



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Jörg Frischbier

Theorie der Stoßbelastung
ortotroper Platten und ihr
experimentelle Überprüfung am
Beispiel einer unidirektional
verstärkten CFK-Verbundplatte

Heft Nr. 51



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Jörg Frischbier

THEORIE DER STOSSBELASTUNG
ORTHOTROPER PLATTEN
UND IHRE EXPERIMENTELLE ÜBERPRÜFUNG
AM BEISPIEL EINER
UNIDIREKTIONAL VERSTÄRKTEN CFK-VERBUNDPLATTE

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 51

MÄRZ 1987

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1987 Dr.-Ing. Jörg Frischbier

Am Bergbaumuseum 33a, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe für Experimentelle Mechanik am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum. Sie wurde durch ein Promotionsstipendium des Landes Nordrhein-Westfalen unterstützt und von der Fakultät für Maschinenbau der Ruhr-Universität Bochum als Dissertation angenommen.

Für die Förderung der Arbeit und die nützlichen, fachlichen Diskussionen bei der theoretischen und experimentellen Behandlung der gestellten Forschungsaufgabe sowie für die Übernahme des Referats danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Schwieger. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller für die Unterstützung des Vorhabens und die Übernahme des Korreferats.

Weiterhin möchte ich den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe für Experimentelle Mechanik für die praktische Mithilfe insbesondere bei der Bewältigung des experimentellen Vorhabens danken.

Referenten:

Prof. Dr.rer.nat. Horst Schwieger

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 01.10.1986

Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.1986

Zusammenfassung

Es wird der elastische Biegestoß von Kugeln auf mechanisch anisotrope Platten theoretisch und experimentell untersucht. Mit einem auf Kontakttheorien orthotroper Körper aufbauenden Kontaktkraftgesetz wird eine vereinfachte Stoßtheorie zur Berechnung der Stoßkräfte, Plattendurchbiegungen und Biegedehnungen unter der Stoßstelle entwickelt. Außerdem wird die Wellenausbreitung und insbesondere die von der Stoßstelle ausgehende Energieausbreitung behandelt. Es werden transzendente Gleichungen zur Berechnung des Dispersionsverhaltens von Longitudinal- und Biegewellen in orthotropen Platten angegeben. Darauf aufbauend wird gezeigt, wie aus der Messung der Grenzgeschwindigkeiten der stoßartig angeregten Longitudinal-, Transversal- und Biegewellen in einer orthotropen Platte bzw. Scheibe die elastischen Konstanten des verallgemeinerten Hookeschen Stoffgesetzes eines unidirektional faserverstärkten Verbundkörpers experimentell bestimmt werden können. Die experimentelle Überprüfung des Kontaktkraftgesetzes und der Stoßtheorie erfolgt am Beispiel einer unidirektional verstärkten Kohlenstofffaser/Epoxydharz-Verbundplatte. Zu diesem Zweck werden zahlreiche Stoßversuche mit verschiedenen Stoßkugeln und Stoßgeschwindigkeiten auf das Zentrum der Platte durchgeführt. Dabei werden die Stoßkräfte, die Plattendurchbiegungen und die Dehnungen an der Plattenoberfläche gemessen.

Summary

Elastic transverse impacts of spheres on mechanically anisotropic plates are investigated theoretically and experimentally. By using a contact law, which is based on a contact theory for orthotropic bodies, a simplified impact theory is derived for the calculation of impact force and deflection of the plate and of the bending strains under the point of impact. In addition the wave propagation and especially the propagation of energy from the point of impact into the plate is treated theoretically. Transcendental equations are given for calculating the dispersion curves of the longitudinal and flexural waves in orthotropic plates. An experimental method is shown how to get the elastic constants of the generalized Hookes law of an unidirectionally fiber-strengthened composite laminate by measuring the fastest velocities of the longitudinal, transverse, flexural waves in an impacted orthotropic plate. An unidirectionally strengthened carbon/epoxy composite plate is used for the experimental verification of the contact law and of the impact theory. For that purpose numerous impact experiments onto the centre of the plate are carried out by using different spheres and impact velocities. Thereby the impact force and the deflection of the plate and the strains of the plate surface are measured.

I n h a l t

	<u>Seite</u>
- <u>Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen</u>	4
1. <u>Einleitung</u>	11
2. <u>Grundlegende Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie des anisotropen Kontinuums</u>	19
3. <u>Wellenausbreitung in einem mechanisch anisotropen Medium</u>	24
3.1 Elastische Wellen im dreidimensionalen, anisotropen Kontinuum - Phasengeschwindigkeit, Schwingungsrichtung, Energieausbreitung	24
3.2 Dispersionsverhalten elastischer Wellen in orthotropen Platten	31
3.3 Phasen- und Energieausbreitungsgeschwindigkeiten in dünnen Scheiben	39
3.4 Methode zur experimentellen Ermittlung der elastischen Konstanten von faserverstärkten Materialien	47
4. <u>Das Kontaktkraftgesetz bei orthotropen Körpern</u>	51
4.1 Vorbemerkungen zu den Kontakttheorien	51
4.2 Die Kontakttheorie von Sveklo	54
4.3 Näherungsverfahren für die Ableitung eines Kontaktkraftgesetzes	58
4.4 Experimentelle Methode zur Bestimmung des Kontaktkraftgesetzes	70

5.	<u>Theoretische Behandlung des Biegestoßes auf eine orthotrope Platte - Herleitung einer vereinfachten Stoßtheorie</u>	73
5.1	Bemerkungen zur Plattentheorie	73
5.2	Vereinfachte Darstellung der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt	78
5.3	Berechnungsverfahren für die Stoßkraft	84
5.3.1	Integralgleichung der nichtvereinfachten Stoßtheorie	84
5.3.2	Vereinfachte Theorie - die nichtlineare Differentialgleichung für die Stoßkraft	86
5.4	Vereinfachte Darstellung der Biegedehnungen unter der Stoßstelle	93
5.5	Die maximale Plattendurchbiegung	102
5.5.1	Die unendliche Doppelreihenbeziehung für die Durchbiegung und die Integralgleichung für die Stoßkraft bei einer fest eingespannten Platte	102
5.5.2	Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes zur einfachen Abschätzung des ersten Maximalwertes der Durchbiegung	106
6.	<u>Versuchsdurchführung und Ergebnisse</u>	114
6.1	Auswahl des Versuchsmaterials	114
6.2	Bestimmung der elastischen Konstanten der mechanisch anisotropen Platte bzw. Scheibe aus der Messung der Wellengrenzgeschwindigkeiten	116
6.2.1	Versuchsanordnung und -daten	116
6.2.2	Dehnungsmeßstreifentechnik	117
6.2.3	Ergebnisse	119

6.3	Plattenstoßversuche	122
6.3.1	Versuchsanordnung und -daten	122
6.3.2	Stoßkraft-, Durchbiegungs- und Dehnungs- meßtechnik	129
6.3.3	Ergebnisse	134
6.4	Untersuchungen zum Kontaktkraftgesetz	147
6.5	Das spannungsoptische Oberflächenschichtverfahren bei einer diametral belasteten Kreisscheibe aus faserverstärktem Epoxydharz	154
7.	<u>Besprechung der Resultate</u>	159
8.	<u>Schrifttum</u>	164
9.	<u>Anhang</u>	173
9.1	Theoretische elastische Materialkonstanten eines uni- direktional faserverstärkten Verbundkörpers	173
9.2	Numerische Berechnung der materialabhängigen Para- meter $\Delta_{kj}, \Delta_{0j}, \Delta_{kj}^{(3)}$ des Kontaktkraftgesetzes von Sveklo	176
9.3	Transformationsverfahren zur näherungsweise Er- mittlung des Verschiebungsfeldes in einem durch eine Einzelkraft belasteten anisotropen Halbraum	178

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

a, b	Seitenlänge einer Rechteckplatte
A	Durchbiegungskonstante
A_0	Schwingungsamplitude einer ebenen Welle
$A_{mn}(t)$	Amplitudenfunktionen
$\dot{A}_{mn}(t)$	$dA_{mn}(t)/dt$
$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$	elastische Materialkonstanten (Steifigkeiten)
$\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots, \bar{c}_{66}$	reduzierte Steifigkeiten bei dünnen Scheiben und Platten
c_E	Energieausbreitungsgeschwindigkeit
C_p	Federkonstante der Platte
D_K	Torsionssteifigkeit einer orthotropen Platte
D_x, D_y	Biegesteifigkeiten einer orthotropen Platte in x- bzw. y-Richtung
D_{xy}	effektive Torsionssteifigkeit $2D_{xy} = (\nu_{yx}D_x + \nu_{xy}D_y + 4D_K)$
e_x, e_y, e_z	spezifische Energieströme in x-, y- bzw. z-Richtung
\dot{E}	Energiestrom
E	Exponent des Kontaktkraftgesetzes
$E(\pi/2, k)$	vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung
E_b	Elastizitätsmodul des Epoxydharzes
E_{fL}, E_{fT}	Elastizitätsmodul der Kohlefasern in Längs- bzw. Transversalrichtung
E_s	Elastizitätsmodul des Stoßmassenmaterials
E_{kin}, E_{pot}	kinetische Energie und Formänderungsenergie einer elastischen Platte
E_x, E_y, E_z	Elastizitätsmodul in x-, y- bzw. z-Richtung
F	Fläche
$F(\pi/2, k)$	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung
G_b	Schubmodul des Epoxydharzes

$G_{f_{LT}}, G_{f_{TT}}$	Schubmodul der Kohlenstofffasern bzgl. der Schnittebenen in Faserlängsrichtung bzw. -quer-richtung
G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}	Schubmoduln des faserverstärkten Materials bzgl. der xy-, xz- bzw. yz-Ebene
h	Plattendicke
i	Imaginärzahl, $i^2 = (-1)$
I_0	Strom durch einen Dehnungsmeßstreifen (DMS)
$k^*(\bar{\lambda}, \tau_0, \tau)$	dimensionslose Krümmung
K	Koeffizient des Kontaktkraftgesetzes
K_b	Kompressionsmodul des Epoxydharzes
$K_{f_{TT}}$	Kompressionsmodul der Kohlenstofffaser quer zur Faserrichtung
K_g	K - Faktor eines DMS
L	Lagrangesche Funktion
m_1, m_2	Stoßmassen, allgemein
$m_{s_1}, m_{s_2}, \dots, m_{s_6}$	Massen der Stoßkugeln
m, n	Ordnungszahlen der Plattenschwingungen
m_p	Masse der Platte
\bar{m}_p, m_p^*	reduzierte Plattenmassen
M_x, M_y	Biegemomente
M_{xy}, M_{yx}	Torsionsmomente
$M_{x_0}(t), M_{y_0}(t)$	Biegemomente am Stoßpunkt
$\underline{n}, n_x, n_y, n_z$	Richtungsvektor der Wellennormalen und Einzelkomponenten; $ \underline{n} = 1$
$\underline{n}', n'_x, n'_y, n'_z$	Schwingungsrichtung des Verschiebungsvektors einer elastischen Welle und Einzelkomponenten; $ \underline{n}' = 1$
$\underline{n}'', n''_x, n''_y, n''_z$	Richtungsvektor des Energiestroms bei einer ebenen Welle und Komponenten; $ \underline{n}'' = 1$
$\underline{n}_F, n_{Fx}, n_{Fy}, n_{Fz}$	Normalenvektor der Fläche eines Kontrollvolumens und Komponenten; $ \underline{n}_F = 1$
$p(x, y, t)$	Flächenlast

p_0	Maximalwert der Flächenlast
$P(t)$	Stoßkraft
P_{\max}	maximale Stoßkraft
P_{stat}	statische Einzelkraft
q_α	generalisierte Koordinate
Q_α	generalisierte Kraft
Q_{mn}	m,n -tes Glied der generalisierten Kraft
Q_x, Q_y	Querkräfte
r	Polarkoordinate in radialer Richtung
r_x, r_y	Halbachsen der elliptischen Kontaktfläche
R_0	Widerstand eines DMS im unverformten Zustand
$R_{x_1}, R_{y_1}, R_{x_2}, R_{y_2}$	Hauptkrümmungsradien der Kontaktpartner 1 und 2 in x- bzw. y-Richtung
R_x, R_y	resultierende Hauptkrümmungsradien
s	allgemeine Ortskoordinate
t, t', t''	Zeitveränderliche
t_0	Zeitparameter
t_k	Kontaktzeit
$t_{w_{\text{omax}}}$	Zeitpunkt maximaler Plattendurchbiegung
T	Referenzzeit
T_e	Impulsdauer
T_{\max}	Zeitpunkt maximaler Stoßkraft
u, v, w	Komponenten des Verschiebungsvektors
U_0, V_0, W_0	Amplituden des Verschiebungsvektors
v_0	Stoßgeschwindigkeit
v_{11_L}, v_{22_L}	Longitudinalwellengeschwindigkeiten
v_{12_T}, v_{21_T}	Transversalwellengeschwindigkeiten
$v_{45_{qL}}$	Phasengeschwindigkeit der Quasilongitudinal- welle in 45° Richtung zu den Fasern

v_{13_T}, v_{23_T}	Biegewellengeschwindigkeiten
v_{Gruppe}	Gruppengeschwindigkeit
v_n	Wellennormalengeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit)
V	Kontrollvolumen
V_f	Fasergehalt im Verbundkörper in Volumen- prozentanteilen
V_b	Epoxydharzgehalt im Verbundkörper in Volumenprozentanteilen
$\bar{w}(t)$	Schwerpunktverschiebung der Stoßmasse nach Stoßbeginn
$\dot{\bar{w}}, d\bar{w}/dt$	Geschwindigkeit der Stoßmasse
$\ddot{\bar{w}}, d^2\bar{w}/dt^2$	Beschleunigung der Stoßmasse
w_1, w_2	Oberflächenverschiebungen in z-Richtung der Kontaktpartner im Bereich der Kontaktfläche
$\bar{w}(x, y, t)$	Durchbiegung der Plattenmittelfläche bei einer orthotropen Platte
\bar{w}_0	Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt
x, y, z	kartesische Koordinaten
x_0, y_0	Koordinaten des Stoßpunktes
α	Winkel zwischen der Wellennormalenrichtung und der x-Achse
α_p	Plattenparameter
β	Winkel zwischen der Schwingungsrichtung einer ebenen Welle und der x-Achse
β_x, β_y	Plattenkrümmungsparameter
δ	Annäherung (Abplattung) der Kontaktpartner
δA	virtuelle Arbeit
$\delta \bar{w}$	virtuelle Verschiebung
$\delta \bar{w}_{mn}$	m, n-tes Glied der virtuellen Verschiebung
$\Delta, \Delta_{kj}, \Delta_{oj}, \Delta_{kj}^{(3)}$	materialabhängige Parameter des Kontaktkraft- gesetzes von Sveklo
$\Delta U(t)$	Spannungsänderung am DMS während seiner Verformung

ϵ	Exzentrizität der elliptischen Kontaktfläche, $\epsilon^2 = (r_x^2 - r_y^2)/r_x^2$
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Dehnungen in x-, y- bzw. z-Richtung
$\epsilon_{x0}(t), \epsilon_{y0}(t)$	Dehnungen unter der Stoßstelle
η, ξ	Koordinaten in der Kontaktfläche
γ	Winkel zwischen Energieausbreitungsrichtung und x-Achse
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zy}$	Schubverformungen (Gleitungen, Scherungen)
κ, κ'	Plattenmassenparameter
κ_x, κ_y	Parameter der Biegewellengrenzgeschwindigkeiten
λ	Wellenlänge
$\bar{\lambda}$	Stoßkennzahl (charakteristische Berechnungsgröße)
$\lambda_{xy}, \lambda_{xz}, \lambda_{zy}$	geometrische Mittel der Poissonschen Zahlen
$\bar{\nu}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$	gemittelte Poissonsche Querdehnzahlen
ν_s	Poissonsche Zahl des Stoßmassenmaterials
$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$	Poissonsche Zahlen eines orthotropen Materials
ω	Eigenkreisfrequenz
ω_{mn}	m,n-te Eigenkreisfrequenz
φ	Winkel bei Polarkoordinaten
Φ	Gesamtpotential der Platte (Verformungsenergie)
ρ	Dichte
ρ_s	Dichte des Stoßmassenmaterials
$\sigma^{3/2}(\bar{\lambda}, \tau)$	dimensionslose Stoßkraft
$\sigma_{\max}^{3/2}(\bar{\lambda})$	maximale dimensionslose Stoßkraft
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen
$\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \dots, \Gamma_{33}$	Christoffelkoeffizienten
τ	dimensionslose Zeitveränderliche ($\tau = t/T$)
τ_0	dimensionslose Zeitkonstante ($\tau_0 = t_0/T$)
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungen (z.B. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, symmetrischer Spannungstensor)

- ϑ Winkel bei Polarkoordinaten
- ϑ Integrationsvariable (Polarkoordinate) beim
Kontaktkraftgesetz von Sveklo
- ϑ_x, ϑ_y Massenträgheitsmomente senkrecht zur
x- bzw. y-Achse

1. Einleitung

Diese Arbeit behandelt den elastischen Stoß von Stahlkugeln auf eine mit Kohlenstofffasern verstärkte Epoxydharz-Verbundplatte mit hohem Anisotropiegrad. Typische faserverstärkte Verbundplatten sind in der Regel aus einzelnen orthotropen Laminatschichten aufgebaut, die aus einer Einbettungsmatrix z.B. aus Epoxydharz bestehen, in die verstärkende Glas- oder Kohlenstofffasern in einer bestimmten Richtung eingebracht sind. Der Volumenprozentanteil der Fasern im Verbundmaterial beträgt dabei im allgemeinen bis zu 60 %. Untereinander können die miteinander verklebten Laminatschichten unterschiedlich orientiert sein. Haben alle Schichten dieselbe Orientierung, d.h. liegen die Fasern in allen Schichten in derselben Richtung, so hat man unidirektional verstärktes Material mit orthogonal anisotropen - kurz orthotropen - Materialeigenschaften

Da die modernen faserverstärkten Verbundmaterialien eine hohe mechanische Festigkeit bei relativ niedrigem Gewicht besitzen, hat ihre Bedeutung mit der Entwicklung der Hochmodulfasern im letzten Jahrzehnt vor allem in der Luft- und Raumfahrttechnik stark zugenommen. Die Entwicklung dieser Materialtechnologie hat zu einem beachtlichen, die Werkstofftechnik und Strukturmechanik betreffenden Forschungsbedarf geführt /97/. So sind werkstofftechnisch vor allem Fragen der Witterungsbeständigkeit und Schadensmechanik der verwendeten Kunststoffe für einen zuverlässigen Einsatz in sicherheitsrelevanten Bauteilen zu klären. Der Einsatz z.B. bei Tragflächen sowie bei Höhen- und Seitenrudern im Flugzeugbau oder die Verwendung bei Turbinenblättern in Triebwerken haben aber auch Untersuchungen zum dynamischen Verhalten dieser hochgradig anisotropen Elemente in der Strukturmechanik notwendig gemacht. Wesentliche Bedeutung hat hierbei die Stoßmechanik, da diese Bauteile im Flugbetrieb Stößen kleiner Teilchen mit Geschwindigkeiten bis zu 300 m/s ausgesetzt sein können und die damit verbundenen Beanspruchungen aushalten müssen /67/-/70/. Neben den dabei konzentriert wirkenden, sehr hohen maximalen Belastungsgrößen sind die durch die Orientierung der einzelnen Lamine konstruktiv beeinflussbare Ausbreitung der Spannungswellen im anisotropen Material und der damit verbundene Energiefluß ausschlaggebend für das dynamische Anfangsverhalten der Struktur /1/-/5/. Eine vertiefte theoretische und experimentelle Untersuchung der grundlegenden Vorgänge bei Stoßbelastungen ist vor allem aber auch deshalb notwendig geworden, da die Verbundmaterialien aus Kohlenstofffaser/Epoxyd-

harz im Gegensatz zu ihren sonstigen überragenden mechanischen Eigenschaften eine wesentlich geringere Widerstandsfähigkeit gegenüber Stoßvorgängen als metallische Werkstoffe besitzen /71/.

Die theoretische Behandlung stoßbelasteter Platten beruht im wesentlichen auf einer geeigneten Plattentheorie und auf dem Kontaktkraftgesetz, das den Zusammenhang zwischen der in der Kontaktfläche wirkenden Stoßkraft und der gegenseitigen Annäherung der Stoßpartner herstellt. Bei elastischen Stoßvorgängen zwischen isotropen Körpern hat sich das Hertz'sche Kontaktkraftgesetz /38/ als zweckmäßig erwiesen. Eine ausführliche Behandlung von elastischen Stoßvorgängen zwischen isotropen Körpern findet man z.B. bei Goldsmith /72/ und Eringen /73/. Der numerische Rechenaufwand zur Ermittlung der Stoßkraft kann dabei beträchtlich sein. Eine vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf dünne isotrope Platten unter Verwendung des Hertz'schen Kontaktkraftgesetzes und der klassischen Plattentheorie wurde deshalb von Schwiager et al. /74/,/75/ entwickelt. Diese Theorie beruht auf einer vereinfachten Beziehung für die Plattendurchbiegung am Stoßpunkt, wonach die Durchbiegung proportional zum Zeitintegral über die Stoßkraft ist. Diese vereinfachte Beziehung, die man bereits bei Boussinesq /98/ und Zener /61/ finden kann, gilt für das Frühstadium des Stoßes, d.h. für den Zeitraum bis die für den Energietransport maßgeblichen schnellsten BiegeWellen die Stoßstelle nach der Reflexion am Plattenrand wieder erreicht haben. Bis zu diesem Zeitpunkt nehmen die Randbedingungen keinen Einfluß auf das Geschehen am Stoßpunkt. In vielen Fällen liegt aber das Maximum der Stoßkraft innerhalb dieses Stoßfrühstadiums, so daß die vereinfachte Beziehung zur Berechnung dieses Maximums benutzt werden kann, was eine beträchtliche Reduzierung des numerischen Rechenaufwandes zur Folge hat. Die Übertragung dieser vereinfachten Stoßtheorie auf eine Rippenplatte mit strukturbedingter Orthotropie bei isotropem Materialverhalten wurde von Streubel /76/ unter einschränkenden Voraussetzungen in Bezug auf die Torsionssteifigkeit der Platte vorgenommen.

Die elastische Stoßbelastung faserverstärkter Verbundplatten wird u.a. von Moon /67/ und Tan et al./4/,/68/ behandelt. Dabei soll der Plattenstoß als Ersatzmodell zur Berechnung der Maximalbelastungen bei Stoßvorgängen kleiner Teilchen auf faserverstärkte Triebwerksturbinenblätter dienen. Moon /67/ benutzt eine anisotrope Plattentheorie unter Berücksichtigung der Querkraftdeformationen und Rotationsträgheiten. Die numerische Berech-

nung der Stoßkraft erfolgt mit Hilfe einer Fast Fourier Transformation. Auch hier werden in Hinblick auf das Stoßfrühstadium die Randbedingungen vernachlässigt. Tan et al./4/,/68/ benutzt eine Plattentheorie, die methodisch der Theorie isotroper Platten von Mindlin /58/ ähnlich ist. Auch hier werden die Querkraftdeformationen und Rotationsträgheiten berücksichtigt. Die numerische Berechnung der Belastungsgrößen erfolgt mit einer Finite-Element-Methode. Das Hauptproblem der Theorien stellt aber in beiden Fällen das Kontaktkraftgesetz dar. Wie in anderen Arbeiten auch, wird entweder näherungsweise das nur für isotrope Stoffe gültige Hertzsche Kontaktkraftgesetz benutzt /67/, oder es wird experimentell bestimmt /4/,/39/,/40/,/43/,/68/.

Besonders zu erwähnen ist noch eine neuere theoretische Arbeit von Schmitz /81/, die das Problem stoßartig erregter rotationssymmetrischer Bauteile numerisch mit einem Differenzenverfahren angeht und mit Bezug auf den Werkstoff Stahlbeton auch Nichtlinearitäten im Stoffgesetz berücksichtigt sowie die sehr bedeutende Problematik der mit dem Stoßvorgang verknüpften Wellenfokussierung behandelt. Unter anderem aufgrund der Komplexität des elastischen anisotropen Kontaktproblems und aufgrund der Tatsache, daß der Stoßvorgang bei höheren Stoßgeschwindigkeiten zumindest im Nahbereich der Kontaktfläche sowieso nicht mehr idealelastisch verläuft, finden sich daneben noch eine Reihe hier auszugsweise aufgeführter, rein experimenteller Arbeiten /71/, /77/-/80/ über Stoßvorgänge auf Platten und andere faserverstärkte Verbundstrukturen.

Wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun u.a. die Herleitung einer geschlossenen vereinfachten Stoßtheorie für den elastischen Biegestoß von Stahlkugeln auf eine orthotrope dünne Platte in Anlehnung an /74/ und /76/. Dazu werden Arbeiten zur Kontakttheorie orthotroper Körper von Sveklo /44/ - /46/ und von Lodge /47/ aufgegriffen. Damit soll die Möglichkeit geschaffen werden, ohne zusätzliche experimentelle Messungen die beim Stoß auftretenden maximalen Belastungsgrößen, wie Stoßkraft und Biegemomente, mit angemessenem Rechenaufwand möglichst genau ermitteln zu können. Die Aussagen der Kontakttheorie und der darauf aufbauenden Stoßtheorie sollen mit geeigneten experimentellen Methoden an einer fest eingespannten quadratischen unidirektional kohlefaserverstärkten Epoxydharzplatte überprüft werden. Besondere Bedeutung kommt aber auch dem Problem der in orthotropen Körpern relativ komplexen Wellenausbreitung zu. Die richtungsabhängige Geschwindigkeit der Energieausbreitungsfront beeinflusst wesentlich das dyna-

mische Verhalten der Gesamtstruktur, wobei z.B. das auch in /81/ angesprochene Problem der Wellenfokussierung besondere Gefahren in sich bergen kann.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich damit in folgende Abschnitte. Ein erstes Hauptkapitel befaßt sich mit der Ausbreitung elastischer Wellen in einem mechanisch anisotropen Medium in Zusammenhang mit einer stoßartigen Erregung. Ausgehend von der dreidimensionalen Wellengleichung werden die Grundgleichungen für die Berechnung der richtungsabhängigen Phasengeschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen der Verschiebungsvektoren ebener Wellen im unendlich ausgedehnten orthotropen Kontinuum sowie die Bestimmungsgleichungen für die damit zusammenhängende Energieausbreitung angegeben. Dazu sei bereits hier erwähnt, daß in orthotropem Material die Energieausbreitung einer ebenen Welle im allgemeinen nicht in Wellennormalenrichtung erfolgt. Es muß unterschieden werden zwischen den Phasengeschwindigkeitsflächen, die sich für bestimmte Zeitpunkte aus den richtungsabhängigen Normalengeschwindigkeiten der Phasenebenen ergeben, und den Energieausbreitungsfrenten, mit denen die Ausbreitungen der elastischen Störung verknüpft sind. Die Phasenebenen definieren dabei die Orte mit konstantem Verschiebungsvektor. Ausgehend von der dreidimensionalen Theorie wird anschließend der Weg zur Herleitung transzendenter Gleichungen für die Wellenausbreitung in einer orthotropen Platte gezeigt. Aus diesen transzendenten Gleichungen kann das Dispersionsverhalten der sich in den elastischen Hauptrichtungen der orthotropen Platte fortpflanzenden Longitudinal- und Biege- wellen berechnet werden, d.h., die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeiten (Wellennormalengeschwindigkeiten) von der Wellenlänge. Schließlich werden die Beziehungen für die richtungsabhängigen Geschwindigkeiten der Phasenebenen und der Energieausbreitungsfrenten der Grenzwellen großer Wellenlänge in dünnen Scheiben angegeben. Das Kapitel abschließend wird auf der Grundlage der erarbeiteten theoretischen Beziehungen in Anlehnung an Daniel et al. /2/, /3/ eine zerstörungsfreie experimentelle Methode vorgestellt, die es gestattet, aus der Messung der Grenzgeschwindigkeiten der Longitudinal-, Transversal- und Biege- wellen in einer stoßerregten dünnen Platte bzw. Scheibe mit Dehnungsmeßstreifen die elastischen Konstanten des hier verwendeten, mit Kohlenstoffasern verstärkten Materials zu bestimmen.

Ein zweites Hauptkapitel der Arbeit beschäftigt sich mit dem für die spätere Stoßtheorie benötigten Kontaktkraftgesetz anisotroper Körper. Dieses Kontaktkraftgesetz (KKG) soll analog zu dem für isotrope Stoffe gül-

tigen Hertzschen Gesetz /99/ für den Fall zweier zusammengedrückter orthotroper Körper den Zusammenhang zwischen der Druckkraft und der gegenseitigen Annäherung der Kontaktpartner herstellen. Dazu wird zunächst eine von Sveklo /44/-/46/ entwickelte statische Kontakttheorie aufgegriffen, die mit Hilfe komplexer Hilfslastfunktionen hergeleitet wurde. Das daraus ableitbare Kontaktkraftgesetz liefert eine ähnliche exponentielle Gesetzmäßigkeit zwischen Kontaktkraft und Annäherung wie das Hertzsche Gesetz für isotrope Stoffe, jedoch erfordert die numerische Berechnung des darin auftretenden Koeffizienten einen nicht ganz unerheblichen Programmieraufwand. Deshalb wird als zweite theoretische Alternative ein näherungsweise¹⁾ gültiges Kontaktkraftgesetz abgeleitet, das auf einem für diese Zwecke vorgeschlagenem Transformationsverfahren von Lodge /47/ aufbaut. Dieses Gesetz besitzt die gleiche exponentielle Form wie das Gesetz von Sveklo bei erheblich vereinfachter Berechenbarkeit des Koeffizienten. In beiden Fällen handelt es sich aber in Analogie zu Hertz zunächst einmal um ein statisches Gesetz. Bei der Anwendung auf den (dynamischen) Stoßvorgang einer Kugel auf eine orthotrope Platte wird im Hertzschen Sinne die Annahme gemacht, daß im wesentlichen nur die elastischen Verformungen in der Umgebung der Stoßstelle das Kontaktverhalten bestimmen, d.h. daß die Annäherung der Kontaktpartner gleich der Annäherung beider Körperschwerpunkte gesetzt werden kann. Dabei geht man bei kompakten Körpern davon aus, daß die Stoßdauer groß sei gegenüber der Zeit, die die durch den Stoß hervorgerufenen Wellen benötigen, um die Kontaktpartner in ihren Ausdehnungen normal zur Stoßrichtung zu durchlaufen. Weiterhin beruhen beide theoretische Alternativen des Kontaktkraftgesetzes auf der Voraussetzung, daß die Kontaktfläche sehr klein ist im Vergleich zu den Abmessungen der Kontaktpartner. Da diese Bedingung im hier betrachteten Fall in Bezug auf die Plattendicke nur schlecht erfüllt wird, sollte die Anwendbarkeit der beiden theoretischen Alternativen für den speziellen Fall des Stoßvorgangs isotroper Stahlkugeln auf eine faserverstärkte Platte experimentell überprüft werden²⁾. Dazu wird am Ende des Kapitels über die Kontakttheorien

1) *Es handelt sich dabei insofern um eine Annäherung, da die Transformation unter der Annahme erfolgt, daß die elastischen Konstanten der Stoffgesetze der beteiligten Kontaktpartner gewissen Symmetriebedingungen genügen /47/ bzw. daß die Stoffgesetze jeweils durch nur vier unabhängige Variable beschrieben werden können. Real existierende anisotrope Materialien genügen diesen Anforderungen allerdings in der Regel nur teilweise.*

2) *Für den elastischen Stoß von Stahlkugeln auf eine isotrope dünne Platte hat sich das Hertzsche Gesetz allerdings als durchaus zweckmäßig im Sinne der vereinfachten Stoßtheorie erwiesen /74/,/75/, obwohl auch dort die angesprochene Voraussetzung nur schlecht erfüllt wird.*

eine Methode zur experimentellen Ermittlung der Parameter der dynamischen Kontaktkraftgesetze beim Stoß auf eine orthotrope Platte und auf einen orthotropen Halbraum angegeben, die bereits teilweise z.B. von Dombrowski /50/ beim elasto-plastischen Biegestoß auf eine isotrope Kreisringplatte und vom Verfasser /51/ beim elastischen Stoß auf eine Rippenplatte benutzt wurde.

Den theoretischen Teil der Arbeit schließt das Kapitel über die eigentliche Theorie des Biegestoßes von Kugeln auf eine dünne orthotrope Rechteckplatte ab. Hauptziel ist hierbei u.a. die Herleitung einer vereinfachten Stoßtheorie, die eine einfache Berechnung der mit dem Stoßvorgang zusammenhängenden Stoßkräfte, Plattendurchbiegungen und Biegemomente am Stoßpunkt ermöglicht. Ausgehend von der klassischen Theorie orthotroper Platten³⁾, die man z.B. bei Lekhnitzkii /59/ oder Ashton und Whitney /60/ findet, wird in Anlehnung an Streubel /76/ zunächst ein vereinfachter Ausdruck für die Plattendurchbiegung unter der Stoßstelle entwickelt, der einen einfachen linearen Zusammenhang zwischen der Plattendurchbiegung und dem Zeitintegral über die Stoßkraft herstellt. Dieser Ausdruck gilt für das bereits erwähnte Stoßfrühstadium⁴⁾ und wird unter den vorne im Zusammenhang mit der vereinfachten isotropen Stoßtheorie /74/ genannten Prämissen in Bezug auf die Vernachlässigung der Randbedingungen verwendet. Auf die von Streubel /76/ benutzten einschränkenden Bedingungen in Bezug auf die Torsionssteifigkeit der orthotropen Platten konnte hier verzichtet werden, so daß die vorliegende modifizierte Gesetzmäßigkeit bei allen orthotropen Materialien anwendbar ist. Mit dieser vereinfachten Beziehung für die Durchbiegung der Platte unter dem Stoßpunkt und dem Kontaktkraftgesetz sowie der Newtonschen Bewegungsgleichung für die Stoßkugel kann

3) *Hierbei wird in Analogie zur klassischen Theorie isotroper Platten der Einfluß der Rotationsträgheiten und der Querkraftdeformationen vernachlässigt. Da der Einfluß der Querkraftdeformationen auf die Durchbiegung und die Eigenfrequenzen insbesondere im Fall der hochanisotropen faserverstärkten Verbundplatten mit zunehmender Plattendicke unter Umständen doch recht erheblich werden kann, sollte die Anwendung der vorgestellten Stoßtheorie auf dünnere Platten, wie z.B. die hier experimentell überprüfte unidirektional verstärkte quadratische Kohlenstoffaser/Epoxydharz-Platte mit $a/h = 50$, beschränkt bleiben.*

4) *Der Zeitraum des Frühstadiums kann aus den Abmessungen der Platte mit den im Kapitel über die Wellenausbreitung abgeleiteten Beziehungen für die Grenzgeschwindigkeiten v_{13T} , v_{23T} der schnellsten Biegewellen abgeschätzt werden.*

dann eine nichtlineare Differentialgleichung als Bestimmungsgleichung für die Stoßkraft abgeleitet werden. Darüberhinaus werden vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungen bzw. Biegedehnungen der Platte an der Stoßstelle entwickelt, die bei zuvor berechnetem Stoßkraftverlauf eine einfache Bestimmung der maximalen Biegemomente ermöglichen. Schließlich wird noch ein Verfahren zur Abschätzung des ersten Maximums der Plattendurchbiegung mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes angegeben, da das Maximum der Plattendurchbiegung in den üblichen praktischen Fällen in der Regel erst weit nach Ablauf des Frühstadiums erreicht wird, so daß die vereinfachte Beziehung für die Durchbiegung unter der Stoßstelle nicht verwendet werden kann. Die Ergebnisse der vorgestellten Methoden werden außerdem mit Werten verglichen, die aus den in klassischer Weise⁵⁾ abgeleiteten Integralgleichungen für die Stoßkraft berechnet wurden, wobei zur Herleitung der Integralgleichungen neben dem Kontaktkraftgesetz und der Bewegungsgleichung für die Stoßmasse die unendlichen Doppelsummen der analytischen Lösungen für die Plattendurchbiegung verwendet wurden.

Im experimentellen Teil der Arbeit sollen die wesentlichen theoretischen Aussagen mit geeigneten Methoden am Beispiel des in Bild 1 schematisch dargestellten elastischen Biegestoßes von Stahlkugeln auf eine unidirektional verstärkte Kohlenstofffaser/Epoxydharz-Platte (CFK-Platte) überprüft werden. Die dazu verwendete Platte wurde von der Firma Keller Aero-Construct-GmbH/Wieslautern gebaut und enthält ca. 60-Vol.% Kohlenstofffasern vom Typ SIGRI NF⁶⁾. Das Verhältnis der Elastizitätsmoduln in den elastischen Hauptrichtungen der Platte liegt bei ca. $E_x/E_y=13$ (hoher Anisotropiegrad). Als experimentelle Hilfsmittel werden im wesentlichen neben Dehnungsmeßstreifen ein kapazitiv arbeitendes Meßgerät zur Ermittlung der Plattendurchbiegungen und ein auf dem piezo-elektrischen Effekt aufgebauter Stoßkraft- bzw. Beschleunigungsaufnehmer verwendet. Die Meßdatenaufzeichnung erfolgt je nach erforderlicher Empfindlichkeit der benutzten Meßsysteme mit einem analogen und/oder einem digitalen Kathodenstrahloszilloskop, wobei das digitale Oszilloskop (Nicolet Typ Explorer III) über ein Interface mit einem Rechner (Typ 9825 A) der Firma Hewlett

5) Die dabei zugrundeliegende methodische Vorgehensweise ist auf die Arbeit von Timoshenko /86/ über den isotropen elastischen Balkenstoß zurückzuführen.

6) Bei einem mittleren Faserdurchmesser von ca. $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ hat man damit pro 1 cm^2 Plattenquerschnittsfläche durchschnittlich ca. $1,56 \cdot 10^6$ Fasern.

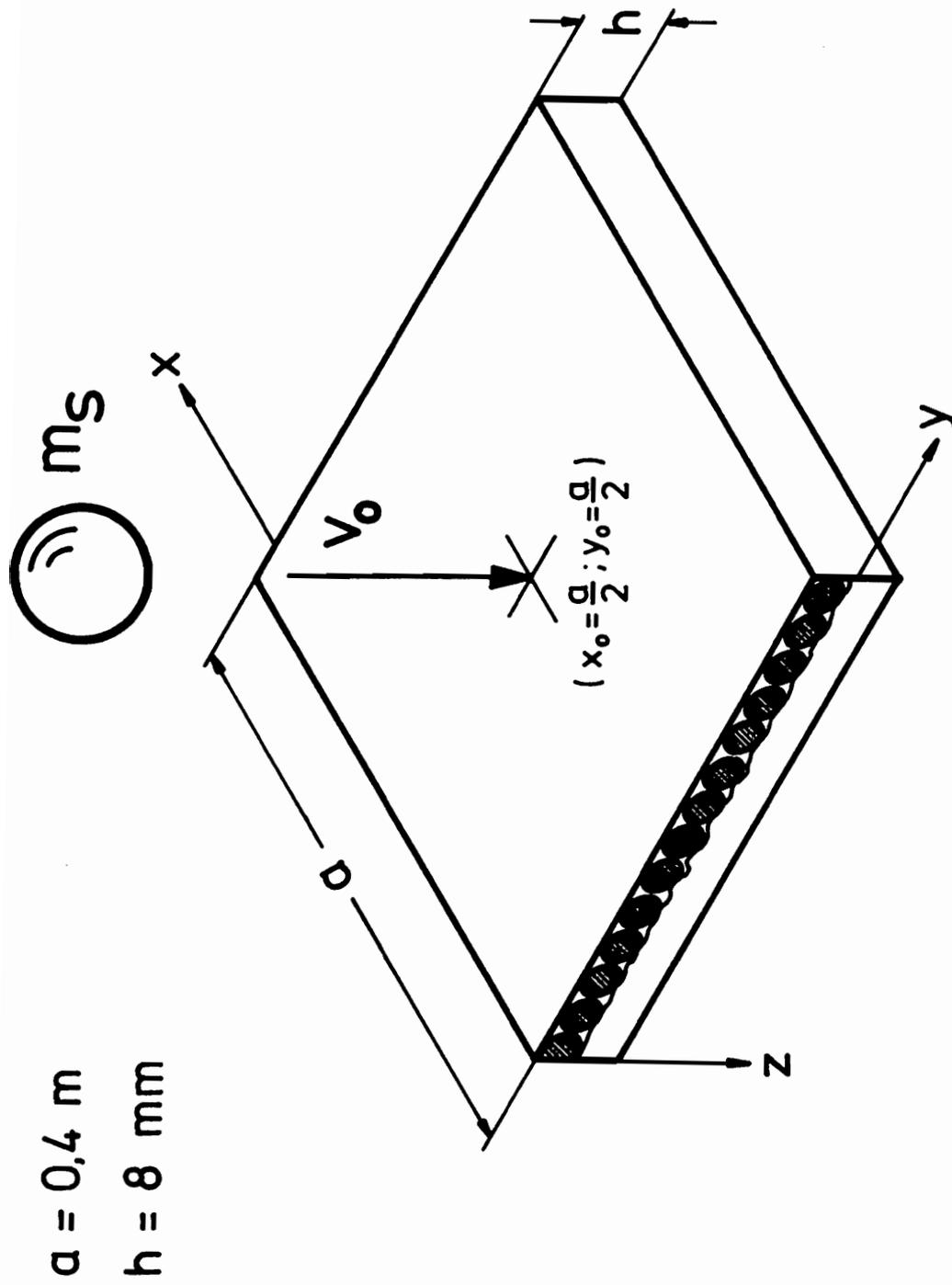


Bild 1: Schema der unidirektional faserverstärkten Platte und Prinzip des zentralen Biegestoßes;
 (Zur Veranschaulichung sind die Fasern vergrößert dargestellt).

Packard verbunden ist.

Vor der eigentlichen experimentellen Überprüfung der Kontakttheorie und der vereinfachten Stoßtheorie werden dann zunächst die elastischen Konstanten (Elastizitäts- und Schubmoduln, Poissonsche Querdehnzahlen) des Plattenmaterials experimentell ermittelt und mit den theoretisch berechenbaren Werten verglichen. Dazu wird die im Kapitel über die Wellenausbreitung vorgeschlagene Methode benutzt, die auf der Messung der Grenzgeschwindigkeiten der Longitudinal-, Transversal- und BiegeWellen mit Hilfe der Dehnungsmeßstreifentechnik beruht.

In Hinblick auf die Weiterentwicklung experimenteller Methoden befaßt sich außerdem ein abschließendes Kapitel noch mit der Anwendung des spannungsoptischen Oberflächenschichtverfahrens als einer flächenhaften Methode zur experimentellen Spannungsanalyse bei orthotropem Material. Da einer Anwendung dieser Methode bei orthotropen Materialien nach Kenntnis des Verfassers noch beträchtliche Schwierigkeiten theoretischer Natur in Bezug auf die quantitative Auswertung bzw. Interpretation der optischen Effekte entgegenstehen, deren Lösung zukünftigen Arbeiten überlassen wird, bleiben die experimentellen Untersuchungen in diesem Zusammenhang auf qualitative Betrachtungen zum Kraftfluß im orthotropen Material am Beispiel einer statisch diametral belasteten Kreisscheibe beschränkt.

2. Grundlegende Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie des anisotropen Kontinuums

Zur Lösung der gestellten Aufgaben wird die bei faserverstärkten Materialien übliche Annahme getroffen, daß das mechanische Verhalten der faserverstärkten Struktur mit den Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie für ein homogenes anisotropes Kontinuum mit makroskopisch gleichen Eigenschaften beschrieben werden kann /22/-/31/,/67/,/100/. In diesem Zusammenhang sind zunächst die nach dem Newtonschen Grundgesetz für den dynamischen Fall erweiterten Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

für ein aus dem Kontinuum herausgeschnitten gedachtes infinitesimales Volumenelement der Dichte ρ in kartesischen Koordinaten zu nennen. Dabei wurden auf die Volumeneinheit bezogene (eingeprägte) Kräfte bereits weglassen. Die in Gl.(1) auftretenden Normalspannungen σ_x , σ_y , σ_z und die Schubspannungen τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} definiert Bild 2.

Dazu kommen die im Sinne infinitesimal kleiner Formänderungen auf die linearen Glieder beschränkten Dehnungs-Verschiebungsgleichungen

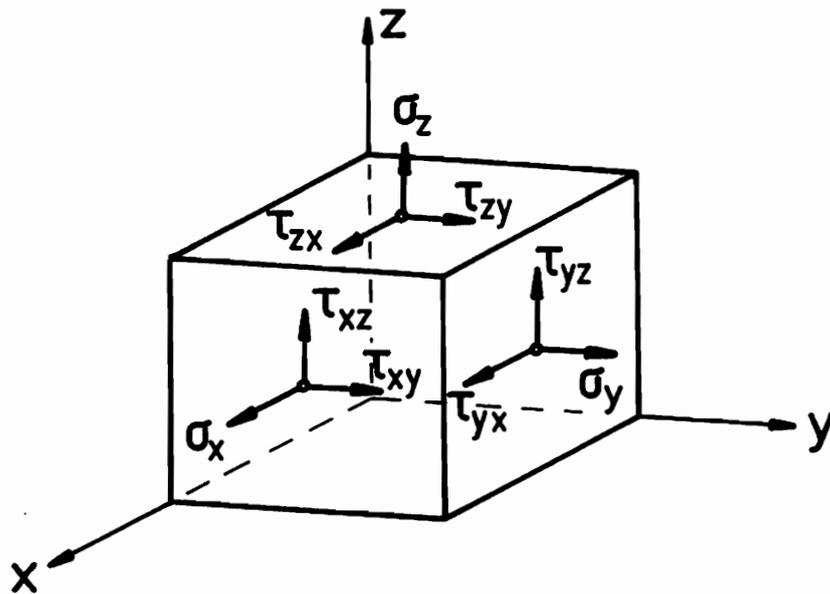


Bild 2: Komponenten des Spannungstensors beim dreiaxialen Spannungszustand

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2}$$

die den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen u, v, w in x, y, z -Richtung und den Dehnungen $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ sowie den Scherungen $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ herstellen. Die Verknüpfung von Spannungs- und Formänderungszustand besorgt schließlich das verallgemeinerte Hookesche Stoffgesetz, das bei Vorhandensein eines elastischen Potentials bei anisotropem Material folgende Form

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & \text{sym.} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3}$$

besitzt. Die 21 elastischen Materialkonstanten $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ werden dabei häufig auch als elastische Steifigkeiten des Materials bezeichnet. Im Falle orthogonaler Anisotropie (Orthotropie), die dann gegeben ist, wenn die Materialeigenschaften bezüglich dreier zueinander senkrechter Ebenen symmetrisch sind, reduziert sich die Elastizitätsmatrix auf 9 unabhängige Konstanten, so daß sich das Stoffgesetz in diesem Fall im elastischen Hauptachsensystem folgendermaßen

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4}$$

darstellt. Sofern in dieser Arbeit nicht ausdrücklich andere Vereinbarungen getroffen werden, wird für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ein x,y,z-Koordinatensystem gewählt, das mit den elastischen Hauptrichtungen zusammenfällt, so daß die Form von Gl.(4) für das Stoffgesetz zur Anwendung kommen kann. Die Steifigkeiten des Materialtensors stehen dann in folgender Beziehung

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{E_x (1 - \lambda_{zy}^2)}{\bar{c}}, & c_{44} &= G_{yz} \\
 c_{22} &= \frac{E_y (1 - \lambda_{xz}^2)}{\bar{c}}, & c_{55} &= G_{xz} \\
 c_{33} &= \frac{E_z (1 - \lambda_{xy}^2)}{\bar{c}}, & c_{66} &= G_{xy} \\
 c_{12} &= \sqrt{E_x E_y} \cdot \frac{(\lambda_{xz} \lambda_{yz} + \lambda_{xy})}{\bar{c}} \\
 c_{13} &= \sqrt{E_x E_z} \cdot \frac{(\lambda_{xy} \lambda_{zy} + \lambda_{xz})}{\bar{c}} \\
 c_{23} &= \sqrt{E_y E_z} \cdot \frac{(\lambda_{zx} \lambda_{yx} + \lambda_{yz})}{\bar{c}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

zu den technischen Materialkennwerten, wobei

$$\bar{c} = 1 - \lambda_{xy}^2 - \lambda_{xz}^2 - \lambda_{zy}^2 - 2\lambda_{xy}\lambda_{xz}\lambda_{zy} \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned}
 \lambda_{xy} &= \sqrt{v_{xy} v_{yx}} \\
 \lambda_{xz} &= \sqrt{v_{xz} v_{zx}} \\
 \lambda_{zy} &= \sqrt{v_{zy} v_{yz}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

abkürzende Ausdrücke in Bezug auf die Poissonschen Querdehnzahlen $\nu_{xy} \dots \nu_{xz}$ sind. Die insgesamt 12 technischen Kennwerte bestehend aus 3 Elastizitätsmoduln E_x, E_y, E_z , 3 Schubmoduln G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} und 6 Poissonschen Querdehnzahlen reduzieren sich mit den Reziprozitätsbeziehungen nach Betti

$$\begin{aligned} E_x \nu_{yx} &= E_y \nu_{xy} \\ E_y \nu_{zy} &= E_z \nu_{yz} \\ E_x \nu_{zx} &= E_z \nu_{xz} \end{aligned} \quad (8)$$

auf wiederum 9 unabhängige Konstante.

Im Sinne einer zügigen späteren Behandlung der aufgezeigten Problemstellungen erscheint es an dieser Stelle zweckmäßig, noch auf die Transformationsbeziehungen für die elastischen Materialkonstanten von anisotropem Material bei einer Drehung des Koordinatensystems hinzuweisen. Wechselt man z.B. von einem x, y, z -System in ein um die z -Achse um den Winkel Θ von x - in y -Richtung gedrehtes x', y', z -System, so berechnen sich nach Hearmon /101/ oder Ashton und Whitney /60/ die elastischen Steifigkeiten $c'_{11}, c'_{12} \dots c'_{66}$ im neuen System folgendermaßen

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c_{11}k^4 + c_{22}l^4 + 2[2(c_{16}k^2 + c_{26}l^2) + (c_{12} + 2c_{66})kl]kl \\ c'_{22} &= c_{22}k^4 + c_{11}l^4 - 2[2(c_{26}k^2 + c_{16}l^2) - (c_{12} + 2c_{66})kl]kl \\ c'_{12} &= c_{12}k^4 + c_{12}l^4 + [2(c_{26} - c_{16})(k^2 - l^2) + (c_{11} + c_{22} - 4c_{66})kl]kl \\ c'_{16} &= c_{16}k^4 - c_{26}l^4 + [(c_{12} - c_{11} + 2c_{66})k^2 + (c_{22} - c_{12} - 2c_{66})l^2 + 3(c_{26} - c_{16})kl]kl \\ c'_{26} &= c_{26}k^4 - c_{16}l^4 + [(c_{22} - c_{12} - 2c_{66})k^2 + (c_{12} - c_{11} + 2c_{66})l^2 + 3(c_{16} - c_{26})kl]kl \\ c'_{66} &= c_{66}(k^2 - l^2)^2 + [2(c_{26} - c_{16})(k^2 - l^2) + (c_{22} + c_{11} - 2c_{12})kl]kl \\ \\ c'_{14} &= c_{14}k^3 - c_{25}l^3 + [(2c_{46} - c_{15})k + (c_{24} - 2c_{56})l]kl \\ c'_{15} &= c_{15}k^3 + c_{24}l^3 + [(2c_{56} + c_{14})k + (c_{25} + 2c_{46})l]kl \\ c'_{24} &= c_{24}k^3 - c_{15}l^3 - [(c_{25} + 2c_{46})k - (c_{14} + 2c_{56})l]kl \\ c'_{25} &= c_{25}k^3 + c_{14}l^3 + [(c_{24} - 2c_{56})k + (c_{15} - 2c_{46})l]kl \\ c'_{46} &= c_{46}k^3 + c_{56}l^3 + [(c_{24} - c_{14} - c_{56})k + (c_{15} - c_{25} - c_{46})l]kl \\ c'_{56} &= c_{56}k^3 - c_{46}l^3 + [(c_{25} - c_{15} + c_{46})k + (c_{24} - c_{14} - c_{56})l]kl \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
c'_{13} &= c_{13}k^2 + c_{23}l^2 + 2c_{36}kl \\
c'_{23} &= c_{23}k^2 + c_{13}l^2 - 2c_{36}kl \\
c'_{44} &= c_{44}k^2 + c_{55}l^2 - 2c_{45}kl \\
c'_{55} &= c_{55}k^2 + c_{44}l^2 + 2c_{45}kl \\
c'_{36} &= c_{36}(k^2 - l^2) + (c_{23} - c_{13})kl \\
c'_{45} &= c_{45}(k^2 - l^2) + (c_{44} - c_{55})kl
\end{aligned}$$

$$c'_{34} = c_{34}k - c_{35}l$$

$$c'_{35} = c_{35}k + c_{34}l$$

$$c'_{33} = c_{33}$$

$$\text{mit } k = \cos \theta, \quad l = \sin \theta$$

aus den Konstanten des ursprünglichen Systems.

3. Wellenausbreitung in einem mechanisch anisotropen Medium

3.1 Elastische Wellen im dreidimensionalen, anisotropen Kontinuum - Phasengeschwindigkeit, Schwingungsrichtung, Energieausbreitung

Eliminiert man mit den Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen von Gl.(2) die Dehnungen und Scherungen im Stoffgesetz (4) und setzt die so erhaltenen Ausdrücke für die Normal- und Schubspannungen in die für den dynamischen Fall erweiterten Gleichgewichtsbedingungen (1) ein, so erhält man nach Ausführung der Differentiationen das folgende partielle Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
c_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (10)$$

für die Schwingung des Verschiebungsvektors in einem orthotropen Kontinuum. Zur Lösung des Systems wird der übliche Ansatz für die Verschiebungskomponenten

$$\begin{aligned} u &= U_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \\ v &= V_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \\ w &= W_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

einer ebenen Welle gewählt, deren Phasenebene sich in Normalenrichtung $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$ mit der Wellennormalengeschwindigkeit v_n fortpflanzt. Die Phasenebene definiert dabei die Orte mit konstantem Verschiebungsvektor, wobei in orthotropem Material die Schwingungsrichtung des Verschiebungsvektors im allgemeinen schräg zur Normalenrichtung liegt. Führt man die Lösungsansätze (11) in die Differentialgleichungen (10) ein, so ergibt sich in abgekürzter Schreibweise das folgende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} (\Gamma_{11} - \rho v_n^2) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & (\Gamma_{22} - \rho v_n^2) & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & (\Gamma_{33} - \rho v_n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (12)$$

für die Schwingungsamplituden der ebenen Welle. Die Symbole $\Gamma_{11}, \Gamma_{12} \dots \Gamma_{33}$ in Gl. (12) sind die bekannten Christoffel-Koeffizienten, die abkürzend für folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11} n_x^2 + c_{66} n_y^2 + c_{55} n_z^2 \\ \Gamma_{22} &= c_{66} n_x^2 + c_{22} n_y^2 + c_{44} n_z^2 \\ \Gamma_{33} &= c_{55} n_x^2 + c_{44} n_y^2 + c_{33} n_z^2 \\ \Gamma_{12} &= (c_{12} + c_{66}) n_x n_y \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Gamma_{13} = (c_{13} + c_{55}) \dot{n}_x n_z$$

$$\Gamma_{23} = (c_{23} + c_{44}) n_y n_z$$

stehen. Bei Vorgabe der Normalenrichtung \underline{n} stellt Gl.(12) dann ein lineares Gleichungssystem für die Schwingungsamplituden dar, dessen Determinante bei einer nichttrivialen Lösung identisch zu Null

$$\begin{vmatrix} (\Gamma_{11} - \rho v_n^2) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & (\Gamma_{22} - \rho v_n^2) & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & (\Gamma_{33} - \rho v_n^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

werden muß. Gl.(14) entspricht einer kubischen Gleichung für v_n^2 und man erhält für jede Normalenrichtung \underline{n} des Kontinuums drei im allgemeinen verschiedene Phasengeschwindigkeiten. Zu jeder dieser drei Normalengeschwindigkeiten existiert eine eindeutige Schwingungsrichtung der ebenen Welle, die im folgenden durch den Einheitsvektor $\underline{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z)$ repräsentiert wird. Diese Schwingungsrichtungen sind mit den jeweiligen Schwingungsamplituden

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \\ n'_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

der Welle verknüpft und können bei bekannter Phasengeschwindigkeit v_n unter Verwendung von Gl.(15) aus dem linearen Gleichungssystem (12) berechnet werden, so daß sich der Lösungsansatz (11) bei noch unbestimmter Amplitude A_0 auch folgendermaßen

$$\begin{aligned} u &= A_0 n'_x \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i (x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \\ v &= A_0 n'_y \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i (x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \\ w &= A_0 n'_z \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i (x n_x + y n_y + z n_z - v_n t) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

darstellen läßt. Untereinander bilden die zu jeder Normalenrichtung \underline{n} gehörenden 3 Schwingungsrichtungen ein Orthogonalsystem, das hier im allgemeinen aber nicht mehr wie bei isotropem Material parallel bzw. senkrecht zur Normalenrichtung orientiert ist. Je nachdem, ob die Schwingungsrichtungen überwiegend parallel oder überwiegend senkrecht zur Wellennormalen liegen, unterscheidet man in jeder Normalenrichtung eine Quasilongitudinal- und zwei Quasitransversalwellen. Reine Longitudinal- und Transversalwellen hat man bei orthotropem Material nur in den elastischen Hauptrichtungen der Elastizitätsmatrix.

