

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Peihua Liu

Optimierung von Kreisplatten
unter dynamischer nicht
rotationssymmetrischer Last

Heft Nr. 59



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

LIU, Peihua

Optimierung von Kreisplatten
unter dynamischer
nicht-rotationssymmetrischer Last

Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 59

Juli 1988

Herausgeber :

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Aufenthalts als Stipendiat am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung durch viele wertvolle Anregungen und für die Übernahme des Referates.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns und Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Übernahme der Korreferate.

Weiterhin gilt mein herzlicher Danke allen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Hierbei sind besonders die Herren A. Meyers und Ch. Scholz zu erwähnen, die bei der Sprachlichen Formulierung geholfen haben.

Bochum, Juli 1988

LIU, Peihua

Referenten :

Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann

Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. H. Waller

eingereicht : 9. 5. 1988

Tag der mündlichen Prüfung : 4. 7. 1988

© 1988 Dr.-Ing. LIU, Peihua

Querenburger Höhe 97/503

4630 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Kreisplatten hinsichtlich ihres Volumens unter dynamischer Last optimiert. Als Restriktionen werden eine minimale Plattendicke und eine zulässige Vergleichsspannung vorgegeben.

Die häufig zu bestimmende Zielfunktion erfordert eine vorherige FEM -Rechnung und eine Schwingungsanalyse. Die FEM-Rechnung läßt sich sehr speicherplatzsparend organisieren, während die Schwingungsanalyse, zur Verminderung des Rechenaufwandes, mit einem modifizierten Ritzverfahren und einer modalen Analyse durchgeführt wird.

Ausgehend von der Platte gleicher Vergleichsspannungen wird mit Hilfe eines linearen Optimierungsverfahrens die Platte minimalen Volumens gesucht. Dabei erweist sich die Platte gleicher Vergleichsspannungen als oft schon sehr gute Lösung der gestellten Aufgabe.

Summary

The present paper deals with the volume optimization of circular plates subjected to dynamic loads. As constraints a minimal plate thickness and a maximal allowable stress are considered.

Each evaluation of the weight function implies a full FEM vibration analysis. The organisation of the needed matrices is performed in respect of reduced memory storage. The vibration analysis uses a modified Ritz method with subsequent modal analysis. Thus the numerical evaluation could result in a considerable time-effectiveness.

The plate of fully stress is taken as the startpoint of the optimization. The method of feasible directions is used as optimization method. It is found that the fully stressed plate is a good approximation to the optimized plate.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
<u>Bezeichnungen</u>	4
<u>1. Einleitung</u>	7
1. 1 Problemstellung	8
<u>2. Die Plattentheorien</u>	11
2. 1 Allgemeines	12
2. 2 Die klassische Plattentheorie von Kirchhoff	12
2. 3 Die Mindlin-Plattentheorie	16
2. 3. 1 Herleitung der Grundgleichung	16
2. 4 Die Kenngrößen	19
2. 5 Vergleich der beiden Theorien	20
2. 5. 1 Die Eigenwerte einer Kreisplatte	20
2. 5. 1. 1 Die Eigenwerte nach der Kirchhoff-Theorie	20
2. 5. 1. 2 Die Eigenwerte nach der Mindlin-Theorie	22
2. 5. 2 Die Platte unter statischer Belastung	25
2. 6 Die Entscheidung für eine geeignete Theorie	29
<u>3. Die Berechnungsmethoden</u>	30
3. 1 Allgemeines	30
3. 2 Aufstellung der Elementmatrizen	32
3. 2. 1 Die Ansatzfunktionen eines Streifens	33
3. 2. 2. Aufstellung der Steifigkeitsmatrix	36
3. 2. 3 Aufstellung der Massenmatrix	38
3. 2. 4 Der Lastvektor	40
3. 2. 5 Schnittgrößen	40
3. 2. 6 Differentialgleichungen	42
3. 2. 7 Konvergenzbetrachtung der Matrizen	43

3. 3	Das verwendete Ritz-Verfahren und die modale Analyse	47
3. 3. 1	Allgemeines	47
3. 3. 2	Das verwendete Ritz-Verfahren	48
3. 3. 2. 1	Die Transformation	48
3. 3. 2. 2	Die Bestimmung des Ritz-Vektors \mathbf{R}	50
3. 3. 2. 3	Zusammenfassung	52
3. 3	Die modale Analyse	52
3. 3. 4	Konvergenzbetrachtungen	56
4.	<u>Die Platte gleicher Vergleichsspannungen</u>	59
4. 1	Allgemeines	59
4. 2.	Platte gleicher Vergleichsspannung	60
4. 3	Beschleunigungsfaktor	62
4. 4	Einige Vorbemerkungen	64
4. 4. 1	Anzahl der Elemente	64
4. 4. 2	Impulsformen und Wirkungsdauer	65
4. 4. 2. 1	Impulsformen	65
4. 4. 2. 2	Wirkungsdauer der Belastung	67
4. 4. 3	Schwingungsdauer	68
5.	<u>Optimierung</u>	69
5. 1	Allgemeines	69
5. 2	Kriterien	70
5. 2. 1	Die Kuhn-Tucker-Bedingungen	70
5. 2. 2	Das geeignete Kriterium	71
5. 3	Optimierungsverfahren	73
5. 3. 1	Die Methode der "feasible directions"	74
I	Bestimmung des Vektors \mathbf{S}_j	74
II	Bestimmung der Gradienten $\nabla \mathbf{V}$ und ∇G_j	76
III	Die Bestimmung der Schrittweite α_j	77
5. 3. 2	Die lineare Optimierung	78

<u>6. Ergebnisse</u>	79
6. 1 Kreisplatten	79
6. 2 Kreisringplatten	82
6. 3 Platte mit zusätzlicher Masse	86
6. 4 Platte mit kombinierter Belastung	87
<u>7. Zusammenfassung und Ausblick</u>	90
7. 1 Zusammenfassung	90
7. 2 Ausblick	91
<u>Literaturverzeichnis</u>	92

Bezeichnungen

Symbol	Name
V	Plattenvolumen
h	Plattendicke
h_{min}	minimal zulässige Plattendicke
r, ϑ, z	Polarkoordinaten
t	Zeit
U_r, U_{ϑ}	Verschiebungen
W	Durchbiegung
Ψ, Φ	Rotationen
ϵ_{rr}, $\epsilon_{\vartheta\vartheta}$, ϵ_{zz}	Dehnungen
$\gamma_{r\vartheta}$, γ_{rz}, $\gamma_{\vartheta z}$	Schubdehnungen
σ_{rr}, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\tau_{r\vartheta}$	Spannungen
σ_v	Vergleichsspannung
M_{rr}, M_{$\vartheta\vartheta$}, M_{rϑ}	Momente
Q_r, Q_{ϑ}	Querkräfte
Q, q	Belastung
E	Elastizitätsmodul
G	Gleitmodul

Symbol	Name
ν	Querkontraktionszahl
k^2	Schubkorrekturfaktor
ρ	Dichte
R	Plattenaußenradius
ω	Frequenz
$[K]$	Steifigkeitsmatrix
$[K^e]$	Elementsteifigkeitsmatrix
$[M]$	Massenmatrix
$[M^e]$	Elementmassenmatrix
$\{F\}$	Lastvektor
$\{F^e\}$	Elementlastvektor
$\{\delta\}$	Verschiebungsvektor
$\{\delta^e\}$	Elementverschiebungsvektor
$[R]$	Ritzmatrix
$\{q\}$	Ritzkoordinaten
$[\Phi]$	Modal-Matrix
$\{x\}$	generalisierte Koordinaten

Symbol	Name
Q_f, Q_1, ζ	dimensionslose Kenngrößen
$\frac{d \dots}{d \dots}$	Ableitung
$\frac{\partial \dots}{\partial \dots}$	partielle Ableitung
$(\dot{})$	Ableitung nach der Zeit
∇	Gradient
Δ	Laplace-Operator
S	Suchrichtung
α_j	Schrittweite

1. Einleitung

Seit langem beschäftigen sich Ingenieure und Mathematiker mit unterschiedlichsten Problemen der Optimierung in allen ingenieur-wissenschaftlichen Bereichen. Die große Zahl aktueller Veröffentlichungen zu diesem Thema beweist den Rang, der diesem Gebiet beizumessen ist.

Während früher die Ingenieure ihre Optimierungsprobleme meist nur mit Hilfe ihrer Erfahrungen lösen konnten, sind in neuerer Zeit von Mathematikern eine Vielzahl von Optimierungsalgorithmen zur Verfügung gestellt worden. Aus den neuesten Veröffentlichungen kann ersehen werden, daß im Einzelfall einer gestellten Optimierungsaufgabe jeweils zunächst ein geeigneter Optimierungsalgorithmus ausgewählt werden muß. Eine zusätzliche Anpassung an die spezielle Aufgabenstellung bewirkt häufig noch eine wesentliche Verringerung des Rechenaufwandes.

Durch die Entwicklung numerischer Rechenanlagen werden auch zunehmend Anwendungen der Optimierungsverfahren auf spezielle Aufgabenstellungen möglich, die zunächst wegen des hohen Rechenaufwandes nicht gelöst werden konnten.

Beschränkt man sich auf den Bereich der Konstruktion, dann besteht die Aufgabe der Optimierung vielfach in den folgenden Punkten:

- I Verminderung des Aufwandes an Materialien und Kosten(z. B. Herstellungskosten, Betriebskosten).
- II Optimierung gewisser Eigenschaften einer Konstruktion unter statischen oder dynamischen Belastungen. Zum Beispiel soll die Verformung einer Konstruktion möglichst klein, die Abweichung der Eigenwerte von der Frequenz der Belastung möglichst groß sein (meistens bei einer vorgegebenen Materialmenge) usw.

Im allgemein wird daher gefordert, daß die zulässige Spannung an

keinem Punkt der Konstruktion und zu keinem Zeitpunkt überschritten wird.

Einen guten Überblick über den Stand der Strukturoptimierung erhält man aus den Arbeiten [1] - [7].

Spezielle Problemstellungen der Optimierung (Maximieren von Eigenfrequenzen und Steifigkeit) von Platten werden in [8] - [14] mit vorgegebenem Volumen unter unterschiedlichen Beschränkungen behandelt.

Die Optimierung bei instationärer Belastung unter Spannungsrestriktionen ist in [15] (Stäbe), [16] und [17] (Rahmen) und [18] (Kreis- bzw. Kreisringplatte unter symmetrischer Belastung) untersucht.

1.1 Problemstellung

In dieser Arbeit werden Kreisplatten bzw. Kreisringplatten unter dynamischer Belastung $Q = Q(r, \vartheta, t)$ optimiert:

Gesucht ist das Minimum (V_{\min}) des Volumens mit

$$V = \int \int h(r, \vartheta) r d\vartheta dr \quad (1.1)$$

unter den Bedingungen:

1. Die zulässige Spannung darf an keinem Punkt während des Schwingungsvorgangs überschritten werden:

$$\sigma(r, \vartheta) \leq \sigma_{zul},$$

2. Die Plattendicke $h(r, \vartheta)$ ist nur vom Radius r abhängig:

$$h(r, \vartheta) = h(r),$$

3. In bezug auf die Herstellung darf eine vorgegebene Größe h_{min} für die Plattendicke h nicht unterschritten werden:

$$h(r) \geq h_{min}.$$

Die Zielfunktion V ist von der Variablen $h(r, \vartheta) = h(r)$ linear abhängig, während die Bedingung 1 eine nichtlineare, implizite Beschränkung darstellt.

Die in Bedingung 3 festgelegte minimale Plattendicke stellt auch sicher, daß die Schubspannung aufgenommen werden kann, die bei der Bestimmung der Vergleichsspannung nicht berücksichtigt wird. Eine obere Grenze für die Plattendicke kann wegen der Bedingung 1 nicht festgelegt werden.

Durch Restriktion 2 wird gesichert, daß die optimierte Platte jeder Belastung, die von ϑ abhängig ist, standhalten kann, solange sie den vorgenommenen Wert nicht überschreitet.

Da eine analytische Lösung für diese Aufgabenstellung nicht mehr möglich ist, bemüht sich die vorliegende Arbeit um eine numerische Lösung.

Im 2. Kapitel wird eine Plattentheorie ausgewählt, die zur Beschreibung der Platte veränderlicher Dicke unter dynamischer Belastung geeignet ist.

Die Berechnung der Zustandsgrößen, die für die weitere Optimierung

der Platte notwendig und für jede Änderung der Plattendicke neu zu bestimmen sind, wird in Kapitel 3 diskutiert. Wegen der Implizität der Restriktion $\sigma < \sigma_{zul}$, wird dort die Diskretisierung der Platte behandelt und anschließend die Methode der finiten Elemente zur Bestimmung der Vergleichsspannungen angewendet.

Die Platte gleicher Vergleichsspannungen, die meistens eine sehr gute Näherung der optimierten Platte und in einigen Fällen sogar die optimierte Platte selbst darstellt, wird in Kapitel 4 beschrieben.

In Kapitel 5 werden die in die engere Wahl gezogenen Optimierungsverfahren besprochen. Zur Berücksichtigung aktiver Restriktionen wird Zoutendijk's Methode der "feasible directions" benutzt.

Anhand einiger Beispiele werden in Kapitel 6 die Ergebnisse der Platte gleicher Vergleichsspannungen und der weiter optimierten Platte gegenübergestellt.

2. Plattentheorien

Die zur Zeit existierenden Plattentheorien lassen sich in zwei Gruppen unterteilen: die klassische Theorie für die dünne Platte von Kirchhoff [19] und die Theorien für dicke Platten.

Die klassische Theorie für dünne Platten von Kirchhoff ist nur für dünne Platten geeignet, besonders für solche unter statischen Belastungen, und ist einfach mit analytischen Methoden zu behandeln. Bei dieser Plattentheorie können nur vier Randbedingungen erfüllt werden.

Bei den Theorien für dicke Platten sind sechs Randbedingungen zu erfüllen. Mit den Theorien für dicke Platten werden die Platten besser beschrieben. Dieses läßt sich besonders dann zeigen, wenn die Dicke von Platten im Verhältnis zu den jeweiligen Seitenlängen groß ist. Bei diesen Theorien kann insbesondere je nachdem, ob die Trägheitsmomente in die Rechnung einbezogen werden, zwischen der in der letzten Zeit bekannt gewordenen Mindlin- oder Reissner-Plattentheorie [20] [21] gewählt werden.

Außer mit oben genannten Theorien können Platten auch als dreidimensionales Problem behandelt werden, so daß die Platten im theoretischen Sinne exakt beschrieben werden.

Die Anforderung an die Auswahl einer geeigneten Theorie besteht darin, daß die Theorie die Platte genügend genau beschreibt und der Berechnungsaufwand möglichst klein gehalten wird. Die oben genannten Plattentheorien können Platten unter bestimmten Bedingungen hinreichend beschreiben, so daß es nicht nötig ist, die Platten als dreidimensionales Problem zu behandeln, und den damit verbundenen sehr hohen Rechenaufwand in Kauf zu nehmen.

2.1 Allgemeine Annahmen

Bei der Herleitung der verschiedenen Plattentheorien werden folgende Annahmen zugrundegelegt:

- A. Die verwendeten Werkstoffe seien homogen und isotrop.
- B. Die Beziehung zwischen Spannungen und Verzerungen sei linear, d. h. es gelte das Hookesche Gesetz.
- C. Die Formänderungen seien klein im Vergleich zu den Plattenabmessungen.
- D. Die resultierenden Belastungen seien senkrecht zur Plattenmittelebene.

Zur Herleitung von bestimmten Plattentheorien sind zusätzliche Annahmen erforderlich.

2.2 Die klassische Theorie von Kirchhoff [19]

Die Herleitung der klassischen Plattentheorie wird im Polarkoordinatensystem beschrieben.

Außer den im obigen Abschnitt eingeführten Annahmen werden zusätzlich folgende Annahmen getroffen:

- A. Die Dicke der Platten bleibt nach der Verformung unverändert, d. h.

$$W(r, \vartheta, z) = W(r, \vartheta). \quad (2.1)$$

(W ist die Durchbiegung).

B. Die senkrechte Linie zur Mittelebene bleibt nach nach der Verformung senkrecht dazu

$$U_r = -z \frac{\partial W}{\partial r}, \quad U_\vartheta = -z \frac{\partial W}{r \partial \vartheta}. \quad (2.2)$$

(U_r und U_ϑ sind die Verschiebungen der senkrechten Linie in den jeweiligen Richtungen. z ist die Koordinate in Richtung der Dicke.)

Nachdem die benötigten Annahmen getroffen worden sind, kann zur Herleitung der klassischen Plattentheorie übergegangen werden.

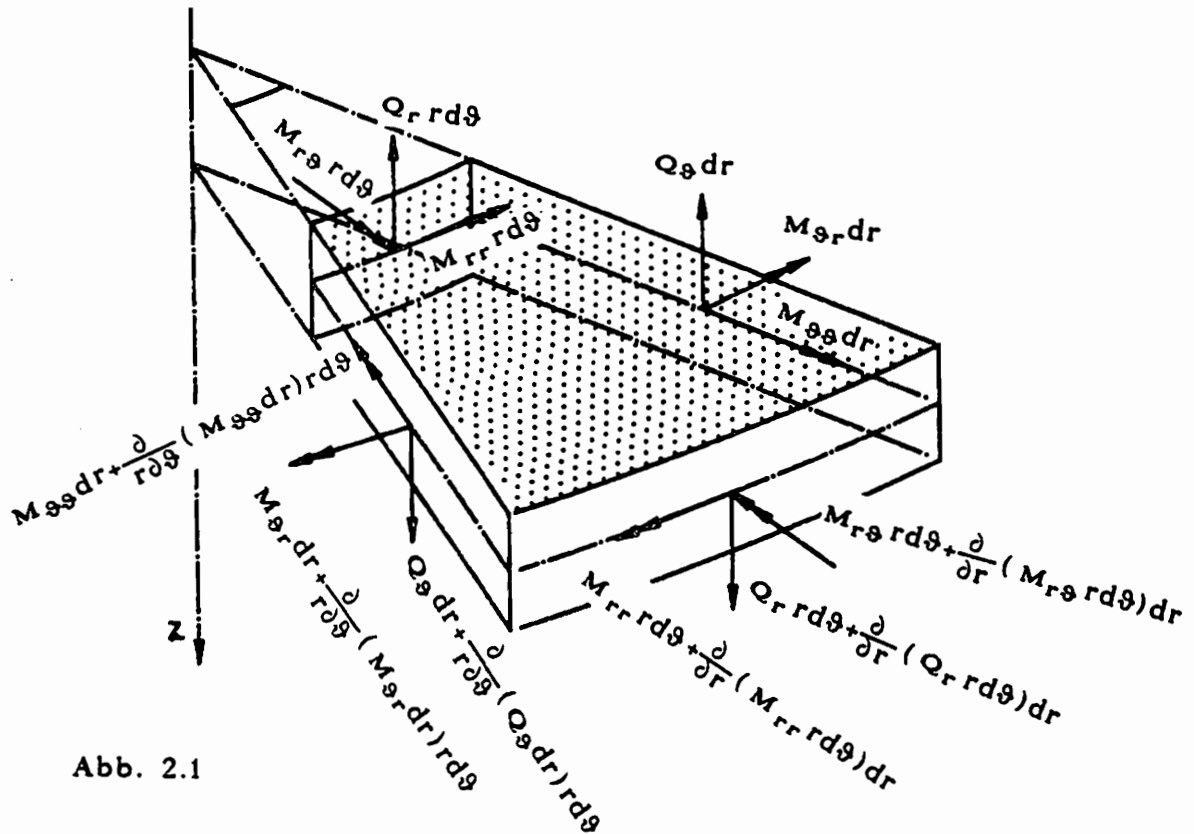


Abb. 2.1

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\vartheta}}{r \partial \vartheta} - Q_r + \frac{M_r - M_\vartheta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\vartheta}{r \partial \vartheta} - Q_\vartheta + 2 \frac{M_{r\vartheta}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + q + Q_r / r = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

wobei

$$M_r = \int_h z \sigma_r dz,$$

$$M_\theta = \int_h z \sigma_\theta dz,$$

$$M_{r\theta} = \int_h z \tau_{r\theta} dz,$$

$$Q_r = \int_h \tau_{rz} dz,$$

(2.4)

$$Q_\theta = \int_h \tau_{r\theta} dz.$$

σ und τ sind die Normal- und Schubspannung.
 q ist die äußere Belastung.

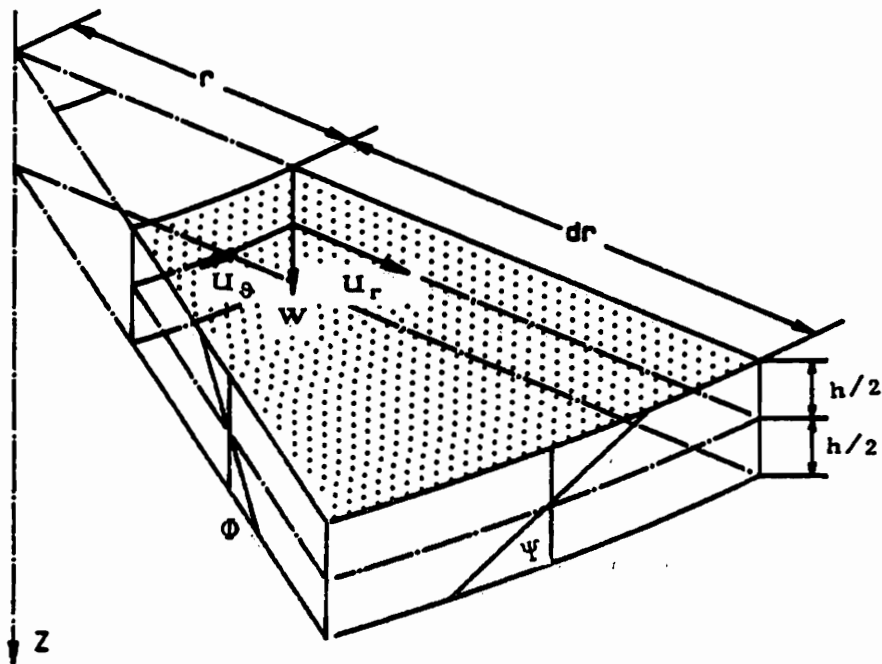


Abb. 2.2 Plattensegment

Es gelten die folgenden kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= -z^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= -z \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \vartheta^2} \right), \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= z \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{\partial W}{r^2 \partial \vartheta} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\vartheta z} = 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Das Hookesche Stoffgesetz lautet

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\vartheta\vartheta}), \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}), \\ \tau_{r\vartheta} &= G \varepsilon_{r\vartheta}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

E, G und ν sind die von Material abhängige Elastizitäts-Konstanten.

Wird Gleichung (2.5) in (2.6) eingesetzt und die entsprechende Integration durchgeführt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \vartheta^2} \right) \right], \\ M_{\vartheta} &= -D \left[\nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \vartheta^2} \right], \\ M_{r\vartheta} &= -(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial W}{r^2 \partial \vartheta} \right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

D ist die Biegesteifigkeit der Platte, $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die beiden Schnittgrößen Q_r und Q_{ϑ} wegen der Annahme (2.2) dem Hookeschen Gesetz nicht gehorchen. Die beiden Schnittgrößen können durch die Gleichgewichtsbedingung (2.3) ermittelt werden. Wegen der Annahme

(2. 2) können auch etwaige Randbedingungen für M_{rs} nicht direkt befriedigt werden[24].

Wird die Gleichung (2. 7) in (2. 3) eingesetzt, so erhalten wir die Gleichung

$$D \cdot \nabla^4 W = q - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (2. 8)$$

durch die die Durchbiegung W unter vorgegebenen Belastungen bestimmt werden kann.

