



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

F.-J. Biehl

Zweiseitige Eingrenzung von
Feldgrößen beim einseitigen
Kontaktproblem

Heft Nr. 30



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

F.- J. BIEHL

ZWEISEITIGE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN BEIM
EINSEITIGEN KONTAKTPROBLEM

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK Nr. 30

DEZEMBER 1981

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1982 Dr.-Ing. F. J. Biehl

Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstr. 150

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des
Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder Teilen daraus bedarf der vorherigen
Zustimmung des Herausgebers und des Autors.

ZWEISEITIGE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN BEIM EINSEITIGEN
KONTAKTPROBLEM

F.-J. Biehl*

Lehrstuhl für Mechanik II, Ruhr-Universität Bochum, W.-Germany

Zusammenfassung - Summary

ZWEISEITIGE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN BEIM EINSEITIGEN KONTAKTPROBLEM.

In dieser Arbeit wird die Berechnung oberer und unterer Fehlerschranken für beliebige Feldgrößen des einseitigen Kontaktproblems der Elastizitätstheorie untersucht. Ausgangspunkt hierzu ist die Einführung des verallgemeinerten Potentials, wodurch die gesuchte Feldgröße als Lösung eines Variationsproblems angegeben wird. Es läßt sich zeigen, daß die Bedingungen der Existenz- und der Äquivalenzsätze erfüllt sind, so daß die Lösung zum einen gekennzeichnet ist als die Größe, die das verallgemeinerte Potential minimiert, und zum anderen dem Extremwert des zugeordneten komplementären Extremalproblems entspricht. Dadurch wird es möglich, eine zweiseitige, globale, d. h. normmäßige Abschätzung der gesuchten Feldgröße zu erhalten. Durch Einführung sogenannter Greenscher Zustände mit geeigneten Singularitäten gelangt man darüber hinaus zu punktwisen Fehlerschranken. Die numerische Realisierung dieses Verfahrens wird an dem Beispiel eines einseitigen Plattenproblems gezeigt.

BILATERAL BOUNDS OF FIELDQUANTITIES FOR THE UNILATERAL CONTACT-PROBLEM.

In this paper the calculation of upper and lower bounds of arbitrary field-quantities is investigated for the unilateral contact-problem of elasticity theory. Starting point is the introduction of the generalized potential, which yields the considered field-quantity as solution of a variational

* Dr.-Ing.

problem. It can be shown that the theorems of existence and equivalence are satisfied. Then the solution is characterized as the quantity minimizing the generalized potential and corresponding to the extremum of the adjoint complementary potential. This enables the derivation of a bilateral global (that means in a certain norm) error bound for field quantities. Moreover, by introduction of so-called Green's states with appropriate singularities pointwise error-bounds are obtained. The numerical realization of the given method is shown for a unilateral plate problem.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Das Kontaktproblem als Randwertproblem mit einseitiger Bindung	3
3. Eigenschaften des verallgemeinerten Potentials	7
4. Existenzsatz, komplementäres Extremalprinzip	14
5. Bestimmung der komplementären Menge beim Kontaktproblem	18
6. Der Hilbertraum der elastischen Zustände beim Kontaktproblem	20
7. Punktweise Eingrenzung mit Hilfe von Greenschen Zuständen	22
8. Numerisches Beispiel	25
Literatur	30

1. EINLEITUNG

Randwertprobleme der Kontinuumsmechanik, bei denen Ungleichungen zur Problembeschreibung benötigt werden, sind in der englisch-sprachigen Literatur unter dem Begriff "unilateral problems" zusammengefaßt. Solche Ungleichungsprobleme sind dadurch gekennzeichnet, daß aufgrund einseitiger (unilateraler) Bindungen das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Ungleichungsform auftritt. Im Jahre 1933 hat Signorini [1] das Problem des einseitigen Kontaktes eines elastischen Körpers auf einer unnachgiebigen Unterlage untersucht, ohne jedoch den Nachweis der Existenz einer Lösung angeben zu können. Dies geschah erst 1963 durch Fichera [2]. Aus der Vielzahl der seither erschienenen Veröffentlichungen seien die Arbeiten von Duvaut und Lions [3] sowie von Moreau [4] erwähnt.

Ziel einer mathematischen Behandlung der Ungleichungsprobleme ist einmal der Nachweis von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung und zum anderen die Herleitung von anwendungsgerechten Verfahren zur näherungsweise Berechnung der unbekanntenen Feldgrößen. Besondere Bedeutung kommt solchen Methoden zu, die gleichzeitig eine pauschale oder sogar punktweise Fehlerabschätzung gestatten. Existenzsätze allgemeiner Art finden sich bei Duvaut und Lions [3], Fichera [5] sowie Auslender [6]. Sie beruhen auf der Theorie monotoner Operatoren unter Verwendung der konvexen Analysis.

Für die meisten Ungleichungsprobleme läßt sich zeigen, daß ihre Lösung - falls sie existiert - zugleich Lösung eines i. a. nicht mehr quadratischen Extremalproblems ist. In der Monographie von Velte [7] werden einige spezielle Klassen nichtquadratischer Extremalprobleme behandelt, für die sich gleichzeitig komplementäre Extremalprobleme formulieren lassen.

Für das hier behandelte Kontaktproblem eines elastischen Körpers auf einer nachgiebigen Unterlage hat Panagiotopoulos [8] gezeigt, daß die Lösung zugleich Lösung eines Extremalproblems ist. Dabei wurde ein verallgemeinertes Potential definiert, das für die Lösung einen minimalen Wert annimmt. Läßt sich zeigen, daß das verallgemeinerte Potential den Bedingungen der Existenzsätze genügt, so ist die Existenz einer Lösung des einseitigen Kontaktproblems sichergestellt. Bezüglich des nichtlinearen Randwertproblems, das dem Kontaktproblem entspricht, handelt es sich hierbei um eine schwache Lösung im Sinne der Differentialgleichungstheorie. Tatsächlich spielt aber die Frage nach den Regularitätseigenschaften bei den Variationsmethoden nicht die entscheidende Rolle, da für die weiteren Betrachtungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in einem gewissen Funktionenraum ausreichend sind. Diese Lösung wird durch geeignete Funktionen aus einem endlich-dimensionalen Unterraum approximiert. Ist man dann in der Lage, die Näherung in einer passenden Norm oder aber sogar punktweise dem Betrag nach abzuschätzen, so kann die Aufgabe vom numerischen Standpunkt aus als gelöst betrachtet werden.

Ausgehend von der Festlegung der benutzen Bezeichnungen für die wichtigsten Größen werden in Abschnitt 2 im Rahmen einer allgemeinen Problembeschreibung die unilateralen Randbedingungen erläutert und der Begriff des verallgemeinerten Potentials eingeführt. In Abschnitt 3 werden eine Reihe von Eigenschaften des verallgemeinerten Potentials nachgewiesen. Diese sind hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit der in Abschnitt 4 aufgeführten Existenzsätze. Es wird gezeigt, daß die gesuchte Lösung gekennzeichnet ist als ein Element aus einem bestimmten Definitionsbereich, das dem verallgemeinerten Potential einen minimalen Wert erteilt. Gleichzeitig ist sie auch das Element, das das komplementäre Funktional auf der Menge der komplementären

Konkurrenzfunktionen maximiert. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Abweichung einer Näherung von der exakten Lösung normmäßig abzuschätzen.

Die dem Kontaktproblem zugeordnete komplementäre Menge wird in Abschnitt 4 bestimmt. Anschließend wird der Hilbertraum der elastischen Zustände mit zwei zueinander orthogonalen Unterräumen definiert. Durch Einführung Greenscher Zustände lassen sich dann Eingrenzungsbeziehungen für die gesuchten Feldgrößen in einem beliebigen Punkt im Innern des elastischen Körpers herleiten. Die erhaltenen Resultate für die punktweise Fehlerabschätzung bei unilateralen Problemen ähneln entsprechenden Ergebnissen, wie sie für die klassischen Randwertprobleme der Kontinuumsmechanik bekannt sind [9]. Zum Schluß wird für das Beispiel der kreisförmigen, fest eingespannten, isotropen Platte mit einseitigem Kontakt zu einer elastischen Unterlage die Durchbiegung mit Fehler-schranken berechnet.

