



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Martin Pitzer

Vergleich einiger
FE-Formulierungen auf der Basis
eines inelastischen Stoffgesetzes

Heft Nr. 61



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr – Universität Bochum**

Martin Pitzer

**Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis
eines inelastischen Stoffgesetzes**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 61

Juli 1988

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität-Gh Kassel und am Lehrstuhl für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für seine ständige Unterstützung und die Übernahme des Referates.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, sowohl für sein Interesse an meiner Arbeit, wie auch für die Übernahme des Korreferates.

Allen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, sei an dieser Stelle gedankt. Namentlich erwähnen möchte ich Herrn Dr.-Ing. L. Schreiber sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Irretier, der mir in seiner Eigenschaft als geschäftsführender Direktor des Instituts für Mechanik der Universität-Gh Kassel die Genehmigung zur Nutzung der dortigen Rechenanlage erteilte.

Bochum, im Juli 1988

Martin Pitzer

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. H. Waller

eingereicht: 1.6.1988

Tag der mündlichen Prüfung: 15.7.1988

© 1988 Dr.-Ing. Martin Pitzer
Huestraße 22
4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Aufbauend auf einem elastisch-viskoplastischen Stoffgesetz vom Überspannungstyp werden FE-Formulierungen in inkrementeller Form hergeleitet, die auf den Verfahren der gewichteten Residuen basieren. Neben dem Verfahren von Galerkin und dem Least-Squares-Verfahren wird eine Kombination beider Methoden vorgestellt.

Grundlage der Diskretisierung sind dabei die in den Größen des Geschwindigkeitsfeldes ausgedrückten Feldgleichungen, die nicht in ihre schwache Form überführt werden.

Vergleichend untersucht werden die verschiedenen Formulierungen anhand zweidimensionaler Elemente zur Beschreibung von Scheiben und axialsymmetrischen Problemen hinsichtlich ihrer Eignung zur genauen Erfassung der Spannungsverläufe.

Der Diskussion der Zeitintegration kommt besondere Bedeutung zu, da die konstitutiven Beziehungen ein steifes Differentialgleichungssystem bilden. Zur Lösung wird ein sowohl im Ort wie der Zeit durchzuführender Prädiktor-Korrektor-Algorithmus vorgeschlagen.

Summary

Based on an overstress-model for elastic-viscoplastic materials incrementally formulated FE-Algorithms are presented, which are derived from various methods of weighted residuals. To be more precisely: Galerkin's method, the method of least-squares, and a combination of both.

The field equations not being translated to their weak formulation, are expressed through the components of the velocity field and become the groundwork of discretisation.

Regarding the precise rendering of stress distributions, the above mentioned methods are compared to each other with two types of elements, one for plane-stress problems, the other for axisymmetric problems.

The other main item of the present thesis is the discussion of the various numerical methods for integration in time, which obtain special importance due to the stiffness of the underlying constitutive relations. A predictor-corrector-algorithm is suggested to be applied to integration in time as well as in place.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>Bezeichnungen</u>	
1. <u>Einleitung</u>	1
2. <u>Materialunabhängige Grundgleichungen</u>	5
2.1 Vorbemerkungen	5
2.2 Kinematik	5
2.3 Spannungstensoren und -geschwindigkeiten	7
2.4 Die Gleichgewichtsbedingungen	8
2.5 Anfangs- und Randbedingungen	9
3. <u>Stoffgesetz</u>	11
3.1 Vorbemerkungen und Voraussetzungen	11
3.2 Konstitutive Beziehungen	14
3.3 Zur Anpassung der Materialfunktionen	18
4. <u>Aufbereitung der Grundgleichungen - Näherungsbetrachtung</u>	20
5. <u>Verfahren der gewichteten Residuen</u>	25
5.1 Das Verfahren von Galerkin	26
5.2 Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate- Least Squares	27
5.3 Kopplung der beiden Verfahren	27
6. <u>Diskretisierung mit der FE- Methode</u>	29
6.1 Ringelement	29
6.2 Scheibenelement	39
6.3 Isoparametrische Ansätze	44

6.4 Elementsteifigkeitsmatrizen - Knotenlasten	50
6.4.1 Ringelement	52
6.4.2 Scheibenelement	57
6.5 Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen und Knotenlastvektoren	60
7. <u>Zeitintegration</u>	66
7.1 Explizite Verfahren	66
7.2 Implizite Verfahren	69
7.3 Vergleich der Verfahren - Bemessung der Schrittweite	73
8. <u>Allgemeine Angaben zur Programmierung</u>	77
9. <u>Vergleichsrechnungen</u>	79
9.1 Das dickwandige Rohr unter Innendruck	79
9.1.1 Elastische Vergleichsrechnungen	79
9.1.2 Reduzierte Integration	88
9.1.3 Rechnung mit viskoplastischen Deformationen	92
9.2 Die dickwandige Kugel unter Innendruck	96
9.2.1 Elastische Vergleichsrechnungen	96
9.2.2 Rechnung mit viskoplastischen Deformationen	103
9.3 Scheibe unter vorgegebener Verschiebung	103
9.4 Kragsscheibe	112
9.5 Scheibe mit Loch	112
10. <u>Zusammenfassung</u>	119
<u>Literaturverzeichnis</u>	
<u>Anhang</u>	

Bezeichnungen

Aufgeführt sind nur die wichtigsten Bezeichnungen. Weitere, in der Arbeit verwendete Symbole werden im Text erläutert. Tensoren zweiter Stufe, sowie Matrizen und Vektoren sind durch fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet.

F	Deformationsgradient
J	Funktionaldeterminante
L	Geschwindigkeitsgradient
D	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
D_i, D_e	inelastischer und elastischer Anteil von D
W	Rotationsgeschwindigkeitstensor
σ	Cauchy-Spannungstensor
τ	gewichteter Cauchy-Spannungstensor
B	viskoplastischer Materialtensor
α	Translationstensor
x	inelastische Arbeit der reduzierten statischen Spannungen
g(x)	isotrope Verfestigungsfunktion
c(x)	kinematische Verfestigungsfunktion
Λ	verallgemeinerte Überspannungen
$\gamma\Phi(\Lambda)$	Überspannungsfunktion
Δ	Strukturgedächtnisfunktion
G, E	Schub- und Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl
E_t	Tangentenmodul

dr	Linielement
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
u, v	Komponenten von \mathbf{v}
x, y, z r, z, φ	globale Koordinaten
ξ, η	lokale Elementkoordinaten
H_k	Formfunktion
J, J^{-1}	verallgemeinerte Jacobi-Matrix und ihre Inverse
E	Elementsteifigkeitsmatrix
A, I, P, T	Teilmatrizen der Elementsteifigkeitsmatrix
\mathbf{e}	Knotenlastvektor
$\mathbf{a}, \mathbf{l}, \mathbf{p}, \mathbf{t}$	Teilvektoren des Knotenlastvektors
k	Knotenfreiwerte
p	hydrostatischer Druck
\mathbf{t}	richtungstreue Traktion
Grad	Gradient
Div	Divergenz
$\text{tr}(\)$	Spur eines Tensors
\cdot	Skalarprodukt
$(\)'$	substantielle Zeitableitung
$(\)^\circ$	objektive Zeitableitung nach Jaumann
$\mathbf{1}$	Einstensor

1. Einleitung

Bei der Auslegung und Bemessung von Bauteilen werden als Folge einer erhöhten Materialausnutzung, wie sie zum Beispiel im Leichtbau üblich ist, an die Festigkeitsanalyse immer strengere Maßstäbe angelegt. Dies erfordert einerseits eine Fortentwicklung effizienter numerischer Lösungsalgorithmen und andererseits eine verbesserte Beschreibung des realen Materialverhaltens.

Die alleinige Berücksichtigung der elastischen Kennwerte eines Materials reicht dann nicht mehr aus, wenn eine Belastung die Grenzen der elastischen Verformbarkeit erreicht oder wenn Sicherheitsbestimmungen die Funktionsfähigkeit einer Struktur auch für eine erhöhte, über die Fließgrenze hinausreichende Belastung erfordern.

Zur Erfassung der dabei auftretenden physikalischen Nichtlinearitäten sind in der Plastizitätstheorie eine Reihe von Stoffgesetzen entwickelt worden, die - abgesehen von endochronen Theorien (*Valanis /1/*) - überwiegend von der Vorstellung ausgehen, daß sich nach Erreichen der Fließgrenze neben den rein elastischen auch plastische Verformungen einstellen. Weil idealplastische Materialgesetze nur unzureichende Ergebnisse lieferten, hat sich zur Berücksichtigung der Verformungsgeschichte in den konstitutiven Gleichungen die Einführung interner Variabler als zweckmäßig erwiesen, mit zunächst nur einem Skalar, der die isotrope Verfestigung repräsentiert /2/. Zu einer verbesserten Beschreibung des phänomenologisch beobachtbaren Bauschinger Effektes ist das Konzept der kinematischen Verfestigung entwickelt worden, das eine innere Variable in Form eines Tensors zweiter Stufe vorsieht, der die Bewegung des Fließflächenmittelpunktes im Spannungsraum charakterisiert /3/.

In Weiterentwicklungen sind neben Kombinationsmodellen aus isotroper und kinematischer Verfestigung /67/ Stoffmodelle vorgeschlagen worden, deren plastische Verformungen sich nicht nach der Normalenregel entwickeln /66/. Ferner werden zur genaueren Erfassung des Materialverhaltens bei nichtradialen Prozessen Mehrfließflächenmodelle formuliert /4,5,6/.

Gemeinsam liegen dabei allen Gesetzen die Annahmen zugrunde, daß sich die bleibenden Verformungen momentan einstellen und daß das Verhalten des Materials geschwindigkeits- und zeitunabhängig ist. Mit dieser Materialtheorie lassen sich vielfach im Experiment beobachtete zeitabhängige viskose Effekte wie zum Beispiel Kriechen und Relaxation nicht erfassen.

Die Viskoplastizitätstheorie versucht die kombiniert auftretenden plastischen und viskosen Eigenschaften eines Werkstoffes zu beschreiben. Die dabei entstehenden Stoffgleichungen sind nicht mehr zeitunabhängig, wobei in vielen Fällen die Zeit nicht explizit in die Beziehungen eingeht, sondern indirekt in Form einer Geschwindigkeitsabhängigkeit auftritt.

Bingham /7/ hat sich erstmals 1916 mit der Entwicklung eines visko-

plastischen Stoffmodells befaßt. In neuerer Zeit sind insbesondere die umfassenden Arbeiten von *Perzyna* /8/ auf diesem Gebiet zu erwähnen, der neben der Formulierung der Stoffmodelle auch eine Einbettung in einen thermodynamischen Rahmen vornimmt. Weitere viskoplastische Gesetze werden u.a. von *Hart* /9/, *Miller* /10/, *Chaboche* /11/ und *Krempf* /68/, der ohne die Definition einer Fließfläche arbeitet, vorgeschlagen.

Das dieser Arbeit zugrundeliegende Stoffgesetz ist ein von *Bruhns* /12,13/ entwickeltes viskoplastisches Überspannungsmodell, bestehend aus einer Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung mit zwei internen Variablen und einer zusätzlichen Strukturgedächtnisfunktion, die dazu beiträgt, das Materialverhalten insbesondere bei nichtradialen Prozessen besser wiederzugeben. Wie der Name Überspannung bereits ausdrückt, werden hierbei im inelastischen Bereich Spannungszustände zugelassen, die die Fließfläche überschreiten und demzufolge sogenannte, über die Fließfläche hinausreichende, Überspannungen beinhalten.

Auf dem Gebiet der Numerik hat sich die Methode der Finiten Elemente parallel mit der Entwicklung leistungsstarker Rechner als führendes Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen herausgebildet. Dabei wird überwiegend in der Festkörpermechanik, ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeiten, die FE-Methode als ein bereichsweises Ritz-Verfahren in Weggrößen formuliert /14, 15, 16/.

Die bei der Analyse einer Struktur in erster Linie interessierenden Spannungen ergeben sich nach Differentiation aus den genäherten Verschiebungen über das Stoffgesetz und verlieren deshalb in aller Regel an Genauigkeit. Der größte Genauigkeitsverlust tritt an den Elementrändern und damit auch an der Oberfläche des Körpers auf, wo aber die den Ingenieur besonders interessierenden Bereiche extremer Spannungen liegen.

Zu einer verbesserten Berechnung der Spannungen werden verschiedene Wege vorgeschlagen. In hybriden Formulierungen werden elementweise Ansätze sowohl für Verschiebungen als auch für Spannungen gemacht /17/, so daß die Spannungen direkt nach dem Lösen des Gleichungssystems vorliegen. Allerdings sollte nicht unerwähnt bleiben, daß hybride Modelle im allgemeinen keine monotonen Konvergenzeigenschaften besitzen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die konventionell ermittelten Spannungen in einem nachgeschalteten Glättungsalgorithmus zu verbessern /18/, der in einem Fehlerquadratverfahren über die gesamte Struktur die Differenzen aus den berechneten Spannungen und einem Spannungsansatz minimiert. Schließlich können mit Hilfe von Nachprozessoren die Randspannungen erheblich verbessert werden durch die Entwicklung von Verfahren, die auf der Äquivalenz der Arbeit der Knotenkräfte und derjenigen der Randverschiebungen beruhen /19/.

Demgegenüber lassen sich Finite-Elementformulierungen auch direkt aus den Feldgleichungen ableiten, basierend auf den Verfahren der ge-

wichteten Residuen /20,21,22,23/. Während sich die Kollokationsmethoden für eine numerische Umsetzung in einen FE-Algorithmus nur sehr begrenzt einsetzen lassen, da im Vorhinein alle Kollokationspunkte festgelegt werden müssen, eignen sich besonders das Verfahren von Galerkin /49/ und die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Least-Squares-Verfahren).

Nachteile einer auf den Verfahren der gewichteten Residuen basierenden FE-Formulierung sind, abgesehen von der Asymmetrie der Steifigkeitsmatrizen beim Galerkinverfahren, vor allem die erweiterten Stetigkeitsanforderungen der zu wählenden Ansatzfunktionen. Das liegt daran, daß die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen Ableitungen von höherer Ordnung enthalten als die zugehörigen Variationsformulierungen. Vielfach werden deshalb die Differentialgleichungen in Systeme niedrigerer Ordnung überführt /24,25/. In /26/ erfolgt basierend auf dem Least-Squares-Verfahren eine Entwicklung hybrider Modelle für Probleme der Elastostatik unter Verwendung der reduzierten Integration.

Zu den Vorteilen dieser Verfahren gehört die Unabhängigkeit von einem zugehörigen Variationsfunktional. Es können daher auch Folgelasten mit in die Berechnung einbezogen werden, die nicht aus einem Potential ableitbar sind. Dazu zählen insbesondere die technisch interessanten Druckbelastungen, die stets senkrecht auf die Körperoberfläche wirken. Dieser Aspekt ist in einer Analyse von inelastisch deformierten Körpern besonders wichtig, da sich die Flächennormalen im Verlauf eines Prozesses ständig verändern.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung geeigneter FE-Algorithmen für viskoplastisch deformierbare Körper, basierend auf den Verfahren der gewichteten Residuen. Da eine exakte Erfüllung der natürlichen Randbedingungen durch die Ansatzfunktionen im allgemeinen große Probleme bereitet, werden die Kräfte-Randbedingungen mit in die Differentialgleichungen einbezogen.

Die Formulierung der Feldgleichungen erfolgt in inkrementeller Form, entsprechend den die Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten verbindenden Stoffgleichungen. Dabei wird beachtet, daß im Bereich inelastischer Deformationen im allgemeinen endliche Verformungen eintreten. Die entstehenden partiellen Differentialgleichungen definieren ein Anfangs-Randwertproblem, daß sich nach den Verschiebungsgeschwindigkeiten umstellen läßt. Das Problem wird in einer "updated-Lagrange" Formulierung angegangen. Dabei wird die Diskretisierung im Ort mit isoparametrischen finiten Elementen vorgenommen, die die Stetigkeitsanforderungen an den Elementgrenzen, die durch die Verfahren der gewichteten Residuen vorgegeben sind, berücksichtigen. Unter der vereinfachenden Annahme isothermer Prozesse werden Elementmatrizen für den ebenen Spannungszustand und für Rotationskörper hergeleitet.

Da bei inelastischen Prozessen die Plastizierung in der Regel auf der Körperoberfläche beginnt und der Spannungszustand das Erreichen der Fließgrenze bestimmt, ist mehr noch als bei rein elastischen Berechnungen darauf zu achten, daß die sich aus der Berechnung ergebenden Randspannungen möglichst exakt sind.

Unter diesem Gesichtspunkt werden die hier zu implementierenden FE-Formulierungen diskutiert. Neben dem Galerkin- und dem Least-Squares-Verfahren wird noch eine Kombination dieser beiden Algorithmen vorgeschlagen, mit dem Ziel, die Ergebnisse der beiden erstgenannten Verfahren zu verbessern. An Beispielen, deren strenge Lösung im elastischen Bereich bekannt ist, läßt sich die Güte der einzelnen Formulierungen erkennen und es kann eine Wertung vorgenommen werden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Arbeit ist die Entwicklung geeigneter Zeitintegrationsverfahren der mathematisch sehr steifen Differentialgleichungen des Stoffgesetzes. Über ähnliche Probleme wird in /27/ berichtet. Anders als in /28/ kann hierbei die Polygonzugmethode (Eulersches-Extrapolationsverfahren) nicht erfolgversprechend eingesetzt werden, da sie nur ungenügende Stabilitätseigenschaften aufweist.

Anhand des homogenen Beispiels eines spannungsgesteuert belasteten Zugstabes, bei dem für ein Zeitinkrement ein kompletter FE-Schritt auszuführen ist, werden verschiedene Zeitintegrationsalgorithmen hinsichtlich ihrer Eignung zur Integration der Stoffgleichungen verglichen.

Unter Beachtung der dabei entstehenden Verhältnisse wird schließlich für die in impliziter Form vorliegenden Verfahren ein FE-Algorithmus entwickelt, der sowohl in der Orts- als auch Zeitdiskretisierung in einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren mündet, das hinsichtlich der Zeitintegration eines Prozesses optimale Konvergenz gewährleistet.

Als Kriterien zur Beurteilung der Verfahren dienen neben der Genauigkeit der Integration auch die Stabilitätseigenschaften der Algorithmen. Dazu werden bei den impliziten Verfahren kritische Schrittweiten bestimmt, die sich auf die Berechnungen inhomogener Strukturen übertragen lassen.

2. Materialunabhängige Grundgleichungen

2.1 Vorbemerkungen

Wir werden im folgenden die grundlegenden Beziehungen in Absolut-schreibweise formulieren, deren Vorzüge gegenüber der Indexschreibweise in ihrer Kompaktheit und Übersichtlichkeit liegen. Bei der Spezialisierung der Gleichungen werden dann später der jeweiligen Körperform angepaßte Koordinaten eingeführt.

2.2 Kinematik

Zur Herleitung der kinematischen Grundgleichungen betrachten wir einen Körper, der eingebettet in den dreidimensionalen euklidischen Anschauungsraum aus einem Ausgangszustand B_0 zur Zeit t_0 - kurz (B_0, t_0) - heraus in einen aktuellen Zustand B zur Zeit t (B, t) deformiert wird (Bild 2.1).

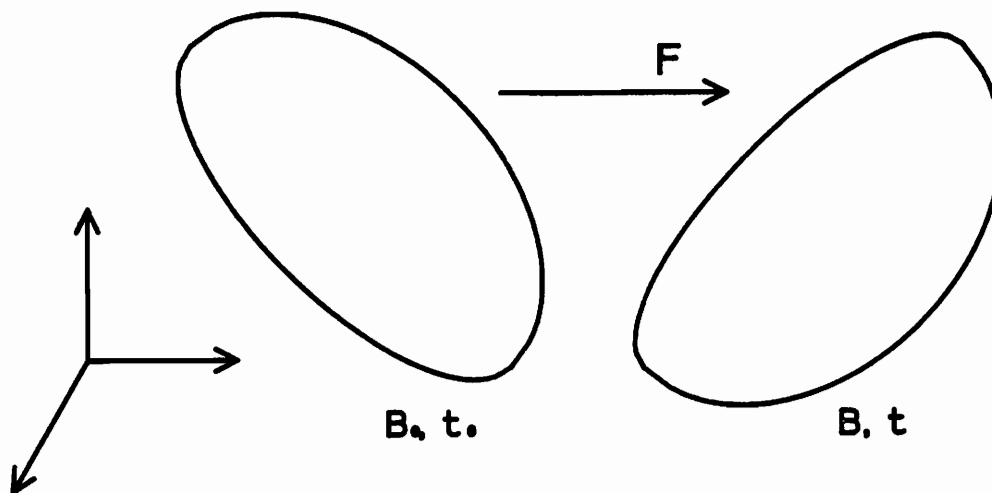


Bild 2.1: Körper im Ausgangs- und Endzustand

Die Beziehung zwischen dem zwei benachbarte Körperpunkte verbindenden Linienelement dr_0 im Zustand (B_0, t_0) und dem zugehörigen Linienelement dr (B, t) wird hergestellt durch den Deformationsgradienten F

$$dr = F dr_0 \quad (2.2.1),$$

der ein Maß für die lokale Deformation des Körpers darstellt. F ist ein Doppelfeldtensor, der Größen verschiedener Konfigurationen miteinander verknüpft.

Im Falle der hier und nachfolgend immer vorausgesetzten eindeutigen Zuordnung der beiden Linienelemente läßt sich der dann nichtsinguläre Tensor F eindeutig über seine polare Zerlegung ausdrücken durch ein Produkt

$$F = R U = V R \quad (2.2.2)$$

mit den symmetrischen, positiv-definiten Rechts- und Links- Strecktensoren U beziehungsweise V und dem orthogonalen Tensor R . Dabei erfolgt die gesamte lokale Deformation entweder durch eine Starrkörperrotation und anschließende Verformung oder zunächst durch eine Verformung und anschließend durch eine Starrkörperrotation. Die Differenzbildung der Quadrate der Linienelemente liefert die Definition des auf die Ausgangskonfiguration bezogenen Cauchy-Green-Verzerrungstensors

$$E = \frac{1}{2} (U^2 - 1) \quad (2.2.3)$$

sowie den auf die aktuelle Lage bezogenen Euler-Almansi-Verzerrungstensor:

$$A = \frac{1}{2} (1 - V^{-2}) \quad (2.2.4)$$

Weitere Verzerrungsmaße lassen sich über die spektrale Zerlegung der beiden Strecktensoren definieren /29,30/.

Da in der Plastizitäts- beziehungsweise Viskoplastizitätstheorie die Stoffgesetzformulierung üblicherweise in Verzerrungsgeschwindigkeiten erfolgt, betrachten wir nun die materielle Zeitableitung der Beziehung (2.2.1):

$$(dr)' = (F dr_0)' \quad (2.2.5)$$

Da das Linienelement dr_0 der Ausgangskonfiguration unverändert bleibt, läßt sich (2.2.5) mit Hilfe des inversen Deformationsgradienten ausdrücken

$$(dr)' = F' dr_0 = F' F^{-1} dr = L dr \quad (2.2.6)$$

und man erhält den (räumlichen) Geschwindigkeitsgradienten L , der sich aus dem Geschwindigkeitsfeld v durch Gradientenbildung ergibt:

$$L = \text{grad } v \quad (2.2.7)$$

Der Geschwindigkeitsvektor selbst wird durch die materielle Zeitableitung des Ortsvektors r

$$v = v(r,t) = r' \quad (2.2.8)$$

definiert. Verdeutlicht wird (2.2.7) durch die Beziehung

$$dv = \frac{\partial v}{\partial r} dr = \text{grad } v \, dr = L \, dr = dr' \quad (2.2.9).$$

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten D läßt sich aus der zeitlichen Änderung des Quadrates der Linienelemente bestimmen

$$(dr \cdot dr)' = dr \cdot (L + L^T) dr = dr \cdot 2D \, dr \quad (2.2.10)$$

und er repräsentiert den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten. Aus der additiven Zerlegung von L

$$L = D + W \quad (2.2.11)$$

in symmetrischen und antimetrischen Anteil

$$D = \frac{1}{2} \{ L + L^T \} = \frac{1}{2} \{ \text{Grad } v + \text{Grad}^T v \} \quad (2.2.12)$$

$$W = \frac{1}{2} \{ L - L^T \} = \frac{1}{2} \{ \text{Grad } v - \text{Grad}^T v \} \quad (2.2.13)$$

geht ferner der Spintensor W hervor, der die Drehgeschwindigkeit des materiellen Elementes beschreibt.

2.3 Spannungstensoren und -geschwindigkeiten

Ausgangspunkt zur Definition von Spannungstensoren ist der im Gleichgewicht befindliche Körper in der aktuellen Konfiguration (B, t) . Die lineare Abbildung, die die Beziehung zwischen dem gerichteten Flächenelement da und dem Kraftvektor dt herstellt (Bild 2.2), wird als Cauchy-Spannungstensor σ bezeichnet.

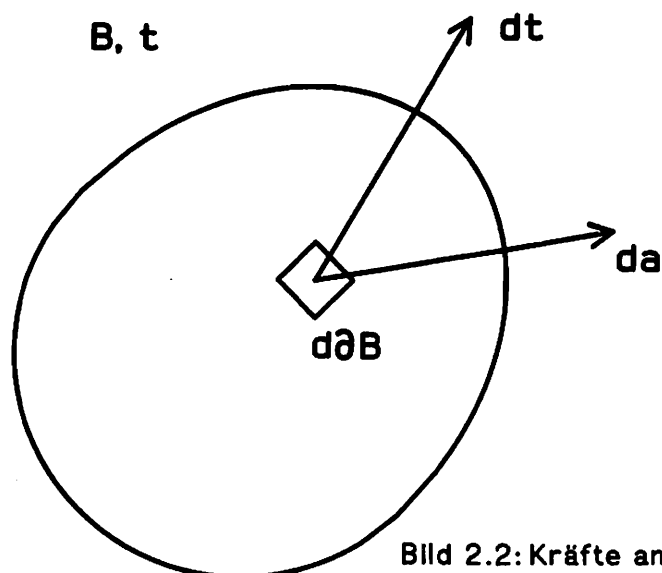


Bild 2.2: Kräfte am Flächenelement

$$dt = \sigma da \quad (2.3.1)$$

Ausgehend von der Gleichung (2.3.1) können nun verschiedene Spannungsmaße definiert werden durch die Umrechnung sowohl des Kraftvektors dt als auch des gerichteten Flächenelementes da in die Ausgangskonfiguration mit Hilfe des Deformationsgradienten /30/.

Zusätzlich zum Cauchy-Spannungstensor führen wir noch zwei weitere Spannungsmaße ein, nämlich den gewichteten Cauchy-Spannungstensor τ , der bei der Formulierung inelastischer Stoffgesetze aus thermodynamischen Erwägungen oftmals verwendet wird und den unsymmetrischen 1. Piola-Spannungstensor σ_0 , der auf die Ausgangskonfiguration (B_0, t_0) bezogen ist und zur Beschreibung der natürlichen Randbedingungen herangezogen wird. Beide Tensoren lassen sich in folgender Weise durch den Cauchy-Spannungstensor darstellen:

$$\tau = \det F \sigma = J \sigma = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_0 = \det F \sigma F^{-T} \quad (2.3.3)$$

Dabei gibt die Funktionaldeterminante $J = \det F$ das Verhältnis der Massendichten ρ zwischen Ausgangs- und aktueller Konfiguration an. Die Spannungsgeschwindigkeiten ergeben sich zu /31/:

$$\dot{\sigma}_0 = J \{ \dot{\sigma} + \sigma \operatorname{tr} D - \sigma L^T \} F^{-T} \quad (2.3.4)$$

$$\dot{\tau} = J \{ \dot{\sigma} + \sigma \operatorname{tr} D \} \quad (2.3.5)$$

2.4 Die Gleichgewichtsbedingungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur quasistatisch ablaufende Prozesse betrachtet, bei denen die Beschleunigungen vernachlässigbar sind, so daß sich die am verformten Körperelement gebildete Impulsbilanz zur Gleichgewichtsbedingung reduziert.

$$\operatorname{Div} \sigma + \rho t_i = 0 \quad (2.4.1)$$

Da bei vielen, in den Anwendungen relevanten Problemstellungen keine volumenhaft angreifenden Kräfte t_i vorhanden sind, beziehungsweise der Einfluß des Eigengewichts vernachlässigbar ist, werden wir im weiteren von der verkürzten Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{Div} \sigma = 0 \quad (2.4.2)$$

ausgehen, in der die Divergenz des Cauchy-Spannungstensors, gebildet in der aktuellen Konfiguration, verschwinden muß.

Gleichung (2.4.2) stellt eine lokale Aussage dar, die für jeden Körperpunkt zu jedem Zeitpunkt zwischen Ausgangs- und aktuellem Zustand gültig sein muß. Dies impliziert das Verschwinden der materiellen Zeitableitung der Gleichgewichtsbedingung:

$$\{ \text{Div } \sigma \} \dot{} = 0 \quad (2.4.3)$$

Nach Umformung von (2.4.3) /31/ erhalten wir die Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts, die die Grundgleichung der später zu entwickelnden Finite-Element-Verfahren darstellt:

$$\text{Div} \{ \sigma \dot{} + \sigma \text{tr} D - \sigma L^T \} = 0 \quad (2.4.4)$$

2.5 Anfangs- und Randbedingungen

Zur Formulierung der Randbedingungen unterteilen wir die Oberfläche ∂B des betrachteten Körpers in einen Teil ∂B_v , auf dem geometrische Bedingungen vorliegen und einen Teil ∂B_s , der durch die Vorgabe von Kräften ausgezeichnet ist (Bild 2.3):

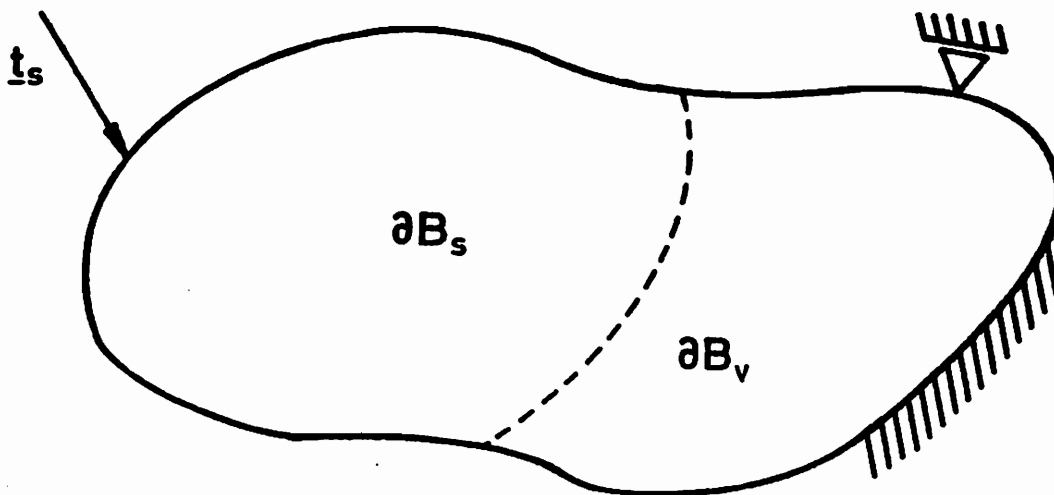


Bild 2.3: Einteilung der Körperoberfläche

$$\partial B = \partial B_v \cup \partial B_s \quad (2.5.1)$$

Da die Gleichungen nicht in Verschiebungen, sondern in Geschwindigkeiten vorliegen, ist der Teil ∂B_v eindeutig durch das dort vorhandene Geschwindigkeitsfeld v_v charakterisiert, woraus folgende Beziehung für die zu ∂B_v gehörenden Körperpunkte P resultiert:

$$\forall P \in \partial B_V : \mathbf{v} = \mathbf{v}_V \quad (2.5.2)$$

Im Verlauf eines Prozesses verändern sich neben der Oberfläche des Körpers auch die Belastungen in Größe und Richtung und es ist deshalb sinnvoll, die Randbedingungen zunächst auf die Ausgangskonfiguration zu beziehen. Im Falle einer richtungstreuen Belastung \mathbf{t}_s gilt für die Körperpunkte auf ∂B_s

$$\forall P \in \partial B_s : \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_s \quad (2.5.3)$$

Da sich \mathbf{n}_0 während des Prozesses nicht ändert und der Lastvektor \mathbf{t}_s richtungstreu ist, erhalten wir die substantielle Zitableitung von (2.5.3) zu:

$$\forall P \in \partial B_s : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 \mathbf{n}_0 = \dot{\mathbf{t}}_s \quad (2.5.4)$$

In den Anwendungen treten sehr häufig Druckbeanspruchungen p als Vertreter der nicht konservativen Lasten auf, zu deren Beschreibung die Änderung der Flächennormalen gegenüber der Ausgangslage zu berücksichtigen ist. Aus der Gleichung

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{n}_0 = -p \mathbf{n}_0 \quad (2.5.5)$$

folgt nach Differentiation nach der Zeit und anschließender Umrechnung der Flächennormalen in den Ausgangszustand /31,32,33 /:

$$\begin{aligned} \forall P \in \partial B_s : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 \mathbf{n}_0 &= -\dot{p} \mathbf{n}_0 + p (\mathbf{L}^T - \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1}) \mathbf{n}_0 \\ &= \{-\dot{p} + p (\mathbf{L}^T - \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1})\} \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

3. Stoffgesetz

3.1 Vorbemerkungen und Voraussetzungen

Die konstitutiven Beziehungen vervollständigen den Satz der Feldgleichungen zur Beschreibung deformierbarer Körper.

Das hier gewählte und von *Bruhns* in /13,34,35/ entwickelte Stoffmodell trägt der Tatsache Rechnung, daß viele Werkstoffe nach Überschreiten der Fließgrenze neben den plastischen auch - nicht vernachlässigbare - viskose Materialeigenschaften besitzen. Um Phänomene wie geschwindigkeitsabhängige Spannungs-Dehnungsverläufe, Kriechen oder Relaxation, die durch plastische Stoffgesetze nicht erfaßt werden, beschreiben zu können, ist dieses Modell entwickelt worden. (vgl. Bilder 3.1 - 3.4)

Eine konsistente Einbettung des Stoffgesetzes in eine Thermodynamik irreversibler Prozesse ist gegeben im Sinne von *Lehmann* /36/ oder durch *Perzyna* /37/.

Bild 3.5 zeigt schematisch das Kriechverhalten eines realen Werkstoffes. Man unterscheidet dabei drei Kriechbereiche:

- Primäres Kriechen - Bereich 1
- Sekundäres Kriechen - Bereich 2
- Tertiäres Kriechen - Bereich 3

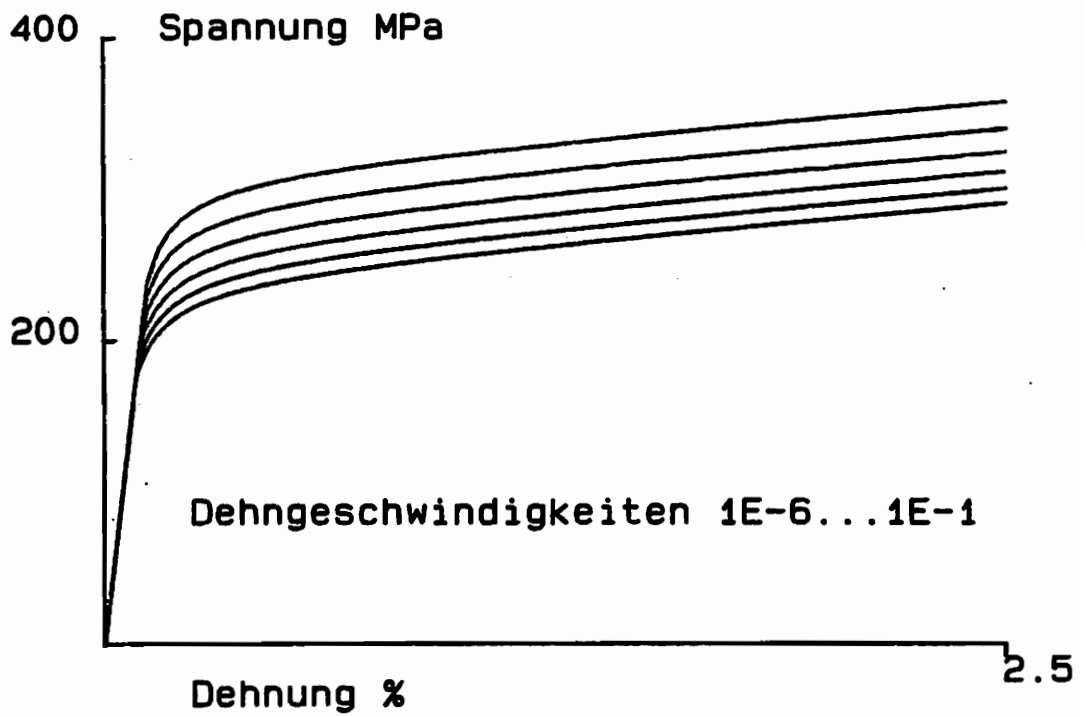
Die ursprünglichen Stoffgleichungen beschränken sich auf die Erfassung des primären Kriechbereiches (Bild 3.4). Durch eine Erweiterung des Evolutionsgesetzes für die kinematische Verfestigung läßt sich neben dem primären auch der sekundäre Kriechbereich beschreiben, wie erste Modellrechnungen zeigen. In den Gleichungen wird dieser zusätzliche Term berücksichtigt, obwohl er in den den Beispielrechnungen zugrundeliegenden Materialparametern nicht enthalten ist.

Die Behandlung des tertiären Kriechbereiches, der unmittelbar mit der Schädigung des Materials einhergeht, bleibt einer Schädigungsanalyse vorbehalten.

Nach der Zusammenstellung der Gleichungen des Stoffgesetzes werden in einem separaten Kapitel die zur Anpassung nötigen Versuche beschrieben und die Materialdaten für den austenitischen Stahl *SS 304* mit den zugehörigen Materialfunktionen sind im Anhang angegeben.

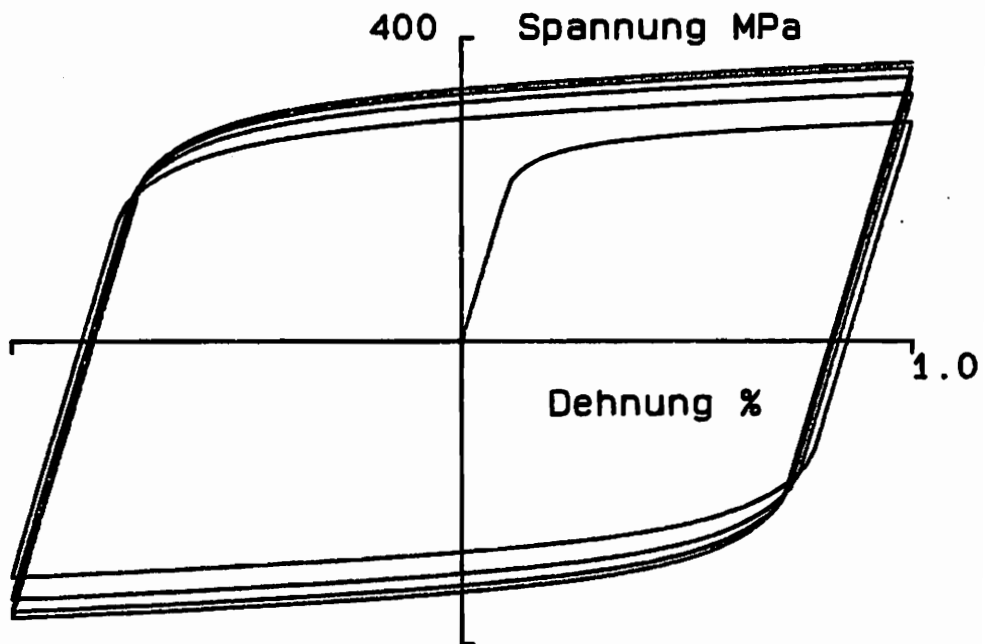
Folgende Annahmen liegen dem Stoffmodell zugrunde:

- Bis zum Erreichen der Fließgrenze sei das Materialverhalten elastisch und reversibel
- Nur jenseits der Fließgrenze sind Geschwindigkeitseffekte zu beobachten, so daß die viskosen Eigenschaften ausschließlich dem Bereich inelastischer Deformationen zuzuordnen sind
- Für sehr kleine Prozeßgeschwindigkeiten seien die viskosen Effekte



Spannungs-Dehnungs Verläufe

Bild 3.1:



Zyklisches Verhalten

Bild 3.2:

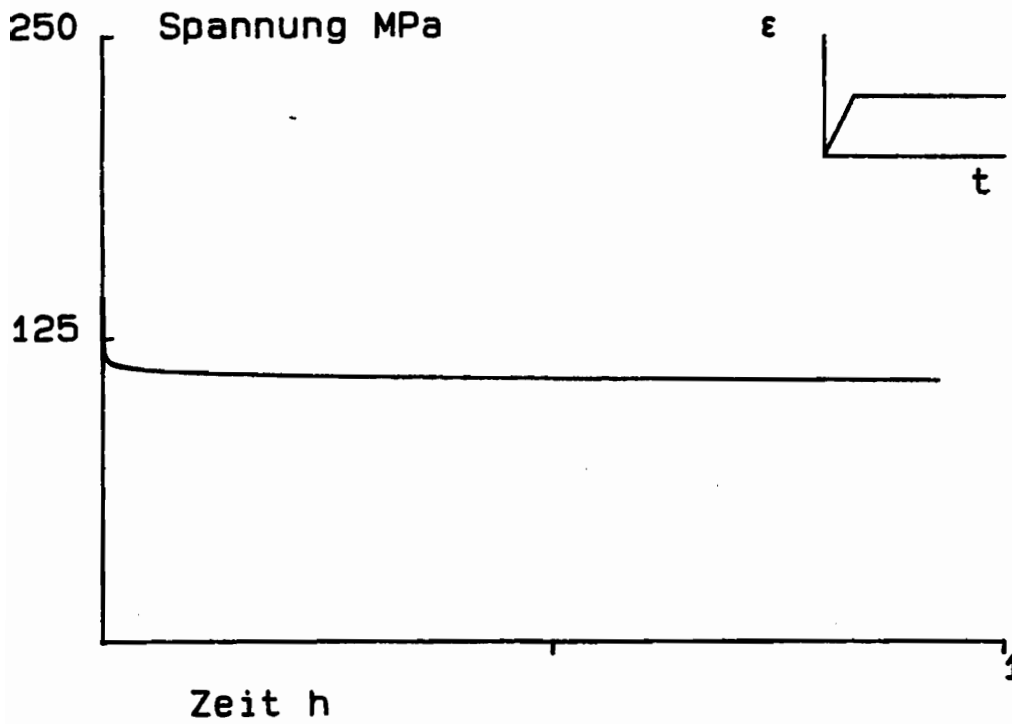


Bild 3.3:

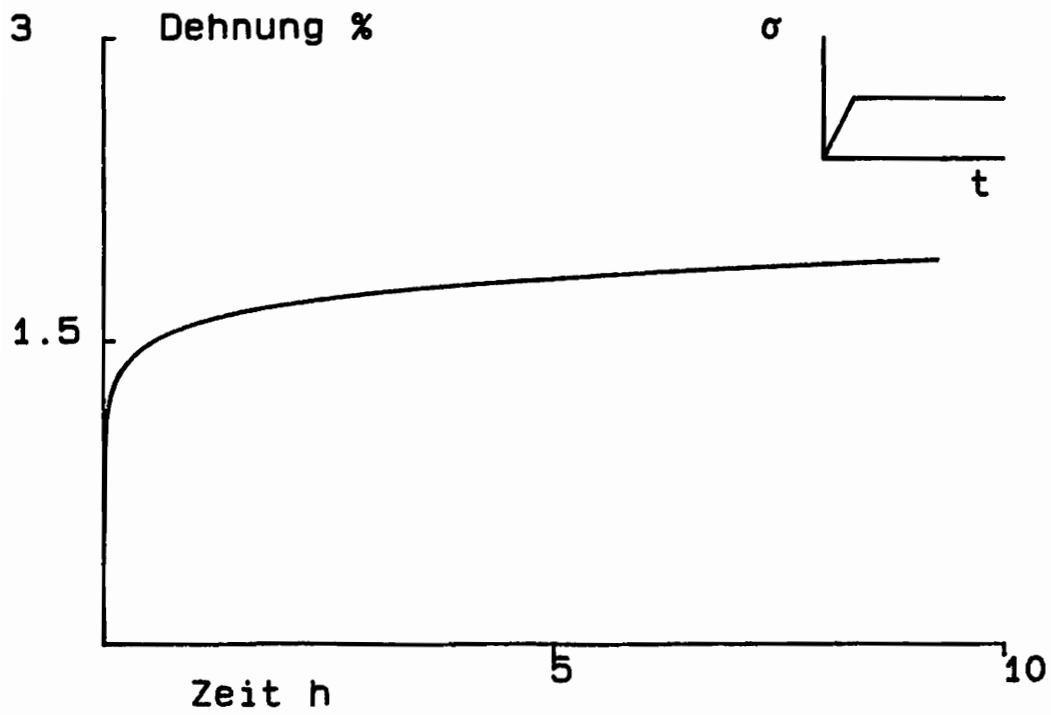


Bild 3.4:

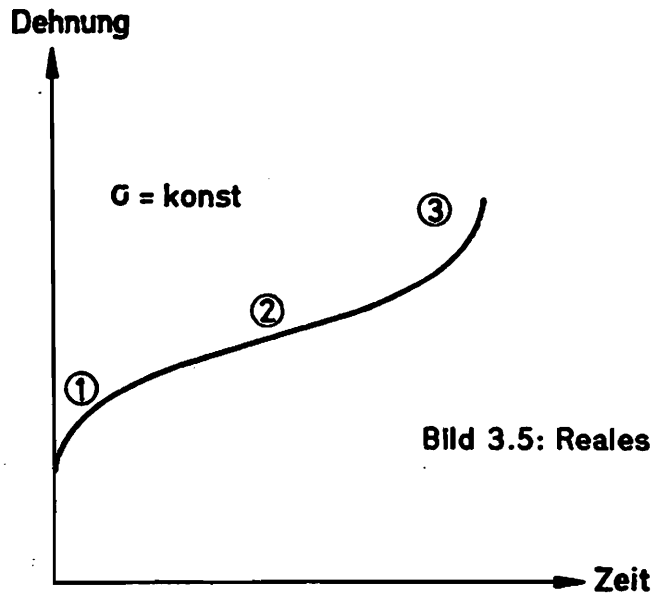


Bild 3.5: Reales Kriechverhalten

vernachlässigbar und das Materialverhalten dann näherungsweise elastisch-plastisch

- Der Gültigkeitsbereich des Modells ist beschränkt auf moderate Prozeßgeschwindigkeiten, wodurch eine Zerlegung der Spannungen im Bereich inelastischer Deformationen in einen athermalen (plastischen) und einen thermisch aktivierten (viskosen) Anteil möglich ist /36/

- Trotz der eben getroffenen Voraussetzung wollen wir von einer näherungsweise isothermen Prozeßführung ausgehen

- Die elastischen Dehnungsanteile seien - selbst bei endlichen Deformationen - klein, so daß die additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeiten eindeutig wird /38/. Die Zulässigkeit dieser Annahme für Metalle ist durch Experimente bestätigt worden

- Im jungfräulichen Zustand sei das Material isotrop

- Das Material sei inelastisch inkompressibel

3.2 Konstitutive Beziehungen

Ausgangspunkt der Materialgleichungen ist die additive Zerlegung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten D in einen elastischen D_e und einen inelastischen Anteil D_i :

$$D = D_e + D_i \quad (3.2.1)$$

Bei der Aufspaltung der Deformationen geht man von der Existenz einer im allgemeinen inkompatiblen Zwischenkonfiguration aus /38/, die die inelastischen Anteile der Gesamtdeformation repräsentiert.