Nach Bestimmung von W können die anderen Zustandsgrößen durch die Gleichungen (2. 3) bis (2. 7) ermittelt werden.

2. 3 Die Mindlin-Plattentheorie [20]

In diesem Abschnitt wird die Mindlin-Plattentheorie erläutert. Als Theorie der dicken Platte berücksichtigt die Mindlin-Platte im Gegensatz zu der Reissner-Platte nicht nur die Querkraft bei der Verformung, sondern auch die Trägheitsmomente beim Schwingungsvorgang.

2. 3. 1 Herleitung der Grundgleichung

Für die Mindlin-Plattentheorie gilt die Annahme, daß die Durchbiegung W unabhängig von der Koordinate z sei. Die senkrechte Linie zur Mittelebene ist nach der Verformung im Gegensatz zur Kirchhoff-Theorie zwar noch eine Gerade, aber nicht mehr notwendig senkrecht zur Mittelebene.

$$U_r = z \cdot \Psi, \quad U_\theta = z \cdot \Phi. \quad (2. 9)$$

So existieren drei unabhängige Verschiebungen W , U_r und U_ϑ , wobei die letzten zwei wieder durch die Verdrehungen Ψ und Φ dargestellt werden können.

Hier gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\vartheta}}{r \partial \vartheta} - Q_r + \frac{M_r - M_\vartheta}{r} &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\vartheta}{r \partial \vartheta} - Q_\vartheta + 2 \frac{M_{r\vartheta}}{r} &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\vartheta}{r \partial \vartheta} + q + Q_r / r &= \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im Vergleich mit Gleichung (2.3) sind in (2.10) die Trägheitsmomente in Radial- und Tangentialrichtung berücksichtigt.

Die kinematischen Beziehungen lauten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= z \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= z \cdot \left(\frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \vartheta} \right), \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= z \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{r \partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \Psi + \frac{\partial W}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\vartheta z} &= \Phi + \frac{\partial W}{r \partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Das Hookesche Gesetz (2.6) muß bei der Mindlin-Plattentheorie ergänzt werden. Außer σ_r , σ_ϑ und $\tau_{r\vartheta}$ müssen nun auch die beiden Schubspannungen τ_{rz} und $\tau_{\vartheta z}$ dem Hookeschen Stoffgesetz gehorchen,

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\vartheta\vartheta}),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}), \\ \tau_{r\vartheta} &= G \varepsilon_{r\vartheta}, \\ \tau_{rz} &= G \varepsilon_{rz}, \\ \tau_{\vartheta z} &= G \varepsilon_{\vartheta z}.\end{aligned}\tag{ 2. 12 }$$

Durch gleiche Behandlung wie bei Gleichung (2. 7) lassen sich die Beziehungen zwischen Verschiebungen und Schnittgrößen darstellen

$$\begin{aligned}M_r &= D \left[\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \nu \left(\frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \vartheta} \right) \right], \\ M_{\vartheta} &= D \left[\nu \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \vartheta} \right], \\ M_{r\vartheta} &= \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{\partial \Psi}{r \partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r} \right], \\ Q_r &= k^2 G h \left(\Psi + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \\ Q_{\vartheta} &= k^2 G h \left(\Phi + \frac{\partial W}{r \partial \vartheta} \right).\end{aligned}\tag{ 2. 13 }$$

k^2 ist ein Faktor zur Korrektur der Abweichung von Q_r und Q_{ϑ} , die durch die Annahme (2. 9) verursacht ist. Nach der Mindlin-Plattentheorie wird k^2 der Wert $\pi^2/12$ zugewiesen und nach der Reissner-Theorie [21] der Wert $5/6$.

Auf jedem Rand sind hier drei Randbedingungen zu erfüllen. Für Kreisplatten sind sie W [oder Q_r], Ψ [oder M_r] und Φ [oder $M_{r\vartheta}$].

Die klassische und die Mindlin-Plattentheorie unterscheiden sich in drei Punkten:

- A. Behandlung der Schubverformung,
- B. Berücksichtigung der Trägheitsmomente,
- C. Anzahl der Randbedingungen.

2. 4. Die Kenngrößen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden verschiedene Größen zur Beschreibung des Schwingungsvorganges verwendet. Bei einer Analyse erkennt man, daß einerseits nicht die verschiedenen physikalischen Größen direkt die Form einer Platte bei der Optimierung beeinflussen, sondern Kombinationen von ihnen, andererseits die Reaktionen von Platten leichter dargestellt werden können, wenn einige physikalische Größen durch Normierung in dimensionslosen Kenngrößen dargestellt werden.

1. Belastung

Flächenbelastung

$$Q_f = q_0 / \sigma_{zul},$$

Linienbelastung

$$Q_l = q_0 / R^2 / \sigma_{zul},$$

wobei q_0 der größte Wert der jeweiligen Belastung ist.

2. Radius

$$\zeta = r / R,$$

Plattendicke

$$h_i = d_i / R.$$

R ist der äußere Radius, d_i ist die Plattendicke.

Die anderen, die Plattenform beeinflussenden Größen sind (für Stahl)

Querkontraktionszahl $\nu = 0.3,$

Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2,$

Dichte $\rho = 7810 \text{ kg/m}^3.$

2. 5 Vergleich der beiden Theorien

Zum Vergleich der beiden Theorien werden zuerst die Eigenwerte einer Platte betrachtet und anschließend eine Platte unter statischer Belastung berechnet.

2. 5. 1 Die Eigenwerte einer Kreisplatte

2. 5. 1. 1 Die Eigenwerte nach der Kirchhoff-Theorie

Die Eigenwerte nach der klassischen Plattentheorie können durch Gleichung (2. 8) mit $q = 0$ bestimmt werden,

$$D \cdot \nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (2. 14)$$

Als Ansatzfunktion kann

$$W = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \cdot \cos(n\vartheta) \cdot F(r) \\ (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2. 15)$$

gewählt werden. A und B sind zwei Konstanten, n ist eine positive ganze Zahl, die die Verformung der Platte in ϑ -Richtung bestimmt. Wird diese Ansatzfunktion in Gleichung (2. 14) eingesetzt, so erhalten wir

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{r dr} + [\pm (\delta/R)^2 - \frac{n^2}{r^2}] F = 0, \quad (2. 16)$$

$$\text{wobei } (\delta/R)^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D} = 12(1-\nu^2) \omega^2 \frac{\rho}{E h^2} \quad (2. 17)$$

und R der Radius der Kreisplatte oder der äußere Radius der Kreisringplatte ist.

Die Lösung der Gleichung (2. 16) lautet

$$F(r) = C_1 \cdot J_n(\delta r/R) + C_2 \cdot Y_n(\delta r/R) \\ + C_3 \cdot I_n(\delta r/R) + C_4 \cdot K_n(\delta r/R) \quad (2. 18)$$

J_n , Y_n , I_n und K_n sind die Bessel- und verbesserten Bessel-Funktionen n-ter Ordnung erster oder zweiter Art.

C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sind Konstanten, die von den Randbedingungen abhängig sind. Für Kreisplatten darf die Durchbiegung in der Mitte nicht unendlich sein, deshalb müssen C_2 und C_4 verschwinden, da Y_n und K_n bei $r = 0$ unendlich groß sind.

Zur Berechnung der Eigenwerte geht man von (2. 18) aus und setzt voraus, daß die Randbedingungen von $F(r)$ erfüllt werden und daß die Konstanten C_i nicht gleichzeitig gleich Null sein dürfen. Dann muß die durch die Koeffizienten von C_i dargestellte Determinante gleich Null sein. Durch die Erfüllung dieser Bedingung läßt sich δ ausrechnen. Dann können die Eigenwerte ω durch (2. 17) bestimmt werden.

Als ein Beispiel werden die ersten fünf Eigenwerte von einer Kreisringplatte in Abb. 2.3 dargestellt.

Zwei Punkte sind hier zu bemerken:

- A. Die Eigenwerte sind linear abhängig von der Plattendicke,
- B. Der entsprechende Eigenwert wird mit zunehmendem n , welches die Schwingungsformen beschreibt, größer.

2. 5. 1. 2 Die Eigenwerte nach der Mindlin-Plattentheorie

Für die Berechnung der Eigenwerte nach der Mindlin-Plattentheorie sehen die Ansatzfunktionen [26] wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \Psi &= (\sigma_1 - 1) \frac{\partial W_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{\partial W_3}{r \partial \vartheta} , \\ \Phi &= (\sigma_1 - 1) \frac{\partial W_1}{r \partial \vartheta} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial W_2}{r \partial \vartheta} - \frac{\partial W_3}{\partial r} , \\ W &= W_1 + W_2 , \end{aligned} \tag{ 2. 19 }$$

wobei

$$\begin{aligned} W_1 &= [C_1 Z_n(\delta_1 r/R) + C_1^* Z_n^*(\delta_1 r/R)] \cos(n\vartheta) , \\ W_2 &= [C_2 Z_n(\delta_2 r/R) + C_2^* Z_n^*(\delta_2 r/R)] \cos(n\vartheta) , \\ W_3 &= [C_3 Z_n(\delta_3 r/R) + C_3^* Z_n^*(\delta_3 r/R)] \sin(n\vartheta) \\ &\quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{ 2. 20 }$$

und

$$\begin{aligned} (\delta_1)^2 &= \frac{1}{2} \lambda^2 \left[1 + \frac{1}{k^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 + \frac{4}{\alpha^2 \lambda^2}} \right] , \\ (\delta_2)^2 &= \frac{1}{2} \lambda^2 \left[1 + \frac{1}{k^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 + \frac{4}{\alpha^2 \lambda^2}} \right] , \\ (\delta_3)^2 &= 2 (\lambda^2 - k^2 / \alpha^2) / (1 - \nu) , \\ \sigma_1 &= (\delta_1)^2 / (\lambda^2 - k^2 / \alpha^2) , \\ \sigma_2 &= (\delta_2)^2 / (\lambda^2 - k^2 / \alpha^2) , \\ \alpha^2 &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 / 12 , \\ k^2 &= \frac{1 - \nu}{24} \pi^2 . \end{aligned} \tag{ 2. 21 }$$

Z_n und Z_n^* sind je nachdem, ob δ_i ($i = 1, 2, 3$) größer oder kleiner als

Null ist, Bessel- oder verbesserte Bessel-Funktionen erster und zweiter Art und n-ter Ordnung,

Durch gleiche Berechnungsvorgänge wie bei der Kirchhoff-Theorie kann der Parameter λ unter den Bedingungen, daß

1. die Randbedingungen erfüllt werden,
2. die Konstanten C_i und C_i^* nicht gleichzeitig verschwinden,

ermittelt werden.

Nach Bestimmung des Parameters λ ist der Eigenwert mit folgender Formel zu berechnen:

$$\omega = \lambda \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (2. 22)$$

Als Beispiel werden die ersten acht Eigenwerte derselben Kreisringplatte in Abb. 2.3 dargestellt.

Bei der Betrachtung fällt folgendes auf:

- A. Die Eigenwerte liegen unter den entsprechenden Eigenwerten nach der Kirchhoff-Theorie.
- B. Mit zunehmender Plattendicke nehmen die höheren Eigenwerte ab.

Außerdem ist bei weiteren Berechnungen aufgefallen, daß die entsprechenden Eigenwerte mit zunehmendem n auch größer werden.

Die Eigenfrequenzen zu rotationsymmetrischen Eigenformen in Abhängigkeit von der Plattendicke sind in den Arbeiten [27] und [18] untersucht worden, wobei auch dort die Tendenz festgestellt ist, daß die höheren Eigenfrequenzen mit zunehmender Plattendicke abnehmen.

Ringplatte

Innenrand frei, Außenrand eingespannt

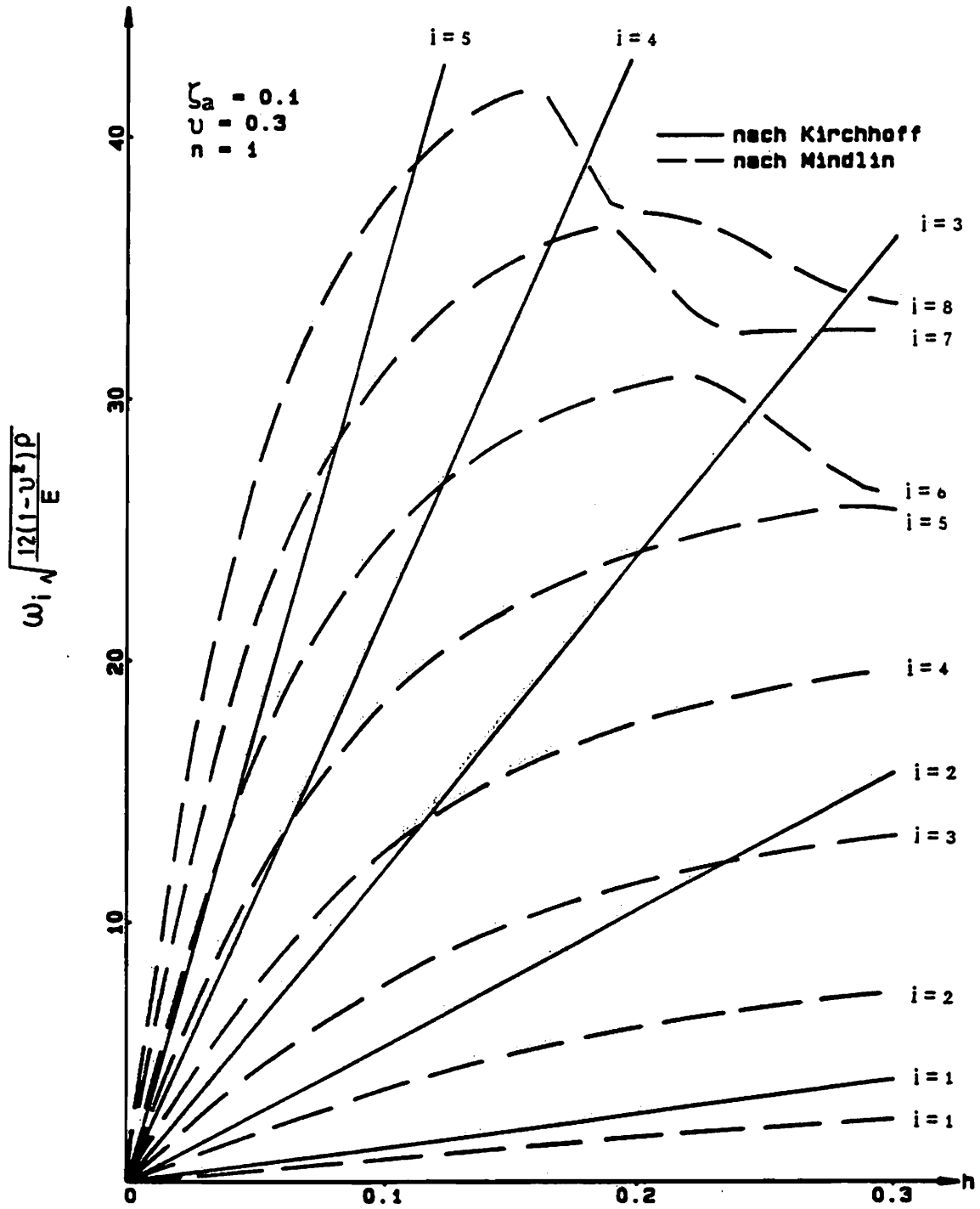


Abb. 2.3 Eigenfrequenzen einer Ringplatte

2. 5. 2. Die Platte unter statischer Belastung

Zum Vergleich der beiden Theorien wird in diesem Abschnitt eine Ringplatte, dargestellt in der Abb. 2.4, betrachtet.

Die Ringplatte wird gemäß

$$q = p \left(r/R \right) \cos(m\vartheta) \quad (m = 2) \quad (2. 23)$$

belastet. p ist hier eine konstante Größe. Der äußere Rand ist freigelagert und der innere Rand wird als eingespannt betrachtet.

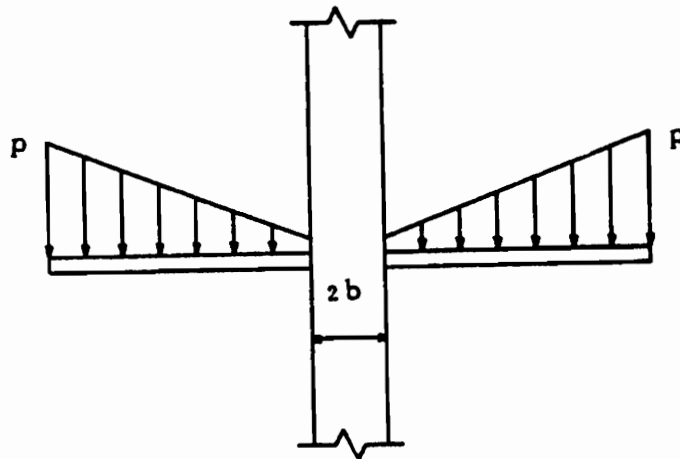


Abb. 2.4 Die Ringplatte

Die Lösung dieses Problems sieht, je nachdem, ob die Theorie von Kirchhoff oder von Mindlin angewendet wird, folgendermaßen aus:

A. Kirchhoff-Theorie

$$W = \left\{ C_1 r^m + C_2 r^{-m} + C_3 r^{m+2} + C_4 r^{2-m} + \frac{p r^5}{D (m^2 - 25) (m^2 - 9)} \right\} \cos(m\vartheta) \quad (2. 24)$$

Die vier Unbekannten C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) müssen durch die Randbedingungen bestimmt werden.

Als Randbedingungen gelten hier

bei $r = b$:

$$W = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dr} = 0, \quad (2.25)$$

bei $r = R$:

$$M_r = 0 \quad \text{und} \quad Q_r + \frac{\partial M_r \vartheta}{r \partial r} = 0. \quad (2.26)$$

Die Schnittgrößen können nach Bestimmung der Durchbiegung mit (2.7) ermittelt werden. Die Ergebnisse sind in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

B. Mindlin-Theorie

$$W = \left\{ C_1 r^m + C_2 r^{-m} - \frac{C_3 r^{m+2}}{4m(m+1)D} - \frac{C_4 r^{-m+2}}{4m(m-1)D} + \frac{p r^5}{(m^2-9)(m^2-25)D} + \frac{p r^2}{k^2 G h (m^2-9)} \right\} \cos(m\vartheta) \quad (2.27)$$

und

$$Q_r = \left\{ C_3 r^{m-1} + C_4 r^{-m-1} + C_5 I_m(\alpha r) + C_6 K_m(\alpha r) \right\} \cos(m\vartheta), \quad (2.28)$$

mit $\alpha = \pi/h$.

Statt vier gibt es hier sechs Konstanten, die durch Randbedingungen bestimmt werden müssen.

Als Randbedingungen gelten nun

bei $r = b$:

$$W = 0, \quad \Psi = 0 \quad \text{und} \quad \Phi = 0 \quad (2.29)$$

und bei $r = R$:

$$M_r = 0, \quad M_{r\theta} = 0 \quad \text{und} \quad Q_r = 0. \quad (2.30)$$

Nach Bestimmung von W und Q_r kann Q_θ durch die letzte Gleichung in (2.10) ermittelt werden. Die anderen Schnittgrößen können danach mit (2.13) bestimmt werden. Die Ergebnisse sind ebenfalls in den Abb. 2.5 und 2.6 dargestellt.

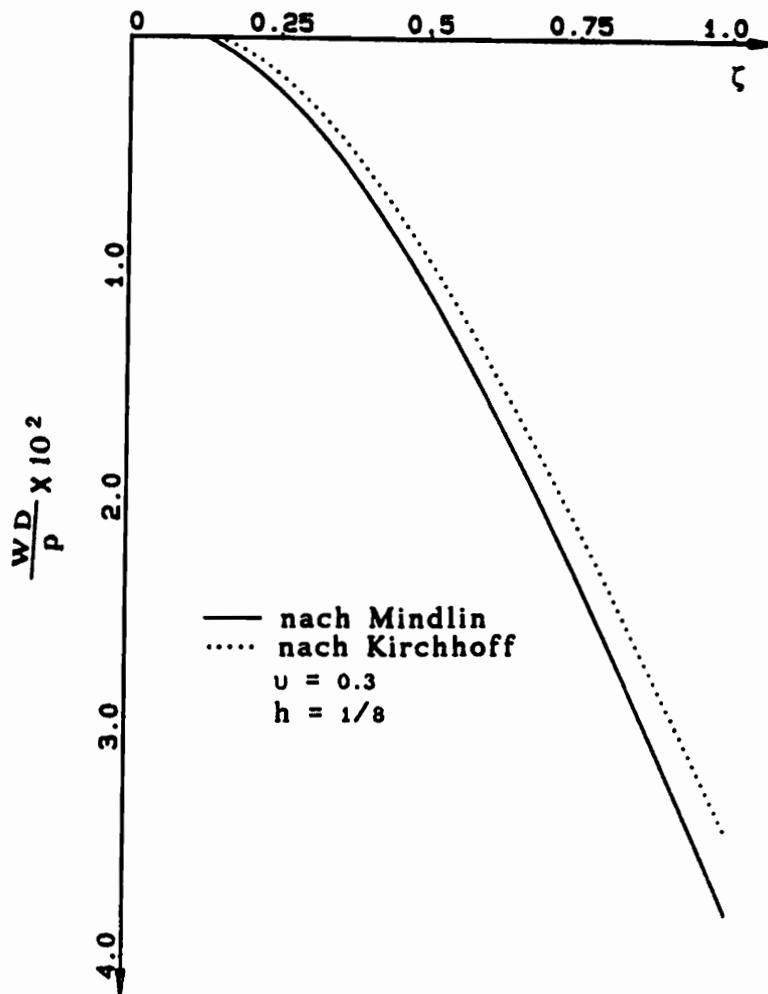


Abb. 2.5 Die Durchbiegung

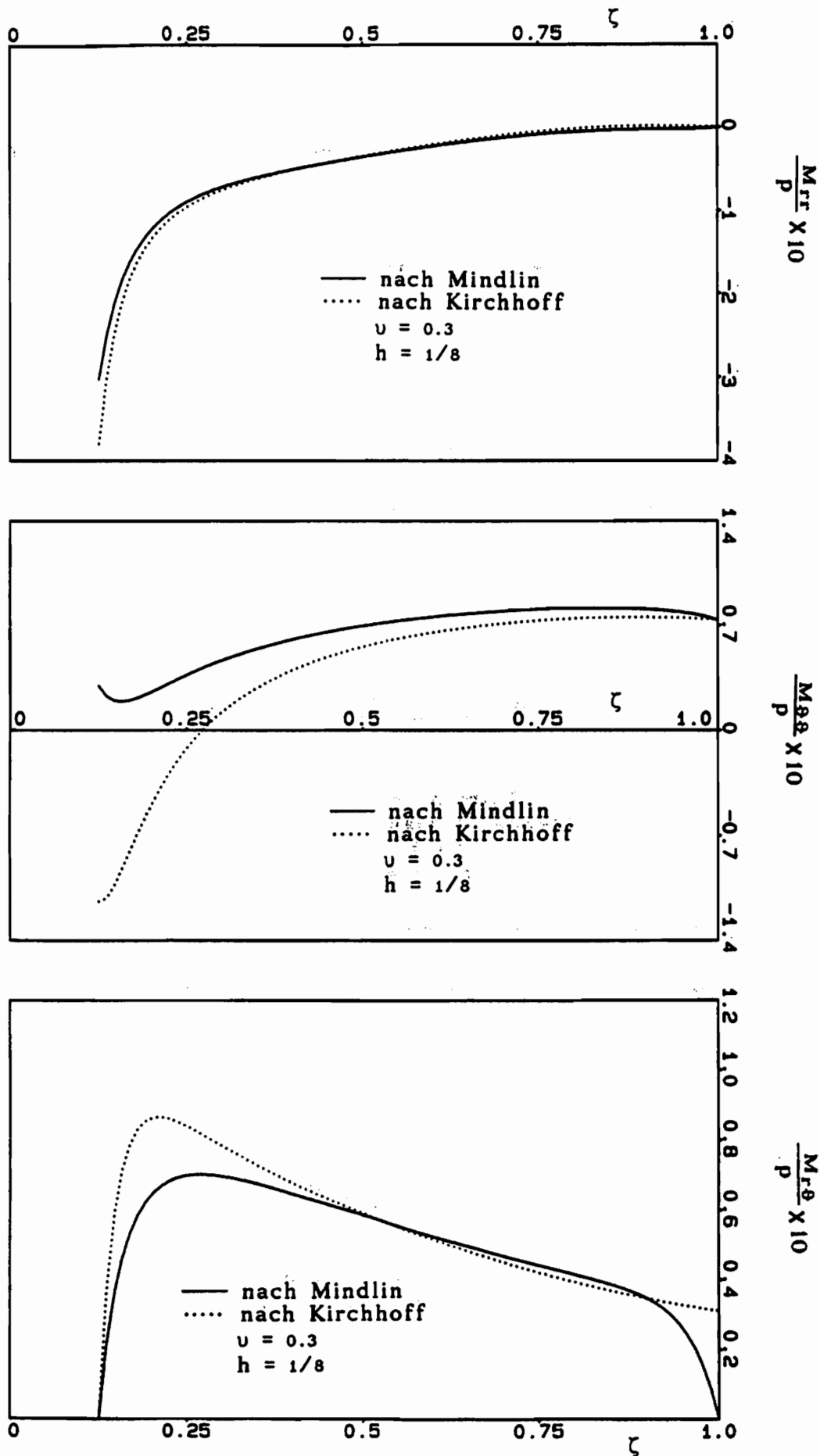


Abb. 2.6 Die Darstellungen der Schnittgrößen

Zu den Abbildungen ist folgendes zu bemerken:

- A. Nach der Mindlin-Theorie ist $\partial W/\partial r$ bei $r = b$ wegen der vorhandenen Schubkraft nicht gleich Null.
- B. Die größten Differenzen von M_{rr} und $M_{r\theta}$ kommen dort vor, wo die Verformungen am stärksten von den Randbedingungen beschränkt sind.
- C. Wie zu erwarten, ist $M_{r\theta}$ nach der Kirchhoff-Theorie am frei gelagerten Rand nicht gleich Null. Φ wurde nach der Mindlin-Theorie am inneren Rand als unbeschränkt betrachtet [25]. Sonst wurde dort der größte Wert für $M_{r\theta}$ erhalten.

