RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Petrisor Mazilu

Variationsprinzipe der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

Heft Nr. 33

Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Herrn Prof. Theodor Lehmann
mit herzlichen Dank
10.02.83
Mazilu

Petrisor Mazilu

Variationsprinzipe der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 33

Dezember 1982

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit widmet sich den Variationsprinzipen in der Theorie der Wärmeausbreitung und in der Plastizitätstheorie. Die heute in diesem Bereich bekannten Variationsprinzipe werden vorgestellt. Man versucht, ihre mathematische Theorie zu vereinheitlichen und zu vervollständigen.

Für die Wärmeausbreitungsprozesse wird auf der Basis des neu entwickelten Variationsprinzips der virtuellen Energieübertragung ein Extremal-Variationsprinzip ausgearbeitet.

Für die Plastizitätstheorie wird eine einheitliche Darstellung der Variationsprinzipe der Spannungsgeschwindigkeit und der Extremal-Variationsprinzipe, die mit Hilfe der Theorie der konvexen Analysis entwickelt sind, vorgeschlagen. Für solche Arten von plastischen Materialien, für die die konvexe Analysis keine klassische Extremal-Variationsprinzipe liefern kann, wird ein Zwei-Kriterium Extremal-Variationsprinzip konstruiert. Solche Zwei-Kriterium Extremal-Variationsprinzipe sind für die Anwendung bei gekoppelten thermomechanischen Prozessen geeignet.

SUMMARY

The present work is devoted to the variational principles in plasticity and in the theory of heat transfer. The most known variational principles in these fields are considered. It is looked upon completing and unifying their mathematical theory.

For the heat transfer processes, based upon the now proposed variational principle of the virtual energy transfer, an extremal variational principle is elaborated.

For the theory of plasticity an unitary exposition of the stress-rate variational principles and of the extremal-

variational principles based on the theory of convex analysis is presented. For those plastic materials,for which the convex analysis supplies no extremal variational principle, a two-criterion extremal-variational principle is suggested. Such an extremal-variational principle is susceptible to be applied to the coupled thermo-mecanical processes.

Vorwort

In thermoplastischen Prozessen spielt die Kopplung der plastischen Deformationsprozesse und der Wärmeausbreitungsprozesse eine wesentliche Rolle.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, einen Überblick über die heute bekannten Variationsprinzipe in der Plastizitätstheorie und in der Theorie der Wärmeausbreitung zu geben und zu versuchen, ihre mathematische Theorie zu vereinheitlichen und zu vervollständigen.

Die Durchsicht der aktuellen Fachliteratur führt zu den folgenden Schlußfolgerungen:

I. Für die Wärmeausbreitung wurden mehrere Typen der Variationsprinzipe vorgeschlagen. Keines dieser Prinzipe bildet aber ein Extremal-Variationsprinzip.

II. In der Plastizitätstheorie sind für zwei spezielle Arten des plastischen Fließens die entsprechenden Extremal-Variationsprinzipe bekannt. Diese Prinzipe beziehen sich auf ideal-plastisches Verhalten und auf einen besonderen Fall plastischer Formänderungen mit Verfestigung.

Im Rahmen des gegenwärtigen Schwerpunktsprogrammes wurden folgende Ergebnisse erzielt:

I.1. Für solche Phänomene, die einen Energiefluß einbeziehen, wird ein allgemeines Variationsprinzip aufgestellt. Dieses Prinzip spielt für die Energieübertragungsprozesse dieselbe Rolle wie das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Mechanik.

I.2. Die Anwendung dieses Prinzips auf Wärmeausbreitungsprozesse in isotropen Stoffen führt zu einem Extremal-Variationsprinzip.

II.1. In der Plastizitätstheorie werden die oben erwähnten Extremal-Variationsprinzipe, die aufgrund der speziellen Theorie der konvexen Analysis hergeleitet wurden, im Rahmen der allgemeinen nichtlinearen Funktional-Analysis vorgestellt.

II.2. Es wird eine mathematische Begründung der inkrementellen Methode für die Berechnung allgemeiner plastischen Formänderungen mit Verfestigung vorgestellt. Im Rahmen dieser Theorie ist diese Berechnung mit der Minimierung eines nichtquadratischen Funktionales äquivalent. Dieses Funktional beinhaltet auch die Belastung-Entlastung-Bedingung.

II.3. Aufgrund dieser Theorie der inkrementellen Methode wird die Randwertaufgabe, die einem plastischen Fließprozeß entspricht, zu einer einzigen Funktional-Evolutionsgleichung reduziert.

II.4. Für diese Funktional-Evolutionsgleichung wird ein Extremal-Variationsprinzip hergeleitet. Auf diesem Weg erhalten die mathematischen Probleme der Variationsrechnung in der Plastizitätstheorie eine allgemeine Lösung. Im Hinblick auf numerische Verfahren sind aber solche Extremal-Variationsprinzipe nutzlos.

II.5. Für die numerische Lösung der Randwertaufgabe des plastischen Fließens mit Verfestigung wird eine neue Art der Variationsprinzipe vorgeschlagen. Diese neue Art gründet sich auf die Minimierung zweier gekoppelter Funktionale, die zum einen den Spannungszustand charakterisieren und zum anderen die Evolution der inneren Strukturen beschreiben. Ein solches Variationsprinzip ist so entworfen, daß alle Vorteile der üblichen Extremal-Variationsprinzipe noch gegeben sind. Bemerkenswert ist, daß in dem Falle, daß das plastische Fließen mit Verfestigung durch ein klassisches Extremal-Variationsprinzip beschrieben werden kann, die oben erwähnten Funktionale einander gleich sind. Das neue vorgeschlagene Variationsprinzip reduziert sich dann zu einem Maximum-Minimum-Prinzip für ein und dasselbe Funktional.

Auf der Basis des Extremal-Variationsprinzips für die Wärmeausbreitung hat B. Kaempf zwei FEM-Programme entwickelt. Das erste Programm, genannt INSTHERM 1, behandelt instationäre Wärmeausbreitungsprozesse. Das zweite, INSTHERM 2, berechnet die thermischen Spannungen, die durch die instationäre Wärmeausbreitung verursacht werden.

Für die Variationsprinzipe, die für plastische Deformationsprozesse aufgestellt sind, fehlt noch die numerische Anwendung. Zur Zeit rechnet man noch mit Hilfe der traditionellen inkrementellen Methoden.

Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt.

Besonders möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.-Ing. Theodor Lehmann bedanken, der mir die Erarbeitung des vorliegenden Teils des Schwerpunktprogramms "Kopplung von thermodynamischen und mechanischen Vorgängen bei Formänderungen fester Körper" anvertraut hat. In gleichem Maße bedanke ich mich auch für seine ständigen wissenschaftlichen und moralischen Unterstützungen.

Herrn Prof. Dr. Ingo Müller danke ich für seine konstruktiven kritischen Meinungen über das extremale Variationsprinzip der Wärmeausbreitung.

Meinem Kollegen, Herrn Dr.-Ing. Dieter Weichert, danke ich für die interessanten Diskussionen über die globalen extremalen Variationsprinzipe der isothermen Plastizität.

Schließlich danke ich meinem Kollegen, Herrn Dr.-Ing. Bernd Kaempf, für dessen numerische und experimentelle Ergebnisse bezüglich der Wärmeausbreitung und der thermischen Spannungen. Dies war mir in der Erarbeitung des zweiten Kapitels sehr hilfreich.

Bochum, 15. Dezember 1982 P. M.

I N H A L T

1. Geschichte der Methoden der Variationsrechnung bei Grenzwertproblemen

Nach Courants Behauptung: "The subject matter with which calculus of variations is concerned is a class of extremum (i.e. maximum or minimum) problems which can be considered an extension of the familiar class of extremum problems dealt with by elementary differential calculus."

Die Probleme, mit denen sich die Variationsrechnung beschäftigt, lassen sich in zwei grundsätzliche Gebiete unterteilen. Das erste geht auf diejenigen Fragen ein, die man vom modernen Standpunkt auch als "Optimierungsprobleme" charakterisieren könnte. Das älteste Problem dieser Art scheint das antike isoparametrische Problem (Didos Problem) zu sein. Das zweite Gebiet beschäftigt sich mit den an die Differentialgleichungen geknüpften Variationsprinzipien.

In dieser Arbeit werden wir unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Probleme der zweiten Gruppe konzentrieren, die sich mit den an die Grenzwertprobleme partieller Differentialgleichungen geknüpften Variationsprinzipien beschäftigen.

Das erste Variationsprinzip, das aus einem Grenzwertproblem hervorging, wurde von C.F. Gauss und W. Thompson entdeckt. Dieses Variationsprinzip drückt aus, daß das Minimum des Integrals

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_D |\mathrm{grad}\ u|^2 \, du \qquad (1.1)$$

geschätzt über eine spezielle Menge von Funktionen, die über das Gebiet D definiert sind, für eine Lösung des Laplaceschen Gleichung

$$\Delta u = 0 \qquad (1.2)$$

erreicht wird. Dieses Integral (1.1) wird jetzt als "Dirichlet Integral" bezeichnet.

Diese geniale Entdeckung markiert den Beginn einer Serie von Geschehnissen äußerster Wichtigkeit in der Mathematik. In chronologischer Abfolge waren dies die folgenden Ereignisse:

P.G.L. Dirichlet (vgl. Courant [1]) bemerkt, daß, da das Integral immer nach unten begrenzt ist, es notwendigerweise eine Funktion u gibt (in der Klasse der zulässigen Funktionen), für die F(u) das Minimum erreicht. Die Plausabilität dieser Behauptung, von G.F.B. Riemann als "Dirichlets Prinzip" erwähnt, wurde auf eine Analogie zu einem ähnlichen Problem der Elementaranalyse gestützt.

1869 (vgl. Courant, loc. cit.) oder 1870 (vgl. Weinstock [2]), liefert K.W. Weierstrass ein Gegenbeispiel, für das Dirichlets Prinzip nicht länger gültig ist. Wie Courant bemerkt, provozierte dieses Gegenbeispiel zu dieser Zeit einen echten Schock in der mathematischen Welt.

1900 (vgl. Courant loc. cit.) oder 1899 (vgl. Weinstock, loc. cit.) beweist Hilbert, daß für eine große Menge von Bereichen Dirichlets Integral in der Tat sein Minimum erreicht und daß der Erfolg von Weierstrass' Gegenbeispiel auf eine spezielle Auswahl des betrachteten Gebietes zurückzuführen war.

Weierstrass' Gegenbeispiel und Hilbert's Beweis stellen fest, daß ein gut formuliertes Variationsprinzip ein Funktionalintegral einbeziehen muß, das nach unten begrenzt ist und das sein Minimum innerhalb der Menge der zulässigen Funktionen erreicht. Diese Ergebnisse haben die gesamte weitere Entwicklung der Variationsmethoden im Gebiet der partiellen Differentialgleichungen gekennzeichnet.

Wir wollen uns darauf beschränken, lediglich diejenigen Fortschritte zu betrachten, die in dem speziellen Gebiet der Elastizitätstheorie gemacht wurden. Die ersten wichtigen Momente bei der Anwendung der Variationsprinzipien auf die Elastizität sind mit den Namen von G. Green und W. Thomson - Lord Kelvin verbunden. 1839 führt Green das Konzept des elastischen Potentials ein, und dieses erlaubt Kelvin die Formulierung des "Variationsprinzips der minimalen elastischen Energie" (vgl. Love [3]). Dieses Variationsprinzip beinhaltet als Testfelder die Komponenten des vektorialen Verschiebungsfeldes (3 Funktionen).

1875 betrachtet A. Castigliano das elastische Potential als Funktion der Spannungen und macht den Vorschlag des sogenannten "Variationsprinzips der minimalen komplementären Energie" (vgl. Timoshenko & Goodier [4]). Castiglianos Prinzip beinhaltet als Testfelder die Komponenten des Spannungstensors (6 Funktionen).

In unserem Jahrhundert regen E. Hellinger [5] und E. Reissner [6] ein allgemeineres Variationsprinzip an, das als Testfelder die Verschiebungskomponenten, die Spannungskomponenten und die Komponenten des Randspannungsvektors beinhalten (insgesamt 12 Funktionen).

Schließlich erwägt R. Washizu [7] eine Verallgemeinerung des Hellgier & Reissner Variationsprinzips, die 18 Testfelder beinhaltet.

Es ist jetzt vielleicht der richtige Moment, eine Erklärung dafür zu finden, warum die Theorie der Variationsprinzipien die Beachtung einer Reihe von brillianten Wissenschaftlern angezogen hat. Der erste Grund kommt aus der philosophischen Überzeugung, daß unser Universum ein perfektes Werk ist. Euler, Mauperuis und D'Alembert sind nur einige der Vertreter dieser Meinung. Außer diesen philosophischen Argumenten gibt es eine Reihe von praktischen Vorteilen, die durch die Existenz eines Variationsprinzips impliziert werden. Wir nennen hier diese, die von Finlayson & Scriven [8] oder von Truesdell [9] aufgezeigt wurden.

(1) The variational integral may represent a physical quantity of more use for the needs at hand than the field given by the solution, and the variational method is likely to approximate this integral more accurately than it approximates the solution.

(2) If the principle is a minimum or maximum principle, the variational method provides upper or lower bounds on the variational integral.

(3) If in addition a reciprocal variational principle (maximum or minimum) can be formulated, both upper and lower bounds can be found, and these may be close enough together to have real utility.

(4) The direct method of the calculus of variations may yield proof of existence of solutions, a potential advantage when an exhaustive study of the mathematical aspects of a problem seems indicated. In view of these advantages it is not surprising that much effort has been expended on the search for variational principles for nonlinear and nonself-adjoint systems.

B.A. Finlayson & L.E. Scriven

Variational principles are prized for three reasons:

(1) they characterize an entire theory in terms of a single simple concept,

(2) they are equally valid for all methods of description,

(3) they may often be used to prove analytical theorems regarding the subject,

(4) they may often be used to calculate numerical solutions in special cases.

C. Truesdell

Der Formulierung der Variationsprinzipien in der nicht linearen Elastizitätstheorie ging die Entwicklung der Variationsrechnung in Abstrakt-Funktional Räumen voraus. Sehr wichtig war die Erweiterung des Konzepts des Differentials im Hilbert- oder Banach-Raum, die von M. Frêchet [10] und R.Gateaux [11] hergeleitet wurde. Kerners Theorem für die Potentialität einer Funktionalformel [12] spielt eine besondere Rolle in dieser Entwicklung. Eine eindeutige Theorie dieser mathematischen Ergebnisse wird in Vainbergs Monographie [13] dargestellt. Der erste Erfolg in der Ableitung eines Variationsprinzips in der nichtlinearen Elastizität wurde von Langenbach [14] verzeichnet. Seine Variationsprinzipien widmen sich Stäben und Platen. Die Ausdehnung dieser Variationsprinzipien zu allgemeinen dreidimensionalen Körpern wird in [15] betrachtet. Die Grenzen der Anwendung der neuentwickelten Theorie wurden von I.Beju [16] angegeben. Er versucht auf Grund dieser Funktionalmethoden ein Variationsprinzip für geometrische nichtlineare elastische Körper zu bilden. Wang & Truesdell [17] und Oden [18] nahmen Beju's Theorie zunächst an. Bald wurde jedoch klar, daß Beju's Voraussetzung, welche behauptet, daß die elastische Energie ein konvexes Funktional ist, der Objektivität widerspricht.

Es scheint, daß diese Unvereinbarkeit zwischen Konvexität und Objektivität für große elastische Formänderungen zuerst in [19] zu treffen ist. (Es handelt sich natürlich um eine Konvexität über einen Funktionalraum aus dem alle starren Rototranslationen eliminiert sind. Einige neuere Arbeiten verwechseln fälschlicherweise diese besondere Art von Konvexität mit der üblichen punktuellen Konvexität, die auch in der infinitesimalen Elastizitätstheorie nicht gilt.)

J.M. Ball [20] behauptet, daß dieselbe Bemerkung schon vorher von Colemann & Noll [21] und Noll & Truesdell [22] gemacht worden war.

Wir schließen diesen kurzen Überblick über die Entwicklung der Variationsrechnung in der Elastizität mit der Bemerkung, daß für große elastische Deformationen passende Variationsprinzipe noch nicht formuliert sind.

Die Entwicklung der Variationsrechnung für Viskoelastizität war schon in unserer Studie [23] betrachtet worden. Das aktuelle Stadium dieser Entwicklung in der Wärmeausbreitung und Plastizität wird in den nächsten Abschnitten dargestellt.

2.1 Das aktuelle Stadium der Entwiklung der Variationsrechnung für die Wärmeausbreitung*

Alle wesentlichen Ergebnisse, die bei der Formulierung einiger Variationsprinzipien für das Wärmeleitungsproblem bis 1966 erhalten wurden, sind in einer ausgezeichneten Arbeit von B.A. Finlayson und L.E. Scriven [1] dargestellt. Nach der Darstellung der sogenannten "Quasi-Variationsprinzipien" schließen die Autoren dieser Abhandlung wie folgt: "Die in der Literatur enthaltenen 'Quasi Variationsprinzipien' und 'eingeschränkten Variationsprinzipien' unterscheiden sich dergestalt von der klassischen Variationsrechnung, daß sie nicht die Anwendungsbereiche besitzen, die von den wirklichen Variationsprinzipien erschlossen werden." Die Entwicklung der Variationsprinzipien bis 1966 betreffend, folgen wir ohne Vorbehalte den Ausführungen von Finlayson und Scriven. Für die Zeit danach versuchen wir einen kurzen Überblick zu geben.

Das Variationsprinzip von Biot [2] wendet die Lagrange'sche Thermodynamik an, um mit einem Quasi-Variationsprinzip das Wärmeleitungsproblem zu beschreiben. Wir bemerken hierzu, daß ein Funktional bzw. ein Variationsintegral im klassischen Sinne nicht vorhanden ist. Aus diesem Grunde ist auch die Methode der finiten Elemente nicht auf dieses Variationsprinzip begründbar. Eine numerische Lösung erhält man jedoch mit Hilfe der Methode nach Galerkin bzw. der MWR (Method of Weighted Residuals).

Das Variationsprinzip von Krajewski [3] impliziert nur dann ein Extremum-Prinzip, falls der Term $\frac{\partial\Theta}{\partial t}$ nicht variiert wird. Somit gehört das Prinzip von Krajewski zu den eingeschränkten Variationsprinzipien. Die gleiche Meinung äußern auch Lebon und Lambermont [4] in einer direkten Stellungnahme zu [3], wobei diese Autoren früher als Krajewski [16] ein ähnliches

* Erarbeitet zusammen mit B. Kaempf

Prinzip entwickelt haben. Bei der numerischen Lösung bestehen ähnliche Probleme wie beim Prinzip von Biot. Vujanovic und Baclič [5] wenden das Prinzip des kleinsten Zwanges von Gauß auf die Wärmeleitung an. Hierbei wird der Ausdruck Z ($Z = \int_D |\dot{\Theta}-\Delta\Theta|^2 dV$) bezüglich Θ minimiert. D.h., das Verfahren ist ein "Least-Squares-Verfahren" und damit ein Spezialfall des MWR-Verfahrens. Zur Berücksichtigung der Anfangsbedingungen muß das Verfahren gesondert für $t = 0$ angewendet werden. Desgleichen sind die Randbedingungen nicht apriori im Prinzip enthalten. Entsprechende zusätzliche Formulierungen sind erforderlich. Es kann daher nicht von einem wirklichen Variationsprinzip gesprochen werden.

Wir erweitern unsere Betrachtungen mit der Behandlung eines vielversprechenden Weges, der die Lösung von Anfangswert-Problemen durch ein gut begründetes Variations-Prinzip beinhaltet. Im Falle der Anfangswert-Gleichungen lautet der Differentialoperator bezüglich der Zeit

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} . \tag{1.1}$$

Da, in Bezug auf das gewöhnliche innere Produkt, dieser Operator nicht selbstadjungiert ist, versagen die klassischen Methoden der Variationsrechnung. Basierend auf einer allgemeinen Theorie, die von der modernen Funktional-Analysis über symmetrierbare Operatoren [6] entwickelt worden ist, kann ein selbstadjungierter Operator K(.) so bestimmt werden, daß zusätzlich

$$\int_0^{t_0} \frac{\partial u}{\partial t} K(v)\, dt = \int_0^{t_0} K(u) \frac{\partial v}{\partial t}\, dt \tag{1.2}$$

gilt. Dies bedeutet in der Sprache der modernen Funktionalanalysis, daß L(.) ein symmetrierbarer Operator ist. Es ist nun ausgesprochen einfach, eine entsprechende Form des Operators K abzuleiten, die L(u) K-selbstadjungiert macht. Wir nehmen an, daß die betrachteten Funktionen im Zeitursprung Null sind.

$$u(o) = 0$$

Aus (1.2) folgt die Forderung

$$-\int_0^{t_0} u \frac{\partial K(v)}{\partial t} dt + u(t_0)K(v)|_{t_0} = \int_0^{t_0} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot K(u)\,dt = \int_0^{t_0} uK(\frac{\partial v}{\partial t})dt$$

und weiterhin

$$\frac{\partial}{\partial t} (K(v)) = - K (\frac{\partial v}{\partial t}), \; K(v)|_{t_0} = 0.$$

K* sei ein Operator, der durch

$$K^*(u(t)) = K(u(t_0-t))$$

definiert ist. Somit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} K^*(v) = K^*(\frac{\partial v}{\partial t}), \; K^*(v)|_{t=0} = 0.$$

K^* kann also ein beliebiger Operator sein, der mit dem Differential-Operator in der entsprechenden Beziehung steht und den gleichen Wert für t = 0 aufweist. Das einfachste Beispiel eines solchen Operators ist der Einheitsoperator $K^* = I$. Für diesen speziellen Fall folgt

$$K(u(t)) = u(t_o - t)$$

und

$$\int_o^{t_o} \frac{\partial u}{\partial t} K(v)\,dt = \int_o^{t_o} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v(t_o - t)\,dt = \frac{\partial u}{\partial t} * v.$$

Hier symbolisiert der * das Faltungsintegral (convolution-produkt).