D_e folgt dem hypo-elastischen Stoffgesetz

$$D_e = M \overset{\circ}{\tau} \quad (3.2.2)$$

mit dem Nachgiebigkeitstensor M . τ ist der in Kapitel 2.3 definierte gewichtete Cauchy-Spannungstensor und das Zeichen \circ steht stellvertretend für eine objektive Zeitableitung. Wir wollen im folgenden die Jaumannsche Zeitableitung

$$\overset{\circ}{\tau} = \tau' - W \tau + \tau W \quad (3.2.3)$$

gebrauchen. Die Wahl irgendeiner anderen objektiven Zeitableitung wäre ebenso möglich und würde keinerlei zusätzliche Schwierigkeiten bereiten.

Nach Einarbeitung der vorausgesetzten Isotropie wird (3.2.2) zu

$$D_e = \frac{1}{2G} \left\{ \overset{\circ}{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{tr} \overset{\circ}{\tau} \mathbf{1} \right\} \quad (3.2.4)$$

mit der Querkontraktionszahl ν und dem Gleitmodul G . Inversion von (3.2.4) liefert das nach den Spannungsgeschwindigkeiten aufgelöste Elastizitätsgesetz:

$$\overset{\circ}{\tau} = 2G \left\{ D_e + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} D_e \mathbf{1} \right\} \quad (3.2.5)$$

Gemäß Voraussetzung ist im inelastischen Bereich die Aufspaltung des Spannungstensors in einen statischen oder athermalen Anteil τ_p und einen viskosen oder thermisch aktivierten Anteil τ_v möglich. Hierbei erfüllt der Teil τ_p die dem Modell zugrundeliegende elastisch-plastische Theorie, während τ_v vereinfachend als Überspannung bezeichnet wird.

Zu einer exakten Beschreibung des aktuellen Materialverhaltens muß die gesamte Prozeßgeschichte mit einbezogen werden. Aus diesem Grund werden hier zwei interne Variable eingeführt, die den Einfluß der Vorgeschichte näherungsweise erfassen, so daß der Zustand beschrieben wird durch den aktuellen Spannungstensor und die beiden inneren Variablen.

Die im Stoffmodell enthaltenen inneren Variablen - der Tensor α und der Skalar x - repräsentieren die kinematische und isotrope Verfestigung.

Das Auftreten inelastischer Deformationen ist geknüpft an die Erfüllung einer Fließbedingung F , die befriedigt wird mit dem plastischen Anteil der Spannungen τ_p :

$$F = F(\tau_p, \alpha, x) = 0 \quad (3.2.6)$$

Im Spannungsraum beschreibt F eine Hyperfläche, die den Bereich elastischer von dem inelastischer Deformationen trennt. Einsetzen des aktuellen Spannungstensors τ in (3.2.6) führt zu der Ungleichung

$$F(\tau, \alpha, x) \geq 0 \quad (3.2.7)$$

im inelastischen Bereich, d.h. der Spannungszustand verläßt die Fließfläche und deshalb entfällt im Stoffgesetz die Konsistenzbedingung im Gegensatz zu elastisch-plastischen Modellen.

Wir wollen annehmen, daß sich in F die Variablen in der Form

$$F(\tau, \alpha, x) = F(\tau - \alpha, x) = f(\tau - \alpha) - g(x) \quad (3.2.8)$$

trennen lassen, mit der isotropen Verfestigungsfunktion $g(x)$.

Die Entwicklung der inelastischen Deformationen möge der verallgemeinerten Normalenregel

$$D_i = \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial F(\tau - \alpha)}{\partial \tau} = \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial f(\tau - \alpha)}{\partial \tau} \quad (3.2.9)$$

genügen, wobei die Größe $\gamma \Phi$ eine zu bestimmende Materialfunktion ist und Λ ein skalares Maß für die oben erwähnten Überspannungen darstellt, das noch genau zu definieren ist.

Für die Evolutionsgesetze wird folgender Ansatz gewählt:

$$\dot{\alpha} = c(x) D_i - d(\Lambda) \alpha \quad (3.2.10)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial F(\tau_p, \alpha, x)}{\partial \tau_p} \cdot D_i = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\tau_p - \alpha)}{\partial \tau_p} \cdot D_i \quad (3.2.11)$$

Während α die Translation der Fließfläche im Spannungsraum beschreibt (3.2.8), wobei der zweite Anteil von (3.2.10) mit der Materialfunktion $d(\Lambda)$ einen Recovery-Term darstellt, läßt sich die interne Variable x deuten als inelastische Arbeit der reduzierten statischen Spannungen.

Wenn wir die Voraussetzungen der inelastischen Inkompressibilität

$$\text{tr } \mathbf{D}_i = 0 \quad (3.2.12)$$

und die isotropen Materialverhaltens hinzunehmen, so folgt direkt aus (3.2.10), daß die Spur des Tensors α verschwindet, α somit von deviatorischer Gestalt ist und (3.2.8) sich in Abhängigkeit der zweiten und dritten Invarianten des Deviators von $\tau - \alpha$ schreiben läßt. Die einfachste Möglichkeit der Darstellung von f besteht in der verallgemeinerten von Mises - Form

$$f(\tau - \alpha) = (\tau' - \alpha) \cdot (\tau' - \alpha) \quad (3.2.13)$$

mit dem Spannungsdeviator τ' .

In der Fließregel und im Evolutionsgesetz für x sind Ableitungen von f nach τ beziehungsweise dem statischen Anteil des Spannungstensors τ_p zu bilden. Unter der Annahme der Parallelität dieser beiden Tensoren f_τ und f_{τ_p} im Spannungsraum ergibt sich folgendes Stoffgesetz:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2G} \left\{ \overset{\circ}{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{tr } \overset{\circ}{\tau} \mathbf{1} \right\} + \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} f_\tau \rangle \quad (3.2.14)$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \langle c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} f_\tau - d(\Lambda) \alpha \rangle \quad (3.2.15)$$

$$x' = \langle 2 \gamma \Phi(\Lambda) \sqrt{g(x)} \rangle \quad (3.2.16)$$

Dabei haben die eckigen Klammern die Bedeutung einer Schalterfunktion:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{für } F(\tau - \alpha, x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Aus (3.2.14) erhalten wir die Spannungsgeschwindigkeiten zu:

$$\overset{\circ}{\tau} = 2G \left\{ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} f_\tau \rangle \right\} \quad (3.2.18)$$

Die skalare Größe Λ - ein Maß für die während eines Prozesses entstandenen Überspannungen - wird definiert als Differenz

$$\Lambda = \sqrt{f(\tau' - \alpha)} - \sqrt{g(x)} \quad (3.2.19)$$

und repräsentiert im Spannungsraum den Abstand zwischen dem Spannungszustand und der Fließfläche.

3.3 Zur Anpassung der Materialfunktionen

In den konstitutiven Gleichungen (3.2.14 - 16) sind die Materialfunktionen $g(x)$ und $c(x)$ sowie $\gamma\Phi(\Lambda)$ und $d(\Lambda)$ durch Experimente zu bestimmen.

Grundlage bei der Anpassung ist die Annahme, daß für kleine Prozeßgeschwindigkeiten die viskosen Materialeigenschaften verschwinden und deshalb sowohl die isotrope Verfestigungsfunktion $g(x)$ als auch die kinematische Verfestigungsfunktion $c(x)$ übernommen werden können aus dem von *Bruhns* /39/ entwickelten elastisch - plastischen Kombinationsmodell aus isotroper und kinematischer Verfestigung.

Die zur Bestimmung der beiden Funktionen des geschwindigkeitsunabhängigen Stoffmodells nötigen, mit kleinstmöglichen Prozeßgeschwindigkeiten durchzuführenden Versuche /40/ bestehen aus:

- Monotonem einaxialen Zug
- Zyklischer Belastung bei verschiedenen Umkehrdehnungen

Aus dem Zugversuch ergibt sich ein Spannungs-Dehnungsverlauf des Materials, der in geeigneter Weise durch folgende Funktion approximiert werden kann:

$$\sigma = \begin{cases} E \varepsilon & \text{für } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \frac{d_1 \varepsilon^2 + d_2 \varepsilon + d_3}{\varepsilon + d_4} & \text{für } \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

E ist der Elastizitätsmodul, ε die gemessene Dehnung und σ die wahre Spannung. Aus den zyklischen Belastungen erhält man eine Folge von zugehörigen Werten ε und $g(\varepsilon)$, die sich nach Belastungsumkehr und erneuter Plastizierung durch Messen des elastischen Bereiches ergeben. Mit Hilfe einer zusätzlichen Strukturgedächtnisfunktion $\Delta(x)$, die eine Verbesserung der Beschreibung des Bauschinger Effektes ermöglicht /39/, können wir bei Spezialisierung der Gleichungen auf eindimensionale Prozesse eine Beziehung zwischen der internen Variablen x und der Dehnung herstellen, so daß mit der daraus resultierenden Folge von Wertepaaren $(x, g(x))$ die Materialfunktion $g(x)$ angepaßt werden kann. Aus $g(x)$ folgt dann direkt über eine Differentialbeziehung die kinematische Verfestigungsfunktion $c(x)$. (vgl. Anhang 1)

Es verbleibt die Ermittlung der von den Überspannungen abhängenden

Funktionen $\gamma\Phi(\Lambda)$ und $d(\Lambda)$.

Dazu sind neben monotonen Zugversuchen mit unterschiedlichen Prozeßgeschwindigkeiten auch Relaxations- und Kriechversuche auszuwerten.

Bei der numerischen Integration der Stoffgleichungen zur Anpassung an die Versuchsdaten zeigt sich, daß der Einfluß der Funktion $d(\Lambda)$ auf die Spannungs - Dehnungsverläufe bei monotonem Zug vernachlässigbar klein ist.

In einem ersten Schritt wird die Funktion $d(\Lambda)$ auf den Wert Null gesetzt und anschließend die Funktion $\gamma\Phi(\Lambda)$ so bestimmt, daß die unterschiedlichen Spannungs-Dehnungsverläufe möglichst gut approximiert werden.

Zu einer genauen Nachbildung des Kriech- und Relaxationsverhaltens dient die Funktion $d(\Lambda)$, deren Einfluß bei diesen speziellen Prozessen, wo ein Abbau von Überspannungen stattfindet, groß ist. Betrachten wir die Evolutionsgleichung (3.2.15), so wird deutlich, daß der zweite Term ein Rückfedern der Fließfläche bewirkt und sich die Abnahme der Überspannung verringert. Dies hat eine wesentliche Verbesserung der Kriechfähigkeit gemäß (3.2.14) wie auch des Relaxationsverhaltens (3.2.18) zur Folge.

Zur Kontrolle werden abschließend die Spannungs-Dehnungsverläufe mit dem ermittelten d nachgerechnet.

4. Aufbereitung der Grundgleichungen - Näherungsbetrachtung

Nach der Zusammenfassung der in den Kapiteln 2 und 3 bereitgestellten Gleichungen zur Beschreibung inelastisch deformierbarer Körper ergibt sich folgendes System partieller Differentialgleichungen:

Kinematik:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \{ \text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v} \} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \{ \text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v} \} \quad (4.2)$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\text{Div} \{ \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma} \text{tr } \mathbf{D} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T \} = 0 \quad (4.3)$$

Stoffgesetz:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = 2G \left\{ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\tau \rangle \right\} \quad (4.4)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}} = \langle c(\mathbf{x}) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\tau - d(\Lambda) \boldsymbol{\alpha} \rangle \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}' = \langle 2 \gamma \Phi(\Lambda) \sqrt{g(\mathbf{x})} \rangle \quad (4.6)$$

Geometrische Randbedingungen:

$$\forall P \in \partial B_v : \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (4.7)$$

Kräfte randbedingungen:

Richtungstreue Last:

$$\forall P \in \partial B_s : \boldsymbol{\sigma}'_o \mathbf{n}_o = \mathbf{t}_s \quad (4.8)$$

Drucklast:

$$\forall P \in \partial B_s : \boldsymbol{\sigma}'_o \mathbf{n}_o = \{-p \mathbf{i} + p (\mathbf{L}^T - \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1})\} \mathbf{n}_o \quad (4.9)$$

Komplettiert werden die Gleichungen neben der Definition der Jaumannschen Zeitableitung (3.2.3) durch die Beziehungen zwischen den verschiedenen Spannungsmaßen (2.3.2), (2.3.3) sowie deren Geschwindigkeiten (2.3.4) und (2.3.5).

Durch Auflösen nach dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} können die Verzerrungs-, Rotations- und Spannungsgeschwindigkeiten eliminiert werden. Diese Vorgehensweise entspricht der Umformung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in die Lamé-Navierschen Gleichungen.

Zuerst setzen wir die kinematischen Beziehungen (4.1) und (4.2) in das Stoffgesetz (4.4) ein und erhalten unter Beachtung der Jaumannschen Zeitableitung :

$$\boldsymbol{\tau}' = 2G \left\{ \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}}{1-2\nu} \text{tr}(\text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v}) \mathbf{1} \right. \quad (4.10)$$

$$\left. - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f} \boldsymbol{\tau} \rangle \right\} + \frac{1}{2} \{ (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \}$$

Mit (2.3.5) und (2.3.2) lassen sich der gewichtete Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und seine substantielle Zeitableitung durch die entsprechenden Größen von $\boldsymbol{\sigma}$ ausdrücken und aus (4.10) wird, wobei die Spur des Gradienten von \mathbf{v} gleich der Divergenz von \mathbf{v} ist:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2GJ^{-1} \left\{ \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{v}}{1-2\nu} \text{div } \mathbf{v} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f} \boldsymbol{\tau} \rangle \right. \quad (4.11)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \{ (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \} - \boldsymbol{\sigma} \text{div } \mathbf{v} \right\}$$

Durch Einsetzen von (4.11) in (4.3) werden die Spannungsgeschwindigkeiten eliminiert und es verbleibt die durch das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} ausgedrückte Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts:

$$\text{Div} \left\{ 2GJ^{-1} \left\{ \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{v}}{1-2\nu} \text{div } \mathbf{v} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f} \boldsymbol{\tau} \rangle \right\} \right. \quad (4.12)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \{ (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \} - \boldsymbol{\sigma} \text{div } \mathbf{v} \right\} = 0$$

Zur Lösung von Gleichung (4.12), die zu allen Zeiten zwischen Ausgangs- B_0 und Endzustand B gilt, denken wir uns die Gesamtdeformation zusammengesetzt aus einer Folge von n -Teildeformationen mit den zugehörigen Konfigurationen B_i und Zeiten t_i , (B_i, t_i) , (Bild 4.1).

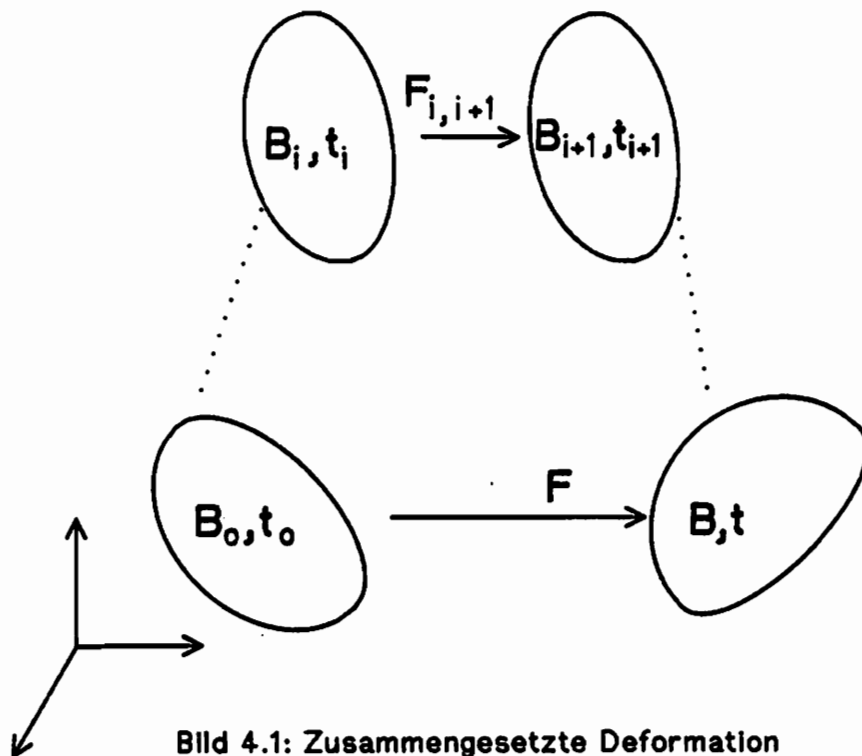


Bild 4.1: Zusammengesetzte Deformation

Unter der Voraussetzung der Kenntnis von Spannungen, Verfestigungen und Verformungen eines "Zwischenzustandes" (B_i, t_i) wählt man im Sinne einer updated-Lagrange Formulierung /42/ B_i zur Referenzkonfiguration. Wäre die Größe von J und damit auch die der Inversen bekannt, so ließen sich die drei skalaren Gleichungen (4.12) zur Bestimmung des unbekanntes Geschwindigkeitsfeldes v verwenden, das den Körper in den Zustand B_{i+1} überführt.

Zur Lösung dieser Schwierigkeit fordern wir, daß der Deformationsgradient, der die Linienelemente zweier benachbarter Zustände aufeinander abbildet,

$$F_{i,i+1} \approx 1 \quad (4.13)$$

näherungsweise gleich dem Einsteintensor ist oder anders ausgedrückt sollen die Deformationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konfigurationen klein bleiben.

Aus (4.13) folgt direkt:

$$J_{i,i+1} = \det F_{i,i+1} = 1 = J_{i,i+1}^{-1} \quad (4.14)$$

Diese Näherung ändert nichts daran, daß der inelastisch deformierte Körper im allgemeinen eine endliche Verformung zwischen B_0 und B erfährt. Es ist lediglich sicherzustellen, daß die Unterteilung der gesamten Deformation in eine hinreichende Anzahl von jeweils benachbarten

Konfigurationen erfolgt, die (4.14) erfüllen. Diese Forderung ist, wie sich später zeigt, gerechtfertigt, da die Zeitintegration des sehr steifen Systems der Stoffgleichungen sehr kleine zeitliche Schrittweiten erfordert, weshalb sich wegen der im Stoffgesetz vorausgesetzten moderaten Prozeßgeschwindigkeiten nur kleine Deformationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konfigurationen einstellen können. Zur Kennzeichnung der jeweiligen Referenzkonfiguration ist es nun notwendig, die Größen dieses Zustandes zu indizieren. Wir wollen im Hinblick auf die Übersichtlichkeit der Gleichungen darauf verzichten und vereinbaren ab jetzt, daß sich die Überlegungen stellvertretend für den ganzen Prozeßverlauf auf den i-ten Zwischenzustand (B_i, t_i) beziehen.

Mit den Annahmen (4.13) und (4.14) und unter Berücksichtigung der updated-Lagrange Formulierung gilt die Gleichheit

$$\sigma = \tau = \sigma_0 \quad (4.15)$$

zwischen den verschiedenen Spannungsmaßen, während sich die Beziehungen zwischen den Spannungsgeschwindigkeiten aus (2.3.4) und (2.3.5) vereinfachen:

$$\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma} + \sigma \operatorname{tr} D - \sigma L^T \quad (4.16)$$

$$\dot{\tau} = \dot{\sigma} + \sigma \operatorname{tr} D \quad (4.17)$$

Die Evolutionsgleichungen bleiben durch diese Näherung unverändert, aber die in den Geschwindigkeiten formulierte Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts ergibt

$$\operatorname{Div} \left\{ 2G \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{Grad} \mathbf{v} + \operatorname{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\sigma \rangle \right\} \right. \quad (4.18)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \{ (\operatorname{Grad} \mathbf{v} - \operatorname{Grad}^T \mathbf{v}) \sigma - \sigma (\operatorname{Grad} \mathbf{v} - \operatorname{Grad}^T \mathbf{v}) \} - \sigma \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} = 0$$

mit dem Richtungstensor \mathbf{f}_σ , der sich wegen (4.15) nicht von \mathbf{f}_τ unterscheidet.

Die Spannungsrandbedingungen für richtungstreue (4.8) und Druckbelastung (4.9) werden zu (4.19) und (4.20):

$$\forall P \in \partial B_s :$$

$$\left[2G \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{Grad} \mathbf{v} + \operatorname{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\sigma \rangle \right\} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \{ (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T \Big] \mathbf{n} \\
 & - \mathbf{t}_s = 0 \qquad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[2G \left\{ \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{v} + \text{Grad}^T \mathbf{v}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{div } \mathbf{v} \mathbf{1} - \langle \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\sigma \rangle \right\} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \{ (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\text{Grad } \mathbf{v} - \text{Grad}^T \mathbf{v}) \} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T \\
 & \left. + \rho \cdot - \rho (\mathbf{L}^T - \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{1}) \right] \mathbf{n} = 0 \qquad (4.20)
 \end{aligned}$$

Bei den Kräfte- und Momentenrandbedingungen sind ebenfalls die Spannungsgeschwindigkeiten eliminiert worden. \mathbf{n} ist der zur Konfiguration (B_i, t_i) gehörende äußere Normaleneinheitsvektor.

Durch die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konfigurationen gemachte Näherung werden die Feldgleichungen linear in den Geschwindigkeiten. Hinsichtlich der numerischen Umsetzung wird dadurch die Lösung nichtlinearer Gleichungen vermieden.

5. Verfahren der gewichteten Residuen

Zur Lösung mit der FE - Methode eines in der Form

$$Y[v(x)] - a = 0 \quad , \quad x \in \Omega \quad (5.1)$$

$$Z[v(x)] - b = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad (5.2)$$

vorgelegten Differentialgleichungssystem mit den Operatoren Y im Gebiet Ω und Z auf dem Rand $\partial\Omega$ wird in der Regel ein zugeordnetes Variationsproblem formuliert, das dann basierend auf dem Ritz-Verfahren stationär gemacht wird. Durch die Variationsformulierung werden die Stetigkeitsanforderungen der Ansatzfunktionen reduziert, was eine Erleichterung der numerischen Handhabung beinhaltet.

Allerdings darf nicht unerwähnt bleiben, daß damit die sogenannte *schwache* Lösung des Problems approximiert wird, deren Lösungsraum nur bei zusätzlichen Eigenschaften der Operatoren Y und Z dicht im Funktionenraum der exakten Lösung von (5.1) und (5.2) liegt und daß erst dann die schwache Lösung mit der Lösung von (5.1) identisch ist /41/.

Da wir jedoch an praktischen Fragestellungen interessiert sind, wollen wir diese mehr mathematischen Aspekte der Umsetzung der Differentialgleichungen in FE- Verfahren nicht weiter vertiefen und direkt auf die Verfahren der gewichteten Residuen eingehen, die im Gegensatz zur Variationsformulierung direkt auf den Gleichungen (5.1) und (5.2) operieren.

Zur Approximation der gesuchten Größe v wird dabei der Ansatz

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^N v_k \psi_k(x) \quad (5.3)$$

verwendet, der eingesetzt in (5.1) unter der Annahme der Erfüllung aller Randbedingungen die exakte Lösung genau dann liefert, wenn (5.1) erfüllt ist. Im allgemeinen wird jedoch ein Rest R verbleiben, den wir Residuum nennen:

$$R(x) = Y[\bar{v}] - a \quad (5.4)$$

Die Methode der gewichteten Residuen fordert nun, daß die Integrale gebildet aus dem Produkt zwischen Residuum und einem geeigneten Satz von Gewichtsfunktionen $w_j(x)$ über dem Gebiet Ω verschwinden:

$$\int_{\Omega} R(x) w_j(x) d\Omega = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

Gleichung (5.5) orthogonalisiert das Residuum gegenüber einem durch die Gewichtsfunktionen aufgespannten Unterraum. Damit ist die Verbindung hergestellt zum in diesem Zusammenhang fundamentalen Projektionssatz, der die mathematische Grundlage einer eindeutigen Lösung des Problems im Unterraum legt [20,41]. Häufig wird daher auch der Name Projektionsverfahren gebraucht, der ausdrückt, daß man die Lösung des eigentlichen Problems durch Funktionen eines Unterraums approximiert.

5.1 Das Verfahren von Galerkin

Beim Verfahren von Galerkin werden die Gewichtsfunktionen $w_j(\mathbf{x})$ so gewählt, daß sie mit den Ansatzfunktionen $\psi_k(\mathbf{x})$ zusammenfallen:

$$w_k(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x}) \quad (5.1.1)$$

Die Galerkinschen Gleichungen, die das Residuum gegenüber dem Raum der Ansatzfunktionen orthogonalisieren, lauten also:

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \psi_k \, d\Omega = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (5.1.2)$$

Bei der Herleitung der Gleichungen (5.5) haben wir vorausgesetzt, daß der Ansatz $\bar{\mathbf{v}}$ alle Randbedingungen erfüllt. Diese Forderung ist Voraussetzung für das Galerkin-Verfahren und im allgemeinen sehr schwer zu erfüllen, da die natürlichen Randbedingungen in differentieller Form vorliegen.

Zur Umgehung dieser Schwierigkeiten erweitert man deshalb das Differentialgleichungssystem (5.1) um die natürlichen Randbedingungen (5.2) und modifiziert die Galerkinschen Gleichungen um diesen Anteil. Der Ansatz (5.3) erstreckt sich also auf die Vereinigungsmenge

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad (5.1.3)$$

und es verbleibt neben dem Residuum R ein zweites r infolge (5.2):

$$r(\mathbf{x}) = Z[\bar{\mathbf{v}}] - \mathbf{b} \quad (5.1.4)$$

Die um die Kräfte-Randbedingungen erweiterten Gleichungen lauten dann:

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \psi_k \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} r(\mathbf{x}) \psi_k \, d\partial\Omega = 0 \quad (5.1.5)$$

Im verallgemeinerten Galerkin-Verfahren sind vom Ansatz (5.3) wie beim Ritzverfahren nur noch die wesentlichen Randbedingungen zu erfüllen.

5.2 Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate - Least Squares

Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate versucht das Quadrat der Norm des Residuums zu minimieren. Fügen wir auch hier die Kraft- randbedingungen hinzu, so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\int_{\Omega} R^2(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} r^2(\mathbf{x}) \, d\partial\Omega \longrightarrow \text{Min.} \quad (5.2.1)$$

Unter Beachtung von (5.3) folgen aus (5.2.1) die Gleichungen des Least-Squares-Verfahrens

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \int_{\Omega} R^2(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} r^2(\mathbf{x}) \, d\partial\Omega \right\} = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.2.2)$$

durch partielle Differentiation von (5.2.1) nach den Freiwerten. Nach Ausführung der Ableitungen läßt sich (5.2.2) umformen zu

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial v_k} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} r(\mathbf{x}) \frac{\partial r(\mathbf{x})}{\partial v_k} \, d\partial\Omega = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.2.3)$$

und die Gewichtsfunktionen $w_j(\mathbf{x})$ sind hier die partiellen Ableitungen der Residuen nach den Ansatzfreiwerten.

5.3 Kopplung der beiden Verfahren

Durch die Hinzunahme der Randterme werden im Prinzip zwei Residuen (R und r) minimiert und man ist aufgrund der Allgemeinheit der Verfahren der gewichteten Residuen in der Lage, Galerkin- und Least-Squares-Verfahren zu koppeln /42/. Im ersten Fall behandelt man Gleichung (5.1) mit dem Galerkin-Verfahren und (5.2) mit der Least-Squares-Methode, im zweiten umgekehrt. Es resultieren daraus die "gemischten" Verfahren:

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial v_k} d\Omega + \int_{\partial\Omega} r(\mathbf{x}) \psi_k d\partial\Omega = 0 \quad (5.3.1)$$

$$k = 1, \dots, N$$

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \psi_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} r(\mathbf{x}) \frac{\partial r(\mathbf{x})}{\partial v_k} d\partial\Omega = 0 \quad (5.3.2)$$

Von den beiden Möglichkeiten der Kopplung der Verfahren wird nachfolgend nur von der Variante (5.3.2) Gebrauch gemacht.

6. Diskretisierung mit der FE - Methode

Zur Lösung der Differentialbeziehungen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wird der Körper B in N Teilvolumina ΔB_j - die finiten Elemente - zerlegt mit der Bedingung

$$B = \bigcup_{j=1}^N \Delta B_j.$$

Im Bereich ΔB_j jedes Elementes werden die gesuchten Größen approximiert durch geeignete Ansatzfunktionen. Wegen ihrer leichten Handhabung werden in der Regel Polynomräume gewählt und die Unbekannten durch die entsprechenden Polynome in Abhängigkeit der Knotenwerte interpoliert. Die lokalen Aussagen auf Elementebene sind dann über Inzidenzmatrizen beziehungsweise Tafeln der Gesamtstruktur zuzuordnen und deshalb reicht es aus, zur Charakterisierung einer Struktur stellvertretend ein Element zu betrachten.

Nach der Spezialisierung der Gleichungen (4.18) - (4.20) für Scheiben- und Ringelement und Einarbeiten der Ansätze für das Geschwindigkeitsfeld in die verschiedenen Verfahren entstehen dann die Gleichungssysteme zur Bestimmung der Freiwerte.

Da die zeitliche Diskretisierung bereits im vierten Kapitel erfolgt ist, bezieht sich die anschließende Darstellung auf einen festen Zeitpunkt t_i .

6.1 Ringelement

Das Ringelement soll der Beschreibung rotationssymmetrischer Probleme dienen, so daß es zweckmäßig ist, neben einem raumfesten kartesischen Koordinatensystem ein körperfestes Zylinderkoordinatensystem (r, z, φ) einzuführen. (Bild 6.1)

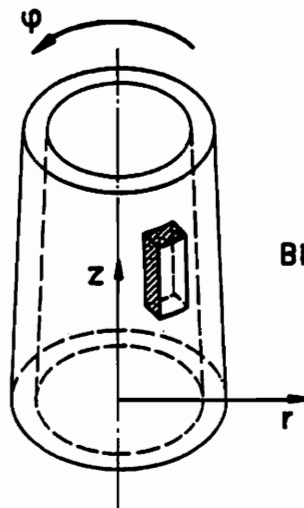


Bild 6.1: Ringelement

Die sich anschließende Umrechnung der Grundgleichungen ist dem Tensorformalismus entsprechend durchzuführen, wobei ausgehend vom Ortsvektor durch partielle Differentiation nach den Koordinaten die Basisvektoren entstehen und aus ihnen durch Skalarproduktbildung die Metrik ermittelt wird. Durch Ableitung der Metrikkoeffizienten ergeben sich dann die Christoffel-Symbole, mit deren Hilfe sich die kovarianten Ableitungen bestimmen lassen /43,44,45/. Wir werden nur die wichtigsten daraus resultierenden Beziehungen explizit angeben.

Die auf den Körper einwirkenden Kräfte seien ferner während des gesamten Prozesses rotationssymmetrisch.

Diese Voraussetzungen haben zur Folge, daß - nach Einführung physikalischer Komponenten - neben der Geschwindigkeit v_φ auch die Spannungskomponenten $\sigma_{r\varphi}$ und $\sigma_{z\varphi}$, sowie deren Inkremente verschwinden. Für das Geschwindigkeitsfeld demnach

$$\mathbf{v} = [v_r(r,z), v_z(r,z)] = [u(r,z), v(r,z)] \quad (6.1.1)$$

mit der radialen Komponente $u(r,z)$ sowie der axialen $v(r,z)$. Der Spannungstensor besteht aus vier unabhängigen Komponenten:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

Da die Deviatorbildung eines Tensors nichts an den Nebendiagonalelementen verändert, läßt sich aus dem Evolutionsgesetz für den Translationstensor (3.2.10) ausgehend von einem ursprünglich jungfräulichen Material und unter Berücksichtigung der während des gesamten Prozesses gültigen Rotationssymmetrie ableiten, daß für $\boldsymbol{\alpha}$ ebenfalls die Darstellung

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{rr} & \alpha_{rz} & 0 \\ \alpha_{rz} & \alpha_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

gültig ist.

Nach diesen direkt aus den Voraussetzungen ersichtlichen Beziehungen berechnen sich die Christoffel-Symbole zu:

$$\Gamma_{33}^1 = -r, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (6.1.4)$$

Allgemein ist die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten eines Vektors x definiert durch

$$x^i|_j = x^i_{,j} + \Gamma_{jk}^i x^k \quad (6.1.5)$$

und die kontravarianten Komponenten eines Tensors A zweiter Stufe ergeben kovariant differenziert:

$$A^{ij}|_k = A^{ij}_{,k} + \Gamma_{km}^i A^{mj} + \Gamma_{km}^j A^{im} \quad (6.1.6)$$

Dabei ist in den beiden letzten Beziehungen von der Einsteinschen Summationskonvention Gebrauch gemacht worden, bei der über gegenständige gleiche Indizes zu summieren ist. Mit diesen Beziehungen können die Grundgleichungen weiter aufbereitet werden und man erhält nach Übergang auf physikalische Komponenten und unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v^j|_j = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \quad (6.1.7)$$

$$\operatorname{Grad} \mathbf{v} = v^i|_j = L = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{r} \end{bmatrix} \quad (6.1.8)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{A} = A^{ij}|_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial A_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\varphi\varphi}) \\ \frac{\partial A_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} A_{rz} \end{bmatrix} \quad (6.1.9)$$

Aus dem Geschwindigkeitsgradienten (6.1.8) folgen direkt die Kompo-

nenten der Verzerrungs- und Rotationsgeschwindigkeitstensoren analog (2.2.8) beziehungsweise (2.2.9)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{r} \end{bmatrix} \quad (6.1.10)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.11)$$

und die in den Gleichungen (4.18) - (4.20) zu bildenden Tensorprodukte können damit angegeben werden:

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ -\sigma_{rr} & -\sigma_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \begin{bmatrix} -\sigma_{rz} & \sigma_{rr} & 0 \\ -\sigma_{zz} & \sigma_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} & \sigma_{rr} \frac{\partial v}{\partial r} + \sigma_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \\ \sigma_{rz} \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} & \sigma_{rz} \frac{\partial v}{\partial r} + \sigma_{zz} \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \frac{u}{r} \end{bmatrix} \quad (6.1.14)$$

Es sind nun die Vorarbeiten ausgeführt, d.h. alle in den Grundgleichungen enthaltenen Tensorkomponenten gegeben, so daß mit der Beziehung (6.1.9) für die Divergenz eines Tensors die im Innern des Körpers gültigen Differentialbeziehungen komponentenweise formuliert werden können.

Zur Verkürzung der Gleichungen wird noch der Tensor

$$\mathbf{B} = \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \mathbf{f}_\sigma = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rz} & 0 \\ B_{rz} & B_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.1.15)$$

vereinbart, den wir im folgenden "Materialtensor" nennen wollen, da in \mathbf{B} bedingt durch die Definitionen der Überspannung Λ und der Funktion f alle internen Variablen des Stoffgesetzes enthalten sind und \mathbf{B} deshalb das viskoplastische Materialverhalten in den Differentialgleichungen (4.18) repräsentiert. Rein formal stimmt \mathbf{B} mit den inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten \mathbf{D}_i überein. Die Divergenzbildung des Materialtensors führt auf eine längere Rechnung, die im Anhang im Einzelnen ausgeführt ist. Wir benutzen hier nur die Komponenten von \mathbf{B} und deren Ableitungen als Kürzel.

Die Divergenzbildung der einzelnen Terme liefert folgende Gleichungen:

$$\text{Div } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{bmatrix} \quad (6.1.16)$$

$$\text{Div (tr } \mathbf{D} \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.1.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Div} (\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Div} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \begin{bmatrix} -\sigma_{rz} \\ \sigma_{rr} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{zz} \\ -\sigma_{rz} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \begin{bmatrix} -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Div} (\boldsymbol{\sigma} \text{div} \mathbf{v}) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} \end{bmatrix} \quad (6.1.20)$$

Damit lassen sich die beiden aus (4.18) resultierenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} & u_{10} u + u_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{12} \frac{\partial u}{\partial z} + u_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + u_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + v_{11} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{12} \frac{\partial v}{\partial z} + v_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + v_{14} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + v_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \langle b_1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

$$\begin{aligned} & u_{20} u + u_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{22} \frac{\partial u}{\partial z} + u_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + u_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u_{25} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + v_{21} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{22} \frac{\partial v}{\partial z} + v_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + v_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + v_{25} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \langle b_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

angeben und die - nicht konstanten - Koeffizienten haben folgendes Aussehen:

$$u_{10} = \left\{ \left[-2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) + 3\sigma_{\varphi\varphi} \right] \frac{1}{r} - 2 \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \right\} \frac{1}{r}$$

$$u_{11} = \left[2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) + 2\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_{rr} \right] \frac{1}{r} - 3 \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right)$$

$$u_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - 2\sigma_{rz} \frac{1}{r}$$

$$u_{13} = -3\sigma_{rz}$$

$$u_{14} = 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) - 3\sigma_{rr}$$

$$u_{15} = G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})$$

$$v_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} - \sigma_{rz} \frac{1}{r}$$

$$v_{12} = -2\left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\frac{1}{r}\right]$$

$$v_{13} = G\left(1 + 2\frac{\nu}{1-2\nu}\right) - \frac{1}{2}(3\sigma_{rr} + \sigma_{zz})$$

$$v_{14} = -\sigma_{rz}$$

$$v_{15} = -2\sigma_{rz}$$

$$b_1 = 2G\left[\frac{\partial B_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial B_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(B_{rr} - B_{\varphi\varphi})\right]$$

(6.1.23)

$$u_{20} = -2\left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

$$u_{21} = -2\left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right) - 4\sigma_{rz}\frac{1}{r}$$

$$u_{22} = \left[G\left(1 + 2\frac{\nu}{1-2\nu}\right) - \frac{1}{2}(3\sigma_{zz} + \sigma_{rr})\right]\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r} - \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\right) - \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}$$

$$u_{23} = G\left(1 + 2\frac{\nu}{1-2\nu}\right) - \frac{1}{2}(3\sigma_{zz} + \sigma_{rr})$$

$$u_{24} = -2\sigma_{rz}$$

$$u_{25} = -\sigma_{rz}$$

$$v_{21} = \left[G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right]\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r}\right)$$

$$v_{22} = -3\left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right) - 3\sigma_{rz}\frac{1}{r}$$

$$v_{23} = -3\sigma_{rz}$$

$$v_{24} = G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})$$

$$v_{25} = 2G\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) - 3\sigma_{zz}$$

$$b_2 = 2G\left[\frac{\partial B_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial B_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} B_{rz}\right]$$

In analoger Weise ergeben sich aus den Kraftrandbedingungen für richtungstreue Belastung (4.19) die Gleichungen

$$u_{30}u + u_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{32} \frac{\partial u}{\partial z} + v_{31} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{32} \frac{\partial v}{\partial z} - b_3 = 0 \quad (6.1.24)$$

$$u_{40}u + u_{41} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{42} \frac{\partial u}{\partial z} + v_{41} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{42} \frac{\partial v}{\partial z} - b_4 = 0 \quad (6.1.25)$$

mit den in den Koeffizienten

$$u_{30} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} n_r$$

$$u_{31} = [2G\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) - \sigma_{rr}] n_r$$

$$u_{32} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})] n_z$$

$$v_{31} = -\sigma_{rz} n_r + [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] n_z$$

$$v_{32} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} n_r - \sigma_{rz} n_z$$

$$b_3 = t_{sr} + 2G \langle B_{rr} n_r + B_{rz} n_z \rangle$$

(6.1.26)

$$u_{40} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} n_z$$

$$u_{41} = -\sigma_{rz} n_r + 2G \frac{\nu}{1-2\nu} n_z$$

$$u_{42} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] n_r - \sigma_{rz} n_z$$

$$v_{41} = [G + \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})] n_r$$

$$v_{42} = [2G(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}) - \sigma_{zz}] n_z$$

$$b_4 = t_{sz} + 2G \langle B_{rz} n_r + B_{zz} n_z \rangle$$

enthaltenen Komponenten des Normalenvektors n_r in radialer und n_z in axialer Richtung, die beide Funktionen von r und z sind. Die Bestimmung des noch unbekanntes Normalenvektors wird in Kapitel 6.5 vorgenommen. Die äußere Belastung ist ebenfalls in die einzelnen Komponenten zerlegt worden. (t_{sr} , t_{sz})

Für Druckbelastung ergeben sich folgende Verhältnisse, wobei p der zum betrachteten Zeitpunkt bereits wirkende Druck ist:

$$u_{50}u + u_{51} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{52} \frac{\partial u}{\partial z} + v_{51} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{52} \frac{\partial v}{\partial z} - b_5 = 0 \quad (6.1.27)$$

$$u_{60}u + u_{61} \frac{\partial u}{\partial r} + u_{62} \frac{\partial u}{\partial z} + v_{61} \frac{\partial v}{\partial r} + v_{62} \frac{\partial v}{\partial z} - b_6 = 0 \quad (6.1.28)$$

$$u_{50} = [2G \frac{\nu}{1-2\nu} + p] n_r$$

$$u_{51} = [2G(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}) - \sigma_{rr}] n_r$$

$$u_{52} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})] n_z$$

$$v_{51} = -\sigma_{rz} n_r + [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) - p] n_z$$

$$v_{52} = [2G \frac{\nu}{1-2\nu} + p] n_r - \sigma_{rz} n_z$$

$$b_5 = -p \cdot n_r + 2G \langle B_{rr} n_r + B_{rz} n_z \rangle$$

(6.1.29)

$$u_{60} = [2G \frac{\nu}{1-2\nu} + p] n_z$$

$$u_{61} = -\sigma_{rz} n_r + [2G \frac{\nu}{1-2\nu} + p] n_z$$

$$u_{62} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) - p] n_r - \sigma_{rz} n_z$$

$$v_{61} = [G + \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})] n_r$$

$$v_{62} = [2G(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}) - \sigma_{zz}] n_z$$

$$b_6 = -p \cdot n_z + 2G \langle B_{rz} n_r + B_{zz} n_z \rangle$$

6.2 Scheibenelement

Wir legen bei der Beschreibung ein kartesisches Koordinatensystem (x,y,z) zugrunde, dessen x - y -Ebene mit der Scheibenmittelfläche zusammenfällt (Bild 6.2).