2. 6 Entscheidung für eine geeignete Theorie

Die zusätzliche Berücksichtigung der Schubverformungen und Trägheitsmomente bei der Mindlin-Theorie läßt bessere Ergebnisse erwarten. Besonders große Unterschiede zwischen den beiden Theorien zeigen sich in den Eigenfrequenzen.

Weil eine dynamische Belastung vorliegt und außerdem die Dicke der Platte nach oben unbeschränkt ist, wird hier die Mindlin-Theorie bevorzugt.

3 Berechnungsmethoden

3.1 Allgemeines

Zur Lösung eines komplizierten Problems, besonders eines, das analytisch nicht mehr zu lösen ist, bietet sich die Methode der finiten Elemente an. Der Grundgedanke dieser Methode ist, eine Struktur in zahlreiche kleine Teile zu zerlegen, in denen die physikalischen Forderungen nicht exakt, aber wenigstens hinreichend genau erfüllt werden.

Der Vorteil der Methode der finiten Elemente liegt in folgendem :

1. Fast alle Probleme können gelöst werden. Besonders bei denjenigen, die durch analytische Methoden nicht lösbar sind oder deren Lösung sehr aufwendig ist, zeigen sich die Vorteile dieser Methode.
2. Der Grundgedanke und die Behandlung sind einfach zu verstehen.
3. Die Methode basiert auf bestimmten Prinzipien, wodurch die physikalischen Eigenschaften hinreichend genau eingehalten werden.

Wegen der Vorteile ist die Methode der finiten Elemente mit Unterstützung der rasch entwickelnden Rechenanlagen immer mehr von Bedeutung und findet immer mehr neue Anwendungen.

Als Nachteile der Methode der finiten Elemente sind zu nennen:

1. Die Anzahl der Unbekannten steigt mit der Zahl der Knotenpunkte, wodurch mehr Rechenzeit und Speicherbedarf erforderlich werden.

2. Die Genauigkeit ist in vielen Fällen schwierig abzuschätzen. Es kann auch nicht behauptet werden, daß sie mit zunehmender Anzahl der Elemente immer verbessert werden kann.

Über die Methode des finiten Elemente sind zahlreiche Bücher (wie zum Beispiel [30] [31]) geschrieben worden, in denen man die Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten finden kann.

Die Platten unter statischer und dynamischer Belastung nach den in Kapitel 2 beschriebenen Theorien kann man zwar, wie man dort sieht, analytisch berechnen, wenn die Bedingung gleicher Dicke erfüllt wird. Aber für die Problemstellung der Optimierung, das heißt, Platten mit veränderlichen Dicken, können die Gleichungen in Kapitel 2 im allgemeinen nicht mehr analytisch gelöst werden. Aus diesem und den oben genannten Gründen wird die Methode der finiten Elemente gewählt.

In diesem Kapitel wird ein Element hergeleitet. Bei der Aufstellung des Elementes werden zwei Aspekte berücksichtigt:

1. Genauigkeit,
2. möglichst geringer Speicherbedarf.

In den letzten Abschnitten dieses Kapitels werden die Lösungsmethoden für das Differentialgleichungssystem beschrieben, welches durch die Methode der finiten Elemente hergeleitet worden ist.

3.2 Aufstellung der Elementmatrizen

Beim Aufstellen der Elementmatrizen wird in dieser Arbeit die in dem Buch von Zienkiewicz [31] beschriebene Methode verwendet, bei der im Anschluß an die Auswahl geeigneter Verformungsansätze der weitere Vorgang rein mathematisch erfolgt. Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist das Prinzip der virtuellen Arbeit. Eine andere Herleitung findet man in dem Buch von Bathe/Wilson[30], wobei das Prinzip des Minimums des Gesamt-Potentials verwendet wurde. Die einzelnen Vorgänge werden hier nicht angegeben; das Ergebnis aus den beiden Herleitungen ist identisch.

Vor dem Aufstellen der Elementmatrizen ist zu erläutern, daß bei der Optimierung die Annahme gemacht wird, daß die Plattendicke unabhängig von ϑ (der Umfangrichtung) ist (s.S. 9). Unter dieser Annahme wird die Platte nur in Radiusrichtung diskretisiert(Abb. 3.1). Beim Aufstellen der Matrizen wird weiterhin vorausgesetzt, daß sich die Dicke innerhalb eines Streifens nicht ändert. Die Abweichung der Lösung bei dieser Annahme nimmt mit zunehmender Anzahl der Elemente ab. Unter dieser Annahme wird der Speicherbedarf und die Rechenzeit erheblich kleiner, da die Anzahl der Unbekannten erheblich geringer ist als bei einer Diskretisierung wie in Abb. 3.2.

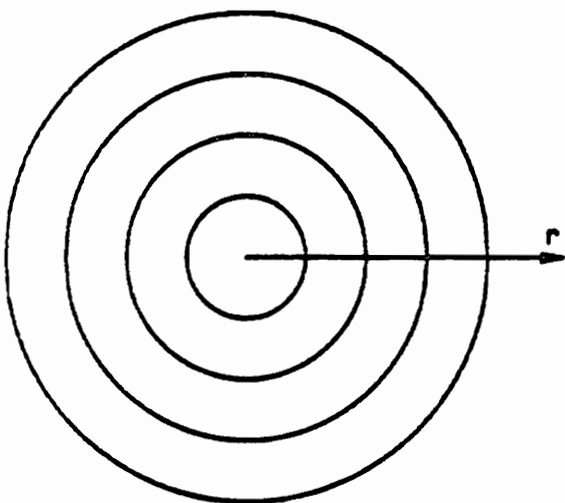


Abb. 3.1

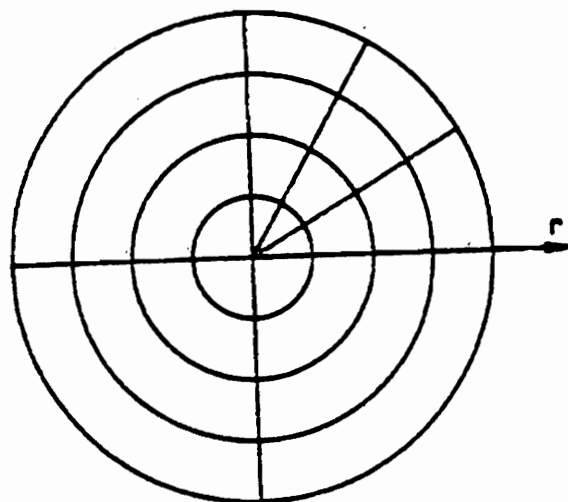


Abb. 3.2

3. 2. 1 Die Ansatzfunktionen eines Streifens

Wie in Kapitel 2 beschrieben ist, besitzen die Verschiebungen und Verdrehungen die Form

$$\begin{aligned} W &= W(r) \cos(m\vartheta), \\ \Psi &= \Psi(r) \cos(m\vartheta), \\ \Phi &= \Phi(r) \sin(m\vartheta), \end{aligned} \quad (3. 1)$$

wenn die Belastung sich gemäß $Q=q(r)\cos(m\vartheta)$ darstellen läßt.

Diese Formen werden für die Ansatzfunktionen übernommen, d. h. innerhalb eines Streifens ändern sich die Verformungen in tangentialer Richtung mit den Kreisfunktionen. $W(r)$, $\Psi(r)$ und $\Phi(r)$ sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned} W(r_1) &= W_1, \\ \Psi(r_1) &= \Psi_1, \\ \Phi(r_1) &= \Phi_1, \\ W(r_2) &= W_2, \\ \Psi(r_2) &= \Psi_2, \\ \Phi(r_2) &= \Phi_2 \end{aligned} \quad (3. 2)$$

erfüllen.

Dabei sind W_1 , Ψ_1 , Φ_1 und W_2 , Ψ_2 , Φ_2 die größten Verformungen am inneren bzw. äußeren Rand in den jeweiligen Richtungen.

Zur Wahl der Ansatzfunktionen der Verformungsgrößen ist folgendes zu berücksichtigen:

1. Die Verformungsgrößen müssen an jedem beliebigen Punkt der Platte stetig sein.
2. Die Ansatzfunktionen müssen beliebige Randbedingungen erfüllen können.

3. Die Ansatzfunktionen sollen eine hohe Genauigkeit gewährleisten.

Mit diesen Überlegungen werden die Ansatzfunktionen eines Streifens wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} W(r) &= C_1 r^m + C_2 r^{m+2}, \\ \Psi(r) &= C_3 r^{m-1} + C_4 r^{m+1}, \\ \Phi(r) &= C_5 r^{m-1} + C_6 r^{m+1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

C_1 bis C_6 sind Konstanten, die durch die Übergangsbedingungen (3.2) bestimmt werden können.

Die ersten zwei Aspekte in der Überlegung sind offensichtlich erfüllt, und der dritte wird in den folgenden Abschnitten dargestellt. Werden die Übergangsbedingungen (3.2) eingeführt, so lassen sich die Ansatzfunktionen (3.3) umschreiben in

$$[f(r)] = [N(r)] [TG] \{\delta\}. \quad (3.4)$$

$[f(r)]$ ist dabei der aus $[W(r) \ \Psi(r) \ \Phi(r)]$ bestehende Vektor.

$[N(r)]$ umfasst die in Gleichung (3.3) definierten Funktionen und hat folgende Form

$$[N(r)] = \begin{bmatrix} r^m & 0 & 0 & r^{m+2} & 0 & 0 \\ 0 & r^{m-1} & 0 & 0 & r^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & r^{m-1} & 0 & 0 & r^{m+1} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

$\{\delta\}$ enthält die Knotenunbekannten $[W_1 \ \Psi_1 \ \Phi_1 \ W_2 \ \Psi_2 \ \Phi_2]$.

$[TG]$ ist eine Matrix, die den Vektor $\{\delta\}$ und C verknüpft $\{C = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6\}\}$:

$$[C] = [TG] \{\delta\},$$

$$[TG]^{-1} = \begin{bmatrix} r_1^m & r_1^{m+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1^{m-1} & r_1^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_1^{m-1} & r_1^{m+1} \\ r_2^m & r_2^{m+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2^{m-1} & r_2^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2^{m-1} & r_2^{m+1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Wird die Gleichung (3. 4) in (3. 1) eingesetzt, dann erhält man

$$[f] = [SC] [N(r)] [TG] \{\delta\}. \quad (3.7)$$

[f] enthält [W Ψ Φ], während [SC] nur aus trigonometrischen Funktionen besteht:

$$[SC] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(m\vartheta) & & & & & \\ & \text{Cos}(m\vartheta) & & & & \\ & & \text{Sin}(m\vartheta) & & & \\ & & & \text{Cos}(m\vartheta) & & \\ & & & & \text{Sin}(m\vartheta) & \\ & & & & & \text{Cos}(m\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Nach Gleichung (2. 16) können die Dehnungen durch Differentiation von Gleichung (3. 7) hergeleitet werden

$$[\varepsilon] = [SCS] [B] [TG] \{\delta\}. \quad (3.9)$$

[ε] enthält die Dehnungen {ε_{rr} ε_{θθ} ε_{rθ} γ_{rz} γ_{θz}}. [SCS] ist eine quadratische Matrix

$$[SCS] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(m\vartheta) & & & & & \\ & \text{Cos}(m\vartheta) & & & & \\ & & \text{Sin}(m\vartheta) & & & \\ & & & \text{Cos}(m\vartheta) & & \\ & & & & \text{Sin}(m\vartheta) & \\ & & & & & \text{Cos}(m\vartheta) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

mit von Null verschiedenen Elementen nur auf der Hauptdiagonalen. [B] ist eine von dem Radius r abhängige Matrix

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (m-1)r & (m+1)r^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{m-2} & r^m & mr^{m-2} & mr^m \\ 0 & 0 & -mr^{m-2} & -mr^m & (m-2)r^{m-2} & mr^m \\ mr^{m-1} & (m+2)r^{m+1} & r^{m-1} & r^{m+1} & 0 & 0 \\ -mr^{m-1} & -mr^{m+1} & 0 & 0 & r^{m-1} & r^{m+1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die bisher erhaltenen Ergebnisse nur für einen Streifen mit einem inneren Radius $r_1 > 0$ und $m > 1$ gelten. Sonst müssen die Ansatzfunktionen entsprechend geändert werden. Beispielweise muß C_1 gleich Null sein, wenn $r_1 = 0$ ist und $m > 0$.

3.2.2 Aufstellung der Steifigkeitsmatrix

Nach der Vorbereitung in den vorigen Abschnitten kann jetzt die Steifigkeitsmatrix für einen Streifen aufgestellt werden, wobei die Matrizen (3.6) (3.10) (3.11) in die Gleichung

$$[K^e] = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \{[SCS][B][TG]\}^T [D] \{[SCS][B][TG]\} r d\theta dr \quad (3.12)$$

eingesetzt werden.

$[K^e]$ ist die zu berechnende Steifigkeitsmatrix.

In die Matrix $[D]$ fließen die Materialeigenschaften und die Plattendicke h ein.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & & & & \\ \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & & & & \\ & & \frac{Gh^3}{12} & & & \\ & & & k^2 Gh & & \\ & & & & k^2 Gh & \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Obwohl Gleichung (3. 12) bei vorgegebenem m leicht zu integrieren ist, wird hier eine numerische Integration durchgeführt; dadurch wird die Steifigkeitsmatrix $[K^e]$ weicher als bei der exakten Integration, ergibt aber, wie aus Testrechnungen zu ersehen ist, eine Korrektur der Fehler aus den Ansatzfunktionen. Nachdem die Steifigkeitsmatrix für jeden Streifen bestimmt worden ist, wird sie in die globale Steifigkeitsmatrix des gesamten Systems $[K]$ eingesetzt.

$$[K] = \left[\begin{array}{c} \boxed{K^1} \\ \boxed{K^2} \\ \boxed{K^3} \end{array} \right] \quad \text{Skyline} \quad (3. 14)$$

Alle Nicht-Null-Elemente in der Steifigkeitsmatrix liegen, wie wir sehen, eng zusammen in der Nähe der Hauptdiagonalen. Außerdem kann festgestellt werden, daß die Matrix $[K^e]$ in Gleichung (3. 12) mit (3. 13) symmetrisch ist. Daraus folgt eine symmetrische Gesamtsteifigkeitsmatrix $[K]$. Um Speicherplatz zu sparen, werden nur die Nicht-Null-Elemente in (3. 14) zwischen der Hauptdiagonalen und der Skyline in einem eindimensionalen Feld abgespeichert. Die Adressen der Elemente, die auf der Hauptdiagonalen liegen, werden in einem anderen Feld gespeichert, wie in dem Buch von Bathe/Wilson beschrieben. Eine Untersuchung der Konvergenz der hier aufgestellten Steifigkeitsmatrix wird in den folgenden Abschnitten durch Beispiele dargestellt.

3. 2. 3 Aufstellung der Massenmatrix

Ähnlich wie beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix kann die Massenmatrix durch

$$[M^e] = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \{[SC][N(r)][TG]\}^T [P] \{[SC][N(r)][TG]\} r d\theta dr$$

(3. 15)

berechnet werden,

wobei die Matrix [P]

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{\rho h^3}{12} & & \\ & \frac{\rho h^3}{12} & \\ & & \rho h \end{bmatrix}$$

(3. 16)

die Dichte ρ der Platte enthält.

Die globale Massenmatrix [M], die aus den Elementmassenmatrizen [M^e] (e= 1, 2, , n, n ist die Anzahl der Streifen) aufgebaut wird, hat genauso viele Nicht-Null-Elemente wie die Steifigkeitsmatrix [K] und den gleichen Speicherplatzbedarf.

Mit einer Änderung der Ansatzfunktionen [f(r)] (3. 4) bei dem Aufstellen der Massenmatrix [M^e] können der Speicherbedarf und die Rechenzeit weiter reduziert werden, indem angenommen wird, daß

für $r_1 \leq r \leq (r_1+r_2)/2$

$$W(r) = W_1$$

$$\Psi(r) = \Psi_1$$

$$\Phi(r) = \Phi_1$$

und für $(r_1+r_2)/2 < r \leq r_2$

$$W(r) = W_2$$

$$\Psi(r) = \Psi_2$$

$$\Phi(r) = \Phi_2$$

(3. 17)

3. 2. 4 Der Lastvektor

Der Lastvektor eines Streifens berechnet sich zu

$$\{F^e\} = \int_r^{r_2} \int_0^{2\pi} \{[SC][N(r)][TG]\}^T \{q\} r d\vartheta dr . \quad (3.20)$$

$[SC]$, $[N(r)]$ und $[TG]$ sind in Abschnitt (3.2.1) definiert.

$\{q\}$ ist die äußere Belastung und enthält drei Elemente in drei Richtungen. In $W(r)$ -Richtung sind es die senkrecht zur Mittelebene der Platte wirkenden verteilten bzw. konzentrierten Kräfte, in $\Psi(r)$ - und $\Phi(r)$ -Richtung die entsprechenden verteilten bzw. konzentrierten Momente.

3. 2. 5 Die Schnittgrößen

Nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese beträgt die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\vartheta\vartheta}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\vartheta\vartheta} + 3\sigma_{r\vartheta}^2} \Big|_{|z|=h/2} . \quad (3.21)$$

Die Spannungen in (3.21) lassen sich in Momente umschreiben

$$M_v = \sqrt{M_{rr}^2 + M_{\vartheta\vartheta}^2 - M_{rr} M_{\vartheta\vartheta} + 3M_{r\vartheta}^2} . \quad (3.22)$$

Eine Beschränkung bei der Optimierung ist, daß das größte Vergleichsmoment eine zulässige Größe (von der Dicke abhängig) nicht überschreiten darf. Deshalb braucht nur das Vergleichsmoment ausgerechnet zu werden. Werden die Eigenschaften, daß $[M_{rr} M_{\vartheta\vartheta}]$ in ϑ -Richtung in der Form $\cos(m\vartheta)$ und $M_{r\vartheta}$ in der Form $\sin(m\vartheta)$ dargestellt werden können, berücksichtigt, so kann festgestellt

werden, daß das Vergleichsmoment M_V seinen größten Wert entweder bei $\vartheta=0$

$$M_V = \sqrt{M_{rr}^2 + M_{\vartheta\vartheta}^2 - M_{rr} M_{\vartheta\vartheta}} \quad (3.23)$$

oder bei $\vartheta = \frac{\pi}{2m}$

$$M_V = \sqrt{3} M_{r\vartheta} \quad (3.24)$$

annimmt, wenn die Belastung sich in der Form $Q = q(t) \cos(m\vartheta)$ darstellen läßt.

Um die Schnittgrößen $[M_{rr} M_{\vartheta\vartheta} M_{r\vartheta}]$ auszurechnen, werden die Ansatzfunktionen (3.1) in Gleichung (2.13) eingesetzt.

bei $\vartheta = 0$

$$\begin{bmatrix} M_{rr} \\ M_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} [m+1+\nu]r^{m-2} & [m+1+\nu]r^m & \nu r^{m-2} & \nu r^m \\ [\nu(m+1)+1]r^{m-2} & [\nu(m+1)+1]r^m & r^{m-2} & r^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix},$$

(3.25)

und bei $\vartheta = \frac{\pi}{2m}$

$$M_{r\vartheta} = \frac{1-\nu}{2} D \begin{bmatrix} -mr^{m-2} & -mr^m & (m-2)r^{m-2} & mr^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Bemerkungen:

1. Zur Berechnung von $[M_{rr} M_{\vartheta\vartheta} M_{r\vartheta}]$ werden die Werte in Meridian - Mitte eines Streifens genommen.
2. Für $Q = q(t) \cos(m\vartheta)$ wird der Maximalwert aus (3.23) und (3.24) gewählt; anderenfalls muß entlang des Umfangs der Maximalwert ermittelt werden.

3.2.6 Differentialgleichungen

Die Differentialgleichungen des gesamten Systems unter dynamischer Belastung lauten:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (3.27)$$

$\{\delta\}$ enthält die Knotenunbekannten, während $\{\ddot{\delta}\}$ die zweite Ableitung von $\{\delta\}$ nach der Zeit bezeichnet. $\{F\}$ ist der Lastvektor des gesamten Systems. Die Differentialgleichungen in (3.27) können unter bekannten Randbedingungen und Anfangsbedingungen (Anfangslage $\{\delta\}$ und Anfangsgeschwindigkeit $\{\dot{\delta}_0\}$) gelöst werden.

Lösungsverfahren für das Differentialgleichungssystem werden in nachfolgendem Abschnitt (3.3) erläutert.

3.2.7 Konvergenzbetrachtung der Matrizen

In diesem Abschnitt wird das Konvergenzverhalten der in den vorigen Abschnitten aufgestellten Matrizen durch zwei Beispiele untersucht.

Zum Vergleich werden lineare Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} W(r) &= C_1 + C_2 r \\ \Psi(r) &= C_3 + C_4 r \\ \Phi(r) &= C_5 + C_6 r \end{aligned} \tag{3.28}$$

gewählt und in den nachfolgenden Abbildungen als Fall 1 dargestellt.

