

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Horst J. Klepp

Über die Gleichgewichtslagen
und Gleichgewichtsbereiche
nichtlinearer autonomer Systeme

Heft Nr. 45



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

HORST J. KLEPP

ÜBER DIE GLEICHGEWICHTSLAGEN
UND GLEICHGEWICHTSBEREICHE
NICHTLINEARER AUTONOMER SYSTEME

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

Nr. 45

JUNI 1985

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1985 Dr.rer.nat.habil.Horst J.Klepp
Marderweg 17 , 4630 Bochum 7

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden autonome Systeme betrachtet, auf die unstetige Kräfte wirken. Das Verhalten in den Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereichen wird untersucht.

Für konservative Systeme mit unstetigen Rückführ- oder Verstellkräften werden mit dem bereichsweise definierten Potential Hilfsfunktionen gebildet, mit denen die Stabilität der Gleichgewichtslagen bestimmt werden kann.

Für Systeme mit Dämpfung und Reibung werden typische Eigenschaften der Phasenporträts untersucht. Auf Besonderheiten der Schaltlinien in der Phasenebene, bei un stetigem Übergang von der Haft- zur Gleitreibung, wird hingewiesen.

Dann werden Systeme mit Gleichgewichtsbereichen betrachtet. Um das unterschiedliche Verhalten der Systeme in den verschiedenen Gleichgewichtslagen innerhalb von Gleichgewichtsbereichen zu kennzeichnen werden, auf Grund des Verhaltens des Systems auf kleine Störungen, für die Gleichgewichtslagen Richtungselemente und für die Bereiche Richtungsfelder definiert. Für ein Modell werden die Verzweigungspunkte des Richtungsfeldes bestimmt und der Einfluß von System- und Störparametern auf die Verzweigungspunkte untersucht.

SUMMARY

Autonomous systems with discontinuous forces are considered. The behavior in the equilibrium positions and equilibrium domains is investigated.

For conservative systems having discontinuous displacement dependent forces, with the help of the piecewise defined potential, auxiliary functions are determined. These functions are used for stability investigations of the equilibrium positions.

For systems with damping and friction representative phase-plane portraits are established. Particularities on the switching line because of discontinuous transition from static to kinetic friction are pointed out.

Then systems with equilibrium zones are considered. In order to characterize the equilibrium positions inside equilibrium zones, on the base of the response of the system to small perturbations, direction elements for equilibrium positions and therefore direction fields for equilibrium zones are defined. For a model the bifurcation points of the direction field are established and the influence of the parameters of the system and the perturbation on the bifurcation points is analysed.

INHALTSVERZEICHNIS

I. Systeme mit einem Freiheitsgrad	5
I.1. Die Differentialgleichung des Systems	5
I.2. Die isolierten Gleichgewichtslagen eines konservativen Systems mit unstetiger Kennlinie	9
I.2.1. Das Potential und die Hilfsfunktionen	10
I.2.2. Die Unstetigkeitspunkte der Kräfte als singuläre Punkte	14
I.2.3. Sonderfall mit der Vorzeichenfunktion	29
I.3. Besonderheiten der Schaltlinie $\dot{q}=0$ bei unstetigem Übergang von der Haft- zur Gleitreibung	38
I.4. Die Phasenporträts in den seitlichen Bereichen der Unstetigkeitsstellen der Kraft $F_0(q)$	42
I.4.1. Gleichsinnige Wirkung der Reibungs- und Dämpfungskraft	42
I.4.2. Entgegengesetzte Wirkung von Reibungs- und Dämpfungskraft	47
I.5. Systeme mit Gleichgewichtsbereichen	51
I.5.1. Beispiele von Systemen mit Gleichgewichtsbereichen	51
I.5.2. Die Richtungselemente der Gleichgewichtslagen	54
I.5.3. Das Richtungsfeld	55
I.5.4. Modell mit einem Freiheitsgrad	56
I.5.4.1. Die Bewegungsdifferentialgleichung	56
I.5.4.2. Das Richtungsfeld für Anfangsstörungen mit konstanter kinetischer Energie	59
I.5.4.3. Das Richtungsfeld für Anfangsstörungen in der Form von Stößen mit konstantem Impuls	66
I.5.4.4. Schlußfolgerungen	71
I.5.5. Systeme mit ortsabhängiger Reibungskraft	72
II. Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	78
II.1. Beispiele von Systemen mit Gleichgewichtsbereichen	78

II.1.1. Die Schwingerkette mit zwei Freiheitsgraden und konstanter Reibung	78
II.1.2. Systeme mit konstantem Potential	80
II.1.3. Symmetrisches System mit konstantem Potential	88
II.1.4. Bemerkung zur Integration der Bewegungs- differentialgleichungen	92
II.2. Allgemeines System mit n Freiheitsgraden	94
II.2.1. Die Bewegungsgleichungen und Gleichge- wichtslagen	94
II.2.2. Die Richtungselemente der Gleichgewichts- lagen	94
Literaturverzeichnis	101

ÜBER DIE GLEICHGEWICHTSLAGEN UND GLEICHGEWICHTSBEREICHE
NICHTLINEARER AUTONOMER SYSTEME

I. SYSTEME MIT EINEM FREIHEITSGRAD

I.1. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG DES SYSTEMS

Es wird ein System betrachtet, dessen kinetische Energie E_k als Funktion der verallgemeinerten Koordinate q und der verallgemeinerten Geschwindigkeit \dot{q} gegeben ist

$$E_k = E_k(q, \dot{q}) \quad . \quad (1)$$

Auf das System wirken orts- und zeitabhängige Kräfte sowie geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskräfte und Reibungskräfte. In den Reibungskräften treten die dynamischen Komponenten der Reaktionen auf, die von \dot{q} und auch von \ddot{q} abhängen können. Deshalb ist die verallgemeinerte Kraft Q allgemein in der Form

$$Q = Q(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (2)$$

anzunehmen.

Für autonome Systeme tritt die Zeit t nicht explizit in (2) auf. Damit ergibt sich allgemein für autonome Systeme die Bewegungsdifferentialgleichung

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad . \quad (3)$$

Die Funktion $F(q, \dot{q}, \ddot{q})$ wird wie folgt dargestellt

$$F(q, \dot{q}, \ddot{q}) = F_0(q) - d(q, \dot{q}) \cdot \text{sign } \dot{q} + R(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (4)$$

mit

$$F_0(q) = F(q, 0, 0) \quad . \quad (5)$$

Die Gleichgewichtslagen des Systems, das sind die singulären Punkte der Phasenebene, folgen aus der Gleichung

$$F_0(q) = 0 \quad . \quad (6)$$

Die ortsabhängige Kraft $F_0(q)$ kann auch Unstetigkeitsstellen mit Sprung haben. In der Umgebung solcher Unstetigkeitspunkte, z.B. mit der Abszisse q_i , werden seitliche Bereiche $(q_i - \eta_i^l, q_i)$ und $(q_i, q_i + \eta_i^r)$ betrachtet, in denen vorausgesetzt wird, daß $F_0(q)$ analytisch ist.

In einer Sprungstelle der Funktion $F_0(q)$ mit der Abszisse q_i , in der die Bedingung

$$\text{sign } F_0(q_i - 0) \neq \text{sign } F_0(q_i + 0) \quad (7)$$

erfüllt ist, wird die Definition der Kraft $F_0(q)$ durch die Vorschrift

$$F_0(q_i) = 0 \quad (8)$$

ergänzt. Solche Unstetigkeitsstellen sind auch Gleichgewichtslagen des Systems.

In einem Bereich um die Gleichgewichtslage mit der Abszisse q_i , in der die Bedingung

$$F_0(q) \cdot (q - q_i) < 0 \quad (9)$$

erfüllt ist, stellt $F_0(q)$ eine Rückstellkraft dar. In einem Bereich mit

$$F_0(q) \cdot (q - q_i) > 0 \quad (10)$$

ist $F_0(q)$ eine Verstellkraft.

Der Kraft $F_0(q)$ wird ein Potential zugeordnet

$$U = - \int F_0(q) dq + C \quad (11)$$

Die Integrationskonstante C ist durch die Wahl eines Punktes \bar{q} , in dem $U(\bar{q}) = 0$ gilt, bestimmt.

Bei einer bereichsweisen Definition des Potentials können Unstetigkeitsstellen auftreten. Die Tatsache, daß das Potential Sprungstellen besitzt, ist nicht wesentlich, wenn das Studium mit Hilfe des Anstückelungsverfahrens durchgeführt wird und die Sprungstellen als Anstückelungspunkte genommen werden.

Das Glied $-d(q, \dot{q}) \cdot \text{sign } \dot{q}$ ist die Dämpfungskraft und enthält auch die gyroskopischen Kräfte. Gewöhnlich treten die Dämpfungs- und gyroskopischen Kräfte in der Form von Potenzen der Geschwindigkeit multipliziert mit konstanten oder ortsabhängigen Faktoren oder als Summen von solchen Gliedern auf. Es gilt

$$d(q, 0) = 0 \quad (12)$$

In Bereichen der Phasenebene (q, \dot{q}) , in denen die Bedingung

$$d(q, \dot{q}) > 0 \quad (13)$$

erfüllt ist, heißt diese Kraft "positive" Dämpfungskraft, da sie eine echte Dämpfungskraft darstellt und die mechanische Energie des Systems vermindert.

In Bereichen der Phasenebene, in denen

$$d(q, \dot{q}) < 0 \quad (14)$$

gilt, heißt diese Kraft "negative" Dämpfungskraft, da sie dem System Energie zuführt.

Das Glied $R(q, \dot{q}, \ddot{q})$ ist die Reibungskraft und enthält die in den Führungen und Gelenken des Systems auftretenden Reibungseffekte. In Bereichen der Phasenebene mit

$$R(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \dot{q} < 0 \quad (15)$$

ist $R(q, \dot{q}, \ddot{q})$ eine "positive" Reibungskraft, die energievermindernd auf das System einwirkt. In Bereichen der Phasenebene mit

$$R(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \dot{q} > 0 \quad (16)$$

ist $R(q, \dot{q}, \ddot{q})$ eine "negative" Reibungskraft, wie sie bei selbsterregten Systemen auftreten kann, und dem System mechanische Energie zuführt.

Für den Fall mit positiver Reibungskraft wird zwischen Reibung der Bewegung $T(q, \dot{q}, \ddot{q})$ (Gleitreibung), Reibung in Umkehrpunkten $T_s(q, \dot{q})$ und Reibung der Ruhe $T_s(q, 0)$ (Haftreibung) unterschieden. Wenn die Reibungskraft nicht von der Beschleunigung \ddot{q} abhängt, stimmen die Reibung in Umkehrpunkten und die Reibung der Ruhe überein.

Die Reibungskraft $R(q, \dot{q}, \ddot{q})$ wird in folgender Form angenommen

$$\begin{aligned} R(q, \dot{q}, \ddot{q}) = & -T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \text{sign } \dot{q} - \\ & - [1 - (\text{sign } \dot{q})^2] \{ F_0(q) H [T_S(q, 0) - |F_0(q)|] \text{sign} [T_S(q, 0) - |F_0(q)|] + \\ & + T_S(q, \ddot{q}) H [|F_0(q)| - T_S(q, 0)] \text{sign } F_0(q) \} \quad . \quad (17) \end{aligned}$$

Hier sind $\text{sign } x$ und $H(x)$ die Vorzeichen- bzw. die Heaviside-Funktion mit $\text{sign } 0 = 0$ und $H(0) = 1$.

Die Bereiche der Koordinate q , in denen die Bedingung

$$|F_0(q)| \leq T_S(q, 0) \quad (18)$$

erfüllt ist, stellen Gleichgewichtsbereiche des Systems dar.

I.2. DIE ISOLIERTEN GLEICHGEWICHTSLAGEN EINES KONSERVATIVEN SYSTEMS MIT UNSTETIGER KENNLINIE

Die isolierten Gleichgewichtslagen des konservativen Systems sind die Lösungen der Gleichung (6) und die Unstetigkeitsstellen der ortsabhängigen Kraft $F_0(q)$, für die (7) gilt.

Die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen ist aus dem Verlauf des Potentials in der Umgebung dieser Punkte zu bestimmen. Die hinreichende Bedingung für Stabilität ist, daß das Potential ein strenges relatives Minimum besitzt.

Wenn in der Gleichgewichtslage mit der Abszisse q_i die Kraft $F_0(q)$ stetig ist, so entscheidet das Vorzeichen der ersten von Null verschiedenen Ableitung des Potentials über den Verlauf des Potentials in dieser Gleichgewichtslage. Die Bedingung für Stabilität ist

$$\left[\frac{d^k U}{dq^k} \right]_{q=q_i} > 0 \quad k \text{ eine gerade Zahl} \quad (19)$$

Gilt hingegen

$$\left[\frac{d^k U}{dq^k} \right]_{q=q_i} < 0, \quad k \text{ eine gerade Zahl} \quad (20)$$

so hat das Potential ein Maximum und die Gleichgewichtslage ist instabil.

Wenn die Ordnung der ersten von Null verschiedenen Ableitung eine ungerade Zahl ist, so hat das Potential in dieser Lage einen Wendepunkt. Das ist ein degenerierter singulärer Punkt und stellt eine einseitig instabile Gleichgewichtslage dar.

In Gleichgewichtslagen, die Unstetigkeitsstellen der Kraft sind, müssen die seitlichen Ableitungen des Potentials ermittelt werden, um ein Potentialmaximum, ein Minimum oder einen Wendepunkt zu erkennen. Um die Stabilität solcher Gleichgewichtslagen zu untersuchen, werden Hilfsfunktionen definiert, mit denen die seitlichen Ableitungen ausgedrückt

werden. Der Unterschied zu anderen verallgemeinerten Ableitungen in Unstetigkeitsstellen, wie z.B. in der Distributionstheorie, besteht darin, daß hier der Sprungwert in zwei Anteile aufgespalten wird.

I.2.1. DAS POTENTIAL UND DIE HILFSFUNKTIONEN

Das Potential des Systems wird in der Form

$$U = U(q, \psi_1(q), \psi_2(q), \dots, \psi_s(q)) \quad (21)$$

angenommen. Hier sind

$$\psi_i(q) = \varphi_i(q) \cdot H[f_i(q)] \quad (22)$$

Die Funktionen $f_i(q)$ sind unendlich oft differenzierbar.

Die Gleichungen

$$f_i(q) = 0 \quad i=1, 2, \dots, s \quad (23)$$

haben nur h_i einfache Wurzeln, die mit q_{ij} ($j=1, 2, \dots, h_i$) bezeichnet werden.

Die Funktionen $\varphi_i(q)$ haben stetige Ableitungen. Wenn q_{ij} auch Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_i(q) = 0 \quad (24)$$

sind, dann ist das Potential stetig.

Die Funktion U hat stetige partielle Ableitungen in bezug auf q und $\psi_i(q)$.

Die erste Hilfsfunktion ist

$$V(q) = U^1(q) = U_0^1 + \sum_{i_1=1}^s U_{i_1}^1 \cdot H[f_{i_1}(q)] \quad (25)$$

mit

$$U_0^1 = \frac{\partial U}{\partial q} \quad \text{und} \quad U_{i_1}^1 = \frac{\partial U}{\partial \psi_{i_1}} \cdot \varphi_{i_1}' \quad (26)$$

Diese Funktion stimmt in allen Punkten außer q_{ij} mit der ersten Ableitung des Potentials überein, die in den Punkten q_{ij} nicht definiert ist.

Die zweite Hilfsfunktion ist der Sprungwert $R(q_{ij})$ der ersten Ableitung des Potentials im Punkt q_{ij} . Dieses ist auch der Sprung der verallgemeinerten Kraft im Unstetigkeitspunkt q_{ij}

$$\begin{aligned} R(q_{ij}) &= U'(q_{ij+0}) - U'(q_{ij-0}) \\ &= V(q_{ij+0}) - V(q_{ij-0}) \end{aligned} \quad (27)$$

Wenn q_{ij} nur die Wurzel einer Gleichung (23) ist, gilt

$$R(q_{ij}) = U_i^1(q_{ij}) \cdot \text{sign } f_i'(q_{ij}) \quad (28)$$

Es sei q_{ij} solch eine Wurzel, für die $\text{sign } f_i'(q_{ij}) = 1$ gilt. Aus (25) folgt mit der Bezeichnung (28)

$$\begin{aligned} V(q_{ij-0}) &= U_o^1(q_{ij}) \\ V(q_{ij}) &= U_o^1(q_{ij}) + R(q_{ij}) \\ V(q_{ij+0}) &= U_o^1(q_{ij}) + R(q_{ij}) \end{aligned} \quad (29)$$

Es folgt für diesen Fall

$$\begin{aligned} V(q_{ij-0}) &= V(q_{ij}) - R(q_{ij}) \\ V(q_{ij+0}) &= V(q_{ij}) \end{aligned} \quad (30)$$

Wenn für q_{ij} die Bedingung $\text{sign } f_i'(q_{ij}) = -1$ gilt, folgt aus (25) mit der Bezeichnung (28)

$$\begin{aligned} V(q_{ij-0}) &= U_o^1(q_{ij}) - R(q_{ij}) \\ V(q_{ij}) &= U_o^1(q_{ij}) - R(q_{ij}) \\ V(q_{ij+0}) &= U_o^1(q_{ij}) \end{aligned} \quad (31)$$

Es folgt für diesen Fall

$$\begin{aligned} V(q_{ij-0}) &= V(q_{ij}) \\ V(q_{ij+0}) &= V(q_{ij}) + R(q_{ij}) \end{aligned} \quad (32)$$

Wenn q_{ij} mit den Wurzeln mehrerer Gleichungen (23) übereinstimmt, z.B. sei $q_{ij} = q_{km} = \dots = q_{rt}$, dann gilt

$$R(q_{ij}) = U_i^1(q_{ij}) \cdot \text{sign } f_i'(q_{ij}) + U_k^1(q_{km}) \cdot \text{sign } f_k'(q_{km}) +$$

$$+ \dots + U_r^1(q_{rt}) \cdot \text{sign } f_r'(q_{rt}) \quad . \quad (33)$$

In diesem Fall wird $R(q_{ij})$ in zwei Glieder aufgespalten. Die Glieder in (33), deren letzter Faktor positiv ist, werden mit den Kennzahlen p_1, p_2, \dots bezeichnet und ihre Summe ist

$$R^+(q_{ij}) = U_{p_1}^1(q_{ij}) + U_{p_2}^1(q_{ij}) + \dots \quad . \quad (34)$$

Die Glieder in (33), deren letzter Faktor negativ ist, werden mit den Kennzahlen n_1, n_2, \dots bezeichnet, und ihre Summe ist

$$R^-(q_{ij}) = - U_{n_1}^1(q_{ij}) - U_{n_2}^1(q_{ij}) - \dots \quad . \quad (35)$$

Mit den Bezeichnungen (34) und (35) gilt

$$R(q_{ij}) = R^+(q_{ij}) + R^-(q_{ij}) \quad (36)$$

$$V(q_{ij}+0) - V(q_{ij}-0) = R^+(q_{ij}) + R^-(q_{ij}) \quad (37)$$

und

$$V(q_{ij}-0) = V(q_{ij}) - R^+(q_{ij}) \quad (38)$$

$$V(q_{ij}+0) = V(q_{ij}) + R^-(q_{ij}) \quad . \quad (39)$$

Das sind die seitlichen Ableitungen des Potentials in der Unstetigkeitsstelle q_{ij} .

Weiter werden für $v \geq 2$ noch folgende Hilfsfunktionen definiert

$$\begin{aligned} U^v(q) = & U_0^v + \sum_{i_1=1}^s U_{i_1}^v \cdot H[f_{i_1}(q)] + \quad (40) \\ & + \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^s U_{i_1 i_2}^v \cdot H[f_{i_1}(q)] \cdot H[f_{i_2}(q)] + \dots + \\ & + \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^s \dots \sum_{i_v=1}^s U_{i_1 i_2 \dots i_v}^v \cdot H[f_{i_1}(q)] \dots H[f_{i_v}(q)] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 U_0^v &= \frac{\partial U_0^{v-1}}{\partial q} \\
 U_{i_1}^v &= \frac{\partial U_{i_1}^{v-1}}{\partial q} + \frac{\partial U_0^{v-1}}{\partial \psi_{i_1}} \cdot \varphi'_{i_1} \\
 U_{i_1 i_2}^v &= \frac{\partial U_{i_1 i_2}^{v-1}}{\partial q} + \frac{\partial U_{i_1}^{v-1}}{\partial \psi_{i_2}} \cdot \varphi'_{i_2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 U_{i_1 i_2 \dots i_{v-1}}^v &= \frac{\partial U_{i_1 i_2 \dots i_{v-1}}^{v-1}}{\partial q} + \frac{\partial U_{i_1 i_2 \dots i_{v-2}}^{v-1}}{\partial \psi_{i_{v-1}}} \cdot \varphi'_{i_{v-1}}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

(für $v=2$ ist hier $U_{i_0}^1 = U_0^1$)

$$U_{i_1 i_2 \dots i_v}^v = \frac{\partial U_{i_1 i_2 \dots i_{v-1}}^{v-1}}{\partial \psi_{i_v}} \cdot \varphi'_{i_v}$$

Diese Funktionen stimmen in allen Punkten außer q_{ij} mit der v -ten Ableitung des Potentials überein, die in diesen Punkten nicht definiert sind.

Mit Hilfe der Funktion U kann auch die Distribution gebildet werden

$$U = \{U\} \tag{42}$$

Wenn das Potential keine Unstetigkeitsstellen hat, ist die erste Ableitung dieser Distribution

$$U' = \{U^1(q)\} = \{V(q)\} \tag{43}$$

In den Punkten q_{ij} gilt

$$U'(q_{ij}) = \{V(q_{ij})\} \tag{44}$$

Berechnet man die zweite Ableitung der Distribution so erhält man

$$U'' = \{U^2(q)\} + \sum_{i_1=1}^s \left\{ \sum_{j=1}^{h_{i_1}} U_{i_1}^1(q_{i_1,j}) \cdot \text{sign}[f'_{i_1}(q_{i_1,j})] \cdot \delta(q - q_{i_1,j}) \right\}. \quad (45)$$

In einem Punkt $q_{i,j}$ gilt mit der Bezeichnung (33)

$$U''(q_{i,j}) = \{U^2(q_{i,j})\} + R(q_{i,j}) \cdot \delta(0) \quad . \quad (46)$$

In diesem Ausdruck erscheint der Wert $R(q_{i,j})$, der den Sprung der verallgemeinerten Kraft im Unstetigkeitspunkt $q_{i,j}$ darstellt. Wenn $q_{i,j}$ nur die Wurzel einer Gleichung (23) ist, besteht $R(q_{i,j})$ nur aus einem Glied, das entweder zu $R^+(q_{i,j})$ oder zu $R^-(q_{i,j})$ gehört. Ist hingegen $q_{i,j}$ Wurzel mehrerer Gleichungen (23), so erscheint in der Distribution (46) der Gesamtwert $R(q_{i,j})$. Da zur Bestimmung der Stabilität die seitlichen Ableitungen (38) und (39) also die Teilsummen $R^+(q_{i,j})$ und $R^-(q_{i,j})$ notwendig sind, müssen diese auch berechnet werden. Der Gesamtwert $R(q_{i,j})$ hilft hier nicht weiter.

I.2.2. DIE UNSTETIGKEITSSTELLEN DER KRÄFTE ALS SINGULÄRE PUNKTE

Die einseitigen Ableitungen $U'(q_{i,j}-0) = -F_o(q_{i,j}-0)$ und $U'(q_{i,j}+0) = -F_o(q_{i,j}+0)$ geben Aufschluß über das Verhalten des Potentials in $q_{i,j}$. Die Bedingungen für Stabilität werden an Hand der seitlichen Ableitungen (38) und (39) mit den Hilfsfunktionen $V(q)$, $R^+(q)$ und $R^-(q)$ ausgedrückt. In einigen kritischen Fällen werden auch die Hilfsfunktionen $U^V(q)$ verwendet.

In einer Unstetigkeitsstelle $q_{i,j}$, die auch eine Gleichgewichtslage ist, werden $V(q_{i,j})=V$, $R(q_{i,j})=R$ und $R^+(q_{i,j})=R^+$

bestimmt und das Verhältnis

$$\lambda = \frac{R^+(q_{ij})}{R(q_{ij})} \quad (47)$$

berechnet.

In einem Koordinatensystem mit den Achsen OV und OR entspricht den Werten (V,R) ein Bildpunkt. Die Geraden

$$R = \frac{V}{\lambda} \quad R = \frac{V}{\lambda - 1} \quad (48)$$

entsprechen den Grenzwerten, in denen die seitlichen Ableitungen gleich Null sind.

Die so entstandenen vier Bereiche stellen stabile, instabile bzw. keine Gleichgewichtslagen dar. Aus der Lage des Bildpunktes (V,R) in der OVR-Ebene kann die Natur der Gleichgewichtslage bestimmt werden.

In den Abb. 1-5 sind für $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 0$ und $\lambda < 0$ die verschiedenen Bereiche dargestellt.

Die VR-Ebene eignet sich zur Bestimmung von Wertebereichen der Systemparameter, damit der singuläre Punkt ein vorgegebenes Stabilitätsverhalten aufweist.

Die Bedingungen für $V(q_{ij})$, $R^+(q_{ij})$ und $R^-(q_{ij})$, damit die Unstetigkeitsstelle q_{ij} eine stabile oder instabile Gleichgewichtslage bzw. keine Gleichgewichtslage ist, sowie die entsprechenden Bereiche in der Ebene OVR, sind in der Tabelle 1 angegeben. In den Abb. 6-21 sind die entsprechenden Phasenporträts dargestellt.

