



Der unbekannte innere Zustand $\underline{y}(t)$ des Systems wird dabei aus dem meßbaren Übertragungsverhalten abgeleitet. Das System mit bekannter

Struktur ist eindeutig durch seine Differentialgleichung bestimmt. Durch Transformation dieser Gleichung in den Frequenz- oder (allgemeiner) Bildbereich errechnet sich das Systemübertragungsverhalten.

Mit den Transformationen nach FOURIER (ω -Transformation) oder nach LAPLACE (s -Transformation) folgt mit

$$\underline{x}(s) = \hat{\underline{x}} e^{st} \quad , \quad \underline{f}(s) = \hat{\underline{f}} e^{st}$$

für die systembeschreibende Differentialgleichung:

$$(s^2 \underline{M} + s \underline{D} + \underline{K}) \underline{x}(s) = \underline{f}(s) \quad .$$

Hierin beschreibt

$$\underline{H}(s) = (s^2 \underline{M} + s \underline{D} + \underline{K})^{-1} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}$$

die Matrix-Übertragungsfunktion (bei FOURIER-Transformation die Frequenzgangmatrix $\underline{F}(\omega)$). Der eindeutige Übergang von Matrizen-tripel $\{\underline{M}, \underline{K}, \underline{D}\}$ zu $\{\underline{H}(s)\}$ kennzeichnet die Ein/Ausgangsbeziehung eines linearen Systemmodells bekannter Struktur. Bei unbekannter Struktur stellt sich das inverse Problem. Hier ist das Übertragungsverhalten meßbar. Die Koeffizientenmatrizen der Differentialgleichung

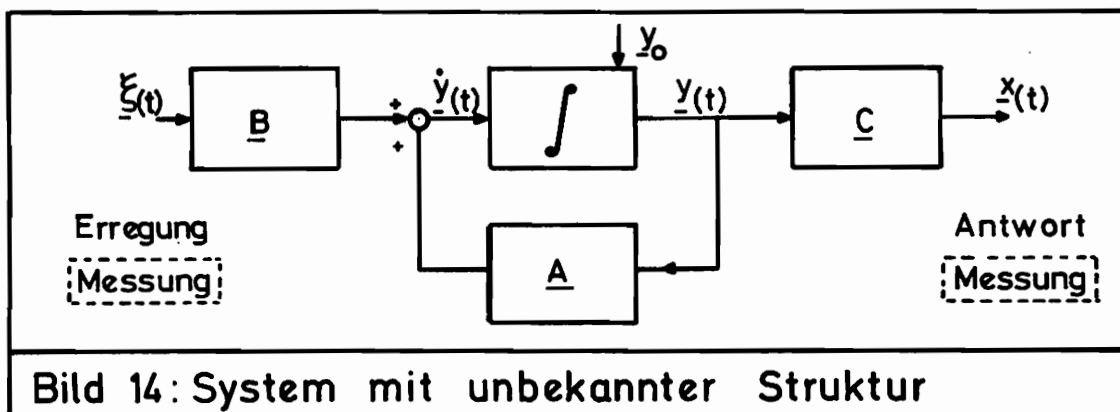
$$\underline{x}(t) = \underline{C} \underline{y}(t)$$

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)$$

müssen aus der Matrix-Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

abgeleitet werden.



Das Übertragungsverhalten physikalisch-technischer Systeme läßt sich mit definierten deterministischen Erregungen (Dirac-Impuls, Heavyside- oder harmonischer Erregung) bestimmen. Mit der Matrix-Übertragungsfunktion wird versucht, das Systemverhalten zu identifizieren. Unter Systemidentifikation soll hier der Übergang von der gemessenen Übertragungsmatrix $H(s)$ auf die Koeffizientenmatrizen $\{A, B, C\}$ einer das Systemverhalten beschreibenden Differentialgleichung verstanden werden. Während aber der Übergang vom Matrizen-triplet $\{A, B, C\}$ zur Matrix-Übertragungsfunktion eindeutig ist, wird das Problem bei der inversen Fragestellung mehrdeutig (KALMAN, [49]). Im Bereich der linearen (regelungstheoretischen) Systemtheorie besitzt die Realisierung, d.h. die Ableitung der Koeffizientenmatrizen aus der Matrix-Übertragungsfunktion, seit langer Zeit große Bedeutung, so daß an späterer Stelle auf die Theorie zur Identifikation von Übertragungssystemen zurückgegriffen werden kann.

Die bisherigen Ausführungen dienen als Grundlage weiterer Ableitungen. In dieser Arbeit sollen für stationäre mehrfachkorrelierte

Zufallsprozesse lineare Übertragungsmodelle erstellt werden. Hierbei werden die stochastischen Prozesse als Naturvorgänge und nicht wie oben als zufällige Antwort eines dynamischen Realsystems auf weißes Erregungsrauschen verstanden. Der stochastische (farbige) Prozeß ist nicht unmittelbar als kausale Ursache des weißen Rauschens zu beobachten. Untersucht man die Zufallsvorgänge statistisch, so erhält man unter anderem zur Prozeßbeschreibung die statistischen Kennfunktionen wie Leistungsspektren und Korrelationsfunktionen. Für lineare dynamische Systeme ist die Übertragung solcher Kennfunktionen bekannt. Für Systeme nach Bild 12 und Bild 14 wird die Eingangs-Spektralmatrix mit

$$\underline{S}_{xx}(s) = \underline{H}(s) \underline{S}_{ff}(s) \underline{H}^T(-s)$$

zur Antwort-Spektralmatrix übertragen. Diese Gleichung gilt auch, wenn das lineare System durch weiße Rauschvorgänge erregt wird. In diesem Fall wird die Leistungsspektralmatrix am Systemeingang, wie oben beschrieben, eine Einheitsmatrix:

$$\underline{S}_{xx}(s) = \underline{H}(s) \underline{S}_{\xi\xi}(s) \underline{H}^T(-s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

Beide Gleichungen kennzeichnen eine stochastische Übertragung statischer Kennfunktionen.

Da im vorliegenden Fall farbige Rauschvorgänge aus weißen Rauschprozessen gefiltert werden sollen, und das gesuchte Übertragungsmodell linear wie die Realsysteme aufgebaut sein soll, muß die spektrale Dichtematrix des zu beschreibenden stochastischen Prozesses das Übertragungsverhalten des gesuchten Modells beinhalten.

Untersucht man einen stationären mehrfachkorrelierten Zufallsprozeß durch Bestimmung seiner spektralen Dichtematrix und zerlegt diese in die Form

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s) = \underline{H}(s) \tilde{\underline{H}}^T(s)$$

$s = j\omega$

so soll die Matrix $\underline{H}(s)$ stellvertretend für das Übertragungsverhalten eines linearen Systemmodells stehen. Identifiziert man das Übertragungsverhalten durch eine Zustandsraumdarstellung

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{C} \underline{y}(t)$$

so findet sich mit der nun bekannten Systemstruktur die stochastische Differentialgleichung zur Beschreibung stochastischer mehrfachkorrelierter Prozesse.

Bild 15 zeigt den Ablauf zur Realisierung mehrfachkorrelierter stationärer Zufallsvorgänge, die ausschließlich durch ihre statistischen Kennwerte und -funktionen beschrieben werden können.

Im folgenden werden zunächst im Frequenzbereich Verfahren zur Bestimmung linearer Ein/Ausgangsmodelle aus der Leistungsspektralmatrix stochastischer Prozesse hergeleitet und diskutiert. Hier schließt sich die Realisierung dieser Matrix-Übertragungsfunktion durch Ableitung einer Zustandsraumdarstellung an. Das Ergebnis ist die Beschreibung zufälliger Prozesse durch stochastische Differentialgleichungen, mit der eine neue und einfache Behandlung von Zufallsschwingungen mechanischer Strukturen ermöglicht wird.

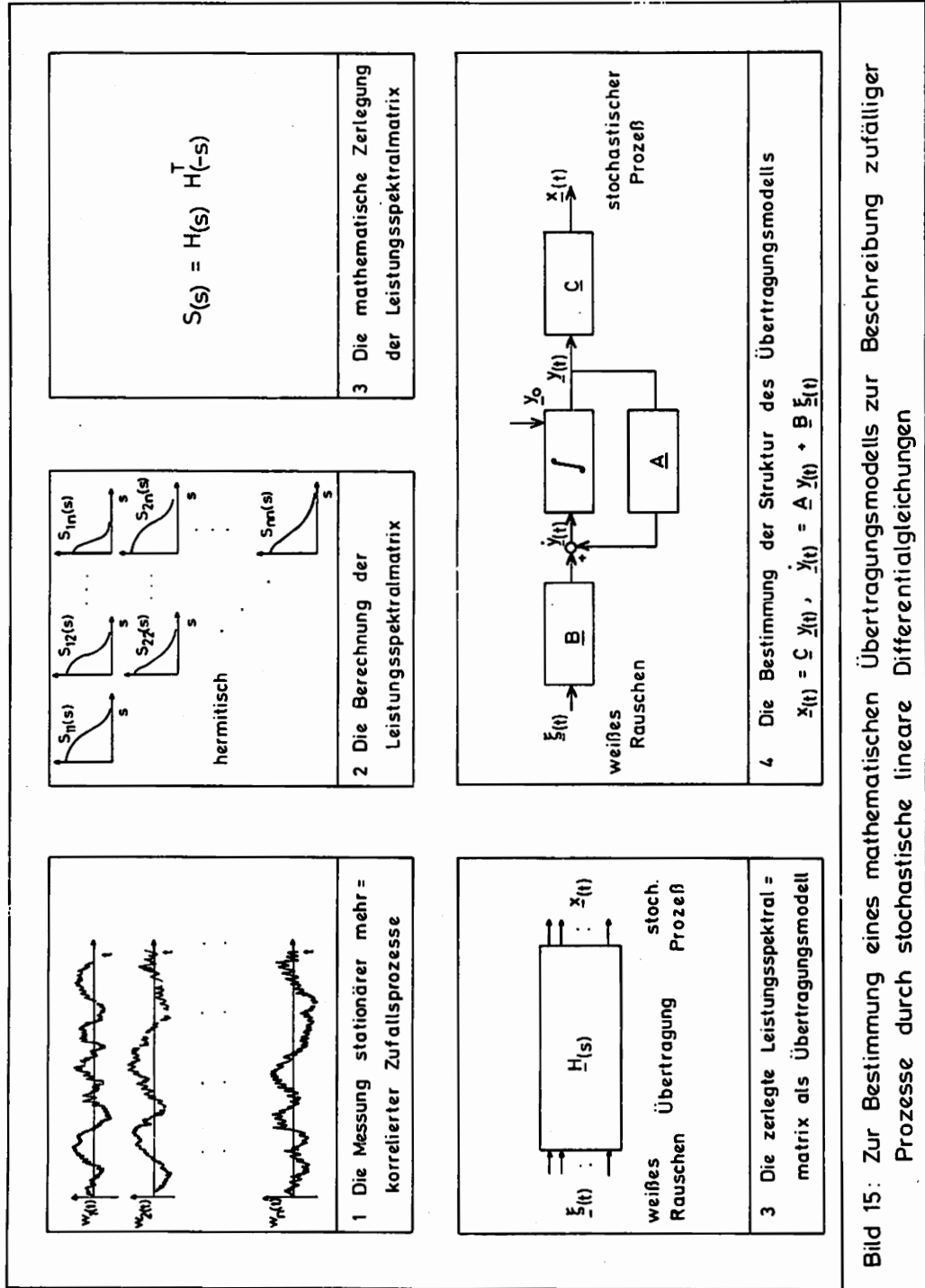


Bild 15: Zur Bestimmung eines mathematischen Übertragungsmodells zur Beschreibung zufälliger Prozesse durch stochastische lineare Differentialgleichungen

4.2 Einige Bemerkungen zur Zerlegung einer Leistungsspektralmatrix

Die Leistungsspektralmatrix ist eine positiv definite HERMITESche Matrix mit symmetrischen Realteil- und antimetrischen Imaginärteilmfunktionen (s. Anhang). Sie dient der statistischen Beschreibung regelloser Vorgänge und informiert über das Frequenzverhalten und die Phasenlage von mehrfachkorrelierten stationären Zufallsprozessen. Die statistischen Kennfunktionen der Einzelprozesse sind durch die Definition positiv reell und enthalten keine Information über die Phasenlage der anteiligen harmonischen Vorgänge, aus denen sich ein Zufallsvorgang zusammensetzt. Durch die Nichtberücksichtigung des Phasenverhaltens ist keine eindeutige inverse Zuordnung von Leistungsspektren und einem "einzelnen" deterministischen Zeitvorgang herstellbar. Grundsätzlich ist eine Rechenvorschrift mit Informationsverlust nicht umkehrbar. Dies entspricht der Auffassung von Zufallsprozessen. Zu einer statistischen Kennfunktion gehört immer eine nicht endliche Zahl klassengleicher Zufallsfunktionen. Man spricht auch von einer Familie von Zufallsfunktionen. Die angestrebte Zerlegung einer Leistungsspektralmatrix und die damit verbundene Ableitung von Formfiltern gilt somit nicht für eine einzelne deterministische Signalfunktion, sondern für unendlich viele Zufallsvorgänge mit gleicher statistischer Kennzeichnung.

Bei mehrfachkorrelierten Zufallsprozessen, wie sie in dieser Arbeit behandelt werden, steckt die Information über die Phasenlage der korrelierten Teilprozesse in den komplexen Kreuzleistungsspektren und ist bei Herleitung eines Formfilters zu berücksichtigen.

Die trivial anmutende Zerlegung spektraler Dichtematrizen

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

bereitete dem Verfasser anfangs erhebliche Schwierigkeiten bei der

praktischen Anwendung von stochastischen Naturvorgängen (Windmeßdaten). Daher sollen die Möglichkeiten der Zerlegung von Leistungsspektral-matrizen etwas breiter diskutiert werden. Betrachtet man die Zerlegung zunächst rein mathematisch ohne Bedingungen, so bietet sich eine CHOLESKY-Zerlegung oder eine modale Darstellung der spektralen Dichte-matrix an.

Nach CHOLESKY läßt sich jede positiv definite HERMITESche Matrix als Produkt einer komplexen unteren und einer konjugiert komplexen oberen Dreiecksmatrix darstellen. Eine andere Möglichkeit besteht in der modalen Schreibweise einer spektralen Dichtematrix:

$$\underline{S}(s) = \underline{\phi}(s) \text{diag} [\Omega^2(s)] \underline{\phi}^T(s) = \{ \underline{\phi}(s) \text{diag} [\Omega(s)] \} \{ \text{diag} [\Omega(s)] \underline{\phi}^T(s) \}$$

Mit der Modalmatrix $\underline{\phi}(s)$ unitärer Eigenvektoren und der Diagonalmatrix $\underline{\Omega}(s)$ der komplexen Eigenwerte der Leistungsspektralmatrix $\underline{S}(s)$ wäre die gewünschte Produktdarstellung gefunden. Bei spektralen Dichtema-trizen diskret gemessener Zeitreihen wird die Zerlegung für jede Frequenzstützstelle durchgeführt. Die praktische Anwendung bei der Zerlegung gemessener Leistungsspektralmatrizen von Windgeschwindigkeits-verläufen führte numerisch auf diskrete Funktionsverläufe der gesuchten Übertragungsfunktionen $\underline{H}(s)$ mit sprunghaft wechselnden Amplituden, die keine Approximation durch analytische Funktionen ermöglichten. Die Ergebnisse versprachen keine erfolgreiche Realisation dieser Über-tragungsmodelle durch ein lineares dynamisches Systemmodell. Der rauhe Kurvenverlauf wird durch den Informationsverlust bei der Berechnung der spektralen Dichten (Phase) begründet. Durch die Mehrdeutigkeit der Problemstellung

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T_{(-s)} = \underline{H}(s) \underline{U}(s) \underline{U}^T_{(-s)} \underline{H}^T_{(-s)} = \underline{W}(s) \underline{W}^T_{(-s)} ,$$

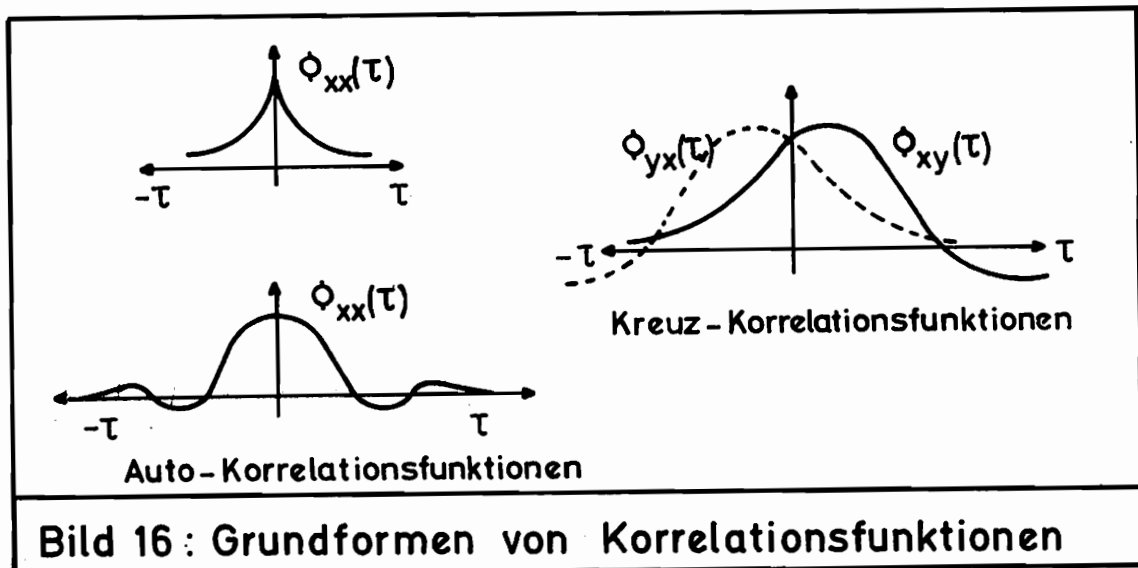
$$\underline{U}(s) \underline{U}^T_{(-s)} = \underline{I}$$

lassen sich Leistungsspektralmatrizen nicht in der beschriebenen Weise für jede ihrer Stützstellen numerisch in eine weiterverarbeitbare Form zerlegen. Vielmehr ist das auf diese Art berechnete Formfilter mit großen Phasensprüngen behaftet.

Deshalb hält es der Verfasser für unumgänglich, gemessene Leistungsspektren durch geeignete Funktionen zu approximieren und diese in analytische Übertragungsfunktionen zu zerlegen. Hierzu sollen jedoch zunächst einige Voraussetzungen geklärt werden.

Hinsichtlich des Übertragungsmodells muß gefordert werden, daß die durch Simulation aus weißem Rauschen zu berechnenden (deterministischen) Zeitfunktionen als Teil des stochastischen Prozesses existieren und für negative Zeitpunkte verschwinden. Ferner soll dem abzuleitenden Formfilter nur äußere Energie über seine Erregung zugeführt werden. Es darf physikalisch auf Impulse nur mit abklingenden Eigenschwingungen antworten. Diese Forderungen erwirken die Gültigkeit des Kausalitätsprinzips. Ursache (weißes Eingangsrauschen) und Wirkung (stochastischer farbiger Prozeß) sollen eindeutig sein.

Aus der linearen (regelungstechnischen) Systemtheorie ist bekannt, daß lineare Übertragungsmodelle physikalisch-technischer Systeme vorwiegend durch gebrochen rationale Funktionen dargestellt werden. Dies liegt zum einen darin, daß sich zu gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen Übertragungsfunktionen dieses Typs (LAPLACE-Transformation) finden lassen, und zum anderen kann das Systemverhalten aus Matrix-Übertragungsfunktionen mit Elementen gebrochener rationaler Funktionen abgeleitet werden. Es erscheint daher sinnvoll, auch die (numerische) Approximation spektraler Dichtefunktionen mit Hilfe rational gebrochener Funktionen vorzunehmen. Dies mag zunächst als wesentliche Einschränkung der Problemstellung angesehen werden, doch reicht für die meisten Aufgaben diese Darstellung aus. Vergegenwärtigt man sich die Grundformen [25] von Korrelationsfunktionen stochastischer Prozesse,



so sind die Auto-Korrelationsfunktionen in der Regel durch Funktionen der Form

$$\phi_{xx}(\tau) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i |\tau|}$$

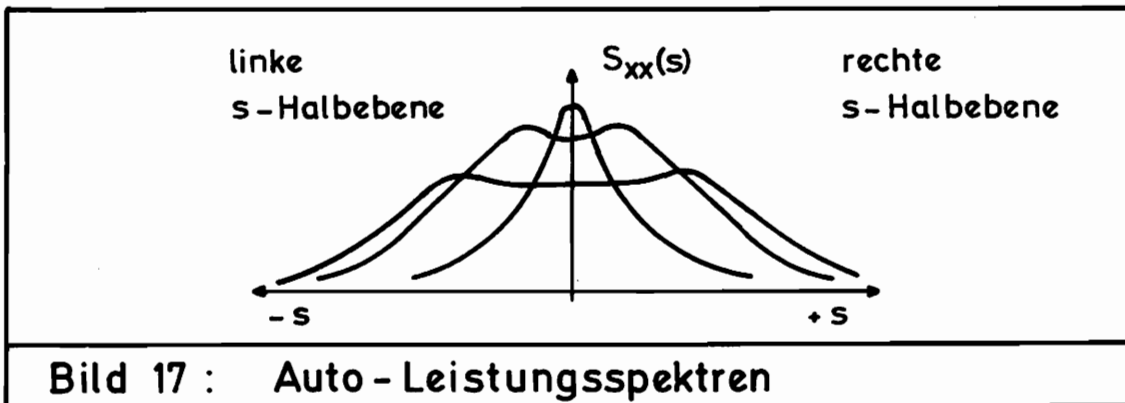
$$\phi_{xx}(\tau) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i |\tau|} \left[\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right]$$

approximierbar. Für die Kreuz-Korrelationsfunktionen können ähnliche Ausdrücke gefunden werden. Hier soll nicht unerwähnt bleiben, daß die numerische Berechnung konsistenter statistischer Kennfunktionen noch nicht gänzlich geklärt ist, da die Genauigkeit z. B. der Korrelationsfunktionen stochastischer Prozesse aufgrund endlicher Meßwerte mit wachsendem τ fällt (s. Anhang). Die Erfahrungen des Verfasser in der Untersuchung gemessener Zufallserregungen sprechen jedoch für die angeführten Approximationen.

Die Korrelationsfunktionen sind nach WIENER-CHINTCHIN die FOURIER-Transformierten der Leistungsspektren (s. Anhang). Die obigen Grundformen gehen durch Integral-Transformation in gebrochen rationale Funktionen über:

$$S_{xx}(s) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(s-s_i)} + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(-s-s_i)}$$

$$S_{xx}(s) = c \frac{[(s-s_a)(s-s_b)\cdots(s-s_m)][(-s-s_a)(-s-s_b)\cdots]}{[(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)][(-s-s_1)(-s-s_2)\cdots]}$$



Die Kreuz-Leistungsspektren können ebenfalls durch gebrochen rationale Funktionen der Form

$$S_{xy}(s) = c_0 \frac{a - bs + cs^2 - ds^3 + es^4 - \dots}{[(s-s_1)\cdots(s-s_n)][(-s-s_1)\cdots(-s-s_n)]}$$

$$S_{yx}(s) = c_0 \frac{a + bs + cs^2 + ds^3 + es^4 + \dots}{[(s-s_1)\cdots(s-s_n)][(-s-s_1)\cdots(-s-s_n)]}$$

approximiert werden. Aufgrund des HERMITESchen Charakters der Leistungsspektralmatrix stellt sich das Zählerpolynom als ungerade Funktion dar. Die Darstellungen rechtfertigen allgemein die Approximation von Leistungsspektren durch gebrochen rationale Funktionen.

Es verbleibt eine Beziehung zwischen dieser Beschreibung und dem zu bestimmenden Übertragungsmodell herzustellen. Gesucht werden lineare dynamische stabile Systeme als mathematische Modelle stochastischer Prozesse. Es ist bekannt, daß Systeme, deren Eigenwerte ausschließlich negative Realteile besitzen, durch abklingende Eigenschwingungen gekennzeichnet sind. Treten Eigenwertlösungen mit positivem Realteil auf, wächst das Ausgangssignal nach einer kleinen Störung gegen unendlich, das System ist instabil. Für stabile Übertragungsmodelle, die durch gebrochen rationale Funktionen beschrieben werden, zeigt sich, daß die Nullstellen der Nennerpolynome (Polstellen der Matrix-Übertragungsfunktion) mit den Wurzeln des charakteristischen Polynoms der systembeschreibenden Differentialgleichung übereinstimmen. Es muß daher verlangt werden, daß die aus der Leistungsspektralmatrix abgeleitete Matrix-Übertragungsfunktion ausschließlich Polstellen in der linken (negativen) s-Halbebene aufweist.

Durch den positiv definiten HERMITESchen Charakter der Leistungsspektralmatrix ist eine Approximation der Elemente dieser Matrix mit gebrochen rationalen Funktionen unter der Bedingung von paarweisem Auftreten der Polstellen in linker und rechter s-Halbebene immer möglich. Die angestrebte Zerlegung

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

erfüllt dann bei entsprechender Aufteilung der Polstellen mit dem Übertragungsmodell $\underline{H}(s)$ die Forderung nach einem stabilen Systemverhalten.

In gleicher Weise ist auch die Bildung der Zählerpolynome möglich. Wenn

die Symmetriebedingungen $S_{xx}(s) = S_{xx}(-s)$ und $S_{xy}(s) = S_{yx}(-s)$ eingehalten werden, fallen die Nullstellen entsprechend in die linke oder rechtes-Halbebene.

Es zeigt sich, daß die Beschreibung von Leistungsspektralmatrizen durch Elemente gebrochen rationaler Funktionen ein geeignetes Hilfsmittel zur Zerlegung dieser Matrizen darstellt. Da jede rationale Funktion eine eindeutige Funktion von s ist, erhält die aus einer analytischen Zerlegung hervorgehende Matrix-Übertragungsfunktion ein definiertes (eindeutiges) Phasenverhalten und erfüllt die Bedingungen der Kausalität.

Für kausale Filter des beschriebenen Typs besteht die Möglichkeit [44] der Realisierung durch ein Matrizenriplel und die Beschreibung des Übertragungssystems mittels einer linearen Differentialgleichung.

Stochastische Prozesse, deren Leistungsspektralmatrix durch gebrochen rationale Funktionen approximiert werden kann, sind, wie gezeigt wird, durch stochastische Differentialgleichungen beschreibbar. Inwieweit die spezielle Darstellung der Leistungsspektralmatrix überhaupt eine Einschränkung des Problemkreises bedeutet, kann zu diesem Zeitpunkt nicht geklärt werden, da allgemein noch zu wenig Meßdaten stationärer stochastischer Naturvorgänge vorhanden sind.

4.3 Die Zerlegung der spektralen Dichtematrix in eine Summe mit gebrochen rationalen Funktionen zur Bestimmung der Matrix-Übertragungsfunktion

Bei Darstellung der Komponenten einer spektralen Dichtematrix durch echt gebrochen rationale Funktionen ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Partialbruchzerlegung gegeben.

$$\frac{\text{Zählerelemente}}{\text{Nennerelemente}} : \frac{Z_{ij}(s)}{N_{ij}(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_N}{s-s_n}$$

Dabei nennt man die Nullstellen des Nennerpolynoms (s_i) auch Pole der echt gebrochen rationalen Funktion. Weist das Nennerpolynom komplexe Linearfaktoren auf, so treten die Pole in konjugiert komplexen Paaren auf, die als reelle Summen darstellbar sind. Im Falle einer HERMITESchen positiv definiten Matrix mit gebrochen rationalen Elementen ist die Matrix in eine Summe zerlegbar:

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}_{(-s)}^T \quad \bullet$$

Die Symmetrie der Realteile und die Antimetrie der Imaginärteilkomponenten gewährleistet eine Pol- und Nullstellenkonfiguration in linker und rechter Halbebene der LAPLACE-Variablen s .

Die Zerlegung der Leistungsspektralmatrix in eine Summe von Matrizen mit Elementen echt gebrochen rationaler Funktionen ermöglicht die Realisierung dieser Matrizen und liefert für weitere Überlegungen ein geeignetes lineares Hilfssystem zur Herleitung der Matrix-Übertragungsfunktion.

Wie an späterer Stelle ausführlich gezeigt wird, kann aus einer Matrix mit Elementen echt gebrochen rationaler Funktionen eine Zustandsraumdarstellung gefunden werden.

Aus der Matrix $\underline{W}(s)$ folgt somit die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= \underline{J} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{F} \underline{w}(t) + \underline{G} \underline{\xi}(t) \end{aligned} \quad \bullet$$

Das Matrizen triplet $\{\underline{F}, \underline{G}, \underline{J}\}$ erfüllt die Gleichung

$$\underline{W}(s) = \underline{J} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G}$$

und führt zu der Darstellung der Leistungsspektralmatrix:

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}_{(-s)}^T = \underline{J} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} + \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{J}^T$$

Von ANDERSON [2, 3] stammt der Vorschlag, die gesuchte Zerlegung

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}_{(-s)}^T$$

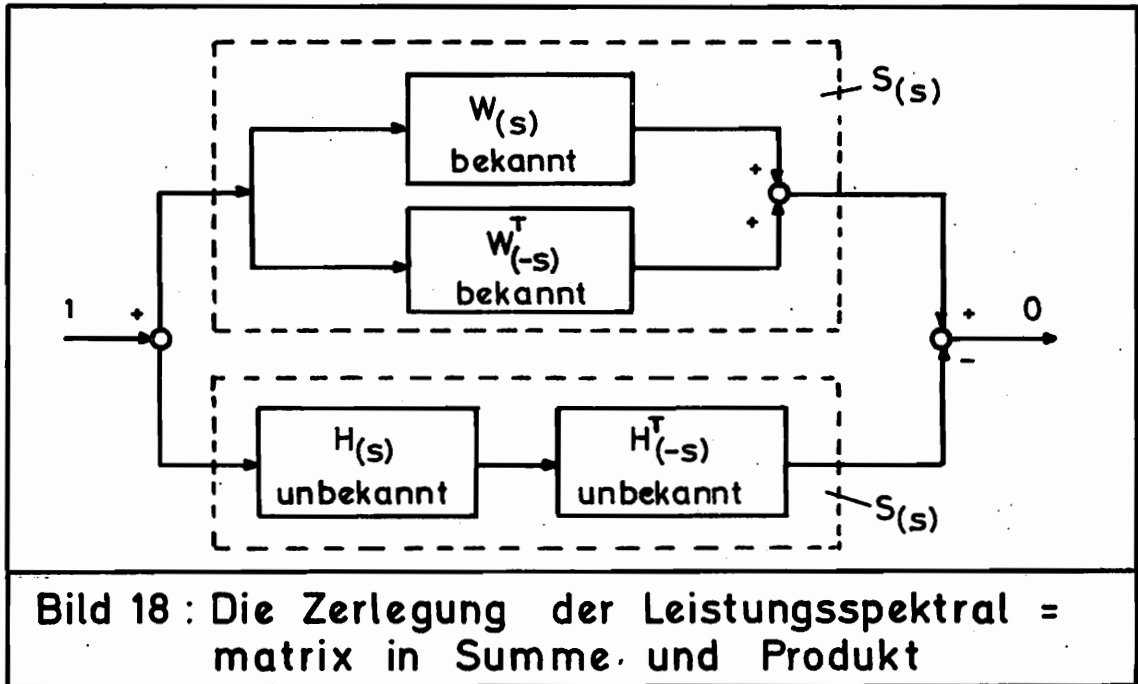
mit dem geforderten Formfilter $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ bzw. der Matrix-Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

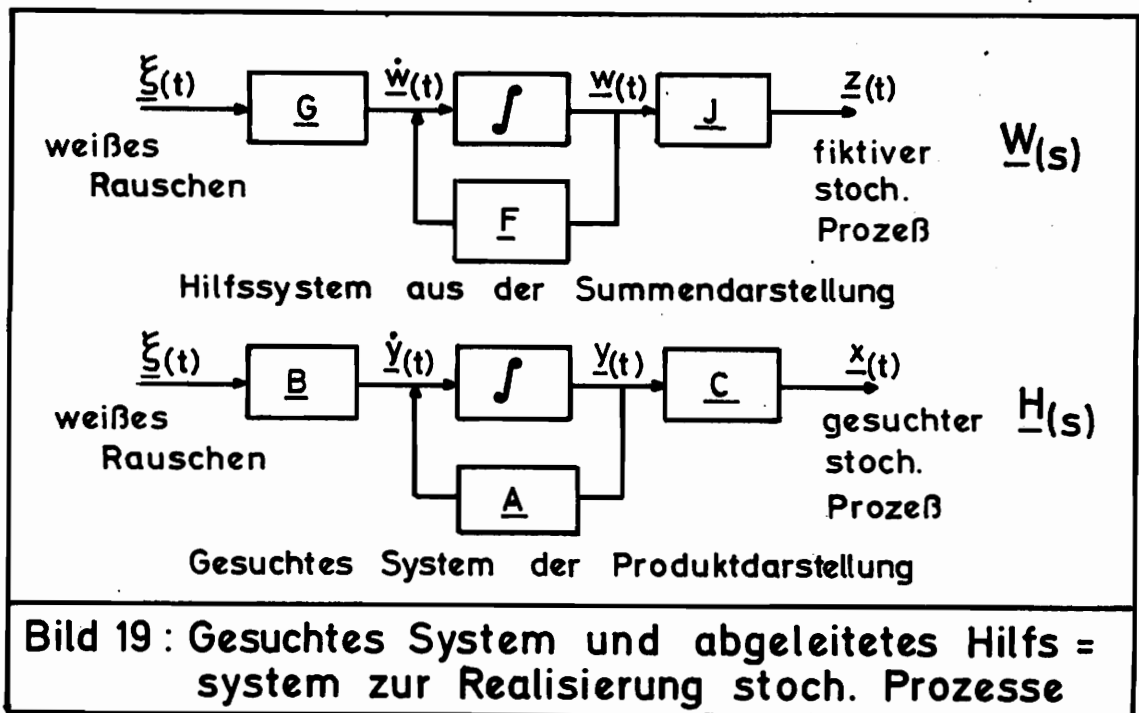
aus der Summenzerlegung der Leistungsspektralmatrix

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}_{(-s)}^T = \underline{H}(s) \underline{H}_{(-s)}^T$$

abzuleiten.



Im folgenden wird aus der Summenaufspaltung der Leistungsspektralmatrix und der Zustandsraumdarstellung $\{\underline{F}, \underline{G}, \underline{J}\}$ des linearen Hilfssystems $\underline{W}(s)$ durch Koeffizientenvergleich das gesuchte Übertragungsmodell $\underline{H}(s)$ und seine Realisation $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ abgeleitet.



Wird die Existenz der Produktdarstellung einer Leistungsspektralmatrix und ihre Realisation im Zeitbereich vorausgesetzt, so folgt aus

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T_{(-s)} = \left[\underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \right] \left[\underline{B}^T (-s\underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{C}^T \right]$$

die geforderte stochastische Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{C} \underline{y}(t) \\ \dot{\underline{y}}(t) &= \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \end{aligned}$$

Mit dem Matrizen-tripel $\{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \}$ läßt sich die spektrale Dichtematrix direkt darstellen:

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{R} & (s\underline{I} + \underline{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = (-s\underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{B} \underline{B}^T (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$$

Aus dem bereits realisierten Hilfssystem $\underline{W}(s)$ folgt mit

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}^T_{(-s)} = \underline{J} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} + \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{J}^T$$

eine äquivalente Darstellung der Leistungsspektralmatrix

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} \underline{J} & \underline{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & (s\underline{I} + \underline{F}^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G} \\ -\underline{J}^T \end{bmatrix}$$

Mit diesen Darstellungen der spektralen Dichtematrix besteht nun die Aufgabe darin, das gesuchte Matrizentripel $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ aus dem bekannten Übertragungsmodell $\{\underline{J}, \underline{F}, \underline{G}\}$ abzuleiten.

Aus der Beziehung

$$\begin{bmatrix} s\underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & s\underline{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & (s\underline{I} + \underline{F}^T)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

folgt mit den Matrizen

$$\underline{F}^* = \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{F}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{J}^* = \begin{bmatrix} \underline{J} & \underline{G}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^{T*} = \begin{bmatrix} \underline{G}^T & -\underline{J} \end{bmatrix}$$

die Matrixgleichung

$$\underline{S}(s) = \underline{J}^* (s\underline{I} - \underline{F}^*)^{-1} \underline{G}^*$$

Ebenso läßt sich die Leistungsspektralmatrix mit dem gesuchten System $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ darstellen.

Mit

$$\begin{bmatrix} \underline{sI} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{sI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{B}\underline{B}^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{sI} - \underline{A})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{R} & (\underline{sI} + \underline{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

kann über die Matrizen

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{B}\underline{B}^T & -\underline{A}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{C}^* = [\underline{0}, \underline{C}], \quad \underline{B}^{T*} = [\underline{C}, \underline{0}]$$

die folgende Gleichung gefunden werden:

$$\underline{S}(s) = \underline{C}^* (\underline{sI} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{B}^*$$

Zur Bestimmung der Matrizen $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ gilt also:

$$\underline{C}^* (\underline{sI} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{B}^* = \underline{J}^* (\underline{sI} - \underline{F}^*)^{-1} \underline{G}^*$$

Diese Gleichung wird mit der trivialen Lösung $\underline{B} = \underline{0}$ erfüllt, doch widerspricht diese Lösung dem Ausgangspunkt. Andererseits gilt auch die folgende Matrixgleichung

$$\underline{C}^* \underline{I}^{-1} \{ \underline{I} (s\underline{I} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{I}^{-1} \} \underline{I} \underline{B}^* = \underline{J}^* (s\underline{I} - \underline{F}^*)^{-1} \underline{G}^* \quad \bullet$$

Wählt man die Transformationsmatrix \underline{I} zu

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{X} & \underline{I} \end{bmatrix}, \quad \underline{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{X} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

so folgt für die linke Seite der obigen Matrixgleichung die Darstellung der Leistungsspektralmatrix:

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} \underline{C}\underline{X}, \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{X}\underline{A} + \underline{A}^T\underline{X} + \underline{B}\underline{B}^T & s\underline{I} + \underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ -\underline{X}\underline{C}^T \end{bmatrix} \quad \bullet$$

Läßt sich eine Matrix \underline{X} derart finden, so daß gilt

$$\underline{X}\underline{A} + \underline{A}^T\underline{X} + \underline{B}\underline{B}^T = \underline{0}$$

können die Darstellungen der spektralen Dichtematrix aus Produkt- und Summendarstellung ineinander überführt werden.

Durch Koeffizientenvergleich folgt direkt

$$\underline{A} = \underline{F} \quad , \quad \underline{C} = \underline{G}^T$$

während für die noch unbekannt Matrix \underline{B} die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\underline{J} = \underline{C} \underline{X} \quad , \quad \underline{B} \underline{B}^T = -\underline{X} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{X} = -\underline{X} \underline{F} - \underline{F}^T \underline{X}$$

gefunden werden. Zur Kontrolle wird die Ausgangsgleichung ausgeführt:

$$\begin{aligned} \underline{S}(s) &= \underline{W}(s) + \underline{W}^T(-s) \\ &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{J}^T + \underline{J} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} \\ &= \underline{G}^T \left\{ (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{X} + \underline{X} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \right\} \underline{G} \\ &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \left\{ \underline{X} (s - \underline{F}) + (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{X} \right\} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} \\ &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \left\{ \underline{X} s - \underline{X} s - \underline{X} \underline{F} - \underline{F}^T \underline{X} \right\} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} \\ &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \left\{ \underline{B} \underline{B}^T \right\} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} \\ &= \underline{H}(s) \bullet \underline{H}^T(-s) \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung der spektralen Dichtematrix in eine Summe realisierbarer "Übertragungs"-Matrizen $\underline{W}(s)$ sind die Matrizen \underline{A} , \underline{C} zur Realisierung der gesuchten Übertragungsmatrix $\underline{H}(s)$ direkt gegeben, während für Matrix \underline{B} die zwei Bestimmungsgleichungen

$$\underline{J} = \underline{C} \underline{X} = \underline{G}^T \underline{X}$$

$$\underline{B} \underline{B}^T = -\underline{X} \underline{F} - \underline{F}^T \underline{X}$$

gelten.

Im Falle einer quadratischen, regulären Matrix \underline{G} wird die Matrix \underline{B} durch CHOLESKY-Zerlegung aus

$$\underline{B}\underline{B}^T = -\underline{C}^{-1}\underline{J}\underline{F} - \underline{F}^T\underline{J}^T\underline{C}^T{}^{-1}$$

gewonnen. Leider ist die Beschränkung auf quadratische Matrizen für den praktischen Anwendungsfall zu groß, so daß nach anderen Lösungsmöglichkeiten der Matrixgleichungen gesucht werden muß. Sind die Matrizen \underline{B} und \underline{C} rechteckig und setzt man für die Matrix \underline{X} Symmetrie voraus, so lassen sich die beiden Matrixgleichungen in ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten b_{ij} der Matrix \underline{B} überführen.

Für $\underline{B}\underline{B}^T = -\underline{X}\underline{F} - \underline{F}^T\underline{X}$ folgt mit

$$\underline{X}^T = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}; x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n}; \dots; x_{nn}]$$

$$\underline{B}\underline{B}^T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1j}^2 & \sum_{j=1}^m b_{1j} b_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^m b_{1j} b_{nj} & \dots \\ \sum_{j=1}^m b_{2j}^2 & \sum_{j=1}^m b_{2j} b_{3j} & \dots & \sum_{j=1}^m b_{2j} b_{nj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sum_{j=1}^m b_{nj}^2 & \dots \end{bmatrix}$$

und einer Umformung der Matrix \underline{F} :

$$\underline{X}^T = -\underline{F}^{-1} \underline{B}\underline{B}^T, \quad k = n(n+1)/2$$

sowie mit einer Neuformulierung der obigen Matrixgleichung

$$\underline{m}_J^n = \underline{m}_C^n \underline{n}_X^n \rightarrow \underline{m}_{,n}^1 \underline{J} = \underline{m}_C^k \underline{n}_X^1$$

in ein nichtlineares Gleichungssystem mit den Unbekannten b_{ij} :

$$\underline{J} = - \underline{C} \underline{F}^{-1} [\underline{B} \underline{B}^T]$$

Da für die rechteckige Matrix \underline{C} mit geringerer Zeilenzahl (m) als Spaltenzahl (n) keine Linksinverse existiert, verbleibt ein nicht-lineares unterbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten b_{ij} der Matrix \underline{B} . Die Mehrdeutigkeit der Lösung verwundert keineswegs, denn mit $\underline{U}\underline{U}^T = \underline{I}$ folgt sofort:

$$\begin{aligned} \underline{S}(s) &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{B} \underline{U} \underline{U}^T \underline{B}^T (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} = \\ &= \underline{G}^T (-s\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{B}^* \underline{B}^{*T} (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{G} \end{aligned}$$

Für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystem bietet sich ein numerisches Verfahren von NEWTON-RAPHSON an, da die unbekannt Koeffizienten b_{ij} in quadratischen Formen auftreten und somit die Ableitungen leicht (schematisiert) bestimmt werden können. Die bekannte NEWTON-RAPHSON-Iteration verläuft nach der Iterationsformel:

$$b_{v+1} = b_v - \frac{\partial f(b_v)}{\partial b_v} f(b_v), \quad v \geq 0$$

In dieser Gleichung sind die überzähligen Koeffizienten b_{ij} vorzuwählen. Unter Berücksichtigung der quadratischen Formen sind allerdings Nebenbedingungen einzuhalten, deren Bestimmung bei großen Systemen zu Schwierigkeiten führen können. Zur Veranschaulichung des Zerlegungsverfahrens soll ein kurzes Beispiel angeführt werden.

BEISPIEL ZUR ZERLEGUNG EINER LEISTUNGSSPEKTRALMATRIX

Gegeben ist eine 2×2 Leistungsspektralmatrix mit Elementen gebrochen rationaler Funktionen:

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1 - 4s^2}{4 - 5s^2 + s^4} & \frac{s}{4 - 5s^2 + s^4} \\ \frac{-s}{4 - 5s^2 + s^4} & \frac{1 - 9s^2}{4 - 5s^2 + s^4} \end{bmatrix} \cdot$$

Die Nennerpolynome sind auf den gemeinsamen Hauptnenner der spektralen Dichtematrix erweitert worden. Die Summenzerlegung erfordert zunächst eine Partialbruchzerlegung der Elemente.

a) Die Zerlegung in eine Summe

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}^T(-s)$$

Element 11:

$$\frac{-4s^2+1}{4-5s^2+s^4} = \frac{-0.5}{1-s} + \frac{1.25}{2-s} + \frac{0.5}{1+s} + \frac{1.25}{2+s}$$

Element 12:

$$\frac{s}{4-5s^2+s^4} = \frac{0.16}{1-s} + \frac{-0.16}{2-s} + \frac{-0.16}{1+s} + \frac{0.16}{2+s}$$

Element 21:

$$\frac{-s}{4-5s^2+s^4} = \frac{-0.16}{1-s} + \frac{0.16}{2-s} + \frac{0.16}{1+s} + \frac{-0.16}{1+s}$$

Element 22:

$$\frac{-9s^2+1}{4-5s^2+s^4} = \frac{-1.33}{1-s} + \frac{-1.33}{2-s} + \frac{2.916}{1+s} + \frac{2.916}{2+s}$$

$$\underline{W}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.75s + 0.25}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{6(s^2 + 3s + 2)} \\ \frac{-1}{6(s^2 + 3s + 2)} & \frac{1.58s + 0.25}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}$$

b) Die Realisation der Matrix $\underline{W}(s)$ aus der Summenzerlegung

Die Realisierung des Formfilters $\{\underline{F}, \underline{G}, \underline{J}\}$ erfolgt nach einem Verfahren von GERTH, das an späterer Stelle beschrieben wird. Innerhalb dieses Beispiels sind die Ergebnisse einer Zustandsraumdarstellung des Hilfssystems vorweggenommen.

$$\underline{W}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ -2 & 0.16 \\ 0 & 1.58 \\ -0.16 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{G}^T (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{J}$$

$$\underline{S}(s) = \underline{W}(s) + \underline{W}^T(-s) = \underline{G}^T (s\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{J} \underline{J}^T (-s\underline{I} + \underline{F}^T)^{-1} \underline{G}$$

- c) Die Produktzerlegung unter Benutzung der Realisation der Summenzerlegung
-

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{B}^T (-s\underline{I} + \underline{A}^T)^{-1} \underline{C}^T$$

Das beschriebene Verfahren übernimmt die Matrizen \underline{A} und \underline{C} aus der Realisation der Summenzerlegung.

$$\underline{A} = \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \underline{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Bestimmungsgleichungen der an dieser Stelle noch unbekanntem Matrix \underline{B}

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \underline{G}^T \underline{X} \quad , \quad \underline{J}^T = \underline{X} \underline{G} \\ \underline{B} \underline{B}^T &= -\underline{A} \underline{X} - \underline{X} \underline{A}^T \end{aligned}$$

führen auf ein nichtlineares Gleichungssystem. Mit

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ -2 & 0.166 \\ 0 & 1.583 \\ -0.166 & -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

und

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \end{bmatrix} \quad (ii)$$

folgt durch Umstellung der Gleichungssysteme aus (i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -2. \\ 0. \\ -0.166 \\ 0. \\ 0.166 \\ 1.538 \\ -4.5 \end{bmatrix} \quad (iii)$$

und aus Gleichung (ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^2 + b_{12}^2 \\ b_{11} b_{21} + b_{12} b_{22} \\ b_{11} b_{31} + b_{12} b_{32} \\ b_{11} b_{41} + b_{12} b_{42} \\ b_{21}^2 + b_{22}^2 \\ b_{21} b_{31} + b_{22} b_{32} \\ b_{21} b_{41} + b_{22} b_{42} \\ b_{31}^2 + b_{32}^2 \\ b_{31} b_{41} + b_{32} b_{42} \\ b_{41}^2 + b_{42}^2 \end{bmatrix} \quad (iiii)$$

Die Zusammenfassung der Gleichungssysteme (iii) und (iiii) ergibt ein nichtlineares Gleichungssystem mit 7 Gleichungen und 8 Unbekannten.

$$\begin{aligned}
 6 b_{31} b_{41} + 6 b_{32} b_{42} + b_{41}^2 + b_{42}^2 + 80 &= 0 \\
 6 b_{11} b_{41} + 6 b_{12} b_{42} + b_{21} b_{41} + b_{22} b_{42} + 3 &= 0 \\
 6 b_{11} b_{21} + 6 b_{12} b_{22} + b_{21}^2 + b_{22}^2 + 35 &= 0 \\
 b_{11} b_{41} - b_{21} b_{31} + b_{12} b_{42} - b_{22} b_{32} + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} b_{31} + b_{12} b_{32} &= 0 \\ b_{31}^2 + b_{32}^2 - 9 &= 0 \\ b_{11}^2 + b_{12}^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Wahl einer Unbekannten konnten mittels NEWTON-RAPHSON-Iteration numerisch die folgenden Lösungen erzielt werden:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0.22 & -1.98 \\ -1.66 & 5.85 \\ -2.98 & -0.33 \\ 9.05 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.44 & -1.95 \\ 2.29 & 5.69 \\ 2.92 & -0.65 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0.13 \\ 7 & -0.67 \\ -0.2 & -3 \\ 0.9 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ -3 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Allgemein bleibt festzustellen, daß eine mit gebrochen rationalen Funktionen besetzte spektrale Dichtematrix in eine Summe von Matrizen zerlegt werden kann. Aus der Realisierung dieser analytisch gegebenen Matrizen wird die Matrix der Übertragungsfunktionen abgeleitet. Während zwei Matrizen der Summenzerlegung in die Produktzerlegung übernommen werden können, verbleibt zur Bestimmung der übrigen Matrix die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Die Mehrdeutigkeit der Lösung ergibt sich formal aus der Problemstellung, wobei für die überzähligen Koeffizienten aufgrund der quadratischen Ausdrücke Nebenbedingungen einzuhalten sind. Wie schon das kleine Beispiel zeigt, liegen die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems unter Umständen eng beieinander. Bei komplizierteren und anwendungsbezogenen Beispielen tauchten oft numerische Schwierigkeiten auf, weil die Anzahl der Iterationen zu groß oder aber die Lösungen in der Kontrollrechnung nicht den Ansprüchen des Verfasser genügten. Daher soll im folgenden ein weiteres Verfahren vorgestellt werden, das auf direktem Wege eine Produktzerlegung spektraler Dichtematrizen ermöglicht.

