



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Diemar Bouchard

Entwicklung und Anwendung  
eines an die  
Diskrete-Fourier-Transformation  
angepaßten direkten Algorithmus  
zur Bestimmung der modalen  
Parameter linearer  
Schwingungssysteme

Heft Nr. 42



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Dietmar Bouchard**

**Entwicklung und Anwendung eines an  
die Diskrete -Fourier -Transformation  
angepaßten direkten Algorithmus zur  
Bestimmung der modalen Parameter  
linearer Schwingungssysteme**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 42**

**Februar 1984**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller danke ich besonders für die wertvollen Anregungen, mit denen er meine Arbeit immer unterstützt hat.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann danke ich für das Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Reinhard Schmidt für die Erstellung zahlreicher Programme, für seine Unterstützung bei den Versuchen und für seine zeichnerischen Beiträge, Herrn Roland Pooch für die Durchsicht des Manuskripts, sowie für die Hilfe bei der Fertigstellung der Reinschrift, sowie nicht zuletzt Frau Ute Hallwaß für die schnelle Erledigung der Schreibarbeiten. Ich danke auch meinen Kollegen, die meine Arbeiten auf unterschiedliche Art unterstützt haben.

Februar 1984

Dietmar Bouchard

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 14.12.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 16. 2.1984

© 1984 Dietmar Bouchard  
Heinrich-Feuchter-Weg 4  
5600 Wuppertal 2

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werks (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Verfahren zur direkten Bestimmung von Schwingungsparametern mit Hilfe der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT) vorgestellt. Das Verfahren basiert auf einer exakten Rekonstruktion der DFT einer exponentiell abklingenden harmonischen Funktion, welche freie oder periodisch erregte Schwingungen linearer Schwingungssysteme mit viskoser Dämpfung beschreibt. Durch eine angepaßte Iteration werden auch Schwingungen mit eng benachbarten Eigenfrequenzen getrennt. Neben der Beschreibung des Algorithmus enthält die Arbeit die Ergebnisse numerischer Untersuchungen über die Abhängigkeit der Fehler der ermittelten Schwingungsparameter von den beim Messen auftretenden Störungen, sowie einige Beispiele für die praktische Anwendung des Verfahrens bei durchgeführten Versuchen an einfachen Modellen und Maschinen.

## **Summary**

This paper shows a new algorithm for the identification of vibration-parameters using the Discrete-Fourier-Transform (DFT). The algorithm is based on an exact reconstruction of the DFT of an exponentially decreasing harmonic function, which describes free or periodically excited vibrations of a linear system with viscous damping. Using a special iteration algorithm, it is possible to separate vibrations with closely neighboured eigen-frequencies. This paper also shows the results of numerical tests about the relationship between the uncertainties of the identified parameters and the disturbances, that are accompanied by measurements, as well as some applications of this algorithm to practical tests at simple models and machines.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Systembeschreibung-Modalanalyse	3
2.1. Allgemeine Bemerkungen	3
2.2. Beschreibung linearer Systeme	4
2.2.1. Konservative Systeme mit einem Freiheitsgrad	4
2.2.2. Konservative Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	5
2.2.3. Viskos gedämpfte Systeme mit einem Freiheitsgrad	6
2.2.4. Viskos gedämpfte Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	7
2.2.5. Modale Dämpfung	12
2.2.6. Systeme mit Strukturdämpfung	13
2.2.7. Komplexe Systeme	14
2.3. Experimentelle Modalanalyse	15
2.4. Schwingungen bei unterschiedlichen Erregungen	16
2.4.1. Beschreibung freier Schwingungen	16
2.4.2. Versuche mit freien Schwingungen	17
2.4.3. Beschreibung harmonisch erregter Schwingungen	19
2.4.4. Versuche mit harmonisch erregten Schwingungen	21
2.4.5. Beschreibung periodisch erregter Schwingungen	21
2.4.6. Versuche mit periodisch erregten Schwingungen	22
2.4.7. Beschreibung transient erregter Schwingungen	23
2.4.8. Versuche mit transient erregten Schwingungen	25
3. Signalanalyse mit Hilfe der DFT	28
3.1. Vorbemerkungen	28
3.2. Systematische Fehler der DFT	29
3.3. FT - FR - DFT	33
3.4. Vorperiodisierung	42
3.5. Entperiodisierung	44
4. Explizite DFT Auswertgleichungen	46
4.1. Vorbemerkungen	46
4.2. Analytische Berechnung der DFT	46
4.3. Aufstellung der Zwei-Punkte Formel	49
4.4. Erweiterung zur Mehr-Punkte Formel	51

5. Systematische und iterative Auswertung	55
5.1. Vorbemerkungen	55
5.2. Iterative Auswertung einer Schwingung	56
5.3. Systematische Auswertung überlagerter Schwingungen	58
5.4. Iterative Auswertung überlagerter Schwingungen	60
5.5. Auswertung einer Schwingung mit Gleitfrequenz	62
5.6. Auswertung komplexer Schwingungen	62
6. Störanfälligkeit	64
6.1. Eingrenzung der Störungen	64
6.2. Untersuchungsmethoden	65
6.3. Abhängigkeit des Fehlers von verschiedenen Parametern	66
6.4. Angabe der Fehler	67
6.5. Fehler bei unterschiedlichen Störungen	68
6.5.1. Rauschen	68
6.5.2. Digitalisierungsfehler	69
6.5.3. Nichtlineare Kennlinie	69
6.5.4. Überlagerte Störungen	70
6.6. Der Einfluß des Exponentialfensters	95
7. Durchgeführte Versuche	104
7.1. Übersicht	104
7.2. Messungen am Biegebalken	105
7.2.1. Versuchsdurchführung	105
7.2.2. Stahlbalken	106
7.2.3. Stahl-Plexiglas-Balken	107
7.2.4. Stahlbalken mit Öldämpfer	108
7.2.5. Holzbalken	109
7.3. Messungen an einer Prüfmaschine	110
7.4. Messungen am Trennschalter	110
7.5. Messungen an einem Kreissägeblatt	111
8. Zusammenfassung	117
Literaturverzeichnis	118

## 1. Einleitung

Eine der Hauptaufgaben in der Mechanik ist die Berechnung des Verhaltens von Maschinen und Bauwerken unter dynamischer Beanspruchung. Mit der in der letzten Zeit immer weiter verbesserten Rechentchnik sind auch die Verfahren zur Modellbildung (z. B. finite Elemente) verfeinert worden. Ebenso haben die Verfahren der experimentellen Systemidentifikation, bei der die Modellparameter der Struktur aus den Ergebnissen von Schwingungsversuchen abgeleitet werden, große Fortschritte gemacht. Durch die immer schneller und leistungsfähiger werdenden Mikrorechner haben die digitalen Verfahren zur Versuchsauswertung die analogen Verfahren fast vollständig verdrängt. Neben den in der Mechanik seltener angewendeten Zeitbereichsverfahren, die die Meßwerte direkt verarbeiten, sind das vor allem Frequenzbereichsverfahren, die mit der FFT, einem schnellen Algorithmus zur Berechnung der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT), arbeiten. Der Grund dafür ist, daß das Schwingungsverhalten einer komplizierten mechanischen Struktur mit Hilfe der Modalanalyse auf eine Überlagerung des Verhaltens mehrerer Systeme mit nur einem Freiheitsgrad zurückgeführt werden kann. Diese sogenannten Eigenschwingungen besitzen in der Regel unterschiedliche Eigenfrequenzen, so daß es naheliegt, sie durch eine Transformation in den Frequenzbereich zu trennen.

Eines der Hauptprobleme der experimentellen Modalanalyse stellt die Auswertung der mit Hilfe der FFT transformierten Meßdaten dar. Während aber den Verfahren zur Berechnung der Modellparameter aus den versuchstechnisch ermittelten modalen Schwingungsgrößen sehr viel Aufmerksamkeit gewidmet worden ist, haben sich die Methoden zur Bestimmung der modalen Parameter nicht wesentlich weiterentwickelt. Die heute noch praktizierte Anwendung von Auswerteverfahren, deren Grundlage die analytische Fourier-Transformation ist, kann wegen der großen Unterschiede zwischen den beiden Transformationen nur selten befriedigende Ergebnisse liefern. Der Beschreibung dieser Unterschiede, die auch als systematische Fehler der FFT bezeichnet werden, ist in der Literatur viel Platz eingeräumt worden.

Zur Verbesserung der Auswertung diskret transformierter Meßwerte sind jedoch im wesentlichen nur zwei Methoden entwickelt worden. Dabei handelt es sich um die Zoom-Analyse und die Multiplikation mit Fensterfunktionen. Bei der Zoom-Analyse wird eine hohe Frequenzauflösung in einem begrenzten Frequenzbereich durch digitale Filterung der Meßwerte vor der Transformation

erreicht. Die Auswertung erfolgt dann in mehreren Schritten für die unterschiedlichen Frequenzbereiche. Die Zoom-Analyse benötigt viel Speicherplatz für die Zwischenspeicherung und ist rechenzeitintensiv. Die systematischen Fehler werden jedoch auch durch die verbesserte Auflösung nicht beseitigt. Bei dem anderen Verfahren, der Multiplikation der Meßwerte mit einer Fensterfunktion vor der Transformation, soll der Fehler, der durch die zeitliche Begrenzung der Messung (Abschneiden) entsteht, abgeschwächt werden, indem die Schwingung langsam ausgeblendet wird. Der Nachteil ist, daß das Spektrum dabei verzerrt und die Frequenzauflösung verringert wird.

In dieser Arbeit soll nun ein Auswerteverfahren vorgestellt werden, mit dem die Parameter freier und periodisch erregter Schwingungen linearer, viskos gedämpfter Systeme direkt aus der Diskreten-Fourier-Transformierten der Meßwerte berechnet werden können. Weil die Auswertung auf einer exakten Analyse der DFT basiert, sind ergänzende Verfahren (Zoom-Analyse, Fensterfunktion) nicht erforderlich. Das Auswerteverfahren ist auf periodisch erregte und freie Schwingungen beschränkt, weil es sich bei diesen um deterministische Funktionen handelt, die explizit angegeben werden können und nur wenige freie Parameter enthalten. Für diese Funktionen kann auch die DFT analytisch rekonstruiert werden. Die expliziten Auswertegleichungen basieren auf einer Näherung dieser Rekonstruktion, bei der nur unwesentliche Anteile vernachlässigt wurden. Den zweiten Teil des Verfahrens bildet ein Iterationsalgorithmus, der auch in schwierigen Fällen eine saubere Trennung überlagerter Schwingungen ermöglicht. Mit Hilfe der Rekonstruktionsformel können die störenden Einflüsse überlagerter Schwingungen schrittweise eliminiert werden, sofern der Frequenzunterschied zum Erkennen der einzelnen Spitzenwerte ausreicht. Die Vorteile des vorgestellten Verfahrens sind also zum einen die extrem hohe erreichbare Genauigkeit, die die Möglichkeiten der vorhandenen Meßapparatur in Verbindung mit der DFT voll ausschöpft, zum anderen die einfache Programmierbarkeit (explizite Gleichungen, FFT ohne Zusätze) und der geringe Bedarf an Rechenzeit und Speicherplatz.

Über die Herleitung und Beschreibung des Verfahrens hinaus enthält die Arbeit numerische Untersuchungen über die Abhängigkeit der Auswertegenauigkeit von der Größe der Störungen, die beim Messen durch die verwendete Meßapparatur hervorgerufen werden, sowie die Ergebnisse einiger Versuche, die zur praktischen Erprobung des Auswerteverfahrens durchgeführt wurden.



## 2. Systembeschreibung - Modalanalyse

### 2.1. Allgemeine Bemerkungen

Zunächst sollen die allgemeinen Grundlagen der Systembeschreibung mit Hilfe linearer Differentialgleichungen, sowie die Lösung dieser Gleichungen über Eigenwertprobleme und die physikalische Interpretation der Ergebnisse dargestellt werden. Die Strukturmechanik unterscheidet nach der Art der Bewegungsgleichung drei Arten von Systemen.

- 1) Systeme mit einem Freiheitsgrad (Einmassenschwinger)
- 2) Diskrete Systeme mit mehreren Freiheitsgraden
- 3) Kontinuierliche Systeme

Einmassenschwinger werden durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben. Sie eignen sich besonders zur Untersuchung und Veranschaulichung von Dämpfungseinflüssen, weil ihr Verhalten leicht darstellbar ist und die Schwingungen komplizierter Systeme darauf zurückgeführt werden können. Diskrete Systeme werden durch gekoppelte Differentialgleichungen beschrieben, die zu einer Matrizendifferentialgleichung zusammengefaßt werden. Für kontinuierliche Systeme ergeben sich partielle Differentialgleichungen, die in der Regel nicht lösbar sind. Durch eine Ortsdiskretisierung ist es möglich, diese Schwinger ebenfalls durch eine Matrizendifferentialgleichung zu beschreiben. Die Güte eines diskreten Modells kann an einfachen Beispielen durch Vergleich mit der analytischen Lösung überprüft werden.

Nur in wenigen Fällen wird es jedoch gelingen, allein aufgrund der bekannten Konstruktionsdaten einer Maschine oder eines Bauwerks ein hinreichend genaues Modell zu erstellen. Hier setzt die experimentelle Systemidentifikation an. Ist die Modellbildung schon anhand der Konstruktionsunterlagen durchgeführt worden und sollen nur die Parameter des Modells bestimmt oder korrigiert werden, so spricht man von Parameteridentifikation. Wird das Modell ebenfalls aus den Versuchsergebnissen abgeleitet, so handelt es sich um eine Strukturidentifikation. Unter Modellbildung fallen z. B. die Wahl des Dämpfungsansatzes, die Bestimmung der Freiheitsgrade und die Struktur der Matrizen. Während in der Regelungstechnik beide Identifikationen starke Bedeutung haben - die physikalischen Zusammenhänge sind meist zur Modellbildung zu kompliziert -

bedeutet Systemidentifikation in der Mechanik in der Regel Parameteridentifikation

Die Lösung der Schwingungsgleichung, das Zerlegen einer Schwingung in Eigenschwingungen (modale Analyse), sowie die Zusammenhänge zwischen dem Ein-/Ausgangsverhalten eines Systems und seinen Parametern sollen im folgenden kurz skizziert werden.

## 2.2. Beschreibung linearer Systeme

### 2.2.1. Konservative Systeme mit einem Freiheitsgrad

Die Differentialgleichung des Einmassenschwingers lautet allgemein:

$$m\ddot{x} + kx = f \quad , \quad (2.1)$$

und für freie Schwingungen:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Der komplexe Ansatz

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad , \quad (2.3)$$

führt auf das charakteristische Polynom:

$$-m\omega^2 + k = 0 \quad , \quad (2.4)$$

mit den Lösungen (Eigenwerten):

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{m} \quad ,$$

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \doteq \quad \pm \Omega_0 \quad , \quad (2.5)$$

die eingesetzt auf die reelle Lösung der Differentialgleichung führen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{i\Omega_0 t} + \bar{\underline{x}}_0 e^{-i\Omega_0 t} . \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Konservative Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Die Beschreibung erfolgt durch eine Matrizendifferentialgleichung:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{f} \quad (\neq 0) . \quad (2.7)$$

Die Lösung für freie Schwingungen erfolgt über den gleichen Ansatz, wie beim Einmassenschwinger:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{i\omega t} , \quad (2.8)$$

der hier auf ein Matrizeneigenwertproblem führt:

$$(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}) \underline{x}_0 = \underline{0} , \quad (2.9)$$

dessen Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind:

$$\det(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}) = 0 . \quad (2.10)$$

Die Zahl der Eigenwerte ( $\omega^2$ ) entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade, wenn mehrfache Nullstellen mehrfach gezählt werden. Die Eigenvektoren ( $\underline{x}_0$ ) sind nur bis auf einen Faktor bestimmbar, die zu mehrfachen Eigenwerten gehörenden haben entsprechend mehr frei wählbare Faktoren.

Die Eigenvektoren werden in der Modalmatrix zusammengefaßt:

$$\underline{X} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) . \quad (2.11)$$

Sie kann die Systemmatrizen auf Diagonalform transformieren.

$$\underline{X}^T \underline{M} \underline{X} = \underline{diag}(\tilde{m}_k) = \underline{\tilde{M}}, \quad (2.12)$$

$$\underline{X}^T \underline{K} \underline{X} = \underline{diag}(\Omega_{ok}^2 \tilde{m}_k) = \underline{diag}(\tilde{k}_k) = \underline{\tilde{K}}. \quad (2.13)$$

Die beiden Diagonalmatrizen werden als generalisierte Massen- und Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Damit ist eine Transformation der ursprünglichen Differentialgleichung möglich; die Verschiebungen werden aus den Eigenvektoren zusammengesetzt:

$$\underline{x} = \underline{X} \underline{q} \Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{X} \dot{\underline{q}} \Rightarrow \ddot{\underline{x}} = \underline{X} \ddot{\underline{q}}, \quad (2.14)$$

$$\underline{M} \underline{X} \ddot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{X} \underline{q} = \underline{f}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}^T \underline{M} \underline{X} \ddot{\underline{q}} + \underline{X}^T \underline{K} \underline{X} \underline{q} &= \underline{X}^T \underline{f} \\ &= \underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\tilde{K}} \underline{q} = \underline{\tilde{f}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

oder normiert:  $\underline{X}^T \underline{M} \underline{X} = \underline{1}, \quad (2.17)$

$$\underline{X}^T \underline{K} \underline{X} = \underline{diag}(\Omega_{ok}^2) = \underline{\Omega_o^2}, \quad (2.18)$$

$$\ddot{\underline{q}} + \underline{\Omega_o^2} \underline{q} = \underline{\tilde{f}}. \quad (2.19)$$

Diese Matrizendifferentialgleichung enthält nur Diagonalmatrizen. Damit handelt es sich um ein System entkoppelter Differentialgleichungen. Jede dieser Gleichungen ist identisch mit der Differentialgleichung des Einmassenschwingers.

### 2.2.3. Viskos gedämpfte Systeme mit einem Freiheitsgrad

Die Berechnung der Schwingungen viskos gedämpfter Systeme hat heute in der Schwingungstechnik die größte Bedeutung. Dies hat mehrere Gründe: Zum einen werden solche Systeme durch lineare Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten beschrieben, zum anderen sind viele der auftretenden Dämpfungen annähernd geschwindigkeitsproportional. Erwähnt seien hier nur die Flüssigkeitsreibung der Schmiermittel und das viskoelastische Dehnungsverhalten vieler Kunststoffe.

Die Differentialgleichung lautet:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f \quad (=0). \quad (2.20)$$

Die Lösung erfolgt durch den Ansatz einer komplexen Exponentialfunktion:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, \quad (2.21)$$

$$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0, \quad (2.22)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \quad (2.23)$$

Im Fall starker Dämpfung ( $\frac{d^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$ ) sind die Eigenwerte reell, die Lösung der Gleichung lautet:

$$x(t) = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.24)$$

Der Grenzfall ( $\frac{d^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$ ) ist nicht von praktischer Bedeutung. Für das schwingungsfähige System ( $\frac{d^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ ) sind die Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} \doteq \Delta \pm i\Omega. \quad (2.25)$$

Das führt auf die Lösung

$$x(t) = x_0 e^{(\Delta+i\Omega)t} + \bar{x}_0 e^{(\Delta-i\Omega)t}, \quad (2.26)$$

eine exponentiell abklingende harmonische Funktion.

#### 2.2.4. Viskos gedämpfte Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Differentialgleichung, Ansatz und Eigenwertproblem werden wie vorher

aufgestellt:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{D} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{f} \quad (\neq \underline{0}), \quad (2.27)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{\lambda t}, \quad (2.28)$$

$$(\lambda^2 \underline{M} + \lambda \underline{D} + \underline{K}) \underline{x} = \underline{0}. \quad (2.29)$$

Die Systemmatrizen sind alle symmetrisch und positiv definit oder positiv semidefinit. Es gibt pro Freiheitsgrad (analog zum Einmassenschwinger) zwei reelle oder konjugiert komplexe Eigenwerte. Die Eigenvektoren sind wie die zugeordneten Eigenwerte reell oder konjugiert komplex.

Dieses Problem wird zur Lösung als Standard Eigenwertproblem (1. Ordnung) in Zustandsgrößen formuliert. Diese sind neben den Auslenkungen die Geschwindigkeiten der Systempunkte. Mit den partitionierten Vektoren und Matrizen:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{bmatrix}, \quad \underline{f}_z = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{M} \\ \underline{M} & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{M} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

lautet die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\underline{A} \dot{\underline{z}} + \underline{B} \underline{z} = \underline{f}_z, \quad (2.31)$$

und das (zugehörige) Eigenwertproblem:

$$(\lambda \underline{A} + \underline{B}) \underline{z} = \underline{0}. \quad (2.32)$$

Das Zusammenfassen der Eigenvektoren zur Modalmatrix führt auf einen ähnlichen Zusammenhang wie beim ungedämpften System:

$$\underline{Z} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_{2n}), \quad (2.33)$$

$$\underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \doteq \text{diag} (\tilde{A}_k) \doteq \tilde{A}, \quad (2.34)$$

$$\underline{Z}^T \underline{B} \underline{Z} \doteq \text{diag} (-\lambda_k \tilde{A}_k) \doteq \underline{\Lambda}_z \tilde{A} \doteq \tilde{B}. \quad (2.35)$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen kann die Bewegungsgleichung ähnlich wie im konservativen Fall in ein System entkoppelter Gleichungen überführt werden. Da die Entkoppelung (mit Ausnahme von modaler Dämpfung) hier nur im Zustandsraum möglich ist, handelt es sich um komplexe Differentialgleichungen 1. Ordnung. Mit dem (komplexen) Ansatz

$$\underline{z}(t) = \underline{Z} \underline{q}(t) \quad , \quad \dot{\underline{z}}(t) = \underline{Z} \dot{\underline{q}}(t) \quad , \quad (2.36)$$

und durch Linksmultiplikation mit  $\underline{Z}^T$  entsteht das Gleichungssystem:

$$\underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \dot{\underline{q}} + \underline{Z}^T \underline{B} \underline{Z} \underline{q} = \underline{Z}^T \underline{f}_z \quad ,$$

$$\tilde{A} \dot{\underline{q}} + \tilde{B} \underline{q} = \tilde{\underline{f}} \quad , \quad (2.37)$$

$$\tilde{A}_k \dot{q}_k + \tilde{A}_k \lambda_k q_k = \tilde{f}_k \quad , \quad k=1, \dots, 2n \quad . \quad (2.38)$$

Diese Gleichungen besitzen entweder reelle oder paarweise konjugiert komplexe Koeffizienten. Eine Gleichung mit reellen Koeffizienten hat nur reelle Lösungen und beschreibt das Verhalten eines Feder-Dämpfer-Systems ohne Masse. Ein Paar konjugiert komplexer Gleichungen beschreibt einen gedämpften Einmassenschwinger, was aus den Gleichungen nicht ohne weiteres erkennbar ist. Im folgenden wird deshalb zur Verdeutlichung dieser Tatsache die komplexe Differentialgleichung 1. Ordnung in zwei reelle Differentialgleichungen 2. Ordnung überführt. Ausgegangen wird von Gleichung (2.38), in der zur Schreibvereinfachung der Index k weggelassen wird.

$$\tilde{A} \dot{q} + \tilde{A} \lambda q = \tilde{f} \quad . \quad (2.39)$$

Die einzelnen Koeffizienten werden in Real- und Imaginärteile getrennt. Für  $\tilde{A}$  wird dabei eine Darstellung gewählt, die auf zum ungedämpften Fall analoge

Gleichungen führt:

$$q = v + iw \quad , \quad \tilde{f} = \alpha + i\beta \quad ,$$

$$\lambda = \Delta + i\Omega \quad , \quad \tilde{A} = (a+ib)(\Delta + i\Omega) \quad , \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow (a+ib)(\Delta + i\Omega)(\dot{v} + i\dot{w}) + (a+ib)(\Delta + i\Omega)^2(v + iw) = \alpha + i\beta \quad ,$$

$$\dot{v} + i\dot{w} + (\Delta + i\Omega)(v + iw) \doteq \dot{\alpha} + i\dot{\beta} \quad . \quad (2.41)$$

Die komplexe Gleichung wird in eine Realteil- und eine Imaginärteilgleichung aufgespalten. Anschließend werden die Funktionen v und w voneinander getrennt:

$$\dot{v} - \Delta v + \Omega w = \dot{\alpha} \quad , \quad (2.42)$$

$$\dot{w} - \Delta w - \Omega v = \dot{\beta} \quad , \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow \ddot{v} - 2\Delta v + (\Delta^2 + \Omega^2)v = \dot{\alpha} - \Delta\alpha - \Omega\dot{\beta} \quad (2.44)$$

und 
$$w = \frac{\Delta}{\Omega} v - \frac{1}{\Omega} \dot{v} + \frac{1}{\Omega} \dot{\alpha} \quad (2.45)$$

oder 
$$\ddot{w} - 2\Delta w + (\Delta^2 + \Omega^2)w = \dot{\beta} - \Delta\beta + \Omega\dot{\alpha} \quad (2.46)$$

und 
$$v = -\frac{\Delta}{\Omega} w - \frac{1}{\Omega} \dot{w} - \frac{1}{\Omega} \dot{\beta} \quad . \quad (2.47)$$

Diese Gleichungen lauten ausgeschrieben und so normiert, daß rechts Kraftgrößen stehen:

$$\sqrt{a^2 + b^2} [\ddot{v} - 2\Delta\dot{v} + (\Delta^2 + \Omega^2)v] = \frac{-a(\Delta^2 - \Omega^2) + b2\Delta\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}(\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\alpha}$$

$$+ \frac{-a2\Delta\Omega - b(\Delta^2 + \Omega^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}(\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\beta} + \frac{a\Delta - b\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}(\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\alpha} + \frac{a\Omega + b\Delta}{\sqrt{a^2 + b^2}(\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\beta} \quad , \quad (2.48)$$



$$\text{und } W = \frac{\Delta}{\Omega} v - \frac{1}{\Omega} \dot{v} + \frac{a\Delta - b\Omega}{\Omega \sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \alpha + \frac{-a\Omega - b\Delta}{\Omega \sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \beta \quad (2.49)$$

$$\text{oder } \sqrt{a^2 + b^2} [\ddot{W} - 2\Delta \dot{W} + (\Delta^2 + \Omega^2)W] = \frac{a(\Delta^2 - \Omega^2) - b2\Delta\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \beta$$

$$+ \frac{-a2\Delta\Omega - b(\Delta^2 + \Omega^2)}{\sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \alpha + \frac{a\Delta - b\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\beta} + \frac{-a\Omega - b\Delta}{\sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \dot{\alpha} \quad (2.50)$$

$$\text{und } v = \frac{-\Delta}{\Omega} W + \frac{1}{\Omega} \dot{W} + \frac{-a\Delta + b\Omega}{\Omega \sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \beta + \frac{a\Omega + b\Delta}{\Omega \sqrt{a^2 + b^2} (\Delta^2 + \Omega^2)} \alpha \quad (2.51)$$

In Analogie zur entkoppelten Differentialgleichung beim konservativen System kann der Ausdruck  $\sqrt{a^2 + b^2}$  als generalisierte Masse ( $\tilde{m}$ ) bezeichnet werden. Die generalisierte Dämpfung ist dann:

$$\tilde{d} = 2\Delta \tilde{m} \quad (2.52)$$

und die Steifigkeit:

$$\tilde{k} = (\Delta^2 + \Omega^2) \tilde{m} \quad (2.53)$$

Dabei handelt es sich um die gleichen Beziehungen, die für das ungedämpfte System mit einem Freiheitsgrad gelten. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen treten hier aber als Erregung nicht nur die (modalen) Kräfte, sondern auch deren erste Ableitungen auf.

Die Lösung für ein konjugiert komplexes Eigenschwingungspaar lautet:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 q(t) + \bar{\underline{x}}_0 \bar{q}(t) = 2(\underline{x}_{0Re} v(t) - \underline{x}_{0Im} w(t)). \quad (2.54)$$

Das bedeutet, daß die Schwingung aus zwei überlagerten Schwingungsformen ( $\underline{x}_{0Re}$ ,  $\underline{x}_{0Im}$ ) mit unterschiedlichen, aber nicht voneinander unabhängigen Zeitfunktionen ( $v(t)$ ,  $w(t)$ ) besteht; auch treten Real- und Imaginärteil ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) der modalen Erregung immer gleichzeitig auf.

### 2.2.5. Modale Dämpfung

Wenn die Eigenformen des gedämpften Systems bei entsprechender Normierung gleich denen des zugehörigen ungedämpften Systems (gleiche Masse und Steifigkeit) sind, so spricht man von modaler Dämpfung. Die Bedingung für das Auftreten modaler Dämpfung ist:

$$\underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{D} \stackrel{!}{=} \underline{D} \underline{M}^{-1} \underline{K}. \quad (2.55)$$

Die Dämpfungsmatrix kann dann mit der Modalmatrix des ungedämpften Systems auf Diagonalform transformiert werden:

$$\underline{X}_0^T \underline{D} \underline{X}_0 = \underline{diag}(\tilde{d}_k). \quad (2.56)$$

In der Praxis hat sich die Annahme modaler Dämpfung besonders bei schwach gedämpften Systemen bewährt. Der Fehler ist gegenüber sonstigen durch die Modellierung entstandenen Fehlern in der Regel sehr klein. Der Vorteil bei der Systemidentifikation ist, daß die Systemparameter Masse und Steifigkeit aus den gemessenen Schwingungen leichter bestimmt werden können, wenn angenommen wird, daß die Dämpfung keinen Einfluß auf die Eigenformen hat. Die Schwingungsfrequenz des ungedämpften Systems läßt sich aus der des gedämpften Systems leicht berechnen, wie sich durch Vergleich mit den Beziehungen (2.5) und (2.23) für den Einmassenschwinger zeigen läßt:

$$\text{ungedämpft: } \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad (2.57)$$

$$\text{gedämpft: } \lambda = \Delta + i\Omega = -\frac{d}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \quad , \quad (2.58)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \Delta^2} \quad , \quad (2.59)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \quad . \quad (2.60)$$

Bei der Anwendung wird meistens nicht allgemeine modale Dämpfung, sondern eine massen- und steifigkeitsproportionale Dämpfungsmatrix angenommen:

$$\underline{D} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad . \quad (2.61)$$

Für die einzelnen (generalisierten) Dämpfungen gilt:

$$\tilde{d}_k = \tilde{m}_k (\alpha + \beta \Omega_0^2) \quad , \quad (2.62)$$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} (\alpha + \beta \Omega_0^2) \quad . \quad (2.63)$$

Diese Annahme proportionaler Dämpfung, auch Bequemlichkeitshypothese genannt, führt die Bestimmung einer kompletten Matrix auf die Bestimmung zweier Parameter  $(\alpha, \beta)$  zurück. Das ist sinnvoll, weil die Bestimmung von Dämpfungen sehr schwierig und damit unsicher ist.

### 2.2.6. Systeme mit Strukturdämpfung

Als Strukturdämpfung werden Dämpfungskräfte angenommen, bei denen die dissipierte Energie (harmonische Schwingung vorausgesetzt) nicht von der Frequenz abhängt. Mit einer harmonischen Erregungsfunktion wird daher für das System folgende Differentialgleichung angesetzt:

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \frac{1}{\omega} \underline{D}\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \hat{f} e^{i\omega t} \quad . \quad (2.64)$$

Diese führt mit dem harmonischen Ansatz

$$\underline{x}(t) = \hat{\underline{x}} e^{i\omega_s t} , \quad (2.65)$$

auf die Gleichung

$$(-\omega^2 \underline{M} + i \underline{D}_s + \underline{K}) \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{f}} . \quad (2.66)$$

Daraus wird analog zum System mit viskoser Dämpfung folgendes Eigenwertproblem abgeleitet:

$$(\lambda_s^2 \underline{M} + i \underline{D} + \underline{K}) \underline{x}_{s0} = \underline{0} , \quad (2.67)$$

das auf komplexe Eigenwerte und -vektoren führt. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen bedeutet die Lösung des Eigenwertproblems hier nicht die Berechnung der Parameter einer freien Schwingung des Systems. Da schon beim Aufstellen der Differentialgleichung harmonische Erregung vorausgesetzt worden ist, sind die berechneten Eigenwerte und -vektoren nur ein mathematisches Hilfsmittel zur Beschreibung harmonischer Schwingungen. Auch hier gibt es wieder den Sonderfall modaler Dämpfung und die einfache Berechnung der Dämpfungsmatrix mit Hilfe der Bequemlichkeitshypothese.

### 2.2.7. Komplexe Systeme

Nur kurz erwähnt werden soll hier der Fall komplexer Systemmatrizen. Sie treten bei Rotoren oder Balken auf, wenn Auslenkungen in einer Raumrichtung als Realteil und Auslenkungen senkrecht dazu als Imaginärteil einer komplexen Verschiebungsgröße angesehen werden. Das daraus resultierende komplexe Eigenwertproblem hat auch allgemein komplexe Lösungen. Bisher traten konjugiert komplexe Lösungspaare auf, weil nur reelle Verschiebungen möglich waren. Bei der Schwingungsauswertung soll im folgenden nicht von komplexen Systemen ausgegangen werden; die Abweichungen, die sich hieraus ergeben, werden jedoch erwähnt.

### 2.3. Experimentelle Modalanalyse

Die Umkehrung dieses Vorgehens, bei dem die Eigenschwingungsgrößen (modale Parameter) aus den gemessenen oder errechneten physikalischen Systemparametern berechnet werden, ist die experimentelle Modalanalyse. Dabei werden zunächst die modalen Parameter mit Hilfe von Schwingungsversuchen ermittelt und daraus die Systemparameter des physikalischen Modells bestimmt. Dieser (Um-) Weg, die Systemparameter mit Hilfe von Frequenzbereichsverfahren über die modalen Größen und nicht mit Hilfe von Zeitbereichsverfahren direkt aus der gemessenen Schwingung zu berechnen, ist in der Mechanik gebräuchlicher. Für die Schwingungen können unterschiedliche Anregungen gewählt werden; daraus ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten der Versuchsdurchführung mit verschiedenen rechnerischen Auswertungen.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel bei der experimentellen Modalanalyse ist die FFT (Fast-Fourier-Transformation), mit deren Hilfe die digitalisierten Meßdaten schnell in den Frequenzbereich transformiert werden. Sie wurde 1965 von Cooley und Tukey als schneller Algorithmus zur Berechnung der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT) entwickelt. Damit weist sie auch die prinzipbedingten Eigenschaften der DFT auf, die als systematische Fehler der FFT bezeichnet werden. Auf deren Herkunft und Auswirkungen wird später noch eingegangen.

Zunächst sollen deshalb Schwingungen bei unterschiedlichen Erregungen mit Hilfe der modalen Analyse beschrieben werden. Es soll gezeigt werden, welche Bedingungen für Schwingungsversuche daraus resultieren und wie das Systemverhalten aus den Meßwerten hergeleitet werden kann. Als Beispiel wird das viskos gedämpfte System mit mehreren Freiheitsgraden aufgeführt. Dieses ist der häufigste in der Praxis angenommene Fall. Das ungedämpfte System und der Einmassenschwinger sind als Sonderfälle ( $D = 0$  und  $n = 1$ ) darin schon enthalten. Auf Unterschiede in der Behandlung des strukturgedämpften Systems wird jeweils hingewiesen.

## 2.4. Schwingungen bei unterschiedlichen Erregungen

### 2.4.1. Beschreibung freier Schwingungen

Die freie Schwingung des Systems wird durch die homogene Differentialgleichung beschrieben. Der exponentielle Lösungsansatz führt, wie gezeigt, auf Eigenlösungen, bestehend aus Eigenwerten und Eigenvektoren, mit deren Hilfe sich die Bewegungsgleichung auf entkoppelte Differentialgleichungen transformieren läßt. Allgemeine freie Schwingungen sind Überlagerungen der unterschiedlichen Eigenschwingungen. Die Stärke der einzelnen Anteile wird in relativen Größen, den sogenannten modalen Koordinaten, angegeben.

Für ein System mit  $L$  Freiheitsgraden gilt:

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{2L} q_{0k} \underline{x}_{0k} e^{\lambda_k t} , \quad (2.68)$$

und bei schwacher Dämpfung:

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{2L} q_{0k} \underline{x}_{0k} e^{(\Delta_k + i\Omega_k)t} , \quad (2.69)$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{2L} (q_{0k} \underline{x}_{0k} e^{(\Delta_k + i\Omega_k)t} + \bar{q}_{0k} \underline{x}_{0k} e^{(\Delta_k - i\Omega_k)t}) . \quad (2.70)$$

Die modalen Koordinaten werden aus den Anfangswerten durch Lösen eines Gleichungssystems berechnet:

$$\underline{x}(t=0) = \sum_{k=1}^{2L} q_{0k} \underline{x}_{0k} , \quad (2.71)$$

oder mit der  $L \times 2L$  Matrix der Eigenvektoren  $\underline{X}$

$$\underline{x}(t=0) = \underline{X} q_0 . \quad (2.72)$$

Dieses System aus  $L$  Gleichungen mit  $2L$  Unbekannten wird durch Hinzunahme der

Anfangsgeschwindigkeiten (Übergang in den Zustandsraum) um weitere  $L$  Gleichungen ergänzt und damit eindeutig lösbar.

$$\underline{z}(t=0) = \underline{Z} q_0 \quad , \quad (2.73)$$

$$q_0 = \underline{Z}^{-1} \underline{z}(t=0) \quad . \quad (2.74)$$

Für das System mit Strukturdämpfung können die freien Schwingungen nicht berechnet werden, weil die Differentialgleichung unter der Annahme harmonischer Erregung aufgestellt worden ist.

#### 2.4.2. Versuche mit freien Schwingungen

Die Auswertung freier Schwingungen spielt in der Systemidentifikation eine große Rolle, weil freie Schwingungen sehr leicht auf unterschiedliche Art erzeugt werden können, z. B. durch zeitlich begrenzte Erregungen oder durch Wegnahme statischer Lasten. Versuchstechnisch ist es von Vorteil, daß keine Krafteinleitungs- und Kraftmeßprobleme auftreten. Rechnerisch ist es von Vorteil, daß es sich um deterministische Zeitfunktionen handelt, deren Verlauf nur von wenigen Parametern abhängt. Da es sich nicht um die Messung von Ein-/Ausgangsbeziehungen des Systems handelt, können einige für dessen vollständige Beschreibung notwendige Größen nicht bestimmt werden. Diese sind die generalisierten Systemparameter (Massen, Dämpfungen oder Steifigkeiten), welche untereinander durch die Eigenwerte verknüpft sind, von denen aber jeweils ein Parameter immer bekannt sein muß. Der Nachteil ist daher, daß deren Bestimmung nur über ergänzende Verfahren erfolgen kann.

Die Schwingungsfrequenz und die Dämpfungskonstante jeder Eigenschwingung werden direkt aus der DFT der gemessenen Zeitfunktion ermittelt. Die Frequenzen dürfen dazu nicht zu dicht liegen, weil eine Trennung sonst unmöglich wird. Der Eigenvektor ergibt sich aus dem Vergleich der (komplexen) Anfangswerte einer Eigenschwingung an den unterschiedlichen Meßstellen. Sind die Meßpunkte mit den Diskretisierungspunkten des Modells identisch, so sind die Anfangswerte gleich den Komponenten des Eigenvektors (ohne Normierung). Stimmen sie nicht überein, so können sie ineinander überführt werden. Das geschieht in der Regel durch Multiplikation mit der

sogenannten Meßmatrix. Sind nicht an allen Punkten die gleichen Größen (Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen) gemessen worden, so werden sie mit Hilfe der Eigenwerte angepaßt:

$$\dot{x}_{ki} = \lambda_k x_{ki} \quad , \quad \ddot{x}_{ki} = \dot{\lambda}_k \dot{x}_{ki} = \lambda_k^2 x_{ki} . \quad (2.75)$$

Zur Bestimmung der generalisierten Systemparameter können unterschiedliche Verfahren benutzt werden. [12] Bei der Zusatzmassenmethode werden kleine Zusatzmassen am System angebracht und dadurch die Eigenfrequenzen verschoben. Die Massen sollten an den Diskretisierungsstellen befestigt werden und so bemessen sein, daß sie die Eigenformen praktisch nicht ändern. Die generalisierten Massen sind aus den Frequenzänderungen direkt zu berechnen. Zur sinnvollen Anwendung dieses Verfahrens ist eine sehr genaue Bestimmung der Eigenfrequenzen erforderlich.

Ein dazu analoges Verfahren ist die Methode der Zusatzsteifigkeiten, bei der kleine Zusatzfedern über das System verteilt angebracht werden. Damit erfolgt die Berechnung der generalisierten Steifigkeiten, welche sich in die generalisierten Massen umrechnen lassen:

$$\tilde{m}_k = \frac{\tilde{k}_k}{\lambda_k^2} . \quad (2.76)$$

Als Nachteile gegenüber dem Zusatzmassenverfahren ergeben sich: Die zu berücksichtigende Eigenmasse der Federn, das Problem der Befestigung am System und die Notwendigkeit eines festen Gegenlagers für die Federn.

Eine gute Möglichkeit zur Bestimmung der Steifigkeiten ist die statische Belastung des Systems und Messung der Verschiebungen, die miteinander über die Steifigkeitsmatrix verknüpft sind:

$$\underline{K} \underline{x}_{st} = \underline{f}_{st} . \quad (2.77)$$

Besteht die Möglichkeit, das System an allen Diskretisierungsstellen zu messen und zu belasten, so läßt sich aus  $n$  (= Anzahl der Freiheitsgrade) Messungen durch Lösen eines Gleichungssystems die Steifigkeitsmatrix bestimmen. Ist diese Möglichkeit nicht gegeben, so werden die Belastungen und Verschiebungen entsprechend dem gewählten physikalischen Modell umgerechnet.



Eine direkte Bestimmung der Systemsteifigkeit ist gegenüber einer indirekten aus generalisierten Systemparametern deshalb vorteilhaft, weil eine unabhängige Entkopplung von Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungseinfluß nur bei modal gedämpften Systemen möglich ist. Zur Berechnung der übrigen Systemmatrizen dienen dann (beim schwach gedämpften System) die folgenden Beziehungen:

$$\underline{X}_s^T \underline{K} \underline{X}_s - \underline{\Lambda}_s \underline{X}_s^T \underline{M} \underline{X}_s \underline{\Lambda}_s = \underline{\Lambda}_s \underline{\tilde{A}}_s, \quad (2.78)$$

$$\underline{X}_s^T \underline{K} \underline{X}_s - \underline{\Lambda}_s \underline{X}_s^T \underline{M} \underline{X}_s \underline{\Lambda}_s = \underline{0}, \quad (2.79)$$

$$\underline{X}_s^T \underline{D} \underline{X}_s + \underline{\Lambda} \underline{X}_s \underline{M} \underline{X}_s + \underline{X}_s^T \underline{M} \underline{X}_s \underline{\Lambda}_s = \underline{\tilde{A}}_s, \quad (2.80)$$

$$\underline{X}_s^T \underline{D} \underline{X}_s + \underline{\Lambda} \underline{X}_s \underline{M} \underline{X}_s + \underline{X}_s^T \underline{M} \underline{X}_s \underline{\Lambda}_s = \underline{0}. \quad (2.81)$$

### 2.4.3. Beschreibung harmonisch erregter Schwingungen

Das System antwortet auf eine harmonische Erregung mit harmonischen Schwingungen. Die Differentialgleichung und der Lösungsansatz lauten:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{D} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{f}_1 e^{i\omega_1 t} + \underline{\bar{f}}_1 e^{-i\omega_1 t}, \quad (2.82)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_1 e^{i\omega_1 t} + \underline{\bar{x}}_1 e^{-i\omega_1 t}. \quad (2.83)$$

Die Beschreibung im Zustandsraum lautet:

$$\underline{A} \dot{\underline{z}} + \underline{B} \underline{z} = \underline{f}_{z1} e^{i\omega_1 t} + \underline{\bar{f}}_{z1} e^{-i\omega_1 t}, \quad (2.84)$$

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 e^{i\omega_1 t} + \underline{\bar{z}}_1 e^{-i\omega_1 t}. \quad (2.85)$$

Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit Hilfe der Modalmatrix werden die

Gleichungen entkoppelt:

$$\underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \dot{\underline{q}} + \underline{Z}^T \underline{B} \underline{Z} \underline{q} = \underline{Z}^T (\underline{f}_{z1} e^{i\omega_1 t} + \bar{\underline{f}}_{z1} e^{-i\omega_1 t}), \quad (2.86)$$

mit  $\underline{q}(t) = \underline{q}_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{\underline{q}}_1 e^{-i\omega_1 t}.$  (2.87)

Das führt im Fall normierter Eigenvektoren auf die Beziehung:

$$(i\omega_1 \underline{I} - \underline{\Lambda}_z) \underline{q}_1 = \tilde{\underline{f}}_{z1}, \quad (2.88)$$

mit den Komponenten:

$$q_{1k} = \frac{\tilde{f}_{z1k}}{i\omega_1 - \lambda_k}. \quad (2.89)$$

Zur Beschreibung der Zeitlösung wird die sogenannte Frequenzgangmatrix definiert:

$$\underline{z}_1 = \underline{Z} (i\omega_1 \underline{I} - \underline{\Lambda})^{-1} \cdot \underline{Z}^T \underline{f}_{z1} \doteq H_z(i\omega_1) \cdot \underline{f}_{z1}. \quad (2.90)$$

Und analog dazu:

$$\underline{x}_1 = \underline{H}_x(i\omega_1) \cdot \underline{f}_1. \quad (2.91)$$

Sie kann auch direkt aus der Schwingungsdifferentialgleichung abgeleitet werden:

$$\underline{z}_1 = (i\omega \underline{A} + \underline{B})^{-1} \underline{f}_{z1}, \quad (2.92)$$

$$\underline{x}_1 = (-\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{D} + \underline{K})^{-1} \underline{f}_1. \quad (2.93)$$

Die harmonische Schwingung als Antwort auf eine harmonische Erregung stellt sich jedoch erst ein, wenn sonstige Schwingungsanteile (überlagerte freie Schwingungen) abgeklungen sind. Besonders bei sehr schwach gedämpften Systemen ist deshalb eine längere Einschwingzeit vor den Messungen erforderlich.