2. DAS KONTAKTPROBLEM ALS RANDWERTPROBLEM MIT EINSEITIGER BINDUNG

Betrachtet wird in dem orthogonalen kartesischen Koordinatensystem $O x_1, x_2, x_3$ ein linear-elastischer Körper Ω mit einem regulären Rand Γ . Vektoren und Tensoren werden in der Indizesschreibweise notiert, wobei die Indizes i, j usw. die Werte 1 bis 3 annehmen können. Außerdem gilt die Summationsvereinbarung, wonach über gleichbenannte Indizes in verschiedenen Faktoren eines Produktes zu summieren ist. Es sei u der Verschiebungsvektor in einem Punkt x des Körpers Ω , p sei der Vektor der Volumenkraftdichte, ϵ sei der Dehnungs- und σ der Spannungstensor. Der Rand Γ bestehe aus den disjunkten Teilen Γ_u, Γ_p und Γ_s .

Auf Γ_u ist die Verschiebung u^* und auf Γ_p sind die Randkräfte P^* vorgeschrieben. Auf Γ_s werden die "unilateralen" Randbedingungen mit Hilfe von Ungleichungen formuliert.

Es sei n der nach außen gerichtete Normalenvektor auf dem Rand Γ , dann ist $\sigma_{ij}n_j = P_i$ die Randspannung. P wird zerlegt in einen Vektor P_N senkrecht zum Rand und in einen Vektor P_T tangential zum Rand. Die zugehörigen algebraischen Werte sollen mit P_N und mit P_T bezeichnet werden. P_N soll positiv sein, wenn der Vektor P_N vom Körper nach außen weist. In gleicher Weise wird auf dem Oberflächenteil Γ_s der Verschiebungsvektor u zerlegt in einen Normalenvektor u_N und in einen Tangentialvektor u_T mit entsprechenden algebraischen Werten u_N und u_T . Auf Γ_s sollen die folgenden einseitigen (unilateralen) Randbedingungen gelten:

$$\text{Wenn } u_N < 0, \text{ dann } P_N = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{wenn } u_N \geq 0, \text{ dann } P_N + k(u_N) = 0. \quad (2.2)$$

Durch Gleichung (2.1) wird zum Ausdruck gebracht, daß die Normalspannung Null ist, wenn der elastische Körper sich vom Untergrund abhebt. Bedingung (2.2) ist gültig für die Teile von Γ_s , die Kontakt zum Untergrund haben. Die Funktion $k(u_N)$ ist monoton wachsend und ist Null für negative Werte von u_N .

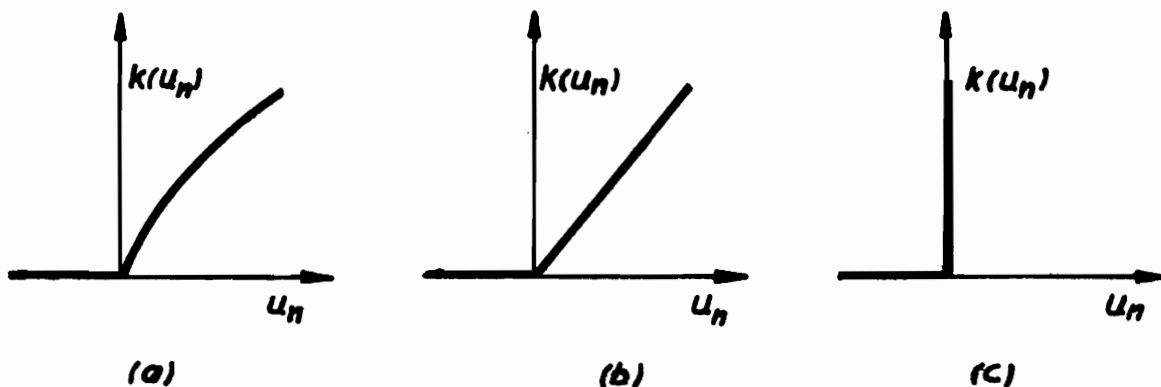


Abb. 1

Abb. 1a gibt den allgemeinen Fall eines elastischen Untergrundes wieder, wohingegen in Abb. 1b ein linear-elastischer Untergrund vorausgesetzt ist, wofür die Bedingungen (2.1 - 2) die folgende Gestalt annehmen:

$$\text{Wenn } u_N < 0, \text{ dann } P_N = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{wenn } u_N \geq 0, \text{ dann } P_N = -ku_N. \quad (2.4)$$

Abb. 1c stellt die sogenannte Signorini-Fichera-Randbedingung dar:

$$\text{Wenn } u_N < 0, \text{ dann } P_N = 0, \quad (2.5)$$

$$\text{wenn } u_N = 0, \text{ dann } P_N < 0. \quad (2.6)$$

Die Bedingungen (2.5 - 6) gelten also für den vollkommen starren Untergrund, der keine positive Normalverschiebung auf Γ_s zuläßt.

Neben den durch (2.1 - 6) beschriebenen einseitigen Randbedingungen gelten noch die bekannten zweiseitigen Bindungen auf den entsprechenden Randteilen:

$$u_i(x) = u_i^*(x) \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij}(x)n_j(x) = P_i^*(x) \quad \forall x \in \Gamma_p, \quad (2.8)$$

$$P_{T_i}(x) = P_{T_i}^*(x) \quad \forall x \in \Gamma_s. \quad (2.9)$$

Hinzu kommen noch die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_{ij,j} + p_i = 0 \quad (2.10)$$

und die Kompatibilitätsbedingung

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0. \quad (2.11)$$

Die Kompatibilitätsbedingung ist bekanntlich genau dann erfüllt, wenn sich der Dehnungstensor aus einer Verschiebungsfunktion ableiten läßt:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (2.12)$$

Wegen des vorausgesetzten linear-elastischen Verhaltens des Körpers Ω gilt das Hookesche Gesetz:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} , \quad (2.13)$$

bzw.

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (2.14)$$

Mit c_{ijkl} ist der Tensor 4. Stufe der Elastizitätskonstanten und mit s_{ijkl} der Tensor der Elastizitätskoeffizienten bezeichnet. Beide Tensoren sind invers zueinander. Außerdem gelten die Symmetriebeziehungen:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} = c_{lkij} , \quad (2.15)$$

und

$$c_2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \geq c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq c_1 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \text{ mit } c_1, c_2 > 0 . \quad (2.16)$$

Für die folgenden Untersuchungen wird der positive und der negative Teil von u_N eingeführt:

$$u_N = u_{+N} - u_{-N} , \quad u_{+N} = \frac{u_N + |u_N|}{2} \geq 0 , \quad u_{-N} = \frac{-u_N + |u_N|}{2} \geq 0 , \quad (2.17)$$

außerdem wird definiert die Funktion:

$$K(\xi) = \int_0^\xi k(\eta) d\eta . \quad (2.18)$$

Im weiteren wird unterstellt, daß $\Gamma_u \neq \emptyset$ und der Untergrund nicht vollkommen starr ist. Führt man das folgende Funktional

$$\begin{aligned} I(u) = & \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(u) d\Omega + 2 \int_{\Gamma_s} K(u_{+N}) d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_s} p_{Ti}^* u_{Ti} d\Gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_p} p_i^* u_i d\Gamma - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.19)$$

ein, so ist $I(u)$ die verallgemeinerte Form für die doppelte potentielle Gesamtenergie. Diese nimmt, wie in [8] gezeigt ist, für die Lösung \bar{u} des einseitigen Kontaktproblems ihr Minimum an, falls diese Lösung existiert. Umgekehrt ist die Lösung des Minimalproblems für das Funktional $I(u)$ nach (2.19) auch Lösung des durch die Beziehungen (2.1 - 6) beschriebenen einseitigen Randwertproblems. Aus der Extremaleigenschaft der potentiellen Gesamtenergie (2.19) folgt die Eindeutigkeit der Lösung.