Beim Studium der Fälle 5 bis 9 (Tabelle 1) mit $U'(q_{ij}-0) = 0$ oder/und $U'(q_{ij}+0) = 0$ werden die Funktionen $U^V(q)$ verwendet. Es gelten die Bezeichnungen

$$U^V(q_{ij}-0) = 0 \quad \text{für } v < v_1 \quad \text{und} \quad U^{v_1}(q_{ij}-0) \neq 0 \quad (49)$$

$$U^V(q_{ij}+0) = 0 \quad \text{für } v < v_r \quad \text{und} \quad U^{v_r}(q_{ij}+0) \neq 0 \quad (50)$$

Es werden Fälle unterschieden, wenn v_1 eine gerade oder

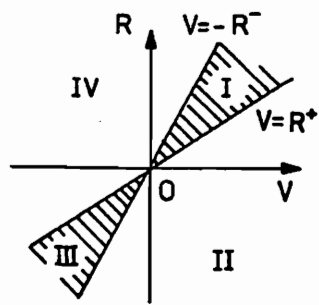


Abb.1

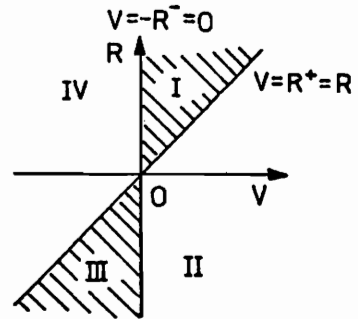


Abb.2

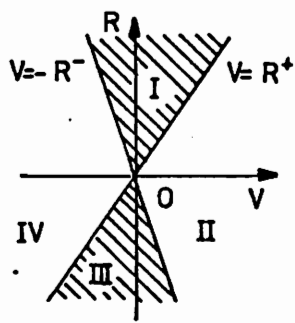


Abb.3

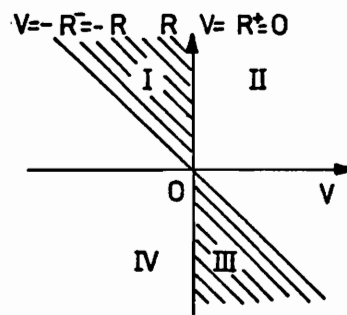


Abb.4

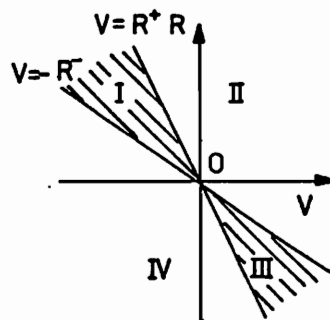


Abb.5

Tabelle 1
Die einseitigen Ableitungen des Potentials und die
Natur der Unstetigkeitsstellen

Nr.	$U'(q_{ij}^-)$	$U'(q_{ij}^+)$	Bedingungen für $V(q_{ij}), R^-(q_{ij}), R^+(q_{ij})$	Bereich in Abb. 1-5	$U^1(q_{ij}^-)$		$U^r(q_{ij}^+)$	Phasen- porträt	Natur des Punktes q_{ij}
					$\lambda_1 = 2p$	$\lambda_1 = 2p+1$			
1	< 0	> 0	$V(q_{ij}) > -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) < R^+(q_{ij})$	I			$\lambda_r \in N$	Abb. 6	stabile Gleich- gewichts- lage
2	> 0	< 0	$V(q_{ij}) < -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) > R^+(q_{ij})$	III				Abb. 7	instabile Gleich- gewichts- lage
3	> 0	> 0	$V(q_{ij}) > -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) > R^+(q_{ij})$	II				Abb. 8	keine Gleich- gewichts- lage
4	< 0	< 0	$V(q_{ij}) < -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) < R^+(q_{ij})$	IV				Abb. 9	keine Gleich- gewichts- lage

Nr.	$U'(q_{ij}-0)$	$U'(q_{ij}+0)$	Bedingungen für $V(q_{ij}), R^-(q_{ij}), R^+(q_{ij})$	Bereich in $U^1(q_{ij}-0) \neq 0$ Abb. 1-5	$U^1(q_{ij}-0) \neq 0$		$U^r(q_{ij}+0) \neq 0$ $\lambda_r \in N$	Phasen- porträt	Natur des Punktes q_{ij}
					$\lambda_1=2p$	$\lambda_1=2p+1$			
5	$= 0$	> 0	$V(q_{ij}) > -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) = R^+(q_{ij})$	Grenze I-II	> 0	< 0		Abb. 10	stabile Gleich- gewichts- lage
6	< 0	$= 0$	$V(q_{ij}) = -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) < R^+(q_{ij})$	Grenze I-IV	< 0	> 0	> 0	Abb. 11	linksel- tige inst. Gl.Lage
7	> 0	$= 0$	$V(q_{ij}) = -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) > R^+(q_{ij})$	Grenze II-III			< 0	Abb. 12	stabile Gleichge- wichtslage
							< 0	Abb. 13	rechtsel- tige inst. Gl.Lage
							< 0	Abb. 14	instabile Gleichge- wichtslage
							> 0	Abb. 15	linksel- tig inst. Gl.Lage

Nr.	$U'(q_{ij}^{-0})$	$U'(q_{ij}^{+0})$	Bedingungen für $V(q_{ij}), R^-(q_{ij}), R^+(q_{ij})$	Bereich in Abb. 1-5	$U^1(q_{ij}^{-0}) \neq 0$		$U^R(q_{ij}^{+0}) \neq 0$ $\gamma_R \in N$	Phasen- porträt	Natur des Punktes q_{ij}
					$\gamma_{1=2p}$	$\gamma_{1=2p+1}$			
8	= 0	< 0	$V(q_{ij}) < -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) = R^+(q_{ij})$	Grenze III-IV	< 0	> 0		Abb. 16	instabile Gleichge- wichtslage
					> 0	< 0			
9	= 0	= 0	$V(q_{ij}) = -R^-(q_{ij})$ $V(q_{ij}) = R^+(q_{ij})$	Punkt 0	> 0	< 0	> 0	Abb. 18	stabile Gleichge- wichtslage
					< 0	> 0	< 0	Abb. 19	instabile Gleichge- wichtslage
					> 0	< 0	< 0	Abb. 20	rechtssei- tig inst. Gl.Lage
					< 0	> 0	> 0	Abb. 21	linkssei- tig inst. Gl.Lage

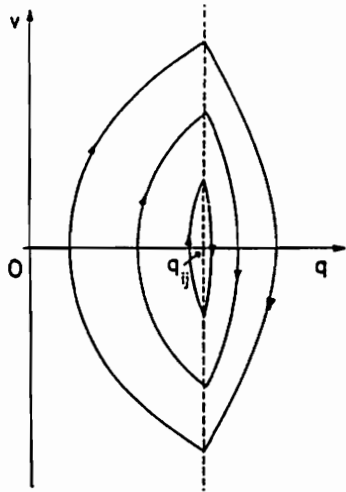


Abb. 6

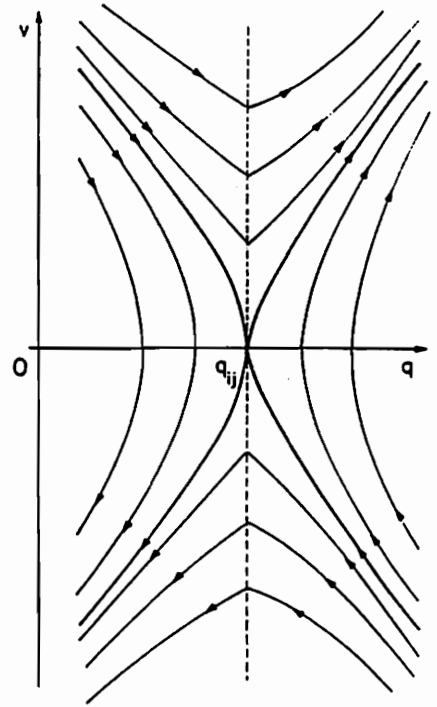


Abb. 7

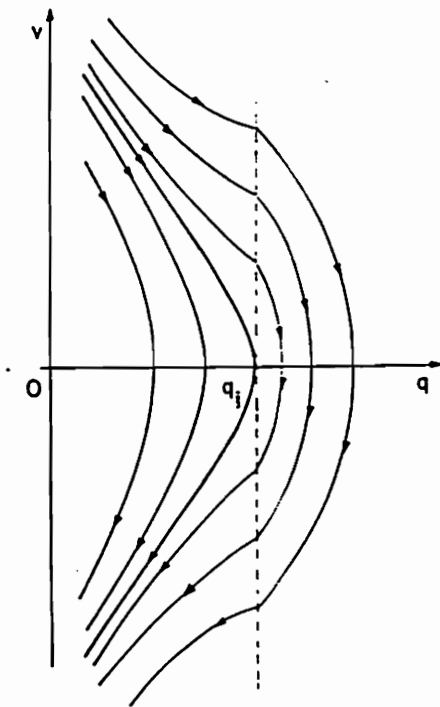


Abb. 8

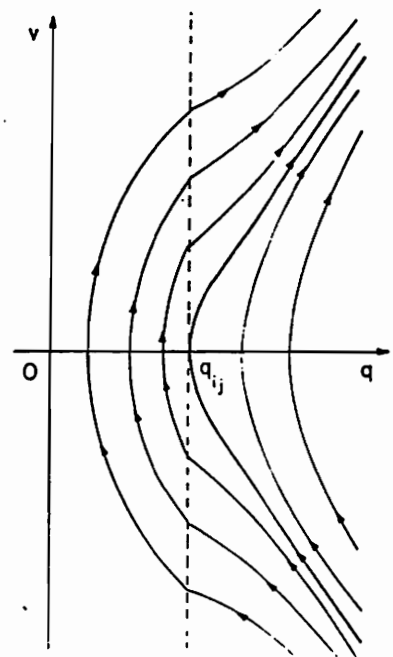


Abb. 9

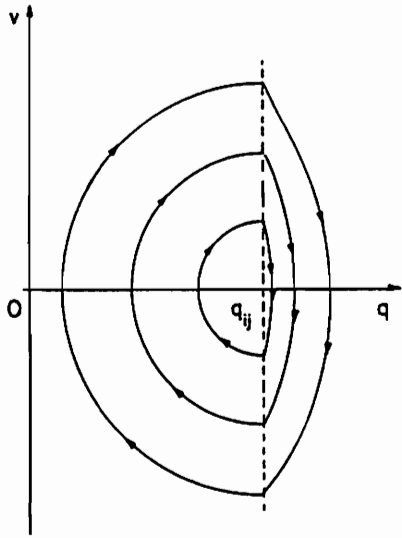


Abb.10

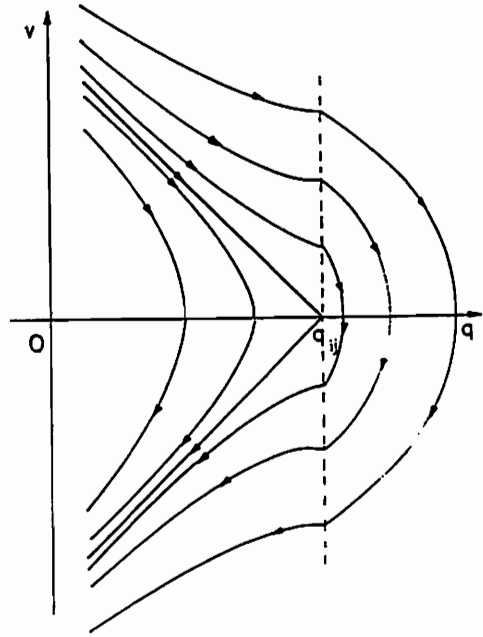


Abb.11

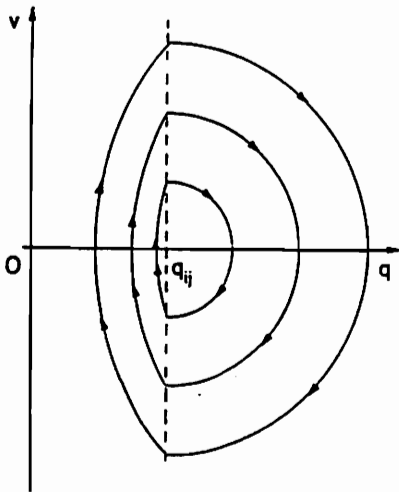


Abb.12

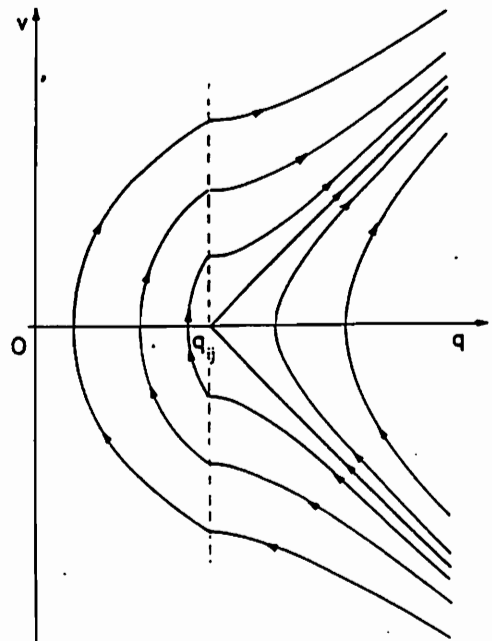


Abb.13

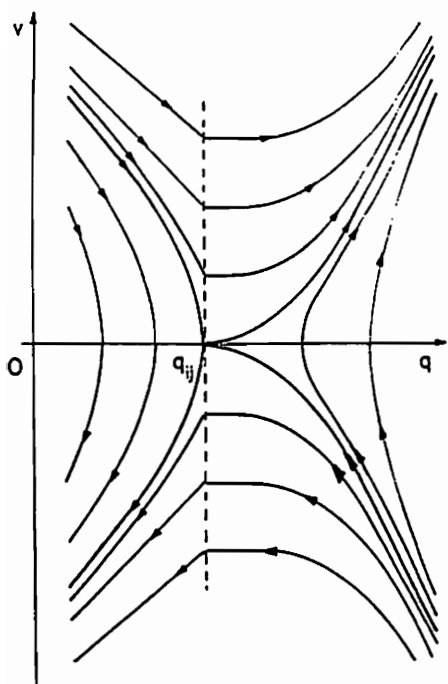


Abb.14

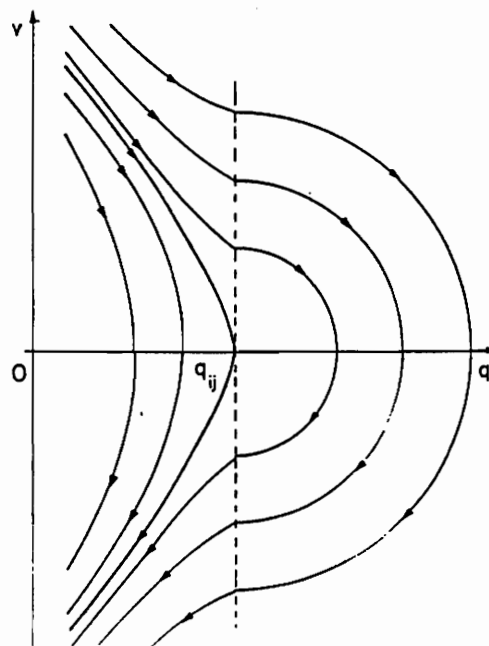


Abb.15

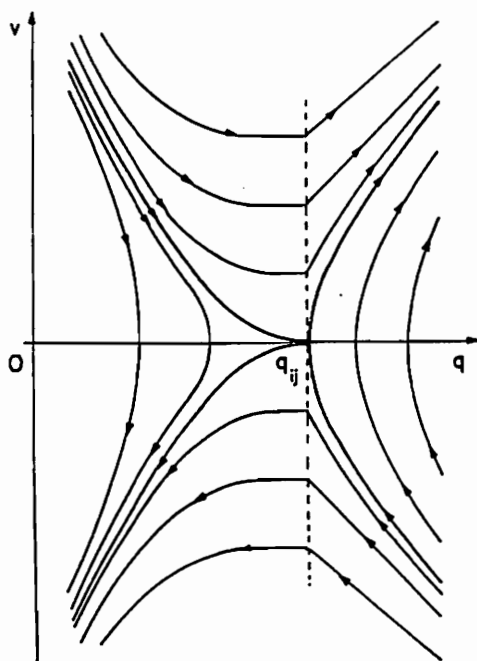


Abb.16

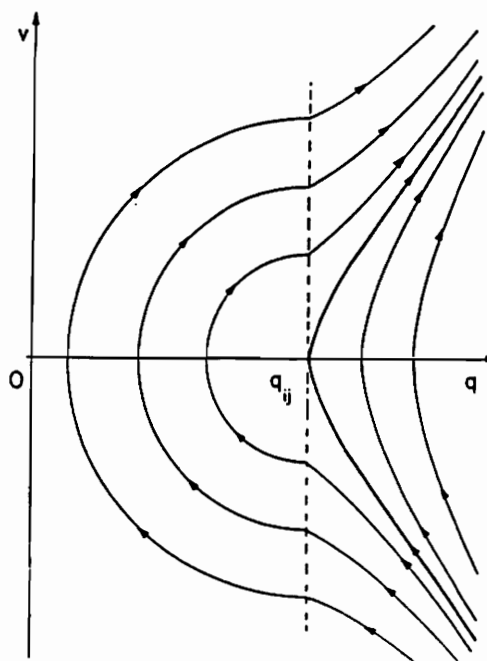


Abb.17

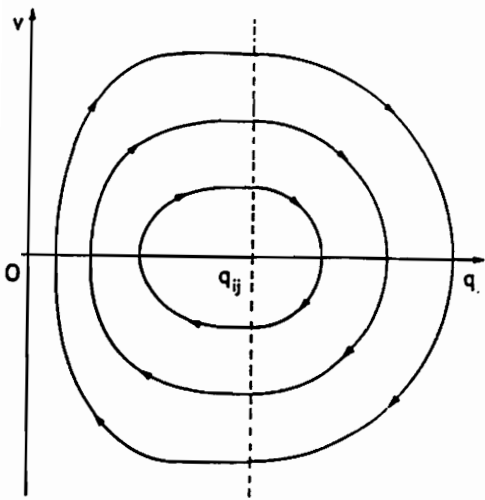


Abb.18

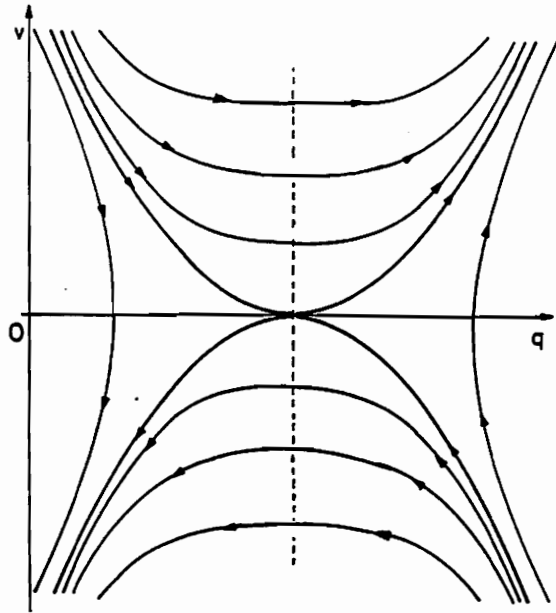


Abb.19

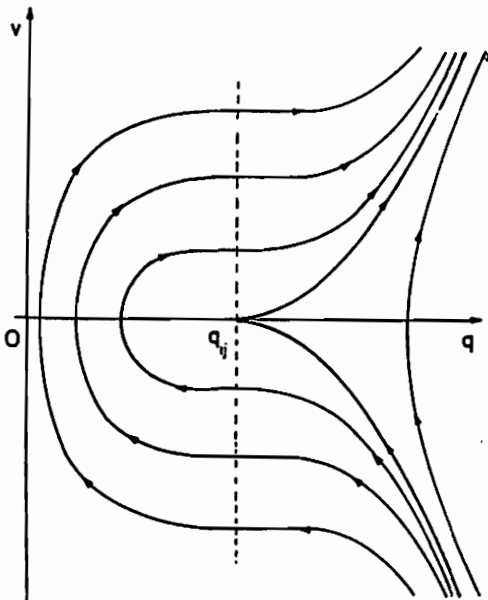


Abb.20

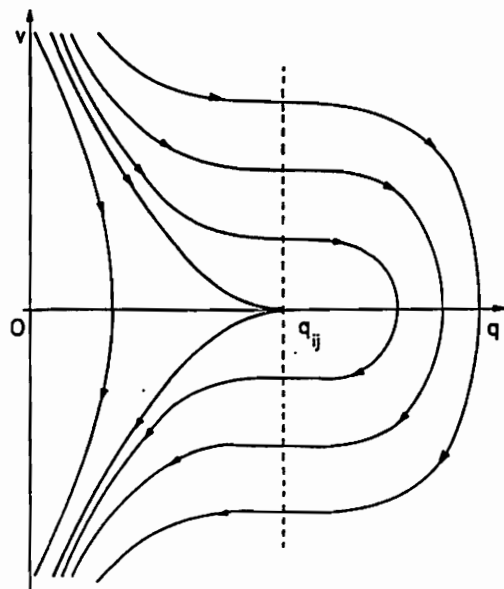


Abb.21

ungerade Zahl ist und wenn v_r eine natürliche Zahl ist. Für den Fall mit analytischer und symmetrischer Kennlinie gilt $R^+(q_{ij}) = R^-(q_{ij}) = 0$. Er ist in der Tabelle 1 unter Nr.9 enthalten.

BEISPIELE

Als erstes Beispiel wird das in der Abb.22 dargestellte System betrachtet. Eine homogene Stange von der Masse m und Länge a ist mit zwei Gleitern gelenkig verbunden. Auf den Gleiter, der sich vertikal bewegen kann, wirkt für $q > q_{11}$ die Feder c_1 , die in der Lage q_{11} mit d_1 vorgespannt ist. Für $q < q_{11}$ wirkt die Feder c_2 , die in der Lage q_{11} mit d_2 verformt ist. Limitatoren verhindern die Wirkung der Feder c_1 für $q < q_{11}$ und der Feder c_2 für $q > q_{11}$. Auf den Gleiter, der sich horizontal bewegen kann, wirkt für $q > q_{11}$ die Feder c_3 , die in der Lage q_{11} mit $d_3 = a \cdot \sin q_{11}$ verformt ist und für $q < q_{11}$ nicht wirkt. Die Feder c ist in der Lage $q=0$ unverformt.

Das Potential des Systems ist

$$\begin{aligned}
 U = & -\frac{1}{2} m g a \cdot (1 - \cos q) + \frac{1}{2} c a^2 \sin^2 q + & (51) \\
 & + \frac{1}{2} c_1 [(a \cdot \cos q_{11} - a \cdot \cos q + d_1)^2 - d_1^2] H(q - q_{11}) + \\
 & + \frac{1}{2} c_2 [(a \cdot \cos q - a \cdot \cos q_{11} + d_2)^2 - d_2^2] H(q_{11} - q) + \\
 & + \frac{1}{2} c_3 [(a \cdot \sin q - a \cdot \sin q_{11} + d_3)^2 - d_3^2] H(q - q_{11})
 \end{aligned}$$

mit $q \in (0, \pi/2)$. Es soll die Stabilität der Lage $q=q_{11}$ untersucht werden.

Mit diesem Potential werden die Hilfsfunktionen (25), (34), (35), (40) und der Wert von λ berechnet. Es folgt

$$\begin{aligned}
 V(q_{11}) = & -\frac{1}{2} m g a \sin q_{11} + \frac{1}{2} c a^2 \sin 2q_{11} + & (52) \\
 & + c_1 d_1 a \sin q_{11} - c_2 d_2 a \sin q_{11} + c_3 d_3 a \cos q_{11}
 \end{aligned}$$

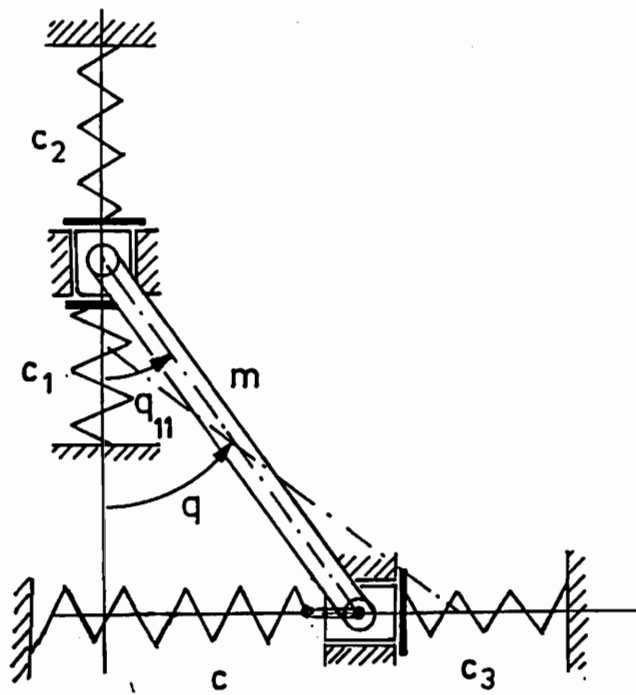


Abb.22

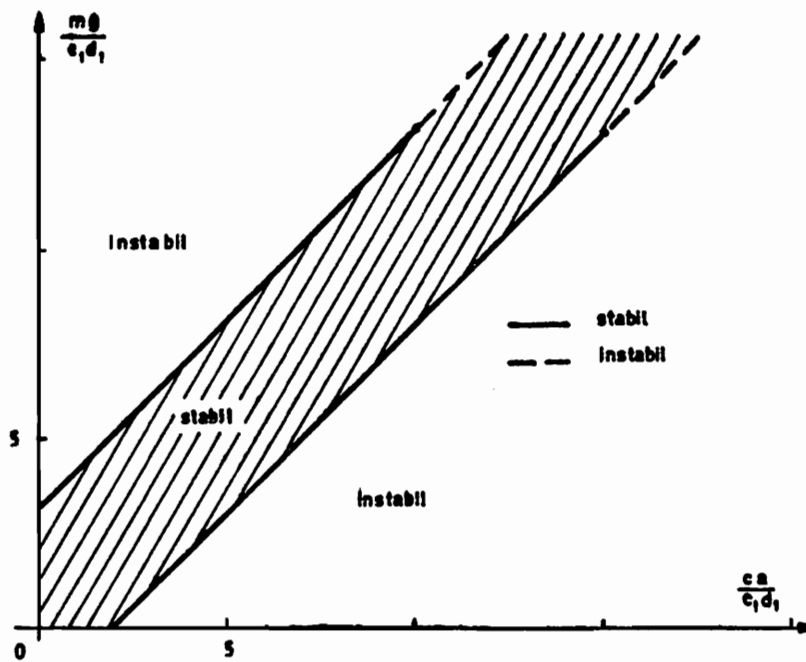


Abb.23

$$R^+(q_{11}) = c_1 d_1 a \sin q_{11} + c_3 d_3 a \cos q_{11} \quad (53)$$

$$R^-(q_{11}) = c_2 d_2 a \sin q_{11} \quad (54)$$

$$U^2(q_{11}-0) = -\frac{1}{2} m g a \cos q_{11} + c a^2 \cos 2q_{11} + \quad (55)$$

$$+ c_2 a^2 \sin^2 q_{11} - c_2 d_2 a \cos q_{11}$$

$$U^2(q_{11}+0) = -\frac{1}{2} m g a \cos q_{11} + c a^2 \cos 2q_{11} + \quad (56)$$

$$+ c_1 a^2 \sin^2 q_{11} + c_1 d_1 a \cos q_{11} +$$

$$+ c_3 a^2 \cos^2 q_{11} - c_3 d_3 a \sin q_{11}$$

$$\lambda \in (0 ; 1) \quad . \quad (56)$$

Die Bedingungen für Stabilität der Lage q_{11} sind aus Tabelle 1 Nr.1 zu entnehmen. Es folgt

$$2c a \cos q_{11} - 2c_2 d_2 < m g < 2c a \cos q_{11} + 2c_1 d_1 + 2c_3 d_3 \cot q_{11} \quad . (57)$$

An der Grenze der Bereiche I und II (Tabelle 1, Nr.5) ist

$$m g = 2c a \cos q_{11} - 2c_2 d_2 \quad (58)$$

und

$$U^2(q_{11}-0) = a^2 (c_2 - c) \sin^2 q_{11} \quad . \quad (59)$$

Für $c_2 > c$ ist q_{11} eine stabile und für $c_2 < c$ keine Gleichgewichtslage. Für $c_2 = c$ ist in dem Bereich $q < q_{11}$ das Potential konstant, und es bildet sich hier ein Gleichgewichtsbereich.

