

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Guido Obermüller

Ein Beitrag zur
Strukturoptimierung unter
stochastischen Lasten

Heft Nr. 65



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

GUIDO OBERMÜLLER

**EIN BEITRAG ZUR STRUKTUROPTIMIERUNG
UNTER STOCHASTISCHEN LASTEN**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 65

JUNI 1989

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für den Anstoß zu dieser Arbeit, wertvolle Anregungen und die Übernahme des Referates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für ihr aktives Interesse an meiner Arbeit und ihre Bereitschaft zum Korreferat.

Ich danke allen Mitarbeitern des Instituts, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Für wertvolle Ratschläge und die Unterstützung bei der Lösung numerischer Probleme bin ich Herrn Dr.-Ing. A. Meyers und Herrn Dipl.-Ing. Ch. Scholz zu ganz besonderem Dank verpflichtet.

Juni 1989

Guido Obermüller

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 06.04.1989

Tag der mündlichen Prüfung: 27.06.1989

© 1989 Dr.-Ing. Guido Obermüller
Kirchstr. 38, 5620 Velbert 15

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Die Wanddicken diskretisierter, elastischer Stäbe und Kreisringplatten unter stochastischer Last werden gewichtsminimal bestimmt. Neben geometrischen Restriktionen wird die Überschreitenswahrscheinlichkeit einer vorgegebenen Spannung beachtet. Die Lasten werden durch lineare Filter in einer Form gewählt, wie sie z.B. durch Fahrbahnrauigkeiten auftreten.

Die Basis der Untersuchung bildet die Kovarianzanalyse. Für diese wird ein sehr platzsparender, schneller und somit wirtschaftlicher Mehrstufen-Lösungsalgorithmus aufgezeigt.

Analytische Betrachtungen eines kontinuierlichen Stab liefern Abschätzungen über den Grad der erforderlichen Diskretisierung. Untersuchungen an einem Einmassenschwinger zeigen die Gültigkeit der Kovarianzanalyse in der Einschwingphase.

Summary

Minimum weight design of stochastically loaded elastic beams and plates is considered. The side conditions of the problem are that the probability of overstressing beyond a given stress is specified for a given class of stochastic loads and some geometrical limitations are imposed on the shape. The stochastic loads of interest are similar to the ones that occur in guideway roughness studies and they are generated from white noise by a suitably designed filter.

A basis of the study is the covariance analysis. A fast and economical algorithm is developed for the numerical solution of the problem.

On the other hand an analytical study of a continuous beam enabled us to obtain estimates for the desired rank of discretization used in the numerical work. A study of a simpler case of a single degree of freedom system shows that at large times a stationary state predicted by the covariance analysis is reached.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verwendete Formelzeichen	3
1 Einleitung	5
1.1 Übersicht	5
1.2 Beschreibung der vorliegenden Arbeit	6
2 Grundlagen zur Behandlung von Zufallsprozessen	8
2.1 Grundbegriffe	9
2.1.1 Statistik	9
2.1.2 Stochastik	15
2.2 Klassifizierende Begriffe	18
3 Stochastische Differentialgleichungen	21
3.1 Stochastische Integrale	21
3.2 Lösung stochastischer Differentialgleichungen	26
3.3 Existenz und Stabilität der Dauerlösung	30
4 Stochastische Belastung	33
4.1 Auswahl einer Lastform	33
4.2 Übergang von der stochastischen zur harmonischen Belastung	36
5 Anwendung der Kovarianzanalyse	40
5.1 Berechnung der Varianz für Kontinua	40
5.2 Einschwingverhalten eines Einmassenschwingers	45
5.3 Anwendung auf diskretisierte Bauteile	52
5.3.1 Gemeinsame Voraussetzungen	53
5.3.2 Ermittlung der Vergleichsspannungsvarianz	54
5.3.3 Stäbe	56
5.3.4 Rotationssymmetrische Platten	58
6 Optimierung	61
6.1 Zielfestlegung	61
6.2 Verifikationskriterien für Extrema	62
6.3 Optimierungsverfahren	64
6.3.1 Unbeschränkte Probleme	64
6.3.2 Beschränkte Probleme	66
7 Numerische Lösung der LJAPUNOV-Gleichung	70
7.1 Dynamische Kondensation	70
7.2 Einbau von Filtergleichungen	71
7.3 Separation	72
7.4 Entkopplung	73
7.5 Dämpfung	74
7.6 Sequentielle Lösung	75

8	Einige optimierte Querschnittsverläufe	78
8.1	Stäbe	78
8.2	Rotationssymmetrische Platten	84
9	Zusammenfassung und Ausblick	89
	Literaturverzeichnis	91
	Anhang	
A1	Verteilungsfunktionen	97
A2	Verfahren zur Bestimmung der Kovarianzmatrix	101
A3	Numerische Gradientenbestimmung	108

Verwendete Formelzeichen

A	Fläche
A	Systemmatrix
c	Konfidenzintervall
C	Konfidenzzahl
e	Entwurfsgröße
E	Elastizitätsmodul
$E\{g(X)\}$	Erwartungswert von $g(X)$
f	Verteilungsfunktion
f_d	Driftvektor
F	komplexe Frequenzgangmatrix
g	Wichtungsfunktion
$G = E / \{2(1 + \nu)\}$	Gleitmodul
G	Koeffizienten- oder Diffusionsmatrix
H	Hesse'sche Matrix
I	Flächenträgheitsmoment
I	Einheitsmatrix
K	Korrelationsmatrix
N	Anzahl von Ereignissen
P	Wahrscheinlichkeit
q	Verteilte Lasten
(r, φ, z)	Zylinderkoordinaten
R	Kovarianzmatrix
s	Suchrichtung
S	Spektraldichtematrix
u	Verschiebung
W	Wiener-Prozeß Größe
(x, y, z)	Kartesische Koordinaten

x, y	Realisationen von X und Y
X, Y	Zufallsgrößen
\mathbf{z}	Zustandsvektor
σ	Standardabweichung / Spannung
ε	Verzerrung
δ	massenbezogene Dämpfung
δ_{ik}	Kronecker-Symbol
κ	massenbezogene Steifigkeit
φ	massenbezogene Kraft
Φ	Gauß'sches Fehlerintegral
$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$	Fundamentalmatrix
ν	Querkontraktionszahl
ψ	Rotation
$\psi(x)$	Eigenfunktion
ρ	Dichte
ξ	Zufallsgröße
(η, ζ)	Lokale Koordinaten
$P(A B)$	Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung des Eintritts von B
\mathbf{O}	Einheitsmatrix/-vektor
x	Skalar x
\mathbf{x}	Vektor \mathbf{x}
$\bar{\mathbf{x}}$	Mittelwert des Vektors \mathbf{x}
\mathbf{X}	Matrix \mathbf{X}
$\mathbf{X}_{i,j}$	i, j tes Element der Matrix \mathbf{X}
$()' = \partial() / \partial x$	partielle Ableitung von $()$ nach x
$()' = \partial() / \partial t$	Zeitableitung von $()$
∇g	Gradient der Funktion g
$\text{Sp}(\mathbf{A})$	Spur der Matrix \mathbf{A}

1 Einleitung

1.1 Übersicht

Eine wesentliche Forderung moderner Fertigung ist die bestmögliche Werkstoffausnutzung mechanischer Bauteile und Strukturen. Neben wirtschaftlichen Gesichtspunkten wie z.B. Nutzung vorhandener Fertigungsmöglichkeiten, Herstellungskosten, Designfragen u.ä. sind auf mechanischer Seite einerseits die äußere Gestaltung, andererseits die Dickenauslegung bei gegebener Kontur von vorrangigem Interesse.

Die Lastannahmen sind hierzu möglichst *realistisch* zu wählen. Mit deterministischen Lastannahmen (z.B. transiente oder harmonische Last) können zwar wesentliche Aussagen getroffen werden; hingegen geben sie nur ein ungefähres Bild tatsächlicher Vorgänge ab. Reale Lastgrößen haben zu einem nicht unerheblichen Anteil einen zufälligen Charakter. Dieser Tatsache wird in neueren Abhandlungen zur Festkörperdynamik Rechnung getragen, beispielsweise in WALLER/SCHMIDT [57].

Im Bereich der Mechanik tritt das Problem zufallsbedingter Prozeßgrößen zum Beispiel bei Systemidentifikationen, Materialermüdungen und fahrdynamischen Untersuchungen auf. Für diese Vorgänge sind auf der Basis von Wiener-Prozessen [4] leistungsfähige Beschreibungsmethoden entwickelt worden. Durch ihre speziellen Korrelationseigenschaften ermöglichen sie die Lösung linearer stochastischer Differentialgleichungen. Grundlagen zur Beschreibung nichtlinearer stochastischer Systeme sind in ersten Ansätzen von KLIEMANN [48], ARNOLD [5] und anderen entwickelt worden; KREĚ [28] erforscht die Existenz stochastischer Integrale außerhalb von Wiener-Räumen.

Es können zwar nicht alle möglichen Prozesse mit Wiener-Prozessen nachgezeichnet werden, aber durch ein mittlerweile hinreichend ausgebauten mathematisches Rüstzeug sind sie für die Bearbeitung von Problemen aus der Mechanik besonders geeignet. In letzter Zeit sind dazu eine Reihe von grundlegenden Arbeiten entstanden. GORMANN [22] zeigt die Anwendung von weißem Rauschen bei der Berechnung von winderregten Bauwerken. SCHIEHLEN [48] simuliert Fahrzeugbewegungen mit Hilfe von Mehrkörpersystemen; wobei Fahreigenschaften und die auf den Fahrgast wirkende Belastung bestimmt werden. WEDIG [58] und KOZIN [27] nutzen die Techniken zur Systemidentifikation. SOBCZYK [48] zeichnet ein stochastisches Modell zur Beschreibung der Materialermüdung.

Optimierungen unter deterministischen Einflußgrößen sind in großer Zahl veröffentlicht worden. Die Arbeiten von OLHOFF/TAYLOR [41] und anderen [z.B. 3, 54] geben einen guten Überblick über den derzeitigen Entwicklungsstand.

Auf dem Gebiet der Bauteiloptimierung steht der Funktionaloptimierung, wie sie von PREUSS [45] behandelt wurde, die Parameteroptimierung gegenüber. Für diese können zum Beispiel folgende Arbeiten angegeben werden: MEYERS [36]: Rotationsschalen, ULLENBOOM [54]: Stäbe instationärer Erregung, LAUERT [31]: Stäbe unter harmonischer Erregung, v. BREDOW [8]: Stäbe unter stochastischer Erregung, BÜRGER [10]: Rotations-symmetrische Platten unter instationärer Erregung, LIU [33]: Kreisplatten unter nicht rotationssymmetrischer Last und ESCHENAUER [17]: Schalen aus nichtlinearen Werkstoffen.

In der Literatur sind vergleichsweise wenige Arbeiten zur Optimierung mechanischer Systeme unter stochastischer Belastung zu finden. Neben der bereits erwähnten Arbeit von v. BREDOW [8] existieren z.B. Arbeiten von NIGAM [39] und NARAYANAN/NIGAM [40].

Optimierungen sind in technischen Anwendungen nur innerhalb vorgegebener Grenzen denkbar, bei denen die Spannungsrestriktion, besonders in der Bauteiloptimierung, eine zentrale Rolle spielt. Im Falle stochastischer Belastung ist diese Restriktion in eine Forderung nach Begrenzung der Überschreitungswahrscheinlichkeit gegebener Grenzen umzuformulieren. Konfidenzabschätzende Relationen, wie die Tschebyschew'schen Ungleichung, transformieren diese verbale Forderung in eine formale Form. Neben Spannungsrestriktionen liegen darüber hinaus oft Beschränkungen in Form zulässiger Bereiche für die variierbaren Parameter vor.

1.2 Beschreibung der vorliegenden Arbeit

In dieser Arbeit werden für gegebene Lastfälle volumenminimale Bauteile bei Stäben und Kreisringplatten gesucht. Zur Begrenzung der Wahrscheinlichkeit von Materialversagen oder Ermüdung im gesamten Bauteil werden, neben geometrischen Restriktionen, maximale Standardabweichungen der Spannung in der Dauerlösung vorgeschrieben.

Für die Berechnung der stochastischen Zustandsgrößen wird auf die Kovarianzanalyse zurückgegriffen [38]. Nach der Klärung grundlegender Begriffe der Statistik und Stochastik werden die Lösung der stochastischen Differentialgleichungen und deren Erwartungswerte bestimmt. Eine besondere Bedeutung kommt der Integralbildung zu, die unter Verwendung des ITÔ-Kalküls nicht identisch mit dem klassischen Riemann-Kalkül ist.

Die Anpassung des Frequenzspektrums der Last an angenommene Spektralverläufe wird durch lineare Filter realisiert. Mit Hilfe eines sehr speziellen Filters erweist sich, daß, in der Terminologie der Mengenlehre, die stochastische Analyse als Obermenge der deterministischen zu sehen ist. Eine Antwort auf die Frage, ab welchem Zeitpunkt ein mechanisches System die Dauerlösung unter einer stochastischen Last einnimmt, wird am gleichen Beispiel des Einmassenschwingers diskutiert.

Das Konvergenzverhalten mit zunehmender Zahl berücksichtigter Eigenformen läßt sich an der Kovarianzanalyse von kontinuierliche Stäben untersuchen. Diese ist für eine Funktionaloptimierung nicht geeignet, läßt aber eine Abschätzung über die notwendige Anzahl von Diskretisierungen zu, mit deren Hilfe eine Parameteroptimierung zum gewünschten Ziel führt.

Die Wahl des geeignetesten Optimierungsverfahrens ist von den Eigenschaften des Problems abhängig. Die Entscheidung fällt zugunsten des (siehe auch ESCHENAUER [17]) Verfahrens nach ZOUTENDIJK [62] aus. Der Rechenaufwand wird durch eine geeignete numerische Aufbereitung des zu lösenden Gleichungssystem minimiert.

In anschließenden Beispielrechnungen werden Stäbe und Kreisringplatten unter einer stochastischen Last betrachtet, deren Frequenzspektrum eine merkliche Betonung eines schmalbandigen Bereiches aufweisen. Die Kreisringplattenoptimierung wird unter dem Aspekt eines Ergebnisvergleiches zwischen der Theorie nach KIRCHHOFF [26] und MINDLIN [37] durchgeführt. Abschließend werden die optimalen Resultate für deterministische Lastfälle beider Bauteiltypen anderen Wanddickenverläufen gegenübergestellt.

Im Anhang finden sich, neben einer Auflistung angewendeter Verteilungsfunktionen, eine Vorstellung der verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Kovarianzmatrix und ein numerisches Verfahren zur Gradientenbestimmung.

2 Grundlagen zur Behandlung von Zufallprozessen

Eine Messung realer dynamischer Größen, die ein mechanisches System belasten, ist in der Regel als Grundlage für eine direkte Belastungsanalyse an diesem System nur bedingt aussagefähig; das folgende Diagramm einer Messung von Windgeschwindigkeiten und -richtung mag dem Leser einen Eindruck davon vermitteln:

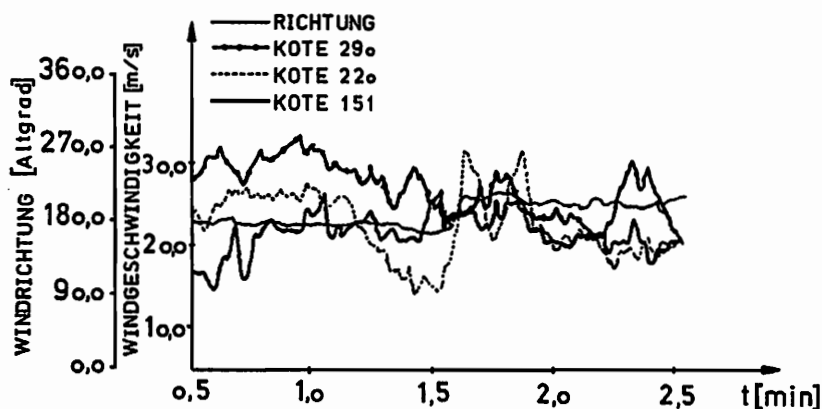


Abb. 2.1: Protokoll einer Windmessung

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß es sich bei realen Messungen dieser Art um Zufallsereignisse handelt; das bedeutet: jede Messung ist eine Realisation einer Zufallsgröße. Demzufolge müssen Korrelationen sowohl zwischen gleichartigen Messungen, die zu unterschiedlichen Zeiten durchgeführt werden, als auch zwischen gleichzeitigen Messungen, die an unterschiedlichen Objekten, aber gleichen Umgebungen zu beobachten sind, bestehen.

Diese Aussage soll an einem Beispiel aus der Luftfahrtindustrie verdeutlicht werden:

Es sollen die Belastungen bestimmt werden, denen Flugzeuge eines Typs auf Flügen von A nach B ausgesetzt sind. Aus einem, zu diesem Zweck stattfindenden Testflug ist die 'übliche' Belastung auf diesem Flug nicht repräsentativ ermittelbar. Dies folgt aus dem Bernoulli'schen Gesetz großer Zahlen, nach dem die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Ereignisses statistisch sicher erst dann bestimmt wird, wenn die Zahl der ausgewerteten Messungen unendlich ist. Abgesehen davon, daß diese theoretische Forderung die wirtschaftlichen Möglichkeiten jedes Betriebes sprengt, folgt für den Hersteller die Erkenntnis, daß er auch bei einer sehr hohen Zahl von beispielsweise 1000 Flügen mit verschiedenen Flugzeugen keine sicheren Aussagen erhalten wird. Beim alternativen Einsatz eines Versuchsträgers über eine entsprechend hohe Zahl von Meßflügen schwindet der Einfluß von Größen, die zwischen den Versuchsträgern (z.B. produktionsbedingt) schwanken.

In der Praxis kann davon ausgegangen werden, daß die verschiedenen einflußnehmenden Größen untereinander nur sehr begrenzt korrelieren, hingegen der Bezug einer Messung zu sich selbst, bzw. zur gleichen Größe aus einer anderen Messreihe, sehr hoch sein wird. Folglich ist es unter diesen Annahmen möglich, gesicherte Erkenntnisse aus entsprechend langen Messungen an wenigen Objekten zu erhalten.

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Statistik

Eine *Zufallsvariable* X ist eine reellwertige Größe, die durch nicht kontrollierbare Einflüsse bestimmt wird. Im Rahmen von *Stichproben* werden endlich viele Realisationen x , sogenannte Ereignisse, der Zufallsvariablen X erfaßt.

Die *Wahrscheinlichkeit* P des Eintreffens von A aus einer diskreten, endlichen Grundmenge ist definiert durch die, auf die gegen unendlich strebende Gesamtzahl N aller beobachteten Ereignisse einer Stichprobe relativierte, Zahl N_A des beobachteten Eintritts von A

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} . \quad (2.01)$$

Demnach hat ein *sicheres Ereignis* die Wahrscheinlichkeit eins.

Sind $P(A)$ und $P(B)$ bekannt, so ist die Wahrscheinlichkeit für A oder B durch die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten nur zu bilden, wenn A und B sich gegenseitig ausschließen. Ist dies nicht der Fall, muß von der Summe die Wahrscheinlichkeit $P(AB)$ der Schnittmenge beider Ereignisse subtrahiert werden

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) . \quad (2.02)$$

Dieser Ausdruck kann über die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ bzw. $P(B|A)$ bestimmt werden

$$P(AB) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B); \quad (2.03)$$

sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig, vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$P(AB) = P(A) P(B) . \quad (2.04)$$

Für Stichproben, in denen die Wahrscheinlichkeit p_X der Realisierung eines Ereignisses x_i nicht konstant ist, schlägt SCHUELLER [50] vor, die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ durch

$$P(A) = \frac{\sum_i^{N_A} p_X(x_i)}{\sum_i^{N} p_X(x_i)} \quad (2.05)$$

zu bilden; die erste Summe wird über alle Realisationen von A , die zweite über alle Ereignisse gebildet. Überträgt man diese Definition auf kontinuierliche Prozesse, bei denen die Wahrscheinlichkeit für x durch die Verteilungsdichte $f(x)$ gegeben wird, so ist

$$P(A) = \frac{\int_{R_A} f(x) dx}{\int_R f(x) dx}; \quad (2.06)$$

die Integrationen werden, analog zum diskreten Fall, im Unterraum R_A der Realisationen von A bzw. im Gesamtraum R aller Ereignisse ausgeführt. Unter Beachtung des Kolmogoroff-Axioms¹ folgt

$$P(A) = \int_{R_A} f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{dP}{dx}. \quad (2.07)$$

Die Wahrscheinlichkeit für $X \leq x$ wird als *Verteilungsfunktion* F bezeichnet

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.08)$$

In der Literatur werden die verschiedensten Verteilungen vorgeschlagen. Klassifiziert werden können sie in diskrete und kontinuierliche Verteilungen oder, nach ihrer Entstehung, in ursprüngliche und abgeleitete Verteilungen. Für die Anpassung der Verteilungsparameter an die Stichprobendaten werden sehr unterschiedliche Verfahren verwendet, angefangen von der Momenten- und Maximum-Likelyhood-Methode bis hin zu sehr speziellen Sonderverfahren. Für die Überprüfung der verwendeten Verteilung im Hinblick auf die zugrundeliegende Datenmenge stehen der Chi-Quadrat- und der Kolmogoroff-Smirnow-Test zu Verfügung. Einen Überblick über verschiedene praktisch angewendete Verteilungen, die der einschlägigen Literatur entnommen [29, 42] wurden, gibt der Anhang zu dieser Arbeit.

¹ $0 \leq P(A) \leq 1$, Wahrscheinlichkeit des Eintritts aller Ereignisse gleich eins und Nichtüberschneidung von Unterräumen

Für die durch ihre Verteilungsfunktion vollständig beschriebene Verteilung werden Signifikanzzahlen in Form linearer Operatoren eingeführt. Diese *mathematischen Erwartungswerte*, sind definiert durch

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP(x). \quad (2.09)$$

Wählt man die Bewertungs- oder Wichtungsfunktion $g(x)$ in der i -ten Potenz der Zufallsgröße, so erhält man Maßzahlen, die analog zur üblichen Nomenklatur² als *Momente* dieser Zufallsgrößen bezeichnet werden:

$$E\{X^i\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^i dP(x). \quad (2.10)$$

Als Moment erster Ordnung stellt der *Mittelwert* die für die Praxis bedeutendste statistische Kenngröße dar:

$$\bar{x} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.11)$$

In vielen Fällen ist es sinnvoll, Momente höherer Ordnung auf den Mittelwert zu beziehen. Dieses geschieht in Form der *zentralen Momente* i -ter Ordnung

$$E\{(X - \bar{x})^i\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^i f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^i dP(x). \quad (2.12)$$

Durch elementare Operationen lassen sich zentrale Momente in nicht zentrale umrechnen. Das Quadrat der *Standardabweichung* σ , die *Varianz* oder *Dispersion*,

$$\begin{aligned} E\{(X - \bar{x})^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \\ &= E\{X^2\} - \bar{x}^2 = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

ist eine Maßzahl für die Streuung der Ereignisse um den Mittelwert. Folglich ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mit welcher ein Ereignis in einem begrenzten Bereich um den Mittelwert auftritt. Unabhängig von der verwendeten bzw. vorkommenden Verteilungsfunktion leistet dies die Tschebyschew'sche Ungleichung

$$P\{|X - \bar{x}| \geq h\sigma\} \leq h^{-2}. \quad (2.14)$$

² In der Mechanik werden die ersten Momente einer Massenverteilung zur Bestimmung von Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment benötigt.

Diese Beziehung gilt für alle Verteilungen, also auch für die zum Mittelwert unsymmetrischen. Folglich kann h^{-2} nur als obere Schranke der Wahrscheinlichkeit des Überschreitens eines $h\sigma$ -Konfidenzintervalls verstanden werden; bei vielen tatsächlichen Verteilungen ist diese Wahrscheinlichkeit erheblich kleiner.

Zur Veranschaulichung sollen die Definitionen auf die Gaußsche Normalverteilung angewendet werden. Diese ist definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \quad (2.15)$$

Da der Mittelwert \bar{x} lediglich eine Verschiebung der Funktion längs der Abszisse durchführt, ist es für eine repräsentative Darstellung ausreichend, verschwindende Mittelwerte \bar{x} zu verwenden. Für verschiedene Standardabweichungen σ ergeben sich folgende Verläufe der Verteilungsdichtefunktion $f(x)$.

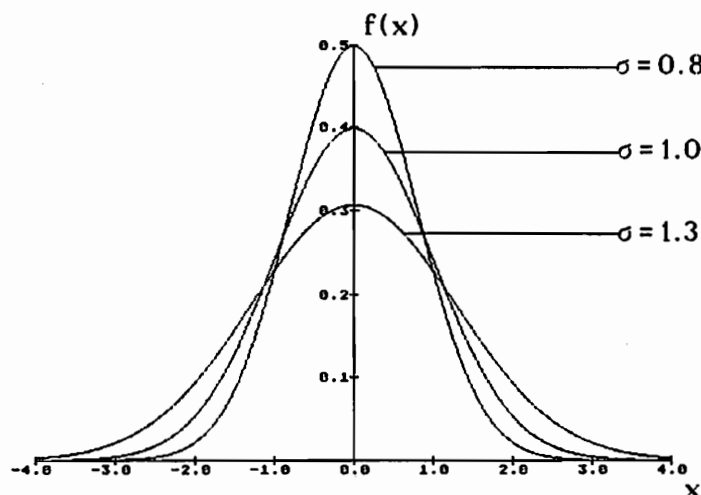


Abb. 2.2: standardisierte Normalverteilung

Die zugehörige Verteilungsfunktion ist definitionsgemäß

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2.16)$$

Durch Einführung der Variablen $z = (x - \bar{x})/\sigma$ ergibt sich die Möglichkeit, die nicht in geschlossener Form lösbare Funktion F auf eine tabellierbare Funktion $\Phi(z)$ zu standardisieren. Φ wird als Gaußsches Fehlerintegral oder Errorfunction $\text{Erf}(z)$ bezeichnet.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (2.17)$$

Für die oben dargestellten Normalverteilungen zeigen sich folgende Graphen der Verteilungsfunktion F :

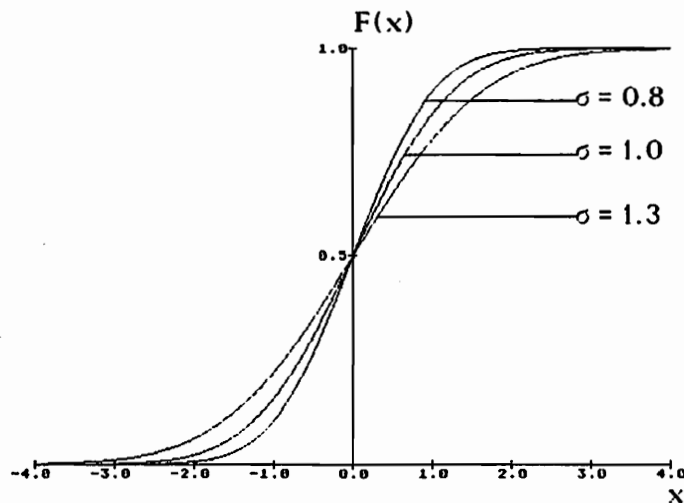


Abb.2.3: Gaußsches Fehlerintegral

Mit der Betrachtung einzelner Konfidenzintervalle wird die Bedeutung der Standardabweichung σ verständlich. Unter Konfidenzintervallen versteht man den endlichen Bereich $[c_1, c_2]$, in dem die Zufallsvariable X mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit C , der sogenannten Konfidenzzahl, liegt:

$$P\{c_1 \leq x \leq c_2\} = C. \quad (2.18)$$

Für die Gaußsche Normalverteilung ist dies immer ein zum Mittelwert \bar{x} symmetrischer Bereich, dessen Breite $2c$ über das Gaußsche Fehlerintegral bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} P\{\bar{x} - c \leq x \leq \bar{x} + c\} &= F(\bar{x} + c) - F(\bar{x} - c) \\ &= 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 = C. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich sowohl die Konfidenzzahlen bei gegebenen Intervallbreiten als auch, bei umgekehrter Auswertung, die Intervallbreiten c bei gegebenen Konfidenzzahlen C . Drei Beispiele illustrieren dies:

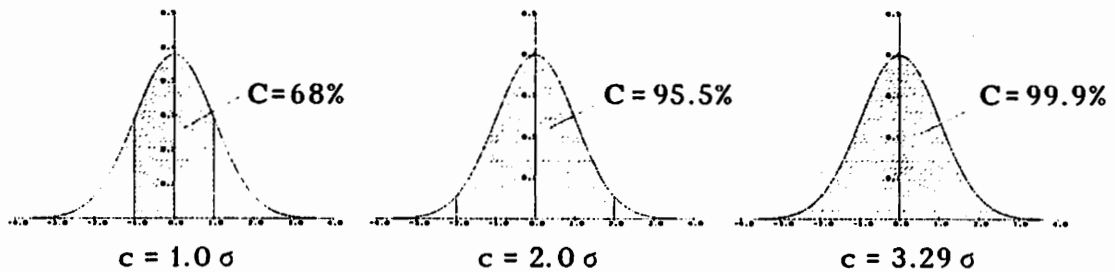


Abb. 2.4: Konfidenzen

Invers ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit des Überschreitens einer Toleranzbreite $\pm c$ ist $1-C$. Vergleicht man diese Aussage mit jenen, die durch Anwendung der Tschebyschew'schen Ungleichung (2.14) gewonnen werden, ist erkennbar, daß letztere einen stark geminderten Aussagewert hat: Das bedeutet jedoch, daß in bezug auf die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Kriterium ein höheres Sicherheitsmaß impliziert.

Ausfallrate bei Normalverteilung	Intervallbreite	Obergrenze nach Tschebyschew
5 %	± 1.96	26 %
0.3 %	± 3	11.1 %
0.0001 %	± 4.47	5 %

In den bisherigen Ausführungen sind Zufallsgrößen in eindimensionaler Form betrachtet worden. Für reale Probleme ist diese sehr stark einschränkende Annahme in nur wenigen Fällen anwendbar. Das einleitend benutzte Beispiel der Flugzeugbelastung zeigte die Abhängigkeit der betrachteten Größen von vielen Parametern (Produktionstoleranzen, meteorologische Gegebenheiten u.s.w.); diese können ihrerseits, jeder für sich, als zufällig betrachtet werden.

Aus diesen Überlegungen folgt die Notwendigkeit zur Ausweitung auf *mehrdimensionale Verteilungen* $f(\mathbf{x})$, bei denen die einzelnen Zufallsgrößen, also die Komponenten des Zufallsvektors \mathbf{x} , nicht notwendigerweise zueinander in statistisch nachweisbarer Beziehung stehen müssen.

Die n -dimensionale Normalverteilung mit dem Mittelwertsvektor \mathbf{x} und der Kovarianzmatrix \mathbf{R} , der zentralen Erwartungswertmatrix³ des Zufallsvektors \mathbf{x} , wird in der erweiterten Form ausgedrückt durch

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{R}|}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x})} \quad (2.20)$$

Für $n=2$ ist dieser Sachverhalt in folgendem Diagramm dargestellt.

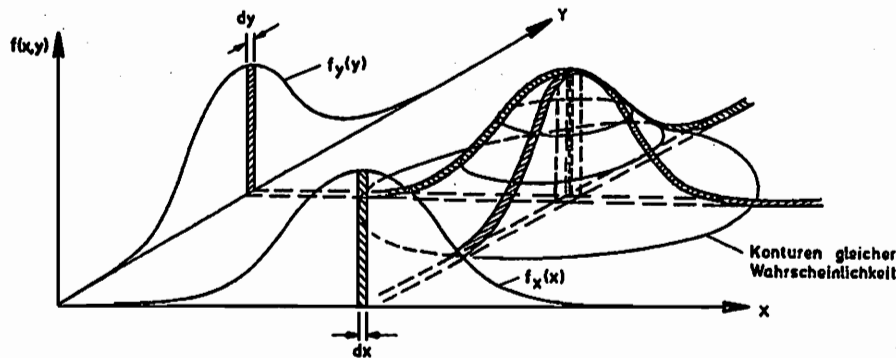


Abb. 2.5: zweidimensionale Normalverteilung

Die Form der, durch die 2×2 -Kovarianzmatrix \mathbf{R} bestimmten, Fläche bzw. der Linien gleicher Wahrscheinlichkeit ist bei unterschiedlichen Varianzen σ_{xx} und σ_{yy} elliptisch; exzentrisch wird diese Ellipsenschar, wenn die Matrix auf der Nebendiagonale besetzt ist, d.h. die Kovarianz σ_{xy} von Null verschieden ist. Die eindimensional normalverteilten Projektionen auf die (f,x) und (f,y) -Ebenen der Verteilungsdichtefläche zeigen sehr deutlich, daß bei einer isolierten Betrachtung einer Zufallsgröße der Mittelwert der anderen angenommen wird. Bedingt durch die Vernachlässigung der Korrelation gemäß Gleichung (2.02) zeigen sich bei derartiger Betrachtungsweise in der Regel zu große Wahrscheinlichkeitsdichten.

2.1.2 Stochastik

Werden Zufallsvariablen abhängig von Ort und/oder Zeit, gelangt man zum Begriff der Zufallsfunktion $X = X(\mathbf{r}, t)$. Wird der Ort fixiert, bezeichnet man $X = X(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, t) = X(t)$ als Zufallsprozeß; die Festlegung der Zeit führt zum Zufallsfeld $X = X(\mathbf{r}, t = t_0) = X(\mathbf{r})$. Mit dieser Aufweitung wird der Übergang der 'statischen' Statistik zur 'dynamischen' Stochastik vollzogen.

Im folgenden wird, wie in der Ingenieur-Praxis üblich, angenommen, daß sich die Orts- und Zeitabhängigkeit voneinander unabhängig betrachten lassen. Demnach reduziert sich die Beschreibung von Zufallsfunktionen auf ein Feld vektorieller Zufallsprozesse.

³ Dieser Begriff wird im folgenden Abschnitt erläutert.