Des weiteren muß bei orthotropem Material zwischen der Normalenrichtung und der Energieausbreitungsrichtung einer ebenen Welle unterschieden werden. Ausgehend von einer Energiebilanz unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungsenergie und der kinetischen Energie in einem Kontrollvolumen V des Kontinuums kann mit einer zeitlichen Differentiation nach kurzer Umformung folgender Ausdruck

$$\begin{aligned} \dot{E} = \iiint_V & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{66} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c_{55} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c_{44} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \left(c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{55} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + c_{44} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (17)$$

für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie im Kontrollvolumen abgeleitet werden. Die Herleitung von Gl.(17) findet man z.B. bei Kriz et al. /7/. In dieser Form kann das Volumenintegral von Gl.(17) mit dem Integralsatz von Gauß sofort in ein Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} \dot{E} = \iint_F & \left\{ n_{F_x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{66} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c_{55} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right. \\ & + n_{F_y} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c_{44} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ & \left. + n_{F_z} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \left(c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c_{44} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + c_{55} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dF \end{aligned} \quad (18)$$

überführt werden. Bei dem in geschweiften Klammern stehenden Integranden von Gl.(18) handelt es sich um einen flächenspezifischen Energiestrom, der durch ein infinitesimal kleines Flächenelement dF in Richtung der Kontrollflächennormalen $\underline{n}_F = (n_{Fx}, n_{Fy}, n_{Fz})$ hindurchtritt. Die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke können als flächenspezifische Energieströme e_x, e_y, e_z

$$\begin{aligned} e_x &= - \left[\frac{\partial u}{\partial t} (c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z}) + c_{66} \frac{\partial v}{\partial t} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) + c_{55} \frac{\partial w}{\partial t} (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \right] \\ e_y &= - \left[\frac{\partial v}{\partial t} (c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial w}{\partial z}) + c_{44} \frac{\partial w}{\partial t} (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial t} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \right] \\ e_z &= - \left[\frac{\partial w}{\partial t} (c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z}) + c_{44} \frac{\partial v}{\partial t} (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) + c_{55} \frac{\partial u}{\partial t} (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

in x-, y- bzw. z-Richtung interpretiert werden. Die negativen Vorzeichen in Gl.(19) bedeuten dabei, daß aus dem Kontrollvolumen in Richtung der nach außen zeigenden Flächennormalen heraustretende Energieströme negativ definiert werden. Setzt man in Gl.(19) die Lösungsansätze einer ebenen Welle nach Gl.(16) ein, so erhält man nach Ausführung der Differentiationen folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} e_x &= - L_1 v_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ A_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(xn_x + yn_y + zn_z - v_n t) \right] \right\}^2 \\ e_y &= - L_2 v_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ A_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(xn_x + yn_y + zn_z - v_n t) \right] \right\}^2 \\ e_z &= - L_3 v_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ A_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(xn_x + yn_y + zn_z - v_n t) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

für die spezifischen Energieströme, worin L_1, L_2 und L_3 abkürzende Bezeichnungen für folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} L_1 &= n'_x (c_{11} n'_x n'_x + c_{12} n'_y n'_y + c_{13} n'_z n'_z) + c_{66} n'_y (n'_x n'_y + n'_y n'_x) + c_{55} n'_z (n'_x n'_z + n'_z n'_x) \\ L_2 &= n'_y (c_{12} n'_x n'_x + c_{22} n'_y n'_y + c_{23} n'_z n'_z) + c_{44} n'_z (n'_z n'_y + n'_y n'_z) + c_{66} n'_x (n'_x n'_y + n'_y n'_x) \\ L_3 &= n'_z (c_{13} n'_x n'_x + c_{23} n'_y n'_y + c_{33} n'_z n'_z) + c_{44} n'_y (n'_y n'_z + n'_z n'_y) + c_{55} n'_x (n'_x n'_z + n'_z n'_x) \end{aligned} \quad (21)$$

sind. Wie aus Gl.(20) sofort zu erkennen ist, gilt demnach für das Verhältnis der spezifischen Energieströme

$$e_x : e_y : e_z = L_1 : L_2 : L_3 \quad , \quad (22)$$

und man erhält

$$\underline{n}'' = \begin{bmatrix} n_x'' \\ n_y'' \\ n_z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)^{1/2}} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

als Bestimmungsgleichung für den Einheitsvektor \underline{n}'' der Energiestromrichtung einer ebenen Welle. Der Betrag der Energieausbreitungsgeschwindigkeit c_E in Richtung von \underline{n}'' ergibt sich dann aus der Bedingung

$$c_E \underline{n}'' \underline{n} = v_n \quad , \quad (24)$$

die besagt, daß die Projektion des Energiegeschwindigkeitsvektors $c_E \underline{n}''$ auf die Wellennormalenrichtung \underline{n} betragsmäßig der Phasengeschwindigkeit v_n gleich sein muß. Zur Veranschaulichung sei in diesem Zusammenhang auch auf Bild 3 verwiesen.

Das Kapitel zusammenfassend kann mit Verweis auf Bild 3 festgehalten werden, daß in orthotropem Material im allgemeinen zwischen der Wellennormalen und der Energieausbreitungsrichtung einer ebenen Welle unterschieden werden muß. Wenn die Wellennormale mit einer der elastischen Hauptrichtungen des Materials zusammenfällt, erfolgt die Energieausbreitung über reine Longitudinal- bzw. Transversalwellen mit der Phasengeschwindigkeit in Wellennormalenrichtung. Außerhalb der elastischen Hauptrichtungen muß zwischen den Phasengeschwindigkeitsflächen, die durch die zugehörigen Phasengeschwindigkeiten in den verschiedenen Normalenrichtungen bestimmt werden, und den Energieausbreitungsfronten, mit denen die Ausbreitung der elastischen Störungen verknüpft ist, unterschieden werden. Die äußere Gestalt dieser Flächen kann je nach Art der Orthotropie recht komplex sein /1/,/4/,/8/, /101/.

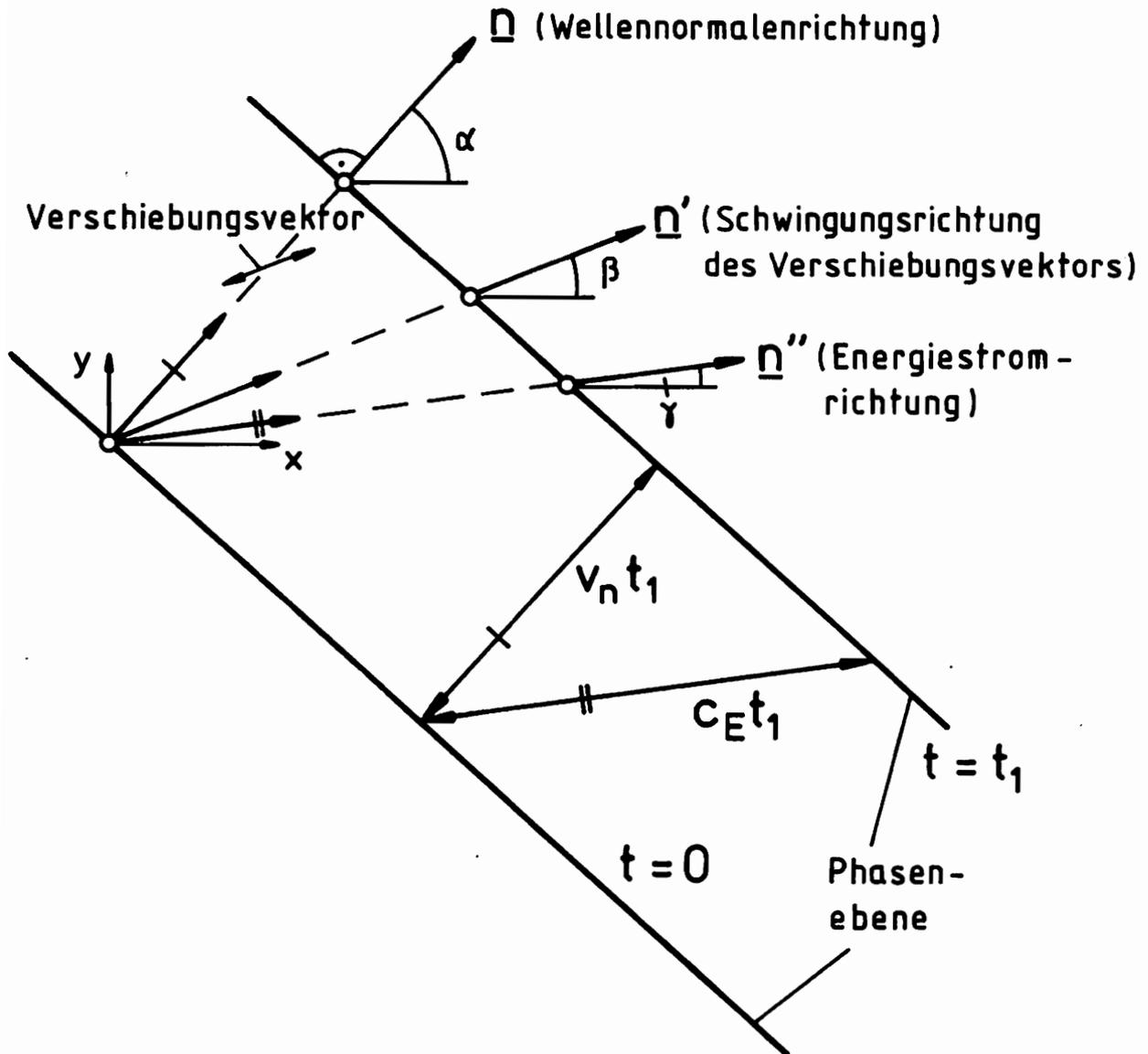


Bild 3: Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Wellennormalenrichtung, der Schwingungsrichtung und der Energieausbreitungsrichtung einer ebenen Welle in einem mechanisch anisotropen Medium

Wie ferner aus einer vergleichenden Betrachtung der Beziehungen für die Dehnungen und der Gleichungen für die spezifischen Energieströme gezeigt werden kann, muß einerseits an einer Stelle des Kontinuums, an der ein Energiestrom auftritt, auch ein Dehnungs- bzw. Verzerrungszustand vorliegen und andererseits an einer Stelle, an der sich der Verformungszustand zeitlich ändert, auch ein Energiestrom vorhanden sein. Mit der Energieausbreitung

ist also unmittelbar die Ausbreitung der Spannungs- und Verzerrungszustände verbunden /1/,/4/,/8/,/101/, was u.a. für die später angestrebte experimentelle Erfassung der Wellenausbreitungszustände in einer orthotropen Platte mit Hilfe der Dehnungsmeßstreifentechnik von Bedeutung ist. Außerhalb der elastischen Hauptrichtungen sind die frühest aufgezeichneten Signale eines Dehnungsmeßstreifen, der sich in einem gewissen Abstand vom Stoßort befindet, der Energieausbreitungsfront und nicht der Phasengeschwindigkeitsfläche zuzuordnen.

3.2 Dispersionsverhalten elastischer Wellen in orthotropen Platten

Beim Übergang vom unendlich ausgedehnten Medium in eine geometrisch begrenzte Struktur, wie die nachfolgend behandelte orthotrope Platte, sind die Dispersionseigenschaften elastischer Wellen, d.h. die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeiten von der Wellenlänge λ , zu berücksichtigen /9/,/10/,/11/,/102/. Mathematischer Ausgangspunkt ist hier wiederum das dreidimensionale Differentialgleichungssystem (10). In Bezugnahme auf das bereits in Bild 1 eingeführte Koordinatensystem wird nun zunächst ein Lösungsansatz für eine in der x,z -Ebene schwingende Welle

$$\begin{aligned} u &= U_0(z) \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(x - v_n t) \right] \\ v &= 0 \\ w &= W_0(z) \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i(x - v_n t) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

gemacht, die sich innerhalb der Platte mit der Phasengeschwindigkeit v_n in x -Richtung als einer elastischen Hauptrichtung der Platte fortpflanzt. Dabei werden die Schwingungsamplituden $U_0(z)$, $W_0(z)$ als funktionale Veränderliche der Dickenkoordinate z der Platte eingeführt. Nach Einsetzen der Ansätze (25) in das partielle Differentialgleichungssystem (10) und nach Ausführung der Differentiationen verbleiben zwei gekoppelte gewöhnliche Dif-

$$\frac{d^2 U_0}{dz^2} + i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \frac{(c_{13} + c_{55})}{c_{55}} \frac{dW_0}{dz} + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{(\rho v_n^2 - c_{11})}{c_{55}} U_0 = 0$$

$$\frac{d^2 W_0}{dz^2} + i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \frac{(c_{13} + c_{55})}{c_{33}} \frac{dU_0}{dz} + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{(\rho v_n^2 - c_{55})}{c_{33}} W_0 = 0$$
(26)

ferentialgleichungen 2. Ordnung für $U_0(z)$ und $W_0(z)$, die mit einer bei Stepanow /103/ beschriebenen Methode in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem aus 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden können. Mit einer Superposition der vier Partikulärlösungen dieses Systems kann gezeigt werden, daß die folgenden Lösungsansätze für $U_0(z)$ und $W_0(z)$

$$U_0(z) = A \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 z\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 z\right) + i C \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 z\right) + i D \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 z\right)$$

$$W_0(z) = -i A r_1 \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 z\right) - i B r_1 \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 z\right) + C r_2 \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 z\right) + D r_2 \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 z\right)$$
(27)

das Differentialgleichungssystem (26) erfüllen, wobei für r_1 und r_2 die folgenden Beziehungen

$$r_1 = \frac{c_{11} - \rho v_n^2 - s_1^2 c_{55}}{(c_{13} + c_{55}) s_1}$$

$$r_2 = \frac{c_{11} - \rho v_n^2 - s_2^2 c_{55}}{(c_{13} + c_{55}) s_2}$$
(28)

gelten und s_1, s_2 zwei reelle Wurzeln der Gleichung

$$c_{33} c_{55} s^4 - \left[c_{55} (c_{55} - \rho v_n^2) + c_{33} (c_{11} - \rho v_n^2) - (c_{13} + c_{55})^2 \right] s^2 + (c_{11} - \rho v_n^2) (c_{55} - \rho v_n^2) = 0$$

(29)

sein müssen. Die noch unbestimmten Konstanten A, B, C, D der Ansätze (27) werden durch die Randbedingungen der Platte festgelegt, die Spannungsfreiheit an der Plattenoberfläche $z = \pm h/2$ verlangen. Dies führt bei den hier verwendeten Ansätzen (25) unter Berücksichtigung der Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (2) und des Stoffgesetzes (4) auf die beiden noch zu erfüllenden Forderungen

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= c_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \underline{z = \pm \frac{h}{2}} : & \\ \sigma_z &= c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

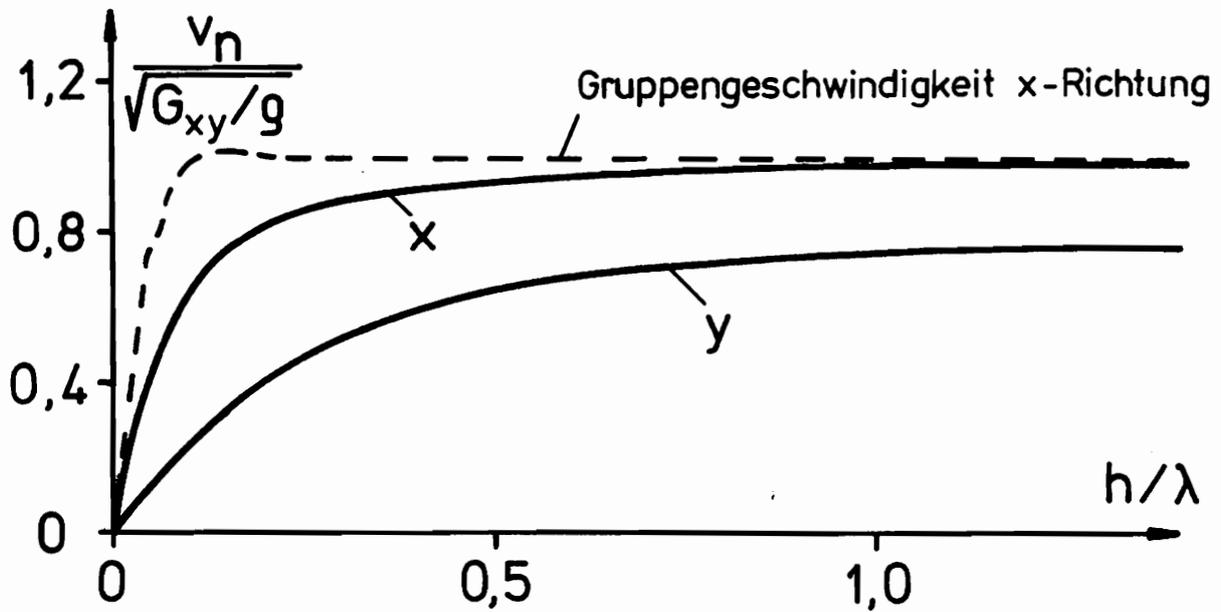
da $\tau_{yz} = 0$ für $z = \pm h/2$ durch die Wahl der Ansätze (25) bereits identisch erfüllt ist. Die Form von Gl. (27) gestattet nun in Analogie zu den elastischen Wellen in einer isotropen Platte /102/ die Unterscheidung von bezüglich der Plattenmittelfläche unsymmetrischen und symmetrischen Schwingungen.

a) Unsymmetrische Schwingungen (Biegewellen), $A = C = 0$:

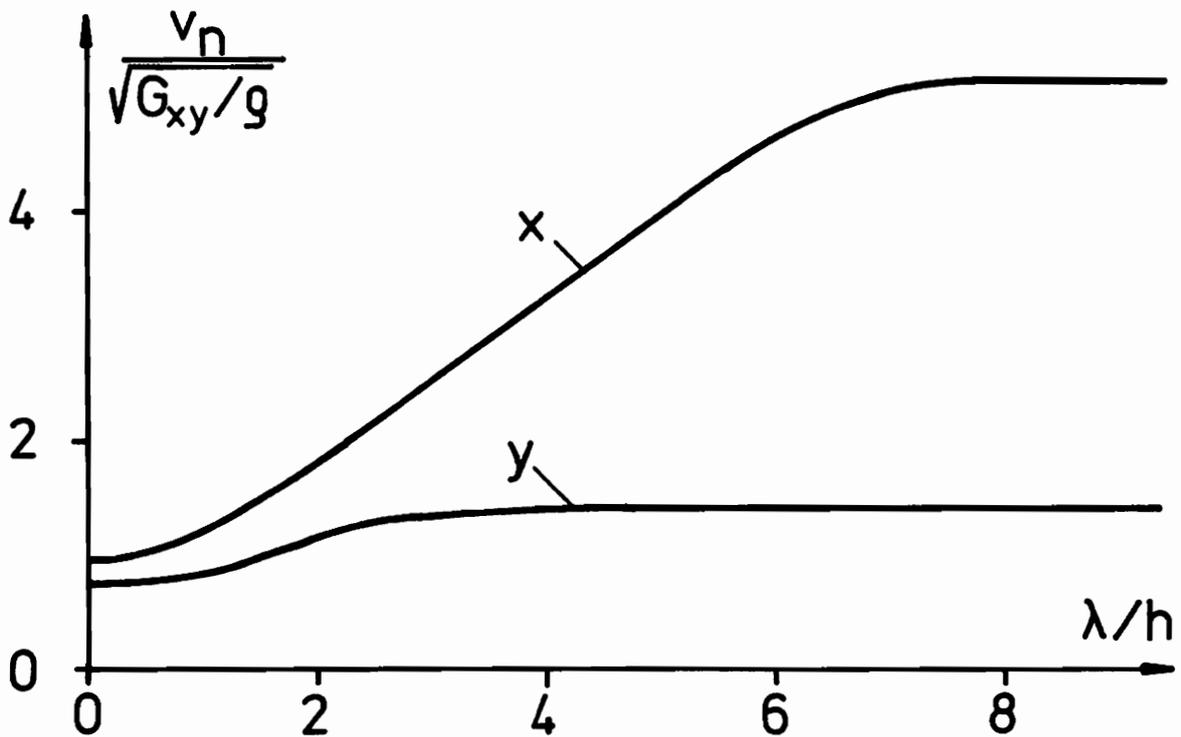
Damit wird $U_0(z)$ eine ungerade und $W_0(z)$ eine gerade Funktion von z . Die Plattenmittelfläche wird ohne Ausdehnung gebogen. Geht man mit den so reduzierten Ansätzen (27) in die Verschiebungsgleichungen (25) und setzt die erhaltenen Ausdrücke für u, v, w in die Randbedingungen (30) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für B und D. Für eine nichttriviale Lösung muß dessen Koeffizientendeterminante zu Null werden, was auf folgende transzendente Gleichung

$$(r_1 + s_1) (c_{13} - c_{33} r_2 s_2) \operatorname{cth} \left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 \frac{h}{2} \right) = (r_2 + s_2) (c_{13} - c_{33} r_1 s_1) \operatorname{cth} \left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 \frac{h}{2} \right) \quad (31)$$

als Frequenzgleichung der Biegewellen führt. Die numerische Berechnung der Dispersionskurve erfolgt zweckmäßigerweise, in dem man zu einer vorgegebenen Phasengeschwindigkeit v_n mit Gl. (31) die zugehörige Wellenlänge λ sucht. Einen exemplarischen Verlauf, der mit den elastischen Konstanten der hier experimentell untersuchten faserverstärkten Platte berechnet wurde, zeigt u.a. Bild 4a. Man erkennt das bereits von Biegewellen in isotropen Platten



a)



b)

Bild 4: Phasengeschwindigkeiten elastischer Wellen in der faserverstärkten Platte. Die Dispersionskurven wurden für die Ausbreitung in Faser- richtung (x-Richtung) und senkrecht dazu (y-Richtung) berechnet.

a) Biegewellen - anomale Dispersion ($dv_n/d\lambda \leq 0$)

b) Longitudinalwellen - normale Dispersion ($dv_n/d\lambda \geq 0$)

bekannte anomale Dispersionsverhalten, d.h. das Ansteigen der Phasengeschwindigkeiten der BiegeWellen bei kleiner werdenden Wellenlängen λ .

Von besonderem Interesse sind aber auch die Phasengrenzgeschwindigkeiten der BiegeWellen bei sehr großen bzw. sehr kleinen Wellenlängen im Vergleich zur Plattenhöhe h . Während v_n für $\lambda \rightarrow \infty$ zu Null wird, geht die Frequenzgleichung bei sehr kleinen Wellenlängen ($\lambda \ll h$ bzw. $h/\lambda \rightarrow \infty$) in folgende Form

$$(r_1 + s_1)(c_{13} - c_{33}r_2s_2) = (r_2 + s_2)(c_{13} - c_{33}r_1s_1) \quad (32)$$

über. Daraus kann nach einer längeren Zwischenrechnung die obere Phasengrenzgeschwindigkeit der BiegeWellen sehr kleiner Wellenlänge für eine Ausbreitung in x-Richtung

$$v_n = \kappa_x \sqrt{\frac{G_{xz}}{\rho}} \quad (33)$$

abgeleitet werden, wobei κ_x die in der Regel einzige /101/ reelle Wurzel der Gleichung

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_{55}}{c_{33}}\right) \kappa_x^6 - \left[1 - \frac{c_{11}}{c_{33}} + 2 \left(\frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{55}}\right)\right] \kappa_x^4 + \\ + \left(\frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{55}}\right) \left[\left(\frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{55}}\right) + 2\right] \kappa_x^2 - \left(\frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{55}}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

ist. Berechnete Werte des Parameters κ_x für eine in x-Richtung unidirektional verstärkte Epoxydharzplatte mit verschiedenen Faservolumenprozentanteilen zeigt folgende Aufstellung⁷⁾.

⁷⁾ Die dazu benötigten jeweiligen elastischen Konstanten $c_{11}, c_{13}, \dots, c_{55}$ des Verbundmaterials wurden mit den im Anhang 9.1 angegebenen Beziehungen aus den in Kapitel 6.1 angegebenen Faser- und Epoxydharzdaten berechnet.

Vol.-% Faser- gehalt	isotrop	20	40	60	80	100
κ_x	0,938	0,994	0,994	0,990	0,982	0,946

Die Phasengeschwindigkeit von Gl.(33) ergibt sich im übrigen nach Hearmon /101/ auch für die entsprechenden Oberflächenwellen in orthotropem Material, was in Übereinstimmung mit den Beziehungen für die als Rayleighwellen bekannten Oberflächenwellen in isotropen Platten steht /12/,/101/,/102/.

b) Symmetrische Schwingungen (Longitudinalwellen), B = D = 0:

Hier wird $U_0(z)$ eine gerade und $W_0(z)$ eine ungerade Funktion von z . Die Plattenmittelfläche bleibt eben, wird aber gedehnt. Mit den Gln.(27),(25) und den Randbedingungen (30) erhält man nun analog ein lineares Gleichungssystem für A und C , mit dessen Koeffizientendeterminante man bei nicht-trivialer Lösung zu folgender

$$(r_1 + s_1) (c_{13} - c_{33} r_2 s_2) \operatorname{th} \left(\frac{2\pi}{\lambda} s_1 \frac{h}{2} \right) = (r_2 + s_2) (c_{13} - c_{33} r_1 s_1) \operatorname{th} \left(\frac{2\pi}{\lambda} s_2 \frac{h}{2} \right) \quad (35)$$

transzendenten Frequenzgleichung für die Longitudinalwellen in x -Richtung kommt. Die am Beispiel der hier experimentell untersuchten Platte berechnete Dispersionskurve zeigt Bild 4b. Man erkennt das normale Dispersionsverhalten der Longitudinalwellen. Im Falle großer Wellenlängen, d.h. $\lambda \gg h$ bzw. $h/\lambda \rightarrow 0$, wird die Frequenzgleichung in erster Näherung

$$s_1 (r_1 + s_1) (c_{13} - c_{33} r_2 s_2) = s_2 (r_2 + s_2) (c_{13} - c_{33} r_1 s_1) \quad (36)$$

und man erhält mit den Gln.(28),(29) für r_1, r_2, s_1, s_2 nach einer Zwischenrechnung die Lösung

$$v_n = \left(\frac{c_{11} c_{33} - c_{13}^2}{\rho c_{33}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{E_x}{\rho (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}} \quad (37)$$

als obere Phasengrenzgeschwindigkeit der Longitudinalwellen großer Wellen-

längen. Für kleine Wellenlängen, d.h. $\lambda \ll h$ bzw. $h/\lambda \rightarrow \infty$, geht die Frequenzgleichung in die Form von Gl.(32) über, so daß

$$v_n = \kappa_x \sqrt{\frac{G_{xz}}{\rho}} \quad (38)$$

mit κ_x nach Gl.(34) gleichzeitig die untere Phasengrenzgeschwindigkeit der Longitudinalwellen kleiner Wellenlängen in x-Richtung ist.

In formaler Analogie zur bisherigen Vorgehensweise können auch die Frequenzgleichungen und Grenzgeschwindigkeiten der sich in y-Richtung ausbreitenden Biege- und Longitudinalwellen bestimmt werden, weshalb hier nur noch kurz die entsprechenden Ergebnisse angegeben werden. Die berechneten Dispersionskurven für die Wellenausbreitung in y-Richtung sind in Bild 4 zu finden. Die Phasengrenzgeschwindigkeit der Biege- und Longitudinalwellen in y-Richtung geht für sehr große Wellenlängen ($\lambda \gg h$ bzw. $h/\lambda \rightarrow 0$) gegen Null und erreicht bei kleinen Wellenlängen ($\lambda \ll h$ bzw. $h/\lambda \rightarrow \infty$) die obere Grenze

$$v_n = \kappa_y \sqrt{\frac{G_{yz}}{\rho}} \quad (39)$$

wobei κ_y die reelle Wurzel der Gleichung

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_{44}}{c_{33}}\right) \kappa_y^6 - \left[1 - \frac{c_{22}}{c_{33}} + 2 \left(\frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}{c_{33}c_{44}}\right)\right] \kappa_y^4 + \\ + \left(\frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}{c_{33}c_{44}}\right) \left[\left(\frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}{c_{33}c_{44}}\right) + 2\right] \kappa_y^2 - \left(\frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}{c_{33}c_{44}}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

ist. Typische Werte für κ_y einer in x-Richtung verstärkten Epoxydharzplatte bei verschiedenen Faservolumenprozentanteilen zeigt wiederum folgende Aufstellung.

Vol.-% Faser- gehalt	isotrop	20	40	60	80	100
ν_y	0,938	0,935	0,930	0,935	0,935	0,935

Für die Longitudinalwellen in y-Richtung ergibt sich

$$v_n = \sqrt{\frac{E_y}{\rho(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}} \quad (41)$$

als obere Phasengrenzgeschwindigkeit bei großen Wellenlängen und die Biege-
wellengrenzgeschwindigkeit nach Gl.(39) als untere Grenze bei kleinen Wel-
lenlängen.

Das Kapitel abschließend sei noch auf die im Zusammenhang mit der Dispersi-
on stehende Problematik in Bezug auf den Begriff der Gruppengeschwindig-
keit hingewiesen. Die Geschwindigkeit

$$v_{\text{Gruppe}} = v_n - \lambda \frac{dv_n}{d\lambda} \quad (42)$$

einer Wellengruppe, bestehend aus Wellen benachbarter Frequenzen /10/, /102/,
unterscheidet sich bei dispersionsbehafteten Vorgängen im allgemeinen von
der Phasengeschwindigkeit v_n und wird im Gegensatz zur rein formalen Rolle
der Phasengeschwindigkeit in ihrer physikalischen Bedeutung mit der Ge-
schwindigkeit der durch die Wellengruppe dargestellten Energieausbreitung
/10/ verbunden. Im Bereich der oberen Phasengrenzgeschwindigkeiten haben
die Dispersionskurven der Biege- und Longitudinalwellen horizontale Tangen-
ten, d.h. die Gruppengeschwindigkeit ist dort gleich der Phasengeschwindig-
keit. Bei der normalen Dispersion der Longitudinalwellen liegt ansonsten
die Gruppengeschwindigkeit immer unter der Phasengeschwindigkeit, während
bei der anomalen Dispersion der Biege-Wellen erstaunlicherweise ein Wellen-
längenbereich - Siehe auch Bild 4 - existiert, in dem die mit Gl.(42) er-
mittelte Gruppengeschwindigkeit größer wird als die höchste überhaupt exi-
stierende einzelne Phasengeschwindigkeit einer Biege-Wellen. Dies ist physi-
kalisch kaum vorstellbar und konnte bisher auch nicht durch frühere Unter-

suchungen im Institut zur Wellenausbreitung in isotropen Platten bestätigt werden. Auch weist Sommerfeld /10/ im Zusammenhang mit dem Energietransport in einem anomal dispergierenden isotropen Medium auf den "merkwürdigen" Umstand hin, daß im Falle anomaler Dispersion zur Unterhaltung der Wellenbewegung mehr Energie aufgewendet werden muß, als in der Welle transportiert wird. Der Begriff der Gruppengeschwindigkeit führt also in einem anomal dispergierenden Medium in gewisser Weise zu zweifelhaften Aussagen, so daß dort die Problematik im Zusammenhang mit der Gruppengeschwindigkeit noch einer zukünftigen Klärung oder einer neuen Interpretation bedarf.

3.3 Phasen- und Energieausbreitungsgeschwindigkeiten in dünnen Scheiben

Es soll hier kurz ein Grenzfall der Dispersionskurven und zwar die Ausbreitung der in der Platten- bzw. Scheibenebene schwingenden Wellen großer Wellenlänge, d.h. $h/\lambda \rightarrow 0$, behandelt werden. Betrachtet man die Ausbreitung einer in der Scheibenebene x,y erfolgenden impulsartigen Störung, kann man im Rahmen der Theorie dünner Scheiben in Bezug auf die für den dynamischen Fall erweiterten Gleichgewichtsbedingungen von einem ebenen Spannungszustand

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ausgehen und hat damit folgende Form

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 \\ & \bar{c}_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

des Stoffgesetzes. Darin sind $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots, \bar{c}_{66}$ die reduzierten Steifigkeiten

$$\begin{aligned}\bar{c}_{11} &= c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} = \frac{E_x}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \\ \bar{c}_{22} &= c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} = \frac{E_y}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \\ \bar{c}_{12} &= c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} = \frac{\nu_{yx} E_x}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} = \frac{\nu_{xy} E_y}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \\ \bar{c}_{66} &= c_{66} = G_{xy},\end{aligned}\tag{45}$$

und man erhält mit den Gln.(43),(44) unter Verwendung der Dehnungs-Verschiebungsgleichungen (2) die reduzierte Form

$$\begin{aligned}\bar{c}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{c}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \bar{c}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{c}_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{46}$$

des partiellen Differentialgleichungssystems für die Verschiebungen beim ebenen Spannungszustand. Es wird der Ansatz für eine in der Scheibenebene schwingende Welle

$$\begin{aligned}u &= U_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i (x n_x + y n_y - v_n t) \right] \\ v &= V_0 \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} i (x n_x + y n_y - v_n t) \right]\end{aligned}\tag{47}$$

gewählt, und es ergibt sich nach Einsetzen von Gl.(47) in Gl.(46) und nach Ausführung der Differentiationen das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} (\Gamma_{11} - \rho v_n^2) & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & (\Gamma_{22} - \rho v_n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (48)$$

für U_0 und V_0 , wobei die Christoffel-Koeffizienten abkürzend für

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \bar{c}_{11} n_x^2 + \bar{c}_{66} n_y^2 \\ \Gamma_{22} &= \bar{c}_{66} n_x^2 + \bar{c}_{22} n_y^2 \\ \Gamma_{12} &= (\bar{c}_{66} + \bar{c}_{12}) n_x n_y \end{aligned} \quad (49)$$

stehen. Die nichttriviale Lösung von Gl.(48) verlangt, daß die Koeffizientendeterminante zu Null

$$(\Gamma_{11} - \rho v_n^2) (\Gamma_{22} - \rho v_n^2) - \Gamma_{12}^2 = 0 \quad (50)$$

wird, und man erhält

$$\rho v_{n_{I,II}}^2 = \frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) \pm [(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2 + 4\Gamma_{12}^2]^{1/2}}{2} \quad (51)$$

als Bestimmungsgleichung der beiden zu jeder Normalenrichtung $\underline{n} = (n_x, n_y)$ gehörenden Phasengeschwindigkeiten v_n . Zu jeder der beiden Geschwindigkeiten kann anschließend aus Gl.(48) der zu normierende Einheitsvektor der Schwingungsrichtung

$$\begin{bmatrix} (\Gamma_{11} - \rho v_{n_{I,II}}^2) & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & (\Gamma_{22} - \rho v_{n_{I,II}}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix}_{I,II} = \underline{0} \quad (52)$$

berechnet werden.

Bild 5 zeigt die am Beispiel der hier experimentell untersuchten, in x-Richtung unidirektional verstärkten Kohlenstoffaser/Epoxydharz-Platte berechneten richtungsabhängigen Phasengeschwindigkeiten. Des weiteren seien noch kurz einige Spezialfälle betrachtet.

a) $n_x=1, n_y=0$ (Wellennormale in x-Richtung):

$$v_{11L} = \sqrt{\frac{E_x}{\rho(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Longitudinalwelle}) \quad (53)$$

$$v_{12T} = \sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Transversalwelle}) \quad (54)$$

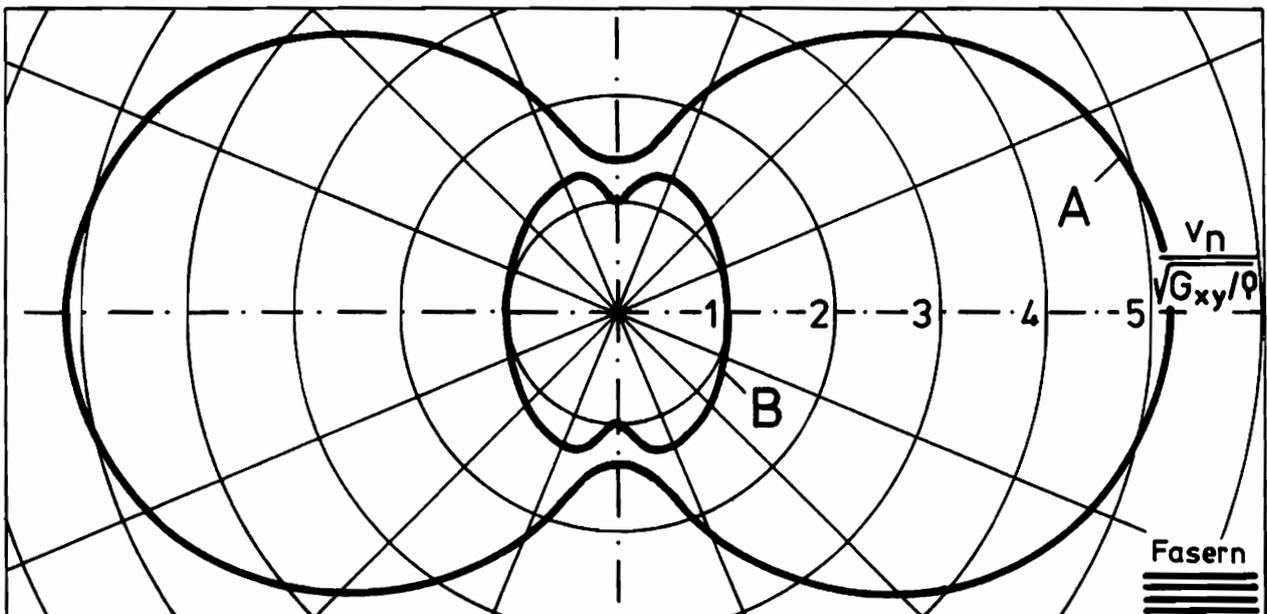


Bild 5: Auf die Schubwellengeschwindigkeit bezogene richtungsabhängige Werte der beiden in der Scheibenebene schwingenden Wellentypen
 A - überwiegend longitudinal schwingende Wellen
 B - überwiegend transversal schwingende Wellen

b) $n_x = 0, n_y = 1$ (Wellennormale in y-Richtung):

$$v_{22L} = \sqrt{\frac{E_y}{\rho(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Longitudinalwelle}) \quad (55)$$

$$v_{21T} = \sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Transversalwelle}) \quad (56)$$

In den elastischen Hauptrichtungen hat man also jeweils reine Longitudinal- und Transversalwellen. Die Indizierung dieser Wellen wird derart gehandhabt, daß z.B. v_{12T} eine sich in x-Richtung ausbreitende und in y-Richtung schwingende Transversalwelle bezeichnet. Anders verhält es sich, wenn man die elastischen Hauptrichtungen verläßt.

c) $n_x = 1/\sqrt{2}, n_y = 1/\sqrt{2}$ (Wellennormale 45° zu den Hauptrichtungen):

$$\rho v_{45qL}^2 = \frac{(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22} + 2\bar{c}_{66}) + [(\bar{c}_{11} - \bar{c}_{22})^2 + 4(\bar{c}_{66} + \bar{c}_{12})^2]^{1/2}}{4} \quad (57)$$

$$\rho v_{45qT}^2 = \frac{(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22} + 2\bar{c}_{66}) - [(\bar{c}_{11} - \bar{c}_{22})^2 + 4(\bar{c}_{66} + \bar{c}_{12})^2]^{1/2}}{4} \quad (58)$$

So erhält man z.B. für die 45° -Richtung eine Quasilongitudinalwelle v_{45qL} und eine Quasitransversalwelle v_{45qT} , deren Schwingungsrichtungen bei einer vektoriellen Zerlegung mit den größeren Komponenten parallel bzw. senkrecht zur Normalenrichtung liegen. Dabei kann mit den Gln.(45) und den Beziehungen für $v_{11L}, v_{22L}, v_{12T}$ die Phasengeschwindigkeit der Quasilongitudinalwelle auch folgendermaßen

$$v_{cL}^2 = \frac{(v_{11L}^2 + v_{22L}^2 + 2v_{12T}^2) + \left[(v_{11L}^2 - v_{22L}^2)^2 + 4(v_{12T}^2 + v_{xy}v_{22L}^2)^2 \right]^{1/2}}{4} \quad (59)$$

dargestellt werden.

In Bezugnahme auf den Energiefluß in einer dünnen Scheibe ergibt sich mit den in Kapitel 3.1 abgeleiteten Beziehungen unter den hier getroffenen Voraussetzungen folgender Zusammenhang

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x'' \\ n_y'' \end{bmatrix} = \frac{1}{(L_1^2 + L_2^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

für die Energiestromrichtung \underline{n}'' einer in der Scheibenebene schwingenden Welle, wobei L_1 und L_2 für

$$\begin{aligned} L_1 &= n_x' (\bar{c}_{11} n_x' n_x' + \bar{c}_{12} n_y' n_y') + \bar{c}_{66} n_y' (n_x' n_y' + n_y' n_x') \\ L_2 &= n_y' (\bar{c}_{12} n_x' n_x' + \bar{c}_{22} n_y' n_y') + \bar{c}_{66} n_x' (n_x' n_y' + n_y' n_x') \end{aligned} \quad (61)$$

stehen, so daß die Geschwindigkeit c_E der Energieausbreitungsfront in Richtung von \underline{n}'' mit der bekannten Beziehung

$$c_E = \frac{v_n}{\underline{n}'' \cdot \underline{n}} \quad (62)$$

in Abhängigkeit von der Normalenrichtung und der jeweiligen Phasengeschwindigkeit berechnet werden kann.

Die Form der Energieausbreitungsfronten am Beispiel der später experimentell untersuchten Platte kann man in Bild 6 erkennen. Ferner wird in Bild 7 am Beispiel des überwiegend longitudinal schwingenden Wellentyps der bereits von Hearmon /101/ erwähnte geometrische Zusammenhang zwischen den Phasengeschwindigkeitsflächen und den Energieausbreitungsfronten veranschaulicht,

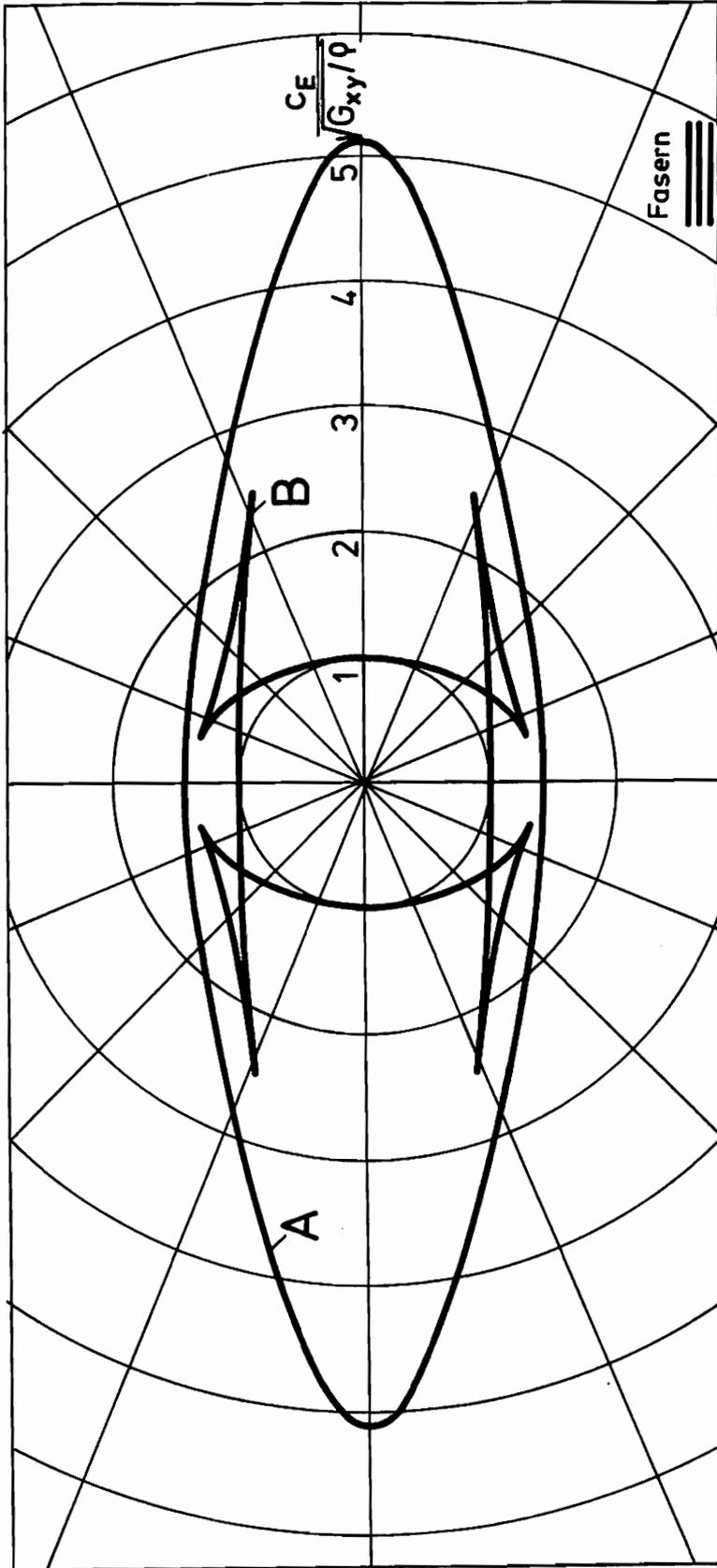


Bild 6: Richtungsverteilungen der Energieausbreitungsgeschwindigkeiten der

A - überwiegend longitudinal

B - überwiegend transversal

schwingenden Wellen in der orthotropen Scheibe

der für festgehaltene Zeitpunkte nach Erregungsbeginn darin besteht, daß die Energieausbreitungsfront die Einhüllende aller Phasenebenen ist. Außerdem zeigt eine darin eingezeichnete Vergleichsellipse die nahezu elliptische Gestalt der Energieausbreitungsfront des überwiegend longitudinal schwingenden Wellentyps im Nahbereich der elastischen Hauptrichtungen einer unidirektional verstärkten CFK-Platte. Die folgende zahlenmäßige Aufstellung

α	v_{n_I} [m/s]	$v_{n_{II}}$ [m/s]	β_I	β_{II}	γ_I	γ_{II}
0°	9043	1761	0°	90°	0°	0°
15°	8747	1816	1°	91°	$0,6^\circ$	$27,4^\circ$
30°	7886	1956	$2,1^\circ$	$92,1^\circ$	$1,4^\circ$	$48,2^\circ$
45°	6527	2132	$3,8^\circ$	$93,8^\circ$	$2,4^\circ$	$62,5^\circ$
60°	4800	2290	$7,0^\circ$	$97,0^\circ$	$4,2^\circ$	$72,5^\circ$
75°	2987	2356	$23,7^\circ$	$113,7^\circ$	$11,4^\circ$	$65,1^\circ$
82°	2551	2091	$69,9^\circ$	$159,9^\circ$	$62,0^\circ$	$20,8^\circ$
90°	2513	1761	90°	180°	90°	90°

gibt schließlich noch für die hiesige CFK-Platte die zu den verschiedenen

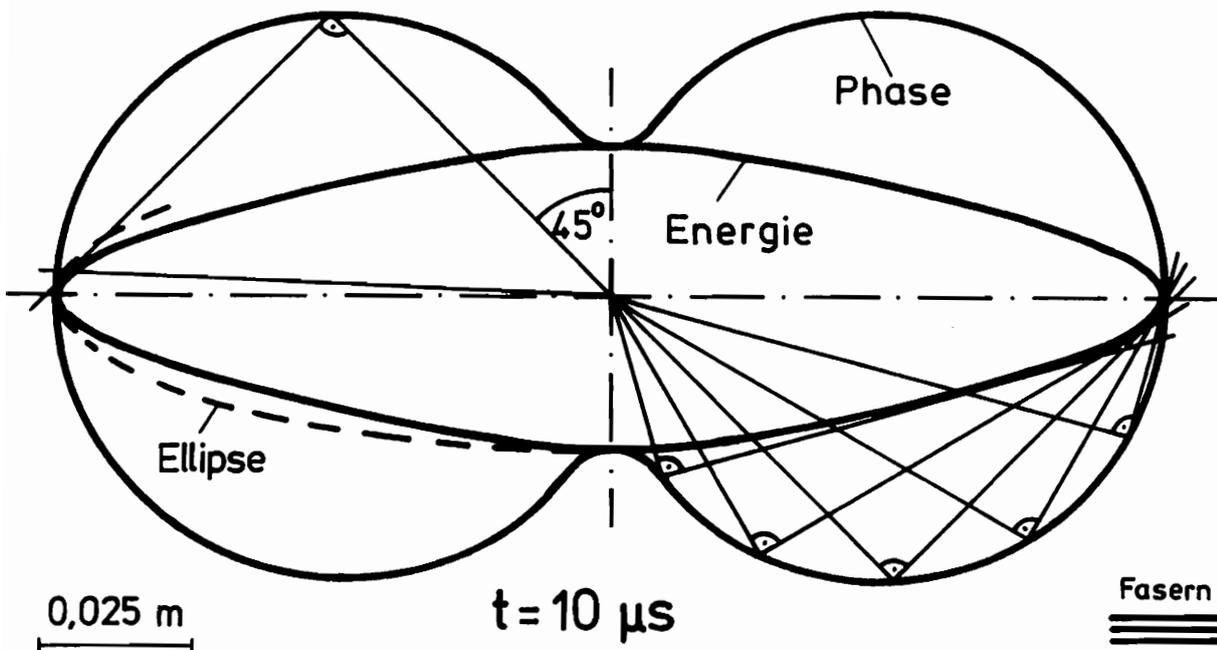


Bild 7: Momentaufnahme von Phasengeschwindigkeitsfläche und Energieausbreitungsfront des überwiegend longitudinal schwingenden Wellentyps in der faserverstärkten Scheibe

Normalenrichtungen gehörenden jeweiligen zwei Phasengeschwindigkeiten, Schwingungsrichtungen und Energiestromrichtungen an. Mit Verweis auf Bild 3 bezeichnen α , β und γ dabei die Winkel zwischen der x-Achse einerseits und der Normalen-, Schwingungs- bzw. Energiestromrichtung andererseits.

3.4 Methode zur experimentellen Ermittlung der elastischen Konstanten von faserverstärkten Materialien

Zahlreiche Arbeiten /22/-/31/ behandeln die theoretische Berechnung der elastischen Konstanten (Elastizitätsmatrix) unidirektional faserverstärkter Verbundmaterialien ausgehend von den elastischen Konstanten der Fasern und der Matrix sowie vom Faservolumenprozentanteil. Ein von Hashin /22/ entwickeltes sowie von Kriz und Stinchcomb /13/ aufgegriffenes und experimentell verifiziertes Berechnungsverfahren ist im Anhang 9.1 angegeben und dient zur Berechnung theoretischer Vergleichswerte für die später experimentell ermittelten elastischen Konstanten der hier untersuchten CFK-Platte. Die Hauptunsicherheit der theoretischen Berechnungsverfahren besteht neben der Frage nach dem im allgemeinen schwachen Einfluß der Viskoelastizität der Epoxydharzmatrix auf das elastische Verhalten der Gesamtstruktur u.a. darin, daß im real existierenden Verbundmaterial nicht von hundertprozentigen Haftflächen zwischen den Fasern und der Matrix ausgegangen werden kann.

Deshalb empfiehlt sich aus Genauigkeitsgründen im konkreten Fall eine experimentelle Ermittlung der Elastizitätsmatrix. Eine Möglichkeit dazu bietet z.B. ein von Hearmon und Adams /32/ entwickeltes Verfahren, das auf Dehnungs- und Durchbiegungsmessungen an biege- und torsionsbelasteten dünnen Platten beruht und auf der klassischen Theorie orthotroper Platten aufbaut. Eine andere Methode, die auf Dehnungsmessungen an einer durch eine Einzelkraft seitlich belasteten Scheibe basiert, mit der eine unendlich ausgedehnte Halbebene simuliert wird, findet man bei Prabhakaran und Chermahini /33/. Ein auf der Torsion- und Zugbelastung von Versuchsstäben, die in verschiedenen Orientierungsrichtungen aus dem orthotropen Material herausgeschnitten werden, beruhendes Verfahren zeigt außerdem noch Scharr /34/. Dieses Verfahren wurde von Neuhaus /35/ zur Bestimmung der Elastizitätszahlen von Fichtenholz benutzt.

Diesen statischen Methoden steht die in Bezug auf eventuelle schwache viskoelastische Eigenschaften dem Problemkreis der Kurzzeitmechanik besonders angepasste Möglichkeit der Messung der dynamischen Elastizitätskonstanten unter Verwendung der Ultraschalltechnik nach Kriz und Stinchcomb /13/ gegenüber. Sie basiert auf der Ermittlung der Phasengeschwindigkeiten über Laufzeitmessungen der Longitudinal- bzw. Quasilongitudinal- und der Transversal- bzw. Quasitransversalwellen im Ultraschallbereich in kleinen Versuchsproben, die in sechs verschiedenen Orientierungsrichtungen aus dem Material herausgeschnitten werden. Eine Modifizierung dieses Verfahrens stellt die hier in Anlehnung an Daniel et al. /3/ vorgeschlagene Methode zur Messung der Grenzgeschwindigkeiten der Longitudinal-, Transversal- und BiegeWellen in einer unidirektional kohlefaserverstärkten Epoxydharzplatte dar. Dazu wird die Platte sowohl in Richtung der Plattenebene als auch transversal (Biegestoß) schlagartig belastet. Mit einem über die Plattenoberfläche verteilten System von Dehnungsmeßstreifen können dann die Laufzeiten der schnellsten Wellen erfaßt werden. Neben der Tatsache, daß es sich hierbei um eine dynamische Methode handelt, bietet sich diese Vorgehensweise bei unidirektionalen Gelegen aber auch insofern an, als daß sie eine zerstörungsfreie und eine mit Hinblick auf die Inhomogenität des Materials wünschenswerte großräumige Messung gestattet.

Die Stoßstellen- und Dehnungsmeßstreifenanordnung sowie die praktische Versuchsdurchführung wird in Kapitel 6.2 besprochen, so daß sich an dieser Stelle auf eine Zusammenstellung der theoretischen Beziehungen beschränkt wird. In einem in x-Richtung unidirektional verstärkten Verbund mit den Koordinatenrichtungen nach Bild 1 kann das Stoffgesetz mit den folgenden fünf unabhängigen Konstanten

$$E_x, E_y, G_{xy}, G_{zy}, \nu_{xy}$$

beschrieben werden /2/. Die restlichen Konstanten ergeben sich zum einen aus den Reziprozitätsbeziehungen (8) nach Betti und zum anderen aus den Symmetriebedingungen

$$\begin{aligned} E_y &= E_z \\ \nu_{xy} &= \nu_{xz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{yx} &= v_{zx} \\ G_{xy} &= G_{xz}\end{aligned}$$

des unidirektionalen Geleges sowie aus der idealisierenden Annahme, daß in der zur Faserrichtung senkrechten y,z -Schnittebene quasiisotropes Verhalten

$$E_Y = E_Z = 2G_{YZ}(1 + \nu_{YZ}) \quad (64)$$

vorliegt. Die Ermittlung der fünf unabhängigen Konstanten erfolgt nun schrittweise mit den in den vorangegangenen Kapiteln abgeleiteten Beziehungen. Zunächst können die Quotienten $E_X/(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})$ und $E_Y/(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})$ aus der Messung der Grenzgeschwindigkeiten der schnellsten Longitudinalwellen

$$\begin{aligned}\rho v_{11_L}^2 &= E_X / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \\ \rho v_{22_L}^2 &= E_Y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})\end{aligned} \quad (65)$$

bestimmt werden. Der Schubmodul

$$G_{xy} = \rho v_{12_T}^2 = \rho v_{21_T}^2 \quad (66)$$

läßt sich sowohl aus der Grenzgeschwindigkeit der schnellsten Transversalwelle in x -Richtung als auch aus der in y -Richtung berechnen. Für die Biegewellen in x - bzw. y -Richtung gelten schließlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}v_{13_T} &= \kappa_x \sqrt{\frac{G_{xz}}{\rho}} \\ v_{23_T} &= \kappa_y \sqrt{\frac{G_{yz}}{\rho}}\end{aligned} \quad (67)$$

wobei κ_x, κ_y aus den Gln. (34), (40) zu bestimmen sind. Hat man die Grenzgeschwindigkeiten der Longitudinal-, Transversal- und Biegewellen experimentell ermittelt, so empfiehlt sich folgende iterative Vorgehensweise zur Be-

stimmung der elastischen Konstanten. Man berechnet mit Anhang 9.1 die theoretischen Werte von v_{xy} und v_{zy} und betrachtet deren Werte im ersten Iterationsschritt als näherungsweise gültig. Mit den Gln.(8),(63)-(66) können dann alle elastischen Konstanten bestimmt werden sowie mit Gl.(34),(40) κ_x und κ_y . Daran anschließend werden mit Gl.(67) die Biegewellengeschwindigkeiten berechnet und mit den experimentellen Werten verglichen. Je nach Übereinstimmung wird ein neuer Iterationsschritt mit verbesserten v_{xy} und v_{zy} gemacht oder die Iteration abgebrochen. Da die theoretischen Werte für v_{xy} und v_{zy} den tatsächlichen Werten im allgemeinen bereits recht nahe kommen, kann das Iterationsverfahren in der Regel nach wenigen Schritten abgebrochen werden.

