



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ulrich Schmid

Zur Berechnung des plastischen
Setzens von Schraubenfedern

Heft Nr. 50



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ulrich Schmid

Zur Berechnung des plastischen Setzens
von Schraubenfedern

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 50

Februar 1987

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung durch viele hilfreiche Anregungen und für die Übernahme des Referats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns bin ich für sein Interesse an meiner Arbeit und für das Korreferat zu Dank verpflichtet.

Ein herzliches Dankeschön gilt auch allen meinen Kollegen.

Besonders erwähnen möchte ich die tatkräftige Unterstützung von Frau Schmidt-Balve bei den Zeichnungen sowie von Herrn Grundmann und Herrn Böhme bei der Versuchsvorbereitung. Ein offenes Ohr für Fachdiskussionen fand ich stets bei Herrn Dr.-Ing. A. Meyers.

Februar 1987

Ulrich Schmid

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns

Tag der Einreichung: 14.01.1987

Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.1987

© 1987 Dr.-Ing. Ulrich Schmid

Kiefernweg 40

4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Weg zur Berechnung des Setzens von Schraubenfedern mit nichtkonstanter Kennlinie vorgestellt.

Hierzu werden die Federn durch finite Stabelemente diskretisiert, die durch ein im Rahmen der Thermodynamik konsistentes Werkstoffgesetz das reale Materialverhalten auch bei erhöhten Temperaturen hinreichend genau erfassen. Durch Versuche wird die Güte der elasto-plastischen Stabelemente aufgezeigt.

Die bei Schraubendruckfedern auftretenden Kontaktprobleme werden durch den Einbau zusätzlicher Kontaktelemente berücksichtigt.

Durch Messungen an zylindrischen Schraubenfedern konstanter Steigung werden die numerischen Verfahren experimentell verifiziert.

Summary

In this paper a method is introduced for the calculation of the positioning of coil springs with a variable characteristic. For this purpose the spring continuum is discretized by finite rod elements.

The material behaviour is accurately described by means of a thermodynamically consistent material law, even under increased spring temperatures.

The quality of the elasto-plastic rod element is demonstrated in experiments.

The contact problems, resulting from coil pressure springs are taken into consideration by use of additional GAP-elements. The presented numerical procedures are verified by a comparative experimental investigation of cylindrical coil springs with constant lead.

Inhaltsverzeichnis

<u>Bezeichnungen</u>	Seite
1. <u>Einleitung</u>	7
1.1. Problemstellung	8
1.2. Aufbau und Schwerpunkte	11
2. <u>Stoffunabhängige Gleichungen</u>	12
2.1. Grundlagen der Beschreibung endlicher Deformationen	12
2.1.1. Kinematik	12
2.1.2. Verzerrungstensoren	16
2.1.3. Verzerrungsgeschwindigkeiten	19
2.2. Spannungstensoren	20
3. <u>Konstitutives Gesetz</u>	22
3.1. Evolutionsgesetze für elastische und plastische Deformationen	23
3.1.1. Elastische Formänderungen	23
3.1.2. Plastische Formänderungen	24
3.2. Konstitutiver Tensor	27
4. <u>Bewegungsgleichung des Kontinuums</u>	28
4.1. Prinzip der virtuellen Arbeit	29
4.2. Update-Lagrange'sche Formulierung	30
4.3. Linearisierung der Update-Lagrange Bewegungsgleichung	34
4.4. Gleichgewichtsiteration	36
5. <u>Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente</u>	44
5.1. Methode der finiten Elemente	44

5.2. Stabelement für geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnungen	50
5.2.1. Beschreibung des Stab-Elementes	51
5.2.1.1. Interpolationsfunktion für das inkrementelle Verschiebungsfeld	53
5.2.1.2. Kondensation der lokalen Element-Freiheitsgrade	59
5.2.1.3. Koordinatentransformation	60
5.2.2. Beschreibung der Deformation des Stab-Elementes	64
5.2.3. Spannungszustand	67
5.2.4. Vollständiges Differentialgleichungssystem zur Spannungsberechnung	68
5.2.4.1. Elastische Deformation	69
5.2.4.2. Elasto-plastische Deformation	70
5.2.5. Numerische Lösung	73
5.2.6. Volumenintegration	74
6. <u>Numerische Realisierung</u>	76
6.1. Rechner-Implementierung des elasto-plastischen Stabelementes	79
6.2. Elementüberprüfung	79
6.2.1. Werkstoff	79
6.2.2. Ermittlung der Werkstoffkenngrößen	80
6.2.3. Vergleich zwischen Experiment und der Berechnung mit Hilfe des Stabelementes	83
6.3. Anwendungsbeispiele für das Stabelement	88
7. <u>Schraubenfedern</u>	94
7.1. Diskretisierung der Schraubenfeder	95
7.1.1. "Kontakt"-Element	97
7.1.2. Beispiel zum "Kontakt"-Element	100
7.2. Numerische und experimentelle Untersuchung von Schraubendruckfedern	102

7.2.1. Versuchsanordnung	104
7.2.2. Versuchsergebnisse und Vergleich zwischen Theorie und Experiment	108
8. <u>Zusammenfassung und Ausblick</u>	113

Literaturverzeichnis

Bezeichnungen

Symbol	Name
a	Vektor
A	Tensor 2. Stufe
$()^{-1}$	Inverse eines Tensors
$()^T$	Transponierte eines Tensors
$Sp ()$	Spur eines Tensors
1	Einstensor
Grad	Gradient
∇	Nabla-Operator
δ	Variation
δ_{β}^{α}	Kronecker-Symbol
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Christoffelsymbole
$()^{\alpha} _{\beta}$	kovariante Ableitung bezüglich der Ausgangsfiguration
$()^{\alpha} _{\beta}$	kovariante Ableitung bezüglich der aktuellen Konfiguration
\cdot	Skalarprodukt
$\cdot\cdot$	doppelskalarprodukt
$(\dot{\cdot})$	substantielle Zeitableitung
(∇)	objektive Zeitableitung nach ZAREMBA-JAUMANN

Sofern an entsprechender Stelle nicht anders vereinbart, gilt die EINSTEIN'sche Summationskonvention.

${}^0B, B$	Ausgangs- bzw. aktuelle Konfiguration
${}^1B, {}^2B$	Zwischenkonfiguration
${}^m A, {}^m V$	Fläche, Volumen des Körpers in Konfiguration m
$d^m A, d^m V$	infinitesimales Flächen- oder Volumenelement der Konfiguration m

m_x^α	krummlinige Koordinaten
${}^m g_\alpha, {}^m g^\alpha, {}^m g_{\alpha\beta}, {}^m g^{\alpha\beta}$	kovariante bzw. kontravariante Basis, Metrik des Zustands m
dr	Linienenelement
F	Deformationsgradient
$\overset{\circ}{C}$	rechter CAUCHY-Tensor
$\overset{\circ}{B}$	linker CAUCHY-Tensor
$\overset{\circ}{E}$	CAUCHY-GREEN bzw. GREEN-LAGRANGE'scher Verzerrungstensor
E	ALMANSI-HAMEL oder EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
u	Verschiebungsvektor
v	Geschwindigkeitsvektor
Grad $v, \nabla \cdot v$	Geschwindigkeitsgradient
D	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit
W	Tensor der Rotationsgeschwindigkeit
df	infinitesimaler Kraftvektor
da	gerichtetes Flächenelement
σ	CAUCHY-Spannungstensor
S	gewichteter CAUCHY-Spannungstensor
τ	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
T	Spannungsdeviator
J	Funktionaldeterminante
ρ	Dichte
b^*, B	interne Zustandsvariablen
T	Temperatur
G	Gleitmodul
ν	Querkontraktionszahl
α	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient
E	Elastizitätsmodul
D_{el}, D_{pl}	elastische und plastische Verzerrungsinkremente
C	konstitutiver Tensor
k^2, ζ, κ	Stoffparameter

FEM-Matrizen

H^S, H	Oberflächen- und Volumen-Verschiebungs-Interpolations-Matrix
${}^m B_{n1}, {}^m B_{n1}$	lineare und nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix im Zustand m, bezogen auf den Zustand n
${}_n \Delta C$	inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Materialeigenschaftsmatrix, bezogen auf Zustand n
${}^m K_{n1}$	inkrementelle Steifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
${}^m K_{n1}$	bei nichtlinearer Verzerrung (infolge Geometrie oder Anfangsspannungen)
u	Vektor der Knotenverschiebungen
${}^m f_n$	Vektor der verallgemeinerten inneren Knotenkräfte
${}^m r$	Vektor der äußeren Knotenpunktlasten
${}^m \sigma, {}^m s$	Matrix und Vektor der CAUCHY-Spannungen
${}^1 f_A, {}^1 f_V$	Oberflächen- und Volumenkraftvektor

1. Einleitung

Durch die in den letzten Jahren sprunghafte Weiterentwicklung der Computeranlagen wurde in allen Bereichen der Technik die Möglichkeit geschaffen, komplexe numerische Berechnungen selbst für solche Probleme durchzuführen, deren analytische Lösung früher undenkbar schien. So avancierte vor allen Dingen die Methode der finiten Elemente zu einem sehr beliebten Berechnungswerkzeug und stellt gegenwärtig das wohl universellste Hilfsmittel zur numerischen Behandlung komplexer Fragestellungen des Ingenieurwesens dar.

Die immer stärkere Verbreitung und der umfassende Einsatz dieses rechnergestützten Berechnungsverfahrens brachte eine kontinuierliche Steigerung von Qualität und Zuverlässigkeit der Produkte mit sich, führte aber gleichzeitig bei immer größer und dabei leichter werdenden Konstruktionen und ständig gesteigerten Belastungen zu einem stetigen Herantasten an die Grenzen elastischer Verformbarkeit. Da man bei neueren Projekten aus Kostengründen und zur weiteren Materialeinsparung zunehmend auch Verformungen bis in den plastischen Bereich zuläßt, wird verstärkt der Ruf nach Elementen laut, die auch für solche Berechnungen geeignet sind.

Folgerichtig hat man in den letzten Jahren einige finite Elemente entwickelt, die unter Anwendung einfachster Materialgesetze einen begrenzten Einstieg in die Berechnung plastizierender Strukturen ermöglichen sollten. Bei den anschließend durchgeführten Berechnungen erwies sich jedoch die Unzulänglichkeit der verwendeten konstitutiven Gleichungen; die Elemente lieferten nur bedingt brauchbare Ergebnisse. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit, bessere finite Elemente unter Einbezug einer theoretisch fundierten, allgemein anwendbaren und dabei möglichst einfachen Plastizitätstheorie zu entwickeln.

1.1. Problemstellung

Mit dem Trend der Automobilindustrie zum Leichtbau und stetig steigenden Anforderungen an Fahrsicherheit und -komfort finden zunehmend zylindrische und nichtzylindrische Schraubendruckfedern mit progressiver Kennung ihren Einsatz. Die Progressivität wird neben der Formgebung durch das Anlegen einzelner Windungen aneinander oder auf den Federunterlagen erreicht. Bedingt durch die Federgeometrie greift die Reaktionskraft einer Schraubendruckfeder außermittig an der Aufstandsfläche an. Wegen der Abwälzbewegungen der Endwindungen auf dem Federteller kann sich diese Exzentrizität während der Belastung ändern.

Im Hinblick auf eine bessere Materialausnutzung werden die nichtzylindrischen Federn vermehrt mit variablem Drahtdurchmesser ausgebildet. Eine weitere Verbesserung der Werkstoffausnutzung sowie der Federeigenschaften ist durch das zusätzliche (Vor)Setzen oder Plastizieren der Federn zu erreichen. Bei diesem Herstellungsvorgang, dem erstmaligen Spannen einer Feder in Richtung ihrer späteren Betriebskraft, bei dem die Spannungen die Fließgrenze überschreiten, tritt eine plastische Verformung auf, die im Querschnitt einen günstigen Eigenspannungszustand und damit eine erhöhte Belastbarkeit beim späteren Einsatz erzeugt.

Der Problemkomplex zylindrischer und nichtzylindrischer Schraubendruckfedern weist demnach folgende Teilprobleme auf, die von einer praxisorientierten Software zur Berechnung aller Schraubendruckfedern erfaßt werden muß:

1. beliebige Federgeometrie (Zylinder-, Kegelstumpf-, Doppelstumpf-, Taillen-, Tonnen-, Trichterfedern u.s.w.) mit inkonstanter Steigung und veränderlichem Drahtdurchmesser
2. Berührung übereinanderliegender Windungen bzw. Elemente miteinander
3. Berührung der Elemente mit den Federunterlagen, Darstellung der Bettung und beliebiger Randbedingungen für die Endwindungen
4. große Verformungen und große Verzerrungen

5. Bestimmung der Kraftmittelpunkte sowie der aus Exzentrizität resultierenden zusätzlichen Lagerkräfte
6. Spannungsanalyse
7. Berechnung des Setzmaßes und der nach dem Plastizieren verbleibenden Restspannungen

Aufbauend auf den Methoden der Kontinuumsmechanik und eingebettet in eine konsistente inkrementelle und iterative Formulierung zur Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Probleme soll in dieser Arbeit ein finites Stab-Element hergeleitet werden, das mit einem in der phänomenologischen Betrachtungsweise des Kontinuums verankerten und auf den Grundgesetzen der Thermodynamik basierenden thermoplastischen Stoffgesetz arbeitet und zur Berechnung plastizierender Strukturen eingesetzt werden kann. Dieses Element soll zusammen mit weiteren, speziell für diese Anwendung entwickelten Algorithmen zur Untersuchung zylindrischer und nichtzylindrischer Schraubenfedern mit nichtlinearen Kennlinien einzusetzen sein, wobei primär das Problem des Plastizierens bei erstmaliger Belastung der Feder untersucht werden soll. Die entwickelten numerischen Verfahren sollen anschließend durch den Vergleich mit experimentell gewonnenen Ergebnissen verifiziert werden.

Da die Schraubenfeder eine sehr komplexe Struktur darstellt, standen den Ingenieuren lange Zeit nur Verfahren zur Berechnung elastisch deformierter zylindrischer Schraubenfedern mit konstanter Steigung zur Verfügung. Diese Standardverfahren, wie sie z. B. den Lehrbüchern von GROSS [1] und ROLOFF/MATEK [2] zu entnehmen sind, oder von HUHNEN mit einer Fülle von Literaturhinweisen in [3] zusammengefaßt wurden, sind ausführlich dokumentiert und bekannt. Über den Stand der Technik liefern die Berechnungsunterlagen namhafter Federnhersteller einen guten Überblick. Stellvertretend seien nur die Berechnungsblätter der Firma GRUEBER [4] genannt.

Erste einfache Näherungsansätze zur Berücksichtigung inkonstanter Steigungen bei zylindrischen Federn wurden von GROSS [5] sowie dem Federnhersteller HOESCH [6] eingeführt und von WANKE [7] kritisch kommentiert. In seiner Dissertation hat HEYN [8] ein Verfahren entwickelt, bei dem die Helixkurve

einer Schraubenfeder eine parameterabhängige Größe ist. Da dieses Verfahren jedoch von konstantem Außen-, Innen- oder mittlerem Durchmesser der Feder ausgeht, ist es in seiner Anwendung ebenfalls begrenzt.

Mit fortschreitender Entwicklung der Rechnertechnik kamen langsam exaktere Berechnungsmethoden auf, bei denen die Feder nun als räumlich gekrümmtes Stabwerk betrachtet wird. Hierbei gründen die grundlegenden Arbeiten von TROSTEL [9] und KÄMMEL [10] auf der linearen Theorie gekrümmter Stäbe. Die Möglichkeiten zur Erfassung der bei großen Verformungen auftretenden geometrischen Nichtlinearitäten behandelte BESSELING [11] allgemein. Erste Formulierungen geometrisch nichtlinearer Stabprobleme für beliebig gekrümmte, dünnwandige und gerade Stäbe unter Anwendung der Tensornotation finden wir bei BOEGERSHAUSEN [12], BEVERUNGEN [13] und CELIGOJ [14]. Alle diese Methoden lieferten zwar eine Fülle theoretischer Ansätze, diese blieben jedoch immer auf spezielle Geometrien beschränkt und konnten keine allgemeingültigen Lösungen liefern.

Den Einstieg in die Analyse der elastisch deformierten Feder beliebiger Geometrie brachte die Anwendung des Verfahrens der finiten Elemente. So berichtet GO in seiner Dissertation [15] von umfassenden Berechnungen nicht-zylindrischer Schraubendruckfedern nach einer Theorie erster Ordnung. Stabelemente für den Einsatz bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen wurden in den letzten Jahren z. B. von BATHE/BOLOURCHI [16] sowie BESSELING [17, 18] entwickelt.

Die Bestimmung von Setzerscheinungen bei Schraubenfedern stützt sich bislang immer noch auf empirische Verfahren, deren Grundzüge schon vor Jahren von WANKE [19] beschrieben wurden. In unzähligen Versuchen werden hierfür Schubspannungs-Schiebungs-Schaubilder erstellt, die dann zur Vorausbestimmung des Setzens von Federn gleicher Geometrie genutzt werden können. Im Lauf der Zeit hat man dieses Verfahren zwar verfeinert, eine zufriedenstellende analytische Berechnung des Setzens von Federn beliebiger Geometrie und mit nichtlinearen Kennlinien ist aber bis heute nicht möglich.

1.2. Aufbau und Schwerpunkte

Zunächst werden in gebotener Kürze die Grundlagen zur Beschreibung endlicher elasto-plastischer Deformationen zusammengefaßt. Hierzu stellen wir die benötigten Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik dar und erörtern anschließend das verwendete thermoplastische Materialgesetz in seinen wesentlichen Zügen.

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit leiten wir dann die wesentlichen Gleichungen einer konsistenten, inkrementellen und iterativen Formulierung zur Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Probleme her. Die so in Form eines partiellen Differentialgleichungssystems gewonnenen Bewegungsgleichungen des Körpers lösen wir numerisch mit der Methode der finiten Elemente.

Nach der ausführlichen Darstellung des elasto-plastischen Stabelements verifizieren wir das Element und die eingesetzten Berechnungsverfahren experimentell. Da die Spannungsanalyse relativ rechenzeitintensiv ist, wird anhand weiterer Testbeispiele der Iterationsalgorithmus ermittelt, dessen Anwendung bei der Berechnung plastizierender Strukturen optimale Konvergenz und minimale Rechenzeit verspricht.

Der letzte Schwerpunkt beinhaltet einen Abriß der Vorgehensweise zur Darstellung der bei Schraubendruckfedern auftretenden Kontaktprobleme. Dem schließt sich die Berechnung einer zylindrischen Schraubendruckfeder und der kritische Vergleich mit experimentell gewonnenen Daten an.

Den Abschluß der Arbeit bilden die Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen.

2. Stoffunabhängige Gleichungen

2.1. Grundlagen der Beschreibung endlicher Deformationen

2.1.1. Kinematik

Die Deformationen eines Körpers, den wir als klassisches Kontinuum betrachten wollen, können aus der Beschreibung der Bewegung seiner Körperpunkte gegenüber einem geeignet definierten Beobachtungsraum ermittelt werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Starrkörperrotationen, die zu den Deformationen der Körperelemente nicht beitragen, eliminiert werden müssen.

Eine eindeutige Beschreibung der Bewegung bedingt, die Position aller Körperelemente im Raum als Funktion der Zeit t eindeutig zu spezifizieren. Dazu ist es notwendig, sowohl die Raumpunkte selbst wie auch die jeweils betrachteten Körperelemente zu jedem Zeitpunkt eindeutig zu identifizieren.

Zur Identifikation aller Punkte des Beobachtungsraums e_α legen wir ein raumfestes, krummliniges Koordinatensystem x^α fest, das uns sowohl bezüglich der geometrischen Form des zu untersuchenden Körpers als auch von der quantitativen Beschreibung der Bewegung her jegliche Freiheit läßt.

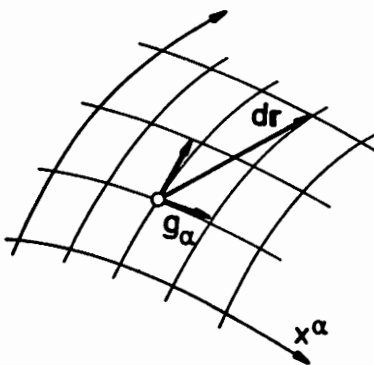


Abb. 2.1. krummlinige Koordinaten

Für ein Linienelement des Beobachtungsraums gilt (Abb. 2.1.)¹⁾

$$dr = dx^\alpha g_\alpha \quad (2.1.1)$$

wobei mit

$$g_\alpha(x^\rho) = \frac{\partial r}{\partial x^\alpha} \quad (2.1.2)$$

die im allgemeinen ortsabhängigen Basisvektoren des raumfesten Koordinatensystems definiert sind.

Die zu diesen Basisvektoren reziproke Basis g^α ist durch

$$g^\alpha \cdot g_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (2.1.3)$$

definiert. Hierbei bezeichnet δ_β^α das Kroneckersymbol, das für $\alpha=\beta$ den Wert 1, sonst den Wert 0 annimmt.

Die Metrik des raumfesten Koordinatensystems ergibt sich durch die skalare Multiplikation der Basisvektoren

$$g_{\alpha\beta}(x^\rho) = g_\alpha \cdot g_\beta \quad (2.1.4)$$

bzw. für die reziproke Basis

$$g^{\alpha\beta}(x^\rho) = g^\alpha \cdot g^\beta \quad (2.1.5)$$

und es gilt

$$g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = g_{\beta\rho} g^{\rho\alpha} = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.1.6)$$

1) Wir benutzen hier und im folgenden stets die EINSTEIN'sche Summationskonvention, nach der über die (von 1 bis 3) laufenden Indizes stets zu summieren ist, sobald ein Index in einem Term (genau) zweimal auftritt, wie hier der Index α . Fett geschriebene Kleinbuchstaben bezeichnen Vektoren, fette Großbuchstaben gerichtete Größen 2. Stufe.

Die Anfangsposition eines Körperpunktes im Beobachtungsraum zum Zeitpunkt 0t (Ausgangskonfiguration 0B des Körpers) legen wir durch seine Raumkoordinaten (Abb. 2.2)

$${}^0x^\alpha = x^\alpha({}^0t) \quad (2.1.7)$$

fest, die ihn zugleich für alle Zeiten eindeutig identifizieren. Die diesem Körperpunkt zugeordneten Basisvektoren und Metriken sind entsprechend mit dem Superskript 0 gekennzeichnet

$${}^0g_\alpha = g_\alpha({}^0x^\rho) \quad (2.1.8)$$

und

$${}^0g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}({}^0x^\rho). \quad (2.1.9)$$

Die verformte Lage des gleichen Körperpunktes zur Zeit t (aktuelle Konfiguration B des Körpers) erhält man durch²⁾

$$x^\alpha = x^\alpha({}^0x^\rho, t). \quad (2.1.10)$$

(2.1.10) beschreibt die Bewegung der Körperpunkte in Abhängigkeit ihrer Anfangslage im Beobachtungsraum und der Zeit.

Der zur aktuellen Konfiguration zugehörige Basisvektor und die Metrik sind

$$g_\alpha = g_\alpha(x^\rho) = g_\alpha({}^0x^\rho, t) \quad (2.1.11)$$

und

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\rho) = g_{\alpha\beta}({}^0x^\rho, t), \quad (2.1.12)$$

2) Der Einfachheit halber benutzen wir das gleiche krummlinige Koordinatensystem für die Identifikation der Elemente in 0B und B . Natürlich bleiben alle Relationen auch dann unverändert, wenn x^α als Koordinate eines zweiten Koordinatensystems in B mit der Basis g_α interpretiert wird,

Aus den Bewegungen der Körperelemente (2.1.10) lassen sich die Verzerrungen des Körpers ableiten.

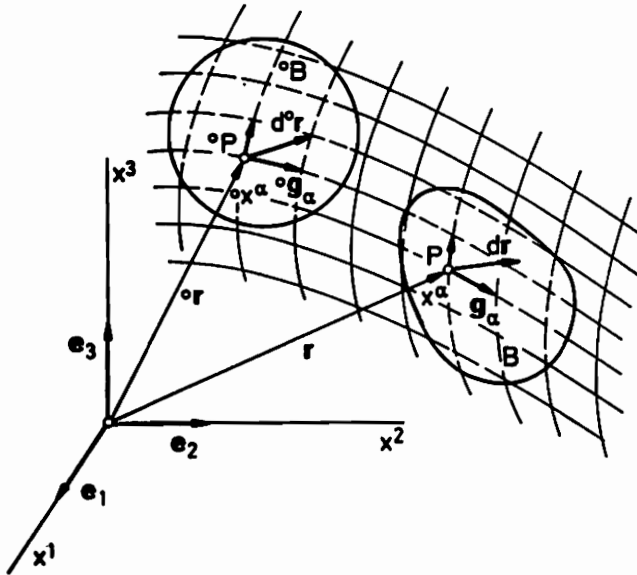


Abb. 2.2.
Körper im Ausgangszustand 0B
und Endzustand B

Ein Linienelement, für das in der Ausgangskonfiguration (Abb. 2.2)

$$d^0r = d^0x^\alpha \cdot {}^0g_\alpha \quad (2.1.13)$$

gilt, geht bei der Bewegung des Körpers in

$$dr = dx^\alpha \cdot g_\alpha \quad (2.1.14)$$

über. Die Abbildung des Ortsvektors d^0r auf den Vektor dr mittels einer linearen Transformation wird durch Angabe des Deformationsgradienten F eindeutig festgelegt:

$$dr = F \cdot d^0r \quad (2.1.15)$$

mit

$$F = \frac{\partial x^\alpha}{\partial {}^0x^\beta} \cdot g_\alpha \cdot {}^0g^\beta = dr \cdot {}^0\nabla. \quad (2.1.16)$$

${}^0\nabla$ bezeichnet den auf die Ausgangskonfiguration bezogenen Nabla-Operator.

Bei der Umkehrtransformation

$$d^{\circ}r = F^{-1} \cdot dr \quad (2.1.17)$$

mit

$$F^{-1} = \frac{\partial^{\circ}x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \circ g_{\alpha} g^{\beta} = d^{\circ}r \cdot \nabla \quad (2.1.18)$$

stellt ∇ dann den auf die aktuelle Basis bezogenen Nabla-Operator dar. Die jeweils transformierten Tensoren lauten

$$F^T = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial^{\circ}x^{\beta}} \circ g^{\beta} g_{\alpha}, \quad (F^{-1})^T = \frac{\partial^{\circ}x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} g^{\beta \circ} g_{\alpha}. \quad (2.1.19)$$

Zur Elimination der im Deformationsgradienten noch enthaltenen Starrkörper-Rotationen bilden wir durch skalare Multiplikation mit F^T von links

$$F^T \cdot F = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial^{\circ}x^{\alpha}} g_{\rho\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial^{\circ}x^{\beta}} \circ g^{\alpha\circ} g^{\beta} = \circ C_{\alpha\beta} \circ g^{\alpha\circ} g^{\beta} = \circ C \quad (2.1.20)$$

bzw. von rechts

$$F \cdot F^T = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial^{\circ}x^{\rho}} \circ g^{\rho\mu} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial^{\circ}x^{\mu}} g_{\alpha} g_{\beta} = B^{\alpha\beta} g_{\alpha} g_{\beta} = B \quad (2.1.21)$$

und erhalten den rechten CAUCHY-TENSOR $\circ C$, der dem Ausgangszustand $\circ B$ zugeordnet ist, bzw. den auf die aktuelle Konfiguration B bezogenen linken CAUCHY-Tensor B. Beide können zur Beschreibung der totalen Deformationen (Verzerrungen) des Körpers herangezogen werden.

2.1.2. Verzerrungstensoren

Als Maß für die Verzerrungen bilden wir die Differenz der Quadrate eines Linienelements des Körpers im verformten und unverformten Zustand

$$\frac{1}{2} \{ ds^2 - d^{\circ}s^2 \} = \frac{1}{2} \{ dr \cdot dr - d^{\circ}r \cdot d^{\circ}r \} \quad (2.1.22)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \circ C_{\alpha\beta} - \circ g_{\alpha\beta} \} d^{\circ}x^{\alpha} d^{\circ}x^{\beta} = \circ E_{\alpha\beta} d^{\circ}x^{\alpha} d^{\circ}x^{\beta} \quad (2.1.23)$$

$$= \frac{1}{2} \{g_{\alpha\beta} - (B^{-1})_{\alpha\beta}\} dx^\alpha dx^\beta = E_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1.24)$$

und erhalten mit (2.1.23) die Maßzahlen des auf die Anfangskonfiguration 0B bezogenen CAUCHY-GREEN bzw. GREEN'LAGRANGE'schen Verzerrungstensors, mit (2.1.24) die des in der aktuellen Basis g_α stehenden ALMANSI-HAMEL oder EULER-ALMANSI-Verzerrungstensors.

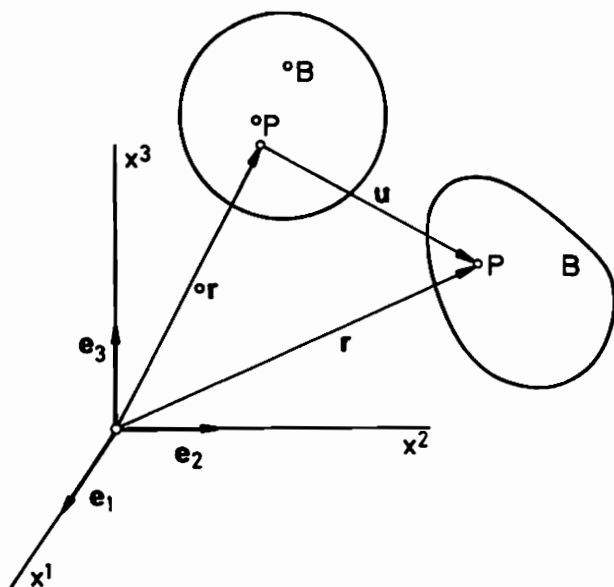


Abb. 2.3. Verschiebungsvektor

Für viele Zwecke, wie in der vorliegenden Arbeit für das Verfahren der finiten Elemente, ist es vorteilhaft, den Verschiebungsvektor u einzuführen, der die Verschiebung des Punktes ${}^0P({}^0x^p)$ der Ausgangskonfiguration im Verlauf des thermo-mechanischen Prozesses in der Form (Abb. 2.3)

$$u({}^0x^p, t) = r({}^0x^p, t) - {}^0r({}^0x^p) \quad (2.1.25)$$

beschreibt. Stellen wir den Verschiebungsvektor

$$u = {}^0u^\alpha {}^0g_\alpha({}^0x^p) \quad (2.1.26)$$

bezüglich der kovarianten Basis der Ausgangskonfiguration 0B dar, liefert die Differentiation von (2.1.25)

$$\frac{\partial r}{\partial {}^0x^\beta} = \frac{\partial {}^0r}{\partial {}^0x^\beta} + \frac{\partial u}{\partial {}^0x^\beta} = {}^0g_\beta + {}^0u^\alpha|_\beta {}^0g_\alpha. \quad (2.1.27)$$

Die kovariante Ableitung in der Ausgangsbasis wird durch

$${}^0u^\alpha|_\beta = {}^0u^\alpha{}_{,\beta} + {}^0\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha {}^0u^\gamma \quad (2.1.28)$$

definiert, wobei ${}^0\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ die sogenannten Christoffelsymbole darstellt, die man durch Differentiation der Metrik nach den Koordinaten erhält

$${}^0\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} {}^0g^{\alpha\rho} ({}^0g_{\gamma\rho,\beta} + {}^0g_{\rho\beta,\gamma} - {}^0g_{\beta\gamma,\rho}). \quad (2.1.29)$$

Ist der Verschiebungsvektor hingegen durch

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{g}_\alpha(x^p) \quad (2.1.30)$$

in Abhängigkeit der aktuellen Basis gegeben, folgt aus (2.1.25)

$$\frac{\partial {}^0\mathbf{r}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\beta} = \mathbf{g}_\beta - u^\alpha ||_\beta \mathbf{g}_\alpha. \quad (2.1.31)$$

Dabei soll der Doppelstrich $||$ die kovariante Differentiation im verformten Körper (Basis \mathbf{g}_α) andeuten.

Wir setzen (2.1.27) in (2.1.22) ein und erhalten unter Berücksichtigung der Transformation

$${}^0u_\beta|^\alpha = {}^0g_{\beta\gamma} {}^0u^\gamma|_\rho {}^0g^{\rho\alpha} \quad (2.1.32)$$

den CAUCHY-GREEN Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{E} &= \frac{1}{2} \{ {}^0u_\alpha|_\beta + {}^0u_\beta|_\alpha + {}^0u_\rho|_\alpha {}^0u^\rho|_\beta \} {}^0g^{\alpha\sigma} {}^0g^\beta \\ &= {}^0E_{\alpha\beta} {}^0g^{\alpha\sigma} {}^0g^\beta \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

bzw. durch Einsetzen von (2.1.31) in (2.1.22) den ALMANSI-HAMEL-Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \{ u_\alpha ||_\beta + u_\beta ||_\alpha - u_\rho ||_\alpha u^\rho ||_\beta \} g^\alpha g^\beta \\ &= E_{\alpha\beta} g^\alpha g^\beta \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

in Abhängigkeit des Verschiebungsvektors \mathbf{u} .

Die entweder mittels des Deformationsgradienten F oder durch den Verschiebungsvektor u definierten Verzerrungstensoren beschreiben die zeitabhängigen Deformationen des Körpers eindeutig.

2.1.3. Verzerrungsgeschwindigkeiten

Da die elasto-plastischen Deformationen eines Körpers im allgemeinen zeitabhängig sind, benötigen wir zu deren Beschreibung die Formänderungs- oder Verzerrungsgeschwindigkeit der einzelnen Körperpunkte.