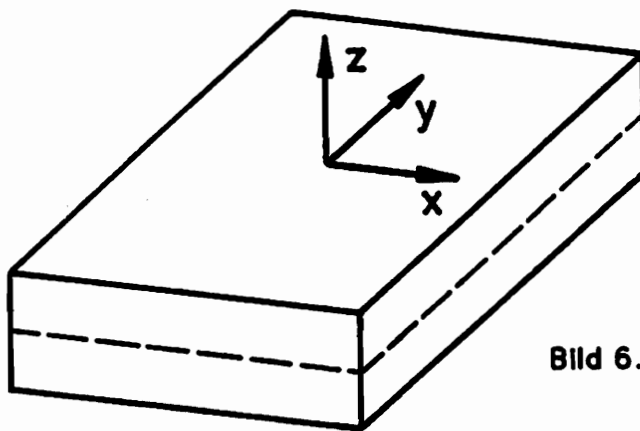


Bild 6.2: Scheibenelement

Die Dicke t der Scheibe sei klein gegenüber den anderen Abmessungen und wir fordern, daß der Spannungszustand unabhängig von der Dickenkoordinate z ist. Da Belastungen nur in der Scheibenebene angreifen dürfen und Ober- und Unterseite der Scheibe spannungsfrei sind, liegt in guter Näherung ein ebener Spannungszustand

$$\sigma_{iz} = 0 \quad i = x, y, z \quad (6.2.1)$$

vor, der zu allen Zeiten gültig ist, woraus

$$\dot{\sigma}_{iz} = 0 \quad i = x, y, z \quad (6.2.2)$$

resultiert. Die Gleichungen (6.2.1) und (6.2.2) behalten ihre Gültigkeit für den gewichteten Cauchy-Spannungstensor τ , dessen Jaumannsche Zeitableitung für die entsprechenden Komponenten ebenfalls verschwindet:

$$\overset{\circ}{\tau}_{iz} = 0 \quad i = x, y, z \quad (6.2.3)$$

Ausgehend von einem ursprünglich jungfräulichen Material und mit (6.2.1) folgt aus dem Evolutionsgesetz für die kinematische Verfestigung (3.2.15)

$$\overset{\circ}{\alpha}_{xz} = \overset{\circ}{\alpha}_{yz} = 0 \quad (6.2.4)$$

und daraus

$$B_{xz} = B_{yz} = 0 \quad (6.2.5)$$

Aus dem Stoffgesetz (3.2.14) verschwinden wegen (6.2.3) die Verzerungsgeschwindigkeiten

$$D_{xz} = D_{yz} = 0 \quad (6.2.6)$$

und aus den drei Gleichungen für die Dehnungsgeschwindigkeiten

$$D_{xx} = \frac{1}{2G} \left[\overset{\circ}{\tau}_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} (\overset{\circ}{\tau}_{xx} + \overset{\circ}{\tau}_{yy}) \right] + \langle B_{xx} \rangle$$

$$D_{yy} = \frac{1}{2G} [\overset{\circ}{\tau}_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} (\overset{\circ}{\tau}_{xx} + \overset{\circ}{\tau}_{yy})] + \langle B_{yy} \rangle \quad (6.2.7)$$

$$D_{zz} = \frac{1}{2G} [-\frac{\nu}{1+\nu} (\overset{\circ}{\tau}_{xx} + \overset{\circ}{\tau}_{yy})] + \langle B_{zz} \rangle$$

läßt sich D_{zz} in Abhängigkeit von D_{xx} und D_{yy} angeben:

$$D_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (D_{xx} + D_{yy} - \langle B_{xx} + B_{yy} \rangle) + \langle B_{zz} \rangle \quad (6.2.8)$$

Im Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = [u(x,y), v(x,y), w] \quad (6.2.9),$$

dessen x- und y-Komponenten infolge der in z-Richtung konstanten Spannungen nicht Funktionen von z sind, läßt sich auch w durch u und v ausdrücken (6.2.8) und es verbleibt somit wie beim Ringelement ein Ansatz für die beiden in der Scheibenebene liegenden Geschwindigkeitskomponenten u und v.

Die Herleitung der Differentialbeziehungen für das Scheibenelement erfolgt analog der Vorgehensweise in Kapitel 6.2. Da wir die Beschreibung in kartesischen Koordinaten vornehmen, degeneriert der Tensorformalismus, d.h. Tensorkomponenten und physikalische Komponenten stimmen überein, die Christoffel-Symbole verschwinden und deshalb werden die kovarianten Ableitungen zu partiellen Ableitungen. Da alle anderen Operationen analog denen beim Ringelement sind, werden hier nur die Ergebnisse aufgeführt. Aus (4.18) wird

$$\begin{aligned} & u_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + u_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + u_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_{11} \frac{\partial v}{\partial x} \\ & + v_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + v_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v_{14} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \langle b_1 \rangle = 0 \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

$$u_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + u_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + u_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u_{25} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_{21} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$+ \nu_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_{25} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \langle b_2 \rangle = 0 \quad (6.2.11)$$

mit den Koeffizienten:

$$u_{11} = - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right)$$

$$u_{12} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right)$$

$$u_{13} = - \sigma_{xy}$$

$$u_{14} = 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) - \sigma_{xx}$$

$$u_{15} = G - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\nu_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$$

$$\nu_{12} = 0$$

$$\nu_{13} = G \left(1 + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

$$\nu_{14} = - \sigma_{xy}$$

$$\nu_{15} = 0$$

$$b_1 = 2G \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left[- \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial x} \right) - \frac{\partial B_{zz}}{\partial x} \right] + \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{xy}}{\partial y} \right\}$$

(6.2.12)

$$u_{21} = 0$$

$$u_{22} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

$$u_{23} = G \left(1 + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

$$u_{24} = 0$$

$$u_{25} = -\sigma_{xy}$$

$$v_{21} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right)$$

$$v_{22} = -\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right)$$

$$v_{23} = -\sigma_{xy}$$

$$v_{24} = G - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$v_{25} = 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) - \sigma_{yy}$$

$$b_2 = 2G \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left[-\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial B_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial B_{zz}}{\partial y} \right] + \frac{\partial B_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} \right\}$$

Bei der Scheibe beschränken wir uns auf richtungstreue Belastungen. Hier sind die Komponenten des Normalenvektors mit n_x und n_y gekennzeichnet, die wiederum Funktionen des Ortes sind. Die Koeffizienten der Differentialgleichungen für richtungstreue Belastung

$$u_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + u_{32} \frac{\partial u}{\partial y} + v_{31} \frac{\partial v}{\partial x} + v_{32} \frac{\partial v}{\partial y} - b_3 = 0 \quad (6.2.13)$$

$$u_{41} \frac{\partial u}{\partial x} + u_{42} \frac{\partial u}{\partial y} + v_{41} \frac{\partial v}{\partial x} + v_{42} \frac{\partial v}{\partial y} - b_4 = 0 \quad (6.2.14)$$

lauten:

$$u_{31} = \left[2G \left(1 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) - \sigma_{xx} \right] n_x$$

$$u_{32} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] n_y$$

$$v_{31} = -\sigma_{xy} n_x + [G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] n_y$$

$$v_{32} = 2G \frac{\nu}{1-\nu} n_x - \sigma_{xy} n_y$$

$$b_3 = t_{sx}$$

$$+ 2G \langle [\frac{\nu}{1-2\nu} [-\frac{\nu}{1-\nu}(B_{xx} + B_{yy}) - B_{zz}] + B_{xx}] n_x + B_{xy} n_y \rangle$$

(6.2.15)

$$u_{41} = -\sigma_{xy} n_x + 2G \frac{\nu}{1-\nu} n_y$$

$$u_{42} = [G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] n_x - \sigma_{xy} n_y$$

$$v_{41} = [G + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] n_x$$

$$v_{42} = [2G(1 + \frac{\nu}{1-\nu}) - \sigma_{yy}] n_y$$

$$b_4 = t_{sy}$$

$$+ 2G \langle B_{xy} n_x + [\frac{\nu}{1-2\nu} [-\frac{\nu}{1-\nu}(B_{xx} + B_{yy}) - B_{zz}] + B_{yy}] n_y \rangle$$

Wie beim Ringelement ist auch hier die Traktion in die beiden Komponenten t_{sx} und t_{sy} aufgeteilt worden.

6.3 Isoparametrische Ansätze

Zur Diskretisierung verwenden wir isoparametrische Elemente, deren Vorteile in der einheitlichen Beschreibung von Elementgeometrie und Geschwindigkeitsfeld bestehen. Da die jeweiligen Definitionsbereiche der Differentialgleichungen für die Scheibe beziehungsweise den Rotationskörper zweidimensional sind, werden wir im folgenden die Ansätze nur in einem kartesischen Koordinatensystem vornehmen, wobei dann im Fall des Ringelementes x durch r und y durch z zu ersetzen sind.

Die Ansatzfunktionen für die auf dem Galerkin-Verfahren basierende FE-Methode sind so zu wählen, daß neben den Randbedingungen, die

schon weiter oben diskutiert wurden, auch die Übergangsbedingungen von Element zu Element zu erfüllen sind. Im vorliegenden Fall ist also die Stetigkeit der Spannungen beziehungsweise deren Inkremente über die Elementkanten hinweg zu gewährleisten

$$\sigma_{ij} \in C^0(\Omega) \quad , \quad \sigma_{ij} \in C^0(\Omega) \quad (6.3.1),$$

woraus für die Komponenten u und v des Geschwindigkeitsfeldes die Bedingung

$$u, v \in C^1(\Omega) \quad (6.3.2)$$

folgt, d.h. die partiellen Ableitungen müssen stetig über die Elemente hinweg verlaufen.

Für die hier gewählten, im allgemeinen krummlinigen Viereckelemente treffen wir den Ansatz

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) u_k \quad (6.3.3)$$

$$\bar{v}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) v_k$$

für das Geschwindigkeitsfeld v mit den von den lokalen Elementkoordinaten ξ und η abhängenden Formfunktionen H_k und den Knotenfreiwerten u_k und v_k .

Die Geometrie der Elemente erfüllt infolge des isoparametrischen Ansatzes dieselben Beziehungen:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) x_k \quad (6.3.4)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) y_k$$

In Anlehnung an /46/ - /48/ , die ähnliche Ansatzfunktionen in der FE -

Verschiebungsmethode basierend auf dem Ritzverfahren für Platten gewählt haben, zerlegen wir die Formfunktionen durch einen Produktsatz, dessen einzelne Faktoren nur von einer lokalen Koordinate abhängen:

$$H_k(\xi, \eta) = h_m(\xi) h_n(\eta) \quad (6.3.5)$$

Für die Funktionen h_m wählen wir die kubischen Hermite- Polynome

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \frac{1}{4} \{\xi - 1\}^2 \{\xi + 2\} & h_3(\xi) &= \frac{1}{4} \{\xi + 1\}^2 \{\xi - 2\} \\ h_2(\xi) &= \frac{1}{4} \{\xi - 1\}^2 \{\xi + 1\} & h_4(\xi) &= \frac{1}{4} \{\xi + 1\}^2 \{\xi - 1\} \end{aligned} \quad (6.3.6),$$

die wie gewöhnlich zwischen den Extremwerten +1 und -1 der lokalen Koordinaten definiert sind. Es ergeben sich somit insgesamt $N = 16$ in ξ und η bikubische Formfunktionen $H_k(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} H_1(\xi, \eta) &= h_1(\xi) h_1(\eta) & H_2(\xi, \eta) &= h_2(\xi) h_1(\eta) \\ H_3(\xi, \eta) &= h_1(\xi) h_2(\eta) & H_4(\xi, \eta) &= h_2(\xi) h_2(\eta) \\ H_5(\xi, \eta) &= -h_3(\xi) h_1(\eta) & H_6(\xi, \eta) &= h_4(\xi) h_1(\eta) \\ H_7(\xi, \eta) &= -h_3(\xi) h_2(\eta) & H_8(\xi, \eta) &= h_4(\xi) h_2(\eta) \\ H_9(\xi, \eta) &= h_3(\xi) h_3(\eta) & H_{10}(\xi, \eta) &= -h_4(\xi) h_3(\eta) \\ H_{11}(\xi, \eta) &= -h_3(\xi) h_4(\eta) & H_{12}(\xi, \eta) &= h_4(\xi) h_4(\eta) \\ H_{13}(\xi, \eta) &= -h_1(\xi) h_3(\eta) & H_{14}(\xi, \eta) &= -h_2(\xi) h_3(\eta) \\ H_{15}(\xi, \eta) &= h_1(\xi) h_4(\eta) & H_{16}(\xi, \eta) &= h_2(\xi) h_4(\eta) \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

und die Freiwerte haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(\xi = -1, \eta = -1) &= u_1 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi = -1, \eta = -1)} &= u_2 \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi = -1, \eta = -1)} &= u_3 & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi = -1, \eta = -1)} &= u_4 \\
 \bar{u}(\xi = +1, \eta = -1) &= u_5 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi = +1, \eta = -1)} &= u_6 \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi = +1, \eta = -1)} &= u_7 & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi = +1, \eta = -1)} &= u_8 \\
 \bar{u}(\xi = +1, \eta = +1) &= u_9 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi = +1, \eta = +1)} &= u_{10} \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi = +1, \eta = +1)} &= u_{11} & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi = +1, \eta = +1)} &= u_{12} \\
 \bar{u}(\xi = -1, \eta = +1) &= u_{13} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi = -1, \eta = +1)} &= u_{14} \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi = -1, \eta = +1)} &= u_{15} & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi = -1, \eta = +1)} &= u_{16}
 \end{aligned}
 \tag{6.3.8}$$

Für v , sowie die Elementgeometrie, d.h. x und y gilt entsprechendes. Während die Freiwerte u_1, u_5, u_9 und u_{13} die Knotengeschwindigkeiten in x -Richtung sind, lassen sich die partiellen Ableitungen deuten als Dehngeschwindigkeiten in lokaler Koordinatenrichtung.

Die geometrischen Transformationsgleichungen (6.3.4) zwischen den globalen und lokalen Koordinaten seien umkehrbar eindeutig, so daß die inversen Beziehungen

$$\xi = \xi(x, y) \quad , \quad \eta = \eta(x, y) \tag{6.3.9}$$

existieren. Wir fordern während eines Prozesses, daß kein Element entartet. Aus (6.3.4) und (6.3.9) folgt die Existenz und Regularität der verallgemeinerten Jacobi-Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (6.3.10)$$

und es ergeben sich folgende Transformationsbeziehungen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial ()}{\partial \xi} \\ \frac{\partial ()}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial ()}{\partial x} \\ \frac{\partial ()}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial ()}{\partial x} \\ \frac{\partial ()}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial ()}{\partial \xi} \\ \frac{\partial ()}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 ()}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} \quad (6.3.11)$$

mit der inversen Jacobi-Matrix

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (6.3.12).$$

Mit den Transformationsbeziehungen läßt sich die C^1 - Stetigkeit des Ansatzes über die Elementgrenzen hinweg zeigen, indem man mit der Kettenregel die Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes zweier benachbarter Elemente nach den globalen Koordinaten längs einer gemeinsamen Kante betrachtet. Dabei ist direkt ersichtlich, daß die aus den gemischten zweiten Ableitungen nach den lokalen Koordinaten hervorgehenden Freiwerte 4, 8, 12, und 16, die bei einem vollständigen Produktansatz aller 4 Hermite-Polynome untereinander entstehen, zur Erfüllung der stetigen Differenzierbarkeit über das gesamte Definitionsgebiet nicht benötigt werden und somit über die Anforderungen der Verfahren der gewichteten Residuen hinausgehende Eigenschaften des Ansatzes darstellen.

Es liegt deshalb nahe, einen zweiten, verkürzten Ansatz zu bilden, der aus den Gleichungen (6.3.3) - (6.3.8) hervorgeht durch Wegnahme der Freiwerte 4, 8, 12 und 16 mit den zugehörigen Formfunktionen H_4 , H_8 , H_{12} und H_{16} .

Da alle Beziehungen dieses neuen Ansatzes bereits oben aufgeführt sind, verzichten wir hier auf die nochmalige Darstellung. Freiwerte und Formfunktionen des neuen Ansatzes (jeweils links aufgeführt) gehen folgendermaßen aus den Größen des ersten Ansatzes (rechts) hervor:

$u_1, v_1 \leftarrow u_1, v_1$	$H_1(\xi, \eta) \leftarrow H_1(\xi, \eta)$
$u_2, v_2 \leftarrow u_2, v_2$	$H_2(\xi, \eta) \leftarrow H_2(\xi, \eta)$
$u_3, v_3 \leftarrow u_3, v_3$	$H_3(\xi, \eta) \leftarrow H_3(\xi, \eta)$
$u_4, v_4 \leftarrow u_5, v_5$	$H_4(\xi, \eta) \leftarrow H_5(\xi, \eta)$
$u_5, v_5 \leftarrow u_6, v_6$	$H_5(\xi, \eta) \leftarrow H_6(\xi, \eta)$
$u_6, v_6 \leftarrow u_7, v_7$	$H_6(\xi, \eta) \leftarrow H_7(\xi, \eta)$
$u_7, v_7 \leftarrow u_9, v_9$	$H_7(\xi, \eta) \leftarrow H_9(\xi, \eta)$
$u_8, v_8 \leftarrow u_{10}, v_{10}$	$H_8(\xi, \eta) \leftarrow H_{10}(\xi, \eta)$
$u_9, v_9 \leftarrow u_{11}, v_{11}$	$H_9(\xi, \eta) \leftarrow H_{11}(\xi, \eta)$
$u_{10}, v_{10} \leftarrow u_{13}, v_{13}$	$H_{10}(\xi, \eta) \leftarrow H_{13}(\xi, \eta)$
$u_{11}, v_{11} \leftarrow u_{14}, v_{14}$	$H_{11}(\xi, \eta) \leftarrow H_{14}(\xi, \eta)$
$u_{12}, v_{12} \leftarrow u_{15}, v_{15}$	$H_{12}(\xi, \eta) \leftarrow H_{15}(\xi, \eta)$

6.4 Elementsteifigkeitsmatrizen - Knotenlasten

Die nachfolgende Herleitung der Steifigkeitsmatrizen der verschiedenen Verfahren sowohl für Ring- als auch Scheibenelement wird unabhängig vom gewählten Ansatz vorgenommen, d.h. wir vereinbaren die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) u_k = H_k u_k \\ \bar{v}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) v_k = H_k v_k\end{aligned}\tag{6.4.1}$$

und N kann wahlweise 12 oder 16 sein. Mit den in (6.4.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_k}{\partial \xi} &= H_k^I, \quad \frac{\partial H_k^I}{\partial \xi} = H_k^{II}, \quad \frac{\partial H_k^I}{\partial \eta} = H_k^+ \\ \frac{\partial H_k}{\partial \eta} &= H_k^-, \quad \frac{\partial H_k^-}{\partial \eta} = H_k^=\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

eingeführten Ableitungen der Formfunktionen lassen sich die Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes in Richtung der globalen Koordinaten mit Hilfe der Transformationsvorschriften (6.3.10) - (6.3.12) ausdrücken, wobei die Elemente der inversen Jacobi-Matrix mit q_{ki} gekennzeichnet sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= H_k^I u_k q_{11} + H_k^- u_k q_{12} = (H_k^I q_{11} + H_k^- q_{12}) u_k = H_{kx} u_k \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= (H_k^I q_{21} + H_k^- q_{22}) u_k = H_{ky} u_k \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} &= (H_k^I q_{31} + H_k^- q_{32} + H_k^+ q_{33} + H_k^{II} q_{34} + H_k^= q_{35}) u_k = H_{kxy} u_k \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= (H_k^I q_{41} + H_k^- q_{42} + H_k^+ q_{43} + H_k^{II} q_{44} + H_k^= q_{45}) u_k = H_{kxx} u_k \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} &= (H_k^I q_{51} + H_k^- q_{52} + H_k^+ q_{53} + H_k^{II} q_{54} + H_k^= q_{55}) u_k = H_{kyy} u_k\end{aligned}\tag{6.4.3}$$

Beim Ringelement gilt analog:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = H_k^I u_k q_{11} + H_k^- u_k q_{12} = (H_k^I q_{11} + H_k^- q_{12}) u_k = H_{kr} u_k$$

usw.

Bei der Herleitung der Steifigkeitsmatrizen und Knotenlasten ist zu beachten, daß infolge des speziellen Aufbaus der viskoplastischen Stoffgleichungen sowohl aus dem Volumenintegral als auch aus dem Randintegral jeweils Anteile in die Steifigkeitsmatrix wie in den Vektor der Knotenlasten kommen. Im folgenden repräsentiert A den Teil der Steifigkeitsmatrix, der durch die Auswertung des Randintegrals entsteht und I den Teil, der vom Volumenintegral herrührt. Die Symbole a und l sind die entsprechenden Anteile des Knotenlastvektors. Für die gesamte Elementsteifigkeitsmatrix E sowie für den Knotenlastvektor e gelten somit die Zerlegungen:

$$E = A + I \quad (6.4.4)$$

$$e = a + l$$

Alle Knotenfreiwerte des Elementes fassen wir zu einem Vektor k zusammen, der sich in der Form

$$k^T = [k_U^T, k_V^T] = [u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N] \quad (6.4.5)$$

schreiben läßt. Entsprechend zu dieser Aufteilung lassen sich die einzelnen Teilmatrizen und -vektoren partitionieren, wobei jede Untermatrix eine $(N \times N)$ -Matrix ist und jeder Untervektor N Reihen besitzt:

$$A = \begin{bmatrix} A^{1u} & A^{1v} \\ A^{2u} & A^{2v} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I^{1u} & I^{1v} \\ I^{2u} & I^{2v} \end{bmatrix} \quad (6.4.6)$$

$$a = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l^1 \\ l^2 \end{bmatrix} \quad (6.4.7)$$

Die hochgestellte 1 oder 2 deutet die Herkunft aus der ersten oder zweiten Differentialgleichung (6.1.21/22, 6.2.10/11) an, beziehungsweise der ersten oder zweiten Kräfte- und Randbedingung (6.1.24/25/27/28, 6.2.13/14). Auf eine Fallunterscheidung zwischen Ring- oder Scheibenelement wird verzichtet, da die Zuordnung in den einzelnen Kapiteln eindeutig ist. Im weiteren bedeutet ein tiefgestellter Index G, daß es sich um das Galerkin-, ein tiefgestellter Index L, daß es sich um das Least-Squares-Verfahren handelt.

6.4.1 Ringelement

Beim Ringelement müssen wir weitere Unterscheidungen treffen. Da hier nicht nur die Kräfte- und Randbedingungen der vorgegebenen Traktion hergeleitet wurden, sondern auch die der vorgegebenen Folgelast, teilen wir die durch das Randintegral entstehenden Matrizen und Vektoren weiter auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P} + \mathbf{T} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{p} + \mathbf{t} \end{aligned} \tag{6.4.1.1}$$

Unter Zuhilfenahme der zuvor eingeführten Abkürzungen (6.4.3) ergeben sich im einzelnen:

Galerkin:

$$I_{G \ k l}^{1u} = \int_{\Omega} H_k \{ u_{10} H_l + u_{11} H_{lr} + u_{12} H_{lz} + u_{13} H_{lrz} + u_{14} H_{lrr} + u_{15} H_{lzz} \} d\Omega$$

$$I_{G \ k l}^{1v} = \int_{\Omega} H_k \{ v_{11} H_{lr} + v_{12} H_{lz} + v_{13} H_{lrz} + v_{14} H_{lrr} + v_{15} H_{lzz} \} d\Omega \tag{6.4.1.2}$$

$$I_{G \ k l}^{2u} = \int_{\Omega} H_k \{ u_{20} H_l + u_{21} H_{lr} + u_{22} H_{lz} + u_{23} H_{lrz} + u_{24} H_{lrr} + u_{25} H_{lzz} \} d\Omega$$

$$I_{G \ k l}^{2v} = \int_{\Omega} H_k \{ v_{21} H_{lr} + v_{22} H_{lz} + v_{23} H_{lrz} + v_{24} H_{lrr} + v_{25} H_{lzz} \} d\Omega$$

$$I_{G \ k}^1 = \int_{\Omega} H_k \langle b_1 \rangle d\Omega \tag{6.4.1.3}$$

$$I_{Gk}^2 = \int_{\Omega} H_k \langle b_2 \rangle d\Omega$$

$$P_{Gkl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{u_{50}H_l + u_{51}H_{lr} + u_{52}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$P_{Gkl}^{1v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{v_{51}H_{lr} + v_{52}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

(6.4.1.4)

$$P_{Gkl}^{2u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{u_{60}H_l + u_{61}H_{lr} + u_{62}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$P_{Gkl}^{2v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{v_{61}H_{lr} + v_{62}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$P_{Gk}^1 = \int_{\partial\Omega} H_k b_5 d\partial\Omega$$

(6.4.1.5)

$$P_{Gk}^2 = \int_{\partial\Omega} H_k b_6 d\partial\Omega$$

$$T_{Gkl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{u_{30}H_l + u_{31}H_{lr} + u_{32}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$T_{Gkl}^{1v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{v_{31}H_{lr} + v_{32}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

(6.4.1.6)

$$T_{Gkl}^{2u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{u_{40}H_l + u_{41}H_{lr} + u_{42}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$T_{Gkl}^{2v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{v_{41}H_{lr} + v_{42}H_{lz}\} d\partial\Omega$$

$$t_{Gk}^1 = \int_{\partial\Omega} H_k b_3 d\partial\Omega$$

(6.4.1.7)

$$t_{Gk}^2 = \int_{\partial\Omega} H_k b_4 d\partial\Omega$$

Least-Squares :

$$I_{L \quad kl}^{1u} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{ u_{10} H_k + u_{11} H_{kr} + u_{12} H_{kz} + u_{13} H_{krz} + u_{14} H_{krr} + u_{15} H_{kzz} \} \\ & \{ u_{10} H_l + u_{11} H_{lr} + u_{12} H_{lz} + u_{13} H_{lrz} + u_{14} H_{lrr} + u_{15} H_{lzz} \} \\ & + \{ u_{20} H_k + u_{21} H_{kr} + u_{22} H_{kz} + u_{23} H_{krz} + u_{24} H_{krr} + u_{25} H_{kzz} \} \\ & \{ u_{20} H_l + u_{21} H_{lr} + u_{22} H_{lz} + u_{23} H_{lrz} + u_{24} H_{lrr} + u_{25} H_{lzz} \} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L \quad kl}^{1v} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{ u_{10} H_k + u_{11} H_{kr} + u_{12} H_{kz} + u_{13} H_{krz} + u_{14} H_{krr} + u_{15} H_{kzz} \} \\ & \{ v_{11} H_{lr} + v_{12} H_{lz} + v_{13} H_{lrz} + v_{14} H_{lrr} + v_{15} H_{lzz} \} \\ & + \{ u_{20} H_k + u_{21} H_{kr} + u_{22} H_{kz} + u_{23} H_{krz} + u_{24} H_{krr} + u_{25} H_{kzz} \} \\ & \{ v_{21} H_{lr} + v_{22} H_{lz} + v_{23} H_{lrz} + v_{24} H_{lrr} + v_{25} H_{lzz} \} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

(6.4.1.8)

$$I_{L \quad kl}^{2u} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{ v_{11} H_{kr} + v_{12} H_{kz} + v_{13} H_{krz} + v_{14} H_{krr} + v_{15} H_{kzz} \} \\ & \{ u_{10} H_l + u_{11} H_{lr} + u_{12} H_{lz} + u_{13} H_{lrz} + u_{14} H_{lrr} + u_{15} H_{lzz} \} \\ & + \{ v_{21} H_{kr} + v_{22} H_{kz} + v_{23} H_{krz} + v_{24} H_{krr} + v_{25} H_{kzz} \} \\ & \{ u_{20} H_l + u_{21} H_{lr} + u_{22} H_{lz} + u_{23} H_{lrz} + u_{24} H_{lrr} + u_{25} H_{lzz} \} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L \quad kl}^{2v} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{ v_{11} H_{kr} + v_{12} H_{kz} + v_{13} H_{krz} + v_{14} H_{krr} + v_{15} H_{kzz} \} \\ & \{ v_{11} H_{lr} + v_{12} H_{lz} + v_{13} H_{lrz} + v_{14} H_{lrr} + v_{15} H_{lzz} \} \\ & + \{ v_{21} H_{kr} + v_{22} H_{kz} + v_{23} H_{krz} + v_{24} H_{krr} + v_{25} H_{kzz} \} \\ & \{ v_{21} H_{lr} + v_{22} H_{lz} + v_{23} H_{lrz} + v_{24} H_{lrr} + v_{25} H_{lzz} \} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L \quad k}^1 = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \langle b_1 \rangle \{ u_{10} H_k + u_{11} H_{kr} + u_{12} H_{kz} + u_{13} H_{krz} + u_{14} H_{krr} + u_{15} H_{kzz} \} \\ & + \langle b_2 \rangle \{ u_{20} H_k + u_{21} H_{kr} + u_{22} H_{kz} + u_{23} H_{krz} + u_{24} H_{krr} + u_{25} H_{kzz} \} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

(6.4.1.9)

$$I_{Lk}^2 = \int_{\Omega} \left\{ \langle b_1 \rangle \{v_{11} H_{kr} + v_{12} H_{kz} + v_{13} H_{krz} + v_{14} H_{krr} + v_{15} H_{kzz}\} \right. \\ \left. + \langle b_2 \rangle \{v_{21} H_{kr} + v_{22} H_{kz} + v_{23} H_{krz} + v_{24} H_{krr} + v_{25} H_{kzz}\} \right\} d\Omega$$

$$P_{Lkl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{u_{50} H_k + u_{51} H_{kr} + u_{52} H_{kz}\} \{u_{50} H_l + u_{51} H_{lr} + u_{52} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{u_{60} H_k + u_{61} H_{kr} + u_{62} H_{kz}\} \{u_{60} H_l + u_{61} H_{lr} + u_{62} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$P_{Lkl}^{1v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{u_{50} H_k + u_{51} H_{kr} + u_{52} H_{kz}\} \{v_{51} H_{lr} + v_{52} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{u_{60} H_k + u_{61} H_{kr} + u_{62} H_{kz}\} \{v_{61} H_{lr} + v_{62} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

(6.4.1.10)

$$P_{Lkl}^{2u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{v_{51} H_{kr} + v_{52} H_{kz}\} \{u_{50} H_l + u_{51} H_{lr} + u_{52} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{v_{61} H_{kr} + v_{62} H_{kz}\} \{u_{60} H_l + u_{61} H_{lr} + u_{62} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$P_{Lkl}^{2v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{v_{51} H_{kr} + v_{52} H_{kz}\} \{v_{51} H_{lr} + v_{52} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{v_{61} H_{kr} + v_{62} H_{kz}\} \{v_{61} H_{lr} + v_{62} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$P_{Lk}^1 = \int_{\partial\Omega} \left\{ b_5 \{u_{50} H_k + u_{51} H_{kr} + u_{52} H_{kz}\} \right. \\ \left. + b_6 \{u_{60} H_k + u_{61} H_{kr} + u_{62} H_{kz}\} \right\} d\partial\Omega$$

(6.4.1.11)

$$P_{Lk}^2 = \int_{\partial\Omega} \left\{ b_5 \{v_{51} H_{kr} + v_{52} H_{kz}\} + b_6 \{v_{61} H_{kr} + v_{62} H_{kz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$T_{Lkl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{u_{30} H_k + u_{31} H_{kr} + u_{32} H_{kz}\} \{u_{30} H_l + u_{31} H_{lr} + u_{32} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{u_{40} H_k + u_{41} H_{kr} + u_{42} H_{kz}\} \{u_{40} H_l + u_{41} H_{lr} + u_{42} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$T_{L k l}^{1v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{u_{30} H_k + u_{31} H_{kr} + u_{32} H_{kz}\} \{v_{31} H_{lr} + v_{32} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{u_{40} H_k + u_{41} H_{kr} + u_{42} H_{kz}\} \{v_{41} H_{lr} + v_{42} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega \quad (6.4.1.12)$$

$$T_{L k}^{2u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{v_{31} H_{kr} + v_{32} H_{kz}\} \{u_{30} H_l + u_{31} H_{lr} + u_{32} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{v_{41} H_{kr} + v_{42} H_{kz}\} \{u_{40} H_l + u_{41} H_{lr} + u_{42} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$T_{L k l}^{2v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \{v_{31} H_{kr} + v_{32} H_{kz}\} \{v_{31} H_{lr} + v_{32} H_{lz}\} \right. \\ \left. + \{v_{41} H_{kr} + v_{42} H_{kz}\} \{v_{41} H_{lr} + v_{42} H_{lz}\} \right\} d\partial\Omega$$

$$t_{L k}^1 = \int_{\partial\Omega} \left\{ b_3 \{u_{30} H_k + u_{31} H_{kr} + u_{32} H_{kz}\} \right. \\ \left. + b_4 \{u_{40} H_k + u_{41} H_{kr} + u_{42} H_{kz}\} \right\} d\partial\Omega \quad (6.4.1.13)$$

$$t_{L k}^2 = \int_{\partial\Omega} \left\{ b_3 \{v_{31} H_{kr} + v_{32} H_{kz}\} \right. \\ \left. + b_4 \{v_{41} H_{kr} + v_{42} H_{kz}\} \right\} d\partial\Omega$$

Mit den bekannten Teilmatrizen und -vektoren lassen sich die Elementsteifigkeitsmatrizen beziehungsweise Knotenlastvektoren angeben. Für Galerkin und Least-Squares Verfahren sind die jeweiligen Anteile mit G oder L zusammzusetzen. Im gemischten Verfahren (5.3.2) ist die Partitionierung (6.4.6/7) in der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_L^{1u} & A_L^{1v} \\ A_L^{2u} & A_L^{2v} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_G^{1u} & I_G^{1v} \\ I_G^{2u} & I_G^{2v} \end{bmatrix}$$

(6.4.1.14)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_L^1 \\ \mathbf{a}_L^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_G^1 \\ \mathbf{l}_G^2 \end{bmatrix}$$

durchzuführen.

6.4.2 Schelbenelement

Beim Scheibenelement haben die Teilmatrizen und -vektoren folgendes Aussehen:

Galerkin:

$$I_{G\ kl}^{1u} = \int_{\Omega} H_k \{ u_{11} H_{lx} + u_{12} H_{ly} + u_{13} H_{lxy} + u_{14} H_{lxx} + u_{15} H_{lyy} \} d\Omega$$

$$I_{G\ kl}^{1v} = \int_{\Omega} H_k \{ v_{11} H_{lx} + v_{12} H_{ly} + v_{13} H_{lxy} + v_{14} H_{lxx} + v_{15} H_{lyy} \} d\Omega$$

(6.4.2.1)

$$I_{G\ kl}^{2u} = \int_{\Omega} H_k \{ u_{21} H_{lx} + u_{22} H_{ly} + u_{23} H_{lxy} + u_{24} H_{lxx} + u_{25} H_{lyy} \} d\Omega$$

$$I_{G\ kl}^{2v} = \int_{\Omega} H_k \{ v_{21} H_{lx} + v_{22} H_{ly} + v_{23} H_{lxy} + v_{24} H_{lxx} + v_{25} H_{lyy} \} d\Omega$$

$$I_{G\ k}^1 = \int_{\Omega} H_k \langle b_1 \rangle d\Omega$$

(6.4.2.2)

$$I_{G\ k}^2 = \int_{\Omega} H_k \langle b_2 \rangle d\Omega$$

$$A_{G\ kl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{ u_{31} H_{lx} + u_{32} H_{ly} \} d\partial\Omega$$

$$A_{G\ kl}^{1v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{ v_{31} H_{lx} + v_{32} H_{ly} \} d\partial\Omega$$

(6.4.2.3)

$$A_{G \text{ kl}}^{2u} = \int_{\partial\Omega} H_k \{u_{41}H_{lx} + u_{42}H_{ly}\} d\partial\Omega$$

$$A_{G \text{ kl}}^{2v} = \int_{\partial\Omega} H_k \{v_{41}H_{lx} + v_{42}H_{ly}\} d\partial\Omega$$

$$a_{G \text{ k}}^1 = \int_{\partial\Omega} H_k b_3 d\partial\Omega$$

(6.4.2.4)

$$a_{G \text{ k}}^2 = \int_{\partial\Omega} H_k b_4 d\partial\Omega$$

Least-Squares :

$$I_{L \text{ kl}}^{1u} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\{u_{11} H_{kx} + u_{12} H_{ky} + u_{13} H_{kxy} + u_{14} H_{kxx} + u_{15} H_{kyy}\} \\ &\{u_{11} H_{lx} + u_{12} H_{ly} + u_{13} H_{lxy} + u_{14} H_{lxx} + u_{15} H_{lyy}\} \\ &+ \{u_{21} H_{kx} + u_{22} H_{ky} + u_{23} H_{kxy} + u_{24} H_{kxx} + u_{25} H_{kyy}\} \\ &\{u_{21} H_{lx} + u_{22} H_{ly} + u_{23} H_{lxy} + u_{24} H_{lxx} + u_{25} H_{lyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L \text{ kl}}^{1v} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\{u_{11} H_{kx} + u_{12} H_{ky} + u_{13} H_{kxy} + u_{14} H_{kxx} + u_{15} H_{kyy}\} \\ &\{v_{11} H_{lx} + v_{12} H_{ly} + v_{13} H_{lxy} + v_{14} H_{lxx} + v_{15} H_{lyy}\} \\ &+ \{u_{21} H_{kx} + u_{22} H_{ky} + u_{23} H_{kxy} + u_{24} H_{kxx} + u_{25} H_{kyy}\} \\ &\{v_{21} H_{lx} + v_{22} H_{ly} + v_{23} H_{lxy} + v_{24} H_{lxx} + v_{25} H_{lyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

(6.4.2.5)

$$I_{L \text{ kl}}^{2u} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\{v_{11} H_{kx} + v_{12} H_{ky} + v_{13} H_{kxy} + v_{14} H_{kxx} + v_{15} H_{kyy}\} \\ &\{u_{11} H_{lx} + u_{12} H_{ly} + u_{13} H_{lxy} + u_{14} H_{lxx} + u_{15} H_{lyy}\} \\ &+ \{v_{21} H_{kx} + v_{22} H_{ky} + v_{23} H_{kxy} + v_{24} H_{kxx} + v_{25} H_{kyy}\} \\ &\{u_{21} H_{lx} + u_{22} H_{ly} + u_{23} H_{lxy} + u_{24} H_{lxx} + u_{25} H_{lyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L\ kl}^{2v} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{v_{11} H_{kx} + v_{12} H_{ky} + v_{13} H_{kxy} + v_{14} H_{kxx} + v_{15} H_{kyy}\} \\ & \{v_{11} H_{lx} + v_{12} H_{ly} + v_{13} H_{lxy} + v_{14} H_{lxx} + v_{15} H_{lyy}\} \\ & + \{v_{21} H_{kx} + v_{22} H_{ky} + v_{23} H_{kxy} + v_{24} H_{kxx} + v_{25} H_{kyy}\} \\ & \{v_{21} H_{lx} + v_{22} H_{ly} + v_{23} H_{lxy} + v_{24} H_{lxx} + v_{25} H_{lyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$I_{L\ k}^1 = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \langle b_1 \rangle \{u_{11} H_{kx} + u_{12} H_{ky} + u_{13} H_{kxy} + u_{14} H_{kxx} + u_{15} H_{kyy}\} \\ & + \langle b_2 \rangle \{u_{21} H_{kx} + u_{22} H_{ky} + u_{23} H_{kxy} + u_{24} H_{kxx} + u_{25} H_{kyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

(6.4.2.6)

$$I_{L\ k}^2 = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \langle b_1 \rangle \{v_{11} H_{kx} + v_{12} H_{ky} + v_{13} H_{kxy} + v_{14} H_{kxx} + v_{15} H_{kyy}\} \\ & + \langle b_2 \rangle \{v_{21} H_{kx} + v_{22} H_{ky} + v_{23} H_{kxy} + v_{24} H_{kxx} + v_{25} H_{kyy}\} \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$A_{L\ kl}^{1u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{u_{31} H_{kx} + u_{32} H_{ky}\} \{u_{31} H_{lx} + u_{32} H_{ly}\} \\ & + \{u_{41} H_{kx} + u_{42} H_{ky}\} \{u_{41} H_{lx} + u_{42} H_{ly}\} \end{aligned} \right\} d\partial\Omega$$

$$A_{L\ kl}^{1v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{v_{31} H_{kx} + v_{32} H_{ky}\} \{v_{31} H_{lx} + v_{32} H_{ly}\} \\ & + \{v_{41} H_{kx} + v_{42} H_{ky}\} \{v_{41} H_{lx} + v_{42} H_{ly}\} \end{aligned} \right\} d\partial\Omega$$

(6.4.2.7)

$$A_{L\ kl}^{2u} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{v_{31} H_{kx} + v_{32} H_{ky}\} \{u_{31} H_{lx} + u_{32} H_{ly}\} \\ & + \{v_{41} H_{kx} + v_{42} H_{ky}\} \{u_{41} H_{lx} + u_{42} H_{ly}\} \end{aligned} \right\} d\partial\Omega$$

$$A_{L\ kl}^{2v} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \{v_{31} H_{kx} + v_{32} H_{ky}\} \{v_{31} H_{lx} + v_{32} H_{ly}\} \\ & + \{v_{41} H_{kx} + v_{42} H_{ky}\} \{v_{41} H_{lx} + v_{42} H_{ly}\} \end{aligned} \right\} d\partial\Omega$$

$$a_{L\ k}^1 = \int_{\partial\Omega} \left\{ b_3 \{u_{31} H_{kx} + u_{32} H_{ky}\} \right\}$$

$$+ b_4 \{ u_{41} H_{kx} + u_{42} H_{ky} \} d\partial\Omega$$

(6.4.2.8)

$$a_{Lk}^2 = \int_{\partial\Omega} \{ b_3 \{ v_{31} H_{kx} + v_{32} H_{ky} \} + b_4 \{ v_{41} H_{kx} + v_{42} H_{ky} \} \} d\partial\Omega$$

Der Zusammenbau von Elementsteifigkeitsmatrix und Knotenlastvektor erfolgt wie beim Ringelement.

6.5 Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen und Knotenlastvektoren

Da die Komponenten sowohl der Elementsteifigkeitsmatrizen als auch der Knotenlastvektoren in Abhängigkeit der lokalen Koordinaten ξ und η formuliert sind, ersetzen wir zunächst die Volumen- beziehungsweise Flächenelemente $d\Omega$ und $d\partial\Omega$ durch ihre lokale Form. Dazu wird aus Termen der verallgemeinerten Jacobi-Matrix J (6.3.10) die Determinante Det

$$Det = |J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}| \quad (6.5.1)$$

gebildet. Im Fall des Ringelementes gilt dann - unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie - die Beziehung

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} d\varphi r dr dz = 2\pi \int_z \int_r r dr dz = 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r(\xi, \eta) Det d\xi d\eta \quad (6.5.2)$$

und beim Scheibenelement ergibt sich mit der konstanten Dicke d des Elementes:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} dx dy dz = d \int_y \int_x dx dy = d \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Det d\xi d\eta \quad (6.5.3)$$

Zur Umformung der Randintegrale beschreiben wir die in der r - z bzw. x - y Ebene verlaufende Randkurve durch ihre Bogenlänge s , die durch

$$ds = \sqrt{\{ dr^2 + dz^2 \}} , ds = \sqrt{\{ dx^2 + dy^2 \}} \quad (6.5.4)$$

mit den globalen Koordinaten verknüpft ist. Da für jede Randkurve entweder ξ oder η konstant sind, läßt sich aus (6.5.4) und (6.3.10) folgender Zusammenhang zwischen ds und $d\xi$ bzw. $d\eta$ herleiten:

$$\begin{aligned} \xi = \text{konst.}: \quad ds &= \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}} \, d\eta \\ \eta = \text{konst.}: \quad ds &= \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}} \, d\xi \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Mit (6.5.5) ergeben sich dann für die Randterme die Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi = \text{konst.}: \\ \int_{\partial\Omega} d\partial\Omega &= \iint_{\varphi s} d\varphi r ds = 2\pi \int_s r ds = 2\pi \int_{-1}^{+1} r(\eta) \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}} \, d\eta \\ \eta = \text{konst.}: \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

$$\int_{\partial\Omega} d\partial\Omega = \iint_{\varphi s} d\varphi r ds = 2\pi \int_s r ds = 2\pi \int_{-1}^{+1} r(\xi) \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}} \, d\xi$$

für das Ringelement und im Fall des Scheibenelementes:

$$\begin{aligned} \xi = \text{konst.}: \\ \int_{\partial\Omega} d\partial\Omega &= \iint_{z s} dz ds = d \int_s ds = d \int_{-1}^{+1} \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}} \, d\eta \\ \eta = \text{konst.}: \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

$$\int_{\partial\Omega} d\partial\Omega = \iint_{z s} dz ds = d \int_s ds = d \int_{-1}^{+1} \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}} \, d\xi$$

An dieser Stelle können auch die in den Koeffizienten der Randbedingungen (6.1.26/29, 6.2.15) enthaltenen Komponenten des Normalenvektors bestimmt werden. Gemäß /50/ ermitteln wir den Normalenvektor aus der Parameterdarstellung der Randkurve und nützen dabei aus, daß die Ableitungen der Kurvendarstellung nach dem Kurvenpara-

meter gerade Komponenten der Jacobi-Matrix sind. Unter Beachtung der Forderung, in den Randbedingungen jeweils die äußere Normale einsetzen zu müssen, erhalten wir für den Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} = [n_r, n_z]^T, \quad \mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \quad (6.5.8)$$

die Darstellungen:

$$\begin{aligned} \eta = -1: \quad \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}}} [J_{12}, -J_{11}]^T \\ \xi = +1: \quad \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}}} [J_{22}, -J_{21}]^T \\ \eta = +1: \quad \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}}} [-J_{12}, J_{11}]^T \\ \xi = -1: \quad \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}}} [-J_{22}, J_{21}]^T \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Da sich die Elementsteifigkeitsmatrizen und Knotenlastvektoren in jedem Zeitschritt ändern, ist zur Berechnung ein numerisches Integrationsverfahren notwendig. Die Integration von Polynomen läßt sich dabei im Gegensatz zu den Newton-Cotes-Formeln am effektivsten mit der Gaußschen Integrationsmethode (Gauß-Quadratur) behandeln, da dieses Verfahren bei n -Stützstellen Polynome bis zum Grad $(2n-1)$ exakt integriert /51,52/.