Für abschließende Kontrollzwecke kann man sich schließlich noch der Beziehungen für die Phasengeschwindigkeit der sich unter 45° zu den elastischen Hauptrichtungen fortpflanzenden Quasilongitudinalwelle bedienen. Diese Phasengeschwindigkeit v_{45qL} kann zwar nicht mit einem Dehnungsmeßstreifen (DMS) erfaßt werden, da außerhalb der elastischen Hauptrichtungen die Phasengeschwindigkeitsfläche und die mit einem DMS erfaßbare Energieausbrei-

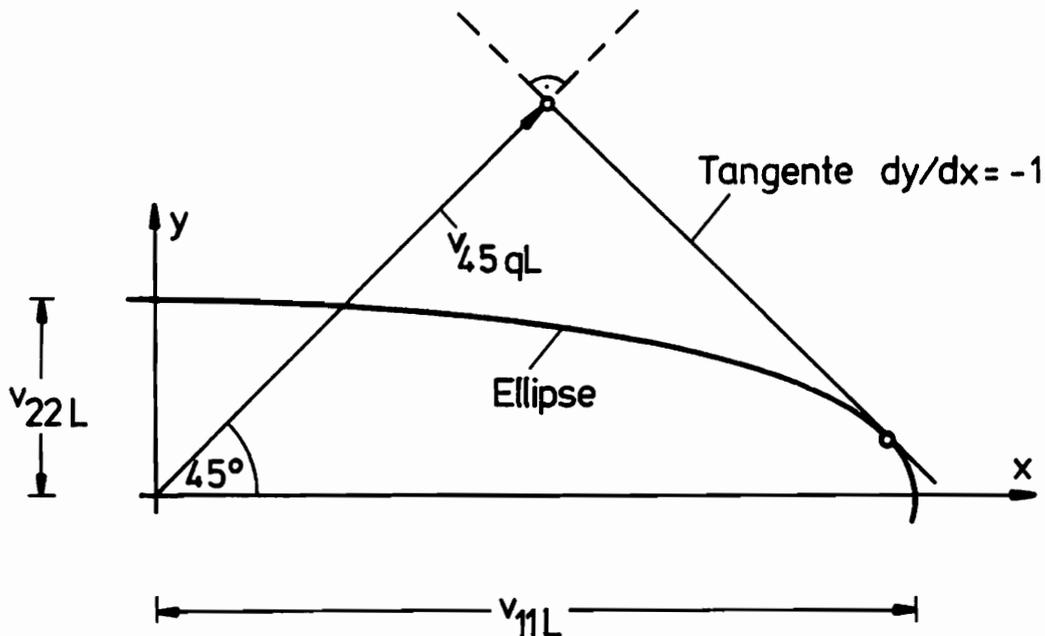


Bild 8: Phasengeschwindigkeit der 45° -Quasilongitudinalwelle bei Annäherung der Energieausbreitungsfront durch eine Ellipse mit den Halbachsen v_{11L} und v_{22L}

tungsfront nicht mehr zusammenfallen. Da die Energieausbreitungsfront aber die Einhüllende der Phasenebenen, d.h. die Fußpunktsfläche der Phasengeschwindigkeitsfläche, ist, kann bei einem unidirektionalen Verbund folgende Näherungskonstruktion für v_{45qL} genutzt werden. Man nähert mit Verweis auf Bild 7 und Bild 8 die Energieausbreitungsfront durch eine Ellipse mit den Halbachsen v_{11L} und v_{22L} an, so daß sich mit der Tangentenkonstruktion folgender geometrischer Zusammenhang

$$v_{45qL} = (v_{11L}^2 + v_{22L}^2)^{1/2} \cos 45^\circ \quad (68)$$

zwischen v_{45qL} und v_{11L} sowie v_{22L} ergibt. Ein Vergleich der nach Gl.(59) und Gl.(68) berechneten Werte für v_{45qL} in der hier untersuchten Platte ergab unter Verwendung der theoretischen Elastizitätskonstanten eine Abweichung von 1% zwischen den beiden Werten. Auf eine ähnliche Übereinstimmung sollten auch die aus den experimentell ermittelten Konstanten berechneten Werte für die Phasengeschwindigkeit der 45° -Quasilongitudinalwelle führen.

4. Das Kontaktkraftgesetz bei orthotropen Körpern

4.1. Vorbemerkungen zu den Kontakttheorien

In formaler Analogie zu den Stoßtheorien isotroper Körper /72/,/99/ wird hier bei der theoretischen Behandlung des Kontaktverhaltens zunächst vom statischen Problem der Zusammenpressung zweier Körper mit orthotropen elastischen Materialeigenschaften ausgegangen. Mit Bezugnahme auf Bild 9 sei die x,y-Ebene die gemeinsame Tangentialebene der sich berührenden Körper, wobei mit der x- und y-Achse nach wie vor auch die elastischen Hauptrichtungen der Elastizitätstensoren bezeichnet werden. Des weiteren wird angenommen, daß die unverformten Oberflächen der Kontaktpartner 1 und 2 in der Umgebung der gemeinsamen Druckfläche durch ihre Hauptkrümmungsradien R_{x1} , R_{x2} in x-Richtung sowie mit R_{y1} , R_{y2} in y-Richtung gegeben seien.

Für die durch die Zusammenpressung resultierende Annäherung der beiden

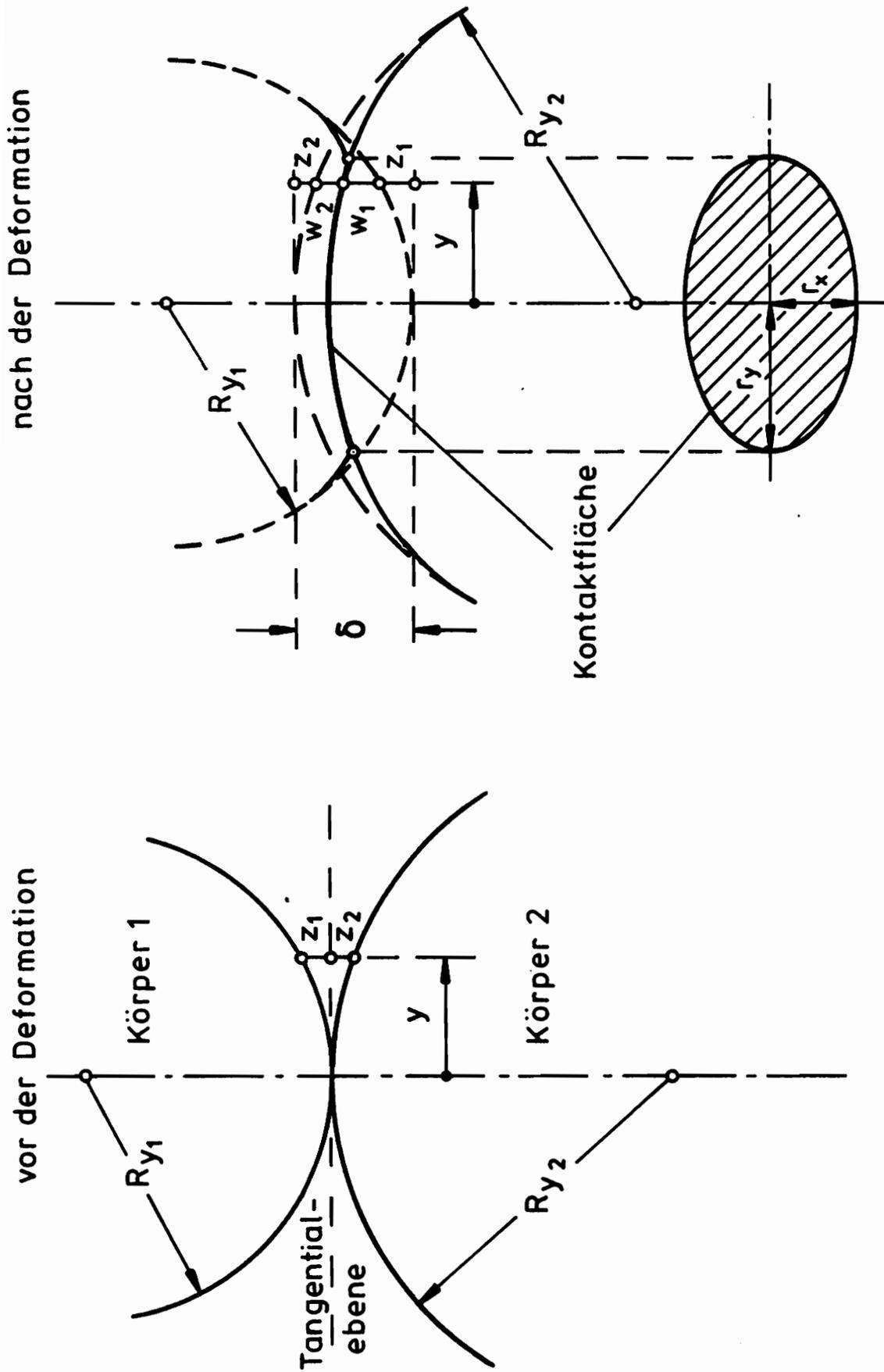


Bild 9: Elastische Verformungen und Kontaktfläche zweier zusammengepresster anisotroper Körper

Körper gilt dann

$$\delta = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 \quad , \quad (69)$$

wobei $w_1(x,y)$ und $w_2(x,y)$ die elastischen Verschiebungen der beiden Kontaktpartner in der Kontaktfläche sind und $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ die Abstände der unverformten Körperoberflächen von der gemeinsamen Tangentialebene. Unter der Voraussetzung, daß z_1, z_2 sehr viel kleiner sind als die Hauptkrümmungsradien, was bei kleinen Abmessungen der Kontaktfläche im Vergleich zu den Krümmungsradien immer erfüllt ist, gilt in guter Näherung.

$$z_1 = \frac{x^2}{2R_{x_1}} + \frac{y^2}{2R_{y_1}} \quad (70)$$

$$z_2 = \frac{x^2}{2R_{x_2}} + \frac{y^2}{2R_{y_2}}$$

Mit den Summen der reziproken Hauptkrümmungsradien

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} \quad (71)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{y_1}} + \frac{1}{R_{y_2}}$$

folgt dann aus Gl.(69) und (70)

$$w_1 + w_2 = \delta - \left(\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \right) \quad (72)$$

für den Zusammenhang zwischen den elastischen Verschiebungen $w_1(x,y), w_2(x,y)$ der Körperoberflächen und der resultierenden Annäherung δ der beiden Körper. Um zu einem Zusammenhang zwischen dem Berührungsdruck $p(x,y)$ und den Verschiebungen $w_1(x,y)$ und $w_2(x,y)$ zu kommen, denkt man sich die in der im allgemeinen elliptischen Berührungsfläche wirkende Druckverteilung $p(x,y)$ durch

eine jeweils in den einzelnen Elementen dF der Druckfläche wirkende Einzelkraftbelastung $dP = p dF$ ersetzt. Betrachtet man zunächst die alleinige Wirkung der auf das Flächenelement dF entfallenden Elementarlast dP auf die Deformationen w_1 und w_2 , so liegt mit guter Näherung, wenn man die Abmessungen der Druckfläche als klein gegenüber den Krümmungsradien voraussetzt, der in Bild 10 dargestellte Fall eines durch eine Einzelkraft belasteten Halbraums vor.

4.2 Die Kontakttheorie von Sveklo

Unter Benutzung komplexer Lastfunktionen hat Sveklo /44/-/46/ in diesbezüglicher Übereinstimmung mit Willis /41/, /42/ gezeigt, daß sich in der Kontaktfläche eine parabolische Druckverteilung

$$p(x,y) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{y^2}{r_y^2} \right)^{1/2} \quad (73)$$

wie im isotropen Fall ergibt. In Gl.(73) sind r_x, r_y die Halbachsen der im allgemeinen elliptischen Druckfläche. Mit der Bedingung, daß der über die

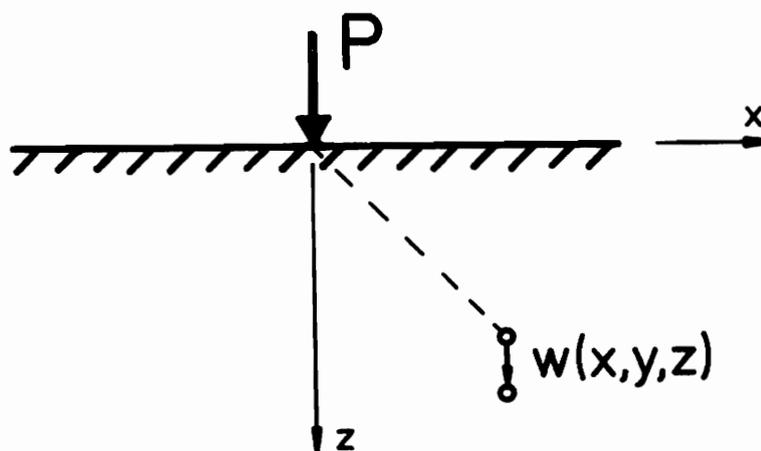


Bild 10: Prinzip der Wirkung einer Einzelkraft auf einen anisotropen Halbraum

Kontaktfläche F aufintegrierte Normaldruck gleich der resultierenden Kontaktkraft P sein muß

$$P = \iint_F p(x,y) \, dx dy \quad (74)$$

folgt für die Konstante p_0 aus Gl.(73).

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi r_x r_y} \quad (75)$$

Für den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen w_j der beiden Kontaktpartner $j=1,2$ und der resultierenden Kontaktkraft P sowie den Halbachsen r_x, r_y hat Sveklo /46/ des weiteren folgende Beziehung

$$w_j = \frac{3P}{4\pi (r_x r_y)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{0j}} \left(r_x r_y - \frac{x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta}{\Delta^2} \right) \frac{d\theta}{\Delta} \quad (76)$$

abgeleitet, worin Δ abkürzend für

$$\Delta = \left[\frac{r_x}{r_y} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta) \right]^{1/2} \quad (77)$$

steht und ϵ die numerische Exzentrizität

$$\epsilon^2 = \frac{r_x^2 - r_y^2}{r_x^2} \quad (78)$$

der Kontaktfläche bezeichnet. Die in Gl.(76) auftretenden Größen $\Delta_{kj}^{(3)}, \Delta_{kj}$ und Δ_{0j} sind komplexe Funktionen, die allein von den elastischen Konstanten des jeweils betrachteten Körpers j sowie vom Integrationswinkel θ abhängen. Abgesehen von wenigen einfachen Spezialfällen können diese Größen nicht durch elementare analytische Ausdrücke angegeben werden. Die in Gl.(76) und in den nachfolgenden Beziehungen des Kapitels auftretenden Integrale über θ

müssen deshalb numerisch berechnet werden, wobei für jeden Kontaktpartner $j=1,2$ und jeden diskreten Integrationsschritt von θ die komplexen Werte $\Delta_{kj}^{(3)}$, Δ_{kj} und Δ_{oj} zu bestimmen sind. Die dazu benötigten Beziehungen sind in Anhang 9.2 aufgeführt.

In diesem Sinne kann nach Sveklo mit den Gln.(72),(76) die folgende Beziehung für die resultierende Annäherung der beiden Kontaktpartner

$$\delta = \frac{3P}{4\pi(r_x r_y)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \frac{d\theta}{\Delta} \quad (79)$$

sowie der folgende Zusammenhang

$$\frac{1}{R_x} = \frac{3P}{2\pi(r_x r_y)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\Delta^3} \quad (80)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{3P}{2\pi(r_x r_y)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \sin^2 \theta \frac{d\theta}{\Delta^3}$$

zwischen der Kontaktkraft P , den Halbachsen r_x, r_y und den resultierenden Krümmungsradien angegeben werden. Aus den Gln.(80) folgt mit den Gln.(77), (78)

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \left(\cos^2 \theta - \frac{R_y}{R_x} \sin^2 \theta \right) \frac{d\theta}{(1-\epsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = 0 \quad (81)$$

und

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{3P}{2\pi r_x^3} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \frac{d\theta}{(1-\epsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (82)$$

so daß aus letzterer Beziehung zusammen mit den Gln.(78) und (79) das gesuchte Kontaktkraftgesetz in der folgenden Form

$$P = K \delta^{3/2} \quad (83)$$

abgeleitet werden kann, wobei sich der Koeffizient K aus folgendem Ausdruck

$$K = \frac{4}{3} \pi (1 - \epsilon^2)^{3/8} \frac{\left[\int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \frac{d\theta}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right]^{1/2}}{\left[\int_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)} \Delta_{kj}}{\Delta_{oj}} \frac{d\theta}{\Delta} \right]^{3/2}} \left(\frac{2R_x R_y}{R_x + R_y} \right)^{1/2} \quad (84)$$

berechnet. Dabei ist es erforderlich, zunächst mit der Gl.(81) die Exzentrizität ϵ zu ermitteln. Im übrigen verbleibt zu bemerken, daß für isotrope Materialien die Beziehungen von Sveklo in die entsprechenden von Hertz übergehen.

Da die numerische Berechnung der Parameter des Kontaktkraftgesetzes mit einem nicht ganz unerheblichen Programmieraufwand verbunden ist, werden in Tabelle 1 ein paar exemplarisch berechnete Werte angegeben. Diese Tabelle gilt für den Kontakt zwischen einer isotropen Kugel mit dem Radius $R_{x1} = R_{y1} = R_s$ und dem E-Modul E_s ($\nu_s = 0,30$) und einem ebenen, unidirektional mit Kohlenstoffasern (Typ SIGRINF) in x-Richtung verstärkten Epoxydharzhalbraum ($R_{x2} = R_{y2} \rightarrow \infty$). In dieser Tabelle wurde der Koeffizient K auf den Radius R_s der Kugel bezogen und die Kontakthalbachse r_y auf das Produkt aus Kontaktkraft und Kugelradius. Damit gestattet die Tabelle die Bestimmung der aktuellen Parameter des Kontaktkraftgesetzes in Abhängigkeit von R_s, E_s und vom Faservolumenprozentanteil im Halbraum.

Außerdem wird im nächsten Kapitel ein Näherungsverfahren zur Ableitung eines Kontaktkraftgesetzes gezeigt, das unter gewissen einschränkenden Bedingungen in Bezug auf die elastischen Konstanten der anisotropen Kontaktpartner eine wesentlich einfachere Berechnung der anisotropen Kontaktkraftgesetzparameter als bei Sveklo gestattet. Im Sinne einer praktikablen Anwendbarkeit entfällt dabei die aufwendige numerische Berechnung der komplexen Hilfsfunktionen der Theorie von Sveklo.

Halbachsenverhältnis r_x/r_y :

		Vol.-% Fasergehalt				
		0	20	40	60	80
E_s	2 10^{10}	1	0,904	0,879	0,860	0,823
	8 10^{10}	1	0,896	0,869	0,837	0,785
in	14 10^{10}	1	0,896	0,868	0,835	0,781
	20 10^{10}	1	0,894	0,866	0,832	0,775

Bezogener Koeffizient des Kontaktkraftgesetzes $K/(R_s)^{1/2}$ in $|N/m^2|$:

		Vol.-% Fasergehalt				
		0	20	40	60	80
E_s	2 10^{10}	0,450 10^{10}	0,760 10^{10}	1,004 10^{10}	1,576 10^{10}	1,810 10^{10}
	8 10^{10}	0,509 10^{10}	0,831 10^{10}	1,122 10^{10}	1,552 10^{10}	2,240 10^{10}
in	14 10^{10}	0,518 10^{10}	0,839 10^{10}	1,132 10^{10}	1,570 10^{10}	2,274 10^{10}
	20 10^{10}	0,522 10^{10}	0,845 10^{10}	1,149 10^{10}	1,604 10^{10}	2,355 10^{10}

Bezogene Kontakthalbachse $r_y/(R_s P)^{1/3}$ in $|m/(Nm)^{1/3}|$:

		Vol.-% Fasergehalt				
		0	20	40	60	80
E_s	2 10^{10}	6,06 10^{-4}	5,32 10^{-4}	4,92 10^{-4}	4,60 10^{-4}	4,16 10^{-4}
	8 10^{10}	5,81 10^{-4}	5,20 10^{-4}	4,77 10^{-4}	4,34 10^{-4}	3,95 10^{-4}
in	14 10^{10}	5,78 10^{-4}	5,19 10^{-4}	4,76 10^{-4}	4,34 10^{-4}	3,93 10^{-4}
	20 10^{10}	5,76 10^{-4}	5,18 10^{-4}	4,74 10^{-4}	4,31 10^{-4}	3,90 10^{-4}

Tabelle 1: Parameter des Kontaktkraftgesetzes beim Kontakt zwischen isotropen Kugeln mit verschiedenen Elastizitätsmoduln E_s ($\nu_s = 0,30$) und einem mit Kohlenstoffasern unidirektional verstärkten Epoxydharzhalbraum

4.3 Näherungsverfahren für die Ableitung eines Kontaktkraftgesetzes

Als Basis zur Herleitung des Kontaktkraftgesetzes wird wie bei Sveklo die Lösung des statischen Teils der Differentialgleichungen (10) eines durch eine Einzelkraft belasteten orthotropen Halbraums gesucht. Dieses Verschiebungsfeld u, v, w muß neben dem partiellen Differentialgleichungssystem, das aus den Gleichgewichtsbedingungen, den Dehnungs-Verschiebungsgleichungen und dem Werkstoffgesetz abgeleitet ist, noch folgenden Randbedingungen mit Bezugnahme auf Bild 10 gehorchen. Im Unendlichen müssen alle Spannungen und

Formänderungen gegen Null gehen. Die Spannungskomponenten τ_{zx} und τ_{zy} müssen in allen Punkten der Oberfläche $z=0$ verschwinden. Ebenso muß in allen Punkten dieser Ebene mit Ausnahme des Lastangriffspunktes die Komponente σ_z gleich Null sein. Die aufintegrierte Resultante der Spannungen σ_z in den Ebenen $z = \text{const.}$ muß den Betrag P haben.

Während Sveklo das anstehende Problem mit Hilfe komplexer Lastfunktionen gelöst hat, wird hier eine Näherungslösung im Reellen angestrebt. In Anlehnung an Lodge /47/ wird angenommen, daß die elastischen Konstanten der jeweiligen Kontaktpartner den Bedingungen

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}} &= \sqrt{\nu_{xz}\nu_{zx}} = \sqrt{\nu_{zy}\nu_{yz}} = \bar{\nu} \\ G_{yz} &= \frac{\sqrt{E_y E_z}}{2(1+\bar{\nu})} \\ G_{xz} &= \frac{\sqrt{E_x E_z}}{2(1+\bar{\nu})} \\ G_{xy} &= \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1+\bar{\nu})} \end{aligned} \quad (85)$$

genügen. Dies wird z.B. von isotropen Körpern exakt erfüllt. Real existierende orthotrope Materialien erfüllen diese Bedingungen dagegen nur mehr oder weniger angenähert. Betrachtet man die Bedingungen nach Gl.(85) im folgenden als erfüllt, was bedeutet, daß die Elastizitätsmatrix der jeweiligen Kontaktpartner z.B. durch die jeweils vier Größen E_x , E_y , E_z und $\bar{\nu}$ vollständig beschrieben werden kann, so kann mit einer Transformation nach Lodge /47/ das Problem des durch eine Einzelkraft belasteten orthotropen Halbraums in Bezug auf die Differentialgleichungen und die Randbedingungen in eine dem isotropen Problem analoge Form überführt werden. Deren Lösung ist bekannt, und man erhält nach einer Rücktransformation folgende Beziehung

$$w(x, y, z=0) = \frac{P}{\pi} \frac{1 - \bar{\nu}^2}{(E_x E_y E_z)^{1/4}} \left[\left(\frac{E_z}{E_x} \right)^{1/2} x^2 + \left(\frac{E_z}{E_y} \right)^{1/2} y^2 \right]^{-1/2} \quad (86)$$

für die Verschiebungen $w(x, y, z=0)$ an der Oberfläche des Halbraums. Die ge-

naue Durchführung des Transformationsverfahrens findet man dazu in Anhang 9.3.

Um nun zu einem Zusammenhang zwischen dem in der Kontaktfläche nach Bild 11 herrschenden Druck $p(x,y)$ und den Verschiebungen $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ der beiden Körper 1,2 zu gelangen, denkt man sich die Druckverteilung durch eine in den einzelnen Elementen der Druckfläche wirkende Einzelkraftbelastung $dP = p dF$ ersetzt. Eine solche, an der Stelle (x,y) wirkende Einzelkraft $p dF$ ruft dann unter Bezugnahme auf Bild 11 an der Stelle (x_0, y_0) eine infinitesimal kleine Verschiebung dw_1 der Körperoberfläche 1

$$dw_1(x_0, y_0) = \frac{1 - \bar{\nu}_1^2}{\pi(E_{x1}E_{y1}E_{z1}^2)^{1/4}} \frac{p dF}{\sqrt{\left(\frac{E_{z1}}{E_{x1}}\right)^{1/2} \xi^2 + \left(\frac{E_{z1}}{E_{y1}}\right)^{1/2} \eta^2}} \quad (87)$$

hervor. Integriert man über sämtliche Elementarlasten der Kontaktfläche, ergibt sich für die resultierende Verschiebung w_1 an der Stelle (x_0, y_0)

$$w_1(x_0, y_0) = \frac{1 - \bar{\nu}_1^2}{\pi(E_{x1}E_{y1}E_{z1}^2)^{1/4}} \int_{r_x - x_0}^{-r_x - x_0} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{p_0 \left[1 - \left(\frac{\xi + x_0}{r_x}\right)^2 - \left(\frac{\eta + y_0}{r_y}\right)^2 \right]^{1/2}}{\sqrt{\left(\frac{E_{z1}}{E_{x1}}\right)^{1/2} \xi^2 + \left(\frac{E_{z1}}{E_{y1}}\right)^{1/2} \eta^2}} d\eta d\xi \quad (88)$$

wobei die inneren Integrationsgrenzen sich aus

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -y_0 + r_y \left[1 - \left(\frac{\xi + x_0}{r_x}\right)^2 \right]^{1/2} \\ \eta_2 &= -y_0 - r_y \left[1 - \left(\frac{\xi + x_0}{r_x}\right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (89)$$

berechnen. Zur Berechnung des Doppelintegrals in Gl.(88) erweist es sich als zweckmäßig, mit der Substitutionsmethode auf transformierte Koordinaten ξ', x', η', y' ... überzugehen.

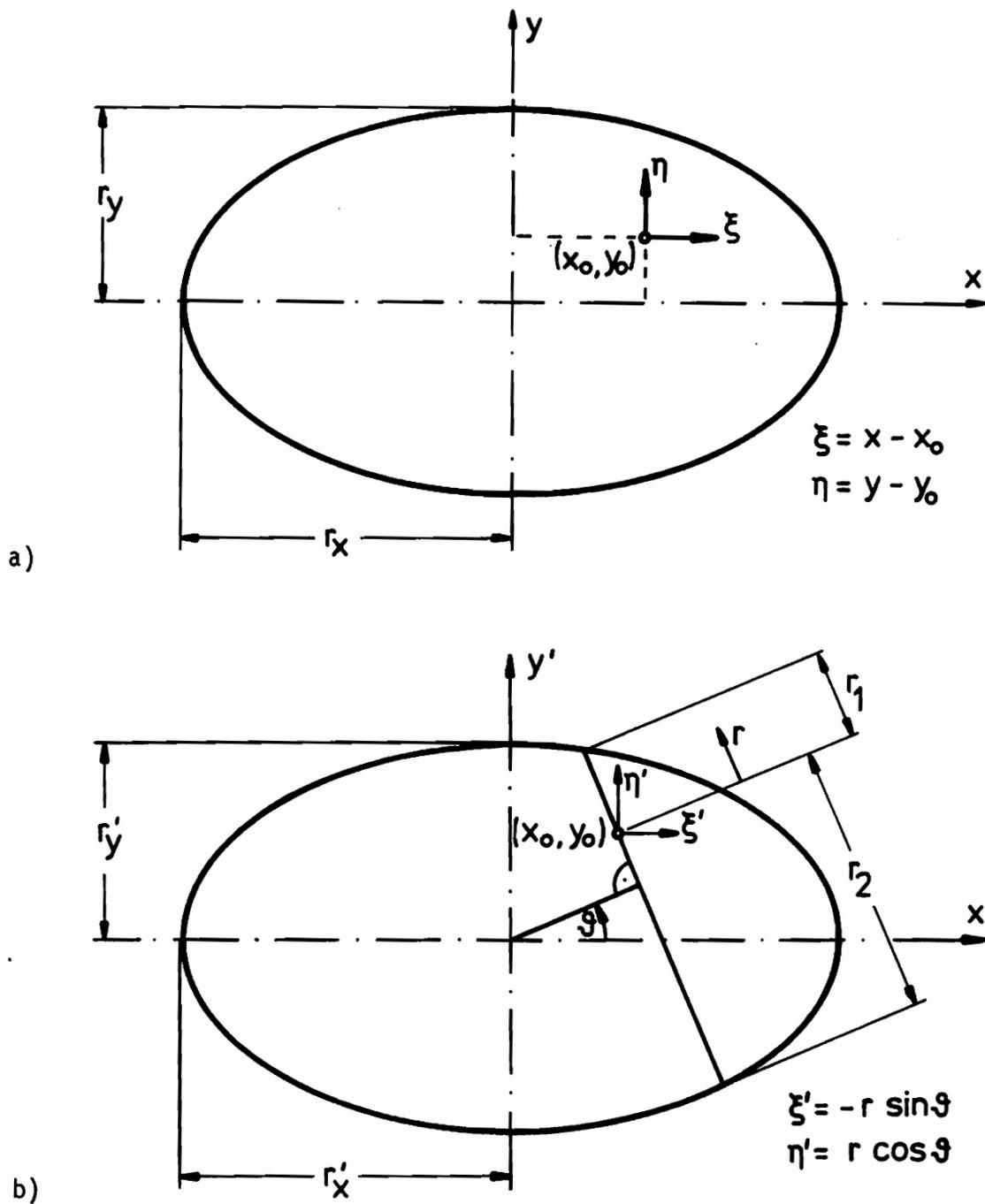


Bild 11: Schema der elliptischen Kontaktfläche mit den Halbachsen r_x und r_y .
Darstellung in a) kartesischen Koordinaten
b) transformierten kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

Mit

$$\begin{aligned}\frac{\xi'}{\xi} &= \frac{x'}{x} = \frac{x'_0}{x_0} = \frac{r'_x}{r_x} = \left(\frac{E_{z_1}}{E_{x_1}} \right)^{1/4} \\ \frac{\eta'}{\eta} &= \frac{y'}{y} = \frac{y'_0}{y_0} = \frac{r'_y}{r_y} = \left(\frac{E_{z_1}}{E_{y_1}} \right)^{1/4}\end{aligned}\quad (90)$$

wird dann das Doppelintegral von Gl.(88)

$$w_1 = \frac{1 - \bar{v}_1^2}{\pi(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \int_{r'_x - x'_0}^{-r'_x - x'_0} \int_{\eta'_1}^{\eta'_2} \frac{\rho_0 \left[1 - \left(\frac{\xi' + x'_0}{r'_x} \right)^2 - \left(\frac{\eta' + y'_0}{r'_y} \right)^2 \right]^{1/2}}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \frac{d\eta'}{(E_{z_1}/E_{y_1})^{1/4}} \frac{d\xi'}{(E_{z_1}/E_{x_1})^{1/4}} \quad (91)$$

mit den folgenden

$$\begin{aligned}\eta'_1 &= -y'_0 + r'_y \left[1 - \left(\frac{\xi' + x'_0}{r'_x} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \eta'_2 &= -y'_0 - r'_y \left[1 - \left(\frac{\xi' + x'_0}{r'_x} \right)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (92)$$

inneren Integrationsgrenzen. Mit Verweis auf Bild 11b wird nun zu Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\xi' &= -r \sin \vartheta \\ \eta' &= r \cos \vartheta \\ d\eta' d\xi' &= r dr d\vartheta\end{aligned}\quad (93)$$

übergegangen. Das Doppelintegral nimmt damit folgende Form

$$w_1 = \frac{1 - \bar{v}_1^2}{\pi(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{y_1} E_{x_1}}{E_{z_1}^2} \right)^{1/4} \int_0^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_0 \left[1 - \left(\frac{x'_0 - r \sin \vartheta}{r'_x} \right)^2 - \left(\frac{y'_0 + r \cos \vartheta}{r'_y} \right)^2 \right]^{1/2}}{r} r dr d\vartheta \quad (94)$$

an. Die darin auftretenden inneren Integrationskonstanten r_1, r_2 berechnen sich aus

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1} \\ r_2 &= \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1} \end{aligned} \quad (95)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= - \left(\frac{\sin \vartheta}{r'_x} \right)^2 - \left(\frac{\cos \vartheta}{r'_y} \right)^2 \\ a_2 &= 2 \left(\frac{x'_0 \sin \vartheta}{(r'_x)^2} - \frac{y'_0 \cos \vartheta}{(r'_y)^2} \right) \\ a_3 &= 1 - \left(\frac{x'_0}{r'_x} \right)^2 - \left(\frac{y'_0}{r'_y} \right)^2 \end{aligned} \quad (96)$$

als abkürzenden Ausdrücken. Das innere Integral von Gl.(94) kann nun z.B. mit Hilfe der Integraltafeln in Bronstein, Semendjajew /105/ berechnet werden und man erhält nach einer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1 - \bar{v}_1^2}{2(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{y_1} E_{x_1}}{E_{z_1}^2} \right)^{1/4} p_0 r'_x r'_y * \\ & * \left[(r'_x{}^2 - x_0'^2) \int_0^\pi \frac{\cos^2 \vartheta}{(r'_y{}^2 \sin^2 \vartheta + r'_x{}^2 \cos^2 \vartheta)^{3/2}} d\vartheta + (r'_y{}^2 - y_0'^2) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta}{(r'_y{}^2 \sin^2 \vartheta + r'_x{}^2 \cos^2 \vartheta)^{3/2}} d\vartheta \right] \end{aligned} \quad (97)$$

Nach der Rücksubstitution auf die ursprünglichen Koordinaten x, ξ, y, η, \dots ergibt sich daraus unter Beachtung von Gl.(75) schließlich folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}
w_1(x_0, y_0) &= \frac{3P}{4\pi} \frac{1 - \bar{\nu}_1^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} * \\
& * \left[(x_x^2 - x_0^2) \left(\frac{E_{z_1}}{E_{x_1}} \right)^{1/2} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \vartheta}{[(E_{z_1}/E_{y_1})^{1/2} r_y^2 \sin^2 \vartheta + (E_{z_1}/E_{x_1})^{1/2} r_x^2 \cos^2 \vartheta]^{3/2}} d\vartheta \right. \\
& \left. + (y_y^2 - y_0^2) \left(\frac{E_{z_1}}{E_{y_1}} \right)^{1/2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta}{[(E_{z_1}/E_{y_1})^{1/2} r_y^2 \sin^2 \vartheta + (E_{z_1}/E_{x_1})^{1/2} r_x^2 \cos^2 \vartheta]^{3/2}} d\vartheta \right]
\end{aligned} \tag{98}$$

für die Verschiebung $w_1(x_0, y_0)$, der in folgende Form

$$\begin{aligned}
w_1(x_0, y_0) &= \frac{3P}{4\pi} \frac{1 - \bar{\nu}_1^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{r_x} \right) * \\
& * \left\{ \left(1 - \frac{x_0^2}{r_x^2} \right) \int_0^\pi \frac{\cos^2 \vartheta}{[\cos^2 \vartheta + (E_{x_1}/E_{y_1})^{1/2} (r_y/r_x)^2 \sin^2 \vartheta]^{3/2}} d\vartheta + \right. \\
& \left. + \left(\frac{E_{x_1}}{E_{y_1}} \right)^{1/2} \left(\frac{r_y}{r_x} \right)^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{r_y^2} \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta}{[\cos^2 \vartheta + (E_{x_1}/E_{y_1})^{1/2} (r_y/r_x)^2 \sin^2 \vartheta]^{3/2}} d\vartheta \right\}
\end{aligned} \tag{99}$$

gebracht werden kann. Die Integrale in Gl.(99) sind nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar. Sie können aber mit den Integraltafeln von Gröbner und Hofreiter /106/ auf elliptische Integrale zurückgeführt werden, so daß sich die elastischen Verschiebungen der Kontaktpartner an der Stelle (x_0, y_0) folgendermaßen

$$\begin{aligned}
w_1(x_0, y_0) &= \frac{3P}{4\pi} \frac{1 - \bar{\nu}_1^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{r_x} \right) \left[\left(1 - \frac{x_0^2}{r_x^2} \right) I_{11} + \left(1 - \frac{y_0^2}{r_y^2} \right) I_{12} \right] \\
w_2(x_0, y_0) &= \frac{3P}{4\pi} \frac{1 - \bar{\nu}_2^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{r_x} \right) \left[\left(1 - \frac{x_0^2}{r_x^2} \right) I_{21} + \left(1 - \frac{y_0^2}{r_y^2} \right) I_{22} \right]
\end{aligned} \tag{100}$$

darstellen lassen, wobei folgende Abkürzungen

$$I_{j1} = \begin{cases} \frac{2}{k_j^2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_j\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k_j\right) \right] & \text{für } 0 < k_j < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k_j = 0 \end{cases} \quad (101)$$

$$I_{j2} = \begin{cases} \frac{2}{k_j^2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k_j\right) - (1-k_j^2)F\left(\frac{\pi}{2}, k_j\right) \right] & \text{für } 0 < k_j < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k_j = 0 \end{cases}$$

und

$$k_j^2 = 1 - \left(\frac{E_{x_j}}{E_{y_j}} \right)^{1/2} \left(\frac{r_y}{r_x} \right)^2 \quad (102)$$

gelten. $F(\pi/2, k_j)$ und $E(\pi/2, k_j)$ sind dabei die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, deren Werte man in Abhängigkeit von k_j bei Bronstein, Semendjajew /105/ und Jahnke-Emde /107/ tabelliert findet.

Aus den Gln.(100) ergibt sich dann mit der geometrischen Beziehung von Gl.(72)

$$w_1 + w_2 = \delta - \frac{x_0^2}{2R_x} - \frac{y_0^2}{2R_y}$$

$$= \left(\frac{3P}{4\pi} \right) \left(\frac{1}{r_x} \right) \left\{ \frac{(1 - \bar{\nu}_1)^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}} \right)^{1/4} \left[\left(1 - \frac{x_0^2}{r_x^2} \right) I_{11} + \left(1 - \frac{y_0^2}{r_y^2} \right) I_{12} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}} \right)^{1/4} \left[\left(1 - \frac{x_0^2}{r_x^2} \right) I_{21} + \left(1 - \frac{y_0^2}{r_y^2} \right) I_{22} \right] \right\} \quad (103)$$

als Grundgleichung des Kontaktproblems. Ein Koeffizientenvergleich der bei

x_0 und y_0 stehenden Terme der Gl.(103) liefert

$$\frac{1}{2R_x} = \frac{3P}{4\pi} \left(\frac{1}{r_x}\right) \left(\frac{1}{r_x^2}\right) \left\{ \frac{(1 - \bar{\nu}_1)}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} I_{11} + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} I_{21} \right\}$$

$$\frac{1}{2R_y} = \frac{3P}{4\pi} \left(\frac{1}{r_x}\right) \left(\frac{1}{r_y^2}\right) \left\{ \frac{(1 - \bar{\nu}_1)}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} I_{12} + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} I_{22} \right\}$$

(104)

Außerdem folgt aus Gl.(103) für die Stelle $x_0 = y_0 = 0$

$$\delta = \frac{3P}{4\pi} \left(\frac{1}{r_x}\right) \left\{ \frac{1 - \bar{\nu}_1}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} (I_{11} + I_{12}) + \frac{1 - \bar{\nu}_2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} (I_{21} + I_{22}) \right\}$$

(105)

woraus mit den Gln.(104)

$$\delta = \frac{r_x^2}{2R_x} + \frac{r_y^2}{2R_y}$$

(106)

abgeleitet werden kann. Multipliziert man die zweite der Gln.(104) außerdem mit dem Faktor R_y/R_x und subtrahiert den Ausdruck von der ersten, so erhält man

$$\frac{(1 - \bar{\nu}_1)}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} \left[I_{11} - \left(\frac{R_y}{R_x}\right) \left(\frac{r_x}{r_y}\right)^2 I_{12} \right] +$$

$$+ \frac{(1 - \bar{\nu}_2)}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} \left[I_{21} - \left(\frac{R_y}{R_x}\right) \left(\frac{r_x}{r_y}\right)^2 I_{22} \right] = 0$$

(107)

als Bestimmungsgleichung für das Halbachsenverhältnis r_x/r_y . Ferner folgt

aus den Gln.(104)

$$\frac{1}{2R_x} + \frac{1}{2R_y} = \frac{3P}{4\pi} \left(\frac{1}{r_x}\right)^3 \left[\frac{(1 - \bar{\nu}_1)^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} \left(I_{11} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{12}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} \left(I_{21} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{22}\right) \right] \quad (108)$$

Eliminiert man hieraus mit Gl.(105) r_x , ergibt sich nach Auflösung nach P die bekannte Form

$$P = K \delta^{3/2} \quad (109)$$

des Kontaktkraftgesetzes mit

$$K = \frac{4}{3} \pi \frac{\left[\frac{(1 - \bar{\nu}_1)^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} \left(I_{11} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{12}\right) + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} \left(I_{21} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{22}\right) \right]^{1/2}}{\left[\frac{(1 - \bar{\nu}_1)^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}}\right)^{1/4} \left(I_{11} + I_{12}\right) + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}}\right)^{1/4} \left(I_{21} + I_{22}\right) \right]^{3/2}} * \left(\frac{2R_x R_y}{R_x + R_y}\right)^{1/2} \quad (110)$$

als Bestimmungsgleichung des Koeffizienten K. Dabei sind R_x und R_y mit

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} \\ \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{y_1}} + \frac{1}{R_{y_2}} \quad (111)$$

die bereits definierten Hauptkrümmungsradien. Zur Berechnung des Koeffizi-

enten K ist es erforderlich, zunächst mit Gl.(107) das Halbachsenverhältnis zu berechnen. Abschließend bleibt noch darauf hinzuweisen, daß die Umstellung von Gl.(108) folgende Beziehung

$$r_x = \left\{ \frac{3P}{4\pi} \left[\frac{(1 - \bar{\nu}_1)^2}{(E_{x_1} E_{y_1} E_{z_1}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_1}}{E_{z_1}} \right)^{1/4} (I_{11} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{12}) + \frac{(1 - \bar{\nu}_2)^2}{(E_{x_2} E_{y_2} E_{z_2}^2)^{1/4}} \left(\frac{E_{x_2}}{E_{z_2}} \right)^{1/4} (I_{21} + \frac{r_x^2}{r_y^2} I_{22}) \right] \right\}^{1/3} \left(\frac{2R_x R_y}{R_x + R_y} \right)^{1/3} \quad (112)$$

für die Kontakthalbachse r_x in Abhängigkeit von der Kontaktkraft liefert. Beim Übergang zu isotropen Stoffen kommt man mit den abgeleiteten Gleichungen außerdem auch hier wiederum zu den entsprechenden Hertzschen Beziehungen.

Die Berechnung der Parameter des Kontaktkraftgesetzes hat sich damit gegenüber Sveklo erheblich vereinfacht. Dies unter der Bedingung, daß die Beziehungen von Gl.(85) in Bezug auf die elastischen Konstanten gelten und sich das Stoffgesetz jedes Kontaktpartners auf vier unabhängige Variable E_x, E_y, E_z und $\bar{\nu}$ reduziert. Wie Vergleichsrechnungen mit der Theorie von Sveklo ergaben, berechnet man dabei zweckmäßigerweise die mittlere Poissonsche Querdehnzahl

$$\bar{\nu} = (\nu_{xy} \nu_{yx} \nu_{zy} \nu_{yz} \nu_{xz} \nu_{zx})^{1/6} \quad (113)$$

aus dem geometrischen Mittel der Poissonschen Querdehnzahlen des real existierenden Materials.

Für das konkrete Beispiel des Kontaktes zwischen einer isotropen Stahlkugel ($E_s = 21,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu_s = 0,28$) und einem unidirektional mit Kohlefasern (Typ SIGRI NF) in x-Richtung verstärkten Epoxydharzhalbraum bei verschiedenen Faservolumenprozentanteilen zeigt Bild 12 einen Vergleich berechneter Parameter des Kontaktkraftgesetzes, die zum einen mit der Theorie von Sveklo und zum anderen mit der in diesem Kapitel abgeleiteten Näherungstheorie bestimmt wurden. Beide Theorien führen bei Null Volumenprozent Fasergehalt auf die entsprechenden Werte der für isotrope Stoffe gültigen Theorie von Hertz. Bezüglich des Koeffizienten K zeigen beide Theorien außerdem eine gute Übereinstimmung im Bereich der in der Technik heute vorkommenden Fälle (bis ca. 60-Vol.% Fasergehalt).

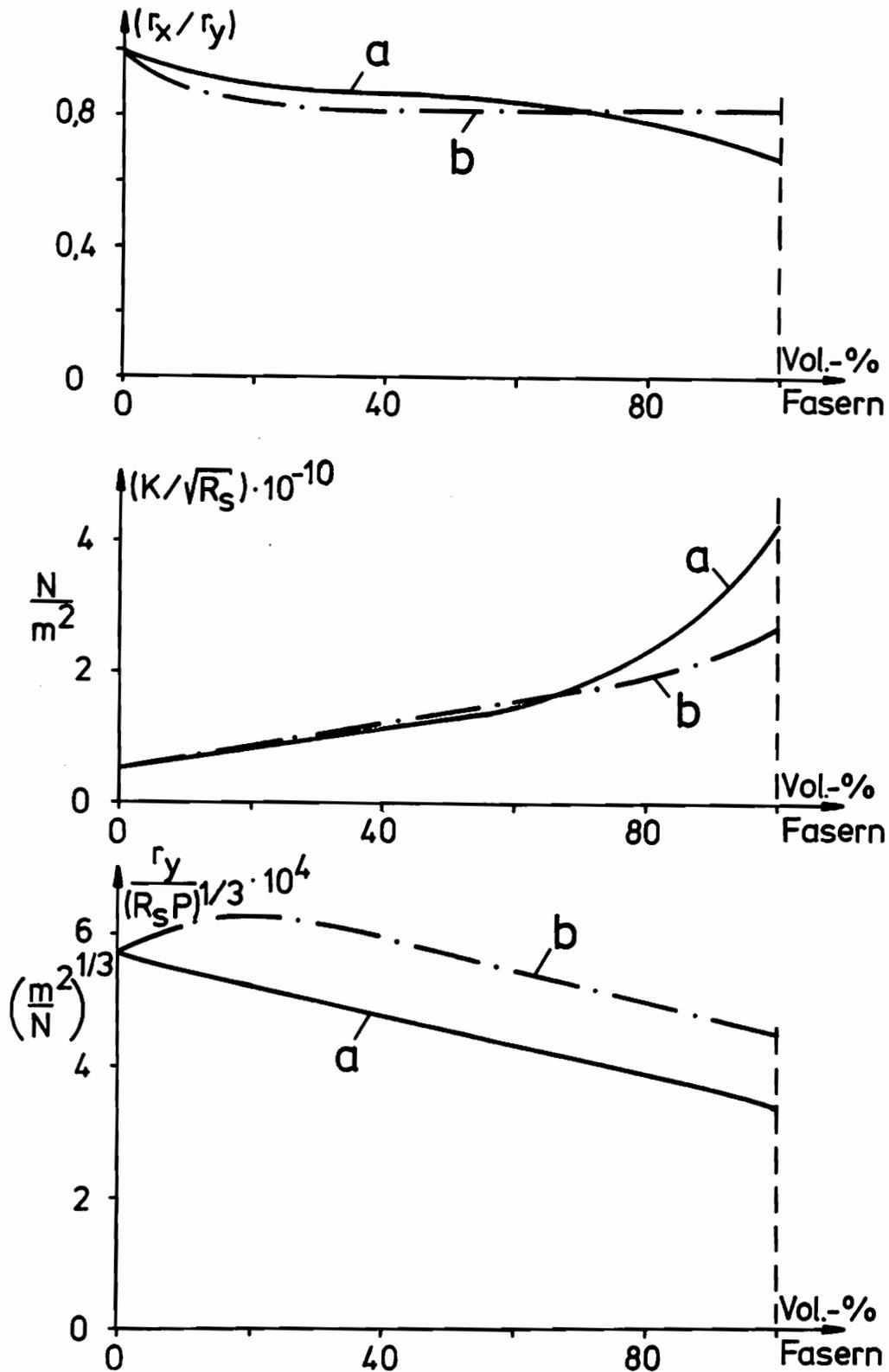


Bild 12: Parameter der Kontaktkraftgesetze beim Kontakt zwischen einer isotropen Stahlkugel und einem Kohlenstofffaser/Epoxydharz-Halbraum bei verschiedenen Faservolumenprozentanteilen

- a - Theorie von Sveklo
- b - Näherungstheorie

4.4 Experimentelle Methode zur Bestimmung des Kontaktkraftgesetzes

Die vorgestellten theoretischen Verfahren zur Berechnung der Parameter des Kontaktkraftgesetzes beruhen auf idealisierenden Voraussetzungen. So handelt es sich zunächst um statische Kontakttheorien. Möglicherweise auftretende Einflüsse z.B. von Reibung in der Kontaktfläche oder eventuell nicht linear elastischem Materialverhalten werden nicht berücksichtigt. Außerdem wird die Annahme, daß die Kontaktfläche sehr klein im Vergleich zu den Abmessungen der Kontaktpartner sei, bei einer dünnen Platte in Bezug auf die Plattendicke h nur schlecht erfüllt.

Im folgenden wird deshalb eine Methode erläutert, die eine experimentelle Bestimmung der dynamischen Parameter des Kontaktkraftgesetzes unter den realen Bedingungen des Stoßes von Stahlkugeln auf eine faserverstärkte Platte und einen faserverstärkten Halbraum gestattet. Diese Methode wurde bereits von Schwieger und Dombrowski /48/, /49/ zur Bestimmung der Parameter des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes beim Balkenbiegestoß vorgestellt. Außerdem wurde sie von Dombrowski /50/ beim Stoß auf eine dünne isotrope Platte mit elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung benutzt sowie vom Verfasser /51/ zur Ermittlung der Parameter beim elastischen Stoß auf eine Rippenplatte mit strukturbedingter Orthotropie. Hier interessiert u.a. die Frage, ob beim Platten- und Halbraumstoß größere Unterschiede in Bezug auf die experimentellen Parameter des Kontaktkraftgesetzes feststellbar sind.

a) Biegestoß auf eine Platte:

Die Vorzeichenregelung der Ortskoordinaten im Zusammenhang mit dem Stoßvorgang wird hier und im weiteren Verlauf der Arbeit derart gehandhabt, daß sämtliche Lageveränderungen in ursprünglicher Kugelstoßrichtung als positiv - entgegengesetzt als negativ - betrachtet werden. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung der Kugel. Sie liefert den Zusammenhang zwischen der auf die Platte gerichteten Stoßkraft

$$P(t) = -m_s \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} \quad (114)$$

und der Schwerpunktbeschleunigung der Kugel. Die zweifache Integration über die Zeit führt auf das folgende Doppelintegral

$$\bar{w}(t) = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^{t''=t} \int_0^{t'=t''} P(t') dt' dt'' \quad (115)$$

für die Schwerpunktverschiebung \bar{w} der Kugel. Dies kann in ein Einfachintegral

$$\bar{w}(t) = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' \quad (116)$$

überführt werden.

Während des Frühstadiums des Stoßes, in dem die Randbedingungen der Platte keinen Einfluß auf das Geschehen am Stoßpunkt nehmen können, besteht außerdem ein im nachfolgenden Hauptkapitel abgeleiteter linearer Zusammenhang zwischen der Durchbiegung der orthotropen Platte unter dem Stoßpunkt

$$\bar{w}_0(t) = \alpha_p \int_0^t P(t') dt' \quad (117)$$

und dem Zeitintegral über die Stoßkraft. Der diese Proportionalität beschreibende Plattenparameter α_p wird dabei allein durch die elastischen Konstanten, die Dichte und die Höhe der Platte bestimmt.

Unter der Voraussetzung von Hertz, daß allein die Verhältnisse in der Umgebung der Stoßstelle selbst den Stoßvorgang ausmachen, kann für die Deformationen von Kugel und Plattenelement, d.h. für die Abplattungen der Kugel und das Eindringen der Kugel in die Platte, die Differenz der Schwerpunktverschiebungen der Stoßpartner gesetzt werden. Dann kann für die Annäherung der Kontaktpartner folgende Abhängigkeit

$$\delta(t) = \bar{w}(t) - \bar{w}_0(t) = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' - \alpha_p \int_0^t P(t') dt' \quad (118)$$

von der Stoßkraft angegeben werden. Hat man die Stoßkraft gemessen, so können aus einer Zuordnung entsprechender Wertepaare der nach Gl.(118) ermittelten Annäherung δ und der Stoßkraft P mit den Methoden der Ausgleichsrechnung (Prinzip vom Minimum der Fehlerquadrate) der Koeffizient K und der Exponent E des verallgemeinerten Kontaktkraftgesetzansatzes

$$P = K \delta^E = K (\bar{w} - \bar{w}_0)^E \quad (119)$$

bestimmt werden. /48/-/51/.

b) Stoß auf einen orthotropen Halbraum:

Hierbei tritt keine Verschiebung des Halbraumschwerpunktes auf, so daß die Annäherung der Kontaktpartner gleich der Schwerpunktverschiebung der Stoßkugel nach Stoßbeginn

$$\delta(t) = \bar{w}(t) = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' \quad (120)$$

ist. Die Bestimmung der KKG-Parameter erfolgt ansonsten analog zum Plattenstoß. Auch braucht hier keine Rücksicht auf ein Frühstadium genommen zu werden, so daß der gesamte Be- und Entlastungsvorgang zur Auswertung herangezogen werden kann.

Nimmt man den Wert $E = 3/2$ des Exponenten als gegeben an, besteht noch eine zweite Möglichkeit zur Berechnung des Koeffizienten K beim Stoß auf den Halbraum. In formaler Analogie zur Theorie des Stoßes zweier Körper 1 und 2 von Hertz können ausgehend vom Kontaktkraftgesetz

$$P = K \delta^{3/2} = K (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)^{3/2} \quad (121)$$

mit den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\bar{w}}_1 &= -P(t) \\ m_2 \ddot{\bar{w}}_2 &= P(t) \end{aligned} \quad (122)$$

folgende Beziehungen

$$P_{\max} = \left[\frac{5}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} K^{2/3} (v_{01} - v_{02})^2 \right]^{3/5} \quad (123)$$

$$T_{\max} = 1,4716 \left[\frac{25}{16} \frac{1}{(v_{o1} - v_{o2})^2 K^2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right]^{1/5} \quad (124)$$

für die maximale Stoßkraft P_{\max} und für den Zeitpunkt maximaler Stoßkraft T_{\max} in Abhängigkeit vom Koeffizienten K und von den Stoßgeschwindigkeiten der beiden Kontaktpartner angegeben werden. Die Herleitung der Gl.n.(123), (124) findet man z.B. bei Szabo /99/. Bei dem hier vorliegenden Fall des Stoßes einer Kugel $m_s = m_1$ mit der Geschwindigkeit $v_o = v_{o1}$ auf einen ruhenden Halbraum ($v_{o2} = 0; m_2 \rightarrow \infty$) liefert die Umstellung von Gl.(123) folgende

$$K = \frac{P_{\max}^{5/2}}{\left[\frac{5}{4} m_s v_o^2 \right]^{3/2}} \quad (125)$$

Beziehung für den Koeffizienten K . Mit der gemessenen maximalen Stoßkraft P_{\max} kann der Koeffizient somit bei vorgegebener Stoßmasse und -geschwindigkeit auf besonders einfache Weise bestimmt werden.

5. Theoretische Behandlung des Biegestoßes auf eine orthotrope Platte - Herleitung einer vereinfachten Stoßtheorie

5.1 Bemerkungen zur Plattentheorie

Ausgangspunkt zur Behandlung des Plattenstoßes in Anlehnung an Bild 1 ist die klassische Theorie orthotroper Platten, die man z.B. bei Lekhnitzkii /59/ oder Ashton und Whitney /60/ findet. Es werden die von der Plattentheorie von Kirchhoff bekannten Voraussetzungen getroffen.

1. Die Plattendicke bzw. -höhe soll klein sein gegenüber den Abmessungen der Plattenmittelfläche und relativ groß im Vergleich zur Durchbiegung.
2. Die Wirkungen der Querkraftschubspannungen τ_{xz} , τ_{yz} und der Normalspannung σ_z werden vernachlässigt.

3. Die Normalen der Plattenmittelfläche stehen auch nach der Deformation senkrecht zur gekrümmten Mittelebene.
4. Alle untereinanderliegenden Plattenpunkte erfahren dieselbe von z unabhängige Durchbiegung $\bar{w} = \bar{w}(x,y)$. Eine "Zusammenpressung" der Platte wird also vernachlässigt.