3. EIGENSCHAFTEN DES VERALLGEMEINERTEN POTENTIALS

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften des verallgemeinerten Potentials aufgezeigt, die Voraussetzung sind für den Nachweis der Existenz einer Lösung.

Das gemäß Gleichung (2.19) definierte verallgemeinerte Potential läßt sich wie folgt als Summe einer bilateralen Form $a(u,v)$ und eines Funktionals $F(u)$ darstellen:

$$I(u) = a(u,u) + 2F(u) \quad , \quad (3.1)$$

mit

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) d\Omega \quad , \quad (3.2)$$

und

$$F(u) = \int_{\Gamma_s} K(u_{+N}) d\Gamma - \int_{\Gamma_s} p_{Ti}^* u_{Ti} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} p_{ii}^* u_{ii} d\Gamma - \int_{\Omega} p_{ii} u_{ii} d\Omega \quad (3.3)$$

Wir führen den vollständigen Hilbert-Raum

$$E = (H^1(\Omega))^3 \quad , \quad (3.4)$$

der stetig differenzierbaren Funktionen u_i ein mit der Norm $\|u\|_1$

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} (u_i u_i + u_{i,j} u_{i,j}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Mit $U \subset E$ werde der Unterraum der Funktionen $u \in E$ mit $u_i = 0$ auf Γ_u bezeichnet.

Für die weiteren Betrachtungen werden die folgenden Ungleichungen benötigt [3,7].

a) Kornsche Ungleichung

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(u) d\Omega + \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \geq c_0 \|u\|_1^2 \quad \forall u \in E, \quad (3.6)$$

mit einer Konstanten $c_0 > 0$; für $\Gamma_u \subset \Gamma$ mit $\Gamma_u \neq \emptyset$ gilt

$$a(u, u) \geq c_1 \|u\|_1^2 \quad \forall u \in U, \quad c_1 > 0. \quad (3.7)$$

b) Für ein beschränktes Gebiet Ω mit regulärem Rand Γ gilt mit einer nur vom Gebiet Ω abhängigen Konstanten $c_2 > 0$ für alle $v \in C^k(\bar{\Omega})$ und $|\alpha| \leq k - 1$.

$$\left(\int_{\Gamma} |D^\alpha v|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \leq c_2 \|D^\alpha v\|_1, \quad (3.8)$$

und es gibt eine eindeutig bestimmte, stetige lineare Abbildung

$T^\alpha : H^k(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$ mit der Eigenschaft $T^\alpha v = D^\alpha v|_{\Gamma}$ für alle $v \in C^k(\bar{\Omega})$ und $|\alpha| \leq k - 1$. Dabei wurde benutzt:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \quad (3.9)$$

Aus (2.16) folgt:

$$a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in E. \quad (3.10)$$

Darüber hinaus gilt:

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \in U, u \neq 0. \quad (3.11)$$

Wegen (2.16) ist:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \epsilon_{ij} s_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega \geq c_1 \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \\ &= \frac{c_1}{4} \int_{\Omega} (u_{i,j} + u_{j,i}) (u_{i,j} + u_{j,i}) d\Omega, \end{aligned}$$

Aus $a(u, u) = 0$ würde aber $u \in V$ folgen mit

$$V = \{u | u(x) = a + b \times x, \forall a, b \in \mathbb{R}^3\}, \quad (3.12)$$

wo V der Raum der Starrkörperverschiebungen ist. Aus $u \in V \cap U$ ergibt sich sofort $u = 0$, womit (3.11) bewiesen ist.

Es gilt:

Satz 3.1: Auf der Linearmanigfaltigkeit $u^* + U$ ist das verallgemeinerte Potential $I(u)$ nach unten beschränkt, d. h., es gilt

$$I(u) \geq \beta_0 \quad \forall u \in u^* + U, \quad (3.13)$$

mit einer Konstanten β_0 . Hierbei ist u^* ein Verschiebungsfeld, das die geometrische Randbedingung (2.7) erfüllt.

Beweis:

Im ersten Schritt wird (3.13) für den Sonderfall $u \in U$ gezeigt. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung und den Ungleichungen (3.7-8) erhält man bei einer vorgegebenen Kräftebelegung $p_i, P_i^*, P_{T_i}^*$:

$$\left| \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \right| + \left| \int_{\Gamma_s} P_{T_i}^* u_{T_i} d\Gamma \right| + \left| \int_{\Gamma_p} P_i^* u_i d\Gamma \right| \leq c_3 a(u, u)^{1/2}, \quad c_3 > 0 \quad (3.14)$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I(u) &= \frac{1}{2} a(u, u) + F(u) \geq \frac{1}{2} a(u, u) - c_3 a(u, u)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [a(u, u)^{1/2} - c_3]^2 - \frac{c_3^2}{2} \geq -\frac{c_3^2}{2} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wir setzen nun $u = u_0 + v$ mit $u_0 \in U$ und $u \in U^* + U$, wobei v für das Einhalten der Randbedingung auf Γ_u sorgt. Die Schwarzsche Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) &\geq \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}(u_0) \varepsilon_{ij}(u_0) + \{2^{-1/2} [\varepsilon_{ij}(u_0) \varepsilon_{ij}(u_0)]^{1/2} \\ &\quad - 2^{1/2} [\varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v)]^{1/2}\}^2 - \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich für das Potential:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I(u_0 + v) &\geq \frac{c_1}{2} \int_{\Omega} \{2^{-1/2} [\varepsilon_{ij}(u_0) \varepsilon_{ij}(u_0)]^{1/2} - 2^{1/2} [\varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v)]^{1/2}\}^2 d\Omega \\ &\quad - \frac{c}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Gamma_s} K(\underbrace{u_0 + v}_N) d\Gamma - \int_{\Gamma_s} p_{Ti}^* u_{Ti} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_p} p_i^* v_i d\Gamma - \int_{\Omega} p_i v_i d\Omega - \frac{c_4^2}{4} , \quad c_4 > 0 . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für die Glieder, die nur u_0 enthalten, ist in (3.17) eine Abschätzung wie in (3.15) durchgeführt worden. Bei einem fest gewähltem v stellt die rechte Seite von (3.17) eine Konstante dar, wenn man die positiven Glieder wegläßt. Damit ist (3.13) bewiesen.

Satz 3.2: Das Funktional $I(u)$ nach (3.1) ist in $U^* + U$ bezüglich der Konvergenz in der Energienorm stetig, d. h., es gilt

$$I(u_\nu) \rightarrow I(u) \quad \text{für} \quad \|u - u_\nu\| \rightarrow 0 , \quad (3.18)$$

wobei die Energienorm $\| \cdot \|$ durch

$$\| u \| = \left(\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) d\Omega \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

definiert ist.