An der Grenze der Bereiche I und IV (Tabelle 1, Nr.6) ist

$$m g = 2c a \cos q_{11} + 2c_1 d_1 + 2c_3 a \cos q_{11} \quad (60)$$

und

$$U^2(q_{11}+0) = a^2 (c_1 - c - c_3) \sin^2 q_{11} \quad . \quad (61)$$

Für $c_1 > c + c_3$ ist q_{11} eine stabile und für $c_1 < c + c_3$ keine Gleichgewichtslage. Für $c_1 = c + c_3$ ist das Potential für $q > q_{11}$ konstant, und es bildet sich hier ein Gleichgewichtsbereich.

Für die numerischen Werte $q_{11} = 60^\circ$, $c_1 d_1 = c_2 d_2 = c_3 d_3$, $d_1 = a/20$, $d_2 = a/15$, $d_3 = a/10$ sind in der Abb. 23 die Wertebereiche von $ca/(c_1 d_1)$ und $mg/(c_1 d_1)$ für stabiles und instabiles Verhalten dargestellt.

Als zweites Beispiel wird das in der Abb. 24 dargestellte System betrachtet. Gegeben sind: $m_1 = m$, $m_2 = 0,8 m$, $m_3 = 0,5 m$, $m_4 = 0,3 m$, $s = q_3 - q_2$ ist die Vorverformung der Feder. Man bestimme die Federkonstante c , damit

a) die Lage $q = q_2$,

b) die Lage $q = q_3$

eine stabile Gleichgewichtslage ist.

Das Potential des Systems ist

$$U(q) = -m_1 g q + m_2 g q + m_4 g q \cdot H(q - q_1) - \quad (62)$$
$$- m_3 g q \cdot H(q_3 - q) + \frac{1}{2} c (q - q_2 + s)^2 H(q - q_2) \cdot H(q_3 - q) \quad .$$

In der Unstetigkeitsstelle $q = q_1$ gilt

$$V(q_1) = [-(m_1 + m_3) + (m_2 + m_4)] g = -0,4 mg \quad (63)$$

$$R^+(q_1) = m_4 g = 0,3 mg \quad (64)$$

$$R^-(q_1) = 0 \quad (65)$$

und entspricht dem Fall 4 aus Tabelle 1. Die Unstetigkeitsstelle $q = q_1$ ist also keine Gleichgewichtslage.

In der Unstetigkeitsstelle $q = q_2$ gilt

$$V(q_2) = [-(m_1 + m_3) + (m_2 + m_4)] g + cs \quad (66)$$

$$R^+(q_2) = cs \quad (67)$$

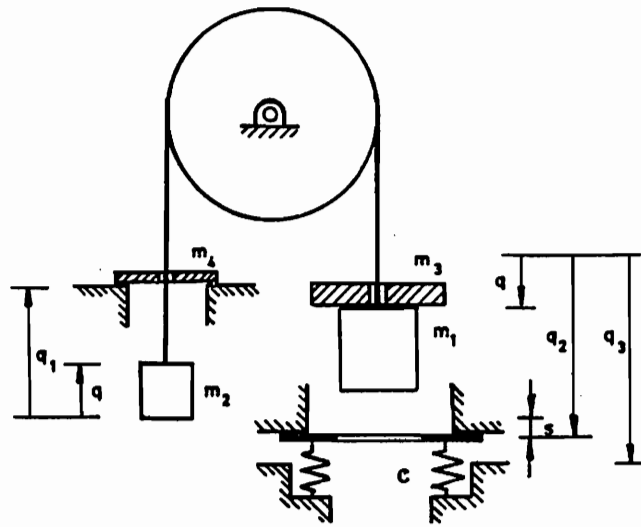


Abb.24

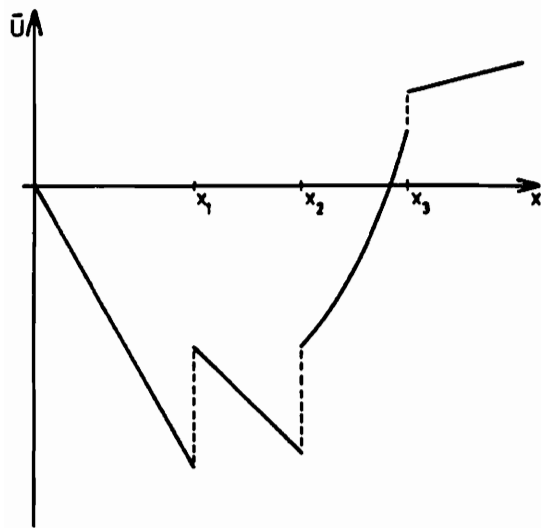


Abb.25

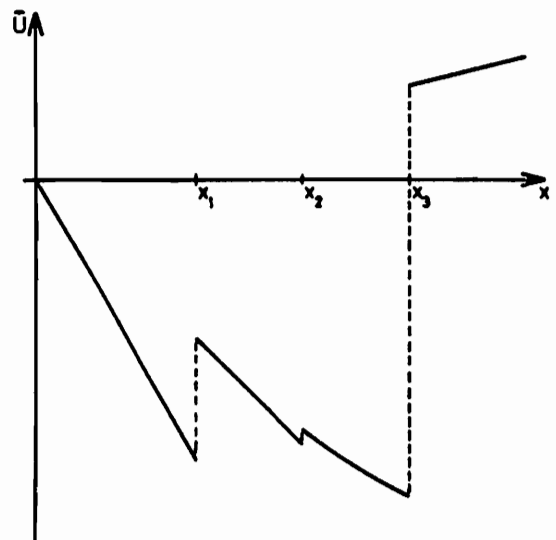


Abb.26

$$R^-(q_2) = 0 \quad (68)$$

In der Unstetigkeitsstelle $q=q_3$ gilt

$$V(q_3) = [-(m_1+m_3)+(m_2+m_4)]g + c(q_3-q_2+s) \quad (69)$$

$$R^+(q_3) = 0 \quad (70)$$

$$R^-(q_3) = m_3g - 2cs \quad (71)$$

a) Die Bedingungen, damit $q=q_2$ eine stabile Gleichgewichtslage darstellt, sind

$$- R^-(q_2) < V(q_2) < R^+(q_2) \quad (72)$$

Daraus folgt $1,1 \text{ m} < 1,5 \text{ m}$ und $c > 0,4 \text{ mg/s}$. Damit q_2 eine stabile Gleichgewichtslage ist, muß $c > 0,4 \text{ mg/s}$ sein.

b) Die Bedingungen, damit $q=q_3$ eine stabile Gleichgewichtslage darstellt, sind

$$- R^-(q_3) < V(q_3) < R^+(q_3) \quad (73)$$

Daraus folgt $1,1 \text{ m} > m$ und $c < 0,2 \text{ mg/s}$. Für $c < 0,2 \text{ mg/s}$ ist q_3 eine stabile Gleichgewichtslage.

In der Abb.25 ist der Verlauf des dimensionslosen Potentials $\bar{U} = U/(mgs)$ als Funktion von $x=q/s$ für $c=0,8 \text{ mg/s}$ dargestellt, für die die Gleichgewichtslage q_2 stabil ist.

In der Abb.26 ist \bar{U} in Abhängigkeit von x für $c=0,1 \text{ mg/s}$ dargestellt. Die Gleichgewichtslage $q=q_3$ ist stabil.

I.2.3.SONDERFALL MIT DER VORZEICHENFUNKTION

Das Potential kann mit der Vorzeichenfunktion ausgedrückt werden, wenn die un stetigen Kräftekomponenten in

den Sprungstellen symmetrisch verlaufen. Für diesen Sonderfall ändern sich auch die Ausdrücke für die Hilfsfunktionen.

Für die unstetige Funktion $\psi_i(q)$ wird folgender Ausdruck verwendet

$$\psi_i(q) = f_i(q) \operatorname{sign} f_i(q) \quad . \quad (74)$$

Wegen

$$\begin{aligned} f_i(q) \operatorname{sign} f_i(q) &= f_i(q) H[f_i(q)] + \\ &+ [-f_i(q)] H[-f_i(q)] \end{aligned} \quad (75)$$

folgt aus dem Vergleich mit (22)

$$f_{s+i}(q) = -f_i(q) \quad (76)$$

$$\varphi_i(q) = f_i(q) \quad ; \quad \varphi_{s+i}(q) = f_{s+i}(q) \quad (77)$$

für $i=1,2,\dots,s$. Aus (34) und (35) ergibt sich

$$R^+(q_{ij}) = R^-(q_{ij}) = \frac{1}{2} R(q_{ij}) \quad . \quad (78)$$

Die Stabilitätsbedingung für diesen Sonderfall ist

$$-\frac{1}{2} R(q_{ij}) < V(q_{ij}) < \frac{1}{2} R(q_{ij}) \quad . \quad (79)$$

Wenn für das in der Abb. 22 dargestellte System die Parameterwerte $c_1=c_2$, $d_1=d_2$ und $c_3=0$ angenommen werden, hat das Potential die Form

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2} m g a (1 - \cos q) + \frac{1}{2} c a^2 \sin^2 q + \\ &+ \frac{1}{2} c_1 [a(\cos q_{11} - \cos q) \operatorname{sign}(\cos q_{11} - \cos q)]^2 - \frac{1}{2} c_1 d_1^2 \end{aligned} \quad (80)$$

und es folgt

$$R^+ = R^- = c_1 d_1 a \sin q_{11} \quad . \quad (81)$$

Die Bedingung für die Stabilität der Lage q_{11} ist

$$2ca \cos q_{11} - 2c_1 d_1 < mg < 2ca \cos q_{11} + 2c_1 d_1 \quad . \quad (82)$$

Als anderes Beispiel mit der Vorzeichenfunktion sei der Wackelschwinger erwähnt. Das Potential ist

$$U = \omega^2 [\cos(\alpha - q \operatorname{sign} q) - \cos \alpha] \quad (83)$$

im Bereich $q \in (0; \pi/2)$. Hier sind ω und α Konstanten. Für die Unstetigkeitsstelle $q_{11}=0$ folgt

$$V(q_{11}) = 0 \quad ; \quad R^+(q_{11}) = R^-(q_{11}) = \omega^2 \sin \alpha \quad . \quad (84)$$

Die Bedingung (79) ist immer erfüllt, und somit ist diese Gleichgewichtslage stabil.

BEISPIEL

Der Punkt $A(x, y, z)$ eines Systems befinde sich auf einer Kurve C . Die Lage des Punktes auf der Kurve sei durch die verallgemeinerte Koordinate q bestimmt

$$x = x(q) \quad ; \quad y = y(q) \quad ; \quad z = z(q) \quad . \quad (85)$$

Auf diesen Punkt wirkt eine Kraft $F_i(q)$, deren Richtung durch einen fixen Punkt $A_i(x_i, y_i, z_i)$ hindurchgeht. Für diese Kraft kann ein Potential U_i definiert werden

$$\frac{dU_i}{dq} = - F_i(q) \cdot \frac{(x_i - x)x' + (y_i - y)y' + (z_i - z)z'}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}} \quad . \quad (86)$$

Befindet sich der Punkt A_i nicht auf der Kurve C , so hat (86) immer einen endlichen Wert, wenn auch $F_i(q)$ endlich ist.

Wenn sich A_i auf der Kurve C befindet und für den Wert

q_i der verallgemeinerten Koordinate entspricht und auch noch $F_i(q_i) \neq 0$ gilt, wird (86) für $A=A_i$ zum unbestimmten Ausdruck. Um das Stabilitätsverhalten in einer solchen Lage zu beurteilen, werden die seitlichen Bereiche von $q=q_i$ untersucht.

Solche Kräfte können mit Hilfe von Konstruktionselementen, die sich in eine Richtung elastisch verformen, oder durch Seile, die über Rollen oder durch Ringe gehen, erzeugt und eingeleitet werden.

Als Sonderfall wird ein Punkt A von der Masse m_1 betrachtet, der sich reibungsfrei auf einem Kreis in einer vertikalen Ebene bewegen kann. An diesem Punkt ist ein Seil befestigt, das durch einen Ring in $A_i(0,0,R)$ hindurchgeht. Am anderen Ende des Seils ist die Masse m_2 befestigt. Die Gleichung des Kreises sei $x^2+z^2 = R^2$, $y=0$, z-vertikal und q sei der Winkel, der die Lage von m_1 in bezug auf den tiefsten Punkt des Kreises $(0,0,-R)$ bestimmt. Es soll die Stabilität der Gleichgewichtslage $q=\pi$ untersucht werden.

Das Potential des Systems ist

$$U = m_1 g R (1 - \cos q) - \quad (87)$$
$$- 2 m_2 g R \left[1 - \cos \frac{q}{2} \cdot \text{sign}(\cos \frac{q}{2}) \right] .$$

Die Hilfsfunktionen sind

$$V(q) = m_1 g R \sin q - m_2 g R \sin \frac{q}{2} \cdot \text{sign}(\cos \frac{q}{2}) \quad (88)$$

$$V(\pi) = 0 ; \quad R^+(\pi) = R^-(\pi) = m_2 g R \quad . \quad (89)$$

Die Bedingung (79) ist immer erfüllt, und somit ist die Gleichgewichtslage $q=\pi$, in der die verallgemeinerte Kraft $-(dU/dq)$ unstetig ist, stabil.

Die Stabilität der Gleichgewichtslage $q=\pi$ kann auch durch die Betrachtung eines allgemeineren Systems bestimmt werden. Der Ring, durch den das Seil geht, befinde

sich im Punkt $A_i(0, d, R)$. Für $d \rightarrow 0$ folgt das anfangs betrachtete System. Für dieses allgemeinere System ist das Potential

$$U = m_1 g R (1 - \cos q) - m_2 g \left[\sqrt{d^2 + 4R^2} - \sqrt{d^2 + 2R^2(1 + \cos q)} \right] \quad (90)$$

differenzierbar mit der zweiten Ableitung

$$U'' = m_1 g R \cos q - m_2 g R^2 \cdot \frac{d^2 \cos q - R^2 (1 + \cos q)^2}{[d^2 + 2R^2(1 + \cos q)]^{3/2}} \quad (91)$$

In der Gleichgewichtslage $q = \pi$ ist

$$U''(\pi) = -m_1 g R + m_2 g \cdot \frac{R^2}{|d|} \quad (92)$$

Für $|d| < R m_2 / m_1$ ist diese Gleichgewichtslage stabil. Das gilt auch für $|d| \rightarrow 0$.

Die Gleichgewichtslagen des Systems mit $d=0$, in Abhängigkeit vom Massenverhältnis m_2/m_1 sind in der Abb. 27 dargestellt. Die mit ausgezogener Linie gezeichneten Gleichgewichtslagen sind stabil ($q=0$ für $m_2/m_1 \in [0; 2)$, $q=\pi$ und $q=-\pi$), die mit unterbrochener Linie gezeichneten instabil.

Wird Reibung zwischen Masse m_1 und Kreis angenommen (Haftreibungszahl 0,2), dann bilden sich Gleichgewichtsbereiche, die in der Abb. 27 schraffiert eingezeichnet sind. Die Grenzzustände mit negativer Verlagerungstendenz sind als strichpunktierte Linien mit einem Punkt und bei positiver Verlagerungstendenz mit zwei Punkten dargestellt.

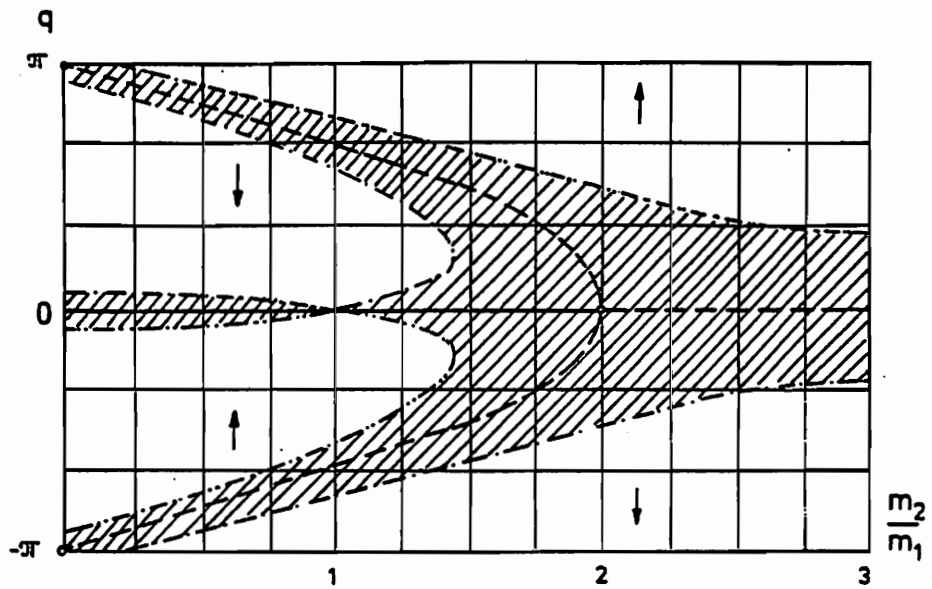


Abb.27

I.3. BESONDERHEITEN DER SCHALTLINIE $\dot{q} = 0$ BEI
UNSTETIGEM ÜBERGANG VON DER HAFT- ZUR GLEITREIBUNG

Zwischen den in (17) definierten verallgemeinerten Reibungskräften bei Bewegung und in den Lagen mit der Geschwindigkeit gleich Null kann folgender Zusammenhang bestehen

$$T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = f(q, \dot{q}, \ddot{q}; \mu_i(\dot{q})) \quad (93)$$

$$T_s(q, \ddot{q}) = f(q, 0, \ddot{q}; \mu_{is}) \quad (94)$$

Hier sind $\mu_i(\dot{q})$ und μ_{is} die Gleit- bzw. Haftreibungskoeffizienten in den Führungen und Gelenken des Systems.

Der Übergang von der Reibung in Zuständen mit $\dot{q}=0$ zur Gleitreibung geschieht in der Regel mit fallender Charakteristik. Für kleine Werte der Geschwindigkeit kann die Veränderung der Reibungskoeffizienten bei diesem Übergang z.B. mit dem Gesetz

$$\mu_i(\dot{q}) = \mu_i + (\mu_{is} - \mu_i) \exp(-\alpha_i |\dot{q}|) \quad (95)$$

ausgedrückt werden. Mit diesem Gesetz gilt

$$T_s(q, \ddot{q}) = T(q, 0, \ddot{q}) \quad (96)$$

Oft werden einfachere Modelle für die Reibungskräfte verwendet, die einen unstetigen Übergang von der Reibung bei $\dot{q}=0$ zur Gleitreibung beinhalten. Für solche Systeme gilt in der Regel

$$T_s(q, \ddot{q}) > T(q, 0, \ddot{q}) \quad (97)$$

Auf der Schaltlinie $\dot{q}=0$ der Phasenebene entstehen Bereiche mit besonderem Verhalten, auf die im folgenden hingewiesen wird.

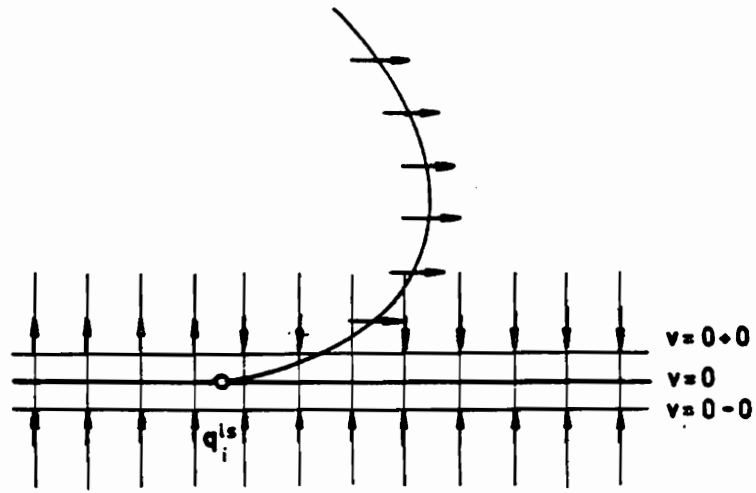


Abb.28

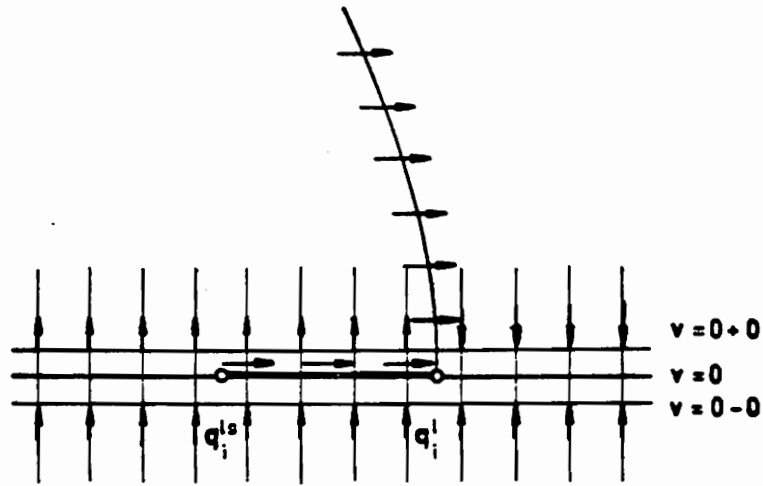


Abb.29

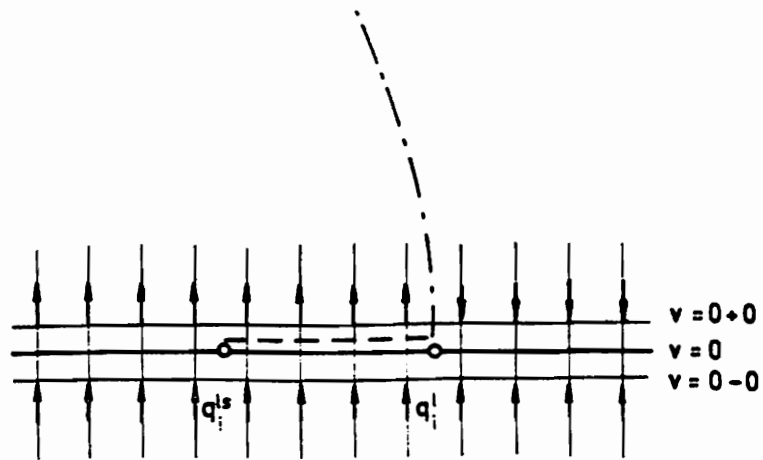


Abb.30

Eine wichtige Hilfslinie in der Phasenebene, die zur Beurteilung des Verhaltens des Systems verwendet wird, ist die Isokline mit horizontalen Tangenten. Sie stellt Zustände mit Nullbeschleunigung dar und ist aus der Gleichung

$$F(q, \dot{q}, 0) = 0 \quad (98)$$

zu bestimmen. Diese Isokline schneidet die Schaltlinie $\dot{q} = 0$ in Punkten, die Gleichgewichtslagen darstellen ($\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$) und die Lösungen der Gleichung

$$|F_0(q)| = T_s(q, 0) \quad (99)$$

sind. Bei stetigem Übergang von der Haft- zur Gleitreibung sind diese Punkte auch die Lösungen der Gleichung

$$|F_0(q)| = T(q, 0, 0) \quad (100)$$

In einem Bereich mit $F_0(q) > 0$ sei q_i^{1s} so eine Gleichgewichtslage

$$F_0(q_i^{1s}) = T_s(q_i^{1s}, 0) = T(q_i^{1s}, 0, 0) \quad (101)$$

und es gelte

$$F_0(q) < T_s(q, 0) \quad \text{für} \quad q > q_i^{1s} \quad (102)$$

$$F_0(q) > T_s(q, 0) \quad \text{für} \quad q < q_i^{1s} \quad (103)$$

Die Isokline mit horizontalen Tangenten verlaufe z.B. so, wie sie in der Abb. 28 dargestellt ist.

Für sehr kleine Beträge der Geschwindigkeit kann angenommen werden

$$d(q, v) \cong 0 \quad , \quad T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cong T(q, 0, \ddot{q}) \quad (104)$$

und

$$\frac{dv}{dq} = \frac{1}{v} [F_0(q) - T(q, 0, \ddot{q}) \text{sign } v] \quad (105)$$

Links von q_i^{1s} sind die Punkte der $\dot{q} = 0$ Achse E-A Punkte (E-Eintrittspunkt, A-Austrittspunkt) oder transition points.

Rechts von q_i^{1s} sind die Punkte der $\dot{q} = 0$ Achse E-E Punkte (end points) also Gleichgewichtslagen.