Ein typischer Zufallsprozeß besteht aus einem Ensemble von m Aufzeichnungen X_1 bis X_m eines bestimmten Messwertes über der bei t_0 beginnenden Zeit t .

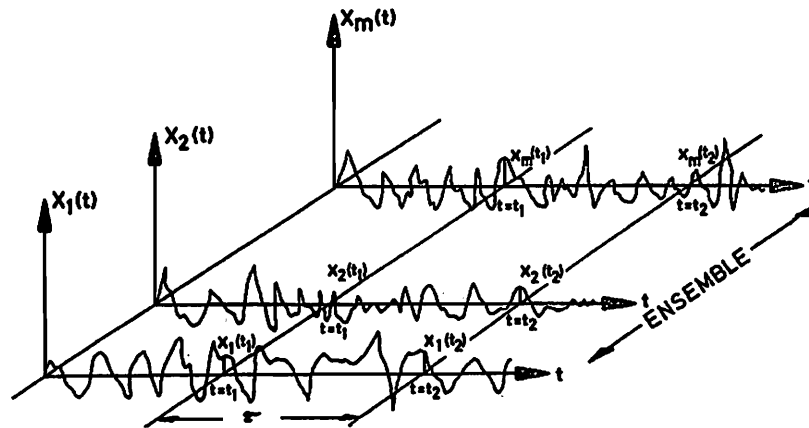


Abb.2.6 : Beispiel eines Zufallsprozesses

Formal analog zur Betrachtung der Zufallsvariablen werden nun die Erwartungswerte dieser Prozesse gebildet; beachtet werden muß jedoch, daß die integralen Mittelungen, entgegen der Ingenieurpraxis, nicht entlang der Zeitachse zu bilden sind, sondern entlang der Zufallsvariablen $X(t)$. Somit werden auch die Momente zu Funktionen der Zeit.

Über die im Abschnitt 2.1.1 dargestellten Zusammenhänge hinaus sind die stochastischen 'Beziehungen' von Interesse, die zwischen den Zufallsvariablen $X(t=t_i)$ desselben Zufallsprozesses zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder zwischen verschiedenen Zufallsprozessen zur gleichen oder verschiedenen Zeiten bestehen. Diese 'Beziehungen' werden durch *Korrelationen* ausgedrückt, die im allgemeinsten Fall definiert sind durch

$$K_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y; t_1, t_2) dx dy \quad (2.21)$$

mit dem Beginn der Zeitachse $t_0=0$.

Wird der Erwartungswert über zentrale Zufallsprozesse gebildet, geht die *Korrelationsfunktion* in die *Kovarianzfunktion* über:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{ (X(t_1) - E\{X(t_1)\}) (Y(t_2) - E\{Y(t_2)\}) \}. \quad (2.22)$$

Die Anwendung dieser Definition auf einen Zufallsprozeß $X=Y$ führt zur *Autokorrelationsfunktion* bzw zur *Varianzfunktion*.

Dehnt man die für einen Zufallsprozeß festgelegten Definitionen auf die Betrachtung des vollständigen Vektorfeldes der Zufallsfunktion aus, werden die skalarwertigen Zeitfunktionen zu Matrixfunktionen der Zeit. Die Dimension dieser Matrizen hängt von der Zahl der betrachteten Stützstellen im Raum ab

$$\mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1) \mathbf{Y}'(t_2)\} , \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2) = E\{(\mathbf{X}(t_1) - E\{\mathbf{X}(t_1)\})(\mathbf{Y}(t_2) - E\{\mathbf{Y}(t_2)\})'\} . \quad (2.24)$$

Die Autokorrelationsfunktionen stellen, wie die Varianzfunktionen, die Diagonalelemente der Korrelations- bzw. Kovarianzmatrix dar.

Für mindestens schwach stationäre Prozesse definieren die *Wiener-Chintschin-Relationen* das Verhältnis der *Spektralleistungsdichtematrix* $\mathbf{S}_{\mathbf{XY}}(\omega)$ zur Korrelationsfunktionsmatrix $\mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau)$. Bis auf den Faktor 2π entspricht dieses der *FOURIER-Transformation*. Die erforderliche Existenz der Transformationsintegrale wird bei zumindest schwach stationären Zufallsprozessen in der Regel durch ein genügend starkes Abklingen der Funktionen im Unendlichen sichergestellt:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{XY}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau) d\tau , \quad (2.25)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \mathbf{S}_{\mathbf{XY}}(\omega) d\omega . \quad (2.26)$$

Mit der Symmetrie von $\mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau)$ vereinfachen sich die Wiener-Chintschin-Relationen zu

$$\mathbf{S}_{\mathbf{XY}}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau , \quad (2.27)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{S}_{\mathbf{XY}}(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega . \quad (2.28)$$

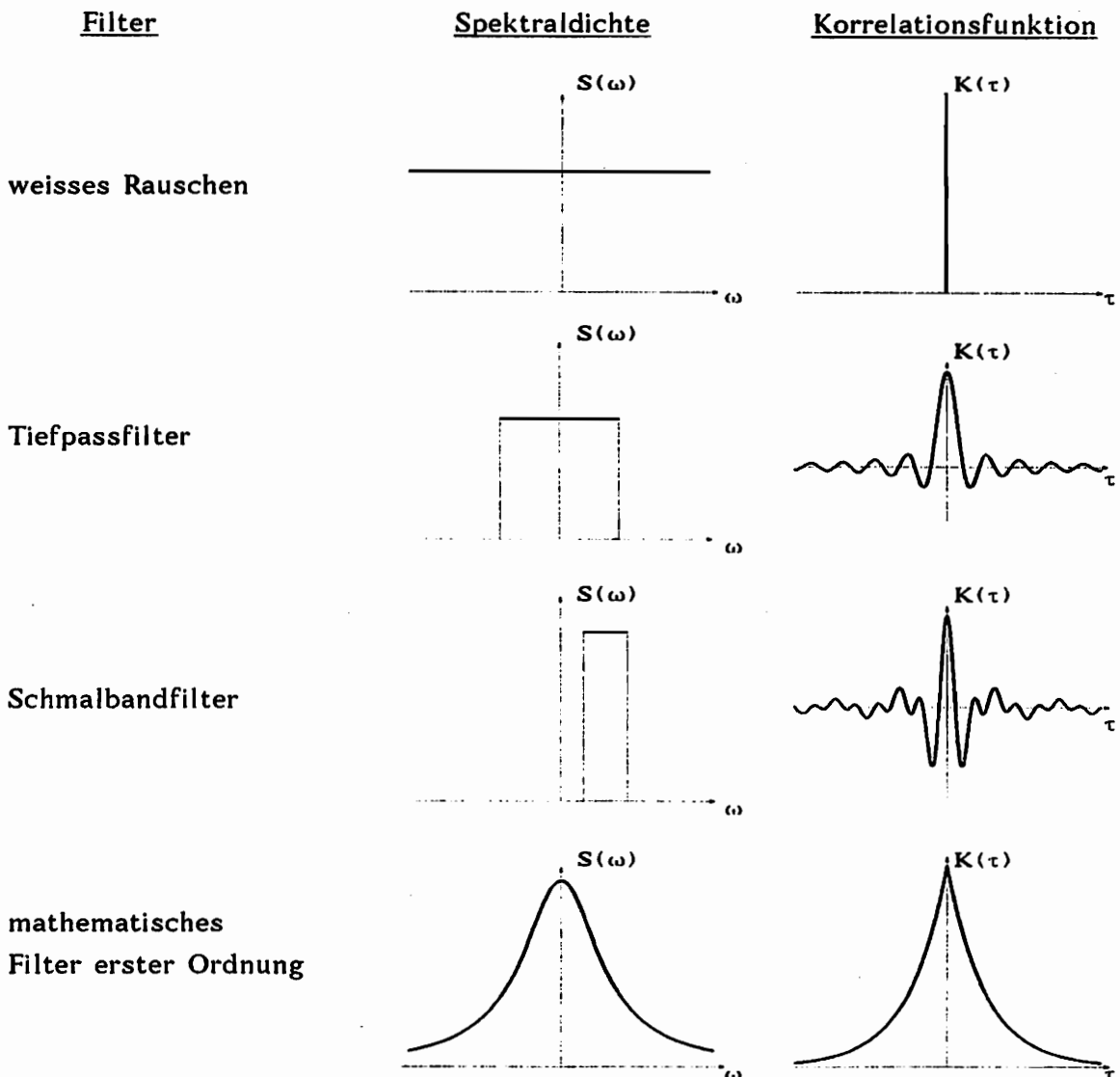
Eine Anwendung dieser Beziehungen ist im Anhang dargestellt.

Die Berechnung des quadratischen Erwartungswertes

$$E\{\mathbf{X}'\mathbf{X}\} = \mathbf{K}_{\mathbf{XX}}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{S}_{\mathbf{XX}}(\omega) d\omega \quad (2.29)$$

zeigt, daß $\mathbf{S}_{\mathbf{XX}}(\omega)$ als Funktion der Amplitudenquadrate den "Energieinhalt" des erfaßten Frequenzbereiches darstellt. Aus diesem Grunde wird $\mathbf{S}_{\mathbf{XX}}(\omega)$ auch als *Leistungsspektrum* bezeichnet.

Für einige, später erläuterte, eindimensionale Filterfunktionen stellen sich die *Wiener-Chintschin-Relationen* wie folgt dar:



2.2 Klassifizierende Begriffe

Sind die statistischen Eigenschaften eines Zufallsprozesses unabhängig von Verschiebungen des Zeitnullpunktes, wird der Prozeß als *stationär* bezeichnet. *Schwach stationär* ist dieser, wenn sich die Invarianz auf die beiden ersten Momente beschränkt.

Folglich geht der Erwartungswert $E\{\mathbf{X}(t)\}$ für mindestens schwach stationäre Zufallsprozesse in eine Konstante $E\{\mathbf{X}\}$ über, die Momente zweiter Ordnung degenerieren zu Funktionen des betrachteten Zeitintervalls:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{X}(t_1 - t_0) \mathbf{Y}(t_2 - t_0)^T\} \\ &= E\{\mathbf{X}(0) \mathbf{Y}(t_2 - t_1)^T\} = \mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(t_2 - t_1) = \mathbf{K}_{\mathbf{XY}}(\tau) \quad (2.30) \end{aligned}$$

mit $t_0 = -t_1$.

Sind die Elemente dieser symmetrischen, nicht negativ definiten Matrixfunktion endlich

$$|\mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\tau)|_{i,j} \leq \mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(0)_{i,j} < \infty, \quad (2.31)$$

läßt sich durch Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung die Stetigkeit für alle Zeiten τ zeigen.

Ein Prozeß, dessen Kenngrößen mit Wahrscheinlichkeit eins identisch sind mit jenen, die durch Mittelung aus einer Stichprobenfunktion ausreichender Länge gewonnen werden, heißt *ergodisch*.

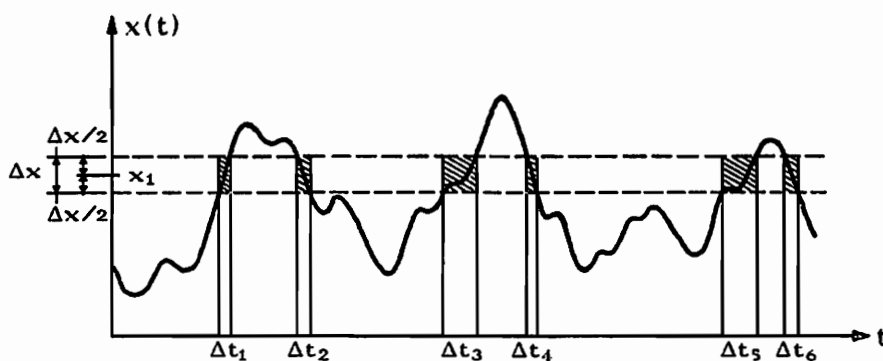


Abb.2.7: Wahrscheinlichkeitsermittlung eines ergodischen Prozesses

Für einen ergodischen Prozeß gilt

$$\text{mit} \quad P(X_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \Delta t_i(x_1) \quad (2.32)$$

$$P\left(\mathbb{E}\{g(X(t))\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x(t+\tau)) d\tau\right) = 1. \quad (2.33)$$

Liegt dieses Verhalten nur in einigen Erwartungswerten vor, spezifiziert man den Prozeß als ergodisch im Mittel, quadratisches Mittel, Korrelation usw..

Unter dem Begriff des *Markov-Prozesses* wird ein gedächtnisloser Prozeß verstanden [34]. Die Inkremente bilden sich nur auf Basis der aktuellen Konfiguration und sind stochastisch unabhängig von der vergangenen⁴:

$$P(X(t_n) | X(t_0)X(t_1)X(t_2) \dots X(t_{n-1})) = P(X(t_n) | X(t_{n-1})). \quad (2.34)$$

In der Klasse der Markov-Prozesse werden verschiedene Modelle zur Beschreibung verwendet. Für diskrete Folgen sind der Poisson-Prozeß und

⁴ Dieser Grundgedanke wird in vielen physikalischen Modellen verwendet, die mit Hilfe von Differentialgleichungen der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ künftige Zustände nur auf der Basis gegenwärtiger Parameter bestimmen.

das Markov-Ketten-Modell zu nennen; Hauptvertreter kontinuierlicher Folgen ist der *Gauß-Prozeß*. Die stochastischen Folgen sind durch die Übergangswahrscheinlichkeiten vollständig beschrieben.

Für den Gauß-Prozeß bedeutet dies, daß er mit der Kenntnis von Mittelwertsvektor und Kovarianzmatrix vollständig beschrieben ist. Aus diesem Grunde stellt er ein wichtiges Element innerhalb der Korrelationstheorie dar, in der Erwartungswerte nur bis zur zweiten Ordnung betrachtet werden. Eine Unterscheidung zwischen starker und schwacher Stationarität ist bei diesen Prozessen nicht zu treffen, da die eine Eigenschaft die andere impliziert [15].

Weißes Rauschen $\xi(t)$ ist ein mehrdimensionaler, stationärer Gaußscher Prozeß mit dem Mittelwert Null und konstanter Spektraldichte auf der reellen Achse. Die Autokorrelationsfunktion wird folglich zur Dirac'schen Deltafunktion

$$\bar{\xi} = 0, \quad (2.35)$$

$$S_{\xi\xi}(\omega) = S_0, \quad (2.36)$$

$$K_{\xi\xi}(\tau) = S_0 \delta(\tau). \quad (2.37)$$

Bereits im Jahre 1908 wurde die Modellvorstellung von Langevin beim Studium reibungsloser Brown'scher Bewegung von Teilchen in Fluiden benutzt und als sehr nützliche Idealisierung realer Prozesse betrachtet, die unter zufälligen, schnell fluktuierenden und praktisch unkorrelierten Einflüssen stehen. Nachteilig ist jedoch, daß es sich bei den formal aufgestellten Bewegungsgleichungen aufgrund der enthaltenen Größen, die mit Wahrscheinlichkeit eins nicht differenzierbar sind, nicht um gewöhnliche Differentialgleichungen handelt.

Aufgrund gleicher Erwartungswertsfunktionen wird im Rahmen der Korrelationstheorie das Zeitintegral des weißen Rauschens als *Wiener Prozeß* W bezeichnet [8]. Dieser ist ein Gaußscher Prozeß, der mit der Wahrscheinlichkeit eins stetige, aber nirgends differenzierbare Realisierungen hat. Im allgemeinen ist W mehrdimensional und spannt einen Wiener-Raum auf. Der erste Erwartungswert der Differenz der Prozeßgrößen zu unterschiedlichen Zeiten verschwindet, der zweite ist identisch mit der Zeitdifferenz

$$E\{\mathbf{W}(t_1) - \mathbf{W}(t_2)\} = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

$$E\{(\mathbf{W}(t_1) - \mathbf{W}(t_2))(\mathbf{W}(t_1) - \mathbf{W}(t_2))^T\} = \mathbf{I}(t_1 - t_2). \quad (2.39)$$

Ebenso wie die Differentialgleichungen stellen auch die Zeitintegrale der Rauschprozesse keine gewöhnlichen Riemann-Stieltjes-Integrale dar.

3 Stochastische Differentialgleichungen

3.1 Stochastische Integrale

Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren zur Lösung benötigter stochastischer Integrale der Form

$$\int \mathbf{G}(t) \boldsymbol{\xi}(t) dt \quad (3.01)$$

vorgestellt, die aufgrund der Größe $\boldsymbol{\xi}$ keine gewöhnlichen Riemann-Integrale sind.

\mathbf{G} sei eine nicht vorgreifende $r \times s$ -Matrixfunktion, $\boldsymbol{\xi}$ ein s -dimensionaler Vektor.

Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise wird vorübergehend vorausgesetzt, daß erstens \mathbf{G} unstetig sei und zweitens $r=s=1$ sei.

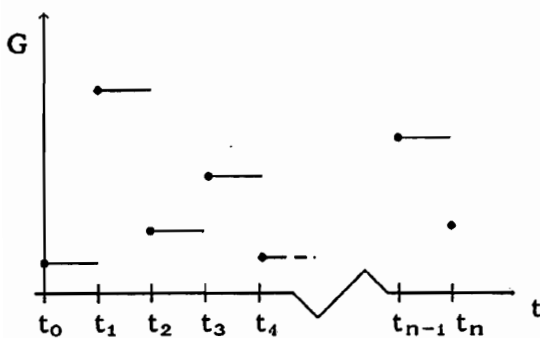


Abb. 3.1: Treppenfunktion

Unter Beachtung der genannten Voraussetzungen und des nicht vorgreifenden Charakters von \mathbf{G} kann das Integral für streng monotone Folgen der n Unstetigkeitszeitpunkte von \mathbf{G} durch eine Summation ausgedrückt werden:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1}) \int_{t_0}^t \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau. \quad (3.02)$$

Zurückgreifend auf die Eigenschaften des Wiener Prozesses $W(t)$, dessen Zeitableitung als weißes Rauschen $\boldsymbol{\xi}(t)$ verstanden werden kann,

$$dW(t) = \boldsymbol{\xi}(t) dt \quad (3.03)$$

bzw.
$$W(t) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \quad (3.04)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1}) \int_{t_0}^t dW(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1}) (W(t_i) - W(t_{i-1})). \end{aligned} \quad (3.05)$$

Läßt man nun die zweite Bedingung $r=s=1$ fallen, ergibt sich

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n G_{1k}(t_{i-1})(W_k(t_i) - W_k(t_{i-1})) \\ \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n G_{2k}(t_{i-1})(W_k(t_i) - W_k(t_{i-1})) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n G_{rk}(t_{i-1})(W_k(t_i) - W_k(t_{i-1})) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1})(\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})). \quad (3.06)$$

Von größerem Interesse als die Lösung des Integrals sind die Momente dieses Integrals. Im Rahmen der in dieser Arbeit behandelten Korrelations-
theorie sind der Mittelwert und der quadratische Erwartungswert von Bedeutung.

Die Unkorreliertheit von \mathbf{G} und \mathbf{W} wird bei der folgenden Betrachtung vorausgesetzt; der Erwartungswert von \mathbf{G} sei endlich.

Der Mittelwert ergibt sich zu

$$E \left\{ \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right\} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1})(\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \right\}. \quad (3.07)$$

Betrachtet man eine Zeile u dieses Erwartungsvektors, so gilt unter Beachtung der Unabhängigkeit von \mathbf{G} und \mathbf{W}

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s G_{uk}(t_{i-1})(W_k(t_i) - W_k(t_{i-1})) \right\} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s E \{ G_{uk}(t_{i-1}) \} E \{ W_k(t_i) - W_k(t_{i-1}) \}. \end{aligned}$$

Da der Mittelwert der Wiener Prozessgrößendifferenz laut Definition (2.38) identisch Null ist, verschwindet auch der betrachtete Erwartungswert, falls die Erwartungswerte von $G_{uk}(t_{i-1})$ endlich sind.

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s E \{ G_{uk}(t_{i-1}) \} 0 = 0 \quad (3.08)$$

Für den Erwartungswert des Gesamtintegrals gilt folglich:

$$E \left\{ \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right\} = \mathbf{0}, \quad \text{wenn } E \{ \mathbf{G}(t) \} < \infty. \quad (3.09)$$

Von einigen Autoren, wie AXELRAD [6], werden derartige Integrale als stochastische Riemann-Integrale bezeichnet.

Die quadratische Erwartungswertmatrix des Integrals berechnet sich mit Gleichung (3.06) zu:

$$\begin{aligned}
 & E \left\{ \left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right)^T \right\} \\
 &= E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{G}(t_{i-1}) (\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \right) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{G}(t_{j-1}) (\mathbf{W}(t_j) - \mathbf{W}(t_{j-1})) \right)^T \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{G}(t_{i-1}) (\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \right) \left(\mathbf{G}(t_{j-1}) (\mathbf{W}(t_j) - \mathbf{W}(t_{j-1})) \right)^T \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus der Betrachtung des u,v-ten Elementes der Matrix

$$\begin{aligned}
 & E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{G}_{u1}(t_{i-1}) (\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \right) \left(\mathbf{G}_{v1}(t_{j-1}) (\mathbf{W}(t_j) - \mathbf{W}(t_{j-1})) \right)^T \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \mathbf{G}_{uk}(t_{i-1}) \mathbf{G}_{vl}(t_{j-1}) (\mathbf{W}_k(t_i) - \mathbf{W}_k(t_{i-1})) (\mathbf{W}_l(t_j) - \mathbf{W}_l(t_{j-1})) \right\}
 \end{aligned}$$

folgt unter Beachtung der statistischen Unabhängigkeiten von \mathbf{G} und \mathbf{W}

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s E \left\{ \mathbf{G}_{uk}(t_{i-1}) \mathbf{G}_{vl}(t_{j-1}) \right\} E \left\{ (\mathbf{W}_k(t_i) - \mathbf{W}_k(t_{i-1})) (\mathbf{W}_l(t_j) - \mathbf{W}_l(t_{j-1})) \right\} \tag{3.11}$$

und der Anwendung der Korrelationseigenschaften des Wiener Prozesses

$$E \left\{ (\mathbf{W}_k(t_i) - \mathbf{W}_k(t_{i-1})) (\mathbf{W}_l(t_j) - \mathbf{W}_l(t_{j-1})) \right\} = \delta_{kl} (t_i - t_{i-1}) \tag{3.12}$$

schließlich

$$\begin{aligned}
 & E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{G}_{u1}(t_{i-1}) (\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \right) \left(\mathbf{G}_{v1}(t_{j-1}) (\mathbf{W}(t_j) - \mathbf{W}(t_{j-1})) \right)^T \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s E \left\{ \mathbf{G}_{uk}(t_{i-1}) \mathbf{G}_{vk}(t_{i-1}) \right\} (t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s E \left\{ \mathbf{G}_{uk}(t_{i-1}) \mathbf{G}_{vk}(t_{i-1}) \right\} (t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left\{ \mathbf{G}_{u1}(t_{i-1}) \mathbf{G}'_{1v}(t_{i-1}) \right\} (t_i - t_{i-1}).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Der gesuchte Erwartungswert existiert also genau dann, wenn die Erwartungswerte $E\{\mathbf{G}_{u1}(t_{i-1})\mathbf{G}'_{1v}(t_{i-1})\}$ existieren, d.h. endlich sind. Für die Matrix bedeutet dieses Ergebnis

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right)^T \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n E \left\{ \mathbf{G}(t_{i-1}) \mathbf{G}'(t_{i-1}) \right\} (t_i - t_{i-1}) \\ &= E \left\{ \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}'(\tau) d\tau \right\}, \quad \text{falls } E\{\mathbf{G}(t)\mathbf{G}'(t)\} < \infty. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Die genannte Unstetigkeitsbedingung kann im Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ in eine Stetigkeitsbedingung überführt werden [4]. Insbesondere ergeben sich für die gebildeten Erwartungswerte formal dieselben Beziehungen.

Bei der Bestimmung der zentralen Autokorrelationsmatrix $\mathbf{K}(t_1, t_2)$ zeigt die Summenbildung im Bereich $]\min(t_1, t_2), \max(t_1, t_2)[$ die Unabhängigkeit von \mathbf{W} , so daß sich die Autokorrelationsmatrix ergibt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau - E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right\} \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau - E \left\{ \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right\} \right)^T \right\} \\ &= E \left\{ \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}'(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Anmerkung

Der vorgestellte Lösungsweg setzt die statistische Unabhängigkeit von \mathbf{G} und $\boldsymbol{\xi}$ bzw \mathbf{W} voraus. Unter Verletzung dieser Bedingung lassen sich in analoger Vorgehensweise Lösungen bilden.

Beispiel: Gesucht ist die Lösung des Integrals

$$\int_{t_0}^t \mathbf{W} d\mathbf{W}. \quad (3.16)$$

Entsprechend der obigen Vorgehensweise wird nun die Summe

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{W}(t_{i-1})(\mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})) \quad (3.17)$$

im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ betrachtet.

Unter Berücksichtigung des Korrelationsverhaltens des Wiener Prozesses folgt

$$\int_{t_0}^t \mathbf{W} d\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{W}^2(t) - \mathbf{W}^2(t_0)) - \frac{1}{2}(t - t_0) \quad (3.18)$$

Ebenso wie die äquivalente differentielle Aussage

$$d\mathbf{W}^2 = 2\mathbf{W}d\mathbf{W} + dt \quad (3.19)$$

unterscheidet sich dieses Integral vom klassischen Riemann-Stieltjes-Kalkül. ITÔ [24] hat die hier anzuwendenden Regeln in folgendem Satz zusammengefaßt:

Hat der stochastische Prozeß \mathbf{X} das stochastische Differential⁵

$$d\mathbf{X} = \mathbf{f} dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}, \quad (3.20)$$

so ergibt sich das Differential der Funktion

$$\mathbf{Y} = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) \quad (3.21)$$

bezüglich desselben Wiener Prozesses \mathbf{W} nach folgender Regel

$$d\mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{X} + \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \right). \quad (3.22)$$

Für die partiellen Ableitungen gilt folgende Definition

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{i,j} = \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_j}, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_{i,j} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.23)$$

Ausgehend von den Erwartungswerten des Wiener Prozesses muß bei der Ausführung des Satzes (3.22) beachtet werden:

$$d\mathbf{W} d\mathbf{W} = \mathbf{I} dt, \quad (3.24)$$

$$d\mathbf{W} dt = dt d\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

$$dt dt = 0. \quad (3.26)$$

Die auf dem dargestellten ITÔ-Kalkül basierenden Integrale bieten den Vorteil, daß sie als Funktion der oberen Integrationschranken martingale Eigenschaften haben. und daß die Bildung der beiden ersten Momente des Integrals zu einfachen Ausdrücken führt. Erkauft wird dieses jedoch mit einem größerem Berechnungsaufwand.

⁵ Die Größen \mathbf{f} und \mathbf{G} seien nicht zwingend zeitinvariant.

STRATONOVICH [51] schlägt eine zweite Definition stochastischer Integrale vor. Deren wesentliches Merkmal ist die formale Anwendbarkeit des Riemann-Stieltjes-Kalküls (einschließlich aller darin bestehenden Regeln). In der Herleitung unterscheidet sich dieses vom ITÔ-Integral in der Festlegung der Integrandenstützstellen. Während ITÔ streng am nicht-vorgreifenden Charakter des Integranden festhält, schlägt STRATONOVICH den Funktionswert des zeitlichen Mittelpunktes des Summanden vor. Das Integral ergibt sich demnach zu

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t W dW &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (W(t_i) + W(t_{i-1})) (W(t_i) - W(t_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2} (W^2(t) - W^2(t_0)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Da sich beide Definitionen ineinander umrechnen lassen, besteht die Frage, welche Form unter welchen Bedingungen anzuwenden ist. Diese Frage kann nur pragmatisch beantwortet werden. Aufgrund besserer Approximationseigenschaften zu realisierbaren physikalischen Prozessen wird das STRATONOVICH-Integral von einigen Autoren bevorzugt, während andere vorschlagen, die STRATONOVICH-Beziehung dann anzuwenden, wenn der Übergang zum weissen Rauschen erst nach erfolgter "klassischer" Integration erfolgen soll [46].

Die hier vorgestellten stochastischen Integrale sind im Raum der Wiener Prozesse definiert. Der Schluß, stochastische Integrale existieren nur in diesen Räumen, ist jedoch falsch, wie KRÉE [28] mit dem Existenznachweis stochastischer Integrale in chaotischen Räumen zeigen konnte.

3.2 Lösung von stochastische Differentialgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden mechanische, geschwindigkeitproportional gedämpfte Strukturen mit zeitinvarianter Systemmatrix untersucht; die Belastung erfolgt über deterministische und stochastische Lastanteile. Deren Differentialgleichungen lassen sich durch spezielle Verfahren [56, 57, 61] auf eine gewöhnliche lineare Vektordifferentialgleichung erster Ordnung transformieren. Der stochastische Anteil der Last wird durch das Produkt der Koeffizientenmatrix \mathbf{G} und dem Rauschvektor ξ gebildet. Die Komponenten von ξ sind unkorrelierte Realisationen weissen Rauschens⁶

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}_d(t) + \mathbf{G}(t)\xi(t). \quad (3.28)$$

Die Anfangszustände für $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t=0)$ werden durch Normalverteilungen mit

⁶ In der Theorie der Diffusionsprozesse wird \mathbf{f}_d als Driftvektor und $\mathbf{G}\mathbf{G}'$ als Diffusionsmatrix bezeichnet.

festen Erwartungswerten beschrieben. Bei verschwindender Varianz sind somit auch konstante \mathbf{z}_0 darstellbar.

Die Korrelationszeit der stochastischen Komponente ist mit Wahrscheinlichkeit eins kleiner als die Reaktionszeit des mechanischen Systems. Daraus folgt, daß das ITÔ-Kalkül hier sinnvoll anwendbar ist.

Unter Einführung der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ läßt sich formal die Lösung angeben

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{f}_d(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau \right). \quad (3.29)$$

Die Wiener-Prozeßgröße \mathbf{W} , als dem Zeitintegral des Rauschvektors $\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{W}(t) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

bzw. das äquivalenten Differential

$$d\mathbf{W}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) dt \quad (3.31)$$

überführen die Lösung in

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{f}_d(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right). \quad (3.32)$$

Dieses Resultat, das sich mit dem Satz von ITÔ (3.22) leicht verifizieren läßt, stellt genau dann einen Gaußschen stochastischen Prozeß dar, wenn \mathbf{z}_0 konstant oder normalverteilt ist.⁷

Bemerkung

Bei der hier hergeleiteten Lösung ist zu beachten, daß es sich nicht um eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung handelt, in die nur durch Hinzufügung eines Terms die Möglichkeit zur Beschreibung stochastischer Vorgänge eingebracht ist; es handelt sich hier vielmehr um ein Resultat, welches nach dem Satz von ITÔ insgesamt stochastische Vorgänge beschreibt. Dies bedeutet insbesondere, daß Anfangsvektor sowie Driftvektor nur deterministisch sind, wenn sie mit der Wahrscheinlichkeit eins bestimmte Werte annehmen und nicht mit der Übergangswahrscheinlichkeit des weissen Rauschens beaufschlagt sind.

⁷ Aufgrund nicht deterministischer Anfangsbedingungen für \mathbf{z} geht die Differentialgleichung (3.28) auch mit verschwindender Fluktuation nicht in eine deterministische über; sie kann jedoch als quasi-deterministisch betrachtet werden.

Die Bildung der Erwartungswerte dieser Lösung werden durch die Unkorreliertheit der drei Summanden von \mathbf{z} sowie der deterministischen Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ vereinfacht. Die Mittelwertbildung erfolgt durch

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Z}(t)\} &= E \left\{ \Phi(t) \left(\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{f}_d(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right) \right\} \\ &= \Phi(t) \left(E\{\mathbf{z}_0\} + E \left\{ \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{f}_d(\tau) d\tau \right\} + E \left\{ \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right\} \right) \end{aligned}$$

mit der hier vorliegenden Bestimmtheit des zweiten Summanden sowie Gleichung (3.09)

$$E\{\mathbf{Z}(t)\} = \Phi(t) E\{\mathbf{z}_0\} + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \mathbf{f}_d(\tau) d\tau. \quad (3.33)$$

Ein Effekt, der auf den verschwindenden Mittelwert des weissen Rauschens zurückgeht, ist hier in der ausschließlichen Abhängigkeit des Mittelwertes von den "klassischen" Termen der Systemgleichung zu erkennen. Gleichwohl erhält man das gleiche Ergebnis wie aus einer nichtstochastischen Differentialgleichung, die in den Mittelwerten $\bar{\mathbf{z}}(t)$ des Zustandsvektors \mathbf{z} formuliert ist

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}(t) \bar{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{f}_d(t). \quad (3.34)$$

Die zentrale Autokorrelationsfunktion als Erwartungswert zweiter Ordnung berechnet sich in analoger Weise:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left(\mathbf{Z}(t_1) - E\{\mathbf{Z}(t_1)\} \right) \left(\mathbf{Z}(t_2) - E\{\mathbf{Z}(t_2)\} \right)^T \right\} \\ &= E \left\{ \left(\Phi(t_1) [\mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\}] + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\Phi(t_2) [\mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\}] + \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right)^T \right\} \\ &= \Phi(t_1) E \left\{ \left(\mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\} \right) \left(\mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\} \right)^T \right\} \Phi^T(t_2) \\ &\quad + \Phi(t_1) E \left\{ \mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\} \right\} E \left\{ \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right\}^T \Phi^T(t_2) \\ &\quad + \Phi(t_1) E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right\} E \left\{ \mathbf{z}_0 - E\{\mathbf{z}_0\} \right\}^T \Phi^T(t_2) \\ &\quad + \Phi(t_1) E \left\{ \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\mathbf{W}(\tau) \right)^T \right\} \Phi^T(t_2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Berücksichtigt man nun die Erwartungswerte des stochastischen Integrals (3.09) und (3.14), so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{zz}(t_1, t_2) &= \Phi(t_1) \mathbf{K}_{z_0 z_0} \Phi^T(t_2) + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^{T-1}(\tau) d\tau \Phi^T(t_2) \\ &= \Phi(t_1) \mathbf{K}_{z_0 z_0} \Phi^T(t_2) + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \Phi(t_1 - \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_2 - \tau) d\tau . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bei Gleichheit von t_1 und t_2 wird die Autokorrelationsmatrix definitionsgemäß zur Kovarianzmatrix

$$\mathbf{R}_{zz}(t) = \Phi(t) \mathbf{R}_{z_0 z_0} \Phi^T(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t - \tau) d\tau . \quad (3.37)$$

Durch Zeitableitung von \mathbf{R}_{zz} läßt sich zeigen, daß diese symmetrische Kovarianzmatrix die eindeutige, nicht-negativ definite Lösung der bilinearen LJAPUNOV-Differentialgleichung ist⁸

$$\dot{\mathbf{R}}_{zz}(t) = \mathbf{A} \mathbf{R}_{zz}(t) + \mathbf{R}_{zz}(t) \mathbf{A}^T + \mathbf{G}(t) \mathbf{G}^T(t) . \quad (3.38)$$

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß der Driftvektor \mathbf{f}_d verschwinde. die Koeffizientenmatrix \mathbf{G} zeitinvariant und der Anfangsvektor $\mathbf{z}(t_0)$ normalverteilt mit dem Mittelwert $\mathbf{0}$ und der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_0 sind.⁹ Für dieses Cauchyproblem existiert im allgemeinen eine Lösung, die einen stationären Gaußschen Prozeß mit verschwindendem Mittelwert und der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{zz} beschreibt, die der bilinearen LJAPUNOV-Gleichung genügt:

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{zz} + \mathbf{R}_{zz} \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{G}^T = \mathbf{0} . \quad (3.39)$$

Die Autokorrelationsmatrix wird in diesem Fall bestimmt durch:

$$\mathbf{K}_{zz}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{R}_{zz} \Phi^T(\tau) & \text{für } \tau \geq 0 , \\ \Phi(-\tau) \mathbf{R}_{zz} & \text{für } \tau \leq 0 . \end{cases} \quad (3.40)$$

⁸ \mathbf{G} ist als zeitvariante, aber von \mathbf{z} unabhängige Matrix zulässig. Bei Abweichung von dieser Einschränkung wird die LJAPUNOV-Differentialgleichung durch zusätzliche, nichtlineare Terme erweitert [4,38].