Die Anzahl der zu einer hinreichend genauen Integration nötigen Stützstellen läßt sich am besten beim Scheibenelement ermitteln. Unter der vereinfachenden Annahme, daß x mit ξ und y mit η zusammenfallen, ist im Volumenintegral ein Polynom 6. Grades und im Randintegral ein Polynom 5. Grades zu integrieren. Daraus folgt, daß die exakte Integration im Innern 4 Stützstellen pro Richtung benötigt und auf dem Rand 3 Stützstellen.

Beim Ringelement sind gebrochenrationale Funktionen zu integrieren, die durch die Terme mit r im Nenner entstehen. In diesem Fall lassen sich keinerlei weitere Abschätzungen bezüglich der Anzahl der notwendigen Stützstellen angeben.

In den Beispielrechnungen hat sich herausgestellt, daß die mit 3 oder 4 Gaußstützstellen pro Koordinatenrichtung erzielten Ergebnisse in den

meisten Fällen übereinstimmen. Bei einer viskoplastischen Analyse, deren Berechnung eine relativ große Anzahl von Zeitschritten beinhaltet (vgl. Kapitel 7), ist es daher empfehlenswert, jeweils die in einer elastischen Vorrechnung mit wahlweise 3 beziehungsweise 4 Stützstellen pro Koordinatenrichtung errechneten Ergebnisse zu vergleichen und bei hinreichender Übereinstimmung der Werte mit 3 Stützstellen pro Koordinatenrichtung wegen der geringeren Rechenzeit zu integrieren, anderenfalls mit 4 Stützstellen (vgl. Bild 6.3).

Aufgrund der vergleichsweise großen Anzahl von Stützstellen haben wir noch ein Element mit 2 Gaußpunkten pro Richtung vorgesehen. Die Ergebnisse dieser reduzierten Integration werden in Kapitel 9.1.2 diskutiert. Außerdem wird im Programm an den 4 Knoten der komplette Spannungs- und Verfestigungszustand des Elementes berechnet. Dies ist hinsichtlich einer möglichen Erweiterung auf Bruch- beziehungsweise Versagensanalysen von Vorteil.

Es ergeben sich folgende Gewichte und Gaußpunktkoordinaten:

Stützstellen: $\xi_k, \eta_k =$ Gewichte: $w_k =$

a) $M=3$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung

k = 1:	- 0.7745966692	0.5555555556
k = 2:	0.0	0.8888888889
k = 3:	0.7745966692	0.5555555556

b) $M=4$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung

k = 1:	- 0.8611363116	0.3478548451
k = 2:	- 0.3399810436	0.6521451549
k = 3:	0.3399810436	0.6521451549
k = 4:	0.8611363116	0.3478548451

c) $M=2$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung

k = 1:	- 0.5773502692	1.0
k = 2:	0.5773502692	1.0

Beim Ringelement wird dann aus (6.5.2) und (6.5.6)

$$2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r(\xi, \eta) \text{Det} \, d\xi \, d\eta = 2\pi \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M w_k w_l r(\xi_k, \eta_l) \text{Det} \Big|_{(\xi_k, \eta_l)}$$

(6.5.10)

$\xi = \text{konst.} :$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} r(\eta) \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}} d\eta = 2\pi \sum_{k=1}^M w_k r(\eta_k) \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}}|_{(\eta_k)}$$

$\eta = \text{konst.} :$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} r(\xi) \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}} d\xi = 2\pi \sum_{k=1}^M w_k r(\xi_k) \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}}|_{(\xi_k)}$$

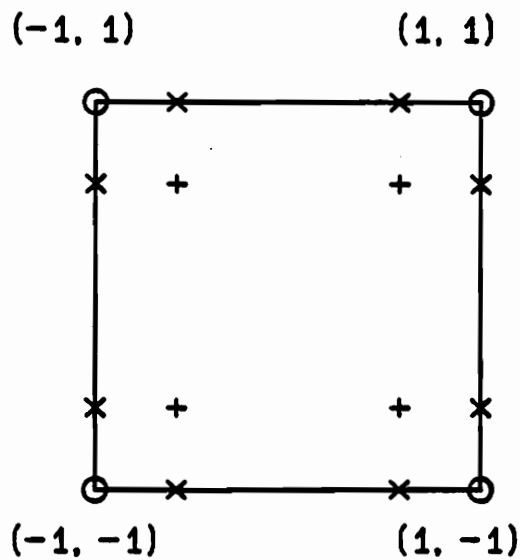
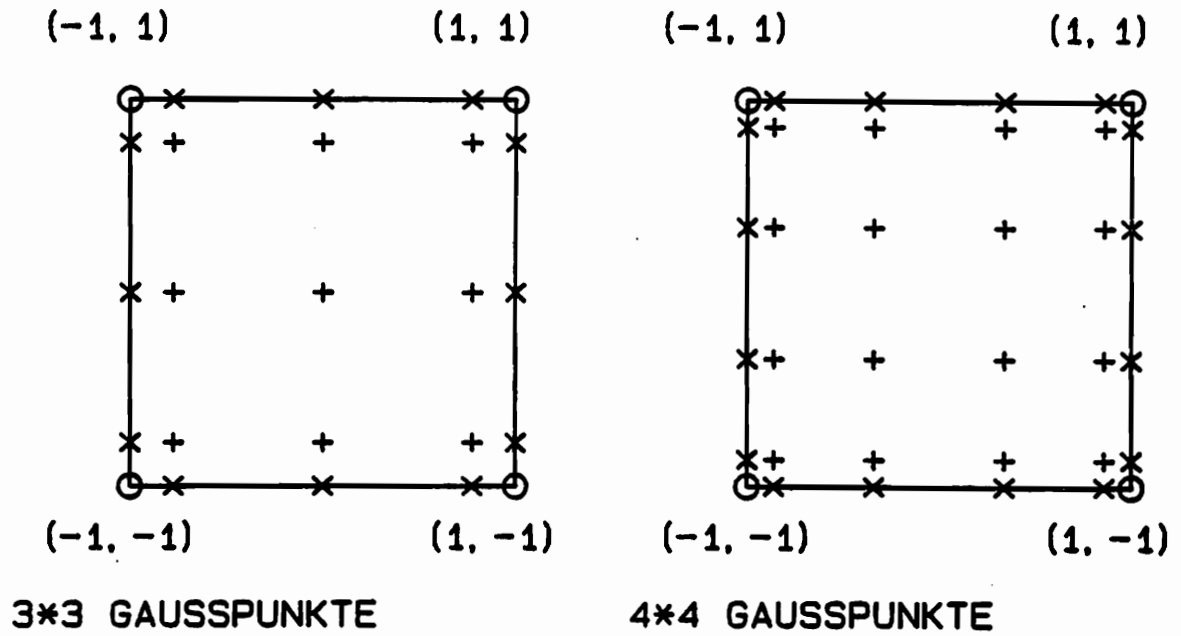
und beim Scheibenelement gilt:

$$d \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{Det} d\xi d\eta = d \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M w_k w_l \text{Det}|_{(\xi_k, \eta_l)} \quad (6.5.11)$$

$$\xi = \text{konst.} : d \int_{-1}^{+1} \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}} d\eta = d \sum_{k=1}^M w_k \sqrt{\{J_{21}^2 + J_{22}^2\}}|_{(\eta_k)}$$

$$\eta = \text{konst.} : d \int_{-1}^{+1} \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}} d\xi = d \sum_{k=1}^M w_k \sqrt{\{J_{11}^2 + J_{12}^2\}}|_{(\xi_k)}$$

Alternativ zur hier verwendeten Gaußpunktintegration ist es möglich, die konstanten Anteile der Steifigkeitsmatrizen analytisch zu integrieren und deren Ergebnisse an die zugehörigen Stellen der Steifigkeitsmatrix bzw. des Knotenlastvektors einzutragen; wodurch der Rechenaufwand geringfügig vermindert wird. Wir verzichten darauf, weil einerseits dadurch die mit verschiedener Anzahl von Gaußpunkten integrierten Ergebnisse nicht mehr direkt vergleichbar sind und andererseits infolge der unterschiedlichen Verfahren die kompakte Form des Programmsystems verletzt wird.



2*2 GAUSSPUNKTE

Bild 6.3: Lage der Gaußpunkte

7. Zeitintegration

Mit dem Ergebnis der im letzten Kapitel beschriebenen FE-Rechnung - dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} sowie dem Zustand aller Feldgrößen zum Zeitpunkt t_1 - müssen die Geometrie und die Zustandsgrößen der nachfolgenden Konfiguration t_{1+1} bestimmt werden. Das entspricht der Integration des Stoffgesetzes um einen Zeitschritt Δt . Bei einem Vergleich des hier vorliegenden viskoplastischen Stoffgesetzes mit dem zugrundeliegenden elastisch-plastischen Modell /39/ bezüglich der Schrittweiten zur reinen Stoffgesetzintegration, ist beim viskoplastischen Modell eine etwa um das zehnfache kleinere Schrittweite nötig, um die gleiche Rechengenauigkeit zu erlangen. Der Grund dafür liegt in dem steifen Differentialgleichungssystem der elastisch-viskoplastischen Stoffgleichungen. Zur Veranschaulichung dient Bild 7.1, das den Verlauf der Materialfunktion $\gamma\Phi$ in Abhängigkeit der Überspannung Λ bei Raumtemperatur zeigt. Im Gegensatz zum beim elastisch-plastischen Modell für die Änderung des Materials maßgebenden Tangentenmodul, der etwa um einen Faktor fünfzig zwischen Anfangs- und Endwert differiert, steigt die Größe von $\gamma\Phi$ in einem vergleichbaren Dehnungsbereich um viele Zehnerpotenzen an. Dieser Sachverhalt erfordert daher eine eingehende Untersuchung verschiedener Integrationsverfahren hinsichtlich ihrer Eignung für das vorliegende Differentialgleichungssystem.

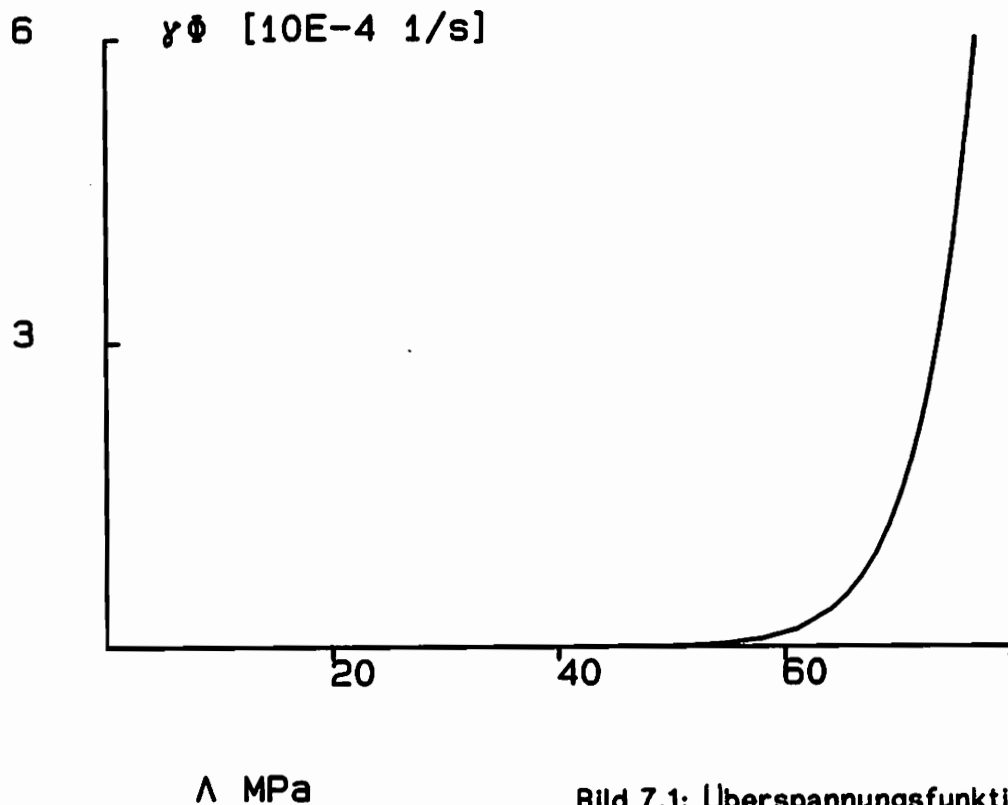


Bild 7.1: Überspannungsfunktion

7.1 Explizite Verfahren

Aus dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} sind über die Gleichungen (4.1) und

(4.2) die Verzerrungs- und Rotationsgeschwindigkeiten bekannt und mit den ebenfalls vorliegenden Zustandsgrößen werden dann durch die Gleichungen (4.5 - 4.7) die Spannungs- und Verfestigungsgeschwindigkeiten ermittelt. Zur Integration bieten sich zunächst explizite Verfahren an, deren Vorteile gegenüber den impliziten in der direkten Integration des Differentialgleichungssystems liegen ohne vorherige Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Da Galerkin- und Least-Squares-Verfahren auch die Ortsableitungen der Spannungen und Verfestigungen benötigen, sind deren Geschwindigkeiten ebenfalls an jedem Gaußpunkt zu integrieren (vgl. Anhang 1). Um zu einer übersichtlichen Darstellung zu kommen, fassen wir alle Spannungs- und Verfestigungsgeschwindigkeiten zu einem Vektor y' zusammen, so daß das vorgelegte System die Form

$$y'_i = y'_i(L_i, y_i; m_i) = y'(L_i, y_i; m_i) \quad (7.1.1)$$

besitzt. Dabei sind D und W in L zusammengefaßt und im Vektor m befinden sich die zum betrachteten Zeitpunkt gültigen Werte der im Stoffmodell enthaltenen Materialfunktionen. Im einfachsten Fall könnte (7.1.1) mit der Polygonzugmethode

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t y'_i \quad (7.1.2)$$

integriert werden, was aber wegen des steifen Systems ein aussichtsloses Unterfangen ist und trotz einer um das Zehnfache kleineren Schrittweite gegenüber derjenigen der Trapezformel nicht zur stabilen Integration führte. Aus der Vielzahl möglicher expliziter Integrationsverfahren wählen wir das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit der Konsistenzordnung 4 und einen auf Fehlberg /38/ zurückgehenden Ansatz mit der Konsistenzordnung 8 aus. Beide Verfahren lassen sich einbetten in die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned} \rho_1 &= y'(L_i, y_i; m_i) \\ \rho_2 &= y'(L_{i+\delta_2 \Delta t}, y_i + \Delta t \beta_{21} \rho_1; m_{i+\delta_2 \Delta t}) \\ &\vdots \\ \rho_m &= y'(L_{i+\delta_m \Delta t}, y_i + \Delta t [\beta_{m1} \rho_1 + \dots + \beta_{m,m-1} \rho_{m-1}]; m_{i+\delta_m \Delta t}) \end{aligned} \quad (7.1.3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (\gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \dots + \gamma_m \rho_m)$$

wobei man von einem m-stufigen Verfahren spricht.

Das Runge-Kutta-Verfahren ist 4-stufig und die Koeffizienten β , γ und δ lauten:

$$\begin{aligned} \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad \delta_4 = 1 \\ \beta_{21} = \beta_{32} = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_{43} = 1 \\ \gamma_1 = \gamma_4 = \frac{1}{6} \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Die umfangreiche Auflistung der Koeffizienten des 13-stufigen Algorithmus nach Fehlberg befindet sich z. B. in /57/.

Ein entscheidender Nachteil der expliziten Verfahren vom Typ (7.1.3) besteht darin, daß aus dem aus der FE-Rechnung ermittelten Geschwindigkeitsfeld lediglich der Geschwindigkeitsgradient beziehungsweise die Verzerrungs- und Rotationsgeschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_i , nicht aber zu den in (7.1.3) geforderten Zwischenzuständen $t_i + \delta_m \Delta t$ bekannt sind. Wir setzen deshalb näherungsweise:

$$L_{i+\delta_j \Delta t} \approx L_i \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad (7.1.5)$$

Die Wirkung dieser Näherung läßt sich am besten am homogenen Beispiel des spannungsgesteuerten Zugstabes diskutieren, wo die Verzerrungsgeschwindigkeiten nicht konstant sind. Mit dem Elastizitätsmodul E ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{rr} &= E \left\{ D_{rr} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)} \gamma \Phi(\Lambda) \right\} \\ \dot{\tau}_{zz} &= E \left\{ D_{zz} - 2 \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)} \gamma \Phi(\Lambda) \right\} \\ \dot{\tau}_{\varphi\varphi} &= E \left\{ D_{\varphi\varphi} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)} \gamma \Phi(\Lambda) \right\} \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

bei Zug in z-Richtung. Aus der FE-Rechnung folgen nun zum Zeitpunkt t_i

$$\dot{\tau}_{rr} \approx \dot{\tau}_{\varphi\varphi} \approx 0 \quad (7.1.7)$$

mit Zahlenwerten in der Größenordnung von 10^{-12} .

Mit (7.1.5) wird an jedem Zwischenzustand die ursprüngliche Verzerrungsgeschwindigkeit in (7.1.3) eingesetzt, während sich die Zustandsgrößen und damit auch die Materialfunktionen ändern. (7.1.7) wird also an allen Zwischenzuständen $t_i + \delta_m \Delta t$ verletzt und zwar

infolge (7.1.6) derart, daß die Summe der drei Spannungskomponenten gleich der äußeren Zugspannung ist, jedoch die Differenz zwischen äußerer Spannung und τ_{zz} jeweils zur Hälfte τ_{rr} beziehungsweise $\tau_{\varphi\varphi}$ zugeschlagen wird.

Dieser Effekt läßt sich mit kleineren Schrittweiten reduzieren, aber die dabei anfallenden Fehler liegen dennoch bei realistischen Werten von Δt im Bereich von 1 - 2%, wenn man den Zugstab bis zur 3-4fachen Fließspannung belastet.

Der Vergleich beider Verfahren liefert bei sehr kleinen Schrittweiten quantitativ kaum Unterschiede in den Ergebnissen und aus diesem Gesichtspunkt ist das Runge-Kutta-Verfahren dem wesentlich aufwendigeren Fehlberg-Algorithmus vorzuziehen. Beachtet man aber zusätzlich die besseren Stabilitätseigenschaften des Fehlberg-Verfahrens bei der Integration des steifen Differentialgleichungssystems, das auch Rechnungen mit verhältnismäßig großen Schrittweiten aus ingenieurmäßiger Sicht noch hinreichend genau integriert, während in diesem Bereich eine Integration mit dem Runge-Kutta-Verfahren nicht mehr stabil erfolgt, so sollte insgesamt gesehen der größere Rechenaufwand des Fehlberg-Verfahrens durchaus in Kauf genommen werden.

Zwei weitere Verfahren vom Typ (7.1.3) /54, 55/, die besonders günstige Stabilitätseigenschaften besitzen und von der Konsistenzordnung 5 und 6 sind, verbessern die Ergebnisse nicht gegenüber dem Verfahren von Fehlberg, da auch dort der Genauigkeit infolge (7.1.5) Grenzen gesetzt sind.

Nach der Integration der Zustandsgrößen mit expliziten Verfahren verbleibt die Ermittlung der neuen zum Zustand t_{i+1} gehörigen Geometrie. Da wir durch die Näherung (7.1.5) den Geschwindigkeitsgradienten während des gesamten Zeitschrittes als konstant annehmen, muß dies auch für das Geschwindigkeitsfeld gelten, woraus sich die neue Konfiguration durch die Polygonzugmethode aus der alten bestimmt:

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + \Delta t u_{k,i} \quad (7.1.8)$$

$$y_{k,i+1} = y_{k,i} + \Delta t v_{k,i}$$

Der Laufindex k erstreckt sich über alle Freiheitsgrade der Struktur.

7.2 Implizite Verfahren

Im Gegensatz zur expliziten Integration erreicht man mit impliziten Verfahren der gleichen Stufe m eine wesentlich höhere Konsistenzordnung (bis zu $2m$) /56/ und außerdem sind die Stabilitätseigenschaften dieser Verfahren im allgemeinen besser. Der Nachteil aller impliziten

Verfahren besteht darin, daß die unbekanntenen Vektoren ρ_i in (7.1.3) anders als bei den expliziten Verfahren nicht direkt ermittelt werden können, sondern implizit miteinander verknüpft sind, woraus sich in jedem Zeitschritt und an jeder Gaußstützstelle die Notwendigkeit der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems ergibt. Das einfachste implizite Verfahren ist die rückwärts genommene Eulerformel,

$$\rho = y' (L_{i+1}, y_{i+1}; m_{i+1}) \quad (7.2.1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \rho = y_i + \Delta t y' (L_{i+1}, y_{i+1}; m_{i+1})$$

die die Konsistenzordnung 1 genau wie (7.1.2) besitzt, aber weitaus günstigere Stabilitätseigenschaften aufweist. Insbesondere ist (7.2.1) stark absolut stabil. Die Begriffe stark stabil, absolut stabil und stark absolut stabil /56/ sind im Rahmen der Integration steifer Differentialgleichungen von großem Interesse, da damit charakterisiert wird, ob ein numerisches Integrationsverfahren, von der Frage der Konvergenz gegen die Lösung ganz abgesehen, überhaupt in der Lage ist, qualitativ ein Anwachsen oder Abklingen der steifen Komponenten des Systems richtig wiederzugeben.

Verfahren mit der Konsistenzordnung 2 lassen sich gewinnen aus der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} \rho_1 &= y' (L_i, y_i; m_i) \\ \rho_2 &= y' (L_{i+\delta \Delta t}, y_i + \Delta t \beta \rho_1; m_{i+\delta \Delta t}) \end{aligned} \quad (7.2.2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (\gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2)$$

wobei die Koeffizienten gewissen Bedingungsgleichungen genügen müssen, die sich aus dem Taylorabgleich ergeben:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1, \quad \gamma_2 \neq 0 \\ \delta = \beta &= \frac{1}{2\gamma_2} \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Die implizite Trapezformel (Verfahren von Heun) erhält man durch die Wahl von

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta = \beta = 1 \quad (7.2.4)$$

und es ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{\Delta t}{2} (\varrho_1 + \varrho_2) \\ &= y_i + \frac{\Delta t}{2} (y'(L_i, y_i; m_i) + y'(L_{i+1}, y_{i+1}; m_{i+1})) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

(7.2.5) ist absolut stabil. Ein weiteres in (7.2.2) enthaltenes Verfahren ist die Mittelpunkregel, bei der $\gamma_1 = 0$ gewählt wird und dann aus $\gamma_2 = 1$ die restlichen Koeffizienten folgen. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen, sondern noch ein Verfahren diskutieren, dessen Koeffizienten sich aus der Minimalforderung des führenden Fehlergliedes beim Taylorabgleich ableiten lassen (Optimal-Regel). Dort gilt:

$$\gamma_2 = \frac{3}{4}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{4}, \quad \delta = \beta = \frac{2}{3} \quad (7.2.6)$$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta t \left(\frac{1}{4} \varrho_1 + \frac{3}{4} \varrho_2 \right) \\ &= y_i + \Delta t (y'(L_i, y_i; m_i) + y'(L_{i+\frac{2}{3}\Delta t}, y_i + \frac{2}{3}\Delta t \varrho_1; m_{i+\frac{2}{3}\Delta t})) \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Würden wir zur Lösung der impliziten Gleichungen (7.2.1), (7.2.5) und (7.2.7) die Näherungsannahme eines über das gesamte Zeitinkrement konstanten Geschwindigkeitsgradienten beibehalten, so wären die Ergebnisse mit den gleichen Fehlern behaftet, wie bei den expliziten Verfahren. Um diese Ungenauigkeit zu vermeiden, formulieren wir die impliziten Verfahren in einer Prädiktor-Korrektor-Technik, wobei als Prädiktor jeweils die Polygonzugmethode (7.1.2) gewählt wird. Wir erhalten dann nacheinander die folgenden Verfahren:

Prädiktor :

Polygonzugmethode:

$$y_{i+1}^0 = y_i + \Delta t y_i'$$

Korrektor :

Euler-Rückwärts:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t y' (L_{i+1}^0, y_{i+1}^0; m_{i+1}^0) \quad (7.2.8)$$

Trapezformel:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2} (y' (L_i, y_i; m_i) + y' (L_{i+1}^0, y_{i+1}^0; m_{i+1}^0)) \quad (7.2.9)$$

Optimal-Regel:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (y' (L_i, y_i; m_i) + 3y' (L_{i+\frac{2}{3}}^0, y_i + \frac{2}{3}\Delta t y' (L_i, y_i; m_i); m_{i+\frac{2}{3}}^0)) \quad (7.2.10)$$

Bei der Optimal-Regel (7.2.10) ist der Prädiktor nur über zweidrittel des Zeitschrittes auszuführen.

Im ersten Schritt wird aus dem aktuellen Zustand t_i durch Anwendung des Prädiktors eine Näherung der Zustandsgrößen für t_{i+1} (y_{i+1}^0, m_{i+1}^0) ermittelt. Mit diesen genäherten Werten wird dann ein kompletter FE-Schritt ausgeführt, aus dessen Geschwindigkeitsfeld der Geschwindigkeitsgradient L_{i+1}^0 folgt, der anschließend in den Korrektorschritt einzusetzen ist.

Im Fall der Trapezformel und der Optimal-Regel wird mit dem ersten Korrektorschritt die Konsistenzordnung des Korrektors erreicht. Wir haben zu Testzwecken einen zweiten Korrektorschritt nachgeschaltet, der aber nur bei der rückwärts genommenen Euler-Formel eine Vergrößerung der maximal zulässigen Schrittweite und damit eine Verbesserung der Ergebnisse nach sich zog.

Mit der in einer Prädiktor-Korrektor-Form mit einem zweiten FE-Schritt durchgeführten Zeitintegration, der nicht mehr die Näherung (7.1.5) zugrundeliegt, läßt sich der spannungsgesteuerte Zugversuch bei ausreichend kleinen Zeitschritten exakt nachrechnen und man erhält die Spannungskomponenten τ_{rr} und $\tau_{\varphi\varphi}$ in der Größenordnung von 10^{-11} , woraus ersichtlich ist, daß sich im Verlauf der Rechnung selbst bei dem steifen Differentialgleichungssystem kaum Fehler akkumuliert haben.

Die Berechnung der neuen Geometrie wird hier mit dem jeweils gleichen impliziten Verfahren durchgeführt, wobei im Prädiktorschritt die erste Näherung der neuen Konfiguration zu bestimmen ist und das Ergebnis anschließend mit dem Korrektor verbessert wird. Daraus resultieren analog zu (7.1.8):

Prädiktor :

$$x_{k,i+1}^0 = x_{k,i} + \Delta t u_{k,i} \quad , \quad y_{k,i+1}^0 = y_{k,i} + \Delta t v_{k,i}$$

Korrektor :

Euler-Rückwärts:

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + \Delta t u_{k,i+1}^0 \quad , \quad y_{k,i+1} = y_{k,i} + \Delta t v_{k,i+1}^0 \quad (7.2.11)$$

Trapezformel:

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + \frac{1}{2} \Delta t \{ u_{k,i} + u_{k,i+1}^0 \} \quad (7.2.12)$$

$$y_{k,i+1} = y_{k,i} + \frac{1}{2} \Delta t \{ v_{k,i} + v_{k,i+1}^0 \}$$

Optimal-Regel:

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + \frac{1}{4} \Delta t \{ u_{k,i} + 3u_{k,i+\frac{2}{3}\Delta t}^0 \} \quad (7.2.13)$$

$$y_{k,i+1} = y_{k,i} + \frac{1}{4} \Delta t \{ v_{k,i} + 3v_{k,i+\frac{2}{3}\Delta t}^0 \}$$

Auch in (7.2.13) ist die Rechnung des Prädiktors wieder nur über zwei-drittel des Zeitschrittes auszuführen.

7.3 Vergleich der Verfahren - Bemessung der Schrittweite

Eine globale Aussage zu treffen über zulässige Schrittweiten für die einzelnen Verfahren ist sehr schwierig, da die Materialdaten jeweils für einen ca. 600 Grad Celsius großen Temperaturbereich angepaßt sind und sich die Parameter der Materialfunktionen dabei erheblich ändern. Wir gehen davon aus, daß sich die bei Raumtemperatur getroffenen Aussagen infolge des dort großen Exponenten in der Materialfunktion $\gamma\Phi$, der für das enorme Anwachsen dieser Funktion verantwortlich ist, auf den gesamten Temperaturbereich übertragen lassen.

Wie bereits in Kapitel 7.2 erwähnt, wird der spannungsgesteuert belastete Zugstab mit den impliziten Verfahren bei hinreichend kleinen Schrittweiten numerisch exakt integriert. Bei systematischer Vergrößerung der Schrittweiten treten bei allen Verfahren kritische Zeit-

inkremente auf, ab denen die Rechnung instabil wird und anschließend abbricht. Bei Belastung ergeben sich für die einzelnen Verfahren folgende kritische Spannungszuwächse, die im ungünstigsten Fall pro Zeitschritt nicht überschritten werden dürfen, um eine stabile Zeitintegration zu gewährleisten:

$$\begin{aligned} \text{Euler-Rückwärts:} & \quad \Delta\sigma \leq 0.067 \text{ MPa} \\ \text{Trapezformel, Optimal-Regel:} & \quad \Delta\sigma \leq 0.1 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Es zeigt sich, daß die rückwärts genommene Eulerformel gegenüber den beiden anderen Verfahren deutlich geringere Schrittweiten benötigt, obwohl die in (7.3.1) gewonnenen Ergebnisse für dieses Verfahren mit 2 Korrektorschritten erreicht wurden. Trapezformel und Optimal-Regel sind jeweils mit einem Korrektorschritt durchgeführt worden.

Aus (7.3.1) kann mit der konstanten Spannungsgeschwindigkeit σ' über die Beziehung

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma'} \quad (7.3.2)$$

das kritische Zeitinkrement bestimmt werden.

Da in das Argument Λ der Materialfunktion $\gamma\Phi$ im wesentlichen die 2. Invariante des Spannungszustandes eingeht, wird (7.3.2) in folgende Form umgeschrieben:

$$\Delta t_{\text{krit}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{(\sigma' \cdot \sigma')}} \quad (7.3.3)$$

Bei einer Verallgemeinerung auf beliebige Strukturen ist von der Gleichung (7.3.3) Gebrauch zu machen, wobei die kritische Schrittweite an der Stelle des Körpers zu bestimmen ist, die zuerst plastiziert und zwar zum Zeitpunkt des Auftreffens auf die Fließfläche. Numerisch geschieht dies an derjenigen Gaußstützstelle, die zuerst plastiziert.

Da die kritischen Spannungszuwächse bei einem realen Prozeß zu einigen hundert beziehungsweise zu mehreren tausend Zeitschritten führen können, wurde zusätzlich ein von Lindberg /58,59/ vorgeschlagener Glättungsalgorithmus für die Trapezformel getestet, der in folgender Form durchzuführen ist:

$$\tilde{y}_i = y_i$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{i+1} &= \tilde{y}_i + \frac{\Delta t}{2} (y'(L_i, \tilde{y}_i; m_i) + y'(L_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}; m_{i+1})) \\ \tilde{y}_{i+2} &= \tilde{y}_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} (y'(L_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}; m_{i+1}) + y'(L_{i+2}, \tilde{y}_{i+2}; m_{i+2})) \\ y_{i+1} &= \frac{1}{4} (y_i + 2\tilde{y}_{i+1} + \tilde{y}_{i+2})\end{aligned}\quad (7.3.4)$$

Der gesuchte Zustand zum Zeitpunkt t_{i+1} wird berechnet durch eine Mittelung aus aktuellem Zustand t_i und Näherungen \tilde{y} der beiden darauffolgenden Zustände. (7.3.4) erhöht den kritischen Spannungszuwachs der Trapezformel um 10%. Berücksichtigt man aber, daß zur Berechnung des neuen Zustandes mit dem Glättungsalgorithmus in jedem Schritt eine zusätzliche FE-Analyse auszuführen ist, weil eine Abschätzung für t_{i+2} benötigt wird, so wird deutlich, daß damit keinerlei Zeitgewinn verbunden ist. Negativ kommt hinzu, daß die Glättung zusätzlichen Speicherplatz in der Größe eines kompletten Zustandes erfordert.

Die Berechnung des spannungsgesteuert belasteten Zugstabes mit den beiden expliziten Verfahren bei zugrundeliegender kritischer Schrittweite der Trapezregel führt auf folgende Abweichungen gegenüber der exakten Lösung (dreifache Fließspannung):

Runge-Kutta: - 2.3%

Fehlberg : - 1.65%

Interessant ist das Verhalten der expliziten Verfahren bei Vergrößerung der Schrittweite. So wächst beim Algorithmus von Fehlberg wegen seiner hohen Stabilitätseigenschaften der Fehler bei der fünf-fachen kritischen Schrittweite der Trapezformel lediglich auf 8% an, während das Runge-Kutta-Verfahren dann bereits instabil integriert.

Bei einer Auswahl der vorgestellten Integrationsverfahren bietet sich von den impliziten Verfahren die Trapezformel an, während bei den expliziten der Algorithmus von Fehlberg trotz des größeren numerischen Aufwandes wegen seiner besseren Stabilitätseigenschaften dem Runge-Kutta-Verfahren vorzuziehen ist.

Eine Wahl zwischen Trapezformel und Fehlberg-Verfahren wird neben der Größe der vorgelegten und zu analysierenden Struktur auch durch die Forderungen nach möglichst genauer Rechnung und möglichst geringer Rechenzeit beeinflusst. Unter dem ausschließlichen Gesichtspunkt der Genauigkeit der Zeitintegration ist die Trapezformel mit dem zugehörigen Algorithmus (7.2.9/12) eindeutig vorzuziehen. Für den Fall von Systemen mit mäßiger Anzahl von Freiheitsgraden, wie in den Bei-

spielrechnungen, ist ebenfalls die Trapezformel günstiger, da der zusätzliche FE-Schritt, d.h. Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix und Lösung des Gleichungssystems weniger Zeit beansprucht, als die Integration mit dem aufwendigeren Fehlberg-Verfahren. Während bei größer werdendem System die Anzahl der Gaußpunkte und somit die Dauer der Zeitintegration in etwa linear zunehmen, steigt die zur Lösung des Gleichungssystems erforderliche Zeit mehr als quadratisch mit der Zahl der Unbekannten an. Deshalb wird für Systeme mit einer großen Anzahl von Unbekannten die Rechenzeit bei Wahl des Fehlberg-Verfahrens geringer als mit der Trapezformel sein, da dort nur einmal pro Zeitschritt das Gleichungssystem zu lösen ist. Aus ingenieurmäßiger Sicht sollte die Wahl des Fehlberg-Verfahrens trotz der geringeren Genauigkeit dann aber kein Problem darstellen, denn es bleibt zu bedenken, daß im allgemeinen die aus der Ortsdiskretisierung folgenden Spannungen bereits mit Fehlern behaftet sind, die oftmals wesentlich größer sind als diejenigen, die aus einer mit dem Fehlberg-Verfahren durchgeführten Zeitintegration resultieren.

Abschließend sei angemerkt, daß die Anwendung eines Mehrschrittverfahrens in Form eines Adams-Bashforth Prädiktors und eines Adams-Moulton Korrektors, wobei die Anlaufwerte mit dem Runge-Kutta-Verfahren ermittelt wurden /60/, gegenüber der Trapezformel wesentlich schlechter abschneidet, insbesondere weil der Speicherplatzbedarf der Mehrschrittverfahren ungleich größer ist und deshalb die Behandlung größerer Systeme nicht mehr alleine im Arbeitsspeicher durchgeführt werden kann, was wegen der Plattenzugriffszeiten zu einer erheblichen Verlängerung der Rechenzeiten führt. Außerdem ist der Adams-Bashforth Prädiktor wegen seines stark anwachsenden Restgliedes extrem instabil, so daß auch hiermit keine Vergrößerung der kritischen Schrittweiten erreicht werden kann.

8. Allgemeine Angaben zur Programmierung

Die verschiedenen Programme zur Spannungs- und Verformungsanalyse wurden auf einem Personal-Computer entwickelt und sind dort komplett einsetzbar. Die Programmierung erfolgte aber immer so maschinenunabhängig wie möglich, um jederzeit eine rasche Implementierung auf einer Großrechenanlage zu ermöglichen, weil im allgemeinen die Berechnung viskoplastisch deformierbarer Strukturen sehr rechenzeitintensiv ist und daher von einem Großrechner besser bewältigt wird.

Der gesamte Rechengang ist in drei größere Blöcke aufgeteilt:

- Aufbereiten der Struktur und des Materialgesetzes; Wahl des gewünschten FE-Verfahrens und der Zeitintegration; Organisation und Erstellung der Inzidenztafeln sowie Einarbeiten von geometrischen und natürlichen Randbedingungen;
- Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors; Lösen des linearen Gleichungssystems; Ermittlung der neuen Zustandsgrößen durch Zeitintegration; Optional: Einarbeiten neuer Randbedingungen (etwa bei Kriechen oder Relaxation);
- Verwaltung der Ergebnisse;

Die Aufbereitung der Struktur, d.h. die Diskretisierung erfordert wegen des isoparametrischen Ansatzes (6.3.4) nicht nur die Angabe der Knotenkoordinaten der einzelnen Elemente, sondern auch deren Ableitungen nach den lokalen Koordinaten ξ und η (6.3.8). Da jede Elementkante in ihrer Parameterdarstellung ein Polynom dritten Grades in der zugehörigen lokalen Koordinate ist, werden in einem Algorithmus ähnlich einer Splineinterpolation durch Hinzunahme zweier zusätzlicher Punkte zu den Knotenkoordinaten oder durch die Angabe von zwei zusätzlichen Steigungen die gewünschte Form der Kante entsprechend der zu berechnenden Struktur erzeugt und die gemäß (6.3.8) erforderlichen geometrischen Beziehungen ermittelt. Durch diese - interaktiv programmierte - Interpolation lassen sich auch gekrümmte Berandungen ohne allzu großen Aufwand beschreiben (vgl. Kap. 9.2,9.5). Die zugehörigen Inzidenzen werden nach Angabe aller Lagerungsbedingungen durch ein Programm aufgebaut.

Durch die Vorgabe der gewünschten Temperatur werden alle zugehörigen Materialparameter im Programm bestimmt. Außerdem sind verschiedene isotrope Verfestigungsfunktionen $g(x)$ implementiert, die zum Testen des Stoffgesetzes anhand von inhomogenen Problemen wahlweise eingesetzt werden können.

Der Einbau von geometrischen Randbedingungen mit nicht verschwindenden Geschwindigkeiten erfolgt nicht über ein Penalty-Verfahren, in dem die zugehörige Steifigkeit erhöht wird, sondern durch Kondensa-

tion der Steifigkeitsmatrix und entsprechende Modifizierung des Knotenlastvektors.

Die Verwaltung der Komponenten der Steifigkeitsmatrix erfolgt mit dem Skyline-Verfahren, das die Bandstruktur der Matrix ausnutzt.

Durch die bei den Verfahren der gewichteten Residuen außer beim Least-Squares-Verfahren vorhandene Asymmetrie der Matrizen war es notwendig, eine gegenüber /61/ erweiterte Abspeicherung zu programmieren, die jeweils ausgehend vom Diagonalelement sowohl die Säule der zugehörigen Spalte als auch die der zugehörigen Zeile berücksichtigt. Ein entsprechend dieser Abspeicherung arbeitender Skyline-Löser für unsymmetrische Matrizen löst anschließend das entstehende Gleichungssystem. Die Invertierung der verallgemeinerten Jacobi-Matrix (6.3.10) ist per Hand ausgeführt worden und direkt im Programm eingebaut. Dadurch entfällt die numerische Matrixinvertierung an jedem Gaußpunkt.

Neben einer Klartextausgabe der Verformungen sowie Spannungen und Verfestigungen mit allen Ortsableitungen für alle Elemente sind 3 Plotprogramme vorhanden, mit denen wahlweise

- das Verschiebungsfeld
- eine Spannungs- oder Verfestigungskomponente über der Struktur
- eine Spannungs- oder Verfestigungskomponente längs einer Linie mit $\xi = \text{konst.}$ oder $\eta = \text{konst.}$ durch die Struktur

zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt werden können. Ein weiteres Programm ermöglicht die Darstellung einer beliebigen Zustandsgröße an einem Gaußpunkt der Struktur als Funktion der Zeit.

Ferner wird in der Eingabe festgelegt, zu welchen Zeitpunkten Ergebnisse produziert werden sollen. Es ist dann jederzeit möglich, von einem bekannten Zustand t_i das Programm neu zu starten und weiterzurechnen. Dadurch lassen sich die Rechenzeiten erheblich verringern, weil die Möglichkeit der Wahl unterschiedlicher Zeitschrittweiten besteht, was im vorliegenden Stoffmodell besonders bei Relaxations- oder Kriechprozessen von Vorteil ist.

Sowohl Ring- als auch Scheibenelement erfüllen mit dem sechzehn- wie auch dem zwölfgliedrigen Ansatz den von Irons in /62/ postulierten Patch-Test.

9. Vergleichsrechnungen

Wir vergleichen die verschiedenen Finite-Elementformulierungen anhand von Beispielrechnungen, für die im elastischen Bereich eine analytische Lösung vorliegt. Besondere Beachtung findet dabei die Analyse der Spannungen und hier wiederum der Randbedingungen, da in aller Regel auf dem Rand des Körpers die maximalen Spannungen auftreten. Auf die Darstellung des Verschiebungsfeldes wird überwiegend verzichtet, weil die größeren Abweichungen der FE-Lösungen gegenüber der strengen Lösung in den Spannungen auftreten.

Das dickwandige Rohr unter Innendruck als Komponente eines Rohrleitungssystems wird in der Kraftwerkindustrie oftmals stellvertretend für die gesamte Struktur untersucht.

Die dickwandige Kugel wird als Behälter vor allem in der chemischen Industrie eingesetzt, so daß auch dieses Beispiel von technischem Interesse ist.

Als Beispiele für das Scheibenelement wird die Scheibe unter einer vorgegebenen Geschwindigkeitsbelastung betrachtet, die bei elastischem Materialverhalten eine reine Biegung hervorruft. Im Bereich inelastischer Deformationen können das Relaxationsverhalten und mögliche Spannungsumlagerungen bei festgehaltener Verformung beobachtet werden. Abschließend werden noch die Kragsscheibe und die Scheibe mit Loch untersucht, letztere vor allem wegen der Spannungsüberhöhung in der Umgebung des Lochrandes.

Allen Beispielrechnungen liegen die Materialdaten des austenitischen Stahls SS 304 bei Raumtemperatur (20 Grad Celsius) zugrunde.

