



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Heinrich Oeynhaus

Verzweigungslasten  
elastoplastisch deformierter,  
dickwandiger Kreiszyylinder unter  
Innendruck und Axialkraft

Heft Nr. 29



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

HEINRICH OEYNHAUSEN

VERZWEIGUNGSLASTEN ELASTOPLASTISCH  
DEFORMIERTER, DICKWANDIGER KREISZYLINDER  
UNTER INNENDRUCK UND AXIALKRAFT

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 29

NOVEMBER 1981

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Bruhns danke ich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Otto Bruhns

Tag der Einreichung: 23. 6.1981

Tag der mündlichen Prüfung: 19.11.1981

© 1981 Dr.-Ing. Heinrich Oeynhausen

Schlüterweg 6, 463 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft ermittelt. Die Anwendung zweier Stoffgesetze, denen unterschiedliche Fließbedingungen (Tresca, v.Mises) zugrunde liegen, ermöglicht es, elastoplastisches Materialverhalten mit nichtlinearer Verfestigung in die Rechnung einzuarbeiten. Es werden kritische Werte für den Innendruck und für die Axialkraft gezeigt, sowohl auf konstante Geometrie des deformierten Grundzustandes als auch auf den spannungsfreien Ausgangszustand bezogen.

## Summary

The bifurcation of elastoplastic thick-walled tubes under internal pressure and additional axial loading is examined. Elastoplastic material behaviour is considered with non-linear hardening in the plastic range. Critical values for internal pressure and axial loading are presented with respect to the current state and stress-free initial state. It is shown that the application of two constitutive laws with different yield conditions (Tresca, v.Mises) for the predeformation and bifurcation analysis leads to satisfying results.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
<u>Bezeichnungen</u>	3
<u>1. Einleitung</u>	4
<u>2. Stoffunabhängige Grundlagen</u>	8
2.1 Allgemeines	8
2.2 Geometrie	9
2.3 Spannungstensoren	12
2.4 Gleichgewichtsbedingungen	13
<u>3. Stoffgesetze</u>	15
3.1 Allgemeines	15
3.2 Elastische Formänderungen	15
3.3 Plastische Formänderungen	16
3.4 Formulierung der Stoffgesetze	18
<u>4. Beschreibung der Grunddeformation</u>	28
4.1 Geometrie des dickwandigen Rohres	28
4.2 Normierung der geometrischen Größen	32
<u>5. Spannungen im Grundzustand</u>	34
5.1 Allgemeines	34
5.2 Spannungen für Fall 1	36
5.3 Spannungen für Fall 2	42
5.4 Spannungen für Fall 3	45
5.5 Belastungsbedingung	49
<u>6. Verzweigungsanalyse</u>	50
6.1 Allgemeines	50
6.2 Feldgleichungen	51
6.3 Randbedingungen zu den Feldgleichungen	55
6.4 Rotationssymmetrische Beulformen	58
6.5 Belastungsbedingung	64

	<b>Seite</b>
<b><u>7. Numerische Lösung der Randwertprobleme</u></b>	<b>66</b>
7.1 Allgemeines	66
7.2 Werkstoffkennwerte	66
7.3 Numerische Behandlung	68
<b><u>8. Ergebnisse für vorgegebene Grundzustandsgeometrie</u></b>	<b>71</b>
8.1 Geschwindigkeitsfeld in Umfangsrichtung	71
8.2 Geschwindigkeitsfeld in Radial- und Axialrichtung	72
8.3 Verzweigungslasten	83
<b><u>9. Ergebnisse für vorgegebene Ausgangszustände</u></b>	<b>90</b>
9.1 Allgemeines	90
9.2 Eigenwerte	90
9.3 Verzweigungslasten, Grunddeformationen	90
9.4 Ergänzungen	104
<b><u>10. Zusammenfassung</u></b>	<b>113</b>
<b><u>Literaturverzeichnis</u></b>	<b>115</b>

### Bezeichnungen

$(\underline{\quad})$	Vektor im Euklidischen Raum
$(\underline{\underline{\quad}})$	Tensor 2. Stufe
$(\underline{\underline{\quad}})^{-1}$	Inverse eines Tensors
$(\underline{\underline{\quad}})^T$	Transponierte eines Tensors
$Sp(\underline{\underline{\quad}})$	Spur eines Tensors
$\underline{\underline{1}}$	Einstensor
$(\underline{\underline{\quad}}) \cdot (\underline{\underline{\quad}})$	Verjüngendes Produkt
$(\underline{\underline{\quad}})^{\cdot}$	Materielle Zeitableitung
$(\underline{\underline{\quad}})^{\circ}$	Objektive Zeitableitung
$(\underline{\underline{\quad}})_e (\underline{\underline{\quad}})_p$	Elastischer bzw. plastischer Anteil einer tensoriellen Größe

Alle weiteren, nicht einzeln aufgeführten Bezeichnungen und Abkürzungen werden im Text erläutert oder sind allgemein gebräuchlich.

Für das Rechnen mit Tensoren gelten die in [36] erläuterten Rechenregeln.

## 1. Einleitung

Steigende Anforderungen an die Sicherheit mechanisch beanspruchter Bauteile führen zu der Überlegung, auch plastische Deformationen mit in die Berechnung einzubeziehen. Dabei kommt den Stabilitätsbetrachtungen plastisch oder elastoplastisch deformierter Körper eine besondere Bedeutung zu. Im Gegensatz zu elastischen Körpern, für die bereits gut ausgebaute Theorien, wie zum Beispiel Arbeiten von PFLÜGER [1] und FLÜGGE [2], vorliegen, sind die Stabilitätstheorien für plastische oder elastoplastische Stoffe weit weniger gut entwickelt. BRUHNS gibt in [3] einen geschichtlichen Rückblick zur Entwicklung der Stabilitätstheorien.

Unter dem Begriff "Stabilitätsuntersuchungen" werden sowohl die Ermittlung von Verzweigungen des Gleichgewichts (Verlust der Eindeutigkeit einer Lösung) bei bestimmter Belastung als auch die Berechnung der maximalen Traglast eines Körpers zusammengefaßt. SHANLEY weist in [4,5] erstmals darauf hin, daß für plastische oder elastoplastische Körper Unterschiede zwischen beiden Betrachtungsweisen bestehen. Danach ist das Erreichen eines Verzweigungspunktes nicht unbedingt mit einem Stabilitätsverlust (Versagen ohne weitere Laststeigerung) verbunden. Die Deformationen nehmen jedoch nach Überschreiten der Verzweigungslast relativ stark zu, etwa durch örtliches Ausbeulen, so daß der Verzweigungspunkt bzw. die Verzweigungslast ein mögliches Kriterium für die Belastbarkeit eines Körpers darstellt.

Eine grundlegende kontinuumsmechanische Theorie zur Stabilität und Eindeutigkeit von Deformationen starrplastischer und elastoplastischer Stoffe entwickelt HILL in [6-9]. Mit diesen Arbeiten als Basis wurden in den letzten Jahren verschiedene Einzelprobleme behandelt. Von besonderem Interesse sind hier Veröffentlichungen, die sich mit dünnen



und dicken Zylinderschalen unter Innen- bzw. Außendruckbelastung oder Belastung in axialer Richtung befassen. Für dünnwandige Schalen wird üblicherweise ein homogener, ebener Spannungsgrundzustand angenommen. Unter dieser Voraussetzung berechnet HILLIER [10,11] die maximale Tragfähigkeit von Rohren bei starrplastischem Werkstoffverhalten und Belastung durch Innendruck und Axialkraft. CHAKRABARTY [12-14] untersucht die Eindeutigkeit von Lösungen für die mit Außen- oder Innendruck belastete, ARIARATNAM/DUBEY [15] für die axial gedrückte Zylinderschale. In diesem Zusammenhang seien noch Arbeiten von ARIARATNAM/DUBEY [16,17] genannt, die sich allgemein auf die Verzweigungsanalyse elastoplastischer Körper im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand beziehen. Eine Gegenüberstellung von Verzweigungslasten und maximalen Traglasten des dünnwandigen Rohres bei elastoplastischem Werkstoffverhalten mit linearer Verfestigung zeigt BRUHNS [18]. In dieser Arbeit werden Belastungen durch Innendruck und Axialkraft, sowie nicht-rotationssymmetrische Versagensmoden (Beulformen) berücksichtigt.

Für Probleme mit inhomogenen Spannungsgrundzuständen, wie im vorliegenden Fall des dickwandigen Rohres, existieren überwiegend nur Untersuchungen für starrplastisches Werkstoffverhalten. MILES [19] berechnet die Verzweigung der dicken Kugelschale unter Innendruck. SKRZYPEK/ŻYCZKOWSKI [20] und STORÅKERS [21] zeigen Lösungen für das dickwandige Rohr unter Außendruck, STRIFORS/STORÅKERS [22,23] berücksichtigen Innen- und Außendruck. Einen gewissen Abschluß zu diesem Problemkreis stellt eine Arbeit von KUMAR/ARIARATNAM [24] dar, in der das dickwandige, starrplastische Rohr unter Innendruck und axialer Zugkraft auf Eindeutigkeit der Lösungen untersucht wird.

Die Annahme von starrplastischem Werkstoffverhalten bringt bei inhomogenen Spannungsgrundzuständen eine - zum Teil - erhebliche Vereinfachung der Rechnung mit sich. Obwohl

dies wünschenswert erscheint, kann dadurch bei Verzweigungsproblemen das Ergebnis völlig verfälscht werden, siehe in diesem Zusammenhang auch [3]. Eine Möglichkeit, elastoplastisches Materialverhalten mit linearer Verfestigung, sowie Belastung durch Innendruck und Axialkraft in die Verzweigungsanalyse des dickwandigen Rohres einzuarbeiten, führt BRUHNS in [25] auf.

In der vorliegenden Arbeit soll diese Möglichkeit aufgegriffen und weiterentwickelt werden. Unter anderem wird durch geeignete Ansätze elastoplastisches Stoffverhalten mit nichtlinearer Verfestigung berücksichtigt, und zwar mit teilweise analytischen Lösungen, so daß der numerische Aufwand zur Berechnung des Verzweigungspunktes nicht unnötig ansteigt. Es werden für verschiedene Rohrabmessungen (Wanddicken) die Verzweigungslasten - kritische Innendrucke und kritische Axialkräfte - ermittelt und deren gegenseitige Abhängigkeit unter besonderer Beachtung der zugehörigen Deformationszustände dargestellt. Zusätzlich wird der Einfluß der Axialkraft auf die Länge des Rohrschnitts, auf dem die Verzweigung erfolgt, untersucht und diskutiert.

Die Berechnung von Formänderung und Verzweigung soll an folgende Voraussetzungen gebunden sein:

1. Der Werkstoff sei vor und während der Deformation homogen und isotrop.
2. Im plastischen Bereich soll die Verfestigung isotrop erfolgen.
3. Der Werkstoff sei elastisch und plastisch inkompressibel.
4. Alle Formänderungen sollen isotherm verlaufen.
5. Trägheitswirkungen seien vernachlässigbar.
6. Die Belastung soll während der Deformation richtungstreu bleiben.

Für die weiteren Betrachtungen gehen wir von einem "unend-

lich" langen, spannungsfreien Rohr aus, das durch Innendruck und Axialkraft zunächst über die gesamte Länge gleichmäßig verformt wird, bis bei einem bestimmten Spannungs- und Verzerrungszustand die Verzweigung des Gleichgewichts eintritt. Wir können nun annehmen, daß die Verzweigung - zum Beispiel der Beginn des Ausbeulens in radialer Richtung - auf ein endliches Teilstück des Rohres begrenzt bleibt. Die Länge des Teilstücks wird im folgenden mit "Beullänge" oder "Rohrlänge" bezeichnet. Unter Einhaltung entsprechender Randbedingungen an den Enden läßt sich die Betrachtung auf diesen Rohrabschnitt beschränken. In den einzelnen Kapiteln dieser Arbeit wird, soweit es erforderlich erscheint, auf die Voraussetzungen Bezug genommen.

Im Anschluß an die Einleitung werden die benötigten stoffunabhängigen Grundlagen und die Stoffgesetze zusammengestellt. Die Beschreibung der Deformation des dickwandigen Rohres und die Berechnung der zugehörigen Spannungen erfolgt in den Kapiteln 4 und 5. Danach wird in Kapitel 6 die eigentliche Verzweigungsanalyse behandelt, eine kurze Beschreibung der numerischen Lösung des Problems folgt in Kapitel 7. Die Ergebnisse der Berechnungen werden in den Kapiteln 8 und 9 ausführlich dargestellt und diskutiert.

## 2. Stoffunabhängige Grundlagen

### 2.1 Allgemeines

Wir betrachten einen Körper, der aus einem spannungsfreien "Ausgangszustand"  $\overset{\circ}{B}$  in einen beliebigen "Grundzustand"  $B$  deformiert wird.

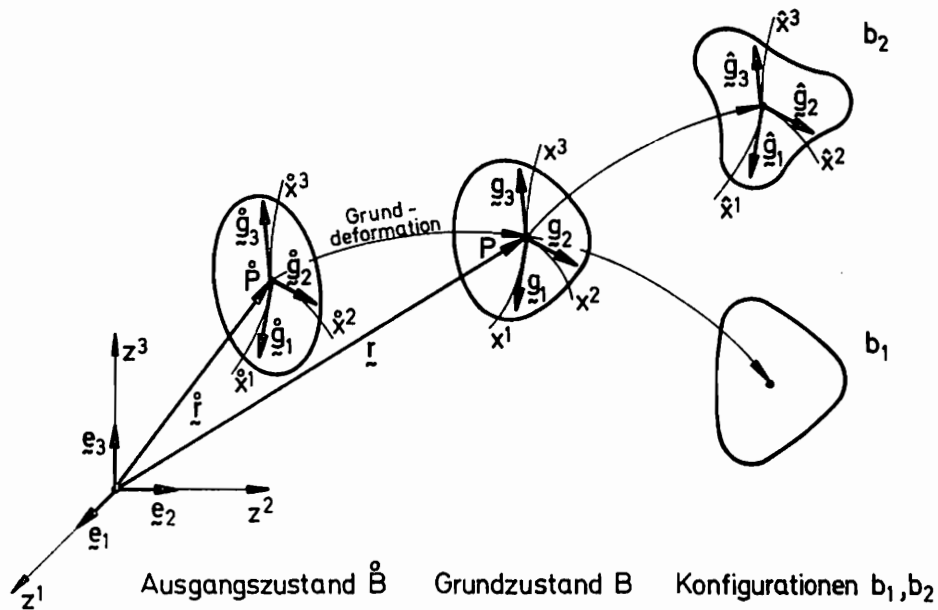


Abb. 1 Deformationszustände

Die Deformation von  $\overset{\circ}{B}$  nach  $B$  bezeichnen wir im folgenden als "Grunddeformation". Für den Grundzustand  $B$  wollen wir annehmen, daß Spannungen und Verzerrungen bekannt seien. Existieren nun im Grundzustand neben dem Geschwindigkeitsfeld, welches eine Fortführung der Grunddeformation nach  $b_1$  bewirken könnte, noch andere Geschwindigkeitsfelder, die mit den Randbedingungen des Systems vereinbar sind, so würden diese auf von der Grunddeformation abweichende Deformationen führen, etwa nach  $b_2$ . In diesem Fall liegt eine Verzweigung des Gleichgewichts vor, die zugehörigen Belastungen sind die Verzweigungslasten oder kritischen Lasten.

## 2.2 Geometrie

In einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem  $z^j$  mit den Basisvektoren  $\underline{e}_j$  definieren wir ein raumfestes, krummliniges Koordinatensystem  $x^i$  mit den Basisvektoren  $\underline{g}_i$ , der Zusammenhang der Koordinaten sei gegeben durch

$$\begin{aligned}x^i &= x^i(z^j) \\z^j &= z^j(x^i) .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die Deformation eines Körpers vom spannungsfreien Ausgangszustand  $\overset{\circ}{B}$  in einen beliebigen Grundzustand B läßt sich dadurch beschreiben, daß für jeden Körperpunkt eine Beziehung zwischen seinen Koordinaten im Zustand  $\overset{\circ}{B}$  und seinen Koordinaten im Zustand B angegeben wird. Nimmt ein Körperpunkt zur Zeit  $t_0$  die Lage  $\overset{\circ}{x}^k$  im Raum ein, so gilt allgemein zur Zeit  $t$  für diesen Punkt

$$x^i = x^i(\overset{\circ}{x}^k, t) .\tag{2.2}$$

Der Ortsvektor zum Punkt  $x$  lautet

$$\underline{r} = z^j \underline{e}_j .\tag{2.3}$$

Damit erhalten wir die Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \underline{e}_j\tag{2.4}$$

und die Metrikkoeffizienten

$$g_{ik} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_k .\tag{2.5}$$

Die kontravarianten Basisvektoren und die kontravarianten Metrikkoeffizienten sind definiert durch

$$\underline{g}^i \circ \underline{g}_k = \delta_k^i \quad (2.6)$$

$$g^{ir} \circ g_{rk} = \delta_k^i . \quad (2.7)$$

Als Maß für die Verzerrung führen wir den Deformationsgradienten ein

$$\underline{F} = \frac{\partial x^i}{\partial \dot{x}^k} \underline{g}_i \dot{g}^k = F^i_{\cdot k} \underline{g}_i \dot{g}^k, \quad \dot{g}^i = \underline{g}^i(\dot{x}^k) . \quad (2.8)$$

Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes  $x^i$  erhalten wir unter Beachtung von (2.2)

$$\underline{v} = \frac{D}{dt} \underline{r} = v^i \underline{g}_i \quad (2.9)$$

mit der Ableitung

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} . \quad (2.10)$$

Für die materielle Zeitableitung der Basisvektoren (2.4) folgt nun

$$\dot{\underline{g}}_k = \frac{D}{dt} \underline{g}_k = \Gamma_{jk}^i v^j \underline{g}_i , \quad (2.11)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{kr,j} + g_{rj,k} - g_{jk,r}) . \quad (2.12)$$

Der Geschwindigkeitsgradient

$$\underline{U} = v^i|_k \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.13)$$

ist die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\underline{v}$  nach den Ortskoordinaten  $x^i$ , also

$$v^i|_k = v^i_{,k} + \Gamma_{jk}^i v^j . \quad (2.14)$$

Es gelten die bekannten Rechenregeln für Tensoren, siehe zum Beispiel [35,36].

Wir spalten den Geschwindigkeitsgradienten auf in einen symmetrischen und in einen antimetrischen Anteil, in den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) = d_{\cdot k}^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.15)$$

$$d_{\cdot k}^i = \frac{1}{2} (v_{\cdot k}^{\cdot i} + v_{\cdot k}^{\cdot i})$$

und in den Tensor der Rotationsgeschwindigkeit

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T) = \omega_{\cdot k}^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.16)$$

$$\omega_{\cdot k}^i = \frac{1}{2} (v_{\cdot k}^{\cdot i} - v_{\cdot k}^{\cdot i}) .$$

Die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten ergibt sich zu

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{F}} = (\dot{F}_{\cdot k}^i + F_{\cdot k}^j \Gamma_{j\cdot}^i v^{\cdot r}) \underline{g}_i \underline{g}^{\cdot k} . \quad (2.17)$$

Eine Volumenänderung wird allgemein ausgedrückt durch

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} = \frac{\sqrt{\underline{\underline{g}}}}{\sqrt{\underline{\underline{g}}_0}} |F_{\cdot s}^{\cdot r}| , \quad (2.18)$$

wobei  $\sqrt{\underline{\underline{g}}_0}$ ,  $\sqrt{\underline{\underline{g}}}$  die Spatprodukte der Basisvektoren  $\underline{\underline{g}}_i$ ,  $\underline{g}_i$  bedeuten.

Die materielle Zeitableitung von  $\mathcal{J}$  erhalten wir aus

$$\dot{\mathcal{J}} = \frac{D}{dt} \mathcal{J} = \mathcal{J} Sp(\underline{\underline{U}}) = \mathcal{J} v^{\cdot r} |_{\cdot r} . \quad (2.19)$$

Zu bemerken wäre an dieser Stelle, daß die aufgeführten Gleichungen auch zur Berechnung der Verzerrung herangezogen werden. In Kapitel 6 werden wir auf die dadurch bedingten formalen Unterschiede hinweisen. Dies gilt sinngemäß auch für die folgenden Herleitungen.

### 2.3 Spannungstensoren

Wir führen zunächst den auf die aktuelle Konfiguration bezogenen Cauchyschen Spannungstensor ein

$$\underline{\underline{S}} = \sigma_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k . \quad (2.20)$$

Zwischen dem Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\underline{\underline{S}}_K = S_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.21)$$

und dem Cauchyschen Spannungstensor besteht der Zusammenhang

$$\underline{\underline{S}}_K = J \underline{\underline{S}} . \quad (2.22)$$

Den Lagrangeschen Spannungstensor erhalten wir aus

$$\underline{\underline{S}}_L = J \underline{\underline{S}} (\underline{F}^{-1})^T \quad (2.23)$$

mit den Komponenten

$$\underline{\underline{S}}_L = S_{Lk}^i \underline{g}^k \underline{\underline{g}}_i . \quad (2.24)$$

Weiterhin benötigen wir die Spannungsdeviatoren

$$\underline{\underline{T}} = \tau_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k = \left( \sigma_k^i - \frac{1}{3} \sigma_r^r \delta_k^i \right) \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.25)$$

$$\underline{\underline{T}}_K = t_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k = \left( S_k^i - \frac{1}{3} S_r^r \delta_k^i \right) \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.26)$$

Die physikalischen Komponenten  $\overset{*}{\sigma}_k^i$  des Tensors  $\underline{\underline{S}}$  folgen aus

$$\overset{*}{\sigma}_k^i = \frac{\sqrt{g^{kk}}}{\sqrt{g^{ii}}} \sigma_k^i , \quad \nabla . \quad (2.27)$$

Liegt ein Hauptachsensystem vor, so sind bei gemischtvari-  
anter Schreibweise die physikalischen Komponenten gleich  
den Maßzahlen des Tensors.



Wir wollen nun die verschiedenen Zeitableitungen der Spannungstensoren betrachten, zunächst definieren wir

$$\dot{\underline{\underline{S}}} = \frac{D}{dt} \underline{\underline{S}} = \frac{D}{dt} (\sigma_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k) \quad (2.28)$$

als materielle Zeitableitung des Cauchyschen Spannungstensors. Die Ausrechnung von (2.28) führt mit (2.11) zu

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{S}}} = & [\dot{\sigma}_k^i + \sigma_k^r (d_r^i + \omega^i_{,r}) \\ & - \sigma_r^i (d_k^r + \omega^r_{,k}) - \sigma_k^r v^i_{,r} + \sigma_r^i v^r_{,k}] \underline{g}_i \underline{g}^k. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Wir können die Zeitableitungen von  $\underline{\underline{S}}_K$  und  $\underline{\underline{S}}_L$  mit (2.17) und (2.19) formulieren

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_K = \mathcal{J} [\dot{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} \text{Sp}(\underline{\underline{U}})] \quad (2.30)$$

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_L = \mathcal{J} [\dot{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} \text{Sp}(\underline{\underline{U}}) - \underline{\underline{S}} \underline{\underline{U}}^T] (\underline{\underline{F}}^{-1})^T. \quad (2.31)$$

Zusätzlich benötigen wir die objektive Zeitableitung (Jaumann-Ableitung)

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}} = \dot{\underline{\underline{S}}} - \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{W}} \quad (2.32)$$

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K = \dot{\underline{\underline{S}}}_K - \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}}_K + \underline{\underline{S}}_K \underline{\underline{W}} = \mathcal{J} [\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} \text{Sp}(\underline{\underline{U}})] \quad (2.33)$$

Die materiellen und objektiven Zeitableitungen der Spannungstensors (2.25), (2.26) lassen sich ebenfalls mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen herleiten.

#### 2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Bei Vernachlässigung von Massenkräften und Trägheitswirkungen gilt

$$\text{Div} \underline{\underline{S}} = \sigma_k^i |_{,i} \underline{g}^k = 0 \quad (2.34)$$

mit

$$\sigma_{k|i}^i = \sigma_{k,i}^i + \Gamma_{ir}^i \sigma_k^r - \Gamma_{ki}^r \sigma_r^i . \quad (2.35)$$

Fordern wir, daß dies zu allen Zeiten für jeden Körperpunkt gültig bleibt, so muß auch die materielle Zeitableitung von (2.34) verschwinden

$$\overline{Div} \underline{\underline{S}} = 0 . \quad (2.36)$$

Zur Ausführung dieser Rechnung sei auf [3] verwiesen. Man erhält die Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts in der Form

$$Div [\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}} Sp(\underline{\underline{U}}) - \underline{\underline{S}} \underline{\underline{U}}^T] = 0 . \quad (2.37)$$

Unter Verwendung der Gleichungen aus Kapitel 2.3 läßt sich (2.37) schreiben

$$Div \left[ \frac{1}{J} \underline{\underline{S}}_K^{\circ} + \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}} \underline{\underline{D}} \right] = 0 \quad (2.38)$$

oder in gemischtvarianten Komponenten

$$\left[ \frac{1}{J} S_k^i|_o + \omega_k^r \sigma_r^i - \sigma_k^r d_r^i \right] |_{,i} = 0 \quad (2.39)$$

mit  $S_k^i|_o$  als Maßzahlen von  $\underline{\underline{S}}_K^{\circ}$ .

### 3. Stoffgesetze

#### 3.1 Allgemeines

Ein Stoffgesetz für elastoplastische Körper beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungen bzw. Spannungsinkrementen und Verzerrungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten. Da elastische und plastische Formänderungen unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten unterworfen sind, müssen wir die Gesamtdeformation aufteilen in einen elastischen und einen plastischen Anteil, beispielsweise durch multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_e \underline{\underline{F}}_p . \quad (3.1)$$

Die Aufspaltung kann auch auf andere Art erfolgen. LEHMANN [27,28] geht ausführlich auf die unterschiedlichen Möglichkeiten ein, die schließlich alle zu einer additiven Aufteilung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit in einen elastischen und einen plastischen Anteil führen

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_e + \underline{\underline{D}}_p = (d_e^i + d_p^i) g_i g^k . \quad (3.2)$$

#### 3.2 Elastische Formänderungen

Für kleine elastische Formänderungen, wie z.B. bei metallischen Werkstoffen, gilt die bekannte Beziehung

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} \left[ \overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K) \underline{\underline{1}} \right] . \quad (3.3)$$

Dieses hypo-elastische Stoffgesetz kann auch in der Form

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}_K + \frac{1}{\overset{\circ}{K}} \text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K) \underline{\underline{1}} \quad (3.4)$$

geschrieben werden, mit  $\text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K) = \text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K)$ .

K ist der Kompressionsmodul

$$K = 2G \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} = E \frac{1}{3(1-2\nu)} \quad (3.5)$$

In Komponentenform lautet (3.4)

$$d_k^i = \frac{1}{2G} t_{k|0}^i + \frac{1}{g_K} s_{r|0}^r \delta_k^i \quad (3.6)$$

### 3.3 Plastische Formänderungen

Plastische Formänderungen werden durch eine Fließbedingung und durch ein Formänderungsgesetz bestimmt. Die Fließbedingung kennzeichnet den Beginn der plastischen Deformation als Funktion der Spannungen und der Werkstoffverfestigung, das Formänderungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Verzerrungsgeschwindigkeit und Spannungen bzw. Spannungskrementen.

Die Fließbedingung für isotrope Materialien wird üblicherweise mit den Invarianten des Spannungsdeviators  $\underline{T}_K$  aufgestellt

$$F(J_2, J_3, k^2) = f(J_2, J_3) - k^2 = 0 \quad (3.7)$$

wobei

$$J_2 = Sp(\underline{T}_K^2) \quad (3.8)$$

$$J_3 = Sp(\underline{T}_K^3) \quad .$$

$k^2$  ist eine skalare Funktion, welche die Werkstoffverfestigung in Abhängigkeit der plastischen Arbeit  $w_p$  beschreibt

$$k^2 = k^2(w_p) \quad (3.9)$$

Neben der Fließbedingung muß auch die Belastungsbedingung erfüllt sein

$$Sp\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{T}_K} \underline{T}_K\right) \geq 0 \quad (3.10)$$

### 3.3.1 Fließbedingungen

In dieser Arbeit sollen die Fließbedingungen von Tresca und von v.Mises angewandt werden. Die Tresca-Fließbedingung läßt sich nach [37] in allgemeiner Form angeben

$$F_T = \frac{1}{2} J_2^3 - 3 J_3^2 - 9 k_T^2 J_2^2 + 48 k_T^4 J_2 - 64 k_T^6 = 0. \quad (3.11)$$

Liegt ein Hauptspannungssystem vor, kann (3.11) auch als Funktion der Hauptspannungen formuliert werden

$$[(\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 - k_T^2][(\sigma_2^2 - \sigma_3^3)^2 - k_T^2][(\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2 - k_T^2] = 0. \quad (3.12)$$

Wenn einer der drei Terme zu Null wird, so ist die Fließbedingung erfüllt. Zur Vereinfachung der Rechnung können wir später in drei Fälle unterscheiden.

Die v.Mises-Fließbedingung lautet

$$F_M = Sp(\underline{T}_K^2) - k_M^2 = t_k^i t_i^k - k_M^2 = 0 \quad (3.13)$$

und als Funktion der Hauptspannungen

$$(\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^3)^2 + (\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2 - 3k_M^2 = 0. \quad (3.14)$$

Das Verfestigungsgesetz (3.9) wird aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines einachsigen Zugversuchs ermittelt. Als Approximationsansatz für die Versuchskurve wählen wir

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0}{B} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^n, \quad \sigma \geq \sigma_0 \quad (3.15)$$

nach einem Vorschlag von BRUHNS [3]. Dieser Ansatz ähnelt dem sogenannten Ramberg-Osgood-Gesetz. Ein Vorteil von (3.15) ist unter anderem, daß an der Streckgrenze  $\sigma_0$  ein stetiger Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich - sowohl von  $\sigma(\varepsilon)$  als auch von  $d\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon$  - berücksichtigt wird.

Durch Differentiation von (3.15) nach der Dehnung  $\varepsilon$  erhalten

wir eine Beziehung für den Tangentenmodul

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{n-1}} . \quad (3.16)$$

Der Elastizitätsmodul E und die Parameter B, n werden aus dem Zugversuch bestimmt.

### 3.3.2 Formänderungsgesetz

Als Formänderungsgesetz verwenden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{D}_p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{S}_k} \\ d_p^i &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_i^k} \end{aligned} \quad (3.17)$$

aus der Theorie des plastischen Potentials (Normalenregel). Die positive, skalarwertige Funktion  $\dot{\lambda}$  wird aus der Forderung bestimmt, daß die Fließbedingung während der gesamten plastischen Deformation erfüllt bleibt, d. h.

$$\dot{F} = 0 . \quad (3.18)$$

Die Belastungsbedingung (3.10) ist aus (3.18) entstanden.

### 3.4 Formulierung der Stoffgesetze

Die v.Mises-Fließbedingung (3.13) führt auf ein Stoffgesetz, das bei beliebigen Formänderungsvorgängen einfache Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungsänderungen ergibt. Die Tresca-Fließbedingung (3.11) bereitet hingegen wegen der singulären Ecken in manchen Fällen Schwierigkeiten. Deshalb sei hier vorweggenommen, daß wir die Fließbedingung von Tresca für ein Stoffgesetz zur Berechnung der Grunddeformation heranziehen wollen. Die Formänderungen eines dickwandigen Rohres, belastet durch Innendruck und Axialkraft,

erfolgen koaxial in Richtung der Hauptspannungsachsen, siehe z. B. [29,30,31]. Wir können uns also bei der Herleitung eines Stoffgesetzes mit der Trescaschen Fließbedingung auf ein Hauptspannungssystem beschränken und Gleichung (3.12) verwenden.

Im folgenden berücksichtigen wir inkompressibles Materialverhalten, mit  $J = 1$  nach (2.18) erhalten wir aus (2.22), (2.26) und (2.30)

$$\underline{\underline{S}}_K = \underline{\underline{S}} \quad , \quad \underline{\underline{T}}_K = \underline{\underline{T}} \quad (3.19)$$

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_K = \dot{\underline{\underline{S}}} \quad , \quad \dot{\underline{\underline{T}}}_K = \dot{\underline{\underline{T}}} \quad (3.20)$$

### 3.4.1 Stoffgesetz bei Anwendung der Tresca-Fließbedingung

Wir betrachten den Fall, daß ein beliebiger Term in (3.12) zu Null wird. Die Hauptspannungen  $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^3$ , ordnen wir nach ihrer Größe und weisen ihnen die folgenden Indizes zu

$$\sigma_n^n \geq \sigma_m^m \geq \sigma_l^l \quad , \quad \nexists n, m, l \quad (3.21)$$

Dann lautet die vereinfachte Form der Fließbedingung

$$F = (\sigma_n^n - \sigma_l^l)^2 - k_T^2 = 0. \quad (3.22)$$

Die Normalenregel (3.17) liefert

$$\underline{\underline{D}}_p = \lambda (\sigma_n^n - \sigma_l^l) \underline{\underline{\beta}} \quad , \quad (3.23)$$

mit  $\beta_k^i$  nach

$$\beta_k^i = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^3 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\beta_n^n = +1 \quad , \quad \beta_m^m = 0 \quad , \quad \beta_l^l = -1 \quad .$$

Die Auswertung von (3.18) ergibt

$$\dot{F} = (\sigma_n^n - \sigma_l^l)(\dot{\sigma}_n^n - \dot{\sigma}_l^l) - 2 \frac{\partial k_T^2}{\partial W_p} \dot{W}_p = 0 \quad (3.25)$$

Führen wir die Formänderungsarbeit in inkrementeller Form

$$\dot{W} = \frac{1}{g_0} Sp(\underline{\underline{S}}_K \underline{\underline{D}}) \quad (3.26)$$

ein, so erhalten wir mit der Aufspaltung von  $\underline{\underline{D}}$  nach (3.2)

$$\dot{W}_p = \frac{1}{g_0} Sp(\underline{\underline{S}}_K \underline{\underline{D}}_p) = \frac{1}{g_0} Sp(\underline{\underline{T}}_K \underline{\underline{D}}_p) \quad , \quad (3.27)$$

die plastische Formänderungsarbeit. Der hydrostatische Anteil des Spannungstensors liefert keinen Beitrag zur plastischen Arbeit.

