



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Heinz Antes, Thomas Meise
Thomas Wiebe

Wellenausbreitung in
akustischen Medien

Randelement-Prozeduren im 2-D
Frequenzraum und im 3-D
Zeitbereich

Heft Nr. 54



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Heinz ANTES, Thomas MEISE und Thomas WIEBE

WELLENAUSBREITUNG IN AKUSTISCHEN MEDIEN

-

RANDELEMENT - PROZEDUREN

im 2-D FREQUENZRAUM und im 3-D ZEITBEREICH

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 54

JANUAR 1988

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

1988 Prof. Dr. rer. nat. Heinz Antes

Dipl.-Math. Thomas Meise, cand.-ing. Thomas Wiebe

**Alle Rechte vorbehalten. Auch die photomechanische Vervielfältigung der Arbeit
oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung der Autoren.**

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zwei numerische Verfahren zur Ermittlung der Wellenausbreitung in akustischen Medien oder kompressiblen Flüssigkeiten vorgestellt.

In Teil A wird für zwei-dimensionale Probleme die Ausbreitung durch harmonische Erregungen verursachter Wellen im Frequenzraum untersucht, während in Teil B in direkter Zeitverlaufsberechnung Druckwellen infolge beliebig zeitlich veränderlicher Anregungen, bzw. deren Ausbreitung in drei-dimensionalen Gebieten ermittelt werden.

Die beiden Programmsysteme - in Teil A das Programm **MGBEM-FF**, in Teil B das Programm **FLUID3D** - haben außer den unterschiedlichen Anwendungsbereichen auch verschieden weit ausgearbeitete numerische Möglichkeiten. In dieser Hinsicht ist besonders auf das in **MGBEM-FF** eingesetzte Mehrgitterverfahren hinzuweisen, das die schnelle, effektive Lösung großer Gleichungssysteme ermöglicht. In beiden Teilen ist die jeweils zugrunde liegende Theorie mit der Herleitung der Integralgleichungen enthalten.

Summary

In this paper two numerical procedures are presented by which the propagation of waves in acoustic media or in compressible fluids can be determined.

In part A, the propagation of 2-D waves produced by harmonic excitations is analyzed in the frequency domain, while in part B in a direct time domain approach the pressure waves caused by arbitrary time-variable excitations, i.e. their propagation in 3-D domains will be computed.

Besides the distinct fields of applicability the programmings - in part A the program **MGBEM-FF**, in part B the system **FLUID3D** - both have differently elaborated numerical possibilities. In this regard it has to be pointed especially to the Multigrid method applied in **MGBEM-FF** for very fast and effectively solving large systems of algebraic equations. In both parts the basic theory and the derivation of the integral equations is contained.

Teil A: MGBEM - FF

Ein Rechenprogramm zur Untersuchung der Ausbreitung 2-dimensionaler Wellen im Frequenzraum mit einem Mehrgitter-Randelemente Verfahren
(Thomas Meise)

	Seite
1. Einführung	3
2. Problemstellung	3
3. Randelementeverfahren	5
4. Mehrgitterverfahren	7
5. Möglichkeiten und Vorteile	11
6. Speicherplatzbedarf	16
7. Eingabedaten	18
8. Ausgabe	23
9. Beispiele	24
10. Literatur	46

Teil B: FLUID3D

Ein Rechenprogramm zur Untersuchung der Ausbreitung 3-dimensionaler Wellen im Zeitbereich mit einem Zeitschritt - Randelemente Verfahren
(Thomas Wiebe)

	Seite
1. Einleitung	48
2. Die Wellengleichung	50
3. Eine Punktquelle im unendlichen Gebiet	53
4. Die Kirchhoff'sche Integralgleichung	55
5. Die Randintegralgleichung	61
6. Eine Randelemente-Formulierung	63
7. Die numerische Lösung der Randintegralgleichung	73
8. Beispiele	78
9. Zusammenfassung	90
10. Literatur	91

Teil A: MGBEM - FF

Ein Rechenprogramm zur Untersuchung der Ausbreitung 2-dimensionaler Wellen im Frequenzraum mit einem Mehrgitter-Randelemente Verfahren
(Thomas Meise)

1. Einführung

Basierend auf Überlegungen von Schippers [1] und Meise [2] wurde ein Verfahren entwickelt, das gemischte Randwertprobleme der zweidimensionalen Helmholtzgleichung numerisch löst und dabei die Vorteile der Randelementmethode und des Mehrgitterverfahrens kombiniert. Mit dem hierfür erstellten Programm MGBEM/FF kann die Wellenausbreitung in akustischen Medien bzw. Fluiden numerisch ermittelt werden.

Dieser Bericht erläutert kurz das Prinzip der Randelementmethode und des Mehrgitterverfahrens. Vor allem aber wird der Gebrauch des Programms MGBEM/FF dokumentiert. Eine ausführliche Beschreibung der nötigen Eingaben sowie Aussagen über den Speicherplatzbedarf schließen sich an. Konkrete Beispiele veranschaulichen die Vorgehensweise und die Vorteile des Programms.

Anmerkung: Voraussetzung für das FORTRAN 77 - Programm MGBEM/FF ist die Zugriffsmöglichkeit auf die NAG-Fortran Unterprogramm Bibliothek.

2. Problemstellung

Betrachtet wird ein im zweidimensionalen polygonal begrenztes akustisches Medium bzw. Fluid (z.B. Luft, Wasser), wobei folgende physikalische Annahmen getroffen werden:

- linear kompressibles, homogenes Medium
- keine Viskosität
- kleine Schwingungsamplituden.

Bei einer harmonischen Erregung mit der Kreisfrequenz ω und mit dem Ansatz $p(x) \cdot e^{i\omega t}$ für den hydrodynamischen Druck wird im Frequenzbereich die Druckwellenausbreitung durch die 2-D-Helmholtzgleichung beschrieben:

$$L(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + k^2 p = 0 \quad , \quad p \in C \quad , \quad k = \omega/c$$

Für diese Differentialgleichung können folgende Randbedingungen vom Programm

MGBEM/FF bearbeitet werden:

- a) Auf einem Bereich des Polygonzuges, der das Medium begrenzt, kann der Druck p zu 0 vorgeben werden:

$$\bar{p} = 0 \quad \text{z.B. freie Wasseroberfläche}$$

- b) Weitere Bereiche werden als ∞ steif und undurchlässig angenommen. Auch dort können bereichsweise konstante Randbedingungen bearbeitet werden. Abhängig von der Dichte ρ des Mediums und einer harmonisch vorgegebenen Schallschnelle ($v \cdot e^{i\omega t}$) in Normalenrichtung ist dort

$$\bar{q} = p, n = -i\omega \cdot \rho \cdot v \ .$$

- c) Darüberhinaus können auch Öffnungen und Sprünge in der Randkurve berücksichtigt werden (siehe Kap. 7), so daß auch halboffene Gebiete, wie z.B. Halbebenen, zulässig sind.

- d) Zusätzlich ist die Möglichkeit zur Berücksichtigung lokaler Absorption in den Rändern gegeben. Diese dämpfende Eigenschaft des entsprechenden Randbereiches wird durch die komplexe Wandadmittanz A beschrieben. Als Randbedingung wird nach [4]

$$\bar{q} = p, n = -i\omega \cdot \rho \cdot A \cdot p \quad \text{eingesetzt.}$$

Leider läßt sich diese Bedingung mit $A \neq 0$ bei Verwendung des Mehrgitterverfahrens nur unbefriedigend realisieren. Das Programm greift daher ggf. auf herkömmliche Gleichungslöser zurück.

Nicht möglich ist die Kopplung von Randbereichen.

Näheres zur Problemstellung findet sich in [4].

3. Randelementverfahren

Das Randelementverfahren (BEM) ist eine Alternative zu den bisher verwendeten Finite-Element- oder Differenzen-verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. Dabei sind grundsätzlich zwei Schritte durchzuführen:

a) Zur Differentialgleichung und den zugehörigen Randwerten

$$\begin{aligned} L(p) &= 0 && \text{in } \Omega \\ p &= \bar{p} && \text{auf } \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned}$$

wird analytisch eine Integralgleichung für Innen- und für Randpunkte hergeleitet, die eine gleichwertige Darstellung des elliptischen Randwertproblems darstellt. Dies ist mit Hilfe der Differentialgleichung über die Methode der gewichteten Residuen [3,6] möglich (siehe auch [4]).

$$d \cdot p(x) = \int_{\partial\Omega} p(s) \frac{\partial}{\partial \bar{n}_s} F(s,x) d\Gamma_s - \int_{\partial\Omega} F(s,x) q(s) d\Gamma_s$$

$$d = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega/\partial\Omega \\ 1/2 & \text{für } x \in \partial\Omega \text{ glatt} \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega \end{cases}$$

$$q(s) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_s} p(s)$$

$$F(s,x) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \cdot |x-s|) \quad \text{Fundamentallösung}$$

b) Der Rand, und damit auch die Randintegralgleichung, wird diskretisiert und die Randwerte werden in den Randelementen durch Ansatzfunktionen approximiert. Durch Kollokation an geeigneten Randpunkten erhält man dadurch ein zugeordnetes lineares algebraisches Gleichungssystem, dessen numerische Lösung die Stützwerte für die Ansatzfunktionen der unbekanntenen Randwerte liefert.

Durch die Beschränkung auf den Rand und die damit verbundene Reduzierung der Problemdimension unterscheidet sich die BEM grundsätzlich von den oben er-

wählten Gebietsverfahren.

Anmerkungen:

- 1) Das vorliegende Programm benutzt stückweise lineare Ansatzfunktionen für die unbekannt Randfunktionen p und $p, n = q$.
- 2) Die Stetigkeit von p sowie die Unstetigkeit von p, n in den Ecken des polygonalen Randes wird im Programm berücksichtigt.
- 3) Als numerisches Integrationsverfahren wird das Gaußverfahren mit 8 Stützpunkten verwendet. Trotz der Singularität des Integralkerns ist für akzeptable Ergebnisse eine analytische Integration nicht notwendig.

4. Mehrgitterverfahren

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$A \cdot f = g$$

existieren zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten:

- a) die direkten Verfahren (Invertierung, L-U-Zerlegung, u. a.)
- b) die iterativen Verfahren (z.B. das Mehrgitterverfahren).

Der Rechenaufwand und damit auch die Rechenzeit der direkten Verfahren ist für Vollmatrizen, wie sie bei der BEM auftreten, proportional zu N^3 (N = Anzahl der Unbekannten), d.h. von der Größenordnung $O(N^3)$.

Iterationsverfahren dagegen bestehen im wesentlichen aus Matrix-Vektor Multiplikationen mit einem Aufwand von $O(N^2)$ bei Vollmatrizen. Um eine schnelle Konvergenz zu erreichen, sind i.a. einige vorbereitende Vorlaufrechnungen nötig, die durchaus einen Aufwand der Größenordnung $O(N^3)$ benötigen dürfen. Dabei muß aber sichergestellt sein, daß trotz der dann gleichen Größenordnung diese Vorlaufrechnungen um einen erheblichen Faktor schneller sind als eine direkte Lösung des Gleichungssystems. Nur dann kann man mit einer effektiven Zeiterparnis für das iterative Verfahren (Vorlaufrechnung plus Iteration) rechnen.

Das hier programmierte Mehrgitter-Verfahren zur Lösung der Randelementgleichungen für gemischte elliptische Randwertprobleme wurde durch Erweiterung des von Schippers 1985 [1] vorgestellten Verfahrens für elliptische Dirichlet- oder Neumann-Probleme mit glattem Rand hergeleitet:

Beginnend mit dem Startwert $f_0 = 0$ gilt die Iteration

$$(1) \quad f_{v+1/2} := f_v + D^{-1} \cdot (g - A \cdot f_v) .$$

Nach jedem Iterationsschritt wird auf einem größeren Gitter der aktuelle Fehler näherungsweise bestimmt. Dazu löst man auf dem größeren Gitter das Gleichungssystem

$$A \cdot e = (g - A \cdot f_{v+1/2}) \quad (*) .$$

Dies geschieht ebenfalls iterativ durch rekursive Anwendung des Mehrgitterverfahrens, einschließlich der Benutzung eines noch größeren Gitters.

Die größeren Gitter werden automatisch durch Weglassen jeden zweiten Knotens generiert. Dadurch halbiert sich bei jeder sogenannten Vergrößerung die Größe

des zu lösenden Gleichungssystems (*).

Auf den gröberen Gittern genügen zwei Iterationen der obigen Form, incl. einer weiteren Vergrößerung, eine Näherung \tilde{e} für den Fehler

$$e := A^{-1} (g - A f_{\nu+1/2}) = f - f_{\nu+1/2}$$

zu bestimmen. Diese Näherung wird durch Interpolation (Mittelung der Nachbarwerte) auf das nächst feinere Gitter übertragen und zu $f_{\nu+1/2}$ hinzuaddiert:

$$(2) \quad f_{\nu+1} := f_{\nu+1/2} + \tilde{e} \quad (\approx f_{\nu+1/2} + e = f) .$$

Die rekursive Anwendung des Mehrgitterverfahrens bricht ab, wenn eine festzulegende Anzahl an Vergrößerungen durchgeführt worden ist, d.h. wenn das Gleichungssystem (*) durch die Halbierungen der Knotenanzahl eine bestimmte Größe unterschreitet. Das dann verhältnismäßig kleine Gleichungssystem (*) für dieses grösste Gitter wird mit direkten Verfahren "exakt" gelöst.

(Die Anzahl der Vergrößerungen beeinflusst stark die Rechenzeit. Abhängig von der Anzahl der Unbekannten N trifft das Programm daher stets automatisch eine geeignete Wahl (s.u.))

Die für die Iteration (1) und (2) nötigen Matrizen A auf den gröberen Gittern erhält man (ohne großen Aufwand) aus der ursprünglichen Matrix A für das feinste Gitter, da sich die groben Formfunktionen als Linearkombination der feinen Formfunktionen auffassen lassen. Eine Abspeicherung dieser Matrizen ist daher nicht nötig. Lediglich auf dem grössten Gitter muß die Matrix A (=A₀) abgespeichert und invertiert (oder zerlegt) werden. Der Aufwand dafür ist O(N₀³), wobei N₀ die Anzahl der Knoten des grössten Gitters angibt.

Die Wahl von Matrix D in (1) ist entscheidend für die schnelle Konvergenz des Verfahrens. Nach Schippers [1] ist D geeigneterweise der positiv definite Anteil des elliptischen Integraloperators A (siehe [5]). Beim Randwertproblem 1. Art wird er vom singulären Teil des Integralkerns des Integraloperators A gebildet, d.h. bei der o.g. Hankelfunktion der Logarithmus. Beim Randwertproblem 2. Art ist der Kern jedoch nicht singulär. Dann bildet der integralfreie Term den gesuchten Operator, also 0.5 * Id.

Im vorliegenden Programm ergibt sich demnach für gemischte Randwertprobleme folgende Form:

$$D = \left[\begin{array}{c|ccc} D_1 & & & 0 \\ \hline & 1/2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/2 \end{array} \right] \} n_1$$

Dabei ist D_1 die Diskretisierung des Operators

$$D_1 q(x) = \int_0^1 q(s(t)) \frac{1}{4\pi} \log |t-\tau| dt$$

und $s(t)$ eine Parametrisierung des Randes Γ_1 mit

$$s : (0,1) \rightarrow \Gamma_1, \quad s(\tau) = x \quad \text{und} \quad \dot{s}(t) = l = \text{const.}$$

Nach der Diskretisierung der gesuchten Funktion $q(x)$ ist dieses Integral sogar randunabhängig, was im Programm jedoch nicht weiter ausgenutzt wird. Sei nun n_1 die Anzahl der Knoten mit gegebenem Druck p . Die Invertierung von D besteht dann im Grunde nur aus der Invertierung von D_1 mit einem Aufwand von $O(n_1^3)$. Die Vorlaufrechnungen für die oben genannte Iteration, bestehend aus der Berechnung von D^{-1} und A_0^{-1} , haben mit $O(n_1^3) + O(N_0^3)$ wegen $(\frac{n_1}{N})^3 + (\frac{N_0}{N})^3 \ll 1$ einen wesentlich geringeren Aufwand als ein direkter Löser mit $O(N^3)$. Diese Vorgehensweise (Vorlaufrechnung plus Iteration $O(N^2)$) ermöglicht daher eine erhebliche Zeitersparnis für große N . Dies gilt insbesondere, weil bei sinnvoller Festlegung der Randelemente die Abbruchbedingung für die Iteration bereits nach wenigen (<10) Schritten erfüllt ist [2] und sich die Konvergenz bei noch feinerer Diskretisierung sogar verbessert [1],[2]!

Als Abbruchbedingung wurde hier der relative Defekt benutzt:

$$\| g - A f_v \| / \| g \| < 10^{-4}$$

$$\text{mit } \| x \| = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Durch Testläufe hat sich für dieses Programm ergeben, daß ab etwa 100 Unbekannten die Rechenzeit eines direkten Löser unterboten werden kann. Dies gilt sowohl für das sogenannte Zweigitterverfahren (mit $N_0 = \frac{1}{2} N$), als auch für das

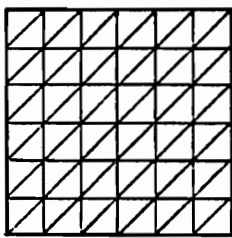
Dreigitterverfahren ($N_0 = \frac{1}{4} N$). Je größer N wird, desto mehr lohnt es sich, auf mehreren Gittern, also mit mehreren Vergrößerungen zu rechnen. Als günstig erweist sich folgende Wahl:

Anzahl der Gitter	Unbekannte N	N_0
2	0 - 100	N/2
3	100 - 500	N/4
4	500 - 1600	N/8
5	1600 - 4800	N/16
6	4800 -	N/32

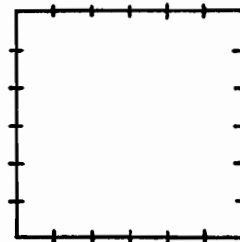
Man beachte, daß das Programm MGBEM für einen gerechten Zeitvergleich möglichst optimal kompiliert wurde, also ggf. mit Option.

5. Möglichkeiten und Vorteile

Vorteile des hier programmierten Verfahrens zur Lösung der Helmholtzgleichung ergeben sich zunächst durch die Anwendung der Randelementmethode (BEM). Damit wird die Problemdimension um 1 reduziert, da statt einer DGL auf einem zweidimensionalen Gebiet eine entsprechende Integralgleichung auf dem lediglich eindimensionalen Gebietsrand gelöst wird. Dies verringert die Anzahl der nötigen Ansatzfunktionen bzw. die Anzahl der Elemente erheblich:



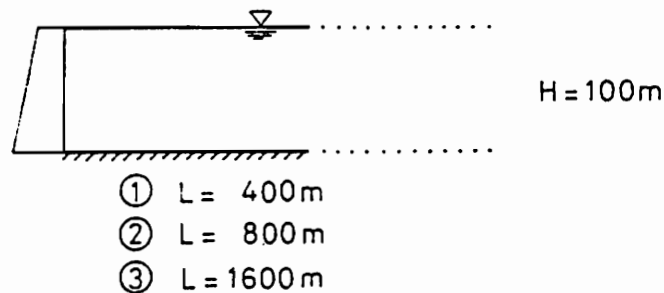
$2 \cdot N^2$ Dreieckselemente



$4 \cdot N$ Randelemente

Besonders markant wird dieser Vorteil bei Außenraumproblemen, wenn anstatt einer unendlichen Fläche lediglich ein endlicher Rand diskretisiert zu werden braucht, wodurch zusätzlich Abbruchfehler und unerwünschte Randstörungen (z.B. Reflektionen) vermieden werden.

Problematisch für die BEM könnten halbunendliche Gebiete sein, bei denen die Diskretisierung des unendlichen Randes ebenfalls abgebrochen werden muß:



Wie sich in Abb.1 zeigt macht sich ein Abbruch bei der Diskretisierung eines unendlichen Randes nur in der Nähe des Abbruchs (d.h. bis zu einer Wellenlänge entfernt) bemerkbar. Diskretisiert man also einen unendlichen Randbereich soweit, daß seine Länge die anderen Abmessungen des Gebiets erheblich übertrifft, kann man den Abbruchfehler vernachlässigen.

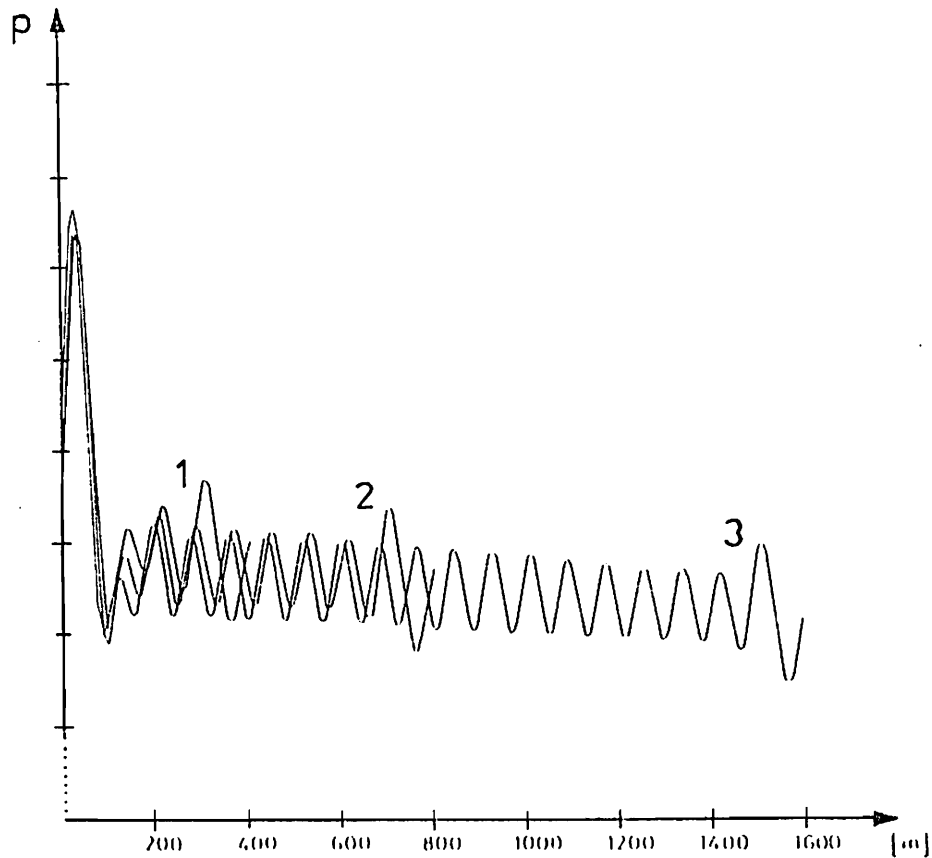


Abb. 1 Verteilung des hydrodynamischen Druckes am Grund eines halbumendlichen Beckens bei horizontal erregter Mauer. -
Einfluß des Abbruchs der Randdiskretisierung

Die Diskretisierung bei obigem Beispiel wurde extrem fein gewählt um Diskretisierungsfehler auszuschließen. Normalerweise nimmt man jedoch Diskretisierungsfehler bis zu einer gewissen Größe in Kauf um kleinere Gleichungssysteme und damit schneller eine Lösung zu erhalten.

Wie groß ist nun die Schrittweite zu wählen?

Zunächst richtet sich die Schrittweite bzw. die Länge der Elemente nach der Wellenlänge (wlg) der entstehenden Druckwellen

$$\text{wlg} = \frac{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}}{\text{Frequenz}}$$

Mindestens drei lineare Elemente pro Wellenlänge sind zur Darstellung sinusförmiger Wellen erforderlich. Acht lineare Elemente sind erforderlich um die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens sicherzustellen. Doch selbst dies genügt i.a. nicht um den Diskretisierungsfehler klein zu halten. Die folgenden Beispiele (Abb.2 und

3) zeigen, daß problemabhängig erheblich mehr Elemente pro Wellenlänge nötig sein können.

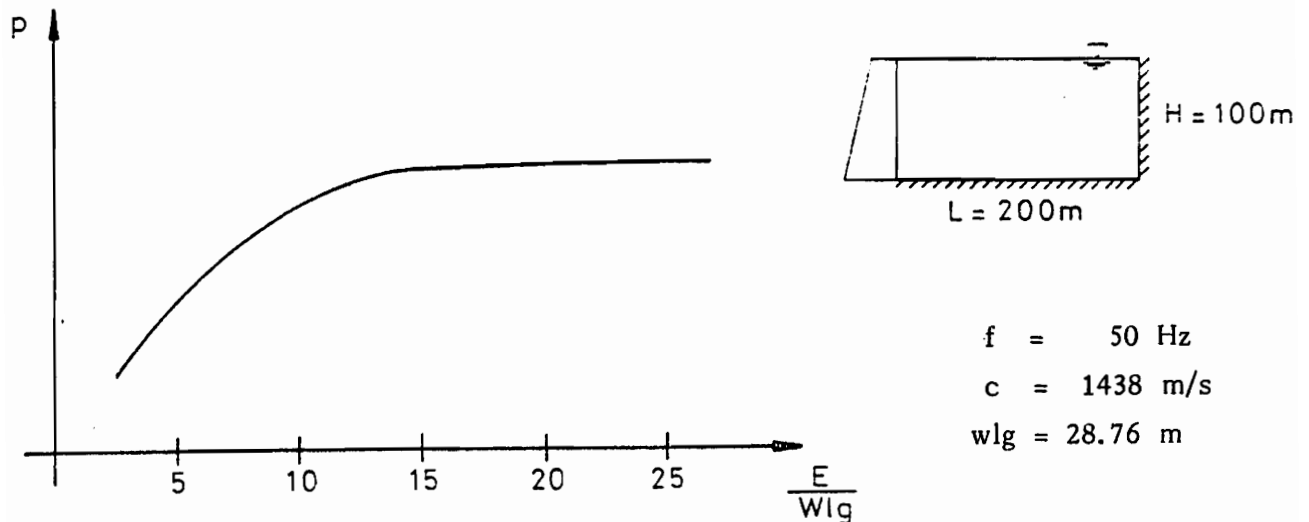


Abb. 2 Max. hydrodynamischer Druck bei horizontal erregter Mauer. -
Konvergenz bei zunehmender Diskretisierung

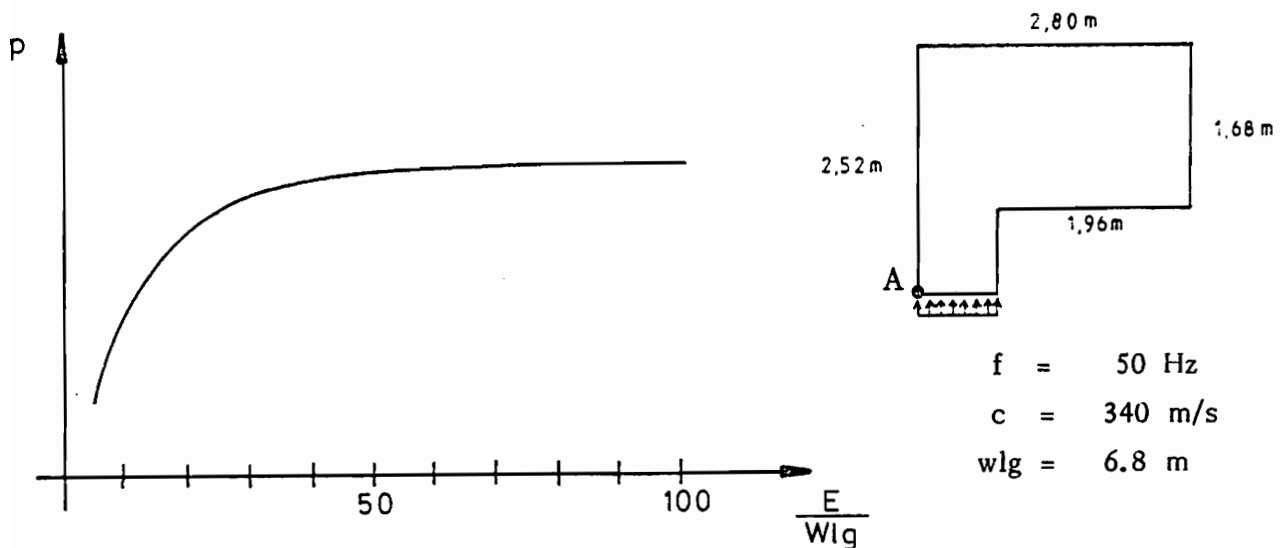


Abb. 3 Schalldruck im Punkt A. -
Konvergenz bei zunehmender Diskretisierung

Alternativ kann man versuchen durch Verkleinerung der Schrittweite in einigen problematischen Randbereichen (Kap 7i)) eine vollständige Diskretisierung des Randes mit sehr kleiner Schrittweite zu vermeiden. Dieses Vorgehen ist jedoch sehr stark problemabhängig und führt ggf. nur nach aufwendigen Testläufen und Vergleichen zum Erfolg.