4.4 Die Zerlegung der spektralen Dichtematrix in ein Produkt konjugiert komplexer transponierter Übertragungsmatrizen

Dieser Abschnitt zeigt die direkte Zerlegung einer Leistungsspektralmatrix mit Koeffizienten, die aus gebrochen rationalen Funktionen bestehen,

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

durch eine endliche Zahl von Matrizen Transformationen der positiv definiten HERMITESchen spektralen Dichtematrix. Von DAVIS stammt die Idee [23], auf der Grundlage der mathematischen Sätze über Polynommatrizen, diese durch Ähnlichkeitstransformation in eine reelle Zahlenmatrix zu transformieren.

Nimmt man einmal an, daß es gelingt, durch eine Folge von Ähnlichkeits- transformationen die spektrale Dichtematrix in eine Einheitsmatrix zu überführen, so ist dies vergleichbar mit der Umkehrung der Problem- stellung.

$$\prod_{i=1}^N \underline{T}_i(s) \underline{S}(s) \prod_{i=1}^N \underline{T}_i^T(-s) = \underline{I}$$

Im vorliegenden Fall wird die spektrale Dichtematrix eines farbigen, mehrfachkorrelierten Rauschprozesses in die Einheitsmatrix des weißen Rauschens transformiert. Gelingt es, reguläre Transformationsmatrizen zu finden, so ist durch Inversion dieser Matrizen die gewünschte Zer- legung zu vollziehen.

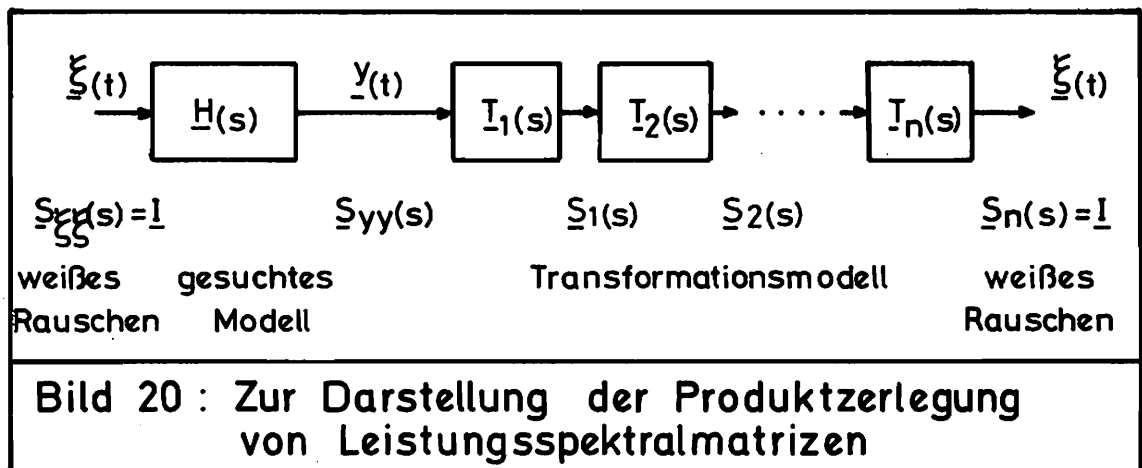
Mit

$$\underline{H}(s) = \underline{T}_1^{-1}(s) \underline{T}_2^{-1}(s) \underline{T}_3^{-1}(s) \cdots \underline{T}_N^{-1}(s)$$

wird die spektrale Dichtematrix in

$$\underline{S}(s) = \left[\prod_{i=1}^N \underline{T}_i^{-1}(s) \right] \underline{I} \left[\prod_{i=1}^N \underline{T}_i^{-1}(-s) \right]^T = \underline{H}(s) \underline{I} \underline{H}^T(-s)$$

zerlegt.



Die Transformation der Leistungsspektralmatrix wird schrittweise ausgeführt. Hierbei entspricht jede Transformation formal einer Übertragung von spektralen Dichtematrizen, wie zu Beginn dieses Kapitels bei physikalisch-technischen Systemen mit bekannter und unbekannter Struktur gezeigt wurde. Es gilt somit allgemein:

$$\underline{S}_{i+1}(s) = \underline{T}_i(s) \underline{S}_i(s) \underline{T}_i^T(-s)$$

Da die Leistungsspektralmatrix mit gebrochen rationalen Funktionen besetzt ist, muß die HERMITESche Matrix zunächst in eine Polynommatrix transformiert werden. Wie eingangs aufgeführt, treten die Pole einer

spektralen Dichtematrix paarweise in der rechten und linken Halbebene der LAPLACE-Variablen s auf. Bringt man die Nennerfunktionen der Leistungsspektralmatrix auf einen gemeinsamen Hauptnenner, so werden die Transformationsmatrizen offensichtlich Diagonalmatrizen. Die Vormultiplikation mit $\underline{T}(s)$ eliminiert Pole in der rechten Halbebene, während die Nachmultiplikation gleiches in der linken LAPLACE-Ebene bewirkt.

Mit den Nullstellen s_i des gemeinsamen Nennerpolynoms wird der Hauptnenner in der Form

$$HN(s) HN(-s) = \prod_{i=1}^k (s + s_i) \prod_{i=1}^k (-s + s_i)$$

aufgespalten, und die Leistungsspektralmatrix kann wie folgt dargestellt werden

$$S(s) = \frac{1}{HN(s)} \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) & \cdot & \cdot & z_{1n}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1}(s) & z_{n2}(s) & \cdot & \cdot & z_{nn}(s) \end{bmatrix} \frac{1}{HN(-s)}$$

Mit der Transformationsmatrix

$$T(s) = \begin{bmatrix} \prod (s + s_i) & & & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & & \prod (-s + s_i) & \\ & & & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HN(s) & & & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & & & HN(s) \\ & & & \dots \end{bmatrix}$$

ergibt sich durch Abspaltung der Pole aus der spektralen Dichtematrix eine Polynommatrix. Durch die HERMITESche Form der Leistungsspektralmatrix kann unter Umständen die Hauptnerinersuche umgangen werden. Die diagonale Transformationsmatrix $\underline{I}(s)$ eliminiert die Polstellen zeilenweise, während die konjugiert komplexe Transformationsmatrix die Polstellen spaltenweise reduziert. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden. Komplexe Polstellen, die paarweise auftreten können, werden reell in der Form $(s_i^2 + as_i + b)$ abgespalten.

Es ist bekannt, daß eine Polynommatrix mit konstanter Determinante durch eine endliche Anzahl von Elementarumformungen in eine reelle Zahlenmatrix überführt werden kann [30]. Nach Abspaltung der Pole soll nun die verbleibende Polynommatrix derart transformiert werden, daß sich ihre Determinante als unabhängig von der LAPLACE-Variablen erweist. Berechnet man die Determinante einer Polynommatrix, so läßt sich im vorliegenden Fall durch Aufsuchen der Nullstellen das Determinantenpolynom der Matrix wie folgt darstellen. Die Nullstellen treten

$$\det(\underline{S}_i(s)) = A \prod_{i=1}^N (s + s_j)(-s + s_j) \quad , \quad A = \text{const.}$$

aufgrund der besonderen Struktur der positiv definiten HERMITESchen Matrix als ein- oder mehrfache reelle oder konjugiert komplexe Nullstellen auf. Aus der Symmetrie der Realteile und der Antimetrie der Imaginärteile folgen die Nullstellenpaare. Da der Wert der Determinante einer Matrix unabhängig von einer Zeilen- oder Spaltenentwicklung ist, muß jeweils eine ganze Zeile oder Spalte von einer der Nullstellen befreit werden. Einerseits ist nicht automatisch jedes Zeilenelement ohne Rest durch eine Nullstelle des Determinantenpolynoms teilbar, andererseits ändert sich der Wert einer Determinante nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) Vielfache einer anderen Zeile (Spalte) addiert

werden. Es muß nun die jeweilige Entwicklungszeile (-spalte) derart manipuliert werden, daß sie ohne Rest durch eine Nullstelle teilbar wird.

Setzt man in die Polynommatrix die jeweilige Nullstelle ein und addiert zur Entwicklungszeile (-spalte) das entsprechende Vielfache der übrigen Zeilen (Spalten), so daß die Entwicklungszeile verschwindet, entspricht dies der Teilbarkeit dieser Zeile (Spalte) durch die Nullstelle.

Mit erlaubten Operationen wird die letzte Zeile und Spalte so verändert, daß die Nullstellen aus der Polynomdeterminante abgespalten werden können und sich die Determinante der verbleibenden Polynommatrix als invariant zur LAPLACE-Variablen s erweist.

Durch Einsetzen der Nullstellen s_k der Polynomdeterminante $\det(\underline{s}_i(s))$ in die Polynommatrix $\underline{S}_i(s)$ ergeben sich die Faktoren zur Umformung der letzten Zeile (Spalte) durch Lösung des Gleichungssystems:

$$\underline{S}_i^T(s=s_k) \underline{x} = \underline{0}$$

Der Lösungsvektor \underline{x} enthält die Multiplikationsfaktoren zur Addition der Zeilen (Spalten) und garantiert die vollständige Teilbarkeit der Elemente der letzten Zeile (Spalte) durch die jeweilige Nullstelle (s_k). Hierdurch wird die Polynomdeterminante um die Faktoren $(-s + s_k)$ und $(s + s_k)$ reduziert.

Faßt man die verbalen Erklärungen formelmäßig zusammen, so lautet die Transformationsvorschrift

$$\underline{S}_{i+1}(s) = \underline{T}_i(s) \underline{S}_i(s) \underline{T}_i^T(-s)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{x_1}{(s+s_k)} & \frac{x_2}{(s+s_k)} & \dots & \frac{1}{(s+s_k)} \end{bmatrix} \underline{S}_i(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \frac{x_1}{(-s+s_k)} \\ 0 & 1 & \cdot & \frac{x_2}{(-s+s_k)} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{(-s+s_k)} \end{bmatrix} .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det(\underline{S}_{i+1}(s)) &= \det(\underline{T}_i(s)) \det(\underline{S}_i(s)) \det(\underline{T}_i^T(-s)) \\ &= \frac{1}{s + s_k} \det(\underline{S}_i(s)) \frac{1}{-s + s_k} \end{aligned}$$

Die fortlaufende Reduktion der Nullstellen der Polynomdeterminante führt zu einer Matrix mit konstanter Determinante. Im Falle komplexer Nullstellen bleibt die Transformationsvorschrift erhalten, wobei jeweils ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar eliminiert wird. Die verbleibende Matrix besitzt in jedem Fall eine Determinante mit reellem Wert, man spricht auch von unimodularen Polynommatrizen. Polynommatrizen mit konstanter Determinante besitzen die Eigenschaft [30,100], durch elementare Umformungen (vgl. Gauß-Algorithmus) in eine reine Zahlenmatrix transformierbar zu sein.

Da der höchste Grad der Polynomdeterminante mit verschwindenden Koeffizienten nur aus Termen mit den größten Potenzen in s gebildet werden kann, faßt man diese in einer Matrix zusammen. Vernachlässigt man jene

Matrizenelemente, die zur höchsten Potenz der Determinante keinen Beitrag leisten, so muß aufgrund obiger Operationen die Determinante dieser neuformierten Matrix verschwinden. Hierdurch ist eine Linearkombination von Zeilen bzw. Spalten gegeben. Addiert man zur Zeile mit der höchsten Potenz in s Vielfache anderer Zeilen, so daß die Potenzen dieser Zeile verschwinden, so kann mit diesen Faktoren die folgende Transformationsmatrix erstellt werden.

$$\underline{T}_i(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & as^m & bs^n & \cdots & ds^k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Bei Vormultiplikation der ursprünglichen Polynommatrix mit Matrizen dieser Art unterscheiden sich die Elemente einer Zeile der Produktmatrix durch Polynome mit einem um die Potenz 1 verminderten Grad. Zur Reduzierung der Polynomordnung ergibt sich für die hier behandelten Matrizen die folgende Rechenvorschrift:

$$\underline{S}_{i+1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & as^m & \cdot & ws^n \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{S}_i(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -as^m & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -ws^n & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die schrittweise Durchführung solch elementarer Umformungen führt letztlich auf eine reine Zahlenmatrix, die durch CHOLESKY-Zerlegung

in zwei transponierte Dreiecksmatrizen zerlegt werden kann. Mit

$$\underline{S}_n(s) = \underline{S}_n = \underline{T}_n \underline{T}_n^T = \text{const.}$$

$$T_{ll} = \sqrt{S_{ll} - \sum_{k=1}^{l-1} T_{kl}^2}, \quad l = 1, \dots, n$$

$$T_{lj} = \frac{1}{T_{ll}} (S_{lj} - \sum_{k=1}^{l-1} T_{kl} T_{kj}), \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, n \\ j = l+1, \dots, n \end{matrix}$$

folgt schließlich die Transformation der Leistungsspektralmatrix in eine Einheitsmatrix

$$\left[\underline{T}_n \dots \underline{T}_2(s) \underline{T}_1(s) \right] \underline{S}(s) \left[\underline{T}_1^T(-s) \underline{T}_2^T(-s) \dots \underline{T}_n^T \right] = \underline{I}$$

Die gesuchte Matrix der Übertragungsfunktionen wird durch Inversion und Multiplikation der Transformationsmatrizen in der Reihenfolge der Reduktion gefunden:

$$\underline{H}(s) = \underline{T}_1^{-1}(s) \underline{T}_2^{-1}(s) \dots \underline{T}_{n-1}^{-1}(s) \underline{T}_n^{-1}$$

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

Vergegenwärtigt man sich die Typen der Transformationsmatrizen in den einzelnen Reduktionsschritten, so ist die jeweilige Inversion sehr einfach zu vollziehen. Bei der Elimination der Pole treten Diagonalmatrizen der Form auf,

$$\underline{T}(s) = \text{diag}(t_i(s))$$

deren Inverse mit

$$\underline{T}^{-1}(s) = \text{diag}\left(\frac{1}{t_i(s)}\right)$$

gegeben sind. Die Bildung der unimodularen Polynommatrizen wird mit Matrizen der Struktur

$$\underline{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ \frac{x_1}{s+s_k} & \frac{x_2}{s+s_k} & \dots & \dots & \frac{1}{s+s_k} \end{bmatrix}$$

vollzogen. Die Inverse ergibt sich durch Vorzeichenumkehr und Produktdarstellung.

$$\underline{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ -x_1 & -x_2 & \dots & \dots & s+s_k \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrizen zur Elementarumformung der Polynommatrizen entsprechen mit Ausnahme einer einzelnen Zeile der Einheitsmatrix.

$$\underline{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \underline{0} & & \\ & & & 1 & as^m & bs^n & \dots & zs^k \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Die Inversen dieser Matrizen typen bildet man durch Vorzeichenumkehr der Polynomkoeffizienten.

$$\underline{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \underline{0} & & \\ & & & 1 & -as^m & -bs^n & \dots & -zs^k \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Die verbleibende reelle Zahlenmatrix ist regulär, zerlegbar und somit invertierbar.

Zum besseren Verständnis der Transformation einer positiv definiten HERMITESchen Matrix mit Elementen gebrochen rationaler Funktionen in eine reelle Zahlenmatrix wird ein kurzes Beispiel angeführt.

BEISPIEL ZUR ZERLEGUNG EINER SPEKTRALEN DICHEMATRIX

Gegeben sei die Leistungsspektralmatrix

$$\underline{S}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{1 - 4s^2}{s^4 - 5s^2 + 4} & \frac{s}{s^4 - 5s^2 + 4} \\ \frac{-s}{s^4 - 5s^2 + 4} & \frac{1 - 9s^2}{s^4 - 5s^2 + 4} \end{bmatrix} \cdot$$

a) Die Reduktion der Polpaare

$$HN(s) = s^4 - 5s^2 + 4 = (s+1)(s+2)(-s+1)(-s+2)$$

$$\underline{T}_1(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_1(s) = \underline{T}_1(s) \underline{S}_0(s) \underline{T}_1^T(-s) = \begin{bmatrix} 1 - 4s^2 & s \\ -s & 1 - 9s^2 \end{bmatrix}$$

b) Die Reduktion der Determinante

$$\begin{aligned} \det(\underline{S}_1(s)) &= (1 - 4s^2)(1 - 9s^2) + s^2 = 36s^4 - 12s^2 + 1 \\ &= \left(s + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(s - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(-s + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(-s - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

(i) Die Reduktion des Nullstellenpaares ($\pm s + \frac{1}{\sqrt{6}}$)

$$\begin{bmatrix} 1 - 4\left(\frac{1}{6}\right) & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & 1 - 9\left(\frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$\underline{T}_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3/\sqrt{6}}{s + \frac{1}{\sqrt{6}}} & \frac{1}{s + \frac{1}{\sqrt{6}}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_2(s) = \underline{T}_2(s) \underline{S}_1(s) \underline{T}_2^T(-s) = \begin{bmatrix} 1 - 4s^2 & -\frac{12}{\sqrt{6}}s - 3 \\ \frac{12}{\sqrt{6}}s - 3 & 15 \end{bmatrix}$$

(ii) Die Reduktion des Nullstellenpaares ($\pm s - \frac{1}{\sqrt{6}}$)

$$\begin{bmatrix} 1 - 4\left(\frac{1}{6}\right) & \frac{12}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 3 \\ -\frac{12}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 3 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$T_3(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{s - \frac{1}{\sqrt{6}}} & \frac{1}{s - \frac{1}{\sqrt{6}}} \end{bmatrix}$$

$$S_4(s) = T_3(s) S_3(s) T_3^T(-s) = \begin{bmatrix} 1 - 4s^2 & -12s \\ 12s & 36 \end{bmatrix}$$

Die verbleibende Polynommatrix $S_4(s)$ hat eine von der LAPLACE-Variablen unabhängige Determinante. Die Matrix ist unimodular.

$$\det(S_4(s)) = (1 - 4s^2) 36 + (12s)^2 = 36$$

c) Die Elementarumformungen der Polynommatrix

(i) Die Reduktion der höchsten Polynompotenz

$$\begin{bmatrix} 1-4s^2 & -12s \\ 12s & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4s^2 & -12s \\ 12s & 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4s^2 & -12 \\ 12s & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12s & 36 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \frac{1}{3}s$$

$$\begin{bmatrix} 1-4s^2 & -12s \\ 12s & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4s^2 & -12s \\ 12s & 36 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_4(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_5(s) = \underline{T}_4(s) \underline{S}_4(s) \underline{T}_4^T(-s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

d) Die CHOLESKY-Zerlegung der Zahlenmatrix

$$\underline{S}_5(s) = \underline{S}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e) Die Matrix der Übertragungsfunktionen

$$\underline{H}(s) = \underline{T}_1^{-1}(s) \underline{T}_2^{-1}(s) \underline{T}_3^{-1}(s) \underline{T}_4^{-1}(s) \underline{T}_5^{-1}$$

$$\underline{H}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3/\sqrt{6}}{s+\frac{1}{\sqrt{6}}} & \frac{1}{s+\frac{1}{\sqrt{6}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{s-\frac{1}{\sqrt{6}}} & \frac{1}{s-\frac{1}{\sqrt{6}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & s+\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & s-\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3}s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2s}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-3s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

f) Die Kontrolle

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2s}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-3s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(-s+1)(-s+2)} & \frac{3s}{(-s+1)(-s+2)} \\ \frac{2s}{(-s+1)(-s+2)} & \frac{1}{(-s+1)(-s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-4s^2}{s^4-5s^2+4} & \frac{s}{s^4-5s^2+4} \\ \frac{-s}{s^4-5s^2+4} & \frac{1-9s^2}{s^4-5s^2+4} \end{bmatrix}$$

Es konnte gezeigt werden, daß es mit Hilfe einer Folge von Ähnlichkeits-
transformationen gelingt, eine Leistungsspektralmatrix mit Elementen
echt gebrochen rationaler Funktionen in eine Einheitsmatrix zu über-
führen. Aus den konjugiert komplexen inversen Transformationsmatrizen
wird eine Matrix-Übertragungsfunktion gebildet, die kennzeichnend für
das Übertragungsverhalten eines linearen Systems angesehen werden kann.

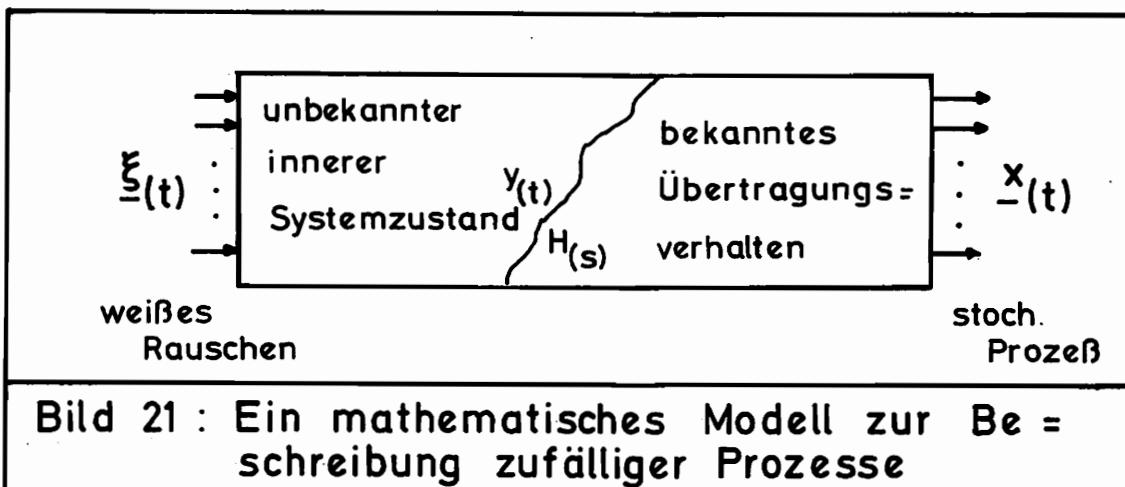
Mit diesem Übertragungsmodell läßt sich der stochastische Prozeß des
weißen Rauschens in einen mehrfachkorrelierten farbigen Zufallsprozeß
transformieren. Die Ableitung eines mathematischen Übertragungsmodells
aus einer vorgegebenen (z. B. gemessenen) spektralen Dichtematrix
gewährleistet, daß der Antwortprozeß dieses fiktiven Systems die
geforderten statistischen Kennwerte (Mittelwerte, Varianzen, Kovarianzen)
und Kennfunktionen (Leistungsspektren, Korrelationsfunktionen) des zu
modellierenden stochastischen Prozesses aufweist.

Im folgenden wird nun eine Realisierung dieser Matrix-Übertragungs-
funktion gesucht. Zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines
linearen Systems im Frequenzbereich wird eine äquivalente Darstellung
im Zeitbereich in Form einer Differentialgleichung abgeleitet.

4.5 Die Minimalrealisierung einer Matrix-Übertragungsfunktion

Mit den bisherigen Ausführungen ist die Berechnung einer Matrix-Übertragungsfunktion aus der Leistungsspektralmatrix eines mehrfachkorrelierten, stochastischen Prozesses möglich. Zur Beschreibung des Ein/Ausgangsverhaltens linearer Systeme sind die Matrix-Übertragungsfunktion (z. B.: Frequenzgangmatrix) und die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung ebenwertig. Der innere Systemzustand wird jedoch im allgemeinen ausführlicher durch die Differentialgleichung gekennzeichnet. Ziel dieser Arbeit ist es unter anderem, ein Verfahren zu erstellen, mit dem stationäre, mehrfachkorrelierte Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden können. Gesucht wird ein mathematisches lineares Systemmodell, das auf weißes Eingangsruschen mit einem Zufallsprozeß antwortet, der die vorgegebene (z. B.: gemessene) Leistungsspektralmatrix (bzw. Matrix der Korrelationsfunktionen) und Gaußsche Amplitudenverteilung aufweist. Die Beschreibung stochastischer Prozesse durch lineare, stochastische Differentialgleichungen ermöglicht später neben einer numerischen Prozeßsimulation im Zeitbereich eine einfache Kovarianzanalyse von mechanischen Strukturschwingungen unter zufälliger Belastung.

Nach der Bestimmung der Matrix-Übertragungsfunktion aus einer spektralen Dichtematrix wird nun ein Verfahren zur Realisierung im Zeitbereich vorgestellt.



Aus der Matrix-Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & g_{13}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1q}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2q}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_{pq}(s) \end{bmatrix}$$

mit den $p \cdot q$ Elementen $g_{ij}(s)$ echt gebrochen rationaler Funktionen wird die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}}(t) &= \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \\ \underline{x}(t) &= \underline{C} \underline{y}(t) \end{aligned}$$

gesucht.

Das Problem besteht in der Bestimmung der Matrizen \underline{A} mit der Ordnung (n, n) , \underline{B} mit der Ordnung (n, q) und \underline{C} mit der Ordnung (p, n) aus der vorgegebenen Matrix-Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ mit der Ordnung (p, q) . Neben dieser Realisierung wird zusätzlich die Bedingung einer minimalen Systemordnung ($n = n_{\min} = n_0$) und der vollständigen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des mathematischen Übertragungsmodells $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ gestellt. Im Rahmen der Darstellung der linearen (regelungstechnischen) Systemtheorie spielt die Realisierung der Matrix-Übertragungsfunktion seit langer Zeit eine große Rolle. Die Problemstellung ist dort unter dem Begriff "Minimalrealisierung" bekannt. Im Gegensatz zu der hier angestrebten Behandlung stochastischer Prozesse handelt es sich in der Regelungstechnik um die Untersuchung realer, physikalischer Systeme, dagegen soll an dieser Stelle

zur Beschreibung von Zufallsvorgängen ein fiktives lineares Systemmodell aus statistischen Kennfunktionen abgeleitet werden. Während im einen Fall die Matrix-Übertragungsfunktion gezielt deterministisch vermessen werden kann, wird sie in dieser Arbeit aus der statistischen Leistungsspektralmatrix bestimmt. Beiden Problemstellungen gemein ist jedoch die Ableitung einer Zustandsraumdarstellung $\{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \}$ aus der (wie auch immer bestimmten) Matrix-Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$. Die Behandlung dieser Fragestellung geht auf Arbeiten von KALMAN [49] zurück, dem im Jahre 1966 mit HO [44] ein erstes Rechenverfahren zur Realisierung einer minimalen Zustandsraumdarstellung gelang. Weitere Arbeiten [32,62] auf diesem Gebiet erhöhen im wesentlichen die Effektivität für diesen Algorithmus. Obwohl sich an dieser Stelle die Zielsetzung zur Beschreibung mehrfachkorrelierter zufälliger Prozesse durch stochastische Differentialgleichungen mit der zur Identifikation und Realisierung von Mehrgrößenübertragungssystemen deckt, soll die Methode einer Minimalrealisierung vorgestellt werden. Die derzeitige Behandlung von Zufallsschwingungen beschränkt sich auf die Berechnung von Strukturschwingungsvarianzen durch Ein/Ausgangsübertragung von Leistungsspektralmatrizen über das mechanische System ohne Berücksichtigung einer systemtheoretischen Betrachtungsweise des stochastischen Erregerprozesses. Da das Problem einer Minimalrealisierung in der Strukturdynamik unbekannt ist, soll an dieser Stelle ein Lösungsverfahren nach GERTH [31] mit der in dieser Arbeit gebräuchlichen Formulierung vorgestellt werden. Zum ausführlichen Studium sei auf die Spezialliteratur [31,32,84] verwiesen.

Der Ausdruck "Minimalrealisierung" besagt, daß einem bekannten Übertragungsverhalten ein lineares Systemmodell (Struktur) mit der geringsten Zahl an Energiespeichern zugeordnet wird. Mit dem Übertragungsverhalten

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$
$$\underline{y}(s) = \underline{H}(s) \underline{\xi}(s) = \left\{ \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \right\} \underline{\xi}(s)$$

wird das mathematische Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}(t) &= \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \\ \underline{x}(t) &= \underline{C} \underline{y}(t)\end{aligned}$$

gesucht, welches die kleinste Systemordnung (n_0) aufweist. Die Herleitung steht in engem Zusammenhang mit den Begriffen von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit dynamischer Systeme, die von KALMAN um 1960 in die Regelungstheorie eingeführt wurden.

Ein System heißt vollständig beobachtbar im Zeitintervall (t_0, t_1) , wenn ein beliebiger Zustand \underline{x}_0 zur Zeit t_0 aus der Kenntnis von Systemein- und -ausgängen bestimmt werden kann.

Ein System heißt vollständig steuerbar im Zeitintervall (t_0, t_1) , wenn es zu jedem Zustand \underline{x}_0 zur Zeit t_0 und jedem Endzustand \underline{x}_1 zur Zeit t_1 ($t_1 > t_0$) einen Systemeingang gibt, mit dem $\underline{x}_1 = \underline{x}_1(t_1)$ wird.

Während der Begriff Steuerbarkeit verlangt, daß alle Systemeigenschwingungsformen von außen erregt werden können, verlangt die Beobachtbarkeit, daß diese Zustände auch bemerkt werden können. Die KALMAN-Kriterien [49,84] für diese Begriffe werden ohne Ausführungen angegeben:

Ein System mit der (n, nq) -Matrix

$$\underline{W}_{ST} = \left[\underline{B} : \underline{A}\underline{B} : \underline{A}^2\underline{B} : \dots : \underline{A}^{n-1}\underline{B} \right]$$

heißt mit der (n, n) -Matrix \underline{A} und der (n, q) -Matrix \underline{B} vollständig steuerbar, wenn

$$\text{Rang}[\underline{W}_{ST}] = n$$

gilt und wird vollständig beobachtbar mit der (p, n) -Matrix \underline{C} und der (n, np) -Matrix

$$\underline{W}_B = \left[\underline{C}^T : \underline{A}^T \underline{C}^T : \underline{A}^{T^2} \underline{C}^T : \dots : \underline{A}^{T^{n-1}} \underline{C}^T \right]$$

genannt, wenn

$$\text{Rang}[\underline{W}_B] = n$$

gilt.

Im Falle einer vollständigen steuerbaren und beobachtbaren Realisierung entspricht der Rang der Matrizen \underline{W}_{ST} und \underline{W}_B gerade der Ordnung der angestrebten Minimalrealisierung. Hiermit kann an späterer Stelle aus einer allgemeinen Realisierung nicht minimaler Ordnung, die durch geeignete Wahl der Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} gefunden wird, die geforderte Minimalrealisierung $\{\underline{A}_0, \underline{B}_0, \underline{C}_0\}$ abgeleitet werden. Eine derartige Realisierung ist aber keineswegs eindeutig, denn mit

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} = \underline{C} \underline{Q} \underline{Q}^{-1} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{Q} \underline{Q}^{-1} \underline{B}$$

ist natürlich auch

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C} \underline{Q} \quad , \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q} \quad , \quad \underline{\tilde{B}} = \underline{Q}^{-1} \underline{B}$$

eine äquivalente Minimalrealisierung. Jede Minimalrealisierung ist durch Ähnlichkeitstransformation in eine andere überführbar.

Im folgenden wird zunächst eine Realisierung der gegebenen Matrix-Übertragungsfunktion gesucht und anschließend mit Hilfe der KALMAN-Kriterien eine mögliche Minimalrealisierung abgeleitet.

Vergegenwärtigt man sich die Matrix-Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ mit ihren Elementen echt gebrochen rationaler Funktionen, so ist jede Komponente dieser Matrix als Potenzreihe darstellbar:

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{M_1}{s} + \frac{M_2}{s^2} + \frac{M_3}{s^3} + \dots + \frac{M_i}{s^i} \quad \bullet \end{aligned}$$

Auf Konvergenzfragen soll hier nicht eingegangen werden. Die Koeffizienten der unendlichen Potenzreihe werden auch als MARKOV-Parameter bezeichnet. Ihre Berechnung kann durch Koeffizientenvergleich erfolgen. Mit der höchsten Potenz m des Nennerpolynoms lassen sich rekursive Eigenschaften zeigen [84]:

$$\begin{aligned} M_i &= -\sum_{j=1}^{i-1} a_{m-i+j} M_j + b_{m-i} \quad , \quad i \leq m \\ M_i &= -\sum_{j=0}^{m-1} a_j M_{i-m+j} \quad , \quad i > m \quad \bullet \end{aligned}$$

Die MARKOV-Parameter bilden eine rekursive Folge und sind identisch mit den Koeffizienten einer Entwicklung der Gewichtsfunktion (LAPLACE-Transformierte der Übertragungsfunktion) in eine TAYLOR-Reihe an der Stelle $t = 0$ bei verschwindenden Anfangswerten:

$$g(t) = M_1 + \frac{M_2 t}{1!} + \frac{M_3 t^2}{2!} + \dots + \frac{M_i t^{i-1}}{(i-1)!} + \dots$$

Die spezielle Anordnung der MARKOV-Parameter in Matrizenform:

$$\underline{P}_r = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_r \\ M_2 & M_3 & \dots & \dots & M_{r+1} \\ M_3 & \dots & & & \\ \dots & \dots & & & \\ M_r & \dots & \dots & \dots & M_{2r} \end{bmatrix}$$

nennt man eine HANKEL-Matrix [30]. Derartige Matrizen haben auch bei unendlicher Ordnung einen endlichen Rang. Im Falle einer vollständig steuer- und beobachtbaren Realisierung kann gezeigt werden [84]:

$$\underline{P}_n = \underline{W}_B^T \underline{W}_{ST}$$

Diese charakteristische Eigenschaft wird später zur Bestimmung einer Minimalrealisierung aus einer geeignet gewählten Realisierung genutzt.

Faßt man die MARKOV-Parameter aller Elemente der Matrix-Übertragungsfunktion für jeden Koeffizienten der Potenzreihe in Matrizen der Form

$$\underline{M}_j = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{p1} & M_{p2} & \cdots & M_{pq} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} M_{j11} & M_{j12} & \cdots & M_{j1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{jp1} & M_{jp2} & \cdots & M_{jpq} \end{bmatrix}$$

zusammen, so folgt für die Matrix-Übertragungsform die Matrizenreihe:

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{M}_1}{s} + \frac{\underline{M}_2}{s^2} + \frac{\underline{M}_3}{s^3} + \frac{\underline{M}_4}{s^4} + \cdots + \frac{\underline{M}_i}{s^i} + \cdots$$

Eine vergleichbare Darstellung läßt sich auch dann finden, wenn die Matrix-Übertragungsfunktion zuvor auf ihren gemeinsamen Hauptnenner aller Elemente gebracht wird. Nach KALMAN [48] fordert die Realisierung einer Matrix-Übertragungsfunktion die Zuordnung eines reellen Matrizen Tripels $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ zur unendlichen Folge der reellen Matrizen \underline{M}_i derart, daß gilt:

$$\underline{M}_i = \underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B}$$

Die Beschreibung der Matrix-Übertragungsfunktion durch eine Folge von MARKOV-Parametern versteht sich unabhängig von Konvergenzfragen als Rechenvorschrift zur Bestimmung der MARKOV-Koeffizienten. Mit einem gleichen Ansatz erhält man für die rechte Seite der Gleichung

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

mit

$$(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{\underline{M}_1^*}{s} + \frac{\underline{M}_2^*}{s^2} + \frac{\underline{M}_3^*}{s^3} + \dots + \frac{\underline{M}_i^*}{s^i} + \dots$$

und

$$\underline{I} = \frac{\underline{M}_1^*}{s}(s\underline{I} - \underline{A}) + \frac{\underline{M}_2^*}{s^2}(s\underline{I} - \underline{A}) + \dots + \frac{\underline{M}_i^*}{s^i}(s\underline{I} - \underline{A}) + \dots$$

bzw.

$$\underline{M}_1^* + \frac{\underline{M}_2^*}{s} + \frac{\underline{M}_3^*}{s^2} + \frac{\underline{M}_4^*}{s^3} + \dots = \underline{I} + \frac{\underline{M}_1^* \underline{A}}{s^2} + \frac{\underline{M}_2^* \underline{A}}{s^3} + \dots$$

durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \underline{M}_1^* &= \underline{I} = \underline{A}^0 \\ \underline{M}_2^* &= \underline{M}_1^* \underline{A} = \underline{A}^1 \\ \underline{M}_3^* &= \underline{M}_2^* \underline{A} = \underline{A}^2 \\ &\dots \\ \underline{M}_i^* &= \underline{M}_{i-1}^* \underline{A} = \underline{A}^{i-1} \end{aligned}$$

die folgende Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} &= \frac{\underline{C} \underline{M}_1^* \underline{B}}{s} + \frac{\underline{C} \underline{M}_2^* \underline{B}}{s^2} + \dots + \frac{\underline{C} \underline{M}_i^* \underline{B}}{s^i} \\ &= \frac{\underline{C} \underline{I} \underline{B}}{s} + \frac{\underline{C} \underline{A} \underline{B}}{s^2} + \dots + \frac{\underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B}}{s^i} \end{aligned}$$

Aus diesen Ableitungen ergibt sich die Realisierungsvorschrift nach KALMAN, die nun zur Bestimmung des Matrizen Tripels $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ genutzt wird. Durch geeignete Wahl dieser Matrizen wird zunächst eine nicht minimale Realisierung erreicht, aus der im weiteren ein günstiger Algorithmus zur Berechnung der geforderten Minimalrealisierung abgeleitet werden kann. Aus den Rekursionseigenschaften der MARKOV-Parameter wird die Matrix \underline{A} zu einer FROBENIUS-Matrix gewählt, so daß sich mit der aus Einheitsspaltenvektoren bestehenden Matrix \underline{B} die Matrix \underline{C} aus den MARKOV-Parametern zusammensetzen muß. Die Rekursionseigenschaften der MARKOV-Parameter eines einzelnen Elementes der Matrix-Übertragungsfunktion können auch für die Matrizen \underline{M}_i gefunden werden. Für diese Matrizen mit einem Index i , der größer oder gleich dem gemeinsamen Hauptnennergrad m ist, gilt die folgende Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_1 & \underline{M}_2 & \underline{M}_3 & \dots & \underline{M}_m \\ \underline{M}_2 & \underline{M}_3 & \dots & \dots & \underline{M}_{m+1} \\ \underline{M}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{M}_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{M}_{k-m} & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{M}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \underline{I} \\ -\alpha_2 \underline{I} \\ -\alpha_3 \underline{I} \\ \vdots \\ -\alpha_m \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{m+1} \\ \underline{M}_{m+2} \\ \underline{M}_{m+3} \\ \vdots \\ \underline{M}_k \end{bmatrix}, \quad k = 2m, \dots, \infty$$

Nutzt man die Realisierungsvorschrift

$$\underline{M}_i = \underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{m+1} &= -\alpha_1 \underline{M}_1 - \alpha_2 \underline{M}_2 - \dots - \alpha_m \underline{M}_m \\ \underline{M}_{m+1} &= \underline{C} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \underline{I} & -\alpha_2 \underline{A} & \dots & -\alpha_m \underline{A}^{m-1} \end{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{M}_{m+2} &= \underline{C} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \underline{A} & -\alpha_2 \underline{A}^2 & \dots & -\alpha_m \underline{A}^m \end{bmatrix} \underline{B} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ \underline{M}_k &= \underline{C} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \underline{A}^{k-m-1} & \dots & -\alpha_m \underline{A}^{k-2} \end{bmatrix} \underline{B} \end{aligned}$$

Nach GERTH wird die Matrix \underline{A} so gewählt, daß sie einerseits die Bedingung $\underline{M}_i = \underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B}$ erfüllt und andererseits die Rekursions-eigenschaften der MARKOV-Parameter erhalten bleiben.

Setzt man die Kenntnis des Polynoms $\underline{\alpha}^T$ voraus, so existiert zu diesem Polynom eine Begleitmatrix der Form:

$$\underline{F}_m = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_m \end{array} \right]$$

Diese FROBENIUS-Matrix bildet ihr charakteristisches Polynom direkt aus den Koeffizienten α_j :

$$\det [\lambda \underline{I} - \underline{F}] = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda^1 + \dots + \alpha_m \lambda^{m-1} + \lambda^m \quad \bullet$$

Es gilt mit dem Satz von CAYLEY-HAMILTON:

$$\begin{aligned} \underline{F}_m^m &= -\alpha_1 \underline{I} - \alpha_2 \underline{F} - \alpha_3 \underline{F}^2 - \dots - \alpha_m \underline{F}^{m-1} \\ \underline{F}_m^{m+1} &= -\alpha_1 \underline{F} - \alpha_2 \underline{F}^2 - \alpha_3 \underline{F}^3 - \dots - \alpha_m \underline{F}^m \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned} \quad \bullet$$

Setzt man die gesuchte Matrix A als (qm,qm) diagonalähnliche Matrix

$$\underline{A} = \text{diag}^q[\underline{F}_m] = \begin{bmatrix} \underline{F}_m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{F}_m \end{bmatrix}$$

an, so folgt mit den obigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{m+1} &= \underline{C} \left\{ -\alpha_1 \underline{I} - \alpha_2 \text{diag}^q[\underline{F}_m] - \alpha_3 \text{diag}^q[\underline{F}_m^2] - \dots - \alpha_m \text{diag}^q[\underline{F}_m^{m-1}] \right\} \underline{B} \\ \underline{M}_{m+2} &= \underline{C} \left\{ -\alpha_1 \underline{A} - \alpha_2 \underline{A}^2 - \dots - \alpha_m \underline{A}^m \right\} \underline{B} \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned}$$

oder durch die spezielle Wahl der Matrix \underline{A} aus dem Satz von CAYLEY-HAMILTON:

$$\begin{array}{l} \underline{M}_{m+1} = \underline{C} \underline{A}^m \underline{B} \\ \underline{M}_{m+2} = \underline{C} \underline{A}^{m+1} \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{M}_k = \underline{C} \underline{A}^{k-1} \underline{B} \end{array} , \quad k \geq 2m$$

Die diagonalähnliche Matrix \underline{A} mit ihren FROBENIUS-Blöcken \underline{F}_m garantiert die Einhaltung der Rekursionseigenschaften der MARKOV-Parameter und führt bei geeigneter Wahl der Matrizen \underline{B} und \underline{C} auf die gestellte Bedingung:

$$\underline{M}_i = \underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B} \quad , \quad i=1, \dots, \infty$$

Wählt man die (qm, q) -Matrix \underline{B} als Anordnung von q Einheitsvektoren:

$$\underline{B} = \left[\underline{e}_1, \underline{e}_{1+m}, \dots, \underline{e}_{1+qm-m} \right]$$

so ergibt sich für die Matrizenmultiplikationen $\underline{A}^{i-1} \underline{B}$:

$$i \leq m, \quad \underline{A}^i \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{F}_m^i & & \underline{0} \\ & \underline{F}_m^i & \\ \underline{0} & & \underline{F}_m^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & & \underline{0} \\ & \underline{e}_1 & \\ \underline{0} & & \underline{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{i+1} & & \underline{0} \\ & \underline{e}_{i+1} & \\ \underline{0} & & \underline{e}_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$i = m, \quad \underline{A}^m \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{F}_m^m & & \underline{0} \\ & \underline{F}_m^m & \\ \underline{0} & & \underline{F}_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & & \underline{0} \\ & \underline{e}_1 & \\ \underline{0} & & \underline{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} & & \underline{0} \\ & \underline{\alpha} & \\ \underline{0} & & \underline{\alpha} \end{bmatrix}$$

Die gewünschte Realisierung der Matrix-Übertragungsfunktion folgt mit der Matrix \underline{C} , die aus den MARKOV-Parametern aufgebaut wird.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} M_{111} & M_{211} & \dots & M_{m11} & M_{112} & M_{212} & \dots & M_{m12} & \dots & M_{11q} & M_{21q} & \dots & M_{m1q} \\ M_{121} & M_{221} & \dots & M_{m21} & M_{122} & M_{222} & \dots & M_{m22} & \dots & M_{12q} & M_{22q} & \dots & M_{m2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{1p1} & M_{2p1} & \dots & M_{mp1} & M_{1p2} & M_{2p2} & \dots & M_{mp2} & \dots & M_{1pq} & M_{2pq} & \dots & M_{mpq} \end{bmatrix}$$

Die Richtigkeit dieser speziellen Wahl der Realisierungsmatrizen wird durch Einsetzen in

$$\underline{M}_i = \underline{C} \underline{A}^{i-1} \underline{B}$$

bestätigt. Mit den obigen Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{C} \underline{I} \underline{B} &= \underline{C} \underline{A}^0 \underline{B} = \underline{C} \text{diag}^q [\underline{e}_1] && = \underline{M}_1 \\ \underline{C} \underline{A} \underline{B} &= \underline{C} \text{diag}^q [\underline{e}_2] && = \underline{M}_2 \\ \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} &= \underline{C} \text{diag}^q [\underline{e}_3] && = \underline{M}_3 \\ &\vdots && \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^m \underline{B} &= \underline{C} \text{diag}^q [\underline{\alpha}] && = \underline{M}_{m+1} \\ \underline{C} \underline{A}^{m+1} \underline{B} &= -\alpha_1 \underline{C} \underline{A} \underline{B} - \alpha_2 \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} - \dots - \alpha_m \underline{C} \underline{A}^m \underline{B} = \\ &= -\alpha_1 \underline{M}_2 - \alpha_2 \underline{M}_3 - \dots - \alpha_m \underline{M}_{m+1} = \underline{M}_{m+2} \\ \underline{C} \underline{A}^{m+2} \underline{B} &= -\alpha_1 \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} - \dots - \alpha_m \underline{C} \underline{A}^{m+1} \underline{B} = \\ &= -\alpha_1 \underline{M}_3 - \dots - \alpha_m \underline{M}_{m+2} = \underline{M}_{m+3} \\ &\vdots && \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{k-1} \underline{B} &= \dots && = \underline{M}_k \end{aligned}$$

oder direkt:

$$\begin{aligned} \underline{H}(s) &= \frac{\underline{M}_1}{s} + \frac{\underline{M}_2}{s^2} + \frac{\underline{M}_3}{s^3} + \dots + \frac{\underline{M}_i}{s^i} + \dots \\ &= \frac{\underline{C}\underline{B}}{s} + \frac{\underline{C}\underline{A}\underline{B}}{s^2} + \frac{\underline{C}\underline{A}^2\underline{B}}{s^3} + \dots + \frac{\underline{C}\underline{A}^{i-1}\underline{B}}{s^i} + \dots \end{aligned}$$

Das Matrizen­triplerel $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ stellt also eine algebraische Realisierung der Matrix­Übertragungsfunktion dar. Die nicht minimale Realisierung ist vollständig steuerbar, denn mit dem entsprechenden KALMAN-Kriterium kann gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \underline{W}_{ST} &= \left[\underline{B} \mid \underline{A}\underline{B} \mid \underline{A}^2\underline{B} \mid \dots \mid \underline{A}^{m-1}\underline{B} \right] \\ &= \left[\text{diag}^q[\underline{e}_1] \mid \text{diag}^q[\underline{e}_2] \mid \dots \mid \text{diag}^q[\underline{e}_m] \right] \end{aligned}$$

$$\underline{W}_{ST} = \left[\underline{e}_1 \mid \underline{e}_2 \mid \dots \mid \underline{e}_m \mid \underline{e}_{m+1} \mid \dots \mid \underline{e}_{qm} \right]$$

Der Rang dieser Matrix ergibt sich zu $\text{Rang} [\underline{W}_{st}] = qm$ und entspricht der Ordnung der vorgegebenen Matrix \underline{A} . Somit ist also eine vollständig steuerbare, aber eine nicht unbedingt vollständig beobachtbare Realisierung zunächst formal gefunden worden.

Aus der Realisierung $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ und der zusätzlichen Bedingung der vollständigen Beobachtbarkeit kann im weiteren die geforderte Minimalrealisierung $\{\underline{A}_0, \underline{B}_0, \underline{C}_0\}$ abgeleitet werden. Hierbei wird sich zeigen, daß das Matrizen­triplerel direkt aus den MARKOV-Parametern der Matrix­Übertragungsfunktion folgt, ohne explizite Bestimmung der FROBENIUS-Blöcke.

Der Aufbau der Matrix \underline{W}_B zur Kontrolle der vollständigen Beobachtbarkeit folgt mit dem KALMAN-Kriterium zu:

$$\underline{W}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \hline \underline{C} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \vdots \\ \underline{c}_p \\ \hline \underline{c}_1 \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}_p \underline{A} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline \underline{c}_1 \underline{A}^{m-1} \\ \vdots \\ \underline{c}_p \underline{A}^{m-1} \end{bmatrix}, \underline{c}_i : \text{i-te Zeile der Matrix } \underline{C}$$

Zur vollständigen Beobachtbarkeit gilt die Bedingung

$$\text{Rang} [\underline{W}_B] = qm$$

Da sich der Rang einer Matrix nicht durch Zeilenvertauschen ändert, gilt das KALMAN-Kriterium zur vollständigen Beobachtbarkeit auch für die Matrix:

$$\underline{W}_B^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_1 \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}_1 \underline{A}^{m-1} \\ \hline \underline{c}_2 \\ \underline{c}_2 \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}_2 \underline{A}^{m-1} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline \underline{c}_p \\ \underline{c}_p \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}_p \underline{A}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \\ \hline \underline{Z}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{Z}_p \end{bmatrix}$$

Die Ausführung dieser Matrix ergibt mit der formal gewonnenen Realisierung $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ das folgende Schema:

$$\underline{W}_B^* = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{Z}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{111} & \underline{M}_{211} & \cdots & \underline{M}_{m11} & \underline{M}_{112} & \underline{M}_{212} & \cdots & \underline{M}_{m12} & \underline{M}_{11q} & \underline{M}_{21q} & \cdots & \underline{M}_{m1q} \\ \underline{M}_{211} & \underline{M}_{311} & \cdots & \underline{M}_{m+11} & \underline{M}_{212} & \underline{M}_{312} & \cdots & \underline{M}_{m+12} & \underline{M}_{21q} & \underline{M}_{31q} & \cdots & \underline{M}_{m+1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{M}_{m11} & \underline{M}_{m+11} & \cdots & \underline{M}_{k11} & \underline{M}_{m12} & \underline{M}_{m+12} & \cdots & \underline{M}_{k12} & \underline{M}_{m1q} & \underline{M}_{m+1q} & \cdots & \underline{M}_{k1q} \\ \hline \underline{M}_{1p1} & \underline{M}_{2p1} & \cdots & \underline{M}_{mp1} & \underline{M}_{1p2} & \underline{M}_{2p2} & \cdots & \underline{M}_{mp2} & \underline{M}_{1pq} & \underline{M}_{2pq} & \cdots & \underline{M}_{mpq} \\ \underline{M}_{2p1} & \underline{M}_{3p1} & \cdots & \underline{M}_{m+1p1} & \underline{M}_{2p2} & \underline{M}_{3p2} & \cdots & \underline{M}_{m+1p2} & \underline{M}_{2pq} & \underline{M}_{3pq} & \cdots & \underline{M}_{m+1pq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{M}_{mp1} & \underline{M}_{m+1p1} & \cdots & \underline{M}_{kp1} & \underline{M}_{mp2} & \underline{M}_{m+1p2} & \cdots & \underline{M}_{kp2} & \underline{M}_{mpq} & \underline{M}_{m+1pq} & \cdots & \underline{M}_{kpq} \end{bmatrix}$$

(k ≥ 2m)

Die Matrix \underline{W}_B^* weist einige Besonderheiten auf, die die Ableitung einer Minimalrealisierung ermöglichen. Zum einen entsprechen die Untermatrizen \underline{Z}_i den HANKEL-Matrizen der i-ten Zeile der Matrix-Übertragungsfunktion:

$$\underline{Z}_i = [\underline{P}_{i1}, \underline{P}_{i2}, \cdots, \underline{P}_{iq}]$$

mit der erwähnten Eigenschaft

$$\text{Rang} [\underline{P}_r] = n, \quad r \geq n$$

Zum anderen werden die Matrizen \underline{Z}_i aufgrund ihrer Konstruktion durch ein Vektorsystem gebildet:

$$\underline{Z}_i^T = \left[\underline{c}_i^T, \underline{A}^T \underline{c}_i, \underline{A}^{T^2} \underline{c}_i, \dots, \underline{A}^{T^{m-1}} \underline{c}_i \right]$$

Für derartige Vektorsysteme gilt der folgende Satz [30]:

Sind die ersten k Vektoren $\underline{x}, \underline{Dx}, \underline{D}^2 \underline{x}, \dots, \underline{D}^k \underline{x}$ einer Vektorfolge linear unabhängig, so stellt der $(k + 1)$ -te und alle weiteren Vektoren eine Linearkombination dieser k -Vektoren dar.