Die Geschwindigkeit des Körperpunktes x^α gegenüber dem Beobachtungsraum ergibt sich aus der zeitlichen Änderung des zu diesem Körperpunkt zeigenden Radiusvektors r bei festgehaltenem ${}^0x^\rho$ (substantielle Zeitableitung)

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \mathbf{g}_\alpha = \dot{x}^\alpha \mathbf{g}_\alpha = v^\alpha \mathbf{g}_\alpha. \quad (2.1.35)$$

Definieren wir den Tensor \dot{F} der Deformationsgeschwindigkeiten als substantielle Zeitableitung des Deformationsgradienten F

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F({}^0x^\rho, t) = \dot{F} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^\alpha({}^0x^\rho, t)}{\partial {}^0x^\beta} \mathbf{g}_\alpha \circ \mathbf{g}^\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial {}^0x^\beta} (v^\alpha \mathbf{g}_\alpha) \circ \mathbf{g}^\beta, \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

erhalten wir nach der Skalarmultiplikation mit F^{-1} von rechts

$$\begin{aligned} \dot{F} \cdot F^{-1} &= \frac{\partial}{\partial {}^0x^\mu} (v^\alpha \mathbf{g}_\alpha) \circ \mathbf{g}^\mu \cdot \frac{\partial {}^0x^\gamma}{\partial x^\beta} \circ \mathbf{g}_\gamma \mathbf{g}^\beta \\ &= v^\alpha |_\beta \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta = \text{Grad } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

den Geschwindigkeitsgradienten. Spalten wir diesen unsymmetrischen Tensor auf, so definiert sein symmetrischer Anteil den Tensor der Verzerrungsge-

schwindigkeit

$$D = d_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g^{\beta} = \text{sym}\{\dot{F} \cdot F^{-1}\} = \frac{1}{2} \{v^{\alpha}|_{\beta} + v_{\beta}|\alpha\} g_{\alpha} g^{\beta}, \quad (2.1.38)$$

sein antimetrischer den sogenannten Spin- oder Rotationsgeschwindigkeits-tensor

$$W = w_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g^{\beta} = \{\dot{F} \cdot F^{-1}\} = \frac{1}{2} \{v^{\alpha}|_{\beta} - v_{\beta}|\alpha\} g_{\alpha} g^{\beta}, \quad (2.1.39)$$

der die Starrkörperrotation der Körperelemente gegenüber dem Beobachtungsraum beschreibt.

2.2. Spannungstensoren

Wie die Dehnungen können wir auch die den Spannungszustand des Körpers beschreibenden Tensoren auf die aktuelle Konfiguration B oder auf die Ausgangskonfiguration 0B des Körpers beziehen.

Die wahren Spannungen des Körpers beschreibt der auf die aktuelle Konfiguration bezogene CAUCHY-Spannungstensor

$$\sigma = \sigma_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g^{\beta} = \sigma^{\alpha\beta} g_{\alpha} g_{\beta}, \quad (2.2.1)$$

der im aktuellen Zustand zur Zeit t das gerichtete Flächenelement $da = n dA$ mit dem Kraftvektor $df = \sigma \cdot da$ (Abb. 2.4) verknüpft. Bei Annahme des BOLTZMANN-Axioms ist σ_{β}^{α} symmetrisch.

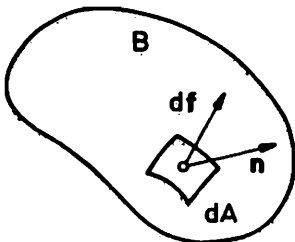


Abb. 2.4. Kräfte am Flächenelement

Ebenfalls symmetrisch ist der gewichtete CAUCHY-Tensor, der über die lineare Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= J \boldsymbol{\sigma} = J \sigma_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} = S_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} \\ &= J \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} = S^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

mit dem CAUCHY-Spannungstensor verknüpft ist. Die Funktionaldeterminante

$$J = \frac{dV}{d^{\circ}V} = \frac{\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{|g_{\alpha\beta}|}{|\circ g_{\alpha\beta}|}} |\mathbf{F}^{\alpha}_{\cdot\beta}| \quad (2.2.3)$$

beschreibt die Volumenänderung eines Elements während des Deformationsprozesses in Abhängigkeit von der Determinanten der Maßzahlen des Deformationsgradienten und der Metriken. ρ bezeichnet die Dichte des unverformten, ρ die des verformten Elements.

Der auf die Ausgangskonfiguration bezogene 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist über

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \\ &= \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial^{\circ} x^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \sigma^{\rho\mu} \frac{\partial^{\circ} x^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \circ g_{\alpha} \circ g_{\beta} = \tau^{\alpha\beta} \circ g_{\alpha} \circ g_{\beta} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

definiert. Eine der wichtigsten Eigenschaften dieses ebenfalls symmetrischen Tensors ist seine Invarianz gegenüber Starrkörperrotationen.

3. Konstitutives Gesetz

Zur Beschreibung des nichtisothermen inelastischen Verhaltens von Werkstoffen bei großen Formänderungen hat LEHMANN in [20] einen grundlegenden Rahmen erstellt, der auf den Grundgesetzen der Thermodynamik basiert und nicht an eine spezielle Prozeßführung gebunden ist. Diese Theorie ist eine phänomenologische, in der der betrachtete Körper als klassisches Kontinuum angesehen wird und die versucht, makroskopisch auftretende Phänomene zu beschreiben. Da sie gewisse Erweiterungen der klassischen Plastizitätstheorie umfaßt, erlaubt sie insbesondere, die isotrope wie die kinematische Verfestigung sowie gewisse Abweichungen von der sogenannten Normalenregel in Abhängigkeit der Temperatur in die Betrachtungen mit einzubeziehen.

Das Stoffgesetz ist an die folgenden Voraussetzungen gebunden:

- a) Die Beschreibung beschränkt sich auf elasto-plastische Formänderungen, viskose (geschwindigkeitsabhängige) Effekte werden nicht berücksichtigt. Allerdings stellt die Ausweitung auf elasto-viskoplastische Deformationen theoretisch kein Problem dar. Wie LEHMANN in [20] gezeigt hat, gestaltet sich deren Beschreibung in manchen Punkten sogar einfacher.
- b) Das Material sei elastisch kompressibel und plastisch inkompressibel.
- c) Die elastischen Deformationen und -anteile sollen klein sein. Diese Forderung ist bei allen Metallen erfüllt.
- d) Der Werkstoff sei vor der Deformation isotrop.
- e) Bezüglich der Energieflüsse wird nur die Wärmeleitung berücksichtigt, bei den anschließenden Berechnungen wird eine isotherme Prozeßführung vorausgesetzt. Wärmeleitungseffekte können jedoch analog abgeleitet und ohne größeren Aufwand berücksichtigt werden.

Im folgenden führen wir nur die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen Grundgleichungen ein. Der allgemeine Rahmen für die Definition thermoplastischer Stoffgesetze und die theoretischen Überlegungen bezüglich der Thermodynamik sind bei LEHMANN in [21] - [30] ausführlich nachzulesen.

3.1. Evolutionsgesetze für elastische und plastische Deformationen

Das Stoffgesetz elasto-plastisch deformierbarer Körper beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsinkrementen in Abhängigkeit der Formänderungsgeschichte. Einige der bei plastischen Deformationen auftretenden typischen Effekte sind für den einachsigen Zugversuch in Abbildung 3.1 zusammengestellt.

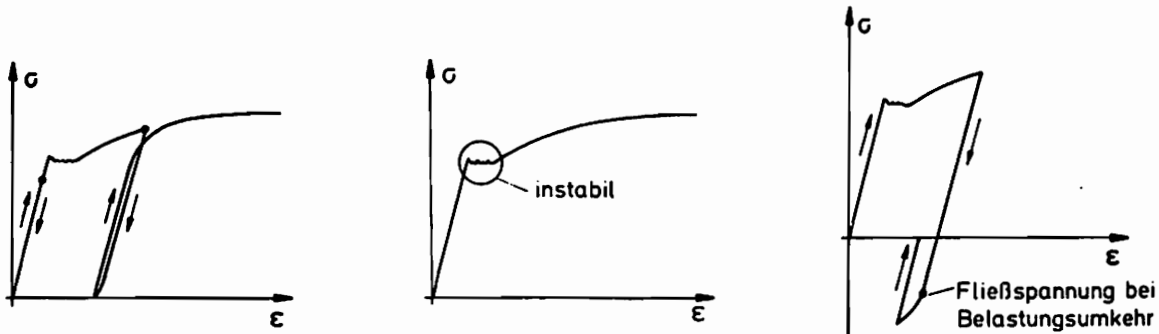


Abb. 3.1. Werkstoffverhalten bei verschiedenen Belastungsfolgen

Da elastische und plastische Formänderungen unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten gehorchen, wird die Gesamtdeformation in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten. Diese Aufspaltung kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. LEHMANN geht in [22] ausführlich auf die verschiedenen Möglichkeiten ein, die jedoch letztlich alle zu einer additiven Aufteilung des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit in einen elastischen und einen plastischen Teil führen.

$$D = D_{el} + D_{pl} \quad (3.1.1)$$

3.1.1. Elastische Formänderungen

Da bei allen Metallen die elastischen Verzerrungen klein sind, liefert ihre Beschreibung durch ein hypoelastisches Stoffgesetz der Form

$$D_{el} = \frac{1}{2G} \left(\overset{\vee}{\mathbb{T}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\overset{\vee}{\mathbb{S}}) \mathbb{1} \right) + \alpha \overset{\vee}{\mathbb{T}} \quad (3.1.2)$$

eine gute Approximation (vgl. [21]). $(\overset{\vee}{\mathbb{T}})$ kennzeichnet die objektive

ZAREMBA-JAUMANN Zeitableitung [31, 32], $(\dot{})$ die substantielle; $Sp()$ die Spur eines Tensors. Über die Beziehung

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} - \frac{1}{3} Sp(\mathbf{S})\mathbf{1} \quad (3.1.3)$$

sind die Maßzahlen des Spannungsdeviators definiert. Die elastischen Eigenschaften des Werkstoffes werden durch die Materialkonstanten G (Schubmodul) und ν (POISSON'sche Querkontraktionszahl) bestimmt, den aus der zeitlichen Temperaturänderung \dot{T} resultierenden Dehnungen wird durch die Multiplikation mit dem Temperatureausdehnungskoeffizienten α Rechnung getragen.

Vorausgehende plastische Deformationen beeinflussen zwar die Grenzen des elastischen Bereichs, das elastische Verhalten selbst bleibt dadurch aber nahezu unverändert.

3.1.2. Plastische Formänderungen

Plastische Deformationen werden im Gegensatz zu elastischen prinzipiell durch drei Gesetzmäßigkeiten bestimmt

- die Fließbedingung
- das Formänderungsgesetz (Fließregel)
- das Verfestigungsgesetz.

Wir nehmen an, daß inelastische Deformationen nur auftreten, wenn der Zustand des Materials die Fließbedingung

$$F(\mathbf{S}, \mathbf{T}, b^*, B) = Sp((\mathbf{T}-B)^2) - k^2 (b^*, \mathbf{T}) = 0 \quad (3.1.4)$$

und die korrespondierende Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = 2Sp((\mathbf{T}-B) (\dot{\mathbf{T}}-\dot{B})) - \frac{\partial k^2}{\partial b^*} \dot{b}^* - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (3.1.5)$$

erfüllt. In (3.1.4) und (3.1.5) bezeichnet

b^* eine skalarwertige Zustandsvariable, die zusammen mit der Temperatur T den durch die skalare Funktion k^2 beschriebenen isotropen Verfestigungszustand kennzeichnet (vgl. Abb. 3.2: Aufweitung der Ellipse) und

B eine tensorielle, spurlose Zustandsvariable mit den Maßzahlen b_{β}^{α} , die in Abhängigkeit der Deformationsvorgeschichte den anisotropen Verfestigungszustand (BAUSCHINGER-Effekt) (vgl. Abb. 3.2: Verschiebung des Ellipsenmittelpunktes) beschreibt.

LEHMANN und ZEBEL [33] folgend, wählen wir für den plastischen Anteil der Deformationsgeschwindigkeit das Formänderungsgesetz

$$D_{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial S} + \kappa (\mathbb{I} - B). \quad (3.1.6)$$

Der erste Term gehorcht der sogenannten Normalenregel (Abb. 3.3), wobei λ ein noch unbekannter, stets positiver skalarwertiger Faktor ist. Da Versuchsergebnisse eine systematische Abweichung von der Normalenregel zeigen, wird einem Vorschlag von LEHMANN [22] folgend der zweite Term zur Berücksichtigung dieser Effekte eingeführt. Über den (relativ kleinen) skalaren Faktor κ , der vom internen Zustand des Materials abhängt, lassen sich die Abweichungen von der Normalenregel steuern.

Bei rein isotroper Verfestigung ($B = 0$) und reiner Normalenregel ($\kappa = 0$) ist (3.1.6) mit der von MISES'schen Fließregel identisch.

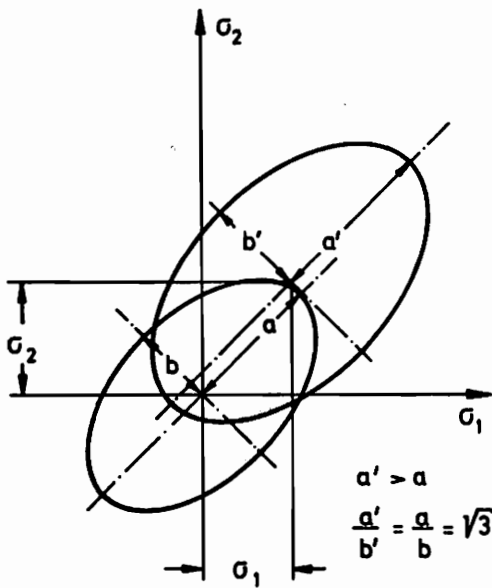


Abb. 3.2. Fließbedingung mit isotroper und kinematischer Verfestigung

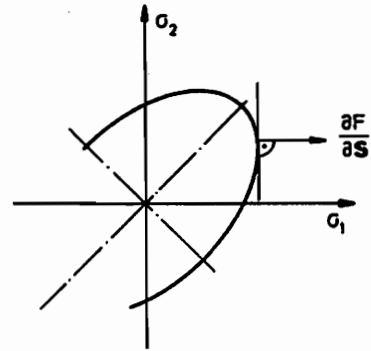


Abb. 3.3. Fließfläche im Hauptspannungsraum

Definieren wir die Evolutionsgesetze der die Verfestigung beschreibenden internen Zustandsvariablen in der Form (vgl. [34])

$$\dot{b}^* = \text{Sp}((T-B)D_{pl}) \quad \text{mit } b^*(0) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\dot{B} = \zeta D_{pl} = \zeta (D - D_{el}) \quad \text{mit } B(0) = 0 \quad (3.1.8)$$

und setzen diese in die Konsistenzbedingung (3.1.5) ein, erhalten wir den in (3.1.6) bislang unbekanntem Faktor λ und mit diesem letztlich

$$D_{pl} = \frac{1}{1+\kappa\zeta} (\kappa \dot{T} + \frac{(2-\kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}) \text{Sp}((T-B)\dot{T})}{(2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*})k^2} (T-B)). \quad (3.1.9)$$

Die Materialfunktionen

$$\begin{aligned} k^2 &= k^2(b^*, T) \\ \zeta &= \zeta(b^*, T) \\ \kappa &= \kappa(b^*, T) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

sind durch geeignete experimentelle Untersuchungen [33, 34] zu bestimmen.

3.2. Konstitutiver Tensor

Für den Tensor D der Deformationsgeschwindigkeit erhalten wir bei isothermer Prozeßführung mit (3.1.1), (3.1.2) und (3.1.9)

$$D = \left(\frac{1}{2G\kappa} + \frac{1}{1+\kappa\zeta} \right) \kappa \overset{\vee}{T} + \frac{1-2\nu}{6G(1+\nu)} \text{Sp}(\overset{\vee}{S}) \mathbf{1} + \frac{(2-\kappa \frac{\partial k^2}{\partial b}) \text{Sp}((\mathbf{T}-\mathbf{B})\overset{\vee}{T})}{(1+\kappa\zeta) (2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b}) k^2} (\mathbf{T}-\mathbf{B}). \quad (3.2.1)$$

Invertieren wir (3.2.1), ergibt sich mit

$$\overset{\vee}{S} = \frac{2G(1+\kappa\zeta)}{(1+\kappa\zeta+2G\kappa)} (D + \frac{1}{3} \left(\frac{(1+\kappa\zeta+2G\kappa)(1+\nu)}{(1+\kappa\zeta)(1-2\nu)} - 1 \right) \text{Sp}(D) \mathbf{1}) - \frac{2G(2-\kappa \frac{\partial k^2}{\partial b}) \text{Sp}((\mathbf{T}-\mathbf{B})D)}{(1+\kappa\zeta) (2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b} + 4G) k^2} (\mathbf{T}-\mathbf{B}) \quad (3.2.2)$$

bzw. bei Verletzung der Fließ- oder Belastungsbedingung mit

$$\overset{\vee}{S} = 2G (D + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(D) \mathbf{1}) \quad (3.2.3)$$

das nach den Spannungsgeschwindigkeiten aufgelöste Stoffgesetz.

Ordnen wir (3.2.2, 3.2.3) geeignet um, so können wir $\overset{\vee}{S}$ in der Form

$$\overset{\vee}{S} = C \cdot D \quad (3.2.4)$$

schreiben, wobei einem Verzerrungsinkrement ein Spannungsinkrement zugeordnet ist. C ist der "konstitutive" Tensor.

4. Bewegungsgleichungen des Kontinuums

Zur Vervollständigung der Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik benötigen wir noch eine Beziehung, die das Verschiebungsfeld und das Spannungsfeld des Körpers verknüpft. Bilden wir für das verformte Volumenelement zum Zeitpunkt t die Impulsbilanz, erhalten wir diesen Zusammenhang in Form der Bewegungsgleichungen des Kontinuums.

$$\{\text{Div } \sigma + \rho f - \rho \frac{D^2 \mathbf{u}}{dt^2}\} dV = 0. \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet

$$\text{Div } \sigma = \nabla \cdot \sigma \quad (4.2)$$

die Divergenz des CAUCHY-Spannungstensors, f die Summe der am Körperelement volumenhaft verteilt angreifenden Kräfte.

Der Drallsatz liefert bei Annahme des BOLZMANN-Axioms lediglich die Aussage, daß der Spannungstensor symmetrisch ist.

Ist die Beschleunigung aller Körperelemente vernachlässigbar klein, gelangen wir zur Statik deformierbarer Körper; (4.1) vereinfacht sich zu

$$\text{Div } \sigma + \rho f = 0. \quad (4.3)$$

Die Gleichungen (2.1.23 - 2.1.39), (4.1) und (3.1.2 - 3.2.4) bilden das vollständige Gleichungssystem der Kontinuumsmechanik in Form partieller Differentialgleichungen, für die sich im allgemeinen keine geschlossenen Lösungen unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen eines speziellen Problems mehr finden lassen. Als eine Möglichkeit zur numerischen Lösung bietet sich die Finite-Element-Methode (FEM) an. Der Einstieg in dieses Näherungsverfahren erfolgt am zweckmäßigsten über das Prinzip der virtuellen Arbeit.

4.1. Prinzip der virtuellen Arbeit

Betrachten wir die am ruhenden, verformten Körperelement angreifenden Kräfte, gilt die bezüglich seiner aktuellen Konfiguration aufgestellte Gleichgewichtsbedingung (4.3). Multiplizieren wir diese skalar mit dem virtuellen Verschiebungsfeld δu (vgl. [35]) um die deformierte Konfiguration und integrieren über das Volumen des verzerrten Körpers, erhalten wir die am Körper infolge der virtuellen Verschiebungen geleisteten virtuellen Arbeiten

$$\int_V (\text{Div } \sigma \cdot \delta u) dV + \int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \delta u) dV = 0. \quad (4.1.1)$$

Formen wir (4.1.1) in bekannter Weise um (vgl. [35/4]), ergibt sich das bezüglich der verformten Konfiguration des Körpers aufgestellte Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_V (\sigma \cdot \cdot \text{Grad } (\delta u)) dV + \int_V (\rho \mathbf{f}_V \cdot \delta u) dV + \int_A (\mathbf{f}_A \cdot \delta u) dA \\ &= -\delta W + \delta A_V + \delta A_A. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

δW bezeichnet die mittels des doppelskalaren Produkts

$$\sigma \cdot \cdot \text{Grad } (\delta u) = \sigma^{\alpha\beta} \delta u_{\beta} \Big|_{\alpha} = \sigma_{\beta}^{\alpha} \delta u^{\beta} \Big|_{\alpha} \quad (4.1.3)$$

aus dem Tensor der CAUCHY-Spannungen und dem virtuellen Verschiebungsgradienten zu berechnende virtuelle Formänderungsarbeit, δA_V die virtuelle Arbeit aller (inneren und äußeren) volumenhaft verteilt angreifenden Kräfte \mathbf{f}_V und δA_A die virtuelle Arbeit der vorgegebenen äußeren, auf der Körperoberfläche flächenhaft verteilt angreifenden Kräfte \mathbf{f}_A .

(4.1.2) gilt unabhängig von den Materialeigenschaften und ist in der dargestellten EULER'schen Form, bei der alle Größen auf die aktuelle Basis \mathbf{g}_{α} bezogen sind, auch für größere Formänderungen gültig.

4.2. Update-Lagrange'sche Formulierung

Das mit (4.1.2) formulierte Prinzip der virtuellen Arbeit fordert das Gleichgewicht von virtueller Formänderungsarbeit und virtueller Arbeit der am verformten Körper angreifenden Kräfte. Grundlegende Schwierigkeit bei der Anwendung von (4.1.2) ist die Tatsache, daß sich sowohl der CAUCHY-Spannungstensor als auch die infinitesimalen Verzerrungskomponenten auf die noch unbekannte deformierte Konfiguration beziehen und die Integration über das ebenfalls unbekannte aktuelle Körpervolumen bzw. die -fläche auszuführen ist.

Diese Schwierigkeit läßt sich durch den Übergang auf eine inkrementelle Formulierung des Problems umgehen. Im Hinblick auf eine solche sind zwischen den Ausgangszustand 0B und die verformte Endlage B die Zwischenlagen 1B und 2B (Abb. 4.1) vor und nach einem endlichen Verschiebungsincrement Δu eingeführt. Die Methode geht nun davon aus, daß die Bewegung des Körpers vom Ausgangszustand bis in die Lage 1B bereits berechnet und die Nachbarkonfiguration 2B gesucht ist. Diesen Vorgang führen wir so lange fort, bis die Endlage und damit die Gesamtverformung erreicht ist.

Wie MALVERN [36] und RAMM [37] zeigen, lassen sich alle Größen der Gleichung (4.1.2) auf jede bereits berechnete Gleichgewichtslage beziehen und die angesprochenen Schwierigkeiten bei der Integration umgehen. Bei der in dieser Arbeit verwendeten mitgehenden (updated)-Lagrange-Formulierung (UL), die ursprünglich auf Arbeiten von YAGHMAI und POPOV [38] zurückgeht, sind alle Zustandsgrößen und kinematischen Variablen auf die Konfiguration 1B vor dem Inkrement bezogen, also auf einen jeweils anzugleichenden Bezugszustand.

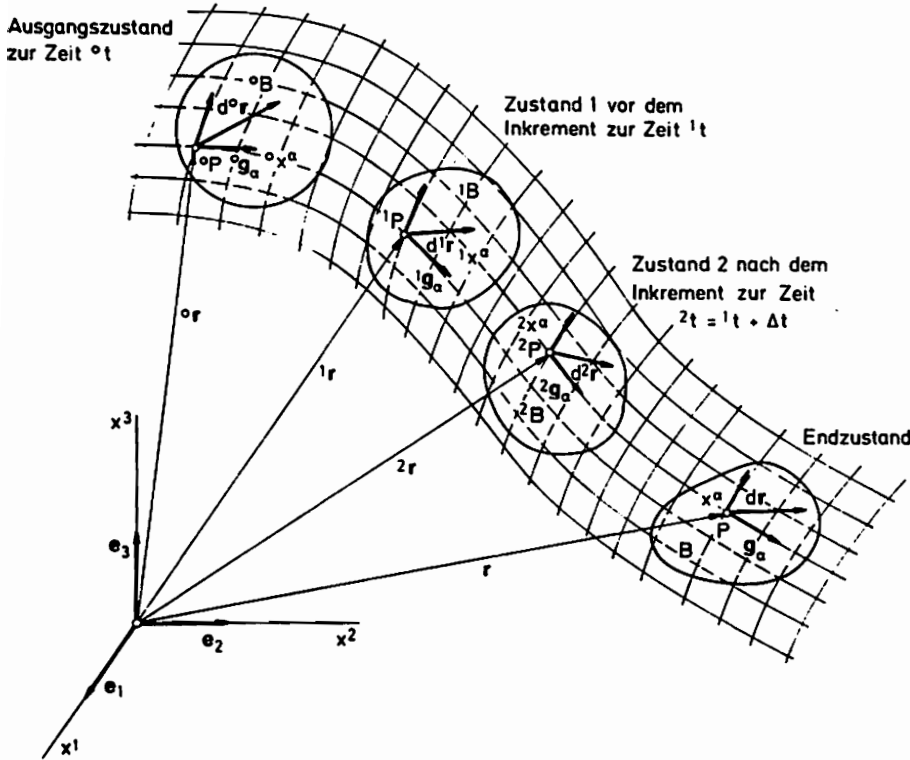


Abb. 4.1. Verformungsprozeß

Zur Unterscheidung einzelner Konfigurationen verwenden wir im folgenden linke Super- und Subscripts. Größen, die eine Lage kennzeichnen (Volumen, Flächen, Koordinaten, Verschiebungen aus der Anfangslage...) oder in dieser wirken (Spannungen, Verzerrungen...), werden mit einem oberen linken Index versehen. Ist darüber hinaus eine Bezugskonfiguration zu definieren, erscheint diese als linker Fußzeiger, z. B.

$$\begin{matrix} m_A. & \text{"Wirkungszustand"} \\ n & \text{Bezugszustand} \end{matrix} \quad (4.2.1)$$

Entsprechend kennzeichnen wir auch die Raumableitungen, z. B.

$$\frac{\partial^m a}{\partial n_x^\beta} = m_a^\alpha |_\beta n_g^\alpha. \quad (4.2.2)$$

Inkrememente hingegen werden ohne Superskript angegeben.

Beziehen wir alle Größen in (4.1.2) auf die Referenzkonfiguration 1B und benutzen die beschriebene Notation, ergibt sich mit

$$0 = - \int_{{}^1V} ({}^2_1\tau \cdots \delta_{{}^1E}) d^1V + \int_{{}^1V} ({}^2_\rho \cdot {}^2f_V \cdot \delta u) d^1V + \int_{{}^1A} ({}^2f_A \cdot \delta u) d^1A \quad (4.2.3)$$

die UL-Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit. Die hierbei erforderlichen Umformungen (vgl. [39]) umfassen die Definition eines Spannungsg- und eines ihm energetisch konjugierten Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} {}^2_1\tau &= J \cdot {}^2_1F^{-1} \cdot {}^2\sigma \cdot ({}^2_1F^{-1})^T \\ &= \frac{{}^1\rho}{2} \frac{\partial {}^1x^\alpha}{\partial {}^2x^\rho} \cdot {}^2\sigma^{\rho\mu} \cdot \frac{\partial {}^1x^\beta}{\partial {}^2x^\mu} \cdot {}^1g_\alpha \cdot {}^1g_\beta = {}^2_1\tau^{\alpha\beta} \cdot {}^1g_\alpha \cdot {}^1g_\beta \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} {}^2_1E &= \frac{1}{2} \{ {}^2_1C_{\alpha\beta} - {}^1g_{\alpha\beta} \} \cdot {}^1g^{\alpha 1} \cdot {}^1g^\beta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial {}^2x^\rho}{\partial {}^2x^\alpha} \cdot {}^2g_{\rho\mu} \cdot \frac{\partial {}^1x^\mu}{\partial {}^2x^\beta} - {}^1g_{\alpha\beta} \right\} \cdot {}^1g^{\alpha 1} \cdot {}^1g^\beta \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

in Analogie zum 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungs- bzw. GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor.

Die Spannungen ${}^2_1\tau$ und die Verzerrungen 2_1E sind zunächst unbekannt. Die Einführung des inkrementellen Verschiebungsfelds (Abb. 4.2)

$${}^2r = {}^1r + \Delta u = {}^0r + {}^1u + \Delta u = {}^0r + {}^2u \quad (4.2.6)$$

mit den Gesamtverschiebungen 1u , 2u und dem Verschiebungsinkrement Δu für die Verschiebung von der Konfiguration 1 in 2, liefert aus (4.2.5) den inkrementellen Verzerrungstensor

$${}^2_1\mathbf{E} = {}_1\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} \{ {}_1\Delta u_\alpha|_\beta + {}_1\Delta u_\beta|_\alpha + {}_1\Delta u_\rho|_\alpha {}_1\Delta u^\rho|_\beta \} {}^1g^\alpha {}^1g^\beta \quad (4.2.7)$$

mit den ko(kontra)varianten Ableitungen des Verschiebungskrements Δu bezüglich der Koordinaten ${}^1x^\beta$ der Referenzkonfiguration 1B . Durch die Aufspaltung

$${}_1\Delta\mathbf{E} = {}_1\Delta\mathbf{E}_1 + {}_1\Delta\mathbf{E}_{nl} \quad (4.2.8)$$

$${}_1\Delta\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} \{ {}_1\Delta u_\alpha|_\beta + {}_1\Delta u_\beta|_\alpha \} {}^1g^\alpha {}^1g^\beta \quad (4.2.9)$$

$${}_1\Delta\mathbf{E}_{nl} = \frac{1}{2} \{ {}_1\Delta u_\rho|_\alpha {}_1\Delta u^\rho|_\beta \} {}^1g^\alpha {}^1g^\beta \quad (4.2.10)$$

erhalten wir einen bezüglich des Verschiebungskrements linearen und nicht-linearen Anteil.

Ausgehend vom (laut Voraussetzung) bekannten Zustand 1B spalten wir vom Spannungstensor ${}^2_1\boldsymbol{\tau}$ in Analogie zu Gleichung (4.2.6) den inkrementellen Spannungszuwachs ${}_1\Delta\boldsymbol{\tau}$ (2. PIOLA-KIRCHHOFF-Inkrement-Tensor bezogen auf 1B) ab

$${}^2_1\boldsymbol{\tau} = {}^1_1\boldsymbol{\tau} + {}_1\Delta\boldsymbol{\tau} \quad (4.2.11)$$

und erhalten, da ${}^1_1\boldsymbol{\tau}$ mit der bereits berechneten CAUCHY-Spannungen ${}^1_1\boldsymbol{\sigma}$ identisch ist

$${}^2_1\boldsymbol{\tau} = {}^1_1\boldsymbol{\sigma} + {}_1\Delta\boldsymbol{\tau}. \quad (4.2.12)$$

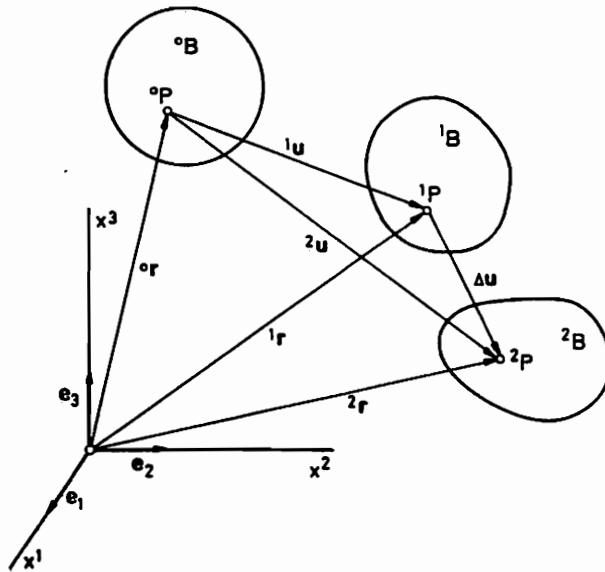


Abb. 4.2.
inkrementeller
Verschiebungszustand

Setzen wir die Inkremente (4.2.9), (4.2.10) und (4.2.12) in Gleichung (4.2.3) des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ein, folgt

$$\int_{1V} ({}^1\Delta\tau \cdots \delta_1\Delta E) d^1V + \int_{1V} ({}^1\sigma \cdots \delta_1\Delta E_{nl}) d^1V$$

$$= \int_{1V} ({}^2\rho \cdot {}^2f_V \cdot \delta u) d^1V + \int_{1A} ({}^2f_A \cdot \delta u) d^1A - \int_{1V} ({}^1\sigma \cdots \delta_1\Delta E_1) d^1V. \quad (4.2.13)$$

Diese Basisgleichung der UL-Formulierung stellt das Prinzip der virtuellen Arbeit exakt ohne Näherung dar. Eine Beschränkung auf kleine Verzerrungen, Verschiebungen oder Drehungen ist nicht gegeben, auch wenn dies im Schrifttum manchmal behauptet wird [40, 41].

4.3. Linearisierung der Update-Lagrange Bewegungsgleichung

Die für das spezielle mechanische Problem zu lösende Integralgleichung (4.2.13) ist in den unbekanntem Verschiebungsincrementen Δu des Kontinuums formuliert.

Definieren wir die inkrementelle konstitutive Beziehung

$${}_1\Delta\tau = {}_1\Delta C \cdot \cdot {}_1\Delta E, \quad (4.3.1)$$

setzen diese in (4.2.13) ein und machen zur numerischen Berechnung einen Diskretisierungsansatz, würde dieser zu einem algebraischen Gleichungssystem dritter Ordnung in den Verschiebungsinkrementen führen, dessen direkte Lösung im allgemeinen nicht möglich ist.

Zur numerischen Behandlung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme gibt es unterschiedliche Verfahren, siehe z. B. RAMM [37]. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir eine kombinierte inkrementelle und iterative Vorgehensweise, für die wir (4.2.13) innerhalb jedes Inkrements linearisieren. Bei einer Diskretisierung erhalten wir dann ein lineares algebraisches Gleichungssystem, das uns eine Näherungslösung für das Verschiebungsinkrement liefert. Durch eine ggf. nachgeschaltete Iteration wird der aus der Linearisierung resultierende Fehler kompensiert und die berechnete Näherungslösung verbessert.