Der Vorteil des Mehrgitterverfahrens kommt erst bei der Lösung des linearen Gleichungssystems, das mit Hilfe der BEM und entsprechender Kollokation aufgestellt wurde, zum tragen. Da es sich beim Mehrgitterverfahren um einen iterativen Gleichungslöser handelt, kann sein Vorteil "nur" eine Rechenzeiterparnis sein. Diese Ersparnis kann nun in der Tat erhebliche Ausmaße annehmen. Dazu hier die Rechenzeiten für das noch folgende Beispiel A (Kap 9) in Abhängigkeit von der Größe des Gleichungssystems:

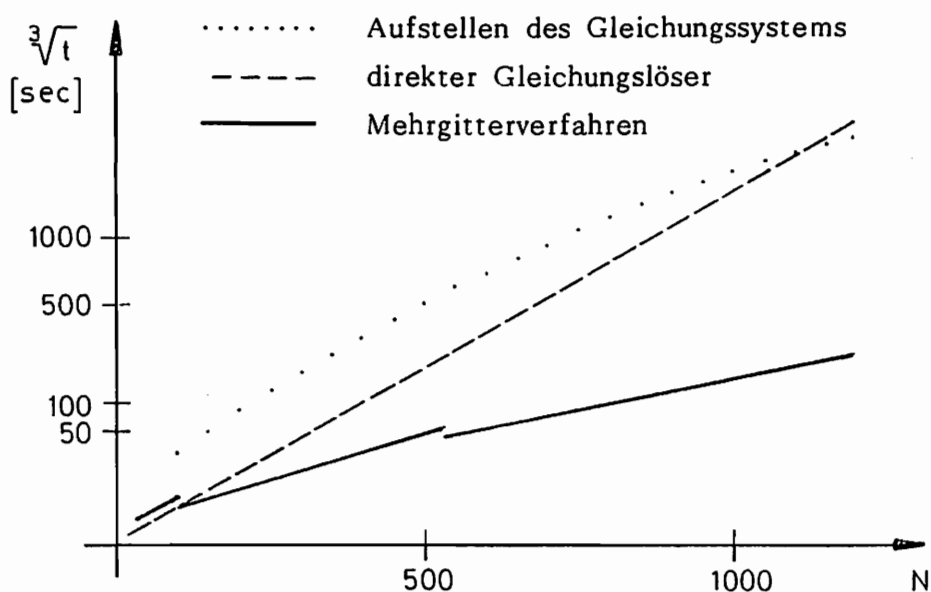


Abb.4 Rechenzeiten für Beispiel A in Abhängigkeit von der Größe des Gleichungssystems (in CPU-Sekunden)

- a) Das Berechnen der Matrixkoeffizienten und der rechten Seite ist natürlich unabhängig vom Gleichungslöser. Dieser Rechenaufwand ist daher unvermeidlich. Er steigt quadratisch mit der Anzahl der Unbekannten N (d.h. $O(N^2)$).
- b) Ein direkter Gleichungslöser (hier L-U-Zerlegung) löst ein Gleichungssystem mit einem Aufwand $O(N^3)$. Für große N (hier $\gg 1100$) entfiel auf ihn der weitaus größte Teil der Rechenzeit zur Lösung einer Randintegralgleichung.
- c) Im Vergleich zum direkten Löser zeigt das Mehrgitterverfahren bereits ab $N=100$ Vorteile. Bei $N=500$ benötigt es nur noch 20% der Rechenzeit des direkten Löser. Bei $N=1100$ sind es sogar nur 8% und dieser Prozentsatz verringert sich weiter für größere N .

Damit wird das herkömmliche direkte Lösungsverfahren für große N äußerst uninteressant. Das iterative Mehrgitterverfahren benötigt dagegen nicht mehr

Rechenzeit als das Aufstellen des Gleichungssystems. Seine Vorteile kommen voll zur Geltung je feiner diskretisiert wird bzw. werden muß, z.B. bei hohen Erregerfrequenzen oder für möglichst exakte Lösungen.

6. Speicherplatzbedarf

Bei großen Gleichungssystemen ist neben der langen Rechenzeit der Speicherplatzbedarf ein Problem. Im wesentlichen müssen die Matrizen A, D, AD, RA und AA (siehe unten) abgespeichert werden. Dies macht einen Platzbedarf von $(2 \cdot N^2 + 2 \cdot n_1^2 + 4 \cdot N_0^2)$ real-Zahlen aus.

Die vorliegende Programmversion ist für das Betriebssystem NOS/VE auf der Cyber 170-855 (Control Data) vorgesehen. Dort ist die Möglichkeit für einen virtuellen Speicherraum durch automatisches paging gegeben.

Ist auf einer anderen Anlage diese Möglichkeit nicht gegeben, so bleiben zwei Möglichkeiten das Programm anzupassen:

- a) Herabsetzen der Dimensionierung; dies läßt sich problemangepasst mit wenig Aufwand durchführen.
- b) Benutzung eines externen Speichermediums für eine oder mehrere der o.g. Matrizen. Dies erfordert jedoch größere Änderungen im Programm. Die nötigen I/O-Vorgänge führen zu einer erheblich längeren Rechenzeit aber nicht zu einem Effektivitätsverlust im Vergleich zu direkten Lösungsverfahren mit Hintergrundspeicher, die i. a. eine noch größere Zahl an I/O-Vorgängen benötigen.

In der vorliegenden Programmversion sind zur Dimensionierung folgende Beschränkungen getroffen worden:

$$N \leq 1100 \quad (P1)$$

$$N_0 \leq 300 \quad (P2)$$

$$n_1 \leq 200 \quad (P3)$$

$$IE \leq 25 \quad (P4)$$

Diese Werte sind in allen Unterprogrammen den Parametern P1 bis P4 zugeordnet. Eine Vergrößerung oder Verringerung der Dimensionierung läßt sich dadurch schnell durchführen, indem alle entsprechenden PARAMETER-Anweisungen im Programm geeignet geändert werden:

PARAMETER (P1=1100, P2=300, P3=200, P4=25)

Diese Anweisung findet sich am Anfang fast aller Programmbausteine.

Erläuterung und Mindestdimensionierung der wichtigsten Variablen:

N	integer	Anzahl der Unbekannten
PMAX	integer	Anzahl der Vergrößerungen
N0	integer	Unbekannte auf größtem Gitter
EXQ	integer	Anzahl der Unstetigkeitsstellen von p,n
XK(N)	real	Koordinaten der Knotenpunkte
YK(N)		
IE	integer	Anzahl der Randbereiche
LG(IE)	real	Länge eines Randbereiches
TGW(IE)	real	"Richtung" eines Randbereiches (in rad)
DAE(IE)	integer	Art des Randes (Kap 5)
NEL(IE)	Integer	Anzahl der Elemente eines Randbereiches
A(N,N)	complex	Matrix A (transponiert)
A0(N0,N0)	complex	Matrix A_0^{-1}
D(n ₁ ,n ₁)	real	Matrix D^{-1}
G(N,0: PMAX)	complex	aktuelle rechte Seite auf den Gittern 0 bis PMAX
F(N,0: PMAX)	complex	aktuelle Näherungslösungen

(F(i, PMAX), i=1,N enthält am Ende die gesuchten Knotenwerte für p bzw p,n)

7. Eingabedaten

Die Eingabe erfolgt wahlweise interaktiv oder mittels einer Eingabedatei, wobei mit Ausnahme von Character-Variablen alle Daten formatfrei eingelesen werden.

Man beginnt im **Dialog** am Bildschirmgerät:

(i) Festlegung der Eingabemethode

Name(Typ)	Beschreibung
a) PNJ (integer)	$\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ Eingabedatei für Eingaben ab (ii) liegt vor} \\ = 1 \text{ interaktive Eingabe aller Daten} \end{array} \right.$
b) INDAT (character*7)	bei PNJ=1 : Dateiname der Eingabedatei PNJ=0 : Name einer Datei, die die interaktiven Eingaben protokolliert (einzugeben im Format A7)

(ii) Festlegung der notwendigen physikalischen Größen.

c) c (real)	Schallgeschwindigkeit im akustischen Medium (LE/sec) (die einmal gewählte Längeneinheit LE (m,ft,...) ist konsequent zu verwenden)
d) f (real)	Erregerfrequenz (1/sec) ($\omega=2\pi \cdot f$)

(iii) Geometrie des Randes

Der Rand, eine eindimensionale polygonale "geschlossene" Kurve, ist so in gradlinige Bereiche einzuteilen, daß die Randbedingungen bereichsweise konstant sind und evtl. vorhandene Ecken Bereichsgrenzen bilden. Öffnungen oder Sprünge im Rand werden als gradlinige Bereiche betrachtet.

Auf max. **einem** Bereich kann als Randbedingung der Druck p vorgegeben werden. Dieser Bereich ist als erster einzugeben.

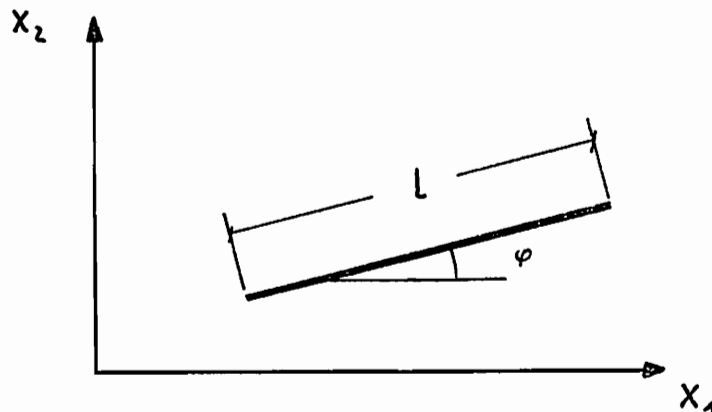
e) IE (integer)	Anzahl der Bereiche, incl. der Öffnungen.
--------------------	---

Ein Rechenlauf legt ggf. (siehe k) in Datei TAPEAB die Matrizen des

Gleichungssystems ab. Ein negatives IE kennzeichnet, daß die Matrizen für den aktuellen Rechenlauf bereits früher berechnet und abgelegt wurden. Sie können daher aus TAPEAB eingelesen werden, was zu einem erheblichen Zeitgewinn führt. Dieselben Matrizen treten allerdings nur dann auf, wenn sich zwei Beispiele lediglich in der Anregung unterscheiden. (Randarten 1 und 4 aus g) dürfen ausgetauscht und die Erregung in j) geändert sein.)

$$\begin{array}{l} \text{f) PNJ} \\ \text{(integer)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ P ist nirgends als Randbedingung vorgegeben.} \\ = 1 \text{ Auf einem Bereich ist } p = 0 \text{ als Randbedingung vorgegeben.} \end{array} \right.$$

Jeder geradlinige Bereich wird nun durch seine Länge und seinen Tangentenwinkel φ (in Grad) zur frei gewählten x_1 -Koordinatenrichtung beschrieben.



Dazu kommt die Art der Randbedingung die dort gelten soll:

- 0 - Öffnung oder Sprung -
- 1 - harter Rand (nicht erregt) $p, n = 0$
- 2 - gedämpfter Rand $p, n = \text{const} \cdot p$
- 3 - freie Oberfläche $p = 0$
- 4 - erregter Rand $p, n \neq 0$

Beachte weiterhin, daß die Randkurve im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, d. h. beim Abschreiten des Randes liegt das Medium links, und daß sich vorhandene Ränder nicht kreuzen oder berühren (mit Ausnahme des Übergangs zum unmittelbaren Nachbarbereich).

$$\begin{array}{l} \text{g) LG (i) , TGW (i) , DAE (i)} \\ \text{(real) (real) (integer)} \end{array} \quad i = 1, \dots, \text{IE}$$

Länge, Tangentenwinkel φ und Art des Randes können formatfrei aus einer Zeile, durch Komma oder Blank getrennt, eingelesen werden (pro Bereich

eine Zeile).

Fehlerhafte Eingaben werden als solche vom Programm erkannt und bei interaktiver Eingabe erneut abgefragt.

(iv) **Diskretisierung**

Die Diskretisierung muß sich nach der Wellenlänge richten. Acht lineare Elemente sind mindestens nötig um die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens zu gewährleisten. Mehr Elemente liefern bessere Näherungslösungen (siehe Kap 5).

h) EW Anzahl der lineare Elemente pro Wellenlänge
(real)

Gibt man hier die gewünschte Zahl negativ ein, so wird die Möglichkeit geboten im folgenden einzelne Randbereiche noch feiner zu diskretisieren. Dazu wird für jeden Randbereich ein ganzzahliger Faktor eingelesen, um den sich die Elementanzahl pro Wellenlänge in diesem Bereich erhöht.

Falls $EW < 0$:

i) IFK (i) $i = 1, IE$
(integer)

(v) **Randbedingungen, Anregung**

In jedem Punkt des Randes ist entweder der Druck p oder dessen Normalenableitung p,n vorzugeben. Für alle Bereiche der Arten 4 bzw. 2 wird die Erregung in Normalenrichtung bzw. die Dämpfung abgefragt. Real- und Imaginärteil werden getrennt eingelesen.

1. Für Erregung:

$$\text{Art} = 4 \qquad p,n = \frac{-i\omega \cdot \rho \cdot v}{T} \qquad \text{z.B. in [Pa/m]}$$

2. Für Dämpfung:

$$\text{Art} = 2 \qquad p,n = \frac{-i\omega \cdot \rho \cdot A \cdot p}{T} \qquad \text{z.B. in [1/m]}$$

Beachte dabei die richtige Umrechnung der Einheiten! (siehe dazu Kap 9)

j) T_r (real) Realteil Bereich i ggf, $i = 1, \dots, IE$
 T_i (real) Imaginärteil Bereich i

(vi) Weitere Informationen

k) RB2 (integer) $\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ Tape AB wird nicht angelegt} \\ = 1 \text{ Tape AB wird angelegt} \\ = 2 \text{ Stop} \end{array} \right.$
(siehe dazu Eingabe f)

l) WNJ (integer) $\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ weiter mit Eingabe p)} \\ = 1 \text{ Berechnung des Druckes p in Innen- oder} \\ \text{Randpunkten.} \end{array} \right.$

Falls WNJ = 1 gewählt wird, werden zu den Innenpunkten folgende Eingaben abgefragt:

m) AS (integer) Anzahl der Innenpunkte

Falls interaktiv eingegeben wird, besteht die Möglichkeit zumindest die Koordinaten der Punkte aus einer Datei INPLOT zu lesen. Anderenfalls müssen diese Daten mit in der Eingabedatei aufgeführt sein (Eingaben n) und o) entfallen).

n) KANAL (integer) $\left\{ \begin{array}{l} = 2 \text{ Daten aus INPUT lesen.} \\ = 4 \text{ Daten für n) sind in Datei INPLOT vorbereitet.} \end{array} \right.$

o) X (i), Y (i), C (i) $i= 1, \dots, AS$
(real) (real) (real)

Die Angabe der Koordinaten X, Y muß zusätzlich mit einer Kennzahl C versehen werden.

- C = 1 $\hat{=}$ Innenpunkt
- C = 2 $\hat{=}$ Randpunkt auf glattem Rand
- C = k $\hat{=}$ Eckpunkt mit Innenwinkel $360^\circ/k$
(z.B. $90^\circ \hat{=}$ k=4)

Die drei Angaben (X,Y,C) können wie schon unter g) aus einer Zeile formatfrei eingelesen werden.

Man beachte, daß der Koordinatenursprung im Anfangspunkt des ersten Bereiches liegen muß!

p) WNJ (integer) $\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ Programmende} \\ = 1 \text{ Vergleichsrechnung mit direktem Gleichungslöser} \end{array} \right.$

Zum Zeitvergleich oder zur Überprüfung bei zweifelhafter Konvergenz kann hier das Gleichungssystem auch direkt (L-U-Zerlegung) gelöst werden. Bei

auftretender Randabsorption mit $A \neq 0$ würde sofort diese Vergleichslösung berechnet.

Im Anschluß folgen ggf. erneut die Eingaben 1) bis o) zur Berechnung von Innenwerten mittels der Vergleichslösung.

8. Ausgabe

Die Ausgabe erfolgt in 4 Abschnitten:

- a) Kurzinformationen über den Rechenlauf und die Ergebnisse erscheinen sofort auf dem Bildschirm (Datei OUTPUT).
- b) Bei interaktiver Eingabe werden die Angaben in einer Datei eigener Wahl übersichtlich protokolliert. Diese Datei kann unverändert oder mit geänderten Werten (Editor) als Eingabedatei für einen weiteren Rechenlauf benutzt werden.
- c) Eine ausführliche Beschreibung des Rechenlaufes wird in Datei ERGIB erstellt. Sie beinhaltet:
 - sämtliche Eingabedaten
 - Beschreibung der Geometrie des Randes
 - die Randbedingungen
 - die benötigte Rechenzeit
 - die gesuchten Werte von p bzw. p, n in den Knoten, sowie deren Koordinaten
 - den Druck p an den zusätzlich gegebenen Innenpunkten.
 - Konvergenzraten
 - ggf. Vergleichslösung (direkt)

Bemerkung: Es werden die Konvergenzraten der ersten fünf Iterationen aufgelistet. Sollten sie nahe 1 oder sogar darüber liegen, oder sollte nach zehn Iterationen die Abbruchbedingung (Kap 4) noch nicht erfüllt worden sein, so ist die Richtigkeit der Ergebnisse nicht gewährleistet. Eine feinere und möglichst äquidistante Diskretisierung könnte Abhilfe schaffen.

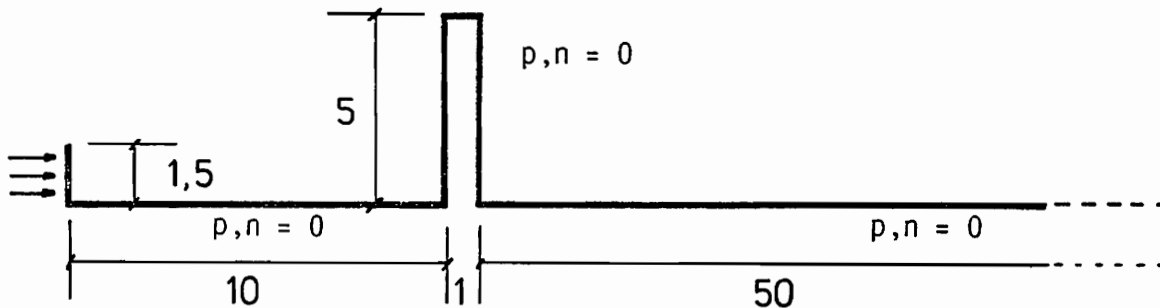
- d) Darüberhinaus können Ergebnisse zur graphischen Darstellung in Datei OUTPLT geschrieben werden. Automatisch geschieht dies mit den Werten für den Druck p an den Innenpunkten. Für weitere Ausgaben steht dem Benutzer das Unterprogramm PLOT zur Verfügung. Dort kann ggf. die Aufbereitung und Ausgabe von Ergebnissen selbst programmiert werden, z.B. zur Erstellung von Eingabedateien für evtl. vorhandene Plot-routinen.

9. Beispiele

Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise bei der Eingabe, soll im folgenden exemplarisch die Wellenausbreitung hinter einer Lärmschutzwand untersucht werden.

Zu Beginn sollte eine Systemskizze, d.h. eine Skizze der Randgeometrie und der geltenden Randbedingungen, stehen:

Beispiel A:



10 m vor einer 5 m hohen Wand soll sich ein Erreger (z.B. Auto) befinden. Er wird durch eine 1,5 m hohe senkrechte "Wand" idealisiert, die horizontal schwingt. An ihrem oberen Ende sowie 50 m hinter der Lärmschutzwand möge die Darstellung des Randes abbrechen. Der daraus resultierende Abbruchfehler macht sich nur in der Nähe des Abbruchs bemerkbar (Kap 5).

Der Rand sei überall hart (d.h. keine Absorption), was zu der Randbedingung $p, n = 0$ (Randart 1) führt.

Nun gilt es die Erregung näher zu beschreiben. Sie ist nach Voraussetzung harmonisch (sinusförmig) und kann durch zwei Werte festgelegt werden: Frequenz und Amplitude ξ .

Die horizontale Auslenkung s des erregten Randes aus der Ruhelage ist dann beschrieben durch

$$s(t) = -i \cdot \xi \cdot e^{i\omega t}, \quad \omega = 2\pi f \text{ die Kreisfrequenz}$$

wenn $s(0) = 0$ und $s'(0) > 0$ gewählt werden.

(Eine Phasenverschiebung ließe sich durch eine komplexe Amplitude erreichen.)

Für die sogenannte Schallschnelle v folgt daraus:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit } v_0 = \omega \cdot \xi$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = 0$$

Mit dieser Schallschnelle v in Normalenrichtung läßt sich nun die aus der linearen Akustik [4] bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung

$$p,n(t) = -\rho \cdot \frac{\partial v(t)}{\partial t}, \quad \rho = \text{Dichte des Mediums}$$

zur Bestimmung der Normalenableitung des gesuchten Druckes p benutzen.

$$\begin{aligned} p,n(t) &= -i\omega\rho \cdot v_0 \cdot e^{i\omega t} \\ &=: q \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -i\omega\rho \cdot v_0 \\ &= -4i\pi^2 f^2 \rho \xi \end{aligned}$$

Zu beachten ist dabei, daß als Einheit für q [Pa/m] verwendet wird, vorausgesetzt daß als Längeneinheit [m] sowie [Hz], [s] und [Pa] für Frequenz, Zeit und Druck benutzt werden.

Weiterhin muß die Schallschnelle $v_0 = \omega \cdot \xi$ klein gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit sein.

Auf gedämpften Rändern gilt mit der komplexen materialabhängigen Wandadmittanz A

$$\begin{aligned} p,n(t) &= -i\omega\rho \cdot A \cdot p(t) \\ &=: q_A \cdot p(t) \\ q_A &= -i\omega\rho \cdot A \quad \left[\frac{1}{m} \right] ! \end{aligned}$$

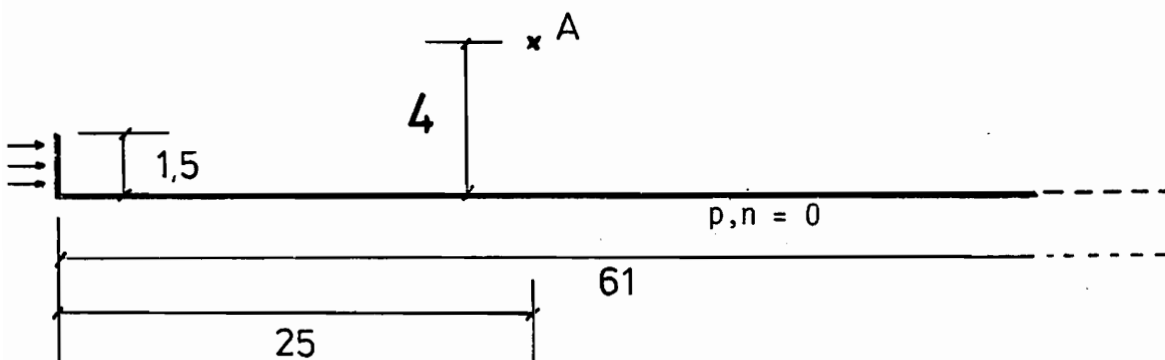
Sind diese Werte q oder ggf. q_A an allen entsprechenden Randbereichen berechnet, so ergibt sich für obiges Beispiel etwa folgende Eingabe, entsprechend Kap 7 c) - p).

340.	[m/s] Schallgeschwindigkeit in Luft
100.	[Hz] Frequenz
7	Anzahl der Randbereiche, incl. des Sprungs zurück zum Ausgangspunkt.
0	$p=0$ ist nirgends vorgegeben.
1.5, 270, 4	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Länge} \\ \text{Winkel zur } x_1\text{-Achse in Grad} \\ \text{Randart} \end{array} \right.$
10, 0, 1	
5, 90, 1	
1, 0, 1	
5, 270, 1	Der Rand muß von links nach rechts durchlaufen
50, 0, 1	werden, damit das Medium zur Linken liegt!
61.02, 178.59, 1	

- 10 automatische äquidistante Diskretisierung mit 10 Elementen pro Wellenlänge
- 0. $q=-i$ für Randbereich 1
- 1. mit $\rho = 1.293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 - $f = 100 \text{ Hz}$
 - $\xi = 1.922 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
- 0 einmalige Rechnung
- 0 keine Innenpunkte
- 1 Vergleichsrechnung
- 0 auch keine Innenpunkte

Diese Eingabe liefert die Ergebnisdatei ERGIB (siehe Anhang A).

Beispiel B:



Dieses Beispiel entspricht Beispiel A ohne Lärmschutzwand. Zusätzlich soll jedoch der Druck am Punkt L berechnet werden. L sei horizontal 25 m vom erregten Rand und vertikal 4 m vom Boden entfernt.

Bezogen auf das Koordinatensystem, dessen Ursprung automatisch im Anfangspunkt des ersten eingegebenen Bereiches liegt und dessen x_1 -Richtung vor der Eingabe von TGW (Kap 7g) festzulegen ist (hier horizontal), hat L die Koordinaten (25.0, 2.5).

Die vollständigen Eingaben lauten demnach:

- 340.
- 100.

3
0
1.5 , 270 , 4
61. , 0 , 1
61.02, 178.59, 0
10
0.
-1.
0
1 Innenpunkte
1 Anzahl Innenpunkte
2 aus INPUT zu lesen
25. , 2.5 , 1 Koordinaten und Kennzahl für Innenpunkt
0 keine Vergleichsrechnung

Ergebnisdatei ERGIB (siehe Anhang B)

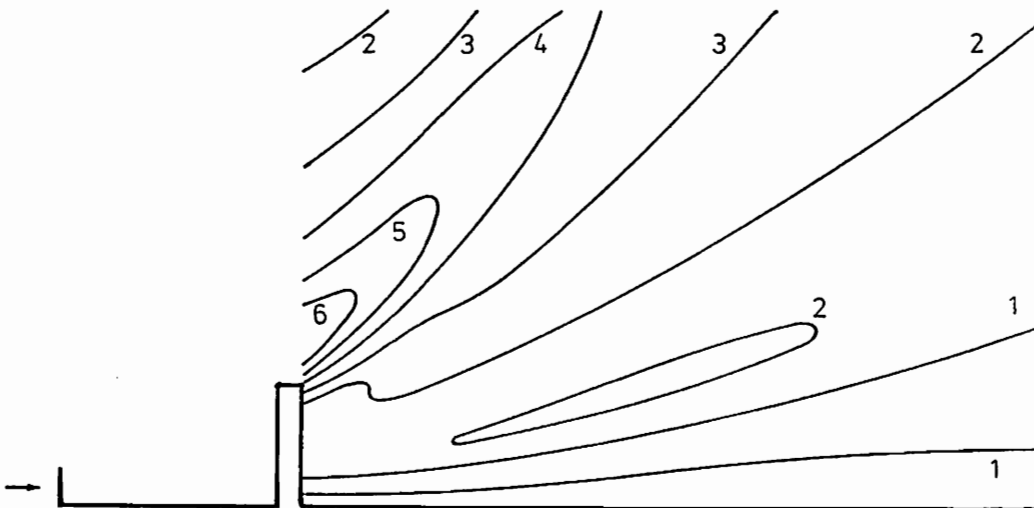
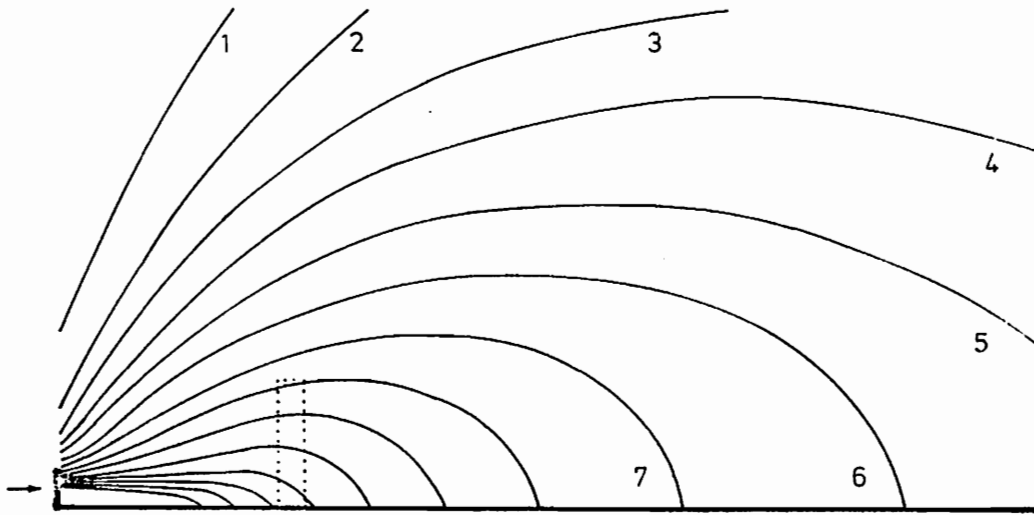
Die oben genannten Eingabedaten, die zunächst interaktiv eingegeben werden, werden gleichzeitig in einer anzugebenden Datei protokolliert.