Mit diesem Satz werden die Untermatrizen \underline{Z}_i durch elementare Spaltenoperationen in die Form

$$\underline{\tilde{Z}}_i = \underline{Z}_i \underline{Q}_i = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{2cm}}^n & \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_i} & & \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 1 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \gamma_{n+1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{n+1,n+n_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{m,n+n_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] & & \end{matrix}$$

gebracht.

Mittels elementarer Umformungen (vgl. Gauß-Algorithmus) ist diese Transformation aufgrund der HANKEL-Charakteristik der Matrizen \underline{Z}_i immer möglich. Es wird die j -te Spalte ($j > n$) mit einer Spalte vertauscht, so daß ein Element großen Betrages auf den jeweiligen PIVOT-Platz in der Matrix \underline{Z}_i kommt. Anschließend wird die j -te Spalte durch den Wert des PIVOT-Elementes dividiert und ein Vielfaches

dieser Spalte zu den übrigen Spalten addiert, so daß die Zeile mit dem PIVOT-Element zu einem Einheitsvektor wird. Die Umformungen werden so lange fortgeführt, bis rechts von der jeweiligen PIVOT-Spalte nur noch Null-Spaltenvektoren erscheinen. Die Einheitsuntermatrix gibt den Rang der Matrix Z_i an. Die Zeilen unter dem letzten PIVOT-Element sind linear abhängig. Weitere elementare Zeilenumformungen transformieren die Matrix Z_i auf ihre Normalform, doch ist die Form im Algorithmus nicht erwünscht, da die erste linear abhängige Zeile zur weiteren Bestimmung der Minimalrealisierung genutzt wird. Die Umformung kann auch direkt aus dem Gauß-Algorithmus abgeleitet werden, allerdings ergeben sich die linear abhängigen Zeilen zu Nullzeilen.

Führt man die Elementarumformungen an allen p Untermatrizen Z_i , beginnend mit der HANKEL-Matrix, als Darstellung der ersten Zeile der Matrix-Übertragungsfunktion durch, so läßt sich die Matrix \underline{W}_B^* zur Kontrolle der Systembeobachtbarkeit in folgende Matrix transformieren:

$$\tilde{W}_B = \underline{W}_B^* Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline \underline{I}_{n_1} & & & & \\ \hline \underline{Y}_1 & & & & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_{n_2} & & & \\ \hline & \underline{Y}_2 & & & \underline{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline & & \underline{0} & & \underline{I}_{n_p} \\ \hline & & \underline{Y}_p & & \\ \hline \end{array} \right]$$

Der Rang dieser Matrix folgt sofort mit

$$\text{Rang}[\tilde{W}_B] = \text{Rang}[\underline{W}_B^* Q] = \sum_{i=1}^p n_i = n_o$$

und ist zugleich die kleinst mögliche Ordnung der gesuchten quadratischen Systemmatrix \underline{A}_0 .

Aufgrund der Orthogonalität der linear unabhängigen Zeilenvektoren in der Matrix \tilde{W}_B können die transformierten Matrizen \underline{C} und \underline{A} sowie die gesuchten Systemmatrizen \underline{A}_0 und \underline{C}_0 mit minimaler Ordnung direkt aus der Matrix \tilde{W}_B abgelesen werden.

Die transformierten Teilmatrizen $\underline{Z}_i \cdot \underline{Q}_i$ beginnen mit dem i -ten Zeilenvektor der Matrix \underline{C} . Da dieser dem k -ten Einheitsvektor entspricht, bildet die $(i + 1)$ -te Zeile die k -te Zeile der Matrix \underline{A} . Da die 2-te bis $(n_1 + 1)$ -te Zeilen der Matrix \underline{Z}_1 einer FROBENIUS-Matrix entsprechen, können diese Zeilen als 1-te bis n_1 -te Zeilen der Matrix \underline{A}_0 gesetzt werden, da aus

$$\underline{e}_1 \underline{A}_0^i = \underline{a}_i \quad , \quad i=1, \dots, n_1$$

gerade die ersten n_1 Zeilen der Matrix \underline{A}_0 folgen. Geht man zu der Matrix \underline{Z}_2 über, so können mit den bisher bekannten Zeilen der Matrix \underline{A}_0 erneut die $(n_1 + 1)$ -te bis $(n_1 + n_2)$ -te Zeilen der Matrix \underline{A}_0 mit der 2-ten bis $(n_2 + 1)$ -ten Zeile der Matrix \underline{Z}_2 gefunden werden. Aufgrund der FROBENIUS-Blöcke der Matrix \tilde{W}_B kann dieses Schema bis zur Matrix \underline{Z}_p fortgeführt werden, wie man durch Ausmultiplizieren sieht. Aus der Matrix \tilde{W}_B (Kontrolle der Beobachtbarkeit) werden die Matrizen \underline{C}_0 und \underline{A}_0 wie folgt abgelesen:

$$\underline{\tilde{W}}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \underline{Q}_1 \\ \underline{c}_1 \underline{Q}_1 \underline{Q}_1^{-1} \underline{A} \underline{Q}_1 \\ \vdots \\ \underline{c}_1 \underline{Q}_1 \underline{Q}_1^{-1} \underline{A}^{m-1} \underline{Q}_1 \\ \vdots \\ \underline{c}_p \underline{Q}_p \\ \underline{c}_p \underline{Q}_p \underline{Q}_p^{-1} \underline{A} \underline{Q}_p \\ \vdots \\ \underline{c}_p \underline{Q}_p \underline{Q}_p^{-1} \underline{A}^{m-1} \underline{Q}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_1 & \alpha_2 & \vdots & \alpha_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \beta_1 & \beta_2 & \vdots & \beta_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_{n_p} \\ \delta_1 & \delta_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \delta_{n_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \underline{0} = \begin{bmatrix} \underline{c}_{o1} \\ \underline{a}_{o1} \\ \vdots \\ \underline{a}_{on_1} \\ \vdots \\ \underline{a}_I \\ \vdots \\ \underline{c}_{op} \\ \underline{a}_{ol} \\ \underline{a}_{on} \\ \vdots \\ \underline{a}_{II} \end{bmatrix}$$

Rang n_o

mit den Zeilen \underline{c}_{o_i} der gesuchten Matrix \underline{C}_o und den Zeilen \underline{a}_{o_i} der gesuchten Matrix \underline{A}_o . Durch Transformation gehen die Systemmatrizen \underline{C} und \underline{A} über in:

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C} \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \underline{Z}_1 \underline{Q} \\ \underline{e}_2^T \underline{Z}_2 \underline{Q} \\ \vdots \\ \underline{e}_1^T \underline{Z}_p \underline{Q} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{C}_o & \underline{0} \\ \hline \underline{c}_{p,n_o} & \underline{c}_{p,mq-n_o} \end{array} \right]$$

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A}_o & \underline{0} \\ \hline \underline{A}_{ab_1} & \underline{A}_{ab_2} \\ \hline (n_o, n_o) & \\ (mq-n_o, n_o) & \end{array} \right]$$

Bei Anwendung des KALMAN-Kriteriums verschwinden die Untermatrizen A_{ab1} , A_{ab2} durch Multiplikation der in \underline{C} enthaltenen \underline{Q} Matrix. Diese Teilmatrizen gehören also zum nicht beobachtbaren Teil der Systemmatrix und können entfernt werden.

Es verbleibt festzustellen, daß die Matrizen A_0 und C_0 der geforderten Minimalrealisierung durch Gaußsche Elementarumformungen an den HANKEL-förmigen Matrizen, die die Zeilen der Matrix-Übertragungsfunktion durch MARKOV-Parameter darstellen, gefunden werden konnten. Bei Durchführung des Rechenverfahrens mußten weder die Transformationsmatrix \underline{Q} noch das in der Herleitung des Verfahrens benötigte Polynom \underline{q}^T zur Bildung der FROBENIUS-Matrix explizit berechnet werden.

Zur Bildung der Matrix \underline{B} wird jedoch die Inverse der Transformationsmatrix \underline{Q} benötigt:

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{Q}^{-1} \underline{B} \quad \bullet$$

Die Matrix \underline{Q}^{-1} läßt sich ohne Berechnung konstruktiv aus der Beziehung

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C} \underline{Q} \quad , \quad \underline{\tilde{C}} \underline{Q}^{-1} = \underline{C}$$

finden. Mit den bekannten Matrizen $\underline{\tilde{C}}$ und \underline{C} folgt:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_1^T \\ \vdots \\ \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_1^T \end{matrix} & \underline{0} \\ \hline \begin{matrix} n_1+1 \\ n_1+n_2+1 \\ \vdots \\ 1 + \sum_{i=1}^{p-1} n_i \end{matrix} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{Q}^{-1} \\ (= ?) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{e}_1^T \underline{z}_1 \\ \underline{e}_1^T \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{e}_1^T \underline{z}_p \end{array} \right] \quad \bullet$$

Diese Matrixgleichung wird offenbar mit

$$\underline{Q}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \underline{I}_{n_1} \underline{Z}_1 \\ \underline{I}_{n_2} \underline{Z}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_{n_p} \underline{Z}_p \\ \hline \underline{Y} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \underline{I}_{n_1} \underline{Z}_1 \\ \underline{I}_{n_2} \underline{Z}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_{n_p} \underline{Z}_p \\ \hline \underline{Y} \end{array}} \right\} n_o$$

erfüllt. Durch die Kenntnis der minimalen Systemordnung n_o und der im Ansatz (s.o.) speziell gewählten Matrix \underline{B} :

$$\underline{B} = [\underline{e}_1, \underline{e}_{1+r}, \dots]$$

folgt für die Matrix \underline{B}_o :

$$\underline{B}_o = \underline{I}_{n_o} \underline{Q}^{-1} \underline{B} \quad .$$

Diese Matrix ergibt sich ebenfalls aus den Matrizen \underline{Z}_i , die durch die MARKOV-Parameter gebildet werden. Die nicht berechnete Untermatrix \underline{Y} aus der Transformationsmatrix \underline{Q}^{-1} entfällt für den vollständig steuerbaren Systemanteil.

Im folgenden sollen die einzelnen Schritte zur Minimalrealisierung einer vorgegebenen Matrix-Übertragungsfunktion nach dem Verfahren von GERTH für ein einfaches Beispiel verdeutlicht werden. Gegeben sei die 2*2 Matrix-Übertragungsfunktion, die in den vorhergehenden Abschnitten durch Zerlegung einer spektralen Dichtematrix erzielt wurde.

BEISPIEL ZUR MINIMALREALISIERUNG EINER MATRIX-ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{-2s}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{-3s}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}$$

In einem ersten Schritt erfolgt die Entwicklung der MARKOV-Parameter für die einzelnen echt gebrochen rationalen Funktionen der Matrix-Übertragungsfunktion durch Koeffizientenvergleich.

Element 11: $\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^3} + \frac{7}{s^4} - \dots$

Element 12: $\frac{-2s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-2}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{-14}{s^3} + \frac{30}{s^4} + \dots$

Element 21: $\frac{-3s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-3}{s} + \frac{9}{s^2} + \frac{-21}{s^3} + \frac{45}{s^4} + \dots$

Element 22: $\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-3}{s^3} + \frac{7}{s^4} + \dots$

Die MARKOV-Parameter werden entsprechend dem Hauptnennergrad ($m=2$) zu $2k = 4$ Reihengliedern bestimmt und in Matrizen zusammengefaßt:

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \underline{M}_3 = \begin{bmatrix} -3 & -14 \\ -21 & -3 \end{bmatrix}, \underline{M}_4 = \begin{bmatrix} 7 & 30 \\ 45 & 7 \end{bmatrix}$$

Hieraus werden die HANKEL-förmigen Untermatrizen \underline{Z}_i der Beobachtbarkeitsmatrix für die zwei Zeilen der Matrix-Übertragungsfunktion gebildet:

$$\underline{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 & -14 \\ -3 & 7 & -14 & 30 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Entwicklung der} \\ \text{1-ten Zeile der} \\ \text{Matrix-Übertragungsfunktion} \end{array}$$

$$\underline{Z}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 & 1 \\ 9 & 21 & 1 & -3 \\ -21 & 45 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Entwicklung der} \\ \text{2-ten Zeile} \end{array}$$

Durch Elementarumformungen an beiden Matrizen folgt bei Orthogonalität der linear unabhängigen Zeilen:

$$\underline{\tilde{Z}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 & -14 \\ -3 & 7 & 14 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{Z}}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 & 1 \\ 9 & -21 & 1 & -3 \\ -21 & 45 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10/3 & 10/3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -6 & -12 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Aus diesen beiden Matrizen ergeben sich direkt die Systemmatrizen \underline{A}_0 und \underline{C}_0 mit der Minimalordnung $n_0 = 4$. Die jeweils ersten Zeilen von \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 bestimmen die Matrix \underline{C}_0 :

$$\underline{C}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

während die folgenden einschließlich der jeweils linear abhängigen Zeile die Matrix \underline{A}_0 bilden:

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ferner berechnet sich die Matrix \underline{B}_0 aus den HANKEL-förmigen Matrizen \underline{Z}_i unter Berücksichtigung des jeweiligen Ranges dieser Teilmatrizen zu:

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 = \underline{Q}^{-1} \underline{B} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & -14 \\ -3 & 7 & -14 & 30 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 & 1 \\ 9 & -21 & 1 & -3 \\ -21 & 45 & -3 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 & -14 \\ -3 & 9 & 0 & 1 \\ 9 & -21 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ -3 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt durch Einsetzen die Richtigkeit dieser Minimalrealisierung für die vorgegebene Matrix-Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(s) = \underline{C}_0 (s\underline{I} - \underline{A}_0)^{-1} \underline{B}_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ -3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

Mit

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{-3s}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} = \underline{I}$$

folgt die Matrix-Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ -3 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{-2s}{s^2+3s+2} \\ \frac{-3s}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \cdot$$

4.6 Die Schlußbetrachtung zur Realisierung mehrfachkorrelierter stationärer stochastischer Prozesse

Während die bisherige Behandlung von mehrfachkorrelierten stationären Zufallsprozessen auf die Bestimmung statistischer Kennwerte und -funktionen beschränkt war, gelingt es mit den Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte, Zufallsvorgänge durch stochastische Differentialgleichungen zu beschreiben.

Aus der gemessenen Leistungsspektralmatrix von stochastischen Zufallsvorgängen und ihrer Darstellung durch gebrochen rationale Funktionen gelingt es, diese positiv definiten HERMITESchen Matrizen mittels Transformationen oder Zerlegung als Produkt von Übertragungsmatrizen darzustellen. Durch die analytischen Umformungen spektraler Dichtematrizen wird der Informationsverlust (Phasenbeziehungen) aus der statistischen Beschreibung von Zufallsvorgängen geeignet ergänzt. Als Ergebnis erhält man eine Matrix-Übertragungsfunktion, die ein Filter beschreibt. Dieses Formfilter entspricht dabei einem linearen dynamischen System, welches auf weiße Rauscherregung kausal mit einer farbigen Zufallsschwingung mit definierter Leistungsspektralmatrix antwortet. Die getroffene Beschränkung, daß die den stochastischen Prozeß kennzeichnenden Leistungsspektren mit gebrochen rationalen Funktionen approximiert sein müssen, hält der Verfasser aufgrund allgemeiner Erfahrungen für nebensächlich. Vielmehr ist durch diese Annahme gewährleistet, daß Wirkung und Ursache in dieser Beschreibung eindeutig sind und das Modell ein Phasenminimumsystem darstellt.

Die aus der Leistungsspektralmatrix stochastischer Prozesse abgeleitete Matrix-Übertragungsfunktion wird mit den Methoden der linearen Systemtheorie identifiziert. Die echt gebrochen rationalen Funktionen dieser Übertragungsmatrix gestatten eine Darstellung durch MARKOV-Parameter, aus denen über geschickt gewählte Ansätze und der zusätzlichen Bedingung von vollständiger Steuer- und Beobachtbarkeit des zu bestimmenden Systems eine Realisierung im Zeitbereich gefunden wird. Das Übertragungsverhalten wird durch eine Differentialgleichung erster Ordnung realisiert und beschreibt ein lineares dynamisches Modell.

Dieses System bildet mit der weißen Eingangserregung ein mathematisches Modell zur Beschreibung mehrfachkorrelierter stochastischer Prozesse und stellt eine geeignete Datenreduktion von Zufallsvorgängen dar. Es kann durch analoge oder digitale Schaltkreise nachgebildet und mittels Pseudoranschgeneratoren zur Zeitreihensimulation eingesetzt werden. Hierdurch wird das Angebot vorliegender Meßdaten mit bestimmten statistischen Eigenschaften beliebig erweitert, so daß spezielle Studien von Tragwerksschwingungen (z. B.: First-Passage, Ermüdung, nichtlineares Werkstoffverhalten) ermöglicht werden.

Der Beschreibung stationärer, mehrfachkorrelierter Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen gestattet darüber hinaus, wie im weiteren gezeigt wird, eine einfachere Kovarianzanalyse zufällig erregter mechanischer Strukturschwingungen als bisher. Hierdurch wird beispielsweise die konstruktive Optimierung von Bauteilen wesentlich vereinfacht. Ausbaufähig erscheinen dem Verfasser die abgeleiteten Methoden auf die Behandlung instationärer Zufallschwingungen.

Mit der Realisierung mehrfachkorrelierter stationärer stochastischer Prozesse wird ein neuer Weg zur Behandlung von zufälligen Strukturschwingungen beschritten.

5. Die Kovarianzanalyse von Schwingungen mechanischer Strukturen durch Anregung mehrfachkorrelierter, zufälliger Prozesse

5.1 Die Bedeutung der Kovarianzmatrix bei der Untersuchung zufallserregter mechanischer Strukturschwingungen

Die Behandlung von Zufallsschwingungen mit Gaußscher Amplitudenverteilung beruht im wesentlichen in der Berechnung von Mittelwert und Streuung der Schwingungsantworten mechanischer Strukturen unter stochastischer Belastung. Hierzu dienen als deterministische Methode die bekannten TIME-HISTORY-Verfahren und als statistisches Verfahren die Spektralmethode (s. Kapitel 2). Während die Zeitverlaufsberechnungen nur über das Schwingungsverhalten eines dynamischen Systems bei wohl definierter Erregung Auskunft geben können, werden die mit der Spektralmethode erzielten Ergebnisse als statistische Werte einer ganzen Klasse von zufälligen Erregungen verstanden. Die hinreichende Behandlung von Zufallsschwingungen ist ausschließlich mit statistischen Methoden zu erreichen.

Während die mittlere Belastung eines Tragwerks unter stationärer Zufallserregung als rein statisches Problem behandelt werden kann, sind die maximalen dynamischen Beanspruchungen von Bauwerken und Maschinenteilen nur als Näherungen unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten zu verstehen. Die Berechnungen leiten sich im wesentlichen aus den Verteilungsdichtefunktionen der fluktuierenden Schwingungsamplituden stochastisch beanspruchter Bauteile ab. Der Grund liegt in der bekannten Übertragung dieser statistischen Kennfunktionen bei Tragwerken mit linear elastischem Werkstoffverhalten. Lineare Systeme besitzen die Besonderheit [25], auf eine Erregung mit Gaußscher Amplitudenverteilung mit ebenfalls Gaußverteilten Schwingungsamplituden zu antworten (Bild 10).

Sind der Mittelwert (\bar{x}) und die Streuung (σ_x) der Schwingungsantwort berechnet, ergibt sich die Amplitudenverteilung nach der bekannten Gleichung

$$g_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \sigma_x^2}}$$

Die den Praktiker interessierende maximale Beanspruchung errechnet sich aus Erfahrungswerten mit dem 3,5 bis 4,5-fachen der Streuung oder unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten aus der RICEschen Theorie [73] als Funktion der Streuung von Schwingungsamplituden und deren Ableitung.

Für eine angemessene Behandlung zufällig erregter Bauteile unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Berechnung der Schwingungsvarianzen maßgebend. Diese wurde bisher mit der aufwendigen Übertragung von Leistungsspektralmatrizen vom Ein- zum Ausgang des linearen Systems erreicht, wobei sich die gewünschte Streuung aus der Integration der Antwortspektren ergibt. Die zu Beginn dieser Arbeit vorgestellte Methode weist den Nachteil auf, daß die Berechnung im Frequenzbereich sehr aufwendig ist. Zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit ist numerisch eine hohe Stützstellenzahl der spektralen Dichtefunktion erforderlich, die eine große Anzahl von rechenzeitintensiven Matrizenmultiplikationen und -inversionen bewirkt. An dieser Stelle soll nun ein in der Anwendung wesentlich einfacheres Verfahren zur Berechnung der Schwingungsvarianzen vorgestellt werden, das auf der Grundlage der stochastischen Differentialgleichungen basiert. Im Gegensatz zur Spektralmethode erfolgt die Berechnung der Kovarianzmatrix im Zeitbereich und ist nach Meinung des Verfassers vom Aufwand her mit statischen Berechnungen zu vergleichen.

5.2 Die Kopplung von mathematischen Übertragungsmodellen zur Beschreibung stochastischer Erregerprozesse mit mechanischen Strukturmodellen

Die bisherigen Ausführungen ermöglichen die Beschreibung mehrfachkorrelierter stochastischer Prozesse mit Hilfe linearer stochastischer Differentialgleichungen. Die Zufallsprozesse mit vorgegebenen statistischen Merkmalen entstehen aus der Antwort eines linearen dynamischen Modellsystems mit weißem Eingangsruschen und können als farbige Erregung einer mechanischen Struktur verwendet werden.

Schwingungsfähige Konstruktionen sind Systeme mit kontinuierlich verteilter Masse, Federsteifigkeit und Dämpfung. Diese kontinuierlichen Schwinger werden mathematisch durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Die numerische Rechnung erfordert eine Diskretisierung durch Differenzen, Ansatzfunktionen oder durch Finite Elemente. Hierdurch erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ähnlich können diskrete Schwinger, die aus einzelnen Federn, Dämpfern und Massen aufgebaut sind, beschrieben werden. Für lineare Probleme gilt die Matrizendifferentialgleichung

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$$

Hierin sind \underline{x} die Systemauslenkungen infolge der Erregungen \underline{f} und \underline{M} die Massen-, \underline{D} die Dämpfungs- und \underline{K} die Steifigkeitsmatrix. Für die Zeitlösung liegt ein Anfangswertproblem vor, das neben den Anfangsauslenkungen auch die Anfangsgeschwindigkeiten benötigt. Nimmt man sie mit in die Rechnung auf, erhält man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{f} \end{bmatrix}_{(t)}$$

oder

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}_{\text{mech.}} \underline{z}(t) + \underline{h}(t)$$

Mit dieser Gleichung ist der physikalische Zustand des Schwingungssystems vollständig beschrieben. Wie bei der Herleitung des Formfilters zur Beschreibung stochastischer Prozesse, erhält man eine Zustandsraumdarstellung des Schwingungssystems.

Als zufällige Belastung mit definierter, statistischer Charakteristik wirke auf den Systemeingang der Ausgang des durch weißen Rauschens erregten Formfilters:

$$\begin{aligned}
 \text{mech. Struktur : } \quad \dot{\underline{z}}(t) &= \underline{A}_{\text{mech.}} \underline{z}(t) + \underline{h}(t) \\
 \underline{h}(t) &= [0, \underline{f}^T \underline{M}^{-1}] (t) \\
 \text{Formfilter : } \quad \underline{f}(t) &= \underline{C} \underline{w}(t) \\
 \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)
 \end{aligned}$$

Beide Differentialgleichungen können zu einer stochastischen Differentialgleichung zusammengefaßt werden. Als anschauliches Beispiel diene ein Fernsehtrüm unter natürlicher aerodynamischer Belastung (Bild 22).

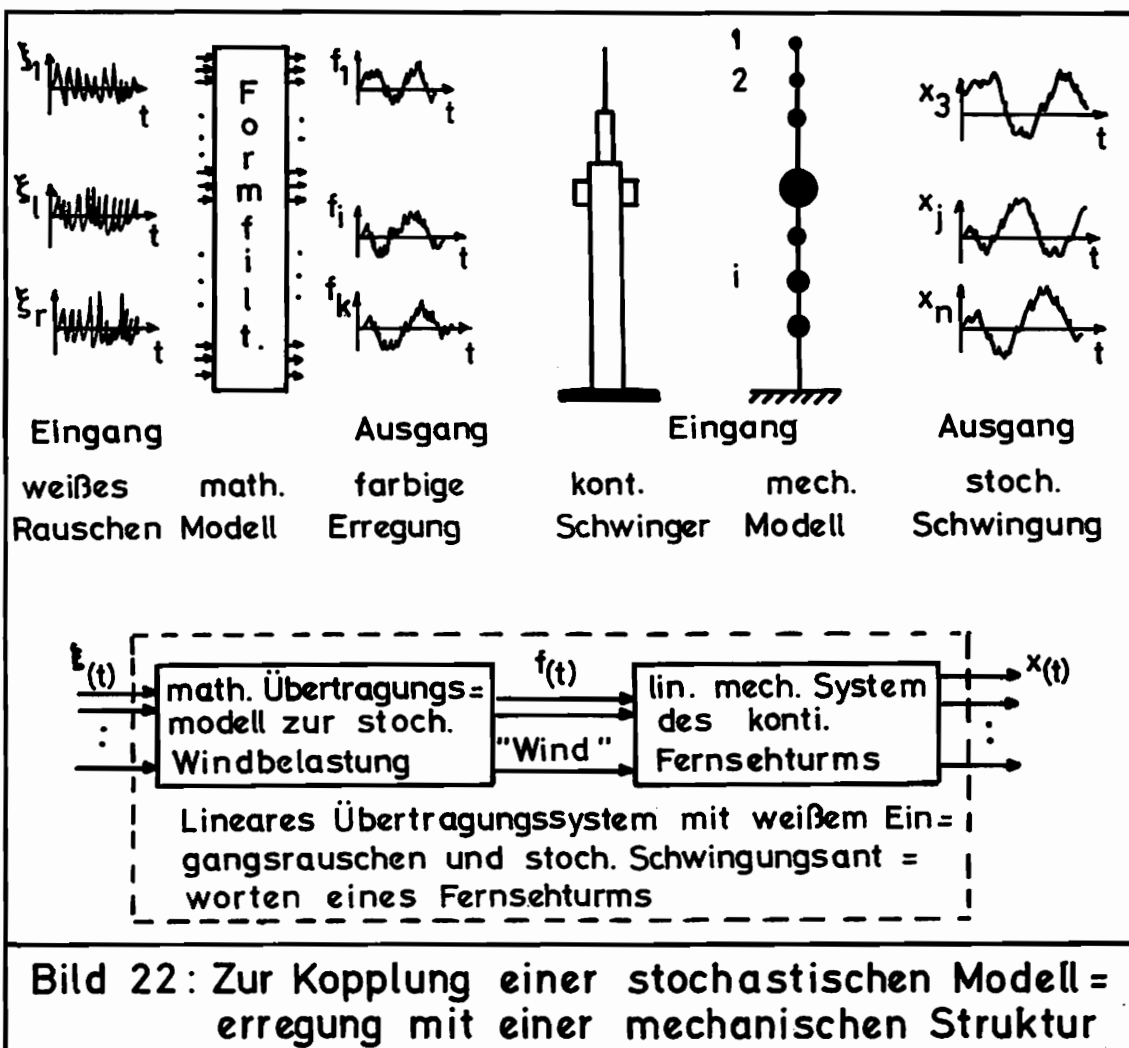


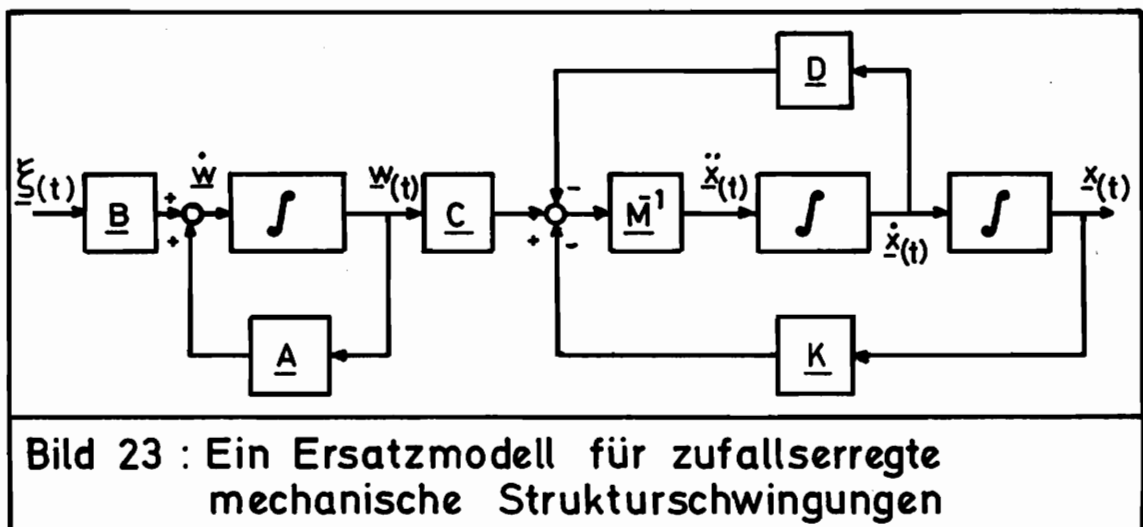
Bild 22: Zur Kopplung einer stochastischen Modell-erregung mit einer mechanischen Struktur

Die mathematische Formulierung der Problemstellung führt zu einem linearen, dynamischen Systemmodell mit weißem Eingangsrauschen und stochastischen Strukturschwingungsantworten:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} & +\underline{M}^{-1}\underline{C} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{B} \end{bmatrix} \underline{\xi}_{(t)}$$

oder

$$\dot{\underline{X}}_{(t)} = \underline{S} \underline{X}_{(t)} + \underline{H} \underline{\xi}_{(t)}$$



Das Ersatzsystem kann z. B. zu Zeitsimulationen von mechanischen Systemen unter zufälliger Belastung auf Analog- oder Digitalrechner eingesetzt werden und eignet sich darüber hinaus für Langzeitversuche (z. B. Ermüdungsprobleme) als Teil einer Prozeßrechnersteuerung.

An dieser Stelle steht jedoch die Bestimmung der Schwingungsvarianzen im Vordergrund. Der Vorteil der obigen Beschreibung von Bauteilen unter stochastischer farbiger Erregung liegt in der Problemformulierung als stochastische Differentialgleichung. Wie in Kapitel 3 ausführlich hergeleitet, berechnet sich die Kovarianzmatrix mit den Sätzen von ITÖ aus der stochastischen Differentialgleichung mit der folgenden algebraischen Gleichung:

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{S} \underline{X}(t) + \underline{H} \underline{\xi}(t) \rightarrow \underline{S} \underline{P}_x + \underline{P}_x \underline{S}^T = -\underline{Q}$$

oder

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} & \underline{M}^{-1}\underline{C} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{x\dot{x}} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{\dot{x}x} & \underline{P}_{\dot{x}\dot{x}} & \underline{P}_{\dot{x}w} \\ \underline{P}_{wx} & \underline{P}_{w\dot{x}} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{x\dot{x}} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{\dot{x}x} & \underline{P}_{\dot{x}\dot{x}} & \underline{P}_{\dot{x}w} \\ \underline{P}_{wx} & \underline{P}_{w\dot{x}} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q} & (-\underline{M}^{-1}\underline{K})^T & \underline{0} \\ \underline{I} & (-\underline{M}^{-1}\underline{D})^T & \underline{0} \\ \underline{0} & (-\underline{M}^{-1}\underline{C})^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{B}\underline{B}^T \end{bmatrix}$$

In dieser bilinearen Gleichung ist \underline{P}_x die Kovarianzmatrix eines dynamischen Ersatzmodells mit weißer Erregung. Die Matrix enthält als Untermatrizen die Kovarianzmatrizen der Verschiebungen \underline{P}_{xx} und der Geschwindigkeiten $\underline{P}_{\dot{x}\dot{x}}$ des mechanischen Systemanteils sowie die Kovarianzmatrix \underline{P}_{ww} vom inneren Zustand des Erregersystems (Formfilter) und die Kovarianzmatrix \underline{P}_{xw} aus der Kopplung beider Teilsysteme. Die Streuungen der Knotenschwingungen des mechanischen Systems ergeben sich aus

$$G_i = \sqrt{P_{x_i x_i}}, \quad i = \text{Knotennr.}$$

An dieser Stelle sei vermerkt, daß in der behandelten Problemklasse sowohl die Formfilter als auch die Schwingermatrizen als zeitinvariant angenommen werden. Dies ist für stationäre Gauß-Prozesse keine Einschränkung. Eine vergleichbare Formulierung ergibt sich für zeitabhängige Matrizen bei instationären Erregungen (z. B. Erdbebenerregung von Bauwerken). In diesem Fall ergeben sich die zeitabhängigen Schwingungsvarianzen aus der Lösung der RICCATI-Gleichung. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden, da die Bestimmung der zeitvarianten Leistungsspektren, der Matrix-Übertragungsfunktion und ihre Minimalrealisierung einer eigenständigen Forschungsarbeit entspricht, die auf dieser Arbeit aufbauen kann.

5.3 Einige algebraische Methoden zur Berechnung der Kovarianzmatrix

Das dynamische lineare Ersatzmodell zur Beschreibung mechanischer Strukturschwingungen infolge farbiger Rauschvorgänge besitzt die Kovarianzmatrix \underline{P} als Lösung der bilinearen algebraischen Matrizen-gleichung

$$\underline{S} \underline{P} + \underline{P} \underline{S}^T = -\underline{Q} \quad .$$

Diese Gleichung ist als LJAPUNOVsche Matrixengleichung bekannt und spielt unter anderem bei Stabilitätsuntersuchungen linearer, zeitinvarianter System eine große Rolle.

Partitioniert man die Matrix \underline{S} wie folgt

$$\underline{S} = \left[\begin{array}{cc|c} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ \hline -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{D} & -\underline{M}^{-1} \underline{C} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A}_{\text{mech.}} & \underline{RD} \\ \hline \underline{0} & \underline{A} \end{array} \right]$$

mit $\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{\text{mech.}} & \underline{RC} \\ \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_x & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_x & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{\text{mech.}}^T & \underline{0} \\ (\underline{RC})^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{BB}^T \end{bmatrix}$$

so läßt sich die Gleichung in die folgenden äquivalenten Matrizen-
gleichungen aufspalten,

$$\underline{A} \underline{P}_w + \underline{P}_w \underline{A}^T + \underline{BB}^T = \underline{0} \quad (\text{i})$$

$$\underline{A}_{\text{mech.}} \underline{P}_{xw} + \underline{P}_{xw} \underline{A}^T + \underline{RC} \underline{P}_w = \underline{0} \quad (\text{ii})$$

$$\underline{A}_{\text{mech.}} \underline{P}_x + \underline{P}_x \underline{A}_{\text{mech.}}^T + (\underline{RC} \underline{P}_{xw} + \underline{P}_{xw} \underline{C}^T \underline{R}^T) = \underline{0} \quad (\text{iii})$$

die nacheinander gelöst werden können. Die ursprüngliche LJAPUNOV-
Gleichung schreibt sich somit allgemeiner (s. (ii)) in der Form:

$$\underline{I} \underline{X} + \underline{X} \underline{Z} = -\underline{Q}$$

In dieser Gleichung sind \underline{I} und \underline{Z} quadratische Matrizen der Ordnung
(m, m) bzw. (n, n) sowie \underline{Q} eine rechteckige Matrix der Ordnung (m, n).
Die gesuchte Lösungsmatrix \underline{x} der Ordnung (m, n) kann aus einem entspre-
chenden linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m (T_{ij} X_{jk}) + \sum_{l=1}^n (X_{il} Z_{lk}) = -q_{ik} \\ (i=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,n)$$

gefunden werden, welches sich durch Ausmultiplizieren der bilinearen Gleichung und Neusortierung ergibt. Das lineare inhomogene Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\underline{X} = 0$ besitzt (Ausschluß von Singularitäten).

Aus der Gleichung $\underline{T}\underline{X} + \underline{X}\underline{Z} = \underline{0}$ folgt formal

$$\underline{T} = -\underline{X}\underline{Z}\underline{X}^{-1}$$

die Ähnlichkeitstransformation der Matrix \underline{Z} . Die Lösung ist also genau dann eindeutig, wenn die Matrizen \underline{T} und \underline{Z} keine gemeinsamen Eigenwerte aufweisen. Andernfalls besitzt das homogene Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen.

Für Gleichungen der Form

$$\underline{T}\underline{X} + \underline{X}\underline{T}^T = -\underline{Q}$$

ist die Lösung \underline{X} stets eindeutig reell, wenn die quadratische Matrix \underline{T} Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt. Dies kann sowohl für die Matrizen des mechanischen Schwingers als auch des Formfilters vorausgesetzt werden, weil die Systeme andernfalls nicht asymptotisch stabil und Energie nicht nur aus der zugeführten Energie der äußeren Erregung beziehen würden. Die Lösungsmatrix \underline{X} wird für diesen Fall symmetrisch, da sich eine symmetrische rechte Seite \underline{Q} der bilinearen Matrixgleichung einstellt.

Für Gleichungen der Form

$$\underline{\underline{T}} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \underline{\underline{Z}} = -\underline{\underline{Q}}$$

die in dieser Arbeit mit $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{A}}_{\text{mech}}$ und $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{A}}$ auftreten, wird immer eine eindeutige Lösung erwartet, da es als unwahrscheinlich angesehen werden kann, daß die grundsätzlich verschiedenen Problemstellungen zu gleichen Eigenwerten der Ersatzsysteme führen.

Die bilineare Matrixengleichung

$$\underline{\underline{T}} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \underline{\underline{Z}} = -\underline{\underline{Q}}$$

läßt sich durch Umsortieren immer in ein entsprechendes lineares Gleichungssystem überführen

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} \underline{\underline{\tilde{X}}} = -\underline{\underline{\tilde{q}}}$$

Im Falle der rechteckigen (m, n) Lösungsmatrix $\underline{\underline{X}}$ ergeben sich $m \cdot n$ -äquivalente Gleichungen, indem aus den Spalten der Matrizen $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Q}}$ (untereinander) die Vektoren $\underline{\underline{\tilde{x}}}$ und $\underline{\underline{\tilde{q}}}$ gebildet werden und die Matrix $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ mit den Elementen von $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{Z}}$ entsprechend sortiert wird. Entspricht die Matrix $\underline{\underline{Z}}$ gerade der Transponierten der Matrix $\underline{\underline{T}}$, ergeben sich $n(n+1)/2$ Gleichungen, da nur die oberen Dreiecksmatrizen von $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{Q}}$ sortiert werden müssen.

An dieser Stelle soll der Hinweis auf die algebraische Lösungsmöglichkeit der bilinearen Matrixengleichung genügen. Die effektiveren numerischen Algorithmen werden im Anschluß ausführlich vorgestellt.

Zunächst soll die in der Bauwerks- und Maschinendynamik heute gebräuch-
liche Methode der modalen Analyse auch bei der Formulierung der Kovarianz-
analyse Berücksichtigung finden, da sich hiermit eine wesentliche Rechen-
vereinfachung in der praktischen Anwendung einstellt.

Häufig werden bei der Konstruktion und Auslegung dynamisch beanspruchter
Bauteile die Eigenfrequenzen und -formen mitbestimmt, um einen Über-
blick über das dynamische Strukturverhalten zu gewinnen. In diesem
Fall ist es sinnvoll, den mechanischen Systemanteil nicht in physika-
lischen, sondern in modalen Koordinaten zu beschreiben, da sich der
Rechenaufwand bei der Kovarianzanalyse erheblich reduzieren läßt.

Mit der Modalmatrix $\underline{\phi}$ der Eigenvektoren werden die physikalischen
Koordinaten $\underline{x}(t)$ der Systembeschreibung

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$$

auf die modalen Koordinaten $\underline{q}(t)$ transformiert

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi} \underline{q}(t) \quad , \quad \underline{q}(t) = \underline{\phi}^T \underline{M} \underline{x}(t)$$

Läßt sich die Dämpfungsmatrix \underline{D} durch Transformation diagonalisieren

$$\underline{\Delta} = \underline{\phi}^T \underline{D} \underline{\phi} \quad \text{mit} \quad \underline{\Delta} = \text{diag} [2 d_i \omega_i]$$

(modale Dämpfung), so folgt mit

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \underline{\Omega} = \text{diag} [\omega_i^2] \quad \underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \underline{I}$$

das entkoppelte Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der mechanischen Struktur in modalen Koordinaten zu:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + \Delta_i \dot{q}_i(t) = [\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{f}]_{i(t)}$$

oder als entkoppeltes Differentialgleichungssystem

$$\dot{\underline{z}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{\Omega} & -\underline{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\phi}^T \underline{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{f} \end{bmatrix}_{(t)}$$

Aus der stochastischen Differentialgleichung mit einem mechanischen Systemanteil in modaler Formulierung folgt die bilineare Matrizen-gleichung zur Berechnung der Kovarianzmatrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{\Omega} & -\underline{\Delta} & \underline{\phi}^T \underline{M}^{-1} \underline{C} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{qq} & \underline{P}_{q\dot{q}} & \underline{P}_{q\dot{w}} \\ \underline{P}_{\dot{q}q} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{w}} \\ \underline{P}_{\dot{w}q} & \underline{P}_{\dot{w}\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{w}\dot{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{qq} & \underline{P}_{q\dot{q}} & \underline{P}_{q\dot{w}} \\ \underline{P}_{\dot{q}q} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{w}} \\ \underline{P}_{\dot{w}q} & \underline{P}_{\dot{w}\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{w}\dot{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{\Omega} & \underline{0} \\ \underline{I} & -\underline{\Delta} & \underline{C}^T \underline{M}^{-1} \underline{\phi} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{B} \underline{B}^T \end{bmatrix}$$

oder wieder mit $\underline{R}^T = [0, \underline{\phi}^T \underline{M}^{-1}]$

$$\underline{A} \underline{P}_{ww} + \underline{P}_{ww} \underline{A}^T + \underline{B} \underline{B}^T = \underline{0} \quad (j)$$

$$\underline{A}_{\text{mech. mod.}} \underline{P}_{qw} + \underline{P}_{qw} \underline{A}^T + \underline{R} \underline{C} \underline{P}_{ww} = \underline{0} \quad (jj)$$

$$\underline{A}_{\text{mech. mod.}} \underline{P}_q + \underline{P}_q \underline{A}_{\text{mech. mod.}}^T + \underline{R} \underline{C} \underline{P}_{qw} + \underline{P}_{qw} \underline{C}^T \underline{R}^T = \underline{0} \quad (jjj)$$

Dieses Gleichungssystem bietet den Vorteil, daß zur mechanischen Systembeschreibung die Anzahl der Eigenformen (rechteckige Modalmatrix) beschränkt werden kann. Darüber hinaus kann Gleichung (jjj) direkt analytisch gelöst werden.

Aus

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{\Omega} & -\underline{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{qq} & \underline{P}_{\dot{q}q} \\ \underline{P}_{q\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{qq} & \underline{P}_{\dot{q}q} \\ \underline{P}_{q\dot{q}} & \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{\Omega} \\ \underline{I} & -\underline{\Delta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{Q}_1 & \underline{Q}_2 \\ \underline{Q}_2 & \underline{Q}_3 \end{bmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{P}_{\dot{q}q} + \underline{P}_{q\dot{q}} &= -\underline{Q}_1 \\ -\underline{\Omega} \underline{P}_{qq} - \underline{\Delta} \underline{P}_{q\dot{q}} + \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} &= -\underline{Q}_2 \\ -\underline{P}_{q\dot{q}} \underline{\Omega} + \underline{P}_{\dot{q}q} \underline{\Delta} + \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} &= -\underline{Q}_2 \\ -\underline{\Omega} \underline{P}_{\dot{q}q} - \underline{\Delta} \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} - \underline{P}_{\dot{q}q} \underline{\Omega} - \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} \underline{\Delta} &= -\underline{Q}_3 \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung der Diagonalmatrizen $\underline{\Omega}$ und $\underline{\Delta}$:

$$\begin{bmatrix} -\omega_i & -\Delta_j & 1 \\ -\omega_j & -\Delta_j & 1 \\ 0 & \omega_i - \omega_j & -\Delta_i - \Delta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{q_i q_j} \\ \underline{P}_{q_i \dot{q}_j} \\ \underline{P}_{\dot{q}_i \dot{q}_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{1ij} + \Delta_i \underline{Q}_{1ij} \\ -\underline{Q}_{2ij} \\ -\underline{Q}_{3ij} + \omega_j \underline{Q}_{1ij} \end{bmatrix}$$

oder

$$\underline{P}_{q_i q_j} = \frac{-\underline{Q}_{1ij} \{-\Delta_j(\Delta_i + \Delta_j) - (\omega_i + \omega_j)\} - \underline{Q}_{2ij} \{-\Delta_i(\Delta_i + \Delta_j) - (\omega_i - \omega_j)\} - \underline{Q}_{3ij} \{\omega_i + \omega_j\}}{\omega_i(\Delta_j(\Delta_i + \Delta_j) + (\omega_i - \omega_j)) - \omega_j(\omega_i - \omega_j)}$$

$$\underline{P}_{\dot{q}_i \dot{q}_j} = \frac{-\underline{Q}_{1ij} \omega_j(\omega_i - \omega_j) + \underline{Q}_{2ij} \omega_i(\omega_i - \omega_j) - \underline{Q}_{3ij}(\omega_i \Delta_j + \omega_j \Delta_i)}{\omega_i(\Delta_j(\Delta_i + \Delta_j) + (\omega_i - \omega_j)) - \omega_j(\omega_i - \omega_j)}$$

Mit den Rechenregeln für Erwartungswerte folgt für die Kovarianzmatrix in den gesuchten physikalischen Koordinaten

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi} \underline{q}(t) \rightarrow \underline{P}_{qq} = [E\{\{\underline{q} - E\{\underline{q}\}\}\}][E\{\{\underline{q} - E\{\underline{q}\}\}\}]^T \\ = [E\{\underline{q}\}][E\{\underline{q}\}]^T$$

$$\underline{P}_{xx} = [E\{\underline{\phi} \underline{q}\}][E\{\underline{\phi} \underline{q}\}]^T = \underline{\phi} [E\{\underline{q}\}][E\{\underline{q}\}]^T \underline{\phi}^T$$

$$\underline{P}_{xx} = \underline{\phi} \underline{P}_{qq} \underline{\phi}^T$$

$$\underline{P}_{\dot{x}\dot{x}} = \underline{\phi} \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} \underline{\phi}^T$$

Wie bei der in der Strukturdynamik gebräuchlichen Modalen Analyse (s. Kapitel 2) ist auch in der Kovarianzanalyse zufälliger Struktur-schwingungen eine modale Formulierung der mechanischen Struktur-gleichungen für die praktische Anwendung von Vorteil. Doch soll hierzu bei den numerischen Algorithmen zur Berechnung der Kovarianz-matrix mehr gesagt werden. Die bisherigen Ableitungen befassen sich ausschließlich mit algebraischen Lösungsmöglichkeiten und sind Grund-lage der nun folgenden numerischen Betrachtungsweise.

5.4 Einige numerische Algorithmen zur Berechnung der Kovarianzmatrix

Die Vorteile einer Kovarianzanalyse stochastisch erregter Tragwerk-schwingungen liegen unter anderem in ihrer einfachen praktischen Handhabung. Es kann unterstellt werden, daß in der zukünftigen Behandlung von Zufallsschwingungen die Beschreibung zufälliger Erregerprozesse, wie beispielsweise Windbelastungen, Erschütterungen durch Meereswellen und ggfs. Erdbebenerregungen in der Bauwerksdynamik sowie Fahrbahnerregungen aller Art oder aerodynamische Schwingungs-erregungen von Flugzeugbauteilen in der Maschinendynamik, durch stochastische Differentialgleichungen einen höheren Stellenwert einnehmen werden als bisher. Wie aus den folgenden Kapiteln zu ersehen

ist, gelang es dem Verfasser, gemessene mehrfachkorrelierte Windgeschwindigkeitsverläufe mit den aufgeführten Methoden durch ein lineares, dynamisches Systemmodell zu beschreiben, wobei die durch Minimalrealisierung einer aus statistischen Kennfunktionen abgeleiteten Matrix-Übertragungsfunktion gewonnene Zustandsraumdarstellung $\{ \underline{A}_0, \underline{B}_0, \underline{C}_0 \}$ für die dynamische Untersuchung von Bauwerken unter aerodynamischer Belastung ausreichen. Gelingt es in zukünftigen Forschungsarbeiten, natürliche Erregungen, deren physikalische Interpretation und Beschreibung für praktische Schwingungsberechnungen in absehbarer Zeit nicht anwendbar sein werden, durch ein mathematisches Modell zu klassifizieren und die Realisierung einer Normung zugänglich zu machen, so reduziert sich die Behandlung von Tragwerken unter stochastischer Belastung auf die Lösung der Matrixgleichung:

$$\underline{T} \underline{P} + \underline{P} \underline{Z} = - \underline{Q}$$

Über die rein algebraischen Lösungsmöglichkeiten wurde einiges gesagt. An dieser Stelle sollen zwei numerische Verfahren zur Lösung der bilinearen Matrixgleichung vorgestellt werden, die als geeignete, schnelle numerische Algorithmen dem Anwender bei einer Kovarianzanalyse dienen können. Die Umformung der Matrixgleichung in ein gewöhnliches, lineares Gleichungssystem (s.o.) soll nicht zu den numerisch geeigneten Algorithmen gezählt werden, da die Umformung schon in dem Sonderfall $\underline{Z} = \underline{T}^T$ mit der Ordnung (n, n) auf $n(n+1)/2$ Gleichungen führt. Zwar bestehen für die numerische Lösung linearer Gleichungssysteme heute kaum noch Probleme, doch sind die Rechenzeiten im Vergleich zu den beiden folgenden Algorithmen deutlich höher.