Setzen wir die Linearisierung

$${}_1\Delta E \approx {}_1\Delta E_1 \quad (4.3.2)$$

zusammen mit der konstitutiven Beziehung

$${}_1\Delta\tau = {}_1\Delta C \cdot \cdot {}_1\Delta E_1 \quad (4.3.3)$$

in (4.2.13) ein, ergibt sich die linearisierte UL-Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} & \int_{{}^1V} ({}_1\Delta C \cdot \cdot {}_1\Delta E_1 \cdot \cdot \delta_1\Delta E_1) d^1v + \int_{{}^1V} ({}_1\sigma \cdot \cdot \delta_1\Delta E_{nl}) d^1v \\ & = \int_{{}^1V} ({}^2\rho \cdot {}^2f_V \cdot \delta\Delta u) d^1v + \int_{{}^1A} ({}^2f_A \cdot \delta\Delta u) d^1A - \int_{{}^1V} ({}_1\sigma \cdot \cdot \delta_1\Delta E_1) d^1v. \quad (4.3.4) \end{aligned}$$

(4.3.4) ist Ausgangsgleichung für die Diskretisierung im Sinne der Methode der finiten Elemente (siehe Abschnitt 5.1). Diese wird zur Berechnung eines genäherten Inkrements Δu der Verschiebungen des jeweiligen Lastinkrements eingesetzt. Die Verschiebungsapproximation 2u der Konfiguration 2B erhalten wir durch Addition des Verschiebungsincrements Δu zu den Verschiebungen 1u . Die Berechnung der aus den Systemverschiebungen 2u resultierenden CAUCHY-Spannungen ${}^2\sigma$ erfolgt mittels numerischer Integration des inkrementellen elasto-plastischen Stoffgesetzes (siehe Abschnitt 5.2). Die Näherungswerte für Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Systems werden anschließend durch Gleichgewichtsiteration innerhalb des Lastinkrements verbessert (siehe Abschnitt 4.4).

In vielen Anwendungen mit großen Verschiebungen und ebensolchen Verzerrungen sind die äußeren Lasten vom jeweiligen Verschiebungszustand, also von den noch unbekanntem Systemverschiebungen, abhängig. Diese Abhängigkeit erfaßt (4.3.4) mit hinreichender Genauigkeit, wenn man die zum Ende des Inkrements gehörende Lastintensität benutzt und die Verformungsabhängigkeit der äußeren Belastung bei der nachgeschalteten Iteration berücksichtigt.

Die in Gleichung (4.3.1) postulierte Einführung des inkrementellen konstitutiven Tensors ${}^1\Delta C$ hat eine weitere, über die Linearisierung (4.3.2) hinausgehende Näherung zur Folge. Wegen des ungleichen Bezugszustands läßt sich ${}^1\Delta C$ lediglich näherungsweise durch Übernahme der Werte des konstitutiven Tensors C (Gleichung 3.2.4)

$${}^1\Delta C \approx C \quad (4.3.5)$$

(Sekantenverfahren) ermitteln. Wie die Linearisierung wird diese Näherung ebenfalls bei der Iteration durch ständige Anpassung an die aktuellen Verhältnisse ausgeglichen.

4.4 Gleichgewichtsiteration

Haben wir aus der linearisierten UL-Basisgleichung (4.3.4) des Prinzips der virtuellen Arbeit die approximierten Systemverschiebungen 2u und daraus mittels der konstitutiven Beziehungen die CAUCHY-Spannungen ${}^2\sigma$ der

Konfiguration 2_B berechnet, können wir den aus der Linearisierung und dem genäherten Werkstoffverhalten resultierenden Fehler bestimmen.

Hierzu bilden wir mit der Gleichgewichtsbedingung (4.1.2) die Differenz der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte und der geleisteten Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned} \text{Fehler } ({}^2_u) &= \int_{{}^2_V} ({}^2_\rho \cdot {}^2_{f_V} \cdot \delta {}^2_u) d{}^2_V + \int_{{}^2_A} ({}^2_{f_A} \cdot \delta {}^2_u) d{}^2_A \\ &- \int_{{}^2_V} ({}^2_\sigma \cdot \text{Grad } (\delta {}^2_u)) d{}^2_V. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Dieser Fehler wird als äußere "Ungleichgewichts"-Arbeit ("out-of-balance-virtual-work") angesehen, die durch eine zusätzliche Systemverschiebung, einschließlich der notwendigen Anpassung der Materialkonstanten und der verformungsabhängigen Lasten, auszugleichen ist. Bezeichnen wir in (4.4.1) die aus der genäherten Systemverschiebung 2_u berechneten äußeren und inneren Kraftresultierenden mit 2_r und 2_f , fordert diese Betrachtungsweise die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\text{Fehler } ({}^2_u) = {}^2_r ({}^2_u) - {}^2_f ({}^2_u) = 0. \quad (4.4.2)$$

Zur Lösung solch nichtlinearer Gleichungen werden z. B. von PREUSS [42] verschiedene Verfahren aufgezeigt. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir eine iterative Vorgehensweise mit dem Ablaufschema

out-of-balance-work	$\Delta r^{(i-1)} = {}^2_r ({}^2_u^{(i-1)}) - {}^2_f ({}^2_u^{(i-1)})$
Verschiebungsinkrement	$\Delta u^{(i)} = ({}^2_K^{(i-1)})^{-1} \cdot \Delta r^{(i-1)}$
Verschiebungsapproximation	${}^2_u^{(i)} = {}^2_u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}$

(4.4.3)

und den Anfangsbedingungen

$${}^2_{\mathbf{u}}(0) = {}^1_{\mathbf{u}}, \quad {}^2_{\mathbf{r}} ({}^2_{\mathbf{u}}(0)) = {}^1_{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad {}^2_{\mathbf{f}} ({}^2_{\mathbf{u}}(0)) = {}^1_{\mathbf{f}}.$$

Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis sich der Fehler $\Delta \mathbf{r}^{(i-1)}$ oder das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$ innerhalb einer vorgegebenen Toleranzschranke befindet. Eine Auswahl zweckdienlicher Konvergenzkriterien ist von BATHE in [39] zusammengestellt. Von einigen Erfahrungen mit verschiedenen Toleranzbereichen berichten BATHE / CIMENTO [43] und CHROSCIELEWSKI / NOLTE [44].

Die bislang (in der FEM-Anwendung) meistverbreiteten Iterationsverfahren arbeiten nach (4.4.2) und sind Formen der NEWTON-RAPHSON-Iteration [43, 45-50]. Für die in dieser Arbeit verwendete UL-Formulierung (4.3.4) lautet (vgl. [37]) die wiederholt zu lösende Gleichung des Standard-NEWTON-RAPHSON-Iterationsverfahrens (NR)

$$\begin{aligned} & \int_{2_{\mathbf{V}}(i-1)} ({}_{i-1}^2 \Delta \mathbf{C}^{(i-1)} \dots {}_{i-1}^2 \Delta \mathbf{E}_1^{(i)} \dots \delta_{i-1} \Delta \mathbf{E}_1^{(i)}) d^2_{\mathbf{V}}(i-1) \\ & + \int_{2_{\mathbf{V}}(i-1)} ({}_{i-1}^2 \sigma^{(i-1)} \dots \delta_{i-1} \Delta \mathbf{E}_{nl}^{(i)}) d^2_{\mathbf{V}}(i-1) \\ & = \int_{2_{\mathbf{V}}(i-1)} ({}^2_{\mathbf{p}}(i-1) \cdot {}^2_{\mathbf{f}_V} \cdot \delta \Delta \mathbf{u}^{(i-1)}) d^2_{\mathbf{V}}(i-1) + \int_{2_{\mathbf{V}}(i-1)} ({}^2_{\mathbf{f}_A} \cdot \delta \Delta \mathbf{u}^{(i-1)}) d^2_A(i-1) \\ & - \int_{2_{\mathbf{V}}(i-1)} ({}^2_{\sigma}(i-1) \dots \text{Grad} (\delta^2_{\mathbf{u}}(i-1))) d^2_{\mathbf{V}}(i-1), \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

$i = 1, 2, 3 \dots$

die für $i = 1$ der Gleichgewichtsbedingung (4.3.4) entspricht. Erheblicher Aufwand entsteht hier durch die in jedem Iterationsschritt zu berechnende linke Seite (Tangenten-Steifigkeits- oder Koeffizientenmatrix).

Beim sogenannten modifizierten Verfahren nach NEWTON-RAPHSON (MNR) wird dieser Aufwand entscheidend reduziert, indem wir die Werte des Zustands 1_B während des ganzen Inkrementschrittes beibehalten

$$\begin{aligned}
 & \int_{{}^1_V} ({}^1_{\Delta C} \cdot \cdot {}^1_{\Delta E_1}^{(i)} \cdot \cdot \delta_{{}^1_{\Delta E_1}}^{(i)}) d^1_V + \int_{{}^1_V} ({}^1_{\sigma} \cdot \cdot \delta_{{}^1_{\Delta E_{nl}}}^{(i)}) d^1_V \\
 & = \int_{{}^2_V(i-1)} ({}^2_{f_p} \cdot \delta \Delta u^{(i-1)}) d^2_V(i-1) + \int_{{}^2_V(i-1)} ({}^2_{f_A} \cdot \delta \Delta u^{(i-1)}) d^2_A(i-1) \\
 & - \int_{{}^2_V(i-1)} ({}^2_{\sigma} \cdot \cdot \text{Grad} (\delta \Delta u^{(i-1)})) d^2_V(i-1). \tag{4.4.5} \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, 3 \dots
 \end{aligned}$$

Im allgemeinen steigt jedoch bei diesem modifizierten Verfahren die Zahl der Iterationsschritte gegenüber dem Standardverfahren an.

Bei Systemen mit starken Materialnichtlinearitäten oder mit flachen Bereichen des Last-Verschiebungs-Diagramms zeigen beide Methoden selbst bei kleinen Inkrementschritten numerische Instabilitäten, die bei der MNR bis zur Divergenz reichen. Abhilfe schafft hier mitunter eine Konvergenzbeschleunigung, z. B. nach dem Verfahren von AITKEN [43]. Neuere Strategien sowie zugehörige Steueralgorithmen sind in [44] mit umfangreichen numerischen Untersuchungen zusammengestellt.

Als Alternative zu Formen der NEWTON'schen Iterationen wurden Methoden mit Matrix-Umrechnung entwickelt [51, 52], die ebenfalls dem Iterationsschema (4.4.3) folgen. Bei diesen unter dem Begriff quasi-NEWTON'sche-Methoden bekannten Verfahren wird die Koeffizientenmatrix 2_K (genauer gesagt ihre Inverse) im Bedarfsfall in der Weise neu aufgestellt, daß wir für den aktuellen Verschiebungszustand ${}^2_u^{(i)}$ wieder eine Sekantennäherung der Last-Verschiebungsfunktion erhalten. Eine ausführliche Herleitung der aus der Optimierung stammenden und seit kurzer Zeit mit gutem Erfolg [53] in der FEM-Analyse eingesetzten BROYDEN-FLETSCHER-GOLDFARB-SHANNO'schen oder kurz

BFGS-Methode ist bei MATTHIES und STRANG [54] zu finden.

Vor dem Start des Iterationszyklus nach dieser Methode bestimmen wir mit (4.3.4) die Anfangs-Koeffizientenmatrix 1K sowie einen ersten Näherungswert $\Delta u^{(0)}$ für das Verschiebungsincrement. Die zur Berechnung der Systemverschiebung ${}^2u^{(i)}$ und der Sekantenmatrix ${}^2K^{(i-1)}$ in der i-ten Iteration ($i = 1, 2, 3 \dots$) anzuwendenden Gleichungen lauten:

$${}^2u^{(i)} = {}^2u^{(i-1)} + \beta \Delta u^{(i)}, \quad {}^2u^{(0)} = {}^1u. \quad (4.4.6)$$

Der skalare Faktor β wird durch einen Line-Search-Algorithmus derart bestimmt, daß die gemäß (4.4.1) berechnete "Ungleichgewichts"-Arbeit

$$\begin{aligned} \Delta r^{(i)} &= {}^2r^{(i)} - {}^2f^{(i)} \\ &= \int ({}^2\rho^{(i)} \cdot {}^2f_V \cdot \delta \Delta u^{(i)}) d^2V^{(i)} + \int ({}^2f_A \cdot \delta \Delta u^{(i)}) d^2A^{(i)} \\ &\quad {}^2V^{(i)} \qquad \qquad \qquad {}^2V^{(i)} \\ &- \int ({}^2\sigma^{(i)} \cdot \text{Grad}(\delta \Delta u^{(i)})) d^2V^{(i)} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

minimal wird. Liegt dieser Fehler außerhalb des vorgegebenen Toleranzbereichs, ermitteln wir aus dem Verschiebungszuwachs

$$\delta^{(i)} = {}^2u^{(i)} - {}^2u^{(i-1)} \quad (4.4.8)$$

und dem Zuwachs der "out-of-balance"-Arbeit

$$\gamma^{(i)} = \Delta r^{(i-1)} - \Delta r^{(i)} \quad (4.4.9)$$

die Korrekturvektoren

$$\mathbf{v}^{(i)} = -\sqrt{\frac{\beta \delta^{(i)T} \cdot \gamma^{(i)}}{\delta^{(i)T} \cdot \mathbf{r}^{(i-1)}}} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(i-1)} - \gamma^{(i)} \quad (4.4.10)$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = \frac{\delta^{(i)}}{\delta^{(i)T} \cdot \gamma^{(i)}} \quad (4.4.11)$$

Die korrigierte Koeffizientenmatrix

$$({}^2\mathbf{K}^{(i)})^{-1} = (1 + \mathbf{w}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)T}) \cdot ({}^2\mathbf{K}^{(i-1)})^{-1} \cdot (1 + \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)T})$$

$$\text{mit } ({}^2\mathbf{K}^{(0)})^{-1} = ({}^1\mathbf{K})^{-1} \quad (4.4.12)$$

muß nicht explizit aufgestellt werden. Berücksichtigen wir ihre Struktur, läßt sich das neue Verschiebungsinkrement gemäß (4.4.3) direkt mit den Korrekturvektoren berechnen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^{(i)} &= (1 + \mathbf{w}^{(i-1)} \cdot \mathbf{v}^{(i-1)T}) \cdot (1 + \mathbf{w}^{(i-2)} \cdot \mathbf{v}^{(i-2)T}) \cdot \dots \\ &\dots \cdot (1 + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)T}) \cdot ({}^1\mathbf{K})^{-1} \cdot (1 + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{w}^{(1)T}) \cdot \dots \\ &\dots \cdot (1 + \mathbf{v}^{(i-2)} \cdot \mathbf{w}^{(i-2)T}) \cdot (1 + \mathbf{v}^{(i-1)} \cdot \mathbf{w}^{(i-1)T}) \cdot \Delta \mathbf{r}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

dabei sind die in (4.4.13) enthaltenen Skalarmultiplikationen numerisch besonders effektiv.

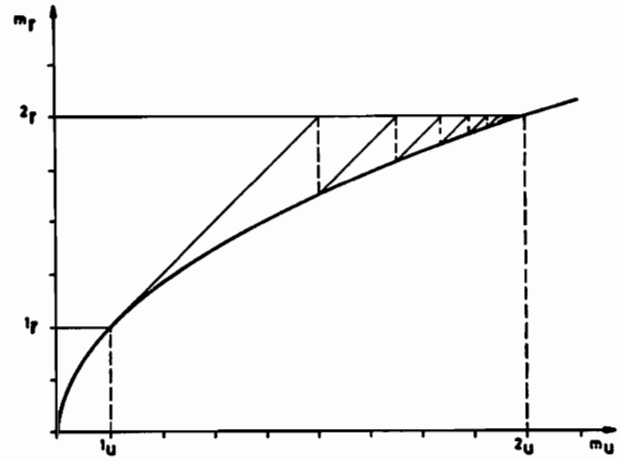
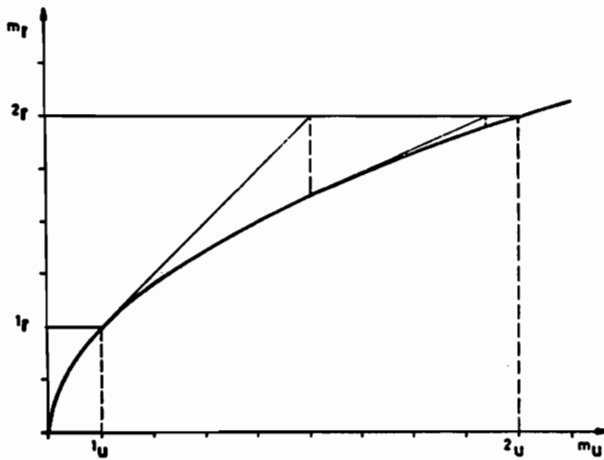


Abb. 4.3. Standard-Newton-Raphson (NR)

Abb. 4.4. modifiziertes NR (MNR)

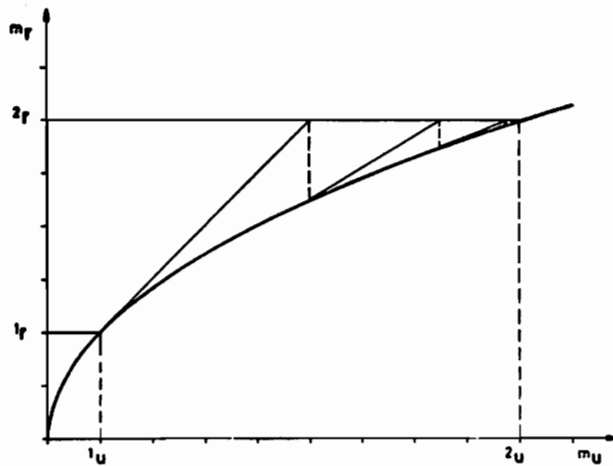


Abb. 4.5. BFGS

In den Abbildungen (4.3 - 4.5) ist abschließend das Konvergenzverhalten der angesprochenen Iterationsschemen für ein aus [39] bekanntes System mit einem Freiheitsgrad dargestellt. Für dieses System sei

$$\Delta u^{(i)} = (2_K^{(i-1)})^{-1} \{ (6-2|\sqrt{2_u^{(i-1)}}|) \},$$

$$2_u^{(i)} = 2_u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}$$

$$\text{mit } (2_K^{(i-1)})^{-1} = |\sqrt{2_u^{(i-1)}}|, \quad 2_u^{(0)} = 1, \quad 2_r = 10.$$

Die in den einzelnen Iterationsschritten erhaltenen Werte für die Koeffizientenmatrix und die Systemverschiebungen sind in Tabelle 4.1. erfaßt.

Tabelle 4.1: Beispiel zum Konvergenzverhalten

i	NR		MNR		BFGS ($\beta=1$)	
	$(z_K^{(i-1)})^{-1}$	$z_u^{(i)}$	$(z_K^{(i-1)})^{-1}$	$z_u^{(i)}$	$(z_K^{(i-1)})^{-1}$	$z_u^{(i)}$
1	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000
2	2.2360	8.4146	1.0000	6.5279	1.6180	7.4721
3	2.9011	8.9902	1.0000	7.4179	2.4848	8.7964
4	2.9984	9.0000	1.0000	7.9708	2.8497	8.9909
5	-	-	1.0000	8.3242	2.9822	8.9999
6			1.0000	8.5539	2.9992	9.0000
7			1.0000	8.7045	-	-
.			.	.		
.			.	.		
.			.	.		
28			1.0000	8.9999		
29			1.0000	9.0000		

5. Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente

Die analytischen Betrachtungen der vorausgehenden Abschnitte führten auf Systeme partieller Differentialgleichungen mit Rand- und Anfangsbedingungen, die für beliebige Probleme nicht mehr geschlossen lösbar sind. Aus diesem Grund suchen wir eine numerische Berechnungstechnik, mit der wir eine Näherungslösung erhalten. Als Verfahren bietet sich hier die Finite-Element-Methode (FEM) an, die in den letzten zwei Jahrzehnten mit der fortschreitenden Entwicklung der Rechenanlagen an Bedeutung gewonnen und sich in allen Bereichen der Ingenieurwissenschaften verbreitet hat.

Über die Grundlagen der Finite-Element-Methode als bereichsweises RITZ-Verfahren ist ein reichhaltiges Literaturangebot vorhanden. Knappe Beschreibungen dieser Methode werden in den klassischen Büchern von DESAI / ABEL [55], ZIENKIEWICZ [56] und BATHE / WILSON [57] gegeben. Eine Übersicht zur Anwendung mit zahlreichen Schrifttumshinweisen finden wir in den Werken von GALLAGHER [58] und ARGYRIS / MLEJNEK [59], eine Vielzahl von Aufsätzen ist in Tagungsberichten [60-62] zusammengefaßt. In den letzten Jahren geht man immer mehr zu kontinuumsmechanischen Formulierungen über. Hierzu liefern wohl die Monographien von ODEN [63] und BATHE [39] die ausführlichsten Darstellungen. Eine Anwendung im Bereich der Plastizität wurde z. B. von OWEN / HINTON [64] eingehend diskutiert. Ferner sind die Bücher von DANKERT [65], WALLER / KRINGS [66] und SCHWARZ [67] zu erwähnen, die sich in erster Linie mit den numerischen Problemen auseinandersetzen, die bei der Anwendung der FEM auf mechanische Systeme auftreten.

In diesem Kapitel stellen wir ein finites Stab-Element vor, das mit möglichst geringem Aufwand bezüglich Speicherplatzbedarf und Freiheitsgraden die zu behandelnden komplexen geometrisch und physikalisch nichtlinearen Probleme hinreichend genau beschreiben kann.

5.1. Methode der finiten Elemente

Beim Verfahren der finiten Elemente diskretisieren wir das Problem, indem wir den Körper in einfache Teilkörper endlicher Größe, die finiten Elemente, zerlegen. Für jedes dieser Elemente ersetzen wir die kontinuierlichen Ver-

schiebungsfelder durch geeignete Polynomansätze, die allen problemspezifischen Stetigkeitsanforderungen gerecht werden. Diese Interpolationsfunktionen werden in Abhängigkeit von der Knotenvariablen des Elements als Linearkombination der sogenannten Formfunktion mit den Knotenvariablen als Koeffizienten ausgedrückt. Setzen wir diese über die Elementverschiebungen gemachten Annahmen in das Prinzip der virtuellen Arbeit ein, ergibt die Superposition der Einzelemente die Gleichgewichtsbedingung des Gesamtkörpers als Summe von Integrationen, die über das Volumen bzw. die Oberfläche der Elemente auszuführen sind. Da die Gleichgewichtsbedingung für jede beliebige mit den kinematischen Restriktionen verträgliche virtuelle Änderung der Knotenvariablen erfüllt sein muß, folgt daraus ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Elementvariablen.

Es ist offensichtlich, daß es für viele Probleme effektiver ist, jedes der Einzelintegrale der Gleichgewichtsbedingung vorab bezüglich der lokalen Elementbasis zu berechnen und die resultierenden FEM-Matrizen vor dem Zusammenbau zum Gesamtausdruck auf die globale Basis zu transformieren. Auf diese Weise können beliebige Elementmatrizen einfach berechnet werden.

Da die Superposition der Elementmatrizen zum Gesamtsystem mittels Standardprozeduren erfolgt, werden im folgenden lediglich die zum Einzelement gehörigen FEM-Matrizen sowie die Vorschriften zu deren Transformation auf die globale Basis dargestellt. Auf eine besondere Kennzeichnung als Elementmatrizen bzw. -vektoren im Unterschied zu den entsprechenden des Gesamtsystems wird daher verzichtet.

Die FEM-Matrizen bezüglich der lokalen Elementbasis ${}^1\mathbf{g}^\alpha$ erhalten wir, indem wir alle statischen und kinematischen Variablen auf diese Basis beziehen. Um die Bewegung des Elements zu beschreiben, machen wir für das inkrementelle Verschiebungsfeld $\Delta\mathbf{u}$ innerhalb des Elements den Polynomansatz

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_\alpha \quad {}^1\mathbf{g}^\alpha = \left(\sum_{i=1}^N h_\alpha^i u_i^e \right) \quad {}^1\mathbf{g}^\alpha \quad (5.1.1)$$

in Abhängigkeit der Freiheitsgrade u_i^e der N Knotenpunkte des Elements und den Verschiebungs-Interpolationsfunktionen h_α^i . Setzen wir diesen Diskretisierungsansatz in die Basisgleichung (4.3.4) ein, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$({}^1\mathbf{K}_l + {}^1\mathbf{K}_{nl}) \cdot \mathbf{u} = {}^2\mathbf{r} - {}^1\mathbf{f} \quad (5.1.2)$$

mit der inkrementellen Steifigkeitsmatrix ${}^1\mathbf{K}_l$ bei linearer Verzerrung, ${}^1\mathbf{K}_{nl}$ bei nichtlinearer Verzerrung (infolge Geometrie oder Anfangsspannungen), dem aus den CAUCHY-Elementspannungen ${}^1\boldsymbol{\sigma}$ resultierenden Knotenlastvektor ${}^1\mathbf{f}$ und dem Vektor ${}^2\mathbf{r}$ der äußeren Knotenpunktlasten der Konfiguration ${}^2\mathbf{B}$ zur Berechnung des Vektors \mathbf{u} der inkrementellen Knotenverschiebungen. Die Elementmatrizen in Gleichung (5.1.2) ermitteln wir aus dem Verschiebungsansatz für das spezielle Element. Tabelle 5.1 faßt alle hierzu notwendigen Berechnungen zusammen, bei denen wir folgende Notation benutzen

- \mathbf{H}^S, \mathbf{H} = Oberflächen- und Volumen-Verschiebungs-Interpolations-Matrix
- ${}^1\mathbf{B}_l, {}^1\mathbf{B}_{nl}$ = lineare und nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix
- ${}^1\Delta\mathbf{C}$ = inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Materialeigenschaftsmatrix
- ${}^1\boldsymbol{\sigma}, {}^1\mathbf{s}$ = Matrix und Vektor der CAUCHY-Spannungen
- ${}^1\mathbf{f}_A, {}^1\mathbf{f}_V$ = Oberflächen- und Volumenkraftvektor
- \mathbf{u} = Vektor der Inkremente der Knotenverschiebungen

Tabelle 5.1: Element-Matrizen

Integral	Matrixauswertung
$\int_{^1V} ({}^1\Delta C \cdots {}^1\Delta E_1 \cdots \delta_1 \Delta E_1) d^1v$	${}^1K_1 \cdot \mathbf{u} = \left(\int_{^1V} ({}^1B_1^T \cdot {}^1\Delta C \cdot {}^1B_1) d^1v \right) \cdot \mathbf{u}$
$\int_{^1V} ({}^1\sigma \cdots \delta_1 \Delta E_{nl}) d^1v$	${}^1K_{nl} \cdot \mathbf{u} = \left(\int_{^1V} ({}^1B_{nl}^T \cdot {}^1\sigma \cdot {}^1B_{nl}) d^1v \right) \cdot \mathbf{u}$
$\int_{^1V} ({}^1\sigma \cdots \delta_1 \Delta E_1) d^1v$	${}^1\mathbf{f} = \int_{^1V} ({}^1B_1^T \cdot {}^1\mathbf{s}) d^1v$
$\int_{^1V} ({}^2\rho \cdot {}^2\mathbf{f}_V \cdot \delta \Delta u) d^1v$	${}^2\mathbf{r} = \int_{^1V} ({}^1\rho \mathbf{H}^T \cdot {}^1\mathbf{f}_V) d^1v$
$+ \int_{^1A} ({}^2\mathbf{f}_A \cdot \delta \Delta u) d^1A$	$+ \int_{^1A} ({}^1\mathbf{H}^{ST} \cdot {}^1\mathbf{f}_A) d^1A$

mit

$$H = \begin{vmatrix} h_1^1 & h_1^2 & \dots & h_1^{i=N} \\ h_2^1 & h_2^2 & \dots & h_2^{i=N} \\ h_3^1 & h_3^2 & \dots & h_3^{i=N} \end{vmatrix}$$

$${}^1\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} h_1^1|_1 & h_1^2|_1 & \dots & h_1^{i=N}|_1 \\ h_2^1|_2 & h_2^2|_2 & \dots & h_2^{i=N}|_2 \\ h_3^1|_3 & h_3^2|_3 & \dots & h_3^{i=N}|_3 \\ (h_1^1|_2+h_2^1|_1) & (h_1^2|_2+h_2^2|_1) & \dots & (h_1^{i=N}|_2+h_2^{i=N}|_1) \\ (h_1^1|_3+h_3^1|_1) & (h_1^2|_3+h_3^2|_1) & \dots & (h_1^{i=N}|_3+h_3^{i=N}|_1) \\ (h_2^1|_3+h_3^1|_2) & (h_2^2|_3+h_3^2|_2) & \dots & (h_2^{i=N}|_3+h_3^{i=N}|_2) \end{vmatrix}$$

$${}^1\mathbf{B}_{n1} = \begin{vmatrix} h_1^1|_1 & h_1^2|_1 & \dots & h_1^{i=N}|_1 \\ h_2^1|_1 & h_2^2|_1 & \dots & h_2^{i=N}|_1 \\ h_3^1|_1 & h_3^2|_1 & \dots & h_3^{i=N}|_1 \\ h_1^1|_2 & h_1^2|_2 & \dots & h_1^{i=N}|_2 \\ h_2^1|_2 & h_2^2|_2 & \dots & h_2^{i=N}|_2 \\ h_3^1|_2 & h_3^2|_2 & \dots & h_3^{i=N}|_2 \\ h_1^1|_3 & h_1^2|_3 & \dots & h_1^{i=N}|_3 \\ h_2^1|_3 & h_2^2|_3 & \dots & h_2^{i=N}|_3 \\ h_3^1|_3 & h_3^2|_3 & \dots & h_3^{i=N}|_3 \end{vmatrix}$$

$${}^1_{\Delta C} = 0.5 \begin{vmatrix} 2_1\Delta C^{1111} & 2_1\Delta C^{1122} & 2_1\Delta C^{1133} & {}_1\Delta C^{1112} & {}_1\Delta C^{1113} & {}_1\Delta C^{1123} \\ 2_1\Delta C^{2211} & 2_1\Delta C^{2222} & 2_1\Delta C^{2233} & {}_1\Delta C^{2212} & {}_1\Delta C^{2213} & {}_1\Delta C^{2223} \\ 2_1\Delta C^{3311} & 2_1\Delta C^{3322} & 2_1\Delta C^{3333} & {}_1\Delta C^{3312} & {}_1\Delta C^{3313} & {}_1\Delta C^{3323} \\ 2_1\Delta C^{1211} & 2_1\Delta C^{1222} & 2_1\Delta C^{1233} & {}_1\Delta C^{1212} & {}_1\Delta C^{1213} & {}_1\Delta C^{1223} \\ 2_1\Delta C^{1311} & 2_1\Delta C^{1322} & 2_1\Delta C^{1333} & {}_1\Delta C^{1312} & {}_1\Delta C^{1313} & {}_1\Delta C^{1323} \\ 2_1\Delta C^{2311} & 2_1\Delta C^{2322} & 2_1\Delta C^{2333} & {}_1\Delta C^{2312} & {}_1\Delta C^{2313} & {}_1\Delta C^{2323} \end{vmatrix}$$

$${}^1_{1\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma^{11}_g^{11} & \sigma^{11}_g^{12} & \sigma^{11}_g^{13} & \sigma^{12}_g^{11} & \sigma^{12}_g^{12} & \sigma^{12}_g^{13} & \sigma^{13}_g^{11} & \sigma^{13}_g^{12} & \sigma^{13}_g^{13} \\ & \sigma^{11}_g^{22} & \sigma^{11}_g^{23} & \sigma^{12}_g^{12} & \sigma^{12}_g^{22} & \sigma^{12}_g^{23} & \sigma^{13}_g^{12} & \sigma^{13}_g^{22} & \sigma^{13}_g^{23} \\ & & \sigma^{11}_g^{33} & \sigma^{12}_g^{13} & \sigma^{12}_g^{23} & \sigma^{12}_g^{33} & \sigma^{13}_g^{13} & \sigma^{13}_g^{23} & \sigma^{13}_g^{33} \\ & & & \sigma^{22}_g^{11} & \sigma^{22}_g^{12} & \sigma^{22}_g^{13} & \sigma^{23}_g^{11} & \sigma^{23}_g^{12} & \sigma^{23}_g^{13} \\ & & & & \sigma^{22}_g^{22} & \sigma^{22}_g^{23} & \sigma^{23}_g^{12} & \sigma^{23}_g^{22} & \sigma^{23}_g^{23} \\ & & & & & \sigma^{22}_g^{33} & \sigma^{23}_g^{13} & \sigma^{23}_g^{23} & \sigma^{23}_g^{33} \\ & & & & & & \sigma^{33}_g^{11} & \sigma^{33}_g^{12} & \sigma^{33}_g^{13} \\ & & & & & & & \sigma^{33}_g^{22} & \sigma^{33}_g^{23} \\ & & & & & & & & \sigma^{33}_g^{33} \\ & & \text{sym.} & & & & & & \end{vmatrix}$$

mit $\sigma^{ij}_{g^{kl}} = {}^1_{\sigma}{}^{ij} {}^1_{g^{kl}}$

$${}^1_{1s^T} = [{}^1_{\sigma}{}^{11} \quad {}^1_{\sigma}{}^{22} \quad {}^1_{\sigma}{}^{33} \quad {}^1_{\sigma}{}^{12} \quad {}^1_{\sigma}{}^{13} \quad {}^1_{\sigma}{}^{23}]$$

$${}^1_{f_A^T} = [{}^1_{f_A}{}^1 \quad {}^1_{f_A}{}^2 \quad {}^1_{f_A}{}^3], \quad {}^1_{f_V^T} = [{}^1_{f_V}{}^1 \quad {}^1_{f_V}{}^2 \quad {}^1_{f_V}{}^3]$$

$$u^T = [u_1^e \quad u_2^e \quad u_3^e \quad \dots \quad u_{i=N}^e]$$

Diese bezüglich der lokalen Basis definierten Elementmatrizen müssen dann vor dem Zusammenbau zum Gesamtsystem noch auf die globale Basis transformiert werden.