K. Washizu [7] war offensichtlich der erste, der diese Produktbildung für die Formulierung eines Variationsprinzipes (vgl. J. Lach [8]) einsetzte. Später wurde diese Methode auf Probleme in der Viscoelastizität (M. Gurtin [9], M. Leitman [10]) und auf die Wärmeausbreitung (J.M. Reddy [11]) ausgedehnt.

Wir bemerken, daß die von Washizu, Gurtin, Tonti und Reddy angewendete Methode der Symmetrierung eines Operators zumindest für die Wärmeleitung zu keinem Extremal-Prinzip führt. Ein erster Schritt auf dem Weg zur Entwicklung eines Extremal-Prinzips wurde von Herrera [19] und Collins [20] getan. Grundlage dieses Weges ist die gleichzeitige Betrachtung der Wärmeleitungsgleichung und ihrer adjungierten Gleichung. Herrera erhält durch diese Betrachtung ein Funktional, das in einem beschränkten Bereich ein Minimum und in einem anderen beschränkten Bereich ein Maximum für die Lösung der Gleichung besitzt. Collins [20] erhält durch Addition und Subtraktion der zueinander adjungierten Differentialgleichungen ein neues System von Differentialgleichungen. Er konstruiert zwei Funktionale mit den folgenden Besonderheiten.

Das erste Funktional stellt zusammen mit der ersten Gleichung als Nebenbedingung ein Minimumprinzip und das zweite Funktional stellt zusammen mit der zweiten Gleichung als Nebenbedingung ein Maximumprinzip dar. Die starke Beschränkung durch die Nebenbedingungen macht es schwierig, das Prinzip von Collins als ein Extremalprinzip im klassischen Sinn anzusehen.
Ein weiterer Versuch, ein Extremalprinzip zu konstruieren, ist von Filippov und Skorokhodow [21] durchgeführt worden. Die Hauptidee der Autoren besteht in dem Versuch, das Prinzip in einer erweiterten Klasse der Funktionale zu formulieren. In dieser erweiterten Klasse werden neben den ersten Ableitungen auch die Integrale der ersten Ableitungen betrachtet. Hierdurch gelingt es den Autoren, ein Extremalprinzip zu konstruieren. Es scheint jedoch, daß das Prinzip nur für Rechteck-Gebiete und besondere Randbedingungen anwendbar ist.

Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Konstruktion eines Extremal-Variationsprinzips für die Wärmeleitung. Dieses Variationsprinzip repräsentiert eine besondere Anwendung des allgemeinen Variationsprinzips der virtuellen Energieübertragung. Auf diese Weise stellen wir die folgende pessimistische Feststellung von Finlayson und Scriven (loc. cit.) in Frage:
"From a mathematical point of wiew it appears that no general variational principle can be derived for transport and transformation processes, despite the alluring hope expressed by the mathematician Euler in 1744 and not forgotten since:
Cumque universa mundi fabrica omnino sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat." (vgl. hierzu A. Kneser in [17]).

Eine kurze Darstellung bekannter Variationsprinzipien

Variationsprinzip von Biot

Biot [2] führt als Hilfsfunktion den Wärmeflußvektor H ein

$$\underset{\sim}{q} = \frac{\partial \underset{\sim}{H}(x,t)}{\partial t} . \qquad (1.3)$$

Aus der Energiebilanz für ein Volumenelement (s.a. [13])

$$dV \; c\, d\Theta = - dV dt \; \mathrm{div}\, \underset{\sim}{q} \qquad (1.4)$$

folgt Biot's 1. Differentialgleichung

$$c\,\Theta = - \mathrm{div}\, \underset{\sim}{H} \; . \qquad (1.5)$$

Hierbei bezeichnet Θ die Temperatur und c die Wärmekapazität. In Gleichung (1.4) stellt die linke Seite die Änderung der inneren Energie des Körpers dar, während der Term div $\underset{\sim}{q}$ die pro Volumen und Zeiteinheit aus dem Volumenelement ausgetretene Wärmemenge angibt. Biot betrachtet nun eine Variation δH. Die hierzu korrespondierende Variation $\delta\Theta$ erhält man durch die Gleichung (1.5) zu

$$c\,\delta\,\Theta = - \mathrm{div}(\delta \underset{\sim}{H}). \qquad (1.6)$$

Für die Wärmeleitung gilt der Ansatz für eine Wärmeleitfähigkeit von 1 wie folgt:

$$\operatorname{grad} \Theta + \underset{\sim}{q} = 0. \tag{1.7}$$

Diese Gleichung wird mit $\delta\underset{\sim}{H}$ multipliziert und über D integriert.

$$\int_D (\operatorname{grad} \Theta + \underset{\sim}{q})\, \delta\underset{\sim}{H}\, dV = 0. \tag{1.8}$$

Die partielle Integration des 1. Terms liefert

$$\int_D \{-\Theta \operatorname{div}(\delta\underset{\sim}{H}) + \underset{\sim}{q}\, \delta\underset{\sim}{H}\} dV = -\int_{\partial D} \Theta \underset{\sim}{n} \cdot \delta\underset{\sim}{H}\, dA \tag{1.9}$$

Mit Hilfe der Gleichung (1.6) erhält man

$$-\int_D \Theta \operatorname{div}\, (\delta\underset{\sim}{H})\, dV = \int_D c\Theta\delta\Theta dV = \delta V^{*}. \tag{1.10}$$

Hieraus folgt das Wärmepotential

$$V^{*} = \frac{1}{2} \int_D c\, \Theta^2. \tag{1.11}$$

Schließlich folgt das Variationsprinzip von Biot für die Wärmeausbreitung, wenn (1.10) in (1.9) eingesetzt wird, zu

$$\delta V^{*} + \int_D \underset{\sim}{q}\, \delta\underset{\sim}{H}\, dV = -\int_{\delta D} \Theta \underset{\sim}{n} \cdot \delta\underset{\sim}{H}\, dA. \tag{1.12}$$

Zur Eindeutigkeit von $\underset{\sim}{H}$ fügen wir die folgenden Bemerkungen an:

Die Dgln. des Systems lauten nach (1.5) und (1.7)

$$c\ \Theta = -\ \mathrm{div}\ \underset{\sim}{H},$$
$$\mathrm{grad}\ \Theta = -\ \underset{\sim}{q}. \tag{1.13}$$

Diese Dgln. seien für $\underset{\sim}{H}_1$ und $\underset{\sim}{H}_2$ gültig, wobei

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{H}_2 - \underset{\sim}{H}_1 \tag{1.14}$$

gesetzt wird. Es gilt also

$$\begin{aligned} c\ \Theta &= -\ \mathrm{div}\ \underset{\sim}{H}_1, \\ c\ \Theta &= -\ \mathrm{div}\ \underset{\sim}{H}_2, \\ \mathrm{grad}\ \Theta &= -\ \underset{\sim}{q}_1, \\ \mathrm{grad}\ \Theta &= -\ \underset{\sim}{q}_2 \quad . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \underset{\sim}{H}_2}{\partial t} - \frac{\partial \underset{\sim}{H}_1}{\partial t} = 0, \\ &\mathrm{div}(\underset{\sim}{H}_2 - \underset{\sim}{H}_1) = 0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ (\underset{\sim}{R}) &= 0, \\ \dot{\underset{\sim}{R}} &= 0\ . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Aus (1.17) folgt

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}_o(x) \, . \qquad (1.18)$$

Da div$(\underset{\sim}{R}_o(\underset{\sim}{x})$ = 0 ist, folgt als eine mögliche Funktion für $\underset{\sim}{R}_o(\underset{\sim}{x})$:

$$\underset{\sim}{R}_o = \mathrm{rot}(\underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x})) \qquad (1.19)$$

für beliebige $\underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x})$, d.h.

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_o + \mathrm{rot}(\underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x})). \qquad (1.20)$$

$\underset{\sim}{H}$ ist somit nicht eindeutig zu bestimmen.

Variationsprinzip von Reddy

In diesem Abschnitt legen wir das von Reddy in [11] (vgl. [12], Kap. 5.11) entwickelte Variationsprinzip für die Wärmeleitung zugrunde. Wir werden im folgenden beweisen, daß das Variationsprinzip von Reddy zwar stationär jedoch nicht konvex oder konkav ist. Wir beschränken uns hier auf homogene Randbedingungen und setzen alle Konstanten gleich 1. Wir übernehmen hier die Formelzeichen und die Vorzeichenkonvention von Reddy (bezeichnen jedoch den Raum mit D und den Rand mit ∂D). Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} q_i &= \Theta,i \, , \\ q_{i,i} &= \frac{\partial\Theta}{\partial t} \, , \end{aligned} \qquad (1.21)$$

Θ_i = Temperatur

q_i = Komponente der Wärmestromdichte

Es folgt das Funktional gemäß Reddy zu:

$$\Phi(\Theta,q) = \int_D \{ \int_0^{t_0} [\frac{1}{2} \frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t} \cdot \Theta(x,t_0-t) + \frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial x_i} q_i(x,t_0-t)$$

$$- \frac{1}{2} q_i(x,t)\, q_i(x,t_0-t)]\, dt + \frac{1}{2} \Theta(x,o)\, \Theta(x,t_0) - \Theta_0(x)\, \Theta(x,t_0)\}\, dV \qquad (1.22)$$

Im folgenden betrachten wir zwei Beispiele, die beweisen, daß das Funktional von Reddy weder konkav noch konvex ist. Wir sehen die 1. Beziehung von (1.21) als gültig an und erhalten so ein Funktional, daß nur von Θ abhängt. Für den eindimensionalen Fall gilt somit

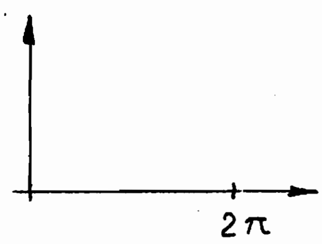
$$\Phi(\Theta,\Theta,_x) = \int_D \{\frac{1}{2} \int_0^{t_0} [\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}\ \Theta(x,t_0-t) + \Theta,_x(x,t) \cdot \Theta,_x(x,t_0-t)]\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \Theta(x,o)\ \ \Theta(x,t_0) - \Theta_0(x)\, \Theta(x,t_0)\}dV \qquad (1.23)$$

Wir betrachten nun das eindimensionale Problem mit den Rand- bzw. Anfangsbedingungen

$\Theta(o,t) = 0;\ \Theta(2\pi,t) = 0$

$\Theta_0(x) = \Theta(x,o) = \sin x. \qquad (1.24)$



Die Euler-Gleichungen zum Funktional Φ (1.23) lauten:

$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial x_i} - q_i(x,t) = 0; \quad \frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial q_i(x,t)}{\partial x_i} = 0;$$

$$\Theta(x,o) - \Theta_0(x) = 0 \text{ in } D. \tag{1.25}$$

Die Funktion

$$\Theta = e^{-t} \sin x \tag{1.26}$$

ist eine Lösung dieses Problems.

Wir beziehen uns nun auf die in [18] entwickelte Theorie und erweitern (1.26) durch eine zulässige Funktion, die außerdem von einem Paramter α abhängt.

Wir greifen aus der Vielzahl der Möglichkeiten zwei Funktionen heraus und schreiben

$$\Theta = (e^{-t} + \alpha t^2) \sin x \;, \tag{1.27}$$

$$\Theta = (e^{-t} + \alpha(t^2 - \tfrac{1}{2}t)) \sin x. \tag{1.28}$$

Beide Gleichungen erfüllen die Rand- bzw. Anfangsbedingungen (1.24). Als erstes betrachten wir die Gleichung (1.27) und setzen sie in (1.23) ein, wobei $t_0 = 1$ gesetzt wird.

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2} \int_o^1 \quad (-e^{-t} + 2\alpha t)(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2) \quad \sin^2 x +$$

$$(e^{-t} + \alpha t^2)(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2) \cos^2 x \quad dt -$$

$$- \frac{1}{2} (e^{-1} + \alpha) \sin^2 x\} \, dx. \tag{1.29}$$

Eine Integration über x ergibt

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int_o^1 (2\alpha t + \alpha t^2)(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2) \, dt$$

$$- \frac{\pi}{2} (e^{-1} + \alpha). \tag{1.30}$$

Hier wird schon deutlich, daß wir $f(\alpha)$ als eine Funktion betrachten, die von α abhängt.

Wir schreiben (1.30) um

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int_o^1 \left[\alpha e^{-1} e^t (2t + t^2) + \alpha^2 (2t + t^2)(1 - 2t + t^2)\right] dt$$

$$- \frac{\pi}{2} (e^{-1} + \alpha). \tag{1.31}$$

Die Zeitintegration liefert

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left[|\alpha e^{-1} e^t (2t - 2 + t^2 - 2t + 2)|_o^1 + \alpha^2 |t^2 - t^3 + \frac{1}{5} t^5|_o^1 \right.$$

$$\left. - e^{-1} - \alpha \right], \tag{1.32}$$

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left[\alpha + \frac{1}{5}\alpha^2 - e^{-1} - \alpha\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{5}\alpha^2 - e^{-1}\ . \tag{1.33}$$

Somit ist die Funktion $f(\alpha)$ konkav.

Wir betrachten jetzt das zweite Beispiel und schreiben wie zuvor unter Verwendung von (1.28) in (1.23)

$$f(\alpha) = \int_D \left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(-e^{-t} + 2\alpha t - \frac{\alpha}{2})(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2\right.\right.$$

$$- \frac{1}{2}\alpha(1-t))\sin^2 x + (e^{-t} + \alpha t^2 - \frac{1}{2}\alpha t)(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\alpha(1-t))\cos^2 x\right]dt - \frac{1}{2}(e^{-1} + \frac{1}{2}\alpha)\sin^2 x\right\}dx. \tag{1.34}$$

Es folgt

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \alpha(\frac{3}{2}t + t^2 - \frac{1}{2})(e^{(-1+t)} + \alpha(1-t)^2 - \frac{1}{2}\alpha(1-t))dt$$

$$-\frac{\pi}{2}(e^{-1} + \frac{1}{2}\alpha) \tag{1.35}$$

bzw.

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[\alpha e^{-1}e^t(\frac{3}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}) + \alpha^2(t^4 - \frac{9}{4}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4})\right]dt$$

$$-\frac{\pi}{2}(e^{-1} + \frac{1}{2}\alpha). \tag{1.36}$$

Die Zeitintegration liefert

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2}\Big[\alpha e^{-1}e^{t}(t^2 - \tfrac{1}{2}t)\Big|_0^1 + \alpha^2(\tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{9}{12}t^3 + \tfrac{3}{4}t^2 - \tfrac{1}{4}t)\Big|_0^1$$

$$- e^{-1} - \tfrac{1}{2}\alpha\Big] \qquad (1.37)$$

bzw.

$$f(\alpha) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{20}\alpha^2 + e^{-1}\right). \qquad (1.38)$$

Somit ist $f(\alpha)$ konvex.

Wir erhalten folgende Situation:

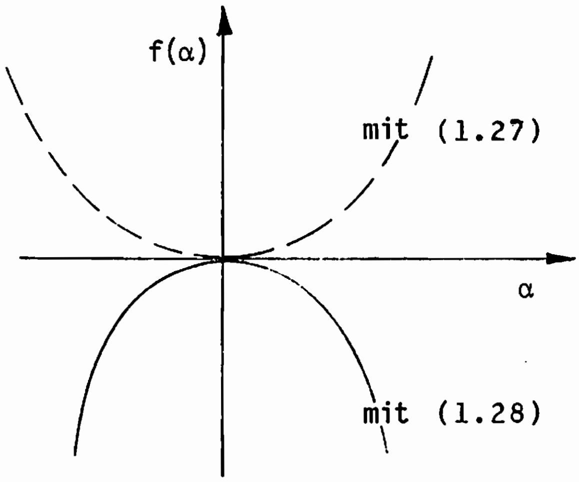


Abb. 2.1

Diese beiden Beispiele beweisen, daß das Funktional von Reddy weder konvex noch konkav ist (vgl. [18]).

2.2 Das Prinzip des virtuellen Energieübertragung

Es sei W die innere Energie und $\underset{\sim}{q}$ der Energiefluß-Vektor. Bezeichnet man mit R die äußere Energieproduktion und schreibt man die Energiebilanzgleichung für ein Gebiet D, mit dem Rand ∂D,

$$\int_D \dot{W} dV + \int_{\partial D} \underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{n}\, ds = \int_D \dot{R} dV,$$

dann erhält man

$$\dot{W} + \operatorname{div}\underset{\sim}{q} = \dot{R}. \qquad (2.1)$$

Eine Variation $\delta\dot{R}$ der Energieproduktion verursacht die Variationen $\delta\dot{W}$, $\delta\underset{\sim}{q}$ der inneren Energie bzw. des Energiefluß-Vektors. Diese Variationen sind verbunden durch die Gleichung

$$\delta\dot{W} + \operatorname{div}\delta\underset{\sim}{q} = \delta\dot{R} . \qquad (2.2)$$

Multipliziert man (2.1) mit $\delta\dot{R}$ und berücksichtigt man (2.2), dann erhält man durch Integration über D

$$\int_0^t dt \int_D (\dot{W}+\operatorname{div}\underset{\sim}{q})(\delta\dot{W}+\operatorname{div}\delta\underset{\sim}{q})dV =$$

$$\int_0^t dt \int_D \dot{R}(\delta\dot{W}+\operatorname{div}\delta\underset{\sim}{q})dV \qquad (2.3)$$

Es seien auf dem Rand ∂D folgende Randbedingungen[†] zu erfüllen

$$W|_{\partial D_1} = f, \qquad (2.4)$$

$$\underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{n}|_{\partial D_2} = h, \qquad (2.5)$$

wobei $\partial D_1 + \partial D_2 = \partial D$, $(\partial D_1 \cap \partial D_2 = \phi)$.

Aus (2.3) folgt

$$\int_0^t dt \int_D \dot{W}\delta\dot{W} dV + \int_0^t dt \int_D \operatorname{div}\underset{\sim}{q}\operatorname{div}\delta\underset{\sim}{q}\, dV - \int_0^t dt \int_D (\underset{\sim}{q}\operatorname{grad}\delta\dot{W} + \operatorname{grad}\dot{W}\delta\underset{\sim}{q})dV +$$

$$+\int_0^t dt \int_{\partial D} (\underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{n}\,\delta\dot{W} + \delta\underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{n}\,\dot{W})ds = \int_0^t dt \int_{\partial D} \dot{R}(\dot{W}+\operatorname{div}\delta\underset{\sim}{q})dV \qquad (2.6)$$

---

†) Die physikalische Bedeutung dieser Randbedingungen ist für jede besondere Art der Energieübertragung zu erklären.

Benützt man die Randbedingungen (2.4) und (2.5) und nimmt man an, daß

$$\delta W|_{\partial D_1} = 0; \quad \delta \underset{\sim}{q}\underset{\sim}{n}|_{\partial D_2} = 0$$

dann erhält man

$$\int_0^t dt\int_D \dot{W}\delta\dot{W}dV + \int_0^t dt\int_D \mathrm{div}\underset{\sim}{q}\,\mathrm{div}\,\delta\underset{\sim}{q}dV - \int_0^t dt\int_D (\underset{\sim}{q}\,\mathrm{grad}\,\delta\dot{W}+\mathrm{grad}\dot{W}\delta\underset{\sim}{q})dV+$$

$$+\int_0^t dt(\int_{\partial D_1}\delta\underset{\sim}{q}\underset{\sim}{n}\dot{f}ds + \int_{\partial D_2} h\delta\dot{W}ds) = \int_0^t dt\int_D \dot{R}(\delta\dot{W}+\mathrm{div}\,\delta\underset{\sim}{q})dV. \qquad (2.7)$$

Es sei das Funktional

$$\Phi(W,q)=\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_D |\dot{W}|^2 dV+\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_D |\mathrm{div}\underset{\sim}{q}|^2 dV-\int_0^t dt\int_D \underset{\sim}{q}\,\mathrm{grad}\dot{W}dV-$$

$$-\int_0^t dt\int_D \dot{R}(\dot{W}+\mathrm{div}\underset{\sim}{q})dV+\int_0^t dt(\int_{\partial D_1} \underset{\sim}{q}\underset{\sim}{n}\dot{f}ds+\int_{\partial D_2} h\dot{W}ds. \qquad (2.8)$$

Man bemerkt, daß (2.7) mit der Funktionalgleichung

$$\delta\,\Phi(W,\underset{\sim}{q}) = 0 \qquad (2.9)$$

äquivalent ist.