Protokolldatei EINDAT:

```
.340000E+03 SCHALLGESCHWINDIGKEIT IN METERN  
.100000E+03 ERZEGERFREQUENZ  
3 ANZAHL DER RANDBEREICHE  
0 DRUCK VORGEGBEN (1=JA/0=NEIN)  
.150000E+01 .270000E+03 4 LAENGE, TANGENTENWINKEL, RANDART  
.610000E+02 0.000000E+00 1 LAENGE, TANGENTENWINKEL, RANDART  
.610200E+02 .178590E+03 1 LAENGE, TANGENTENWINKEL, RANDART  
.100000E+02 ELEMENTE PRO WELLENLAENGE  
0.000000E+00 REALTEIL DER GEGEBENEN ERREGUNG IM BEREICH 1  
- .100000E+01 IMAGINARTEIL " "  
0 TAPEN AB ANLEGER (0=NEIN/1=JA)  
1 INNENPUNKTE (0=NEIN/1=JA)  
1 ANZAHL DER INNENPUNKTE  
25. 2.5 1.  
0 VERGLEICHRECHNUNG (0=NEIN/1=JA)
```

Diese Datei kann anschließend auch mit geänderten Werten bei weiteren Rechenläufen als Eingabedatei Verwendung finden. Man erspart sich dadurch die ggf. lange, interaktive Eingabe.

Weitaus aussagekräftigere Resultate lassen sich erzielen, wenn man an vielen Innenpunkten den Schalldruck berechnet. Mit einem entsprechenden Plot-programm erhält man dann für obige Beispiele folgend Isobarenfelder, die die Auswirkungen der Lärmschutzwand sehr deutlich machen:



Anhang A :

Ergebnisdatei ERGIB für Beispiel A

Schallwellenausbreitung mit Hindernis

SCHALLGESCHWINDIGKEIT IM MEDIUM 340.
 ERREGER - FREQUENZ (IN HZ) 100.
 WELLENZAHL 1.847995678582
 WELLENLAENGE 3.4

ELEMENTE PRO WELLENLAENGE MIND. 10.

BEREICH	LAENGE	TANGENTENWINKEL	ELEMENTE	ELEMENTLAENGE	ELEMENTE/WLG
1	1.5000	1.50 * PI	4	.375000	9.066667
2	10.0000	0.00 * PI	30	.333333	10.200000
3	5.0000	.50 * PI	16	.312500	10.880000
4	1.0000	0.00 * PI	4	.250000	13.600000
5	5.0000	1.50 * PI	16	.312500	10.880000
6	50.0000	2.00 * PI	148	.337838	10.064000
7	61.0200	.99 * PI	0	0.000000	0.000000

ECKEN UND ENDPUNKTE:	KNOTEN	INNENWINKEL	KOORDINATEN	
1	1	1.00 * PI	0.0000	0.0000
2	5	.50 * PI	.0000	-1.5000
3	35	.50 * PI	10.0000	-1.5000
4	51	1.50 * PI	10.0000	3.5000
5	55	1.50 * PI	11.0000	3.5000
6	71	.50 * PI	11.0000	-1.5000
7	219	1.00 * PI	61.0000	-1.5000

RANDBEDINGUNGEN

BEREICH 1 : P,N - (0.0000E+00 -.1000E+01) ERREGT.

UNBEKANNTE : 219
 GITTER : 2
 KNOTEN DES GROEBSTEN GITTERS : 110
 MAX. ANZAHL AN ITERATIONEN : 10

BENOETIGTE RECHENZEIT:

- 1) AUFSTELLEN DER MATRIX A UND DER RECHTEN SEITE G
- 2) MEHRGITTERSPEZIFISCHE MATRIZEN D UND A0
- 3) MEHRGITTERITERATION

BELEGEN: A,G 66.015 SEC

MATRIX A0: 5.575 SEC

1 REL.DEFEKT : .1937
 2 REL.DEFEKT : .0231
 3 REL.DEFEKT : .0035
 4 REL.DEFEKT : .0006
 5 REL.DEFEKT : .0001

ITERATION 2.831 SEC

BENOETIGTE ITERATIONEN : 5

ITERATIONSENDE: REL.DEFEKT < 0.0001

I T E R A T I V

KNOTEN	KOORDINATEN		HYDRODYNAMISCHER DRUCK P			DRUCKAENDERUNG P,N		
	X	Y	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG

BEREICH : 1								
1 /	0.0000E+00	0.0000E+00	-.13096E+00	-.38387E+00	.40559E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
2 /	-.6064E-14	-.3750E+00	-.34332E+00	-.48923E+00	.59768E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
3 /	-.1213E-13	-.7500E+00	-.54883E+00	-.43889E+00	.70273E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
4 /	-.1819E-13	-.1125E+01	-.69268E+00	-.37060E+00	.78559E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.74439E+00	-.33757E+00	.81736E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
BEREICH : 2								
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.74439E+00	-.33757E+00	.81736E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6 /	.3333E+00	-.1500E+01	-.64845E+00	.42073E-01	.64981E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
7 /	.6667E+00	-.1500E+01	-.40199E+00	.45948E+00	.61051E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8 /	.1000E+01	-.1500E+01	-.79636E-01	.76250E+00	.76664E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9 /	.1333E+01	-.1500E+01	.22230E+00	.84622E+00	.87493E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10 /	.1667E+01	-.1500E+01	.42041E+00	.68133E+00	.80060E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
11 /	.2000E+01	-.1500E+01	.46914E+00	.32190E+00	.56895E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
12 /	.2333E+01	-.1500E+01	.37186E+00	-.11395E+00	.38892E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
13 /	.2667E+01	-.1500E+01	.17599E+00	-.48437E+00	.51535E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
14 /	.3000E+01	-.1500E+01	-.45818E-01	-.67160E+00	.67316E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
15 /	.3333E+01	-.1500E+01	-.22120E+00	-.62143E+00	.65962E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
16 /	.3667E+01	-.1500E+01	-.30104E+00	-.36056E+00	.46971E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
17 /	.4000E+01	-.1500E+01	-.27305E+00	.13639E-01	.27339E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
18 /	.4333E+01	-.1500E+01	-.16157E+00	.36753E+00	.40147E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
19 /	.4667E+01	-.1500E+01	-.15207E-01	.57774E+00	.57794E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
20 /	.5000E+01	-.1500E+01	.11240E+00	.57358E+00	.58449E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
21 /	.5333E+01	-.1500E+01	.18169E+00	.36088E+00	.40403E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
22 /	.5667E+01	-.1500E+01	.17908E+00	.18817E-01	.18006E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
23 /	.6000E+01	-.1500E+01	.11851E+00	-.32866E+00	.34937E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
24 /	.6333E+01	-.1500E+01	.32844E-01	-.55688E+00	.55785E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
25 /	.6667E+01	-.1500E+01	-.40819E-01	-.58443E+00	.58585E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
26 /	.7000E+01	-.1500E+01	-.75595E-01	-.40139E+00	.40844E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
27 /	.7333E+01	-.1500E+01	-.64160E-01	-.72464E-01	.96786E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
28 /	.7667E+01	-.1500E+01	-.19277E-01	.28647E+00	.28711E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
29 /	.8000E+01	-.1500E+01	.33534E-01	.54957E+00	.55059E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
30 /	.8333E+01	-.1500E+01	.67753E-01	.62564E+00	.62930E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
31 /	.8667E+01	-.1500E+01	.67401E-01	.49030E+00	.49491E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
32 /	.9000E+01	-.1500E+01	.32998E-01	.19414E+00	.19693E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
33 /	.9333E+01	-.1500E+01	-.19374E-01	-.15539E+00	.15660E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
34 /	.9667E+01	-.1500E+01	-.65862E-01	-.43272E+00	.43770E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
35 /	.1000E+02	-.1500E+01	-.86295E-01	-.54037E+00	.54722E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
BEREICH : 3								
35 /	.1000E+02	-.1500E+01	-.86295E-01	-.54037E+00	.54722E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
36 /	.1000E+02	-.1187E+01	-.85381E-01	-.53664E+00	.54339E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
37 /	.1000E+02	-.8750E+00	-.91714E-01	-.55039E+00	.55798E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
38 /	.1000E+02	-.5625E+00	-.10438E+00	-.56543E+00	.57498E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
39 /	.1000E+02	-.2500E+00	-.12519E+00	-.57272E+00	.58624E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

40 /	.1000E+02	.6250E-01 /	-.15586E+00	-.56377E+00	.58491E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
41 /	.1000E+02	.3750E+00 /	-.19729E+00	-.53294E+00	.56829E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
42 /	.1000E+02	.6875E+00 /	-.24880E+00	-.47912E+00	.53987E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
43 /	.1000E+02	.1000E+01 /	-.30768E+00	-.40593E+00	.50936E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
44 /	.1000E+02	.1313E+01 /	-.36902E+00	-.32059E+00	.48882E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
45 /	.1000E+02	.1625E+01 /	-.42592E+00	-.23188E+00	.48495E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
46 /	.1000E+02	.1938E+01 /	-.47023E+00	-.14762E+00	.49286E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
47 /	.1000E+02	.2250E+01 /	-.49346E+00	-.72737E-01	.49879E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
48 /	.1000E+02	.2563E+01 /	-.48778E+00	-.82598E-02	.48785E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
49 /	.1000E+02	.2875E+01 /	-.44664E+00	.48498E-01	.44927E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
50 /	.1000E+02	.3188E+01 /	-.36314E+00	.10313E+00	.37750E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
51 /	.1000E+02	.3500E+01 /	-.19899E+00	.17274E+00	.26351E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 4

51 /	.1000E+02	.3500E+01 /	-.19899E+00	.17274E+00	.26351E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
52 /	.1025E+02	.3500E+01 /	-.58645E-01	.20793E+00	.21604E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
53 /	.1050E+02	.3500E+01 /	.31713E-01	.18710E+00	.18977E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
54 /	.1075E+02	.3500E+01 /	.90588E-01	.12917E+00	.15777E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
55 /	.1100E+02	.3500E+01 /	.10782E+00	.36013E-01	.11368E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 5

55 /	.1100E+02	.3500E+01 /	.10782E+00	.36013E-01	.11368E+00 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
56 /	.1100E+02	.3188E+01 /	.68959E-01	-.22685E-01	.72595E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
57 /	.1100E+02	.2875E+01 /	.24789E-01	-.32776E-01	.41095E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
58 /	.1100E+02	.2563E+01 /	-.14814E-01	-.26373E-01	.30249E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
59 /	.1100E+02	.2250E+01 /	-.42126E-01	-.12895E-01	.44056E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
60 /	.1100E+02	.1938E+01 /	-.52441E-01	.87847E-03	.52448E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
61 /	.1100E+02	.1625E+01 /	-.45337E-01	.10408E-01	.46517E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
62 /	.1100E+02	.1313E+01 /	-.24802E-01	.13672E-01	.28321E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
63 /	.1100E+02	.1000E+01 /	.19394E-02	.11155E-01	.11323E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
64 /	.1100E+02	.6875E+00 /	.26434E-01	.51726E-02	.26935E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
65 /	.1100E+02	.3750E+00 /	.41381E-01	-.12448E-02	.41400E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
66 /	.1100E+02	.6250E-01 /	.42633E-01	-.54461E-02	.42980E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
67 /	.1100E+02	-.2500E+00 /	.30257E-01	-.61039E-02	.30866E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
68 /	.1100E+02	-.5625E+00 /	.83719E-02	-.34878E-02	.90694E-02 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
69 /	.1100E+02	-.8750E+00 /	-.16212E-01	.79065E-03	.16232E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
70 /	.1100E+02	-.1187E+01 /	-.36131E-01	.44666E-02	.36406E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
71 /	.1100E+02	-.1500E+01 /	-.46461E-01	.55051E-02	.46786E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 6

71 /	.1100E+02	-.1500E+01 /	-.46461E-01	.55051E-02	.46786E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
72 /	.1134E+02	-.1500E+01 /	-.42603E-01	.74092E-02	.43243E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
73 /	.1168E+02	-.1500E+01 /	-.39869E-01	.98097E-02	.41058E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
74 /	.1201E+02	-.1500E+01 /	-.37198E-01	.12565E-01	.39263E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
75 /	.1235E+02	-.1500E+01 /	-.34703E-01	.15992E-01	.38210E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
76 /	.1269E+02	-.1500E+01 /	-.31992E-01	.20459E-01	.37975E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
77 /	.1303E+02	-.1500E+01 /	-.28237E-01	.26105E-01	.38455E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
78 /	.1336E+02	-.1500E+01 /	-.22384E-01	.32426E-01	.39402E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
79 /	.1370E+02	-.1500E+01 /	-.13567E-01	.38234E-01	.40570E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
80 /	.1404E+02	-.1500E+01 /	-.16508E-02	.41744E-01	.41776E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
81 /	.1438E+02	-.1500E+01 /	.12500E-01	.41021E-01	.42884E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
82 /	.1472E+02	-.1500E+01 /	.26875E-01	.34645E-01	.43847E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
83 /	.1505E+02	-.1500E+01 /	.38673E-01	.22257E-01	.44620E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
84 /	.1539E+02	-.1500E+01 /	.44941E-01	.50703E-02	.45226E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
85 /	.1573E+02	-.1500E+01 /	.43397E-01	-.14183E-01	.45656E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
86 /	.1607E+02	-.1500E+01 /	.33309E-01	-.31657E-01	.45953E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
87 /	.1641E+02	-.1500E+01 /	.15934E-01	-.43278E-01	.46118E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
88 /	.1674E+02	-.1500E+01 /	-.54188E-02	-.45873E-01	.46192E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
89 /	.1708E+02	-.1500E+01 /	-.26030E-01	-.38141E-01	.46177E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
90 /	.1742E+02	-.1500E+01 /	-.40878E-01	-.21326E-01	.46107E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
91 /	.1776E+02	-.1500E+01 /	-.45972E-01	.87390E-03	.45980E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
92 /	.1809E+02	-.1500E+01 /	-.39608E-01	.23039E-01	.45822E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
93 /	.1843E+02	-.1500E+01 /	-.23026E-01	.39395E-01	.45631E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
94 /	.1877E+02	-.1500E+01 /	-.33269E-03	.45422E-01	.45424E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

95 /	.1911E+02	-.1500E+01 /	.22470E-01	.39218E-01	.45200E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
96 /	.1945E+02	-.1500E+01 /	.39083E-01	.22242E-01	.44969E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
97 /	.1978E+02	-.1500E+01 /	.44721E-01	-.93162E-03	.44731E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
98 /	.2012E+02	-.1500E+01 /	.37608E-01	-.23772E-01	.44492E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
99 /	.2046E+02	-.1500E+01 /	.19641E-01	-.39654E-01	.44252E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
100 /	.2080E+02	-.1500E+01 /	-.40122E-02	-.43830E-01	.44013E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
101 /	.2114E+02	-.1500E+01 /	-.26361E-01	-.34950E-01	.43777E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
102 /	.2147E+02	-.1500E+01 /	-.40656E-01	-.15594E-01	.43544E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
103 /	.2181E+02	-.1500E+01 /	-.42492E-01	.84088E-02	.43316E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
104 /	.2215E+02	-.1500E+01 /	-.31237E-01	.29683E-01	.43091E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
105 /	.2249E+02	-.1500E+01 /	-.10336E-01	.41607E-01	.42872E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
106 /	.2282E+02	-.1500E+01 /	.13679E-01	.40403E-01	.42656E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
107 /	.2316E+02	-.1500E+01 /	.33222E-01	.26420E-01	.42446E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
108 /	.2350E+02	-.1500E+01 /	.42040E-01	.40980E-02	.42240E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
109 /	.2384E+02	-.1500E+01 /	.37293E-01	-.19405E-01	.42039E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
110 /	.2418E+02	-.1500E+01 /	.20505E-01	-.36473E-01	.41841E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
111 /	.2451E+02	-.1500E+01 /	-.28597E-02	-.41552E-01	.41650E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
112 /	.2485E+02	-.1500E+01 /	-.25133E-01	-.32974E-01	.41460E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
113 /	.2519E+02	-.1500E+01 /	-.38980E-01	-.13577E-01	.41277E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
114 /	.2553E+02	-.1500E+01 /	-.39811E-01	.10193E-01	.41095E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
115 /	.2586E+02	-.1500E+01 /	-.27369E-01	.30419E-01	.40919E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
116 /	.2620E+02	-.1500E+01 /	-.58437E-02	.40323E-01	.40744E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
117 /	.2654E+02	-.1500E+01 /	.17514E-01	.36600E-01	.40575E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
118 /	.2688E+02	-.1500E+01 /	.34799E-01	.20535E-01	.40406E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
119 /	.2722E+02	-.1500E+01 /	.40171E-01	-.23978E-01	.40243E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
120 /	.2755E+02	-.1500E+01 /	.31826E-01	-.24362E-01	.40080E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
121 /	.2789E+02	-.1500E+01 /	.12653E-01	-.37864E-01	.39922E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
122 /	.2823E+02	-.1500E+01 /	-.10733E-01	-.38289E-01	.39765E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
123 /	.2857E+02	-.1500E+01 /	-.30284E-01	-.25534E-01	.39612E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
124 /	.2891E+02	-.1500E+01 /	-.39251E-01	-.40490E-02	.39459E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
125 /	.2924E+02	-.1500E+01 /	-.34574E-01	.18709E-01	.39311E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
126 /	.2958E+02	-.1500E+01 /	-.17922E-01	.34821E-01	.39163E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
127 /	.2992E+02	-.1500E+01 /	.48690E-02	.38713E-01	.39018E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
128 /	.3026E+02	-.1500E+01 /	.25812E-01	.29068E-01	.38874E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
129 /	.3059E+02	-.1500E+01 /	.37599E-01	.93091E-02	.38734E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
130 /	.3093E+02	-.1500E+01 /	.36123E-01	-.13586E-01	.38593E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
131 /	.3127E+02	-.1500E+01 /	.21959E-01	-.31571E-01	.38457E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
132 /	.3161E+02	-.1500E+01 /	.15306E-03	-.38319E-01	.38320E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
133 /	.3195E+02	-.1500E+01 /	-.21580E-01	-.31504E-01	.38186E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
134 /	.3228E+02	-.1500E+01 /	-.35542E-01	-.13592E-01	.38052E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
135 /	.3262E+02	-.1500E+01 /	-.36831E-01	.90306E-02	.37922E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
136 /	.3296E+02	-.1500E+01 /	-.25041E-01	.28304E-01	.37791E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
137 /	.3330E+02	-.1500E+01 /	-.44168E-02	.37403E-01	.37663E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
138 /	.3364E+02	-.1500E+01 /	.17648E-01	.33128E-01	.37535E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
139 /	.3397E+02	-.1500E+01 /	.33293E-01	.17061E-01	.37410E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
140 /	.3431E+02	-.1500E+01 /	.36949E-01	-.49961E-02	.37285E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
141 /	.3465E+02	-.1500E+01 /	.27367E-01	-.25142E-01	.37163E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
142 /	.3499E+02	-.1500E+01 /	.80450E-02	-.36156E-01	.37040E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
143 /	.3532E+02	-.1500E+01 /	-.14054E-01	-.34141E-01	.36920E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
144 /	.3566E+02	-.1500E+01 /	-.30968E-01	-.19879E-01	.36800E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
145 /	.3600E+02	-.1500E+01 /	-.36653E-01	.14503E-02	.36682E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
146 /	.3634E+02	-.1500E+01 /	-.29111E-01	.22125E-01	.36564E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
147 /	.3668E+02	-.1500E+01 /	-.11118E-01	.34712E-01	.36449E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
148 /	.3701E+02	-.1500E+01 /	.10773E-01	.34699E-01	.36333E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
149 /	.3735E+02	-.1500E+01 /	.28654E-01	.22155E-01	.36220E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
150 /	.3769E+02	-.1500E+01 /	.36067E-01	.16797E-02	.36106E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
151 /	.3803E+02	-.1500E+01 /	.30388E-01	-.19292E-01	.35995E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
152 /	.3836E+02	-.1500E+01 /	.13739E-01	-.33149E-01	.35883E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
153 /	.3870E+02	-.1500E+01 /	-.78019E-02	-.34913E-01	.35774E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
154 /	.3904E+02	-.1500E+01 /	-.26381E-01	-.23999E-01	.35664E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
155 /	.3938E+02	-.1500E+01 /	-.35280E-01	-.44282E-02	.35557E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
156 /	.3972E+02	-.1500E+01 /	-.31304E-01	.16634E-01	.35449E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
157 /	.4005E+02	-.1500E+01 /	-.15962E-01	.31533E-01	.35343E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
158 /	.4039E+02	-.1500E+01 /	.50980E-02	.34867E-01	.35237E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

159 /	.4073E+02	-.1500E+01 /	.24190E-01	.25479E-01	.35133E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
160 /	.4107E+02	-.1500E+01 /	.34351E-01	.68610E-02	.35029E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
161 /	.4141E+02	-.1500E+01 /	.31926E-01	-.14164E-01	.34927E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
162 /	.4174E+02	-.1500E+01 /	.17863E-01	-.29894E-01	.34825E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
163 /	.4208E+02	-.1500E+01 /	-.26532E-02	-.34622E-01	.34724E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
164 /	.4242E+02	-.1500E+01 /	-.22079E-01	-.26670E-01	.34623E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
165 /	.4276E+02	-.1500E+01 /	-.33330E-01	-.90024E-02	.34524E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
166 /	.4309E+02	-.1500E+01 /	-.32319E-01	.11856E-01	.34425E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
167 /	.4343E+02	-.1500E+01 /	-.19478E-01	.28266E-01	.34328E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
168 /	.4377E+02	-.1500E+01 /	.42391E-03	.34228E-01	.34230E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
169 /	.4411E+02	-.1500E+01 /	.20070E-01	.27610E-01	.34134E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
170 /	.4445E+02	-.1500E+01 /	.32244E-01	.10906E-01	.34038E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
171 /	.4478E+02	-.1500E+01 /	.32523E-01	-.97174E-02	.33944E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
172 /	.4512E+02	-.1500E+01 /	.20862E-01	-.26656E-01	.33849E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
173 /	.4546E+02	-.1500E+01 /	.15950E-02	-.33719E-01	.33756E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
174 /	.4580E+02	-.1500E+01 /	-.18149E-01	-.28352E-01	.33663E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
175 /	.4614E+02	-.1500E+01 /	-.31123E-01	-.12586E-01	.33572E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
176 /	.4647E+02	-.1500E+01 /	-.32578E-01	.77192E-02	.33480E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
177 /	.4681E+02	-.1500E+01 /	-.22036E-01	.25085E-01	.33390E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
178 /	.4715E+02	-.1500E+01 /	-.34428E-02	.33121E-01	.33300E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
179 /	.4749E+02	-.1500E+01 /	.16330E-01	.28919E-01	.33211E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
180 /	.4782E+02	-.1500E+01 /	.29977E-01	.14087E-01	.33122E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
181 /	.4816E+02	-.1500E+01 /	.32509E-01	-.58672E-02	.33034E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
182 /	.4850E+02	-.1500E+01 /	.23043E-01	-.23548E-01	.32947E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
183 /	.4884E+02	-.1500E+01 /	.51203E-02	-.32459E-01	.32860E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
184 /	.4918E+02	-.1500E+01 /	-.14593E-01	-.29346E-01	.32774E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
185 /	.4951E+02	-.1500E+01 /	-.28827E-01	-.15414E-01	.32689E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
186 /	.4985E+02	-.1500E+01 /	-.32341E-01	.41327E-02	.32604E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
187 /	.5019E+02	-.1500E+01 /	-.23892E-01	.22062E-01	.32520E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
188 /	.5053E+02	-.1500E+01 /	-.66620E-02	.31745E-01	.32436E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
189 /	.5086E+02	-.1500E+01 /	.12951E-01	.29648E-01	.32354E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
190 /	.5120E+02	-.1500E+01 /	.27672E-01	.16604E-01	.32271E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
191 /	.5154E+02	-.1500E+01 /	.32090E-01	-.25231E-02	.32189E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
192 /	.5188E+02	-.1500E+01 /	.24616E-01	-.20615E-01	.32108E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
193 /	.5222E+02	-.1500E+01 /	.80651E-02	-.30996E-01	.32028E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
194 /	.5255E+02	-.1500E+01 /	-.11383E-01	-.29851E-01	.31948E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
195 /	.5289E+02	-.1500E+01 /	-.26529E-01	-.17657E-01	.31868E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
196 /	.5323E+02	-.1500E+01 /	-.31773E-01	.10110E-02	.31789E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
197 /	.5357E+02	-.1500E+01 /	-.25221E-01	.19221E-01	.31711E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
198 /	.5391E+02	-.1500E+01 /	-.93598E-02	.30216E-01	.31633E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
199 /	.5424E+02	-.1500E+01 /	.99015E-02	.29962E-01	.31556E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
200 /	.5458E+02	-.1500E+01 /	.25394E-01	.18603E-01	.31479E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
201 /	.5492E+02	-.1500E+01 /	.31400E-01	.39468E-03	.31403E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
202 /	.5526E+02	-.1500E+01 /	.25732E-01	-.17867E-01	.31327E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
203 /	.5559E+02	-.1500E+01 /	.10540E-01	-.29420E-01	.31252E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
204 /	.5593E+02	-.1500E+01 /	-.84843E-02	-.30000E-01	.31177E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
205 /	.5627E+02	-.1500E+01 /	-.24278E-01	-.19441E-01	.31103E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
206 /	.5661E+02	-.1500E+01 /	-.30981E-01	-.17193E-02	.31029E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
207 /	.5695E+02	-.1500E+01 /	-.26150E-01	.16566E-01	.30956E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
208 /	.5728E+02	-.1500E+01 /	-.11634E-01	.28608E-01	.30883E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
209 /	.5762E+02	-.1500E+01 /	.71441E-02	.29971E-01	.30811E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
210 /	.5796E+02	-.1500E+01 /	.23175E-01	.20194E-01	.30739E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
211 /	.5830E+02	-.1500E+01 /	.30525E-01	.29528E-02	.30668E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
212 /	.5864E+02	-.1500E+01 /	.26496E-01	-.15301E-01	.30597E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
213 /	.5897E+02	-.1500E+01 /	.12632E-01	-.27790E-01	.30526E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
214 /	.5931E+02	-.1500E+01 /	-.58598E-02	-.29887E-01	.30456E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
215 /	.5965E+02	-.1500E+01 /	-.22096E-01	-.20860E-01	.30387E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
216 /	.5999E+02	-.1500E+01 /	-.30037E-01	-.41187E-02	.30318E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
217 /	.6032E+02	-.1500E+01 /	-.26769E-01	.14087E-01	.30249E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
218 /	.6066E+02	-.1500E+01 /	-.13559E-01	.26964E-01	.30181E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
219 /	.6100E+02	-.1500E+01 /	.46441E-02	.29753E-01	.30113E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

KONVERGENZRATE DER 1. ITERATION: .144913218598

KONVERGENZRATE DER 2. ITERATION: .123339251967

KONVERGENZRATE DER 3. ITERATION: .159824894423
KONVERGENZRATE DER 4. ITERATION: .1536448781904

MAX. KONVERGENZRATE : .159824894423

POSTPROCESSING .452 SEC

DIREKTER LOESER : 10.039 SEC

D I R E K T G E L O E S T

KNOTEN	KOORDINATEN		HYDRODYNAMISCHER DRUCK P			DRUCKAENDERUNG P,N		
	X	Y	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG

