



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Günter Renker

Zur Identifikation nichtlinearer  
strukturmechanischer Systeme

Heft Nr. 68



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Günter Renker

Zur Identifikation nichtlinearer  
strukturmechanischer Systeme

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.68  
November 1989

**Herausgeber:**

**Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1986 bis 1989 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe "Numerische Methoden und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum. Sie berichtet über Ergebnisse des Teilprojektes "Identifikation und Modellierung des Schwingungsverhaltens von Tragwerken unter besonderer Berücksichtigung der Dämpfung" im Sonderforschungsbereich "Tragwerksdynamik". Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung des Projektes.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. H.Waller für die fruchtbaren Diskussionen und die zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing.H.J. Niemann danke ich herzlich für die Bereitschaft zur fachlichen Diskussion und ebenso wie Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns für die freundliche Übernahme der Korreferate.

Meinen Kollegen der Arbeitsgruppe danke ich für die gute Zusammenarbeit, besonders Herrn cand.ing. H. Müller, Herrn cand.ing. F. Vanselow, Herrn cand.ing. A. Menne und Herrn H.-J. Michel für die Unterstützung bei den Versuchen und Herrn cand.ing. R.Lieder für die Mithilfe bei der Erstellung der Programme.

Bochum, Juni 1989

Günter Renker

Doktorarbeit eingereicht am: 14.06.1989

Tag der mündlichen Prüfung: 31.10.1989

Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. H.J. Niemann

© 1989 Dr.-Ing. Günter Renker  
Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## **Zusammenfassung**

Für die speziellen Anforderungen strukturmechanischer Systeme wird eine Identifikationsmethode entwickelt, mit der die vielfältigen, in realen Strukturen wirksamen nichtlinearen Mechanismen durch Systembeobachtung und systematische Modellangleichung analysiert werden können. Die Methode basiert auf einer Systemaufspaltung in ein lineares, aus a priori Kenntnissen abgeleitetes Teilsystem und in ein unbekanntes nichtlineares Teilsystem, dessen Parameter in der Identifikation bestimmt werden. Die Systeme werden über eine Zustandsrückführung gekoppelt, wobei zur Zustandsgrößenschätzung ein modales Kalman-Filter dient. Die Methode wird auf die Identifikation verteilter Reibvorgänge angewendet, die durch Masing-Elemente modelliert werden.

## **Summary**

For the special needs of structural mechanic systems, an identification method has been developed, which supports the analysis of various nonlinear mechanisms in real structures by system observing and systematic model-building. The method is based on the separation of the real system into a linear model, which is designed by a priori knowledge only, and an unknown model, whose parameters are estimated in the identification procedure. The models are coupled by statevalue feedback. The state values are estimated by Kalman filtering. Main applications are systems with distributed friction mechanisms, which are modeled by Masing elements.



# INHALT

<b>1. Einführung</b>	1
<b>2. Einige Grundlagen der Systemidentifikation</b>	6
2.1. Einführung	6
2.2. Modellierung	9
2.2.1. Allgemeines	9
2.2.2. Lineare Differenzenmodelle	12
2.2.3. Schätzung von Systemparametern aus Kovarianzfunktionen	20
2.2.4. Bestimmung der Modellordnung	22
2.2.5. Parametrisch nichtlineare Modelle	26
2.3. Parameterschätzung	28
2.3.1. Allgemeines	28
2.3.2. Quadratische Fehlernorm	28
2.3.3. Supremumsnorm	31
2.3.4. Maximum-Likelihood-Funktion und Statistik der Schätzung	32
2.3.5. Auflösung der Schätzgleichungen bei nichtlinearen Modellen	34
2.4. Rekursive Zustands- und Parameterschätzung	40
<b>3. Detektion und Modellierung von nichtlinearen Systemen</b>	45
3.1. Methoden der Detektion	45
3.2. Nichtlineare Modellansätze	48
<b>4. Identifikation nichtlinearer Mehrfreiheitsgradsysteme durch Rückführung von Zustandsgrößen über ein nichtlineares Teilsystem</b>	55
4.1. Prinzip des Rückführungsmodells	55
4.2. Modellvarianten	65
4.2.1. Allgemeines	65
4.2.2. Parameter- und Anfangswertschätzung	66
4.2.3. Parameterschätzung in Verbindung mit Kalman-Zustandsschätzungen	67

<b><u>5. Dämpfung mechanischer Strukturen</u></b>	72
5.1. Allgemeines	72
5.2. Klassifizierung von Dämpfungsmechanismen	76
5.3. Modelle	77
5.3.1. Allgemeines	77
5.3.2. Viskoelastische Modelle	78
5.3.3. Modelle mit trockener Reibung	84
5.3.4. Masing-Modelle	87
<b><u>6. Anwendungen des Rückführungsmodells</u></b>	102
6.1. Masing-Modell mit exponentiell verteilten Haftkräften	102
6.2. Identifikation einer lokalen Nichtlinearität	111
6.3. Dämpfung eines Stahlbetonbalkens durch verteilte Reibung	117
<b><u>7. Zusammenfassung</u></b>	123
<b><u>8. Literatur</u></b>	125
<b><u>Anhang A: Dämpfung von Stahlbeton</u></b>	133
A.1. Dämpfungsmodelle für Stahlbetonkörper	133
A.2. Schwingungsversuche mit Stahlbetonbalken	137
<b><u>Anhang B</u></b>	
B1 Einige Grundlagen der Beschreibung mechanischer Systeme	147
B2 Methode von Prony	153
B3 STD-Methode	155
B4 Yule-Walker-Gleichungen	157
B5 Levinson-Durbin-Rekursion	158
B6 Lattice-Filter	159
<b><u>Anhang C: Identifikation der Steifigkeitsänderungen eines Stahltragbalkens als Beispiel zur Anwendbarkeit des Rückführungsmodells auf Probleme der Schadenserkennung</u></b>	160

## Formelzeichen

### Matrizen

<b>A</b>	- Systemmatrix, zeitkontinuierlich
<b>A<sub>d</sub></b>	- Systemmatrix, zeitdiskret
<b>B</b>	- Eingangsmatrix, zeitkontinuierlich
<b>B<sub>d</sub></b>	- Eingangsmatrix, zeitdiskret
<b>C</b>	- Beobachtungsmatrix
<b>D<sub>k</sub></b>	- Empfindlichkeitsmatrix, Zeitschritt k
<b>E</b>	- Transformationsmatrix
<b>F</b>	- partielle Ableitung von Steuergrößen
<b>G<sub>z</sub></b>	- modale Eingangsmatrix
<b>H<sub>z</sub></b>	- modale Systemmatrix
<b>I</b>	- Einheitsmatrix
<b>K</b>	- Steifigkeitsmatrix
<b>K<sub>k</sub></b>	- Verstärkungsmatrix, Zeitschritt k
<b>M</b>	- Massenmatrix
<b>P</b>	- Kovarianz der Prädiktionsfehler
<b>P*</b>	- Kovarianz der Zustandsschätzfehler
<b>Q</b>	- Kovarianz des Eingangsräuschens
<b>R</b>	- Kovarianz des Meßrauschens
<b>S</b>	- Hessematrix
<b>T</b>	- Transformationsmatrix
<b>W</b>	- Transformationsmatrix
<b>Y</b>	- Datenmatrix
<b>Γ<sub>k</sub></b>	- Kalmanfaktor der zeitvarianten Übertragungsmatrizen
<b>Φ</b>	- Modalmatrix

### Vektoren

<b>a</b>	- Parameter
<b><math>\tilde{a}</math></b>	- Parameterschätzwerte
<b><math>\bar{a}</math></b>	- exakte Parameter
<b>a*</b>	- optimale Parameter
<b>c</b>	- Steuerung des Modells M <sub>2</sub>
<b>d</b>	- Empfindlichkeitsvektor
<b>f</b>	- modale Kräfte
<b>g</b>	- nichtlineare Rückstellfunktion
<b>h</b>	- nichtlineare Beobachtungsfunktion
<b>p</b>	- Erregerkräfte
<b>q</b>	- modaler Zustandsvektor
<b>u</b>	- Steuervektor
<b>v</b>	- Meßrauschen
<b>w</b>	- Eingangsräuschen
<b>x</b>	- Verschiebungen
<b>y</b>	- Ausgangsvektor
<b>z</b>	- Zustandsvektor
<b>e</b>	- Fehlervektor
<b>∂</b>	- Gradient
<b>ψ</b>	- nichtlineare Zustandsfunktion

<b>f</b>	- Frequenz
<b>F</b>	- Kraft
<b>G</b>	- Übertragungsfunktion
<b>H</b>	- Haftkraft
<b>p</b>	- Ordnung von AR-Modellen
<b>q</b>	- Ordnung von MA-Modellen
<b>s</b>	- Variable der Laplace-Transformation
<b>t</b>	- Zeit
<b>Δt</b>	- Zeitschrittweite
<b>T</b>	- Schwingungsperiode
<b>U</b>	- Formänderungsenergie
<b>W<sub>d</sub></b>	- Verlustarbeit
<b>z</b>	- Variable der z-Transformation

<b>δ</b>	- Abklingkonstante
<b>ε</b>	- Dehnung
<b>ε<sub>k</sub></b>	- Fehler zum Zeitpunkt t <sub>k</sub>
<b>η</b>	- Haftkraftparameter
<b>ξ</b>	- modales Dämpfungsmaß
<b>ρ<sub>τ</sub></b>	- Autokorrelationsfunktion
<b>Φ<sub>τ</sub></b>	- Kovarianzfunktion
<b>ψ</b>	- Verlustfaktor
<b>ω</b>	- Kreisfrequenz
<b>τ</b>	- Index der Zeitverschiebung (Lag) bei Kovarianzfunktionen

## 1. Einführung

Das Resultat wissenschaftlicher Analyse besteht häufig in der Formulierung eines Modells. Das Modell soll die Gesetzmäßigkeiten eines untersuchten Objektes nachbilden und nach Möglichkeit eine Prognose zukünftigen Verhaltens gestatten. Die Entwicklung eines technischen Systems ist dagegen überwiegend synthetischer Natur und verläuft umgekehrt zum analytischen Prozeß: Aus der Vorgabe eines Zwecks folgt der Entwurf eines geeigneten Modells, das in ein reales System umgesetzt werden muß. Daraus könnte auf eine umfassende Transparenz des technischen Systems bezüglich seiner Struktur, seiner Eigenschaften und seines Verhaltens geschlossen werden. Von der stofflichen Zusammensetzung der Bestandteile des Systems und ihrer daraus folgenden Eigenschaften existieren aber im allgemeinen nur idealisierte Modellvorstellungen. Bei der Realisierung des Systems müssen außerdem Imperfektionen hingenommen werden, die mit zunehmender Systemkomplexität möglicherweise beträchtliche Abweichungen vom ursprünglichen, der Planung zugrunde liegenden Modell bewirken. Aus der Umgebung wirken zudem auf das System nicht prognostizierbare Prozesse ein, die zu strukturellen Veränderungen führen können. Um die Betriebssicherheit und die Gebrauchsfähigkeit technischer Systeme auch unter der Berücksichtigung unsicherer Eigenschaften und äußerer Einwirkungen beurteilen zu können, wurden probabilistische Sicherheitstheorien entwickelt [s. beispielsweise Kaltofen 1981, Schueller, 1985]. Mit Hilfe dieser Theorien, die der Tatsache der unvollständigen Systemkenntnis Rechnung tragen, kann die Unschärfe von Prognosen quantifiziert werden. Eine Verbesserung der Prognose ist aber nur durch zusätzliche Informationen über das System zu erzielen, die aus der Beobachtung realer Systeme gewonnen wird. Der Beobachtung sind nur wenige Größen eines Systems zugänglich, daher bedarf es einer Methode, von den Beobachtungsgrößen auf die Eigenschaften und Strukturen zu schließen, deren Kenntnis für eine umfassende Modellbildung erforderlich ist.

Die Systemidentifikation löst diese Aufgabe durch systematische Angleichung von Modellen an das durch die Meßwerte repräsentierte reale System. Ihre Schwerpunkte bilden vor allem die *Modellbildung*, die eine substanzwissenschaftliche Analyse des Systems erfordert, und die *Schätzung der Parameter* des Modells, dessen Struktur aus der Analyse resultiert. Zur Parameterschätzung dienen vielfach Methoden der Statistik und der Optimierung. Die Genauigkeit eines identifizierten Modells wird durch das Maß der in den Meßwerten enthaltenen Information über das reale System bestimmt.

Die Gewinnung möglichst informativer Meßwerte, ein Problem der Versuchstechnik und der Signaltheorie, ist offensichtlich eine entscheidende Voraussetzung für den Erfolg einer Identifikation. Diese umfangreiche Thematik kann im Rahmen dieser Arbeit nur kurz gestreift werden. Größeres Gewicht wird dagegen im folgenden Kapitel auf die Darstellung der wichtigsten methodischen Grundlagen der Systemidentifikation gelegt, beginnend mit Fragen der Modellierung, zunächst linearer Systeme, und der Modellordnung. Die anschließende Behandlung des Problems der Parameterschätzung ist von zentraler Bedeutung, weil sie den algorithmischen Teil der Systemidentifikation und damit den numerischen Aufwand der Modellfindung bestimmt. Die Schätztheorie liefert zudem Aussagen über Varianz und Erwartungstreue der berechneten Schätzwerte. Für die Identifikation in Verbindung mit Simulationsmodellen ist die Kenntnis des Zeitverlaufs von Systemzustandsgrößen bedeutsam. Das zweite Kapitel schließt daher mit einer Betrachtung der Zustandsschätzung mit Hilfe von Kalman-Filtern. Wegen der Ähnlichkeit von Zustandsschätzung und rekursiver Parameterschätzung wird für den wichtigen Fall der Schätzung parametrisch nichtlinearer Modelle die Ableitung der Rekursionsgleichungen dargestellt.

In Kapitel 3 folgt eine Diskussion der Modellvalidierung, die sich zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs eines Modells der Identifikation anschließen muß, und bekannter Modellansätze für nichtlineare Systeme.

In dieser Arbeit wird eine neue Methode der Identifikation nichtlinearer mechanischer Systeme vorgestellt. Die Beschäftigung mit diesem Problem wurde von der oftmals vorherrschenden mangelnden Kenntnis der wirksamen Dämpfungsmechanismen in mechanischen Strukturen motiviert, deren physikalische Ursachen häufig sehr verwickelt und kaum quantifizierbar sind. Zur Analyse der Zusammenhänge können die Methoden der Systemidentifikation genutzt werden, um die tatsächlichen Verhältnisse in realen Strukturen aufzudecken. Eine kurze Übersicht über die wichtigsten Dämpfungsmodelle wird in Kapitel 5 gegeben, wobei das Gewicht vor allem auf die trockene Reibung gelegt wird, die in Lagern, Strukturknoten oder in Stahlbetonkörpern auftritt. Für die Modellierung verteilter Reibvorgänge wird eine Formulierung vorgestellt, die ohne globale Linearisierung für die Identifikation geeignet ist.

Zur Beschreibung großer Systeme existieren in der Strukturmechanik bewährte Ansätze, wie die Finite-Element-Methode und die Modalanalyse, die auch bei der Entwicklung einer Identifikationsmethode für mechanische

Systeme Grundlage der Modellbildung sein müssen. Zahlreiche Identifikationsmethoden, die in anderen Wissenschaftsbereichen gebräuchlich sind, lassen sich auf die besonderen Bedingungen großer mechanischer Systeme, insbesondere die große Zahl von Freiheitsgraden, nicht übertragen. Eine kurze Darstellung der wichtigsten Gleichungen der mechanischen Systembeschreibung findet sich in Anhang B1.

Ein auf den Entwurfsdaten eines Systems basierendes Finite-Element-Modell kann immer als eine erste Näherung des optimalen Modells betrachtet werden. Es wäre daher nicht zweckmäßig, die in den Meßwerten enthaltene, aus verschiedenen Gründen immer begrenzte Information über das System zum Aufbau eines völlig neuen Modells zu verwenden. Sinnvoller ist es, die Information auf ein lediglich *ergänzendes Modell* zu konzentrieren, das in Verbindung mit dem a priori Modell das System besser erklärt, als dieses allein es vermag.

Die Aufspaltung eines Systems in Teilsysteme ist ein oft verwendeter Kunstgriff bei der Modellierung. Wiener und Hammerstein [1930] dient er zur Aufspaltung eines nichtlinearen dynamischen Systems in ein statisches nichtlineares und ein dynamisches lineares System, die in Reihe geschaltet das Verhalten des Gesamtsystems approximieren (s. Kapitel 3). Die Methode der Aufspaltung in Teilsysteme wird auch bei linearen Systemen zur Reduzierung der Komplexität verwendet, um bei der Identifikation nur Modelle niedriger Ordnung betrachten zu müssen [Fasol und Jörgl 1980]. Zur Identifikation von Steifigkeits- und Masseverteilungen strukturmechanischer Systeme nimmt Natke [s. 1983] eine Unterteilung in Substrukturen vor, die nach einer Gewichtung durch Faktoren, die im Identifikationsprozeß zu verbessern sind, zur Gesamtstruktur kombiniert werden. Dieser Ansatz hat bei der Anwendung auf annähernd lineare reale Systeme zu guten Ergebnissen geführt [Geis, Schmidt und Waller, 1986].

Nichtlineare Komponenten eines Systems, beispielsweise plastische Gelenke in einer Rahmenstruktur oder Gleitlager einer Turbine, werden physikalisch korrekt durch Funktionen beschrieben, zu deren Argumenten in der Regel nicht unmittelbar beobachtbare Zustandsgrößen des Systems zählen. Die bekannten Identifikationsansätze verzichten entweder auf eine strukturell korrekte Systembeschreibung, die die Kenntnis der Zustandsgrößen voraussetzt, und ersetzen das physikalische Modell durch ein global äquivalentes mathematisches Modell oder verlangen die Messung einer Vielzahl von Systemgrößen, so daß die fehlenden Größen interpoliert werden können. Um diese,

in der aufwendigen Meßtechnik oder der geringen erzielbaren Information liegenden Nachteile zu vermeiden, müssen die Parameter und die Argumente der nichtlinearen Funktionen mit den Methoden der nichtlinearen Filterung [Jazwinski 1970, Krebs 1979, Maybeck 1982] gemeinsam geschätzt werden, etwa mit dem erweiterten Kalman-Filter. Das Filter liefert sowohl die Zustandstrajektorien, auf denen die Formulierung der Nichtlinearität basiert, als auch eine Schätzung der Parameter in jedem Zeitschritt. Die Berechnung erfordert allerdings einen erheblichen rechentechnischen Aufwand und ist für Systeme von einer gewissen Größe an nicht mehr durchführbar.

Die in Kapitel 4 vorgestellte neue Methode verbindet die Vorteile des Kalman-Filters -die Schätzung der Systemzustandsgrößen- mit der Reduzierung des Schätzaufwands, der durch eine Aufspaltung eines komplexen Systems in Teilsysteme erzielt wird. Die Modellgleichungen der Mechanik beschreiben meistens Beziehungen zwischen Kräften, wie Trägheits- und Rückstellkräften, die durch Systemgrößen bestimmt werden, und äußeren Kräften, für die wegen der in der Regel angenommenen Rückwirkungsfreiheit des Systems auf die Umgebung, ein explizites Zeitgesetz vorgegeben wird. Wenn die Forderung der Rückwirkungsfreiheit aufgegeben wird, tritt an die Stelle der Zeitgesetze eine Interaktionsbeziehung zwischen Systemen, das heißt, die Kräfte sind von den aktuellen Zustandsgrößen zweier oder mehrerer Systeme abhängig. Die vorgestellte Identifikationsmethode nutzt das Modell der Interaktion zur Beschreibung der Beziehung zwischen einem a priori Modell  $M_1$ , das bei der Identifikation unverändert bleibt, und einem Ergänzungsmodell  $M_2$ , das zusätzliche Eingangsgrößen, oder, in den Begriffen der Zustandsraumbeschreibung, zusätzliche Steuergrößen für das Modell  $M_1$  liefert, und das bei der Identifikation so angepaßt wird, daß die Ausgangsgrößen von  $M_1$  eine größtmögliche Übereinstimmung mit den Meßwerten zeigen.

Der Ansatz besitzt gegenüber den vorhandenen Methoden vor allem folgende Vorzüge:

1. Die aufwendigen Zeitverlaufsberechnungen können in der, eventuell problemangepaßt reduzierten, Basis der Eigenvektoren des linearen Teilsystems vorgenommen werden.
2. Bei deterministischer Betrachtung kann die Zustandsschätzung für das lineare Teilsystem formuliert werden, das heißt, unter Verwendung bekannter und während der Identifikation unverändert bleibender Systemmatrizen. Dadurch entfallen die aufwendigen Linearisierungen des Gesamtsystems in jedem Zeitschritt, wie bei dem erweiterten Kalman-Filter.

3. Zur Identifikation eines nichtlinearen System genügt es, das häufig wesentlich kleinere Ergänzungssystem an ein lineares Finite-Element-Modell über formalisierte Kraft- und Empfindlichkeitsbeziehungen anzukoppeln.

Kapitel 6 enthält Anwendungen der Methode auf lineare und nichtlineare Systeme. Den Schwerpunkt bilden dabei durch Reibungsmechanismen gedämpfte Strukturen.



## 2. Einige Grundlagen der Systemidentifikation

### 2.1 Allgemeines

Nach einer Klassifizierung von Aström [1980] wird eine Systemidentifikation charakterisiert durch die in einem Experiment gemessenen Daten  $D$ , die Menge  $M$  der Modelle, die zur Nachbildung des beobachteten Verhalten eines Systems  $S$  in Frage kommen und das Kriterium  $C$ , das die Güte der Übereinstimmung zwischen Modell und Wirklichkeit bewertet. Die Daten  $D$  bilden eine Zeitreihe, die von dem realen System  $S$  unter den Versuchsbedingungen  $X$  generiert wurde.

Die Wahl der Modellmenge  $M$  ist in erster Linie eine Folgerung aus der Information, die a priori über das System vorliegt, sie richtet sich aber auch nach der zusätzlich gewünschten Information, die die Identifikation liefern soll. Ein lineares dynamisches System kann beispielsweise durch ein Ein-/Ausgangsmodell beschrieben werden, wenn primär nach dem Übertragungsverhalten des Systems gefragt ist, andernfalls durch ein äquivalentes Zustandsraummodell, das einen tieferen Einblick in die physikalische Struktur des Systems gestattet. Bestimmte Charakteristiken von Störungen (systematische und zufällige Meßfehler, nichtideale Herauslösung des Systems aus der Umgebung, usw.), wie die Farbigkeit und die stochastischen Eigenschaften von Rauschprozessen, können die Ergebnisse der Systemidentifikation signifikant beeinflussen und müssen gesondert modelliert werden. Die Qualität der Daten und die Versuchsbedingungen, womit im wesentlichen die Art der Erregung bezeichnet wird, aber auch Umstände der Messung, beeinflussen daher ebenfalls die Modellmenge  $M$ . Die Systemidentifikation ist im allgemeinen als ein iterativer Prozeß der Informationsgewinnung zu verstehen, in dem mehrere Stufen der Modellbildung aufeinander folgen.

Zu den wichtigsten Anforderungen an das zur Gewinnung von Beobachtungsdaten erforderliche Experiment zählt die Sicherstellung der Identifizierbarkeit, womit die prinzipiell mögliche Erzielung aller erforderlichen Information durch die Versuchsbedingungen bezeichnet wird. Ljung [1987] definiert diese Forderung so, daß gewährleistet sein muß, daß die Daten genügend Information enthalten, um zwischen verschiedenen Modellen der Menge  $M$  unterscheiden zu können. Einfluß auf die Identifizierbarkeit haben unter anderem die Bandbreite der Erregung, die Lage der Meßaufnehmer und, im Falle nichtlinearer Systeme, das Amplitudenniveau von Zustandsgrößen. Eine weitergehende Fragestellung ist die des optimalen Experiments [Goodwin

und Payne 1977, Wahba 1980, Cottin 1987], das, im Kontext mit  $M$ , die Erzielung maximaler Information ermöglicht.