⁹ Diese Bedingungen folgen aus den in dieser Arbeit zugrundegelegten mechanischen Systemen unter nur stochastischer Last. Der Mittelwert sei durch eine Koordinatenfestlegung in der statischen Auslenkung auf Null festgelegt.

Für die Bestimmung der Kovarianzmatrix stellt dieser Lösungsweg ein numerisch stabiles Werkzeug dar, das gegenüber Verfahren, die die numerisch instabilere Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ enthalten, vorteilhaft ist. Dieses Verfahren wird in der Literatur als Kovarianzanalyse bezeichnet.

3.3 Existenz und Stabilität der Dauerlösung

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit einer mit der Wahrscheinlichkeit eins stetigen Lösung stochastischer Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{X})\xi \quad (3.41)$$

ist in Anlehnung an das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf gegeben, wenn eine positive Zahl K existiert,

die der modifizierten Lipschitz-Bedingung

$$\frac{|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{|\mathbf{G}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{G}(t, \mathbf{x}_2)|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \leq K \quad (3.42)$$

und der Wachstumsbeschränkung der Form

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|^2 + |\mathbf{G}(t, \mathbf{x})|^2 \leq K^2 (1 + |\mathbf{x}|^2) \quad (3.43)$$

genügt [20, 21]. Die modifizierte Lipschitz-Bedingung, die mit der Forderung nach stetigen ersten partiellen Ableitungen von \mathbf{f} und \mathbf{G} bezüglich aller Komponenten \mathbf{x} im betrachteten Zeitbereich gleichzusetzen ist, gewährleistet, daß das System langsamer reagiert als Änderungen in \mathbf{f} und \mathbf{G} eintreten.

Sind $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{x})$, so stellt für die autonome Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{G}(\mathbf{X})\xi \quad (3.44)$$

die Erfüllung der modifizierten Lipschitz-Bedingung

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)| + |\mathbf{G}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_2)| \leq K |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \quad (3.45)$$

ein, mit der Wahrscheinlichkeit eins. hinreichendes Kriterium für eine stetige Lösung dar, wenn gewährleistet ist, daß das System im betrachteten Zeitintervall keinen Explosionszeitpunkt hat.

Die Anwendung von (3.44) auf die Differentialgleichung (3.28) führt zu

$$|\mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)| \leq K |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|. \quad (3.46)$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung ist dieses dann erfüllt, wenn die euklidische Norm der Matrix \mathbf{A} endlich ist:

$$|\mathbf{A}| \leq K \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)| \leq K |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|. \quad (3.47)$$

Folglich existiert eine stetige Lösung bei zeitinvarianten Größen \mathbf{A} , \mathbf{f}_d und \mathbf{G} , wenn alle Elemente der Systemmatrix \mathbf{A} endlich sind. Die Existenz der beiden ersten Erwartungswerte ist damit jedoch nicht sichergestellt und muß gesondert untersucht werden.

In der Herleitung der Beziehungen (3.06) und (3.08) wurde die Existenz der gebildeten Erwartungswerte, insbesondere auch die der stochastischen Integrale, vorausgesetzt. Diese basiert auf der Meßbarkeit, also dem Nichtvorgreifen, von \mathbf{z} und der Endlichkeit der erfaßten Größen. Dies drückt sich in folgenden Forderungen aus:

$$E \left\{ \Phi(t-\tau) \mathbf{f}_d(\tau) \right\} < \infty, \quad (3.48)$$

$$E \left\{ \Phi(t-\tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t-\tau) \right\} < \infty. \quad (3.49)$$

Während die erstgenannte bei verschwindendem Driftvektor \mathbf{f}_d keinen Einfluß hat, ist zur Erfüllung der zweiten Ungleichung zu fordern, daß $\Phi(t)$ mit wachsender Zeit t nicht über alle Grenzen wächst. Diese Forderung, die nach Gleichung (3.07) mit jener nach einem stabilen Mittelwert identisch ist, wird genau dann erfüllt, wenn auch das deterministisch belastete System mindestens grenzstabil ist.

Da der Mittelwert grenzstabiler Systeme eine im allgemeinen von Null verschiedene Funktion der Zeit ist, kann in diesem Fall keine stationäre Lösung existieren. Aus diesem Grunde ist, zur Eingrenzung, die asymptotische Stabilität des Systems zu fordern. Im vorliegenden Fall dürfen folglich die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix nur negative Realteile haben.

Mit der Erfüllung dieser Voraussetzung konvergiert die Fundamentalmatrix des betrachteten Systems mit wachsendem t gegen die Nullmatrix:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \mathbf{0}. \quad (3.50)$$

Bei verschwindendem Driftvektor \mathbf{f}_d zeigt der Mittelwert eine asymptotische Annäherung an Null:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

Für die Kovarianzmatrix ergibt sich aus diesen Überlegungen, die gleichzeitig eine Beschränktheit von $\Phi(t)$ bedeuten, daß die Bedingung (3.49) erfüllt ist. Formt man die Gleichung (3.37) derart um

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0} - \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\infty} \mathbf{z}_{\infty}} \right) \Phi^T(t) + \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\infty} \mathbf{z}_{\infty}}. \quad (3.52)$$

mit der Lösung der LJAPUNOV-Gleichung (3.39) $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\infty} \mathbf{z}_{\infty}}$, wird das Abklingen der Anfangsbedingungen $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0}$ mit zunehmender Zeit deutlich. Dies bedeutet, daß eine stationäre Lösung existiert und auch stabil ist.

Die Korrelationszeit der stochastischen Komponente ist mit Wahrscheinlichkeit eins kleiner als die Reaktionszeit des mechanischen Systems. Nach BUCHER [9] folgt daraus, daß das ITÔ-Kalkül hier sinnvoll anwendbar ist.

4 Stochastische Belastung

4.1 Auswahl einer Lastform

Stochastische Prozesse werden mit dem Ziel betrachtet. Parameter zu gewinnen, die zur Grundlage weitergehender Betrachtungen gemacht werden können. Als Beispiel dieser Anwendungen sollen hier erwähnt werden:

- Die Simulation von Zufallsprozessen auf der Basis von Kenngrößen, die aus realen Messungen gewonnen wurden. Dieses wird z.B. für die realistische Gestaltung von Fahrzeugsimulatoren benötigt [2].
- Die direkte Verwendung dieser Kenngrößen in stochastischen Berechnungsverfahren, wie z.B. der Kovarianzanalyse. Auf diesen Fall soll die folgende Betrachtung beschränkt bleiben.

Direkte Verfahren zur Bestimmung von Antwortkenngößen gründen sich in den meisten Fällen auf dem ITÔ- oder STRATONOVICH-Kalkül. Diese wiederum gehen von Wiener Prozessen als inhomogenen Größen aus. Mit geeigneten Filtern können die gemessenen oder gewünschten Verhalten aus dem idealisierten Prozess synthetisiert werden. Zu dem verwendeten Filtern gehören:

- bandbegrenzende Filter (Tiefpass- und Hochpassfilter)
- Schmalbandfilter
- lineare Filter
- spezielle Filter.

Letztere werden vornehmlich zur Beschreibung sehr spezieller Vorgänge, wie z.B. Erdbebenbeschleunigungen, eingesetzt [35].

Während sich jedes der erwähnten Filter zur Anwendung innerhalb der Spektralmethode eignet, können für die Kovarianzanalyse nur lineare Filter verwendet werden.

Diese Filter werden durch lineare Differentialgleichungen

$$r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{r} + a_0 r = \xi \quad (4.01)$$

dargestellt. Den inhomogenen Term stellt weisses Rauschen ξ mit der Spektralleistung S_0 dar. Die Spektraldichtefunktionen $S(\omega)$ der Filterausgänge r ergeben:

- im Falle geradzahliger n :

$$S(\omega) = \frac{S_0}{\left((i\omega)^n + a_{n-2} (i\omega)^{n-2} + \dots - a_2 \omega^2 + a_0 \right)^2 + \omega^2 \left(a_{n-1} (i\omega)^{n-2} + \dots - a_3 \omega^2 + a_1 \right)^2} \quad (4.02)$$

- bei ungeraden n:

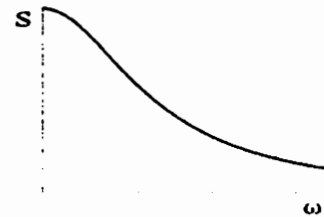
$$S(\omega) = \frac{S_0}{\left(a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots - a_2\omega^2 + a_0 \right)^2 + \omega^2 \left((i\omega)^{n-1} + a_{n-2}(i\omega)^{n-3} + \dots - a_3\omega^2 + a_1 \right)^2} \quad (4.03)$$

Für die ersten vier Filterordnungen ergeben sich folgende Spektralleistungen der Ausgänge:

erster Ordnung

Differentialgleichung: $\dot{r} + a_0 r = \xi$

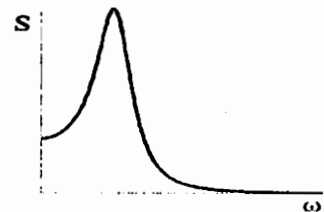
Spektralleistung: $S(\omega) = \frac{S_0}{a_0^2 + \omega^2}$



zweiter Ordnung

Differentialgleichung: $\ddot{r} + a_1 \dot{r} + a_0 r = \xi$

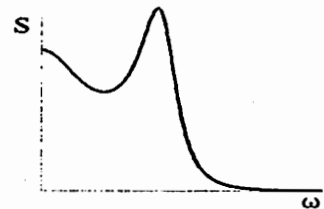
Spektralleistung: $S(\omega) = \frac{S_0}{(a_0 - \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}$



dritter Ordnung

Differentialgleichung: $\ddot{\dot{r}} + a_2 \ddot{r} + a_1 \dot{r} + a_0 r = \xi$

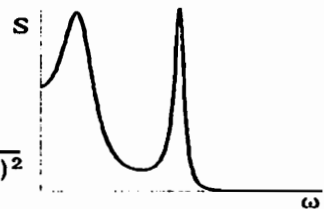
Spektralleistung: $S(\omega) = \frac{S_0}{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + \omega^2(a_1 - \omega^2)^2}$



vierter Ordnung

Differentialgleichung: $\ddot{\dot{\dot{r}}} + a_3 \ddot{\dot{r}} + a_2 \ddot{r} + a_1 \dot{r} + a_0 r = \xi$

Spektralleistung: $S(\omega) = \frac{S_0}{(a_0 - a_2\omega^2 + \omega^4)^2 + \omega^2(a_1 - a_3\omega^2)^2}$



Diese Filtertypen lassen sich in nahezu beliebiger Vielfalt kombinieren; die Spektralleistung des Ausgangs wird durch quadratische Multiplikationen der Eingangsmatrix mit der komplexen Frequenzgangmatrix \mathbf{F} erzeugt

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{F}_n(\omega) \dots \mathbf{F}_2(\omega) \mathbf{F}_1(\omega) \mathbf{S}_0 \mathbf{F}_1^*(-\omega) \mathbf{F}_2^*(-\omega) \dots \mathbf{F}_n^*(-\omega). \quad (4.04)$$

Aus diesen Überlegungen folgt auch, daß die Antworten linearer Systeme im allgemeinen und linearer mechanischer Systeme im speziellen bei Erregung mit stochastischen Lasten vom oben geschilderten Typus sind. Eine Folge hiervon ist, daß auch bei Ankopplung weiterer linearer Teilsysteme der Charakter der sich einstellenden Antwort vom gleichen Typus ist.

Für die Verwendung im Rahmen der Kovarianzanalyse ist eine Zerlegung des Lastspektrums in lineare Filterelemente erforderlich. Ein diesbezügliches Verfahren ist von GOBMAN [22] beschrieben worden.

In der Literatur werden, wie bereits erwähnt, noch andere Filtertypen vorgeschlagen. Im Rahmen der klassischen Filtertypen wird in vielen Anwendungen der Tiefpassfilter in Form des abgebrochenen weissen Rauschens verwendet. Für Erdbebenuntersuchungen wird von TAJIMI eine Kombination linearer Filter vorgeschlagen; IYENGAR hingegen verwendet Filter, deren Ausgangsspektrum durch Exponentialfunktionen beschrieben wird [35]. Bei diesen Anwendungsfällen ist die Auflagerbeschleunigung von elementarer Bedeutung; deren Leistungsspektrum ist aus dem der Auflagerverschiebung ableitbar:

$$S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega) \quad (4.05)$$

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega). \quad (4.06)$$

Ebenso wie die zugrundegelegten Idealprozesse sind auch die Filter nicht zwingend eindimensionale Größen. Deutlich wird dies bereits an einfachen Beispielen windbelasteter Bauwerke. Bezüglich der Problematik, die mit der Parameterbestimmung mehrdimensionaler Filter unter Berücksichtigung ihres Korrelationsverhaltens verbunden ist, wird an dieser Stelle auf die Arbeit von GOBMAN [22] verwiesen.

Filter erster Ordnung eignen sich zur Beschreibung der Brown'schen Bewegungen, von Strömungsturbulenzen und Fahrwegsunebenheiten [8]: Für letztere gilt diese Aussage jedoch nur begrenzt. Infolge von Resonanzerscheinungen zeigen sich dominante Frequenzbereiche.¹⁰ Gleiches zeigt sich bei Windbelastungen, die nach IYENGAR in stochastische und periodische Anteile aufspaltbar sind. Diese Effekte sind mit Filtern zweiter Ordnung beschreibbar [48].

¹⁰ Speziell zeigt sich dieses auf Fahrwegen, die in sehr hohem Maße durch gleichartige schwere Fahrzeuge belastet werden, wie z.B. an LKW-Steigungstrecken der Autobahnen.

Ein typischer Spektraldichteverlauf ist folgender [22]:

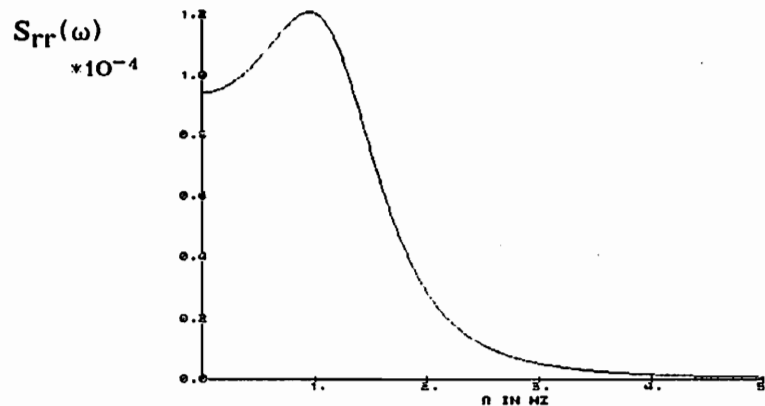


Abb. 4.1: Beispiel eines Fahrwegrauhigkeitsspektrums

Aber auch bei "glatten" Fahrwegen können zusätzliche Einflüsse, wie z.B. Unwuchten, ähnliche Verläufe bedingen.

Dieser qualitative Verlauf ist als besonders realistisch und anpassungsfähig anzusehen. Aus diesem Grunde wird im folgenden der lineare Filter zweiter Ordnung zur Modellierung der benutzten stochastischen Last verwendet.

4.2 Übergang von der stochastischen zur harmonischen Belastung

Durch Grenzübergang ist mit Hilfe eines Filters zweiter Ordnung eine quasi-harmonische Belastung erzeugbar. Im folgenden wird gezeigt, daß die aus harmonischen Belastungsannahmen hergeleiteten Beziehungen als Sonderfall in den stochastischen enthalten sind.

In die Differentialgleichung des Schwingers

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + k x = \tilde{F} r \quad (4.07)$$

bzw.

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x = \varphi r \quad (4.08)$$

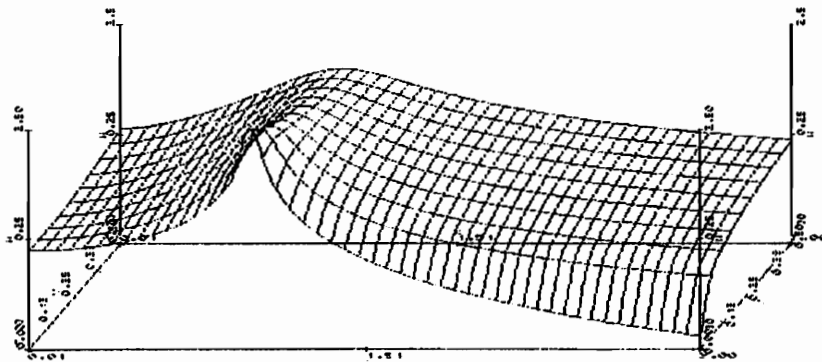
wird die Krafterregung über die zeitvariante Größe r als Antwort eines linearen Filters zweiter Ordnung auf einen Eingang weissen Rauschens ξ mit der Intensität Q aufgebracht:

$$\ddot{r} + a \dot{r} + b r = \xi. \quad (4.09)$$

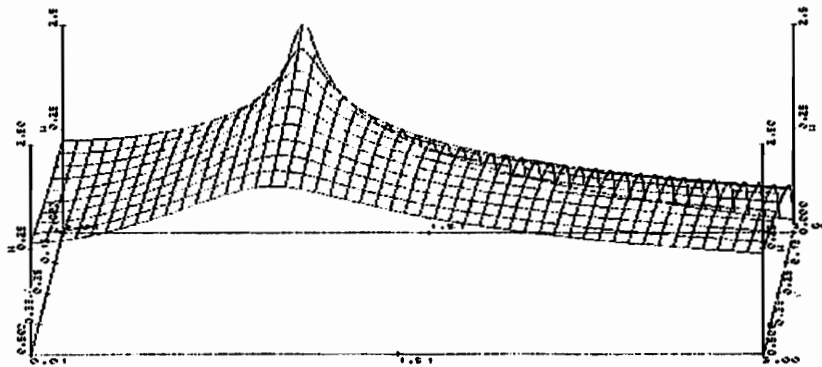
Die Spektraldichtefunktion von r

$$S_{rr}(\omega) = \frac{Q}{(\omega^2 - b)^2 + a^2 \omega^2} \quad (4.10)$$

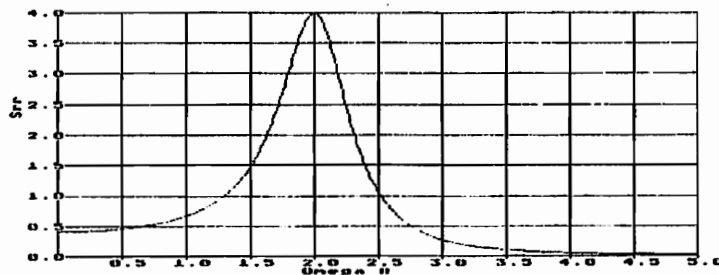
stellt sich bei Variation der Dämpfung bei konstanter Resonanzfrequenz räumlich wie folgt dar:



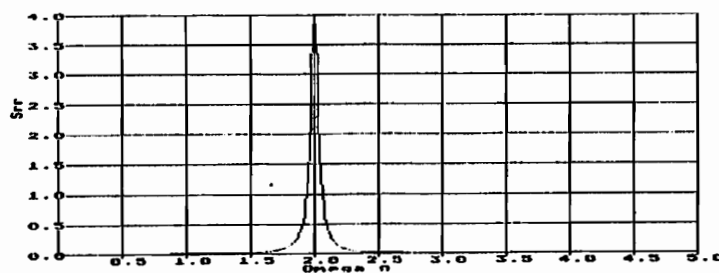
Aus einer anderen Perspektive betrachtet:



Der Spektraldichteverlauf des Filterausgangs r zeigt die typische Vergrößerung an einer definierten Frequenz Ω . Somit unterscheidet er sich signifikant vom Filter erster Ordnung [8].



Durch Verkleinerung der Fläche unter der Kurve geht diese in eine dem Dirac-Impuls vergleichbare Form über.



Im Gegensatz zu diesem bleiben die Spektralleistungen zwar stetig differenzierbar, sind aber nicht spiegelsymmetrisch bezüglich der Frequenz Ω . Im Grenzübergang mit minimierter Fläche bzw. maximierter Peakhöhe werden die Eigenschaften jedoch näherungsweise erreicht.

Es soll nun an diesem Beispiel nachgewiesen werden, daß die aus der harmonischen Analyse bekannte Lösung in der stochastischen enthalten ist. Zu diesem Zweck wird die Kovarianzuntersuchung mit einer Belastung durchgeführt, deren Spektralleistung durch eine sehr schmale, endlich hohe Funktion repräsentiert wird.

Zu diesem Zweck wird zunächst die Fläche unter der Spektralleistungskurve in der Form des quadratischen Erwartungswertes des Filterausgangs r bestimmt:

$$\begin{aligned}
 E\{rr\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S_{rr}(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q d\omega}{(\omega^2 - b)^2 + a^2 \omega^2} \\
 &= \frac{\pi Q}{b} \left\{ \frac{1}{4 \sqrt{b - a^2/4}} \ln \frac{\omega^2 - a\sqrt{2} + b}{\omega^2 + a\sqrt{2} + b} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a} \left(\arctan \frac{\sqrt{4\omega - 2\sqrt{b - a^2/4}}}{a} + \arctan \frac{\sqrt{4\omega + 2\sqrt{b - a^2/4}}}{a} \right) \right\}_0^{\infty} \\
 &= \frac{Q}{ab} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für schwach gedämpfte Filter, bei denen das Verhältnis von $E\{rr\}$ zu S sehr klein ist, lassen sich bei Vorgabe der Filterfrequenz Ω und der Peakhöhe S^* folgende Näherungen für die Filterparameter angeben:

$$a = E\{rr\} / S^* , \tag{4.12}$$

$$b = \Omega^2 , \tag{4.13}$$

$$Q = S^* a^2 b . \tag{4.14}$$

Setzt man dieses in die formale Lösung der LJAPUNOV-schen Matrizen-gleichung (3.39) ein, so geht die Kovarianz der Massenauslenkung

$$R_{xx} = \varphi^2 \frac{Q}{ab} \frac{(\chi - b + (\delta + a)(a + b/\delta)) / \chi}{(\chi - b)^2 + b\delta^2 + (\chi + b)a\delta + a^2 \chi} \tag{4.15}$$

über in

$$\begin{aligned}
 R_{xx} &= \varphi^2 \frac{Q}{ab} \frac{1}{(\Omega^2 - \chi)^2 + \delta^2 \Omega^2} \\
 &= E\{rr\} \frac{\varphi^2}{(\Omega^2 - \chi)^2 + \delta^2 \Omega^2} .
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Nach Substitution von x durch die Eigenfrequenz des ungedämpften mechanischen Schwingers ω^2 erkennt man das Quadrat der Vergrößerungsfunktion für harmonisch erregte Einmassenschwinger. Wird desweiteren der quadratische Erwartungswert $E\{rr\}$ durch die in diesem Fall identische Varianz der Filterantwort ersetzt, so zeigt sich erwartungsgemäß, daß sich die klassische, harmonische Belastungsrechnung als Sonderfall der stochastischen Lösung darstellen läßt.

5 Anwendung der Kovarianzanalyse

5.1 Berechnung der Varianz für Kontinua

Die Berechnung der Varianz der Auslenkung $w(x, t)$ und der Geschwindigkeit $v(x, t)$ ist nur durch hohen Einsatz analytischer und numerischer Berechnungsmethoden möglich. Im Falle schwach gedämpfter Bernoulli-Euler-Balken unter einer diskreten stochastischen Last ist ein Verfahren auf der Basis modaler Entkopplung angebar.

Die Differentialgleichung des Schwingers

$$\rho A \ddot{w}(x, t) + d \dot{w}(x, t) + EI w''''(x, t) = q(x, t) \quad (5.01)$$

ist bei schwachen Dämpfungen modal transformierbar mit den Lösungen des selbstadjungierten, voll-definiten Eigenwertproblems des ungedämpften Systems.

$$EI \psi_i''''(x) - \rho A \omega_i^2 \psi_i(x) = 0 \quad (5.02)$$

Unter Ausnutzung der verallgemeinerten Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_1 \psi_i(x) \rho A \psi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (5.03)$$

überführt der Separationsansatz

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) \psi_i(x) \quad (5.04)$$

und
$$q(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \psi_i(x) \quad (5.05)$$

mit
$$q_i(t) = \frac{\int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx}{\int_0^1 \psi_i^2(x) dx} = v_i^{-2} \int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx \quad (5.06)$$

die Differentialgleichung über in die Summe¹¹

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\rho A \ddot{w}_i + d \dot{w}_i + \rho A \omega_i^2 w_i - q_i) \psi_i = 0. \quad (5.07)$$

¹¹ Im Folgenden werden $w_i(t)$ durch w_i und $\psi_i(x)$ durch ψ_i ersetzt.

Die gesuchten Varianzen ergeben sich formal unter Beachtung der stochastischen Unabhängigkeit der Eigenfunktionen ψ_i von den Zeitfunktionen w_i zu

$$R_{ww} = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} E\{\psi_i w_i w_j \psi_j\} = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \psi_i \psi_j E\{w_i w_j\}, \quad (5.08)$$

$$R_{\dot{w}\dot{w}} = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} E\{\psi_i \dot{w}_i \dot{w}_j \psi_j\} = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \psi_i \psi_j E\{\dot{w}_i \dot{w}_j\}. \quad (5.09)$$

Die Kovarianzen $E\{w_i w_j\}$ und $E\{\dot{w}_i \dot{w}_j\}$ werden mittels der LJAPUNOV-Gleichung aus Gleichung (3.39) berechnet.

Betrachtet man den Sonderfall eines Balkens, der an der Stelle a durch eine weiss-verrauschte diskrete Kraft belastet wird, ergibt sich:

$$q_i = v_i^{-2} \int_0^l q \psi_i dx = v_i^{-2} \psi_i(a) Q \xi; \quad (5.10)$$

daraus folgt $E\{w_i w_j\} = \frac{S_0 \psi_i(a) \psi_j(a)}{v_i^2 v_j^2 \rho A (d^2(\omega_i^2 + \omega_j^2) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 \rho^2 A^2 / 2)},$ (5.12)

$$E\{\dot{w}_i \dot{w}_j\} = \frac{S_0 \psi_i(a) \psi_j(a) (\omega_i^2 + \omega_j^2)}{v_i^2 v_j^2 \rho A (2d^2(\omega_i^2 + \omega_j^2) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 \rho^2 A^2)}. \quad (5.13)$$

Die Kovarianz der Auslenkung und der Geschwindigkeit lautet nun

$$R_{ww}(x) = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \psi_i(x) \psi_j(x) \psi_i(a) \psi_j(a) \frac{S_0}{v_i^2 v_j^2 \rho A (d^2(\omega_i^2 + \omega_j^2) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 \rho^2 A^2 / 2)}, \quad (5.14)$$

$$R_{\dot{w}\dot{w}}(x) = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \psi_i(x) \psi_j(x) \psi_i(a) \psi_j(a) \frac{S_0 (\omega_i^2 + \omega_j^2)}{v_i^2 v_j^2 \rho A (2d^2(\omega_i^2 + \omega_j^2) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 \rho^2 A^2)}. \quad (5.15)$$

In dieser Lösung treten die kovarianten Einflüsse in Form der Summanden mit ungleichen Indizes auf. Aufgrund der hohen Nennerpotenzen werden diese Terme im Vergleich zu jenen gleicher Indizierung keine bzw. nur sehr eingeschränkte Bedeutung in den Gesamtausdrücken haben. In älteren Literaturquellen wird deshalb nur mit den varianten Einflüssen gerechnet; die kovarianten fehlen zum Teil ohne Nachweis ihrer Vernachlässigbarkeit.

Unter Anwendung dieser Näherung stellt sich die Auslenkungsvarianz als Reihe mit stark gegen Null konvergierenden Summanden dar. Neben der nach Leibnitz nachweisbaren eindeutigen Existenz einer endlichen Reihen-

lösung folgt für die numerische Auswertung, daß diese aufgrund starker Konvergenz mit relativ wenigen Termen zu guten Ergebnissen gelangt.

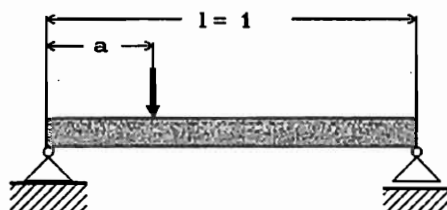
Anders hingegen verhält sich die Geschwindigkeitsvarianz. Die Konvergenz der Reihe ist hier nicht erkennbar. Die an seine Endlichkeit gebundene Existenz des Erwartungswertes liegt nicht vor. Die Varianz der Geschwindigkeit ist folglich nicht bestimmbar.

ELISHAKOFF [16] schlägt zur Lösung dieses Dilemmas vor, das weiße Rauschen durch bandbegrenztes weisses Rauschen zu substituieren. Dies erfordert zwar einen Lösungsgang, der nicht die LJAPUNOV-Gleichung, sondern die Transformation in den Frequenzraum beinhaltet, führt aber schließlich auf die Aussage, daß Eigenfrequenzen oberhalb der Rauschgrenzfrequenz nur noch verschwindenden Einfluß auf die Reihe haben. Die unendliche Reihe ist somit durch eine endliche ersetzbar; die Anzahl der Reihenglieder richtet sich nach dem Verhältnis von Eigenfrequenzanstieg zu Grenzfrequenz.

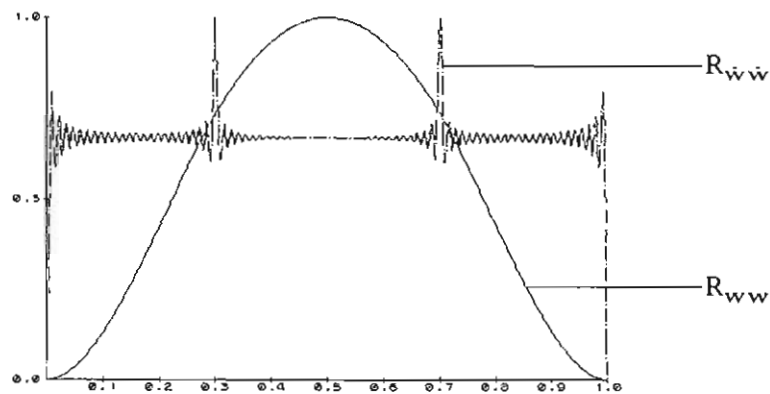
Diesem Vorschlag folgend, zeigen die gewonnenen Resultate speziell in der Geschwindigkeitsvarianz interessante Eigenschaften:

- 1) Aufgrund der gleichmäßigen Anregung relativ vieler Eigenformen zeigt der quadratische Erwartungswert der Geschwindigkeit einen nahezu konstanten Verlauf. Die Übergänge zu den Punkten mit geometrischen Randbedingungen werden quasi sprunghaft vollzogen.
- 2) An der Stelle der Krafteinleitung tritt eine signifikante Varianzspitze auf. Ihre Form entwickelt sich von weichen harmonischen Zügen mit zunehmender Zahl berücksichtigter Eigenformen/werte zu einem singulären Peak.
- 3) Diese Spitze ist auch an dem zum Krafteinleitungspunkt symmetrischen Punkt zu beobachten. Diese Eigenschaft läßt sich mit einem Wellenmodell erklären, in dem sich Störungen von der Krafteinleitung ausdehnen und durch Interferenzerscheinung zur symmetrischen Spitzenbildung führen.

An zwei Beispielen soll das bisher Erwähnte verdeutlicht werden. Ein einfacher Balken auf zwei Stützen der Länge eins ist an der Stelle $a=0.3$ stochastisch belastet:

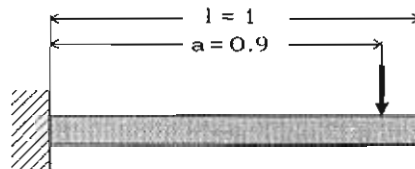


Die auf den größten vorkommenden Wert normierten Graphen zeigen folgenden Verlauf über die Stablänge.