BEREICH : 1								
1 /	0.0000E+00	0.0000E+00	-.13096E+00	-.38388E+00	.40561E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
2 /	-.6064E-14	-.3750E+00	-.34330E+00	-.48924E+00	.59767E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
3 /	-.1213E-13	-.7500E+00	-.54883E+00	-.43888E+00	.70273E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
4 /	-.1819E-13	-.1125E+01	-.69272E+00	-.37048E+00	.78557E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.74440E+00	-.33757E+00	.81737E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
BEREICH : 2								
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.74440E+00	-.33757E+00	.81737E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6 /	.3333E+00	-.1500E+01	-.64850E+00	.42154E-01	.64987E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
7 /	.6667E+00	-.1500E+01	-.40198E+00	.45950E+00	.61052E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8 /	.1000E+01	-.1500E+01	-.79601E-01	.76251E+00	.76665E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9 /	.1333E+01	-.1500E+01	.22232E+00	.84622E+00	.87494E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10 /	.1667E+01	-.1500E+01	.42044E+00	.68132E+00	.80061E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
11 /	.2000E+01	-.1500E+01	.46914E+00	.32189E+00	.56895E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
12 /	.2333E+01	-.1500E+01	.37185E+00	-.11397E+00	.38892E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
13 /	.2667E+01	-.1500E+01	.17598E+00	-.48437E+00	.51535E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
14 /	.3000E+01	-.1500E+01	-.45848E-01	-.67161E+00	.67317E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
15 /	.3333E+01	-.1500E+01	-.22121E+00	-.62143E+00	.65962E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
16 /	.3667E+01	-.1500E+01	-.30105E+00	-.36055E+00	.46971E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
17 /	.4000E+01	-.1500E+01	-.27305E+00	.13649E-01	.27339E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
18 /	.4333E+01	-.1500E+01	-.16155E+00	.36754E+00	.40148E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
19 /	.4667E+01	-.1500E+01	-.15190E-01	.57775E+00	.57795E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
20 /	.5000E+01	-.1500E+01	.11242E+00	.57359E+00	.58450E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
21 /	.5333E+01	-.1500E+01	.18169E+00	.36088E+00	.40404E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
22 /	.5667E+01	-.1500E+01	.17906E+00	.18815E-01	.18005E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
23 /	.6000E+01	-.1500E+01	.11849E+00	-.32866E+00	.34937E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
24 /	.6333E+01	-.1500E+01	.32802E-01	-.55690E+00	.55786E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
25 /	.6667E+01	-.1500E+01	-.40841E-01	-.58444E+00	.58586E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
26 /	.7000E+01	-.1500E+01	-.75613E-01	-.40141E+00	.40847E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
27 /	.7333E+01	-.1500E+01	-.64155E-01	-.72477E-01	.96792E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
28 /	.7667E+01	-.1500E+01	-.19244E-01	.28646E+00	.28710E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
29 /	.8000E+01	-.1500E+01	.33563E-01	.54956E+00	.55058E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
30 /	.8333E+01	-.1500E+01	.67802E-01	.62565E+00	.62932E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
31 /	.8667E+01	-.1500E+01	.67422E-01	.49030E+00	.49492E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

32 /	.9000E+01	-.1500E+01	/.33007E-01	.19416E+00	.19694E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
33 /	.9333E+01	-.1500E+01	/.19381E-01	-.15539E+00	.15659E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
34 /	.9667E+01	-.1500E+01	/.65933E-01	-.43274E+00	.43773E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
35 /	.1000E+02	-.1500E+01	/.86300E-01	-.54038E+00	.54723E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 3

35 /	.1000E+02	-.1500E+01	/.86300E-01	-.54038E+00	.54723E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
36 /	.1000E+02	-.1187E+01	/.85448E-01	-.53664E+00	.54340E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
37 /	.1000E+02	-.8750E+00	/.91736E-01	-.55038E+00	.55798E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
38 /	.1000E+02	-.5625E+00	/.10440E+00	-.56541E+00	.57496E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
39 /	.1000E+02	-.2500E+00	/.12521E+00	-.57270E+00	.58623E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
40 /	.1000E+02	.6250E-01	/.15588E+00	-.56375E+00	.58490E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
41 /	.1000E+02	.3750E+00	/.19730E+00	-.53293E+00	.56828E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
42 /	.1000E+02	.6875E+00	/.24881E+00	-.47912E+00	.53988E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
43 /	.1000E+02	.1000E+01	/.30769E+00	-.40593E+00	.50937E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
44 /	.1000E+02	.1313E+01	/.36902E+00	-.32059E+00	.48883E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
45 /	.1000E+02	.1625E+01	/.42592E+00	-.23187E+00	.48495E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
46 /	.1000E+02	.1938E+01	/.47023E+00	-.14761E+00	.49285E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
47 /	.1000E+02	.2250E+01	/.49345E+00	-.72718E-01	.49878E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
48 /	.1000E+02	.2563E+01	/.48778E+00	-.82247E-02	.48784E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
49 /	.1000E+02	.2875E+01	/.44664E+00	.48527E-01	.44927E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
50 /	.1000E+02	.3188E+01	/.36318E+00	.10319E+00	.37756E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
51 /	.1000E+02	.3500E+01	/.19898E+00	.17275E+00	.26351E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 4

51 /	.1000E+02	.3500E+01	/.19898E+00	.17275E+00	.26351E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
52 /	.1025E+02	.3500E+01	/.58586E-01	.20788E+00	.21597E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
53 /	.1050E+02	.3500E+01	/.31727E-01	.18708E+00	.18975E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
54 /	.1075E+02	.3500E+01	/.90623E-01	.12914E+00	.15776E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
55 /	.1100E+02	.3500E+01	/.10782E+00	.36003E-01	.11367E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 5

55 /	.1100E+02	.3500E+01	/.10782E+00	.36003E-01	.11367E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
56 /	.1100E+02	.3188E+01	/.68919E-01	-.22675E-01	.72553E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
57 /	.1100E+02	.2875E+01	/.24784E-01	-.32769E-01	.41086E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
58 /	.1100E+02	.2563E+01	/.14813E-01	-.26360E-01	.30237E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
59 /	.1100E+02	.2250E+01	/.42123E-01	-.12889E-01	.44050E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
60 /	.1100E+02	.1938E+01	/.52432E-01	.88635E-03	.52440E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
61 /	.1100E+02	.1625E+01	/.45331E-01	.10408E-01	.46510E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
62 /	.1100E+02	.1313E+01	/.24796E-01	.13668E-01	.28313E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
63 /	.1100E+02	.1000E+01	/.19413E-02	.11150E-01	.11318E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
64 /	.1100E+02	.6875E+00	/.26433E-01	.51619E-02	.26932E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
65 /	.1100E+02	.3750E+00	/.41378E-01	-.12490E-02	.41397E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
66 /	.1100E+02	.6250E-01	/.42628E-01	-.54516E-02	.42975E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
67 /	.1100E+02	-.2500E+00	/.30253E-01	-.61038E-02	.30862E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
68 /	.1100E+02	-.5625E+00	/.83698E-02	-.34823E-02	.90653E-02	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
69 /	.1100E+02	-.8750E+00	/.16213E-01	.79083E-03	.16232E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
70 /	.1100E+02	-.1187E+01	/.36156E-01	.44883E-02	.36434E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
71 /	.1100E+02	-.1500E+01	/.46448E-01	.54881E-02	.46772E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

BEREICH : 6

71 /	.1100E+02	-.1500E+01	/.46448E-01	.54881E-02	.46772E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
72 /	.1134E+02	-.1500E+01	/.42633E-01	.74197E-02	.43274E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
73 /	.1168E+02	-.1500E+01	/.39871E-01	.98134E-02	.41061E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
74 /	.1201E+02	-.1500E+01	/.37204E-01	.12576E-01	.39273E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
75 /	.1235E+02	-.1500E+01	/.34698E-01	.16002E-01	.38210E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
76 /	.1269E+02	-.1500E+01	/.31982E-01	.20474E-01	.37975E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
77 /	.1303E+02	-.1500E+01	/.28223E-01	.26109E-01	.38448E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
78 /	.1336E+02	-.1500E+01	/.22363E-01	.32427E-01	.39390E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
79 /	.1370E+02	-.1500E+01	/.13554E-01	.38226E-01	.40558E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
80 /	.1404E+02	-.1500E+01	/.16377E-02	.41726E-01	.41758E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
81 /	.1438E+02	-.1500E+01	/.12501E-01	.41007E-01	.42870E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
82 /	.1472E+02	-.1500E+01	/.26869E-01	.34626E-01	.43828E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
83 /	.1505E+02	-.1500E+01	/.38663E-01	.22249E-01	.44607E-01	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

148 /	.3701E+02	-.1500E+01 /	.10782E-01	.34697E-01	.36333E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
149 /	.3735E+02	-.1500E+01 /	.28656E-01	.22151E-01	.36219E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
150 /	.3769E+02	-.1500E+01 /	.36067E-01	.16704E-02	.36106E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
151 /	.3803E+02	-.1500E+01 /	.30385E-01	-.19296E-01	.35994E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
152 /	.3836E+02	-.1500E+01 /	.13730E-01	-.33152E-01	.35883E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
153 /	.3870E+02	-.1500E+01 /	-.78064E-02	-.34911E-01	.35773E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
154 /	.3904E+02	-.1500E+01 /	-.26387E-01	-.23992E-01	.35664E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
155 /	.3938E+02	-.1500E+01 /	-.35280E-01	-.44235E-02	.35556E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
156 /	.3972E+02	-.1500E+01 /	-.31299E-01	.16642E-01	.35449E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
157 /	.4005E+02	-.1500E+01 /	-.15957E-01	.31535E-01	.35342E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
158 /	.4039E+02	-.1500E+01 /	.51072E-02	.34865E-01	.35237E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
159 /	.4073E+02	-.1500E+01 /	.24193E-01	.25476E-01	.35133E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
160 /	.4107E+02	-.1500E+01 /	.34352E-01	.68519E-02	.35029E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
161 /	.4141E+02	-.1500E+01 /	.31924E-01	-.14168E-01	.34926E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
162 /	.4174E+02	-.1500E+01 /	.17855E-01	-.29899E-01	.34824E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
163 /	.4208E+02	-.1500E+01 /	-.26579E-02	-.34621E-01	.34723E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
164 /	.4242E+02	-.1500E+01 /	-.22086E-01	-.26663E-01	.34623E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
165 /	.4276E+02	-.1500E+01 /	-.33330E-01	-.89976E-02	.34523E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
166 /	.4309E+02	-.1500E+01 /	-.32316E-01	.11864E-01	.34425E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
167 /	.4343E+02	-.1500E+01 /	-.19474E-01	.28268E-01	.34327E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
168 /	.4377E+02	-.1500E+01 /	.43315E-03	.34227E-01	.34220E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
169 /	.4411E+02	-.1500E+01 /	.20074E-01	.27607E-01	.34133E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
170 /	.4445E+02	-.1500E+01 /	.32246E-01	.10897E-01	.34038E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
171 /	.4478E+02	-.1500E+01 /	.32521E-01	-.97216E-02	.33943E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
172 /	.4512E+02	-.1500E+01 /	.20855E-01	-.26661E-01	.33849E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
173 /	.4546E+02	-.1500E+01 /	.15903E-02	-.33718E-01	.33755E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
174 /	.4580E+02	-.1500E+01 /	-.18156E-01	-.28346E-01	.33663E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
175 /	.4614E+02	-.1500E+01 /	-.31124E-01	-.12582E-01	.33571E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
176 /	.4647E+02	-.1500E+01 /	-.32575E-01	.77279E-02	.33479E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
177 /	.4681E+02	-.1500E+01 /	-.22032E-01	.25088E-01	.33389E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
178 /	.4715E+02	-.1500E+01 /	-.34336E-02	.33121E-01	.33299E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
179 /	.4749E+02	-.1500E+01 /	.16333E-01	.28916E-01	.33210E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
180 /	.4782E+02	-.1500E+01 /	-.29980E-01	.14078E-01	.33121E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
181 /	.4816E+02	-.1500E+01 /	.32507E-01	-.58715E-02	.33033E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
182 /	.4850E+02	-.1500E+01 /	.23035E-01	-.23554E-01	.32946E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
183 /	.4884E+02	-.1500E+01 /	.51157E-02	-.32459E-01	.32859E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
184 /	.4918E+02	-.1500E+01 /	-.14601E-01	-.29341E-01	.32773E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
185 /	.4951E+02	-.1500E+01 /	-.28828E-01	-.15410E-01	.32688E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
186 /	.4985E+02	-.1500E+01 /	-.32339E-01	.41415E-02	.32603E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
187 /	.5019E+02	-.1500E+01 /	-.23888E-01	.22065E-01	.32519E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
188 /	.5053E+02	-.1500E+01 /	-.66531E-02	.31746E-01	.32435E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
189 /	.5086E+02	-.1500E+01 /	.12955E-01	.29646E-01	.32352E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
190 /	.5120E+02	-.1500E+01 /	.27676E-01	.16595E-01	.32270E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
191 /	.5154E+02	-.1500E+01 /	.32089E-01	-.25275E-02	.32188E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
192 /	.5188E+02	-.1500E+01 /	.24610E-01	-.20621E-01	.32107E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
193 /	.5222E+02	-.1500E+01 /	.80606E-02	-.30996E-01	.32027E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
194 /	.5255E+02	-.1500E+01 /	-.11391E-01	-.29847E-01	.31947E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
195 /	.5289E+02	-.1500E+01 /	-.26531E-01	-.17653E-01	.31867E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
196 /	.5323E+02	-.1500E+01 /	-.31772E-01	.10198E-02	.31788E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
197 /	.5357E+02	-.1500E+01 /	-.25218E-01	.19224E-01	.31710E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
198 /	.5391E+02	-.1500E+01 /	-.93511E-02	.30218E-01	.31632E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
199 /	.5424E+02	-.1500E+01 /	.99053E-02	.29959E-01	.31555E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
200 /	.5458E+02	-.1500E+01 /	.25398E-01	.18596E-01	.31478E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
201 /	.5492E+02	-.1500E+01 /	.31399E-01	.39028E-03	.31401E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
202 /	.5526E+02	-.1500E+01 /	.25726E-01	-.17874E-01	.31326E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
203 /	.5559E+02	-.1500E+01 /	.10536E-01	-.29421E-01	.31250E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
204 /	.5593E+02	-.1500E+01 /	-.84924E-02	-.29997E-01	.31176E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
205 /	.5627E+02	-.1500E+01 /	-.24280E-01	-.19437E-01	.31102E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
206 /	.5661E+02	-.1500E+01 /	-.30981E-01	-.17106E-02	.31028E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
207 /	.5695E+02	-.1500E+01 /	-.26147E-01	.16569E-01	.30955E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
208 /	.5728E+02	-.1500E+01 /	-.11625E-01	.28610E-01	.30882E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
209 /	.5762E+02	-.1500E+01 /	.71480E-02	.29969E-01	.30810E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
210 /	.5796E+02	-.1500E+01 /	.23180E-01	.20187E-01	.30738E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
211 /	.5830E+02	-.1500E+01 /	.30524E-01	.29484E-02	.30666E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

212 /	.5864E+02	-.1500E+01 /	.26491E-01	-.15308E-01	.30596E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
213 /	.5897E+02	-.1500E+01 /	.12628E-01	-.27791E-01	.30525E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
214 /	.5931E+02	-.1500E+01 /	-.58679E-02	-.29885E-01	.30455E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
215 /	.5965E+02	-.1500E+01 /	-.22098E-01	-.20856E-01	.30386E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
216 /	.5999E+02	-.1500E+01 /	-.30037E-01	-.41101E-02	.30317E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
217 /	.6032E+02	-.1500E+01 /	-.26766E-01	.14090E-01	.30248E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
218 /	.6066E+02	-.1500E+01 /	-.13551E-01	.26967E-01	.30180E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
219 /	.6100E+02	-.1500E+01 /	.46481E-02	.29751E-01	.30112E-01 /	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

EOI ENCOUNTERED.

/

Anhang B :

Ergebnisdatei ERGIB für Beispiel B

Schallwellenausbreitung ohne Hindernis

SCHALLGESCHWINDIGKEIT IM MEDIUM 340.
ERREGER - FREQUENZ (IN HZ) 100.
WELLENZAHL 1.847995678582
WELLENLAENGE 3.4

ELEMENTE PRO WELLENLAENGE MIND. 10.

BEREICH	LAENGE	TANGENTENWINKEL	ELEMENTE	ELEMENTLAENGE	ELEMENTE/WLG
1	1.5000	1.50 * PI	4	.375000	9.066667
2	61.0000	0.00 * PI	180	.338889	10.032787
3	61.0200	.99 * PI	0	0.000000	0.000000

ECKEN UND ENDPUNKTE:	KNOTEN	INNENWINKEL	KOORDINATEN	
1	1	1.00 * PI	0.0000	0.0000
2	5	.50 * PI	.0000	-1.5000
3	185	1.00 * PI	61.0000	-1.5000

RAANDBEDINGUNGEN

BEREICH 1 : P,N - (0.0000E+00 -.1000E+01) ERREGT.

UNBEKANNTE : 185
GITTER : 2
KNOTEN DES GROEBSTEN GITTERS : 93
MAX. ANZAHL AN ITERATIONEN : 10

BENOETIGTE RECHENZEIT:

- 1) AUFSTELLEN DER MATRIX A UND DER RECHTEN SEITE G
- 2) MEHRGITTERSPEZIFISCHE MATRIZEN D UND A0
- 3) MEHRGITTERITERATION

BELEGEN: A,G 47.359 SEC

MATRIX A0: 3.450 SEC

1	REL.DEFEKT :	.1698
2	REL.DEFEKT :	.0230
3	REL.DEFEKT :	.0033
4	REL.DEFEKT :	.0005
5	REL.DEFEKT :	.0001

ITERATION 2.001 SEC

BENOETIGTE ITERATIONEN : 5

ITERATIONSENDE: REL.DEFEKT < 0.0001

ITERATIV

KNOTEN	KOORDINATEN		HYDRODYNAMISCHER DRUCK P			DRUCKAENDERUNG P,N		
	X	Y	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG

BEREICH : 1								
1 /	0.0000E+00	0.0000E+00	-.18521E+00	.65517E-02	.18533E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
2 /	-.6064E-14	-.3750E+00	-.38559E+00	-.10331E+00	.39919E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
3 /	-.1213E-13	-.7500E+00	-.58066E+00	-.51089E-01	.58291E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
4 /	-.1819E-13	-.1125E+01	-.72079E+00	.21486E-01	.72111E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.77778E+00	.58297E-01	.77996E+00	0.00000E+00	-.10000E+01	.10000E+01
BEREICH : 2								
5 /	-.2426E-13	-.1500E+01	-.77778E+00	.58297E-01	.77996E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6 /	.3389E+00	-.1500E+01	-.67025E+00	.38618E+00	.77354E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
7 /	.6778E+00	-.1500E+01	-.39092E+00	.62839E+00	.74007E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8 /	.1017E+01	-.1500E+01	-.22141E-01	.69503E+00	.69539E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9 /	.1356E+01	-.1500E+01	.32212E+00	.56480E+00	.65019E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10 /	.1694E+01	-.1500E+01	.53879E+00	.28315E+00	.60866E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
11 /	.2033E+01	-.1500E+01	.56911E+00	-.55987E-01	.57186E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
12 /	.2372E+01	-.1500E+01	.41638E+00	-.34329E+00	.53965E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
13 /	.2711E+01	-.1500E+01	.14277E+00	-.49118E+00	.51151E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
14 /	.3050E+01	-.1500E+01	-.15346E+00	-.46202E+00	.48684E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
15 /	.3389E+01	-.1500E+01	-.37232E+00	-.27870E+00	.46508E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
16 /	.3728E+01	-.1500E+01	-.44554E+00	-.14294E-01	.44577E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
17 /	.4067E+01	-.1500E+01	-.35824E+00	.23514E+00	.42851E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
18 /	.4406E+01	-.1500E+01	-.15134E+00	.38428E+00	.41301E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
19 /	.4744E+01	-.1500E+01	.95285E-01	.38744E+00	.39899E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
20 /	.5083E+01	-.1500E+01	.29238E+00	.25239E+00	.38625E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
21 /	.5422E+01	-.1500E+01	.37297E+00	.34981E-01	.37460E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
22 /	.5761E+01	-.1500E+01	.31475E+00	-.18269E+00	.36392E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
23 /	.6100E+01	-.1500E+01	.14590E+00	-.32262E+00	.35407E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
24 /	.6439E+01	-.1500E+01	-.67200E-01	-.33836E+00	.34497E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
25 /	.6778E+01	-.1500E+01	-.24544E+00	-.23021E+00	.33651E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
26 /	.7117E+01	-.1500E+01	-.32579E+00	-.43143E-01	.32863E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
27 /	.7456E+01	-.1500E+01	-.28338E+00	.15135E+00	.32127E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
28 /	.7794E+01	-.1500E+01	-.13894E+00	.28200E+00	.31437E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
29 /	.8133E+01	-.1500E+01	.50592E-01	.30371E+00	.30789E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
30 /	.8472E+01	-.1500E+01	.21398E+00	.21282E+00	.30179E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
31 /	.8811E+01	-.1500E+01	.29229E+00	.46963E-01	.29604E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
32 /	.9150E+01	-.1500E+01	.25984E+00	-.13010E+00	.29059E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
33 /	.9489E+01	-.1500E+01	-.13252E+00	-.25280E+00	.28543E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
34 /	.9828E+01	-.1500E+01	-.39438E-01	-.27775E+00	.28054E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
35 /	.1017E+02	-.1500E+01	-.19108E+00	-.19899E+00	.27588E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
36 /	.1051E+02	-.1500E+01	-.26699E+00	-.48996E-01	.27145E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
37 /	.1084E+02	-.1500E+01	-.24144E+00	.11451E+00	.26722E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
38 /	.1118E+02	-.1500E+01	-.12699E+00	.23052E+00	.26318E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
39 /	.1152E+02	-.1500E+01	.31316E-01	.25742E+00	.25932E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
40 /	.1186E+02	-.1500E+01	.17343E+00	.18779E+00	.25562E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
41 /	.1220E+02	-.1500E+01	.24703E+00	.50168E-01	.25208E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
42 /	.1254E+02	-.1500E+01	.22661E+00	-.10241E+00	.24867E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
43 /	.1288E+02	-.1500E+01	.12224E+00	-.21279E+00	.24540E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
44 /	.1322E+02	-.1500E+01	-.25029E-01	-.24096E+00	.24226E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
45 /	.1356E+02	-.1500E+01	-.15928E+00	-.17850E+00	.23923E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
46 /	.1389E+02	-.1500E+01	-.23076E+00	-.50921E-01	.23631E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
47 /	.1423E+02	-.1500E+01	-.21433E+00	.92643E-01	.23350E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
48 /	.1457E+02	-.1500E+01	-.11819E+00	.19822E+00	.23078E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
49 /	.1491E+02	-.1500E+01	.19967E-01	.22728E+00	.22816E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
50 /	.1525E+02	-.1500E+01	.14756E+00	.17068E+00	.22562E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

51 /	.1559E+02	-.1500E+01	/.21716E+00	.51431E-01	.22317E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
52 /	.1593E+02	-.1500E+01	/.20397E+00	-.84512E-01	.22079E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
53 /	.1627E+02	-.1500E+01	/.11468E+00	-.18597E+00	.21849E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
54 /	.1661E+02	-.1500E+01	/.-15740E-01	-.21568E+00	.21625E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
55 /	.1694E+02	-.1500E+01	/.-13765E+00	-.16397E+00	.21409E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
56 /	.1728E+02	-.1500E+01	/.-20555E+00	-.51823E-01	.21199E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
57 /	.1762E+02	-.1500E+01	/.-19508E+00	.77598E-01	.20994E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
58 /	.1796E+02	-.1500E+01	/.-11164E+00	.17546E+00	.20796E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
59 /	.1830E+02	-.1500E+01	/.12138E-01	.20567E+00	.20603E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
60 /	.1864E+02	-.1500E+01	/.12909E+00	.15816E+00	.20416E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
61 /	.1898E+02	-.1500E+01	/.19550E+00	.52132E-01	.20233E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
62 /	.1932E+02	-.1500E+01	/.18734E+00	-.71593E-01	.20055E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
63 /	.1966E+02	-.1500E+01	/.10897E+00	-.16630E+00	.19882E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
64 /	.1999E+02	-.1500E+01	/.-89893E-02	-.19692E+00	.19713E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
65 /	.2033E+02	-.1500E+01	/.-12160E+00	-.15306E+00	.19548E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
66 /	.2067E+02	-.1500E+01	/.-18666E+00	-.52409E-01	.19388E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
67 /	.2101E+02	-.1500E+01	/.-18052E+00	.66313E-01	.19231E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
68 /	.2135E+02	-.1500E+01	/.-10662E+00	.15821E+00	.19078E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
69 /	.2169E+02	-.1500E+01	/.62089E-02	.18918E+00	.18929E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
70 /	.2203E+02	-.1500E+01	/.11495E+00	.14855E+00	.18783E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
71 /	.2237E+02	-.1500E+01	/.17881E+00	.52654E-01	.18640E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
72 /	.2271E+02	-.1500E+01	/.17445E+00	-.61598E-01	.18501E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
73 /	.2304E+02	-.1500E+01	/.10453E+00	-.15099E+00	.18364E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
74 /	.2338E+02	-.1500E+01	/.-37044E-02	-.18227E+00	.18231E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
75 /	.2372E+02	-.1500E+01	/.-10899E+00	-.14451E+00	.18100E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
76 /	.2406E+02	-.1500E+01	/.-17177E+00	-.52896E-01	.17973E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
77 /	.2440E+02	-.1500E+01	/.-16901E+00	.57356E-01	.17848E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
78 /	.2474E+02	-.1500E+01	/.-10266E+00	.14449E+00	.17725E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
79 /	.2508E+02	-.1500E+01	/.14399E-02	.17604E+00	.17605E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
80 /	.2542E+02	-.1500E+01	/.10360E+00	.14088E+00	.17487E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
81 /	.2576E+02	-.1500E+01	/.16540E+00	.53123E-01	.17372E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
82 /	.2609E+02	-.1500E+01	/.16409E+00	-.53493E-01	.17259E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
83 /	.2643E+02	-.1500E+01	/.10099E+00	-.13859E+00	.17148E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
84 /	.2677E+02	-.1500E+01	/.64270E-03	-.17039E+00	.17039E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
85 /	.2711E+02	-.1500E+01	/.-98688E-01	-.13759E+00	.16933E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
86 /	.2745E+02	-.1500E+01	/.-15960E+00	-.53357E-01	.16828E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
87 /	.2779E+02	-.1500E+01	/.-15961E+00	.49961E-01	.16725E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
88 /	.2813E+02	-.1500E+01	/.-99476E-01	.13319E+00	.16624E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
89 /	.2847E+02	-.1500E+01	/.-25573E-02	.16523E+00	.16525E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
90 /	.2881E+02	-.1500E+01	/.94173E-01	.13460E+00	.16427E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
91 /	.2914E+02	-.1500E+01	/.15428E+00	.53582E-01	.16332E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
92 /	.2948E+02	-.1500E+01	/.15552E+00	-.46696E-01	.16238E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
93 /	.2982E+02	-.1500E+01	/.98100E-01	-.12823E+00	.16145E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
94 /	.3016E+02	-.1500E+01	/.43446E-02	-.16048E+00	.16054E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
95 /	.3050E+02	-.1500E+01	/.-90009E-01	-.13185E+00	.15965E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
96 /	.3084E+02	-.1500E+01	/.-14937E+00	-.53816E-01	.15877E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
97 /	.3118E+02	-.1500E+01	/.-15174E+00	.43675E-01	.15790E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
98 /	.3152E+02	-.1500E+01	/.-96853E-01	.12363E+00	.15705E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
99 /	.3186E+02	-.1500E+01	/.-60077E-02	.15610E+00	.15621E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
100 /	.3219E+02	-.1500E+01	/.86138E-01	.12933E+00	.15539E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
101 /	.3253E+02	-.1500E+01	/.14482E+00	.54044E-01	.15458E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
102 /	.3287E+02	-.1500E+01	/.14826E+00	-.40851E-01	.15378E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
103 /	.3321E+02	-.1500E+01	/.95706E-01	-.11936E+00	.15299E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
104 /	.3355E+02	-.1500E+01	/.75777E-02	-.15203E+00	.15222E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
105 /	.3389E+02	-.1500E+01	/.-82532E-01	-.12700E+00	.15146E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
106 /	.3423E+02	-.1500E+01	/.-14059E+00	-.54281E-01	.15071E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
107 /	.3457E+02	-.1500E+01	/.-14502E+00	.38212E-01	.14997E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
108 /	.3491E+02	-.1500E+01	/.-94660E-01	.11537E+00	.14924E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
109 /	.3524E+02	-.1500E+01	/.-90519E-02	.14824E+00	.14852E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
110 /	.3558E+02	-.1500E+01	/.79148E-01	.12483E+00	.14781E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
111 /	.3592E+02	-.1500E+01	/.13664E+00	.54512E-01	.14711E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
112 /	.3626E+02	-.1500E+01	/.14200E+00	-.35723E-01	.14642E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
113 /	.3660E+02	-.1500E+01	/.93689E-01	-.11164E+00	.14574E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
114 /	.3694E+02	-.1500E+01	/.10456E-01	-.14469E+00	.14507E+00	/ 0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