Bei unstetigem Übergang von der Haft- zur Gleitreibung sei $q_i^1 > q_i^{1s}$ durch

$$F_o(q_i^1) = T(q_i^1, 0, 0) < T_s(q_i^1, 0) \quad (106)$$

bestimmt. Die Richtungselemente der Phasenkurven beim Überschreiten der q -Achse sind in der Abb. 29 dargestellt. Auf der q -Achse gibt es den Abschnitt $[q_i^{1s}, q_i^1]$ mit Punkten, die Gleichgewichtslagen darstellen und als E-A Punkte auftreten. Bei einer Bewegung aus der negativen Geschwindigkeitshalbebene kommt das System in diesen Gleichgewichtslagen zur Ruhe. Es verbleibt in dieser Lage, bis eine Störung, in der Form einer positiven Anfangsgeschwindigkeit, einwirkt und die Bewegung fortgesetzt wird. Solche Punkte werden als E-A Punkte mit Haften oder als transition points with stick bezeichnet.

In den folgenden Darstellungen in der Phasenebene werden die Isoklinen mit horizontalen Tangenten als strichpunktierte Linien gezeichnet. Die Abschnitte von E-A Punkten mit Haften werden mit einer unterbrochenen Linie dargestellt (Abb. 30).

Wenn Haft- und Gleitreibung als gleich angenommen werden, fallen die Punkte q_i^{1s} und q_i^1 zusammen und Abschnitte von E-A Punkten mit Haften treten nicht auf.

I.4. DIE PHASENPORTRÄTS IN DEN SEITLICHEN BEREICHEN DER UNSTETIGKEITSTELLEN DER KRAFT $F_0(q)$

Die Lage $q=q_i$ sei eine Unstetigkeitsstelle der Kraft $F_0(q)$, in der die Bedingungen (7) und (8) erfüllt sind und die somit eine Gleichgewichtslage darstellt. Weiter wird angenommen, daß sich um diese Gleichgewichtslage, wegen der Reibungskraft, ein Gleichgewichtsbereich bildet. In solch einem Bereich kann $F_0(q)$ eine Rückführ- oder Verstellkraft sein. Die Dämpfungs- und Reibungskraft wirken entweder gleichsinnig, wenn beide positiv oder negativ sind, oder entgegengesetzt, wenn eine Kraft positiv und die andere negativ ist.

Die Schaltlinien $q=q_i$ und $\dot{q}=0$ in solch einer Unstetigkeitsstelle der Kraft $F_0(q)$ bilden in der Phasenebene vier Bereiche mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Um allgemeine Eigenschaften der Phasenporträts abzuleiten, werden die Bereiche links und rechts der Schaltlinie $q=q_i$ betrachtet, obwohl genau genommen in diesen seitlichen Bereichen die Halbebenen $\dot{q} > 0$ und $\dot{q} < 0$ oder Teile dieser Halbebenen nicht gleichzeitig Zufluß- oder Abflußbereiche sind und deshalb auch unterschiedliche Eigenschaften aufweisen können. Besonders bei Systemen mit gyroskopischen Kräften und bei durch Reibungskräfte erregten Systemen sind solche Besonderheiten zu beachten.

I.4.1. GLEICHSINNIGE WIRKUNG DER REIBUNGS- UND DÄMPFUNGSKRAFT

In einem linksseitigen Bereich von q_i sei $F_0(q)$ eine Rückführkraft, also positiv. Die Dämpfungs- und Reibungskraft seien beide positiv, d.h.

$$d(q, v) = |d(q, v)| \quad , \quad T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = |T(q, \dot{q}, \ddot{q})|. \quad (107)$$

Somit ist dieser seitliche Bereich ein Abflußbereich. Bei unterschiedlicher Haft- und Gleitreibung bildet sich ein Abschnitt von E-A Punkten mit Haften. Die Isokline mit horizontalen Tangenten ist aus der Gleichung

$$|F_0(q)| - [|d(q,v)| + |T(q,\dot{q},0)|] \text{ sign } v = 0 \quad (108)$$

zu bestimmen und verläuft in der positiven Halbebene. Das Phasenporträt eines solchen Bereiches ist in der Abb. 31 dargestellt.

Ist hingegen $F_0(q)$ eine Verstellkraft, d.h. $F_0(q) = -|F_0(q)|$, so befindet sich die Isokline mit horizontalen Tangenten in der negativen Halbebene. Solch ein Phasenporträt ist in der Abb. 32 dargestellt.

Wenn im linksseitigen Bereich der Unstetigkeitsstelle q_i eine negative Dämpfungskraft, d.h. $d(q,v) = -|d(q,v)|$, und eine negative Reibungskraft wirken, dann ist dieser ein Zuflußbereich. Eine negative Reibungskraft $T(q,\dot{q},\ddot{q}) < 0$, $T_s(q,\ddot{q}) \equiv 0$ wirkt im Richtungssinn der Geschwindigkeit. Solch eine Kraft mit konstantem Betrag wurde z.B. beim Studium der Bewegung der Unruhe einer Uhr verwendet. Hier wird eine negative Reibungskraft angenommen, die von q und auch von \dot{q} abhängen kann

$$R(q,\dot{q}) = - T(q,\dot{q}) \text{ sign } \dot{q} = |T(q,\dot{q})| \text{ sign } \dot{q} \quad (109)$$

Im linksseitigen Bereich von q_i sei die Bedingung

$$|F_0(q)| < |T(q,0)| \quad (110)$$

in einem Abschnitt erfüllt, der durch die Lage \bar{q}_i^1 aus

$$|F_0(\bar{q}_i^1)| = |T(\bar{q}_i^1)| \quad (111)$$

nach links begrenzt ist. Der Abschnitt $[\bar{q}_i^1, q_i]$ stellt instabile Zustände dar, die als Intervalle von A-A Punkten oder als starting point set bezeichnet werden. Die Linien-elemente innerhalb dieses Abschnittes sind sowohl in der positiven als auch in der negativen Halbebene von der Schaltlinie $v=0$ weg orientiert. Für kleine Beträge der Geschwindigkeit gilt wegen $d(q,v) \cong 0$

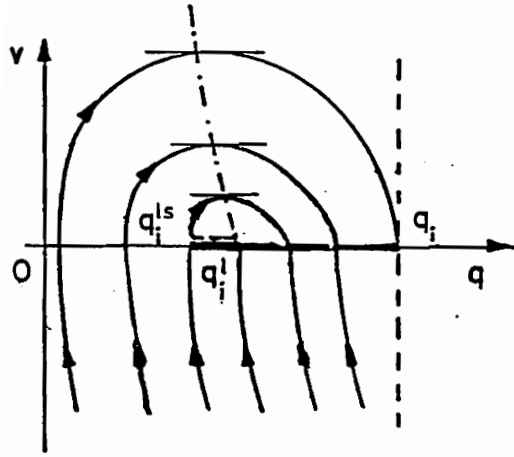


Abb. 31

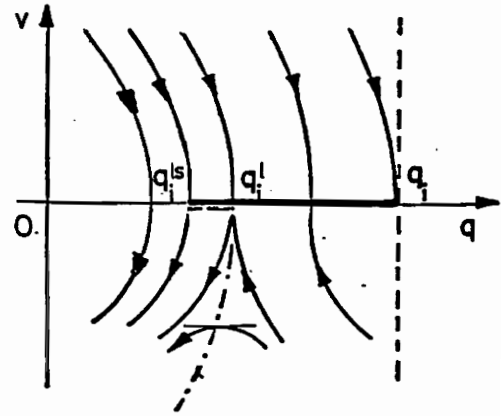


Abb. 32

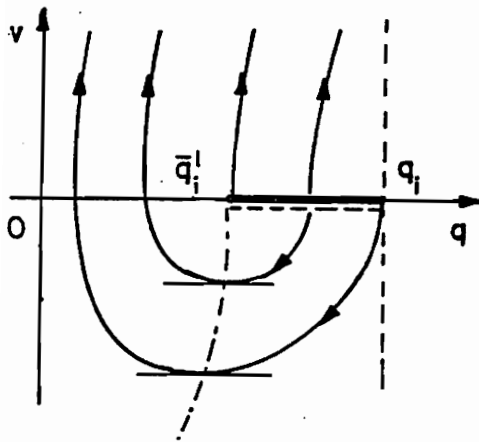


Abb. 33

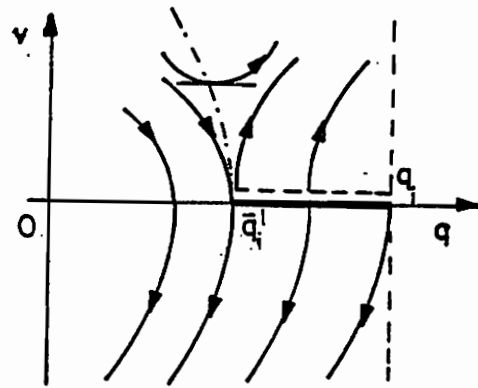


Abb. 34

$$\frac{dv}{dq} = \frac{1}{v} [F_0(q) + |T(q,0)| \operatorname{sign} v] \quad (112)$$

und daraus folgt

$$\left[\frac{dv}{dq} \right]_{v=0 \pm 0} > 0 \quad . \quad (113)$$

Wird ein System mit Rückstellkraft in solch eine Anfangslage gebracht, so wirkt zuerst wegen $v=0$ nur die Kraft $F_0(q) > 0$, die eine Bewegung in die positive Richtung einleitet. Damit sich das System in die negative Richtung bewegt, bedarf es einer Störung in der Form einer Anfangsgeschwindigkeit in diese Richtung. Um hervorzuheben, daß die Bewegungen in die positive Richtung ohne Anfangsstörungen, jene in die negative Richtung aber erst nach einer Anfangsstörung einsetzen, wird in diesem Abschnitt in der negativen Halbebene eine zusätzliche unterbrochene Linie gezeichnet.

Für Systeme mit Verstellkraft in solch einem Abschnitt setzen die Bewegungen in die negative Richtung ohne Anfangsstörungen, die in die positive Richtung aber erst nach einer Anfangsstörung ein. Deshalb wird für diesen Fall die unterbrochene Linie in der positiven Halbebene gezeichnet.

Die Isokline mit horizontalen Tangenten ist aus der Gleichung

$$F_0(q) + [|d(q,v)| + |T(q,v)|] \operatorname{sign} v = 0 \quad (114)$$

zu bestimmen und verläuft für eine Rückführkraft in der negativen und für eine Verstellkraft in der positiven Halbebene. Typische Phasenporträts sind für Rückführkraft in der Abb. 33 und für Verstellkraft in der Abb. 34 dargestellt.

Für den rechtsseitigen Bereich der Unstetigkeitsstelle q_1 erhält man die Phasenkurven aus denen des linksseitigen Bereiches durch Symmetrie zum Punkt $(q_1, 0)$. Sie sind für Abflußbereiche mit Rückführkraft in der Abb. 35 und für Verstellkraft in der Abb. 36 sowie für Zuflußbereiche

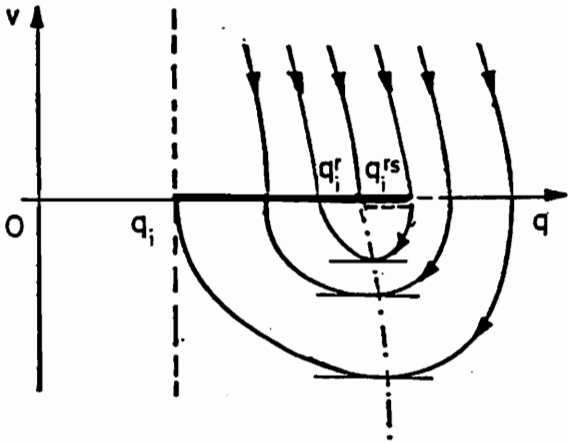


Abb. 35

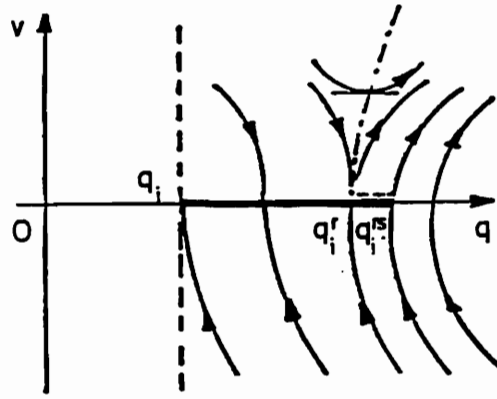


Abb. 36

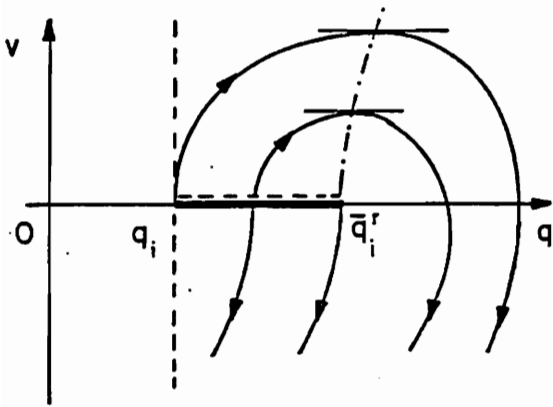


Abb. 37

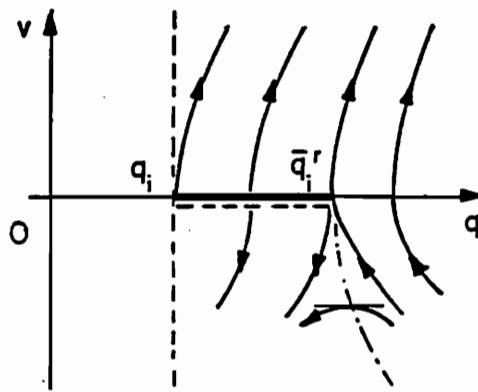


Abb. 38

mit Rückführkraft in der Abb.37 und mit Verstellkraft in Abb.38 dargestellt.

I.4.2. ENTGEGENGESTZTE WIRKUNG VON REIBUNGS- UND DÄMPFUNGSKRAFT

Wenn Reibungs- und Dämpfungskraft gegensinnig wirken, verändert sich im Phasenporträt der Verlauf der Isokline mit horizontalen Tangenten.

In einem linksseitigen Bereich der Unstetigkeitsstelle q_i mit Rückführkraft und positiver Reibung bewirkt eine negative Dämpfungskraft eine verstärkte Krümmung der Isokline mit horizontalen Tangenten im positiven Halbraum nach rechts und im negativen Halbraum nach links.

Eine positive Dämpfung in einem linksseitigen Bereich mit Rückführkraft und negativer Reibung bewirkt eine verstärkte Krümmung der Isokline im positiven Halbraum nach links und im negativen Halbraum nach rechts.

In einem linksseitigen Bereich mit Verstellkraft ist es umgekehrt.

Für den Sonderfall, daß die Reibungskraft nur von q abhängt, zeigen die Abb.39-42 typische Phasenporträts für Rückführkraft mit positiver Reibung und negativer Dämpfung in Abb.39, mit negativer Reibung und positiver Dämpfung in Abb.40 sowie für Verstellkraft mit positiver Reibung und negativer Dämpfung in Abb.41 und mit negativer Reibung und positiver Dämpfung in Abb.42.

Die Geschwindigkeiten $v_o > 0$ und $v_u < 0$ sind die Lösungen der Gleichung

$$F_o(q_i - o) - [d(q_i - o, v) + T(q_i - o)] \text{ sign } v = 0 \quad . \quad (115)$$

Typische Phasenkurven für den rechtsseitigen Bereich der Unstetigkeitsstelle q_i erhält man aus den Phasenkurven des linksseitigen Bereiches durch Symmetrie zum Punkt $(q_i, 0)$ der Phasenebene. Sie sind für Rückführkraft mit

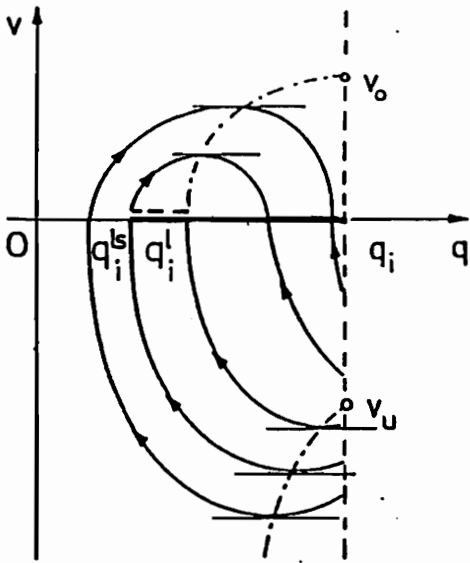


Abb. 39

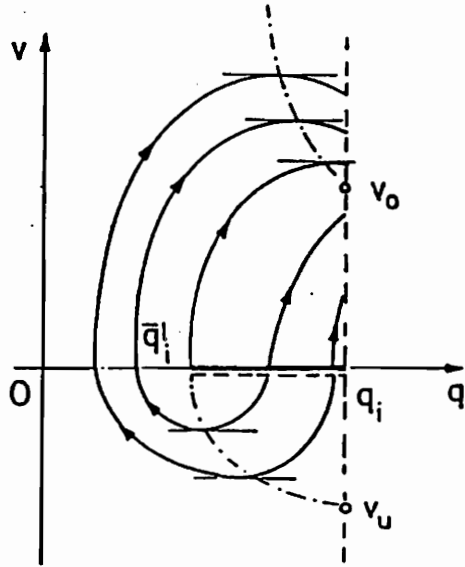


Abb. 40

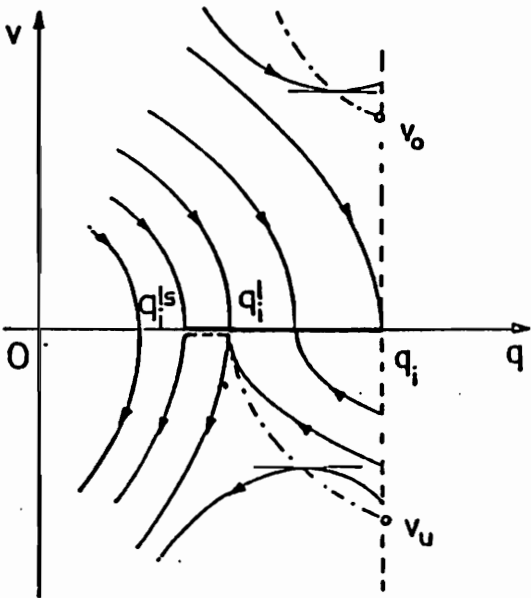


Abb. 41

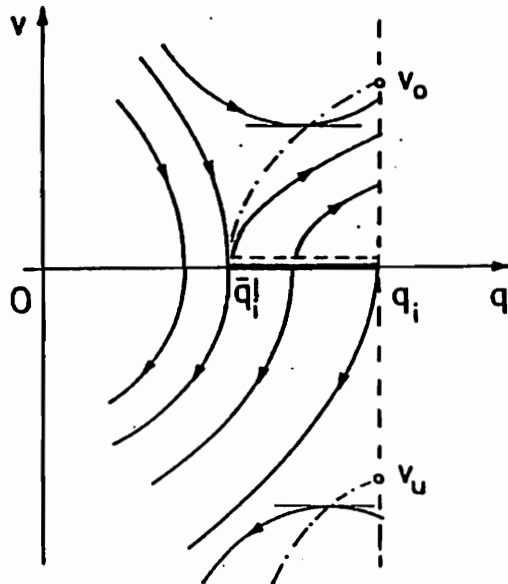


Abb. 42

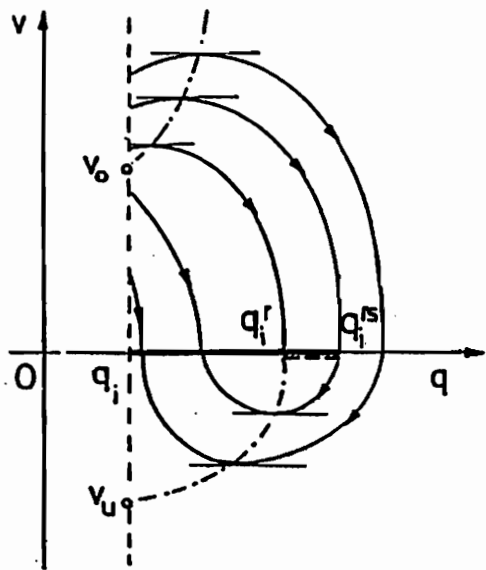


Abb. 43

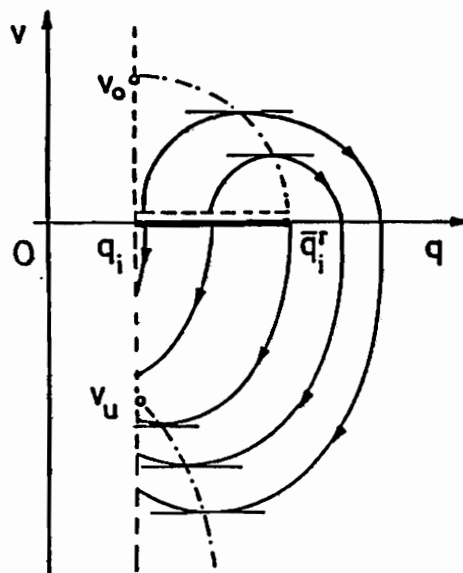


Abb. 44

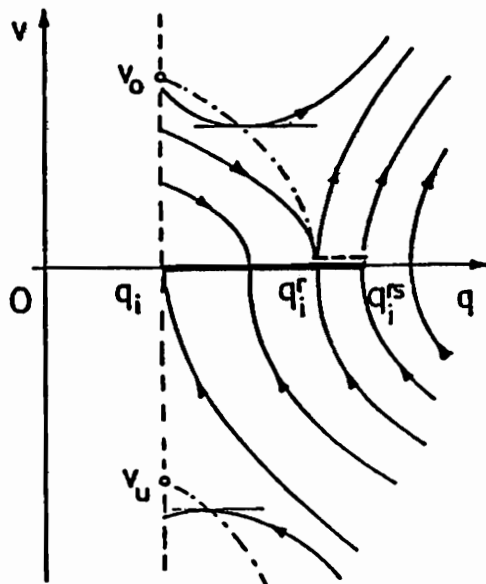


Abb. 45

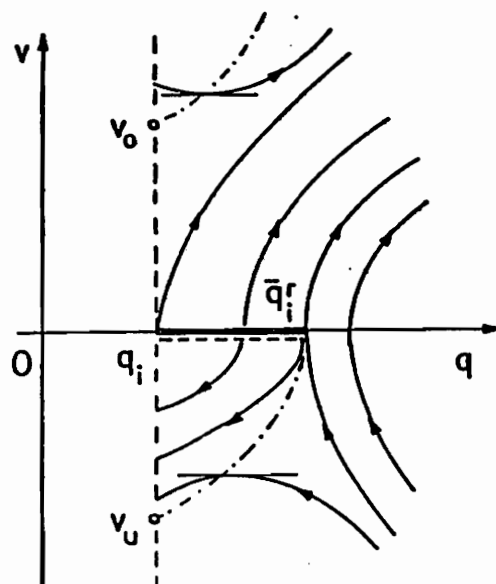


Abb. 46

positiver Reibung und negativer Dämpfung in Abb.43 und mit negativer Reibung und positiver Dämpfung in der Abb. 44 sowie für Verstellkraft mit positiver Reibung und negativer Dämpfung in Abb.45 und mit negativer Reibung und positiver Dämpfung in Abb.46 dargestellt.

Wenn keine unterschiedliche Haft- und Gleitreibung berücksichtigt wird, fehlen die Abschnitte von E-A Punkten mit Haften.

Für bestimmte Systeme kann der Verlauf der Phasenkurven um singuläre Punkte durch Kombinationen der dargestellten Phasenporträts ermittelt werden. Als Sonderfälle ergeben sich die bekannten Strukturen wie Wirbelpunkt, Strudel-
punkt, Knotenpunkt und Sattelpunkt.

I.5. SYSTEME MIT GLEICHGEWICHTSBEREICHEN

I.5.1. BEISPIELE VON SYSTEMEN MIT GLEICHGEWICHTSBEREICHEN

Bei Systemen mit Reibung bilden sich in der Regel um die Punkte mit Potentialmaximum oder Potentialminimum Gleichgewichtsbereiche. Es ist bekannt, daß kleine Störungen ein "Wandern" der Systeme zu den Punkten mit Potentialminimum bewirken. Diese Eigenschaft wird in der Regeltechnik verwendet, um die Genauigkeit von Stellelementen zu verbessern.

Hier werden Systeme mit Gleichgewichtsbereichen betrachtet, die Punkte mit Extremwerten des Potentials enthalten, und solche, für die das Potential konstant ist. Einige Systeme mit konstantem Potential sind in den Abb. 47-51 dargestellt.

Für bestimmte Werte der Federkonstanten c befinden sich die Systeme in den Abb. 47-49 für alle Werte des Lageparameters im Gleichgewicht.

Die Zugbrücke in Abb. 50 befindet sich stets im Gleichgewicht, wenn die Leitkurve des Gegengewichtes eine Kardioide ist.

Das Modell einer Hebebrücke in Abb. 51 befindet sich ebenfalls stets im Gleichgewicht, wenn die Bedingung $G_a = P_b$ erfüllt ist.

Bei diesen Systemen bilden sich Gleichgewichtsbereiche, die mit dem Definitionsbereich der Lagerkoordinaten übereinstimmen.

Die Gleichgewichtslagen innerhalb dieser Bereiche sind nicht äquivalent. Der Begriff "indifferente Gleichgewichtslagen", der gewöhnlich zur Bezeichnung solcher Zustände verwendet wird, ist bestimmt nicht zutreffend.