Beweis: Aus (3.14) folgt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} p_i(u_{v_i} - u_{\mu_i}) d\Omega \right| + \left| \int_{\Gamma_s} p_{T_i}^*(u_{v_{T_i}} - u_{\mu_{T_i}}) d\Omega \right| + \left| \int_{\Gamma_p} p_i^*(u_{v_i} - u_{\mu_i}) d\Gamma \right| \\ & \leq c_1 \| u_v - u_{\mu} \|, \quad c_1 > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Für das nichtlineare Glied $\int_{\Gamma_s} K(u_{+N}) d\Gamma$ gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_s} (K(u_{v_{+N}}) - K(u_{\mu_{+N}})) d\Gamma \right| = \left| \int_{\Gamma_s} (u_{v_{+N}} - u_{\mu_{+N}}) k(\bar{u}_{+N}) d\Gamma \right| \\ & \leq \left(\int_{\Gamma_s} k^2(\bar{u}_{+N}) d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_s} (u_{v_i} - u_{\mu_i})(u_{v_i} - u_{\mu_i}) d\Gamma \right)^{1/2} \\ & \leq c_2(\bar{u}_{+N}) \| u_v - u_{\mu} \|_1, \quad \text{mit } u_{v_{+N}} \leq \bar{u}_{+N} \leq u_{\mu_{+N}} \\ & \text{oder } u_{\mu_{+N}} \leq \bar{u}_{+N} \leq u_{v_{+N}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Für $u_v, u_{\mu} \in u^* + U$ ist $u_v - u_{\mu} \in U$, daher läßt sich auf (3.21) die Kornsche Ungleichung in der Form (3.7) anwenden:

$$\left| \int_{\Gamma_s} (K(u_{v_{+N}}) - K(u_{\mu_{+N}})) d\Gamma \right| \leq c_2(\bar{u}_{+N}) c_3 \| u_v - u_{\mu} \| \quad (3.22)$$

Damit erhält man:

$$|I(u_v) - I(u_{\mu})| \leq \| u_v \| - \| u_{\mu} \| + 2(c_1 + c_2(\bar{u}_{+N})c_3) \| u_v - u_{\mu} \|. \quad (3.23)$$

Aus $\|u_\nu - u_\mu\| \rightarrow 0$ folgt $\|u_\nu\| - \|u_\mu\| \rightarrow 0$, und damit $I(u_\nu) - I(u_\mu) \rightarrow 0$, womit Satz 3.2 bewiesen ist.

Satz 3.3: Der Unterraum U ist in der Energienorm $\|\cdot\|$ abgeschlossen.

Beweis: Es werde angenommen, daß U in der Energienorm nicht abgeschlossen und das $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$ eine Cauchyfolge in U seien, deren Grenzwert \bar{u} nicht in U liegt. Es gibt dann auf dem Oberflächenteil Γ_u eine Menge M von Punkten $x \in \Gamma_u$, für die $\bar{u} \neq 0$ ist; das Maß der Menge M ist von Null verschieden. Es ist dann:

$$0 < \int_M |\bar{u}| d\Gamma \leq c_0 \|\bar{u} - u_n\|_1 \leq c_1 \|\bar{u} - u_n\|. \quad (3.24)$$

Das ist aber ein Widerspruch, da die rechte Seite für die Cauchyfolge u_n gegen Null geht.

Das Funktional $F(u)$ nach (3.3) ist wegen des Gliedes $\int_{\Gamma_s} k(u_n) d\Gamma$ nicht mehr linear. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß $F(u)$ konvex ist.

Definition 3.1: Es sei f ein über der linearen Menge X erklärtes, reelles und endlichwertiges Funktional. Dieses Funktional heißt konvex, wenn für je zwei Punkte x_1 und x_2 aus X gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.25)$$

Es ist klar, daß lineare Funktionale auch konvex sind; denn dann gilt in (3.25) das Gleichheitszeichen. Es genügt daher, sich bei der Untersuchung von $F(u)$ gemäß (3.3) auf das Glied

$$F_1(u) = \int_{\Gamma_s} k(u_n) d\Gamma \quad (3.26)$$

zu beschränken. Offensichtlich ist $F_1(u)$ konvex, wenn der Integrand $K(u_{+n})$ konvex ist, d. h., wenn gilt:

$$\underbrace{K(\lambda u_{1n} + (1-\lambda)u_{2n})}_{+} \leq \lambda K(u_{+1n}) + (1-\lambda)K(u_{+2n}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.27)$$

Trivialerweise gilt (3.27), wenn $u_{1n} \leq 0$ und $u_{2n} \leq 0$ ist. Es wird daher $u_{1n} > 0$ und $u_{2n} > 0$ angenommen. Dann wird mit $u_{3n} = \lambda u_{1n} + (1-\lambda)u_{2n}$ und $u_{2n} \geq u_{1n}$ gesetzt:

$$h(\lambda) = \lambda K(u_{1n}) + (1-\lambda)K(u_{2n}) - K(u_{3n}) \quad (3.28)$$

Mit (2.18) erhält man:

$$h(\lambda) = \int_{u_{3n}}^{u_{2n}} k(\xi) d\xi - \lambda \int_{u_{1n}}^{u_{2n}} k(\xi) d\xi \quad (3.29)$$

Wegen $k(\xi) \geq 0$ und der Stetigkeit von $k(\xi)$ läßt sich auf die beiden Integrale von (3.29) der Mittelwertsatz anwenden:

$$h(\lambda) = \lambda(u_{2n} - u_{1n})(k(\xi_1) - k(\xi_2))$$

$$\text{mit} \quad \lambda u_{1n} + (1-\lambda)u_{2n} \leq \xi_1 \leq u_{2n} \quad (3.30)$$

$$\text{und} \quad u_{1n} \leq \xi_2 \leq u_{2n} .$$

Da voraussetzungsgemäß $k(\xi)$ monoton ist, gilt $h(\lambda) \geq 0$, womit (3.27) bewiesen ist. Für das Weitere ist die Differenzierbarkeit des Funktionals $F(u)$ im Sinne von Gâteaux bedeutungsvoll.

Definition 3.2: Der Grenzwert

$$F'_u(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} \quad u \in E, \quad \forall v \in E, \quad (3.31)$$

wird, falls er existiert, Gâteaux-Ableitung an der Stelle u genannt.

$F_u(\cdot)$ heißt auch Gradient an der Stelle u .

Die Anwendung von (3.31) auf das Funktional $F(u)$ nach (3.3) liefert

$$F_u(v) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_S} (v_n + \frac{u_n}{|u_n|} v_n) k(u_n) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ii}^* v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_S} p_{Ti}^* v_{Ti} d\Gamma - \int_{\Omega} p_{ii} v_i d\Omega. \quad (3.32)$$

4. EXISTENZSATZ, KOMPLEMENTÄRES EXTREMALPRINZIP

Betrachtet wird das Extremalproblem

$$I(u) = a(u, u) + 2F(u) \rightarrow \min, \quad u - u^* \in U, \quad (4.1)$$

mit

$$U = \{u \in (H_1(\Omega))^3 \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma_u\} \quad (4.2)$$

und der Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega, \quad (4.3)$$

sowie dem Funktional

$$F(u) = \int_{\Gamma_S} K(u_n) d\Gamma - \int_{\Gamma_S} p_{Ti}^* u_{Ti} d\Gamma - \int_{\Gamma_P} p_{ii}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} p_{ii} u_i d\Omega. \quad (4.4)$$

Hierzu wurde im letzten Abschnitt gezeigt, daß gilt:

$$a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in E = (H_1(\Omega))^3, \quad (4.5)$$

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \in U, \quad u \neq 0, \quad (4.6)$$

$$F((1-t)u + tv) \leq (1-t)F(u) + tF(v)$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \forall u, v \in u^* + U, \quad (4.7)$$

$$I(u) \geq \beta \quad \forall u \in u^* + U, \quad \beta \in \mathbb{R} . \quad (4.8)$$

Außerdem besitzt $F(u)$ eine Gâteaux-Ableitung und ist in $u^* + U$ stetig bezüglich Konvergenz in der Energienorm. Der Unterraum U ist in der Energienorm abgeschlossen.

Es gilt nun folgender Existensatz [7]:

Satz 4.1: Unter den oben genannten Voraussetzungen besitzt die Extremalaufgabe (4.1) eine eindeutige Lösung $\bar{u} \in u^* + U$. Jede Minimalfolge konvergiert in der Energienorm gegen \bar{u} .