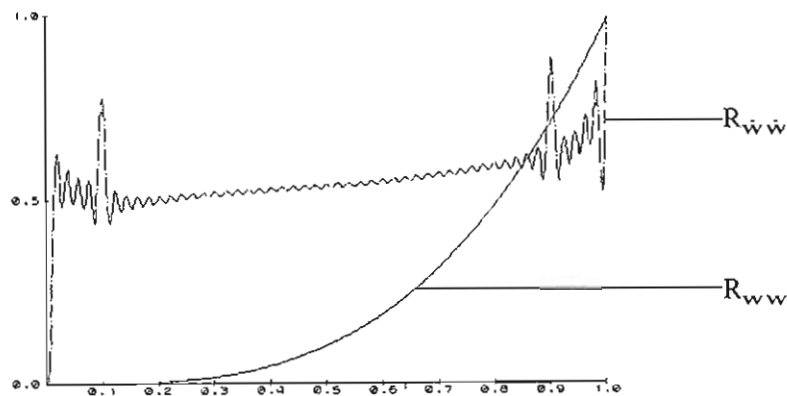


In diesem Beispiel wurden 80 Eigenformen des Balkens berücksichtigt. Deutlich ist der konstante Verlauf der Geschwindigkeitsvarianz $R_{\dot{w}\dot{w}}$ mit den ausgeprägten Spitzen zu erkennen. Die Auslenkungsvarianz zeigt hingegen einen glatten Verlauf. Im Gegensatz zu deterministischen Belastungsformen, in denen die Belastungsstelle in der Regel im Verschiebungsfeld erkennbar wird, ist hier keinerlei Hinweis auf diese Stelle zu finden; trotz asymmetrischer Last ergibt sich ein symmetrischer Auslenkungsvarianzverlauf.

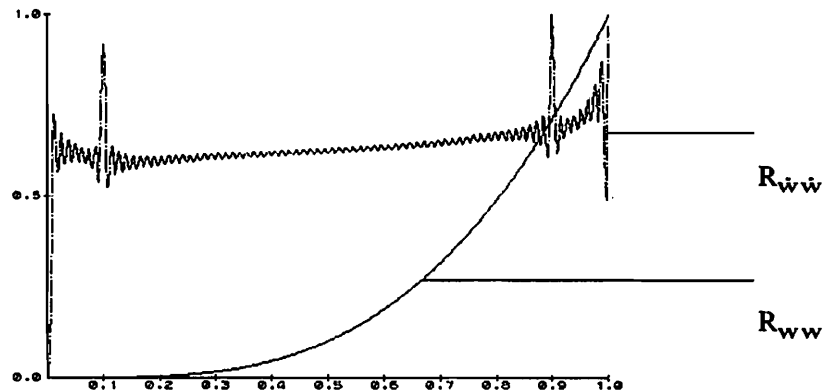
Am zweiten Beispiel, einem Kragbalken, wird der Einfluß der Zahl berücksichtigter Eigenformen auf den Verlauf der Varianzen gezeigt:



Bei 50 Eigenformen ergibt sich



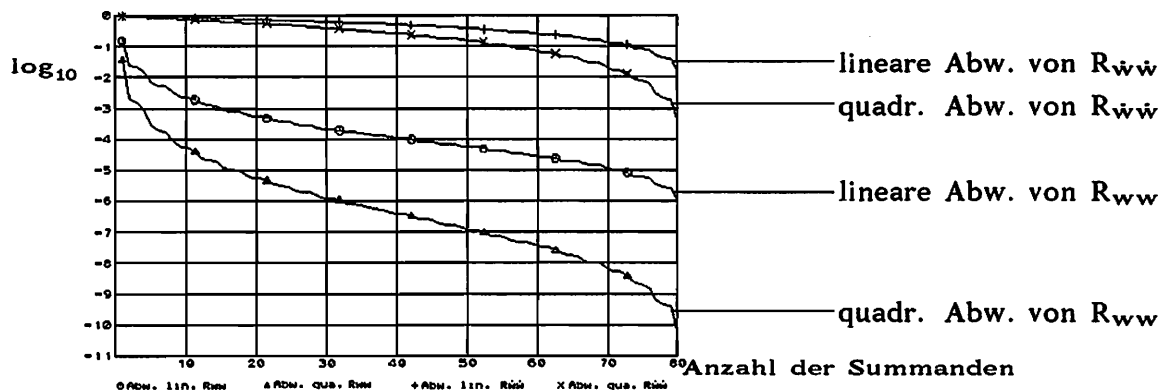
bei 80 Eigenformen verändern sich die Verläufe in



Im Vergleich der beiden Diagramme fallen drei Aspekte auf:

- 1) Die Auslenkungsvarianz zeigt qualitativ keine Änderung; dies verdeutlicht das oben erwähnte Konvergenzverhalten der Reihe.
- 2) Wie im ersten Beispiel zeigen sich Spitzen in der Geschwindigkeitsvarianz an der Krafteinleitungsstelle und dem symmetrischen Reflexionspunkt. Diese Spitzen werden mit zunehmender Zahl berücksichtigter Eigenfrequenzen, also wachsender Grenzfrequenz, schmaler und höher.¹²
- 3) Zwischen den Spitzen sind die Schwankungen der Geschwindigkeitsvarianz vergleichsweise gering, während außerhalb deutliche Randeffekte auftreten. Die Schwankungsbreite wird mit wachsender Grenzfrequenz kleiner.¹³

Abschließend wird an Hand des ersten Beispiels das Konvergenzverhalten unter quantitativen Gesichtspunkten beleuchtet. Zu diesem Zweck werden die auf einen auf die maximale Zahl von 80 Reihentermen bezogenen Abbruchfehler analysiert. Der Fehler wird auf der Basis von 500 Stützstellen linear und quadratisch ermittelt; die folgende Darstellung zeigt den dekadischen Logarithmus dieser Werte.



¹² Der Rückschluß, daß sich dieser bei gegen unendlich gehender Grenzfrequenz zu einem Dirac-förmigen Impuls über einem sonst konstanten Verlauf entwickelt, ist wegen der nicht vorliegenden Konvergenz unmöglich.

¹³ Man beachte, daß es sich um normierte Darstellungen handelt, die nur qualitative Schlußfolgerungen zulassen.

Deutlich ist das erwartete schlechte Annäherungsverhalten der Geschwindigkeitsvarianz zu erkennen. Sehr gut hingegen konvergiert die Auslenkungsvarianz. Bei einer vergleichsweise geringen Zahl von 10 Reihengliedern sind die Abweichungen bereits auf wenige Promille bzw. hundertstel Promille abgesunken.

Weitere, für andere Beispiele durchgeführte numerische Untersuchungen zeigten das gleiche Konvergenzverhalten der Auslenkungsvarianz. Daraus ist zu schließen, daß auch bei weißem Rauschen, gleichbedeutend mit unendlich hoher Grenzfrequenz, eine Berücksichtigung weniger Eigenfrequenzen bereits Ergebnisse bringt, die im ingenieurmäßigen Toleranzbereich liegen. Dies bedeutet für die später folgende Finite-Element-Approximation des kontinuierlichen Systems, daß eine Berechnung mit 15 bis 20 Elementen zu ausreichenden Resultaten führt.

Der dargestellte Berechnungsweg ist prinzipiell auch auf andere Probleme anwendbar, vorausgesetzt alle Eigenformen können in geschlossener Form angegeben werden und deren Quadrate sind integrierbar.

Dieses Verfahren kann somit dazu dienen, den für eine geforderte Genauigkeit erforderlichen Diskretisierungsaufwand abzuschätzen bzw. die Güte einer vorliegenden Finite-Element-Berechnung näherungsweise zu bestimmen.

5.2 Einschwingverhalten eines Einmassenschwingers

Aus der in Abschnitt 3.3 gezeigten Existenz einer stationären Lösung kann keine Schlußfolgerung auf den Zeitpunkt durchgeführt werden, ab dem der Prozeß mit beliebigen Anfangsbedingungen stationär wird oder als stationär angenommen werden kann. Im Rahmen der Korrelationstheorie beschränkt sich dieses Problem auf die Frage nach der schwachen Stationarität der Systemantwort; insbesondere ist für diese Arbeit die Stationarität der Kovarianzfunktion von Bedeutung.

HENNING und HEINRICH [23] schlagen vor, die Stationarität der Varianz eines Zufallsprozesses bei erstmaliger Erreichung von 95% des theoretisch stationären Wertes anzunehmen. Für den Einmassenschwinger folgt, wie im Anhang gezeigt, eine Einschwingzeit von

$$T_E = \frac{\pi}{2D\omega_0} = \frac{m\pi}{d} \quad (5.16)$$

Numerische Untersuchungen ergaben, daß sich auch Schwinger unter farbiger Erregung, erzeugt durch lineare Filter erster und zweiter Ordnung, gleichartig verhalten; die System-Einschwingzeit richtet sich nach der, im betrachteten Differentialgleichungssystem vorkommenden, niedrigsten

Eigenfrequenz. Ausgegangen wurde bei diesen Untersuchungen von ruhenden Systemen, die ab dem zeitlichen Nullpunkt mit weissem Rauschen beaufschlagt wurden. Entkoppelbare Mehrmassenschwinger zeigten gleichartiges Verhalten.

Da das mathematische Filter nur dazu dient, aus weissem Rauschen eine stochastische Last mit bestimmten Kenngrößen zu modellieren, ist es im Rahmen ingenieurmäßiger Betrachtungen nur sinnvoll, das Filter als eingeschwungen zu betrachten. Daher ist zu fragen, wann ein mechanisches System unter dieser Bedingung als eingeschwungen betrachtet werden kann.

Da dieses Problem nicht analytisch lösbar ist, soll für die in dieser Arbeit verwendeten Filter erster und zweiter Ordnung eine Lösung durch numerische Untersuchungen an Einmassenschwingern gegeben werden.

Die Differentialgleichung des Schwingers

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = r \quad (5.17)$$

mit dem inhomogenen Term r , dem Ausgang eines linearen Filters mit eingangsseitigem weissem Rauschen, wird unter Einbeziehung der Filterdifferentialgleichung auf eine Gleichung erster Ordnung transformiert. Die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors ergibt sich aus der Lösung der bilinearen LJAPUNOV-Differentialgleichung (3.38) mit der Anfangsbedingung eines ruhenden mechanischen Systems. Das zu lösende System wird unter Beachtung des bereits stationären Filteranteils zu einem nicht quadratischen Satz gekoppelter Differentialgleichungen. Dieser läßt sich mit Hilfe üblicher Zeitintegrationsverfahren lösen.

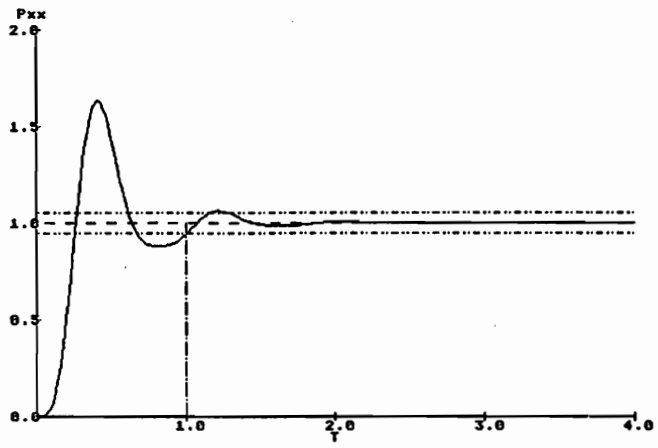
Wird der Schwinger mit dem stationären Ausgangssignal eines Filters erster Ordnung

$$\dot{r} + \omega_F r = a \xi \quad (5.18)$$

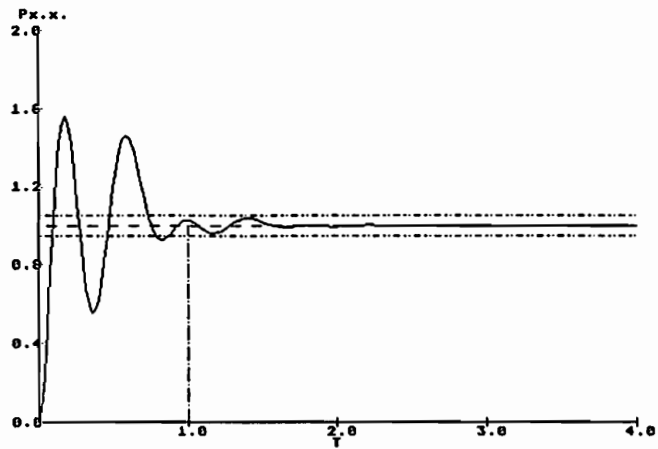
beaufschlagt, zeigt sich ein deutliches Überschwingverhalten der Varianzen, welches umso größer wird, je kleiner das Verhältnis von ω_0 zu ω_F wird.¹⁴

¹⁴ Die im Folgenden verwendeten Zeiten sind auf T_E nach Gleichung (5.16) normiert, die Ordinaten sind auf die Dauerlösung normiert.

Auslenkung

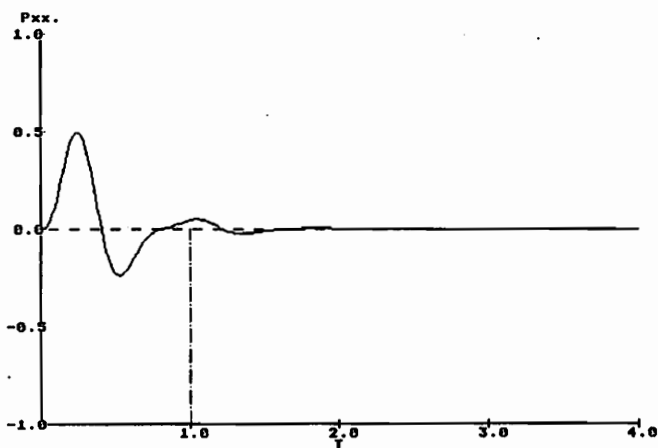


Geschwindigkeit



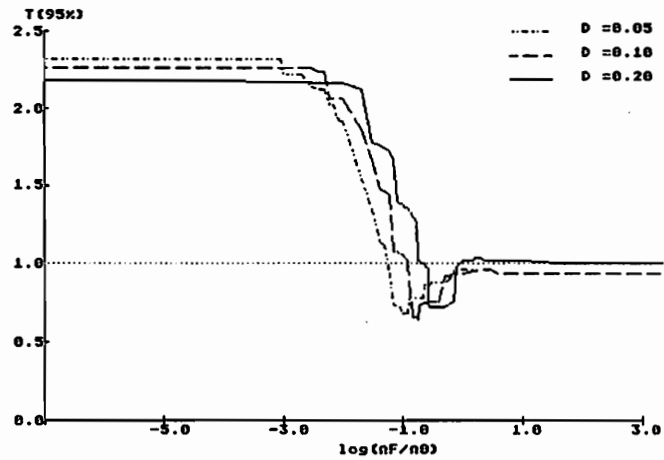
Die Konvergenz zeigt sich auch in der Kovarianz, die in der Dauerlösung verschwindet.

Kovarianz Auslenkung/Geschwindigkeit

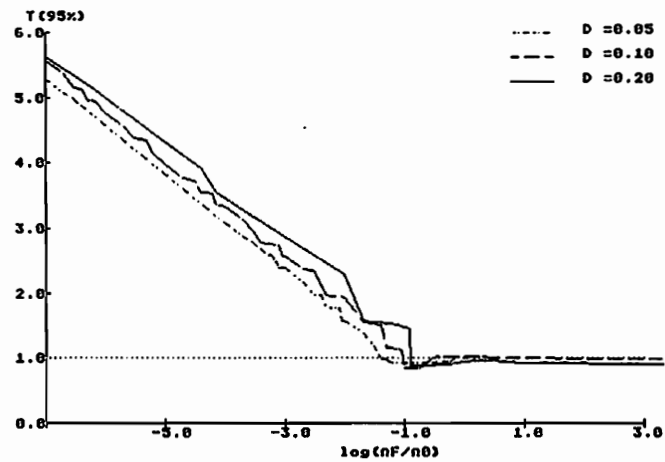


Die Zeiten, die erforderlich sind, um letztmalig in ein 5%-Band um die stationäre Lösung einzutauchen, sind für verschiedene Dämpfungen D in den folgenden Graphen dargestellt.

Auslenkung



Geschwindigkeit



Beiden Diagrammen ist gemein, daß die Einschwingzeit für große ω_F gegen die Zeit bei Anregung durch weisses Rauschen konvergiert. Für, bezogen auf die Eigenfrequenz ω_0 , kleine Werte von ω_F zeigt die Auslenkungsvarianz nach einem Übergangsbereich eine konstante Einschwingzeit T_{E1A} . Für diese gilt sicher:

$$T_{E1A} < 2.5 T_E = \frac{1.25\pi}{D\omega_0} . \quad (5.19)$$

Die Einschwingzeit T_{E1G} der Geschwindigkeitsvarianz läßt sich approximieren durch

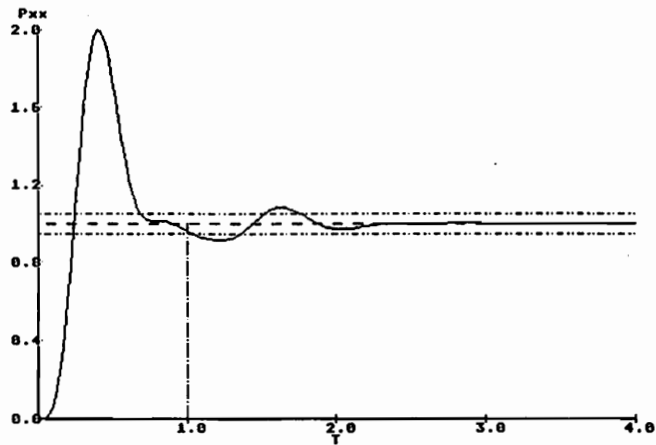
$$T_{E1G} < (1.1 - 0.7 \log_{10} \frac{\omega_F}{\omega_0}) T_E . \quad (5.20)$$

Unter Verwendung eines Filters zweiter Ordnung

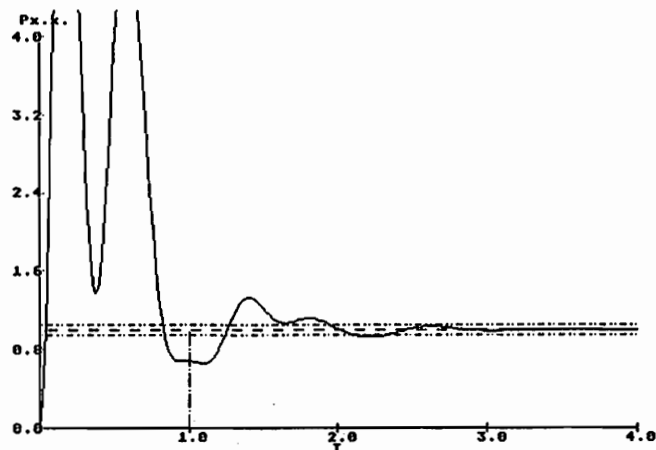
$$\ddot{r} + 2D_F \omega_F \dot{r} + \omega_F^2 r = b \xi \quad (5.21)$$

zeigt sich ein ähnlich unterschiedliches Einschwingverhalten. Insbesondere fällt die starke Überschwingneigung der Geschwindigkeitsvarianz auf.

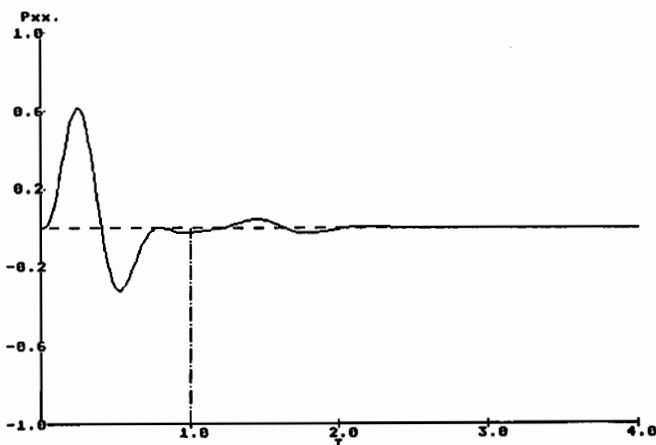
Auslenkung



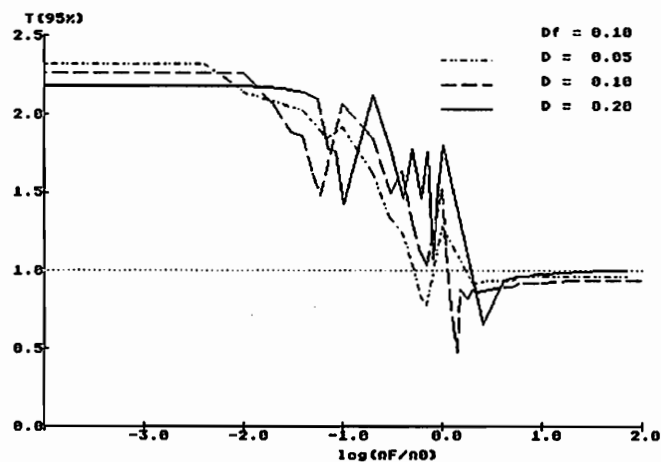
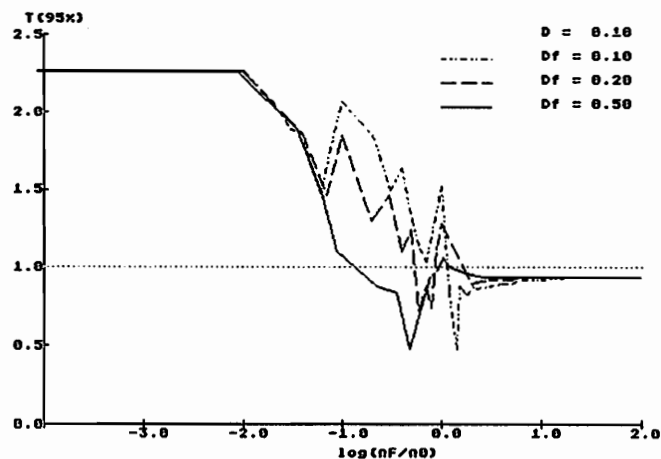
Geschwindigkeit



Kovarianz Auslenkung/Geschwindigkeit

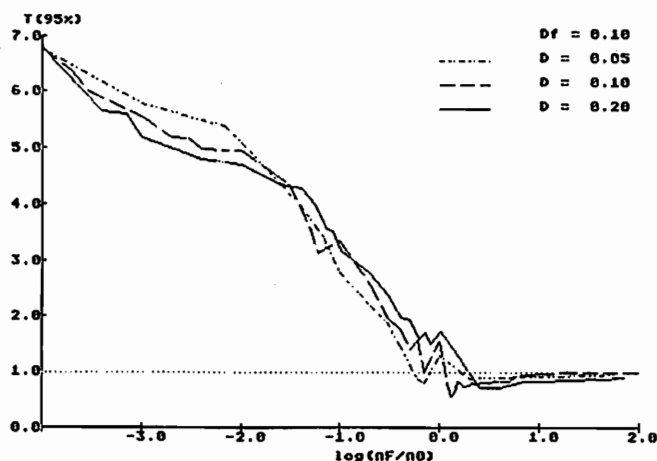
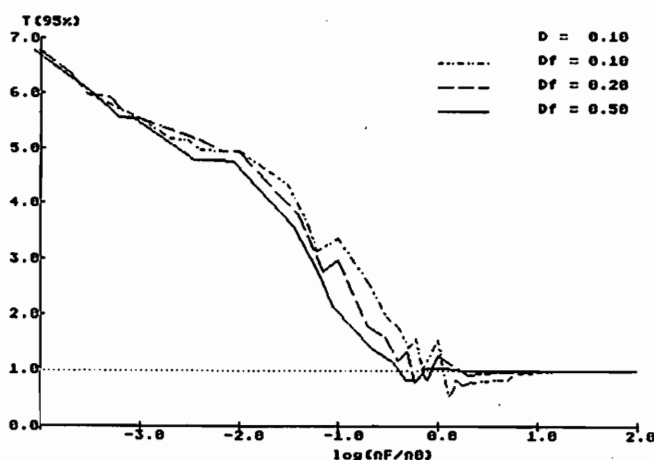


Die folgenden Darstellungen zeigen die Einschwingdauer der Auslenkungsvarianz für verschiedene Kombinationen von mechanischer Dämpfung D und Filterdämpfung D_F .



Zu erkennen ist das schon bekannte Verhalten, nach dem T_E sowohl für kleine ($\omega_F < 10^{-3} \omega_0$) als auch große Filterfrequenzen ($\omega_F > \omega_0$) gegen die gleichen Grenzen konvergiert, die bereits beim Filter erster Ordnung bestimmt wurden. Im Übergangsbereich zeigen sich resonanzbedingt stärkere Schwankungen, für die jedoch nach den Erfahrungen aus unterschiedlichen Rechnungen T_{E1A} eine Obergrenze bildet.

Die Betrachtung der Einschwingzeit der Geschwindigkeitsvarianz zeigt qualitativ das bekannte Verhalten.



In diesem Fall ist die Obergrenze der Einschwingdauer mit

$$T_{E2G} < (2.4 - 0.82 \log_{10} \frac{\omega_E}{\omega_0}) T_E \quad (5.22)$$

sicher anzugeben; sie liegt damit im Mittel um 50% höher als bei Verwendung des Filters erster Ordnung.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

- Wie von ELISHAKOFF beschrieben, wird das Einschwingverhalten unabhängig vom Verhältnis der charakteristischen Parameter von Filter und Schwinger, wenn das Filterspektrum die Eigenfrequenzen des mechanischen Schwingers hinreichend einschließt. In diesem Fall schwingt ein System unter farbiger Erregung genauso ein, wie es ein weiß erregtes tun würde.

- Das Verhalten im Einschwingverhalten von Geschwindigkeits- und Auslenkungsvarianz ist unterschiedlich. Während letztere beiderseits eines Übergangsbereiches konstante Werte annimmt, steigen diese im anderen Fall ohne erkennbare Grenze an. Im untersuchten Bereich bleiben sie jedoch mehrere Größenordnungen unter denen, die sich unter der Annahme eines miteinschwingenden Filters einstellen würden.
- Diese Beispiele und jene, die PRADLWARTER und CHEN [44] für ähnliche Belastungsspektren zeigten, stellen die Zulässigkeit der Stationaritätsannahme bei Erdbebenuntersuchungen, wie sie u.a. von FARAVELLI [18] gemacht werden, mit dem Überschwingen der Varianzen in der Einschwingphase stark in Frage.

5.3 Anwendung auf diskretisierte Bauteile

Die vorliegenden Differentialgleichungen sind vom hyperbolischen Typ und sind im allgemeinen nicht geschlossen lösbar. Dies gilt insbesondere, wenn die auftretenden Koeffizienten nicht konstant sind.

Mit der Einführung digitaler Rechenanlagen in den letzten Jahrzehnten wurden numerische Näherungsverfahren zur Lösung analytisch nicht lösbarer Probleme entwickelt. Die wichtigsten sind das Differenzen-, das Übertragungsmatrizen- und das Finite-Element-Verfahren. Zu diesen, in den Ingenieurwissenschaften allgemein sehr verbreiteten, Verfahren ist auf dem Gebiet der Mechanik seit einigen Jahren noch das Mehrkörperverfahren zu zählen.

Die mit den Näherungen verbundenen Nachteile, wie hoher Rechen- und Speicherplatzbedarf zur Erlangung genauerer Ergebnisse, haben im Laufe der letzten Jahre an Relevanz eingebüßt. Neben der Verfügbarkeit besserer Verfahren resultiert dieses nicht zuletzt aus steigender Leistungsfähigkeit digitaler Anlagen bei gleichzeitig sinkenden Kosten für Rechner und Speicher.

Für die Anwendung auf dem Gebiet der Strukturoptimierung ist es in Anbetracht sehr hoher Rechenzeiten wichtig, ein möglichst schnelles und einfaches Verfahren zu nutzen, das jedoch auch den Anforderungen hinreichender Genauigkeit genügen muß. Die Literatur der letzten Jahre [8, 10, 33] zeigt, daß die Finite-Element-Methode diese Forderungen in vielerlei Hinsicht erfüllt und daher stetig steigende Bedeutung gewinnt.

Grundidee dieses Verfahrens ist es, daß große Strukturen in diskrete Elemente zerlegt werden. Für diese Elemente werden die Schnittkräfte in vorgegebenen Knotenpunkten exakt oder näherungsweise in Beziehung gebracht. Hierfür sind unterschiedliche Verfahren anzuführen: Variationsrechnungen [32], Prinzipien virtueller Arbeit [10], Prinzip gewichteter Residuen [43], direkte Methoden der Elementformulierungen [19] und viele mehr. An dieser Stelle sei auf das reichhaltige Literaturangebot zu diesem Thema verwiesen, wie z.B. [1, 7, 19, 56].

5.3.1 Gemeinsame Voraussetzungen

Für alle berechneten Beispiele wird vorausgesetzt, daß

- die verwendeten Werkstoffe homogen und isotrop seien,
- ein linear elastisches, isothermes Materialverhalten vorliege und
- Formänderungen in Relation zum gültigen Bezugsmaß klein seien.

Diese letzte Bedingung hat zur Folge, daß Bilanzgleichungen an der unverformten Konfiguration angesetzt und daß Verzerrungen superponiert werden können.

Das linear elastische Materialverhalten wird durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben

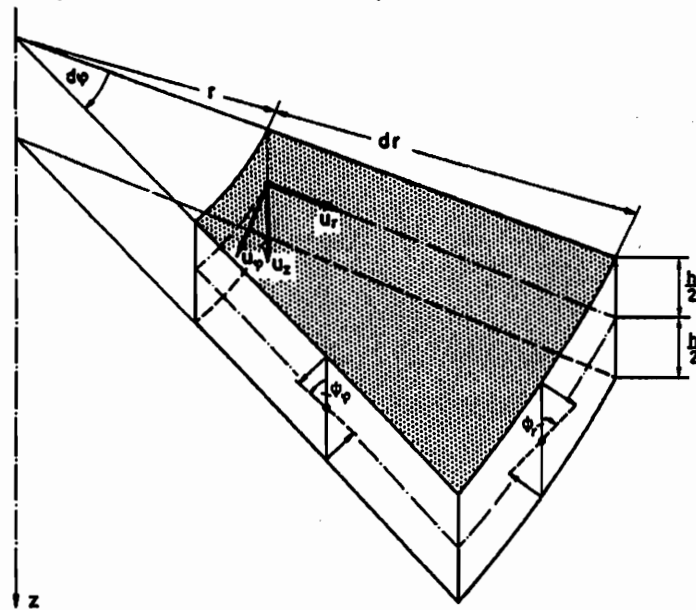
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{xx} - \nu \left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) \right\}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{yy} - \nu \left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx} \right) \right\}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{zz} - \nu \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right) \right\}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx},
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

das hier in karthesischen Koordinaten (x, y, z) angegeben ist.

Die Verzerrungen ε sind mit den Verschiebungen u in der linearen Theorie durch folgende kinematischen Beziehungen verknüpft:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right\}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right\}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Übertragen auf Zylinderkoordinaten (r, φ, z)



lauten diese Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right\}, \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right\}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

5.3.2 Ermittlung der Vergleichspannungsvarianz

In den Anwendungsfällen wird von rein elastischen Verformungen zäher Werkstoffe ausgegangen. Von Huber, v. Mises und Hencky ist für diesen Fall die Gestaltänderungsarbeitshypothese zur Bestimmung der Vergleichsspannung σ_v vorgeschlagen worden. Formuliert in der zweiten Invariante des Spannungsdeviators T_2 lautet diese:

$$\sigma_v = \sqrt{1.5 T_2} \tag{5.26}$$

$$= \sqrt{1.5 \sum_i \sum_k \tau_{ik} \tau_{ki}} \tag{5.27}$$

mit $\tau_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma_m$ (5.28)

und $\sigma_m = 1/3 \sum_i \sigma_{ii}$. (5.29)

Für einige Sonderfälle ergeben sich somit folgende Vergleichsspannungen:

- einachsige Normalspannung mit Scherung:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad , \quad (5.30)$$

- zweiachsiger Spannungszustand:

$$\sigma_v = \sqrt{3/4 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 3\sigma_{xy}^2} \quad , \quad (5.31)$$

handelt es sich um ein Hauptachsensystem:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad , \quad (5.32)$$

- dreiachsiger Hauptspannungszustand:

$$\sigma_v = \sqrt{1/2 \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}} \quad . \quad (5.33)$$

Bei linearem Materialverhalten können diese Beziehungen auf die Bestimmung der Vergleichsspannungsvarianz angewendet werden. Beispielhaft wird dies am Beispiel der zweiachsigen Normalbeanspruchung gezeigt:

$$\begin{aligned} E\{\sigma_v\sigma_v\} &= E\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\} \\ &= E\{\sigma_1^2\} + E\{\sigma_2^2\} - E\{\sigma_1\sigma_2\} \\ &= E\{\sigma_1\sigma_1^T\} + E\{\sigma_2\sigma_2^T\} - E\{\sigma_1\sigma_2^T\} \quad . \end{aligned} \quad (5.34)$$

In diese Gleichung wird der Spannungsansatz der Finite-Element-Berechnung:

$$\sigma = \mathbf{C} \mathbf{B} \delta \quad (5.35)$$

in seinen Komponenten einbezogen:

$$E\{\sigma_v\sigma_v\} = E\{(\mathbf{C}\mathbf{B})_1 \delta \delta^T (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_1\} + E\{(\mathbf{C}\mathbf{B})_2 \delta \delta^T (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2\} + E\{(\mathbf{C}\mathbf{B})_1 \delta \delta^T (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2\} \quad . \quad (5.36)$$

Nach der Ausklammerung deterministischer Anteile aus der Erwartungswertbildung zeigt sich der Zusammenhang zwischen der Vergleichsspannungsvarianz und der Kovarianzmatrix der Auslenkung:

$$\begin{aligned} E\{\sigma_v\sigma_v\} &= (\mathbf{C}\mathbf{B})_1 E\{\delta \delta^T\} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_1 + (\mathbf{C}\mathbf{B})_2 E\{\delta \delta^T\} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2 + (\mathbf{C}\mathbf{B})_1 E\{\delta \delta^T\} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2 \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{B})_1 \mathbf{R}_{\delta\delta} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_1 + (\mathbf{C}\mathbf{B})_2 \mathbf{R}_{\delta\delta} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2 + (\mathbf{C}\mathbf{B})_1 \mathbf{R}_{\delta\delta} (\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T)_2 \quad . \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.3.3 Stäbe

Im folgenden Abschnitt werden Stäbe unter stochastischen Normal- und Querlasten betrachtet.