Aus der Bedingung 2 folgt die vom ebenen Spannungszustand bekannte Form des Stoffgesetzes der Gln.(44),(45). Mit den Bedingungen 3 und 4 ergeben sich die zur Plattenfläche parallelen Verschiebungen aus den Gradienten der Plattendurchbiegung

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{aligned} \quad (126)$$

womit die Dehnungs-Verschiebungsgleichungen folgende Form

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (127)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}$$

annehmen. Des weiteren greifen an einem Plattenelement mit Bezugnahme auf Bild 13 die folgenden auf die Schnittlängeneinheit bezogenen Biegemomente und Querkräfte

$$(M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}) \, dz \quad (128)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{zx}, \tau_{zy}) \, dz \quad (129)$$

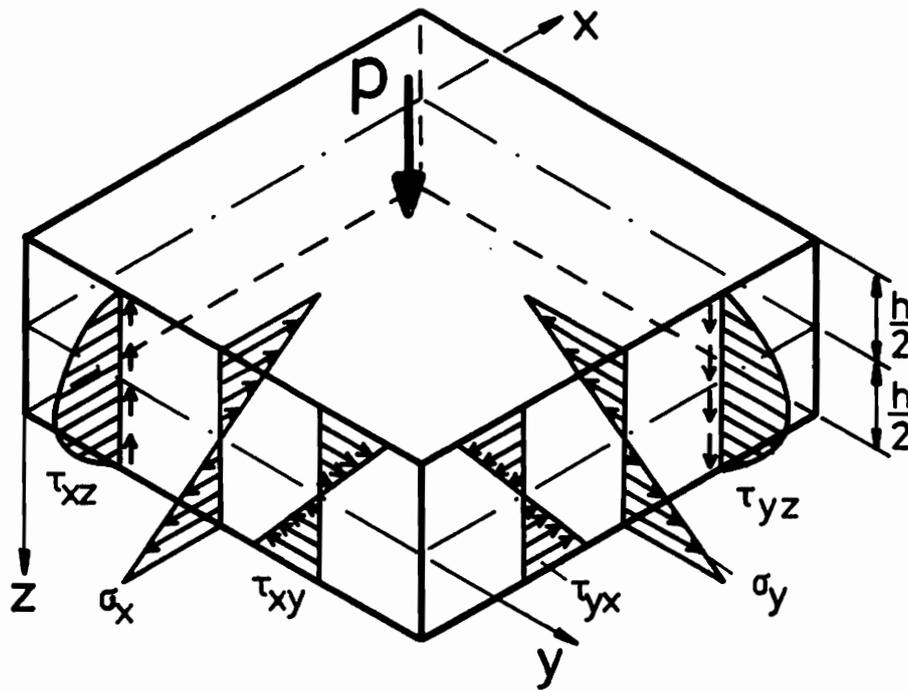


Bild 13: Spannungsverteilungen am Plattenelement; (An den gegenüberliegenden Flächen wurden diese zur besseren Übersicht weggelassen)

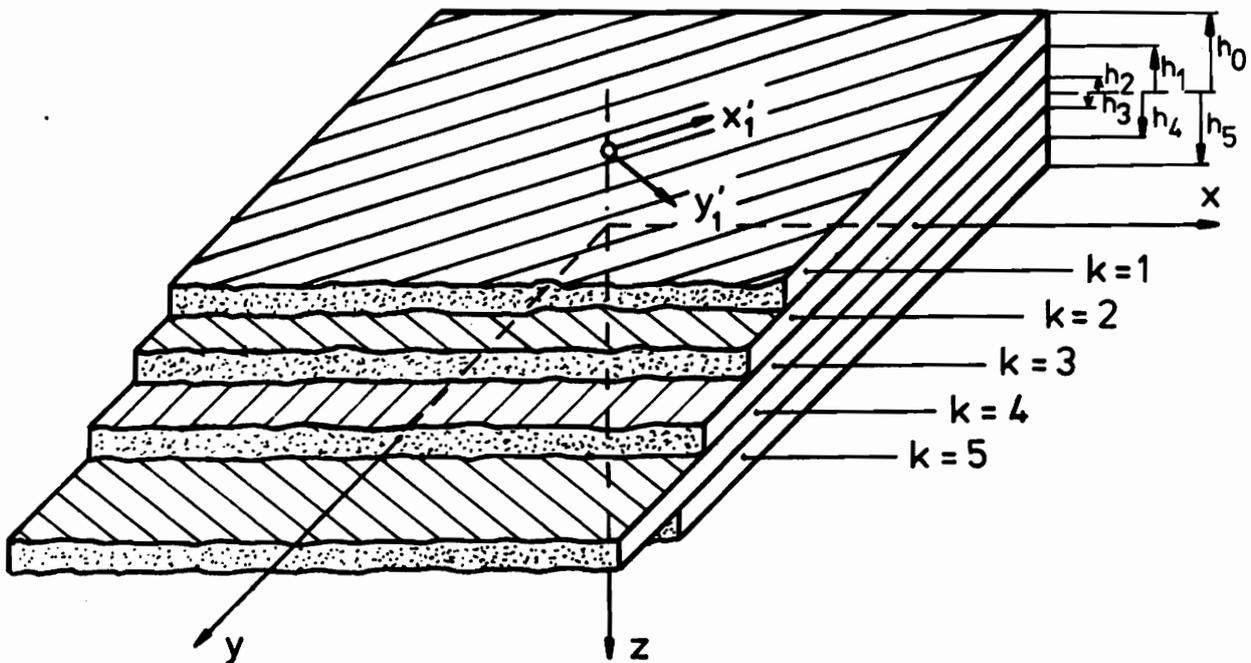


Bild 14: Prinzipieller Aufbau einer anisotropen Verbundplatte aus unidirektional verstärkten Schichten mit unterschiedlicher Faserorientierung

an. Ersetzt man nun mit dem Stoffgesetz nach Gl.(44),(45) die Spannungen in Gl.(128) durch die Komponenten des Verzerrungstensors und drückt diese Komponenten mit den Gln.(127) durch die Krümmungen der Plattenmittelfläche aus, so erhält man nach Integration über die Plattenhöhe folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_k \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (130)$$

für die Biegungs- und Torsionsmomente. Die darin auftretenden Biegesteifigkeiten D_x , D_y und die Torsionssteifigkeit D_k stehen dabei in folgendem Zusammenhang

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \\ D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \\ D_k &= \frac{G_{xy} h^3}{12} \end{aligned} \quad (131)$$

mit den technischen Konstanten. Zur Herleitung der Plattendifferentialgleichung integriert man die für den dynamischen Fall erweiterten Gleichgewichtsbedingungen von Gl.(1) über die Plattenhöhe h und erhält

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x &= \rho_x \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial t^2} \\ -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y &= \rho_y \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y \partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p &= \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (132)$$

mit Θ_x, Θ_y als den auf die Schnittlängeneinheit bezogenen Massenträgheitsmomenten und $p(x,y)$ als Plattenbelastung in positiver z-Richtung. Differenziert man die oberste der Gln.(132) partiell nach x und die mittlere partiell nach y, addiert anschließend beide und eliminiert darin mit der untersten Gleichung Q_x und Q_y , so erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(130) und unter Vernachlässigung des Einflusses der Rotationsträgheiten die folgende Plattendifferentialgleichung

$$\underline{D_x \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = p(x,y,t)} \quad , \quad (133)$$

wobei

$$2 D_{xy} = D_x \nu_{yx} + D_y \nu_{xy} + 4 D_k \quad (134)$$

als "effektive Torsionssteifigkeit" bezeichnet wird.

Abschließend sei noch kurz die Vorgehensweise bei Laminatplatten in Anlehnung an Bild 14 erläutert. Die Platte bestehe aus N unidirektional verstärkten Laminatschichten, die gegeneinander unterschiedlich orientiert sind. Sofern die elastischen Konstanten der einzelnen Laminatschichten in den jeweiligen elastischen Hauptachsensystemen x'_k, y'_k bekannt sind, kann die Elastizitätsmatrix einer jeden Schicht mit den Transformationsbeziehungen der Gl.(9) im globalen Plattenkoordinatensystem x,y berechnet werden. Aus den so erhaltenen Steifigkeiten $(\bar{c}_{11})_k, (\bar{c}_{22})_k, (\bar{c}_{66})_k$ einer jeden einzelnen Schicht k berechnen sich die resultierenden Biegesteifigkeiten und die Torsionssteifigkeit der Laminatplatte nach Vinson und Chou /100/ dann folgendermaßen

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{c}_{11})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \\ D_y &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{c}_{22})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \\ D_k &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{c}_{66})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (135)$$

Diese Laminatplatte kann somit wie eine ungeschichtete orthotrope Ersatzplatte mit den oben angegebenen resultierenden Steifigkeiten behandelt werden. Die erläuterte Vorgehensweise beruht allerdings auf den in praktischen Fällen oftmals eingehaltenen Voraussetzungen, daß die Platte symmetrisch bezüglich der Mittelebene laminiert ist und, sofern neben 0° und 90° auch Schichten unter 45° in Bezug auf das globale Koordinatensystem angeordnet werden, eine gleich große Anzahl von $+45^\circ$ Schichten wie von -45° Schichten bei jeweils gleicher Schichtdicke vorhanden sein muß. Werden diese Bedingungen nicht eingehalten, so verschiebt sich die "neutrale" Ebene, und die resultierende Elastizitätsmatrix hat nicht mehr orthotrope Form.

5.2 Vereinfachte Darstellung der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt

Im Sinne einer praktikablen theoretischen Behandlung des in Bild 1 dargestellten zentralen Biegestoßes isotroper Kugeln auf eine orthotrope Rechteckplatte soll in diesem Kapitel zunächst die Frage geklärt werden, ob auch bei einer orthotropen Platte eine Proportionalität zwischen der Durchbiegung der Platte unter dem Stoßpunkt und dem Zeitintegral über die in der Kontaktfläche übertragene Stoßkraft besteht⁸⁾. Die gesuchte Beziehung soll Gültigkeit für die Dauer des Frühstadiums besitzen, das durch die Laufzeit der für den Energietransport maßgeblichen schnellsten Biegewellen von der Stoßstelle zum Rand und zurück bestimmt wird. Während dieses Frühstadiums nehmen die Randbedingungen keinen merklichen Einfluß auf das Geschehen am Stoßpunkt. Um einfache Eigenfrequenz- und Eigenfunktionsausdrücke zu erhalten wird deshalb die Lösung einer allseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte verwendet, wobei dann aber die anschließend abgeleitete Proportionalitätsbeziehung aus den genannten Gründen Gültigkeit für alle entsprechenden Platten mit beliebigen Randbedingungen besitzt.

In diesem Sinne wird angestrebt, die Lösung der Differentialgleichung (133) für eine beliebige Funktion $p(x,y)$ zu finden, so daß hierfür auch reale Stoßkräfte mit beliebigem zeitlichen Verlauf einsetzbar sind. Dazu wird der

8) *Entsprechende lineare Zusammenhänge bei isotropen Platten wurden bereits von Boussinesq /98/, Zener /61/ und Schwieger /74/ abgeleitet. Für orthotrope Platten hat Streubel /76/ eine analoge Beziehung angegeben, die allerdings auf der einschränkenden und in der Regel nicht erfüllten Bedingung beruht, daß die effektive Torsionssteifigkeit der Beziehung $D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$ gehorcht.*

folgende Produktansatz

$$\bar{w}(x,y,t) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (136)$$

als Reihenentwicklung gewählt, der die Randbedingungen der frei drehbar gelagerten Rechteckplatte mit den Kantenlängen a, b erfüllt. Der Koordinatenursprung befindet sich in einem Eckpunkt der Platte.

Die Amplitudenfunktionen $A_{mn}(t)$ können mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art und dem Prinzip der virtuellen Arbeit für den hier vorliegenden Fall einer zentralen Einzelkraftbelastung bestimmt werden. Den ausführlichen Weg findet man dazu bei Streubel /76/ beschrieben. Man erhält bei der zentralen Einzelkraftbelastung $P(t)$

$$A_{mn}(t) = \frac{4}{\rho h a b} \left[\frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t P(t') \sin \omega_{mn}(t-t') dt' \right] \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad , \quad (137)$$

wobei die Eigenkreisfrequenzen sich aus

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}} \left[D_x \left(\frac{m}{a}\right)^4 + D_y \left(\frac{n}{b}\right)^4 + 2D_{xy} \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (138)$$

berechnen. Mit den Gln.(136),(137) lautet somit die Lösung der Durchbiegungsfunktion einer mit der Einzelkraft $P(t)$ belasteten Platte

$$\bar{w}(x,y,t) = \frac{4}{\rho h a b} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\omega_{mn}} \left[\int_0^t P(t') \sin \omega_{mn}(t-t') dt' \right] \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad , \quad (139)$$

und man hat speziell mit $x_0 = y_0 = a/2$

$$\bar{w}_0(t) = \frac{4}{\rho h a^2} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\omega_{mn}} \left[\int_0^t P(t') \sin \omega_{mn}(t-t') dt' \right] \left\{ \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}^2 \quad (140)$$

als zentrale Durchbiegung einer quadratischen orthotropen Platte mit der Seitenlänge a .

Bei Annahme einer gleichmäßigen Konvergenz der in Gl.(140) auftretenden Doppelreihe kann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht werden. Im Sinne einer Vereinfachung der Durchbiegungsbeziehung wird dann angestrebt, die unendliche Doppelsumme des neuen Integranden durch ein berechenbares uneigentliches Doppelintegral zu ersetzen. Bei dieser Vorgehensweise denkt man sich für jeweils $(t-t') = \text{const.}$ in Anlehnung an Bild 15 die Glieder der Doppelreihe betragsmäßig über einer m,n -Ebene aufgetragen, wobei

$$\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & m,n = 0,2,4, \dots \\ \text{für} & \\ 1 & m,n = 1,3,5, \dots \end{cases}$$

zu beachten ist. Die Summe aller mit der jeweiligen Grundfläche $\Delta m \Delta n$ multiplizierten Werte der Doppelreihenglieder entspricht dann angenähert, sofern man jetzt die Eigenkreisfrequenz als kontinuierlich Veränderliche auffaßt, dem Doppelintegral

$$\sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\sin \omega_{mn} (t-t')}{\omega_{mn}} \Delta m \Delta n = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega (t-t')}{\omega(m,n)} dm dn, \quad (141)$$

so daß mit $\Delta m = \Delta n = 2$ die unendliche Doppelsumme durch ein uneigentliches Doppelintegral

$$\sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\sin \omega_{mn} (t-t')}{\omega_{mn}} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega (t-t')}{\omega(m,n)} dm dn \quad 9) \quad (142)$$

ersetzt werden kann. Zur Lösung des uneigentlichen Doppelintegrals empfiehlt sich der Übergang zu Polarkoordinaten. Mit $m = r \cos \varphi$ und $n = r \sin \varphi$ wird das Doppelintegral

9) *Bei streng mathematischer Vorgehensweise kann diese Äquivalenz nur für eine unendlich ausgedehnte Platte mit $a/h \rightarrow \infty$ nachgewiesen werden. Deshalb wird die anschließend abgeleitete vereinfachte Durchbiegungsbeziehung bei Anwendung auf eine endliche Platte als nur im Frühstadium gültig angesehen, wo die Randbedingungen noch keinen Einfluß auf das Geschehen am Stoßpunkt nehmen.*

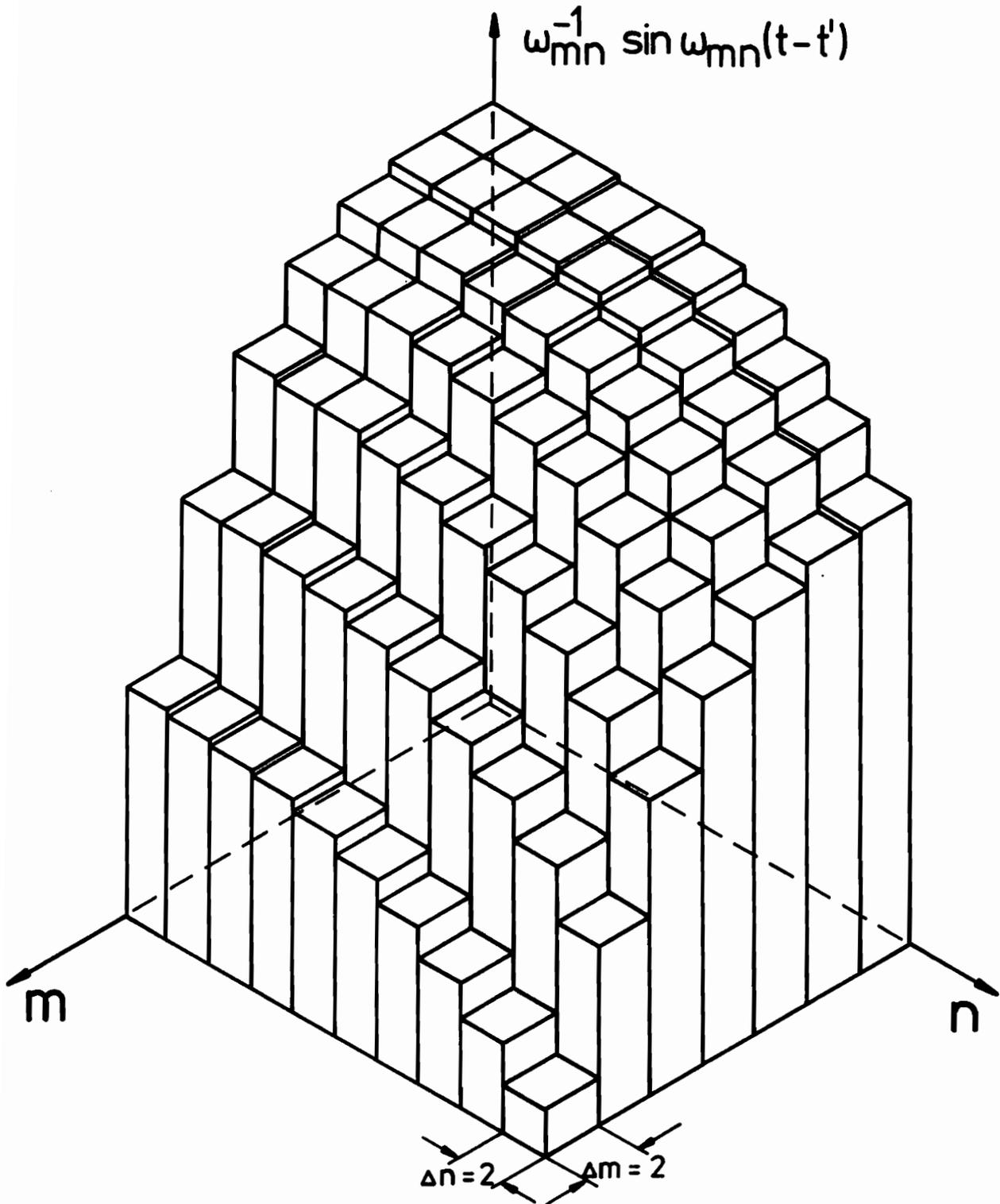


Bild 15: Glieder der unendlichen Reihe für die zentrale Plattendurchbiegung als Amplitudenwerte über der m, n -Ebene für $(t-t') = \text{const.}$
 (maßstäbliche Darstellung für die hier untersuchte CFK-Platte mit $t-t' = 10 \mu\text{s}$; Vertikalmaßstab $1 \text{ cm} \hat{=} 1 \mu\text{s}$)

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(m,n) (t-t')}{\omega(m,n)} dm dn = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(r,\varphi) (t-t')}{\omega(r,\varphi)} r dr d\varphi \quad (143)$$

mit

$$\omega(r,\varphi) = \frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^2 (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2} \quad (144)$$

als kontinuierlich veränderlicher Eigenkreisfrequenz. Mit einer Substitution $r^* = r^2$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(r,\varphi) (t-t')}{\omega(r,\varphi)} r dr d\varphi &= \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \left[\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^* (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2} (t-t') \right]}{\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^* (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2}} dr^* d\varphi \end{aligned} \quad (145)$$

wobei man die Lösung des auf der rechten Seite stehenden inneren Integrals bei Bronstein, Semendjajew /105/ findet. Danach ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \left[\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^* (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2} (t-t') \right]}{\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^* (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2}} dr^* d\varphi &= \\ &= \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2}} d\varphi \end{aligned} \quad (146)$$

und das verbleibende Integral kann unter Anwendung der trigonometrischen Beziehungen und mehrfacher Anwendung der Substitutionsmethode nach einer längeren Zwischenrechnung in ein elliptisches Integral der Form

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2}} d\varphi = \\
& = \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{D_y}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left\{ 4s \left[s^2 + 2(D_{xy}/D_y)s + (D_x/D_y) \right] \right\}^{1/2}} ds
\end{aligned} \tag{147}$$

überführt werden. Das rechte Integral ist ein elliptisches Integral in der Weierstraßschen kanonischen Form, dessen Lösung

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{D_y}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left\{ 4s \left[s^2 + 2(D_{xy}/D_y)s + (D_x/D_y) \right] \right\}^{1/2}} ds = \\
& = \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} F(\pi/2, \bar{k})
\end{aligned} \tag{148}$$

man z.B. bei Gröbner und Hofreiter /106/ findet, wobei \bar{k} abkürzend für

$$\bar{k} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right) \right]^{1/2} \tag{149}$$

steht. In Gl.(148) bedeutet $F(\pi/2, \bar{k})$ das vollständige Legendresche Normalintegral - auch vollständiges elliptisches Integral erster Gattung -, dessen Werte in Abhängigkeit vom Parameter \bar{k} bei Bronstein, Semendjajew /105/ und Jahnke-Emde /107/ tabelliert sind.

Bei Rückverfolgung der Gln.(148)-(142) ergibt sich somit näherungsweise

$$\sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\sin \omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{a^2 \sqrt{\rho h}}{16\pi} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} F(\pi/2, \bar{k}) \tag{150}$$

als Grenzwert der unendlichen Doppelsumme, so daß sich die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt einer zentral belasteten orthotropen Platte folgendermaßen

$$\bar{w}_0(t) = \frac{F(\pi/2, \bar{k})}{4\pi \sqrt{\rho h} (D_x D_y)^{1/4}} \int_0^t P(t') dt' \quad (151)$$

darstellt. Der vor dem Integral stehende Ausdruck

$$\alpha_p = \frac{F(\pi/2, \bar{k})}{4\pi \sqrt{\rho h} (D_x D_y)^{1/4}} \quad (152)$$

wird im weiteren Verlauf der Arbeit als Plattenparameter α_p bezeichnet, und man hat

$$\bar{w}_0(t) = \alpha_p \int_0^t P(t') dt' \quad (153)$$

als vereinfachte Beziehung der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt. Abschließend sei aber nochmals an den zu Beginn des Kapitels angesprochenen Gültigkeitsbereich dieser Gleichung erinnert.

5.3 Berechnungsverfahren für die Stoßkraft

5.3.1 Integralgleichung der nichtvereinfachten Stoßtheorie

Ausgangspunkt ist hier wiederum die Überlegung, daß die Annäherung δ im Sinne des Kontaktkraftgesetzes gleich der Differenz der Schwerpunktsverschiebungen

$$\delta = \bar{w} - \bar{w}_0 \quad (154)$$

von Stoßmasse und gestoßenem Plattenelement ist. Die zweimalige Integration der Bewegungsgleichung der Stoßmasse führt auf die bereits aus Kapitel 4.4 bekannte Beziehung

$$\bar{w}(t) = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' \quad (155)$$

für die Schwerpunktsverschiebung der Kugel. Des weiteren gilt die im vorangegangenen Kapitel angegebene unendliche Doppelsumme nach Gl.(140)

$$\bar{w}_0(t) = \frac{4}{\rho h a b} \sum_m \sum_n \left[\int_0^t P(t') \frac{\sin \omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}} dt' \right] \left(\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right)^2 \quad (156)$$

für die Schwerpunktsverschiebung des gestoßenen Plattenelements einer frei drehbar gelagerten zentral gestoßenen Platte, so daß mit der Umstellung

$$\delta = \left(\frac{P}{K} \right)^{2/3} \quad (157)$$

des bereits bekannten Kontaktkraftgesetzes eine Integralgleichung als Bestimmungsgleichung der Stoßkraft abgeleitet werden kann. Dazu setzt man die Ausdrücke für \bar{w} , \bar{w}_0 , δ aus den Gln.(155)-(157) in die Gl.(154) ein und erhält

$$\left(\frac{1}{K} \right)^{2/3} P(t)^{2/3} = v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' - \frac{4}{\rho h a b} \sum_m \sum_n \left\{ \int_0^t P(t') \frac{\sin \omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}} dt' \right\} \left(\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right)^2 \quad (158)$$

als nichtlineare Integralgleichung für die Stoßkraft, deren Lösung mit einem der üblichen numerischen Integrationsverfahren /104/ berechnet werden kann. Aufgrund der impliziten Form dieser Stoßkraftgleichung und je nach Konvergenz der Doppelreihe kann der Rechenaufwand dabei beträchtlich werden.

5.3.2 Vereinfachte Theorie - die nichtlineare Differentialgleichung für die Stoßkraft

Unter Verwendung der in Kapitel 5.2 entwickelten vereinfachten Beziehung für die Durchbiegung der Platte unter dem Stoßpunkt wird nun eine nichtlineare Differentialgleichung für die Annäherung und damit für die Stoßkraft abgeleitet, wodurch der Rechenaufwand gegenüber der Integralgleichung (158) erheblich reduziert werden kann.

Die zweimalige zeitliche Differentiation der vereinfachten Durchbiegungsbeziehung nach Gl.(153) ergibt

$$\frac{d^2 \bar{w}_0}{dt^2} = \alpha_p \frac{dP}{dt} \quad (159)$$

und man erhält mit der Bewegungsgleichung der Stoßmasse

$$P = -m_s \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} \quad (160)$$

sofort folgenden Ausdruck

$$\frac{d^2}{dt^2} (\bar{w} - \bar{w}_0) = - \left(\frac{P}{m_s} + \alpha_p \frac{dP}{dt} \right) \quad (161)$$

für die Differenz der Schwerpunktsverschiebungen der Stoßpartner. Aus dem Kontaktkraftgesetz der Form

$$P = K (\bar{w} - \bar{w}_0)^{3/2} \quad (162)$$

ergibt sich mit einer zeitlichen Differentiation

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} K (\bar{w} - \bar{w}_0)^{1/2} \frac{d}{dt} (\bar{w} - \bar{w}_0) \quad (163)$$

Setzt man dann die Ausdrücke für P und dP/dt der Gln.(162), (163) in Gl.(161) ein, so hat man

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{w}-\bar{w}_0) + \frac{K}{m_s}(\bar{w}-\bar{w}_0)^{3/2} + \frac{3}{2} \alpha_p K(\bar{w}-\bar{w}_0)^{1/2} \frac{d}{dt}(\bar{w}-\bar{w}_0) = 0 \quad (164)$$

als nichtlineare Differentialgleichung für $(\bar{w}-\bar{w}_0)$, aus deren numerischer Lösung mit dem Kontaktkraftgesetz von Gl.(162) der Stoßkraftverlauf berechnet werden kann.

Auf der Differentialgleichung (164) aufbauend wird nun noch eine dimensionslose Darstellung angestrebt, die es gestattet, losgelöst von den jeweiligen Stoßbedingungen dimensionslose Berechnungsunterlagen in Form von Diagrammen anzugeben, die bei verschiedensten Stoßbedingungen eine unmittelbare schnelle Berechnung insbesondere der maximalen Stoßkraft P_{\max} gestatten. Dazu werden folgende dimensionslose Größen

$$\sigma = \frac{\bar{w}-\bar{w}_0}{v_0 T} \quad (165)$$

$$\tau = t/T \quad (166)$$

mit T als noch zu bestimmender Referenzzeit eingeführt und in die Differentialgleichung (164) eingesetzt. Die Differentialgleichung wird dann,

$$\frac{d^2 \sigma}{d\tau^2} + \left(\frac{K}{m_s} T^{5/2} v_0^{1/2} + \alpha_p K T^{3/2} v_0^{1/2} \frac{d}{d\tau} \right) \sigma^{3/2} = 0, \quad (167)$$

und mit der Festlegung

$$T = \left(\frac{m_s}{K v_0^{1/2}} \right)^{2/5} \quad (168)$$

erhält man

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + (1 + \bar{\lambda} \frac{d}{d\tau}) \sigma^{3/2} = 0 \quad (169)$$

als dimensionslose Differentialgleichung der dimensionslosen Stoßkraft $\sigma^{3/2}$, wobei $\bar{\lambda}$ mit

$$\bar{\lambda} = \frac{\alpha_{ps}^m}{T} \quad (170)$$

als Stoßkennzahl bezeichnet wird. Wie leicht nachzuvollziehen ist, berechnet sich schließlich die dimensionsbehaftete Stoßkraft P folgendermaßen

$$P = K (v_0 T)^{3/2} \sigma^{3/2} \quad (171)$$

aus $\sigma^{3/2}$.

Der Vorteil der dargestellten Vorgehensweise besteht darin, daß der Verlauf von $\sigma^{3/2}(\tau)$ allein durch die Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$ bestimmt wird. Im Bereich der hier vorliegenden konkreten Fälle zeigt Bild 16 Verläufe von $\sigma^{3/2}$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Zeitveränderlichen τ bei verschiedenen Stoßkennzahlen $\bar{\lambda}$. Des weiteren sind in Bild 17 Werte des Maximums der dimensionslosen Stoßkraft angegeben, so daß für verschiedenste Stoßbedingungen mit der diese Bedingungen charakterisierenden Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$ unter Beachtung der Gl.(171) die beim Stoß auftretende maximale Stoßkraft P_{\max} schnell bestimmt werden kann.

Abschließend zeigen Bild 18 und 19 am Beispiel des Stoßes von Stahlkugeln auf die später experimentell untersuchte Kohlenstofffaser/Epoxydharz-Platte Vergleiche von Stoßkraft- und Durchbiegungswerten, die mit den in den letzten beiden Kapiteln 5.3.1 und 5.3.2 angegebenen Methoden berechnet wurden. Dazu wurden für konkrete Stoßbedingungen zunächst die Stoßkräfte mit der Integralgleichung (158) unter Mitnahme unterschiedlich vieler m, n -Glieder der Doppelsumme berechnet und Werten aus der nichtlinearen Differentialgleichung (164) gegenübergestellt. Mit den berechneten Stoßkraftverläufen konnten außerdem mit den Gln.(153),(156) die Berechnungswege für die Plattendurchbiegung $\bar{w}_0(t)$ miteinander verglichen werden. Den berechneten Werten

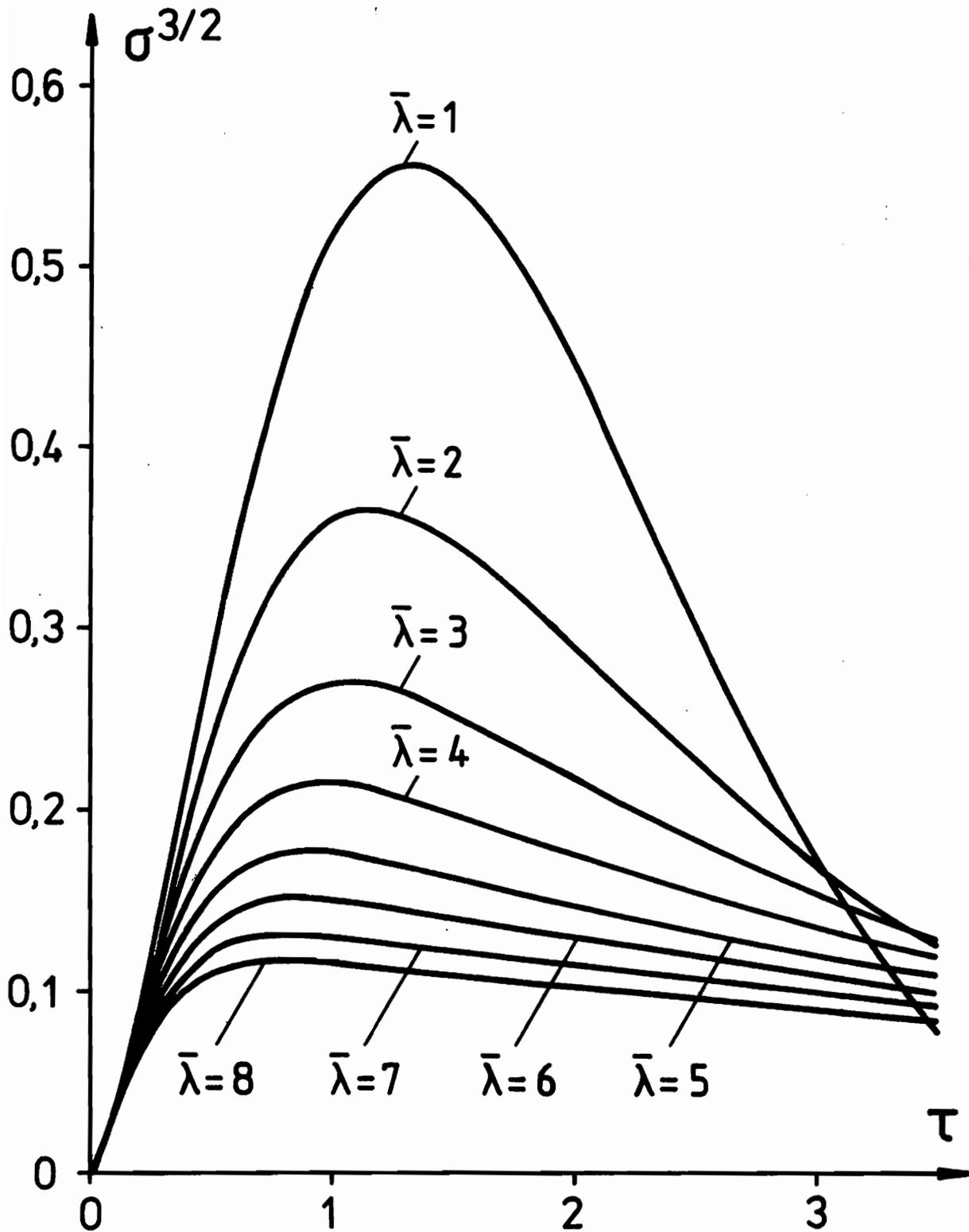


Bild 16: Dimensionslose Stoßkraft $\sigma^{3/2}$ als Funktion der dimensionslosen Zeitveränderlichen τ und der Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$

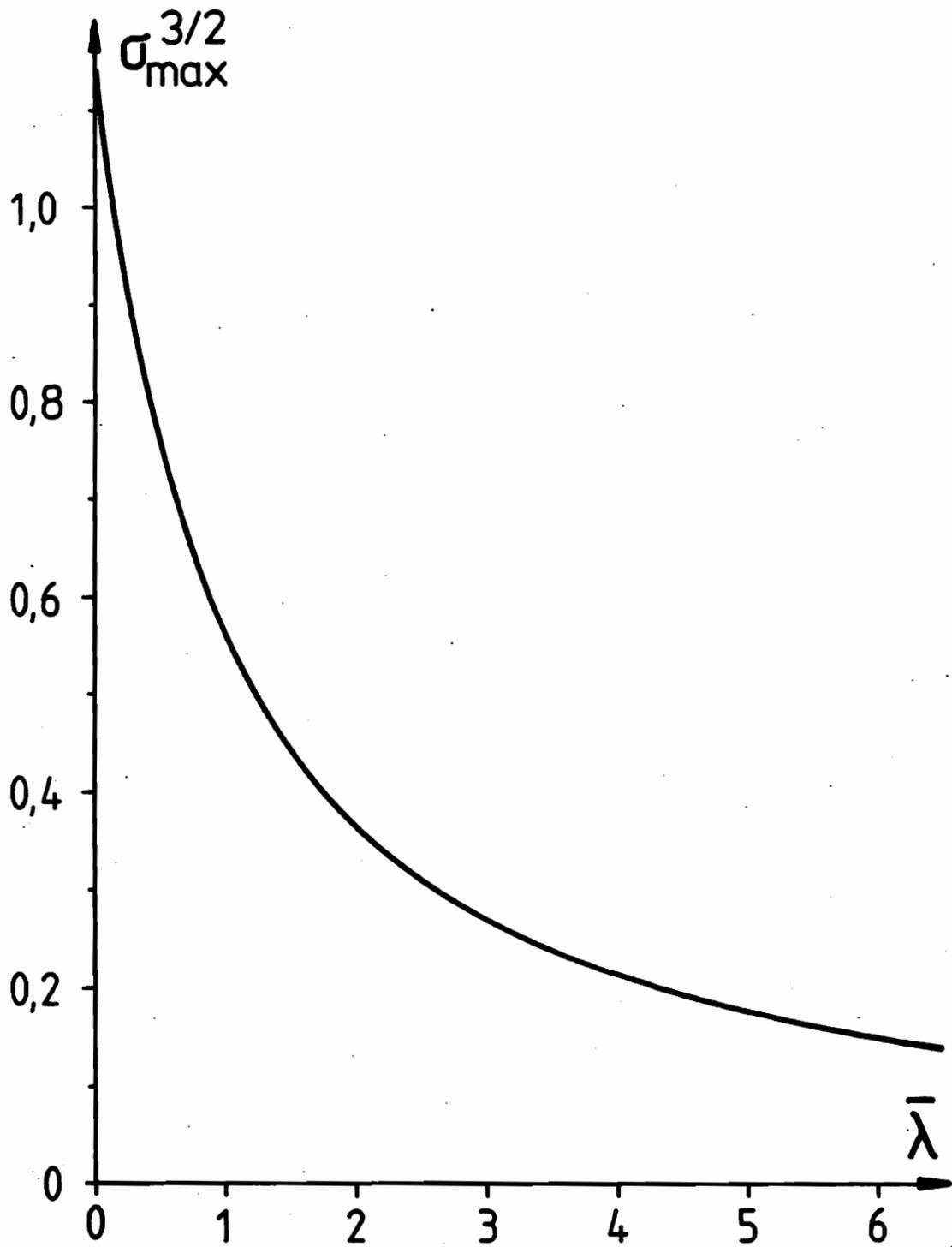


Bild 17: Maximale dimensionslose Stoßkraft $\sigma_{\max}^{3/2}$ in Abhängigkeit von der Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$

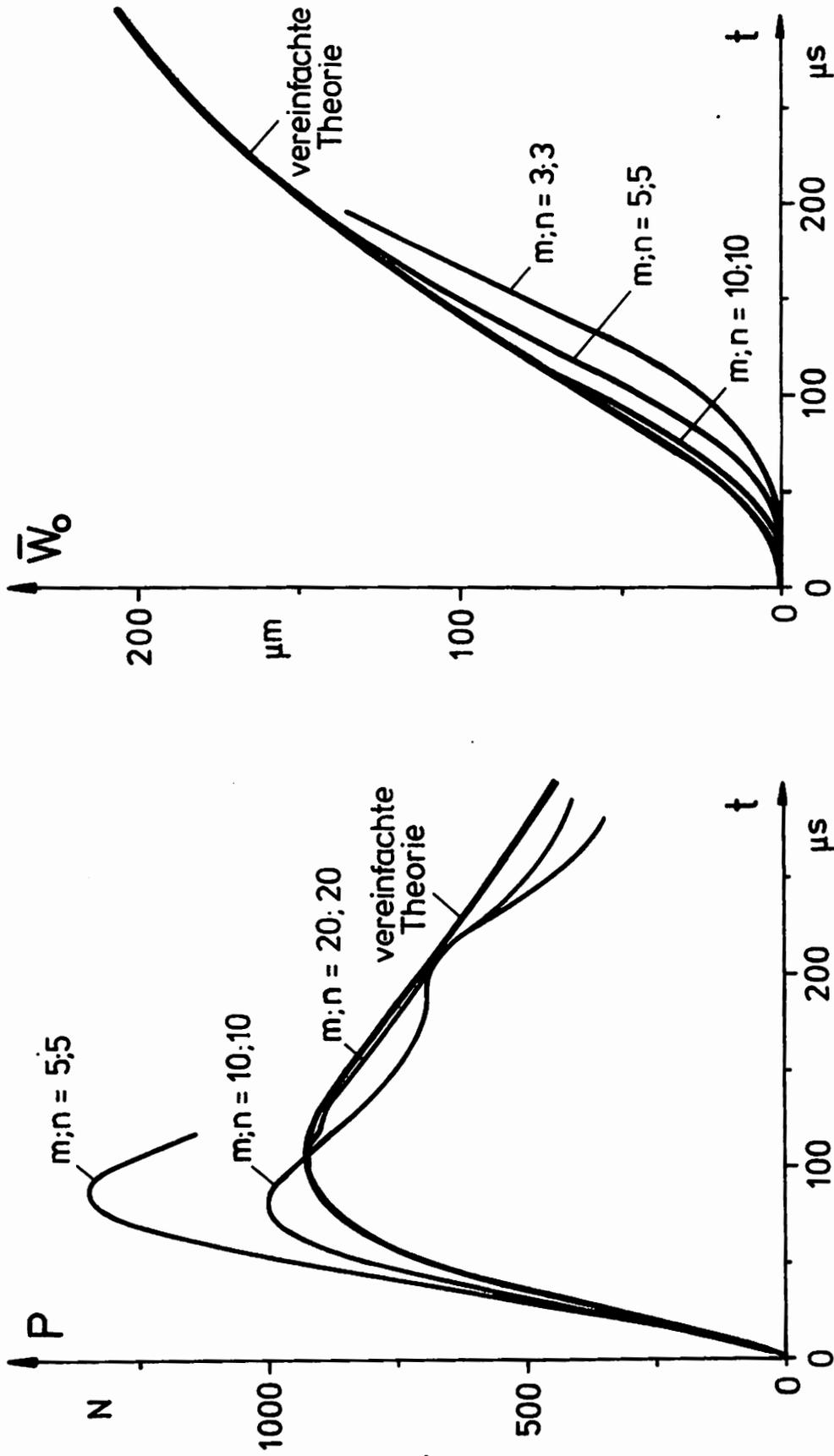


Bild 18: Theoretische Verläufe von Stoßkraft und Durchbiegung; Vergleich der vereinfachten Theorie mit Ergebnissen, die aus der gewöhnlichen Theorie der Gln. (158), (156) berechnet wurden
 $v_0 = 1,25 \text{ m/s}$, $m_s = 0,2199 \text{ kg}$, $\bar{\lambda} = 2,43$, $K(v_0 T)^{3/2} = 2942 \text{ N}$

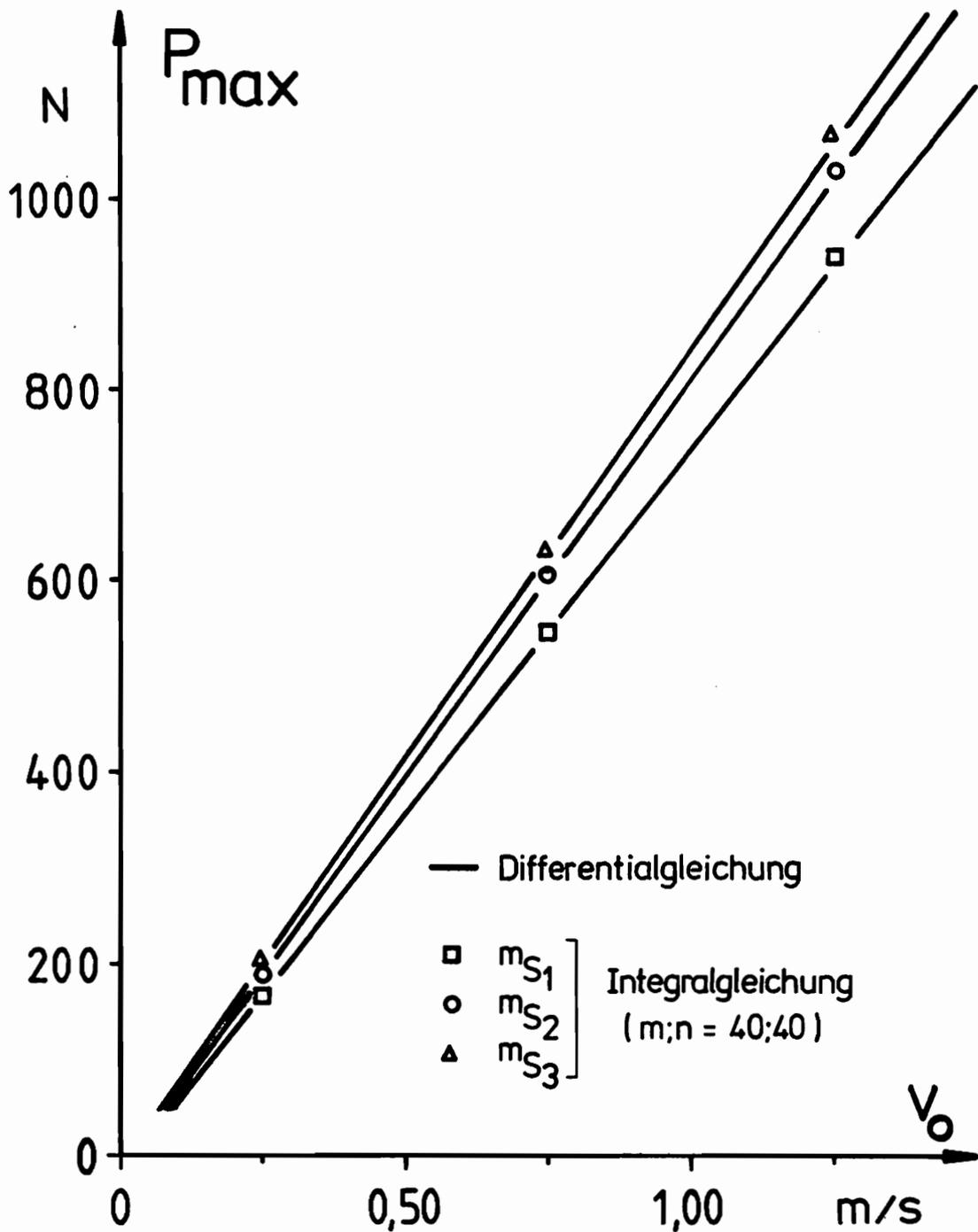


Bild 19: Theoretische Stoßkraftmaxima in Abhängigkeit von der Stoßmasse und der Stoßgeschwindigkeit bei Anwendung verschiedener Berechnungswege
 $m_{S1} = 0,2199 \text{ kg}$ ($K = 0,231 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$); $m_{S2} = 0,4078 \text{ kg}$ ($K = 0,259 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$);
 $m_{S3} = 0,5908 \text{ kg}$ ($K = 0,277 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$); $\alpha_p = 10,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/Ns}$

liegen, soweit sie nicht angegeben sind, die in Kapitel 6 aufgeführten und für die späteren Stoßversuche benutzten Versuchsdaten zugrunde.

5.4 Vereinfachte Darstellung der Biegedehnungen unter der Stoßstelle

Neben den an der Stoßstelle auftretenden Stoßkräften stellen die Biegedehnungen und die damit zusammenhängenden Biegemomente wichtige Verformungs- bzw. Belastungsgrößen dar. Mit einer analogen Vorgehensweise wie bei der Herleitung der vereinfachten Durchbiegungsbeziehung in Kapitel 5.2 sollen hier vereinfachte Ausdrücke für die richtungsabhängigen Krümmungen und die damit verbundenen Biegedehnungen abgeleitet werden.

Nach Gl.(127) sind die Dehnungen ϵ_x bzw. ϵ_y über die Höhenkoordinate z der Platte mit den Krümmungen $\partial^2 \bar{w} / \partial x^2$ bzw. $\partial^2 \bar{w} / \partial y^2$ verknüpft. Man erhält z.B. bei einer zweimaligen Differentiation von Gl.(139) nach der y -Koordinate

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(x_0, y_0, t)}{\partial y^2} = -\frac{4}{\rho h a^2} \int_0^t P(t') \left\{ \sum_m \sum_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin \omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}} \right\} dt' \quad (172)$$

als Krümmung der Plattenfläche in y -Richtung an der Stoßstelle $x_0 = y_0 = a/2$ einer quadratischen Platte.

Mit analogen Überlegungen wird wiederum ein Ersatz der im Integranden von Gl.(172) auftretenden unendlichen Doppelsumme durch ein uneigentliches Doppelintegral angestrebt und mit $\Delta m = \Delta n = 2$ die Zulässigkeit folgender Gleichung

$$\sum_m \sum_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin \omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{\sin \omega(m,n)(t-t')}{\omega(m,n)} dm dn \quad (173)$$

angenommen. Zur Berechnung des Doppelintegrals wird mit $m = r \cos \varphi$ sowie

$n = r \sin \varphi$ zu Polarkoordinaten übergegangen und es wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{n \pi}{a} \right)^2 \frac{\sin \omega(m,n) (t-t')}{\omega(m,n)} dm dn = \\ & = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\infty} \sqrt{\rho h} (r \sin \varphi)^2 \frac{\sin \left[\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^2 (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2} (t-t') \right]}{r^2 (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2}} r dr \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (174)$$

Nun kann zunächst das innere Integral der rechten Seite von Gl.(174) mit der Substitution

$$r^* = r^2 \frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} (t-t') (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (175)$$

in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \sqrt{\rho h} \frac{\sin^2 \varphi \sin \left[\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^2 (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2} (t-t') \right]}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2}} r dr = \\ & = \frac{\rho h a^2}{2\pi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{(t-t') (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)} \int_0^{\infty} \sin r^* dr^* \end{aligned} \quad (176)$$

umgeformt werden. Nach Kreyszig /110/ gilt der Grenzwert

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin r^*}{(r^*)^{\mu}} dr^* = 1, \quad (177)$$

wodurch das Doppelintegral der rechten Seite von Gl.(174) unter Beachtung der Gln.(175)-(177) mit Ausnahme der Stelle $t = t'$ wie folgt

$$\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \sqrt{\rho h} \sin^2 \varphi \frac{\sin \left[\frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} r^2 (D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2} (t-t') \right]}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{1/2}} r dr d\varphi =$$

$$= \frac{\rho h a^2}{8\pi^2 (t-t')} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)} d\varphi \quad (178)$$

wird. Letzteres Integral der Gl.(178) kann nach längerer Zwischenrechnung in das äquivalente Integral

$$\frac{\rho h a^2}{8\pi^2 (t-t')} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{(D_x \cos^4 \varphi + D_y \sin^4 \varphi + 2D_{xy} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho h a^2}{8\pi^2 (t-t')} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s}}{D_x + 2D_{xy}s + D_y s^2} ds \quad (179)$$

überführt werden, dessen Lösung

$$\frac{\rho h a^2}{16\pi^2 (t-t')} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s}}{D_x + 2D_{xy}s + D_y s^2} ds =$$

$$= \frac{\rho h a^2}{16\pi^2 (t-t')} \frac{\pi}{\sqrt{D_y}} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2} \{1 + D_{xy}/(D_x D_y)\}^{1/2}} \quad (180)$$

man bei Gröbner und Hofreiter /106/ findet.

Unter Beachtung der Gln.(173)-(180) erhält man also mit Gl.(172)

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} = - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{D_y}} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2} \{1 + D_{xy}/(D_x D_y)\}^{1/2}} \int_0^{t-t_0} \frac{P(t')}{(t-t')} dt' \quad (181)$$

als vereinfachten Ausdruck für die Krümmung. Eine analoge Vorgehensweise liefert dann den Ausdruck für die Krümmung bzgl. der x-Achse, so daß zusammenfassend festgehalten werden kann

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} = - \beta_x \int_0^{t-t_0} \frac{P(t')}{(t-t')} dt' \quad (182)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} = - \beta_y \int_0^{t-t_0} \frac{P(t')}{(t-t')} dt'$$

mit

$$\beta_x = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{D_x}} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2} \{1 + D_{xy} / (D_x D_y)^{1/2}\}^{1/2}} \quad (183)$$

$$\beta_y = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{D_y}} \frac{1}{(D_x D_y)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2} \{1 + D_{xy} / (D_x D_y)^{1/2}\}^{1/2}}$$

als den sogenannten Krümmungsparametern. Da die abgeleiteten vereinfachten Beziehungen keine Gültigkeit für die Stelle $t = t'$ besitzen, werden im Sinne einer Näherung die oberen zeitlichen Integrationsgrenzen in den Gln.(181), (182) mit einer Zeitkonstanten t_0 eingeschränkt und die ansonsten auftretenden Singularitäten der Integranden ausgeklammert. Wie umfangreiche experimentelle Überprüfungen ergaben, hat sich dabei

$$t_0 = \frac{r_x r_y}{4} \sqrt{\frac{\rho h}{D_{xy}}} \quad (184)$$

als zweckmäßige Bestimmungsgleichung für die Zeitkonstante t_0 erwiesen. Dieser Ausdruck geht im isotropen Fall in die von Schwieger und Hahn /84/ benutzte und auf ihre Zweckmäßigkeit hin experimentell überprüfte Form $t_0 = r^2 \sqrt{\rho h} / 4 \sqrt{D}$ über, die bis auf einen zusätzlichen konstanten Faktor einer von Sneddon /62/ für eine Rechteckbelastung $P(t) = P_0$ (Dauer T_0) theoretisch abgeleiteten Beziehung nachempfunden ist.

Wie man aus Gl.(184) erkennt, wird demnach t_0 eine Funktion der Halbachsen r_x und r_y der Kontaktfläche. Diese sind aber über die Gln.(80) bzw. (112) der Kontakttheorien von der Stoßkraft abhängig und somit in Hinblick auf die realen Stoßkraftverläufe zeitveränderlich. Der damit implizierte erhöhte Rechenaufwand kann vermieden werden, wenn man zum Zwecke der angenäherten Berechnung der Dehnungsmaxima die mit den beschriebenen Methoden berechneten Stoßkraftverläufe $P(t)$ durch impulsmäßig gleiche Rechteckfunktionen der Dauer T_e ersetzt, so daß für jeden Impuls nur ein t_0 berechnet zu werden braucht.

Bei einer am Beispiel der später experimentell untersuchten Stöße von Stahlkugeln auf die faserverstärkte Platte in Bild 20 dargestellten Zweipulszerlegung P_I, P_{II} der berechneten Stoßkraft $P(t)$ werden die Krümmungen und die damit verknüpften Dehnungen während der Dauer T_e des ersten Impulses durch den Anstiegseffekt I

$$\underline{0 < t \leq T_e}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} = -\beta_x P_I \int_0^{t-t_0} \frac{dt'}{(t-t')} = \beta_x P_I \ln \frac{t_0}{t} \quad (185)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} = \beta_y P_I \ln \frac{t_0}{t}$$

bestimmt. Während der Dauer des zweiten Impulses setzen sich die Krümmungen bzw. Dehnungen aus dem Ausklangeffekt I

$$\underline{T_e < t \leq 2T_e}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} = \beta_x P_I \ln \left(1 - \frac{T_e}{t}\right) \quad (186)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} = \beta_y P_I \ln \left(1 - \frac{T_e}{t}\right)$$

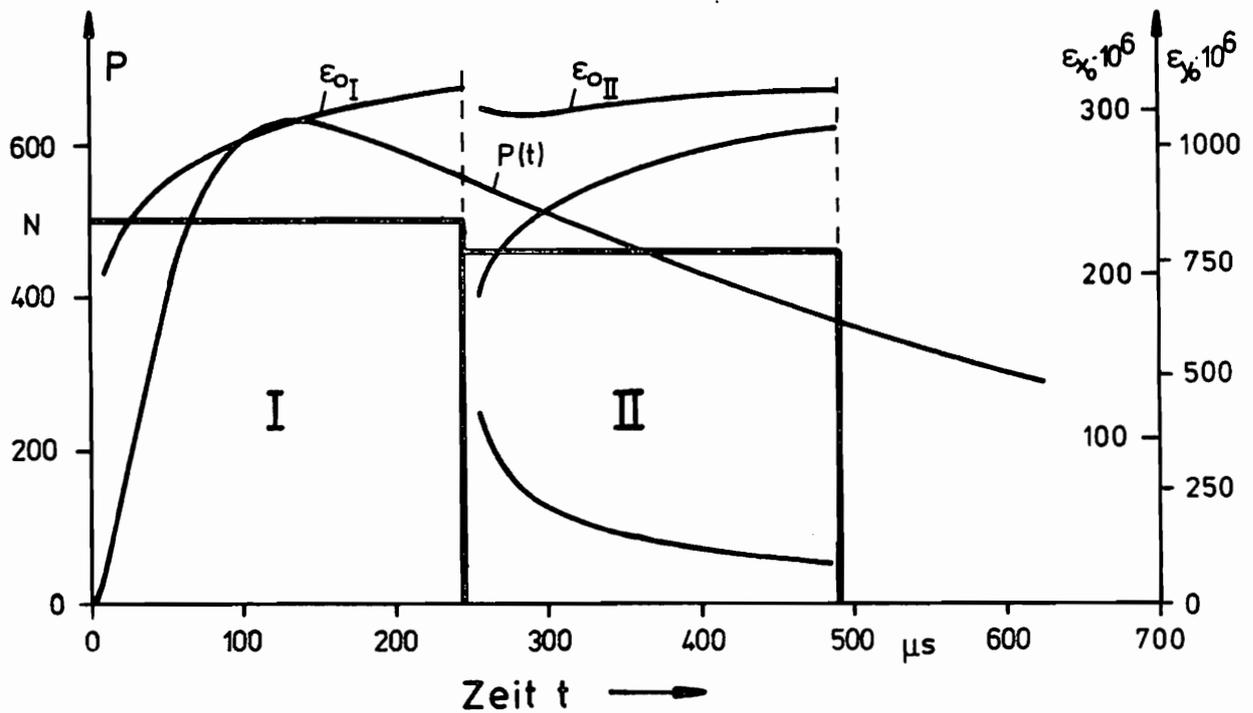
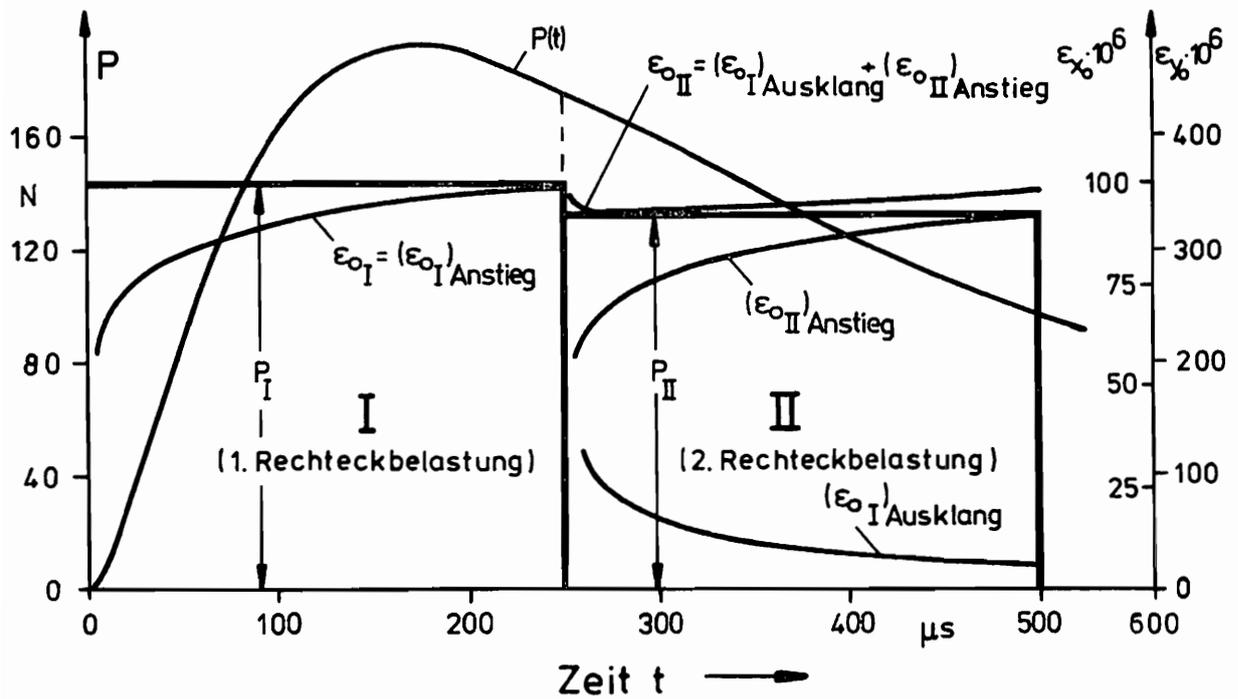


Bild 20: Biegedehnungen ϵ_{x0} und ϵ_{y0} unter dem Stoßpunkt in x- und y-Richtung bei einer Zweipulszerlegung der Stoßkraft

a) $v_0 = 0,25 \text{ m/s}$, $m_s = 0,4078 \text{ kg}$

b) $v_0 = 0,75 \text{ m/s}$, $m_s = 0,5908 \text{ kg}$

des ersten Impulses und dem zu den Gln.(185) analogen Anstiegseffekt II des zweiten Impulses additiv zusammen. Bei dieser Vorgehensweise zur Berechnung der Krümmungs- und Dehnungsmaxima wird empfohlen, bei der Wahl von T_e folgendes zu beachten. Da das Maximum der Krümmungen bzw. Dehnungen nach eigenen Erfahrungen zeitlich etwas später als das jeweilige Stoßkraftmaximum auftritt, sollte T_e etwas größer als T_{\max} gewählt werden. Zur Kontrolle, daß das Maximum der näherungsweise berechneten Krümmungen dann am Ende des 1.Impulses erreicht wird, kann noch der 2.Impuls berücksichtigt werden. Außerdem sollte T_e aber nicht zu groß gewählt werden, so daß der Sprung in den Krümmungsverläufen an der Übergangsstelle zwischen Impuls I und II möglichst gering gehalten wird.