Im Hinblick auf eine normmäßige Abschätzung des Fehlers einer Näherungslösung ist die Formulierung eines komplementären Extremalproblems erforderlich:

Satz 4.2: Unter den oben genannten Voraussetzungen ist die Extremalaufgabe (4.1) äquivalent mit der Variationsgleichung

$$a(u, \varphi) + F_u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in U, \quad (4.9)$$

Die beiden Gleichungen (4.1) und (4.9) besitzen höchstens eine Lösung $\bar{u} \in u^* + U$.

Es sei $u \in u^* + U$ und es sei $v \in E$ eine beliebige Lösung der Variationsgleichung (4.9). Die Menge der Lösungen von (4.9) werde mit E_K bezeichnet. Es gilt dann [7]:

Satz 4.3: Es ist

$$\min_{u-u^* \in U} I(u) = I(\bar{u}) = \max_{v \in E_K} H(v) \quad (4.10)$$

Dabei ist:

$$H(v) = -\|v\|^2 + 2\{F(v) - F_v(v) + a(v, u^*) + F_v(u^*)\}, \quad (4.11)$$

und es sind alle $v \in E_K$ zur Konkurrenz zugelassen. Minimum und Maximum in (4.10) werden angenommen für $u = v = \bar{u}$.

Aus den oben angegebenen Sätzen lassen sich nun die folgenden Normschätzungen für den Fehler $u - \bar{u}$ bzw. $v - \bar{u}$ mit $u \in U$ und $v \in E_K$ herleiten:

$$\|u - \bar{u}\|^2 \leq I(u) - I(\bar{u}) \quad , \quad (4.12)$$

$$\|v - \bar{u}\|^2 \leq I(\bar{u}) - H(v) \quad , \quad (4.13)$$

$$4 \left\| \frac{u+v}{2} - \bar{u} \right\|^2 \leq 2(I(u) - H(v)) - \|u - v\|^2 \quad . \quad (4.14)$$

Beweis:

Aus der Definition (3.25) für konvexe Funktionale folgt durch einfache Umstellung:

$$\frac{1}{t} \{F(u + t(v - u)) - F(u)\} \leq F(v) - F(u) \quad , \quad (4.15)$$

und hieraus durch Grenzübergang:

$$F_u(v - u) \leq F(v) - F(u) \quad . \quad (4.16)$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|^2 &\leq \|u - \bar{u}\|^2 + 2\{F(u) - F(\bar{u}) - F_u(u - \bar{u})\} \\ &= I(u) - I(\bar{u}) - 2\{a(\bar{u}, u - \bar{u}) + F_u(u - \bar{u})\} \quad . \quad (4.17) \end{aligned}$$

Der letzte Klammerausdruck hat den Wert Null, da $u - \bar{u} \in U$ und \bar{u} Lösung von (4.9) ist.

In gleicher Weise erhält man:

$$\begin{aligned} \|v - \bar{u}\|^2 &\leq \|v - \bar{u}\|^2 + 2\{F(\bar{u}) - F(v) - F_v(\bar{u} - v)\} \\ &= I(\bar{u}) - H(v) - 2\{a(v, \bar{u} - v) + F_v(\bar{u} - v)\} \quad . \quad (4.18) \end{aligned}$$

Der letzte Klammerausdruck hat wiederum den Wert Null, da $\bar{u} - v \in U$ und v eine Lösung von (4.9) ist.

Schließlich wird:

$$\begin{aligned} \|u + v - 2\bar{u}\|^2 + \|u - v\|^2 &= \|(u - \bar{u}) + (v - \bar{u})\|^2 + \|(u - \bar{u}) - (v - \bar{u})\|^2 \\ &= 2\|u - \bar{u}\|^2 + 2\|v - \bar{u}\|^2 . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Anwendung von (4.12) und (4.13) auf (4.19) liefert sofort (4.14).

Mit Hilfe der Ungleichung (4.14) ist es grundsätzlich möglich, die Abweichung einer Näherungslösung $(u + v)/2$ von der exakten Lösung \bar{u} normmäßig abzuschätzen, da die Glieder auf der rechten Seite von (4.14) bei einmal ausgewählten u und v berechenbar sind. Allerdings haftet den Elementen $v \in \bar{E}_K$, die sich als Lösung der Variationsgleichung (4.9) ergeben, der grundsätzliche Mangel an, daß sie zugleich im Raum \bar{E} liegen müssen, da für (4.9) nur die Elemente $v \in \bar{E}$ zur Konkurrenz zugelassen sind. Für das hier betrachtete Kontaktproblem bedeutet dies, daß die Näherung $v \in \bar{E}_K$ neben (4.9) noch die Kompatibilitätsbedingungen erfüllen muß, also aus dem Raum der Verschiebungsfunktionen stammen muß. Derartige Bedingungen lassen sich in den konkreten Anwendungsfällen nur in wenigen Ausnahmen realisieren.

Diese Schwierigkeiten lassen sich umgehen durch die folgenden Aussagen [7]:

Es sei $E', (,)$, $\| \quad \|$ ein zweiter linearer Raum. Dabei ist es ausreichend, daß $(,)$ ein semidefinites inneres Produkt ist und $\| \quad \|$ demzufolge nur eine Halbnorm ist. Weiter sei $T : E \rightarrow E'$ ein linearer Operator

$$a(u, v) = (Tu, Tv) \quad \forall u, v \in E . \quad (4.20)$$

Es wird Gleichung (4.9) ersetzt durch:

$$(v', T\varphi) + F_v(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in U . \quad (4.21)$$

Es gilt dann:

Satz 4.4: Es ist

$$\min_{u - u^* \in U} I(u) = I(u) = \max_{v', v} H'(v', v) \quad (4.22)$$

mit

$$H'(v', v) = -\|v'\|^2 + 2\{F(v) - F_v(v) + a(v, u^*) + F(u^*)\}, \quad (4.23)$$

und es sind alle Paare $v' \in E'$, $v \in E$ zur Konkurrenz zugelassen, die der Gleichung (4.21) genügen.

Anstelle von (4.14 - 16) erhält man mit $u - u^* \in U$ und einem Paar $v' \in E'$, $v \in E$, das Gleichung (4.21) genügt:

$$\|Tu - T\bar{u}\|^2 \leq I(u) - I(\bar{u}), \quad (4.24)$$

$$\|v' - T\bar{u}\|^2 \leq I(\bar{u}) - H'(v', v), \quad (4.25)$$

$$4\left\|\frac{Tu + v'}{2} - T\bar{u}\right\|^2 \leq 2\{I(u) - H'(v', v)\} - \|Tu - v'\|^2. \quad (4.26)$$

5. BESTIMMUNG DER KOMPLEMENTÄREN MENGE BEIM KONTAKTPROBLEM

Gesucht werden die Funktionenpaare $v' \in E'$, $v \in E$, die der Variationsgleichung

$$(v', T\varphi) + F_v(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in U \quad (5.1)$$

genügen. Unter Benutzung von (3.32) wird aus (5.1) für das Kontaktproblem

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}(\varphi) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \left[\varphi_n + \frac{v_n}{|v_n|} \varphi_n \right] k(v_{+n}) d\Gamma - \int_{\Gamma_s} p_{Ti}^* \varphi_{Ti} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_p} p_i^* \varphi_i d\Gamma - \int_{\Omega} p_i \varphi_i d\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in U \end{aligned} \quad (5.2)$$

Gesucht sind die Bedingungen für σ'_{ij} und v_i . Gleichung (5.2) muß erst recht gelten für $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ wird nach partieller Integration des ersten Integrals in (5.2):

$$\int_{\Omega} (\sigma'_{ij,j} + p_i) \varphi_i d\Omega = 0 \quad \forall \varphi_i \in C_0^\infty(\Omega) . \quad (5.3)$$