Das System mit Strukturdämpfung verhält sich in diesem Fall entsprechend, und die Frequenzgangmatrix wird mit den gleichen Methoden wie oben geschildert berechnet.

#### **2.4.4. Versuche mit harmonisch erregten Schwingungen**

Untersuchungen von Systemen mit Hilfe harmonischer Erregung gehören zu den klassischen Verfahren in der Systemidentifikation. Beim Phasenresonanzverfahren wird versucht, eine Mehrpunkterregung so zu optimieren, daß nur eine Eigenschwingung mit ihrer Eigenfrequenz erregt wird. Beim Phasentrennverfahren werden Schwingungen nicht mit Eigenfrequenzen (und Formen) erregt, sondern bei beliebigen Zwischenwerten. Die überlagerten Anteile der unterschiedlichen Eigenschwingungsformen werden anschließend rechnerisch getrennt. Die Meßtechnik kann bei diesem Verfahren einfacher ausfallen als bei den übrigen Versuchsarten, die Verwendung analoger Meßgeräte reicht aus. Wegen des größeren Zeitaufwandes sind mit dem Aufkommen der digitalen Versuchsauswertung diese Verfahren allerdings zunehmend verdrängt worden. Die Messung harmonischer Schwingungen tritt heute hauptsächlich bei Rotoren auf, bei denen harmonische Erregung durch Unwuchten automatisch vorhanden ist. Eine Möglichkeit zur Verkürzung der Versuchszeiten bietet die Anregung mit sich langsam ändernder Frequenz (Gleitfrequenzerregung), bei der praktisch ständig ein eingeschwungener Zustand vorliegt und die Frequenz über kurze Betrachtungszeiträume als näherungsweise konstant angesehen werden kann. Weil bei diesen Versuchen das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems gemessen wird, ist auch die Bestimmung aller zur vollständigen Beschreibung notwendigen Parameter möglich.

#### **2.4.5. Beschreibung periodisch erregter Schwingungen**

Die Antwort eines linearen Systems auf eine allgemeine periodische Erregung wird mit Hilfe der Fourier-Analyse berechnet. Die Erregung wird in eine

Fourier-Reihe entwickelt:

$$\underline{f}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{f}_k e^{i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{f}_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad (2.94)$$

mit der Periodendauer  $T$ .

Da die Antworten auf harmonische Erregungen harmonische Schwingungen sind, stellt sich die Antwort auf eine periodische Erregungsfunktion wieder als periodische Funktion in Form einer Fourier-Reihe dar.

$$\underline{x}_k = \underline{H}_x\left(ik \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \underline{f}_k, \quad (2.95)$$

$$\underline{x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{H}_x\left(ik \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \underline{f}_k. \quad (2.96)$$

Wie bei der harmonischen Funktion gelten auch diese Zusammenhänge ebenfalls für das System mit Strukturdämpfung.

#### 2.4.6. Versuche mit periodisch erregten Schwingungen

Periodische Erregungen haben in der Versuchstechnik hauptsächlich dadurch Bedeutung, daß sie im Betrieb von Maschinen häufig auftreten. Zum Teil sind sie stetig oder sogar sinusähnlich, zum Teil treten sie als periodische Folge von Stößen auf. Die Frequenzzusammensetzung unterscheidet sich dabei erheblich. In einem Fall kann nur die Grundfrequenz ausgewertet werden, im anderen Fall können über einen weiten Bereich gestreute Frequenzen verwertbare Ergebnisse liefern. Deshalb kann eine Messung mit allgemeiner periodischer Erregung mehrere Messungen mit harmonischer Erregung ersetzen. Die Erregung und die Schwingungsantwort müssen jedoch bei der Auswertung in ihre Frequenzbestandteile zerlegt werden. In der Regel geschieht dies digital mit Hilfe der FFT.

### 2.4.7. Beschreibung transient erregter Schwingungen

Unter transienter Erregung soll eine deterministische, aber nicht periodische Erregungsfunktion verstanden werden. Ist die Funktion absolut integrierbar,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(t)| dt < \infty, \quad (2.97)$$

so kann sie mit Hilfe der Fourier-Transformation als Frequenzfunktion dargestellt werden:

$$\underline{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}_F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.98)$$

mit 
$$\underline{f}_F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.99)$$

Die Lösung im Frequenzbereich wird mit der Frequenzgangmatrix berechnet und dann in den Zeitbereich zurücktransformiert:

$$\underline{X}_F(i\omega) = \underline{H}_X(i\omega) \cdot \underline{f}_F(i\omega), \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}_F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_X(i\omega) \cdot \underline{f}_F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Ist die Erregungsfunktion, wie z. B. die häufig verwendete Sprungfunktion, nicht Fourier-transformierbar, so kann das Problem mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Die Bedingungen dafür sind, daß die Funktion vor einem festen Zeitpunkt identisch Null sein muß, und sich das

System in Ruhe befindet. Die Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$\underline{f}_L(s) = \int_0^{\infty} \underline{f}(t) e^{-st} dt, \quad (2.102)$$

mit der komplexen Variablen  $s = \alpha + i\omega$ . Sie ist identisch mit der Fourier-Transformation der mit  $e^{-\alpha t}$  multiplizierten und damit absolut integrierbar gemachten Zeitfunktion:

$$\underline{f}(t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \underline{f}_L(s) e^{st} ds. \quad (2.103)$$

Durch die gleichen Umformungen wie bei der harmonischen Ansatzfunktion, bei der nur die Variable  $s$  statt  $i\omega$  steht, wird die Schwingungsantwort im sogenannten Bildbereich berechnet:

$$\underline{x}_L(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{f}_L(s). \quad (2.104)$$

Die Matrix  $H(s)$  wird in diesem Fall Übertragungsmatrix genannt und sie entspricht für  $\text{Re}(s) = \alpha = 0 \Rightarrow s = i\omega$  der Frequenzgangmatrix. Die Lösung der Schwingungsgleichung für transiente Erregung mit Hilfe der Frequenzgangmatrix kann auf Systeme mit Strukturdämpfung nicht angewendet werden. Die Frequenzgangmatrix war wie die Differentialgleichung nur für den eingeschwungenen Zustand bei harmonischer Erregung aufgestellt worden. Eine Anwendung auf andere Fälle kann auf ein nicht-kausales Verhalten des Systems führen, d. h. der Beginn der Schwingungsantwort liegt zeitlich vor dem Beginn der Erregung.

Eine andere Möglichkeit, die Differentialgleichung für transiente Erregung zu lösen, stellt die Faltung, auch Duhamel-Integral genannt, dar:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}(t-\tau) \cdot \underline{f}(\tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}(\tau) \cdot \underline{f}(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\underline{x}(t) \doteq \underline{G}(t) * \underline{f}(t) \quad , \quad (2.106)$$

wobei  $G(t)$  die Matrix der Gewichtsfunktionen ist; das sind die Antworten des Systems auf Einheitsimpulse  $\delta(t)$  an den verschiedenen Diskretisierungspunkten. Für die Anwendung der Fourier-Transformation auf eine solche Faltung gilt der Zusammenhang:

$$\underline{x}(t) = \underline{G}(t) * \underline{f}(t) \Leftrightarrow \underline{x}_F(\omega) = \underline{G}_F(\omega) \cdot \underline{f}_F(\omega) \quad (2.107)$$

und dessen Umkehrung:

$$\underline{g}(t) = \underline{G}(t) \cdot \underline{f}(t) \Leftrightarrow \underline{g}_F(\omega) = \underline{G}_F(\omega) * \underline{f}_F(\omega) \quad . \quad (2.108)$$

Die Frequenzgangmatrix ist also die Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion:

$$\underline{H}(i\omega) = \underline{G}_F(\omega) \quad . \quad (2.109)$$

Dieselben Zusammenhänge gelten auch für die Laplace-Transformation.

#### 2.4.8. Versuche mit transient erregten Schwingungen

Weil transiente Funktionen ein kontinuierliches Frequenzspektrum besitzen, und weil das Erzeugen und Aufbringen transienter Erregungen meistens sehr einfach ist, haben solche Erregungsfunktionen in der Schwingungsversuchstechnik im Laufe der letzten Jahre immer mehr an Bedeutung gewonnen. Unterschieden werden hierbei drei Arten von Funktionen. Zum einen handelt es sich dabei um Vorgänge mit genau definiertem Verlauf, wie z. B. Impuls, Rampenfunktion, Rechteckstoß oder ähnliche. Für solche Funktionen existieren von den Systemparametern abhängige exakte Lösungen, mit denen die gemessenen Funktionen verglichen werden. Das führt auf eine Bestimmung der Schwingungsparameter durch Optimieren. Angewendet werden hiervon hauptsächlich die Rampenfunktion, die durch Wegnahme einer statischen Last realisiert wird, und der Impuls, der sich durch einen sehr kurzen, harten Stoß annähern läßt. Im Prinzip führen diese beiden Testfunktionen wieder auf freie Schwingungen

des Systems mit unterschiedlichen Anfangswerten.

Zum anderen handelt es sich um zeitlich begrenzte Funktionen, deren Verlauf jedoch beliebig ist. Die Fourier- (oder Laplace-) Transformierten dieser Erregungen und ihrer Systemantworten sind kontinuierliche Funktionen, die über die Frequenzgang- (bzw. Übertragungs-)matrix verknüpft sind. Die Bestimmung des Übertragungsverhaltens geschieht in der Regel unter Verwendung der FFT zur Transformation der Eingangs- und Ausgangsfunktion in den Frequenzbereich und anschließende Division der beiden diskreten Spektren. Zu beachten ist dabei, daß die Diskrete-Fourier-Transformation nur unter bestimmten Bedingungen wirklich Näherungswerte für das Frequenzspektrum einer Funktion liefert. Zu diesen Bedingungen gehört, daß die Funktionswerte außerhalb des Zeitintervalls, in dem transformiert wird, gegenüber den Werten innerhalb des Intervalls vernachlässigbar klein sein müssen, und ferner, daß die im wesentlichen darin enthaltenen Frequenzen durch die gewählte Abtastrate erfaßt werden, worauf im nächsten Kapitel noch näher eingegangen wird. Für die praktische Anwendung hat das zur Folge, daß nur kurzzeitige Erregungsfunktionen in Frage kommen, denn die in der Regel schwach gedämpften Systeme besitzen eine längere Ausschwingzeit. Deshalb ist die einfache Methode der Schwingungsanregung durch Hammerschläge weit verbreitet. Durch die Wahl der richtigen Härte des Hammers wird dabei erreicht, daß die angeregten Frequenzen im wesentlichen innerhalb des Darstellungsbereichs bleiben. Die darüber liegenden Frequenzanteile werden aus den beiden gemessenen Funktionen analog herausgefiltert. Ungünstig ist die starke Anregung hoher Frequenzen durch Hammerschläge besonders bei der Verwendung von Beschleunigungsaufnehmern, da sie in diesem Bereich besonders empfindlich sind. Sie registrieren daher auch sich im Moment der Anregung sehr schnell ausbreitende Oberflächenwellen, die keine Schwingungsantworten im Sinne der Strukturmechanik sind.

Die dritte Form transienter Erregungsfunktionen stellen stationäre Rauschprozesse dar. Zur Beschreibung dieser sogenannten stochastischen Signale dienen nicht explizite Parameter, sondern statistische Kenngrößen. Die Auswerte- und Identifikationsverfahren sind daher andere als in den bisher behandelten Fällen. Mit diesen Verfahren können auch zeitlich begrenzte Erregungsfunktionen behandelt werden, die ansonsten nur statistische Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen. Die stochastischen Erregungen sind in der Regel keine künstlich erzeugten und aufgebrauchten



Testfunktionen, sondern natürliche Prozesse und Gegebenheiten wie Erdbeben, Wellen, Wind und bei Fahrzeugen Unebenheiten des Untergrundes. Auf die Auswertung solcher Versuche mit Hilfe statistischer Verfahren soll in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden.

### **3. Signalanalyse mit Hilfe der DFT**

#### **3.1. Vorbemerkungen**

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Grundlagen der Modalanalyse und der experimentellen Modalanalyse als Methode zur Systemidentifikation beschrieben. Grob gesehen besteht die experimentelle Modalanalyse aus drei Schritten:

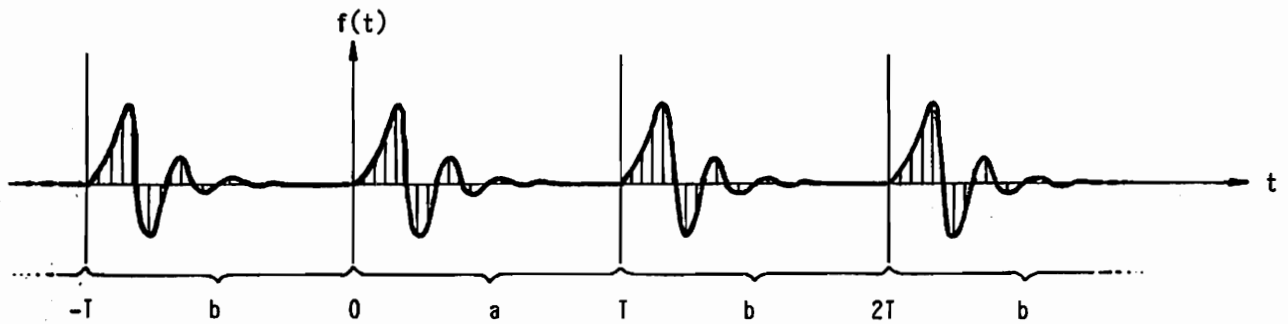
- 1) Versuchsdurchführung und Messung
- 2) Auswertung der gemessenen Signale (Signalanalyse), Bestimmung von Kenngrößen der Messungen
- 3) Zusammenfassung der Meßergebnisse, Bestimmung der Modal- oder Modellparameter, mit denen das Systemverhalten für beliebige Erregungen vorausberechnet werden kann.

Diese drei Punkte beeinflussen sich sehr stark gegenseitig und hängen in ihrer Ausführung auch zum großen Teil von den jeweiligen Möglichkeiten und Gegebenheiten ab. Solche entscheidenden Dinge sind z. B. die vorhandene Meßapparatur und Rechenkapazität, die Meßbedingungen (im Labor oder im Betrieb), die Zugänglichkeit des Systems für Messungen und Anregungen (Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit), sowie auch die geforderte Genauigkeit. Der erste und der letzte Punkt sollen nicht Gegenstand weiterer Betrachtungen sein. Vielmehr soll ein Verfahren zur Analyse von abklingenden harmonischen Schwingungen mit Hilfe der FFT, die sich inzwischen zum wichtigsten Hilfsmittel der digitalen Schwingungsanalyse entwickelt hat, vorgestellt werden. Dieses Kapitel enthält deshalb zunächst eine anschauliche Darstellung der speziellen Eigenschaften der Diskreten-Fourier-Transformation, die zur Folge haben, daß sich deren Ergebnisse oft erheblich von denen der analytischen Fourier-Transformation derselben Funktion unterscheiden. Anschließend werden die mathematischen Zusammenhänge beim Übergang von der Fourier-Transformation (FT) zur Fourier-Reihe (FR) und schließlich zur Diskreten-Fourier-Transformation (DFT), für die die FFT ein schnelles Berechnungsverfahren ist, gezeigt. Damit werden die Unterschiede zwischen den Transformationen erklärt und die Grundlagen für das im nächsten Kapitel hergeleitete Auswerteverfahren gelegt. Zum Schluß dieses Kapitels werden noch zwei Möglichkeiten vorgestellt, die Fehler, die sich aus den

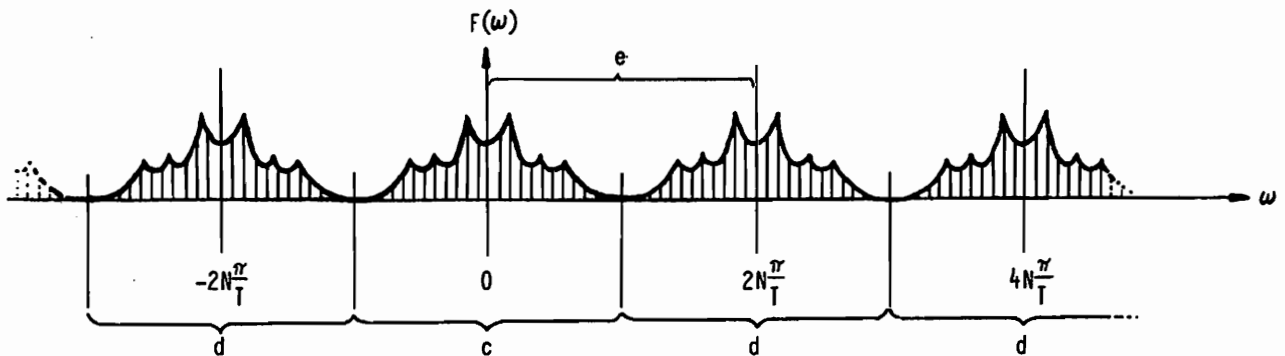
Unterschieden zwischen FT und DFT ergeben, zu verringern.

### 3.2. Systematische Fehler der DFT

Die Ursache für die sogenannten systematischen Fehler der DFT liegt in der Notwendigkeit, die Funktion für die numerische Behandlung durch eine begrenzte Anzahl einzelner Zahlenwerte darzustellen. Diese Darstellung wird durch das Abtasten der Funktion erreicht, indem in äquidistanten Zeitschritten der Momentanwert der Funktion A/D-gewandelt und abgespeichert wird. Zum einen fehlt nun bei der Weiterverarbeitung jede Information über den Funktionsverlauf zwischen den Diskretisierungspunkten, zum anderen muß die Diskretisierung aus Speicherplatzgründen nach einer meist sehr kurzen Meßzeit abgebrochen werden, so daß über den weiteren Funktionsverlauf nichts bekannt ist. Steht ein sehr großer Speicherraum zur Verfügung, so kann mit Hilfe der DFT eine gute Annäherung an die FT erreicht werden. Ist im Extremfall die betrachtete Funktion außerhalb des Meßzeitintervalls ( $0 \leq t \leq T$ ) identisch Null, und ist deren FT auf den bei der DFT durch die Abtastung begrenzten Frequenzbereich ( $-\frac{N\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{N\pi}{T}$ ) beschränkt, so sind die Werte der DFT gleich den Funktionswerten der FT für die entsprechenden Frequenzen. Die Wirkungen der Diskretisierung und Zeitbegrenzung auf die Transformationsbeziehung sind in Bild (3.1) veranschaulicht. Die implizit und explizit berechneten Transformierten sind für alle Frequenzen ( $-\infty < \omega < \infty$ ) definiert, so daß es, wenn die Transformierte anders als bisher angenommen zu hohe Frequenzanteile besitzt, zu Überlagerungen kommt. Die Folge davon ist, daß im explizit dargestellten Frequenzbereich Anteile der sonst nur implizit vorhandenen Funktionen auftauchen und die Ergebnisse für die dort liegenden Frequenzen verfälschen. Dieser Effekt wird als Spiegelungsfehler bezeichnet, weil der Kurvenverlauf anschaulich gesehen an der Grenzlinie gespiegelt wird. Das liegt an den Symmetrieeigenschaften der FT (und DFT) bei rein reellen Zeitfunktionen: In räumlicher Darstellung ist die FT symmetrisch zur reellen Achse im Ursprung, der Realteil der Funktion ist also achsensymmetrisch, der Imaginärteil ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



- a) Zeitlich begrenzte Funktion
- b) Für die DFT gedachte periodische Fortsetzungen der Funktion



- c) Fourier-Transformierte, die durch die DFT-Werte explizit dargestellt wird
- d) Implizit von der DFT erzeugte periodische Wiederholungen der FT
- e) Eigentlich (im mathematischen Sinn) benutzter Frequenzbereich bei der DFT (Summe von  $n = 0$  bis  $N-1$ )

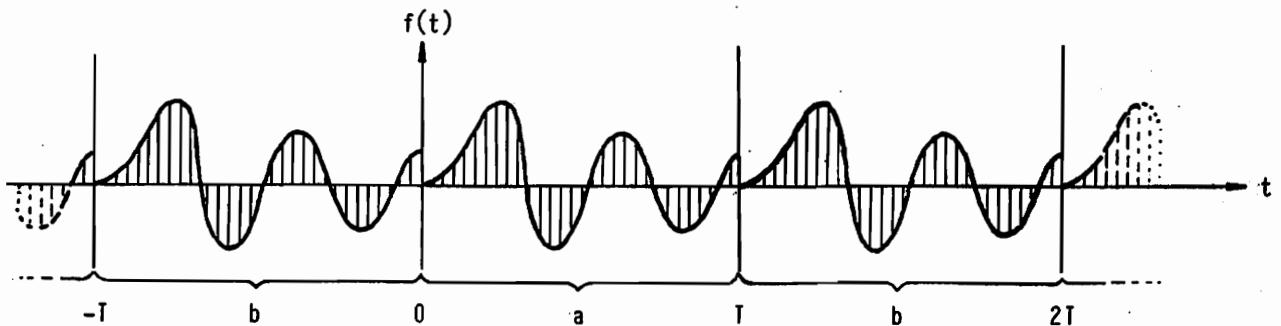
**Bild 3.1** Begrenzte Zeitfunktion mit begrenztem Spektrum

Soll der Spiegelungsfehler verhindert werden, so muß die gemessene Funktion vor der Abtastung analog tiefpaßgefiltert werden. Durch die Begrenzung der Frequenz ist gewährleistet, daß der Funktionsverlauf durch die Einzelwerte hinreichend genau beschrieben wird. In der Praxis jedoch ist es nur selten möglich, eine Signalfunktion von ihrem Beginn bis zum vollständigen Abklingen zu erfassen. Die Erregungsfunktion kann zwar kurz gewählt werden, jedoch schwingen schwach gedämpfte Systeme meistens sehr lange nach. Das bedeutet, daß die Zeitfunktion bei der Messung abrupt abgeschnitten wird. Die Folge davon ist, wie Bild (3.1) zeigt, eine Änderung der Form der Transformierten, und damit auch ein Wegfallen der Beschränkung im Frequenz-

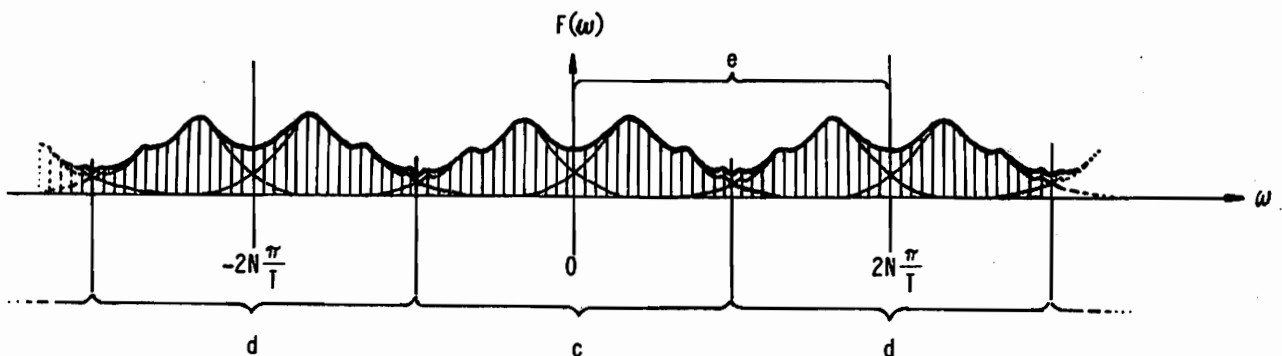
bereich. Die Begrenzung der Zeitfunktion kann als Multiplikation der unbegrenzten Zeitfunktion mit einer rechteckigen "Fensterfunktion" aufgefaßt werden. Das bedeutet, daß sich die Transformierte der begrenzten Zeitfunktion durch Faltung der Transformaten der ursprünglichen Funktion und der des Fensters ergibt. Die FT des Rechteckfensters lautet:

$$R = \int_0^T 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega T} - 1) \quad (3.1)$$

Das ist im Realteil eine Spaltsinusfunktion, im Imaginärteil eine entsprechende Funktion des Cosinus.



- a) Zeitlich begrenzte Funktion
- b) Für die DFT gedachte periodische Fortsetzungen der Funktion

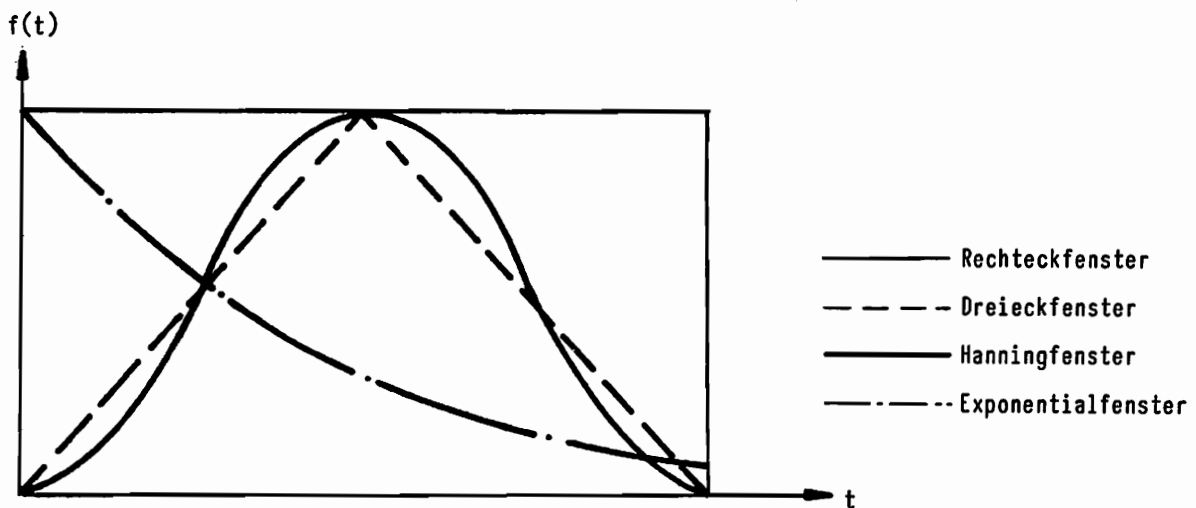


- c) Fourier-Transformierte, die durch die DFT-Werte explizit dargestellt wird
- d) Implizit von der DFT erzeugte periodische Wiederholungen der FT
- e) Eigentlich (im mathematischen Sinn) benutzter Frequenzbereich bei der DFT (Summe von  $n=0$  bis  $N-1$ )

**Bild 3.2** Abgeschnittene Zeitfunktion mit verbreitertem Spektrum

Diese Funktion besitzt ein ausgeprägtes Maximum, klingt jedoch nach beiden Seiten hin nur langsam ab. Das bedeutet, daß sich ausgeprägte Spitzen im Frequenzbereich verbreitern und Nachbarwerte überdecken. Dabei treten sogar Verschiebungen zwischen Realteil- und Imaginärteilwerten auf. Eine weitere Folge davon ist die Ausweitung der FT über den begrenzten Darstellungsbereich der DFT hinaus, was durch die oben beschriebene Spiegelung zu einer zusätzlichen Änderung der Werte der Transformierten führt.

Ein Folgefehler dieser Veränderungen ist der sogenannte Faltungsfehler. Er tritt auf, wenn eine Faltung durch Multiplikation der beiden DFT's und diskrete Rücktransformation realisiert werden soll, oder eine Entfaltung analog dazu durch eine entsprechende Division. Ein Anwendungsfall dieser Methode ist die schon erwähnte Bestimmung der Frequenzgangfunktion durch Division der DFT einer Schwingungsantwort durch die DFT der Erregungsfunktion, oder die Berechnung der Gewichtsfunktion durch anschließende Rücktransformation. Weil Erregung und Antwort durch die zeitliche Begrenzung unterschiedlich verändert werden, haben diese Effekte ein starkes Verfälschen der Ergebnisse zur Folge.



**Bild 3.3** Häufig verwendete Fensterfunktionen

Zur Verringerung der spektralen Verbreiterung sind in der Vergangenheit unterschiedliche Fensterfunktionen entwickelt worden, mit denen die

Zeitfunktion vor der Transformation multipliziert werden kann. Durch diese Operation wird aus dem Abschneiden ein weiches Ein- und Ausblenden des Meßsignals. Diese Fenster, von denen drei typische Formen in Bild (3.3) skizziert sind, haben natürlich auch verfälschende Eigenschaften. Eine Sonderstellung nimmt dabei das Exponentialfenster ein, das die Funktion nur zum Ende der Meßzeit hin abschwächt. Dessen Anwendung führt mit der DFT auf eine "Diskrete-Laplace-Transformation". Je schneller die Funktion dadurch abklingt, umso stärker nähert sich die diskrete Transformation an die Werte der analytischen Laplace-Transformation an. Bei der Untersuchung freier Schwingungen mit Hilfe des Exponentialfensters kann dessen Abklingkoeffizient auch als zusätzliche Dämpfung aufgefaßt werden, die von den Ergebnissen wieder abgezogen werden muß. Die Auswertung erfolgt dabei immer über Vergleiche zwischen den mit der DFT transformierten Meßwerten und den analytisch Fourier-transformierten Ansatzfunktionen. Benutzt werden dazu in der Regel Optimierungsverfahren:

### 3.3. FT - FR - DFT

Eine bessere Auswertung ist möglich, wenn die DFT als eigenständige Transformation angesehen wird, deren spezielle Eigenschaften schon bei der Herleitung des Auswerteverfahrens berücksichtigt werden. So zeigt es sich zum Beispiel, daß die DFT mehr Eigenschaften mit der Fourier-Reihe als mit der Fourier-Transformation gemeinsam hat. Eine Analyse der Zusammenhänge zwischen FT, FR und DFT soll deshalb die Grundlage für eine analytische Berechnung der DFT mit Hilfe von Transformationsintegralen liefern und die schon betrachteten Phänomene der DFT verständlich machen.

Um (mathematisch) einen Übergang von Transformationsintegralen zu Transformationssummen vollziehen zu können, wird der Dirac-Impuls eingeführt, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \stackrel{!}{=} 1, \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t-t_0) dt = g(t_0), \quad (3.3)$$

$g(t)$  ist eine stetige Funktion. Der Dirac-Impuls gehört nicht zur Klasse der gewöhnlichen Funktionen, sondern zu den Distributionen. Sein Funktionswert wird angegeben als:

$$\delta(t=0) = \infty, \quad \delta(t \neq 0) = 0. \quad (3.4)$$

Damit ist eine Integration der  $\delta$ -Funktion im klassischen Sinn auch nicht möglich. Die Regeln für die Behandlung solcher verallgemeinerter Funktionen sind in der Distributionstheorie (verallgemeinerte Funktionstheorie) mathematisch festgelegt. Für die Betrachtungen hier reicht jedoch eine einfachere Vorstellung aus, die den Impuls als Grenzwert einer Folge gewöhnlicher Funktionen auffaßt. Ein gebräuchliches Beispiel dafür ist die Gaußsche Glockenfunktion, deren Integral auf eins normiert ist:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \right]. \quad (3.5)$$

Die Integration läßt sich dann durch eine Vertauschung des Integrals und des Limes erklären:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \right] dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} dt \right] = g(0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zu den im folgenden angegebenen Formeln für FT, FR und DFT muß noch angemerkt werden, daß sie nur eine der unterschiedlichen Darstellungen, die in der Literatur vorkommen, sind. Die Unterschiede beschränken sich jedoch auf Faktoren vor dem Integral oder im Exponenten, die auf die Umformungen und die sich ergebenden Zusammenhänge keinen weiteren Einfluß haben. Sie wurden nur gewählt, weil sie am häufigsten auftreten und auch der Normierung in angewendeten FFT-Programmen entsprechen. Die FT und ihre Umkehrung sind



definiert durch:

$$F(\omega) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad , \quad (3.7)$$

$$f(t) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad . \quad (3.8)$$

Für ihre Gültigkeit gilt die Einschränkung, daß  $f(t)$  eine absolut integrierbare Funktion sein muß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad . \quad (3.9)$$

Die Beziehung zwischen der Zeitfunktion  $f(t)$  und der Frequenzfunktion  $F(\omega)$ , die oben durch die beiden Integrale dargestellt ist, wird im folgenden durch das Symbol  $\circ\bullet$  gekennzeichnet:

$$f(t) \circ\bullet F(\omega) \quad , \quad F(\omega) \bullet\circ f(t) \quad . \quad (3.10)$$

Eine Funktion, die nicht absolut integrierbar, dafür aber mit der Zeit  $T$  periodisch ist, läßt sich durch eine Fourier-Reihe darstellen:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt \quad , \quad (3.11)$$

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \quad . \quad (3.12)$$

Der Ausdruck zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $c_k$  unterscheidet sich von der Transformationsgleichung nur durch die Integrationsgrenzen  $(-T/2, T/2)$  und den Vorfaktor  $(1/T)$ . Zum Vergleich der FR mit der FT wird die periodische Funktion  $f(t)$  nun aufgefaßt als eine Summe unendlich vieler, transformierbarer Funktionen  $f(t)$ , die jeweils um die Zeit  $T$

gegeneinander verschoben sind. Für diese Funktionen brauchen keine weiteren Einschränkungen, wie zeitliche Begrenzung, zu gelten, weshalb hier auch der allgemeine Fall genommen wird.

$$f_p(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT), \quad (3.13)$$

mit 
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.14)$$

Aus der Rücktransformation von  $F(\omega)$  zu  $f(t)$  wird eine Fourier-Reihe, wenn die Frequenzfunktion  $F(\omega)$  zuvor mit einem Impulskamm multipliziert wird. Ein Impulskamm ist eine unendliche Folge äquidistanter Dirac-Impulse. Der Frequenzabstand der Impulse wird dabei so gewählt, daß die entstehende Zeitfunktion  $f_p^*(t)$  mit der Zeit  $T$  periodisch ist, um den Zusammenhang zwischen der durch Überlagern im Zeitbereich und der durch Diskretisieren im Frequenzbereich erzeugten periodischen Funktion darzustellen:

$$\begin{aligned} f_p^*(t) &\doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ F(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(k \frac{2\pi}{T}\right) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Verwandtschaft zwischen dieser Fourier-Reihe und der Reihenentwicklung der periodisierten Funktion kann durch die Umformung der FT der transformierbaren Funktion für die hier vorkommenden Frequenzen ( $\omega = k \frac{2\pi}{T}$ ) in die Berechnung der Fourier-Koeffizienten der durch ihre Überlagerung erzeugten periodischen Funktion gezeigt werden. Das geschieht durch die im

folgenden gezeigten Schritte. Überführung in eine stückweise Integration:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2+nT}^{T/2+nT} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.16)$$

Substitution der Integrationsvariablen:  $t = \tau - nT$ :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau - nT) e^{-i\omega(\tau - nT)} d\tau, \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\tau - nT) e^{-i\omega(\tau - nT)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Exponentialfunktion ist für  $(\omega = k \frac{2\pi}{T})$  mit T periodisch:

$$e^{-ik \frac{2\pi}{T} (\tau - nT)} = e^{-ik \frac{2\pi}{T} \tau} \quad (3.18)$$

und kann deshalb aus der Summe gezogen werden:

$$F(k \frac{2\pi}{T}) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\tau - nT) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau, \quad (3.19)$$

$$F(k \frac{2\pi}{T}) = \int_{-T/2}^{T/2} f_p(\tau) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau = T c_k, \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{T} F(k \frac{2\pi}{T}). \quad (3.21)$$

Die durch Überlagerung erzeugte periodische Funktion ist somit durch

folgende Reihe darstellbar:

$$f_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k \frac{2\pi}{T}) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} = \frac{2\pi}{T} f_p^* \quad (3.22)$$

Diese Betrachtungen führen zu einer erweiterten Definition der Fourier-Transformation. Die FT einer periodischen Funktion ist die Impulsfolge, die das Rücktransformationsintegral in die FR dieser Funktion überführt. Die Stärke der Impulse (Faktor vor dem normierten Einheitsimpuls) ist gegeben durch die FT der Ausgangsfunktion, die durch Verschieben und Überlagern periodisiert wurde, multipliziert mit dem Frequenzabstand der Impulse. Somit kann die FR als vereinfachte Darstellung dieser erweiterten Transformationsbeziehung angesehen werden:

$$\begin{aligned} f_p(t) &\doteq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT) \quad \circ \bullet \quad F_A(\omega) \doteq F(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k 2\pi \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \quad (3.23) \end{aligned}$$

Dieser wechselseitige Zusammenhang zwischen Diskretisierung einer Frequenzfunktion mit einem Impulskamm und Periodisierung ihrer Zeitfunktion durch Verschieben und Überlagern, der für alle elementar transformierbaren Funktionen gilt, ist in bezug auf die Transformationsrichtung umkehrbar. Der Grund dafür ist, daß sich Hin- und Rücktransformation nur wenig unterscheiden, das heißt, daß eine Anwendung des Hintransformationsintegrals auf die Transformierte (mit der Frequenz als Integrationsvariable) auf einen Ausdruck führt, der die ursprüngliche Zeitfunktion enthält, die nur umgedreht und mit einem Faktor versehen ist.

$$f(t) \circ \bullet F(\omega) \quad , \quad F(\omega) \bullet \circ f(t) \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow F(\omega) \circ \bullet 2\pi f(-t) \quad (3.25)$$

Auf diese umgedrehte Transformationsbeziehung lassen sich die vorher

durchgeführten Schritte übertragen:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT) \circ \bullet F(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \quad , \quad (3.26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\Omega) \circ \bullet 2\pi f(-t) \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(-t - k \frac{2\pi}{\Omega}) \quad . \quad (3.27)$$

Die mit dem Impulskamm diskretisierte Zeitfunktion besitzt also ein periodisches Spektrum:

$$f_d(t) \doteq f(t) \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k2\pi) \circ \bullet F_p(\omega) \doteq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\Omega) \quad (3.28)$$

oder mit  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$  : (3.29)

$$f(t) T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \circ \bullet \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n \frac{2\pi}{T_0}) \quad . \quad (3.30)$$

Das entspricht der Darstellung der Frequenzfunktion als Fourier-Reihe:

$$F_p(\omega) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_0) e^{-i\omega k T_0} \quad , \quad (3.31)$$

$$f(kT_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_0}^{\pi/T_0} F_p(\omega) e^{i\omega k T_0} \quad . \quad (3.32)$$

Ausgehend von dem elementaren Transformationspaar  $f(t) \circ \bullet F(\omega)$

wurden die beiden erweiterten Fälle:

Periodische Zeitfunktion - diskretes Spektrum  $f_p(t) \circ \bullet F_d(\omega)$

Diskrete Zeitfunktion - periodisches Spektrum  $f_d(t) \circ \bullet F_p(\omega)$

betrachtet. Daraus werden die Transformationsregeln für den dritten Sonderfall (Periodisierung und Diskretisierung), der sich aus den beiden ersten

zusammensetzt, abgeleitet.

$$f_{pd}(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT) T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_0)$$

$$\circ \bullet F_{dp}(\omega) \doteq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ F\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_0}\right) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_0} - k \frac{2\pi}{T}\right) \right]. \quad (3.33)$$

Interessant ist hier nur der Fall einer ganzzahligen Abtastung pro Periode:

$$T = N \cdot T_0. \quad (3.34)$$

In diesem Fall lassen sich Abtastung und Überlagerung voneinander trennen.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT) \frac{T}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n \frac{T}{N}) \circ \bullet \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\omega - n \frac{2\pi N}{T}\right) \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{T}\right), \quad (3.35)$$

$$f_p(t) \frac{T}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n \frac{T}{N}) \circ \bullet F_p(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{T}\right). \quad (3.36)$$

Das Ergebnis dieser Umformungen ist, daß die Impulsabtastung der periodisierten Zeitfunktion und die ihrer periodisierten Transformaten ein neues Transformationspaar (im erweiterten Sinne) darstellen. Diese Werte können deshalb auch direkt ineinander überführt werden. Die Herleitung der Formel dafür erfolgt analog zur Herleitung der zeitlich begrenzten Integration der periodischen Funktion, die auf die Fourier-Reihe führt. Ausgegangen wird von der Transformation der impulsabgetasteten nichtperiodischen Zeitfunktion, die auf ein periodisiertes Spektrum führt:

$$F_p(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{T}{N} \delta(t-k \frac{T}{N}) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{T}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k \frac{T}{N}) e^{-i\omega k \frac{T}{N}}. \quad (3.37)$$

Von dieser Funktion interessieren nur die durch die Impulse abgetasteten Frequenzwerte ( $\omega = m \frac{2\pi}{T}$ ):

$$F_p(m \frac{2\pi}{T}) = \frac{T}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k \frac{T}{N}) e^{-i2\pi \frac{mk}{N}} = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n \frac{T}{N} + kT) e^{-i2\pi (\frac{mn}{N} + k)}, \quad (3.38)$$

$$F_p(m \frac{2\pi}{T}) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n \frac{T}{N}) e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}. \quad (3.39)$$

Diese Formel ist die bekannte Definitionsgleichung der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT). Ihre Inverse wird durch die gleichen Umformungen aus der Rücktransformation der abgetasteten Frequenzfunktion gewonnen:

$$f_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.40)$$

$$f_p(n \frac{T}{N}) = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=0}^{N-1} F_p(m \frac{2\pi}{T}) e^{i2\pi \frac{mn}{N}}. \quad (3.41)$$

Mit Hilfe der  $\delta$ -Funktion ist es also möglich, die FR und die DFT als zwei Fälle einer erweiterten Definition der FT anzusehen. Damit ist zugleich auch der Ursprung der unterschiedlichen Eigenschaften, die am Anfang des Kapitels anschaulich gezeigt wurden, erklärt. Es zeigt sich, daß die Begrenzung des Integrationsintervalls bei der FR und der Summationsgrenzen bei der DFT auf die Berechnung von  $\delta$ -Impuls-Koeffizienten führt, was notwendig ist, weil deren Funktionswerte immer 0 oder  $\infty$  betragen.

Ein Spezialfall, der auf die spätere analytische Berechnung der DFT-Werte einer bekannten Funktion starken Einfluß hat, muß hier noch betrachtet werden. Es handelt sich dabei um den Funktionswert an einer Unstetigkeitsstelle (Sprungstelle). Da ein solcher Einzelwert keinen Einfluß auf ein Integral und damit auf die Transformation hat, kann er auch bei der

Rücktransformation nicht rekonstruiert werden. Die Rekonstruktion konvergiert an dieser Stelle vielmehr gegen das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte von rechts und links. Wie in Bild (3.2) dargestellt, wird bei der DFT die im Zeitintervall  $0 \leq t \leq T$  gemessene Funktion als Ausschnitt aus einer periodischen Funktion behandelt, der genau eine Periode lang ist. Die betrachtete Funktion springt an den Stellen  $t = 0$  und  $t = T$  vom gemessenen Wert  $f(T)$  auf  $f(0)$ . Bei der Integration (FR) spielt das keine Rolle, bei der DFT wird jedoch nur der Meßwert  $f(0)$  berücksichtigt. Eine Periodisierung (durch Überlagerung) des durch Integration berechneten diskreten Spektrums führt auf Werte, die von den DFT-Ergebnissen um einen konstanten reellen Wert abweichen. Sie würden übereinstimmen, wenn die DFT mit dem Mittelwert aus  $f(0)$  und  $f(T)$  rechnen würde.