Aufgrund der geometrischen Linearität ist eine getrennte Betrachtung von Normalkraft- und Biegeverformung möglich. Die Längsschwingung wird durch ihre Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\left(EA(x) u'(x) \right)' - \rho A(x) \ddot{u}(x) = -n(x,t). \quad (5.38)$$

Die Differentialgleichung des Biegestabes nach der elementaren Theorie lautet:

$$\left(EI_{yy}(x) w''(x) \right)'' + \rho A(x) \ddot{w}(x) = q(x,t). \quad (5.39)$$

Durch die zusätzliche Berücksichtigung von Rotationsträgheiten der Stabelemente sowie Querkraftverformungen, die auf der Annahme konstanter Schubspannungen basiert, wird nach TIMOSHENKO [52] eine Aufspaltung der Verschiebung w in Biege- w_M und Schubdeformationsanteil w_Q erforderlich. Die Bewegungsgleichung wird dadurch zu einem Satz gekoppelter Gleichungen:

$$w = w_M + w_Q, \quad (5.40)$$

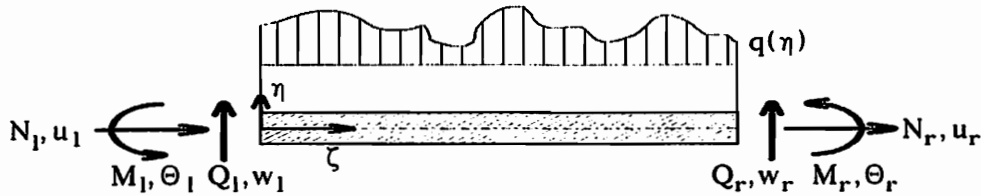
$$\left(EI_{yy}(x) w_M''(x) \right)'' + GA(x)/x w_Q'(x) - \rho I_{yy}(x) \ddot{w}_M(x) = 0, \quad (5.41)$$

$$-\left(GA(x)/x w_Q'(x) \right)' + \rho A(x) \ddot{w}(x) = q(x,t). \quad (5.42)$$

Der querschnittsabhängige Koeffizient x kann der Literatur [32] entnommen werden.

Ein Vergleich der Stabtheorien [54] ergibt, daß die elementare Theorie akzeptable Ergebnisse liefert, wenn der Stab in seinen niedrigen Eigenfrequenzen angeregt wird; für höherfrequente Erregungen, wie sie bei weißem Rauschen oder stoßartigen Belastungen austreten, ist das Timoshenko-Stabmodell zu verwenden. Für die Anwendung im Rahmen der Optimierungsrechnung sind Modelle möglichst einfacher Art vorteilhaft. Aus diesem Grund wurden die Rechnungen zunächst mit der elementaren Stabtheorie durchgeführt. Anschließend wurde anhand des Verhältnisses von Eigenfrequenz des optimierten Stabes zu Erregerspektrum die Gültigkeit der Anwendung dieser Theorie geprüft. Als Maß galt, daß die Erregerfrequenz nicht bzw. nicht wesentlich oberhalb der fünften Eigenfrequenz liegen durfte. Insbesondere bei der Berücksichtigung hoher Erregerfrequenzanteile sind derartige Verifikationen nicht in allen Optimierungsarbeiten konsequent durchgeführt worden [8].

Da in der elementaren Theorie nur Normalspannungen auftreten, lassen sich die folgenden Betrachtungen auf Längsverformungen beschränken. Für die Finite-Element-Formulierung wird ein Stabelement konstanter Dicke gewählt, welches den angegebenen Verschiebungen und Belastungen unterliegt:



Für die ausschließliche Berücksichtigung von Längsverformungen ist ein eindimensionaler Ansatz ausreichend. Dieser wird durch Hermite-Polynome zweiter Ordnung für die Normalverschiebung und vierter Ordnung im Fall der Biegeverformung

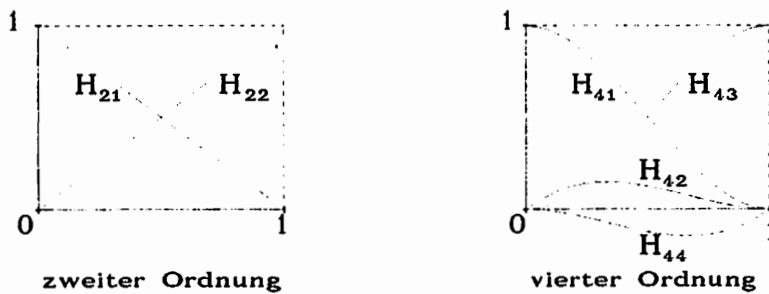


Abb. S.1: normierte Hermite-Polynome

unter Beachtung der kinematischen Beziehung

$$u(\zeta, \eta) = -\eta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (5.43)$$

angesetzt:

$$u(\zeta, \eta) = \begin{pmatrix} H_{21} & -\eta H_{41} & -\eta H_{42} & H_{22} & -\eta H_{43} & -\eta H_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \Theta_1 \\ u_r \\ w_r \\ \Theta_r \end{pmatrix} = \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}. \quad (5.42)$$

Der Verzerrungsvektor \mathbf{B} folgt durch Ableitung von \mathbf{H} nach ζ ; die materialbeschreibende Matrix \mathbf{C} wird zur skalarwertigen Größe des Elastizitätsmoduls E .

Eigene numerische Untersuchungen, wie auch die anderer Autoren [8, 10], ergaben, daß bei dünnen Bauteilen der Einfluß der Drehträgheiten von untergeordneter Bedeutung ist. Zur Rechenzeiterparnis werden diese daher vernachlässigt. Die translatorisch relevanten Anteile der Massenmatrix können in guter Näherung durch "lumped masses" approximiert werden.

Dies wird rechentechnisch über folgenden Ansatz realisiert:

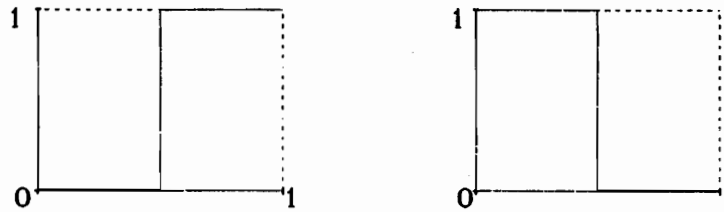


Abb. 5.2: Sprungfunktion

Die benötigten Matrizen werden nach BATHE [7] gebildet durch:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV. \quad (5.47)$$

5.3.4 Rotationssymmetrische Platten

Die Betrachtung zweidimensionaler Körper läßt sich bei linearem Werkstoffverhalten in zwei voneinander unabhängige Fälle aufteilen, die sich durch die Last- und die Verschiebungsrichtung unterscheiden. Tritt die Last in der Mittelebene des Körpers auf, wird dieser als Scheibe bezeichnet, andernfalls als Platte.

Wie bei Stäben existieren auch bei Platten verschiedene Modelle, die sich in der Berücksichtigung verschiedener Einflüsse unterscheiden. Das elementare Modell wurde von KIRCHHOFF [26] entwickelt; es basiert auf den Annahmen, daß Spannungen in Normalenrichtung nicht auftreten, und daß Normale zur Mittelebene nach der Verformung normal zur Mittelebene bleiben. Mit dieser Annahme können Schubverformungen nicht bestimmt werden.

Im REISSNER'schen Plattenmodell [46, 47] werden die Normalen nach der Verformung als gerade, jedoch nicht zwingend senkrecht zur Mittelebene angenommen. Dies führt jedoch zu nichtlinearen Differentialgleichungen, die sich nur mit erhöhten Aufwand lösen lassen. MINDLIN [37] umgeht dieses Problem durch die zusätzliche Annahme verschwindender Spannungen σ_{zz} . Dieses Modell berücksichtigt Schubverformungen und Drehträgheiten mit.

Diese Grundannahmen spiegeln sich in den Verschiebungsansätzen, hier ausgedrückt in Zylinderkoordinaten (nicht aufgeführte Spannungs-komponenten verschwinden):

$$\text{KIRCHHOFF} \quad u_r = -z \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \quad u_\varphi = -\frac{z}{r} \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \quad u_z = w(r, \varphi, t) \quad (5.48)$$

$$\text{MINDLIN} \quad u_r = -z \psi_r(r, \varphi, t) \quad u_\varphi = -z \psi_\varphi(r, \varphi, t) \quad u_z = w(r, \varphi, t) \quad (5.49)$$

Eingesetzt in das Hooke'sche Gesetz (5.23) führen diese Ansätze unter Verwendung von (5.25) für rotationssymmetrische Fälle zu folgenden Spannungen:

$$\text{KIRCHHOFF} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

$$\text{MINDLIN}^{15} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} & \frac{1}{1+\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ -z \frac{\psi}{r} \\ -\kappa \psi / 2 \\ \frac{\kappa}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Durch Integration lassen sich die Schnittgrößen der Platte berechnen.¹⁶

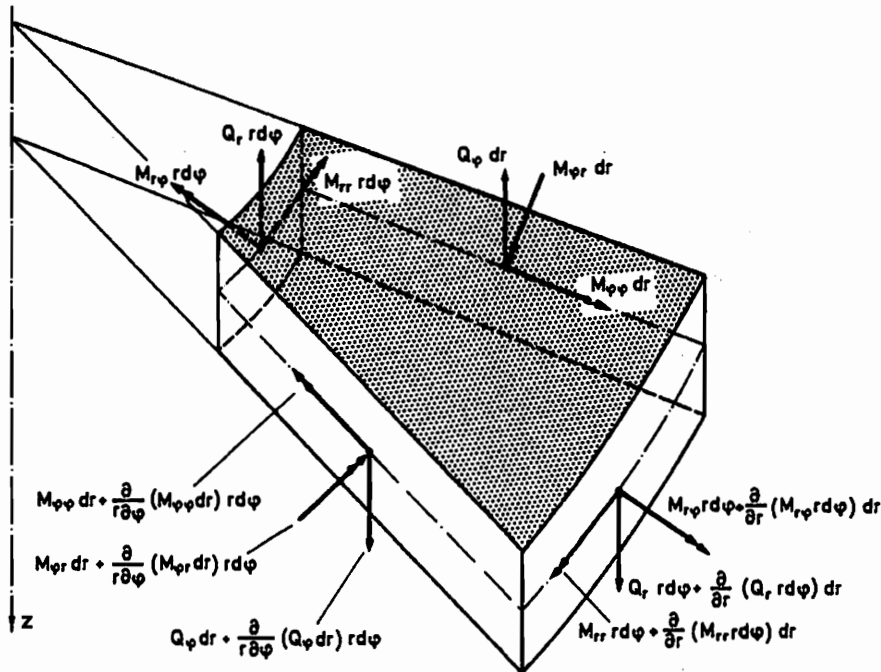
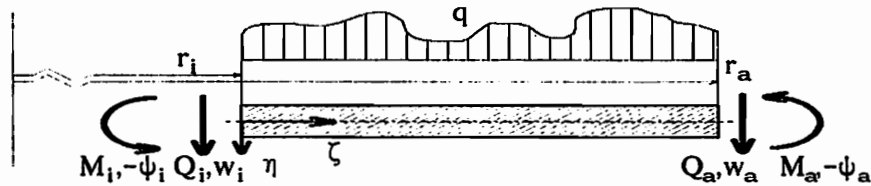


Abb. 5.3: Schnittgrößen an einem Ringplattenelement

¹⁵ Da die Ansatzfunktion ψ_φ überall verschwindet, wird im folgenden ψ_r durch ψ ersetzt. Die Konstante κ wird von MINDLIN nach einer Betrachtung des Scherwelleneigenwertproblems mit $\pi^2/12$ angegeben.

¹⁶ Bei KIRCHHOFF'schen Platten sind die Querkräfte nach THOMSON und TAIT [32] durch Ersatz-Querkräfte zu bestimmen.

Für die Formulierung finiter Elemente



sind verschiedene Ordnungen von Ansatzfunktionen erforderlich. In den Verzerrungsansätzen zum MINDLIN'schen Modell treten nur Ableitungen erster Ordnung auf, lineare Verschiebungsansätze sind ausreichend; im KIRCHHOFF'schen Modell erhöht sich die Ordnung um eins, so daß quadratische Funktionen erforderlich sind. Die Ansätze werden in Form Hermite'scher Polynome (Abb. 5.1) gewählt. Zur Bestimmung der Massenmatrix werden Sprungfunktionen verwendet (siehe Abb. 5.2).

Speziell bei der Verwendung der MINDLIN'schen Theorie haben sich diese Ansätze bewährt, wie durch den Vergleich mit experimentellen Untersuchungen gezeigt wurde [10].

Zu der Beurteilung der verschiedenen Modelle existieren zahlreiche Veröffentlichungen. In den Arbeiten von BÜRGER [10] und LIU [33] wird das Eigenverhalten von Kreisplatten untersucht. Übereinstimmend sagen beide aus, daß die Eigenfrequenzen MINDLIN'scher Platten unter den entsprechenden der KIRCHHOFF'schen liegen. Diese Aussage kann für dünne Platten nicht unbedingt aufrecht erhalten werden. Numerische Untersuchungen zeigten, daß dünne MINDLIN'sche Platten steifer sind als KIRCHHOFF'sche. Der Umschlagpunkt ist aufgrund der starken Abhängigkeit vom gewählten Massenansatz nicht eindeutig quantifizierbar.

6 Optimierung

6.1 Zielfestlegung

Im Rahmen dieser Arbeit werden Bauteilformen gesucht, die unter stochastischer Last einen minimalen Materialeinsatz erfordern; material- und konstruktionsbedingte Beschränkungen sind zu beachten.

Aus dieser globalen Forderung stellt sich die Frage nach der Definition des Optimums. Diese lautet: Das Optimum ist die bestmögliche Realisation der Zielfunktion. In dem Wort Realisation steckt eine Einschränkung, wie an folgendem Beispiel erkennbar wird.

Einem Menschen wird im Gebirge die Aufgabe gestellt, sich möglichst weit nach unten zu bewegen. Er kann nun entweder in die nächstgelegene Mulde gehen oder in ein nahegelegenes Tal; er kann aber auch zum Meer oder gar zum Toten Meer¹⁷ fahren. Der tiefste natürliche Punkt der Erde ist jedoch im Pazifischen Ozean¹⁸. Dieser stellt somit das absolute Optimum dar. Wie dieser werden auch die anderen Alternativen nur begrenzt realisierbar sein. Der Begriff des Optimums kann folglich nur in einem Umfeld gegebener Beschränkungen gesehen werden.

Ein weiteres Problem ist erkennbar: Jeden der oben genannten Punkte wird der Betrachter als Minimum/Optimum der Zielfunktion erkennen; ein Verlassen des Punktes ist nur mit einer Verschlechterung der Zielfunktion möglich. Dies bedeutet, daß auch innerhalb eines Entwurfsraumes, auch wenn dieser Restriktionen unterliegt, mehrere lokale Extrema existieren können;

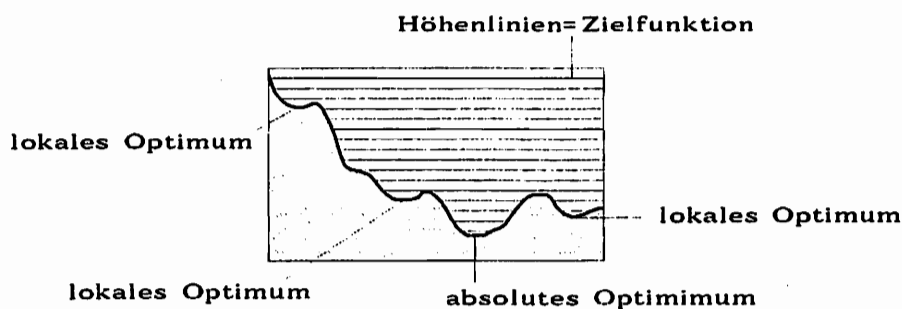


Abb. 6.1: allgemeines Optimierungsproblem

¹⁷ Das tote Meer liegt 300 Meter unter Normal Null.

¹⁸ Der tiefste Punkt ist mit etwa 11000 m unter Normal Null innerhalb eines Tiefseegrabens vermessen worden.

Das absolute Optimum muß jedoch beim Vorliegen von Restriktionen nicht gleichzeitig ein lokales Extremum im mathematischen Sinne sein. Restriktionen können sowohl im Entwurfsraum, d.h. unmittelbar für die freien Parameter, als auch im Zustandsraum als abgeleitete Funktion der freien Parameter vorliegen.

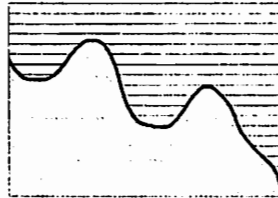


Abb. 6.2: Optimierung mit Restriktionen im Entwurfsraum

Dieses Dilemma stellt die Aufgabe dar, die ein Optimierungsalgorithmus zu bewältigen hat, läßt aber auch erkennen, daß dieser stets auf den aktuellen Aufgabentypus anzupassen ist.

Besonders deutlich wird dies in der Funktionaloptimierung, in der geschlossene Lösungen auf analytischen Wege gesucht werden. Da diese Vorgehensweise mitunter sehr aufwendig ist, wird sie nur in wenigen Fällen der Strukturoptimierung zur Anwendung kommen. Verbreiteter ist die Parameteroptimierung, bei der die unendliche Dimension des Entwurfsraumes auf eine relativ kleine reduziert wird. Aufgrund der im Ingenieurwesen vorherrschenden Methode finiter Betrachtungen, in denen Strukturen durch eine endliche Anzahl von Parametern beschrieben werden, findet die Parameteroptimierung größere Anwendungsfelder.

6.2 Verifikationskriterien für Extrema

Für die n -parametrische stetige Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ sind Extrema unter Beachtung von m , ebenfalls stetigen Restriktionen $g(\mathbf{x})$ zu bestimmen. Im folgenden wird dieses allgemeine Extremalproblem auf das Minimumproblem beschränkt¹⁹

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min , \quad (6.01)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 . \quad (6.02)$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums stellt bei stetigen \mathbf{x} und $f(\mathbf{x})$ das Verschwinden der Ableitungen der Zielfunktion sowie der aktiven Restriktionen dar. Daraus kann unmittelbar geschlossen werden, daß die Determinante der Jacobi-Matrix verschwindet; die Gradienten dieser Funktionen sind an der betrachteten Stelle linear abhängig.

¹⁹ Das zugeordnete, duale Maximumproblem läßt sich analog behandeln.

Auf diese Basis stützen sich zwei Theoreme zur Identifikation von Minima:

1) Fritz-John Bedingung

$$\lambda_0 \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_i^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (6.03)$$

$$\sum_i^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{mit } \lambda \geq 0 \quad (6.04)$$

Diese Formulierung wertet die obige Überlegung linearer Abhängigkeiten direkt aus. Zu falschen, die Grundidee mißachtenden Aussagen, gelangt man jedoch, wenn λ_0 verschwindet. Schließt man diesen nach dem Fritz-John Kriterium zulässigen Fall aus, gelangt man zur

2) Kuhn-Tucker Bedingung

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_i^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (6.05)$$

$$\sum_i^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{mit } \lambda \geq 0. \quad (6.06)$$

Dieses Kriterium ist formal nahezu identisch mit der Lagrange-Multiplikatoren Bedingung

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \nabla \left(f(\mathbf{x}^*) + \sum_i^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) \right) = 0 \quad (6.07)$$

$$\sum_i^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{mit } \lambda_i \text{ nicht alle } 0, \quad (6.08)$$

stellt jedoch im Gegensatz zu dieser durch die geforderte Nichtnegativität der λ_i eine notwendige Bedingung für ein relatives Minimum dar.

Die Kuhn-Tucker Bedingung kann folglich als Kriterium zur Verifikation eines Minimums genutzt werden, ohne daß jedoch die Frage nach der Qualität dieses Minimums beantwortet werden kann. In Fällen konkaver Restriktionen können die Restriktionsgradienten in extremalen Punkten linear abhängig werden; somit stellt dieses Kriterium nur ein hinreichendes dar. Eine in der Literatur oft getroffene Unterscheidung zwischen konkaven oder konvexen Restriktionen oder Problemstellung [10] ist für die Praxis des Optimierers nicht ausreichend, da diese

a) nicht eindeutig und

b) von vornherein nicht im ausreichenden Maße bestimmbar

ist. Die Anwendbarkeit des Kuhn-Tucker-Kriteriums ist ausschließlich an die lineare Unabhängigkeit der Restriktionsgradienten zu binden.

Nebenstehendes Bild zeigt die Minimierung der Funktion f . Im Punkt x^* ist das Optimum. Die Gradienten der Restriktionen sind linear abhängig und sind orthogonal zum Gradienten der Zielfunktion. Folglich existieren keine Lagrange-Multiplikatoren; die Kuhn-Tucker Bedingung ist trotz Minimums nicht erfüllt.

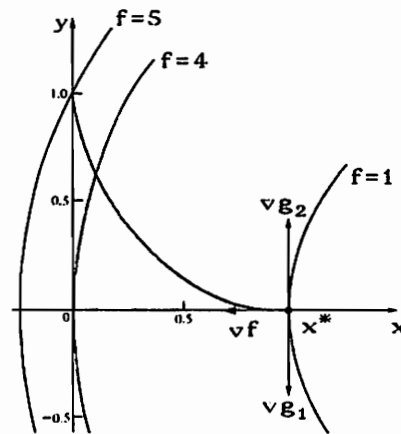


Abb. 6.3: Minimum mit linear abhängigen Restriktionsgradienten

6.3 Optimierungsverfahren

Die Hauptaufgabe eines Optimierungsverfahren besteht im Auffinden möglicher Minima; die wirtschaftliche Effizienz eines Verfahrens hängt von der Relation des erforderlichen Aufwands zum Nutzen, in diesem Fall der Einsparung, ab. Demzufolge muß ein Algorithmus gute Verbesserungen mit wenigen Schritten, d.h. mit minimalem Rechenaufwand, erzielen können.

Eine prinzipielle Unterscheidung zwischen den verschiedenen Aufgabentypen ist durch die vorliegenden Nebenbedingungen möglich. Sind solche existent, ist eine rechen-technisch relevante Unterscheidung in lineare und nichtlineare Restriktionen möglich.

6.3.1 Unbeschränkte Probleme

Für unbeschränkte Probleme

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min. \quad (6.01)$$

hat das Gradientenverfahren größte Bedeutung, bei dem der zum Minimum führende Pfad durch eine nach dem linearen Glied abgebrochene Taylorreihe approximiert wird. Die daraus folgende Iterationsvorschrift lautet:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \zeta_k \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (6.09)$$

mit $\zeta_k > 0$.

Da abgebrochene Reihen in vielen Fällen schlechte Konvergenzeigenschaften zeigen und somit sehr rechenzeitaufwendig sind, ist diese Vorschrift in der Optimierungspraxis nur eingeschränkt einsetzbar.

Eine erste Verbesserung erhält man durch die zusätzliche Betrachtung des eindimensionalen Optimierungsproblems für ζ_k in jedem Schritt:

$$\min_{\zeta > 0} f(\mathbf{x}^k - \zeta_k \nabla f(\mathbf{x}^k)). \quad (6.10)$$

Dieses optimierte Gradientenverfahren kann unter anderem mit Hilfe der Methode der parallelen Tangenten beschleunigt werden.

Im Newton-Raphson-Verfahren wird der Gradient der Zielfunktion betrachtet, der im Minimum notwendigerweise verschwindet. Analog zu (6.09) lautet die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^k) \nabla f(\mathbf{x}^k), \quad (6.11)$$

mit der symmetrischen Hesse'schen Matrix \mathbf{H} der Zielfunktion f

$$\mathbf{H}_{i,j}(\mathbf{x}^k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (6.12)$$

In der Nähe eines Minimums zeigt das Newton-Raphson-Verfahren gute Konvergenzeigenschaften. Da sich diese jedoch nicht von jedem Startpunkt aus einstellen, wird eine Kombination mit anderen Verfahren, z.B. einem Gradientenverfahren, notwendig. Für die numerische Anwendung besteht ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens im Rechenaufwand, der zur Bestimmung der Hesse'schen Matrix und ihrer Inversion erforderlich ist.

Zur Umgehung dieser Nachteile haben Davidon, Fletcher und Powell im Verfahren der variablen Metrik ein Evolutionsregel für die Hesse'sche Matrix aufgestellt.

Neben diesen beiden werden in der Literatur [3] noch

- Rastersuchverfahren oder complex-method
- Zufallsverfahren
- Relaxationsverfahren
- Rosenbrock's Verfahren
- Powell's Verfahren

und viele mehr erwähnt. Sie tasten alle den Entwurfsraum ab und bestimmen nach den unterschiedlichsten Kriterien das Minimum. Gemein ist diesen Verfahren die direkte Einflußnahme auf die Entwurfparameter.

Vor der Anwendung eines Verfahrens bzw. einer Realisation desselben sollten eine qualitative und eine wirtschaftliche Bewertung durchgeführt werden. Letztere umfaßt eine Aufwands-Nutzenanalyse in bezug auf den zu erwartenden Rechenaufwand und der erzielbaren Verbesserung. Im Rahmen der qualitativen Einschätzung sind das Konvergenzvermögen in besonderen Lagen mittels einiger Test-Funktionen zu analysieren. Zu diesen Funktionen gehören:

nach Witte und Holst: $F(x,y) = (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ (6.13)

nach Rosenbrock: $F(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ (6.14)

nach Beal: $F(x,y) = (1.5 - x + xy)^2 + (2.25 - x + xy^2)^2 + (2.625 - x + xy^3)^2$
 $= 14.203125 + x(-12.75 + 3y + 4.5y^2 + 5.25y^3) + x^2(3 - 2y - y^2 - 2y^3 + y^4 + y^6)$
(6.15)

Gemeinsames Merkmal dieser Funktionen ist, daß sich das Minimum in einem langen Tal befindet, das zwar mit deutlichem Gradienten erreicht werden kann, in der Talsohle hingegen ist der Gradient relativ schwach ausgeprägt. Die Güte des getesteten Verfahrens zeigt sich somit in der Bewältigung auch dieses Problems hoher Gradientenunterschiede.

6.3.2 Beschränkte Probleme

Auf beschränkte Optimierungsprobleme

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (6.01)$$

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (6.02)$$

lassen sich diese Algorithmen prinzipiell im Rahmen der durch die Restriktionen zulässigen Bereiche anwenden. Das klassische Verfahren zur Bearbeitung dieser Problemklasse ist die lineare Programmierung, wie sie von DANTZIG [14] in Form der Simplexmethode entwickelt wurde. Für Strukturoptimierungen mit ihren im allgemeinen nichtlinearen Ziel- und Restriktionsfunktionen bleiben die Anwendungsmöglichkeiten sehr begrenzt [10]. Erfolgversprechender sind jedoch Einbeziehungen der aktiven Restriktionen in die Zielfunktion, z.B. durch Lagrange'sche Funktionen [8].

Im Folgenden soll die zweite Alternative aufgrund ihrer großen Entwicklungsmöglichkeit weiterverfolgt werden.

Grundsätzlich wird von einem zulässigen Punkt im n-dimensionalen Entwurfsraum ein Algorithmus in Richtung \mathbf{s} gestartet, der das eindimensionale Optimierungsproblem löst:

$$\min_{\zeta > 0} f(\mathbf{x}^k + \zeta_k \mathbf{s}(\mathbf{x}^k)) \quad \text{mit} \quad g_i(\mathbf{x}^k + \zeta_k \mathbf{s}(\mathbf{x}^k)) \leq 0. \quad (6.16)$$

Zeigt sich, daß die Lösung, unter den oben diskutierten Bedingungen, die Kuhn-Tucker-Bedingung nicht erfüllt, so ist eine neue Suchrichtung so festzulegen, daß sie brauchbar und zulässig ist. Brauchbarkeit ist hier gleichzusetzen mit Nichtvergrößerung der Zielfunktion:

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x}^{k+1}) \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq 0. \quad (6.17)$$

Zulässig ist sie dann, wenn sie keine weitere Verletzung der aktiven Restriktionen bewirkt:

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x}^{k+1}) \nabla g_i(\mathbf{x}^{k+1}) \leq 0 \quad \text{für alle } i, \text{ für die gilt: } -g_i(\mathbf{x}^{k+1}) \leq \varepsilon. \quad (6.18)$$

Ein nach dieser Überlegung mögliches orthogonales Ausweichen führt bei konvexen Restriktionen in der Regel zu nicht sinnvollen Suchrichtungen.

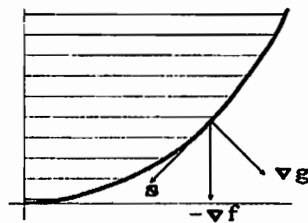


Abb. 6.4: zulässige Suchrichtung

Aus diesem Grunde schägt ZOUTENDIJK [62] eine Ablenkung der neuen Suchrichtung von der Gradientennormalen vor, indem er diese als Ergebnis eines linearen Optimierungsproblems darstellt

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x}^{k+1}) \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq \alpha \leq 0 \quad (6.19)$$

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x}^{k+1}) \nabla g_i(\mathbf{x}^{k+1}) \leq \vartheta \alpha, \quad (6.20)$$

$$\text{mit der Nebenbedingung} \quad \|\mathbf{s}\| = 1. \quad (6.21)$$

Der die Abweichung steuernde Koeffizient ϑ liegt zwischen null (führt zur Gradientennormalen) und eins. Letzteres legt die Suchrichtung auf die Normale der Winkelhalbierenden zwischen Restriktions- und negativem Zielfunktionsgradient.

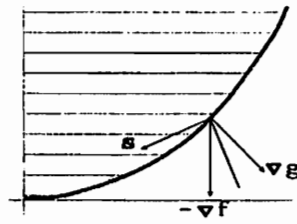


Abb. 6.5 : Suchrichtung nach ZOUTENDIJK

Da sich diese Strategie, unabhängig vom Typus der Zielfunktion und der Restriktionen als universell einsetzbar und sehr effizient erwiesen hat [17], wird sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Das vorliegende Problem ist die Volumenminimierung eines Bauteils unter Beachtung von gegebenen geometrischen und mechanischen Restriktionen. Letztere besteht aus der Forderung der Nichtüberschreitung einer maximalen Spannungsvarianz. Die geometrischen Restriktionen geben eine Bandbreite für die einzelnen Entwurfparameter e_i an; dies verhindert mögliche Fälle verschwindender Dicke [31] oder überschreitender maximaler Einbaumaße.

Die n variierbaren geometrischen Größen werden im Vektor \mathbf{e} zusammengefaßt. Im Entwurfsraum, der durch \mathbf{e} aufgespannt wird, lautet das zu lösende Optimierungsproblem:

$$V(\mathbf{e}) \rightarrow \min \quad (6.22)$$

$$R_{\sigma\sigma \max}(\mathbf{e}) - R_{\sigma\sigma \text{zul}} \leq 0 \quad (6.23)$$

$$e_i - e_{\max} \leq 0 \quad (6.24)$$

$$-e_i + e_{\min} \leq 0 \quad (6.25)$$

Die Einzelschritte werden wie folgt ausgeführt:

1) Der Startpunkt wird entweder manuell vorgegeben oder zufallsgesteuert im Raum der fest vorgegebenen Restriktionen (z.B. extreme geometrische Abmessungen) gewählt. Es genügt, einen Punkt zu finden, der alle Restriktionen erfüllt. Auf die Ermittlung problemangepaßten Startlösung, wie z.B. Bauteilen gleicher Festigkeit, wurde wegen der angestrebten universellen Einsatzmöglichkeit des Verfahrens verzichtet.

2) Der erste Suchvektor ist der negative Zielfunktionsgradient.

3) Die Suche des optimalen Faktors ζ wird in Form einer beschränkten Rastersuche²⁰ mit dem Ziel begonnen, die in Suchrichtung erste Restriktion zu lokalisieren. Eine quadratische Entwicklung beschleunigt auf der Basis dieser Punkte die exakte Auffindung um den Faktor 2-3, birgt jedoch auch die Gefahr des Rückfalls von ζ nach Null.

²⁰ Die Beschränkungen ergeben sich durch die geometrischen Restriktionen, sowie der Positivität von ζ .

4) Für die Bestimmung der neuen Suchrichtung werden alle mitaktivierten Restriktionen berücksichtigt. Die Aktivitätsbandbreite ε wird mindestens zwei Größenordnungen über der Genauigkeit des Zustandsermittlungsverfahrens festgelegt.

5) Für die lineare Optimierung kann auf bewährte lineare Programmierungsalgorithmen, wie den modifizierten Simplexalgorithmus zurückgegriffen werden, der in der Lage ist, die mögliche Negativität der Entwurfsgrößen mitzubersichtigen [30].

Der sich einstellende Zick-Zack-Suchverlauf wird mitunter nur sehr geringe Minimierungsraten zeigen. Es zeigt sich, daß der Abbruch nach einem Fortschrittskriterium [54] oder einem Winkelkriterium [33] zu nicht optimalen Ergebnissen führen kann²¹, was mit den Testfunktionen (6.13-15) zu prüfen ist. Aus diesem Grunde wird die Optimierung abgebrochen, wenn keine neue Suchrichtung mehr bestimmbar ist; dies entspricht der Erfüllung der Kuhn-Tucker-Bedingung.

Dieses Verfahren läßt sich durch eine sukzessive Steigerung der Aktivitätsbandbreite ε um 50% beschleunigen. Im Bereich des Optimums sind Verbesserungen des Resultates durch Reduktion des Faktors ϑ in (6.20) möglich; der erzielte Gewinn ist jedoch gering.

Mit diesem Verfahren kann nur ein lokales Minimum der Zielfunktion je Optimierungslauf erkannt werden. Zu weiteren Minima gelangt man unter Umständen, wenn andere Startwerte gewählt werden. Dies ist jedoch im allgemeinen sehr rechenaufwendig. Teilabhilfe schafft eine vorgezogene Betrachtung an einem reduzierten System, bei dem die mögliche Mannigfaltigkeit von Extrema mit erträglichem Aufwand festgestellt werden kann.