Experimentell kann auch für solche Systeme unterschiedliches Verhalten festgestellt werden, wenn sie kleinen Störungen, z.B. in der Form von Erschütterungen, ausgesetzt sind. Das unterschiedliche Verhalten tritt in der Form

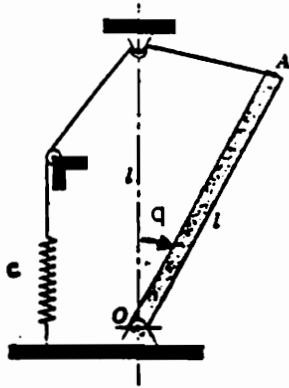


Abb. 47

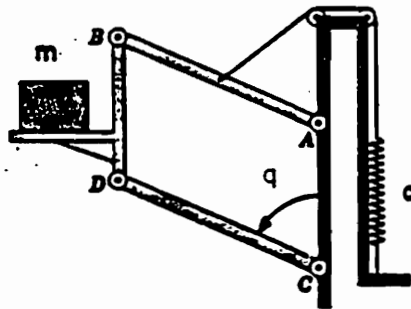


Abb. 48

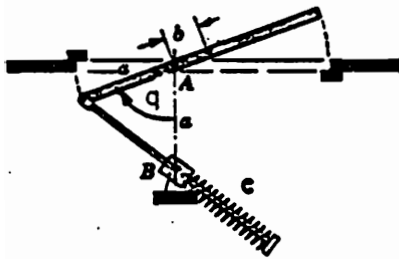


Abb. 49

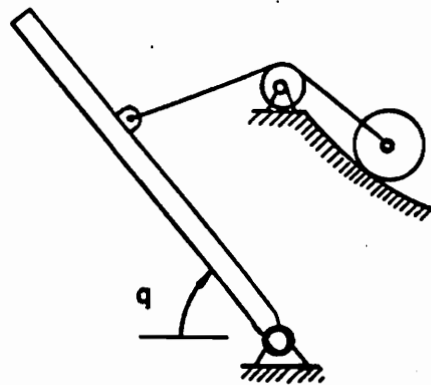


Abb. 50

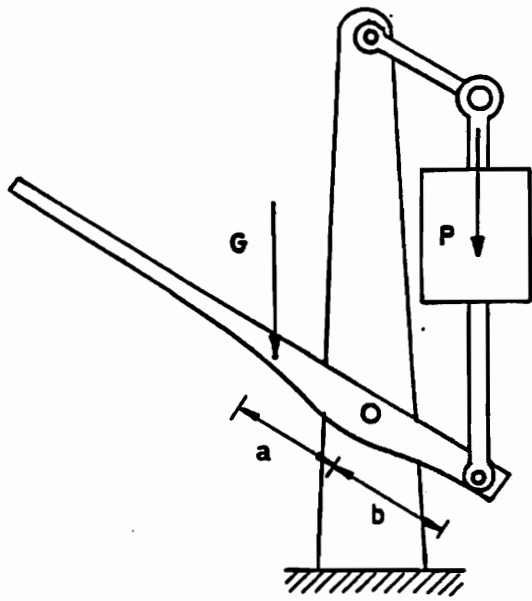


Abb.51

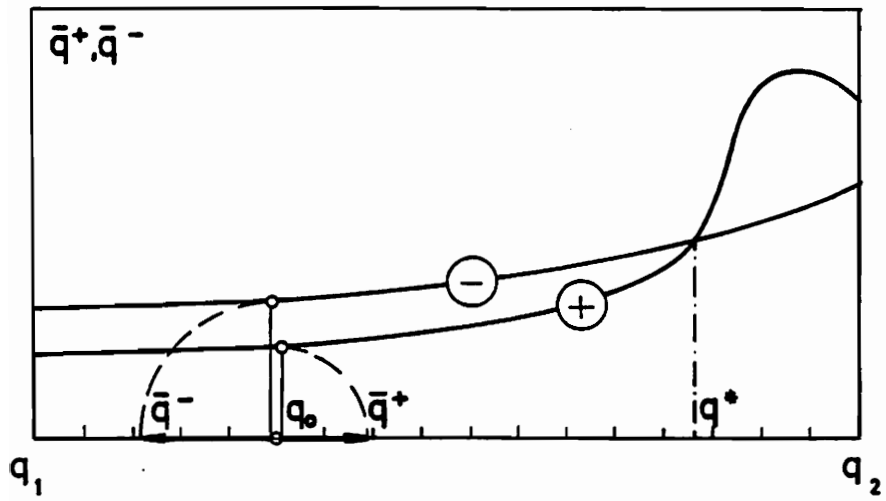


Abb.52

von Verlagerungstendenzen auf. Das System verlagert sich unter der Einwirkung von Störungen in bevorzugte Gleichgewichtslagen.

Unterschiedliches Verhalten tritt auch bei Systemen auf, die mit Hilfe von Stellmotoren innerhalb von Gleichgewichtsbereichen bewegt werden, wie das z.B. bei Brücken, Toren, Antennen der Fall sein kann. Das kann zu einer ungleichförmigen und ruckartigen Belastung des Antriebes führen.

Da das Potential in solchen Bereichen konstant ist, sind andere Ursachen für die unterschiedlichen Eigenschaften der Gleichgewichtslagen innerhalb solcher Bereiche verantwortlich. Die Reibungskräfte in den Gelenken und Führungen gehören zu den Ursachen, die unterschiedliches Verhalten bewirken.

Das unterschiedliche Verhalten von Systemen in den verschiedenen Lagen von Gleichgewichtsbereichen macht eine zusätzliche Charakterisierung der einzelnen Gleichgewichtslagen notwendig. Die Möglichkeit einer solchen Charakterisierung wird im folgenden behandelt.

I.5.2. DIE RICHTUNGSELEMENTE DER GLEICHGEWICHTSLAGEN

Die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems sei

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad . \quad (116)$$

Das System besitzt Gleichgewichtslagen, die die Bedingung

$$0 = F(q_0, 0, 0) \quad (117)$$

erfüllen und einen zusammenhängenden Bereich bilden. In der Abb. 52 sei $[q_1, q_2]$ solch ein Bereich.

Es werden Störungen angenommen, die dem System kleine Anfangsgeschwindigkeiten \dot{q}_0 vermitteln. Das System bewegt sich deshalb in benachbarte Gleichgewichtslagen.

Die Bewegungen in die benachbarten Gleichgewichtslagen sind

die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung (116) mit den Anfangsbedingungen q_0 und \dot{q}_0 . In der Regel können diese Bewegungen

$$q = q(t; q_0, \dot{q}_0) \quad (118)$$

in die benachbarten Gleichgewichtslagen

$$\bar{q} = q(t_1; q_0, \dot{q}_0) \quad \text{mit} \quad \dot{q}(t_1; q_0, \dot{q}_0) = 0 \quad (119)$$

nur durch numerische Integration ermittelt werden.

Die benachbarten Gleichgewichtslagen für $\dot{q}_0 = v_0 > 0$ bzw. $\dot{q}_0 = v_0 < 0$ sind in der Abb. 52 mit \bar{q}^+ bzw. \bar{q}^- bezeichnet. Der Gleichgewichtslage q_0 wird ein Richtungselement zugeordnet. Dieses zeigt in die Richtung der benachbarten Gleichgewichtslage, die am weitesten von der Anfangslage q_0 entfernt ist. Für den in der Abb. 52 dargestellten Fall zeigt das Richtungselement der Gleichgewichtslage q_0 in die negative Richtung.

Wenn die benachbarten Gleichgewichtslagen \bar{q}^+ und \bar{q}^- von q_0 gleichweit entfernt sind, so wird kein Richtungselement definiert. Solch eine Gleichgewichtslage ist in der Abb. 52 mit q^* bezeichnet.

Wenn als Folge einer kleinen Störung in eine Richtung sich das System in eine benachbarte Gleichgewichtslage bewegt, in die andere Richtung aber eine Bewegung eingeleitet wird, die das System aus der Gleichgewichtslage entfernt, dann zeigt das Richtungselement in Richtung der sich entfernenden Bewegung.

Wenn als Folge von Störungen in beide Richtungen Bewegungen entstehen, die das System aus dem Gleichgewichtsbereich entfernen, dann wird so einer Gleichgewichtslage kein Richtungselement zugeordnet.

I.5.3. DAS RICHTUNGSFELD

Um die Richtungselemente der verschiedenen Gleichgewichts-

lagen eines Gleichgewichtsbereiches in Zusammenhang zu bringen, werden die Anfangsstörungen bestimmten Bedingungen unterworfen. Aus dem Modell, das für die Anfangsstörungen angenommen wird, sind diese Bedingungen abzuleiten. Für ein System mit einem Freiheitsgrad kann solch eine Bedingung ganz allgemein in der Form

$$\| \dot{q}_0 g(q) \| = c \quad (120)$$

geschrieben werden. Hier ist $g(q)$ eine Gewichtsfunktion, die ortsabhängig sein kann.

Mit den Anfangsbedingungen, die eine bestimmte Bedingung (120) erfüllen, werden den Gleichgewichtslagen des Bereiches Richtungselemente zugeordnet, die zusammen ein Richtungsfeld bilden. Innerhalb dieses Feldes gibt es Abschnitte mit Richtungselementen, die entweder in die positive oder in die negative Richtung zeigen und durch Gleichgewichtslagen begrenzt sind, denen keine Richtungselemente zugeordnet sind. Die Gleichgewichtslagen ohne Richtungselement sind die Verzweigungspunkte des Richtungsfeldes.

Allgemein hängen die Verzweigungspunkte sowohl vom System als auch von den Störparametern ab.

In der Abb. 52 gibt es zwei Abschnitte mit Richtungselementen nach links und nach rechts. Der Verzweigungspunkt ist die Gleichgewichtslage q^* .

Wenn entsprechende Modelle für das System und für die Störungen angenommen wurden, ist ein Zusammenhang zwischen Richtungsfeld und Verlagerungstendenz bei Störungen zu erwarten.

I.5.4. MODELL MIT EINEM FREIHEITSGRAD

I.5.4.1. DIE BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG

Das Modell ist in der Abb. 53 dargestellt und besteht aus

einem homogenen Stab (Masse m , Länge l), der sich in einer vertikalen Ebene um das Gelenk 1 drehen kann. Am Ende 2 ist ein masseloser Stab angelenkt, der durch die Führung 3 geht und eine Feder verformt. Die Feder ist in der Lage $q=0$ unverformt.

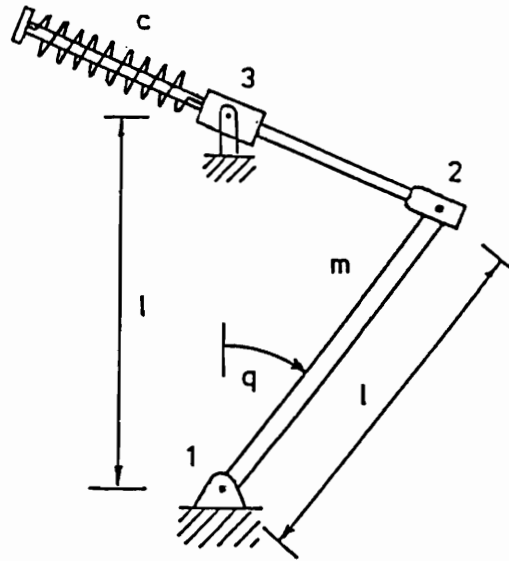


Abb. 53

Das bezogene Potential des Systems ist

$$U = - \left(1 - \frac{2cl}{mg} \right) \cdot \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 \quad (121)$$

Für den Wert der Federkonstanten

$$c = \frac{mg}{2l} \quad (122)$$

ist das Potential von q unabhängig, und das System befindet sich für alle q -Werte im Gleichgewicht. Ungenauigkeiten in der technischen Ausführung des Systems können dazu führen, daß diese Bedingung nicht genau erfüllt ist. Deshalb wird für die Federkonstante der Wert

$$c = (m - \Delta m) \frac{g}{2l} \quad (123)$$

angenommen. Für das Potential folgt

$$U = - \frac{\Delta m}{m} \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 \quad . \quad (124)$$

In den Gelenken 1,2 und in der Führung 3 werden konstante Gleit- und Haftreibungskoeffizienten μ_i bzw. μ_{is} ($i=1,2,3$) angenommen. Die Gelenke werden als zylinderförmige Zapfen mit den Radien r_i angenommen. Es werden folgende Reibungsbeiwerte definiert

$$f_i = \mu_i \cdot \frac{r_i}{1} \quad ; \quad f_{is} = \mu_{is} \cdot \frac{r_i}{1} \quad i=1,2 \quad . \quad (125)$$

Das bezogene dynamische Reibungsmoment im Gelenk 1 ist

$$M_1 = f_1 \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad (126)$$

mit

$$X_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right) \sin q + \frac{1}{2} M_2 (1 - \mu_3 \cot \frac{q}{2}) \operatorname{sign} \dot{q} - \frac{1}{2g} \ddot{q} \quad (127)$$

$$Y_1 = \left(\cos \frac{q}{2} \right)^2 - \frac{\Delta m}{m} \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} M_2 (\mu_3 + \cot \frac{q}{2}) \operatorname{sign} \dot{q} - \frac{1}{2g} \dot{q}^2 \quad . \quad (128)$$

Hier bedeutet M_2 das bezogene Reibungsmoment im Gelenk 2

$$M_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta m}{m} \right) f_2 \left\{ \left[f_2^2 \mu_3^2 + 4 \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 \left(1 - f_2^2 \frac{1 + \mu_3^2}{4 \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2} \right) \right]^{1/2} + f_2 \mu_3 \operatorname{sign} \dot{q} \right\} / \left(1 - f_2^2 \frac{1 + \mu_3^2}{4 \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2} \right) \quad . \quad (129)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung für $\dot{q} \neq 0$ ist

$$\ddot{q} \frac{1}{2g} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \sin q - M(q, \dot{q}, \ddot{q}) \operatorname{sign} \dot{q} \right] \quad (130)$$

mit dem verallgemeinerten dynamischen Reibungsmoment

$$\begin{aligned} M(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= M_1 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_3 \mu_3 \cot \frac{q}{2} \\ &= f(q, \dot{q}, \ddot{q}; f_1, f_2, \mu_3; \frac{\Delta m}{m}) \quad . \end{aligned} \quad (131)$$

Das verallgemeinerte Haftreibungsmoment ist

$$M_s = f(q, 0, 0; f_{1s}, f_{2s}, \mu_{3s}; \frac{\Delta m}{m}) \quad (132)$$

Gleichgewicht besteht in den Bereichen der Lagekoordinate q , in denen die Bedingung

$$\left| \frac{dU}{dq} \right| \cong M_s \quad (133)$$

erfüllt ist. Für $\Delta m = 0$ ist diese Bedingung für alle Werte des Lageparameters erfüllt. Für $\Delta m \neq 0$ werden die Systemparameter $\Delta m/m, f_{1s}, f_{2s}, \mu_{3s}, f_1, f_2$ und μ_3 so gewählt, daß in allen Lagen Gleichgewicht besteht. Aus Symmetriegründen wird nur der Bereich $(0^\circ; 180^\circ)$ betrachtet.

Um die Untersuchung übersichtlich zu gestalten, wird im weiteren die Reibung im Gelenk 2 und in der Führung 3 vernachlässigt. Für diesen Fall folgen mit $f_1 = f$ und $f_{1s} = f_s$

$$M_1 = f \left\{ \left[\left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right) \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} - \frac{1}{2g} \ddot{q} \right]^2 + \left[1 - \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right) (\sin \frac{q}{2})^2 - \frac{1}{2g} \dot{q}^2 \right]^2 \right\}^{1/2} = M_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (134)$$

$$M_{1s} = f_s \left[(\cos \frac{q}{2})^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right) (\sin \frac{q}{2})^2 \right]^{1/2} \quad (135)$$

und die Bewegungsdifferentialgleichung

$$\ddot{q} \frac{1}{2g} = \frac{3}{2} \left[\frac{\Delta m}{m} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} - M_1(q, \dot{q}, \ddot{q}) \operatorname{sign} \dot{q} \right] \quad (136)$$

I.5.4.2. DAS RICHTUNGSFELD FÜR ANFANGSSTÖRUNGEN MIT KONSTANTER KINETISCHER ENERGIE

Es wird angenommen, daß die kleinen Störungen Anfangsgeschwindigkeiten vermitteln, deren kinetische Energie konstant ist. Für die Gewichtsfunktion $g(q)$ gilt

$$g(q) = 1 \quad (137)$$

und daraus folgt

$$|\dot{q}_0| = C = \text{const} \quad . \quad (138)$$

Für verschiedene Werte der Systemparameter $\Delta m/m$ und f sowie des Störparameters C werden die Richtungselemente in den verschiedenen Gleichgewichtslagen des Bereiches $(0^\circ; 180^\circ)$ bestimmt und die Gleichgewichtslagen ohne Richtungselemente, also die Verzweigungspunkte des Richtungsfeldes, ermittelt. Die Abszissen dieser Gleichgewichtslagen werden mit q^* bezeichnet.

Zuerst wird der Fall $\Delta m = 0$ betrachtet. Das Potential ist konstant und hat keinen Einfluß auf das Richtungsfeld. Nur das Reibungsmoment beeinflusst die Bewegung in die benachbarten Gleichgewichtslagen. Für verschiedene Reibungsbeiwerte f wurden die Kurven der q^* -Werte berechnet und sind in der Abb. 54 dargestellt. Im Gleichgewichtsbereich $(0^\circ; 180^\circ)$ bilden sich zwei Abschnitte mit verschiedenen Richtungselementen. Für $f = 0,015$ und $C = 0,1$ 1/s zeigen die Richtungselemente links von q^* zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ und rechts von q^* zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$. Für steigende Werte der Anfangsgeschwindigkeit $|\dot{q}_0| = C$ verlagert sich q^* nach links. Steigende Werte des Reibungsbeiwertes f bewirken eine Verschiebung der Grenzlage q^* nach rechts.

In der Abb. 54 sind auch die q^* -Werte dargestellt, die mit Hilfe eines Reibungsmomentes berechnet wurden, in dem die dynamischen Komponenten in \dot{q} und \ddot{q} vernachlässigt sind. Dieses Reibungsmoment ist in der Abb. 55 dargestellt und hat eine fallende Kennlinie. Die mit unterbrochenen Linien gezeichneten und mit \bar{f} bezeichneten Kurven zeigen, daß für Anfangsgeschwindigkeiten, die einen bestimmten Betrag überschreiten, die Richtungselemente alle nach rechts weisen, wie es aus dem Verlauf des Reibungsmomentes in Abb. 55 zu erwarten ist. Der Vergleich mit den Kurven, die mit dem vollständigen Reibungsmoment berechnet wurden, zeigt große Unterschiede. Die Vernachlässigung der dynamischen Komponenten im Reibungsmoment kann also nicht als erste Näherung betrachtet werden. Noch einfachere Annahmen

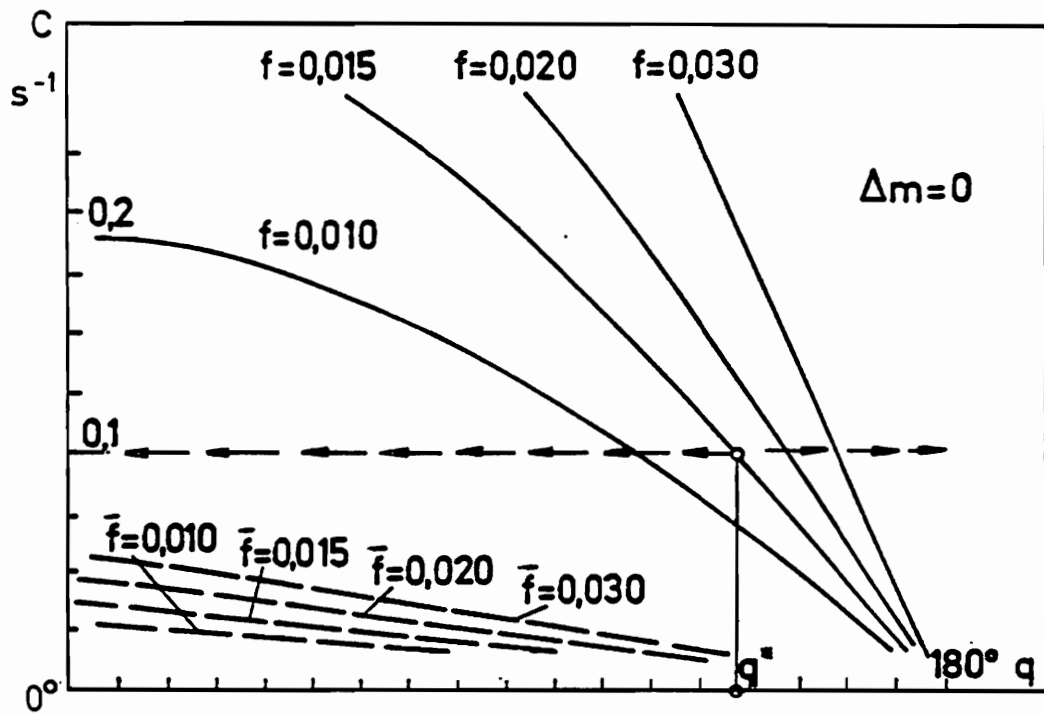


Abb. 54

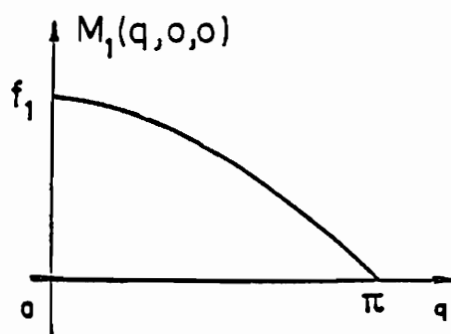


Abb. 55

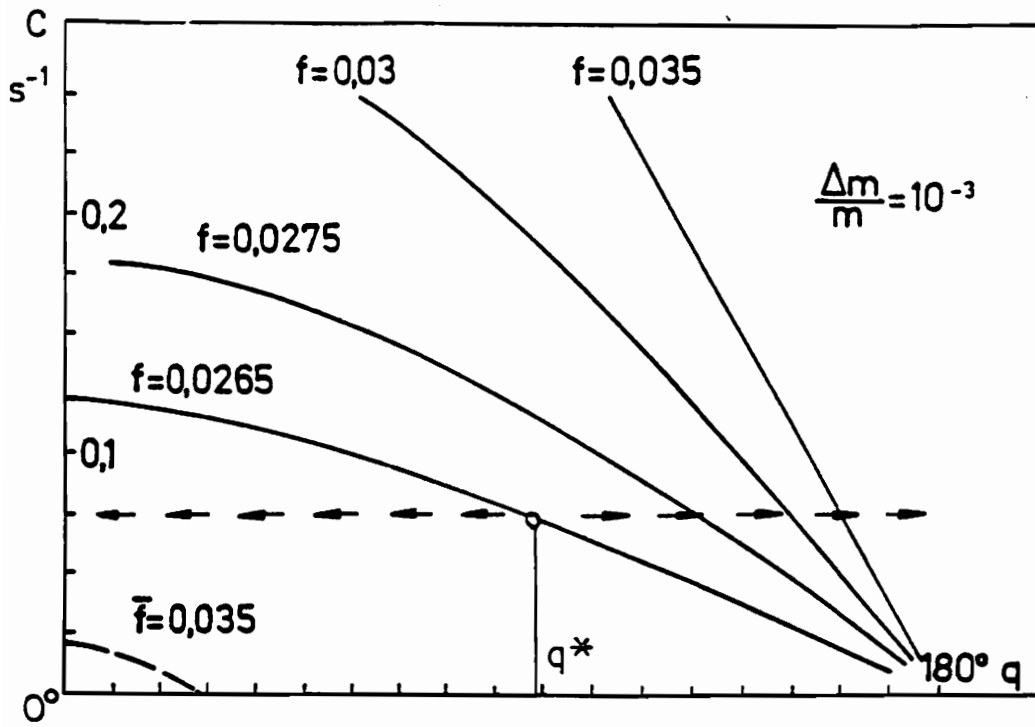


Abb. 56

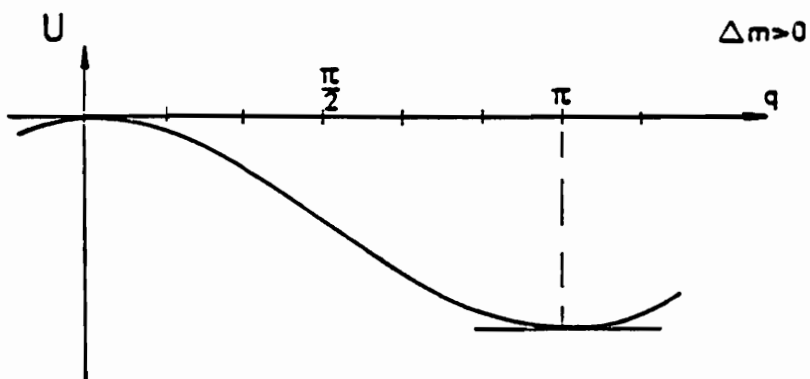


Abb. 57

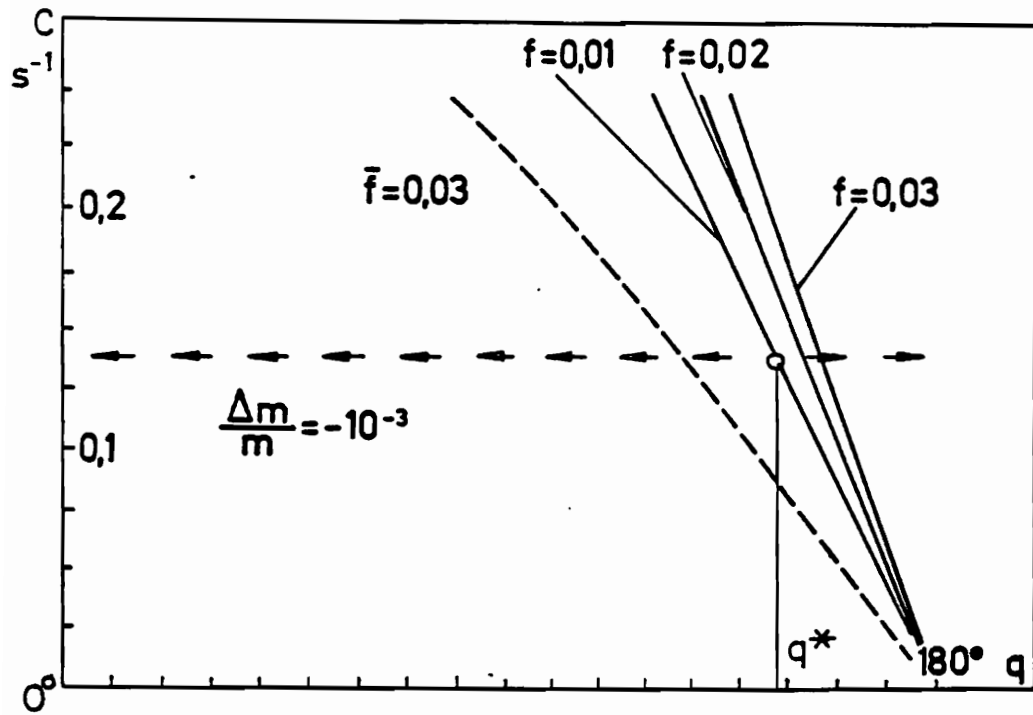


Abb. 58

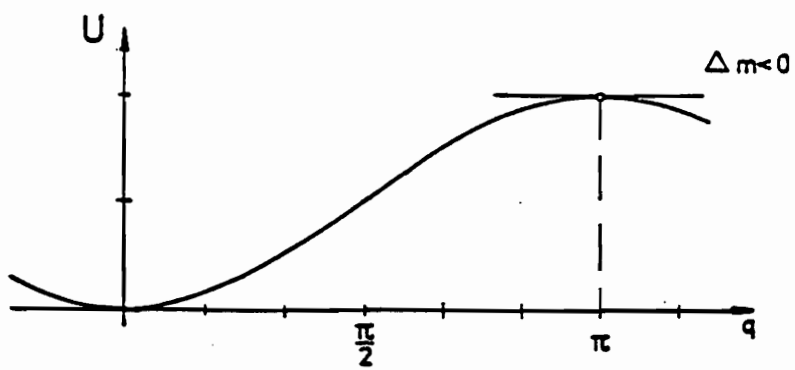


Abb. 59

wie die eines ortsunabhängigen Reibungsmomentes würde das Richtungsfeld noch mehr verfälschen.