### 3.4. Vorperiodisierung

Eine sich aus den Betrachtungen über die Periodizität bei der DFT ableitende Möglichkeit, zu besseren Ergebnissen bei der Anwendung zu gelangen, ist die Vorperiodisierung der Meßwerte, wenn diese während der Meßzeit nicht abklingen, eine Verlängerung der Messung aber aus Speicherplatzgründen nicht möglich ist.

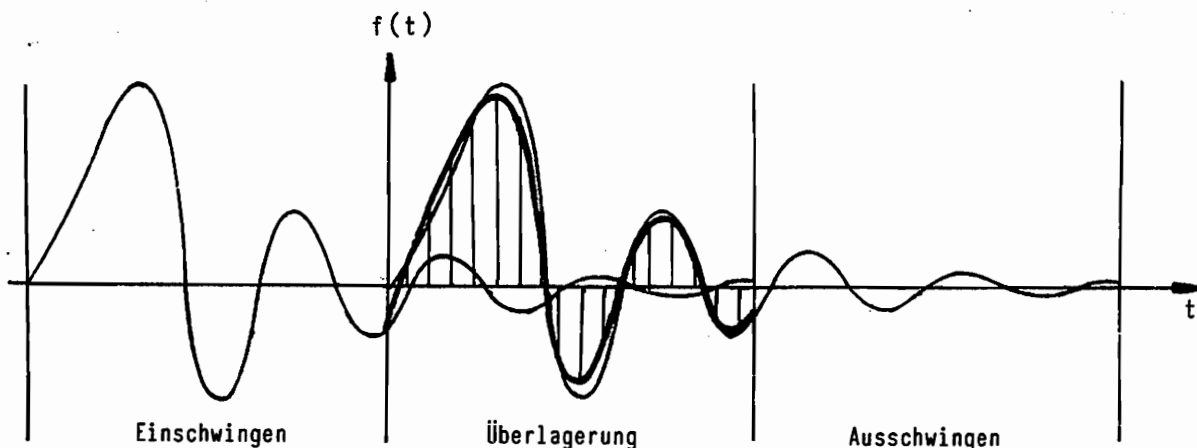


Bild 3.4 Vorperiodisierung einer Zeitfunktion

Dieses Vorgehen beruht im Prinzip auf der Tatsache, daß die DFT einer durch Verschiebung und Überlagerung periodisierten Zeitfunktion mit der FT dieser



Zeitfunktion für alle berechneten Frequenzpunkte übereinstimmt, wenn sich diese auf den durch die Abtastung begrenzten Frequenzbereich beschränkt. In diesem Fall wird das Spektrum durch seine Periodisierung nicht verändert, wie Bild (3.1) zeigt.

$$\tilde{F}_p(\omega) = \tilde{F}(\omega) \quad \text{wenn} \quad \tilde{F}(\omega < -\frac{2\pi}{T}) = F(\omega > \frac{2\pi}{T}) = 0, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(m\frac{2\pi}{T}) &= \frac{T}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k\frac{T}{N}) e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} \\ &= \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_p(n\frac{T}{N}) e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Bei der begrenzten Summe der DFT müssen also die Werte der gemessenen Funktion durch die der periodisierten gemessenen Funktion ersetzt werden, um auf das gleiche Ergebnis zu kommen. Bei dem im Bild (3.4) gezeigten Beispiel wurden zu den Funktionswerten für  $n = 0, \dots, N-1$  die Funktionswerte für  $n = n, \dots, 2N-1$  hinzuaddiert. Auf die Berücksichtigung weiterer Bereiche ( $n > 2N-1$ ) wurde hier verzichtet, weil die Funktion darin nur unwesentliche Werte aufweist. Durch wiederholtes, von vorn beginnendes Hinzuaddieren können jedoch beliebig lange Zeiträume berücksichtigt werden. Vorteilhaft ist die Vorperiodisierung bei der Bestimmung von Frequenzgängen durch Division von Ausgangs- durch Eingangsspektrum kurzzeitiger (impulsähnlicher) Erregungen, eine Methode, die heute weit verbreitet ist. Es ist dann nicht erforderlich, zugunsten einer langen Meßzeit auf eine hohe Diskretisierungsfrequenz, und damit auf ein breites Spektrum, zu verzichten; die in den stoßförmigen Erregungen enthaltenen hohen Frequenzanteile können ausgenutzt werden. Die Schwierigkeit in der Praxis besteht nur darin, daß es von der Geräteseite her möglich sein muß, entweder die größeren Datenmengen bis zum Aufaddieren zwischenspeichern, oder während des Meßvorgangs die Addition in Echtzeit vorzunehmen, was bei fertig konfektionierten Geräten oft nicht möglich sein wird.

### 3.5. Entperiodisierung

Die Umkehrung dieser Methode ist die Entperiodisierung. Sie kann angewendet werden, wenn die Schwingungsantwort auf eine kurzzeitige Erregung durch Multiplikation des Frequenzgangs mit dem Erregungsspektrum und anschließende diskrete Rücktransformation berechnet werden soll (diskrete Faltung). Bei der Entperiodisierung handelt es sich um die numerische Trennung der in der berechneten Funktion enthaltenen Schwingungsantworten für mehrere Zeitabschnitte. Das Verfahren besteht dabei aus zwei Teilen; im ersten werden die Anzahl der Zeitabschnitte, für die Näherungswerte berechnet und abgezogen werden sollen, festgelegt, und die Anfangswerte der freien Schwingung für diese Abschnitte bestimmt; im zweiten Teil werden die Funktionswerte daraus mit Hilfe der Frequenz und Dämpfungsparameter punktweise berechnet und von den durch die DFT erzeugten Werten der periodischen Zeitfunktion abgezogen.

Im Gegensatz zur Vorperiodisierung, bei der die wirklichen, gemessenen Funktionen überlagert werden, müssen hier vereinfachende Annahmen gemacht werden, die eine näherungsweise Extrapolation der Zeitfunktion ermöglichen.

Die Berücksichtigung mehrerer Eigenschwingungen bei der Extrapolation erfordert eine modale Trennung der Auslenkung am Ende des ersten, mit der DFT berechneten, Zeitabschnitts. Dazu sind die Auslenkungen an mehreren Systempunkten erforderlich. Zu beachten ist dabei jedoch, daß bei höheren Frequenzen schon eine relativ geringe Ungenauigkeit bei der Berechnung der Zeitfunktion einen schnell größer werdenden Fehler bis zur Vorzeichenumkehr zur Folge hat, was dann zu einer Verschlechterung des Gesamtergebnisses führt. In der Praxis ist es deshalb sinnvoll, von der Annahme auszugehen, daß alle Eigenschwingungen bis auf eine abgeklungen sind. Die Zulässigkeit dieser Annahme muß im Einzelfall anhand der Dämpfungsparameter überprüft werden. Bei sehr vielen Systemen ist eine Eigenschwingung (in der Regel die erste) gegenüber den übrigen extrem schwach gedämpft. Unter dieser Annahme kann nun aus dem Endwert der überlagerten periodischen Funktion der wirkliche Endwert des ersten Zeitabschnitts und damit der Startwert für die Extrapolation der Zeitfunktion iterativ berechnet werden. Weil dafür der komplexe Endwert oder Auslenkung und Geschwindigkeit nötig sind, muß die Endgeschwindigkeit z. B. durch den Differenzenquotienten berechnet werden. Im ersten Schritt wird der Funktionswert am Ende des ersten Abschnitts

gleich dem berechneten Endwert gesetzt. Damit wird der Wert am Ende des zweiten Zeitabschnitts vorausberechnet. Dieser Restwert wird vom Ausgangswert abgezogen, wodurch sich ein verbesserter Anfangswert ergibt. Ist die Schwingung sehr schwach gedämpft, so können weitere Zeitabschnitte hinzugenommen werden. Zur iterativen Verbesserung des Anfangswerts werden dann die Restwerte aller betrachteten Zeitabschnitte vom Endwert der überlagerten Funktion abgezogen. Die Zahl der Zeitabschnitte muß jedoch möglichst gering gehalten werden, damit der Fehler aus der Frequenzgenauigkeit die Vorteile des Verfahrens nicht wieder aufhebt. Eine Abschätzung der Genauigkeit mit der die Frequenz bestimmt wurde, ist deshalb sehr wichtig. Nach Abzug der Extrapolierten Zeitfunktion von der mit der DFT berechneten Ausgangsfunktion, in der diese als Überlagerung aus der prinzipbedingten Periodisierung schon enthalten war, ergibt sich eine verbesserte Näherung für die Schwingungsfunktion im ersten (betrachteten) Zeitabschnitt, deren Genauigkeit von der Güte der Rekonstruktion der überlagerten Anteile abhängt.

Diese beiden Verfahren der Vorperiodisierung und Entperiodisierung, die die Zusammenhänge zwischen der FT und der DFT ausnutzen, wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht, weil die Idee dazu erst bei der Zusammenfassung der Ergebnisse der Arbeiten entstand. Jedoch sollen es die genauen Ausführungen dem daran interessierten Leser ermöglichen, die Verfahren zu programmieren und ihre Anwendbarkeit im Einzelfall selbst zu überprüfen.

## 4. Explizite DFT-Auswertegleichungen

### 4.1. Vorbemerkungen

Die im letzten Kapitel gezeigten Beziehungen zwischen FT, FR und DFT ermöglichen die analytische Berechnung der diskreten Transformierten einer gegebenen Zeitfunktion durch Integration. Die am häufigsten in der Schwingungstechnik auftretende analytische Funktion ist die exponentiell abklingende harmonische Funktion. Freie und periodisch erregte Schwingungen linearer Systeme sind Überlagerungen solcher Funktionen, wobei im zweiten Fall die Abklingkonstante identisch Null ist.

Für die exponentiell abklingende harmonische Funktion wird deshalb im folgenden die DFT als Funktion der Frequenz und der Schwingungsparameter (Eigenfrequenz, Dämpfung, Amplitude und Phase) berechnet. Nach einer vereinfachenden Annahme wird diese Funktion in eine Gleichung zur Berechnung von Eigenfrequenz und Dämpfung (Abklingkonstante), die zusammen den komplexen Eigenwert bilden, aus den komplexen Funktionswerten an zwei Frequenzpunkten umgestellt. Die komplexe Amplitude wird damit aus einem Funktionswert berechnet. Anschließend werden diese beiden Gleichungen so erweitert, daß mehr als zwei Funktionswerte zur Berechnung der Schwingungsparameter eingesetzt werden. Auch nach der Erweiterung handelt es sich wieder um explizite Parameterbestimmungsgleichungen, die sehr einfach zu programmieren sind, sehr wenig Rechenzeit erfordern und die prinzipbedingten Schwächen anderer Verfahren nicht aufweisen, weil sie auf einer exakten Analyse der DFT basieren.

### 4.2. Analytische Berechnung der DFT

Die exponentiell abklingende harmonische Funktion lautet in komplexer Schreibweise:

$$x(t) = x_0 e^{(\Delta + i\Omega)t} + \bar{x}_0 e^{(\Delta - i\Omega)t} \quad (4.1)$$

Sie wird nur im Meßzeitintervall  $0 \leq t \leq T$  betrachtet. Die DFT dieser Funktion lautet somit bei einer Diskretisierung der Meßzeit  $T$  in  $N$

Abschnitte:

$$X(n) = \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ x_0 e^{(\Delta+i\Omega)m\frac{T}{N}} + \bar{x}_0 e^{(\Delta-i\Omega)m\frac{T}{N}} \right\} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}} \quad (4.2)$$

Die FT dieser zeitbegrenzten Funktion liefert:

$$\overset{\textcircled{1}}{X(\omega)} = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^T [x_0 e^{(\Delta+i\Omega)t} + \bar{x}_0 e^{(\Delta-i\Omega)t}] e^{-i\omega t} dt \quad (4.3)$$

$$\overset{\textcircled{2}}{X(\omega)} = \frac{x_0}{\Delta+i(\Omega-\omega)} (e^{[\Delta+i(\Omega-\omega)]T} - 1) + \frac{\bar{x}_0}{\Delta+i(-\Omega-\omega)} (e^{[\Delta+i(-\Omega-\omega)]T} - 1) \quad (4.4)$$

Die DFT ist wie die FR die Transformation einer periodischen Funktion, d. h. es werden nur die Funktionswerte für die Frequenzen berechnet, deren Periode im Meßzeitintervall ganzzahlig ist. Analog zur Variablen  $\omega$  werden auch die Schwingungsfrequenz  $\Omega$  und die Dämpfungszahl  $\Delta$  unnormiert:

$$\omega \cdot T = n 2\pi \quad (4.5)$$

$$\Omega \cdot T = b 2\pi \quad (4.6)$$

$$\Delta \cdot T = d 2\pi \quad (4.7)$$

Damit erhält die Transformierte folgende Form:

$$\overset{\textcircled{3}}{X(n)} = \frac{x_0}{d+i(b-n)} \cdot \frac{T}{2\pi} (e^{2\pi i(d+ib)} - 1) + \frac{\bar{x}_0}{d+i(-b-n)} \cdot \frac{T}{2\pi} (e^{2\pi i(d-ib)} - 1) \quad (4.8)$$

Eine ungedämpfte Schwingung mit ganzzahliger Periode  $b$  erzeugt in dieser Gleichung für  $b = n$  im ersten und für  $b = -n$  im zweiten Term den unbestimmten Ausdruck  $(\frac{0}{0})$ . Für diesen Sonderfall führt die Integration auf

die folgenden Gleichungen:

$$\overset{\textcircled{2}}{X}(n=b) = x_0 T, \quad \overset{\textcircled{2}}{X}(n=-b) = \bar{x}_0 T. \quad (4.9)$$

Das entspricht auch dem Grenzwert von Gleichung (4.8) für ( $d \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow n$ ) bzw. ( $b \rightarrow -n$ ). Die Diskretisierung der Zeitfunktion in  $N$  Einzelwerte hat zur Folge, daß das berechnete Spektrum periodisch mit der Frequenz ( $2\pi\frac{N}{T}$ ) wird:

$$\overset{\textcircled{3}}{X}(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x_0}{d+i(b-n+kN)} (e^{2\pi(d+ib)} - 1) + \frac{\bar{x}_0}{d+i(-b-n+kN)} (e^{2\pi(d-ib)} - 1) \right\}. \quad (4.10)$$

Die diskrete Rücktransformation dieses Spektrums führt an der Stelle  $t = 0$  auf den Mittelwert der beiden Grenzwerte ( $x(-0) = x(T)$ ;  $x(+0) = x(0)$ ), weil hier bei der Periodisierung ein Sprung entstanden ist. Der Einfluß dieses Unterschieds auf die Transformierte  $X(n)$  ergibt sich aus:

$$X(n) = \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ x_0 e^{2\pi(d+ib)\frac{m}{N}} + \bar{x}_0 e^{2\pi(d-ib)\frac{m}{N}} \right\} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}},$$

$$X(n) = \frac{T}{N} [x_0 + \bar{x}_0] + \frac{T}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \{ \dots \} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}, \quad (4.11)$$

$$\overset{\textcircled{3}}{X}(n) = \frac{T}{2N} [x_0 + \bar{x}_0 + x_0 e^{2\pi(d+ib)} + \bar{x}_0 e^{2\pi(d-ib)}] + \frac{T}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \{ \dots \} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}, \quad (4.12)$$

$$X(n) - \overset{\textcircled{3}}{X}(n) = \frac{T}{2N} [x_0 (1 - e^{2\pi(d+ib)}) + \bar{x}_0 (1 - e^{2\pi(d-ib)})]. \quad (4.13)$$

Damit wird die gefundene Näherungsformel zur vollständigen Beschreibung der

DFT einer abklingenden harmonischen Funktion ergänzt.

$$\begin{aligned}
 X(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x_0}{d+i(b-n+kN)} (e^{2\pi(d+ib)} - 1) \right. \\
 \left. + \frac{\bar{x}_0}{d+i(-b-n+kN)} (e^{2\pi(d-ib)} - 1) \right\} \\
 - \frac{T}{2N} [x_0 (e^{2\pi(d+ib)} - 1) + \bar{x}_0 (e^{2\pi(d-ib)} - 1)]. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Bei der DFT nimmt  $n$  nur Werte von 0 bis  $N-1$  an. Eine Schwingung mit der Frequenz  $b < N$  hat im Spektrum Betragsmaxima an den Punkten:

$$|b-N| \rightarrow \text{Min} ,$$

$$|-b-n+N| \rightarrow \text{Min} .$$

Jede Frequenz  $b > N$  erzeugt wegen der Periodizität der Frequenzfunktion im Bereich  $(0 \leq n \leq N-1)$  ebenfalls zwei Maxima. Von diesen beiden Maxima liegt eines stets im Bereich  $(0 \leq n \leq \frac{N}{2})$ , das andere im Bereich  $(\frac{N}{2} \leq n \leq N-1)$ . Das gemessene Signal sollte deshalb keine Frequenzen  $b > \frac{N}{2}$  enthalten. Diese Forderung entspricht dem Shannon'schen Abtasttheorem. Die Schwingungsfrequenz in Hz ( $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ) muß immer kleiner sein als die halbe Abtastrate  $\frac{1}{2} \frac{N}{T}$ .

$$b < \frac{N}{2} \Rightarrow \omega < \omega_s \doteq \pi \frac{N}{T} . \quad (4.15)$$

### 4.3. Aufstellung der Zwei-Punkte-Formel

Nach der Bestimmung des diskreten Spektrums als Funktion der Schwingungsparameter wird eine Umkehrung dieser Beziehung gesucht. Wegen der komplizierten Summe kann Gleichung (4.14) jedoch nicht nach den Schwingungsparametern aufgelöst werden. Es ist aber leicht zu erkennen, daß der größte Anteil der Funktion durch den ersten Term in der Summe mit dem Faktor ( $k = 0$ ) dargestellt wird. Besonders in der Nähe des Betragsmaximums

der Funktion können die übrigen Anteile vernachlässigt werden. Deshalb wird mit der folgenden Näherungsfunktion gearbeitet:

$$\tilde{X}(n) = \frac{T}{2\pi} \frac{x_0}{d+i(b-n)} (e^{2\pi(d+ib)-1}) . \quad (4.16)$$

Für den Sonderfall ( $b \in \mathbb{N}$ ,  $d = 0$ ) lautet die Frequenzfunktion:

$$X(n=b) = x_0 T ,$$

$$X(n \neq b) = 0 . \quad (4.17)$$

Zum Umstellen dieser Funktion sind zwei Funktionswerte erforderlich, weil zur Berechnung der vier Schwingungsparameter ( $b$ ,  $d$ ,  $\text{Re } x_0$ ,  $\text{Im } x_0$ ) vier Funktionswerte ( $\text{Re } \tilde{X}(n_0)$ ,  $\text{Im } \tilde{X}(n_0)$ ,  $\text{Re } \tilde{X}(n_0+1)$ ,  $\text{Im } \tilde{X}(n_0+1)$ ) benötigt werden. Die Division von zwei benachbarten Werten führt auf eine Gleichung, die sich nach den Parametern für Frequenz und Dämpfung auflösen läßt und die Amplitude nicht enthält.

$$\frac{\tilde{X}(n)}{\tilde{X}(n+1)} = \frac{d+i(b-n-1)}{d+i(b-n)} = 1 - \frac{1}{d+i(b-n)} , \quad (4.18)$$

$$b-id = n + \frac{\tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)} . \quad (4.19)$$

Es ist nicht erforderlich, zwei benachbarte Frequenzpunkte zu nehmen, jedoch ergeben sich beim Einsetzen der beiden der Schwingungsfrequenz am nächsten gelegenen Punkte die besten Ergebnisse. Diese Punkte sind gefunden, wenn  $a \pm b-n \leq 1$ ,

$$a = \text{Re} \left( \frac{\tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)} \right) . \quad (4.21)$$

Der komplexe Anfangswert der Schwingung, die Amplitude, wird anschließend unter Verwendung der schon berechneten Frequenz und Dämpfung aus einem komplexen Funktionswert bestimmt. Dazu wird Gleichung (4.16) nach  $x_0$



aufgelöst:

$$x_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{d+i(b-n)}{e^{2\pi i(d-b)} - 1} \cdot \tilde{X}(n). \quad (4.22)$$

Im Sonderfall ( $b \in \mathbb{N}$ ,  $d = 0$ ), in dem  $b$  und  $d$  auch durch Gleichung (4.19) berechnet werden, wird zur Berechnung des Anfangswertes (der Amplitude) Gleichung (4.17) nach  $x_0$  umgestellt:

$$x_0 = \frac{1}{T} \tilde{X}(n=b). \quad (4.23)$$

#### 4.4. Erweiterung zur Mehr-Punkte-Formel

Diese direkten Parameterbestimmungsgleichungen, mit denen exakte Ergebnisse aus der Näherungsfunktion  $\tilde{X}(n)$  berechnet werden, können verfälschende Einflüsse der in  $\tilde{X}(n)$  vernachlässigten Anteile der DFT-Funktion  $X(n)$  auf die ermittelten Parameter nicht unterdrücken. Schon die Addition einer Konstanten im Frequenzbereich ändert die mit den Gleichungen (4.19) und (4.21) ermittelten Parameter. Das läßt sich dadurch ändern, daß bei der Auswertung mehr als die erforderlichen zwei Werte der Frequenzfunktion benutzt werden. Die hergeleiteten Auswerteformeln lassen sich durch einfache Umformungen dahingehend erweitern. Als Beispiel soll hier die Erweiterung auf die Benutzung von drei Punkten der DFT gezeigt werden:

$$b-id-n = \frac{\tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)}, \quad (4.24)$$

$$b-id-n-1 = \frac{\tilde{X}(n)}{\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)}, \quad (4.25)$$

$$b-id-n-2 = \frac{\tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+2) - \tilde{X}(n+1)}, \quad (4.26)$$

$$\frac{b-id-n-2}{b-id-n} = \frac{\tilde{X}(n+2) - \tilde{X}(n)}{\tilde{X}(n+2) - \tilde{X}(n+1)}, \quad (4.27)$$

$$b-id = n+2 \frac{\tilde{X}(n+2) - \tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+2) - 2\tilde{X}(n+1) + \tilde{X}(n)}. \quad (4.28)$$

Diese Gleichung zur Bestimmung von Frequenz und Dämpfung hat den Vorteil, eine konstante Abweichung der Näherungsfunktion  $\tilde{X}$  von der Frequenzfunktion  $X$  nicht zu berücksichtigen. Durch die Differenzenbildung hat die Addition einer Konstanten zu  $\tilde{X}$  keinen Einfluß auf das Ergebnis. Analoge Umformungen erweitern diese Formel so, daß vier Punkte im Frequenzbereich zur Auswertung dienen.

$$b-id = n+3 \frac{\tilde{X}(n+3) - 2\tilde{X}(n+2) + \tilde{X}(n+1)}{\tilde{X}(n+3) - 3\tilde{X}(n+2) + 3\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)}. \quad (4.29)$$

Bei Verwendung dieser Gleichung beeinflußt selbst eine überlagerte lineare Frequenzfunktion das Ergebnis der Auswertung nicht mehr. Auch die Gleichungen zur Bestimmung der Amplitude können in der gleichen Form erweitert werden. Der erste Schritt der Erweiterung wird hier dargestellt:

$$\tilde{X}(n) = \frac{-ix_0}{b-id-n} \frac{T}{2\pi} (e^{2\pi(d+ib)} - 1), \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n) &= \left( \frac{-ix_0}{b-id-n-1} - \frac{-ix_0}{b-id-n} \right) \frac{T}{2\pi} (e^{2\pi(d+ib)} - 1) \\ &= \frac{-ix_0}{(b-id-n-1)(b-id-n)} \frac{T}{2\pi} (e^{2\pi(d+ib)} - 1), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$x_0 = i \frac{2\pi}{T} [\tilde{X}(n+1) - \tilde{X}(n)] \frac{(b-id-n-1)(b-id-n)}{e^{2\pi(d+ib)} - 1}. \quad (4.32)$$

Die nächste Erweiterung führt dann auf:

$$x_0 = \frac{i}{2} \frac{2\pi}{T} [\tilde{X}(n+2) - 2\tilde{X}(n+1) + \tilde{X}(n)] \frac{(b-id-n-2)(b-id-n-1)(b-id-n)}{e^{2\pi(d+ib)} - 1}. \quad (4.33)$$

Auch bei dieser Gleichung spielt eine lineare Störfunktion im Frequenzbereich keine Rolle mehr. Die berechneten Parameter sind davon unabhängig. Weil zur Erweiterung der Auswertgleichungen stets die gleichen Umformungen durchgeführt werden, entstehen Gesetzmäßigkeiten, die es ermöglichen, für diese Gleichungen allgemeine Formeln anzugeben. Die Anzahl der verwendeten Funktionswerte soll  $m$  sein:

$$b-id = n + (m-1) \frac{\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{m-2}{k-1} \tilde{X}(n+m-k)}{\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m-1}{k-1} \tilde{X}(n+m-k)}, \quad (4.34)$$

$m \geq 2,$

$$x_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{i}{(e^{2\pi(d+ib)} - 1)(m-1)!} \cdot \prod_{k=1}^m (b-id-n-m+k) \cdot \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m-1}{k-1} \tilde{X}(n+m-k), \quad (4.35)$$

$m \geq 1$

Es ist auch hier am günstigsten, wenn die der gesuchten Frequenz am nächsten liegenden Punkte bei der Auswertung mit den betragsgrößten Faktoren multipliziert werden. Das Kriterium dafür lautet:

$$\frac{m}{2} - 1 \leq b-n \leq \frac{m}{2}. \quad (4.36)$$

Charakteristikum aller dieser Gleichungen ist, daß eine überlagerte Störfunktion in Form eines Polynoms  $(m-3)$ -ten Grades bei der Frequenz- und Dämpfungsbestimmung und  $(m-2)$ -ten Grades bei der Amplitudenbestimmung die Ergebnisse der Auswertung nicht mehr beeinflußt. Durch die Erweiterung zur Mehr-Punkte-Formel ist es gelungen, die Nachteile der Vereinfachung in der

zur Herleitung benutzten Näherungsgleichung für die DFT bei der Parameterbestimmung weitgehend auszuschalten. Ist die Auswertung mit nur zwei Punkten bei großen Diskretisierungszahlen (z. B.  $N = 1024$ ) und mittleren Frequenzen (z. B.  $100 < b < 400$ ) noch so genau, daß sie für die praktische Anwendung immer ausreicht, so treten bei kleinen Diskretisierungszahlen (z. B.  $N = 32$ ) oder bei Frequenzen in der Nähe der oberen oder unteren Grenze (z. B.  $b < 5$  oder  $b > N-5$ ) dabei schon größere Fehler auf. Durch die Verwendung von nur vier Punkten tritt schon eine so wesentliche Verbesserung ein, daß die prinzipbedingten Auswertefehler weit unter den Fehlern durch Meßungenauigkeiten liegen. Das liegt daran, daß die bei der Auswertung vernachlässigten DFT-Anteile über den kleinen Frequenzbereich von nur vier Punkten annähernd linear sind.

## 5. Systematische und iterative Auswertung

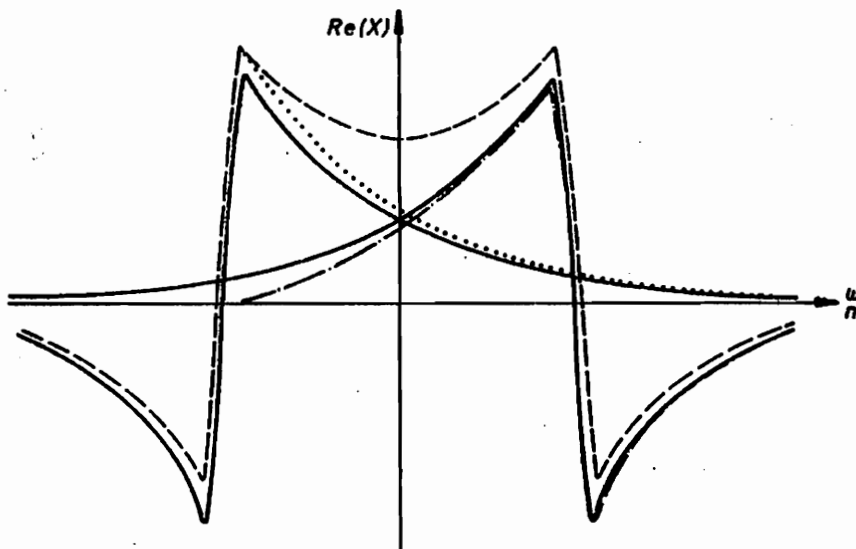
### 5.1. Vorbemerkungen

Bei den freien Schwingungen komplizierterer mechanischer Systeme treten in der Regel mehrere solcher hier betrachteten abklingenden harmonischen Funktionen gleichzeitig auf. Die gemessene Schwingung wird ja auch deshalb in den Frequenzbereich transformiert, weil damit eine Trennung der einzelnen Eigenschwingungen, die sich in der Frequenz fast immer deutlich unterscheiden, erreicht wird. Eine vollständige Trennung erfolgt dadurch jedoch nicht. Zwar treten die Maximalwerte bei der DFT immer im Bereich der gemessenen Schwingungsfrequenz auf, jedoch können die von Schwingungen großer Amplituden erzeugten Werte selbst die Spitzenwerte benachbarter schwach angeregter Schwingungen überdecken. Es ist auch praktisch nicht durchführbar, alle Eigenschwingungen eines Systems gleich stark anzuregen. Die Mehr-Punkte-Auswertung besitzt schon die Eigenschaft, wesentliche Einflüsse dieser Überlagerung zu unterdrücken, jedoch können die Ergebnisse nicht immer befriedigen. Um auch in schwierigen Fällen eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen, empfiehlt sich bei der Auswertung überlagerter Schwingungen ein systematisches Vorgehen.

Durch eine einfache Iteration können die Werte weiter verbessert werden. Die Iteration ermöglicht nämlich eine wesentliche Verringerung der verfälschenden Einflüsse der Seitenspektren (Spiegelungsfehler) und der überlagerten Schwingungen auf die ermittelten Parameter. Sie wird zunächst für den Fall einer einzelnen Schwingung beschrieben. Anschließend wird die Systematik beim Auswerten überlagerter Schwingungen vorgestellt und zum Schluß die iterative Verbesserung der Ergebnisse für diesen Fall. Die Schritte der Auswertung werden einzeln beschrieben und ihre Wirkung wird in Bildern veranschaulicht. Als Beispiele werden außerdem die jeweils einfachsten möglichen Gleichungen angegeben. Die Verwendung von Formeln höherer Ordnung ändert nämlich am Prinzip des Vorgehens nichts.

## 5.2. Iterative Auswertung einer Schwingung

Die iterative Auswertung einer Schwingung bringt besonders bei extrem niedrigen Frequenzen, wie in Bild (5.1) gezeigt, oder bei extrem hohen Frequenzen deutliche Verbesserungen der Ergebnisse.



- für Auswertung benötigte Funktion und deren gespiegelte (fehler)
- - - mit der DFT berechnete Funktion
- ..... im 1. Iterationsschritt abgezogene Näherung für den Fehler
- · - · verbesserte Funktion für die Auswertung im 2. Iterationsschritt

**Bild 5.1** Iterative Auswertung bei niedriger Frequenz

Als Startwert für die Auswertung wird das betragsgrößte Element des Spektrums gesucht:

$$|X(n_{mB})| \geq |X(n)| \quad , \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.1)$$

Eine erste Bestimmung des Frequenzparameters aus der Gleichung:

$$\tilde{b}^0 - i\tilde{d}^0 = n_{mB} + \frac{X(n_{mB}+1)}{X(n_{mB}+1) - X(n_{mB})} \quad (5.2)$$

dient zur Festlegung des optimalen Auswertepunktes:

$$n_0 \leq b < n_0 + 1. \quad (5.3)$$

Damit erfolgt die Bestimmung aller Schwingungsparameter für den ersten Iterationsschritt:

$$\tilde{b}^1 - i\tilde{d}^1 = n_0 + \frac{X(n_0+1)}{X(n_0+1) - X(n_0)}, \quad (5.4)$$

$$\tilde{x}_0^1 = \frac{2\pi}{T} \frac{\tilde{d}^1 + i(\tilde{b}^1 - n_0)}{e^{2\pi(\tilde{d}^1 + i\tilde{b}^1)} - 1} \cdot X(n_0), \quad (5.5)$$

bzw.  $\tilde{x}_0^1 = \frac{1}{T} X(n_0).$  (5.6)

Hier beginnt die iterative Verbesserung der Ergebnisse, indem versucht wird, die Einflüsse der bisher vernachlässigten Anteile der DFT auf den Funktionsverlauf zu eliminieren. Mit den Parametern aus der ersten Auswertung ( $\tilde{b}^1, \tilde{d}^1, \tilde{x}_0^1$ ) werden diese Anteile näherungsweise bestimmt. Dazu werden in Gleichung (4.14) nur die Summanden für  $k = -1, 0, 1$  berücksichtigt. Sie werden dann von den benutzten Spektralwerten abgezogen:

$$\begin{aligned} \hat{X}(n) = X(n) - \frac{T}{2\pi} & \left[ \left( \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + i(\tilde{b}^1 - n - N)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + i(\tilde{b}^1 - n + N)} \right) (e^{2\pi(\tilde{d}^1 + i\tilde{b}^1)} - 1) \right. \\ & + \left( \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + i(-\tilde{b}^1 - n - N)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + i(-\tilde{b}^1 - n)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + i(-\tilde{b}^1 - n + N)} \right) (e^{2\pi(\tilde{d}^1 - i\tilde{b}^1)} - 1) \\ & \left. + \frac{T}{2N} [\tilde{x}_0^1 (e^{2\pi(\tilde{d}^1 + i\tilde{b}^1)} - 1) + \tilde{x}_0^1 (e^{2\pi(\tilde{d}^1 - i\tilde{b}^1)} - 1)] \right]. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Durch Abzug der gepunktet gezeichneten Näherungskurve, Bild (5.1), vom gestrichelt dargestellten DFT-Funktionsverlauf wird eine wesentlich bessere Annäherung (strichpunktierte Linie) an die optimale Funktion (durchgezogene Linie) erreicht.

Im zweiten Iterationsschritt erfolgt die Bestimmung der Schwingungsparameter wieder mit den Gleichungen (5.4) bis (5.6), aber unter Verwendung

der korrigierten Funktionswerte.

$$\tilde{b}^2 - i\tilde{d}^2 = n_0 + \frac{\overset{*1}{X}(n_0+1)}{\overset{*1}{X}(n_0+1) - \overset{*1}{X}(n_0)}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{x}_0^2 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tilde{d}^1 + i(\tilde{b}^1 - n_0)}{e^{2\pi(\tilde{d}^1 + i\tilde{b}^1)} - 1} \overset{*1}{X}(n_0), \quad (5.9)$$

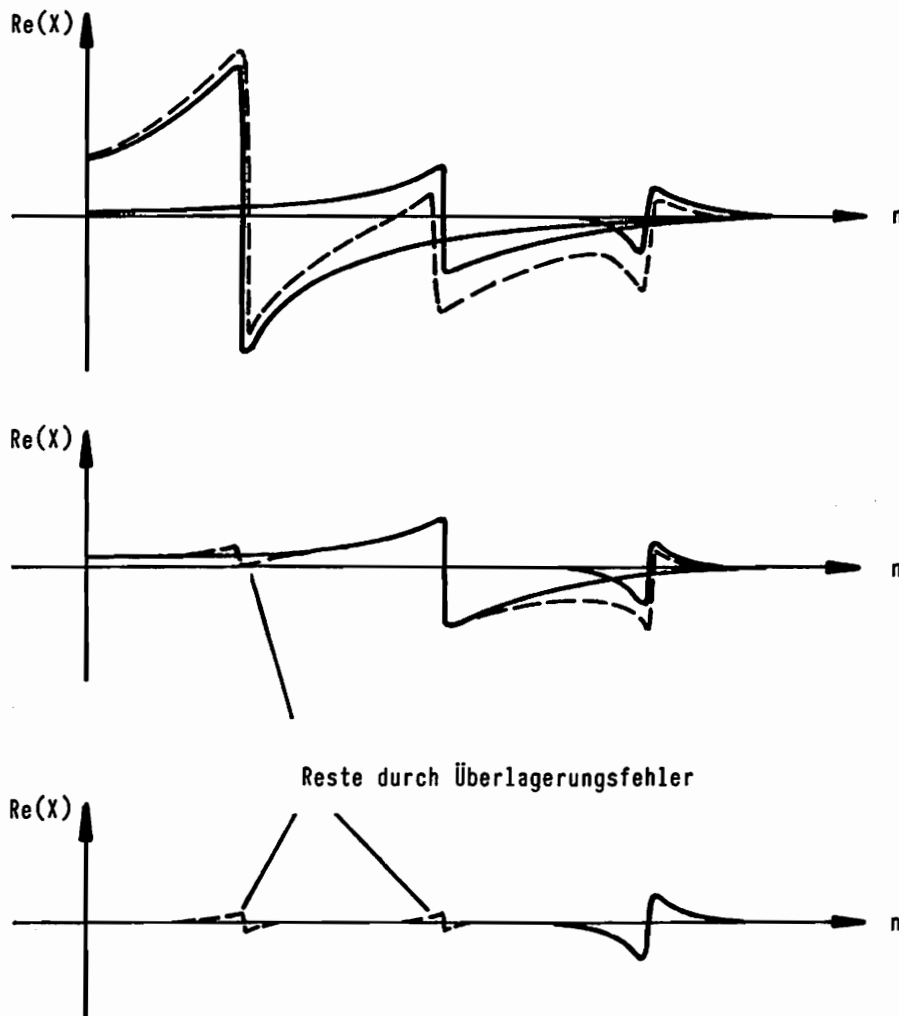
bzw.  $\tilde{x}_0^2 = \frac{1}{T} \overset{*1}{X}(n_0).$  (5.10)

Die Korrektur des Funktionsverlaufs mit den ermittelten Parametern und die anschließende verbesserte Auswertung können beliebig oft wiederholt werden, jedoch steigt die Genauigkeit dadurch nur bis zu einer bestimmten Grenze, weil in Gleichung (5.7) Vereinfachungen durch den Abbruch der Summe gemacht wurden. Durch Hinzunahme weiterer Summenglieder kann die Auswertung theoretisch bis zur Rechengenauigkeit gesteigert werden. Das gilt jedoch nur für rechnerisch erzeugte Testfunktionen, weil dabei keine Übertragungsfehler von Meßgeräten vorhanden sind. Auf die durch diese hervorgerufenen Streuungen der Ergebnisse wird im nächsten Kapitel eingegangen.

### 5.3. Systematische Auswertung überlagerter Schwingungen

Das systematische Vorgehen bei der Auswertung mehrerer überlagerter Schwingungen wird in Bild (5.2) dargestellt. Die Reihenfolge bei der Parameterbestimmung der einzelnen Schwingungen richtet sich dabei nach der Größe der Spitzenwerte der DFT. Die Untersuchung der ersten Schwingung erfolgt wie im vorigen Abschnitt für den Fall einer Schwingung beschrieben. Der Einfluß dieser Schwingung auf den gesamten Verlauf der DFT läßt sich, so gut es die Genauigkeit der ermittelten Parameter erlaubt, eliminieren. Dazu wird eine Gleichung ähnlich (5.7) verwendet, bei der der zentrale Anteil der Kurve jedoch nicht ausgespart ist.





**Bild 5.2** Systematische Auswertung bei 3 Schwingungen

Die Näherungswerte der ersten Parameter seien  $\tilde{x}_{01}^1$ ,  $\tilde{b}_1^1$ ,  $\tilde{d}_1^1$ .

$$\begin{aligned} \tilde{X}^1(n) = X(n) - \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-1}^{+1} \left\{ \left( \frac{\tilde{x}_{01}^1}{\tilde{d}_1^1 - i(\tilde{b}_1^1 - n + kN)} \right) (e^{2\pi(\tilde{d}_1^1 + i\tilde{b}_1^1)} - 1) \right. \\ \left. + \left( \frac{\tilde{x}_{01}^1}{\tilde{d}_1^1 - i(-\tilde{b}_1^1 - n + kN)} \right) (e^{2\pi(\tilde{d}_1^1 - i\tilde{b}_1^1)} - 1) \right\} \\ + \frac{T}{2N} [\tilde{x}_{01}^1 (e^{2\pi(\tilde{d}_1^1 + i\tilde{b}_1^1)} - 1) + \tilde{x}_{01}^1 (e^{2\pi(\tilde{d}_1^1 - i\tilde{b}_1^1)} - 1)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

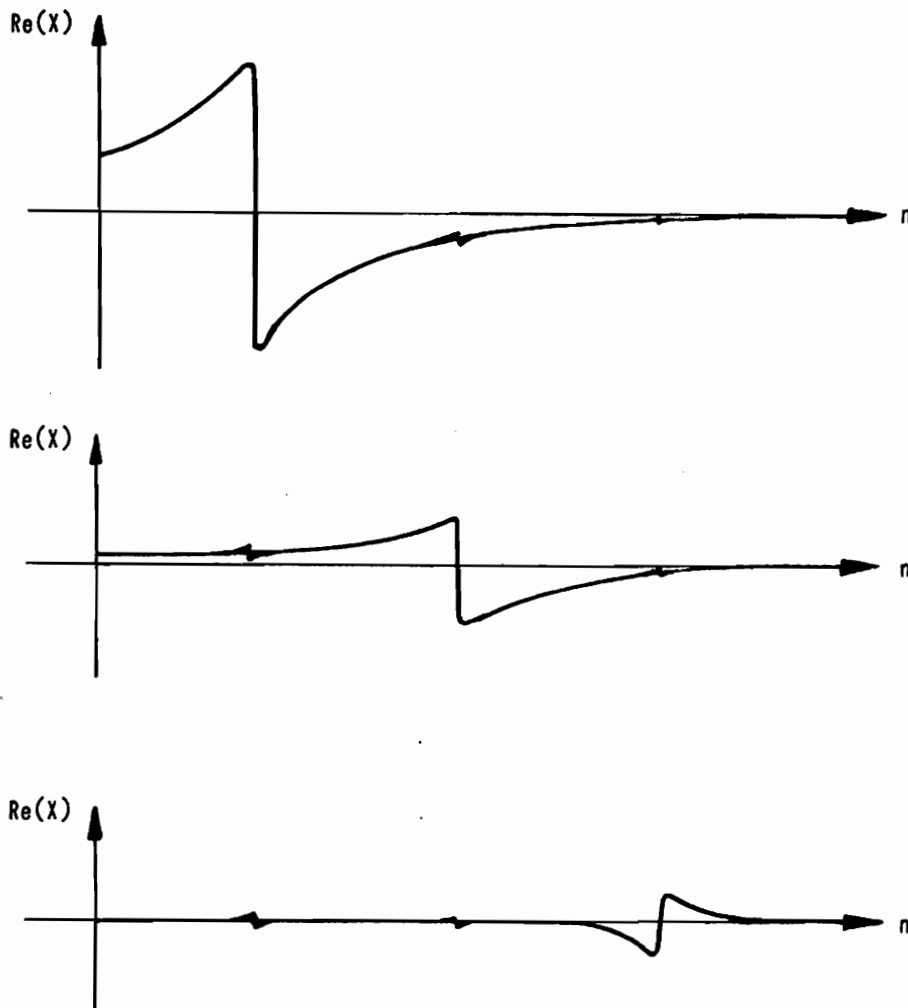
Die Funktion  $\overset{\circ 1}{X}(n)$  wird im folgenden behandelt wie im vorhergehenden die Funktion  $X(n)$ . Eine Identifikation der betragsgrößten Schwingung von  $\overset{\circ 1}{X}(n)$  ist somit eine Identifikation der zweitgrößten Schwingung in  $X(n)$ . In Bild (5.2) ist zu erkennen, daß von der zuerst untersuchten Schwingung im Frequenzbereich nur ein kleiner Rest übrigbleibt, der bei den Frequenzen der anderen Schwingungen praktisch vernachlässigbar ist. Nach dem Eliminieren der zweiten Schwingung kann die dritte schon als ungestört angesehen werden. Sind noch mehr Schwingungen als in diesem Beispiel vorhanden, so wird das Vorgehen fortgesetzt, bis sich bei der Parameterbestimmung unsinnige Werte einstellen. Um diese zu erkennen, müssen bei der Programmierung sinnvolle Kriterien ausgewählt werden. Einige davon, die die häufigsten Fälle abdecken, sollen hier genannt werden:

- 1) Der gefundene Maximalwert unterschreitet eine bestimmte Grenze. Punkte, die sich nur unwesentlich aus dem Rauschen herausheben, können keine brauchbaren Schwingungsparameter liefern.
- 2) Der Wert für die Dämpfung ist zu hoch oder hat das falsche Vorzeichen. Solche Werte können entstehen, wenn zur Parameterbestimmung einige Werte des Rauschens benutzt werden.
- 3) Der Wert für die Schwingungsfrequenz liegt nicht direkt bei dem Betragsmaximum. Auch dieses ist ein häufiges Kennzeichen des Rauschens.
- 4) Der Maximalwert liegt dicht bei einer vorher ermittelten Schwingungsfrequenz. Bei diesem sehr häufigen Fall werden die Reste einer der ersten Schwingungen als Maximum einer weiteren Schwingung gedeutet.
- 5) Die ermittelte Schwingungsfrequenz ist genau das zwei- oder dreifache einer der Grundfrequenzen. Diese Oberwellen werden in der Regel von den Meßgeräten und -verstärkern erzeugt und stellen keine Systemschwingungen dar.