Die Ergebnisse aus den im Abschnitt (3.2.1) dargestellten Ansatzfunktionen werden in den Abbildungen als Fall 2 bezeichnet.

Beispiel 1

Hier wird das in Kapitel 2 dargestellte Beispiel wieder gewählt, um die Brauchbarkeit der aufgestellten Steifigkeitsmatrix [K] (3.14) zu überprüfen. Die durch eine Belastung von $Q = P \cdot r \cdot \cos(2\vartheta)$ beanspruchte Platte wird in 25 Streifenelemente aufgeteilt. Zum Vergleich werden die Ergebnisse und die analytische Lösung in den Abbildungen dargestellt.

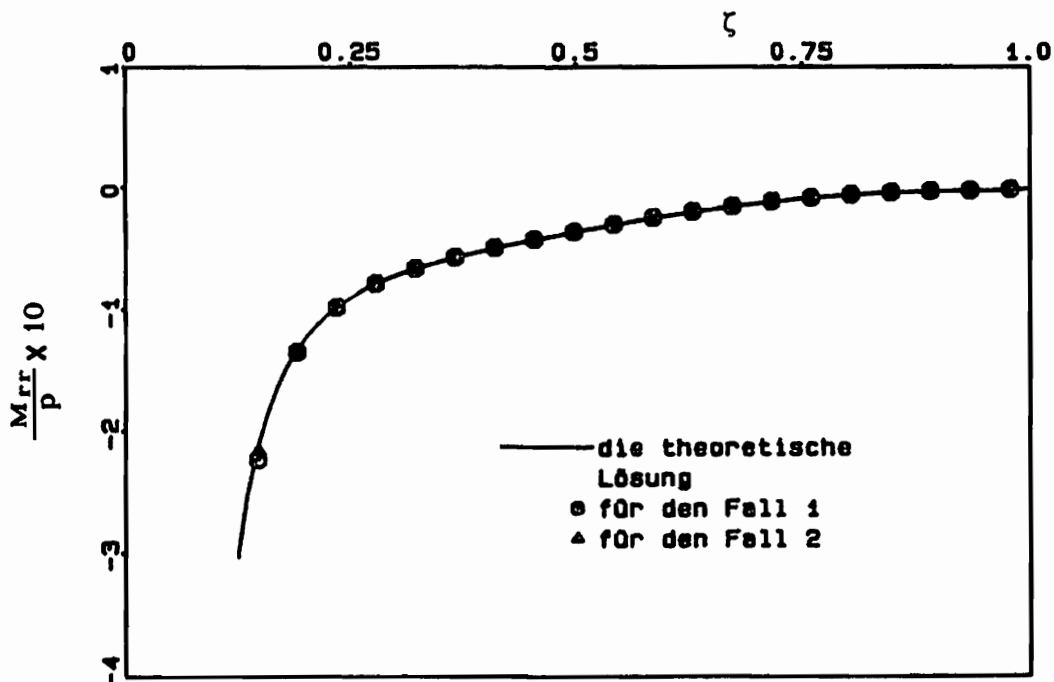


Abb. 3.4 Moment M_{rr}

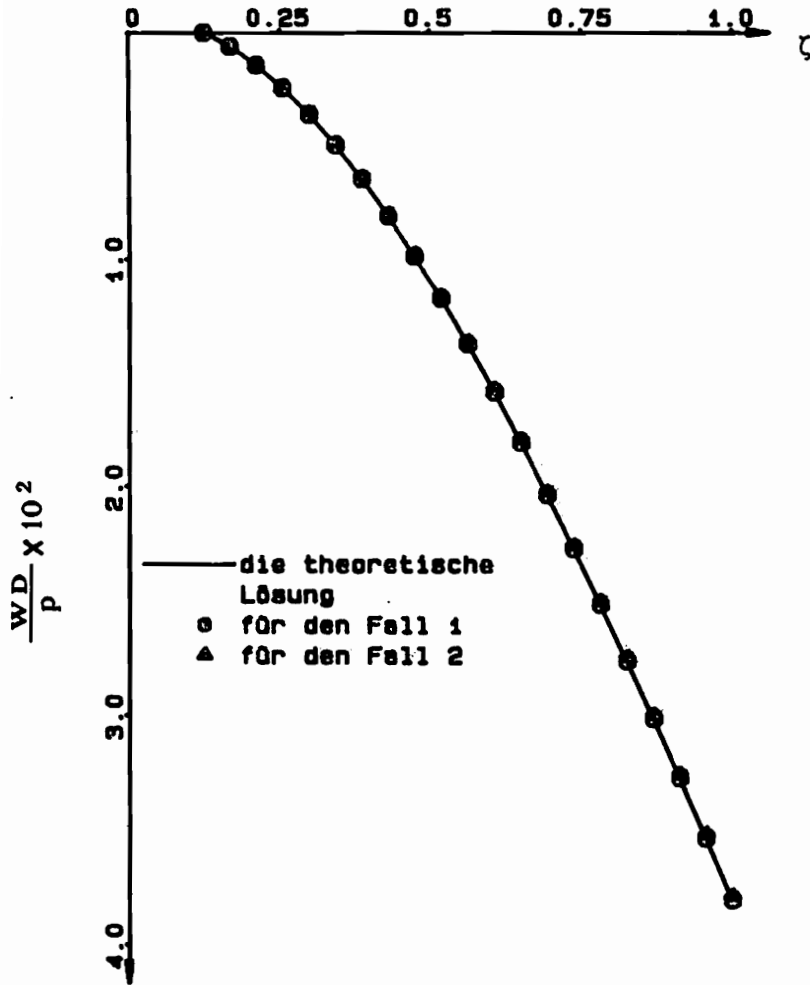


Abb. 3.5 Durchbiegung

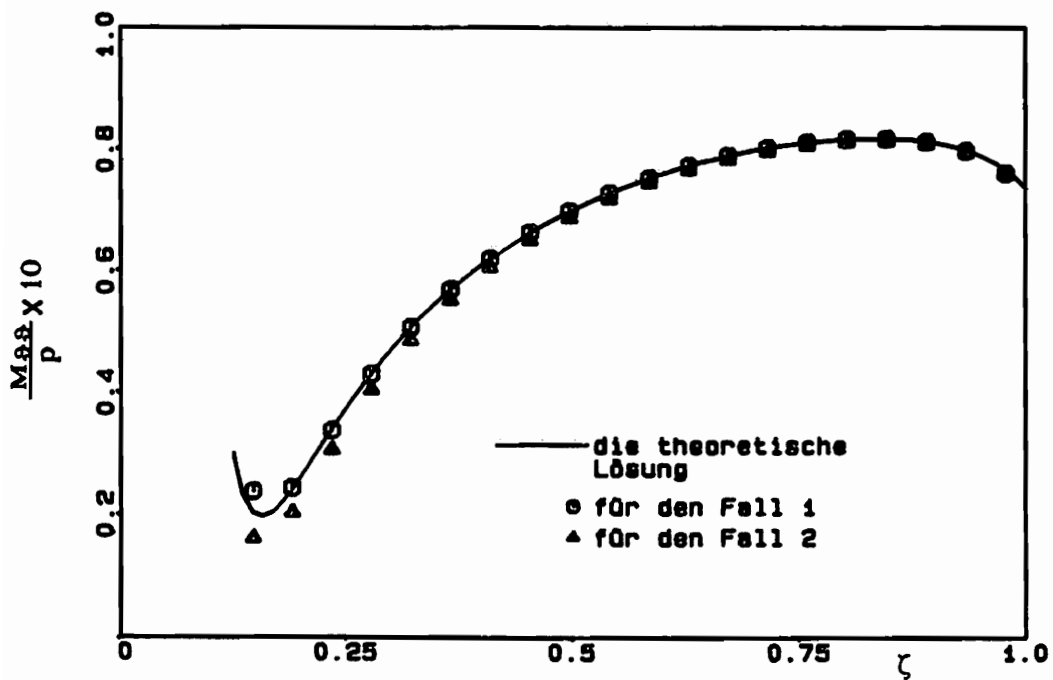


Abb. 3.6 Moment $M_{\theta\theta}$

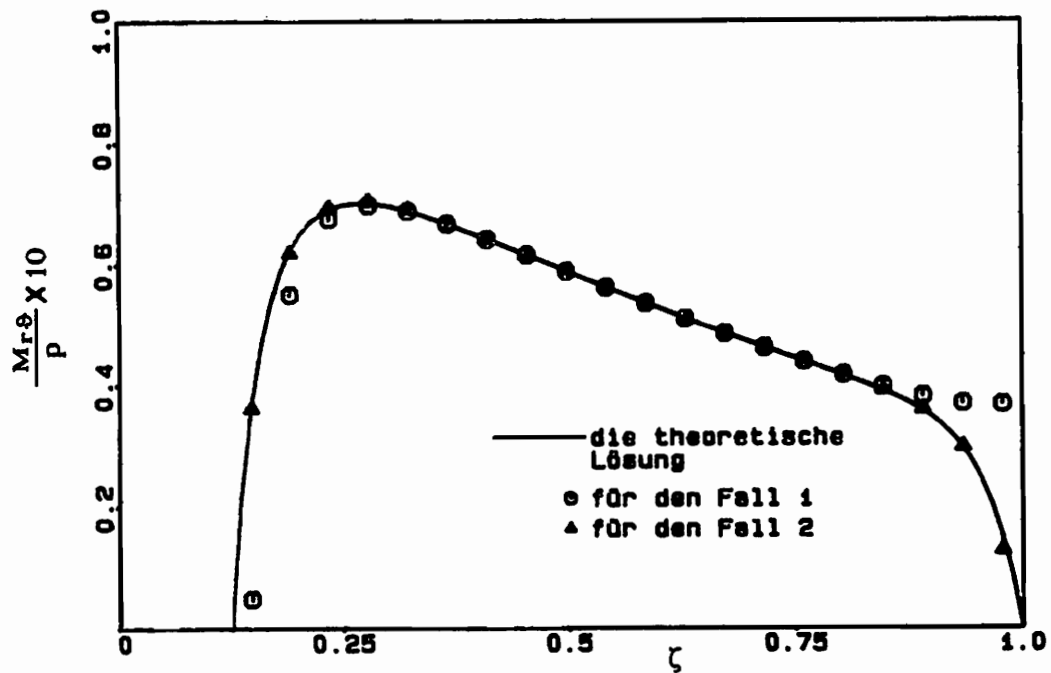


Abb. 3.7 Moment $M_{r\theta}$

In den Abb.n fallen zwei Punkte auf:

1. Die beiden Ansatzfunktionen (3. 3) und (3. 28) ergeben gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung für die Durchbiegung und für das Moment in radialer Richtung.
2. Die Ansatzfunktion (3. 28) liefert eine bessere Übereinstimmung für das Moment $M_{\theta\theta}$. Die Ansatzfunktion (3. 3) liefert eine gute Näherung für $M_{r\theta}$, während die Ansatzfunktion (3. 28) eine nichtakzeptable Abweichung von der analytischen Lösung an den Rändern zeigt.

Beispiel 2

In diesem Beispiel wird das Konvergenzverhalten der aufgestellten Massenmatrix $[M]$ durch Wiedergabe der Eigenwerte mit zunehmender Anzahl der Streifenelemente betrachtet. Die Platte ist dieselbe wie im Beispiel 1. In der Abb.n wird die Ungenauigkeit der ersten bzw. fünften Eigenwerte dargestellt, die sich auf eine Durchbiegung in Umfangsrichtung in der Form $\cos(2\vartheta)$ beziehen.

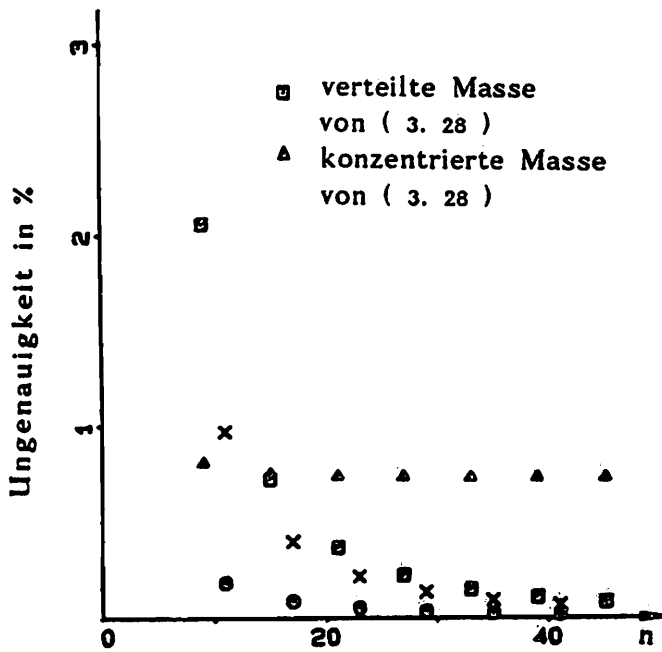


Abb. 3.8 Erste Eigenfrequenz

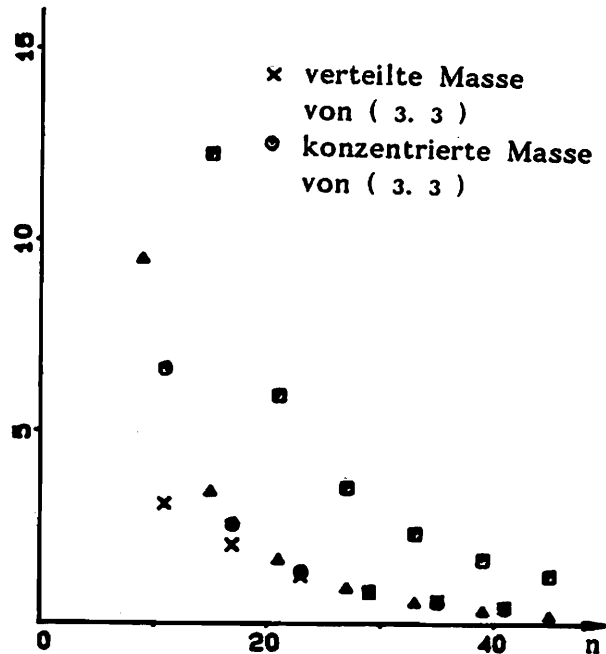


Abb. 3.9 Fünfte Eigenfrequenz

Anhand der Berechnung ist folgendes zu sagen:

1. Für beide Ansatzfunktionen konvergieren die Eigenfrequenzen mit zunehmender Elementzahl zu der analytischen Lösung.
2. Die Ansatzfunktion (3. 3) liefert eine bessere Näherung als die Ansatzfunktion (3. 28)
3. Eine eindeutig bessere Lösung von verteilten bzw. konzentrierten Massen ist bei beliebiger Anzahl von Elementen und beliebiger Eigenfrequenz nicht zu erzielen. Aber die Methode der

konzentrierten Massen mit den Ansatzfunktionen (3. 3) liefert mit zunehmender Anzahl der Streifenelemente eine bessere Konvergenz.

4. Höhere Eigenfrequenzen verlangen auch eine größere Anzahl der Streifenelemente, um die Ungenauigkeiten klein zu halten.

3. 3 Das verbesserte Ritz-Verfahren und die modale Analyse

3. 3. 1 Allgemeines

Das in Abschnitt (3. 2. 6) erhaltene Differentialgleichungssystem

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (3. 29)$$

ist ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, zu dessen Lösung es verschiedene Möglichkeiten gibt. In dieser Arbeit wird das verbesserte Ritz-Verfahren gewählt (Kapitel 3.3.2.2) und danach werden die transformierten Differentialgleichungen durch das Verfahren der modalen Analyse gelöst.

Das Differentialgleichungssystem (3. 29) könnte durch modale Analyse mit n (dem Freiheitsgrad) Eigenvektoren entkoppelt und genau beschrieben werden. Jedoch braucht die Entkoppelung, d. h. die Auswertung der n Eigenvektoren und der n Eigenwerte, sehr viel Rechenzeit. Näherungsweise könnte es auch durch k ($k < n$) Eigenvektoren beschrieben werden, was mit wachsendem k rasch zunehmende Rechenzeit braucht. Aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit das Ritz-Verfahren in einer speziellen Fassung verwendet.

Im Gegensatz zu den Eigenvektoren hängen die hier benutzten Ritz-Vektoren von dem Lastvektor ab. Das Differentialgleichungssystem kann durch Transformation mit Ritz-Vektoren nicht entkoppelt werden, sondern nur der Freiheitsgrad des Systems reduziert werden.

3. 3. 2 Das verwendete Ritz-Verfahren

3. 3. 2. 1 Die Transformation

Die benötigte Rechenzeit für das Differentialgleichungssystem (3. 29) hängt von dem Freiheitsgrad n und der Bandweite ab. Ein zweckmäßiges Verfahren besteht darin, das Gleichungssystem zuerst in ein Differentialgleichungssystem mit niedrigerem Freiheitsgrad umzuformen, welches das Gleichungssystem (3. 29) noch genügend genau wiedergibt.

Das Ritz-Verfahren dient zur Reduzierung des Freiheitsgrades. Statt Eigenvektoren $\Phi = \{ \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k \}$ werden die sogenannten Ritz-Vektoren $R = \{ R_1, R_2, \dots, R_k \}$ benutzt, die von der äußeren Belastung abhängen und deren Elemente mit der Massenmatrix $[M]$ orthogonalisiert sind. Es wird angenommen, daß sich die Verformungsgrößen $\{\delta\}$ durch R in der Form

$$\{\delta\} = R\{q\} \quad (3. 30)$$

beschreiben lassen.

Dabei ist $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ein aus den Ritz-Koordinaten aufgebauter Vektor.

Wird (3. 30) in die Differentialgleichung (3. 29) eingesetzt und von links mit R^T multipliziert, so erhält man

$$R^T[M] R\{\ddot{\mathbf{q}}\} + R^T[K] R\{\mathbf{q}\} = R^T F, \quad (3. 31)$$

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [K^*] \{\mathbf{q}\} = F^* . \quad (3. 32)$$

Durch eine Orthogonalisierung und anschließend Normierung wird $R^T[M] R$ zur Einheitsmatrix. Im Gegensatz zu der modalen Analyse, die eine diagonale Matrix $[K^*]$ liefert, ist hier $[K^*]$ im allgemeinen Fall nur eine symmetrische quadratische Matrix mit der Ordnung (k) .

Die Anfangsbedingungen $\{\mathbf{q}_0\}$ und $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$ werden durch

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_0\} &= R^T[M] \{\delta_0\} , \\ \{\dot{\mathbf{q}}_0\} &= R^T[M] \{\dot{\delta}_0\} \end{aligned} \quad (3. 33)$$

bestimmt.

Mit dem Gleichungssystem (3. 32) und den Anfangsbedingungen (3. 33) kann $\{\mathbf{q}\}$ in Abhängigkeit von der Zeit t berechnet werden. Die Verformungsgrößen werden mit Hilfe der Ritz-Vektoren durch Rücktransformation erhalten.

3.3.2.2 Die Bestimmung des Ritz-Vektors R

A : Der ursprüngliche Verfahren nach Wilson[32]

Der ursprüngliche Ritz-Vektor R wird folgendermaßen bestimmt:

1. Der erste Ritz-Vektor R_1

Als erster Ritz-Vektor R_1 wird die statische Verformung in Folge der äußeren Belastung F ohne zeitlichen Einfluß durch Orthogonalisierung mit der Massenmatrix [M] genommen

$$R_1^* = [K]^{-1} F ,$$

$$R_1 = R_1^* / (R_1^{*T} [M] R_1^*) . \quad (3.34)$$

2. Die weiteren Ritz-Vektoren R_i

Die weiteren Ritz-Vektoren werden durch den zuvor berechneten Ritz-Vektor R_{i-1} und Orthogonalisierung mit [M] bestimmt

$$R_i^{**} = [K]^{-1} [M] R_{i-1} ,$$

$$R_i^* = R_i^{**} - \sum CC_j R_j , \quad (j = 1, 2, \dots, i-1)$$

$$R_i = R_i^* / (R_i^{*T} [M] R_i^*) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (3.35)$$

wobei $CC_j = R_j [M] R_i^{**}$ gilt.

Der in der Iteration benutzte Vektor [M] R_{i-1} ist proportional zu der "Trägheitskraft" $\alpha^2 [M] R_{i-1}$ ($\alpha^2 = R_{i-1}^T [K] R_{i-1}$), das heißt, daß die "Trägheitskraft" bei der Berechnung des nächsten Ritz-Vektors R_i als statische Belastung verwendet wird. Bei diesem Punkt wird eine Verbesserung in dem folgenden Abschnitt eingeführt.

B. Die Korrektur des Ritz-Vektors R

Wie in dem vorherigen Abschnitt erwähnt ist, werden die einem Ritz-Vektor entsprechenden Trägheitskräfte auf den nächsten Ritz-Vektor verschoben. Je kleiner die Trägheitskräfte sind, desto kleiner ist der Einfluß der nachfolgenden Ritz-Vektoren auf die Schwingungsantwort. Eine genauere Lösung mit möglichst wenigen Ritz-Vektoren kann nur dadurch erhalten werden, daß die nicht im Gleichgewicht befindlichen Trägheitskräfte, die zur Bestimmung des nächsten Ritz-Vektors übernommen werden, möglichst klein gehalten werden. Es wird hier ein Verfahren zur Bestimmung der Ritz-Vektoren vorgestellt, bei dem ein Teil der Trägheitskräfte mit den äußeren Belastungen (oder den vom vorherigen Ritz-Vektor übernommenen Trägheitskräften) im Gleichgewicht bleibt und der übrige Teil auf die Bestimmung des nächsten Ritz-Vektors verschoben wird.

1. Der erste Ritz-Vektor R_1 wird durch

$$\begin{aligned} {}^*R_1 &= [K]^{-1} F , \\ R_1^* &= ([K] - \alpha^2 [M])^{-1} F , \\ R_1 &= R_1^* / (R_1^{*T} [M] R_1^*) \end{aligned} \quad (3. 36)$$

bestimmt,

mit $\alpha^2 = {}^*R_1^T [K] {}^*R_1 / ({}^*R_1^T [M] {}^*R_1)$.

2. Die weiteren Ritz-Vektoren R_i werden durch

$$\begin{aligned} {}^*R_i &= [K]^{-1} [M] R_{i-1} , \\ R_i^* &= ([K] - \alpha^2 [M])^{-1} [M] R_{i-1} \end{aligned}$$

ermittelt,

wobei $\alpha^2 = \mathbf{R}_i^T [\mathbf{K}] \mathbf{R}_i / (\mathbf{R}_i^T [\mathbf{M}] \mathbf{R}_i)$ gilt.

Die weiteren Schritte zur Berechnung von \mathbf{R}_i sind wie in (3. 35) dargestellt.

Die beiden Fassungen A und B werden zur Ausrechnung des Vektors \mathbf{R}_i das Glied $[\mathbf{M}] \mathbf{R}_{i-1}$ auf ein und dieselbe Weise benutzt. Aber der Unterschied liegt darin, daß in Fassung B ein Teil der Trägheitskräfte $\alpha^2 [\mathbf{M}]$ berücksichtigt wird.

Dieses Verfahren liegt den nachfolgenden Rechnungen zugrunde.

3. 3. 2. 3 Zusammenfassung

Abschließend sollen einige wichtige Punkte des Ritz-Verfahrens erläutert werden

1. Zur Bestimmung der k Ritz-Vektoren wird wesentlich weniger Rechenzeit gebraucht als zur Bestimmung der ersten k Eigenvektoren, wobei die Rechenzeit mit zunehmender Anzahl k schnell ansteigt.
2. Das durch die Ritz-Matrix \mathbf{R} transformierte Differentialgleichungssystem ist weiterhin nicht entkoppelt, daher ist zu dessen Lösung ein weiteres Verfahren notwendig.
3. Die notwendige minimale Anzahl der Ritz-Vektoren k ist von der Genauigkeit abhängig.