Zunächst wird ein iteratives Verfahren von SMITH [81] vorgestellt. Unter der besprochenen Voraussetzung, daß die Matrizen \underline{T} und \underline{Z} keine gemeinsamen und nur Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzen, existiert eine eindeutige Lösungsmatrix \underline{P} der bilinearen Matrixgleichung. Erweitert man diese Gleichung in der folgenden Weise

$$[\underline{I} - \underline{T}] \underline{P} [\underline{I} - \underline{Z}] - [\underline{I} + \underline{T}] \underline{P} [\underline{I} + \underline{Z}] = 2 \underline{Q} = -2 \underline{T} \underline{P} - 2 \underline{P} \underline{Z}$$

und multipliziert diese Gleichung von links mit $(\underline{I} - \underline{T})^{-1}$ und von rechts mit $(\underline{I} - \underline{Z})^{-1}$, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \underline{U} &= (\underline{I} - \underline{T})^{-1} (\underline{I} + \underline{T}) \\ \underline{V} &= (\underline{I} + \underline{Z}) (\underline{I} - \underline{Z})^{-1} \\ \underline{W} &= 2 (\underline{I} - \underline{T})^{-1} \underline{C} (\underline{I} - \underline{Z})^{-1} \end{aligned}$$

die folgende äquivalente Gleichung:

$$\underline{P} - \underline{U} \underline{P} \underline{V} = \underline{W} \quad \bullet$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich zu

$$\underline{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{U}^{k-1} \underline{W} \underline{V}^{k-1}$$

wie man durch Einsetzen leicht sieht:

$$(\underline{W} + \underline{U} \underline{W} \underline{V} + \underline{U}^2 \underline{W} \underline{V}^2 + \underline{U}^3 \underline{W} \underline{V}^3 + \dots) - (\underline{U} \underline{W} \underline{V} + \underline{U}^2 \underline{W} \underline{V}^2 + \underline{U}^3 \underline{W} \underline{V}^3 + \underline{U}^4 \underline{W} \underline{V}^4 + \dots) = \underline{W} \quad \bullet$$

Diese Lösung konvergiert nur sehr langsam mit dem jeweiligen Fehlerglied $\underline{U}^k \underline{W} \underline{V}^k$. Schnellere Konvergenz kann mit einer Reihe quadratischer Terme erreicht werden.

Setzt man

$$\begin{aligned} \underline{Y}_0 &= \underline{W} \\ \underline{Y}_{l+1} &= \underline{Y}_l + \underline{U}^{2^l} \underline{Y}_l \underline{V}^{2^l} \end{aligned}$$

so gilt für alle l :

$$\underline{Y}_l = \sum_{k=1}^{2^l} \underline{U}^{k-1} \underline{W} \underline{V}^{k-1}$$

wie man durch Einsetzen erkennt:

$$\begin{aligned} (\underline{W} + \underline{U}\underline{W}\underline{V} + \dots + \underline{U}^{2^{l+1}-1} \underline{W} \underline{V}^{2^{l+1}-1}) &= (\underline{W} + \underline{U}\underline{W}\underline{V} + \dots \\ &+ \underline{U}^{2^l-1} \underline{W} \underline{V}^{2^l-1}) + (\underline{U}^{2^l} \underline{W} \underline{V}^{2^l} + \dots + \underline{U}^{2^{l+1}-1} \underline{W} \underline{V}^{2^{l+1}-1}). \end{aligned}$$

Hierbei konvergiert \underline{Y}_l sehr schnell gegen die gesuchte Lösung \underline{P} . Auf Konvergenzfragen (s. [81]) soll hier verzichtet werden. Es steht fest, daß der Algorithmus sehr einfach zu programmieren ist und numerisch sichere Ergebnisse bei kurzen Rechenzeiten liefert.

Ein anderes Verfahren nach KREISSELMEIER [51] transformiert die Matrix \underline{I} der bilinearen Matrixgleichung

$$\underline{I} \underline{P} + \underline{P} \underline{Z} = -\underline{Q}$$

auf HESSENBERG-Form und erreicht hiermit ebenfalls ein relativ einfaches Lösungsverfahren. Im Gegensatz zum Verfahren nach SMITH brauchen bei

diesem Algorithmus die Matrizen \underline{I} und \underline{Z} keine negativen Realteile zu besitzen. Transformiert man die Matrixgleichung derart, daß die Matrix \underline{Z} in ihre HESSENBERG-Darstellung \underline{Z}_H

$$\underline{Z}_H = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 & & 0 \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & \dots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

übergeht, so wird mit

$$\begin{aligned} \underline{Z}_H &= \underline{X}^{-1} \underline{Z} \underline{X} \\ \underline{L} &= \underline{P} \underline{X} \\ \underline{R} &= -\underline{Q} \underline{X} \end{aligned}$$

aus

$$\underline{I} \underline{P} + \underline{P} \underline{Z} = -\underline{Q}$$

$$\begin{aligned} \underline{I} \underline{P} \underline{X} + \underline{P} \underline{X} \underline{X}^{-1} \underline{Z} \underline{X} &= -\underline{Q} \underline{X} \\ \underline{I} \underline{L} + \underline{L} \underline{Z}_H &= \underline{R} \end{aligned}$$

Versteht man die Lösungsmatrix \underline{L} als Vektoranordnung ihrer Spaltenvektoren $[\underline{l}_1, \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n]$, so gilt

$$\underline{I} [\underline{l}_1, \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n] + [\underline{l}_1, \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & & 0 \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ z_{n1} & \dots & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} = [\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n]$$

Als Lösung erkennt man für die einzelnen Spaltenvektoren:

$$\underline{l}_{i-1} = -\frac{1}{z_{i-1,i}} \left[\underline{l}_i + \sum_{j=1}^n z_{ji} \underline{l}_j + \underline{r}_i \right]$$

für $i = n, n-1, \dots, 1$ und den Definitionen $z_{0,1} = 1, z_{i,i+1} \neq 0$.

Dieser rekursive Algorithmus führt zu den gesuchten Lösungen, falls der Spaltenvektor \underline{l}_n der Lösungsmatrix \underline{L} bekannt ist. Der Vektor \underline{l}_n kann andernfalls aus dem Vektor \underline{l}_0 berechnet werden. Für $i = 1$ bestimmt sich der nicht gesuchte Vektor \underline{l}_0 aus dem Rekursionsalgorithmus zu:

$$\begin{aligned} \underline{l}_0 = & -\underline{l} \left[\frac{-1}{z_{12}} \underline{l} \left[\frac{-1}{z_{23}} \underline{l} \left[\frac{-1}{z_{34}} \underline{l} \dots \dots \left[\frac{-1}{z_{n-1,n}} \underline{l} \underline{l}_n \right] \right] \dots \right] \right] \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^n z_{j1} \left[\sum_{j=2}^n z_{j2} \left[\sum_{j=3}^n z_{j3} \dots \dots \left[\sum_{j=n}^n z_{nn} \underline{l}_n \right] \right] \dots \right] \right\} \\ & + \underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \dots + \underline{r}_n \end{aligned}$$

oder allgemein

$$\underline{l}_0 = \underline{G} \underline{l}_n + \underline{d}$$

Die Lösung $\underline{l}_0 = \underline{0}$ ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, damit $\underline{L} = [\underline{l}_1, \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n]$ der gesuchten Lösungsmatrix entspricht. Somit ergeben sich zur Bestimmung des Vektors \underline{l}_n m Gleichungen.

Der Aufbau der unbekannt Matrizen kann wie folgt schematisiert werden:
Für $\underline{l}_n = \underline{0}$ folgt aus dem rekursiven Algorithmus mit $i = n, n-1, \dots, 1$

$$\underline{l}_{i-1}^* = \frac{-1}{z_{i-1,i}} \left[\underline{T} \underline{l}_i^* + \sum_{j=i}^n z_{ji} \underline{l}_j^* + \underline{r}_i \right]$$

und schließlich

$$\underline{l}_0^* = \underline{G} \underline{l}_n^* + \underline{d} = \underline{l}_0 = \underline{d} \quad \bullet$$

Für $\underline{R} = [\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n] = \underline{0}$ und der Wahl $\underline{l}_n^* = \underline{e}_k$ mit $k = 1, \dots, n$ entspricht das jeweilige \underline{l}_0^* als letzte Gleichung des rekursiven Algorithmus gerade der k -ten gesuchten Spalte der unbekannt Matrix \underline{G} .

Besitzen die Matrizen $-\underline{T}$ und \underline{Z} keine gemeinsamen Eigenwerte (s.o.), wird die Matrix \underline{G} regulär und man erhält als Problemlösung

$$\underline{l}_n = \underline{G}^{-1} \underline{d}$$

und

$$\underline{l}_{i-1} = \frac{-1}{z_{i-1,i}} \left(\underline{T} \underline{l}_i + \sum_{j=1}^n z_{ji} \underline{l}_j + \underline{r}_i \right)$$

für $i = n, n-1, \dots, 2$.

Die Ähnlichkeitstransformation \underline{Z} auf eine untere HESSENBERG-Matrix $\underline{z}_H = \underline{x}^{-1} \underline{z} \underline{x}$ läßt sich problemlos durchführen. Für diesen Algorithmus

stehen allgemein sichere Rechenprogramme (z. B. [97]) zur Verfügung, so daß auf diese Transformation nicht näher eingegangen werden braucht. Erweisen sich nach der HESSENBERG-Transformation einige Koeffizienten $z_{k-1,k}$ zu Null, so ist der Algorithmus an diesen Stellen zu unterbrechen und für $l = n, \dots, k_j$ und $i = k_j, \dots, k_1$ getrennt zu durchlaufen, wobei sich der jeweilige Startvektor durch den vorhergehend letzten Lösungsvektor bestimmt.

Die beiden vorgestellten numerischen Algorithmen genügen der numerischen Problemlösung. In der Anwendung erwies sich der SMITH-Algorithmus als (etwas) rechenzeitgünstiger. Es existieren weitere Algorithmen [56], die der Verfasser aber hinsichtlich ihres numerischen Aufwandes nicht testete, da die vorgestellten Rechenverfahren sichere und schnelle Ergebnisse lieferten.

Allgemein bleibt festzustellen, daß bei Lösung des Eigenwertproblems der mechanischen Struktur in jedem Falle die modale Darstellung bei Formulierung der Kovarianzanalyse Berücksichtigung finden sollte. Hierdurch kann einerseits bei einer Teilproblemlösung auf die vorgestellten numerischen Algorithmen verzichtet werden, da die Streuungen der Strukturschwingung direkt berechnet werden können. Bei Kenntnis der Eigenfrequenzen des mechanischen Systems und des Frequenzverhaltens der stochastischen Erregung läßt sich andererseits die Berechnung der Kovarianzmatrix unter Umständen mit den vorgestellten Algorithmen stark reduziert durchführen.

Generell ließe sich zwar zur Berechnung der Kovarianzmatrix auch für das gekoppelte lineare System (mechanische Struktur + Formfilter) eine eigene modale Darstellung mit

$$\underline{S} \underline{P} + \underline{P} \underline{S}^T = - \underline{Q}$$

$$\underline{\psi} = \text{diag} [\omega_{i(s)}]$$

$$\underline{\psi} \underline{P}^* + \underline{P}^* \underline{\psi} = - \underline{Q}^*$$

und der modalen Lösung $P_{ij}^* = Q_{ij}^*/(\omega_i + \omega_j)$ finden, doch hält der Verfasser die Lösung des Eigenwertproblems für das Gesamtsystem aufwendiger als die Anwendung der gezeigten numerischen Lösungsverfahren.

6. Die Anwendung der Kovarianzanalyse auf fahrbahnerregte Fahrzeugschwingungen

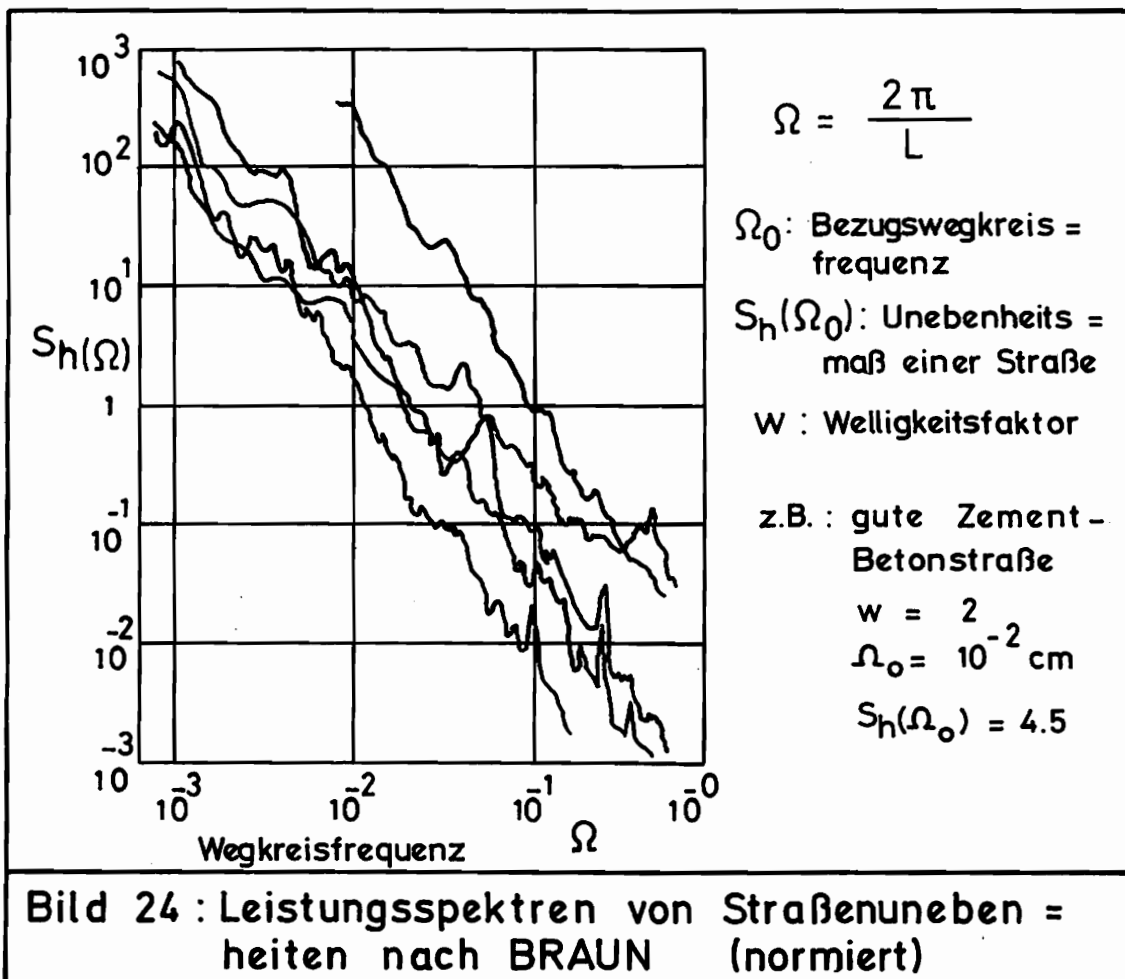
6.1 Die dynamische Erregung von Fahrzeugen durch Straßenunebenheiten und ihre Behandlung

Die in den letzten Jahrzehnten steigende Zahl von Automobilzulassungen erfordert eine stetige Verbesserung der Fahrzeugtechnik. Hierzu zählt insbesondere die Optimierung von Automobilfahrwerken, wobei dem dynamischen Verhalten von Fahrzeugen große Bedeutung zukommt.

Die Schwingungserregung von Kraftfahrzeugen wird hauptsächlich durch Straßenunebenheiten verursacht und führt zu vertikalen Fahrzeugschwingungen, die sich in einer Hubbewegung und einem Nicken des Automobils bemerkbar machen [54]. Darüber hinaus treten Schwingungen in Form von Wanken und Gieren oder Schleuderbewegungen auf, deren Auslösung aber in erster Linie von dem System "Fahrer-Auto" beeinflusst werden und nicht unbedingt als zufällige fahrbahnerregte Schwingungen anzusehen sind. Dieser Problembereich soll im weiteren nicht näher betrachtet werden.

Es wird angenommen, daß die Unebenheiten von Fahrbahndecken auf ein fahrendes Auto eine stationäre stochastische Erregung mit Gaußscher Amplitudenverteilung [25,26] ausüben. Die daraus resultierenden zufälligen Schwingungen von Automobilen wurden lange Zeit in praktischen Fahrversuchen studiert, wobei sich die Automobilhersteller eigene Versuchsstrecken anlegten und auf diese Weise eine geeignete Fahrwerksabstimmung vornahmen. Das Bestreben, Zufallsschwingungen auch theoretisch zu beherrschen, führte in den Jahren um 1965 zur statistischen Analyse von Straßenbelägen. Messungen vertikaler Beschleunigung an Radlagern von Kraftfahrzeugen, die über ausgewählte Straßentypen fuhren, ermöglichten die Frequenzanalyse solcher stochastischer Erregungen. BRAUN [10] gelang es im Jahre 1969, Fahrbahnbeläge durch Leistungsspektren zu charakterisieren (Bild 24). Die statistischen Kennfunktionen hängen von der jeweiligen Fahrzeuggeschwindigkeit ab und werden in bezogener Form dargestellt.

$$S(\omega) = \frac{1}{v} S_h(\Omega_0) \left\{ \frac{\Omega}{\Omega_0} \right\}^{-w}$$



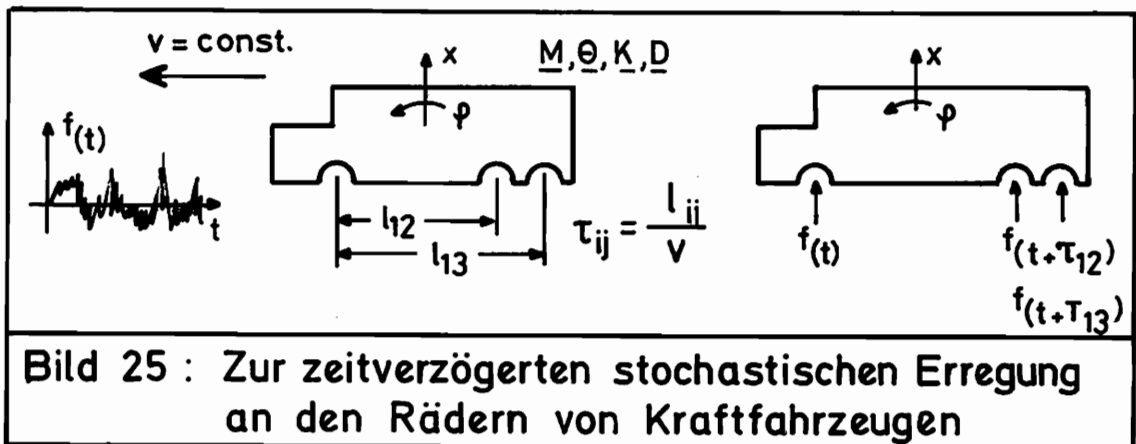
Die Kenntnis der spektralen Dichte gestattet im weiteren die Anwendung der Spektralmethode (s. Kapitel 2), wie sie seit langem in der linearen (regelungstechnischen) Systemtheorie bekannt ist. In der Annahme, daß sich das Fahrzeug als lineares mechanisches System beschreiben läßt, und eine Autofahrt durch Spurtreue der Vorder- und Hinterräder gekennzeichnet ist, werden die Varianzen der Aufbauauslenkungen oder -beschleunigungen wie folgt berechnet:

$$\underline{\sigma}_{xx}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_{xx}(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega) \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{F}^T(\omega) d\omega$$

$\underline{F}(\omega)$ stellt hierbei den Frequenzgang des Fahrzeugs

$$\underline{F}(\omega) = (-\omega^2 \underline{M} + \underline{K} + j\omega \underline{D})^{-1}$$

und \underline{S}_{ff} die spektrale Dichtematrix des durch den Achsstand gegebenen mehrfachkorrelierten stochastischen Erregerprozesses dar.



Mit der vorausgesetzten Spurtreue sind die Autoleistungsspektren der Erregung am Vorder- und Hinterrad identisch, während sich die Kreuzleistungsspektren aus der Korrelation der Erregung zwischen den Rädern ergeben. Aus der Zeitverzögerung des stochastischen Prozesses folgt mit

$$\underline{f}(t)^T = [f(t), f(t+\tau_{12}), \dots, f(t+\tau_{mn})]$$

die Kreuzkorrelationsfunktion (s. Anhang):

$$\phi_{f(\tau_{ij})f(\tau_{lk})}(\tau) = E \left\{ [f_{\tau_{ij}}(t+\tau_{ij}) - \bar{f}] [f_{\tau_{lk}}(t+\tau_{lk}) - \bar{f}] \right\}$$

mit der Autokorrelationsfunktion $\phi_{ff}(\tau)$ kann geschrieben werden:

$$\phi_{f_{\tau_{ij}}f_{\tau_{lk}}}(\tau) = \phi_{ff}(\tau + \tau_{ij} + \tau_{lk}) = \phi_{ff}(\tau + \tau_{ij}) = \phi_{ff}(\tau + \tau_{lk})$$

Durch FOURIER-Transformation (WIENER-CHINTCHIN) ergeben sich die benötigten Kreuzleistungsspektren zu

$$S_{f_{\tau_{ij}}f_{\tau_{lk}}}(\omega) = S_{ff}(\omega) e^{-j\omega(\tau_{ij} + \tau_{lk})}$$

Mit den Radabstandslängen l_{ij}, \dots und der konstanten Fahrgeschwindigkeit v erhält die spektrale Dichtematrix das folgende Aussehen:

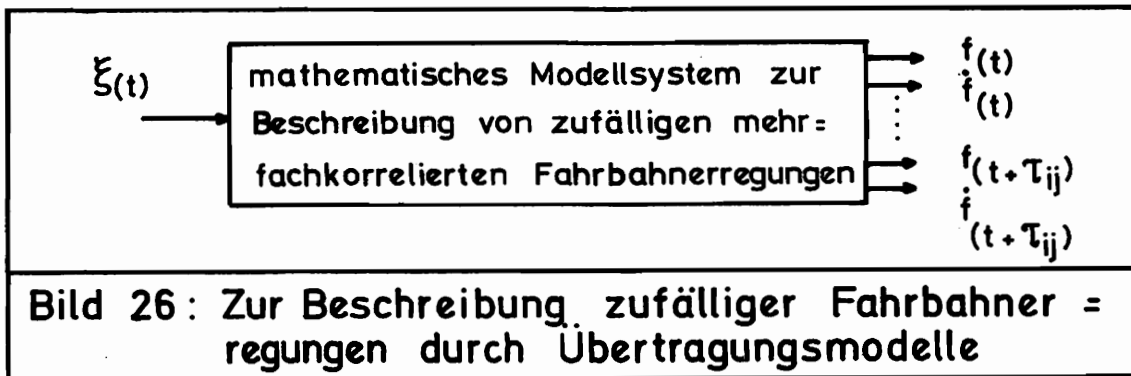
$$\underline{S}_{ff}(\omega) = S_{ff}(\omega) \bullet \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & e^{-j\omega\tau_{ij}} \\ \underline{e}^{+j\omega\tau_{ij}} & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau_{ij} = \frac{l_{ij}}{v}$$

Bei linearem Systemverhalten des Fahrzeugmodells läßt sich die Kovarianzmatrix und somit die bekannte (Normal) Verteilung der Fahrzeugschwingung berechnen. Da im allgemeinen das mathematische Modell eines Kraftfahrzeuges keine linearen Feder- und Dämpfungskennlinien gestattet, bleibt die Anwendung der Spektralmethode beschränkt. Man hilft sich einerseits durch Linearisierung der nichtlinearen Feder- und Dämpfungskennlinien [54] oder versucht, die nicht-Gaußschen Antwortamplitudenverteilungen geeignet abzuschätzen [25].

Die derzeitige Behandlung zufallserregter Fahrzeugschwingungen stützt sich allerdings mehr auf eine rechnerische Simulation der Fahrbahnerregung mit Hilfe von Digital- [90] oder Analogrechnern [13] durch Filterung pseudozufälliger weißer Rauschvorgänge. Diese Simulationsrechnungen filtern im Frequenzbereich und entsprechen nicht der in dieser Arbeit vorgestellten Beschreibung zufälliger Vorgänge durch stochastische Differentialgleichungen. Die gefilterten farbigen Zufallsprozesse mit definierten statistischen Merkmalen erlauben TIME-HISTORY-Rechnungen mit nichtlinearem Fahrzeugverhalten oder können direkt in Versuchsstände (servo-hydraulische Schwingtische [11, 19]) eingeleitet werden.

6.2 Die Kovarianzanalyse als Hilfsmittel zur Berechnung zufallserregter Fahrzeugschwingungen

Das in dieser Arbeit aufbereitete Verfahren der Kovarianzanalyse mehrfachkorrelierter Zufallsvorgänge umfaßt im wesentlichen die bereits angesprochenen Teilgebiete Simulation und Varianzberechnung. Eine numerische Simulation wird durch die Herleitung einer stochastischen Differentialgleichung ermöglicht, mit deren Koeffizientenmatrizen die Kovarianzanalyse zufallserregter Fahrzeugschwingungen erfolgen kann. Da Fahrbahnerregungen als Wegerregungen mechanischer Strukturen auftreten, die über Federn und Dämpfer eingeleitet werden, wird ein mathematisches Modell entwickelt, welches infolge der Erregung durch einen skalaren weißen Rauschvorgang sowohl mit den zeitlich verschobenen farbigen Wegerregungen als auch mit deren Ableitungen antwortet.



Diese Darstellung unterscheidet sich von neueren Arbeiten [59,60], in denen das Verfahren der Kovarianzanalyse für fahrbahnerregte Fahrzeugschwingungen aus einem Formfilter mit mehrfachkorrelierten zeitverschobenen weißen Erregungen hergeleitet wird. Hierin beschreibt die stochastische Differentialgleichung ausschließlich zeitverschobene Wegerregungen.

Die Herleitung einer stochastischen Differentialgleichung zur Beschreibung vertikaler Fahrbahnerregungen unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen den Laufrädern eines Automobils erfordert die Bestimmung einer Matrix-Übertragungsfunktion. Während in Kapitel 4 diese Herleitung allgemein in Matrizenschreibweise

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

durch Zerlegung der spektralen Dichtematrix dargestellt wird, läßt sich die Matrix-Übertragungsfunktion für zeitverschobene Erregungen direkt angeben.

Besitzt der farbige Rauschprozeß

$$\underline{f}^T(t) = [f(t), \dot{f}(t), f(t+\tau_{12}), \dot{f}(t+\tau_{12}), \dots]$$

die Leistungsspektralmatrix

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s & e^{-sT_{12}} & -s e^{-sT_{12}} & \cdot & \cdot \\ s & -s^2 & s e^{-sT_{12}} & -s^2 e^{-sT_{12}} & \cdot & \cdot \\ \hline e^{sT_{12}} & -s e^{sT_{12}} & 1 & -s & \cdot & \cdot \\ s e^{sT_{12}} & -s^2 e^{sT_{12}} & s & -s^2 & \cdot & \cdot \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

so ergibt sich eine äquivalente Darstellung mit

$$\underline{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ e^{sT_{12}} \\ s e^{sT_{12}} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, -s, e^{-sT_{12}}, -s e^{-sT_{12}}, \dots \end{bmatrix} \cdot S_{ff}(s)$$

Unter der Voraussetzung, daß das (skalare) Leistungsspektrum $S_{ff}(s)$ durch eine gebrochen rationale Funktion darstellbar ist, findet sich durch Aufsuchen der Zähler- und Nennernullstellen dieser Funktion

$$\underline{S}_{ff}(s) = \underline{H}_{ff}(s) \underline{H}_{ff}^T(-s) = \frac{(s+s_{z1})(s+s_{z2}) \dots}{(s+s_{n1})(s+s_{n2}) \dots} \cdot \frac{(-s+s_{z1})(-s+s_{z2}) \dots}{(-s+s_{n1})(-s+s_{n2}) \dots}$$

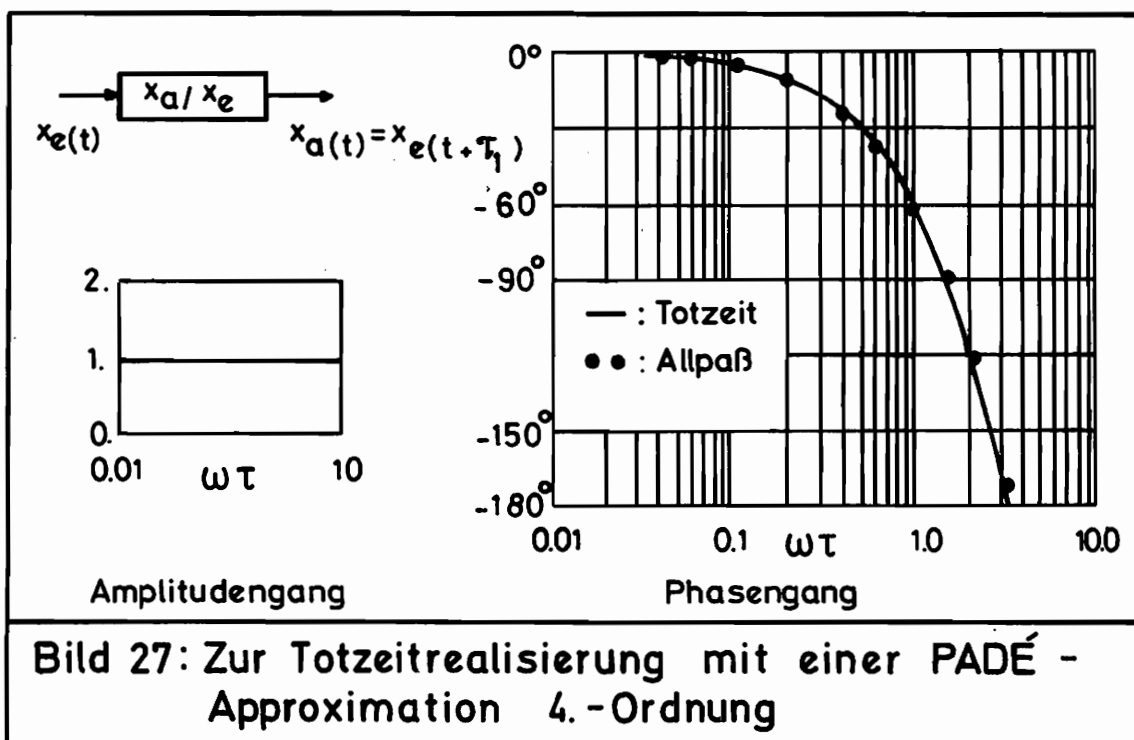
eine Übertragungsfunktion (Filter-), die weißes Rauschen in farbiges Rauschen mit den vorgegebenen statistischen Merkmalen der Straßenebenheiten transformiert. Da Realisierungen von Matrix-Übertragungs-

funktionen bislang nur mit gebrochen rationalen Funktionen möglich sind, müssen die Zeitverschiebungen entsprechend approximiert werden. Geeignete Näherungen finden sich in der Regelungstheorie. Dort realisiert man Totzeiten durch PADÉ-Approximationen [1].

Zumindest für Fahrzeuge kurzer Radlängen reicht eine PADÉ-Approximation 4. Ordnung ([90]) aus:

$$e^{-s\tau_{ij}} \approx \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{1 - 0.5(s\tau_{ij}) + 0.107(s\tau_{ij})^2 - 0.0119(s\tau_{ij})^3 + 5.95 \cdot 10^{-4}(s\tau_{ij})^4}{1 + 0.5(s\tau_{ij}) + 0.107(s\tau_{ij})^2 + 0.0119(s\tau_{ij})^3 + 5.95 \cdot 10^{-4}(s\tau_{ij})^4}$$

Bild 27 zeigt Amplituden- und Phasengänge von Totzeit und PADÉ-Approximation (Allpass)



Mit diesen Approximationen ergibt sich die realisierbare Matrix-Übertragungsfunktion zu

$$\underline{H}(s) = H_{ff}(s) \left[1, s, \frac{x_a}{x_e}(s, \tau_{12}), s \frac{x_a}{x_e}(s, \tau_{12}), \frac{x_a}{x_e}(s, \tau_{13}), \dots \right]^T$$

Das vorgestellte Verfahren zur Minimalrealisierung einer Matrix-Übertragungsfunktion ermöglicht die Beschreibung mehrfachkorrelierter vertikaler Weg- und Geschwindigkeitserregungen von Fahrzeugen durch eine stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= \underline{C} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \\ \underline{H}(s) &= \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \end{aligned}$$

Der die Fahrbahnerregungen beschreibende Vektor

$$\underline{f}(t)^T = \left[f(t), \dot{f}(t), f(t+\tau_{12}), \dot{f}(t+\tau_{12}), f(t+\tau_{13}), \dots \right]$$

kann zu numerischen Simulationsrechnungen mit TIME-HISTORY-Verfahren oder zu praktischen Versuchszwecken genutzt werden. Mit der gewöhnlichen Differentialgleichung zur Beschreibung des Fahrzeugs

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) = \left[\underline{K}, \underline{D} \right]^T \underline{f}(t)$$

folgt die oben hergeleitete bilineare Matrixgleichung zur Berechnung der Kovarianzen zufallserregter Fahrzeugschwingungen durch Straßenunebenheiten:

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} & \underline{M}^{-1}[\underline{K},\underline{D}]^T\underline{C} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \underline{0} & (-\underline{M}^{-1}\underline{K})^T & \underline{0} \\ \underline{I} & (-\underline{M}^{-1}\underline{D})^T & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{M}^{-1}[\underline{K},\underline{D}]^T\underline{C})^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{B}\underline{B}^T \end{bmatrix}$$

6.3 Die Berechnung der Kovarianzmatrix am Beispiel fahrbahnerregter Fahrzeugschwingungen

Für die beispielhaften Berechnungen von Streuungen zufällig erregter Fahrzeugschwingungen werden Modelle eines Personen- und eines Lastkraftwagens gewählt. Dank der freundlichen Überlassung von Meßwerten fahrbahnerregter Fahrzeugschwingungen eines deutschen Automobilherstellers konnten diese Daten analysiert und zur Studie des stochastisch erregten Personenkraftwagens herangezogen werden. Zur Approximation des durch FOURIER-Transformation berechneten Leistungsspektrums (Beschleunigungsmessung) wurde der folgende gebrochen rationale Funktionstyp gewählt:

$$S_{\ddot{y}\ddot{y}}(\omega) = \frac{a \omega^4}{b + c \omega^4 + \omega^8}$$

Da das Leistungsspektrum der erforderlichen Wegerregung

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{\omega^4} S_{\ddot{f}\ddot{f}}(\omega)$$

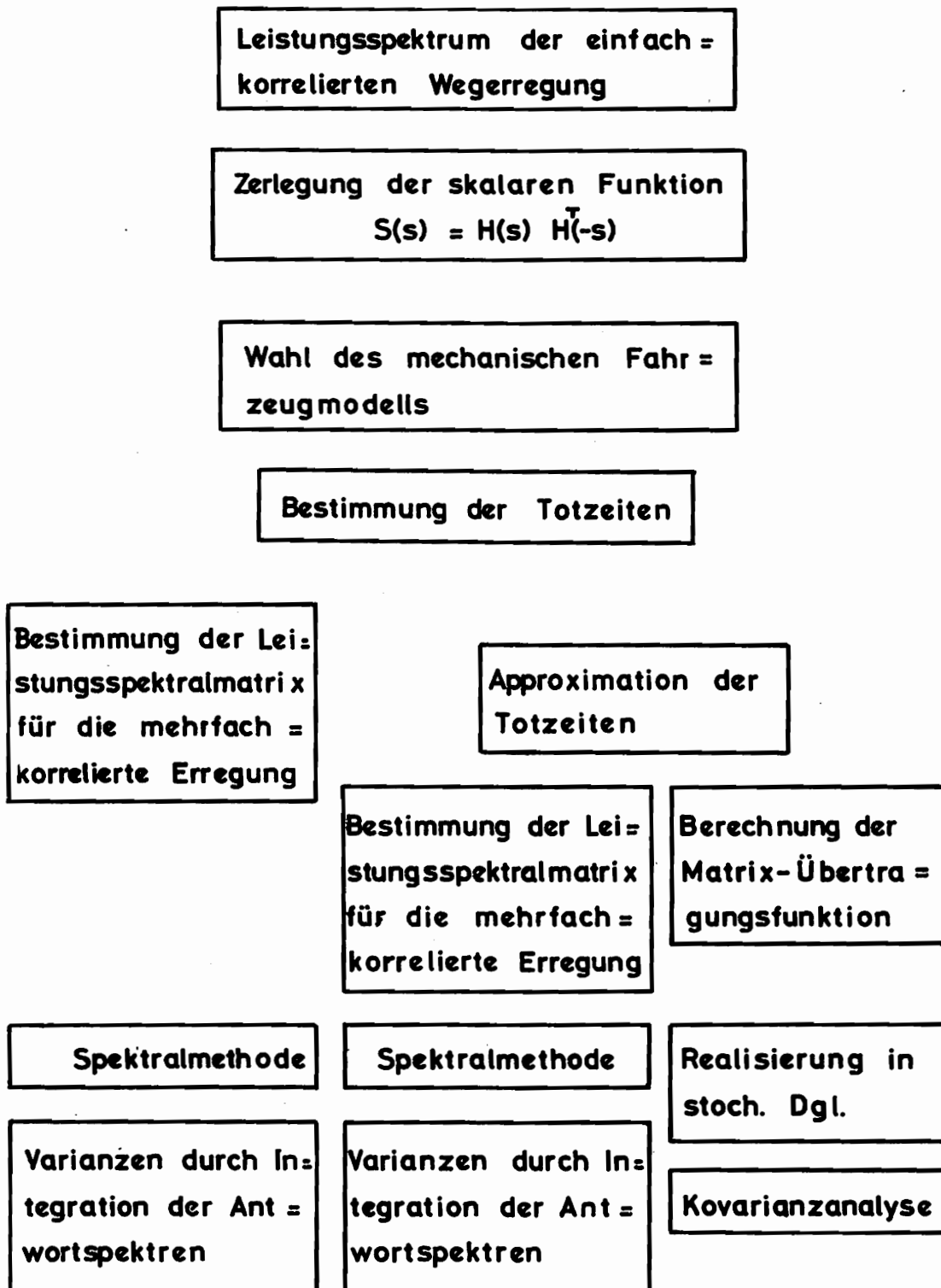
keine Singularität aufweisen darf, ergibt sich die hohe Nennerpolynomordnung. Als statistische Beschreibung der Lastkraftwagenerregung wurde ein empirisch gegebenes Leistungsspektrum nach [25] ausgesucht:

$$S_{ff}(\omega) = \frac{a}{b + c\omega^2 + \omega^4} \cdot$$

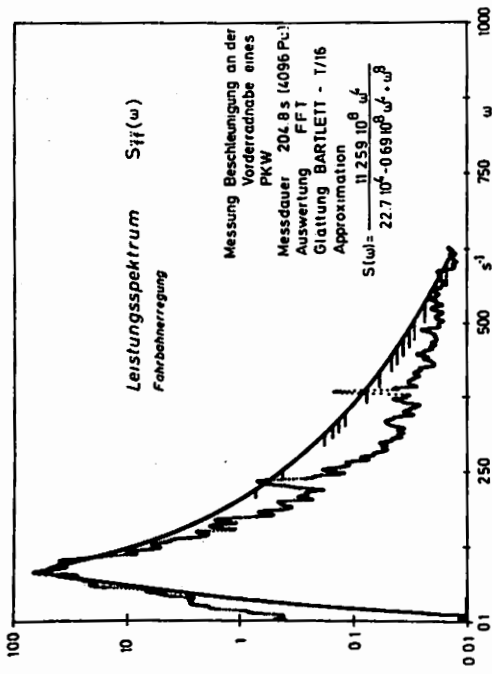
Dieses Spektrum gilt für das Befahren schlechter Wegstrecken.

Mit der Wahl der Fahrzeuggeschwindigkeiten und der Radstände werden mit den oben vorgestellten Methoden die Fahrbahnerregungen durch stochastische Differentialgleichungen beschrieben und eine Berechnung der Schwingungsvarianzen der Fahrzeuge nach der Spektralmethode und der Kovarianzanalyse vorgenommen.

Im einzelnen ergibt sich der folgende Rechenablauf:



Eine übersichtliche Darstellung der Beispiele und der erzielten Rechenergebnisse findet der Leser in den folgenden Bildern.



Leistungsspektrum der Wegerregung :

$$S_{ff}(s) = \frac{11.259 \cdot 10^8}{22.778 \cdot 10^4 \cdot s^2 - 0.699 \cdot 10^8 \cdot s + 0.8}$$

Zerlegung des Leistungsspektrums :

$$S_{ff}(s) = H_{ff}(s) \cdot H_{ff}^*(s)$$

$$H_{ff}(s) = \frac{3.355 \cdot 10^4}{4.77 \cdot 10^7 \cdot s + 1.88 \cdot 10^6 \cdot s^2 + 1.94 \cdot 10^3 \cdot s^3 + s^4}$$

Totzeit : $\tau_1 = 0.1 \text{ s}$

PADE - Approximation 4-Ordnung :

$$P_1(s) = \frac{1 - 0.5(0.1s) + 1.07(0.1s)^2 - 0.019(0.1s)^3 + 5.95 \cdot 10^{-4} (0.1s)^4}{1 + 0.5(0.1s) + 1.07(0.1s)^2 + 0.019(0.1s)^3 + 5.95 \cdot 10^{-4} (0.1s)^4}$$

Matrix-Übertragungsfunktionen :

PADE

$$H(s) = H_{ff}(s) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ e^{-0.1s} \\ s e^{-0.1s} \end{bmatrix} \quad H_p(s) = H_{ff}(s) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ P_1(s) \\ s P_1(s) \end{bmatrix}$$

Realisation :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.447 \cdot 10^8 & -0.134 \cdot 10^7 & -0.188 \cdot 10^5 & -0.194 \cdot 10^3 & -0.351 \cdot 10^1 & 0.522 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.676 \cdot 10^7 & -0.339 \cdot 10^7 & 0.195 \cdot 10^5 & -0.514 \cdot 10^3 & -0.409 \cdot 10^1 & -0.204 \cdot 10^7 & -0.394 \cdot 10^5 & -0.32 \cdot 10^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.335 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.335 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bild 28: Zufällige Vertikalerregung eines Personenkraftwagens durch eine stochastische Differentialgleichung $\dot{r}(t) = C \cdot w(t), \dot{w}(t) = A \cdot w(t) + B \xi(t), \ddot{r}(t) = [r(t) \quad \dot{r}(t) \quad r(t + \tau_1) \quad \dot{r}(t + \tau_1)]$

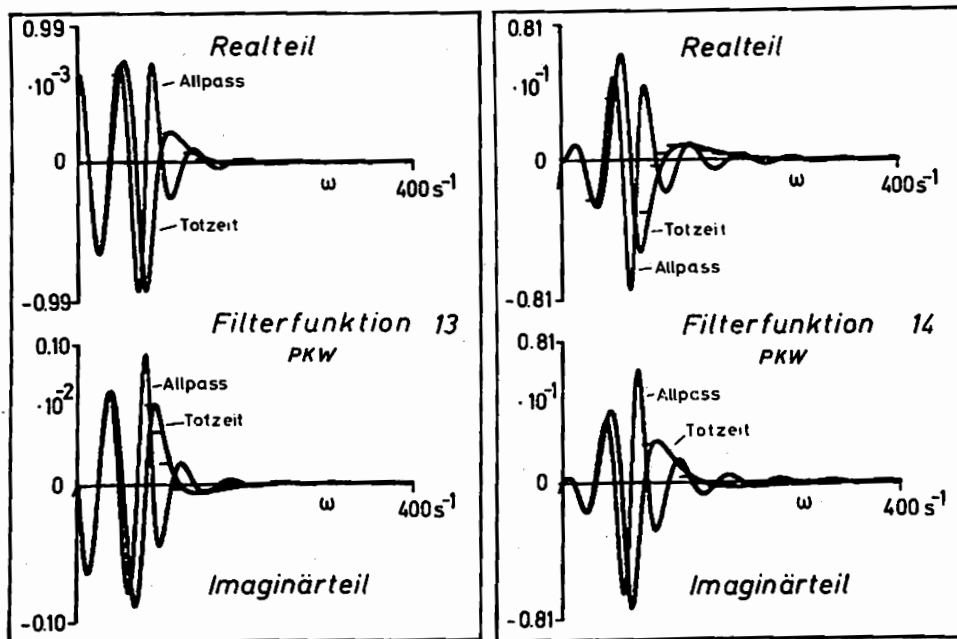
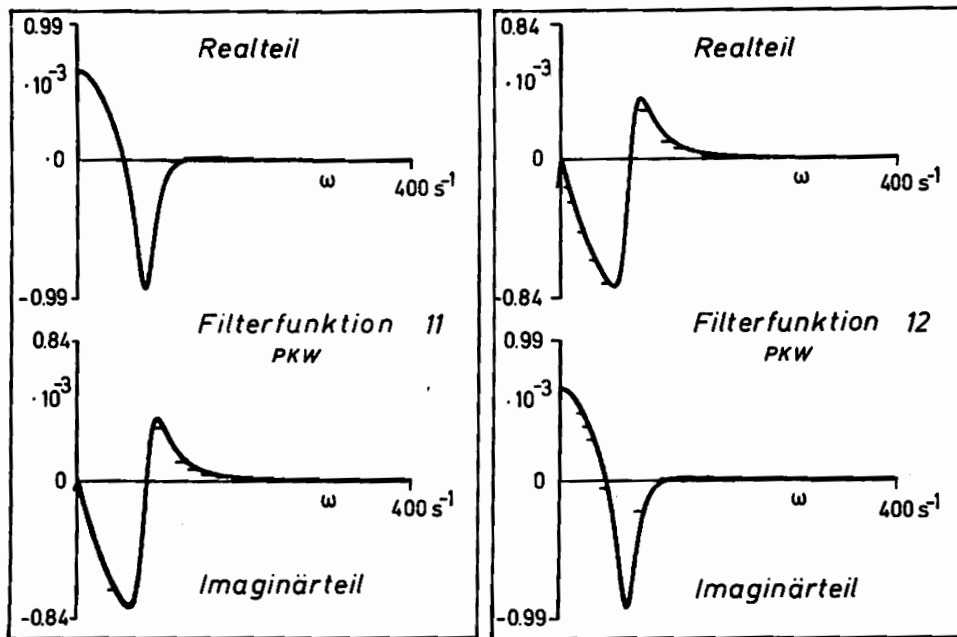


Bild 29 : Matrix-Übertragungsfunktion zur Simulation einer Fahrbahnerregung

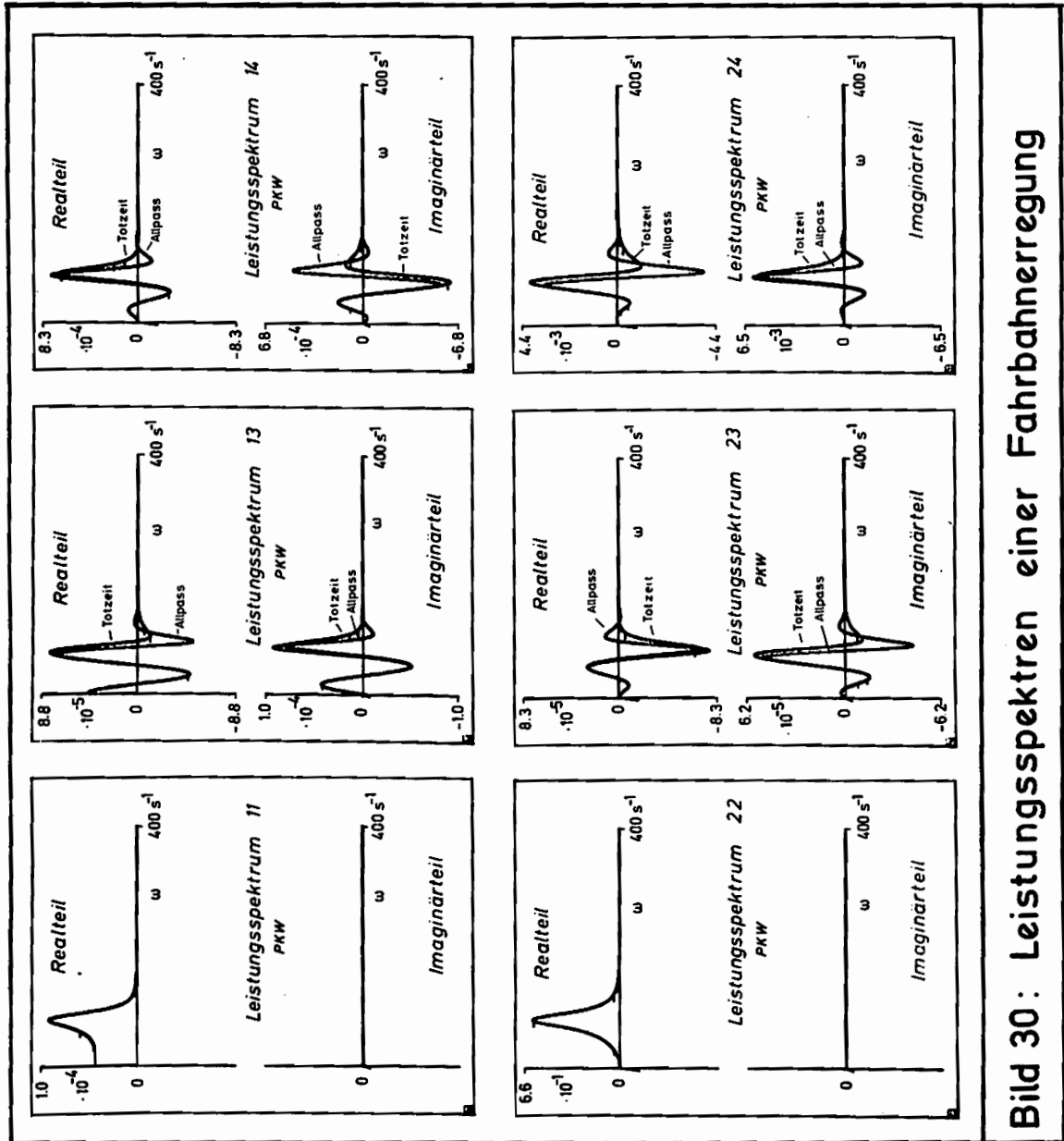


Bild 30: Leistungsspektren einer Fahrerregung

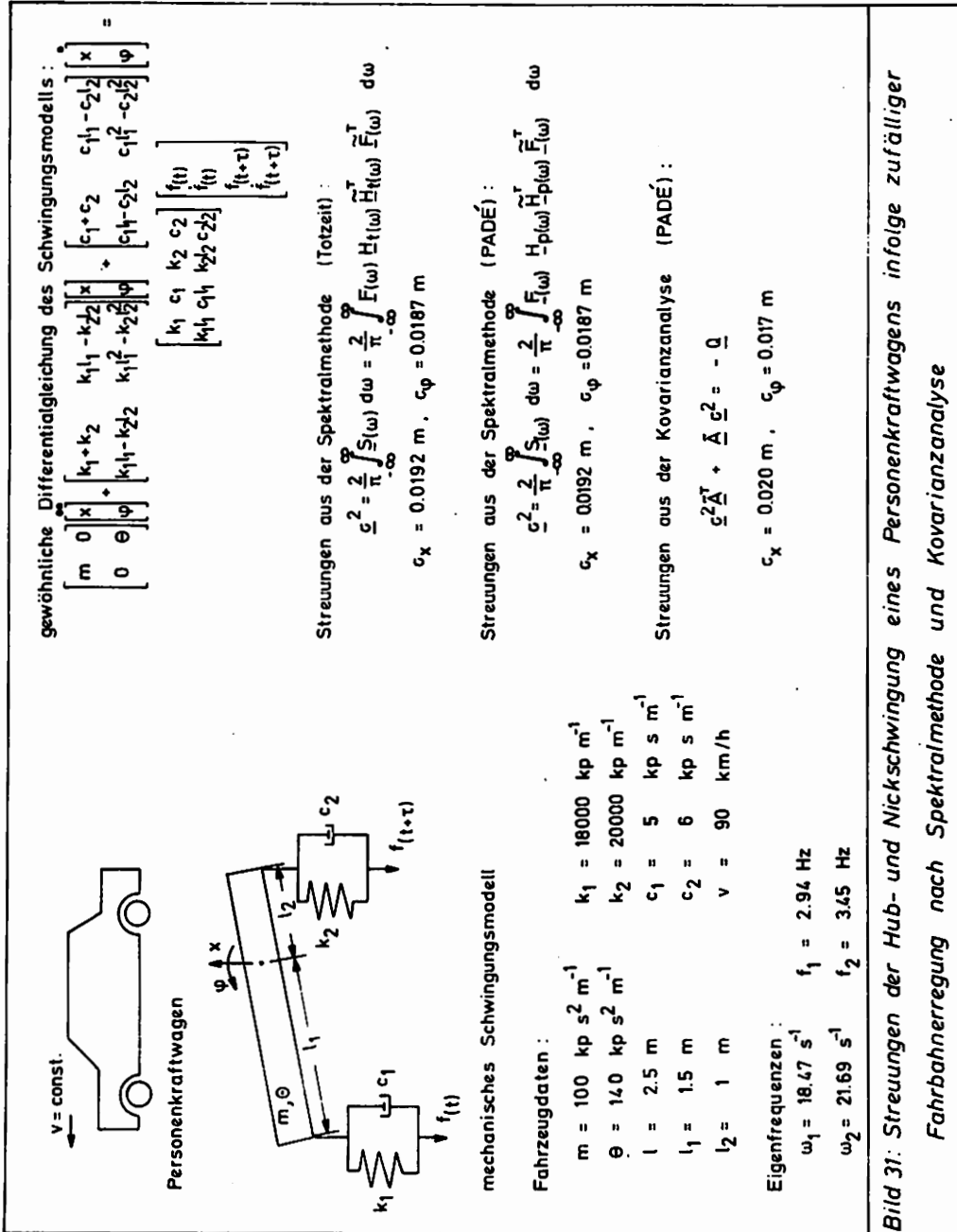


Bild 31: Streuungen der Hub- und Nickschwingung eines Personenkraftwagens infolge zufälliger Fahrbahnerregung nach Spektralmethode und Kovarianzanalyse