#### **5.4. Iterative Auswertung überlagerter Schwingungen**

Die Ergebnisse dieser systematischen Auswertung sind in der Regel hinreichend genau. Liegen jedoch die Frequenzen zweier Schwingungen dicht nebeneinander und unterscheiden sich deren Amplituden nur wenig, so treten bei den ermittelten Parametern größere Fehler auf. Diese Überlagerungsfehler können durch iteratives Neuauswerten beseitigt werden. Graphisch veran-

schaulich wird dieses in Bild (5.3). Die Reihenfolge bei der iterativen



**Bild 5.3** Verbesserte Auswertung durch Iterationsverfahren

Neuauswertung ist die gleiche wie bei der ersten Auswertung. Von den zur Untersuchung der ersten Schwingung benutzten Funktionswerten werden sämtliche Nebeneinflüsse abgezogen, bevor die Parameter erneut berechnet werden. Zuerst werden dazu mit Hilfe von Gleichung (5.7) die konjugiert komplexen und die periodischen Anteile der ersten Schwingung von den Funktionswerten abgezogen. Durch mehrfaches Anwenden von Gleichung (5.10) werden nacheinander die Einflüsse der übrigen identifizierten Schwingungen eliminiert. Es ist deutlich zu erkennen, wieviel besser die übriggebliebene Funktion dem optimalen Funktionsverlauf entspricht. Dementsprechend haben sich auch die jetzt ermittelten Parameter dieser Schwingung verbessert. Auf die gleiche

Art werden auch die Parameter der anderen Schwingungen erneut berechnet. Weil zur Elimination der störenden Überlagerungen immer die zuletzt berechneten (besten) Näherungen der Schwingungsparameter benutzt werden, konvergieren die ermittelten Werte schnell gegen die wirklichen Parameter. Auch in schwierigen Fällen sind nur selten mehr als drei solcher Iterationszyklen nötig, um eine ausreichende Genauigkeit zu erzielen. Zu beachten ist, daß die Auswertgleichungen in der Regel dann falsche Ergebnisse liefern, wenn die Spitzenwerte von zwei Schwingungen gleichzeitig erfaßt werden. Eine Auswertung mit nur zwei Punkten ist deshalb in diesen Fällen empfehlenswert. Zur Sicherheit sollte deshalb immer ein Frequenzpunkt zwischen den beiden Spitzenwertpaaren liegen:

$$\begin{aligned} n_1 \leq b_1 \leq n_1 + 1 \quad , \quad n_2 \leq b_2 \leq n_2 + 1 \\ \Rightarrow n_2 \stackrel{!}{\geq} n_1 + 3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.5. Auswertung einer Schwingung mit Gleitfrequenz

Das angegebene Verfahren zur Auswertung von Schwingungen, die sich näherungsweise durch die Überlagerung einer begrenzten Anzahl exponentiell abklingender harmonischer Funktionen beschreiben lassen, kann auch bei der Anregung einer Schwingung durch eine Sinusfunktion mit sich langsam ändernder Frequenz angewendet werden. Dazu werden jeweils sehr kleine Ausschnitte mit nur wenigen Diskretisierungspunkten (z. B. 32) transformiert und ausgewertet. Somit werden punktweise die Frequenzgänge der untersuchten Systeme bestimmt.

### 5.6. Auswertung komplexer Schwingungen

Die in der Rotordynamik häufig auftretenden komplexen Schwingungen können auf die gleiche Art wie die reellen Schwingungen ausgewertet werden. Bei der Programmierung sind nur einige Unterschiede zu berücksichtigen. Im Spektrum komplexer Schwingungen fehlen die konjugiert komplexen Ergänzungen, sie sind

deshalb bei der Programmierung aus den Gleichungen für die Iteration herauszulassen. Dafür erweitert sich der zu betrachtende Bereich von  $(n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1)$  auf  $(n = 0 \dots N - 1)$ . Bei der Berechnung der Frequenz ist allerdings zu berücksichtigen, daß der Bereich  $n > \frac{N}{2}$  die negativen Schwingungsfrequenzen beschreibt. Die wirkliche Frequenz  $b^1$  ergibt sich aus dem mit Gleichung (5.4) ermittelten Wert  $\tilde{b}^1$  durch:

$$\begin{aligned} b^1 &= \tilde{b}^1 & \text{für } 0 < \tilde{b}^1 < \frac{N}{2}, \\ b^1 &= \tilde{b}^1 - N & \text{für } \frac{N}{2} < \tilde{b}^1 < N. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die übrigen Parameter brauchen nicht umgerechnet zu werden.

## 6. Störanfälligkeit

### 6.1. Eingrenzung der Störungen

Eine der ersten Fragen, die bei einem neuen Meß- oder Auswerteverfahren auftauchen, ist die Frage nach der Anfälligkeit der Ergebnisse gegen Störungen, die beim Messen unvermeidbar sind. Bei der Herleitung des Verfahrens ist nicht nur ein einmaliges Verhalten des Systems (die Schwingung wird durch die angesetzte Funktion exakt beschrieben) sondern auch eine ideale Meßkette (die zur Auswertung benutzten Zahlenwerte geben genau die Auslenkung des Systems wieder) angenommen worden.

Wird davon ausgegangen, daß die erste Annahme unzutreffend war, so ist es erforderlich, neue Ansätze zur Beschreibung der Schwingung zu machen, die natürlich andere Funktionen mit anderen Parametern enthalten. Es bieten sich dann drei Lösungswege zur Untersuchung solcher Schwingungen an:

- 1) Die Verwendung von Parameteranpassungsverfahren
- 2) Die Herleitung angepaßter Auswertegleichungen analog zum hier beschriebenen Verfahren, ausgehend von der analytischen Lösung
- 3) Die Verwendung der hier beschriebenen Auswertung zur Bestimmung von Näherungslösungen und die Berechnung der wirklichen Parameter aus systematischen Abweichungen bei den ermittelten Werten

Solche Abweichungen - das haben Versuche gezeigt - treten besonders deutlich bei den Dämpfungs- und Phasenwerten auf. Die Ergebnisse hängen dann sehr stark davon ab, ob mit 2, 3, 4 oder 5 Punkten ausgewertet wurde, während innerhalb einer Meßreihe bei Auswertung mit einer festgelegten Punktezahl nur geringe Streuungen auftreten. Der ermittelte Dämpfungsparameter kann auch von der Größe der Amplitude abhängen. Die Interpretation solcher Abweichungen setzt eine genaue Voruntersuchung der Zusammenhänge zwischen der angesetzten Schwingungsfunktion und den systematischen Parameteränderungen voraus, die im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt worden ist.

Die zweite Annahme (einer idealen Meßkette) stellt sich im Gegensatz zur ersten in der Praxis als nicht annähernd erreichbar heraus. Auf dem Meßweg vom Schwinger zum Rechner treten hauptsächlich drei die Meßwerte verfälschende Effekte in Erscheinung:

- 1) Die Meßwertaufnehmer, die die mechanischen in proportionale elektrische Größen umwandeln sollen, weisen häufig ein nichtlineares Übertragungsverhal-

ten auf. Auch die erforderlichen Verstärker und analogen Filter verzerren die Funktion noch zum Teil.

2) Alle in der Meßkette verwendeten elektronischen Schaltungen und Übertragungselemente erzeugen zusätzlich ein zufälliges Rauschen, das sich den Meßwerten überlagert und diese dadurch teilweise stark verändert.

3) Auch im letzten Schritt vor der rein digitalen Verarbeitung der Meßwerte, der A/D-Wandlung, treten Verfälschungen auf, weil die A/D-Wandler in Spannungsstufen arbeiten, die im Vergleich zur Rechengenauigkeit sehr grob sind, und bei schwachen Meßwerten schon optisch erkannt werden können.

Der Inhalt dieses Kapitels ist die Untersuchung des Einflusses von Störungen der hier beschriebenen Art auf die Genauigkeit der Auswertung mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren.

## 6.2. Untersuchungsmethoden

Die Untersuchung der Störanfälligkeit erfolgte rein numerisch in Testreihen von jeweils 100 Auswertungen für einen einzelnen Fall. Die Vorgabewerte für die Schwingungsparameter wurden von einem Zufallsgeneratorprogramm innerhalb genau vorgegebener Grenzen erzeugt, die Störungen zu der ungestörten Zeitfunktion hinzugerechnet. Nach der Auswertung wurden die Parameterfehler berechnet und in Bildern aufgetragen. Um zu einer umfassenden Aussage über die Anfälligkeit der Auswertung gegen die hier beschriebenen Störungen zu gelangen, wurden neben der Art und Größe der jeweiligen Störung noch folgende Parameter unabhängig voneinander variiert, weil die Empfindlichkeit der Auswertung zum Teil sehr stark von ihnen abhängt:

1) Der Frequenzbereich, weil Frequenzen im mittleren Bereich eine genauere Auswertung ermöglichen, als Frequenzen nahe der unteren oder oberen Grenze.

2) Der Dämpfungswert, weil schnell abklingende Schwingungen schneller im Rauschen untergehen und durch die grobe Digitalisierung nicht mehr genau wiedergegeben werden.

3) Die Auswertepunktzahl, weil die Störanfälligkeit ganz entscheidend von ihr abhängt.

4) Die Transformationspunktzahl, weil eine geringe Auflösung größere prinzipielle Fehler zur Folge hat.

5) Die Zusatzdämpfung eines Exponentialfensters, weil damit ein Abklingen

der Störungen erreicht wird, die die Meßwerte zum Schluß schon überdecken können.

Die Abhängigkeit der Auswertefehler von der Veränderung der einzelnen Parameter ist für unterschiedliche Störungen untersucht worden, dafür sind am Ende des Kapitels nur einige typische Beispiele angegeben.

### **6.3. Abhängigkeit des Fehlers von verschiedenen Parametern**

Die Abhängigkeit des Fehlers von der Zahl der Diskretisierungspunkte wird in diesem Kapitel nicht genauer angegeben. Zwar wird die Auswertung besonders mit nur zwei Punkten bei abnehmender Diskretisierungszahl ungenauer, jedoch wird davon nur der prinzipielle Fehler der Auswertung, aber nicht die Störanfälligkeit beeinflusst. Den gleichen Einfluß hat die Wahl des Frequenzbereichs, was sich schon daran erkennen läßt, daß bei extremen Frequenzen, wie bei kleinen Diskretisierungszahlen der Spiegelungsfehler den Funktionsverlauf stark verändert. Bei den Berechnungen, die zu den gezeigten Kurven geführt haben, wurden deshalb 512 Zeitdiskretisierungspunkte gewählt, die eine Frequenzauflösung von 256 Punkten unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse zur Folge haben. Untersucht wurden der mittlere Frequenzbereich mit einer Periodenzahl zwischen 10 und 245 und der untere Frequenzbereich von 1 bis 10 Perioden, der in der Auswertegenauigkeit dem Bereich von 246 bis 255 Perioden entspricht. Für die Dämpfung wurden ebenfalls zwei Bereiche vorgegeben. Im einen Fall handelte es sich um sehr schwach gedämpfte Schwingungen mit einer Abklingkonstanten von 0 bis 0,2 und im anderen Fall um eine große Abklingkonstante zwischen 1 und 1,3. Die Dämpfung hat auf die Auswertegenauigkeit einen noch wesentlich stärkeren Einfluß als die Frequenz. Bei zunehmender Dämpfung vergrößert sich nicht nur der prinzipielle Auswertefehler, sondern auch die Empfindlichkeit gegenüber Rauschen und Diskretisierungsfehlern. Der prinzipielle Auswertefehler (Fehler bei ungestörter Zeitfunktion) nimmt durch die Verbreiterung des Spektrums zu, nämlich durch die vergrößerten Werte der verschobenen Spektren (Spiegelungsfehler) und die gleichzeitige Abflachung der Spitzenwerte. Die Empfindlichkeit der Auswertung gegenüber Rauschen und Diskretisierungsfehlern hängt ab von der mittleren Verfälschung der Funktionswerte im Meßzeitraum, weil durch die (Integral-) Transformation die gesamte (gemessene) Zeitfunktion



zur Auswertung benutzt wird. Da sich aber die angegebenen relativen Störungen immer auf den Anfangswert beziehen, ist der Einfluß auf Schwingungen mit schnell abklingender Amplitude wesentlich stärker als auf Schwingungen mit näherungsweise konstanter Amplitude. Anders ist dies bei einer Verzerrung durch eine nichtlineare Kennlinie, weil die relative Verzerrung der Schwingung bei abnehmender Amplitude ebenfalls kleiner wird. Es ist jedoch trotzdem sinnvoll, die Fehler auf den Maximalwert der Amplitude zu beziehen, weil der Maximalwert durch die Aussteuerbarkeit der Verstärker und des A/D-Wandlers begrenzt ist. Entscheidend für den Fehler bei der Auswertung gestörter Meßwerte ist auch die Zahl der benutzten Frequenzpunkte. Gezeigt wird das am Beispiel der durch Rauschen gestörten Funktion, für die Auswertungen mit 2, 4 und 7 Punkten angegeben sind. Deutlich ist zu erkennen, daß der prinzipielle Auswertefehler bei mittleren Frequenzen mit zunehmender Punktezahl zwar geringer wird, die Empfindlichkeit gegenüber Störungen sich jedoch vergrößert. Bei extrem niedrigen oder hohen Frequenzen steigt auch der prinzipielle Fehler stark an. Da außerdem in Fällen starker Dämpfung die Auswertung schon bei geringen Störungen abbricht, kann die Verwendung größerer Punktezahlen nicht empfohlen werden. Beonders bei schwächeren Störungen stellt eine Auswertung mit 4 Punkten in den meisten Fällen den besten Kompromiß dar. Eine Auswertung mit nur 2 Punkten kann in Fällen extrem starker Störungen von Vorteil sein.

#### 6.4. Angabe der Fehler

Wichtig für die Übertragbarkeit der Ergebnisse dieser Störungsrechnung ist die Angabe der Parameterfehler in Größen, die von den sonstigen Randbedingungen der Versuche, wie Abtastfrequenz, Diskretisierungszahl oder Größe der Amplituden nicht abhängen. Als Maß für den Fehler sind jeweils zwei Kurven angegeben, die erkennen lassen, ob der mittlere Fehler durch eine gleichmäßige Streuung der Ergebnisse oder durch wenige stark abweichende Werte hervorgerufen wird. Für die Frequenz- und Dämpfungsparameter sind die Abweichungen der normierten Größen  $b$  und  $d$  angegeben:

$$\sigma_{b1} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\tilde{b}_k - b_k| \quad , \quad \sigma_{b2} = \sigma_{b1} + \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (|\tilde{b}_k - b_k| - \sigma_{b1})^2} \quad , \quad (6.1)$$

$$\sigma_{d1} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\tilde{d}_k - d_k| \quad , \quad \sigma_{d2} = \sigma_{d1} + \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (|\tilde{d}_k - d_k| - \sigma_{d1})^2} \quad (6.2)$$

Die komplexe Amplitude wurde aufgespalten in Betrag und Phasenwinkel, wobei für den Betrag der relative Fehler angegeben ist:

$$x_0 = |x_0| e^{i\varphi} \quad , \quad \tilde{x}_0 = |\tilde{x}_0| e^{i\tilde{\varphi}} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left| \frac{|\tilde{x}_{0k}| - |x_{0k}|}{|x_{0k}|} \right| \quad , \quad \sigma_{x2} = \sigma_{x1} + \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M \left( \left| \frac{|\tilde{x}_{0k}| - |x_{0k}|}{|x_{0k}|} \right| - \sigma_{x1} \right)^2} \quad (6.4)$$

$$\sigma_{\varphi1} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\tilde{\varphi}_k - \varphi_k| \quad , \quad \sigma_{\varphi2} = \sigma_{\varphi1} + \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (|\tilde{\varphi}_k - \varphi_k| - \sigma_{\varphi1})^2} \quad (6.5)$$

Mit Hilfe der gemessenen Amplitude  $\tilde{x}_0$  und der Meßzeit T lassen sich die normierten Größen für den Einzelfall leicht umrechnen. Es wurden bei 512 Diskretisierungspunkten mit jeweils 10 unterschiedlich starken Störungen in je 100 Beispielen die folgenden 4 Fälle durchgerechnet und ausgewertet:

Fall 1:  $10 \leq b \leq 245$  ,  $0 \leq d \leq 0,2$

Fall 2:  $1 \leq b \leq 10$  ,  $0 \leq d \leq 0,2$

Fall 3:  $10 \leq b \leq 245$  ,  $1 \leq d \leq 1,3$

Fall 4:  $1 \leq b \leq 10$  ,  $1 \leq d \leq 1,3$

## 6.5. Fehler bei unterschiedlichen Störungen

### 6.5.1. Rauschen

Das Rauschen der Meßkette wurde mit Hilfe eines Programms zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen simuliert, die zu der ungestörten Funktion addiert wurden. Als Maß für das Rauschen ist hier das Verhältnis zwischen der Standardabweichung der Zufallswerte und dem Betrag der Amplitude angegeben:

$$\xi_R = \frac{1}{2|x_0|} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (y_n^* - x_n)^2} \quad (6.6)$$

Zum Vergleich wurden die Auswertungen mit 2, 4 und 7 Punkten vorgenommen:

----- 2 Punkte

————— 4 Punkte

----- 7 Punkte

### 6.5.2. Digitalisierungsfehler

Das mangelhafte Auflösungsvermögen der A/D-Wandler wird durch ein Programm zur Rundung der erzeugten Funktionswerte simuliert. Die Schrittweite wird auch bezogen auf die Amplitude angegeben:

$$|\bar{x}^* - x| \leq \frac{x_D}{2} \quad \text{mit} \quad \bar{x}^* = k \cdot x_D, \quad (6.7)$$

$$\xi_D = \frac{x_D}{2|x_0|}. \quad (6.8)$$

Die Auswertung erfolgte nur mit der 4-Punkte-Formel. Die Abhängigkeit des Fehlers von der Störgröße war auch in diesem Fall linear.

### 6.5.3. Nichtlineare Kennlinie

Die für die Simulation der Verzerrung angesetzte nichtlineare Kennlinie entsprach der Kennlinie der bei den Messungen an Balken und Kreisringplatte verwendeten kapazitiven Wegaufnehmer. Eine solche umgekehrt proportionale Beziehung zwischen Meßwert und Meßgröße tritt immer bei der berührungslosen Abtastung mit Hilfe elektrischer oder magnetischer Felder auf. Die scheinbare Auslenkung ( $\bar{x}^*$ ) ergibt sich dann als Funktion der wirklichen Auslenkung ( $x$ ) und des Abstands ( $a$ ) vom Aufnehmer:

$$\bar{x}^* = a - \frac{a^2}{a+x}, \quad (6.9)$$

oder als abgebrochene Taylor-Reihe:

$$\bar{x}^* = x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}. \quad (6.10)$$

Die Größe der Verzerrung hängt dabei vom Verhältnis zwischen Abstand und Amplitude ab, welches sich in der Praxis leicht feststellen läßt.

$$A = \frac{a}{x_{max}} = \frac{a}{2|x_0|} . \quad (6.11)$$

Damit ist auch die maximale Amplitudenverzerrung gegeben:

$$\xi_v = \frac{2|x_0|}{a} + \frac{(2|x_0|)^2}{a^2} + \frac{(2|x_0|)^3}{a^3} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^3} \approx \frac{1}{A} . \quad (6.12)$$

Im Gegensatz zu den beiden anderen Störungsarten erzeugt die Verzerrung einen nicht proportionalen Fehler bei den ermittelten Schwingungsparametern.

#### 6.5.4. Überlagerte Störungen

Weil die untersuchten Störungen nicht getrennt sondern immer gleichzeitig, aber von Fall zu Fall in unterschiedlichen Stärken auftreten, wurden auch die Fehler bei überlagerten Störungen untersucht. Es zeigte sich, daß sich die Einzelfehler für die vorhandenen Störungen addieren, wie auch der Fehler für den ungestörten Fall und der Anteil aus den Störungen. Eine Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit bei der Anwendung des vorgestellten Auswerteverfahrens kann also, wenn die Störungen der verwendeten Meßkette ihrer Größe nach bekannt sind, anhand der vorgestellten Bilder vorgenommen werden. Es muß dabei jedoch außerdem beachtet werden, daß andere Einflüsse, wie das Einschwingverhalten der verwendeten Verstärker, die Ergebnisse noch zusätzlich verfälschen können.