115 /	.3728E+02	-.1500E+01	-.75972E-01	-.12281E+00	.14441E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
116 /	.3762E+02	-.1500E+01	-.13292E+00	-.54751E-01	.14376E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
117 /	.3796E+02	-.1500E+01	-.13917E+00	.33381E-01	.14311E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
118 /	.3829E+02	-.1500E+01	-.92798E-01	.10812E+00	.14248E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
119 /	.3863E+02	-.1500E+01	-.11783E-01	.14136E+00	.14185E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
120 /	.3897E+02	-.1500E+01	.72970E-01	.12093E+00	.14124E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
121 /	.3931E+02	-.1500E+01	.12943E+00	.54984E-01	.14063E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
122 /	.3965E+02	-.1500E+01	.13651E+00	-.31156E-01	.14002E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
123 /	.3999E+02	-.1500E+01	.91965E-01	-.10480E+00	.13943E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
124 /	.4033E+02	-.1500E+01	.13055E-01	-.13823E+00	.13884E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
125 /	.4067E+02	-.1500E+01	-.70133E-01	-.11915E+00	.13826E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
126 /	.4101E+02	-.1500E+01	-.12613E+00	-.55225E-01	.13769E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
127 /	.4134E+02	-.1500E+01	-.13401E+00	.29049E-01	.13712E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
128 /	.4168E+02	-.1500E+01	-.91196E-01	.10165E+00	.13657E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
129 /	.4202E+02	-.1500E+01	-.14264E-01	.13526E+00	.13601E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
130 /	.4236E+02	-.1500E+01	.67435E-01	.11749E+00	.13547E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
131 /	.4270E+02	-.1500E+01	.12301E+00	.55460E-01	.13493E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
132 /	.4304E+02	-.1500E+01	.13165E+00	-.27035E-01	.13440E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
133 /	.4338E+02	-.1500E+01	.90474E-01	-.98671E-01	.13387E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
134 /	.4372E+02	-.1500E+01	.15429E-01	-.13246E+00	.13335E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
135 /	.4406E+02	-.1500E+01	-.64873E-01	-.11592E+00	.13284E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
136 /	.4439E+02	-.1500E+01	-.12004E+00	-.55700E-01	.13233E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
137 /	.4473E+02	-.1500E+01	-.12941E+00	.25119E-01	.13183E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
138 /	.4507E+02	-.1500E+01	-.89803E-01	.95829E-01	.13133E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
139 /	.4541E+02	-.1500E+01	-.16542E-01	.12979E+00	.13084E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
140 /	.4575E+02	-.1500E+01	.62423E-01	.11444E+00	.13035E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
141 /	.4609E+02	-.1500E+01	.11721E+00	.55934E-01	.12987E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
142 /	.4643E+02	-.1500E+01	.12729E+00	-.23280E-01	.12940E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
143 /	.4677E+02	-.1500E+01	.89169E-01	-.93122E-01	.12893E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
144 /	.4711E+02	-.1500E+01	.17618E-01	-.12725E+00	.12847E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
145 /	.4744E+02	-.1500E+01	-.60086E-01	-.11303E+00	.12800E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
146 /	.4778E+02	-.1500E+01	-.11452E+00	-.56173E-01	.12755E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
147 /	.4812E+02	-.1500E+01	-.12526E+00	.21522E-01	.12710E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
148 /	.4846E+02	-.1500E+01	-.88578E-01	.90529E-01	.12666E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
149 /	.4880E+02	-.1500E+01	-.18650E-01	.12483E+00	.12621E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
150 /	.4914E+02	-.1500E+01	.57841E-01	.11169E+00	.12578E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
151 /	.4948E+02	-.1500E+01	.11194E+00	.56405E-01	.12535E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
152 /	.4982E+02	-.1500E+01	.12334E+00	-.19827E-01	.12492E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
153 /	.5016E+02	-.1500E+01	.88015E-01	-.88050E-01	.12450E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
154 /	.5049E+02	-.1500E+01	.19652E-01	-.12251E+00	.12408E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
155 /	.5083E+02	-.1500E+01	-.55692E-01	-.11041E+00	.12366E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
156 /	.5117E+02	-.1500E+01	-.10947E+00	-.56641E-01	.12325E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
157 /	.5151E+02	-.1500E+01	-.12149E+00	.18202E-01	.12285E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
158 /	.5185E+02	-.1500E+01	-.87488E-01	.85666E-01	.12245E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
159 /	.5219E+02	-.1500E+01	-.20614E-01	.12029E+00	.12205E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
160 /	.5253E+02	-.1500E+01	.53620E-01	.10920E+00	.12165E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
161 /	.5287E+02	-.1500E+01	.10710E+00	.56870E-01	.12126E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
162 /	.5321E+02	-.1500E+01	.11973E+00	-.16630E-01	.12088E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
163 /	.5354E+02	-.1500E+01	.86985E-01	-.83378E-01	.12049E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
164 /	.5388E+02	-.1500E+01	.21551E-01	-.11816E+00	.12011E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
165 /	.5422E+02	-.1500E+01	-.51629E-01	-.10803E+00	.11974E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
166 /	.5456E+02	-.1500E+01	-.10482E+00	-.57103E-01	.11936E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
167 /	.5490E+02	-.1500E+01	-.11803E+00	.15118E-01	.11899E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
168 /	.5524E+02	-.1500E+01	-.86511E-01	.81171E-01	.11863E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
169 /	.5558E+02	-.1500E+01	-.22454E-01	.11612E+00	.11827E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
170 /	.5592E+02	-.1500E+01	.49704E-01	.10692E+00	.11791E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
171 /	.5626E+02	-.1500E+01	.10263E+00	.57327E-01	.11755E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
172 /	.5659E+02	-.1500E+01	.11640E+00	-.13651E-01	.11720E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
173 /	.5693E+02	-.1500E+01	.86056E-01	-.79046E-01	.11685E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
174 /	.5727E+02	-.1500E+01	.23335E-01	-.11414E+00	.11650E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
175 /	.5761E+02	-.1500E+01	-.47849E-01	-.10585E+00	.11616E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
176 /	.5795E+02	-.1500E+01	-.10051E+00	-.57555E-01	.11582E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
177 /	.5829E+02	-.1500E+01	-.11483E+00	.12237E-01	.11548E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
178 /	.5863E+02	-.1500E+01	-.85626E-01	.76990E-01	.11515E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

179 /	.5897E+02	-.1500E+01	-.24185E-01	.11224E+00	.11482E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
180 /	.5931E+02	-.1500E+01	.46050E-01	.10482E+00	.11449E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
181 /	.5964E+02	-.1500E+01	.98464E-01	.57774E-01	.11416E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
182 /	.5998E+02	-.1500E+01	.11332E+00	-.10861E-01	.11384E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
183 /	.6032E+02	-.1500E+01	.85211E-01	-.75005E-01	.11352E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
184 /	.6066E+02	-.1500E+01	.25017E-01	-.11040E+00	.11320E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
185 /	.6100E+02	-.1500E+01	-.44313E-01	-.10383E+00	.11289E+00	/	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

KONVERGENZRATE DER 1. ITERATION: .1261295117943

KONVERGENZRATE DER 2. ITERATION: .1382917557636

KONVERGENZRATE DER 3. ITERATION: .149387223186

KONVERGENZRATE DER 4. ITERATION: .1462704092412

MAX. KONVERGENZRATE : .149387223186

PUNKT	X-KOORD.	Y-KOORD.	HYDRODYN. DRUCK		
			REALTEIL	IMAGINAERTEIL	BETRAG
1	.250000E+02	.250000E+01	.7182E-01	.1506E+00	.1668E+00

POSTPROCESSING .652 SEC

EOI ENCOUNTERED.

/

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s :

- [1] Schippers, H.
Multigrid Methods for Boundary Integral Equations
Num. Math. 46 (1985)
- [2] Meise, Th.
Mehrgitterverfahren bei Randintegralgleichungen
Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik,
Ruhr-Universität-Bochum (1986)
- [3] Antes, H.
Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik
und der Fluidodynamik
Math. Meth. in der Technik,
Teubner, Stuttgart (1988)
- [4] Becker, P.
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementverfahren
aus: Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 41
Ruhr-Universität-Bochum (1984)
- [5] Wendland, W., L.
On Galerkin Collocation Methods for Integral Equations of
Elliptic Boundary Value Problems
Inter. Ser. Num. Math. 53, Birkhäuser, Basel (1980)
- [6] Antes, H./Ottensreuer, M./Schmid, G.
Randelemente
Technisch-wissenschaftliche Mitteilung Nr. 82-2
Ruhr-Universität-Bochum (1982)

Teil B: FLUID3D

Ein Rechenprogramm zur Untersuchung der Ausbreitung 3-dimensionaler Wellen im Zeitbereich mit einem Zeitschritt - Randelemente Verfahren
(Thomas Wiebe)

1. Einleitung

Viele Vorgänge der Natur und der Technik beruhen auf der Wellenausbreitung in akustischen Medien, insbesondere in der Luft und im Wasser. Die Übertragung der Sprache z.B. erfolgt durch Druckschwankungen in der Luft. Es gibt aber auch unerwünschte oder für den Menschen unangenehme Wellenausbreitung, die man bei entsprechender Intensität als Lärm empfindet.

Die Aufgabe des Ingenieurs ist es, erwünschten Schall möglichst störungsfrei zu übertragen, bzw. die Entstehung unerwünschter Schallwellen zu verhindern oder deren Einwirkung auf Menschen und Bauwerke zu minimieren.

In den ersten Aufgabenbereich fallen z.B. die akustische Gestaltung von Konzertsälen oder die Auslegung von Lautsprechern. Der zweite Bereich beinhaltet u.a. die Konstruktion "leiser" Maschinen, von Schallschutzeinrichtungen und Fahrgastzellen im Fahrzeugbau.

Auch die Wellenausbreitung in anderen Fluiden als Luft ist von technischer Bedeutung. In Rohrleitungssystemen, wie sie in der Verfahrenstechnik vorkommen, können durch das Öffnen und Schließen von Ventilen Druckwellen verursacht werden.

Bei allen genannten Problemen wird die Schallausbreitung mit ausreichender Genauigkeit von der linearen Wellengleichung beschrieben. Die Lösung dieser Wellengleichung ist deshalb eine wichtige Aufgabe der theoretischen Akustik. Andere Vorgänge, z.B. durch Explosionen verursachte Wellen, können mit der linearen Theorie nicht mehr beschrieben werden.

Neben experimentellen Untersuchungen sind eine Reihe von numerischen Verfahren entwickelt worden, um die Wellengleichung zu lösen.

Bei der Methode der Finiten Differenzen (FD) wird das Gebiet mit einem Gitter überzogen und die Differentialgleichung an den Gitterpunkten durch die zugehörige Differenzgleichung ersetzt. Berücksichtigt man die Randbedingungen an den Randknoten, erhält man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten an den Gitterpunkten im Gebietsinnern.

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) geht von der zur Differentialgleichung gehörenden Variationsaufgabe aus. Das Gebiet wird in Elemente, die durch die Knotenpunkte definiert sind, unterteilt. Man macht einen elementweisen Polynomansatz für die gesuchte Funktion. Dadurch reduziert sich die Lösung des Variationsproblems auf die Lösung eines Gleichungssystems für die Ansatzkonstanten.

Zur Randelemente-Formulierung gelangt man normalerweise ausgehend von der Differentialgleichung über die Methode der gewichteten Residuen. Mit Kenntnis der Fundamentallösung kommt man zu einer Integralgleichung, die nur Größen auf dem Rand des Gebietes enthält. Über einen Näherungsansatz erhält man zunächst die Lösung für den Rand. Damit kann dann die Lösung für beliebige Innenpunkte berechnet werden.

Im Vergleich zu FD- oder FEM- Verfahren wird bei der Randelemente-Methode (BEM) also nicht das Gebiet, sondern nur der Rand diskretisiert. Dadurch ist die Anzahl der Dimensionen des Problems um eins reduziert, was die Größe des Gleichungssystems für die Ansatzkonstanten verringert. Die Einflußmatrizen der Randelemente-Methode sind allerdings nicht, wie bei FD- oder FEM-Verfahren, symmetrisch und positiv definit. Sie

besitzen normalerweise auch keine Bandstruktur. Die speziell für diese Fälle entwickelten Programme zum Lösen linearer Gleichungssysteme können also nicht verwendet werden.

Bei der Untersuchung zeitabhängiger Probleme hat man die Möglichkeit, die zeitabhängige Formulierung zu benutzen oder mit der Annahme einer stationär-harmonischen Bewegung zur frequenzabhängigen Formulierung zu gelangen. Die Ergebnisse beider Verfahren sind über die Laplace- bzw. die Fouriertransformation miteinander verknüpft.

Frequenzbereichslösungen eignen sich besonders für Schwingungen, die aus wenigen Frequenzen zusammengesetzt sind. Um z.B. Einschwingvorgänge zu untersuchen sind Zeitbereichsverfahren besser geeignet; bei ihnen ist allerdings die Qualität der Lösung für lange Zeitintervalle problematisch.

In dieser Arbeit wird die zeitabhängige Lösung der dreidimensionalen skalaren Wellengleichung mit der Randelemente-Methode behandelt.

Zunächst werden die skalare Wellengleichung und die Fundamentallösung, d.h. die Antwort auf eine punktförmige Impulserregung im unendlich ausgedehnten Gebiet, hergeleitet. Darauf folgt die Formulierung der zugehörigen Integral- bzw. Randintegralgleichung. Anschließend wird die Diskretisierung der Randintegralgleichung mit der Randelemente Methode dargestellt. Daran schließt sich eine Beschreibung der Programme an, in deren Mittelpunkt das FORTRAN-Programm FLUID3D steht. Einige Beispiele zeigen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens.

2. Die Wellengleichung

Für ein reibungsloses, kompressibles und homogenes Fluid lautet der Impulssatz, der das Gleichgewicht von Kräften durch lokale Druckunterschiede, äußeren Kräften und Trägheitskräften beschreibt (Euler'sche Gleichungen) [1],[2] :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (2.1c)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor v_i und dem Vektor der äußeren Kräfte F_i . Die Geschwindigkeit \vec{v} sei zusammengesetzt aus einer Grundgeschwindigkeit \vec{v}_0 und einer Abweichung Δv :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v} \quad ; \quad \vec{v}_0 = const \quad (2.2)$$

Für ein ruhendes Fluid ist

$$\vec{v}_0 \equiv 0 \quad (2.3)$$

Man erhält damit:

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= (v_{0i} + \Delta v_i) \frac{\partial (v_{0i} + \Delta v_i)}{\partial x_j} \\ &= \Delta v_i \frac{\partial (\Delta v_i)}{\partial x_j} \approx 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

da die Produkte kleiner Größen vernachlässigt werden. Somit können alle Produkte aus Geschwindigkeitskomponenten und den Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen vernachlässigt werden.

Dann bleibt von den Gleichungen (2.1) nur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Delta v_1)}{\partial t} &= F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (\Delta v_2)}{\partial t} &= F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial (\Delta v_3)}{\partial t} &= F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

bzw. in vektorieller Schreibweise

$$\frac{\partial (\Delta \vec{v})}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p). \quad (2.6)$$

Die Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung beschreibt, lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Ebenso wie die Geschwindigkeit, wird auch die Dichte zerlegt:

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho \quad ; \quad \Delta \rho \ll \rho_0 \quad ; \quad \rho_0 = \text{const} \quad (2.8)$$

Mit (2.2) , (2.8) und $\rho \approx \rho_0$ erhält man aus (2.7) :

$$\frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{\Delta v}) = 0. \quad (2.9)$$

Aus den Gleichungen (2.6) und (2.9) wird zunächst die Geschwindigkeit $\vec{\Delta v}$ eliminiert. Dazu bildet man die Divergenz von (2.6) mit $\rho \approx \rho_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\vec{\Delta v})] = \operatorname{div} \vec{F} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p)) \quad (2.10)$$

und die Zeitableitung von (2.9) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\vec{\Delta v})] = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2(\Delta \rho)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Gleichsetzen ergibt:

$$- \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2(\Delta \rho)}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\vec{F}) - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p)) \quad (2.12)$$

Normalerweise ist der Druckverlauf gesucht, es muß also noch die Dichte durch den Druck ausgedrückt werden. Zunächst wird der Druck analog zu (2.2) und (2.8) zerlegt:

$$p = p_0 + \tilde{u} \quad ; \quad \tilde{u} \ll p_0 \quad ; \quad p_0 = \text{const} \quad (2.13)$$

Für kleine Druckänderungen können die Zustandsänderungen als isentrop angesehen werden. Dann kann man von der Definition des Isentropenexponenten κ ausgehen[3]:

$$\kappa = \kappa(T) = - \frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \text{const} \quad (2.14)$$

mit $v = \frac{1}{\rho}$: spezifisches Volumen

und s : spezifische Entropie.

Ersetzt man v durch $\frac{1}{\rho}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{d(\Delta \rho)}{\rho_0} &= \frac{d\tilde{u}}{p_0} \\ \Rightarrow d(\Delta \rho) &= \frac{\rho_0}{\kappa p_0} d\tilde{u} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Diese Beziehung wird in (2.12) eingesetzt:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\vec{F}) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p)) \quad (2.17)$$

Mit

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(p)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p_0 + \tilde{u})) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\tilde{u})) = \nabla^2 \tilde{u} \quad (2.18)$$

und der Quelledichte

$$\gamma = -\rho_0 \operatorname{div}(\vec{F}) \quad (2.19)$$

wird daraus

$$\nabla^2 \tilde{u} - \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \ddot{\tilde{u}} = -\gamma \quad (2.20)$$

Schließlich erhält man mit der Schallgeschwindigkeit des idealen Fluids die Wellengleichung für die Druckschwankung \tilde{u} :

$$\nabla^2 \tilde{u} - \frac{1}{c^2} \ddot{\tilde{u}} = \gamma \quad (2.22)$$

Zur vollständigen Formulierung des hyperbolischen Problems gehören noch Anfangs- und Randbedingungen.

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(q, t=0) &= \tilde{u}_0(q) \\ \tilde{v}(q, t=0) &= \left. \frac{\partial \tilde{u}(q, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{v}_0(q) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(q, t) &= \bar{u} && \text{für } q \in \Gamma_1 \\ \tilde{p}(q, t) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \bar{p} && \text{für } q \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. Eine Punktquelle im unendlichen Gebiet

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung der Randlelementemethode ist eine spezielle Lösung der Wellengleichung, nämlich das Druckfeld bei Impulserregung im unendlich ausgedehnten Gebiet. Diese Lösung heißt Fundamentallösung.

Unter einer Quelle versteht man ein Gebiet, das dem akustischen Medium über eine Kontaktfläche mechanische Energie zuführt[4]. Kugelsymmetrische Quellen erzeugen ein kugelsymmetrisches Druckfeld. Legt man eine Quelle in den Ursprung eines Kugelkoordinatensystems, bleibt von der Wellengleichung nur die radiale Abhängigkeit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Eine allgemeine Lösung, die außer bei $r = 0$ überall endlich ist, ist nach d'Alembert:

$$\tilde{u} = \frac{1}{r} F(r - ct) + \frac{1}{r} G(r + ct) \quad (3.2)$$

mit beliebigen Funktionen F und G . F beschreibt eine in r -Richtung laufende, G eine gegen r -Richtung laufende Welle. Betrachtet wird eine kugelförmige Quelle mit beliebigem Radius a . Wenn diese Quelle kontrahiert und expandiert, wird diese Bewegung durch die Radialgeschwindigkeit $\Delta v_r(t)$ beschrieben. Erfolgt die Bewegung mit kleiner Amplitude um die Ruhelage, kann der Radius konstant angenommen werden und die von der Quelloberfläche bewegte Fluidmasse ist:

$$\dot{m} = \rho 4 \pi a^2 \Delta v_r(t) \quad (3.3)$$

Vom Impulssatz (2.6) bleibt nur die radiale Komponente:

$$\frac{\partial(\Delta v_r)}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad (3.4)$$

Betrachtet man eine auslaufende Welle

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{r} \tilde{F}(r - ct) = \frac{1}{r} F\left(\frac{r}{c} - t\right) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} &= - \frac{F}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.5)$$

wird daraus

$$- \rho \frac{\partial(\Delta v_r)}{\partial t} = - \frac{F}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (3.6)$$

und mit (3.3) gilt bei $r = a$:

$$- \frac{\rho}{4\pi a^2 \rho} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = - \frac{F}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (3.7)$$

Für eine "punktförmige" Quelle, d.h. wenn a klein im Vergleich zur ausgesandten Wellenlänge ist, ist

$$\frac{F}{r}|_a \gg \frac{\partial F}{\partial r}|_a \quad (3.8)$$

und es bleibt

$$F|_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \dot{V}}{\partial t}|_a \quad (3.9)$$

Für den Druck im Abstand r von der Quelle erhält man damit

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial \dot{m}(\frac{r}{c} - t)}{\partial t} \quad (3.10)$$

Wenn die Quelle bis $t = \tau$ in Ruhe ist und ab dann $\dot{m} = 4\pi$ aussendet, also

$$\gamma = 4\pi \delta(\tau) \delta(t - \tau) \quad (3.11)$$

erhält man eine impulsförmige Welle

$$u^* = \frac{1}{r} \delta\left[\frac{r}{c} - (t - \tau)\right] \quad (3.12)$$

Dabei ist $\delta(x)$ die Dirac-Distribution mit folgenden Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (3.13)$$

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{für } x \neq x_0 \quad (3.14)$$

Das ist die gesuchte Fundamentallösung. Sie erfüllt die Wellengleichung in folgender Form:

$$\nabla^2 u^*(p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(p)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(q - p) \delta(t - \tau) \quad (3.15)$$

Wobei q der Ort der Punktquelle und p ein beliebiger Feldpunkt ist. r bezeichnet den Abstand von q nach p . Im Folgenden heißt q "Aufpunkt" und p heißt "Quellpunkt". Die Fundamentallösung hat einige Eigenschaften, die später benötigt werden:

a) Kausalität

$$u^*(q, t; p, \tau) = 0 \quad \text{für } c(t - \tau) < |q - p| \quad (3.16)$$

Das akustische Medium ist in einem Punkt q in Ruhe, bis die sich von p aus mit Schallgeschwindigkeit ausbreitende Welle q erreicht hat.

b) Reziprozität

$$u^*(q, t; p, \tau) = u^*(p, -\tau; q, -t) \quad (3.17)$$

c) Zeitverschiebung

$$u^*(q, t; p, \tau) = u^*(q, t + t_0; p, \tau + t_0) \quad (3.18)$$

Der Druck ist bei festen p und q nur abhängig von der *Zeitdifferenz* zwischen Erregung und Beobachtung.

Außerdem erfüllt die Fundamentallösung die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung, d.h. für $r \rightarrow \infty$ erfüllt u^* homogene Randbedingungen, die Wirkung der Quelle ist also abgeklungen.

4. Die Kirchhoff'sche Integralgleichung

Für die Wellengleichung sind nur für wenige Sonderfälle von Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen exakte Lösungen bekannt. In der Praxis begnügt man sich deshalb mit Näherungslösungen. Um Näherungslösungen mit der Randelemente-Methode zu bestimmen, muß zunächst die zugehörige Integralgleichung hergeleitet werden. Dies geschieht mit der Methode der gewichteten Residuen[5].

Für den dynamischen Druck \bar{u} ist eine Näherungslösung gesucht. Diese Näherungslösung erfüllt i.A. weder die Differentialgleichung noch die Randbedingungen exakt. Beim Vergleich mit der (unbekannten) exakten Lösung treten also Restfehler, sog. Residuen, auf:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma &= \varepsilon_1 \\ u - \bar{u} &= \varepsilon_2 \\ \bar{p} - p &= \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Für die Näherungslösung sollen die Residuen ε_i mit einer Wichtungsfunktion w gewichtet im Mittel verschwinden:

$$\int_0^T \int_V \varepsilon_1 w dV d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \varepsilon_2 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varepsilon_3 w d\Gamma d\tau = 0 \quad (4.2)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_V \left[\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \right] w dV d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [u - \bar{u}] \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma d\tau \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_2} [p - \bar{p}] w d\Gamma d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Um zur Randintegralformulierung zu gelangen, wählt man als Wichtungsfunktion die Fundamentallösung u^* [6],[7],[8]. Mit:

$$\begin{aligned} w &= u^* \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= p^* \end{aligned} \quad (4.4)$$

erhält man aus (4.3):

$$\int_0^T \int_V \left[\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \right] u^* dV d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [u - \bar{u}] p^* d\Gamma d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_2} [p - \bar{p}] u^* d\Gamma d\tau = 0 \quad (4.5)$$

Auf den ersten Term des ersten Integrals wird zweimal der Satz von Gauß angewendet:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 u u^* dV &= \int_V u_{,ii} u^* dV \\ &= \int_V [(u_{,i} u^*)_{,i} - (u_{,i} u^*_{,i})] dV \\ &= \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_V u_{,i} u^*_{,i} dV \\ &= \int_{\Gamma} u_{,n} u^* d\Gamma - \int_V [(u u^*_{,i})_{,i} - (u u^*_{,ii})] dV \\ &= \int_{\Gamma} u_{,n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*_{,i} u n_i d\Gamma + \int_V u u^*_{,ii} dV \\ &= \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma + \int_V u \nabla^2 u^* dV \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der zweite Term des ersten Integrals wird zweimal bzgl. τ integriert:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_V -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* dV d\tau &= -\frac{1}{c^2} \int_V \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* d\tau dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_V \left\{ \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial u^*}{\partial \tau} d\tau \right\} dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_V \left\{ \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \Big|_0^T - u \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \Big|_0^T + \int_0^T u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} d\tau \right\} dV \\ &= \frac{1}{c^2} \int_V \left[u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right]_0^T dV - \frac{1}{c^2} \int_0^T \int_V u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} dV d\tau \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left\{ \int_{\Gamma} [p u^* - p^* u] d\Gamma + \int_V u \nabla^2 u^* dV - \frac{1}{c^2} \int_V u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} dV + \int_V \gamma u^* dV \right\} d\tau \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_V \left[u \frac{\partial u^*}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right]_0^T dV + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [u - \bar{u}] p^* d\Gamma d\tau \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma_2} [p - \bar{p}] u^* d\Gamma d\tau = 0 \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_V \left[\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right] u dV d\tau + \int_0^T \int_V u^* \gamma dV d\tau \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_V \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]_0^T dV + \int_0^T \int_{\Gamma_1} p u^* d\Gamma d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_2} p u^* d\Gamma d\tau \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} p^* u d\Gamma d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_2} p^* u d\Gamma d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_1} u p^* d\Gamma d\tau \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \bar{u} p^* d\Gamma d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \bar{p} u^* d\Gamma d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_2} p u^* d\Gamma d\tau = 0 \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Gamma} [u^* p - p^* u] d\Gamma d\tau + \int_0^T \int_V \left[\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right] u dV d\tau \\
 & + \int_0^T \int_V u^* \gamma dV d\tau + \frac{1}{c^2} \int_V \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]_0^T dV = 0 \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

In diese Gleichung wird die Fundamentallösung eingesetzt. Für $T = t + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ und mit den Eigenschaften der Fundamentallösung kann man weiter vereinfachen.