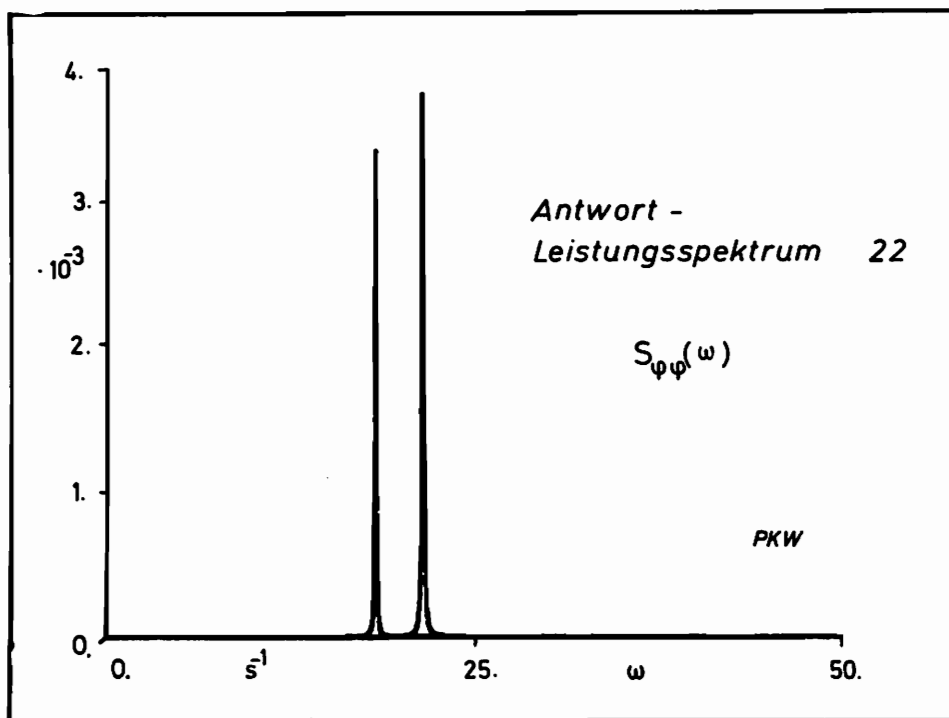
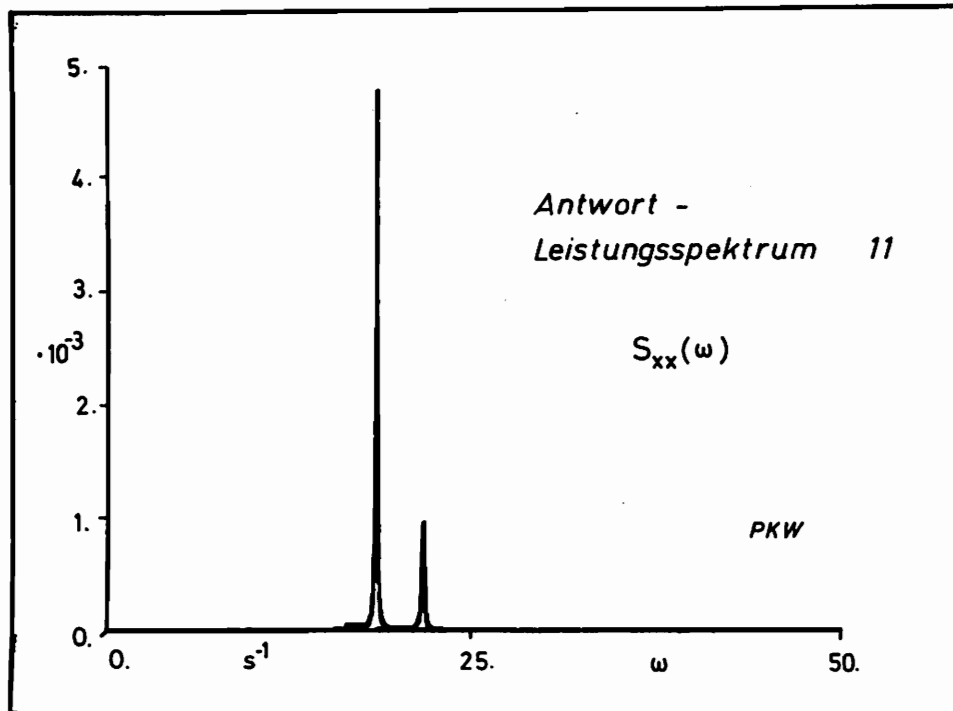


Bild 32 : Antwort-Leistungsspektren eines
Personenkraftwagens infolge zufälliger
Fahrbahnerregung

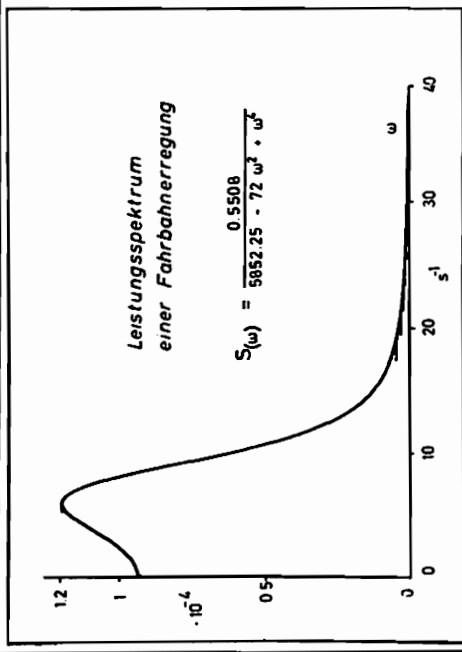
Totzeiten: $\tau_1 = 0.33 \text{ s}$ $\tau_2 = 1.02 \text{ s}$
 PADE-Approximation 4-Ordnung:

$$P_1(s) = \frac{1 - 0.5(\tau_1 s) + 1.07(\tau_1 s)^2 - 0.0119(\tau_1 s)^3 + 5.95 \cdot 10^{-4}(\tau_1 s)^4}{1 + 0.5(\tau_1 s) + 1.07(\tau_1 s)^2 + 0.0119(\tau_1 s)^3 + 5.95 \cdot 10^{-4}(\tau_1 s)^4}$$

Matrix-Übertragungsfunktionen:
 Totzeit PADE

$$\underline{H}_f(s) = H_{ff}(s) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ e^{-0.33 s} \\ e^{-1.02 s} \\ s e^{-1.02 s} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}_p(s) = H_{ff}(s) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ P_1(s) \\ s P_1(s) \\ s^2 P_1(s) \end{bmatrix}$$



Realisation:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -76.5 & -9.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.66 \cdot 10^6 & -3.78 \cdot 10^4 & -1.42 \cdot 10^5 & -2.34 \cdot 10^6 & -1.65 \cdot 10^3 & -6.06 \cdot 10^1 & -3.50 \cdot 10^3 & 5.29 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.55 \cdot 10^6 & -1.78 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.55 \cdot 10^3 & -7.92 \cdot 10^2 & -1.73 \cdot 10^2 & -1.96 \cdot 10^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0.742 & 0 & 0.742 & 9.68 \cdot 10^1 & 6.26 \cdot 10^3 & 0 & 0.742 & -3.56 \cdot 10^1 & 6.36 \cdot 10^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leistungsspektrum der Wegerregung:

$$S_{ff}(s) = \frac{0.5508}{5952.25 + 72.0 s^2 + s^4}$$

Zerlegung des Leistungsspektrums:

$$S_{ff}(s) = H_{ff}(s) H_{ff}(-s)$$

$$H_{ff}(s) = \frac{0.742}{76.5 + 9.0 s + s^2}$$

Bild 33: Zufällige Vertikalerregung eines Lastkraftwagens durch eine stochastische Differentialgleichung

$$\ddot{f}(t) = C \dot{w}(t) + B w(t) + A \xi(t) \quad f(t) = f(t+\tau_1) f(t+\tau_2) f(t+\tau_2)$$

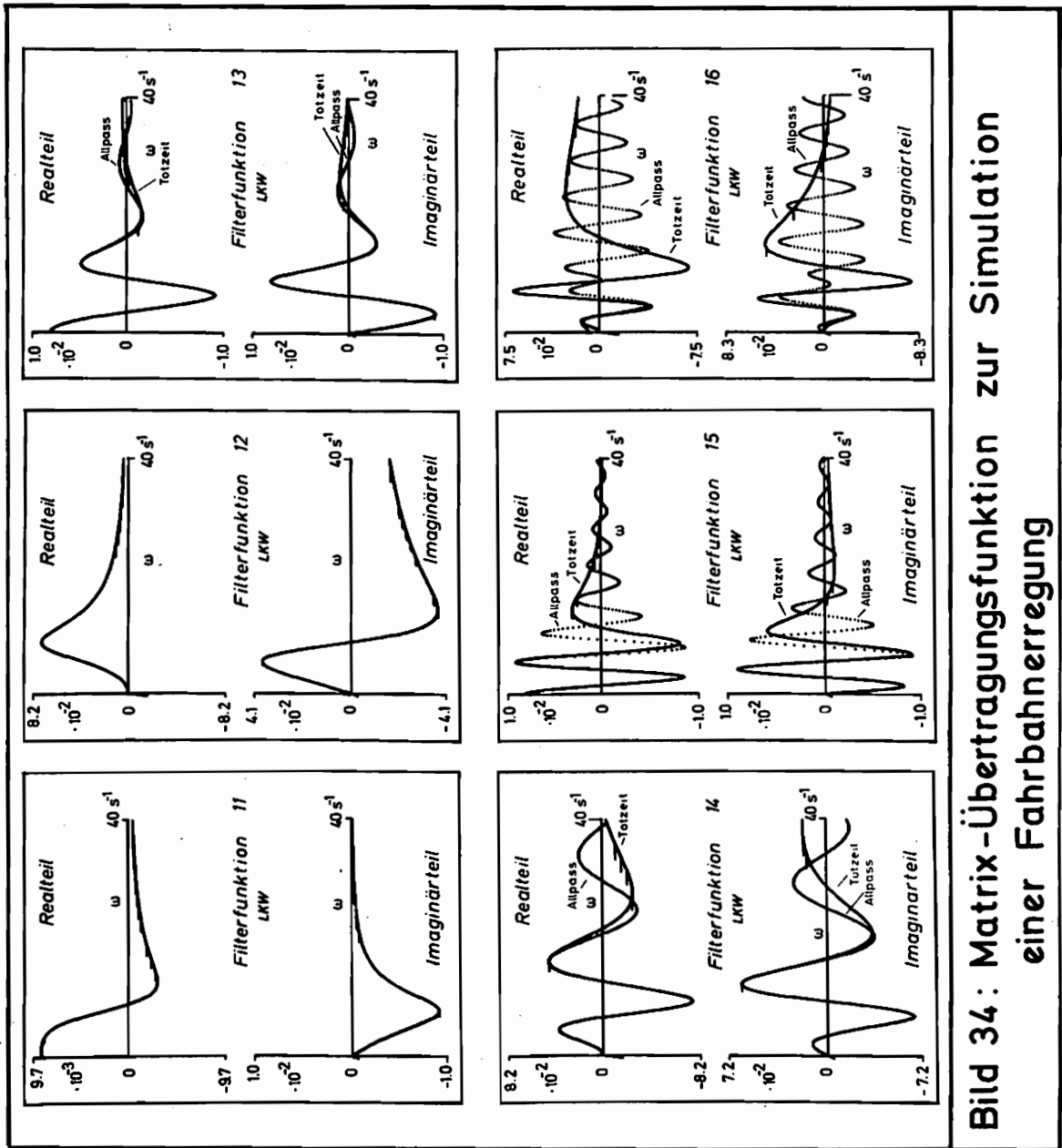


Bild 34: Matrix-Übertragungsfunktion zur Simulation einer Fahrbahnerregung

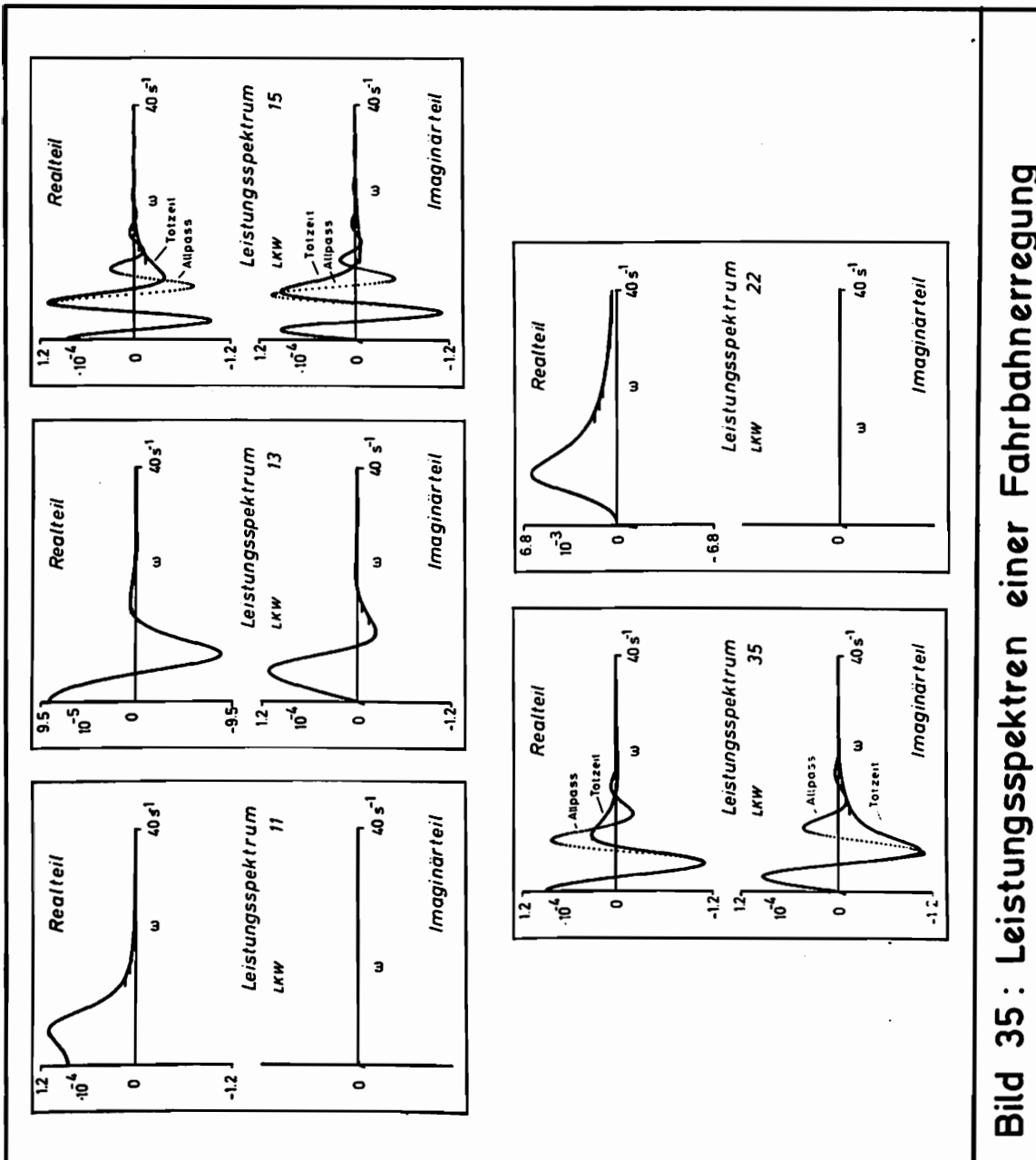
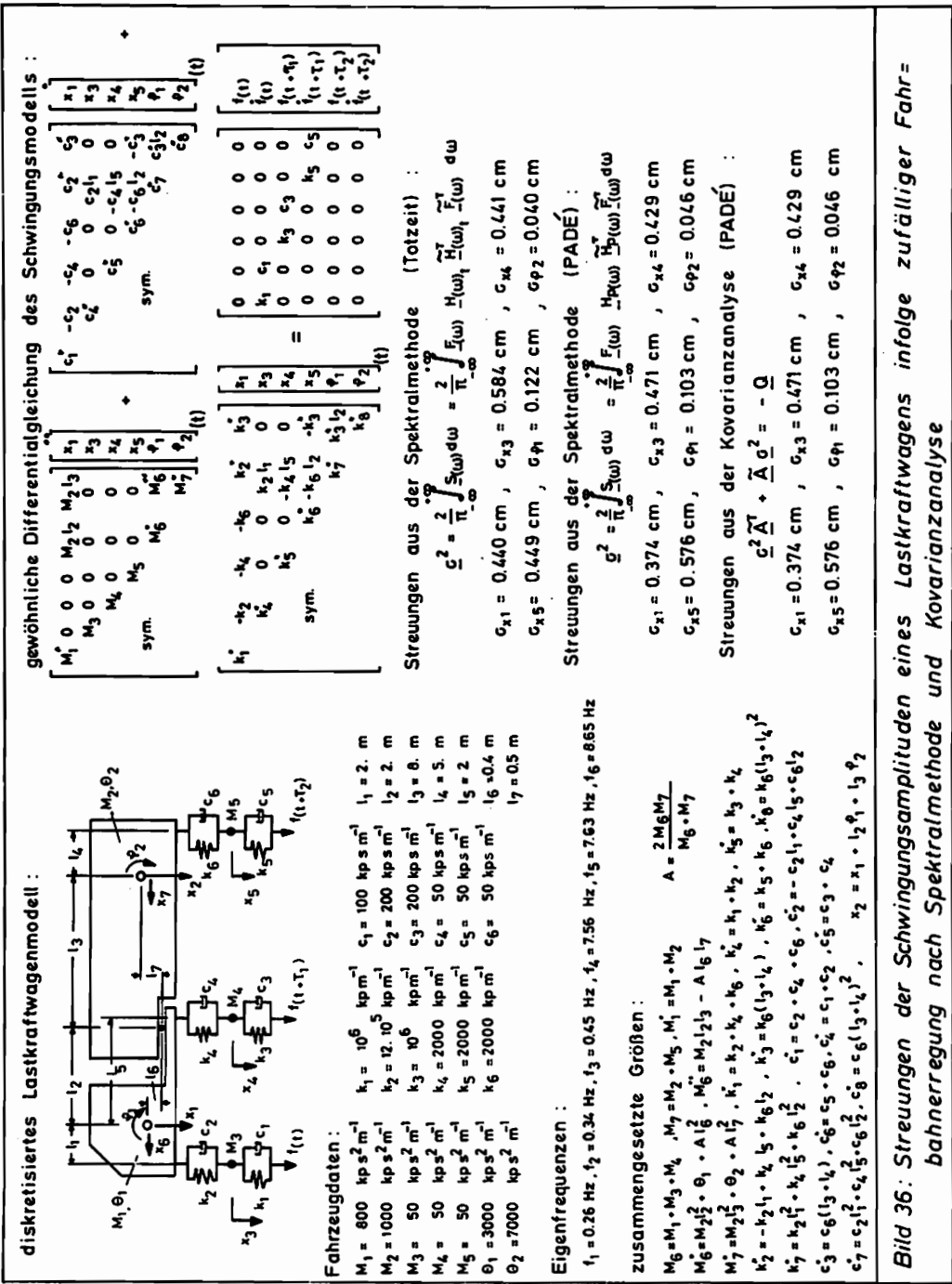


Bild 35 : Leistungsspektren einer Fahrerregung



**Bild 36: Streuungen der Schwingungsamplituden eines Lastkraftwagens infolge zufälliger Fahr-
bahnerregung nach Spektralmethode und Kovarianzanalyse**

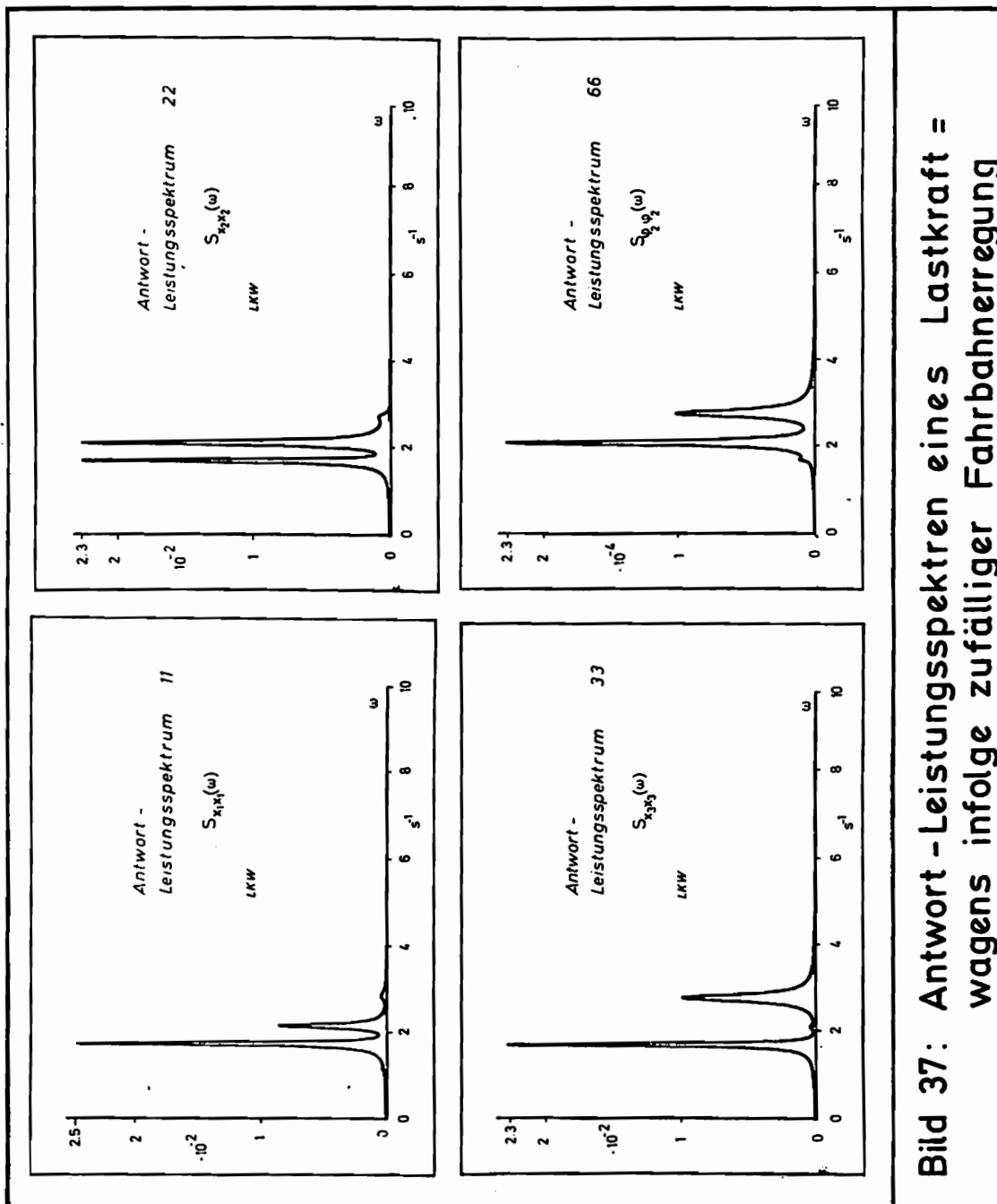


Bild 37: Antwort - Leistungsspektren eines Lastkraft = wagens infolge zufälliger Fahrbanerregung

Die erzielten Ergebnisse bedürfen der Diskussion. Sowohl die Spektralmethode als auch die Kovarianzanalyse sind in praktischer Anwendung als numerische Rechenverfahren anzusehen. Diese berechnen die Kovarianzen der Antwort eines mechanischen Systems infolge zufälliger Erregung unter statistischer Betrachtungsweise. An den Anfang der Betrachtung wurde die spektrale Leistungsdichtematrix gestellt, die sich aus der Approximation gemessener Leistungsspektren ergibt. Diese statistischen Kennfunktionen bedürfen einer Untersuchung auf Allgemeingültigkeit, die an dieser Stelle nicht vorgenommen werden kann. Es war das Anliegen des Verfassers zu zeigen, daß aus spektralen Dichtematrizen lineare stochastische Differentialgleichungen hergeleitet werden können. Hierdurch ist eine stochastische Prozeßbeschreibung von Fahrbahnunebenheiten gegeben, die eine einfache Kovarianzberechnung gestattet. Während die Kovarianzanalyse geschlossene Lösungen liefert, hängt die numerische Kovarianzberechnung mittels Spektralmethode entscheidend von der gewählten Stützstellenanzahl N bzw. der Frequenzdiskretisierung $\Delta\omega$ ab. Um den Rechenaufwand der Spektralmethode in Grenzen halten zu können, ist die Kenntnis der Systemeigenfrequenzen und des Frequenzumfangs der Erregung in jedem Fall erforderlich, um Fehlberechnungen zu vermeiden. Aus diesem Grund bleibt ein Aufwandsvergleich beider Methoden immer relativ.

Die erzielten Ergebnisse aus der Untersuchung des stochastisch erregten Personenkraftwagens sind im Rahmen der Rechengenauigkeit als zufriedenstellend anzusehen. Die Spektralmethode erforderte eine Frequenzdiskretisierung von 0.025 s^{-1} , wobei über 8000 Frequenzpunkte mit dem EULER-Verfahren integriert wurde. Ohne Berücksichtigung der Ein/Ausgabe Anweisungen benötigte eine MODCOMP IV Rechenanlage 4.4 Minuten zur Problemlösung. Die programmierte Kovarianzanalyse begnügte sich dagegen mit 4.42 Sekunden bei Anwendung des iterativen Algorithmus von SMITH.

Die Untersuchung des zufällig erregten Lastkraftwagens zeigt die Grenzen der PADE-Approximation. Totzeitnäherungen 4. Ordnung sind für Lastkraftwagen mit "langem" Radstand unzureichend. Es verbleibt zu klären, inwieweit Approximationen höherer Ordnung bessere Ergebnisse liefern.

Hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit ergeben sich vergleichbare Resultate. Die Spektralmethode wurde mit einer Stützstellenrate von 0.01 s^{-1} über 2000 Datenpunkte ausgeführt. Die Integration bis zur maximalen Frequenz von 20 s^{-1} konnte aufgrund der Kenntnis von Systemeigenfrequenzen und Frequenzbild des Auto-Leistungsspektrums der Wegerregung als ausreichend angesehen werden. Während dieses Verfahren nach 17 Minuten die Problemlösung fand, benötigte die Kovarianzanalyse insgesamt nur 20 Sekunden. Die wesentlichen Vorteile der Kovarianzanalyse liegen in den extrem kleinen Rechenzeiten, ihrer einfachen Handhabung und der geschlossenen Lösung. Die Spektralmethode ist anschaulicher. Der Praktiker sollte die Kovarianzanalyse der Spektralmethode vorziehen, falls die stochastische Differentialgleichung vorliegt und Eingang in die Normung gefunden hat. In der dargestellten Form dürfte die vorläufige Anwendung in der Auslegung neuer Fahrzeugmodelle zur (Erst-) Bestimmung von Federsteifigkeiten, Dämpferwerte usw. liegen.

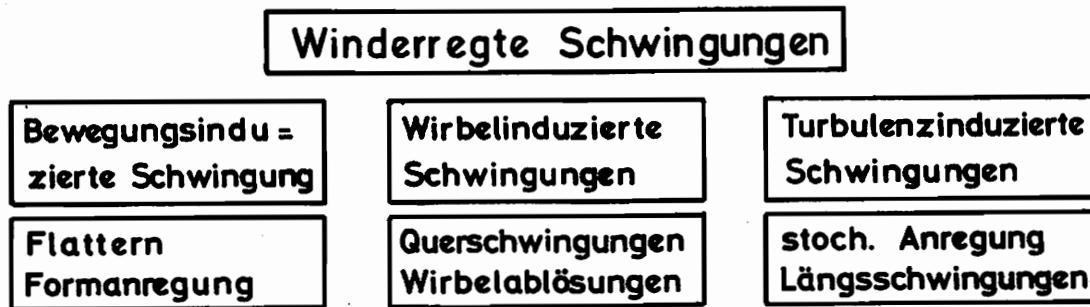
7. Die Anwendung der Kovarianzanalyse auf Bauwerke unter aerodynamischer Belastung

7.1 Die dynamische Erregung von Bauwerken durch den natürlichen Wind und ihre Behandlung

Die zunehmende Vergrößerung von Industriebauten, wie Kühltürme und Kamine oder Fernseh Türme, sowie das Bestreben, die wirtschaftlichen Erstellungskosten solcher Tragwerke durch geringer werdende Eigengewichte zu verkleinern, erforderte es, die geläufigen Berechnungsmethoden zu überdenken. Während sich die klassische Behandlung windgefährdeter Bauwerke mit einer rein statischen Betrachtung (DIN 1055, 4131) begnügte, ist es für den Bauingenieur heute notwendig, aus sicherheitstheoretischen und wirtschaftlichen Überlegungen dynamische Berechnungen in sein Bemessungskonzept mit aufzunehmen. Der Lastfall Wind konnte lange Zeit durch statische Ersatzlasten abgedeckt werden, da die Eigenfrequenzen herkömmlicher Bauwerke und das Frequenzband der Winderregung weit auseinanderlagen. Die Windkräfte erregten die Tragwerke nur zu quasi-statischen Schwingungsreaktionen. Katastrophen, wie der Einsturz der Tacoma-Brücke (1941) oder der Kühltürme von Ferrybridge (1965), zeigen jedoch die Gefährlichkeit windinduzierter Bauwerksschwingungen. Die zunehmende Leichtbauweise erfordert dynamische Berechnungsmethoden und die Analyse der Windkrafteerregungen.

Seit dem Jahre 1950 beschäftigen sich Wissenschaftler vieler Fachrichtungen mit dem Problem winderregter, mechanischer Strukturschwingungen unter dem Gesichtspunkt einer stochastischen Erregung. Eine gänzliche Klärung ist nicht in Sicht, und das Problem erscheint aktueller denn zuvor.

Tragwerksschwingungen infolge strömungsdynamischer Effekte lassen sich grob den folgenden drei Klassen zuordnen [53, 67]:



Die in dieser Arbeit hergeleitete Kovarianzanalyse mehrfachkorrelierter mechanischer Strukturschwingungen ist ein Verfahren zur Berechnung turbulenzinduzierter Schwingungen. Windströmungen entstehen durch das Großwettergeschehen. Der Energieaustausch kalter Luftmassen der Polarzone und heißer Luftmassen des Äquators bewirkt auf der Erde Luftströmungen, die zusätzlich von weiteren Kräften, die z. B. aus der Erdrotation herrühren, beeinflusst werden. Die resultierende Strömung bezeichnet man als Gradientenwind, der ortsabhängig in Höhen zwischen 300 bis 800 Metern auftritt. Die Schwankungsanteile dieser Strömung sind nur sehr gering. Zwischen dieser Schicht und der Erdoberfläche bildet sich dagegen eine turbulente Grenzschicht aus, deren Strömung durch die Erdoberfläche, Bebauung, Wärmeabstrahlung usw. in mannigfacher Weise gestört wird. Die atmosphärische Turbulenz erregt unsere Bauwerke zu Schwingungen. Unterscheidet man die atmosphärische Turbulenz in ein Großwettergeschehen (Makrostruktur) mit langperiodischen Windgeschwindigkeitsschwankungen und in kurzfristige Wetterveränderungen (Mikrostruktur) mit stark fluktuierenden Windverhältnissen, so belastet die Makrostruktur ein Bauwerk statisch, während die Mikrostruktur auf ein Tragwerk schwingungsgefährdend einwirkt.

Windmessungen über lange Zeiträume von VAN DER HOVEN aus dem Jahr 1957 zeigen [88], daß die Trennung von statischer und schwingungsgefährdender Bauwerksbelastung etwa im Bereich von einer Stunde liegt (Bild 38).

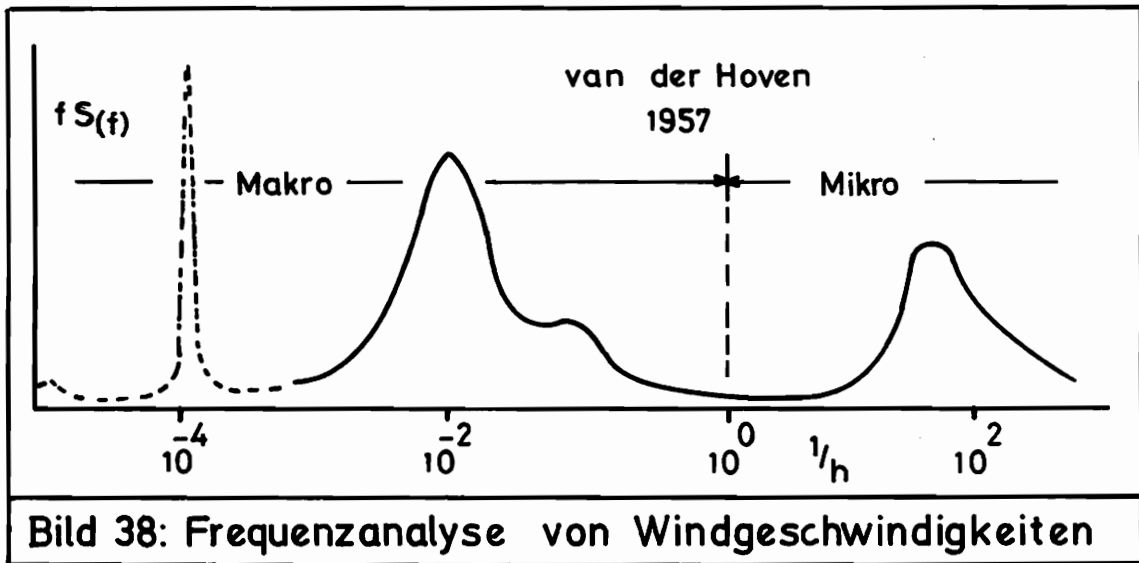


Bild 38: Frequenzanalyse von Windgeschwindigkeiten

Für die turbulenzinduzierten Schwingungen von Tragwerken ist nur die Feinstruktur von Interesse. Dieser Bereich des VAN DER HOVEN Spektrums wird seit 20 Jahren erforscht, wobei der Wind nicht mehr deterministisch, sondern probabilistisch verstanden wird.

Teilt man die Windgeschwindigkeit in Mittelwert und Schwankungsanteile auf

$$v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$$

so sind die statistischen Gesetzmäßigkeiten der fluktuierenden Windgeschwindigkeiten und ihr Einfluß auf Tragwerksschwingungen zu untersuchen. Mit diesem neuen Verständnis der aerodynamischen Belastung von Bauwerken waren neue Rechenverfahren zur dynamischen Schwingungsuntersuchung von Tragwerken notwendig. In Anlehnung an die statistischen Verfahren für die Nachrichten- und Regelungstechnik [80] lag es nahe, sich der Methoden dieser Fachrichtungen zu bedienen, da die stochastische Erregung und Antwort linearer Systeme dort weit-

gehend erforscht war. DAVENPORT erstellte im Jahre 1961 ein vergleichbares Konzept [21] zur statistischen Behandlung von windbelasteten Bauwerken, das weltweit Anerkennung fand und zu großen Aktivitäten auf diesem Gebiet der Aeroelastik im Bauwesen führte.

Nach VAN DER HOVEN (s.o.) können die Bauwerke alle jenen Witterschwankungen folgen, deren Periode größer als eine Stunde ist, während die überlagerten Fluktuationen zu schwingungsgefährdeten Bauwerksreaktionen führen. Da von den amtlichen Wetterstationen seit jeher das Einstunden- und Zehnminuten-Mittel registriert wird, lag es nahe, auf diesen Werten eine Sicherheitstheorie für aerodynamisch belastete Bauwerke aufzubauen.

Messungen von Windgeschwindigkeitsverläufen im Bereich von 10 Minuten bis zu 1 Stunde nutzte DAVENPORT nach Abspaltung des Mittelwertes zur Frequenzanalyse. Im Sinne der Systemtheorie regelloser Vorgänge ist die Übertragung von Leistungsspektren zur Bestimmung der Varianz der Schwingungsantwort (Spektralmethode, (s.o.)) gegeben

$$\underline{S}_{xx}(\omega) = \underline{F}(\omega) \underline{S}_{ff}(\omega) \underline{F}^T(\omega)$$
$$\underline{\sigma}_{xx}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{xx}(\omega) d\omega$$

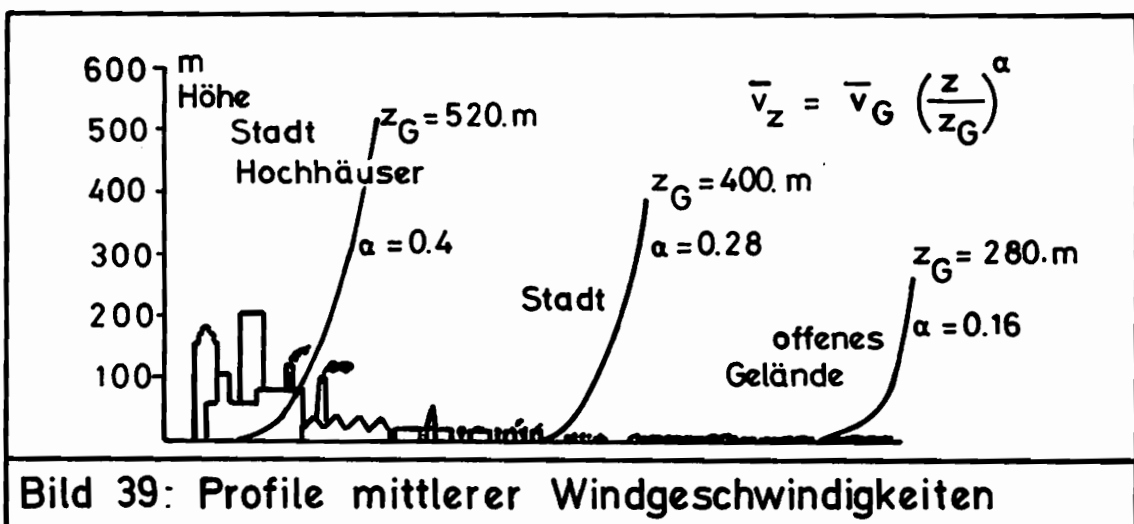
falls die Windgeschwindigkeitsverläufe als stationäre (ergodische) stochastische Prozesse aufgefaßt werden können. Mit der im Jahre 1954 von RICE aufgestellten Theorie [73] zur Abschätzung der Anzahl von Niveauüberschreitungen zufälliger Ereignisse unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen sowie der Annahme, daß die Anzahl solcher Überschreitungen bei hohen Niveaugrenzen als POISSON-verteilt angesehen werden können, schlug DAVENPORT die folgende Formel [22] zur Bestimmung der maximalen Antwortreaktion eines Bauwerks unter aerodynamischer Belastung vor:

$$x_{\max} = \bar{x} + c_x \left\{ \sqrt{2 \ln TN_0} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln TN_0}} \right\}$$

mit $N_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{c_{\dot{x}}}{c_x}$, T: Nutzungszeitraum des Bauwerks

Das in Anlehnung an die Nachrichtentechnik entstandene Verfahren fand Eingang in die Bauwerksdynamik und regte weltweit bis zum heutigen Zeitpunkt zu Forschungen auf diesem Gebiet an. Bestehende oder im Bau befindliche Turmbauwerke wurden mit Schalenkreuzanemometern bestückt, um die regellose Struktur des Windes zu untersuchen.

In ersten Ergebnissen konnten die Windgeschwindigkeitsschwankungen innerhalb eines Mittelungsintervalls als normalverteilte Momentanwerte eines stationären stochastischen Prozesses gedeutet werden, der die Beschreibung durch spektrale Leistungsdichten gestattet. Ferner ließen sich die mittleren Extremwerte (1 h-Mittel) während eines längeren Zeitraums (z. B. Jahreswind) in Windkarten mit regionalen Spitzenwerten darstellen sowie Höhenprofile der mittleren Windgeschwindigkeiten in der turbulenten Grenzschicht in Abhängigkeit verschiedener Bodenrauigkeiten der Erdoberfläche ([21], HELLMANNsche Exponentialformel) finden (Bild 39).



Zahlreiche Wissenschaftler veröffentlichten Leistungsspektren gemessener Windgeschwindigkeitsverläufe, während andere um die Umsetzung der Windgeschwindigkeitsschwankungen in Winddruckschwankungen (aerodynamische Admittanz) bemüht sind.

Obwohl z. Z. in zahlreichen Ländern die Aufnahme der Forschungsergebnisse in Normvorschriften erfolgt, verbleiben viele offene Fragen. Dies gilt insbesondere für eine vereinheitlichte analytische Darstellung der Leistungsspektralmatrix. Es ist verständlich, daß in der Vergangenheit zuerst vorwiegend Auto-Leistungsspektren, also die Betrachtung von Windgeschwindigkeitsschwankungen ohne Berücksichtigung der Mehrfachkorrelation abgeleitet wurden. Daß die zahlreichen spektralen Dichteverläufe [21, 41, 70] nur in grober Näherung vergleichbar sind, hat verschiedene Ursachen. Einerseits können die statistischen Auswerteverfahren ([71], s.o.) unterschiedlich aufgefaßt werden und andererseits kennzeichnet ein Leistungsspektrum eine Klasse von Zufallsfunktionen mit der mittleren Windgeschwindigkeit, der Meßhöhe und der Bodenrauigkeit als Bezugsgrößen. Es kann unterstellt werden, daß die Messung klassengleicher Windgeschwindigkeitsverläufe und die Ensembleauswertung nicht nur einer langjährigen Arbeit bedarf, sondern auch den Austausch riesiger Datenmengen unter den beteiligten Forschern notwendig macht, um zu einer konsistenten statistischen Beschreibung der Windkraftverläufe zu gelangen. Eine derartige Koordination und systematische Untersuchung fehlt bisher.

Weitgehend ungelöst ist auch die Herleitung von Kreuzleistungsspektren zur Berücksichtigung der Mehrfachkorrelation der höhenabhängigen Windgeschwindigkeitsmessungen. Untersuchungen der räumlichen Korrelation der Windböigkeit liegen bislang aus Naturmessungen kaum vor. Dies liegt vor allem an der aufwendigen Meßtechnik. Bisher werden an turmartigen Bauwerken allenfalls an 3 Meßstellen über der Bauwerkshöhe Meßwerte aufgenommen. Dies ist aber nach Ansicht des Verfasser zu wenig, um die höhenabhängige Phasenkorrelation verallgemeinert untersuchen zu können. Für herkömmliche Bauwerke, die vorwiegend in der Grundfrequenz schwingen, reichen die bisherigen Forschungsergebnisse aus oder sind von geringer Bedeutung, da sich diese Tragwerke als Einmassenschwinger-

modelle darstellen lassen. Schwieriger ist die Auslegung von Fernsehtürmen bzw. Tragwerken, bei denen sich Steifigkeits- und Massenverteilung stark ändern. Diese Sonderbauten liegen zumindest mit ihrer ersten Eigenfrequenz ($\approx 1,2$ Hz) im vollen Frequenzbereich der Wind-Leistungsspektren und entnehmen somit der Windkraft Energie, die auch in den höheren Eigenschwingungen zu Beanspruchungen führen können. Für diese Bauwerke wirkt sich aber die Berücksichtigung der Mehrfachkorrelation schwingungsdämpfend und daher vorteilhaft aus, wie durch Vergleichsrechnungen [38, 67] festgestellt werden konnte. Eine Untersuchung der Phasenkorrelation ist in jedem Fall erforderlich, da sie sowohl in TIME-HISTORY-Rechnungen wie in statistische Verfahren eingeht.

Die bisherigen Ausführungen sollen dem Leser einen Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung auf dem Gebiet aerodynamisch belasteter Bauwerke vermitteln. Die teilweise kritischen Anmerkungen stellen jedoch nicht die statistische Betrachtungsweise von Windkräften in Frage. Der zeitliche Windkraftverlauf ist regellos und als stochastischer Prozeß anzusehen, da die Luftströmung durch unendlich viele, nicht erkennbare und berechenbare Störungsfaktoren beeinflusst wird.

Sollen TIME-HISTORY-Rechnungen wirklichkeitsnah durchgeführt werden, so müssen einerseits über die Bauwerkshöhe verteilt viele Windgeschwindigkeitsmessungen vorliegen, und andererseits können solche Berechnungen im Sinne stochastischer Prozesse nicht auf eine einzige Rechnung mit "Mustermeßwerten" beschränkt bleiben. Viele Zeitverlaufsrechnungen mit gemessenen Windkraftverläufen sind in der Bauauslegung wirtschaftlich nicht zu vertreten.

Eine Weiterentwicklung der statistischen Berechnungsmethoden aerodynamisch belasteter Bauwerke sieht der Verfasser in der beschriebenen Kovarianzanalyse von mechanischen Strukturschwingungen infolge mehrfachkorrelierter Erregung und der damit verbundenen Beschreibung (Realisierung) dieser zufälligen Zeitverläufe durch stochastische Differentialgleichungen.

Gegenüber der angesprochenen, anschaulichen Spektralmethode ist die Kovarianzanalyse bislang gleichwertig, aber rechenzeitgünstiger. Dies hilft vor allem dem Praktiker in der Bauwerksauslegung, weil dort das Konstruieren Vorrang vor dem Rechnen hat. Die Einfachheit des Verfahrens gestattet schon in der Entwicklungsphase die Berücksichtigung der stochastischen Windbelastung und muß nicht auf einen einzigen Standfestigkeitsnachweis beschränkt bleiben. Andererseits folgt aus der Darstellung der regellosen Windstruktur durch stochastische Differentialgleichungen zumindest systemtheoretisch gesehen eine physikalische Beschreibung, die nach dem Kausalitätsprinzip erstellt wurde. Nicht nur hiermit steht die Datenreduktion der Windkraftherregung auf einem gesicherten, ausbaufähigen mathematischen Fundament. Die (mathematische) Theorie stochastischer Prozesse ist noch nicht abgeschlossen, wie die zahlreichen Konferenzen [75] und Neuveröffentlichungen zeigen. Es bleibt zu hoffen, daß bei den zukünftigen Auswertungen von Windmeßdaten der Darstellung durch stochastische Differentialgleichungen mehr Beachtung geschenkt und hiermit die Verbindung zu einer modernen mathematischen Theorie hergestellt wird, um so First-Passage-Probleme oder Ermüdungsfragen klären zu können.

7.2 Die Kovarianzanalyse als Hilfsmittel zur Berechnung winderregter Bauwerksschwingungen

Ausgangspunkt zur Beschreibung winderregter Schwingungen sind Messungen zeitlicher Windgeschwindigkeitsverläufe unterschiedlicher Höhen. Aus der Frequenzanalyse folgt die spektrale Dichtematrix, die in eine realisierbare Matrix-Übertragungsfunktion zerlegt wird. Mit Hilfe des Verfahrens der Minimalrealisierung findet sich eine stochastische Differentialgleichung, aus der in geeigneter Weise mit der gewöhnlichen Differentialgleichung des in FINITE-ELEMENTE diskretisierten Tragwerks die Berechnung der Kovarianzmatrix zufällig schwingender Tragwerke erfolgt. In der folgenden Tafel werden noch einmal die zur Bestimmung der stochastischen Differentialgleichung eines mehrfachkorrelierten zufälligen Prozesses durchzuführenden Verfahren übersichtlich dargestellt.