In der Abb.56 ist der Fall eines Systems mit $\Delta m > 0$ dargestellt. Das Potential (Abb.57) hat in $q=0^\circ$ ein Maximum und in $q=180^\circ$ ein Minimum. Die für $\Delta m/m = 10^{-3}$ in Abb.56 dargestellten Kurven zeigen, daß sich auch hier zwei Abschnitte mit verschiedenen Richtungselementen bilden. Obwohl man erwartet, daß, entsprechend dem Verlauf des Potentials, die Richtungselemente zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$ mit Potentialminimum hinweisen, gibt es einen Abschnitt mit Richtungselementen, die zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ mit Potentialmaximum zeigen.

Steigende Beträge des Störparameters verkleinern den Abschnitt um $q = 0^\circ$, so daß für Anfangsgeschwindigkeiten, die einen bestimmten Betrag überschreiten, die Richtungselemente im ganzen Bereich nach rechts, entsprechend dem Potentialgefälle, verlaufen.

Steigende Werte des Reibungsbeiwertes bewirken das Gegenteil und vergrößern den Abschnitt um die Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$.

Wenn an Stelle des Reibungsmomentes $M_1(q, \dot{q}, \ddot{q})$ das Moment $M_1(q, 0, 0)$ zur Berechnung der benachbarten Gleichgewichtslagen verwendet wird, dann zeigen die Richtungselemente, entsprechend der mit unterbrochener Linie und mit \bar{F} bezeichneten Kurve, zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$. Das war aus dem Verlauf des Potentials und des vereinfachten Reibungsmomentes zu erwarten. Aber auch hier können die Ergebnisse, die durch Vernachlässigung von \dot{q} und \ddot{q} im Reibungsmoment erzielt wurden, nicht als Näherung betrachtet werden.

In der Abb.58 ist ein Fall mit $\Delta m/m < 0$ dargestellt. Das Potential (Abb.59) hat in $q = 0^\circ$ ein Minimum und in $q = 180^\circ$ ein Maximum. Die für $\Delta m/m = -10^{-3}$ in Abb.58 gezeichneten Kurven zeigen, daß es zwei Abschnitte mit verschiedenen Richtungselementen gibt. Es gibt auch hier einen Abschnitt, dessen Richtungselemente zur Gleichge-

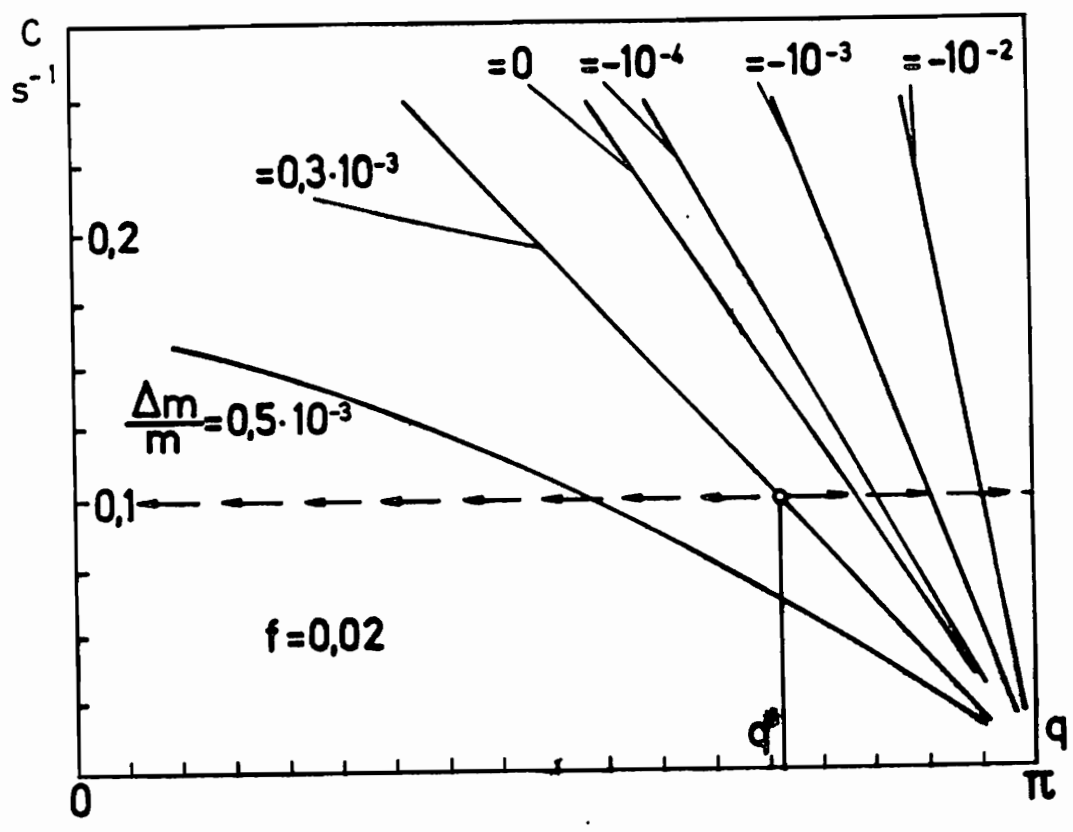


Abb.60

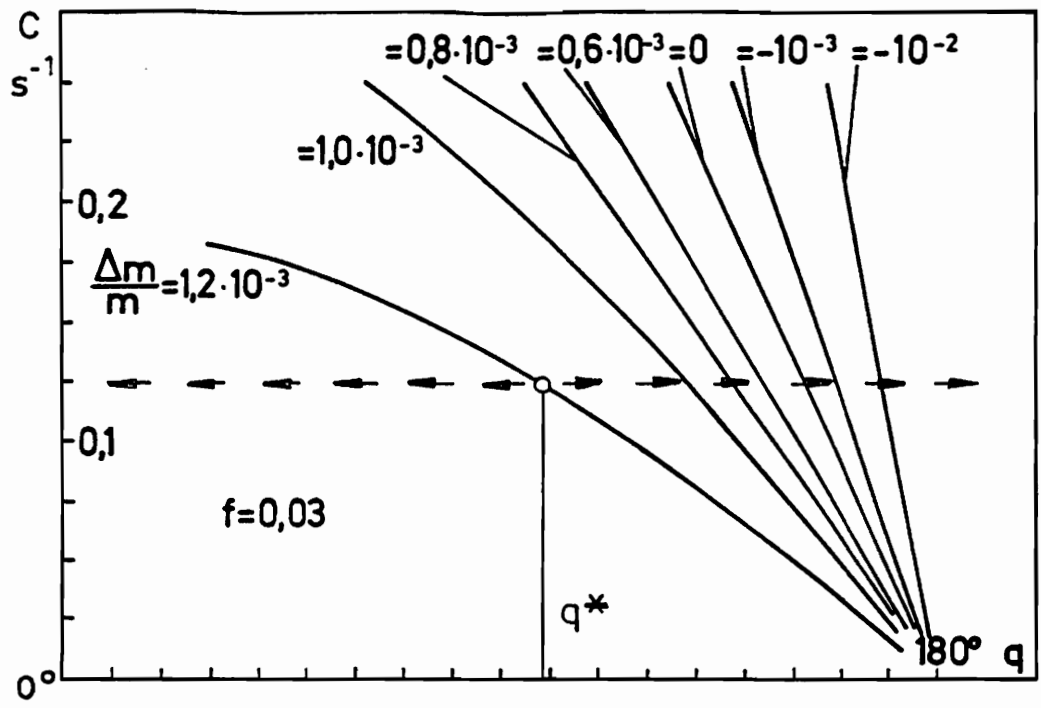


Abb.61

wichtslage $q = 180^\circ$ mit Potentialmaximum hinweisen.

Die mit einem Reibungsmoment ohne dynamische Komponenten berechnete Kurve für $f = \bar{f} = 0,03$ zeigt auch große Unterschiede zur Kurve $f = 0,03$, die mit dem vollständigen Reibungsmoment berechnet wurde.

Ähnlich wie für die Fälle mit $\Delta m = 0$ und $\Delta m > 0$, bewirkt eine Vergrößerung des Betrages der Anfangsgeschwindigkeit eine Verkleinerung des Abschnittes um die Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ und eine Vergrößerung des Reibungsbeiwertes eine Vergrößerung dieses Abschnittes.

In den Abb. 60 und 61 sind für $f = 0,02$ und $f = 0,03$ und für verschiedene Werte von Δm die Kurven der Grenzlagen q^* dargestellt.

Wenn der Betrag von $\Delta m/m$ kleiner als 10^{-2} ist, gibt es im Gleichgewichtsbereich zwei Abschnitte mit verschiedenen Richtungselementen jeweils um die Gleichgewichtslagen $q = 0^\circ$ und $q = 180^\circ$. Der Grenzpunkt mit der Abszisse q^* verschiebt sich mit steigender Anfangsgeschwindigkeit nach links.

Wenn der Betrag von $\Delta m/m$ größer als ein Hundertstel ist, entscheidet das Potential über das Richtungsfeld. Für $\Delta m/m > 10^{-2}$ zeigt das Richtungsfeld zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$ mit dem Potentialminimum und für $\Delta m/m < -10^{-2}$ zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ gleichfalls mit Potentialminimum.

I.5.4.3. DAS RICHTUNGSFELD FÜR ANFANGSSTÖRUNGEN IN DER FORM VON STÖSSEN MIT KONSTANTEM IMPULS

Es werden nun Anfangsstörungen in der Form von Stößen mit konstantem Impuls angenommen. Die Richtung des Impulses I ist durch den Winkel α festgelegt (Abb. 62).

Aus dem Drallsatz in bezug auf die Drehachse 1 folgt, daß die so vermittelte Anfangsgeschwindigkeit ortsab-

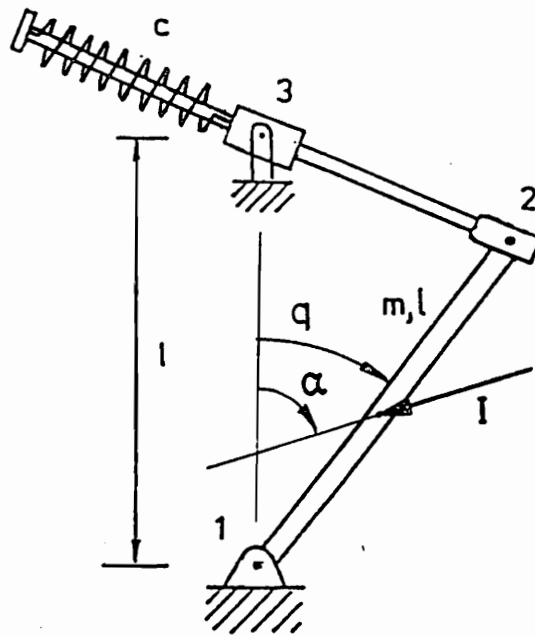


Abb. 62

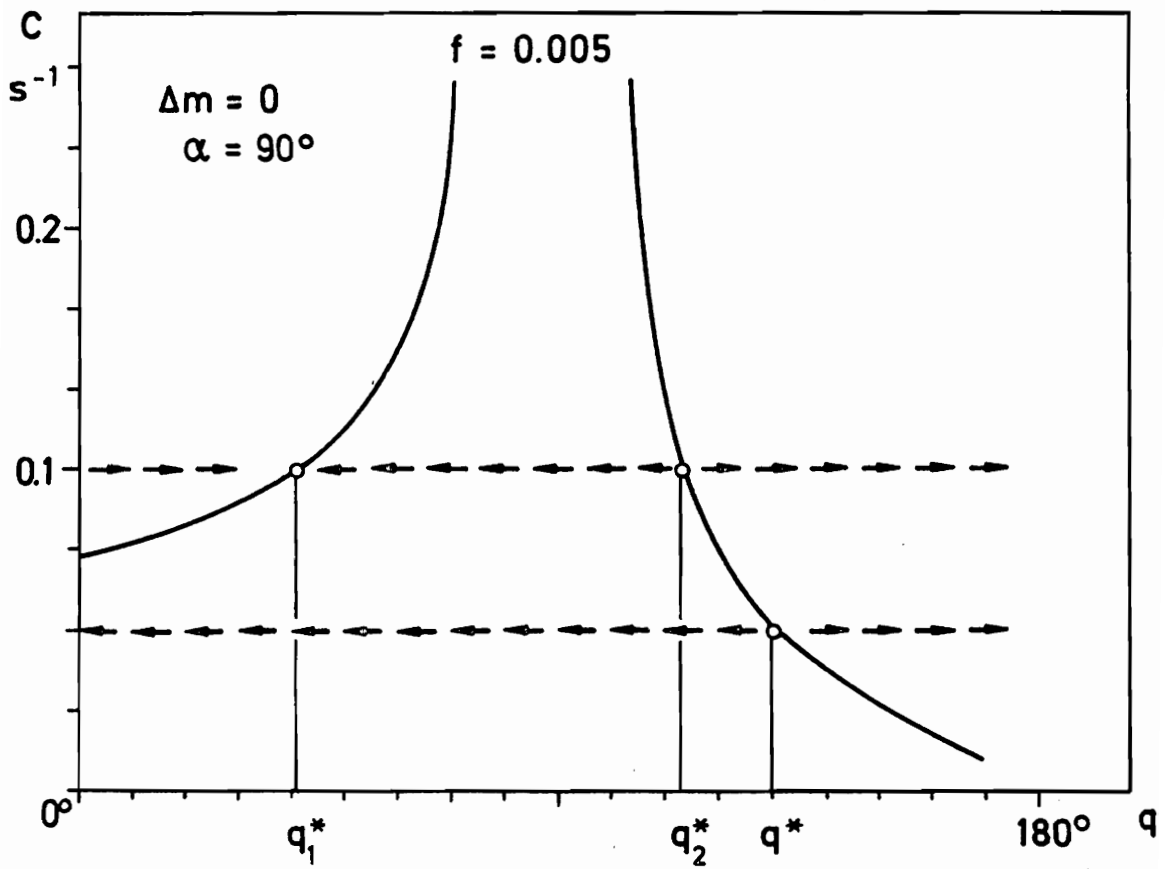


Abb. 63

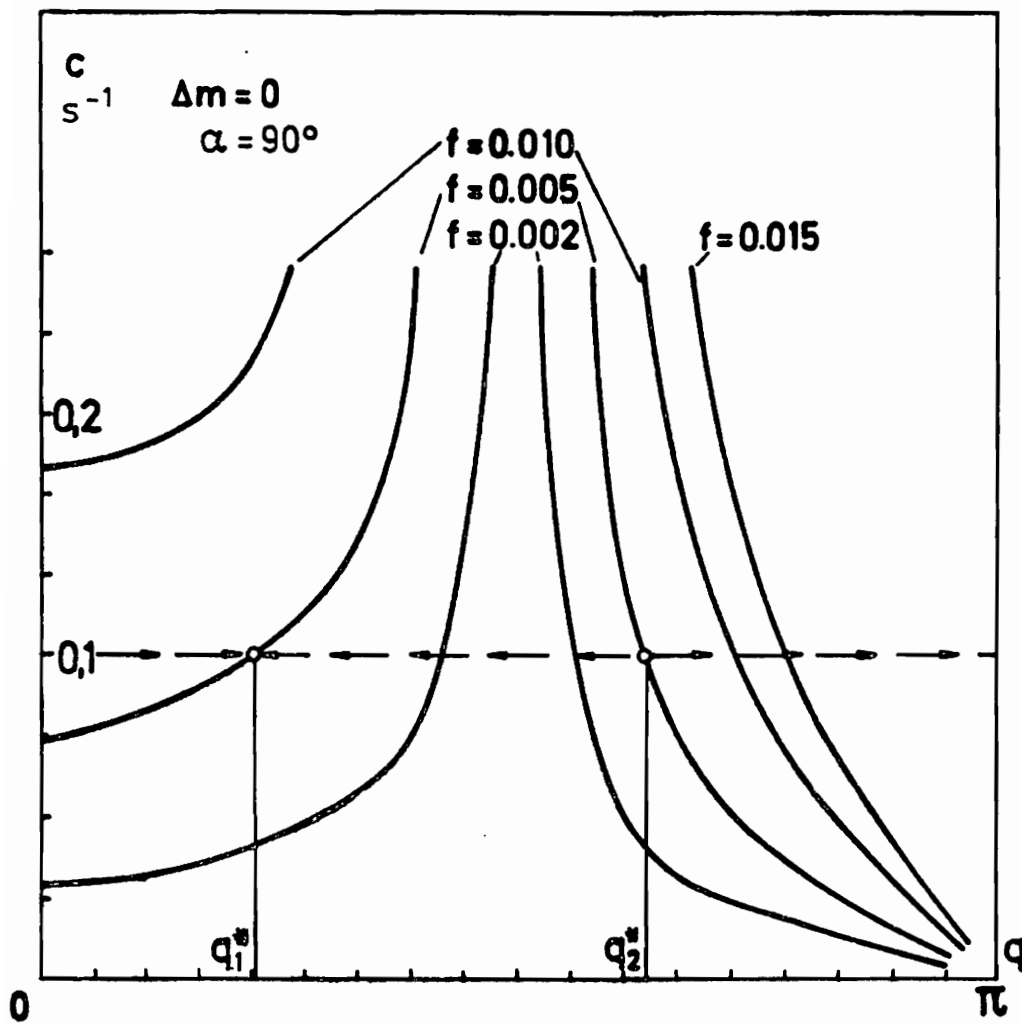


Abb. 64

hängig ist. Die Gewichtsfunktion $g(q)$ ist

$$g(q) = \frac{1}{\sin(\alpha - q)} \quad . \quad (139)$$

HORIZONTALLE STÖSSE

Bei horizontalen Stößen ist $\alpha = 90^\circ$. Für $\Delta m = 0$ und $f = 0,005$ zeigt die Abb. 63 die Lage der Verzweigungspunkte des Richtungsfeldes. Für $C = 0,05$ 1/s bilden sich zwei Abschnitte. Im Abschnitt links von q^* zeigen die Pfeile zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ und im Abschnitt rechts von q^* zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$.

Für $C = 0,1$ 1/s bilden sich im Gleichgewichtsbereich $(0^\circ; 180^\circ)$ drei Abschnitte. Die Richtungselemente zwischen 0° und q_2^* zeigen zur Gleichgewichtslage q_1^* . Außerhalb dieser Abschnitte zeigen die Richtungselemente zur Gleichgewichtslage $q = 180^\circ$.

Die Abb. 64 zeigt die Kurven der Verzweigungspunkte für $\Delta m = 0$ und für verschiedene Reibungsbeiwerte. Für steigende Reibungsbeiwerte sind auch steigende Beträge der Anfangsgeschwindigkeit notwendig, damit sich die drei Abschnitte bilden und daß die Richtungselemente nicht zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ zeigen.

VERTIKALE STÖSSE

Bei vertikalen Stößen ist $\alpha = 0^\circ$. Für $\Delta m = 0$ und für verschiedene Reibungsbeiwerte zeigt die Abb. 65 die Lage der Verzweigungspunkte q^* des Richtungsfeldes. Es bilden sich zwei Abschnitte, und die Richtungselemente zeigen zu den Gleichgewichtslagen $q = 0^\circ$ und $q = 180^\circ$.

Für steigende f - und C -Werte verkleinert sich der Abschnitt um die Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$. Für Anfangsstörungen, deren Parameter C einen bestimmten Wert unterschreitet, bildet sich nur ein Abschnitt mit Richtungselementen, die zur Gleichgewichtslage $q = 0^\circ$ zeigen.

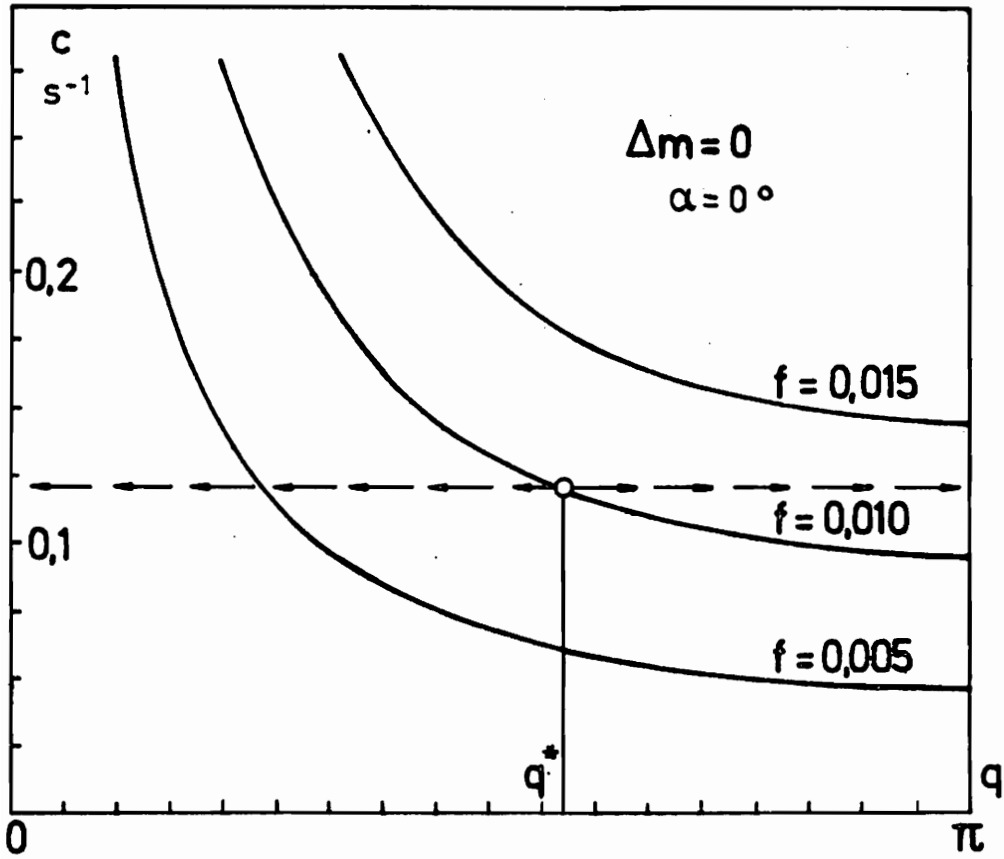


Abb.65

I.5.4.4.SCHLUSSFOLGERUNGEN

Aus den hier dargestellten Ergebnissen kann man folgende Schlußfolgerungen ziehen.

Bei konstantem Potential ist das Richtungsfeld nicht aus der statischen Reibungscharakteristik abzuleiten.

Für Potentiale mit kleinem Gefälle ist das Richtungsfeld nicht aus dem Verlauf des Potentials abzuleiten.

Nur durch die numerische Integration einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Form $\ddot{q} = F(q, \dot{q}, \ddot{q})$ kann das Richtungsfeld ermittelt werden.

Die Verzweigungspunkte, die Abschnitte mit verschiedenen Richtungselementen voneinander trennen, hängen sowohl von den Systemparametern als auch von den Störparametern ab.

I.5.5. SYSTEME MIT ORTSABHÄNGIGER REIBUNGSKRAFT

Für den Sonderfall einer nur von der Lagekoordinate abhängigen Reibungskraft gilt

$$\begin{aligned}
 R(q, \dot{q}) = & - T(q) \operatorname{sign} \dot{q} - \\
 & - [1 - (\operatorname{sign} \dot{q})^2] \{ F_o(q) H[T_s(q) - |F_o(q)|] x \\
 & x \operatorname{sign}[T_s(q) - |F_o(q)|] + \\
 & + T_s(q) H[|F_o(q)| - T_s(q)] \operatorname{sign} F_o(q) \} .
 \end{aligned}
 \tag{140}$$

Wenn auch die Dämpfungskräfte vernachlässigt werden, so folgt aus der Bewegungsdifferentialgleichung

$$v \frac{dv}{dq} = F_o(q) + R(q, \dot{q}) . \tag{141}$$

In (140) ist $T(q)$ die Gleitreibung und $T_s(q)$ die Haftreibung.

Es werden Gleichgewichtslagen des Systems betrachtet, um die sich Gleichgewichtsbereiche bilden. Der Gleichgewichtsbereich um die Gleichgewichtslage $q = q_i$ sei links durch q_i^l und rechts durch q_i^r begrenzt. Innerhalb dieses Bereiches gilt

$$|F_o(q)| < T(q) \leq T_s(q) . \tag{142}$$

In den Randpunkten gilt $|F_o(q)| = T(q)$.

In diese Intervalle des Stillstandes münden Phasenkurven ein. Aus

$$\frac{dv}{dq} = \frac{F_o(q) - T(q) \operatorname{sign} v}{v} \tag{143}$$

ergeben sich folgende Orientierungen der Linienelemente

entlang dieser Intervalle

$$\left(\frac{dv}{dq}\right)_{v>0} < 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dv}{dq}\right)_{v<0} < 0 \quad . \quad (144)$$

Berücksichtigt man die allgemeinen Eigenschaften über den Verlauf der Phasenkurven in den Geschwindigkeitshalbebenen des Phasenplans, so folgt, daß die Phasenkurven sowohl aus der positiven als auch aus der negativen Halbebene in diese Intervalle einmünden. Deshalb sind das E-E Punkte.