Das letzte Integral:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{c^2} \int_V \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]_{r=0}^{t^+} dV \\
 &= \frac{1}{c^2} \int_V \left[\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u \Big|_{r=t^+} - u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{r=t^+} - \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \Big|_{r=0} + u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{r=0} \right] dV \\
 &= -\frac{1}{c^2} \int_V [v_0^* u_0 - u_0^* v_0] dV
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Außerdem wird $\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = -4\pi \delta(q-p) \delta(t-\tau)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t^+} \int_\Gamma [u^* p - p^* u] d\Gamma d\tau - \int_0^{t^+} \int_V 4\pi \delta(q-p) \delta(t-\tau) u dV d\tau \\
 &+ \int_0^{t^+} \int_V u^* \gamma dV d\tau - \frac{1}{c^2} \int_V [v_0^* u_0 - u_0^* v_0] dV
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Das zweite Integral kann mit den Eigenschaften der Dirac-Funktion direkt ausgewertet werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
 u(q, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{t^+} \int_\Gamma [u^*(Q, t; p, \tau) p(Q, \tau) - p^*(Q, t; p, \tau) u(Q, \tau)] d\Gamma(Q) d\tau \right. \\
 + \int_0^{t^+} \int_V u^*(q, t; p, \tau) \gamma(q, \tau) dV(q) d\tau \\
 \left. - \frac{1}{c^2} \int_V [v_0^*(q, t; p) u_0(q) - u_0^*(q, t; p) v_0(q)] dV(q) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Mit der Fundamentallösung

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{c}{r} \delta[r - c(t - \tau)] \\
 &= \frac{1}{r} \delta\left[\frac{r}{c} - (t - \tau)\right]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

und

$$\begin{aligned}
 p^* &= \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u^*}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \delta \left[\frac{r}{c} - (t - \tau) \right] \right\} \\
 &= \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta \left[\frac{r}{c} - (t - \tau) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \delta \left[\frac{r}{c} - (t - \tau) \right] \right\} \\
 &= \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta(t - \tau) + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - t_r) \right\} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

sowie der "retardierten Zeit"

$$t_r = t - \frac{r}{c} \quad (4.16)$$

kann bei Berücksichtigung der Eigenschaften der δ -Funktion analytisch über die Zeit τ integriert werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma(Q) \, d\tau &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \delta \left[\frac{r}{c} - (t - \tau) \right] p(Q, \tau) \, d\tau \, d\Gamma(Q) \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \delta(\tau - t_r) p(Q, \tau) \, d\tau \, d\Gamma(Q) \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_r) \, d\Gamma(Q) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma(Q) \, d\tau &= \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \int_0^{t^+} \left[-\frac{1}{r^2} \delta(\tau - t_r) u(Q, \tau) + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - t_r) u(Q, \tau) \right] \, d\tau \, d\Gamma(Q) \\
 &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(Q, t_r) - \frac{1}{cr} \int_0^{t^+} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - t_r) u(Q, \tau) \, d\tau \right\} \, d\Gamma(Q) \\
 &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(Q, t_r) - \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right\} \, d\Gamma(Q) \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t^+} \int_V u^* \gamma \, dV \, d\tau &= \int_V \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \delta(\tau - t_r) \gamma(q, \tau) \, d\tau \, dV \\
 &= \int_V \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) \, dV \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Gleichung (4.13) :

$$\begin{aligned}
 u(p, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} p(q, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) + \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] \right\} d\Gamma(Q) \\
 &+ \int_{V} \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) dV \\
 &- \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V} [v_0^*(q, t; p) u_0(q) - u_0^*(q, t; p) v_0(q)] dV(q)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Für den letzten Term kann man schreiben:

$$-\frac{1}{4\pi c^2} \int_{V} [v_0^* u_0 - u_0^* v_0] dV = t N_0 + \frac{\partial}{\partial t} (t M_0) \tag{4.21}$$

mit:

M_0 : Mittelwert von u_0 über eine Kugel mit Mittelpunkt in p und Radius ct .

N_0 : entsprechender Mittelwert von v_0 .

Also lautet die Integralgleichung:

$$\begin{aligned}
 u(p, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} p(Q, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] \right\} d\Gamma(Q) \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{V} \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) dV + t N_0 + \frac{\partial}{\partial t} (t M_0)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Diese Gleichung ist als Kirchhoff'sche Integralgleichung bekannt.

Man beachte, daß für $t_r < 0 \rightarrow r > ct$ die rechte Seite keinen Beitrag liefert.

Mit dieser Gleichung kann man u im Innern des Gebiets bestimmen, wenn u, p und $\frac{\partial u}{\partial r}$ auf dem Rand bekannt sind.

5. Die Randintegralgleichung

Die Kirchhoff'sche Integralgleichung ist nicht direkt zur Lösung des Randwertproblems geeignet, da sie noch zwei unbekannte Zustandsgrößen enthält. Auf dem Rand ist bei einem korrekt formulierten Problem aber in jedem Punkt entweder u oder p gegeben. Läßt man also als Quellpunkte nur noch Punkte auf dem Rand zu, d.h. $p \rightarrow P$, erhält man eine Gleichung mit nur noch einer unbekanntem Randgröße:

$$u(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} p(Q, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] \right\} d\Gamma(Q) + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) dV + t N_0 + \frac{\partial}{\partial t} (t M_0) \quad (5.1)$$

Diese Randintegralgleichung ist Ausgangspunkt der numerischen Lösung des Randwertproblems. Wenn man keine Quellen im Innern des Gebiets zuläßt und homogene Anfangsbedingungen betrachtet, enthält die Gleichung nur noch Größen auf dem Rand.

Für $Q \rightarrow P$ strebt $r \rightarrow 0$, die Integralgleichung ist also singular. Die Integrale sind deshalb in Cauchy'sche Hauptwerte und die Werte um die Singularität aufzuteilen. Wenn der Rand Γ glatt ist, wird er in einen halbkugelförmigen Rand Γ_ε und den Rest, $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ aufgespalten. Die Gleichung lautet damit, wenn man homogene Anfangsbedingungen und $\gamma \equiv 0$ betrachtet:

$$u(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{r} p(Q, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] \right\} d\Gamma(Q) + \frac{1}{4\pi} (S_p + S_u + S_v) \quad (5.2)$$

mit:

$$S_p = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} p(Q, t_r) d\Gamma(Q) \quad (5.3)$$

$$S_u = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) \right] d\Gamma(Q) \quad (5.4)$$

$$S_v = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] d\Gamma(Q) \quad (5.5)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht $\Gamma - \Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ und man erhält für glatte Ränder:

$$S_p = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{4\pi} S_u = \frac{1}{2} u(P, t) \quad (5.7)$$

$$S_v = 0 \quad (5.8)$$

Bei Rändern mit Ecken erhält man abhängig von der speziellen Geometrie andere Werte für S_u .

Nach Einsetzen der integralfreien Terme erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(P, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} p(Q, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} u(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] \right\} d\Gamma(Q) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) dV + t N_0 + \frac{\partial}{\partial t} (t M_0) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dabei ist das erste Integral als Cauchy'scher Hauptwert zu verstehen. Zusätzlich ist zu beachten, daß für Punkte außerhalb von V und Γ $u(p, t) \equiv 0$ ist.

Betrachtet man nur punktförmige Quellen, also

$$\gamma(q, t_r) = f(t) \delta(q - q_c) \quad (5.10)$$

wobei q_c die Position der Quelle angibt, wird aus dem Volumenintegral:

$$\int_V \frac{1}{r} \gamma(q, t_r) dV = \frac{1}{r_c} f(t_c) \quad (5.11)$$

mit

$$r_c = |P - q_c| \quad (5.12)$$

und

$$t_c = t - \frac{r_c}{c} \quad (5.13)$$

6. Eine Randelemente-Formulierung

Ausgangspunkt der Randelemente-Formulierung ist die Gleichung (5.9) mit verschwindenden Anfangsbedingungen und ohne Quellen im Innern:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(P, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_r) d\Gamma(Q) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r} u(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_r} \right] d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Für u und p müssen für den örtlichen und zeitlichen Verlauf Ansätze gemacht werden, damit die Integralgleichung in ein algebraisches Gleichungssystem überführt werden kann. Es werden die einfachst möglichen Ansätze gewählt:

Zeitdiskretisierung:	u	linearer Ansatz
	p	konstanter Ansatz
Ortsdiskretisierung:	u	konstanter Ansatz
	p	konstanter Ansatz

Zunächst wird der Ansatz für die Zeit in die Integralgleichung eingesetzt. Es werden die Zeitschritte $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ mit

$$t_i = i\Delta t \quad (6.2)$$

betrachtet.

Damit erhält man für die retardierte Zeit:

$$t_r \rightarrow t_{r,i} = i\Delta t - \frac{r}{c} \quad (6.3)$$

Der lineare Zeitansatz für u lautet:

$$u(Q, t_{r,i}) = \frac{t_m - t_{r,i}}{\Delta t} u^{m-1}(Q) + \frac{t_{r,i} - t_m}{\Delta t} u^m(Q) \quad ; t_{m-1} \leq t_{r,i} \leq t_m \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial u(Q, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t_{r,i}} = \frac{1}{\Delta t} [u^m(Q) - u^{m-1}(Q)] \quad (6.5)$$

Zusätzlich muß die Kausalität beachtet werden:

$$u(Q, i\Delta t - \frac{r}{c}) = 0 \quad \text{für } i\Delta t < \frac{r}{c} \quad (6.6)$$

Damit erhält man für das zweite Integral [13]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} KU^{im}(Q) d\Gamma(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{m - \Delta t - i\Delta t + \frac{r}{c}}{\Delta t} u^{m-1}(Q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i\Delta t - \frac{r}{c} - (m-1)\Delta t}{\Delta t} u^m(Q) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{rc\Delta t} [u^m(Q) - u^{m-1}(Q)] \right\} d\Gamma(Q) \quad (6.7) \end{aligned}$$

Das m wird so gewählt, daß

$$(m-1)\Delta t \leq i\Delta t - \frac{r}{c} \leq m\Delta t$$

$$\text{Für } i = 1 : \quad 0 \leq \Delta t - \frac{r}{c} \leq \Delta t \Rightarrow m = 1$$

$$\text{Für } i = 2 : \quad a) \quad 0 \leq 2\Delta t - \frac{r}{c} \leq \Delta t \Rightarrow m = 1 \quad (6.8)$$

$$b) \quad \Delta t \leq 2\Delta t - \frac{r}{c} \leq 2\Delta t \Rightarrow m = 2$$

usw.

Aus (6.6) erhält man für $i = m + n$:

$$\begin{aligned} KU^{m+n,m} &= \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{m\Delta t - (m+n)\Delta t + \frac{r}{c}}{\Delta t} u^{m-1} + \frac{(m+n)\Delta t - \frac{r}{c} - (m-1)\Delta t}{\Delta t} u^m \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{rc\Delta t} [u^m - u^{m-1}] \right\} \\ &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(n+1)u^m - nu^{m-1}] \quad (6.9) \end{aligned}$$

Z.B.:

$$\begin{aligned} i = 1, \quad m = 1 : \quad KU^{11} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} u^1 && ; \quad 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t \\ i = 2, \quad m = 1 : \quad KU^{21} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [2u^1 - u^0] && ; \quad \Delta t \leq \frac{r}{c} \leq 2\Delta t \\ m = 2 : \quad KU^{22} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} u^2 && ; \quad 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t \\ i = 3, \quad m = 1 : \quad KU^{31} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [3u^1 - 2u^0] && ; \quad 2\Delta t \leq \frac{r}{c} \leq 3\Delta t \\ m = 2 : \quad KU^{32} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [2u^2 - 1u^1] && ; \quad \Delta t \leq \frac{r}{c} \leq 2\Delta t \\ m = 3 : \quad KU^{33} &= \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} u^3 && ; \quad 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t \end{aligned} \quad (6.10)$$

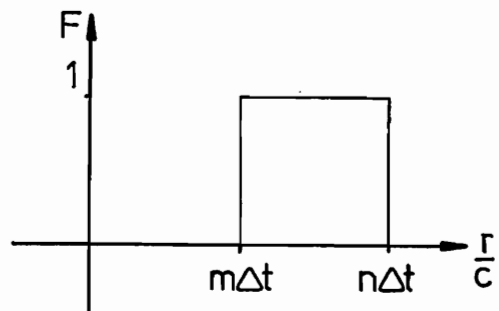
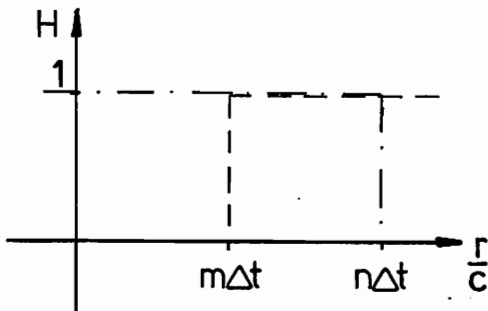
In Abhängigkeit von der retardierten Zeit werden also unterschiedliche m für den Ansatz benötigt. Das führt zu entsprechenden Fallunterscheidungen. Die Integralgleichungen für die einzelnen Zeitschritte lauten damit [13]:

$$i = 1: \quad \frac{1}{2} u^1(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r_1}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) d\Gamma \\ 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t \\ \text{sonst} \\ + 0 \end{array} \right\}$$

$$i = 2: \quad \frac{1}{2} u^2(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r_2}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) d\Gamma \\ \Delta t \leq \frac{r}{c} \leq 2\Delta t \quad (6.11) \\ \text{sonst} \\ + 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^2(Q) d\Gamma \\ 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t \\ \text{sonst} \\ + 0 \end{array} \right\}$$

⋮

Um die Fallunterscheidungen übersichtlich darzustellen, werden die einzelnen Fälle mit zwei Heaviside-Funktionen multipliziert. Dann darf man statt der Fallunterscheidung alle Integrale addieren.



$$\begin{aligned}
 F(m, n) &= H\left(\frac{r}{c} - m\Delta t\right) H\left(n\Delta t - \frac{r}{c}\right) \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{für } m\Delta t \leq \frac{r}{c} \leq n\Delta t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Damit kann man für (6.11) schreiben:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} u^1(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r_1}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) F(0, 1) d\Gamma \right\} \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{2} u^3(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r_3}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \left\{ 3 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) F(2, 3) d\Gamma \right. \\
 &\quad + 2 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^2(Q) F(1, 2) d\Gamma - 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) F(1, 2) d\Gamma \\
 &\quad \left. + 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^3(Q) F(0, 1) d\Gamma \right\} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} u^i(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r_i}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \left\{ i \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) F(i-1, i) d\Gamma \right. \\
 &\quad + (i-1) \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^2(Q) F(i-2, i-1) d\Gamma - (i-2) \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^1(Q) F(i-2, i-1) d\Gamma \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + 3 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^{i-2}(Q) F(2, 3) d\Gamma - 2 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^{i-3}(Q) F(2, 3) d\Gamma \\
 &\quad + 2 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^{i-1}(Q) F(1, 2) d\Gamma - 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^{i-2}(Q) F(1, 2) d\Gamma \\
 &\quad \left. + 1 \int_{\Gamma} \frac{r_{,n}}{r^2} u^i(Q) F(0, 1) d\Gamma \right\}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Für p wird ein zeitschrittweise konstanter Ansatz gewählt:

$$p(Q, t_{r,i}) = p^m(Q) \quad \text{für } (m-1)\Delta t - \frac{r}{c} \leq m\Delta t \quad (6.15)$$

Damit erhält man für den ersten Integranden:

$$\frac{1}{r} p(Q, t_{r,i}) = KP^{im}(Q) \quad (6.16)$$

Wie beim Ansatz für u muß man wieder Fälle in Abhängigkeit der retardierten Zeit unterscheiden:

$$\begin{aligned} i=1: \quad 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t &\Rightarrow m=1 \\ KP^{11} &= \frac{1}{r} p^1(Q) \\ i=2: \quad \Delta t \leq \frac{r}{c} \leq 2\Delta t &\Rightarrow m=1 \\ KP^{21} &= \frac{1}{r} p^1(Q) \\ 0 \leq \frac{r}{c} \leq \Delta t &\Rightarrow m=2 \\ KP^{22} &= \frac{1}{r} p^2(Q) \end{aligned} \quad (6.17)$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r,1}) d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p^1(Q) F(0,1) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r,2}) d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p^1(Q) F(1,2) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p^2(Q) F(0,1) d\Gamma \end{aligned} \quad (6.18)$$

allgemein:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(Q, t_{r,i}) d\Gamma = \sum_{j=1}^i \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p^j(Q) F(i-j, i-j+1) d\Gamma \right\} \quad (6.19)$$

Setzt man (6.19) in (6.14) ein, erhält man die zeitlich diskretisierte Integralgleichung für den i -ten Zeitschritt.

Für die Ortsdiskretisierung wird der Rand in Randelemente eingeteilt. Über die Elemente wird für u und p ein konstanter Ansatz gemacht. u und p werden im Element durch ihren Wert im Elementmittelpunkt (Knoten) angenähert. Die Lösung wird also in so vielen Punkten (Quellpunkten) gesucht, wie man Randelemente wählt. Man erhält dadurch ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntes u bzw. p .

Der erste Integrand:

$$\frac{1}{r} p^m(Q) = \frac{1}{r_{pq}} p_q^m \quad (6.20)$$

mit

$$r_{pq} = |\vec{x}(P_p) - \vec{x}(Q_q)| \quad (6.21)$$

Der zweite Integrand:

$$\frac{r_{,n}}{r^2} u^m(Q) = \frac{\partial r_{pq}}{\partial n_q} \frac{1}{r_{pq}^2} u_q^m \quad (6.22)$$

Damit erhält man aus (6.13):

$$\frac{1}{2} u_p^1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_q} \frac{1}{r_{pq}} F(0,1) d\Gamma p_q^1 + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_q} \frac{r_{,n}}{r_{pq}^2} F(0,1) d\Gamma u_q^1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_p^2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Gamma_q} \frac{1}{r_{pq}} F(1,2) d\Gamma p_q^1 \right. &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ 2 \int_{\Gamma_q} \frac{r_{,n}}{r_{pq}^2} F(1,2) d\Gamma u_q^1 \right. \\ &+ \left. \int_{\Gamma_q} \frac{1}{r_{pq}} F(0,1) d\Gamma p_q^2 \right\} &+ \left. 1 \int_{\Gamma_q} \frac{r_{,n}}{r_{pq}} F(0,1) d\Gamma u_q^2 \right\} \quad (6.23) \end{aligned}$$

⋮
⋮

also:

$$\frac{1}{2} u_p^i = U_{pq}^{im} p_q^m + \bar{P}_{pq}^{im} u_q^m \quad (6.28)$$

oder umgeformt:

$$\left(\frac{1}{2} \delta_{pq}^{im} - \bar{P}_{pq}^{im}\right) u_q^m = U_{pq}^{im} p_q^m \quad (6.29)$$

$$P_{pq}^{im} u_q^m = U_{pq}^{im} p_q^m \quad (6.30)$$

Man sieht, daß:

$$U_{pq}^{im} = U_{pq}^{i+k, m+k} \quad (6.31)$$

und

$$P_{pq}^{im} = P_{pq}^{i+k, m+k} \quad (6.32)$$

,was aus der Eigenschaft der Zeitverschiebung der Fundamentallösung folgt. Deshalb brauchen nur die ersten Spalten U_{pq}^{i1} und P_{pq}^{i1} explizit berechnet werden.

Bei der P-Matrix ist der zweite Summand der i -ten Spalte schon aus der $(i-1)$ -ten Spalte bekannt, nur der erste Summand muß berechnet werden. Man erhält eine Rekursionsformel für P_{pq}^{i1} :

$$P_{pq}^{i1} = i IP F(i-1, i) - (i-2) P_{pq}^{i-1, 1} \quad (6.33)$$

Wenn (auch bei unendlich ausgedehnten Gebieten) der zu diskretisierende Rand endliche Abmessungen hat, existiert ein Abstand

$$R = \max_{p, q} (r_{pq}) \quad (6.34)$$

Damit erhält man eine maximal mögliche retardierte Zeit und eine zugehörige Zeitschrittzahl I . Ab dem $(I+1)$ -ten Zeitschritt liefert $IP F(i, i+1)$ keinen Beitrag mehr, die U -Blockmatrizen der ersten Spalte sind ab dann gleich Null, ab dem $(I+1)$ -ten Zeitschritt auch die P -Matrizen.

$$P_{pq}^{k1} \equiv 0 \quad \text{falls } k \geq I+2 \quad (6.36)$$

$$U_{pq}^{k2} \equiv 0 \quad \text{falls } k \geq I+1 \quad (6.36)$$

Das Gleichungssystem hat also folgende Bandstruktur:

$$\begin{bmatrix}
 P_{pq}^{11} & 0 & 0 & \dots & \dots \\
 P_{pq}^{21} & P_{pq}^{11} & 0 & \dots & \dots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\
 P_{pq}^{I+1,1} & \ddots & P_{pq}^{21} & P_{pq}^{11} & \dots \\
 P_{pq}^{I+2,1} & P_{pq}^{I+1,1} & \ddots & & P_{pq}^{21} & \ddots \\
 0 & P_{pq}^{I+2,1} & P_{pq}^{I+1,1} & \ddots & & \ddots \\
 0 & 0 & P_{pq}^{I+2,1} & \ddots & & \ddots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_q^1 \\
 u_q^2 \\
 u_q^3 \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 U_{pq}^{11} & 0 & 0 & \dots & \dots \\
 U_{pq}^{21} & U_{pq}^{11} & 0 & \dots & \dots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\
 U_{pq}^{I+1,1} & \ddots & U_{pq}^{21} & U_{pq}^{11} & \dots \\
 0 & U_{pq}^{I+1,1} & \ddots & P_{pq}^{21} & \ddots \\
 0 & 0 & U_{pq}^{I+1,1} & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_q^1 \\
 p_q^2 \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \quad (6.37)$$

Bei gemischten Randbedingungen muß noch umsortiert werden. Wenn im k -ten Element p_k^i gegeben ist, dann werden die k -ten Spalten der Einflußmatrizen mit Vorzeichenwechsel getauscht. Der Aufbau des Gleichungssystems bleibt dabei erhalten. Nach dem Tausch stehen auf der rechten Seite nur bekannte Größen.

Das Gleichungssystem kann dann zeitschrittweise gelöst werden. Dabei muß nur die Matrix P_{pq}^{11} invertiert werden.

1. Zeitschritt:

$$P_{pq}^{11} u_q^1 = U_{pq}^{11} p_q^1 \quad \Rightarrow \quad u_q^1 = (P_{pq}^{11})^{-1} U_{pq}^{11} p_q^1 \quad (6.38)$$

2. Zeitschritt:

$$P_{pq}^{21} u_q^1 + P_{pq}^{11} u_q^2 = U_{pq}^{21} p_q^1 + U_{pq}^{11} p_q^2 \quad (6.39)$$

u_q^1 ist schon bekannt

$$u_q^2 = (P_{pq}^{11})^{-1} \{ U_{pq}^{21} p_q^1 + U_{pq}^{11} p_q^2 - P_{pq}^{21} u_q^1 \} \quad (6.40)$$

n-ter Zeitschritt:

$$u_q^n = (P_{pq}^{11})^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n U_{pq}^{n+1-k,1} p_q^k - \sum_{k=1}^{n-1} P_{pq}^{n+1-k,1} u_q^k \right\} \quad (6.41)$$

Wenn nicht während der gesamten Zeit erregt wird, ist p_q^k nur in den ersten Zeitschritten von Null verschieden. Wenn

$$p_q^k \equiv 0 \quad \text{für } k > e \quad (6.42)$$

kann man die obere Grenze der ersten Summe n ersetzen durch $\min(n, e)$. Bei Impulserregung ist $e = 1$.

Mit den Gleichungen (6.35) und (6.36) kann die Anzahl der Multiplikationen weiter reduziert werden, indem die unteren Summengrenzen vergrößert werden. Damit ist die günstigste Lösungsformel für den n -ten Zeitschritt:

$$u_q^n = (P_{pq}^{11})^{-1} \left\{ \sum_{k=I+1}^{\min(n,e)} U_{pq}^{n+1-k,1} p_q^k - \sum_{k=I}^{n-1} P_{pq}^{n+1-k,1} u_q^k \right\} \quad (6.43)$$

Wenn für einen Zeitschritt die Lösung auf dem Rand bestimmt ist, kann entsprechend der Gleichung (4.22) der dynamische Druck u für Punkte im Innern des Gebiets berechnet werden. Die Algebraisierung erfolgt wie bei der Randintegralgleichung. Man erhält eine Gleichung analog zu (6.28):

$$u_{(p, \text{Innen})}^i = U_{(p, \text{Innen})(q, \text{Rand})}^{im} p_{(q, \text{Rand})}^m + \bar{P}_{(p, \text{Innen})(q, \text{Rand})}^{im} u_{(q, \text{Rand})}^m \quad (6.44)$$

Die Innenpunktlösung erfordert also als wesentlichen Rechenaufwand nur das Aufstellen der neuen Einflußmatrizen. Es muß kein neues Gleichungssystem gelöst werden.

7. Die numerische Lösung der Randintegralgleichung

Das im letzten Abschnitt vorgestellte Lösungsverfahren ist Grundlage des FORTRAN-Programms FLUID3D. Es steht im Mittelpunkt eines Programmsystems, das außerdem Programme zur Vor- und Nachbereitung von Daten enthält (Bild 7.1).

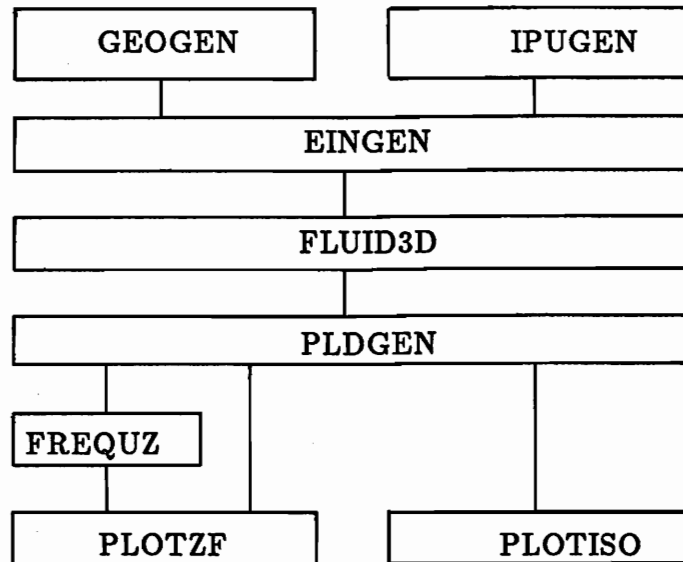


Bild 7.1

GEOGEN : generiert die Randgeometrie

IPUGEN : generiert Innenpunkte

EINGEN : generiert die Eingabedatei

FLUID3D : Lösung der Wellengleichung

PLDGEN : generiert Daten für die Plotprogramme

FREQUZ : Fouriertransformation der Zeitlösung für einzelne Elemente

PLOTZF : Plots von Zeit- und Frequenzverläufen

PLOTISO : Plots von Isobaren

Die Programme laufen auf der CDC Cyber 855 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum unter dem Betriebssystem NOS/VE Version 1.2.3 und dem FORTRAN-Compiler Version V1.4. Für die Matrizeninvertierung, Matrizenmultiplikation und Fouriertransformation werden Unterprogramme der NAG-FORTRAN-Library Mark 11 benutzt. Die Plotprogramme verwenden Unterprogramme des NAG-FORTRAN-Graphical-Supplement Mark 2.

Der FORTRAN-Compiler ermöglicht über den genormten Sprachumfang hinaus die Verwaltung von Direct-Access-Dateien. Diese werden z.B. für die Speicherung der Einflußmatrizen benutzt. Das Programm FLUID3D macht außerdem von der virtuellen Speicherverwaltung des Betriebssystems Gebrauch.

Bild 7.2 zeigt die Struktur des Programms FLUID3D.

Programm FLUID3D	
Eröffnen des Hintergrundspeichers	KANAUF
Einlesen der Problemdatei	EINLES
Berechnen der Normalenvektoren	NORMAL
Ausgeben der Problemdatei	AUSGEB
Sortieren der Geometrie	ORIENT
Bereitstellen der Gauß-Punkte	GEWKO3, GEWKO4
Lösung für den ersten Zeitschritt, Rand	ERSTZS
Innenpunkte ?	
ja	nein
Lösung für den ersten Zeitschritt,Innen ERSTIP	
Schleife über alle Zeitschritte	
Lösung für den i-ten Zeitschritt,Rand LOESZS	
Innenpunkte ?	
ja	nein
Lösung für den i-ten Zeitschritt,Innen LOESIP	
Ausgeben der Einflußmatrizen	MATDRU
Rücksortieren der Lösung	RUETAU
Schließen des Hintergrundspeichers	KANZU

Bild 7.2

Die Eingabe, die von FLUID3D im Unterprogramm EINLES benötigt wird, wird interaktiv mit dem Programm EINGEN zusammengestellt. EINGEN verwendet die Randgeometrie aus GEOGEN und die Innenpunktkoordinaten aus IPUGEN.

Der Faktor

$$\beta = \frac{c \Delta t}{l_j} \quad (7.1)$$

c : Schallgeschwindigkeit

l_j : charakteristische Länge

gibt das Verhältnis zwischen örtlicher und zeitlicher Diskretisierung an. c, β, l_j werden eingegeben. Dadurch ist Δt festgelegt. Die charakteristische Länge l_j wird als Kantenlänge eines Elements gewählt. Der Faktor β kann großen Einfluß auf die Stabilität der Lösung haben. Für $\beta = 1.0$ und $l_j =$ eine Elementlänge breitet sich eine Welle in einem Zeitschritt um eine Elementlänge aus.

Die Diskretisierung des Randes erfolgt mit Dreiecks (GEO=3)- und Viereckselementen (GEO=4, GEO=5). Für Viereckselemente, die rechtwinklig sind und bei denen eine Kante parallel zu einer Koordinatenrichtung ist (GEO=4), werden die singulären Integrale analytisch bestimmt. Ansonsten erfolgt die Integration numerisch.