Daraus folgt:

$$\sigma'_{ij,j} + p_j = 0 , \quad (5.4)$$

d. h., σ'_{ij} muß der Gleichgewichtsbedingung genügen. Unter Beachtung von (5.4) schließt man auf ähnliche Weise:

$$\sigma'_{ij} n_j - p_i^* = 0 \quad \text{auf } \Gamma_p , \quad (5.5)$$

und

$$(\sigma'_{ij} n_j)_T - p_T^* = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s . \quad (5.6)$$

Unter Berücksichtigung von (5.4 - 6) verbleibt von Gleichung (5.2):

$$\int_{\Gamma_s} [(\sigma'_{ij} n_j)_n + \frac{1}{2} (1 + \frac{v_n}{|v_n|}) k(v_n)] \varphi_n d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi \in U. \quad (5.7)$$

Daraus erhält man dann die Bedingung

$$\begin{aligned} \text{Wenn } v_n \leq 0 \text{ dann } (\sigma'_{ij} n_j)_n &= 0 , \\ \text{wenn } v_n > 0 \text{ dann } (\sigma'_{ij} n_j)_n + k(v_n) &= 0 . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es lassen sich nun für das Kontaktproblem kinematisch zulässige und statisch zulässige Vergleichszustände definieren:

Die kinematisch zulässigen Vergleichszustände f^{\sim} müssen der Kompatibilitätsbedingung sowie den geometrischen Randbedingungen auf Γ_u genügen.

Die statisch zulässigen Vergleichszustände f^{\sim} müssen der Gleichgewichtsbedingung und den zweiseitigen statischen Randbedingungen ge-

nügen. Auf dem Oberflächenteil Γ_s , wo eine einseitige Bindung vorge-schrieben ist, muß die Beziehung (5.8) gelten.

6. DER HILBERTRAUM DER ELASTISCHEN ZUSTÄNDE BEIM KONTAKT- PROBLEM

Den insgesamt möglichen elastischen Zuständen des vorgegebenen Körpers Ω beim Kontaktproblem wird ein reeller Hilbertraum H derart zugeordnet, daß die Elemente f^1, f^2, \dots des Hilbertraumes die elastischen Zustände des Körpers Ω darstellen. Die für die Definition des Hilbert-raumes notwendige Bildung eines Skalarproduktes geschieht mit Hilfe der elastischen Wechselwirkungsenergie zweier elastischer Zustände $f^1, f^2 \in H$:

$$\{f^1, f^2\} = \int \epsilon_{ij}^1 c_{ijkl} \epsilon_{kl}^2 d\Omega . \quad (6.1)$$

Aus Gleichung (6.1) folgt für die Norm:

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega \right)^{1/2} . \quad (6.2)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Skalarprodukt nach (6.1) distribu-tiv, assoziativ und nicht negativ ist. Um nachzuweisen, daß (6.1) nicht nur semidefinit ist, müssen die jeweiligen Randbedingungen berücksich-tigt werden. Durch (6.2) ist somit nicht unbedingt in jedem Fall eine Norm definiert, sondern höchstens eine Halbnorm, was aber für die weiteren Überlegungen ausreichend ist.

Der hier definierte Raum $H, \{, \}, \| \|$ entspricht dem im letzten Teil des Abschnitts 4 definierten linearen Raum $E'(\cdot), \| \|$, so daß die Gültig-keit der Beziehungen (4.20 - 26) für den Raum der elastischen Zustände beim Kontaktproblem gewährleistet ist.

Durch partielle Integration läßt sich das Skalarprodukt auf folgende Form bringen:

$$\{f', f'\} = (p, u) + [p, u]_{\Gamma_p} + [p, u]_{\Gamma_u} + [p, u]_{\Gamma_s}, \quad (6.3)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$(p, u) = \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega, \quad (6.4)$$

$$[p, u]_{\Gamma_{p, u, s}} = \int_{\Gamma_{p, u, s}} p_i u_i d\Gamma. \quad (6.5)$$

In ähnlicher Weise wie bei den klassischen Randwertproblemen mit ausschließlich zweiseitigen Bindungen läßt sich nachweisen, daß der Hilbertraum H der elastischen Zustände aus zwei zueinander orthogonalen Unterräumen H' und H'' mit den Elementen $f' \in H'$ und $f'' \in H''$ besteht [9]. Der Zustand f' wird erklärt durch die Volumenkraftdichte im

Innern des Körpers sowie durch die Kräftebelegung auf dem Oberflächen-
 teil Γ_p , die Verschiebung auf den Flächen Γ_u und Γ_s ist Null. Der Zustand $f'' \in H''$ wird definiert durch Angabe einer vorgeschriebenen Verschiebung auf Γ_u , die Volumenkraftdichte und die Oberflächenkraftdichte auf Γ_p verschwinden. Auf Γ_s müssen für $f'' \in H''$ die Beziehungen (2.1 - 2) erfüllt sein. Beim Zustand $f' \in H'$ ist auf Γ_s neben $u_n = 0$ auch $P_n = (\sigma_{ij} n_j)_n = 0$ anzunehmen.

Mit diesen Festsetzungen folgt sofort aus (6.3)

$$\{f', f''\} = 0, \quad (6.6)$$

d. h., die Zustände f' sind orthogonal zu den Zuständen f'' .

7. PUNKTWEISE EINGRENZUNG MIT HILFE VON GREENSCHEN ZUSTÄNDEN

Es wird der Greensche Zustand $\overset{0}{f}(x_0)$ mit einer Singularität an der Stelle x_0 im Innern des elastischen Körpers Ω eingeführt. Dieser erfüllt - von der singulären Stelle x_0 abgesehen - die homogene Gleichgewichtsbedingung (verschwindende Volumenkräfte) sowie die homogene Kompatibilitätsbedingung im Innern von Ω . Weiterhin gelten homogene statische Randbedingungen (verschwindende Randkräfte) auf dem Oberflächenteil Γ_p und homogene geometrische Randbedingungen (verschwindende Verschiebung) auf den Oberflächenteilen Γ_u und Γ_s .

Der Greensche Zustand $\overset{0}{f}(x_0)$ setzt sich zusammen aus einem Fundamentzustand $\overset{\infty}{f}(x_0)$, der dem Feld der Singularität im unendlichen Medium entspricht, und einem Regulärteil $\overset{v}{f}(x_0)$, der für die Erfüllung der übrigen, den Greenschen Zustand definierenden Bedingungen sorgt:

$$\overset{0}{f}(x_0) = \overset{\infty}{f}(x_0) + \overset{v}{f}(x_0) . \quad (7.1)$$

Zur Berechnung der unbekanntes Feldgröße wird das Skalarprodukt $\{f, \overset{0}{f}(x_0)\}$ aus dem unbekanntes Zustand f und dem Greenschen Zustand $\overset{0}{f}(x_0)$ gebildet. Da der Greensche Zustand mit Ausnahme der singulären Stelle x_0 überall die homogene Gleichgewichtsbedingung und die homogene Kompatibilitätsbedingung erfüllt, kann er sowohl durch ein Spannungsfunktionenfeld $\overset{0}{\chi}_{ij}(x_0)$ als auch durch ein Verschiebungsfeld $\overset{0}{u}(x_0)$ repräsentiert werden. Mit $\overset{0}{u}(x_0)$ als Repräsentation des Greenschen Zustandes ergibt sich aus (6.3):

$$\{f, \overset{0}{f}(x_0)\} = (p, \overset{0}{u}(x_0)) + [p, \overset{0}{u}(x_0)]_{\Gamma_p} + S(x_0) . \quad (7.2)$$

Mit $S(x_0)$ wird der Beitrag der Singularität zur Wechselwirkungsenergie bezeichnet. Er ist proportional zu einer statischen Feldgröße des unbekanntes Zustandes f .