5.2. Stabelement für geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnungen

Stabilitäts- und Spannungsberechnungen werden im allgemeinen gelöst, indem die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System aufgestellt werden. Damit geht der jeweilige Verformungszustand in die formulierte Differentialgleichung ein. Diese, das System beschreibende Gleichung, ist somit nicht-linear auf Grund geometrischer Verformungsbedingungen.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Tatsache begründet, daß Rotationen nicht in beliebiger Reihenfolge addierbar sind, da sie keine tensoriellen Größen darstellen. Bei Beschränkung auf endliche, jedoch kleine Rotationen kann der Verschiebungsansatz in Bezug auf die Verdrehanteile um die jeweilige Gleichgewichtslage linearisiert werden. Das bedeutet, daß die drei Rotationskomponenten, die ein Maß für die Biegung bzw. Torsion des Stabes darstellen, wechselweise auch als Winkel gedeutet werden können, wie es bei der linearen Stabtheorie gehandhabt wird.

Aus dieser Überlegung folgt, daß bei der Untersuchung geometrisch nicht-linearer Stabwerke immer dann mit linearen Elementen gearbeitet werden kann, wenn diese allein eine Relativverdrehung im Sinne einer "Restbewegung" erfassen. Dies ist bei der hergeleiteten inkrementellen Vorgehensweise der Fall. Ein Weg zur Bewältigung großer Rotationen ist demnach eine mitgehende Darstellung mit wechselndem Bezugszustand, bei der die Verschiebungsinkremente in linearisierter Form definiert und alle anderen Größen ständig mit angeglichen werden.

Zur Herleitung eines Stabelementes für finite, aber kleine Verschiebungen und Verdrehungen treffen wir folgende Annahmen:

- in der Ausgangskonfiguration sind keine Eigenspannungen und Vorverformungen vorhanden
- Querschnittsverschiebungen sind klein gegenüber der Stabdicke
- durch reine Biegung und Scherung ändert sich die Elementlänge nicht
- Querschnitte bleiben während der Verformung erhalten

- ein vor der Verformung zur neutralen Achse normaler Querschnitt bleibt während der Deformation eben (Bernoulli-Hypothese), aber wegen der vorhandenen (über den Querschnitt konstant angenommenen) Schubdeformation nicht notwendigerweise normal zur Stabachse
- Verwölbungen des Querschnitts werden nicht betrachtet
- die Abmessungen sind so gewählt, daß lokale Instabilitätserscheinungen nicht auftreten
- zum Stoffgesetz werden keine einschränkenden Aussagen gemacht.

Die getroffenen Annahmen haben ebenfalls zur Folge, daß

$$\sigma_{yy}(x,y,z) = \sigma_{zz}(x,y,z) = \sigma_{yz}(x,y,z) = 0, \quad (5.2.1)$$

also Schnittflächen parallel zur Stabachse spannungsfrei sind.

5.2.1 Beschreibung des Stabelementes

Das entwickelte räumliche Element ist ein auf Zug und Druck beanspruchter biege- und drillsteifer Stab. Er ist gerade und von konstantem Querschnitt. Lasten werden nur an den Stabenden eingeleitet. Beliebige linienhafte Körper mit veränderlichem Querschnitt oder gekrümmten Achsen können bei hinreichend feiner Unterteilung durch solche Elemente angenähert werden.

Das Element hat zwei Knoten mit je sechs Freiheitsgraden. Wie in der Stabtheorie üblich, nehmen wir an, daß ebene Querschnitte während der Deformation eben bleiben, jedoch nicht notwendigerweise senkrecht zur neutralen Achse, d. h. eine konstante Scherung ist erlaubt. Diese Scherung wird durch die beiden Scherwinkel als Elementfreiheitsgrad eingeführt. Damit ist das Element in der Lage, eine Axialkraft, zwei Scherkräfte, zwei Biegemomente und das Torsionsmoment zu übertragen. Abbildung 5.1 zeigt ein solches Element.

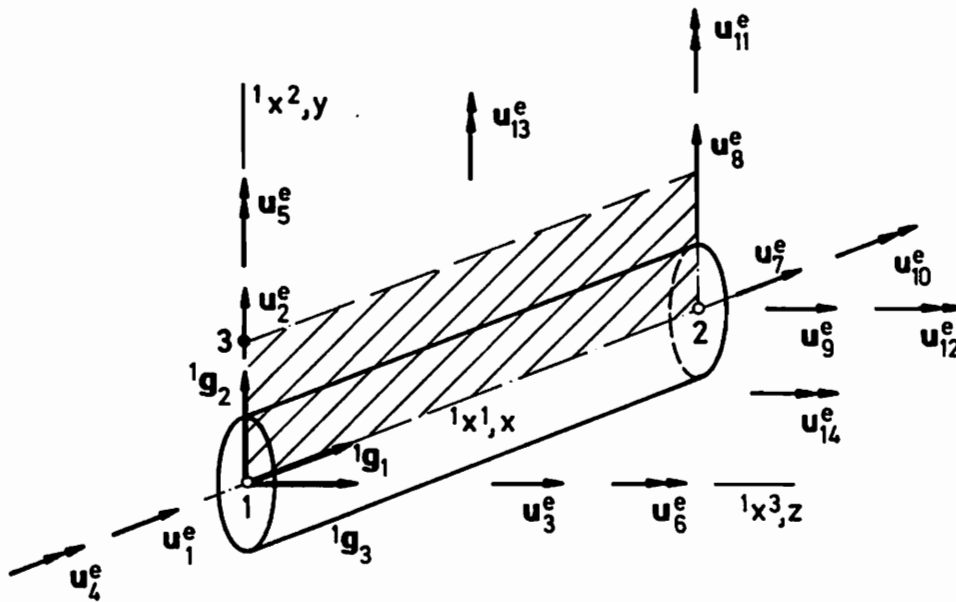


Abb. 5.1. Stabelement im lokalen Koordinatensystem

Das Element kann großen Verschiebungen und Rotationen unterliegen, im Rahmen der inkrementellen Vorgehensweise setzen wir aber für einen Inkrementenschritt kleine Verzerrungen voraus. Daher sollen sich Querschnitt und Länge des Stabelementes während des Verformungsinkrements nicht ändern. Bei der anschließenden Spannungsberechnung entfallen diese Annahmen, hier berechnen wir die aus dem Verschiebungsfeld ${}^2\mathbf{u}$ resultierenden CAUCHY-Spannungen unter Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten.

Die Hauptachsen des Stabes definieren die lokalen kartesischen Koordinaten

$${}^1x^1 = x, \quad {}^1x^2 = y, \quad {}^1x^3 = z, \quad (5.2.2)$$

die beiden Endknoten 1, 2 sowie der externe Knoten 3 legen die xy-Ebene fest (Abb. 5.1).

5.2.1.1. Interpolationsfunktion für das inkrementelle Verschiebungsfeld

Zur Beschreibung der Elementbewegungen benötigen wir die Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld des Elements in Abhängigkeit der Knoten-Verschiebungs-Inkremente u_i^e und der Interpolationsfunktionen h_α^i bezüglich der lokalen Koordinaten x, y, z zur Zeit 1t (vgl. Abb. 5.2)

$$\Delta u = \Delta u_\alpha (x,y,z) {}^1g^\alpha = \left(\sum_{i=1}^{14} h_\alpha^i (x,y,z) u_i^e \right) {}^1g^\alpha. \quad (5.2.3)$$

Die kinematischen Annahmen zur Ableitung der Ansatzfunktionen entsprechen denen der linearen Stabtheorie [16, 35/1, 65, 67, 73].

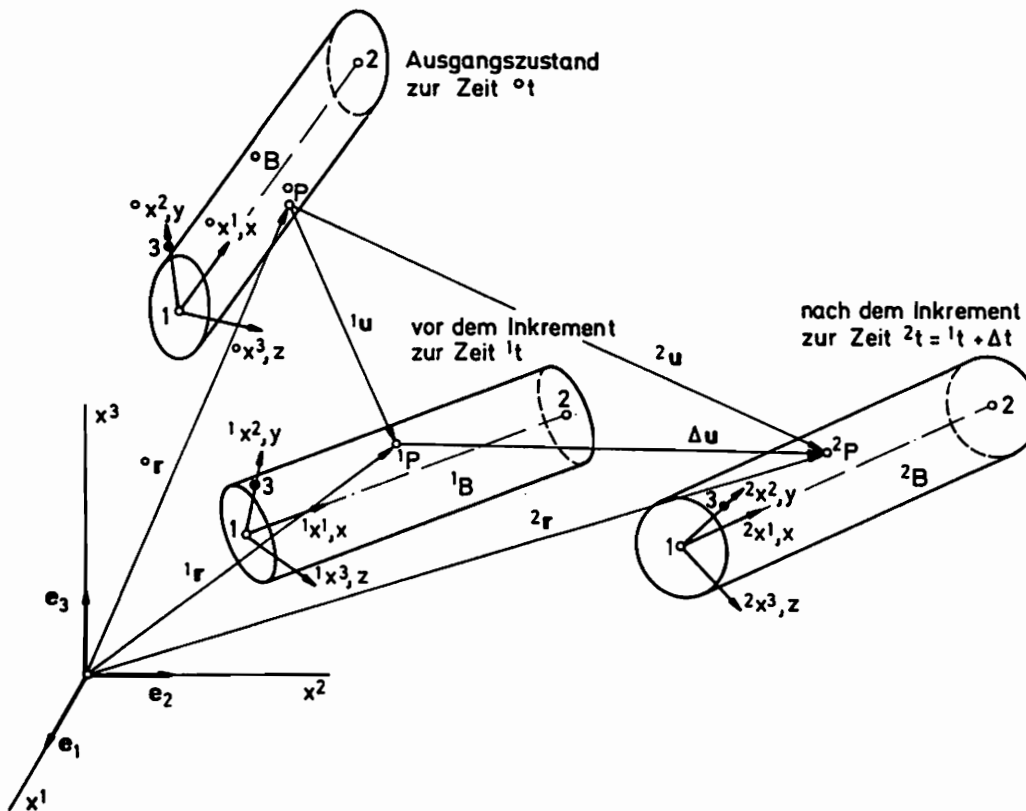


Abb. 5.2. inkrementeller Verschiebungszustand des Stabelementes

Als Maß für die Verformung des Elements werden die Verschiebungen und Verdrehungen der Stabquerschnitte betrachtet. Nach dem Superpositionsprinzip setzen wir diese aus den Einzelverschiebungen und -verdrehungen, die durch Längung, Torsion und Biegung in zwei Ebenen entstehen, zusammen. So erfährt der Querschnitt bei reiner Axialbeanspruchung oder Drillung eine Ver-

schiebung bzw. eine Verdrehung. Im Falle einer Biegebeanspruchung ergibt sich die Verschiebung und Verdrehung des Querschnitts durch Überlagerung der Verformungen infolge der die Stabachse krümmenden Biegemomente und infolge der die Querschnitte gegeneinander verschiebenden Querkräfte.

Um die Stetigkeit der Axial- und Torsionsverschiebungen zu gewährleisten, sind lineare Ansatzpolynome ausreichend. Da für die Stabbiegung die Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen der Biegelinie über die Elementgrenzen gefordert wird, erhalten wir mit einem kubischen Ansatzpolynom (Hermite-Polynom dieser Ordnung, Abb. 5.3) ein zulässiges Element, wenn neben den Knotenverschiebungen auch noch deren erste Ableitungen, d. h. in erster Näherung die Drehwinkel um die Achse, als Knotenvariable eingeführt werden.

Benutzen wir die in der Stabtheorie üblichen Knotenfreiheitsgrade (wie sie für den Zeitpunkt t vor dem Inkrement in Abbildung 5.1 dargestellt sind) und führen die Scherwinkel als weitere unabhängige Variablen ein, ergibt sich der Diskretisierungsansatz

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1 &= L_1 u_1^e + L_2 u_7^e \\
 &\quad - (\Delta u_{2,1} - u_{14}^e) y - (\Delta u_{3,1} + u_{13}^e) z \\
 \Delta u_2 &= H_1 u_2^e + H_2 l (u_6^e + u_{14}^e) + H_3 u_8^e + H_4 l (u_{12}^e + u_{14}^e) \\
 &\quad - (L_1 u_4^e + L_2 u_{10}^e) z \\
 \Delta u_3 &= H_1 u_3^e - H_2 l (u_5^e + u_{13}^e) + H_3 u_9^e - H_4 l (u_{11}^e + u_{13}^e) \\
 &\quad + (L_1 u_4^e + L_2 u_{10}^e) y
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

für das Verschiebungsinkrement Δu . Setzen wir diesen in die mit Tabelle 5.1 definierten Matrizen ein, erhalten wir für das Stabelement:

Tabelle 5.2: Matrizen für die Formulierung des Stabelementes

Anzahl der Element-Freiheitsgrade $N = 14$

$\Delta \mathbf{u}^T = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \Delta u_3]$ Element-Verschiebungsfeld

$\mathbf{u}^T = [u_1^e \ u_2^e \ u_3^e \ \dots \ u_{13}^e \ u_{14}^e]$ Knoten-Verschiebungen

inkrementelle Verschiebungs-Interpolations-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} L_1 & -H_1'y & -H_1'z & 0 & H_2'lz & -H_2'ly \\ 0 & H_1 & 0 & -L_1z & 0 & H_2'l \\ 0 & 0 & H_1 & L_1y & -H_2'l & 0 \\ \\ L_2 & -H_3'y & -H_3'z & 0 & H_4'lz & -H_4'ly \\ 0 & H_3 & 0 & -L_2z & 0 & H_4'l \\ 0 & 0 & H_3 & L_2y & -H_4'l & 0 \\ \\ & & & -(1-H_2'l-H_4'l)z & (1-H_2'l-H_4'l)y & \\ & & & 0 & (H_2+H_4)l & \\ & & & -(H_2+H_4)l & 0 & \end{vmatrix}$$

mit

l = Länge des Stabelementes

x, y, z = lokale Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial x} = ()' \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = ()''$$

Interpolationsfunktionen

$$L_1 = 1 - \frac{x}{I}, \quad L_2 = \frac{x}{I}$$

$$H_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{I}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{I}\right)^3, \quad H_2 = \frac{x}{I} - 2\left(\frac{x}{I}\right)^3$$

$$H_3 = 3\left(\frac{x}{I}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{I}\right)^3, \quad H_4 = -\left(\frac{x}{I}\right)^2 + \left(\frac{x}{I}\right)^3$$

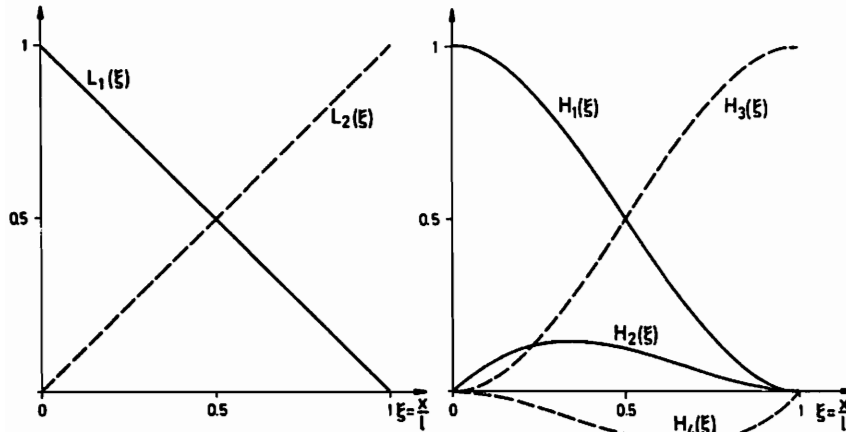


Abb. 5.3. Ansatzfunktionen

lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix

$${}^1_1B_1 = \begin{vmatrix} L_1' & -H_1' y & -H_1' z & 0 & H_2' lz & -H_2' ly \\ 0 & 0 & 0 & -L_1' z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1' y & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} -L_1' & H_1' y & H_1' z & 0 & H_4' lz & -H_4' ly \\ 0 & 0 & 0 & L_1' z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_1' y & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_1' lz & -H_1' ly \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \Bigg|$$

nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix

$${}_1B_{nl} = \begin{vmatrix} L_1' & -H_1''y & -H_1''z & 0 & H_2''lz & -H_2''ly \\ 0 & H_1' & 0 & -L_1'z & 0 & H_2'l \\ 0 & 0 & H_1' & L_1'y & -H_2'l & 0 \\ 0 & -H_1' & 0 & 0 & 0 & -H_2'l \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_1' & 0 & H_2'l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -L_1' & H_1''y & H_1''z & 0 & H_4''lz & -H_4''ly \\ 0 & -H_1' & 0 & L_1'z & 0 & H_4'l \\ 0 & 0 & -H_1' & -L_1'y & -H_4'l & 0 \\ 0 & H_1' & 0 & 0 & 0 & -H_4'l \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1' & 0 & H_4'l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} H_1''lz & -H_1''ly \\ 0 & (H_2'+H_4')l \\ -(H_2'+H_4')l & 0 \\ 0 & 1-H_2'l-H_4'l \\ 0 & 0 \\ -1+H_2'l+H_4'l & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Materialeigenschaftsmatrix

elastisches Werkstoffverhalten

$${}_1\Delta C = \begin{vmatrix} 2G(1-\nu) & 0 & 0 \\ & G & 0 \\ \text{sym.} & & G \end{vmatrix}$$

elasto-plastisches Werkstoffverhalten

$${}_1\Delta C = \begin{vmatrix} C_2(C_3 - t_1^1 t_1^1) & -C_2 t_1^1 t_2^1 & -C_2 t_1^1 t_3^1 \\ & C_1 - C_4 t_2^1 t_2^1 & -C_4 t_2^1 t_3^1 \\ \text{sym.} & & C_1 - C_4 t_3^1 t_3^1 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = k_1/2$$

$$C_2 = k_1 k_3 (1+3k_2)/k_5$$

$$C_3 = (1-k_3 k_4)/k_3$$

$$C_4 = k_1 k_3 (1+2k_2)/k_5$$

$$k_1 = \frac{2G(1+\nu\zeta)}{1+\nu\zeta+2G\nu}$$

$$k_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1+\nu\zeta+2G\nu}{(1+\nu\zeta)(1-2\nu)} - 1 \right)$$

$$k_3 = \frac{4G-2G\nu \frac{\partial k^2}{\partial b^*}}{(1+\nu\zeta) \left(2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} + 4G \right) k^2} \quad k_4 = (t_2^2)^2 + (t_3^3)^2 + 2(t_3^2)^2$$

$$k_5 = (1-k_3 k_4) (1+2k_2) + k_2 k_3 (t_1^1)^2$$

mit $t_\beta^\alpha = {}_1 t_\beta^\alpha$

Matrix und Vektor der CAUCHY-Spannungen

$${}_1\sigma = \begin{pmatrix}
 {}_1\sigma^{11} & 0 & 0 & {}_1\sigma^{12} & 0 & {}_1\sigma^{13} & 0 \\
 & {}_1\sigma^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_1\sigma^{13} \\
 & & {}_1\sigma^{11} & 0 & {}_1\sigma^{12} & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \text{sym.} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0
 \end{pmatrix}$$

$${}_1s = [{}_1\sigma^{11} \quad {}_1\sigma^{12} \quad {}_1\sigma^{13}]$$

5.2.1.2. Kondensation der lokalen Element-Freiheitsgrade

In Tabelle 5.2 hatten wir für das dreidimensionale Stabelement die bezüglich der lokalen Basis ${}^1g^\alpha$ definierten Elementmatrizen und -vektoren zusammengestellt. Da es sich bei den als unabhängige Elementvariablen eingeführten Scherwinkeln u_{13}^e und u_{14}^e um lokale Freiheitsgrade handelt, also um Freiheitsgrade, die mit keinem anderen Element in Verbindung stehen, eliminieren wir diese mittels statischer Kondensation aus dem Gleichungssystem (5.1.2). Die zur Berechnung der kondensierten Elementmatrizen und -vektoren notwendigen Beziehungen und effektiven Algorithmen zur Durchführung sind in [65, 66] ausführlich dargestellt.

Da die Symmetrie der Elementmatrizen bei der statischen Kondensation erhalten bleibt, können wir das kondensierte Element in der weiteren Berechnung wie ein einfaches behandeln. Als Unbekannte verbleiben im reduzierten Gleichungssystem (5.1.2) nur die externen Knotenverschiebungen und -ver-

drehungen u_i^e , $i=1, 12$. Nach der Transformation der kondensierten Matrizen und Vektoren auf die globale Basis und dem Zusammenbau aller Elemente unter Beachtung der Kontinuitätsbedingungen können wir die externen Elementfreiheitsgrade bestimmen. Anschließend berechnen wir aus diesen die Scherwinkel u_{13}^e und u_{14}^e durch Rekondensation.

5.2.1.3. Koordinatentransformation

Vor dem Zusammenbau der Einzelelemente zum Gesamtsystem müssen die bezüglich des lokalen Systems von Bezugsrichtungen ${}^1g_\alpha$ erstellten Elementmatrizen (Tabelle 5.1) auf die globale Basis e_α transformiert werden. Sind die Systemverschiebungen durch die FEM-Analyse berechnet, haben wir aus diesen das für die anschließende Spannungsanalyse benötigte Verschiebungsfeld des Elementes bezüglich der lokalen Basis ${}^2g_\alpha$ zu ermitteln. Die beiden hierzu notwendigen Koordinatentransformationen sollen in aller Kürze angegeben werden.

Die Lage des Stabelementes im Beobachtungsraum vor dem Inkrement wird durch die bekannten globalen Koordinaten der Knoten 1 und 2 sowie des externen Knotens 3 eindeutig festgelegt. Mit den lokalen Koordinaten ${}^1x^\alpha$ gilt für den Ortsvektor 1r (Abb. 5.4) des Elementpunktes 1P :

$$\begin{aligned} {}^1x^1 &= x; \quad {}^1x^2 = y; \quad {}^1x^3 = z \\ {}^1r &= {}^1r_1 + x \frac{({}^1r_2 - {}^1r_1)}{|{}^1r_2 - {}^1r_1|} + y \frac{({}^1r_3 - {}^1r_1)}{|{}^1r_3 - {}^1r_1|} \\ &\quad + z \frac{({}^1r_2 - {}^1r_1) \times ({}^1r_3 - {}^1r_1)}{|({}^1r_2 - {}^1r_1) \times ({}^1r_3 - {}^1r_1)|}. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

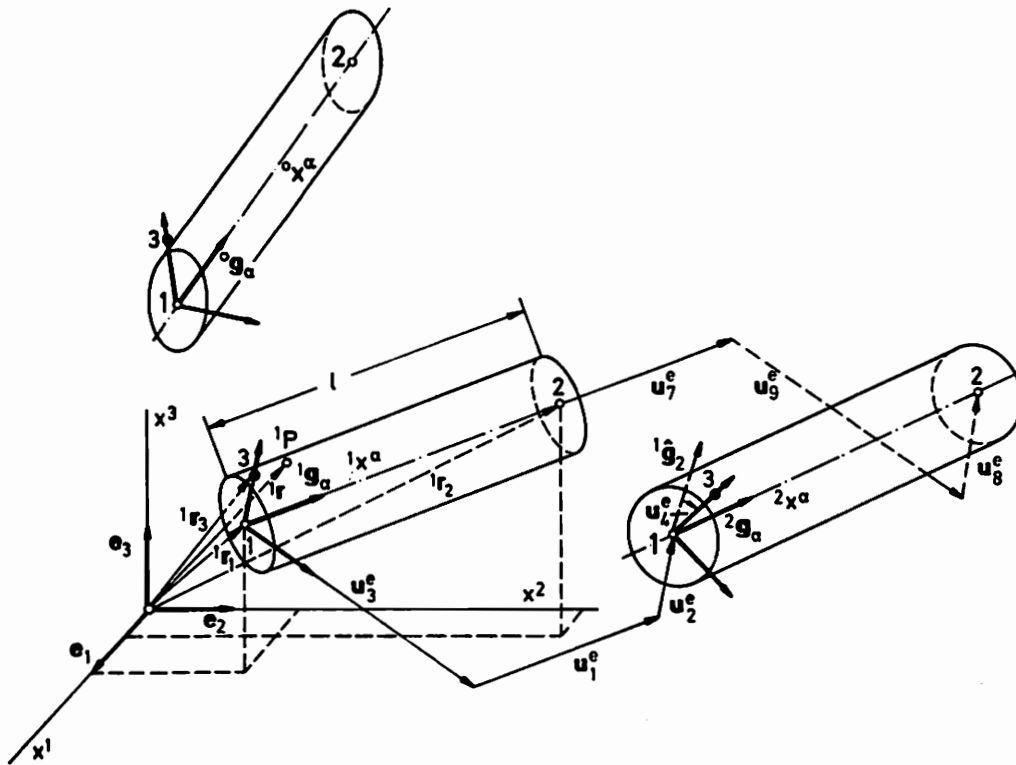


Abb. 5.4. Stabknoten-Verschiebung

Die kovariante Basis ${}^1g_\alpha({}^1x^\rho)$ ergibt sich daraus mit Gleichung (2.1.2)

$$\begin{aligned}
 {}^1g_1 &= \frac{({}^1r_2 - {}^1r_1)}{|{}^1r_2 - {}^1r_1|} &= {}^1t_1^1 e_1 + {}^1t_2^1 e_2 + {}^1t_3^1 e_3 \\
 {}^1g_2 &= \frac{({}^1r_3 - {}^1r_1)}{|{}^1r_3 - {}^1r_1|} &= {}^1t_1^2 e_1 + {}^1t_2^2 e_2 + {}^1t_3^2 e_3 \\
 {}^1g_3 &= \frac{({}^1r_2 - {}^1r_1) \times ({}^1r_3 - {}^1r_1)}{|({}^1r_2 - {}^1r_1) \times ({}^1r_3 - {}^1r_1)|} &= {}^1t_1^3 e_1 + {}^1t_2^3 e_2 + {}^1t_3^3 e_3
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

in Abhängigkeit von der globalen kartesischen Basis e_α . Dabei sind die Komponenten der Basisvektoren gleich den Maßzahlen ${}^1t_\beta^\alpha$ des Tensors 1T der

Basis-Transformation

$${}^1\mathbf{g}_\alpha = {}^1\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \quad (5.2.7)$$

Die Verdrehung des lokalen Systems von Bezugsrichtungen ${}^2\mathbf{g}_\alpha$ gegenüber der Basis ${}^1\mathbf{g}_\alpha$ wird durch die Winkel α und β (Abb. 5.5) eindeutig festgelegt. Hierbei bezeichnet α den Winkel, der die Drehung um die Knotenlinie angibt, β den Winkel, der die Drehung um die ${}^2\mathbf{g}_1$ -Achse beschreibt.

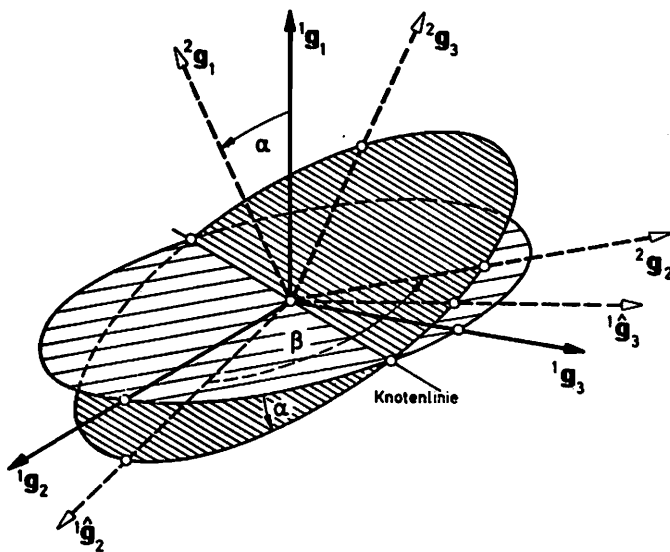


Abb. 5.5. Rotationen im lokalen Koordinatensystem

Stellen wir den Basisvektor ${}^2\mathbf{g}_1$ mittels der Verschiebungsincremente der Elementknoten bezüglich des lokalen Dreibeins ${}^1\mathbf{g}_\alpha$ dar (Abb. 5.4)

$${}^2\mathbf{g}_1 = a {}^1\mathbf{g}_1 + b {}^1\mathbf{g}_2 + c {}^1\mathbf{g}_3$$

$$a = \frac{1+u_7^e - u_1^e}{\sqrt{((1+u_7^e - u_1^e))^2 + (u_8^e - u_2^e)^2 + (u_9^e - u_3^e)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{u_8^e - u_2^e}{\sqrt{((1+u_7^e - u_1^e)^2 + (u_8^e - u_2^e)^2 + (u_9^e - u_3^e)^2)}} \\
 c &= \frac{u_9^e - u_3^e}{\sqrt{((1+u_7^e - u_1^e)^2 + (u_8^e - u_2^e)^2 + (u_9^e - u_3^e)^2)}, \quad (5.2.8)
 \end{aligned}$$

ergibt sich der Drehwinkel α durch das Skalarprodukt

$$\cos \alpha = {}^1g_1 \cdot {}^2g_1 = a. \quad (5.2.9)$$

Der Rotationswinkel β um die 2g_1 -Achse ist bei dieser Transformation gleich dem Elementfreiheitsgrad 4 (Abb. 5.1), also

$$\beta = u_4^e. \quad (5.2.10)$$

Führen wir mit bekanntem α und β zuerst die Drehung um die Knotenlinie aus, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 {}^1g_2 &= {}^1g_2 - ({}^1g_2 \cdot {}^2g_1) \frac{{}^1g_1 + {}^2g_1}{1 + \cos \alpha} \\
 {}^1g_3 &= {}^1g_3 - ({}^1g_3 \cdot {}^2g_1) \frac{{}^1g_1 + {}^2g_1}{1 + \cos \alpha} \quad (5.2.11)
 \end{aligned}$$

und aus der anschließenden Drehung β um die 2g_1 -Achse

$$\begin{aligned}
 {}^2g_2 &= {}^1g_2 \cos u_4^e + {}^1g_3 \sin u_4^e \\
 {}^2g_3 &= -{}^1g_2 \sin u_4^e + {}^1g_3 \cos u_4^e. \quad (5.2.12)
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Basen wird letztlich durch die Gesamttransformation

$${}^2g_\alpha = \Delta T \cdot {}^1g_\beta \quad (5.2.13)$$

beschrieben, wobei wir die Maßzahlen von ΔT aus den Gleichungen (5.2.11, 5.2.12) beider Teildrehungen sowie den Konstanten (5.2.8) zu

$$\Delta t_1^1 = a$$

$$\Delta t_2^1 = b$$

$$\Delta t_3^1 = c$$

$$\Delta t_1^2 = - (b \cos u_4^e + c \sin u_4^e)$$

$$\Delta t_2^2 = \cos u_4^e - (b \cos u_4^e + c \sin u_4^e) \frac{b}{1+a}$$

$$\Delta t_3^2 = \sin u_4^e - (b \cos u_4^e - c \sin u_4^e) \frac{c}{1+a}$$

$$\Delta t_1^3 = - (c \cos u_4^e - b \sin u_4^e)$$

$$\Delta t_2^3 = -\sin u_4^e - (c \cos u_4^e - b \sin u_4^e) \frac{b}{1+a}$$

$$\Delta t_3^3 = \cos u_4^e - (c \cos u_4^e - b \sin u_4^e) \frac{c}{1+a}$$

berechnen.