9.1 Das dickwandige Rohr unter Innendruck

9.1.1 Elastische Vergleichsrechnungen

Vorab wird für alle elastischen Vergleichsrechnungen folgende Vereinbarung getroffen:

gestrichelte Linie = analytische Lösung

durchgezogene Linie = FE-Lösung

Die analytische Lösung im elastischen Bereich für das in Bild 9.1 dargestellte und allen Beispielrechnungen zugrundeliegende System findet sich in /63/ und lautet:

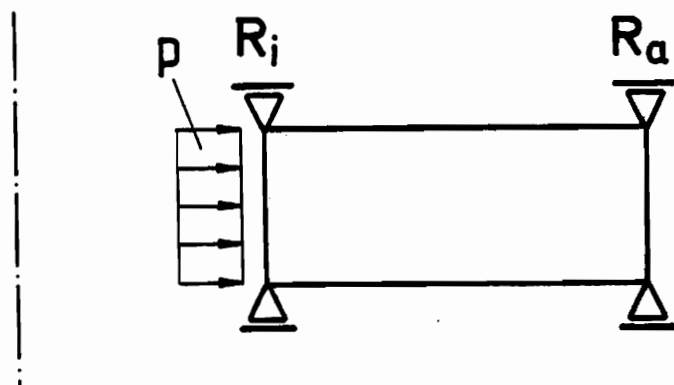


Bild 9.1: Dickwandiges Rohr

$$\sigma_{rr} = -p_i \frac{\left\{ \frac{R_a}{r} \right\}^2 - 1}{\left\{ \frac{R_a}{R_i} \right\}^2 - 1}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = p_i \frac{\left\{ \frac{R_a}{r} \right\}^2 + 1}{\left\{ \frac{R_a}{R_i} \right\}^2 - 1} \quad (9.1.1.1)$$

$$p_i = 60.627 \text{ MPa} , \quad \frac{R_a}{R_i} = 3$$

Als Innendruck p_i wird der Wert gewählt, der mit den gegebenen Materialdaten den Innenrand zum Erreichen der Fließgrenze bringt und das Verhältnis von Außen- zu Innenradius sei 3. Wir verzichten auf die graphische Darstellung der über den Radius konstanten Spannungskomponente in axialer Richtung, werden aber die maximalen Abweichungen von der exakten Lösung angeben. Wegen der speziellen Lagerung und dem Zusammenfallen der Richtungen der lokalen mit den globalen Koordinaten entfallen die zusätzlichen Freiwerte des 16- gegenüber dem 12-gliedrigen Ansatz, so daß die Ergebnisse beider Ansätze für dieses Beispiel identisch sind.

Bei der graphischen Darstellung können zudem wegen der Übereinstimmung der lokalen und globalen Koordinaten auch die an den Gaußpunkten bekannten Ableitungen der Spannungen nach den globalen Koordinaten mit eingebracht werden, so daß von Gaußpunkt zu Gaußpunkt 4 Informationen vorliegen, die eine kubische Splineinterpolation ermöglichen.

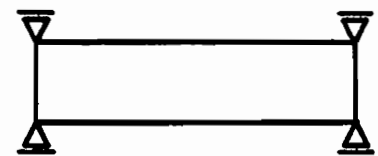
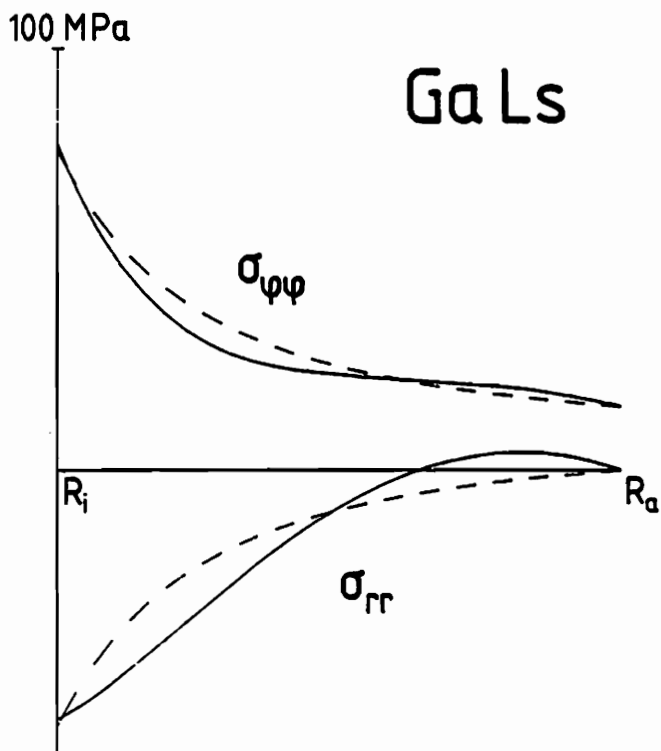
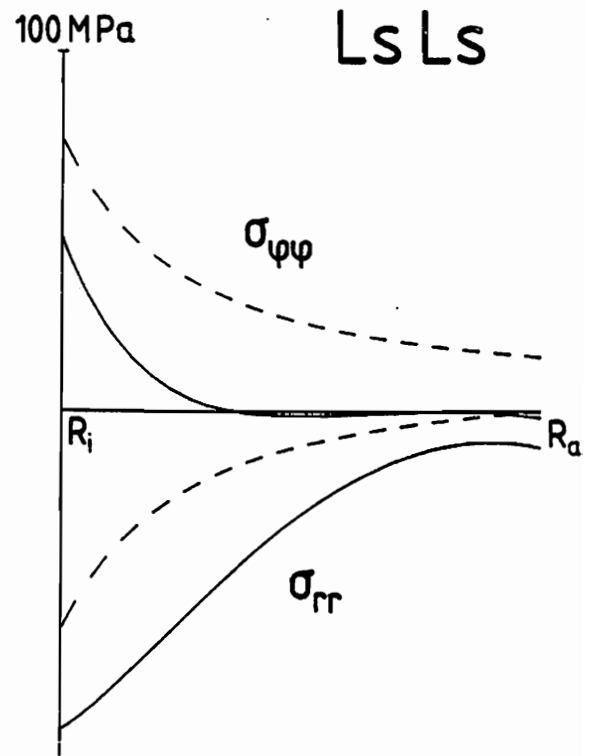
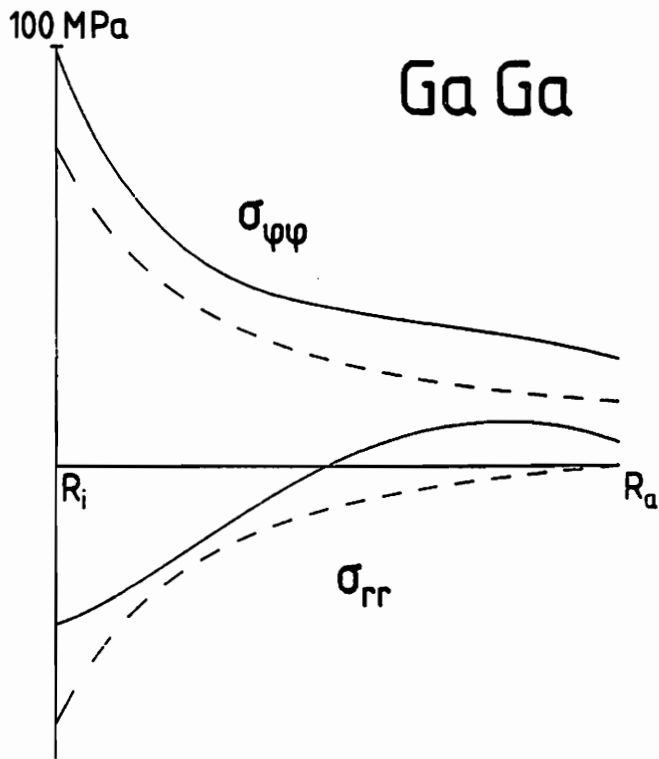
Die einzelnen Verfahren sind durch folgende Kürzel gekennzeichnet:

GaGa = Galerkin-Verfahren im Inneren des Körpers und für die Randbedingungen (5.1.5)

LsLs = Least-Squares-Verfahren im Inneren des Körpers und für die Randbedingungen (5.2.3)

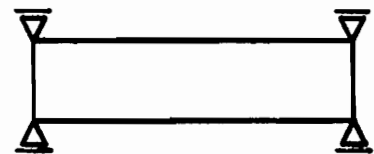
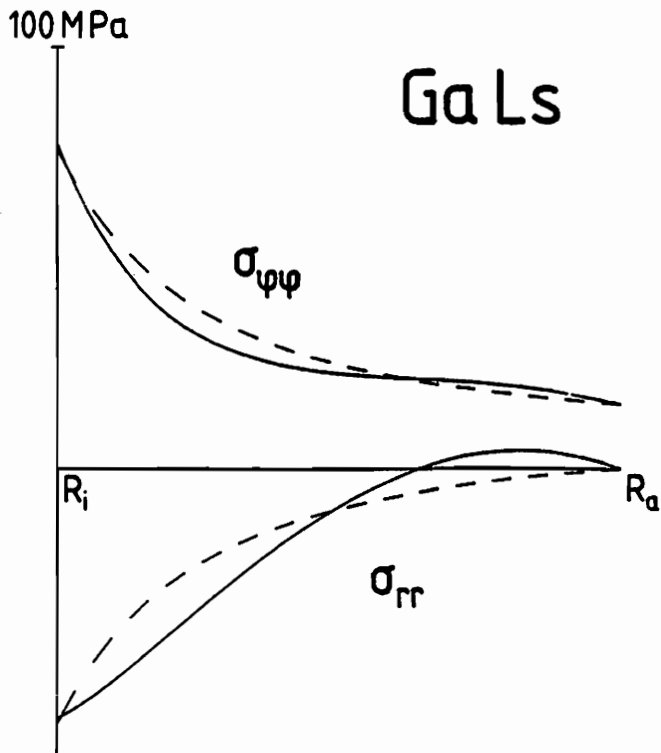
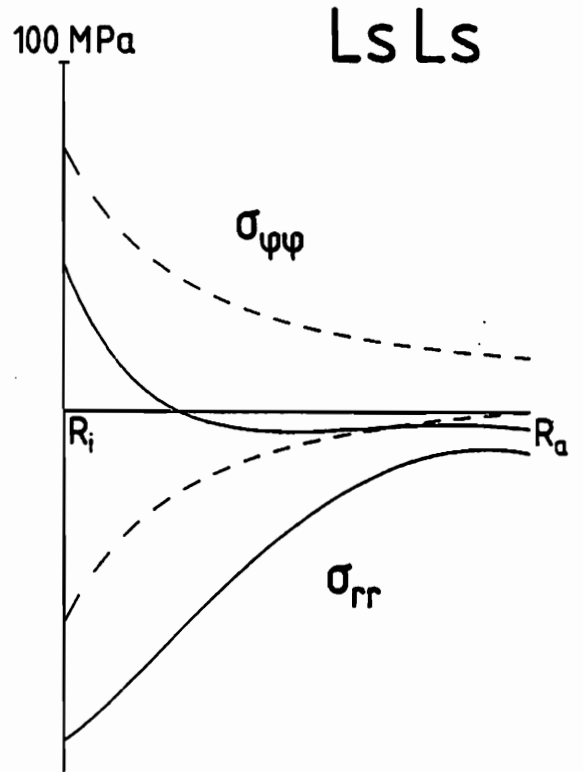
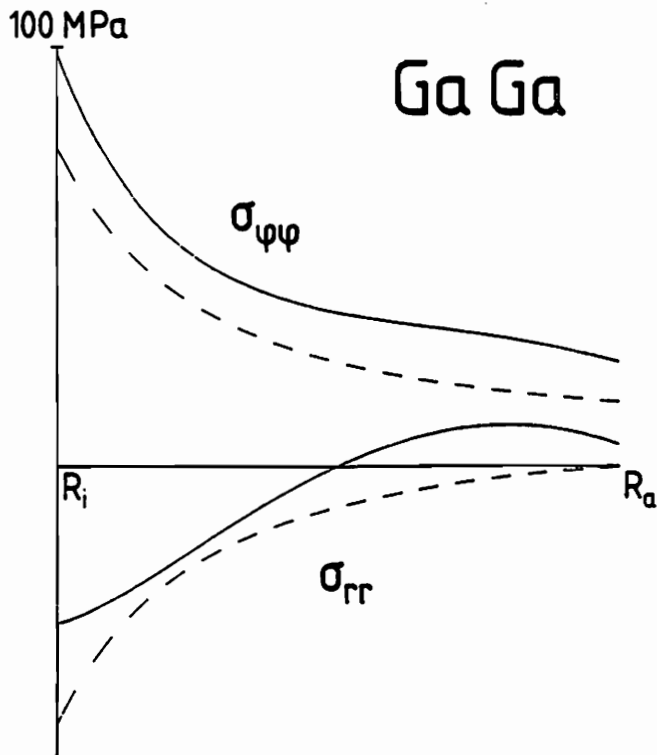
GaLs = Galerkin-Verfahren im Inneren und Least-Squares-Verfahren auf dem Rand (5.3.2)

Die Bilder 9.2 und 9.3 zeigen die Spannungsverläufe der verschiedenen Verfahren bei Wahl von 3 bzw. 4 Gaußpunkten und einem Element in radialer Richtung mit gleichverteilter Geometrie. Im Vergleich der Verfahren untereinander liegen die Ergebnisse von GaLs mit Abstand am besten zur strengen Lösung. Die maximale Abweichung der Radial-



3 GP gleichverteilt

Bild 9.2



4 GP gleichverteilt

Bild 9.3

spannung an einem Gaußpunkt beträgt 9 MPa, was bezogen auf den Wert der Umfangsspannung am Innenrand 12% ist. Besonders deutlich wird der Unterschied am Innen- und Außenrand des Rohres. Während die Abweichungen vor allem des Least-Squares- aber auch die des Galerkin-Verfahrens relativ groß sind, weicht GaLs am Innenrand sowohl bei der Umfangs- als auch der Radialspannung um weniger als 1.5 MPa von den exakten Werten ab. Am Außenrand betragen die Fehler bei der Umfangsspannung weniger als 0.1 und bei der Radialspannung sogar weniger als 0.00001 MPa.

Abgesehen von der Umfangsspannung bei LsLs sind die Ergebnisse der einzelnen Verfahren mit 3 bzw. 4 Gaußpunkten identisch und wir werden uns im folgenden auf die Darstellung der Rechnungen mit 3 Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung beschränken.

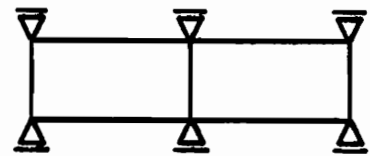
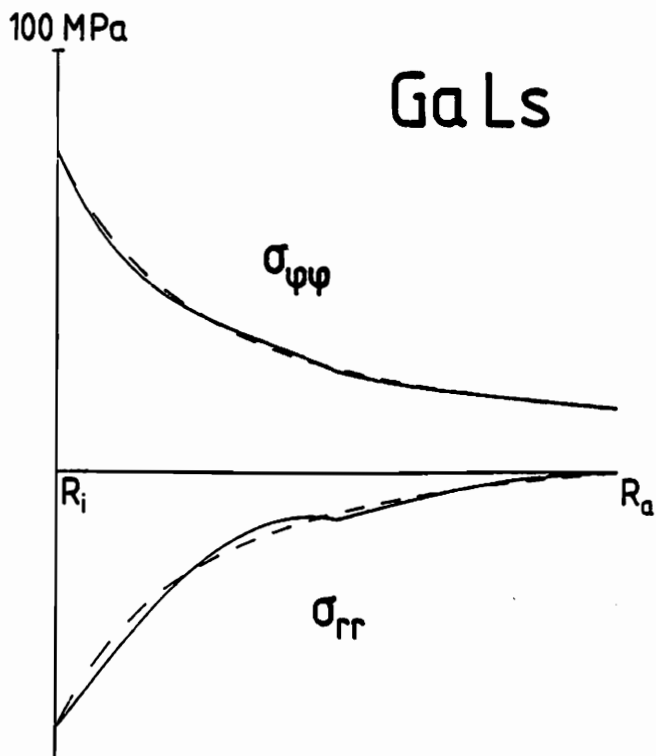
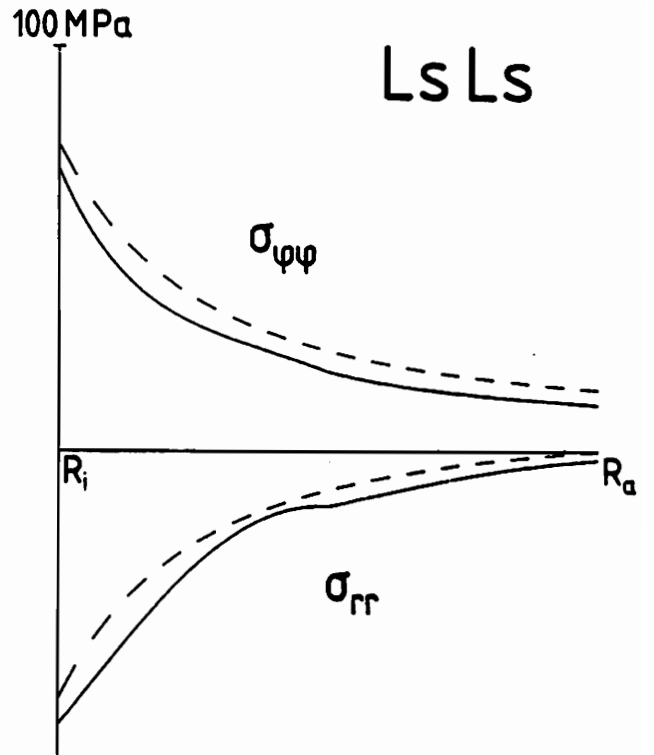
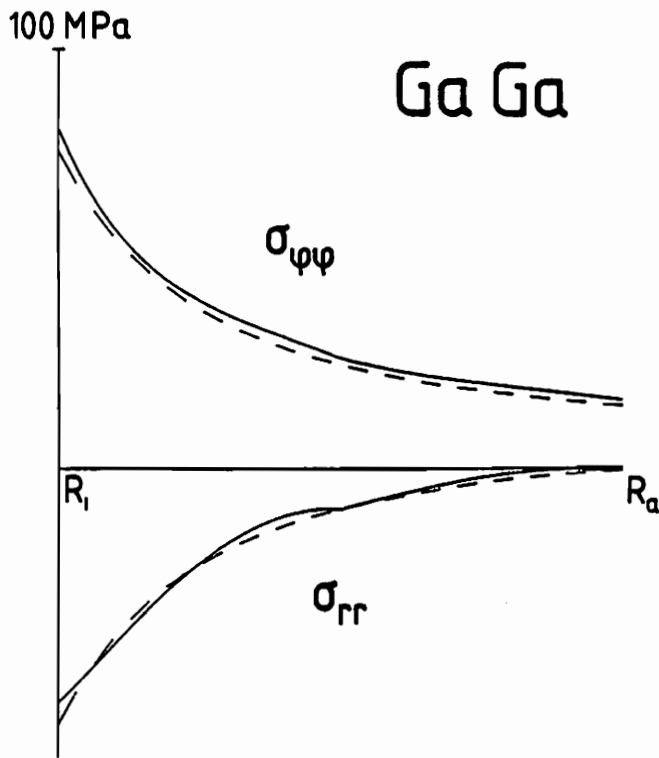
Bei der Rechnung mit 2 gleichverteilten Elementen (Bild 9.4) fällt zunächst bei allen Verfahren ein ausgeprägter Knick der Spannungsverläufe an den Elementgrenzen auf, der darauf zurückzuführen ist, daß die Spannungen zwar über alle Elemente stetig, jedoch nur im Elementinnern auch stetig differenzierbar sind und daher Sprünge in den Spannungsableitungen längs der Elementkanten auftreten. Bei allen Verfahren ist eine Verbesserung der Ergebnisse gegenüber den Werten mit einem Element klar erkennbar. Auch hier sind die Ergebnisse von GaLs im Vergleich am besten, wobei die Radialspannung bei GaGa nur geringfügig schlechter ist, während die Umfangsspannung von GaLs die analytische Lösung weitaus besser approximiert. LsLs liegt wiederum am schlechtesten.

Der Unterschied zwischen GaLs und GaGa ist besser zu erkennen bei Betrachtung der Randbedingungen. Hier sind die maximalen Abweichungen von GaLs gegenüber der strengen Lösung am Innenrand kleiner als 0.4 und am Außenrand kleiner als 0.02 MPa, während bei GaGa am Innenrand immerhin noch Abweichungen von etwa 5 MPa auftreten.

Bei weiterer Verfeinerung mit 3 gleichverteilten Elementen (Bild 9.5) nähern sich die Ergebnisse noch mehr der analytischen Lösung an, mit derselben qualitativen Reihenfolge der einzelnen Verfahren untereinander: GaLs - GaGa - LsLs. GaLs übertrifft die beiden anderen Verfahren erneut in den Randbedingungen und in der Umfangsspannung stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit Näherungs- und analytische Lösung überein. Bei allen Verfahren sind die Sprünge in den Spannungsableitungen kleiner geworden.

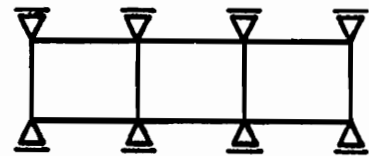
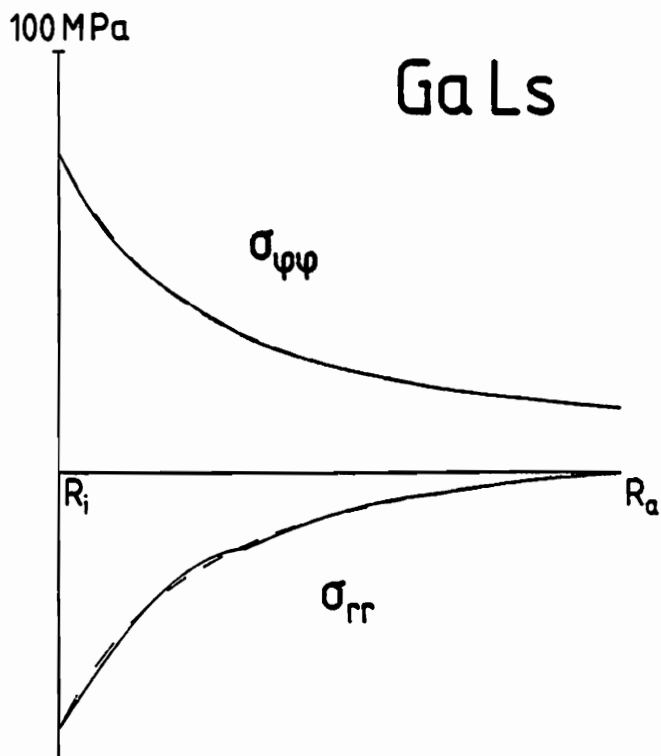
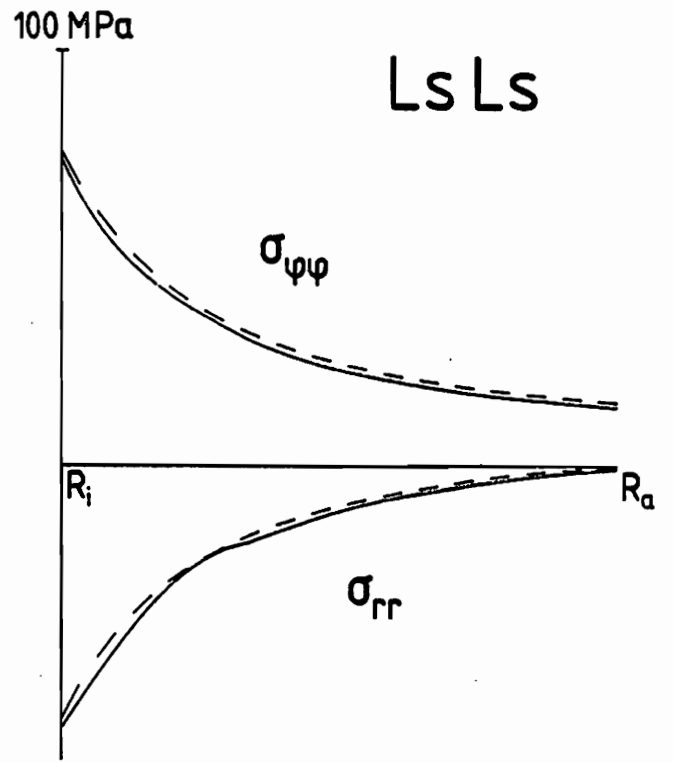
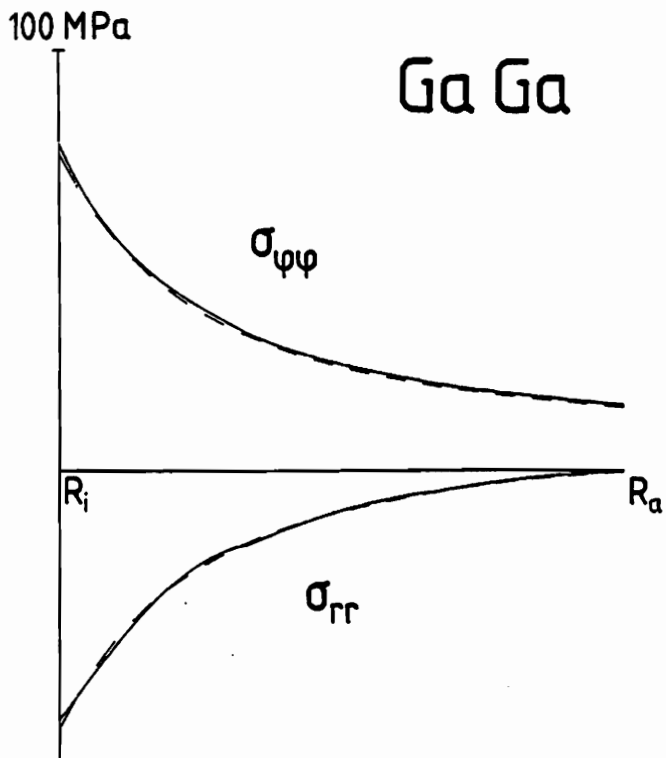
Die in Bild 9.6 dargestellten Ergebnisse für 4 gleichverteilte Elemente liefern bei allen drei Verfahren sehr gute Übereinstimmungen mit der exakten Lösung, wobei wiederum GaLs am günstigsten liegt. Bei weiterer Verfeinerung mit 5 und 6 Elementen (Bild 9.7) sind die Plots aller FE-Näherungsverfahren von der analytischen Lösung nicht mehr zu unterscheiden und nur bei genauer Analyse der Spannungen am Innenrand ergeben sich erneut genauere Werte bei GaLs, die aber im Rahmen einer Finite-Element-Analyse von sekundärer Bedeutung sind.

Die relativen Abweichungen des Verschiebungsfeldes gegenüber der analytischen Lösung liegen für GaLs ab 2 Elementen für die beiden an-



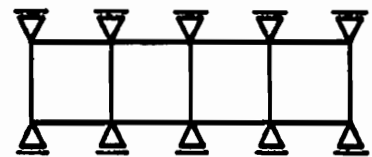
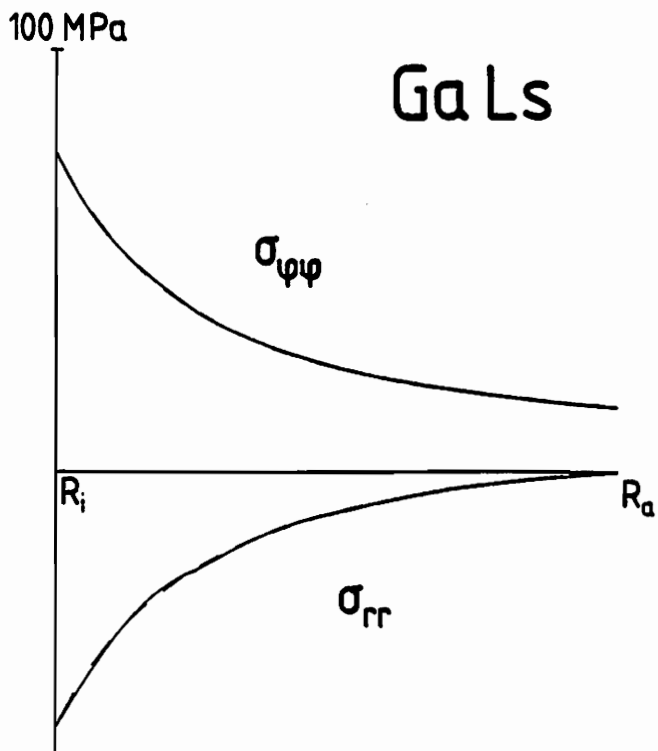
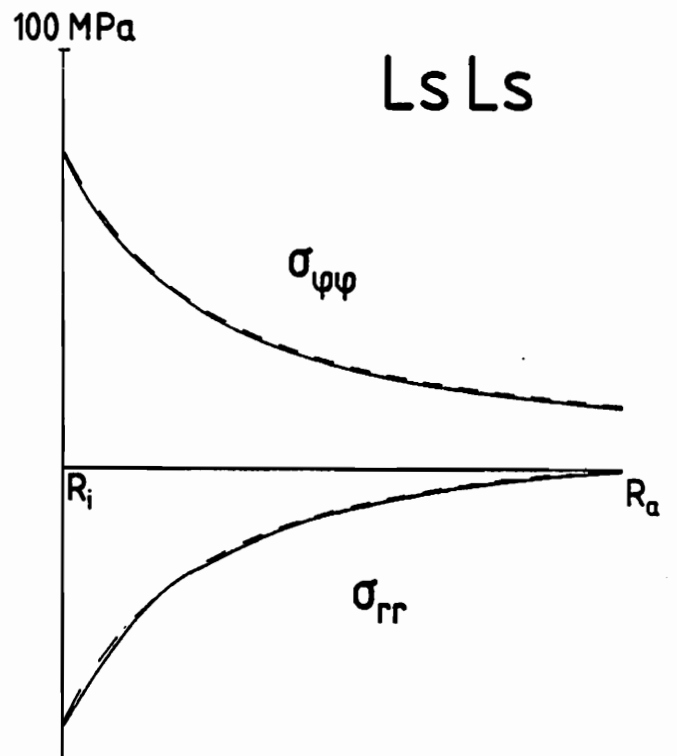
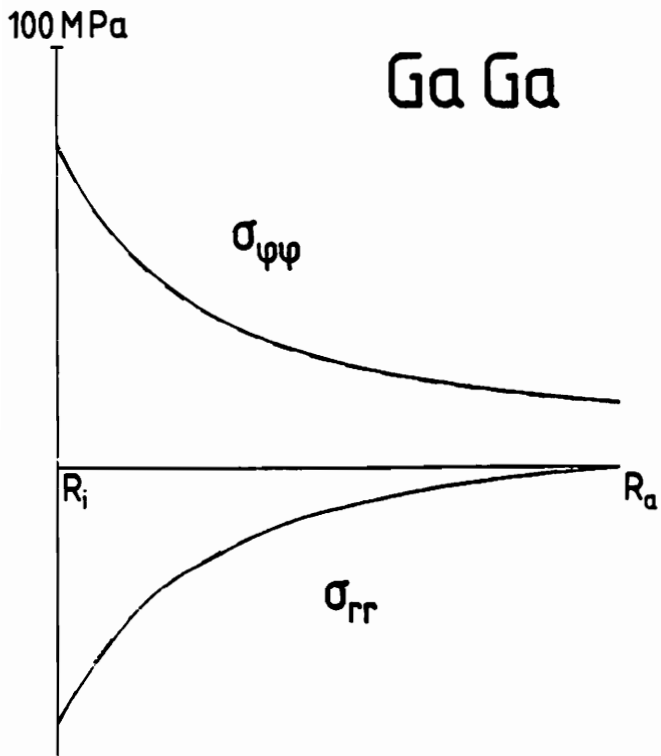
3 GP gleichverteilt

Bild 9.4



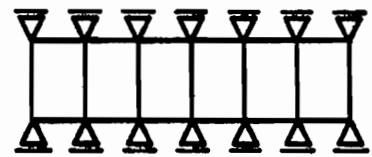
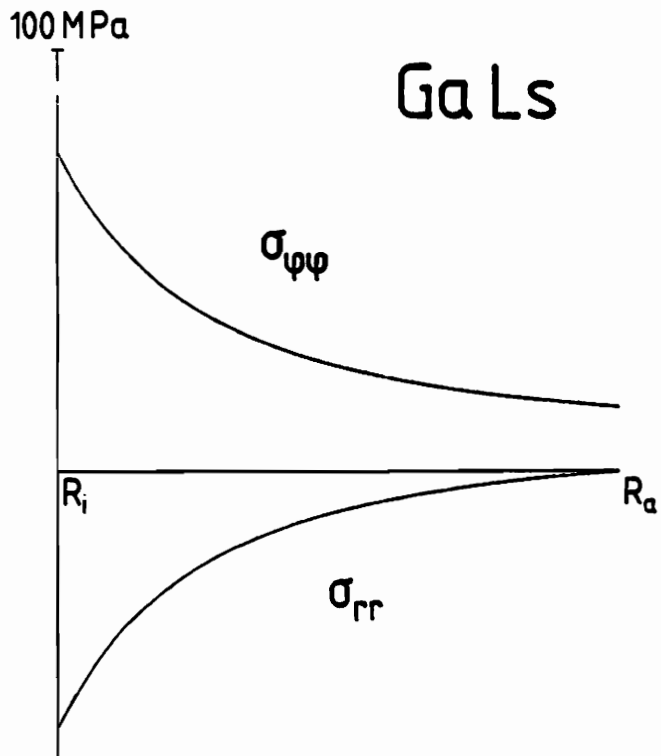
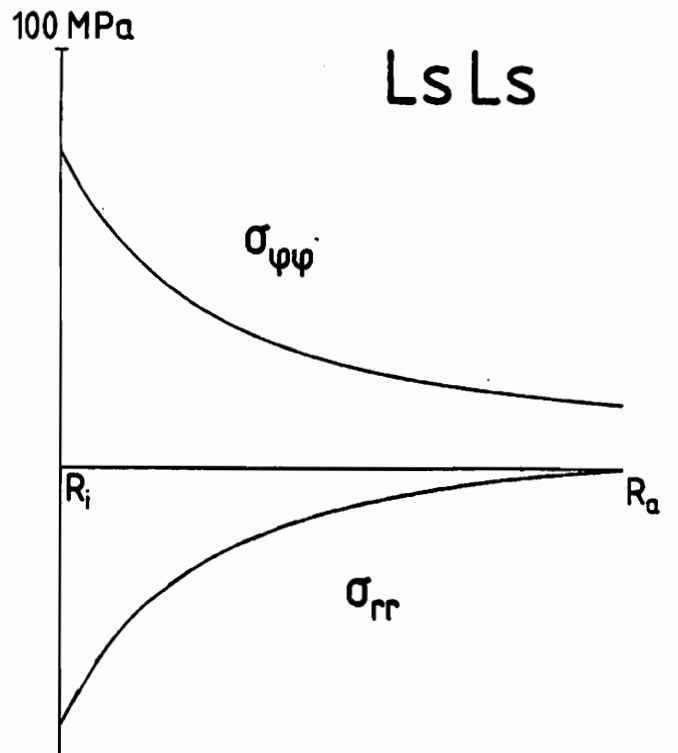
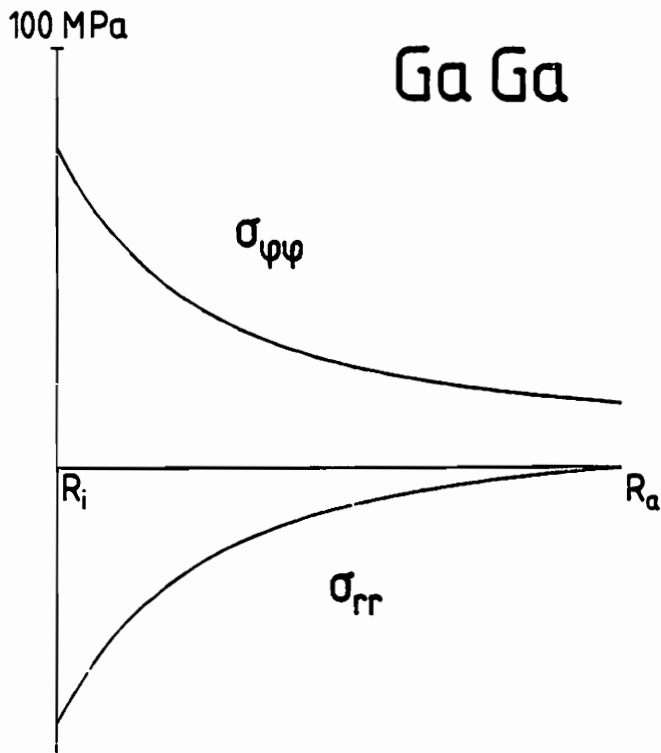
3 GP gleichverteilt

Bild 9.5



3 GP gleichverteilt

Bild 9.6



3 GP gleichverteilt

Bild 9.7

deren Verfahren ab 3 Elementen im Promillebereich. Die konstante Axialspannung wird ab 4 Elementen mit einer Schwankung von maximal 0.1 MPa für GaGa und LsLs, sowie von 0.05 MPa für GaLs an den Gaußpunkten angenähert.

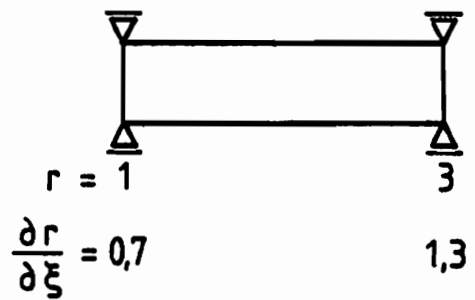
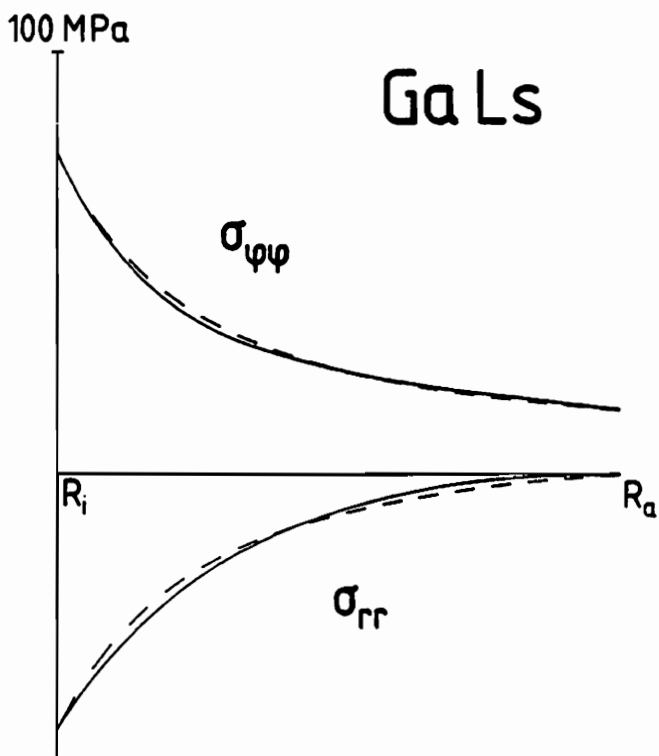
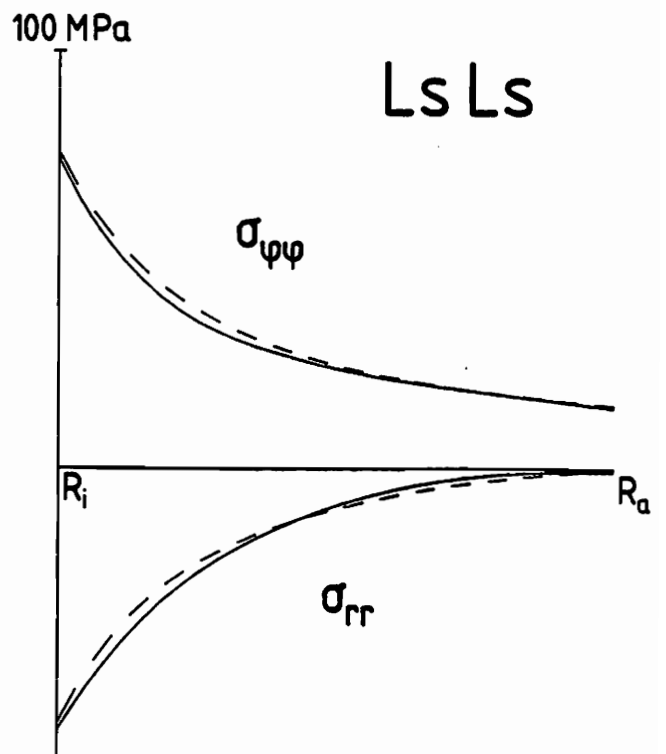
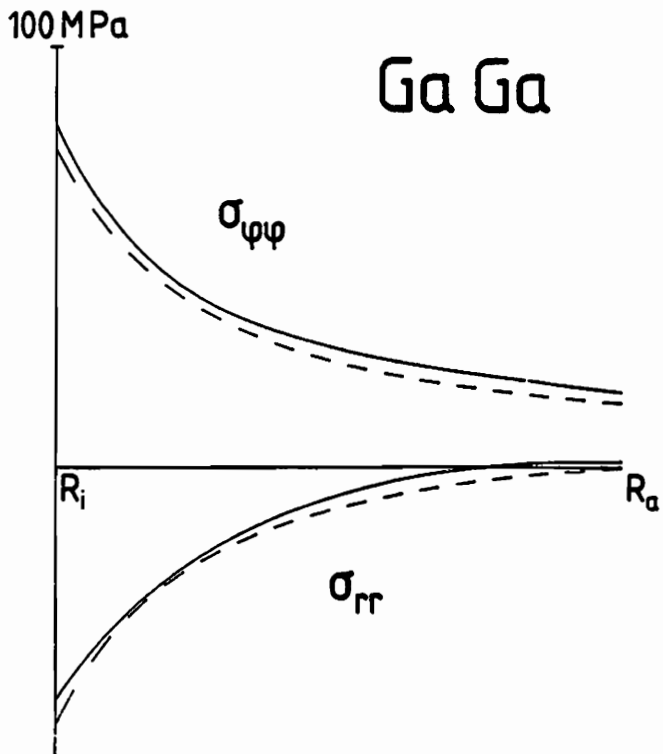
Die Verfeinerung der Elemententeilung zeigt numerisch die Konvergenz aller Verfahren gegen die exakte Lösung. Bei gleicher Elementzahl wird die Güte der Ergebnisse gesteigert durch eine engere Diskretisierung in den Bereichen maximaler Beanspruchung. Mit dem hier vorliegenden Elementansatz läßt sich eine Verbesserung aber nicht nur mit einer verfeinerten Diskretisierung - beim dickwandigen Rohr am Innenrand - erzielen, sondern man kann auch bei gleicher Elementanzahl und Elementlage durch eine geeignete Transformationsvorschrift zwischen globalen und lokalen Koordinaten (6.3.4) die Übereinstimmung der Näherungslösungen mit den analytisch berechneten Werten enorm steigern. Durch die in diesem Fall nicht mehr lineare Beziehung zwischen lokalen und globalen Koordinaten wird die Lage der Gaußpunkte zum Innenrand hin verschoben, was eine bessere Integration der Steifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors zur Folge hat. Ein Vergleich der Ergebnisse von Bild 9.8 mit Bild 9.2, die beide mit einem Element berechnet wurden, zeigt bei allen drei Verfahren erheblich genauere Ergebnisse. Sehr ausgeprägt sind die Verbesserungen beim Least-Squares-Verfahren, das gegenüber GaGa jetzt bessere Werte aufweist und nur geringfügig schlechter als GaLs ist. Aber auch in Bild 9.8 erkennt man die sehr gute Befriedigung der Randbedingungen beim kombinierten Verfahren.

Insgesamt gesehen sind die Ergebnisse für das Beispiel des dickwandigen Rohres unter Innendruck besser als diejenigen der Triax-Elementfamilie /64/.