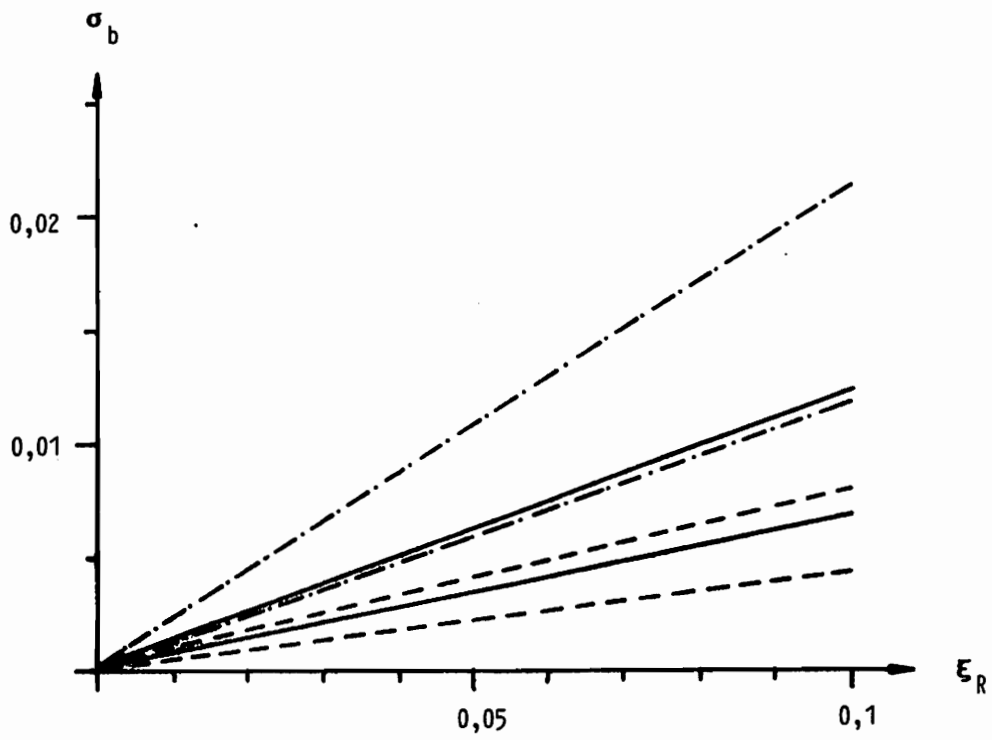


Bild 6.1 Frequenzfehler im Fall 1 durch Rauschen

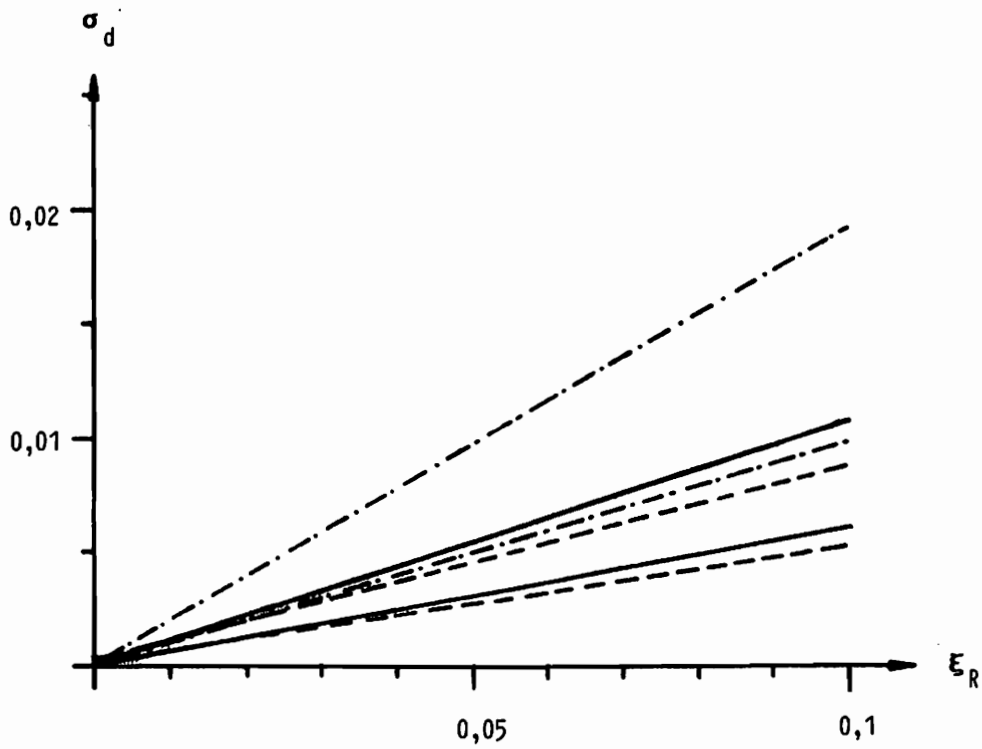


Bild 6.2 Dämpfungsfehler im Fall 1 durch Rauschen

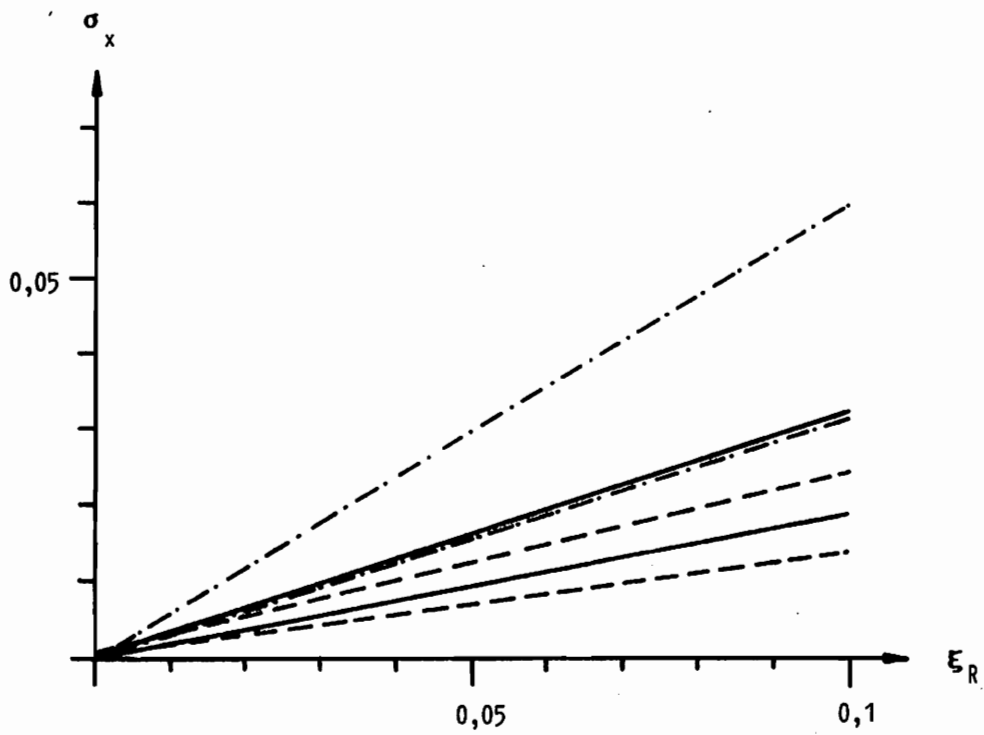


Bild 6.3 Amplitudenfehler im Fall 1 durch Rauschen

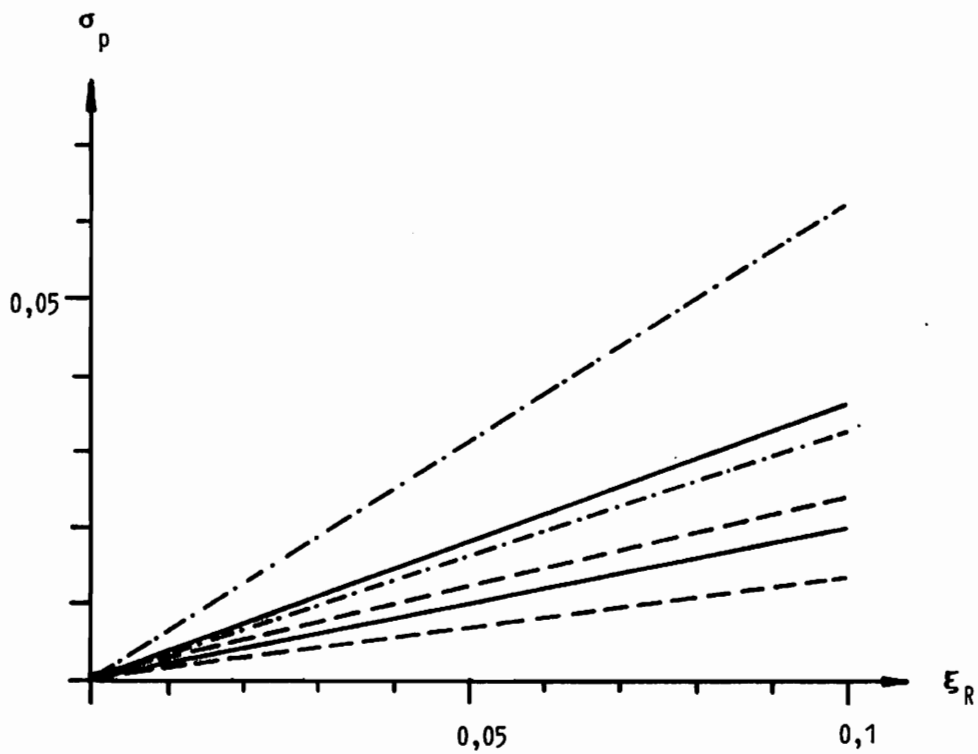


Bild 6.4 Phasenfehler im Fall 1 durch Rauschen

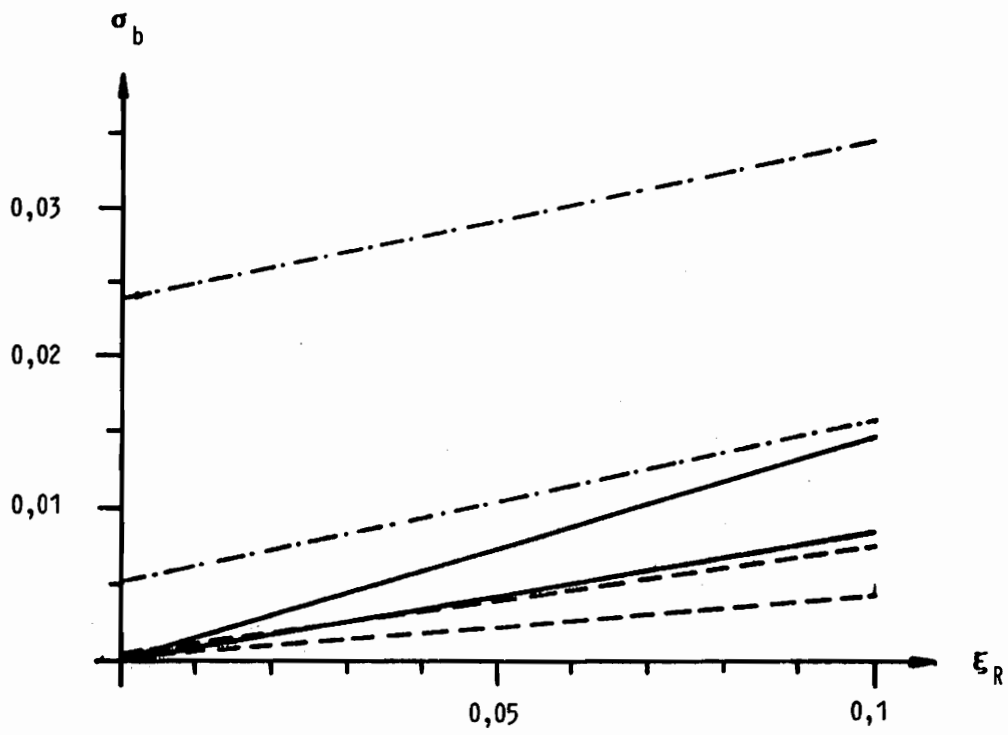


Bild 6.5 Frequenzfehler im Fall 2 durch Rauschen

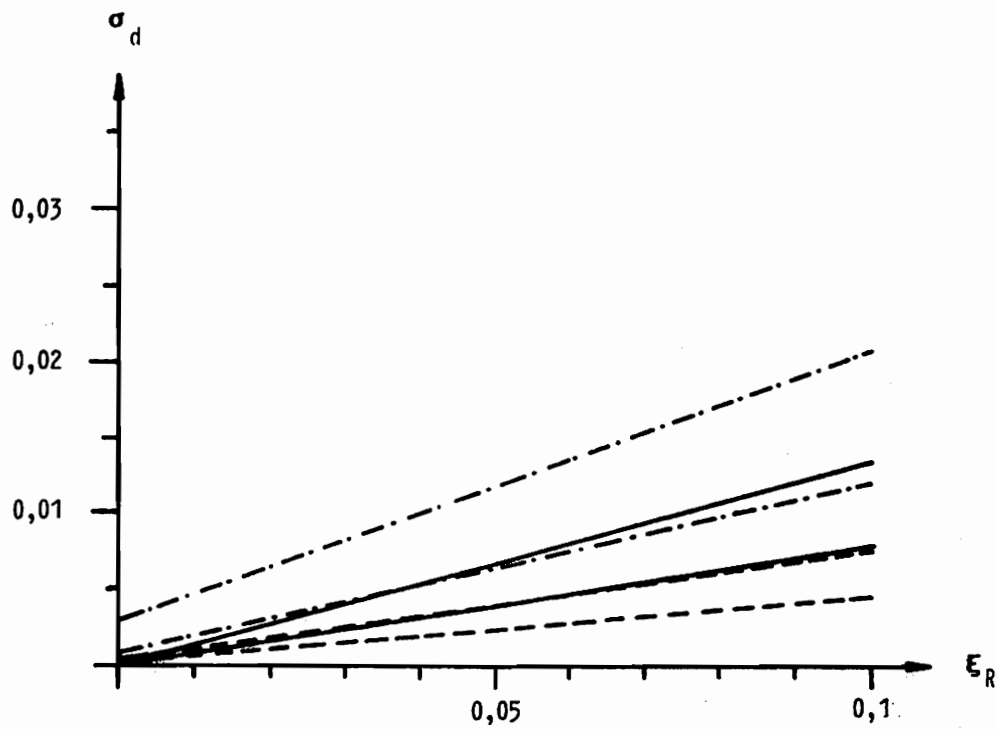


Bild 6.6 Dämpfungsfehler im Fall 2 durch Rauschen

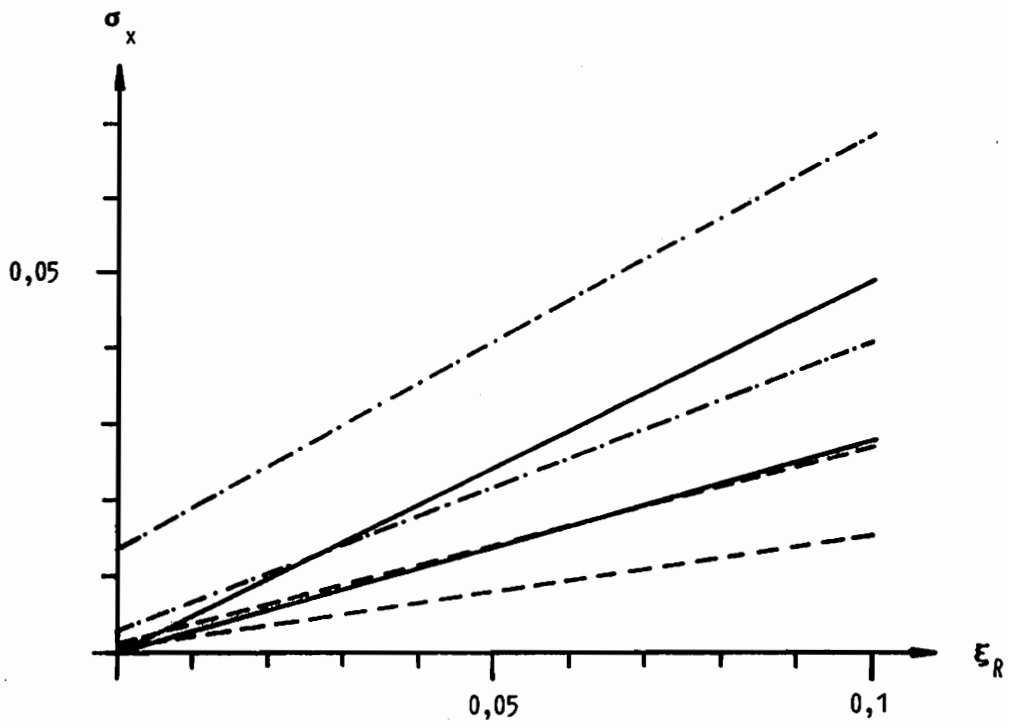


Bild 6.7 Amplitudenfehler im Fall 2 durch Rauschen

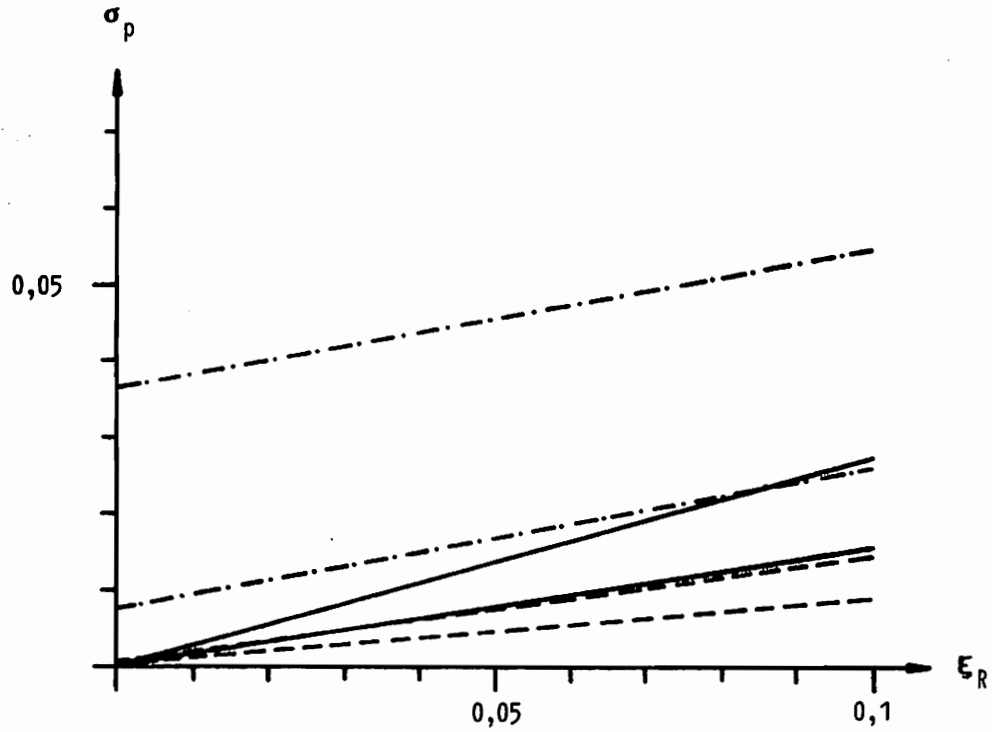


Bild 6.8 Phasenfehler im Fall 2 durch Rauschen



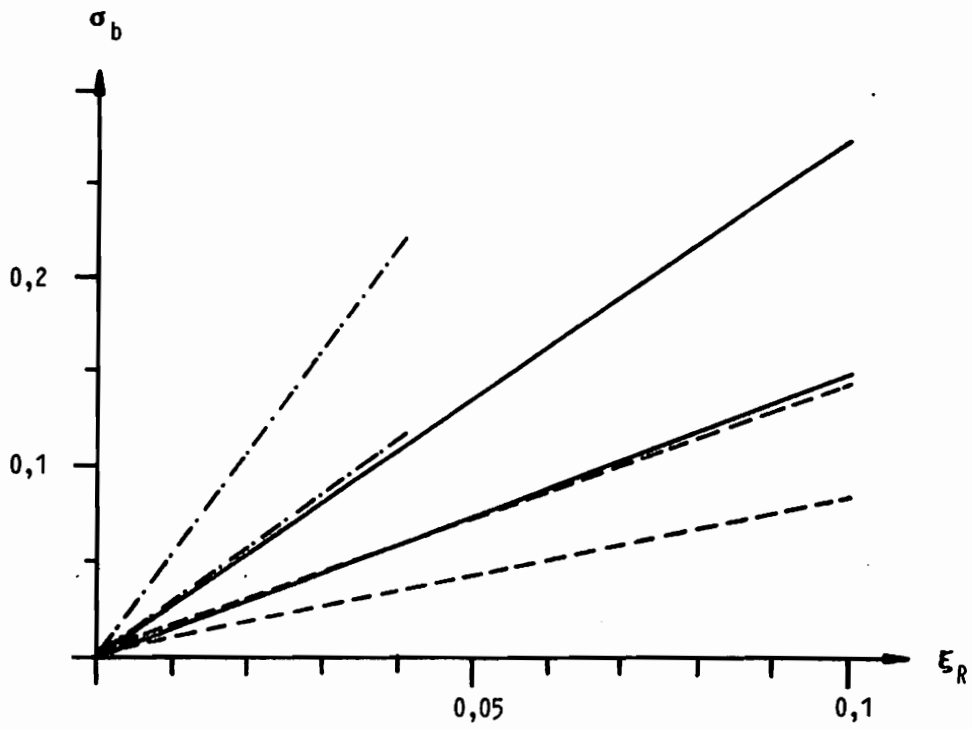


Bild 6.9 Frequenzfehler im Fall 3 durch Rauschen

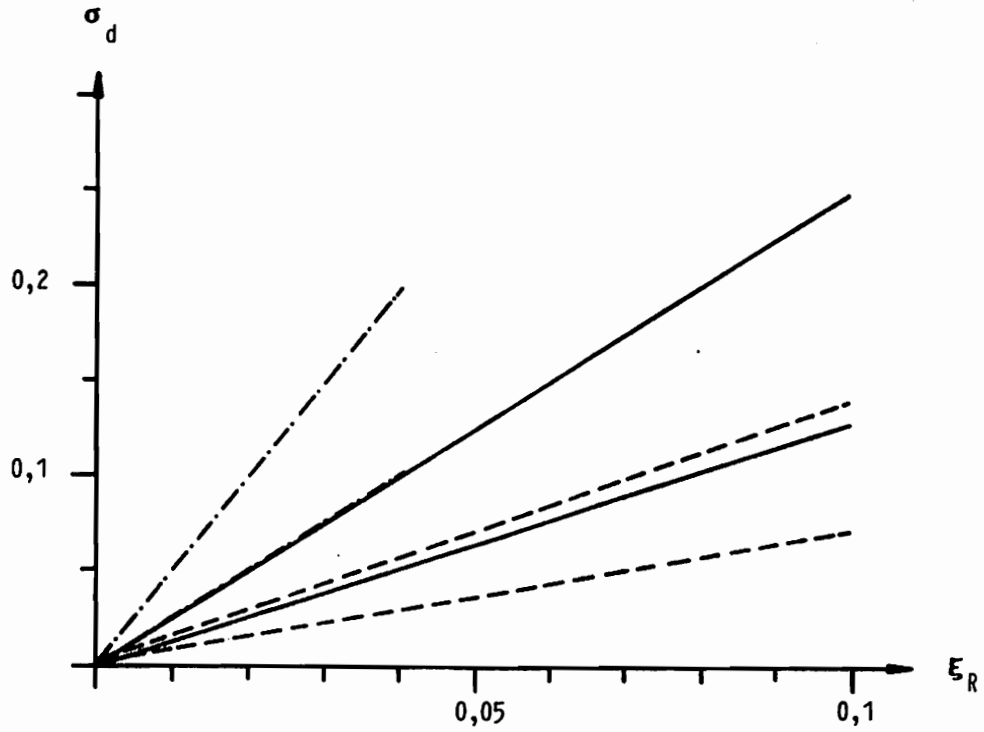


Bild 6.10 Dämpfungsfehler im Fall 3 durch Rauschen

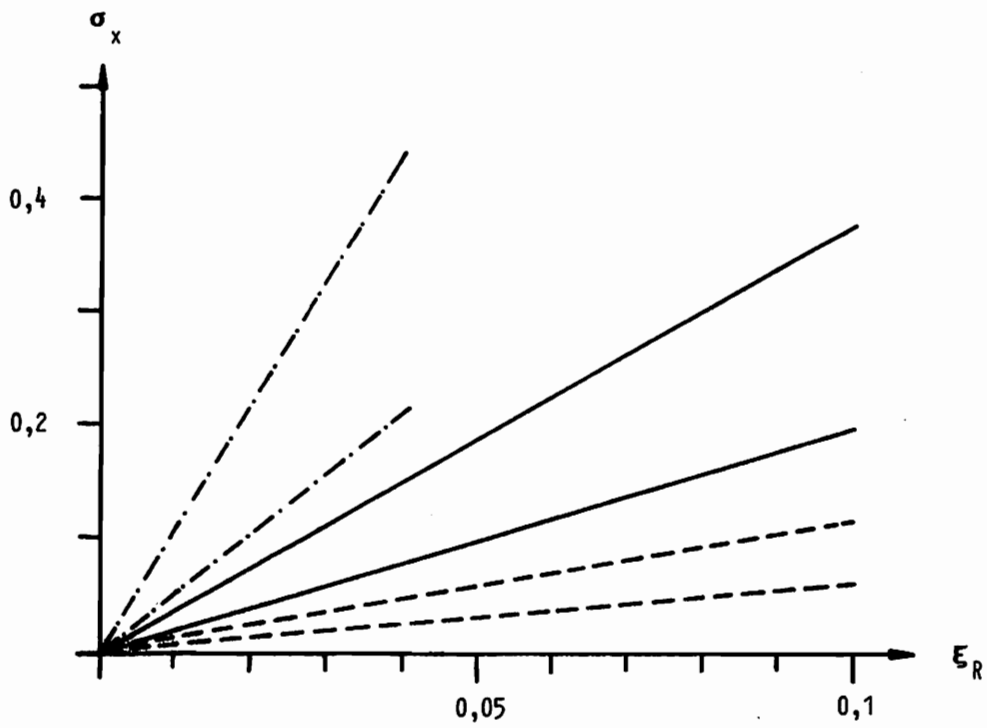


Bild 6.11 Amplitudenfehler im Fall 3 durch Rauschen

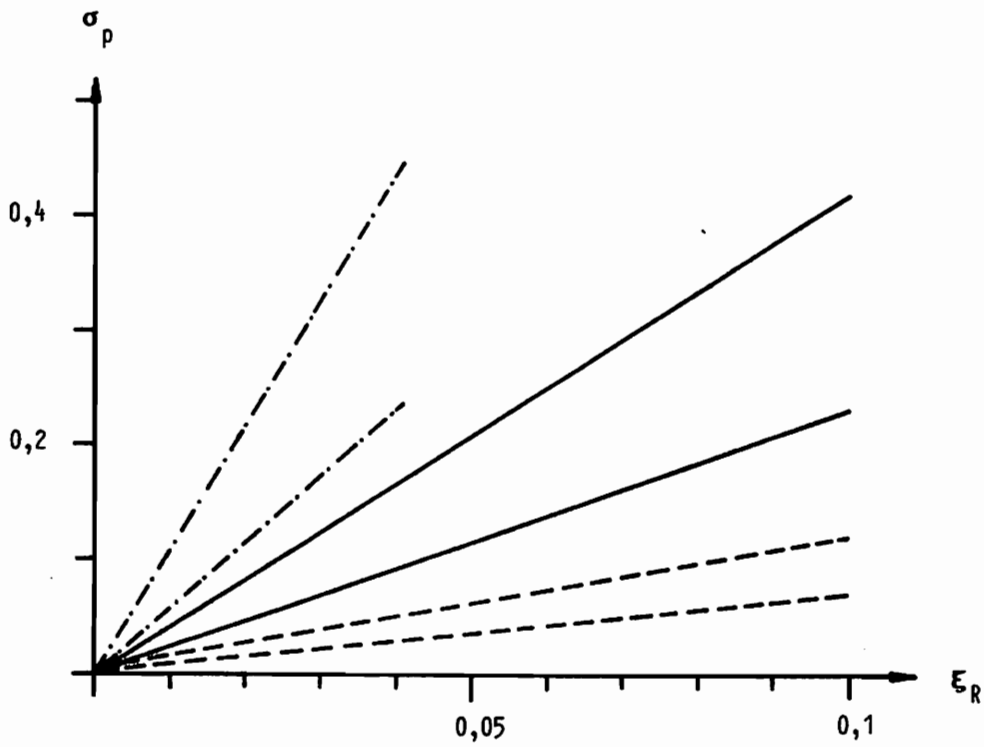


Bild 6.12 Phasenfehler im Fall 3 durch Rauschen

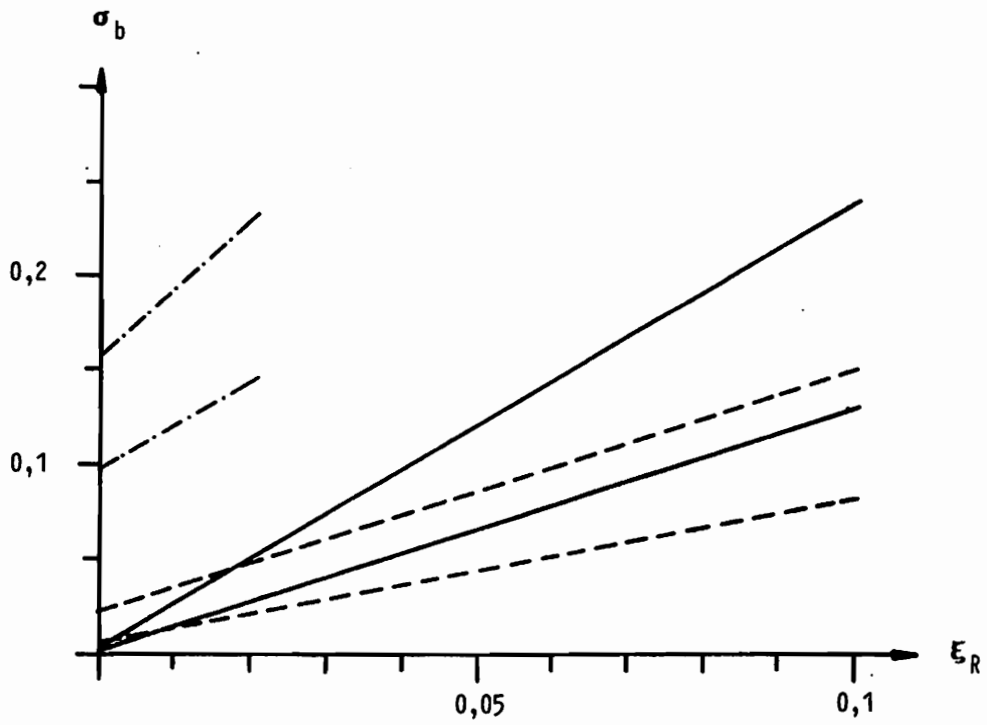


Bild 6.13 Frequenzfehler im Fall 4 durch Rauschen

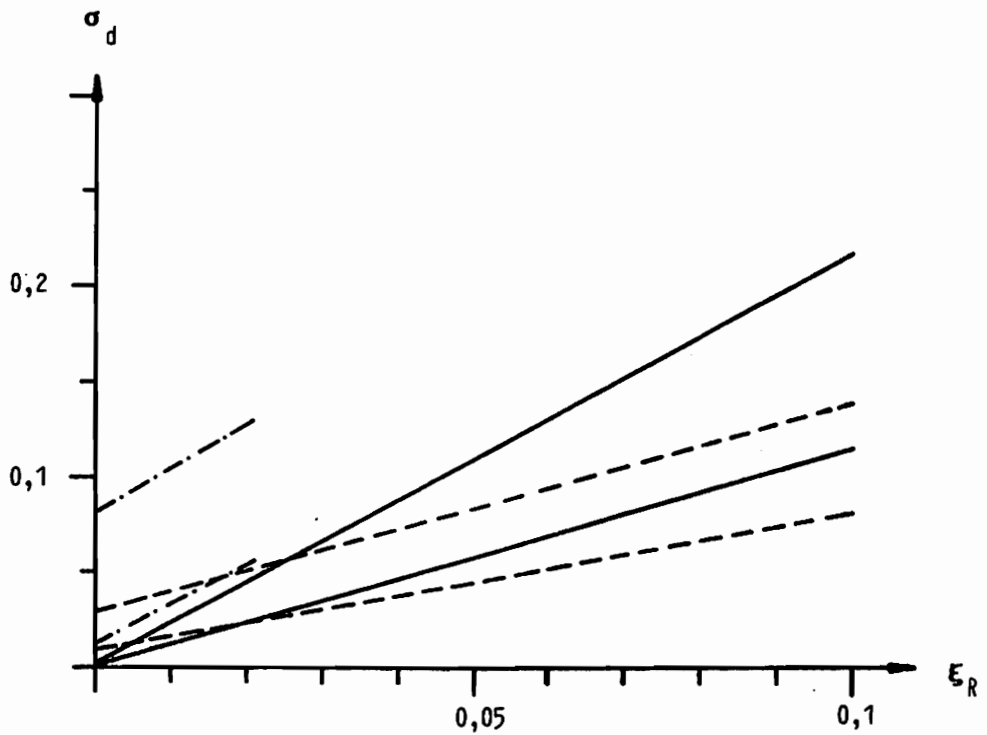


Bild 6.14 Dämpfungsfehler im Fall 4 durch Rauschen

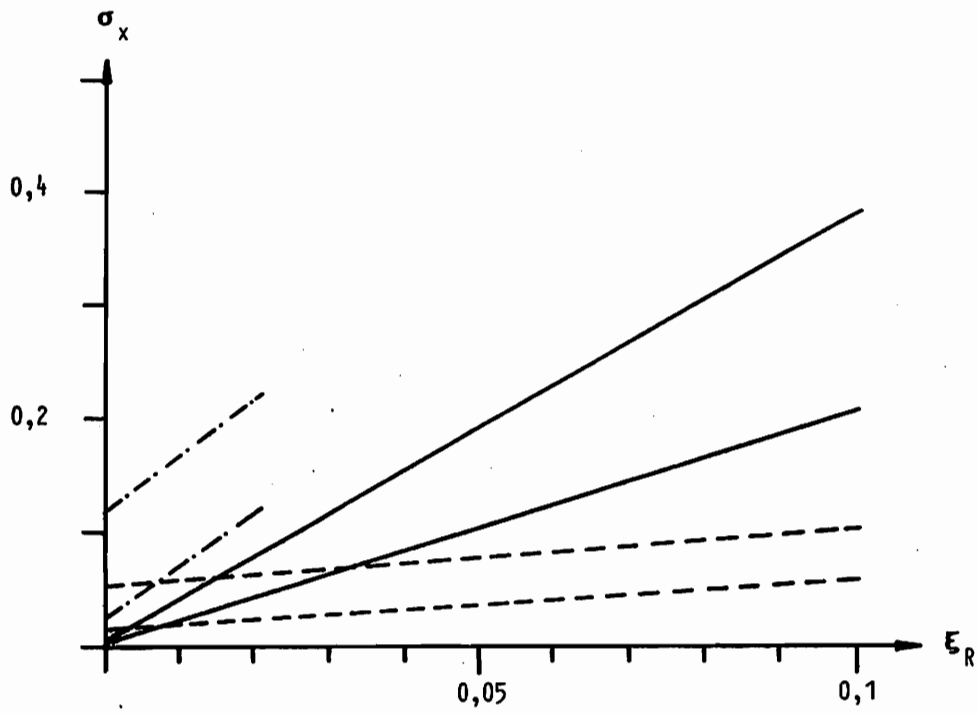


Bild 6.15 Amplitudenfehler im Fall 4 durch Rauschen

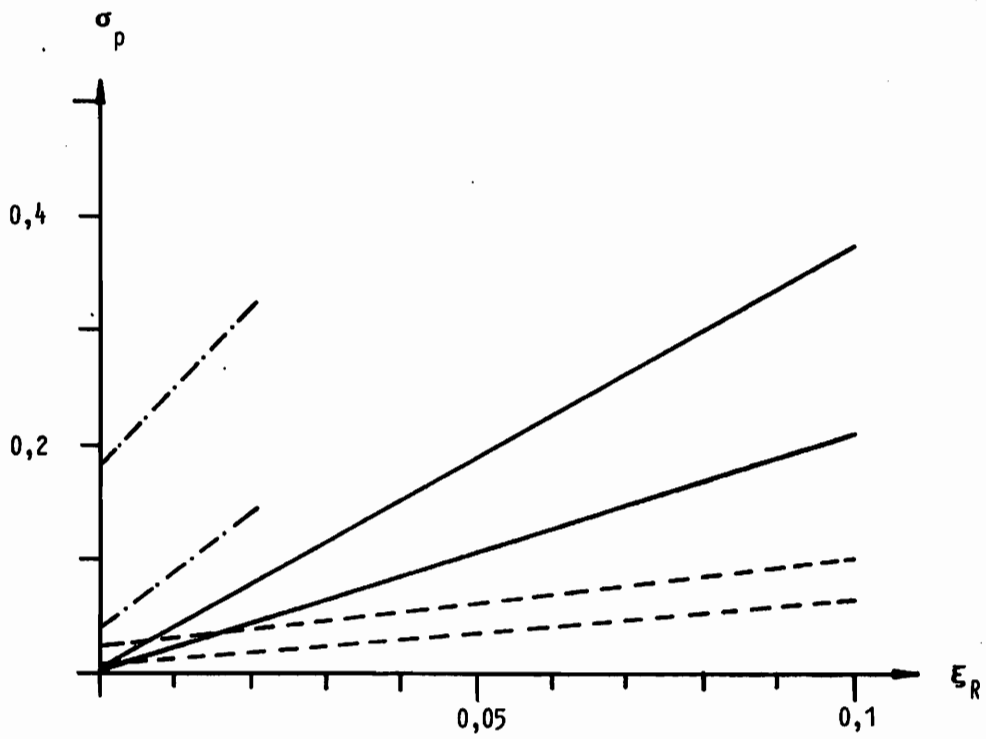


Bild 6.16 Phasenfehler im Fall 4 durch Rauschen

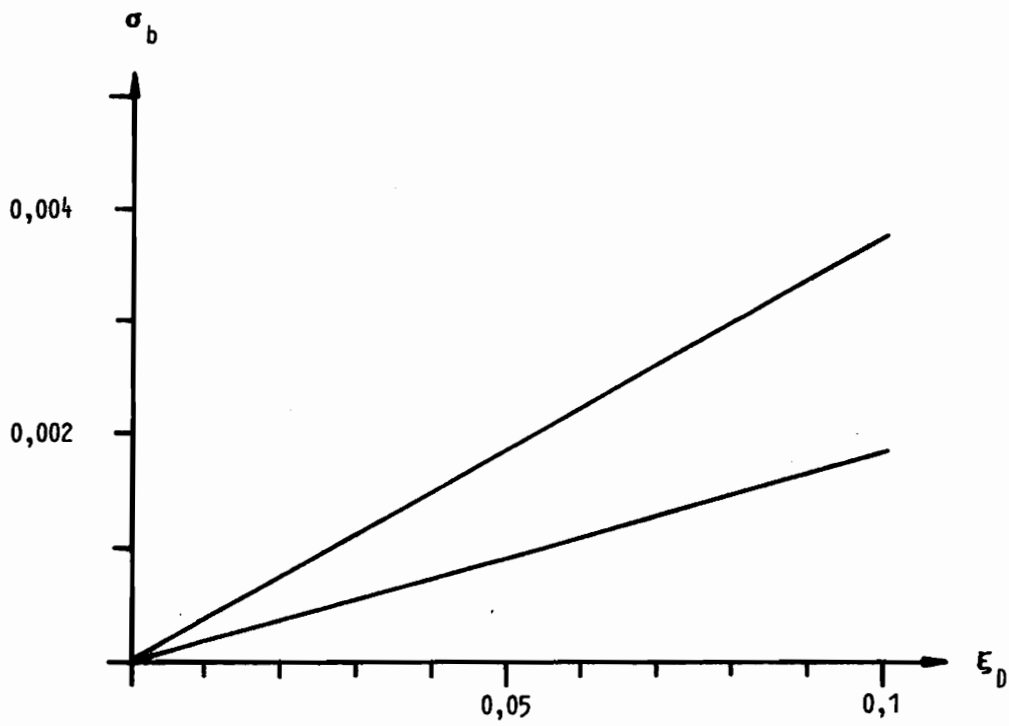


Bild 6.17 Frequenzfehler im Fall 1 durch Digitalisierung

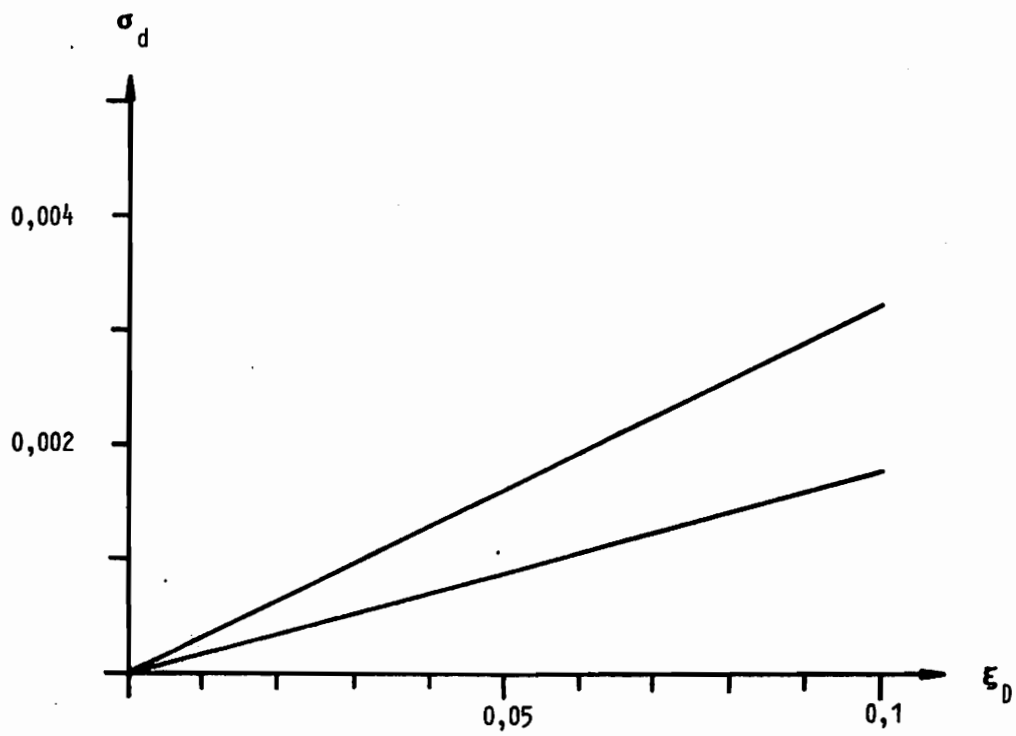


Bild 6.18 Dämpfungsfehler im Fall 1 durch Digitalisierung

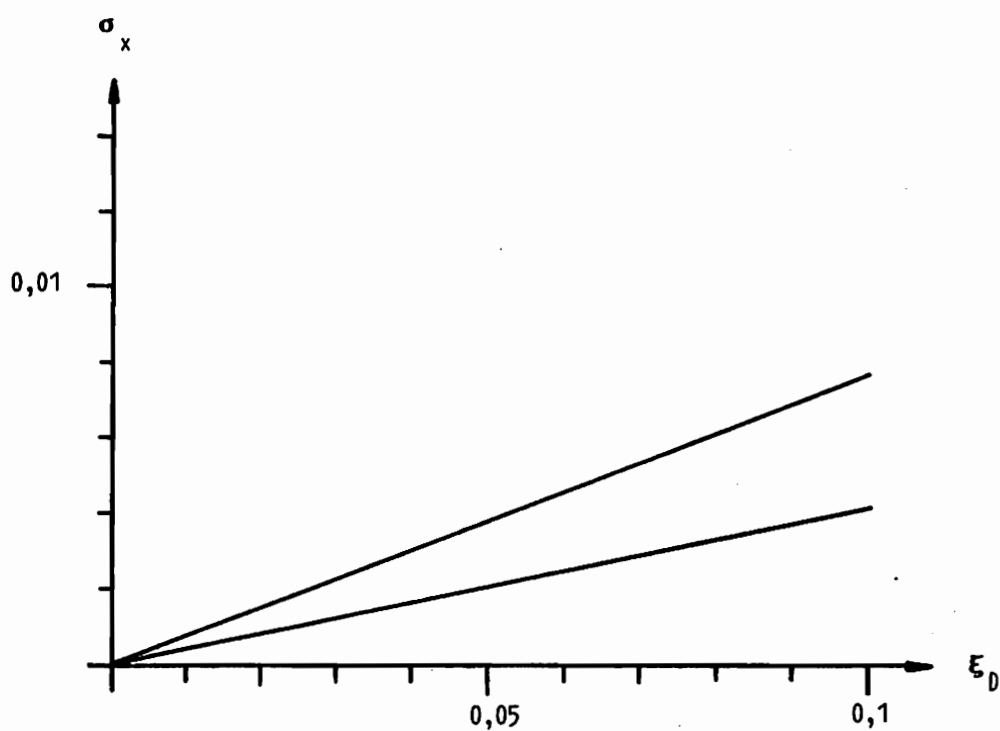


Bild 6.19 Amplitudenfehler im Fall 1 durch Digitalisierung

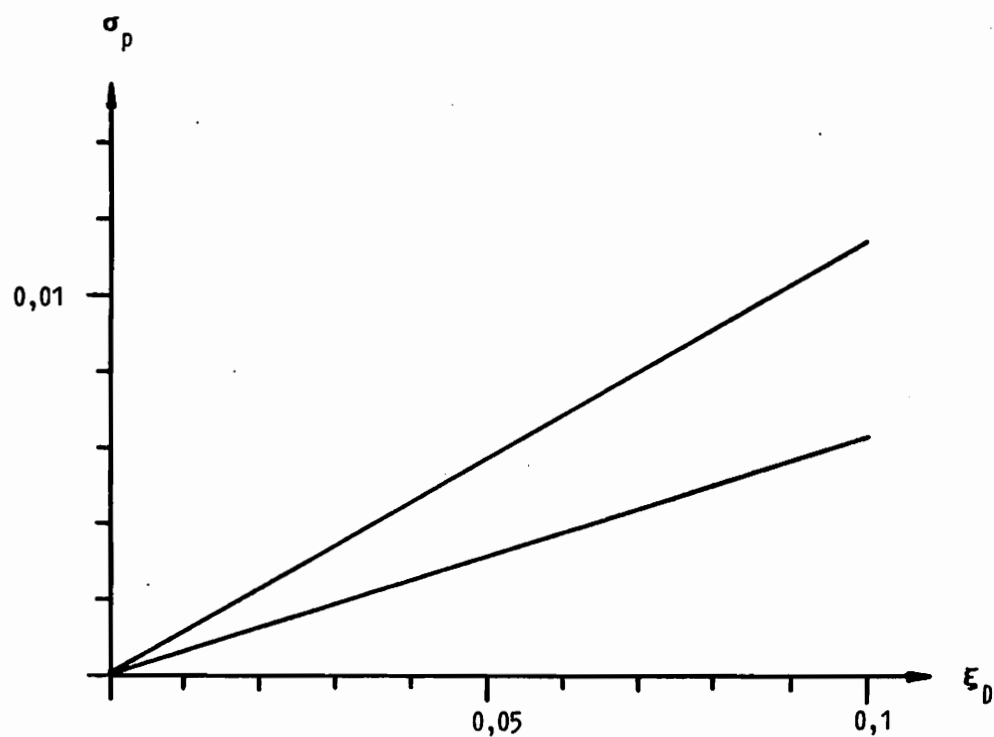


Bild 6.20 Phasenfehler im Fall 1 durch Digitalisierung

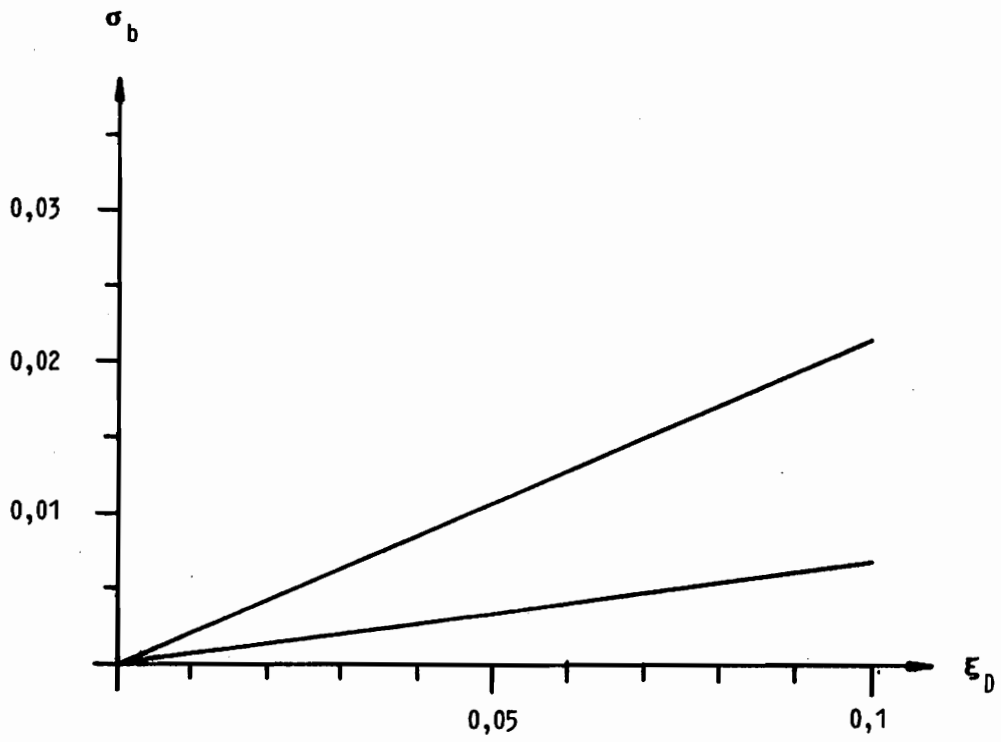


Bild 6.21 Frequenzfehler im Fall 2 durch Digitalisierung

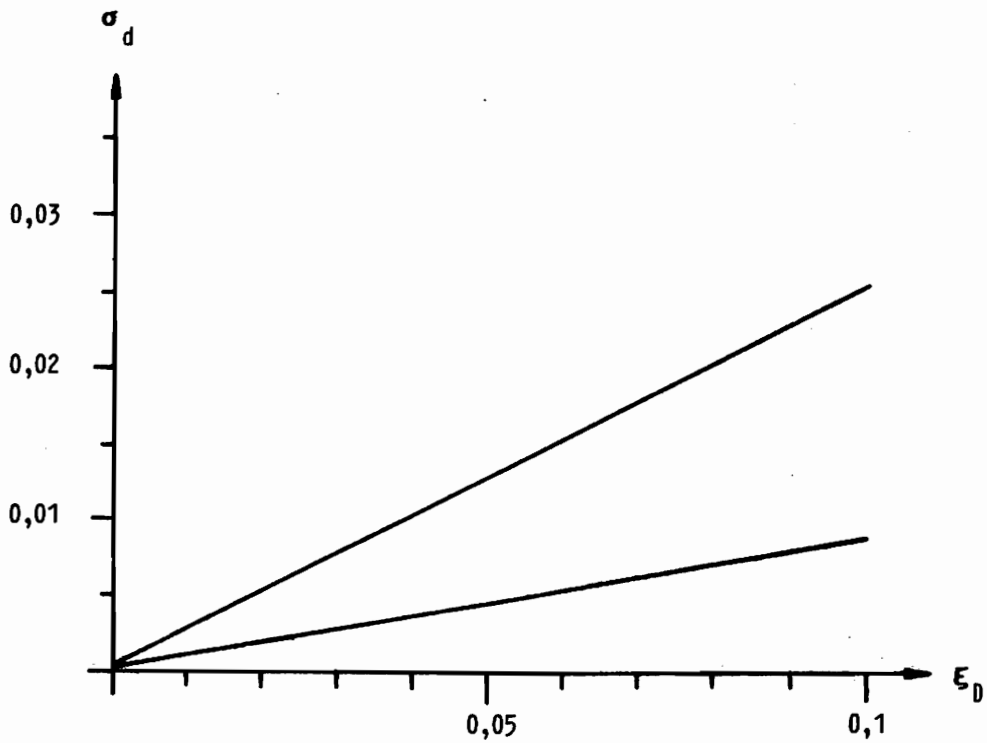


Bild 6.22 Dämpfungsfehler im Fall 2 durch Digitalisierung

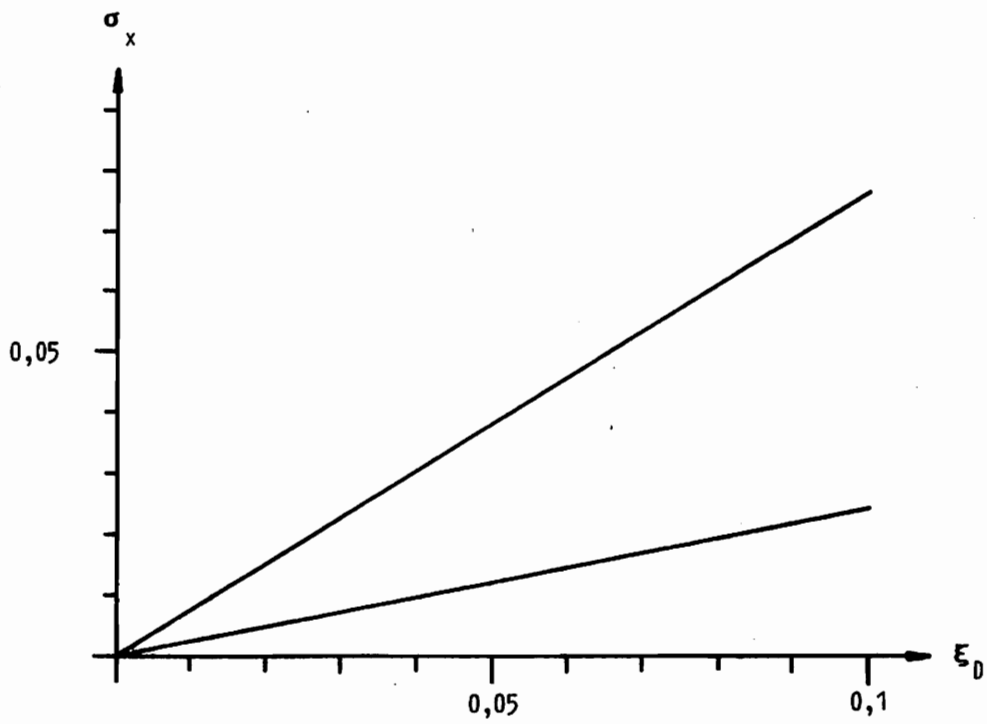


Bild 6.23 Amplitudenfehler im Fall 2 durch Digitalisierung

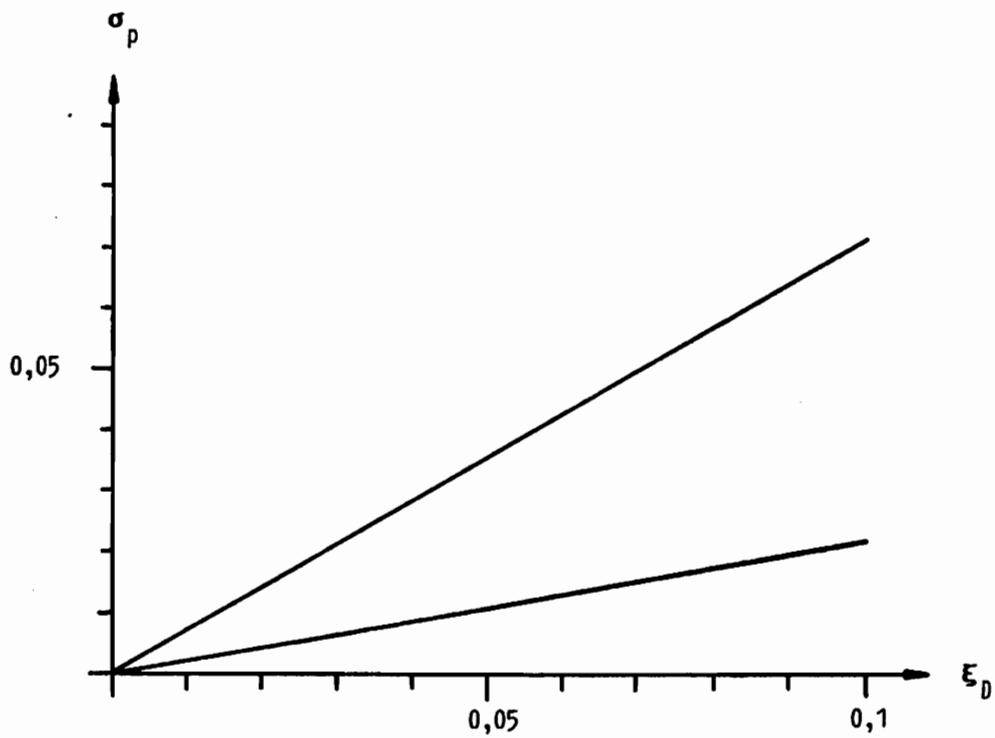


Bild 6.24 Phasenfehler im Fall 2 durch Digitalisierung



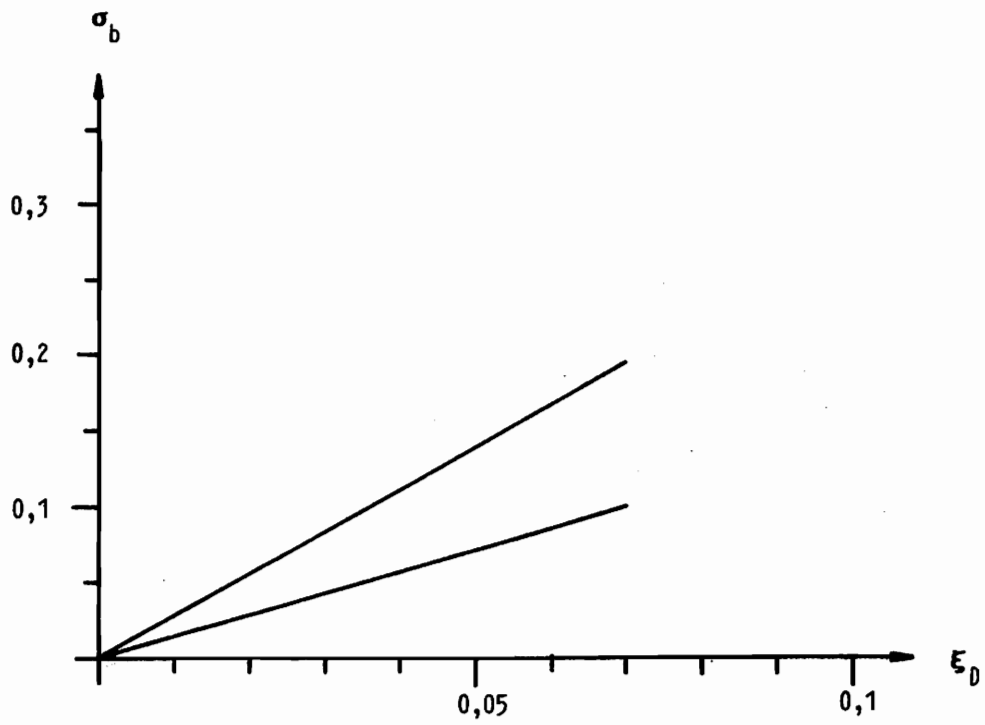


Bild 6.25 Frequenzfehler im Fall 3 durch Digitalisierung

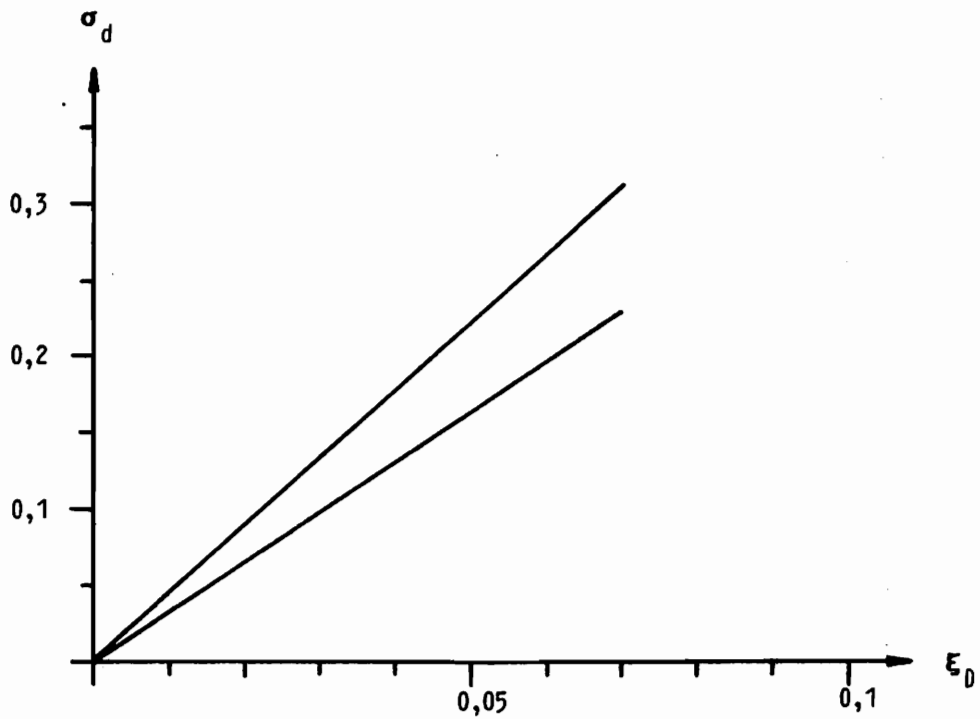


Bild 6.26 Dämpfungsfehler im Fall 3 durch Digitalisierung

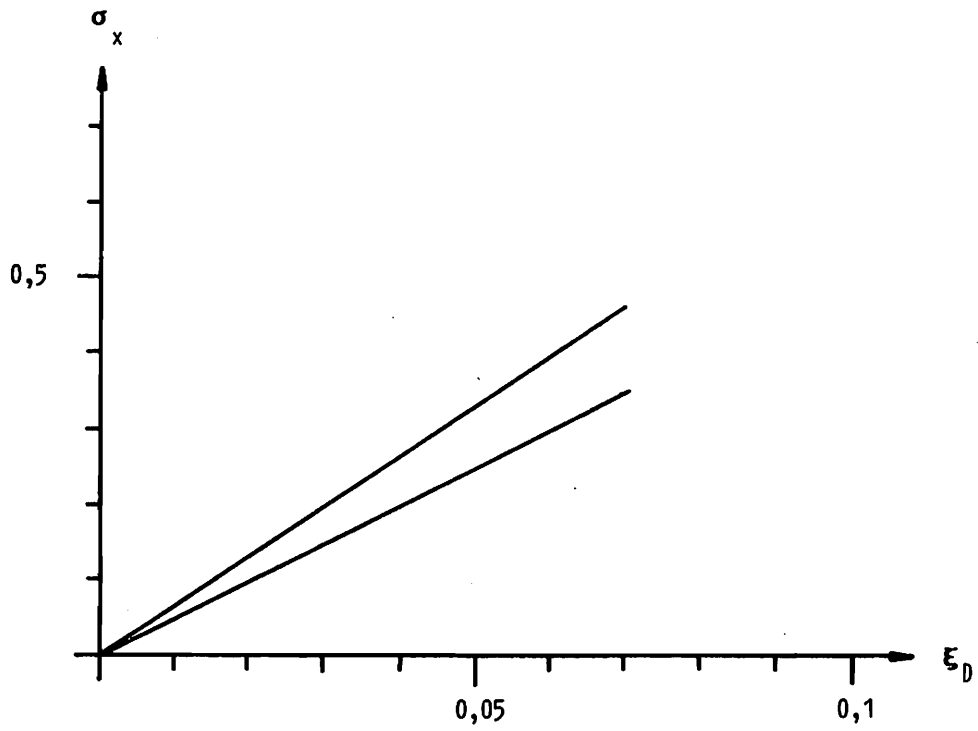