Im Sinne des Kriteriums  $C$  wird in einem einzelnen Identifikationsschritt aus der Menge  $M$  das optimale Modell  $M^*$  ausgewählt. Im Falle der  $a$ -parametrischen Menge  $M$  bedeutet dies die Auswahl von  $a^*$  mit einem Optimierungsalgorithmus, d.h. dieser Teilschritt der Systemidentifikation besteht aus einer Parameterschätzung.

In einer nachfolgenden *Modellvalidierung* muß geprüft werden, ob  $M^*$  dem System  $S$  entspricht oder es, im Fall  $S \notin M$ , ausreichend approximiert, oder ob zwischen den von  $M^*$  generierten Daten  $D^*$  und  $D$  erklärungsbedürftige Diskrepanzen bestehen, die eine Erweiterung von  $M$  erfordern. Eine Erweiterung kann in der Erhöhung der Modellordnung bestehen, in der Wahl zusätzlicher Zustandsgrößen oder im Übergang zu nichtlinearen Modellen. Einige Methoden der Validierung werden im nächsten Kapitel beschrieben.

Zu Erläuterung seien noch einige Klassifizierungen der Identifikation angeführt. Unter *nichtparametrischer* Identifikation wird die Schätzung der Kennfunktionen von Systemen verstanden, wie Übergangs-, Gewichts- oder Übertragungsfunktionen, die auch als nichtparametrische Modelle bezeichnet werden [s. Wellstead 1981]. In der *parametrischen* Identifikation dienen zur Erklärung der beobachteten Daten Modellansätze mit zu schätzenden Parametern. Einer nichtparametrischen Identifikation kann sich eine parametrische anschließen. Während einerseits die zu identifizierenden Systeme linear oder nichtlinear sein können, kann diese Unterscheidung unabhängig davon bei den Modellen vorgenommen werden, das heißt, auch lineare Systeme werden durch *nichtlineare Modelle* beschrieben oder nichtlineare Systeme durch parametrisch *lineare Modelle*. Die Schätzgleichungen, die auf parametrisch linearen Modellen basieren, können direkt nach den Parametern aufgelöst werden, während bei den nichtlinearen Modellen ein iterativer Lösungsalgorithmus mit Linearisierungen in den aktuellen Schätzwerten angewendet werden muß.

Das Begriffspaar *direkt* und *indirekt* wird in unterschiedlicher Bedeutung verwendet. Einerseits wird unter indirekter Identifikation die Verwendung mehrerer Modellstufen im Identifikationsprozeß verstanden, beispielsweise zunächst die Schätzung modaler Größen und aus diesen anschließend physikalische Parameter [s. Natke 1983]. Bei der Identifikation von Systemen, die durch nichtlineare Vektordifferentialgleichungen beschrieben werden, bezeichnet man als indirekte Fehlerquadratmethode die Verwendung der Lö-

sungen -eventuell durch numerische Integration erhalten- und als direkte Fehlerquadratmethode die Verwendung der Differentialgleichung, wobei der Integrand durch ein geeignetes Funktionensystem approximiert wird [s. Vajda u.a. 1987].

Zu unterscheiden sind ferner Identifikationsmethoden, die auf Modellformulierungen im *Frequenzbereich* basieren und solchen im *Zeitbereich*. Zu den Frequenzbereichsmethoden zählen die Testmethoden unter harmonischer Erregung mit konstanter oder veränderlicher Frequenz (Sweep), die spektralanalytischen Methoden und Modellierungen durch Übertragungsfunktionen im Laplace-Raum und Frequenzgangbeschreibungen. Generell ist den Frequenzbereichsmethoden die Definition des Kriteriums  $C$  im Frequenzbereich gemeinsam. Wenn eine Modellanpassung nur in der Umgebung von Resonanzfrequenzen vorgenommen wird, kann häufig eine bessere Signal-Rausch-Trennung als bei den Zeitbereichsmodellen erzielt werden. Nachteilig wirken sich bei einigen Frequenzbereichsmethoden die systematischen Fehler der Integraltransformationen bei endlichen Meßzeiten aus. Nichtlineare Systeme können fast nur im Zeitbereich identifiziert werden.

Eine bedeutsame Unterscheidung wird nach der Art der Erregung getroffen, die *deterministisch* oder *stochastisch* sein kann. Einen Sonderfall bilden die transienten Schwingungen, die zum Teil gemeinsam mit nichtparametrischen Kennfunktionen behandelt werden können. Stochastische Erregung wird wegen der breitbandigen Anregungsspektren und der damit erzielbaren Information zur Identifikation linearer Systeme gerne verwendet. Eine gewünschte Genauigkeit der Parameterschätzwerte ist, konsistente, unverzerrte und erwartungstreue Schätzungen vorausgesetzt, durch genügend lange Meßzeiten erreichbar. Die Begriffe der Schätztheorie werden später erläutert. Die erforderlichen Meßzeiten sind aber bei stochastischer Erregung, im Vergleich mit anderen Erregungsarten, sehr lang und es muß im allgemeinen eine korrekte Modellvorstellung vom Erregerprozeß existieren. Die deterministische Erregung ist im Rahmen der Schätzung in dieser Hinsicht theoretisch wesentlich einfacher zu behandeln, erfordert aber die Messung der Eingangs- oder Steuersignale und ist daher fast nur unter Laborbedingungen anwendbar. Bei der Auswertung transientser Schwingungen entfallen die Schwierigkeiten der Messung der Eingangsgrößen oder ihrer Modellierung als stochastischer Prozeß. Eine breitbandige Erregung kann häufig durch Schlagerregung erzielt werden. Eine ausreichende punktuelle Impulsanregung großer Strukturen erfordert aber die Aufbringung großer Kräfte und birgt damit die Gefahr lokaler Schädigungen. Eine vorteilhafte Identifikationsmethode bei großen linearen Systemen, die ständig der

Einwirkung "natürlicher" Anregungsprozesse (Wind, Verkehr, Erschütterungen) ausgesetzt sind, besteht in der Bestimmung nichtparametrischer Kennfunktionen, wie Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen an möglichst vielen Punkten der Struktur, und der anschließenden parametrischen Identifikation von Eigenfrequenzen, Dämpfungen und Eigenformen. Diese können zur weiteren Identifikation beispielsweise von Steifigkeits- und Masseverteilungen genutzt werden.

## **2.2 Modellierung**

### **2.2.1 Allgemeines**

Das Ziel einer Systemidentifikation ist generell die Auffindung eines Modells, das das beobachtete Verhalten eines realen Systems nachbilden kann. Von diesem Modell erwartet man entweder eine möglichst zuverlässige Prognose zukünftiger Ausgangsgrößen, das Modell ist in diesem Sinne lediglich ein Prädiktor, oder Aufschluß über den inneren Aufbau des betrachteten Systems, in diesem Fall dient das Modell als Mittel der Systemdiagnose. Demgemäß ist zwischen physikalischen oder strukturellen Modellen und mathematischen Modellen (Black-Box-Modellen) zu unterscheiden. Während letzere nur eine formelmäßige Systembeschreibung, beispielsweise des Ein-/Ausgangsverhaltens, liefern, bilden die physikalischen Modelle die innere Struktur von Systemen nach, wobei die verwendeten Parameter auch eine physikalische Bedeutung besitzen. Die Theorie der Systemidentifikation, vor allem die Beiträge zur Theorie der stochastischen Prozesse, ist zu einem großen Teil auf den Wissenschaftsgebieten Statistik und Regelungstechnik entstanden, die durch die Beschäftigung mit Systemen aus sehr unterschiedlichen Problembereichen gekennzeichnet sind. Die daraus folgende starke Gewichtung allgemein anwendbarer mathematischer Modelle erschwerte häufig die Verwendung der Methoden bei der Strukturanalyse mechanischer Systeme, für die physikalisch aussagefähige Modelle unverzichtbar sind. In der Mechanik entwickelte sich der Zweig der experimentellen Modalanalyse [Natke 1983], in der überwiegend deterministische Systeme betrachtet wurden. Seit einigen Jahren findet ein stärkerer Austausch zwischen den Fachgebieten statt, im wesentlichen auf dem Teilgebiet der modalen Identifikation, beispielsweise in der Verwendung von ARMA-Modellen [Gersch 1979] oder Lattice-Filtern [Sundararajan 1987] -die im folgenden noch beschrieben werden- zur Identifikation von Eigenfrequenzen und Dämpfungen mechanischer Strukturen. Bei der nichtlinearen Identifikation sind dagegen erst wenige Anknüpfungspunkte zu erkennen. Die in der Regelungstechnik verwendeten Ansätze (NARMA-, TAR-Modelle, Volterra-Reihen,

Hammerstein-Modelle, s. Kapitel 3) liefern Modelle, die zwar zur Prädiktion von Systemausgangsgrößen auf der Grundlage vergangener Beobachtungen geeignet sind, eventuell auch zur qualitativen Schadensdetektion durch das Erkennen sprunghafter Parameteränderungen, aber weniger zur Analyse des inneren Systemaufbaus. Für diesen Zweck scheinen weiterhin Modelle erforderlich zu sein, die aus den vermuteten physikalischen Ursachen des nichtlinearen Verhaltens abgeleitet sind. Ein solcher Ansatz wird in dieser Arbeit in Form eines Interaktionsmodells eines unbekanntem nichtlinearen Teilsystems mit einem bekannten linearen System vorgestellt. Das Modell des linearen Systems wird in modalen Koordinaten beschrieben und kann als solches entweder *analytisch* abgeleitet werden, üblicherweise mit finiten Elementen, oder *empirisch* mit den Methoden der modalen Identifikation im Sinne einer äquivalenten Linearisierung. Der empirischen Modellierung ist der erste Teil dieses Kapitels gewidmet.

Zur Beschreibung dynamischer Systeme eignen sich besonders Zustandsraummodelle (Bilder 2.1 bis 2.3). Die Zustandsdifferentialgleichungen eines linearen, zeitkontinuierlichen Systems, das durch den stochastischen Prozeß  $w(t)$  am Eingang gestört ist, lautet:

$$\dot{z}(t) = A z(t) + B u(t) + w(t) \quad (B1.8 b)$$

$$y(t) = C z(t) + v(t) \quad (B1.8 c)$$

(Gleichungsnummern nach Anhang B)

- |      |                      |   |      |                        |
|------|----------------------|---|------|------------------------|
| A    | - Systemmatrix       | ; | u(t) | - Steuervektor         |
| B    | - Eingangsmatrix     | ; | y(t) | - Ausgangsvektor       |
| C    | - Beobachtungsmatrix | ; | w(t) | - Eingangsrauschprozeß |
| z(t) | - Zustandsvektor     | ; | v(t) | - Meßrauschen          |

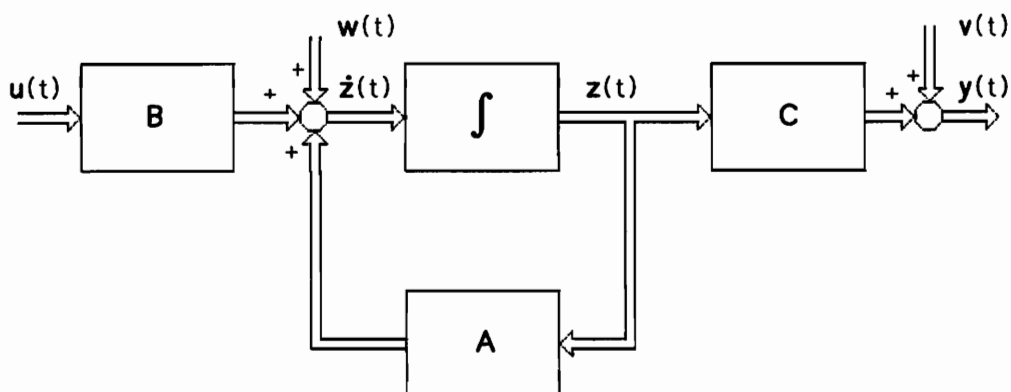


Bild 2.1: Blockschaltbild des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells nach Gl. B.1.8.

Im Zustandsvektor  $\mathbf{z}(t)$  werden im allgemeinen die Verschiebungen und Geschwindigkeiten der physikalischen Systemfreiheitsgrade zusammengefaßt. Nach einer Zeitdiskretisierung geht die Zustandsdifferentialgleichung in eine Vektordifferenzengleichung über:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{B.1.11 b})$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{B.1.11 c})$$

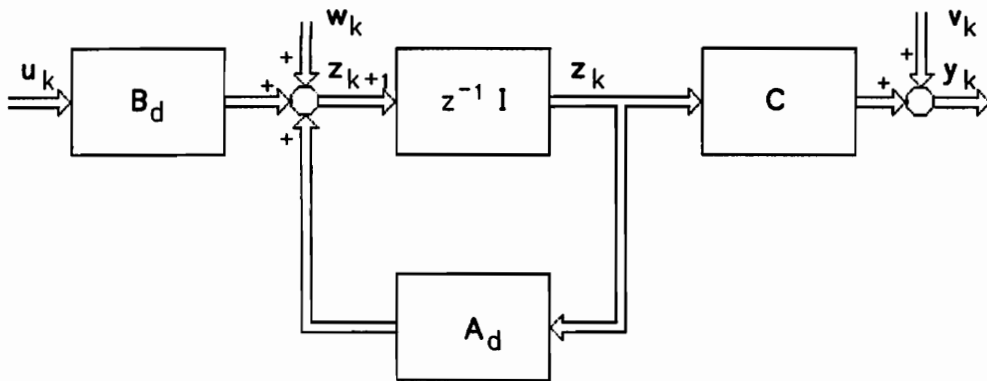


Bild 2.2: Blockschaltbild des zeitdiskreten Systems (Gl. B.1.11).

Die Dynamik eines Systems wird vielfach, abhängig von Anfangsbedingungen und Erregung, von einer relativ geringen Anzahl von Moden bestimmt. Wenn die physikalischen kinematischen Größen über die Modalmatrix  $\Phi$  durch die entsprechenden modalen Größen ersetzt werden, kann eine, in der Dimension oft wesentlich reduzierte Differenzengleichung in modalen Koordinaten formuliert werden:

$$\mathbf{q}_{zk+1} = \mathbf{H}_z \mathbf{q}_{zk} + \mathbf{G}_z \Phi_z^T \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{qk} \quad (\text{B.1.12 b})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \Phi_z \mathbf{q}_{zk} + \mathbf{v}_k \quad (\text{B.1.12 c})$$

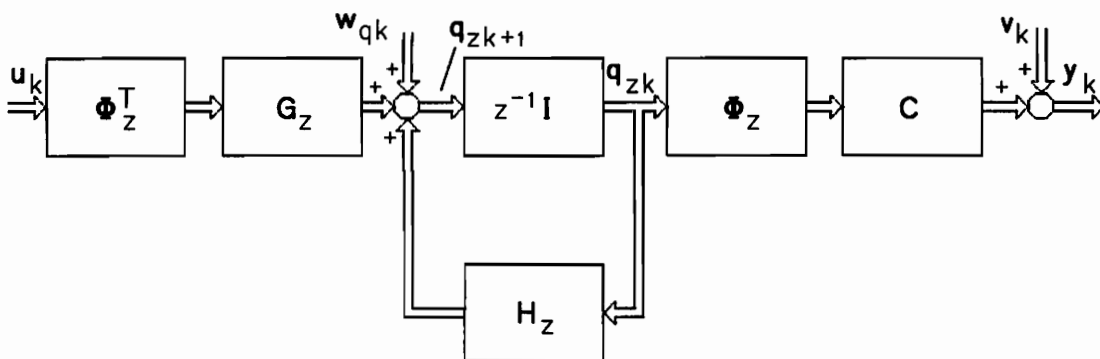


Bild 2.3: Blockschaltbild der modalen Zustandsdifferenzengleichung (Gl. B.1.12).

Die Identifikation eines linearen Systems soll, basierend auf der Messung einer begrenzten Anzahl von Ausgangsgrößen, zuverlässige Schätzungen der Matrix  $\mathbf{A}$  oder  $\mathbf{A}_d$  liefern. Bei strukturmechanischen Problemen übersteigt die Zahl der Systemfreiheitsgrade die Zahl der meßbaren Größen um ein Vielfaches, so daß eine unmittelbare Schätzung von Systemmatrizen nur unter Nutzung von a priori Information möglich ist, durch die die Zahl der Schätzgrößen verringert wird. Ein Beispiel ist die Vorgabe einer speziellen Matrixstruktur, etwa der Beschreibung der Systemmatrix oder ihrer Untermatrizen (s. Anhang, Gl. B1.8 a) als Linearkombination von Substrukturen, die aus der qualitativen Kenntnis des Systemaufbaus abgeleitet wird:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mathbf{A}_{Si}$$

Anstatt zu versuchen, die Koeffizienten von  $\mathbf{A}$  zu bestimmen, wird die Schätzung hier auf die vergleichsweise geringe Zahl der Substrukturkoeffizienten  $\alpha_i$  beschränkt. In dem im Anhang C angeführten Beispiel ist eine solche Vorgehensweise beschrieben.

Die Matrizen  $\mathbf{H}_z$  und  $\mathbf{G}_z$  des zeitdiskreten modalen Modells nach Gl. B1.12 sind nur von den Eigenfrequenzen, den modalen Dämpfungen und der Zeitschrittweite abhängig. Diese Parameter können aus den beobachteten Ausgangsgrößen berechnet werden, ebenso die Eigenvektorkomponente des Systems am Ort und in der Richtung einer aufgenommenen Meßgröße. Die Schätzwerte der Parameter gestatten den Aufbau eines Modells nach Bild 2.3, das als Grundlage der Rekonstruktion des physikalischen Modells dienen kann. Mit den nachfolgend vorgestellten Differenzenmodellen und Schätzmethoden werden diese Informationen unmittelbar aus den zeitdiskret vorliegenden Meßreihen  $y_k^M$  gewonnen.

### 2.2.2 Lineare Differenzenmodelle

Lineare Differenzenmodelle, in der Statistik auch als diskrete Regressionsmodelle bezeichnet, beschreiben einen formelmäßigen Zusammenhang zwischen der zum Zeitpunkt  $t_k$  vorliegenden Ausgangsgröße  $y_k$  -oder  $y(k\Delta t)$ - eines zeitdiskreten Systems und zeitlich zurückliegenden Ausgangsgrößen  $y_{k-j}$ , Eingangsgrößen  $u_{k-j}$  und abgeleiteten Größen  $\epsilon_{k-j}$ . Für nichtlineare Modelle werden zusätzlich Funktionen der Meßgrößen, beispielsweise Produkte  $y_{k-j}u_{k-j}$ , zur Regression verwendet (s. Kap. 3). Die Regressionstiefe, das ist die Zahl der zurückliegenden Meßgrößen, die zur Prädiktion einer

aktuellen Ausgangsgröße verwendet werden, bestimmt die Ordnung der Modelle. Alle auf ein System einwirkenden Störungen werden durch einen Gleichungsfehler modelliert. Die Parameter dieser zeitdiskreten Modelle sind nicht nur von den Systemeigenschaften abhängig, sondern auch von den teilweise willkürlichen Festlegungen der Modellordnung und der Zeitschrittweite, sie eignen sich daher nicht unmittelbar zur objektiven Charakterisierung von Systemen. Der Schätzung der primären Parameter können aber weitere Berechnungsschritte zur Ableitung physikalischer oder modaler Systemparameter angeschlossen werden, dadurch ist ihre Anwendung auch bei der Identifikation mechanischer Strukturen interessant, wenn das Ziel die Schätzung von Eigenfrequenzen, modalen Dämpfungen und Eigenvektorkomponenten ist.

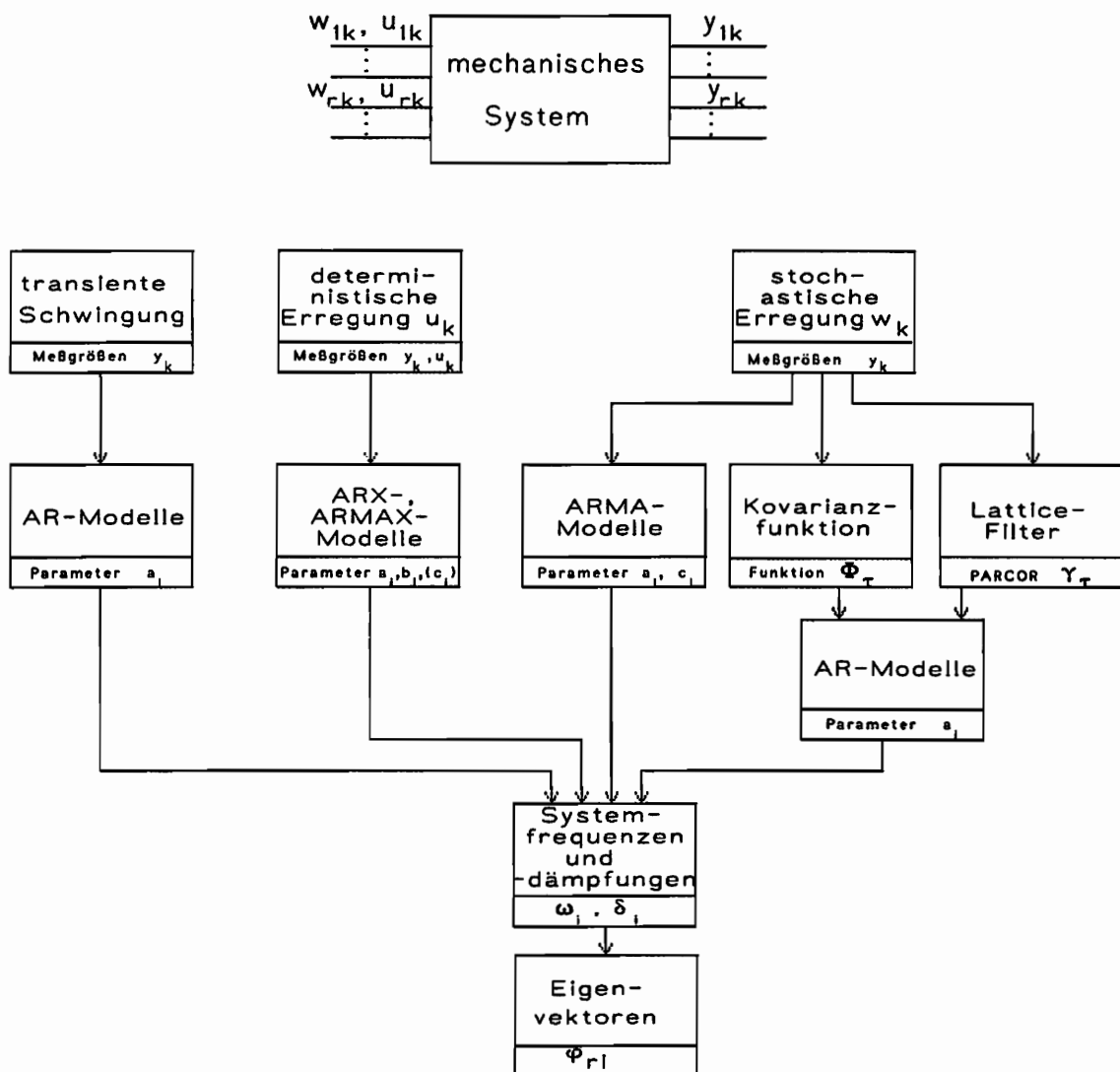


Bild 2.4: Modellierung mechanischer Systeme durch lineare Regressionsmodelle.