Unabhängig davon, ob die Krümmungen direkt mit den Gln.(182) oder mit der Methode der Zweipulszerlegung bestimmt werden, bietet auch hier der Übergang zu einer dimensionslosen Darstellung der Krümmungen gewisse Vorteile. Zu diesem Zweck führt man die dimensionslose Krümmung

$$k^* = \int_0^{\tau - \tau_0} \frac{\sigma^{3/2}}{(\tau - \tau')} d\tau' \quad (187)$$

in Abhängigkeit von der dimensionslosen Stoßkraft $\sigma^{3/2}$ ein, wobei sich die dimensionslose Zeitkonstante τ_0 mit der bereits in Kapitel 5.3.2 eingeführten Referenzzeit T aus

$$\tau_0 = \frac{t_0}{T} \quad (188)$$

berechnet. Die Maxima der dimensionslosen Krümmungen können dann unmittelbar in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}$ und τ_0 aus Bild 21 entnommen werden und die dimensionsbehafteten Krümmungen folgendermaßen

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} = -\beta_y K (v_0 T)^{3/2} k^* \quad (189)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} = -\beta_x K (v_0 T)^{3/2} k^*$$

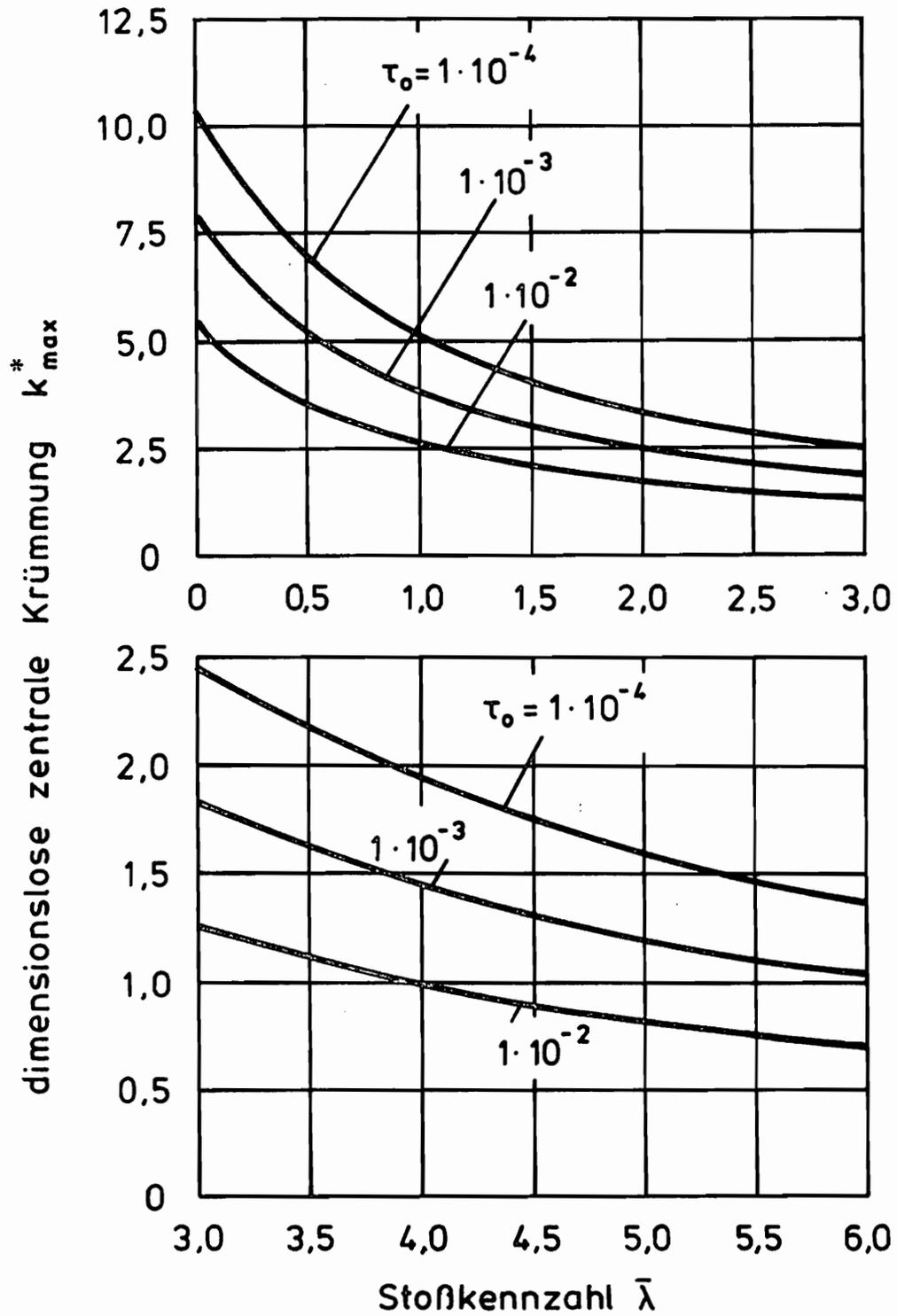


Bild 21: Maximale dimensionslose Krümmung k^* in Abhängigkeit von der Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$ und der dimensionslosen Zeitkonstanten τ_0

aus den dimensionslosen Werten bestimmt werden.

Hat man schließlich so oder so die Krümmungen an der Stoßstelle berechnet, erhält man daraus mit Gl.(127)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_0}(t) &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{y_0}(t) &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (190)$$

als Biegedehnungen an der dem Stoßpunkt mit Bezug auf Bild 1 gegenüberliegenden Oberfläche der Platte und mit Gl.(130)

$$\begin{aligned}M_{x_0}(t) &= -D_x \left[\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} \right] \\ M_{y_0}(t) &= -D_y \left[\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right]\end{aligned}\quad (191)$$

als bezogene Biegemomente an der Stoßstelle. Abschließend sei nochmals an den Gültigkeitsbereich (Frühstadium) der in diesem Kapitel abgeleiteten vereinfachten Krümmungsbeziehungen hingewiesen. Innerhalb dieses Gültigkeitsbereiches ergeben sich mit den Beziehungen für die Krümmungsparameter und den Reziprozitätsbeziehungen nach Betti folgende Verhältnisse

$$\frac{\varepsilon_{y_0}}{\varepsilon_{x_0}} = \frac{M_{x_0}}{M_{y_0}} = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad (192)$$

wie leicht nachzuvollziehen ist.

5.5 Die maximale Plattendurchbiegung

5.5.1 Die unendliche Doppelreihenbeziehung für die Durchbiegung und die Integralgleichung für die Stoßkraft bei einer fest eingespannten Platte

Das erste Maximum der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt wird üblicherweise erst sehr viel später erreicht als das Stoßkraftmaximum, so daß die nur für das Frühstadium geltende vereinfachte Beziehung von Gl.(153) für die Durchbiegung $\bar{w}_0(t)$ nach Ablauf des Frühstadiums nicht mehr zur Berechnung des Maximums der Durchbiegung benutzt werden kann. Vielmehr müssen dazu jetzt die tatsächlichen Randbedingungen berücksichtigt werden.

Hat man eine allseitig frei drehbar gelagerte Platte, kann man dann bis zum Erreichen des Durchbiegungsmaximums und bei Bedarf darüber hinaus aus der Integralgleichung (158) die Stoßkraft berechnen und anschließend mit Gl.(156) die Durchbiegung $\bar{w}_0(t)$. Da für die späteren experimentellen Untersuchungen eine allseitig feste Einspannung der CFK-Platte gewählt wurde, sollen nun hier noch die entsprechenden Bestimmungsgleichungen für diesen Fall der Randbedingungen hergeleitet werden. Zu diesem Zweck denkt man sich im Rahmen dieses Kapitels den Koordinatenursprung in das Zentrum der fest eingespannten Rechteckplatte verlegt, so daß die Durchbiegungsfunktion den Randbedingungen

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 && \text{für } x = \pm a/2 \\ \bar{w} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0 && \text{für } y = \pm b/2\end{aligned}\tag{193}$$

genügen muß. Ein allgemeiner Lösungsansatz, der diese Randbedingungen und die Differentialgleichung (133) exakt erfüllt, ist dem Verfasser nicht bekannt. Deshalb wird ein Näherungsansatz

$$\bar{w}(x,y,t) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} A_{mn}(t) \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \cos \frac{2n\pi y}{b} \right] \tag{194}$$

nach Lekhnitzkii /59/ aufgegriffen, der zumindest die Randbedingungen (193) erfüllt. Die Ermittlung der Amplitudenfunktionen $A_{mn}(t)$ bei einer beliebigen zentralen Einzelkraftbelastung $P(t)$ erfolgt hier vorzugsweise mittels der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, wozu zunächst die kinetische Energie und die Formänderungsenergie der Platte zu berechnen sind. Die kinetische Energie E_{kin} einer Platte berechnet sich aus

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \rho h \dot{\bar{w}}^2 dx dy \quad (195)$$

Differenziert man den Doppelreihenansatz der Gl.(194) nach der Zeit und setzt die erhaltene Ableitung in den Energieausdruck von Gl.(195) ein, so erhält man

$$E_{kin} = \frac{9}{8} \rho h a b \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \dot{A}_{mn}^2(t) \quad (196)$$

als kinetische Energie einer fest eingespannten orthotropen Platte. Demgegenüber ist im Rahmen der hier verwendeten Plattentheorie

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[D_x \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \quad (197)$$

die gesamte Formänderungsenergie der Platte. Differenziert man den Produktansatz (194) partiell nach x und y , läßt sich die Formänderungsenergie damit nach der Integration über die Plattenfläche in der Form

$$E_{pot} = 6 a b \pi^4 \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \left[D_x \left(\frac{m}{a} \right)^4 + D_y \left(\frac{n}{b} \right)^4 + \frac{2}{3} D_{xy} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] A_{mn}^2 \quad (198)$$

beziehungsweise

$$E_{\text{pot}} = \frac{9}{8} \rho h a b \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \omega_{mn}^2 A_{mn}^2 \quad (199)$$

darstellen mit

$$\omega_{mn} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}} \left[D_x \left(\frac{m}{a}\right)^4 + D_y \left(\frac{n}{b}\right)^4 + \frac{2}{3} D_{xy} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (200)$$

als m, n -ter Eigenkreisfrequenz in erster Näherung der fest eingespannten orthotropen Rechteckplatte.

Setzt man nun die angenäherten Energieausdrücke der Gln.(196),(199) in die Lagrangeschen Gleichungen 2.Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (201)$$

ein, in denen q_α die generalisierten Koordinaten und Q_α die generalisierten Kräfte bedeuten, so bekommt man mit der Lagrange Funktion

$$L = (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}) = \frac{9}{8} \rho h a b \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \left[\dot{A}_{mn}^2(t) - \omega_{mn}^2 A_{mn}^2(t) \right] \quad (202)$$

und mit der Festlegung $q_\alpha = A_{mn}$ sowie $Q_\alpha = Q_{mn}$ als m, n -tes Glied eines Gleichungssystems die folgende Beziehung

$$\frac{9}{4} \rho h a b \left\{ \ddot{A}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 A_{mn}^2(t) \right\} = Q_{mn}(t) \quad (203)$$

Dies sind inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen 2.Ordnung, deren Lösung mit den Anfangsbedingungen $Q_{mn}(0) = 0$ sowie $A_{mn}(0) = \dot{A}_{mn}(0) = 0$ die folgenden "Duhamel-Integrale"

$$A_{mn}(t) = \frac{4}{9\rho h a b} \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}(t') \sin \omega_{mn}(t-t') dt' \quad (204)$$

sind. Die darin noch unbestimmten generalisierten Kräfte $Q_{mn}(t)$ werden mit der virtuellen Arbeit

$$\delta A(O, O, t) = P(t) \delta \bar{w}(O, O, t) \quad (205)$$

der Stoßkraft am zentralen Massenpunkt bestimmt. Dabei beträgt der m, n -te Summand der virtuellen Verrückung bei den hier gewählten Randbedingungen

$$\delta \bar{w}_{mn} = \delta A_{mn}(t) \left[1 - (-1)^m \right] \left[1 - (-1)^n \right], \quad (206)$$

so daß sich unter Beachtung der Tatsache

$$\delta A = Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = Q_{mn} \delta A_{mn}(t) \quad (207)$$

die generalisierten Kräfte zu

$$Q_{mn}(t) = P(t) \left[1 - (-1)^m \right] \left[1 - (-1)^n \right] \quad (208)$$

ergeben. Nach dem Einsetzen der generalisierten Kräfte von Gl.(208) in die Duhamel - Integrale (204) gelangt man mit dem Näherungsansatz (194) schließlich zu

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y, t) = & \frac{4}{9\rho h a b} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\omega_{mn}} \left[\int_0^t P(t') \sin \omega_{mn}(t-t') dt' \right] * \\ & * \left[1 - (-1)^m \right] \left[1 - (-1)^n \right] \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \sin \frac{2n\pi y}{b} \right] \end{aligned} \quad (209)$$

als Näherungslösung für die Durchbiegungen einer zentral belasteten orthotropen Rechteckplatte. Die gesuchte Integralgleichung für die Stoßkraft

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{K}\right)^{2/3} P(t)^{2/3} &= v_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t P(t') (t-t') dt' - \\ &- \frac{4}{9 \rho h a b} \sum_m \sum_n \left[\int_0^t P(t') \frac{\sin \omega_{mn} (t-t')}{\omega_{mn}} dt' \right] \left\{ \left[1 - (-1)^m \right] \left[1 - (-1)^n \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (210)$$

bekommt man dadurch, daß man in der Integralgleichung (158) den Ausdruck für die Durchbiegung der frei drehbar gelagerten Platte durch die entsprechende Beziehung der fest eingespannten Platte nach Gl.(209) ersetzt. Aus der numerischen Lösung der Integralgleichung (210) für die Stoßkraft $P(t)$ kann mit Gl.(209) angenähert der Durchbiegungsverlauf unter dem Stoßpunkt bis zum Maximum oder darüberhinaus berechnet werden.

Abschließend verbleibt noch anzumerken, daß ausgehend von Gl.(209) in analoger Vorgehensweise zu Kapitel 5.2 auch für die fest eingespannte Platte wie erwartet eine vereinfachte Beziehung für die zentrale Durchbiegung abgeleitet werden kann, nach der im Frühstadium eine Proportionalität zwischen der Durchbiegung und dem Zeitintegral über die Stoßkraft existiert. Auch können für die fest eingespannte Platte analog zu Kapitel 5.4 vereinfachte Ausdrücke in Bezug auf die Krümmungen an der Stoßstelle angegeben werden, die qualitativ denen der Gln.(182) entsprechen. Quantitative Unterschiede bei den jeweiligen Platten- und Krümmungsparametern in der Größenordnung von z.B. ca. 20% bei der hiesigen CFK-Platte führt der Verfasser darauf zurück, daß der hier gewählte Lösungsansatz von Gl.(194) für die eingespannte Platte die Differentialgleichung (133) nicht erfüllt und nur als Näherungsansatz zu verstehen ist.

5.5.2 Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes zur einfachen Abschätzung des ersten Maximalwertes der Durchbiegung

Die Berechnung der maximalen Plattendurchbiegung mit den im vorangegangenen Kapitel besprochenen Methoden ist recht aufwendig. Deshalb soll hier ein Weg gezeigt werden, der eine einfache Abschätzung des ersten Maximalwertes der zentralen Plattendurchbiegung am Stoßpunkt mit dem Impuls- und Energieerhaltungssatz gestattet /87/.

Dazu werden, um im Sinne der klassischen elastischen Stoßtheorie verfahren

zu können, auf den Stoßpunkt reduzierte Plattenmassen \bar{m}_p , m_p^* eingeführt, die aus dem Gesamtimpuls aller Plattenelemente

$$\bar{m}_p \dot{\bar{w}}_0(t) = \int_F \dot{\bar{w}}(x,y,t) dm_p \quad (211)$$

und aus der gesamten Bewegungsenergie aller Plattenelemente

$$m_p^* \dot{\bar{w}}_0^2(t) = \int_F \dot{\bar{w}}^2(x,y,t) dm_p \quad (212)$$

zu bestimmen sind, wobei das Plattenelement dm_p bei einer Rechteckplatte mit den Kantenlängen a, b gleich

$$dm_p = \frac{m_p}{ab} dx dy \quad (213)$$

ist. Einer Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes steht dann nichts mehr im Wege, und es seien hier kurz zwei Spezialfälle betrachtet.

1. Fall $m_s \ll \bar{m}_p$:

Ist die Masse m_s der Stoßkugel sehr viel kleiner als die reduzierte Plattenimpuls­masse \bar{m}_p , wird die Stoßkugel im allgemeinen relativ schnell von der Platte abgebremst und verläßt nach kurzer Kontaktzeit t_k die Platte mit umgekehrter Impulsrichtung. Mit den Anfangsbedingungen $\dot{w}(0) = v_0$ und $\dot{\bar{w}}_0(0) = 0$ wird dann der Impulserhaltungssatz bei einem Vergleich der Impulse zu Stoßbeginn und am Kontaktende

$$m_s v_0 = -m_s \dot{w}(t_k) + \bar{m}_p \dot{\bar{w}}_0(t_k) \quad (214)$$

Weitere Bestimmungsgleichungen liefert der Energieerhaltungssatz. So ergibt ein Vergleich der Energiezustände zum Stoßbeginn und zum Kontaktende

$$\frac{1}{2} m_s v_0^2 = \frac{1}{2} m_s \dot{w}^2(t_k) + \frac{1}{2} C_p \bar{w}_0^2(t_k) + \frac{1}{2} m_p^* \dot{\bar{w}}_0^2(t_k) + E_{\text{zus}} \quad (215)$$

wobei der Stoß horizontal auf das Zentrum der vertikal aufgestellten Platte erfolgt. Die neben den kinetischen Energien und den von der Federsteifigkeit C_p abhängenden Formänderungsenergien eventuell noch auftretenden anderen Energieformen wie z.B. Reibungsenergien werden dabei durch den Term E_{zus} repräsentiert, werden nachfolgend aber nicht weiter berücksichtigt. Weiterhin führt ein Vergleich der Energiezustände zum Zeitpunkt des Kontaktendes mit denen zum Zeitpunkt der maximalen Plattendurchbiegung auf

$$\frac{1}{2} C_p \bar{w}_o^2(t_k) + \frac{1}{2} m_p^* \dot{\bar{w}}_o^2(t_k) = \frac{1}{2} C_p \bar{w}_{o\text{max}}^2 \quad (216)$$

Nimmt man nun an, daß die Kontaktzeit t_k sehr kurz ist und die Platte sich erst nach dem Kontaktende überhaupt nennenswert verformt, so kann die in den Gln.(215),(216) auftretende Formänderungsenergie der Platte bei Kontaktende im Vergleich zu den anderen Energieanteilen vernachlässigt werden, so daß die unterstrichenen Terme in den Gln.(215),(216) übrig bleiben.

Löst man dann Gl.(214) nach $\dot{\bar{w}}_o(t_k)$ auf und setzt den erhaltenen Ausdruck in Gl.(215) ein, so erhält man nach einer Auflösung nach $\dot{\bar{w}}_o(t_k)$

$$\dot{\bar{w}}_o(t_k) = \frac{2\bar{m}_p v_o}{\frac{\bar{m}_p}{m_s} + m_p^*} \quad (217)$$

woraus mit Gl.(216)

$$C_p \bar{w}_{o\text{max}}^2 = m_p^* \frac{4 \bar{m}_p^2 v_o^2}{\left[\frac{\bar{m}_p}{m_s} + m_p^* \right]^2} \quad (218)$$

folgt. Bezieht man nun noch die auf den Stoßpunkt reduzierten Massen in Anlehnung an Eschler /87/

$$\begin{aligned}\bar{m}_p &= \kappa' m_p \\ m_p^* &= \kappa m_p\end{aligned}\quad (219)$$

auf die tatsächliche Plattenmasse

$$m_p = \rho h a b \quad , \quad (220)$$

so ergibt sich mit Gl.(218) und den von den Randbedingungen abhängigen κ, κ'

$$\bar{w}_{o\max} = 2 v_o \left[\frac{m_s}{C_p \left(1 + \frac{\kappa}{\kappa'^2} \frac{m_s}{m_p}\right) \left(1 + \frac{\kappa'^2}{\kappa} \frac{m_p}{m_s}\right)} \right]^{1/2} \quad (221)$$

als Maximum der Plattendurchbiegung. Diese Beziehung wurde bereits von Schwieger /74/ für eine isotrope Platte benutzt.

2. Fall $m_s > \bar{m}_p$:

Ist die Stoßmasse m_s größer als die reduzierte Plattenimpulsmasse \bar{m}_p , so erfolgt erfahrungsgemäß die endgültige Trennung der Stoßpartner erst nach dem Erreichen der maximalen Plattendurchbiegung. Bis das zentrale Plattenelement seinen Umkehrpunkt erreicht hat, findet in der Regel eine mehr oder weniger kombinierte Bewegung von Plattenelement und Kugel in ursprünglicher Stoßrichtung mit Mehrfachkontakten oder Mehrfachstößen statt. Die ursprüngliche kinetische Energie der Kugel spaltet sich damit zunächst folgendermaßen

$$\underline{\frac{1}{2} m_s v_o^2} = \underline{\frac{1}{2} C_p \bar{w}_{o\max}^2} + \frac{1}{2} m_s \dot{w}_{o\max}^2 \quad (222)$$

auf. Da sich die Bewegung der Stoßkugel beim Erreichen des Plattendurchbiegungsmaximums oder kurz danach ebenfalls umkehrt, kann man sich in Gl.(222) auf die Berücksichtigung der unterstrichenen Energieterme beschränken und

erhält bei Auflösung nach $\bar{w}_{0\max}$

$$\bar{w}_{0\max} = v_0 \left[\frac{m_s}{C_p} \right]^{1/2} \quad (223)$$

als Maximalwert der Durchbiegung des zentralen Plattenelements.

Es verbleibt noch zu erwähnen, daß Gl.(223) auch dann noch näherungsweise benutzt werden kann, wenn die Stoßmasse m_s zwar kleiner als \bar{m}_p ist, aber in der ungefähren Größenordnung von \bar{m}_p liegt. Dies ist bei den späteren experimentellen Stoßversuchen der Fall, wozu Bild 22 an einem Beispiel die Verläufe von Stoßkraft, Kontaktzeit, Plattendurchbiegung und Kugelgeschwindigkeit zeigt. Darüberhinaus sind natürlich noch unzählige Stoßpaarungen denkbar, die keinem der beiden hier behandelten Spezialfälle $m_s \ll \bar{m}_p$ bzw. $m_s \geq \bar{m}_p$ zuzuordnen sind, sondern dazwischen liegen. Für diese Fälle sei auf eine Arbeit von Schwieger, Truppat und Hahn /85/ verwiesen, wo am Beispiel einer isotropen Kreisringplatte ein Weg gezeigt wird, mit dem auch diese Fälle behandelt werden können, der aber die Messung der Kontaktzeit t_k erfordert.

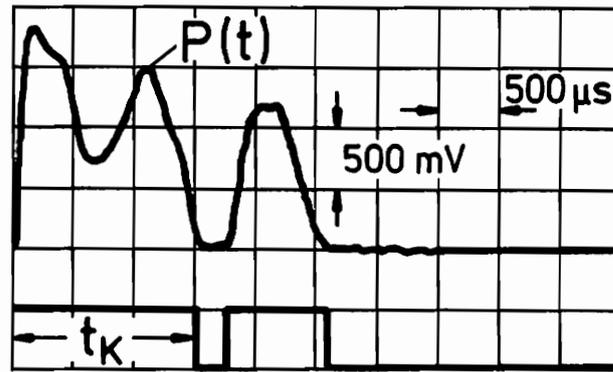
Um mit der hier beschriebenen Methode $\bar{w}_{0\max}$ berechnen zu können, soll nun noch kurz der Weg zur näherungsweisen Bestimmung der Plattenmassenparameter κ, κ' sowie der Federsteifigkeit C_p bei einer fest eingespannten orthotropen Rechteckplatte skizziert werden. Ausgehend vom Näherungsansatz für die Plattendurchbiegung nach Gl.(194) und dem zugehörigen Plattenkoordinatensystem wird sich hier auf die Grundschwingung

$$\bar{w}(x,y,t) = A(t) \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (224)$$

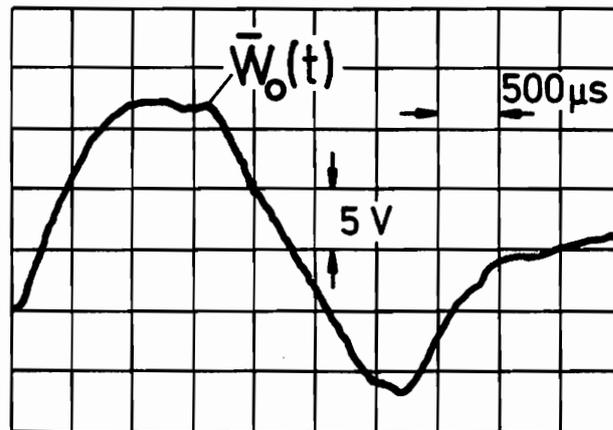
beschränkt, womit die zentrale Plattendurchbiegung gleich

$$\bar{w}_0(t) = \bar{w}_0(x_0=0, y_0=0, t) = 4 A(t) \quad (225)$$

wird. Mit Gl.(211) ergibt sich dann folgende Bestimmungsgleichung



$500 \text{ mV} \cong 290 \text{ N}$



$5 \text{ V} \cong 0,1725 \text{ mm}$

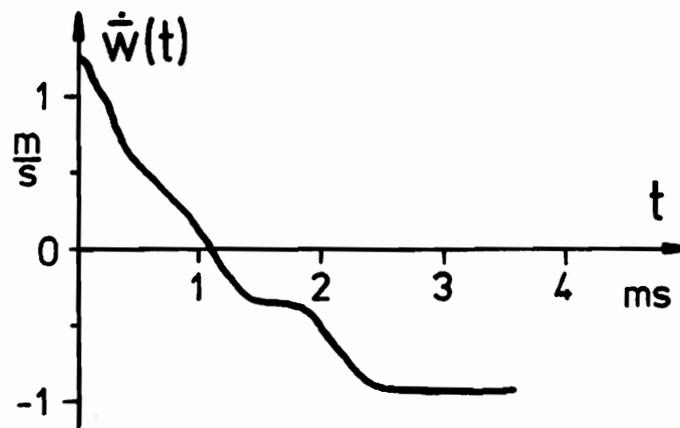


Bild 22: Gemessene zeitliche Verläufe von Stoßkraft, Kontaktzeit und Durchbiegung unter dem Stoßpunkt und daraus errechneter Verlauf der Kugelgeschwindigkeit $\dot{w}(t)$; $v_0 = 0,25 \text{ m/s}$, $m_s = 0,5908 \text{ kg}$

$$\bar{m}_p \ddot{w}_0(t) = 4 \bar{m}_p \dot{A}(t) = \int_F \dot{\ddot{w}}(x,y,t) dm_p = \dot{A}(t) \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (1 + \cos \frac{2\pi x}{a}) (1 + \cos \frac{2\pi y}{b}) \frac{m_p}{ab} dx dy \quad (226)$$

für die auf den Stoßpunkt reduzierte Plattenimpulsmasse, die nach Ausführung der doppelten Integration auf

$$\bar{m}_p = \frac{1}{4} m_p \quad (227)$$

und damit auf

$$\kappa' = 1/4 \quad (228)$$

führt. Ebenso folgt dann aus Gl.(212)

$$m_p^* \ddot{w}_0^2(t_k) = 16 m_p^* \dot{A}^2(t) = \int_F \dot{\ddot{w}}^2(x,y,t) dm_p = \dot{A}^2(t) \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}) (1 + \cos \frac{2\pi y}{b}) \right]^2 \frac{m_p}{ab} dx dy \quad (229)$$

als Bestimmungsgleichung für m_p^* , so daß nach Ausführung der Integrationen

$$m_p^* = \frac{9}{64} m_p \quad (230)$$

beziehungsweise

$$\kappa = 9/64 = 0,1406 \quad (231)$$

folgt. Damit wird näherungsweise das Verhältnis

$$\frac{\kappa}{(\kappa')^2} = 9/4 = 2,25 \quad (232)$$

bei der hier betrachteten fest eingespannten Platte.

Die hier ermittelten Werte für κ , κ' einer orthotropen Rechteckplatte seien nun noch kurz mit Werten isotroper Platten bei Eschler /87/ verglichen. Für eine fest eingespannte quadratische isotrope Platte findet man dort

$$\kappa' = 0,2255$$

$$\kappa = 0,1158$$

als Plattenmassenparameter, so daß das für die Berechnung von $\bar{w}_{0\max}$ relevante Verhältnis $\kappa/(\kappa')^2$ zu

$$\frac{\kappa}{(\kappa')^2} = 2,2773$$

wird. Dabei muß darauf hingewiesen werden, daß hier im Gegensatz zu Eschler /87/ zur Berechnung dieser Parameter nur die 1.Eigenform eines Näherungsansatzes für die Durchbiegung der fest eingespannten Platte benutzt wurde.

Es verbleibt nun noch die Bestimmung der Federsteifigkeit C_p . Sie erfolgt mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials, wobei sich das Gesamtpotential der Platte aus

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + D_y \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 - 2 p \bar{w} \right\} dx dy \quad (233)$$

berechnet. Im Falle der hier vorliegenden zentralen Einzelkraftbelastung P denkt man sich die Einzelkraft durch eine in einer kleinen Rechteckfläche $\xi_0 \eta_0$ wirkende gleichmäßige Belastung $p(x,y) = p_0$ ersetzt mit der Bedingung

$$\lim_{\xi_0, \eta_0 \rightarrow 0} \xi_0 \eta_0 p_0 = P \quad , \quad (234)$$

so daß sich mit Gl.(224)

$$\iint_F p \bar{w} dx dy = \lim_{\xi_0, \eta_0 \rightarrow 0} \int_{-\xi_0/2}^{\xi_0/2} \int_{-\eta_0/2}^{\eta_0/2} \frac{P}{\xi_0 \eta_0} A \left(1 + \cos \frac{2\pi\xi}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi\eta}{\eta} \right) d\xi d\eta = 4 A P \quad (235)$$

ergibt und das Gesamtpotential Φ nach Einsetzen des Ansatzes von Gl.(224) und nach Ausführung der Integrationen

$$\Phi = 2 a b \left\{ 3 D_x \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 A^2 + 2 D_{xy} \left(\frac{\pi}{ab} \right)^2 A^2 + 3 D_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 A^2 - \frac{2AP}{ab} \right\} \quad (236)$$

wird. Das Minimum des Gesamtpotentials führt zu der Forderung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = 2 a b \left\{ 6 D_x \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 A + 4 D_{xy} \left(\frac{\pi}{ab} \right)^2 A + 6 D_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 A - \frac{2P}{ab} \right\} \stackrel{!}{=} 0, \quad (237)$$

woraus sich

$$A = \frac{2P}{\left[6 D_x \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + 4 D_{xy} \left(\frac{\pi}{ab} \right)^2 + 6 D_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right] ab} \quad (238)$$

ergibt. Damit erhält man

$$C_P = \frac{P_{\text{stat}}}{\bar{w}_{\text{O stat}}} = \frac{P_{\text{stat}}}{4A} = \frac{3}{4} \left[D_x \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + \frac{2}{3} D_{xy} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + D_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right] (ab) \quad (239)$$

als angenäherter Federsteifigkeit einer allseitig fest eingespannten orthotropen Rechteckplatte.

6. Versuchsdurchführung und Ergebnisse

6.1 Auswahl des Versuchsmaterials

Für die anstehenden experimentellen Untersuchungen wurde ein unidirektional mit Kohlenstoffasern verstärktes Verbundmaterial auf Epoxydharzbasis ausgewählt. Hersteller der Fasern ist die SIGRI Elektrographit GmbH/Meitingen. Die Herstellung der Platte erfolgte durch die Keller Aero-Construct GmbH/Wieslautern.

Das Verbundmaterial enthält ca. 60 - Volumenprozent Fasern vom Typ SIGRI NF (d.h. $V_f = 0,6$; $V_b = 1 - V_f = 0,4$). Durch die unidirektionale Ausrichtung wurde eine hohe Anisotropie erreicht. Die Ausgangsdaten der Kohlenstofffasern und der Epoxydharzmatrix sind nachfolgend zusammengestellt¹⁰⁾.

Fasern:

Faserdurchmesser 7 μm

Dichte $1,76 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

$E_{fL} = 23 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

$E_{fT} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

$G_{fLT} = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

$G_{fTT} = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

$K_{fTT} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

Epoxydharz (heißhärtend):

$E_b = 0,35 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

$\nu_b = 0,35$

Mit diesen Ausgangsdaten können unter Benutzung der Beziehungen von Anhang 9.1 die elastischen Konstanten des Verbundmaterials theoretisch berechnet werden. Die Werte findet man in der dritten Spalte der Tabelle 2, wobei die Fasern in x-Richtung liegen. Die in der vierten Spalte der Tabelle vergleichsweise angegebenen Werte wurden experimentell mit Dehnungsmeßstreifen über die gemessenen Grenzggeschwindigkeiten elastischer Wellen bestimmt. Diese Methode wurde in Kapitel 3.4 theoretisch behandelt und wird in ihrer praktischen Ausführung hieran anschließend beschrieben.

¹⁰⁾ Bis auf den Elastizitätsmodul E_{fL} in Faserrichtung, für den eine konkrete Werksangabe vorlag, sind die elastischen Konstanten der Fasern einer Arbeit von Kriz und Stinchcomb /13/ entnommen. Sie wurden dort für den vergleichbaren Fasertyp Modmor II angegeben.

	SIGRI Werksangabe	DFVLR Messung ^{+))}	theoretisch (Anhang 9.1)	experimentell DMS
E_x in $[N/m^2]$	$12,5 \cdot 10^{10}$	$12,8 \cdot 10^{10}$	$13,3 \cdot 10^{10}$	$12,3 \cdot 10^{10}$
$E_y = E_z$ in $[N/m^2]$		$0,96 \cdot 10^{10}$	$0,81 \cdot 10^{10}$	$0,95 \cdot 10^{10}$
$G_{xy} = G_{xz}$ in $[N/m^2]$	$0,53 \cdot 10^{10}$	$0,54 \cdot 10^{10}$	$0,43 \cdot 10^{10}$	$0,47 \cdot 10^{10}$
G_{yz} in $[N/m^2]$		$0,32 \cdot 10^{10}$	$0,28 \cdot 10^{10}$	$0,32 \cdot 10^{10}$
$\nu_{xy} = \nu_{xz}$		0,26	0,30	0,30
$\nu_{yx} = \nu_{zx}$		0,019	0,018	0,023
$\nu_{yz} = \nu_{zy}$		0,47	0,45	0,48

^{+))} Angaben aus dem Institut für Strukturmechanik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR) in Braunschweig. Die Messung erfolgte bei Raumtemperatur an einem typischen unidirektionalen Verbund mit 60-Vol.% C-Fasern HT 300.

Tabelle 2: Vergleich von Werksangaben, theoretischen Werten und experimentell ermittelten Werten der elastischen Konstanten des mit 60-Vol% Kohlenstofffasern verstärkten Epoxydharzverbundkörpers

6.2 Bestimmung der elastischen Konstanten der mechanisch anisotropen Platte bzw. Scheibe aus der Messung der Wellengrenzgeschwindigkeiten

6.2.1 Versuchsanordnung und -daten

Nach den in Kapitel 3.4 angegebenen theoretischen Beziehungen ist es erforderlich, zur Bestimmung des kompletten Stoffgesetzes eines unidirektional faserverstärkten Verbundkörpers die Fortpflanzungsgrenzgeschwindigkeiten der schnellsten Longitudinal-, Transversal- und Biege-Wellen in Faserrichtung und senkrecht dazu zu messen. Dies geschah hier an der für die eigentlichen

Stoßversuche verwendeten Kohlenstofffaser/Epoxydharz - Platte mit den Maßen 480 mm x 480 mm x 8 mm.

Die Wellen wurden durch Stoßbelastungen erzeugt. Ihre Ausbreitung nach Stoßbeginn wurde mit Dehnungsmeßstreifen erfaßt, die an der Plattenoberfläche aufgeklebt wurden. Einen Überblick über die Stoßstellen- und Dehnungsmeßstreifenanordnung gibt Bild 23. Bei den DMS 1,2 und 4 handelt es sich um $0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$ - Rosetten der Fa. Tokyo Sokki Kenkyujo Typ FRA-2-11 (Länge 2 mm, $R_0 = 120 \Omega$, $K_g = 2,07$). Die Dehnungsmeßstreifen 3, 5 und 6 sind einzelne Folien-DMS von HBM Typ 0,6/120 LY 11 (Länge 0,6 mm, $R_0 = 120,1 \Omega$, $K_g = 1,88$).

Zur Ermittlung der Grenzgeschwindigkeiten der (in der Scheibenebene schwingenden) schnellsten Longitudinal- und Transversalwellen wurde die Scheibe seitlich jeweils an den Stellen I und II normal zum Rand gestoßen. Die Erregung der Biegewellen geschah über Transversalstöße in den Punkten III, IV und V. Die Stöße erfolgten jeweils mit einem 80 mm langen Stahlbolzen von 6 mm Durchmesser. Die Stoßstellen des Verbundkörpers wurden von 1 mm dicken V_2A -Plättchen mit 10 mm Durchmesser vor örtlichen Zerstörungen geschützt. Der Bolzen selbst wurde in einem 55 mm langen Zylinder axial geführt und durch bifilar aufgehängte Kugeln ($m_s = 0,22$ kg bzw. 0,41 kg) stoßartig in Axialrichtung beschleunigt. Das der Scheibe bzw. Platte zugewandte Ende des Bolzens war abgerundet. Die benutzten Stoßgeschwindigkeiten betragen 1,0 m/s und 1,5 m/s. Durch die axiale Führung des Bolzens und insbesondere durch seine relativ geringe Masse wurden definierte Stoßimpulse kurzer Dauer gewährleistet. Zur Anordnung der Dehnungsmeßstreifen bleibt noch anzumerken, daß bei einer praktischen Anwendung der hier vorgestellten Methode darauf geachtet werden muß, daß mit den DMS auch tatsächlich zuerst die schnellsten Vorläufer der gesuchten Wellentypen und nicht etwa an den seitlichen Rändern reflektierte Wellen erfaßt werden. Dazu empfiehlt es sich, aus den theoretisch erwarteten Materialgrößen zunächst die ungefähren Wellengrenzgeschwindigkeiten im voraus zu berechnen und dementsprechend die DMS und die Stoßstellen sinnvoll zu plazieren.

6.2.2 Dehnungsmeßstreifentechnik

Wie dem Meßstellenplan in Bild 23 zu entnehmen ist, wurden für die Erfassung der Wellenausbreitungszustände drei DMS-Rosetten und drei einzelne DMS verwendet.

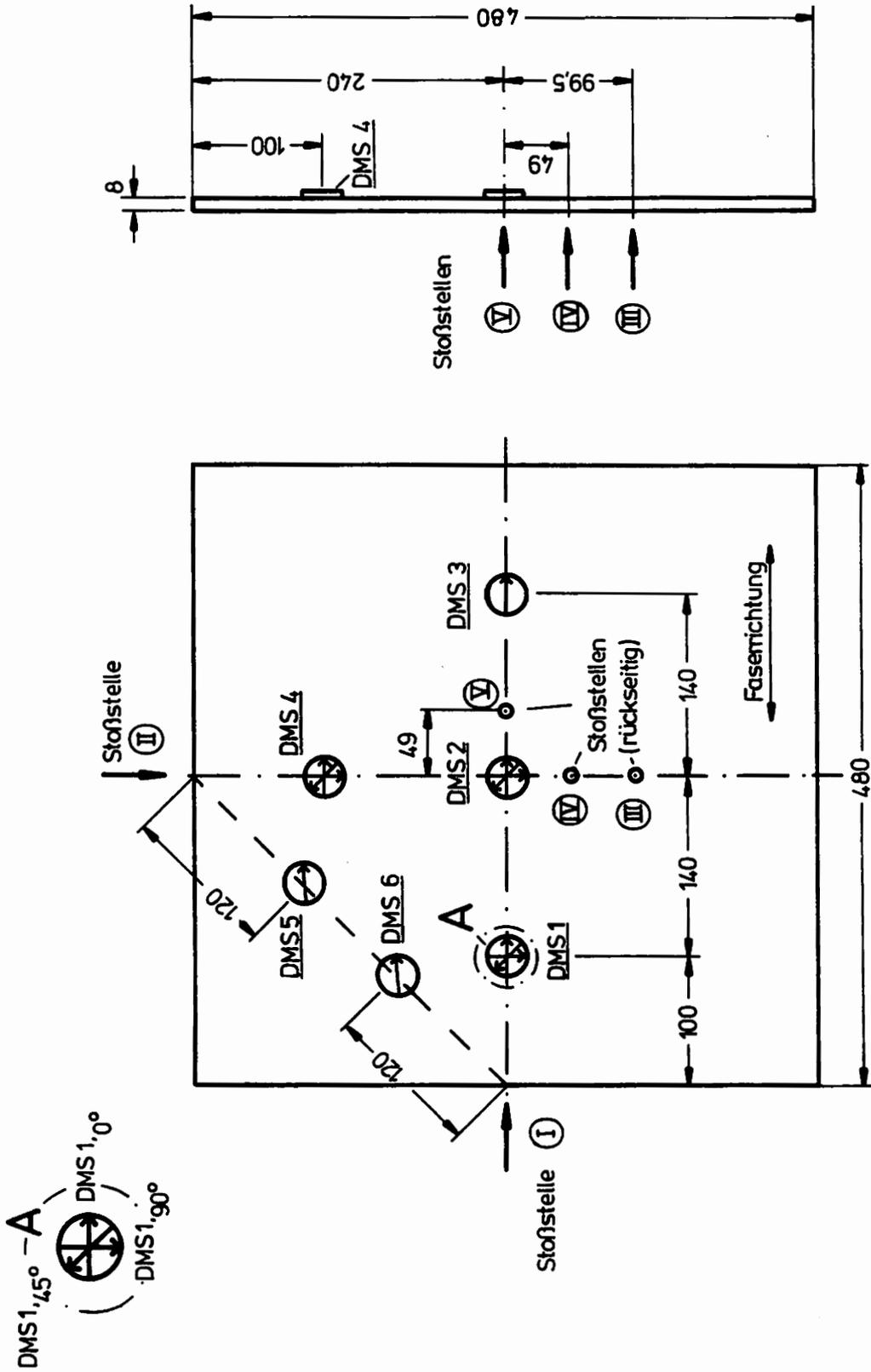


Bild 23: Anordnung der Stoßstellen und DMS-Meßstellenplan zur Untersuchung der Wellenausbreitung und Messung der Grenzgeschwindigkeiten der elastischen Wellen

Das Schaltprinzip am Beispiel eines DMS der zentralen Rosette mit den zugehörigen Meßgeräten zur Erfassung der DMS-Signale zeigt Bild 24. Der verwendete Differenzeinschub des analog arbeitenden Speicheroszilloskops vom Typ Tektronix 7623A hatte eine maximale Empfindlichkeit von $10 \mu\text{V}$ pro Teilstrich. Die Triggerung der Zeitbasis erfolgte extern durch einen elektrischen Kurzschluß zwischen Stoßkugel bzw. -bolzen einerseits und Platte andererseits, wozu beide über eine Spannungsteilerschaltung mit unterschiedlichen elektrischen Potentialen belegt wurden. Über separate, abgeschirmte Schraub-Stützpunkte konnte jeder Einzelne der insgesamt 12 Dehnungsmeßstreifen abgegriffen werden.

Aufgrund der Kurzzeitigkeit der aufgezeichneten Vorgänge konnte auf eine Temperaturkompensation mittels Wheatstonescher Brücken und Kompensations-DMS verzichtet werden. Stattdessen wurde den Dehnungsmeßstreifen nach der "Methode des konstanten Stroms" jeweils ein hoher Widerstand von $15 \text{ k}\Omega$ vorgeschaltet, der den Strom I_0 in dieser Potentiometerschaltung im wesentlichen bestimmte. Änderte sich infolge einer mechanischen Dehnung der elektrische Widerstand des DMS, so trat bei weitgehend konstantem Strom I_0 (hier $I_0 = 10 \text{ mA}$) eine Spannungsänderung am DMS auf. Diese wurde mit dem Oszilloskop gemessen. Bezogen auf den ursprünglichen Spannungsabfall $I_0 R_0$ am DMS und dividiert durch den K_g -Wert entsprach sie der Dehnung

$$\epsilon_{\text{Meß}}(t) = \frac{\Delta U(t)}{K_g R_0 I_0} \quad (240)$$

des DMS¹¹⁾.

6.2.3 Ergebnisse

Zur Messung der Grenzgeschwindigkeit der schnellsten Longitudinalwelle in Faserrichtung wurde die Platte an der Stoßstelle I erregt und mit den DMS 1,2,3 die Ankunftszeit der ersten Störungen an den jeweiligen DMS-Mess-

¹¹⁾ Gl. (240) gilt für den Fall, daß die Messung bei einem einachsigen Spannungszustand auf einem Material erfolgt, für dessen Poissonsche Querdehnzahl ν der vom Hersteller angegebene K_g -Wert gilt. Liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor oder erfolgt die Messung auf einem anisotropen Bauteil mit anderen, richtungsabhängigen Querdehnzahlen, wie z.B. ν_{xy} und ν_{yx} , so sind aufgrund der Querempfindlichkeit Q des Dehnungsmeßstreifen noch Korrekturen der Meßwerte vorzunehmen.

$$\epsilon_x = \frac{1 - \nu_H Q}{1 + (\epsilon_y / \epsilon_x) Q} \epsilon_{x \text{ Meß}} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{1 - \nu_H Q}{1 + (\epsilon_x / \epsilon_y) Q} \epsilon_{y \text{ Meß}}$$

DMS Typ HBM 0,6/120 LY11: $\nu_H = 0,285$; $Q = 1,2\%$

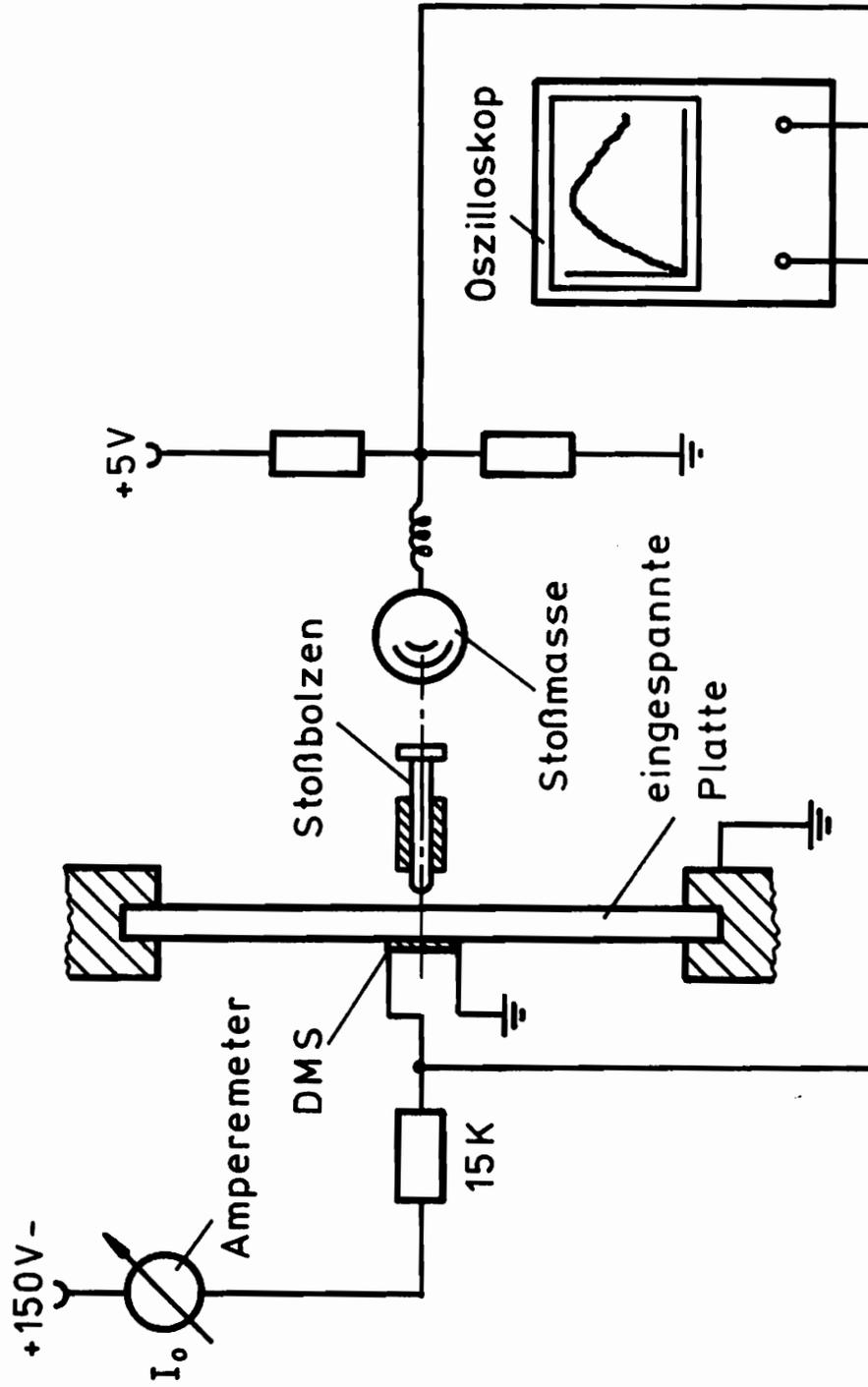


Bild 24: Anordnung zur Messung der Dehnungstreifensignale

punkten ermittelt. Die Ausbreitung der sich quer zur Faserrichtung fort-pflanzenden Longitudinalwellen wurde mit den DMS 4 und 2 erfaßt, wozu die Platte an der Stelle II stoßartig erregt wurde. Die Verwendung eines dritten DMS in größerer Entfernung von der Stoßstelle als die DMS 4 und 2 zur Erfassung der schnellsten Vorläufer dieses Wellentyps erschien wenig sinnvoll, da aufgrund der Plattenberandung in entfernteren Regionen die ersten Störungen anderen, am Rande reflektierten Quasilongitudinalwellen hätten zugeordnet werden müssen.

Im Zusammenhang mit den Erregungen an den Stellen I und II wurde mit den DMS 5 und 6 außerdem die Wellenausbreitung außerhalb der elastischen Haupt-richtungen erfaßt. Die gemessene Geschwindigkeit der schnellsten Signale in dieser 45° -Richtung betrug ca. 3080 m/s. Dies entspricht erwartungsgemäß ungefähr der schnellsten Energieausbreitungsgeschwindigkeit in dieser Richtung und nicht der Phasengeschwindigkeit der 45° -Quasilongitudinalwelle in Höhe von ca. 6530 m/s.

Die Grenzggeschwindigkeiten der in der Scheibenebene schwingenden Transversalwellen wurden ebenfalls über die Stoßerregung an den Stellen I bzw. II mit den DMS 1 bzw. 4 ermittelt. Dabei wurde eine in Faserrichtung und senkrecht dazu gleich große Transversalwellengeschwindigkeit $v_{12T} = v_{21T}$ erwartet, was die experimentellen Ergebnisse auch tatsächlich zu bestätigen scheinen. Die Interpretation der aufgezeichneten Signale bezüglich der Transversalwellengeschwindigkeit ist etwas schwieriger, da den Signalen, die den Transversalwellen zuzuordnen sind, die Impulse der Longitudinalwellen vorausgehen. Zum Zwecke einer möglichst guten Unterscheidbarkeit der den Longitudinalwellen bzw. Transversalwellen zuzuordnenden Signale werden deshalb möglichst kurzzeitige Stoßimpulse gewünscht. Dies wurde hier mit der Verwendung des Stoßbolzens bezweckt. Durch einen möglichst großen Abstand des DMS von der Stoßstelle kann außerdem eine Entzerrung der Longitudinalwellen und Transversalwellen erreicht werden. Dem sind jedoch über die äußeren Abmessungen der Platte Grenzen gesetzt, da sichergestellt werden muß, daß die aufgezeichneten Signale nicht etwa am Rand reflektierten Quasilongitudinalwellen zuzuordnen sind.

Die Anregung der Biegewellen erfolgte schließlich über Transversalstöße in den Punkten III, IV und V, wozu die Platte auch in Hinblick auf die späteren, eigentlichen Stoßversuche allseitig fest eingespannt wurde. Mit den DMS 2 und 1 wurde dann die Grenzggeschwindigkeit v_{13T} der schnellsten Biege-

wellen in Faserrichtung und mit den DMS 2 und 4 entsprechend v_{23T} ermittelt.

Aufzeichnungsbeispiele von DMS-Signalen in Verbindung mit den seitlichen Stößen auf die Scheibe einerseits und den Biegestößen andererseits zeigen die Bilder 25 und 26. Wie dabei im untersten Teilbild von Bild 26 zu erkennen ist, wurden bei den Biegestößen offensichtlich neben den primären, dominierenden Biege-Wellen auch Dilatationswellen, wenn auch äußerst intensitätsschwach, mit angeregt. Weg-Zeit Diagramme am Beispiel der Longitudinalwellen in Faserrichtung und der Biege-Wellen quer zur Faserrichtung sind in Bild 27 und 28 zu finden. Die Ergebnisse zusammenfassend wurden folgende Grenzggeschwindigkeiten

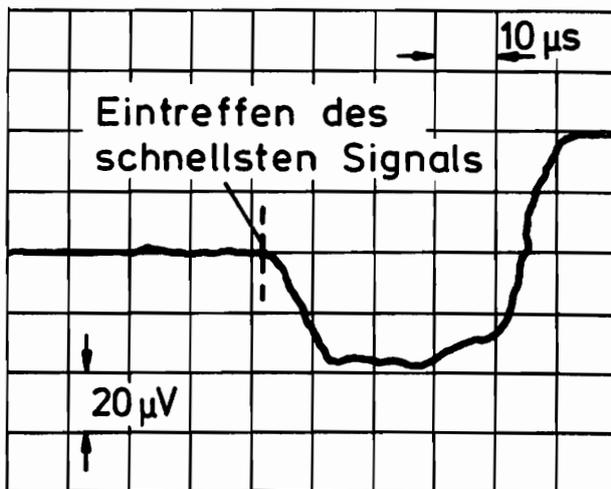
v_{11L}	9050 m/s
v_{22L}	2520 m/s
$v_{12T} = v_{21T}$	1760 m/s
v_{23T}	1350 m/s
v_{13T}	1750 m/s

ermittelt, aus denen die in Spalte 4 von Tabelle 2 angegebenen experimentellen elastischen Konstanten des untersuchten Verbundkörpers berechnet wurden.