Bild 6.27 Amplitudenfehler im Fall 3 durch Digitalisierung

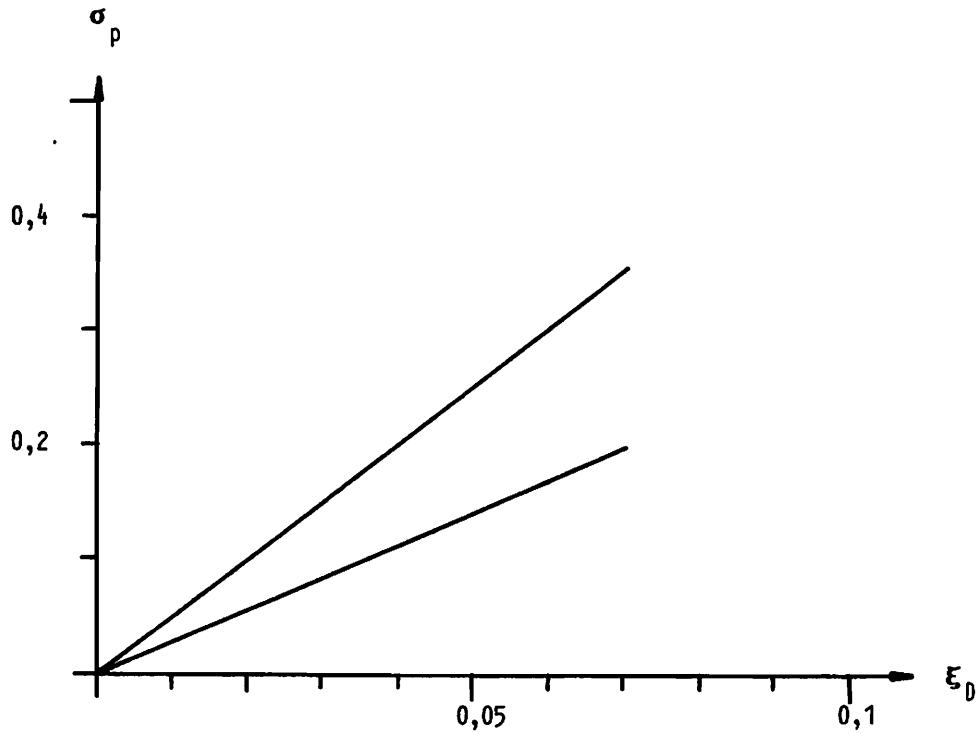


Bild 6.28 Phasenfehler im Fall 3 durch Digitalisierung

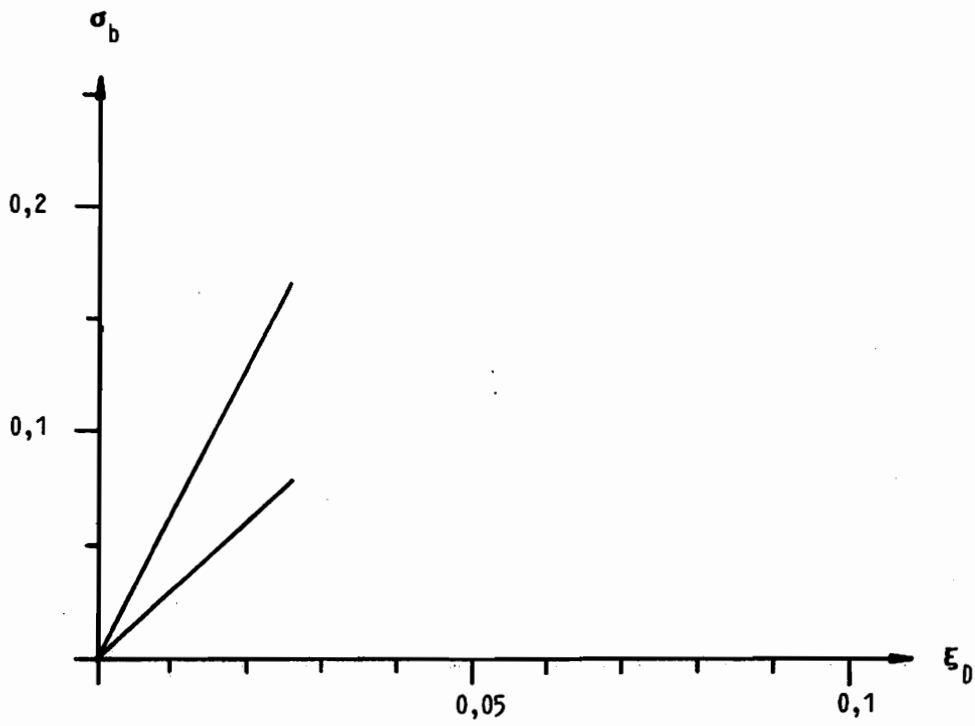


Bild 6.29 Frequenzfehler im Fall 4 durch Digitalisierung

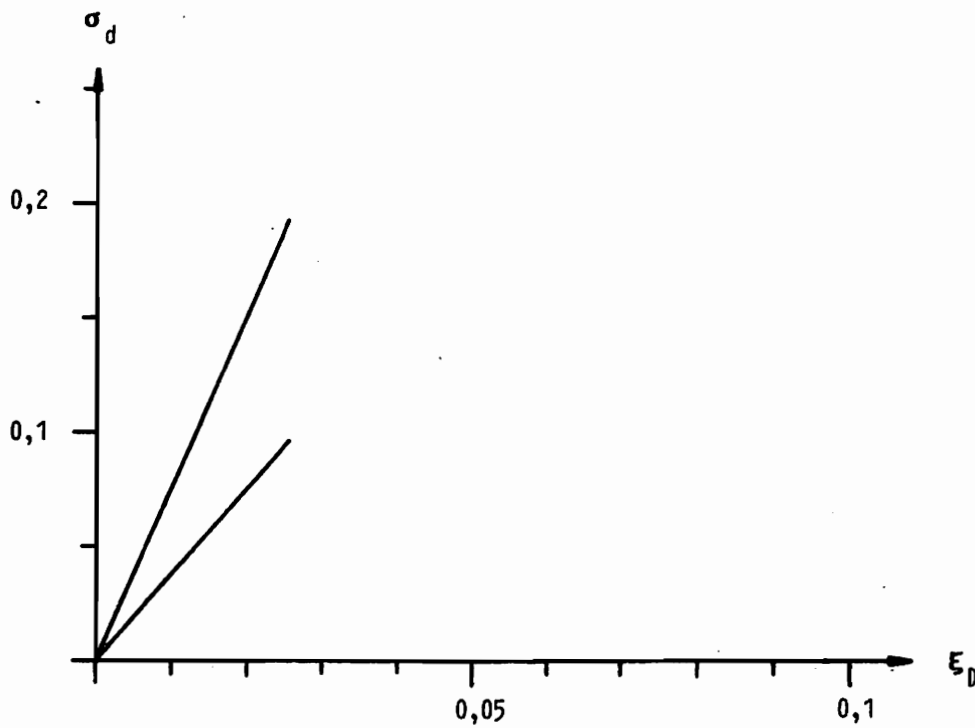


Bild 6.30 Dämpfungsfehler im Fall 4 durch Digitalisierung

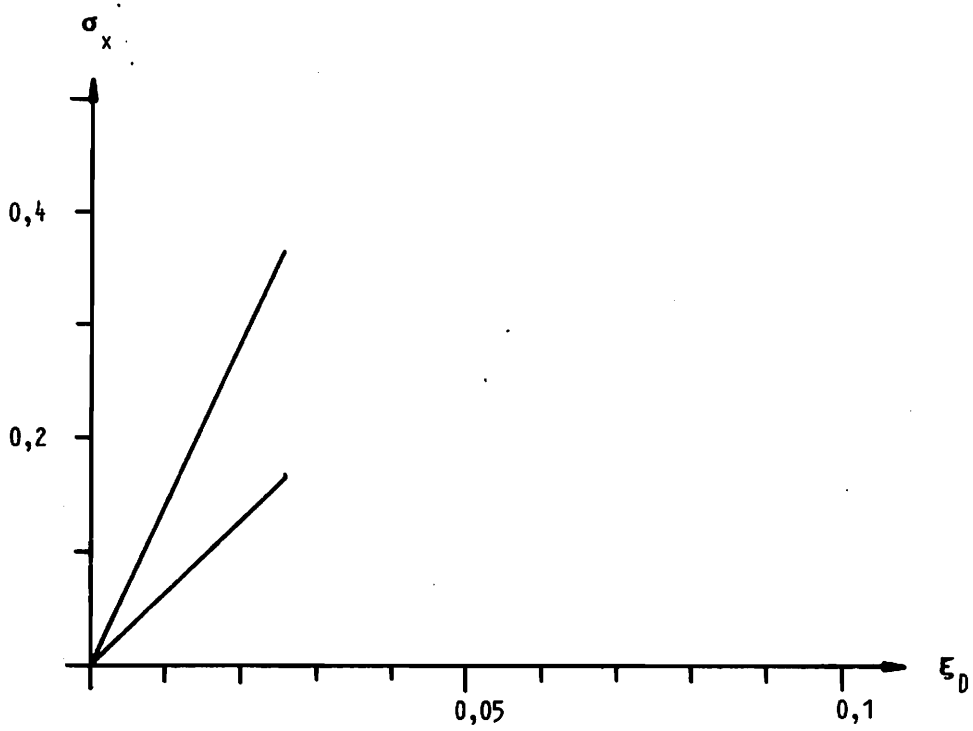


Bild 6.31 Amplitudenfehler im Fall 4 durch Digitalisierung

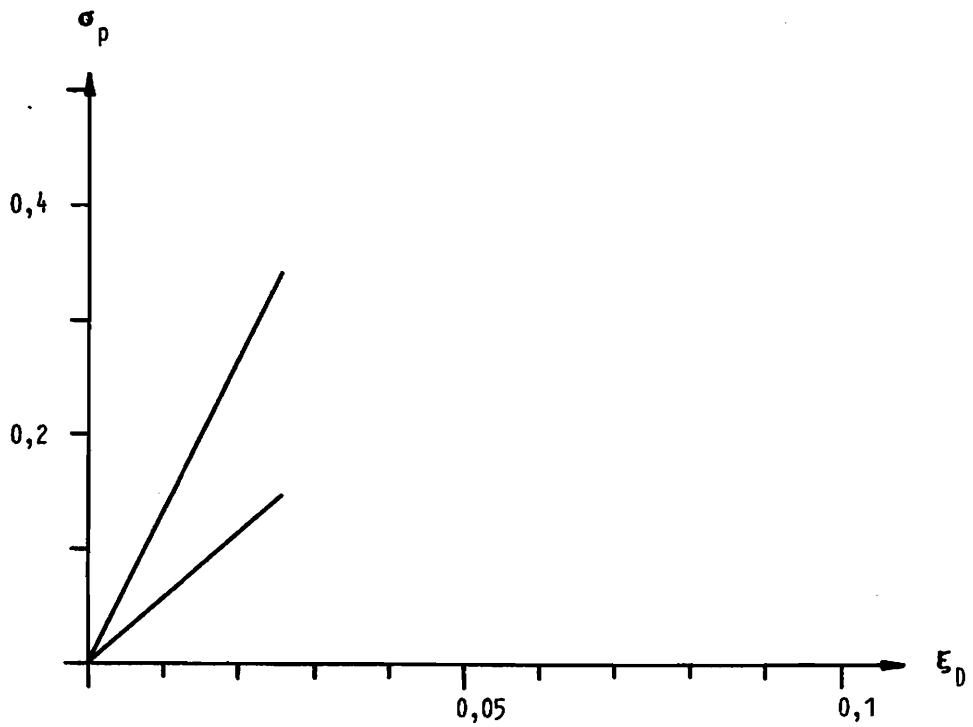


Bild 6.32 Phasenfehler im Fall 4 durch Digitalisierung

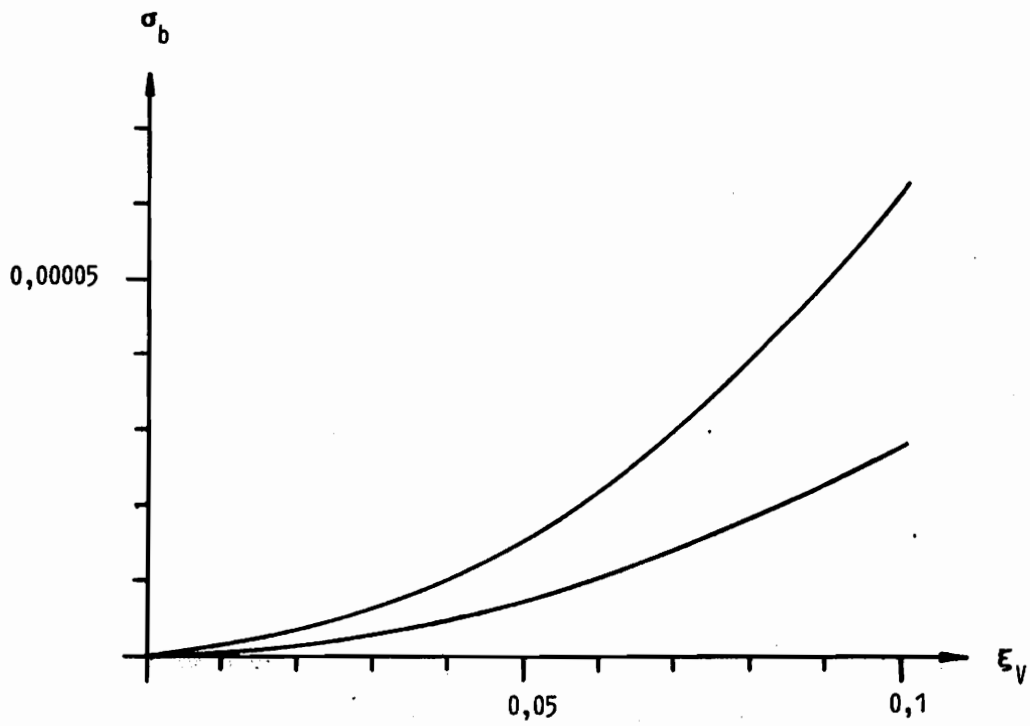


Bild 6.33 Frequenzfehler im Fall 1 durch Verzerrung

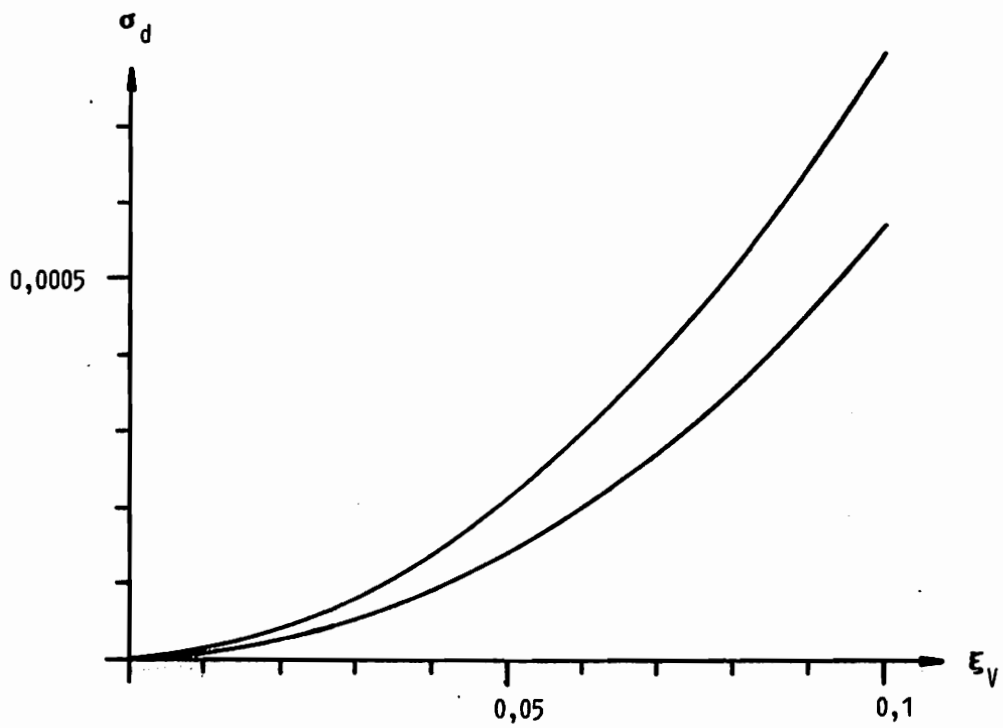


Bild 6.34 Dämpfungsfehler im Fall 1 durch Verzerrung

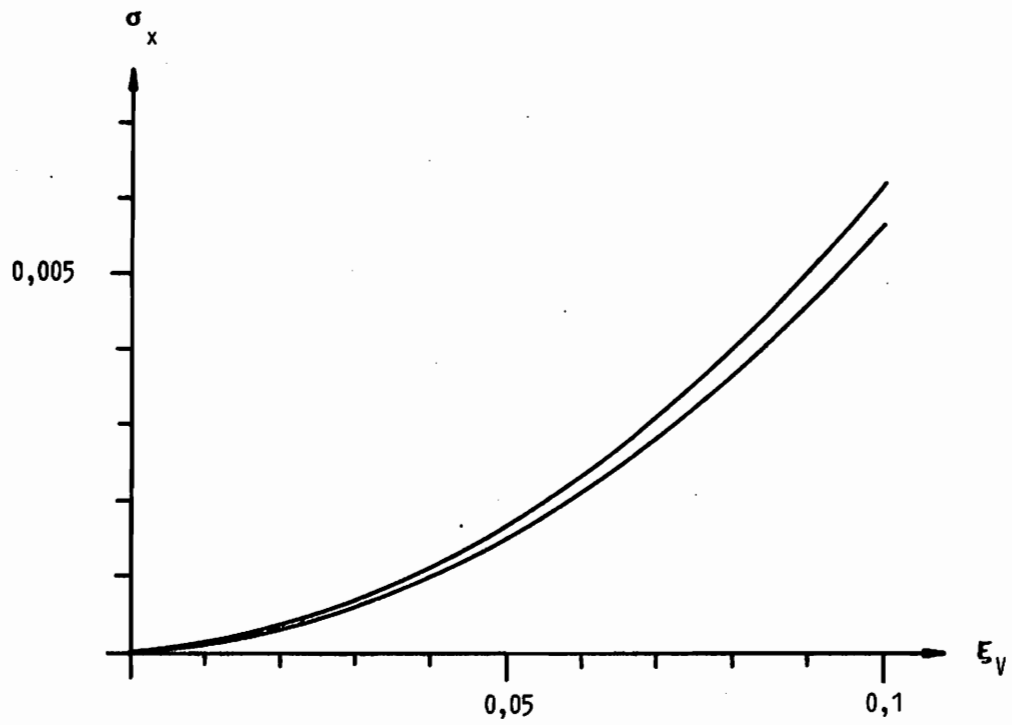


Bild 6.35 Amplitudenfehler im Fall 1 durch Verzerrung

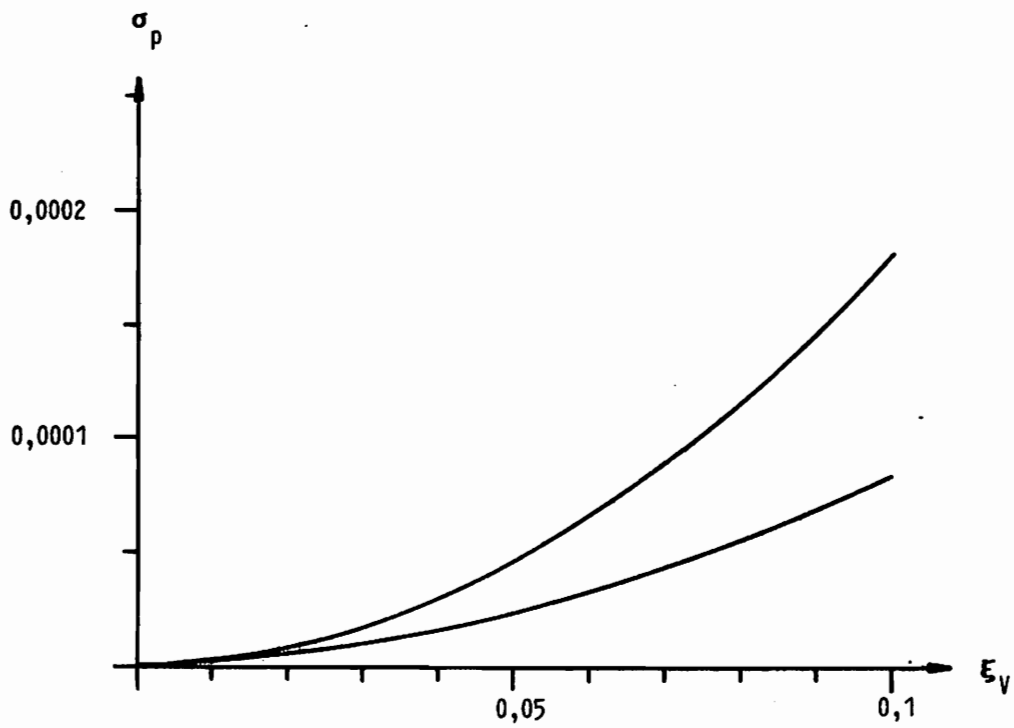


Bild 6.36 Phasenfehler im Fall 1 durch Verzerrung

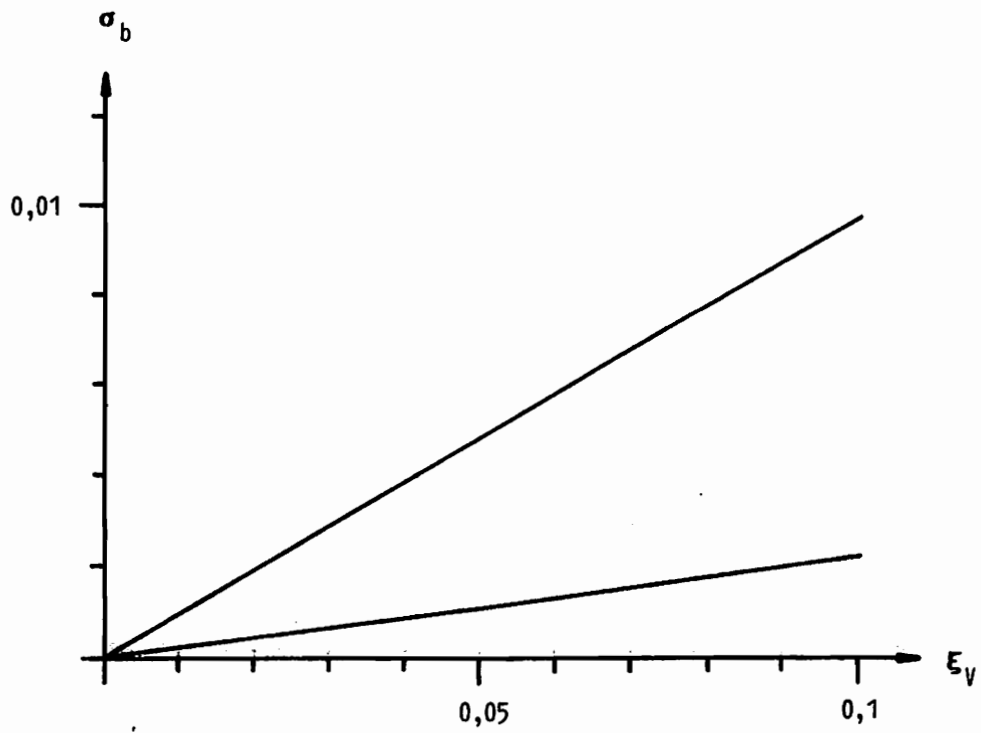


Bild 6.37 Frequenzfehler im Fall 2 durch Verzerrung

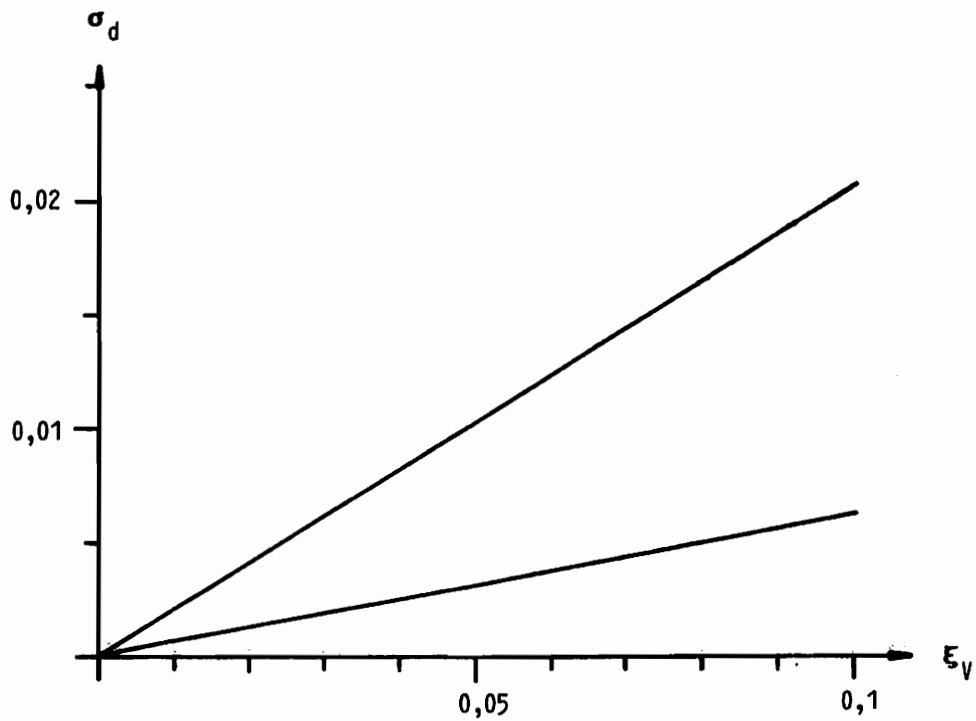


Bild 6.38 Dämpfungsfehler im Fall 2 durch Verzerrung

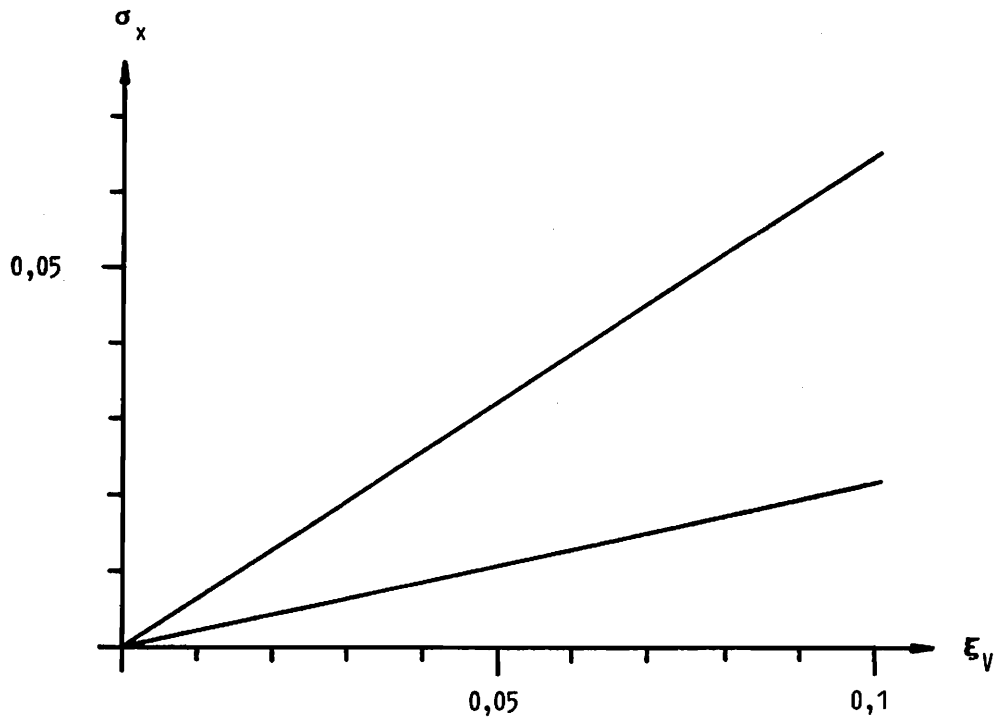


Bild 6.39 Amplitudenfehler im Fall 2 durch Verzerrung

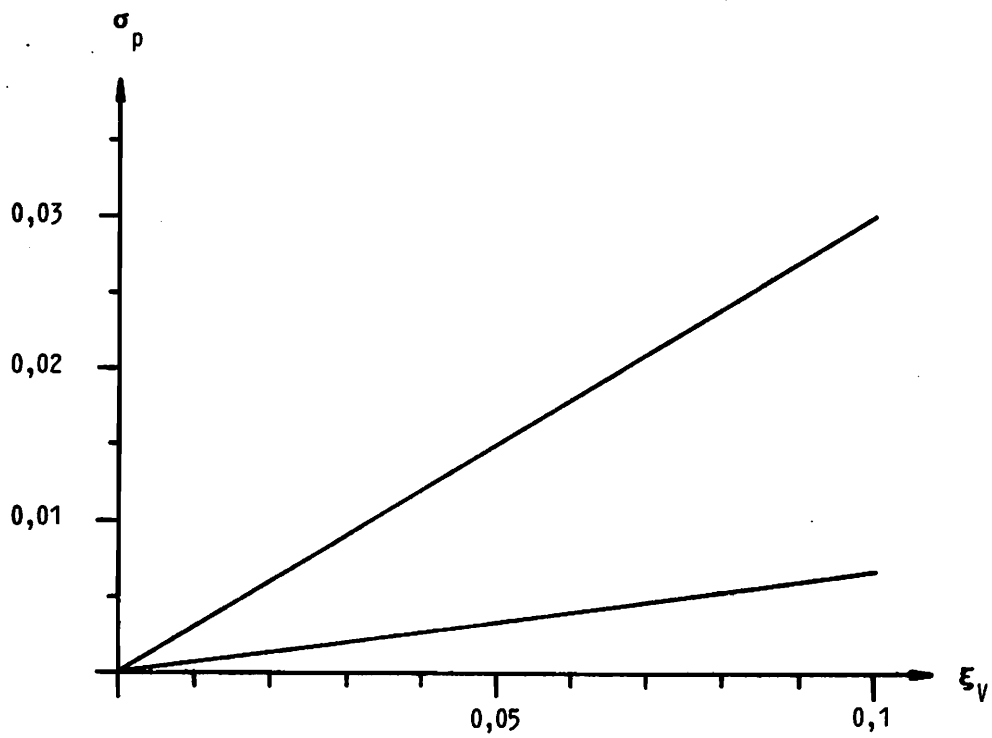


Bild 6.40 Phasenfehler im Fall 2 durch Verzerrung



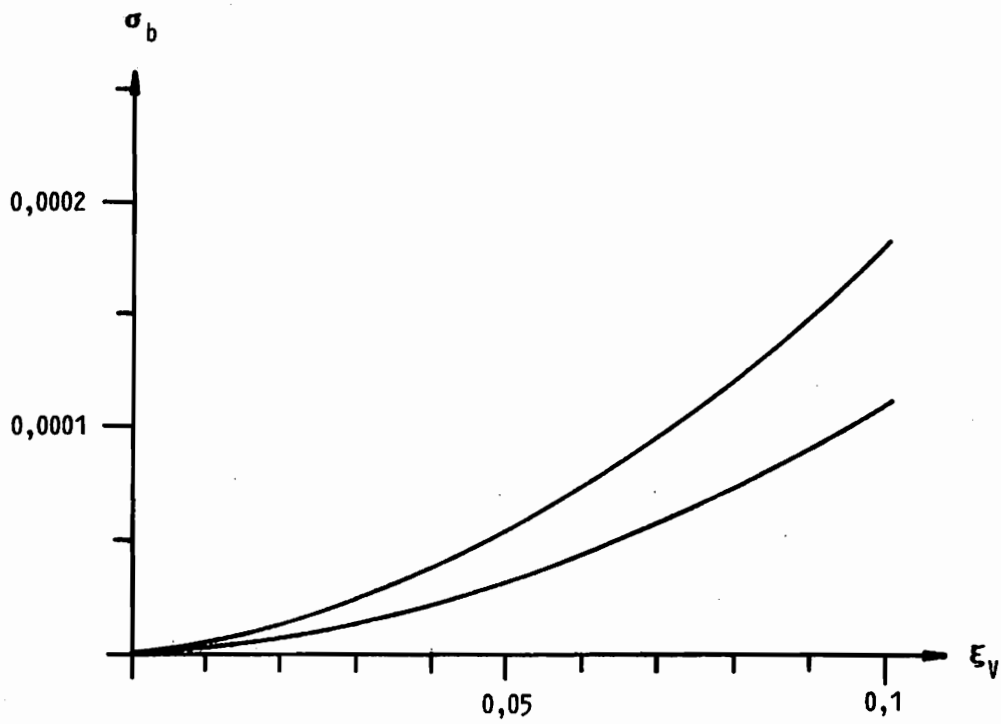


Bild 6.41 Frequenzfehler im Fall 3 durch Verzerrung

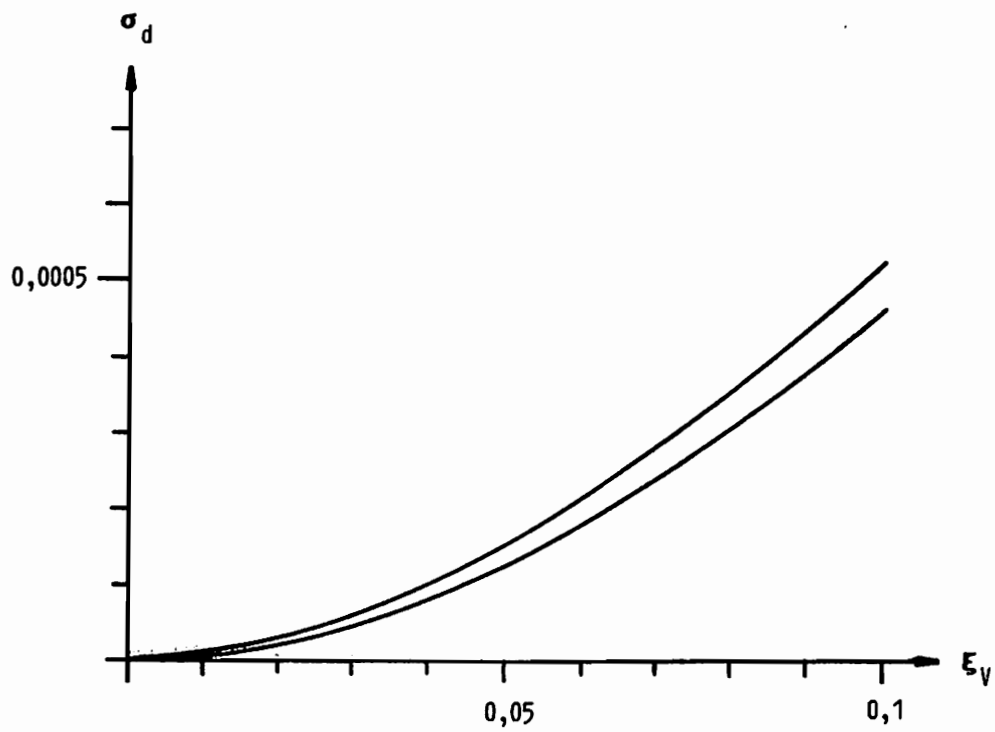


Bild 6.42 Dämpfungsfehler im Fall 3 durch Verzerrung

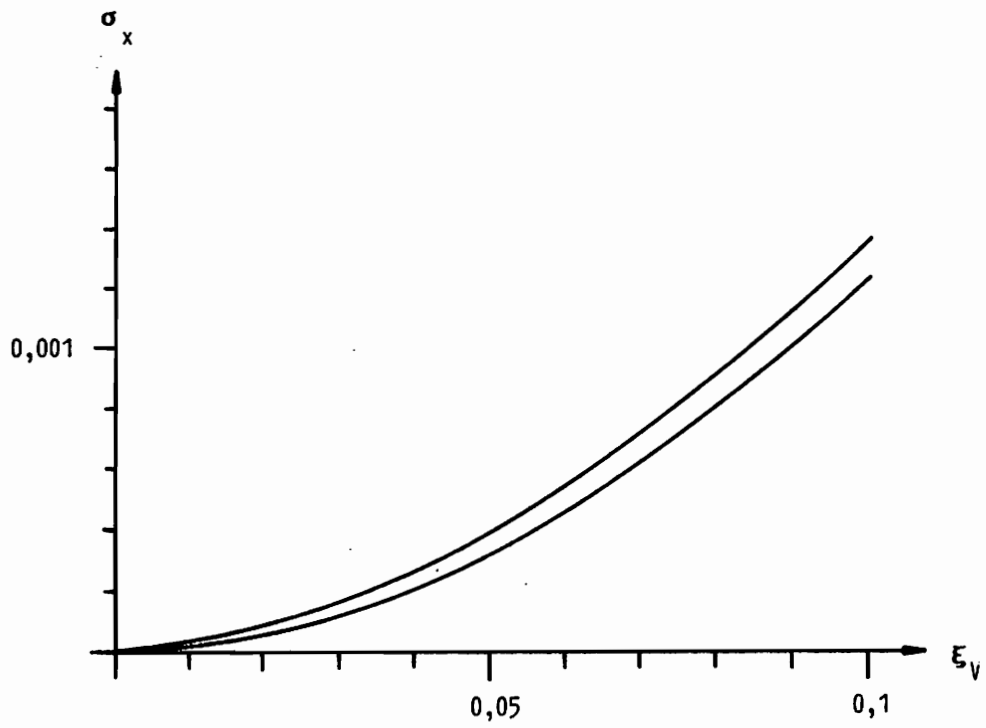


Bild 6.43 Amplitudenfehler im Fall 3 durch Verzerrung

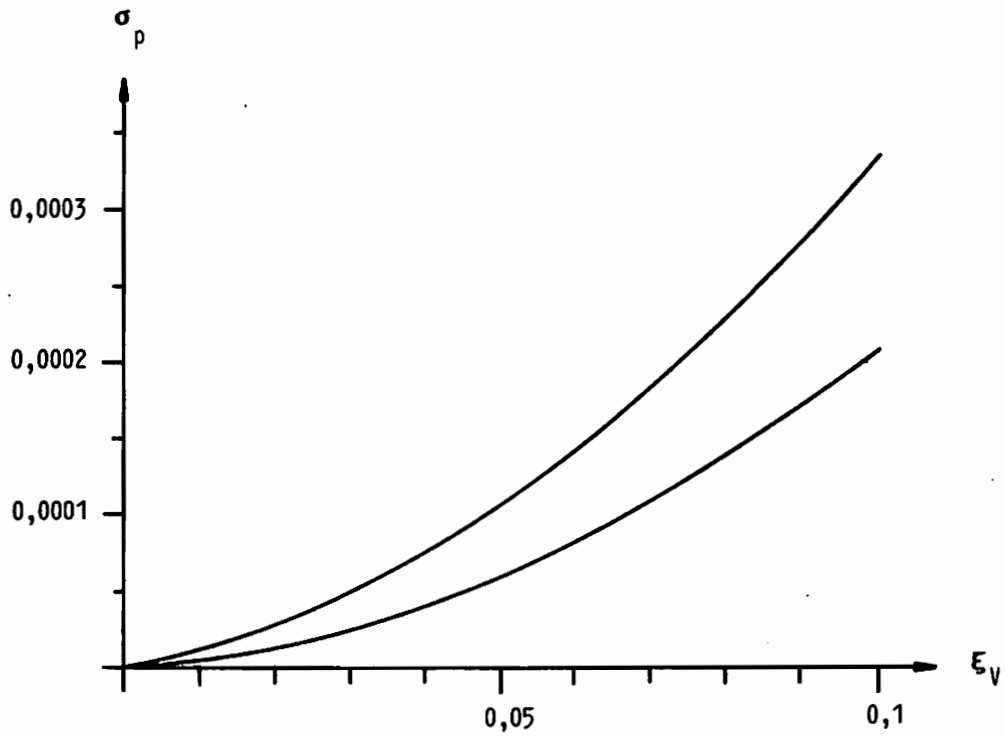


Bild 6.44 Phasenfehler im Fall 3 durch Verzerrung

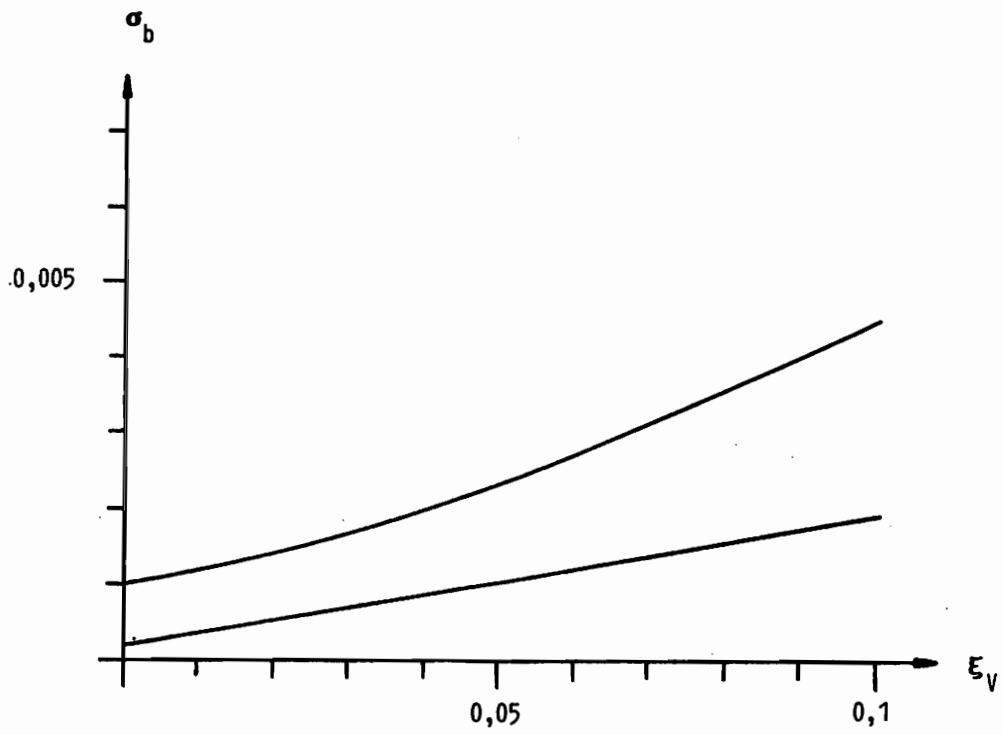


Bild 6.45 Frequenzfehler im Fall 4 durch Verzerrung

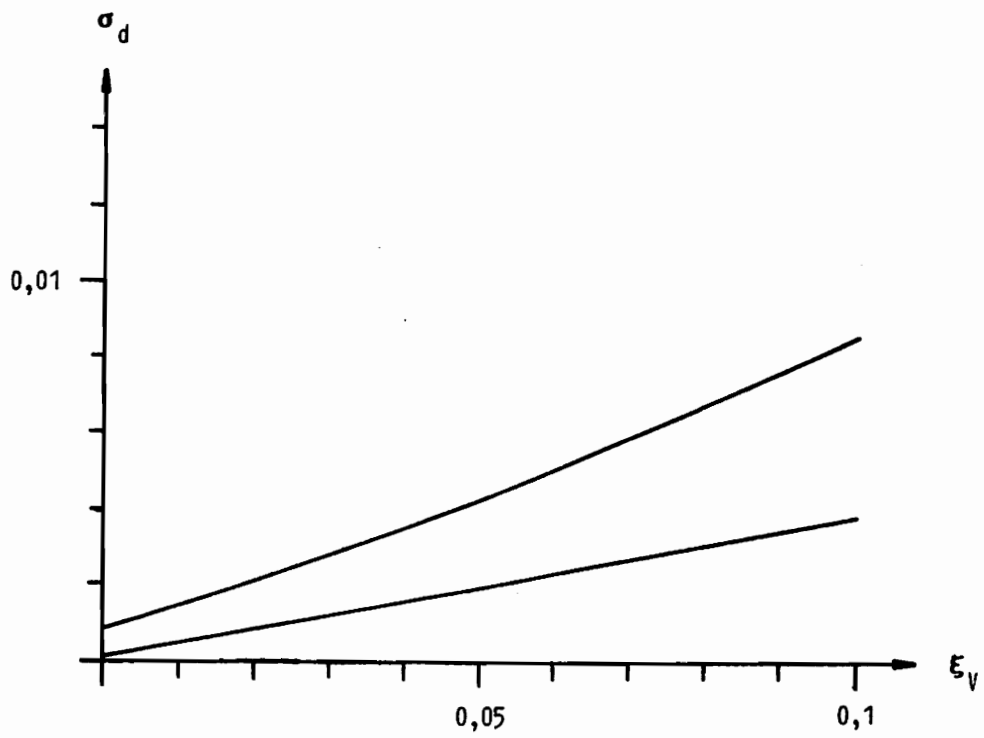


Bild 6.46 Dämpfungsfehler im Fall 4 durch Verzerrung

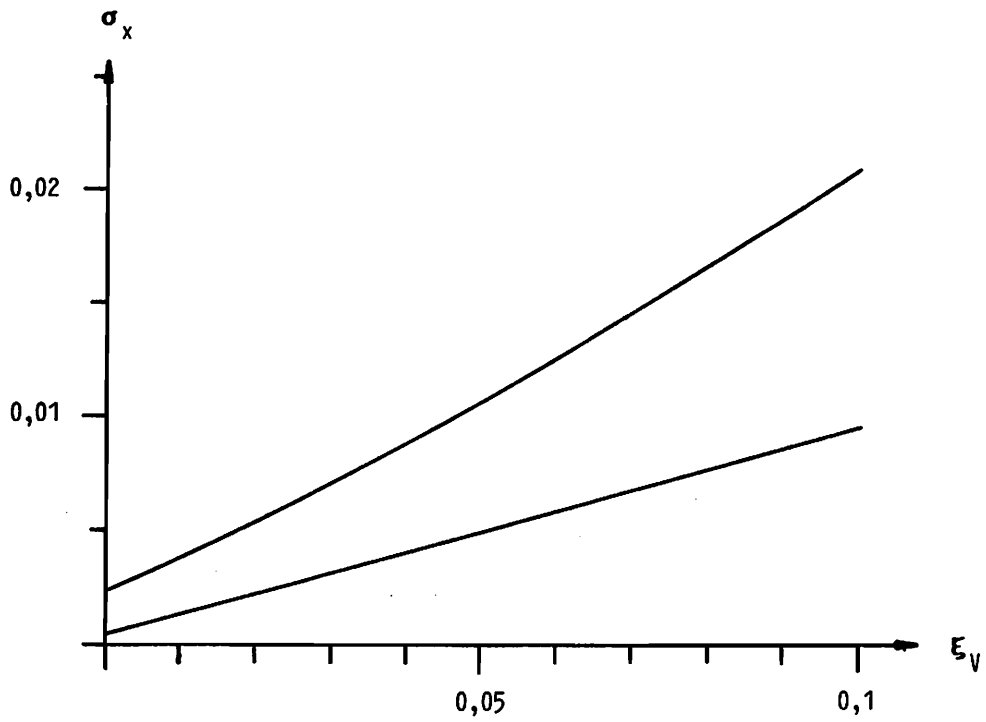


Bild 6.47 Amplitudenfehler im Fall 4 durch Verzerrung

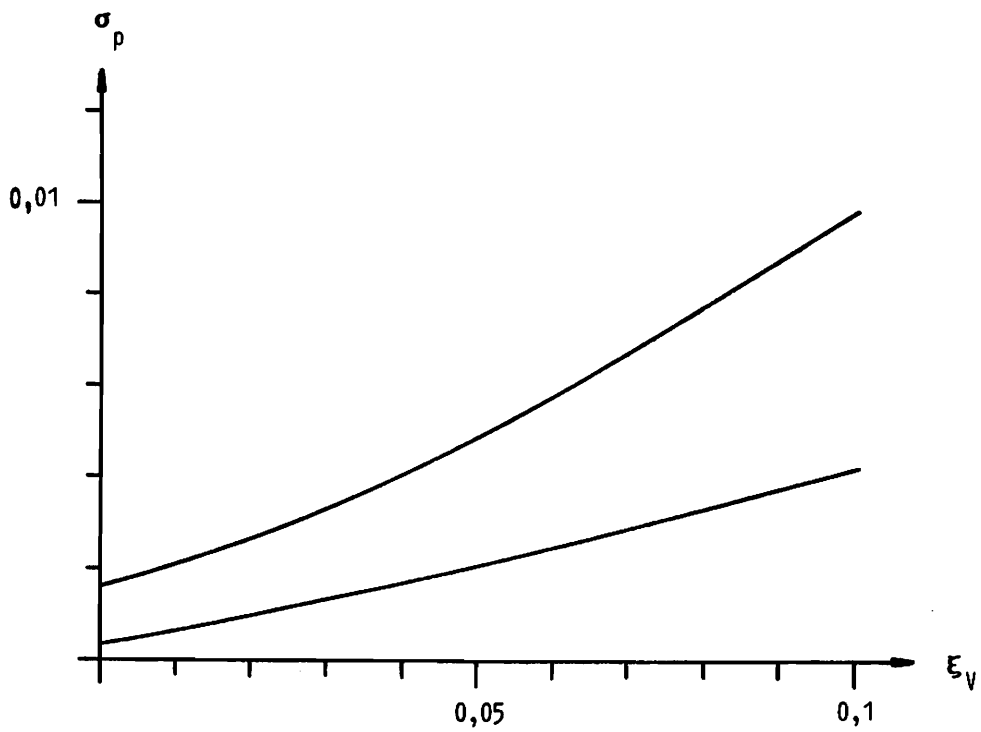


Bild 6.48 Phasenfehler im Fall 4 durch Verzerrung

## 6.6. Der Einfluß eines Exponentialfensters

In Ergänzung der Untersuchungen über die Störanfälligkeit wurde auch überprüft, ob durch den Einsatz einer Fensterfunktion Verbesserungen der Ergebnisse möglich sind. Für eine Anwendung in Verbindung mit dem hier vorgestellten Auswerteverfahren für komplexe Exponentialfunktionen kommt nur das Exponentialfenster in Frage, das eine Vergrößerung des ermittelten Dämpfungsparameters bewirkt. Somit ist ein Umrechnen der Ergebnisse leicht möglich.