In den meisten Anwendungen der Systemidentifikation werden Regressionsmodelle verwendet, weil ihre Formulierung häufig nur geringe apriorische System- oder Prozeßkenntnis erfordert und sie zum Teil mit linearen Schätzmethoden angepaßt werden können. Im Gegensatz zu vielen anderen Zeitbereichsmodellen ist auch bei der Modellierung transienter Schwingungen keine Kenntnis der Anfangsbedingungen des Systems erforderlich, die aber bei Bedarf mitgeschätzt werden können. Eine große Bedeutung kommt den Regressionsmodellen in Anwendungen zu, die Parameterschätzungen in Echtzeit verlangen, weil sie im Vergleich mit anderen Modellansätzen den geringsten rechen-technischen Aufwand erfordern. Ebenso wichtig wurden die Regressionsmodelle mittlerweile bei der spektralen Schätzung stochastischer Prozesse. Besonders auf diesem Gebiet sind in den letzten Jahren zahlreiche effiziente Schätzalgorithmen entwickelt worden [s. Priestley 1981, Kay 1988]. Die nachfolgende kurze Darstellung beschränkt sich daher auf die Beschreibung der meist verwendeten Modelltypen und ihrer wichtigsten Eigenschaften, sofern sie für die Identifikation mechanischer Systeme relevant sind.

Die einfachste Klasse bilden die *autoregressiven (AR-) Modelle*, die eine beobachtete Ausgangsgröße  $y_k$  eines Systems durch Linearkombination der bis zu  $p$  Zeitschritte zurückliegenden Meßgrößen und einer additiven Störung  $\varepsilon_k$  beschreiben. Sie können auch als lineare stochastische Differenzenmodelle verstanden werden.

$$y_k = \sum_{j=1}^p a_j y_{k-j} + \varepsilon_k; \quad \varepsilon_k \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.2.1)$$

$N(\bar{x}, \sigma^2)$  - Gaußprozeß, Mittelwert  $\bar{x}$  und Varianz  $\sigma^2$

Die Regressionstiefe  $p$  bestimmt die Modellordnung. Bei Anwendungen auf mechanische Systeme werden mit AR( $p$ )-Modellen vorwiegend freie Schwingungen oder -durch nichtparametrische Identifikationsmethoden geschätzte- Gewichtsfunktionen modelliert. Ein AR(2)-Modell beschreibt die abklingende Schwingung eines Einmassenschwingers oder eines Modes vollständig, die Modellordnungen sind daher immer geradzahlig (s. Anhang B2). Hinsichtlich der Parameteranzahl besteht keine Redundanz, die AR-Parameter können eindeutig in den Raum der Frequenz- und Dämpfungsparameter abgebildet werden.

Wenn eine meßbare Erregung  $u_k$  auf das System einwirkt, wird die Gleichung 2.2.1 um einen zusätzlichen Regressionsterm erweitert:

$$y_k = \sum_{j=1}^p a_j y_{k-j} + \sum_{j=0}^m b_j u_{k-j} + \varepsilon_k \quad (2.2.2)$$

Diese Modelle werden als *Extended Autoregressive Models (ARX)* oder als deterministische ARMA-Modelle (DARMA) bezeichnet. Der Anteil

$$y_{\text{MA}k} = \sum_{j=0}^m b_j u_{k-j}$$

wird dann als gleitender Durchschnitt (Moving Average) über die Eingangsgrößen  $u_{k-j}$  betrachtet. Im Fall  $\epsilon_k=0$  gleicht die Struktur von Gl. 2.2.2 der eines rekursiven Digitalfilters, wenn zusätzlich auf die Rückführung der Ausgangsgrößen verzichtet wird ( $p=0$ ) der eines Transversalfilters oder Finite Impulse Response (FIR) Filters [s. Hamming 1983]. Durch Anwendung der z-Transformation [s. Marko 1977] auf Gl. 2.2.2 kann, unter Zuhilfenahme des Verschiebungssatzes, die diskrete Übertragungsfunktion des Modells angegeben werden:

$$\text{z-Transformation der Zeitreihe } y_k: \mathcal{Z}\{y_k\} = Y(z)$$

$$\mathcal{Z}\{y_{k-i}\} = Y(z) z^{-i}$$

Transformation des ARX-Modells:

$$\mathcal{Z}\{y_k - \sum_{j=1}^p a_j y_{k-j}\} = (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_p z^{-p}) Y(z)$$

$$\mathcal{Z}\{\sum_{j=1}^m b_j u_{k-j}\} = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) U(z)$$

Daraus folgt die diskrete Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_p z^{-p}} \quad (2.2.3)$$

Die für Eingrößensysteme formulierten Regressionsbeziehungen können für Mehrgrößensysteme erweitert werden. Die Übertragungsbeziehung eines Multi-Input-Multi-Output (MIMO-)Systems lautet beispielsweise:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_r(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \dots & G_{1s}(z) \\ G_{21}(z) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ G_{r1}(z) & \dots & & G_{rs}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_s(z) \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

r - Anzahl der Ausgangsgrößen

s - Anzahl der Eingangsgrößen

Die Modellierung linearer mechanischer Systeme zum Zweck modaler Schätzung erfordert aber nur die Betrachtung einzelner Ausgangskanäle, weil die Systemdynamik in Modalkoordinaten formuliert werden kann und sich über Modal- und Beobachtungsmatrix in allen Systempunkten abbildet, in denen die Moden beobachtbar sind.

Im Vergleich mit dem AR-Modell erfordert das ARX-Modell keinen zusätzlichen rechentechnischen Aufwand bei der Parameterschätzung, aber eine aufwendigere Meßtechnik, weil alle Eingangsgrößen beobachtet werden müssen. Umgekehrt verhält es sich bei *ARMA(p,q)-Modellen*, die Systeme mit stochastischer Störung beschreiben, die Quelle der Störung ist dabei unerheblich. Der MA-Anteil besteht aus einem zusätzlichen Regressionsterm in den Störgrößen  $\epsilon_k$  mit der Regressionstiefe  $q$ . Bei der Schätzung der Parameter von AR(X)-Systemen hat eine Farbigeit der Störung  $\epsilon_k$  einen systematischen Schätzfehler zur Folge (s.Gl. 2.3.5). Die Größe  $\epsilon_k$  kann als Ausgangsgröße eines Filters  $C(z^{-1})$  angesehen werden, auf dessen Eingang ein weißer Rauschprozeß wirkt. Wenn die spektralen Eigenschaften von  $\epsilon_k$  bekannt sind, genügt es, die Gleichung 2.2.2 lediglich mit dem Inversen Rauschfilter  $C^{-1}(z^{-1})$  zu multiplizieren, um die gewünschten Eigenschaften zu erzielen. Das Filter  $C(z^{-1})$  ist aber in den meisten Fällen nicht bekannt und muß in die Schätzung einbezogen werden, dazu dienen beispielsweise ARMA-Modelle:

$$y_k = \underbrace{\sum_{j=1}^p a_j y_{k-j}}_{\text{AR-Anteil}} + \underbrace{\sum_{j=1}^q c_j \epsilon_{k-j}}_{\text{MA-Anteil}} + \epsilon_k \quad (2.2.5)$$

Die Eingangsgrößen müssen zur Schätzung mit ARMA(p,q)-Modellen zwar nicht gemessen werden, aber die Parameterschätzung gestaltet sich wesentlich schwieriger, weil die Regressionsgrößen  $\epsilon_k$  zunächst unbekannt sind und in einem mehrstufigen Algorithmus approximiert werden müssen [s. Honig u. Messerschmidt 1984]. Der MA-Anteil -eine Regression mit Störgrößen- kann auch den ARX-Modellen hinzugefügt werden, wenn der Gleichungsfehler nicht die angenommenen statistischen Eigenschaften weißen Rauschens besitzt, das resultierende Modell wird als ARMAX-Modell bezeichnet. Die Beziehung lautet im z-Bereich:

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \epsilon(z) \quad (2.2.6)$$

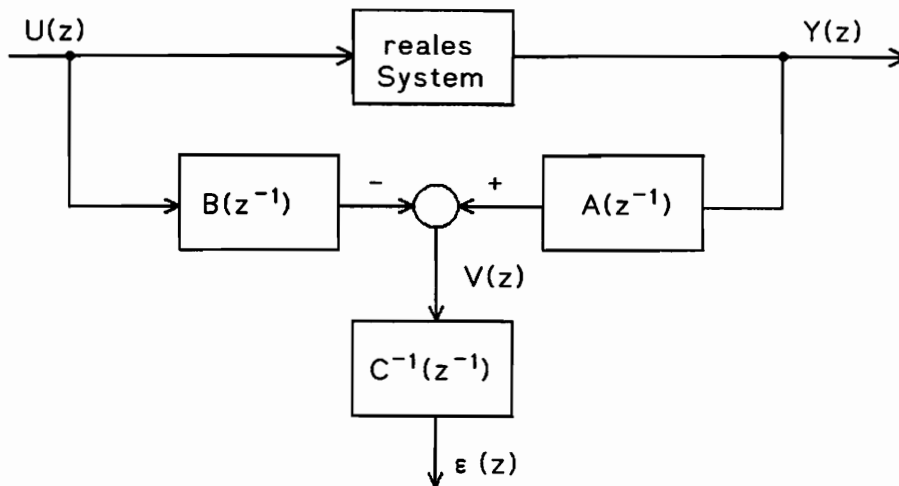


Bild 2.5: ARMAX-Modell

Zur Identifikation mechanischer Strukturen bieten die ARMA(p,q)-Modelle eine weitere Modellierungsmöglichkeit für lineare Systeme unter der Einwirkung stochastischer Erregerprozesse [Gersch u. Martinelli 1979, Maffezoni und Marchese 1981]. Die ARMA-Schätzung stellt eine wirksame Methode zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von Maschinen und Tragwerken dar, die für eine Identifikation nicht durch Testsignale angeregt werden können, sondern unter ambienter Erregung beobachtet werden müssen.

Mit den ARMA(X)-Modellen können lineare dynamische Systeme mit farbigen Störungen modelliert werden. Sehr niederfrequente Störanteile der gemessenen Zeitreihen (Trends) werden allerdings einfacher entweder durch Hochpaßfilterung [s. Isermann 1980] oder spezielle Prozeßmodelle, die *ARIMA-Modelle* (Auto Regressive Integrated Moving Average) - behandelt [Box und Jenkins 1976]. Diese Modelle beschreiben Prozesse in Differenzen der Ordnung d der primären beobachteten Prozeßgrößen.

$$y_{dk} = \nabla^d y_k \tag{2.2.7}$$

$$y_{dk} = \sum_{j=1}^p a_j y_{dk-j} + \sum_{j=0}^q c_j \epsilon_{k-j}$$

Der behauptete Zusammenhang zwischen den AR-Parametern und den Eigenfrequenzen und Dämpfungen eines mechanischen Systems kann unter anderem durch die Ableitung des AR-Modells nach der *Methode von Prony* bewiesen werden, die im Anhang B2 abgeleitet wird. Bei dieser Methode

werden die am Ort  $r$  der Struktur gemessenen abklingenden Schwingungen eines Systems durch komplexe Exponentialsummen, die die analytische Lösung der homogenen Schwingungsgleichung enthalten, approximiert:

$$y_{rk} = \sum_{i=1}^p A_{ri} e^{\lambda_i k \Delta t} = \sum_{i=1}^p A_{ri} \mu_i^k = \sum_{i=1}^{p/2} (C_{r1i} \mu_i^k + C_{r2i} \bar{\mu}_i^k) \quad (2.2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \alpha + j \beta \\ \bar{\mu}_k &= \alpha - j \beta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{konjugiert} \\ \text{komplexe Eigenwerte des} \\ \text{zeitdiskreten Systems} \end{array}$$

Die Amplituden  $A_{ri}$ , bzw.  $C_{r1i}$  und  $C_{r2i}$ , sind von den modalen Anfangsbedingungen der Schwingung und den Eigenvektorkomponenten  $\varphi_{ri}$  abhängig, während es sich bei den Exponenten  $\lambda_i$  um die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen Systems handelt:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} = e^{\delta_i \Delta t} (\cos \omega_i \Delta t + j \sin \omega_i \Delta t) \quad (2.2.9 a)$$

$$\lambda_i = \delta_i + j \omega_i$$

$$\text{gedämpfte Eigenkreisfrequenz} \quad \omega_i = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}\{\mu_i\}}{\operatorname{Re}\{\mu_i\}} \quad (2.2.9 b)$$

$$\text{Abklingkonstante} \quad \delta_i = \frac{1}{2\Delta t} \ln [\operatorname{Re}\{\mu_i\}^2 + \operatorname{Im}\{\mu_i\}^2] \quad (2.2.9 c)$$

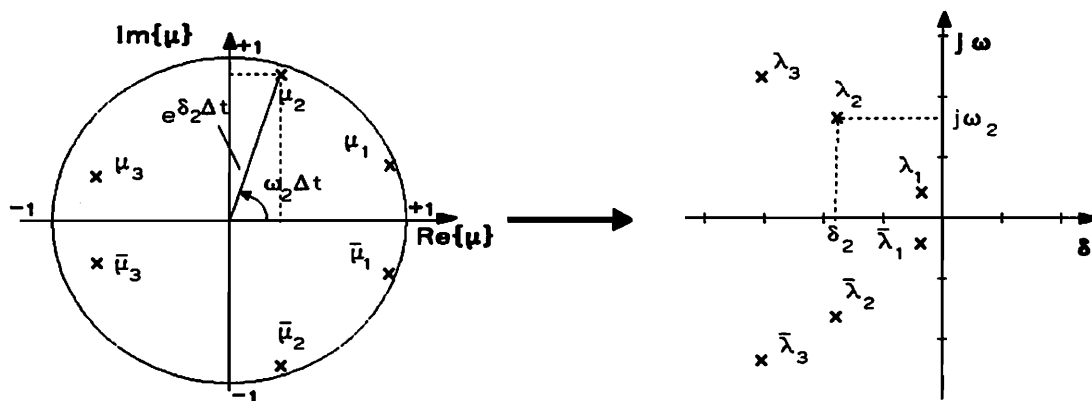


Bild 2.6: Korrespondenz der Eigenwerte zeitdiskreter (links) und zeitkontinuierlicher Systeme (rechts). Der innere Bereich des Einheitskreises wird über die Transformation nach Gl. 2.2.9 in die linke Hälfte der  $\delta$ - $j\omega$ -Ebene abgebildet.

Aus der Prony-Methode folgt, wie im Anhang B2 näher beschrieben wird, daß mit den AR-Koeffizienten unmittelbar ein Polynom zur Bestimmung der

konjugiert komplexen Systemwurzeln  $\mu_i$  aufgestellt werden kann. Dieser Zusammenhang, der auch für das Nennerpolynom der diskreten Übertragungsfunktion (Gl. 2.2.3) abgeleitet werden kann, gestattet die Bestimmung der Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen eines Systems aus den AR-anteilen der beschriebenen Regressionsmodelle, durch Aufsuchen der Nullstellen des Polynoms. Die Kenntnis der Systemwurzeln erlaubt in einem weiteren Berechnungsschritt die Bestimmung der Amplituden  $A_i$  (Gl. 2.2.8).

Die Ausgangsgrößen  $y_{rk}$  können auch als Linearkombination der kinematisch entsprechenden Modalgrößen  $q_{ik}$  aufgefaßt werden.

$$y_{rk} = \sum_{i=1}^{p/2} \varphi_{ri} q_{ik} \quad (2.2.10)$$

Im Fall transienter Schwingungen beschreibt die Beziehung

$$q_{ik} = B_{1i} \mu_i^k + B_{2i} \bar{\mu}_i^k \quad (2.2.11)$$

den Zeitverlauf der modalen Schwingungskomponente  $q_{ik}$  (s.a.Gl.2.2.8), wobei die Amplituden  $B_{1i}$  und  $B_{2i}$  nur von den modalen Anfangsbedingungen abhängen. Nach Einsetzen von Gl. 2.2.11 in 2.2.10 und Gleichsetzen mit Gl. 2.2.8 folgt durch Koeffizientenvergleich das Verhältnis der Eigenvektorkomponenten zweier Meßpunkte  $r$  und  $s$  des Systems:

$$\begin{aligned} \varphi_{ri} B_{1i} &= C_{r1i} ; \varphi_{si} B_{1i} = C_{s1i} \\ \varphi_{ri} B_{2i} &= C_{r2i} ; \varphi_{si} B_{2i} = C_{s2i} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\varphi_{ri}}{\varphi_{si}} = \frac{C_{r1i}}{C_{s1i}} = \frac{C_{r2i}}{C_{s2i}}$$

Die Beschreibung von Systemen mit einer Vielzahl von Freiheitsgraden erfordert Polynome hohen Grades, bei deren Lösung numerische Schwierigkeiten auftreten können. In einigen Verfahren wird daher versucht, an Stelle des Polynoms ein Matrizeigenwertproblem zu formulieren, zu dessen Lösung effiziente Algorithmen zur Verfügung stehen. Zu dieser Klasse gehört das *Sparse Time Domain (STD) Verfahren* von Ibrahim [1985], das ebenfalls, wie die Prony-Methode, auf einem Exponentialsummenansatz basiert. Das Verfahren wird in den Grundzügen im Anhang B3 beschrieben. Die umfangreichen Vergleichsrechnungen, die vom Autor mit den verschiedenen Verfahren im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, lassen aber eher auf eine Überlegenheit der Polynommethode schließen.

Eine ähnliche Formulierung wie die STD-Methode liefert auch die Überführung der autoregressiven Beschreibung des AR(p)-Modells in eine Zustandsraumbeschreibung, wozu mehrere Realisierungsmöglichkeiten bestehen [s. Aoki 1987]. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  enthält dann die aktuellen und die p-1 vergangenen Beobachtungsgrößen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{k-1} & ; & & \mathbf{A}_p &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \\ & & & & \\ a_p & a_{p-1} & \dots & & a_1 \end{bmatrix} \\ y_k &= \mathbf{c} \mathbf{x}_k + \varepsilon_k & & & & & & & (2.2.13) \\ \mathbf{x}_k^T &= (y_{k-p-1}, \dots, y_k) \\ \mathbf{c} &= (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

Die Anwendung der z-Transformation auf diese Vektordifferenzgleichung führt auf das Eigenwertproblem

$$z \mathbf{X}(z) = \mathbf{A} \mathbf{X}(z) \tag{2.2.14}$$

Die Lösung liefert die Eigenwerte  $z_i (= \mu_i)$  des zeitdiskreten Modells, aus denen nach Gl. 2.2.9 wieder die Eigenfrequenzen und Dämpfungen berechnet werden können.

### 2.2.3 Schätzung von Systemparametern aus Kovarianzfunktionen

Die empirische Kovarianzfunktion der an den Punkten r und s eines zeitdiskreten Systems gemessenen Ausgangsgrößen  $y_{rk}$  und  $y_{sk}$  ist

$$\Phi_{\tau}^{rs} = \frac{1}{n-\tau} \sum_{k=1}^{n-\tau} (y_{rk} - \hat{y}_r)(y_{sk+\tau} - \hat{y}_s) ; \tau = 0, 1, \dots, m \tag{2.2.15}$$

mit den Erwartungswerten der Ausgangsprozesse

$$\hat{y}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{xk} \tag{2.2.16}$$

Die empirische Autokorrelationsfunktion (AKF)  $\rho_{\tau}$  der Ausgangsgrößen eines Kanals (Index r) folgt daraus durch Normierung mit dem Anfangswert:

$$\rho_{\tau} = \frac{\Phi_{\tau}}{\Phi_0}$$

Zwischen der AR(p)-Beschreibung eines Prozesses  $y_k$  und seiner Autokorrelationsfunktion  $\rho_\tau$  existiert ein für Systeme unter stochastischer Anregung wichtiger Zusammenhang, den die *Yule-Walker-Gleichungen* beschreiben (s. Anhang B4):

$$\rho_\tau = a_1 \rho_{\tau-1} + a_2 \rho_{\tau-2} + \dots + a_p \rho_{\tau-p} \quad (2.2.17)$$

Zum einen können mit Kenntnis dieser Gleichungen aus geschätzten AKF leicht die AR-Parameter berechnet werden, umgekehrt aber auch aus den Parametern eines AR(p)-Modells die AKF und die spektrale Leistungsdichte eines Prozesses. Die homogene Differenzengleichung 2.2.17 kann mit Hilfe der z-Transformation gelöst werden. Die allgemeine Lösung entspricht dem bei den Methoden von Prony oder von Ibrahim verwendeten Exponentialsummenansatz:

$$\rho_\tau = \sum_{i=1}^p A_i z_i^{-\tau} \quad (2.2.18)$$

Die Berechnung von Modellparametern aus einer vorliegenden AKF wird seltener durchgeführt, weil die Schätzung der empirischen AKF mit anderen Methoden als der über ein Regressionsmodell in der Regel ungenauer ist, insbesondere dann, wenn nur wenige Meßdaten vorliegen [Kay 1988]. Falls aber eine zuverlässige AKF-Schätzung existiert, können die Parameter eines AR(p)-Modells sehr einfach mit der *Levinson-Durbin-Rekursion* bestimmt werden. Dieser Algorithmus berechnet die Modellparameter aller Modellordnungen von 1 bis m rekursiv aus den Parametern von Modellen niedrigerer Ordnung und den ersten p Werten der AKF (s. Anhang B5).