Aus (3.27), (3.23) folgt unter Beachtung von (3.19)

$$\dot{W}_p = \frac{1}{g_0} 2 \lambda (\sigma_n^n - \sigma_l^l) Sp(\underline{\underline{T}} \underline{\underline{\beta}}) \quad (3.28)$$

und mit (3.25) führt dies zu

$$\lambda = \frac{g_0 (\dot{\sigma}_n^n - \dot{\sigma}_l^l)}{4 \frac{\partial k_T^2}{\partial W_p} (\sigma_n^n - \sigma_l^l)} \quad . \quad (3.29)$$

Der plastische Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit wird demnach

$$\underline{\underline{D}}_p = \frac{g_0 (\dot{\sigma}_n^n - \dot{\sigma}_l^l)}{2 \frac{\partial k_T^2}{\partial W_p}} \underline{\underline{\beta}} \quad . \quad (3.30)$$

Den elastischen Anteil von  $\underline{\underline{D}}$  können wir nach (3.3) und (3.20) für koaxiale Formänderungen, d. h.  $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\dot{S}}}$ , angeben zu

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} [\underline{\underline{\dot{S}}} - \frac{1}{3} Sp(\underline{\underline{\dot{S}}}) \underline{\underline{1}}] = \frac{1}{2G} [\underline{\underline{\dot{S}}} - \dot{q} \underline{\underline{1}}] \quad , \quad (3.31)$$

und mit (3.30) erhalten wir das elastoplastische Stoffgesetz in der Form



$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2G} \left[ \underline{\underline{\dot{S}}} - \underline{\underline{\dot{q}}} \underline{\underline{1}} + \frac{G(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_n^n - \underline{\underline{\dot{\sigma}}}')}{\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial k_T^2}{\partial W_P}} \underline{\underline{\beta}} \right] . \quad (3.32)$$

Nach kurzer Zwischenrechnung folgt schließlich

$$\underline{\underline{\dot{S}}} = 2G \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\dot{q}}} \underline{\underline{1}} - G \sigma_T(W_P) Sp(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\beta}}) \underline{\underline{\beta}} \quad (3.33)$$

mit der Abkürzung

$$\sigma_T(W_P) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2G \varrho_0} \frac{\partial k_T^2}{\partial W_P}} , \quad 0 \leq \sigma_T \leq 1, \quad (3.34)$$

einer dimensionslosen Stoffgröße, die für rein elastisches Verhalten den Wert 0, für elastisch-idealplastisches Verhalten den Wert 1 annimmt, siehe [32,3,25].

Wir wollen den "Verfestigungsparameter"  $\sigma_T$  aus dem einachsigen Zugversuch bestimmen. Zunächst betrachten wir dazu zwei verschiedene Möglichkeiten,  $\sigma_T$  als Funktion des Tangentenmoduls  $E_t$  darzustellen.

Eine "direkte" Anpassung des Stoffgesetzes (3.33) an den Zugversuch soll zuerst diskutiert werden. Hierzu gehen wir von einem Spannungszustand aus, für den (3.22) und somit auch (3.33) eine eindeutige Aussage liefert, z. B.

$$\sigma_1^1 > \sigma_3^3 > \sigma_2^2 , \quad \sigma_3^3 = 0 , \quad \sigma_2^2 < 0 , \quad (3.35)$$

mit der Fließbedingung

$$F = \sigma_1^1 - \sigma_2^2 - 2k_T = 0 . \quad (3.36)$$

Eine Annäherung an den einachsigen Spannungszustand  $\sigma_1^1$  erhalten wir, wenn  $\sigma_2^2 \rightarrow 0$ .

Den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit wählen wir unter Beachtung von (3.21) bis (3.24) und Vernachlässigung eines möglichen elastischen Verzerrungsgeschwindigkeitsanteils  $d_3^3$  zu

$$d_1^1 = \dot{\varepsilon} \quad , \quad d_2^2 = -\dot{\varepsilon} \quad , \quad (3.37)$$

alle übrigen  $d_k^i = 0$ , wobei wir nach LEHMANN [33]

$$d_k^i = \varepsilon_k^i|_0 \quad , \quad (3.38)$$

bzw. für koaxiale Formänderungen

$$d_k^i = \dot{\varepsilon}_k^i \quad (3.39)$$

angenommen haben. Das Stoffgesetz (3.33) ergibt - bedingt durch die Tresca-Fließbedingung - im Regelfall nur ebene plastische Deformationen. Die tatsächlichen Formänderungen eines einachsigen Zugversuchs lassen sich deshalb ohne Zusatzannahmen nicht erfassen.

Eine "direkte" Anpassung des Stoffgesetzes an einen Zugversuch ist somit nur angenähert möglich.

Fordern wir noch, daß

$$\dot{\sigma}_2^2 = 0 \quad , \quad \dot{\sigma}_3^3 = 0 \quad , \quad (3.40)$$

so führt die Auswertung mit (3.33),  $i = k = 1$ , zu

$$\dot{\sigma}_1^1 = 2G\dot{\varepsilon} + \frac{1}{3}\dot{\sigma}_1^1 - 2G\sigma_T\dot{\varepsilon} = E_t\dot{\varepsilon} \quad (3.41)$$

und für inkompressibles Material,  $E = 3G$ , zu

$$\sigma_T = 1 - \frac{E_t}{E} \quad . \quad (3.42)$$

Überprüfen wir die Forderung (3.40) durch Einsetzen von (3.42) in (3.33),  $i = k = 2, 3$ , so folgt

$$\dot{\sigma}_2^2 = -\frac{1}{3}\dot{\sigma}_1^1 \quad , \quad \dot{\sigma}_3^3 = \frac{1}{3}\dot{\sigma}_1^1 \quad , \quad (3.43)$$

d. h. die Forderung wird nicht erfüllt; dies bestätigt nochmals die Aussage hinsichtlich der Anpassung des Stoffgesetzes. Die zweite Möglichkeit, welche wir diskutieren wollen, ist eine "indirekte" Anpassung des Stoffgesetzes, indem wir über

die Formänderungsarbeit den einachsigen Zugversuch in (3.34) einarbeiten.

Als Fließbedingung benötigen wir

$$F = \sigma - 2k_T = 0 . \quad (3.44)$$

Der inkrementelle Zuwachs der gesamten Formänderungsarbeit des Zugversuchs

$$dw = \frac{1}{g_0} \sigma d\varepsilon \quad (3.45)$$

läßt sich aufspalten in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$dw = dw_e + dw_p . \quad (3.46)$$

Mit dem elastischen Anteil

$$dw_e = \frac{1}{g_0} \frac{\sigma}{E} d\sigma \quad (3.47)$$

und dem Tangentenmodul  $E_t$  folgt aus (3.45) und (3.46)

$$\frac{d\sigma}{dw_p} = \frac{g_0}{\sigma} \frac{1}{\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}} . \quad (3.48)$$

Drücken wir  $k_T$  bzw.  $k_T^2$  mit Hilfe von (3.44) aus, so können wir die partielle Ableitung in (3.34) ersetzen durch

$$\frac{dk_T^2}{dw_p} = \frac{\sigma}{2} \frac{d\sigma}{dw_p} = \frac{g_0}{2} \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (3.49)$$

und erhalten schließlich die gewünschte Form von  $\sigma_T$

$$\sigma_T = 1 - \frac{3E_t}{4E - E_t} . \quad (3.50)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß auch diese zweite Möglichkeit keine exakte Anpassung an den Zugversuch darstellt. Eine Überprüfung der Annäherung des Stoffgesetzes (3.33) mit  $\sigma_T$  nach (3.50) an den einachsigen Spannungszustand ergibt,

daß neben den nicht erfüllten Forderungen (3.40) auch  $\dot{\sigma}_T^1 = E\dot{\epsilon}$  nur näherungsweise erreicht wird.

Auf die Nachteile der Tresca-Fließbedingung, die hier zu Tage treten, wollen wir nicht weiter eingehen, es sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, z. B. [38].

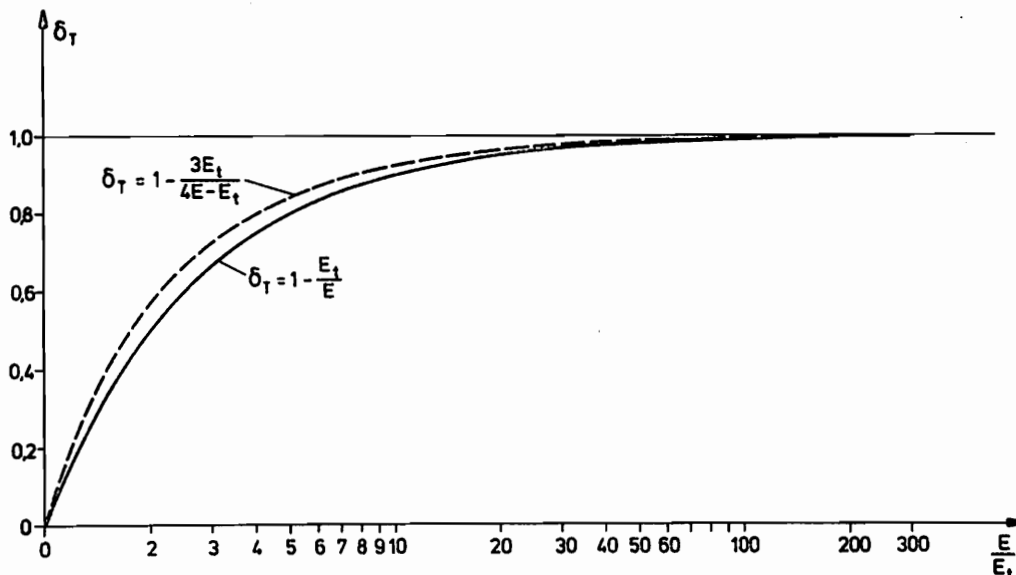


Abb. 2 Verfestigungsparameter

$\sigma_T$  (3.42) und  $\dot{\sigma}_T$  (3.50) sind in Abb. 2 über dem Verhältnis  $E/E_t$  aufgetragen. Die Kurven weichen für kleine Werte  $E/E_t$  geringfügig voneinander ab. In Kapitel 5.1 entscheiden wir, welcher Beziehung für  $\dot{\sigma}_T$  der Vorzug gegeben wird.

### 3.4.2 Stoffgesetz bei Anwendung der v.Mises-Fließbedingung

Wir gehen von einem beliebigen Spannungszustand  $\underline{\underline{S}}_K$  bzw.  $\underline{\underline{T}}_K$  aus.

Die Fließbedingung (3.13) ergibt mit der Normalenregel (3.17)

$$\underline{\underline{D}}_P = \lambda \cdot 2 \underline{\underline{T}}_K \quad (3.51)$$

Aus der Bedingung (3.18)

$$\dot{F} = 2 Sp(\underline{\underline{T}}_K \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}_K) - \frac{\partial k_M^2}{\partial W_P} \dot{W}_P \quad (3.52)$$

mit  $\dot{w}_p$  nach (3.27)

$$\dot{w}_p = \frac{1}{g_0} 2 \dot{\lambda} Sp(\underline{T}_K^2) \quad (3.53)$$

folgt

$$\dot{\lambda} = \frac{g_0}{\frac{\partial k_M^2}{\partial w_p}} \frac{Sp(\underline{T}_K \overset{\circ}{\underline{T}}_K)}{Sp(\underline{T}_K^2)} \quad (3.54)$$

Damit erhalten wir den plastischen Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\underline{\underline{D}}_p = \frac{2 g_0}{\frac{\partial k_M^2}{\partial w_p}} \frac{Sp(\underline{T}_K \overset{\circ}{\underline{T}}_K)}{Sp(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K, \quad (3.55)$$

und mit dem elastischen Anteil  $\underline{\underline{D}}_e$  nach (3.4) führt dies zu

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2G} \overset{\circ}{\underline{T}}_K + \frac{1}{gK} Sp(\underline{\underline{S}}_K) \underline{\underline{1}} + \frac{2 g_0}{\frac{\partial k_M^2}{\partial w_p}} \frac{Sp(\underline{T}_K \overset{\circ}{\underline{T}}_K)}{Sp(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K. \quad (3.56)$$

Überschieben wir beide Seiten von (3.56) mit  $\underline{T}_K$  und bilden die Spur, so folgt

$$Sp(\underline{T}_K \underline{\underline{D}}) = \left( \frac{1}{2G} + \frac{2 g_0}{\frac{\partial k_M^2}{\partial w_p}} \right) Sp(\underline{T}_K \overset{\circ}{\underline{T}}_K). \quad (3.57)$$

Eingesetzt in (3.56) erhalten wir das Stoffgesetz

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2G} \overset{\circ}{\underline{T}}_K + \frac{1}{gK} Sp(\underline{\underline{S}}_K) \underline{\underline{1}} + \sigma_M(w_p) \frac{Sp(\underline{T}_K \underline{\underline{D}})}{Sp(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K, \quad (3.58)$$

mit dem Verfestigungsparameter

$$\sigma_M(w_p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4G g_0} \frac{\partial k_M^2}{\partial w_p}}, \quad 0 \leq \sigma_M \leq 1, \quad (3.59)$$

in einer ähnlichen Formulierung wie (3.34).

Wir wollen auch diesen Verfestigungsparameter als Funktion des Tangentenmoduls darstellen.

Das Stoffgesetz (3.58) läßt sich direkt dem einachsigen Zugversuch anpassen.

Setzen wir dazu unter Beachtung von (3.19) und (3.20)

$$S_1^1 = \sigma_1^1 = \sigma, \quad \dot{S}_1^1 = \dot{\sigma}_1^1 = \dot{\sigma} \quad (3.60)$$

und als Verzerrungsgeschwindigkeiten entsprechend (3.39)

$$d_1^1 = \dot{\epsilon}, \quad d_2^2 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2}, \quad d_3^3 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2}, \quad (3.61)$$

alle übrigen  $S_k^i, \dot{S}_k^i, d_k^i = 0$ , so folgt unmittelbar durch Einsetzen in (3.58),  $i = k = 1$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3G} \dot{\sigma} + \delta_M \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_t} \quad (3.62)$$

und für  $E = 3G$  schließlich

$$\delta_M = 1 - \frac{E_t}{E}. \quad (3.63)$$

Eine Kontrollrechnung mit  $i = k = 2, 3$  führt zum gleichen Ergebnis, d. h. die Forderung (3.40) wird in diesem Fall erfüllt, die Anpassung an den Zugversuch ist exakt.

Zu untersuchen wäre noch die Möglichkeit, den Zugversuch in die Gleichung für  $\delta_M$  (3.59) einzuarbeiten.

Mit der Fließbedingung für den einachsigen Spannungszustand

$$F = \sigma^2 - \frac{3}{2} k_M^2 = 0 \quad (3.64)$$

und (3.45) bis (3.48) erhalten wir

$$\frac{dk_M^2}{dw_p} = \frac{4}{3} \sigma \frac{d\sigma}{dw_p} = \frac{4}{3} \sigma_0 \frac{E E_t}{E - E_t}. \quad (3.65)$$

Eingesetzt in (3.59) ergibt sich die gleiche Beziehung für  $\delta_M$  wie (3.63), beide hier gezeigten Möglichkeiten stimmen also überein.

Wir wollen das Stoffgesetz (3.58) noch umformen, mit einigen Gleichungen aus Kapitel 2.2 folgt nach kurzer Rechnung

$$\underline{\underline{S}}_k^o = 2G \left[ \underline{\underline{D}} + \dot{q} \underline{\underline{1}} - \sigma_M \frac{Sp(\underline{\underline{T}}_k \underline{\underline{D}})}{Sp(\underline{\underline{T}}_k^2)} \underline{\underline{T}}_k \right], \quad (3.66)$$

wobei die Abkürzung

$$\dot{q} = \left( \frac{K}{2G} - \frac{1}{3} \right) Sp(\underline{\underline{D}}) \quad (3.67)$$

für inkompressibles Material unbestimmt wird, siehe hierzu auch [3].

In Komponentenschreibweise lautet (3.66)

$$s_{k|o}^i = 2G \left[ d_k^i + \dot{q} \delta_k^i - \sigma_M \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} t_k^i \right]. \quad (3.68)$$

#### 4. Beschreibung der Grunddeformation

##### 4.1 Geometrie des dickwandigen Rohres

Wir wählen zur Beschreibung der Deformation ein raumfestes Zylinderkoordinatensystem

$$x^i = (r, \varphi, z) \quad (4.1)$$

und kennzeichnen die auf den undeformierten Ausgangszustand bezogenen Größen mit  $(\ )_0$

$$\overset{\circ}{x}^k = (r_0, \varphi_0, z_0) . \quad (4.2)$$

Während der Grunddeformation sollen

- a) Bewegungen von Körperpunkten nur in radialer und axialer Richtung erfolgen,
- b) ebene Querschnitte eben und
- c) kreiszylindrische Mantelflächen kreiszylindrisch bleiben.

Nach (2.2) können wir dann schreiben

$$r = r(r_0, t), \quad \varphi = \varphi(\varphi_0, t), \quad z = z(z_0, t). \quad (4.3)$$

Bedingung a) bedeutet weiterhin, daß Rotationen ausgeschlossen werden; es gilt somit

$$\varphi = \varphi_0 = \text{konst.} \quad (4.4)$$

Abb. 3 zeigt die Koordinatensysteme und Bezeichnungen am undeformierten und am deformierten Rohr.

Der Ortsvektor  $\underline{r}$  eines Punktes P hat die Komponenten

$$\begin{aligned} z^1 &= r \cos \varphi \\ z^2 &= r \sin \varphi \\ z^3 &= z \end{aligned} \quad (4.5)$$



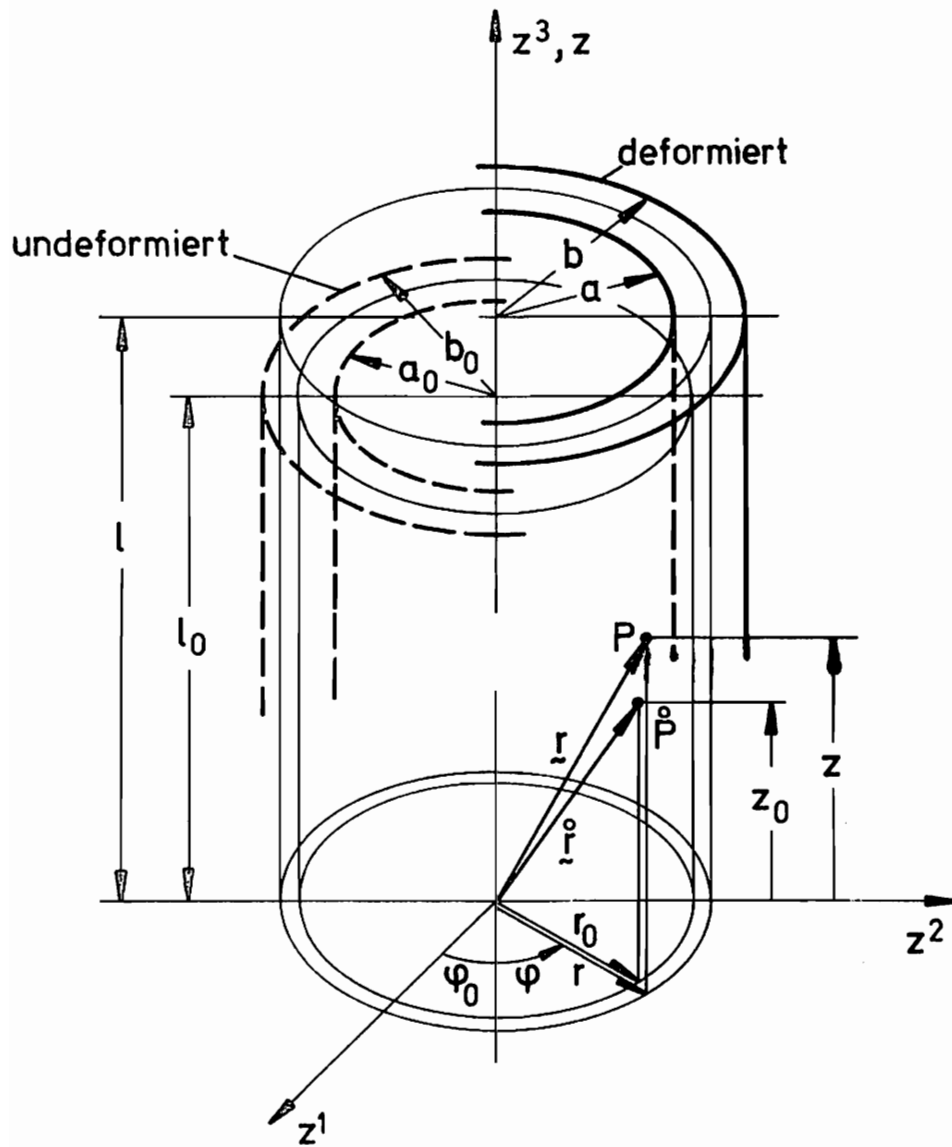


Abb. 3 Koordinatensysteme und Bezeichnungen

daraus ergeben sich mit (2.4) die Basisvektoren

$$\begin{aligned}\underline{g}_1 &= r \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_2 &= -r \sin \varphi \underline{e}_1 + r \cos \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_3 &= \underline{e}_3\end{aligned}\quad (4.6)$$

Die Metriktensoren erhalten wir aus (2.5) und (2.7)

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Unter Berücksichtigung von (4.4) läßt sich der Deformationsgradient (2.8) angeben

$$F^i_{.k} = \begin{pmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z^+ \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

mit den Abkürzungen

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial r_0} (\ ), \quad (\ )^+ = \frac{\partial}{\partial z_0} (\ ). \quad (4.9)$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors folgen aus (2.10) und (4.1)

$$v^i = (\dot{r}, 0, \dot{z}) . \quad (4.10)$$

Bilden wir die Christoffelsymbole (2.12) mit (4.7)

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad (4.11)$$

alle übrigen  $\Gamma_{jk}^i = 0$ , so können wir den Geschwindigkeitsgradienten (2.14) ermitteln

$$v^i|_k = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}^i}{r^i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{z}^+}{z^+} \end{pmatrix} . \quad (4.12)$$

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir auch mit (2.17) und (4.8). Da der Geschwindigkeitsgradient symmetrisch ist, erübrigt sich eine Aufspaltung nach (2.15), (2.16).

Die Verzerrungsgeschwindigkeit  $d_3^3$  in Axialrichtung wollen wir als unabhängig von den Koordinaten ansehen, d. h. wir setzen eine über die Rohrlänge konstante Längsdehnung voraus.

Damit folgt unmittelbar

$$\frac{\dot{z}^+}{z^+} = \frac{\dot{l}}{l} , \quad (4.13)$$

und der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit wird

$$d_k^i = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}^i}{r^i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{l}}{l} \end{pmatrix} . \quad (4.14)$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung

$$d_r^r = \frac{\dot{r}^i}{r^i} + \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{l}}{l} = 0 , \quad (4.15)$$

erhalten wir durch Integration nach der Zeit

$$r^i \frac{r}{r_0} \frac{l}{l_0} = 1 , \quad (4.16)$$

mit den Anfangswerten

$$r^i(t_0) = 1 , \quad r(t_0) = r_0 , \quad l(t_0) = l_0 . \quad (4.17)$$

Nach einer Variablentrennung läßt sich (4.16) nochmals integrieren

$$r_o^2 = \frac{l}{l_o} (r^2 - C_1) . \quad (4.18)$$

Der Parameter  $C_1$  kann eine Funktion der Zeit sein [30,25]. Für bekannte Werte  $C_1$  und  $l/l_o$  ist der Deformationszustand des dickwandigen Rohres vollständig bestimmt.

#### 4.2 Normierung der geometrischen Größen

Die numerische Berechnung und die Darstellung der Ergebnisse sollen später in dimensionslosen Kenngrößen durchgeführt werden. Als Bezugsgrößen wählen wir den Innenradius und den mittleren Radius.

Für den Grundzustand definieren wir als dimensionslose Variable

$$x = \frac{r}{a} , \quad (4.19)$$

sowie

$$\xi = \frac{b}{a} \quad (4.20)$$
$$\zeta = \frac{l}{R} , \quad R = \frac{a+b}{2}$$

als bezogene Rohrabmessungen.

Eine Gegenüberstellung beider Bezeichnungsmöglichkeiten ist aus Abb. 4 ersichtlich.

Der Parameter  $C_1$  läßt sich ebenfalls als bezogene Größe angeben

$$L_1 = \frac{C_1}{a^2} \quad (4.21)$$

Führen wir an dieser Stelle als Maß für die Verzerrung in Axialrichtung

$$L_2 = \frac{3}{2} \ln \frac{l}{l_o} \quad (4.22)$$

ein, so können wir den Deformationszustand des Rohres auch mit  $L_1$  und  $L_2$  beschreiben.

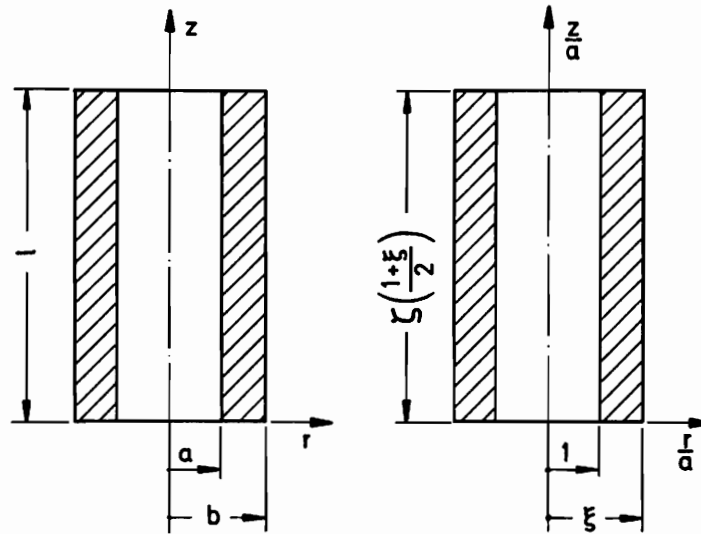


Abb. 4 Absolute und bezogene Rohrabmessungen

Für den Ausgangszustand definieren wir analog (4.20)

$$\xi_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad (4.23)$$

$$\zeta_0 = \frac{l_0}{R_0} \quad , \quad R_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad .$$

Wir formen (4.23) mit (4.18) bis (4.22) noch um, so daß nur bezogene Größen  $\xi$ ,  $\zeta$  und die Parameter  $L_1$ ,  $L_2$  auftreten

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\xi^2 - L_1}{1 - L_1}} \quad (4.24)$$

$$\zeta_0 = \zeta \frac{1 + \xi}{1 + \xi_0} \frac{\exp(-L_2)}{\sqrt{1 - L_1}} \quad .$$

## 5. Spannungen im Grundzustand

### 5.1 Allgemeines

Wie in Kapitel 3.4 bereits erwähnt, wollen wir die Berechnung der Spannungen im Grundzustand mit einem auf der Trescaschen Fließbedingung basierenden Stoffgesetz durchführen. Unter dieser Voraussetzung sind dann analytische Lösungen für die zur Verzweigungsberechnung benötigten Hauptspannungsdifferenzen möglich.

Im Gegensatz dazu ist die Ermittlung der Spannungen aus einem Stoffgesetz bei Verwendung der v. Misesschen Fließbedingung nur noch numerisch unter großem Aufwand durchführbar. In Verbindung mit der numerischen Lösung des Verzweigungsproblems, bei dem die Spannungen für jeden Integrationsschritt neu berechnet werden müssen, würde dabei die Rechenzeit auf ein unüberschaubares Maß anwachsen.

Bevor wir die drei möglichen Fälle des Stoffgesetzes, die wir nach der Fließbedingung (3.12) zu unterscheiden haben, im einzelnen untersuchen, wollen wir nochmals auf den Verfestigungsparameter  $\delta_T$  zurückkommen. Als Abkürzung für die Spannungsdifferenz, welche die Fließbedingung (3.22) erfüllt, führen wir ein

$$2\theta = \bar{\sigma}_n^n - \bar{\sigma}_t^t, \quad (5.1)$$

wobei ein übergesetzter Querstrich Spannungen kennzeichnet, die auf  $2G$  bezogen sind. Entsprechend folgt für die Fließspannung  $\sigma$  und die Streckgrenze  $\sigma_0$  des einachsigen Zugversuchs

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= 2\bar{k}_T = 2\theta \\ \bar{\sigma}_0 &= 2\bar{k}_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Damit können wir den Verfestigungsparameter  $\delta_T$  nach (3.42) mit dem Tangentenmodul (3.16) angeben

$$\sigma_T = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{k_0} - 1 \right)^{n-1}} \quad (5.3)$$

und den Verfestigungsparameter  $\sigma_T$  nach (3.50)

$$\sigma_T = 1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{E}{E} n \left( \frac{\theta}{k_0} - 1 \right)^{n-1}} \quad (5.4)$$

Wir müssen nun entscheiden, welche von den beiden Beziehungen für  $\sigma_T$  in den folgenden Rechnungen angewandt wird. Aufgrund der besseren Anpassung an den Zugversuch (siehe Kapitel 3.4) und der formalen Übereinstimmung mit  $\sigma_M$  nach (3.63) dürfte die Anwendung von  $\sigma_T$  nach (3.42) bzw. (5.3) gerechtfertigt sein. Versuchsweise wurden Lösungen des Verzweigungsproblems auch mit Gleichung (5.4) ermittelt. Dabei zeigte sich, daß die kritischen Spannungszustände und damit die kritischen Belastungen (Verzweigungslasten) mit denen von Gleichung (5.3) bei gleichem Grundzustand übereinstimmen. Die zugehörigen Ausgangszustände bzw. Grunddeformationen sind jedoch verschieden.  $\sigma_T$  nach (5.3) führt auf die kleineren Deformationen und stellt aus ingenieurmäßiger Sicht also die ungünstigere Lösung dar, man liegt "auf der sicheren Seite".

Der Spannungszustand läßt sich als Funktion der Koordinate  $r$  mit den gemischtvarianten Komponenten der Spannungstensoren und -deviatoren beschreiben

$$S_k^i = \sigma_k^i = \begin{pmatrix} \sigma_1^1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^3(r) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$t_k^i = \tau_k^i = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_1^1 - \sigma_2^2 - \sigma_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2^2 - \sigma_1^1 - \sigma_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^3 - \sigma_1^1 - \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

## 5.2 Spannungen für Fall 1: $\sigma_2^2 \geq \sigma_3^3 \geq \sigma_1^1$

Wir formulieren die Fließbedingung nach (3.21), (3.22)

$$F = (\sigma_2^2 - \sigma_1^1)^2 - 4k_T^2 = 0 \quad (5.7)$$

und die Komponenten von  $\underline{\beta}$  nach (3.24)

$$\beta_1^1 = -1, \quad \beta_2^2 = +1, \quad \beta_3^3 = 0. \quad (5.8)$$

Aus dem Stoffgesetz (3.33) folgt mit dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor (4.14)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1^1 &= 2G \frac{\dot{r}'}{r'} + \dot{q} - G \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right) \\ \dot{\sigma}_2^2 &= 2G \frac{\dot{r}}{r} + \dot{q} - G \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right) \\ \dot{\sigma}_3^3 &= 2G \frac{\dot{l}}{l} + \dot{q} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Entsprechend der in der Fließbedingung auftretenden Spannungsdifferenz bilden wir die Differenz der zugehörigen Inkremente, unter Beachtung von (5.1) erhalten wir

$$2\dot{\theta} = \dot{\sigma}_2^2 - \dot{\sigma}_1^1 = (1 - \delta_T) \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right). \quad (5.10)$$

Gleichung (5.10) läßt sich nach der Zeit integrieren, wobei zwischen rein elastischen Formänderungen ( $\delta_T = 0$ ) und elastoplastischen Formänderungen ( $\delta_T \neq 0$ ) zu unterscheiden ist. Im folgenden kennzeichnen wir Größen, die sich auf den Übergang (Grenze) von rein elastischen zu elastoplastischen Deformationen beziehen, mit  $( )_*$ .

### 5.2.1 Elastische Deformationen

Die Integration von (5.10) mit  $\delta_T = 0$

$$\int_{t_0}^t \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \frac{\dot{r}}{r} dt - \int_{t_0}^t \frac{\dot{r}'}{r'} dt \right) \quad (5.11)$$



führt mit den Anfangsbedingungen

$$t = t_0 : \bar{\sigma}_1^1 = \bar{\sigma}_2^2 = 0 \quad (5.12)$$

und der Inkompressibilitätsbedingung (4.16) bis (4.18) zu

$$\theta = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) , \quad (5.13)$$

d. h. die Spannungsdifferenz ist eine Funktion der Koordinate  $r$  und des Parameters  $C_1$ .

Für die Verzweigungsanalyse in Kapitel 6 benötigen wir weiterhin die partiellen Ableitungen nach dem Radius  $r$  von  $\theta(r)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \theta' &= -\frac{C_1}{r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right)} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \theta'' &= \frac{C_1(3r^2 - C_1)}{\left[ r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \right]^2} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Um Verwechslungen mit der partiellen Ableitung nach dem Radius  $r_0$  des Ausgangszustandes gemäß (4.9) zu vermeiden, halten wir fest, daß Ableitungen von  $\theta$  nur nach dem Radius  $r$  des Grundzustandes erfolgen.

### 5.2.2 Plastische Deformationen

Mit  $\sigma_r$  von (5.3) erhalten wir aus (5.10)

$$\int_{t_*}^t \left[ 1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{k_0} - 1 \right)^{n-1} \right] \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_*}^t \frac{\dot{r}}{r} dt - \int_{t_*}^t \frac{\dot{r}'}{r'} dt \right) \quad (5.15)$$

Die Integration beider Seiten ergibt mit den Anfangsbedingungen

$$t = t_* : \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1 = 2\bar{k}_0 \quad (5.16)$$

eine implizite Bestimmungsgleichung für  $\theta$

$$\theta + \frac{E}{B} \bar{k}_0 \left( \frac{\theta}{k_0} - 1 \right)^n + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) = 0 . \quad (5.17)$$

Bei beliebigen, reellen Exponenten  $n$  ermitteln wir  $\theta$  nach dem Newtonschen Näherungsverfahren, als Startwert wählen wir die Lösung für den ganzzahligen Exponenten  $n = 2$

$$\theta_{St} = \bar{k}_o - \frac{\bar{k}_o}{2} \frac{B}{E} \sqrt{\frac{\bar{k}_o}{2} \frac{B}{E} \left[ \frac{\bar{k}_o}{2} \frac{B}{E} - 2\bar{k}_o - \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \right]} . \quad (5.18)$$

Differentiation nach dem Radius  $r$  von (5.17) führt zu

$$\theta' = - \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{\bar{k}_o} - 1 \right)^{n-1}} \frac{C_1}{r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right)} \quad (5.19)$$

$$\theta'' = \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{\bar{k}_o} - 1 \right)^{n-1}} \left[ \frac{C_1 (3r^2 - C_1)}{\left[ r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \right]^2} - \frac{E}{B} \frac{n(n-1)}{\bar{k}_o} \left( \frac{\theta}{\bar{k}_o} - 1 \right)^{n-2} \theta'^2 \right] .$$

### 5.2.3 Zusammenstellung der Spannungsdifferenzen

Aus der noch zur Verfügung stehenden dritten Gleichung von (5.9) folgt

$$\bar{\sigma}_3^3 = \frac{\bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_2^2}{2} + \frac{3}{2} \ln \frac{l}{l_o} . \quad (5.20)$$

Damit lassen sich die Spannungsdifferenzen und deren Ableitungen aufstellen, wobei  $L_2$  nach (4.22) eingesetzt wird

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) &= 2\theta, & (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' &= 2\theta' \\ (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) &= \theta - L_2, & (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)' &= \theta' \\ (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) &= \theta + L_2, & (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' &= \theta', & (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' &= \theta'' . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Der Spannungszustand ist für vorgegebene Werkstoffkennwerte  $E$ ,  $B$ ,  $n$  nur abhängig von den Parametern  $C_1$  ( $L_1$ ) und  $L_2$ , ebenso wie die zugehörige Deformation (siehe (4.18)).