Es folgt unmittelbar das <u>Variationsprinzip des virtuellen Energieübertragung.</u>

Das Funktional (2.8) wird stationär für die innere Energie W und den Energiefluß-Vektoren $\underset{\sim}{q}$,welche die Energiebilanzgleichung (2.1) und die Randbedingungen (2.4) und (2.5) erfüllen. Nimmt man in (2.9) eine Beziehung zwischen der inneren Energie W und dem Energiefluß-Vektor $\underset{\sim}{q}$ an, dann erhält man ein bestimmtes Variationsprinzip, dessen Funktional nur von einer einzigen Funktion abhängt. In dem besonderen Fall des Fourierschen Modells für die Wärmeausbreitung im isotropen Körper

$$W=c\theta \quad , \quad \underset{\sim}{q}=-k\,\mathrm{grad}\,\theta \quad ,$$

wobei θ die Temperatur und c,k positive Konstanten sind, reduziert sich (2.8) zu dem konvexen Funktional

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{2}c^2\int_0^t dt\int_D |\theta|^2 dV+\frac{1}{2}k^2\int_0^t dt\int_D |\Delta\theta|^2 dV+\frac{1}{2}ck\int_D |\mathrm{grad}\,\theta|_t^2 dV-$$

$$-\frac{1}{2}ck\int_0^t dt\int_D |\mathrm{grad}\,\theta_0|^2 dV-\int_0^t dt\int_D \dot{R}(c\dot{\theta}-k\Delta\theta)dV-k\int_0^t dt\int_{\partial D_1} \dot{f}\frac{\partial\theta}{\partial n}ds+c\int_0^t dt\int_{\partial D_2} h\dot{\theta}ds \quad , \tag{2.10}$$

wobei mit θ_0 die Anfangstemperatur bezeichnet ist.In [22] wird diese Extremalvariationsprinzip zur Randwertaufgabe der instationäre Wärmeausbreitung angewendet. Wir bemerken die folgende bezeichnende Analogie† zwischen thermodynamischen und mechanischen Prozessen:

Mechanik	Thermodynamik
Kraft	Energiequelle Intensität
$\underset{\sim}{F}$	$\dot{R}$
Geschwindigkeit	Energietransport
$\underset{\sim}{v}$	$\rho e=\int(\dot{W}+\mathrm{div}\,\underset{\sim}{q})dt$ + konst.
Zweites Newtonsches Gesetz	Energiebilanz
$m\dot{\underset{\sim}{v}} = \underset{\sim}{F}$	$\rho\dot{e} = \dot{R}$
Prinzip der virtuellen Verschiebung	Prinzip des virtuellen Energietransportes
$(m\dot{\underset{\sim}{v}}-\underset{\sim}{F})\delta\underset{\sim}{u}=0$	$\int_0^t dt\int_D(\rho\dot{e}-\dot{R})\delta e\,dV = 0$

† Diese Form der Analogie wurde von B.Kaempf vorgeschlagen

Bezüglich der ersten und dritten Gesetze der Mechanik bemerken wir folgendes:Das Beharrungsgesetz von Galilei hat eine natürliche Anwendung in der Thermodynamik der Materialien mit Gedächtnis (vgl.[23],[24]und [25]); Dem Gleichheit zwischen Aktion und Reaktion entspricht in der Thermodynamik die Identität der absoluten Größen der Sender- und Empfänger-Energiequelle. Eine grundlegender Unterschied zwischen thermodynamischen und mechanischen Prozesse scheint zu bestehen, in der Clausius-Fourierschen Ungleichung

$$\underset{\sim}{q}\,\mathrm{grad}W \leqq 0$$

und in den Onsagerschen Symmetriebeziehungen welche keine Korrespondenz in der Mechanik haben. Um diesen Zustand zu analysieren, kehren wir zu der Formel (2.8) des Funktionals des oben erwähnten Variationsprinzips zurück.

Eine Beziehung zwischen $\underset{\sim}{q}$ und W (das konstitutive Gesetz), welche einem reellen Phänomen entspricht, muß das Funktional (2.8) so bestimmen, daß (unter passenden Anfangs- und Randsbedingungen)die Eindeutigkeit und die Stabilität der Lösung von (2.9) gesichert ist. in dem folgenden beschränken wir uns auf das klassische Fouriersche Modell der Wärmeausbreitung

$$W=c\theta \quad , \tag{2.11}$$

$$\underset{\sim}{q}=-K\mathrm{grad}\theta \quad , \tag{2.12}$$

wobei K die Wärmeleitfähigkeits-Matrix bezeichnet. Setzt man (2.11) und (2.12) in (2.8), dann erhält man

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{2}c\int_0^t dt\int_D |\dot{\theta}|^2 dV+\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_D |\mathrm{div}(K\mathrm{grad}\theta)|^2 dV+c\int_0^t dt\int_D K\mathrm{grad}\theta\,\mathrm{grad}\dot{\theta}\,dV-$$

$$-\int_0^t dt\int_D R\; c\dot{\theta}+\operatorname{div}(K\operatorname{grad}\theta)\; dV+\int_0^t dt\;\int_{\partial D_1}(-K\operatorname{grad}\theta)\underset{\sim}{n}\dot{f}ds+c\int_{\partial D_2}h\dot{\theta}ds \qquad (2.13)$$

mit der Nebenbedingungen $\theta|_{t_0} = \theta_0^-$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehemen wir an , daß θ_0=konst. ist.

Wir spalten $K=K^++K^-$,wobei K^+ den symmetrische Teil $K^+=\frac{1}{2}(K+K^T)$ und K^- den antimetrische Teil $K^-=\frac{1}{2}(K-K^T)$ des K bezeichnet.

Dann gilt

$$\int_0^t dt\int_D K\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV=\int_0^t dt\int_D K^+\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV+\int_0^t dt\int_D K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_D K^+\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta})dV+\int_0^t dt\int_D K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV= \qquad (2.14)$$

$$=\frac{1}{2}\int_D K^+\operatorname{grad}\theta|_t\operatorname{grad}\theta|_t dV-\frac{1}{2}\int_D K^+\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\theta\; dV+\int_0^t dt\int_D K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV$$

Setz man (2.13) in (2.12) ein, dann folgt

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{2}c\int_0^t dt\int_D|\theta|^2dV+\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_D|\operatorname{div}(K\operatorname{grad}\theta)|^2dV+ \qquad (2.15)$$

$$+\frac{c}{2}\int_D K^+\operatorname{grad}\theta|_t\operatorname{grad}\theta|_t dV+\int_0^t dt\int_D K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV+\text{lineare Glieder}$$

mit der Nebenbedingungen $\theta_0(x,0)$=konst.

Erinnern wir uns an die Definition eines konvexen Funktionals.

Definition: Ein Funktional $\Phi:X\longrightarrow R$ (wobei X ein linearer vektorieller Raum bezeichnet) ist konvex, wenn für beliebige $\theta_1,\theta_2\in X$ und $\alpha\in[0,1]$

$$\Phi(\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2)\geqq\alpha\Phi(\theta_1)+(1-\alpha)\Phi(\theta_2) \qquad (2.16)$$

gilt. Das Funktional wird streng konvex gennant, wenn aus der Gleichheit

$$\Phi(\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2)=\alpha\Phi(\theta_1)+(1-\alpha)\Phi(\theta_2) \qquad (2.17)$$

für $\alpha\in[0,1]$ fölgt, daß $\theta_1\equiv\theta_2$ ist. Bezeichnet man mit X den linearen Raum der hinreichend glatten Funktionen

$\theta(x,\tau)$; $x\in D$, $\tau\in[0,t]$,z.B.

$X=\{\theta: D\times[0,t]\longrightarrow R \mid \theta\in C^2(D\times[0,t]),\ \theta|_{t=0}=\text{konst.}\}$

dann ist das Funktional (2.15) genau dann streng konvex, wenn für alle $\theta\in X$

$$c\int_0^t dt\int_D |\dot{\theta}|^2 dV+\int_0^t dt\int_D |\operatorname{div}(K\operatorname{grad}\theta)|^2 dV+c\int_D K^+\operatorname{grad}\theta|_t \operatorname{grad}\theta|_t dV+$$

$$+c\int_0^t dt\int_D K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dV\geqq 0 \qquad (2.18)$$

gilt. Die Gleichung wird genau dann erfüllt, wenn θ=konst. ist. Es ist einfach zu beweisen, daß unter der Bedingung dieser strengen Konvexität die Funktionalgleichung

$$\delta\Phi(\theta)=0$$

eine eindeutige Lösung hat die die Randbedingungen erfüllt und daß die Lösung stabil für allen Störungen der Randwerte oder der Energiequelle ist. Es gilt das folgende

Theorem 1: Das Funktional (2.15) ist genau dann streng konvex, wenn die folgende Bedingungen

$c>0$ positivität der Wärmekapazität,

$K=K^T$ Onsagersche Symmetriebeziehungen,

$K\geqq 0$ Clausius- Fouriersche Ungleichung

erfüllt sind.

Beweiss: Wenn die Bedingungen des Theorems erfüllt sind, dann folgt aus (2.18) das Konvexität des $\Phi(\theta)$.Um den zweiten Teil des Theoremes zu beweisen, schreiben wir (2.18) für den besonderen Fall, wenn $\operatorname{grad}\theta$ unabhängig von den räumlichen veränderlichen ist, $\operatorname{grad}\theta=f(t)$:

$$c\int_0^t |\dot{\theta}|^2 dt+\int_0^t K^+\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dt+2c\int_0^t K^-\operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\dot{\theta}dt\geqq 0\ . \qquad (2.19)$$

Schreibt man diese Ungleichung für einen Zyklus der Temperatur $\theta(t_0)=\theta(0)$, dann erhält man

$$c\int_0^{t_0}|\dot{\theta}|^2 dt+\int_0^{t_0} K^- \mathrm{grad}\theta \mathrm{grad}\dot{\theta} dt \geqq 0 \tag{2.20}$$

Wir beweisen ,daß diese letzte Ungleichung genau dann gilt, wenn für jeden Temperatur -Zyklus

$$\int_0^{t_0} K^- \mathrm{grad}\theta \mathrm{grad}\dot{\theta} dt=0 \tag{2.21}$$

ist. Nimmt man an,daß (2.21) nicht gilt, dann es einen Zyklus $\theta(t)$, T' o,t_0 mit $\mathrm{grad}\theta(x,t_0)=0$ so daß

$$\int_0^{t_0} K^- \mathrm{grad}\theta \mathrm{grad}\dot{\theta} dt \leqq 0 \tag{2.22}$$

Es sei die Geschichte der Temperatur

$$\theta^{*}(\tau)=\theta(\eta\tau) \quad , \quad \tau\in\left[0,\frac{t_0}{\eta}\right],$$

wobei η eine beliebige Zahl ist. Setz man diese in (2.20) ein, dann folgt

$$c\eta\int_0^{t_0}|\dot{\theta}|^2 dt + \int_0^{t_0} K^- \mathrm{grad}\theta\ \mathrm{grad}\dot{\theta} dt \geqq 0$$

für alle η.Nimmt man η hinreichend klein, dann findet man

$$\int_0^{t_0} K^- \mathrm{grad}\theta \mathrm{grad}\dot{\theta} dt \geqq 0$$

und das widerspricht (2.21). Wir bemerken daß die Gleichung (2.21) äquivalent mit Onsagerschen Symmetriebeziehung $K=K^T$ ist. Benützt man diese Symmetriebeziehung, dann reduziert sich (2.19) zu

$$c\int^{t}|\dot{\theta}|^2 dt+\frac{1}{2}K\mathrm{grad}\theta\mathrm{grad}\theta\Big|_t \geqq 0 \tag{2.23}$$

woher folgt $c \geqq 0$ und $K \geqq 0$.

Berüchtisichtigt man die strenge Konvexität des Funktionals, dann folgt $c>0$ und $K>0$. Dadurch ist das Theorem voll bewiesen.

Der folgende Satz stellt eine Analogie zwischen der Konvexität-Bedingung und einer Beziehung von Monotonie zwischen Temperatur und zugeführter Energie auf:

Theorem 2: Das funktional (2.15) ist konvex genau dann, wenn die Monotonie-Bedingung

$$\int_0^t dt \int_{\partial D} \underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{n}_i \dot{\theta}\, ds + \int_0^t dt \int_D R\dot{\theta}\, dV \geqq 0 \tag{2.24}$$

($\underset{\sim}{n}_i$ bezeichnet die innere Normale, $\underset{\sim}{n}_i = -\underset{\sim}{n}$) für alle hinreichen glatten Temperatur- Geschichten gilt, die aus einem Gleichgewichtszustand $\theta(x,0)=\text{konst.}$ anfängt; (z.B. für $\theta \in X$).

Das Funktional ist genau dann streng konvex, wenn die Gleichheit in (2.24) zur Folge hat, daß $\dot{\theta} = 0$ ist.

Beweis: Die Ungleichung (2.24) ist äquivalent mit

$$\int_0^t dt \int_D (-\dot{\theta}\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{q}\,\mathrm{grad}\,\dot{\theta} + R\dot{\theta})\, dV \geqq 0$$

Benütz man die Energiebilanzgleichung und die konstitutive Beziehung (2.12), so erhält man dann

$$c\int_0^t dt \int_D |\dot{\theta}|^2 dV + \int_0^t dt \int_D K\,\mathrm{grad}\,\theta\,\mathrm{grad}\,\dot{\theta}\, dV \geqq 0$$

Auf dasselben Weg, wie in vorigen Theorem folgt, daß diese letzte Ungleichung genau dann gilt, wenn $c>0$, $K=K^T$ und $K \geqq 0$. Das beweist die Äquivalenz zwischen konvexität und Monotonie- Bedingung (2.24). Eine übliche Beweisführung bestätigt auch den Teil des Theorems, der die strenge Konvexität betrachtet.

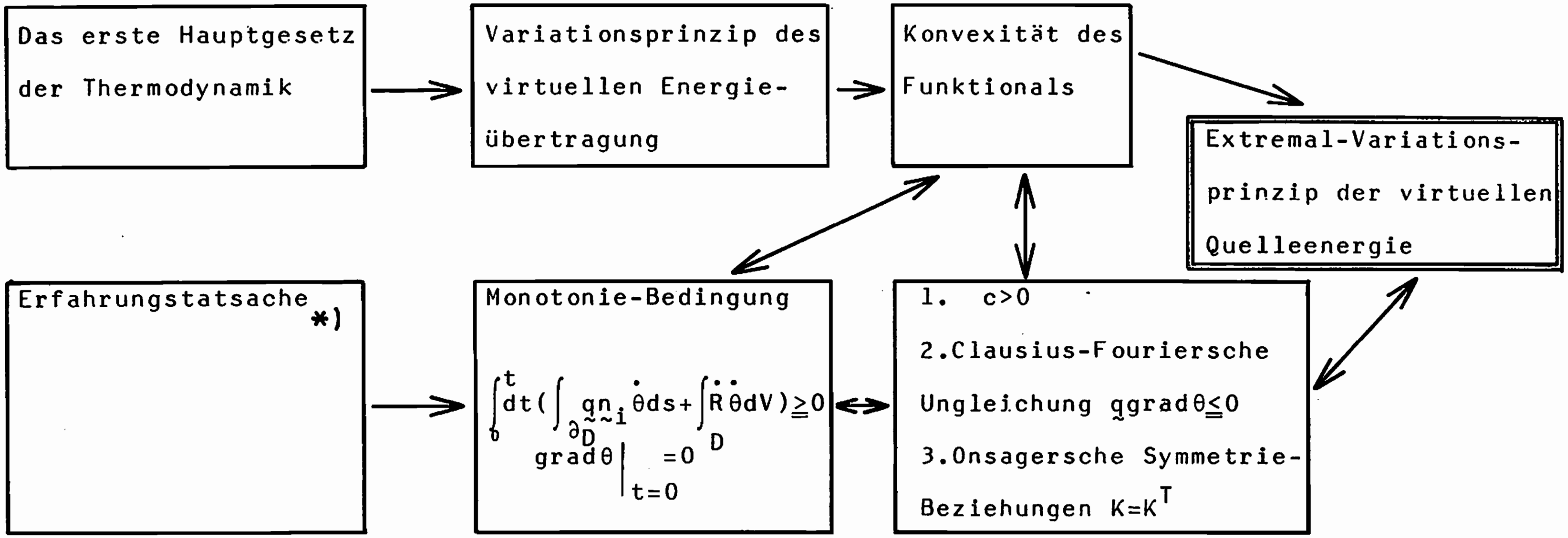
Die Monotonie- Bedingung (2.24) kann man als mathematischen Ausdruck folgender Erfahrungstatsache interpretieren.

Die Temperatur eines Körpers der sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet vergrossert sich, wenn der Körper Wärme empfängt und verringert sich, wenn er Wärme verliert.

Natürlich es ist prinzipell unmöglich zu beweisen,daß die Monotonie- Bedingung des Theorems 2 den einzigen mathematischen Ausdruck dieser Erfahrungstatsache darstellt. Sicher ist nur, daß jedes mathematische Modell der Wärmeausbreitung, durch bestimmte Beschränkungen, diese Erfahrung reflektieren muß. Nimmt man die strenge Monotonie-Bedingung des Theorems 2 als den Ausdruck dieser Erfahrungstatsache an, dann findet man die klassische Thermodynamik mit der Clausius-Fourierschen Ungleichung und den Onsagerschen Symmetriebeziehungen als Konsequenzen des Modells. Voll kennzeichnend ist, daß in diesem Fall das Variationsprinzip des virtuellen Energietransport zu einem Extremal-Variationsprinzip führt.

Parameter: W-innere Energie — Konstitutive Gleichung: $W=c\theta$

$\underset{\sim}{q}$=Energiefluß-Vektor — $\underset{\sim}{q}=-K\,\mathrm{grad}\,\dot{\theta}$



*) Die Temperatur eines Körpers der sich in thermodynamischen Gleichgewicht befindet, vergrößert sich wenn der Körper Wärme empfängt und veringert sich wenn er die Wärme verliert.

2.3 . Das Extremal Variationsprinzip der Wärmeausbreitung [*]

Das Problem des raum-zeitlichen Temperaturverlaufes wird bekannterweise durch die Differentialgleichung

$$\dot{\Theta} - \Delta\Theta = f(x,t) \tag{3.1}$$

beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind dabei sämtliche Konstanten gleich Eins gesetzt worden. $f(x,t)$ stellt die Wärmequellenleistung dar. Zuerst betrachten wir die folgende Anfangsbedingung

$$\Theta(x,o) = \Theta_o(x) \tag{3.2}$$

und die homogene Dirichlet'sche Randbedingung

$$\Theta|\partial D = 0.$$

Wir lassen eine kleine Änderung zu, die durch $\delta\dot{\Theta}$ und $\Delta\delta\Theta$ gegeben ist.