(5.2.14)

5.2.2. Beschreibung der Deformation des Stabelementes

Die Deformation des Stabelementes (Abb. 5.6) ist nach Vorgabe der Knotenvariableninkremente vollständig beschrieben. Wir können nun die Koordinaten ${}^2x^\alpha$ aller Körperpunkte der verformten Konfiguration in Funktion ihrer Ausgangskordinaten ${}^1x^\alpha$ vor dem Inkrement berechnen. Aus dem mit Gleichung

(5.2.3, 5.2.4) in Abhängigkeit von den Ansatzfunktionen und den Elementfreiheitsgraden definierten Verschiebungsfeld $\Delta u(1x^\alpha)$ und dem durch (5.2.13) gegebenen Zusammenhang zwischen den lokalen Bezugssystemen, ergeben sich die Koordinaten des Punktes $2P$ der verformten Konfiguration $2B$:

$$2x^\alpha = \Delta t_\beta^\alpha (1x^\beta + \Delta u^\beta - \Delta u_1^\beta)$$

mit

$$\Delta u_1^\beta = \Delta u^\beta(1x^\alpha=0). \quad (5.2.15)$$

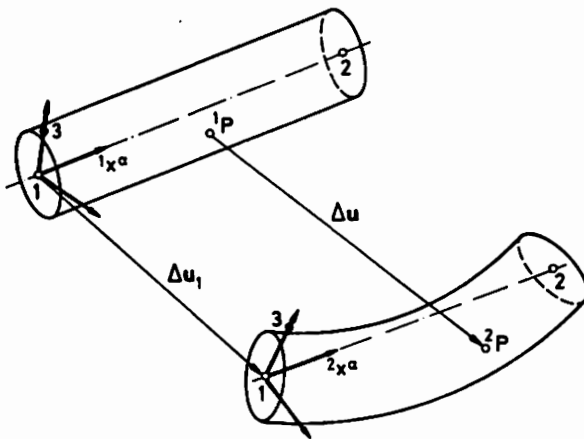


Abb. 5.6. inkrementeller Verformungszustand

Nach (2.1.35) erhalten wir dann die Maßzahlen des Geschwindigkeitsvektors $2v$

$$2v^\alpha = 2\dot{x}^\alpha = \Delta t_\beta^\alpha \Delta \dot{u}^\beta. \quad (5.2.16)$$

Da für die Basis $2g_\alpha$ die nach (2.1.29) berechneten Christoffelsymbole verschwinden, folgt mit (2.1.28) für die Maßzahlen des Geschwindigkeitsgradienten (2.1.37)

$$2v^\alpha |_\beta = \Delta t_\gamma^\alpha \frac{\partial \Delta \dot{u}^\gamma}{\partial 1x^\beta} \frac{\partial 1x^\rho}{\partial 2x^\beta}. \quad (5.2.17)$$

Aus diesen erhalten wir durch (2.1.38) und (2.1.39) die Maßzahlen des Ten-

sors der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\frac{2}{2} \overset{\alpha}{d} \overset{\beta}{\beta} = \frac{1}{2} \left(\Delta t_{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \Delta \dot{u}^{\gamma}}{\partial \overset{1}{x}^{\rho}} \frac{\partial \overset{1}{x}^{\rho}}{\partial \overset{2}{x}^{\beta}} + \Delta t_{\gamma}^{\beta} \frac{\partial \Delta \dot{u}^{\gamma}}{\partial \overset{1}{x}^{\rho}} \frac{\partial \overset{1}{x}^{\rho}}{\partial \overset{2}{x}^{\alpha}} \right) \quad (5.2.18)$$

und die des Tensors der Rotationsgeschwindigkeit

$$\frac{2}{2} \overset{\alpha}{w} \cdot \overset{\beta}{\beta} = \frac{1}{2} \left(\Delta t_{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \Delta \dot{u}^{\gamma}}{\partial \overset{1}{x}^{\rho}} \frac{\partial \overset{1}{x}^{\rho}}{\partial \overset{2}{x}^{\beta}} - \Delta t_{\gamma}^{\beta} \frac{\partial \Delta \dot{u}^{\gamma}}{\partial \overset{1}{x}^{\rho}} \frac{\partial \overset{1}{x}^{\rho}}{\partial \overset{2}{x}^{\alpha}} \right), \quad (5.2.19)$$

für die Koordinatendifferentiale gilt mit (5.2.15)

$$\frac{\partial \overset{1}{x}^{\alpha}}{\partial \overset{2}{x}^{\beta}} = \left(\frac{\partial \overset{2}{x}^{\beta}}{\partial \overset{1}{x}^{\alpha}} \right)^{-1} = \left(\Delta t_{\mu}^{\beta} \left(\delta_{\alpha}^{\mu} + \frac{\partial \Delta u^{\mu}}{\partial \overset{1}{x}^{\alpha}} \right) \right)^{-1}. \quad (5.2.20)$$

Die für das Element verwendeten Ansatzfunktionen erfüllen die in der linearen Stabtheorie üblichen Annahmen über die Verformungen in Richtung der Stabachse. Da sie jedoch keine Aussage über die Verschiebungen von Schnittflächen parallel zu dieser treffen, müssen wir die zur Bestimmung des Verzerrungszustandes (5.2.18, 5.2.19) benötigten Ableitungen

$$\frac{\partial \Delta \dot{u}^2}{\partial \overset{1}{x}^2}; \quad \frac{\partial \Delta \dot{u}^3}{\partial \overset{1}{x}^3}; \quad \frac{\partial \Delta \dot{u}^2}{\partial \overset{1}{x}^3}; \quad \frac{\partial \Delta \dot{u}^3}{\partial \overset{1}{x}^2} \quad (5.2.21)$$

aus der Kinematik und den über die Spannungen des Stabes getroffenen Annahmen (5.2.1) bestimmen und mit aufintegrieren.

Wie in [68] gezeigt, läßt sich dem schiefssymmetrischen Spin- oder Rotationsgeschwindigkeitstensor $\overset{2}{W}$ ein "axialer" Vektor $\overset{2}{\Omega}$ zuordnen. Dieser Vektor der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das lokale gegenüber dem raumfesten System dreht, hängt mit $\overset{2}{W}$ folgendermaßen zusammen:

$$\overset{2}{W} \cdot \overset{\alpha}{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega^3 & \Omega^2 \\ \Omega^3 & 0 & -\Omega^1 \\ -\Omega^2 & \Omega^1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.2.22)$$

Da die Rotation des Stabelementes um seine Achse durch den Freiheitsgrad u_4^e (Abb. 5.1) beschrieben wird, gilt

$${}^2w_{\cdot\beta}^{\alpha} = -\dot{\Omega}^1 = -\dot{u}_4^e \quad (5.2.23)$$

wodurch in Verbindung mit (5.2.19) die erste Bestimmungsgleichung für die Verschiebungsableitungen (5.2.21) ermittelt ist.

Neben der Kinematik muß das Element noch die üblichen Annahmen (5.2.1) über die Spannungsverteilung im Stabvolumen erfüllen. Diese liefern mittels des konstitutiven Gesetzes die noch ausstehenden drei Bestimmungsgleichungen. Wir kommen in den folgenden Abschnitten darauf zurück.

5.2.3. Spannungszustand

In der Stabtheorie ist es üblich, Schnittflächen parallel zur Achse als spannungsfrei zu betrachten. Damit erhalten wir in der zur Achse senkrechten Schnittfläche einen Spannungszustand mit den physikalischen Komponenten σ_1^1 , σ_2^1 und σ_3^1 . Nach [69] sind für unsere Basis ${}^2g_{\alpha}$ die Maßzahlen des CAUCHY-Spannungstensors mit diesen physikalischen Komponenten identisch:

$${}^2\sigma_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_2^1 & 0 & 0 \\ \sigma_3^1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.2.24)$$

Da bei metallischen Werkstoffen die elastischen Deformationen stets klein sind, können wir elastisch inkompressibles Materialverhalten annehmen. Wegen der ohnehin vorausgesetzten plastischen Inkompressibilität bleibt folglich die Dichte während der Verformung konstant und wir erhalten (2.2.3)

$$J = \frac{d^2V}{d^1V} = \frac{1}{2\rho} = 1; \quad \text{Sp}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) = \text{Sp}(\mathbf{D}) = 0, \quad (5.2.25)$$

für den gewichteten CAUCHY-Spannungstensor (2.2.2) gilt damit

$${}^2\mathbf{S} = {}^2\boldsymbol{\sigma}. \quad (5.2.26)$$

Führen wir die zur Beschreibung des anisotropen Verfestigungszustands ver-

wendete tensorielle Zustandsvariable $\frac{2}{2}B$ (siehe Abschnitt 3.1.2.) ein, folgt mit (3.1.3) und (5.2.24) für die "aktiven Deviatorspannungen"

$$\frac{2}{2}T - \frac{2}{2}B = (t_{\beta}^{\alpha} - b_{\beta}^{\alpha}) \frac{2}{2}g_{\alpha} \frac{2}{2}g^{\beta}$$

$$(t_{\beta}^{\alpha} - b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{vmatrix} 2/3\sigma_1^1 - b_1^1 & \sigma_2^1 - b_2^1 & \sigma_3^1 - b_3^1 \\ \sigma_2^1 - b_2^1 & -1/3\sigma_1^1 - b_2^2 & 0 \\ \sigma_3^1 - b_3^1 & 0 & -1/3\sigma_1^1 - b_3^3 \end{vmatrix}, \quad (5.2.27)$$

die Fließbedingung (3.1.4) vereinfacht sich mit diesen zu

$$F = (\sigma_1^1 - b_1^1)^2 + 2 (\sigma_2^1 - b_2^1)^2 + 2 (\sigma_3^1 - b_3^1)^2$$

$$- \frac{1}{3} (\sigma_1^1)^2 + (b_2^2)^2 + (b_3^3)^2 - k^2 (b^*, T) = 0. \quad (5.2.28)$$

5.2.4. Vollständiges Differentialgleichungs-System zur Spannungsberechnung

Die konstitutiven Gleichungen verknüpfen die nach ZAREMBA-JAUMANN gebildete objektive zeitliche Änderung des gewichteten CAUCHY-Spannungstensors mit dem Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten, so daß für die Maßzahlen

$$\frac{2}{2}\dot{v}_{\beta}^{\alpha} = \frac{2}{2}\dot{v}_{\beta}^{\alpha} \left(\frac{2}{2}\sigma_{\beta}^{\alpha}, \frac{2}{2}d_{\beta}^{\alpha}, T \right) \quad (5.2.29)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (5.2.18)

$$\frac{2}{2}\dot{v}_{\beta}^{\alpha} = \frac{2}{2}\dot{v}_{\beta}^{\alpha} \left(\frac{2}{2}\sigma_{\beta}^{\alpha}, \frac{\partial \Delta u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial \Delta u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, T \right) \quad (5.2.30)$$

gilt. Da andererseits beim Stab in den Schnittflächen parallel zur Achse keine Spannungen auftreten, muß die objektive zeitliche Änderung der entsprechenden Maßzahlen des Spannungstensors ebenfalls verschwinden, also

$$2\frac{\nabla\alpha}{2\sigma\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\nabla 1}{\sigma_1} & \frac{\nabla 1}{\sigma_2} & \frac{\nabla 1}{\sigma_3} \\ \frac{\nabla 1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ \frac{\nabla 1}{\sigma_3} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.2.31)$$

gelten. In Verbindung mit (5.2.30) erhalten wir aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\nabla 2}{\sigma_2} &= \frac{\nabla 2}{\sigma_2} \left(\sigma_\beta^\alpha, \frac{\partial \Delta u^\alpha}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \Delta \dot{u}^\alpha}{\partial x^\beta}, T \right) = 0 \\ \frac{\nabla 3}{\sigma_3} &= \frac{\nabla 3}{\sigma_3} \left(\sigma_\beta^\alpha, \frac{\partial \Delta u^\alpha}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \Delta \dot{u}^\alpha}{\partial x^\beta}, T \right) = 0 \\ \frac{\nabla 2}{\sigma_3} &= \frac{\nabla 2}{\sigma_3} \left(\sigma_\beta^\alpha, \frac{\partial \Delta u^\alpha}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \Delta \dot{u}^\alpha}{\partial x^\beta}, T \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

die substantielle Zeitableitung der unbekanntenen Verschiebungsableitungen (5.2.21), aus den verbleibenden Maßzahlen von (5.2.31) bei Berücksichtigung der Definition der objektiven Zeitableitung die substantielle zeitliche Änderung der Elementspannungen

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \frac{\nabla 1}{\sigma_1} + 2 \frac{2 \cdot 1}{2^w \cdot 2} \sigma_2 + 2 \frac{2 \cdot 1}{2^w \cdot 3} \sigma_3 \\ \dot{\sigma}_2 &= \frac{\nabla 1}{\sigma_2} - \frac{2 \cdot 1}{2^w \cdot 2} \sigma_1 + \frac{2 \cdot 2}{2^w \cdot 3} \sigma_3 \\ \dot{\sigma}_3 &= \frac{\nabla 1}{\sigma_3} - \frac{2 \cdot 1}{2^w \cdot 3} \sigma_1 - \frac{2 \cdot 2}{2^w \cdot 3} \sigma_2 \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

(5.2.23) und (5.2.32, 5.2.33) bilden das zu lösende Differentialgleichungssystem, aus dem von den bekannten Anfangswerten ausgehend die Spannungen und die unbekanntenen Verschiebungsableitungen mittels numerischer Integration berechnet werden.

5.2.4.1. Elastische Deformation

Sind Fließ- oder Belastungsbedingung verletzt, verwenden wir zur Beschreibung der elastischen Formänderungen das hypoelastische Stoffgesetz (3.1.2).

Setzen wir eine isotherme Prozeßführung voraus, folgt aus den Spannungsbedingungen (5.2.32)

$$\begin{aligned} 0 &= \nu \frac{2d_1^1}{2} + \frac{2d_2^2}{2} \\ 0 &= \nu \frac{2d_1^1}{2} + \frac{2d_3^3}{2} \\ 0 &= \frac{2d_3^2}{2} \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

und der Elementkinematik (5.2.23)

$$0 = \frac{2w_3^2}{2} + \dot{u}_4 \tag{5.2.35}$$

sowie mit (5.2.33)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1^1 &= 2G(1+\nu) \frac{2d_1^1}{2} + 2 \frac{2w_2^1}{2} \sigma_2^1 + 2 \frac{2w_3^1}{2} \sigma_3^1 \\ \dot{\sigma}_2^1 &= 2G \frac{2d_2^1}{2} - \frac{2w_2^1}{2} \sigma_1^1 + \frac{2w_3^2}{2} \sigma_3^1 \\ \dot{\sigma}_3^1 &= 2G \frac{2d_3^1}{2} - \frac{2w_3^1}{2} \sigma_1^1 - \frac{2w_3^2}{2} \sigma_2^1 \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

Durch Einsetzen von (5.2.18) und (5.2.19) und Umstellen von (5.2.34, 5.2.35) nach den unbekanntem Verschiebungsableitungen erhalten wir die endgültige Form des zu lösenden Differentialgleichungssystems.

5.2.4.2. Elasto-plastische Deformation

Das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen ist wesentlich umfangreicher. Neben den Entwicklungsgesetzen der Verzerrungen und Spannungen müssen auch die Evolutionsgesetze der die isotrope und kinematische Verfestigung beschreibenden internen Variablen mit berücksichtigt werden.

Der aus (5.2.32) hergeleitete Zusammenhang der Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$0 = - \frac{{}^2d_1^1 (a_2 t_1^1 - a_6 t_3^3) + a_3 a_4 (a_7 + t_1^1 t_3^3)}{((1-a_3 a_5) (1+2a_2) + a_2 a_3 (t_1^1)^2) (b_3^3 - b_2^2)} + \frac{{}^2d_2^2}{{}^2d_2^2}$$

$$0 = \frac{{}^2d_1^1 (a_2 t_1^1 - a_6 t_2^2) + a_3 a_4 (a_7 + t_1^1 t_2^2)}{((1-a_3 a_5) (1+2a_2) + a_2 a_3 (t_1^1)^2) (b_3^3 - b_2^2)} + \frac{{}^2d_3^3}{{}^2d_3^3}$$

$$0 = \frac{{}^2d_3^2}{{}^2d_3^2} \tag{5.2.37}$$

vereinfacht die konstitutive Gleichung (3.2.2) auf

$$\bar{\sigma}_1^1 = a_1 (1+3a_2) \frac{{}^2d_1^1 (1-a_3 a_5) - a_3 a_4 t_1^1}{(1-a_3 a_5) (1+2a_2) + a_2 a_3 (t_1^1)^2}$$

$$\bar{\sigma}_2^1 = a_1 \left(\frac{{}^2d_2^1}{2} - a_3 \frac{(a_4 (1+2a_2) + a_2 t_1^1 \frac{{}^2d_1^1}{2}) t_2^1}{(1-a_3 a_5) (1+2a_2) + a_2 a_3 (t_1^1)^2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_3^1 = a_1 \left(\frac{{}^2d_3^1}{2} - a_3 \frac{(a_4 (1+2a_2) + a_2 t_1^1 \frac{{}^2d_1^1}{2}) t_3^1}{(1-a_3 a_5) (1+2a_2) + a_2 a_3 (t_1^1)^2} \right), \tag{5.2.38}$$

und reduziert die Gleichungen (3.1.7) und (3.1.8) der internen Variablen

für das Stabelement auf:

$$\mathbf{b}^* = k_1 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1)$$

$$\mathbf{b}_1^1 = k_2 (2\mathbf{v}_1^1 + k_3 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1) t_1^1)$$

$$\mathbf{b}_2^2 = k_2 (-\mathbf{v}_1^1 + k_3 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1) t_2^2)$$

$$\mathbf{b}_3^3 = k_2 (-\mathbf{v}_1^1 + k_3 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1) t_3^3)$$

$$\mathbf{b}_2^1 = k_2 (3\mathbf{v}_2^1 + k_3 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1) t_2^1)$$

$$\mathbf{b}_3^1 = k_2 (3\mathbf{v}_3^1 + k_3 (t_1^1 \mathbf{v}_1^1 + 2t_2^1 \mathbf{v}_2^1 + 2t_3^1 \mathbf{v}_3^1) t_3^1)$$

$$\mathbf{b}_3^2 = 0.$$

(5.2.39)

Die Koeffizienten erhalten wir durch:

$$a_1 = \frac{2G(1+\kappa\zeta)}{1+\kappa\zeta+2G\kappa} \quad a_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{(1+\kappa\zeta+2G\kappa)(1+\nu)}{(1+\kappa\zeta)(1-2\nu)} - 1 \right)$$

$$a_3 = \frac{4G-2G\kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}}{(1+\kappa\zeta) \left(2\zeta+4G+ \frac{\partial k^2}{\partial b^*} \right) k^2}$$

$$a_4 = t_1^1 \frac{2}{2} d_1^1 + 2t_2^1 \frac{2}{2} d_2^1 + 2t_3^1 \frac{2}{2} d_3^1$$

$$a_5 = (t_2^2)^2 + (t_3^3)^2$$

$$k_1 = \frac{2}{2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*}} \quad k_2 = \frac{x\zeta}{3(1+x\zeta)} \quad k_3 = \frac{3(2-x\frac{\partial k^2}{\partial b^*})}{x(2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*})k^2}. \quad (5.2.40)$$

Wie bei den elastischen Formänderungen erhalten wir aus (5.2.35, 5.2.37 - 5.2.39) das vollständige Differentialgleichungssystem der elasto-plastischen Formänderungen des Stabelementes durch Einsetzen der Definitionsgleichung der objektiven Zeitableitung nach ZAREMBA-JAUMANN, dem Ersetzen von Verzerrungs- und Rotationsgeschwindigkeiten durch (5.2.18) und (5.2.19) und Auflösen nach den substantiellen Zeitableitungen.

Ist die Belastungsbedingung

$$(2-x\frac{\partial k^2}{\partial b^*}) (t_1^1 \dot{\sigma}_1^1 + 2t_2^1 \dot{\sigma}_2^1 + 2t_3^1 \dot{\sigma}_3^1) > 0 \quad (5.2.41)$$

verletzt, sind zur Beschreibung der Formänderung die Gleichungen der elastischen Deformation zu benutzen.

5.2.5. Numerische Lösung

Die numerische Lösung der gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten erfolgt mit einem modifizierten HEUN-Verfahren (vgl. RECHENBERG [70]).

Innerhalb jedes Integrationsschrittes wird die Fließ- und Belastungsbedingung überprüft und entsprechend das Differentialgleichungssystem der elastischen oder elasto-plastischen Deformation abgearbeitet. Die geforderte Genauigkeit der Lösung wird mit einer automatischen Steuerung der Schrittweite gewährleistet. Durch die zusätzlich in jedem Integrationsschritt mittels Fehlerabschätzung durchgeführte Korrektur der ermittelten Werte wird der numerische Aufwand bei vorgegebener Genauigkeit deutlich reduziert.

5.2.6 Volumenintegration

Der letzte Schritt zum Erhalt der Elementmatrizen ist die Auswertung der Matrixintegrale (Tabelle 5.1). Diese erfolgt numerisch unter Anwendung der GAUSS'schen Quadraturformel. Da der anfallende Berechnungsaufwand im wesentlichen von der Anzahl der verwendeten Integrationsstützstellen im Elementvolumen bestimmt wird, benutzen wir eine auf die spezielle Elementgeometrie zugeschnittene Form, die bei gleicher Genauigkeit eine geringere Anzahl von Stützstellen verlangt.

Nach ABRAMOWITZ [71] leiten wir für das zylindrische Element mit Länge l und Radius R die Näherungsformel

$$\int_V F(x,y,z) dx dy dz = \frac{\pi R^2 l}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j F(x_i, y_j, z_j) \quad (5.2.42)$$

her. Die w_k sind die Gewichtungsfaktoren und die $F(x_i, y_j, z_j)$ die Werte der Matrizen $F(x, y, z)$ in den im Argument angegebenen Integrationsstützstellen.

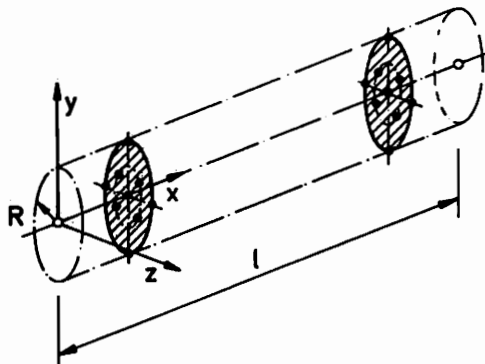


Abb. 5.7. Stützstellen der numerischen Integration

Aus den mit verschiedenen typischen Testfunktionen durchgeführten Vergleichsrechnungen hat sich die Wahl von 18 Stützstellen mit der in Abbildung 5.7 dargestellten Verteilung auf zwei Querschnittsebenen des Volumens als geeignet aber auch notwendig erwiesen. Für die Lage der Stützstellen und die Werte der Gewichtungsfaktoren gilt [71]

x_i	w_i	(y_j, z_j)	w_j
$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	1	$(0, 0)$	1/6
		$(\underline{+R}, 0)$	1/24
$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	1	$(0, \underline{+R})$	1/24
		$(\underline{+R}/2, \underline{+R}/2)$	1/6

(5.2.43)

6. Numerische Realisierung

Zur Spannungs- und Verschiebungsanalyse beliebiger Bauteile und zur Berechnung der nachfolgenden Beispiele haben wir ein Finite-Element-Programm-System in FORTRAN 77 erstellt, in welches u. a. das zuvor hergeleitete elasto-plastische Stabelement eingebaut wurde. Zur Überprüfung der entwickelten Einzelalgorithmen und für erste Testläufe haben wir den MODCOMP IV-Rechner sowie einen Personal Computer ATARI 520 ST+ des Instituts für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum eingesetzt. Die anschließenden umfangreichen Berechnungen wurden an dem Rechner HP 1000/A900 des Instituts durchgeführt.

Das entwickelte Programmsystem entspricht in seiner modularen Strukturierung und den verwendeten Algorithmen den heute üblichen Verfahren, wie sie auf vielen Großrechnern implementiert sind. Der wesentliche Vorteil seiner, in den Grundzügen an die von SCHRADER [72-74] entwickelte Elementmethode MESY angelehnten Konzeption ist jedoch, daß beliebige generalisierte Koordinaten im Sinne der analytischen Mechanik als Rand- oder Systemverschiebungen gewählt werden können. Damit ermöglicht das Programm-System den Einsatz und die Kopplung unterschiedlicher Elementtypen und so die Analyse von Strukturen verschiedenster Art und Geometrie. Da weiterhin alle wesentlichen Routinen völlig unabhängig voneinander sind, ist die Ergänzung des Programm-Systems auf allen Ebenen, wie z. B. das Einfügen neuer Elementtypen oder die Anpassung an spezifische Forderungen des Anwenders einfach möglich, ohne in die Grundroutinen selbst eingreifen zu müssen. Auf einen kleinlich sparsamen Umgang mit dem verwendeten Speicherplatz haben wir bei der Programmierung äußersten Wert gelegt, so daß Strukturen mit mäßiger Anzahl von Freiheitsgraden auch auf Kleincomputern analysiert werden können.

Der Programmablauf kann vereinfacht zu folgenden Punkten zusammengefaßt werden:

1. Einlesen aller Daten für Geometrie, Elemente, Belastungen und Randbedingungen
2. Organisation und Speicherzuteilung

3. Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix und des Lastvektors einschließlich der Einarbeitung der Randbedingungen
4. Auflösung des linearen Gleichungssystems nach den Systemverschiebungen
5. Berechnung der Spannungen und der Randschnittlasten aus den Systemverschiebungen
6. Konvergenzabfrage
 - 6.1. keine Konvergenz: Aufbau eines Korrekturzyklus, dadurch Erstellen einer neuen rechten Seite und ggf. Korrektur der Systemsteifigkeitsmatrix, Rücksprung zu 4.
 - 6.2. Konvergenz: nächster Lastschritt oder ENDE.

Alle Eingabedaten, welche die zu analysierende Struktur beschreiben, werden in einer separaten, leicht editierbaren Datei bereitgestellt. Aus diesen generiert sich das Programm zunächst alle benötigten Größen, bestimmt die Systemdimensionen und ermittelt den Speicherplatzbedarf der Systemsteifigkeitsmatrix sowie ggf. den der Fehlervektoren des Iterationsverfahrens.

Das Abspeichern der Matrix des Gesamtsystems erfolgt speicherplatzsparend unter Ausnutzung von Symmetrie und Bandstruktur nach dem "Skyline-Verfahren" [57]. Diese Vorgehensweise legt nur die Elemente des oberen Dreiecks der Matrix nacheinander auf einem Vektor ab, die zwischen der Hauptdiagonalen und der "Skyline" (Abb. 6.1) liegen. Das Programm berechnet neben den Indices der Diagonalelemente auch die Säulenhöhe der einzelnen Matrixspalten und speichert diese Information.

Anschließend werden alle Elemente der Gesamtstruktur durchlaufen, ihre Steifigkeitsmatrizen berechnet und in die Steifigkeitsmatrix des Systems eingeordnet. Nach dem Einarbeiten der Kräfte- und Verschiebungs-Randbedingungen lösen wir mit den üblichen Routinen zur Dreieckszerlegung und dem Rückwärtseinsetzen nach dem GAUSS-Algorithmus das lineare Gleichungssystem für die Systemverschiebungen.

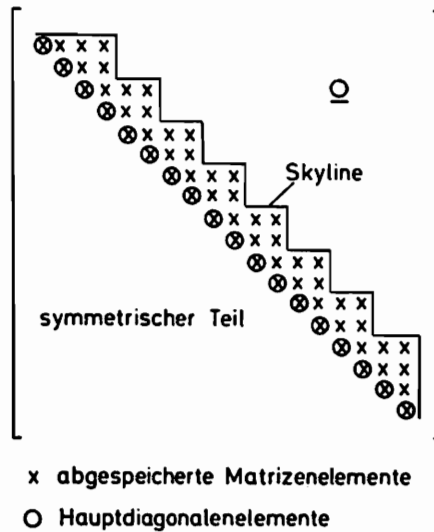


Abb. 6.1. Skyline-Struktur der Steifigkeitsmatrix

Bei einem zweiten Durchlauf aller Elemente berechnen wir in jeder Element-routine nach den speziellen Integrationsvorschriften der konstitutiven Gleichungen die aus den Systemverschiebungen resultierenden Spannungen. Die Randschnittlasten ergeben sich dann durch numerische Integration über die an den vorgeschriebenen Stützstellen im Element berechneten Spannungen.

Die Differenz zwischen dem aus den Randschnittlasten berechneten Knotenlastvektor und dem Vektor der eingepprägten Systemlasten ergibt den Korrektur-lastvektor der Ungleichgewichtskräfte. Dieser wird als Maß für die Güte der ermittelten Systemverschiebungen verwendet. Liegt sie außerhalb des vom Konvergenzmaß abgesteckten Bereiches, kann der Anwender zwischen den verschiedenen vom Programm-System bereitgestellten Iterationszyklen (z. B. NR, MNR, BFGS) zur Verbesserung der erhaltenen Verschiebungslösungen auswählen. Ist die Konvergenz erreicht, wird der nächste Lastschritt durch ein Kraft- oder Verschiebungsinkrement vorgegeben.

Die Restartfähigkeit vervollständigt schließlich das Programm und erlaubt in Verbindung mit einer interaktiven, halb- oder vollautomatischen Steuerung die effiziente Bearbeitung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Probleme.

6.1. Rechner-Implementierung des elasto-plastischen Stabelementes

Das hergeleitete elasto-plastische Stabelement ist als ein in sich abgeschlossenes Programm-Modul im beschriebenen FEM-Software-Paket implementiert worden. Die zur Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix, für die Spannungsberechnung und zur Koordinatentransformation benötigten Subroutinen bestehen aus 3500 Zeilen FORTRAN-Quelltext, aus denen der HP 1000/A900 46K Bytes Programmcode erzeugt. Als Programmdaten sind für jedes Element 395 Realzahlen zu speichern. Diese setzen sich aus den für die 18 Integrationsstützstellen jeweils benötigten 20 Anfangswerten der Spannungen und internen Variablen des Stoffgesetzes, den insgesamt 29 für die Rekondensation der Scherwinkel notwendigen Koeffizienten sowie den Werkstoff- und Geometrie-größen zusammen.

6.2. Elementüberprüfung

Um Aussagen über die Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit des Stabelementes bei der Beschreibung des physikalisch nichtlinearen Werkstoffverhaltens zu gewinnen, werden für ein spezielles Material die aus der numerischen Berechnung erhaltenen Ergebnisse experimentell überprüft. Bevor das Element zur Berechnung eingesetzt werden kann, müssen die Werkstoffparameter des verwendeten Materials bestimmt und der Elementroutine mit den Geometriedaten vorgegeben werden. Die dazu durchgeführten experimentellen Untersuchungen dienen dann gleichzeitig zur Überprüfung des Elementes.

6.2.1. Werkstoff

Als Probenmaterial suchten wir einen in seiner chemischen Zusammensetzung relativ reinen Stahl mit ausgeprägt nichtlinearem Verhalten. Auf Grund der begrenzten Leistung der für die Versuche zur Verfügung stehenden Zug-Torsions-Prüfmaschine (Abb. 6.2) und um Fertigungsschwierigkeiten wegen zu kleiner Probenabmessung zu vermeiden, sollte der Werkstoff eine moderate Streckgrenze besitzen. Die Wahl fiel auf den Stahl Ck 15, einen weichen, kohlenstoffarmen Stahl, der besonders zur Einsatzhärtung geeignet ist.

Chemische Zusammensetzung von Ck 15 in Gew. %:

C	Si	Mn	P	S	Cr	Cu	Al	N ₂
0.15	0.29	0.39	0.012	0.026	0.12	0.215	0.0033	0.0065

Alle Proben, wie auch die bei den späteren Versuchen eingesetzten Federn sind aus Material ein und derselben Charge gefertigt. Zur Vermeidung etwaiger aus den Herstellungsverfahren des Halbzeugs (z. B. Texturen durch Strangpressen) und aus der Weiterverarbeitung (z. B. Verfestigung durch Kaltformung) resultierender Anisotropien wurden alle Proben bei ca. 900 °C zwei Stunden unter Hochvakuum geglüht und langsam abgekühlt.

6.2.2. Ermittlung der Werkstoffkenngrößen

Zur analytischen Beschreibung des Spannungs- und Verfestigungszustands benötigen wir für das verwendete Material die Materialfunktionen (3.1.10) sowie die elastischen Werkstoffkenngrößen G und ν .

In seiner Dissertation [34] hat ZEBEL für die Materialfunktionen die Ansätze

$$k^2 = k_0^2 + a_1 (1 + a_2 b^* - \exp(-a_3 b^*)); \quad b^* \leq b_1^*$$

$$k^2 = k_\infty^2 - (k_\infty^2 - k_1^2) \exp(-a_4 (b^* - b_1)); \quad b^* > b_1^*$$

$$\zeta = a_5 (a_6 + a_7 \exp(-a_7 b^*)) \sqrt{6k^2}$$

$$2G\kappa = a b^{*3}$$

ermittelt. Zur Verifikation der materialabhängigen Konstanten haben wir auf der hydraulischen Zug-Torsions-Prüfmaschine³⁾ (Abb. 6.2) des IfM drei Typen von Versuchsreihen mit Zylinderproben gefahren. Als Grundexperiment zur Ermittlung des Verfestigungsverhaltens dient der einachsige Zugversuch. Zur Bestimmung der isotropen und kinematischen Verfestigung sind

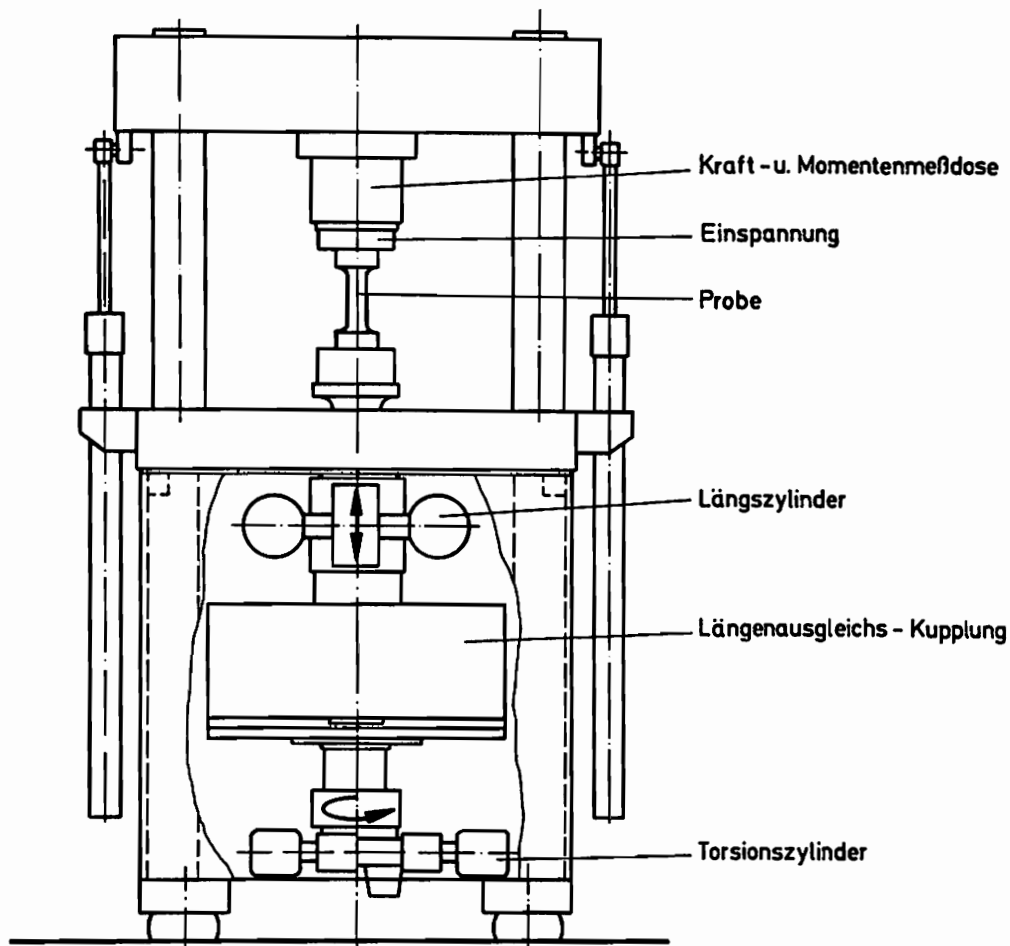


Abb. 6.2. Universalprüfmaschine

3) Die Maschine wurde von der Firma Schenk in Darmstadt gebaut und vom IfM mit Mitteln der Stiftung Volkswagenwerk erworben.