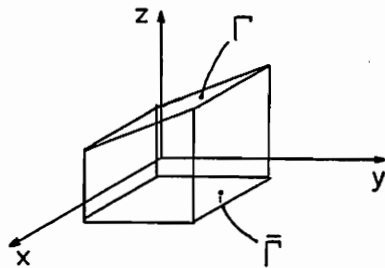


Bild 7.3

Da die Elemente eben sind, läßt sich die Ebenengleichung für Γ_q angeben, z.B.:

$$\Gamma_q : z = ax + by + c \quad (7.2)$$

Damit kann man das Oberflächenintegral in ein ebenes Gebietsintegral umwandeln:

$$\int_{\Gamma_q} f(x, y, z) d\Gamma = \int_{\bar{\Gamma}} f(x, y, ax + by + c) \sqrt{1 + a^2 + b^2} d\bar{\Gamma} \quad (7.3)$$

$\bar{\Gamma}$ ist bei GEO=4 ein achsenparalleles Rechteck. Bei allgemeinen Vierecken (GEO=5) und Dreiecken erhält man auch $\bar{\Gamma}$ schiefwinklig.

Das singuläre Integral für GEO=4 kann mit

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma = d_1 \ln \left| \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} + d_2} \right| + d_2 \ln \left| \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} + d_1} \right| \quad (7.4)$$

mit $d_{1,2}$: Kantenlängen des Rechtecks

berechnet werden.

Die numerische Integration erfolgt mit Gauß'schen Integrationsformeln.

GEO=4:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy &= \frac{y_2 - y_1}{2} \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) d\xi d\eta \\ &= \frac{y_2 - y_1}{2} \frac{x_2 - x_1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x, y) w_{i_n} w_{j_n} \end{aligned} \quad (7.5)$$

mit $x = \frac{x_2 - x_1}{2} \xi + \frac{x_2 + x_1}{2}$
 $y = \frac{y_2 - y_1}{2} \eta + \frac{y_2 + y_1}{2}$

mit den Integrationspunkten ξ_{i_n} , η_{i_n} und den Wichtungskoeffizienten w_{i_n} [9].

Die Integrationsordnung n kann zu 2, 4, 6 oder 8 gewählt werden. Es werden also zwischen 4 und 64 Funktionswerte berechnet. Die maximale Integrationsordnung wird vorgegeben, für große r wird die Integrationsordnung automatisch reduziert.

GEO=3:

Die Integration erfolgt in natürlichen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3

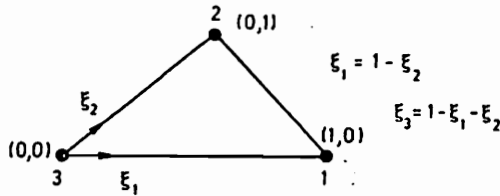


Bild 7.4

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right\} d\xi_2 = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}) \quad (7.6)$$

n kann gewählt werden als $n = 1, 2, 4, 7$ oder 21 [10],[11].

Die singulären Integrale werden unabhängig von der gewählten Integrationsordnung mit $n = 21$ Gaußpunkten ausgewertet, da bei einigen anderen Integrationsordnungen auch der Funktionswert im Elementmittelpunkt ausgewertet wird.

GEO=5:

Die Elemente werden für die Integration in zwei Dreiecke zerlegt. Diese werden wie bei GEO=3 integriert. Der Wert des Integrals über das Viereck ist dann gleich der Summe der Integrale der Dreiecke.

Der Lösungsalgorithmus (siehe (6.43)) ist rekursiv, d.h. um die Lösung für einen Zeitschritt zu bestimmen, werden die Lösungen aller vorhergehenden Zeitschritte benutzt. Bei unzureichender Genauigkeit in den ersten Zeitschritten besteht deshalb die Gefahr, daß die numerische Lösung instabil wird.

Die numerische Integration und die Invertierung von P_{pq}^{11} müssen deshalb mit großer Sorgfalt durchgeführt werden. Die numerische Integration ist sehr zeitaufwendig. Es muß jedoch nur in den ersten Zeitschritten integriert werden. In den Zeitschritten, bei denen $P_{pq}^{n1} \equiv 0, U_{pq}^{n1} \equiv 0$ wird der Integrierer nicht mehr aufgerufen, sondern nur noch die Matrizenmultiplikation durchgeführt. Die Matrizenoperationen benötigen wesentlich weniger Rechenzeit als die Integration. Deshalb wird bei vorgegebener maximaler CPU-Zeit pro Rechenlauf die mögliche Problemgröße wesentlich durch die Integrationszeit bestimmt. Ca. 60%-70% der CPU-Zeit wurde bei den Beispielrechnungen für die Integration verbraucht.

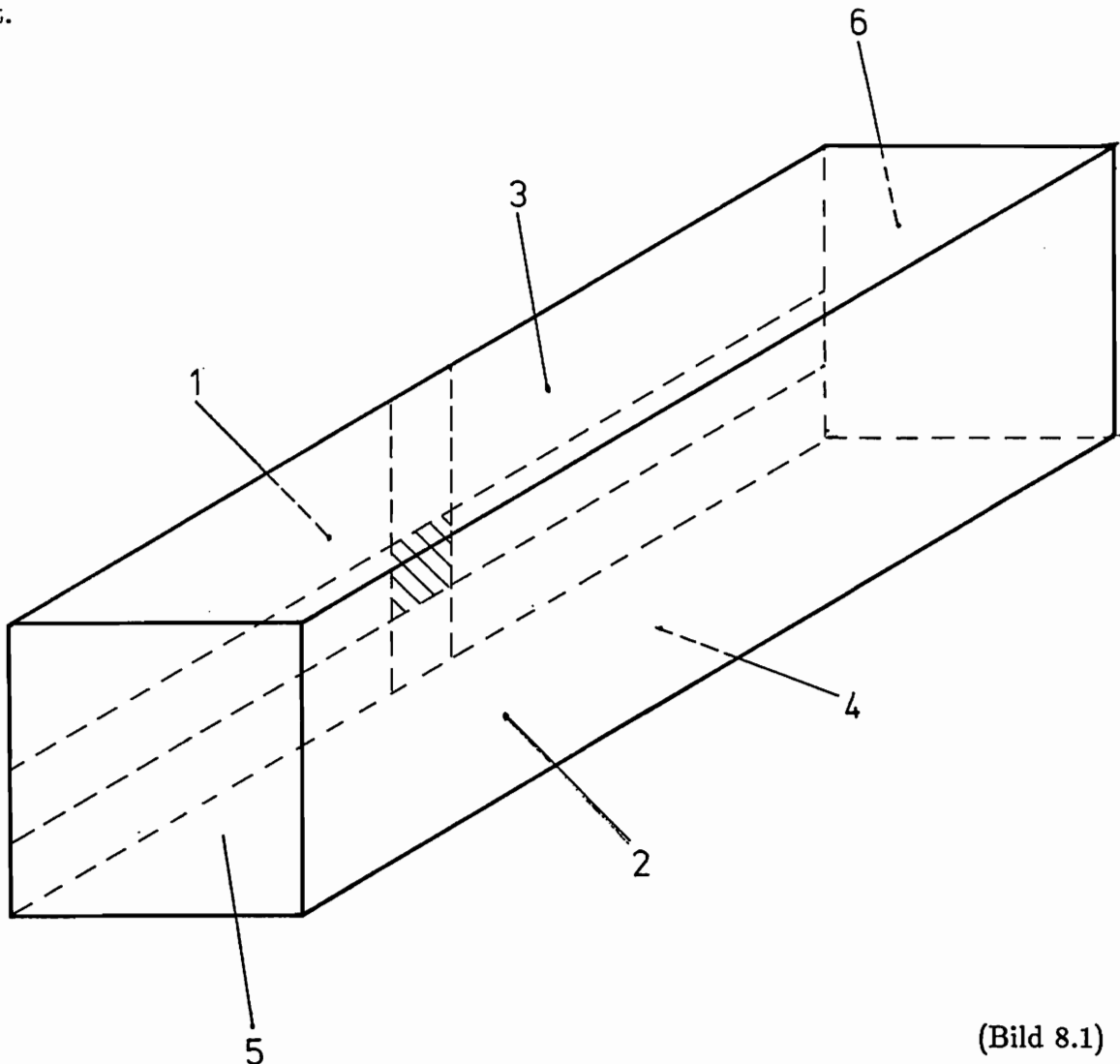
Die Ergebnisse können zeitschrittweise ausgegeben werden und stehen außerdem einschließlich aller Einflußmatrizen in Direct-Access-Dateien für die Ergebnisaufbereitung zur Verfügung. Das Programm PLDGEN verwendet diese Direct-Access-Dateien, um daraus Dateien mit zeitlichen Druckverläufen einzelner Elemente oder Druckfelder aus Innenpunktsdrücken zu erstellen. Diese Informationen können mit den Programmen PLOTZF und PLOTISO graphisch dargestellt werden.

8. Beispiele

8.1 Vergleich mit einem zweidimensionalen Programm

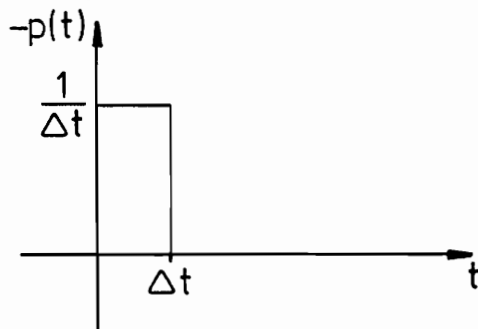
In Gebieten, bei denen die Ausdehnung in einer Dimension (z -Richtung) wesentlich größer ist, als in den beiden anderen Richtungen (x - und y -Richtung), stellt sich im mittleren Bereich der langen Ausdehnung solange ein zweidimensionales Schallfeld ein, bis der Einfluß der Reflexion sich bemerkbar macht, und sofern die Randbedingungen unabhängig von z sind.

Als Beispiel dafür wird ein Becken mit der Ausdehnung $1\text{m} \times 1\text{m} \times 13\text{m}$ (Bild 8.1) betrachtet.



(Bild 8.1)

Der Rand ist mit Viereckselementen der Kantenlänge 0.25m diskretisiert. Insgesamt werden also 240 Elemente benutzt. Rand 3 ist eine freie Oberfläche, d.h. dort ist der Druck vorgegeben. Die übrigen Ränder sind schallharte Wände. Der Rand 1 wird im ersten Zeitschritt mit einem Einheitsimpuls gegen die Normalenrichtung erregt (Bild 8.2).



(Bild 8.2)

Die Randbedingungen lauten also:

Rand 1:

$$p(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta t} & \text{im ersten Zeitschritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

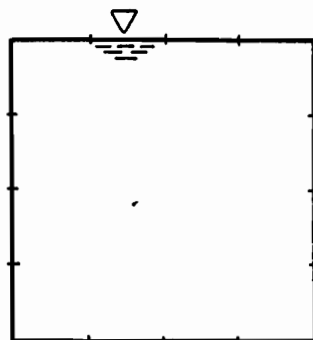
Ränder 2,4,5,6:

$$p = 0 \quad (8.1)$$

Rand 3:

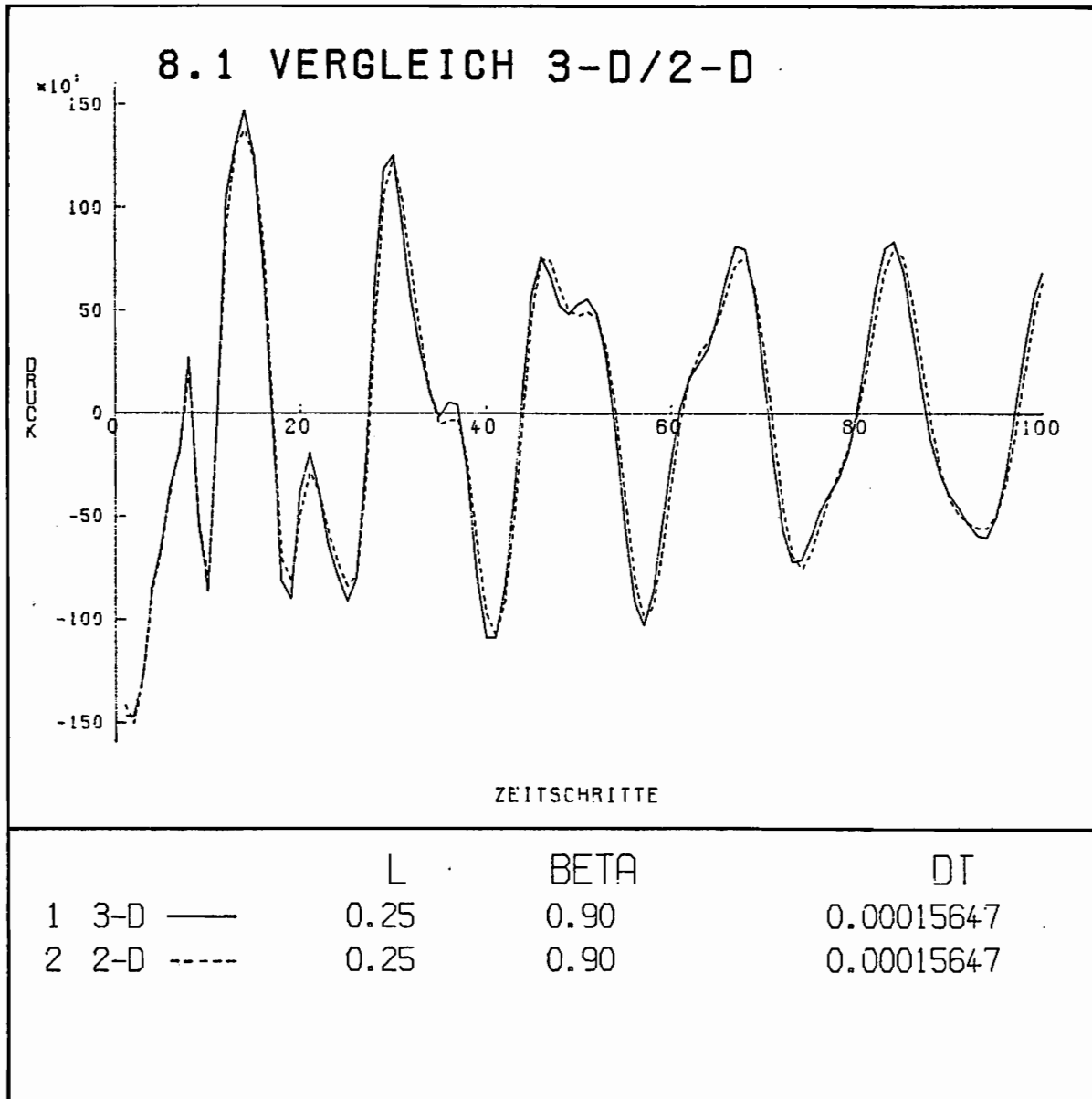
$$u = 0 \quad \text{freie Oberfläche}$$

Bild 8.4 zeigt den Druckverlauf im Mittelpunkt des erregten Randes. Der Vergleich wurde mit dem Programm FIBEM [12] mit dem entsprechenden zweidimensionalen Gebiet (Bild 8.3) berechnet.



(Bild 8.3)

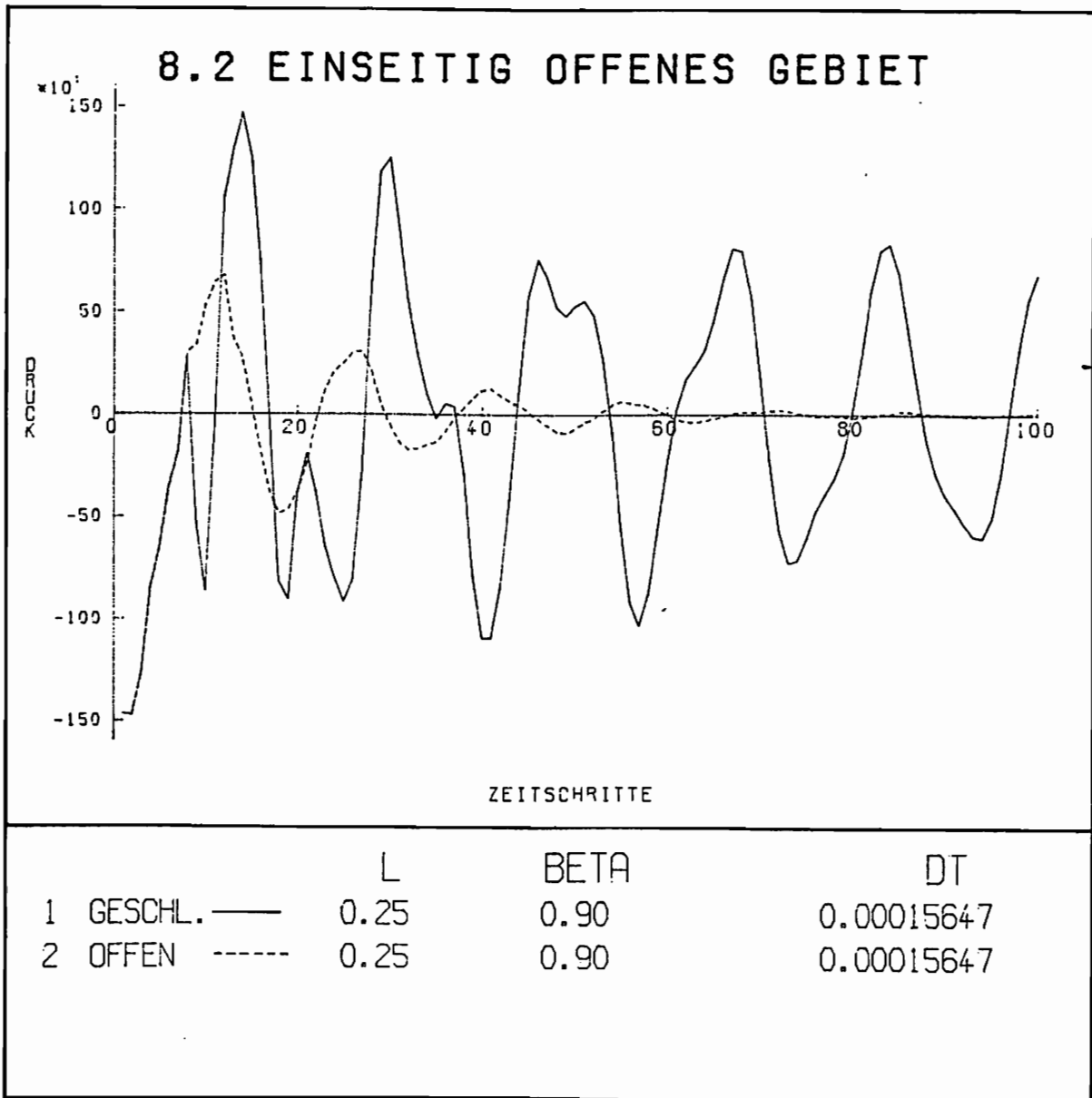
Man erkennt die gute Übereinstimmung während der ersten Zeitschritte. Anschließend macht sich die Reflexion an den Rändern 5 und 6 bemerkbar, die mit der zweidimensionalen Rechnung (gestrichelt) nicht erfaßt werden kann.



(Bild 8.4)

8.2 Einseitig offenes Gebiet

Betrachtet wird wieder das Gebiet aus Bild 8.1. Der Rand 2 wird jedoch weggelassen, so daß dort keine Reflexion stattfindet, das Becken also offen ist. Der Rand 1 wird im ersten Zeitschritt impulsförmig belastet. Die durchgezogene Kurve in Bild 8.5 ist das Ergebnis aus 8.1. Die gestrichelte Kurve zeigt den Druckverlauf des entsprechenden Elements beim offenen Gebiet. Die Kurven stimmen bis zum 8. Zeitschritt überein. Das ist die Zeit, nach der in Beispiel 8.1 die reflektierte Welle wieder den Rand 1 erreicht. Danach klingt die gestrichelte Kurve schnell ab, da die Energie über den offenen Rand ins Unendliche abgegeben wird.

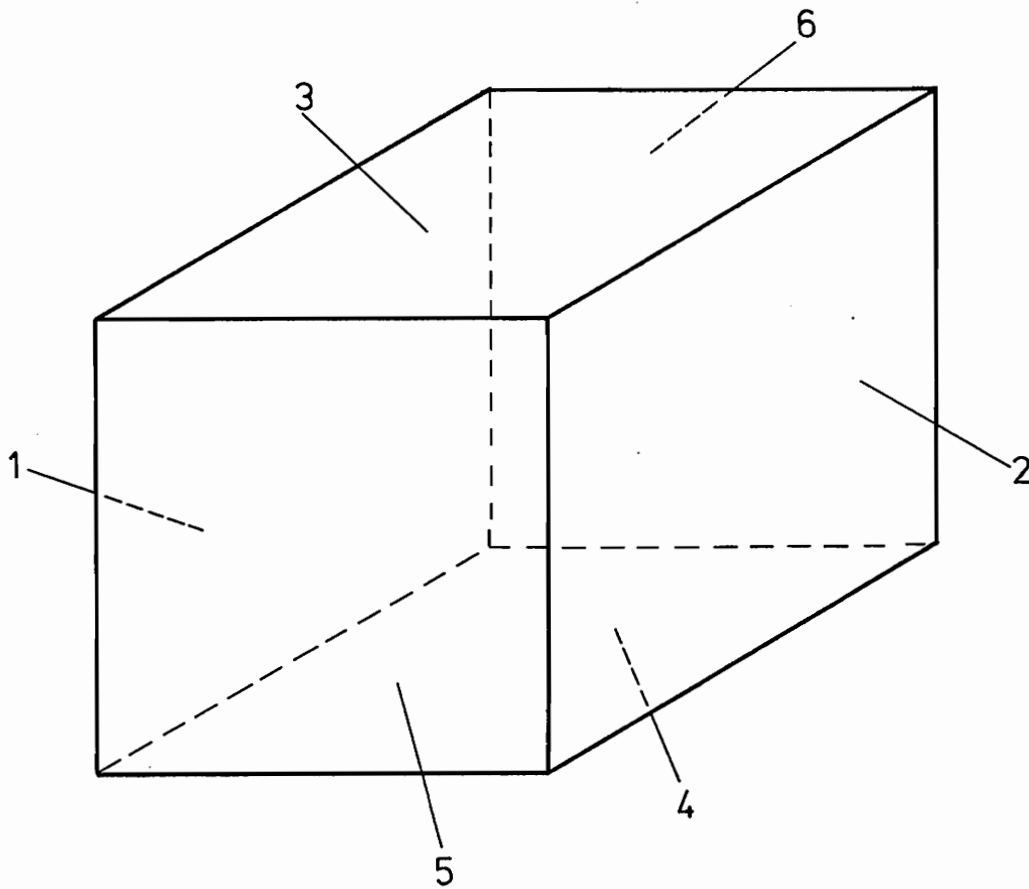


(Bild 8.5)

8.3 Einfluß der Elementanzahl

Die Wahl der Anzahl der Randelemente ist wesentlich bei der Diskretisierung eines Problems. Die Anzahl der Elemente bestimmt die Größe der Einflußmatrizen und damit den Speicherbedarf und die Rechenzeit, die sich bei feinerer Diskretisierung wesentlich erhöhen. Andererseits erhofft man sich von einer feineren Diskretisierung eine höhere Genauigkeit der Ergebnisse.

Der Einfluß der Elementanzahl wird am Beispiel eines Würfels mit der Kantenlänge 1m gezeigt. Die Diskretisierung erfolgt mit Rechteckelementen (GEO=4) (Bild 8.6).



(Bild 8.6)

Rand 1 wird wieder impulsbelastet, Rand 3 ist eine freie Oberfläche (vgl. 8.1). Bei konstantem β verringert sich die Zeitschrittlänge Δt mit fallender Bezugslänge l , bzw. mit steigender Elementanzahl. Damit vergrößert sich auch die Anzahl der Zeitschritte, in denen die Einflußmatrizen von Null verschieden sind.

Betrachtet werden drei Diskretisierungen:

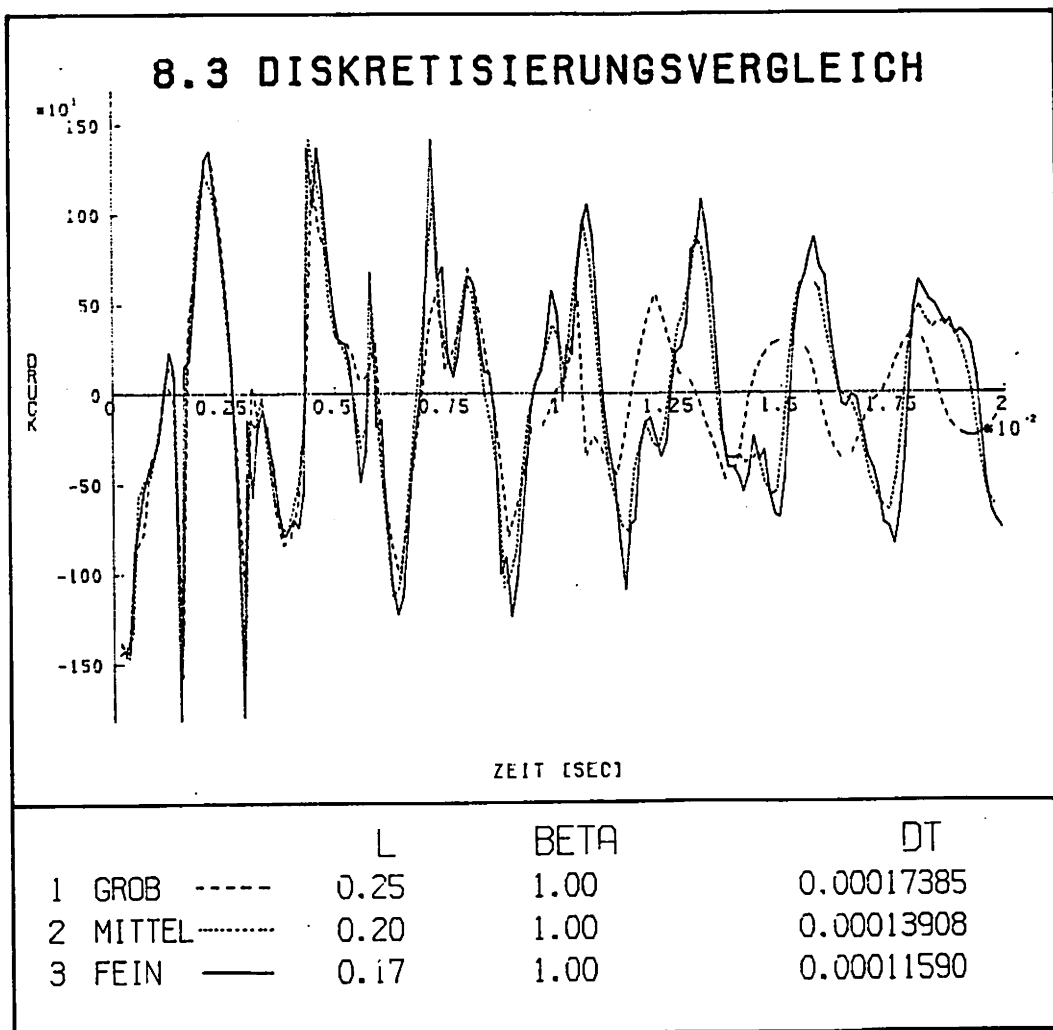
l_j	Elementzahl	CPU-Zeit[sec]
0.250m	96	109
0.200m	150	411
0.167m	216	577

Die CPU-Zeit bezieht sich auf 200 Zeitschritte und die Berechnung des Drucks im Mittelpunkt der erregten Wand.

Schallgeschwindigkeit : $c=1438 \frac{m}{s}$

Diskretisierungsverhältnis : $\beta=1.0$

Bild 8.7 zeigt den dynamischen Druck im Mittelpunkt der erregten Wand. Man erkennt, daß die Lösung der groben Diskretisierung am stärksten abklingt. Da die Wellenenergie im System erhalten bleiben muß, sollte sich nach dem Einschwingvorgang eine stationäre Bewegung einstellen. Dies wird von der feineren Diskretisierung besser wiedergegeben. Die ersten beiden Reflexionen der Welle nach $t = 0.0013908s$ bzw. nach $t = 0.0027816s$ bewirken bei der feinen Diskretisierung die größte Druckamplitude.