### 5.2.4 Elastoplastische Grenze

Wird das dickwandige Rohr mit Druck beaufschlagt, breitet sich nach Erreichen der Fließgrenze am Innenrand von dort

beginnend eine elastoplastische Zone aus, die bei weiterer Drucksteigerung zum Außenrand wandert, bis das Rohr vollständig plastisch deformiert ist. An der Grenze zwischen elastoplastischen und rein elastischen Formänderungen wird die Fließbedingung (5.7) erstmals erfüllt, d. h.

$$\theta = \bar{k}_0 \quad (5.22)$$

Ist der Deformations- bzw. Spannungszustand durch  $C_1$  vorgegeben, so erhalten wir aus (5.13) oder (5.17) mit (5.22) den elastoplastischen Grenzradius

$$r_* = \sqrt{\frac{C_1}{1 - \exp(-2\bar{k}_0)}} \quad (5.23)$$

Folgende Möglichkeiten sind zu unterscheiden:

- a)  $r_* \leq a$ : rein elastische Formänderungen von  $a \leq r \leq b$ .
- b)  $a < r_* < b$ : elastoplastische Formänderungen von  $a \leq r < r_*$ , rein elastische Formänderungen von  $r_* \leq r \leq b$ .
- c)  $r_* \geq b$ : nur elastoplastische Formänderungen von  $a \leq r \leq b$ .

### 5.2.5 Gültigkeitsbereich

Den Gültigkeitsbereich von (5.7) stellen wir als Funktion der Parameter  $C_1$  ( $L_1$ ) und  $L_2$  dar, aus (5.21) folgt

$$\bar{\sigma}_3^3 \leq \bar{\sigma}_2^2 : L_2 \leq \theta \quad (5.24)$$

$$\bar{\sigma}_3^3 \geq \bar{\sigma}_1^1 : L_2 \geq -\theta$$

Da  $\theta = \theta(C_1, r)$ , ist (5.24) eine obere und untere Grenze für  $L_2$  in Abhängigkeit von  $C_1, r$ .

### 5.2.6 Gleichgewicht

Gleichung (2.34) führt mit den Christoffelsymbolen (4.11) und dem auf 2G bezogenen Spannungstensor (5.5) zu

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1^1}{\partial r} + \frac{1}{r} (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) = 0, \quad (5.25)$$

der Bedingung des radialen Gleichgewichts.

Es gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} r = a : \quad \bar{\sigma}_1^1 &= -\bar{p} \\ r = b : \quad \bar{\sigma}_1^1 &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.26)$$

damit erhalten wir aus (5.25)

$$\bar{\sigma}_1^1 = 2 \int_a^r \theta \frac{dr}{r} - \bar{p} . \quad (5.27)$$

Entsprechend der elastoplastischen Grenze  $r_*$  (5.23) wird die Integration bereichsweise mit  $\theta$  nach (5.13) oder mit  $\theta$  nach (5.17) durchgeführt.

$\bar{\sigma}_2^2$ ,  $\bar{\sigma}_3^3$  ermitteln wir dann aus den Spannungsdifferenzen (5.21).

### 5.2.7 Innendruck, Axialkraft

Die zweite Randbedingung von (5.26) liefert mit (5.27) den Innendruck

$$\bar{p} = 2 \int_a^b \theta \frac{dr}{r} , \quad (5.28)$$

die Integration von  $\bar{\sigma}_3^3$  über den Rohrquerschnitt ergibt die Axialkraft

$$\bar{N} = 2 \pi \int_a^b \bar{\sigma}_3^3 r dr . \quad (5.29)$$

Mit (5.21), (5.27) und (5.28) läßt sich (5.29) schreiben

$$\bar{N} = 2 \pi \left[ 2 \int_a^b \left( \int_a^r \theta \frac{dr}{r} \right) r dr + \int_a^b \theta r dr + (L_2 - \bar{p}) \frac{b^2 - a^2}{2} \right]. \quad (5.30)$$

Wir wollen Gleichung (5.30) noch vereinfachen. Dazu betrachten wir das dickwandige Rohr im ebenen Verzerrungszustand, d. h. die Verzerrungsgeschwindigkeitskomponente  $d_3^3$  in (4.14) wird Null. Dann folgt mit (5.20) sofort

$$\bar{N}_{\bar{p}} = 2 \pi \int_a^b \frac{\bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_2^2}{2} r dr. \quad (5.31)$$

Für die Annahme elastischer und plastischer Inkompressibilität - und nur dann - führt die Auswertung von (5.31) zu

$$\bar{N}_{\bar{p}} = \pi a^2 \bar{p}, \quad (5.32)$$

einer Kraft, die der Wirkung des Druckes  $\bar{p}$  auf die innere Querschnittsfläche  $\pi a^2$  entspricht (siehe hierzu [23, 26, 34]).

Dies bedeutet, daß der ebene Verzerrungszustand des Rohres hier einem Rohr mit geschlossenen Enden gleichkommt.

Da wir die axiale Verzerrungsgeschwindigkeit  $d_3^3$  als unabhängig von den Koordinaten eingeführt haben, können wir die axiale Dehnung  $1/l_0$  als eine dem ebenen Verzerrungszustand überlagerte, zusätzliche Dehnung ansehen. Damit erhalten wir die vom Innendruck unabhängige Axialkraft

$$\bar{T} = \bar{N} - \bar{N}_{\bar{p}} = 2 \pi \int_a^b \bar{\sigma}_3^3 r dr - \pi a^2 \bar{p} \quad (5.33)$$

und mit (5.20), (5.31) schließlich

$$\bar{T} = \pi (b^2 - a^2) L_2. \quad (5.34)$$

Für elastoplastisches Werkstoffverhalten mit linearer Verfestigung wird in [25] dasselbe Ergebnis gezeigt.

### 5.3 Spannungen für Fall 2: $\sigma_3^3 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^1$

Die Rechnung erfolgt analog dem Vorgehen in Kapitel 5.2.  
Wir erhalten die Fließbedingung

$$F = (\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2 - 4k_T^2 = 0 \quad (5.35)$$

und die Komponenten von  $\underline{\beta}$

$$\beta_1^1 = -1, \quad \beta_2^2 = 0, \quad \beta_3^3 = +1 \quad (5.36)$$

Aus dem Stoffgesetz folgt

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1^1 &= 2G \frac{\dot{r}'}{r'} + \dot{q} + G \delta_T \left( \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right) \\ \dot{\sigma}_2^2 &= 2G \frac{\dot{r}}{r} + \dot{q} \\ \dot{\sigma}_3^3 &= 2G \frac{\dot{l}}{l} + \dot{q} - G \delta_T \left( \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

und daraus

$$2\dot{\theta} = \dot{\sigma}_3^3 - \dot{\sigma}_1^1 = (1 - \delta_T) \left( \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{r}'}{r'} \right) . \quad (5.38)$$

#### 5.3.1 Elastische Deformationen

Die Integration von (5.38) mit  $\delta_T = 0$

$$\int_{t_0}^t \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \frac{\dot{l}}{l} dt - \int_{t_0}^t \frac{\dot{r}'}{r'} dt \right) , \quad (5.39)$$

ergibt mit den Anfangsbedingungen

$$t = t_0 : \bar{\sigma}_1^1 = \bar{\sigma}_3^3 = 0 , \quad (5.40)$$

sowie (4.16) bis (4.18) schließlich

$$\theta = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) - L_2 \right] \quad (5.41)$$

Die partiellen Ableitungen werden

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \theta' = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{r^3 \left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right)} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \theta'' = \frac{1}{2} \frac{C_1(3r^2 - C_1)}{\left[r^3 \left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right)\right]^2} .$$

### 5.3.2 Plastische Deformationen

Mit  $\sigma_r$  von (5.3) folgt aus (5.38)

$$\int_{t_*}^t \left[1 + \frac{E}{B} n \left(\frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1\right)^{n-1}\right] \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_*}^t \frac{\dot{t}}{t} dt - \int_{t_*}^t \frac{\dot{r}'}{r'} dt \right) . \quad (5.43)$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$t = t_* : \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1 = 2\bar{k}_0 , \quad (5.44)$$

damit erhalten wir aus (5.43)

$$\theta + \frac{E}{B} \bar{k}_0 \left(\frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1\right)^n + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) - L_2 \right] . \quad (5.45)$$

Zur numerischen Lösung wird ein Startwert ähnlich (5.18) gewählt.

Die partiellen Ableitungen werden

$$\theta' = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left(\frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1\right)^{n-1}} \frac{C_1}{r^3 \left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right)} \quad (5.46)$$

$$\theta'' = \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left(\frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1\right)^{n-1}} \left[ \frac{1}{2} \frac{C_1(3r^2 - C_1)}{\left[r^3 \left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right)\right]^2} - \frac{E}{B} \frac{n(n-1)}{\bar{k}_0} \left(\frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1\right)^{n-2} \theta'^2 \right] .$$

### 5.3.3 Zusammenstellung der Spannungsdifferenzen

Die Integration der zweiten Gleichung von (5.37) ergibt

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{\bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_3^3}{2} - \frac{1}{2} L_2 - \frac{3}{4} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right), \quad (5.47)$$

daraus folgen die Spannungsdifferenzen und deren Ableitungen

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) &= \theta - \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \right] \\ (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' &= \theta' - \frac{3}{2} \frac{C_1}{r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right)} \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) = (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) - 2\theta, \quad (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)' = (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' - 2\theta'$$

$$(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) = 2\theta, \quad (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' = 2\theta', \quad (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' = 2\theta'' .$$

### 5.3.4 Elastoplastische Grenze

Gleichung (5.41) führt mit (5.22) zu dem Grenzradius

$$r_* = \sqrt{\frac{C_1}{1 - \exp(-4k_0 + 2L_2)}} . \quad (5.49)$$

Neben den Fällen a) bis c) aus Kapitel 5.2.4 ist hier zu beachten, daß für  $L_2 \geq 2k_0$  unabhängig von  $C_1$  kein elastischer Bereich mehr möglich ist, da infolge der Längsspannung (ausgedrückt durch  $L_2$ ) die Fließgrenze erreicht wird.

### 5.3.5 Gültigkeitsbereich

Den Gültigkeitsbereich von (5.34) erhalten wir aus (5.48)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2^2 \geq \bar{\sigma}_1^1 : \quad L_2 &\leq 2\theta - \frac{3}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \\ \bar{\sigma}_2^2 \leq \bar{\sigma}_1^1 : \quad L_2 &\geq -2\theta - \frac{3}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Da  $C_1$  nur positive Werte annimmt, läßt sich abschätzen, daß  $L_2 \geq 0$  wird.



### 5.3.6 Gleichgewicht

Aus (5.25), (5.26) ermitteln wir mit (5.48) die Radialspannung

$$\bar{\sigma}_1 = \int_a^r \theta \frac{dr}{r} - \frac{3}{4} \int_a^r \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} - \frac{1}{2} L_2 \ln \frac{r}{a} - \bar{p} , \quad (5.51)$$

die Spannungen  $\bar{\sigma}_2^2$ ,  $\bar{\sigma}_3^3$  folgen aus (5.48).

### 5.3.7 Innendruck, Axialkraft

Der Innendruck wird nach (5.26), (5.51)

$$\bar{p} = \int_a^b \theta \frac{dr}{r} - \frac{3}{4} \int_a^b \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} - \frac{1}{2} L_2 \ln \frac{b}{a} \quad (5.52)$$

und die Axialkraft nach (5.29), (5.48)

$$\begin{aligned} \bar{N} = 2\pi & \left[ \int_a^b \left( \int_a^r \theta \frac{dr}{r} \right) r dr \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \int_a^b \left( \int_a^r \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} \right) r dr + 2 \int_a^b \theta r dr \right] \\ & - \pi \left[ (b^2 - a^2) \bar{p} + L_2 \left( \frac{b^2}{2} \ln \frac{b}{a} - \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

### 5.4 Spannungen für Fall 3: $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^1 \geq \sigma_3^3$

Die Fließbedingung lautet

$$F = (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)^2 - 4k_T^2 = 0 \quad (5.54)$$

und die Komponenten von  $\underline{\beta}$

$$\beta_1^1 = 0, \quad \beta_2^2 = +1, \quad \beta_3^3 = -1 . \quad (5.55)$$

Damit erhalten wir aus dem Stoffgesetz (3.33)

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1^1 &= 2G \frac{\dot{r}'}{r'} + \dot{q} \\ \dot{\sigma}_2^2 &= 2G \frac{\dot{r}}{r} + \dot{q} - G \delta_T \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{l}}{l} \right) \\ \dot{\sigma}_3^3 &= 2G \frac{\dot{l}}{l} + \dot{q} + G \delta_T \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{l}}{l} \right)\end{aligned}\quad (5.56)$$

und daraus

$$2\dot{\theta} = \dot{\sigma}_2^2 - \dot{\sigma}_3^3 = (1 - \delta_T) \left( \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{l}}{l} \right) . \quad (5.57)$$

#### 5.4.1 Elastische Deformationen

Aus (5.57) folgt mit  $\delta_T = 0$

$$\int_{t_*}^t \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_*}^t \frac{\dot{r}}{r} dt - \int_{t_*}^t \frac{\dot{l}}{l} dt \right) . \quad (5.58)$$

Die Integration führt mit den Anfangsbedingungen

$$t = t_0 : \dot{\sigma}_2^2 = \dot{\sigma}_3^3 = 0 , \quad (5.59)$$

sowie (4.16) bis (4.18) zu

$$\theta = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) + L_2 \right] . \quad (5.60)$$

Die partiellen Ableitungen nach  $r$  von (5.60) stimmen überein mit den Ableitungen von (5.41), d. h.  $\theta'$ ,  $\theta''$  wie (5.42).

#### 5.4.2 Plastische Deformationen

Mit  $\delta_T$  nach (5.3) ergibt sich aus (5.57)

$$\int_{t_*}^t \left[ 1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{k_0} - 1 \right)^{n-1} \right] \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{t_*}^t \frac{\dot{r}}{r} dt - \int_{t_*}^t \frac{\dot{l}}{l} dt \right) . \quad (5.61)$$

und mit den Anfangsbedingungen

$$t = t_*: \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3 = 2\bar{k}_o \quad (5.62)$$

liefert die Integration

$$\theta + \frac{E}{B} n \bar{k}_o \left( \frac{\theta}{\bar{k}_o} - 1 \right)^n + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) + L_2 \right] . \quad (5.63)$$

Die Ableitungen  $\theta'$ ,  $\theta''$  sind (5.46) zu entnehmen.

### 5.4.3 Zusammenstellung der Spannungsdifferenzen

Aus der ersten Gleichung von (5.56) läßt sich

$$\bar{\sigma}_1^1 = \frac{\bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^3}{2} - \frac{1}{2} L_2 + \frac{3}{4} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \quad (5.64)$$

herleiten. Damit folgt

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) &= \theta - \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) - L_2 \right] \\ (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' &= \theta' - \frac{3}{2} \frac{C_1}{r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right)} \\ (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) &= 2\theta, \quad (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)' = 2\theta' \\ (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) &= (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) - 2\theta, \quad (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' = (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' - 2\theta' \\ (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' &= -\theta'' + \frac{3}{2} \frac{C_1(3r^2 - C_1)}{\left[ r^3 \left( 1 - \frac{C_1}{r^2} \right) \right]^2} . \end{aligned} \quad (5.65)$$

### 5.4.4 Elastoplastische Grenze

Der Grenzradius wird nach (5.60) und (5.22)

$$r_* = \sqrt{\frac{C_1}{1 - \exp(-4\bar{k}_o - 2L_2)}} . \quad (5.66)$$

Für  $L_2 \leq 2k_o$  ist unabhängig von  $C_1$  kein elastischer Bereich möglich.

### 5.4.5 Gültigkeitsbereich

Aus (5.65) erhalten wir die Grenzen

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1^1 \leq \bar{\sigma}_2^2 : \quad L_2 \geq -2\theta + \frac{3}{2} \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \\ \bar{\sigma}_1^1 \geq \bar{\sigma}_3^3 : \quad L_2 \leq 2\theta + \frac{3}{2} \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) . \end{aligned} \quad (5.67)$$

Für positive Werte von  $C_1$  wird  $L_2 < 0$ .

### 5.4.6 Gleichgewicht

Die Bedingung des radialen Gleichgewichts (5.25) führt zu

$$\bar{\sigma}_1^1 = \int_a^r \theta \frac{dr}{r} - \frac{3}{4} \int_a^r \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} + \frac{1}{2} L_2 \ln \frac{r}{a} - \bar{p}, \quad (5.68)$$

die Spannungen  $\bar{\sigma}_2^2, \bar{\sigma}_3^3$  lassen sich aus (5.65) ermitteln.

### 5.4.7 Innendruck, Axialkraft

Der Innendruck folgt aus (5.26), (5.68)

$$\bar{p} = \int_a^b \theta \frac{dr}{r} - \frac{3}{4} \int_a^b \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} + \frac{1}{2} L_2 \ln \frac{b}{a} \quad (5.69)$$

und die Axialkraft aus (5.29), (5.65)

$$\begin{aligned} \bar{N} = 2\pi \left[ \int_a^b \left( \int_a^r \theta \frac{dr}{r} \right) r dr - \frac{3}{4} \int_a^b \left( \int_a^r \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) \frac{dr}{r} \right) r dr \right. \\ \left. - \int_a^b \theta r dr - \frac{3}{4} \int_a^b \ln\left(1 - \frac{C_1}{r^2}\right) r dr \right] \\ + \pi \left[ L_2 \left( \frac{b^2}{2} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \right) - (b^2 - a^2) \bar{p} \right] . \end{aligned} \quad (5.70)$$

### 5.5 Belastungsbedingung

Setzen wir in die Belastungsbedingung (3.10) die Gleichungen (3.22) und (3.24) ein, so folgt mit (5.1) unmittelbar

$$\theta \dot{\theta} \geq 0 . \quad (5.71)$$

Für unsere Berechnungen wollen wir davon ausgehen, daß während der Grunddeformation keine Entlastungen oder Belastungsumkehrungen stattfinden und daß bei Laststeigerungen die jeweilige Fließbedingung (Fall 1, 2 oder 3) bzw. die zugehörige Spannungsrestriktion (3.21) eingehalten wird.

## 6. Verzweigungsanalyse

### 6.1 Allgemeines

In Kapitel 2.1 wurde bereits erläutert, wann eine Verzweigung des Gleichgewichts vorliegt. Wir nehmen nun einen beliebigen Grundzustand als Ausgangspunkt möglicher weiterer Deformationen an, Spannungen und Verzerrungen aus der Grunddeformation seien bekannt. Da die Bestimmung des Verzweigungspunktes durch eine Betrachtung der Geschwindigkeitsfelder erfolgt, brauchen weiterführende Deformationen nicht berechnet zu werden. Somit fallen für die folgenden Herleitungen aktuelle und Referenzkonfiguration zusammen. Aus (2.8) und (2.18) folgt dann - unabhängig von der vereinbarten Inkompressibilität des Werkstoffs -

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} \quad , \quad \underline{\underline{J}} = 1 \quad . \quad (6.1)$$

Der Lagrangesche Spannungstensor nach (2.23) wird

$$\underline{\underline{S}}_L = \underline{\underline{S}}_K = \underline{\underline{S}} \quad . \quad (6.2)$$

Die Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts (2.37) läßt sich mit (2.31) und (6.1) schreiben

$$\text{Div } \dot{\underline{\underline{S}}}_L = 0 \quad . \quad (6.3)$$

Wir führen ein beliebiges, mit den Randbedingungen des Systems verträgliches Geschwindigkeitsfeld  $\underline{v}$  ein. Zur Herleitung von  $\dot{\underline{\underline{S}}}_L$  müssen wir dann ein Stoffgesetz verwenden, das solche beliebigen Geschwindigkeitsfelder und damit auch beliebige Formänderungen erfaßt, also Stoffgesetz (3.58) bzw. (3.66). Das zur Berechnung der Grunddeformation angewandte Stoffgesetz (3.33) ist auf koaxiale Formänderungen in Richtung der Hauptspannungen beschränkt und erfüllt diese Voraussetzungen nicht.

Die Anwendung zweier Stoffgesetze, denen unterschiedliche

Fließbedingungen zugrunde liegen, stellt eine gewisse Inkonsistenz in der Berechnung des vorliegenden Problems dar, jedoch ist eine andere Vorgehensweise für elastoplastisches Werkstoffverhalten nicht ohne weiteres möglich, siehe auch die Hinweise in den Kapiteln 3.4, 5.1, 8.2.3.

## 6.2 Feldgleichungen

Aus dem Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v} = v_i \underline{g}^i = u \underline{g}^1 + v \underline{g}^2 + w \underline{g}^3 \quad (6.4)$$

erhalten wir mit (2.14) und (4.7), (4.11) den Geschwindigkeitsgradienten

$$v^i{}_{/k} = \begin{pmatrix} u' & u^* - \frac{v}{r} & u^+ \\ \frac{1}{r^2} \left( v' - \frac{v}{r} \right) & \frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} & \frac{v^+}{r^2} \\ w' & w^* & w^+ \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Als Abkürzung verwenden wir

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial r} (\quad), \quad (\quad)^* = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\quad), \quad (\quad)^+ = \frac{\partial}{\partial z} (\quad). \quad (6.6)$$

Es folgt mit (2.15) und (2.16) der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_k^i = \begin{pmatrix} u' & \frac{1}{2}(u^* + v' - 2\frac{v}{r}) & \frac{1}{2}(u^+ + w') \\ \frac{1}{2r^2}(u^* + v' - 2\frac{v}{r}) & \frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2r^2}(v^+ + w^*) \\ \frac{1}{2}(u^+ + w') & \frac{1}{2}(v^+ + w^*) & w^+ \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

und der Tensor der Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega^i_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u^* - v') & \frac{1}{2}(u^+ - w') \\ -\frac{1}{2r^2}(u^* - v') & 0 & \frac{1}{2r^2}(v^+ - w^*) \\ -\frac{1}{2}(u^+ - w') & -\frac{1}{2}(v^+ - w^*) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Die Forderung nach fortgesetztem Gleichgewicht (2.38) führt mit dem Stoffgesetz (3.66) zu der Bedingung, der alle möglichen Geschwindigkeitsfelder  $\underline{y}$  unterworfen sind, unter Beachtung von (6.2), (6.3)

$$\text{Div } \dot{\underline{S}}_L = \text{Div} \left[ 2G \left( \underline{D} + \dot{q} \underline{1} - \sigma_M \frac{\text{Sp}(\underline{T} \underline{D})}{\text{Sp}(\underline{T}^2)} \underline{T} \right) + \underline{W} \underline{S} - \underline{S} \underline{D} \right] = 0 \quad (6.9)$$

und in gemischtvarianten Komponenten mit (2.39), (3.68)

$$\dot{S}_{Lk}^i |_{i} = \left[ 2G \left( d_k^i + \dot{q} \delta_k^i - \sigma_M \frac{\tau_s^r d_r^s}{\tau_s^r \tau_r^s} \tau_k^i \right) + \omega_k^r \sigma_r^i - \sigma_k^r d_r^i \right] |_{i} = 0. \quad (6.10)$$

Da die Spannungen im Grundzustand allgemein durch (5.5), (5.6) gegeben sind, lassen sich die Komponenten von  $\dot{S}_{Lk}^i$  ermitteln.

Wir setzen im folgenden

$$\frac{3}{2} Q = \sigma_M \frac{\tau_s^r d_r^s}{\tau_s^r \tau_r^s} = \sigma_M \frac{\sigma_1^1 u^1 + \sigma_2^2 \left( \frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} \right) + \sigma_3^3 w^+}{\frac{1}{3} [(\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^3)^2 + (\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2]} \quad (6.11)$$

und erhalten nach einiger Rechnung  $\dot{S}_{Lk}^i$  (6.12).



$$\dot{S}_{L_k}^i = \left[ \begin{array}{c|c|c} 2G[u'+\dot{q}-\frac{Q}{2}(2\sigma_1'-\sigma_2'^2-\sigma_3'^3)] & 2G[\frac{1}{2r^2}(u^*+v'-2\frac{v}{r})] & 2G[\frac{1}{2}(v^++w^*)] \\ -\sigma_1'u' & +\frac{1}{2r^2}[\sigma_2^2(u^*-v')-\sigma_1'(u^*+v'-2\frac{v}{r})] & +\frac{1}{2}[\sigma_3^3(u^*-w')-\sigma_1'(u^++w')] \\ \hline 2G[\frac{1}{2}(u^*+v'-2\frac{v}{r})] & 2G[\frac{v^*}{r^2}+\frac{v}{r}+\dot{q}-\frac{Q}{2}(2\sigma_2'^2-\sigma_1'-\sigma_3'^3)] & 2G[\frac{1}{2}(v^++w^*)] \\ -\frac{1}{2}[\sigma_1'(u^*-v')+\sigma_2^2(u^*+v'-2\frac{v}{r})] & -\sigma_2^2(\frac{v^*}{r^2}+\frac{v}{r}) & +\frac{1}{2}[\sigma_3^3(v^*-w^*)-\sigma_2^2(v^++w^*)] \\ \hline 2G[\frac{1}{2}(w'+u^*)] & 2G[\frac{1}{2r^2}(v^++w^*)] & 2G[w^*+\dot{q}-\frac{Q}{2}(2\sigma_3'^3-\sigma_1'-\sigma_2'^2)] \\ -\frac{1}{2}[\sigma_1'(u^*-w')+\sigma_3^3(u^++w')] & -\frac{1}{2r^2}[\sigma_2^2(v^*-w^*)+\sigma_3^3(v^++w^*)] & -\sigma_3^3w^+ \end{array} \right]$$

(6.12)

Die Divergenz von  $\dot{S}_{Lk}^i$  (6.12) wird entsprechend (2.35) ermittelt. Unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung

$$d_r^r = u' + \frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} + w^+ = 0 \quad (6.13)$$

und deren partielle Ableitungen gemäß (6.6), sowie der Bedingung des radialen Gleichgewichts (5.25), gelangen wir zu drei linearen, partiellen Differentialgleichungen, den sogenannten Feldgleichungen

$$\begin{aligned} & \left( \Delta u - 2 \frac{v^*}{r^3} \right) (1 - \bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_3^3) + 2 \dot{q}' \\ & + \frac{1}{r^2} (u^{**} - v^{*'}) (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) + \frac{2}{r} (2u' + w^+) (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) \quad (6.14) \\ & + \frac{3}{r} Q (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) - [Q (2\sigma_1^1 - \sigma_2^2 - \sigma_3^3)]' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ r \Delta \left( \frac{v}{r} \right) + 2 \frac{u^*}{r} \right] (1 - \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^3) + \dot{q}^* \\ & + \left( v'' - u^{*'} + \frac{u^*}{r} - \frac{v'}{r} \right) (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_3^3) + \left( u^* + v' - 2 \frac{v}{r} \right) (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2)' \quad (6.15) \\ & - Q^* (2\sigma_2^2 - \sigma_1^1 - \sigma_3^3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \Delta w + \frac{w}{r^2} \right) (1 - \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^3) + \dot{q}^+ \\ & + \left( w'' + \frac{w'}{r} - u^+ + \frac{u^+}{r} \right) (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) + (u^+ - w') (\sigma_1^1 - \sigma_3^3)' \quad (6.16) \\ & - Q^+ (2\sigma_3^3 - \sigma_1^1 - \sigma_2^2) = 0, \end{aligned}$$

wobei als Operator

$$\Delta ( ) = \left\{ \frac{1}{r} [r ( )]' \right\}' + ( )^{++} + \frac{1}{r^2} ( )^{**} \quad (6.17)$$

angewandt wird.

Eine spezielle Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems ist das Geschwindigkeitsfeld der Grunddeformation, kurz "Grundlösung" genannt. Die "Verzweigungslösung" wäre dementsprechend ein Geschwindigkeitsfeld, welches ebenfalls eine Lösung des Differentialgleichungssystems darstellt, jedoch auf andere Deformationen als die Grundlösung führt. SHANLEY zeigt in [5] am Beispiel eines Knickstabes, daß die wirkliche Deformation am Verzweigungspunkt eine Überlagerung aus Fortführung der Grunddeformation und "Verzweigungsdeformation" ist. Beziehen wir diese Erkenntnis auf das vorliegende Problem, so muß die physikalisch sinnvolle Lösung eine Linearkombination aus Grund- und Verzweigungslösung sein. Wir kommen später noch darauf zurück.

Im folgenden betrachten wir nur die Verzweigungslösung mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

### 6.3 Randbedingungen zu den Feldgleichungen

Für das dickwandige Rohr benötigen wir Kräfte- und Momentenrandbedingungen sowohl für die Rohrenden als auch für die Rohrinnen- und -außenflächen. Wir beziehen alle Größen auf die Referenzkonfiguration des Grundzustandes, d. h. wir verwenden den Lagrangeschen Spannungstensor.

Liegt richtungstreue Belastung einer Fläche vor, wie etwa an den Rohrenden (durch die Axialkraft), so gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_L \underline{n}_L &= \underline{f} \\ \dot{\underline{\underline{S}}}_L \underline{n}_L &= \dot{\underline{f}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Erfolgt die Belastung einer Fläche durch hydrostatischen Druck, muß die Veränderung der Flächennormalen gegenüber der Ausgangslage bei der Zeitableitung berücksichtigt werden (siehe auch [19]), mit (2.31) und (6.1) erhalten wir

$$\underline{\dot{S}}_L \underline{n}_L = -\rho \underline{n}_L \quad (6.19)$$

$$\underline{\dot{S}}_L \underline{n}_L = -\dot{\rho} \underline{n}_L + \rho [\underline{n}_L \underline{U} - \text{Sp}(\underline{D}) \underline{n}_L] .$$

Die zeitlichen Änderungen der Belastungen werden als klein vorausgesetzt. Somit können wir in der zweiten Gleichung von (6.19) die zeitliche Änderung des Druckes gegenüber dem Anteil aus der zeitlichen Änderung des Flächennormalenvektors vernachlässigen.

### 6.3.1 Rohrenden $z = 0, 1$

Es genügt die Betrachtung eines Rohrendes, z. B.  $z = 1$ , mit dem Flächennormalenvektor

$$\underline{n}_L = \underline{g}^3 . \quad (6.20)$$

Die Axialkraft  $N$  hat ebenfalls die Richtung  $\underline{g}^3$ , so daß aus der ersten Bedingung von (6.18) keine neue Aussage erfolgt, sondern mit

$$\underline{\sigma}_3^3 \neq 0, \quad \underline{\sigma}_1^3 = \underline{\sigma}_2^3 = 0 \quad (6.21)$$

nur der vorhandene Spannungsgrundzustand (5.5) bestätigt wird.

Aus der Zeitableitung erhalten wir

$$\underline{\dot{f}} = \dot{f} \underline{g}^3 = \dot{S}_{Lk}^{\cdot 3} \underline{g}^k \quad (6.22)$$

und durch Vergleich der Komponenten

$$\dot{S}_{L3}^{\cdot 3} \neq 0, \quad \dot{S}_{L1}^{\cdot 3} = \dot{S}_{L2}^{\cdot 3} = 0 . \quad (6.23)$$

Ausgeschrieben lauten die Bedingungen für  $z = 0, 1$

$$u^+ (1 - \bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_3^3) + w^1 (1 - \bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_3^3) = 0 \quad (6.24)$$

$$v^+ (1 - \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^3) + w^* (1 - \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) = 0 .$$

Weiterhin fordern wir, daß das Geschwindigkeitsfeld an den Rohrenden keine Komponente in Axialrichtung hat, also

$$w = 0 ; \quad (6.25)$$

damit schließen wir Längenänderungen des Rohrteilstücks (Beullänge) durch die Verzweigung aus.

### 6.3.2 Rohrinnenfläche $r = a$

Die druckbeaufschlagte Innenfläche des Rohres hat den Flächennormalenvektor

$$\underline{n}_L = -\underline{g}^1 , \quad (6.26)$$

aus der ersten Gleichung von (6.19) folgt dann

$$\sigma_1^1 = -p , \quad \sigma_2^1 = \sigma_3^1 = 0 . \quad (6.27)$$

Dies stimmt überein mit den Spannungen des Grundzustandes, vergleiche (5.5), (5.26).

Für inkompressibles Material führt die zweite Gleichung von (6.19) zu der Beziehung

$$\dot{S}_{Lk}^1 = pV^1|_k , \quad (6.28)$$

und mit (6.5), (6.12) gelangen wir zu

$$\begin{aligned} u' + \dot{q} - \frac{Q}{2}(2\sigma_1^1 - \sigma_2^2 - \sigma_3^3) &= 0 \\ (u^* + v' - 2\frac{V}{r})(1 + \bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) &= 0 \\ (w' + u^+)(1 + \bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_3^3) &= 0 . \end{aligned} \quad (6.29)$$

### 6.3.3 Rohraußenfläche $r = b$

Der Flächennormalenvektor der unbelasteten Außenfläche des Rohres ist

$$\underline{n}_L = \underline{g}^1 . \quad (6.30)$$

Aus (6.18) oder (6.19) erhalten wir mit  $\underline{f} = 0$  bzw.  $p = 0$

$$\sigma_1^1 = \sigma_2^1 = \sigma_3^1 = 0 \quad (6.31)$$

und

$$S_{LK}^{\cdot 1} = 0 \quad , \quad (6.32)$$

so daß mit (6.12) folgt

$$\begin{aligned} u' + \dot{q} - \frac{Q}{2}(-\sigma_2^2 - \sigma_3^3) &= 0 \\ (u^* + v' - 2\frac{V}{r})(1 - \bar{\sigma}_2^2) &= 0 \\ (w' + u^+) (1 - \bar{\sigma}_3^3) &= 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Vergleichen wir die Bedingungen (6.29) und (6.33), so zeigt sich, daß (6.33) unter Beachtung von  $\sigma_1^1 = 0$  für  $r = b$  aus (6.29) abzuleiten ist.