Aus den Gl. 2.2.1 und 2.2.17 folgt, daß die Kovarianzfunktionen eines linearen Systems unter stochastischer Anregung und die freien Schwingungen des Systems auf Modelle mit identischen AR-Koeffizienten führen, weil diese allein durch die Eigenfrequenzen und Dämpfungen bestimmt sind. Die Schätzung auf der Basis von Kovarianzfunktionen ist sinnvoll, wenn die Eigenvektoren von Systemen aus stochastischen Schwingungen geschätzt werden müssen. Die Kovarianzfunktionen enthalten ebenso wie die Zeitverläufe transienter Schwingungen die Eigenvektorinformation, wie nachfolgend gezeigt wird. Es werden zentrierte (mittelwertbefreite) Prozesse vorausgesetzt:



$$\begin{aligned}\Phi_{\tau}^{rs} &= \frac{1}{n-\tau} \sum_{k=1}^{n-\tau} y_{rk} y_{sk+\tau} \\ &= \frac{1}{n-\tau} \sum_{k=1}^{n-\tau} \left[ \sum_{i=1}^p \varphi_{ri} q_{ik} + \varepsilon_{rk} \right] \left[ \sum_{i=1}^p \varphi_{si} q_{ik+\tau} + \varepsilon_{sk+\tau} \right]\end{aligned}\quad (2.2.19)$$

mit  $\frac{1}{n-\tau} \sum_{k=1}^{n-\tau} q_{ik} q_{lk+\tau} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq l \\ \Phi_{\tau}^{ii} & \text{für } i = l \end{cases}$  und  $\frac{1}{n-\tau} \sum_{k=1}^{n-\tau} q_{ik} \varepsilon_{rk+\tau} \approx 0$

$$\Phi_{\tau}^{rs} = \sum_{i=1}^p \varphi_{ri} \varphi_{si} \Phi_{\tau}^{ii} = \sum_{i=1}^p \varphi_{ri} \varphi_{si} A_i^* \mu_i^{\tau} = \sum_{i=1}^p A_{rsi} \mu_i^{\tau} \quad (2.2.20)$$

Daraus folgt, daß nach modaler Zerlegung einer Auto- und einer Kreuzkovarianzfunktion nach Gl. 2.2.20 aus den Amplituden die Eigenvektorverhältnisse berechnet werden können:

$$\frac{A_{rsi}}{A_{rri}} = \frac{\varphi_{si}}{\varphi_{ri}} \quad (2.2.21)$$

#### **2.2.4 Bestimmung der Modellordnung**

Die Bestimmung der korrekten Modellordnung ist bei der Anwendung von Regressionsmodellen häufig problematisch, besonders dann, wenn es sich bei den zu schätzenden Prozessen tatsächlich um gemischte Prozesse, das heißt mit AR- und MA-Anteil, handelt. Prozesse, die überwiegend MA(q)-Eigenschaften besitzen, können verhältnismäßig einfach an ihrer Autokorrelationsfunktion (AKF) erkannt werden, da bei ihnen eine Korrelation nur innerhalb der Regressionstiefe q besteht. Die Beträge der AKF sind daher für Lags  $\tau > q$  signifikant kleiner als die mit  $\tau < q$ , für reine MA(q)-Prozesse gilt:

$$\rho_{\tau} = 0 \text{ für } \tau > q \quad (2.2.22)$$

Die Ordnung der für die Identifikation mechanischer Systeme wichtigeren reinen AR(p)-Prozesse kann analog dazu aus der zur AKF dualen partiellen Autokorrelationsfunktion (PAKF) geschätzt werden, für die das gleiche gilt. Ihre Berechnung ist allerdings aufwendiger als die der Autokorrelationsfunktion. Die PAKF  $\gamma_{\tau}$  wird von den jeweils letzten Koeffizienten der an einen Prozeß angepaßten AR-Modelle der Ordnung 1 bis m gebildet, für  $\tau=0$  gilt  $\gamma_0=1$ . Der Koeffizient  $\gamma_{\tau}$  beschreibt die Korrelation zwischen der Prozeßgröße  $y_k$  und der um  $\tau$  Zeitschritte verschobenen Größe  $y_{k+\tau}$  bei konstanten Größen  $y_{k+1}$  bis  $y_{k+\tau-1}$ . Handelt es sich bei den  $y_k$  beispielsweise um störungsfreie Meßwerte der abklingenden Schwingungen eines mechanischen

Systems mit  $n$  Freiheitsgraden, eines typischen  $AR(2n)$ -Prozesses, ist die Meßgröße  $y_{k+2n}$  bei Kenntnis der Größen  $y_k$  bis  $y_{k+2n-1}$  eindeutig bestimmt und die zusätzliche Einbeziehung von  $y_{k-1}$  liefert keine neue Information. Für die empirische PAKF gilt dann

$$\gamma_\tau = 0 \quad \text{für } \tau > 2n \quad (2.2.23)$$

Wenn der beobachtete Prozeß von Rauschanteilen überlagert wird oder aus anderen Gründen nicht ausschließlich  $AR$ -Eigenschaften besitzt, kann er exakt nur durch ein  $AR$ -Modell von unendlicher Ordnung beschrieben werden, wobei die Koeffizienten der weiter zurückliegenden Prozeßvariablen allerdings, man vergleiche die Bemerkungen zur PAKF, rasch gegen Null streben [s. Priestley 1981]. Die Bedingung Gl. 2.23 gilt in diesem Fall nur angenähert und die Festlegung der Modellordnung ist, in Grenzen, willkürlich.

Am Rande sei hier vermerkt, daß die Werte der PAKF in der Theorie der Lattice-Filter (s. Anhang B6) als primäre Modellparameter zur Beschreibung stationärer stochastischer Prozesse dienen, sie werden in diesem Zusammenhang auch als Reflexionskoeffizienten oder PARTIAL-CORrelation-Coefficients bezeichnet. Aus diesen Koeffizienten kann wieder ein  $AR$ -Modell abgeleitet werden.

Zur Entscheidung über die angemessene Modellordnung sind verschiedene sogenannte Informationskriterien entwickelt worden, mit deren Hilfe das, im Sinne eines zu definierenden Kriteriums, ausreichend approximierende Modell mit der geringsten Zahl von Parametern ausgewählt werden soll. Die Meßwerte erfüllen die Modellgleichungen bis auf die Residuen  $\epsilon_k$ , die einen mittelwertfreien, durch seine Varianz  $\sigma_\epsilon^2$  charakterisierten White-Noise-Prozeß bilden.

$$\epsilon_k \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Die Varianz der Modellresiduen nimmt in der Regel mit zunehmender Modellordnung monoton ab, nach Überschreiten einer gewissen Schwelle, die durch die Ordnung des tatsächlichen Prozesses bestimmt wird, aber nur noch in geringem Maße, so daß eine größere Parameteranzahl wegen des erhöhten Berechnungsaufwands und einer größeren Schätzfehlervarianz ineffizient wird. Mit den Informationskriterien wird versucht, diese Schwelle zu identifizieren. Sie können als eine Kostenfunktion der Residualvarianz  $\sigma_\epsilon^2$  und der

Parameteranzahl  $\alpha$  betrachtet werden. Bekannt ist vor allem das *Akaike Information Criterion (AIC)* [s. Ljung 1987]:

$$AIC(\alpha) = \ln \sigma_{\alpha}^2 + 2 \frac{\alpha}{n} \quad (2.2.24)$$

- $\sigma^2$ : Varianz der Residuen
- $\alpha$ : Anzahl der Modellparameter
- $n$ : Anzahl der Meßwerte

Das Modell  $M(\alpha)$ , für das gilt

$$\arg M(\alpha) = \{ \text{Min} [AIC(\alpha)] \}$$

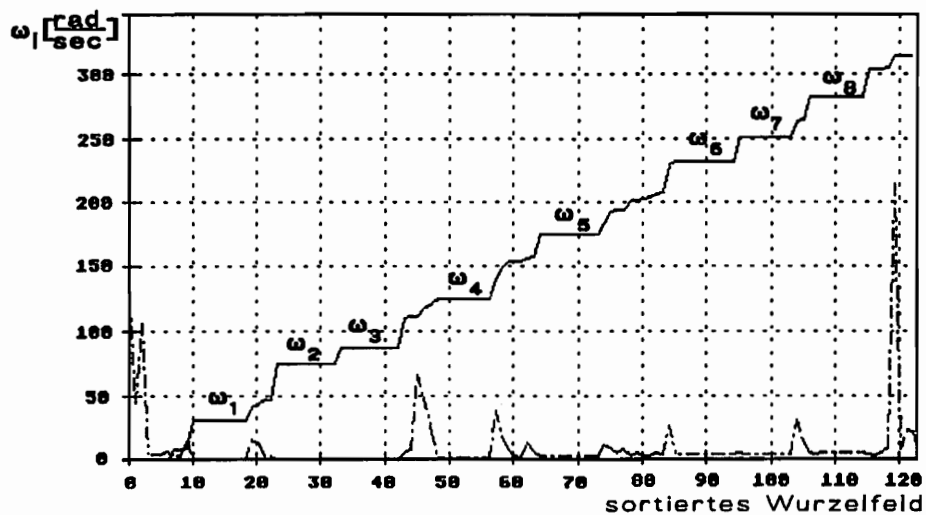
wird ausgewählt. In zahlreichen Anwendungen des AIC hat sich gezeigt, daß die Modellordnungen häufig etwas zu hoch eingeschätzt wurden, es sind daher verschiedene weitere Kriterien entwickelt worden, von denen hier nur noch das *Bayes Information Criterion* erwähnt wird:

$$BIC(\alpha) = \ln \sigma_{\alpha}^2 + \frac{\alpha}{n} \ln n \quad (2.2.25)$$

Für die Identifikation mechanischer Systeme, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verstanden wird, ist die Frage der Ordnung der Primärmodelle nicht vorrangig, weil das Ziel die Bestimmung physikalischer Parameter ist. Wichtig ist lediglich, daß die Modellordnung nicht kleiner als die Ordnung des realen Systems ist (durchaus kein triviales Problem). Bei dieser Abschätzung sind die Informationskriterien hilfreich. Wie schon erwähnt wurde, können die Frequenz- und Dämpfungsparameter aus den AR-Koeffizienten der Regressionsmodelle berechnet werden. Wenn eine Modellstruktur gewählt wurde, in der die Störungen ebenfalls vom AR-Anteil des Primärmodells modelliert werden müssen, ist es aber oft schwierig, die tatsächlichen Systemeigenwerte von denen des Rauschprozesses zu unterscheiden. Häufig wird einfach so verfahren, daß die Wurzeln mit minimalem Realteil, der die Dämpfung angibt, als Systemwurzeln identifiziert werden [Davies und Hammond 1984].

In allen Mengen von Wurzeln charakteristischer Polynome der identifizierten Modelle unterschiedlicher Ordnung sind die Systemwurzeln enthalten, allerdings nicht exakt, sondern mit einer von der Qualität der Daten abhängigen Varianz. Die restlichen Wurzeln sind zufällig und daher auch in jeder Modellstufe verschieden. Yang [1985] schlägt einen Algorithmus vor, der die ähnlichsten Wurzeln aus zwei Parameterschätzungen mit verschiedenen

Modellordnungen aus der Menge aller Wurzeln herausucht und dem System zuordnet. Diese Vorgehensweise ist in vielen Fällen unbefriedigend und führt zu Fehlschätzungen, weil bereits die Ordnungen der beiden zugrunde gelegten Modelle, die alle Systemwurzeln mit ausreichender Genauigkeit enthalten müssen, nicht korrekt geschätzt werden können. Für die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit wurden daher zwei einfache Algorithmen bevorzugt. Der erste beruht auf einer Modifikation der Methode von Yang. Anstelle der Identifikation mit zwei unterschiedlichen Modellordnungen werden mehrere Modelle berechnet und deren sämtliche Wurzeln in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Die Systemwurzeln können dann leicht als die Wurzeln identifiziert werden, die mit minimaler Varianz auftreten (Bild 2.7).



*Bild 2.7: Schätzung der Wurzeln eines Systems mit Modellen der Ordnungen 8 bis 17. Aus einer Gesamtheit von 125 berechneten Wurzeln können die 8 Systemeigenfrequenzen (Imaginärteile) leicht aufgrund ihres mehrfachen Auftretens mit geringer Varianz identifiziert werden. Die gestrichelte Kurve kennzeichnet die Dämpfungswerte (Realteile).*

Der zweite Algorithmus setzt nur eine Primärmodellberechnung voraus, günstig ist allerdings, das mit dem AIC- oder dem BIC-Kriterium ausgewählte Modell zu verwenden. Zwischen den Meßwerten und harmonischen Funktionen mit den identifizierten Frequenzen wird über die Meßzeit die Kovarianz berechnet. Die Frequenzen und ihre zugehörigen Dämpfungen, die zu maximalen Kovarianzen führen, werden dem System zugeordnet.

### 2.2.5 Parametrisch nichtlineare Modelle

Als Alternative zu den Regressionsmodellen können auch die analytischen Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung direkt als Modellansatz gewählt werden. Allerdings müssen dann zur Parameterschätzung Methoden der nichtlinearen Approximation verwendet werden. Bei der Prony-Methode und den verwandten Methoden wurde diese Erschwernis durch die zwei-stufige Berechnung der Parameter vermieden, obwohl die analytische Lösung im Ansatz enthalten war. Die Ansätze enthalten außerdem aber auch die rein reellen Exponentialfunktionen, die analytische Lösungen von Systemen erster Ordnung oder überkritisch gedämpften Systemen zweiter Ordnung darstellen. Das hat zur Folge, daß im realistischen Fall stochastischer Meßwerte die Modelle zur Parameterschätzung von höherer Ordnung sein müssen als die zu identifizierenden Systeme, weil die Rauschanteile zu diesen Funktionen im Ansatz Beiträge liefern. Dieser Sachverhalt wurde bei der Diskussion der Modellordnung bereits vom Standpunkt der Regressionsmodelle als Approximation eines nichtidealen AR-Prozesses durch ein AR-Modell erhöhter Ordnung erklärt. Es kann daher vorteilhaft sein, an Stelle der einfachen Regressionsmodelle speziellere Modelle zu verwenden, auch um den Preis, daß diese Modelle möglicherweise nichtlinear in den Parametern sind. Für ein Gemisch abklingender Schwingungen beschreibt die folgende Gleichung das in diesem Sinne optimale Modell, weil sie nur für unterkritisch gedämpfte Systeme gilt:

$$y_k = \sum_{i=1}^{p/2} \left[ Y_i e^{(\delta_i + j\omega_i)k\Delta t} + \bar{Y}_i e^{(\delta_i - j\omega_i)k\Delta t} \right] + \varepsilon_k$$

$$Y_i = Y_{iRe} + j Y_{iIm} ; \quad \bar{Y}_i = Y_{iRe} - j Y_{iIm} \quad (2.2.26)$$

$$y_k = 2 \sum_{i=1}^{p/2} \left[ Y_{iRe} \cos\omega_i k\Delta t - Y_{iIm} \sin\omega_i k\Delta t \right] e^{\delta_i k\Delta t} + \varepsilon_k$$

Die Parameter können nur noch iterativ geschätzt werden, außerdem ist es erforderlich, Anfangswerte der Parameter mit einem direkten Verfahren zu schätzen. Allerdings liefert die Schätzung sehr genaue Werte und die Modellordnung entspricht der des realen Systems.

Eine interessante Variante dieses speziellen Modells Gl.2.2.26 liefert die Formulierung im Frequenzbereich:

$$Y(j\Omega) = \sum_{i=1}^{p/2} \frac{f_{iRe} + j f_{iIm}}{N_i}$$

$$\begin{aligned}
 N_i &= (\delta_i^4 + \omega_i^2 - \Omega^2)^2 + 4 \delta_i^2 \Omega^2 \\
 f_{iRe} &= -k_{i1} \\
 f_{iIm} &= -k_{i4} \\
 k_{i1} &= 2 [ Y_{iRe} \delta_i (\delta_i^2 + \omega_i^2 + \Omega^2) + Y_{iIm} \omega_i (\delta_i^2 + \omega_i^2 - \Omega^2) ] \\
 k_{i4} &= 4 Y_{iIm} \delta_i \omega_i \Omega - 2 Y_{iRe} \Omega (\omega_i^2 - \Omega^2 - \delta_i^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.27}$$

Hier bietet sich an, die Schwingungsanteile einzeln, oder bei eng benachbarten Eigenfrequenzen, in Gruppen zu schätzen, also nur einen Ausschnitt des Spektrums zu betrachten. Die Fast-Fourier-Transformation stellt in diesem Fall nicht den optimalen Algorithmus für die diskrete Integraltransformation der Meßwerte dar, sondern es ist vorteilhaft, das Fourierintegral direkt mit einem numerischen Integrationsverfahren auszuwerten. Das Spektrum und die Frequenzschrittweite können dann frei gewählt werden. Bei der Frequenzbereichsmethode muß aber beachtet werden, daß die Transformierte der Meßwerte aufgrund der zeitbegrenzten Messung eine Faltung der analytischen Lösung Gl.2.2.26 mit einem Rechteckfenster der Breite T der Gesamtmeßzeit darstellt. Die Faltung muß im Modell ebenfalls berücksichtigt werden, weil der Einfluß der Zeitbegrenzung mehr oder weniger stark ausgeprägte Nebenmaxima zur Folge hat, die eine Schätzung erheblich verzerren können. Das vollständige Modell ist dann:

$$\begin{aligned}
 f_{iRe} &= e^{\delta_i T} [ c_{i1} k_{i1} + c_{i2} k_{i2} + s_{i1} k_{i3} + s_{i2} k_{i4} ] - k_{i1} \\
 f_{iIm} &= e^{\delta_i T} [ c_{i1} k_{i4} - c_{i2} k_{i3} + s_{i1} k_{i2} - s_{i2} k_{i1} ] - k_{i4} \\
 k_{i2} &= 4 Y_{iRe} \delta_i \omega_i \Omega + 2 Y_{iIm} \Omega (\omega_i^2 - \Omega^2 - \delta_i^2) \\
 k_{i3} &= 2 [ Y_{iRe} \delta_i (\delta_i + \omega_i + \Omega) - Y_{iIm} \delta_i (\omega_i - \delta_i - \Omega) ] \\
 c_{i1} &= \cos \omega_i T \cos \Omega T \quad ; \quad c_{i2} = \sin \omega_i T \sin \Omega T \\
 s_{i1} &= \sin \omega_i T \cos \Omega T \quad ; \quad s_{i2} = \cos \omega_i T \sin \Omega T
 \end{aligned}
 \tag{2.2.28}$$

Der Vergleich mit Gl. 2.2.27 zeigt, daß die Berücksichtigung der Zeitbegrenzung einen beträchtlichen Zusatzaufwand erfordert.

## **2.3. Parameterschätzung**

### **2.3.1 Allgemeines**

Die Modelle der gewählten Menge  $M$  sind in der Regel strukturell identisch und unterscheiden sich nur in ihren Parametern  $a$ . Die Auswahl des optimalen Modells verlangt daher eine Parameterschätzung, die auf der Basis der Meßdaten  $D$  und im Sinne eines geeigneten Kriteriums  $C$  durchgeführt wird. Das Kriterium bewertet die Güte der Übereinstimmung charakteristischer Modellgrößen mit den entsprechenden gemessenen Größen des realen Systems. Dabei kann es sich um Ausgangsgrößen handeln oder, bei indirekter Identifikation, um Eigenwerte und -formen, die in einer Vorstufe identifiziert wurden. Mögliche Gütefunktionale, auch als Kostenfunktionen bezeichnet, sind:

1. Die quadratische Fehlernorm .
2. Die Supremumsnorm .
3. Die Maximum-Likelihood-Funktion .

Die Wahl des Kriteriums entscheidet weitgehend über den Identifikationsalgorithmus und damit über den Berechnungsaufwand und, bei gestörten Meßwerten, stochastischer Erregung oder nichtlinearen Einflüssen, über die Güte der Schätzung.

### **2.3.2. Quadratische Fehlernorm**

Die quadratische oder Gauß'sche Norm des Vorhersagefehlers (Prediction Error) führt auf relativ einfache Schätzgleichungen und ist daher ein sehr häufig verwendetes Kriterium. Die Vorhersagefehler –die Differenzen zwischen den von einem Modell prognostizierten und den gemessenen Größen– zu verschiedenen Zeitpunkten werden im Fehlervektor  $\mathbf{\varepsilon}$  zusammengefaßt. Die quadratische Norm des Fehlervektors ist:

$$I_Q = \frac{1}{2} \mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{\varepsilon} \quad (2.3.1)$$

Unterschiedliches Vertrauen in die Meßwerte zu verschiedenen Zeitpunkten kann durch eine Gewichtsmatrix  $\mathbf{G}$  in das Gütefunktional eingebracht werden.

$$I_{QM} = \frac{1}{2} \mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{G} \mathbf{\varepsilon} \quad (2.3.2)$$

Wenn  $\mathbf{G}$  die inversen Varianzen der Residuen enthält, führt die Gleichung 2.3.2 auf die Gauß-Markov-Schätzung.

In den weiteren Ableitungen wird zwischen folgenden Parametern unterschieden:

- $\bar{\mathbf{a}}$  - exakte Parameter
- $\tilde{\mathbf{a}}$  - Parameterschätzwert (lineare Modelle)
- $\mathbf{a}_v$  - Schätzwert nach dem Iterationsschritt  $v$  (nichtlineare Modelle)
- $\mathbf{a}^*$  - optimaler Schätzwert im Sinne des Gütekriteriums

Besonders einfach kann das optimale Modell bestimmt werden, wenn die Modellmenge  $\mathbf{M}$ , wie bei den AR(X)-Ansätzen nach Gl. 2.2.1 und 2.2.2, linear in den Parametern ist. Die Gleichungen werden für aufeinanderfolgende Zeitpunkte angeschrieben, nach dem Fehler  $\epsilon_k$  umgestellt und in Gl. 2.3.1 eingesetzt:

$$I_Q = \frac{1}{2} (\mathbf{y}^M - \mathbf{Y} \mathbf{a})^T (\mathbf{y}^M - \mathbf{Y} \mathbf{a}) \quad (2.3.3)$$

$\mathbf{y}^M$  - Vektor der Meßwerte

$$\epsilon_k = y_k^M - (y_{k-1}^M \ y_{k-2}^M \ \dots \ y_{k-p}^M) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^M = \begin{bmatrix} y_{p+1}^M \\ y_{p+2}^M \\ \vdots \\ y_n^M \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_p^M & y_{p-1}^M & \dots & y_1^M \\ y_{p+1}^M & \dots & & y_2^M \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n-1}^M & \dots & & y_{n-p}^M \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

Die Minimierung der quadratischen Fehlernorm bezüglich der Modellparameter, die im Vektor  $\mathbf{a}$  zusammengefaßt sind, führt unmittelbar auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\frac{\partial I_Q}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} = -\mathbf{Y}^T (\mathbf{y}^M - \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{a}})$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \underbrace{(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1}}_{\mathbf{V}} \mathbf{Y}^T \mathbf{y}^M \quad (2.3.4)$$

Im Fall der Korrelation der Gleichungsfehler  $\epsilon$  mit den Meßwerten ist die Schätzung nicht *erwartungstreu*, das heißt der Erwartungswert der Schätzung konvergiert nicht gegen den exakten Parameterwert  $\bar{\mathbf{a}}$ :



$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}} &= (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T (\mathbf{Y} \bar{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \bar{\mathbf{a}} + (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert der Parameterschätzwertes folgt dann:

$$E\{\tilde{\mathbf{a}}\} = \bar{\mathbf{a}} + E\{(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\varepsilon}\} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_B \quad (2.3.5)$$

$\mathbf{a}_B$  - Bias (Fehleranteil des Parameterschätzwertes)

Eine Methode zur Vermeidung einer *Verzerrung (Bias)*

$$\mathbf{a}_B = E\{(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\varepsilon}\}$$

der Schätzwerte ist die Verwendung einer Matrix  $\mathbf{W}_1^T$  anstelle von  $\mathbf{Y}^T$ , die folgende Bedingung erfüllt:

$$E\{(\mathbf{W}_1^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{W}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{0} \quad (2.3.6)$$

Die Koeffizienten von  $\mathbf{W}_1$  liefert ein Hilfsmodell, d.h. anstelle der Beobachtungswerte  $y_k^M$ , wie in  $\mathbf{Y}$  enthalten, werden Hilfsvariable oder instrumentelle Variable  $w_k$  verwendet, daher wird diese Schätzung als *Methode der instrumentellen Variablen* bezeichnet.

Eine wichtige Rolle spielt die nachfolgend abgeleitete Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  bei der Schätzung, weil sie, wie noch gezeigt wird, ein Maß für die maximal erzielbare Information darstellt. Unter der Voraussetzung, daß der Schätzung eine ausreichende Zahl von Beobachtungen zugrunde liegt, um statistische Aussagen treffen zu können, gilt für die Kovarianz der Schätzfehler, d.h. der Differenz zwischen geschätzten und exakten Parametern:

$$\mathbf{P} = E\{(\tilde{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}) (\tilde{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}})^T\} \quad (2.3.7)$$

Mit Gl. 2.3.5 folgt daraus

$$\mathbf{P} = E\{(\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{a}}) (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{a}})^T\} = \mathbf{V} E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T$$

Unter der Voraussetzung, daß die Elemente von  $\mathbf{e}$  unkorreliert sind und die gleiche Varianz  $\sigma_{\mathbf{e}}^2$  besitzen, folgt mit

$$E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \sigma_{\mathbf{e}}^2 \mathbf{I} \quad (2.3.8)$$

für die Kovarianzmatrix der Schätzfehler:

$$\mathbf{P} = \sigma_{\mathbf{e}}^2 (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \quad (2.3.9)$$

Eine Schätzung  $\mathbf{a}$  wird als *konsistent* bezeichnet, wenn die Folge der Schätzwerte  $\mathbf{a}_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den wahren Parameterwert  $\bar{\mathbf{a}}$  strebt, unter der Voraussetzung, daß die Daten  $\mathbf{D}$  genügend Information enthalten, zwischen verschiedenen Modellen der Menge  $\mathbf{M}$  unterscheiden zu können. Von einem "wahren" Parameterwert kann selbstverständlich nur dann gesprochen werden, wenn gilt  $\mathbf{S} \in \mathbf{M}$ , ansonsten ist nach der besten Approximation zu fragen. Generell ist von einem Schätzverfahren zu fordern, daß eine Zunahme von Information die Qualität der Schätzwerte verbessert.