Messung des mehrfachkorrelierten Prozesses
Frequenzanalyse

Darstellung der Elemente der Leistungsspektral-
matrix durch gebrochen rationale Funktionen

Zerlegung der spektralen Dichtematrix in ihre
konjugiert komplexen transponierten Matrix-
Übertragungsfunktionen (Filterfunktionen)

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

Minimalrealisierung der Matrix-Übertragungs-
funktion durch Bestimmung des Matrizen =
trippels $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$

$$\underline{H}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

Aufstellen der stochastischen Differential =
gleichung aus den Matrizen der Realisierung

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= \underline{C} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \end{aligned}$$

Aufstellen der bilinearen Matrizengleichung mit
den Matrizen der Realisierung und des Bau-
werks zur Berechnung der Kovarianzmatrix

$$\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} = -\underline{Q}$$

Tafel 1 : Übersicht zur Berechnung der Kovarianz-
matrix von Tragwerken unter mehrfach-
korrelierter Erregung

Aerodynamische Bauwerke werden durch den stochastischen Windkraftverlauf zu Schwingungen angeregt. Da die Forschungen auf diesem Gebiet z. Z. andauern, ist es verständlich, daß in der Vergangenheit vorwiegend Windgeschwindigkeitsverläufe gemessen und analysiert wurden. Die notwendige Übertragung von der Windgeschwindigkeit zum Winddruck (aerodynamische Admittanz) steht z. Z. noch aus. Aus diesem Grund werden einige Vereinfachungen durchgeführt, die zwar die berechenbare Reaktion eines Bauwerks infolge aerodynamischer Belastung beeinflussen, aber auf die dargestellten Methoden und deren Vergleich ohne Einfluß bleiben.

Die allgemeine Beziehung [87] zwischen Winddruck und Windgeschwindigkeit lautet:

$$P(t) = \frac{\rho}{2} c_w(t) v(t)^2 + c_m \varphi A^* \frac{dv(t)}{dt}$$

$P(t)$: zeitlicher
Druckverlauf

F : Fläche

ρ : Luftdichte

A^* : Bezugsfläche ($\frac{\pi F}{4}$)

c_w : Widerstands=
beiwert

c_m : Beschleunigungs=
beiwert

Im einzelnen werden die folgenden Vereinfachungen durchgeführt:

- 1) Der aus der Strömungsbeschleunigung resultierende Anteil

$$c_m \rho A^* \frac{dv}{dt}$$

wird vernachlässigt.

- 2) Der Windwiderstandsbeiwert $c_w(t)$ wird sowohl zeit- als auch geometrisch invariant angenommen.

- 3) Die Windlast wird als Stablast anteilmäßig auf die Knoten des diskreten Schwingers aufgeteilt.

$$P_i(t) = \frac{\rho}{2} c_w F_i v_i^2(t)$$

- 4) Die Windgeschwindigkeitsschwankungen folgen bestimmten angenommenen Gesetzmäßigkeiten über die Höhe (s.u.).
- 5) Der Einfluß des schwingenden Bauwerks auf das Strömungsfeld wird vernachlässigt.

Teilt man den zeitlichen Windgeschwindigkeitsverlauf in Mittelwert und Schwankungsanteil auf, so folgt mit

$$v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$$

der zeitliche Winddruckverlauf mit den oben getroffenen Einschränkungen zu

$$p(t) = \bar{p} + \tilde{p}(t)$$

$$\bar{p} = \frac{\rho}{2} c_w F \bar{v}^2$$

während der stochastische Druckkraftverlauf zu

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) &= \frac{\rho}{2} c_w F (2\bar{v} \tilde{v}(t) + \tilde{v}(t)^2) \\ &= \bar{p} \left(\frac{2\tilde{v}(t)}{\bar{v}} + \frac{\tilde{v}(t)^2}{\bar{v}^2} \right) \end{aligned}$$

angenommen wird. Linearisiert man die Beziehung zwischen Winddruck

und Windgeschwindigkeit durch Vernachlässigung des quadratischen Anteils, so kann mit

$$\tilde{p}(t) = \bar{p} \frac{2\tilde{v}(t)}{\bar{v}} = \rho c_w \bar{v} \tilde{v}(t)$$

das Druckkraft-Leistungsspektrum in Abhängigkeit vom Leistungsspektrum der Windgeschwindigkeit angegeben werden:

$$S_{p_i p_j}(\omega) = \rho^2 c_w^2 F_i F_j \bar{v}_i \bar{v}_j S_{v_i v_j}(\omega)$$

In Matrixschreibweise lautet diese Beziehung:

$$\underline{S}_p(\omega) = \rho c_w \text{diag}[F\bar{v}] \underline{S}_v(\omega) \text{diag}[F\bar{v}] c_w \rho$$

Um die stochastische Differentialgleichung der zufälligen Wind-
erregung bestimmen zu können, muß die spektrale Windkraftdichte-
matrix in ihre Matrix-Übertragungsfunktionen

$$\underline{S}_p(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{\tilde{H}}^T(\omega)$$

zerlegt werden. Aufgrund der Linearisierung reicht die Zerlegung der
spektralen Windgeschwindigkeitsdichtematrix in

$$\underline{S}_v(\omega) = \underline{G}(\omega) \underline{\tilde{G}}^T(\omega)$$

aus. Hiermit ergibt sich die Matrix-Übertragungsfunktion der Windkraft
zu

$$\underline{H}(\omega) = \rho c_w \text{diag}[\underline{F}\bar{v}] \underline{G}(\omega)$$

Die Zerlegung der Leistungsspektralmatrix der Windgeschwindigkeitsverläufe ermöglicht durch Minimalrealisierung (Kapitel 4) die Bestimmung einer stochastischen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \underline{C} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \\ \underline{G}(s) &= \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \end{aligned}$$

Aus den Windgeschwindigkeitsverläufen sind die stochastischen Druckkraftverläufe entsprechend obiger Ableitungen und Vereinfachungen zu finden:

$$\begin{aligned} \underline{p}(t) &= \rho c_w \text{diag}[\underline{F}\bar{v}] \underline{C} \underline{w}(t) = \underline{E} \underline{C} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t) \\ \underline{H}(s) &= \underline{E} \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \end{aligned}$$

Gegenwärtige Forschungen [14] beschäftigen sich mit der Ableitung einer aerodynamischen Übertragungsfunktion, um den Zusammenhang zwischen spektraler Windlastdichte und Bögigkeitsspektrum herzustellen. Gelingt der eingeschlagene Weg

$$\underline{S}_p(\omega) = \underline{I}(\omega) \underline{S}_v(\omega) \underline{I}^T(\omega)$$

so sind die Beziehungen entsprechend obiger Ausführungen in der

Bestimmung der stochastischen Differentialgleichung zu berücksichtigen.

$$\underline{S}_p(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{\tilde{H}}^T(\omega) = \underline{I}(\omega) \underline{S}_v(\omega) \underline{\tilde{I}}^T(\omega)$$

$$\underline{H}(\omega) = \underline{I}(\omega) \underline{G}(\omega)$$

Mit der gewöhnlichen Differentialgleichung zur Beschreibung mechanischer Systeme

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t) = \underline{R} \underline{p}(t)$$

folgt die stochastische Differentialgleichung zur Schwingungsbeschreibung der mechanischen Struktur, einschließlich der systemtheoretisch dargestellten Winderregung

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{R} \underline{E} \underline{C} \underline{w}(t)$$

$$\dot{\underline{w}}(t) = \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)$$

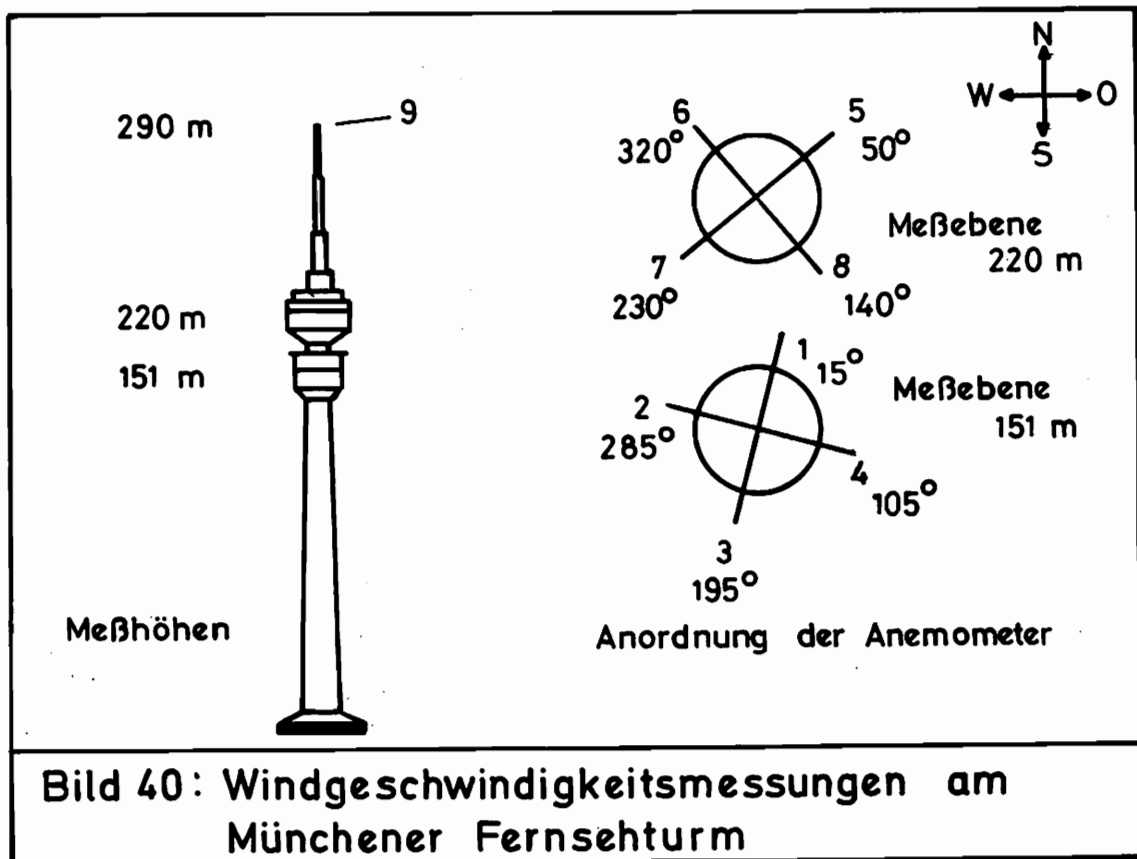
Für diese lineare Differentialgleichung kann die in Kapitel 3 hergeleitete Kovarianzmatrix in bekannter Weise aus der bilinearen Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{D} & \underline{M}^{-1} \underline{R} \underline{E} \underline{C} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{xw} \\ \underline{P}_{xw} & \underline{P}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & -(\underline{M}^{-1} \underline{K})^T & \underline{0} \\ \underline{I} & -(\underline{M}^{-1} \underline{D})^T & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{M}^{-1} \underline{R} \underline{E} \underline{C})^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{B} \underline{B}^T \end{bmatrix}$$

berechnet werden. Die Matrix \underline{R} stellt hierin eine Steuermatrix zur Verteilung der realisierten höhenabhängigen Windkräfte auf das diskrete mechanische System (s.u.) dar.

7.3 Die Darstellung gemessener mehrfachkorrelierter Windgeschwindigkeitsverläufe durch stochastische Differentialgleichungen

Am 30.12.1978 wurden in der Zeit von 2.00 bis 2.30 Uhr am Münchener Fernsehtrum vom Lehrstuhl für Strömungsmechanik der dortigen Universität Messungen der Windgeschwindigkeit durchgeführt. Diese mit einer Abtastung von 0,1 Sekunden aufgezeichneten Daten stehen dem Verfasser dankenswerter Weise zur Verfügung. Bei diesen umfangreichen Messungen [29] handelt es sich um Windgeschwindigkeitsmessungen mittels Schalenkreuzanemometern auf 3 Meßebenen des Münchener Fernsehturns (Bild 40).



Mit der Hauptwindrichtung von 253 Grad (Bild 40) eignen sich für weitere Untersuchungen die Meßwerte der Geber (3, 7, 9). In dieser Arbeit werden Turmbauwerke als Linientragwerke abgebildet. Hierdurch ergeben sich Differenzen hinsichtlich der Belastung, weil die Meßstellen nicht in Fluchtlinie angeordnet sind. Den weiteren Analysen liegen zwei Meßreihen mit je 4096 Datenpunkten mit Meßzeiten von 819,2 Sekunden und 409,6 Sekunden zugrunde. Sie werden im weiteren mit Messung I und Messung II bezeichnet. Die Mittelwerte und Varianzen der Meßreihen zeigt die folgende Tafel.

Höhe	mittl. Windgeschw.		Varianzen	
151 m	12.94 m s ⁻¹	12.33 m s ⁻¹	2.22 m ² s ⁻²	1.11 m ² s ⁻²
220 m	12.22 m s ⁻¹	11.52 m s ⁻¹	1.36 m ² s ⁻²	0.77 m ² s ⁻²
290 m	16.35 m s ⁻¹	15.36 m s ⁻¹	1.54 m ² s ⁻²	0.98 m ² s ⁻²
Messung:	I	II	I	II

Tafel 2: Mittelwerte und Varianzen aus 2 Messungen

Anhand dieser statistischen Daten lassen sich relativ schwache Windgeschwindigkeiten feststellen. Während Messung I noch verhältnismäßig große Turbulenzen (s. Varianzen) aufweist, sind diese in Messung II wesentlich geringer. Auffällig verhält sich die Verteilung der mittleren Windgeschwindigkeiten über die Bauwerkshöhe. Offenbar unterliegen die Mittelwerte keiner bekannten Gesetzmäßigkeit (z. B. HELLMANNsches Exponentialgesetz). Die Feststellung konnte der Verfasser auch in der Analyse weiterer Meßreihen [38,39] treffen. Der Grund kann in den versetzten Meßwertgebern liegen. Es ist auch möglich, daß die Windströmung um den in einer Großstadtumgebung eingebetteten Turm durch thermische Schichtung beeinflusst wird. Weiteren Untersuchungen (s.u.) liegt daher eine vereinfachte (Höhen-) Annahme zugrunde.

Zunächst werden für die beiden Meßreihen die Auto- und Kreuzleistungsspektren numerisch mit dem Algorithmus der Fast-Fourier-Transformation

[12] bestimmt. Die notwendige Glättung der Frequenzkurven wurde nach einem Verfahren von WELCH [96] durchgeführt. Hierbei wird das zunächst "rauh" errechnete Kurzzeit-Leistungsspektrum in den Zeitbereich (Korrelationsfunktion, WIENER-CHINTCHIN) transformiert und dort mittels eines BARTLETT-Fensters geglättet. Die maximale zulässige Korrelationsdauer wurde für beide Meßreihen auf $T/16 = 51,2$ Sekunden bzw. 25,6 Sekunden festgelegt. Der interessierte Leser kann sich im Anhang über das Analyseverfahren informieren.

Die zur Zeitrealisierung erforderliche Darstellung der spektralen Dichteverläufe mittels gebrochen rationaler Funktionen wurde mit einem Approximationsverfahren nach [42] durchgeführt. Für die Auto-Leistungsspektren erscheint der folgende Funktionstyp geeignet:

$$S_{v_i v_i}(s) = \frac{a}{(s+s_{z_i})(-s+s_{z_i})}$$

Unter der Bedingung minimaler quadratischer Abweichung der beiden Kurvenverläufe über den gesamten darstellbaren Frequenzbereich werden die freien Parameter a, s_k numerisch bestimmt. Die Güte der Approximation kann anhand der Varianzen

$$\sigma_{v_i v_i}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{v_i v_i}(\omega) d\omega$$

von geglättetem und angenähertem Funktionsverlauf gemessen werden. Die Abweichungen liegen in der Größenordnung von 4 Promille und mögen als Beweis einer ausreichenden Approximation angesehen werden.

Um den Aufwand der Minimalrealisierung in Grenzen halten zu können, wurde der gebrochen rationale Funktionstyp zur Beschreibung der Kreuz-Leistungsspektren enger gefaßt, indem die Polstellen vor der

erweiterten Approximation festgelegt wurden. Der Ansatz lautet:

$$S_{v_i v_j}(s) = \frac{b + cs + ds^2 + es^3}{(s + s_{z_i})(-s + s_{z_j})} \cdot \frac{1}{(s + s_{\gamma})^2 (-s + s_{\gamma})^2} \cdot$$

Die Polstellen s_{z_k} ergeben sich aus den approximierten Auto-Leistungsspektren, während die Nennernullstelle s_{γ} interaktiv durch mehrmalige Berechnung und Approximation aller Kreuz-Leistungsspektren des stochastischen Prozesses festgelegt wurde. Die Parameter des Zählerpolynoms folgen aus der numerischen Approximation.

Die Bilder 41 bis 44 zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Approximation bei den Auto-Leistungsspektren sowie bei den Realteilen der Kreuz-Leistungsspektren, während die Imaginärteile dieser Funktionen deutliche Abweichungen aufweisen. Dies kann einerseits an den gewählten Näherungsfunktionen liegen, andererseits bleibt zu klären, ob die großen Höhendifferenzen (70 Meter) zwischen den Meßgebern nicht zu Unkorreliertheiten der Windgeschwindigkeitsverläufe führen. Es sei vermerkt, daß in der Literatur bislang nur ansatzweise Kreuz-Leistungsspektren veröffentlicht wurden [55, 61]. In diesem Sinne befriedigen die erzielten Ergebnisse.

Mit der Darstellung der spektralen Dichteverläufe durch gebrochen rationale Funktionen wird die Zerlegung der Leistungsspektralmatrix in ihre Matrix-Übertragungsfunktionen durchgeführt.

$$\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$$

Die geeignete Wahl der Nennerpolynome (gemeinsame Polstellen der Elemente jeder Matrizenzeile legt die Aufspaltung der Nenner-Spektralmatrix fest. Die schrittweise durchgeführte Reduktion der Polynomordnung der verbleibenden Zähler-Spektralmatrix führt mit dem

in Kapitel 4 beschriebenen Algorithmus zu den Matrix-Übertragungsfunktionen. Diese Filterfunktionen, deren graphische Darstellung den Bildern 46 und 48 entnommen werden kann, ermöglichen im Frequenzbereich die Transformation weißer Rauschvorgänge in farbige Zufallsprozesse mit den statistischen Merkmalen mehrfachkorrelierter Windgeschwindigkeitsverläufe. Die angestrebte statistische Beschreibung der Windgeschwindigkeiten durch stochastische Differentialgleichungen wird durch Realisierung im Zeitbereich mit den beschriebenen Verfahren zur Minimalrealisierung von Matrix-Übertragungsfunktionen durchgeführt. Die zu den stochastischen Differentialgleichungen des Typs

$$\begin{aligned}\underline{v}(t) &= \underline{C} \underline{w}(t) \\ \dot{\underline{w}}(t) &= \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{\xi}(t)\end{aligned}$$

gehörenden Matrizen-tripel $\{A, B, C\}$ der beiden untersuchten Messungen sind den Bildern 45 und 47 zu entnehmen.

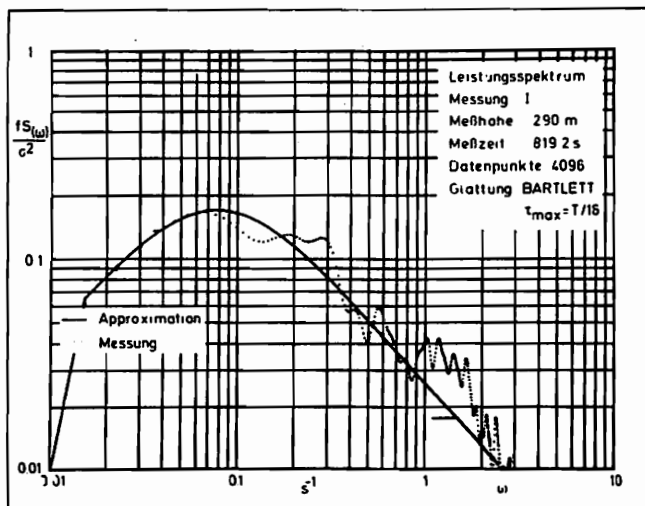
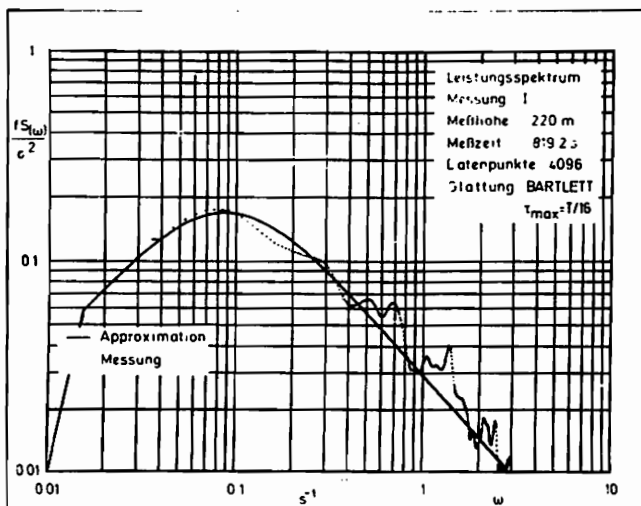
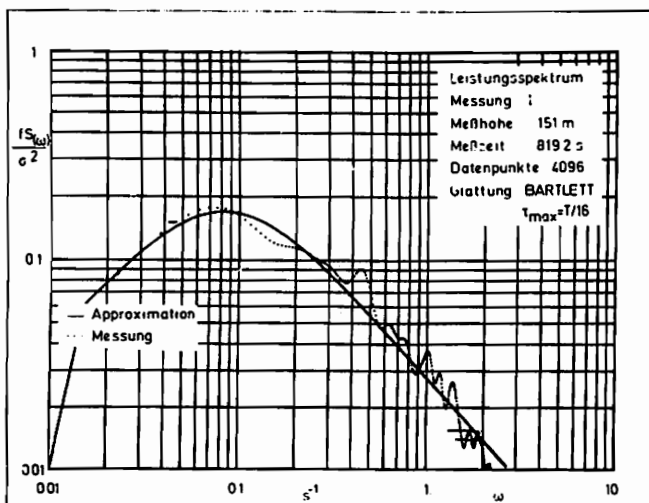


Bild 41: Auto-Leistungsspektren von gemessenen Windgeschwindigkeitsverläufen

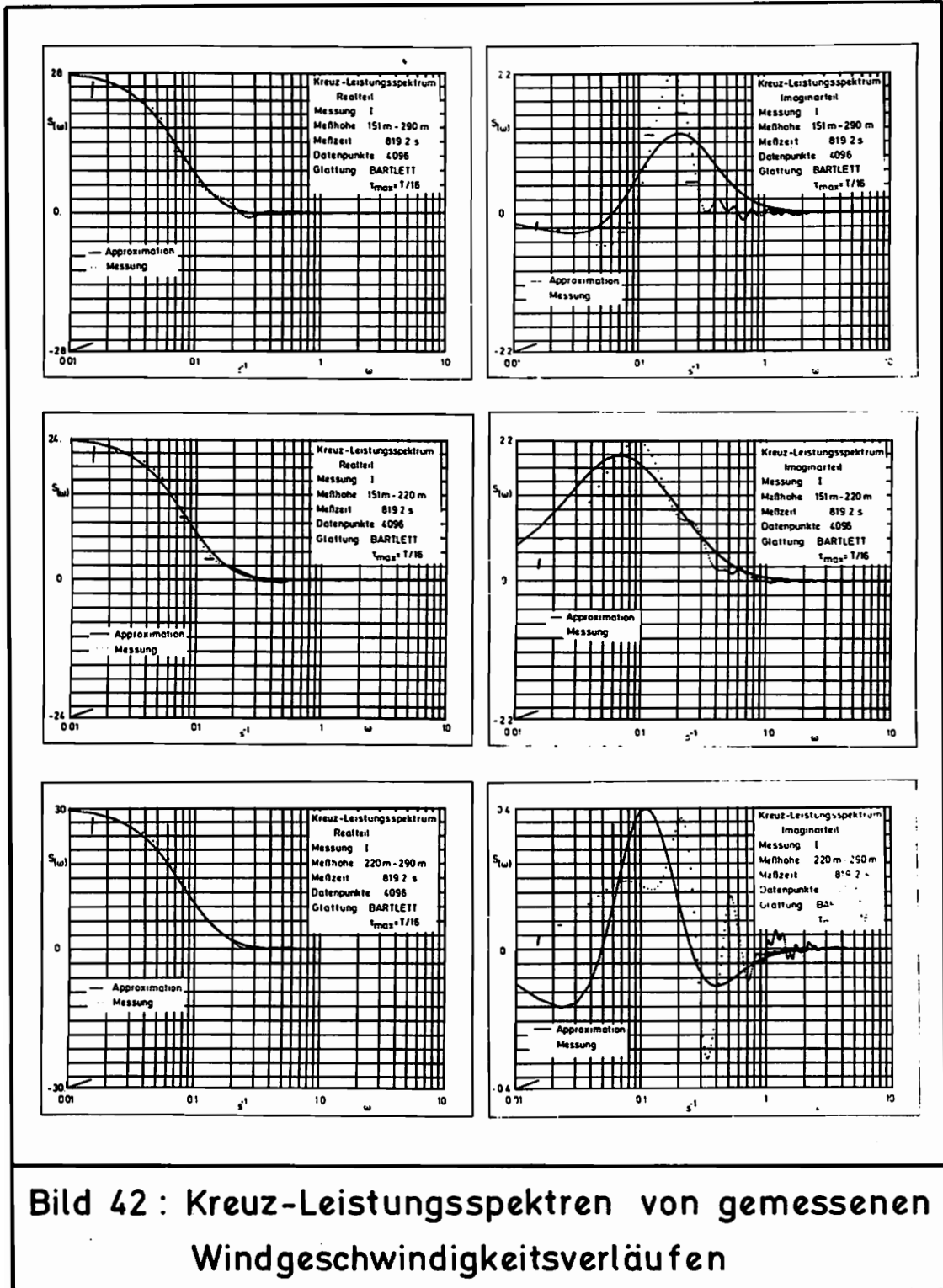


Bild 42 : Kreuz-Leistungsspektren von gemessenen Windgeschwindigkeitsverläufen

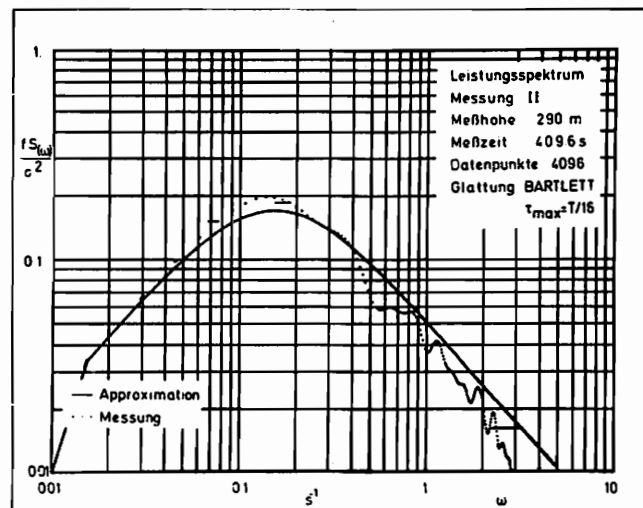
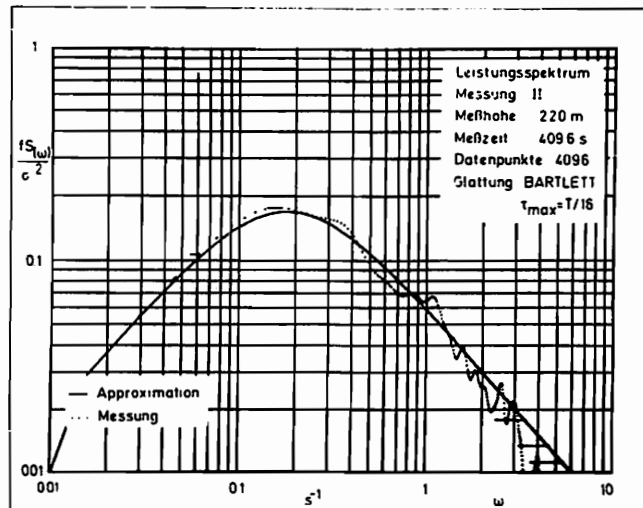
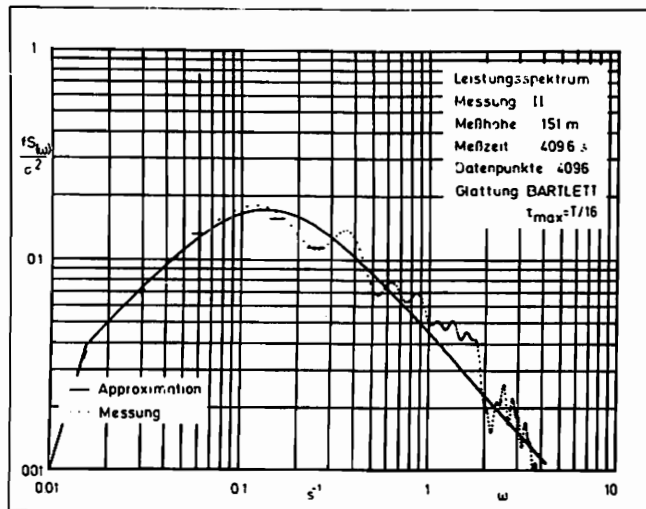


Bild 43: Auto-Leistungsspektren von gemessenen Windgeschwindigkeitsverläufen

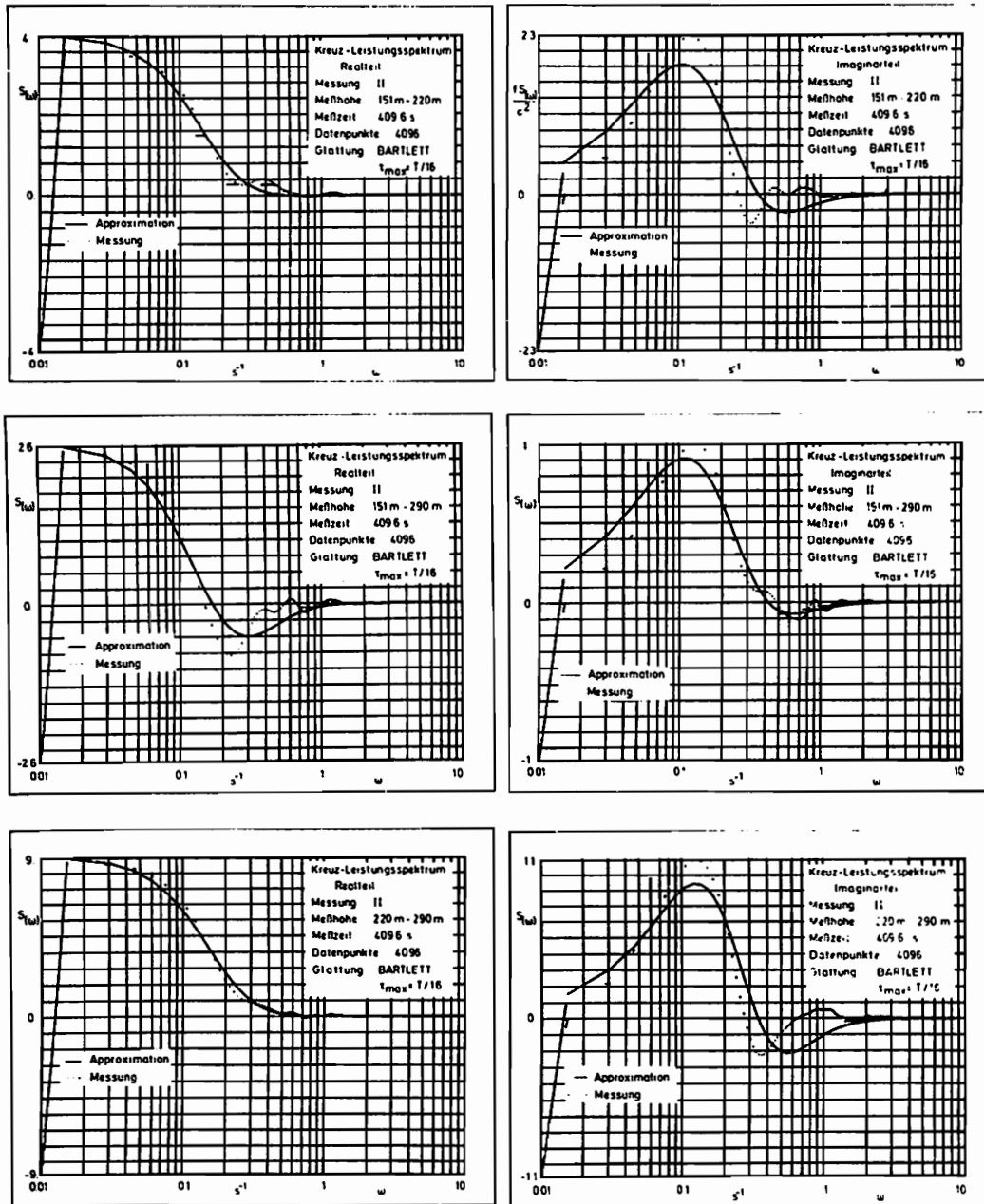


Bild 44 : Kreuz-Leistungsspektren von gemessenen Windgeschwindigkeitsverläufen

Leistungsspektralmatrix:

$$\underline{S}(s) = \frac{1}{(s \cdot \sqrt{0.1})^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{-s \cdot 0.0825} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-s \cdot 0.087} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-s \cdot 0.077} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.91 - 78.19s^2, 390.97s^4 & 2.56 \cdot 2.74s \cdot 9.29s^2 \cdot 65.95s^3 & 1.67 \cdot 0.33s \cdot 22.42s^2 - 137.37s^3 \\ 2.53 - 50.71s^2, 253.59s^4 & 2.03 \cdot 2.29s \cdot 803s^2 \cdot 32.41s^3 & \\ 2.54 - 50.93s^2 \cdot 254.63s^4 & & \end{bmatrix} 10^{-3}$$

hermitisch

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s \cdot 0.0825} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s \cdot 0.087} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s \cdot 0.077} \end{bmatrix} \frac{1}{(s \cdot \sqrt{0.1})^2}$$

Matrix-Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{10^{-3}} \begin{bmatrix} \frac{1.48 \cdot 4.68s \cdot 3.71s^2}{0.0085 \cdot 0.152s \cdot 0.714s^2 \cdot s^3} & \frac{1.01 \cdot 9.82s \cdot 19.42s^2}{0.0085 \cdot 0.152s \cdot 0.714s^2 \cdot s^3} & \frac{-0.83 - 3.15s}{0.0085 \cdot 0.152s \cdot 0.714s^2 \cdot s^3} \\ \frac{1.3 \cdot 9.25s \cdot 15.64s^2}{0.0087 \cdot 0.155s \cdot 0.719s^2 \cdot s^3} & \frac{-0.13 - 2.90s \cdot 2.98s^2}{0.0087 \cdot 0.155s \cdot 0.719s^2 \cdot s^3} & \frac{-0.83 \cdot 0.485s}{0.0087 \cdot 0.155s \cdot 0.719s^2 \cdot s^3} \\ \frac{0.614 \cdot 0.695s}{0.0077 \cdot 0.148s \cdot 0.709s^2 \cdot s^3} & \frac{-0.42 - 4.61s}{0.0077 \cdot 0.148s \cdot 0.709s^2 \cdot s^3} & \frac{-1.41 - 8.62s - 15.96s^2}{0.0077 \cdot 0.148s \cdot 0.709s^2 \cdot s^3} \end{bmatrix} 10^{-3}$$

Realisation:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.008 & -0.152 & -0.714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.008 & -0.155 & -0.719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0.117 & 0.494 & 0.00 \\ -0.231 & -0.646 & -0.022 \\ 0.194 & 0.430 & 0.035 \\ 0.614 & -0.094 & 0.00 \\ -0.752 & 0.159 & 0.146 \\ 0.478 & -0.105 & 0.116 \\ 0.00 & 0.00 & -0.504 \\ 0.099 & -0.015 & 0.630 \\ -0.097 & -0.014 & -0.417 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zerlegung der Leistungsspektralmatrix $\underline{S}(s)$ in ihre Matrix-Übertragungsfunktionen $\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(-s)$ und deren Minimalrealisierung $\underline{H}(s) = \underline{C} (I s - \underline{A})^{-1} \underline{B}$ für die Messung I

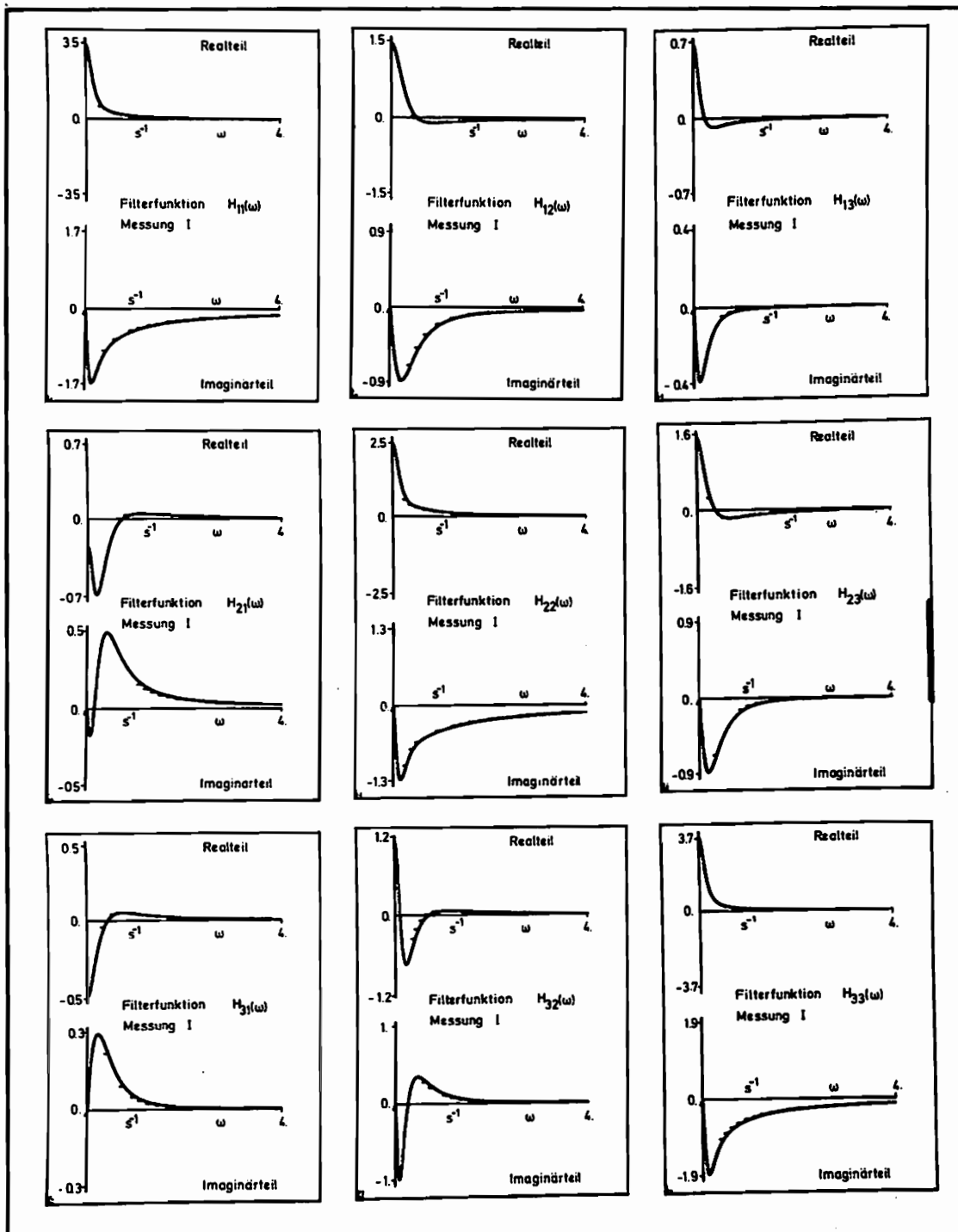


Bild 46 : Matrix - Übertragungsfunktion zur Simulation von Windgeschwindigkeiten

Leistungsspektralmatrix :

$$\underline{S}(s) = \frac{1}{(s - \sqrt{0.2})^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s - 0.153 & 1 & 0 \\ 0 & -s - 0.180 & 1 \\ 0 & 0 & -s - 0.134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.46 - 14.63s^2 + 36.57s^4 & 0.44 + 3.08s + 1.58s^2 + 23.06s^3 & 0.22 + 1.51s + 8.18s^2 + 8.75s^3 \\ 1.18 - 11.85s^2 + 29.63s^4 & 0.87 + 2.75s + 1.94s^2 + 20.37s^3 \\ 1.14 - 11.46s^2 + 28.66s^4 \end{bmatrix}$$

hermitisch

$$10^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s \cdot 0.153 & 1 & 0 \\ 0 & s \cdot 0.180 & 1 \\ 0 & 0 & s \cdot 0.134 \end{bmatrix} \frac{1}{(s - \sqrt{0.2})^2}$$

Matrix-Übertragungsfunktion :

$$\underline{H}(s) = \frac{\begin{bmatrix} 3.46 + 14.03s + 18.8s^2 \\ 0.03 + 0.34s + 1.04s^2 + s^3 \\ -0.31 - 7.62s - 2.76s^2 \\ 0.036 + 0.36s + 1.07s^2 + s^3 \\ -0.43 - 2.615s \\ 0.026 + 0.32s + 1.03s^2 + s^3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1.46 + 9.35s + 3.07s^2 & 0.71 + 1.2s \\ 0.03 + 0.34s + 1.04s^2 + s^3 & 0.03 + 0.34s + 1.04s^2 + s^3 \\ 2.93 + 10.84s + 16.98s^2 & 1.78 + 6.63s \\ 0.036 + 0.36s + 1.07s^2 + s^3 & 0.036 + 0.36s + 1.07s^2 + s^3 \\ 3.21 + 13.51s + 16.93s^2 & 3.21 + 13.51s + 16.93s^2 \\ 0.026 + 0.32s + 1.03s^2 + s^3 & 0.026 + 0.32s + 1.03s^2 + s^3 \end{bmatrix}} \sqrt{10^{-3}}$$

Realisation :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.031 & -0.337 & -1.048 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0.596 & -0.087 & 0.00 \\ -1.069 & 0.333 & -0.083 \\ 1.029 & -0.329 & -0.100 \\ -0.097 & 0.537 & 0.00 \\ -0.400 & -0.921 & 0.184 \\ 0.442 & 0.888 & -0.166 \\ 0.000 & 0.00 & 0.535 \\ 0.038 & -0.209 & -0.978 \\ 0.062 & 0.272 & 0.936 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zerlegung der Leistungsspektralmatrix $\underline{S}(s)$ in ihre Matrix-Übertragungsfunktionen $\underline{S}(s) = \underline{H}(s) \underline{H}^T(s)$ und deren Minimalrealisierung $\underline{H}(s) = \underline{C} (\underline{I}s - \underline{A})^{-1} \underline{B}$ für die Messung II

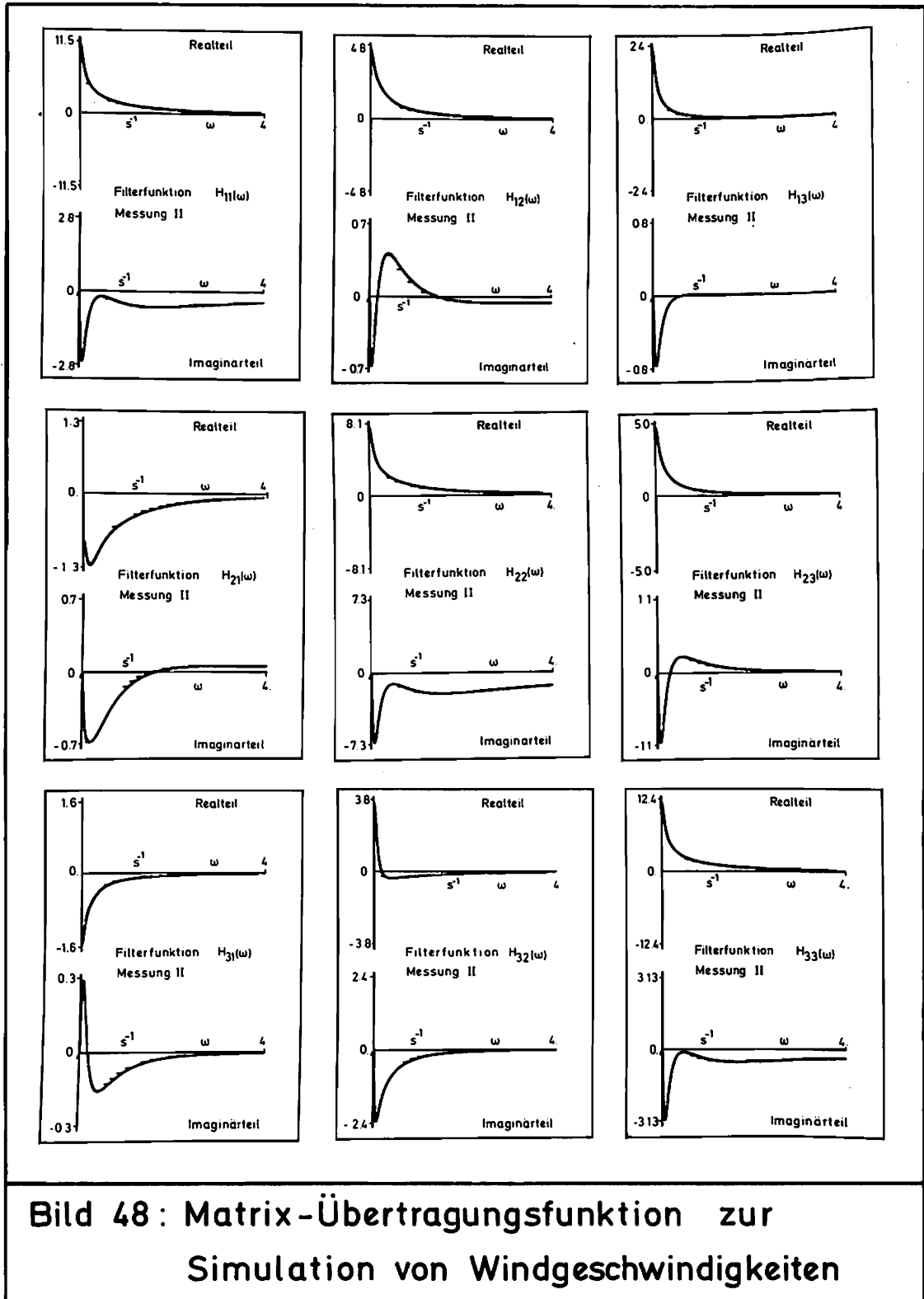
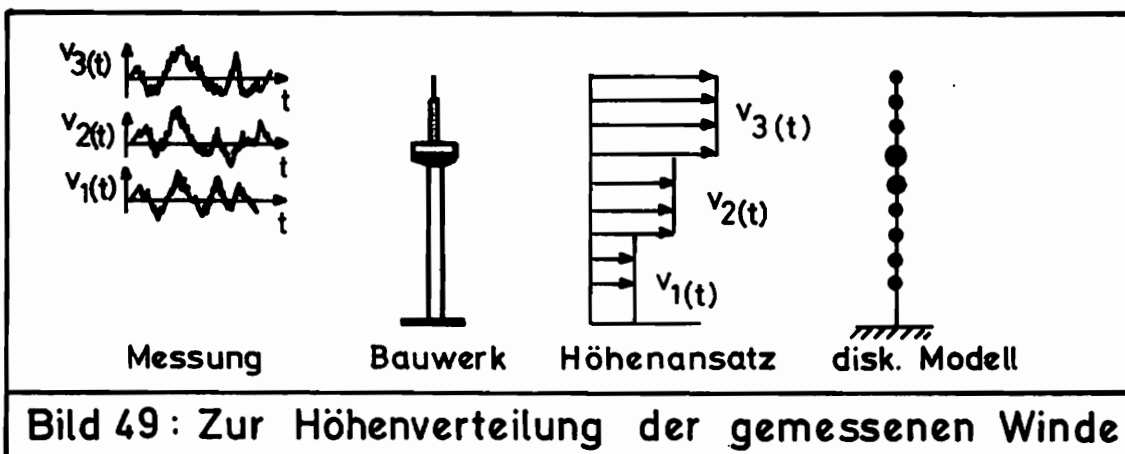


Bild 48: Matrix-Übertragungsfunktion zur Simulation von Windgeschwindigkeiten

Die Minimalrealisierung von Matrix-Übertragungsfunktionen ist aufgrund der Problemstellung mehrdeutig. Es bleibt zu untersuchen, inwieweit die erzielten Ergebnisse verallgemeinert werden können. Eine stochastische Differentialgleichung stellt ein mathematisches Modell zur Beschreibung stochastischer Prozesse dar. In dieser Arbeit kann erstmals gezeigt werden, daß gemessene mehrfachkorrelierte Windgeschwindigkeitsverläufe statistisch durch Differentialgleichungen gekennzeichnet werden können. Es kann an dieser Stelle keine physikalische Interpretation gegeben werden. Hierzu bedarf es weiterer Untersuchungen von Messungen an verschiedenen Orten und in unterschiedlichen Landschaftsformen. Trotzdem erscheint bei Fortführung der hier gezeigten Analyse von Windgeschwindigkeitsschwankungen eine Datenreduktion bei der Behandlung aerodynamisch belasteter Bauwerke möglich.

7.4 Die Berechnung der Kovarianzmatrix am Beispiel aerodynamisch belasteter Turmtragwerke

Für die weiteren beispielhaften Berechnungen von Kovarianzmatrizen winderregter Bauwerke nach den beschriebenen Verfahren werden drei Turmtragwerke gewählt, deren Eigenfrequenzen im Bereich heute üblicher Bauwerke liegen. Die Türme werden durch Stabelemente [91] in lineare mechanische Schwinger (lumped-mass-systems) diskretisiert. Da für höhenabhängige Belastungen keine Gesetzmäßigkeit nachgewiesen werden kann, sind die (gemessenen) Winderregungen bereichsweise konstant anzusetzen.



Die gemessene Leistungsspektralmatrix wird in geeigneter Weise in die Belastungsmatrix überführt.

$$\underline{S}_{ff}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{v_1 v_1} & S_{v_1 v_2} & S_{v_1 v_3} \\ S_{v_2 v_1} & S_{v_2 v_2} & S_{v_2 v_3} \\ S_{v_3 v_1} & S_{v_3 v_2} & S_{v_3 v_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Messung Belastungswahl

$$\underline{S}_{ff}(\omega) = \underline{R} \underline{S}_{VV}(\omega) \underline{R}^T$$

Entsprechend lassen sich die Antworten des mathematischen Modells zur Beschreibung der Winderregung verteilen:

$$\underline{f}(t) = \underline{R} \underline{C} \underline{w}(t) \quad , \quad \begin{cases} \dot{\underline{w}}(t) = \underline{A} \underline{w}(t) + \underline{B} \underline{f}(t) \\ \underline{y}(t) = \underline{C} \underline{w}(t) \quad , \quad \underline{v}^T(t) = (v_1, v_2, v_3)^T(t) \end{cases}$$

Auf den folgenden Seiten werden die numerischen Rechenergebnisse für drei Turmtragwerke in graphischer Form mitgeteilt.