6.3 Plattenstoßversuche

6.3.1 Versuchsordnung und -daten

In diesem Kapitel sollen die eigentlichen Hauptversuche beschrieben werden, bei denen unter verschiedenen Stoßbedingungen im wesentlichen die Stoßkräfte, die Plattendurchbiegungen und die Dehnungen an der Stoßstelle gemessen wurden. Das Prinzip des zentralen Biegestoßes und die damit zusammenhängenden Bezeichnungen wurden bereits in Bild 1 dargestellt. Die konkrete Realisierung der Versuchsordnung im Labor zeigt Bild 29. Wie man

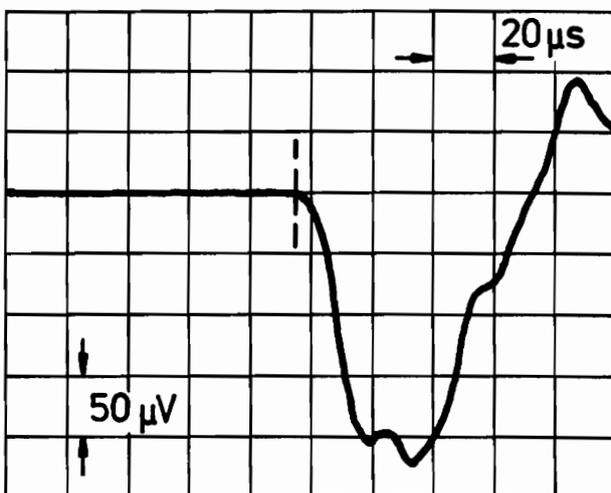


Longitudinalwelle in Faserrichtung

Stoßstelle I

DMS 3

Stoßstellenabstand $s = 0,380 \text{ m}$

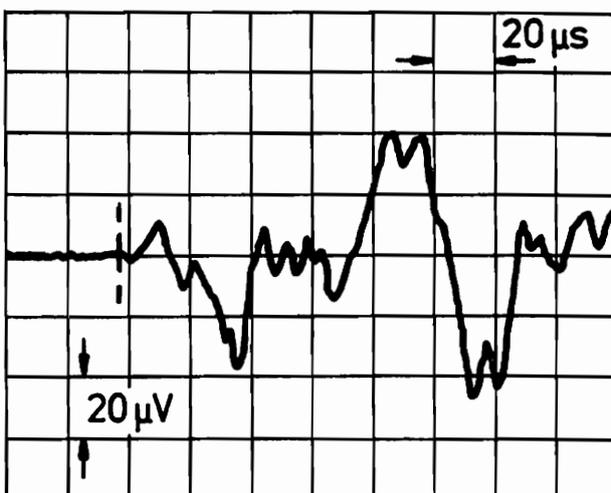


Longitudinalwelle quer zur Faserrichtung

Stoßstelle II

DMS $2,90^\circ$

Stoßstellenabstand $s = 0,240 \text{ m}$



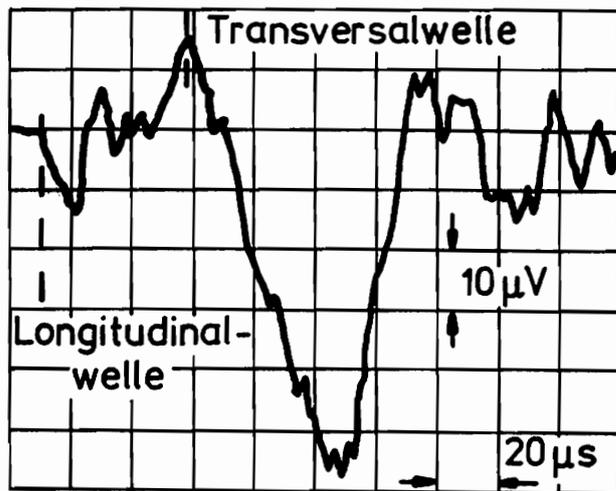
45° -Richtung zu den Fasern

Stoßstelle I

DMS 6

Stoßstellenabstand $s = 0,120 \text{ m}$

Bild 25: Aufzeichnungsbeispiele von Dehnungsmeßstreifensignalen zur Ermittlung der schnellsten Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Longitudinalwellen (Scheibenstoß)

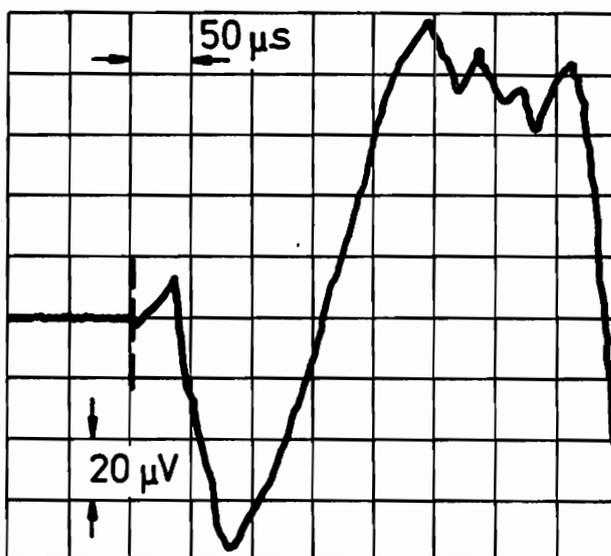


Longitudinal- und Transversalwelle in Faserrichtung

Stoßstelle I (Scheibenstoß)

DMS $1,45^\circ$

Stoßstellenabstand $s = 0,100 \text{ m}$

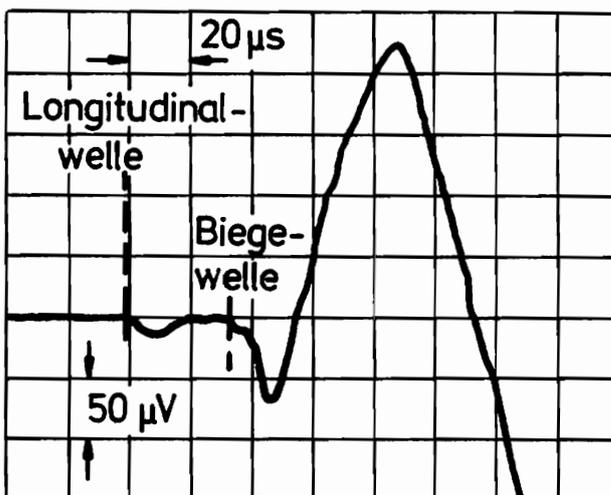


Biegewelle in Faserrichtung

Stoßstelle V (Biegestoß)

DMS $1,90^\circ$

Stoßstellenabstand $s = 0,189 \text{ m}$



Biegewelle quer zur Faserrichtung

Stoßstelle III (Biegestoß)

DMS $2,90^\circ$

Stoßstellenabstand $s = 0,0995 \text{ m}$

Bild 26: Aufzeichnungsbeispiele von Dehnungsmeßstreifensignalen zur Ermittlung der Grenzgeschwindigkeiten der Transversalwellen und Biegewellen

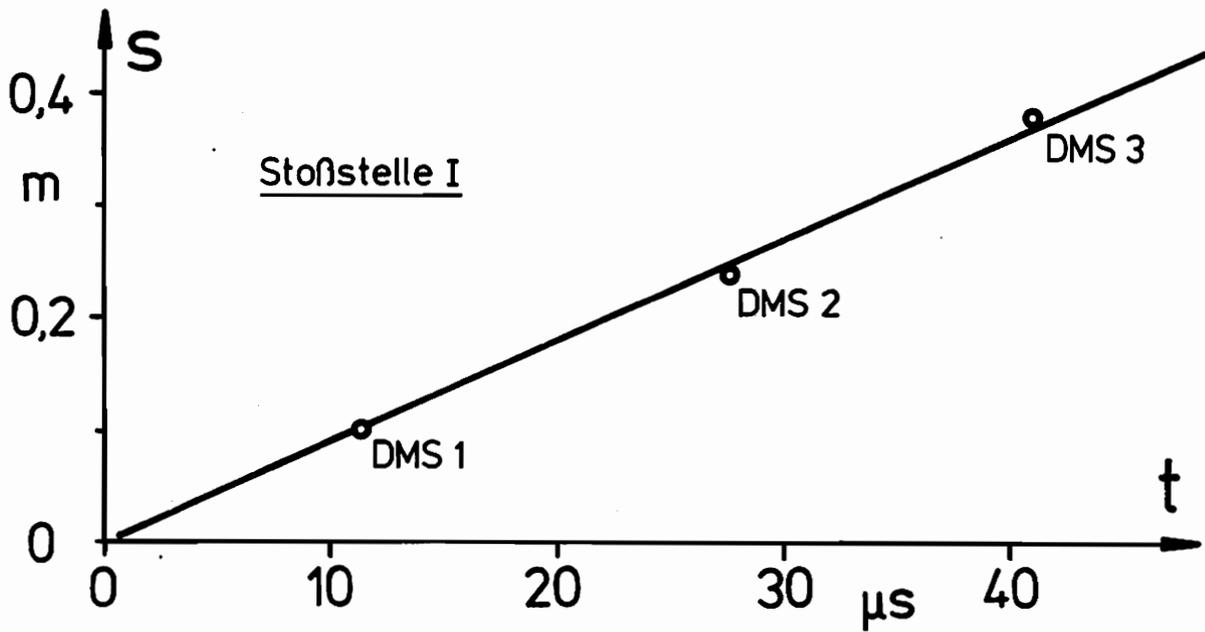


Bild 27: Weg - Zeit Diagramm für die schnellste Longitudinalwelle in Faserichtung; $v_{11L} = \Delta s / \Delta t = 9050 \text{ m/s}$

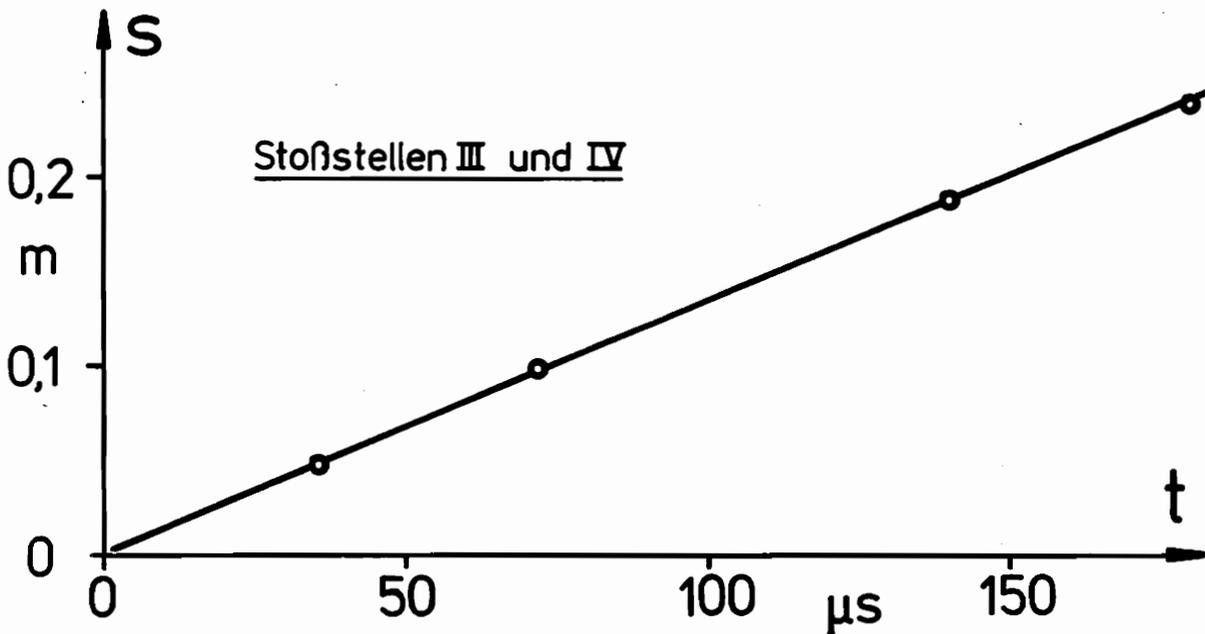


Bild 28: Weg - Zeit Diagramm für die schnellste Biegewelle quer zur Faserichtung; dabei wurden die Stoßstellen III und IV sowie die Dehnmessstreifen 2 und 4 benutzt. $v_{23T} = \Delta s / \Delta t = 1350 \text{ m/s}$

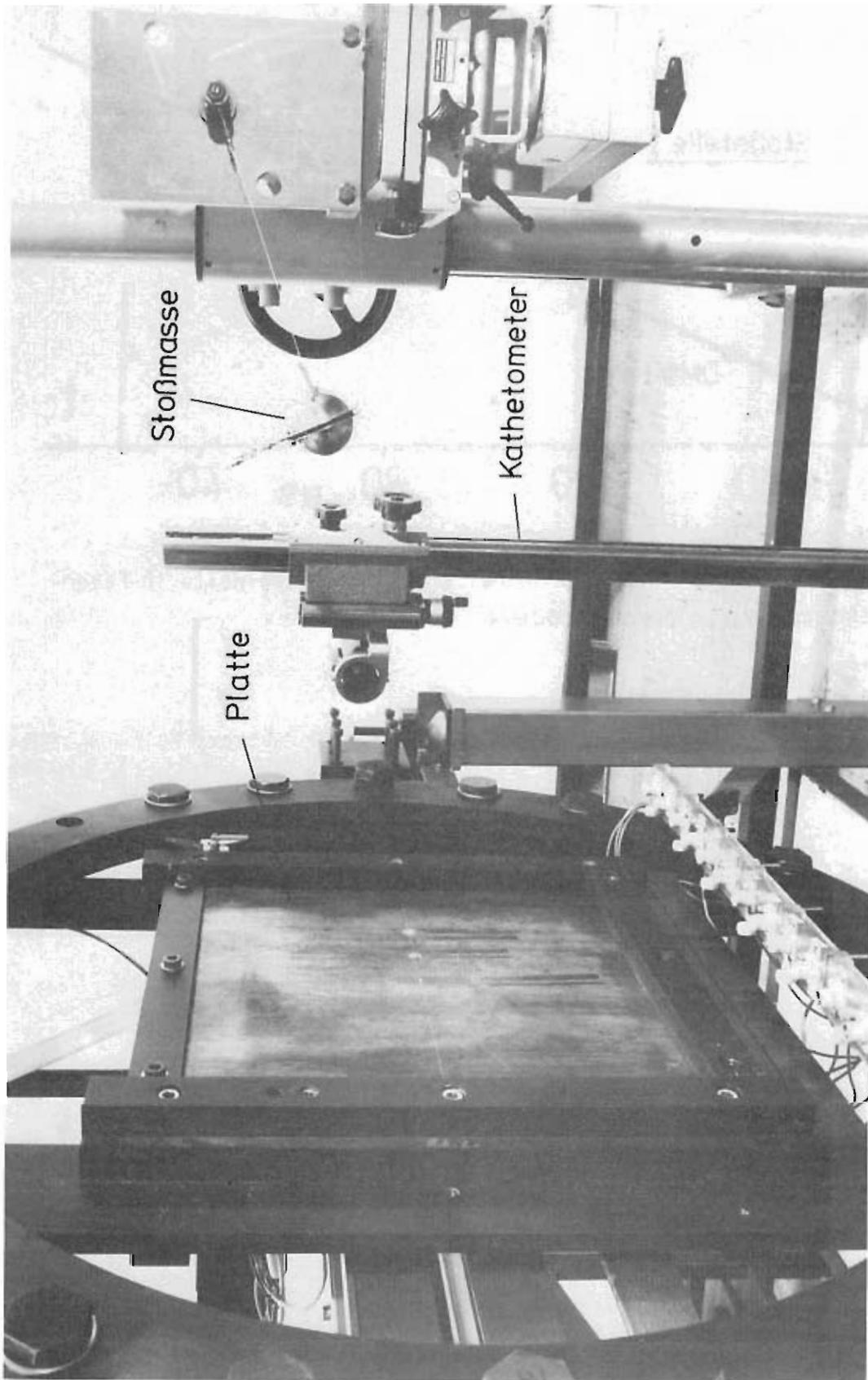


Bild 29: Aufbau zum Studium des Biegestoßes auf eine anisotrope Platte

erkennt, wurde die Platte mit Stahlflanschen vertikal und allseitig fest eingespannt. Als Stoßmassen wurden Kugeln aus gehärtetem Kugellagerstahl 100 CrMn 6 mit verschiedenen Radien gewählt. Die Kugeln wurden bifilar als Pendel aufgehängt. Ihre Fallhöhen im Schwerfeld der Erde und damit ihre Stoßgeschwindigkeiten v_0 konnten grob mit einer Winkelskala eingestellt werden. Genaue Bestimmungen der Fallhöhen wurden mit einem Kathetometer vorgenommen. Einen Überblick über die wichtigsten Versuchsdaten gibt nachfolgende Aufstellung. Tabelle 3 zeigt außerdem eine Zusammenstellung der

Platte

Material: Epoxydharz unidirektional mit Kohlenstoffasern SIGRI NF verstärkt
Fasergehalt 60-Vol.%

$$E_x = 12,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E_y = 0,95 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$G_{xy} = G_{xz} = 0,47 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$G_{yz} = 0,32 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,30$$

$$\nu_{yx} = \nu_{zx} = 0,023$$

$$\nu_{zy} = \nu_{yz} = 0,48$$

$$\rho = 1515 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 0,4 \text{ m}$$

$$h = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Stoßkugeln

Material: Kugellagerstahl 100 CrMn 6

$$E_s = 21,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\nu_s = 0,28$$

$$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$R_{s_1} = 17,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; m_{s_1} = 0,2199 \text{ kg}$$

$$R_{s_2} = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; m_{s_2} = 0,4078 \text{ kg}$$

$$R_{s_3} = 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; m_{s_3} = 0,5908 \text{ kg}$$

Massen mit
Beschleunigungsaufnehmer
Typ Kistler 802 B

$$v_0 = 0,25 \text{ m/s} ; 0,50 \text{ m/s} ; 0,75 \text{ m/s} ; 1,00 \text{ m/s} ; 1,25 \text{ m/s}$$

m_s in kg	K in N/m ^{1,5}	v_0 in m/s	T in s	$\bar{\lambda}$	$t_0^{+)}$ in s
0,2199	$0,231 \cdot 10^{10}$	0,25	$0,129 \cdot 10^{-3}$	1,77	$1,16 \cdot 10^{-8}$
		0,50	$0,113 \cdot 10^{-3}$	2,02	$1,90 \cdot 10^{-8}$
		0,75	$0,104 \cdot 10^{-3}$	2,20	$2,52 \cdot 10^{-8}$
		1,00	$0,098 \cdot 10^{-3}$	2,33	$3,07 \cdot 10^{-8}$
		1,25	$0,094 \cdot 10^{-3}$	2,43	$3,60 \cdot 10^{-8}$
0,4078	$0,259 \cdot 10^{10}$	0,25	$0,158 \cdot 10^{-3}$	2,68	$1,46 \cdot 10^{-8}$
		0,50	$0,138 \cdot 10^{-3}$	3,07	$2,41 \cdot 10^{-8}$
		0,75	$0,127 \cdot 10^{-3}$	3,34	$3,12 \cdot 10^{-8}$
		1,00	$0,120 \cdot 10^{-3}$	3,53	$3,85 \cdot 10^{-8}$
		1,25	$0,115 \cdot 10^{-3}$	3,69	$4,47 \cdot 10^{-8}$
0,5908	$0,277 \cdot 10^{10}$	0,25	$0,179 \cdot 10^{-3}$	3,43	$1,65 \cdot 10^{-8}$
		0,50	$0,156 \cdot 10^{-3}$	3,94	$2,68 \cdot 10^{-8}$
		0,75	$0,143 \cdot 10^{-3}$	4,30	$3,50 \cdot 10^{-8}$
		1,00	$0,135 \cdot 10^{-3}$	4,55	$4,30 \cdot 10^{-8}$
		1,25	$0,129 \cdot 10^{-3}$	4,76	$5,03 \cdot 10^{-8}$

^{+) Die Werte der Zeitkonstanten t_0 wurden mit Gl.(184) aus den Kontakt-halbachsen berechnet, die sich nach der Kontakttheorie von Sveklo aus den theoretischen Stoßkraftmaxima ergeben.}

$$D_x = 5284 \text{ Nm}, \quad D_y = 408 \text{ Nm}, \quad D_{xy} = 524 \text{ Nm}$$

$$\alpha_p = 10,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/Ns}$$

$$\beta_x = 17,34 \cdot 10^{-6} \text{ (Nm)}^{-1}, \quad \beta_y = 62,41 \cdot 10^{-6} \text{ (Nm)}^{-1}$$

$$\text{Kontakttheorie von Sveklo: } (r_x/r_y) = 0,85, \quad r_y/(PR_s) = 4,16 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{N}}\right)^{1/3}$$

Tabelle 3: Zusammenstellung der wichtigsten Stoßkenngrößen im Rahmen der experimentell untersuchten Stoßbedingungen

aus diesen Versuchsdaten berechneten Stoßkenngrößen, die eine einfache Ermittlung der maximalen dimensionslosen Stoßkräfte und Plattenkrümmungen aus Bild 17 und 21 gestatten. Die Dauer des Frühstadiums im Sinne der vereinfachten Stoßtheorie, d.h. der Zeitraum, in dem die Randbedingungen das Geschehen am Stoßpunkt noch nicht beeinflussen, wurde für die hier untersuchte Platte aus der höchsten Grenzggeschwindigkeit der Biegewellen in Höhe von 1750 m/s und aus der Kantenlänge $a = 0,4$ m der zentral gestoßenen Platte abgeschätzt. Da sich die energiereichen Biegewellen größerer Wellenlänge aber etwas langsamer fortpflanzen, kann dieser Zeitbereich als geringfügig größer angenommen werden, so daß hier der Zeitraum der ersten 250 μs als Gültigkeitsbereich des Frühstadiums angesehen wurde. Bei den Stoßgeschwindigkeiten wurde nicht über 1,25 m/s hinausgegangen, um plastische Verformungen oder örtliche Materialzerstörungen im Bereich der Stoßstelle auf jeden Fall zu vermeiden.

6.3.2 Stoßkraft-, Durchbiegungs- und Dehnungsmeßtechnik

Die experimentelle Bestimmung der Stoßkräfte erfolgte unter Berücksichtigung der Newtonschen Bewegungsgleichung über die Messung der beim Stoß auftretenden Beschleunigungen bzw. Verzögerungen der jeweiligen Stoßmasse. Dazu waren auf der in Bezug auf den Stoßpunkt rückwärtigen Seite der Stoßkugeln Beschleunigungsaufnehmer angebracht, die durch Innengewinde kraftschlüssig mit den Kugeln verbunden waren. Diese Beschleunigungsaufnehmer (Kistler Typ 802 B) bestehen aus einer seismischen Masse und einem Piezo-Quarz, wobei die seismische Masse als Einmassenschwinger [92] mit entsprechender Federkonstante, Dämpfungskonstante und Eigenfrequenz (hier z.B. 40 kHz) aufgefaßt werden kann. Die Beschleunigungen, denen die Stoßkugel ausgesetzt wird, werden auf die seismische Masse übertragen, die ihrerseits eine ihrer Masse und der Beschleunigung proportionale Druck- oder Zugkraft auf den Piezo-Quarz ausübt. Die dabei erzeugten elektrischen Ladungsveränderungen im Quarz bei einer Empfindlichkeit von $0,498 \cdot 10^{-12}$ Coulomb pro $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ werden in einem Ladungsverstärker der Firma Kistler in proportionale Spannungsänderungen umgewandelt, die dann auf dem Schirm des Kathodenstrahloszilloskops aufgezeichnet werden. Bild 30 zeigt schematisch die Anordnung zur Messung und zur Weiterverarbeitung der Stoßkraftsignale.

Die im wesentlichen auf die Eigenschwingungen der seismischen Masse zurückzuführenden, dem eigentlichen Meßsignal überlagerten Oberschwingungen wurden mit einem Tiefpaßfilter der Grenzfrequenz 180 kHz geringfügig geglättet, ohne die Anstiegsflanken der Meßsignale nennenswert zu verflachen. Bei der

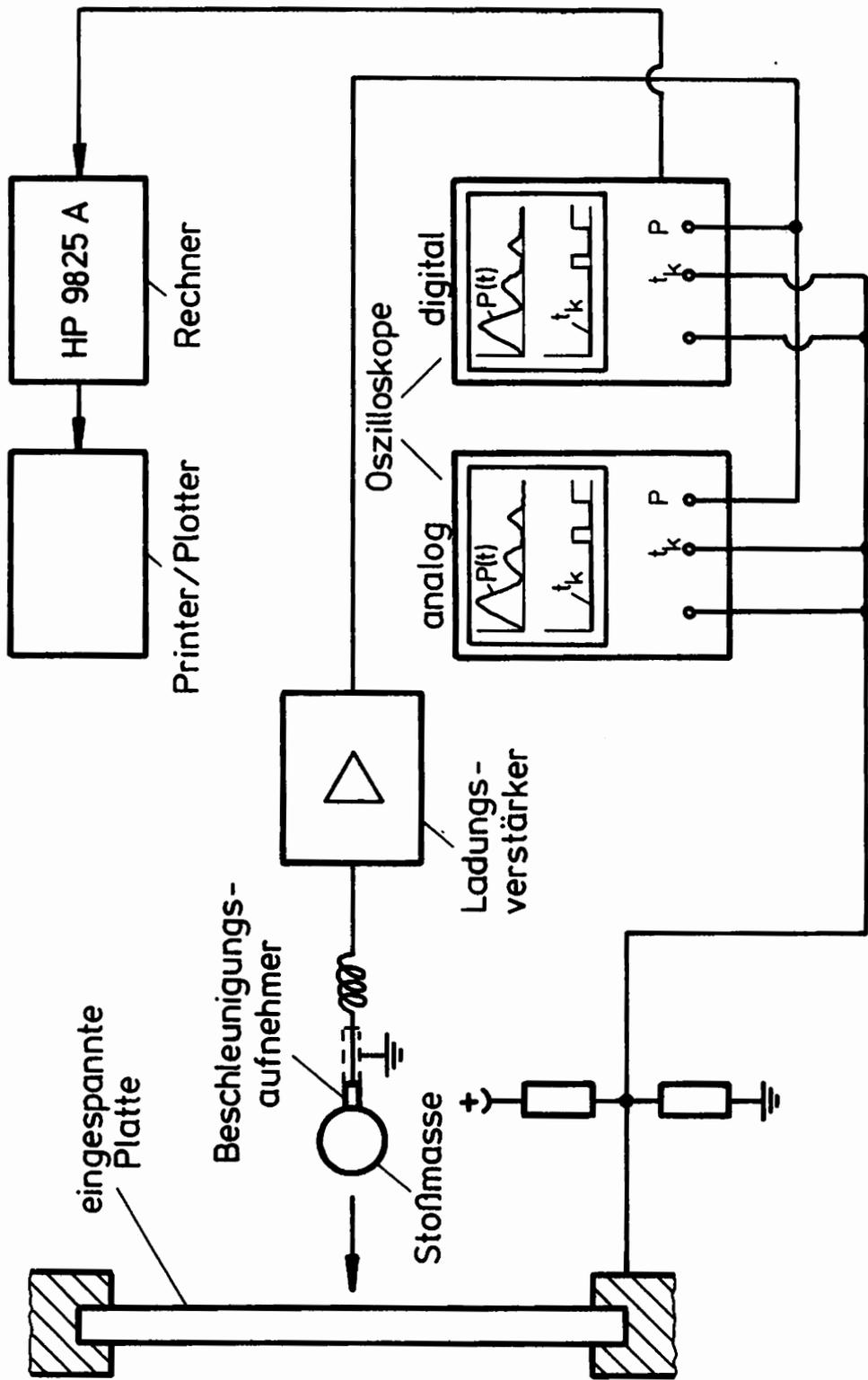


Bild 30: Anordnung zur piezoelektrischen Messung und zur Weiterverarbeitung der zeitlichen Stoßkraftverläufe; gleichzeitig Messung der Kontaktzeit

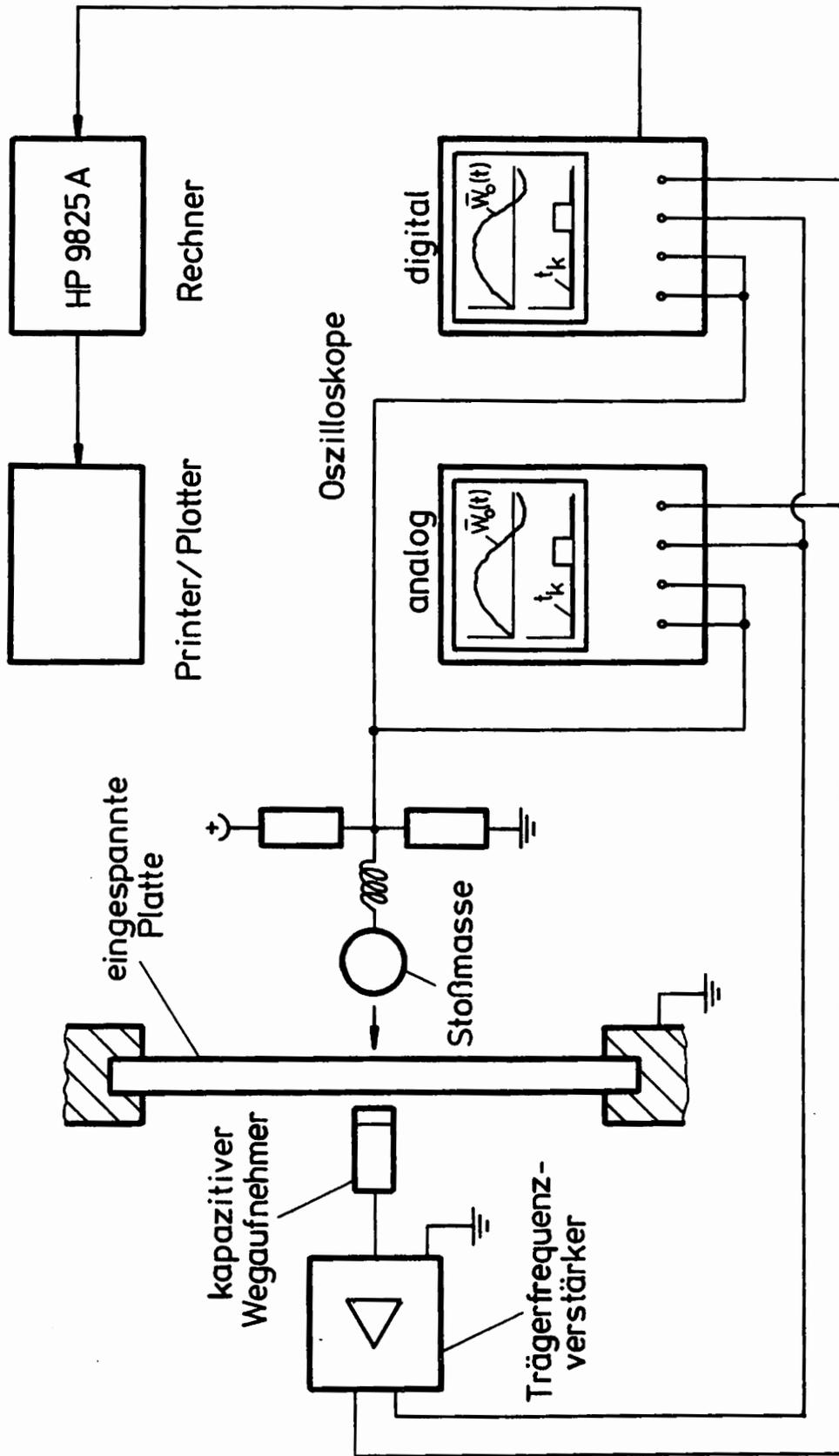


Bild 31: Anordnung zur kapazitiven Messung und zur Weiterverarbeitung der zeitlichen Verläufe der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt; gleichzeitige Messung der Kontaktzeit

Auswertung der aufgezeichneten Stoßkraftsignale war außerdem der Umstand zu berücksichtigen, daß die Signale von der Stoßstelle ausgehend jeweils erst die Kugeln bis zum Beschleunigungsaufnehmer durchlaufen müssen, was eine verzögerte Aufzeichnung der Signale bedeutet. Bei einer Geschwindigkeit von ca. 5000 m/s der Longitudinalwellen in Stahl lag die Verzögerung bei den hier verwendeten Kugeln im Bereich von ca. 9 - 12 μ s. Da die Triggerung der Zeitbasis mit dem ersten Kontakt zwischen Kugel und Plattenoberfläche erfolgte und das Geschehen aber gedanklich auf die Plattenmittelfläche bezogen werden sollte, war bei der Auswertung der Verläufe demgegenüber noch der Umstand zu berücksichtigen, daß die Stoßwellen die Plattenmittelfläche jeweils erst ca. 1,5 μ s nach dem Triggerzeitpunkt erreichten. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß die Platte trotz der nichtleitenden Eigenschaft der Epoxydharzmatrix eine gewisse elektrische Leitfähigkeit besitzt, die auf die Leitfähigkeit der Kohlenstoffasern zurückzuführen ist, deren spezifischer elektrischer Widerstand $1,8 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ cm}$ beträgt. Dadurch konnte bei der CFK-Platte die Triggerung der Zeitbasis des benutzten Kathodenstrahloszilloskops unmittelbar über einen elektrischen Kurzschluß zwischen Platte und Kugel erfolgen.

Die experimentelle Bestimmung der Plattendurchbiegungen erfolgte mit einem auf kapazitivem Prinzip aufgebauten Schwingungs- und Durchbiegungsmeßgerät der Firma Wayne - Kerr. Bild 31 zeigt diesbezüglich die prinzipielle Anordnung zur Messung und Weiterverarbeitung der Verläufe der Plattendurchbiegung. Dem Stoßpunkt genau gegenüberliegend wurde auf der in Bezug auf das Stoßgeschehen rückwärtigen Seite der Platte ein Wegaufnehmer auf definierten Abstand zur Platte gebracht. Der Abstand und damit der Meßbereich war dabei größer als die zu erwartende maximale Durchbiegung einzustellen und betrug bei dem hier verwendeten Wegaufnehmer 2,5 mm. Der im Raum fixierte Wegaufnehmer und die Platte bilden bei diesem Meßprinzip einen Plattenkondensator, dessen Kapazität vom Abstand zwischen Plattenelement und Wegaufnehmer und damit vom Durchbiegungszustand des Plattenelements abhängt. Über eine entsprechende Schaltung in einem angeschlossenen Trägerfrequenzmeßverstärker wird aus der Kapazitätsänderung infolge der Durchbiegung des Plattenelements eine elektrische Spannung in wahlweise modulierter oder demodulierter Form erzeugt, die über den gesamten Meßbereich des Wegaufnehmers proportional zum Abstand Aufnehmer-Platte ist und mit einem Kathodenstrahloszilloskop aufgezeichnet werden kann. Dabei ist in Übereinstimmung mit früheren Erfahrungen noch der Umstand zu berücksichtigen, daß bei den durchgeführten Stoßversuchen die im Oszilloskop aufgezeichneten Signale je-

weils einen gewissen Zeitverzug aufwiesen, d.h. daß der Einsatzpunkt sowie der gesamte Verlauf der Durchbiegungskurven im Oszilloskop jeweils etwas verspätet registriert wurde. Diese offensichtlich meßtechnisch bedingten zeitlichen Verzögerungen in Höhe von erfahrungsgemäß ca. $30 \mu\text{s}$ sind wahrscheinlich auf den Trägerfrequenzmeßverstärker zurückzuführen, dessen Trägerfrequenz bei 50 kHz liegt. Bei der Auswertung der zeitlichen Durchbiegungsverläufe müssen diese Verzögerungen zum Abzug gebracht werden. Da die Triggerung der Zeitbasis wiederum mit dem ersten Kontakt auf der Platten Vorderseite erfolgte, die Durchbiegung aber auf der Rückseite gemessen wurde sowie gedanklich auf die Plattenmittelfläche bezogen werden sollte, war bei der Auswertung noch eine zusätzliche Zeitkorrektur in Höhe von ca. $1,5 \mu\text{s}$ abzuziehen, die der Laufzeit der Longitudinalwellen durch die halbe Plattenhöhe entsprach.

Die DMS-Meßtechnik zur experimentellen Erfassung der Dehnungen unter der Stoßstelle wurde bereits in Kapitel 6.2.2 beschrieben. Dabei wurden Folien-DMS vom Typ HBM 06/120 LY 11 verwendet. Die Triggerung der Zeitbasis erfolgte bei allen hier vorgestellten Meßmethoden jeweils extern durch Kurzschluß zwischen Kugel und Platte, die für diesen Zweck über eine Spannungsteilerschaltung mit unterschiedlichen elektrischen Potentialen belegt wurden, wie man den Bildern 24, 30 und 31 entnehmen kann. Bei den Stoßkraft- und Durchbiegungsmessungen wurden diese Spannungssprünge gleichzeitig im jeweils zweiten Kanal des Oszilloskops noch mit aufgezeichnet, wodurch auch die Kontaktzeit festgehalten werden konnte.

Während die Dehnungsmeßstreifensignale wegen der erforderlichen hohen Empfindlichkeit nur mit einem analogen Speicheroszilloskop vom Typ Tektronix 7623A aufgezeichnet werden konnten, wurde bei der Erfassung der Stoßkraft- und Durchbiegungsverläufe noch zusätzlich ein zweikanaliges digitales Oszilloskop vom Typ Explorer III der Firma Nicolet Instruments benutzt. Dies war für die spätere rechnergestützte Meßwertverarbeitung von Vorteil, da das Oszilloskop über ein Interface mit einem Rechner vom Typ 9825A der Firma Hewlett-Packard verbunden war, so daß unmittelbar Kurven in digitalisierter Form vom Bildschirm des Oszilloskops in den internen Speicher des Rechners eingelesen werden konnten. Umgekehrt bestand die Möglichkeit, theoretisch errechnete Kurvenzüge vom Rechner auf den Bildschirm zurückzugeben und sie dort z.B. mit gleichzeitig eingeblendeten Meßkurven zu vergleichen. Neben dem eingebauten Floppy-Disk Speicherwerk besaß dieses Oszilloskop den Vorteil, auf dem eingebauten Monitor mit einem eingeblendeten elektronischen Fadenkreuz jeden Punkt der Meßkurve anzufahren und dessen

absolute oder relative Zeit- und Amplitudenwerte als Digitalwerte einzublenden. Außerdem konnte die jeweilige Kurve im Bereich des Fadenkreuzes in horizontaler und vertikaler Richtung um das maximal 64-fache gespreizt werden, so daß Einzelheiten, wie z.B. Maxima, Minima, Nulldurchgänge etc., besser untersucht bzw. ausgewertet werden konnten. Abschließend sei noch erwähnt, daß die Funktionstüchtigkeit bzw. Genauigkeit der beschriebenen Geräte und Meßverfahren in Vorversuchen auf geeignete Weise überprüft wurden.

6.3.3 Ergebnisse

Zur Überprüfung der theoretischen Aussagen der Kapitel 4 und 5 wurden umfangreiche Stoßversuche durchgeführt, wobei die Stoßbedingungen mit drei verschiedenen Stoßmassen und jeweils fünf verschiedenen Stoßgeschwindigkeiten variiert wurden. Beispiele aufgezeichneter Verläufe der Stoßkraft, Kontaktzeit, Durchbiegung des gestoßenen Plattenelements und der Dehnungen an der Oberfläche unter der Stoßstelle zeigen die Bilder 32-34.

Die Ergebnisse der Stoßversuche sollen nun theoretischen Werten gegenübergestellt werden. Ausgehend von den Versuchsdaten des Kapitels 6.3.1 berechnen sich zunächst die Biegesteifigkeiten der Platte mit Gl.(131) theoretisch zu

$$\begin{aligned} D_x &= 5284 \text{ Nm} \\ D_y &= 408 \text{ Nm} \\ D_{xy} &= 524 \text{ Nm} \end{aligned} ,$$

woraus sich mit Gl.(152)

$$\underline{\alpha_p = 10,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/Ns}}$$

als theoretischer Wert des Plattenparameters ergibt. Bezüglich des Koeffizienten K des Kontaktkraftgesetzes führen die Kontakttheorien von Sveklo und die Näherungstheorie von Kapitel 4.3 bei den hier vorliegenden Versuchs-

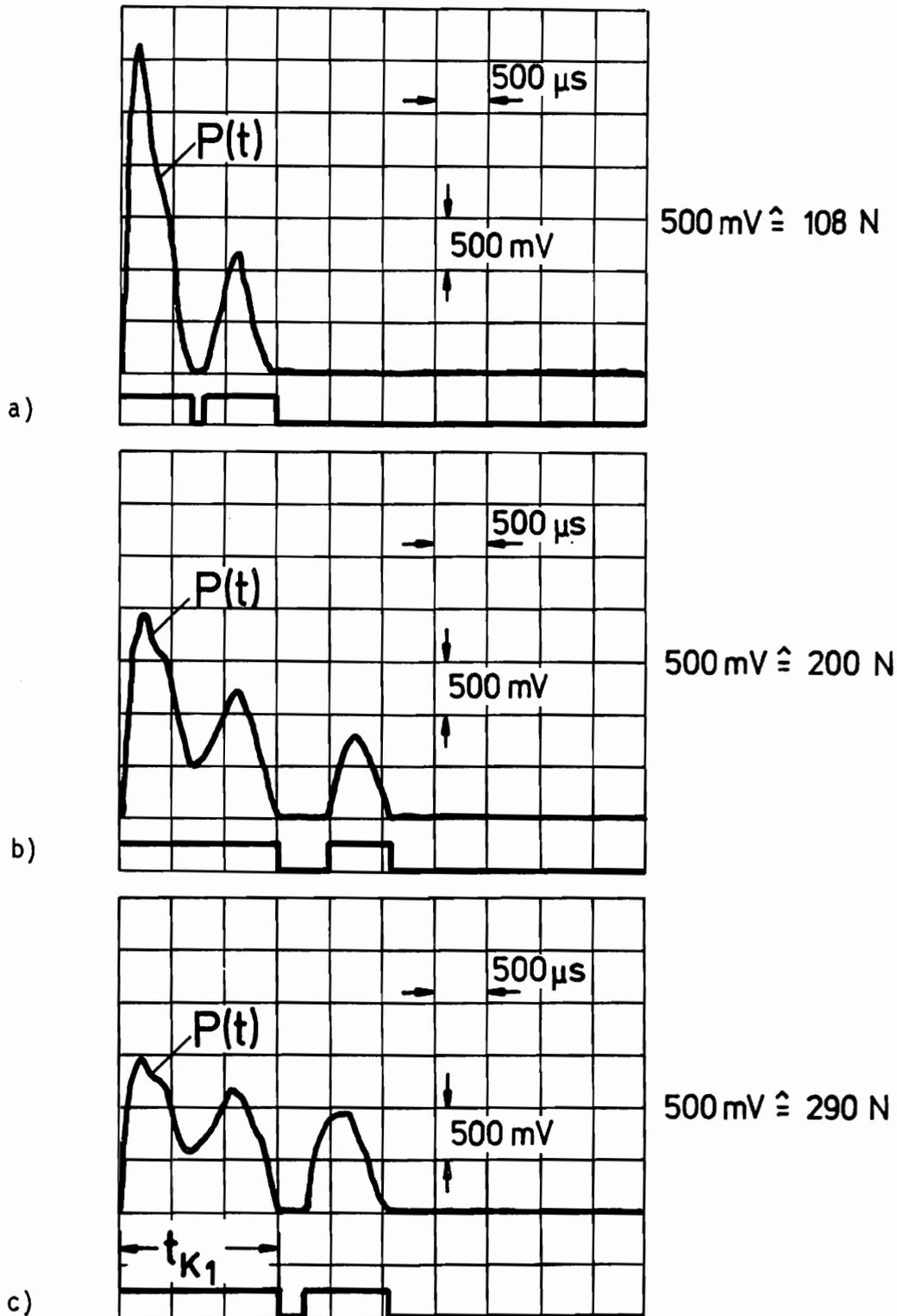


Bild 32: Aufzeichnungsbeispiele gemessener Stoßkraftverläufe und Kontaktzeiten bei einer Stoßgeschwindigkeit von $v_0 = 1 \text{ m/s}$
 a) $m_s = 0,2199 \text{ kg}$ b) $m_s = 0,4078 \text{ kg}$ c) $m_s = 0,5908 \text{ kg}$

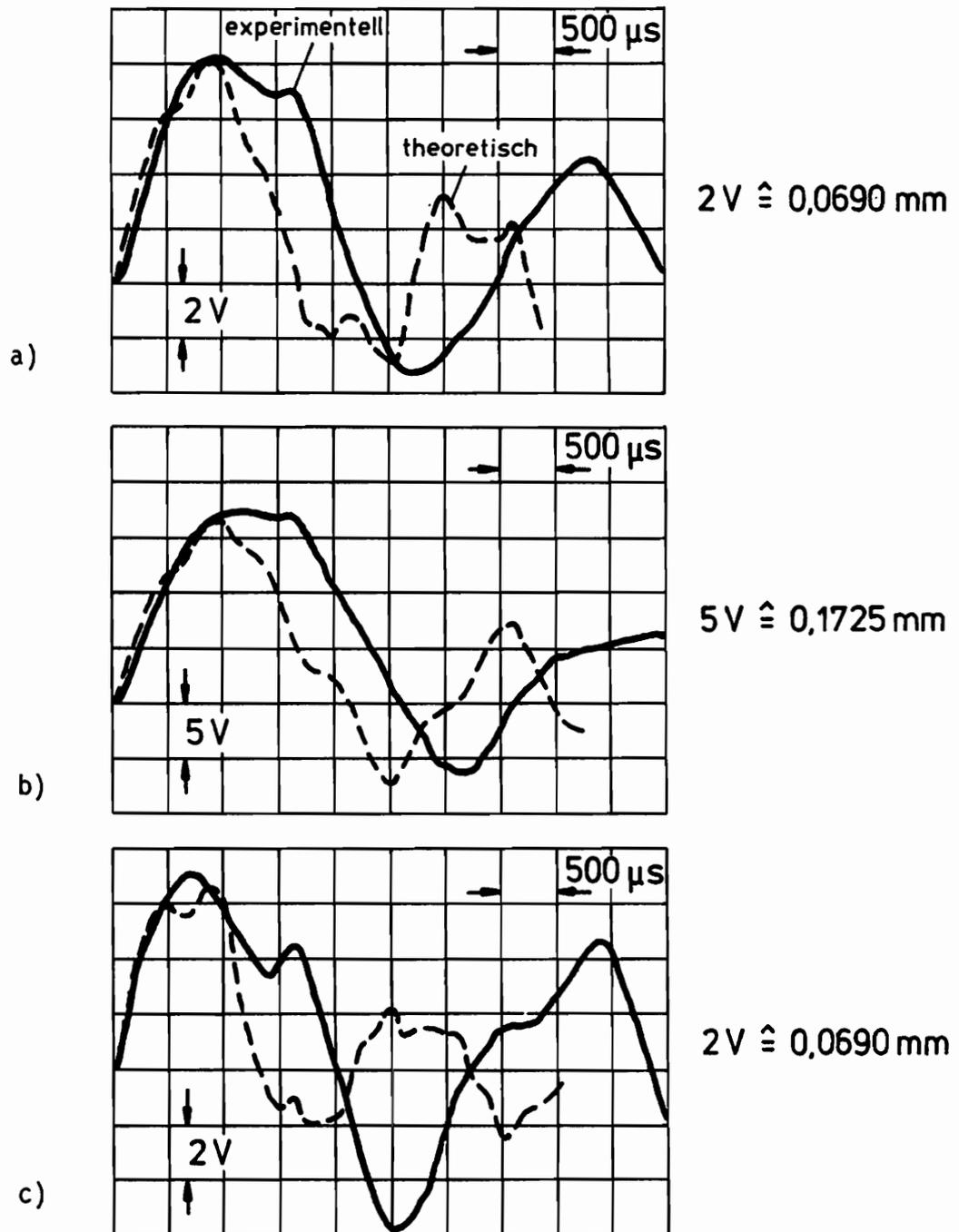


Bild 33: Gemessene zeitliche Verläufe der Durchbiegung unter dem Stoßpunkt. Zum Vergleich sind die mit den Gln.(210),(209) berechneten theoretischen Verläufe für die fest eingespannte Platte gestrichelt angegeben.

a) $v_0 = 0,75\text{ m/s}$, $m_s = 0,4078\text{ kg}$

b) $v_0 = 1,25\text{ m/s}$, $m_s = 0,5908\text{ kg}$

c) $v_0 = 1,00\text{ m/s}$, $m_s = 0,2199\text{ kg}$

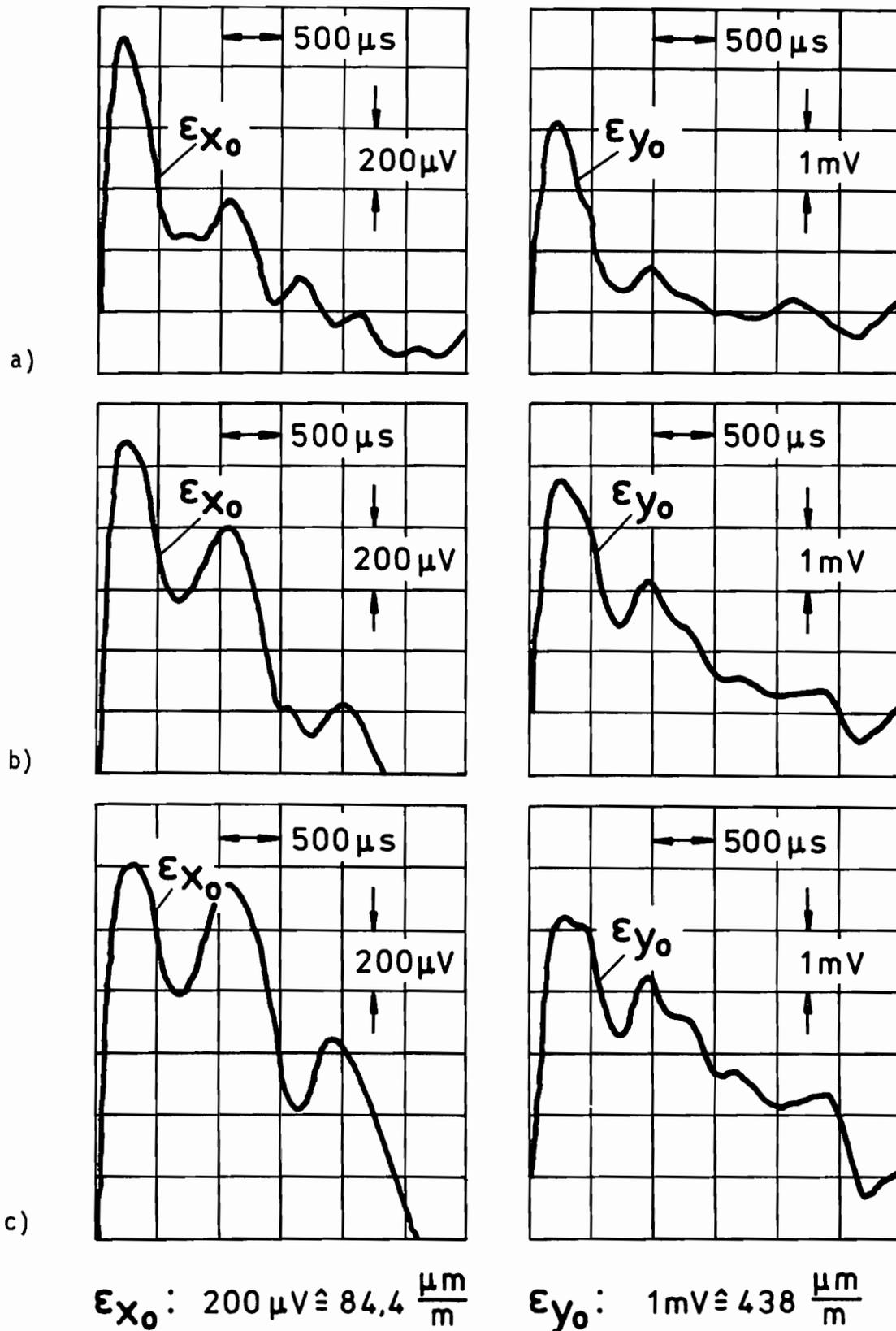


Bild 34: Beispiele aufgezeichneter Verläufe der Dehnungen unter dem Stoßpunkt bei einer Stoßgeschwindigkeit von $v_0 = 1 \text{ m/s}$
 a) $m_s = 0,2199 \text{ kg}$, b) $m_s = 0,4078 \text{ kg}$, c) $m_s = 0,5908 \text{ kg}$

daten auf den gleichen theoretischen Wert

$$\frac{K}{\sqrt{R_s}} = 1,74 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

wobei der Koeffizient auch hier gleich auf den Kugelradius R_s bezogen angegeben wird. Unterschiede, allerdings geringeren Ausmaßes, liefern beide Theorien bezüglich des Halbachsenverhältnisses r_x/r_y der Kontaktflächen

	Sveklo	Näherungstheorie
r_x/r_y	0,85	0,82
$r_y/(P R_s)^{1/3}$	$4,16 \cdot 10^{-4} (\text{m}^2/\text{N})^{1/3}$	$5,13 \cdot 10^{-4} (\text{m}^2/\text{N})^{1/3}$

und bezüglich der auf das Produkt $(P R_s)^{1/3}$ bezogenen Kontakthalbachse r_y .

Die experimentellen Ergebnisse wurden nun zunächst daraufhin überprüft, ob für das sogenannte Stoßfrühstadium, d.h. hier die ersten ca. 250 μs nach Stoßbeginn, in Hinblick auf die vereinfachte Durchbiegungsbeziehung von

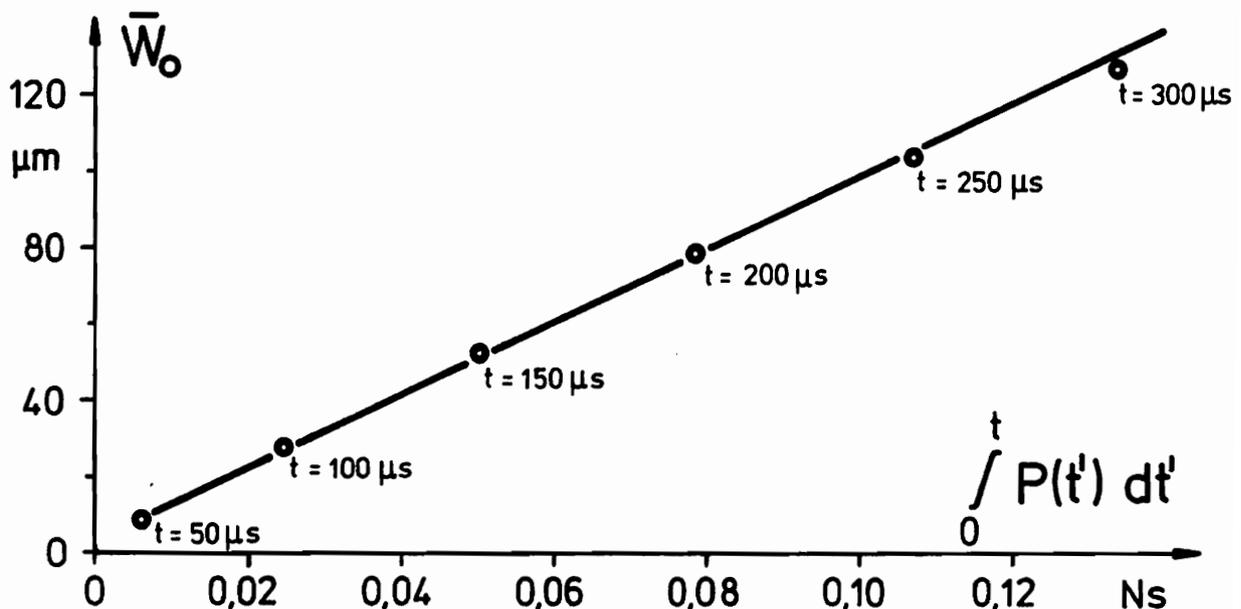


Bild 35: Zuordnung der gemessenen Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt zu den Zeitintegralen über die gemessene Stoßkraft;

$$v_0 = 0,75 \text{ m/s}, \quad m_s = 0,4078 \text{ kg}$$

Gl.(153) ein linearer Zusammenhang zwischen der Durchbiegung des gestoßenen Plattenelements und dem Zeitintegral über die Stoßkraft festgestellt werden kann. Dazu wurden bei allen Stoßversuchen die kapazitiv gemessenen Durchbiegungen den zuzuordnenden Zeitintegralen über die gemessene Stoßkraft gegenübergestellt. Bild 35 zeigt dies exemplarisch für einen Stoßversuch. Hier, wie in allen anderen Versuchen auch, konnte im untersuchten Frühstadium eine befriedigende Linearität festgestellt werden und aus der jeweiligen Steigung der diese Linearität beschreibenden Geraden der experimentelle Wert des Plattenparameters bestimmt werden. Als Mittelwert aus allen Stoßversuchen ergab sich

$$\underline{\alpha_{p_{exp}} = 10,3 \cdot 10^{-4} \text{ m/Ns} \quad ,}$$

wobei die größte einzelne Abweichung von diesem Mittelwert relativ unter 9% lag.

Weiterhin wurden für das Frühstadium mit dem theoretischen Plattenparameter und dem theoretischen Koeffizienten K des Kontaktkraftgesetzes aus der nichtlinearen Differentialgleichung die Verläufe der Stoßkraft berechnet. Bild 36 zeigt diesbezüglich einen Vergleich berechneter und gemessener Stoßkraftmaxima bei verschiedenen Stoßbedingungen. Eine Gegenüberstellung geplotteter zeitlicher Verläufe von theoretischer und experimenteller Stoßkraft im Frühstadium zeigt exemplarisch für einen Stoßversuch Bild 37a. Man erkennt darin neben einer gewissen Überhöhung des theoretischen Maximums den deutlich steileren Anstieg des theoretischen Stoßkraftverlaufs gegenüber dem experimentellen.