Der Vorteil des Exponentialfensters liegt darin, daß es die Werte nur zum Ende der Meßzeit hin abschwächt, wodurch gedämpfte Schwingungen, die nur zu Beginn der Meßzeit große Auslenkungen aufweisen, im Mittel weniger stark beeinflußt werden, als das konstante Rauschen.

Untersucht würden die gleichen 4 Fälle, wie bei den einzelnen Störungen. Als Störung wurde jedoch eine Kombination aus starkem Rauschen (0,05), mittlerer Auflösung (0,005) und schwacher Verzerrung (0,01) angesetzt.

Im Bereich schwacher Dämpfungen können durch den Einsatz des Exponentialfensters nur geringfügige Verbesserungen erzielt werden, bei starken Dämpfungen ist eine deutliche Verbesserung besonders der ermittelten Amplituden zu erkennen. Das gilt jedoch nur für den mittleren Frequenzbereich. Bei sehr niedrigen oder hohen Frequenzen hingegen hat der Fehler schon bei geringen Zusatzdämpfungen sein Minimum und steigt dann sehr schnell über den Wert bei der Auswertung ohne Fensterfunktion an. Die Multiplikation mit einem zu schmalen Exponentialfenster führt sogar, wie an dem Abbruch der Kurven für die Fälle 2 und 4 zu erkennen ist, dazu, daß die Parameter von Schwingungen, die ohne Fenster noch identifizierbar sind, nicht mehr bestimmt werden können.

Aufgrund der Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen kann die Anwendung des Exponentialfensters nur in Ausnahmefällen empfohlen werden. Die deutliche Verschlechterung der Ergebnisse in Fällen sehr niedriger oder hoher Frequenzen und bei nur geringfügig zu groß gewählter Zusatzdämpfung erfordert in jedem Fall Vergleichsrechnungen ohne Fensterfunktion.

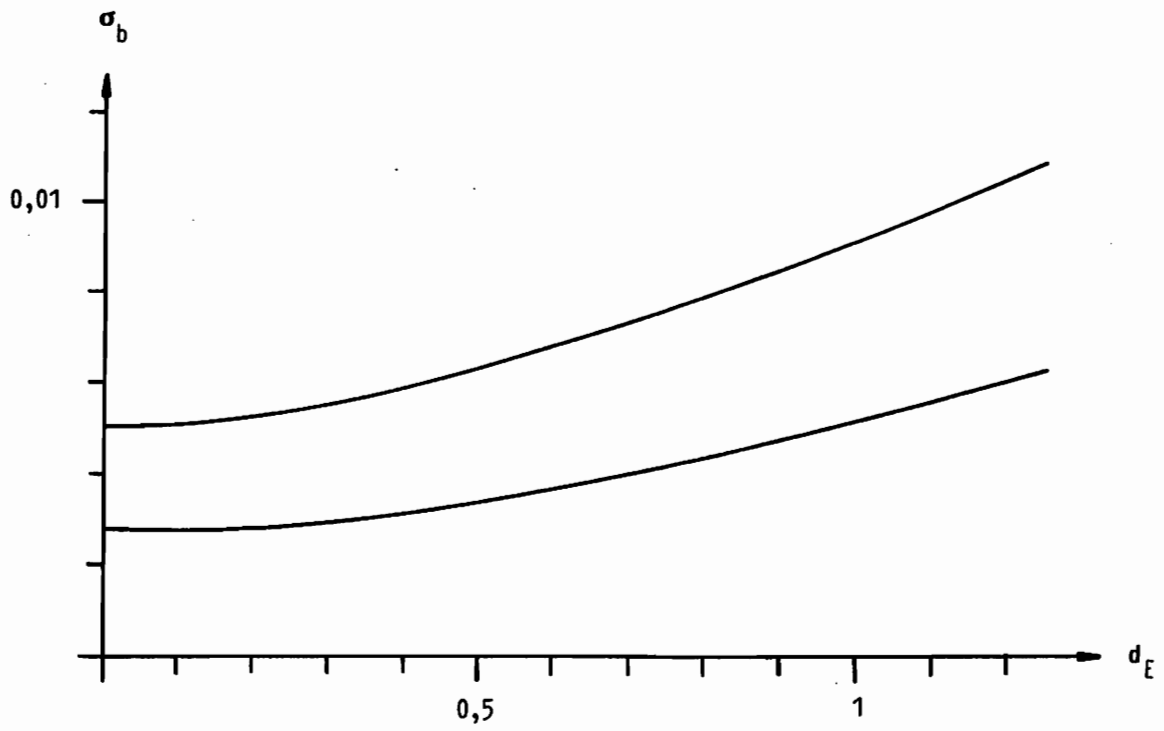


Bild 6.49 Frequenzfehler im Fall 1 bei Exponentialfenster

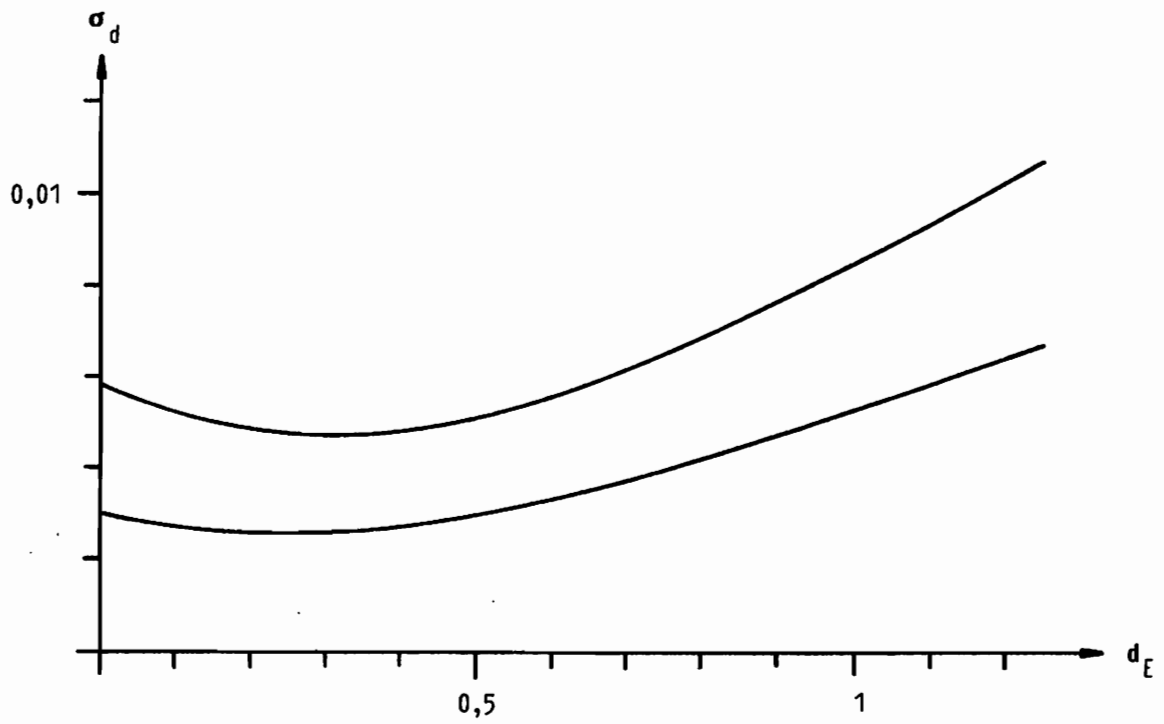


Bild 6.50 Dämpfungsfehler im Fall 1 bei Exponentialfenster

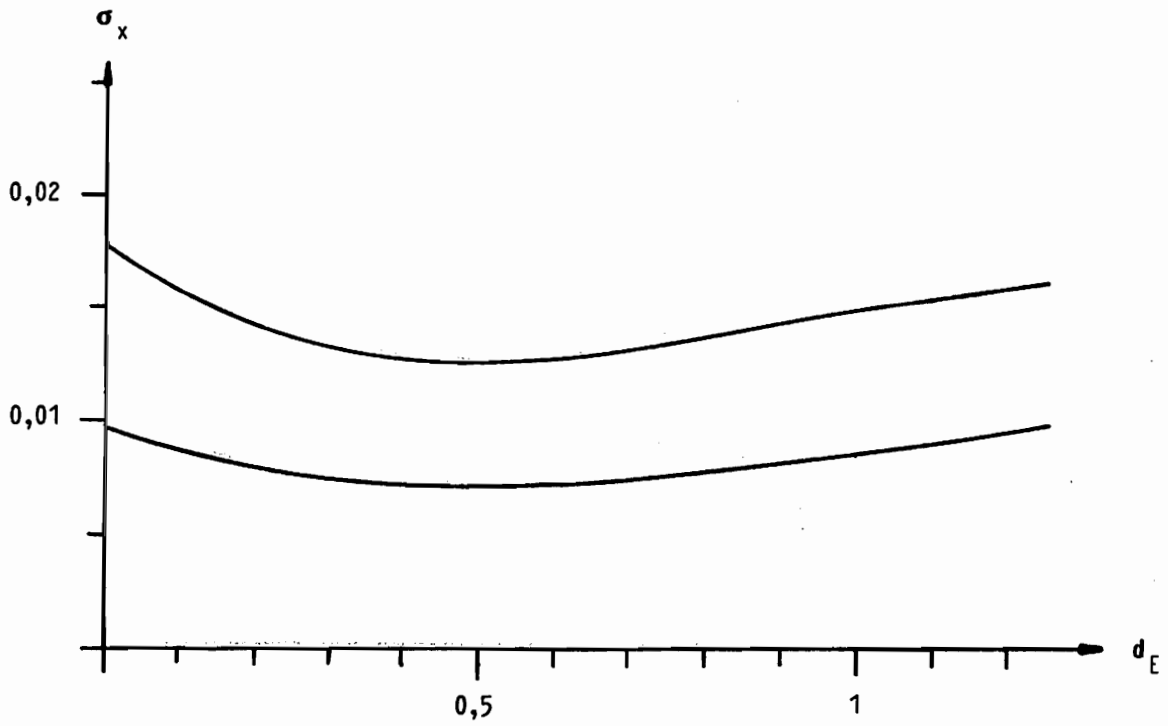


Bild 6.51 Amplitudenfehler im Fall 1 bei Exponentialfenster

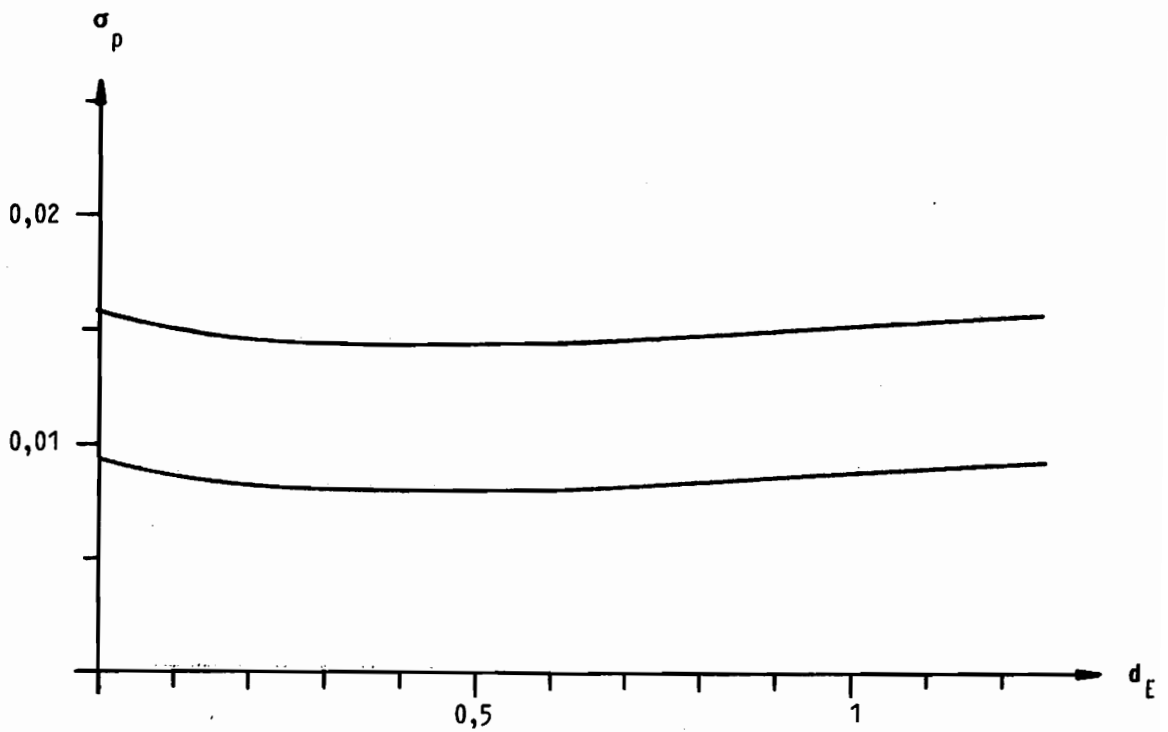


Bild 6.52 Phasenfehler im Fall 1 bei Exponentialfenster

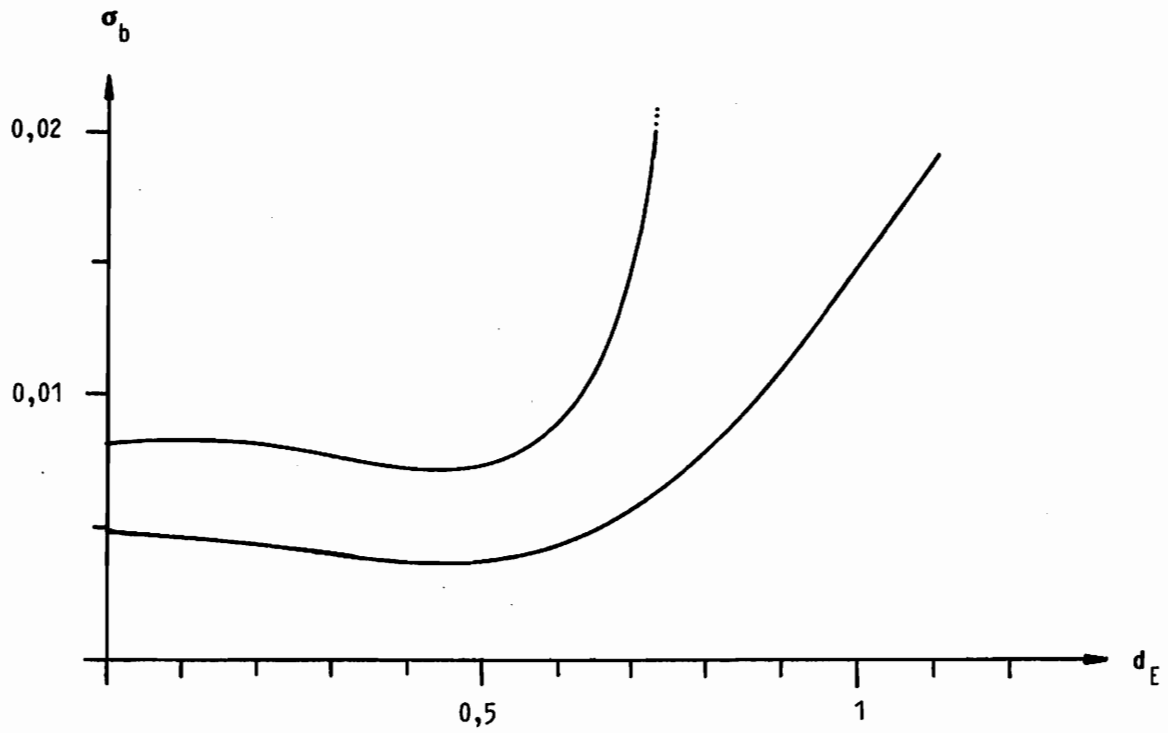


Bild 6.53 Frequenzfehler im Fall 2 bei Exponentialfenster

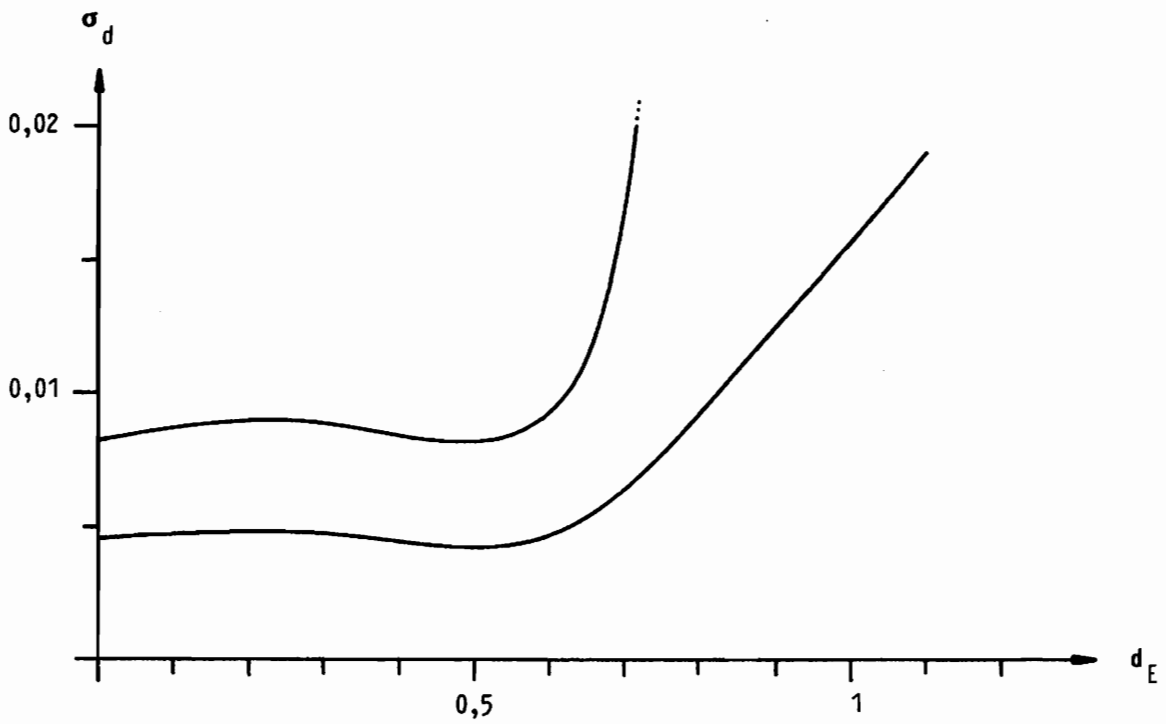


Bild 6.54 Dämpfungsfehler im Fall 2 bei Exponentialfenster



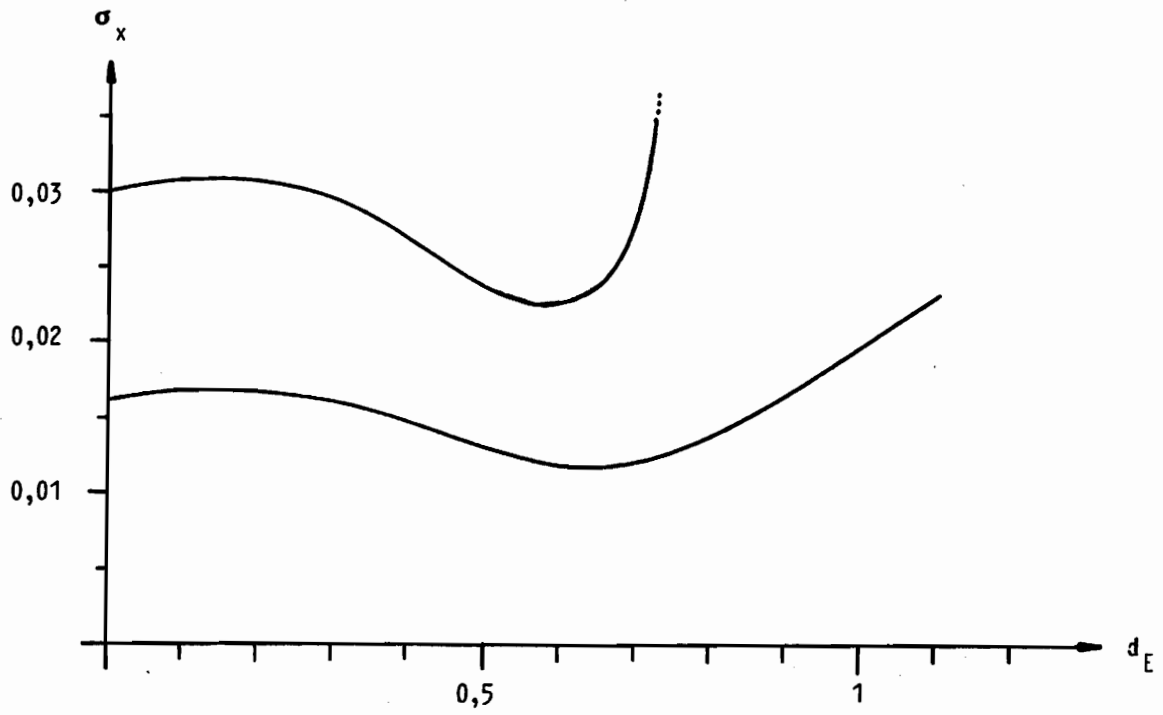


Bild 6.55 Amplitudenfehler im Fall 2 bei Exponentialfenster

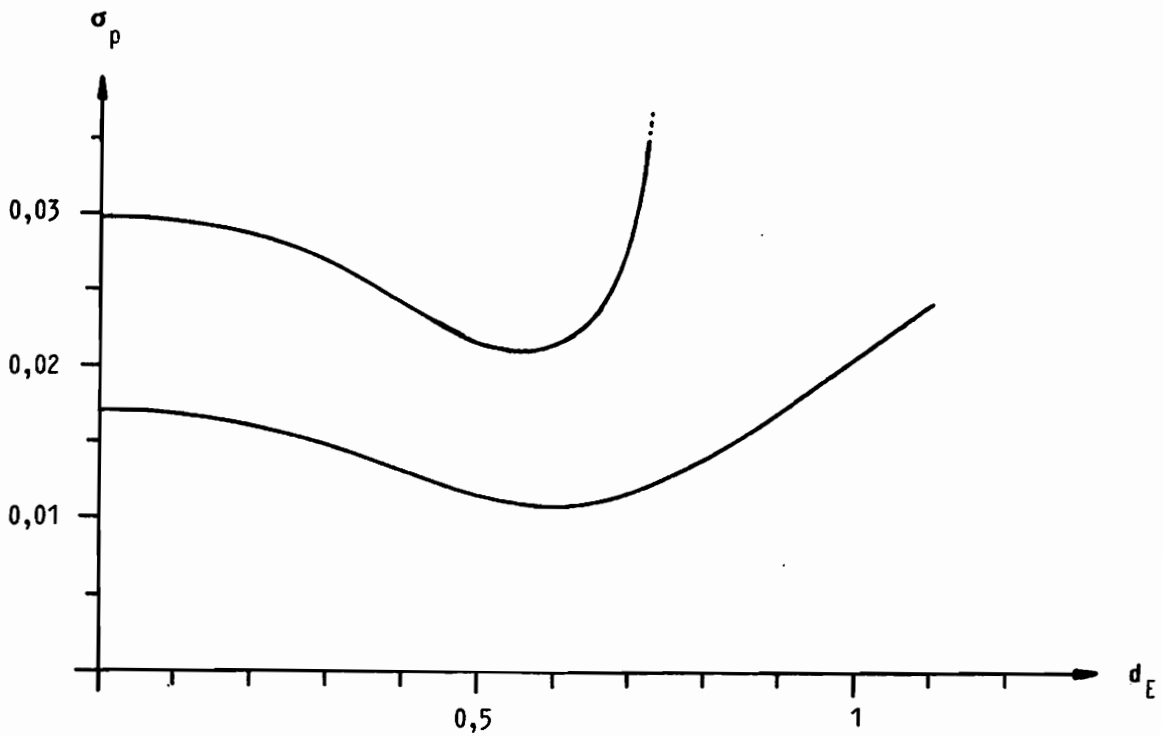


Bild 6.56 Phasenfehler im Fall 2 bei Exponentialfenster

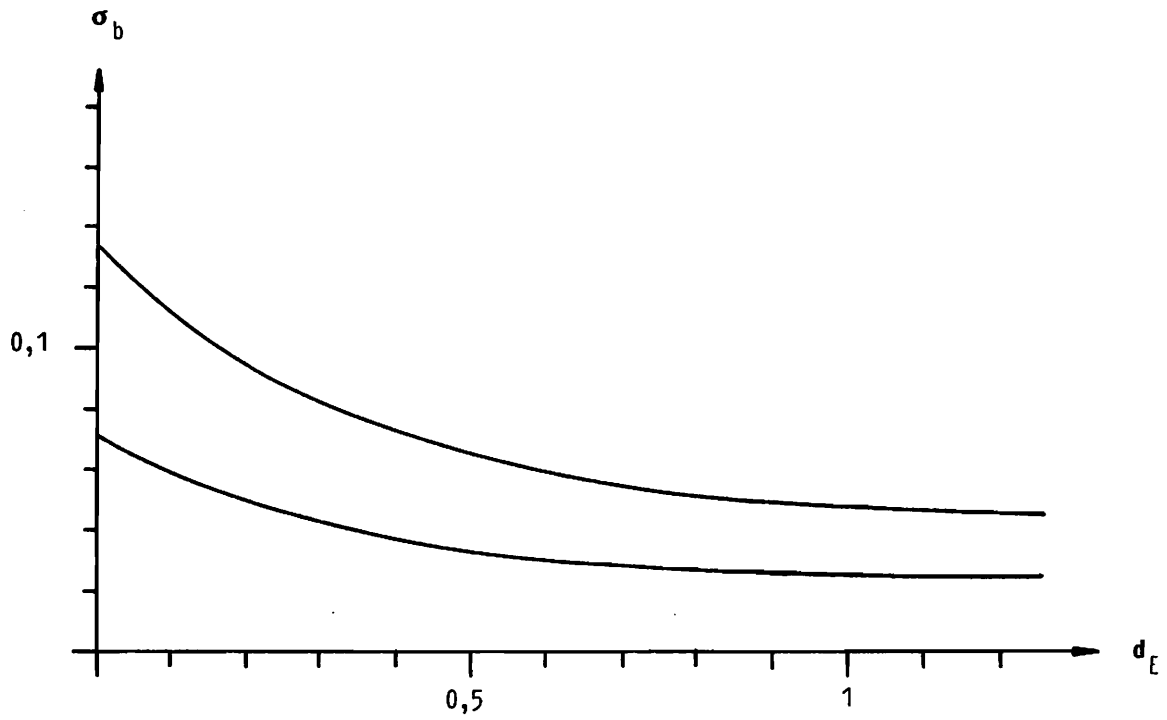


Bild 6.57 Frequenzfehler im Fall 3 bei Exponentialfenster

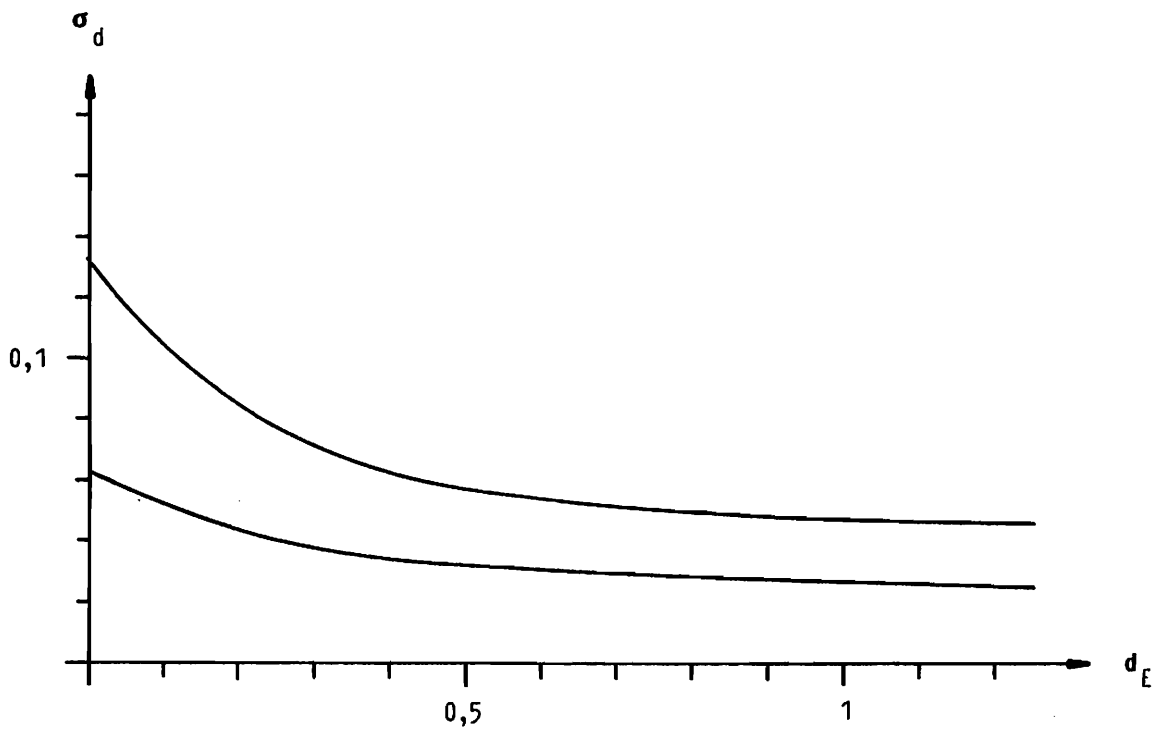


Bild 6.58 Dämpfungsfehler im Fall 3 bei Exponentialfenster

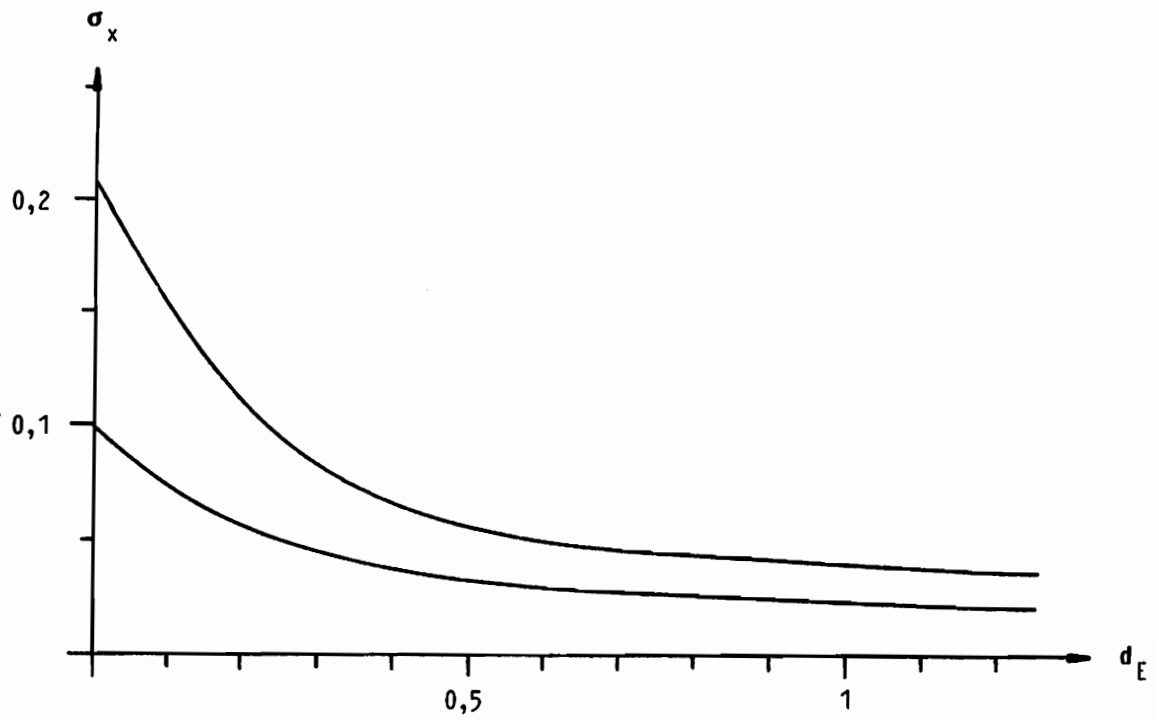


Bild 6.59 Amplitudenfehler im Fall 3 bei Exponentialfenster

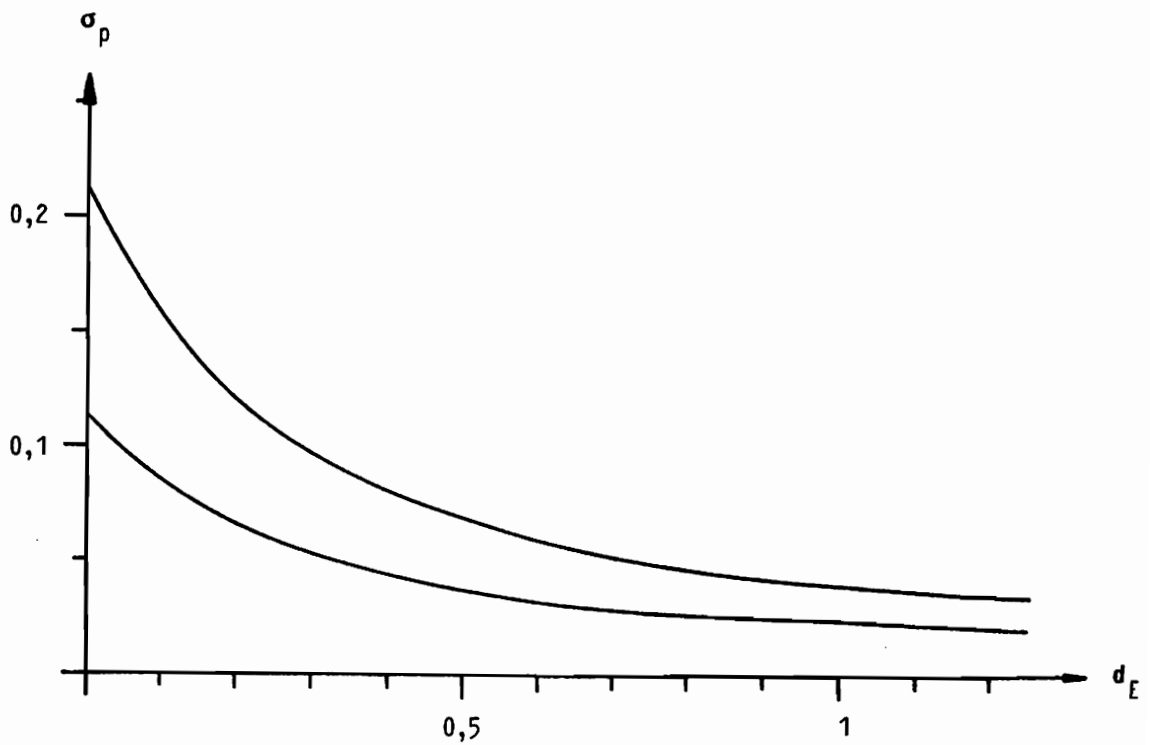


Bild 6.60 Phasenfehler im Fall 3 bei Exponentialfenster

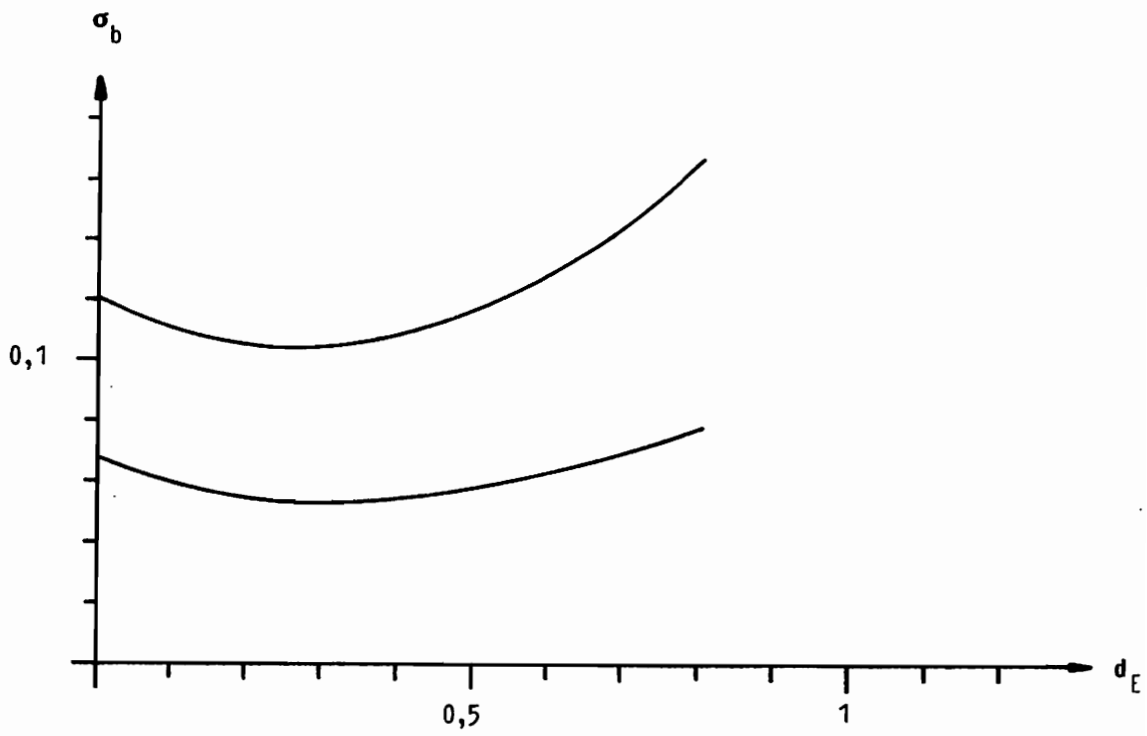


Bild 6.61 Frequenzfehler im Fall 4 bei Exponentialfenster

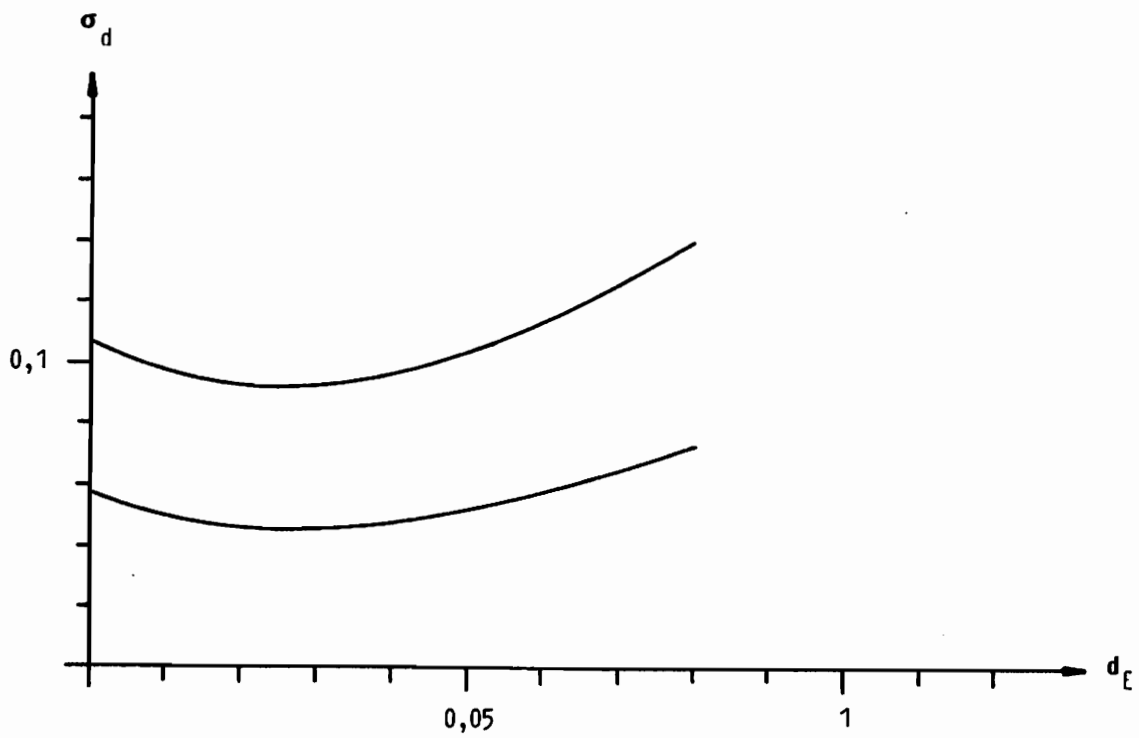


Bild 6.62 Dämpfungsfehler im Fall 4 bei Exponentialfenster

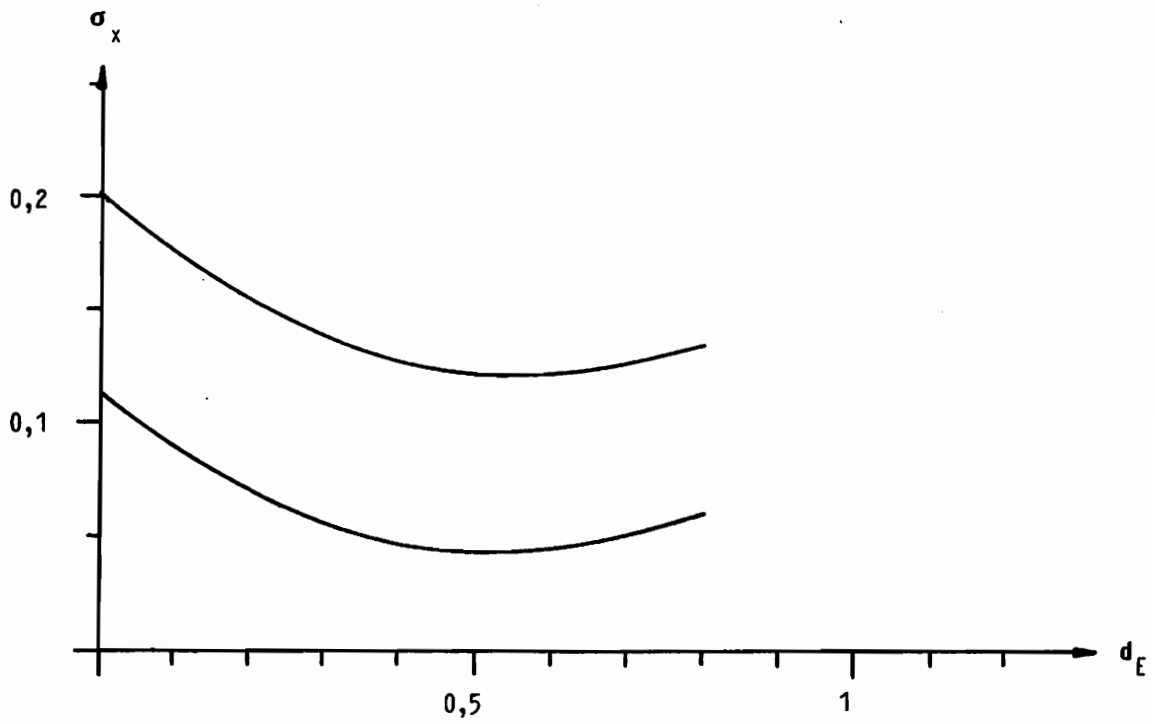


Bild 6.63 Amplitudenfehler im Fall 4 bei Exponentialfenster

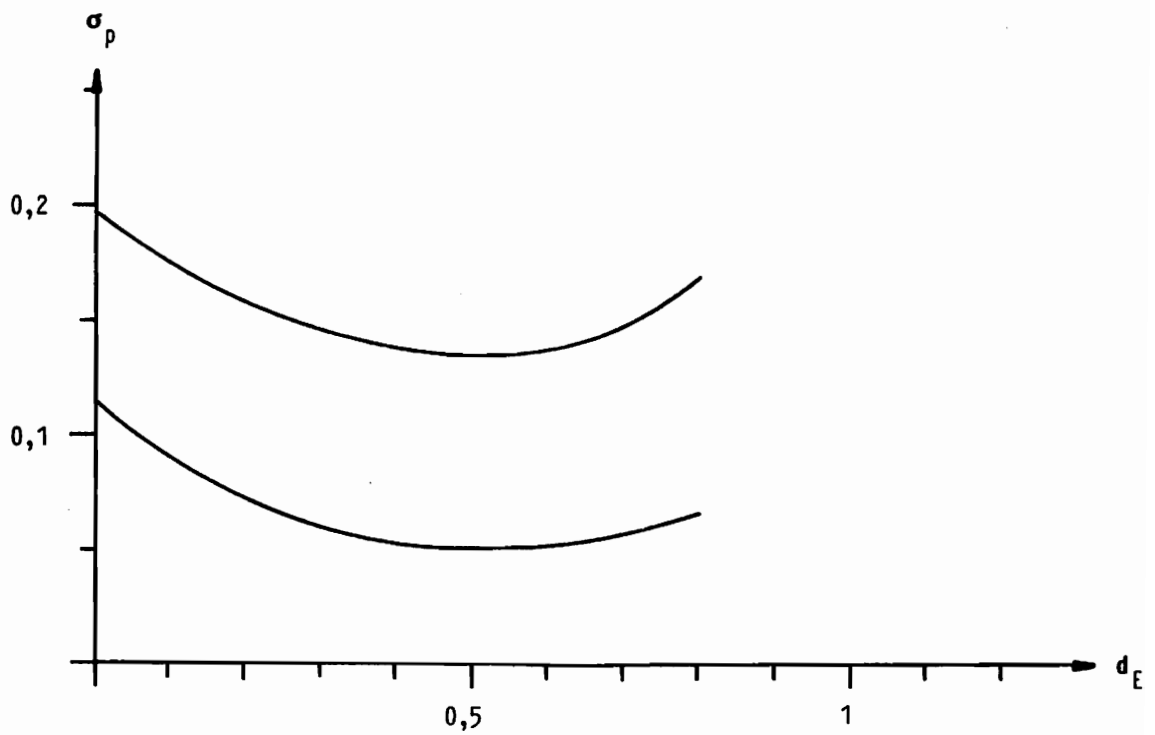


Bild 6.64 Phasenfehler im Fall 4 bei Exponentialfenster

## 7. Durchgeführte Versuche

### 7.1. Übersicht

In diesem Kapitel werden nun zum Abschluß die Versuche beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt und mit dem direkten Verfahren ausgewertet wurden. Es handelte sich dabei einerseits um Versuche an einfachen Modellen (Balken und Kreisringplatte) auf einem Versuchsstand neben der Rechenanlage, wobei die Meßwerte direkt digitalisiert werden konnten, und andererseits um Versuche an größeren Objekten (Werkstoffprüfmaschine und Scherentrennschalter) an deren Aufstellungsorten, wodurch die Meßwerte auf einem Analogbandgerät zwischengespeichert werden mußten. Bei allen Versuchen wurden immer zwei Meßkanäle gleichzeitig aufgenommen, die mit gleichen Meßwertaufnehmern und Verstärkern bestückt waren. Durch die Messung von zwei Kanälen ist es möglich, Eigenformen zu bestimmen, indem die Meßwerte eines Kanals (des Referenzkanals) immer an einem Punkt des Systems aufgenommen werden, während der andere Aufnehmer nacheinander an verschiedene Stellen des Systems gesetzt wird. Die Eigenform wird dann durch eine einfache komplexe Normierung bestimmt. Wird z. B. die Amplitude der m-ten Eigenschwingung an der Stelle n zur Normierung gleich 1 gesetzt,

$$\hat{x}_{nn} = 1 \quad (7.1)$$

so ergibt sich für die anderen Meßpunkte:

$$\hat{x}_{mk} = \frac{y_{mk} \cdot y_{nn}}{y_{nk} \cdot y_{mm}} \quad (7.2)$$

x-komplexe Amplitude am Meßpunkt

y-zugehörige Amplitude am Referenzpunkt

Die Meßreihen weisen häufig Lücken auf. Lücken im Meßkanal, bei großen Amplituden im Referenzkanal, zeigen an, daß in der Nähe eines Schwingungsknotens gemessen wurde, bei Lücken in beiden Kanälen ist die entsprechende Eigenschwingung zu schwach angeregt worden. Sollen möglichst viele Eigenformen untersucht werden, empfiehlt es sich, an einer Stelle mehrfach zu messen, da das Anregen hoher Eigenfrequenzen auch vom Zufall abhängt.