Wir setzen

$$\delta r = \delta\dot{\Theta} - \Delta\delta\Theta$$

und multiplizieren die Glg. (3.1) mit δr und integrieren über den Raum und die Zeit. In den folgenden Gleichungen sind die Zeit- und Raumdifferentiale vernachlässigt.

$$\int_o^{t_o} \int_D (\dot{\Theta} - \Delta\Theta)(\delta\dot{\Theta} - \Delta\delta\Theta) = \int_o^{t_o} \int_D f\cdot(\delta\dot{\Theta} - \Delta\delta\Theta) \tag{3.3}$$

---
[*] Erarbeitet zusammen mit B.Kaempf

Weiterhin folgt

$$\int_o^{t_o} \int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} - \dot{\Theta}\Delta\delta\Theta - \delta\dot{\Theta}\Delta\Theta + \Delta\Theta \quad \Delta\delta\Theta = \int_o^{t_o} \int_D f\ (\delta\dot{\Theta} - \Delta\delta\Theta). \tag{3.4}$$

Der zweite und dritte Term der obigen Gleichung wird mit Hilfe des Integralsystems von Gauss-Green (vgl. z.B. [14])

$$\int_o^{t_o} \int_D \nabla\dot{\Theta} \cdot \nabla\delta\Theta + \int_o^{t_o} \int_D \nabla\delta\dot{\Theta} \cdot \nabla\Theta \tag{3.5}$$

umgeformt. Hier wurde die homogene Randbedingung eingesetzt. (3.5) schreiben wir zu

$$\int_D \int_o^{t_o} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\Theta \cdot \nabla\delta\Theta)dt = \int_D \nabla\Theta(x,t_o) \cdot \nabla\delta\Theta(x,t_o) - \nabla\Theta_o \cdot \nabla\delta\Theta(x,o). \tag{3.6}$$

Es folgt aus (3.4) mit (3.6) und $\underset{\sim}{h} = \nabla\Theta_o$

$$\int_o^{t_o} \int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \int_o^{t_o} \int_D \Delta\Theta\delta\Delta\Theta + \int_D \nabla\Theta(x,t_o) \cdot \delta\nabla\Theta(x,t_o) - \int_o^{t_o} \int_D f\ (\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta)$$

$$- \int_D \underset{\sim}{h} \cdot \delta\nabla\Theta(x,o) = 0. \tag{3.7}$$

Es ist nun einfach zu zeigen, daß die Variationsgleichung (3.7) dem Funktional

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_o^{t_o}\int_D |\dot{\Theta}|^2 + \frac{1}{2}\int_o^{t_o}\int_D |\Delta\Theta|^2 + \frac{1}{2}\int_D |\nabla\Theta|^2_{t_o}$$

$$- \int_o^{t_o}\int_D f(\dot{\Theta} - \Delta\Theta) - \int_D \underset{\sim}{h}\cdot\nabla\Theta(x,o) \qquad (3.8)$$

entspricht.

Wir gehen nun den umgekehrten Weg und variieren (3.8)

$$\delta\Phi = \int_o^{t_o}\int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \int_o^{t_o}\int_D \Delta\Theta\delta\Delta\Theta + \int_D \nabla\Theta\cdot\delta\nabla\Theta\Big|_{t_o}$$

$$- \int_o^{t_o}\int_D f(\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta) - \int_D \underset{\sim}{h}\cdot\delta\nabla\Theta(x,0). \qquad (3.9)$$

Wir addieren nun das Integral $\int_o^{t_o}\int_D \Delta\Theta\delta\dot{\Theta}$ zu (3.9)

$$\delta\Phi = \int_o^{t_o}\int_D (\dot{\Theta} - \Delta\Theta)\delta\dot{\Theta} - \int_o^{t_o}\int_D f\cdot(\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta) + \int_o^{t_o}\int_D \Delta\Theta\delta\Delta\Theta$$

$$+ \int_o^{t_o}\int_D \Delta\Theta\delta\dot{\Theta} + \int_D \nabla\Theta\cdot\delta\nabla\Theta\,\Big|_{t_o} - \int_D \underset{\sim}{h}\cdot\delta\nabla\Theta(x,o). \qquad (3.10)$$

Das 4. Integral von (3.10) wird mit Hilfe des Satzes von Gauss-Green unter Beachtung der Randbedingungen zu

$$- \int_o^{t_o}\int_D \nabla\Theta\cdot\delta\nabla\dot{\Theta} \qquad (3.11)$$

umgeformt.

Wir integrieren (3.11) partiell nach der Zeit

$$- \int_D \nabla\Theta \cdot \delta\nabla\Theta \Big|_o^{t_o} + \int_o^{t_o} \int_D \nabla\dot{\Theta} \cdot \delta\nabla\Theta \tag{3.12}$$

Hierauf wenden wir den Gauss-Green'schen Integralsatz an, so daß schließlich gilt

$$- \int_o^{t_o} \int_D \nabla\Theta \cdot \delta\nabla\dot{\Theta} = - \int_D \nabla\Theta \cdot \delta\nabla\Theta \Big|_o^{t_o} - \int_o^{t_o} \int_D \dot{\Theta}\delta\Delta\Theta. \tag{3.13}$$

Wir setzen (3.13) in (3.10) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \delta\Phi = \int_o^{t_o} \int_D (\dot{\Theta} - \Delta\Theta - f)(\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta) \\ + \int_D \nabla\Theta(o) \cdot \delta\nabla\Theta(o) - \int_D \underset{\sim}{h} \cdot \delta\nabla\Theta(o). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Aus (3.14) folgen die Euler'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} - \Delta\Theta &= f \quad \text{in } D \\ \nabla\Theta(o) &= \underset{\sim}{h}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Schließlich betrachten wir die Neumann'schen Randbedingungen

$$- \nabla\Theta \cdot \underset{\sim}{n} = q^* \quad \text{auf} \quad \partial D. \tag{3.16}$$

Das entsprechende Funktional lautet:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_D |\dot{\Theta}|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_D |\Delta\Theta|^2 + \frac{1}{2} \int_D |\nabla\Theta(x,t_0)|^2$$

$$- \int_D \underset{\sim}{h} \cdot \nabla\Theta(x,o) - \int_0^{t_0} \int_D f_{\sim}(\dot{\Theta} - \Delta\Theta) + \int_0^{t_0} \int_{\partial D} q^* \dot{\Theta}. \tag{3.17}$$

Wir variieren (3.17)

$$\delta\Phi = \int_0^{t_0} \int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \int_0^{t_0} \int_D \Delta\Theta\delta\Delta\Theta + \int_D \nabla\Theta(x,t_0) \cdot \delta\nabla\Theta(x,t_0)$$

$$- \int_D \underset{\sim}{h} \cdot \delta\nabla\Theta(o) - \int_0^{t_0} \int_D f_{\sim}(\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta) + \int_0^{t_0} \int_{\partial D} q^* \delta\dot{\Theta}. \tag{3.18}$$

Wir addieren $\int_0^{t_0} \int_D \Delta\Theta\delta\dot{\Theta}$ zu (3.18) und verfahren wie bei den Dirichlet'schen Randbedingungen, erhalten jedoch im Vergleich zu (3.13)

$$\int_0^{t_0} \int_D \Delta\Theta\delta\dot{\Theta} = - \int_D \nabla\Theta \cdot \delta\nabla\Theta \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \int_D \dot{\Theta}\delta\Delta\Theta + \int_0^{t_0} \int_{\partial D} \nabla\Theta \cdot \underset{\sim}{n} \delta\dot{\Theta}. \tag{3.19}$$

Somit ergibt (3.18) mit (3.19)

$$\delta\Phi = \int_o^{t_o} \int_D (\dot\Theta - \Delta\Theta - f)(\delta\dot\Theta - \delta\Delta\Theta) + \int_D \nabla\Theta(0) \cdot \delta\nabla\Theta(o)$$

$$- \int_D \underset{\sim}{h} . \delta\nabla\Theta(o) + \int_o^{t_o} \int_{\partial D} \nabla\Theta \cdot \underset{\sim}{n} \delta\dot\Theta + \int_o^{t_o} \int_{\partial D} q^* \delta\dot\Theta. \tag{3.20}$$

Es folgen die Euler'schen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \dot\Theta - \Delta\Theta & = f \\ \nabla\Theta(o) & = \underset{\sim}{h} \end{array}\right\} \text{in } D \qquad -\nabla\Theta \cdot \underset{\sim}{n} = q^* \quad \text{auf } \partial D. \tag{3.21}$$

Wir bestätigen die Richtigkeit unseres Variationsprinzipes auf eine zweite Art, indem wir das Funktional Φ für die Dirichlet'schen Randbedingungen wie folgt ermitteln. Wir multiplizieren die Glg. (3.1) mit $\delta\dot\Theta$ und integrieren. Wir erhalten

$$\int_o^{t_o} \int_D \dot\Theta\delta\dot\Theta - \Delta\Theta\delta\dot\Theta = \int_o^{t_o} \int_D f\delta\dot\Theta . \tag{3.22}$$

Wir wenden den Gauß-Green'schen Satz auf den 2. Term an und beachten die homogene Randbedingung

$$\int_o^{t_o} \int_D \dot\Theta\delta\dot\Theta + \nabla\Theta . \delta\nabla\dot\Theta = \int_o^{t_o} \int_D f\, \delta\dot\Theta . \tag{3.23}$$

Wir schreiben anders

$$\int_o^{t_o}\int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Theta\cdot\delta\nabla\Theta) - \nabla\dot{\Theta}\,\delta\nabla\Theta = \int_o^{t_o}\int_D f\delta\dot{\Theta}. \tag{3.24}$$

Es folgt

$$\int_o^{t_o}\int_D \dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} - \nabla\dot{\Theta}\cdot\delta\nabla\Theta + \int_D \nabla\Theta(t_o)\cdot\delta\nabla\Theta(t_o) - $$

$$- \nabla\Theta_o\cdot\delta\nabla\Theta(o) = \int_o^{t_o}\int_D f\delta\dot{\Theta}. \tag{3.25}$$

Der 2. Term wird mit Hilfe des Gauss-Green'schen Satzes umgeformt. Es folgt

$$\int_o^{t_o}\int_D \left[\dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \dot{\Theta}\delta\Delta\Theta\right] + \int_D \left[\nabla\Theta(t_o)\cdot\delta\nabla\Theta(t_o) - \underset{\sim}{h}\cdot\delta\nabla\Theta(o)\right]$$

$$= \int_o^{t_o}\int_D f\,\delta\dot{\Theta}. \tag{3.26}$$

Gemäß (3.1) gilt $\dot{\Theta} = \Delta\Theta + f$. Wir setzen diese Beziehung in (3.26) ein.

$$\int_o^{t_o}\int_D \left[\dot{\Theta}\delta\dot{\Theta} + \Delta\Theta\delta\Delta\Theta\right] + \int_D \left[\nabla\Theta(t_o)\cdot\delta\nabla\Theta(t_o) - \underset{\sim}{h}\cdot\delta\nabla\Theta(o)\right]$$

$$- \int_o^{t_o}\int_D f\,(\delta\dot{\Theta} - \delta\Delta\Theta) = 0. \tag{3.27}$$

Dies stimmt aber mit (3.7) überein. Es folgt also (3.8).

Die numerische Anwendung dieses Extremal-Variationsprinzips wird von B. Kaempf durchgeführt, der zu diesem Zweck ein F.E.M.-Programm entwickelt hat.

3.1. Das aktuelle Stadium der Entwicklung der Variationsrechnung in der Plastizitätstheorie

Die ersten Variationsprinzipe der Plastizitätstheorie gehen zurück auf Hodge & Prager [1], [2] (für den plastischen Fluß mit Verfestigung) und Greenberg [2] (für Ideale-Plastizität). Diese Variationsprinzipe wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der aktuelle Spannungszustand $\sigma(t)$ bekannt ist und nur die Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\sigma}(t)$ bzw. $\dot{\varepsilon}(t)$ zu bestimmen sind. Die Variationsprinzipe von Hodge & Prager verlangen neben dem Spannungszustand auch bestimme Informationen über die Belastung - Entlastung Zonen. Dadurch wird das Problem linear in Spannungs- bzw. Deformationsgeschwindigkeit und die Methoden der linearen Elastizitätstheorie sind anwendbar. Die numerischen Verfahren für den plastischen Fluß mit Verfestigung gründen sich noch heute auf solche zusätzlichen Informationen über Belastung-Entlastung Zonen (vgl. [4]).

Hill [5] ist der erste, der auf die jeweiligen zusätzlichen Bedingungen über die Belastung-Entlastung Zonen verzichtet hat. Er zeigt, daß die Spannungsgeschwindigkeit an jedem Moment ein bestimmtes nichtquadratisches Funktional minimiert, welches von dem aktuellen Spannungszustand abhängt. Weil die numerische Lösung eines nichtquadratischen Funktionals, neben der unter Begrenzung des Funktionals, einige zusätzliche Eigenschaften verlangt (Konvexität, Differentiabilität), die Hill in seinem Variationsprinzip nicht betrachtet hat, ist es noch nicht praktisch angewendet worden.

Es ist zu bemerken, daß diese oben erwähnten Variationsvorgänge zu keinen globalen Extremal-Variationsprinzipen führen. Koiter [6] betrachtet das sogar als unmöglich:

"Since the curent stress destribution in a elastic-plastic solid depends on its loading history it can hardly cause surprise that no general minimum principles should exist for the current stresses or total strains."

Das erste globale Variationsprinzip betrachtet die Ideal-Plastizität und wurde von Moreau [7], Duvaut & Lions [8] durchgeführt. Die Konvexität des Funktionals des Prinzipes und dadurch die Existenz, die Eindeutigkeit und die Stabilität der Lösung wird bewiesen von den Autoren selbst. Die numerische Anwendung wurde von Nguyen [9] und Weichert [10] durchgeführt. Nguyen [11] hat dieses Prinzip auch zu einer besonderen Klasse der plastischen Materialien mit Verfestigung ausgedehnt.

Diese Variationsprinzipe gründen sich auf die Theorie der konvexen Analysis, die von der französischen Schule entwickelt wird. Im folgenden begründen wir äquivalente Variationsprinzipe auf dem klassischen Prinzip der virtuellen Arbeit.

Es sei $f(s) = k^2$ die Fließ-Grenze im Deviator-Spannungsraum $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$. Wir bezeichnen mit K das geschlossene Gebiet $f(s) \le k^2$ und mit $\Sigma(K,\Omega)$ die Menge der Spannungsgeschichten $\sigma(x,t) \in K$, für $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$ so daß für alle $t \in [0,T]$, $\sigma(\cdot,t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega)$, $\dot{\sigma}(\cdot,t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega)$ und für alle $x \in \Omega$, $\sigma(x,\cdot)$ stetig und $\dot{\sigma}(x,\cdot)$ stückweise stetig in $t \in [0,T]$ sind.

Elasto-idealplastische Randwertaufgabe

Es seien gegeben die Funktionen $F: \Omega \times [0,T] \to R^3$, $h^o: \partial_1\Omega \to R^3$, $u^o: \partial_2\Omega \to R^3$, wobei $\partial_1\Omega + \partial_2\Omega = \partial\Omega$ $(\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset)$ den Rand des Gebietes Ω bezeichnet. Zu bestimmen sind die Vektor- und Tensorfelder $u: \Omega \times [0,T] \to R^3$, $u(\cdot,t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega)$, $\varepsilon: \Omega \times [0,T] \to R^{3\times 3}_{sym}$, $\varepsilon(\cdot,t) \notin C^1(\Omega)$, und $\sigma \in \Sigma(K,\Omega)$ die die folgenden Gleichungen und Randwertaufgabe

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} A^{hk}_{ij}\,\dot{\sigma}_{hk} + \lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} & f = k^2,\ \dot{f} = 0 \\[2ex] A^{hk}_{ij}\,\dot{\sigma}_{hk} & f \le k^2 \text{ oder } f = k^2,\ \dot{f} < 0 \end{cases}$$

mit A^{hk}_{ij} die Komponenten eines konstanten Tensors,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i &= 0, \\ \sigma_{ij} n_j \big|_{\partial_1 \Omega} &= h_i^o \\ u_i \big|_{\partial_2 \Omega} &= u_i^o. \end{aligned}$$

erfüllen. Es sei σ die Lösung der elasto-idealplastischen Randwertaufgabe und $\sigma^* \in \Sigma(K,\Omega)$ die statisch zulässige Spannungsgeschichte

$$\sigma^*_{ij,j} + F_i = 0, \quad \sigma^*_{ij} n_j \big|_{\partial_1 \Omega} = h_i^o.$$

Auf dem Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit erhält man

$$\int_\Omega [A_{ij}^{hk} \dot\sigma_{hk} (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma) \, (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij})] dv =$$

$$= \int_\Omega \dot u_i^o (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) n_j \, dv. \tag{1.1}$$

Nimmt man an, daß f eine konvexe Funktion ist, dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma) \, (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) \le f(\sigma^*) - f(\sigma) \tag{1.2}$$

Berücksichtigt man (1.2) in (1.1) und daß für $\sigma^* \in \Sigma(K,\Omega)$ $\lambda(f(\sigma^*) - f(\sigma)) \le 0$, dann folgt

$$\phi(\sigma^*, \sigma) = \int_o^T \int_\Omega [A_{ij}^{hk} \dot\sigma_{hk} \, (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) \, dv \, dt$$

$$- \int_o^T \int_{\partial_2 \Omega} \dot u_i^o (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) \, dv \, dt \ge 0 \tag{1.3}$$

für alle $\sigma^* \in \Sigma(K,\Omega)$ statisch zulässig

$(\sigma^*_{ij,j} + F_i = 0,\ \sigma^*_{ij} n_j |_{\partial_1\Omega} = h^o)$. Es ist einfach zu beweisen, daß dieses nur für die Lösung σ der elasto-ideal-plastischen Randwertaufgabe gilt. Wir liefern eine Widerspruchsbeweisführung dieser Tatsache.

Es sei $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ für das

$$\phi(\sigma^*,\tilde{\sigma}) \geq 0,$$

dann gelten die beiden Ungleichungen

$$\phi(\tilde{\sigma},\sigma) \geq 0$$

und

$$\phi(\sigma,\tilde{\sigma}) \geq 0$$

zusammen. Es folgt

$$-\phi(\tilde{\sigma},\sigma) - \phi(\sigma,\tilde{\sigma}) =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega A^{hk}_{ij} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\tilde{\sigma}}_{ij})(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})\, dv\, dt \leq 0$$

daß $\sigma = \tilde{\sigma}$. Es folgt auch, daß für $\tilde{\sigma} \neq \sigma$

$$\min_{\sigma^* \in \Sigma(K,\Omega)} \phi(\sigma^*,\tilde{\sigma}) \leq 0.$$

Das führt zu dem folgenden Extremal-Variationsprinzip.

Die Spannungsgeschichte, Lösung der elastoidealplastischen Randwertaufgabe ist auch die Lösung des Extremalproblems

$$\max_{\sigma} \ \min_{\sigma^*} \ \phi(\sigma^*,\sigma), \ \sigma, \ \sigma^* \in \Sigma(K,\Omega).$$

Die Skalarfunktion λ wird aus den Kompatibilitätsgleichungen der Deformationen

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{ij} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

bestimmt. Es ist bekannt, daß die Kompatibilitätsgleichungen mit den Orthogonalitäts-Bedingungen

$$\int_{\Omega} (A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}) \sigma_{ij}^* \, dv = 0 \qquad (1.4)$$

für alle $\sigma^* \in C^1(\Omega) \cap C^o(\Omega + \partial\Omega)$, $\sigma^*_{ij,j} = 0$, und $\sigma^* = 0$ außerhalb eines Untergebietes G, $G + \partial G \subset \Omega$ äquivalent ist. Es sei Ω^e und Ω^p, $\Omega^e + \Omega^p = \Omega$ die elastische bzw. plastische Zone, die für den Spannungszustand σ Lösung der elasto-idealplastischen Aufgabe ist. Insbesondere muß (1.4) von allen Spannungen σ^* erfüllt sein, die sich im statischen Gleichgewicht befinden ($\sigma^*_{ij,j} = 0$) und in $\Omega^e - G^e$ und $\Omega^p - G^p$, wobei $G^e + \partial G^e \subset \Omega^e$ bzw. $G^p + \partial G^p \subset \Omega^p$, Null sind, d.h.

$$\int_{\Omega^e} A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk} \sigma^*_{ij} \, dv + \int_{\Omega^p} (A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}) \sigma^*_{ij} \, dv = 0. \qquad (1.5)$$

Betrachtet man (1.3), dann ist es einfach zu beweisen, daß

$$\int_{\Omega^e} A_{ij}^{hk}\, \dot{\sigma}_{hk}\, \sigma^*_{ij}\, dv = 0$$

gilt. Es bleibt nun

$$\int_{\Omega^p} (A_{ij}^{hk}\, \dot{\sigma}_{hk} + \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}})\sigma^*_{ij}\, dv = 0 \tag{1.6}$$

zu erfüllen.