²¹ Man vergleiche dies mit der Durchschreitung eines langen Hochtals ohne nennenswertes Gefälle.

7 Numerische Lösung der LIAPUNOV-Gleichung

Die Kovarianzanalyse stellt in Form der LIAPUNOV-Gleichung ein numerisches Instrument zur Verfügung, welches unter Umgehung der sonst erforderlichen Entwicklung numerisch nicht sehr stabiler Reihen die Kovarianzmatrix auf algebraischem Wege bestimmen kann. Jedoch lassen sich mit der großen Zahl zu bestimmender Matrixelemente²² und die mit der Berechnung verbundenen Größe der Gleichungssystemmatrizen sehr schnell die physikalischen Grenzen jeder Rechenanlage erkennen.

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Verfahren entstanden, welches die anstehenden Probleme auf Personal- und Microcomputern lösbar macht, um so mit preiswerter Rechenleistung technisch und wirtschaftlich gute Resultate zu erzielen.

Im folgenden wird ein auf mehreren Komponenten aufbauender Lösungsweg vorgestellt, der die Berechnung größerer Systeme auf vergleichsweise kleinen, nicht virtuellen Rechnern physikalisch erlaubt und, im Hinblick auf die Optimierung, die erforderliche Rechenzeit minimiert. Da beide Effekte, Speicherplatz- und Rechenzeiterparnis, untrennbar, aber nicht uneindeutig miteinander verbunden sind, ist die Quantifizierung des Nutzens einzelner Schritte nicht immer explizit aufzuzeigen.

7.1 Dynamische Kondensation

Die Bewegungsgleichungen geschwindigkeitsproportional gedämpfter Systeme können durch

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (7.01)$$

beschrieben werden. Die Dämpfung sei nur durch den Werkstoff bedingt und schwach; die Dämpfungsmatrix sei positiv definit. Durch die möglichen Vernachlässigung der Drehträgheiten ist die nach dem Lumped-Mass Modell approximierte Massenmatrix nicht auf allen Diagonalelementen besetzt. Eine entsprechende Aufspaltung der Freiheitsgrade bringt die Differentialgleichung in folgende Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}, \quad (7.02)$$

²² Bei n Freiheitsgraden des mechanischen Systems sind $1.5n^2$ Unbekannte im Rahmen der Kovarianzanalyse zu bestimmen.

die durch Einführung des Vektors \mathbf{z}

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} \quad (7.03)$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduziert werden kann.

$$\dot{\mathbf{z}}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{z}^* + \mathbf{g}^* \quad (7.04)$$

Die Systemmatrix sowie der Belastungsvektor lauten in diesem Falle:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{11} & -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21}) & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{22}) & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}) \end{pmatrix}, \quad (7.05)$$

$$\mathbf{g}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_2 - \mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{f}_1) \end{pmatrix}. \quad (7.06)$$

7.2 Einbau der Filtergleichung in die Systemgleichung

Bevor diese Matrizen in die LJAPUNOV-Gleichung eingesetzt werden können, sind einige Überlegungen zum Lastvektor notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit bestehe die Belastung \mathbf{f} aus dem Produkt einer Koeffizientenmatrix \mathbf{F} mit der vektoriellen Antwort \mathbf{r} eines mathematischen Filters auf weisses Rauschen

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \mathbf{r}, \quad (7.07)$$

das seinerseits durch eine lineare Differentialgleichung realisiert wird

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{G}} \xi. \quad (7.08)$$

Aus der Zusammenfassung der Bewegungsgleichung und der Filtergleichung zu einer neuen, stochastischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{G} \xi \quad (7.09)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{11} & -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21}) & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{22}) & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}) & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

und der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

ergibt sich nun die Möglichkeit zur Bestimmung der stationären Kovarianzmatrix des Vektors \mathbf{z} mit Hilfe der LJAUNOV-Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{zz} + \mathbf{R}_{zz} \mathbf{A}' + \mathbf{G} \mathbf{G}' = \mathbf{0}. \quad (7.13)$$

Diese Gleichung läßt sich nach Umformung in ein lineares Gleichungssystem lösen; ein entsprechender Algorithmus wurde von CHEN und SHIEN [11] vorgeschlagen. Mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden sind schnell die technischen und wirtschaftlichen Grenzen dieses Verfahrens erreicht.

An einem Beispiel sei dies verdeutlicht: Ein ebenes System mit drei Freiheitsgraden je Knoten, erregt von einem Rauschprozeß, der über einen Filter zweiter Ordnung wirkt, habe n Knoten. Unter Ausnutzung der Symmetrie und der partiell vorhandenen Antimetrie von \mathbf{R}_{zz} ergeben sich $10.5n^2 + 11.5n + 3$ Unbekannte, bei 10 Knoten sind dies 1378; die unsymmetrische Gleichungsmatrix ist in diesem Fall mit 1,898,884 Elementen zu dimensionieren, was bei Verwendung von REAL*8 Größen 14.8 MegaByte erfordert.²³

²³ Würde man im gleichen Beispiel die Drehträgheiten berücksichtigen, erhöht sich die Zahl der Unbekannten um 26% auf 1488; die Dimension der Gleichungsmatrix stiege auf 2,214,144 Elemente, entsprechend wären dies 17.3 MegaByte.

7.3 Separation

Aus der formalen Zusammensetzung des Vektors \mathbf{z} läßt sich die Autonomie der Differentialgleichung für \mathbf{r} zeigen; daraus erwächst die Möglichkeit einer von der Gesamtlösung von \mathbf{R} unabhängigen Teillösung für die Submatrix \mathbf{R}_{rr} . Diese Separation führt formal zu einer Einsparung, die allerdings erst im Zuge einer sequentiellen Lösung bedeutsam wird.

Wichtiger ist jedoch die Möglichkeit einer abtrennbaren, kondensierenden Berechnung von $\mathbf{x}_2(t)$ und $\dot{\mathbf{x}}_2(t)$, wenn gilt

$$\mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21} = \mathbf{0}. \quad (7.14)$$

Die Erfüllung dieser Bedingung spart etwa 36% Speicherplatz ein; weitere numerische Maßnahmen, wie entkoppelnde Transformationen des kondensierten Teilsystems, werden nun möglich und führen zu erheblichen Absenkungen von Rechenzeit und Speicherbedarf:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{D}^*\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}^*\mathbf{x}_2 = \mathbf{g}_3^* \quad (7.15)$$

$$\text{mit } \mathbf{D}^* = \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{22}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{g}_3^* = \mathbf{f}_2 - \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{f}_1. \quad (7.18)$$

7.4 Entkopplung

Eine erste Stufe der Entkopplung ist durch Ritz-Vektoren realisierbar, die entsprechend ihrer Anzahl das nicht entkoppelte Restsystem reduzieren. Bei vollständiger Berücksichtigung aller Systemfreiheitsgrade wird zwar eine Einsparung von Speicherplatz erzielt, nicht jedoch eine wesentliche Rechenzeitreduzierung.

Beschränkt man die Betrachtung auf die ersten n Freiheitsgrade, sind *Ritzvektoren* vorteilhaft einsetzbar [33], vorausgesetzt, es liegt eine Abschätzung zwischen Erregerspektrum und Eigenverhalten vor. Dies ist in der Regel nur sehr schwer durchführbar; insbesondere wenn das Eigenverhalten im Rahmen von Optimierungsprozessen teilweise stark verändert wird. Aus diesem Grunde ist das Verfahren im Rahmen dieser Arbeit nicht eingesetzt worden.

Die vollständige Entkopplung und damit die maximale Einsparung von Speicherplatz und Rechenzeit erhält man mit Hilfe der *modalen Analyse*, wenn schwache Dämpfungen vorausgesetzt werden können. Da im Rahmen dieser Arbeit nur von werkstoffbedingter Dämpfung ausgegangen wird,

und sich das Eigenverhalten von gedämpftem und ungedämpftem System nur geringfügig unterscheidet, ist die Anwendung in folgender Form zulässig:

Mit der **M**-orthonormierten Eigenvektormatrix **X**

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (7.19)$$

des ungedämpften Systems überführt die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{X} \boldsymbol{\varphi}(t), \quad (7.20)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_2(t) \quad (7.21)$$

nach einer Linksmultiplikation mit **X**^T Gleichung (7.15) in

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{X}^T \mathbf{D}^* \mathbf{X} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X}^T \mathbf{g}_3. \quad (7.22)$$

$\boldsymbol{\Omega}^2$ ist die Diagonalmatrix der Eigenfrequenzen. Die später diskutierte Entkoppelbarkeit von $\mathbf{X}^T \mathbf{D}^* \mathbf{X}$ vorausgesetzt, bietet die mit dieser Transformation verbundene Vollentkopplung eine Rechenzeiterparnis von bis zu 95% [8]. Veranschaulichen läßt sich dies durch die Betrachtung des zu berechnenden Gleichungssystems. Mit den bekannten Kovarianzmatrizen von Auslenkung und Erregung, sowie der Auslenkungsgeschwindigkeit und Erregung degeneriert die Bestimmung der Kovarianzmatrix auf die Lösung von Teilsystemen mit je vier²⁴ zu bestimmenden Größen. Deren Anzahl entspricht den Freiheitsgraden des ursprünglich kondensierten Teilsystems.

Die erzielte Einsparung des erforderlichen Speicherplatzes sei anhand des oben verwendeten Zahlenbeispiels verdeutlicht. Gegenüber ursprünglich $(6n^2 + n)^2$ Gleitkommazahlen ist durch die Modaltransformation der Speicherbedarf auf $10n^2 + 9n$ gesunken. Bei angenommenen 10 Knoten bedeutet dies einen Rückgang von 2907 auf 8.5 kiloByte.

Für die erforderliche Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren kann auf leistungsfähige und numerisch stabile Verfahren, wie z.B. das JACOBI-Rotationsverfahren zurückgegriffen werden. Insbesondere dieses läßt sich im hier vorliegenden Fall diagonalen Massenmatrizen durch vollständige Ausnutzung der vorhandenen Rechermöglichkeiten so stark beschleunigen, daß die für die Transformation aufgewendete Rechenzeit im Verhältnis zur verfahrensbedingten Einsparung nicht negativ ins Gewicht fällt.

²⁴ Aufgrund der Symmetrie der Kovarianzmatrix reduziert sich die Zahl der Unbekannten auf effektiv drei.

7.5 Dämpfung

Eine vollständige Entkopplung des Systems ist im Fall viskoser Dämpfung, wegen des fehlenden Bezuges zur Massen- und Steifigkeitsmatrix, im allgemeinen nicht möglich. Notwendige Bedingung für eine Diagonalisierung von $\mathbf{X}^T \mathbf{D}^* \mathbf{X}$ ist

$$\mathbf{K}^* \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^* = \mathbf{D}^* \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^* . \quad (7.23)$$

Neben der modalen Dämpfung

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (7.24)$$

wird die Bedingung bei einem eigenwertproportionalen Ansatz, mit den Lehrschen Dämpfungsmaßen D_i , erfüllt.

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(2 D_i \omega_i \right) . \quad (7.25)$$

Bei einer Wertung dieser Dämpfungsansätze ist zu beachten, daß das gewählte Modell das gesamte mechanische System beschreiben muß und daß die Bedingung (7.14) erfüllt werden sollte. Beide Nebenforderungen können nur von der modalen Dämpfung erbracht werden. Unter mechanischen Gesichtspunkten fällt besonders ins Auge, daß die zweiparametrische modale Dämpfung relativ unflexibel angepaßt werden kann. In der Praxis werden die Parameter nur auf das gedämpfte Verhalten in der ersten Eigenform angepaßt. Dieses Faktum ist bei Verwendung Lehrscher Dämpfungen naturgemäß besser.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Dämpfung als materialbedingt und somit als sehr schwach angenommen; folglich ist der sich einstellende Fehler bei der Verwendung eines einfacheren Dämpfungsmodells klein. Eine gänzliche Vernachlässigung der Dämpfung ist jedoch aufgrund der in Abschnitt 3.3 angeführten Notwendigkeit für Existenz und Stationarität der gebildeten stochastischen Integrale nicht zulässig.

7.6 Sequentielle Lösung

Betrachtet man nun den Wandel in der Struktur der ursprünglichen LJAPUNOV-Gleichung (in den folgenden Darstellungen sind Vorgaben mit v, unbekannte mit u, bekannte mit b und nicht betroffene Größen mit × angedeutet)

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{A} \quad \mathbf{R} \quad + \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{A}^T \quad + \quad \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline v & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & 0 & v & 0 \\ \hline v & 0 & v & 0 \\ \hline v & \mathbf{I} & v & 0 \\ \hline v & 0 & v & v \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 = \mathbf{0},
 \end{array}$$

eröffnet die Erfüllung der Bedingung (7.14)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline 0 & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline u & u & u & u \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & 0 & 0 & 0 \\ \hline v & 0 & v & 0 \\ \hline v & \mathbf{I} & v & 0 \\ \hline v & 0 & v & v \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 = \mathbf{0},$$

die Möglichkeit zu einer sequentiellen numerischen Lösung, die bei \mathbf{R}_{rr} beginnend

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline 0 & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & u \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & v \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline \times & 0 & \times & 0 \\ \hline \times & \mathbf{I} & \times & 0 \\ \hline \times & 0 & \times & v \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v \\ \hline \end{array}
 = \mathbf{0}$$

mit den Resultaten \mathbf{R}_{xx} und \mathbf{R}_{xr}

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline 0 & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & u \\ \hline \times & \times & \times & u \\ \hline \times & \times & \times & b \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & u \\ \hline \times & \times & \times & u \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline \times & 0 & \times & 0 \\ \hline \times & \mathbf{I} & \times & 0 \\ \hline \times & 0 & \times & v \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times \\ \hline \end{array}
 = \mathbf{0}$$

das kondensierte Teilsystem mit \mathbf{R}_{xx} , \mathbf{R}_{xx} und \mathbf{R}_{xx} in modaltransformierter Form löst.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & \times & 0 \\ \hline 0 & \times & \times & v \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & u & u & \times \\ \hline \times & u & u & \times \\ \hline \times & b & b & \times \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & u & u & b \\ \hline \times & u & u & b \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline \times & 0 & \times & 0 \\ \hline \times & \times & \times & 0 \\ \hline \times & 0 & v & \times \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times \\ \hline \end{array}
 = \mathbf{0}$$

Sind diese Elemente der Kovarianzmatrix bis dahin bekannt, können die verbleibenden nacheinander mit Hilfe elementarer Matrizenoperationen bestimmt werden, so daß kein weiteres Gleichungssystem gelöst werden muß.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & x \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & u & u & u \\ \hline x & b & b & b \\ \hline x & b & b & b \\ \hline x & b & b & b \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & u & u & u \\ \hline x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 0 & 0 \\ \hline x & 0 & v & 0 \\ \hline x & 1 & v & 0 \\ \hline x & 0 & v & v \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x \\ \hline \end{array}
 = 0$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & v & v & v \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & x \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & x & x & x \\ \hline b & x & x & x \\ \hline b & x & x & x \\ \hline b & x & x & x \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & b & b & b \\ \hline x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v & 0 & 0 & 0 \\ \hline v & 0 & x & 0 \\ \hline v & 1 & x & 0 \\ \hline v & 0 & x & x \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x \\ \hline \end{array}
 = 0$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß zwar nicht die Anzahl der Unbekannten, jedoch der Speicherbedarf auf ca. 50% und die Rechenzeit auf ca. 30% gesenkt werden kann.

Für den Einsatz von Personal- und Kleincomputern stellen die mit dem vorgestellte Verfahren verbundenen Einsparungen eine absolute Notwendigkeit dar. Für die Berechnungen zu dieser Arbeit wurde ein Atari-ST-Rechner mit 1MByte Zentralspeicher und Fließkommprozessor verwendet. Für diese Rechnerklasse stellen Probleme, wie sie hier gelöst wurden, eine kapazitive Obergrenze dar.

8 Einige optimale Querschnittsverläufe

Im folgenden Abschnitt werden Ergebnisse von materialminimierenden Optimierungen dargestellt, bei denen die Bauteile unter stationärer stochastischer Krafterregung stehen. In allen Beispielen wurde von den gleichen Materialdaten ausgegangen:

Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$

Dichte $\rho = 7850 \text{ kg m}^{-3}$

Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$

Die Dauerfestigkeit des Werkstoffs wird mit 10 MPa angenommen. Die Wahrscheinlichkeit des Überschreitens dieses Werte solle 10^{-3} nicht übersteigen; dies bedeutet, daß während 1000 Betriebsstunden die tatsächliche auftretende Spannung den Grenzwert kummulativ eine Stunde überschreitet. Aus dieser Überlegung folgt die maximale Standardabweichung zum 3.sten Teil des Dauerfestigkeitswertes; daraus ergibt sich die höchstzulässige Spannungsvarianz $R_{\sigma_{\max}} = 8 \cdot 10^{12} \text{ N}^2 \text{ m}^{-4}$.

Die Lasten werden in ihrem Zeitverhalten durch den Ausgang eines linearen Filters zweiter Ordnung beeinflusst, dessen Eingangssignal weißes Rauschen ist. Die Filterparameter S_0 , a_0 und a_1 aus (4.02) werden aus der Resonanzfrequenz ω_F , der Spektralleistung S_{\max} in der Filterresonanz sowie der Varianz P_{Faus} des Filterausgangs numerisch bestimmt. Zur Wahrung der Vergleichbarkeit werden die beiden letztgenannten Größen in den Beispielen gleichgesetzt:

$$S_{\max} = 1 ,$$

$$P_{\text{Faus}} = 10 .$$

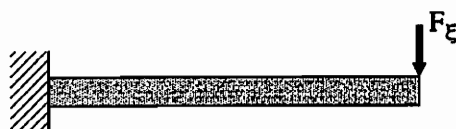
Durch diese Vorgehensweise ist gewährleistet, daß sich der Filter ein definierte Resonanzverhalten aufweist und daß die Gesamtleistung des Filterausgangs gleich bleibt.

Der dimensionierende Koeffizient F zur Bildung der Last f in (7.07) wird in den Stabbeispielen zu $F=1 \text{ N}$ gewählt, im Fall der Platten zu $F = 1\text{kN}$.

8.1 Stäbe

Im folgenden werden gewichtsm minimale Querschnittsverläufe von eingespannten Stäben der Länge 1 m unter einer stochastischen Einzellast F_{ξ} am Stabende gezeigt.

Abb. 8.1: Lastfall 1

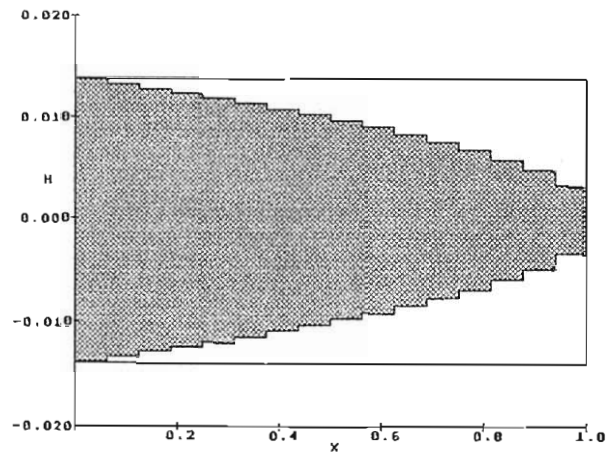


Für verschiedene vorgegebene Resonanzfrequenzen ω_F des Filters ergeben sich folgende optimale Querschnittsverläufe²⁵:

$$\omega_F = 1 \text{ Hz}$$

$$\text{Vol.}_{\min} = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

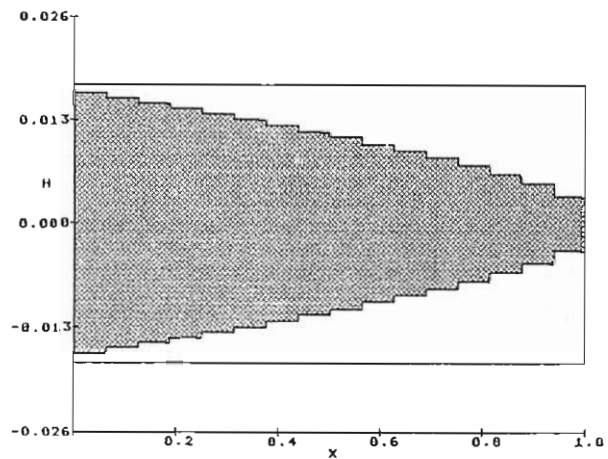
Einsparung 31.3%



$$\omega_F = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{Vol.}_{\min} = 2.16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Einsparung 38.7%



$$\omega_F = 100 \text{ Hz}$$

$$\text{Vol.}_{\min} = 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Einsparung 45.9%

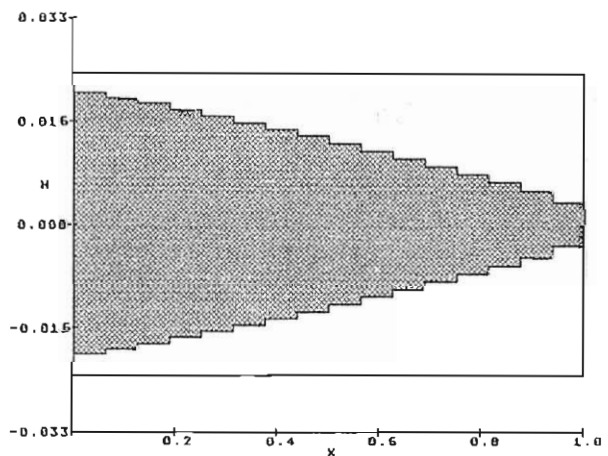


Abb. 8.2: optimale Wanddickenverläufe für unterkritische Erregungen

²⁵In den Darstellungen werden die Querschnittsverläufe, wie sie sich durch einen Optimierungsschritt aus einem Stab konstanter Dicke einstellen, mit angedeutet. Die Darstellungen erfolgen über der Stabachse x; die verwendeten Einheiten sind metrisch. Die Volumensparnis des optimalen Verlaufs wird als prozentuale Einsparung gegenüber dem Volumen nach den ersten Schritt mitangegeben.

Die obigen Verläufe sind derart, daß die dominante Erregerfrequenz unterhalb der ersten Eigenfrequenz des Stabes liegt und somit unterkritisch ist. Dies kommt auch durch die formgleiche Vergrößerung des optimalen Verlaufes mit zunehmender Erregerfrequenz zum Ausdruck; die typische Form kann als erste Grundform des Optimums dieses Belastungsfall bezeichnet werden. Ein Beispiel einer überkritischen Erregung (zwischen erster und zweiter Eigenfrequenz des Stabes) ist im nächsten Bild zu sehen:

$\omega_F = 300 \text{ Hz}$
 $\text{Vol.}_{\min} = 1.58 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
Einsparung 23.3 %

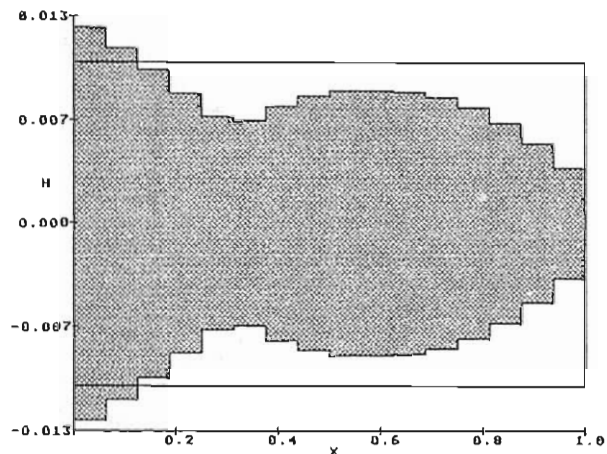


Abb. 8.3 : optimaler Wanddickenverlauf der zweiten Grundform

Das Volumen bei dieser überkritischen Erregung ist gegenüber dem unterkritischen Fall deutlich geringer. Diese Aussage deckt sich mit Ergebnissen von LAUERT [31].

Liegt die Erregung oberhalb des dritten Eigenwertes, stellt sich ein optimaler Verlauf ein, bei dem die auftretenden maximalen Spannungsvarianzen durch Massenkonzentration²⁶ am Stabende minimiert wird. Die konstante Dicke unmittelbar vor der Massenkonzentration ist durch die geometrische Restriktion bedingt.

$\omega_F = 800 \text{ Hz}$
 $\text{Vol.}_{\min} = 6.61 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
Einsparung 30.1 %

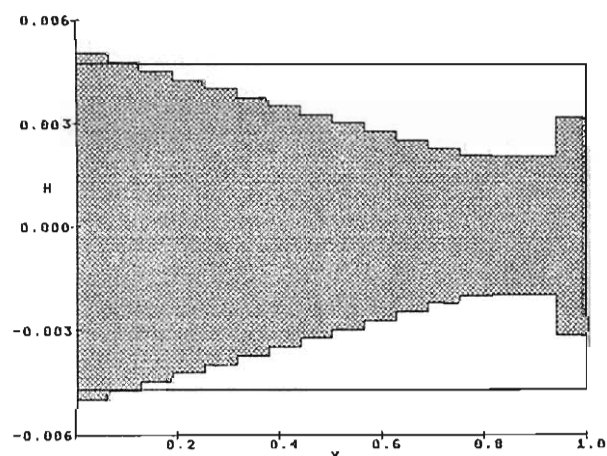


Abb.8.4 : optimaler Wanddickenverlauf der dritten Grundform

²⁶ und nicht Steifigkeitanhäufung

Das nächste Beispiel zeigt einen ungültigen, aber optimalen Verlauf. Bei diesem liegt die dominante Erregerfrequenz oberhalb der sechsten Eigenfrequenz des Stabes; die verwendete elementare Biegetheorie ist nicht mehr anwendbar.

$\omega_F = 1500 \text{ Hz}$
 $\text{Vol.}_{\min} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
 Einsparung 31,4 %

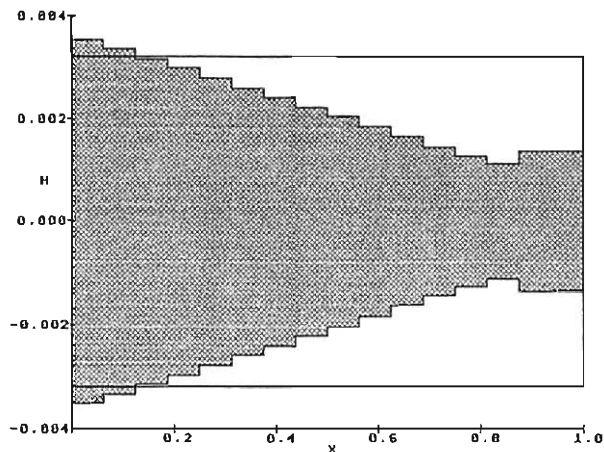


Abb. 8.5 : optimaler Wanddickenverlauf außerhalb der elementaren Theorie

ULLENBOOM [54] hat u.a. einen eingespannten Stab optimiert, der am freien Ende transient durch eine Einzelkraft belastet wurde. Der Stab war in Einzelelemente unterteilt; die Elementdicken waren linear veränderlich. Aus einer Optimierung, bei der die variierbaren Dicken an den Elementnahtstellen bestimmt wurden, ergab sich folgender Wanddickenverlauf:

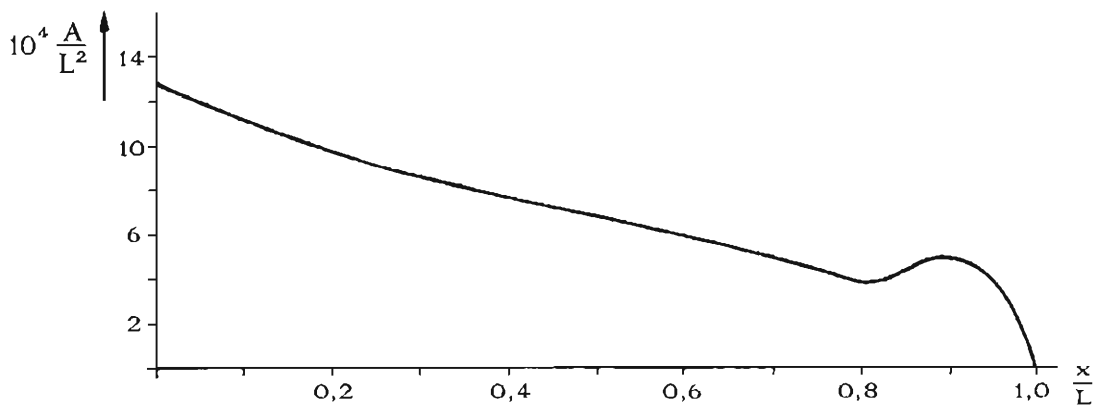


Abb. 8.6 : optimaler Stab nach ULLENBOOM

Unter stochastischer Erregung erhält man in der dritten Grundform einen qualitativ ähnlichen Verlauf, wie Abb. 8.4 zu entnehmen ist.

Für einen auf 70% der Länge verschobenen Lastangriffspunkt

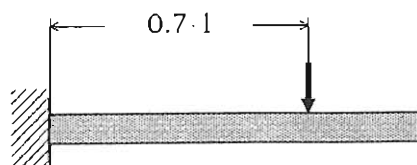


Abb. 8.7 : Lastfall 2

wird vom gleichen Autor folgender Querschnittsverlauf als optimal angegeben:

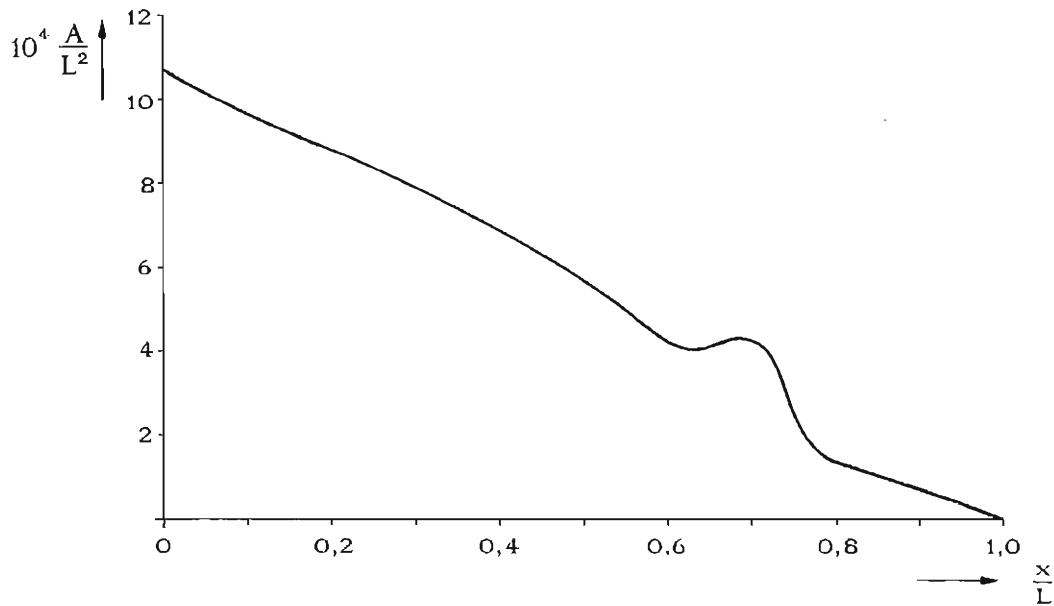


Abb.8.8: Optimum für Lastfall 2 nach ULLENBOOM

Eigene Rechnungen ergaben folgende Verläufe:

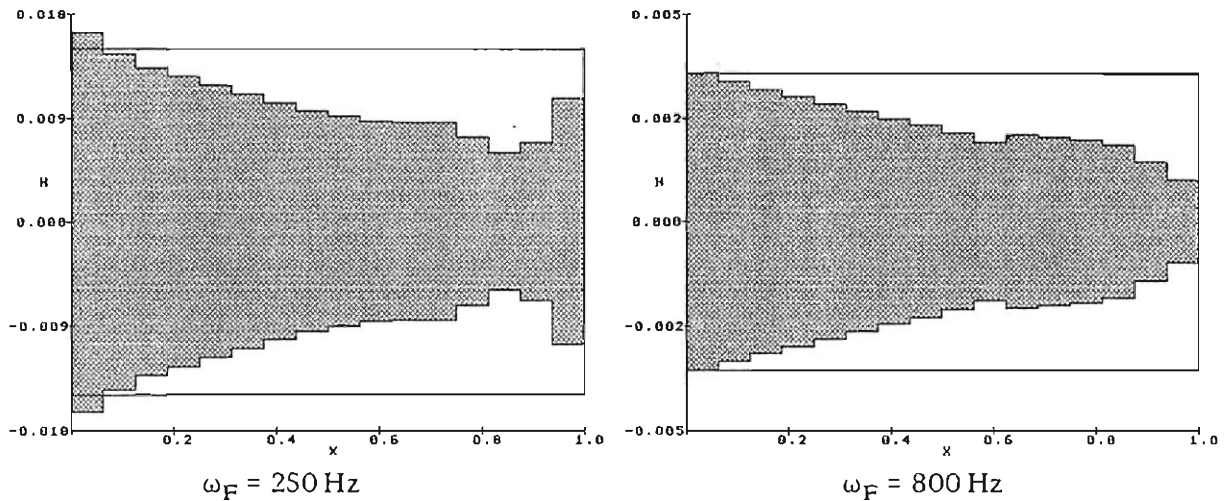


Abb.8.9 : Optima für Lastfall 2 unter stochastischer Last

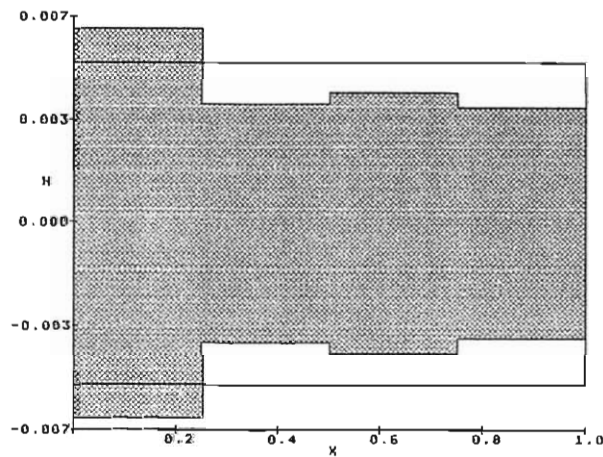
Beide dargestellten Verläufe zeigen nur in sehr schwacher Form die von ULLENBOOM angegebene Massenanhäufung im Kräfteeinleitungspunkt. Da im Verlauf der Optimierung diese Verdickung teilweise nahezu vollständig verschwindet und die Optimierung zum Teil langsam abläuft, d.h. der Gradient kein ausgeprägtes Gefälle zeigt, spielt die Wahl des Abschaltkriteriums eine nicht unbedeutende Rolle.