9.1.2 Reduzierte Integration

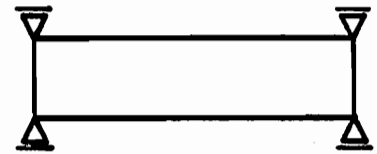
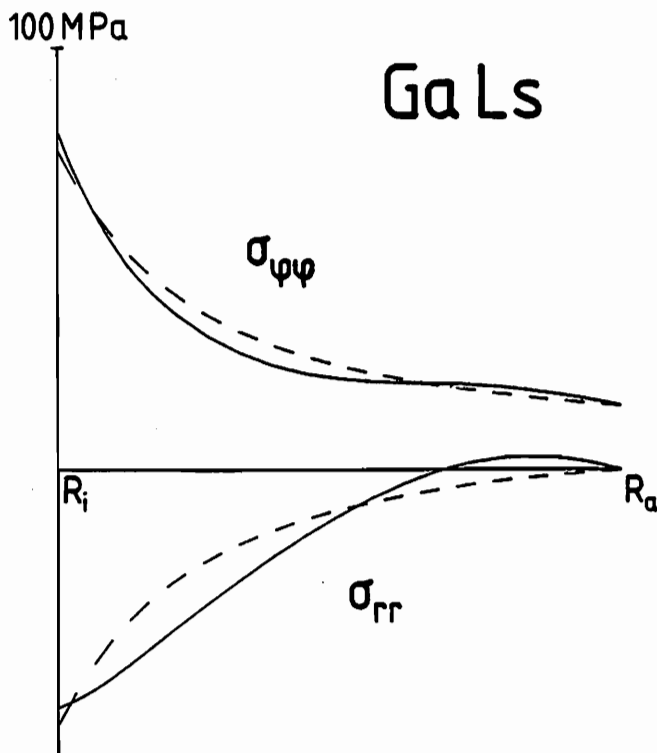
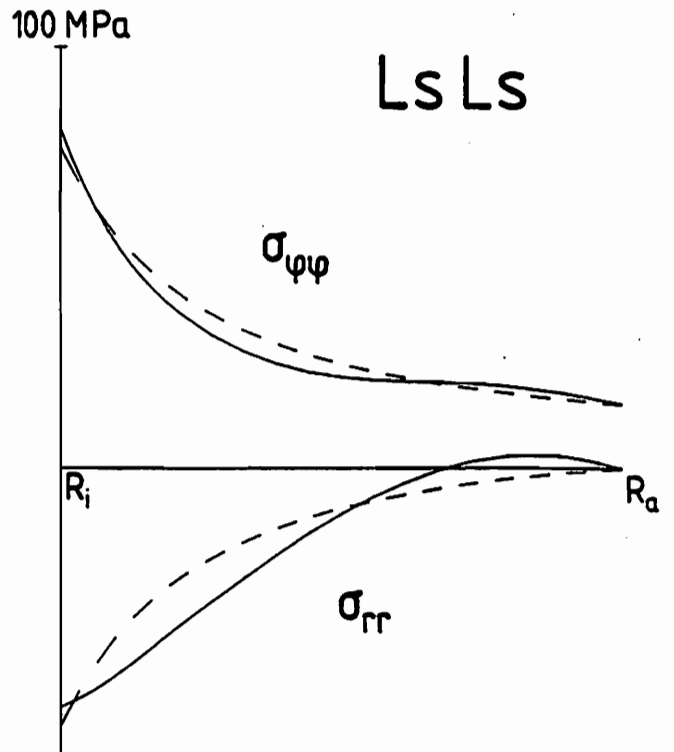
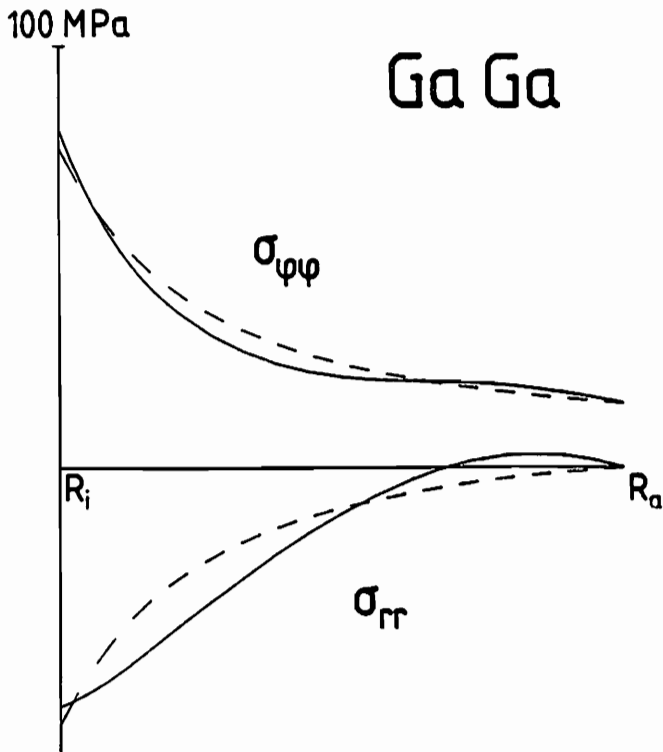
Ein Vergleich mit den obigen Rechnungen bei Verringerung der Anzahl an Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung von 3 auf 2 hat überraschende Ergebnisse zur Folge. In Bild 9.9, dem dieselbe Konfiguration und Geometrie mit einem Element wie in Bild 9.2 zugrundeliegen, sind die Spannungsverläufe aller Verfahren identisch und im Vergleich zur Lösung mit 3 Gaußpunkten zumindest beim Galerkin- und Least-Squares-Verfahren besser, während bei GaLs die Funktionen etwa vergleichbar sind. Bei Verfeinerung mit gleichverteilten Elementen, denen eine lineare Transformation zwischen lokaler und globaler Koordinate zugrundeliegt, erzielt man ebenfalls gute Ergebnisse - Bild 9.10 mit 3 Elementen im Vergleich zu Bild 9.5 - und die Lösungen aller Verfahren stimmen wiederum überein.

Diese Übereinstimmung der Verfahren bei Wahl von 2 Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung hat uns veranlaßt, daß vorliegende Beispiel genauer zu analysieren. Dazu betrachten wir den Fall eines Elementes in radialer Richtung. Wegen der Unabhängigkeit des Problems von der



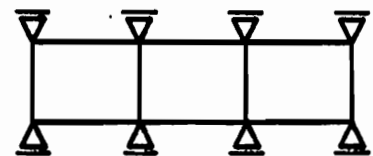
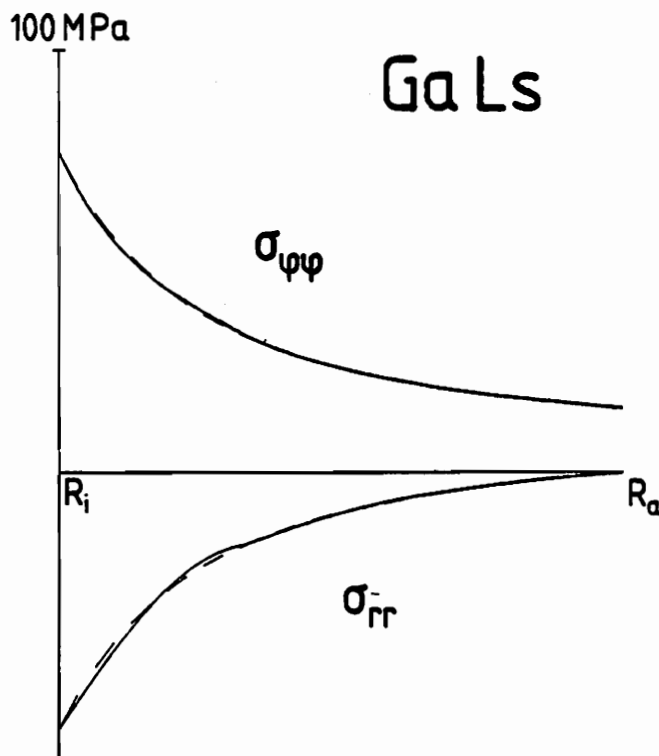
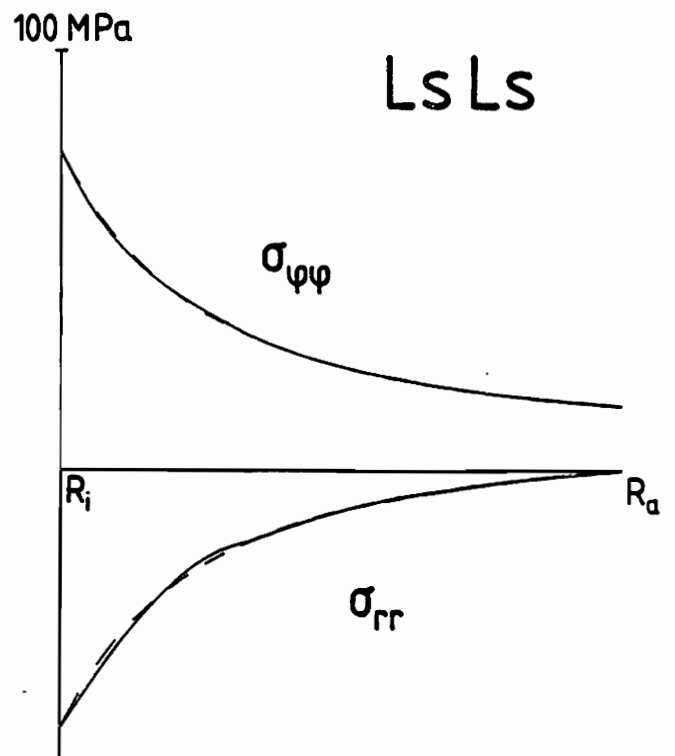
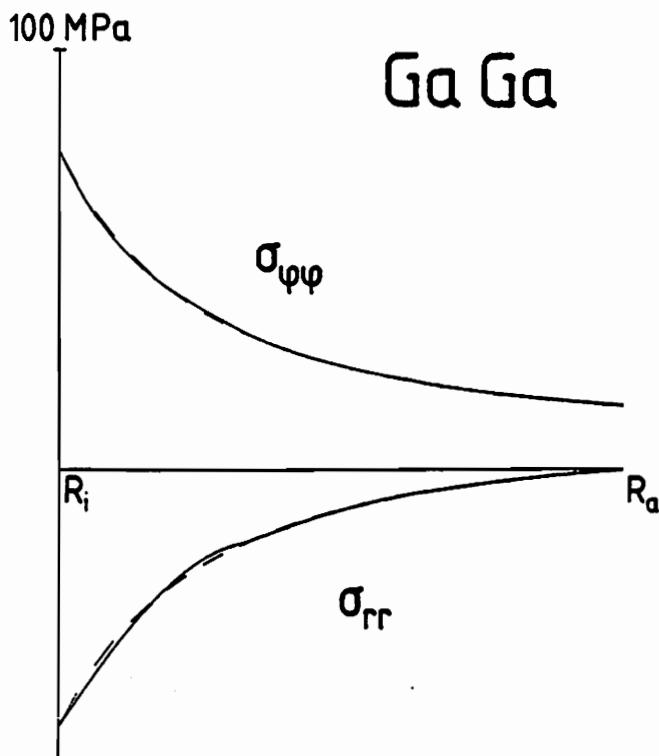
3 GP nicht gleichverteilt

Bild 9.8



2 GP gleichverteilt

Bild 9.9



2 GP gleichverteilt

Bild 9.10

axialen Komponente und unter Ausnutzung des Zusammenfallens von globaler und lokaler Koordinate in radialer Richtung muß der isoparametrische Ansatz (6.3.3) mit den zugehörigen Formfunktionen (6.3.6) übereinstimmen mit dem in r kubischen Polynom

$$u(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \quad (9.1.2.1)$$

und den Ansatzfreiwerten a_i , die natürlich in dieser Form nicht mehr den Knotenfreiwerten in (6.3.3) entsprechen. Die Basis des Polynomraumes der Ansatzfunktionen wird mit dem Satz

$$\Upsilon = \{1, r, r^2, r^3\} \quad (9.1.2.2)$$

gebildet, der dann für das Galerkin-Verfahren gebraucht wird. Mit (9.1.2.1) läßt sich nun durch explizites Nachrechnen zeigen, daß bei Wahl von zwei Gaußpunkten alle Näherungsverfahren übereinstimmen (vgl. Bild 9.9). Zur Berechnung der exakten Lösungen der Finite-Elementverfahren wird (9.1.2.1) nacheinander in (5.1.5), (5.2.3) und (5.3.2) eingesetzt und dann anschließend analytisch integriert. Die exakten Funktionsverläufe sind in Bild 9.11 dargestellt. Ein Vergleich der Bilder 9.9 und 9.11 zeigt, daß die mit reduzierter Integration berechneten Ergebnisse der strengen Lösung des Problems näher kommen als die exakt integrierten Verläufe der FE-Verfahren. Ähnlich gute Ergebnisse werden in /26/ mit reduzierter Integration in einem hybriden Modell auf Least-Squares Basis ebenfalls für rotationssymmetrische Probleme vorgestellt.

Im Vorgriff auf die in Kapitel 9.2 zu behandelnde dickwandige Kugel unter Innendruck bleibt zu erwähnen, daß sowohl das Zusammenfallen der Ergebnisse aller Verfahren bei Wahl von zwei Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung wie auch deren gute Übereinstimmung bei Verwendung der reduzierten Integration mit der analytischen Lösung nur im speziellen Fall des dickwandigen Zylinders gegeben sind, während bei der Kugel die reduzierte Integration vollkommen versagt. Es kommt zum Auftreten der sogenannten "Zero-Energy-Modes".

9.1.3 Rechnung mit viskoplastischen Deformationen

Bild (9.12) stellt die Ergebnisse einer Rechnung dar, die einen typischen Betriebsvorgang eines Kraftwerkes simuliert. In einer Anlaufphase wird der Innendruck zunächst bis zum Erreichen der Fließgrenze am Innenrand gesteigert (Zustand 1). Danach erhöht sich der Innendruck mit einer Geschwindigkeit von 1 MPa pro Sekunde auf das Zweifache dieses Wertes (Zustand 2) und wird anschließend 200 Stunden konstant gehalten. Zustand 3 charakterisiert das Verhalten des Zylinders nach 2 Minuten Haltezeit, während Zustand 4 nach Ablauf der 200

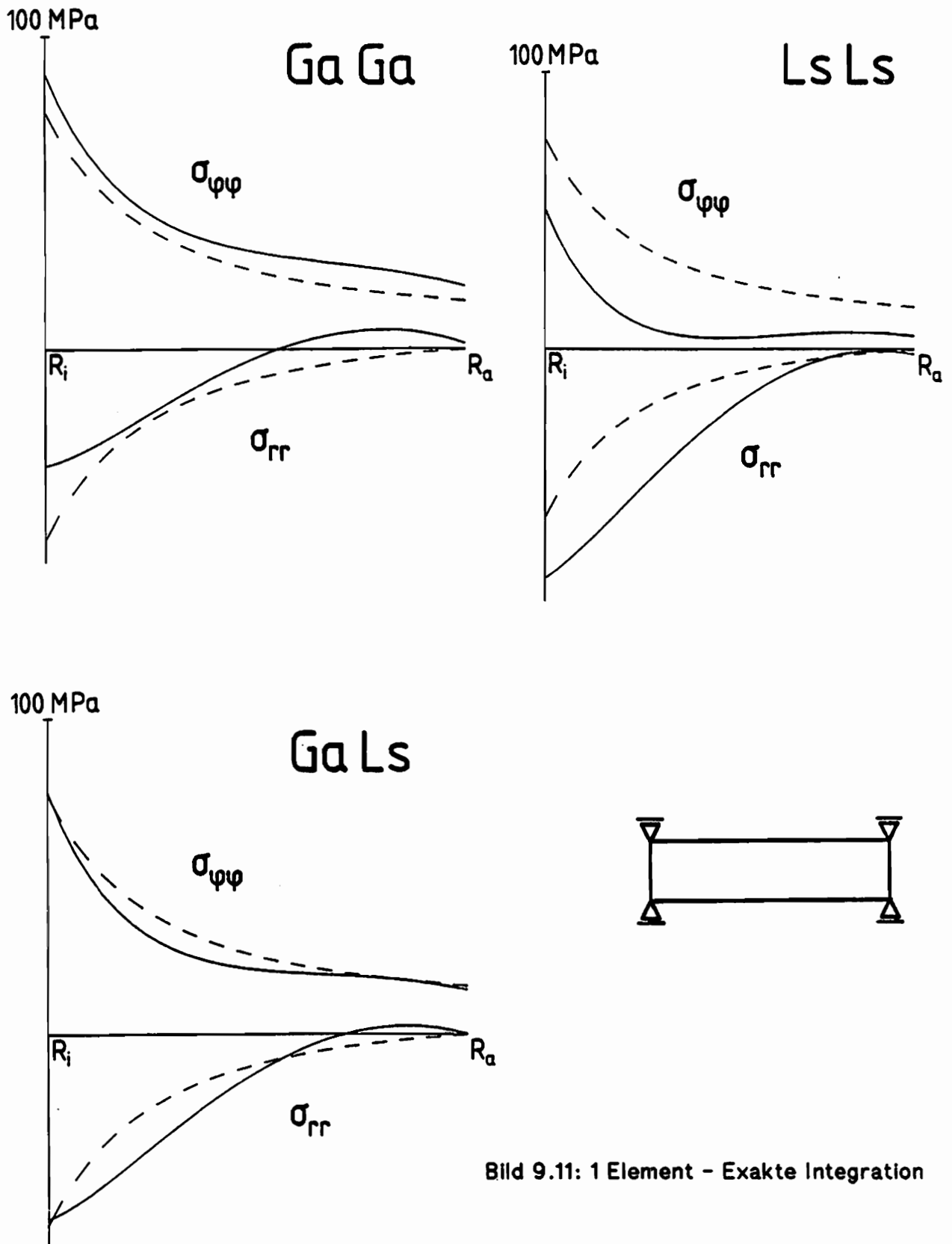
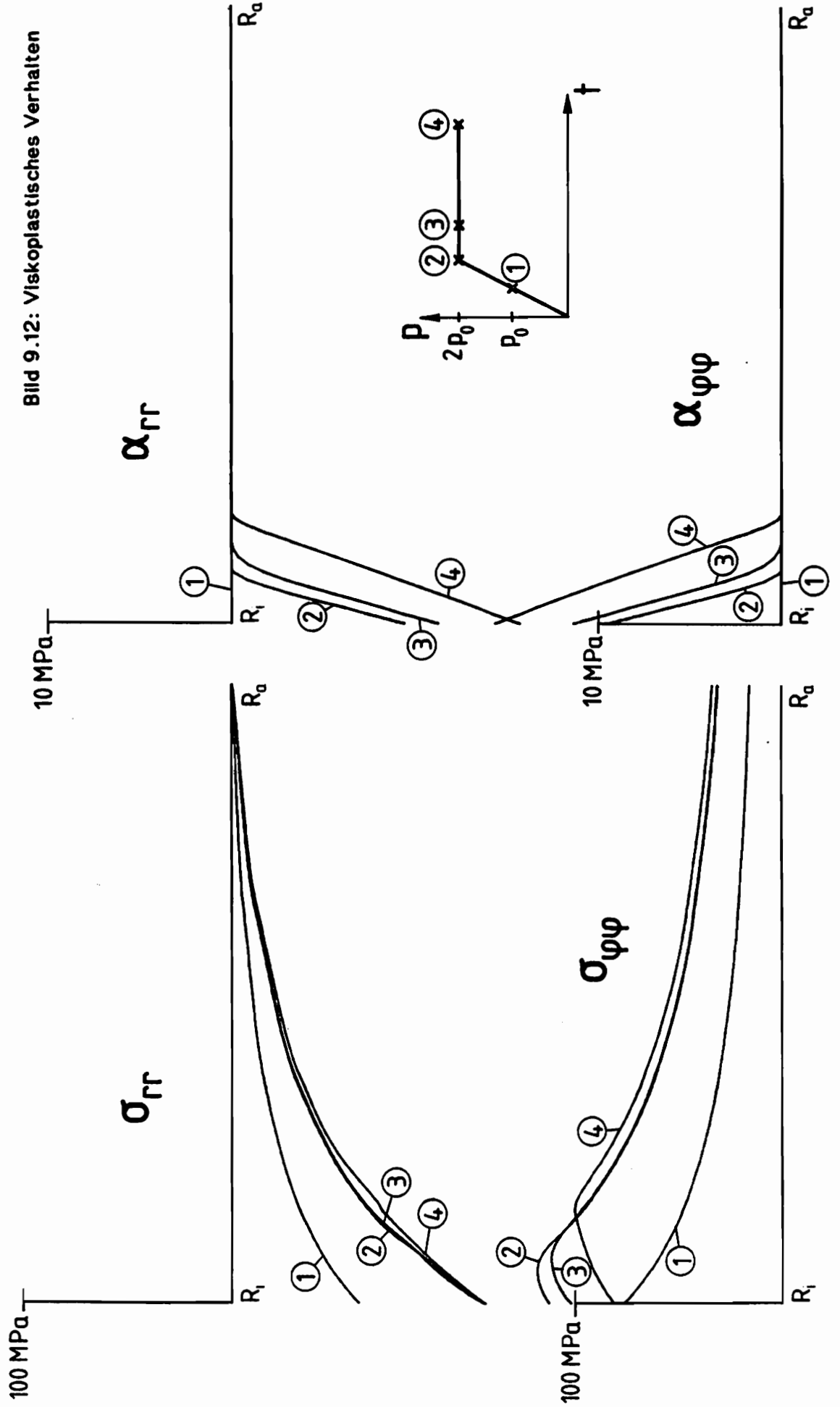
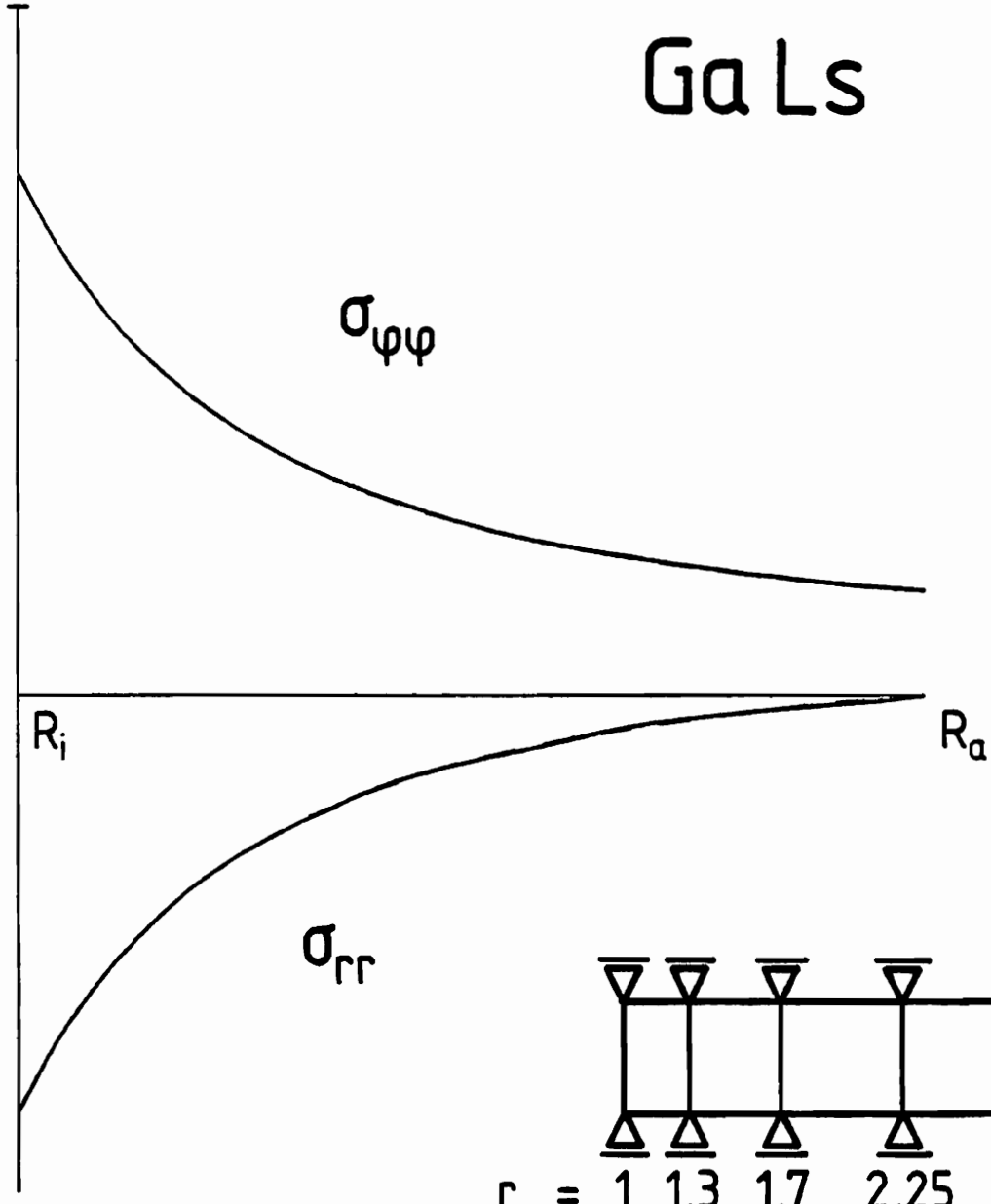


Bild 9.11: 1 Element - Exakte Integration



100 MPa

Ga Ls

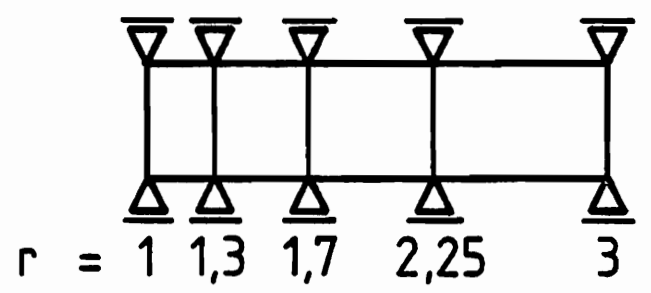


$\sigma_{\phi\phi}$

R_i

R_a

σ_{rr}



$$r = 1 \quad 1,3 \quad 1,7 \quad 2,25 \quad 3$$
$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0,13 \quad 0,17 \quad 0,23 \quad 0,3 \quad 0,4$$

Bild 9.13

3 GP nicht gleichverteilt

Stunden erreicht wird. Die Rechnung erfolgte mit vier über dem Radius angeordneten Elementen mit dem kombinierten Verfahren GaLs und als Zeitintegrationsverfahren diente die Trapezformel. Die Geometrie der Elemente sowie ein Vergleich der Spannungen gegenüber der strengen Lösung im elastischen Bereich sind in Bild 9.13 angegeben.

Bei Betrachtung der Radialspannung in Bild 9.12 erkennt man zunächst die strenge Erfüllung der Randbedingungen während des ganzen Prozesses. Die Zustände 2 und 3 unterscheiden sich kaum, es werden aber gegenüber dem elastischen Grenzzustand unruhigere Funktionsverläufe sichtbar, die im Zustand 4 in zwei Knicken des Spannungsverlaufes an den Elementgrenzen zwischen erstem und zweitem sowie zweitem und drittem Element münden. Diese im inelastischen Prozeß anwachsenden Sprünge in den Spannungsableitungen erklären sich aus den durch fortschreitende Plastifizierung unterschiedlichen Elementsteifigkeitsmatrizen und unterschiedlichen Knotenlastvektoren. Die zur Radialspannung gehörende Komponente des Translationstensors α wächst im Verlauf des Kriechens sowohl im Maximalwert an der Innenkante des Rohres wie auch in der radialen Ausdehnung an.

Der Einfluß des sich im inelastischen Bereich ändernden Materialverhaltens läßt sich am besten beobachten an der Umfangsspannung. Von der elastischen Grenze bis zum Ende des Belastungsvorganges (Zustand 2) ändert sich qualitativ der Verlauf dieser Spannungskomponente, da das am Innenrand auftretende Maximum in Form einer Spannungsumlagerung nach außen wandert. Am Außenrand verdoppeln sich die Spannungswerte zwischen den Zuständen 1 und 2, was dem dort rein elastischen Materialverhalten entspricht. Mit Beginn des Kriechens sinkt die Umfangsspannung ab, wobei sich die Tendenz des nach außen wandernden Maximums weiter fortsetzt. Zum Zustand 4 beträgt die Umfangsspannung am Rohrrinnenrand nur noch geringfügig mehr als beim Erreichen der Fließgrenze. Die Spannungsumlagerung des Maximalwertes hat sich bis in das zweite Element hinein entwickelt. Die zugehörige kinematische Verfestigung behält hingegen den am Innenrand einmal erreichten größten Wert bei und dringt mit fortlaufender Prozeßdauer weiter nach außen vor.

9.2 Die dickwandige Kugel unter Innendruck

9.2.1 Elastische Vergleichsrechnungen

Allen Rechnungen liegt auch für die Kugel ein und dieselbe Geometrie zugrunde, eine Hohlkugel mit Innenradius 1 und Außenradius 2 (Bild 9.14a). Die strenge Lösung ergibt sich bei Erreichen der Fließgrenze zu /63/:

$$\sigma_{rr} = -p_i \frac{\left\{ \frac{R_a}{r} \right\}^3 - 1}{\left\{ \frac{R_a}{R_i} \right\}^3 - 1}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = p_i \frac{\frac{1}{2} \left\{ \frac{R_a}{r} \right\}^3 + 1}{\left\{ \frac{R_a}{R_i} \right\}^3 - 1} \quad (9.2.1.1)$$

$p_i = 69.098 \text{ MPa} \quad , \quad \frac{R_a}{R_i} = 2$

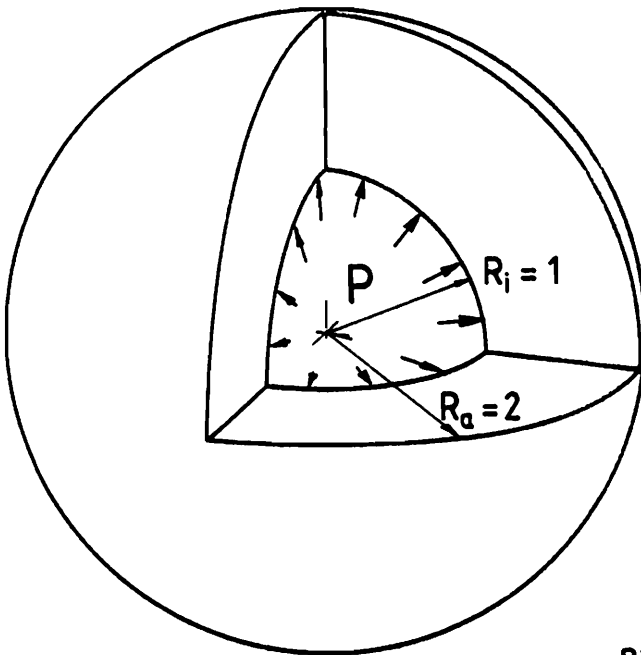


Bild 9.14a: Dickwandige Kugel

Die vorliegenden Spannungen sind in Kugelkoordinaten angegeben und stellen den Hauptspannungszustand mit den beiden Tangentialspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ dar. Bei der Berechnung dieses Beispiels sind die Ortsableitungen der Spannungen in den Plots nicht mit verwendet worden, da in diesem Fall für jede isoparametrische Linie, längs derer die jeweiligen Spannungsverläufe aufgetragen werden, eine aufwendige Koordinatentransformation der nach den globalen Koordinaten vorliegenden Ortsableitungen in die lokale Koordinatenrichtung zu erfolgen hätte. Die Funktionsverläufe entstehen durch eine geradlinige Verbindung der Spannungswerte an den Gaußpunkten.

Die strenge Lösung (9.2.1) stimmt qualitativ mit derjenigen des dickwandigen Rohres überein und es wird deshalb auf den numerischen Konvergenzbeweis der Verfahren verzichtet. Vielmehr kommt es uns in diesem Beispiel darauf an, neben einem Vergleich der auf unterschied-

lichem Wege gewonnenen Näherungen zu untersuchen, wie gut die vorliegende rotationssymmetrische Elementformulierung in der Lage ist, ein kugelsymmetrisches Problem zu beschreiben. Da (9.2.1) nur vom Radius abhängt, die Näherungsergebnisse aber auch von der axialen Richtung, zeichnen wir jeweils pro Element eine Lösung (vgl. Bild 9.14b) gegenüber den exakten Werten auf. Im Idealfall müßten dann alle 4 aus der FE-Rechnung stammenden Kurven übereinanderliegen.

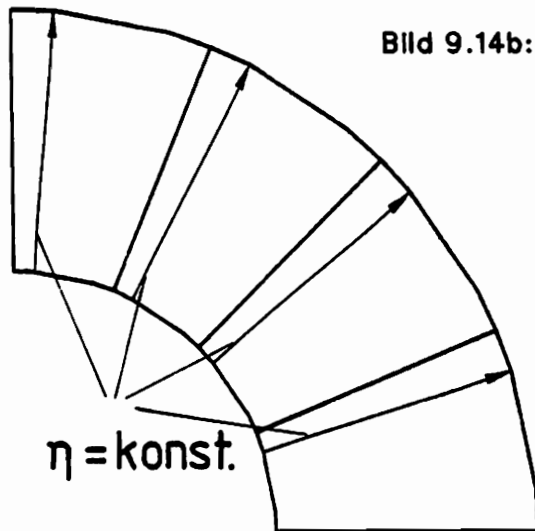


Bild 9.14b: Zur Darstellung der Ergebnisse entlang isoparametrischer Linien

Die in Bild (9.15) aufgetragenen Verläufe der Tangential- und Radialspannungen für ein Element in radialer Richtung bei zugrundeliegendem 16-gliedrigem Ansatz und 3 Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung zeigen bei allen Verfahren kaum eine Abhängigkeit von der axialen Koordinate. Beim Vergleich der Spannungsordinaten an den Gaußpunkten (dort treten Knicke im Funktionsverlauf auf) mit der exakten Lösung wird besonders bei GaLs für diese grobe Elemententeilung bereits eine sehr gute Übereinstimmung mit der wahren Lösung deutlich. Dies gilt im Gegensatz zu GaGa und LsLs in verstärktem Maße bei den Randbedingungen. GaGa liefert insgesamt sehr ausgeglichene Ergebnisse, während bei LsLs die Abweichungen bei der Umfangsspannung relativ groß sind.

Bei Verfeinerung der Elemententeilung mit zwei gleichverteilten Elementen in radialer Richtung (Bild 9.16) verschlechtern sich die Ergebnisse des Galerkin-Verfahrens (Bild 9.17) ungemein gegenüber der gröberen Diskretisierung in Bild 9.15. Dies läßt sich nur mit der bei den Verfahren der gewichteten Residuen nicht mehr gegebenen monotonen Konvergenz der Näherungen gegen die analytische Lösung erklären. Beim Least-Squares-Verfahren verbessern sich die Ergebnisse durch die Netzverfeinerung erheblich und die Werte von GaLs stimmen fast schon im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit der strengen Lösung überein.

Ein Grund für die trotz der Hinzunahme eines weiteren Elementes in radialer Richtung schlechter gewordenen Ergebnisse von GaGa liegen sicherlich in der ungenügenden Genauigkeit bei den Randbedingungen.

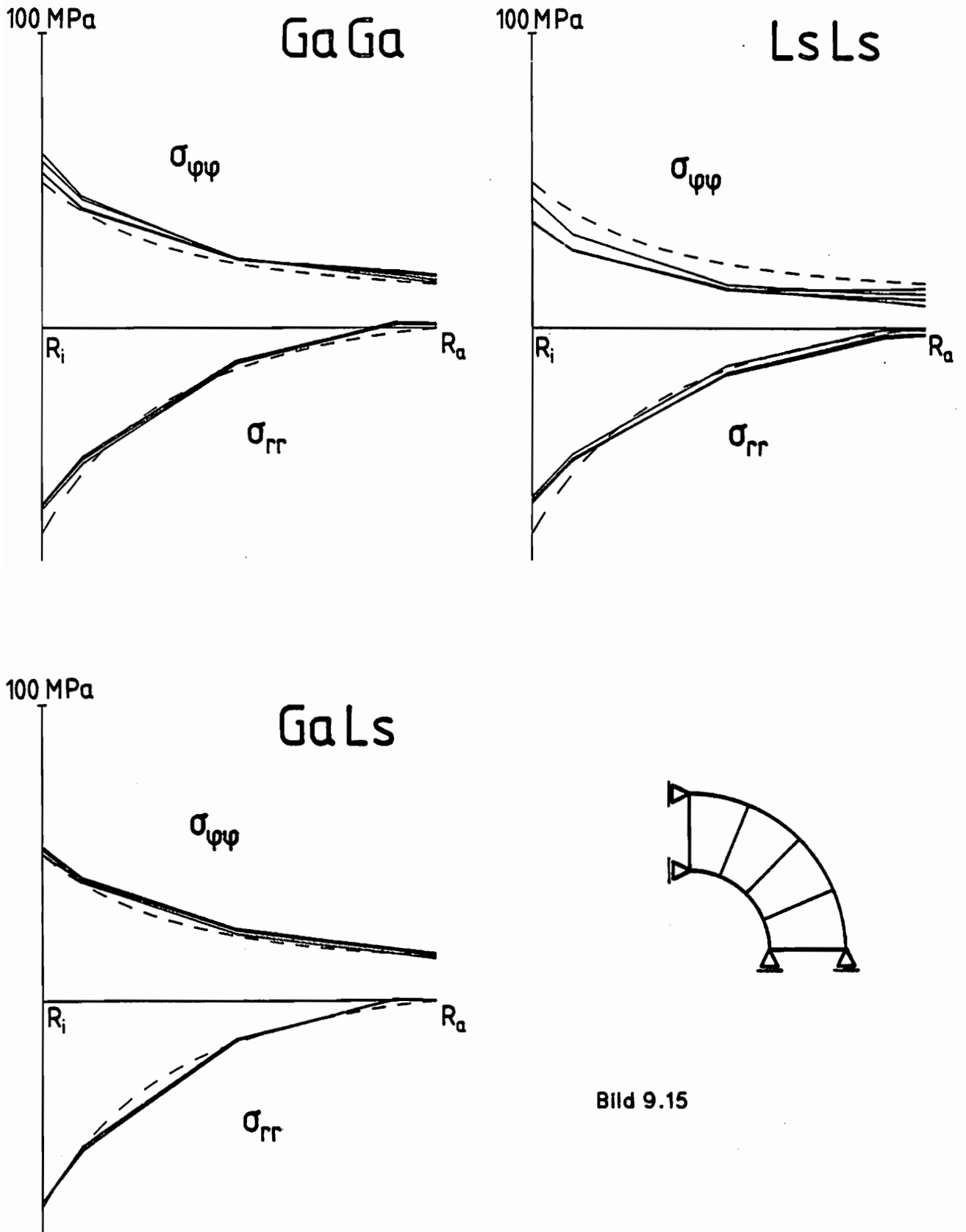


Bild 9.15

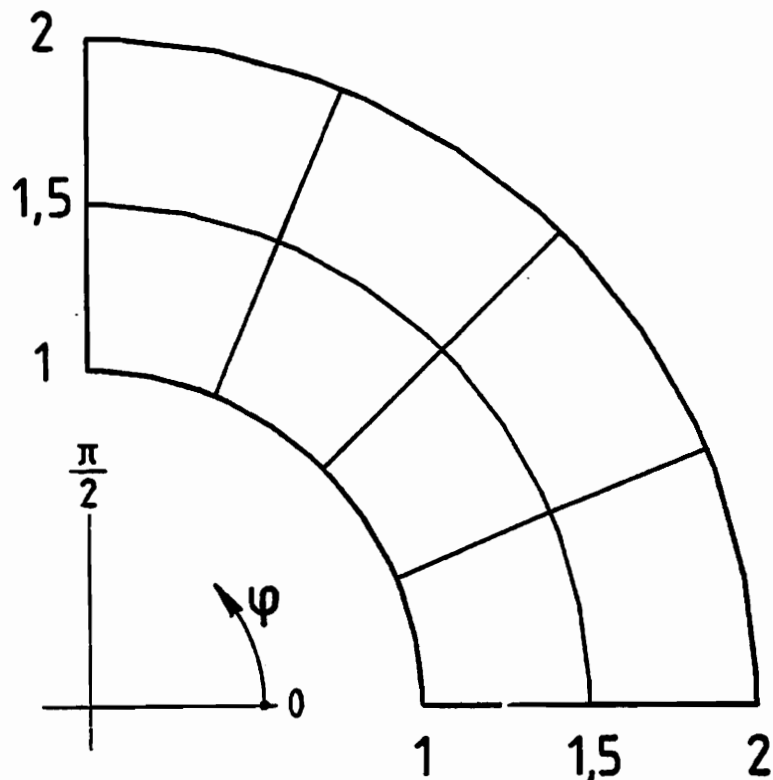


Bild 9.16: Diskretisierung der Kugel in 2*4 Elemente

In Bild 9.18 sind die Radialspannungen am Innen- und Außenradius aufgetragen und beim Galerkin-Verfahren weichen am Innenrand die Spannungen fast um die Hälfte von der exakten Lösung ab. Am Außenrand ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Bei GaLs beträgt die Abweichung bei R_i konstant 1.9% und für R_a ist numerische Übereinstimmung vorhanden. Die Spannungen alternieren beim Least-Squares-Verfahren sowohl im Kugellinnern wie auch am Außenrand um die strenge Lösung. Wir haben jeweils die Knotenpunkte aus der Darstellung herausgenommen, da ihre Spannungswerte nicht dieselbe Aussagekraft wie die Gaußpunkte besitzen. Allerdings bleiben die Plots bei Hinzunahme der Knotenpunkte qualitativ und quantitativ unverändert.

Vergleicht man das mit dem gemischten Verfahren ermittelte Verschiebungsfeld der mit acht Elementen diskretisierten Kugel (Bild 9.19) mit demjenigen nach /65/, wo mit einem linearen Verschiebungsansatz und 90 Elementen gearbeitet wurde, so wird deutlich, daß die hier vorliegende höhere Ansatzordnung ungleich besser in der Lage ist, eine verformungsgetreue Abbildung der Kugel vor der Belastung in eine Kugel nach der Belastung zu erreichen.