3. 3. 3 Die modale Analyse [30]

Um das Differentialgleichungssystem (3. 29) genügend genau zu beschreiben, braucht man in den meisten Fällen nur eine erheblich kleinere Anzahl von Ritz-Vektoren als das System Freiheitsgrade besitzt. Deswegen ist die Ordnung des Differentialgleichungssystems (3. 32) im Vergleich zu der des ursprünglichen Systems (3. 29) sehr klein. Der Rechenzeitbedarf zur Lösung eines solchen Systems ist daher wesentlich geringer.

Das Differentialgleichungssystem (3. 32) ist ebenso wie (3. 29) ein gekoppeltes System, zu dessen Lösung hier zwei Verfahren zu empfehlen sind: die direkte Integration und die modale Analyse. Entscheidend für die Wahl eines Verfahrens ist hier nicht die Genauigkeit (ausgenommen beim zentralen Differenzen-Verfahren), sondern die Rechenzeit. Daher wird in dieser Arbeit die modale Analyse gewählt.

Die allgemeine Formulierung des Differentialgleichungssystems (3. 32) lautet

$$[M^*]\{\mathbf{q}\} + [K^*]\{\mathbf{q}\} = F^*, \quad (3. 37)$$

wobei $[M^*]$ eine symmetrische quadratische Matrix von der Ordnung (k) ist.

Werden die Koordinaten $\{\mathbf{q}\}$ durch die generalisierten Koordinaten $\{\mathbf{x}\}$

$$\{\mathbf{q}\} = \Phi \{\mathbf{x}\} \quad (3. 38)$$

ersetzt, wobei $\Phi = \{ \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k \}$ die mit $[M^*]$ orthogonalisierte Eigenvektorenmatrix des Differentialgleichungssystems (3. 37) ist und $\{\mathbf{x}\} = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \}$ gilt.

Wird (3. 39) von links mit Φ multipliziert, so erhält man mit (3. 38)

$$\begin{aligned} \Phi^T [M^*] \Phi \{\ddot{\mathbf{x}}\} + \Phi^T [K^*] \Phi \{\mathbf{x}\} &= \Phi^T \mathbf{F}^* , \\ \{\ddot{\mathbf{x}}\} + \Omega^2 \{\mathbf{x}\} &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3. 39)$$

mit der Diagonalmatrix

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_j^2 \end{bmatrix} , \quad (3. 40)$$

die durch $\omega_i^2 = \Phi_i^T [K^*] \Phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) bestimmt ist.

\mathbf{p} ist ein von der Belastung abhängiger Vektor und hat k Elemente.

Jede der k Gleichungen in (3. 39) entspricht einer Schwingung mit einem Freiheitsgrad, deren allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= A_i \text{Sin}(\omega_i \cdot t) + B_i \text{Cos}(\omega_i \cdot t) + \mathbf{x}_i^* \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, j) \quad (3. 41) \end{aligned}$$

ist.

A_i und B_i sind zwei Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen

$$\{\mathbf{x}_0\} = \Phi^T [M^*] \{\mathbf{q}_0\} ,$$

$$\{\dot{\mathbf{x}}_0\} = \Phi^T [M^*] \{\dot{\mathbf{q}}_0\}$$

bestimmt werden müssen. Da $[M^*]$ im Differentialgleichungssystem (3. 32) die Einheitsmatrix ist, lassen sich die Anfangsbedingungen in

$$\{\mathbf{x}_0\} = \Phi^T \{\mathbf{q}_0\},$$

$$\{\dot{\mathbf{x}}_0\} = \Phi^T \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \quad (3.42)$$

umschreiben.

\mathbf{x}_i^* in (3.41) stellt eine spezielle Lösung dar, die durch die Duhamel-sche Integration

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \mathbf{p}_{i(\tau)} \sin(t-\tau) d\tau \quad (3.43)$$

oder entsprechend dem Typ der Belastung direkt bestimmt werden kann.

Die Ritz-Koordinaten $\{\mathbf{q}\}$ werden durch Rücktransformation mit Hilfe von (3.38) erhalten.

An dieser Stelle ist folgendes zu erläutern

1. Die modale Analyse wird in dieser Arbeit nicht direkt bei dem Differentialgleichungssystem (3.29), sondern bei dem durch die Ritz-Matrix transformierten System (3.32) angewendet. Deshalb ist die benötigte Rechenzeit geringer.
2. Das Differentialgleichungssystem (3.32) wird mit vollen $j = k$ Eigenvektoren bei der modalen Analyse transformiert. Daher ist $\{\mathbf{q}\}$ eine exakte Lösung des Systems (3.32).
3. Die k Eigenwerte sind aus (3.32) bestimmt worden, und sind i. a. nicht dieselben wie die des Differentialgleichungssystems (3.29).
4. Zur Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte wird die Jacobi-Methode verwendet.

3.3.4 Konvergenzbetrachtungen

Das Konvergenzverhalten des dargestellten Ritz-Verfahrens wird in diesem Abschnitt mit Hilfe von zwei Beispielen untersucht.

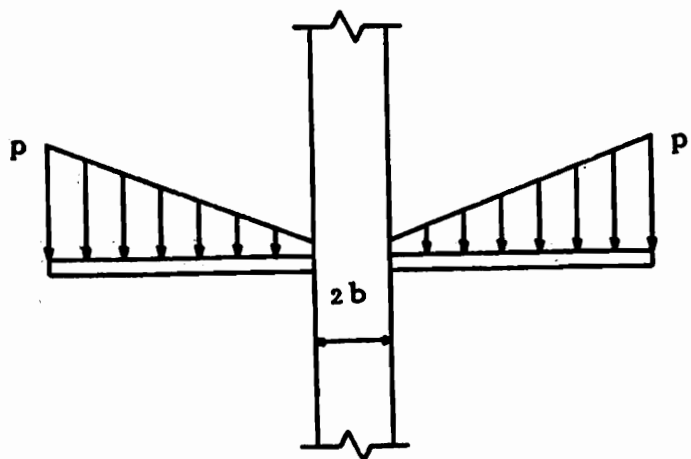
Als Beispiel wird die bereits in Kapitel 2 betrachtete Platte verwendet, die durch zwei unterschiedliche Belastungstypen beansprucht wird. Die Ringplatte wird in 25 Streifenelemente aufgeteilt und hat einen Freiheitsgrad von 76. Zuerst wird das Differentialgleichungssystem (3. 29) durch die modale Analyse mit vollen 76 Eigenvektoren gelöst. Anschließend werden die maximalen Verformungsgrößen jedes Knotens und die maximalen Vergleichsspannungen in der Mitte jedes Elementes bestimmt und als Vergleichsgrößen zugrundegelegt.

Zur Betrachtung des Konvergenzverhaltens des Ritz-Verfahrens wird das Differentialgleichungssystem (3. 29) mit unterschiedlicher Zahl von Ritz-Vektoren ausgewertet.

Zum Vergleich wird auch das Ergebnis, das durch modale Analyse mit den ersten Eigenvektoren erhalten wurde, zusammen mit dem des Ritz-Verfahrens in Abhängigkeit von der Anzahl der Eigen- bzw. Ritz-Vektoren tabellarisch dargestellt. Die in den Tabellen eingetragenen Größen sind die maximalen Fehler, die innerhalb der Platte auftreten.

Beispiel 1

Die äußere Belastung ist wie in der Abb. rechts dargestellt. Die Genauigkeit ist in Prozent in der Tabelle eingetragen.



Durchbiegungen

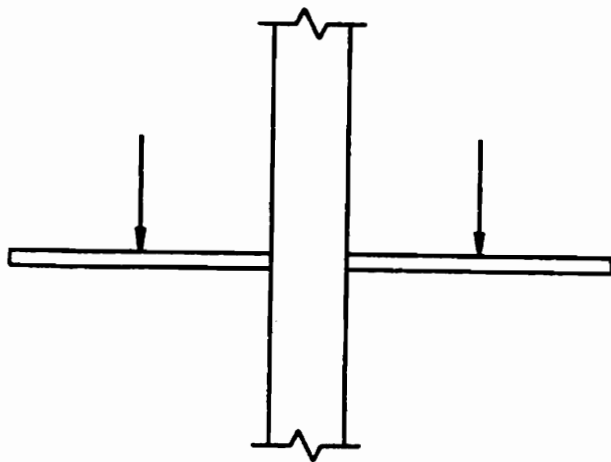
Anzahl	1	3	5	10
modale Analyse	3.4363	0.1265	0.9095	0.0198
Ritz-Verfahren	0.5777	0.3871	0.3521	0.0096
korrig. Ritz-V.	3.4400	0.1868	0.0864	0.0139

Vergleichsspannungen

Anzahl	1	3	5	10
modale Analyse	2.7499	0.1164	0.7683	0.0200
Ritz-Verfahren	0.4792	0.1607	0.1492	0.0228
korrig. Ritz-V.	2.7526	0.2276	0.0397	0.0164

Beispiel 2

Die Belastung wirkt nur auf den Mittelstreifen.



Durchbiegungen

Anzahl	1	3	5	10
modale Analyse	34.6895	2.8631	3.1477	0.6188
Ritz-Verfahren	9.3147	7.1108	3.1809	1.0476
korrig. Ritz-V.	42.7130	6.4204	1.2947	0.9010

Vergleichsspannungen

Anzahl	1	3	5	10
modale Analyse	29.3448	5.2356	3.6429	1.8419
Ritz-Verfahren	7.1471	4.1359	1.5833	1.5537
korrig. Ritz-V.	37.4321	3.5162	2.2397	1.0017

Bei der Betrachtung der Tabellen fallen folgende Punkte auf:

1. Mit einem Vektor liefert das Ritz-Verfahren die beste Näherung, wobei der Fehler bei gleichmäßig verteilter Belastung unter 1% liegt.
2. Im Gegensatz zu den anderen Verfahren konvergiert das korrigierte Ritz-Verfahren schneller und monoton. Mit 10 Vektoren liefert es das beste Ergebnis für die Vergleichsspannungen, die bei der Optimierung die entscheidende Rolle spielen.
3. Eine größere Anzahl der Vektoren ist notwendig um bei ungleichmäßig verteilter Belastung eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen.

Außerdem ist als interessanter Aspekt bei der Berechnung aufgefallen, daß die ersten Eigenwerte des transformierten Differentialgleichungssystem (3. 32) mit den niedrigsten des Systems (3. 29) übereinstimmen oder in ihrer Nähe liegen, während sich die höheren Eigenwerte stärker unterscheiden. Diese Erscheinung weist darauf hin, daß bei der Lösung des Differentialgleichungssystems (3. 29) die ersten Eigenvektoren am stärksten ins Gewicht fallen.

4. Die Platte gleicher Vergleichsspannungen

4. 1 Allgemeines

Konstruktionen gleicher Vergleichsspannungen sind relativ leicht zu ermitteln. In vielen anwendungsorientierten Büchern über Strukturoptimierung (wie [35] [38] [39]) wird diese Methode dargestellt. Vorteilhaft spart man in allen Fällen (im Vergleich zu Optimierung) Rechenzeit. Außerdem zeigt die Erfahrung, daß die dadurch erhaltene Konstruktion meistens sehr nahe an der optimierten liegt.

Unter einer Platte gleicher Vergleichsspannungen versteht man eine Platte, bei der an allen Punkten der Oberfläche die maximal zulässige Spannung erreicht wird. Da bei der Problemstellung festgelegt ist, daß die Dicke der Platte in Umfangsrichtung unveränderlich bleiben soll, kann die zulässige Spannung nur an einigen Punkten (wenigstens einem) in Umfangsrichtung mindestens einmal während des Schwingungsvorgangs erreicht werden.

Bei einer Konstruktion gleicher Vergleichsspannungen ist das Volumenminimum dann erreicht, wenn die Konstruktion statisch bestimmt ist und unter statischer Belastung besteht. Für den hier zu behandelnden allgemeinen Fall gilt diese Aussage jedoch nicht immer. Ein ganz einfaches Beispiel dafür findet man in [38].

Durch Vergleich des Volumens von Platten gleicher Vergleichsspannungen und optimierten Platten wird festgestellt, daß der Unterschied des Volumens zwischen den beiden Fällen meistens sehr gering ist. Die Form der Platte gleicher Festigkeit kann also als hervorragende Näherung der optimierten Plattenform angesehen werden, wenn die Rechenzeit als wichtiger Faktor berücksichtigt werden muß.

Die Rechenzeit für Platten gleicher Festigkeit ist fast in allen Fällen nur ein Bruchteil von derjenigen für optimierte Platten. Außerdem kann aus obengenanntem Grund die Platte gleicher Vergleichsspannung bei der Optimierung als Ausgangspunkt benutzt werden, wodurch der Aufwand an Rechenzeit oft erheblich reduziert werden kann.

4. 2 Die Platte gleicher Vergleichsspannung

Um eine Platte gleicher Vergleichsspannung unter einer bestimmten dynamischen Belastung zu erhalten, kann man von einer beliebigen Plattenform, die durch die Dicke $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ festgelegt ist, ausgehen. Bei jeder Iteration i wird die von der letzten Iteration bestimmte Platte neu analysiert, die Vergleichsschnittgröße M_V und die dazu gehörige Vergleichsspannung σ_V neu berechnet und dementsprechend die Dickenverteilung geändert.

Es wird erwartet, daß durch eine Änderung von h_k^i ($k = 1, 2, \dots, n$) die Vergleichsspannungen $(\sigma_V)_k^{i+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$(\sigma_V)_k^{i+1} = \frac{6 (M_V)_k^{i+1}}{(h_k^{i+1})^2} \quad (4.1)$$

(i bezeichnet die Iteration und k das Element)

die zulässige maximale Spannung σ_Z erreichen. Wegen der analytischen Undarstellbarkeit von $(\sigma_V)_k$ in Abhängigkeit von h_k ($k = 1, 2, \dots, n$) kann die zulässige maximale Spannung σ_Z nur iterativ gefunden werden.

Die Plattendicken h_k^{i+1} werden durch die Annahme, daß die Vergleichsschnittgrößen $(M_V)_k^{i+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) trotz der Änderung von h_k^i nicht wesentlich von $(M_V)_k^i$ abweichen [15], erhalten.

$$(M_V)_k^{i+1} = (M_V)_k^i \quad (4.2)$$

Ersetzt man $(M_V)_k^i$ und $(M_V)_k^{i+1}$ in (4.2) durch $(\sigma_V)_k^i$ und $(\sigma_V)_k^{i+1}$ und fordert $(\sigma_V)_k^{i+1} = \sigma_Z$, so erhält man

$$\sigma_z (h_k^{i+1})^2 = (\sigma_v)_k^i (h_k^i)^2, \quad (4.3)$$

$$h_k^{i+1} = h_k^i \left(\frac{(\sigma_v)_k^i}{\sigma_z} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Bei (4.4) muß noch die Bedingung

$$h_k^{i+1} \geq h_{zul} \quad (4.5)$$

berücksichtigt werden.

Hier stellt h_{zul} die minimal zulässige Dicke dar, die nicht nur die Kontinuität der Platte sichert, sondern auch die Übertragung der Schubkräfte ermöglicht.

Als Kriterium gilt daher entweder

$$\begin{cases} |1 - (\sigma_v)_k^i / \sigma_z| \leq \varepsilon \\ h_k^i \geq h_{zul} \end{cases} \quad (4.6)$$

oder $h_k^i = h_{zul}, \quad (4.7)$

wobei ε eine vorzugebene Toleranz ist.

Wenn für alle Elemente eines der beiden Kriterien (4.6) oder (4.7) erfüllt ist, wird die Iteration abgebrochen.

4.3 Beschleunigungsfaktor

Die in (4 . 4) dargestellte Dicken h_k^{i+1} hängen lediglich von der Vergleichsspannung an der betreffenden Stelle ab. Durch eine kleine Änderung von (4 . 4) kann der Aufwand an Rechenzeit verringert werden.

Im folgenden werden dazu drei einfache Möglichkeiten dargestellt.

A. Einführung eines Faktors α [44]

α ist eine konstante Größe, die man bei der Berechnung festlegen muß. Mit ihr erhält man anstelle von (4 . 4) den Ausdruck

$$h_k^{i+1} = h_k^i \left\{ 1 + \alpha \left(\sqrt{\frac{(\sigma_v)_k^i}{\sigma_z}} - 1 \right) \right\} . \quad (4 . 8)$$

Ein geeigneter Wert für α muß durch Probieren ermittelt werden. Bei statischen Problemen wird behauptet, daß α zweckmäßig mit 0.57 [44] angesetzt werden soll. Für Platten unter dynamischen Belastung erweisen sich Werte zwischen 1 und 1.3 als günstig.

B. Die Einführung von β [44]

Auf ähnliche Weise wie α wird eine Größe β eingeführt, welche die Dickenänderungen wie folgt beeinflusst

$$h_k^{i+1} = h_k^i \left(\frac{(\sigma_v)_k^i}{\sigma_z} \right)^\beta . \quad (4 . 9)$$

Formeln (4 . 8) und (4 . 9) können (4 . 4) ersetzen. Die Kriterien (4 . 6) oder (4 . 7) müssen dabei eingehalten werden.

C. Näherung

Hier wird eine Näherung der Platte gleicher Vergleichsspannung vorgestellt, welche das Kriterium nicht mehr unbedingt erfüllt.

Der Grundgedanke besteht darin, daß die Platte nach 10 Iterationen mit (4.4), (4.8) oder (4.9) schon sehr nahe an der Platte gleicher Vergleichsspannung liegt. Anschließend braucht man nur die Dicken der Elemente, bei denen die maximal zulässige Spannung überschritten ist, zu vergrößern. Nach wenigen Iterationen erhält man eine Platte, die der folgenden Bedingung genügt

$$(\sigma_v)_k^i \leq \sigma_z .$$

$$(k = 1, 2, , , , , n) \quad (4.10)$$

Interessant ist, daß eine durch diese Näherung erhaltene Platte ein kleineres Volumen hat als die Platte gleicher Vergleichsspannungen. Dadurch ist wieder gezeigt, daß die Platte gleicher Vergleichsspannungen nicht das minimale Volumen besitzt.

4. 4 Einige Vorbemerkungen

4. 4. 1 Anzahl der Elemente

Bei der Wahl der Anzahl der Elemente müssen drei Punkte berücksichtigt werden:

Es müssen so viele Elemente verwendet werden, daß das Lösungs- Konvergenzverhalten der Platte gewährleistet sind.

Die gewählte Anzahl der Elemente muß auch das Konvergenzverhalten des Volumens sicherstellen.

Wegen des Aufwandes an Rechenzeit sollen unter Berücksichtigung der obengenannten zwei Punkte möglichst wenige Elemente verwendet werden.

Der erste Punkt ist schon in Kapitel 3 besprochen worden. Hier sollen die letzten zwei Punkte behandelt werden.

In Abb.4.1 wird das Konvergenzverhalten in bezug auf die Anzahl der Elemente durch ein Beispiel dargestellt.

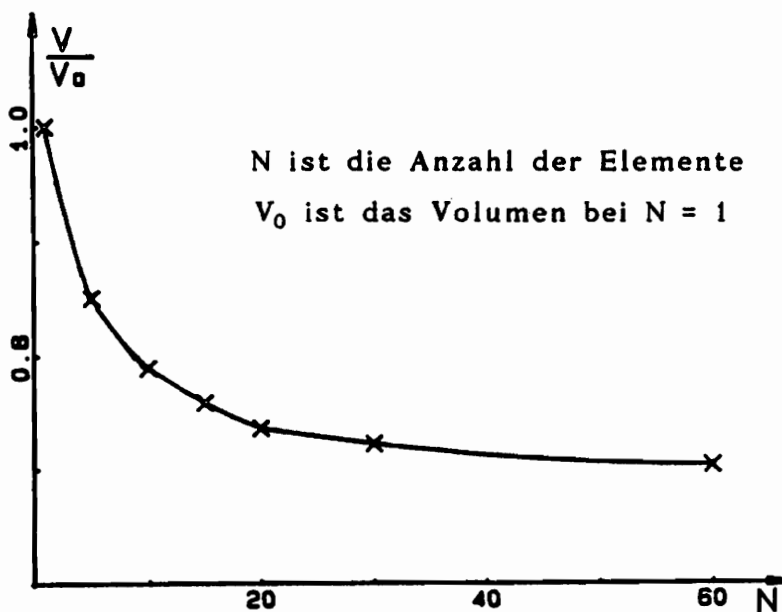


Abb. 4.1 Volumenverhältnis

4. 4. 2 Impulsformen und Wirkungsdauer

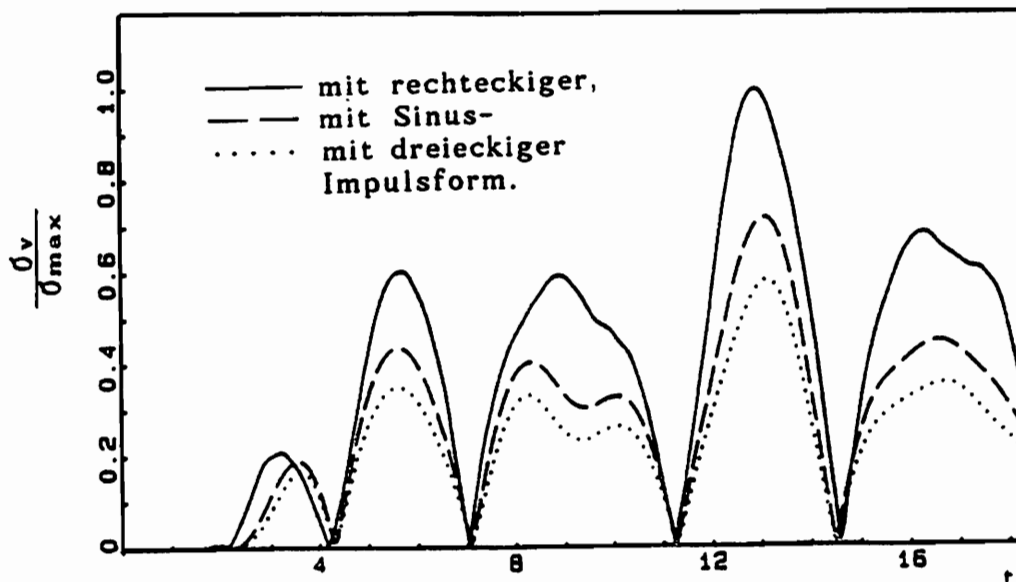
4. 4. 2. 1 Impulsformen

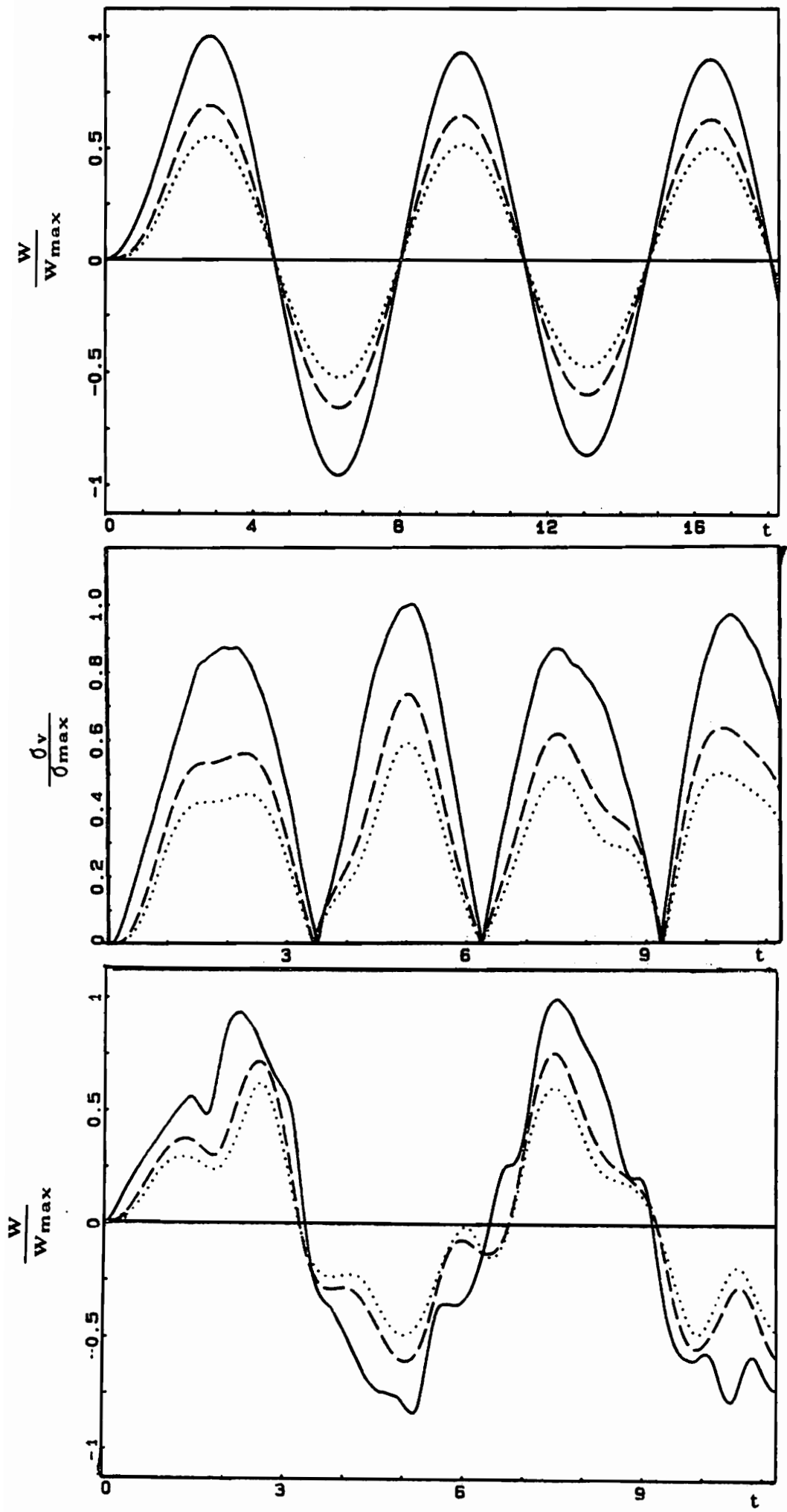
Unter unterschiedlichen Impulsformen reagieren die Platten auch unterschiedlich. Es ist sinnvoll, eine Impulsform herauszugreifen, unter deren Einwirkung die maximalen Spannungen nicht kleiner sind als bei den anderen. Eine mit dieser Impulsform erhaltene Platte kann auch unter anderen Impulsformen bestehen. Aus den zahlreichen Möglichkeiten werden drei Impulsformen herausgegriffen und miteinander verglichen.