Aussagen über die Genauigkeit der bestimmten Parameter lassen sich durch einen Vergleich der Frequenz- und Dämpfungswerte machen, die für jede Messung und jeden Kanal unabhängig voneinander bestimmt werden. Zu beachten ist, daß an Meßstellen mit sehr kleinen Amplituden zwangsläufig größere Fehler auftreten. Entscheidend für die Berechnung von Eigenformen ist auch die Wahl eines günstigen Referenzpunktes. Ideal ist ein Punkt, an dem alle Eigenformen maximale Auslenkungen aufweisen. Beim einseitig eingespannten Balken besitzt das freie Ende diese Eigenschaft, bei komplizierteren Systemen muß aufgrund von Vergleichsmessungen ein Punkt festgelegt werden. In kritischen Fällen kann es sogar erforderlich sein, für unterschiedliche Eigenformen unterschiedliche Referenzpunkte zu wählen. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Versuchen war das jedoch nicht nötig.

## **7.2. Messungen am Biegebalken**

### **7.2.1. Versuchsdurchführung**

Als erstes Beispiel für die Auswertung von Meßwerten wurden Versuche an einseitig eingespannten Biegebalken durchgeführt. Der Versuchsaufbau und die Anordnung der Meßgeräte sind in Bild (7.1) dargestellt. Den Untergrund für den Versuchsaufbau bildete eine massive Gußplatte, die auf einem Tisch in Gummi gelagert war, um von den Schwingungen des Bodens weitgehend isoliert zu sein. Die berührungslos arbeitenden kapazitiven Wegaufnehmer wurden zunächst beide über dem Balken verschiebbar an einer Schiene aufgehängt. Die bei den ersten Versuchen verwendete Stahlschiene wurde später gegen eine aus Holz ausgetauscht, weil sich die Eigenchwingungen der Schiene mit den Aufnehmern den Balkenschwingungen überlagerten. Zudem änderten sich diese Schwingungen durch das Verschieben der Aufnehmer ständig. Die Holzschiene hat dagegen eine so hohe innere Dämpfung, daß deren Eigenschwingungen schon nach wenigen hundertstel Sekunden abgeklungen sind. Der Referenzpunkt wurde so nahe wie möglich an das freie Balkenende gelegt. Der andere Meßaufnehmer wurde nacheinander an verschiedene Punkte des Balkens geschoben. Da beide Kanäle mit den gleichen Meßwertaufnehmern und Verstärkern bestückt waren, sollte der Meßwert des Referenzkanals mit zur Bestimmung der Eigenformen dienen. Es zeigte sich jedoch, daß die Verstärker dazu zu ungenau waren; so

wiesen die ermittelten komplexen Amplituden der ersten Eigenfrequenz (ca. 18 Hz) eine Phasendifferenz von  $0,35$  ( $20''$ ) zwischen beiden Kanälen auf. Da sich dieser Fehler jedoch als näherungsweise konstant erwies, war eine komplexe Normierung der Meßwerte mit Hilfe des Referenzkanals möglich. Der Versuchsstand wurde darum so umgebaut, daß der Referenzaufnehmer unter dem Balken auf dem Tisch befestigt war, damit auch die Auslenkungen in der Nähe des freien Balkenendes gemessen werden konnten. Die Erregung der Schwingungen erfolgte durch Schläge mit einem kleinen Hammer. Als günstig für die gleichmäßige Erregung auch hoher Frequenzen erwiesen sich Schläge nahe der Einspannung. Da der Hammer beim Auftreffen zum Prellen neigte, wurde er an eine Spannungsquelle angeschlossen. Die Spannung des Hammers wurde auch aufgezeichnet, damit festgestellt werden konnte, wann der Hammer den Balken nicht mehr berührt hat. Wurde zu diesem Zeitpunkt mit der Auswertung begonnen, waren die ermittelten Ergebnisse jedoch zu ungenau. Die Ursachen dafür sind das Einschwingverhalten der Verstärker, die mit einem Übertragungsbereich von 20 Hz bis 20 kHz für Messungen im Audio-Bereich ausgelegt sind, und das Einschwingverhalten des Balkens, der nach der punktförmigen Belastung zunächst noch Querschwingungen ausführt. Bei der Wahl der Einschwingzeit muß ein Kompromiß zwischen gut eingeschwingenen unteren Eigenfrequenzen und noch nicht abgeklungenen oberen Eigenfrequenzen gewählt werden. Bei den angegebenen Streuungen handelt es sich um die Streuung innerhalb der Meßreihe.

### **7.2.2. Stahlbalken**

Als Beispiel für die am einfachen Stahlbalken durchgeführten Messungen sind in Bild (7.2) die ersten 6 in einer Versuchsreihe bestimmten Eigenformen aufgezeichnet und die zugehörigen Eigenfrequenzen und Dämpfungen angegeben. Die Auslenkungen wurden an 14 Stellen gemessen, die hier durch die senkrechten Linien dargestellt sind. Die gezeigten Verformungskurven sind von Hand gezeichnete Verbindungen der gemessenen Einzelwerte. Die Versuchsreihe umfaßte jeweils 3 Messungen an jedem Punkt, deren Ergebnisse gemittelt wurden.



Versuchsdaten: Meßzeit.....0,25 s      Einschwingzeit..0,05 s  
 Diskretisierungszahl..1024      Auswertepunktzahl....4  
 Exponentialfenster-Zusatzdämpfung  $0,8 \frac{2\pi}{5}$

Ergebnisse: siehe Bild (7.2)

Zur Überprüfung der Genauigkeit unter optimalen Versuchsbedingungen wurde ergänzend eine Versuchsreihe durchgeführt, bei der durch Wegnahme einer statischen Auslenkung hauptsächlich die erste Eigenform angeregt wurde. Der Balken war bei diesen Versuchen kürzer eingespannt. Um die Amplituden und Phasengenauigkeit nach der Normierung bestimmen zu können wurde nur an einem Punkt gemessen.

Versuchsdaten: Meßzeit.....1.0 s      Einschwingzeit...0,3 s  
 Diskretisierungszahl..1024      Auswertepunktzahl....2  
 Auflösung.....5 mV

Ergebnisse:                      1. Eigenform                      2. Eigenform

Frequenz	18,970 ± 0.003 Hz	118,78 ± 0,10 Hz
Dämpfung	0,008 ± 0,002 $\frac{2\pi}{5}$	0,053 ± 0,004 $\frac{2\pi}{5}$
Aussteuerung	2068 mV...3440 mV	41 mV...143 mV
Normierungsfehler Amplitude	3 mV $\cong$ 0,0015	2 mV $\cong$ 0,03
Normierungsfehler Phase	0.1° = 0,002	1° = 0,02

### 7.2.3. Stahl-Plexiglas-Balken

Um Aussagen über die Phasenverschiebungen bei einem nicht modal gedämpften Balken zu erhalten, wurde ein Stahlbalken untersucht, der teilweise mit Plexiglas zusammengeklebt war. Die Messungen erfolgten unter den gleichen Bedingungen wie beim Stahlbalken. Wegen der hohen Dämpfung und der kleinen Amplituden, bedingt durch die schlechtere Anregbarkeit, konnten in diesem Fall aber nur 3 Eigenschwingungen ermittelt werden. Es konnten jedoch trotz der hohen erreichten Genauigkeit keine Phasenverschiebungen bei den

Amplituden festgestellt werden. Die ermittelten Phasenwerte wiesen nur zufällige Streuungen auf, deren Beträge bei 2, 1, und 3 lagen. Zu beachten ist bei der Beurteilung der Genauigkeit der Meßergebnisse, daß bei einer möglichen Signalspannung von 10 000 mV und einer Auflösung von 5 mV die durchschnittliche Amplitude der 3. Eigenschwingung zu Beginn 160 mV, nach der Hälfte der Meßzeit 26 mV und am Ende nur noch 4 mV betrug. Die Fehler sind unter diesen Bedingungen als gering zu bezeichnen. Die Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Balkens betragen:

Versuchsdaten: Meßzeit.....0,25 s      Einschwingzeit..0,01 s  
Diskretisierungszahl...1024      Auswertepunktzahl....4

Ergebnisse:	Frequenz/Hz	Dämpfung/ $\frac{2\eta}{s}$
	23,35 ± 0,05	0,50 ± 0,03
	102,24 ± 0,02	0,93 ± 0,01
	295,08 ± 0,06	2,37 ± 0,03

#### 7.2.4. Stahlbalken mit Öldämpfer

Ebenfalls zur Untersuchung des Einflusses nichtmodaler Dämpfung wurde ein Stahlbalken am freien Ende mit einem Dämpfer versehen, der aus einem Blechplättchen an einer Gewindestange bestand, das in Getriebeöl getaucht wurde. Phasenverschiebungen konnten auch hierbei nicht festgestellt werden.

Versuchsdaten: Meßzeit.....0,50 s      Einschwingzeit..0,25 s  
 Diskretisierungszahl...1024      Auswertepunktzahl....2

Ergebnisse zum Vergleich:

	Frequenz/Hz	Dämpfung/ $\frac{2\pi}{s}$
ohne Öldämpfung	17,82 ± 0,02	0,02 ± 0,01
	111,88 ± 0,02	0,057 ± 0,006
	313,00 ± 0,03	0,128 ± 0,009
mit Öldämpfung	17,77 ± 0,03	0,33 ± 0,03
	111,65 ± 0,01	0,40 ± 0,01
	312,24 ± 0,04	0,74 ± 0,01

### 7.2.5. Holzbalken

Zum Vergleich der Dämpfung zwischen Stahl und Holz wurden die Schwingungen eines Balkens aus Fichtenholz unter gleichen Bedingungen gemessen. Die Oberfläche war mit Aluminiumfolie beklebt, um elektrisch leitfähig zu sein. Wegen der hohen Dämpfung konnten nur vier Eigenschwingungen ermittelt werden.

Versuchsdaten: Meßzeit.....0,125 s      Einschwingzeit..0,05 s  
 Diskretisierungszahl....256      Auswertepunktzahl....2

Ergebnisse:	Frequenz/Hz	Dämpfung/ $\frac{2\pi}{s}$
	24,37 ± 0,10	0,13 ± 0,08
	154,93 ± 0,08	0,62 ± 0,05
	431,51 ± 0,05	1,66 ± 0,05
	830,5 ± 0,6	3,5 ± 0,5

### 7.3. Messungen an einer Prüfmaschine

Als erstes Beispiel für Messungen an Maschinen wurden die freien Schwingungen einer Zug- und Torsionsprüfmaschine gemessen. Der Versuchsaufbau ist in Bild (7.3) dargestellt. Der Hammer, mit dem die Schwingungen angeregt wurden, mußte zur Dämpfung mit einem Gummi beklebt werden, damit die verwendeten Beschleunigungsaufnehmer nicht beim Anschlagen übersteuerten. Die Meßwerte wurden auf einem Analog-Magnetband zwischengespeichert und später digital ausgewertet. Zwei der gemessenen Eigenformen sind in Bild (7.4) räumlich dargestellt, die übrigen vier Eigenschwingungen waren sehr lückenhaft, so daß eine bildliche Darstellung nicht sinnvoll war.

Versuchsdaten: Meßzeit.....0,25 s      Einschwingzeit..0,00 s  
Diskretisierungszahl....512      Auswertepunktzahl....2

Ergebnisse:	Frequenz/Hz	Dämpfung/ $\frac{2}{c}$
	71,0 ± 0,2	0,74 ± 0,09
	91,6 ± 0,8	3,0 ± 0,5
	117,7 ± 0,4	2,1 ± 0,4
	154,5 ± 0,9	3,9 ± 0,9
	263,8 ± 0,7	5,5 ± 0,7
	637,6 ± 0,8	8,3 ± 1,1

### 7.4. Messungen am Trennschalter

Mit dem gleichen Meßaufbau, wie bei der Prüfmaschine wurde auch an einem Scheren-Trennschalter, wie er in Starkstromanlagen verwendet wird, gemessen. Durch Kurzschluß erregte mechanische Schwingungen führen bei diesen Schaltern häufig zum Versagen. Zur Schwingungsanregung wurden die Holme mit einem Draht verspannt, der durchgetrennt wurde. Die Versuchsergebnisse reichten jedoch wegen ihrer mangelnden Genauigkeit zur Bestimmung von Eigenformen nicht aus. Die Meßschriebe zeigte immer am Umkehrpunkt ein plötzliches Entstehen sehr hochfrequenter Schwingungen. Erklärt werden kann das nur durch das Festhaken und Losbrechen der Gelenke im Umkehrpunkt. Diese

weisen eine große Reibung auf, weil sie elektrisch gut leiten müssen. Die ermittelten Frequenz- und Dämpfungswerte sollen trotzdem angegeben werden:

Versuchsdaten: Meßzeit.....0,125 s      Einschwingzeit..0,00 s  
Diskretisierungszahl....512      Auswertepunktzahl....2  
Exponentialfenster-Zusatzdämpfung  $2 \frac{2\pi}{5}$

Ergebnisse:	Frequenz/Hz	Dämpfung / $\frac{2\pi}{5}$
	8,9 ± 0,2	1,1 ± 0,4
	17,5 ± 0,4	2,1 ± 0,4
	236 ± 2	3,3 ± 1,0
	473 ± 3	3,3 ± 0,8

### 7.5. Messungen an einem Kreissägeblatt

Auf dem Versuchsstand, auf dem die Balkenschwingungen gemessen worden waren, wurden auch die Versuche an einem horizontal eingespannten Kreissägeblatt durchgeführt. Der Aufbau war der gleiche, nur so geändert, daß der obere Wegaufnehmer an jede Stelle über dem Sägeblatt geschoben werden konnte. Zwei der gemessenen Eigenformen sind in Bild (7.5) räumlich dargestellt. Während die untere Eigenschwingung als stehende Welle erscheint, besitzt die obere auch umlaufende Anteile. Deshalb sind hier auch zwei (verschobene) Schwingungszustände eingezeichnet, die bei den Versuchen ermittelt wurden.

Versuchsdaten: Meßzeit.....2 s      Einschwingzeit...0,1 s  
Diskretisierungszahl...2048      Auswertepunktzahl....4

Ergebnisse:	Frequenz/Hz	Dämpfung / $\frac{2\pi}{5}$
	57,1 ± 0,1	0,27 ± 0,07
	59,6 ± 0,1	0,16 ± 0,08
	119,8 ± 0,1	0,07 ± 0,04
	243,6 ± 0,1	0,02 ± 0,01

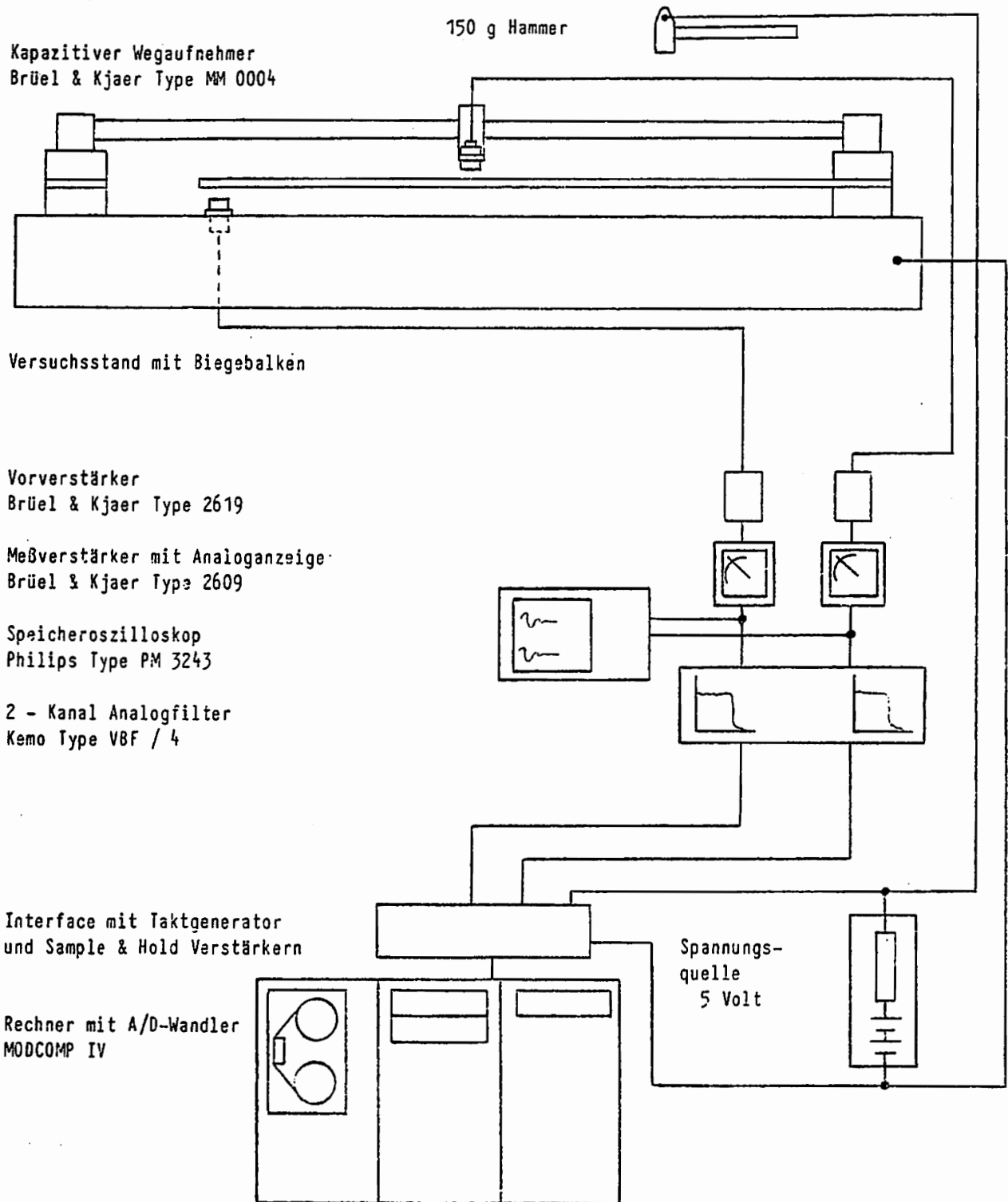
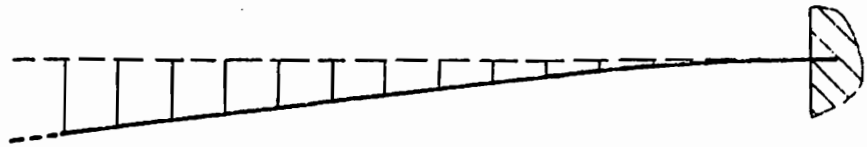


Bild 7.1 Versuchsaufbau für Messungen am Biegebalken

Frequenz  
17,55 ± 0,02 Hz

Dämpfung  
0,03 ± 0,02  $\frac{2\pi}{s}$



Frequenz  
109,87 ± 0,06 Hz

Dämpfung  
0,05 ± 0,01  $\frac{2\pi}{s}$



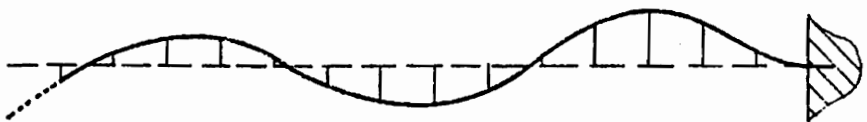
Frequenz  
307,76 ± 0,12 Hz

Dämpfung  
0,25 ± 0,05  $\frac{2\pi}{s}$



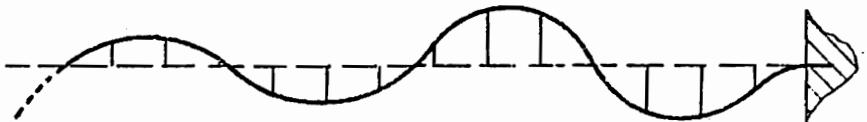
Frequenz  
602,87 ± 0,24 Hz

Dämpfung  
0,40 ± 0,05  $\frac{2\pi}{s}$



Frequenz  
996,4 ± 0,4 Hz

Dämpfung  
0,6 ± 0,1  $\frac{2\pi}{s}$



Frequenz  
1489 ± 0,4 Hz

Dämpfung  
1,22 ± 0,07  $\frac{2\pi}{s}$



Bild 7.2 Eigenformen des Biegebalkens

1500 g Hammer mit Dämpfungsgummi

Beschleunigungsaufnehmer  
Brüel & Kjaer Type 4375

Zug - Torsions - Prüfmaschine  
Schenk Hydropuls

Ladungsverstärker  
Brüel & Kjaer Type 2626

Speicheroszilloskop  
Philips Type PM 3243

2 - Kanal Analogfilter  
Kemo Type VBF / 4

Analog - Bandgerät  
Philips Type Analog 7

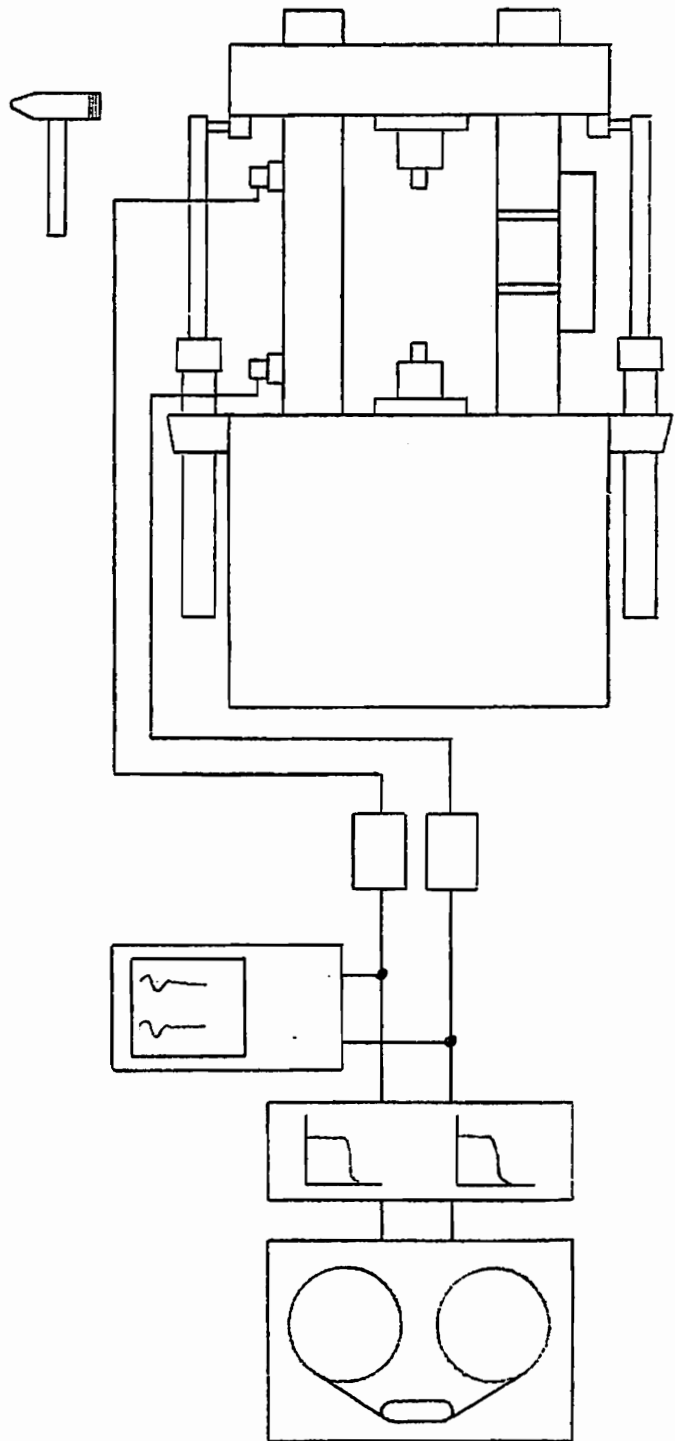


Bild 7.3 Versuchsaufbau für Messungen an der Prüfmaschine



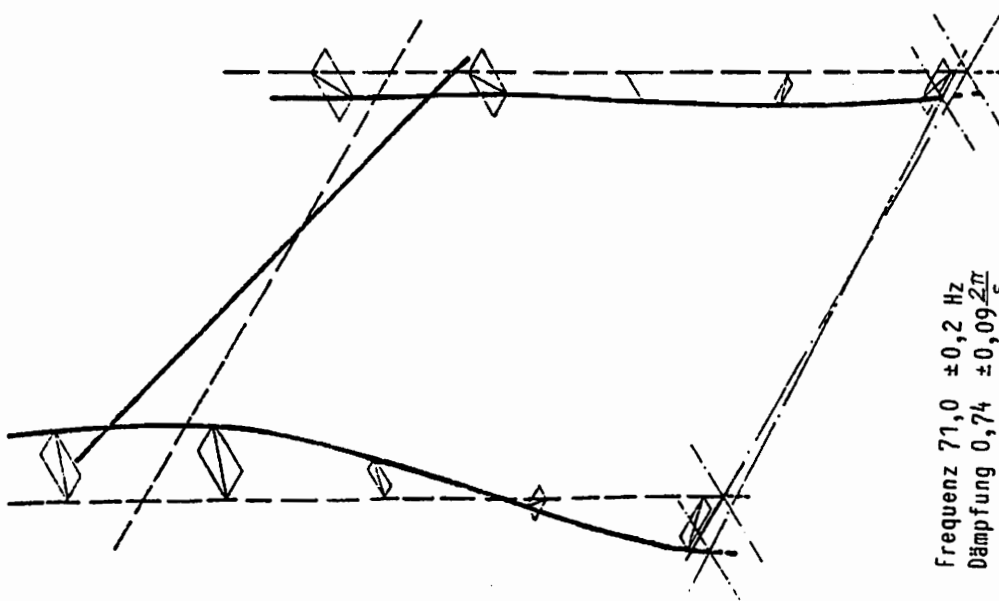
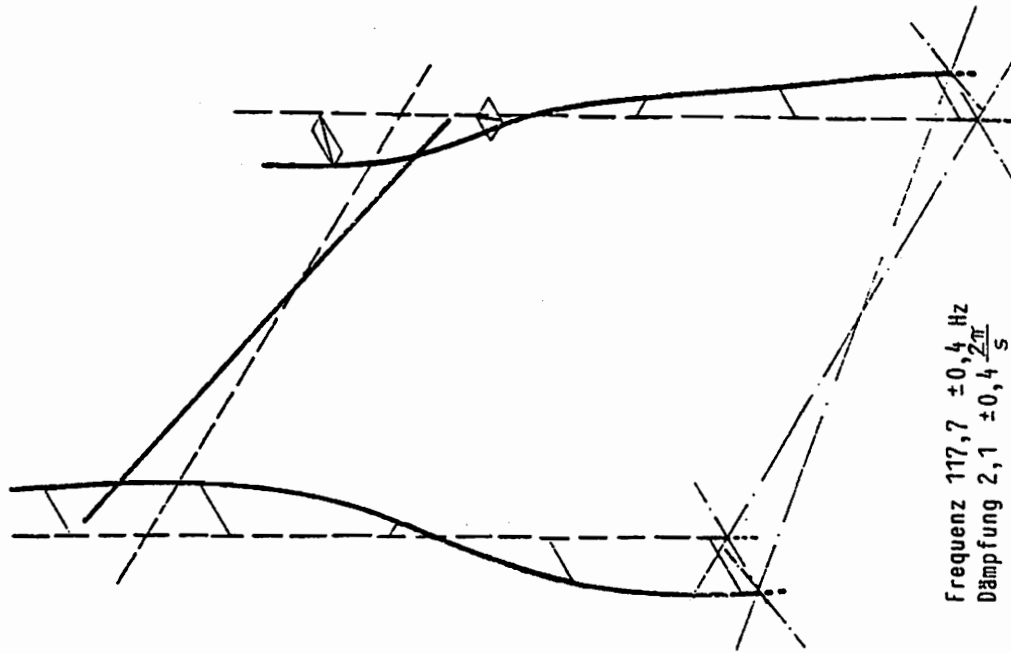
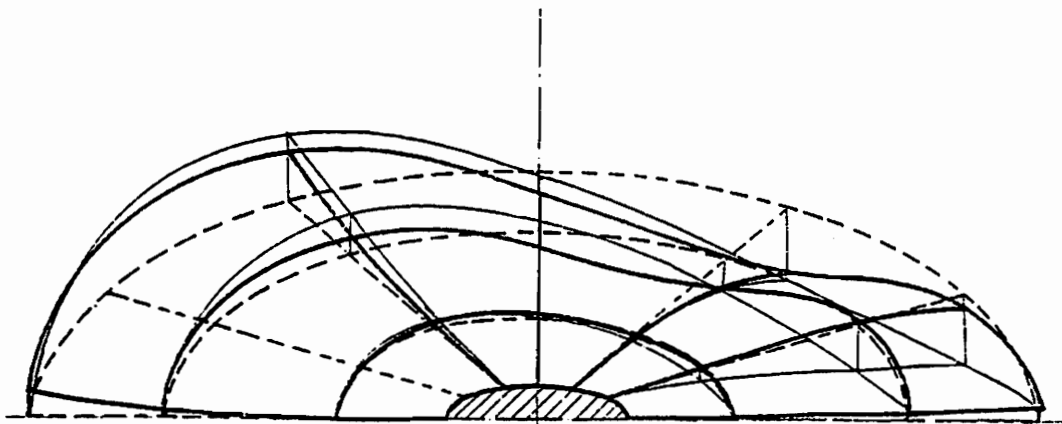
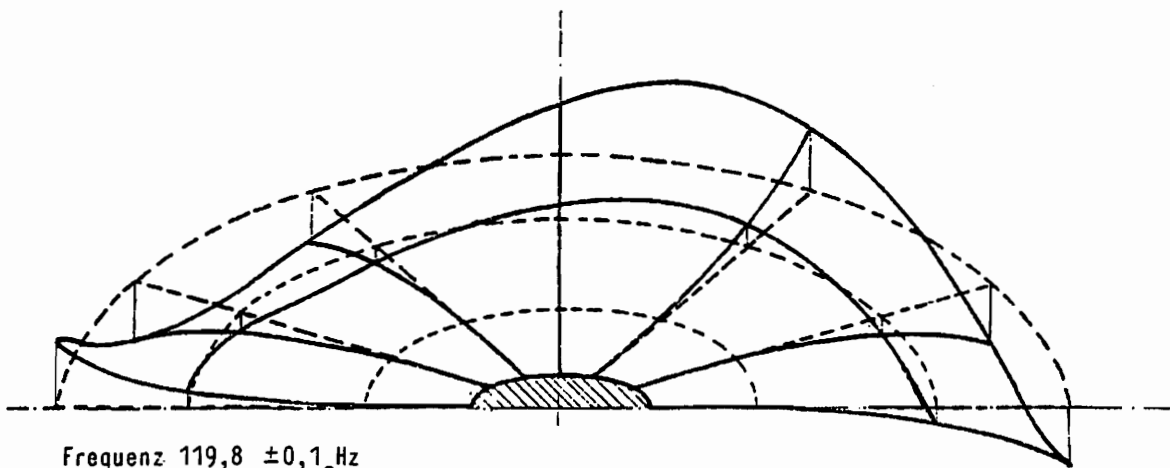


Bild 7.4 Eigenformen der Prüfmaschine



Frequenz  $57,12 \pm 0,10$  Hz  
Dämpfung  $0,27 \pm 0,07 \frac{2\pi}{s}$



Frequenz  $119,8 \pm 0,1$  Hz  
Dämpfung  $0,07 \pm 0,4 \frac{2\pi}{s}$

**Bild 7.5** Eigenformen eines Kreissägeblattes

## 8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Verfahren zur digitalen Versuchsauswertung von Schwingungen vorgestellt. Dieses Verfahren basiert auf der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT, FFT). Der Anwendungsbereich ist auf freie und periodisch erregte Schwingungen begrenzt, da sich diese explizit beschreiben lassen. Die Vorteile des Verfahrens liegen in der optimalen Ausnutzung der Möglichkeiten der DFT.

Eine mathematische Analyse führt dabei auf eine Beschreibung der DFT als Fourier-Reihe von  $\delta$ -Impulsen, und der Fourier-Reihe als Darstellungsform der Fourier-Transformation periodischer Funktionen. Damit ist die DFT einer bekannten Funktion analytisch darstellbar. Für die exponentiell abklingende harmonische Funktion führt das auf eine Gleichung, die vereinfacht und dann umgestellt werden kann. Bei der Bestimmung der Schwingungsparameter mit Hilfe dieser direkten Gleichungen wird eine extrem hohe Genauigkeit erreicht. Zur Trennung eng benachbarter Eigenfrequenzen kann eine iterative Auswertung vorgenommen werden.

Die drei wichtigsten die Meßergebnisse verfälschenden Störungen sind das Rauschen der Meßgeräte, die geringe Auflösung des A/D-Wandlers und die Verzerrungen durch nichtlineares Verhalten von Meßwertaufnehmern.

Die Anfälligkeit der Auswertung gegen diese Störungen wird deshalb mit Hilfe künstlich gestörter numerisch erzeugter Testfunktionen statistisch untersucht und für die vier Schwingungsparameter (Frequenz, Dämpfung, Amplitude, Phase) graphisch dargestellt. Bei Überlagerung dieser Störungen addieren sich auch die einzelnen Fehler.

Wie die ergänzenden Versuchsbeispiele zeigen, lassen sich auch in der praktischen Anwendung gute Ergebnisse erzielen. Besonders geeignet ist das vorgestellte Verfahren wegen seiner hohen Genauigkeit zur Untersuchung von Dämpfungen und Phasenverschiebungen.

Mit der vorliegenden Arbeit ist daher eine neue praktisch anwendbare Möglichkeit zur Signalanalyse im Frequenzbereich gegeben.

## Literaturverzeichnis

- 1 **Achilles, D.**  
Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung  
Springer-Verlag, Berlin 1978
- 2 **Bartsch, H.-J.**  
Taschenbuch mathematischer Formeln  
Verlag Harri Deutsch, Zürich 1973
- 3 **Bouchard, D.**  
Ein DFT-angepaßter, direkter Algorithmus zur modalen  
Identifikation freier Schwingungen  
in: VDI-Bericht 456  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1982
- 4 **Brigham, E. O.**  
The Fast Fourier Transform  
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1974
- 5 **Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.**  
Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch, Zürich 1975
- 6 **Freund, H.; Nordmann, R.**  
Vergleich zwischen experimenteller Modalanalyse und  
Finite-Element-Rechnung von Eigenschwingungen offener,  
dünnwandiger Profile  
in: VDI-Bericht 456  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1982
- 7 **Goßmann, E.; Krings, W.; Waller, H.**  
On Suitable Formulations of the Method of Modal Analysis  
for Numerical Calculations  
in: International Journal for Numerical Methods in  
Engineering, Vol. 12 (1978), S. 795-808
- 8 **Goßmann, E.; Waller, H.**  
Rechnergestützte Schwingungsanalyse mit Hilfe der  
Fourier-Transformation  
in: VDI-Zeitschrift 122, Nr. 11 u. 12  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1980
- 9 **Grabowski, B.**  
Zur modalen Simulation des instationären Schwingungs-  
verhaltens von Turboläufern  
Fortschritt-Berichte Reihe 11, Nr. 25  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1976
- 10 **Jahn, K. D.**  
Rechnergestützte Auswertung von Schwingungs-  
untersuchungen  
Dissertation, TU Hannover 1978

- 11 **Loon, P. van**  
Modal Parameters of Mechanical Structures  
Dissertation Universität Leuven/Niederlande 1974
- 12 **Natke, H. G.**  
Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen-  
und Modalanalyse  
Vieweg & Sohn, Braunschweig 1983
- 13 **Nordmann, R.**  
Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Eigenwerte  
von Turborotoren mit Gleitlagern  
Spalterregung, äußerer und innerer Dämpfung  
Dissertation TH Darmstadt 1974
- 14 **Nordmann, R.**  
Schwingungsberechnungen von nichtkonservativen Ro-  
toren mit Hilfe von Links- und Rechts-Eigenvektoren  
VDI-Berichte Nr. 269  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1976
- 15 **Nordmann, R.; Schöllhorn, K.**  
Experimentelle Ermittlung modaler Größen von  
Rotoren  
VDI-Berichte Nr. 320  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1978
- 16 **Schlegel, V.**  
Zur Parameteridentifikation von Turboläufnern aus  
dem Schwingungsverhalten  
Fortschritt-Berichte Reihe 11, Nr. 35  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1981
- 17 **Schwarz, R. G.**  
Identifikation mechanischer Mehrkörpersysteme  
Fortschritt-Berichte Reihe 8, Nr. 30  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1980
- 18 **Stearns, S. D.**  
Digitale Verarbeitung analoger Signale  
R. Oldenbourg Verlag, München 1979
- 19 **Verein Deutscher Ingenieure**  
Schwingungen von Maschine, Fundament und  
Baugrund  
VDI-Bericht 381  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1980
- 20 **Waller, H.; Krings, W.**  
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerks-  
BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1975
- 21 **Wedig, W.**  
Nichtlineare Identifikation linearer Systeme -  
Trennung benachbarter Eigenfrequenzen  
VDI-Berichte Nr. 419  
VDI-Verlag, Düsseldorf 1981

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1     Theodor Lehmann:  
          Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2     Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
          Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite  
          Elastic-Plastic Deformations.  
          Basic Concepts
- Nr. 3     Wolfgang Krings:  
          Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
          viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4     Burkhard Lücke:  
          Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen  
          elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5     Knut Schwarze:  
          Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen  
          Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6     Hubert Sommer:  
          Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-  
          zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7     H. Stumpf/F.J. Biehl:  
          Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
          Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8     Albert Meyers:  
          Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden  
          Zentrifugenschalen
- Nr. 9     Berend Fischer:  
          Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-  
          wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10    Wojciech Pietraszkiewicz:  
          Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinemato-graphischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear  
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei  
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch  
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value  
Problems in the Theory of Plasticity and Application to  
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-  
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-  
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger  
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen  
Kontaktproblem



- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und  
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and  
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre  
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische  
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-  
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik  
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-  
funktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung  
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-  
tigung großer Rotationen

- Nr. 40      Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41      Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42      Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 42**