### 2.3.3. Supremumsnorm

Die Supremumsnorm oder Tschebyscheffnorm wird in der Systemidentifikation vergleichsweise selten verwendet [Wedig 1987] :

$$I_S = \sum_{k=1}^n |\mathbf{e}_k| \quad (2.3.10)$$

Ein Grund ist darin zu sehen, daß die Tschebyscheffschätzer nicht die für die Anwendung auf reale stochastische Prozesse unabdingbare Eigenschaft der "Robustheit" besitzen. Als robust werden solche Schätzalgorithmen bezeichnet, die weitgehend unempfindlich gegen extreme Meßfehler ("Ausreißer") sind. Tschebyscheff-Approximationen überschreiten im Approximationsintervall nie den maximalen Fehlerbetrag  $r$ , wodurch der Einfluß von Ausreißern zwangsläufig unangenehm hoch gewichtet wird.

Die Optimalitätsbedingung führt im Gegensatz zur quadratischen Norm nicht auf ein lineares Gleichungssystem, sondern auf ein System von Ungleichungen in den Parametern  $\mathbf{a}$  und dem maximalen Fehler  $r$ , nachfolgend für ein AR-Modell angeschrieben:

$$\begin{aligned}
 & | a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_p y_p - y_{p-1} | \leq r \\
 & | a_1 y_2 + a_2 y_3 + \dots + a_p y_{p+1} - y_p | \leq r \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & | a_1 y_{n-p} + \dots + a_p y_{n-1} - y_n | \leq r
 \end{aligned}
 \tag{2.3.11}$$

Solche linearen Ungleichungssysteme können mit den bekannten Verfahren der linearen Optimierung, etwa mit dem Simplex-Verfahren, gelöst werden.

### **2.3.4 Maximum-Likelihood-Funktion und Statistik der Schätzung**

Das Maximum-Likelihood-Kriterium wird für die Klasse der probabilistischen Modelle angewendet. Ljung [1987] unterscheidet zwei Modellklassen:

1. Reine *Prädiktormodelle*. Sie werden, wie die bisher angeführten Modelle, durch stabile Filter  $W(z^{-1})$  beschrieben.
2. Vollständige *probabilistische Modelle*. Sie werden ebenfalls durch ein Filter  $W(z^{-1})$  beschrieben, zusätzlich aber durch die *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*  $f_{\epsilon}(x)$  des Prädiktionsfehlers  $\epsilon$  charakterisiert

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Beobachtungen den Wert  $\mathbf{y}$  annehmen, wird durch die Dichtefunktion  $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$  beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit aller Beobachtungen, die als unabhängig voneinander betrachtet werden, führt auf die Likelihoodfunktion  $L$ .

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \prod_{k=1}^n f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, y_k)
 \tag{2.3.12}$$

Der Schätzwert  $\mathbf{a}^*$ , der nach dem ML-Kriterium ausgewählt wird, maximiert die Likelihoodfunktion, es wird also das Modell geschätzt, das die Realisierungswahrscheinlichkeit der beobachteten Prozeßgrößen  $y_k$  maximiert. In den weitaus meisten Anwendungen wird für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungen eine Normalverteilung mit nachfolgenden Dichte- und Likelihoodfunktionen angenommen:

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, y_k) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ - \frac{(y_k^M - y_k)^2}{2\sigma^2} \right]
 \tag{2.3.13}$$

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \exp \left[ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k^M - y_k)^2 \right]$$

Die Maximierung der Likelihoodfunktion ist der Minimierung der negativen logarithmierten Funktion äquivalent und kann zur Vereinfachung der Berechnung durch diese ersetzt werden.

$$-\log L(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k^M - y_k)^2 + n \log \sigma + \frac{n}{2} \log 2\pi \quad (2.3.14)$$

Im Fall bekannter Residualvarianz  $\sigma^2$  ist das Kriterium also, unter den getroffenen probabilistischen Annahmen, mit dem Kriterium der quadratischen Fehlernorm identisch. Die Bedeutung der Maximum-Likelihood-Methode liegt vor allem in der Theorie der Schätzungen begründet, weil die Berücksichtigung probabilistischer Eigenschaften der Daten bessere Einblicke in das Verhalten von Schätzverfahren ermöglicht als eine Überprüfung durch Simulationsstudien, die allerdings in vielen Fällen ebenfalls unverzichtbar sind.

Für die Varianz der Parameterschätzwerte auf der Basis der Meßwerte  $\mathbf{y}$ , ausgedrückt durch die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$ , existiert aufgrund der Unsicherheit der Beobachtungen eine untere Schranke, die von keinem Schätzverfahren unterschritten werden kann. Der Beweis wurde von Cramer und Rao geführt (Cramer-Rao-Schranke) [s. Ljung 1987]. Danach gilt

$$\mathbf{P} = E \{ (\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{a}_0) (\mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{a}_0)^T \} \geq \mathbf{M}^{-1} \quad (2.3.15)$$

$\mathbf{P}$ : Kovarianzmatrix der Schätzfehler

$$\mathbf{M} = E \left\{ \frac{d^2}{d\mathbf{a}^2} \log [f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{y})] \right\} \quad (2.3.16)$$

$\mathbf{M}$  ist die Fisher'sche Informationsmatrix, die das Maß der in den Beobachtungen  $\mathbf{y}$  enthaltenen Information bezüglich  $\mathbf{a}$  angibt. Systematische Optimierungen von Versuchsbedingungen basieren in der Regel auf der Maximierung eines skalaren Gütefunktional (det $\mathbf{M}$ , tr  $\mathbf{M}$ ) der Informationsmatrix.

Die wohl wichtigste Eigenschaft eines Schätzverfahrens ist die erzielbare Genauigkeit. Die Genauigkeitsforderung wird durch die in Kapitel 2.3.2 definierten Begriffe der Konsistenz, der Erwartungstreue und der Varianz der Schätzwerte präzisiert. Die Maximum-Likelihood erfüllt für genügend lange Meßzeiten die genannten Anforderungen an eine Schätzung, denn sie liefert konsistente Schätzwerte mit minimaler Varianz. Schätzer mit der letztgenannten Eigenschaft werden auch als *effiziente Schätzer* bezeichnet.

Eine weitere Schätzmethode für probabilistische Modelle ist die *Bayes-Schätzung* [Schwartz 1975, Krebs 1980, Peterka 1980]. Sie basiert auf der bekannten Bayes'schen Beziehung für die a posteriori Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariablen und führt, im Zusammenhang mit der Modellschätzung, auf die Schätzung der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Parametervektors unter der Voraussetzung der Beobachtungen und der angenommenen a priori Wahrscheinlichkeiten der Parameter und der Beobachtungen. Sie führt auf die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Parameter, aus der Schätzungen von  $\mathbf{a}$  abgeleitet werden können:

$$p(\mathbf{a} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{a}) p(\mathbf{a})}{p(\mathbf{y})} \quad (2.3.17)$$

Punktschätzungen von Parametern sind als Bestandteil der resultierenden Wahrscheinlichkeitsfunktion zu betrachten. Aus der Funktion der bedingten Wahrscheinlichkeit für die Parameter  $\mathbf{a}$  können verschiedene Schätzwerte gewonnen werden. Die Schätzung, die der maximalen Wahrscheinlichkeit entspricht, wird als Maximum-a-posteriori- (MAP) Schätzung bezeichnet. Von dieser unterscheidet sich in der Regel der bedingte Erwartungswert von  $\mathbf{a}$ . Die Einbeziehung der a priori Wahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{a})$  gibt die Möglichkeit, bekannte Schranken für die Parameter bereits im Gütekriterium zu berücksichtigen.

### 2.3.5 Auflösung der Schätzgleichungen bei nichtlinearen Modellen

Die Parameterschätzung besteht in der Mehrzahl der Fälle in der Minimierung einer Kostenfunktion bezüglich eines Satzes freier Parameter, es handelt sich also um eine Optimierungsaufgabe. Wenn die Modelle linear in den Parametern sind, führt die Optimalitätsbedingung, wie gezeigt wurde, auf einfache, direkt auflösbare Bestimmungsgleichungen für die Parameter. Die Kostenfunktionen der parametrisch nichtlinearen Modelle können in der Regel nicht mehr mit analytischen Methoden minimiert werden, es müssen die Verfahren der nichtlinearen Optimierung verwendet werden. Dabei kann es sich um deterministische oder stochastische Suchverfahren für den optimalen Parametervektor  $\mathbf{a}^*$  handeln.

Einfachste Varianten der probabilistischen Verfahren sind die Monte-Carlo-Methoden und die Gittersuchverfahren. Um methodische Erweiterungen dieser recht primitiven und zeitaufwendigen Verfahren handelt es sich bei den Evolutionsmethoden [s. Ruppert 1982] und der dynamischen Programmierung

von Bellmann. Wenn das Funktional nach den Parametern differenziert werden kann, werden halbanalytische Methoden wie die Gradienten- und Newtonverfahren bevorzugt, weil sie eine beträchtliche Zeitersparnis gegenüber den reinen Zufallsmethoden bieten. Die Programmierung ist allerdings, besonders im Fall komplizierten Modellen mit Unstetigkeiten, aufwendiger und es können Konvergenzprobleme auftreten.

In der einfachsten Form des Gradientenverfahrens wird die sich auf den gesamten Parameterraum erstreckende iterative (Index  $v$ ) Suche nach dem Minimum der Kostenfunktion auf eine lineare Suche in negativer Gradientenrichtung (des "steilsten Abstiegs" der Kostenfunktion) reduziert. Für die auf  $n$  Beobachtungswerten basierende Kostenfunktion eines Systems mit mehreren Ausgangsgrößen

$$I_{vQ} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [y_k^M - y_k(a_v)]^T [y_k^M - y_k(a_v)]$$

lautet der Gradient:

$$\frac{\partial I_{vQ}}{\partial \mathbf{a}} = \boldsymbol{\Phi}_{vn} = - \sum_{k=1}^n \mathbf{D}_{vk}^T [y_k^M - y_k(a_v)] \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{vk} = \left. \frac{\partial y_k(a_v)}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}_v}$$

$$\text{Sensitivitätsmatrix } \mathbf{D}_{vk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{1k}}{\partial a_1} & \frac{\partial y_{1k}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_{1k}}{\partial a_x} \\ \frac{\partial y_{2k}}{\partial a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial y_{lk}}{\partial a_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_{lk}}{\partial a_x} \end{bmatrix}$$

$$\text{Parametervektor } \mathbf{a}_v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_x \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} x - \text{Anzahl der Parameter} \\ l - \text{Anzahl der Meßkanäle} \end{array}$$

Zur Berechnung eines verbesserten Parameterschätzwertes wird der gewichtete Gradient zum alten Schätzwert hinzu addiert, wobei der Gewichtungsfaktor  $\lambda_v$  so gewählt wird, daß die Kostenfunktion im aktuellen Iterationsschritt  $v+1$  ein Minimum annimmt.

$$\mathbf{a}_{v+1} = \mathbf{a}_v + \lambda_v \boldsymbol{\Phi}_{vn}$$

Die Bestimmung eines optimalen Faktors  $\lambda_v$  kann sehr aufwendig sein, besonders bei der nichtlinearen Identifikation größerer mechanischer Strukturen, weil dazu mehrfache Zeitverlaufsberechnungen der Ausgangsgrößen

erforderlich sind. In diesen Fällen ist es günstiger, einen konstanten Gewichtungsfaktor zu wählen. Der Korrekturschritt  $\lambda_v \Phi_{vn}$  wird mit der Annäherung an das Minimum der Kostenfunktion ohnehin ständig kleiner, für das Minimum ( $\mathbf{a}_v = \mathbf{a}^*$ ) gilt:

$$\frac{\partial l_{vQ}}{\partial(\mathbf{a})} \Big|_{\mathbf{a}^*} = 0$$

Diese Bedingung wird in der *Newton-Raphson-Iteration* genutzt, die bei der Schätzung des Rückführungsmodells in Kapitel 4 verwendet wird. Die Ausgangsgrößen des Modells werden dazu durch eine nach dem linearen Glied abgebrochene und nach den Parametern entwickelte Taylorreihe ersetzt:

$$y_k(\mathbf{a}_{v+1}) = y_k(\mathbf{a}_v) + \underbrace{\frac{\partial y_k(\mathbf{a}_v)}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}_v}}_{D_{vk}} (\mathbf{a}_{v+1} - \mathbf{a}_v) + O_k \quad (2.3.18)$$

Die Kostenfunktion ist nun eine quadratische Funktion in den Parameterverbesserungen  $\Delta \mathbf{a}$  :

$$l_{vQ} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\mathbf{y}_k^M - y_k(\mathbf{a}_v) - D_{vk} \Delta \mathbf{a}_v)^T (\mathbf{y}_k^M - y_k(\mathbf{a}_v) - D_{vk} \Delta \mathbf{a}_v) \quad (2.3.19)$$

$\Delta \mathbf{a}_v$  - Parameterverbesserung im Iterationsschritt  $v$

Für die Ableitung nach der Parameteränderung gilt:

$$\frac{\partial l_{vQ}}{\partial(\Delta \mathbf{a})} = 0 = \underbrace{\sum_{k=1}^n D_{vk}^T D_{vk}}_{S_{vn}} \Delta \mathbf{a}_v - \underbrace{\sum_{k=1}^n D_{vk}^T \boldsymbol{\epsilon}_k}_{\Phi_{vn}} \quad (2.3.20)$$

Hessematrix                      Gradient

Die Differenz der Meßwerte  $\mathbf{y}_k^M$  und der geschätzten Ausgangsgrößen  $y_k(\mathbf{a}_v)$  bildet den Fehlervektor  $\boldsymbol{\epsilon}_k$  :

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{y}_k^M - y_k(\mathbf{a}_v) \quad (2.3.21)$$

Wenn die Hessematrix

$$S_{vn} = \sum_{k=1}^n D_{vk}^T D_{vk} \quad (2.3.22)$$

invertierbar ist (s.u.), kann Gleichung 2.3.20 nach der Parameterverbesserung aufgelöst werden:

$$\Delta \mathbf{a}_v = \mathbf{S}_{vn}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{vn} \quad (2.3.23)$$

Dieser Parameterschritt kann auch, wie bei dem oben beschriebenen einfachen Gradientenverfahren, mit einer linearen Verbesserung in der durch die rechte Seite von Gl. 2.3.23 gegebene Richtung verbunden werden, wodurch eine größere Reduzierung der Kostenfunktion in einem Iterationsschritt erzielt wird:

$$\Delta \mathbf{a}_v = \lambda_v \mathbf{S}_{vn}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{vn}$$

Diese Variante besitzt zudem den Vorteil, daß bei der Bestimmung des optimalen Gewichtungsfaktors gleichzeitig überprüft wird, ob überhaupt eine Verringerung der Kostenfunktion mit dem geschätzten Parameterschritt möglich ist. Bei ungünstigen Startwerten der Iteration oder geringempfindlichen Ausgangsgrößen kann dieser Fall auftreten.

Neben den Newton-Verfahren existieren die verschiedentlich zur Identifikation verwendeten Quasi-Newton-Verfahren [Masri u. Werner 1985], die auf eine analytische Berechnung der Hessematrix mit anschließender Invertierung verzichten und statt dessen die Folge der Matrizen  $\mathbf{S}_{vn}^{-1}$  durch eine rekursive Folge von Matrizen ersetzen, in deren Berechnung die Differenzen aufeinanderfolgender Parameterschritte und Gradienten eingehen. Zu den bekanntesten Verfahren dieser Klasse zählt der Davidon-Fletcher-Powell-Algorithmus (DFP) [s. Walsh 1975].

Mit der verbesserten Parameterschätzung

$$\mathbf{a}_{v+1} = \mathbf{a}_v + \Delta \mathbf{a}_v$$

wird der Algorithmus wiederholt durchlaufen, bis keine weitere Reduzierung der Kostenfunktion mehr möglich ist. In einer nachfolgenden Modellvalidierung muß die Plausibilität der Schätzwerte untersucht werden, beispielsweise, ob eventuell nur ein lokales Minimum der Kostenfunktion gefunden wurde.

Eine wesentliche Ursache für Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung der Schätzgleichungen ist ein zu geringer Informationsgehalt einer Messung bezüglich eines oder mehrerer Parameter, das bedeutet, daß die Messung



nur geringempfindlich für Änderungen des Parameters ist. Die *Empfindlichkeit*  $d_{ij}$  einer Beobachtungsgröße bezüglich eines Parameters wird durch die partielle Ableitung ausgedrückt:

$$d_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial a_j} \quad (2.3.24)$$

Geringe Empfindlichkeiten haben eine schlechte Konditionierung der Hessematrix zur Folge, die ja die über alle Zeitschritte aufsummierten Produkte der Empfindlichkeiten nach Gl. 2.3.24 enthält. Die Invertierbarkeit der Hessematrix ist infolge dessen nicht gesichert. Das Problem kann beispielsweise bei der Schätzung modaler Parameter mit einem Modell nach Gl. 2.2.26 auftreten, wenn die Beobachtungen sowohl schnelle als auch langsame Moden enthalten. Die langsamen Moden besitzen bei der Analyse in kurzen Zeitabschnitten nur eine geringe Signifikanz. Noch gravierender ist das Problem bei der Schätzung von Parametern, die prinzipiell nur in bestimmten Amplitudenbereichen beobachtbar sind. Infolge dessen enthalten dann die Beobachtungen unter ungünstigen Versuchsbedingungen möglicherweise keinerlei Information. Zur Stabilisierung der Schätzalgorithmen in solchen Fällen bestehen verschiedene Möglichkeiten, hier werden drei Methoden betrachtet:

1. Das klassische Levenberg-Marquardt-Verfahren. Vor der Invertierung wird zur Hessematrix eine gewichtete Einheitsmatrix addiert:

$$\mathbf{a}_{v+1} = \mathbf{a}_v + (\mathbf{S}_{vn} + \alpha_v \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}_{vn} \quad (2.3.25)$$

Mit abnehmender Varianz der Schätzwerte wird der Gewichtungsfaktor  $\alpha_v$  reduziert.

2. Skalierung der Parameter in der Weise, daß die Hessematrix anschließend eine Einheitsdiagonale besitzt. Diese Methode kann man auch als eine simulierte Erhöhung der Empfindlichkeit deuten, die durch Multiplikation der Gradientenkomponenten mit unterschiedlichen Gewichtungsfaktoren bewirkt wird. Außer der verbesserten Konditionierung der Hessematrix für die Invertierung wird, falls nach der Invertierung nicht reskaliert wird, die Schrittweite der mit großen Skalierungsfaktoren versehenen Parameteränderungen – das sind jene, die sich geringempfindlich in den Ausgangsgrößen abbilden – reduziert und damit die Gefahr der Divergenz des Iterationsverfahrens verringert.
3. Vor der Invertierung werden die Diagonalelemente in Relation zu einer Matrixnorm bewertet, bei Unterschreitung einer zu definierenden Schranke wird die Matrix um die betreffenden Zeilen und Spalten reduziert, das heißt, auf die Veränderung geringempfindlicher Parameter wird verzichtet.

Die nichtlinearen Optimierungsverfahren setzen Vorschätzungen der gesuchten Parameter voraus und verbessern diese schrittweise. Bekanntlich benötigen Newton-Verfahren genauere Vorschätzungen als Gradientenverfahren, während diese in der Umgebung des Optimums eine schlechte Konvergenz besitzen. Es ist daher günstig, die nichtlineare Identifikation mit einem Gradientenverfahren zu beginnen und bei kleiner werdender Fehlerreduzierung in aufeinander folgenden Iterationsschritten auf ein Newtonverfahren umzuschalten. In einfacher Form ist diese Methode in der Levenberg-Marquardt-Methode enthalten, weil hohe Gewichtungsfaktoren den Einfluß der Hessematrix auf die Verbesserung verringern und daher annähernd zu Gradientenschritten führen.

Der rechenzeitintensivste Teil der nichtlinearen Identifikation ist in der Regel die Berechnung der Kostenfunktion, weil sie bei nichtlinearen Systemen die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen erfordert, um Vergleichswerte zu den gemessenen Ausgangsgrößen zu erhalten. Mit jeder verbesserten Parameterschätzung muß dieser Schritt wiederholt werden. Es ist klar, daß Verfahren ohne systematische Parameterverbesserung für die Identifikation ausscheiden müssen, obwohl in der Vergangenheit wegen der Schwierigkeit der Gradientenbildung bei Systemen mit Unstetigkeiten, verschiedentlich solche Ansätze versucht wurden. Die Gradientenverfahren erfordern in jedem Zeitschritt die Berechnung der Empfindlichkeitsmatrix  $D_{vk}$ . Der tatsächliche Aufwand dafür ist von der Problemstellung abhängig. Die Anwendung der Newtonverfahren macht zusätzlich die Produktbildung

$$D_{vk}^T D_{vk}$$

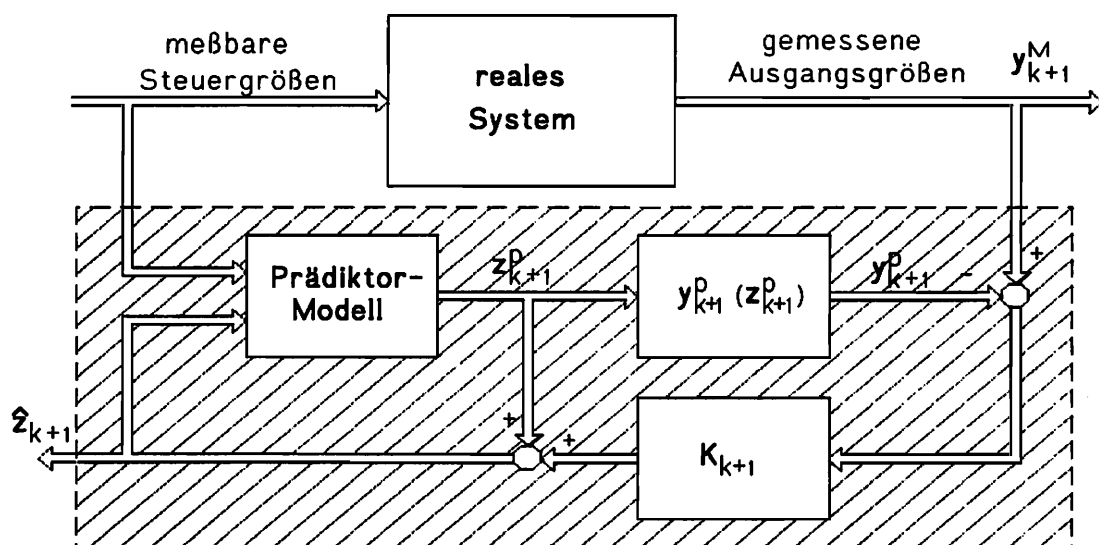
zur Berechnung der Hessematrix und ihre, allerdings nicht zeitkritische, Invertierung erforderlich. Der Zeitbedarf für die Gleichungslösung ist dem gegenüber vernachlässigbar.