Auch hier werden zwei Platten betrachtet. Die erste Platte ist durch ein Moment an einer zusätzlichen Masse beansprucht und die zweite Ringplatte wird gemäß $Q = q_0 \cos(2 \vartheta)F(t)$ belastet. Das Ergebnis wird in folgenden Abb. dargestellt.

Wie aus den Abb. ersichtlich ist, schwingt die erste Platte in einer nahezu idealen Sinus-Form, während sich die Schwingung der zweiten Platte aus mehreren (Eigen-) Schwingungsformen zusammensetzt.

In den Abb. zeigt sich deutlich, daß die rechteckige Impulsform die größte Spannung und Auslenkung hervorruft. Sie kann als Ersatz-Impulsform benutzt werden, wenn nicht genau entschieden werden kann, wie die Impulsform aussieht. Die dadurch erhaltene Platte kann unter anderen Impulsformen auch bestehen.





Abn. 4.2 Einfluß der Impulsformen

4. 4. 2. 2. Wirkungsdauer der Belastung

Bezüglich der Wirkungsdauer t_0 des Impulses $f(t)$ [normiert zu 1 entsprechend den Ausführung des letzten Abschnitts] [$0 \leq t \leq t_0$] kann nicht allgemein festgestellt werden, daß es ein bestimmtes t_0 gibt, unter dessen Wirkung die Vergleichsspannung am größten ist.

In Abb. 4.3 werden die Spannungen einer Ringplatte unter $Q = q_0 \cos(\vartheta)$ mit unterschiedlicher Wirkungsdauer dargestellt, wobei sich zeigt, daß die Spannungen bei der Belastungsdauer $T_1/2$ (T_1 ist die Schwingungsdauer der 1. Eigenform) am größten sind. Dieses Ergebnis läßt sich jedoch nicht auf konzentrierte Belastungen übertragen.

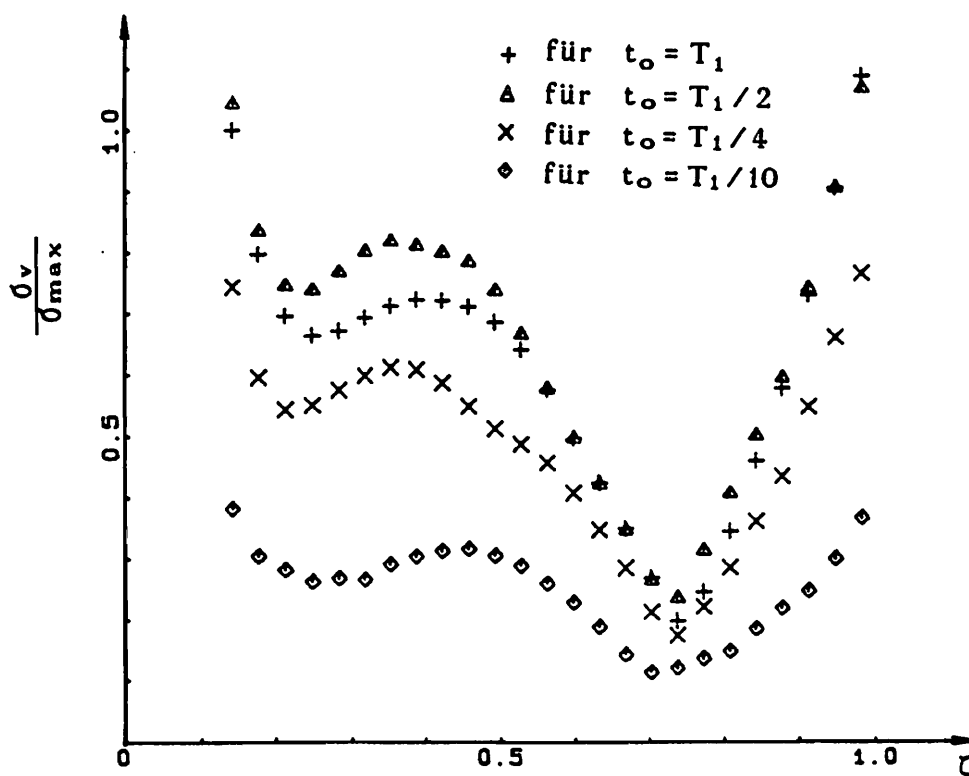


Abb. 4.3 maximal auftretende Vergleichsspannungen

4. 4. 3 Schwingungsdauer

Wie in Abschnitt (4 . 2) dargestellt und später bei der Optimierung noch gesehen werden kann, müssen die maximalen Spannungen in jedem Element und während des gesamten Schwingungsvorgangs berechnet werden, um die Dicke der Platte gemäß eines Kriteriums, welches von den maximalen Spannungen abhängt, zu bestimmen. In der Praxis wird jedoch der Schwingungsvorgang nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnet, ab dem gesichert ist, daß das Maximum der Spannungen erfaßt worden ist.

Wie diese Zeitlänge gewählt werden muß, kommt auf das Problem an. In Abschnitt 4. 4. 2. 1 zeigt es sich deutlich, daß die Rechnung bis zu $2T_1$ (T_1 ist die Schwingungsdauer der 1. Eigenform) durchgeführt werden muß, bis die größte Vergleichsspannung erhalten werden kann.

5. Optimierung

5.1 Allgemeines

Wie wir schon wissen, besitzen die Platten gleicher Vergleichsspannungen noch nicht das optimale Gewicht. Mit anderen Worten heißt das, daß wir noch Plattenformen finden können, die unter derselben Belastung die Spannungsrestriktionen erfüllen und gleichzeitig einen kleineren Materialaufwand in Anspruch nehmen.

Die mathematische Darstellung der Optimierung von Platten mit Hilfe der finiten Elemente kann wie folgt formuliert werden:

Minimiert wird

$$V = \sum c_i h_i, \quad (5.1)$$

$$G(h_i) \leq 0, \quad (5.2)$$

$$h_i \geq h_{\min}, \quad (5.3)$$

wobei $c_i = \text{konst}$, $G(h_i) = \sigma(h_i) - \sigma_{\text{zul}}$.

Hierbei handelt es sich um eine lineare Zielfunktion mit nicht-linearen Restriktionen, die durch die Plattendicken h_i ($i=1, 2, \dots, n$) nur implizit darstellbar sind.

Für eine solche Optimierung stehen einige inzwischen bekannt gewordene mathematische Verfahren [35]–[37] zu Verfügung, von denen eines ausgewählt werden soll, das für dieses Problem geeignet ist. Welches für dieses Problem geeignet ist, wird in Abschnitt 5.3 diskutiert. Hier soll noch gesagt werden, daß es in bezug auf die Anwendbarkeit und den Aufwand an Rechenzeit kein Optimierungsverfahren gibt, das für alle Problemstellungen gleichermaßen gut geeignet ist.

Bei einer konvexen Problemstellung sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen [39] [41] hinreichend für den Nachweis eines globalen Minimums. Bei allgemeinen nichtlinearen Problemstellungen kann keine Aussage

darüber gemacht werden, ob das gefundene Minimum ein globales oder lokales Minimum darstellt. Eine Verbesserung kann dadurch erreicht werden, daß man von verschiedenen Ausgangspunkten ausgeht und nachher die Ergebnisse vergleicht. Aber auch dann kann nicht mit Sicherheit behauptet werden, daß das globale Minimum gefunden wurde.

5. 2 Kriterien

Für die allgemeinen nicht-linearen Problemstellungen gelten die Kuhn-Tucker-Bedingungen[41] als notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum. Durch weitere Überlegungen und Ableitungen können die dem, in dieser Arbeit gestellten, Problem angepaßten Bedingungen hergeleitet werden.

5. 2. 1 Die Kuhn-Tucker-Bedingungen[41]

Es wird angenommen, daß bei dem betrachteten Punkt k Restriktionen

$$G_j(H_j) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k \leq m) \quad (s. 4)$$

aktiv sind (m ist die Anzahl der gesamten Restriktionen).

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten unter oben genannter Annahme

$$\nabla V + \sum \lambda_j \cdot \nabla G_j = 0 ,$$

$$\lambda_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (s. 5)$$

Diese Bedingungen lassen sich durch Abbildungen im 2-dimensionalen Fall deutlich machen.

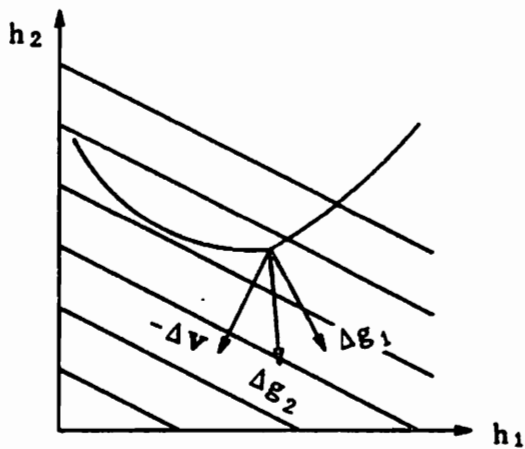


Abb. 5.1

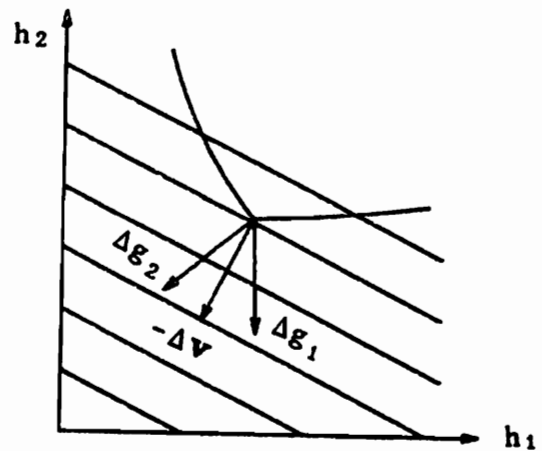


Abb. 5.2

Kuhn-Tucker-Bedingungen

Bei dem betrachteten Punkt in Abb. 5.1 liegt der negative Gradient der Zielfunktion V außerhalb des von den Gradienten der aktiven Restriktionen aufgespannten Bereiches. Für Gleichung (5.5) heißt das, daß ein negatives λ auftritt. Deshalb handelt es sich nicht um ein Minimum.

Dagegen liegt der negative Gradient der Zielfunktion V in Abb. 5.2 innerhalb des von den Gradienten der aktiven Restriktionen aufgespannten Bereiches und es existieren nur positive λ . Die Kuhn-Tucker-Bedingungen, d.h. auch die notwendigen Bedingungen eines Minimums der Zielfunktion, sind bei diesem betrachteten Punkt erfüllt.

5. 2. 2 Das geeignete Kriterium

Bei der Plattenoptimierung kommt es selten vor, daß die Anzahl der aktiven Restriktionen gleich der Anzahl der Raumdimensionen n ist (dies gilt nur für Platten gleicher Vergleichsspannungen ohne Dickenbeschränkung). Deshalb wird der Fall für $k < n$ in diesem Abschnitt diskutiert.

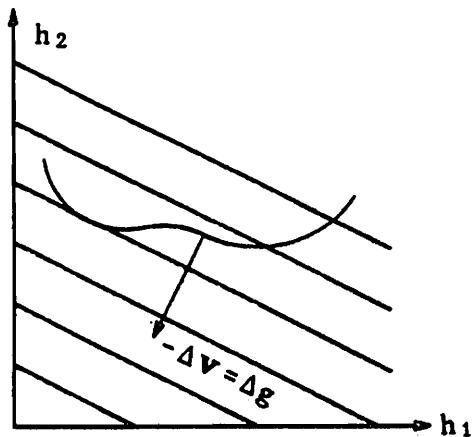


Abb. 5.3

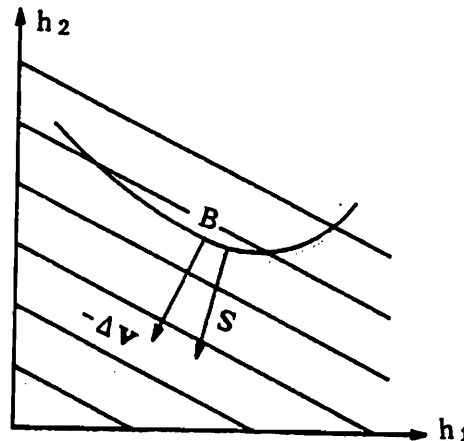


Abb. 5.4

Abb. 5.3 zeigt, daß die Kuhn-Tucker-Bedingung nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein Minimum ist.

Der theoretisch in Abb. 5.4 existierende Punkt B (Minimum) kann durch Verfolgung eines Optimierungsverfahrens mit einer vorgegebenen Rechengenauigkeit erreicht werden: im n-dimensionalen Raum nähert sich der durch die Gradienten der k aktiven Restriktionen gebildete Unterraum (oder die durch die Gradienten der k aktiven Restriktionen gehende Ebene) immer an den Gradienten der Zielfunktion an. Dabei ist eine Rechengenauigkeit, die den Winkel zwischen dem Gradienten der Zielfunktion und der durch die Gradienten der aktiven Restriktionen gebildeten Ebene beschreiben, vorzugeben.

Das Kriterium kann unter der Voraussetzung, daß der betrachtete Punkt in einem konvexen Bereich liegt, so formuliert werden:

Gesucht ist ein beliebiger Vektor \mathbf{S} , der die Bedingungen

$$\mathbf{S} \cdot \nabla V \leq -\delta,$$

$$\mathbf{S} \cdot \nabla G_i \leq -\delta \quad (5.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

nicht mehr erfüllt.

Existiert ein solcher Vektor \mathbf{S} beim betrachteten Punkt, so nimmt die Zielfunktion bei diesem Punkt ein Minimum an.

5.3 Optimierungsverfahren

Zum allgemeinen Problem der nichtlinearen Optimierung wird eine Reihe mathematischer Verfahren angeboten, die im wesentlichen in zwei Kategorien aufgeteilt werden können[37]:

1. die direkten Methoden

- (i) the complex method,
- (ii) the cutting plan method,
- (iii) the methods of feasible (usable) directions,

2. die indirekten Methoden

- (i) transformation of variables,
- (ii) Penalty function methods.

Bei der "complex method" wird zuerst die Zielfunktion an m (m größer als die Anzahl der Optimierungsvariablen) Punkten im zulässigen Bereich ausgewertet. Bei dem eigentlichen Optimierungsvorgang wird jeweils der Punkt mit dem schlechtesten Funktionswert durch einen neuen Punkt im zulässigen Bereich ersetzt. Der Vorgang wird so lange wiederholt, bis das Optimum hinreichend genau gefunden ist. Von Vorteil ist, daß dieses Verfahren nicht den Gradienten der Zielfunktion oder der Restriktionen benötigt.

Als indirekte Methode wird bei der "penalty function method" ein nichtlineares beschränktes Optimierungsproblem wie ein unbeschränktes behandelt, die Zielfunktion aber im Falle einer Verletzung einer Restriktion durch Hinzunahme einer Straffunktion künstlich erhöht. Es genügt hier ein Verfahren für unbeschränkte Optimierungsprobleme, dessen Konvergenz aber langsamer wird, wenn das zu suchende Optimum an einer Restriktion liegt.

Wegen des hohen Rechenaufwandes zur Auswertung der Zielfunktion wird zur Einbindung von Restriktionen in dieser Arbeit die Methode der "feasible directions" gewählt. Bei diesem Verfahren wird im Falle einer Verletzung einer Restriktion aus der aktuellen Suchrichtung und dem Gradienten der Restriktion eine neue Suchrichtung konstruiert, die zu einem neuen Punkt im zulässigen Bereich und zur Verbesserung der Zielfunktion führt. Zwar muß hier der Gradient auf den Restriktionen gebildet werden, aber das Konvergenzverhalten wird bei geeigneter Wahl der neuen Suchrichtung oft verbessert.

5. 3. 1 Die Methode der "feasible directions" [49]

Ausgehend von einem zulässigen Entwurfsvariablen H^* ($H = \{ h_1, h_2, \dots, h_n \}$; in dieser Arbeit die Plattendicken) wird H_j bei der nächsten Iteration $j+1$ in eine Richtung des von H_j abhängigen Vektors S_j um die Schrittweite $\alpha_j S_j$ ($\alpha_j > 0$) geändert

$$H_{j+1} = H_j + \alpha_j \cdot S_j . \quad (5. 7)$$

Hierbei sind zwei Bedingungen für S_j zu erfüllen:

1. Für ein kleines α_j darf H_{j+1} zu keiner Verletzung der Restriktionen führen, d. h.

$$S_j^T \cdot \nabla G_i \leq 0 \quad (5. 8)$$

($i = 1, 2, \dots, k$) aktive Restriktionen

d. h. S_j muß "feasible" (durchführbar) sein.

2. Die Zielfunktion muß in dieser Richtung S_j verkleinert werden können

$$S_j^T \cdot \nabla V \leq 0 \quad (s. 9)$$

d. h. S_j muß "usable" (brauchbar) sein.

I Bestimmung des Vektors S_j

Ungleichungen (s. 8) und (s. 9) sind zwei Bedingungen, die den Vektor S_j beschränken. Trotzdem existiert ein Bewegungsbereich für S_j , in dem beim betrachteten Punkt die in Abschnitt 5.2 dargestellten Bedingungen erfüllt werden können. Zur Bestimmung des Vektors S_j sind zwei Punkte zu beachten:

1. In der Richtung S_j soll die Zielfunktion möglichst stark verkleinert werden können. So soll S_j möglichst nahe an der negativen Richtung des Gradienten der Zielfunktion liegen.
2. Um eine größere Schrittweite erzielen zu können, soll S_j möglichst von den Restriktionen abgelenkt werden.

Unter Berücksichtigung dieser beiden Punkte kann S_j durch Einführung einer neuen Variablen β mit dem linearen Optimierungsverfahren bestimmt werden.

Die Formulierung lautet

Gesucht ist das Maximum von β (5. 10)

mit den Variablen S_j und β

unter den Restriktionen

$$S_j^T \cdot \nabla V + \beta \leq 0 ,$$

$$S_j^T \cdot \nabla G_i + \vartheta_i \beta \leq 0 , \quad (5. 11)$$

($i = 1, 2, \dots, k$) aktive Restriktionen

$$- 1 \leq S_i \leq 1 , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wobei S_i die i -te Komponente von S_j ist.

ϑ_i sorgt dafür, wie weit der gesuchte Vektor S_j von den jeweiligen Restriktionen abgelenkt werden soll. ϑ_i ist eine nichtnegative Größe. In dieser Arbeit wird ϑ_i der Wert 1 zugeordnet.

Die Restriktion $- 1 \leq S_i \leq 1$ sorgt dafür, daß keine Komponente von S_j und damit auch β unendlich groß wird.

Durch Einführung $t_i = S_i + 1$ kann die lineare Optimierung (5. 10) mit (5. 11) in die Standardform gebracht werden. Zur Lösung des Problems kann auf vorhandene Programme zurückgegriffen werden (Simplex-Verfahren).

Die nichtnegative Größe β ist nicht nur von dem Winkel zwischen S_j und dem Gradienten der Zielfunktion und der Restriktionen, sondern auch von deren Beträgen abhängig. Bei der Berechnung werden die Gradienten der Zielfunktion und der Restriktionen normiert, so daß man den Winkel ψ zu

$$\cos (\psi) = \frac{ - \beta }{ | S_j | } \quad (5. 12)$$

erhält.

Wenn β gegen Null geht, sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt.
Die (s. 6) entsprechende Bedingung ist

$$\frac{\beta}{|S_j|} \leq \delta . \quad (s. 13)$$

Ist die Bedingung (s. 13) erfüllt, so wird die Iteration abgebrochen.

II Bestimmung der Gradienten ∇V und ∇G_j

Der Gradient ∇V kann wegen der Linearität der Zielfunktion

$$V = \sum c_i h_i \quad (s. 14)$$

durch Ableitung leicht berechnet werden,

$$\nabla V = \{ c_1, c_2, \dots, c_n \} . \quad (s. 15)$$

Da die Restriktionen $G_j(H)$ nicht durch H explizit darstellbar sind, und sich deswegen die Gradienten ∇G_j nicht analytisch bestimmen lassen, wird hier die Differenzenmethode angewendet,

$$\nabla G_j = \left\{ \frac{\partial G_j}{\partial h_1}, \frac{\partial G_j}{\partial h_2}, \dots, \frac{\partial G_j}{\partial h_n} \right\} \quad (s. 16)$$

und

$$\frac{\partial G_j}{\partial h_i} = \frac{1}{\Delta h_i} \left\{ [G_j(H_j + \Delta h_i)]_{\max} - [G_j(H_j)]_{\max} \right\} .$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (s. 17)$$

Die in (s. 17) auftretende Variablenänderung Δh_i spielt eine wichtige Rolle. Sie muß an das Problem und an die Rechengenauigkeit angepaßt werden.