Im Bereich (q_i^1, q_i) soll zuerst $F_o(q)$ eine Rückführkraft, also positiv sein. Die Linienelemente in den Punkten P_1 und P_2 (Abb. 66), die für denselben Wert von q_o und für Geschwindigkeiten mit demselben Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen $v_2 = -v_1$ entsprechen, folgen aus

$$\left(\frac{dv}{dq}\right)_{P_1} = \frac{F_o(q_o) - T(q_o)}{v_1} = - \frac{T(q_o) - F_o(q)}{v_1} \quad (145)$$

$$\left(\frac{dv}{dq}\right)_{P_2} = \frac{F_o(q_o) + T(q_o)}{v_2} = - \frac{T(q_o) + F_o(q_o)}{v_1} \quad . \quad (146)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{dv}{dq}\right)_{P_1} > \left(\frac{dv}{dq}\right)_{P_2} \quad . \quad (147)$$

Die Phasenkurven aus der negativen Halbebene verlaufen steiler auf das Intervall des Stillstandes hin als jene aus der positiven Geschwindigkeitshalbebene.

Um die Lagen \bar{q}^- und \bar{q}^+ zu bestimmen, in denen das System mit den Anfangsbedingungen P_1 bzw. P_2 zum Stillstand kommt, wird die Bewegungsdifferentialgleichung (141) integriert. Aus

$$v \frac{dv}{dq} = F_o(q) - T(q) \text{ sign } v \quad (148)$$

folgt für die positive Geschwindigkeitshalbebene

$$\int_{v_1}^0 v \, dv = - \int_{q_0}^{\bar{q}^+} [T(q) - F_0(q)] \, dq \quad (149)$$

und mit dem Mittelwertsatz und $\tilde{q}_1 \in (q_0, \bar{q}^+)$ ergibt sich

$$\frac{v_1^2}{2} = [T(\tilde{q}_1) - F_0(\tilde{q}_1)] (\bar{q}^+ - q_0) \quad (150)$$

und

$$\varepsilon_1 = \bar{q}^+ - q_0 = \frac{v_1^2}{2[T(\tilde{q}_1) - F_0(\tilde{q}_1)]} \quad (151)$$

Für die negative Geschwindigkeitshalbebene folgt mit $\tilde{q}_2 \in (\bar{q}^-, q_0)$

$$\varepsilon_2 = |\bar{q}^- - q_0| = \frac{v_1^2}{2[T(\tilde{q}_2) - F_0(\tilde{q}_2)]} \quad (152)$$

Wenn im Bereich (q_i^1, q_i) die Bedingung

$$\sup [T(q) - F_0(q)] < \inf [T(q) + F_0(q)] \quad (153)$$

erfüllt ist, so folgt $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Die Bedingung (153) ist eine hinreichende Forderung, damit das Richtungselement der Gleichgewichtslage q_0 in die positive Richtung zeigt.

Im Bereich (q_i^1, q_i) sei $F_0(q)$ eine Verstellkraft, also negativ. Wenn die hinreichende Bedingung

$$\sup [T(q) - |F_0(q)|] < \inf [T(q) + |F_0(q)|] \quad (154)$$

erfüllt ist, so folgt $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ (Abb. 67). Das Richtungselement zeigt in die negative Richtung.

In einem rechtsseitigen Intervall können ähnliche Be-

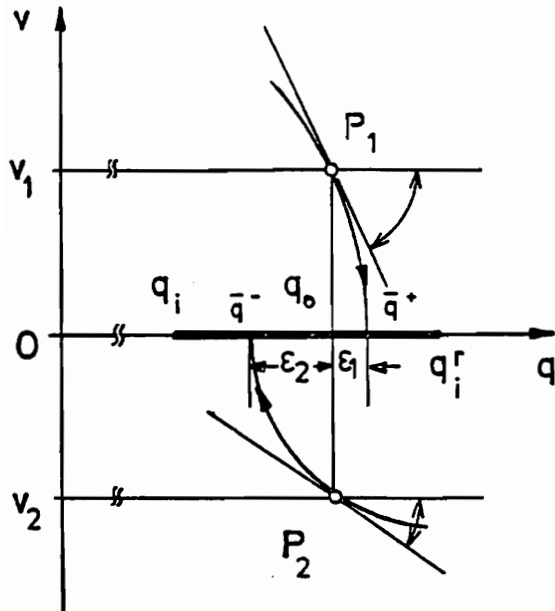


Abb.68

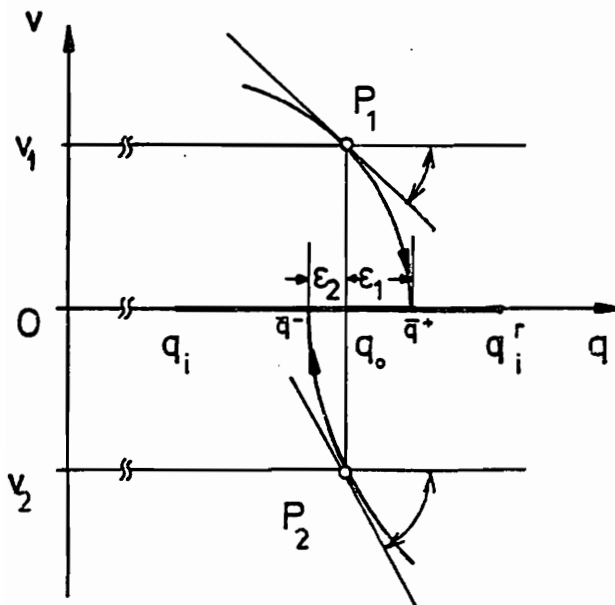


Abb.69

dingungen abgeleitet werden.

Wenn im Bereich (q_i, q_i^F) eine Bedingung (154) erfüllt ist, zeigt mit $F_o(q) < 0$ (Rückführkraft) das Richtungselement nach links (Abb.68) und mit $F_o(q) > 0$ (Verstellkraft) nach rechts (Abb.69).

Wenn in den seitlichen Bereichen $F_o(q)$ Null ist, bestimmt der Verlauf der Reibungscharakteristik $T(q)$ die Orientierung der Richtungselemente.

II. SYSTEME MIT MEHREREN FREIHEITSGRADEN

II.1. BEISPIELE VON SYSTEMEN MIT GLEICHGEWICHTSBEREICHEN

II.1.1. DIE SCHWINGERKETTE MIT ZWEI FREIHEITSGRADEN UND KONSTANTER REIBUNG

Eine Schwingerkette mit zwei Freiheitsgraden ist in der Abb.1 dargestellt. Die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems sind

$$m_1 \ddot{q}_1 = -c_1 q_1 - c_{12}(q_1 - q_2) + R_1 = F_1 + R_1 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 = -c_2 q_2 - c_{12}(q_2 - q_1) + R_2 = F_2 + R_2 \quad (2)$$

mit

$$R_i = -T_i \text{sign} \dot{q}_i - [1 - (\text{sign} \dot{q}_i)^2] [F_i \cdot H(T_{si} - |F_i|) + x \text{sign}(T_{si} - |F_i|) + T_{si} \text{sign} F_i \cdot H(|F_i| - T_{si})] \quad (3)$$

für $i=1,2$. Hier sind T_i und T_{si} die Gleitreibungs- bzw. Haftreibungskräfte, die als konstant angenommen werden.

Um die Gleichgewichtslage $q_1=0, q_2=0$ bildet sich ein Bereich von Gleichgewichtslagen, dessen Grenzen im Koordinatenraum durch die Gleichungen

$$-(c_1 + c_{12})q_1 + c_{12}q_2 = \pm T_{s1} \quad (4)$$

$$c_{12}q_1 - (c_2 + c_{12})q_2 = \pm T_{s2} \quad (5)$$

bestimmt sind.

Für den Sonderfall $c_1 = c_2 = c_{12} = c$, $T_{s1} = T_{s2} = T$ ist dieser Gleichgewichtsbereich in der Abb.2 gezeichnet.

Es werden die Gleichgewichtslagen innerhalb dieses Bereiches betrachtet und die Nachbarlagen bestimmt, in die

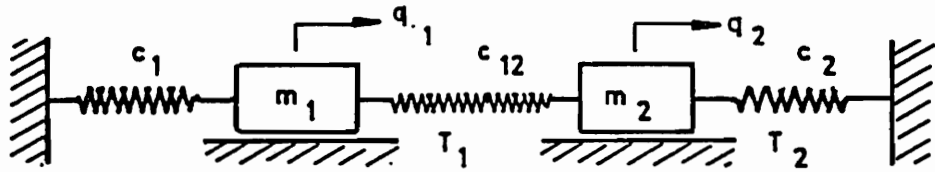


Abb.1

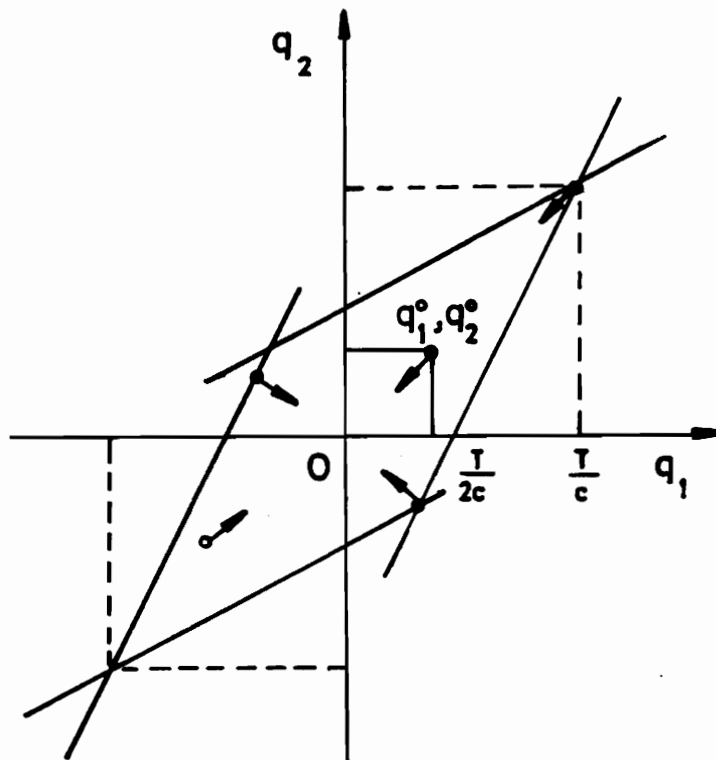


Abb.2

sich das System als Folge der Anfangsgeschwindigkeiten \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0 , die eine konstante kinetische Energie vermitteln, bewegt. Es kann rechnerisch ermittelt werden, daß sich das System aus einer Anfangslage q_1^0, q_2^0 am weitesten in die Richtung der Gleichgewichtslage $q_1 = 0, q_2 = 0$ bewegt. Das ist auch die Richtung der Richtungselemente, die den Gleichgewichtslagen zugeordnet werden. Das war auch zu erwarten, da das Potential des Systems in diesen Punkt ein Minimum besitzt und die Reibungskräfte als konstant angenommen wurden.

Das Richtungsfeld ist in diesem Fall von der kinetischen Energie der Anfangsstörung unabhängig.

II.1.2. SYSTEME MIT KONSTANTEM POTENTIAL

Das in der Abb. 3 dargestellte Modell eines Zeichentisches befindet sich für alle Wertepaare der Koordinaten q_1, q_2 im Gleichgewicht, wenn die Bedingungen

$$G \cdot b = P \cdot d \quad , \quad G \cdot s = P \cdot a \quad (6)$$

erfüllt sind, da in diesem Fall der Massenmittelpunkt sich in 0 befindet. Die praktische Erfahrung zeigt, daß diese Gleichgewichtslagen nicht gleichwertig sind und daß unter der Einwirkung von kleinen Erschütterungen sich das System in bevorzugte Gleichgewichtslagen innerhalb des Bereiches verlagert.

Ähnliches gilt auch für das System in der Abb. 4, wenn die Bedingungen

$$m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2 \quad ; \quad m_1 \cdot l_3 = m_2 \cdot l_4 \quad (7)$$

erfüllt sind.

Das Potential ist für diese Systeme von q_1 und q_2 unabhängig, und das ungleichförmige Verhalten des Systems in den verschiedenen Gleichgewichtslagen wird durch die

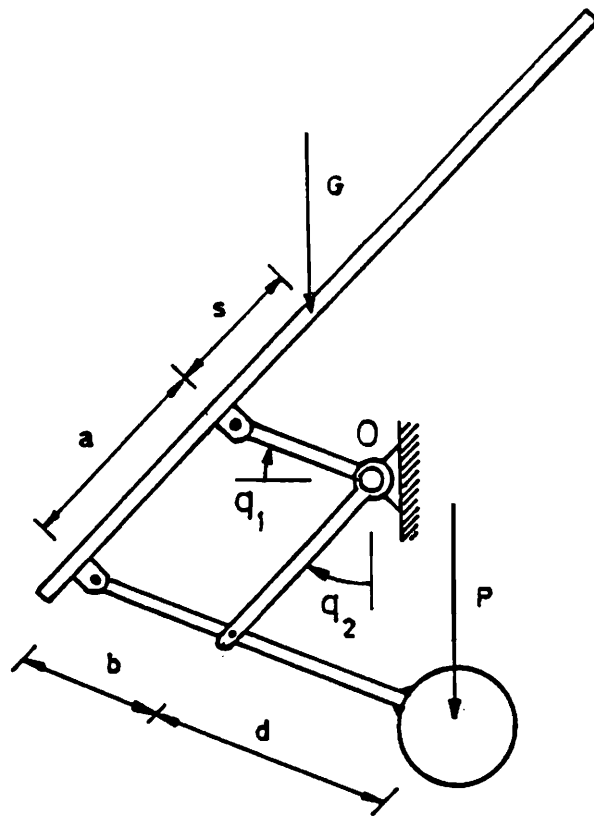


Abb. 3

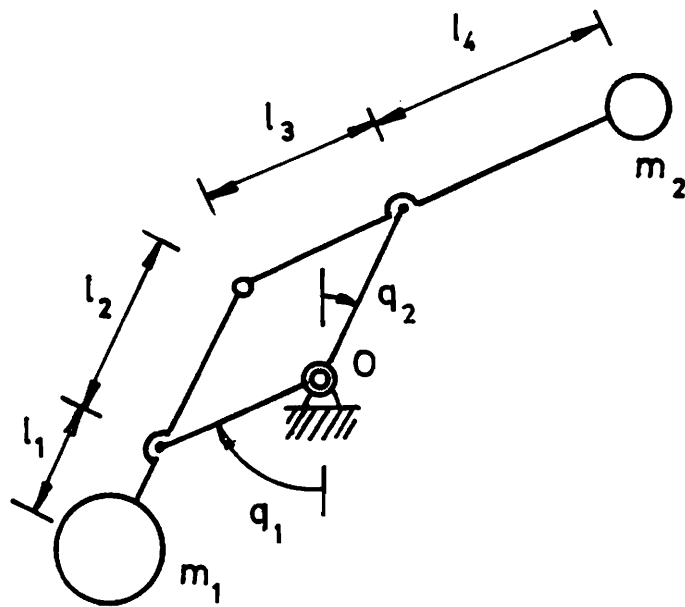


Abb. 4

Reibungsmomente in den Gelenken bestimmt.

Aus der Abb.5 folgen für das System aus Abb.4 die 12 Bewegungsdifferentialgleichungen für die 12 unbekanntenen Größen $q_1(t), q_2(t)$ und X_i, Y_i ($i=1,2,\dots,5$). Die Reibungsmomente M_i in den als zylindrische Tragzapfen angenommenen Gelenken werden durch die Gleichungen

$$M_i = M_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2) = \mu_i r_i \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \quad (8)$$

ausgedrückt. Die Bewegungsdifferentialgleichungen sind:

$$- m_1 \ddot{x}_1 + X_1 + X_2 = 0 \quad (9)$$

$$- m_1 \ddot{y}_1 + Y_1 - Y_2 - m_1 g = 0 \quad (10)$$

$$-(M_1 + M_2) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - [X_1 l_1 + X_2 (l_1 + l_2)] \cos q_2 + [Y_1 l_1 - Y_2 (l_1 + l_2)] \sin q_2 = 0 \quad (11)$$

$$- m_2 \ddot{x}_2 - X_2 - X_3 = 0 \quad (12)$$

$$- m_2 \ddot{y}_2 + Y_2 + Y_3 - m_2 g = 0 \quad (13)$$

$$(M_2 + M_3) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - [X_3 l_4 + X_2 (l_3 + l_4)] \cos q_1 - [Y_3 l_4 + Y_2 (l_3 + l_4)] \sin q_1 = 0 \quad (14)$$

$$- X_1 + X_4 = 0 \quad (15)$$

$$- Y_1 + Y_4 = 0 \quad (16)$$

$$(M_1 + M_4) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - X_4 l_3 \cos q_1 + Y_4 l_3 \sin q_1 = 0 \quad (17)$$

$$X_3 - X_4 + X_5 = 0 \quad (18)$$

$$- Y_3 - Y_4 + Y_5 = 0 \quad (19)$$

$$-(M_3 + M_4) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + M_5 \text{sign} \dot{q}_2 - X_3 l_2 \cos q_2 -$$

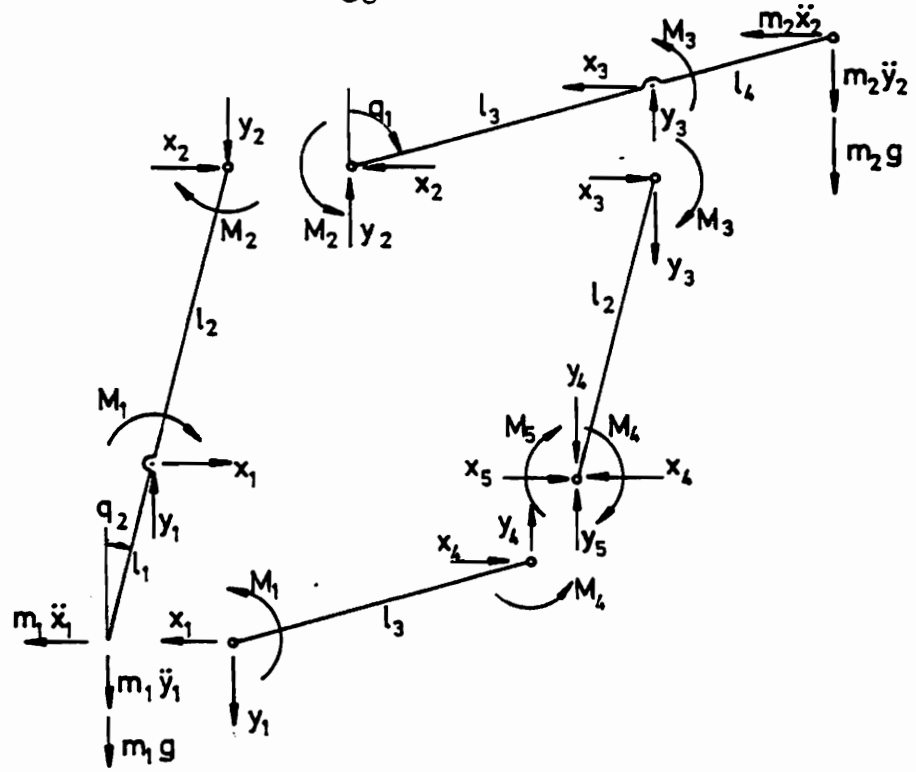


Abb. 5

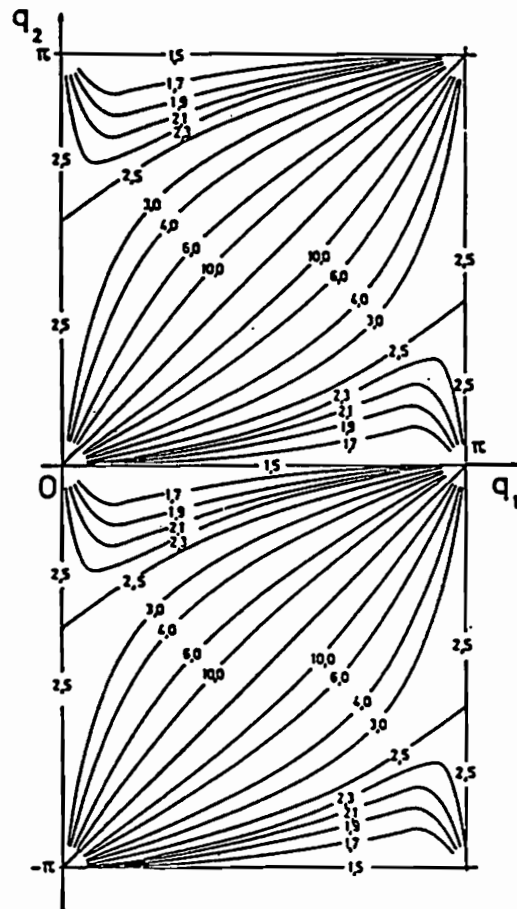


Abb. 6

$$- Y_3 l_2 \sin q_2 = 0 \quad . \quad (20)$$

Hier bedeuten

$$x_1 = -l_3 \sin q_1 - l_1 \sin q_2 \quad (21)$$

$$y_1 = -l_3 \cos q_1 - l_1 \cos q_2 \quad (22)$$

$$x_2 = l_4 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \quad (23)$$

$$y_2 = l_4 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \quad . \quad (24)$$

Zwei dieser Gleichungen können durch folgende Gleichungen ersetzt werden, die mit der Lagrangeschen Methode ermittelt wurden

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 l_3^2 + m_2 l_4^2) + \ddot{q}_2 (m_1 l_1 l_3 + m_2 l_2 l_4) \cos(q_1 - q_2) + \\ + \dot{q}_2^2 (m_1 l_1 l_3 + m_2 l_2 l_4) \sin(q_1 - q_2) = \\ = - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 l_1 l_3 + m_2 l_2 l_4) \cos(q_1 - q_2) + \ddot{q}_2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) - \\ - \dot{q}_1^2 (m_1 l_1 l_3 + m_2 l_2 l_4) \sin(q_1 - q_2) = \\ = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4) \text{sign}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - M_5 \text{sign} \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (27)$$

Aus diesen Gleichungen können für gegebene Anfangsbedingungen der Bewegungsverlauf und die Reaktionskräfte mit einer numerischen Methode iterativ ermittelt werden.

Die Reaktionskräfte in den Gelenken 1-4, die bei der iterativen Lösung zum ersten Schritt benötigt werden, haben folgende Ausdrücke

$$\frac{R_1}{2mg} = \frac{R}{2mg} = \left[\frac{\sin^2 q_2}{\sin^2(q_1 - q_2)} + \left(\frac{l}{g}\right)^2 \cdot (\ddot{q}_1^2 + \dot{q}_1^4) - \right.$$

$$- \frac{2l}{g} \cdot \frac{\sin q_2}{\sin(q_1 - q_2)} \cdot \ddot{q}_1^2]^{1/2} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{2mg} = & \left[\frac{1}{\sin^2(q_1 - q_2)} \sin^2 q_1 \cdot \sin^2 q_2 + \frac{1}{4} \sin^2(q_1 + q_2) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2g}\right)^2 \cdot (\ddot{q}_1^2 + \dot{q}_1^4) - \frac{1}{2g} \ddot{q}_1 \sin q_1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2g} \cdot \frac{\sin q_1 \cos(q_1 - q_2) + \sin q_2}{\sin(q_1 - q_2)} \cdot \ddot{q}_1^2 \right]^{1/2} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R_3}{2mg} = & \left[\frac{\sin^2 q_1}{\sin^2(q_1 - q_2)} + \left(\frac{1}{g}\right)^2 \cdot (\ddot{q}_1^2 + \dot{q}_1^4) - \right. \\ & \left. - \frac{2l}{g} \cdot \frac{\sin q_1}{\tan(q_1 - q_2)} \cdot \ddot{q}_1^2 - \frac{2l}{g} \ddot{q}_1 \sin q_1 \right]^{1/2} \quad (30) \end{aligned}$$

In der Abb.6 ist für den Sonderfall $r_i = r$, $\mu_i = \mu$ der statische Anteil des bezogenen Reibungsmomentes

$$\bar{M} = \frac{1}{2mgr\mu} \sum_{i=1}^4 M_i = \frac{1}{2mg} \sum_{i=1}^4 R_i, \quad (31)$$

das mit den Reaktionskräften aus (28)-(30) berechnet wurde, dargestellt. Der Verlauf dieses Reibungsmomentes läßt auf unterschiedliches Verhalten des Systems in den verschiedenen Gleichgewichtslagen des Gleichgewichtsbereiches schließen.

II.1.3. SYMMETRISCHES SYSTEM MIT KONSTANTEM POTENTIAL

In der Abb.7 ist ein symmetrisches System mit zwei Freiheitsgraden dargestellt, das ein konstantes Potential besitzt. Die Stäbe sind homogen mit der linearen Dichte ρ .