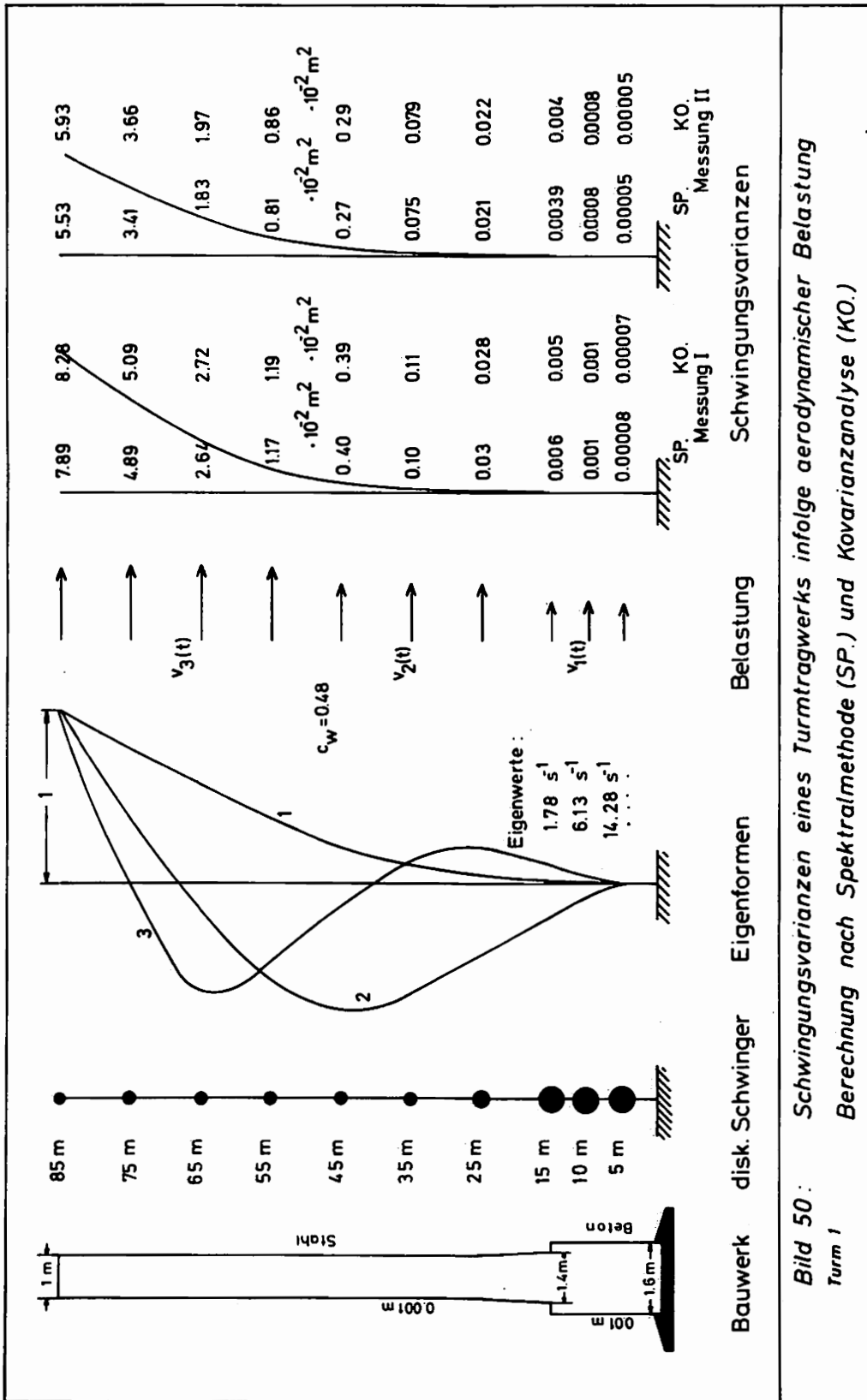
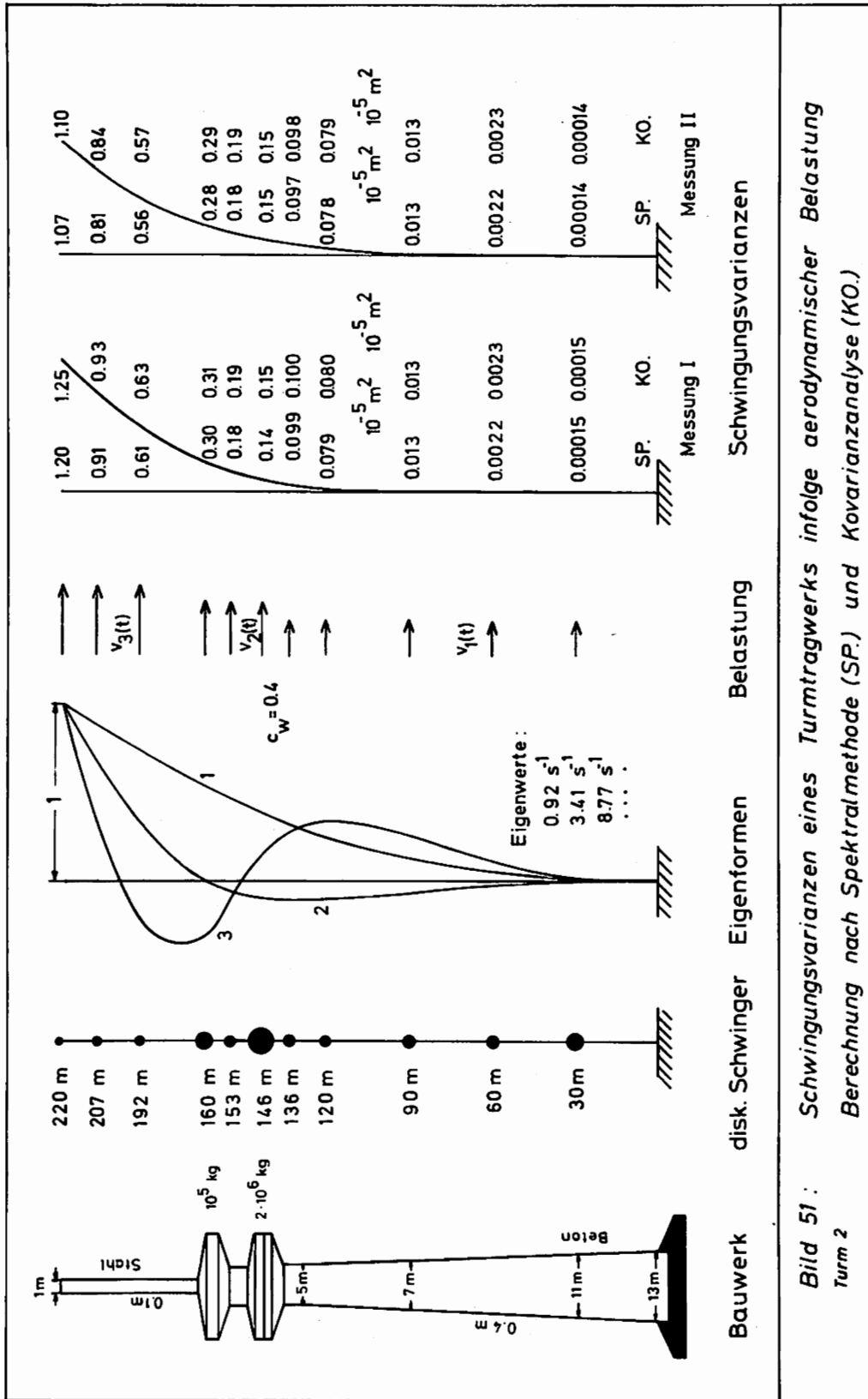


Bild 50 : Schwingungsvarianzen eines Turmtragwerks infolge aerodynamischer Belastung
 Turm 1
 Berechnung nach Spektralmethode (SP.) und Kovarianzanalyse (KO.)

Bauwerk disk. Schwinger Eigenformen Belastung Schwingungsvarianzen



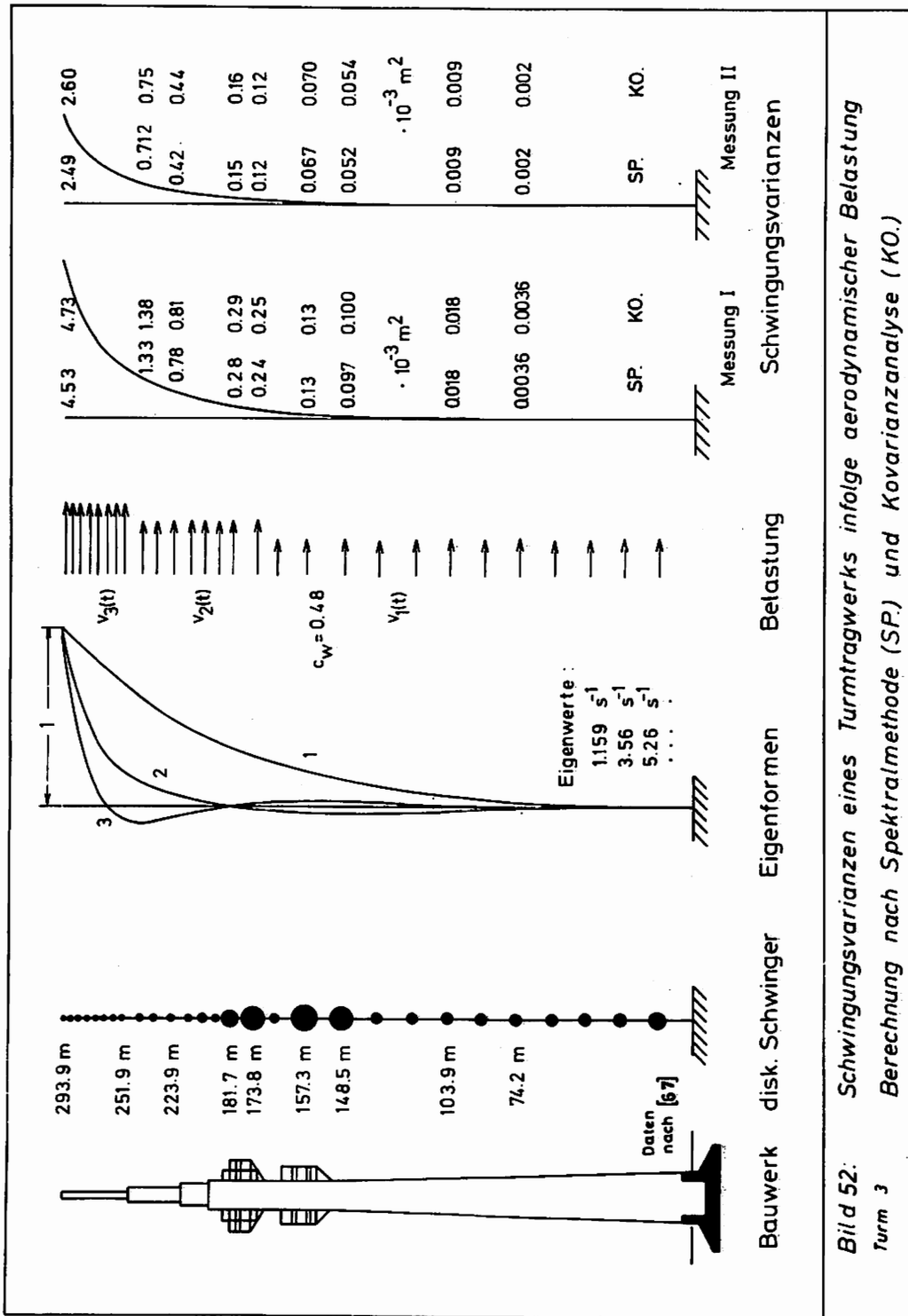


Bild 52: Schwingungsvarianzen eines Turmtragwerks infolge aerodynamischer Belastung
 Turm 3
 Berechnung nach Spektralmethode (SP.) und Kovarianzanalyse (KO.)

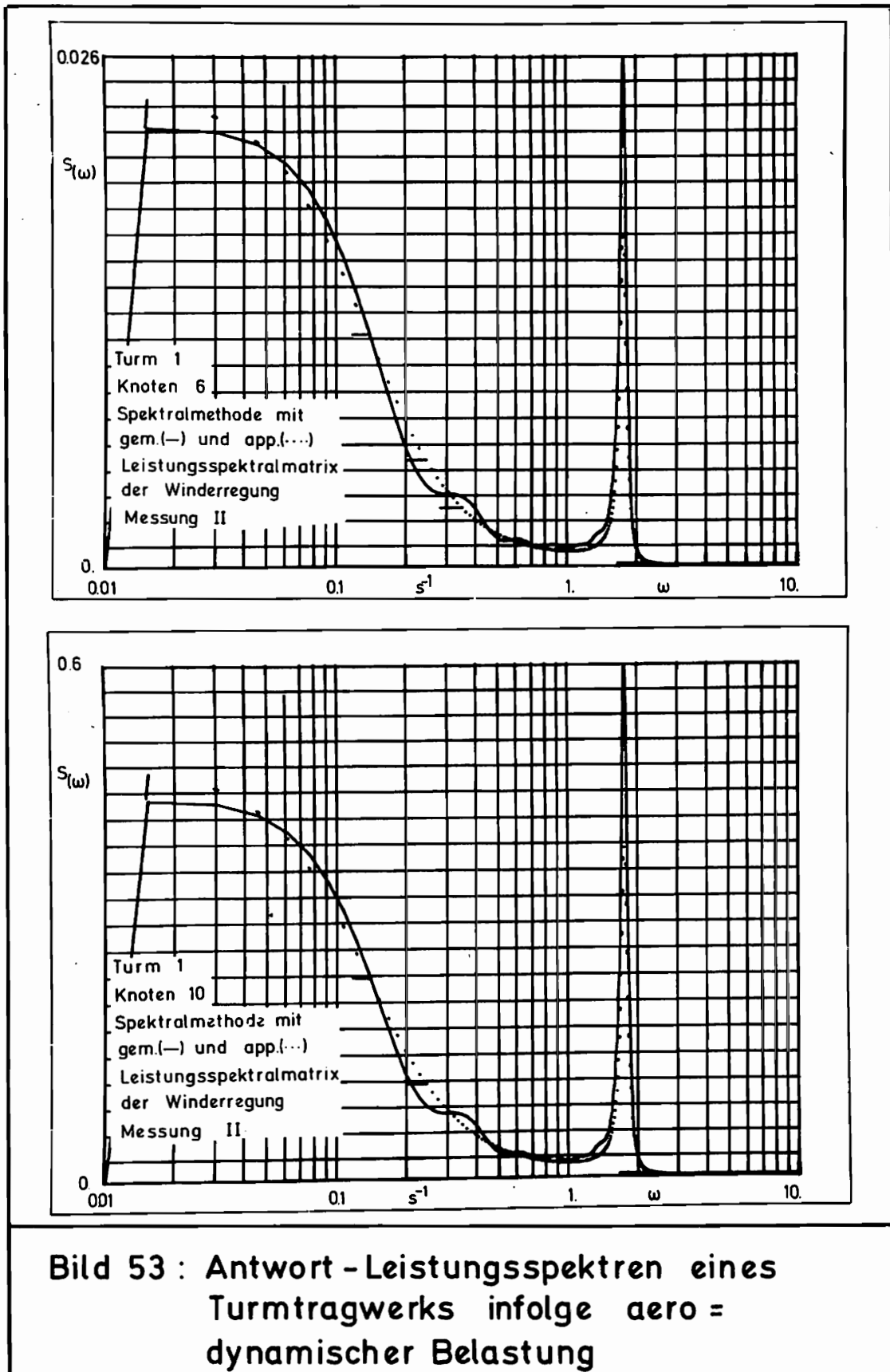


Bild 53 : Antwort - Leistungsspektren eines Turmtragwerks infolge aero = dynamischer Belastung

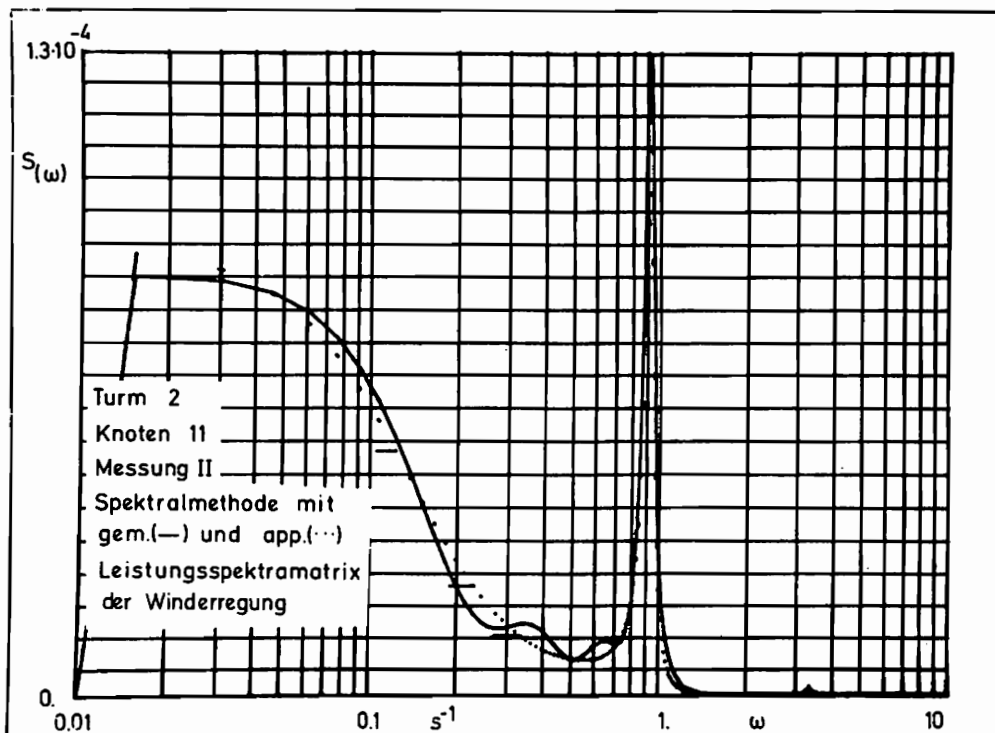
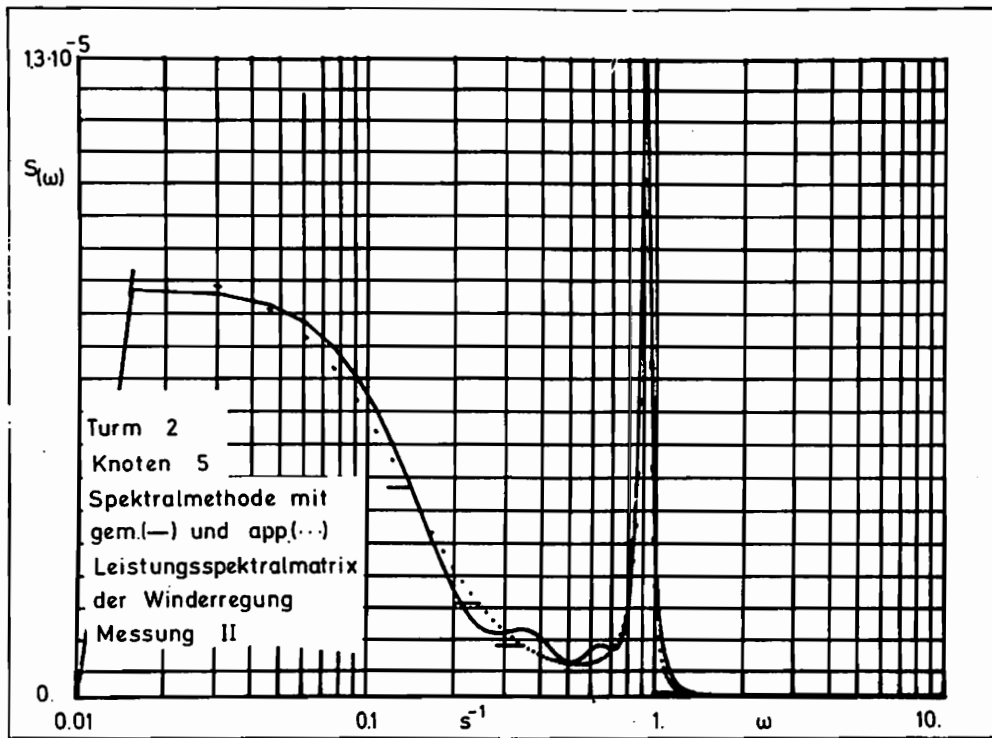


Bild 54 : Antwort - Leistungsspektren eines Turmtragwerks infolge aero = dynamischer Belastung

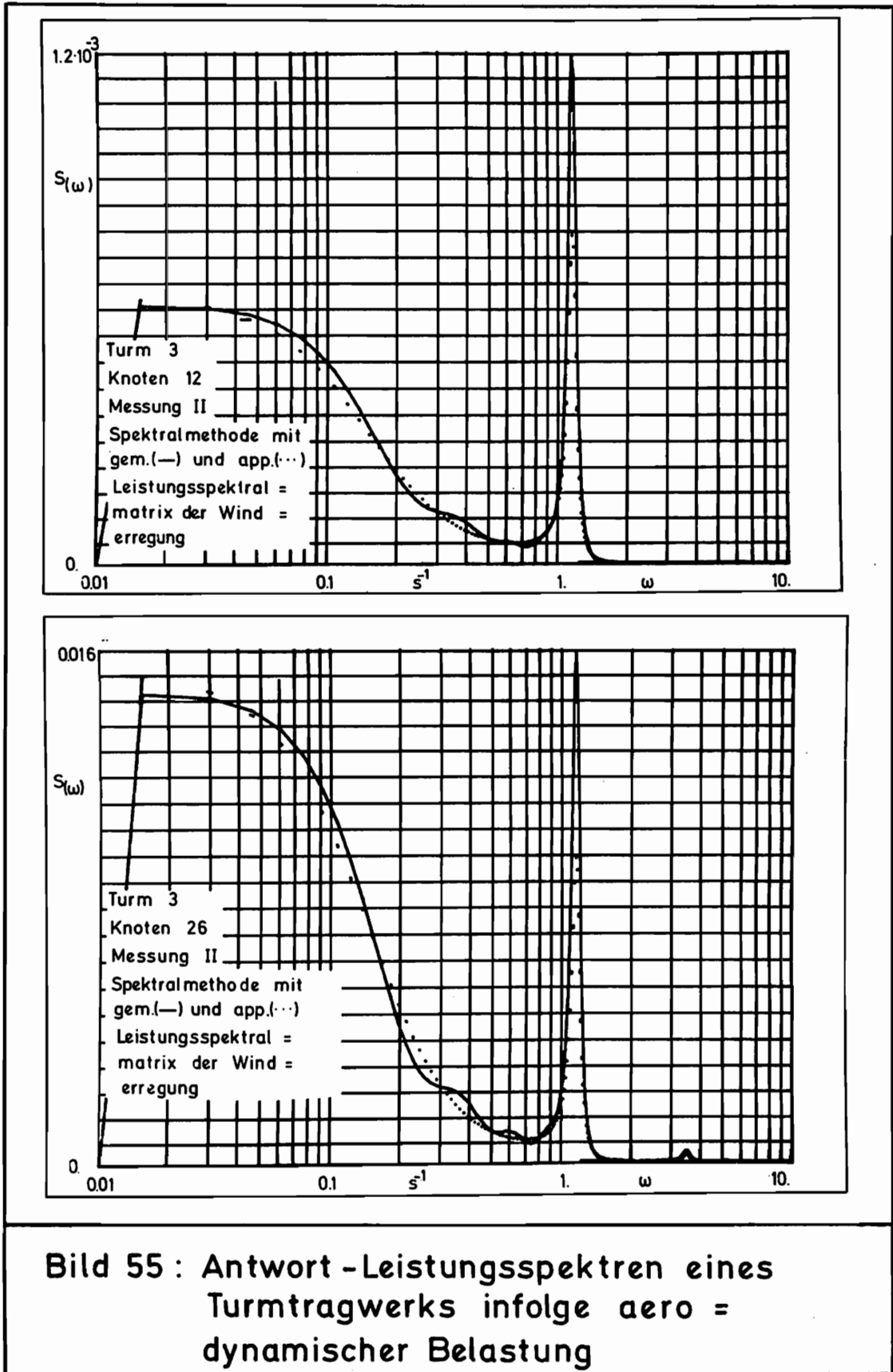


Bild 55 : Antwort -Leistungsspektren eines Turmtragwerks infolge aero = dynamischer Belastung

Die numerisch berechneten Schwingungsvarianzen zeigen die erwartete Übereinstimmung beider Methoden zur Behandlung von Zufallsschwingungen. Es muß wiederholt werden, daß der Vergleich der Verfahren an gleiche Ausgangsstellungen gebunden ist. In den Beispielsrechnungen wird von Leistungsspektralmatrizen ausgegangen, deren Elemente mittels gebrochen rationaler Funktionen dargestellt (s.o.) werden.

Die Kovarianzanalyse ermöglicht eine geschlossene Lösung, da der gesamte Frequenzbereich (Ausnahme ist die modale Darstellung) der Erregung und des mechanischen Systems kontinuierlich abgedeckt wird. Dies trifft bei Anwendung der Spektralmethode auf Mehrmassenschwinger nicht zu, da die Frequenzbelastung und die maximale Frequenzgrenze zu wählen sind. Die mit der Spektralmethode berechneten Schwingungsvarianzen wurden mit einer Frequenzdiskretisierung von 0.001 s^{-1} bis zur maximalen Frequenz von 8 s^{-1} erzielt. Die Wahl dieser Werte kann willkürlich werden. Berechnungen der stochastischen Bauwerksbeanspruchung mit einer durch die endliche Meßzeit und Diskretisierung vorgegebenen Frequenzrate ($\Delta\omega = 2\pi/T$) führten in den 3 Beispielsrechnungen zu Fehlern von durchschnittlich 10 %. Hier wird die Problematik der Spektralmethode deutlich.

Beide Verfahren gestatten bei speziellen Dämpfungsgesetzen die Formulierung mit modalen Systemkoordinaten (Kapitel 2, 5). Dies bietet bei aerodynamisch belasteten Bauwerksberechnungen hinsichtlich Rechenzeit und Speicherkapazität große Vorteile. Der Verfasser variierte in beiden Methoden die Anzahl der zugrundeliegenden Eigenformen und konnte feststellen, daß bei Berücksichtigung von nur 3 Eigenformen der Fehler zur "exakten" Berechnung unter 1 % liegt. Aus einer der Beispielsrechnungen sei vermerkt, daß die Beschränkung von 11 auf 5 Eigenformen zu einer Rechenzeiteinsparung von 60 % führte. Die Mitnahme von nur wenigen Eigenformen (Eigenfrequenzen bis zu 10 s^{-1}) rechtfertigen auch die mit der Spektralmethode gewonnenen Antwortspektren (Bilder 53 bis 55). Die Resonanzpunkte heute üblicher Bauwerke liegen auf dem abfallenden Kurventeil der spektralen Winderregerfrequenzen, so daß dynamische Überhöhungen in höheren Eigenformen nur wenig zur Schwingungsvarianz beitragen. Die Bilder

53 bis 55 zeigen dem Leser hierüber hinaus den Vergleich der Antwortspektren bei Erregung des Systems mittels gemessenen und approximierten spektralen Dichteverläufen.

Die Kovarianzanalyse ist in ihrer Handhabung (Abtastung) nicht nur problemloser, sie benötigt auch weniger Rechenzeit. Anhand der Beispiele konnte festgestellt werden, daß diese Methode zwischen 30 und 100 mal schneller Schwingungsvarianzen errechnet als die Spektralmethode. Diese Zahlen sind allerdings von den Genauigkeitsanforderungen abhängig. Als sehr genau erwiesen sich die Algorithmen von SMITH und KREISSELMEIER bei etwa gleichem Aufwand zur Lösung der bilinearen Matrixgleichung. Es soll ferner vermerkt werden, daß die angesprochene modale Darstellung der mechanischen Systeme bei der Spektralmethode die Rechenzeit einschließlich der Eigenwertlösung auf $1/6$ reduziert, während der Einfluß bei der Kovarianzanalyse unerheblich (0.9) bleibt. Die genannten Zahlen sind Erfahrungswerte aus drei Beispielsrechnungen und sollen dem Anwender einen Überblick verschaffen. Eine Entscheidung zugunsten der Kovarianzanalyse oder der Spektralmethode stellt sich nach Meinung des Verfassers z. Z. nicht. Trotz aller Vorteile ist eine Kovarianzanalyse nur dann sinnvoll, wenn stochastische Differentialgleichungen zur Beschreibung mehrfachkorrelierter Windkrafteerregungen in breitem Rahmen hergeleitet und verallgemeinert werden. In diesem Sinne sind die angeführten Rechnungen zu verstehen. Es konnte erstmals gezeigt werden, daß dreifachkorrelierte Windgeschwindigkeitsverläufe als zufällige Prozesse durch stochastische Differentialgleichungen, die aus ihren Leistungsspektralmatrizen abgeleitet werden, beschreibbar sind.

7.5 Die Abschätzung maximaler Beanspruchung aerodynamisch belasteter Turmtragwerke unter Zuhilfenahme der Kovarianzanalyse

Die Erweiterung der gewöhnlichen Differentialgleichung zur Beschreibung schwingungsfähiger Tragwerke

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$$

auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{f} \end{bmatrix}_{(t)}$$

ermöglicht eine Kovarianzanalyse, die sowohl die Varianzen der Verschiebung und deren Ableitung aerodynamisch belasteter Bauwerke liefert.

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{\underline{x}\underline{x}} & \underline{P}_{\underline{x}\dot{\underline{x}}} \\ \underline{P}_{\dot{\underline{x}}\underline{x}} & \underline{P}_{\dot{\underline{x}}\dot{\underline{x}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_{\underline{x}\underline{x}} & \underline{P}_{\underline{x}\dot{\underline{x}}} \\ \underline{P}_{\dot{\underline{x}}\underline{x}} & \underline{P}_{\dot{\underline{x}}\dot{\underline{x}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & (-\underline{M}^{-1}\underline{K})^T \\ \underline{I} & (-\underline{M}^{-1}\underline{D})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Aus der bilinearen Matrixgleichung ergeben sich die zur Berechnung der Extremwertverteilung notwendigen Parameter

$$\underline{P}_{\underline{x}_i \underline{x}_i} = \sigma_{\underline{x}_i}^2, \quad \underline{P}_{\dot{\underline{x}}_i \dot{\underline{x}}_i} = \sigma_{\dot{\underline{x}}_i}^2$$

Die Verteilungsdichtefunktion der Extremwerte (Kapitel 2)

$$g(\xi_i) = \frac{T \sigma_{x_i}}{\sigma_{x_i}^3} \xi_i \exp - \left\{ \frac{\xi_i^2}{2 \sigma_{x_i}^2} - T \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \exp - \left\{ \frac{\xi_i^2}{2 \sigma_{x_i}^2} \right\} \right\}$$

besitzt den näherungsweise berechneten Mittelwert

$$\bar{\xi}_i = \sigma_{x_i} \left\{ \sqrt{2 \ln \frac{T \sigma_{x_i}}{2 \pi \sigma_{x_i}}} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln \frac{T \sigma_{x_i}}{2 \pi \sigma_{x_i}}}} \right\}$$

und die Streuung

$$\sigma_{\xi_i} = \sigma_{x_i} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{1}{2 \ln T \frac{1}{2 \pi} \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_{x_i}}}} \right\}$$

In diesen Gleichungen beschreibt T die Nutzungsdauer des Bauwerks. Die Bilder 56 und 57 zeigen die Anwendung der Extremwerttheorie für zwei der oben vorgestellten Turmtragwerke.

Die Beispielsrechnungen verdeutlichen einen unwesentlichen Einfluß der gewählten Nutzungsdauer von T = 10,25 und 50 Jahren. Der Anwender hat aus diesen Funktionen die maximal zulässige Beanspruchung "geeignet" zu wählen. Mit der überlagerten mittleren Beanspruchung

$$\bar{x} = \underline{K}^{-1} \bar{f} = \underline{F}_{(0)} \bar{f}$$

stellt die Größe

$$\underline{x}_{\max} = \bar{x} + \underline{\xi}_{\text{Wahl}}$$

eine Beanspruchung des Tragwerks dar, die mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(x_{\max})_i = \exp - \left\{ \frac{T \sigma_{x_i}}{2\pi \sigma_{x_i}} \exp - \left\{ \frac{\xi_{i\text{Wahl}}}{2 \sigma_{x_i}^2} \right\} \right\}$$

im Gebäudenutzungsraum T eintreten kann. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt für die Beispiele im Mittel $4 \cdot 10^{-11}$. Ein Vergleich mit der Drei-Sigma-Regel zeigt die Sicherheit dieser Ergebnisse.

$$x_{\max_i} = \bar{x}_i + (\sim 5.5) \sigma_{x_i}$$

Hier muß an die wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkte erinnert werden. Der Verfasser hat in TIME-HISTORY-Rechnungen mit gemessenen Windbelastungen einen Faktor von 2.5 bis 4.5 vorgefunden. Dieser Wert ergibt sich auch aus der Extremwertverteilung (~ 3.1), wenn statt der Nutzungsdauer die Meßzeit (Windgeschwindigkeitsverläufe vom TU München) zugrundegelegt wird. Da aber eine einzige Zeitrealisation nur eine Musterfunktion darstellt, können in statistisch äquivalenten Meßreihen höhere Werte auftreten. Der Leser muß sich verdeutlichen, daß es nur "wahrscheinliche" Maximalbeanspruchungen gibt. Die tatsächliche Höchstbelastung kann im Nutzungszeitraum eines Bauwerks niedriger, aber auch höher ausfallen. Es muß also die Frage nach einem vertretbaren Risiko gestellt werden. Auf diese Theorie [27,61] soll jedoch nicht näher eingegangen werden, obwohl die Herleitung stochastischer Differentialgleichungen ein geeignetes Hilfsmittel für numerische Simulationsrechnungen darstellt.

Mit den heute an allen Rechenanlagen installierten Pseudozufallszahlengeneratoren können die stochastischen Differentialgleichungen zu umfangreichen TIME-HISTORY-Rechnungen genutzt werden und erweitern so das Angebot von Meßdaten erheblich.

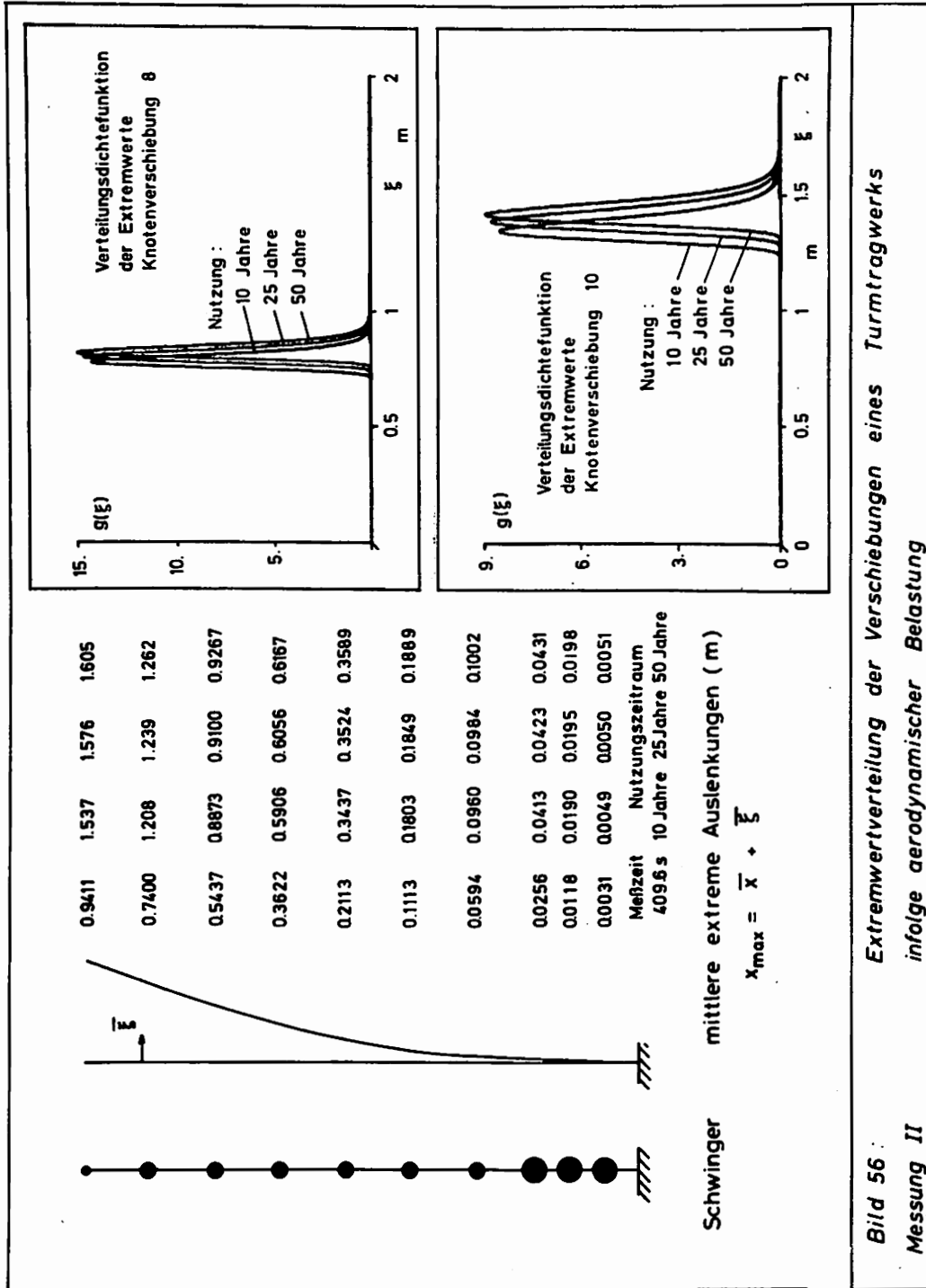


Bild 56: Extremwertverteilung der Verschiebungen eines Turmtragwerks infolge aerodynamischer Belastung Messung II

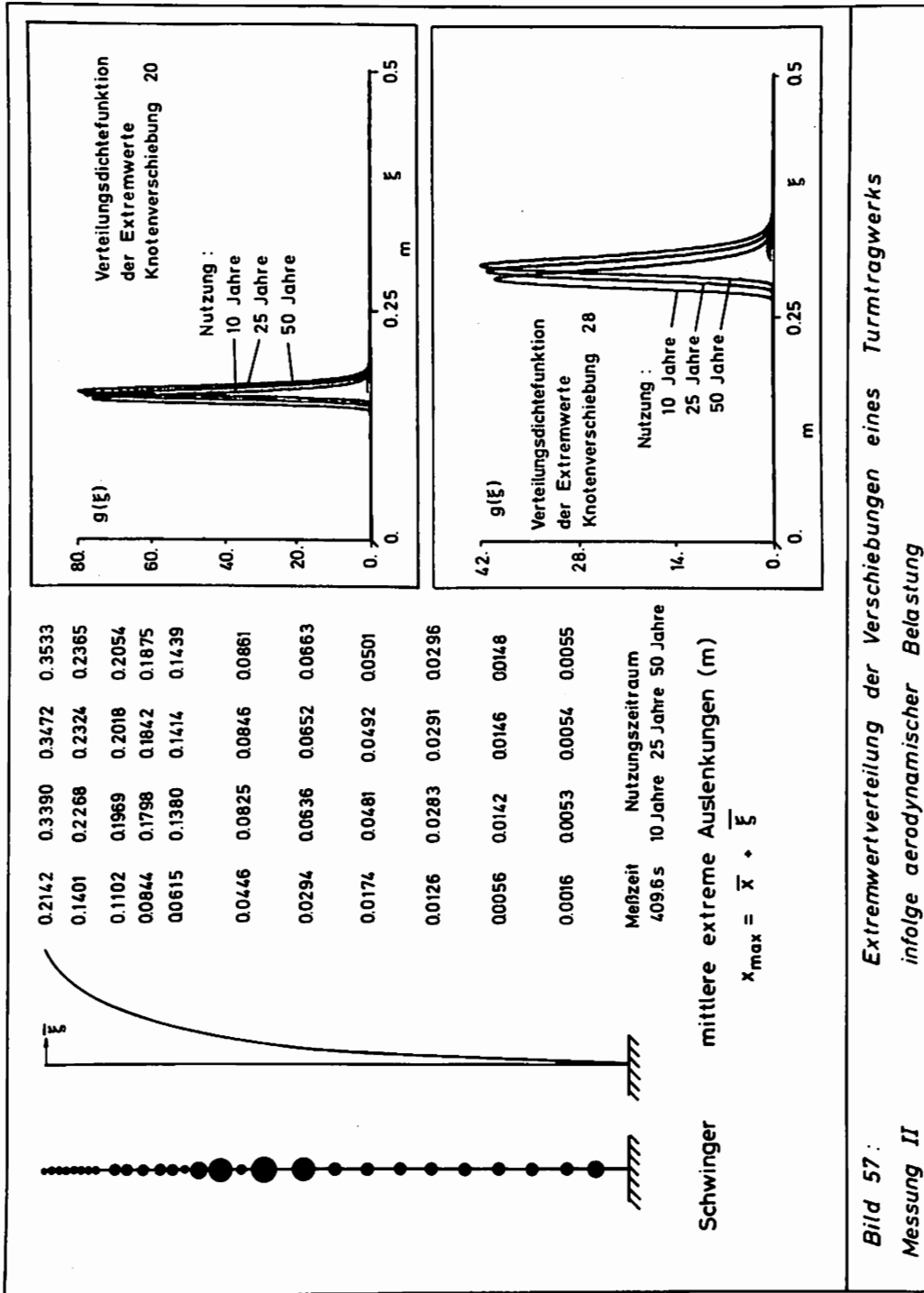


Bild 57 : Extremwertverteilung der Verschiebungen eines Turmtragwerks infolge aerodynamischer Belastung

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt Methoden zur Darstellung mehrfach-korrelierter Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen und deren Anwendung für mechanische Zufallsschwingungen.

Aus der Leistungsspektralmatrix stationärer Zufallserregungen werden Koeffizientenmatrizen linearer Differentialgleichungen abgeleitet. Hierbei weisen die Differentialgleichungen als Störgröße den mathematischen Modellprozeß des weißen Rauschens auf. Diese Beschreibungsform mehrfachkorrelierter Zufallserregungen führt in Verbindung mit der Darstellung linearer mechanischer Systeme zur Anwendung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen auf mechanische Zufallsschwingungen.

Zur Herleitung stochastischer Differentialgleichungen aus Meßwerten mehrfachkorrelierter Zufallsvorgänge wird folgender Weg vorgeschlagen:

1. Beschreibung der mehrfachkorrelierten Zufallsprozesse durch Leistungsspektren und Approximation dieser statistischen Kennfunktionen durch gebrochen rationale Funktionen;
2. Zerlegung der Leistungsspektralmatrix in ein Produkt komplexer und konjugiert komplexer Matrix-Übertragungsfunktionen;
3. Minimalrealisierung der Matrix-Übertragungsfunktion als mathematisches Modell zur Beschreibung mehrfachkorrelierter Zufallsprozesse durch stochastische Differentialgleichungen.

Mit den vorgestellten Methoden wird ein lineares, mathematisches Modellsystem erzeugt, das bei Erregung durch weißes Rauschen mit einem mehrfach-korrelierten stochastischen Vorgang antwortet, der die statistischen Kennwerte und -funktionen des zu beschreibenden Zufallsprozesses aufweist.

Stochastische Differentialgleichungen lassen sich zur numerischen

Simulation zufälliger Naturprozesse verwenden. Die Erweiterung dieser Gleichungen mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen linearer mechanischer Systeme ermöglicht eine einfache Berechnung der Schwingungsvarianzen von Konstruktionen unter zufälliger Belastung.

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß die Theorie stochastischer Differentialgleichungen für praxisorientierte Aufgabenstellungen genutzt werden kann. Berechnungen von Kovarianzmatrizen fahrbahn-erregter Fahrzeugschwingungen und aerodynamisch belasteter Turmtragwerke verdeutlichen in Beispielen die Vorteile einer Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen im Vergleich mit der bisher in der Praxis angewandten Spektralmethode. Die Berechnung von Schwingungsvarianzen mit der Kovarianzanalyse zeichnet sich numerisch durch wesentlich kürzere Rechenzeiten (im Einzelfall 30 bis 100 mal schneller) aus und ermöglicht geschlossene Lösungen, da keine Zeit- oder Frequenzdiskretisierung erforderlich ist. Mit der gleichzeitig anfallenden Bestimmung der Varianzen für die Schwingungsverschiebungen und deren Ableitungen können die Ergebnisse mit der vorgestellten Extremwerttheorie zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussage maximaler Beanspruchungen mechanischer Bauteile verwertet werden.

Die Kovarianzanalyse ist ein leistungsstarkes numerisches Rechenverfahren zur Bestimmung der Varianzen von Schwingungsantworten, das der Spektralmethode oft überlegen sein wird. Dies setzt aber die Kenntnis der stochastischen Differentialgleichung zur Beschreibung mehrfachkorrelierter Zufallserregungen voraus, da andernfalls der numerische Aufwand zur Herleitung dieser Darstellungsart berücksichtigt werden muß.

Stochastische Differentialgleichungen sind eine neue Beschreibungsmöglichkeit zufälliger Naturvorgänge, die mindestens soviel Information wie die entsprechenden Leistungsspektren beinhalten. Es ist zu erwarten, daß mehr Einsicht in zufällige Naturvorgänge möglich wird. Diese interessante Fragestellung kann hier nur angedeutet werden. Zur Klärung bedarf es sehr umfangreicher signalanalytischer Untersuchungen zufälliger

Prozesse, die diese Arbeit nicht leisten kann.

Die vorteilhafte Behandlung mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung mehrfachkorrelierter Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen sollte Anlaß zu weiterführenden Untersuchungen sein.