## 2.4 Zustandsschätzung und rekursive Parameterschätzung

Von fast allen Schätzalgorithmen existieren rekursive Versionen. Die Struktur rekursiver Parameterschätzgleichungen ähnelt sehr den Gleichungen zur Zustandsschätzung von Systemen, wie sie durch das *Kalman-Filter* oder die *Zustandsbeobachter* gegeben sind. In beiden Fällen setzt sich der Schätzwert der Parameter oder der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  aus einer Prädiktion auf der Basis der Information über das System zum Zeitpunkt  $t_k$  und einem Korrekturwert zusammen, der aus dem Residuum aus gemessenen und prognostizierten Größen zur Zeit  $t_{k+1}$  berechnet wird (Bild 2.8).

$$\hat{z}_{k+1} = z_{k+1}^p + K_{k+1} [y_{k+1}^M - y_{k+1}^p(z_{k+1}^p)] \quad (2.4.1)$$

Die sogenannte Verstärkungsmatrix (Gain)  $K_{k+1}$  gewichtet die Meßinformation zu jedem Zeitpunkt neu. Die, in Gl. 2.4.1 eingeklammerten, Residuen können aus dem Informationsdefizit über das System, also aus Modellfehlern, resultieren oder aus Meßfehlern und sonstigen Störeinflüssen. Die Matrix  $K_{k+1}$  wird nach dem Grad des Vertrauens in das System oder in die Meßwerte berechnet. Wenn a priori oder durch Informationsakkumulation während der Rekursion größeres Vertrauen in die Modellierung gesetzt wird, ist die Verstärkung gering, andernfalls werden die Residuen hoch gewichtet, ebenso wenn bekannt ist, daß die Meßwerte störungsarm sind. In der Theorie der Zustandsschätzung werden diese Gewichtungen über angenommene Kovarianzen der System- und der Meßstörungen gesteuert.



Bid 2.8: Blockschaltbild der rekursiven Zustands- oder Parameterschätzung. Der schraffierte Bereich kennzeichnet den Schätzalgorithmus.

Im folgenden soll die Zustandsschätzung eines linearen, zeitdiskreten Systems betrachtet werden (s.a. Anhang B1 ):

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{B1.11 b})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{B1.11 c})$$

Während  $\mathbf{A}_d$  und  $\mathbf{B}_d$  die Eigenschaften des Systems charakterisieren, modellieren  $\mathbf{w}_k$  und  $\mathbf{v}_k$  Störungen, die auf das System, bzw, die Beobachtungsgrößen einwirken. Diese Rauschprozesse werden in der Regel als weiße Gaußprozesse angenommen, andere Charakteristiken müssen, wie oben beschrieben, durch entsprechende Filter eingebracht werden. Der optimale Zustandsschätzer für dieses System wird durch die zeitvarianten Kalman-Filtergleichungen [Brammer und Siffing 1985] beschrieben:

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k^p + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k^m - \mathbf{C} \mathbf{z}_k^p] \quad (\text{2.4.2 a})$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^* = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_k^* \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \quad (\text{2.4.2 b})$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^* \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \mathbf{P}_k^* \mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (\text{2.4.2 c})$$

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}] \mathbf{P}_k^* \quad (\text{2.4.2 d})$$

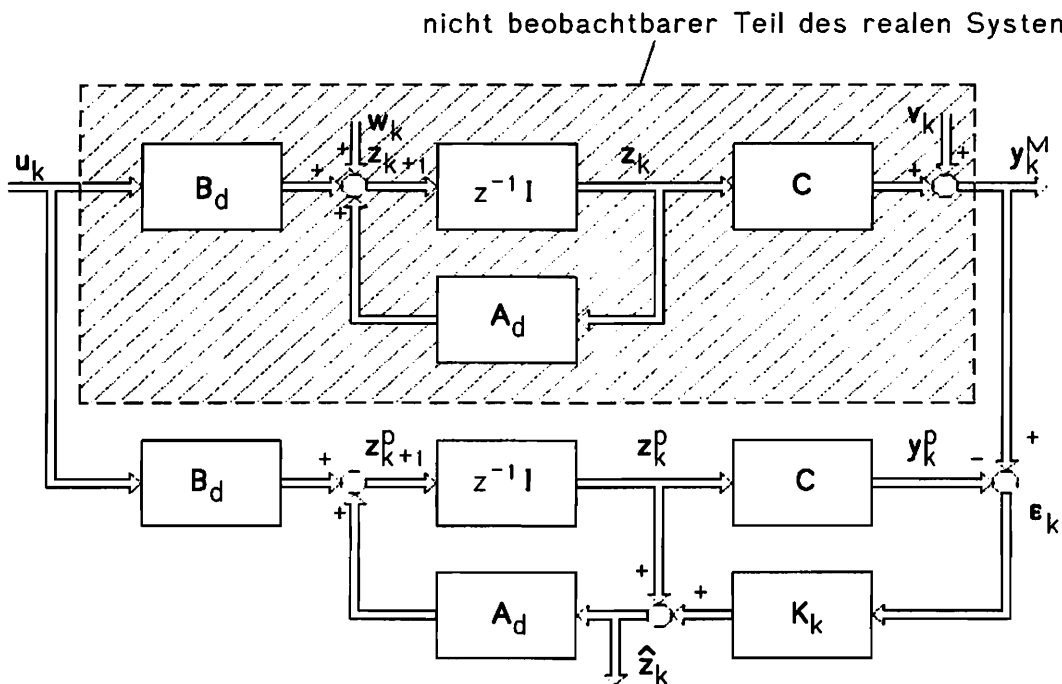


Bild 2.9: Blockschaltbild der Kalman-Filterung

Die Matrix  $\mathbf{Q}$  beschreibt die Kovarianz des Eingangs- oder Systemrauschens und  $\mathbf{R}$  die Kovarianz des Meßrauschens. Die Kovarianzen des Zustandsschätzfehlers bilden die Matrix  $\mathbf{P}_k$ . Die Herleitung des Kalmanfilters basiert auf einer Minimierung der Spur von  $\mathbf{P}_k$ , das Filter liefert also Zustandsschätzungen minimaler Varianz. Der Anfangswert  $\mathbf{P}_0$  muß, ebenso wie die Anfangswerte  $\mathbf{z}_0$ , entweder mit einem nichtrekursiven Verfahren berechnet oder durch eine Annahme ersetzt werden, im letzten Fall benötigt das Filter eine etwas längere Einschwingzeit.

Aus den Filtergleichungen kann der Einfluß der Störungskovarianzen abgelesen werden. Eine große Meßunsicherheit (große Varianzen in  $\mathbf{R}$ ) bewirkt eine geringe Verstärkung der Ausgangsfehler und damit eine größere Gewichtung der Prädiktion. Starkes Eingangsrauschen (große Varianzen in  $\mathbf{Q}$ ) verringert dagegen den Wert der Prädiktion und verkleinert die Abnahme der Schätzfehlerkovarianz. Folglich wird durch größere Werte der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  die Meßinformation höher bewertet. Die Gleichungen sind für bekannte Systemeigenschaften  $\mathbf{A}_d$  und  $\mathbf{B}_d$ , sowie bekannte Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_k$  gültig. In Verbindung mit Problemen der Systemidentifikation sind diese Voraussetzungen natürlich nicht erfüllt. Die geringere Systemkenntnis kann aber auch hier, in Grenzen, durch eine größere Eingangskovarianz  $\mathbf{Q}$  ausgedrückt werden, wodurch die Filterausgangsgrößen sich rascher den Beobachtungsgrößen anschmiegen. Für die Identifikation hat die Verbindung mit der Zustandsschätzung den Vorteil, daß zum einen die Modellsimulation stabilisiert wird und nicht aufgrund falscher Parameter divergiert, zum anderen, bei nichtlinearen Modellen, durch verbesserte Zustandsschätzungen die Gradientenberechnung realistischer ist und nicht auf Zustandstrajektorien basiert, die ohne die Rückführung der Meßinformation zwangsläufig falsch berechnet würden. Einzelheiten dieser kombinierten Schätzung von Zustandsgrößen und Parametern werden in Kapitel 4 in Verbindung mit dem Rückführungsmodell beschrieben.

Rekursive Algorithmen zur Parameterschätzung werden vor allem dann verwendet, wenn Schätzungen zeitvarianter Parameter in Echtzeit verlangt sind oder zur Speicherung der Meßwerte nur geringer Platz zur Verfügung steht [Diekmann 1981, Ljung 1987]. Das Schema der rekursiven Parameterschätzung wird im folgenden für ein parametrisch nichtlineares Modell abgeleitet, das sinngemäß auf andere Schätzprobleme übertragen werden kann (vgl. Gl. 2.3.23). Es wird nur ein Meßkanal betrachtet, daher ist an Stelle der Empfindlichkeitsmatrix  $\mathbf{D}_k^T$  der Vektor  $\mathbf{d}_k$  einzusetzen. Der Iterationsindex  $v$  wird unterdrückt.

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß eine auf  $k$  Meßwerten basierende Schätzung  $\Delta \mathbf{a}_k$  bereits vorliegt und nach Eintreffen des Meßwertes  $y_{k+1}^M$  ein verbesserter Schätzwert  $\Delta \mathbf{a}_{k+1}$  gesucht ist. Der Meßwert wird mit der aufgrund der vorhandenen Parameterkenntnis prognostizierten Ausgangsgröße  $y_{k+1}^P$  verglichen:

$$\varepsilon_{k+1} = y_{k+1}^M - y_{k+1}^P$$

Zweck der rekursiven Formulierung ist es, anstelle der Invertierung der Hessematrix in jedem Zeitschritt -die nach Gl. 2.3.23 erforderlich wäre, wenn ein Schätzwert nicht nur nach der Auswertung einer vollständigen Zeitreihe gefordert würde, sondern nach jedem Eintreffen eines neuen Meßwertes- die Inverse  $\mathbf{S}_{k+1}^{-1}$  mit wesentlich reduziertem Aufwand aus  $\mathbf{S}_k^{-1}$  berechnen zu können:

$$\Delta \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}_{k+1} = (\mathbf{S}_k + \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T)^{-1} (\boldsymbol{\vartheta}_k + \mathbf{d}_{k+1} \varepsilon_{k+1})$$

$\mathbf{S}_k^{-1}$  und  $\boldsymbol{\vartheta}_k$  sind aus dem vorherigen Zeitschritt bekannt, während der Empfindlichkeitsvektor  $\mathbf{d}_{k+1}$  im aktuellen Zeitschritt berechnet wird. Für die Inverse einer Matrix  $\mathbf{S}_k$ , die um die Dyade  $\mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T$  erweitert wird, gilt nach dem Matrix-Inversionslemma [s. Zielke 1970]:

$$(\mathbf{S}_k + \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T)^{-1} = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{S}_k^{-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} \right] \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.4.3)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{S}_k^{-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} \right] \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{S}_k + \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T) \\ &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{S}_k^{-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} \right] (\mathbf{I} + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T) \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern folgt:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} \underbrace{\left[ -\frac{1}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} + 1 - \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} \right]}_{\equiv 0} \mathbf{d}_{k+1}^T$$

Womit die Annahme nach Gl. 2.4.3 bestätigt ist.

Für die Parameterschätzung folgt damit:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{a}_{k+1} &= \left[ \mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{S}_k^{-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}^T}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}}}_{\Lambda} \right] \mathbf{S}_k^{-1} (\boldsymbol{\vartheta}_k + \mathbf{d}_{k+1} \varepsilon_{k+1}) \\
 &= \underbrace{\mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\vartheta}_k}_{\Delta \mathbf{a}_k} + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} \varepsilon_{k+1} - \underbrace{\mathbf{S}_k^{-1} \Lambda \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\vartheta}_k}_{\Delta \mathbf{a}_k} - \mathbf{S}_k^{-1} \Lambda \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} \varepsilon_{k+1} \\
 &= \Delta \mathbf{a}_k - \mathbf{S}_k^{-1} \Lambda \Delta \mathbf{a}_k + \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{d}_{k+1} - \Lambda \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}) \varepsilon_{k+1} \\
 &= \Delta \mathbf{a}_k + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} \left[ \frac{\varepsilon_{k+1} - \mathbf{d}_{k+1}^T \Delta \mathbf{a}_k}{1 + \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1}} \right] \\
 &= \Delta \mathbf{a}_k + \mathbf{K}_{k+1} [\varepsilon_{k+1} - \mathbf{d}_{k+1}^T \Delta \mathbf{a}_k] \tag{2.4.4}
 \end{aligned}$$

mit der Verstärkungsmatrix (bzw. -vektor):

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} [\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{d}_{k+1} + 1]^{-1} \tag{2.4.5}$$

Die Ähnlichkeit von Gl. 2.4.3 bis 2.4.5 mit den Gleichungen des Kalman-Filters ist offensichtlich. Im nächsten Kapitel wird das erweiterte Kalman-Filter diskutiert, das die Schätzung von Zustandsgrößen und Parametern zusammenfaßt.

### **3. Detektion und Modellierung nichtlinearer Systeme**

#### **3.1 Methoden der Detektion**

Für eine große Zahl technischer Systeme gilt die Annahme linearen Verhaltens nicht oder nur angenähert: Die mit den im vergangenen Kapitel beschriebenen Methoden identifizierten linearen Modelle können daher oft nur als Linearisierungen der realen Systeme betrachtet werden. Das Resultat der Linearisierung ist dabei von dem verwendeten Gütekriterium, der Modellklasse und den Versuchsbedingungen abhängig. Nach der Systemidentifikation wird daher eine Modellvalidierung vorgenommen, die klären muß, innerhalb welcher Grenzen das Modell die Systemeigenschaften mit hinreichender Genauigkeit repräsentiert. Gewöhnlich werden die Zulässigkeitsgrenzen durch Amplitudenbereiche und Frequenzbeschränkungen definiert. Aufgrund der Ungültigkeit des Superpositionsgesetzes bei nichtlinearen Systemen sind diese Einschränkungen häufig nicht ausreichend, beispielsweise kann eine bifrequente Erregung mit Amplituden und Frequenzen innerhalb der als zulässig beschriebenen Grenzen zu qualitativ völlig anderen Systemreaktionen führen als eine monofrequente Erregung. Ebenso kann die Lastgeschichte einen merklichen Einfluß auf das Systemverhalten ausüben.

Die Vielfalt der Ursachen für nichtlineares Verhalten hat die Entwicklung einer einheitlichen nichtlinearen Systemtheorie bisher verhindert. Ebenso wenig existieren allgemein anwendbare Identifikationsmethoden für nichtlineare Systeme. Im Zusammenhang mit der Systemidentifikation sind vor allem die Fragen der Detektion und der Modellierung relevant, das heißt, ob ein untersuchtes System nichtlineare Komponenten besitzt, welcher Klasse diese zuzuordnen sind und wie das System in diesem Fall, in einer für die Identifikation geeigneten Weise, modelliert werden kann.

Einfache Nichtlinearitätstests basieren oft auf Versuchen mit harmonischer Erregung [Mehra 1979, Haber 1985]. Die Reaktion des nichtlinearen Systems ist ebenfalls periodisch, aber nicht mehr harmonisch und weist daher im Frequenzbereich über- oder auch unterharmonische Spektralanteile auf (Bild 3.1). Über unterschiedliche Erregungsniveaus kann die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes überprüft werden.

Kirshenboim und Ewins [1984] führen einen Linearitätsindex ein, der bei harmonischer Erregung aus Erwartungswert und Varianz der Abweichung der gemessenen Systemantwort von der linear extrapolierten Antwort bei



niedrigem Amplitudenniveau berechnet wird. Für einige einfache Mechanismen, wie kubischer Steifigkeit oder Coulombscher Reibung, kann aus dem Verlauf des Index über einem Amplitudenmaß auf die Art der Nichtlinearität geschlossen werden.

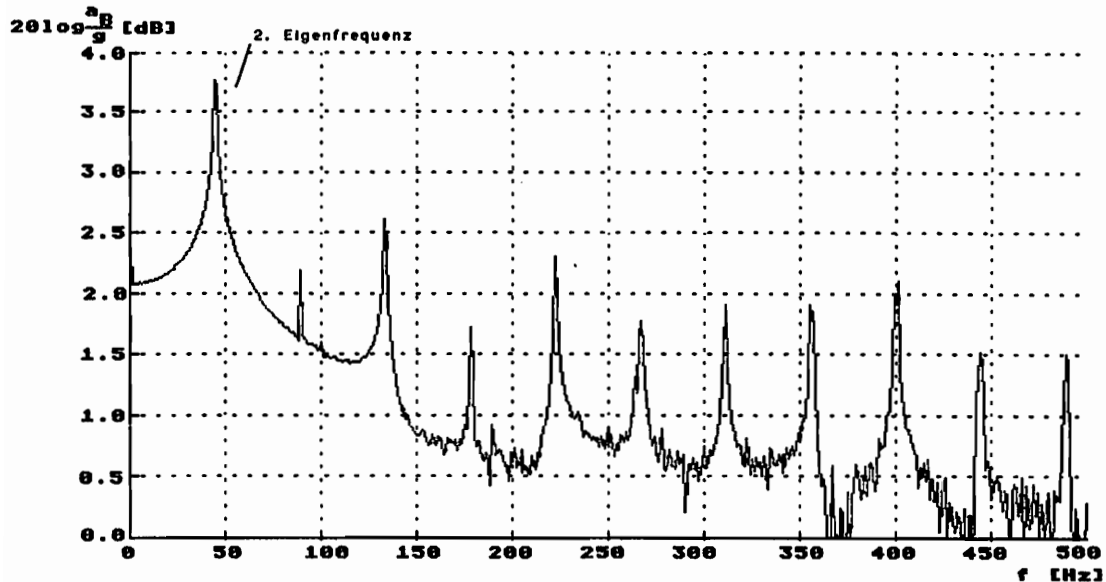


Bild 3.1: Fourier-Transformation der Beschleunigungsantwort eines stark gerissenen Stahlbetonbalkens unter harmonischer Erregung in der zweiten Eigenfrequenz ( $f_2 = 44.3$  Hz). Die Anregung der Oberharmonischen weist auf das dynamisch nichtlineare Strukturverhalten hin.

Tomlinson [1982] identifiziert Systeme mit Coulomb-Reibung aufgrund der charakteristischen Verzerrung der Frequenzgangortskurve, die ebenfalls unter harmonischer Erregung aufgenommen wird. Eine weitere von Simon und Tomlinson [1984] angegebene Methode basiert auf den Eigenschaften der Hilbert-Transformation. Die Real- und Imaginärteile einer Übertragungsfunktion enthalten die gleiche Systeminformation, falls die Funktion ein lineares Phasenminimumsystem beschreibt. Mit der Hilbert-Transformation kann der Realteil aus dem Imaginärteil berechnet werden und umgekehrt, sofern die entsprechende Zeitbereichsfunktion kausal und realisierbar ist [s.Marko 1977]:

$$G(\omega) = G_1(\omega) + j G_2(\omega)$$

Der Quotient aus Ausgangs- und Eingangssignal im Frequenzbereich besitzt bei nichtlinearen Systemen keine mit der Übertragungsfunktion linearer Systeme vergleichbare physikalische Bedeutung, weil das Übertragungsverhalten von der Amplitude des Eingangssignals abhängt. Die Rücktransformierte dieser Funktion ist daher im allgemeinen keine kausale Funktion mehr. Die

Hilbert-Transformierte des Realteils unterscheidet sich signifikant vom Imaginärteil, eine Eigenschaft, die zur Detektion von Nichtlinearitäten genutzt werden kann.

Die auf harmonischer Erregung basierenden Detektionsmethoden erfordern einen relativ großen versuchstechnischen Aufwand, der häufig nicht realisiert werden kann. Vom Autor wurde eine Methode bevorzugt, bei der -mit einfachen Mitteln anregbar- transiente Schwingungen verwendet werden. Innerhalb kurzer Zeitabschnitte können nichtlineare Schwingungen oft mit ausreichender Genauigkeit linear approximiert werden. Mit der Veränderung der Amplitudenniveaus in aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten verschieben sich auch die Parameter der approximierten Modelle. Aus dem Trend der Parameter kann in einigen Fällen auf den Charakter der Nichtlinearität geschlossen werden.

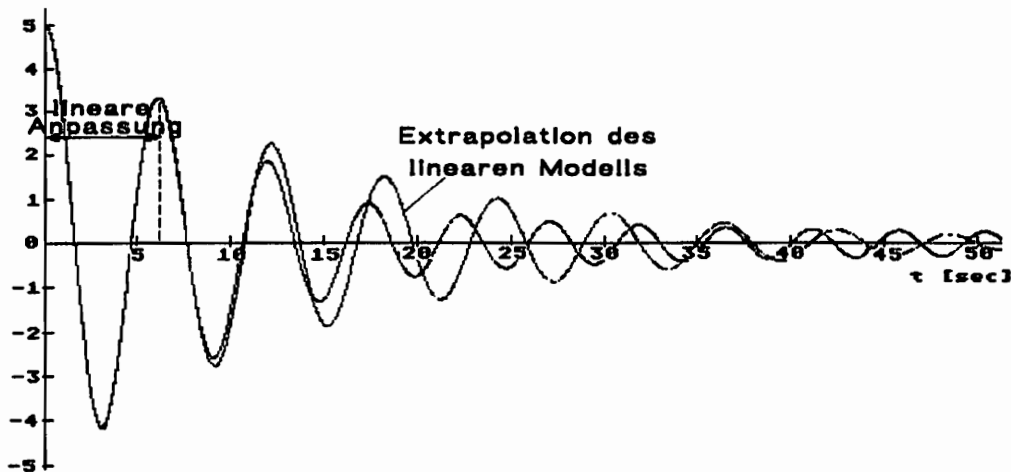


Bild 3.2: Abklingkurve eines Schwingers mit Masingdämpfung (s. Kap.5) und Extrapolation eines im ersten Zeitabschnitt (s.Markierung) angepaßten linearen Modells.

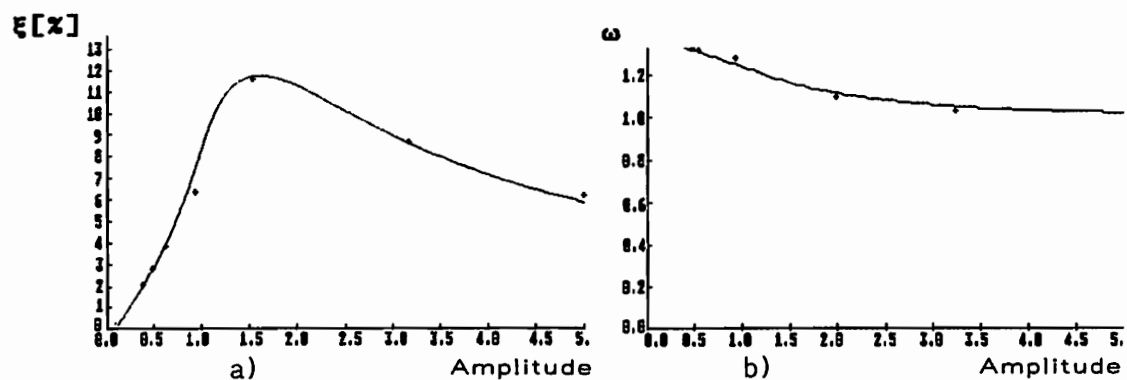


Bild 3.3: Durch bereichsweise lineare Anpassung (+) identifizierte amplitudenabhängige äquivalente Dämpfungsmaße (a) und Frequenzen (b). Die durchgezogenen Kurven entsprechen den theoretischen Werten des Masing-Elementes nach Kapitel 5.

### 3.2 Nichtlineare Modellansätze

In der nichtlinearen Systemidentifikation werden im wesentlichen vier Klassen von Modellen verwendet:

1. Funktionalreihenansätze
2. Blockorientierte Modelle
3. Nichtlineare Differenzen- oder Regressionsmodelle
4. Zustandsraummodelle

Bei den Funktionalreihenansätzen handelt es sich vor allem um *Volterra-Reihen*, die von Wiener in die Identifikation eingeführt wurden. Die Volterra-Reihe ersetzt das Lösungsfunktional eines nichtlinearen Prozesses durch die unendliche Summe von mehrdimensionalen Faltungen sogenannter Volterra-Kerne  $h_n$  (oder auch verallgemeinerter Impulsantworten) mit den Produkten des Eingangssignals:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t-\tau_i) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (3.2.1)$$

Die Volterra-Kerne werden gewöhnlich mit Korrelationsmethoden identifiziert, wobei das System durch unkorreliertes Rauschen erregt wird. Der analoge Ansatz bei zeitdiskreten Systemen lautet:

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} h_{1,i} u_{k-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{2,ij} u_{k-i} u_{k-j} + \dots \quad (3.2.2)$$

Eine entsprechende Darstellung im Frequenzraum erfordert die Anwendung mehrdimensionaler Fourier-Transformationen [s. Priestley 1981]. Die Identifikation mit Volterra-Reihen erfordert auch bei einfachen Nichtlinearitäten bereits einen erheblichen Berechnungsaufwand, die Methoden haben daher keine große praktische Bedeutung.