Wird andererseits für den Greenschen Zustand eine Repräsentation durch den Spannungsfunktionentensor $\overset{\circ}{\chi}_{ij}(\chi_0)$ gewählt, so folgt aus (6.3) unter Beachtung der Eigenschaften von $\overset{\circ}{f}(\chi_0)$:

$$\{\overset{\circ}{f}(\chi_0), f\} = [\overset{\circ}{p}(\chi_0), u]_{\Gamma_u} + E(\chi_0) \quad (7.3)$$

$E(\chi_0)$ ist der Beitrag der Singularität zur Wechselwirkungsenergie und stellt bis auf einen konstanten Faktor eine geometrische Feldgröße des unbekanntes Zustandes f dar.

Subtrahiert man (7.2) von (7.3), so hebt sich das Skalarprodukt $\{f, \overset{\circ}{f}(\chi_0)\}$ weg:

$$F(\chi_0) = E(\chi_0) - S(\chi_0) = (p, \overset{\circ}{u}(\chi_0)) + [p, \overset{\circ}{u}(\chi_0)]_{\Gamma_p} - [\overset{\circ}{p}(\chi_0), u]_{\Gamma_u} \quad (7.4)$$

In $F(\chi_0)$ sind die Beiträge der Singularität zusammengefaßt. Bei der praktischen Anwendung der Beziehung (7.4) wählt man die Singularitäten jeweils so, daß entweder $S(\chi_0)$ oder $E(\chi_0)$ verschwindet, je nachdem ob eine geometrische oder eine statische Feldgröße berechnet werden soll.

Voraussetzung für eine erfolgreiche Ermittlung von unbekanntes Feldgrößen mit Hilfe von Gleichung (7.4) ist die Kenntnis der auf der rechten Seite von (7.4) auftretenden Feldgrößen des Greenschen Zustandes $\overset{\circ}{f}(\chi_0)$. Da das im allgemeinen nicht der Fall ist, werden auch für den Greenschen Zustand Vergleichszustände $\overset{\circ}{f}^{\sim}(\chi_0)$ und $\overset{\circ}{f}^{\approx}(\chi_0)$ eingeführt, die nur die statischen oder nur die geometrischen Bedingungen von $\overset{\circ}{f}(\chi_0)$ erfüllen.

$$\overset{\circ}{f}^{\sim}(\chi_0) = \overset{\circ}{f}(\chi_0) + \overset{\circ}{f}^{\sim}(\chi_0) \quad (7.5)$$

$$\overset{\circ}{f}^{\approx}(\chi_0) = \overset{\circ}{f}(\chi_0) + \overset{\circ}{f}^{\approx}(\chi_0) \quad (7.6)$$

Bei bekanntem Fundamentalzustand $\overset{\circ}{f}(\chi_0)$

können Vergleichszustände $\check{f}^{\sim}(x_0)$ und $\check{f}^{\approx}(x_0)$ in der Regel verhältnismäßig leicht angegeben werden.

Unter Verwendung von (7.5) und (7.6) erhält man eine zu (7.4) analoge Beziehung für die Feldgröße $F(x_0)$:

$$F(x_0) = (p, \check{u}^0(x_0)) + [p, \check{u}^0(x_0)]_{\Gamma_p} - [\check{p}^0(x_0), u]_{\Gamma_u} + \{f, \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0)\} \quad (7.7)$$

Gegenüber (7.4) treten in den ersten drei Integralausdrücken auf der rechten Seite von (7.7) Feldgrößen der Vergleichszustände des Greenschen Zustandes auf, die als bekannt angesehen werden können. Allerdings erscheint in (7.7) noch ein Skalarprodukt mit dem unbekanntem Zustand f . Mit den in Abschnitt 5 eingeführten Vergleichszuständen f^{\sim} und f^{\approx} läßt sich die folgende Abschätzung für das Skalarprodukt in (7.7) durchführen:

$$\begin{aligned} |\{f, \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0)\} - \frac{1}{2} \{f + f^{\sim}, \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0)\}| &\leq \\ &\leq \|f - \frac{1}{2}(f^{\sim} + f^{\approx})\| \| \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0) \| \quad (7.8) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abschätzung (4.26) erhält man:

$$\begin{aligned} |\{f, \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0)\} - \frac{1}{2} \{f^{\sim} + f^{\approx}, \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0)\}| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} [2I(f^{\sim}) - 2H'(f^{\approx}, f^{\sim}) - \|f^{\sim} - f^{\approx}\|]^{1/2} \| \check{f}^{\approx}(x_0) - \check{f}^{\sim}(x_0) \| = Sp(f) \quad (7.9) \end{aligned}$$

Vorstehende Abschätzung, in (7.7) eingesetzt, liefert die Eingrenzungsbeziehung

$$|F(x_0) - F_N(x_0)| \leq Sp(f) \quad (7.10)$$

mit der Näherungsgröße

$$F_N(x_0) = (p, \tilde{u}^0(x_0)) + [p, \tilde{u}^0(x_0)]_{\Gamma_p} - [\tilde{p}^0(x_0), u]_{\Gamma_u} + \\ + \frac{1}{2} \{ \tilde{f} + \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim}(x_0) - \tilde{f}^{\sim}(x_0) \} . \quad (7.11)$$

Nach der Abschätzung (7.10) unterscheidet sich die gesuchte Feldgröße $F(x_0)$ von f an der Stelle x_0 von einer Näherungsgröße $F_N(x_0)$ nach (7.11) höchstens um eine Eingrenzungsspanne $Sp(f)$, deren Wert durch die rechte Seite der Ungleichung (7.9) bestimmt ist.

Numerisch einfacher zu handhabende Eingrenzungsbeziehungen erhält man, wenn von den besonderen Eigenschaften des vorgelegten Problems Gebrauch gemacht wird. Diese Vorgehensweise wird im nächsten Abschnitt an einem Beispiel erläutert.

8. NUMERISCHES BEISPIEL

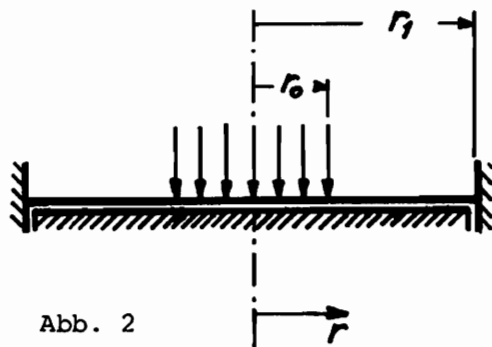


Abb. 2

Betrachtet wird eine kreisförmige, dünne, fest eingespannte, isotrope Platte auf elastischem Untergrund. Die Platte wird durch eine in Richtung der Flächennormalen

wirkende Flächenkraft p auf Durchbiegung beansprucht. Für hinreichend kleine Beträge der Verschiebung u gilt folgende Differentialgleichung:

$$D \Delta \Delta u + ku = p . \quad (8.1)$$

(8.1) ist nur gültig für Punkte der Platte mit Haftung am Untergrund.

Für Punkte, die sich vom Untergrund freigearbeitet haben, gilt anstelle von (8.1):

$$D \Delta \Delta u + p . \quad (8.2)$$

Die Randbedingungen der eingespannten Platte lauten:

$$u = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial G. \quad (8.3)$$

Die positive Konstante D ist die Plattensteifigkeit

$$D = \frac{Eh^3}{12} (1 - \nu^2) \quad , \quad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (8.4)$$

mit dem Elastizitätsmodul E der Platte, der Plattendicke h und der Poissonschen Zahl ν . In Gleichung (8.1) ist k die Nachgiebigkeit des Untergrundes.