Wir spalten überall in Ω^p

$$\sigma^*_{ij} = \mu\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^*_{\tau ij}$$

wobei μ: $\Omega^p \to R$ ein bestimmtes Skalarfeld ist. Wir bezeichnen mit $M(\Omega^p)$ die Menge dieses Skalarfeldes μ, die zu allen zulässigen Spannungstensoren σ^* ($\sigma^*_{ij,j} = 0$, $\sigma^* \equiv 0$ auf $\Omega^p - G^p$, $G^p + \partial G^p$. Weil $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, \sigma^*_{\tau ij} = 0$, reduziert sich (1.5) zu

$$\int_{\Omega^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, \lambda\, \mu\, dv + \int_{\Omega^p} A_{ij}^{hk}\, \dot{\sigma}_{hk}(\mu\, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^*_{\tau ij})\, dv = 0 .$$

Wir bezeichnen

$$F(\mu) = \int_{\Omega^p} A_{ij}^{hk}\, \dot{\sigma}_{hk}\, (\mu\, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^*_{\tau ij})\, dv$$

und beweisen, daß $F(\mu)$ ein eindeutiges Funktional von μ ist. Es seien zwei Spannungen σ^* und σ^{**} beide statisch zulässig $\sigma^*_{ij,j} + F_i = 0$, $\sigma^{**}_{ij,j} + F_i = 0$, und $\sigma^*_{ij} \equiv \sigma^{**}_{ij} \equiv \sigma_{ij}$

außerhalb eines Untergebietes $G(G + \partial G \subset \Omega)$, so daß

$$\sigma^*_{ij} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^*_{\tau ij}, \quad \text{mit } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma)\, \sigma^*_{\tau ij} = 0$$

$$\sigma^{**}_{ij} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^{**}_{\tau ij}, \quad \text{mit } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma)\, \sigma^{**}_{\tau ij} = 0$$

Schreibt man (1.1) für $\sigma + (\sigma^{**} - \sigma^*)$ und σ folgt

$$0 = \int_{\Omega^p} [A^{hk}_{ij}\, \dot{\sigma}_{ij}\, (\sigma^{**}_{ij} - \sigma^*_{ij}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma^{**}_{ij} - \sigma^*_{ij})]\, dv =$$

$$= \int_{\Omega^p} [A^{hk}_{ij}\, \dot{\sigma}_{ij}\, (\sigma^{**}_{\tau ij} - \sigma^*_{\tau ij}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma^{**}_{\tau ij} - \sigma^*_{\tau ij})]\, dv$$

$$= \int_{\Omega^p} A^{hk}_{ij}\, \dot{\sigma}_{ij}\, (\sigma^{**}_{\tau ij} - \sigma^*_{\tau ij})\, dv.$$

Wir finden

$$\int_{\Omega^p} A^{hk}_{ij}\, \dot{\sigma}_{hk}\, (\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^*_{\tau ij})\, dv =$$

$$= \int_{\Omega^p} A^{hk}_{ij}\, \dot{\sigma}_{hk}\, (\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma^{**}_{\tau ij})\, dv = F(\mu),$$

was zu beweisen war.

Man erhält für die Bestimmung der λ die Funktionalgleichung

$$\int_{\Omega^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda\, \mu\, dv + F(\mu) = 0 \qquad (1.6')$$

für alle Skalarfelder $\mu \in M(\Omega^p)$.

Anmerkung: Betrachtet man den Banachraum

$$B(\Omega^p) = \{\mu : \Omega^p \rightarrow R \mid \|\mu\| = (\int_{\Omega^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mu^2 \, dv)^{1/2} < +\infty\},$$

dann nimmt (1.6) eine eindeutige Lösung genau dann an, wenn $M(\Omega^p)$ vollständig in $B(\Omega^p)$ ist. Der einfachste Fall eines 1-dimensionalen Deformationsprozesses zeigt z.B., daß μ = konstant nicht zu $M(\Omega^p)$ gehört. Es gibt die Meinung (vgl. Matthies [12]), daß die Nichteindeutigkeit die äußerste Idealisierung der Realität zeigt, die von der Ideal -Plastizität impliziert wird. Wir bemerken, daß diese Idealisierung nicht das konstitutive Gesetz betrifft. Der ideal-plastische Fluß ist ein Phänomen dafür, daß das quasistatische Modell und die Formulierung der Randbedingungen wie in der Mechanik der starren Körper ungeeignet sind.

Wir schlagen eine andere Form dieses Variationsprinzips vor.

Es sei zu bestimmen in der Klasse der Spannungsgeschichten $\sigma(x,t) \in \Sigma(K,\Omega)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$ statisch zulässig ($\sigma_{ij,j} + F_i = 0$, $\sigma_{ij} n_j|_{\partial_1\Omega} = h_i^o$) Lösung des extremalen Problems.

$$\phi(\dot{\sigma}) = \min_{\dot{\sigma}} \{\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk} \dot{\sigma}_{ij} \, dv \, dt -$$

$$- \int_0^T \int_{\partial_2\Omega} \dot{u}_i^o \dot{\sigma}_{ij} n_j \, ds \, dt\}.$$

Wir beweisen, daß die Lösung $\sigma(x,t)$ dieses Extremalproblems gleich der Spannungen der elasto-idealplastischen Randwertaufgabe ist. Es genügt zu beweisen, daß es ein Skalar-Feld $\lambda: \Omega \times [0,T] \to R^+$ gibt, so daß

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

und daß $\lambda \equiv 0$ im Untergebiet $\Omega^e \subset \Omega$, wo $f(\sigma) < k^2$ ist.

Es sei $\sigma^*(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$ die sich immer im Gleichgewicht ($\sigma^*_{ij,j} = 0$) befinden und Null außerhalb von $G(G + \partial G \subset \Omega)$ sind. Wir nehmen an, daß σ^* hinreichende glatte Felder sind und für $x \in \Omega^p$ spalten wir ihre Zeitableitung

$$\dot{\sigma}^*_{ij}(x,t) = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma(x,t)) + \dot{\sigma}^*_{\tau ij}(x,t) \qquad (1.7)$$

mit $\dot{\sigma}^*_{\tau ij}$, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma(x,t)) \, \dot{\sigma}^*_{\tau ij}(x,t) = 0.$$

Die Menge der Skalarfelder $\mu: \Omega \times [0,T] \to R$ wird bezeichnet durch

$$M(\Omega \times [0,T]).$$

Die Kompatibilitätsbedingungen führen dann zu der Funktionalgleichung

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda \mu \, dv \, dt + \int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\sigma}^*_{\tau ij}\right) dv \, dt = 0 \tag{1.8}$$

Wir beweisen, daß das zweite Integral

$$F(\mu) = \int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\sigma}^*_{\tau ij}\right) dv \tag{1.9}$$

ein lineares Funktional von μ bildet.

Es genügt zu zeigen, daß $F(\mu)$ eindeutig definiert ist. Es sei $\sigma^{**} \neq \sigma^*$, so daß für $x \in \Omega^p$

$$\dot{\sigma}^{**}_{ij}(x,t) = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma(x,t)) + \sigma^{**}_{\tau ij}$$

mit demselben μ wie in (1.7) gilt.

Weil sich das Spannungsfeld $\sigma^{**} - \sigma^*$ in Gleichgewicht befindet ($\sigma^{**}_{ij,j} - \sigma^*_{ij,j} = 0$) und außerhalb von $G(G + \partial G \subset \Omega)$ ist Null $\sigma + (\sigma^{**} - \sigma^*) \in \Sigma(K,\Omega)$ und ist statisch zulässig. Berechnet man das Funktional $\phi(\dot{\sigma})$ für $\dot{\sigma} + (\dot{\sigma}^{**} - \dot{\sigma}^*)$ und berücksichtigt man daß $\phi(\sigma)$ sein Minimum genau für $\dot{\sigma}$ erreicht, erhält man

$$\int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk} \, \dot{\sigma}_{hk} (\dot{\sigma}_{ij}^{**} - \dot{\sigma}_{ij}^{*}) \, dv \, dt = 0$$

was zu beweisen war. Aus (1.8) und (1.9) folgt dann, daß λ die Lösung der Funktionalgleichung

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda \mu \, dv \, dt + F(\mu) = 0, \tag{1.8'}$$

wobei $\mu \in M(\Omega \times [0,T])$ ist.

Schreibt man (1.7) für die Spannungsgeschichten, die außerhalb von $G^e (G^e + \partial G^e \subset \Omega^e)$ Null sind und berücksichtigt man, daß auf Grund des Variationsprinzips

$$\int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk} \, \dot{\sigma}_{hk} \, \dot{\sigma}_{ij}^{*} \, dv \, dt = \int_0^T \int_{\Omega^e} A_{ij}^{hk} \, \dot{\sigma}_{hk} \, \dot{\sigma}_{ij}^{*} \, dv \, dt = 0$$

gilt, so folgt, daß man in Ω^e immer

$$\lambda = 0$$

annehmen kann.

Wir bemerken wieder, daß im allgemeinen Fall $M(\Omega \times [0,T])$ keine vollständige Menge von Funktionen bildet und der oben erwähnte Kommentar über die Eindeutigkeit der Lösung der Funktionalgleichung (1.8') auch gilt.

Das Problem der Bestimmung der Verzerrungen in einem ideal plastischen Körper würde in jungster Zeit von

Nayroler [13], Johnson [14] und Suquet [15] betrachtet. Sie beweisen die Existenz eines Verschiebungsfeldes, das zusammen mit dem Spannungsfeld eine schwache Formel der elasto-ideal plastischen Randwertaufgabe erfüllt. Die Beweisführung gründet sich auf einigen nicht-konstruktiven Verfahren der schwachen Kompaktheit in normierten Räumen. Bis jetzt fehlt jede direkte und konstruktive Methode, um die Verzerrungen in einem elasto-ideal plastischen Körper zu bestimmen. Der Grund besteht in dem Fehlen einer entsprechenden Gleichung für den Skalar-Parameter λ . Die Funktionalgleichung (1.6') oder (1.8') (grundlegend sind beide gleich) gleicht diesen Mangel aus.

Es gibt eine besondere Klasse von plastischen Materialien mit Verfestigung, für die das Prinzip der virtuellen Arbeit noch zu einem Extremal-Variationsprinzip führt. Das betrifft die Materialien, die von dem konstitutiven Gesetz

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk}\,\dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{2}\,g(f)\,\left(1 + \frac{\dot{f}}{|\dot{f}|}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{f}, \tag{1.10}$$

mit $f(\sigma) \geq k^2$ beschrieben werden. Bezeichnet man

$$\varphi = \sqrt{G(f)}$$

wobei

$$G(f) = \int_o^f g(f)\, df$$

dann reduziert (1.9) sich zu

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk}\, \dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}\, \dot{\varphi} \tag{1.11}$$

mit der neuen Fließ-Grenze

$$\varphi(\sigma) = k^2 = \sqrt{G(k^2)}$$

Wir betrachten das folgende Problem:

Elasto-plastische Randwertaufgabe:

Es sei zu bestimmen im Gebiet Ω, mit dem Rand $\partial\Omega$,
$u \in C^1(\Omega \times [0,T]) \cap C^o(\Omega + \partial\Omega \times [0,T])$, $\varepsilon \in C^1(\Omega \times [0,T])$
und $\sigma \in C'(\Omega \times [0,T]) \cap C^o(\Omega + \partial\Omega \times [0,T])$, so daß

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk}\,\dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi}{|\varphi|}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\varphi}, \quad \text{für } \varphi \geq k^2$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{hk}\,\dot{\sigma}_{hk} \qquad\qquad \text{für } \varphi < k^2$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0,$$
$$\sigma_{ij}n_j\big|_{\partial_1\Omega} = h_i^o,$$
$$u_i\big|_{\partial_2\Omega} = u_i^o,$$

wobei $\partial_1\Omega + \partial_2\Omega = \partial\Omega$ und $F: \Omega \to R^3$, $h : \partial_1\Omega \to R^3$, $u^o: \partial_2\Omega \to R^3$ gegebene Funktionen bezeichnen.

Es sei σ die Lösung der elasto-plastischen Randwertaufgabe. Auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit der zusätzlichen Kräfte folgt

$$\int_0^T \int_\Omega A_{ij}^{hk}\,\dot{\sigma}_{hk}(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi}{|\varphi|}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\varphi}(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\,dv\,dt$$

$$= \int_0^T \int_{\partial_2\Omega} u_i^o(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\,n_j\,ds \qquad (1.12)$$

für alle zulässigen Spannungszustände σ^*, $\sigma_{ij,j}^* + F_i = 0$, $\sigma_{ij}^*\,n_j\big|_{\partial_1\Omega} = h_i^o$. Im Folgenden bezeichnen wir durch $Z(\Omega,F,h^o)$ die Menge dieser zulässigen Spannungszustände und durch K die Menge $K = \{(\sigma,\varphi)\,|\,\sigma \in Z(\Omega,F,h^o),\ \varphi = \varphi(\sigma)\}$.

Nehmen wir die Konvexität von φ an, d.h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\,(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \leq \varphi(\sigma^*) - \varphi(\sigma),$$

dann folgt aus (1.12) die Ungleichung

$$\phi(\sigma^*,\varphi^*,\sigma,\varphi) = \int_0^T \int_\Omega [A_{ij}^{hk}\,\dot\sigma_{hk}(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) + \dot\varphi(\varphi^* - \varphi)]\,dv\,dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial_2\Omega} u_e^o(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})n_j\,ds\,t \geq 0 \qquad (1.13)$$

für alle $(\sigma^*,\varphi^*) \in K$. Diese Ungleichung ist gleichartig der Nguyenschen Ungleichung. Sie führt zu folgendem Variationsprinzip:

Die Lösung σ der elasto-plastischen Randwertaufgabe ist auch die Lösung des folgenden Extremalproblems:

$$\underset{(\sigma,\varphi)\in K}{\mathrm{Max}} \quad \underset{(\sigma^*,\varphi^*)\in K}{\mathrm{Min}} \quad \phi(\sigma^*,\varphi^*,\sigma,\varphi)$$

Wir bemerken zuerst, daß es für die jeweiligen $(\tilde\sigma,\tilde\varphi) \in K$, $(\tilde\sigma,\tilde\varphi) \neq (\sigma,\varphi)$ wenigstens ein Paar $(\sigma^*,\varphi^*) \in K$ gibt, so daß

$$\phi(\sigma^*,\varphi^*,\sigma,\varphi) < 0.$$

Wir geben eine Widerspruchsbeweisführung. Es sei $(\tilde\sigma,\tilde\varphi) \neq (\sigma,\varphi)$, so daß

$$\phi(\sigma^*,\varphi^*,\tilde\sigma,\tilde\varphi) \geq 0$$

für alle $(\sigma^*,\varphi^*) \in K$. Schreibt man

$$\phi(\tilde\sigma,\tilde\varphi,\sigma,\varphi) \geq 0,$$

und

$$\phi(\sigma,\varphi,\tilde{\sigma},\tilde{\varphi}) \geq 0$$

dann folgt

$$\phi(\sigma,\varphi,\tilde{\sigma},\tilde{\varphi}) - \phi(\tilde{\sigma},\tilde{\varphi},\sigma,\varphi) =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega [A_{ij}^{hk}(\dot{\sigma}_{hk} - \dot{\tilde{\sigma}}_{hk})(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) + (\dot{\varphi} - \dot{\tilde{\varphi}})(\varphi - \tilde{\varphi})] \, dv \, dt \leq 0. \tag{1.14}$$

Weil A eine positive definite Matrix ist, folgt $\sigma = \tilde{\sigma}$ und $\varphi = \tilde{\varphi}$, was den Satz beweist.

Aus diesem Satz folgt

$$\min_{(\sigma^*,\varphi^*)\in K} \phi(\sigma^*,\varphi^*,\tilde{\sigma},\tilde{\varphi}) < 0$$

für alle $(\tilde{\sigma},\tilde{\varphi}) \neq (\sigma,\varphi)$. Auf Grund der Ungleichung (1.13) folgt aber

$$\min_{(\sigma^*,\varphi^*)\in K} \phi(\sigma^*,\varphi^*,\sigma,\varphi) \geq 0.$$

Demzufolge erreicht das Funktional

$$\min_{(\sigma^*,\varphi^*)\in K} \phi(\sigma^*,\varphi^*,\sigma,\varphi)$$

sein Maximum genau für die Lösung der elasto-plastischen Randwertaufgabe. Dadurch wird das Theorem bewiesen.

Anmerkung: Dieses Theorem liefert uns ein Extremal-Variationsprinzip im Eulerischen Sinn. Die praktische Anwendung führt aber zu komplizierteren Verfahren.

In den folgenden Abschnitten erforschen wie die Möglichkeit, eine Art der Variationsprinzipe zu entwickeln, die für numerische Lösungen angebrachter ist. Wir beschränken uns auf das konstitutive Gesetz für die plastische Formänderungen

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = g(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} \dot{\sigma}_{hk} \tag{1.15}$$

Dieser Ausdruck der plastischen Formänderungen war zuerst von Drucker betrachtet (vgl. [18]) worden. Interessant ist zu bemerken (vgl. [19]), daß es die allgemeine Form eines konstitutiven Gesetzes $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = C^{hk}_{ij}(\sigma)\,\dot{\sigma}_{hk}$ ist, welches die folgende Postulate erfüllt.

1. Die gesamte plastische Arbeit hängt nur vom End-Spannungszustand ab:

$$L = \int_{\widehat{O\sigma}} \sigma\, \dot{\varepsilon}^{p} d\sigma = f(\sigma)$$

ab.

2. Die Monotonie-Bedingung

$$\Delta\sigma\ \Delta\varepsilon \geq 0$$

gilt für hinreichende kleine Spannungsinkremente.

3. Ohne plastische Leistungen sind keine plastischen Deformationen möglich.

Bemerkenswert für das konstitutive Gesetz (1.15) ist die Symmetrie bezüglich der Indizes $(i,j) \leftrightarrow (h,k)$. Diese erweist sich weiter als sehr nützlich in der Variationsrechnung.

3.2. Variationsprinzipe für die Spannungsgeschwindigkeit

3.2.1. Die klassische Formulierung des Randwertproblems

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im dreidimensionalen Euklidischen Raum, und es sei $\partial\Omega$ sein Rand. Bezeichnet man mit:

A_{ij}^{kl} - die Komponenten eines konstanten Tensors (Hookesche Tensor) $A_{ij}^{kh} = A_{ij}^{lk} = A_{lk}^{ij}$,

$h(\sigma)$ - eine hinreichend glatte Funktion des Spannungstensors $\sigma(\sigma \in R^{3\times 3}, \sigma = \sigma^T)$,

$\phi(\sigma)$ - die Fließgrenze im Spannungsraum

dann lautet die klassische mathematische Aufgabe der quasistatischen plastischen Prozesse:

Es seien zu bestimmen die Vektor- und Tensorfelder $(\underset{\sim}{u},\varepsilon,\sigma)$

$\underset{\sim}{u}: \Omega \times [0,T] \to R^3$, $u \in C^1((\Omega + \partial\Omega) \times [0,T])$, $\nabla u \in C^1(\Omega \times [0,T])$

$\varepsilon: \Omega \times [0,T] \to R^{3\times 3}$, $(\varepsilon = \varepsilon^T)$, $\varepsilon \in C^1(\Omega \times [0,T])$

$\sigma: \Omega \times [0,T] \to R^{3\times 3}$, $(\sigma = \sigma^T)$, $\sigma \in C^1(\Omega \times [0,T]) \cap C^0((\Omega + \partial\Omega) \times [0,T])$

so daß

a) die Kompatibilitäts-Bedingung

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \tag{2.1}$$

b) das konstituitive Gesetz

$$\varepsilon_{ij} = A_{ij}^{kl}\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\right)h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\,\dot{\sigma}_{kl}, \tag{2.2}$$

c) die Gleichgewichtsgleichungen

$$\operatorname{div}\sigma = 0, \tag{2.3}$$

d) die Anfangsbedingungen

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},o) = o, \quad \varepsilon(\underset{\sim}{x},o) = o, \quad \sigma(\underset{\sim}{x},o) = o \tag{2.4}$$

und

e) die Randbedingungen

$$\sigma\underset{\sim}{n}\big|_{\partial_1\Omega} = o, \quad \underset{\sim}{u}\big|_{\partial_2\Omega} = \underset{\sim}{u}_o \tag{2.5}$$

mit $\underset{\sim}{u}_o(\underset{\sim}{x},t)$, $\underset{\sim}{x} \in \partial_2\Omega$ gegebene Funktion, erfüllt sind.

3.2.2. Die funktionale Formulierung des Problems

Bezeichnet man mit Σ den Spannungsraum

$$\Sigma = \{\sigma\colon \Omega \to R^{3\times 3}/\sigma = \sigma^T,\ \sigma \in C^1(\Omega) \cap C^o(\Omega + \partial\Omega),\ \mathrm{div}\,\sigma = 0,\ \sigma\underset{\sim}{n}\big|_{\partial_1\Omega} = 0\}$$

und betrachtet man in Σ das Skalarprodukt

$$\langle\sigma,\tau\rangle = \int_\Omega Sp(\sigma\tau)dV,$$

dann erhält man durch die Vollständigkeit von Σ bezüglich der Norm

$$\|\sigma\| = (\langle\sigma,\sigma\rangle)^{1/2}$$

den Hilbertraum

$$\bar{\Sigma} = \{\sigma\colon \Omega \to R^{3\times 3}/\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - \sigma\| = 0,\ \sigma_n \in \Sigma\}.$$

Wir betrachten das folgende Funktionalproblem:

Es sei $\sigma \in \Sigma$ so zu bestimmen, daß für beliebige $\delta\sigma \in \Sigma$

$$\int_\Omega (A_{ij}^{kl}\sigma_{kl} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|})h(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}dv = \int_{\partial_2\Omega} u_i^o\delta\sigma_{ij}n_j ds \qquad (2.6)$$

gilt für jeden $t \in [0,T]$.
Wir beweisen den folgenden Satz:

<u>Theorem:</u> Das Funktionalproblem und die klassische Formulierung sind äquivalent.