Torsionsversuche mit Belastungsumkehr nötig. Die Abweichung von der Normalenregel erhalten wir aus kombinierten Zug-Torsionsversuchen mit abruptem Belastungswechsel Zug-Torsion bzw. Torsion-Zug. Eine genaue Versuchsbeschreibung sowie die Vorschriften zur Ermittlung aller Größen sind aus der Arbeit von ZDEBEL [34] zu entnehmen.

Die experimentellen Untersuchungen ergaben für den Werkstoff Ck 15 die Konstanten:

$$k_0^2 = 22480.00000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$a_1 = 86664.00000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$a_2 = 0.00490 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$a_3 = 0.05740 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$b_1^* = 80.00000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$k_1^2 = 142238.00000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$k_\infty^2 = 160000.00000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$a_4 = 0.02675 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$a_5 = 7.30000 \text{ N}/\text{mm}^2$$

$$a_6 = 0.01350 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$a_7 = 1.18000 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$a = 0.00050 \text{ mm}^6/\text{N}^3$$

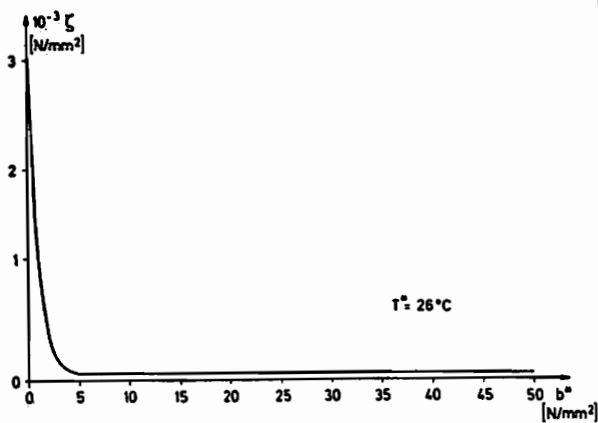
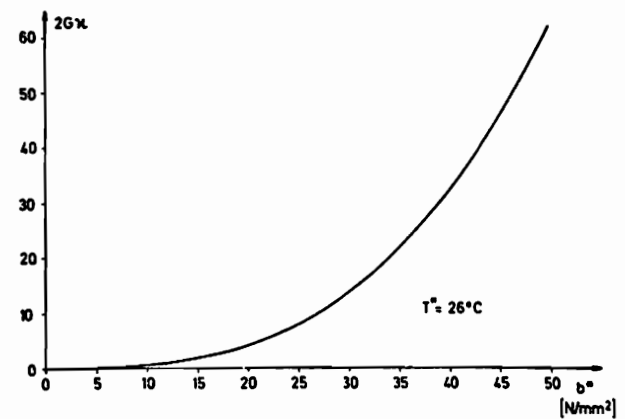
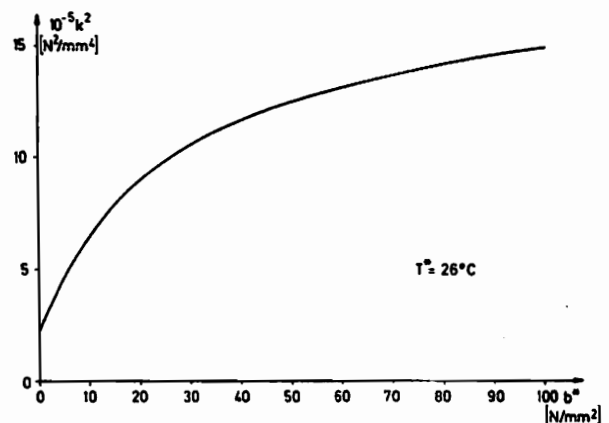


Abb. 6.3. - 6.5.

Materialfunktionen des Werkstoffs
Ck 15

In den Abbildungen (6.3 - 6.5) sind die Materialfunktionen in Abhängigkeit der Zustandsvariablen dargestellt.

Die Messung der elastischen Materialgrößen ergab die Werte

$$G = 84000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.28989$$

Im Rahmen der getroffenen Voraussetzungen (isotherm, kleine elastische Deformationen) können diese als konstant angenommen werden.

6.2.3. Vergleich zwischen Experiment und der Berechnung mit Hilfe des Stabelementes

Wie im vorausgehenden Abschnitt ausgeführt, bestimmen wir das Verfestigungsverhalten des Materials aus dem einachsigen Zugversuch. Die Approximation des aus dem Experiment gewonnenen Spannungs-Dehnungs-Diagramms liefert uns die für unsere konstitutiven Beziehungen benötigte Verfestigungsfunktion. Setzen wir diese in das Stoffgesetz ein und fahren den Zugversuch numerisch nach, können wir die nahezu deckungsgleiche Übereinstimmung der aus Theorie und Experiment erhaltenen Spannungs-Dehnungs-Verläufe erwarten. Die auftretenden Abweichungen (Abb. 6.6) sind somit ein Maß für die Güte der

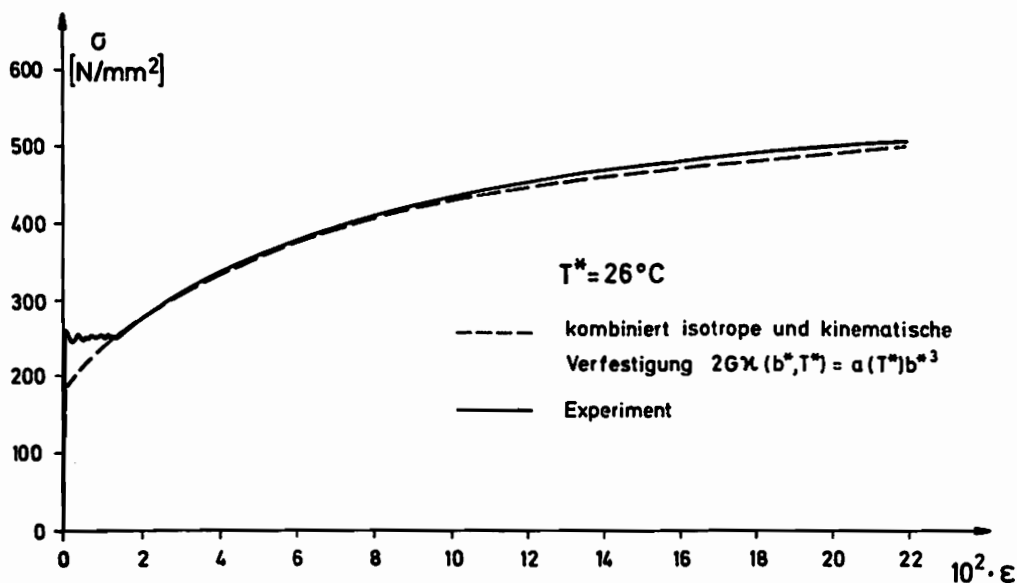


Abb. 6.6. Spannungs-Dehnungs-Kurve,
Vergleich Theorie und Experiment

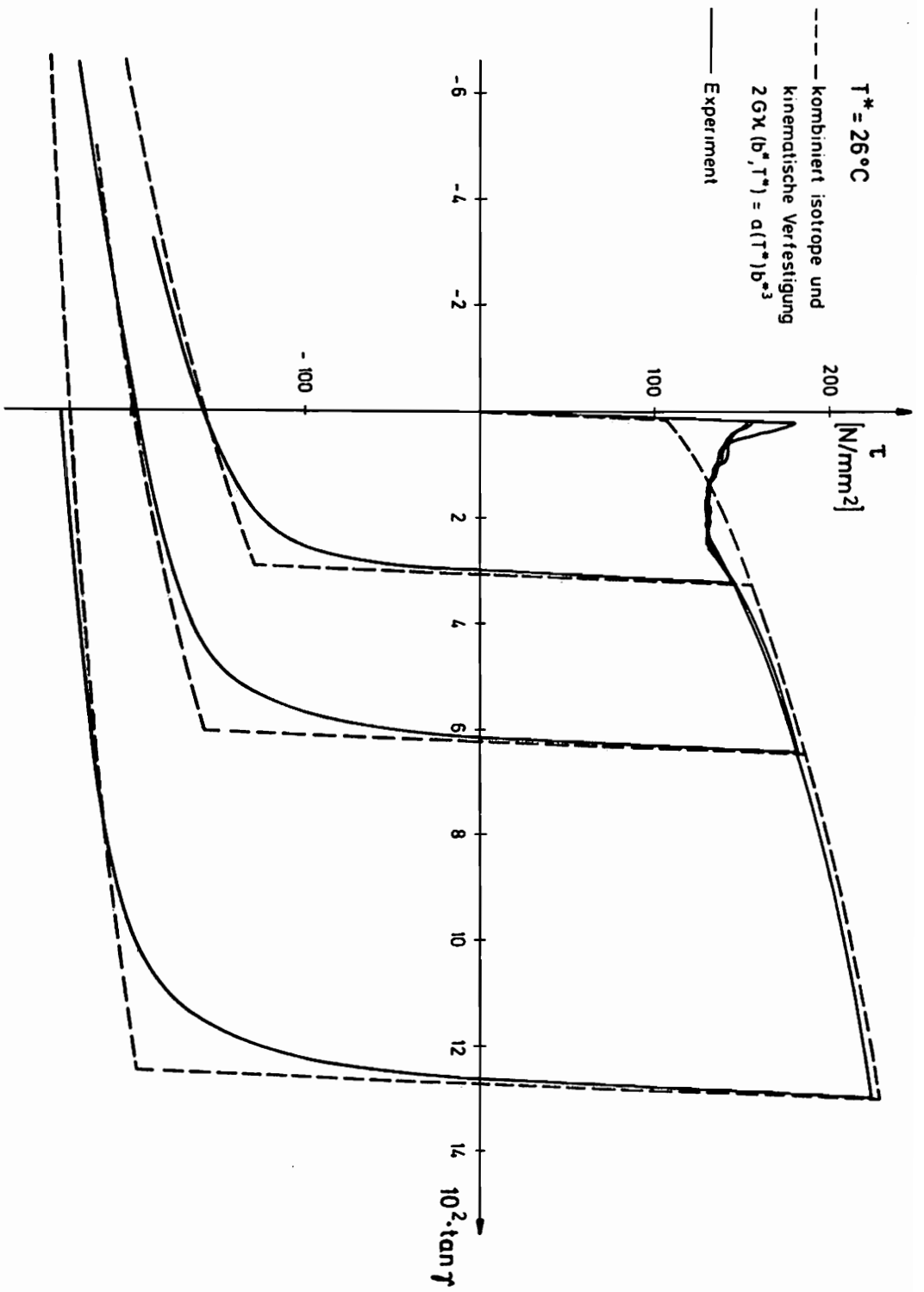


Abb. 6.7. Torsion mit Belastungsumkehr, Vergleich Theorie und Experiment

Approximationen und der Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens durch das Stabelement. Der ermittelte maximale Fehler lag bei allen Versuchen in der Größenordnung von einem Prozent.

Rechnen wir mit dem Stabelement Torsionsversuche (Abb. 6.7) ohne Belastungsumkehr nach, so erhalten wir stets um ca. 5% zu hohe Spannungen. Diese Abweichung ist, wie ZDEBEL in [34] ausführt, im wesentlichen auf die gewählte Fließbedingung zurückzuführen, die das konstante Verhältnis von $\sqrt{3}$ der Fließspannungen bei Zug bzw. Torsion voraussetzt. Abbildung 6.7 zeigt am Beispiel der Torsion auch die Beschreibung des BAUSCHINGER-Effekts bei Prozessen mit Belastungsumkehr (Zug-Druck bzw. Torsion-Rücktorsion). Nach dem Wechsel der Belastung treten im Versuch die erneuten plastischen Deformationen stets früher auf, als es die Theorie vorhersagt. Bei größeren Rückverformungen nähern sich beide Kurven wieder an und die Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie ist durchaus zufriedenstellend.

Die Ergebnisse der kombinierten Versuche mit abruptem Belastungswechsel Zug-Torsion und Torsion-Zug sind in den Abbildungen 6.8, 6.9 dargestellt. Auch hier erfaßt das Stabelement die im Versuch auftretenden Spannungsumlagerungen sowie die Spannungsänderungen bei anhaltender Verformung recht gut. Die Abweichungen von den experimentell ermittelten Funktionsverläufen bleiben immer unter fünf Prozent. Praktisch identische Resultate beschreiben LEHMANN und ZDEBEL in ihren Ausführungen [33, 34] zum verwendeten thermo-plastischen Stoffgesetz, so daß wohl letztlich die Diskrepanz in den Spannungsverläufen nicht aus den vereinfachenden Annahmen bezüglich des Element-Verschiebungsfeldes sondern primär aus dem Stoffgesetz resultieren dürfte.

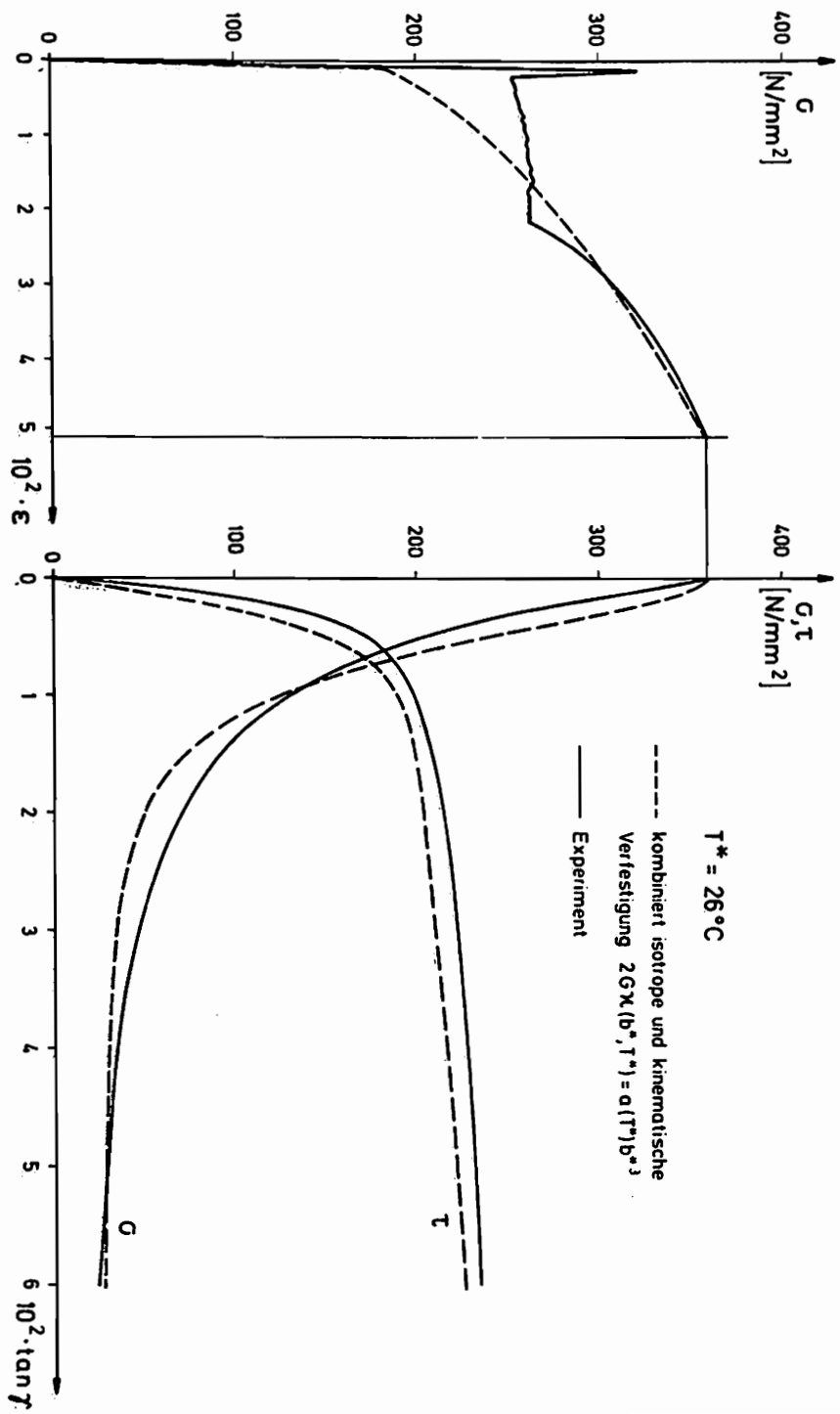


Abb. 6.8. Belastungszyklus 1, Vergleich Theorie und Experiment

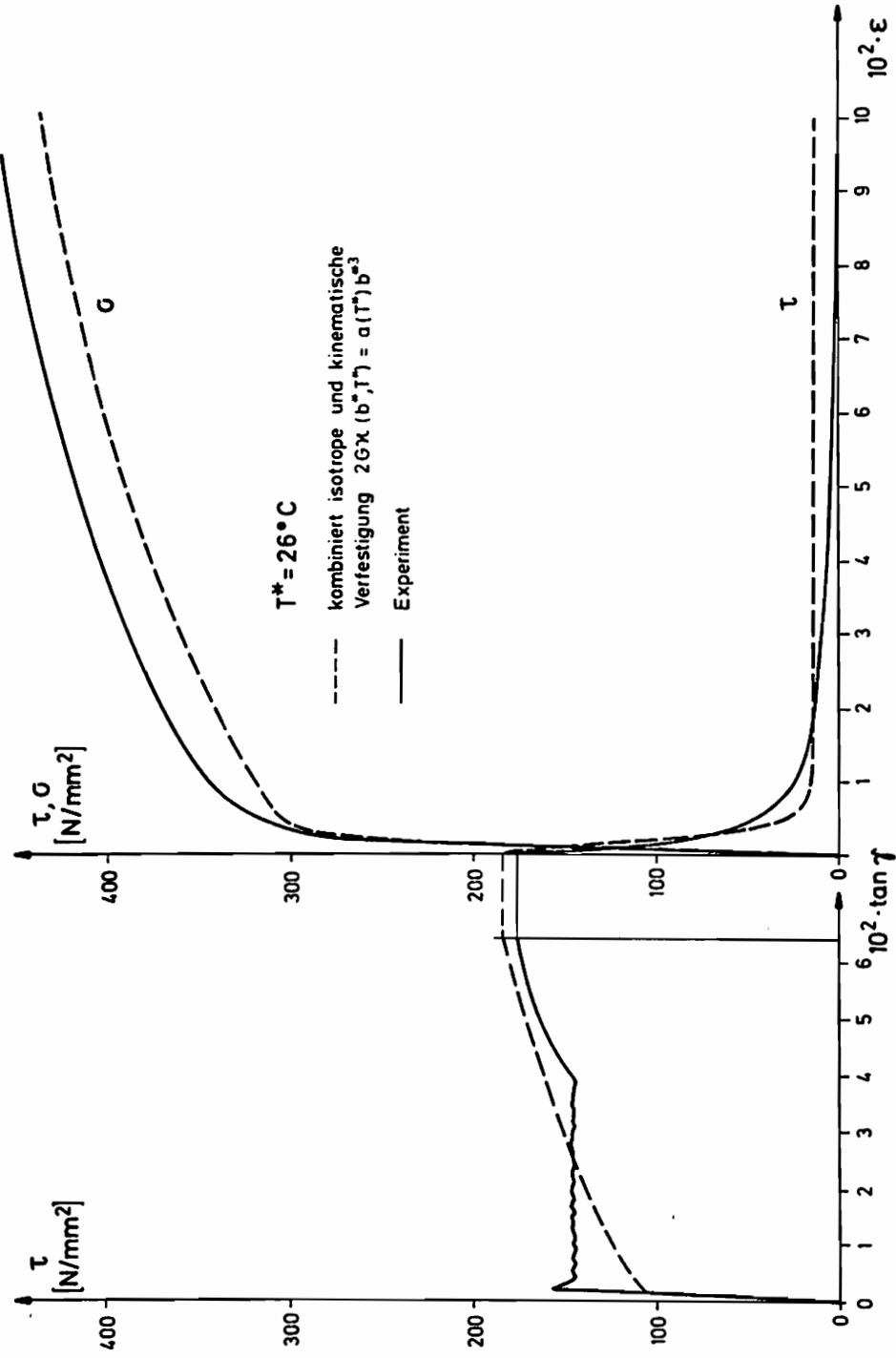


Abb. 6.9. Belastungszyklus 2, Vergleich Theorie und Experiment

6.3. Anwendungsbeispiele für das Stabelement

Nach der Implementierung des elasto-plastischen Stabelementes in das Finite-Element-Programm haben wir Berechnungen zum Fließverhalten verschiedener Strukturen durchgeführt. Von primärem Interesse war hierbei, wie die in Abschnitt 4.4 beschriebenen Iterationsverfahren auf plötzlich auftretende Steifigkeitsänderungen der Struktur, wie sie z. B. beim Eintreten des Fließens oder bei Entlastung nach vorausgehender plastischer Deformation vorkommen, reagieren. Einige Ergebnisse wollen wir beispielhaft an zwei einfachen Strukturen erläutern. Für den Abbruch der Gleichgewichtsiteration benutzten wir eine Fehlerschranke der Form (siehe 4.4.3)

$$\epsilon_{\text{tol}} \geq \frac{|\Delta R^{(i-1)}|}{|2R - 2F|} \quad (6.3.1)$$

mit $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$.

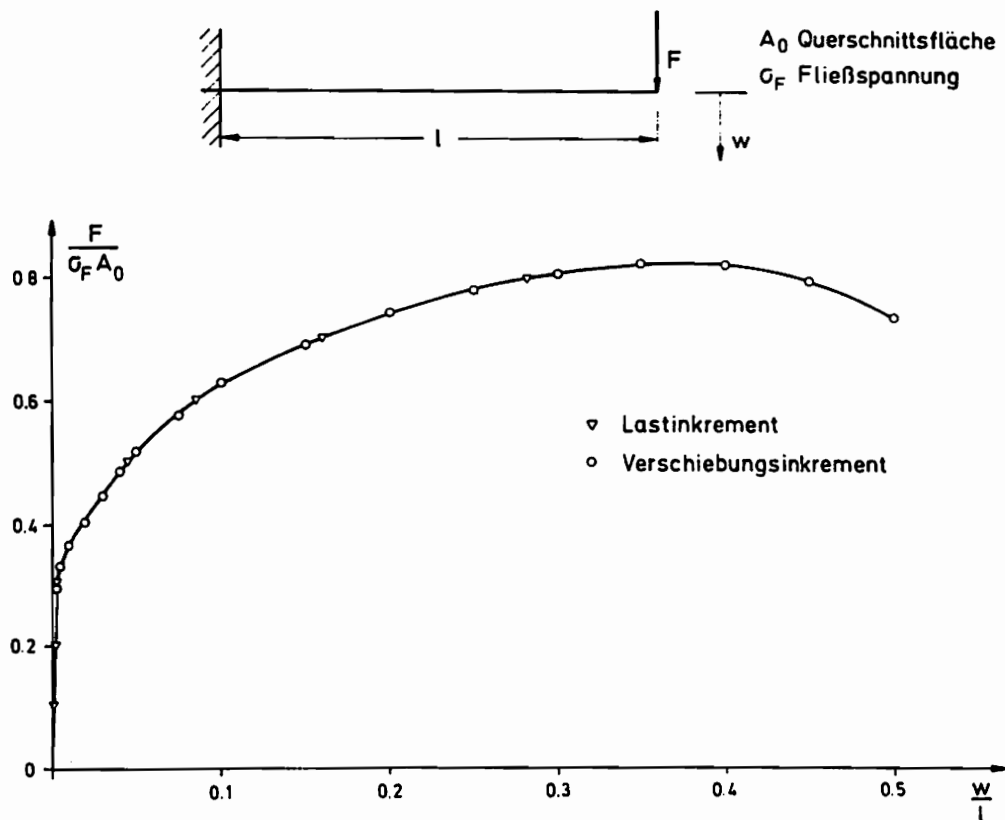


Abb. 6.10. Beispiel 1: Kragträger mit Endlast

Abbildung 6.10 zeigt das erste Beispiel, einen durch Querkraft belasteten Kragträger. Dieser wird über seine Fließgrenze hinaus plastisch deformiert. Das für ihn berechnete Last-Verschiebungs-Diagramm ist ebenfalls dieser Abbildung zu entnehmen. In Tabelle 6.1 haben wir die Anzahl der bei den verschiedenen Iterationsverfahren in den einzelnen Lastinkrementen durchlaufenen Iterationen aufgelistet. Im oberen Teil sind die bei Vorgabe der eingepprägten Systemverschiebung w benötigten Schritte dargestellt. Die bei Vorgabe der Verschiebungsrandbedingungen erreichte wesentliche Verminderung der zur Gleichgewichtsfindung notwendigen Iterationen läßt sich auch bei Strukturen mit größerer Elementzahl feststellen.

Im zweiten Beispiel wollen wir die Traglast des in Abbildung 6.11 dargestellten Dreibeins bestimmen. Nach Eintreten des plastischen Fließens wird die Struktur vollkommen entlastet, um die bleibende plastische Verformung u_{pl} sowie die Restspannungen zu ermitteln. Aufgetragen sind das berechnete Last-Verschiebungs-Diagramm sowie der Spannungszustand der Einzelstäbe. In Tabelle 6.2 werden die bei den verschiedenen Verfahren benötigten Iterationsschritte miteinander verglichen. Der mit einer Entlastung verbundene Übergang von plastischem zu elastischem Materialverhalten bedingt normalerweise eine Reorganisation der System-Steifigkeitsmatrix oder eine große Anzahl von Iterationsschritten im ersten Entlastungsinkrement.

Tabelle 6.1

$\frac{w}{l}$	$\frac{F}{\sigma_{F^A} A_0}$	NR	MNR	BFGS
Laststeuerung				
0.001	0.100	1	1	1
0.002	0.200	2	3	3
0.003	0.300	4	12	4
0.018	0.400	7	55	9
0.045	0.500	10	21	11
0.085	0.600	16	64	16
0.162	0.700	15	72	17
0.282	0.800	15	68	16
Wegsteuerung				
0.003	0.295	1	1	1
0.005	0.329	3	11	3
0.010	0.365	2	6	3
0.020	0.402	2	5	3
0.030	0.443	3	5	3
0.040	0.484	2	5	3
0.050	0.516	4	8	4
0.075	0.572	4	35	5
0.100	0.631	4	42	6
0.150	0.690	5	21	4
0.200	0.742	4	26	5
0.250	0.779	5	23	5
0.300	0.805	4	22	5
0.350	0.823	6	15	7
0.400	0.818	6	16	6
0.450	0.796	3	13	5
0.500	0.733	4	12	5

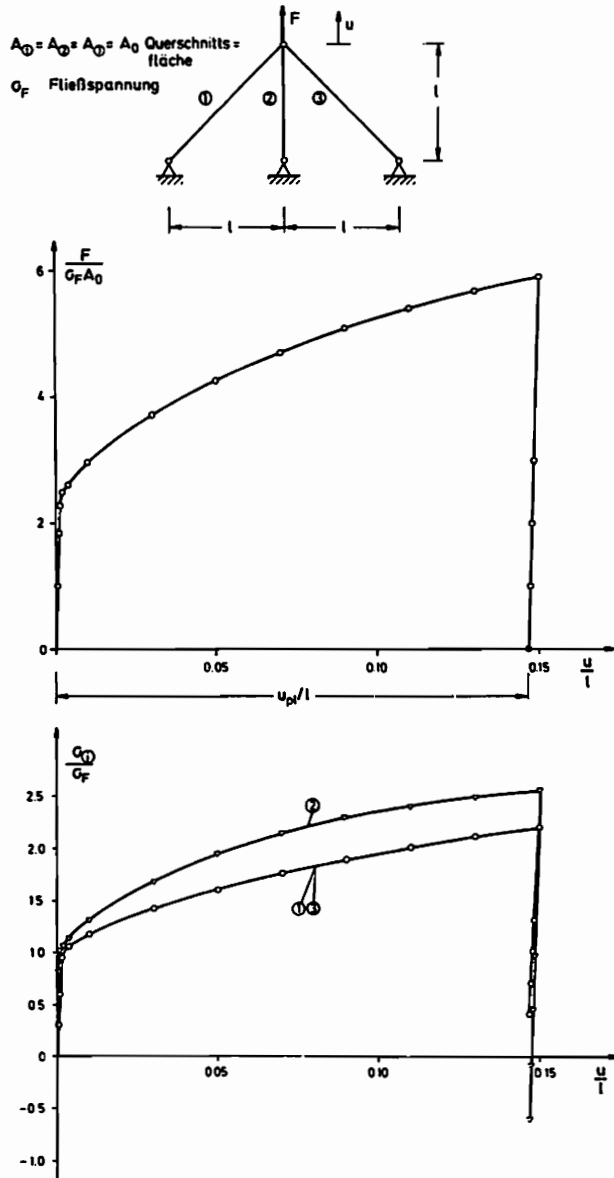


Abb. 6.11. Beispiel 2: Statisch unbestimmtes Fachwerk

Tabelle 6.2

$10^2 \frac{u}{I}$	$\frac{F}{\sigma_F A_O}$	$\frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_F}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_F}$	NR	MNR	BFGS
0.05	1.090	0.298	0.597	1	1	1
0.10	1.863	0.570	1.019	1	1	1
0.15	2.308	0.896	1.041	1	1	1
0.20	2.505	1.018	1.062	2	3	2
0.40	2.644	1.063	1.139	2	2	2
1.00	2.974	1.173	1.310	2	2	2
3.00	3.716	1.420	1.680	2	2	2
5.00	4.272	1.604	1.951	2	2	2
7.00	4.716	1.763	2.150	2	2	2
9.00	5.087	1.901	2.297	2	2	2
11.00	5.396	2.020	2.406	2	2	2
13.00	5.656	2.121	2.490	2	2	2
15.00	5.879	2.208	2.559	2	2	2
14.84	2.971	1.314	0.988	4	-	5
14.79	1.982	1.012	0.456	2	-	2
14.74	0.991	0.709	-0.078	2	-	2
14.69	0.000	0.405	-0.611	2	-	2

Geben wir für dieses jedoch eine relativ kleine Laständerung vor, erhalten wir auch ohne Neuberechnung der System-Steifigkeitsmatrix schnelle Konvergenz. Der Steifigkeits-Update geschieht erst im folgenden Lastschritt, von dem ab wir mit Inkrementen gewohnter Größe weiterentlasten.

Anhand der gewählten einfachen Beispiele wird deutlich, daß bei der modifizierten Newton-Raphson-Iteration (MNR) immer Konvergenzschwierigkeiten auftreten, wenn sich die Steifigkeit der Struktur während des Lastschrittes wesentlich ändert.

Nimmt sie stark ab, wie es für den Eintritt des plastischen Fließens (Beispiel 1) typisch ist, und plastifiziert innerhalb des Lastinkrements mehr als ein Element, kann es sogar zu Divergenz von der Lösung kommen. Bei einer plötzlichen Steifigkeitszunahme, wie sie bei Entlastung plastisch fließender Strukturen auftritt (Beispiel 2), liefert die MNR nur Konvergenz, wenn die Systemsteifigkeitsmatrix innerhalb des Lastschrittes mit den elastischen Werkstoffkenngrößen erneut aufgestellt und zur weiteren Iteration verwendet wird.

Hingegen zeigt die BFGS-Methode befriedigendes Konvergenzverhalten. Bei allen berechneten Strukturen benötigt sie nur unwesentlich mehr Iterationen als das volle Newton-Raphson-Verfahren (NR), bei dem, wie in Abschnitt 4.4 erwähnt, die System-Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt neu

zu berechnen und zu triangularisieren ist. Dies führt bei großen Systemen zu einem gegenüber der BFGS mit ihrer geringfügig größeren Zahl von Iterationen unvertretbar hohen numerischen Aufwand. Aus diesem Grund setzen wir die BFGS-Methode bei den weiteren Berechnungen als Standard-Iterations-Verfahren ein.

Abschließend bleibt noch zu erwähnen, daß die Größe der vorgegebenen Lastinkremente sowie die Entscheidung, ob der Struktur eingeprägte Kräfte oder Verschiebungen als Randbedingungen vorgegeben werden, von Problem zu Problem neu abzuwägen sind. Im Zweifelsfalle müssen diese Größen während der Berechnungen interaktiv überwacht und gesteuert werden.

7. Schraubenfedern

Belasten wir eine Druckfeder und überschreiten die dadurch in ihr erzeugten Spannungen die Fließgrenze des Werkstoffs, tritt abhängig vom Maß der Überschreitung eine bleibende Verformung auf, die sich in einer Längenabnahme der ungespannten Feder äußert. Erfolgt dieses Setzen erst während des Betriebszustands, führt es in den meisten Fällen zum Ausfall der Feder, oft auch zu dem des gesamten Aggregats.

Um dies zu vermeiden, werden die Federn bei der Herstellung entsprechend den zu erwartenden Betriebskräften vorgesetzt. Durch das Vorsetzen tritt eine Verfestigung des Werkstoffes ein, wodurch wir sicherstellen, daß die Fließspannung im späteren Einsatz nicht mehr überschritten wird. Mit den nach dem Setzen verbleibenden lokalen Eigenspannungen, die den Betriebsspannungen entgegengesetzt sind, ist bei Wiederbelastung ein höheres elastisches Formänderungsvermögen verbunden, wodurch eine bessere Werkstoffausnutzung bei ruhender bzw. selten wechselnder Belastung erreicht wird.

Ziel der von uns durchgeführten Berechnungen ist, neben den üblichen Größen wie Federkennlinie (Last-Verschiebungsdiagramm) und Federrate (Feder-rate-Verschiebungs-Diagramm), auch das für eine gegebene Last zu erwartende Setzmaß, den Verfestigungszustand des Werkstoffes sowie die nach dem Plastizieren in den einzelnen Querschnitten verbleibenden Eigenspannungen numerisch zu ermitteln.