Die Randbedingungen lassen sich demnach zusammengefaßt schreiben; für  $r = a, b$

$$\begin{aligned} u' + \dot{q} - \frac{Q}{2}(2\sigma_1^1 - \sigma_2^2 - \sigma_3^3) &= 0 \\ u^* + v' - 2\frac{V}{r} &= 0 \\ w' + u^+ &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

#### 6.4 Rotationssymmetrische Beulformen

Zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems wollen wir uns auf rotationssymmetrische Beulformen beschränken. Setzen wir dementsprechend in (6.14) bis (6.16)

$$( )^* = 0 \quad , \quad (6.35)$$

so läßt sich das System entkoppeln in eine Differentialgleichung für  $v$ , sowie - einschließlich der Inkompressibilitäts-

bedingung (6.13) - in drei Differentialgleichungen zur Bestimmung von  $u$ ,  $w$ ,  $\dot{q}$ .

#### 6.4.1 Geschwindigkeitsfeld in Umfangsrichtung

Aus (6.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} v'' [1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)] - v' \left[ \frac{1}{r} (1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)) + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)' \right] \\ + 2 \frac{v}{r} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)' + v^{++} [1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^2)] = 0, \end{aligned} \quad (6.36)$$

die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitsfeld  $v(r, z)$  in Umfangsrichtung. Die zugehörigen Randbedingungen sind nach (6.24), (6.35)

$$z = 0, l: \quad v^+ = 0 \quad (6.37)$$

und nach (6.34), (6.35)

$$r = a, b: \quad v' - 2 \frac{v}{r} = 0 \quad (6.38)$$

Für den Fall eines in  $z$ -Richtung konstanten Geschwindigkeitsfeldes werden in [3] kritische Belastungen gezeigt, die "Scher-Verzweigungslasten". Der zugehörige Versagensmodus (Scher-Beulmodus) wird dort näher erläutert.

Mit einem Produktansatz

$$v(r, z) = \psi(r) \cos(\alpha z), \quad \alpha = m \frac{2\pi}{l}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.39)$$

der die Randbedingung (6.37) identisch erfüllt, können wir die partielle Differentialgleichung (6.36) in eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung für  $\psi$  überführen

$$\begin{aligned} \psi'' [1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)] - \psi' \left[ \frac{1}{r} (1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)) + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)' \right] \\ + \psi \left[ \frac{2}{r} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^2)' - \alpha^2 (1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^2)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

mit der Randbedingung

$$r = a, b: \quad \psi' - 2 \frac{\psi}{r} = 0 . \quad (6.41)$$

Dieses Randwertproblem läßt sich nur auf numerischem Wege lösen, da die Koeffizienten von  $\psi, \psi', \psi''$  Spannungsdifferenzen enthalten und somit Funktionen der Variablen  $r$  sind.

#### 6.4.2 Geschwindigkeitsfeld in Radial- und Axialrichtung

Aus (6.14) und (6.16) folgt

$$\begin{aligned} & \left[ u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} + u^{++} \right] (1 - \bar{\sigma}_1^1 + \bar{\sigma}_3^3) + \frac{2}{r} (2u' + w^+) (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) \\ & + \frac{3}{r} Q (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) + \left[ Q (2\sigma_1^1 - \sigma_2^2 - \sigma_3^3) \right]' + 2\dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} & \left[ w'' + \frac{w'}{r} + w^{++} \right] (1 + \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) + \left[ w'' + \frac{w'}{r} - u^{++} + \frac{u^+}{r} \right] (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2) \\ & (u^+ - w') (\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_3^3)' - Q^+ (2\sigma_3^3 - \sigma_1^1 - \sigma_2^2) + 2\dot{q}^+ = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

und aus (6.13)

$$u' + \frac{u}{r} + w^+ = 0 . \quad (6.44)$$

Damit stehen drei Differentialgleichungen für  $u, w, \dot{q}$  zur Verfügung, die zugehörigen Randbedingungen bleiben unverändert, siehe (6.24), (6.34).

Ein Geschwindigkeitsfeld mit den Komponenten  $u, w$  führt zu einer radialen Aufweitung des dickwandigen Rohres, also zu einem "klassischen" Ausbeulen. Für unsere Betrachtungen ist dies offensichtlich der interessantere Fall.

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems bilden wir zunächst die Ableitung  $( )^+$  von (6.42) und  $( )'$  von (6.43), anschließend läßt sich der unbestimmte Ausdruck  $\dot{q}^+$  eliminieren. Die Inkompressibilitätsbedingung gestattet die Ein-



führung einer Funktion  $H(r, z)$ , die folgendermaßen mit den Geschwindigkeitskomponenten zusammenhängt

$$u = -H^+, \quad w = \frac{1}{r} (rH)'^, \quad (6.45)$$

so daß (6.44) erfüllt ist.

Ersetzen wir nun alle Ableitungen von  $u, w$  durch entsprechende Ausdrücke von  $H$  und arbeiten  $Q$  nach (6.11) in die Rechnung ein, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung eine Differentialgleichung 4. Ordnung für  $H$

$$\begin{aligned} A_1 LL(H) + 2L(H)^{++} - 2(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' L(H)' - A_2 L(H) \\ + A_3 H^{++++} - A_4 H^{+++} + A_5 H^{++} + A_6 H^+ = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

mit dem Operator

$$L(\ ) = \left\{ \frac{1}{r} [r(\ )]' \right\}' \quad (6.47)$$

und den Faktoren

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) \\ A_2 &= (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' + \frac{1}{r} (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' \\ A_3 &= 1 + (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) \\ A_4 &= \frac{3\delta_M}{Q_N} (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)^2 \\ A_5 &= A_4 \left[ \frac{Q_N'}{Q_N} - \frac{\delta_M'}{\delta_M} - \frac{1}{r} - 2 \frac{(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'}{(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)} \right] \\ A_6 &= (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' + \frac{1}{r} [(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)' + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)'] \\ &\quad - \frac{3\delta_M}{r Q_N} (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1) (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) \left[ \frac{Q_N'}{Q_N} - \frac{\delta_M'}{\delta_M} + \frac{1}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)'}{(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)} - \frac{(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'}{(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)} - \frac{1}{r} \frac{(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)'}{(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)} \right]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

$Q_N$  ist der auf 2G bezogene Nenner der Abkürzung Q

$$Q_N = \frac{1}{2} [(\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_2^2)^2 + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)^2 + (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)^2] . \quad (6.49)$$

Die Faktoren der Differentialgleichung lassen sich also vollständig mit Hilfe der Hauptspannungsdifferenzen und deren Ableitungen ausdrücken, den Verfestigungsparameter  $\sigma_M$  betrachten wir in diesem Zusammenhang noch gesondert.

Mit  $\sigma_M$  nach (3.63) und  $E_t$  nach (3.16) folgt

$$\sigma_M = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{n-1}} . \quad (6.50)$$

Wir können die Spannungen des einachsigen Zugversuchs  $\sigma, \sigma_0$  entweder durch die Tresca-Fließbedingung oder durch die v.Mises-Fließbedingung ersetzen. Nach (5.2) erhalten wir als erste Möglichkeit  $\sigma/\sigma_0 = \theta/\bar{k}_0$  und mit (3.14), (6.49) als zweite Möglichkeit  $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{Q_N}/\bar{\sigma}_0$ . Da  $Q_N$  aus den Spannungen der Grunddeformation ermittelt wird, müssen beide Möglichkeiten gleichermaßen als Versuch angesehen werden, die unterschiedlichen Fließbedingungen miteinander zu kombinieren. Die Anwendung von  $\theta/\bar{k}_0$  ergibt eine Übereinstimmung von  $\sigma_M$  und  $\sigma_T$  (5.3), so daß der Verlauf von  $\sigma_M$  - und von  $\sigma_M'$  - am Grenzradius  $r_*$  (bzw. an der Streckgrenze  $\sigma_0$ ) stetig ist. Im Gegensatz dazu ergeben sich Unstetigkeiten an diesen Punkten, wenn  $\sqrt{Q_N}/\bar{\sigma}_0$  angewandt wird.

Für die weiteren Rechnungen wählen wir deshalb die erste Möglichkeit, also

$$\sigma_M = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1 \right)^{n-1}} \quad (6.51)$$

und die Ableitung

$$\sigma_M' = \frac{\frac{E}{B} \frac{n(n-1)}{\bar{k}_0} \left( \frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1 \right)^{n-2}}{\left[ 1 + \frac{E}{B} n \left( \frac{\theta}{\bar{k}_0} - 1 \right)^{n-1} \right]^2} \theta'^2 . \quad (6.52)$$

Erwähnt sei noch, daß Lösungen des Verzweigungsproblems versuchsweise auch mit  $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{Q_N}/\bar{\sigma}_0$  ermittelt wurden. Bei gleichen Geometriewerten für den Grundzustand (Radienverhältnis  $\xi$ , bezogene Rohrlänge  $\zeta$ ) führt diese zweite Möglichkeit zu den höheren Verzweigungslasten und den größeren Grunddeformationen. Die Anwendung von  $\Theta/\bar{k}_0$  erscheint aus dieser Sicht ebenfalls gerechtfertigt.

Wir setzen (6.45) in die Randbedingungen (6.24), (6.25) ein, und erhalten

$$\begin{aligned} z = 0, l: \quad (A_1 - 2\bar{\sigma}_1') L(H) - A_3 H^{++} &= 0 \\ (rH)' &= 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

sowie aus (6.34) mit  $\dot{q}^+$  nach (6.43)

$$\begin{aligned} r = a, b: \quad A_1 [rL(H)]' + [2 + A_1 - A_4] rH^{++} + A_7 H^{++} &= 0 \\ L(H) - H^{++} &= 0. \end{aligned} \quad (6.54)$$

$A_1, A_3, A_4$  sind (6.48) zu entnehmen,  $A_7$  lautet ausgeschrieben

$$A_7 = 1 + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3) + (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) + \frac{3\delta_M}{Q} (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3)(\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1). \quad (6.55)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$H(r, z) = \phi(r) \sin(\alpha z), \quad \alpha = m \frac{2\pi}{l}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.56)$$

überführen wir die partielle Differentialgleichung (6.46) in eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung für  $\phi$

$$\phi'''' + B_4 \phi'' + B_3 \phi' + B_2 \phi = 0, \quad (6.57)$$

wobei wir als Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{A_1} \left[ -\frac{3}{r^3} \left( \frac{A_1}{r} + (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left( (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' + 2\alpha^2 \right) + (A_3 \alpha^2 - A_6) \alpha^2 \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \frac{1}{A_1} \left[ \frac{3}{r^2} \left( \frac{A_1}{r} + (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{r} \left( (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' + 2\alpha^2 \right) - A_5 \alpha^2 \right] \\
 B_3 &= \frac{1}{A_1} \left[ -\frac{3}{r} \left( \frac{A_1}{r} + (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)'' + 2\alpha^2 \right) + A_4 \alpha^2 \right] \\
 B_4 &= 2 \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{A_1} (\bar{\sigma}_3^3 - \bar{\sigma}_1^1)' \right]
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

verwenden.

Ein Vergleich mit (6.45) zeigt, daß der Lösungsansatz (6.56) ein in z-Richtung (co)sinusförmiges Geschwindigkeitsfeld ergibt, dies entspricht den zu erwartenden Beulformen. Die Randbedingungen (6.53) werden durch den Ansatz (6.56) bereits erfüllt; aus (6.54) erhalten wir

$r = a, b$ :

$$\begin{aligned}
 \phi''' + \frac{2}{r} \phi'' - \left[ \frac{1}{r^2} + \left( 1 + \frac{2-A_4}{A_1} \right) \alpha^2 \right] \phi' + \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{A_7}{A_1} \frac{\alpha^2}{r} \right] \phi &= 0 \\
 \phi'' + \frac{1}{r} \phi' + \left( \alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi &= 0 .
 \end{aligned}$$

Es liegt auch hier ein Randwertproblem vor, welches nur numerischen Lösungsverfahren zugänglich ist.

### 6.5 Belastungsbedingung

Wir müssen überprüfen, ob die Belastungsbedingung (3.10) am Verzweigungspunkt noch erfüllt ist. Dazu betrachten wir die Überlagerung von Grund- und Verzweigungsdeformation, die in Kapitel 6.2 näher erläutert wurde.

Für die Grunddeformation haben wir Rotationen ausgeschlossen (siehe (4.4)), so daß ein Geschwindigkeitsfeld  $v$  in Umfangsrichtung - vorausgesetzt es existiert - zusätzliche (Scher-)

Deformationen und damit zusätzliche Scherspannungen zum vorhandenen Spannungsgrundzustand hervorruft. Die Belastungsbedingung wäre also erfüllt, da der Spannungszustand - vereinfacht ausgedrückt - ansteigt.

Eine ähnliche Überlegung wollen wir auch für ein Geschwindigkeitsfeld mit radialen und axialen Komponenten anstellen. Die Linearkombination von Grund- und Verzweigungslösung (die "physikalische" Lösung) erhalten wir mit (4.10) und (6.4)

$$U_{ges} = U_{hom}(\dot{r}) + \lambda U \quad (6.60)$$

$$W_{ges} = W_{hom}(\dot{Z}) + \lambda W .$$

Nach den Ergebnissen von SHANLEY [5] überwiegt unmittelbar am Verzweigungspunkt noch die Grunddeformation.  $u_{ges}$  und  $w_{ges}$  rufen demnach nur Deformationen hervor, die zu ansteigenden Spannungen führen. Damit ist die Gültigkeit der Belastungsbedingung (3.10) am Verzweigungspunkt gesichert.

## 7. Numerische Lösung der Randwertprobleme

### 7.1 Allgemeines

Um die numerische Lösung mit dimensionslosen Kenngrößen durchzuführen, setzen wir die in Kapitel 4.2 definierten Beziehungen (4.19) bis (4.21) in die Gleichungen für die Spannungsdifferenzen von Kapitel 5 und in die Differentialgleichungen, Randbedingungen etc. von Kapitel 6 ein. Die Ableitungen nach  $r$  ersetzen wir durch

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} ( ) = \frac{1}{a^n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} ( ) . \quad (7.1)$$

Auf eine Wiederholung der normierten Gleichungen wollen wir verzichten, da sich nur formale Änderungen ergeben ( $r \rightarrow x$ ,  $C_1 \rightarrow L_1$ ). Im folgenden ist  $( )'$  als Ableitung nach  $x$  zu verstehen, die Randbedingungen (6.41), (6.59) gelten nun für  $x = 1, \xi$ . Der Parameter  $\alpha$  (6.39) und (6.56), über den die Rohrlänge  $l$  in die Randwertprobleme eingeht, läßt sich ebenfalls auf bezogene Größen zurückführen, mit (4.20) erhalten wir

$$\tilde{\alpha} = a\alpha = m \frac{4\pi}{\xi(1+\xi)} . \quad (7.2)$$

Für die Rechnung setzen wir  $m = 1$  und variieren die Länge  $l$  bzw. die bezogene Länge  $\xi$  entsprechend.

### 7.2 Werkstoffkennwerte

Zur Bestimmung der Werkstoffkenngrößen greifen wir auf einen Zugversuch zurück, der im Rahmen einer Versuchsreihe [40] an der Zug-Torsions-Prüfmaschine des Instituts für Mechanik der Ruhr-Universität durchgeführt wurde. Bei dem Werkstoff handelt es sich um eine Aluminium-Legierung AlMgCuPb, deren Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abb. 5 gezeigt wird.

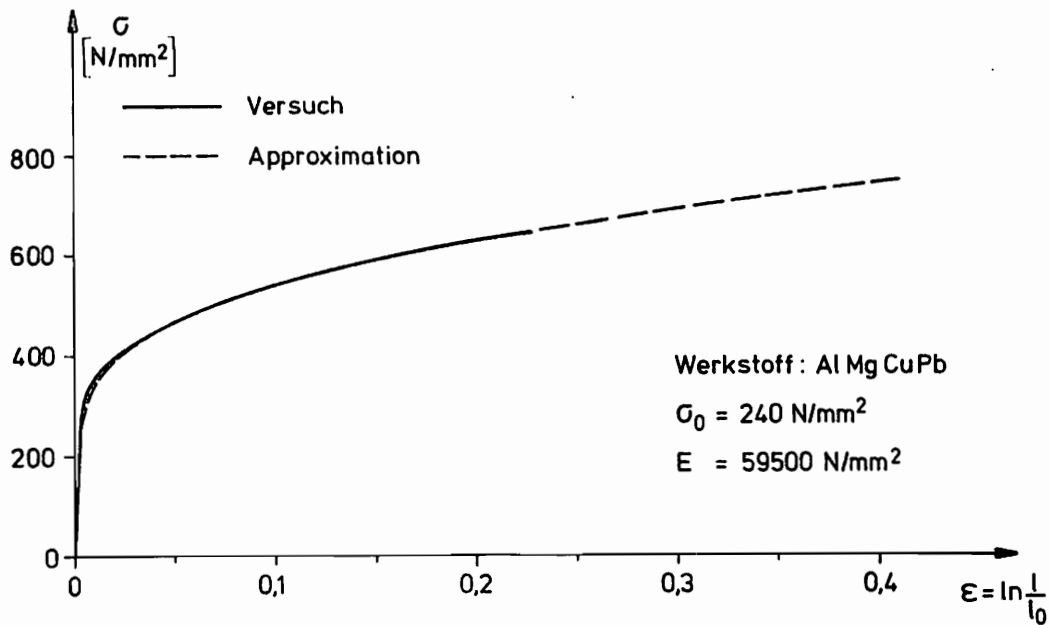


Abb. 5 Zugversuch

Die Werkstoffkennwerte ergeben sich unter Berücksichtigung des Ansatzes (3.15) zu

$$\sigma_0 = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 59500 \text{ N/mm}^2$$

$$B = 4857,5 \text{ N/mm}^2$$

$$n = 2,79865$$

und aus (3.5) folgt mit  $\nu = 0,5$

$$G = 19833 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{k}_0 = 0,0030252$$

Zu bemerken wäre noch, daß  $\sigma_0$  den wirklichen Übergang von der elastischen Geraden in den nichtlinearen plastischen Bereich darstellt und nicht die sogenannte 0,2%-Dehngrenze nach DIN 144.

### 7.3 Numerische Behandlung

Beide Randwertprobleme werden mit denselben numerischen Methoden gelöst. Wir wollen deshalb den Lösungsgang nur einmal an Hand des Randwertproblems (6.57) bis (6.59) skizzieren.

Zunächst wird die lineare, homogene Differentialgleichung 4. Ordnung in ein System von vier Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt, z. B.  $y_1 = \phi$ ,  $y_2 = \phi'$  usw. Wir fassen die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems in einer Matrix  $C_{ij}$  zusammen und schreiben abgekürzt

$$y_i' = C_{ij} y_j \tag{7.3}$$

$$i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Die Randbedingungen (6.62) lassen sich für den Innenrand  $x = 1$  angeben zu

$$g_i(1) y_i(1) = 0 \tag{7.4}$$

$$h_i(1) y_i(1) = 0$$

und für den Außenrand  $x = \xi$

$$g_i(\xi) y_i(\xi) = 0 \tag{7.5}$$

$$h_i(\xi) y_i(\xi) = 0.$$

$h_i(x)$  und  $g_i(x)$  sind die Abkürzungen der von  $x$  abhängigen Faktoren der jeweiligen  $y_i$  in den Randbedingungen. Zwischen den Lösungen am Innenrand  $y_i(1)$  und den Lösungen am Außenrand  $y_i(\xi)$  besteht ein linearer Zusammenhang, so daß wir  $y_i(\xi)$  als Linearkombination von  $y_i(1)$  darstellen können

$$y_i(\xi) = Y_{ji} y_j(1), \tag{7.6}$$

wobei  $Y_{ji}$  als eine Übertragungsmatrix zu interpretieren ist,



die aus vier Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems besteht. Mit Hilfe eines numerischen Integrationsverfahrens, etwa mit der Methode von Runge-Kutta, wird (7.3) für vier linear unabhängige Anfangsvektoren

$$\tilde{y}_1(1) = (1, 0, 0, 0), \tilde{y}_2(1) = (0, 1, 0, 0) \text{ usw.}$$

integriert. Die Lösungen (Fundamentallösungen)

$\tilde{y}_1(\xi) = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14})$ ,  $\tilde{y}_2(\xi) = (y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{24})$  usw. ergeben dann die Elemente der Übertragungsmatrix. Damit läßt sich (7.4), (7.5) als lineares Gleichungssystem schreiben

$$\begin{aligned} g_j(1) y_j(1) &= 0 \\ h_j(1) y_j(1) &= 0 \\ g_i(\xi) Y_{ji} y_j(1) &= 0 \\ h_i(\xi) Y_{ji} y_j(1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Eine nichttriviale Lösung dieses Gleichungssystems und somit auch eine Lösung des Randwertproblems liegt genau dann vor, wenn die Koeffizientendeterminante von (7.7) verschwindet

$$\text{Det} \begin{pmatrix} g_1(1) & g_2(1) & g_3(1) & g_4(1) \\ h_1(1) & h_2(1) & h_3(1) & h_4(1) \\ g_i(\xi) Y_{1i} & g_i(\xi) Y_{2i} & g_i(\xi) Y_{3i} & g_i(\xi) Y_{4i} \\ h_i(\xi) Y_{1i} & h_i(\xi) Y_{2i} & h_i(\xi) Y_{3i} & h_i(\xi) Y_{4i} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.8)$$

Die Parameter  $L_1$  und  $L_2$ , von denen - über die Spannungsdifferenzen - alle Koeffizienten der Differentialgleichung und der Randbedingungen abhängen, stehen uns noch als freie Größen zur Verfügung. Wir können demnach  $L_1$  und  $L_2$  als Eigenwerte des Randwertproblems ansehen, die so zu bestimmen sind, daß (7.8) erfüllt wird.

Der Lösungsgang zum Randwertproblem 2. Ordnung (6.40), (6.41)

läßt sich den vorstehenden Gleichungen entnehmen, wenn die zweite Randbedingung sowohl in (7.4) als auch in (7.5) gestrichen wird; für die Indizes gilt  $i = 1, 2$  bzw.  $j = 1, 2$ . Vereinfachen wir dementsprechend (7.7), so folgt unmittelbar

$$\text{Det} \begin{bmatrix} g_1(1) & g_2(1) \\ g_i(\xi) \gamma_{1i} & g_i(\xi) \gamma_{2i} \end{bmatrix} = 0 . \quad (7.9)$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte  $L_1, L_2$  beider Randwertprobleme wurden zwei - im wesentlichen Aufbau übereinstimmende - Programme in FORTRAN IV geschrieben, die nach Wahl einer Fließbedingung (Fall 1, 2 oder 3 aus Kapitel 5) für vorgegebene (Grundzustands-) Geometriewerte  $\xi, \zeta$  schrittweise ein Feld  $L_{1A} \leq L_1 \leq L_{1E}, L_{2A} \leq L_2 \leq L_{2E}$  auf mögliche Nulldurchgänge der Determinante absuchen. Existieren Nullstellen und damit kritische Wertepaare  $L_1, L_2$ , so erfolgt die Berechnung der zugehörigen kritischen Belastungen  $\bar{p}$  und  $\bar{N}$  (bzw.  $\bar{T}$ ), sowie die Ermittlung des Ausgangszustandes  $\xi_0, \zeta_0$ .

Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden auf dem MODCOMP-Rechner des Instituts für Mechanik durchgeführt.

## 8. Ergebnisse für vorgegebene Grundzustandsgeometrie

### 8.1 Geschwindigkeitsfeld in Umfangsrichtung

Das Randwertproblem (6.40), (6.41) untersuchen wir für die folgenden Kombinationen von Radienverhältnissen  $\xi$  und bezogenen Beullängen  $\zeta$  innerhalb der Bereiche  $L_{1A}$ ,  $L_{1E}$ , sowie  $L_{2A}$ ,  $L_{2E}$ :

Fall 1 ( $\sigma_2^2 \geq \sigma_3^3 \geq \sigma_1^1$ ):

$$\xi = 1,1/1,5/2,0/2,5$$

$$\zeta = 4/8/16/32/64/128$$

$$0,01 \leq L_1 \leq 0,95$$

$$-0,04 \leq L_2 \leq 0,04$$

Fall 2 ( $\sigma_3^3 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^1$ ):

$$\xi = 1,02/1,1$$

$$\zeta = 4/8/16/32/64/128$$

$$0,01 \leq L_1 \leq 0,7$$

$$0 \leq L_2 \leq 0,8$$

Fall 3 ( $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^1 \geq \sigma_3^3$ ):

$$\xi = 1,02/1,1$$

$$\zeta = 4/8/16/32/64/128$$

$$0,01 \leq L_1 \leq 0,7$$

$$-0,8 \leq L_2 \leq 0$$

Um die Ermittlung nicht von vornherein einzuengen, überschreiten die vorgegebenen Bereiche für  $L_1$  und  $L_2$  deutlich die Gültigkeitsgrenzen der jeweiligen Fließbedingungen, siehe hierzu Abb. 6 und Abb. 11.

Zu keiner der aufgeführten Wertekombinationen  $\xi$ ,  $\zeta$  existieren kritische Wertepaare  $L_1$ ,  $L_2$ , die (7.9) erfüllen. Eine Verzweigung nach dem "Scher-Beulmodus" ist also für ein in Längsrichtung veränderliches Umfangsgeschwindigkeitsfeld nicht möglich.

## 8.2 Geschwindigkeitsfeld in Radial- und Axialrichtung

### 8.2.1 Eigenwerte für Fall 1 ( $\sigma_2^2 \leq \sigma_3^3 \leq \sigma_1^1$ )

Zunächst wollen wir den Gültigkeitsbereich der Tresca-Fließbedingung nach (5.24) betrachten. Abb. 6 zeigt den (numerisch) ermittelten Verlauf der Grenzwerte von  $L_2$  als Funktion von  $L_1$  für verschiedene Radienverhältnisse  $\xi$ . Den Kurven ist zu entnehmen, daß mit positiv oder negativ ansteigenden Werten  $L_2$  zuerst am Außenrand des dickwandigen Rohres der Bereich der Fließbedingung verlassen wird.

Die Bestimmung der Eigenwerte stellt den aufwendigsten Teil der numerischen Bearbeitung dar. Andererseits liefert der Verlauf von  $L_1$ ,  $L_2$  bereits wesentliche Aussagen über die zu erwartenden kritischen Belastungen, Grunddeformationen etc., so daß wir uns näher damit befassen wollen. Als Beispiel werden die Radienverhältnisse  $\xi = 1,05/1,2/1,5/2,0$  gewählt und mit unterschiedlichen bezogenen Beullängen  $\zeta$  kombiniert. Abb. 7 bis Abb. 10 zeigen - über die Grenzen von Abb. 6 hinausgehende - Kurvenzüge der Eigenwerte  $L_1$ ,  $L_2$  in Abhängigkeit der Größen  $\xi$ ,  $\zeta$ .

Aus den Diagrammen ist ersichtlich, daß bei konstantem Verhältnis  $\xi$  die Lösungskurven mit steigendem  $\zeta$  zu kleineren Werten  $L_1$  verschoben werden. Der Einfluß der Beullänge  $\zeta$  nimmt jedoch oberhalb  $\zeta \geq 10 \dots 12$  stark ab, so ergeben Rechnungen für  $\zeta = 40$  keine nennenswerten Änderungen gegenüber Rechnungen für  $\zeta = 20$ . Mit zunehmender Wanddicke (bzw. steigendem Radienverhältnis) verlagern sich die Lösungen insgesamt zu größeren Werten  $L_1$  und damit zu größeren radialen Grunddeformationen, die Lösungen für kleine Beullängen verschwinden.

Die innerhalb des gültigen Bereichs der Fließbedingung verlaufenden Lösungskurven weisen keine Unstetigkeiten an den Grenzen für  $L_2$  auf, wie der Vergleich mit Abb. 6 zeigt. Vom