<u>Beweis:</u> Es sei $\underset{\sim}{u}$, ε und σ erfüllen die Gleichungen (2.1-2.3) sowie die Anfangs- und Randbedingungen (2.4-2.5). Multipliziert man die Gleichgewichtsgleichung $\operatorname{div}\delta\sigma = 0$ mit $\underset{\sim}{u}$, dann erhält man durch die Integration über Ω die Identität

$$\int_\Omega \varepsilon\,\delta\,\sigma\, dV = \int_{\partial_2\Omega} \underset{\sim}{u}^o\delta\sigma\underset{\sim}{n}\, ds. \qquad (2.7)$$

Aufgrund des konstitutiven Gesetzes folgt dann (2.6).

Wir beweisen jetzt die umgekehrte Richtung des Theorems.
Es sei $\sigma(x,t)$ mit $\sigma(\cdot,t) \in \Sigma$, $t \in [0,T]$, $\sigma(\underset{\sim}{x},0) = 0$ für welches (2.6) für alle $\delta\sigma \in \Sigma$ gilt.
Wir bezeichnen mit ε das Tensorfeld, das durch

$$\varepsilon_{ij} = A_{ij}^{kl}\sigma_{kl} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|})\, h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl}$$

definiert wird. Aus (2.1) folgt dann

$$\int_\Omega \varepsilon\,\delta\,\sigma\, dv = \int_{\partial_2\Omega} \underset{\sim}{u}^o\delta\sigma\underset{\sim}{n}\, ds \qquad (2.8)$$

für alle $\delta\sigma \in \Sigma$. Ein bekanntes Theorem (vgl. Funk [16]) besagt dann, daß (2.8) genau dann gilt, wenn die Kompatibilitätsgleichungen

$$\operatorname{Ink} \varepsilon = 0$$

erfüllt sind. Das heißt, daß es ein Vektor-Feld $\underset{\sim}{u}$ gibt, so daß (2.1) gilt. Ersetzt man in (2.8) ε durch $1/2(\nabla u+\nabla u^T)$ und wendet man eine Integraltransformation an, dann folgt, daß auf $\partial_2\Omega$

$$\dot{\underset{\sim}{u}}\big|_{\partial_2\Omega} = \dot{\underset{\sim}{u}}^{o}.$$

Damit wird bewiesen, daß alle Erfordernisse der klassischen Formulierung erfüllt sind.

3.2.3. Die variationale Formulierung

Für jedes feste $\sigma \in \Sigma$ sei das Funktional

$$F_\sigma : \Sigma \times \Sigma \to R$$

definiert durch

$$F_\sigma(\dot{\sigma},\delta\dot{\sigma}) = \int_\Omega [A_{ij}^{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|})\, h(\sigma)\, \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\, \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\, \dot{\sigma}_{kl}]\, \delta\dot{\sigma}_{ij}\, dv.$$

Wir beweisen, daß, so definiert, F_σ die Bedingungen des Theorems 1 des Appendix erfüllt.

Zuerst bemerken wir, daß F_σ in $\delta\dot{\sigma}$ linear ist, d. h. daß für alle $\alpha,\beta \in R$ und $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2 \in \Sigma$

$$F_\sigma(\dot{\sigma},\alpha\delta\dot{\sigma}_1 + \beta\delta\dot{\sigma}_2) = \alpha F_\sigma(\dot{\sigma},\delta\dot{\sigma}_1) + \beta F_\sigma(\dot{\sigma},\delta\dot{\sigma}_2)$$

gilt.
Wir beweisen, daß für alle festen $\dot{\sigma}_1$, $\dot{\sigma}_2 \in \Sigma$ und gegebenen gleichmäßigen stetigen reellen Funktionen $\alpha(t)$ $\beta(t)$, $t \in R$ die Funktion

$$F_\sigma(\alpha(t)\sigma_1 + \beta(t)\sigma_2,\ \delta\sigma)$$

eine stetige Funktion in t ist. Es ist genug zu beweisen, daß für konstante Tensoren σ_1,σ_2 und $\delta\sigma$ die Funktion

$$f_{(\dot{\sigma}_1,\dot{\sigma}_2,\delta\sigma)}(t) = [A_{ij}^{kl}(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2kl}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1ps} + \beta(t)\sigma_{2pq})}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1pq} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2pq})\right|}\right) \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2kl})]\delta\sigma_{ij} \qquad (2.9)$$

gleichmäßig stetig in t ist.
Wir bemerken, daß wegen ihrer Linearität in $\alpha(t)$, $\beta(t)$ die Funktion

$$A_{ij}^{kl}(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2kl})\delta\dot{\sigma}_{ij}$$

gleichmäßig stetig ist. Wir bezeichnen

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1pq} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2pq})}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha(t)\sigma_{1pq} + \beta(t)\sigma_{2pq})\right.}\right) \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha(t)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t)\dot{\sigma}_{2kl})\delta\sigma_{ij} .$$

Es sei $\varphi(\phi)$ die Funktion, die durch

$$\varphi(\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\right)\phi$$

definiert wird. Es folgt unmittelbar (vgl. Abb. 1)

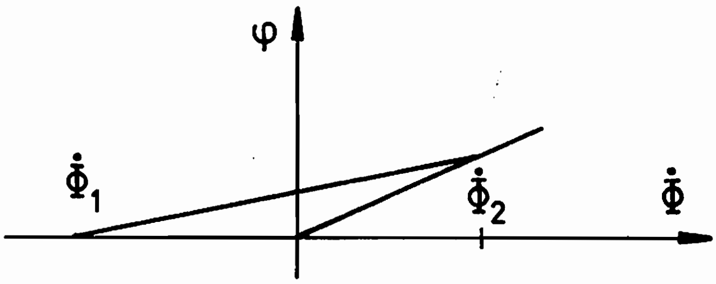


Abb. 1

daß die Lipschitzsche Bedingung

$$|\varphi(\dot{\phi}_1) - \varphi(\dot{\phi}_2)| \leq |\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2|$$

erfüllt wird. Ersetzt man in dieser letzten Ungleichung

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha(t_1)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t_1)\dot{\sigma}_{2kl})$$

und

$$\phi_2 = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha(t_2)\dot{\sigma}_{1kl} + \beta(t_2)\dot{\sigma}_{2kl}),$$

dann folgt die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $g(t)$.

Nimmt man an $\alpha(t) \equiv 1$, $\beta(t) = t$ und $\dot{\sigma}_2 = \delta\dot{\sigma}$, dann wird auch die Bedingung 2° des oben erwähnten Theorems bewiesen. Es bleibt zu beweisen, daß die Differentialform

$$F_\sigma(\alpha\dot{\sigma}_1 + \beta\sigma_2, \dot{\sigma}_1)d\alpha + F_\sigma(\alpha\dot{\sigma}_1 + \beta\dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_2)d\beta$$

ein totales Differential in der Ebene (α,β) ist. Um dieses zu beweisen, ist es ausreichend zu zeigen, daß an der jeweiligen hinreichend glatten geschlossenen Kurve $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $t \in [0,1]$

$$\int_C \{\int_\Omega [A_{ij}^{kl}(\alpha\dot{\sigma}_{1kl} + \beta\dot{\sigma}_{2kl}) + \frac{1}{2}(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha\sigma_{1pq} + \beta\sigma_{2pq})}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha\sigma_{1pq} + \beta\sigma_{2pq})\right|} h(\sigma) *$$

$$* \quad \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha\dot{\sigma}_{1kl} + \beta\dot{\sigma}_{2kl})]\dot{\sigma}_{1ij}\, dV\, d\alpha + \tag{2.10}$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha\dot{\sigma}_{1pq} + \beta\dot{\sigma}_{2pq})}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\alpha\sigma_{1pq} + \beta\dot{\sigma}_{2pq})\right|} h(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\sigma)(\alpha\dot{\sigma}_{1kl} + \beta\dot{\sigma}_{2kl})]\dot{\sigma}_{ij}\, dV\, d\beta\} = 0$$

gilt.

Weil C eine hinreichende glatte Kurve ist, ist das Integral des letzten Integrals gleichmäßig stetig, demzufolge sind das Volumen- und das Linienintegral umtauschbar. Es ist genug zu beweisen, daß das Linienintegral in jedem Punkt $\underset{\sim}{x} \in \Omega$ Null ist.

Es sei in der Ebene (α,β) die Gerade G

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\alpha\dot{\sigma}_{1kl} + \beta\dot{\sigma}_{2kl}) = 0$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Die Kurve C intersektiert nicht die Gerade G,
2. Die Kurve C intersektiert die Gerade G.

In dem ersten Fall reduziert sich (2.10) entweder

$$\frac{1}{2}\int_C d[A_{ij}^{kl}(\alpha\dot\sigma_{1kl} + \beta\dot\sigma_{2kl})(\alpha\dot\sigma_{1ij} + \beta\dot\sigma_{2ij}) + + d[h(\sigma)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)(\alpha\dot\sigma_{1ij} + \beta\dot\sigma_{2ij})^2\right] = 0, \tag{2.11}$$

oder zu

$$\frac{1}{2}\int_C d[A_{ij}^{kl}(\alpha\dot\sigma_{1kl} + \beta\dot\sigma_{2kl})(\alpha\dot\sigma_{1ij} + \beta\dot\sigma_{2ij})] = 0, \tag{2.12}$$

die beide erfüllt sind.

Im zweiten Fall folgt durch Zerteilung der Kurve C in zwei geschlossenen Kurven $C_1 + C_2$ (vgl. Abb. 2)

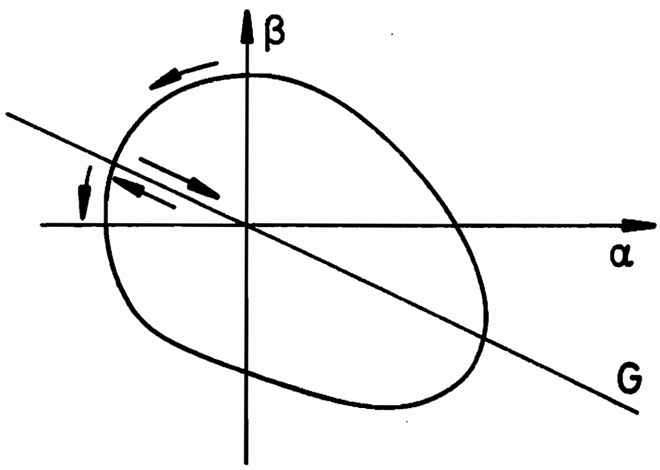


Abb. 2

folgt

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

wobei jede Linienintegrale der rechten Seite genügen, entweder (2.11) oder (2.12).
Dadurch werden alle notwendigen Bedingungen für Potentialität des F_σ erfüllt. Demzufolge gibt es ein Funktional

$$F_\sigma : \Sigma \to R$$

so daß

$$DF_\sigma(\dot\sigma,\delta\dot\sigma) = F_\sigma(\dot\sigma,\delta\dot\sigma) = \int_\Omega [A^{kl}_{ij}\dot\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{p2}}\dot\sigma_{pq}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{p2}}\dot\sigma_{pq}\right|}\right) h(\sigma)\,\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot\sigma_{kl}]\delta\dot\sigma_{ij}dv + \int_{\partial_2\Omega}\dot u^o_i\delta\dot\sigma_{ij}n_j ds \tag{2.13}$$

gilt.
Wendet man die Formel (vgl. [17] oder Appendix)

$$F_\sigma(\sigma) = \int_0^1 F_\sigma(\xi\dot\sigma,\dot\sigma)\,d\xi \tag{2.13'}$$

an, dann folgt

$$F_\sigma(\sigma) = \frac{1}{2}\int_\Omega [A^{kl}_{ij}\dot\sigma_{kl}\dot\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\dot\sigma_{pq}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{pq}\right|}\right)h(\sigma)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot\sigma_{kl}\right|^2]dv + \int_{\partial_2\Omega}\dot u^o_i\dot\sigma_{ij}n_j ds \tag{2.14}$$

Es ist möglich, direkt zu prüfen, daß (2.14) (2.13) erfüllt.
Zu diesem Zweck betrachten wir

$$F_\sigma(\sigma + t\delta\sigma) = \frac{1}{2}\int_\Omega [A^{kl}_{ij}(\dot\sigma_{kl} + t\delta\dot\sigma_{kl})(\dot\sigma_{ij} + t\delta\dot\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\sigma_{pq} + t\delta\sigma_{pq})}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}(\sigma_{pq} + t\partial\sigma_{pq})\right|}\right)h(\sigma)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\dot\sigma_{kl} + t\delta\dot\sigma_{kl})\right|^2]dv + \int_{\partial_2\Omega}\dot u^o_i(\dot\sigma_{ij} + t\delta\dot\sigma_{ij})n_j\,ds \tag{2.15}$$

Wir bemerken, daß das Integral (2.14) alle Bedingungen für die Differenzierung eines Integrals mit Parametern erfüllt.

Bezeichnet man durch $f(\underset{\sim}{x},t)$ den Integranden des Volumenintegrals aus (2.14), das dann einem festen $\sigma, \dot{\sigma}$ und $\delta\dot{\sigma}$ entspricht so gilt

1. $f(\underset{\sim}{x},t)$ ist stetig bezüglich $\underset{\sim}{x} \in \Omega$ und $t \in (-\infty\ \infty)$

2. ist differenzierbar bezüglich $t \in (-\infty,\infty)$,

3. für jeden beschränkten Intervall $I \subset (-\infty,\infty)$
   sind $f(\underset{\sim}{x},t)$ und $\partial f/\partial t(\underset{\sim}{x},t)$, $\underset{\sim}{x} \in \Omega$, $t \in I$
   gleichmäßig begrenzt von

$$M_1 = \sup_{\substack{t\in I\\ \underset{\sim}{x}\in\Omega}} \tfrac{1}{2}|A^{kl}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl} + t\delta\dot{\sigma}_{kl})(\dot{\sigma}_{ij} + t\delta\dot{\sigma}_{ij}) + \tfrac{1}{2}\, h(\sigma)\,|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)(\dot{\sigma}_{ij} + t\delta\dot{\sigma}_{ij})|^2$$

bzw.

$$M_2 = \sup_{\substack{t\in I\\ \underset{\sim}{x}\in\Omega}} |A^{kl}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl} + t\delta\dot{\sigma}_{kl})\dot{\sigma}_{ij} + \tfrac{1}{2}h(\sigma)\ \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\dot{\sigma}_{kl} + t\delta\dot{\sigma}_{kl})\ \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\delta\dot{\sigma}_{ij}| \,.$$

Gleicherweise kann man dieselben Eigenschaften für das Integral

$$I_{\partial_2\Omega} = \int_{\partial_2\Omega} \overset{o}{u}_i(\dot{\sigma}_{ij} + t\delta\dot{\sigma}_{ij})nj\ ds$$

beweisen.

Differenziert man (2.15) bezüglich t und nimmt man $t = 0$ dann erhält man (2.13).

3.2.4. Konvexität des F_σ

Aufgrund des Satzes 3 des Appendix ist es genug, die Monotonie-Bedingung zu beweisen.

$$DF_\sigma(\dot\sigma,\dot\sigma_1-\dot\sigma_2) - DF_\sigma(\dot\sigma_2,\dot\sigma_1-\dot\sigma_2) \geq 0 \tag{2.16}$$

d.h.

$$\int_\Omega \{A_{ij}^{kl}(\sigma_{1kl}-\sigma_{2kl})(\sigma_{1ij}-\sigma_{2ij}) + \frac{1}{2}h(\sigma)[(1+\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{1pq}}{|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\dot\sigma_{1pq}|})\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\sigma_{kl} -$$

$$-(1+\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{2pq}}{|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{2pq}|})\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot\sigma_{2kl}](\sigma_{1ij}-\sigma_{2ij})\}dv \geq 0.$$

Wir beweisen das folgende Theorem:

<u>Theorem:</u> Wenn der Hookesche Elastizitätstensor A streng positiv ist, d. h.

$$\int_\Omega A_{ij}^{kl}(\dot\sigma_{1kl}-\dot\sigma_{2kl})(\dot\sigma_{1ij}-\dot\sigma_{2ij})dv \geq \gamma\|\dot\sigma_1-\dot\sigma_2\|^2$$

mit $\gamma > 0$ und $h(\sigma) \geq 0$, dann wird die Monotonie-Bedingung (2.16) streng erfüllt.

$$DF_\sigma(\dot\sigma_1,\dot\sigma_1-\dot\sigma_2) - DF_\sigma(\dot\sigma_2,\dot\sigma_1-\dot\sigma_2) \geq \gamma\|\dot\sigma_1-\dot\sigma_2\|^2$$

und dadurch das Funktional (2.14) streng konvex.

<u>Beweis:</u> Es ist genug zu beweisen, daß

$$E(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{2}h(\sigma)[(1+\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{1pq}}{|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\dot\sigma_{1pq}|})\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\sigma_{1kl} -$$

$$-(1+\frac{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{1pq}}{|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\sigma_{1pq}|})\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\sigma_{2kl}](\sigma_{1kl}-\sigma_{2kl}) \geq 0$$

gilt.

Wir unterscheiden die folgenden vier Fälle:

1. $\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\,\dot{\sigma}_{1kl} \geq 0$ und $\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\,\dot{\sigma}_{2kl} \geq 0$,

Dann wird

$$E(\dot{\sigma}_1,\dot{\sigma}_2) = \frac{1}{2}\left|h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)(\dot{\sigma}_{1kl} - \dot{\sigma}_{2kl})\right|^2 \geq 0$$

2.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{1kl} < 0 \text{ und } \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{2kl} < 0.$$

Dann wird

$$E(\dot{\sigma}_1,\dot{\sigma}_2) = 0.$$

3. $\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{1kl} < 0$ und $\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{2kl} \geq 0$

Dann wird

$$E(\sigma_1,\sigma_2) = -\frac{1}{2}\,h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\sigma_{2kl}(\dot{\sigma}_{1ij} - \dot{\sigma}_{2ij}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\sigma_{1ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\,\dot{\sigma}_{2kl} + \frac{1}{2}\,h\,(\sigma)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{2kl}\right|^2 \geq 0$$

4.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{1kl} \geq 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{2kl} < 0.$$

Dann wird

$$E(\dot{\sigma}_1,\dot{\sigma}_2) = \frac{1}{2}\,h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\sigma_{1kl}(\dot{\sigma}_{1ij} - \dot{\sigma}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,h(\sigma)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{1kl}\right|^2 - \frac{1}{2}\,h(\sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\dot{\sigma}_{1ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}(\sigma)\dot{\sigma}_{2kl} \geq 0$$

Was zu beweisen war.

Benutzt man (2.13), dann wird die Konvexitätsbedingung

$$F_\sigma(\dot\sigma_1, \dot\sigma_1 - \dot\sigma_2) - F_\sigma(\dot\sigma_2, \dot\sigma_1 - \dot\sigma_2) \geq \gamma \| \dot\sigma_1 - \dot\sigma_2 \| \, .$$

Aufgrund des Theorems 2 des Appendix folgt:

1. Das Funktional F_σ ist unten begrenzt

2. Es erreicht sein Minimum genau für die Lösung der Funktionalgleichung

$$F_\sigma(\dot\sigma, \delta\dot\sigma) = 0, \; \delta\dot\sigma \in \Sigma, \tag{2.17}$$

3. Die Lösung dieser Funktionalgleichung ist eindeutig bestimmt in $\bar\Sigma$

<u>Anmerkung:</u> Die oben erwähnte Theorie wurde entwickelt unter den Bedingungen der Homogenität der Gleichgewichtsgleichung (2.3) und Spannungsrandbedingung (2.5_1).

Dieselbe Theorie kann man bilden, wenn man statt (2.3) und (2.5_1) nimmt

$$\operatorname{div} \sigma + \underset{\sim}{f} = 0 \tag{2.3'}$$

und

$$\sigma \underset{\sim}{n} \Big|_{\partial_1 \Omega} = \underset{\sim}{g} \tag{2.5_1}$$

an.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine hinreichend glatte Spannungsgeschichte $\sigma^o(\underset{\sim}{x},t)$, die so bestimmt wird, daß

$$\operatorname{div} \sigma^o + \underset{\sim}{f} = 0$$

und

$$\sigma^o \underset{\sim}{n}\big|_{\partial_1\Omega} = \underset{\approx}{g} \; .$$

Sucht man die aktuellen Spannungen in der Form $\sigma^o + \sigma$ gilt dann für σ wieder (2.3) und (2.5_1) und demzufolge $\sigma(\cdot,t) \in \Sigma$ Die Theorie ist mit dem neuen konstitutiven Gesetz

$$\varepsilon_{ij} = A_{ij}^{kl}(\dot{\sigma}^o_{kl} + \dot{\sigma}_{kl}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|})h(\sigma^o + \sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma^o + \sigma)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}\,(\sigma^o + \sigma)(\dot{\sigma}^o_{kl} + \dot{\sigma}_{kl}),$$

wobei $\qquad \dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}}\,(\sigma^o + \sigma)(\dot{\sigma}^o_{pq} + \dot{\sigma}_{pq}),$

ist.
zu entwickeln.