Aus den berechneten Stoßkraftverläufen der vereinfachten Stoßtheorie konnten ferner mit Gl.(153) die Durchbiegungen des gestoßenen Plattenelements im Frühstadium bestimmt werden, wozu Bild 38a wiederum einen Vergleich theoretischer und experimenteller Verläufe zeigt. Die erst weit nach Ablauf des Frühstadiums auftretenden Durchbiegungsmaxima wurden demgegenüber mit der in Kapitel 5.5.2 erläuterten Methode unter Verwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes aus Gl.(223) berechnet. Für die verschiedenen Stoßmassen und Stoßgeschwindigkeiten sind sie in Bild 39 gemessenen Werten gegenübergestellt. Die benötigte Federsteifigkeit C_p der Platte war dabei aus den Versuchsdaten mit Gl.(239) theoretisch zu

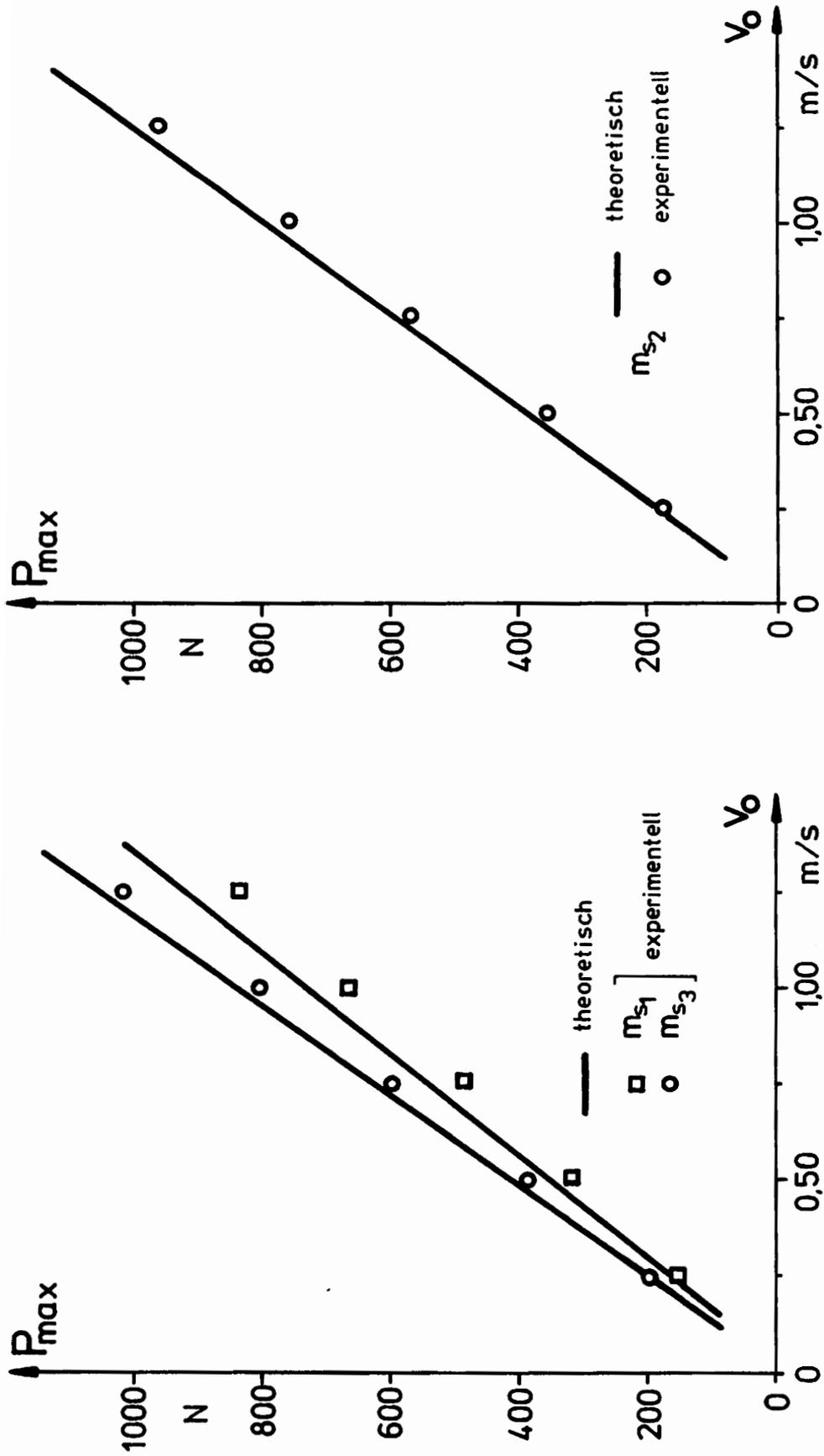


Bild 36: Vergleich experimenteller und theoretischer Stoßkraftmaxima bei verschiedenen Stoßmassen und Stoßgeschwindigkeiten; $m_{s1} = 0,2199$ kg, $m_{s2} = 0,4078$ kg, $m_{s3} = 0,5908$ kg

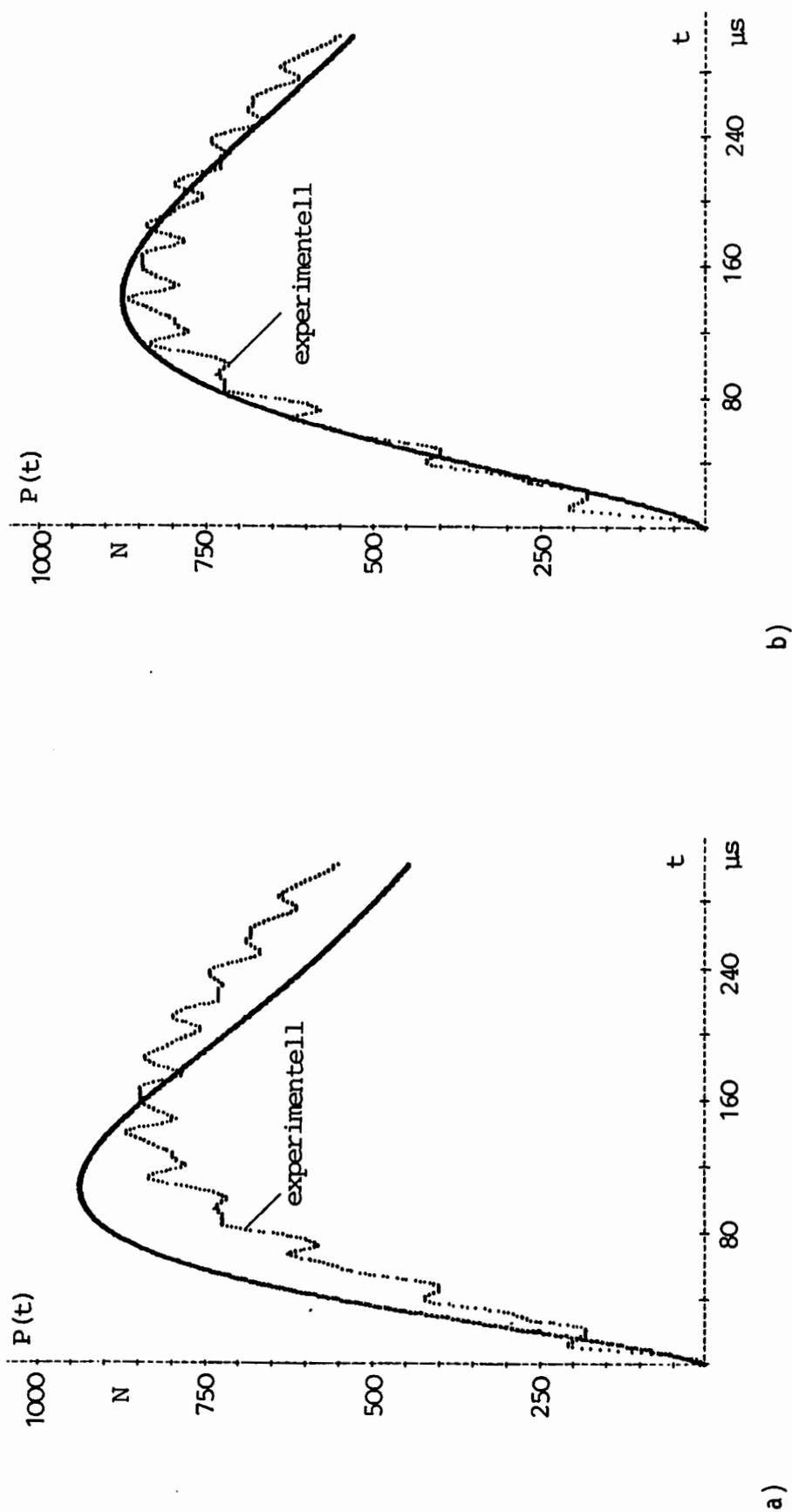


Bild 37: Gemessener und theoretischer Stoßkraftverlauf bei einer Stoßgeschwindigkeit von $v_0 = 1,25$ m/s mit der Kugel $m_{s1} = 0,2199$ kg ($\bar{\lambda} = 2,43$; $K(v_0 T)^{3/2} = 2942$ N). Die theoretischen Verläufe wurden aus der nichtlinearen Differentialgleichung (164) unter Benutzung des Koeffizienten des

a) Kontaktkraftgesetzes von Sveklo

b) experimentellen Kontaktkraftgesetzes berechnet

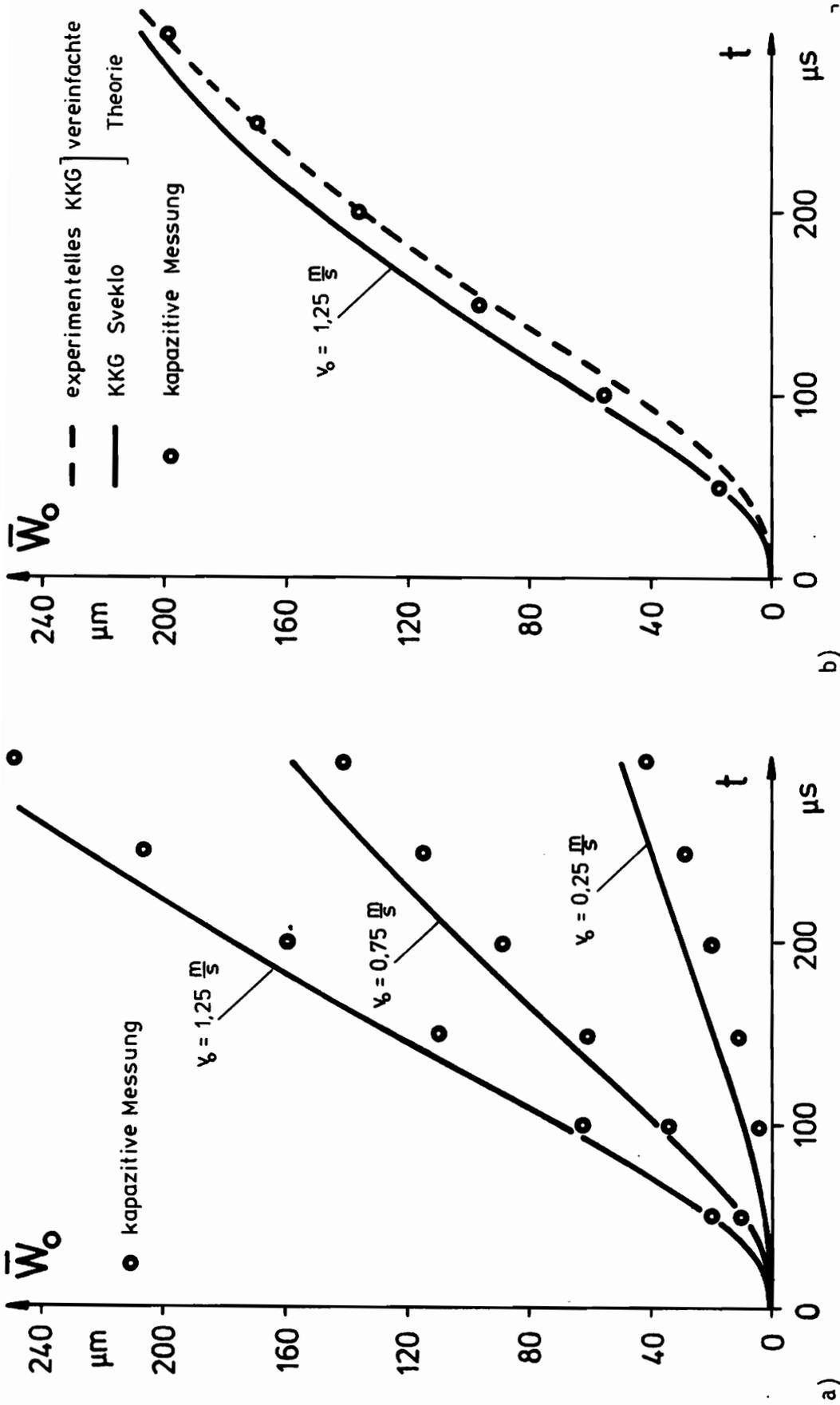


Bild 38: Vergleich gemessener und theoretischer Verläufe der Plattendurchbiegung im Frühstadium des Stoßes;
 a) $m_S = 0,5908 \text{ kg}$ b) $m_S = 0,2199 \text{ kg}$

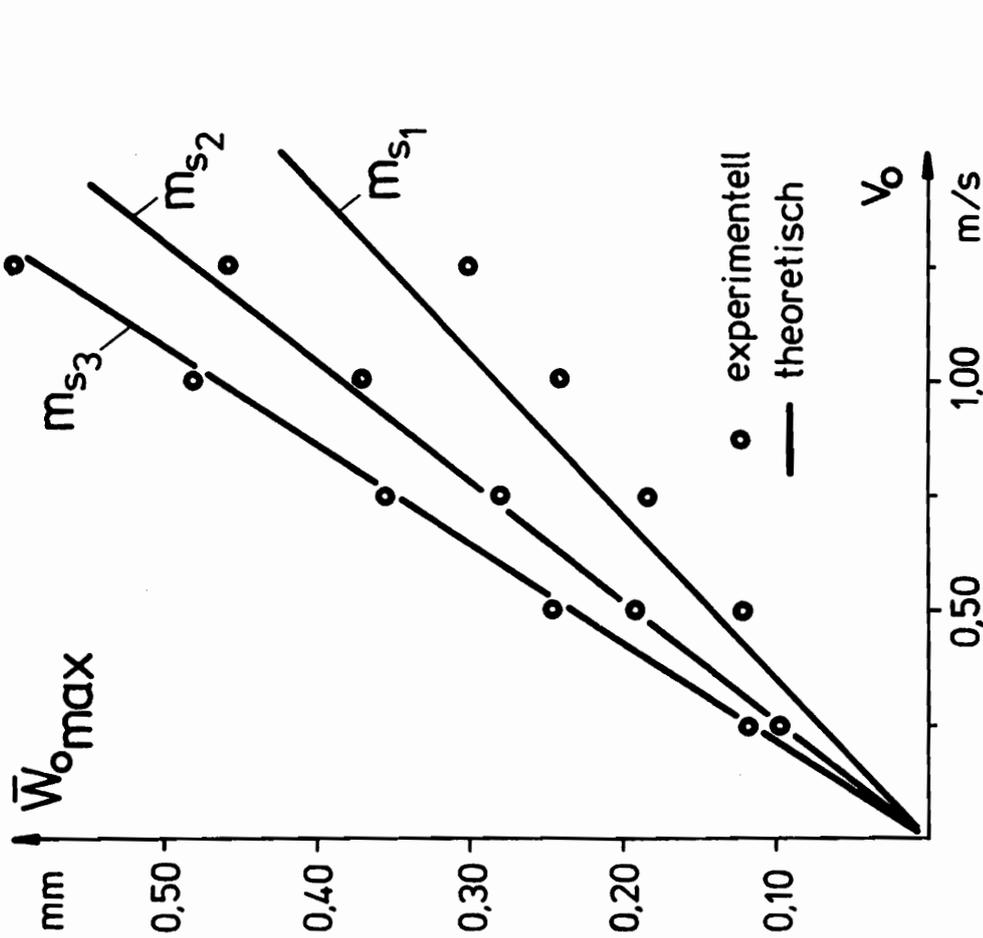


Bild 39: Vergleich berechneter und gemessener Werte der maximalen Plattendurchbiegung am Stoßpunkt in Abhängigkeit von Stoßmasse und Stoßgeschwindigkeit; $m_{s1} = 0,2199 \text{ kg}$, $m_{s2} = 0,4078 \text{ kg}$, $m_{s3} = 0,5908 \text{ kg}$

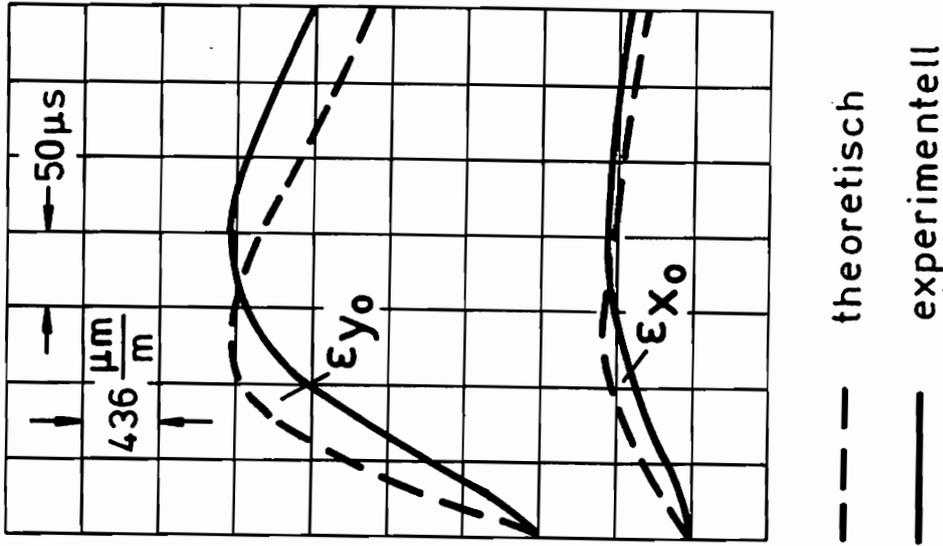


Bild 40: Zeitlicher Verlauf der Dehnungen unter dem Stoßpunkt im Frühstadium des Stoßes (theoretische Kurve berechnet mit zeitveränderlichem t_0); $m_s = 0,2199 \text{ kg}$, $v_0 = 1,25 \text{ m/s}$

$$C_p = 2,76 \cdot 10^6 \text{ kg/s}^2$$

berechnet worden. Die in Bild 39 auftretenden Differenzen zwischen Theorie und Experiment sind auf zwei mögliche Fehlerquellen der Theorie zurückzuführen, die sich auf die berechneten Werte allerdings gegenläufig auswirken. Zum einen ist die berechnete Federsteifigkeit C_p nur als Näherungswert zu verstehen, da zu ihrer Berechnung nur die Grundschwingungsform eines Näherungsansatzes für die Durchbiegung der fest eingespannten Platte berücksichtigt wurde. Die berechnete Federsteifigkeit dürfte damit etwas zu hoch sein, so daß die damit ermittelten Durchbiegungsmaxima geringfügig zu niedrig sein dürften. Dazu kommt eine zweite Fehlerquelle der Theorie, die auf der Vernachlässigung der kinetischen Energie der Stoßmasse zum Zeitpunkt der maximalen Plattendurchbiegung in Gl.(222) beruht. Diese kinetische Energie kann bei den hier untersuchten Stoßbedingungen genaugenommen nur im Fall der größten Stoßmasse m_{s3} nahezu vernachlässigt werden. Mit kleiner werdender Stoßmasse nimmt die Bedeutung dieses Energieterms immer mehr zu, so daß dessen Vernachlässigung auf überhöhte theoretische Durchbiegungsmaxima führt.

Eine weitere, wenn auch weitaus umständlichere Möglichkeit, die Durchbiegungsverläufe nach Ablauf des Frühstadiums zu berechnen, besteht außerdem noch in folgender Vorgehensweise. Man löst unter Berücksichtigung der tatsächlichen Randbedingungen der hier fest eingespannten Platte die Integralgleichung (210) und berechnet sich aus den ermittelten Stoßkräften mit Gl.(209) die Durchbiegungen. Bei der praktischen Durchführung wurde dabei aus programmtechnischen Gründen unter Annahme gleichmäßiger Konvergenz in den Gleichungen (209) und (210) die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht. Entsprechende theoretische Verläufe unter Berücksichtigung von 400 Gliedern der unendlichen Doppelreihe ($m = n = 40$) im Vergleich mit experimentellen Verläufen findet man exemplarisch in Bild 33.

Dieses Kapitel abschließende Untersuchungen galten noch den experimentellen und theoretischen Dehnungen an der rückwärtigen Oberfläche des gestoßenen Plattenelements und den damit zusammenhängenden Biegemomenten. Nach der Beziehung von Gl.(192) war bei der hiesigen Platte im Frühstadium ein konstantes Verhältnis der Biegedehnungen in x- und y-Richtung von theoretisch

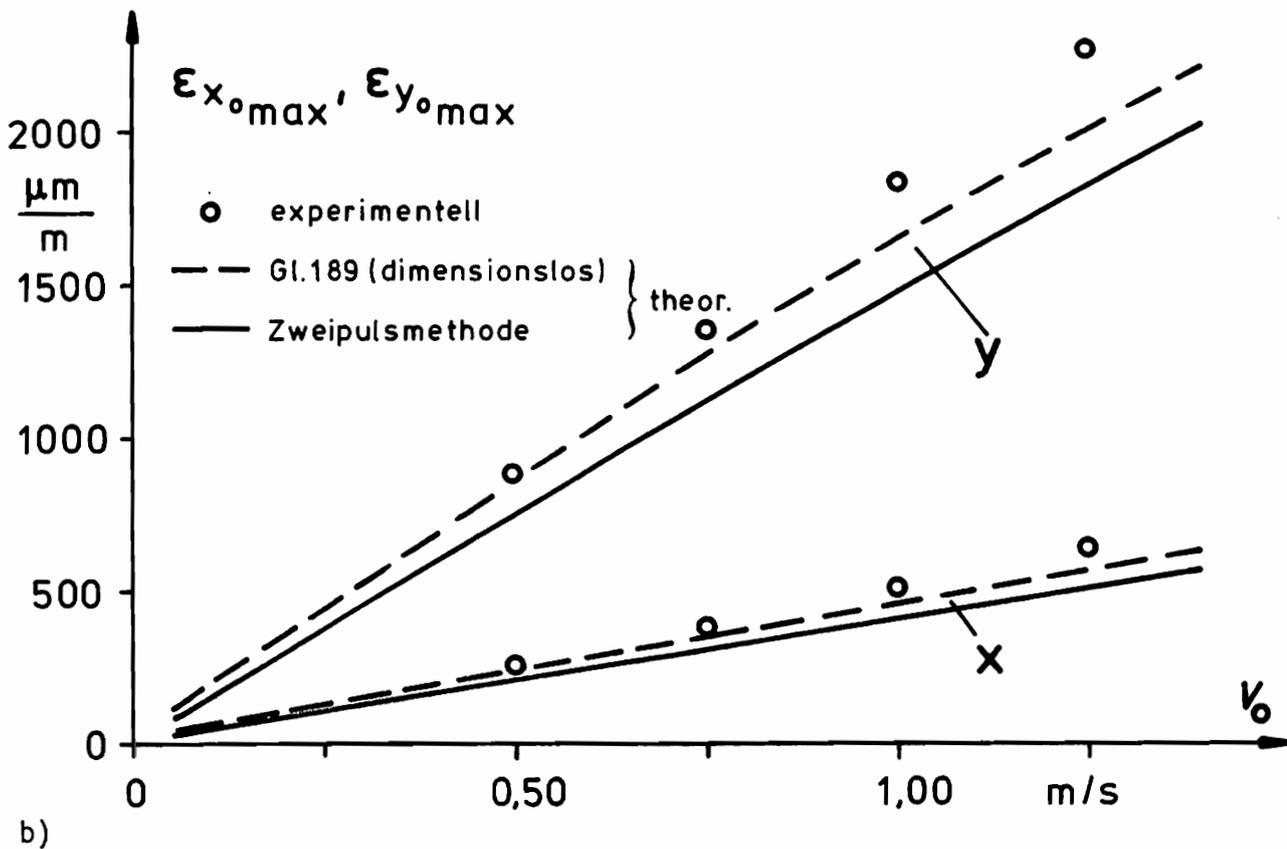
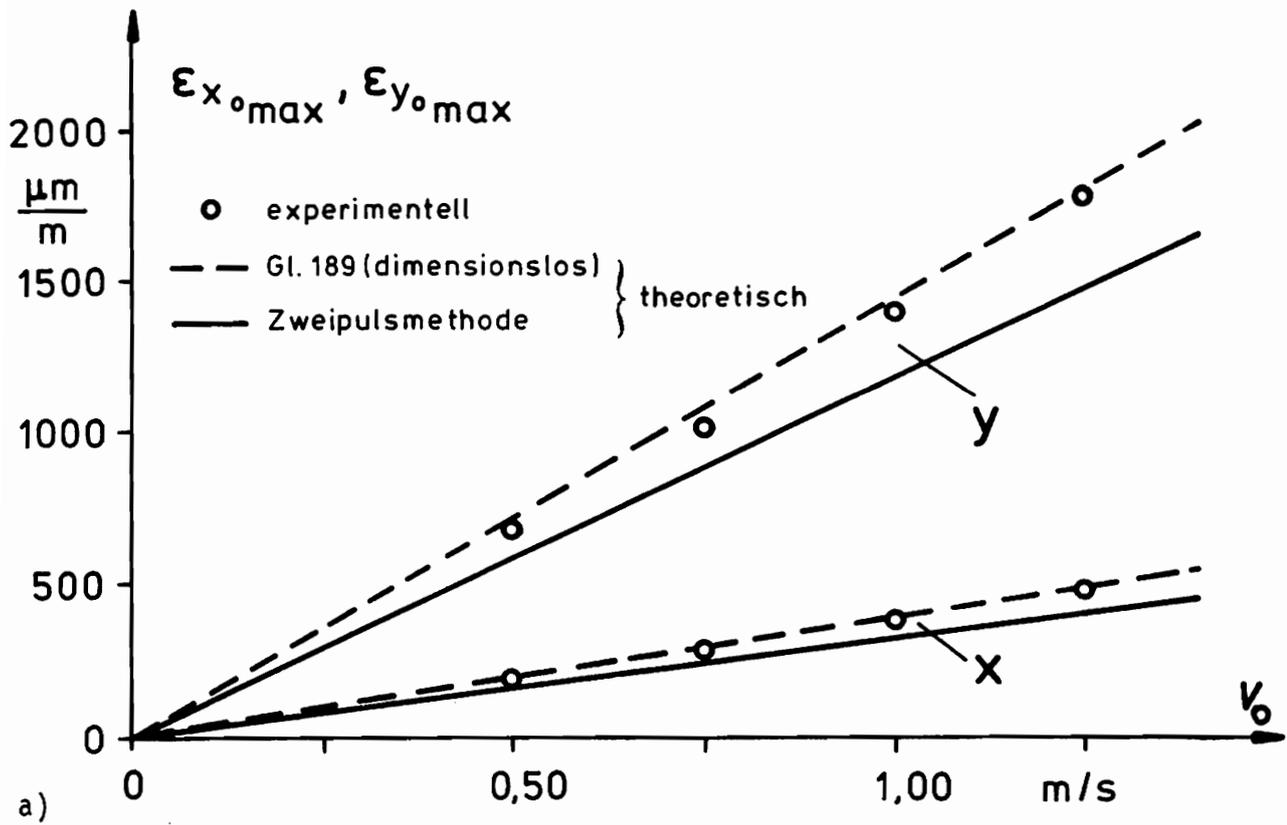


Bild 41: Maxima der Dehnungen unter dem Stoßpunkt,
 (bei den mit der dimensionslosen Darstellungsweise ermittelten
 Werten wurde t_0 jeweils aus Gl.(184) mit der Kontakttheorie von
 Sveklo und dem jeweiligen Stoßkraftmaximum P_{\max} berechnet);
 a) $m_s = 0,2199$ kg, b) $m_s = 0,5908$ kg

$$\epsilon_{y_0} / \epsilon_{x_0} = (E_x / E_y)^{1/2} = 3,60$$

zu erwarten. Dem steht ein experimenteller Durchschnittswert von

$$(\epsilon_{y_0} / \epsilon_{x_0})_{\max} = 3,64$$

gegenüber, der aus einer Auswertung der gemessenen Dehnungsmaxima aller Stoßversuche ermittelt wurde. Weitere Ergebnisse bezüglich der Dehnungen zeigen außerdem die Bilder 40 und 41. Bei den theoretischen Werten wurden dabei zunächst die Stoßkräfte mit der vereinfachten Theorie aus der Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (164) berechnet. Davon ausgehend wurden die Krümmungen und damit die Biegedehnungen zunächst aus Gl.(182) berechnet. Ein exemplarisches Ergebnis findet man in Bild 40. Dabei wurde für jeden diskreten Integrationsschritt die Zeitkonstante t_0 nach Gl.(184) unter Verwendung der Kontakttheorie von Sveklo als Funktion der mit der Stoßkraft zeitveränderlichen Halbachsen r_x, r_y der Kontaktfläche berechnet. Dazu ergänzend stehen die in Bild 41 dargestellten Resultate bezüglich der Dehnungsmaxima. Die theoretischen Werte wurden dabei auf relativ einfache Weise zum einen unter Anwendung der dimensionslosen Darstellungsweise (Gl.(189) in Verbindung mit Tabelle 3, Bild 21) und zum anderen mit der am Ende von Kapitel 5.4 erläuterten Methode der Zweipulszerlegung bestimmt. Die Berechnung von t_0 aus Gl.(184) erfolgte dabei ebenfalls unter Verwendung der Kontakttheorie von Sveklo.

Den Vergleich Theorie-Experiment bezüglich der Dehnungen abschließend sei noch auf folgende Umstände hingewiesen. Im theoretischen Teil werden nur die Biegedehnungen im Rahmen der hier benutzten Plattentheorie berücksichtigt. Zusätzliche Biege- und Längsausdehnungen aus Nahfeldeinflüssen, die von Schwieger et al. /88/ z.B. beim Biegestoß auf einen Balken berücksichtigt wurden, werden hier vernachlässigt, so daß in gewissen Grenzen durchaus Unterschiede zu den experimentellen Werten, die den tatsächlichen Dehnungen entsprechen, zu erwarten sind. Außerdem steckt in der Wahl zur Berechnung der Zeitkonstanten t_0 nach Gl.(184) eine gewisse Willkürlichkeit, die durch zukünftige Untersuchungen noch zu klären wäre. Dies ist vor allem deshalb zu betonen, da die berechneten Ergebnisse der Krümmungsverläufe nicht unwesentlich von t_0 beeinflußt werden.

6.4 Untersuchungen zum Kontaktkraftgesetz

Die zunehmende Bedeutung faserverstärkter Verbundmaterialien in der Luft- und Raumfahrttechnik, die damit zusammenhängenden Untersuchungen zum Verhalten bei Stoßbelastungen und insbesondere die Tatsache, daß die modernen Verbundmaterialien entgegen ihren sonstigen überragenden mechanischen Eigenschaften je nach Laminataufbau eine mehr oder weniger schwache Resistenz gegenüber Stoßvorgängen besitzen, haben in neuerer Zeit zu einer Reihe experimenteller Untersuchungen des Kontaktverhaltens geführt /4/,/43/,/52/,/68/,/70/.

Bei den genannten Arbeiten wurden die Parameter des exponentiellen Kontaktkraftgesetzes jeweils durch einfache statische Druckversuche z.B. von Stahlkugeln auf die zu untersuchende Verbundstruktur ermittelt. Dabei wurden mit Wegmeßuhren bei einer schrittweisen Steigerung der statischen Last z.B. jeweils nach 30 - 40 Sekunden die zugehörigen Annäherungen der Kontaktpartner abgelesen. Die Auswertungen der Versuche führten zu folgenden Ergebnissen. Bezüglich der Parameter des Kontaktkraftgesetzes muß bei statischen Versuchen zwischen der Belastung und der Entlastung unterschieden werden. So hat der Exponent des Kontaktkraftgesetzes bei der Belastung den erwarteten Wert von $3/2$, während er bei der Entlastung Werte unter $3/2$ annimmt. Die jeweiligen Verfasser führen dies in der Hauptsache darauf zurück, daß auch schon bei relativ kleinen Kontaktkräften irreversible Energieverluste z.B. in Form von einzelnen Faserbrüchen auftreten. Zum anderen macht sich bei den statischen Versuchen vor allem aber auch der Kriecheffekt bemerkbar, der bei größeren Lasten dominierenden Einfluß gewinnt, so daß dann nach /70/ einer vorgegebenen Last überhaupt keine eindeutige Annäherung mehr zugeordnet werden kann. Darüberhinaus existieren neuere Arbeiten von Doyle /39/,/40/ zur Bestimmung der dynamischen Parameter aus Dehnungsmessungen an stoßbelasteten Balken. Die dazu notwendigen vereinfachten Beziehungen für die Dehnungen an der Oberfläche wurden aber bisher nur für isotropes Material angegeben.

Hier wurden nun die im Kapitel 4.4 vorgestellten Methoden zur Bestimmung der dynamischen Parameter des Kontaktkraftgesetzes angewendet. Dabei sollten die Aussagen der Kontakttheorien des Kapitels 4 überprüft werden. Insbesondere sollte die Frage geklärt werden, ob die idealisierende Annahme, daß die Kontaktfläche sehr klein ist im Vergleich zu den übrigen Abmessungen der Kontaktpartner, auf den hier vorliegenden Fall einer mehr oder we-

niger dicken bzw. dünnen Platte anwendbar ist oder ob z.B. Unterschiede in den experimentellen Kontaktkraftgesetzparametern beim Stoß auf die faserverstärkte Platte zum einen und beim Stoß auf einen Halbraum gleichen Materials zum anderen auftreten.

a) Stoß auf die Platte:

Hier wurden die Meßwerte der Hauptstoßversuche des Kapitels 6.3 ausgewertet. Dazu wurden jeweils für die drei Stoßgeschwindigkeiten $v_0 = 0,25$ m/s bzw. $0,75$ m/s bzw. $1,25$ m/s der drei benutzten Stoßkugeln aus den gemessenen Stoßkräften mit der Integralbeziehung (118) die Schwerpunktsannäherungen der Stoßpartner im Frühstadium ermittelt. Aus der Zuordnung der sich zeitlich entsprechenden Wertepaare von Annäherung und Stoßkraft konnte dann mit den Mitteln der Ausgleichsrechnung über das Prinzip vom Minimum der Fehlerquadrate der Exponent E und der Koeffizient K für jeden Stoßversuch bestimmt werden. Entsprechend der diskreten Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,5$ μ s wurden dabei jeweils über 200 Wertepaare berücksichtigt. Bild 42 zeigt diesbezüglich für einen Stoßversuch einige Wertepaare der Be- und Entlastungsphase und die durch Ausgleichsrechnung gewonnene Kurve des Kontaktkraftgesetzes. Da die benutzte Methode auf das Frühstadium beschränkt ist, konnten die Entlastungsphasen jeweils nur teilweise zur Auswertung herange-

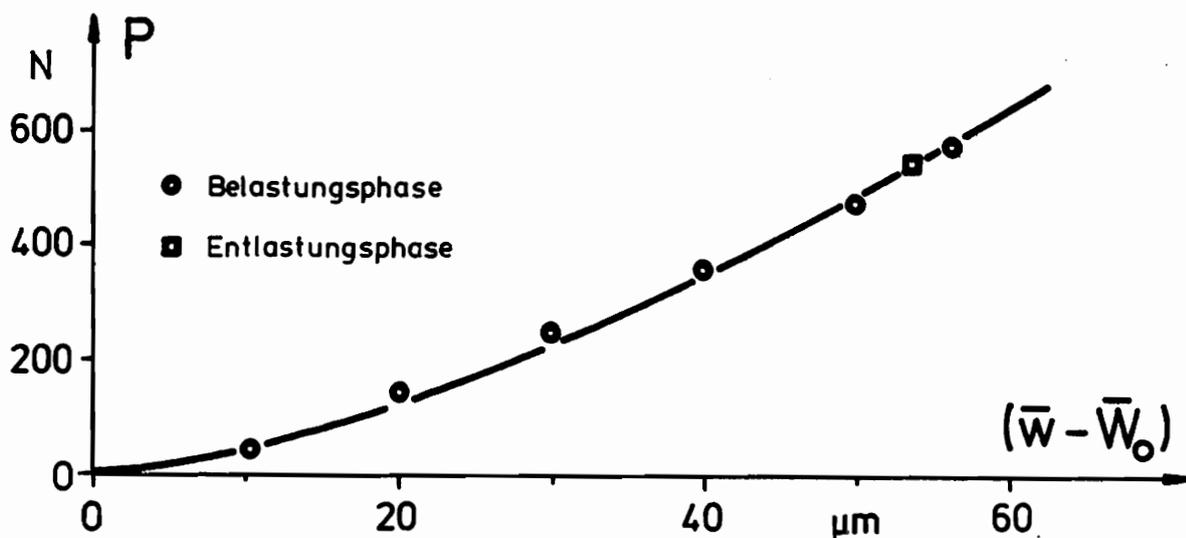


Bild 42: Wertepaare von Stoßkraft und Annäherung der Stoßpartner beim Biegestoß auf die orthotrope Platte; die ausgezogene Kurve stellt das durch Ausgleichsrechnung ermittelte Kontaktkraftgesetz dar.

$$v_0 = 0,75 \text{ m/s} , \quad m_s = 0,4078 \text{ kg}$$

zogen werden. Insgesamt ergaben sich schließlich folgende Resultate. Eine Abhängigkeit des Exponenten E von der Stoßgeschwindigkeit oder der Stoßmasse konnte nicht festgestellt werden. Der gemittelte Wert aller einzeln bestimmten Exponenten betrug

$$\underline{E = 1,50} \quad ,$$

wobei die größte Abweichung eines Einzelwertes relativ unter 1,3% lag. Wie theoretisch erwartet konnte ebenfalls keine Änderung des Koeffizienten K mit der Stoßgeschwindigkeit festgestellt werden, wohl aber eine dem Faktor $R_s^{-1/2}$ proportionale Abhängigkeit vom Kugelradius R_s . Der aus den Versuchen gemittelte experimentelle Wert von K betrug bezogen auf $R_s^{1/2}$

$$\frac{K}{\sqrt{R_s}} = 0,97 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad .$$

Dies ist eine recht deutliche Abweichung vom Wert der Kontakttheorien in Höhe von $1,74 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

b) Stoß auf den Halbraum:

Da ein weit ausgedehnter Halbraum des hier untersuchten Plattenmaterials nicht zur Verfügung stand, wurde versucht, den Halbraum über eine rückwärtige Verstärkung des 8mm dicken Verbundmaterials durch einen massiven Stahlblock wenigstens angenähert zu realisieren. Auf die so verstärkte Struktur wurde dann mit den 3 Stahlkugeln

$$\left. \begin{array}{l} R_{s_4} = 0,0254 \text{ m} ; \quad m_{s_4} = 0,599 \text{ kg} \\ R_{s_5} = 0,0300 \text{ m} ; \quad m_{s_5} = 0,929 \text{ kg} \\ R_{s_6} = 0,0350 \text{ m} ; \quad m_{s_6} = 1,478 \text{ kg} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Massen mit} \\ \text{Beschleunigungsaufnehmer} \end{array}$$

mit Geschwindigkeiten bis zu 0,50 m/s gestoßen, wobei ansonsten die Versuchsdaten des Kapitels 6.3.1 gelten.

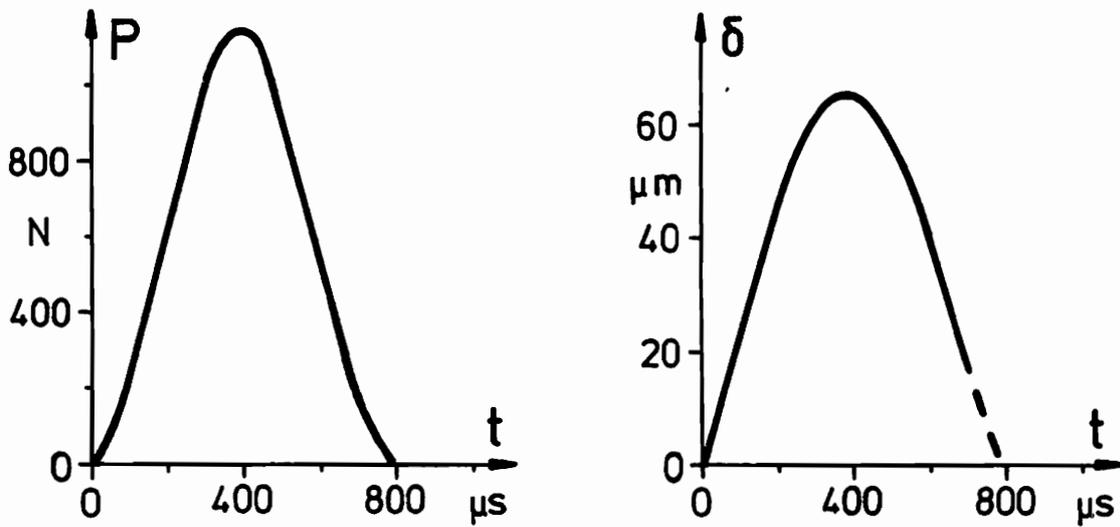


Bild 43: Gemessene Stoßkraft und der daraus mit Gl.(118) berechnete Verlauf der Annäherung der Stoßpartner beim Stoß der Kugel $m_{s5} = 0,929 \text{ kg}$ auf den anisotropen Halbraum; $v_0 = 0,25 \text{ m/s}$

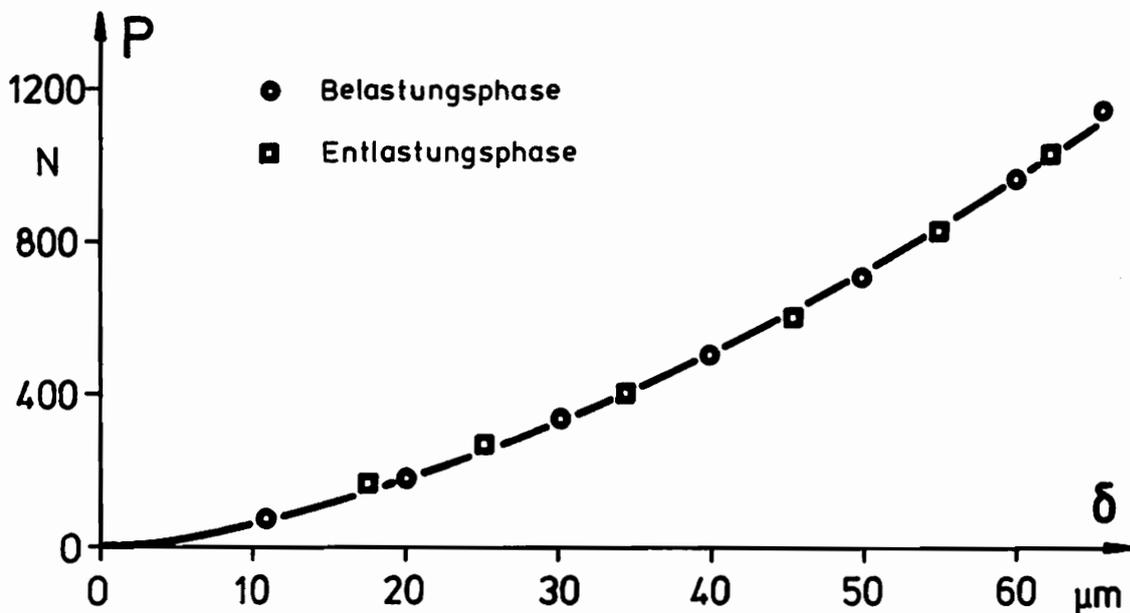


Bild 44: Experimentelles Kontaktkraftgesetz für die Be- und Entlastungsphase beim Stoß der Kugel $m_{s5} = 0,929 \text{ kg}$ auf den anisotropen Halbraum; $v_0 = 0,25 \text{ m/s}$

Für jeden Stoßversuch konnte dann mit Gl.(120) aus dem gemessenen Stoßkraftverlauf der jeweilige Verlauf der Annäherung berechnet werden. Entsprechende zeitliche Verläufe zeigt dazu exemplarisch Bild 43. Unter der zuvor experimentell verifizierten Annahme von $E = 3/2$ als Wert des Exponenten wurde dann aus der Gegenüberstellung sich zeitlich entsprechender Wertepaare von Stoßkraft und Annäherung über die Ausgleichsrechnung für jeden Stoßversuch der Koeffizient K ermittelt. Den exponentiellen Verlauf des Kontaktkraftgesetzes mit entsprechenden Wertepaaren von Stoßkraft und Annäherung zeigt Bild 44 für einen Stoßversuch. Da hier kein Frühstadium zu berücksichtigen war, konnte die gesamte Entlastungsphase zur Auswertung herangezogen werden. Wie zu erkennen ist, waren die Stoßversuche bei den hier verwendeten Stoßgeschwindigkeiten nahezu elastisch, d.h. hysteresefrei.

Des Weiteren wurde der Koeffizient noch aus der maximalen Stoßkraft P_{\max} mit Gl.(125) berechnet. Zusammenfassend konnte wiederum keine Abhängigkeit des Koeffizienten K von der Stoßgeschwindigkeit festgestellt werden, wohl aber wiederum eine zu $R_s^{-1/2}$ proportionale Abhängigkeit vom Kugelradius. Im Mittel ergab sich

$$\frac{K}{\sqrt{R_s}} = 1,26 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

als experimenteller Wert des bezogenen Koeffizienten beim Stoß der Stahlkugeln auf den faserverstärkten Halbraum. Dies entspricht einer besseren Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert als beim Plattenstoß. Im übrigen zeigt sich beim Halbraumstoß auch eine recht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, wenn man mit den Gln.(123),(124) mit dem theoretischen Koeffizienten K das Stoßkraftmaximum P_{\max} und den Zeitpunkt maximaler Stoßkraft T_{\max} berechnet. Den Vergleich entsprechender Werte bei verschiedenen Stoßbedingungen zeigt Bild 45.

Das Kapitel zusammenfassend zeigt Bild 46 noch am Beispiel zweier Stoßmassen eine Gegenüberstellung exponentieller Verläufe des Kontaktkraftgesetzes, die zum einen aus den Kontakttheorien und zum anderen aus den experimentellen Werten von $K/\sqrt{R_s}$ bestimmt wurden.

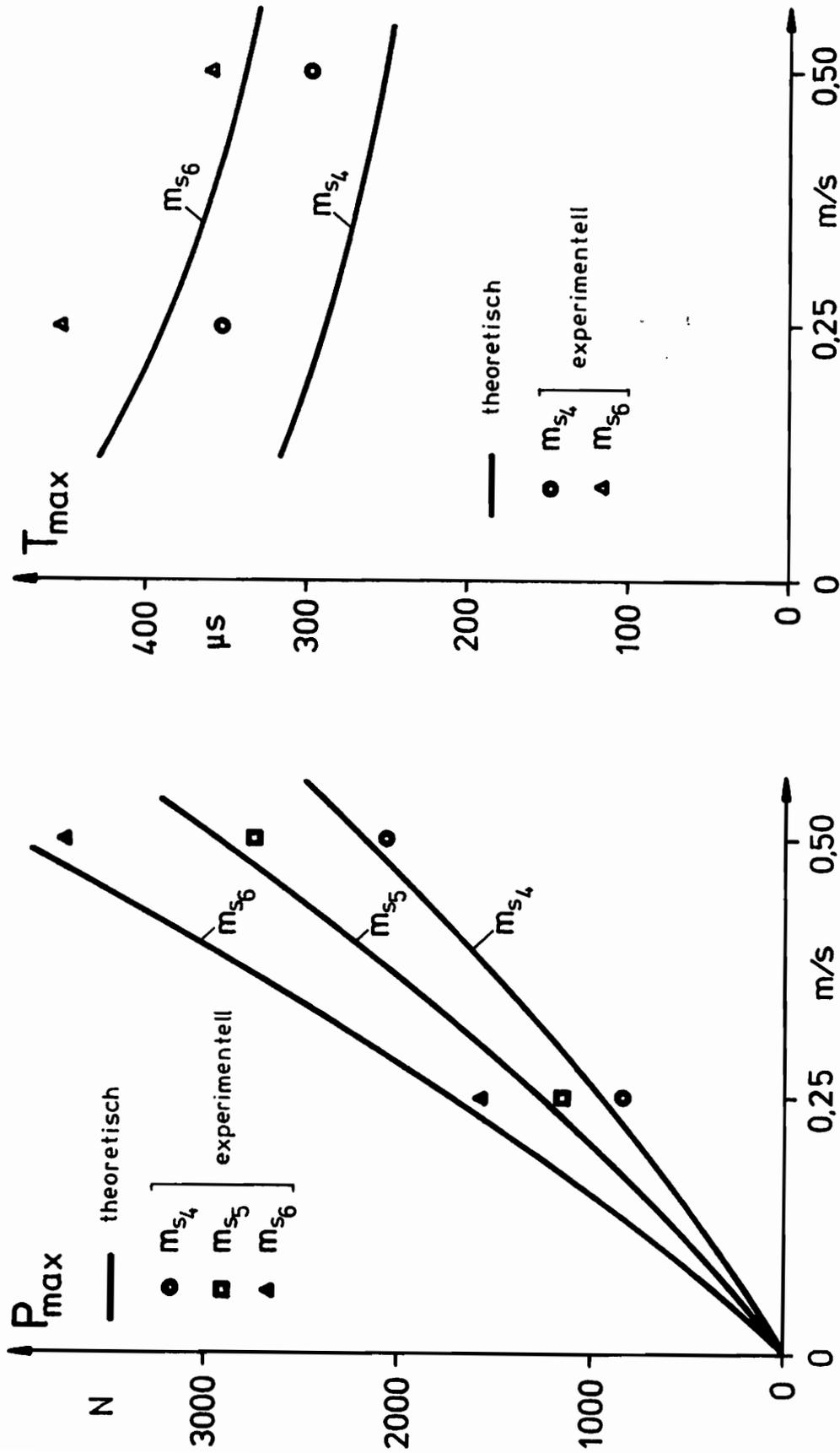


Bild 45: Maximale Stoßkraft P_{\max} und Zeitpunkt T_{\max} maximaler Stoßkraft beim Stoß auf den faserverstärkten Halbraum in Abhängigkeit von Stoßmasse und Stoßgeschwindigkeit; $m_{s4} = 0,599 \text{ kg}$, $m_{s5} = 0,929 \text{ kg}$, $m_{s6} = 1,478 \text{ kg}$

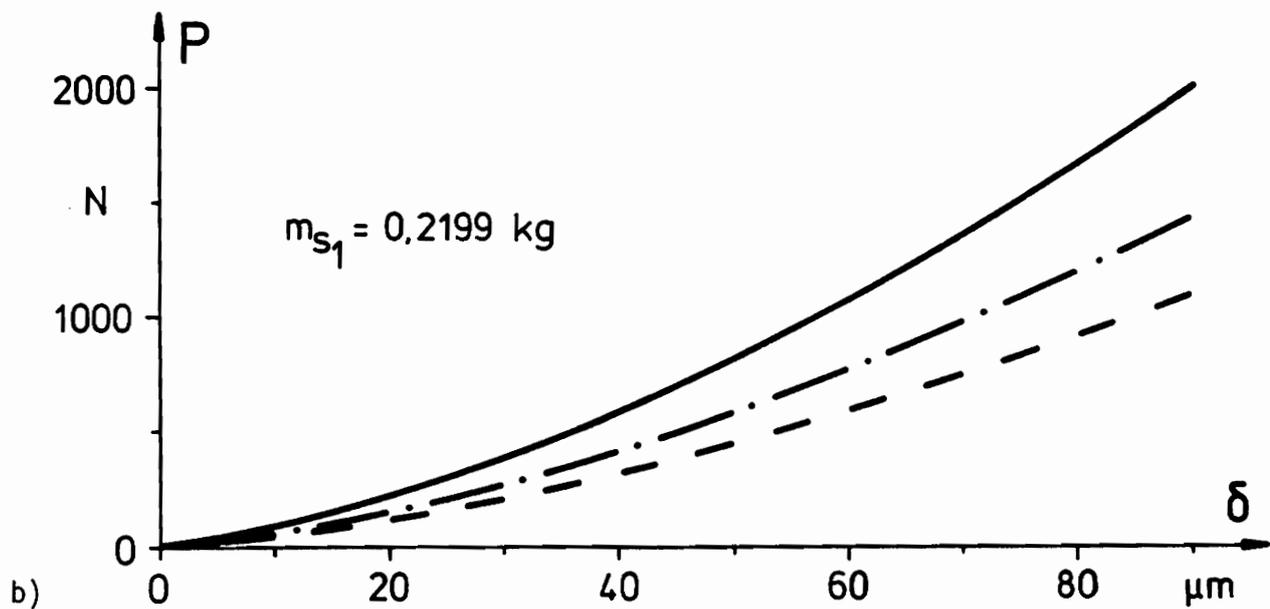
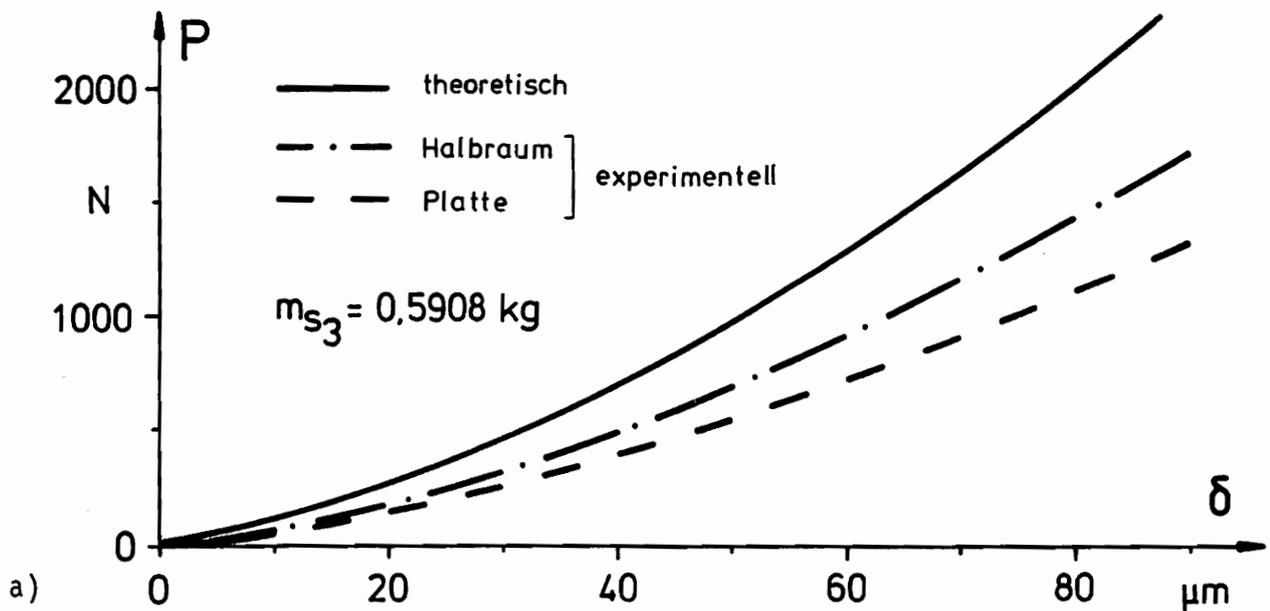


Bild 46: Vergleich der experimentell ermittelten Abhängigkeit der Stoßkraft von der Annäherung der Stoßpartner mit dem Kontaktkraftgesetz von Sveklo; a) $m_{s_3} = 0,5908 \text{ kg}$, $R_{s_3} = 0,0254 \text{ m}$
 b) $m_{s_1} = 0,2199 \text{ kg}$, $R_{s_1} = 0,0177 \text{ m}$

6.5 Das spannungsoptische Oberflächenschichtverfahren bei einer diametral belasteten Kreisscheibe aus faserverstärktem Epoxydharz

Im Sinne einer Erweiterung der Einsatzmöglichkeiten experimenteller Methoden der Spannungsanalyse sollen hier kurz die Möglichkeiten und Probleme der Anwendung des Oberflächenschichtverfahrens bei faserverstärkten bzw. generell anisotropen Körpern angerissen werden. Die aus der Spannungsoptik bei isotropen Körpern bekannten Untersuchungen an durchsichtigen Kunststoffmodellen sind auf anisotrope Körper nicht übertragbar, da dort die Spannungsverteilung neben der äußeren Form des Bauteils und der äußeren Belastung auch von der Art der Anisotropie abhängt. Modelluntersuchungen sind also nur an Modellen mit gleicher Anisotropie wie das Originalbauteil sinnvoll. Dem sind jedoch dadurch Grenzen gesetzt, daß mit den für die durchsichtigen Modelle verwendeten Glasfasern die hohen Anisotropiegrade kohlefaserverstärkter Originalbauteile oft nicht erreichbar sind. Außerdem ist der erhebliche Aufwand bei der Herstellung glasfaserverstärkter Modelle zu bedenken. Demgegenüber scheint sich das Oberflächenschichtverfahren als einfache und praktikable flächenhafte Methode zur experimentellen Verformungsanalyse an hochanisotropen Originalbauteilen anzubieten. Dies insbesondere, da mit den anderen, allgemein bekannten flächenhaften Methoden, wie z.B. der Moire-Technik, der Holographie oder der Speckle-Interferometrie, nur die Verschiebungen u, v, w nicht aber die Dehnungsgrößen direkt experimentell erfaßt werden können.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden nun qualitative Untersuchungen exemplarisch an einer diametral belasteten Kreisscheibe des hier vorliegenden, unidirektional verstärkten CFK-Materials mit dem Oberflächenschichtverfahren angestellt. Diese Untersuchungen sollen zunächst als Anregungsvorschlag verstanden werden und die praktische Durchführbarkeit sowie die Deutlichkeit der dabei auftretenden optischen Effekte demonstrieren. Die Lösung der vielschichtigen Probleme insbesondere theoretischer Natur bei einer Anwendung dieser Methode für quantitative Messungen muß späteren Arbeiten überlassen werden. Auch ist das Gebiet der Spannungsoptik und des daraus abgeleiteten Oberflächenschichtverfahrens viel zu umfangreich, um in dieser Arbeit ausführlich behandelt zu werden. Es wird sich deshalb auf die notwendigen Erläuterungen, die zum Verständnis der durchgeführten Versuche unerläßlich sind, beschränkt. Im übrigen sei auf die umfassende Darstellung der Spannungsoptik bei isotropen Körpern bei Frocht /94/ und Wolf /95/ hingewiesen.

Das Wesen der Spannungsoptik beruht auf der Spannungsdoppelbrechung bestimmter durchsichtiger Kunststoffe. Optisch zunächst isotrope Körper werden dabei unter mechanischer Belastung optisch anisotrop. Diese Anisotropie wird durch die erzeugten Deformationen hervorgerufen. Mit Hilfe von linear oder zirkular polarisiertem Licht können dann bei ebenen Spannungszuständen in ebenen doppelbrechenden Medien optische Effekte sichtbar gemacht werden, die bei senkrechter Durchstrahlung Auskunft über die Hauptdehnungsdifferenzen $\epsilon_1 - \epsilon_2$ und die Hauptdehnungsrichtungen geben.

Beim Oberflächenschichtverfahren wird insbesondere eine spannungsdoppelbrechende Folie auf das ebene Originalbauteil aufgeklebt, wobei die Übergangsfläche Folie-Bauteil optisch möglichst gut reflektierend gemacht wird. Man nimmt dann an, daß in der Trennschicht Folie-Bauteil die elastischen Verschiebungen stetig vom Bauteil auf die photoelastische Schicht übertragen werden. Dabei ist zu beachten, daß die Folie einen Teil der Verformungsenergie aufnimmt, d.h. die Folie verstärkt die Gesamtstruktur mechanisch. Dementsprechend treten im Bauteil mit der aufgeklebten photoelastischen Schicht etwas andere Verformungen auf als im Bauteil ohne Folie. Eine Möglichkeit zur quantitativen Berechnung dieses mechanischen Verstärkungseffektes bei anisotropen Originalbauteilen ist dem Verfasser allerdings nicht bekannt. Eine Lichtwelle, die nun senkrecht zur Ebene der Hauptspannungen in die Folie eintritt, wird in zwei Teilwellen aufgespalten, die unterschiedliche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten besitzen und in zueinander senkrechten Ebenen jeweils linear polarisiert schwingen. Der durch die Laufstrecke Folienoberfläche - Reflexionsfläche - Folienoberfläche und durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten bedingte Gangunterschied der beiden Teilwellen am Austritt kann mit Hilfe von linear oder zirkular polarisiertem Licht in Form von Isochromaten und Isoklinen sichtbar gemacht werden, wobei Isochromaten Orte gleicher Hauptdehnungsdifferenzen ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) und Isoklinen die Orte gleicher Hauptdehnungsrichtungen verbinden.