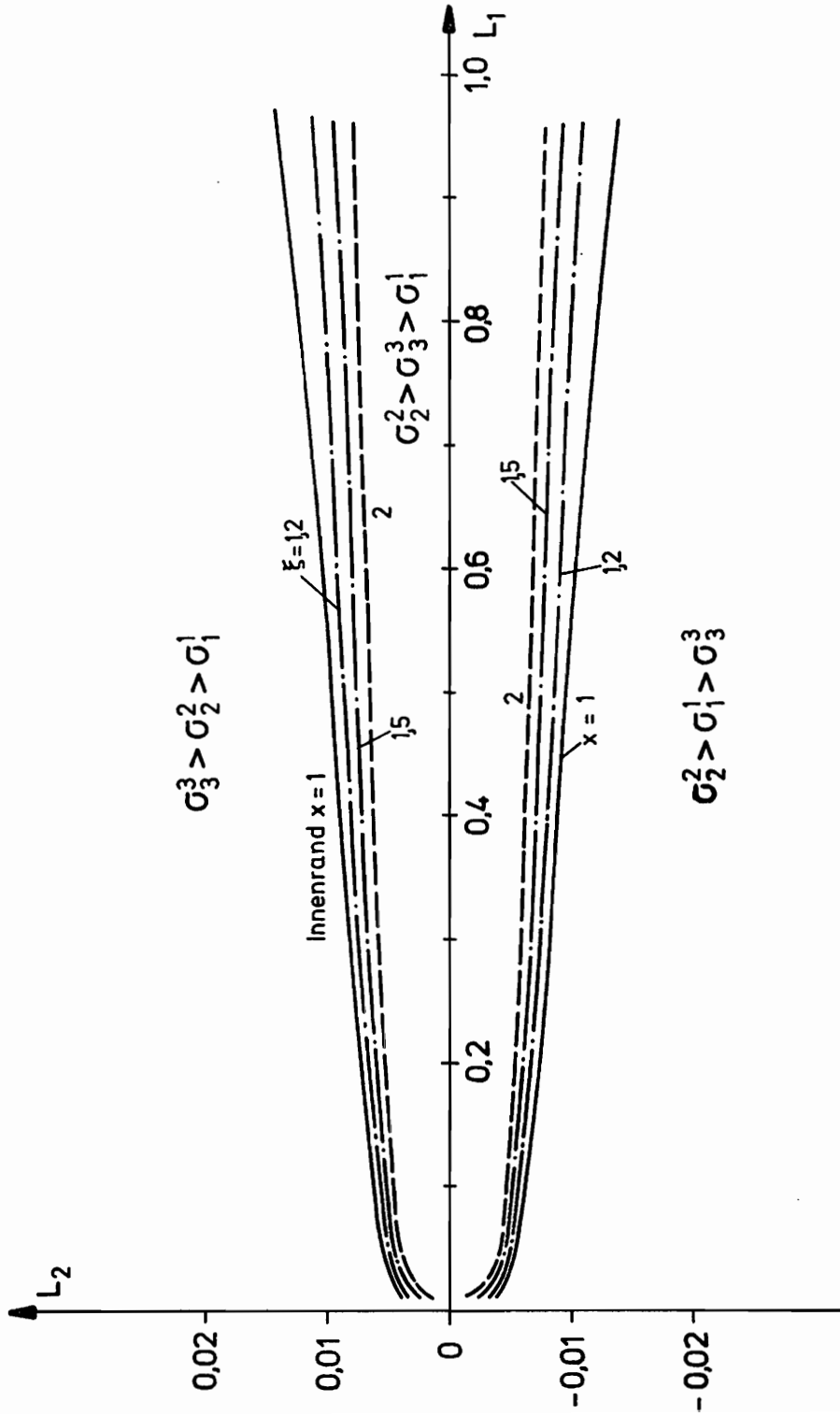


Abb. 6 Gültigkeitsbereich Fall 1

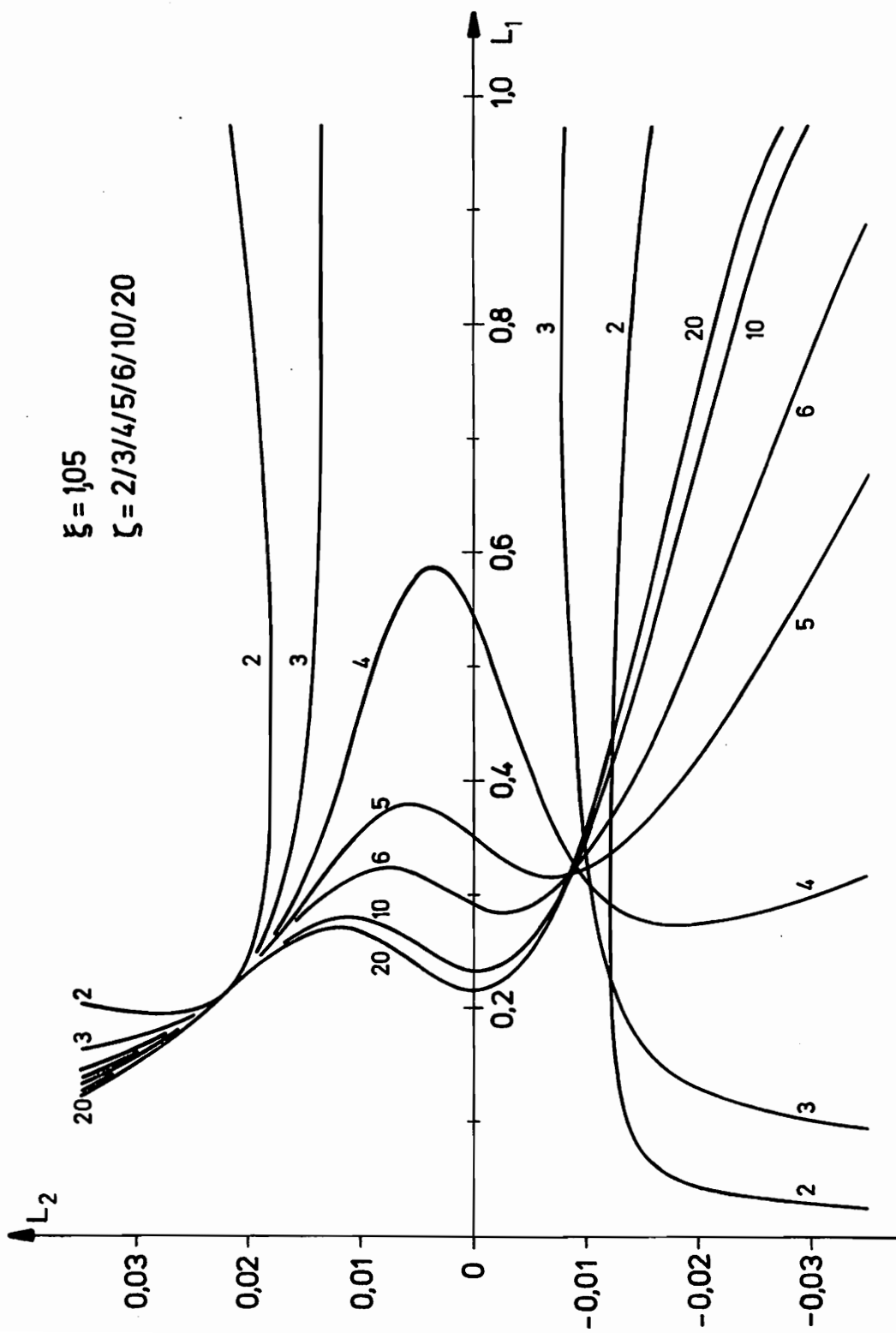


Abb. 7 Eigenwerte Fall 1

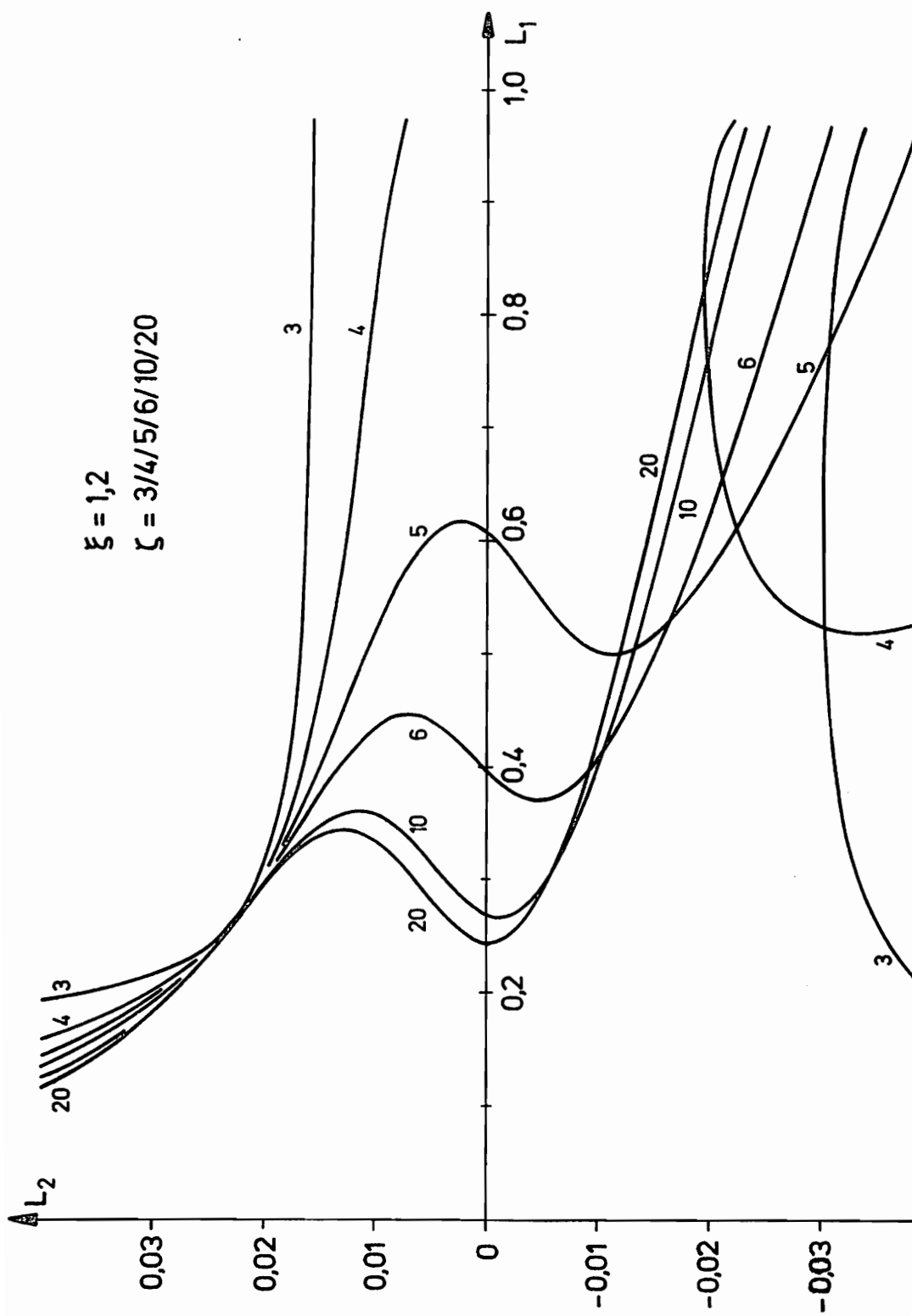


Abb. 8 Eigenwerte Fall 1

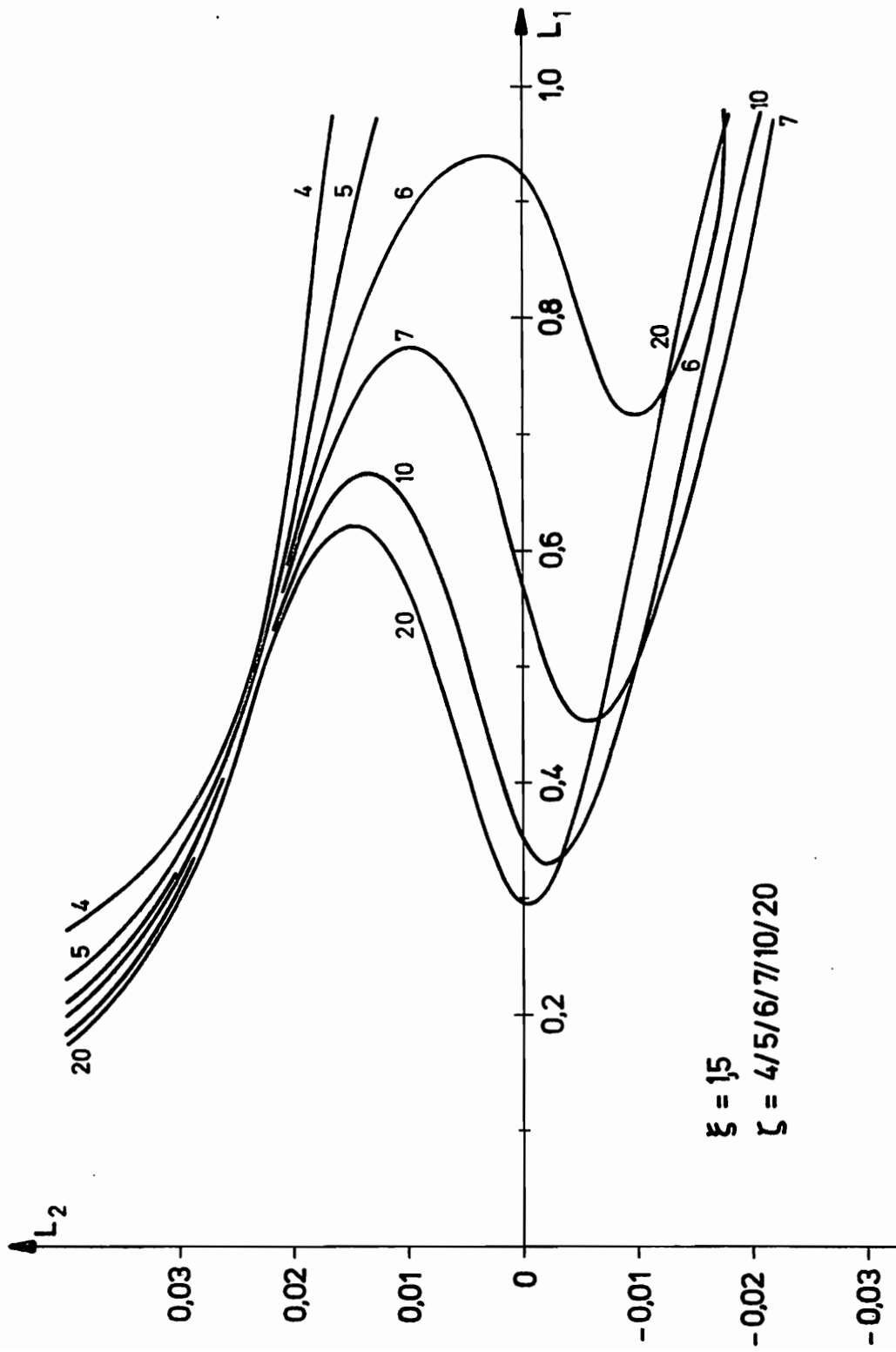


Abb. 9 Eigenwerte Fall 1



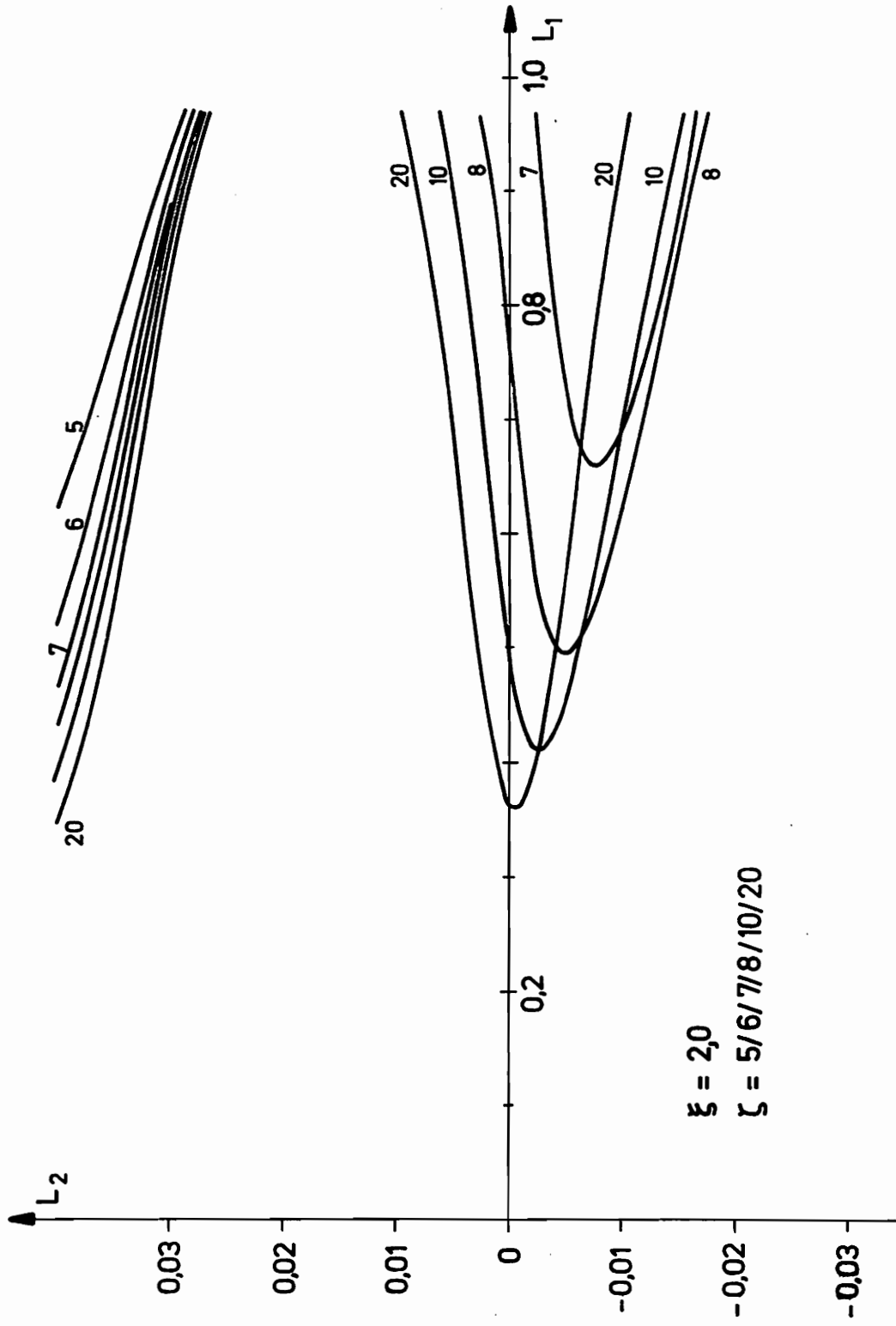


Abb. 10 Eigenwerte Fall 1

Standpunkt des Ingenieurs ausgehend, könnten also Eigenwerte in unmittelbarer Nachbarschaft des Bereiches nach (5.24) durchaus noch als (Näherungs-) Lösungen zugelassen werden.

Rechnungen mit Radienverhältnissen  $\xi > 2,0$  erscheinen wenig sinnvoll, da die zugehörigen Ausgangszustände, d. h. die Radienverhältnisse  $\xi_0$ , für  $\xi = 2,0$  bereits Größenordnungen von  $\xi_0 \sim 2,4 \dots 5,0$  erreichen.

### 8.2.2 Eigenwerte für Fall 2 ( $\sigma_3^3 \leq \sigma_2^2 \leq \sigma_1^1$ )

Wir betrachten auch hier zuerst den Gültigkeitsbereich der Fließbedingung. Die oberen und unteren Grenzen für  $L_2$  nach (5.50) werden in Abb. 11 für unterschiedliche  $\xi$  dargestellt. Es zeigt sich, daß die Grenzkurvenpaare für den Außenrand bereits für relativ kleine Werte  $\xi$  soweit von den Grenzkurven des Innenrandes ( $x = 1$ ) entfernt verlaufen, daß nur im unteren Bereich noch Überschneidungen stattfinden. In diesem Überschneidungsbereich müßten aber die Lösungen  $L_1, L_2$  liegen, damit die Fließbedingung über die gesamte Wanddicke des Rohres gültig bleibt. Wie aus Abb. 11 deutlich hervorgeht, ist jedoch für ein Radienverhältnis  $\xi = 1,2$  praktisch kein Lösungs(Überschneidungs-)bereich mehr vorhanden. Die Anwendung von Fall 2 muß also auf dünne Rohre beschränkt werden.

Abb. 12 zeigt die ermittelten Eigenwerte  $L_1, L_2$  für ein dünnwandiges Rohr mit  $\xi = 1,02$ . Sämtliche Lösungskurven liegen außerhalb des gestrichelten Gültigkeitsbereiches, auch eine Steigerung der Beullänge über  $\zeta = 16$  hinaus führt zu keinen gültigen Lösungen.

### 8.2.3 Eigenwerte für Fall 3 ( $\sigma_2^2 \leq \sigma_1^1 \leq \sigma_3^3$ )

Für Fall 3 tritt - erwartungsgemäß - die gleiche Erscheinung hinsichtlich des Gültigkeitsbereiches der Fließbedingung auf wie bei Fall 2. Die Grenzkurven nach (5.67) verlaufen spiegelbildlich zu denen von (5.50), in Abb. 11 gelten jetzt die

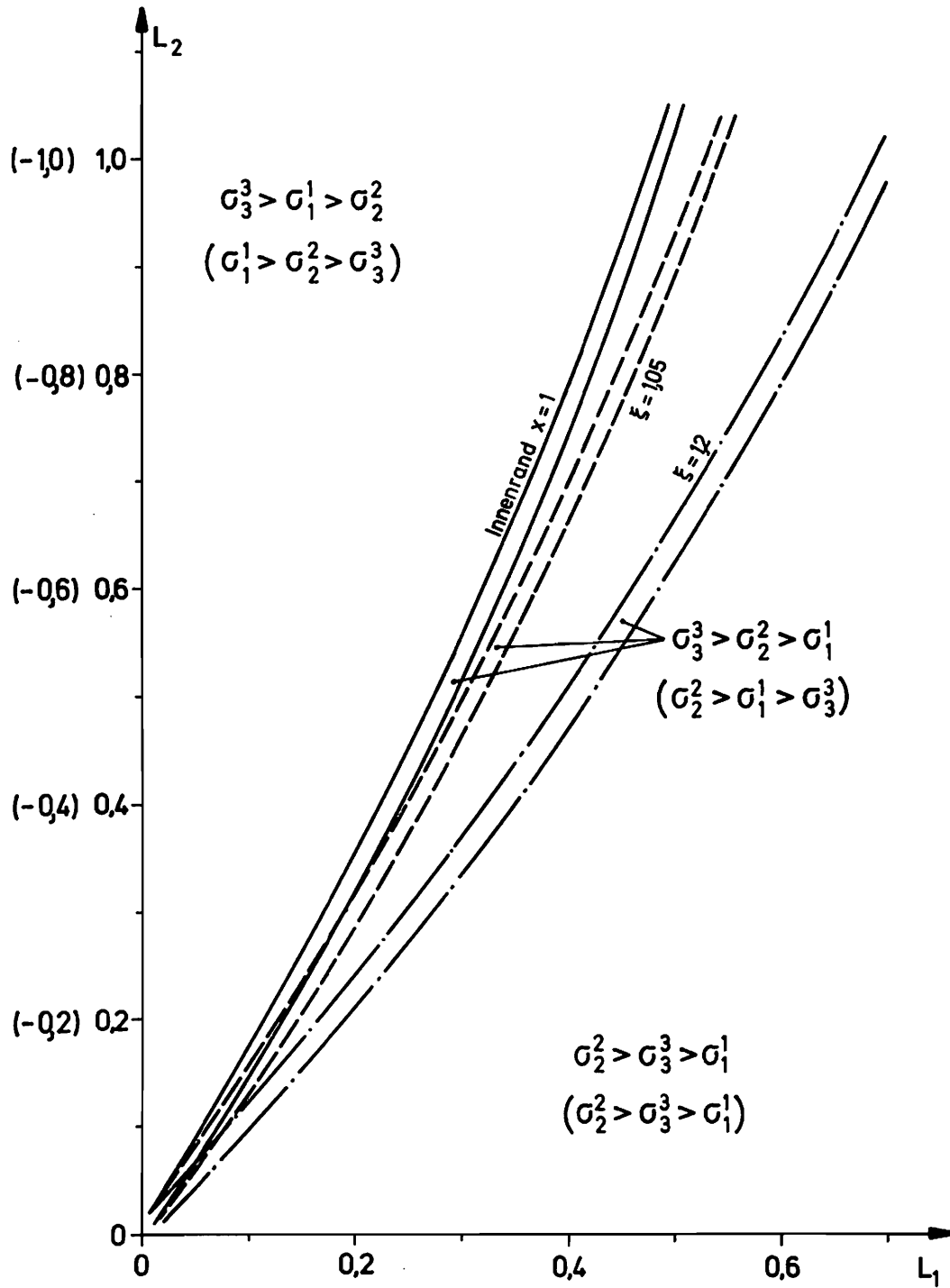


Abb. 11 Gültigkeitsbereich Fall 2 (3)

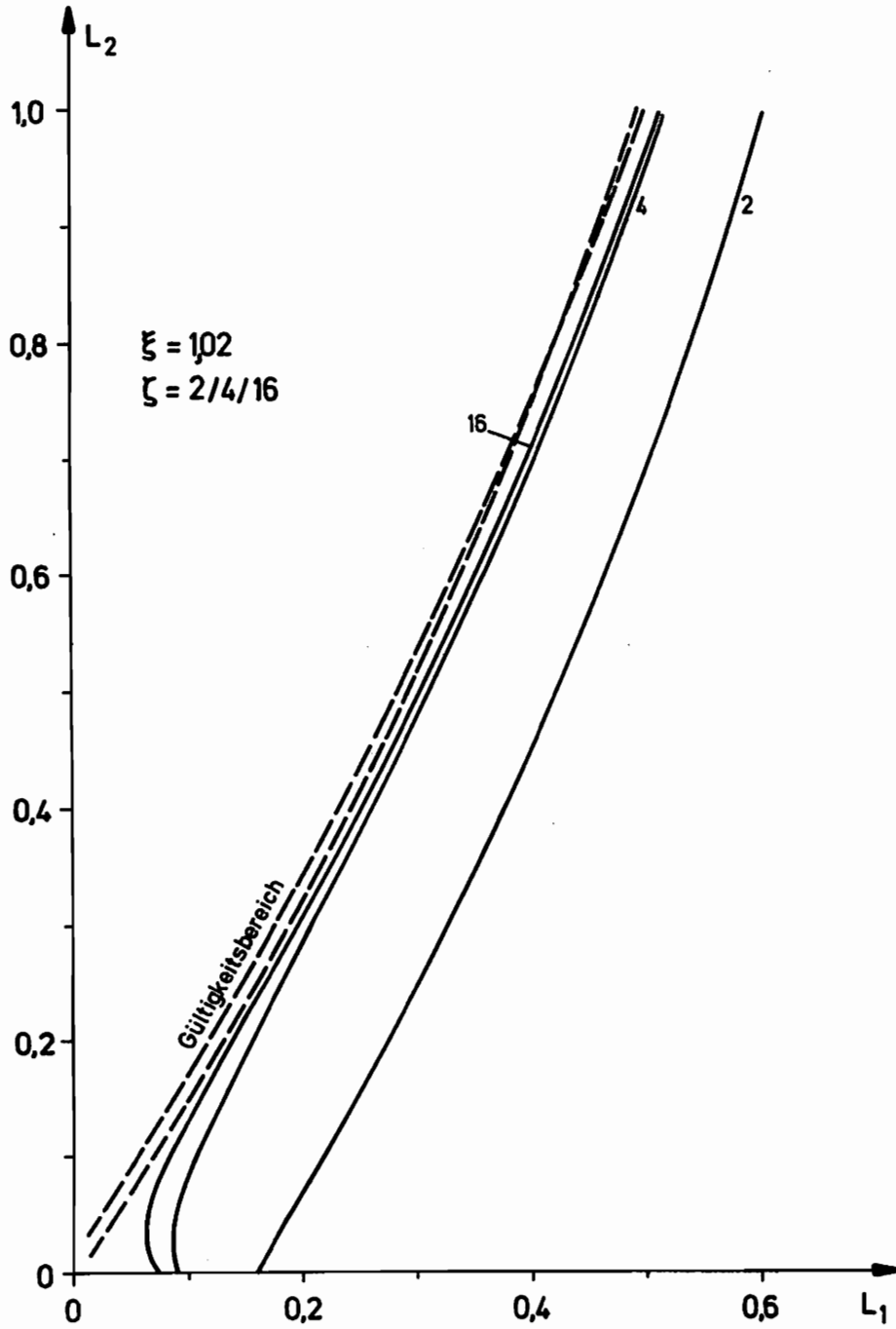


Abb. 12 Eigenwerte Fall 2

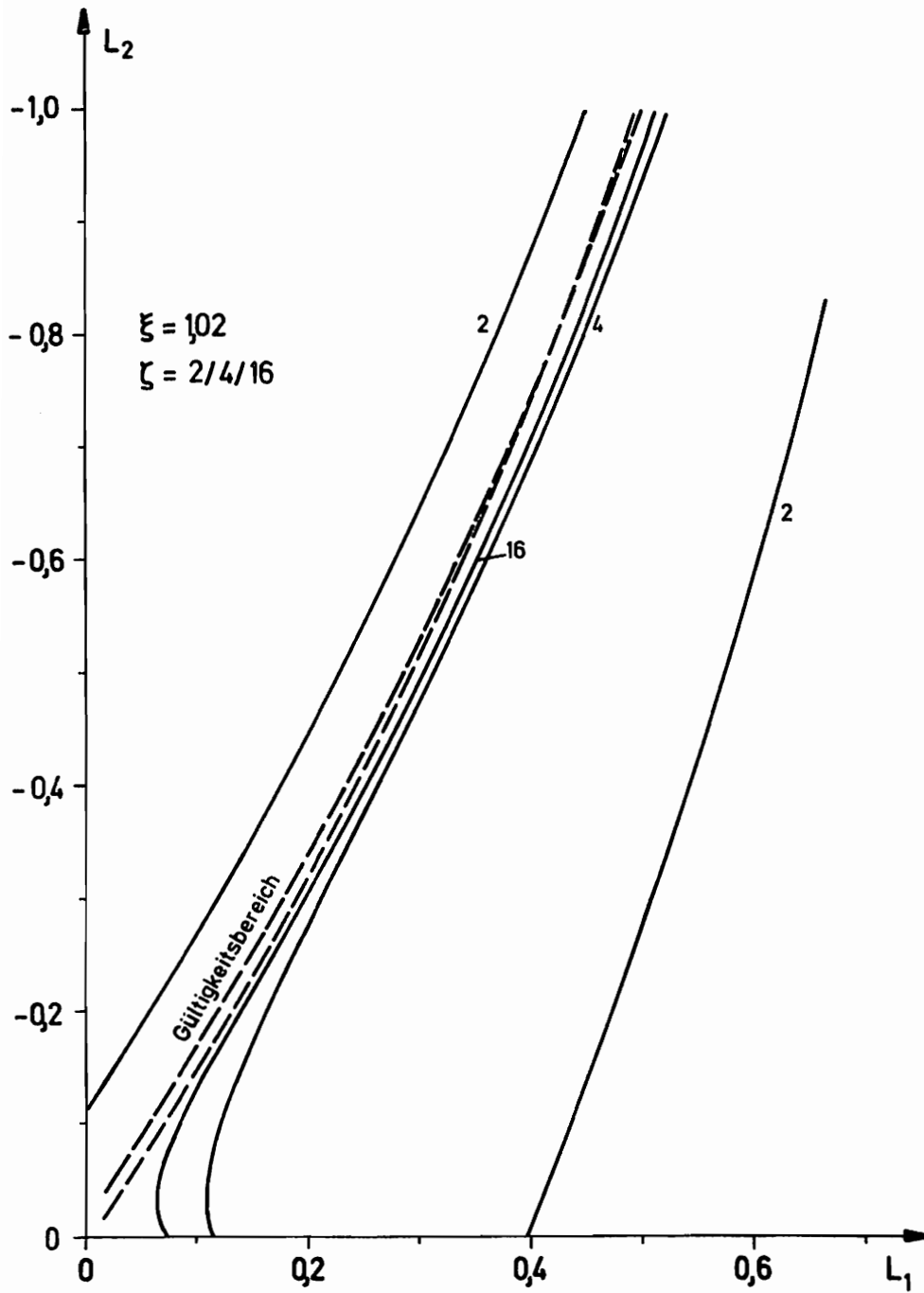


Abb. 13 Eigenwerte Fall 3

in Klammern gesetzten Bezeichnungen. Es existieren auch hier keine gültigen Eigenwerte, siehe Abb. 13.

Die Verzweigungsberechnung führt also in Verbindung mit den Tresca-Fließbedingungen (5.35) und (5.54) zu unbrauchbaren Ergebnissen. Ein "nahtloser" Übergang von einem Tresca-Fall auf den anderen - und damit eine Erweiterung von Fall 1 auf beliebig große Axialkräfte - ist nicht möglich. Als Näherungslösungen sind die für Fall 2 und 3 ermittelten Eigenwerte ebenfalls ungeeignet, da die versuchsweise berechneten Verzweigungslasten - bezogen auf die zugehörigen Grunddeformationen - unrealistisch sind.

Die Ursachen für das Versagen der Berechnung in den Fällen 2 und 3 lassen sich wegen des komplizierten Zusammenhangs von Grunddeformation und Verzweigung nicht vollständig klären. Einer der wesentlichen Gründe ist offensichtlich die Formulierung der Fließbedingungen mit  $\sigma_3^3$ . Die Spannungskomponente in Axialrichtung  $\sigma_3^3$  wird maßgeblich bestimmt durch den Verzerrungsgeschwindigkeitsanteil  $d_3^3$ , der in Kapitel 4.1 als unabhängig von Radial- und Tangentialrichtung eingeführt wurde. Somit besteht ein Widerspruch, da  $d_3^3$  - über  $\sigma_3^3$  in den Fließbedingungen -  $\sigma_1^1$  bzw.  $\sigma_2^2$  beeinflusst.

Wir wollen nochmals auf die Anwendung zweier unterschiedlicher Stoffgesetze bei der Berechnung von Grunddeformation und Verzweigung zurückkommen und zwar im Hinblick auf Fall 1. HODGE und WHITE zeigen in [39], daß die Berechnung elastoplastischer Deformationen von dickwandigen Rohren unter Innendruckbelastung mit der Tresca-Fließbedingung zu Ergebnissen führt, die quantitativ gut übereinstimmen mit Berechnungsergebnissen bei Anwendung der v.Mises-Fließbedingung. Beziehen wir diese Aussage auf das vorliegende Problem, so ergeben beide Fließbedingungen annähernd gleiche Grundzustände bzw. Grunddeformationen. Die aus bereits genannten Gründen (siehe Kapitel 5.1 und 6.1) erforderliche Anwendung zweier Stoffgesetze führt demnach zu keinen nennenswerten Abweichungen.

### 8.3 Verzweigungslasten

Die Verzweigungslasten für den Fall 1 - wir betrachten des weiteren nur diesen Fall - erhalten wir aus (5.28), (5.34). Um die Ergebnisse für die Radienverhältnisse  $\xi = 1,05/1,2/1,5/2,0$  miteinander vergleichen zu können, beziehen wir die Größen  $\bar{p}$  und  $\bar{T}$  auf den jeweiligen belasteten Querschnitt und auf die Streckgrenze des Werkstoffs. Für die kritische Axialkraft folgt

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}}{\bar{\sigma}_0 \pi (\xi^2 - 1)} = \frac{L_2}{\bar{\sigma}_0} \quad (8.1)$$

und für den kritischen Innendruck analog der sogenannten "Kesselformel"

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{\sigma}_0 (\xi - 1)} \quad (8.2)$$

Abb. 14 bis Abb. 17 zeigen die gegenseitige Abhängigkeit von Innendruck  $\bar{p}$  und Längskraft  $\bar{T}$  bei konstanter Grundzustandsgeometrie, der Bereich von  $\bar{T}$  ist auf die nähere Umgebung des Gültigkeitsbereiches nach Abb. 6 begrenzt.

Der Einfluß der Beullänge  $\zeta$  ist bei positiven Axialkräften für alle Radienverhältnisse ähnlich, die Zunahme von  $\zeta$  führt zu abnehmenden Drücken. Eine Steigerung der Beullänge auf Werte  $\zeta > 20$  ergibt keine wesentliche Verringerung des Innendruckes gegenüber  $\zeta = 20$ , siehe hierzu auch Abb. 17. Bei negativen Längskräften überschneiden sich die einzelnen Kurvenzüge, so daß zu den jeweils niedrigsten Drücken unterschiedliche Beullängen gehören.

Zu den Verzweigungslasten  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  konstanter Geometriewerte  $\xi$ ,  $\zeta$  gehören - in Abhängigkeit der veränderlichen Eigenwerte  $L_1$ ,  $L_2$  - variable Ausgangszustände  $\xi_0$ ,  $\zeta_0$  (siehe Gleichung (4.24)) bzw. variable Grunddeformationen.