7.1. Diskretisierung der Schraubenfeder

Durch den Trend der Automobilindustrie zum Leichtbau wird von den Federnherstellern zunehmend die Verminderung des Federgewichts und der -bauhöhe gefordert. Dies kann durch den Einsatz zylindrischer und nichtzylindrischer Schraubendruckfedern mit progressiver Kennung realisiert werden. Die Progressivität der Kennlinie entsteht sowohl durch die Federgeometrie (Tonnenfeder, Tailenfeder usw.) als auch durch das sukzessive Abschalten, d. h. das Anlegen einzelner Windungen aneinander (inkonstante Steigung der Windungen) bzw. das Abrollen oder Anlegen auf der Federunterlage. Diese Eigenschaften weisen vor allem die Mehrzahl der nichtzylindrischen Schraubendruckfedern auf.

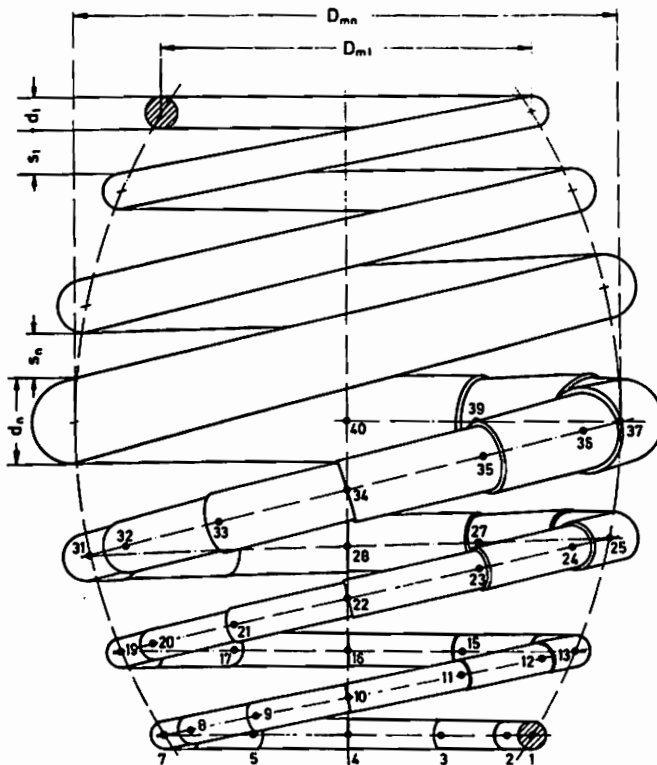


Abb. 7.1. Diskretisierung einer Schraubenfeder

Für die FEM-Analyse diskretisieren wir die zu untersuchende Feder mit dem elasto-plastischen Stabelement. Beliebige Geometrie sowie variablen Drahtdurchmesser können wir durch eine geeignete Elementunterteilung, wie sie z. B. in Abbildung 7.1 dargestellt ist, hinreichend genau erfassen. Da das Setzverhalten der Druckfedern mit progressiver Kennung entscheidend durch die Berührungszustände bei ihrer Verformung, d. h. dem Kontakt einzelner Windungsbereiche miteinander oder mit der Federauflage, geprägt ist, müssen wir zusätzlich Elemente einbauen, mit denen wir die entstehenden Kontaktprobleme modellieren können. Setzen wir diese "Kontakt"-Elemente zwischen die Knotenpunkte, an denen wir Berührung erwarten, sollen sie im Falle eines Kontakts die entstehenden Zwischenreaktionen in die sich berührenden Knoten einleiten. Definieren wir auch auf der Federunterlage Knoten, können wir das Anlegen bzw. Abrollen der Endwindung auf der Federunterlage ebenfalls mit Hilfe dieses Elementtyps beschreiben.

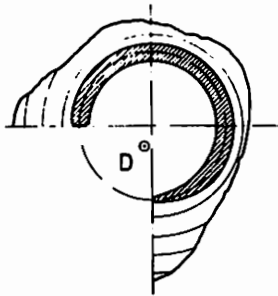


Abb.7.2. Druckverteilung
Federaufstandsfläche

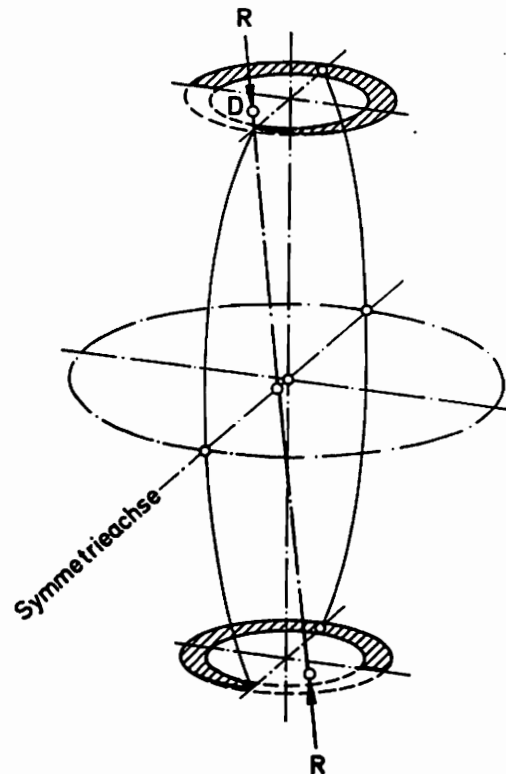


Abb. 7.3. Exzentrizität und
resultierende Belastungsrichtung

Wegen der Unsymmetrie der Federenden erhalten wir eine unsymmetrische Druck-

verteilung (Abb. 7.2) in der Federaufstandsfläche. Damit weicht die resultierende Druckkraft R (Abb. 7.3) von der geometrischen Mittellinie der Feder ab. Folge dieser Exzentrizität sind zusätzliche Momente und Querkräfte in den Auflagern. Rollen die Federenden mit zunehmender Belastung auf der Unterlage ab, ändert sich die Druckverteilung, der Druckmittelpunkt D wandert aus und damit variiert der Verlauf der Resultierenden sowie die Exzentrizität. Da wir für eine gegebene Last die resultierende Druckverteilung aus den, durch die "Kontakt"-Elemente übertragenen, Kräften berechnen können, liegen uns auch die zugehörigen Auflagerreaktionen vor.

7.1.1. "Kontakt"-Element

Erstmalig wird das "Kontakt"-Element von HUGHES vorgestellt, der in seiner Arbeit [75] das Kontaktproblem zwischen zwei Knoten direkt auf die Elementebene zurückführt. Das von ihm beschriebene Element findet inzwischen nicht nur bei Berechnungen dieses Problemkreises [76, 77] sondern auch bei Untersuchungen zu Rißausbreitungen in Bauteilen [78, 79] Verwendung. Daher ist in der Literatur auch die Bezeichnung Gap-Element geläufig.

Das "Kontakt"-Element läßt sich durch ein diskretes Federmodell (Abb. 7.4) darstellen, das nur dann eine Reaktionskraft überträgt, wenn es gestaucht wird. Somit hängen seine Knotenkräfte S_i sowohl von der Richtung der beiden Freiheitsgrade u_i

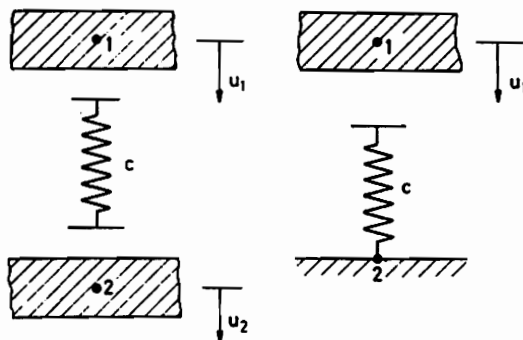


Abb. 7.4. Federmodell des "Kontakt"-Elementes

als auch dem Abstand l_k der Knoten ab (Abb. 7.5). Ist dieser größer als die

ungespannte Länge l der Feder, sind die Verschiebungen u_1 und u_2 entkoppelt und die Knotenkräfte verschwinden. Tritt ein Kontakt auf und wird das Element gestaucht, führt dies zu einer Kopplung der linken und rechten Knotenverschiebung

$$u_1 = u_2 \tag{7.1.1}$$

und zu den Knotenkräften

$$S_1 = -S_2 \tag{7.1.2}$$

Das beschriebene Verhalten können wir mit zwei symmetrischen quasi-Element-Steifigkeitsmatrizen formulieren. Für ein geöffnetes Element lautet diese

$$H_{nK} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{7.1.3}$$

ein geschlossenes simulieren wir mit

$$H_K = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.1.4}$$

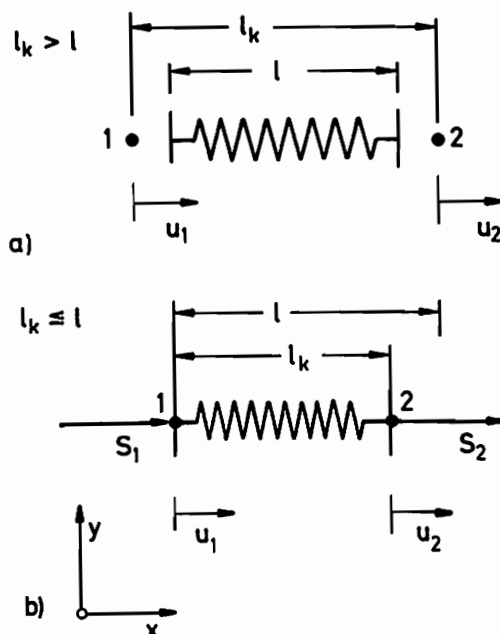


Abb. 7.5. Schnittgrößen des "Kontakt"-Elementes

Den Vektor der Knotenkräfte erhalten wir dann aus dem Matrizenprodukt

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}. \quad (7.1.5)$$

Je nachdem, ob ein Kontakt vorliegt und das "Kontakt"-Element gestaucht wird oder nicht, bauen wir eine der beiden Element-Steifigkeitsmatrizen in die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems zwischen die sich berührenden Knoten ein. Ist kein Kontakt vorhanden, sind durch Verwendung der Matrix \mathbf{H}_{nK} die Systemfreiheitsgrade dieser Knoten entkoppelt und ihre Knotenkräfte verschwinden. Wird das Element gestaucht, erzwingt die Matrix \mathbf{H}_K die gewünschte Kopplung der Systemverschiebungen und der resultierende Knotenkraftvektor \mathbf{S} baut die Kontaktkraft an der Berührungsstelle auf. Tritt während des Lastinkrements eine Änderung, d. h. ein Kontakt- oder Abhebevorgang auf, so braucht lediglich ein "Schalter" für die Steifigkeit umgelegt und die Kontaktkraft mit der entsprechenden Element-Steifigkeitsmatrix berechnet zu werden. Da wir die Knotenkräfte bei der Gleichgewichtsiteration mit berücksichtigen, wird das Kontakt- bzw. Abhebeprobem des Lastschrittes exakt erfaßt und gelöst. Über die Federsteifigkeit c (Bettungsziffer β) kann zusätzlich die Größe der Kontaktkraft individuell beeinflußt und damit auch Berührung von Materialien verschiedener Härte sowie die Bettung in einer Auflagefläche simuliert werden.

Da beim Einbau der "Kontakt"-Elemente die Symmetrie der System-Steifigkeitsmatrix erhalten bleibt, können wir auch weiterhin alle auf diese Symmetrie ausgerichteten speicheroptimalen Algorithmen nutzen. In Verbindung mit dem angesprochenen FEM-Programm läßt sich das "Kontakt"-Element beliebig mit anderen Elementtypen kombinieren, es muß jedoch beachtet werden, daß es im Gegensatz zu den Standard-Elementen nicht für unterschiedliche Belastungsrichtungen genutzt werden kann, da die Kontaktkraft nur bei einer Stauchung des Elements entsteht. Durch Berücksichtigung von Gap-Elementen zwischen den Knoten, an denen Abhebe- oder Kontaktvorgänge zu erwarten sind, können die verschiedensten Probleme untersucht werden. Die Zahl der gleichzeitig stattfindenden Berührungs- und/oder Abhebevorgänge ist dabei unerheblich, da die jeweils neu entstandenen oder gelösten Bindungen durch die Gleichgewichtsiteration mit berücksichtigt werden.

7.1.2. Beispiel zum "Kontakt"-Element

An einem rechenzeitunkritischen einläufigen Stabtragwerk wollen wir die bei der Analyse einer Schraubendruckfeder mit progressiver Kennlinie zu erwartenden typischen Kontakt-, Abhebe- und Abrollerscheinungen simulieren, um Aufschlüsse darüber zu erhalten, wie die Iterationsalgorithmen BFGS und MNR auf die damit verbundenen Sprünge der Systemsteifigkeit reagieren. Vor allen Dingen galt es, die Frage zu beantworten, ob das BFGS-Verfahren auch beim Einbau von "Kontakt"-Elementen in das System die bei den elasto-plastischen Berechnungen gezeigte Zuverlässigkeit beibehält und für die weiteren Untersuchungen als Iterationsverfahren geeignet ist.

Als Beispiel wählen wir ein ebenes System entsprechend Abbildung 7.6. Die aus drei Biegebalken zusammengesetzte Struktur wird durch ein Moment M_0 belastet. Die mit Abstand zu ihm angeordnete starre Unterlage läßt nur eine begrenzte Vertikalverschiebung der Knoten 2 und 3 zu. Belasten wir den Träger und erhöhen dabei schrittweise das Biegemoment M_0 , wird zuerst Knoten 2, einige Lastschritte später Knoten 3 Kontakt mit der Aufstandsfläche bekommen. Nach einer Übergangszeit, in der beide Knoten aufliegen, wird Knoten 2 wieder abheben, der Träger rollt quasi auf der Unterlage ab. Die Struktur diskretisieren wir durch drei Stabelemente. Zwischen die erwarteten Auflagepunkte und den Knoten 2 bzw. 3 bauen wir "Kontakt"-Elemente ein. Da die Reaktionskraft Knoten/Unterlage normal zur Berührungsfläche wirken muß, sehen wir für die "Kontakt"-Elemente verschiebliche Auflager auf der starren Unterlage vor. Durch eingeprägte Verschiebungen werden diese Auflager jeweils so mitbewegt, daß die Elemente immer lotrecht zur Aufstandsfläche liegen. Im Rahmen des FEM-Programmes läßt sich dies einfach durch entsprechende Vorgaben in der System-Eingabedatei erreichen.

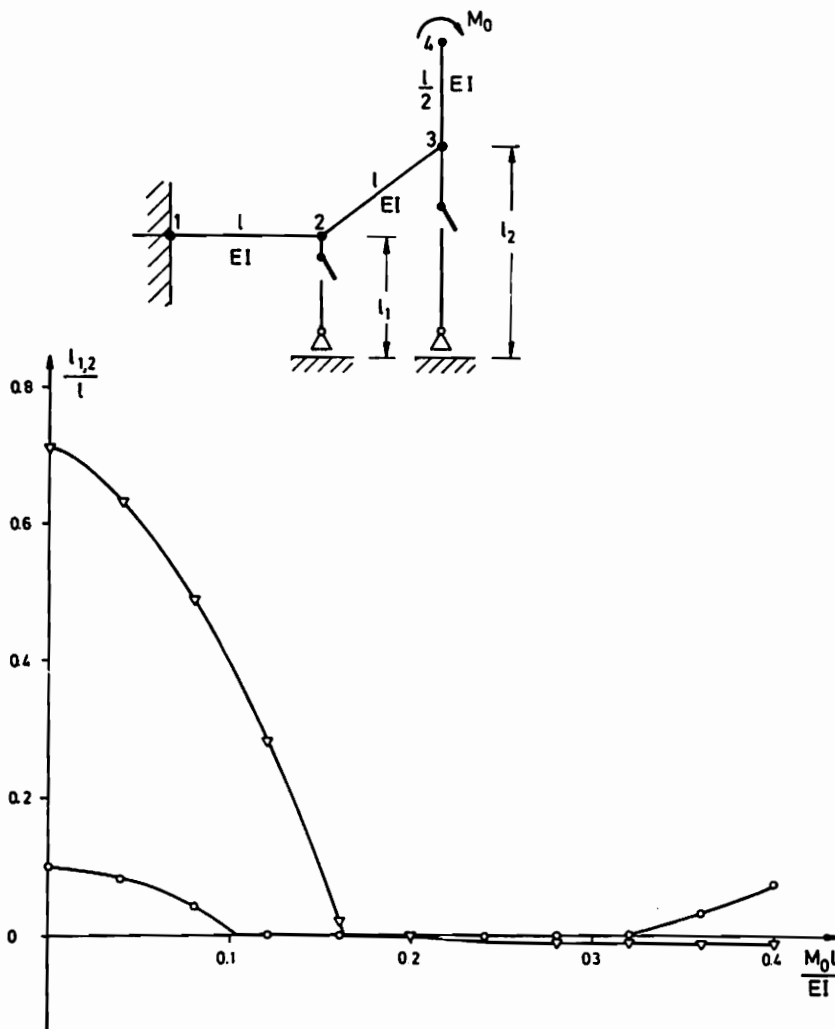


Abb. 7.6. Beispiel zum "Kontakt"-Element

Das für die Strukturknoten 2 und 3 berechnete Last-Verschiebungs-Diagramm ist ebenfalls Abbildung 7.6 zu entnehmen, Ergebnisse für die einzelnen Lastinkremente sowie die Anzahl der mit der MNR- und BFGS-Iteration zur Konvergenz (Gleichung (6.3.1), $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$) benötigten Schritte sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Wie zu erwarten war, zeigt auch dieses Beispiel, daß die im Kontaktfall auftretende plötzliche Steifigkeitsänderung des

Systems beim MNR-Verfahren zu großen Konvergenzschwierigkeiten führt, beim Abheben der Knoten sogar zu Divergenz. Für einen Einsatz bei den uns interessierenden Problemen ist sie damit ungeeignet. Die BFGS-Methode hingegen konvergierte bei allen auftretenden Kontakterscheinungen zufriedenstellend und arbeitete auch bei anderen von uns durchgeführten Testrechnungen recht zuverlässig. Aus diesem Grund scheint uns ihre Verwendung als Standard-Iterations-Verfahren zur Berechnung der bei den Schraubendruckfedern mit progressiver Kennung auftretenden Kontaktprobleme gerechtfertigt.

Tabelle 7.1

$\frac{M_o l}{EI}$	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l_2}{l}$	$\frac{S_1 l}{M_o}$	$\frac{S_2 l}{M_o}$	MNR	BFGS
0.04	0.080	0.630	-	-	1	1
0.08	0.040	0.490	-	-	1	1
0.12	-0.001	0.280	-0.12	-	16	3
0.16	-0.003	0.019	-0.44	-	1	1
0.20	-0.003	-0.001	-0.31	-0.35	39	7
0.24	-0.002	-0.007	-0.23	-0.62	1	1
0.28	-0.001	-0.009	-0.12	-0.68	1	1
0.32	-0.001	-0.011	-0.01	-0.79	1	1
0.36	0.002	-0.014	-	-0.83	-	3
0.40	0.004	-0.015	-	-0.86	-	1

7.2. Numerische und experimentelle Untersuchung von Schraubendruckfedern

Zur Überprüfung der numerischen Berechnungsverfahren sollen an zylindrischen Schraubendruckfedern mit konstanter Steigung vergleichende numerische und

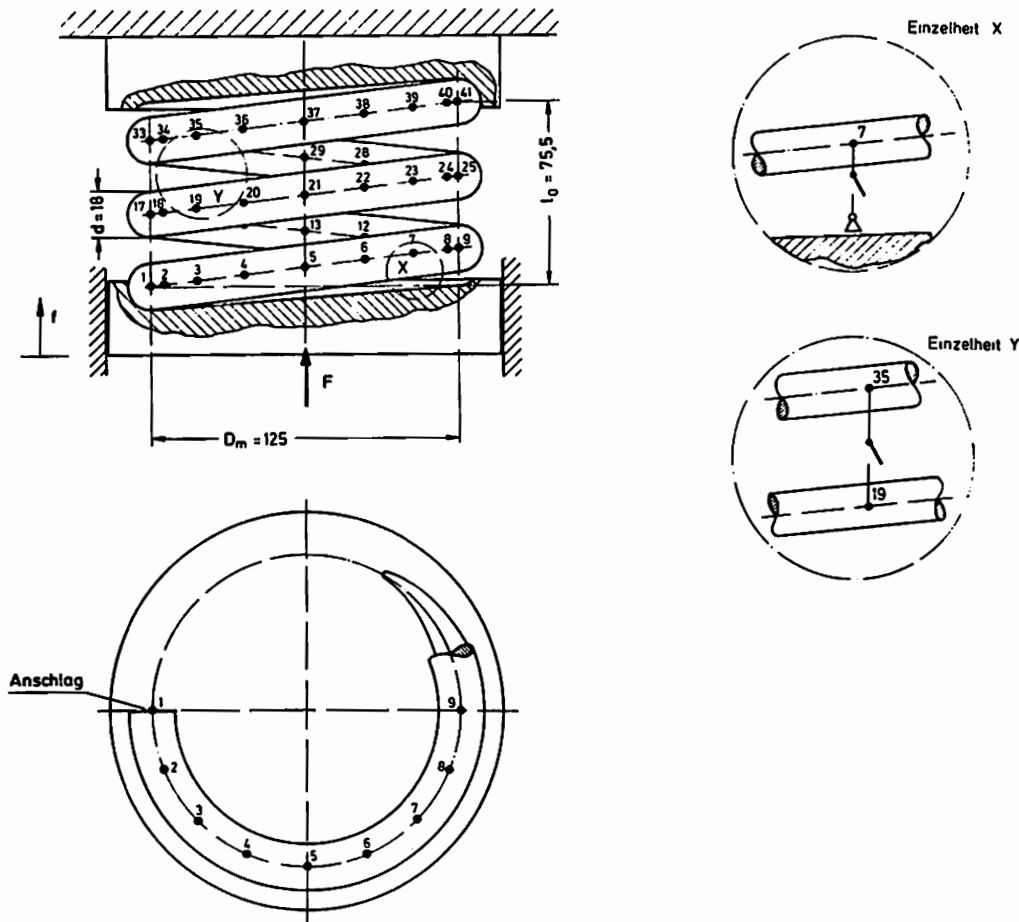


Abb. 7.7. Geometrie und Elementunterteilung einer berechneten Feder

experimentelle Untersuchungen durchgeführt werden. Für die benötigte numerische Kontrollrechnung stand uns nur der Rechner HP 1000/A900 des Instituts für Mechanik zur Verfügung. Auf Grund seiner begrenzten Kernspeicherkapazität (768 kB) und wegen des, bei einem Adressierbereich von 64 kB pro Page, bei größeren Datenmengen erforderlichen Pagings und dem damit verbundenen überproportionalen Anwachsen der Rechenzeit, mußte die Zahl der zu berechnenden Windungen beschränkt bleiben. Ausreichend für die Beurteilung der Güte des Verfahrens dürfte bei der Symmetrie des Problems die Untersuchung einer Teilfeder mit 2.5 Windungen sein, wobei Kontakt- und Abrolleinflüsse mit berücksichtigt werden.

Die Abmessungen dieser Feder sowie die spezielle Form der zur Krafteinleitung eingesetzten Federteller sind Abbildung 7.7 zu entnehmen. Für die numerische Analyse wird das Bauteil durch 40 der beschriebenen elasto-plastischen Stabelemente gleicher Länge und gleichen Durchmessers diskretisiert. Die Simulation des Kontaktproblems Windung/Federteller sowie der bei Blockbildung auftretenden Berührung der Windungen untereinander erfolgt durch den Einbau von "Kontakt"-Elementen zwischen übereinanderliegenden Knoten (Abb. 7.7). Die Kraft F prägen wir dem System über den verschiebbaren Federteller mittels der Kontaktkraft Feder/Unterlage der jeweils geschlossenen "Kontakt"-Elemente ein, die vorgegebenen Randbedingungen werden dem Federteller angepaßt.

Das so diskretisierte Bauteil hat 264 Freiheitsgrade, für die System-Steifigkeitsmatrix sowie die Werkstoff- und Anfangswerte der 138 Elemente sind 35000 Real- und 2000 Integerzahlen zu speichern, was auf der eingesetzten Rechenanlage 284 kB Programmdateien entspricht. Zur Ausführung eines aus 12 Lastschritten bestehenden Belastungs- und Entlastungszyklus benötigte der Rechner 190 CPU-Stunden, wobei der Rechenaufwand primär durch die Integration der Spannungs-Differentialgleichungen des Stabelementes bestimmt wurde.

7.2.1. Versuchsanordnung

Aus Abbildung 7.8 ist die Versuchsanordnung in ihrer Gesamtheit zu ersehen.

Die Feder wird zwischen zwei als Federteller entsprechend Abbildung 7.7 ausgeformten und fest mit der Arbeitsplattform (2) bzw. dem Meßaufnehmer (3) verschraubten Spannköpfen in die bereits erwähnte Hydropuls-Maschine (1) eingespannt. Mittels des hydraulisch gefahrenen Arbeitszylinders (4) wird die Feder mit der Einzelkraft F belastet. Die Messung der Verschiebungen des Federtellers, der Federkraft sowie des aus der exzentrischen Krafteinleitung resultierenden Auflagermomentes erfolgt durch die maschineninternen Meßaufnehmer, deren Anzeigewerte aus der Maschinenregelung (5) analog abgegriffen werden können. Zusätzlich wird während eines Versuches das Last-Verschiebungs-Diagramm der eingespannten Feder auf dem xy-Schreiber (6) direkt mitgeschrieben.

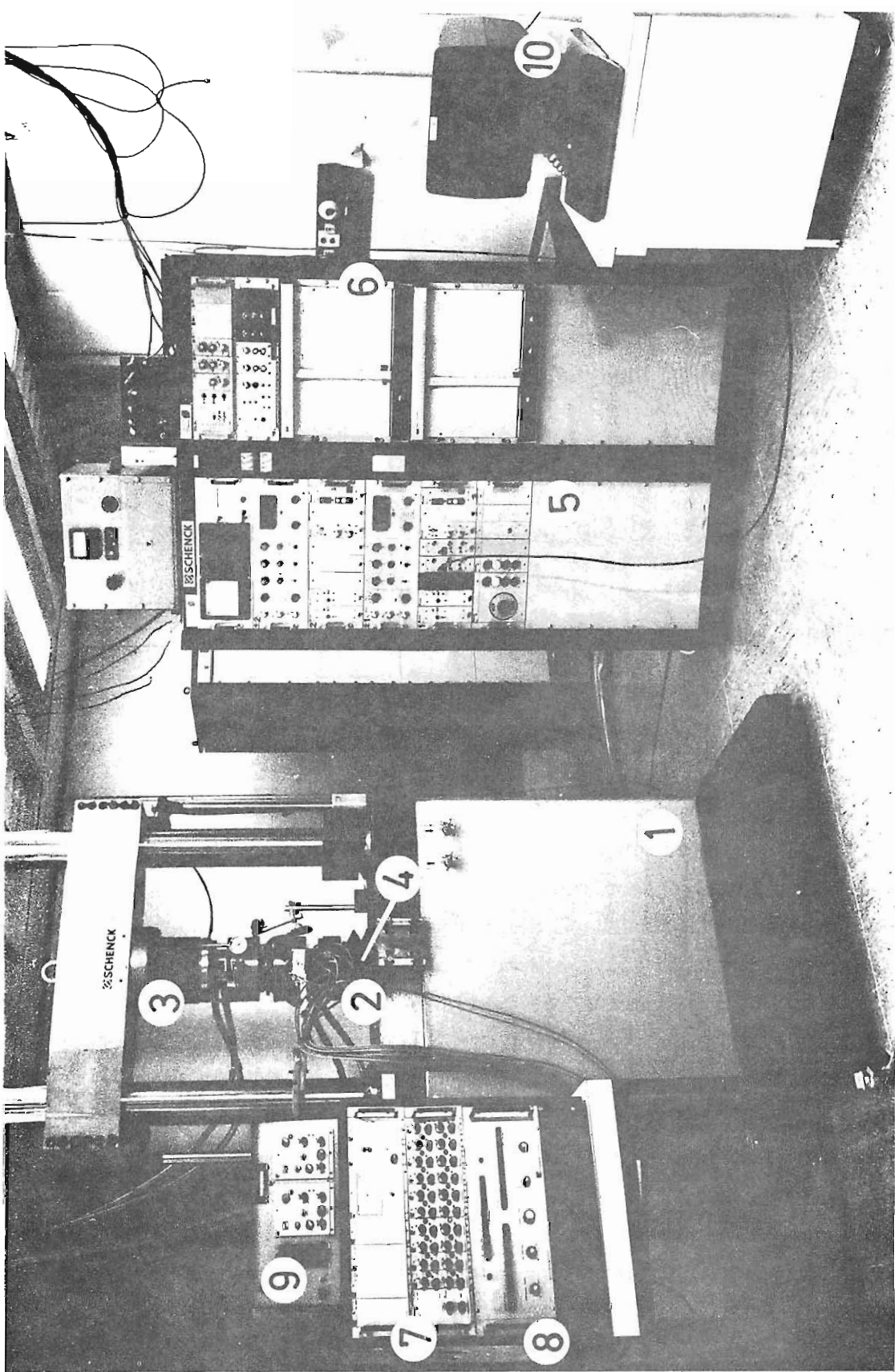


Abb. 7.8. Versuchsanordnung

Die bei Belastung der Feder auftretenden Dehnungen werden mit Dehnungsmeßstreifen aufgenommen. Hierzu bringen wir an dem durch Knoten 21 bestimmten Querschnitt der Feder in den vier auf der Mantelfläche des Drahtes liegenden Integrationsstützpunkten des Elementes Kanten-Rosetten vom Typ RY 81 ($K = 1.98 \pm 1\%$, $R = 120 \Omega \pm 0.2\%$) der Firma Hottinger Baldwin Meßtechnik mit dem Spezialkleber Z 70 auf. Näheres zur Anordnung der Dehnungsmeßstreifen geht auch aus Abbildung 7.9 hervor.

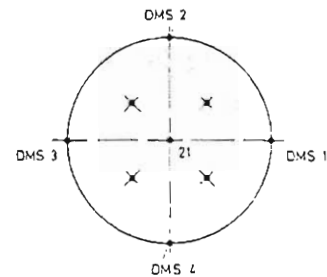
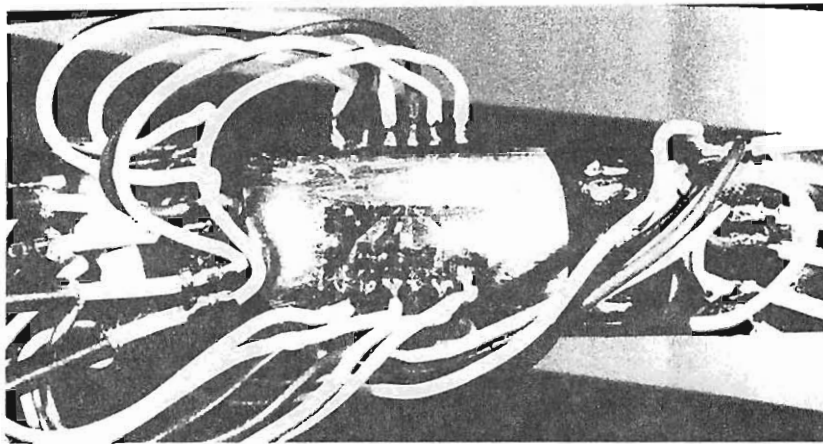


Abb. 7.9. Anordnung der Dehnungsmeßstreifen

Die Dehnungsmeßstreifen (11) bilden das erste Glied der im Blockschaubild (Abb. 7.10) skizzierten Meßkette des Versuchsaufbaus. Ihre 12 Meßgitter sind in Viertelbrückenschaltung an das Meßstellen-Umschaltgerät (7) angeschlossen. Um Einflüsse der Wärmedehnungen zu kompensieren, klemmen wir an dieses zusätzlich für je zehn Meßstellen einen Kompensations-DMS an. Die intern mit diesem Kompensator gebildeten Halbbrücken werden schließlich mit der sich in der Haupteinheit UH 3321 des Umschaltgerätes befindlichen Ergänzungshalbbrücke zu einer (modifizierten) Thomson-Vollbrücke verschaltet. Die Thomson-Schaltung eliminiert den Einfluß variierender Kontaktwiderstände beim Durchschalten der einzelnen Meßstellen.

Mit der aus Steuergerät (8) und Umschalter (7) bestehenden Meßstellen-Umschalteinrichtung legen wir die an den geschalteten Brücken durch die Dehnung der Meßgitter auftretenden Spannungen abwechselnd an den Eingang des Trägerfrequenz-Meßverstärkers (9) an. Durch Analog-Digital-Wandler werden dessen Ausgangssignale sowie die in der Regel-

einheit (5) abgegriffenen Maschinendaten dem Prozeßrechner (10) zugeführt. Hat der Rechner die Daten des anliegenden Meßgitters gewandelt, gibt er dem Steuergerät einen Schaltimpuls, so daß dieses zum nächsten Meßgitter weiter- schaltet. Nach dem Durchlauf aller Meßstellen speichert der Rechner die er- faßten Daten zusammen mit den Werten der maschineninternen Aufnehmer zur späteren Weiterverarbeitung ab. Zu einem vorgegebenen Zeitpunkt wählt der Prozeßrechner durch einen Reset des Steuergerätes wiederum das erste Meß- gitter an und startet einen neuen Meßdurchgang.