Bei den blockorientierten Modellen wird der nichtlineare Systemteil vom linearen Teil abgespalten. Bekannte Sonderformen für spezielle Nichtlinearitäten sind das *Hammerstein- und das Wiener-Modell* (Bild 3.4) [s. Isermann 1987]. Das Eingangssystem des Hammerstein-Modells beschreibt eine statische Nichtlinearität ohne Gedächtnis, die durch Polynome approximiert werden kann. Das nachgeschaltete lineare System repräsentiert die dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems [Stoica und Söderström 1982, Kortmann und Unbehauen 1987]. Die Hammerstein-Modelle werden

in der Regel als verallgemeinerte ARX-Modelle formuliert, indem für jede Potenz der Eingangsgröße ein Regressionsterm angesetzt wird, was einer Multi-Input-Single-Output (MISO)-Formulierung gleichkommt.

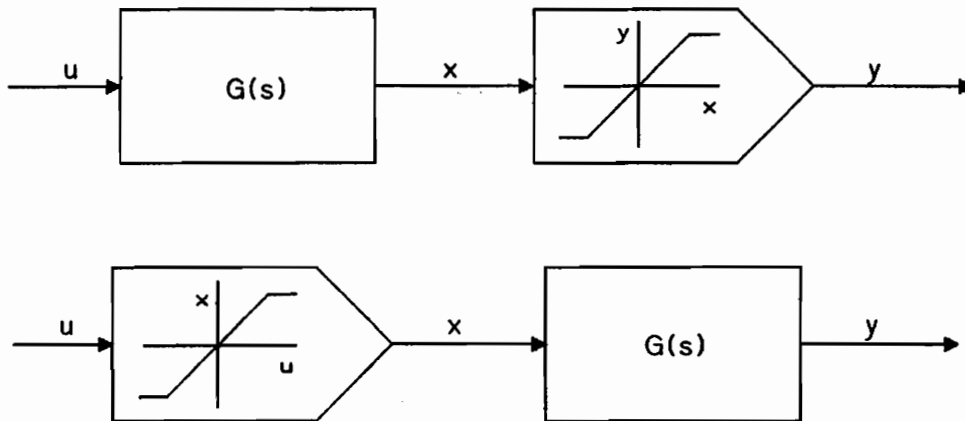


Bild 3.4: a) Wiener- und b) Hammerstein-Modell

Diese lineare Regressionsformulierung für ein nichtlineares System kann erweitert werden, wenn man die Ein- und Ausgangsgrößen in einem ARX-Modell durch allgemeine nichtlineare Transformationen ersetzt [Ljung 1987].

$$y_k = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(u, y) \quad (3.2.3)$$

Die Funktionen  $\varphi_i(u, y)$  des *nichtlinearen Regressionsmodells* beschreiben a priori bekannte Zusammenhänge zwischen vergangenen und aktuellen Eingangsgrößen  $u$  und Ausgangsgrößen  $y$ , im einfachsten Fall beispielsweise höhere Potenzen der primären Größen. Daraus resultiert ein nichtlineares Modell, das linear in den Parametern ist. Die Parameter  $a_i$  können entsprechend einfach geschätzt werden. Im allgemeinen ist es aber schwierig, die korrekten nichtlinearen Funktionen zu definieren, insbesondere, weil die Nichtlinearität in Ein- und Ausgangsgrößen ausgedrückt werden muß, was bei mechanischen Mehrfreiheitsgradsystemen unrealistisch ist.

Allgemein wurde für die nichtlinearen Regressionsmodelle der Begriff *NARMA-Modelle* (Nonlinear ARMA) geprägt [Billings und Voon 1984]. Eine spezielle Klasse bilden darunter die *bilinearen ARMA (BARMA)-Modelle* [s. Tang und Mohler 1988], bei denen die gewöhnliche ARMA(p,q)-Beschreibung um Produkte der Prozeßvariablen  $y_{k-i}$  mit den Störungen  $\epsilon_{k-i}$  ergänzt wird:

$$y_k = \underbrace{\sum_{i=1}^p a_i y_{k-i}}_{\text{AR-}} + \underbrace{\sum_{i=0}^q c_i \varepsilon_{k-i}}_{\text{MA-}} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^s d_{ij} y_{k-i} \varepsilon_{k-j}}_{\text{bilinearer}} \quad (3.2.4)$$

Anteil

Nichtlineare Prozesse können auch durch mehrere lineare AR(p)-Modelle, eventuell unterschiedlicher Ordnung, mit unterschiedlichen Definitionsbereichen beschrieben werden. Jedes Modell beschreibt das System innerhalb bestimmter Intervalle einer Schwellwertgröße, daher rührt, nach Tong [1980], die Bezeichnung *Threshold-Autoregressive- (TAR-) Models*. Anstelle eines Schwellwertes können auch beispielsweise Regionen des Zustandsraums den Gültigkeitsbereich eines Modells definieren. In diesem Sinne kann der Modellansatz als stückweise lineare Approximation des nichtlinearen Systems interpretiert werden. Verschiedentlich sind auch Modelle nach Gl. 3.2.3 zu Threshold-Modellen kombiniert worden, um stetige Nichtlinearitäten besser wiedergeben zu können (TNARMA-Modelle) [Lai und Hsieh 1987].

Das Modell von Masri u.a. [1980, 1987] zählt zu den wenigen nichtlinearen Modellen, die auf der Vektordifferentialgleichung (Gl. B1.2) mechanischer Systeme basieren und dessen Parameter ohne Iteration bestimmt werden können.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{p}(t) \quad (B1.2)$$

Allerdings müssen für die Identifikation stark einschränkende Voraussetzungen erfüllt sein. Die Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen, letztere beiden Größen eventuell durch Integration der Beschleunigungen bestimmt, müssen ebenso vollständig bekannt sein wie die Massmatrix und die Erregerkräfte. Die Gleichung kann dann nach der noch einzig unbekanntem Rückföhrfunktion  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$  umgestellt werden, die durch Summen von Tschebyscheffpolynomen in den physikalischen oder den modalen Geschwindigkeiten und Verschiebungen approximiert wird:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \Phi \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t)$$

Φ - Modalmatrix des linearisierten Systems

$\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)$  - Modalkoordinaten

$$h_i(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \sum_{j=1}^s h_{ij}(v_{1j}, v_{2j}) \quad (3.2.5)$$

$$h_{ij}(v_{1j}, v_{2j}) = \sum_k \sum_l C_{kl}^{ij} T_k(v_{1j}) T_l(v_{2j})$$

$T_k(v_{1j}), T_l(v_{2j})$  - Tschebyscheffpolynome der  
Ordnung  $k$ , bzw  $l$

Bei den Variablen  $v$  kann es sich um die modalen Verschiebungen oder Geschwindigkeiten unterschiedlicher Moden handeln, es werden somit auch Kopplungen der Moden untereinander berücksichtigt. Die Schätzung der Modellvariablen  $C$  ist zwar ebenso einfach wie bei den oben beschriebenen linearen Regressionsmodellen (Gl. 3.2.3), aber die notwendige, bestenfalls unter Laborbedingungen realisierbare Kenntnis aller Zustandsgrößen mindert die Anwendbarkeit der Methode erheblich. Bei der Identifikation realer Systeme muß vielmehr davon ausgegangen werden, daß nur einige kinematische Größen der Messung zugänglich sind und die nicht beobachtbaren Größen, die in die funktionale Beschreibung der Nichtlinearität eingehen, geschätzt werden müssen.

Die fehlenden Zustandsgrößen können theoretisch durch ein zum realen System parallel angeordnetes mathematisches Simulationsmodell berechnet werden, das mit den gleichen Steuergrößen angeregt wird. Reine Prädiktormodelle besitzen aber im allgemeinen eine zu große Empfindlichkeit gegenüber falschen Anfangswerten, ungenauen Eingangsgrößen und die bei der Systemidentifikation durch die Problemstellung natürlich immer vorhandenen Modellfehler. Aus diesem Grund werden die Prädiktormodelle mit Zustandsschätzern verknüpft, auf die in Kapitel 2 eingegangen wurde. Parameter und Zustandsgrößen werden dann entweder nacheinander geschätzt (Bootstrap Estimators) [Goodwin und Sin 1984, Puthenpura und Sinha 1986] oder simultan. Der bekannteste Ansatz zur simultanen Schätzung ist das *erweiterte Kalman-Filter (EKF)* [Jazwinski 1970, Ljung 1979, Maybeck 1982].

Betrachtet werden wieder nichtlineare zeitdiskrete Systeme, jetzt in Zustandsraumdarstellung:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a}) + \mathbf{w}_k \quad (3.2.6 \text{ a})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (3.2.6 \text{ b})$$

$\psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a})$  - nichtlineare Vektorfunktion der Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_k$ ,  
Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_k$  und der Parameter  $\mathbf{a}$

$h(\mathbf{x}_k)$  - nichtlineare Beobachtungsfunktion der Zustandsgrößen

Analog zu den Gleichungen des Kalman-Filters für lineare Systeme (Gl.2.4.2) lauten hier die Schätzungen der Zustandsgrößen:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a}) + \mathbf{K}_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1}^M - h(\psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a}))] \quad (3.2.7)$$

Zur Berechnung der Gainmatrix  $\mathbf{K}_{k+1}$  werden die linearen Glieder einer Taylor-Reihenentwicklung von  $\psi$  und  $h$  in der Umgebung der geschätzten Zustands-trajektorie verwendet:

$$\psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a}) \approx \psi(\mathbf{x}_{0k}, \mathbf{u}_{0k}, \mathbf{a}) + \underbrace{\frac{\partial \psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_k}}_{\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})} \Delta \mathbf{x} \quad (3.2.8 \text{ a})$$

$$h(\mathbf{x}_k) \approx h(\mathbf{x}_{0k}) + \underbrace{\frac{\partial h(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_k}}_{\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_k)} \Delta \mathbf{x} \quad (3.2.8 \text{ b})$$

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{H}}^T(\mathbf{x}_k) [\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_k) \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{H}}^T(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}]^{-1} \quad (3.2.9 \text{ a})$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{F}}^T(\mathbf{x}_k) + \mathbf{Q} - \mathbf{K}_k [\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_k) \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{H}}^T(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}] \mathbf{K}_k^T \quad (3.2.9 \text{ b})$$

Nach der Berechnung von Schätzwerten ist eine erneute Linearisierung bezüglich der neuen Zustandsgrößenschätzung möglich, die Gleichungen 3.2.8 und 3.2.9 werden in jedem Zeitschritt iterativ angewendet (*iterierendes erweitertes Kalman-Filter*).

Im folgenden soll angenommen werden, daß die Beobachtungsgrößen wie beim linearen Modell über eine lineare Funktion aus den Zustandsgrößen hervorgehen. Die Annahme trifft für die Messung mechanischer Systeme fast immer zu:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k ; \quad \bar{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{C}$$

Die Gleichungen 3.2.8 und 3.2.9 beschreiben das erweiterte Kalman-Filter zur Zustandsschätzung nichtlinearer zeitdiskreter Systeme. Die Qualität

der geschätzten Zustandsgrößen ist von der Genauigkeit des Simulationsmodells, insbesondere der Parameter  $\mathbf{a}$ , abhängig. Unabhängig davon, ob der primäre Zweck der nichtlinearen Filterung die Schätzung der Systemzustände oder eine Systemidentifikation ist, empfiehlt sich daher die Einbeziehung der Parameter in die Schätzung. Wenn der Zweck der Parameterschätzung in der Verbesserung des Filters liegt, wird das Verfahren als adaptive Filterung bezeichnet. Gemeinsam ist diesen Verfahren, daß der Filterfehler zur Verbesserung des Filters selbst verwendet wird. An Stelle von  $\mathbf{x}_k$ , dem Vektor der kinematischen Zustandsgrößen, kann der verallgemeinerte Zustandsvektor  $\mathbf{z}_k$  eingeführt werden, der auch die Parameter umfaßt.

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \dot{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k) + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}' \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k$$

Im Fall linearer Systeme lauten die Filtergleichungen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(\mathbf{a}) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d(\mathbf{a}) \mathbf{u}_k \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.2.11 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{z}_k) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}_k} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(\mathbf{a}) & \left. \frac{\partial [\mathbf{A}_d(\mathbf{a}) \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_d(\mathbf{a}) \mathbf{u}_k]}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\hat{\mathbf{a}}_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.11 \text{ b})$$

Für lineare mechanische Systeme bedeutet das die Notwendigkeit, die aus globaler Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenmatrix gebildete Transitonsmatrix  $\mathbf{A}_d$ , gegebenenfalls auch die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_d$ , nach den Parametern zu differenzieren. Bei nichtlinearen Systemen kommt die partielle Ableitung nach den Zustandsgrößen hinzu, beide Ableitungen müssen in jedem Zeitschritt neu berechnet werden:



$$f(z_k, u_k) = \begin{bmatrix} \psi(z_k, u_k) \\ a \end{bmatrix} \quad (3.2.12 \text{ a})$$

$$\bar{F}(z_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi(z_k, u_k)}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_k} & \frac{\partial \psi(z_k, u_k)}{\partial a} \Big|_{\hat{a}_k} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.2.12 \text{ b})$$

In der Strukturmechanik gilt aufgrund der im allgemeinen kleinen Verformungen die Annahme einer konstanten Massenmatrix auch bei nichtlinearen Systemen. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen können dann nach der Beschleunigung aufgelöst werden. Eine Abhängigkeit der Massenmatrix von Zustandsgrößen, wie beispielsweise bei Mehrkörpersystemen und großen Verschiebungen der Fall, erschwert die Beschreibung erheblich.

$$\psi(z_k, u_k) = \begin{bmatrix} x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(t) dt \\ \dot{x}_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} M^{-1} g(x(t), \dot{x}(t)) dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} M^{-1} p(t) dt \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Der Vergleich mit den Gleichungen B1.2 und B1.8 zeigt, daß in jedem Zeitschritt eine äquivalente Steifigkeitsmatrix und eine Dämpfungsmatrix berechnet werden müssen. Das Berechnen von Elementmatrizen und das Assemblieren der Gesamtmatrizen ist sehr aufwendig und begrenzt die Anwendbarkeit des Verfahrens in der dargestellten Form auf kleine Systeme mit wenigen Freiheitsgraden. Das im folgenden Kapitel vorgestellte Verfahren besitzt eine wesentlich breiterer Anwendungsmöglichkeit weil dort die Neuberechnung der Matrizen in jedem Zeitschritt vermieden wird.

#### 4. Identifikation nichtlinearer Mehrfreiheitsgradsysteme durch Rückführung von Zustandsgrößen über ein nichtlineares Teilssystem

##### 4.1 Prinzip des Rückführungsmodells

Im vorangegangenen Kapitel wurden verschiedene Modellansätze zitiert, die in vielen Bereichen, in denen die Systemidentifikation eingesetzt wird, Verwendung finden. Zur Identifikation mechanischer Systeme, auf deren spezielle Eigenschaften zum Teil bereits eingegangen wurde, sind sie wegen der unzureichenden Modellierungsmöglichkeiten nichtlinearer Komponenten oder wegen des immensen Berechnungsaufwandes bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden nur bedingt geeignet. Die Anforderungen an eine, für die mechanische Strukturanalyse geeignete Identifikationsmethode sollen noch einmal zusammengefaßt werden:

1. Die Nichtlinearitäten des mechanischen Systems können physikalisch korrekt nur in Zustandsgrößen beschrieben werden, die nicht unmittelbar beobachtbar sind, eine lokale Nichtlinearität beispielsweise durch eine funktionale Beziehung zwischen einer örtlichen Verschiebungs- und einer Kraftgröße. Diese nichtlinearen Funktionen müssen in das Identifikationsmodell integriert werden können.
2. Die Schwingungen eines mechanischen Systems können modal, das heißt als zeitveränderliche Linearkombination von Eigenformen, beschrieben werden. Diese Annahme gilt auch angenähert für schwach nichtlineare Systeme [vgl. Busby u.a. 1986]. Die modale Beschreibung bietet häufig, durch eine Beschränkung auf die wesentlichen Eigenformen eines Systems, die Möglichkeit einer drastischen Reduzierung der Freiheitsgrade und ist für große Systeme unverzichtbar.
3. Die für effiziente Suchverfahren erforderliche Gradientenbildung der Ausgangsgrößen bezüglich der Parameter muß auch bei großen Modellen (Finite-Element-Modellen) möglich sein.

In der Einführung wurde bereits die Möglichkeit erwähnt, die Modellbildung durch eine Separation komplexer Systeme in Teilsysteme zu vereinfachen. Im Hinblick auf die Ziele der Identifikation und die oben angeführten Anforderungen an eine Methode, ist es naheliegend, das Gesamtsystem durch zwei Modelle  $M_1$  und  $M_2$  zu beschreiben. Diese Modelle müssen nach folgenden Gesichtspunkten gewählt werden:

1. **Modell  $M_1$**  ist eine Realisierung der nach den a priori Kenntnissen *bestmöglichen linearen Näherung* des wirklichen Systems.

2. Das im allgemeinen nichtlineare **Modell  $M_2$**  bildet die unbekanntenen Komponenten des Systems ab.  $M_2$  kann als *Ergänzungsmodell* bezeichnet werden.

Durch die Definition von  $M_1$  als Beschreibung eines ausschließlich linearen Systems, wird die Problemformulierung in den modalen Koordinaten dieses Modells möglich und damit die geforderte modale Reduktion der Freiheitsgrade. Die physikalisch korrekte Beschreibung in Zustandsgrößen wird durch eine Zustandsschätzung gestattet, die im wesentlichen über die Systembeschreibung  $M_1$  abgeleitet werden kann und durch  $M_2$  nur korrigiert wird. Die dritte oben angeführte Forderung der Gradientenbildung ist durch die von  $M_2$  bereitgestellte Ein-/Ausgangsbeziehung zwischen Zustandsgrößen und Kraftgrößen, wie noch zu zeigen ist, im allgemeinen leicht zu erfüllen.

Die in Kapitel 3 erwähnten Wiener- und Hammerstein-Modelle sind Beispiele für eine Aufteilung von nichtlinearen Systemen in rein lineare und rein nichtlineare Teilsysteme. Es finden aber keine Interaktionen zwischen den Modellen der Teilsysteme statt, sondern nur gerichtete Wirkungen von  $M_1$  auf  $M_2$  oder umgekehrt. Mit einer solchen offenen Steuerkette kann aber keine tatsächliche Äquivalenz mit dem realen System erreicht werden, insbesondere keine korrekte Wiedergabe der Systemstruktur, weil entweder die Zustandsgrößen bei der Berechnung der Nichtlinearität unbekannt sind (Hammerstein-Modell) oder zur Berechnung der dynamischen Zustandsgrößen die nichtlinearen Komponenten nicht berücksichtigt werden (Wiener-Modell).

Eine Interaktion zwischen Systemen wird durch eine Kreisschaltung, also eine Rückführung von Ausgangs- oder Zustandsgrößen beschrieben. Bezogen auf die oben genannten Kriterien der Aufteilung, könnte das Modell  $M_1$ , in dessen Zustandsgrößen die Problemformulierung vorgenommen wird, im Vorwärtszweig, das Modell  $M_2$  in der Rückführung angeordnet werden (Bild 4.3).  $M_2$  liefert dann, gesteuert durch Zustandsgrößen von  $M_1$ , zusätzliche Steuerungen (Eingangsgrößen) für das unbeschränkt steuerbare Modell  $M_1$  (s. Anhang B1) im Vorwärtszweig. Für die Identifikation stellt sich dann die Aufgabe, das Modell  $M_2$  zu finden, das die Steuerungen generiert, die im Sinne eines Gütekriteriums zur optimalen Übereinstimmung der Ausgangsgrößen von  $M_1$  mit Beobachtungswerten führen. Aus dieser Struktur leitet sich die Bezeichnung des **Rückführungsmodells** ab.

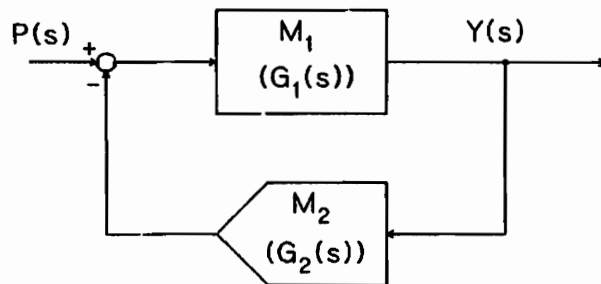
Die Teilsystemaufspaltung wird an der Beschreibung eines einfachen gedämpften Einmassenschwingers im Bildbereich veranschaulicht:

$$(ms^2 + bs + k) X(s) = P(s)$$

$$\text{Übertragungsfunktion: } G_s(s) \equiv \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Als Vorwärtsmodell wird die Übertragungsfunktion des ungedämpften Schwingers gewählt:

$$G_1(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$$



Das korrekte Ergänzungsmodell  $M_2$  beschreibt

$$G_2(s) = bs$$

wie man durch Bildung der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises zeigen kann:

$$G_g(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \triangleq G_s(s)$$

In einer Simulationsrechnung würde in diesem Fall die Geschwindigkeit zurückgeführt und mit der daraus berechneten Dämpfungskraft der ungedämpfte Schwinger gesteuert. Aufgrund der Interaktionsbeziehung muß im Zeitbereich diese Berechnung iterativ durchgeführt werden. In der Strukturmechanik wird diese Methode zur Berechnung nichtlinearer Systeme häufig verwendet. Es ist nun einfach, an Stelle der linearen Dämpfungsbeziehungen ein beliebiges nichtlineares Gesetz zu formulieren.

Es wird deutlich, wie die Kopplung der Systeme auch für die Parameterschätzung formalisiert werden kann: Für das lineare System ist eine allgemeine Empfindlichkeitsbeziehung der Ausgangsgrößen bezüglich der Steuergrößen zu formulieren, ähnlich einer Eingangsgrößenidentifikation, die mit der beschriebenen Modellstruktur ebenfalls durchgeführt werden kann. Für

diese Beziehungen wird der Schätzalgorithmus abgeleitet, der -ohne Kenntnis des speziellen Ergänzungsmodells  $M_2$  - beispielsweise in ein Finite-Element-System implementiert wird. Die tatsächlichen Parameterempfindlichkeiten der Steuergrößen können dann, wie die Steuergrößenbeziehung selbst, bei der Ankopplung des Modells  $M_2$  belegt werden.