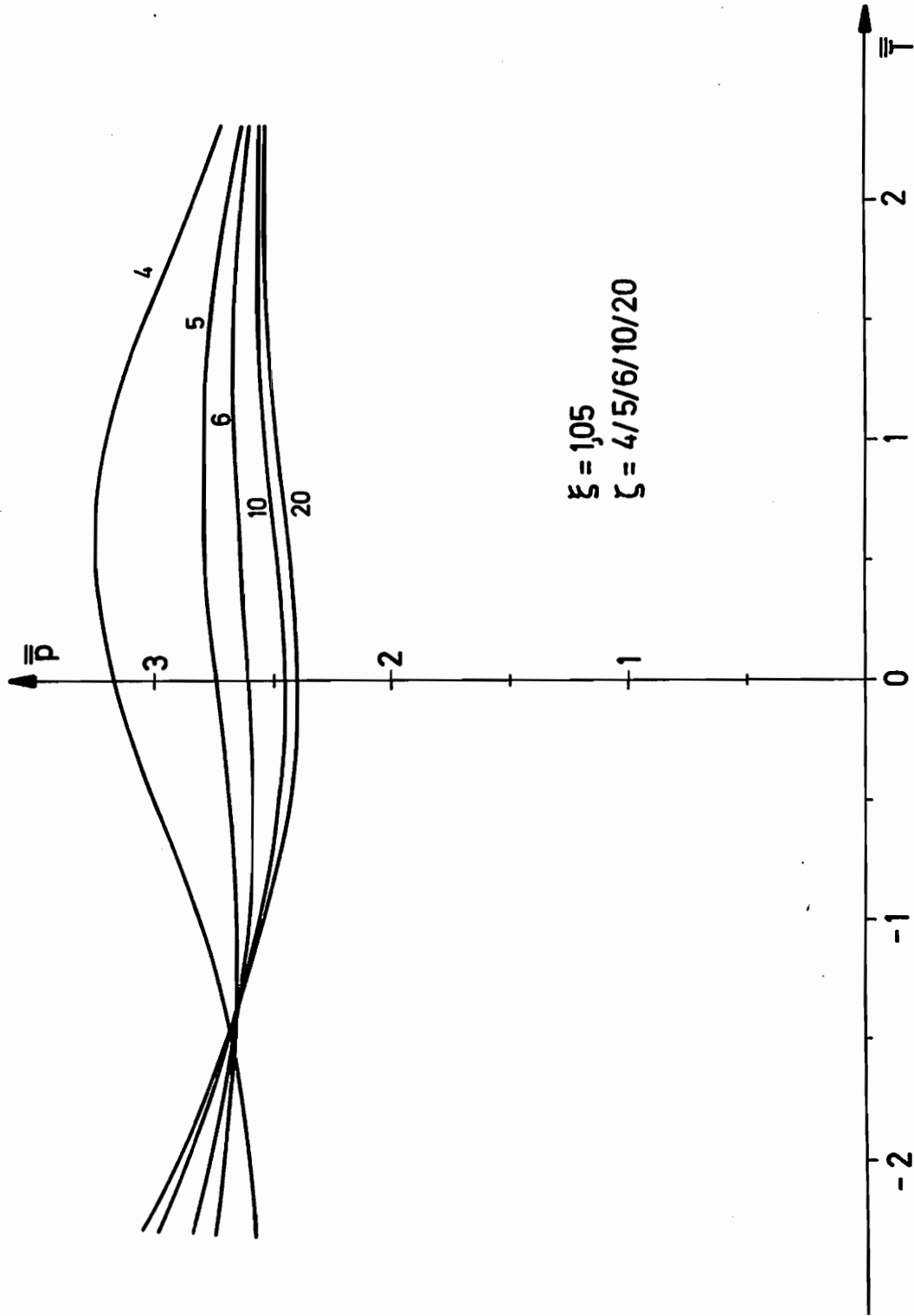


Abb. 14 Verzweigungslasten



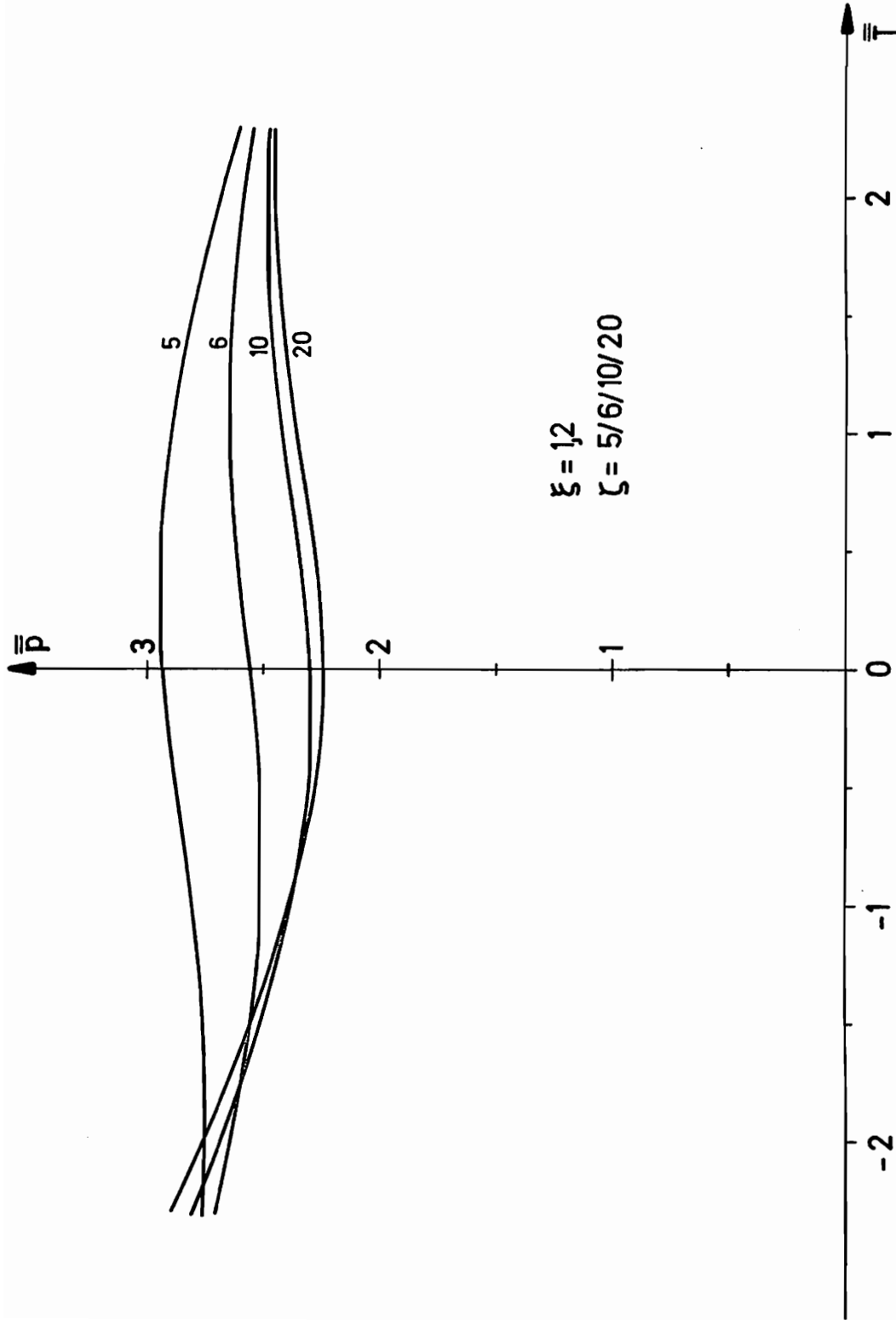


Abb. 15 Verzweigungslasten

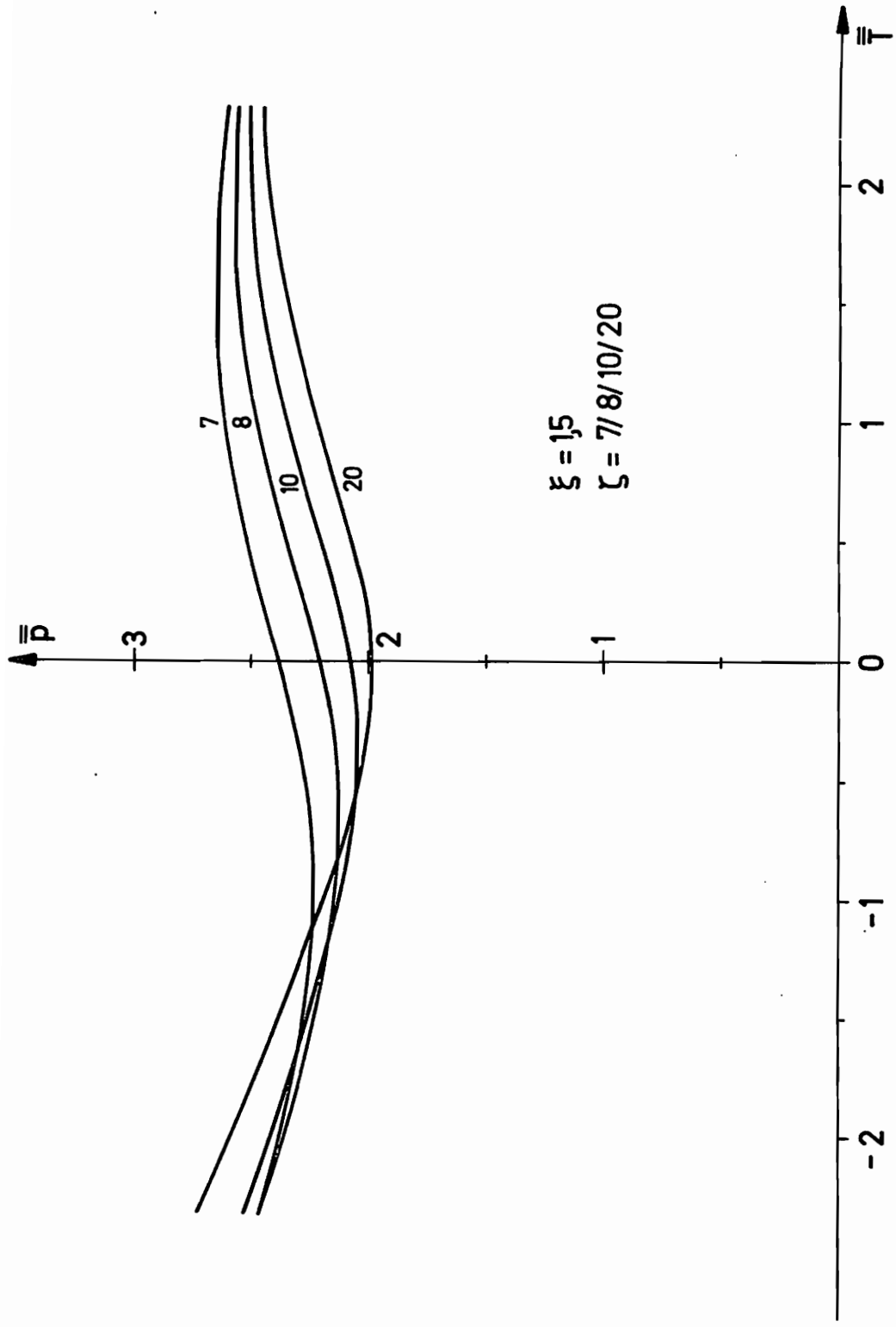


Abb. 16 Verzweigungslasten

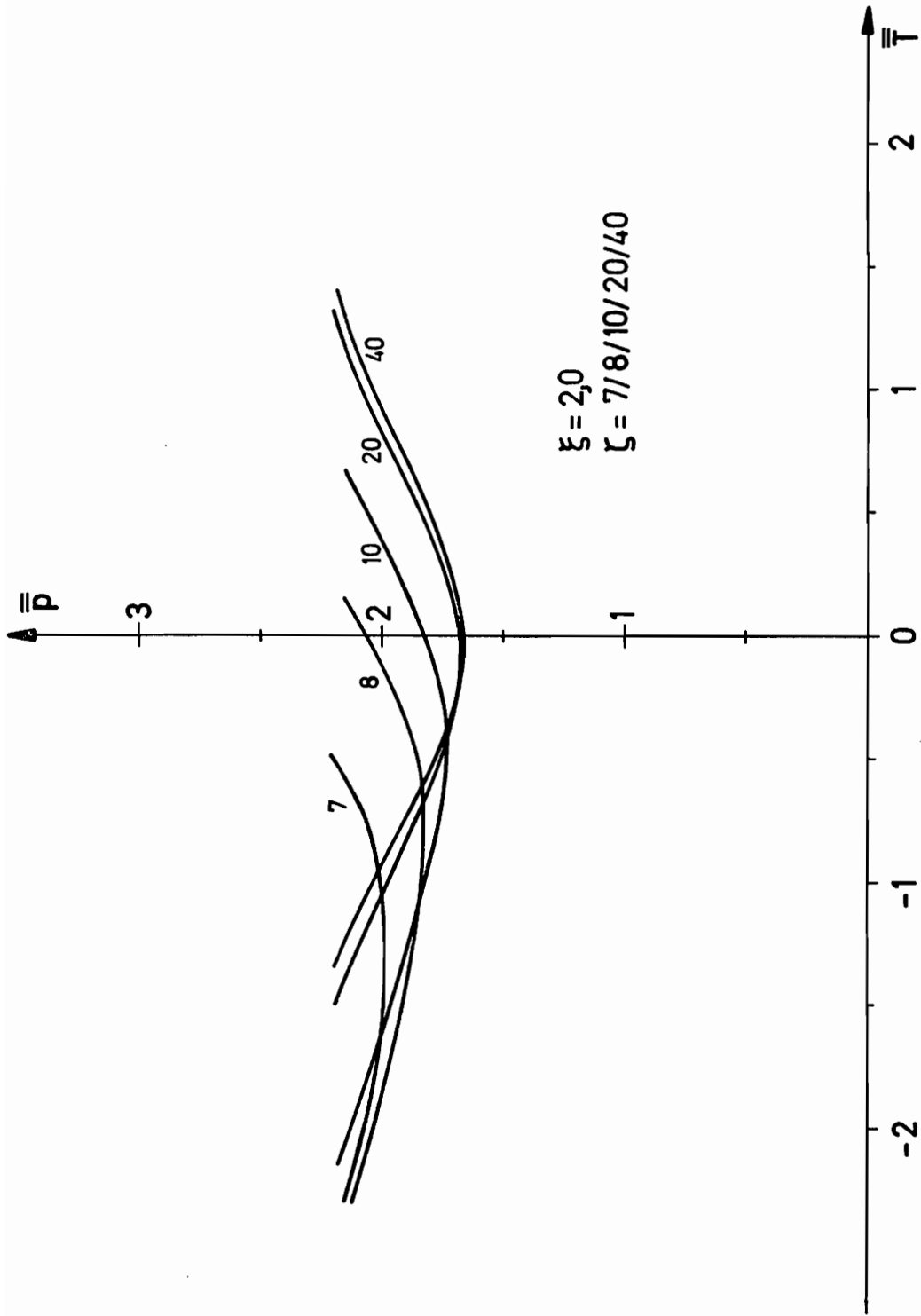


Abb. 17 Verzweigungslasten

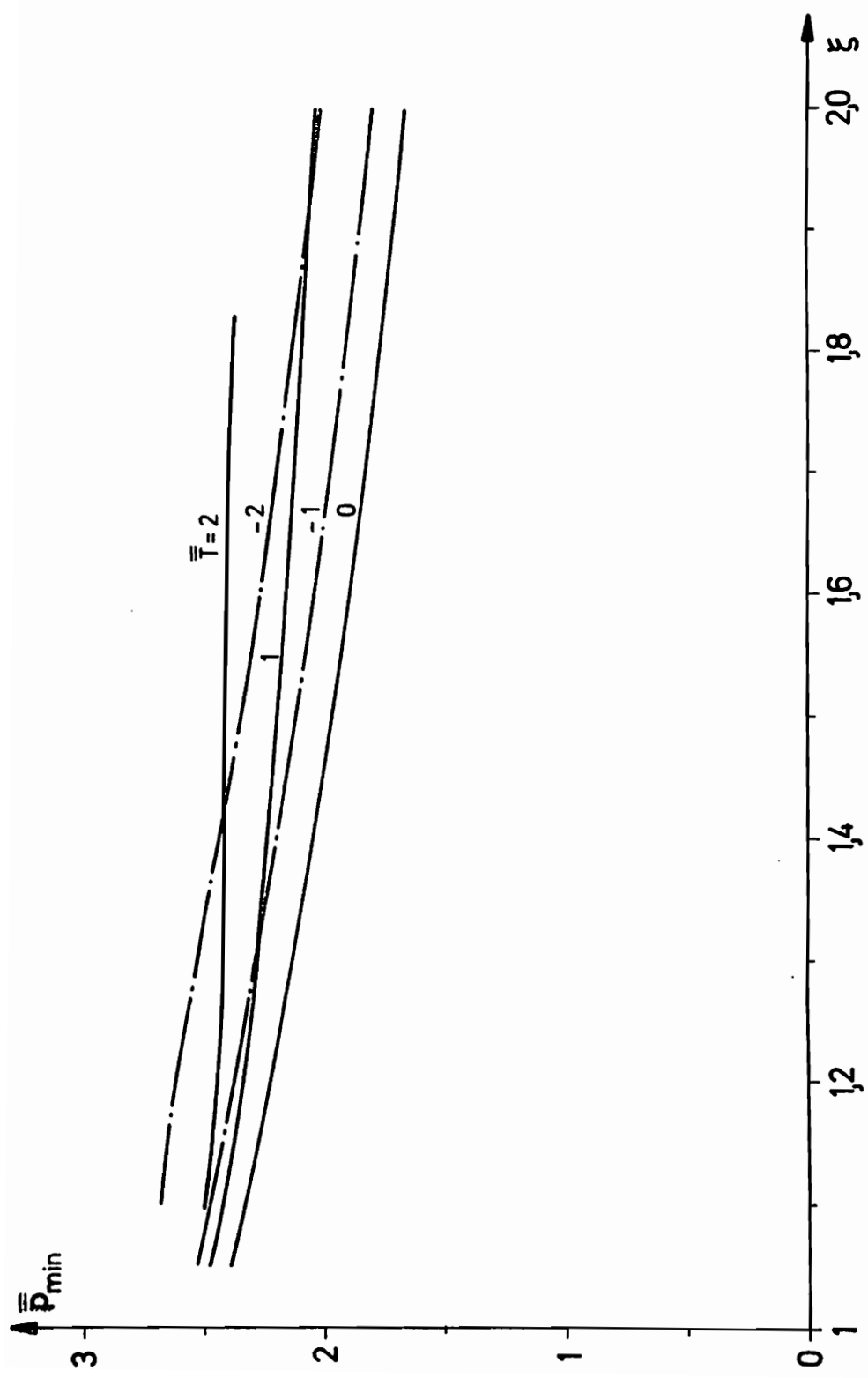


Abb. 18 Minimale kritische Innendrucke

In den bisherigen Darstellungen der Ergebnisse werden diese veränderlichen Deformationen nicht in gewünschtem Maße berücksichtigt. Die Zunahme der kritischen Drücke bei positiver oder negativer Längskraftsteigerung (an den unteren Kurvenzügen in Abb. 14 bis Abb. 17 am deutlichsten erkennbar) ist beispielsweise zurückzuführen auf eine veränderliche - mit der Längskraft ansteigende - Grunddeformation.

In Abb. 18 wird zu verschiedenen Axialkräften  $\bar{T}$  der jeweils minimale Innendruck  $\bar{p}_{min}$  als Funktion des Radienverhältnisses dargestellt. Die bezogene Größe  $\bar{p}_{min}$  läßt Rückschlüsse zu auf die spezifische Belastbarkeit und damit auf die mögliche Werkstoffausnutzung des dickwandigen Rohres.

## 9. Ergebnisse für vorgegebene Ausgangszustände

### 9.1 Allgemeines

Die Verzweigungslasten  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  sollen nun zu vorgegebenen, konstanten Ausgangszuständen  $\xi_0$ ,  $\zeta_0$  berechnet und dargestellt werden. Zur Durchführung dieser Rechnungen wurde ein weiteres Programm abgefaßt, welches durch gezielte Variation der Grundzustandsgeometrie  $\xi$ ,  $\zeta$  die Lösungen  $L_1$ ,  $L_2$  bzw.  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  für einen bestimmten Ausgangszustand ermittelt. Da zu jedem Näherungsschritt, d. h. Vorgabe eines geschätzten Wertepaares  $\xi$ ,  $\zeta$ , das Randwertproblem (6.57), (6.59) vollständig gelöst wird, ergeben sich beträchtliche Rechenzeiten; für eine Lösung sind unter Umständen mehrere Minuten erforderlich.

### 9.2 Eigenwerte

Der Verlauf der Eigenwerte  $L_1$ ,  $L_2$  zu den gewählten Radienverhältnissen  $\xi_0 = 1,2/1,6/2,0/2,5$ , kombiniert mit verschiedenen bezogenen Beullängen  $\zeta_0$ , ist aus Abb. 19 bis Abb. 22 ersichtlich. Die ermittelten Lösungen  $L_1$ ,  $L_2$  weisen ähnliche Merkmale auf wie die in Kapitel 8.2.1 besprochenen Lösungskurven für konstante Grundzustandsgeometriewerte  $\xi$ ,  $\zeta$  (siehe Abb. 7 bis Abb. 10).

An dieser Stelle sei an die Definitionen von  $\xi$  und  $\zeta_0$  nach (4.20) und (4.23) erinnert. Infolge der Bezugsgrößen  $R$  bzw.  $R_0$  wird der Zusammenhang zwischen  $\xi$  und  $\zeta_0$  im wesentlichen durch die radiale Grunddeformation bestimmt, während der Einfluß der - rein elastischen - axialen Deformation von  $l_0$  auf  $l$  für den betrachteten Bereich  $L_2$  gering bleibt.

### 9.3 Verzweigungslasten, Grunddeformationen

Eine Darstellung der Verzweigungslasten nach (8.1) und (8.2) ist hier nicht angebracht, da variable Grundzustände vorliegen.

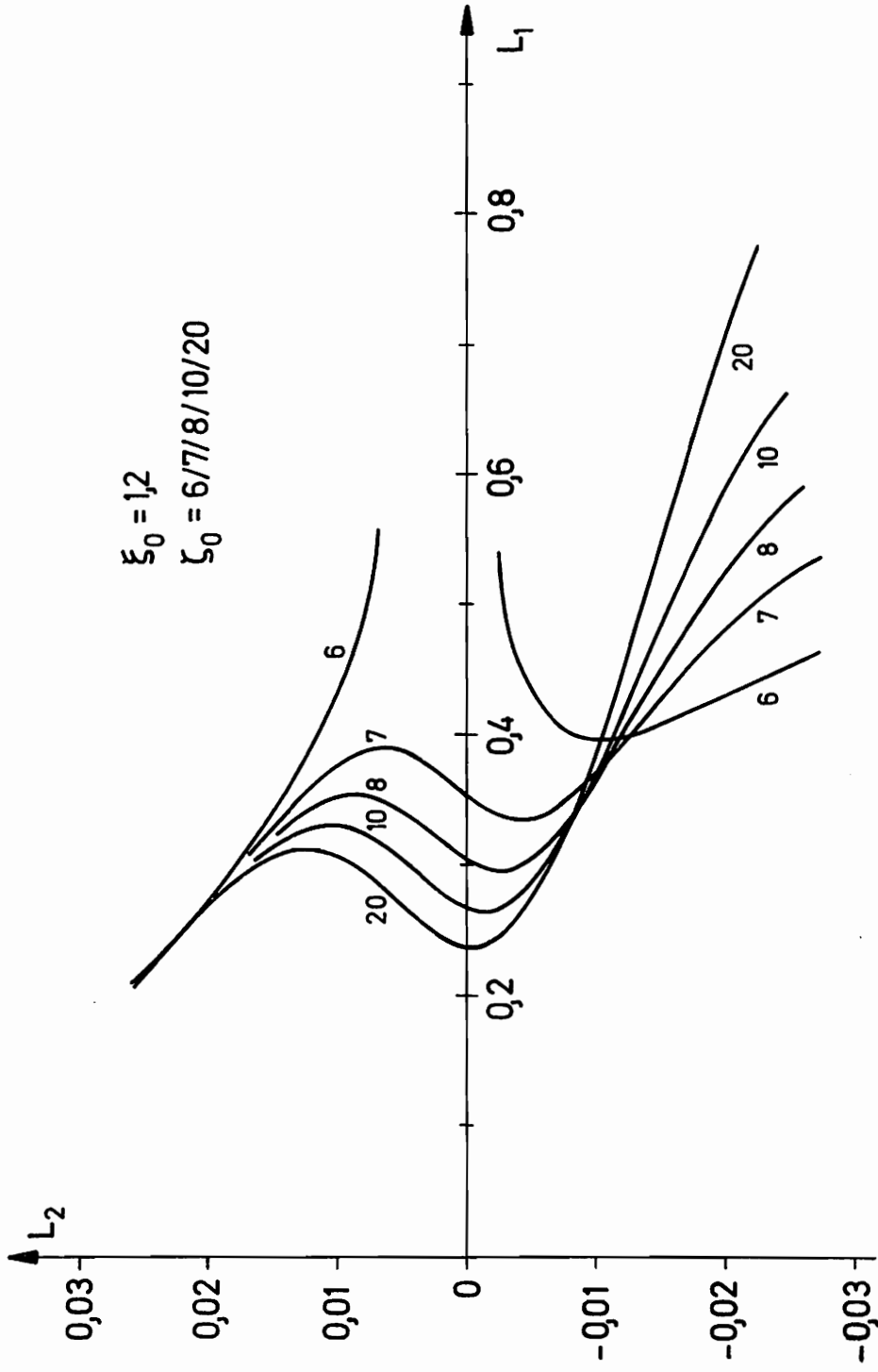


Abb. 19 Eigenwerte

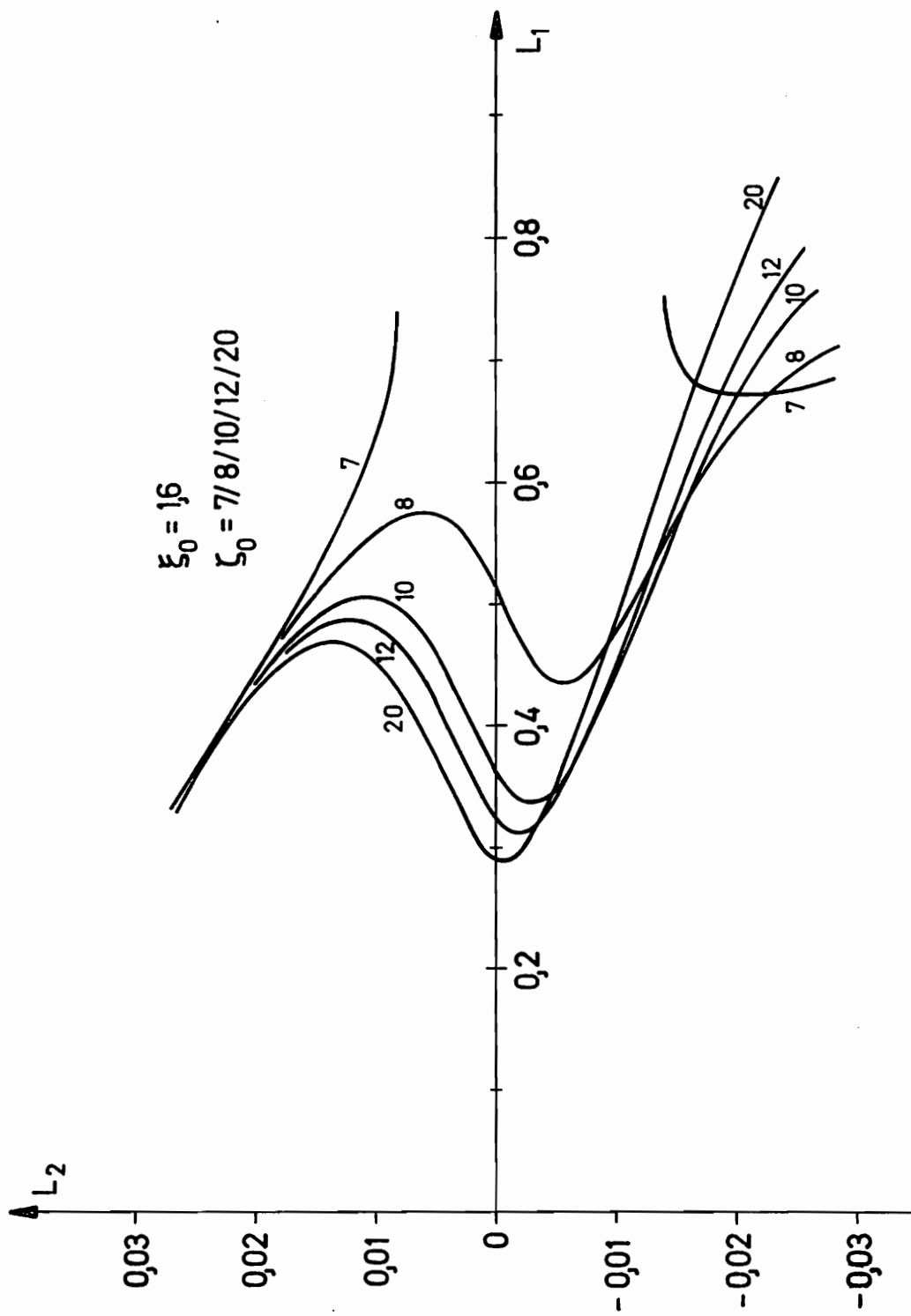


Abb. 20 Eigenwerte



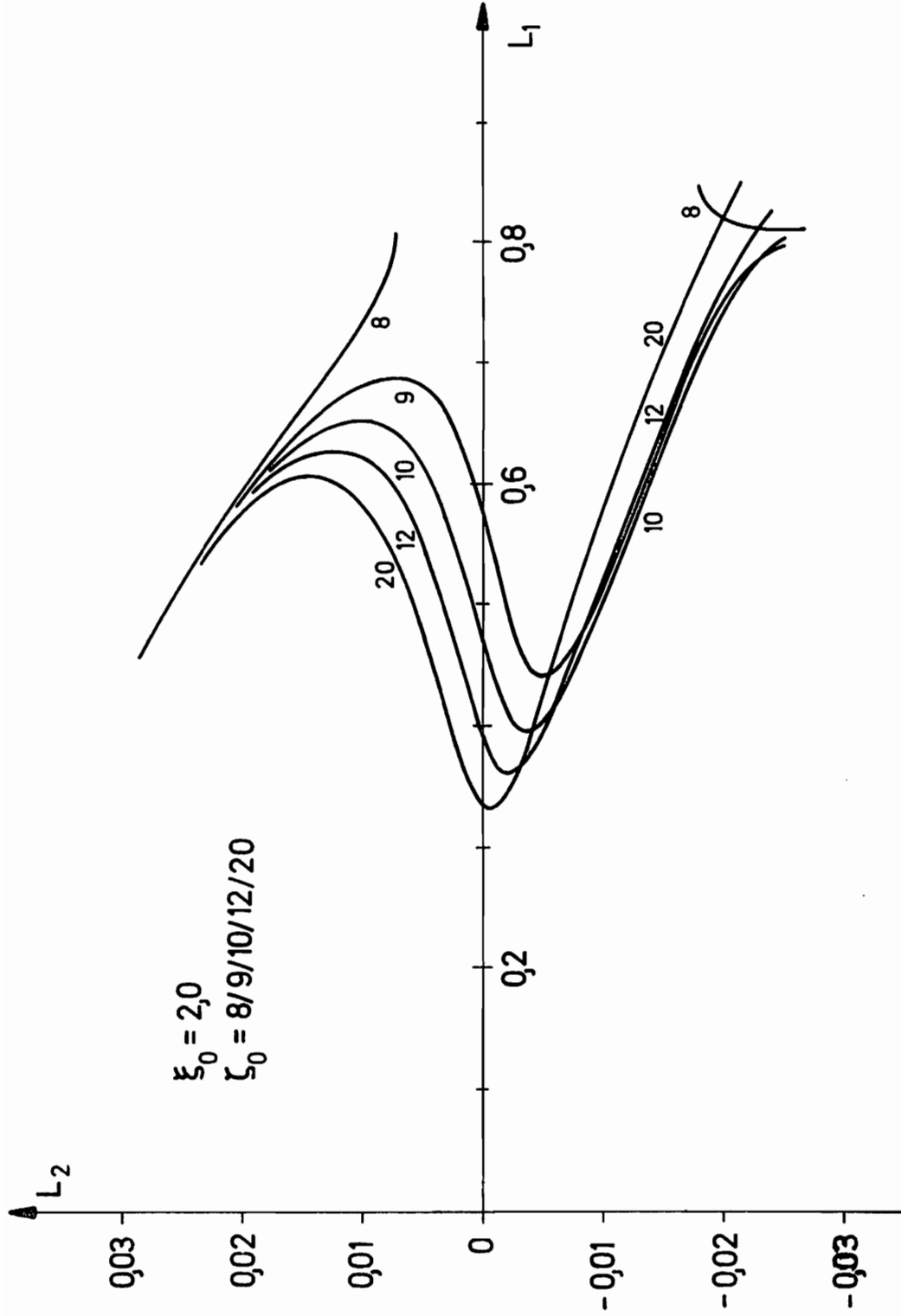


Abb. 21 Eigenwerte

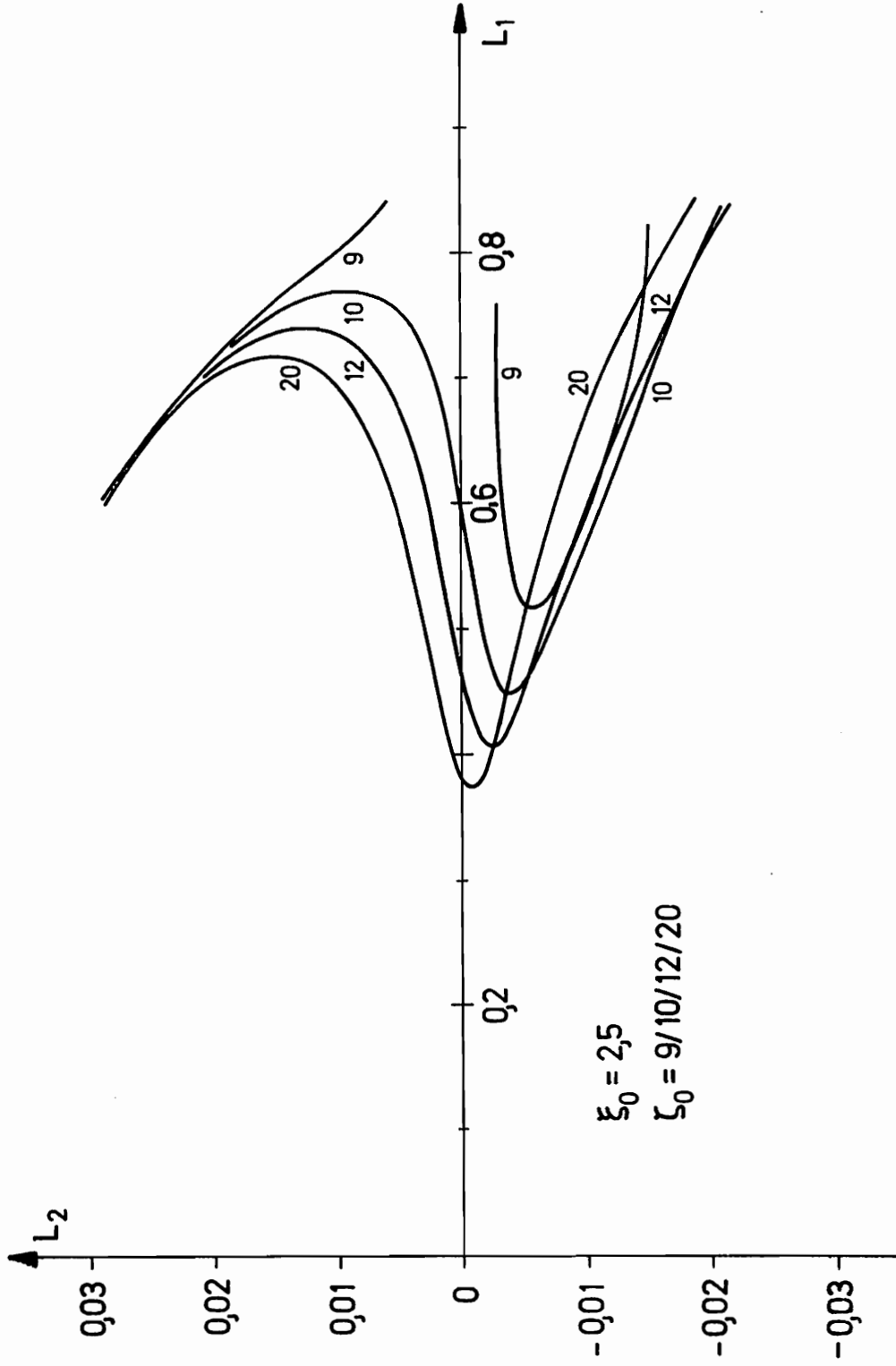


Abb. 22 Eigenwerte

Wir beziehen deshalb die kritischen Innendrucke und die kritischen Längskräfte auf die Geometrie des Ausgangszustandes. Analog (8.1) und (8.2) folgt

$$\bar{\bar{T}}_0 = \frac{\bar{T}}{\bar{\sigma}_0 \pi (\xi_0^2 - 1)} = \frac{L_2}{\bar{\sigma}_0} \exp\left(-\frac{2}{3} L_2\right) \quad (9.1)$$

sowie

$$\bar{\bar{p}}_0 = \frac{\bar{p}}{\bar{\sigma}_0 (\xi_0 - 1)} \quad (9.2)$$

Die Verzweigungslasten  $\bar{\bar{p}}_0$ ,  $\bar{\bar{T}}_0$  für die gewählten Geometriewerte  $\xi_0$ ,  $\zeta_0$  sind in den Abb. 23 bis 26 angegeben. Im Gegensatz zu den Ergebnissen von Kapitel 8.3 werden durch die vorliegenden Lösungen die jeweiligen - mit der Längskraft veränderlichen - Grunddeformationen hinreichend berücksichtigt. Verfolgen wir z. B. die oberen Kurvenzüge in den Abbildungen, so führen positiv oder negativ ansteigende Längskräfte zu abnehmenden Innendrucke. Dieser Effekt entspricht durchaus den Erwartungen einer ingenieurmäßigen Betrachtungsweise.

Im Bereich negativer Längskräfte liegen die Maxima der einzelnen Kurven. Die Ursache dafür ist der vom Innendruck abhängige Axialkraftanteil, der über  $\sigma_3^3$  mit in die Rechnung eingeht, jedoch nicht explizit in den Ergebnissen erscheint, dargestellt ist nur der druckunabhängige Axialkraftanteil, siehe hierzu Kapitel 5.2.7. Kleine negative Kräfte  $\bar{T}$  (bzw.  $\bar{\bar{T}}_0$ ) bewirken also - vereinfacht ausgedrückt - eine Entlastung des Rohres in Axialrichtung, so daß die Belastbarkeit in Radial- und Tangentialrichtung ansteigt.