Bei verfeinerter Elementeinteilung läßt sich wiederum die Genauigkeit der Ergebnisse steigern wie auch durch eine stärkere Wichtung der Geometrie am Kugelinnenrand analog Bild 9.8 und man erhält numerische Konvergenz. Wir wollen darauf aber ebensowenig eingehen wie auf die Ergebnisse des 12-gliedrigen Ansatzes, der bei der Kugel schlechtere Werte liefert als der 16-gliedrige, da sich infolge der

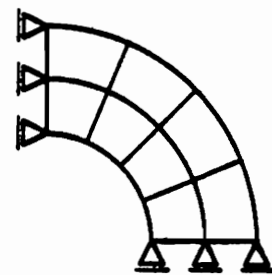
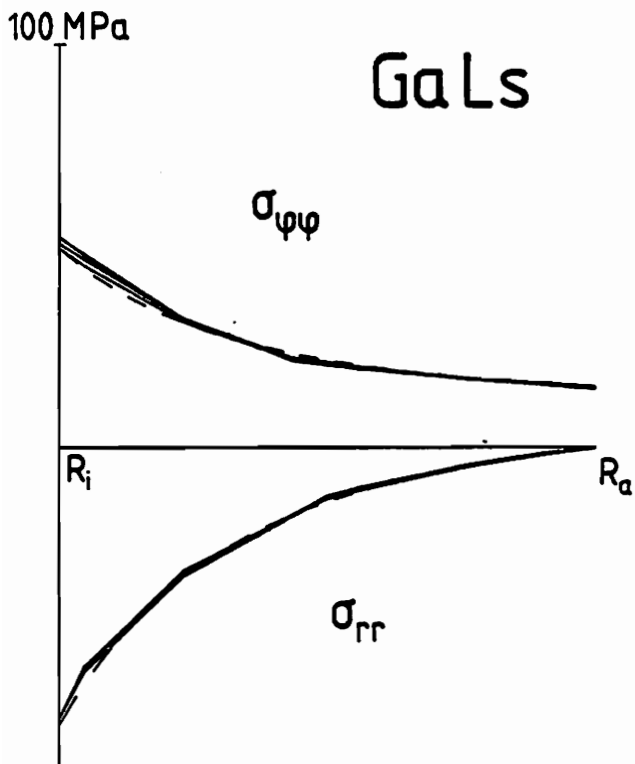
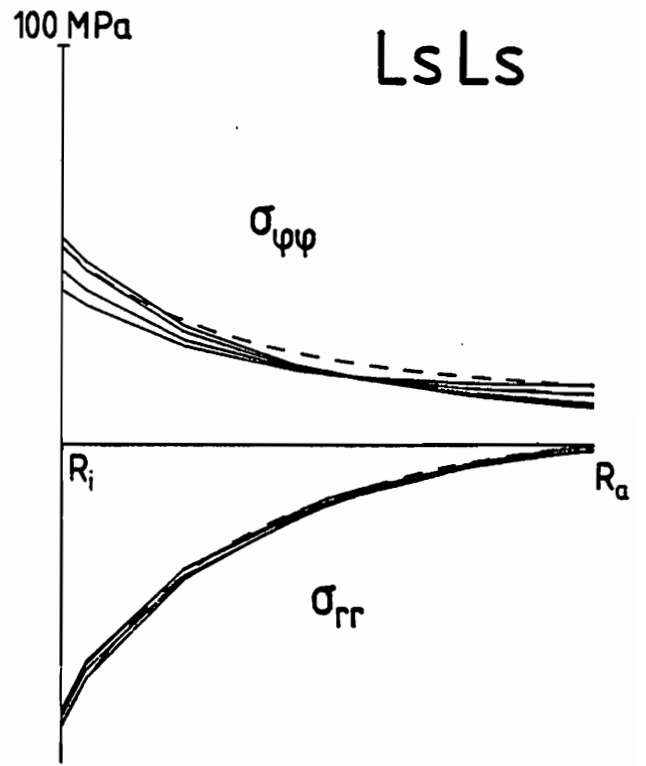
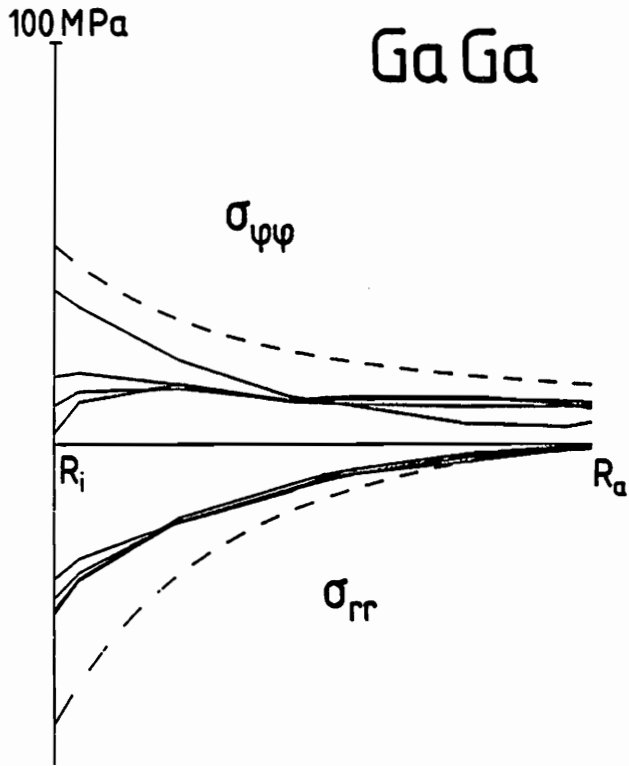


Bild 9.17

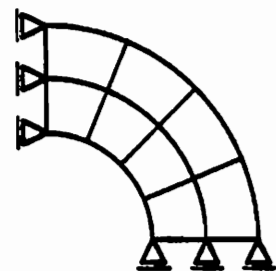
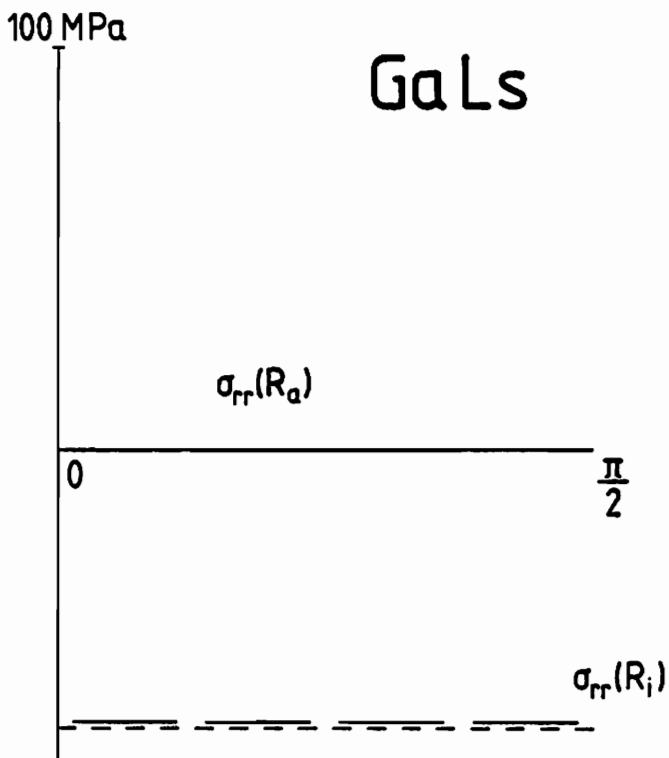
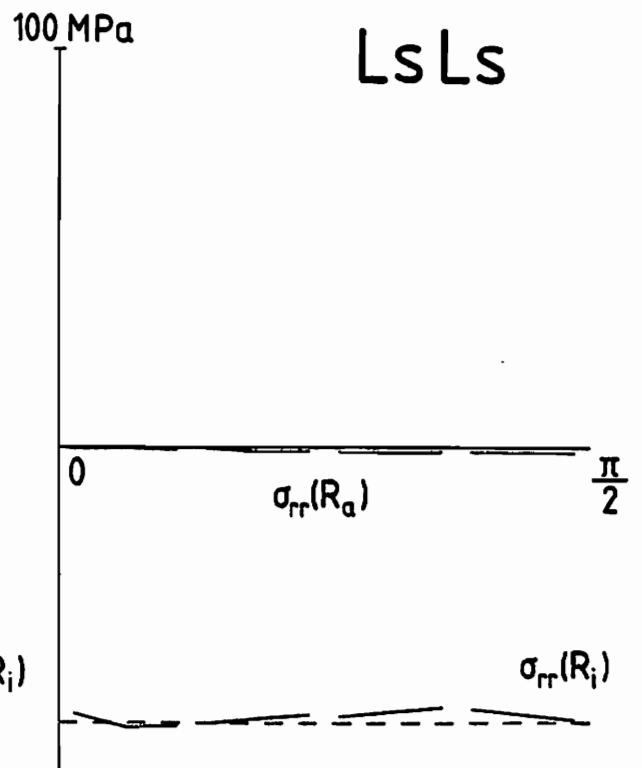
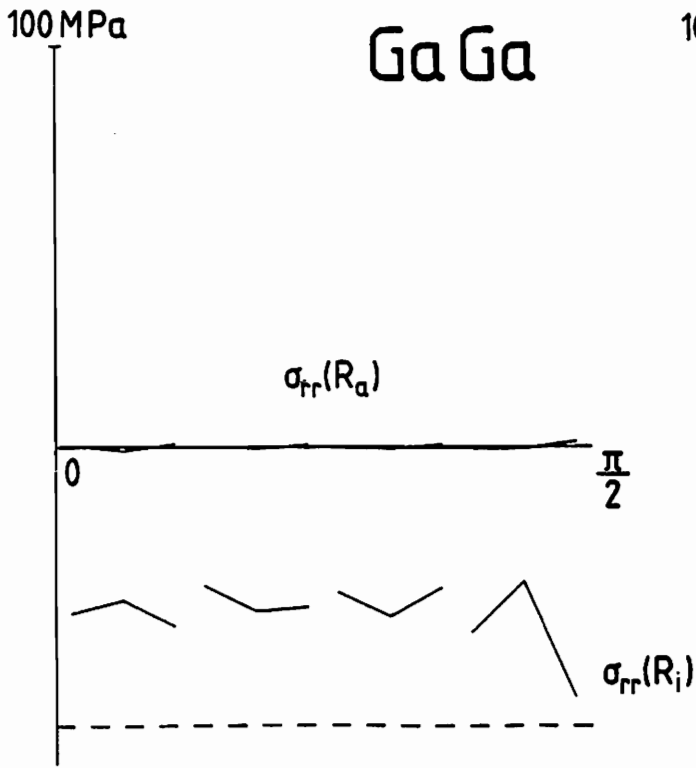


Bild 9.18

Krümmung der Kugel die zusätzlichen Freiwerte positiv auswirken. Weiter oben wurde bereits erwähnt, daß für die Kugel bei dem Versuch einer reduzierten Integration keine Konvergenz erzielt wird.

9.2.2 Rechnung mit viskoplastischen Deformationen

Mit der in Bild 9.16 gegebenen Konfiguration führen wir eine Rechnung analog derjenigen von Kapitel 9.1.3 durch. Als Finites-Elementverfahren dient wiederum GaLs und zur Zeitintegration wird die Trapezformel herangezogen. Die Steigerung des Innendruckes vom Erreichen der Fließspannung bis zum doppelten Wert erfolgt mit einer Geschwindigkeit von 1 MPa pro Sekunde und die anschließende Haltezeit beträgt 200 Stunden.

Auf eine Diskussion der Ergebnisse (Bild 9.20) kann verzichtet werden, da die Entwicklung der Spannungen und Verfestigungen vergleichbar denen von Bild 9.12 ist mit dem Nachteil, daß bei der Kugel nur zwei Elemente über dem Radius liegen. Eine Wertung der Genauigkeit der Ergebnisse im inelastischen Bereich ist nicht möglich wegen fehlender Versuchsdaten. Lediglich die Überprüfung der Randbedingungen bei der Radialspannung läßt auf eine genaue Rechnung schließen.

9.3 Scheibe unter vorgegebener Verschiebung

Als erstes Beispiel für das Scheibenelement wird eine Scheibe betrachtet, die längs ihrer Kanten $x = \text{konstant}$ durch eine linear in der y -Koordinate aufgebrachte Verschiebungsgeschwindigkeit belastet ist (Bild 9.21). Im Fall elastischen Materialverhaltens resultiert daraus eine Biegemomentenbelastung /45/ und die Spannungskomponente σ_{xx} verläuft linear in y , während die anderen Spannungen im elastischen Bereich verschwinden. Die Berechnungen, denen der zwölfgliedrige Ansatz mit 3 Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung zugrundeliegt, wurden mit einem Element durchgeführt, das sich aus Symmetriegründen nur über den rechten oberen Quadranten erstreckt.

Qualitativ stimmen die Verschiebungsfelder aller Verfahren (Bilder 9.22a - c) mit der exakten Lösung gut überein. Die größten Abweichungen gibt es beim Galerkin-Verfahren, während die Lösung des Least-Squares-Verfahrens erheblich besser ausfällt. Das Verschiebungsfeld des gekoppelten Verfahrens GaLs liegt an der Oberkante der Scheibe schlechter als das der Least-Squares-Formulierung, verläuft aber längs der beiden anderen Kanten identisch mit der exakten Lösung.

Beim Vergleich der Spannungsverläufe an der Oberkante der Scheibe (Bild 9.23), aufgetragen sind jeweils die Normalspannungskomponenten in x - und y -Richtung, liefert GaLs die mit Abstand besten Ergebnisse.

Bild 9.19: Dickwandige Kugel unter
Innendruck

Elastoplastische Grenze
Verschiebungen (Verg. Faktor 150)

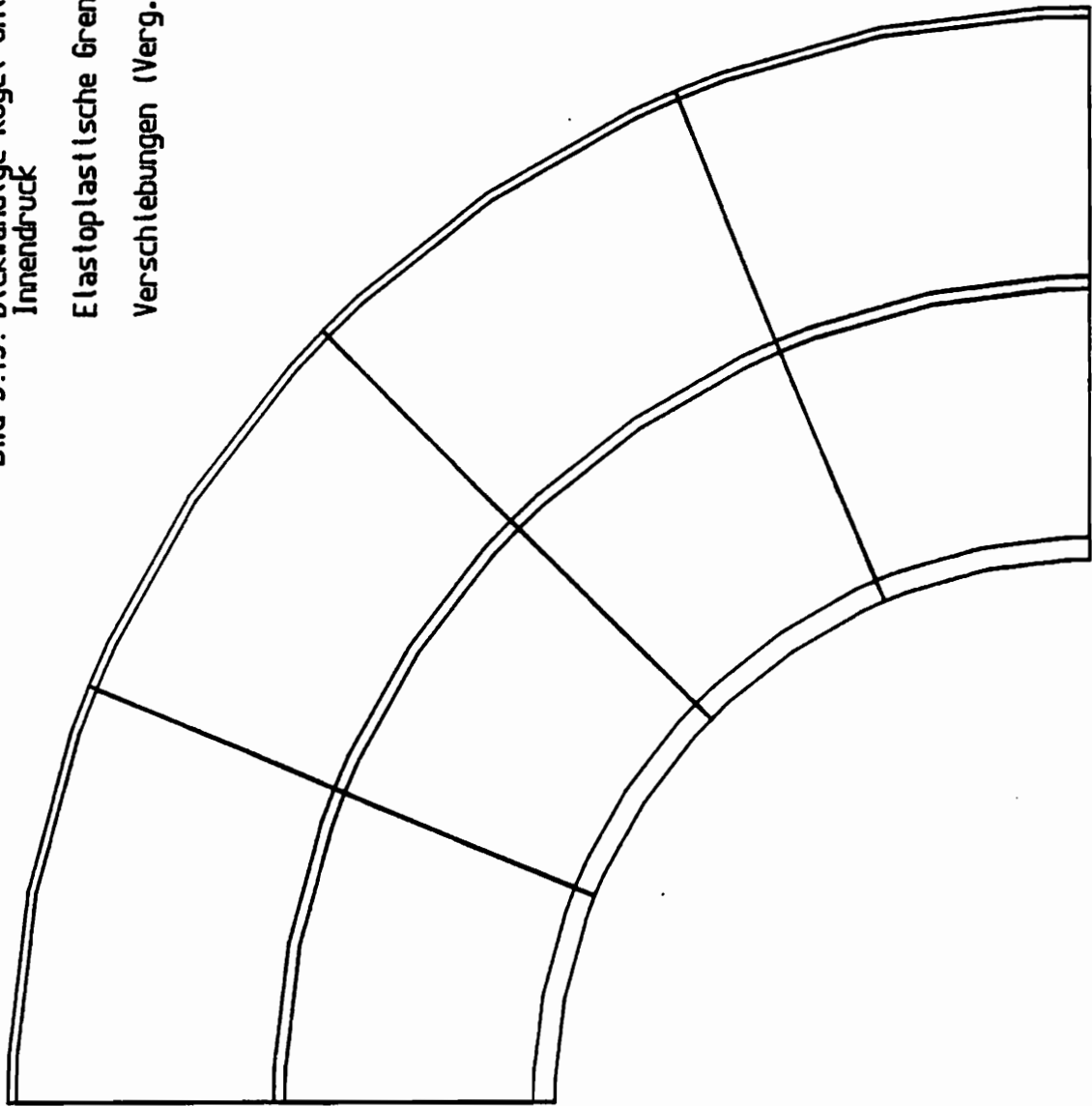
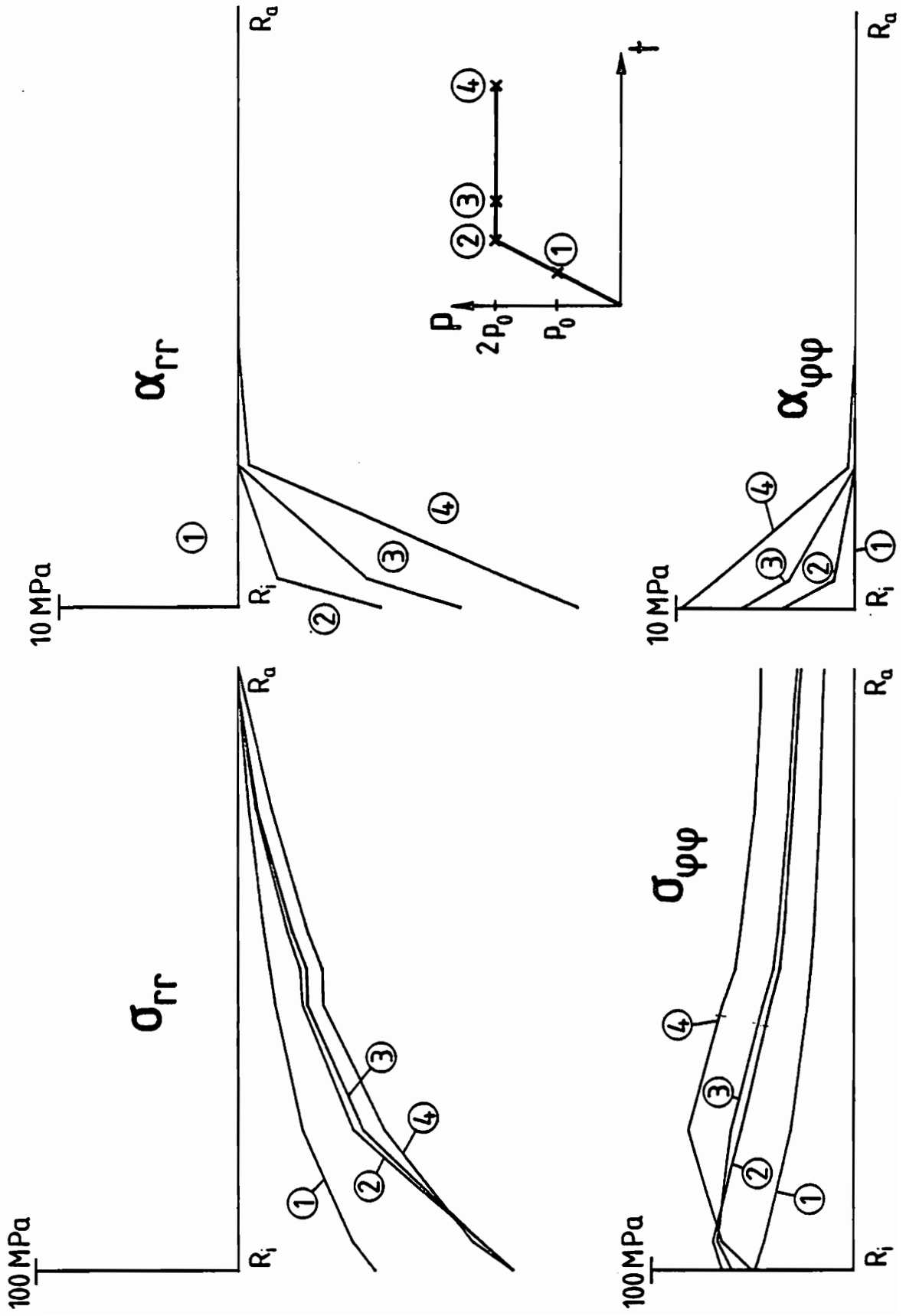


Bild 9.20: Viskoplastisches Verhalten



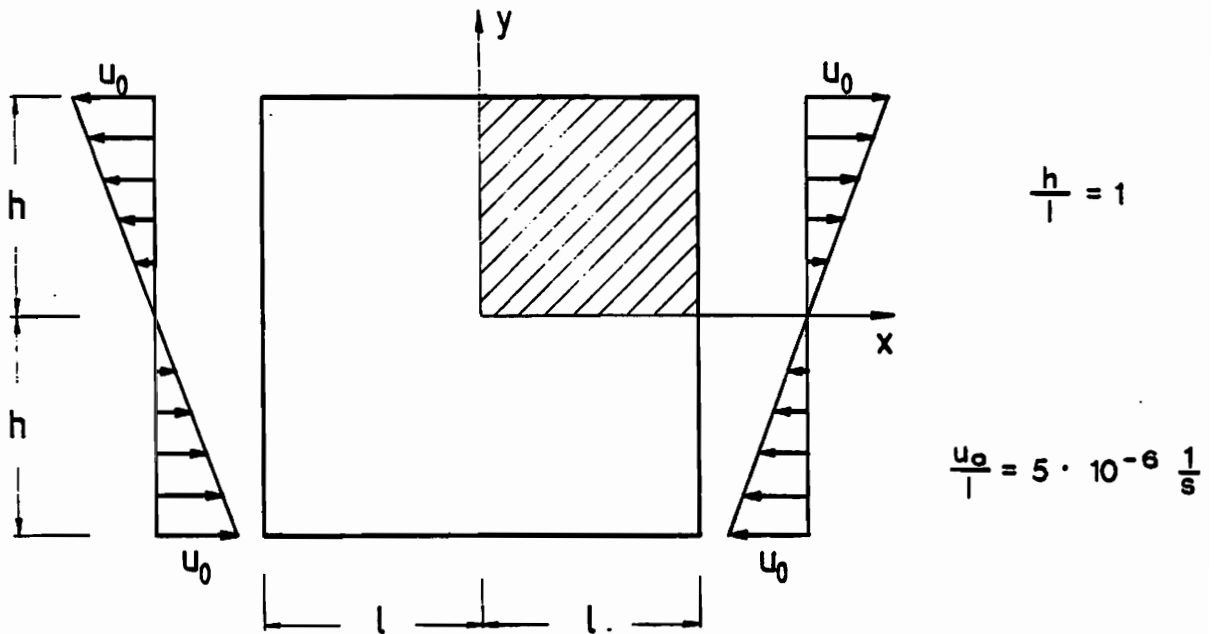


Bild 9.21: Scheibe unter vorgegebener Verschiebung

Ga Ga Verg.Faktor 150

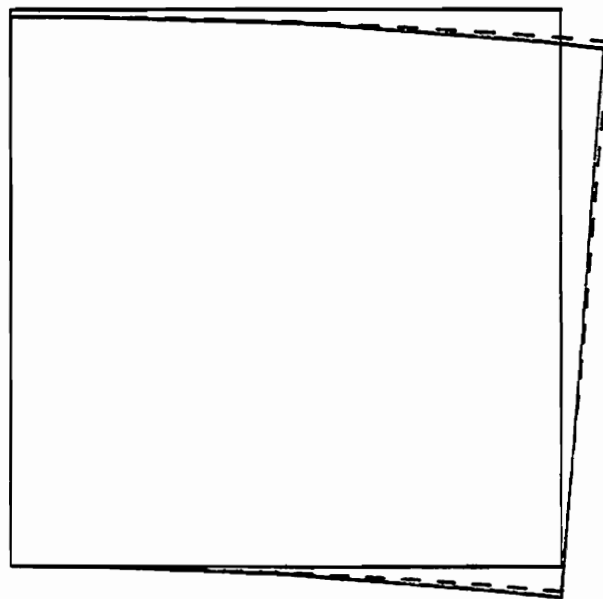


Bild 9.22a: Verschiebungsfeld

LsLs Verg.Faktor 150

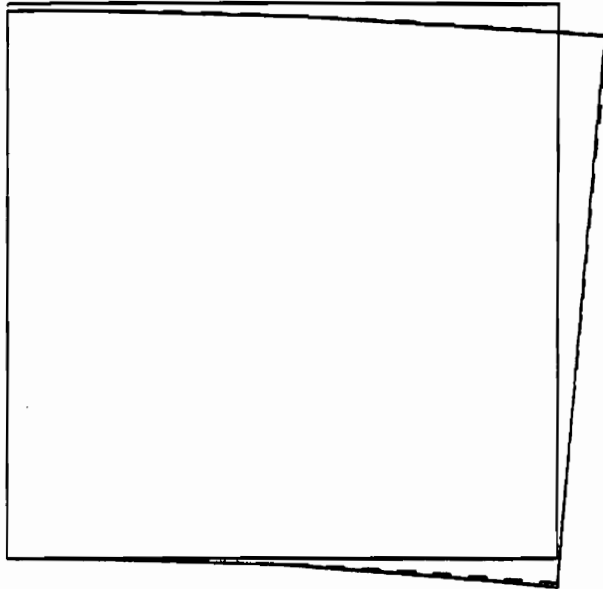


Bild 9.22 b:
Verschiebungsfeld

GaLs Verg.Faktor 150

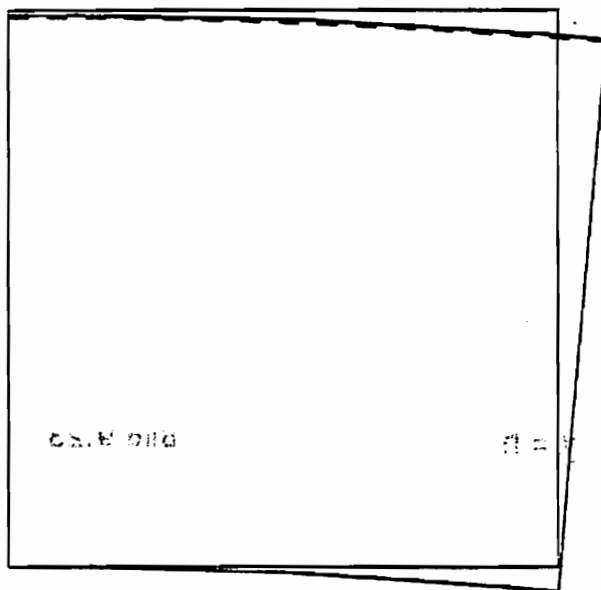
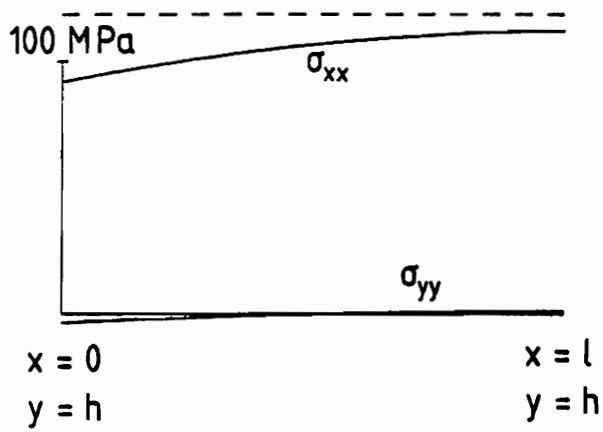
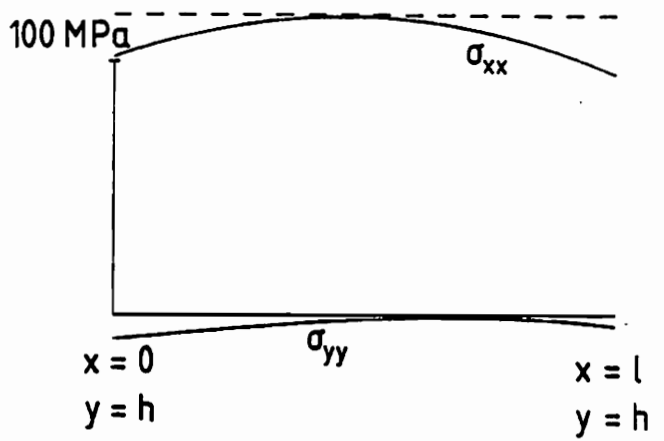


Bild 9.22 c:
Verschiebungsfeld

Ga Ga



Ls Ls



Ga Ls

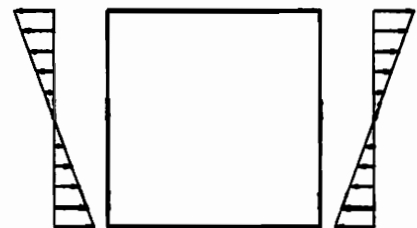
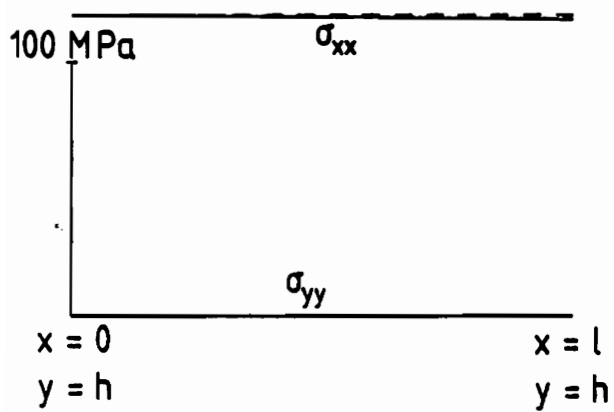


Bild 9.23

Der maximal auftretende Fehler in der Komponente σ_{xx} beträgt 1.7%, während der Betrag von σ_{yy} an jedem Gaußpunkt weniger als 0.01 MPa von der exakten Lösung abweicht. Die nicht dargestellte Schubspannungskomponente wird in der gleichen Größenordnung approximiert.

Beim Galerkin-Verfahren liegt die maximale Abweichung bei σ_{xx} knapp über 20%, während σ_{yy} relativ gut wiedergegeben wird. Die Abweichungen des Least-Squares-Verfahrens sind besonders groß an den Rändern der Elementkanten.

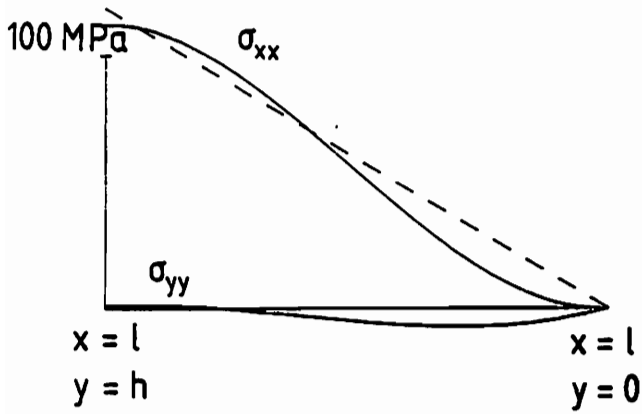
Betrachtet man die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren entlang von Schnitten mit $x = \text{konstant}$, so treten die größten Abweichungen für $x=1$ auf (Bild 9.24). Hier sind alle Verfahren deutlich fehlerbehaftet, da auf dieser Kante keine Gaußpunkte liegen, während in anderen Schnitten die Werte erheblich näher an der exakten Lösung liegen. Durch Wahl mehrerer Elemente verbessern sich die Ergebnisse aller Verfahren.

In einer Rechnung, bei der die vorgegebenen Verschiebungen auf den zehnfachen Wert gegenüber dem Erreichen der Fließgrenze gesteigert werden, mit anschließender Haltezeit, lassen sich sowohl das Relaxationsverhalten aber auch ganz besonders die Spannungsumlagerungen bei inelastischen Prozessen beobachten (Bild 9.25). Zugrunde liegen der Berechnung das gekoppelte Verfahren GaLs und als Zeitintegration wiederum die Trapezformel. Im linken Teil des Bildes sind längs der oberen Kante der Scheibe die Normalspannungen aufgetragen zum Ende der Belastung (Zustand 1), sowie nach 5000 (Zustand 2) beziehungsweise 10000 Sekunden Haltezeit (Zustand 3).

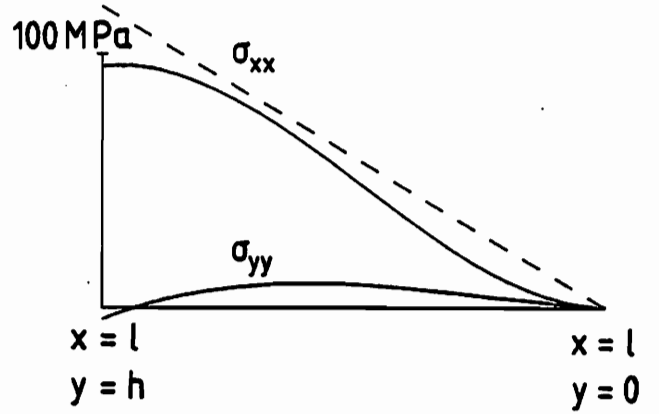
Die Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} behalten für alle Zustände ihren aus dem elastischen Bereich konstanten Verlauf nahezu bei. Während σ_{xx} zum Ende der Belastung (Zustand 2) seinen Wert gegenüber demjenigen bei Erreichen der Fließgrenze verdoppelt, bleibt die geforderte Spannungsfreiheit in y -Richtung erhalten. Das Relaxationsverhalten, Zustände 3 und 4, entspricht qualitativ dem aus Bild 3.3. Man erkennt deutlich, daß zu Beginn der Haltezeit die Spannungen stark abfallen, während nach Erreichen des Zustandes 3 nur noch eine geringfügige Spannungsabnahme erkennbar ist.

Im rechten Teil des Bildes 9.25 ist neben der Spannungskomponente σ_{xx} auch die zugehörige kinematische Verfestigungskomponente α_{xx} entlang einer Linie $x = \text{konstant}$ im Innern der Struktur aufgetragen. Durch den Verlauf der Verfestigung wird deutlich, daß bis auf eine kleine Umgebung der x -Achse die gesamte Struktur plastiziert ist. Das ursprünglich lineare Verhalten von σ_{xx} wird nun nur noch in diesem schmalen, noch elastischen Bereich sichtbar, wo auch die drei Zustände identisch sind, während im übrigen Gebiet die Spannungsumlagerung bewirkt, daß sich das Spannungsmaximum von der Oberkante der Struktur nach innen verlagert.

Ga Ga



Ls Ls



Ga Ls

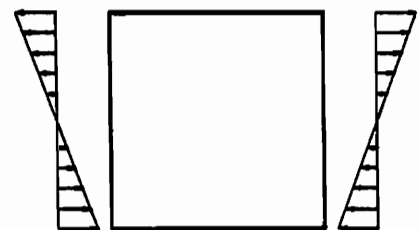
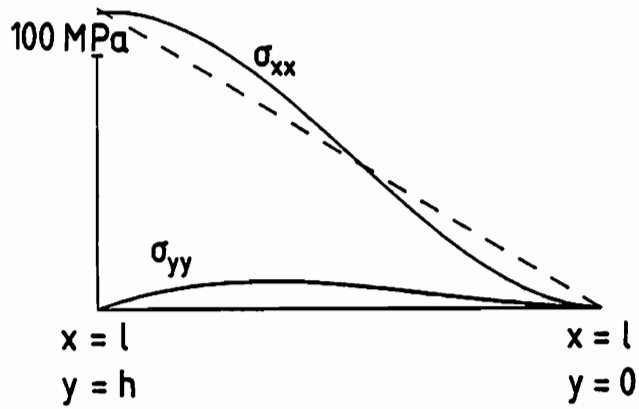
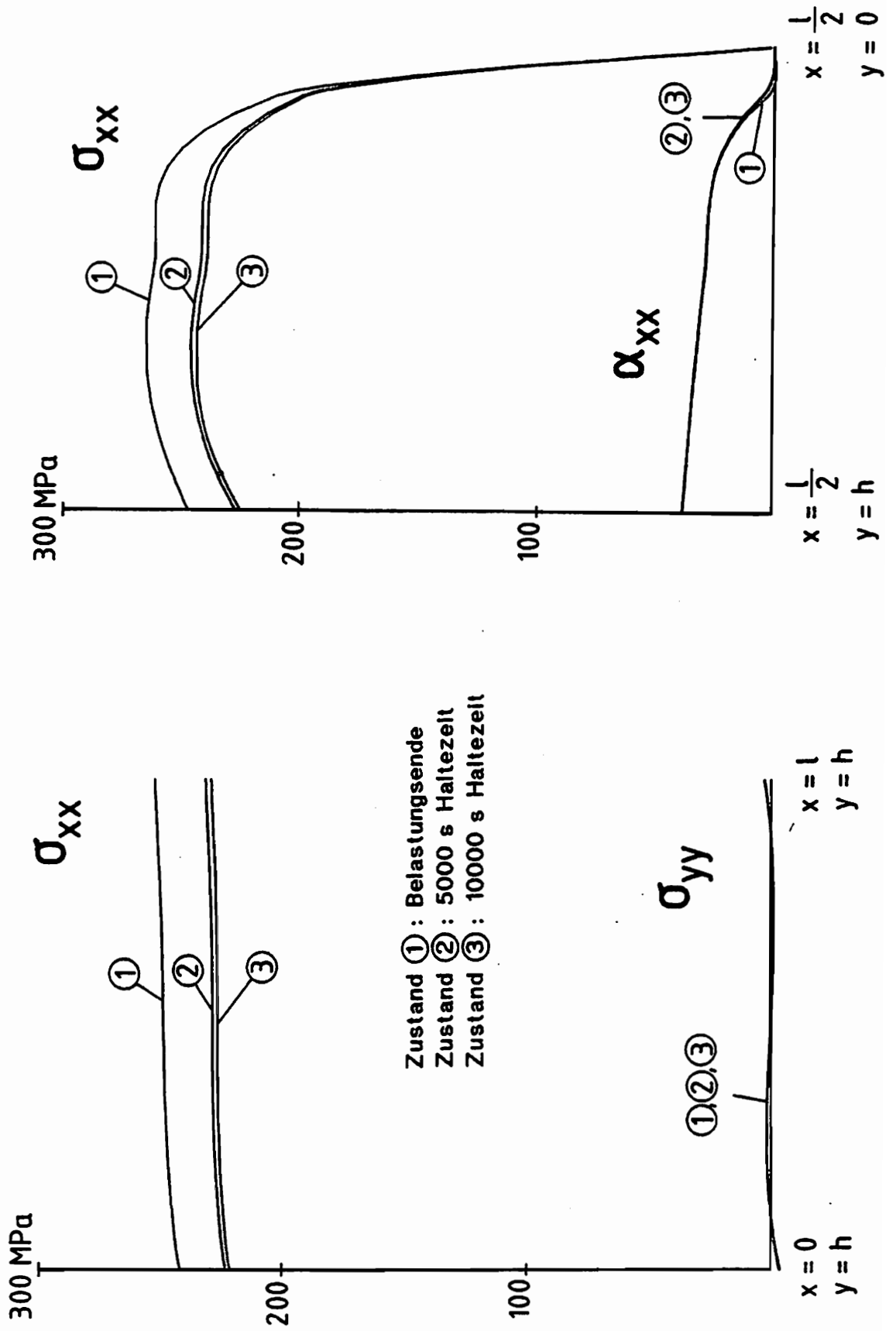


Bild 9.24

Bild 9.25: Spannungsverläufe bei
Inelastischen Deformationen



9.4 Kragsscheibe

In einer Beispielrechnung zur quadratischen Kragsscheibe (Bild 9.26a) wird ebenfalls das kombinierte Verfahren (GaLs) mit der Trapezformel als Zeitintegrationsverfahren verwendet. Da die elastische Lösung des Problems nur näherungsweise angegeben werden kann /45/ und der analytisch errechnete Spannungsverlauf am freien Rand die Spannungsfreiheit der Komponente σ_{xx} im Gegensatz zur FE-Lösung nicht gewährleistet, wird auf einen Vergleich der elastischen Lösungen verzichtet. Vielmehr erkennt man anhand von Bild 9.26b, wie gut das Verschiebungsfeld qualitativ mit einem einzigen Element wiedergegeben wird. Neben der unbelasteten Ausgangslage sind darin die Verformungen bei Erreichen der Fließgrenze aufgetragen, sowie die derjenigen Konfiguration, die durch Verdoppeln der zur Fließgrenze führenden Last gehört. Die Lastgeschwindigkeit der äußeren Belastung beträgt 1 MPa/sek. Bild 9.27 zeigt die Verläufe der Spannungskomponente σ_{xx} und der zugehörigen kinematischen Verfestigung α_{xx} für diese beiden Zustände längs der Kante, auf die die Streckenlast einwirkt. Deutlich wird dabei, daß der Spannungsverlauf im inelastischen Bereich infolge der einsetzenden Spannungsumlagerung eine Krümmungsänderung erfährt, wobei der Wendepunkt der Kurve etwa dort liegt, wo der inelastische Bereich beginnt, also wo die kinematische Verfestigung anwächst.

9.5 Scheibe mit Loch

Abschließend wird die durch eine Zugbeanspruchung in x-Richtung belastete Scheibe mit Loch (Bild 9.28a) betrachtet. Die Diskretisierung wird mit 64 Elementen (Bild 9.28b) für die quadratische Viertelscheibe vorgenommen, die in der Umgebung des Kreisloches wegen der großen Spannungsüberhöhung verfeinert ist. Dabei ist die Anordnung so gewählt, daß jeweils 8 Elemente über dem Radius angeordnet sind. Ein Nachteil des isoparametrischen Elementansatzes für dieses spezielle Problem zeigt sich am rechten oberen Rand der Diskretisierung von Bild 9.28b. Wegen der Stetigkeit der Ortsableitung längs einer isoparametrischen Kante (6.3.4) muß die Ecke ausgerundet sein, um einen Sprung in den Ableitungen zu vermeiden. Dieser Nachteil ist aber mehr optischer Natur, denn die interessierenden Spannungsverläufe am Lochrand bleiben davon unberührt.