Die drei folgenden Verläufe zeigen den Optimierungsverlauf, wie er sich bei der beschriebenen, sukzessiven Steigerung der Elementzahl einstellt. Die Vorgabe für den nächsten Optimierungslauf wurde durch eine Spline-Interpolation aus dem Optimum des Vorlaufs gewonnen²⁷.

$$\omega_F = 115 \text{ Hz}$$

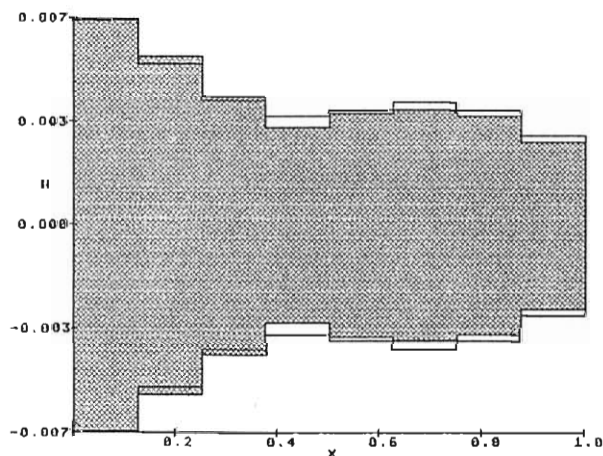
$$\text{Vol.}_{\text{min.}} = 8.98 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Einsparung 13 %



$$\text{Vol.}_{\text{min.}} = 8.29 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Einsparung 2.4 %



$$\text{Vol.}_{\text{min.}} = 7.89 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Einsparung 3.6 %

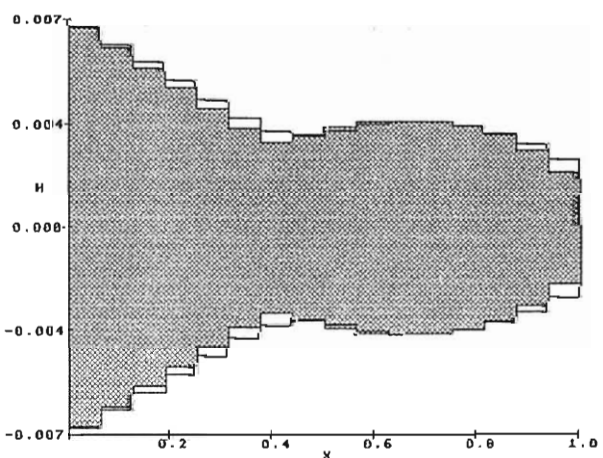


Abb. 8.10: Optimierung mit steigender Elementzahl

²⁷Die Einsparungen werden im zweiten und dritten Bild auf den Vorgänger bezogen. Die Belastung wurde gegenüber den vorangegangenen Beispielen kleiner angesetzt; die Ergebnisse lassen somit nur qualitative Aussagen zu.

Es fällt auf, daß die spline-erzeugten Vorgaben nach einem Optimierungsschritt das Optimum gut beschreiben und daß die erzielten Materialeinsparungen in der zweiten und dritten Konfiguration gering sind. Eine weitere Optimierungsstufe mit noch gesteigerter Elementzahl ist an dieser Stelle nur in Ausnahmefällen extremen Materialeinsparungszwanges, wie z.B. in der Raumfahrt, sinnvoll. Bei einer Beschreibung der Zwischenkonfiguration durch Splines mit anschließendem Einzeloptimierungsschritt ist der Rechenaufwand im Verhältnis zum Nutzen wirtschaftlich vertretbar.

8.2 Rotationsymmetrische Platten

Die Optimierung der rotationsymmetrischen Platten erfolgt unter der Fragestellung, wie sich die Verwendung der verschiedenen Plattentheorien auf den optimalen Querschnittsverlauf auswirkt. Zu diesem Zweck wurden außen eingespannte Ringplatten (Außenradius 1m, Innenradius 0.1m) einer auf dem Innenring verteilten, stochastischen Last $F_{\xi} = 2 \pi r_i \tilde{F}$ unterworfen, deren Charakteristik zu Beginn dieses Kapitels erläutert worden ist.

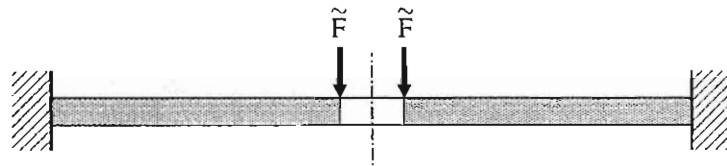
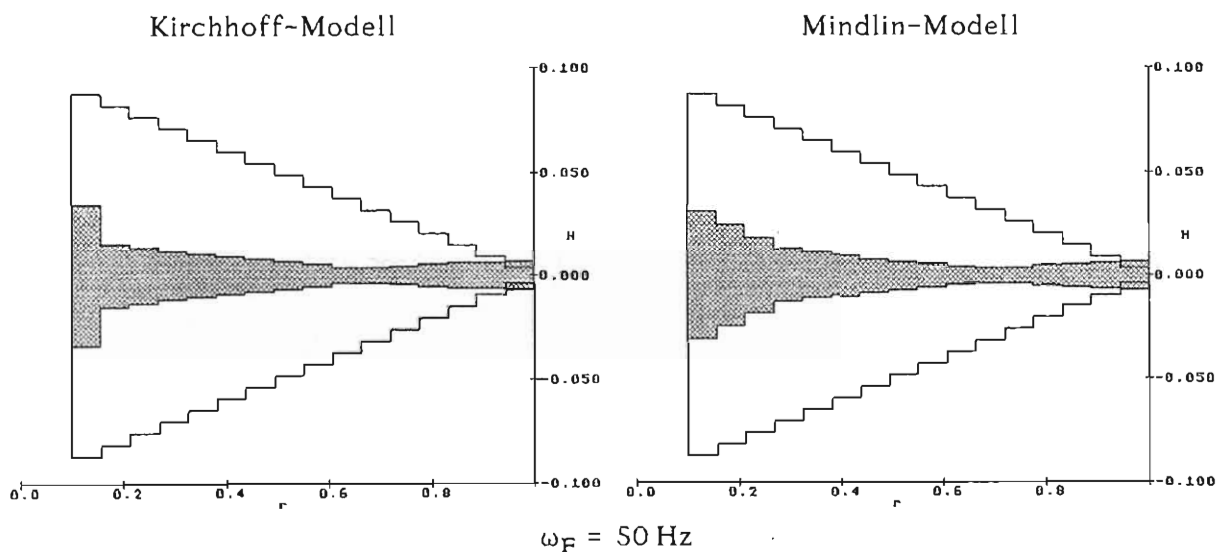


Abb. 8.11 : Lastfall 3

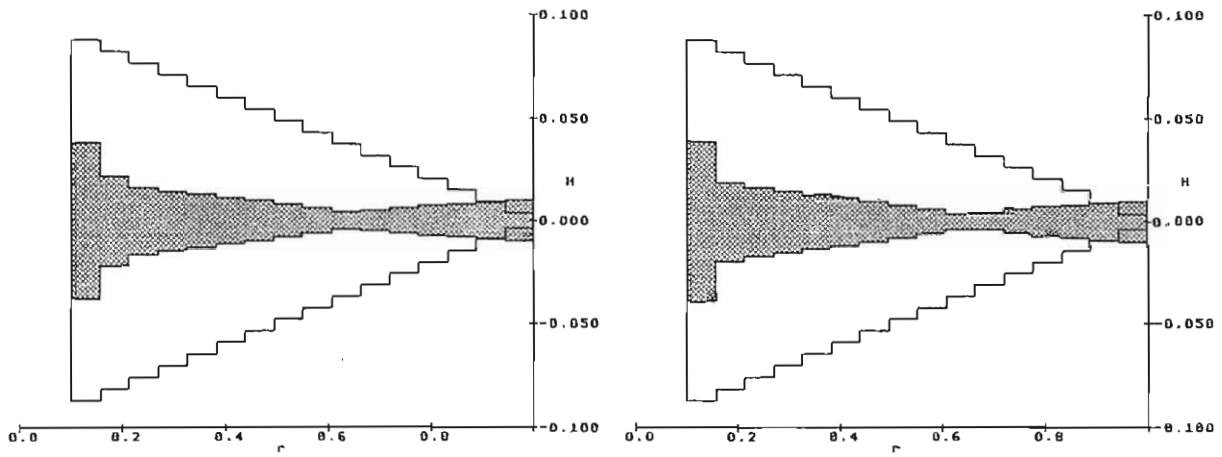
Unter Verwendung der beschriebenen Ringelemente konstanter Dicke stellen sich die optimalen Querschnittsverläufe für verschiedene Filterresonanzfrequenzen ω_F wie folgt ein²⁸:



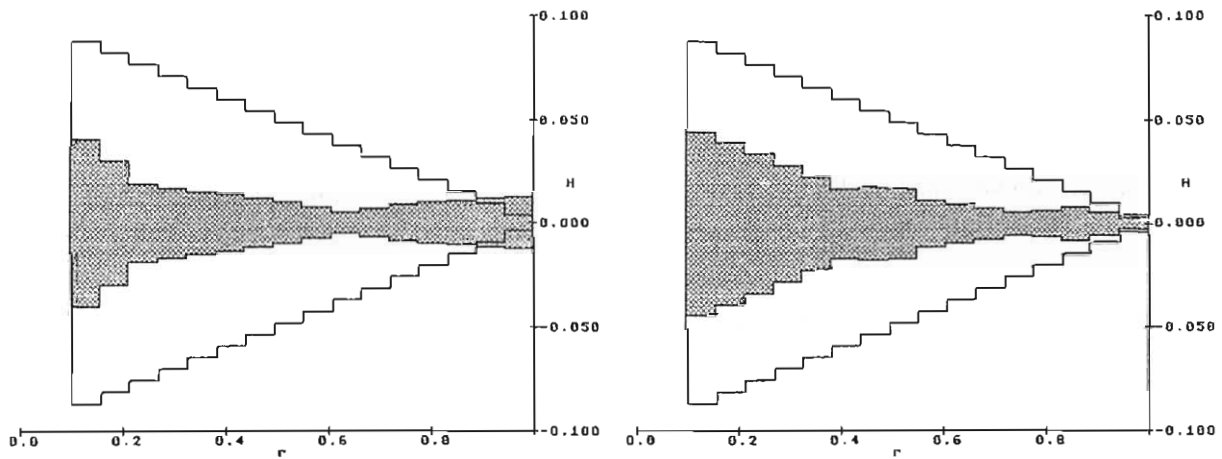
²⁸ Die folgenden Darstellungen zeigen radiale Schnitt durch die optimalen Platten. Die äußeren Konturen zeigen wie in Abschnitt 8.1 Zwischenergebnisse nach den ersten Optimierungsschritten.

Kirchhoff-Modell

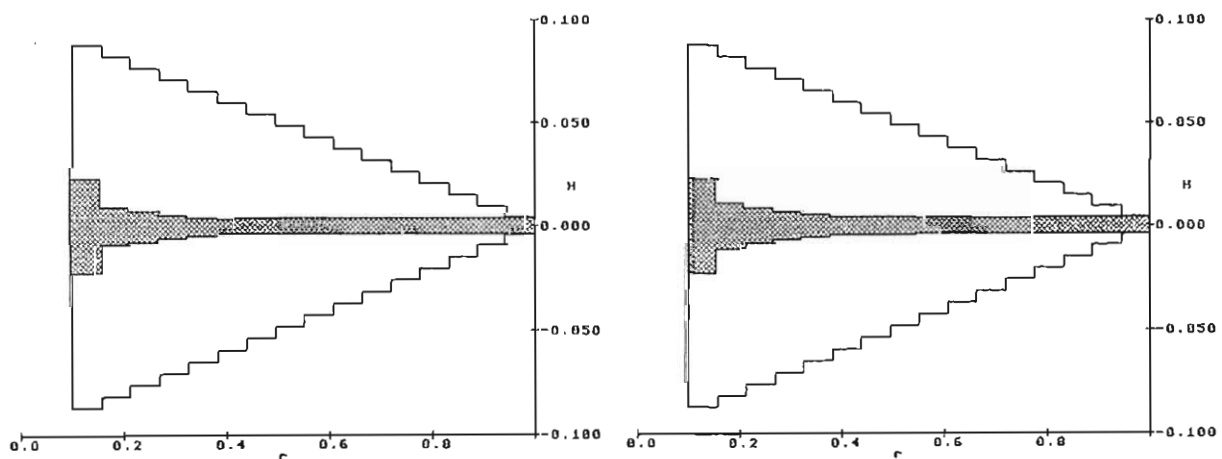
Mindlin-Modell



$\omega_F = 200$ Hz



$\omega_F = 350$ Hz



$\omega_F = 500$ Hz

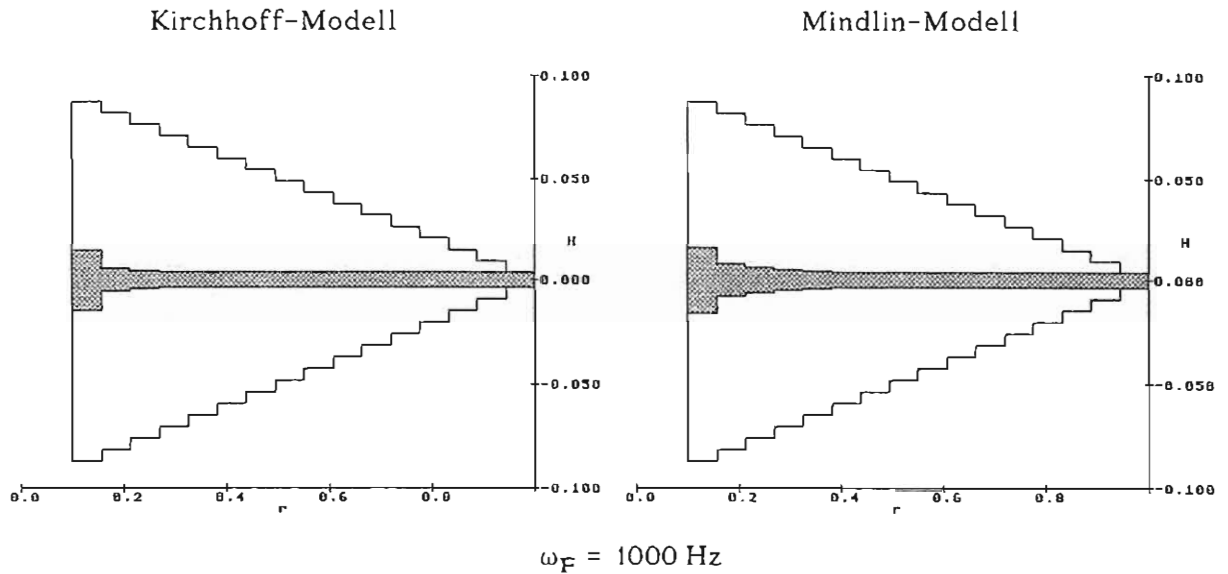


Abb. 8.12: optimale Ringplatten unter Lastfall 3

Bei der qualitativen Beurteilung dieser Verläufe fallen zwei Aspekte besonders auf:

- 1) Die Platten zeigen keine größeren Dickenverlaufsunterschiede zwischen beiden Modellen; mit Ausnahme der mit 350Hz erregten MINDLIN-Platte. Diese Platte weist mehrere Massenanhäufungen auf. Dieses kann z.B. eine Folge der unterschiedlichen Eigenwerte nach beiden Theorien sein.
- 2) Bei hohen Frequenzen werden zunehmend geometrische Restriktionen aktiviert. Dieses wird von anderen Autoren ebenfalls berichtet; beispielsweise gibt BÜRGER [10] folgende optimierte, gelochte Ringplatte an, die am Innenring sprunghaft entlastet wird;

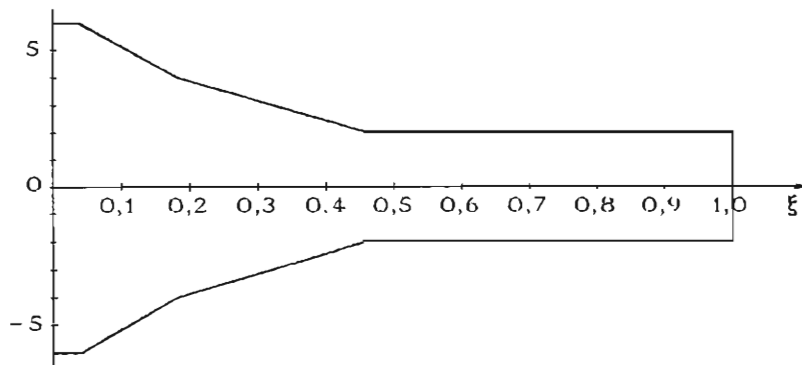


Abb. 8.13: optimale gelochte Platte nach BÜRGER

sie zeigt einen Dickenverlauf, der mit jenem vergleichbar ist, der sich bei hohen Erregerfrequenzen einstellt. Dies stellt insofern kein überraschendes Ergebnis dar, da die Transformation eines Sprungs in den Frequenzraum einen sehr hohen Anteil hoher Frequenzen aufweist.

Die nachfolgende Tabelle zeigt die erzielten Werte der in Abb. dargestellten optimierten Ringplatten (KIRCHHOFF'sche Platten links, MINDLIN'sche rechts):

Erregerfrequenz Hz	optimales Volumen $\cdot 10^{-2} \text{ m}^3$	Ersparnis %	erste	zweite Eigenfrequenz Hz	dritte
50	4.42 4.60	78.9 78.0	218.9 214.7	1079 1152	
200	5.69 5.59	72.7 73.2	296.7 293.1	1372 1380	
350	7.05 7.28	66.3 65.5	375.0 183.1	1660 1431	
500	2.87 2.95	86.3 85.9	133.3 135.6	642 680	1502 1585
1000	2.61 2.72	87.5 87.0	128.1 132.8	541 604	1270 1405

Bei beiden Platten ist eine Volumenzunahme im unterkritischen und Volumenabnahme im überkritischen Fall festzustellen. Die Ergebnisse sind quantitativ kaum unterschiedlich. Eine Ausnahme bildete die Erregung mit $\omega_F=350\text{Hz}$: hier ist in einem Fall der Sprung von der unter- zur überkritischen Platte vollzogen worden.

Bei einer Belastung mit zwei ringförmig angreifenden Lasten,

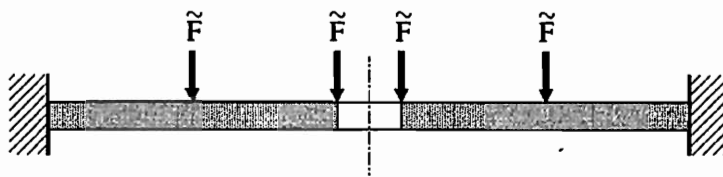


Abb. 8.14: Lastfall 4

von denen eine am Innenring, die andere in der Mitte der radialen Plattenbreite angreift, läuft der Optimierungsprozeß in andere Dickenkonfigurationen, als die obige Tabelle vermuten läßt. Während die optimale Platte unter einer Ringlast für $\omega_F=350\text{Hz}$ ihre erste Eigenfrequenz unterhalb ω_F hat, ergibt unter Verwendung des MINDLIN'schen Modells die unterkritische Platte $\omega_0=427.1\text{Hz}$ für die zweifache Ringlast das geringste Volumen; es liegt 7% über dem der oben angegebenen Platte.

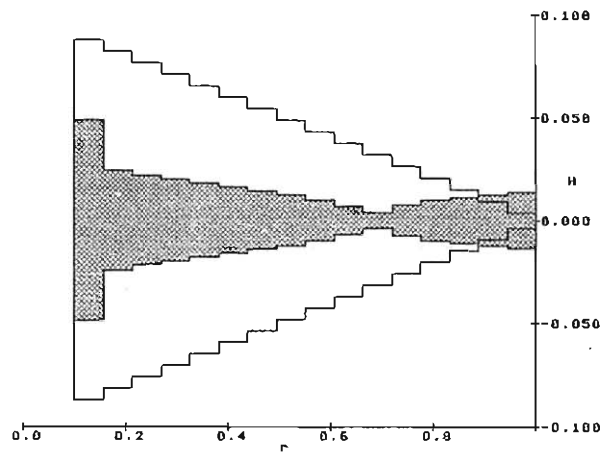


Abb. 8.15 : optimierte Ringplatte im Lastfall 4 mit $\omega_F=350\text{Hz}$

Wird die Filterresonanzfrequenz auf 500Hz erhöht, findet ein deutlicher Übergang zum überkritischen Optimum statt:

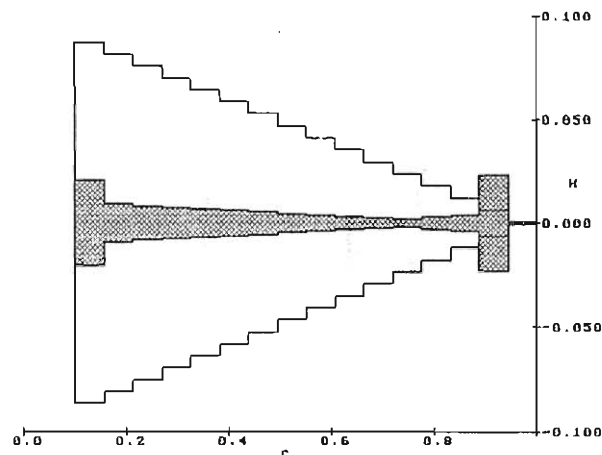


Abb. 8.16 : optimierte Ringplatte im Lastfall 4 mit $\omega_F=500\text{Hz}$

Dieser zeichnet sich durch sehr hohe Unstetigkeit am Plattenrand aus; die Kräfteinleitungsringe sind nicht explizit erkennbar. Dieser Dickensprung ist als deutlicher Schwachpunkt der verwendeten Ringstreifendiskretisierung zu erkennen; diese Platte ist aus technischen Gründen schlecht realisierbar, und die verwendete Plattentheorie ist zur Beschreibung nicht ausreichend.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden mechanische Bauelemente unter stochastischer Belastung bezüglich ihrer Wanddicke optimiert. Ziel war es, ein Bauteil zu schaffen, welches bei minimalem Volumen eine vorgegebene Betriebszuverlässigkeit erzielt. Dieses ist durch die Vorgabe einer maximalen Spannungsvarianz geschehen; sie läßt sich über Konfidenzintervalle oder die Tschebyschew'sche Ungleichung aus der geforderten Zuverlässigkeit gewinnen. Desweiteren wurden geometrische Restriktionen, insbesondere in Form einer minimaler Wanddicke, verwendet.

Die Berechnung sollte unter der Annahme von Spektren stattfinden, die realen Prozessen, wie z.B. Fahrbahnunebenheiten, nahekommen. Zu diesem Zweck wurde ein Filter zweiter Ordnung verwendet. Für dieses konnte gezeigt werden, daß die deterministische harmonische Erregung als Grenzfall der stochastischen Erregung dargestellt werden kann.

Die Berechnung der Auslenkungs- und Geschwindigkeitsvarianz für kontinuierliche Stäbe ergab, daß die Auslenkungsvarianz ein gutes Konvergenzverhalten zeigt. Daraus konnte geschlossen werden, daß eine ausreichende Genauigkeit bereits unter Berücksichtigung weniger Eigenwerte möglich ist. Auffallenderweise zeigte die Geschwindigkeitsvarianz keine Konvergenz.

Eine Untersuchung an einem Einmassenschwinger ergab sehr unterschiedliches Einschwingverhalten stochastisch erregter Systeme. Insbesondere fielen starke Antwortvarianzüberhöhungen in der Anlaufphase auf, welches dem Verhalten nach HENNING und HEINRICH widerspricht, das einige Autoren auch für gefilterte Rauscherregung annehmen. Es zeigte sich, daß die oft getroffene Stationaritätsannahme insbesondere bei kurzzeitigen stochastischen Belastungen für die Systemantwort nicht gilt.

Die Spannungsvarianz ließ sich mittels der Gestaltänderungs-Arbeits-Hypothese, auch bei Auftreten nichtlinearer Terme, auf die Kovarianzmatrix der Knotenverschiebungen beziehen. Der sehr große Bedarf von Rechnerressourcen zur Bestimmung dieser Matrix wurde durch dynamische Kondensation und anschließende modale Entkopplung stark reduziert. Der vorgestellte sequentielle Lösungsweg ermöglicht die Berechnung auch auf Kleinstrechnern (PC).

Die optimierten Verläufe ließen sich qualitativ mit jenen vergleichen, die mit gänzlich anderen Zeitverläufen der Last bestimmt wurden. Der Vergleich optimierter Platten nach verschiedenen Plattentheorien ergab, daß sich unter den getroffenen Lastannahmen keine bzw. keine wesentlichen Unterschiede in den Ergebnissen zeigen. Ein qualitativer Unterschied zu anderen optimierten Bauteilen zeigte sich im Fehlen merklicher Massenanhäufungen in Kräfteinleitungspunkten. Eine Beschleunigung des Optimierungsprozesses wurde durch das Verfahren steigernder Elementzahlen mit Splinevorgaben erzielt.

Weitere Erkenntnisse aus dieser Arbeit sind:

- 1) Das Einschwingverhalten ist vor der Anwendung der Kovarianzanalyse zu untersuchen, um die Gültigkeit der Ergebnisse zu verifizieren.
- 2) Für die Form eines optimalen Bauteils ist entscheidend, welche der ersten Bauteil-Eigenfrequenzen durch das Frequenzspektrum der Last dominant angeregt wird.
- 3) Optimierungsprozesse lassen sich durch gezielte Maßnahmen stark beschleunigen, die sich selbstständig dem laufenden Optimierungsprozeß anpassen.

Ausblick

Der Übergang auf kompliziertere Strukturen oder anderen Fragestellungen, wie der nach optimalen Auflagerpunkten, ist mit den angegebenen Verfahren möglich. Hierfür sind spezielle Anpassungen vorzubereiten.

Für die Berechnung der Kovarianzmatrix sind Verfahren zu entwickeln, die durch wenige, das Eigenverhalten gut beschreibende, Approximationen, wie z.B. Ritz-Vektoren, die Bestimmung der Dauerlösung mit geringen Rechenaufwand erlauben.

Für die Strukturoptimierung zeigen sich neue Aspekte, wenn zusätzliche, von Ingenieuren meist nicht beachtete, wirtschaftliche Größen in die Betrachtung einbezogen werden. Für diese Problemfälle der "Vektoroptimierung" sind die entsprechenden Werkzeuge zu übertragen.

Literaturverzeichnis

- [1] AGYRIS, J. und MLEJNEK, H.-P.
Die Methode der Finiten Elemente Bd. I-III
Braunschweig: Vieweg, 1987
- [2] AMMON, D.
Generierung von diskreten zweidimensionalen stochastischen
Prozessen mit definierten Leistungsdichtespektren
ZAMM No. 68 1988, pp. T45-47
- [3] AOKI, M.
Introduction to Optimization Techniques
New York: Macmillan Com, 1971
- [4] ARNOLD, L.
Stochastische Differentialgleichungen
München: Oldenbourg Verlag, 1973
- [5] ARNOLD, L. and WIHSTUTZ, V.
Ljapunov Exponents
Berlin: Springer, 1986
Lecture Notes in Mathematics 1186
- [6] AXELRAD, D.R.
Foundations of the
Probabilistic Mechanics of Discrete Media
Oxford: Pergamon Press 1984
- [7] BATHE, K.J.
Finite-Elemente-Methoden
Berlin: Springer, 1986
- [8] v. BREDOW, B.
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
Bochum: Ruhr-Universität, 1980
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 22
- [9] BUCHER, C.G. and LIN, Y.K.
Effect of spanwise correlation of turbulence field
on the motion stability of long-span bridges
Journal of Fluids and Structures Vol. 2, 1988, pp. 437-451
- [10] BÜRGER, K.H.
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten
unter instationärer Erregung
Bochum: Ruhr-Universität, 1985
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 49
- [11] CHEN, C.F. and SHIEN, L.S.
A Note on Expanding $PA + A^T P = -Q$
SIAM J. Appl. Math., Volume 16, 1968, pp. 122-123

- [12] COLLATZ, L.
Differentialgleichungen
Stuttgart: Teubner 1969
- [13] CRANDALL, S. and MARK, W.
Random Vibration in Mechanical Systems
New York: Academic Press 1973
- [14] DANTZIG, G.B.
Programming in a linear structure
Washington D.C., 1948
- [15] DOBB, J.L.
Stochastic Processes
New York: Wiley&Sons 1961
- [16] ELISHAKOFF, I.
Probabilistic Methods in the Theory of Structures
New York: Wiley&Sons 1983
- [17] ESCHENAUER, H.
Rechnerische und experimentelle
Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen
Siegen: Universität-Gesamthochschule, 1985
- [18] FARAVELLI, L., CASCIATI, F. and SINGH, M.P.
Stochastic equivalent linearization algorithms
and their applicabilty to hysteretic systems
Meccanica, Volume 23, 1988, pp. 107-112
- [19] GALLAGHER, R. H.
Finite-Element-Analysis, Grundlagen
Berlin: Springer-Verlag, 1976
- [20] GIKHMAN, I.I. and SKOROHOD, A.V.
Introduction to the theory of random processes
Philadelphia: Saunders, 1969
- [21] GIKHMAN, I.I. and SKOROHOD, A.V.
Stochastische Differentialgleichungen
Kiew: Naukova Dumka, 1968
- [22] GOSSMANN, E.
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen
bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregung
durch tochastische Differentialgleichungen
Bochum: Ruhr-Universität, 1981
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 24
- [23] HEINRICH, W., HENNING, K.
Zufallsschwingungen mechanischer Systeme
Braunschweig: Vieweg, 1978

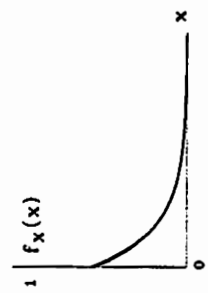
- [24] ITÔ, K.
On Stochastic Differential Equations
New York: American Mathematic Society 1951
- [25] JAMES, H.M., NICHOLS, N.B. and PHILLIPS, R.S.
Theory of Servomechanism
New York: MacGraw-Hill, 1947
M.I.T. Radiation Laboratory Series Vol. 25, pp. 333-369
- [26] KIRCHHOFF, G.R.
Über das Gleichgewicht und die Bewegung
einer elastischen Scheibe
Crelle: Journal Mathematik, Bd. 40, 1850, S. 51
- [27] KOZIN, F. and NATKE, H.G.
System Identification Techniques
Structural Safety, Vol 3, 1986, pp. 209-316
- [28] KRÉE, P.
Lecture Notes on Stochastic Integrals
Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems
Udine: CISM, June 1987
- [29] KREYZIG E.
Statistische Methoden und ihre Anwendung
Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1977 6. Aufl.
- [30] KÜNZI, H.P., TZSCHACH, H.G. und ZEHNDER, C.A.
Mathematische Optimierung
Stuttgart: Teubner Verlag 1966
- [31] LAUERT, H.A.
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer
Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
Bochum: Ruhr-Universität, 1979
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 15
- [32] LEHMANN, T.
Elemente der Mechanik Bd. 1-4
Braunschweig: Vieweg 1985
- [33] LIU, P.
Optimierung von Kreisplatten
unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
Bochum: Ruhr-Universität, 1988
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 59
- [34] MARKOV, A.A.
Calculus of Probability 4th ed.
Moscow 1924

- [35] MESKOURIS, K.
Beitrag zur Erdbebenuntersuchung
von Tragwerken des Konstruktiven Ingenieurbaus
Bochum: Ruhr-Universität, 1982
Mitteilungen aus dem Institut für Konstruktiven Ingenieurbau Nr. 82-12
- [36] MEYERS, A.
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf
von schnellaufenden Zentrifugenschalen
Bochum: Ruhr-Universität, 19
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 8
- [37] MINDLIN, R.D.
Influence of Rotatory Inertia and Shear
on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates
Journal of Applied Mechanics 1951, p. 31-38
- [38] MÜLLER, P.C. and SCHIEHLEN, W.
Linear Vibrations
Dordrecht: Nijhoff Pub, 1985
- [39] NIGAM, N.C.
Structural Optimization in Random Vibration Environment
AIAA-Journal, Vol. 10, 1972, pp. 551-553
- [40] NARAYANAN, S. and NIGAM, N.C.
Optimum structural Design
of sheet-stringer Panels subjected to Jet Noise Excitation
London: Pitman, 1977
- [41] OLHOFF, N. and TAYLOR, J.D.
On Structural Optimization
Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983, pp. 1139-1151
- [42] PATEL, J.K., KAPADIA, C.H. and OWEN, D.B.
Handbook of statistical distributions
New York: Dekker, 1976
- [43] PITZER, M.
Vergleich einiger FE-Formulierungen
auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
Bochum: Ruhr-Universität, 1988
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 61
- [44] PRADLWATER, H. and CHEN, X-W.
On the response of a linear MDOF-System to nonstationary
colored and white noise excitation
European Earthquake Engineering No. 1, 1988, pp. 41-46
- [45] PREUSS, J.
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
Bochum: Ruhr-Universität, 1981
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 23