3.2.5. Numerische Lösung

Eine numerische Methode, die die Lösung des extremalen Problems

$$\min_{\dot{\sigma}\in\Sigma} F_\sigma(\dot{\sigma})$$

bestimmt, ist, eine minimisierende Folge $(\dot{\sigma}_n)$ zu finden,

d. h. σ_n, $n = 1,2,\ldots$ $\dot\sigma_n \in \Sigma$ so daß

$$\lim_{n\to\infty} F_\sigma(\dot\sigma_n) = \min_{\sigma\in\Sigma} F_\sigma(\dot\sigma). \tag{2.18}$$

Als eine besondere Anwendung eines Theorems der Konvex-Analysis folgt, daß jede minimisierende Folge gegen die Lösung der Funktionalgleichung (2.17) strebt. Tatsächlich sei (σ_n) eine minimisierende Folge, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} F_\sigma(\dot\sigma_n) = d = \inf_{\sigma\in\Sigma} F_\sigma(\dot\sigma).$$

Für beliebige $\epsilon > 0$ gibt es $N(\epsilon)$, so daß für $m,n > N(\epsilon)$

$$F_\sigma(\sigma_m) < d + \epsilon, \quad F_\sigma(\sigma_n) < d + \epsilon$$

gilt.

Weil

$$F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right) \geq d$$

gilt, folgt

$$\frac{1}{2} F_\sigma(\dot\sigma_m) + \frac{1}{2} F_\sigma(\dot\sigma_n) - F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right) \leq d + \epsilon - d = \epsilon \tag{2.19}$$

Aus (2.13). (2.13') und (2.17) folgt

$$\frac{1}{2} F_\sigma(\dot\sigma_m) + \frac{1}{2} F_\sigma(\dot\sigma_n) = F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[F_\sigma(\dot\sigma_m) - F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[F_\sigma(\dot\sigma_n) - F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right) + \xi \frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}, \frac{\dot\sigma_m - \dot\sigma_n}{2}\right) -$$

$$- F_\sigma\left(\frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2} + \xi \frac{\dot\sigma_n - \dot\sigma_m}{2}, \frac{\dot\sigma_m + \dot\sigma_n}{2}\right)\Bigg] d\xi \geq \frac{1}{n} \gamma \int_0^1 \xi \|\dot\sigma_m - \dot\sigma_n\|^2 d\xi = \frac{1}{8} \gamma \|\dot\sigma_m - \dot\sigma_n\|^2$$

Berücksichtigt man (2.19), dann folgt

$$\|\dot{\sigma}_m - \dot{\sigma}_n\| \to 0$$

was die oben erwähnte Behauptung beweise.

Diese Eigenschaften erlauben uns, eine numerische Annäherung der exakten Lösung durch die Galerkin-Projektionsmethode zu bestimmen.

3.2.6. Evolutionsgleichung des elasto-plastischen Fließ

Es wird jetzt möglich, daß zu jedem Spannungstensor-Feld $\sigma \in \Sigma$ die Spannungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma} \in \Sigma$ durch den Operator

$$\begin{aligned} \sigma &= M(\sigma) \\ M&: \Sigma \to \Sigma \end{aligned} \qquad (2.20)$$

herangezogen wird.
Die Gleichung (2.20) stellt eine Evolutionsgleichung für elastoplastische Formänderung dar.
Falls für M einige Stetigkeitsbedingungen und auch die Lipschitz-Bedingung

$$\| M(\sigma_1) - M(\sigma_2)\| \leq K\|\sigma_1 - \sigma_2\|$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ erfüllt sind, dann folgt die Existenz, Eindeutigkeit und die Stabilität der Lösung. Für die numerische Lösung gelten dann alle numerischen Methoden , die differenzialen Gleichungen im Banachraum entsprechen.
Es sei z. B. $h = \Delta t$ ein kleiner Zeitintervall und Die einfachste numerische Methode lautet

$$\sigma(t + 1h) = \sigma(t) + \int_t^{t+1h} M(\sigma(\xi))d\xi$$

Im besonderen Fall $l=1$ erhält man die klassische Euler-Formel

$$\sigma(t + (k+1)h) = \sigma(t_k) + hM(\sigma(t_k)).$$

Diese Formel entspricht der Inkrementalmethode, die üblicherweise heute in der Plastizitäts-Theorie angewandt wird. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man in jedem Schritt das nichtquadratische Funktional (2.14) minimisiert, das die Belastungs-/Entlastungsbedingungen beinhaltet. Es scheint aber, daß die Beweisführung der oben erwähnten Stetigkeit und Lipschitz-Bedingungen eine nicht triviale Tatsache bilden.

Mit Hilfe des Operators $M(\sigma)$ kann man das Extremal-Variationsprinzip

$$\min_{\sigma\in\Sigma} \int_0^t \int_\Omega (\dot\sigma_{ij} - M_{ij}(\sigma))(\dot\sigma_{ij} - M_{ij}(\sigma))\, dv\, dt$$

bilden. Ein solches Variationsprinzip hat aber nur eine theoretische Bedeutung. (Die Bestimmung des Operators ist komplizierter als die Bestimmung der Lösung der elastoplastischen Randwertaufgabe.)

3.3. Das Zwei-Kriterium Extremal-Variationsprinzip für elasto-plastische Formänderungen mit Verfestigung

Die vorherigen Abschnitte zeigen, daß im Fall des elasto-plastischen Flusses mit Verfestigung das Prinzip der virtuellen Verschiebungen das Problem nicht voll löst. Dieses Prinzip reduziert nur die Randwertaufgaben zu einer Evolutionsgleichung. Die Bedeutung der Existenz eines Extremal-Variationsprinzips als hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösung ist bekannt. Eine natürliche Frage ist, wie kann man im Falle der elasto-plastischen Formänderung mit Verfestigung die Lösungsstabilität durch ein extremales Variationsprinzip reflektieren. Um diese Frage zu beantworten, schreiben wir das konstitutive Gesetz (2.2) in der äquivalenten Form

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ij}^{kl}\,\dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{pq}\sigma_{pq}}{|\alpha_{pq}\,\sigma_{pq}|}\right)\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sigma_{kl}, \tag{3.1}$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{h}(\sigma)\;\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,(\sigma) \tag{3.2}$$

Es sei das Funktional

$$F_{\sigma}(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left[A_{ij}^{kl}\,\dot{\sigma}_{kl}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{pq}\dot{\sigma}_{pq}}{|\alpha_{pq}\dot{\sigma}_{pq}|}\right)\alpha_{ij}\alpha_{kl}\dot{\sigma}_{kl}\right]dv\,dt \tag{3.3}$$

Es gilt das folgende Theorem:

Theorem: Das Funktional F_α nimmt für alle Abweichungen zu.

Interpretiert man α_{ij} als innere Veränderliche, die die Änderung der inneren Strukturen mißt, dann beweist das oben erwähnte Theorem die Stabilität an allen Abweichungen $\delta\dot{\sigma} \in \Sigma$ die nicht die innere Struktur ändern.

Kennt man die Evolution des Tensors α, dann bildet das letzte Theorem ein extremales Variationsprinzip. Die Evolutionsgleichung kann man durch die folgende Prozedur erhalten.

Es sei N der Operator, der zu jedem gegebenen α das Spannungsfeld σ heranziet, welches das Funktional (3.3) minimisiert

$$\sigma = N(\alpha). \tag{3.4}$$

Folgt man (3.4) in (3.2), dann folgt

$$\alpha_{ij} = \sqrt{h(N(\alpha))}\ \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}\,(N(\alpha)), \tag{3.5}$$

welches die Evolutionsgleichung des α darstellt.

Es gilt das folgende Extremalprinzip:

Das Funktional (3.3), wobei α (3.5) erfüllt, erreicht sein Minimum genau für die Lösung des elasto-plastischen Problems.

Dieses Prinzip suggeriert das folgende Zwei-Kriterium Extremal-Variationsprinzip, das für die numerische Lösung der elasto-plastischen Aufgabe zu verwenden ist.

Es sei der Funktionalraum

$$\Sigma[0,T] = \{\sigma\colon \Omega \times [0,T] \to R^{3\times 3}_{sym} \mid \sigma(\cdot,t) \in \Sigma,\ \int_0^T \|\sigma\|^2\, dt < +\infty\}$$

und

$$A[0,T] = \{\alpha\colon \Omega \times [0,T] \to R^{3\times 3}_{sym} \mid \int_0^T \int_\Omega \alpha_{ij}\alpha_{ij}\, db\, dt < +\infty\}$$

Es sei $\underset{\sim}{\sigma}^{*}(x,t)$ die Lösung des elasto-plastischen Problems und

$$\alpha^{*}_{ij} = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma^{*}),$$

dann gilt die folgende Ungleichung

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(A^{kl}_{ij}\dot{\sigma}^{*}_{kl}\dot{\sigma}^{*}_{ij} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{pq}\sigma^{*}_{pq}}{|\alpha_{pq}\sigma^{*}_{pq}|}\right)\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sigma^{*}_{kl}\sigma^{*}_{ij}\right) dv\, dt \leq$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(A^{kl}_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{pq}\sigma_{pq}}{|\alpha_{pq}\sigma_{pq}|}\right)\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}\right) dv\, dt$$

und

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(\alpha^{*}_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\right)\left(\alpha^{*}_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\right) dv\, dt \leq$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(\alpha_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\right)\left(\alpha_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma)\right) dv\, dt.$$

Das führt zu folgendem Extremal-Variationsprinzip:

Es sei zu bestimmen $\dot{\sigma}^{*} \in \Sigma\,[0,T]$ und $\alpha^{*} \in A[0,T]$ für die beiden Mininuma

$$\min_{\sigma}\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(A^{kl}_{ij}\dot{\sigma}_{kl}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^{*}_{pq}\sigma_{pq}}{|\alpha^{*}_{pq}\sigma_{pq}|}\right)\alpha^{*}_{ij}\alpha^{*}_{kl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}\right) dv\, dt$$

und

$$\min_{\alpha}\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\left(\alpha_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma^{*})\right)\left(\alpha_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma^{*})\right) dv\, dt$$

in $\Sigma\,[0,T] \times A[0,T]$ erreicht werden.

Dieses Variationsprinzip scheint eine natürliche Ausdehnung des Variationsprinzips der virtuellen Verschiebungen an den Materialien mit Änderung der inneren Struktur zu sein. Die mechanische Bedeutung des Zwei-Kriterium-Variationsprinzips ist evident. Die entsprechende mathematische Theorie steht bedarf weitere Entwicklung.

A P P E N D I X

Methoden der Funktionalanalysis in der Variationsrechnung

In der vorliegenden Arbeit seien einige Ergebnisse der nichtlinearen Funktionalanalysis dargelegt. Diese wurden dann bei der nachfolgenden Erläuterung einiger spezieller Variationsprinzipien angewendet.

Üblicherweise sind solche Ergebnisse in der aktuellen Literatur (z. B. [1] oder [2]) mit Hilfe der Begriffe der modernen Funktionalanalysis entwickelt. Wir verfolgen jedoch einen Weg, der sich auf klassische Methoden der Funktionalanalysis beschränkt. Die Vorteile dieses Weges sind nicht nur didaktischer Art. Es ist bekannt, daß die numerische Lösung eines Variationsprinzips das Funktional immer zu einer

Funktion mit mehreren Veränderlichen reduziert. Aus diesem Grund ist jede mögliche Analogie zwischen der klassischen Analysis und der modernen Funktionalanalysis besonders nützlich.

Die natürlichen Metriken, die man in der Variationsrechnung benutzen kann, sind die Normen der Räume L_p und W_p^1

$$\|u\|_{L_p}^{p} = \int_D |u|^p dV,$$

$$\|u\|_{W_p^1}^{p} = \int_D |u|^p dV + \int_D \sum_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dV + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \int_D \sum_{\alpha_i} \left| \frac{\partial^1 u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dV; \quad \sum_i \alpha_i = 1$$

(D-ist ein Gebiet in n-dimensionalen Raum)
Ausführlich behandelt z.B. W.I. Smirnow [3] die Theorie dieses Raumes.

Wir bemerken, daß diese Räume reflexive Banach-Räume sind. Im besonderen Fall von $p = 2$ sind die entsprechenden Räume Hilbert-Räume.

Aus diesem Grund werden wir im folgenden das "Final-Theorem" im Hilbert-Raum oder zumindest im reflexiven Banach-Raum entwickeln. Zu Anfang betrachten wir den allgemeinen linearen Vektor-Raum.

Es sei V ein linearer Vektor-Raum und $F: V \to R$ ein Funktional, das in V definiert ist.

<u>Definition 1:</u> F ist ein konvexes Funktional, falls

$$F(\theta u_1 + (1-\theta)u_2) \leqq F(u_1) + (1-\theta)\, F(u_2) \qquad (A.1)$$

für beliebige $\theta \in (0,1)$ und $u_1, u_2 \in V$.

Wir betrachten die reelwertige Funktion $f: R \to R$, die zu dem Elementepaar $u, \delta u \in V$ in der folgenden Beziehung steht.

$$f(u,\delta u)(\alpha) = F(u + \alpha\delta u) \tag{A.2}$$

Es folgt der

<u>Satz 1:</u> F ist genau dann ein konvexes Funktional, wenn für alle $u, \delta u \in V$ die entsprechende Funktion $f(u,\delta u)(\alpha)$ konvex ist.

<u>Beweis:</u> Wir schreiben die linke Seite von (A.1) zu

$$F(\theta u_1 + (1-\theta)u_2) = F(u_2 + \theta(u_1 - u_2)).$$

Ebenso folgt für die rechte Seite von (A.1)

$$\theta F(u_1) + (1-\theta) F(u_2) = F(u_2) + \theta(F(u_1) - F(u_2)).$$

Die Bedingung (A.1) schreibt sich dann zu

$$F(u_2 + \theta(u_1 - u_2)) \leqq F(u_2) + \theta(F(u_1) - F(u_2)).$$

Wir benutzen die Beziehung (A.2) und erhalten

$$f(u_2,u_1 - u_2)(\theta) \leqq f(u_2,u_1 - u_2)(0) + \theta(f(u_2,u_1-u_2)(1) - f(u_2,u_1-u_2)(0).$$

Es gelte die

<u>Definition 2:</u> Das Funktional F ist differenzierbar, wenn für alle $u, \delta u \in V$ die assoziierte Funktion $f(u,\delta u)(.)$ differenzierbar ist.

Falls F differenzierbar ist, betrachten wir das Funktional

$$F^{\dagger}: V \times V \times R \to R$$

$F^{\dagger}$ ist durch

$$F^{\dagger}(u, \delta u,\alpha) = \frac{df(u,\delta u)(\alpha)}{d\alpha}$$

definiert.

Wegen der Identität

$$f(u,\delta u)(\alpha) = F(u+\alpha\delta u) = F(u+\alpha_0\,\delta u + (\alpha-\alpha_0)\delta u) =$$

$$= f(u+\alpha_0\,\delta u, \delta u)(\alpha-\alpha_0)$$

folgt

$$F^{\dagger}(u,\delta u,\alpha) = F^{\dagger}(u+\alpha\delta\, u,\ \delta u,\ 0)$$

Dies bedeutet, daß das Funktional F nur durch die Werte bestimmt ist, die aus $\alpha = 0$ folgen. Daher nennen wir das neue Funktional einfach $F^{\dagger}$, wobei

$$F^{\dagger} : V \times V \rightarrow R$$

gilt.

$F^{\dagger}$ ist somit mit

$$F^{\dagger}(u,\delta u) = F^{\dagger}(u+\delta u, \delta u, 0)$$

definiert.

Es herrscht offenbar eine Analogie mit der klassischen Differentialrechnung. Somit wird $F^{\dagger}(u,\delta u)$ als Ableitung von F in dem Punkt u in die Richtung von δu genannt. Diese Ableitung wird auch mit dem Symbol

$$DF(u,\delta u)$$

bezeichnet.

In der Variationsrechnung trifft man auf die folgende inverse Aufgabe:

Es sei das Funktional

$$F^{\dagger} : V \times V \rightarrow R$$

gegeben.

$$F : V \rightarrow R$$

ist so zu bestimmen, daß

$$F^{\dagger}(u,\delta u) = DF(u,\delta u)$$

gilt.

Als eine Antwort auf diese Aufgabe beweisen wir das folgende Theorem:

<u>Theorem 1:</u> Es sei ein Funktional $F^{\dagger}: V \times V \to R$ gegeben, so daß

1. für alle $u, \delta u_1, \delta u_2$ in V und $\alpha, \beta \in R$
   $F^{\dagger}(u,\alpha\delta u_1 + \beta\delta u_2) = \alpha F^{\dagger}(u,\delta u_1) + F^{\dagger}(u,\delta u_2)$
   gilt,

2. für alle festen u und δu in V die reelwertige Funktion $F^{\dagger}(u+t\delta u,\delta u)$ eine stetige Funktion in t ist.

Dann kann man ein neues Funktional $F: V \to R$ bestimmen, so daß

$$DF(u,\delta u) = F^{\dagger}(u,\delta u)$$

für alle $u, \delta u$ in V genau dann gilt, wenn die Differentialform:

$$F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_1)d\alpha + F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_2)d\beta \qquad (A.3)$$

ein totales Differential in der Ebene (α,β) ist.

<u>Beweis:</u>

a) Falls es ein Funktional $F: V \to R$ gibt, so daß $F^{\dagger}(u,\delta u) = DF(u,\delta u)$, dann bezeichnen wir

$$\phi(\alpha,\beta) = F(\alpha u_1 + \beta u_2).$$

Die Differentialform (A.3) lautet mit obiger Beziehung

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)d\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial\beta}(\alpha,\beta)d\beta$$

Dies stellt offenbar ein totales Differential dar.

b) Wir betrachten das neue Funktional F: V $\to$ R, das durch

$$F(u) = F(o) + \int_0^1 F(\zeta u, u)d\zeta$$

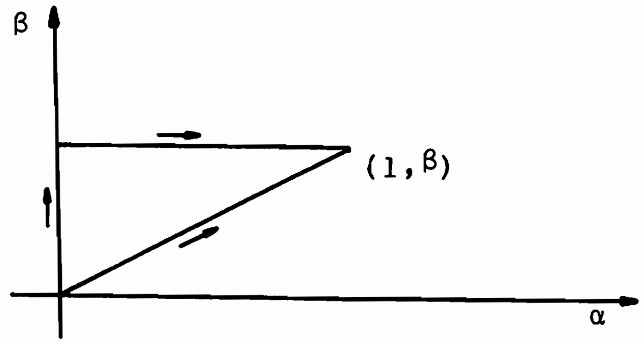
definiert wird. (F(o) sei eine beliebige Konstante.)

In einem Nachbarpunkt $u + \beta\delta u$ wird dieses Funktional zu

$$F(u + \beta\,\delta u) = F(o) + \int_0^1 F^{\dagger}(\zeta u + \zeta\beta\delta\, u,\ u + \beta\,\delta u)d\zeta$$

in der Tat stellt der letzte Term in der obigen Gleichung die Integralform der Differentialform (A.3) dar.

Wir betrachten nun in der (α,β)-Ebene den Weg zwischen den Punkten (O,O) und $(1,\beta)$



Da (A.3) eine totale Differentialform ist, können wir das letzte Integral auch über einen anderen Weg anschreiben. Wir erhalten

$$F(u+\beta\delta u) = F(0) + \int_0^1 F^{\dagger}(\alpha u, u)d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\beta} F^{\dagger}(u+\beta\delta u, \delta u)d\beta = F(u) + \int_0^{\beta} F^{\dagger}(u+\beta\delta U, \delta u)d\beta\ .$$

Es folgt durch Differentiation

$$\frac{dF(u+\beta\delta u)}{d\beta} = F^{\dagger}(u + \beta\delta\, u,\ \delta u)$$

Dies beweist das Theorem.

Anmerkung: Falls für alle festen $u, \delta u \in V$, $F(u+\beta\delta u, \delta u)$ eine differenzierbare Funktion ist, ist(A.3) genau dann eine totale Differentialform, falls

$$\frac{\partial F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_1)}{\partial\beta} = \frac{\partial F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_2)}{\partial\alpha} \qquad (A.4)$$

für alle u_1, $u_2 \in V$ und α, $\beta \in R$ gilt.