Da eine analytische Lösung dieses Problems lediglich für die unendlich ausgedehnte Scheibe bekannt ist, lassen sich die FE-Lösungen im elastischen Bereich mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen nur in der Nähe des Kreisloches vergleichen. Dabei zeigt sich erneut, daß GaLs die mit Abstand besten Ergebnisse liefert. Daß zeigt sich nicht nur darin, daß die einsetzende Plastizierung exakt am Knotenpunkt mit $x=0$ und $y = 1$ angezeigt wird, sondern auch im qualitativ richtigen Verlauf aller

$$\frac{2h}{l} = 1$$

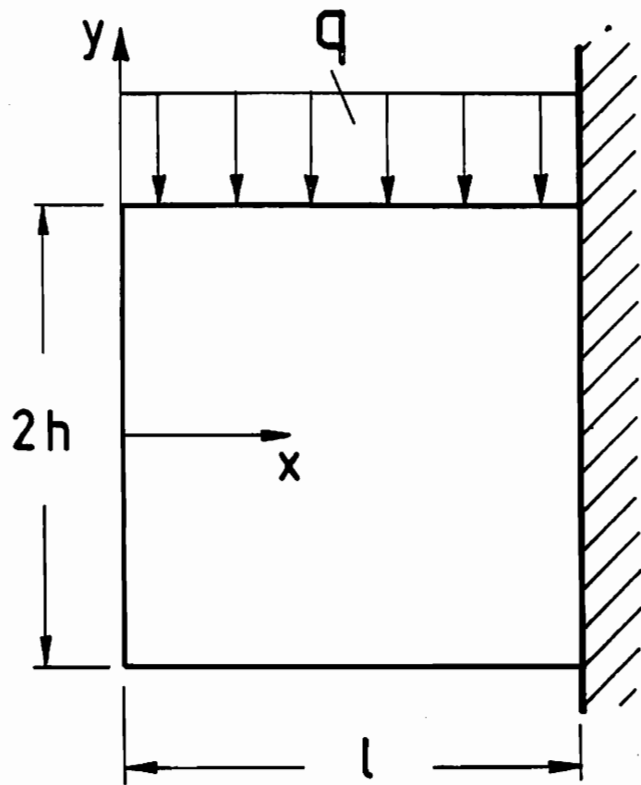
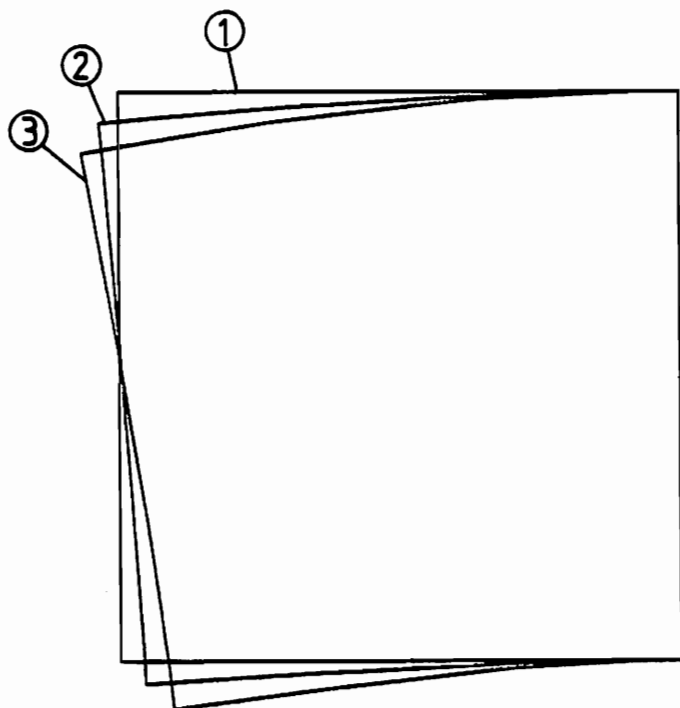


Bild 9.26a : Kragsscheibe

GaLs

Verg.Faktor 150



Zustand ① : Ausgangslage

Zustand ② : el.-pl. Grenze

Zustand ③ : Lastverdopplung

Bild 9.26b:

Verschiebungsfeld - Kragsscheibe

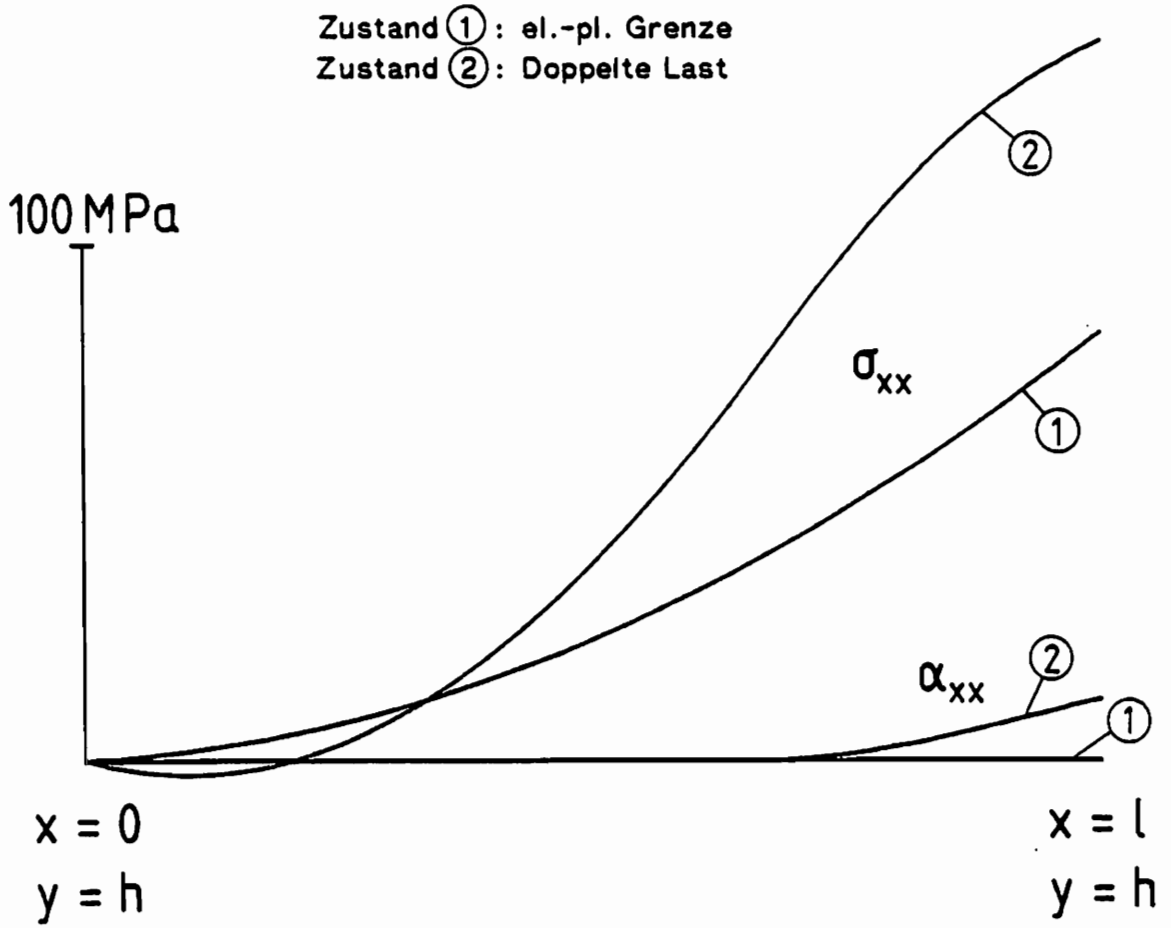


Bild 9.27: Spannungs- und Verfestigungsverlauf

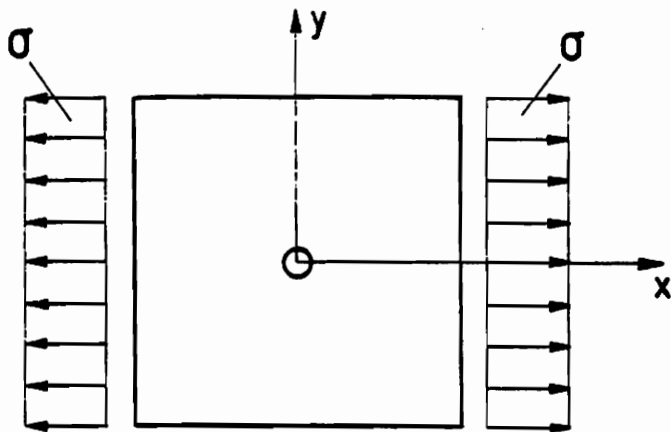


Bild 9.28 a : Scheibe mit Loch

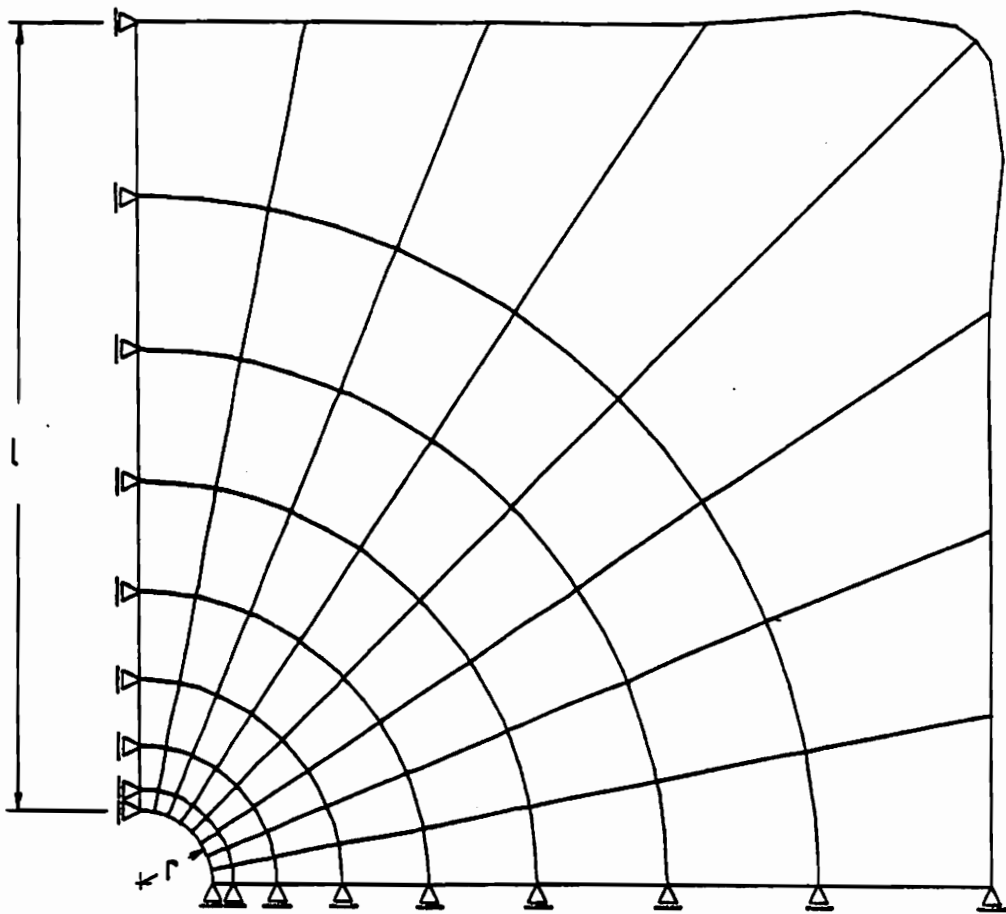


Bild 9.28 b : FE- Diskretisierung

$l = 11.8 \text{ mm}$

$r = 1 \text{ mm}$

Spannungen in Schnitten mit $x = 0$ beziehungsweise $y = 0$. Das Least-Squares Verfahren erkennt zwar die beginnende Plastizierung richtig, fällt aber gegenüber GaLs in der Wiedergabe der Spannungsverläufe deutlich ab. Die vorliegende Diskretisierung reicht für das Galerkin-Verfahren nicht aus, denn die Ergebnisse weichen auch qualitativ von der analytischen Lösung ab und sind somit die schlechtesten im Vergleich der Verfahren untereinander.

Die Ergebnisse einer Rechnung mit inelastischen Deformationen sind in Bild 9.29 dargestellt. Zugrunde liegt das Kombinationsverfahren mit der Trapezformel als Zeitintegrationsalgorithmus. Gewählt wurde ferner der sechzehngliedrige Ansatz mit drei Gaußpunkten pro Koordinatenrichtung. Die Lastgeschwindigkeit der Zugbeanspruchung beträgt 10 MPa pro Sekunde und die Belastung wird auf den doppelten Wert vom Erreichen der Fließgrenze erhöht. Anschließend wird die Belastung 250 Sekunden konstant gehalten.

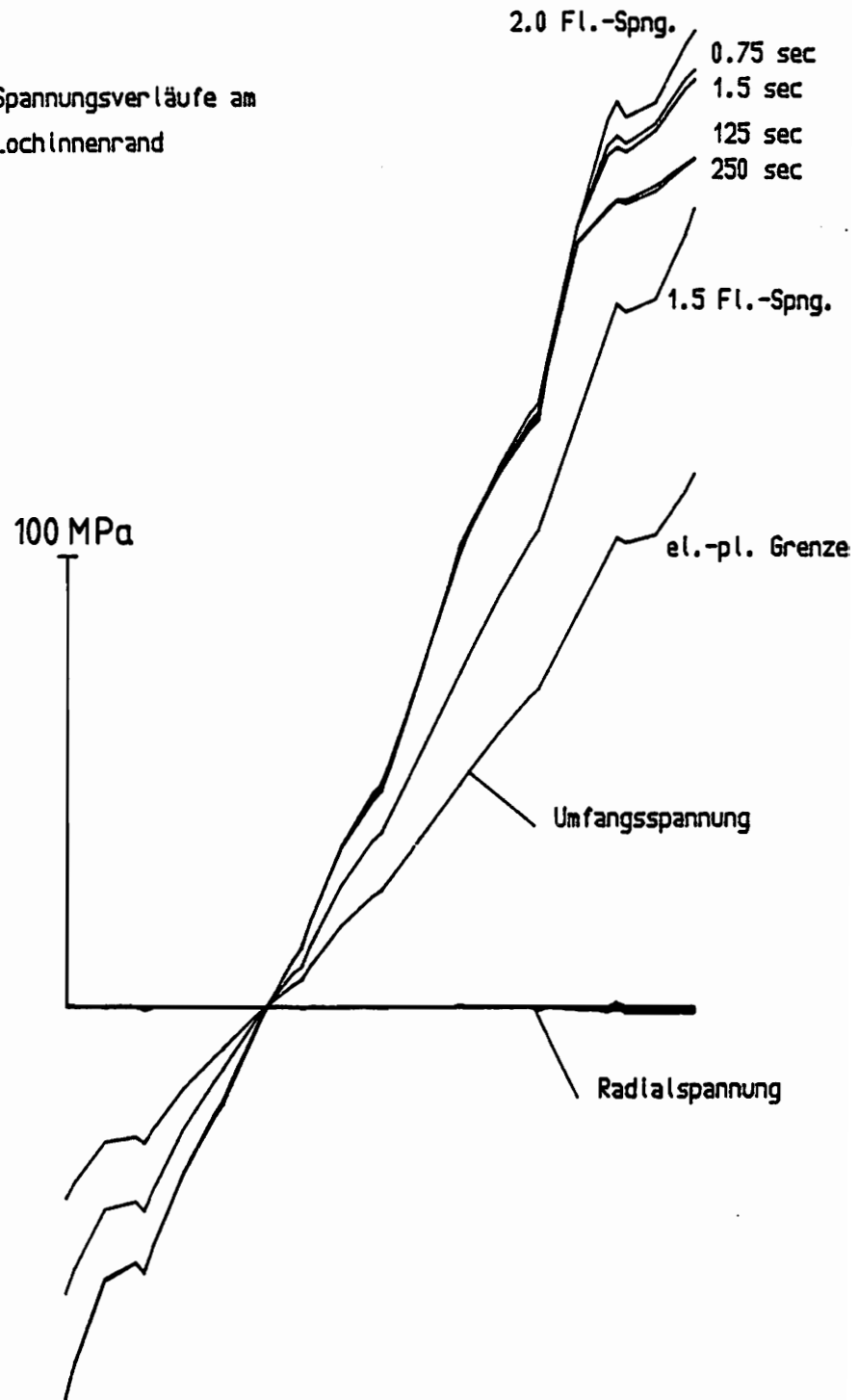
Aufgetragen sind die Verläufe der Umfangs- und Radialspannung entlang des Lochrandes. Da die Formulierung in kartesischen Koordinaten erfolgt ist, wird der Spannungstensor an jeder Gaußstützstelle und jedem Knotenpunkt auf dem Lochrand mit dem zugehörigen Normalenvektor transformiert, so daß Radial- und Umfangsspannung bekannt sind. Die so ermittelten Werte werden anschließend geradlinig verbunden.

Für alle aufgetragenen Zustände des Prozesses fällt zunächst die exakte Spannungsfreiheit der Radialspannung auf. Lediglich an den Knotenpunkten, deren Spannungen nicht die Genauigkeit der Gaußstützstellen aufweisen, lassen sich geringe Spannungsordinaten erkennen.

Die Umfangsspannung entspricht an der elastisch-plastischen Grenze bis auf die beiden im ersten und achten Element auftretenden Knicke genau dem Verlauf der analytischen Lösung, die von dem negativen Wert der äußeren Belastung kosinusförmig bis auf den dreifachen Betrag anwächst. Die weiter aufgetragenen Funktionsverläufe für die 1.5- beziehungsweise 2-fache Belastung entsprechen diesem Verlauf. Das Absinken der Umfangsspannung bei festgehaltener äußerer Belastung zeigt sehr anschaulich einen exponentiellen Charakter, der vom Stoffgesetz (vgl. Bild 3.3) vorgegeben ist. Die nach 125 beziehungsweise 250 Sekunden Haltezeit abnehmende Steigung der Kurven im Bereich des Spannungsmaximums zeigt auch hier wieder an, daß sich das globale Spannungsmaximum der Scheibe vom Lochrand in das Scheibeninnere hinein verlagert hat.

Die Bilder 9.30 a und b zeigen das Verschiebungsfeld bei Erreichen der inelastischen Grenze und nach 250 Sekunden Haltezeit. Bei gleichem Vergrößerungsfaktor erkennt man, daß die ursprünglichen Kreise besonders in 9.30b eine elliptische Form annehmen.

Bild 9.29: Spannungsverläufe am Lochinnenrand



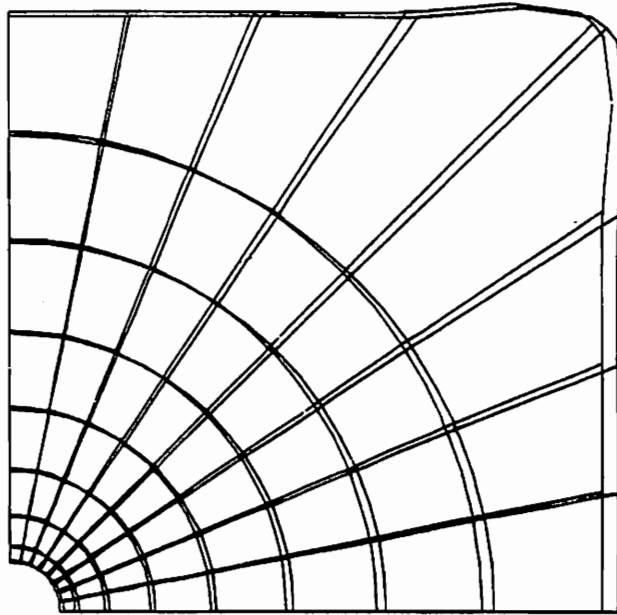


Bild 9.30 a : Verschiebungsfeld (el.-pl.Grenze)
Verg.Faktor 150

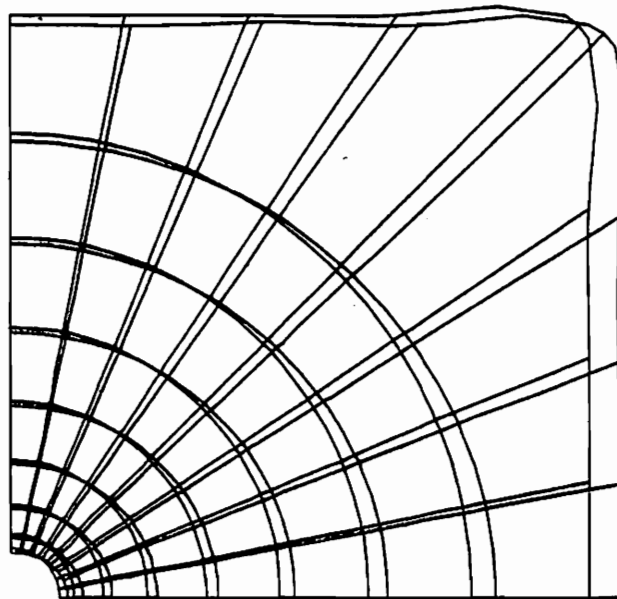


Bild 9.30 b : Verschiebungsfeld (nach 250s Kriechen)
Verg.Faktor 150

10. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene FE-Formulierungen basierend auf den Verfahren der gewichteten Residuen, zur Beschreibung elastisch-viskoplastisch deformierbarer Körper hergeleitet. Abgesehen von den für eine numerische Umsetzung wenig geeigneten Kollokationsverfahren sind dies:

- FE-Galerkin-Verfahren
- FE-Least-Squares-Verfahren
- Kombination aus Galerkin- und Least-Squares-Verfahren

Um die Ansatzfunktionen von der Befriedigung der natürlichen Randbedingungen, die im allgemeinen sehr kompliziert ist, zu befreien, wurden die Grundgleichungen um die Kräfte- und Momentenrandbedingungen erweitert. Das Kombinationsverfahren wird nun so definiert, daß die Kräfte- und Momentenrandbedingungen mit dem Least-Squares-Algorithmus und die Feldgleichungen mit dem Galerkin-Verfahren behandelt werden.

Grundlage der Materialbeschreibung war das von *Bruhns* /13/ entwickelte viskoplastische Stoffmodell, das aufbauend auf einem elastisch-plastischen Gesetz /32/ isotrope und kinematische Verfestigungsterme enthält.

Die Formulierung der Feldgleichungen erfolgte analog derjenigen der konstitutiven Beziehungen in Geschwindigkeiten, wobei das Auftreten endlicher Deformationen berücksichtigt wurde. Durch eine Zerlegung der Gesamtdeformation in eine Folge von n hinreichend nah benachbarten Teildeformationen lassen sich die Feldgleichungen in einem update-Lagrange-Formalismus in ein partielles Differentialgleichungssystem überführen, das im Geschwindigkeitsfeld linear ist. Die Zulässigkeit dieser Annahme wird durch die vorgegebenen kritischen Zeitschrittweiten bestätigt.

Hergeleitet wurden zweidimensionale, isoparametrische Elemente für den ebenen Spannungszustand und für Rotationskörper unter Verwendung von kubischen Hermitepolynomen. Unter Beachtung der durch die Verfahren der gewichteten Residuen auferlegten Stetigkeitsanforderungen kann ein 12- und ein 16-gliedriger Ansatz formuliert werden.

Die Vergleichsrechnungen der einzelnen Verfahren an speziellen, technisch relevanten Bauteilen, deren strenge Lösung im elastischen Bereich vorliegt, zeigen, daß die besten Ergebnisse mit dem Kombinationsmodell aus Galerkin- und Least-Squares-Verfahren erzielt werden. Dies gilt insbesondere für geringe Elementzahlen und im Hinblick auf die Extremspannungen, die in aller Regel auf der Körperoberfläche auftreten und die einsetzende Plastizierung anzeigen.

Eine Verwendung der reduzierten Integration hat sich lediglich im Fall des dickwandigen Rohres unter Innendruck bewährt, während sie bei anderen Strukturen völlig versagt. Bei der Berechnung allgemeiner Systeme empfiehlt sich deshalb, eine ausreichende Anzahl von Gauß-

stützstellen zu gebrauchen.

Zur Zeitintegration des steifen Differentialgleichungssystems der konstitutiven Beziehungen sind verschiedene ex- und implizite Verfahren implementiert und getestet worden, wobei das homogene Problem des Zugstabes unter konstanter Spannungssteigerung zur Analyse diente. Es konnte gezeigt werden, daß sich bei den expliziten Verfahren selbst bei sehr geringen Schrittweiten Fehler akkumulieren, die daraus resultieren, daß nur zu bestimmten, diskreten Zeitpunkten die Verzerungsgeschwindigkeiten "numerisch exakt" vorliegen. Mit den untersuchten impliziten Integrationsverfahren wird ein sowohl im Ort als auch in der Zeit impliziter FE-Algorithmus begründet, der in einer Prädiktor-Korrektor Form optimale Konvergenz gewährleistet. Dazu sind kritische Zeitschrittweiten für die einzelnen Verfahren angegeben, die in einer stabilen Integration nicht überschritten werden dürfen. Eine Verallgemeinerung dieser kritischen Schrittweiten auf allgemeine Probleme wird vorgeschlagen. Als bestes der hier untersuchten Integrationsverfahren hat sich die Trapezformel erwiesen, deren kritische Schrittweite etwa um einen Faktor 1.5 über derjenigen der rückwärts genommenen Eulerformel liegt.

Wegen der geringen noch zulässigen Schrittweiten ist die inelastische Analyse sehr rechenzeitintensiv. Während zur Berechnung des viskoplastisch deformierten Rohres unter Innendruck (vgl. Kap. 9.1.3) der Personal-Computer eine ausreichende Rechengeschwindigkeit besitzt, lassen sich komplexere Strukturen erfolgversprechend nur mit einem Großrechner behandeln.

In diesem Zusammenhang kommt der Überspannungsfunktion besondere Bedeutung zu, deren Einfluß eine zentrale Rolle für die kritischen Schrittweiten spielt. Eine Modifikation von γ_{Φ} könnte zu moderateren Rechenzeiten führen.

Eine Erweiterung des Programmpaketes um andere Elemente, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, ist infolge der modularen Programmstruktur ohne weiteres möglich, wie auch die Einbeziehung nicht isothermer Prozesse durch Hinzufügen der Wärmeleitungsgleichung.

Literaturverzeichnis

- /1/ **Valanis, R.C.**
A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface
Part 1, Part 2, Arch. of Mechanics, 1971
- /2/ **Prager, W.**
The Theory of Plasticity; A survey of recent achievements
James Clayton lecture , Proc. Inst. Mech. Eng. , **169** , 1955
- /3/ **Ziegler, H.**
A modification of Pragers hardening rule
Quart. Appl. Math. , **17** , 1959
- /4/ **Mroz, Z.**
On the description of anisotropic work-hardening
J. Mech. Physics Solids, Vol. 15 , **3** , 1967
- /5/ **Bruhns, O.T. et al.**
Some Remarks on the Application of a Two-Surface Model in
Plasticity
Acta Mechanica **53**, 1984
- /6/ **Dafalias, Y. F. , Popov, E. P.**
Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity
J. Appl. Mech. , Trans. ASME , Vol. 98, **4**
- /7/ **Bingham, E.C.**
Scient. Pap. Bureau of Standarts, **13**, 1916
- /8/ **Perzyna, P.**
Fundamental Problems in viscoplasticity
in: Advances in Applied Mechanics , Vol. 9, ed. : G. Kuerti
Academic Press , 1966
- /9/ **Hart, E. W.**
Constitutive Equations for the Non-Elastic Deformation of Me-
tals
J. Eng. Mat. Tech. , Vol.98 , **3** , 1976
- /10/ **Miller, A.**
An Inelastic Constitutive Model for Monotonic Cyclic and Creep
Deformation: Part 1
J. Eng. Mat. Tech. , Vol. 98 , **2** , 1976
- /11/ **Chaboche, J.L.**
Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic
and anisotropic behaviour of metals
Bull. Acad. Pol. Sci. **25** , 1977

- /12/ **Bruhns, O.T.**
The constitutive relations of elastic-inelastic materials at small strains
Nucl. Engng. Design. **83** , 1984
- /13/ **Bruhns, O.T.**
On the Constitutive Relations of Austenitic Stainless Steels
in: Constitutive Laws for Engineering Materials
Theory and Applications ;
Eds.: Desai,C.S. , Krempl,E. , Kioussis,P.D. , Kundu, T.
Elsevier , New York, Amsterdam, London, 1987
- /14/ **Zienkiewicz, O.C.**
The Finite Element Method in Engineering Science
McGraw-Hill, London, 1971
- /15/ **Gallagher, R.H.**
Finite Element Analysis
Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975
- /16/ **Argyris, J. H. / Mlejnek, H.-P.**
Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Struktur-
mechanik
Band 1 , Verschiebungsmethode in der Statik
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1986
- /17/ **Plan, T.H.**
Hybrid Models, in Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.
Editors: Fenves et al.
Academic Press, New York, London 1973
- /18/ **Hinton, E., Scott, F. C., Ricketts, R. E.**
Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isopara-
metric Elements
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. **10** , 1975
- /19/ **Klöhn, C.**
Alternative Spannungsberechnung in Finite-Element Verschie-
bungsmodellen
Dissertation, Universität Hannover, Bericht-Nr. F82/2, 1982
- /20/ **Oden, J.T.**
Finite Elements of nonlinear Continua
McGraw-Hill, 1972
- /21/ **Crandall, S.H.**
Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956

- /22/ **Finlayson, B. A.**
The Method of Weighted Residuals and Variational Principles
Academic Press, New York, 1972
- /23/ **Fairweather, G.**
Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations
Marcel Dekker, Inc., 1978
- /24/ **Lynn, P.P. , Arya, S. K.**
Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 6, 1973
- /25/ **Lynn, P.P., Arya, S. K.**
Finite Elements Formulated by the Weighted Discrete Least Squares Method
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8 , 1974
- /26/ **Zienkiewicz, O.C. , Owen, D. R. , Lee, K. N.**
Least Squares Finite Element for Elasto-Static Problems
Use of Reduced Integration
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8 , 1974
- /27/ **Hartmann, G.**
Zur Implementierung des Millerschen-Werkstoffgesetzes für
AISI 316
in: Große Plastische Formänderungen
Mitteilung 3 aus dem Institut für Mechanik der Gh-Kassel
Hrsg: O.T.Bruhns
- /28/ **Klee, K. D.**
Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nicht linearer viskoplastischer Kontinua
Dissertation, Universität Hannover, Bericht-Nr. F79/1, 1979
- /29/ **Thermann, K.**
Foundations of Large Deformations
in: Plasticity today - Modelling, Methods and Applications,
Sawczuk, A. , Bianchi , G. , Ed. , 1983
- /30/ **Macvean, D. B.**
Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren
ZAMP, 19 , 1968

- /31/ **Bruhns, O.**
Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten
elastoplastisch deformierter Kontinua
Mitteilung Nr.74-9, Institut für konstruktiver Ingenieurbau
Ruhr-Universität Bochum , 1974
- /32/ **Hill, R.**
Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics
J. Mech. Phys. Solids **10** , 1962
- /33/ **Miles, J. P.**
Fluid-pressure eigenstates and bifurcation in tension specimens under lateral pressure
J. Mech. Phys. Solids **21** , 1973
- /34/ **Bruhns, O. T.**
The INTERATOM model
in: Constitutive Modelling in the Range of Inelastic Deformations
INTERATOM No. 68.09030.6 , 1984
- /35/ **Bruhns, O. T.**
On Constitutive Modelling of the Inelastic Behaviour of Austenitic Steel
Advanced Technology of Plasticity , 1984, Vol. 1
- /36/ **Lehmann, Th. , Bruhns, O.**
Optimum deformation rate in large inelastic deformation
in: Metal Forming Plasticity, IUTAM Symp. Tutzing 1978
ed: H. Lippmann, Springer-Verlag, 1979
- /37/ **Perzyna, P.**
On thermodynamic foundations of viscoplasticity
in: Mechanical Behaviour of Materials under Dynamic Loads
IUTAM Symp. San Antonio 1967 , ed: U.S. Lindholm
Springer-Verlag 1968
- /38/ **Ranlecki, B. . Thermann, K.**
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 2 , Ruhr-Universität Bochum, 1978
- /39/ **Bruhns, O. T. et al.**
New constitutive equations to describe infinitesimal elastic-plastic deformations
ASME, 82 - PVP - 71

- /40/ **Schreiber, L.**
Ergebnisse von Versuchen zu Geschwindigkeitseffekten bei Metallen und Kunststoffen
ZAMM , **67** , 1987 , 4
- /41/ **Stephan, E. , Wendlandt, W.**
Mathematische Grundlagen der finiten Element-Methoden
Hrsg: B.Brosowski und E. Martensen
Peter Lang Verlag, Frankfurt, 1982
- /42/ **Bathe, K.-J.**
Finite Element Procedures in Engineering Analysis
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982
- /43/ **Klingbell, E.**
Tensorrechnung für Ingenieure
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich , 1966 (Nachdruck von 1985)
- /44/ **Flügge, W.**
Tensor Analysis and Continuum Mechanics
Springer-Verlag Berlin , 1972
- /45/ **Eschenauer, H. , Schnell, W.**
Elastizitätstheorie I , Grundlagen, Scheiben und Platten
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich, 1981
- /46/ **Bogner, F.K. , Fox, R.L. , Schmidt Jr. , L.A.**
The Generation of Inter-element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas
Proc. Ist Conf. Matrix Methods Struct. Mech. ,
Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965
- /47/ **Pestel, E. C.**
Dynamic Stiffness Matrix Formulation by Means of Hermitean Polynomials
Proc. Ist Conf. Matrix Methods Struct. Mech. ,
Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965
- /48/ **Falk, S.**
Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit Hermiteschen Interpolationspolynomen
ZAMM **43** , 1963
- /49/ **Galerkin, B. G.**
Reihenentwicklungen für einige Fälle des Gleichgewichts von Platten und Balken
Wjestwik Ingenerow , Petrograd , 1915 (in Russisch)

- /50/ **Bronstein-Semendjajew**
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Thun, 1985
- /51/ **Törnig, W.**
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure Band II
Springer Verlag Berlin , 1979
- /52/ **Stoer, J.**
Einführung in die numerische Mathematik I
Springer-Verlag Berlin , 1976
- /53/ **Fehlberg , E.**
Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter und siebenter Ordnung
mit Schrittweiten-Kontrolle
Computing, **4** , 1969
- /54/ **Lawson , J. D.**
An order five Runge-Kutta process with extended region of stability
SIAM J. Num. Anal. **3** , 1966
- /55/ **Lawson , J. D.**
An order sixth Runge-Kutta process with extended region of stability
SIAM J. Num. Anal. **4** , 1967
- /56/ **Grigorleff, R. D.**
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen 1
B. G. Teubner , Stuttgart , 1972
- /57/ **Grigorleff, R.D.**
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen 2
B. G. Teubner , Stuttgart , 1977
- /58/ **Lindberg , B.**
On smoothing and extrapolation for the trapezoidal rule
BIT **11** , 1971
- /59/ **Dahlquist, G.**
A Numerical method for some ordinary differential equations
with large Lipschitz constants
Information processing **68** , Amsterdam 1969
- /60/ **Jordan-Engeln, G./Reutter, F.**
Numerische Mathematik für Ingenieure
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich , 1978

- /61/ **Schmid, U.**
 Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
 Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 50, Ruhr-Uni-
 versität Bochum, 1987
- /62/ **Irons, B. , Ahmad , S.**
 Techniques of Finite Elements
 Ellis Horwood Limited , New York, 1980
- /63/ **Lehmann, Th.**
 Elemente der Mechanik
 Vieweg, Braunschweig, Bd. 2, 1984
- /64/ **Buck, K. E.**
 Rotationskörper unter beliebiger Belastung
 in : Finite Elemente in der Statik
 Verlag von Wilhelm Ernst&Sohn, Berlin/München/Düsseldorf,
 1973
 Hrsg.: Buck, K. E. , Scharpf, D.W. , Stein, E. , Wunderlich, W.
- /65/ **Schreiber, L.**
 Versagenskriterium und -Lasten für dickwandige Behälter
 Mitteilung 2 aus dem Institut für Mechanik der Gh-Kassel
- /66/ **Lehmann , Th.**
 Some theoretical considerations and experimental results con-
 cerning elastic-plastic stress-strain relations
 Ingenieur-Archiv, **52** , 1982
- /67/ **Lehmann , Th.**
 Anisotrope plastische Formänderungen
 Rev. roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., Tome 17 , **5** , Bukarest 1972
- /68/ **Krempf, E.**
 Isotropic and Orthotropic Formulations of the Viscoplasticity
 Theory Based on Overstress
 in: Constitutive Laws for Engineering Materials
 Theory and Applications ;
 Eds.: Desai,C.S. , Krempf,E. , Kiousis,P.D. , Kundu, T.
 Elsevier , New York, Amsterdam, London, 1987

Anhang 1 : Aufbereitung des Stoffgesetzes für die FE-Formulierung

Die Kenntnis der in den Gleichungen des Stoffgesetzes (4.4) - (4.6) enthaltenen Spannungs- und Verfestigungsgeschwindigkeiten genügt nicht für die FE-Formulierung basierend auf den Verfahren der gewichteten Residuen. In den Feldgleichungen (4.18) sind die Ortsableitungen des viskoplastischen Materialtensors \mathbf{B} zu bilden. Die partiellen Ableitungen von \mathbf{B} nach den globalen Koordinaten zu einem Zustand t_{i+1} erfordern aber gerade eine Erweiterung des Stoffgesetzes um die Ortsableitungen der Spannungs- und Verfestigungsgeschwindigkeiten des Zustandes t_i . Diese sind dann im Zeitintegrationsschritt zu integrieren und führen zu den geforderten Ableitungen von \mathbf{B} zum Zeitpunkt t_{i+1} . Dazu bilden wir formal die partiellen Ableitungen des Stoffgesetzes nach x und y (beim Ringelement entsprechend nach r und z): Die Ableitungen des Verzerrungs- und Rotationsgeschwindigkeitstensors werden nicht explizit durch die entsprechenden Größen des Geschwindigkeitsfeldes ersetzt, da diese aus den kinematischen Zusammenhängen des jeweiligen Elementes bekannt sind. Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\dot{\tau}_{xx} = 2 \left\{ G \left\{ D_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) - \langle B_{xx} \rangle \right\} + \tau_{xy} W_{xy} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\tau}_{xx}}{\partial x} = 2 \left\{ G \left\{ \frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} \right\rangle \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} W_{xy} + \tau_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\tau}_{xx}}{\partial y} = 2 \left\{ G \left\{ \frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{xx}}{\partial y} \right\rangle \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} W_{xy} + \tau_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{\tau}_{yy} = 2 \left\{ G \left\{ D_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) - \langle B_{yy} \rangle \right\} - \tau_{xy} W_{xy} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\tau}_{yy}}{\partial x} = 2 \left\{ G \left\{ \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{yy}}{\partial x} \right\rangle \right\} \right. \\ \left. - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} W_{xy} - \tau_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \right\} \quad (A.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{yy} = 2 \left\{ G \left\{ \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} \right\rangle \right\} \right. \\ \left. - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} W_{xy} - \tau_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{\tau}_{xy} = 2G \{ D_{xy} - \langle B_{xy} \rangle \} + W_{xy} \{ \tau_{yy} - \tau_{xx} \}$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial x} = 2G \left\{ \frac{\partial D_{xy}}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial B_{xy}}{\partial x} \right\rangle \right\} + \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \{ \tau_{yy} - \tau_{xx} \} + W_{xy} \left\{ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial y} = 2G \left\{ \frac{\partial D_{xy}}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial B_{xy}}{\partial y} \right\rangle \right\} + \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} \{ \tau_{yy} - \tau_{xx} \} + W_{xy} \left\{ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right\}$$

Nur beim Ringelement: ($x \rightarrow r$, $y \rightarrow z$, $z \rightarrow \varphi$)

$$\dot{\tau}_{zz} = 2G \left\{ D_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) - \langle B_{zz} \rangle \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{zz}}{\partial x} = 2G \left\{ \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{zz}}{\partial x} \right\rangle \right\}$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{zz}}{\partial y} = 2G \left\{ \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} \right) - \left\langle \frac{\partial B_{zz}}{\partial y} \right\rangle \right\}$$

Zur Abkürzung wird folgende Beziehung vereinbart:

$$f_{\tau} = 2(\tau' - \alpha) = \Psi \quad (\text{A.3})$$

Damit lassen sich die erweiterten Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung angeben:

$$\dot{\alpha}_{xx} = c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xx}}{\sqrt{f}} + 2\alpha_{xy} W_{xy}$$

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial c(x)}{\partial x} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xx}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \frac{\Psi_{xx}}{\sqrt{f}}$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{xx}}{\partial x} \sqrt{f} - \Psi_{xx} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \left\{ \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} W_{xy} + \alpha_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial y} &= \frac{\partial c(x)}{\partial y} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xx}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \frac{\Psi_{xx}}{\sqrt{f}} \\ &+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{xx}}{\partial y} \sqrt{f} - \Psi_{xx} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + 2 \left\{ \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} W_{xy} + \alpha_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha_{yy} = c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{yy}}{\sqrt{f}} - 2\alpha_{xy} W_{xy}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial x} &= \frac{\partial c(x)}{\partial x} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{yy}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \frac{\Psi_{yy}}{\sqrt{f}} \\ &+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{yy}}{\partial x} \sqrt{f} - \Psi_{yy} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - 2 \left\{ \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} W_{xy} + \alpha_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial c(x)}{\partial y} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{yy}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \frac{\Psi_{yy}}{\sqrt{f}} \quad (\text{A.4})$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{yy}}{\partial y} \sqrt{f} - \Psi_{yy} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - 2 \left\{ \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} W_{xy} + \alpha_{xy} \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \right\}$$

$$\alpha_{xy} = c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xy}}{\sqrt{f}} + W_{xy} \{ \alpha_{yy} - \alpha_{xx} \}$$

$$\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial c(x)}{\partial x} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xy}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \frac{\Psi_{xy}}{\sqrt{f}}$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{xy}}{\partial x} \sqrt{f} - \Psi_{xy} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$+ W_{xy} \left\{ \frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} \{ \alpha_{yy} - \alpha_{xx} \}$$

$$\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial c(x)}{\partial y} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{xy}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \frac{\Psi_{xy}}{\sqrt{f}}$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{xy}}{\partial y} \sqrt{f} - \Psi_{xy} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$+ W_{xy} \left\{ \frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial y} \right\} + \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} \{ \alpha_{yy} - \alpha_{xx} \}$$

$$\dot{\alpha}_{zz} = c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{zz}}{\sqrt{f}}$$

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_{zz}}{\partial x} = \frac{\partial c(x)}{\partial x} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{zz}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \frac{\Psi_{zz}}{\sqrt{f}}$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{zz}}{\partial x} \sqrt{f} - \Psi_{zz} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_{zz}}{\partial y} = \frac{\partial c(x)}{\partial y} \gamma \Phi(\Lambda) \frac{\Psi_{zz}}{\sqrt{f}} + c(x) \gamma \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \frac{\Psi_{zz}}{\sqrt{f}}$$

$$+ c(x) \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Psi_{zz}}{\partial y} \sqrt{f} - \Psi_{zz} \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Zur Entwicklung der isotropen Verfestigung

$$\dot{x} = 2\gamma \Phi(\Lambda) \sqrt{g(x)}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 2\gamma \left\{ \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \sqrt{g(x)} - \Phi(\Lambda) \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x} \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 2\gamma \left\{ \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \sqrt{g(x)} - \Phi(\Lambda) \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial y} \right\}$$

werden die partiellen Ableitungen der isotropen Verfestigungsfunktion $g(x)$ nach x und y ebenso benötigt, wie die Änderungen der übrigen im Stoffgesetz enthaltenen Materialfunktionen. Durch mehrmaliges Anwenden der Kettenregel ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \{ \Psi \cdot \Psi \} = \frac{1}{2} \Psi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} \{ \Psi \cdot \Psi \} = \frac{1}{2} \Psi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{f} - \sqrt{g})}{\partial x} \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x} \right\} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{f} - \sqrt{g})}{\partial y} \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial y} \right\}$$

Mit (A.3) und (A.6) lassen sich die partiellen Ableitungen des Materialtensors \mathbf{B} angeben:

$$\mathbf{B} = \gamma \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \Psi \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \gamma \left\{ \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{f}} \Psi - \frac{1}{2} \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \Psi + \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \gamma \left\{ \frac{\partial \Phi(\Lambda)}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{f}} \Psi - \frac{1}{2} \Phi(\Lambda) \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \Psi + \Phi(\Lambda) \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}$$

Um die Ableitungen der kinematischen Verfestigungsfunktion $c(x)$ bilden zu können, ist die Kenntnis einer weiteren im Stoffgesetz enthaltenen inneren Variablen, der Strukturgedächtnisfunktion $\Delta(x)$ nötig, die zur besseren Beschreibung des Bauschinger Effektes eingeführt wird und mit der internen Variablen x in folgender Weise verknüpft ist /34/:

$$\Delta \dot{=} \rho u \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g(x)}} \dot{x}$$

$$\frac{\partial \Delta \dot{}}{\partial x} = \rho u \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g(x)}} \left\{ -\frac{1}{2g(x)} \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \Delta \dot{}}{\partial y} = \rho u \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g(x)}} \left\{ -\frac{1}{2g(x)} \frac{\partial g}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right\}$$

Darin ist ρu eine während eines Belastungsvorganges konstante Größe, die in einem Update-Formalismus bei jeder erneuten Belastung neu zu berechnen ist /34/. g_0 ist der Fließflächenradius des Materials im jungfräulichen Zustand. Bei der Zeitintegration sind die Gleichungen (A.7) im Stoffgesetz enthalten und dementsprechend ebenfalls zu integrieren.

Für die Funktion $c(x)$ gilt nun folgende Beziehung, wobei sich der Tangentenmodul des einaxialen Zugversuches in Abhängigkeit der Strukturgedächtnisfunktion ausdrücken läßt:

$$c(x) = \frac{2}{3} E \frac{E_t(\Delta)}{E - E_t(\Delta)} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{E^2}{(E - E_t(\Delta))^2} \frac{\partial E_t(\Delta)}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial y} = \frac{2}{3} \frac{E^2}{(E - E_t(\Delta))^2} \frac{\partial E_t(\Delta)}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial y}$$

Die jeweils gewählten Ansätze für $g(x)$ beziehungsweise den Tangentenmodul in Abhängigkeit der Strukturgedächtnisfunktion sind dann in die Gleichungen einzusetzen, um die endgültigen und kompletten Materialbeziehungen zu erhalten, die für die FE- Formulierung im Rahmen der Methode der gewichteten Residuen erforderlich sind.

Anhang 2 : Materialdaten und Funktionen für den Austenit SS 304

Für den austenitischen Stahl wurden unter Beachtung von Gleichung (3.3.1) folgende Materialfunktionen und Parameter angepaßt /34/:

Materialfunktionen:

$$g(x; \Theta) = g_0 + 2c_0 \left\{ \frac{c_2 x}{1 + c_1 x} + (1 - c_2) \frac{\ln(1 + x)}{1 + c_1 \ln(1 + x)} \right\}$$

$$c(x; \Theta) = \frac{2}{3} E \frac{E_t(\Delta, \Theta)}{E - E_t(\Delta, \Theta)} - \frac{1}{2} \frac{dg(x; \Theta)}{dx}$$

$$E_t(x; \Theta) = E_{t\infty} + \frac{d_4 (c_3 - E_{t\infty} d_4)}{\left[d_4 + h + \sqrt{h^2 + \frac{d_4}{\sigma_0 \left(1 - \frac{E_{t\infty}}{E}\right)}} \right]^2}$$

$$h(\Delta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\Delta}{\sigma_0 \left(1 - \frac{E_{t\infty}}{E}\right)} \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi(\Lambda; \Theta) = \frac{\Lambda}{E} \left\{ 1 + \frac{\Lambda}{c_4} \right\}^{c_5}$$

Materialparameter:

$$d_1 = E_{t\infty} \quad , \quad d_2 = c_3 \quad , \quad d_3 = 0$$

$$d_4 = \frac{1}{E} \left\{ c_3 - \sigma_0 \left(1 - \frac{E_{t\infty}}{E}\right) \right\}$$

$$E(\Theta) = a_1 - a_2 \Theta$$

$$v(\Theta) = a_3 + a_4 \Theta + a_5 \Theta^2$$

$$E_{t\infty}(\Theta) = a_6 - a_7 \Theta$$

$$\sigma_o = a_8 E(\Theta)$$

$$c_o = \frac{2}{3} E \frac{E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}}$$

$$c_1 = \exp(-a_9 \Theta - a_{10}) \quad (A.11)$$

$$c_2 = \exp(-a_{11} \Theta + a_{12})$$

$$c_3 = a_{13} \exp(-a_{14} \Theta) + a_{15} - a_{16} \Theta$$

$$\gamma(\Theta) = \exp(a_{17} \Theta - a_{18})$$

$$c_4(\Theta) = \begin{cases} a_{19} & ; \quad \Theta < 350^0 \text{ C} \\ a_{20} - a_{21}\Theta + a_{22} \Theta^2 & ; \quad 350^0 \leq \Theta \leq 550^0 \text{ C} \\ a_{23} - a_{24}(\Theta - 550^0) & ; \quad \Theta \geq 550^0 \text{ C} \end{cases}$$

$$c_5(\Theta) = \begin{cases} a_{25} & ; \quad \Theta < 350^0 \text{ C} \\ a_{26} - a_{27} \Theta & ; \quad \Theta \geq 350^0 \text{ C} \end{cases}$$

Tabelle der Koeffizienten a_k :

<u>a_k</u>	<u>Wert</u>	<u>Dimension</u>
1	199050	MPa
2	81.36	MPa/ ^0C
3	0.2773	
4	$4.049 \cdot 10^{-5}$	$1/^0\text{C}$
5	$2.75 \cdot 10^{-8}$	$1/^0\text{C}^2$
6	2090.0	MPa
7	0.35	MPa/ ^0C
8	$6 \cdot 10^{-4}$	
9	0.00245	$1/^0\text{C}$
10	0.406	
11	0.002	$1/^0\text{C}$
12	0.073	
13	36.4	MPa
14	0.0128	$1/^0\text{C}$

15	155.14	MPa
16	0.0752	MPa/°C
17	0.0477	1/°C
18	83.77	
19	0.22	MPa
20	1.2376	MPa
21	0.00408	MPa/°C
22	$3.35 \cdot 10^{-6}$	MPa/°C ²
23	0.007	MPa
24	0.000126	MPa/°C
25	14.2	
26	26.63	
27	0.0355	1/°C

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Guldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 61**