Um die Abhängigkeit der Grunddeformation von der Längskraft zu zeigen, ist in den Abb. 27 bis 30 das Radienverhältnis des Grundzustandes  $\xi$  über  $\bar{\bar{T}}_0$  aufgetragen. Bei geringer Wanddicke im Ausgangszustand, etwa  $\xi_0 = 1,2$ , wird der Verlauf

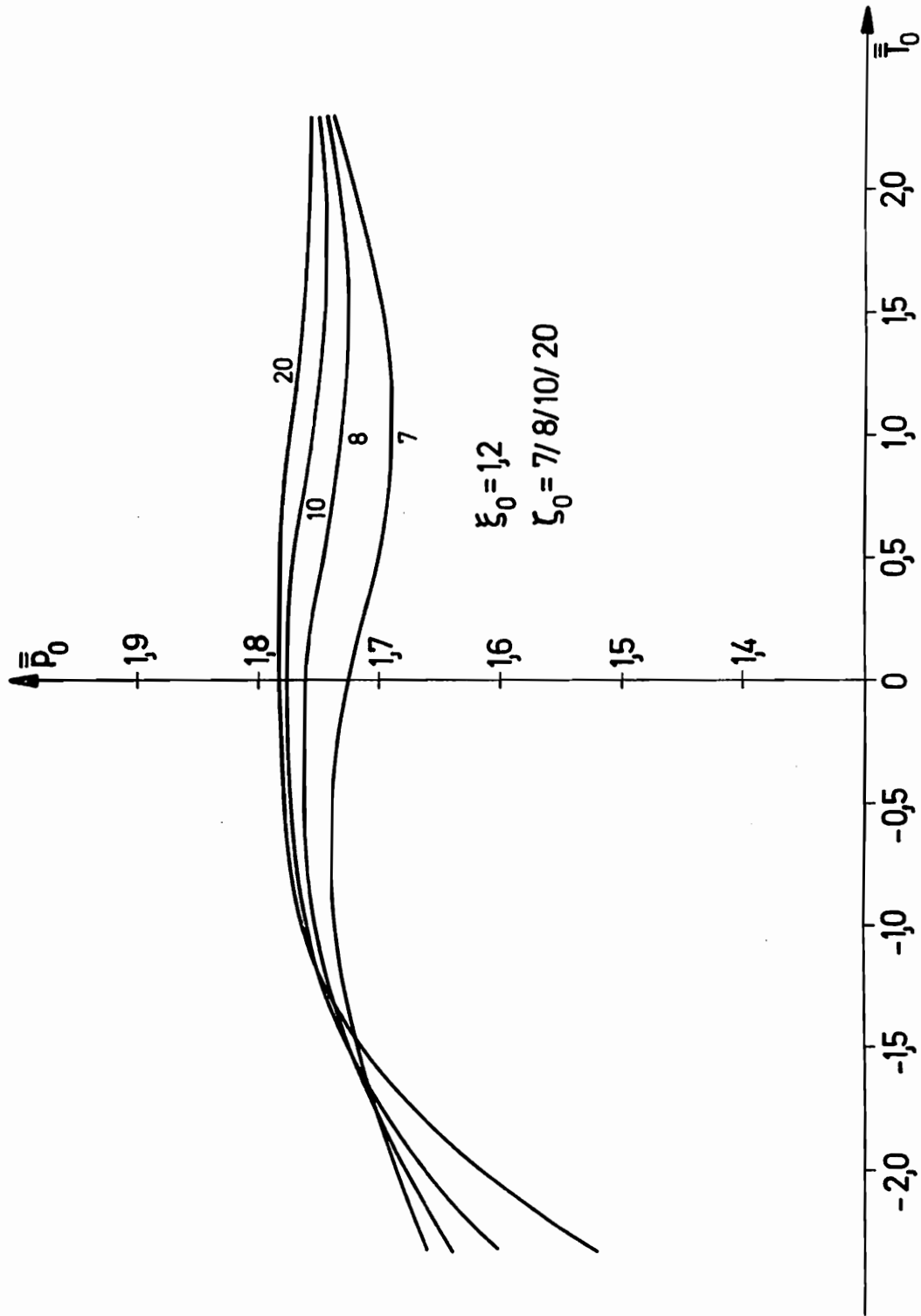


Abb. 23 Verzweigungslasten

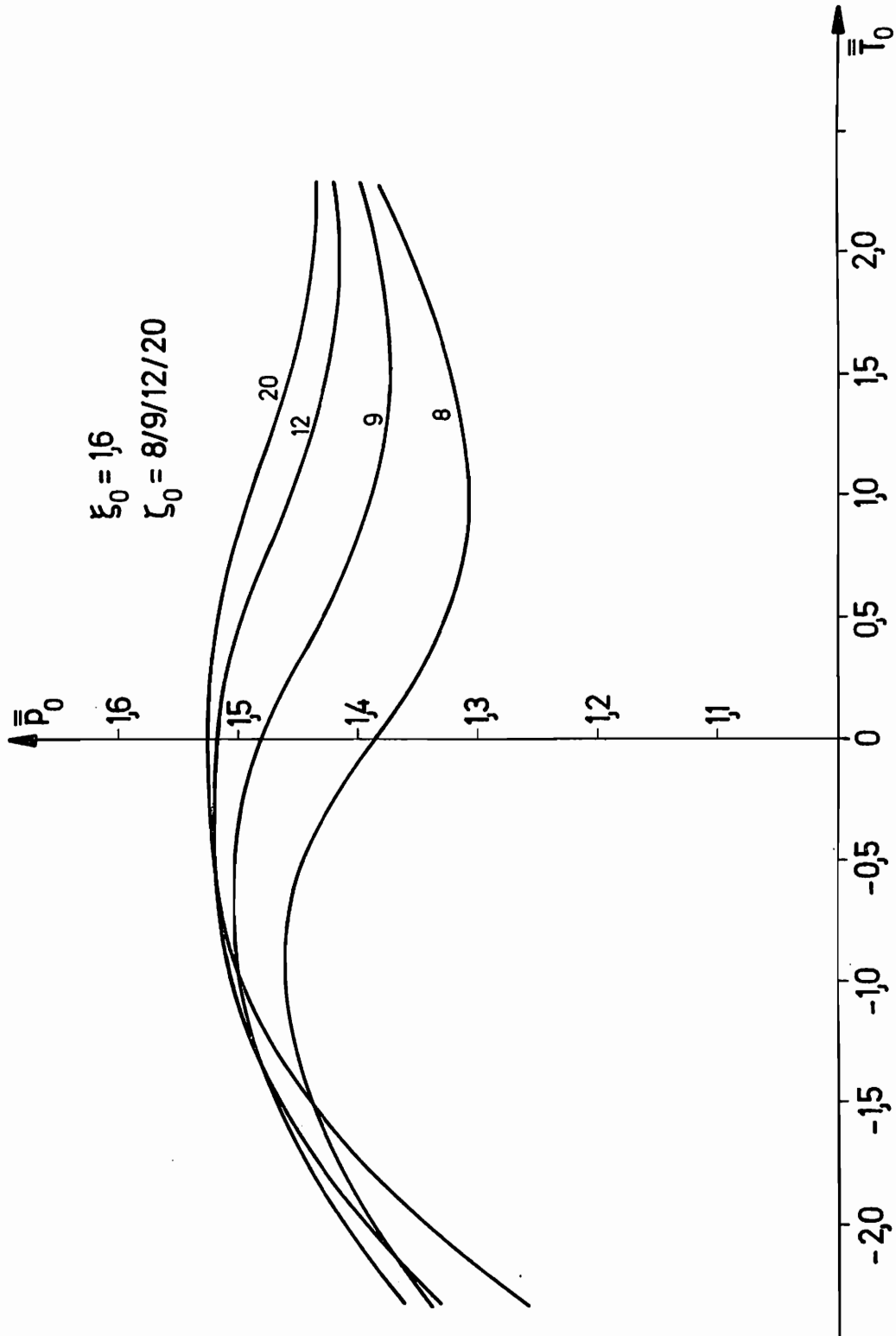


Abb. 24 Verzweigungslasten

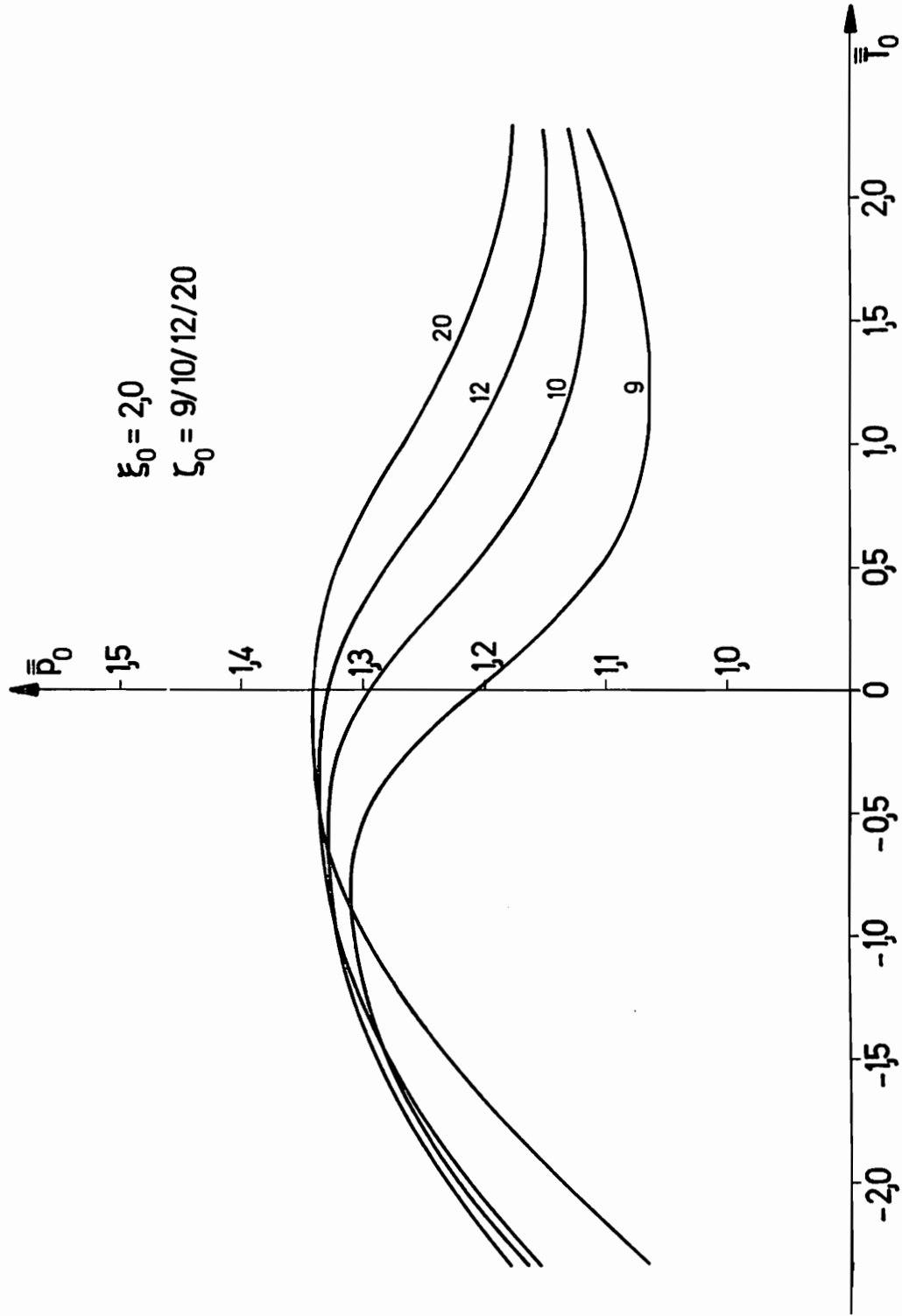


Abb. 25 Verzweigungslasten

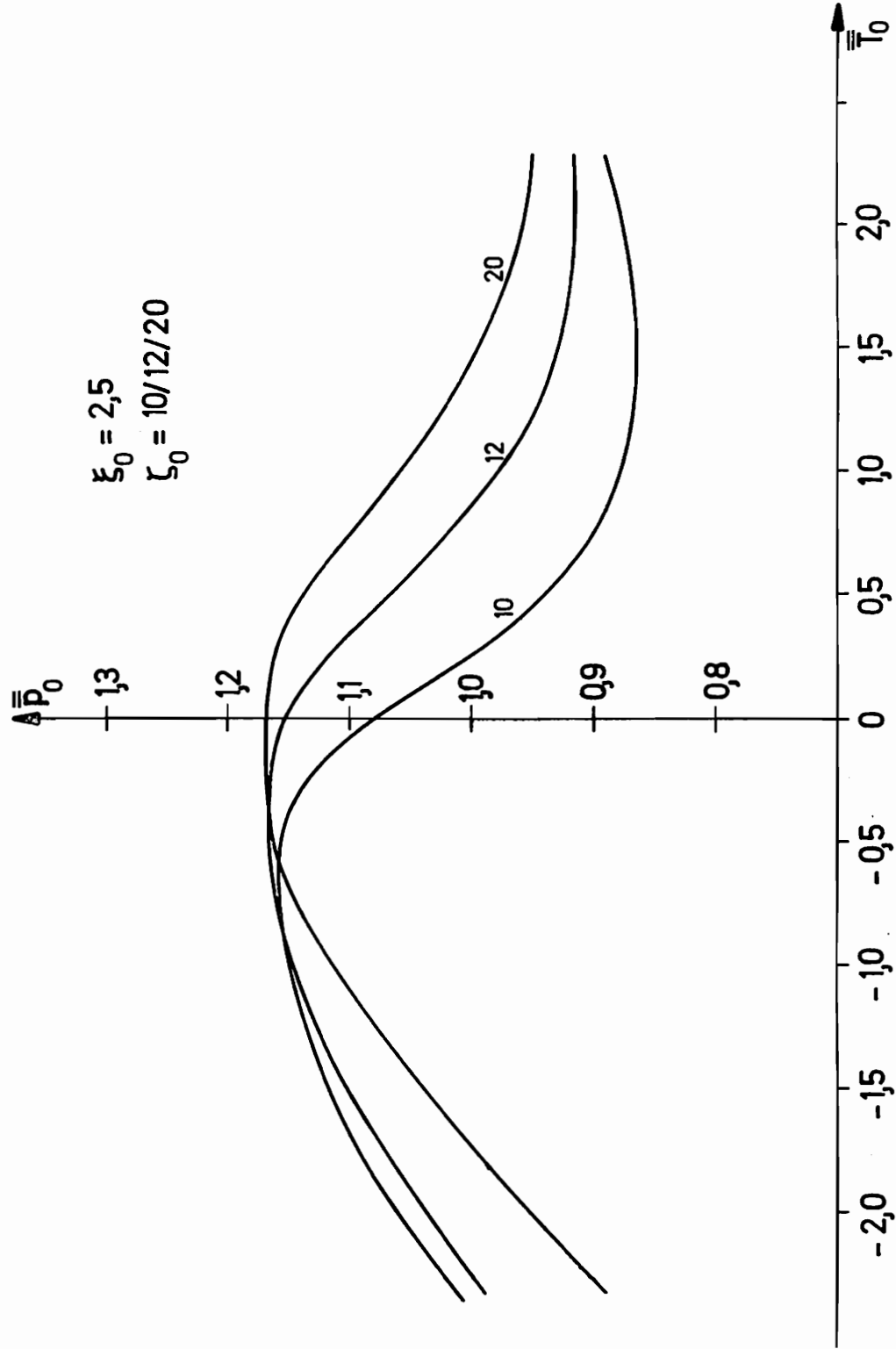


Abb. 26 Verzweigungslasten

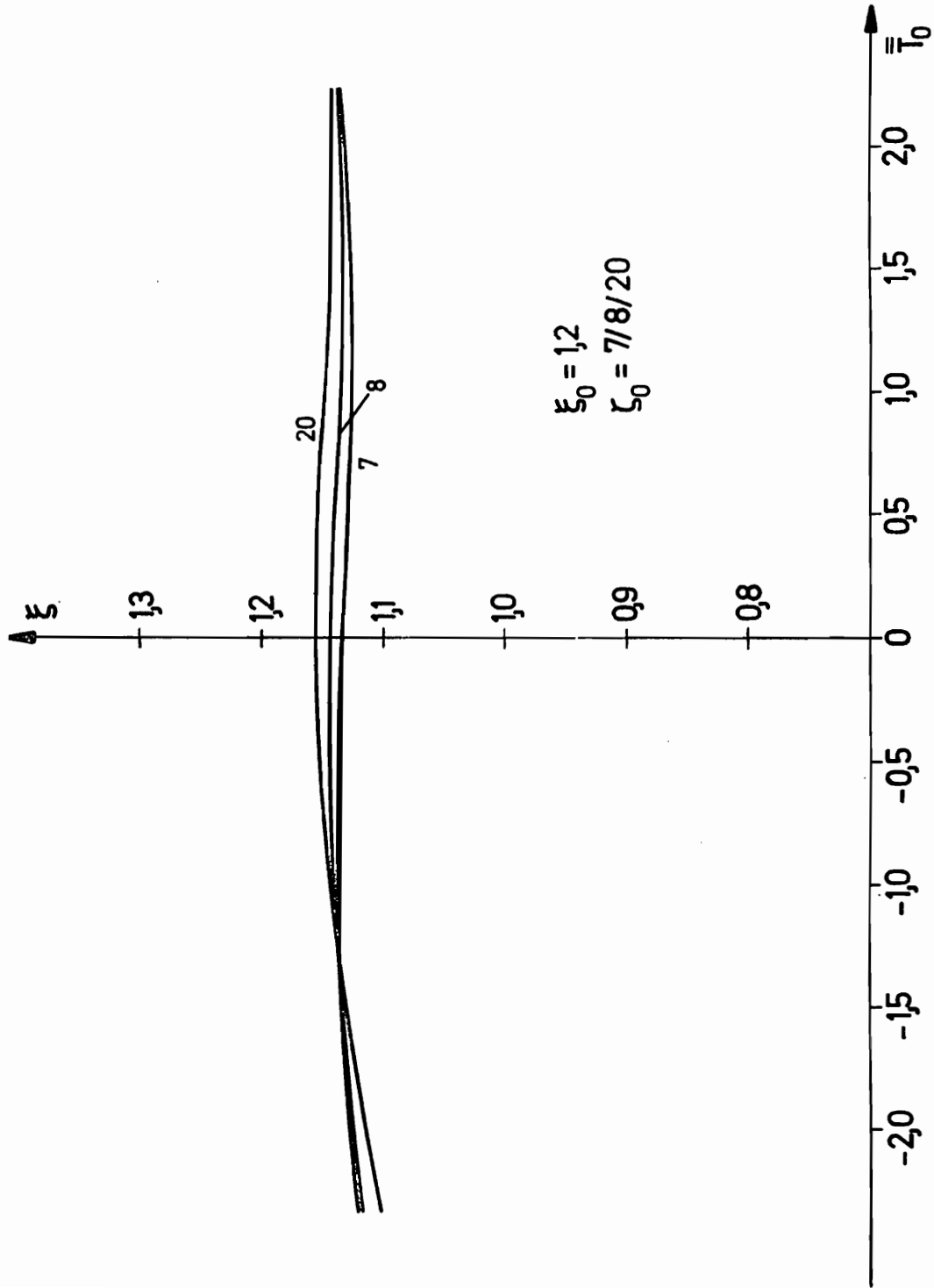


Abb. 27 Grundzustandsgeometrie



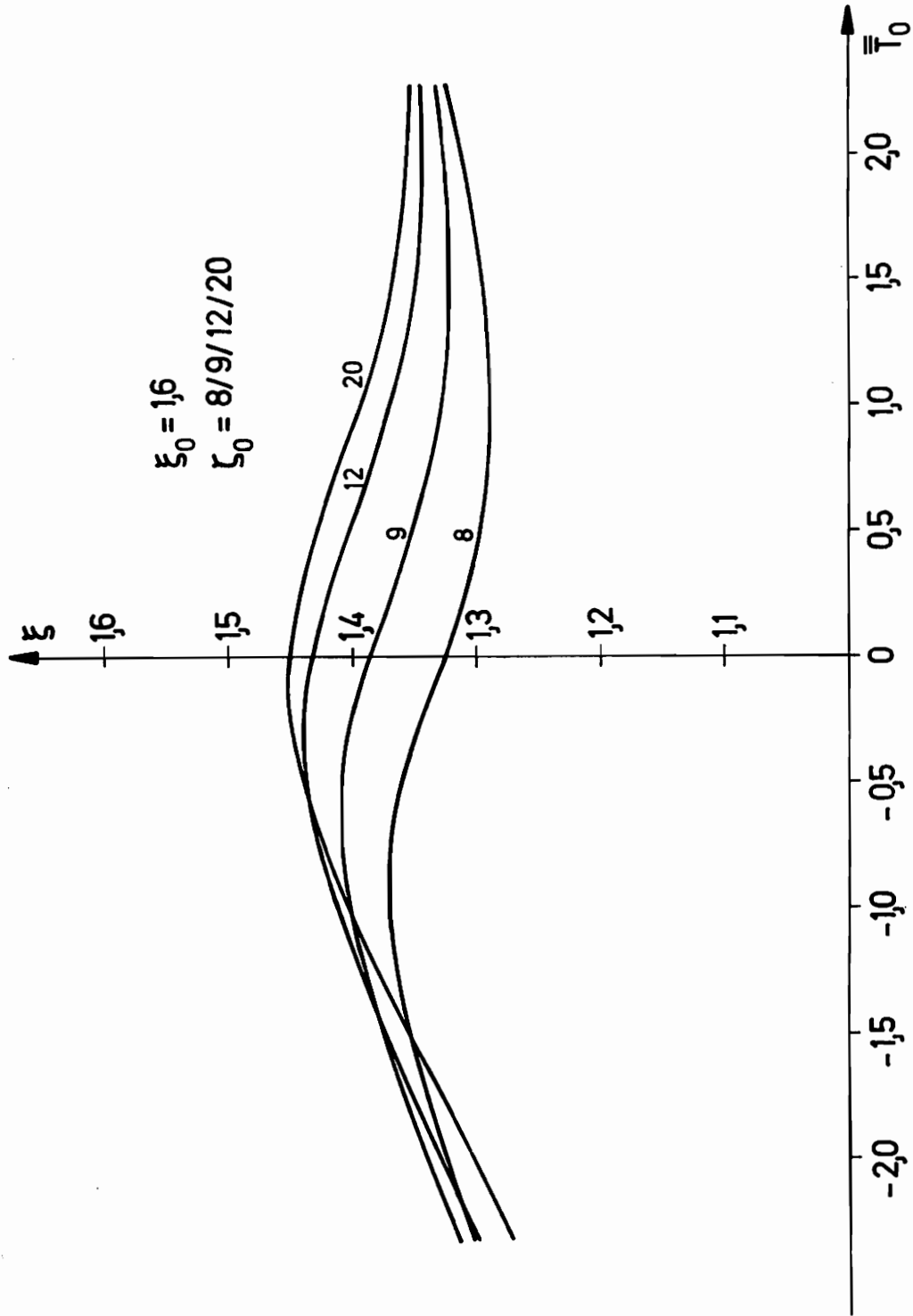


Abb. 28 Grundzustandsgeometrie

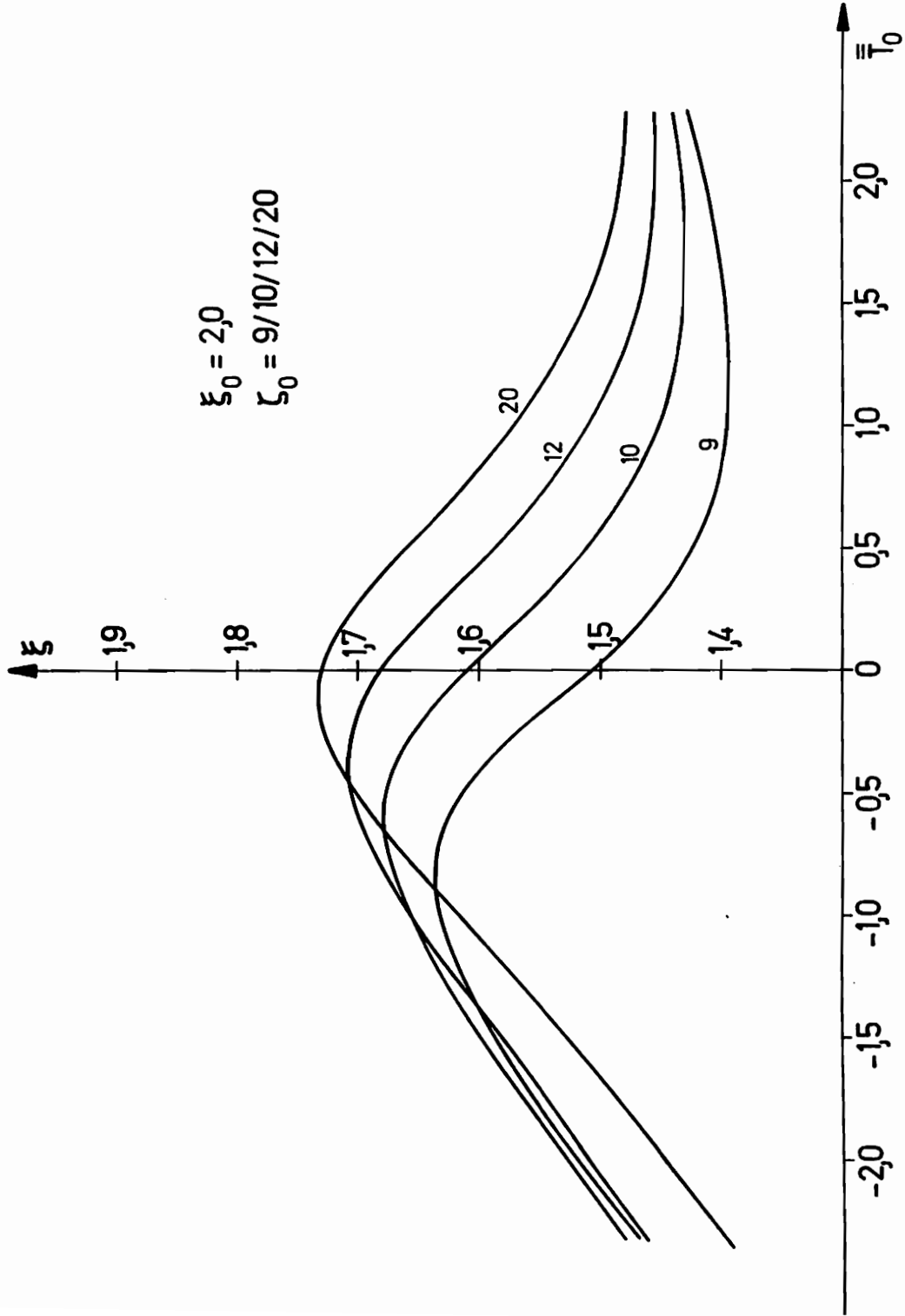


Abb. 29 Grundzustandsgeometrie

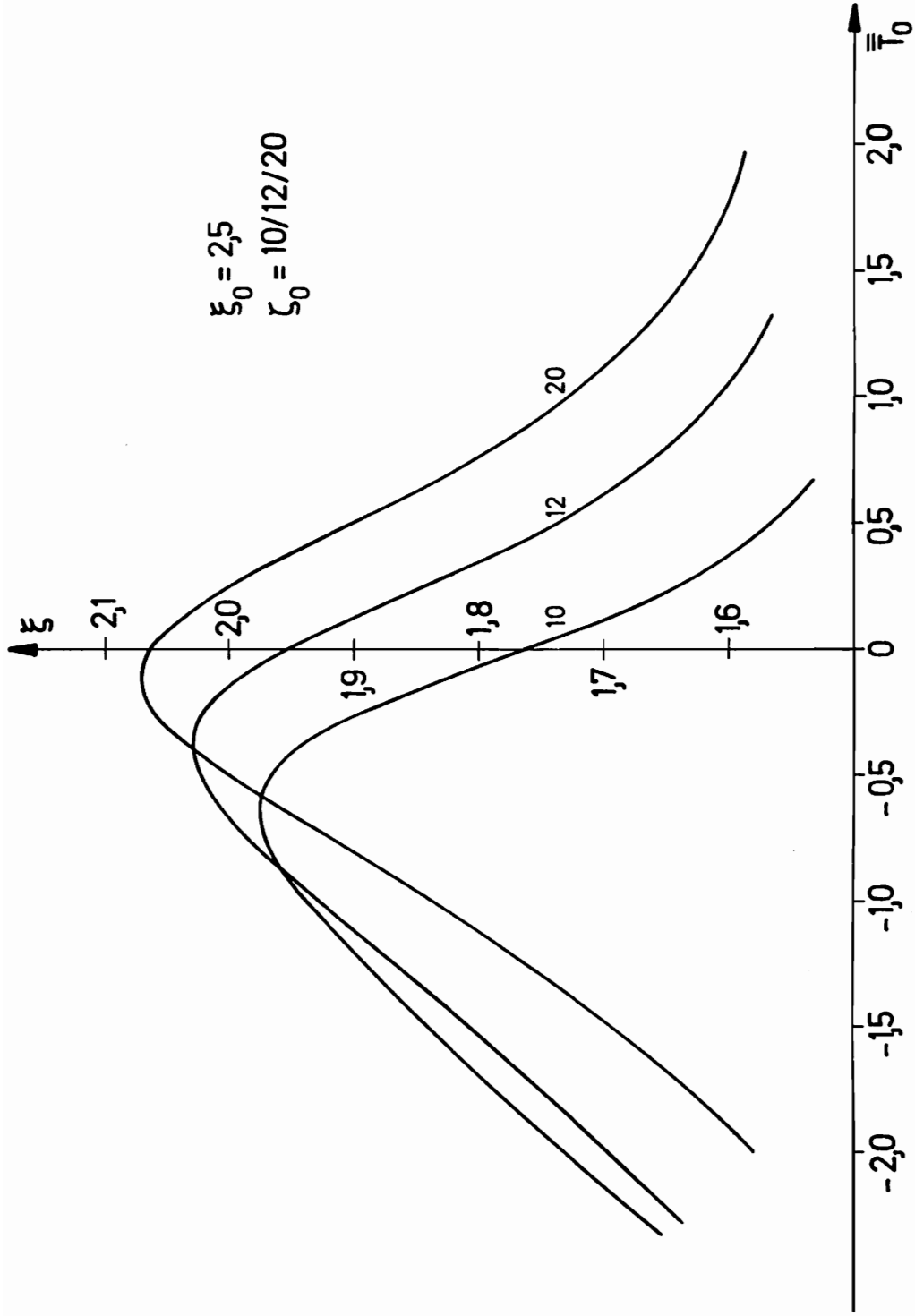


Abb. 30 Grundzustandsgeometrie

von  $\xi$  nur unwesentlich von der Längskraft beeinflusst. Mit zunehmender Wanddicke nimmt jedoch der Einfluß der Längskraft auf die Grunddeformation deutlich zu.

Bisher offengeblieben ist die Frage, welche Beullängen auftreten können, bzw. welche Verzweigungslasten und Grunddeformationen gültig sind für ein Rohr, das steigenden Belastungen ausgesetzt wird. Wir gehen davon aus, daß durch eine vorgegebene Schrittfolge von Druck- und Längskraftsteigerungen, kurz "Belastungsweg" genannt, die in Kapitel 5.5 aufgestellten Bedingungen nicht verletzt werden. Die Verzweigung tritt dann bei einem Grundzustand ein, der - für den gewählten Belastungsweg - auf die kleinste Grunddeformation und damit auch auf den kleinsten Spannungszustand führt. In den Abb. 23 bis 30 gelten demnach die jeweils oberen Kurvenzüge.

Für positive Axialkräfte ist die größtmögliche Beullänge maßgebend;  $\xi_0 = 20$  kann als Grenzwert angenommen werden, da eine Rechnung mit z. B.  $\xi_0 = 40$  keine wesentlichen Änderungen mehr ergibt. Eine genaue Aussage, welche Beullänge am belasteten Rohr auftreten würde, ist somit nicht möglich.

Im Bereich negativer Axialkräfte verlagern sich dagegen die gültigen Lösungen zu endlichen - infolge der Kurvenüberschneidungen veränderlichen - Beullängen. Bei vorgegebenem Belastungsweg kann man die entsprechende Beullänge aus den Abbildungen entnehmen.

#### 9.4 Ergänzungen

Die Abb. 31 und 32 zeigen für einige Axialkräfte  $\bar{T}_0$  den Verlauf der kritischen Innendrucke  $\bar{p}_0$  über dem Radienverhältnis  $\xi_0$ . Der bezogene Druck und damit die spezifische Belastbarkeit des Rohres nimmt mit steigender Wanddicke ab.