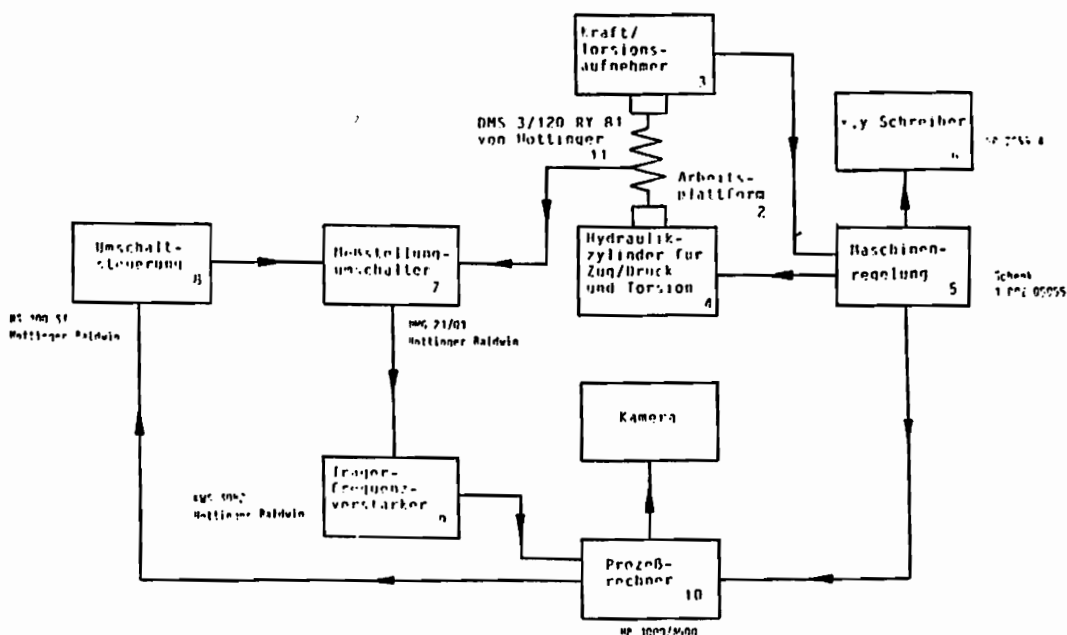


Abb. 7.10. Blockschaubild der Meßanordnung

Zur photometrischen Vermessung der Verschiebungen markanter Federpunkte nehmen wir in regelmäßigen Abständen Bilder von der sich deformierenden Feder auf. Durch geeignet angeordnete Spiegel können wir die räumliche Lage- änderung der gekennzeichneten Meßpunkte verfolgen und auf einer einzigen Fotografie festhalten. Da wir in diese gleichzeitig einen Zeit- sowie einen Verschiebungsmaßstab einblenden und das Auslösen des Kameraverschlusses durch den Prozeßrechner erfolgt, ist später eine eindeutige Zuordnung der im Rechner gespeicherten Verformungsdaten und der aus den Fotografien zu ent- nehmenden Verschiebungsfeldern möglich. Zur weiteren Auswertung können wir

die Verschiebungsfelder mittels eines Digitalisiertisches (TDS-Digitizer, Typ HR-20) in den Rechner übernehmen und zusammen mit den bereits gespeicherten Daten weiterverarbeiten.

7.2.2 Versuchsergebnisse und Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Die aus Messungen an mehreren Federn gleicher Geometrie erhaltenen charakteristischen Resultate sind in den Abbildungen 7.11 bis 7.13 zusammengestellt. Hierbei haben wir jeweils das Last-Verschiebungs-Diagramm sowie die Verläufe der Normal- und Schubspannungen in den beiden durch Biegung beanspruchten Querschnittspunkten (DMS 2 und 4, Abb. 7.9) der Feder (Abb. 7.7) im Vergleich zur Finite-Element-Rechnung aufgetragen. Da die Dehnungsmeßstreifen bei Blockbildung der Feder ausfielen, standen für die Entlastung keine Meßwerte der Dehnungen mehr zur Verfügung.

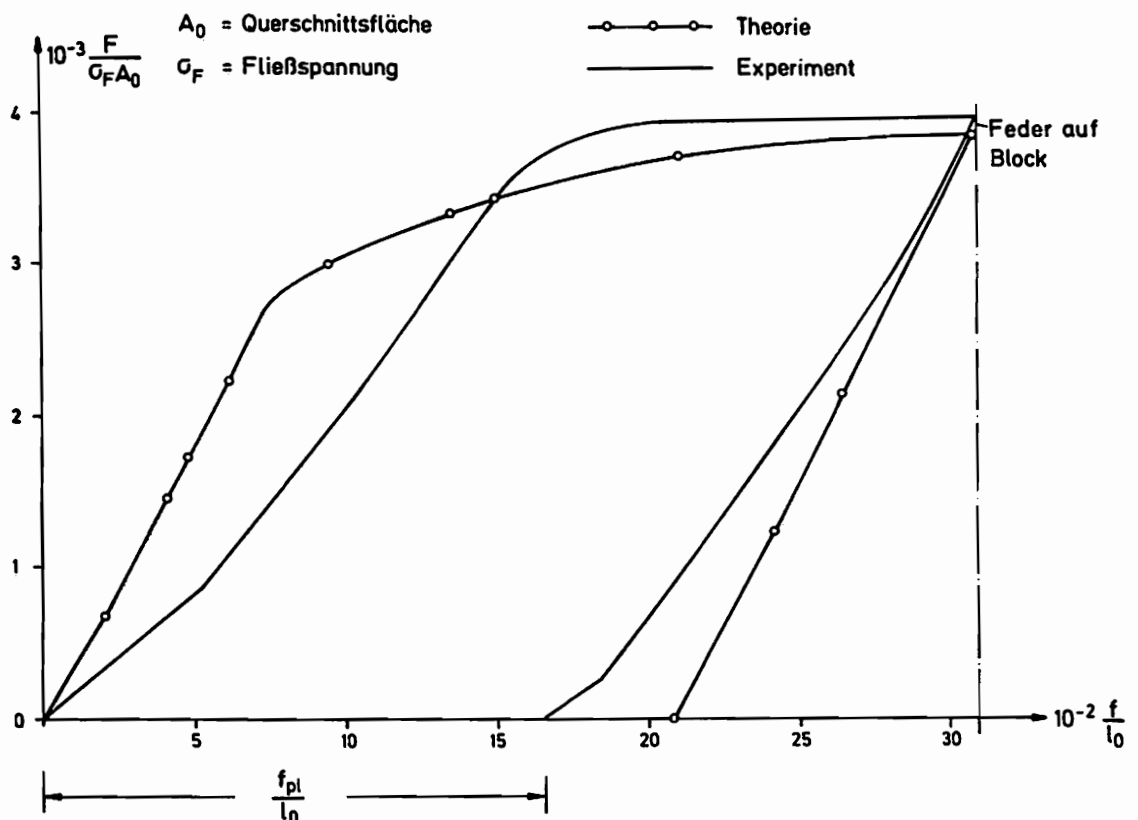


Abb. 7.11. Last-Verschiebungs-Diagramm der Feder

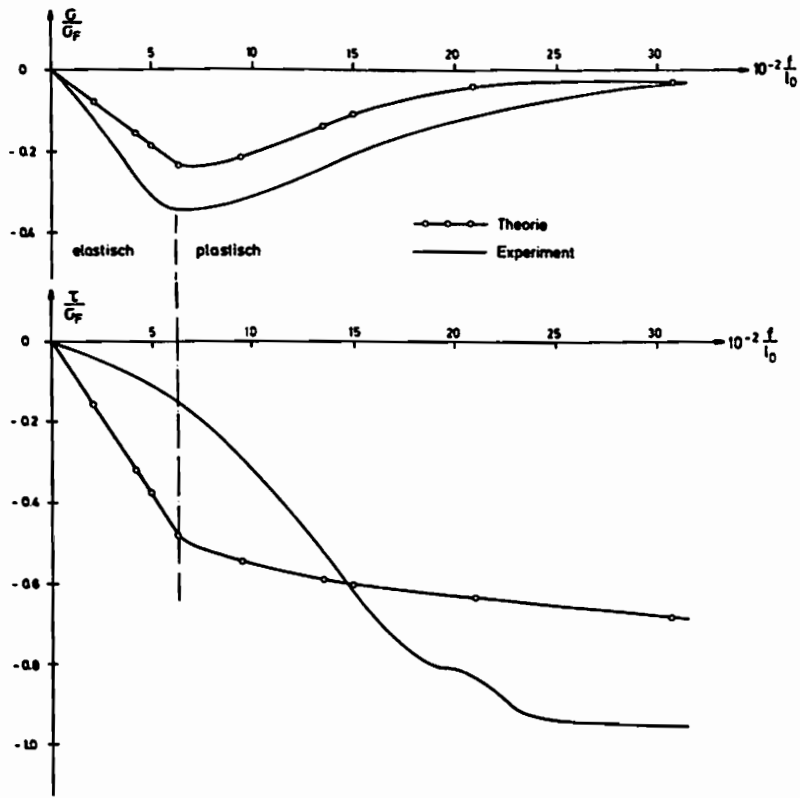


Abb. 7.12. Spannungs-Dehnungs-Kurven der Feder DMS 2

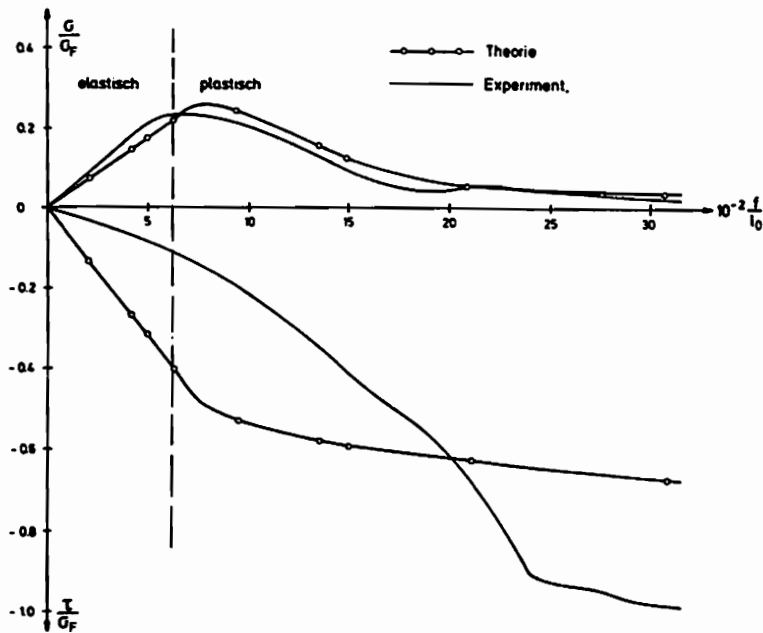


Abb. 7.13. Spannungs-Dehnungs-Kurven der Feder DMS 4

Im Bereich elastischer Formänderungen konnten wir beträchtliche Schwankungen der aufgezeichneten Meßwerte feststellen, so daß hier die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse nicht sehr gut war. Dies liegt in den fertigungsbedingten Geometrieabweichungen und der Einspannung der untersuchten Federn begründet, welche durch die Form der verwendeten Federteller zu entscheidendem Einfluß gelangen. Schon HUHNEIN berichtet in seiner Übersichtsarbeit [3], daß sich selbst kleine Abweichungen in Geometrie und Randbedingungen stark bemerkbar machen und zusammen mit der Auflage bis zum vollständigen Anliegen der Endwindungen auf dem Federteller entscheidenden Einfluß auf das Verhalten der Feder haben. Diese Aussage wird von den durchgeführten Messungen bestätigt, die nach dem Anliegen der Endwindungen nahezu identische Werte liefern, die auch im Bereich plastischer Formänderungen nicht voneinander abweichen. Bei einzelnen Proben kam es lediglich durch örtliches Fließen zu unterschiedlichen Übergängen von elastischem zu plastischem Materialverhalten.

Im gemessenen Last-Verschiebungs-Diagramm (Abb. 7.11) können wir deutlich die durch Anlegen und Plastizieren bedingten Teilbereiche unterscheiden. Belasten wir die Feder kontinuierlich, legen sich die Endwindungen während einer kurzen linear-elastischen Verformung vollständig an den Federteller an. Die dadurch verkürzte federnde Länge äußert sich in einem Anwachsen der Federkonstanten, die weitere elastische Deformation erfolgt entlang einer Geraden mit sichtbar größerer Steigung. Nach dem langsamen Eintreten des plastischen Fließens können wir die Feder bei fast konstanter Belastung weiterdeformieren, Verfestigung ist im Experiment faktisch nicht zu beobachten. Bei der anschließenden Entlastung stellen wir deutliche Abweichungen gegenüber einem linearen Verhalten fest. Dieser bekannte Effekt resultiert, wie SCHOLTES in [80] zeigt, aus Spannungsumlagerungen und Krieeffekten, die bei Entlastung nach vorausgegangener plastischer Deformation stets zu Nichtlinearitäten führen, so daß bei sehr genauer Betrachtung keine lineare Entlastung existieren kann. Da die Feder beim Unterschreiten einer bestimmten Last wieder von der Auflagefläche abhebt, ändert sich erneut die Federsteifigkeit, die den weiteren Funktionsverlauf bis zur vollständigen Entlastung festlegt.

Vergleichen wir das berechnete mit dem gemessenen Last-Verschiebungs-Dia-

gramm, so ist zu erkennen, daß die Theorie den Funktionsverlauf tendentiell richtig beschreibt, das Anlegen der Endwindungen an die Federteller und damit den Einfluß der Auflage aber offensichtlich nicht ausreichend berücksichtigt. Klammern wir diesen Bereich aus und verschieben wir den berechneten Funktionsverlauf parallel in den Punkt der Steifigkeitsänderung, ist eine gute Übereinstimmung beider Verläufe gegeben. Das von der Theorie bei elastischen Formänderungen etwas zu steif wiedergegebene Systemverhalten folgt aus der Streuung der Materialkennwerte und dem aus der Literatur [56, 57] bekannten Faktum, daß Balkenelemente allgemein zu steif ausfallen. Auch beim Setzmaß f_{pl} , das wir dem Last-Verschiebungs-Diagramm entnehmen, müssen dann geringfügige Abweichungen festzustellen sein.

Betrachten wir in den Meßpunkten 2 und 4 den Verlauf der Normalspannungen (Abb. 7.12, 7.13 oben), so erkennen wir deutlich, daß den Spannungen aus Biegung im Experiment ein aus Normalkraft resultierender Anteil überlagert ist. Dieser durch die stark nichtaxiale Krafteinleitung, die zu einer Querkraft im Federteller und damit zu der zusätzlichen Normalkraft im Meßquerschnitt führt, bedingte Spannungsanteil baut sich bei zunehmender Verformung langsam auf, bleibt nach Eintreten des plastischen Fließens praktisch konstant und verschwindet bei anhaltender Deformation. Verfolgen wir den Verlauf der gesamten Normalspannung, so erkennen wir zuerst einen gleichmäßigen Anstieg, nach dem Eintreten des plastischen Fließens gehen die Spannungen langsam zurück und bauen sich bei anhaltender Deformation fast vollständig ab. Dieser Spannungsverlauf wird von der Theorie in Tendenz und Beträgen gut wiedergegeben. Die durch die Exzentrizität der resultierenden Federkraft im Meßquerschnitt hervorgerufene Normalspannung wird von der Rechnung hingegen nicht ausreichend erfaßt.

Bei den Schubspannungsverläufen (Abb. 7.12, 7.13 unten) können wir deutliche Abweichungen erkennen. So plastiziert die Feder nach der Theorie früher als im Experiment. Dieses Verhalten, das wir bereits bei reinen Zug- und Torsionsversuchen (Abb. 6.6, 6.7) beobachten konnten, ist durch die von ZDEBEL [34] festgelegte Approximation der Verfestigungsfunktion im Bereich der LÜDERS-Bänder (inhomogene Deformationsphase zu Beginn der plastischen Formänderungen) bedingt. Die im weiteren Funktionsverlauf zu erkennenden Größenunterschiede von berechneter und gemessener Schubspannung gehen primär auf die bereits beim Normalspannungsverlauf nachgewiesene und vom Programm nicht

ausreichend erfaßte Exzentrizität der resultierenden Federkraft zurück. Vergleichen wir die mit den "Kontakt"-Elementen berechnete Lage des Kraftmittelpunktes der resultierenden Federkraft (Abb. 7.14) mit der aus verschiedenen Veröffentlichungen [3, 4] bekannten, zeigt sich, daß der theoretische Kraftmittelpunkt näher am Meßquerschnitt liegt. Folglich ist das bei der Berechnung in den Meßpunkten berücksichtigte Torsionsmoment zu klein, wodurch sich zwangsläufig zu geringe Schubspannungen ergeben.

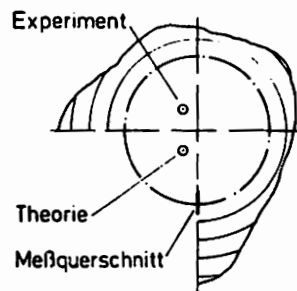


Abb. 7.14. Lage des Druckmittelpunktes, Vergleich Theorie und Experiment

Abschließend ist noch zu erwähnen, daß Vergleichsmessungen an Federn mit einer Gesamtwindungszahl von 7.5 die dargestellten Funktionsverläufe bestätigen. Im Vergleich mit dem am Federsegment mit 2.5 Windungen gemessenen und in den Abbildungen 7.11 - 7.13 dargestellten Verhalten fiel besonders die bei allen Versuchen festzustellende völlige Übereinstimmung der Fließlast ins Auge.

8. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein finites Stabelement vorgestellt, das in Verbindung mit einem konsistenten, in der Kontinuumsmechanik begründeten inkrementellen und iterativen Lösungsverfahren zur Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Strukturen eingesetzt werden kann. Abweichend von bereits bekannten Arbeiten [11-15, 81, 82] verwenden wir ein im Rahmen einer phänomenologischen Betrachtungsweise gegenüber klassischen Ansätzen erweitertes thermoplastisches Materialgesetz mit realer, nichtlinearer Verfestigungsfunktion. Nach Überprüfung der Güte des Elementes an den zur Bestimmung der Materialfunktionen des Stoffgesetzes durchgeführten Versuchen, wird dieses zur Analyse des plastischen Setzens von Schraubenfedern mit nichtlinearer Kennlinie verwendet, wobei wir die numerischen Verfahren an zylindrischen Schraubendruckfedern konstanter Steigung experimentell verifizieren.

Beim Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt sich, daß die benutzten Modelle und Verfahren die beim Plastizieren einer Schraubenfeder ablaufenden Mechanismen tendentiell richtig wiedergeben, den Einfluß der Auflager, d. h. die Wanderung des Kraftmittelpunktes beim Anlegen der Endwindungen aber offensichtlich nicht ausreichend erfassen. Da die Auflagerbedingungen, wie in den Versuchen nachgewiesen, für das Verhalten der Federn von wesentlicher Bedeutung sind, sollte in weitergehenden experimentellen Untersuchungen vermehrt das Augenmerk auf die sich aus der Krafteinleitung ergebenden Einflüsse gelegt werden.

Als Schwachstelle des eingeschlagenen Lösungswegs ist sicher auch der durch Gleichgewichts-Iteration und aufwendige Spannungsintegration erforderliche numerische Aufwand zu betrachten. Schwierigkeiten bereiten uns ebenfalls die großen Datenmengen, die durch Ablage der vom Stoffgesetz in jedem Iterationsschritt benötigten Anfangswerte von Spannungen und internen Variablen anfallen. Im Zuge einer sprunghaft fortschreitenden Entwicklung der Rechanlagen und einer damit verbundenen Steigerung von Rechengeschwindigkeit und Speicherdichte dürften diese Punkte in naher Zukunft an Bedeutung verlieren und bei zukünftigen Untersuchungen keine Probleme mehr aufwerfen.

Zu den auf die verwendete Fließbedingung zurückzuführenden Abweichungen sei abschließend angemerkt, daß eine Verbesserung hier im wesentlichen von modifizierten Ansätzen für die Entwicklung der internen Variablen in Abhängigkeit vom Prozeß zu erwarten ist. Möglichkeiten hierzu wurden von LEHMANN im Rahmen eines umfassenden Stoffgesetzes [83] aufgezeigt. Eine Überprüfung der Ergebnisse mit diesem modifizierten Stoffgesetz macht durch Einbeziehung viskoser Einflüsse die Erweiterung der Untersuchungen auf andere Werkstoffe möglich.

Bauen wir im Element die Temperatur als weitere variable Zustandsgröße ein, indem wir deren Anwachsen in Abhängigkeit des dissipierten Anteils der plastischen Arbeit als eine zusätzliche Gleichung in das Differentialgleichungssystem der Spannungen aufnehmen, lassen sich auch nichtisotherme Formänderungsvorgänge berechnen. Wärmeleitungsprobleme können wir leicht durch Entkoppeln des thermischen und mechanischen Prozesses in unsere Betrachtungen einbeziehen.

Voraussetzung für alle diese Erweiterungen ist jedoch die Verfügbarkeit der benötigten temperaturabhängigen Materialfunktionen technisch wichtiger Werkstoffe. Aus diesem Grund sollte ein umfassendes Meßprogramm zu deren Bestimmung initiiert werden.

- [1] **Gross, S.**
Berechnung und Gestaltung von Metallfedern
Springer, Berlin, 1960
- [2] **Roloff, H. / Matek, W.**
Maschinenelemente
Vieweg, Braunschweig, 1974
- [3] **Huhnen, J.**
Entwicklungen auf dem Federgebiet
I. Teil: Draht 17, Nr. 9, 1966, S. 669/681
II. Teil: Draht 18, Nr. 8, 1967, S. 592/612
- [4] **Federnwerke Grueber, J. P.**
Schraubenfedern
Hagen, 1981
- [5] **Groß, S.**
Zylindrische Schraubenfedern mit ungleichförmiger
Steigung
Draht 10, Nr. 8, 1959, S. 358-363
- [6] **Hoesch AG, (Hg.)**
Berechnungsblätter der Hoesch AG
Federnwerk Hohenlimburg
- [7] **Wanke, K.**
Beitrag zur Berechnung von zylindrischen
Schraubendruckfedern mit gekrümmter Kennlinie
Draht 16, Nr. 11, 1965, S. 781-788
- [8] **Heyn, K.**
Beiträge zur Theorie der Schraubenfeder
Diss. Universität Stuttgart, 1970
- [9] **Trostel, R.**
Beitrag zur Berechnung räumlich gekrümmter Stäbe nach der Theorie
erster Ordnung
Ingenieur-Archiv, Bd. 25, 1957, S. 414-423

- [10] **Kämmel, G.**
Zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes
Ingenieur-Archiv, Bd. 27, 1959, S. 255-267
- [11] **Besseling, J. F.**
Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis
Journal Computer Methods in applied mechanics and engineering, Vol. 3, 1974, pp. 173-194
- [12] **Boegershausen, H.**
Kinematische Untersuchung geometrisch nichtlinearer Stabtragwerke
Ingenieur-Archiv, Bd. 47, 1978, S. 339-348
- [13] **Beverungen, G.**
Geometrisch nichtlineare Berechnung des Spannungs- und Stabilitätsproblems räumlich gekrümmter Stäbe
Techn. Wiss. Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Nr. 76-13, Ruhr-Universität Bochum, 1976
- [14] **Celigoj, C.**
Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Stabprobleme
Ingenieur-Archiv, Bd. 47, 1979, S. 371-381
- [15] **Go, G. D.**
Beitrag zur rechnerunterstützten Auslegung und Dimensionierung von Schraubendruckfedern mit beliebigen Kennlinien
Rechnerunterstütztes Konstruieren, Nr. 81.3, Institut für Konstruktionstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1981
- [16] **Bathe, K.-J. / Bolourchi, S.**
Large displacement analysis of three-dimensional beam structures
International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 14, 1979, S. 961-986
- [17] **Besseling, J. F.**
Non-linear theory for elastic beams and rods and its finite element representation
WTHD, Nr. 143, Delft, 1981

- [18] **Besseling, J. F.**
Non-linear theory for elastic beams and rods and its finite element representation
Journal Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, Vol. 31,
1982, S. 205-220
- [19] **Wanke, K.**
Beitrag zum Vorsetzen (Voreinrichten) von Schraubenfedern bei Raum-
temperatur bzw. erhöhten Temperaturen
(Warmsetzen)
Draht 15, Nr. 6, 1964, S. 309-317
- [20] **Lehmann, Th.**
General frame for the definition of constitutive laws for large
non-isothermic elastic-plastic und elastic-viscoplastic deformations
The Constitutive Law in Thermoplasticity. CISM Courses and Lectures
No. 281, Springer, Wien - New York, 1984
- [21] **Lehmann, Th.**
On large elastic-plastic deformations
Foundations of Plasticity, Noordhoff International
Publishing Leyden, 1973, 571-585
- [22] **Lehmann, Th.**
Große elasto-plastische Formänderungen
Mitteilungen des Instituts für Mechanik, Nr. 1, Ruhr-Universität
Bochum, 1976
- [23] **Lehmann, Th.**
Some aspects of non-isothermic large inelastic deformations
Solid Mechanics Archives, Vol. 3, No. 3, 1978, 261-317
- [24] **Lehmann, Th.**
Some remarks on the decomposition of deformation and mechanical work
International Journal Of Engineering Science, Vol. 20, No. 2, 1982,
281-288

- [25] **Lehmann, Th.**
Some theoretical considerations and experimental results concerning
elastic-plastic stress-strain relations
Ingenieur-Archiv, Nr. 52, 1982, 391-403
- [26] **Lehmann, Th.**
Einige Aspekte der Thermoplastizität
ZAMM, Nr. 63, 1983, T. 3 - T. 13
- [27] **Lehmann, Th.**
Some considerations on the constitutive law in thermoplasticity Mech.
Teor. i. Stos. 22, 1984, S. 3-23
- [28] **Lehmann, Th.**
On a generalized constitutive law in thermo-plasticity taking into
account different yield mechanisms
Acta Mechanica, Nr. 57, 1985, S. 1-23
- [29] **Lehmann, Th.**
Some remarks on the evolution of anisotropic hardening in plasticity
ZAMM, Vol. 66, Nr. 4, 1986, T 163-165
- [30] **Lehmann, Th.**
Thermo-mechanical coupling in large deformations particularly in
bifurcation problems
IUTAM Symposium Paris, 1986
- [31] **Zaremba, M. S.**
Sur une forme perfectionnee de la theorie de la relaxation
Anz. Akad. Krakau, math.-naturw. Klasse, 1903, S. 594-614
- [32] **Jaumann, G.**
Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze
Sitzungsbericht Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, Wien, Abt.
IIa, 120, 1911, S. 385-530

- [33] **Lehmann, Th. / Zdebel, U.**
Some theoretical considerations and experimental investigations on a constitutive law in thermoplasticity
International Journal of Plasticity, submitted for publication
- [34] **Zdebel, U.**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr. 43, 1984
- [35] **Lehmann, Th.**
Elemente der Mechanik
Vieweg, Braunschweig, Bd. 1, 1985
Vieweg, Braunschweig, Bd. 2, 1984
Vieweg, Braunschweig, Bd. 3, 1985
Vieweg, Braunschweig, Bd. 4, 1985
- [36] **Malvern, L. E.**
Introduction to the mechanics of a continuous medium
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969
- [37] **Ramm, E.**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente
Habilitationsschrift im Fachbereich Konstruktiver Ingenieurbau,
Universität Stuttgart, 1976
- [38] **Yaghmai, S. / Popov, E. P.**
Incremental analysis of large deflections of shells of revolution
International Journal Solids Structure, Vol. 7, 1971, S. 1375-1393
- [39] **Bathe, K.-H.**
Finite element procedures in engineering Analysis
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982
- [40] **Felippa, C. A. / Sharifi, P.**
Computer implementation of nonlinear finite element analysis
Symp. ASME, Detroit, November 1973, Report AMD, Vol. 6

- [41] **Stricklin, J. A. et al.**
Static, geometric and material nonlinear analysis
Advances in computational methods in structural mechanics and design.
2nd US - Japan seminar on matrix meth. of struct. Anal. and Design,
Uni. of Alabama Press, 1972, S. 301-324
- [42] **Preuss, J.**
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 23, Ruhr-Universität
Bochum, 1981
- [43] **Bathe, K.-J. / Cimento, A. P.**
Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element
equations
Journal Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22,
1980, S. 59-85
- [44] **Chróscielewski, J. / Nolte, L.-P.**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und
ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 48, Ruhr-Universität
Bochum, 1985
- [45] **Stricklin, J. A. / Haisler, W. E. / von Riesenmann, W. A.**
Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically
nonlinear structural Analysis
A.I.A.A. Journal, Vol. 11, 1973, S. 292-299
- [46] **Oden, J. T.**
Finite elements of nonlinear continua
McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1972
- [47] **Felippa, C. A.**
Procedures for computer analysis of large nonlinear structural systems
Proceedings, Int. Symp. on Large Engineering Systems, Manitoba,
Winnipeg, Canada, Aug. 1976

- [48] **Bathe, K.-J.**
An assessment of current solution capabilities for nonlinear problems
in solid mechanics
Numerical Methods for Partial Differential Equations-III, (B. Hubbard,
ed.) Academic Press, New York, N.Y., 1976
- [49] **Bergan, P. G., et al.**
Solution techniques for nonlinear finite element problems
Engineering, Vol. 12, 1978, S. 1677-1696
- [50] **Argyris, J. H. / Vaz, L. E. / William, K. J.**
Improved solution methods for inelastic rate problems
Journal Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 16,
1978, S.231-277
- [51] **Murray, W. (ed.)**
Numerical methods for unconstrained optimization
Academic Press, New York, N.Y., 1972
- [52] **Dennis, J. E., Jr**
A brief survey of convergence results for quasi-newton methods
SIAM-AMS proceedings, Vol. 9, 1976, S. 185-200
- [53] **Bathe, K.-J. (ed)**
Nonlinear finite element analysis and ADINA
Computers and Structures, Vol. 13, No. 5/6, June 1981
- [54] **Matthies, H. / Strang, G.**
The solution of nonlinear finite element equations
International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 14,
1979, S. 1613-1626
- [55] **Desai, C. S. / Abel, J. F.**
Introduction to the finite element method
A Numerical Method for Engineering Analysis
Von Nostrand Reinhold Company, 1972

- [56] Zienkiewicz, O. C.
The finite element method in engineering science
McGraw-Hill, 1971
- [57] Bathe, K.-J. / Wilson, E. L.
Numerical methods in finite element analysis
Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1976
- [58] Gallagher, R. H.
Finite element analysis
Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975
- [59] Argyris, J. / Mlejnek, H.-P.
Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik
Band I, Verschiebungsmethode in der Statik
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden, 1986
- [60] Buck, K. E., et al. (eds.)
Finite Elemente in der Statik
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin - München - Düsseldorf, 1973
- [61] Bathe, K.-J. / Oden, J. T. / Wunderlich, W. (eds.)
Formulations and computational algorithms in finite element analysis
U.S.-Germany Symposium, Massachusetts Institute of Technology, 1977
- [62] Wunderlich, W. (ed.)
Finite Elemente im Ingenieurwesen. Nichtlineare Theorie und Berechnung
Tagungsmaterial, Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [63] Oden, J. T.
Finite elements of nonlinear continua
McGraw-Hill, 1972
- [64] Owen, D. R. J. / Hinton, E.
Finite elements in plasticity
Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980

- [65] **Dankert, J.**
Numerische Methoden der Mechanik
Springer, Wien - New York, 1977
- [66] **Waller, H. / Krings, W.**
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
B. I. - Wissenschaftsverlag, Mannheim - Wien - Zürich, 1975
- [67] **Schwarz, H. R.**
Methode der finiten Elemente
B. G. Teubner, Stuttgart, 1984
- [68] **Becker, E. / Bürger, W.**
Kontinuumsmechanik
B. G. Teubner, Stuttgart, 1975
- [69] **Klingbeil, E.**
Tensorrechnung
B. I. - Wissenschaftsverlag, Mannheim - Wien - Zürich, 1966
- [70] **Rechenberg, P.**
Die Simulation kontinuierlicher Prozesse mit Digitalrechnern
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1972
- [71] **Abramowitz, M. / Stegun, I. A.**
Handbook of mathematical functions
Dover Publications, inc., New York, 1965
- [72] **Schrader, K.-H.**
Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierten
Sprache
Bibliographisches Institut, Mannheim - Zürich, 1969
- [73] **Schrader, K.-H.**
Elementverfahren der Analytischen Mechanik
Techn. Wiss. Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau,
Nr. 74-1, Ruhr-Universität Bochum, 1974

- [74] **Schrader, K.-H.**
MESY - Einführung in das Konzept und Benutzeranleitung für das Programm
MESY-MINI
Techn. Wiss. Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau,
Nr. 78-11, Ruhr-Universität Bochum, 1978
- [75] **Hughes, T. J. R. et al.**
A finite element method for a class of contact-impact problems
Journal Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, Nr. 8,
1976, S. 249-276
- [76] **Hughes, T. J. R. et al.**
A finite element method for large displacement contact and impact
problems
Formulations and computational algorithms in finite element analysis
(Bathe, K.-J. et al., eds.) M.I.T. Press, 1977
- [77] **Okamoto, N. / Nakazawa, M.**
Finite element incremental contact analysis with various frictional
conditions
International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 14,
1979, S. 337-357
- [78] **Zastrau, B.**
Vibration of cracked structures
Symposium "Mechanics of Inelastic Solids and Structures", Bad Honnef,
1984, to appear
- [79] **Zastrau, B.**
A strategie for calculating nonlinear oscillations of partially
destroyed structures
Institut für Mechanik und Thermodynamik, Bundeswehrhochschule Hamburg,
o. J., B. 5/5, S. 191-196
- [80] **Scholtes, B.**
Die Auswirkungen des Bauschingereffektes auf das Verformungsverhalten
technisch wichtiger Vielkristalle
Dissertation Universität Karlsruhe, 1980

[81] **Bathe, K.-J. / Wiener, P. M.**

On elastic-plastic analysis of I-Beams in bending and torsion
Computers and structures, Vol. 17, No. 5/6, 1983, S. 711-718

[82] **Bathe, K.-J. / Dvorkin, E. N.**

On the automatic solution of nonlinear finite element equations
Computers and Structures, Vol. 17, No. 5/6, 1983, S. 871-879

[83] **Lehmann, Th.**

On a generalized constitutive law for finite deformations in
thermo-plasticity and thermo-viscoplasticity
2nd International Conference and Short Course on Constitutive Laws for
Engineering Materials, University of Arizona, Tucson, USA, 1987

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite
Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit
stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszu-
standes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur
Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentri-
fugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen
Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Be-
lastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr.32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nicht-linearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into
nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz. K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer
Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von
Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik
und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-
stationärer Erregung
- Nr.50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 50**