Am Beispiel der hier untersuchten diametral belasteten, orthotropen Kreisscheibe zeigt Bild 47 den prinzipiellen Versuchsaufbau. Hierbei wurde mit zirkular polarisiertem Licht gearbeitet, bei dem nur Isochromaten sichtbar werden. Vor der Quecksilberhöchstdrucklampe, die mit einem Farbfilter monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 546$ nm abstrahlt, befindet sich ein sogenannter Polarisator, der linear polarisiertes Licht erzeugt. Ihm folgen zwei sogenannte Viertelwellenlängenplatten in Subtraktionsstellung zuein-

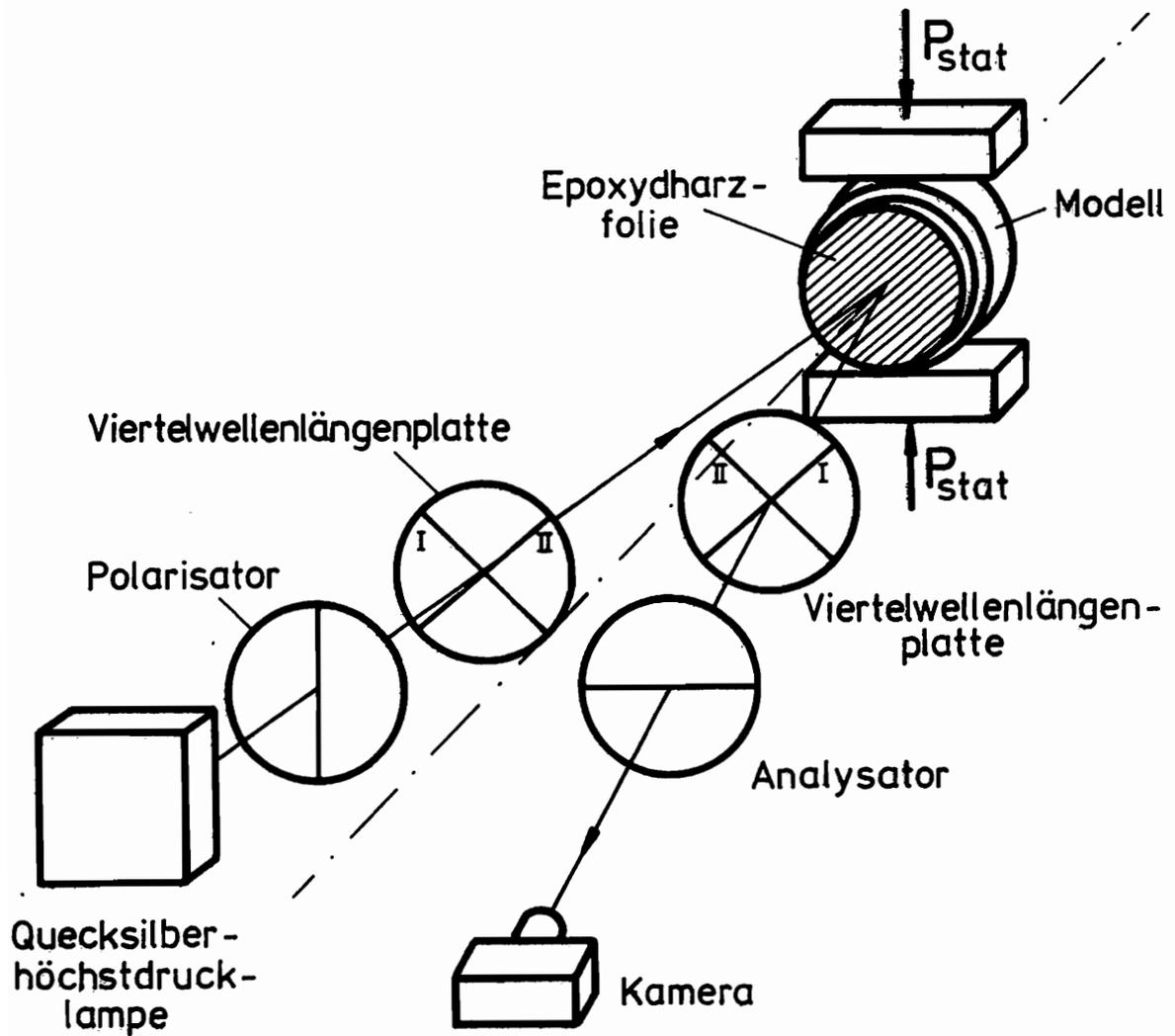
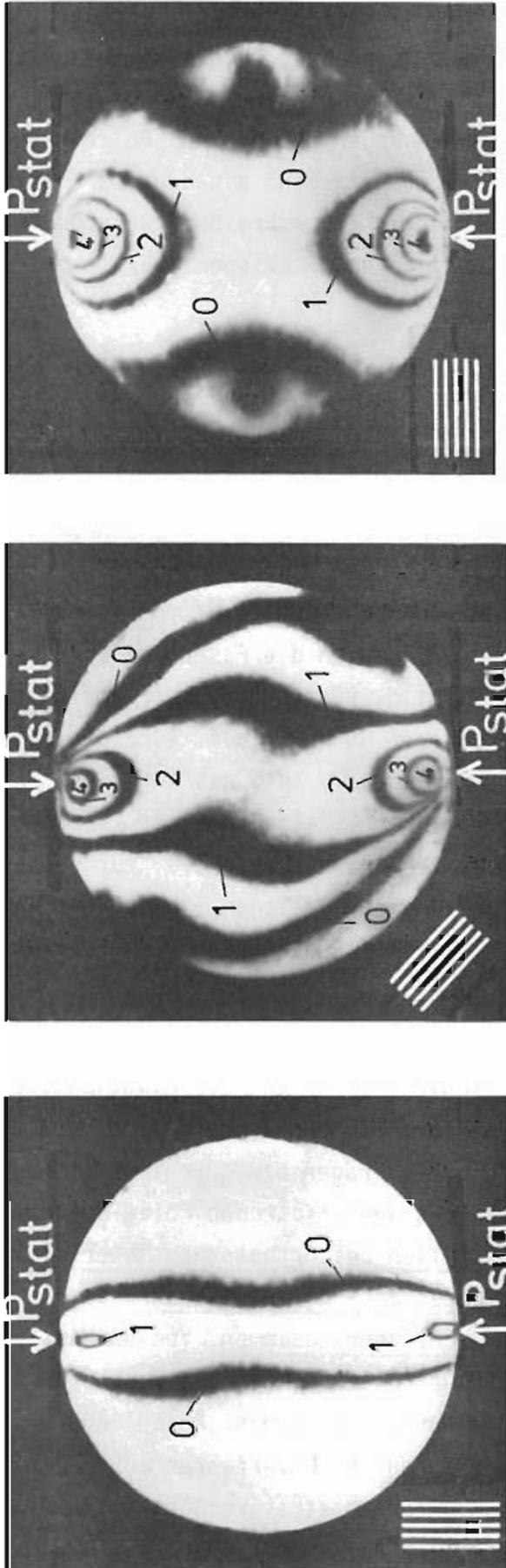


Bild 47: Spannungsoptischer Versuchsaufbau beim Oberflächenschichtverfahren: Diametral belastete faserverstärkte Kreisscheibe im Reflexionspolariskop (Zirkularpolariskop)



a)

b)

c)

Bild 48: Spannungsoptische Aufnahmen einer diametral belasteten Kreisscheibe aus unidirektional verstärktem Epoxydharz bei unterschiedlicher Orientierung der Faserstruktur zur Lastrichtung (Durchmesser der Kreisscheibe 0,06 m; Dicke der Scheibe 8 mm; Lichtwellenlänge 546 nm; Spannungsoptische Folie aus Araldit D mit einer Schichtdicke von 2 mm); a) $P_{\text{stat}} = 6000 \text{ N}$, b) und c) $P_{\text{stat}} = 4100 \text{ N}$

ander, von denen das erstere zirkular polarisiertes Licht erzeugt. Zwischen den Viertelwellenlängenplatten befindet sich das Bauteil mit der Folie. Vor der Kamera, die die Isochromatenbilder aufzeichnet, ist schließlich noch ein Analysator mit senkrechter Schwingungsrichtung zum Polarisator. Mit dieser Anordnung hat man im unbelasteten Zustand ein dunkles Arbeitsfeld. Die genaue Ausführung und die ausführliche Beschreibung des benutzten Reflexionspolariskops findet man im übrigen bei Schwieger /96/.

Bild 48 zeigt nun Isochromatenaufnahmen der unidirektional verstärkten Kreisscheibe bei unterschiedlicher Orientierung der Fasern zur Lastrichtung. Bei der zur Lastrichtung parallelen Faserlage im linken Teilbild erkennt man den gebündelten Kraftfluß längs des vertikalen Symmetrieschnittes. Außerdem sind trotz der hohen Last von 6000 N nur wenig Isochromaten niedriger Ordnung zu sehen, d.h. die auftretenden Hauptdehnungsdifferenzen sind relativ klein. Dies dürfte auf den hohen Elastizitätsmodul der Fasern in der Lastrichtung zurückzuführen sein. Liegen die Fasern dagegen senkrecht zur Lastrichtung, wie im rechten Teilbild, treten trotz der geringeren Last von 4100 N mehr Isochromaten mit höherer Ordnung auf. Außerdem fällt dort die breit auslaufende Form der Isochromaten auf, was auf einen mehr verteilten Kraftfluß schließen läßt. Bei der 45° -Richtung der Fasern herrscht schließlich keine Axialsymmetrie des Verformungszustandes zur Lasteinwirkungslinie. Man erkennt also sofort den maßgeblichen Einfluß der Faserlage auf den Verformungszustand und damit auch auf die Spannungsverteilung.

Für eine Anwendung des Oberflächenschichtverfahrens zur quantitativen Spannungs- bzw. Verformungsanalyse bei orthotropen Körpern sind nach Kenntnis des Verfassers allerdings noch folgende Fragen bzw. Probleme offen. So ist die Frage nach dem Verstärkungseffekt der isotropen Folie auf dem anisotropen Bauteil zu klären. Außerdem fallen bei orthotropen Materialien - von den elastischen Hauptrichtungen abgesehen - die Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtungen im allgemeinen nicht mehr zusammen. Von der Hauptdehnungsdifferenz kann also nicht mehr ohne weiteres, wie bei isotropen Stoffen, auf die Hauptspannungsdifferenz geschlossen werden. Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß das Oberflächenschichtverfahren außerdem auch zur Untersuchung der Wellenausbreitung bei dynamischen Vorgängen in anisotropen Materialien von Nutzen sein kann.

7. Besprechung der Resultate

Diese Arbeit behandelt die schlagartige Belastung orthotroper Platten durch Stoßkugeln. Im Vordergrund stehen diesbezüglich die während des Stoßvorgangs im Bereich der Kontaktfläche konzentriert wirkenden Belastungs- und Verformungsgrößen. Insbesondere die Stoßkräfte und Biegemomente können dabei auch schon bei kleinen Stoßgeschwindigkeiten kurzzeitig sehr große Werte erreichen. Die Berechnung dieser Belastungsgrößen ist vor allem für die modernen faserverstärkten Verbundkörper von Bedeutung, da diese Verbundwerkstoffe relativ zerstörungsanfällig gegenüber Stößen sind. Andererseits werden sie aber aufgrund ihres niedrigen Gewichts bei hoher mechanischer Festigkeit zunehmend in der Luft- und Raumfahrttechnik eingesetzt, wo sie besonders stoßgefährdet sind und Materialversagen besonders schwerwiegende Folgen hat /1/,/4/,/43/,/52/,/68/-/71/,/79/.

Im ersten Kapitel wurde die Wellenausbreitung in orthotropem Material behandelt. Ausgangspunkt waren dabei die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie eines anisotropen Kontinuums. Insbesondere wurden die Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der richtungsabhängigen Phasen- und Energieausbreitungsgeschwindigkeiten angegeben. Dabei zeigt sich, daß die Energieausbreitungsfronten und die damit verbundenen Ausbreitungsflächen der Spannungsimpulse je nach zugehörigem Wellentyp und Art der Anisotropie (Laminierung) teilweise recht komplizierte Formen annehmen. Die Energieausbreitung innerhalb der Struktur wird durch die Laminierung gezielt beeinflussbar. Dies ist auch in Bezug auf die mit einer möglichen Wellenfokussierung verbundenen Gefahr der örtlichen Konzentration von Spannungsimpulsen von Bedeutung. Darüberhinaus wurden zwei transzendente Gleichungen abgeleitet, mit denen das Dispersionsverhalten der Longitudinal- und der Biegewellen in den elastischen Hauptrichtungen einer orthotropen Platte berechnet werden kann.

Schließlich wurde gezeigt, wie man aus der Messung der Grenzgeschwindigkeiten der schnellsten Longitudinal-, Transversal- und Biegewellen in einer Scheibe bzw. Platte alle elastischen Konstanten (E-Moduln, Schubmoduln, Poissonsche Querdehnzahlen) eines unidirektional faserverstärkten Verbundkörpers bestimmen kann. Dabei wurde die allgemein übliche Annahme /1/-/4/, /7/, /22/-/31/ vorausgesetzt, daß trotz gewisser viskoelastischer Eigenschaften der Epoxydharzmatrix in einer CFK-Struktur der Verbundkörper aufgrund der dominierenden hohen Elastizität der Kohlenstofffasern und insbesondere in Hinblick auf die Kurzzeitigkeit der dynamischen Vorgänge als

nahezu idealelastisches Kontinuum behandelt werden kann. Im experimentellen Teil wurden die Wellen dann durch kurze Stöße angeregt und die Grenzgeschwindigkeiten mit einem System von Dehnungsmeßstreifen an der Scheiben- bzw. Plattenoberfläche ermittelt. Ein Vergleich mit den theoretisch erwarteten elastischen Materialkonstanten ergab eine befriedigende Übereinstimmung. Der Vorteil der Methode liegt insbesondere darin, daß man die elastischen Konstanten auf eine den dynamischen Stoßversuchen besonders angepaßte Weise ermittelt. Die dem Verfasser bekannten anderen Methoden beruhen dagegen entweder auf statischen Versuchen oder erfordern die Herstellung einer mehr oder weniger großen Anzahl verschiedenster Proben.

Im Sinne der Entwicklung einer geschlossenen Stoßtheorie zur Berechnung der wichtigsten Belastungsgrößen beim Stoßvorgang galt das nächste Hauptkapitel dem Kontaktkraftgesetz bei orthotropem Materialverhalten in Analogie zum Gesetz von Hertz bei isotropen Körpern. Das Kontaktkraftgesetz beschreibt dabei den Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft, mit der zwei Körper zusammengepreßt werden, und der daraus resultierenden Annäherung. In neueren, dem Verfasser bekannten Arbeiten zur Stoßproblematik /1/, /4/, /43/, /52/, /68/ anisotroper Verbundkörper wurden diesbezüglich bisher in grober Näherung das nur für isotrope Stoffe gültige Hertz'sche Gesetz benutzt oder die KKG-Parameter experimentell bestimmt.

Hier wurde nun eine Kontakttheorie orthotroper Körper von Sveklo /44/ - /46/ aufgegriffen. Das daraus abgeleitete Kontaktkraftgesetz besitzt die gleiche exponentielle Form wie das Gesetz von Hertz, jedoch ist die numerische Berechnung des Koeffizienten komplizierter und aufwendiger. Als zweite theoretische Alternative wurde außerdem ein Transformationsverfahren von Lodge /47/ aufgegriffen, mit dessen Hilfe vom Verfasser ein näherungsweise gültiges Kontaktkraftgesetz abgeleitet werden konnte. Dieses Gesetz beruht auf bestimmten, in der Regel allerdings nicht immer exakt erfüllten Voraussetzungen. Es ermöglicht aber bei ansonsten gleicher exponentieller Form eine erheblich einfachere Berechnung des Kontaktkraftgesetzkoeffizienten. Mit entsprechenden Rechenprogrammen konnten dann beide Theorien in ihren praktischen Aussagen miteinander verglichen werden. Beiden Theorien ist aber gemeinsam, daß es sich wie bei der Theorie von Hertz zunächst um statische Gesetze handelt, die unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, daß die Kontaktfläche sehr klein ist im Vergleich zu den Abmessungen der Kontaktpartner. Deshalb wurde die Übertragbarkeit auf den Stoßvorgang bei dünnen Platten später experimentell überprüft.

Das abschließende Hauptkapitel des theoretischen Teils diente der Entwicklung einer vereinfachten Stoßtheorie. Ausgehend von der klassischen Theorie orthotroper Platten wurde eine vereinfachte Beziehung für die Durchbiegung der Platte unter dem Stoßpunkt abgeleitet. Diese Beziehung stellt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Zeitintegral über die Stoßkraft und der Durchbiegung des gestoßenen Plattenelements her und besitzt Gültigkeit für die Dauer des sogenannten Stoßfrühstadiums. Mit dieser vereinfachten Durchbiegungsbeziehung, dem Kontaktkraftgesetz und der Bewegungsgleichung der Stoßmasse kann dann eine nichtlineare Differentialgleichung in dimensionsloser Darstellung hergeleitet werden, aus deren numerischer Lösung man sofort den dimensionsbehafteten Stoßkraftverlauf bekommt. Der große Vorteil der dimensionslosen Darstellung liegt u.a. darin, daß für die jeweiligen Stoßbedingungen das Maximum der "dimensionslosen Stoßkraft" in Abhängigkeit von einer einzigen Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$ angegeben werden kann. Der vereinfachten Stoßtheorie wurde dann eine auch übliche, numerisch aufwendigere Methode gegenübergestellt. Diese beruht auf einer Integralgleichung für die Stoßkraft, zu deren Herleitung anstelle der vereinfachten Durchbiegungsbeziehung die unendliche Doppelsumme der analytischen Lösung für die Plattendurchbiegung benutzt wurde. Ein Vergleich der nach beiden Theorien berechneten Stoßkraft- und Durchbiegungsverläufe ergab im Frühstadium keine nennenswerten Unterschiede. Dazu sei auch exemplarisch auf Bild 18 und 19 verwiesen.

Die Aussagen des theoretischen Teils sollten aber auch am Beispiel einer unidirektional mit Kohlenstoffasern verstärkten Epoxydharzplatte experimentell überprüft werden. Nachdem die elastischen Konstanten bestimmt worden waren, wurden dazu umfangreiche Kugelstoßversuche auf das Zentrum der quadratischen Platte durchgeführt. Die Stoßbedingungen wurden dabei mit drei Stahlkugeln und jeweils fünf Stoßgeschwindigkeiten variiert. Dabei ergaben sich folgende Resultate. Bei allen Stoßversuchen konnte im Frühstadium ein linearer Zusammenhang zwischen den Plattendurchbiegungen unter dem Stoßpunkt und den Zeitintegralen über die Stoßkraft festgestellt werden. Der aus allen Versuchen gemittelte experimentelle Plattenparameter stimmte dabei ausgezeichnet mit dem theoretisch erwarteten Wert überein. Der Vergleich der mit der vereinfachten Stoßtheorie berechneten Stoßkraft- und Durchbiegungsverläufe ergab ebenfalls befriedigende Übereinstimmungen, wobei allerdings die theoretischen Stoßkraftverläufe gegenüber den experimentellen etwas zu schnell ansteigen und einen etwas zu hohen Maximalwert erreichen. Diese Unterschiede führt der Verfasser hauptsächlich auf das theo-

retische Kontaktkraftgesetz zurück, da die vereinfachte Durchbiegungsbeziehung als zweite mögliche Hauptfehlerquelle der Theorie bei der hier untersuchten Platte experimentell nachweislich entfällt. Wie zu erwarten, verschwinden auch tatsächlich die Differenzen zwischen Theorie und Experiment nahezu, wenn statt des theoretischen Werts des KKG-Koeffizienten der experimentell ermittelte verwendet wird (Bild 37 und 38b).

Weiterhin wurde in Kapitel 5.4 in Analogie zur vereinfachten Durchbiegungsbeziehung eine vereinfachte Integralbeziehung für die Biegedehnungen in x- und y-Richtung unter der Stoßstelle abgeleitet. Dabei wurde wiederum eine dimensionslose Darstellung der Biegedehnungen bzw. Krümmungen gewählt, so daß das Maximum der dimensionslosen Krümmungen in Abhängigkeit von zwei den Stoß charakterisierenden Kennzahlen dargestellt werden konnte. Ein Vergleich der berechneten Biegedehnungen unter dem Stoßpunkt mit den gemessenen Werten ergab relativ brauchbare Übereinstimmungen. Die eher geringen Differenzen könnten dabei nach Ansicht des Verfassers auf zwei Effekte zurückzuführen sein. Zum einen wurden in der Theorie nur die Biegedehnungen im Rahmen der hier benutzten Plattentheorie berechnet, d.h. zusätzlich überlagerte Biege- und Längsausdehnungen aus Nahfeldeinflüssen /88/ wurden nicht berücksichtigt. Außerdem werden in der benutzten Plattentheorie die Querkraftdeformationen und Rotationsträgheiten vernachlässigt. Den theoretischen Teil abschließend wurden in Kapitel 5.5.2 mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes analytische Beziehungen zur besonders einfachen Abschätzung des ersten Maximalwertes der Plattendurchbiegung angegeben. Die Übereinstimmungen zwischen den danach berechneten Durchbiegungsmaxima und den Meßwerten waren in Hinblick auf die theoretischen Vereinfachungen recht zufriedenstellend.

Das Kontaktkraftgesetz betreffend wurden noch zusätzlich Stoßversuche auf einen Halbraum des hier untersuchten, faserverstärkten Materials durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß durchaus Unterschiede in den experimentellen Parametern des Kontaktkraftgesetzes beim Platten- und Halbraumstoß auftreten, wobei der Halbraumstoß den Theorien näher kommt. Dies war im Prinzip zu erwarten, da beide Theorien voraussetzungsgemäß davon ausgehen, daß die Kontaktfläche sehr viel kleiner ist als die geometrischen Abmessungen der Kontaktpartner. Dies ist insbesondere bei der hier untersuchten Platte in Bezug auf ihre Dicke h weniger der Fall. Bei der Anwendung der Kontakttheorien zur Berechnung der beim Stoß auftretenden Belastungsgrößen wirkt sich die Tatsache der Unterschiede in den experimentellen und theoretischen KKG-

Parametern aber weniger schwerwiegend aus, als erwartet. Dies steht im übrigen in Einklang mit Ergebnissen von Arbeiten zum Stoß auf isotrope Platten /74/, /75/, in denen das Hertzsche Gesetz verwendet wurde, das auf der gleichen Voraussetzung beruht.

Die hier benutzte Plattentheorie betreffend bleibt zu bemerken, daß die Vernachlässigung des Einflusses der Querkraftschubspannungen und Rotationsträgeiten bei der hier untersuchten 8 mm dicken CFK-Platte offensichtlich nicht zu größeren Abweichungen zwischen Theorie und Experiment führt.

Abschließend kann also festgehalten werden, daß es gelungen ist, eine vollständige vereinfachte Stoßtheorie vorzulegen, die die Berechnung der Stoßkräfte, Biegedehnungen und Plattendurchbiegungen beim Biegestoß auf orthotrope Platten ermöglicht. Innerhalb der Theorien wurden nach Kenntnis des Verfassers erstmalig Kontakttheorien orthotroper Körper verwendet. Im Rahmen der vereinfachten Theorie konnte zu einer dimensionslosen Darstellung der Stoßkräfte und Krümmungen (Biegedehnungen) übergegangen werden. Dabei hängt das Maximum der "dimensionslosen Stoßkraft" von nur einer und das der "dimensionslosen Krümmung" von zwei den Stoß charakterisierenden Kennzahlen ab. Der große Vorteil der dimensionslosen Darstellung liegt darin, daß Berechnungsunterlagen in Form von dimensionslosen Kurven (Bild 17 und 21) angegeben werden konnten, die eine schnelle und einfache Berechnung der Stoßkraft- und Dehnungsmaxima bei verschiedenen Stoßbedingungen gestatten. Der Vergleich berechneter Stoßkraft-, Durchbiegungs- und Biegedehnungsverläufe ergab zufriedenstellende Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen. Vorteilhafterweise liegen die mit der vereinfachten Theorie berechneten Stoßkräfte und Plattendurchbiegungen über den zugehörigen experimentellen Ergebnissen, so daß man mit der vorgelegten Theorie eine obere Grenze dieser Belastungs- und Verformungsgrößen erhält. Dies gilt allerdings nicht für die Biegedehnungen. Anwendungsgrenzen der Theorie sind im Bereich dicker Platten zu erwarten, da dort die Vernachlässigung des Einflusses der Querkraftschubspannungen zu größeren Fehlern führen dürfte. Von praktischem Nutzen dürfte die Theorie dagegen bei der Berechnung von Stoßbelastungen im Triebwerksbau sein, wo z.B. bei Turbinenfanblättern die Tendenz verstärkt zum Einsatz anisotroper Materialien, wie z.B. einkristallinen Systemen oder unidirektional ausgerichtet erstarrten eutektischen Legierungen aber eventuell auch CFK, geht.

8. SchrifttumWellenausbreitung

- / 1 / Moon, F.C. A Critical Survey of Wave Propagation and Impact in Composite Materials, NASA-CR-121226 (1973)
- / 2 / Daniel, I.M.
Liber, T. Wave Propagation in Fiber Composite Laminates, NASA-CR-135086 (1976)
- / 3 / Daniel, I.M.
Liber, T.
LaBedz, R.H. Wave Propagation in Transversely Impacted Composite Laminates, Experimental Mechanics 19 (1979), Nr. 1, 9-16
- / 4 / Tan, Tein-min Wave Propagation in Graphite/Epoxy Laminate Due to Impact, Dissertation Purdue University (1982)
- / 5 / Sun, C.T. Propagation of Shock Waves in Anisotropic Composite Plates, Journal of Composite Materials 7 (1973), 366-382
- / 6 / Yang, P.C.
Norris, C.
Stavsky, Y. Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates, Int. Journ. of Solids and Structures 2 (1966), 665-684
- / 7 / Kriz, R.D.
Stinchcomb, W.W. Mechanical Properties for Thick Fiber Reinforced Composite Materials Having Transversely Isotropic Fibers, VPI-E-77-13 (1977)
- / 8 / Moon, F.C. Wave Surfaces Due to Impact on Anisotropic Plates, Journal of Composite Materials 6 (1972), 62-79
- / 9 / Green, W.A. Bending Waves in Strongly Anisotropic Elastic Plates, Q.J. Mech. Appl. Math. 35 (1982), Nr. 4, 485-507
- /10/ Sommerfeld, A. Vorlesungen über theoretische Physik - Band II: Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Becker u. Erler 1945
- /11/ Kolsky, H. Stress Waves in Solids, New York: Dover Publications 1963
- /12/ Rayleigh Theory of Sound, Dover Publications 1945
- /13/ Kriz, R.D.
Stinchcomb, W.W. Elastic Moduli of Transversely Isotropic Graphite Fibers and their Composites, Experimental Mechanics 19 (1979), 41-49

- /14/ Green, W.A. Wave Propagation in Strongly Anisotropic Elastic Materials, Archives of Mechanics 30 (1978), Nr. 3, 297-307
- /15/ Murakami, H. A Mixture Theory for Wave Propagation in Angle-Ply Laminates, Part 1+2, J. Appl. Mech. 52 (1985), Nr. 2, 331-337, 338-344
- /16/ Buchwald, V.T. Elastic Waves in Anisotropic Media, Proc. Roy. Soc. London 253 (1959), 563-580
- /17/ Synge, J.L. Elastic Waves in Anisotropic Media, J. Math. and Phys. 35 (1957), 323-334
- /18/ Pao, Y.H. Elastic Waves in Solids, J. Appl. Mech. 50 (1983), Nr. 4, 1152-1164
- /19/ Rowlands, R.E.
Daniel, I.M.
Prabhakaran, R. Wave Motion in Anisotropic Media by Dynamic Photomechanics, Experimental Mechanics 14 (1974), 433-439
- /20/ Tauchert, T.R.
Guzelsu, A.N. An Experimental Study of Dispersion of Stress Waves in a Fiber-Reinforced Composite, J. Appl. Mech. 39 (1972), Nr. 3, 98-103
- /21/ Pih, H.
Bi, Q.
Chen, Y.Y.
Ye, P. Dynamic Stress-Concentration Effects on Stress Waves in Composite Models with Different Fiber-End Geometries, Experimental Mechanics 25 (1985), Nr. 3, 214-225

Elastische Eigenschaften anisotroper Materialien

- /22/ Hashin, Z. Theory of Fiber Reinforced Materials, NASA-CR-1974 (1972)
- /23/ Behrens, E. Elastic Constants of Fiber-Reinforced Composites with Transversely Isotropic Constituents, J. Appl. Mech. 38 (1971), 1062-1065
- /24/ Chen, C.H.
Shun, C. Mechanical Properties of Anisotropic Fiber Reinforced Composites, J. Appl. Mech. 37 (1970), 186-189
- /25/ Datta, S.K.
Ledbetter, H.M.
Kriz, R.D. Calculated Elastic Constants of Composites Containing Anisotropic Fibers, Int. J. Solids Structures 20 (1984), Nr. 5, 429-438

- /26/ Hashin, Z. Analysis of Properties of Fiber Composites with Anisotropic Constituents, J. Appl. Mech. 46 (1979), 543-549
- /27/ Hashin, Z.
Rosen, B.W. The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, J. Appl. Mech. 31 (1964), 223-232
- /28/ Hashin, Z. On Elastic Behaviour of Fiber-Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometrie, J. Mech. Phys. Solids 13 (1965), 119-134
- /29/ Hill, R. Theory of Mechanical Properties of Fibre Strengthened Materials, J. Mech. Phys. Solids 12 (1964), 199-212
- /30/ Hashin, Z. Analysis of Composite Materials - A Survey, J. Appl. Mech. 50 (1983), Nr. 3, 481-505
- /31/ Tzadka, U.
Schulgasser, K. Effective Properties of Fiber Reinforced Materials, J. Appl. Mech. 50 (1983), Nr. 4, 828-834
- /32/ Hearman, R.F.S.
Adams, E.H. The Bending and Twisting of Anisotropic Plates, Brit. J. Appl. Physics 3 (1952), Nr. 3, 150-156
- /33/ Prabhakaran, R.
Chermahini, R.G. Application of the Least-squares Method to Elastic and Photoelastic Calibration of Orthotropic Composites, Experimental Mechanics 24 (1984), 17-21
- /34/ Scharr, G. Experimentelle Bestimmung des kompletten Stoffgesetzes von anisotropen faserverstärkten Kunststoffen, Messtechnische Briefe 21 (1985), Nr. 1, 7-11
- /35/ Neuhaus, F.H. Elastizitätszahlen von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchtigkeit, Schriftenreihe TWM, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 81-8, Bochum (1981)
- /36/ Heym, M. Unidirektional faserverstärkte Verbundkörper für Anwendungen bei erhöhter Temperatur, Dissertation Universität Karlsruhe (1976)
- /37/ Niederstadt, G. Besonderheiten beim Konstruieren mit Kohlenstofffasern, Kunststoffe 74 (1984), Nr. 11, 686-691

Kontaktprobleme

- /38/ Hertz, H. Geammelte Werke - Band 1, Leipzig: Joh. Ambrosius Barth 1895
- /39/ Doyle, J.F. An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law, *Experimental Mechanics* 24 (1984), Nr. 1, 10-16
- /40/ Doyle, J.F. Further Developments in Determining the Dynamic Contact Law, *Experimental Mechanics* 24 (1984), Nr. 4, 265-270
- /41/ Willis, J.R. Boussinesq Problems for an Anisotropic Half-Space, *J. Mech. Phys. Solids* 15 (1967), 331-339
- /42/ Willis, J.R. Hertzian Contact of Anisotropic Bodies, *J. Mech. Phys. Solids* 14 (1966), 163-176
- /43/ Yang Indentation Law for Composite Laminates, NASA-CR-165460 (1981)
- /44/ Sveklo, V.A. Boussinesq Type Problems for the Anisotropic Half-Space, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 28 (1964), Nr. 5, 1099-1105
- /45/ Sveklo, V.A. The Action of a Stamp on an Elastic Anisotropic Half-Space, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 34 (1970), Nr. 1, 165-171
- /46/ Sveklo, V.A. Hertz Problem of Compression of Anisotropic Bodies, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 38 (1974), Nr. 6, 1023-1027
- /47/ Lodge, A.S. The Transformation to Isotropic Form of the Equilibrium Equations for a Class of Anisotropic Elastic Solids, *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.* 8 (1955), Nr. 2, 211-225
- /48/ Schwieger, H.
Dombrowski, H. Das Elasto-Plastische Kontaktkraftgesetz beim Biegestoß auf einen Balken, 6. Internationale Konferenz Experimentelle Spannungsanalyse, München, September 1978 (VDI-Berichte Nr. 313, 1978)
- /49/ Schwieger, H.
Dombrowski, H. Eine Methode zur Bestimmung der Parameter des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes beim Balkenbiegestoß, *Materialprüfung* 22 (1980), Nr. 2, 61-64

- /50/ Dombrowski, H. Der Biegestoß auf eine dünne Platte bei elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung, Dissertation Ruhr-Universität Bochum (1981)
- /51/ Frischbier, J. Über das Kontaktverhalten beim Biegestoß einer Kugel auf eine Rippenplatte, Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1, Nr. 114 (1984)
- /52/ Yang, S.H. Static and Dynamic Contact Behavior of Composite Laminates, Dissertation Purdue University, West Lafayette, Ind. (1981)
- /53/ Gladwell, G.M.L. Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Alphen aan den Rijn: Sijthoff u. Noordhoff 1980
- /54/ Wolf, K. Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material, ZAMM 15 (1935), Nr. 5, 249-254
- /55/ Brémond, C.
Durelli, A.J. Experimental Analysis of Displacements and Shears at Surface of Contact, Experimental Mechanics 21 (1981), 105-110
- /56/ Kim, I.V.
Suncheleer, R.Ya. A Contact Problem for an Orthotropic Half-Space, Soviet Applied Mechanics 6 (1970), Nr. 7, 719-724
- /57/ Lardner, R.W.
Tupholme, G.E. An Indenter Moving on an Anisotropic Elastic Half-Space, Acta Mechanica 31 (1978), 117-135

Plattentheorie

- /58/ Mindlin, R.D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech. 18 (1951), Nr. 31, 31-38
- /59/ Lekhnitzkii, S.G. Anisotropic Plates, New York: Gordon and Breach 1968
- /60/ Ashton, J.E.
Whitney, J.M. Theory of Laminated Plates, Stamford: Technomic Publishing Co. 1970
- /61/ Zener, C. The Intrinsic Inelasticity of Large Plates, Phys. Rev. 59 (1941), Nr. 2, 669-673
- /62/ Sneddon, I.N. The Symmetrical Vibrations of a Thin Elastic Plate, Proc. Camb. Phil. Soc. 41 (1945), Nr. 1, 27-43
- /63/ Ambartsumyan, S.A. Theory of Anisotropic Plates, Stamford: Technomic Publishing Co. 1969

- /64/ Prabhakara, M.K.
Chia, C.Y. Bending of Elliptical Orthotropic Plates with Large Deflection, *Acta Mechanica* 21 (1975), 29-40
- /65/ Uspenskiy, M.M. Bending of a Rectangular Plate with Orthogonal Anisotropy, *Trudy voronezhskogo inzhenerno-stroitel'nogo instituta sbornik* 2 (1950)
- /66/ Sivakumaran, K.S.
Chia, C.Y. Large Amplitude Oscillations of Unsymmetrically Laminated Anisotropic Rectangular Plates Including Shear, Rotatory Inertia, and Transverse Normal Stress, *J. Appl. Mech.* 52 (1985), Nr. 3, 536-542

Stoßprobleme

- /67/ Moon, F.C. Theoretical Analysis of Impact in Composite Plates, NASA-CR-121110 (1973)
- /68/ Tan, T.M.
Sun, C.T. Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates, *J. Appl. Mech.* 52 (1985), Nr. 1 6-12
- /69/ Takeda, N.
Sierakowski, R.L.
Malvern, L.E. Wave Propagation Experiments on Ballistically Impacted Composite Laminates, *Journal of Composite Materials* 15 (1981), 157-174
- /70/ Sun, C.T.
Sankar, B.V.
Tan, T.M. Dynamic Response of SMC to Impact of a Steel Ball, *Advances in Aerospace Structures and Materials, The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Washington, D.C.* (1981), 99-107
- /71/ American Society for Testing Materials Foreign Object Impact Damage to Composites, ASTM STP 568 (1973)
- /72/ Goldsmith, W. Impact - The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids, London: Edward Arnold Ltd. 1960
- /73/ Eringen, A.C. Transverse Impact on Beams and Plates, *J. Appl. Mech.* 20 (1953), Nr. 4, 461-468
- /74/ Schwieger, H. Vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf eine dünne Platte und ihre experimentelle Überprüfung, *Forsch. Ing.-Wes.* 41 (1975), Nr. 4, 122-132

- /75/ Mittal, R.K.
Schwieger, H.
Truppat, V. A Simplified Analysis of Transverse Impact on Clamped Circular Plates - Part I+II, Journ. of Aero. Soc. of India 28 (1976), 265-275, 277-282
- /76/ Streubel, R. Die Verformungsanalyse schlagartig belasteter orthotroper Platten, Forsch.-Ber. VDI-Z. Reihe 1, Nr. 111 (1984)
- /77/ Bishop, S.M. Mechanical Performance and Impact Behaviour of Carbon Fibre Reinforced PEEK, Compos. Struct. 3 (1985), Nr. 3-4, 295-318
- /78/ Crook, A.W. A Study of Some Impacts Between Metal Bodies by a Piezo-Electric Method, Proc. Roy. Soc. London 212 (1952), 377-390
- /79/ Wang, T. Dynamic Response and Damage of Hard Object Impact on a Graphite/Epoxy Laminate, Dissertation Purdue University, West Lafayette, Ind. (1982)
- /80/ Corran, R.S.J.
Shadbolt, P.J.
Ruiz, C. Impact Loading of Plates - an Experimental Investigation, Int. Journ. Impact Engineering 1 (1983), 3-22
- /81/ Schmitz, U.P. Dickwandige rotationssymmetrische Bauteile und daraus ableitbare Scheiben im ebenen Spannungs- oder Formänderungszustand unter stoßartiger und ruhender Belastung mit Berücksichtigung des Werkstoffs Stahlbeton, Mitteilungen aus dem Lehr- und Forschungsgebiet für Festigkeitsfragen des Konstruktiven Ingenieurbaus, RWTH Aachen (1984)
- /82/ Lee, Y.
Hamilton, J.F.
Sullivan, J.W. The Lumped Parameter Method for Elastic Impact Problems, J. Appl. Mech. 50 (1983), Nr. 4, 823-827
- /83/ Schwieger, H. Central Deflection of a Transversely Struck Beam, Experimental Mechanics 10 (1970), Nr. 4, 166-169
- /84/ Schwieger, H.
Hahn, H. Maximale Belastung und Energieumwandlung bei einem transversalen Stoß auf eine Kreisplatte, Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1, Nr. 53 (1977)
- /85/ Schwieger, H.
Truppat, V.
Hahn, H. Central Deflection of a Transversely Struck Clamped Circular Plate, Mech. Res. Comm. 3 (1976), 13-19
- /86/ Timoshenko, S. Zur Frage der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, Z. Math. Phys. 62 (1913), Nr. 2, 198-209

- /87/ Eschler, H. Beitrag zur elementaren Theorie des Querstoßes auf Stäbe und Platten, Ing.-Arch. 12 (1941), Nr. 1, 31-37
- /88/ Schwieger, H.
Truppat, V. Der zentrale Biegestoß auf einen beidseitig eingespannten Balken - Eine vereinfachte Theorie und ihre experimentelle Überprüfung, Fortschr. Ber. VDI-Z. Reihe 1, Nr. 45 (1976)
- /89/ Streubel, R. Zur Stoßbelastung anisotroper Bauteile, Ing.-Arch. 56 (1986), Nr. 3, 181-191

Experimentelle Methoden, Meßtechnik

- /90/ Bert, C.W. Normal and Shear Stress Gages and Rosettes for Orthotropic Composites, Experimental Mechanics 25 (1985), Nr. 3, 288-293
- /91/ Smith, H.W.
Hunt, J.P. Stresses and Strains in Composites from Rosette-Gage Readings, Experimental Techniques 9 (1985), Nr. 10, 21-22
- /92/ Tichy, J.
Gautschi, G. Piezoelektrische Meßtechnik, Berlin: Springer-Verlag 1981
- /93/ Tanimura, S. A New Method for Measuring Impulsive Force at Contact Parts, Experimental Mechanics 24 (1984), Nr. 4, 271-276
- /94/ Frocht, M.M. Photoelasticity - Vol. I+II
New York: John Wiley and Sons, Inc. 1967
- /95/ Wolf, H. Spannungsoptik, Berlin: Springer-Verlag 1976
- /96/ Schwieger, H. Ein neues Reflexionspolaroskop und seine Anwendung beim spannungsoptischen Oberflächenschichtverfahren - Teil II, Zeitschrift für Instrumentenkunde 73 (1965), Nr. 2, 38-44

Lehrbücher, Nachschlagewerke, Allgemeines

- /97/ Bergmann, H.W.
Gädke, M.
Block, J.
Kirschke, L.
Eggers, H. Beiträge zum Verhalten kohlefaserverstärkter Verbundstrukturen, DFVLR - Institut für Strukturmechanik, Mitteilung Nr. 83-16, Braunschweig (1983)
- /98/ Boussinesq, J.N. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris: Gauthier-Villars 1885

- / 99/ Szabó, I. Höhere Technische Mechanik, Berlin: Springer-Verlag 1977
- /100/ Vinson, J.R.
Chou, T.W. Composite Materials and their Use in Structures, London: Applied Science Publishers Ltd. 1975
- /101/ Hearmon, R.F.S. An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press 1961
- /102/ Geiger, H.
Scheel, K. Handbuch der Physik - Band VI: Mechanik der elastischen Körper, Berlin: Springer-Verlag 1928
- /103/ Stepanow, W.W. Lehrbuch der Differentialgleichungen, 4. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976
- /104/ Waller, H.
Krings, W. Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik, Mannheim-Wien-Zürich: B.I.- Wissenschaftsverlag 1975
- /105/ Bronstein, I.N.
Semendjajew Taschenbuch der Mathematik, 16. Auflage Zürich-Frankfurt-Thun: Verlag Harri Deutsch 1976
- /106/ Gröbner, W.
Hofreiter, N. Integraltafel, 4. Aufl. Wien-New York: Springer-Verlag 1966
- /107/ Jahnke-Emde Tafeln höherer Funktionen, 4. Auflage Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1948
- /108/ Timoshenko, S.
Goodier, J. Theory of Elasticity, New York: Mc Graw-Hill 1951
- /109/ Klöppel, K.
Yamada, M. Anisotrope Fließbedingung, Der Stahlbau 29 (1960), Nr. 6, 173-179
- /110/ Kreyszig, E. Über den allgemeinen Integralsinus, Acta Math. 85 (1951), 117-181
- /111/ Love, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4. Aufl. New York: Dover Publications 1927
- /112/ Okubo, H. The Stress Distribution in an Aelotropic Circular Disc Compressed Diametrically, J. Math. and Phys. 31 (1952), Nr. 1, 75-83
- /113/ Lekhnitskii, S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, San Francisco: Holden-Day Inc. 1963

9. Anhang

9.1 Theoretische elastische Materialkonstanten eines unidirektional faserverstärkten Verbundkörpers

Zur Berechnung der Materialkonstanten eines unidirektional verstärkten Verbundkörpers wird von folgenden Daten der Ausgangsstoffe ausgegangen:

Fasern:

E_{fL}	E-Modul in Längsrichtung
E_{fT}	E-Modul in Transversalrichtung
G_{fLT}	Schubmodul bzgl. der Ebene, die durch einen Schnitt in Faserrichtung entsteht
G_{fTT}	Schubmodul der zur Faser senkrechten Schnittebene
K_{fTT}	Kompressionsmodul bzgl. der zur Faser senkrechten Schnittebene
V_f	Faservolumenanteil im Verbundkörper

Einbettungsmatrix (isotrop):

E_b	E-Modul
ν_b	Poissonsche Zahl
K_b	Kompressionsmodul
V_b	Matrixvolumenanteil im Verbundkörper $V_b = 1 - V_f$

Ferner wird die x-Achse als Faserrichtung definiert. Die nun folgenden Gleichungen sind einem Anhang bei Kriz und Stinchcomb /13/ entnommen und gehen auf Hashin /22/ zurück. Danach berechnet sich der Kompressionsmodul bezüglich der z,y-Ebene zu

$$K_{yz}^{(-)*} = K_b + \frac{V_f}{\frac{1}{K_{fTT} - K_b} + \frac{V_b}{K_b + G_b}}$$

$$K_{yz}^{(+)} = K_{f_{TT}} + \frac{V_b}{\frac{1}{K_b - K_{f_{TT}}} + \frac{V_f}{K_{f_{TT}} + G_{f_{TT}}}},$$

wobei die Indizierung (+),(-) hier und im folgenden den oberen bzw. unteren theoretischen Grenzwert im Rahmen der Theorie von Hashin bezeichnet. Das Zeichen * markiert schließlich jeweils noch die Beziehung, die erfahrungsgemäß den experimentellen Ergebnissen recht nahe kommt /13/ und die zur Berechnung der Vergleichswerte in Tabelle 2 benutzt wurde.

In diesem Sinne berechnet sich dann der Schubmodul G_{yz} der y,z-Ebene aus

$$G_{yz}^{(-)} = G_b + \frac{V_f}{\frac{1}{G_{f_{TT}} - G_b} + \frac{V_b(K_b + 2G_b)}{2G_b(K_b + G_b)}} \quad (242)$$

$$G_{yz}^{(+)*} = G_b \frac{(1 + \alpha_1 V_f^3) (\alpha_2 + \beta_1 V_f) - 3V_f V_b^2 \beta_1^2}{(1 + \alpha_1 V_f^3) (\alpha_2 - V_f) - 3V_f V_b^2 \beta_1^2}$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 - \gamma \beta_2}{1 + \gamma \beta_2}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3 - 4\nu_b}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3 - 4\nu_{f_{TT}}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma + \beta_1}{\gamma - 1}$$

$$\gamma = \frac{G_{f_{TT}}}{G_b}$$

(243)

Für die verbleibenden Größen findet man noch folgende Beziehungen für

$$G_{xy}^{(-)*} = G_b + \frac{V_f}{\frac{1}{G_{f_{LT}} - G_b} + \frac{V_b}{2G_b}} = G_{xz} \quad (244)$$

$$G_{xy}^{(+)} = G_{f_{LT}} + \frac{V_b}{\frac{1}{G_b - G_{f_{LT}}} + \frac{V_f}{2G_{f_{LT}}}}$$

und

$$E_x = V_f E_{f_L} + V_b E_b \quad (245)$$

$$E_y = E_z = \frac{4K_{yz}^{(-)*} G_{yz}^{(+)*}}{K_{yz}^{(-)*} + \psi G_{yz}^{(+)*}} \quad (246)$$

sowie

$$v_{yz} = v_{zy} = \frac{K_{yz}^{(-)*} - \psi G_{yz}^{(+)*}}{K_{yz}^{(-)*} + \psi G_{yz}^{(+)*}} \quad (247)$$

$$v_{xy} = \frac{V_f E_{f_L} L_I + V_b E_b L_{II} v_b}{V_f E_{f_L} L_{III} + V_b E_b L_{II}} \quad (248)$$

mit

$$\psi = 1 + 4K_{yz}^{(-)*} v_{xy}^2 / E_x$$

$$L_I = 2v_{f_{LT}} (1 - v_b^2) V_f + V_b (1 + v_b) v_b$$

$$L_{II} = V_f (1 - v_{f_{LT}} - 2v_{f_{LT}}^2) \quad (249)$$

$$L_{III} = 2(1 - v_b^2) V_f + (1 + v_b) V_b$$

9.2 Numerische Berechnung der materialabhängigen Parameter $\Delta_{kj}, \Delta_{oj}, \Delta_{kj}^{(3)}$ des Kontaktkraftgesetzes von Sveklo

Die hier aufgeführten Beziehungen findet man in analoger Form in den Aufsätzen zur anisotropen Kontakttheorie von Sveklo /44/-/46/.

Der Index j bei $\Delta_{kj}, \Delta_{oj}, \Delta_{kj}^{(3)}$ bezeichnet den jeweils betrachteten Kontaktpartner $j = 1, 2$. Die in diesem Anhang angegebenen Berechnungsschritte sind für beide Kontaktpartner gleichermaßen durchzuführen, weshalb im folgenden der Index j weggelassen wird, so daß für jeden Kontaktpartner also $\Delta_k, \Delta_o, \Delta_k^{(3)}$ mit $k = 1, 2, 3$ zu bestimmen sind.

Aus den elastischen Steifigkeiten $c_{11}, c_{12} \dots c_{66}$ des betrachteten Materials sind dazu in Abhängigkeit vom Winkel θ die 3 konjugiert komplexen Nullstellenpaare μ_k der Determinantenbeziehung

$$\begin{vmatrix} c_{11}^* & (c_{12} + c_{66}) \cos \theta \sin \theta & \mu (c_{13} + c_{55}) \cos \theta \\ (c_{12} + c_{66}) \sin \theta \cos \theta & c_{22}^* & \mu (c_{23} + c_{44}) \sin \theta \\ \mu (c_{13} + c_{55}) \cos \theta & \mu (c_{23} + c_{44}) \sin \theta & c_{33}^* \end{vmatrix} = 0 \quad (250)$$

zu bestimmen, wobei folgende Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= c_{11} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta + c_{55} \mu^2 \\ c_{22}^* &= c_{66} \cos^2 \theta + c_{22} \sin^2 \theta + c_{44} \mu^2 \\ c_{33}^* &= c_{55} \cos^2 \theta + c_{44} \sin^2 \theta + c_{33} \mu^2 \end{aligned} \quad (251)$$

gelten. Zu jedem konjugiert komplexen Nullstellenpaar μ_k ($k = 1, 2, 3$) können dann die Größen

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} &= (c_{12} + c_{66}) (c_{23} + c_{44}) \sin^2 \theta \\ &\quad - (c_{13} + c_{55}) (c_{66} \cos^2 \theta + c_{22} \sin^2 \theta + c_{44} \mu_k^2) \\ \Delta_k^{(2)} &= (c_{12} + c_{66}) (c_{13} + c_{55}) \cos^2 \theta \\ &\quad - (c_{23} + c_{44}) (c_{11} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta + c_{55} \mu_k^2) \end{aligned} \quad (252)$$

$$\Delta_k^{(3)} = (c_{11} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta + c_{55} \mu_k^2) (c_{66} \cos^2 \theta + c_{22} \sin^2 \theta + c_{44} \mu_k^2) - (c_{12} + c_{66})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

berechnet werden, mit denen schließlich

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\mu_2 \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(3)}) (\mu_3 \Delta_3^{(2)} + \Delta_3^{(3)}) - (\mu_3 \Delta_3^{(1)} + \Delta_3^{(3)}) (\mu_2 \Delta_2^{(2)} + \Delta_2^{(3)}) \\ \Delta_2 &= (\mu_1 \Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}) (\mu_3 \Delta_3^{(1)} + \Delta_3^{(3)}) - (\mu_1 \Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(3)}) (\mu_3 \Delta_3^{(2)} + \Delta_3^{(3)}) \\ \Delta_3 &= (\mu_1 \Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(3)}) (\mu_2 \Delta_2^{(2)} + \Delta_2^{(3)}) - (\mu_1 \Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}) (\mu_2 \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(3)}) \end{aligned} \quad (253)$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (c_{13} \mu_1 \Delta_1^{(1)} \cos^2 \theta + c_{23} \mu_1 \Delta_1^{(2)} \sin^2 \theta + c_{33} \mu_1 \Delta_1^{(3)}) \Delta_1 \\ &\quad + (c_{13} \mu_2 \Delta_2^{(1)} \cos^2 \theta + c_{23} \mu_2 \Delta_2^{(2)} \sin^2 \theta + c_{33} \mu_2 \Delta_2^{(3)}) \Delta_2 \\ &\quad + (c_{13} \mu_3 \Delta_3^{(1)} \cos^2 \theta + c_{23} \mu_3 \Delta_3^{(2)} \sin^2 \theta + c_{33} \mu_3 \Delta_3^{(3)}) \Delta_3 \end{aligned} \quad (254)$$

berechnet werden können.

9.3 Transformationsverfahren zur näherungsweise Ermittlung des Verschiebungsfeldes in einem durch eine Einzelkraft belasteten anisotropen Halbraum

Es wird angenommen, daß die elastischen Konstanten des Materials folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}} &= \sqrt{\nu_{xz}\nu_{zx}} = \sqrt{\nu_{zy}\nu_{yz}} = \bar{\nu} \\ G_{yz} &= \frac{\sqrt{E_y E_z}}{2(1+\bar{\nu})} \\ G_{xz} &= \frac{\sqrt{E_x E_z}}{2(1+\bar{\nu})} \\ G_{xy} &= \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1+\bar{\nu})} \end{aligned} \quad (255)$$

genügen. In Anlehnung an Lodge /47/ werden nun folgende Substitutionen für neue Variable gemacht.

Die neuen Koordinaten x' , y' , z' gehorchen

$$x = x' \quad y = \left(\frac{E_y}{E_x} \right)^{1/4} y' \quad z = \left(\frac{E_z}{E_x} \right)^{1/4} z' \quad , \quad (256)$$

so daß sich die partiellen Ableitungen zu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{E_x}{E_y} \right)^{1/4} \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{E_x}{E_z} \right)^{1/4} \frac{\partial}{\partial z'} \quad (257)$$

ergeben. Darüberhinaus werden folgende Substitutionen bei den Verschiebungen

$$u = u' \quad v = \left(\frac{E_x}{E_y} \right)^{1/4} v' \quad w = \left(\frac{E_x}{E_z} \right)^{1/4} w' \quad , \quad (258)$$

den Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma'_x & \sigma_y &= \left(\frac{E_y}{E_x} \right)^{1/2} \sigma'_y & \sigma_z &= \left(\frac{E_z}{E_x} \right)^{1/2} \sigma'_z \\
 \tau_{yz} &= \left(\frac{E_y E_z}{E_x^2} \right)^{1/4} \tau'_{yz} \\
 \tau_{xz} &= \left(\frac{E_x E_z}{E_x^2} \right)^{1/4} \tau'_{xz} \\
 \tau_{xy} &= \left(\frac{E_x E_y}{E_x^2} \right)^{1/4} \tau'_{xy}
 \end{aligned} \tag{259}$$

den Komponenten des Verzerrungstensors

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon'_x & \epsilon_y &= \left(\frac{E_x}{E_y} \right)^{1/2} \epsilon'_y & \epsilon_z &= \left(\frac{E_x}{E_z} \right)^{1/2} \epsilon'_z \\
 \gamma_{yz} &= \left(\frac{E_x^2}{E_y E_z} \right)^{1/4} \gamma'_{yz} \\
 \gamma_{xz} &= \left(\frac{E_x^2}{E_x E_z} \right)^{1/4} \gamma'_{xz} \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{E_x^2}{E_x E_y} \right)^{1/4} \gamma'_{xy}
 \end{aligned} \tag{260}$$

und bei der Einzelkraft P

$$P = \left(\frac{E_z}{E_x} \right)^{1/2} \left(\frac{E_y}{E_x} \right)^{1/4} P' \tag{261}$$

gemacht. Unter Verwendung dieser Transformationsbeziehungen können für einen orthotropen Körper, dessen elastische Konstanten den Gln. (255) genügen, ausgehend von den Grundgleichungen des Kapitels 2 folgendermaßen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'} &= 0 \end{aligned} \quad (262)$$

die geometrischen Bedingungen

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{\partial u'}{\partial x'} & \epsilon'_y &= \frac{\partial v'}{\partial y'} & \epsilon'_z &= \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \gamma'_{zy} &= \gamma'_{yz} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \gamma'_{xz} &= \gamma'_{zx} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \gamma'_{xy} &= \gamma'_{yx} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \end{aligned} \quad (263)$$

das Stoffgesetz

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{zy} \\ \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_x}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \begin{bmatrix} (1-\bar{\nu}) & \bar{\nu} & \bar{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\bar{\nu}) & \bar{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\bar{\nu}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\bar{\nu}}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1-2\bar{\nu}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\bar{\nu}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \epsilon'_z \\ \gamma'_{zy} \\ \gamma'_{zx} \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix} \quad (264)$$

und damit die Differentialgleichungen für das Verschiebungsfeld

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{1}{(1-2\bar{\nu})} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{1}{(1-2\bar{\nu})} \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right] &= 0 \quad (265) \\ \frac{\partial w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial w'}{\partial z'^2} + \frac{1}{(1-2\bar{\nu})} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right] &= 0 \end{aligned}$$

umgeschrieben werden. Des weiteren können die Randbedingungen des hier vorliegenden Problems des durch eine Einzelkraft belasteten Halbraums in die Form

$$\begin{aligned} \tau'_{zx} = \tau'_{zy} &= 0 && \text{für } z'=0 \\ \sigma'_z &= 0 && \text{für } z'=0 \text{ und } x', y' \neq 0 \quad (266) \\ P' &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma'_z dx' dy' && \text{für alle Ebenen } z'=\text{const.} \end{aligned}$$

überführt werden.

Man erkennt in den Gln. (262)-(266) die totale formale Analogie zum äquivalenten isotropen Problem, dessen Lösung bekannt ist /102/, und bekommt

$$w'(x', y', z'=0) = \frac{P'}{\pi E_x} \frac{(1-\bar{\nu}^2)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (267)$$

als Beziehung für die Verschiebungen der Halbraumoberfläche in z-Richtung, woraus nach einer Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen

$$w(x, y, z=0) = \frac{P}{\pi} \frac{1-\bar{\nu}^2}{(E_x E_y E_z)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{(E_z/E_x)^{1/2} x^2 + (E_z/E_y)^{1/2} y^2}} \quad (268)$$

folgt.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Guldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr.32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into
nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz. K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer
Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von
Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik
und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-
stationärer Erregung
- Nr.50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experi-
mentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten
CFK-Verbundplatte

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 51**