Um die Größenordnung der dargestellten Ergebnisse zu veran-

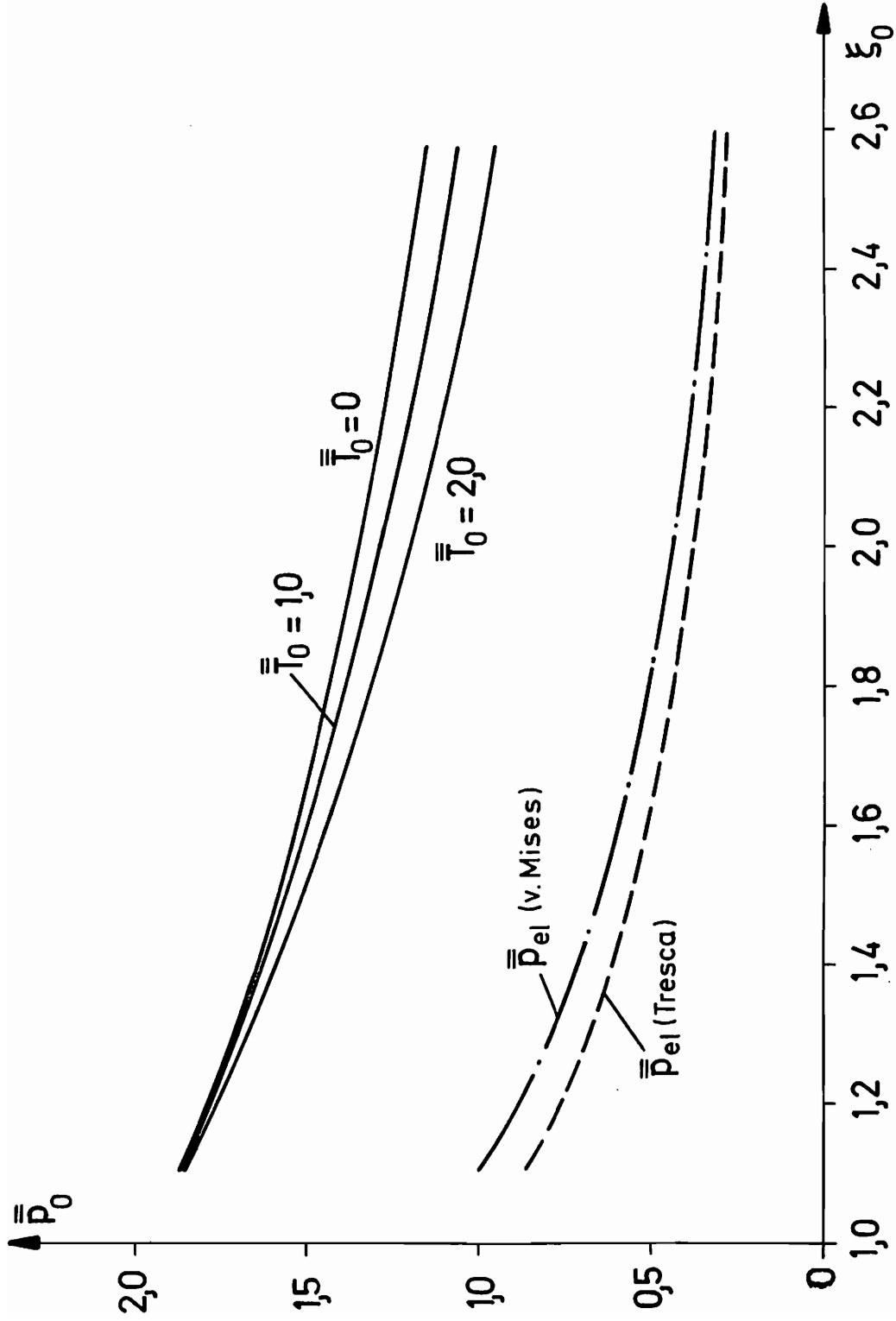


Abb. 31 Kritische Innendrucke

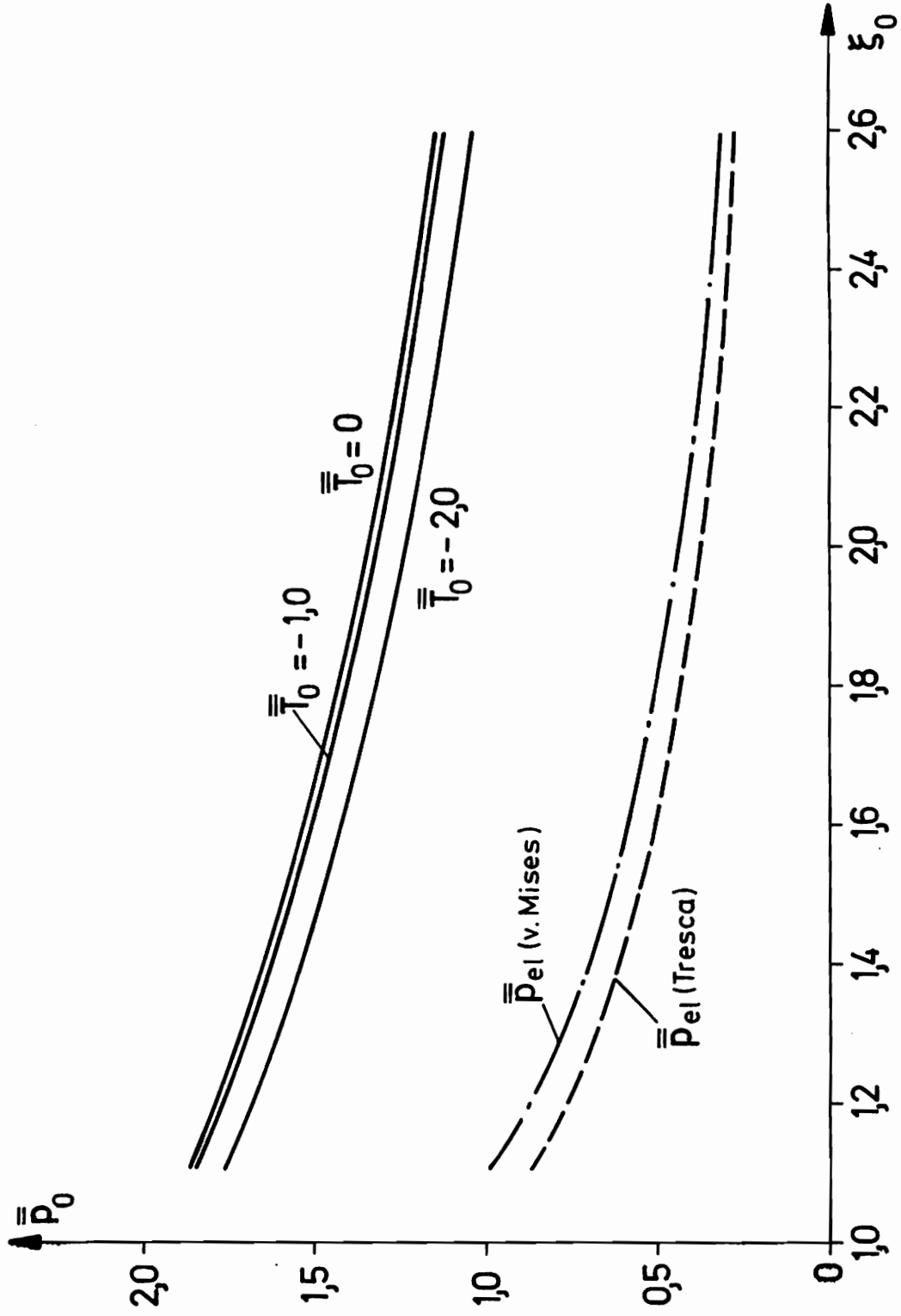


Abb. 32 Kritische Innendrucke

schaulichen, wollen wir auch die zulässigen Innendrucke für rein elastisch beanspruchte, dickwandige Rohre betrachten. Die Gleichungen zur Berechnung der Spannungen bei kleinen, elastischen Formänderungen in radialer Richtung und ebenem Verzerrungszustand in axialer Richtung entnehmen wir [34]. Für  $r_0 = a_0$  folgt

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1^1(a_0) &= -\bar{p} \\ \bar{\sigma}_2^2(a_0) &= \bar{p} \frac{\xi_0^2 + 1}{\xi_0^2 - 1} \\ \bar{\sigma}_3^3(a_0) &= \bar{p} \frac{2\nu}{\xi_0^2 - 1} .\end{aligned}\tag{9.3}$$

Aus der Forderung, daß die Vergleichsspannung aus  $\bar{\sigma}_1^1$ ,  $\bar{\sigma}_2^2$  und  $\bar{\sigma}_3^3$  an der Rohrinneenseite ( $r_0 = a_0$ ) gerade die Streckgrenze  $\bar{\sigma}_0$  erreichen soll, läßt sich eine Beziehung zwischen dem zulässigen Innendruck und dem Radienverhältnis herleiten. Mit der Tresca-Fließbedingung (3.12) und  $\bar{k}_T = 1/2 \bar{\sigma}_0$  erhalten wir

$$\bar{p}_{el} = \frac{\xi_0 + 1}{2 \xi_0^2} \tag{9.4}$$

sowie mit der v.Mises-Fließbedingung (3.14) und  $\bar{k}_M = \sqrt{2/3} \bar{\sigma}_0$

$$\bar{p}_{el} = \frac{\xi_0 + 1}{\sqrt{3} \xi_0^2} . \tag{9.5}$$

Die Kurven zu (9.4) und (9.5) sind in den Abb. 31 und 32 eingezeichnet. Abgesehen von der Größe der Zahlenwerte ist der Verlauf des kritischen Druckes  $\bar{p}_0$  und der Verlauf des Druckes  $\bar{p}_{el}$  über dem Radienverhältnis  $\xi_0$  ähnlich. In beiden Fällen zeigt sich der Einfluß des inhomogenen Spannungszustandes, der bei zunehmender Wanddicke dazu führt, daß die äußeren Zonen des Rohres weniger "mittragen".

Abschließend wollen wir noch einige charakteristische Spannungsverläufe im Grundzustand betrachten. Um die unterschied-

lichen Radienverhältnisse  $\xi$  auszugleichen, führen wir als bezogene Wanddicke

$$\bar{x} = \frac{x-1}{\xi-1}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (9.6)$$

ein. In Abb. 33 bis Abb. 35 sind die Spannungen eines Rohres  $\xi_0 = 2,0$  für verschiedene Verzweigungslasten  $p_0, T_0$  dargestellt. Aus dem Verlauf von  $\sigma_2^2$  und  $\sigma_3^3$  wird ersichtlich, daß keine elastischen Bereiche am Außenrand existieren. Dies gilt im übrigen für alle in Kapitel 9.3 gezeigten Lösungen.

Bei einem Werkstoff mit höherer Streckgrenze als die hier gewählte Aluminium-Legierung AlMgCuPb (siehe Kapitel 7.2) könnten durchaus Spannungszustände mit elastischen Randzonen auftreten.

Die Abhängigkeit der einzelnen Spannungen vom Radienverhältnis  $\xi_0$  ist der Abb. 36 zu entnehmen, als Belastung liegt ausschließlich Innendruck vor.



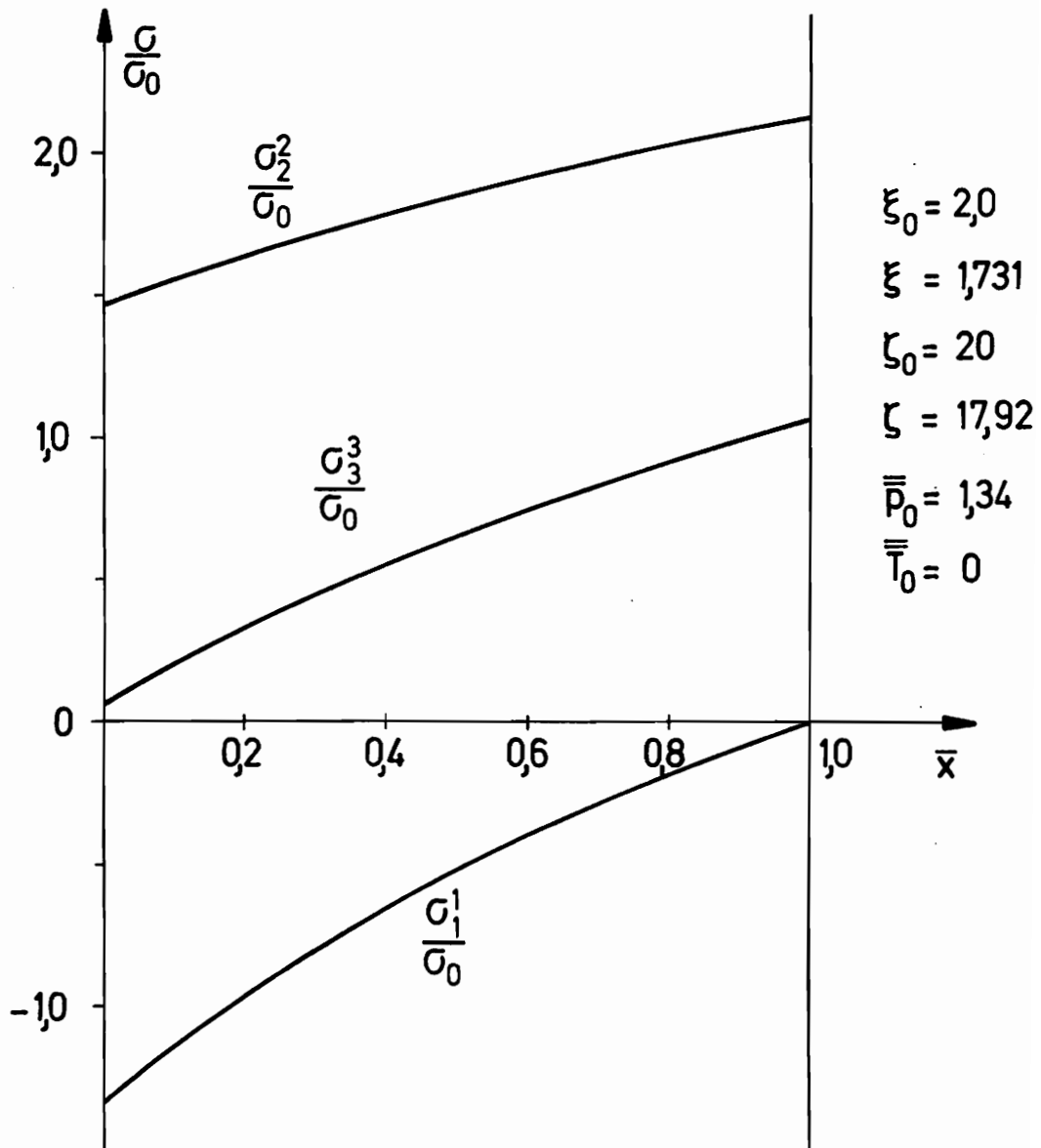


Abb. 33 Spannungsverlauf

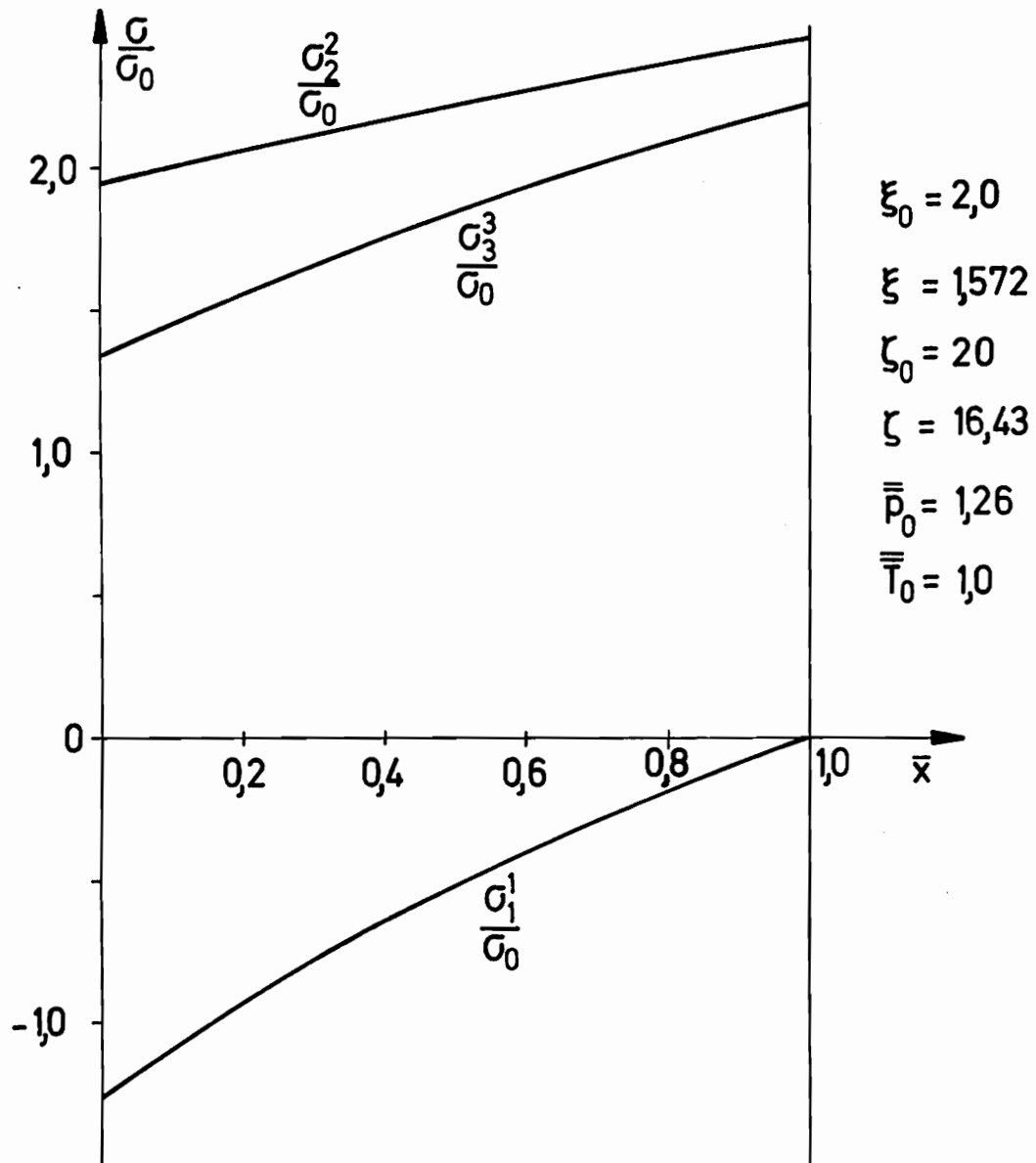


Abb. 34 Spannungsverlauf

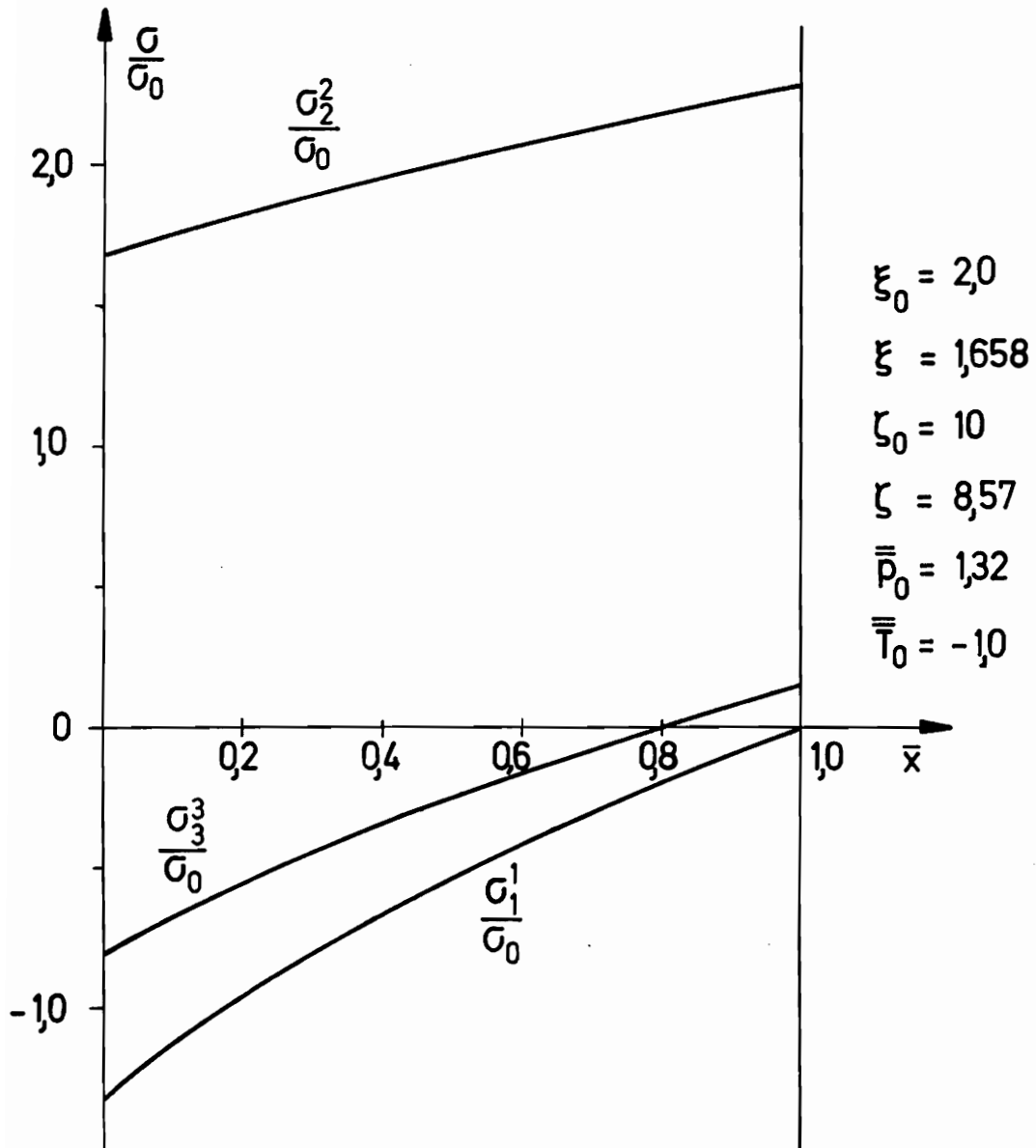


Abb. 35 Spannungsverlauf

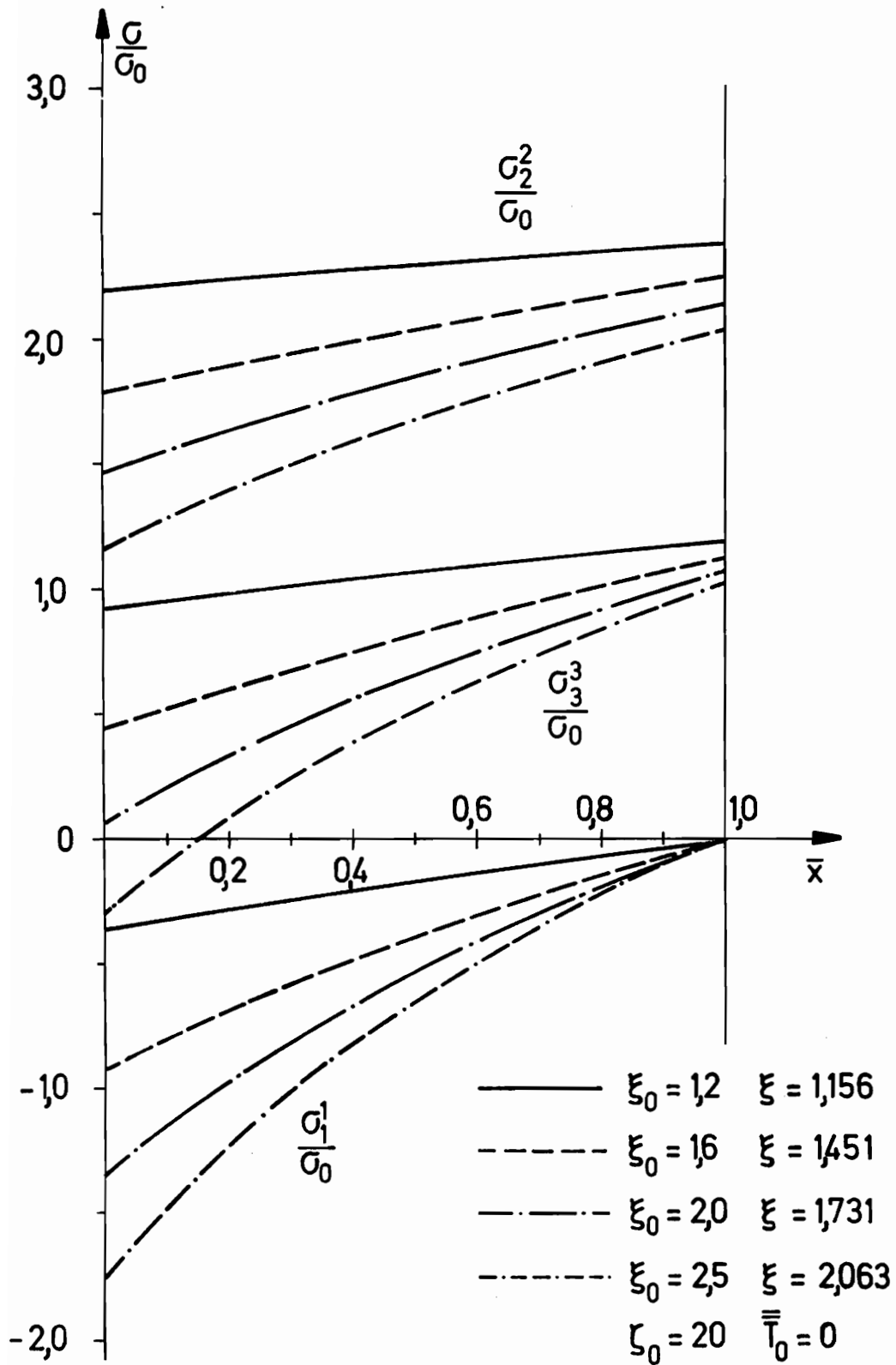


Abb. 36 Spannungsverlagerungen

## 10. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Verzweigungslasten ermittelt für elastoplastisch deformierte, dickwandige Rohre unter Innendruck und Axialkraft. Die Bestimmung des Verzweigungspunktes erfolgt durch eine Betrachtung möglicher Geschwindigkeitsfelder, die über ein Stoffgesetz der Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts unterworfen werden. Die daraus resultierenden Feldgleichungen ergeben mit den zugehörigen Randbedingungen ein lineares, homogenes, partielles Randwertproblem, welches für rotationssymmetrische Geschwindigkeitsfelder auf numerischem Wege zu lösen ist.

Durch die Anwendung zweier unterschiedlicher Stoffgesetze - das Stoffgesetz für die Grunddeformation basiert auf der Tresca-Fließbedingung, zur Verzweigungsanalyse wird die v.Mises-Fließbedingung angewandt - lassen sich sowohl geschlossene Lösungen für die Spannungen der Grunddeformation angeben als auch elastoplastisches Werkstoffverhalten mit nichtlinearer Verfestigung in die Rechnungen einarbeiten. Auswirkungen dieser Vorgehensweise werden im einzelnen diskutiert.

Einige Ergebnisse dieser Arbeit seien nochmals kurz zusammengefaßt. Für die drei möglichen Fälle der Tresca-Fließbedingung werden in den Abb. 6 bis 13 Lösungen des Randwertproblems gezeigt. Zwei Fälle der Tresca-Fließbedingung führen zu keinen sinnvollen Ergebnissen, Abb. 11 bis 13. Die Verzweigungslasten, bezogen auf die Geometrie des deformierten Grundzustandes, lassen sich den Abb. 14 bis 18 entnehmen.

Eine Berechnung der Verzweigungslasten zu konstanten, undeformierten Ausgangszuständen berücksichtigt die unterschiedlichen Grunddeformationen und ergibt damit eine vollständige Aussage über das vorliegende Problem, Abb. 23 bis 26, sowie Abb. 31 und 32.

Der Einfluß der Axialkraft auf die Beullänge wird - unter Beachtung vorgegebener Belastungswege - in Kapitel 9.3 ausführlich erläutert.

Eine Überprüfung der ermittelten Ergebnisse durch Versuche erscheint angebracht, da im allgemeinen die Theorie zu hohe Verzweigungslasten liefert, siehe z. B. [40]. Möglicherweise könnte dann eine Erweiterung des zur Verzweigungsanalyse angewandten Stoffgesetzes um einen "nichtassoziativen" Anteil im Formänderungsgesetz (wie in [33] vorgeschlagen) auch beim dickwandigen Rohr zur Anpassung von theoretischen Ergebnissen an den praktischen Versuch beitragen.

Literaturverzeichnis

- 1 Pflüger, A.  
"Stabilitätsprobleme der Elastostatik"  
Springer, Berlin, 1964
- 2 Flügge, W.  
"Stresses in shells"  
Springer, New York, 1967
- 3 Bruhns, O.  
"Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungs-  
lasten elastoplastisch deformierter Kontinua"  
Techn.-wiss. Mitt. Nr. 74-9, Institut KIB,  
Ruhr-Universität Bochum, 1974
- 4 Shanley, F. R.  
"The column paradox"  
J. Aeronaut. Sci. 13 (1946), S. 678
- 5 Shanley, F. R.  
"Inelastic column theory"  
J. Aeronaut. Sci. 14 (1947), S. 261 - 268
- 6 Hill, R.  
"On the problem of uniqueness in the theory of a  
rigid-plastic solid"  
J. Mech. Phys. Solids 4 (1956) S. 247 - 255,  
5 (1956) S. 1 - 8, S. 153 - 161, S. 302 - 307
- 7 Hill, R.  
"Stability of rigid-plastic solids"  
J. Mech. Phys. Solids 6 (1957), S. 1 - 8

- 8 Hill, R.  
"A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids"  
J. Mech. Phys. Solids 6 (1958), S. 236 - 249
- 9 Hill, R.  
"Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics"  
J. Mech. Phys. Solids 10 (1962), S. 185 - 194
- 10 Hillier, M. J.  
"Tensile plastic instability under complex stress"  
Int. J. Mech. Sci. 5 (1963), S. 57- 67
- 11 Hillier, M. J.  
"Tensile plastic instability of thin tubes I, II"  
Int. J. Mech. Sci. 7 (1965), S. 531 - 549
- 12 Chakrabarty, J.  
"On the problem of uniqueness under pressure loading"  
ZAMP 20 (1969), S. 696 - 706
- 13 Chakrabarty, J.  
"On uniqueness and stability in rigid-plastic solids"  
Int. J. Mech. Sci. 11 (1969), S. 723 - 731
- 14 Chakrabarty, J.  
"Plastic buckling of cylindrical shells subjected to external fluid pressure"  
ZAMP 24 (1973), S. 270 - 280
- 15 Ariaratnam, S. T. and Dubey, R. N.  
"Instability in an elastic-plastic cylindrical shell under axial compression"  
J. Appl. Mech. 36 (1969), S. 47 - 50



- 16 Ariaratnam, S. T. and Dubey, R. N.  
"Some cases of bifurcation in elastic-plastic solids  
in plane strain"  
Quart. Appl. Math. 27 (1969), S. 349 - 358
- 17 Dubey, R. N. and Ariaratnam, S. T.  
"Bifurcation in elastic-plastic solids in plane stress"  
Quart, Appl. Math. 27 (1969), S. 381 - 390
- 18 Bruhns, O.  
"On the stability of thin-walled pressure vessels"  
Nuclear Engineering and Design 58 (1980), S. 359 - 366
- 19 Miles, J. P.  
"Bifurcation in rigid-plastic materials under spheri-  
cally symmetric loading conditions"  
J. Mech. Phys. Solids 17 (1969), S. 303 - 313
- 20 Skrzypczek, J. and Życzkowski, M.  
"Non-symmetrical plastic collapse modes of a symmetri-  
cally loaded circular cylinder"  
Acta Mech. 7 (1969), S. 213- 223
- 21 Storåkers, B.  
"Bifurcation and instability modes in thick-walled  
rigid-plastic cylinders under pressure"  
J. Mech. Phys. Solids 19 (1971), S. 339 - 351
- 22 Strifors, H. and Storåkers, B.  
"The initiation of buckling of rigid-plastic thick-  
walled cylinders under hydrostatic pressure"  
Foundations of Plasticity, Vol. 1 (ed. by A. Sawczuk)  
Noordhoff International Publishing 1972

- 23 Strifors, H. and Storåkers, B.  
"Uniqueness and stability of rigid-plastic spherical shells subjected to finite deformation under hydrostatic pressure"  
J. Mech. Phys. Solids 21 (1973), S. 125 - 134
- 24 Kumar, A. and Ariaratnam, S. T.  
"Uniqueness and stability of rigid-plastic cylinders under internal pressure and axial tension"  
Int. J. Solids Structures 12 (1976), S. 525 - 535
- 25 Bruhns, O.  
"Some remarks on the stability of extremely loaded pressure vessels"  
Proc. Int. Symp. Mechanics of Inelastic Media and Structures, Warsaw 1978
- 26 Chakrabarty, J. and Alexander, J. M.  
"Plastic instability of thick-walled tubes with closed ends"  
Int. J. Mech. Sci. 11 (1969), S. 175 - 186
- 27 Lehmann, Th.  
"On large elastic-plastic deformations"  
Foundations of Plasticity, Vol. 1 (ed. by A. Sawczuk), Noordhoff International Publishing 1972
- 28 Lehmann, Th.  
"Große elasto-plastische Formänderungen"  
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 1  
Ruhr-Universität Bochum 1976
- 29 Koiter, W. T.  
"On partially plastic thick-walled tubes"  
Aniversary Volume on Applied Mechanics, Antwerpen 1953, S. 232 - 251

- 30 Celep, Z.  
"Beitrag zur Theorie dicker Kreiszyylinder- und Kugelschalen unter innerem Druck"  
Diss. TU Hannover, 1971
- 31 Fischer, B.  
"Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen"  
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 9  
Ruhr-Universität Bochum 1977
- 32 Bruhns, O. und Thermann, K.  
"Verzweigungslasten elastoplastischer Kreisplatten"  
Acta Mech. 20 (1974), S. 247 - 262
- 33 Lehmann, Th.  
"Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung"  
Rheologica Acta 2 (1962), S. 247 - 254
- 34 Lehmann, Th.  
"Elemente der Mechanik, Bd. II"  
Vieweg, Braunschweig, 1975
- 35 Truesdell, C. and Toupin, R.  
"The classical field theories"  
Handbuch der Physik, Bd. III, 1  
Springer, Berlin, 1965
- 36 Klingbeil, E.  
"Tensorrechnung für Ingenieure"  
BI-Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1966
- 37 Prager, W. und Hodge, P. G.  
"Theorie plastischer Körper"  
Springer, Wien, 1954

- 38 Reckling, K. A.  
"Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme"  
Springer, Berlin, 1967
- 39 Hodge, P. G. and White, G. N.  
"A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity"  
J. Appl. Mech. 17 (1950), S. 180 - 184
- 40 Zander, G.  
"Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünner Kreis-  
zylinder unter kombinierter Längs- und Torsionsbe-  
lastung"  
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 27  
Ruhr-Universität Bochum 1981

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1     Theodor Lehmann  
          Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2     Bogdan Raniecki/Klaus Thermann  
          Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of  
          Finite Elastic-Plastic Deformations.  
          Basic Concepts
- Nr. 3     Wolfgang Krings  
          Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
          viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4     Burkhard Lücke  
          Theoretische und experimentelle Untersuchung der  
          zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei  
          endlichen Verzerrungen
- Nr. 5     Knut Schwarze  
          Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünn-  
          wandigen Stäben mit gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6     Hubert Sommer  
          Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Ver-  
          zerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7     H. Stumpf/F.J. Biehl  
          Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
          Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8     Albert Meyers  
          Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufen-  
          den Zentrifugenschalen
- Nr. 9     Berend Fischer  
          Zur zyklischen elasto-plastischen Beanspruchung eines  
          dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen

- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometric Nonlinear v. Kármán Plates

- Nr. 19 Heinz Antes  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei  
numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Woźniak  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates,  
Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Pla-  
sticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehr-  
zielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei  
Darstellung der mehrfach korrelierten Erregungen  
durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert  
Variational Formulation and Solution of Boundary-  
Value Problems in the Theory of Plasticity and App-  
lication to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz  
On Consistent Approximations in the Geometrically  
Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-  
last

- Nr. 28 Paweł Rafalski  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter,  
dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und  
Axialkraft





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 29**