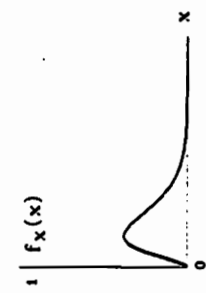
- [46] REISSNER E.
The Effect of Transverse Shear Deformation
on the Bending of Elastic Plates
Journal of Applied Mechanics Vol. 12, 1945, pp. 69-77
- [47] REISSNER E.
On Bending of Elastic Plates
Quarterly of Applied Mechanics Vol. 5, 1947, pp. 55-68
- [48] SCHIEHLEN, W. and WEDIG, W. (Ed.)
Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems
Wien: Springer Verlag, 1988
- [49] SCHNEIDER, K.
Statistische Methoden
Bochum: Ruhr-Universität, 1980
- [50] SCHUËLLER, G.
Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken
Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1981
- [51] STRATONOVICH, R.L.
A New Representation for Stochastic Integrals and Equations
SIAM J. Control 1966, S. 362-371
- [52] TIMOSHENKO, S.P.
On the Correction for Shear of the Differential Equation for
Transverse Vibrations of Prismatic Bars
The London, Edinburgh, Dublin Philosophical Magazine and
Journal of Science, 1921
- [53] TOLLE, H.
Optimierungsverfahren
Springer-Verlag, 1971
- [54] ULLENBOOM, W.
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
Bochum: Ruhr-Universität, 1977
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 11
- [55] VANDERPLAATS, G.N.
Structural Optimization: Past, Present and Future
AIAA-Journal, Vol. 20, 1982, pp. 992-1000
- [56] WALLER, H., KRINGS, W.
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag 1975
- [57] WALLER, H. und SCHMIDT, R.
Schwingungslehre für Ingenieure
Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag 1989

- [58] WEDIG, W.
Stochastische Schwingungen-Simulation, Schätzung und Stabilität
ZAMM Vol. 67, 1987, pp. T. 34-42
- [59] ZAHRADNIK, R.L.
Theory and Techniques of Optimization
New York: Barnes & Noble, Inc., 1971
- [60] ZIENKIEWICZ, O. C.
The Finite Element Method
London; McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1970
- [61] ZURMÜHL, R.
Matrizen und ihre technische Anwendung
Berlin: Springer 1964
- [62] ZOUTENDIJK, G.
Methods of Feasible Directions
Amsterdam: Elsevier 1960

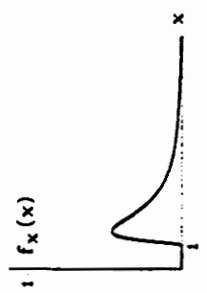
A1 Verteilungsfunktionen



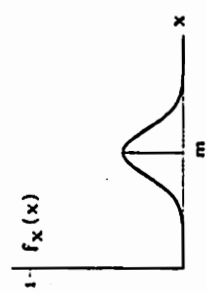
Exponentialverteilung
 $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
 $x \geq 0$
 $E(X) = 1/\lambda$
 $VAR(X) = 1/\lambda^2$



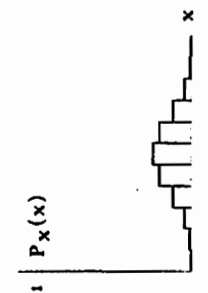
Gammaverteilung
 $f_X(x) = \frac{v(vx)^{k-1} e^{-vx}}{\Gamma(k)}$
 $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt$
 $x \geq 0$
 $E(X) = k/v$
 $VAR(X) = k/v$



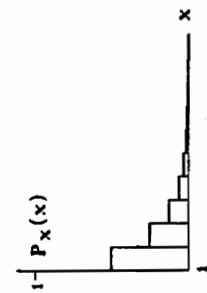
logarithmische Gammaverteilung
 $f_X(x) = \frac{1}{x} \frac{v^{k+1}}{\Gamma(k+1)} (\ln x)^k e^{-v \ln x}$
 $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt$
 $x \geq 1$



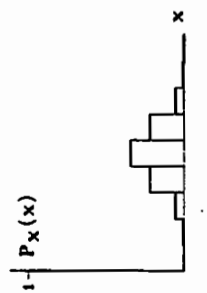
Normalverteilung
 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2\right)$
 $-\infty \leq x \leq \infty$
 $E(X) = m_X$
 $VAR(X) = \sigma_X^2$



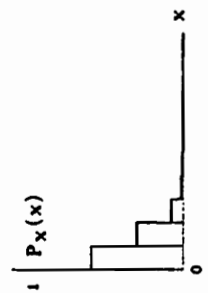
Binomialverteilung
 $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
 $x = 0, 1, 2, \dots, n$
 $E(X) = np$
 $VAR(X) = np(1-p)$



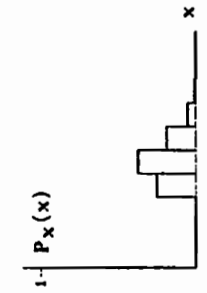
Geometrische Verteilung
 $P_X(x) = p(1-p)^{x-1}$
 $x = 1, 2, \dots, n$
 $E(X) = 1/p$
 $VAR(X) = (1-p)/p^2$



hypergeometrische Verteilung
 $P_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
 $x = 0, 1, 2, \dots, n$
 $E(X) = nM/N$
 $VAR(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$



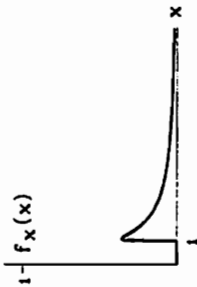
Poissonverteilung
 $P_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$
 $v t = \lambda; x = 0, 1, 2, \dots, n$
 $E(X) = vt$
 $VAR(X) = vt$



negative Binomial Verteilung
 $P_X(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$
 $v = n, n+1, n+2, \dots$
 $E(X) = n/p$
 $VAR(X) = n(1-p)/p^2$

logarithmische Weibullverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{x} a b^{-a} (\ln x)^{a-1} e^{-(\ln x)/b} \quad x \geq 1$$



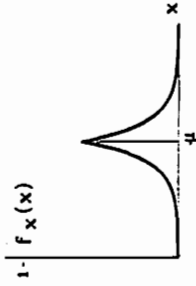
Laplace-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\beta}\right)$$

$$-\infty < x < \infty \quad b > 0$$

$$E(X) = \mu$$

$$VAR(X) = 2\beta^2$$

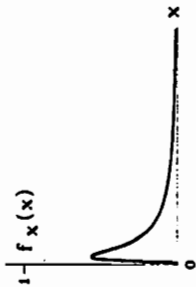


Inverse Gauss-Verteilung

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2x} \left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2\right) \quad x \geq 0$$

$$E(X) = \mu$$

$$VAR(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$



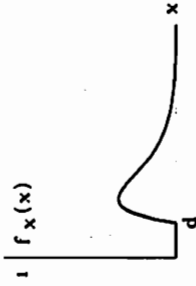
Pearson-III-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{b}{\Gamma(a+1)} (b(x-d))^a e^{-b(x-d)}$$

$$x \geq d \quad \text{bzw.} \quad x \leq d \quad \text{bzw.} \quad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = d + \frac{a+1}{b}$$

$$VAR(X) = \frac{a+1}{b^2}$$



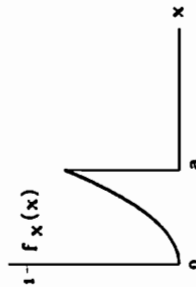
Power-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}$$

$$0 < x < a$$

$$E(X) = \frac{ab}{b+1}$$

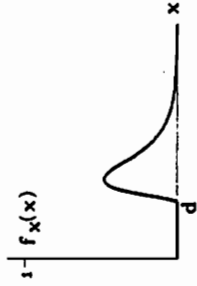
$$VAR(X) = a^2 \frac{b}{(b+2)(b+1)^2}$$



logarithmische Pearson-III-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{x} \frac{b}{\Gamma(a+1)} (b(\ln x - d))^a e^{-b(\ln x - d)}$$

$$x > 0 \quad \text{und} \quad \ln x \geq d \quad \text{bzw.} \quad \ln x \leq d$$



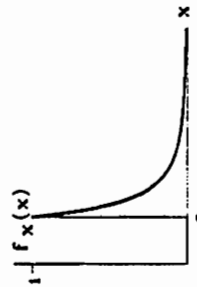
Pareto-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}$$

$$x \geq a \quad b > 0$$

$$E(X) = \frac{ab}{b-1} \quad \text{für } b > 1$$

$$VAR(X) = a^2 \frac{b}{(b-2)(b-1)^2} \quad \text{für } b > 2$$



Logarithmische Normalverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \zeta} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right)$$

$$\zeta = \sigma \ln x; \lambda = \ln m_X; x \geq 0$$

$$E(X) = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2} \zeta^2\right)$$

$$VAR(X) = E^2(X) (e^{\zeta^2} - 1)$$

Rayleighverteilung

$$f_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)$$

$$x \geq 0$$

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha$$

$$VAR(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \alpha^2$$

Rechteckverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a < x < b$$

$$E(X) = (a+b)/2$$

$$VAR(X) = (b-a)/12$$

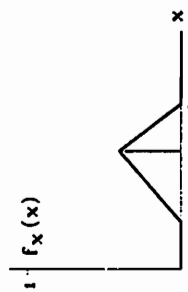
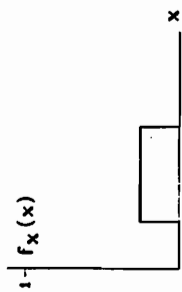
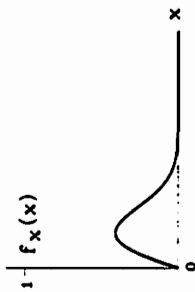
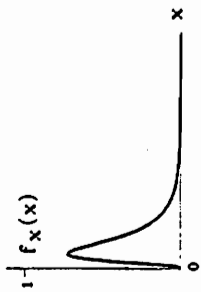
Dreiecksverteilung

$$f_X(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{x-a}{u-a}\right) \quad a \leq x \leq u$$

$$f_X(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-u}\right) \quad u \leq x \leq b$$

$$E(X) = (a+b+u)/3$$

$$VAR(X) = (a^2 + b^2 + u^2 - ab - au - bu) / 18$$



Betaverteilung

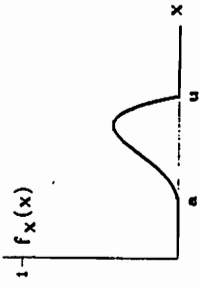
$$f_X(x) = \frac{1}{B(q,r)} \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$$

$$a \leq x \leq b$$

$$E(X) = a + \frac{q}{q+r} (b-a)$$

$$VAR(X) = \frac{q\Gamma}{(q+r)^2 (q+r+1)} (b-a)^2$$

$$B(q,r) = \int_a^b x^{q-1} (b-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$



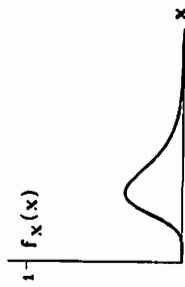
Gumbelverteilung

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha(x-u)} \exp(-e^{-\alpha(x-u)})$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = u + 0.577/\alpha$$

$$VAR(X) = \frac{\pi}{6\alpha^2}$$



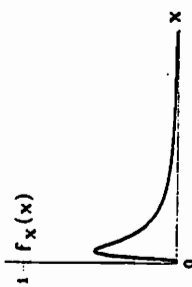
Frechet-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} e^{-(u/x)^k}$$

$$x \geq 0$$

$$E(X) = u \Gamma(1-1/k)$$

$$VAR(X) = u^2 \left(\Gamma(1-2/k) \Gamma^2(1-1/k)\right)$$



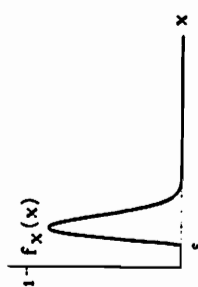
Weibullverteilung

$$f_X(x) = \frac{k}{\omega-\varepsilon} \left(\frac{x-\varepsilon}{\omega-\varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\varepsilon}{\omega-\varepsilon}\right)^k\right)$$

$$x \geq \varepsilon$$

$$E(X) = \varepsilon + (\omega-\varepsilon) \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$VAR(X) = (\omega-\varepsilon)^2 \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$



Verteilungen für Anpassungstests:

Chi-Quadratverteilung

$$f_X(x) = \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}$$

$\Gamma(n/2) = (n/2 - 1)!$ für gerade n

$$\Gamma(n/2) = \sqrt{\pi} \quad (n=1)$$

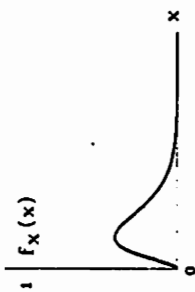
$$\Gamma(n/2) = 1/2 \sqrt{\pi} \quad (n=3)$$

$$\Gamma(n/2) = 3/4 \sqrt{\pi} \quad (n=5)$$

$x \geq 0$

$$E(X) = n$$

$$VAR(X) = n$$



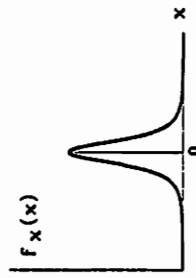
Student-t-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}$$

$-\infty \leq x \leq +\infty$

$$E(X) = \begin{cases} \text{nicht definiert} & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

$$VAR(X) = \begin{cases} \text{nicht definiert} & n=1; 2 \\ (n/(n-2))^2 & n>2 \end{cases}$$



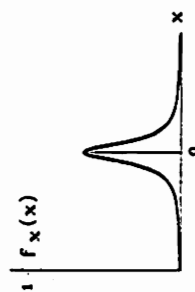
Sonderfall Cauchy-Verteilung n=1

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{(1+x^2)}$$

$-\infty \leq x \leq +\infty$

$E(X)$ nicht definiert

$VAR(X)$ nicht definiert



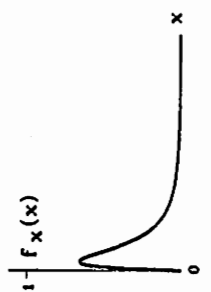
F-Verteilung

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} x^{n/2-1}}{B(n/2, m/2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{(n+m)/2}}$$

$x > 0$ $n, m = 1, 2, \dots$

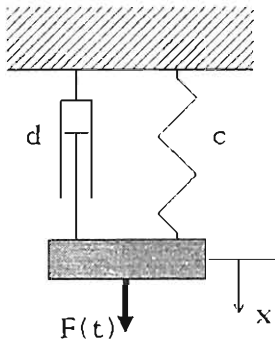
$$E(X) = \frac{m}{m-2} \quad \text{für } m > 2$$

$$VAR(X) = 2 m^2 \frac{n+m-2}{n(m-4)(m-2)^2} \quad \text{für } m > 4$$



A2 Verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Kovarianzmatrix

Am Beispiel eines Einmassenschwingers sollen verschiedene Verfahren zur Berechnung der Auslenkungsamplitudenvarianz demonstriert werden. Vorausgesetzt wird eine Kraftanregung F , die stationäres, ideal weißes Rauschen mit der Intensität S_0 darstellt.



Die Bewegungsgleichung des Schwingers

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + c x = F(t) = \tilde{F} * \xi(t) \quad (\text{A.01})$$

$$\text{wird durch } \mathbf{z}^T = \begin{pmatrix} x & \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.02})$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.03})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & -d/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.04})$$

in die Matrizendifferentialgleichung erster Ordnung überführt

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{b} \xi(t). \quad (\text{A.05})$$

Spektraldichteuntersuchung:

Für zumindest schwach stationäre Prozesse ist von WIENER und CHINTCHIN die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion als Spektraldichtefunktion definiert worden. Aufgrund der Linearität der mathematischen Momente läßt sich leicht zeigen, daß die Spektraldichte der Systemantwort durch quadratische Multiplikation der Erregungsspektraldichte mit komplexer Frequenzgangmatrix des Schwingers berechnet werden kann.

Das Spektraldichteverfahren nutzt diesen Zusammenhang aus; bestimmt wird zunächst die Spektraldichtefunktion der Systemantwort und anschließend durch inverse Fouriertransformation die Autokorrelationsfunktion. Bedingt durch die Stationarität des Gesamtprozesses kann diese einparametrig angegeben werden.

In matrizieller Formulierung lautet dieses Verfahren:

- Bestimmung der Spektraldichtematrix durch

$$\mathbf{S}_{\mathbf{xx}}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \mathbf{Q} \mathbf{F}^T(-\omega), \quad (\text{A.06})$$

$$\mathbf{F}(\omega) = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \quad (\text{A.07})$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{b} \mathbf{S}_{\xi\xi} \mathbf{b}^T = \mathbf{S}_0 \mathbf{b} \mathbf{b}^T; \quad (\text{A.08})$$

- Die inverse Fouriertransformation von \mathbf{S}_{zz} liefert die Autokorrelationsmatrix \mathbf{K}_{zz} , somit auch die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{zz}

$$\mathbf{K}_{zz}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{zz}(\Omega) e^{i\omega(t)} d\omega, \quad (\text{A.09})$$

$$\mathbf{R}_{zz} = \mathbf{K}_{zz}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{zz}(\omega) d\omega. \quad (\text{A.10})$$

In der Lösung dieses Matrizenintegrals treten in vielen Fällen Integrale der Form

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_n(\Omega)}{h_n(i\Omega) h_n(-i\Omega)} d\Omega \quad (\text{A.11})$$

$$\text{mit } g_n(\Omega) = b_0(i\Omega)^{2n-2} + b_1(i\Omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{und } h_n(i\Omega) = a_0(i\Omega)^n + a_1(i\Omega)^{n-1} + \dots + a_n = \det(i\Omega \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (\text{A.13})$$

auf. JAMES, NICHOLS und PHILLIPS [25] geben als Lösung an

$$I = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{a_0} \frac{M_n}{H_n} \quad (\text{A.14})$$

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & h_{12} & h_{13} & h_{14} & \dots & h_{1n} \\ b_1 & h_{22} & h_{23} & h_{24} & \dots & h_{2n} \\ b_2 & h_{32} & h_{33} & h_{34} & \dots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & h_{n2} & h_{n3} & h_{n4} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & \dots & h_{2n} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & \dots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & h_{n4} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$h_{jk} = \begin{cases} a_{2j-k} & \text{für } 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{für alle anderen Fälle.} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Für das angegebene Beispiel berechnen sich

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{(\chi - \omega^2) + i \omega \delta} \begin{pmatrix} i \omega + \delta & 1 \\ -\chi & i \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{Q} = S_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Die Spektraldichtematrix der Schwingungsantwort ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\omega) &= \mathbf{F}(\omega) \mathbf{Q} \mathbf{F}^T(-\omega) \\ &= \frac{\varphi^2 S_0}{(\chi - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -i \omega \\ i \omega & \omega^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Aus der inversen Fouriertransformation folgt die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} \varphi^2 S_0 \begin{pmatrix} 1/(\chi\delta) & 0 \\ 0 & 1/\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{S_0 \tilde{F}^2}{2 c, d} & 0 \\ 0 & \frac{S_0 \tilde{F}^2}{2 m d} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Die Ausführung dieses Verfahrens führt zu Ausdrücken, die mit der Systemordnung n stark anwachsen. Da der damit verbundene Rechenaufwand in n^3 steigt, sind, nach MÜLLER und SCHIEHLEN [38], Systeme "nur bis zu einem Freiheitsgrad von 7 mit erträglichem Aufwand lösbar".

Kovarianzuntersuchung:

Die direkte Berechnung der Varianz einzelner Größen kann auf zweierlei Weise geschehen:

- durch Bildung des Erwartungswertes aus der Fundamentallösung der Differentialgleichung unter Einbeziehung des auftretenden stochastischen Integrals,
- durch Lösung der aus diesem Erwartungswert weiterentwickelten LJAPUNOV-schen Differentialgleichung.

Im Gegensatz zur oben beschriebenen Spektralmethode sind hier beide Wege zur Bestimmung Kovarianzmatrix des Systems auch bei instationärer Erregung geeignet. Insbesondere lassen sich Einschwingvorgänge berechnen sowie deren Dauer abschätzen.

Direkte Berechnung der Kovarianz

Die Varianz der Schwingungsantwort wird nach Gleichung (3.32) aus der Summe von nachschwingenden Anfangsbedingungen und Systemantworten auf die Erregung mit weissem Rauschen gebildet. Deterministische Anfangsbedingungen $x(0) \equiv 0$ und $\dot{x}(0) \equiv 0$, sowie ein ab dem Zeitursprung existierender und konstanter stochastischer Lastvektor \mathbf{b} vereinfachen die Bestimmung der Kovarianzmatrix zu

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Phi^T(t-\tau) d\tau \quad . \quad (\text{A.22})$$

Die in dieser Lösung enthaltene Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ kann für das vorliegende Beispiel in geschlossener Form unter Einführung von $\omega = \sqrt{4x - \delta^2}/2$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} \\ &= e^{-t\delta/2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{2\delta}{\omega} \sin(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\frac{x}{\omega} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) - \frac{\delta}{2\omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

Die Integration liefert die Kovarianzmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t) &= S_0 \varphi^2 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2x\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\delta} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\delta t} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2\delta\omega^2} & -\frac{1}{4\omega^2} \\ -\frac{1}{4\omega^2} & \frac{x}{2\delta\omega^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{8x\omega^2} & \frac{1}{4\omega^2} \\ \frac{1}{4\omega^2} & -\frac{\delta}{8\omega^2} \end{pmatrix} \cos(2\omega t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{4x\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\omega} \end{pmatrix} \sin(2\omega t) \right] \right\} \quad . \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

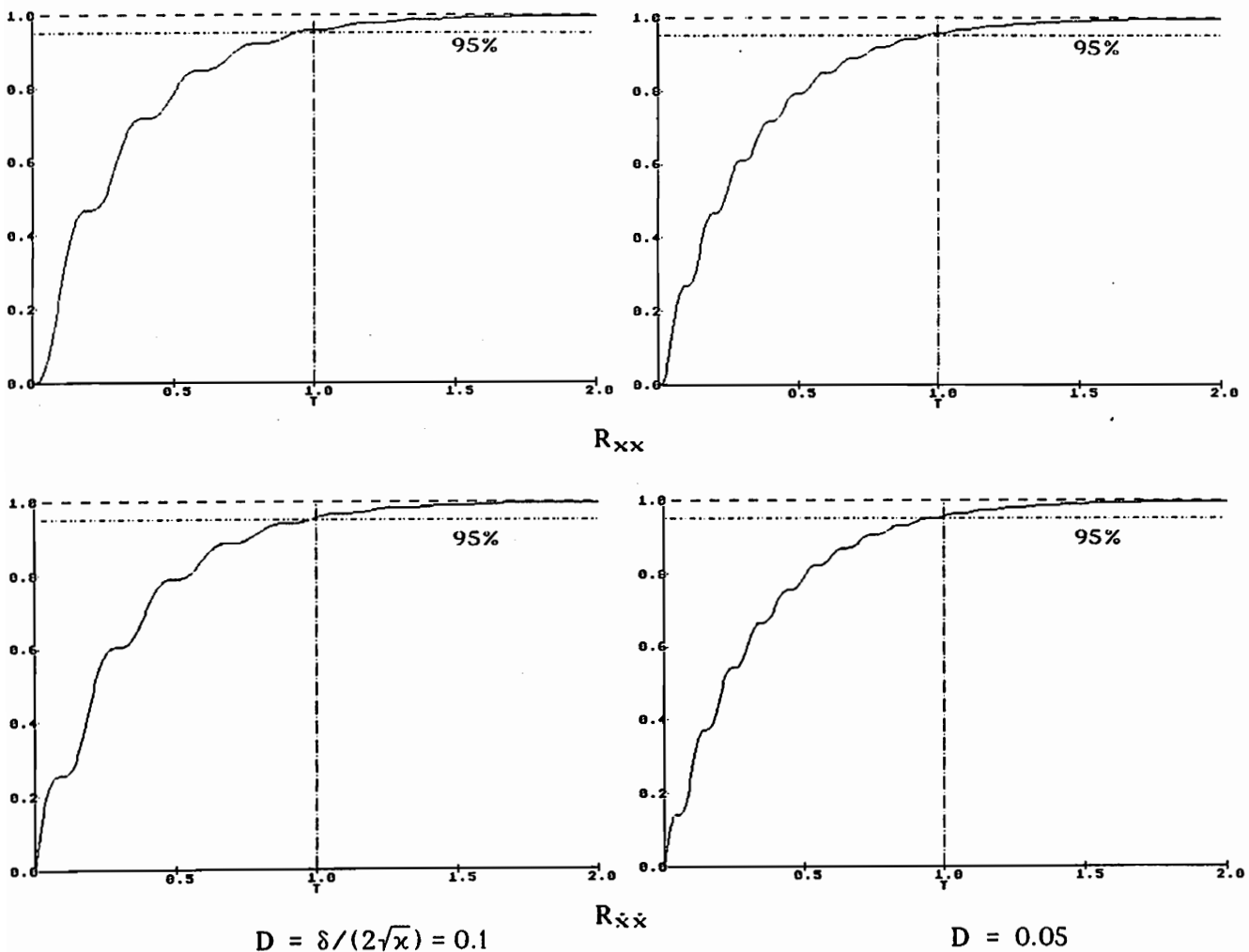
Mit $\alpha = \arctan(2\omega/\delta)$ ergibt sich

$$\mathbf{R}_{zz}(t) = S_0 \varphi^2 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2\chi\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\delta} \end{pmatrix} - \frac{e^{-\delta t}}{4\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{2}{\delta} - \frac{\cos(2\omega t + \pi + \alpha)}{\sqrt{\chi}} & -1 + \cos(2\omega t) \\ -1 + \cos(2\omega t) & \frac{2\chi}{\delta} + \sqrt{\chi} \cos(2\omega t + \pi - \alpha) \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.25})$$

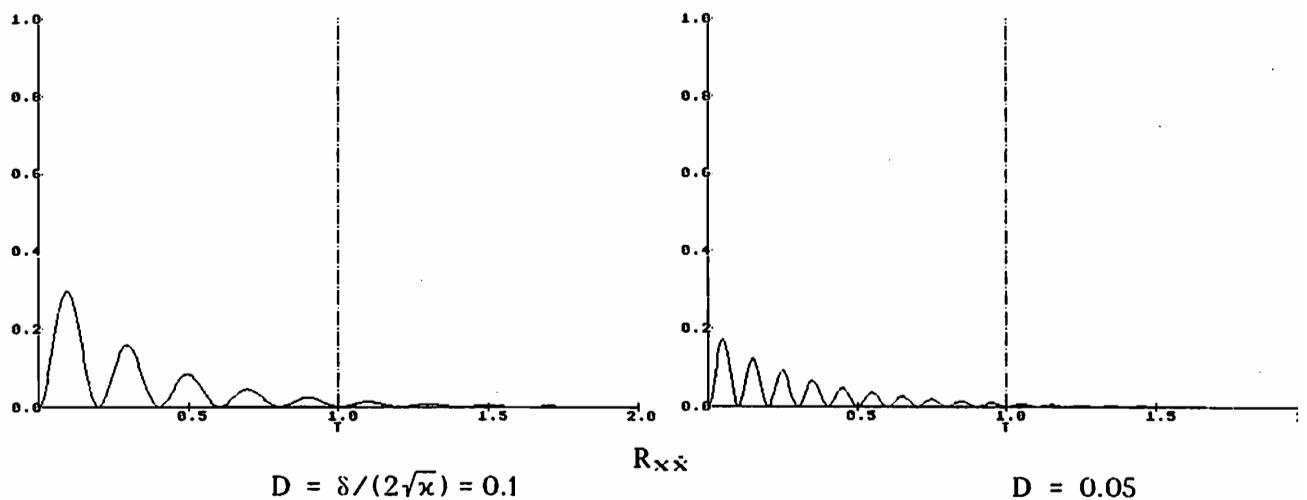
Die Übereinstimmung mit der Spektraldichtelösung für $t \rightarrow \infty$ ist leicht zu erkennen; es fällt jedoch auf, daß die stationäre Lösung theoretisch nie erreicht wird. HENNING und HEINRICH [23] schlagen deshalb vor, den stationären Zustand bei Erreichen von 95% der theoretischen Lösung anzunehmen. Die Einschwingzeit beträgt demnach

$$T_E = \frac{\pi}{\delta} \quad (\text{A.26})$$

Die folgenden Diagramme zeigen das Einschwingverhalten der Kovarianzmatrix. Die Zeitachsen sind auf T_E , die Ordinaten auf die stationären Lösungen normiert¹.



¹ Die Diagramme $R_{\dot{x}\dot{x}}$ sind auf $R_{xx}(t \rightarrow \infty)$ normiert.



Vorteilhaft ist bei diesem Verfahren, daß es bei allen Arten stochastischer Erregung angewendet werden kann. Nachteilig bleibt hingegen der hohe Aufwand, der für die einzelnen Lösungsschritte erforderlich ist.

Bestimmung der Kovarianz durch Lösung der LJAPUNOV-Differentialgleichung

Die Differentiation von Gleichung (A.22) ergibt die bilineare LJAPUNOV-Matrizendifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}, \quad (\text{A.27})$$

die sich ihrer Natur nach zur numerischen Lösung, auch bei höheren Freiheitsgraden, eignet. Da die gewöhnlichen Integrationsalgorithmen von

$$\dot{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{b}} \quad (\text{A.28})$$

ausgehen, ist eine Datenumorganisation notwendig.

Von CHEN und SHIEH [11] wird ein Rechenprogramm zur direkten Bestimmung von $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ vorgeschlagen. Bei n Freiheitsgraden des Schwingers sind $4n^2$ gekoppelte inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Deren Lösung stößt jedoch mit zunehmender Zahl von Freiheitsgraden schnell an die Grenzen der zur Verfügung stehenden Rechnerkapazität.

Die modale Entkopplung stellt einen zweiten Lösungsweg dar. Analog zum Verfahren in Kapitel 7 vereinfacht sich die Integration dann auf n Sätze mit je vier gekoppelten Differentialgleichungen. Zwar ist nach jedem Integrationsschritt eine Multiplikation der Zustandsmatrix mit der Modalmatrix erforderlich, die durch die Vereinfachung eingesparte Zeit und der eingesparte Speicherplatz rechtfertigen dies jedoch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten.

Direkte Bestimmung der stationären Lösung (Kovarianzanalyse)

Die Dauerlösung kann aus der LJAPUNOV'schen Differentialgleichung leicht gewonnen werden:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.29})$$

Für das Beispiel des Einmassenschwingers:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{x\dot{x}} \\ R_{\dot{x}x} & R_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{x\dot{x}} \\ R_{\dot{x}x} & R_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 1 & -\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix} S_0 = \mathbf{0}. \quad (\text{A.30})$$

Daraus folgt: $R_{xx} = \varphi^2 S_0 / (2\kappa\delta), \quad (\text{A.31})$

$$R_{\dot{x}x} = P_{x\dot{x}} = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$R_{\dot{x}\dot{x}} = \varphi^2 S_0 / (2\delta). \quad (\text{A.33})$$

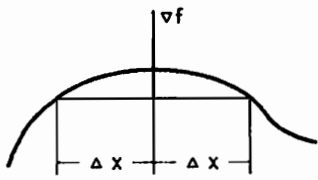
A3 Numerische Gradientenbestimmung

Der Gradient einer Funktion ist definiert durch

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{\Delta x_1}; \dots \dots \dots; \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_n \mathbf{e}_n) - f(\mathbf{x})}{\Delta x_n} \right)^T \quad (\text{A.34})$$

Näherungsweise kann dieser durch den Differenzenquotienten

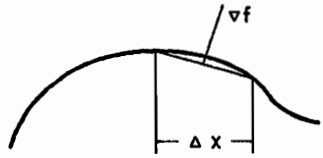
$$\nabla f(\mathbf{x}) \cong \left(\frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x} - \Delta x_1 \mathbf{e}_1)}{\Delta x_1}; \dots \dots \dots; \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_n \mathbf{e}_n) - f(\mathbf{x} - \Delta x_n \mathbf{e}_n)}{\Delta x_n} \right)^T \quad (\text{A.35})$$



ersetzt werden. Zur Minimierung der Fehler werden die Δx_i sehr klein gewählt; jedoch darf die sichere Rechengenauigkeit und die Verfahrensgenauigkeit für f nicht unterschritten werden. Diese Approximation erfordert bei n variierten Parametern $2 \cdot n$ Funktionsaufrufe und kann somit sehr zeitaufwendig sein.

In den ausgeführten Optimierungsläufen zeigte sich, daß die Gradientenbildung mehr als 75% der Gesamtrechenzeit beansprucht. Zum Zweck der Rechenzeiterparnis wird daher eine vereinfachte, auf der einseitigen

Differenzenquotientenbildung basierende Gradientenbildung benutzt. Der systematische Fehler kann zwar nicht beseitigt werden, jedoch sind seine Folgen im Mittel sehr gut kompensierbar, wenn die Richtung der Parametervariation durch einen symmetrisch gleichverteilenden Zufallsgenerator ξ vorgegeben wird



$$\nabla f(\mathbf{x}) \cong \left(\frac{f(\mathbf{x} + \text{sign}(\xi_1) \Delta x_1 \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{\text{sign}(\xi_1) \Delta x_1}; \dots \dots \dots; \frac{f(\mathbf{x} + \text{sign}(\xi_n) \Delta x_n \mathbf{e}_n) - f(\mathbf{x})}{\text{sign}(\xi_n) \Delta x_n} \right)^T \quad (\text{A.36})$$

Eine zusätzliche Beeinflussung der Variationsbreite Δx_i durch einen Zufallszahlengenerator ist hingegen nicht sinnvoll, da dies leicht zu numerischen Schwierigkeiten durch die begrenzte Berechnungsgenauigkeit der Digitalrechner führt. In der Praxis stellten sich die Variationsbreiten als sehr günstig heraus, die zu sicheren Änderungen der Funktionswerte in der Größenordnung einer Potenz über der sicheren Verfahrensgenauigkeit führen.

Die Resultate, die unter Verwendung der zufallsgesteuerten, einseitigen Differenzenquotienten erzielt wurden, weichen zwar geringfügig von denen ab, die mit dem symmetrischen Differenzenquotienten ermittelt wurden, führen aber bei den vorliegenden relativ glatten Funktionen zu gleichen Ergebnissen. Dieses wird jedoch in nur 70% der Rechenzeit erreicht.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 65**