III Bestimmung der Schrittweite α_j

Die Schrittweite α_j hängt von den Restriktionen (aktive und auch nicht aktive) ab. Sie darf höchstens so groß sei, daß der neue zu betrachtende Punkt H_{j+1} von H_j aus wieder an den Rand des zulässigen Bereiches stößt,

$$\alpha_j \leq (\alpha_j)_{\max} . \quad (\text{ s. } 18)$$

Wenn die Restriktionen eine flache Ebene bilden, soll eine Schrittweite $\alpha_j < (\alpha_j)_{\max}$ gewählt werden. Sonst soll α_j gleich $(\alpha_j)_{\max}$ gesetzt werden.

5. 3. 2. Die lineare Optimierung [42][43]

Die lineare Optimierung ist die Optimierung einer linearen Zielfunktion unter ausschließlich linearen Restriktionen. Alle linearen Optimierungsprobleme können durch Transformation in die Standardform

gesucht Maximum von F

$$F = \sum a_j x_j \quad (\text{ s. } 19)$$

unter

$$G_j = g_{j0} + \sum g_{ji} x_i \leq 0 , \quad (\text{ s. } 20)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

gebracht werden.

Zur Lösung dieses Problems sollen m nichtnegative Hilfsvariablen $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ in (5. 20) eingeführt werden, damit die Ungleichungen der Restriktionen sich in Gleichungen umschreiben lassen:

$$g_{j0} + \sum g_{ji} x_i + x_{n+j} = 0 ,$$
$$x_k \geq 0 . \quad (k = 1, 2, \dots, n+m) \quad (5. 21)$$

Von den $n+m$ Variablen in (5. 21) müssen mindestens n gleich null sein, wenn ein Maximum existiert.

Die Lösungsschritte können folgendermaßen dargestellt werden

- I. Ausgang von einem zulässigen Punkt X^* .
- II. Untersuchung, ob das Maximum erreicht ist.
Wenn ja, Stop, sonst zu III.
- III. Null- und nicht Null-Variablen austauschen
unter Berücksichtigung von (5. 20)

6. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige Beispiele mit dem in der Arbeit beschriebenen Optimierungsverfahren dargestellt. Die Materialkonstante entsprechen den Werten in Abschnitt 2.4.

In den Abb. werden Platten mit gleicher Dicke und die optimierten Platten dargestellt. Ebenfalls sind die Belastungen und die Impulsformen mit ihrer Wirkungsdauer gezeigt.

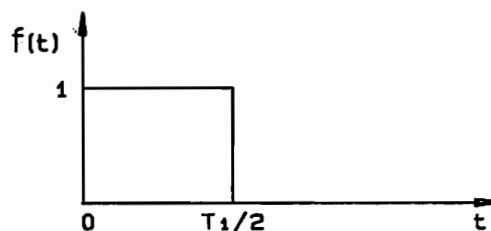
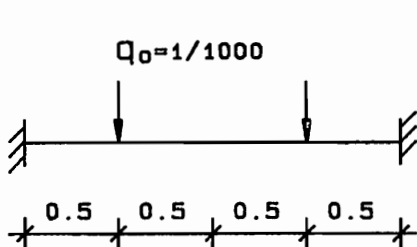
Die Volumeneinsparung von Platten gleicher Vergleichsspannungen $\Delta_v = 1 - V_v/V_0$ und optimierten Platten $\Delta_0 = 1 - V_{0p}/V_0$ gegenüber solchen gleicher Dicke werden in Prozent angegeben, wobei V_0 , V_v und V_{0p} das Volumen für Platte gleicher Dicke, gleicher Vergleichsspannung und optimierte Platte darstellen.

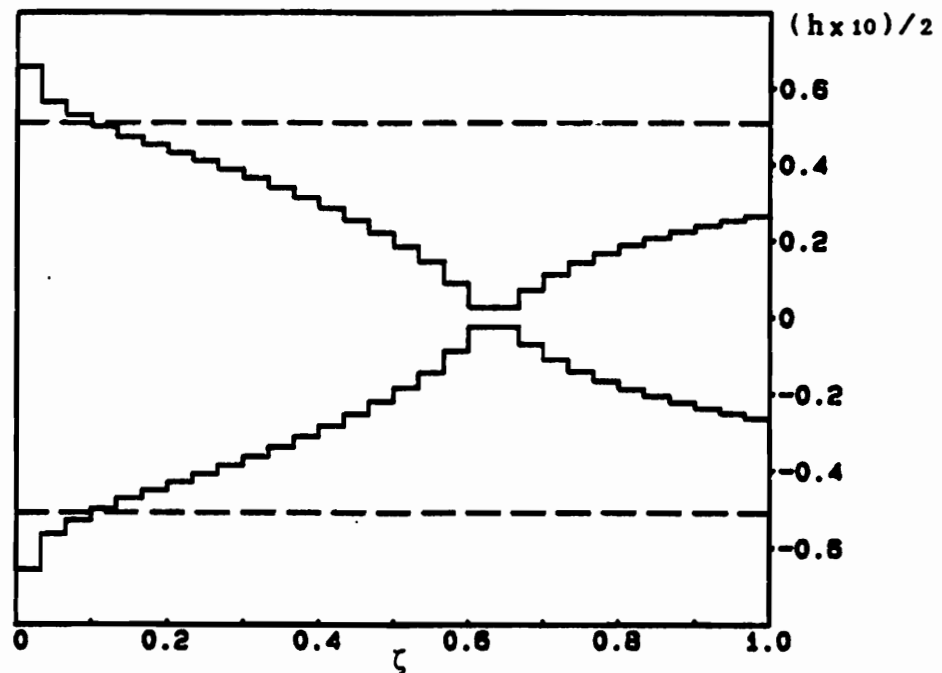
In den Beispielen soll als eingespannter Rand $W=0$, $\Psi=0$ und $Mr_\theta=0$ verstanden werden und als einfach gelagerter Rand $W=0$, $Mr=0$ und $Mr_\theta=0$. Die in Kapitel 1 eingeführte minimale Plattendicke h_{min} in bezug auf den äußeren Radius der Kreis- oder Kreisringplatte beträgt 0.005.

6.1 Kreisplatten

Als erstes Beispiel wird die Kreisplatte mit eingespanntem Rand behandelt. Die Belastung greift kreisringförmig mit dem Radius $R/2$ an: $Q_1 = q_0(\zeta=0.5) f(t)$.

Die Ersparnis Δ_v beträgt 58.722 %; Δ_0 beträgt 58.722 %.

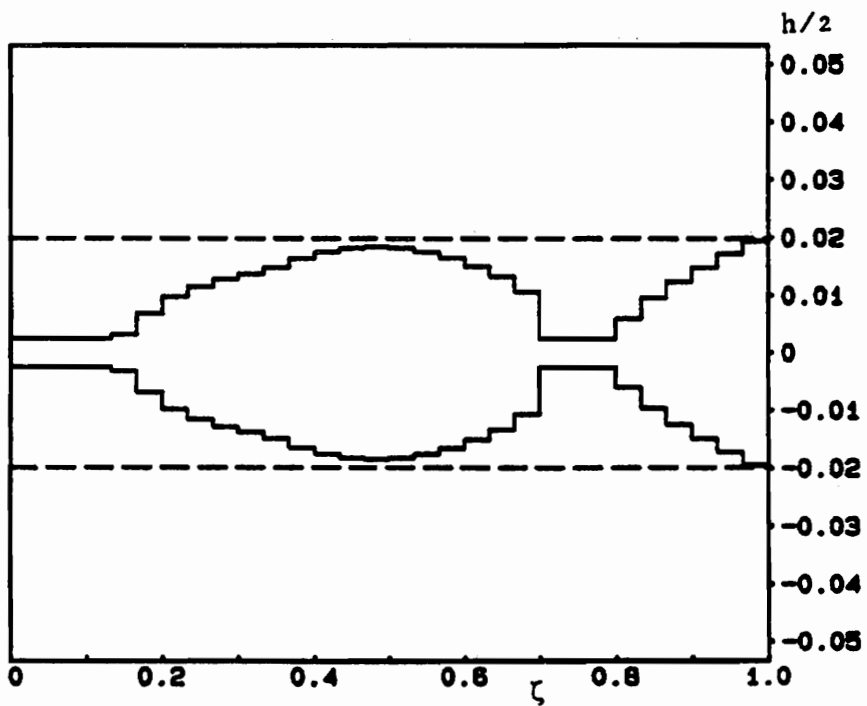
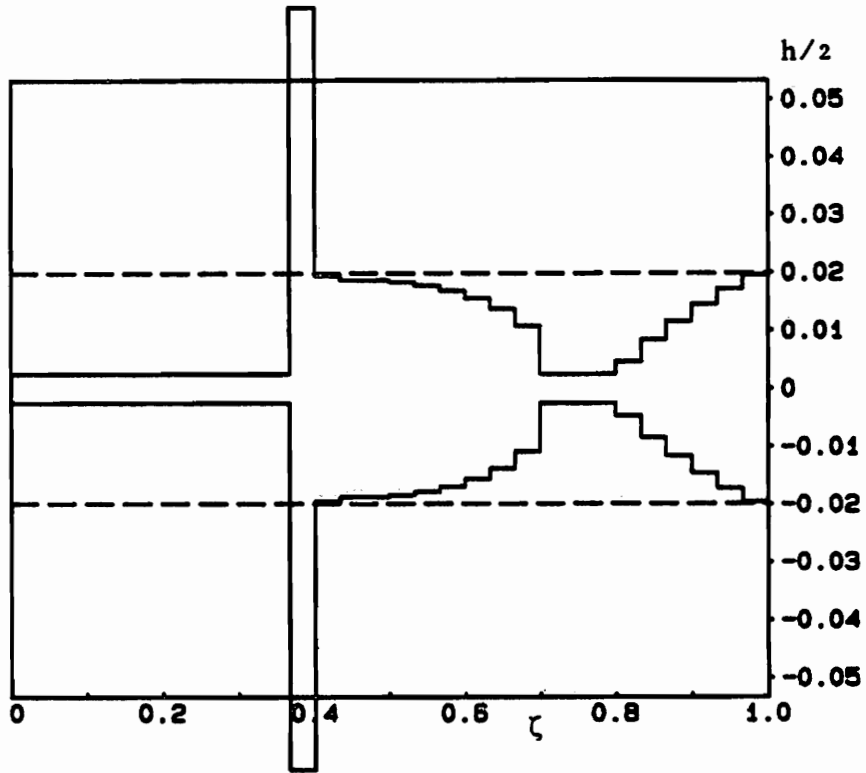
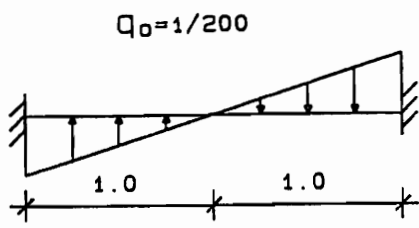




Das zweite Beispiel behandelt die Kreisplatte mit eingespanntem Rand unter linearer (kippende) Belastung: $Q_f = q_0 \zeta \cos(\vartheta) f(t)$.

Die Ersparnisse betragen: $\Delta v = 37.453 \%$, $\Delta \sigma = 38.982 \%$.

Interessant bei diesem Beispiel ist, daß das Volumen der Platte mit dem Näherungsverfahren C in Kapitel 4 noch kleiner ist als das der Platte gleicher Vergleichsspannungen. Der Dickenverlauf der optimierten Platte ist im zweiten Bild der nächsten Seite dargestellt.

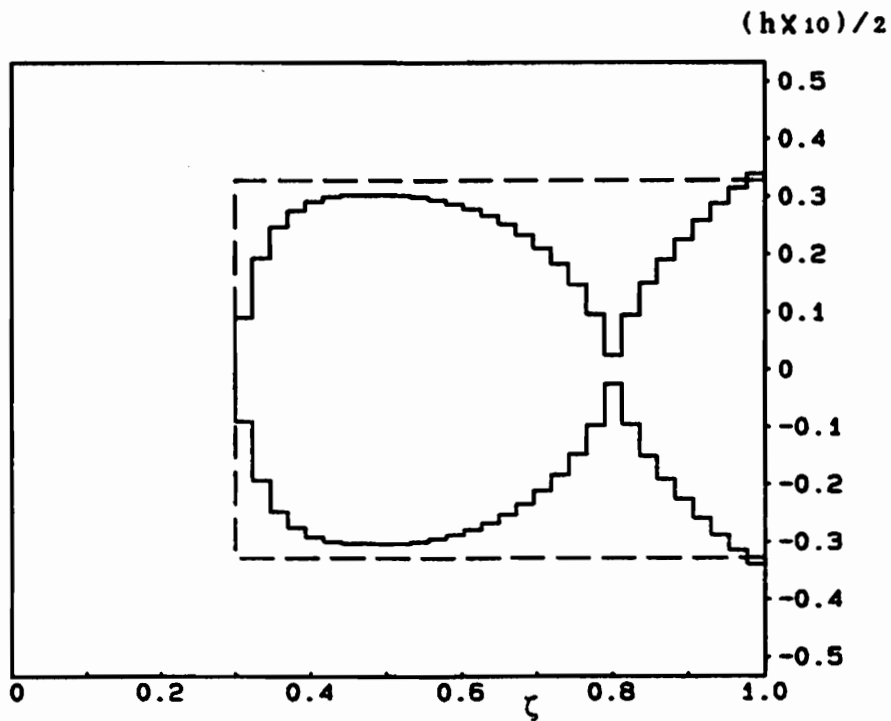
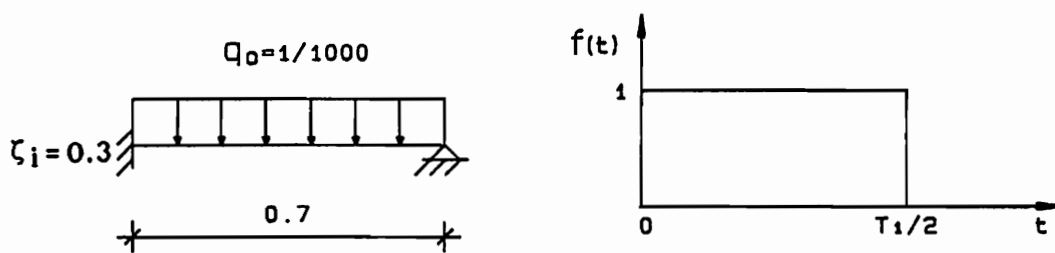


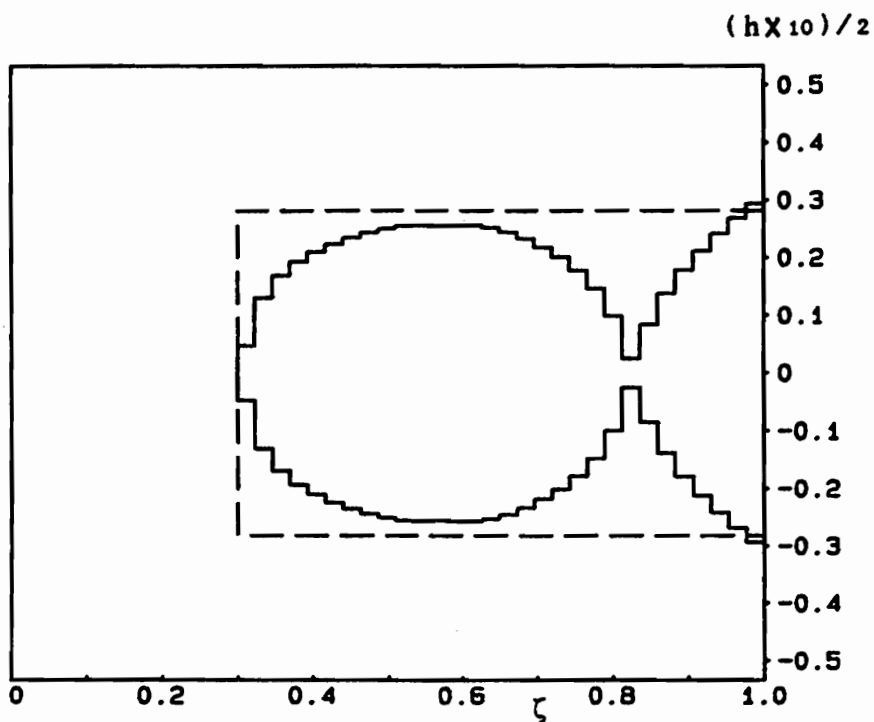
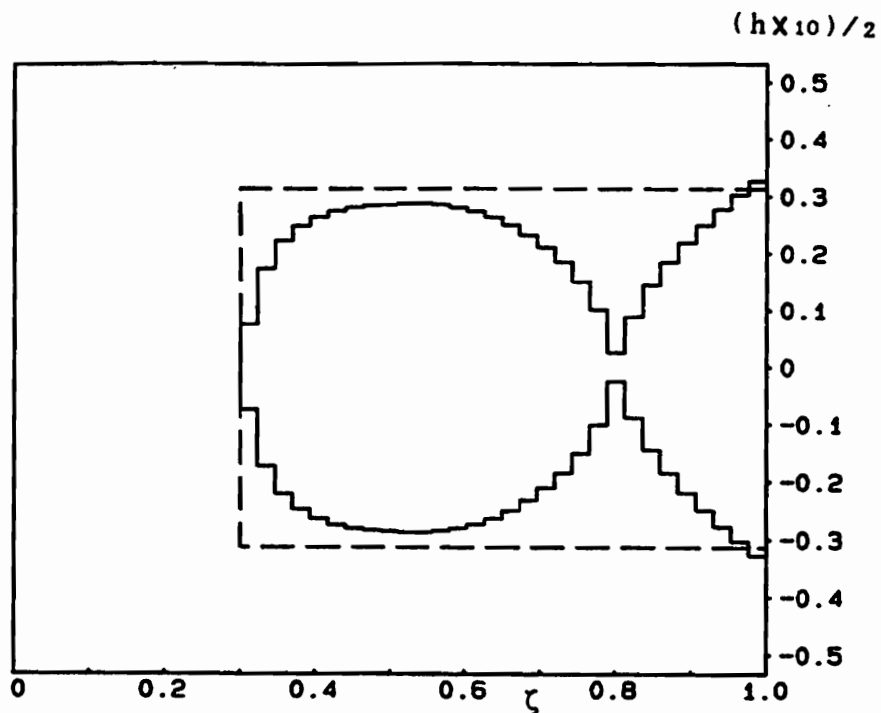
6. 2 Kreisringplatten

Als drittes Beispiel werden drei Kreisringplatten gezeigt, die alle am Innenrand eingespannt und am Außenrand einfach gelagert sind. Sie können auch dazu dienen, zu zeigen, wie sich die Plattenformen in Folge von Änderungen der Belastungsformen ändern.

Konstante kippende Belastung $Q_f = q_0 \cos(m\vartheta) f(t)$.

$$m = 0, 1, 2.$$





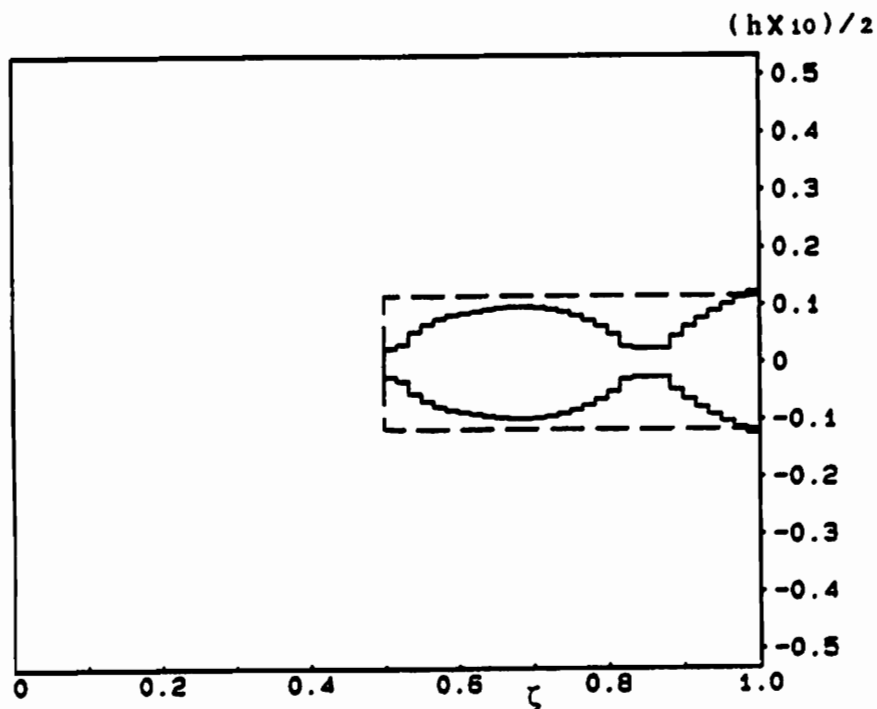
Die Platten gleicher Vergleichsspannungen bei den drei Fällen erfüllen das Kriterium (s. 6); so stellen sie gleichzeitig auch die optimierten Platten dar.

- Die Ersparnis Δ_0 für $m = 0$ 29.639 %.
- Die Ersparnis Δ_0 für $m = 1$ 29.081 %.
- Die Ersparnis Δ_0 für $m = 2$ 29.004 %.

Bei allen drei Fällen sind die Ersparnisse zwar fast die selben, zwischen 29 % und 30%, aber bei Betrachtung der Plattenformen kann festgestellt werden, daß mit zunehmendem m weniger Material gebraucht ist. Das entspricht der Theorie der Platten, da mit zunehmendem m die Steifigkeit der Platte auch größer wird.

Das 4. Beispiel wird durch eine Änderung des inneren Radius erhalten. Dabei wird der innere Radius auf den Wert 0.5 gesetzt, m bleibt 0 und Impulsform wird nicht geändert.

Die Ersparnisse betragen: $\Delta v = 37.240 \%$, $\Delta o = 37.244 \%$.