In der Abb.8 sind die Reaktionskräfte und die Reibungs-

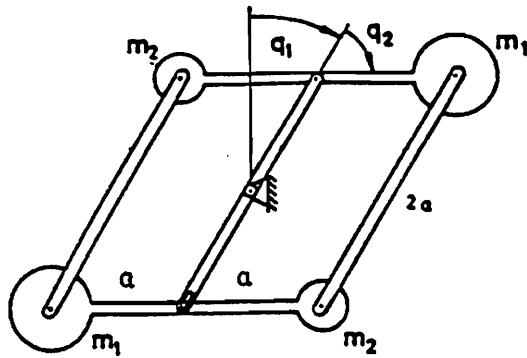


Abb. 7

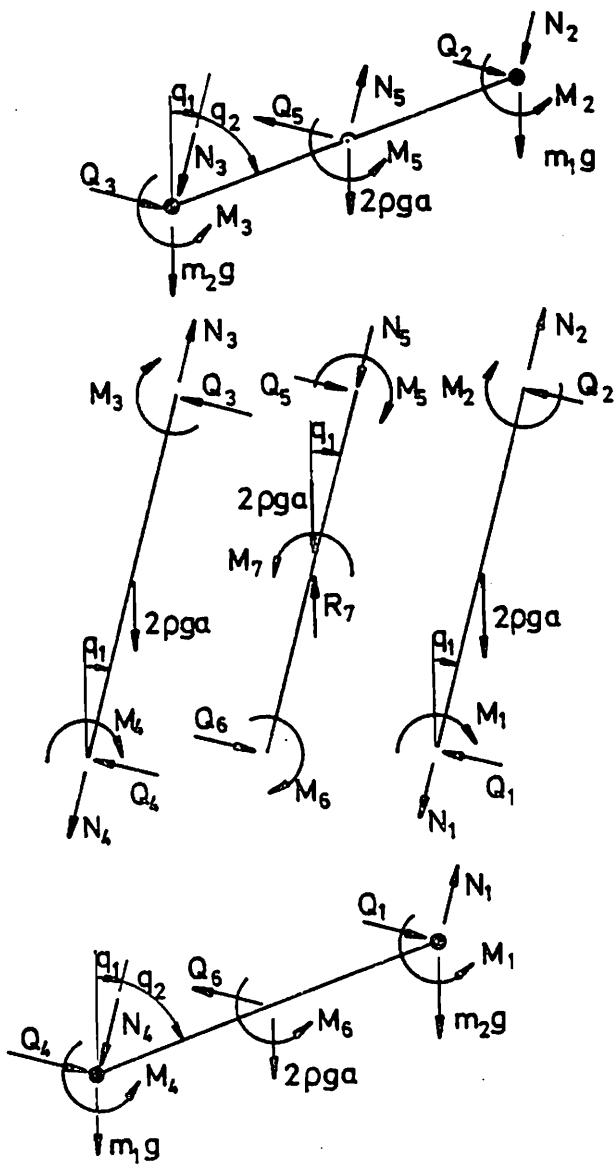


Abb. 8

momente in den Gelenken für die Bewegungstendenz in die positiven q_1 - und q_2 -Richtungen dargestellt.

Für den Sonderfall $m_1=4m$, $m_2=2m$, $\rho a=m$ erhält man mit der Langrangeschen Methode folgende Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 ma^2 \left(\frac{53}{3} + 4\cos q_2 \right) + \ddot{q}_2 ma^2 \left(\frac{52}{3} + 4\cos q_2 \right) - \\ - \dot{q}_1 \dot{q}_2 4ma^2 \sin q_2 - \dot{q}_2^2 4ma^2 \sin q_2 = \\ = - M_7 \operatorname{sign} \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 ma^2 \left(\frac{52}{6} + 4\cos q_2 \right) + \ddot{q}_2 ma^2 \cdot \frac{26}{3} + \\ + \dot{q}_1^2 4ma^2 \sin q_2 = - \sum_{i=1}^6 M_i \operatorname{sign} \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Hier sind M_i die Reibungsmomente in den Gelenken, die durch

$$M_i = \mu_i r_i \sqrt{N_i^2 + Q_i^2} \quad i=1,2,\dots,6 \quad (34)$$

bestimmt sind.

Die statischen Anteile der Reaktionskräfte, die bei der iterativen Lösung zum ersten Schritt benötigt werden, sind

$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_4 = mgs \sin q_1 \quad (34)$$

$$Q_5=Q_6 = 10 mgs \sin q_1 \quad (35)$$

$$N_1 = 4mg \cos q_1 + mg \cdot \frac{\sin(q_1+q_2)}{\sin q_2} \quad (36)$$

$$N_2 = 6mg \cos q_1 + mg \cdot \frac{\sin(q_1+q_2)}{\sin q_2} \quad (37)$$

$$N_3 = 6mg \cos q_1 - mg \cdot \frac{\sin(q_1+q_2)}{\sin q_2} \quad (38)$$

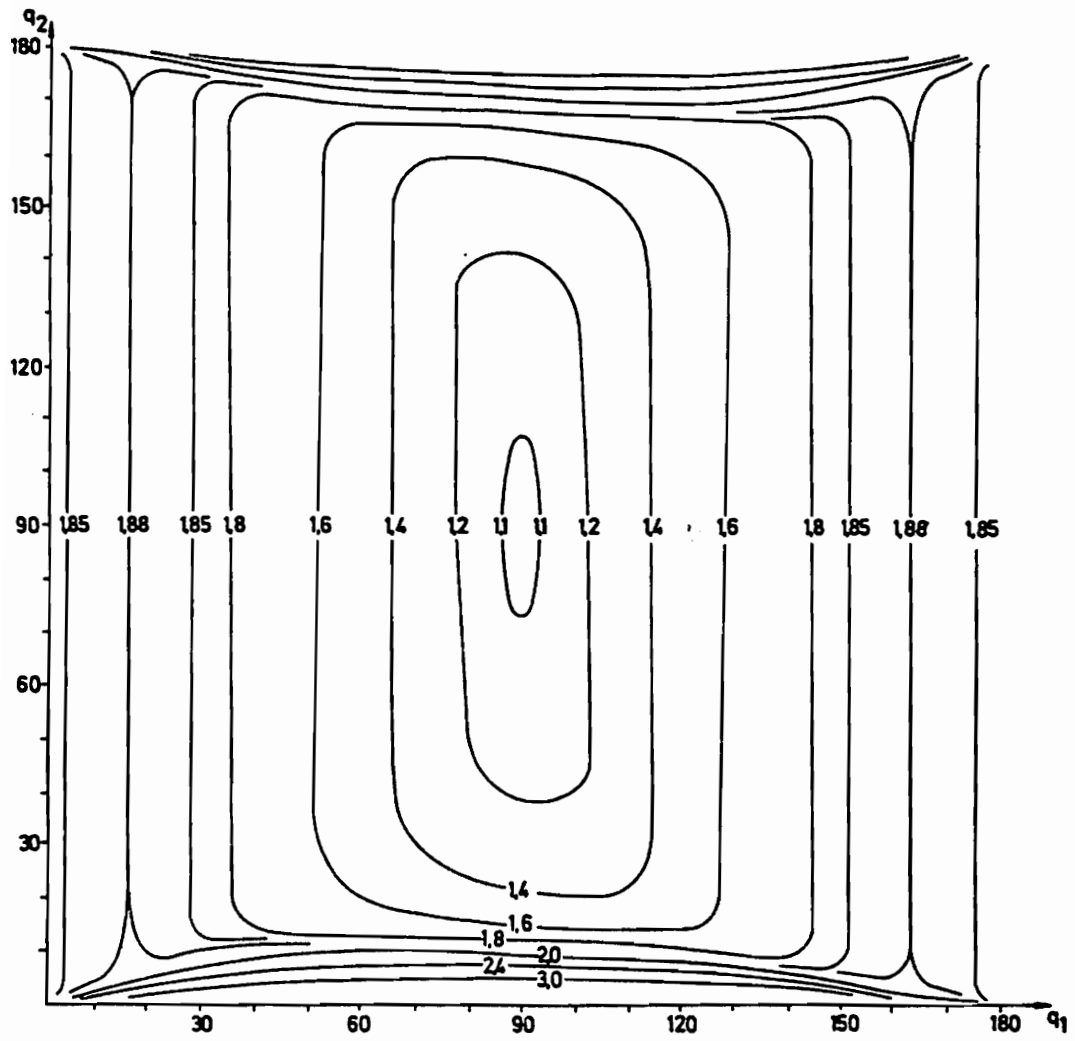


Abb. 9

$$N_4 = 4mg \cos q_1 - mg \cdot \frac{\sin(q_1 + q_2)}{\sin q_2} \quad (39)$$

$$N_5 = 20 mg \cos q_1 \quad (40)$$

$$N_6 = 0 \quad (41)$$

$$R_7 = 22 mg \quad (42)$$

In der Abb.9 ist das Verhältnis $(\sum_{i=1}^6 M_i)/M_7$ für den

Sonderfall $r_i=r$ und $\mu_i=\mu$ dargestellt. Der Verlauf dieses bezogenen Reibungsmomentes läßt unterschiedliche Eigenschaften in den verschiedenen Gleichgewichtslagen erwarten.

II.1.4. BEMERKUNG ZUR INTEGRATION DER BEWEGUNGS- DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Es wird ein allgemeines System mit zwei Freiheitsgraden betrachtet, bei dem Reibung in g Gelenken und f Führungen berücksichtigt wird. Die Komponenten der Reaktionen in den Gelenken werden mit N_s, Q_s für $s=1, 2, \dots, g$ und in den Führungen mit N_j für $j=g+1, \dots, g+f$ bezeichnet.

Aus den mit der Lagrangeschen Methode ermittelten Bewegungsdifferentialgleichungen folgt

$$\ddot{q}_i = f_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, M_s, T_j) \quad \begin{array}{l} i=1, 2 \\ s=1, 2, \dots, g \\ j=g+1, \dots, g+f \end{array} \quad (43)$$

Aus den dynamischen Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Teile des Systems folgt

$$N_s = N_s(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, M_1, \dots, M_g, T_{g+1}, \dots, T_{f+g}) \quad (44)$$

für $s=1, 2, \dots, g+f$

$$Q_s = Q_s(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, M_1, \dots, M_g, T_{g+1}, \dots, T_{g+f}) \quad (45)$$

für $s=1, 2, \dots, g$.

Die Reibungsmomente M_s sind durch

$$M_s = \mu_s r_s \sqrt{N_s^2 + Q_s^2} \quad s=1, \dots, g \quad (46)$$

und die Reibungskräfte T_j durch

$$T_j = \mu_j |N_j| \quad j=g+1, \dots, g+f \quad (47)$$

gegeben. Diese Gleichungen drücken folgende Zusammenhänge aus

$$F_s(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, M_1, \dots, M_g, T_{g+1}, \dots, T_{g+f}) = \begin{cases} M_s & \text{für } s=1, 2, \dots, g \\ T_s & \text{für } s=g+1, \dots, g+f \end{cases} \quad (48)$$

Die Systeme (43) und (48) werden zur iterativen Lösung der Aufgabe verwendet. Die Iteration für jeden Zeitschritt wird solange fortgesetzt, bis \ddot{q}_i, M_s und T_s die angestrebte Genauigkeit erreicht haben.

II.2. ALLGEMEINES SYSTEM MIT n FREIHEITSGRADEN

II.2.1. DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN UND GLEICHGEWICHTSLAGEN

Der Lagevektor der verallgemeinerten Koordinaten eines autonomen Systems mit n Freiheitsgraden sei

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \quad . \quad (49)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung wird allgemein in der Form

$$F(q, \dot{q}, \ddot{q}; q^0, \dot{q}^0) = 0 \quad (50)$$

angenommen, weil bei der Berücksichtigung der Reibungskräfte und Reibungsmomente die Beschleunigungskomponenten in den verallgemeinerten Kräften auftreten. Hier sind

$$q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) \quad ; \quad \dot{q}^0 = (\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \dots, \dot{q}_n^0) \quad (51)$$

die Anfangsbedingungen.

Das System besitzt Gleichgewichtslagen \bar{q} , die die Bedingung

$$F(\bar{q}, 0, 0; \bar{q}, 0) = 0 \quad (52)$$

erfüllen. Diese Gleichgewichtslagen werden über Bewegungen mit bestimmten Anfangsbedingungen in endlicher Zeit erreicht. Im n -dimensionalen Raum der Systemkoordinaten wird die Menge dieser Gleichgewichtslagen mit R bezeichnet

$$R = \{ r \mid r = \bar{q} , F(\bar{q}, 0, 0; \bar{q}, 0) = 0 \} \quad . \quad (53)$$

Im $2n$ -dimensionalen Phasenraum (q, \dot{q}) bilden diese Gleichgewichtslagen Bereiche von E-E Punkten oder end point sets.

II.2.2. DIE RICHTUNGSELEMENTE DER GLEICHGEWICHTSLAGEN

Es sei $\bar{q} = r$ eine Gleichgewichtslage des Systems innerhalb des Bereiches R . Diese Gleichgewichtslage soll zusätz-

lich charakterisiert werden. Zu diesem Zweck werden kleine Störungen betrachtet, die dem System in dieser Anfangslage Anfangsgeschwindigkeiten vermitteln.

Um die Auswirkungen dieser Störungen auf das System vergleichen zu können, wird verlangt, daß die Anfangsgeschwindigkeiten \dot{q}^0 Bedingungen erfüllen, die aus dem Modell, das für die Anfangsstörungen angenommen wird, abzuleiten sind. Solche Bedingungen können z.B. die Form

$$\| \dot{q}^0 g(q) \| = C = \text{const} \quad (54)$$

haben. Hier ist $g(q)$ eine Gewichtsfunktion, die auch ortsabhängig sein kann. So z.B. kann verlangt werden, daß die kinetische Energie der Anfangsstörung oder der Betrag des durch die Störungen vermittelten Impulses und Dralls konstant sind.

Die Anfangsgeschwindigkeiten, die die Bedingung (54) erfüllen, bilden im Raum der verallgemeinerten Geschwindigkeiten einen abgeschlossenen Bereich G , in den eine Halbordnung eingeführt wird. Diese erlaubt es, die Anfangsgeschwindigkeiten in einer bestimmten Reihenfolge zu betrachten.

Mit diesen Anfangsgeschwindigkeiten bewegt sich das System aus der Gleichgewichtslage \bar{q} nach einem Gesetz

$$q = q(t; \bar{q}, \dot{q}^0) \quad , \quad (55)$$

das in der Regel nur numerisch bestimmt werden kann.

Für die Menge der Anfangsgeschwindigkeiten aus dem Bereich G , entspricht eine Menge Q von Bewegungsgesetzen

$$Q = \{ q \mid q = q(t; \bar{q}, \dot{q}^0), F(q, \dot{q}, \ddot{q}; \bar{q}, \dot{q}^0) = 0, \| \dot{q}^0 g \| = C \} . \quad (56)$$

Zuerst sollen jene Gleichgewichtslagen aus R betrachtet werden, für die bei geeigneter Wahl von C , dem Parameter der Anfangsstörungen, alle Bewegungen $q = q(t; \bar{q}, \dot{q}^0)$ in benachbarte Gleichgewichtslagen der Anfangslage \bar{q} enden.

Einer solchen Gleichgewichtslage \bar{q} wird mit Hilfe der Anfangsgeschwindigkeiten, die (54) erfüllen, und der Bewegungsgesetze (56) eine Menge benachbarter Gleichgewichtslagen $\bar{\bar{q}}$ zugeordnet. Diese Gleichgewichtslagen bilden eine Unter-
menge von R, die mit P bezeichnet wird

$$P = \{ p \mid p = \bar{q}, F(\bar{q}, 0, 0; \bar{q}, \dot{q}^0) = 0, \|\dot{q}^0\| = C \} \quad (57)$$

Im Raum der verallgemeinerten Koordinaten sei der Abstand zweier Elemente $q^{(1)}, q^{(2)}$ durch

$$\rho(q^{(1)}, q^{(2)}) = \|q^{(1)} - q^{(2)}\| = \sqrt{\sum_i (q_i^{(1)} - q_i^{(2)})^2} \quad (58)$$

definiert.

Die Abstände ρ zwischen einer Gleichgewichtslage \bar{q} und den Nachbargleichgewichtslagen $\bar{\bar{q}}$ aus P bilden eine Menge endlicher Zahlen

$$E = \{ \varepsilon \mid \varepsilon = \rho(\bar{q}, \bar{\bar{q}}), \bar{q} \in R, \bar{\bar{q}} \in P \} \quad (59)$$

Die obere Schranke dieser Menge sei ε^S

$$\varepsilon^S = \sup E \quad (60)$$

Dieser Wert hängt in der Regel von den Systemparametern und vom Parameter der Anfangsstörungen C ab.

Wenn es nur ein Element der Menge P gibt, also nur eine Nachbargleichgewichtslage $\bar{\bar{q}}^S$, für die

$$\varepsilon^S = \rho(\bar{q}, \bar{\bar{q}}^S) \quad (61)$$

gilt, dann wird im Raum der Systemkoordinaten der Einvektor e des Vektors gebildet, der die Punkte \bar{q} und $\bar{\bar{q}}^S$ verbindet

$$e = \frac{\bar{\bar{q}}^S - \bar{q}}{\|\bar{\bar{q}}^S - \bar{q}\|} \quad (62)$$

Dieser Einsvektor ist das Richtungselement der Gleichgewichtslage \bar{q} .

Für ein System mit zwei Freiheitsgraden ist dieser Sachverhalt in der Abb. 10 dargestellt.

Wenn es mehrere Punkte $\bar{q} \in P$ gibt, für die

$$\varepsilon = \rho(\bar{q}, \bar{q}) = \varepsilon^S \quad (63)$$

gilt, dann wird für solch eine Anfangsgleichgewichtslage \bar{q} kein Richtungselement definiert. Solche Punkte begrenzen Teilbereiche mit Richtungselementen, die zu unterschiedlichen Gleichgewichtslagen des Gleichgewichtsbereiches hinweisen.

Jetzt werden auch jene Gleichgewichtslagen $\bar{q} \in R$ betrachtet, für die kein C gewählt werden kann, damit alle Bewegungen, die aus ihnen als Anfangslage und mit Anfangsgeschwindigkeiten aus (54) beginnen, zu benachbarten Gleichgewichtslagen führen. Es werden also auch Bewegungen eingeleitet, die das System aus dem Gleichgewichtsbereich R entfernen. Diese Bewegungen führen über einen Bereich des Randes der Menge R . Wenn dieser Randbereich eine eindeutige äußere Normale besitzt, so ist der Einsvektor dieser Normalen das Richtungselement der Gleichgewichtslage \bar{q} .

Wenn für ein System mit zwei Freiheitsgraden die Anfangsgeschwindigkeiten aus G entsprechend der eingeführten Halbordnung genommen werden, so entsprechen z.B. für zwei dieser Anfangsgeschwindigkeiten $(\dot{q}^0)_i$ und $(\dot{q}^0)_j$ die Nachbargleichgewichtslagen \bar{q}_i und \bar{q}_j (Abb. 10). Für Anfangsgeschwindigkeiten zwischen $(\dot{q}^0)_i$ und $(\dot{q}^0)_j$ gibt es keine Lösung \bar{q} .

Die Punkte \bar{q}_i und \bar{q}_j bestimmen einen Bereich des Randes der Menge R . Wenn diesem Randbereich eine eindeutige äußere Normale zugeordnet werden kann, so ist der Einsvektor dieser Normalen das Richtungselement der Anfangslage \bar{q} .

Auf diese Weise werden den Gleichgewichtslagen des Bereiches R Richtungselemente zugeordnet. Diese bestimmen für

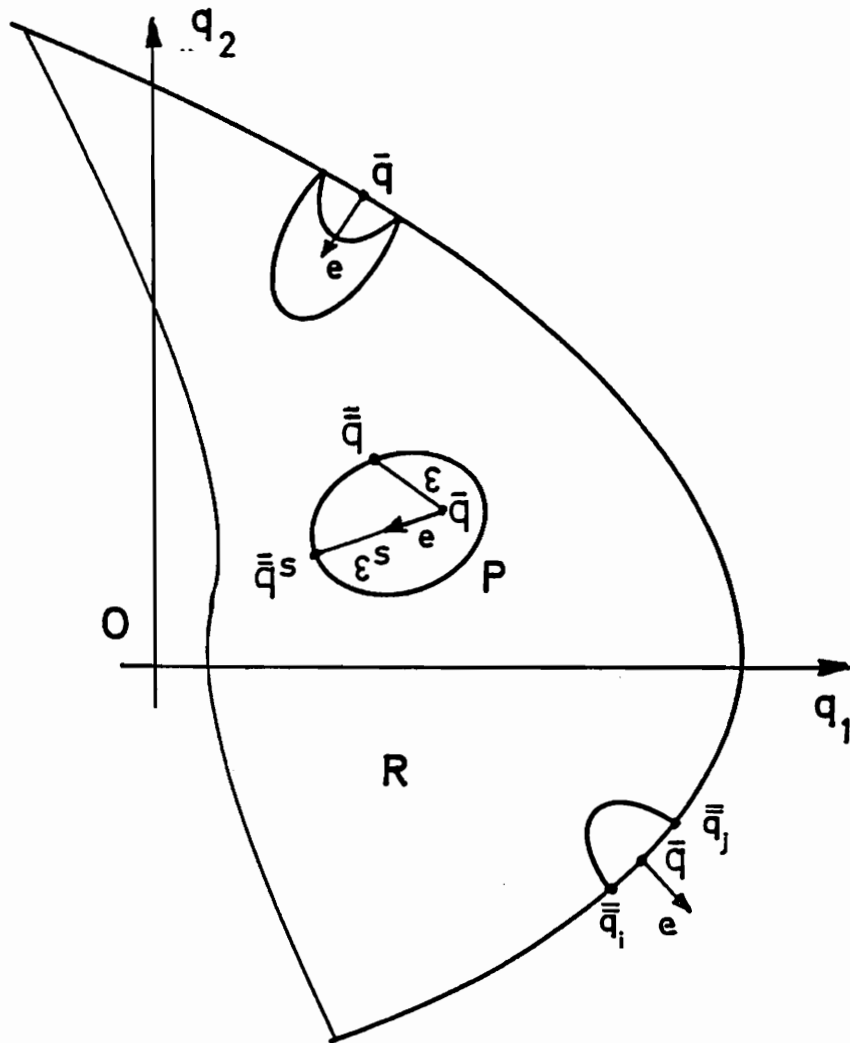


Abb.10

den ganzen Bereich **Richtungsfelder**, die zu verschiedenen bevorzugten Gleichgewichtslagen innerhalb des Bereiches hinweisen.

Die Gleichgewichtslagen, für die keine Richtungselemente bestimmt werden, begrenzen die Richtungsfelder, die zu verschiedenen Gleichgewichtslagen hinweisen, und sind deshalb die Verzweigungspunkte des Richtungsfeldes oder sind die bevorzugten Gleichgewichtslagen des Bereiches, auf die die Richtungselemente weisen.

Bei einer genauen Berücksichtigung der tatsächlich in einem technischen System auftretenden Reibungen und der auf das System wirkenden Störungen durch entsprechende Modelle können die so ermittelten Richtungsfelder über ungleichförmiges Verhalten des Systems im Gleichgewichtsbereich Aufschluß geben.

LITERATURVERZEICHNIS

1. André, J., Seibert, P., Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelproblemen auftreten, Teil I, Arch. Math., Vol. VII, No. 3, S. 148-156; Teil II, Arch. Math., Vol. VII, No. 3, S. 157-164 (1956)
2. Andronow, A. A., Witt, A. A., Chaikin, S. E., Theorie der Schwingungen, Akademie Verlag, Berlin (1965), Teil I, S. 88, 89, 160, Teil II, S. 26, 100
3. Atherton, D. P., Nonlinear Control Engineering, Van Nostrand Reinhold Company, London-New York-Cincinnati-Toronto-Melbourne (1975), S. 45
4. Burton, P., Kinematics and Dynamics of Planar Machinery, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1979), S. 423, 426, 463-465
5. Butenin, N. V., Neimark, Ju. I., Fufaev, N. A., Vvedenie v teoriyu nelineynyh kolebaniy, Izdatel'stvo Nauka, Moskva (1976), S. 82, 202
6. Cosgriff, R. L., Nonlinear Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London (1958), S. 115, 154
7. Deruso, P. M., Roy, R. J., Close, Ch. M., State Variables for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney (1965), S. 493
8. Hagedorn, P., Nichtlineare Schwingungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1978), S. 83
9. Hagedorn, P., On the Stability of Equilibrium Sets of Discrete Conservative Mechanical Systems, AIAA Journal, 12 (1974), S. 1057-1059

10. Hahn, W., Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1959), S. 66, 93
11. Den Hartog, J. P., Forced Vibrations with Combined Viscous and Coulomb Damping, Phil. Mag., (7), 9, (1930), S. 801-817
12. Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London (1956), S. 358, 375
13. Kauderer, H., Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958), S. 180, 183-195, 202, 204, 207, 249, 269, 277, 279, 281, 390, 402, 410
14. Keks, W., Teodorescu, P. P., Applications of the Theory of Distributions in Mechanics, Tunbridge Wells, Kent, Abacus Press (1974)
15. Klepp, H. J., Über die Stabilität der stationären Punkte eines Mechanischen Verbandes, Conferinta "Vibratii in constructia de masini", Timisoara (1978), S. 17-25
16. Klepp, H. J., Über die Stabilität singulärer Punkte eines Verbandes mit unstetigen Ableitungen der potentiellen Energie, ZAMP, Vol. 31 (1980), S. 657-662
17. Klepp, H. J., Das Studium der Stabilität singulärer Punkte, in welchen die Kräfte unstetig sind, mit Hilfe des Potentials, Int. Journal of Non-Linear Mechanics, 3/4, (1981) S. 283-290
18. Klepp, H. J., Eigenschaften von Gleichgewichtslagen innerhalb von Gleichgewichtsbereichen, GAMM-Tagung Regensburg, 16.-19.4.84, ZAMM, Band 65, Heft 4/5, 1985, S. 67-69

19. Klepp, H.J., Meyers, A., Die Bestimmung der Richtungselemente und des Richtungsfeldes für Systeme mit Gleichgewichtsbereichen, GAMM-Tagung Dubrovnik, 1.-4.4.85
20. Lefschetz, S., Stability of Nonlinear Control Systems, Academic Press, New York-London (1965), S.73,76,78
21. Lehmann, Th., Elemente der Mechanik IV, Schwingungen, Variationsprinzip, Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden (1979), S.8,39,83
22. Magnus, K., Schwingungen, B.G. Teubner, Stuttgart (1969), S.57,76,112
23. Malkin, J.G., Theorie der Stabilität einer Bewegung, R. Oldenbourg Verlag, München (1959), S.8
24. Naslin, P., Dynamik linearer und nichtlinearer Systeme, R. Oldenbourg Verlag, München -Wien (1968), S.408,432
25. Shinnars, St.M., Modern Control System Theory and Application, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, Amsterdam-London-Manila-Singapore-Sydney-Tokyo, Second Print (1975), S.407
26. Silas, Gh., Klepp, H.J., Sprunglinien und Grenzzyklen eines selbsterregten nichtlinearen Systems mit einem Freiheitsgrad, Actes du Colloque EQUA-DIFF 73, Bruxelles-Louvain, 3.-8.9.1973, Complements, S.75-90
27. Silas, Gh., Klepp, H.J., Das Studium der Bewegung eines Körpers auf einer rauhen sich gleichförmig drehenden Zylinderfläche, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série des Mécanique appliquée, Bukarest, Tom 19, Nr.2, 1974, S.213-230
28. Zubov, V.I., Methods of A.M. Ljapunov and their Application, Noordhoff Ltd., Groningen (1964), S.22

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 45**