Literaturverzeichnis

- [1] AMMON, W.: Schaltungen der Analogrechentechnik.
R. Oldenbourg, München/Wien, 1966
- [2] ANDERSON, B.D.O.: An Algebraic to the Spectral Factorization
Problem. IEEE Trans. on Aut. Control, No. 4, 1967
- [3] ANDERSON, B.D.O.: A System Theory Criterion for positive
real Matrices. SIAM, J. of Control, Vol. 5, No. 2, 1967
- [4] ARNOLD, L.: Stochastische Differentialgleichungen.
R. Oldenbourg, München/Wien, 1973
- [5] ASTRÖM, K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory.
Academic Press, New York/London, 1970
- [6] BARTLETT, M.S.: Periodogram Analysis and Continuous Spectra.
Biometrika 37, 1950
- [7] BENDAT, J.S. und Piersol, A.G.: Measurement of Analysis of
Random Data. J. Wiley and Sons, New York, 1966
- [8] BLACKMAN, R.B. und TUCKEY, J.W.: The Measurement of Power
Spectra. DOVER Publications, New York, 1959
- [9] BOGNER, R.E. und CONSTANINIDES: Introduction to Digital
Filterung. J. Wiley and Sons, London/New York, 1975
- [10] BRAUN, H.: Untersuchung von Fahrbahnunebenheiten.
Dissertation, Braunschweig, 1969
- [11] BRAUN, H.: Auslegung elektro-hydraulischer Fahrbahn-Unebenheits-
Simulatoren. ATZ, Automobiltechnische Zeitschrift, 73, Nr. 6,
1971 (205-211)
- [12] BRIGHAM, E.O.: FAST-FOURIER-Transform. Prentice Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New York, 1974
- [13] BRUNS, H. und LEHNHARDT, H.: Simulationsanlage zur Untersuchung
von Fahrzeugschwingungen. AEG-Telefunken 4, 1971 (27-31)
- [14] BRUST, H., BAETKE, F. und GRÄBELDINGER, W.: Untersuchung der
aerodynamischen Übertragungsfunktion für schlanke, kreis-
zylindrische Bauwerke. DFG-Koll., Bauwerke unter aerodynamischer
Belastung, Vulkan-Verlag, Essen, 1981 (erscheint demnächst)
- [15] BUCY, R.S. und JOSEPH, P.D.: Filtering for Stochastic Processes
with Application to Guidance. Wiley, New York, 1968
- [16] CHEN, C.F. und SHIEH, L.S.: A Note on Expanding $PA + A^T P = Q$.
IEEE Trans. AC-13, 1968 (122-123)

- [17] CLOUGH, R.W. und PENZIEN, J.: Dynamics of Structures. McGraw Hill, New York, 1975
- [18] COOLEY, J.W., LEWIS, D.A.W. und WELCH, P.D.: The Application of the FAST-FOURIER-Transform Algorithm to the Estimation of Spectra and Cross-Spectra. J. Sound and Vibration 12, Southampton, 1970
- [19] CRAIG, J.B.: ITFC-Computer Control, Schenk-Schrift, Darmstadt, 1979
- [20] CRANDALL, S.H. und MARK, W.D.: Random Vibration in Mechanical Systems. Academic Press, New York/London, 1963
- [21] DAVENPORT, A.G.: The Spectrum of Horizontal Gustiness near the Ground in High Winds. Quart. J. Roy. Met. Soc. 87, 1961
- [22] DAVENPORT, A.G.: Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading. The Inst. of Civ. Eng. Proc., Vol. 28, 1964 (187-196)
- [23] DAVIS, M.C.: Factoring the Spectral Matrix. IEEE Trans. Auto Control, Vol. AC-8, 1963 (296-305)
- [24] DOOB, J.: Stochastic Processes. J. Wiley and Sons, New York, 1960
- [25] FABIAN, L.: Zufallsschwingungen und ihre Behandlung. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973
- [26] FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970
- [27] FREUDENTHAL, A.M. und SCHUELLER, G.I.: Risikoanalyse von Ingenieurtragwerken. Berichte des Konstr. Ing. Baus, H 25/26, Vulkan-Verlag, Essen, 1976
- [28] FRIEDRICH- H. und HENNIG, K.: Zur Berechnung von Überschreitungswahrscheinlichkeiten stochastisch beanspruchter mechanischer Systeme. Z. Ang. Math. Mech. 60, 1980 (177-183, 257-261)
- [29] FRIMBERGER, R. und BRUST, H.: Druckverteilungen am Fernsehturm München. Beitrag zum DFG-Koll., Bauwerke unter aerodynamischer Belastung, Darmstadt, 1977
- [30] GANTMACHER, F.R.: Matrizenrechnung I, II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966
- [31] GERTH, W.: Zur Identifikation und Minimalrealisierung von Mehrgrößenübertragungssystemen durch Markov-Parameter. Dissertation, Hannover, 1972
- [32] GERTH, W.: Ein einfacher Algorithmus zur Minimalrealisierung von rationalen Übertragungsmatrizen. Regelungstechnik, Heft 9, 1972 (400-402)

- [33] GILOI, W.: Simulation und Analyse stochastischer Vorgänge. R. Oldenbourg, München/Wien, 1970
- [34] GOSSMANN, E., KRINGS, W. und WALLER, H.: Numerische Behandlung linearer Tragwerksschwingungen bei deterministischen und stochastischen Erregungen. Vulkan-Verlag, Konstr. Ing. Bau, Heft 25, Essen, 1976
- [35] GOSSMANN, E., KRINGS, W. und WALLER, H.: On Suitable Formulations of the Method of Modal Analysis for Numerical Calculations. Int. J. for Num. Methods in Eng., Vol. 12, 1978 (795-808)
- [36] GOSSMANN, E. und WALLER, H.: Simulation mehrfachkorrelierter Zufallsprozesse. Mitt. aus dem Inst. für Massivbau der TH Darmstadt. Bauwerke unter aerodynamischer Belastung, DFG-Koll., Verlag W. Ernst, Berlin/München/Düsseldorf, 1977
- [37] GOSSMANN, E. und WALLER, H.: Numerische Berechnung nicht-deterministischer Schwingungen. Mitt. des Curt-Risch-Inst., Aero. Probleme, Hannover, 1978
- [38] GOSSMANN, E. und WALLER, H.: Dynamische Belastung von Tragwerken durch Wind. Ber. zum DFG-Forsch. Schwerpunkt Bauwerke unter aerodynamischer Belastung, Bochum, 1978
- [39] GOSSMANN, E. und WALLER, H.: Leistungsspektren von Wind. DFG-Koll. Bauwerke unter aerodynamischer Belastung, Karlsruhe, 1978
- [40] HANGAN, S. und LARIONESCU, S.: Funktionelle Sicherheit der von Zufallsschwingungen beanspruchten Systeme. VDI-Bericht 221, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1974
- [41] HARRIS, B.: Spectral Analysis of Time Series. J. Wiley and Sons, New York, 1967
- [42] HARWELL: Harwell Subroutine Library. Atomic Energy Research Establishment, Harwell, 1973
- [43] HEINRICH, W. und HENNIG, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme. Vieweg u. Sohn GmbH, Braunschweig, 1978
- [44] HO, B.L. und KALMAN, R.E.: Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input-Output Descriptions. Regelungstechnik 12, 1966
- [45] ISERMANN, R.: Prozeßidentifikation. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974
- [46] ITO, K.: On Stochastic Differential Equations. Amer. Math. Soc., New York, 1951
- [47] ITO, K. und NISIO, M.: On Stationary Solutions of Stochastic Differential Equations. J. of Math. of Kyoto Univ. 4, Kyoto, 1964 (1-79)

- [48] KALMAN, R.E.: A new Approach to Linear Filtering and Prediction. J. Basic Eng., Trans. ASME 82, 1960 (35-)
- [49] KALMAN, R.E.: Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. SIAM J. of Control, Vol. 1, 1963 (152-192)
- [50] KEMPE, V.: Theorie stochastischer Systeme. Akademie-Verlag, Berlin, 1974
- [51] KREISSELMEIER, G.: A Solution of the Bilinear Matrix Equation $AY + YB = -Q$. SIAM J. Appl. Math. 23, 1972 (334-338)
- [52] LANDGRAF, C.: Stochastische lineare Systeme. TU Berlin, Kybernetik, Berlin, 1976
- [53] MAHREHOLTZ, O.: Die Mechanismen der Aeroelastizität. Mitt. des Curt-Risch-Inst., Aeroel. Probleme, Hannover, 1978
- [54] MITSCHKE, M.: Dynamik der Kraftfahrzeuge. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972
- [55] MÜLLER, F.P. und NIESER, H.: Measurements of Wind Induced Vibrations on a concrete Chimney. Industrial Aerodynamics, 1978
- [56] MÜLLER, P.C.: Solution of the Matrix Equation $AX + XB = -Q$ and $SX + XS = -Q$. SIAM J. Appl. Math. 18, 1970 (682-687)
- [57] MÜLLER, P.C. und SCHIEHLEN, W.O.: Lineare Schwingungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1976
- [58] MÜLLER, P.C.: Stabilität und Matrizen. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977
- [59] MÜLLER, P.C. und POPP, K.: Kovarianzanalyse von linearen Zufallsschwingungen mit zeitlich verschobenen Erregerprozessen. Z. Ang. Math. Mech. 59, 1979 (T144-T146)
- [60] MÜLLER, P.C., POPP, K. und SCHIEHLEN, W.O.: Berechnungsverfahren für stochastische Fahrzeugschwingungen. Ingenieur-Archiv 49, 1980 (235-254)
- [61] NIEMANN, H.-J.: Ein Windlastkonzept für Naturzugkühltürme. Ber. des Konstr. Ing. Baus, Heft 29/30, Vulkan-Verlag, Essen. 1977
- [62] NOUR ELDIN, H.A.: Minimalrealisierung der Matrix-Übertragungsfunktion. Regelungstechnik, Heft 3, 1977
- [63] OPPENHEIM, A.V. und SCHAFER, R.W.: Digital Signal Processing. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975
- [64] OTNES, R.K. und ENOCHSON, L.: Digital Time Series Analysis. J. Wiley and Sons, New York, 1972

- [65] PAPOULIS, A.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGrawHill, New York, 1965
- [66] PETERSEN, C.: Digitale und analoge Klassierung zeitveränderlicher stochastischer Größen. LKI-TU München, Heft 2/73, München, 1973
- [67] PETERSEN, C.: Schwingungen turmartiger Bauwerke im böigen Wind unter Berücksichtigung der vertikalen Phasenkorrelation am Beispiel des Münchener Fernsehturms. Beiträge zur Anwendung der Aeroelastik im Bauwesen, Heft 7, München, 1975
- [68] POPP, K.: Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen. VDI-Fortschritt-Ber. 35/12, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1979
- [69] POTTS, G.R. und WALKER, H.S.: Nonlinear Truck Ride Analysis. J. of Eng. for Industry. ASME, 1974 (597-602)
- [70] PRÖPPER, H.: Zur aerodynamischen Belastung großer Kühltürme. Mitt. des Inst. für Konstr. Ing. Bau der Ruhr-Universität Bochum, Heft 77-3, Bochum, 1977
- [71] RABINER, L. und GOLD, B.: Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice Hall, New York, 1974
- [72] RAUSCH, E.: Einwirkung von Windstößen auf hohe Bauwerke. Zeit. des VDI, Bd. 77, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1933
- [73] RICE, S.: Mathematical Analysis of Random Noise. Dover Publications, New York, 1954
- [74] ROSEMEIER, G.: Winddruckprobleme bei Bauwerken. Springer-Verlag, Berlin, 1976
- [75] Stochastic Processes and Their Applications. 10. Conference, Montreal, 1981
- [76] SAGIROW, P.: Stochastic Methods in the Dynamics of Satellites. Springer-Verlag, CISM, Wien/New York, 1970
- [77] SCHIEHLEN, W.: Zur Untersuchung von Zufallsschwingungen. Z. Ang. Math. Mech. 54, 1974 (T64-T65)
- [78] SCHIEHLEN, W.: Kovarianzanalyse von Zufallsschwingungen. VDI-Berichte Nr. 221, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1974
- [79] SCHLAICH, J.: Beitrag zur Frage der Wirkung von Windstößen auf Bauwerke. Bauingenieur 41, 1966
- [80] SCHLITT, H.: Systemtheorie regelloser Vorgänge. Springer-Verlag. Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- [81] SMITH, R.A.: Matrix Equation $XA + BX = C$. SIAM J. Appl. Math. 16, 1968 (198-201)

- [82] SCHNEEWEISS, W.G.: Zufallsprozesse in dynamischen Systemen. Springer-Verlag, Berlin, 1974
- [83] SCHNEIDER, F.X. und WITTMANN, F.H.: Ergebnisse und Diskussion der Wind- und Schwingungsmessungen am Münchener Fernsehturm. Unveröffentlichter Bericht zum DFG-Forsch. Schwerpunkt Bauwerke unter aerodynamischer Belastung. 1974
- [84] SCHWARZ, H.: Mehrfachregelung I, II. Springer-Verlag, Berlin, 1967, 1971
- [85] SCHWARTZ, M. und SHAW, L.: Signal-Processing. McGraw Hill, New York, 1974
- [86] SHINOZUKA, M.: Simulation of Multivaritate and Multidimensional Random Prozesses. J. Acoustical Society AM. 49, 1971
- [87] TRUCKENBRODT, E.: Strömungsmechanik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1968
- [88] VAN DER HOVEN, I.: Power Spectrum of Horizontal Wind Speed. J. of Meteorology 14, 1957 (160-164)
- [89] VANMARKE, E.H.: Probabilistic Seismic Resonse of Structures. CISM, Udine, 1976
- [90] VOY, C.: Die Simulation vertikaler Fahrzeugschwingungen. VDI-Fortschritt-Berichte 30/12, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1977
- [91] WALLER, H. und KRINGS, W.: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1975
- [92] WEDIG, W.: Zufallsschwingungen. VDI-Bericht Nr. 221, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1974
- [93] WEDIG, W.: Kovarianzanalyse stochastischer Schwingungen. VDI-Bildungswerk, Karlsruhe, 1978
- [94] WEDIG, W.: Stationäre Zufallsschwingungen von Balken - eine neue Methode zur Kovarianzanalyse. Z. Ang. Math. Mech. 60, 1980 (T89-T91)
- [95] WEHRMANN, W.: Einführung in die stochastisch-ergodische Impulstechnik. R. Oldenbourg, Wien/München, 1973
- [96] WELCH, P.D.: A Direct Digital Method of Power Spectrum Estimation. IBM-Journal, 1961
- [97] WILKINSON, J.H. und REINSCH, C.: Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971

- [98] WITTIG, L.E. und SINHA, A.K.: Simulation of Multicorrelated Random Processes using the FFT Algorithm. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 58, No. 3, 1975
- [99] YOULA, D.C.: On the Factorization of Rational Matrices. IRE Trans. on Inf. Theory, 1961 (172-189)
- [100] ZURMÜHL, R.: Matrizen. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964

ANHANG

A Statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe

A 1 Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

Ein Ereignis, welches eintreten kann oder nicht, nennt man ein zufälliges Ereignis.

Sind in N Versuchen n_j -mal die Ereignisse A_j vorgekommen, so spricht man von der relativen Häufigkeit

$$h_N(A_j) = \frac{n_j}{N}$$

des zufälligen Ereignisses A_j . Unter dem Grenzwert

$$P\{A_j\} = \lim_{N \rightarrow \infty} h_N(A_j)$$

wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A_j verstanden. Tritt das Ereignis sicher ein, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 1.

A 2 Zufallsfolge, Zufallsfunktion und stochastischer Prozeß

Unter einem Zufallsprozeß versteht man die geordnete Anzahl von Zufallsereignissen. Ein solcher Vorgang tritt in Abhängigkeit von zwei Parametern auf. Diese sind der Wert des zufälligen Ereignisses x_j und der Zeitpunkt t_j , bei dem das Ereignis eintritt. Sind die Ereignisse zu diskreten Zeitpunkten gegeben, spricht man von einer Zufallsfolge, andernfalls von einer Zufallsfunktion. Ein stochastischer Prozeß

besteht aus einem Ensemble von Zufallsfunktionen. Hierunter versteht man eine Klasse (Vielzahl) zufälliger Zeitfunktionen gleicher statistischer Merkmale.

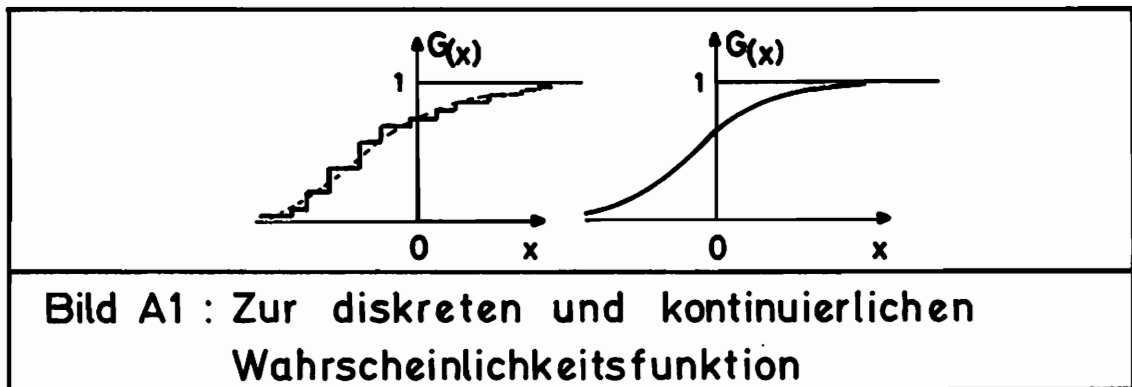
Eine Zufallsfolge besitzt zählbare Werte mit Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P_i = P\{x_i\} \quad .$$

Die x_i sind die Werte des zufälligen Vorgangs X . Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsfolge einen Wert kleiner x_i annimmt, beträgt mit obiger Gleichung P_i . Aus dem Wertebereich leitet sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion ab:

$$P\{X < x_i\} = P\{A_i\} = G(x_i) \quad .$$

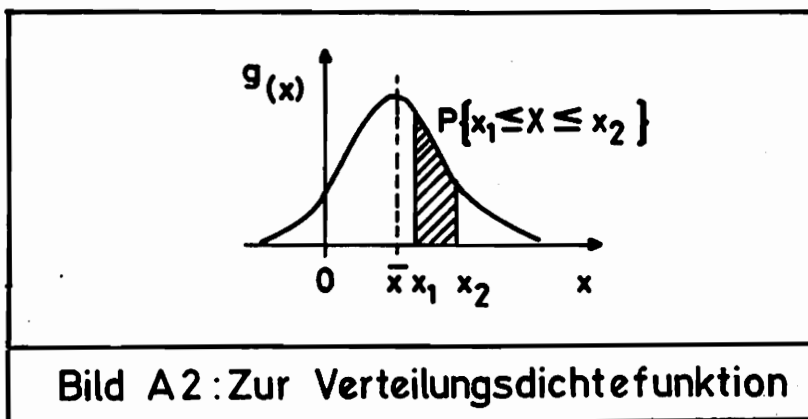
Für Zufallsfolgen ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion, für Zufallsfunktionen eine kontinuierliche Funktion.



Findet sich eine Funktion $g(x)$, mit der die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $G(x)$ der Zufallsgröße X für alle x in der Form

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$$

geschrieben werden kann, so nennt man $g(x)$ die Verteilungsdichtefunktion der Zufallsgröße X



Das Integral über $g(x)$ ergibt stets den Wert 1. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = G(+\infty) - G(-\infty) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße X im Intervall x_1, x_2 liegt, berechnet sich wie folgt:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

A 3 Erwartungswert, Mittelwert und Varianz

Führt man k Versuche durch, so wird der Mittelwert der Zufallsfolge mit

$$\bar{x}_k = \sum_i x_i h_k(x_i)$$

definiert. Handelt es sich um sehr umfangreiche Versuchsreihen, so stimmen die relativen Häufigkeiten mit den Einzelwahrscheinlichkeiten überein:

$$h_k(x_i) \approx p_i$$

In diesem Fall entspricht der Mittelwert dem Erwartungswert, der wie folgt gegeben ist:

$$E\{X\} = \sum_i x_i p_i$$

Für Zufallsfunktionen folgt entsprechend:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_{(x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x| g_{(x)} dx < \infty$$

Sind die Zufallsprozesse stationär (s.u.) gilt:

$$E\{X\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x_{(t)} dt \quad \bullet$$

Für Erwartungswerte gelten die folgenden Rechenregeln:

$$E\{aX + bY\} = a E\{X\} + b E\{Y\}$$

$$X \leq Y : E\{X\} \leq E\{Y\}$$

$$X = 1 : E\{X\} = 1. \quad \bullet$$

Während der Mittelwert ein Maß für die Lage einer Verteilung ist, stellt die Varianz σ^2 die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert dar. Es gilt:

$$\sigma_x^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = E\{(x - \bar{x})^2\} \quad \bullet$$

Die Rechenregeln für Varianzen lauten:

$$\sigma_{cX}^2 = c^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2, \text{ falls } X, Y \text{ stoch. unabhängig} \quad \bullet$$

Allgemein werden Mittelwert und Varianz auch als 1. und 2. Moment der Verteilung einer Zufallsgröße genannt

$$\begin{aligned}\mu_1 &= E\{X\} = \bar{x} \\ \mu_2 &= E\{(x - \bar{x})^2\} = \sigma_x^2\end{aligned}$$

Die Wurzel aus der Varianz bezeichnet man als Streuung.

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

A 4 Stationarität und Ergodizität

Errechnet man zu verschiedenen Zeitpunkten einer Zufallsfolge die ersten beiden Momente, so spricht man von einem stationären Vorgang, wenn die statistischen Kennzahlen zeitinvariant sind. Sind diese Werte zusätzlich für alle Folgen eines Ensembles von Zufallsvorgängen gleich, so heißt der stochastische Vorgang ergodisch. Ergodizität setzt Stationarität voraus.

A 5 Spezielle Verteilungsdichtefunktionen

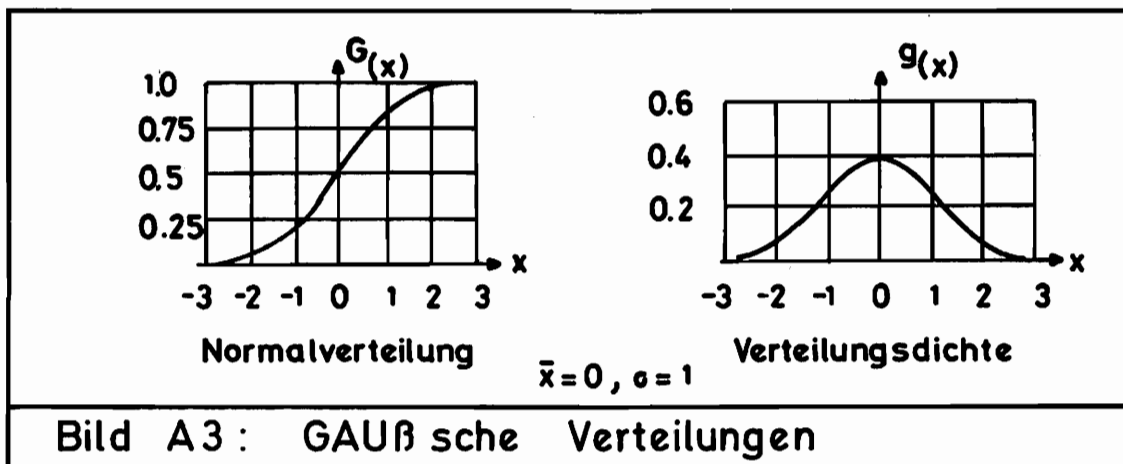
Viele Zufallsvorgänge werden durch das additive Zusammenwirken sehr vieler voneinander unabhängiger Einflüsse bestimmt (zentraler Grenzwertsatz). In diesem Falle besitzt die Zufallsfunktion X häufig eine stetige Verteilungsdichtefunktion der Form

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp - \left\{ \frac{(x - \bar{x})^2}{2 \sigma_x^2} \right\}$$

Mit

$$E\{X\} = \bar{x} \quad , \quad E\{(x - \bar{x})^2\} = \sigma_x^2$$

nennt man diese Funktion eine Gaußsche Verteilungsdichtefunktion



Eine Zufallsfolge, welche die Werte $k = 0, 1, 2, \dots$ mit den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad \lambda > 0$$

annimmt, heißt POISSON verteilt. Mit dem Parameter λ ($\lambda > 0$) wird

$$E\{X\} = \lambda, \quad \sigma_x = \lambda$$

POISSON-Verteilungen dienen u.a. zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussage von Niveauüberschreitungen (Extremwerttheorie). Die Extremwerte treten hierbei als Einzelereignisse in Zufallsfunktionen auf.

A 6 Korrelation und Kovarianzen

Betrachtet man mehrere Zufallsgrößen, so lassen sich mehrdimensionale Verteilungen und Verteilungsdichtefunktionen angeben. Für eine zweidimensionale Gaußverteilung gilt die Gleichung

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x \sigma_y}\right)\right\}$$

Die Momente der Verteilung eines zweidimensionalen Zufallsprozesses errechnen sich wie folgt:

$$\text{k-tes Moment: } \mu_{ij} = E\{(x-\bar{x})^i (y-\bar{y})^j\}, \quad i+j = k$$

$$\bar{x} = E\{X\}, \quad \bar{y} = E\{Y\}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x-\bar{x})^2\}, \quad \sigma_y^2 = E\{(y-\bar{y})^2\}$$

$$\sigma_{xy}^2 = E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\}$$

σ_{xy}^2 stellt hierin die Kovarianz der Zufallsgrößen X, Y dar. Im Falle von Zufallsfunktionen ergibt sich:

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) g_{(x,y)} dx dy \quad \bullet$$

Für Kovarianzen gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^2 &= \sigma_{yx}^2 \\ \sigma_{xy}^2 &= E\{XY\} - E\{X\} E\{Y\} \\ \sigma_{ax,by}^2 &= ab \sigma_{xy}^2 \end{aligned} \quad \bullet$$

Die Zufallsfolgen heißen unkorreliert, wenn gilt

$$\sigma_{xy}^2 = E\{XY\} - E\{X\} E\{Y\} = 0 \quad \bullet$$

Als normierte Kovarianz der Zufallsgrößen x, y ist der Korrelationskoeffizient definiert:

$$\rho_{(x,y)} = \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \quad \bullet$$

Die Kovarianzmatrix zweier Zufallsfolgen

$$\underline{C}_{xy}^2 = \begin{bmatrix} C_{xx}^2 & C_{xy}^2 \\ C_{yx}^2 & C_{yy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx}^2 & \rho C_{xx} C_{yy} \\ \rho C_{xx} C_{yy} & C_{yy}^2 \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch und positiv semidefinit. Es gilt die SCHWARZsche Ungleichung:

$$(C_{xy}^2)^2 \leq C_{xx}^2 C_{yy}^2$$

A 7 Korrelationsfunktionen und Leistungsspektren

Ein stochastischer Prozeß heißt ein Prozeß 2. Ordnung, wenn $E\{X^2\} < \infty$ für alle $t \in T(X = X_{(t)})$ gilt. Das Moment 1. Ordnung nennt man die Erwartungwertfunktion

$$E\{X_t\} = \bar{x}(t)$$

und das zweite Moment die Auto-Korrelationsfunktion

$$E\{X_{t_1} X_{t_2}\} = \phi_{xx}(t_1, t_2)$$

Entsprechend stellt

$$E \{ X_{t_1}, Y_{t_2} \} = \phi_{xy}(t_1, t_2)$$

die Kreuz-Korrelationsfunktion dar.

Unter der Bezeichnung Auto-Korrelationsfunktion wird die Erwartung des Produkts der Werte einer Zufallsfunktion zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 verstanden.

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t_1, t_2) &= E \left\{ (x_{t_1} - \bar{x}_{t_1})(x_{t_2} - \bar{x}_{t_2}) \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_{t_1} - \bar{x}_{t_1})(x_{t_2} - \bar{x}_{t_2}) g(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \end{aligned}$$

Im stationären, ergodischen Fall gilt:

$$\phi_{xx}(\tau) = E \left\{ (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}) dt$$

Entsprechend folgt für zwei Zufallsfunktionen $x_{(t)}$, $y_{(t)}$ die Kreuz-Korrelationsfunktion

$$\phi_{xy}(\tau) = E \left\{ (x_t - \bar{x})(y_{t+\tau} - \bar{y}) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x_t - \bar{x})(y_{t+\tau} - \bar{y}) dt$$

Die Auto-Korrelationsfunktion bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zufallsfunktion $x(t)$, die zum Zeitpunkt t den Wert $x(t)$ hat, zum Zeitpunkt $t + \tau$ den Wert $x(t + \tau)$ haben wird. Mit Hilfe dieser Funktion lassen sich Schwankungszeiten und Periodizitäten feststellen. Falls die Korrelationsweite τ klein ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Werte $x(t)$ und $x(t + \tau)$ sich nur wenig unterscheiden, sehr groß. Die Verwandtschaft dieser Werte nimmt bei stochastischen Prozessen ohne periodische Anteile mit Zunahme der Korrelationsweite ab.

Für diese statistischen Kennfunktionen gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{xx}(\tau) &= 0 \\ \phi_{xx}(0) &= \overline{x^2} \quad (= \sigma_{xx}^2 \text{ mit } \bar{x} = 0) \\ \phi_{xx}(\tau) &= \phi_{xx}(-\tau) \\ \phi_{xx}(0) &\geq |\phi_{xx}(\tau)| \\ \phi_{xy}(0) &= \overline{x_t y_t} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{xy}(\tau) &= \bar{x}_t \bar{y}_t \\ \phi_{xy}(\tau) &= \phi_{yx}(-\tau)\end{aligned}$$

Zwei stochastische Prozesse heißen unkorreliert (s.o.), wenn gilt

$$\phi_{xy}(\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau \text{ mit } \bar{x} = 0, \bar{y} = 0$$

Einen stochastischen Prozeß nennt man stationär, falls die Auto-

Korrelationsfunktion nur von der Korrelationsweite τ und nicht von der Zeit abhängt. Die Korrelationsfunktionen kennzeichnen stochastische Prozesse im Zeitbereich. Eine gleichwertige Beschreibung liefert das Leistungsspektrum im Frequenzbereich. Diese Funktionen zeigen, welche Frequenzen in einem stochastischen Prozeß vertreten sind und wie stark sich diese auswirken.

Nach WIENER und CHINTCHIN heißt die FOURIER-Transformierte der Auto-Korrelationsfunktion

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} \phi_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

Auto-Leistungsspektrum eines stochastischen Prozesses. Diese statistische Kennfunktion ist nur dann definiert, wenn das FOURIER-Integral existiert. Dies trifft für stationäre ergodische Prozesse in der Regel mit

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{XX}(\tau) = 0, \quad \phi_{XX}(\tau=0) = \sigma_{XX}^2, \quad \phi_{XX}(\tau) = \phi_{XX}(-\tau)$$

zu. Für Kreuz-Leistungsspektren definiert man entsprechend:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Für Leistungsspektren (spektrale Dichten) gelten die folgenden Eigenschaften:

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$$

$$S_{XX}(\omega) \geq 0 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_{XX}^2 = \phi_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \quad \text{PARSEVAL sches Theorem}$$

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega) \quad \text{hermitisch}$$

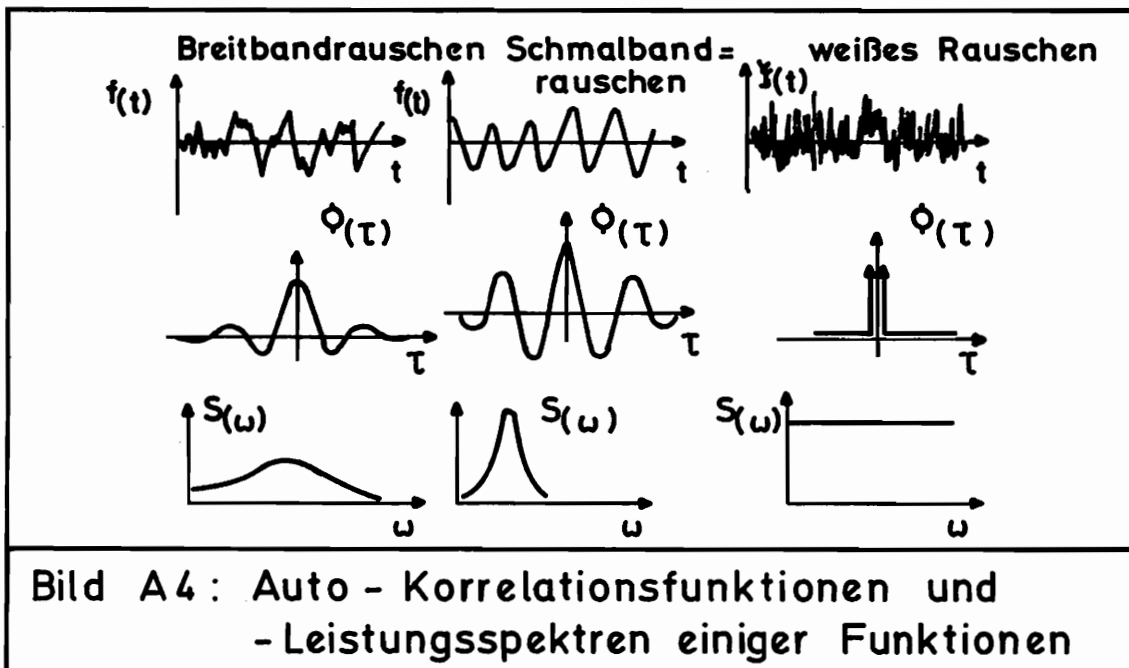
$$\sigma_{xy}^2 = \phi_{xy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) d\omega \quad \text{PARSEVAL sches Theorem}$$

$$S_{xy}(\omega) = 0 \quad \text{falls } x(t), y(t) \text{ unkorreliert}$$

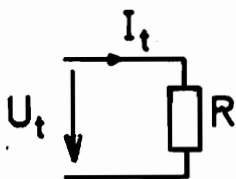
$$S_{x\dot{x}}(\omega) = j\omega S_{xx}(\omega)$$

$$S_{x\ddot{x}}(\omega) = -\omega^2 S_{xx}(\omega)$$

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega)$$



Hinweis: Der Begriff Leistungsspektrum resultiert aus der Elektrotechnik.



Liegt an einem OHMschen Widerstand die Rauschspannung U_t , so errechnet sich die momentante Leistung durch

$$\frac{1}{R} E \{ U_t^2 \}$$

$$E \{ U_t^2 \} = \sigma_{U_t}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{UU}(\omega) d\omega$$

B Numerische Berechnung von Leistungsspektren

B 1 Kurzzeit-Leistungsspektrum

Da ein stationärer stochastischer Prozeß nicht durch eine FOURIER-Transformation beschrieben werden kann, weil gewöhnlich keine Konvergenz vorliegt, erweiterte WIENER die harmonische Analyse durch Einführen des Leistungsspektrums (s.o.). Diese Funktionen beschreiben, welche Frequenzen in einem Zufallsprozeß auftreten und wie sie gewichtet sind.

Zum besseren Verständnis wird die Definition der FOURIER-Transformation vorgestellt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f(t < 0) = 0 \end{aligned} \quad (b1)$$

Konvergenz ist bekanntlich nur gewährleistet, wenn das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ konvergiert. Betrachtet man nur einen Ausschnitt der Funktion $f(t)$, so existiert für

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

das FOURIER-Integral. Da physikalische Prozesse nur endliche Leistung enthalten können, werden Leistungsspektren wie folgt definiert:

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [F_{x_T}(\omega) \tilde{F}_{y_T}(\omega)] \quad (b2)$$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (b3)$$

Beide Definitionen sind äquivalent. Während Gleichung (b2) die FOURIER-Transformierten direkt zur Berechnung von Leistungsspektren benutzt, wird in Gleichung (b3) der Umweg über die Korrelationsfunktion beschritten. Den Zusammenhang zwischen Leistungsspektren und Korrelationsfunktionen zeigten WIENER (1930) und CHINTCHIN (1934) auf.

Da sich der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ in beiden Gleichungen numerisch nicht nachvollziehen läßt, sind Spektren endlicher Zeitsignale nur geschätzte statistische Kennfunktionen. Die numerische Auswertung ist also fehlerbehaftet.

Während Gleichung (b3) als konventionelle Auswertemethode bezeichnet wird, nennt man Gleichung (b2) auch FFT-Methode, da der schnelle numerische Algorithmus der Fast-Fourier-Transformation (COOLEY-TUCKEY, 1965) benutzt wird.

B 2 Numerische Berechnung von Kurzzeit-Leistungsspektren

Da ein Digitalrechner keine kontinuierlichen Funktionen berechnen kann, müssen die Gleichungen (b3) und (b4) für diskrete Funktionswerte äquidistanter Stützstellen Δt , $\Delta \tau$ und $\Delta \omega$ aufbereitet werden. Die zu wählende Diskretisierung ergibt sich im allgemeinen aus der zeitlichen Abtastrate Δt des zu analysierenden Meßschriebes. Unter Berücksichtigung des SHANNON-Theorems folgt hieraus auch der numerisch auswertbare Frequenzbereich ($0 \leq \omega \leq \omega_c$). ω_c ist die NYQUIST- oder Faltungsfrequenz, bis zu der Frequenzen maximal abgebildet werden

können ($\omega_c = \pi / \Delta t$). Hinsichtlich der Grenzwertbildung bzw. der oberen Integrationsgrenzen ergeben sich für Gleichung (b2) und (b3) verschiedene Betrachtungsweisen der numerischen Aufbereitung, die im folgenden angesprochen werden sollen.

B 2.1 Konventionelle Methode

Die Autokorrelationsfunktion ist eine gerade Funktion, d. h. man kann mit Hilfe der bekannten EULERSchen Gleichung

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

die Leistungsspektren (Gl. b3) auch in der Form

$$S_{XX}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \phi_{XX}(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (b4)$$

darstellen. Die konventionelle Methode geht hierbei von der numerisch berechneten Korrelationsfunktion $\phi(\tau)$ aus. Für eine zeitlich begrenzte Meßreihe $x_T(t)$ der Meßdauer T ergibt sich die näherungsweise Berechnung der Korrelationsfunktion zu:

$$\phi_{XX}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \bar{x}] [x(t+\tau) - \bar{x}] \, dt \quad (b5)$$

bzw. mit N diskreten Meßpunkten und einer Abtastrate Δt :

$$\hat{\phi}_{xx}(n \Delta t) = \frac{\Delta t}{T - n \Delta t} \sum_{r=1}^N x_r x_{r+n} = \frac{1}{N-n} \sum_{r=1}^N x_r x_{r+n}$$

Infolge der zeitlich begrenzten Meßzeit nimmt hierbei das jeweilige Korrelationsintervall mit zunehmender Korrelationsverschiebung $\tau = n \Delta t$ ab (Streifenmodell). Die Schätzung der Korrelationsfunktion wird mit wachsender Korrelationszeit ungenauer. Mit $\tau \rightarrow T$ wird die Schätzung (Gl. b5) sogar zu einem unbestimmten Ausdruck. Allgemein üblich wird daher nur eine Schätzung bis zu einer maximalen Korrelationsweite von $\tau_{\max} \leq 0.1 T$ als genügend genau angesehen. Da Korrelationsfunktionen natürlicher Zufallsvorgänge im allgemeinen sehr schnell abklingen, scheint diese beschränkte Auswertung sinnvoll, doch bleibt die Wahl der maximalen Korrelationsdauer willkürlich. Eine zeitlich sehr lange Messung ist in jedem Fall von Vorteil.

Mit Gleichung (b5) und $\tau_{\max} = m \Delta t$ ($m < N$) ergibt sich die Schätzung des Leistungsspektrums:

$$\hat{S}(\omega) = \Delta t \left\{ \hat{\phi}(0) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \hat{\phi}_r \cos \frac{r\pi\omega}{\omega_c} + \hat{\phi}_m \cos \frac{m\pi\omega}{\omega_c} \right\} \quad (b6)$$

B 2.2 FFT-Methode

Während bei den bisherigen Ableitungen der spektralen Dichten von der WIENER-CHINTCHIN-Beziehung ausgegangen wurde, soll nun eine Berechnung der Leistungsspektren ohne Benutzung der Korrelationsfunktion versucht werden. Hierzu sind die Gleichungen (b1) und (b2) in ähnlicher Weise aufzubereiten wie die Gleichungen (b5) und (b6). Liegt die Funktion

$x_T(t)$ in $2N$ äquidistanten Stützstellen mit der Abtastrate $\Delta t = T/2N$ vor, so folgt mit

$$t_k = k \Delta t = k T / 2N, k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 ; n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$$

$$x_{T_n} = \frac{T}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} x_{T_k} \exp \left\{ -\frac{j n k \pi}{N} \right\}$$
$$X_{T_k} = \frac{1}{T} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} x_{T_n} \exp \left\{ \frac{j n k \pi}{N} \right\}$$

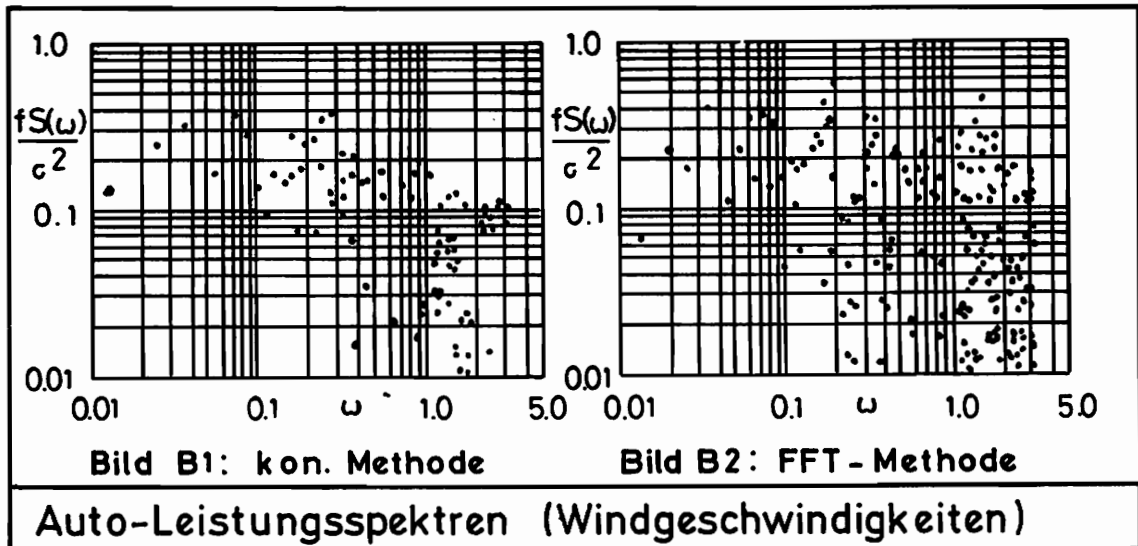
Gleichung (b7) beschreibt eine diskrete FOURIER-Transformation, wobei die Integrale der Gleichung (b1) mit der Rechteckregel berechnet werden. Eine computergerechte, d.h. rechenzeitgünstige Formulierung findet man in dem hier nicht dargestellten Algorithmus der Fast-Fourier-Transformation, der dieser Methode auch den Namen gibt. Eine ausführliche Beschreibung findet der Leser in [12].

Im Gegensatz zur konventionellen Methode wird bei der FFT-Methode verfahrensbedingt Periodizität der Funktion $x_T(t)$ angenommen, d.h. $x_k = x_{2N+k} = x_{4N+k} = \dots$. Damit ergibt sich eine andere Betrachtungsweise. Bei der konventionellen Methode gehen alle über $\tau_{\max} = m \Delta t$ ($m < N$) hinausverschobenen Werte der Korrelationsrechnung verloren, während sie bei der FFT-Methode erneut mit den Anfangswerten korreliert werden. Für die Zufallsfunktion entsteht ein Zylindermodell.

B 3 Anwendung und Vergleich

Die beiden vorgestellten Methoden sind analytisch gleichwertig, da sie über die WIENER-CHINTCHIN-Beziehung miteinander verknüpft sind. Sie unterscheiden sich jedoch in ihrer numerischen Aufbereitung. Während sich bei der konventionellen Methode das Korrelationsintervall mit zunehmender Korrelationsdauer verkleinert, bleibt es bei der FFT-Methode konstant, da die zu untersuchende Funktion mit der

Periode T (Meßdauer) periodisch angesehen wird. Diese Unterscheidung führt natürlich zu verschiedenen numerischen Rechenergebnissen. Die Bilder B1 und B2 zeigen vergleichbare Auswertungen.



Die gewonnenen Leistungsspektren sind "rauhe" Schätzungen des zu untersuchenden stochastischen Prozesses. Die Rauigkeit erklärt sich aus der zeitlich begrenzten Meßdauer. Hierdurch wird der eigentlich zu betrachtende Zufallsprozeß durch ein Rechteckfenster beschnitten. Zusätzlich zu den oben erwähnten verschiedenartigen Betrachtungen verfälscht dieses Fenster das "wahre" Spektrum durch Spreizung der einzelnen Frequenzanteile (Leakage). Die Multiplikation einer Funktion mit einem Rechteckfenster führt im Frequenzbereich zu einer (unerwünschten) Faltung :

$$x_T(t) = x(t) u_T(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_T(\omega) = X(\omega) * U_T(\omega)$$

Mit der FOURIER-Transformation dieser Fensterfunktion

$$U_T(\omega) = 2 \tau_{\max} \frac{\sin \omega \tau_{\max}}{\omega \tau_{\max}}$$

wird die in jedem Punkte des Spektrums stetiger Zufallsfunktionen konzentrierte Leistung gespreizt. Die Überlagerung der "Seitenbänder" an den einzelnen Frequenzpunkten führt zu einer Aufrauung der spektralen Dichtefunktion. Eine mathematisch befriedigende Reduzierung gelingt bisher nur für weiße Rauschvorgänge, während man dieses Problem für farbige Zufallsprozesse mit Glättungsfunktionen zu beheben versucht.

B 4 Glättung rauher Kurzzeit-Leistungsspektren

Für weiße Rauschvorgänge ist eine Fehlerbehandlung und Beurteilung der numerisch berechneten Spektren möglich, da das "wahre" Leistungsspektrum als analytische Vergleichsfunktion bekannt ist. Durch eine gleitende Mittelung über "viele" Punkte wird das Spektrum erwartungstreu geglättet. Farbige Rauschvorgänge lassen sich mit dieser Methode nur bei sehr umfangreichen Datenmengen (z. B. 16 000 Punkte, Mittelung über ein 12 Punkteintervall) erfolgreich behandeln. Bei Unkenntnis des "wahren" Spektrums liegt die Gefahr der Kurvenverzerrung sehr nah. Da Naturmessungen meist einen zu geringen Umfang aufweisen, und eine Mittelung vieler rauher Spektren nach dem Ergodentheorem im allgemeinen wegen mangelnder äquivalenter Meßreihen nicht möglich ist, sucht man nach anderen Glättungsmethoden.

Das bekannteste Verfahren stammt in Anlehnung an die Glättung weißer Zufallsprozesse von HAMMING und beschränkt sich auf eine gleitende Mittelung dreier gewichteter Punkte der rauhen Schätzfunktion:

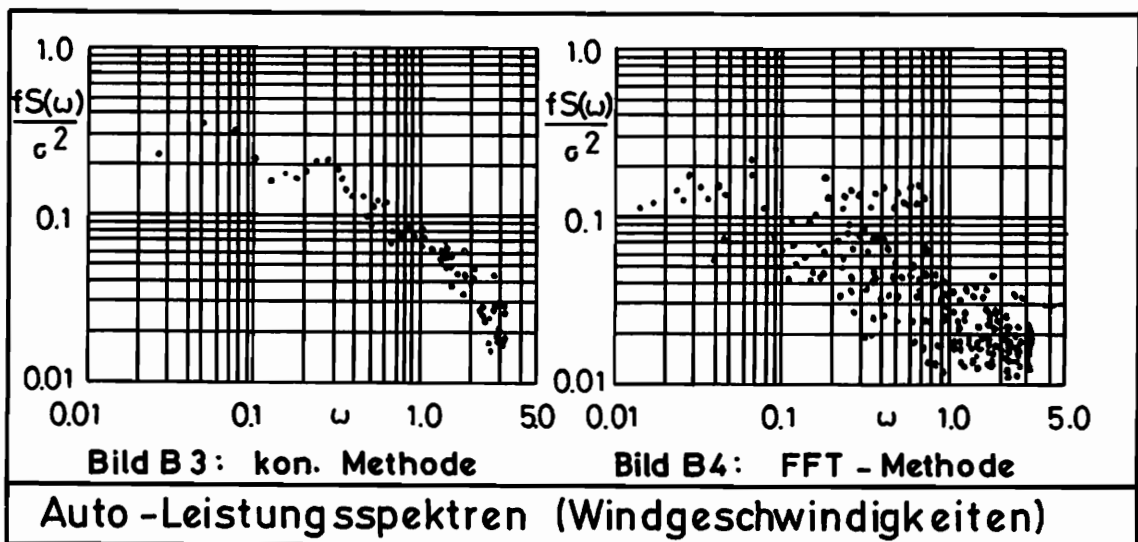
$$\hat{S}_{(\omega_k)} = 0.25 \hat{S}_{(\omega_{k-1})} + 0.5 \hat{S}_{(\omega_k)} + 0.25 \hat{S}_{(\omega_{k+1})}$$

Eine äquivalente Darstellung [6] ergibt sich bei der Bewertung (Glättung) der Korrelationsfunktion mit

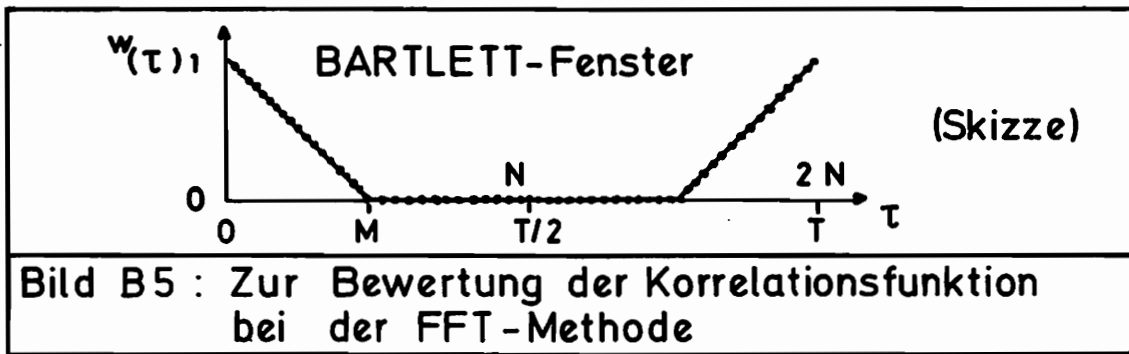
$$w_{(\tau)} = 0.5 (1 + \cos \omega \tau)$$

$$w_r = \begin{cases} 0.5 (1 + \cos \frac{\pi r}{m}) & r = 0, 1, 2, \dots, m \\ 0 & r > m \end{cases}$$

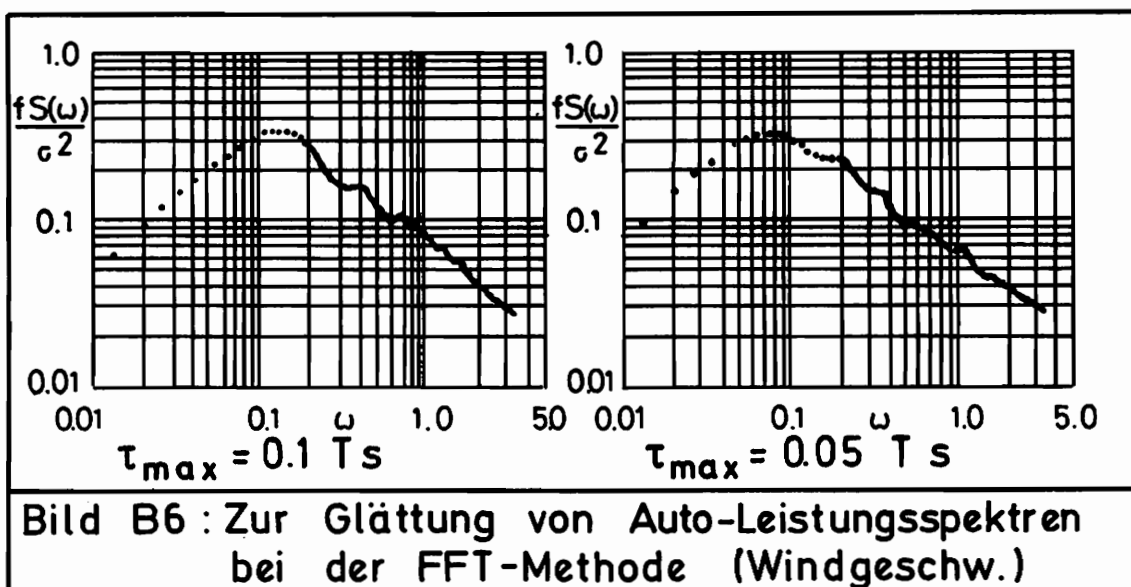
Die Anwendung auf Meßschriebe mit etwa 2000 Datenpunkten zeigt bei der konventionellen Methode einen "deutlicheren" Glättungseffekt als bei der FFT-Methode (Bilder B2 und B4).



Der Grund liegt in der unterschiedlichen numerischen Berechnung der Korrelationsfunktion (Streifenmodell-Zylindermodell) und im wesentlichen an der ausgewerteten Korrelationslänge. Ebenso wie bei der konventionellen Methode läßt sich über einen Umweg auch bei der FFT-Methode die zur Spektrenberechnung verwertbare maximale Korrelationszeit $\{\phi(\tau > \tau_{\max}) = 0\}$ manipulieren. Hierzu wird das mit der FFT berechnete Leistungsspektrum zunächst invers transformiert und die somit gewonnene Korrelationsfunktion entsprechend bewertet und beschnitten. Bild B5 zeigt eine vergleichbare Fensterfunktion (BARTLETT-FENSTER). Durch erneute Transformation erhält



man nun ebenfalls glatte Spektren, die denen der konventionellen Methode gleichen. Angemerkt sei, daß dieses Verfahren wesentlich rechenzeitgünstiger als die konventionelle Auswertung ist. Die Beschränkung der maximalen Korrelationsweite τ_{\max} (Festlegung des Punktes M, Bild B5) erfolgt gleichermaßen willkürlich wie bei der konventionellen Methode. Hierdurch wird der Kurvenverlauf der Spektren ebenso beeinflusst wie durch die Wahl des Glättungsalgorithmusses. Je kürzer das verwertete Korrelationsintervall gewählt wird, desto "glatter" verlaufen die Leistungsspektren. Eine höhere Konsistenz der Spektren wird jedoch nicht zwingend gewährleistet. Unberührt hiervon bleibt lediglich die Varianz der zu beschreibenden stochastischen Funktion (PARSEVAL'sches Theorem), solange die zu transformierende Korrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$ nicht gewichtet wird. Einen Zusammenhang zwischen τ_{\max} und einer erwartungstreuen Schätzung spektraler Leistungsdichten ist bisher ungeklärt. Bild B6 zeigt einige Auswertungen. Die Ausführungen gelten in ähnlicher Weise für Auto- und Kreuzleistungsspektren.



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 24**