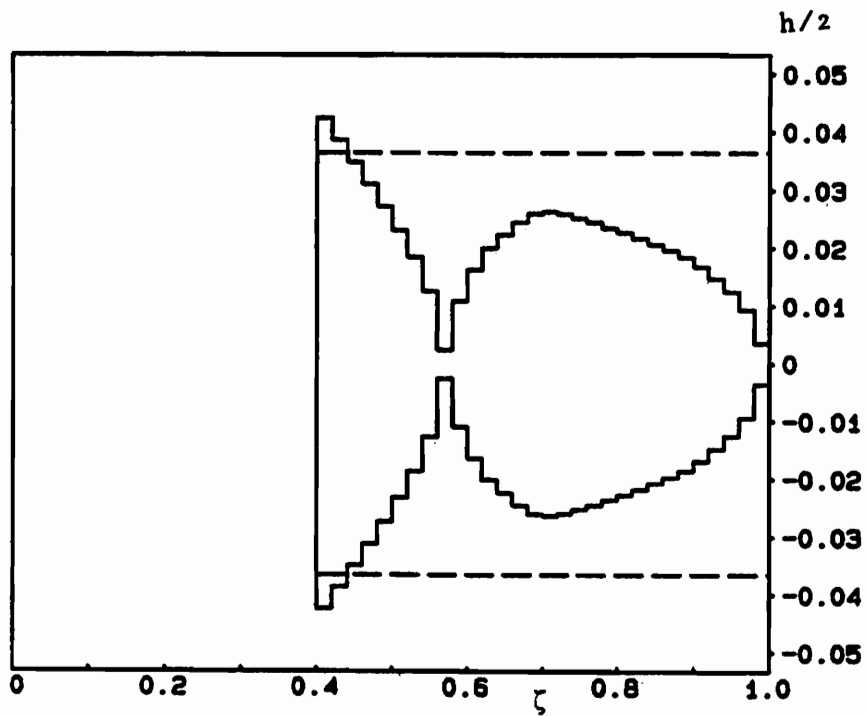
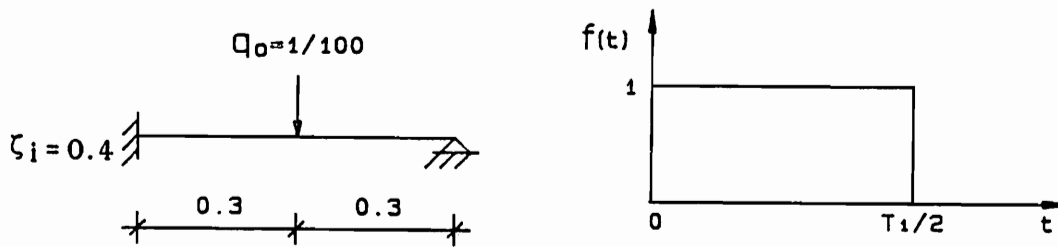


Dabei kann festgestellt werden, daß die Steifigkeit der Platte mit zunehmendem inneren Radius sich schnell vergrößert.

Die Kreisringplatte (innerer Rand eingespannt, äußerer Rand einfach gelagert) wird als Beispiel 5 dargestellt. Die Belastung wirkt in der Mitte zwischen innerem und äußerem Rand und hat die Form

$$Q = q_0(\zeta=0.7) \cos(\vartheta) f(t).$$

Die Ersparnisse betragen: $\Delta v = 45.096\%$, $\Delta \sigma = 45.070\%$



6.3 Platte mit zusätzlicher Masse

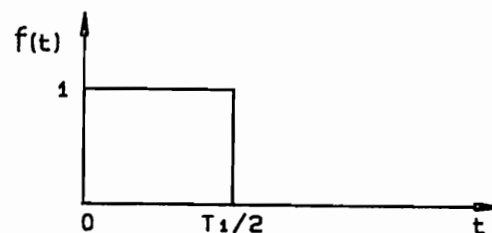
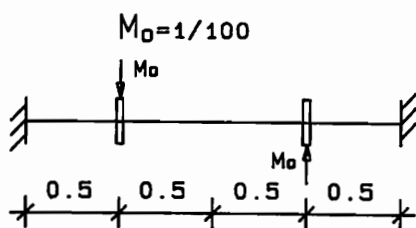
In diesem Abschnitt wird eine eingespannte Kreisplatte mit zusätzlicher Masse betrachtet. Als zusätzliche Masse wird ein starrer Zylinderring zentrisch eingesetzt. Der Radius des Zylinderrings ist halb so groß wie derjenige der Platte und die Ringhöhe/Außenradius der Platte beträgt 0.2. Der Ring sei mit der Platte unverrückbar verbunden. Die Belastung M wirkt direkt auf die zusätzliche Masse.

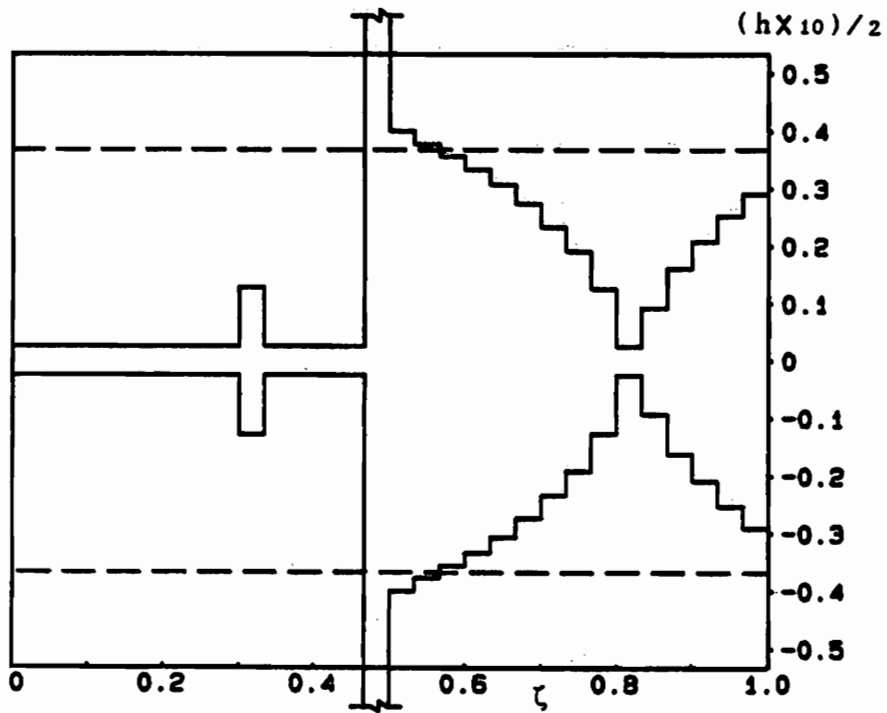
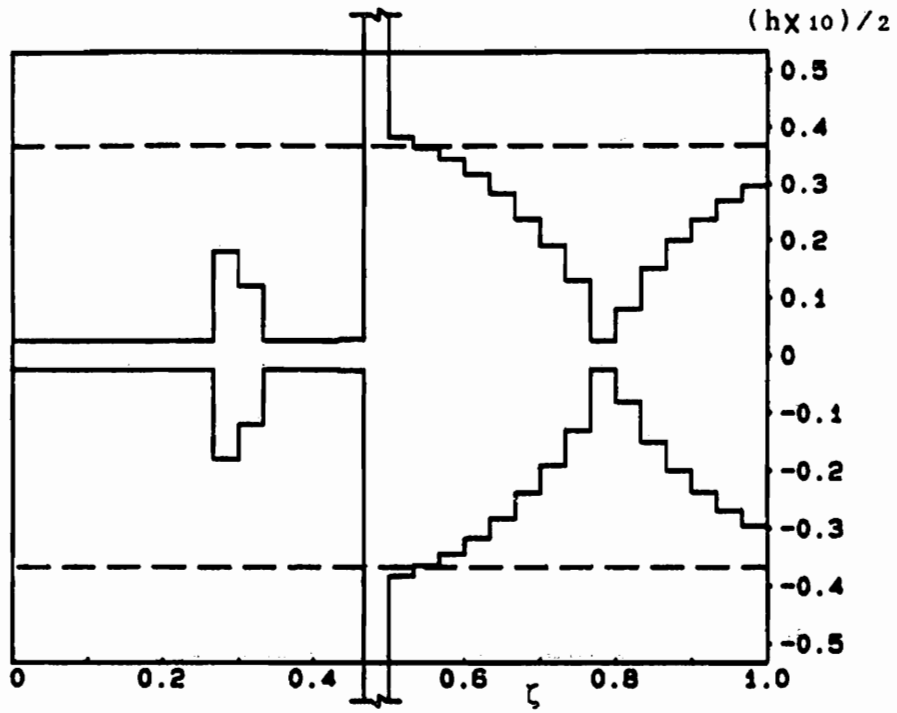
Bei der Berechnung der Platte gleicher Vergleichsspannungen wird als Ausgangspunkt eine Platte mit gleichmäßig verteilter Dicke gewählt. Die dadurch erhaltene Platte erfüllt das Kriterium (s. 6) und stellt daher gleichzeitig auch die optimale Platte dar. Die Plattenform wird in der ersten Abb. der folgenden Seite gezeigt.

Werden die oben erhaltenen Plattendicken geringfügig geändert und wieder eine Form der Platte gleicher Vergleichsspannungen gesucht, so gelangt man zum Beispiel zu der Plattenform der zweiten Abb. auf der nächsten Seite, die auch gleichzeitig das Kriterium (s. 6) erfüllt. Dies weist darauf hin, daß meist mehrere lokale Minima bei der Problemstellung der Gewichtsoptimierung unter dynamischer Belastung existieren. Zur Zeit ist es noch nicht möglich, das absolute Minimum zu erzielen.

Die Belastung $M = M_0 f(t)$

Die Ersparnis Δ_0 beträgt 49.644 %.



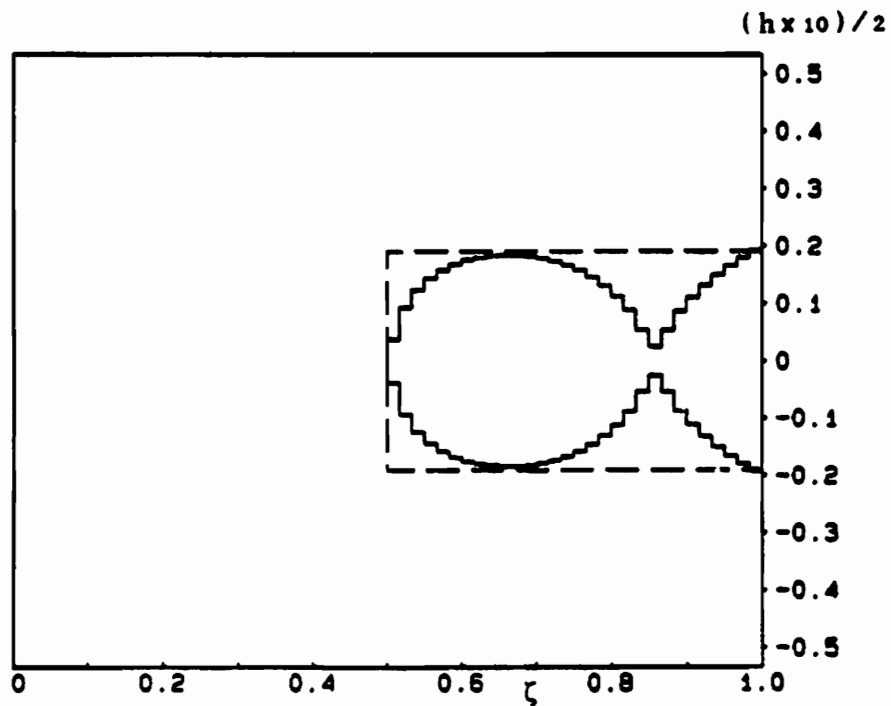
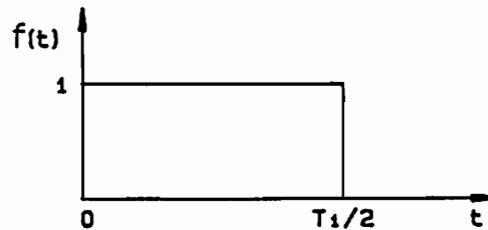


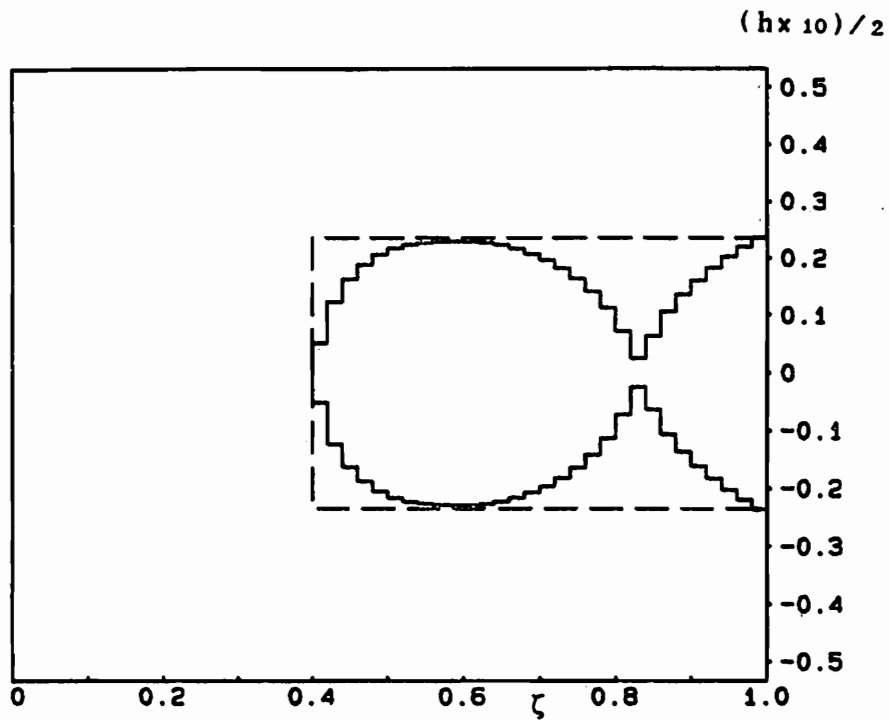
6. 4 Platten mit kombinierter Belastung

Zwei Kreisringplatten werden in diesem Abschnitt gezeigt, die durch die ersten zwei Glieder einer in Fourier-Reihe entwickelten unsymmetrische Belastung beansprucht sind. Damit wird gezeigt, daß Kreis- bzw. Kreisringplatten mit dem in dieser Arbeit dargestellten Verfahren berechnet werden können.

Die Belastung lautet $Q = q_0 [1 + \cos(\vartheta)] \sin\left(\frac{\zeta - \zeta_a}{1 - \zeta_a} \pi\right) f(t)$.

Die Ersparnisse betragen: $\Delta v = 28.273\%$, $\Delta o = 28.276\%$.





Das Kriterium (s. 6) ist bei der zweiten Platte erfüllt.

Die Ersparnis Δ_0 beträgt 27.682%

Die Randbedingungen für die obigen zwei Platten sind: Innen einfach gelagert und außen eingespannt.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7. 1. Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Volumenoptimierung von Kreis- bzw. Kreisringplatten unter dynamischen Belastungen. Als Nebenbedingungen und Beschränkungen sind zu berücksichtigen:

I die untere Schranke der Plattendicke h_{min} ,

II die Spannungsbeschränkung $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$.

Verschiedene Randbedingungen und Belastungstypen werden durch Beispiele dargestellt.

Zuerst beschäftigt sich diese Arbeit mit der Suche nach einer geeigneten Plattentheorie. In bezug auf die Dickenänderung und die dynamische Belastung hat sich herausgestellt, daß die Mindlin-Platte (Theorie für die dicken Platten), nach der auch die Trägheitsmomente berücksichtigt sind, für die Optimierung geeignet ist.

Da die Schwingungsanalyse für die Platte sehr zeitaufwendig ist, wurde ein Modell entwickelt, das die Rotationssymmetrie der Platte berücksichtigt und Speicherbedarf und Rechenzeit spart.

Die entscheidenden Zustandsgrößen (die Spannungen) sind nach jeder kleinen Änderung der Plattendicke neu zu bestimmen. Dabei muß eine gesamte Schwingungsanalyse durchgeführt werden.

Zur Analysierung der Platte wird das Ritz-Verfahren mit einer Modifikation verwendet, welche es ermöglicht, mit wenig Rechenzeit die Ordnung der Differentialgleichungen erheblich zu verkleinern. Ebenfalls, um den Rechenaufwand gering zu halten, wird anschließend die modale Analyse verwendet.

Als Näherung der optimierten Platten werden die Platten gleicher Vergleichsspannungen zuerst betrachtet. Dabei wird festgestellt, daß

die Platte gleicher Vergleichsspannungen sehr nahe an der optimierten Platte liegt oder u.U. sogar die optimierte Platte selbst darstellen kann. Für die Berechnung der Platte gleicher Vergleichsspannungen werden meistens nur wenige Iterationen benötigt.

Die Optimierung wird mit dem Verfahren der "feasible usable direction" durchgeführt. Die Platte gleicher Vergleichsspannungen wird dabei als Ausgangspunkt verwendet. Obwohl das verwendete Verfahren für die Problemstellung geeignet ist, ist der Rechenaufwand erheblich.

Wenn die Rechenzeit als wichtiger Faktor betrachtet wird, dann lohnt es sich meistens nicht mehr, nach Erhalten der Platte gleicher Vergleichsspannung noch weiter zu optimieren.

6. 2 Ausblick

Ein weiterer Schritt auf diesem Gebiet ist die Optimierung rotationssymmetrischer Schalen. Die in dieser Arbeit beschriebene Vorgehensweise kann direkt übertragen werden.

Die Optimierung von Kreisplatten unter beliebiger dynamischer Belastung kann nach Entwicklung der Belastung in eine Fourier-Reihe mit in dieser Arbeit entwickelten Programmen gerechnet werden; dabei ist jedoch eine schnellere Rechanlage notwendig.

Literaturverzeichnis

1. **Venkayya, V. B.**
Structural Optimization
A Review and some Recommendations
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol. 13, (1978), S. 203 - 228

2. **Vanderplaats, G. N.**
Structural Optimization
Past, Present and Future
AIAA-Journal, Vol. 20, (1982), S. 992 - 1000

3. **Banichuk, N. V.**
Current Problems in the Optimization of Structures
Mechanika Tverdogo Tela (Mechanics of Solids)
Vol. 17, No. 2, (1982), S. 95 - 107

4. **Olhoff, N. and Taylor, J. D.**
On Structural Optimization
Journal of Applied Mechanics
Vol. 50, (1983), S. 1139 - 1151

5. **Olhoff, N.**
A Survey of the Optimal Design of Vibration Structural Elements
The Shock and Vibration Digest
Part I: Theory, Vol. 8, No. 8, (1976), S. 3 - 10
Part II: Applications, Vol. 8, No. 9, (1976), S. 3 - 10

6. **Rao, S. S.**
Structural Optimization under Shock and Vibration Environment
The Shock and Vibration Digest
Vol. 11, (1979), S. 3 - 12

7. **Haftka, R. T. and Prasad, B.**
Optimum Structural Design with Plate Bending Elements - A Survey
AIAA-Journal, Vol. 19, (1981), S. 517 - 522

8. Olhoff, N.
Optimal Design of Vibrating Circular Plates
International Journal of Solids and Structures
Vol. 6, (1970), S. 139 - 156

9. Olhoff, N.
Optimal Design of Vibrating Rectangular Plates
International Journal of Solids and Structures
Vol. 10, (1974), S. 93 - 109

10. Masur, E. F.
Optimal structural Design under multiple Eigenvalue Constraints.
International Journal of Solids and Structures
Vol. 20, (1984), S. 211 - 231

11. Cheng, K.-T. and Olhoff, N.
An Investigation concerning Optimal Design of Solids Elastic Plates
International Journal of Solids and Structures.
Vol. 17, (1981), S. 305 - 323

12. Cheng, K.-T. and Olhoff, N.
Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates
International Journal of Solids and Structures
Vol. 18, (1982), S. 153 - 169

13. Niordson, F.
Optimal Design of Plates with a Constraint on the Slope of
the Thickness Function
International journal of Solids and Structures
Vol. 19, (1983), S. 141 - 151

14. Plaut, R. H.
Optimal Beam and Plate Fundametions for Minimum Compliance.
Journal of Applied Mechanics
Vol. 54, (1987), S. 255

15. Ullenboom, W.
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik. RUB, Nr. 11 (1977)
16. Feng, T. T., Arora, J. S. and Haug, E. J.
Optimal Structural Design under Dynamic Loads
International Journal of Numerical Methods in Engineering
Vol. 11, (1977), S. 39 - 52
17. Venkayya, V. B. and Khot, N. S.
Design of Optimum Structures to Impulse Type Loading
AIAA-Journal, Vol. 13, (1975), S. 989 - 994
18. Bürger, K. H.
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
Mitteilung aus dem Institut für Mechanik. RUB, Nr. 49 (1985)
19. Kirchhoff, G. R.
Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.
Journal Mathematik (Crelle), 40, (1850), S. 51.
20. Mindlin, R. D.
Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates
Journal of Applied Mechanics
Vol. 18 (1951), S. 31 - 38
21. Reissner, E.
The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates
Journal of Applied Mechanics
Vol. 12 (1945), S. 69 - 77

- 22 Reissner, E.
On Bending of Elastic Plates
Quarterly of Applied Mechanics
Vol. 5 (1947), S. 55 - 68

- 23 Reissner, E.
On Transverse Bending of Plates, Including the Effect of
Transverse Shear Deformation
Internal Journal of Solids and Structures
Vol. 11, (1975), S. 569 - 573

- 24 Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.
Theoriy of Plates and Shells
McGraw-Hill Book Company, Second Edition, 1959

- 25 Lehnhoff, F. and Miller, R. E
Influence of Transverse Shear on the Small Displacement
Theory of Circular Plates
AIAA Journal, Vol. 7, No. 8, (1969), S. 1499 - 1505

- 26 Irie, T. , Yamada, G. and Takagi, K.
Design Data and Methods,
Natural Freauencies of Thick Annular Plates
Journal of Applied Mechanics
Vol. 49, (1982), S. 633 - 638

- 27 Reismann, H.
Forced Motion of Elastic Plates
Journal of Applied Mechanics
Vol. 35, (1968), S. 510 - 515

- 28 Abramowitz, M. and Stegun, I. A.
Handbook of Mathamatical Functions
Dover Publications, Inc., New York, (1965)

- 29 Mervyn D. O. and Lindberg G. M.
Annular and Circular Sector Finite Elements for Plate Bending
Int. J. mech. Sci., Vol. 12, (1970), S. 17 - 33.

- 30 **Bathe, K.-J. and Wilson, E. L.**
Numerical Methods in Finit Element Analysis
Prentice Hall, Inc. New Jersey, (1976)

- 31 **Zienkiewicz, O. C.**
The Finit Element Method in Engineering Science
Mc Graw Hill, (1971)

- 32 **Wilson, E. L., Yuan, M.-W. and Dickens, J. M.**
Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors
Earthquake Engineering and Structural Dynamics
Vol. 10, (1982), S. 813 - 821

- 33 **Waller, H. und Krings, W.**
Matrizenmethoden in der Maschinen und Bauwerksdynamik
B. I. - Wissenschaftsverlag
Mannheim - Wien - Zürich, (1975)

- 34 **Lehmann, Th.**
Elemente der Mechanik IV:
Schwingungen und Variationsprinzipie
Vieweg, (1979)

- 35 **Fox, R. L.**
Optimization Methods for Engineering Design
Addison-Wesley, (1971)

- 36 **Himmelblau, D. M.**
Applied Nonlinear Programming
Mc Graw-Hill, (1972)

- 37 **Rao, S. S.**
Optimization - Theory and Applications
Wiley Eastern Limited, 2nd Ed., (1984)

- 38 Cheng, K.-G.
Grundlagen der anwendungsorientierten Strukturoptimierung
Verlag für Wasser- und Elektro-Wissenschaft. (1984)
(auf Chinesisch).
- 39 Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C.
Optimum Structural Design, Theory and Applications
John Wiley & Sons. (1973).
- 40 Zoutendijk, G.
Methods of Feasible Directions
Elsevier, Amsterdam, (1960)
- 41 Kuhn, H. W. and Zucker, A. W.
Nonlinear Programming
in "Proceedings of the Second Berkeley Symposium
on Mathematical Statistics and Probability"
(Ed. J. Neymann)
University of California Press., (1951)
- 42 Künzi, H. P., Tzschach, H. G. und Zehnder, C. A.
Mathematische Optimierung
B. G. Teubner, Stuttgart. (1966)
- 43 Kuester, J. L. and Mize, J. H.
Optimization Techniques with Fortran
McGraw-Hill. (1973)
- 44 Qian Lingxi
Strukturoptimierung in den Ingenieurwissenschaften
(auf Chinesisch)
Verlag für Wasserwirtschaft u. Elektrotechnik (1983)

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 59**