(Bild 8.7)

8.4 Einfluß des Diskretisierungsverhältnisses β

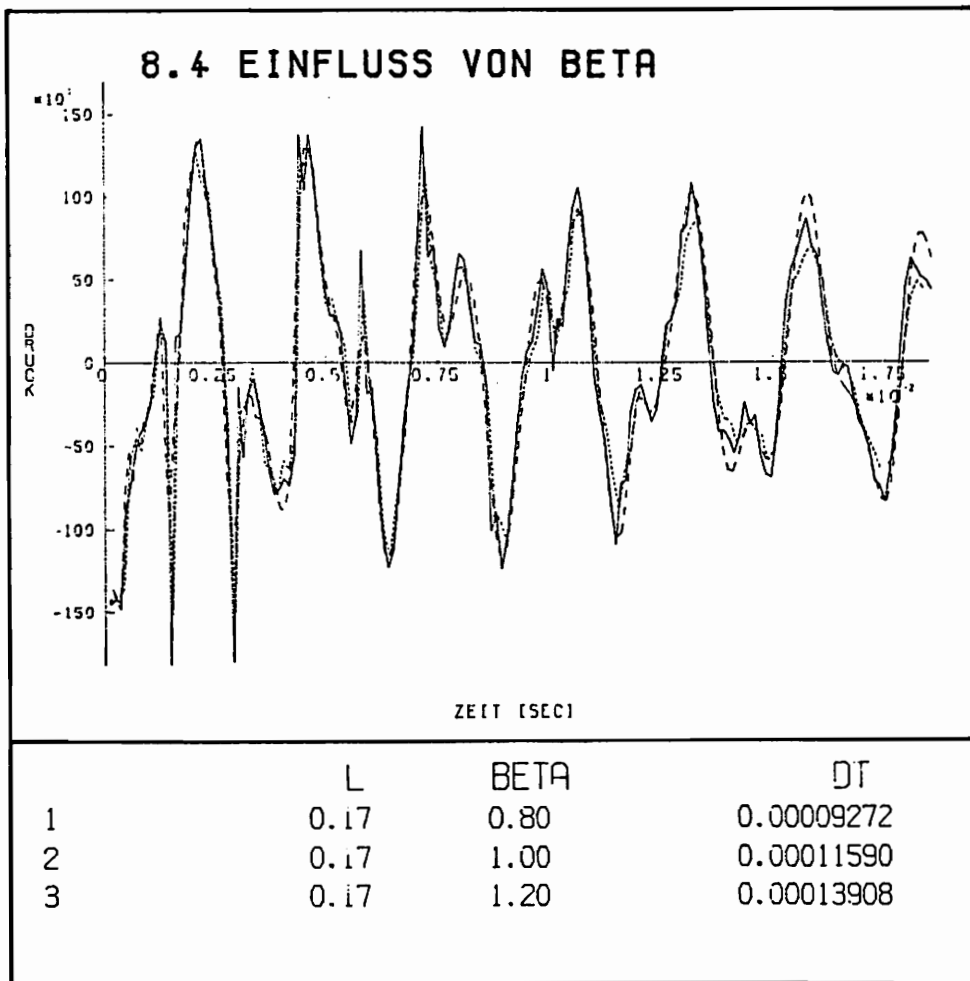
Der Parameter

$$\beta = \frac{c \Delta t}{l_j} \tag{8.2}$$

steuert das Verhältnis zwischen zeitlicher und örtlicher Diskretisierung. Bei festen c und l_j vergrößert sich mit β auch Δt . Bei $\beta = 1.0$ breitet sich eine Welle in einem Zeitschritt gerade um die Bezugslänge l_j aus.

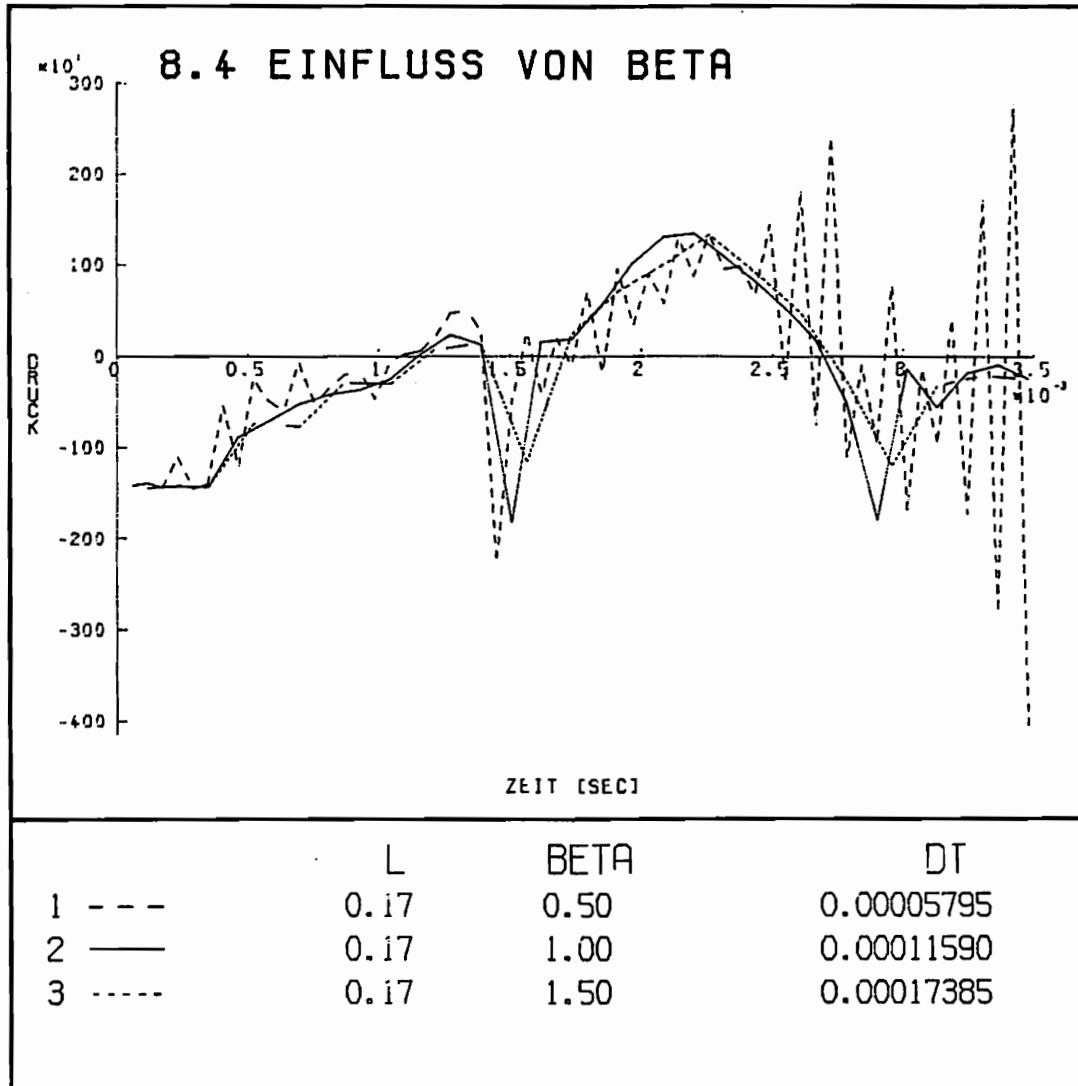
Betrachtet wird der Würfel nach Bild 8.6 mit 216 Elementen und den Randbedingungen (8.1). Der Druckverlauf des Mittelpunkts des Randes 1 ist für verschiedene β in den Bildern 8.8 und 8.9 dargestellt.

Bei $\beta = 1.0$ erhält man nach 12 bzw. 24 Zeitschritten ausgeprägte Druckspitzen, da die reflektierte Wellenfront genau in diesen Zeitpunkten den betrachteten Punkt erreicht. Bei anderen β liegt die Reflexion zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten.



(Bild 8.8)

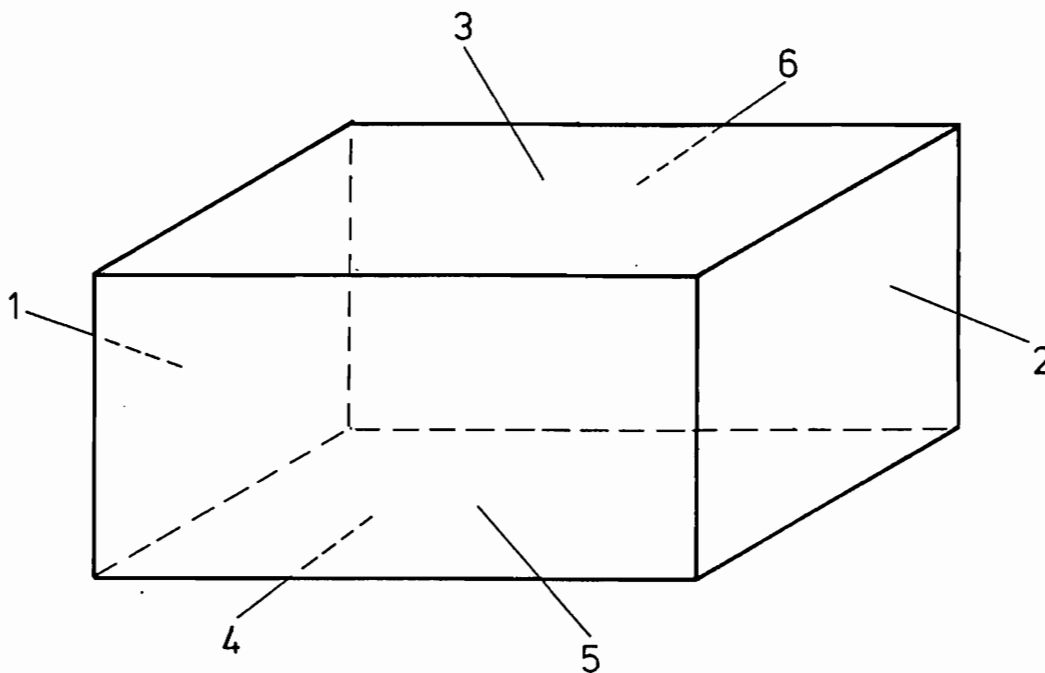
Bild 8.8 zeigt, daß man bei der Wahl von $\beta \approx 1$ eine stabile Lösung erhält. Bild 8.9 zeigt lösungen für β 's, die stärker von 1 abweichen. Bei $\beta = 0.5$ sind die singulären Integrale numerisch ausgewertet.



(Bild 8.9)

8.5 Wellenausbreitung im Innern eines Gebietes

Bisher wurde der Druckverlauf von Punkten auf dem Rand eines Gebietes betrachtet. Mit der Gleichung (6.44) wird in einer Nachlaufrechnung der Druck für beliebige Innenpunkte berechnet. Um die Ausbreitung einer Welle im Innern verfolgen zu können, wird ein gleichmäßiges Innenpunktsgitter betrachtet. In das rechteckige Gebiet (1m x 1m x 2m, Bild 8.10) wird in horizontaler und vertikaler Richtung ein Gitter mit je 21 x 11 Punkten gelegt.

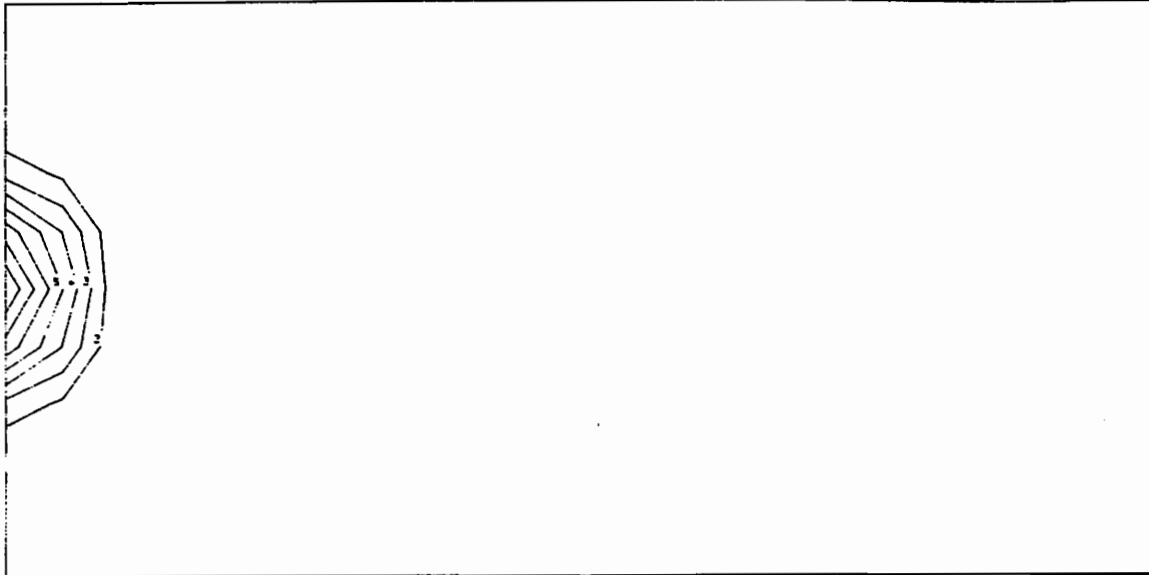


(Bild 8.10)

Rand 3 ist eine freie Oberfläche. Auf den anderen Rändern ist $p = 0$ vorgegeben, mit Ausnahme des mittleren Elements des ersten Randes, das impulserregt wird. In der Horizontalrichtung erwartet man eine symmetrische Ausbreitung mit Reflexion an den Rändern 5 und 6. Der Druckverlauf im Vertikalschnitt wird unsymmetrisch, da nur am Rand 4 Reflexion stattfindet. Solange die Welle noch nicht die freie Oberfläche bzw. reflektierende Wände erreicht hat, sind Horizontal- und Vertikalschnitt identisch. Ähnliche Ergebnisse findet man bei Dohner [14].

1. Zeitschritt

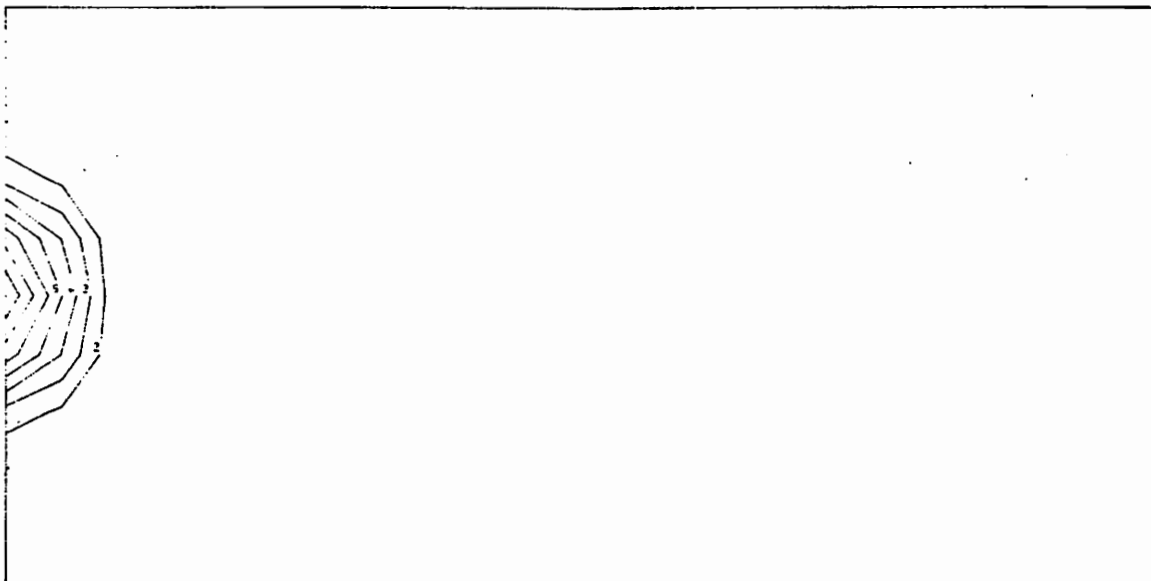
Horizontalschnitt



CONTOUR KEY	
1	0.0000
2	-45.0000
3	-90.0000
4	-135.0000
5	-180.0000
6	-225.0000
7	-270.0000
8	-315.0000

(Bild 8.11a)

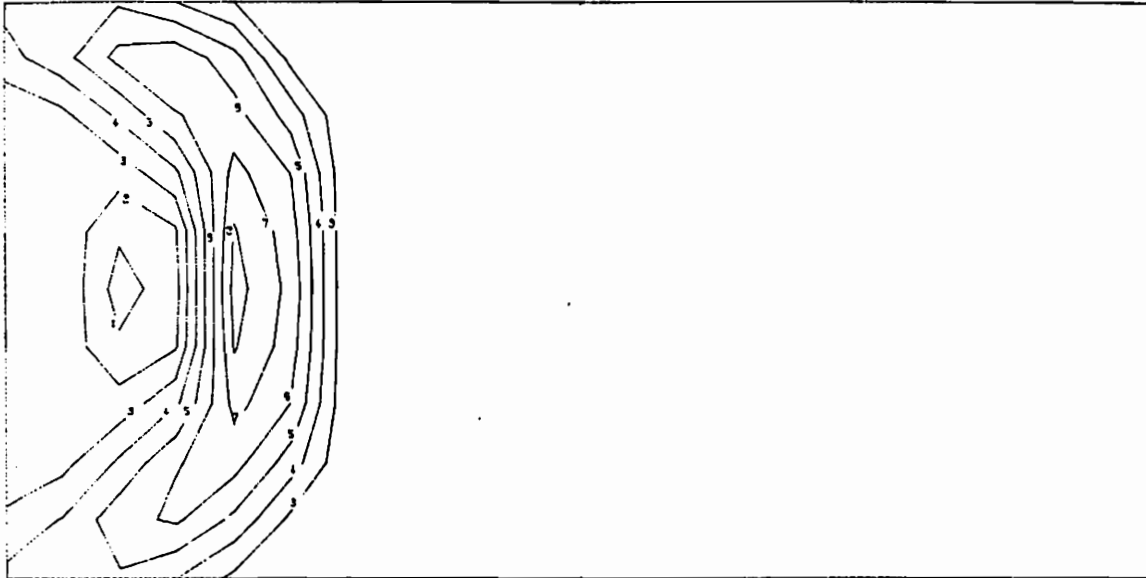
Vertikalschnitt



(Bild 8.11b)

3. Zeitschritt

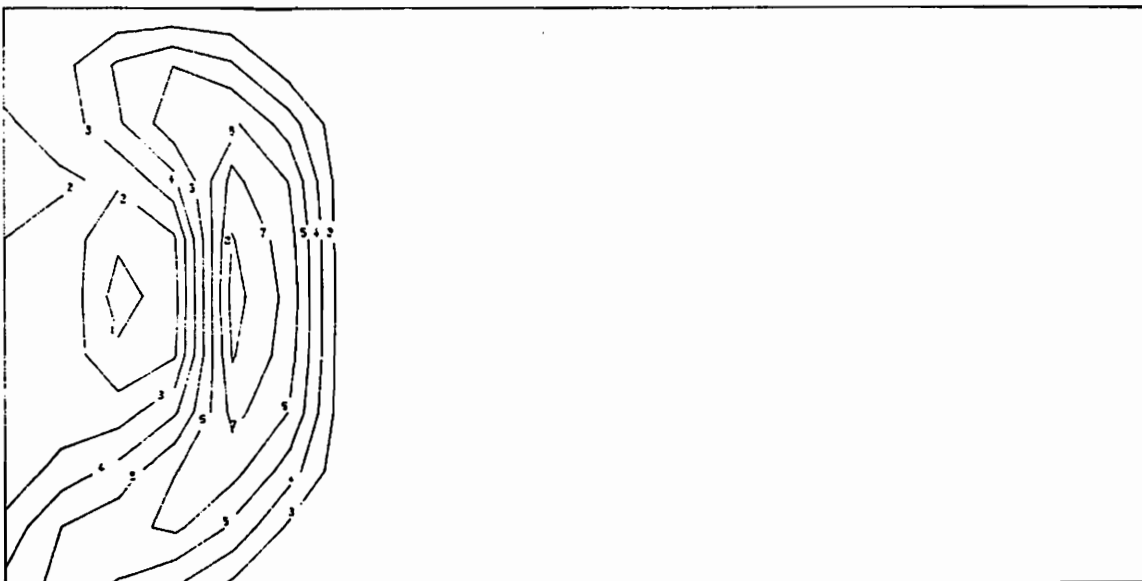
Horizontalschnitt



CONTOUR KEY	
1	20.0000
2	0.0000
3	-20.0000
4	-40.0000
5	-60.0000
6	-80.0000
7	-100.0000
8	-120.0000

(Bild 8.12a)

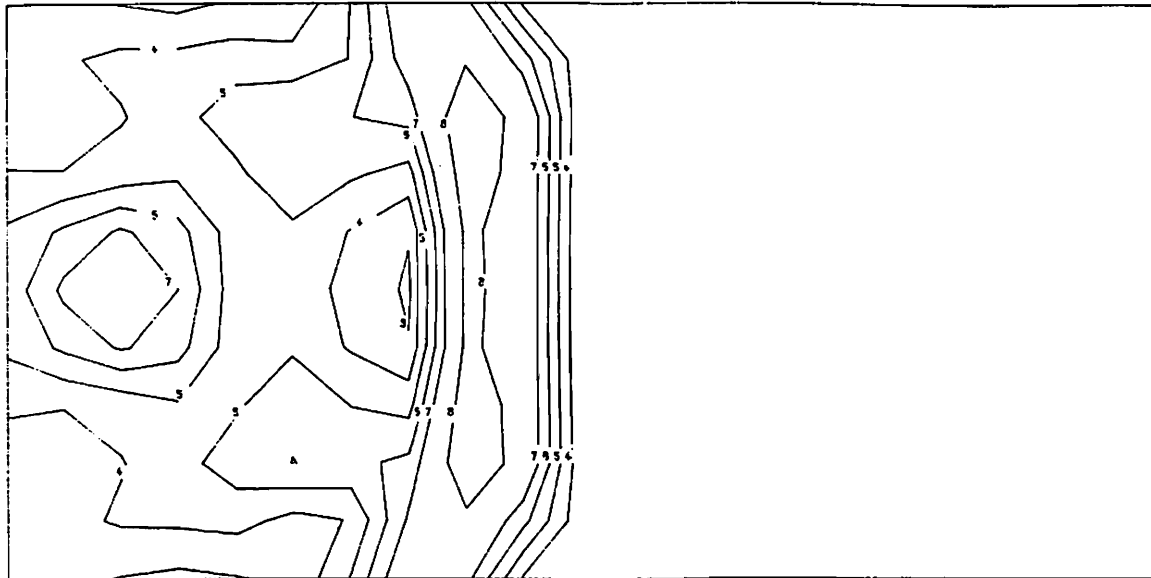
Vertikalschnitt



(Bild 8.12b)

5. Zeitschritt

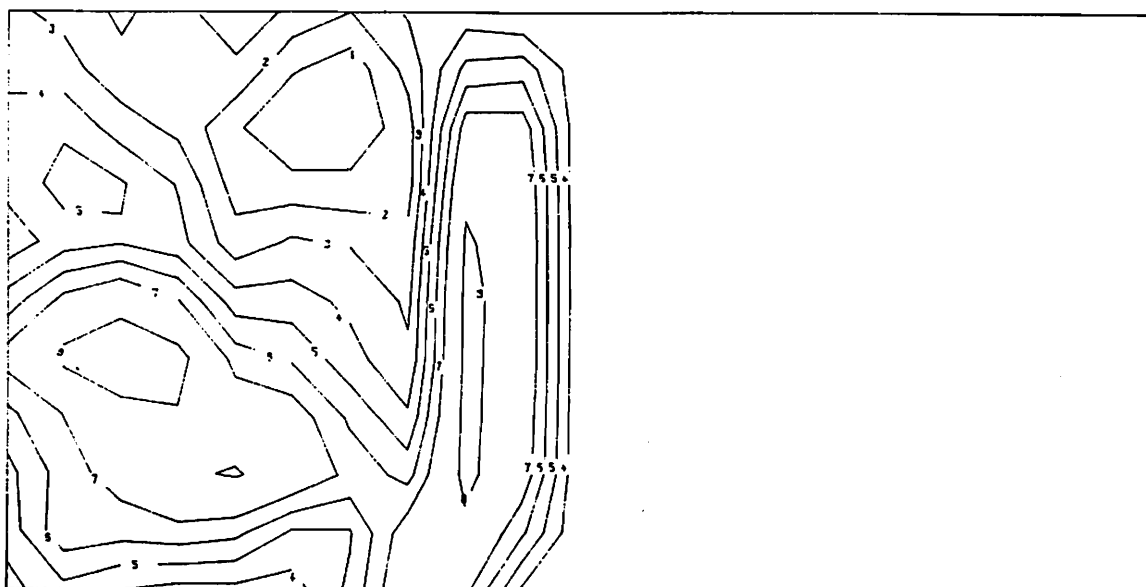
Horizontalschnitt



CONTOUR KEY	
1	20.0000
2	10.0000
3	0.0000
4	-10.0000
5	-20.0000
6	-30.0000
7	-40.0000
8	-60.0000

(Bild 8.13a)

Vertikalschnitt



(Bild 8.13b)

9. Zusammenfassung

Ausgehend von der dreidimensionalen skalaren Wellengleichung wurde mit der Methode der gewichteten Residuen die Kirchhoff'sche Integralgleichung hergeleitet. Durch den Übergang zu Randgrößen erhielt man die zugehörige Randintegralgleichung.

Aus ihr kann man den Druck u bzw. $p = \frac{\partial u}{\partial n}$ auf dem Rand des betrachteten Gebietes bestimmt werden. Dadurch ist die Dimension des Problems um eins reduziert.

Die Diskretisierung der Randintegralgleichung führt auf ein lineares Gleichungssystem für u bzw. p in den Knotenpunkten auf dem Rand. Mit den daraus bestimmbaren Randgrößen kann in einer Nachlaufrechnung der Druck im Gebietsinnern bestimmt werden.

Die Randelemente-Methode eignet sich, da nicht das Gebiet, sondern der Rand diskretisiert wird, auch besonders bei unendlich ausgedehnten Gebieten. Die Betrachtung dynamischer Vorgänge im Zeitbereich hat den Vorteil, daß das Einschwingverhalten des Systems gut wiedergegeben wird. Für längere Zeiten hat das dargestellte Verfahren den Vorteil, daß die Rechenzeit für jeden weiteren Zeitschritt sehr gering ist, wenn eine Welle einmal das gesamte Gebiet durchlaufen hat. Das Gleichungssystem hat Bandstruktur und ist nach Invertierung der P -Einflußmatrix im ersten Zeitschritt durch wiederholtes Einsetzen lösbar. Deswegen brauchen nur wenige Einflußmatrizen ausintegriert und abgespeichert werden. Trotz der einfachen Ansätze werden mit dem Verfahren gute Ergebnisse erzielt, wie die Beispielrechnungen zeigen.

10. Literatur

- [1] Gersten,K. : Einführung in die Strömungsmechanik
Vieweg, Braunschweig,3. Auflage 1984
- [2] Wieghardt,K. : Theoretische Strömungslehre
Teubner, Stuttgart, 2. Auflage 1974
- [3] Baehr,H.D. : Thermodynamik
Springer, Berlin, Heidelberg, 5. Auflage 1984
- [4] Morse,P.H., Ingard,K.V. : Theoretical Acoustics
McGraw-Hill, New York, 1968
- [5] Brebbia,C.A. : The Boundary Element Method for Engineers
Pentech Press, London, 1978
- [6] Mansur,W.J., Brebbia,C.A. : Formulation of the boundary Element method
for transient problems governed by scalar wave equation
Appl. Math. Modelling,1982, Vol.6, August
- [7] Mansur,W.J., Brebbia,C.A. : Solution of Wavepropagation Problems
by Boundary Elements
Proceedings of the Fourth International Semimar,
Southampton, England, September 1982, Ed.: C.A.Brebbia
Springer, Berlin, Heidelberg, 1982
- [8] Mansur,W.J., Brebbia,C.A. : Further Developments on the Solution of the
Transient Scalar Wave Equation
in: Topics in Boundary Element Research, Ed.:C.A. Brebbia
Volume 2: Time-dependent and Vibration Problems
Springer,Berlin, Heidelberg, 1985
- [9] Stroud,A.H., Secrest,D. : Gaussian Quadratur Formulas
Prentice-Hall, New-York, 1966
- [10] Laursen,M.E., Gellert,M. : Some criteria for numerically integrated
matrices and quadrature formulas for triangles
Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.12, 67-76, 1978
- [11] Cowper,G.R. : Gaussian quadrature formulas for triangles
Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.7, 405-408, 1973
- [12] Estorff.O.v. : Zur Berechnung der dynamischen Wechselwirkung zwischen Bauwerken
und ihrer Umgebung mittels zeitabhängiger Randintegralgleichungen
Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Ruhr-Universität Bochum, 86-10
- [13] Antes,H. : Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik
und in der Fluidodynamik
Teubner, Stuttgart, 1988
- [14] Dohner,J.L., Shoreshi,R., Bernhard,R.J. : Transient analysis of three-dimensional
wave propagation using the boundary element method
Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.24, 621-634,1987

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz. K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 54**