Beispiel: Als Beispiel betrachten wir das Funktional

$$F(\varepsilon, \delta\varepsilon) = \int_D \sigma_{ij}(\varepsilon)\delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

welches im Rahmen der Elastizitätstheorie die Variation der Arbeit darstellt (σ und ε bezeichnen die Spannungs- bzw. die Verzerrungstensoren). Mit der Symmetriebedingung (A.4) folgt

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_D \sigma_{ij}(\alpha\overset{1}{\varepsilon} + \beta\overset{2}{\varepsilon})\overset{1}{\varepsilon}_{ij}\, dV = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_D \sigma_{ij}(\alpha\overset{1}{\varepsilon} + \beta\overset{2}{\varepsilon})\overset{2}{\varepsilon}_{ij}\, dV$$

oder in äquivalenter Form

$$\int_D \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{hk}}(\alpha\overset{1}{\varepsilon} + \beta\overset{2}{\varepsilon})\overset{2}{\varepsilon}_{hk}\overset{1}{\varepsilon}_{ij}\, dV = \int_D \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{hk}}(\alpha\overset{1}{\varepsilon} + \beta\overset{2}{\varepsilon})\overset{1}{\varepsilon}_{hk}\overset{2}{\varepsilon}_{ij}\, dV$$

Diese Bedingung ist z.B. für elastische Stoffe mit einem elastischen Potential $W(\varepsilon)$ erfüllt. Dann lautet das Funktional

$$F(\varepsilon) = \int_D W(\varepsilon)\, dV$$

Die Variation dieses Funktionals bezüglich der Verzerrung entspricht genau $F^{\dagger}(\varepsilon, \delta\varepsilon)$. Im Rahmen der oben erwähnten Theorie ist $F^{\dagger}(\varepsilon, \delta\varepsilon)$ die Ableitung von F im Punkt ε in Richtung von $\delta\varepsilon$

Das Funktional $F(\varepsilon)$ ist konvex, falls die Matrix

$$\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{hk}} \right)$$

eine positive definite Form bildet,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{hk}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{hk} \geqq 0$$

Diese letzte Bedingung ist immer erfüllt, wenn die Spannungsfunktion monoton bezüglich der Verzerrungen ist.

Im folgenden werden wir die allgemeinen mathematischen Bedingungen betrachten, die erfüllt werden müssen, um ein korrekt formuliertes Variationsprinzip konstruieren zu können.

Zunächst beweisen wir den folgenden Satz

Satz 2: Falls die Ableitung $DF(u, \delta u)$ eines Funktionals $F: V \to R$ linear in δu ist , d.h.
$DF(u, \alpha\delta u_1 + \beta\delta u_2) = \alpha DF((u, \delta u_1) + \beta DF(u, \delta u_2))$,
dann ist die Bedingung der Konvexität (A.1) mit der Bedingung

$$DF(u_2, u_1 - u_2) \leqq F(u_1) - F(u_2) \qquad \text{(A.5)}$$

für alle $u_1, u_2 \in V$ äquivalent.

Beweis:

a) Die Konvexitäts-Bedingung (A.1) ist mit der Bedingung

$$\frac{F(u_2 + \theta (u_1 - u_2)) - F(u_2)}{\theta} \leqq F(u_1) - F(u_2)$$

äquivalent (siehe auch Satz 1).

Strebt in dieser letzten Ungleichung θ gegen Null, so erhält man (A.5).

b) Setzen wir nun (A.5) voraus, so gilt für beliebe u_o, u_1, $u_2 \in V$

$$F(u_1) \geqq F(u_2) + DF(u_o, u_1 - u_o)$$
$$F(u_2) \geqq F(u_o) + DF(u_o, u_2 - u_o).$$

Durch die Multiplikation mit θ bzw. $(1 - \theta)$ und eine Summation erhält man

$$\theta F(u_1) + (1-\theta)\, F(u_2) \geqq F(u_o) + DF(u_o, \theta(u_1-u_2) + (1-\theta)(u_2 - u_1))$$

Setzen wir jetzt $u_o = \theta\, u_1 + (1-\theta)u_2$, so erhalten wir (A.5).

<u>Satz 3:</u> Falls die Ableitung $DF(u, \delta u)$ eines Funktionals $F: V \to R$ linear in δu ist und für alle $u_1, u_2 \in V$ die "Monotonie-Bedingung"

$$DF(u_1, u_1 - u_2) - DF(u_2, u_1 - u_2) \geqq 0$$

erfüllt ist, dann ist F ein konvexes Funktional.

<u>Beweis:</u> Auf Grund von Satz 2 genügt es zu beweisen, daß

$$F(u_1) - F(u_2) - DF(u_2, u_1 - u_2) \geqq 0$$

für alle $u_1, u_2 \in V$ ist.

Wir wenden das Lagrange'sche Theorem an und erhalten

$$F(u_1) - F(u_2) = DF(u_2 + c(u_1 - u_2), u_1 - u_2).$$

Hierbei ist $c \in (0,1)$ und außerdem von u_1 und u_2 abhängig.

Schreibt man in der Monotonie-Bedingung
$u_1 = u_2 + c(u_1 - u_2)$ und $u_2 = u_2$, so folgt

$$DF(u_2 + c(u_1 - u_2), c(u_1 - u_2)) - DF(u_2, c(u_1 - u_2)) \geqq 0.$$

Da c eine positive Zahl ist, folgt

$$DF(u_2 + c(u_1 - u_2), u_1 - u_2) - DF(u_2, u_1 - u_2) \geqq 0$$

womit der Satz 3 bewiesen ist.

<u>Definition 3:</u> Gegeben ist eine Funktional-Gleichung im Raum V

$$F^{\dagger}(u, \delta u) = 0$$

für alle $\delta u \in V$ mit $F^{\dagger}: V \times V \to R$. Dann ist mit $F: V \to R$ durch

$$DF(u, \delta u) = F^{\dagger}(u, \delta u)$$

ein korrekt formuliertes Variationsprinzip definiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. F ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $c \in R$, so daß für alle $u \in V$ $F(u) \geqq c$ gilt.

2. F besitzt ein Minimum; d.h. es gibt ein $u^{\dagger} \in V$, so daß

$$F(u^{\dagger}) = \min_{u \in V} F(u) .$$

Wir beweisen das folgende Theorem

<u>Theorem 2:</u> Es sei V ein Hilbert-Raum (oder ein reflexiver Banach-Raum).

Die Funktionalgleichung

$$F^{\dagger}(u, \delta u) = 0$$

$F^{\dagger}: V \times V \to R$, $F^{\dagger}$ ist linear und stetig in δu und $F^{\dagger}(u+\delta u, \delta u)$ eine stetige Funktion in t ist, wird ein korekt formuliertes Variationsprinzip, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_1) d\alpha + F^{\dagger}(\alpha u_1 + \beta u_2, u_2) d\beta$ ist ein totales Differential für alle $u_1, u_2 \in V$ in der Ebene (α, β).

2. Die Monotonie-Bedingung

$$F^{\dagger}(u_1, u_1 - u_2) - F^{\dagger}(u_2, u_1 - u_2) \geqq 0$$

ist erfüllt.

3. Für beliebige $u \in V$ gilt

$$F(u,u) \geqq C(\|u\|)\,\|u\|$$

wobei $C(\cdot)$ eine reellwertige Funktion mit $C(r) > 0$ für $r \geqq R$ ist.

<u>Beweis:</u> Auf Grund der 1. Bedingung des 1. Theorems gibt es ein Funktional $F: V \to R$, so daß

$$DF(u, \delta u) = F^{\dagger}(u, \delta u)$$

für alle $u, \delta u \in V$ gilt. Die Monotonie-Bedingung impliziert die Konvexität des Funktionals F. Wir werden beweisen, daß F eine untere Grenze besitzt.

Zunächst betrachten wir die Kugel

$$S = \{u \in V / \|u\| \leqq R\}$$

und beweisen, daß F über S begrenzt ist. Wir nehmen an, daß $u_n \in S$, $n = 1,2,\ldots$ existieren, so daß $\lim F(u_n) = -\infty$. Weil die Folge (u_n) $n = 1,2,\ldots$ in einem Hilbert- (oder reflexiven Banach-) Raum beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge (u_n) $n = 1,2,\ldots$, die schwach gegen $u_o \in S$ konvergiert.

Der Beweis dieses Satzes ist bei K. Yosida (vgl.[4]) S. 126 nachzulesen.

In einem Banach-Raum V wird eine Folge (u_n) $n = 1,2,\ldots$ schwach konvergent genannt, wenn ein $u_o \in V$ existiert, so daß für jedes lineare und stetige Funktional $F: V \to R$

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = F(u_o)$$

gilt.

Im Hilbert-Raum ist jedes lineare und stetige Funktional auf Grund des Riesz-Frechet'schen Theorems als Skalarprodukt darstellbar. Schwache Konvergenz bedeutet dann

$$\lim_{n \to \infty} \langle u_n, u \rangle = \langle u_o, u \rangle$$

für alle $u \in V$ (K. Yosida [4] S. 120, S. 90).

Weil für feste $u \in V$, $DF(u, \delta u)$ linear und stetig ist, folgt

$$\lim_{n \to \infty} DF(u, u_n - u_o) = 0.$$

Aus der Konvexitäts-Bedingung

$$F(u_n) - F(u_o) \geqq DF(u, u_n - u_o)$$

folgt

$$F(u_o) \leqq - \infty$$

was unmöglich ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß F nach unten begrenzt sein muß.

Es sei

$$C = \inf_{u \in S} F(u)$$

Wir beweisen jetzt, daß F auch auf der Komplementärmenge $V - S$ nach unten begrenzt ist.

Es sei $u \in V$, $u \notin S$ (d.h. $\|u\| > R$). Auf Grund des Theorems 1 ist $F(u)$ in der Form

$$F(u) = F(o) + \int_o^1 DF(tu, u)\, dt$$

darstellbar. Wir schreiben jetzt

$$F(u) = F(o) + \int_o^{\frac{R}{\|u\|}} DF(tu, u)\, dt +$$

$$+ \int_{\frac{R}{\|u\|}} DF(tu, u)\, dt = F\left(\frac{R}{\|u\|} u\right) + \int_{\frac{R}{\|u\|}} DF(tu, u)\, dt$$

und benutzen die Bedingung 3 des Theorems 2. Dann erhalten wir

$$F(u) > c^{\dagger} + c\,(\|u\|) > c$$

Demzufolge ist F ebenfalls auf V - S nach unten begrenzt und es gilt

$$\inf_{u \in V} F(a) > c^{\dagger}$$

Jetzt müssen wir nur noch beweisen, daß F(u) in der Tat ein Minimum besitzt.

Es sei (u_n) n = 1,2,... eine Folge, so daß

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = c^{\dagger}$$

da die Folge F(u) > C außerhalb von S beschränkt sein muß. Benutzt man wieder den oben erwähnten Satz über die Beschränktheit einer Folge, so gibt es eine Teilfolge (u_n) n = 1,2,... die gegen $u^{\dagger} \in V$ schwach konvergiert. Auf Grund der Konvexitäts-Bedingung

$$F(u_n) - F(u^{\dagger}) \geqq DF(u^{\dagger}, u_n - u^{\dagger})$$

folgt $c^{\dagger} - F(u^{\dagger}) \geqq 0.$

Weil $C = \inf_{u \in V} F(u)$ folgt $F(u^{\dagger}) = c^{\dagger}$ und das Theorem ist bewiesen.

Anmerkung:

1. Weil F in $u^{\dagger}$ ein Minimum hat, folgt

$$DF(u^{\dagger}, \delta u) = 0$$

   für alle $\delta u \in V$.

2. Falls die Ungleichung in der 2. Bedingung des Theorems streng erfüllt ist, gibt es in V nur ein $u^{\dagger}$, das die Funktional-Gleichung erfüllt.

L I T E R A T U R

Kapitel 1.

1. R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformed Mapping and Minimal Surfaces, Intersciences Publishers, Inc. New York, 1950

2. R. Weinstock, Calculus of Variations with Applications to Physics and Enginneering, Mc. Graw-Hill, 1952

3. A.E.H. Love, A Treatis on the Mathematical Theory of Elasticity (Fourth edition), Dover Publications, 1927

4. S.P. Timoshenko & J.M. Goodier, Theory of Elasticity (Third edition), Mc. Graw-Hill, 1970

5. E. Hellinger, Der allgemeine Ansatz der Mechanik der Kontinua, Encyclopädie der Mathematik, Vol. 4, Part. 4, 1914

6. E. Reissner, On a Variational Theorem in Elasticity, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 29, 2, 1950

7. K. Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1975

8. B.A. Finlayson & L.E. Scriven, On the search for Variational Principles, Int. Journal Heat and Mass Transfer. Vol. 10, 1967

9. C. Truesdell, Essays in the History of Mechanics, Springer-Verlag, 1968

10. M. Frêchet. Sur la notion de differentielle, C.R.Acad.. Sci. (Paris),152, 1911

11. R. Gâteaux, Sur les functionelles continues et les functionelles analitiques, C.R. Acad. Sci. (Paris) 157, 1913

12. M. Kerner. Die Differentiale in der Allgemeinen Analysis, Ann. of Math., Vol. 34,

13. M.M. Vainberg, Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden Day, San Francisco, 1964

14. A. Langenbach, Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung, Springer-Verlag, 1977

15. P. Mazilu & S.F. Sburlan, Metode Functionale in Rezolvarea Ecuatiilor Teoriei Elasticitatii, Bukarest, 1973

16. I. Beju, Theorems on Existence, Uniqueness and Stability of the Solution of the Place Boundary-Value Problem in Static for Hyperelastic Materials, Arch. Rational Mechanics and Analysis, Vol. 42, 1, 1971

17. C.C. Wang & C. Truesdell, Introduction to Rational Elasticity, Noordhoff International Publishing, Leyden 1973

18. J.T. Oden, Aproximation and Numerical Analysis of Finite Deformations of Elastic Solids, in "Nonlinear Elasticity", ed R. Dickey, Academic Press, New York 1973

19. P. Mazilu, On the Boundary Conditions of Place for Finite Elasticity, Rend. Circolo Mat. Palermo, Tom 2 1976

20. J.M. Ball, Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity, Arch. Rational. Mechanics and Analysis, Vol. 63, 1976/77

21. B.D. Colemann & W. Noll, On the Thermostatic of Continuous Media, Arch. Rational Mechanics and Analysis, Vol. 4, 1959

22. C. Truesdell & W. Noll, The Nonlinear Field Theories in Mechanics, in Handbuch der Physik III/3, Ed. Flügge, Springer-Verlag, Berlin, 1965

23. Studie über Variationsprinzipe in der Thermodynamik der linearen nichtelastischen Formänderungen, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1981

Kapitel 2.

1. B.A.Finlayson and L.E. Scriven: On the Search for Variational Principles, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, 799-821, 1967

2. M.A. Biot: Variational Principles in Heat Transfer, Oxford AT THE CLARENDON PRESS, 1970

3. B. Krajewski: On a Direct Variational Method for Nonlinear Heat Transfer, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, 495 ff., 1975

4. G. Lebon a. J. Lambermont: Comments on the Papers "On a Direct Variational Method for Nonlinear Heat Transfer" by B. Krajewski, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, 1340, 1976

5. B. Vujanovic and B. Bačlić: Applications of Gauss's Principle of Least Constraint to the Nonlinear Heat-Transfer Problem, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, 721 f., 1976

6. A.C. Zaanen: Linear Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1953, p. 250

7. K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, Oxford, 1975

8. J. Lach: Modyfikacja besposrednich metod wariacyjnych, Archiwum Termodynamiki i Spalania, Vol. 9 (1978) Nr. 3

9. M.E. Gurtin: Variational principles for linear initial-value problems. Quart. Appl. Math. 22 (1964) No. 3, 252-256

10. M.J. Leitman a. G.M.C. Fisher: The linear Theory of Viscoelasticity, Handbuch der Physik, Band VI/a/3, Springer Verlag 1973

11. J.N. Reddy: A Note on Mixed Variational Principles for Initial-Value Problems, Q.J. Mech.Appl. Math., Vol. 28, part. 1, 1975

12. J.T. Oden, J.N. Reddy: Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag, 1976

13. W. Traupel: Die Grundlagen der Thermodynamik, G. Braun, Karlsruhe, 1971

14. H. Tietz: Geometrie, Handbuch der Physik, Band II, Mathematische Methoden II, Springer Verlag 1955

15. H.S. Carslaw u. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press, 1959

16. G. Lebon and J. Lambermont, Some variational principles pertaining to non-stationary heat conduction and coupled thermoelasticity, Acta Mech. 15, 121-139 (1972)

17. A. Kneser: Euler und die Variationsrechnung, Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, Leipzig und Berlin, B.G. Teubner, 1907

18. P. Mazilu: Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis in der Variationsrechnung, unveröffentlicht, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1980

19. I. Herrera und J. Bielak: Dual Variational Principles for Diffusion Equations, Quartely of Applied Mathematics, April 1976, S. 85f.

20. W.D. Collins: Dual Extremum Principles for the Heat Equation, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, 77 A, 273-292, 1977

21. V.M. Filippov and A.N. Skorokhodov: Quadratic - Functional Minimum Principle for Heat - Conduction Boundary - Value Problem, Differential Equations 13, 6, 770-776, 1978

22. B. Kaempf & P. Mazilu, Ein Extremal-Variationsprinzip für das instationäre Wärmeleitungsproblem, unveröffentlicht, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1981.

23. P. Mazilu, Sur la loi constitutive de Boltzmann-Volterra, Compt. Rendue Acad. Sci. Paris 276, 1973 (951-952).

24. P. Mazilu, The equation of heat coduction, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 23, 1978 (419-435).

25. P. Mazilu, Die Onsagersche Reziprozitätsbeziehungen in der Thermodynamik der Materialien mit Gedächtnis, unveröffentlicht, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1981.

Kapitel 3.

1. W. Prager & P.G. Hodge, Theorie ideal plastischer Körper, Wien, Springer-Verlag, 1954

2. P. Hodge & W. Prager, A variational principle for plastic materials with strain-hardening, J. Math. and Phys. 27, 1948 (1-10)

3. H.J. Greenberg, Complementary minimum principles for an elasti-plastic material, Quart. Math. 7, 1949 (85-95)

4. D.R.J. Owen, Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Limited, 1980

5. R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford at the Clarendon Press, 1950

6. W. Koiter, General Theorems for Elasto-plastic Solids in Progress in Solid Mechanics, vol I, Ed. Sneddon & Hill, 1969 (164-221)

7. J.J. Moreau, Application of Convex Analysis to the Treatment of Elasto-Plastic Systems Lectures Notes, 503, Springer Verlag, Ed. P. Germain & B. Nayroles, 1975, (56-89)

8. G. Duvaut & J.L. Lions, Les inêquations en Mêchanique et en Physique, Dunod, Paris,1972

9. O.S. Nguyen, Contribution â la thêorie machoscopique de l'êlastoplasticitê avec êcrouissage, doctorate thesis, l'Universitê de Paris, 1973

10. D. Weichert, Variationelle Formulierung und Lösung von Randwartproblemen in der Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Plattenprobleme. Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1980

11. O.S. Nguyen, Materiau elastoplastique ecruissable. Distribution de la contraite dans une evolution quasi-statique. Arch. of Mechanics, 25, 1973 (695-702)

12. H. Matthies, Existence Theorems in Thermo-Plasticity, J. Mecanique, 18, 1979 (695-712)

13. B. Nayroles, Essai de theorie fonctionell des structures rigides plastiques parfaits. J. Mêcanique, 9, 1970 (491-506)

14. C. Johnson, Existence Theorems for Plasticity Problems, J. Math. pures et appl., 55, 1976 (431-444)

15. P.M. Suquet, Sur les êquations de la plasticitê: existence et regularitê des solutions, J. Mecanique 20, 198 (3-39)

16. Y.C. Fung, Foundations of Solids Mechnics Prentice-Hall Inc. 1965

17. P. Mazilu, Studie über Variationsprinzipe in der Thermodynamik der linearen inelastischen Formänderung, Bericht für DFG 1981

18. P.M. Naghdi, Stress-Strain relations in plasticity and thermoplasticity, in Plasticity Ed. E.H. Lee & P.S. Symonds, Pergamon Press, 1960

19. P. Mazilu, Decreasing of the initial shear modulus with increasing axial strain explained by means of a plastic-hypoelastic model, unveröffentlicht.

Appendix

1. M.M. Vainberg, Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden Day, San Francisco, 1964

2. P. Mazilu a. S.F. Sburlan, Functional Methods in the Solving of the Eqn. of Elasticity (rum.) Bukarest, 1973

3. W.I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil V, VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1967

4. K. Yosida, Functional Analysis, Fourth edition, Springer-Verlag, 1974

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen

Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells

Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen

Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse

Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen

Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates

Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken

Nr. 20 Czeslaw Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity

Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung

Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen

Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems

Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast

Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem

Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszylinder und Innendruck und Axialkraft

Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem

Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory

Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen

Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipe der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 33