Die Bipotentialgleichung $\Delta \Delta u = 0$ besitzt für die Ebene die Fundamentallösung

$$\phi(r) = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r. \quad (8.5)$$

Unter Beachtung der homogenen Randbedingungen (8.3) erhält man mit Hilfe der Greenschen Formeln:

$$u(x_0) = \int_G \Delta u \Delta \phi \, d\Omega, \quad (8.6)$$

wobei x_0 der Punkt der Singularität ($\cong r = 0$ in (8.5)) ist.

Es sei \bar{u} die gesuchte Lösung der einseitigen Randwertaufgabe. Dann ergibt sich aus (8.6) mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichung

$$|u(x_0) - \bar{u}(x_0)|^2 \leq \|u - \bar{u}\|^2 \|\phi\|^2. \quad (8.7)$$

Die Energienorm von $u - \bar{u}$ kann nun nach (4.25) abgeschätzt werden, wobei man erhält:

$$|u(x_0) - \bar{u}(x_0)|^2 \leq \|\phi\|^2 \cdot (I(u) - H'(v', v)), \quad (8.8)$$

mit

$$I(u) = D \int_G (\Delta u)^2 \, d\Omega + k \int_G u^2 \, d\Omega - 2 \int_G p u \, d\Omega. \quad (8.9)$$

und

$$H'(v', v) = \int_G (Dv'^2 + kv^2) d\Omega . \quad (8.10)$$

Die Abschätzung (8.8) gilt für alle $u \in H_0^2(G)$ sowie für alle $v' \in L_2(G)$, $v \in H^2(G)$, die der Differentialgleichung

$$D\Delta v' + kv = p \quad (8.11)$$

genügen, allerdings nur für solche Punkte der Plattenebene, die auf dem elastischen Untergrund haften. Ansonsten gilt anstelle von (8.11)

$$D\Delta v' = p . \quad (8.12)$$

Für das vorliegende Beispiel wurde gewählt $k/D = 1000 \text{ m}^{-2}$. Die Platte wurde mit einer konstanten Flächenlast p im Bereich $0 \leq r/r_1 \leq 0,2$ belastet. Bei dieser Art der Lastverteilung zeigte sich, daß die Platte sich in einem zum Rand hin gelegenen Ringgebiet vom Untergrund frei gearbeitet hat.

Die Verschiebung u mit positiver Zählrichtung nach unten ergibt sich aus der Minimierung des Funktionals $I(u)$. Hierzu wurden als Koordinatenfunktionen folgende Ansätze ausgewählt:

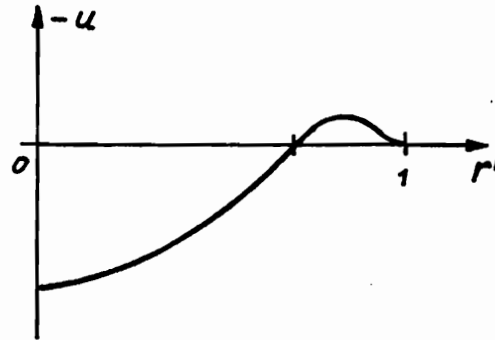
$$u_i(r') = (2r'^3 - 3r'^2 + 1)r'^i, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \quad i \neq 1, \quad (8.13)$$

mit $r' = r/r_1$. Man erkennt leicht, daß die Ansatzfunktionen den Randbedingungen (8.3) genügen. Der Minimierungsprozeß wurde durchgeführt in Anlehnung an einen in [10,12] angegebenen Algorithmus sowie durch iterative Anwendung des Ritzschen Verfahrens zur Kontrolle. Dabei wurden die folgenden Resultate erzielt:

$$I_{\min} = 3,9165 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{p^2 r^6}{D}$$

sowie

$r' = r/r_1$	$u/10^{-6} \frac{pr^4}{D}$
0	366,264
0,1	338,250
0,2	261,331
0,3	173,915
0,4	101,705
0,5	51,883
0,6	22,029
0,7	6,761
0,8	0,768
0,836	0
0,9	- 0,286
0,95	- 0,125
1,0	0



(Zeichnung nicht
maßstäblich)
Abb. 3

Wie man der Tabelle entnimmt, hat sich die Platte im Ringbereich $0,836 \leq r' \leq 1,0$ vom Untergrund freigearbeitet.

Für das komplementäre Extremalproblem gehen wir aus von dem partikulären Ansatz

$$\Delta v' = \begin{cases} b_1 - \left(\frac{r'}{0,2}\right)^n & \text{für } 0 \leq r' \leq 0,2 \\ \frac{1-b_1}{0,636} (r' - 0,836) & \text{für } 0,2 \leq r' \leq 0,836 \\ 0 & \text{für } 0,836 \leq r' \leq 1 \end{cases} \quad (8.14)$$

mit $0 \leq b_1 \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Aus $\Delta v'$ lassen sich leicht mittels Gleichungen (8.11 - 12) v und durch Integration v' bestimmen. Durch geeignete Wahl von b_1 und n läßt sich das Integral $\int v^2 d\Omega$ beliebig klein machen. Die Optimierung des

komplementären Funktionals reduziert sich damit auf die Optimierung des Integrals $\int_G v'^2 d\Omega$. Dazu wird dem partikulären Ansatz v' eine Folge von harmonischen Funktionen der Gestalt $\beta_i r^{i/\nu} \sin \frac{i}{\nu} \alpha$ bzw. $\cos \frac{i}{\nu} \alpha$ mit ganzem positiven i und ν und unbestimmten Parametern β_i überlagert. Nach bekannten Verfahren lassen sich die Variationskoeffizienten β_i bestimmen. Diese Vorgehensweise gleicht dem Verfahren der anharmonischen Reste [11]. Man erhält hierbei keine Näherung für die Durchbiegung u , sondern höchstens eine Näherung für Δu . In gleicher Weise läßt sich durch Hinzunahme der harmonischen Ansatzfunktionen das Funktional $\|\phi\|$ verkleinern.

Für den Plattenmittelpunkt ergibt sich damit die folgende Eingrenzung:

$$|\bar{u}(0) - 3,6626 \cdot 10^{-4} \frac{pr^4}{D}| \leq 2,6496 \cdot 10^{-6} \frac{pr^4}{D} .$$

LITERATUR

- [1] Signorini, A.: Sopra alcune questioni elastostatica. Atti Soc. Ital. per il progresso delle Science 1933.
- [2] Fichera, G.: Problemi elastostatica con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni alcontorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII 7, fasc. 5, S. 91-140 (1964).
- [3] Duvaut, G., Lions, J.L.: Les inéqualitions en Mécanique et en Physique. Paris 1972.
- [4] Moreau, J.J.: On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity. In: New Variational Techniques in Mathematical Physics: C.I.M.E., S. 173 - 322. Roma 1974: Edizioni Grenconese.
- [5] Fichera, G.: Boundary Value Problems in Elasticity with Unilateral Constraints. In: Handbuch der Physik. (Herausg. von S. Flügge) Band VIa/2 Festkörpermechanik II, S. 391-424. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972.
- [6] Auslender, A.: Problèmes de Minimax via l'analyse convexe et les inéqualités variationnelles: Théorie et algorithmes. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 77. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972.
- [7] Velte, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Stuttgart 1976.
- [8] Panagiotopoulos, P.D.: A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact- and Friction-boundary Value Problem in the Theory of Elasticity. Ing.-Arch. 44, S. 421 - 432 (1978).
- [9] Stumpf, H.: Eingrenzungsverfahren in der Elastomechanik. Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1970.
- [10] Himmelblau, D.: Applied Nonlinear Programming. New York 1972.
- [11] Michlin, S.G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Berlin 1962.
- [12] Elster, K.-H., Reinhardt, R., Schäuble, M., Donath, G.: Einführung in die nichtlineare Optimierung. Leipzig 1977.

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite
 Elastic-Plastic Deformations.
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
 elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen
 Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-
 zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden
 Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
 Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-
 wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
 Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value
Problems in the Theory of Plasticity and Application to
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen
Kontaktproblem

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 30**