Die für die Identifikation erforderlichen Empfindlichkeitsfunktionen der Ausgangsgrößen von  $M_1$  bezüglich der Parameter von  $M_2$  werden im folgenden für das allgemeine Mehrfreiheitsgradsystem abgeleitet. Grundlage ist die nichtlineare Vektordifferentialgleichung eines mechanischen Systems (Bezeichnungen s. Anhang B1):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{p}(t) \quad (\text{B1.2})$$

Der Term  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$  beschreibt die im allgemeinen nichtlinearen Dämpfungs- und Rückstellkräfte. Eine Zerlegung von  $\mathbf{g}$  in einen linearen, ungedämpften Anteil  $\mathbf{g}_1$  und den nichtlinearen Anteil  $\mathbf{g}_2$  sei möglich, eventuell durch eine Reihenentwicklung der Nichtlinearität.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \quad (\text{4.1})$$

Unter der Voraussetzung, daß das Verhalten des Gesamtsystems wesentlich durch  $\mathbf{g}_1$  bestimmt wird, kann der nichtlineare Anteil  $\mathbf{g}_2$  als Systemeinganggröße behandelt werden:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{g}_2(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \quad (\text{4.2})$$

Die physikalischen Zustandsgrößen können nun auch durch die modalen Größen des homogenen linearen Systems ersetzt werden. In der Basis der  $\mathbf{M}$ -normierten Eigenvektoren lautet die Gleichung dann:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{p}(t) - \mathbf{g}^*(\mathbf{c}(t)) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{c}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (\text{4.3})$$

Im Hinblick auf das Identifikationsproblem soll  $\mathbf{g}^*$  alle unbekanntenen Eigenschaften des Gesamtsystems enthalten, d.h.  $M_2$  repräsentieren, während das lineare Teilmodell  $M_1$  aus einer optimalen linearen Umsetzung der apriorischen Systemkenntnis, beispielsweise in ein Finite-Element-Modell, das nach den Konstruktionsdaten einer Maschine oder eines Bauwerks erstellt wird, resultiert.  $\mathbf{g}^*$  kann als Teilsystem verstanden werden, das durch physikalische oder modale Zustandsgrößen, eventuell auch durch Meßgrößen

$y^M$ , gesteuert wird. Diese Steuergrößen werden allgemein im Vektor  $\mathbf{c}(t)$  zusammengefaßt:

$$\mathbf{c}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{y}(t))$$

Die allgemeine Lösung von Gl.4.3 ist [s. Waller und Krings 1975]:

$$\mathbf{q}(t) = \Theta_1(t) \mathbf{q}_0 + \Theta_2(t) \omega^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 + \int_0^t \Theta_2(t-\tau) \omega^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) d\tau \quad (4.4)$$

$\boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$  - Steuerfunktion des Teilsystems  $M_1$   
 $\mathbf{c}(\tau)$  - " " " "  $M_2$   
 $\mathbf{p}(\tau)$  - auf das mechanische System  
 einwirkende äußere Kräfte

mit den modalen Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  und  $\dot{\mathbf{q}}_0$ . Für die Matrizen  $\omega$ ,  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  gilt:

$$\omega_{ij} = \delta_{ij} \omega_i \quad ; \quad \Theta_{1ij} = \delta_{ij} \cos \omega_i t \quad ; \quad \Theta_{2ij} = \delta_{ij} \sin \omega_i t \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Die Steuerfunktion  $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{c}(t), \mathbf{p}(t))$  ist natürlich von  $\mathbf{q}(t)$  und daraus abgeleiteten Größen abhängig und Gleichung 4.4 daher im allgemeinen nur iterativ lösbar. Ein günstiges Verfahren zur numerischen Auswertung der Gleichung kann durch eine *Zeitdiskretisierung* und Approximation von  $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{c}(t), \mathbf{p}(t))$  durch eine Funktion  $\boldsymbol{\varphi}^*(\tau)$  innerhalb eines Zeitschritts abgeleitet werden. Mit  $\boldsymbol{\varphi}^*(\tau)$  ist die analytische Lösung des Faltungsintegrals möglich und damit die Aufstellung eines Übertragungsverfahrens für die modalen Zustandsgrößen zwischen zwei Zeitpunkten. Im einfachsten Fall könnte für  $\boldsymbol{\varphi}^*(t)$  im Intervall  $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$  eine Konstante gewählt werden, die nur von  $\boldsymbol{\varphi}(t_k, \mathbf{c}(t_k), \mathbf{p}(t_k))$  abhängt. Diese Annahme würde zwar die Berechnung von  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  ohne Iteration ermöglichen, aber wegen der recht groben Näherung eine erhebliche Beschränkung der zulässigen Zeitschrittweite erfordern. Eine Verbesserung, die bereits eine Iteration notwendig macht, besteht in der Mittelung über ein Zeitintervall:

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\tau) = \frac{1}{2} [ \boldsymbol{\varphi}(t_k, \mathbf{c}(t_k), \mathbf{p}(t_k)) + \boldsymbol{\varphi}(t_{k+1}, \mathbf{c}(t_{k+1}), \mathbf{p}(t_{k+1})) ] \quad (4.5)$$

Die Abhängigkeit des nichtlinearen Anteils  $\mathbf{g}^*$  auch von aktuellen Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$ , und die damit notwendige Gleichgewichtsiteration in jedem Zeitschritt, trägt allerdings zu einer wesentlich besseren Stabilität der Zeitverlaufsberechnung bei.

Ein linearer Ansatz für  $\boldsymbol{\varphi}^*(\tau)$  approximiert den Verlauf der Ersatzkräfte in einem Zeitschritt schon sehr gut und gestattet die Aufstellung einer Ein-schritt-Übertragungsbeziehung.

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\tau) = \boldsymbol{\varphi}_k^* + \tau \dot{\boldsymbol{\varphi}}_k^* \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^* = \boldsymbol{\varphi}(t_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{p}_k); \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{c}(t_k); \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{p}(t_k)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_k^* = \frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\varphi}_{k+1} - \boldsymbol{\varphi}_k)$$

$$\mathbf{q}_{zk+1} = \mathbf{H}_z \mathbf{q}_{zk} + \mathbf{G}_z \boldsymbol{\varphi}_{zk}^* \quad (4.7)$$

$$\mathbf{q}_{zk}^T = (q_1, \dot{q}_1, \dots, q_m, \dot{q}_m)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{zk}^{*T} = (\varphi_1^*, \dot{\varphi}_1^*, \dots, \varphi_m^*, \dot{\varphi}_m^*)$$

Die Belegung der modalen Systemmatrix  $\mathbf{H}_z$  und der modalen Eingangsmatrix  $\mathbf{G}_z$  ist im Anhang B1 beschrieben.

Zur Berechnung von  $\mathbf{g}^*$  muß ein angemessenes mathematisches Modell gefunden werden, dessen Parameter vorgeschätzt, und durch die Beobachtung von Ausgangsgrößen des realen Systems mit Hilfe des Identifikationsverfahrens verbessert werden. Dazu kann beispielsweise ein Gütekriterium verwendet werden, das die Prädiktionsfehler  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^p$  bewertet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^p = \mathbf{y}_k^M - \mathbf{y}_k^p$$

$$I_Q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_k^p{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_k^p \quad ; \quad I_Q - \text{Kostenfunktion}$$

n - Anzahl der Zeitschritte  
 $\boldsymbol{\varepsilon}_k^p$  - Prädiktionsfehler im Zeitschritt k

Als Meßgrößen werden im folgenden die kinematischen Größen  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  und  $\ddot{\mathbf{y}}$  zugelassen. Eine Erweiterung, beispielsweise um Dehnungsgrößen, ist bei verschiedenen Problemen möglicherweise sinnvoll, wurde hier aber nicht weiter verfolgt.

Die Prädiktion von Beschleunigungen aus den vorliegenden Zustandsgrößen Verschiebung und Geschwindigkeit könnte über Differenzenformeln in der Zeit erfolgen, diese Vorgehensweise liefert aber immer Näherungen. Eine Alternative besteht in der numerischen Integration gemessener Beschleunigungen, was aber oft problematisch ist. Wenn die Steuergrößen bekannt sind, also bei gemessenen Erregungen oder bei freien Schwingungen, können die modalen Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen exakt berechnet werden. Dadurch wird eine zu große Beschränkung der Zeitschrittweite, wie sie bei der Differenzendarstellung erforderlich wäre, vermieden:

$$\ddot{q} = \varphi^* - \omega^2 q \quad (4.9)$$

Diese Beziehung wird zur Erweiterung des modalen Zustandsvektors um die Beschleunigungen verwendet. Für den geschätzten Ausgangsvektor, der alle Beobachtungsgrößen des Systems enthält, gilt dann zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$ :

$$y_{k+1}^p = C_s \Phi_s \underbrace{[ \varphi_{sk+1}^* + T W (H_z q_{zk} + G_z \varphi_{zk}^*) ]}_{q_{sk+1}} \quad (4.10)$$

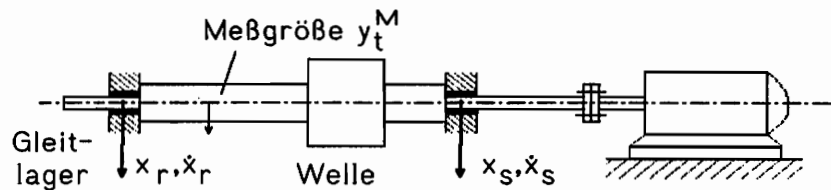
Anmerkung: Der Index z bezeichnet Vektoren und Matrizen, die sich auf Verschiebungen und Geschwindigkeiten beziehen, während s Größen bezeichnet, die zusätzlich Beschleunigungen enthalten. Die Struktur der nachfolgend bezeichneten Matrizen gilt für eine Partitionierung der Zustandsvektoren nach Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. In der bisher verwendeten Anordnung, nach der die Übertragungsmatrizen Blockstruktur besitzen, würden diese Matrizen keine übersichtliche Struktur aufweisen. Weil die Anordnung der Elemente im Vektor der Zustandsgrößen beliebig ist, wurde jeweils die für eine klare Darstellung günstigste Variante gewählt. Der Übergang zwischen den Anordnungen wird formal durch die Matrix **W** gekennzeichnet.

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad T' = T W; \quad q_{sk} = \begin{bmatrix} q_k \\ \dot{q}_k \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{sk}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_k^* \end{bmatrix} = E W \varphi_{zk}^*; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}; \quad E' = E W$$



Die wichtigsten Schritte bei der Identifikation mit dem Rückführungsmodell werden noch einmal zusammengefaßt und an einem einfachen Beispiel verdeutlicht. Zunächst wird von der Struktur, deren nichtlineare oder unbekannte lineare Komponenten identifiziert werden sollen, ein lineares Finite-Element-Modell  $M_1$  entworfen und dessen Eigenwerte und Eigenformen berechnet. Alternativ dazu kann das aus der Eigenwertlösung resultierende modale Modell auch, mit den in Kapitel 2 beschriebenen Methoden, empirisch abgeleitet werden.



*Bild 4.1: Rotierende Welle mit Gleitlagern als Beispiel eines mechanischen Systems mit lokalen Nichtlinearitäten.*

Die zu identifizierenden Komponenten werden als Modell  $M_2$  in Zustandsgrößen formuliert. Wenn beispielsweise mit der Messung von Wellenschwingungen eine Untersuchung der nichtlinearen Trageigenschaften von Gleitlagern beabsichtigt ist (Bild 4.1), würde ein geschätzter linear elastischer Anteil der Lagermodelle gemeinsam mit der Welle im Modell  $M_1$  nachgebildet. Für die nichtlinearen Feder- und Dämpferwirkungen der Lager, sowie für einen linear-elastischen Korrekturanteil, muß ein, möglichst aus physikalischer Kenntnis der im Gleitlager wirksamen Mechanismen abgeleiteter Ansatz  $M_2$  gewählt werden. In diesen Ansatz können eventuell nichtmechanische Meßgrößen wie Öltemperatur oder Öldruck eingehen. Wenn nur geringe Informationen über den Charakter der Nichtlinearitäten vorliegen, sollten allgemeine Potenzreihenansätze in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten gewählt werden. Diese, der Messung nicht zugänglichen Zustandsgrößen  $x_r$ ,  $\dot{x}_r$ ,  $x_s$  und  $\dot{x}_s$  liefert das Modell  $M_1$ .

Die Parameter des Modellansatzes  $M_2$  werden aus der Beobachtung von Ausgangsgrößen des Modells  $M_1$  geschätzt. Voraussetzung für die Formulierung von Schätzgleichungen ist die Kenntnis einer Empfindlichkeitsbeziehung zwischen den Beobachtungsgrößen  $y_t^M$  und den Parametern  $\mathbf{a}$ . Weil algorithmische Strukturen, in die das Rückführungsmodell implementiert wird, von der konkreten Form des Modells  $M_2$  unabhängig bleiben müssen, werden die Empfindlichkeitsfunktionen zunächst nur für die Steuergrößen formuliert. Das heißt, daß während der Zeitintegration in jedem Zeitschritt

eine Matrix berechnet wird, die die Empfindlichkeit der Ausgangsgrößen von  $M_1$  bezüglich aller Steuergrößen beschreibt.  $M_2$  liefert in jedem Zeitschritt neben dem Steuervektor auch die Matrix ihrer partiellen Ableitungen nach den Parametern. Das Produkt beider Matrizen ergibt die gesuchten Empfindlichkeitsfunktionen.

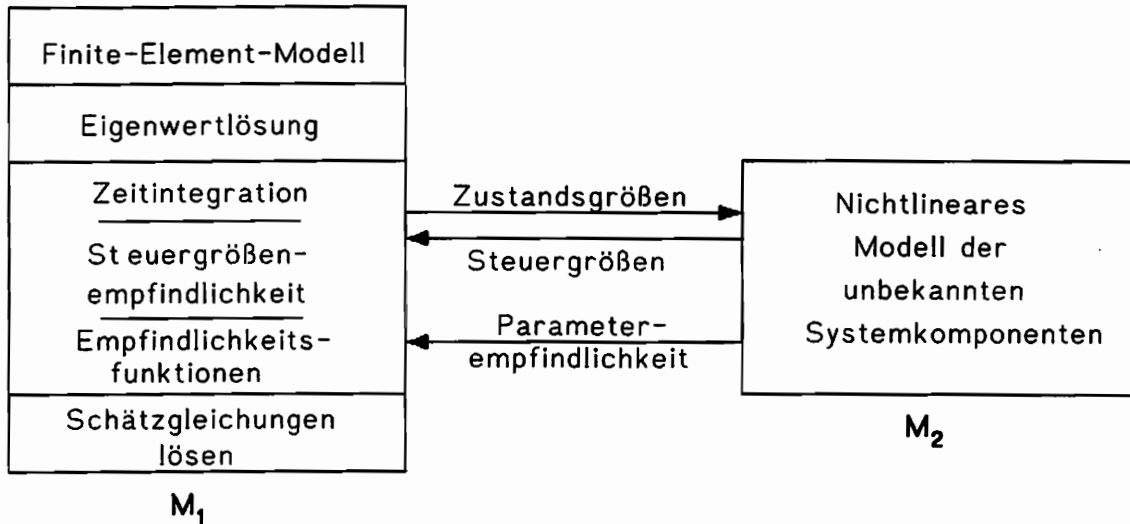


Bild 4.2: Aufteilung der Funktionen des Rückführmodells. Die algorithmische Struktur des linken Teils ist modellunabhängig.

Die Abweichungen zwischen beobachteten und prognostizierten Systemausgangsgrößen setzen sich aus verschiedenen Anteilen zusammen, die nicht nur aus den Parameterunsicherheiten des zu schätzenden Ergänzungsmodells herrühren. Dabei handelt es sich um unbekannte Steuergrößen und Anfangswerte oder um Meßrauschen. Diese Anteile müssen entweder solche statistischen Eigenschaften besitzen, daß die Parameterschätzungen durch sie nicht verzerrt werden oder sie müssen ebenfalls geschätzt werden. Zunächst soll nur der Fall freier Schwingungen und gemessener Anfangswerte betrachtet werden, so daß eine Optimierung des Gütefunktionalis bezüglich der Parameter genügt (vgl. Gl. 2.3.18 bis 2.3.23):

$$\frac{\partial I_Q}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^n \left( -\frac{\partial \mathbf{y}_k^p}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \underbrace{(\mathbf{y}_k^M - \mathbf{y}_k^p)}_{\boldsymbol{\epsilon}_k} = 0 \quad (4.11)$$

$\mathbf{y}_k^M$  - gemessene Ausgangsgrößen  
 $\mathbf{y}_k^p$  - mit Hilfe des Modells  
 vorhergesagte Ausgangsgrößen

Zur Berechnung der Empfindlichkeitsfunktionen der Ausgangsgrößen werden zunächst die Empfindlichkeiten der modalen Zustandsgrößen bestimmt:

$$\frac{\partial q_{zk+1}}{\partial a} = H_z \frac{\partial q_{zk}}{\partial a} + G_z \frac{\partial \varphi_{zk}^*}{\partial a} \quad (4.12)$$

$$D_{zk+1}^a = H_z D_{zk}^a + G_z F_{zk}^a$$

$$D_{zk}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_{1k}}{\partial a_1} & \frac{\partial q_{1k}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial q_{1k}}{\partial a_x} \\ \frac{\partial \dot{q}_{1k}}{\partial a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \dot{q}_{mk}}{\partial a_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \dot{q}_{mk}}{\partial a_x} \end{bmatrix}; \quad F_{zk}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{1k}^*}{\partial a_1} & \frac{\partial \varphi_{1k}^*}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{1k}^*}{\partial a_x} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{1k}^*}{\partial a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{mk}^*}{\partial a_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \dot{\varphi}_{mk}^*}{\partial a_x} \end{bmatrix}$$

m - Anzahl der Moden

x - Anzahl der Modellparameter

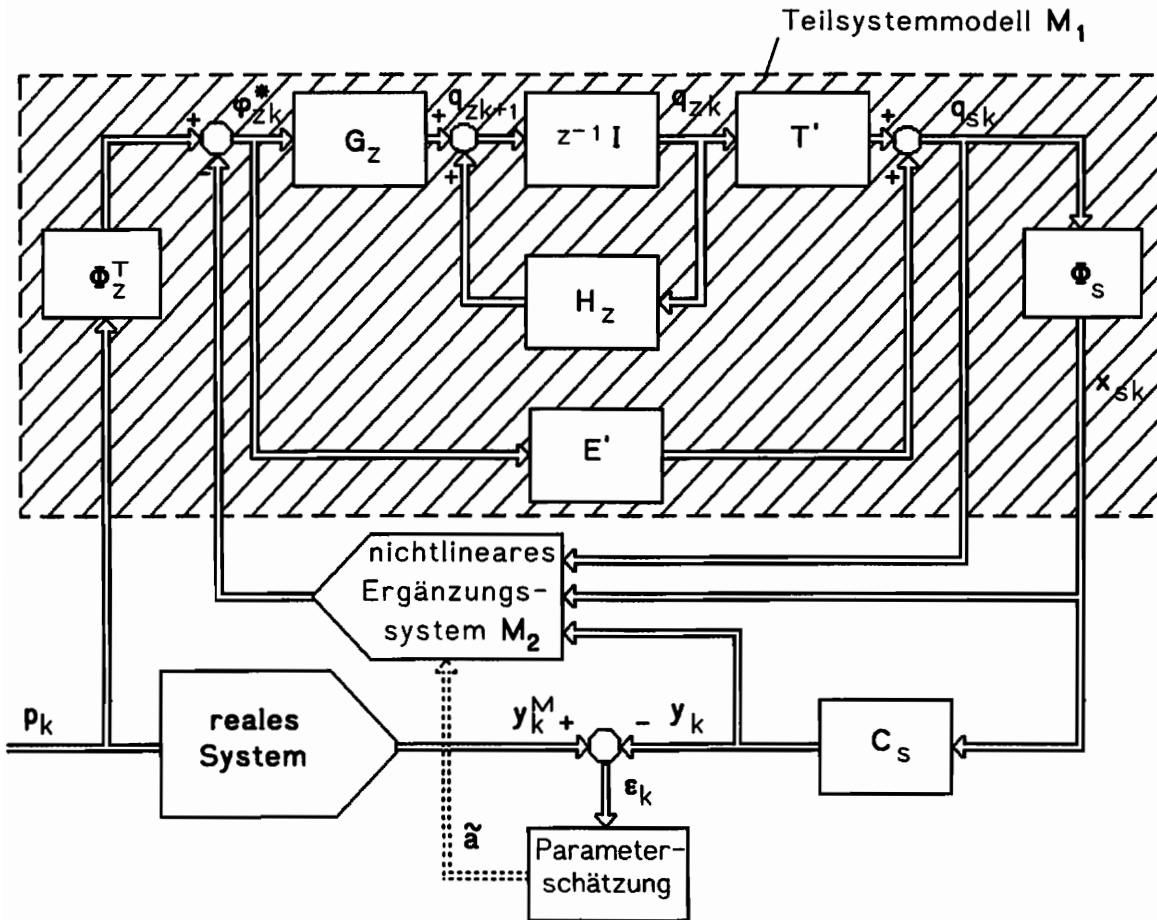
Die Ableitung der zeitlichen Änderung  $\dot{\varphi}_j^*$  der Ergänzungskräfte nach den Modellparametern  $a_i$  kann wegen der linearen Approximation innerhalb eines Zeitschritts aus den Empfindlichkeitsbeziehungen der Ergänzungskräfte selbst abgeleitet werden:

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_{jk}^*}{\partial a_i} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \varphi_{jk+1}^*}{\partial a_i} - \frac{\partial \varphi_{jk}^*}{\partial a_i} \right) \quad (4.13)$$

Für die numerische Berechnung der Schätzgleichungen ergibt sich daraus die Notwendigkeit, die in einem Zeitschritt berechneten Empfindlichkeiten nur für den Folgeschritt einmal zu speichern. Die weiteren Empfindlichkeitswerte folgen aus der aktuellen Ableitung der Ergänzungskräfte nach den Parametern und rekursiv aus den Empfindlichkeitswerten des vergangenen Zeitschritts. Die partiellen Ableitungen werden an der Stelle der jeweils vorliegenden Parameterschätzwerte berechnet. Zur Berechnung der Empfindlichkeit der Ausgangsgrößen kann die Gl. 4.10 zugrunde gelegt werden:

$$D_{k+1}^a = \frac{\partial y_k^p}{\partial a} = C_s \Phi_s \left[ F_{sk+1}^a + T' \underbrace{(H_z D_{zk}^a + G_z F_{zk}^a)}_{D_{zk+1}^a} \right] \quad (4.14)$$

Die Matrix  $F_{sk}^a$  folgt aus der Beziehung 4.9 und enthält die Ableitung der Ergänzungskräfte nach den Parametern. Sie wird nur berücksichtigt, wenn zum Ausgangsvektor Beschleunigungen zählen.



- |               |                                    |  |          |                         |
|---------------|------------------------------------|--|----------|-------------------------|
| $H_z, G_z$    | - Übertragungsmatrizen             |  | $q_{zk}$ | - modale Verschiebungen |
| $E', T'$      | - Transformationsmatrizen zur      |  |          | und Geschwindigkeiten   |
|               | Berechnung der Beschleunigungen    |  | $x_{sk}$ | - physikalische         |
| $\Phi$        | - Modalmatrix                      |  |          | Zustandsgrößen          |
| $C_s$         | - Beobachtungsmatrix               |  | $y_k^M$  | - Meßwerte              |
| $\varphi_k^*$ | - Steuervektor zum Zeitpunkt $t_k$ |  | $y_k$    | - Modellausgangsgrößen  |

Bild 4.3: Struktur des Rückführmodells.

## 4.2. Modellvarianten

### 4.2.1 Allgemeines

Die Messung von Anfangsgrößen kann in der Regel nur mit großem Aufwand realisiert werden. Die Bedeutung falscher Anfangswerte ist zwar bei der Auswertung von Langzeitmessungen unter stationärer Erregung gering, für Schätzungen aus transienten Schwingungen ist sie aber entscheidend. Zur

Berücksichtigung unsicherer Anfangsbedingungen bei der Parameterschätzung bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Die modalen Anfangswerte werden in die Schätzung einbezogen. Diese Methode ist einfach zu realisieren, vergrößert aber die Schätzmatrix unter Umständen erheblich und damit die numerischen Schwierigkeiten bei der Lösung der Schätzgleichungen. Unsichere Steuergrößen bleiben unberücksichtigt.
2. Die Parameterschätzung wird mit einer Zustandsschätzung durch Beobachter oder Kalman-Filter verbunden.

#### 4.2.2. Parameter- und Anfangswertschätzung

Wenn die Versuchsbedingungen so gestaltet werden können, daß keine äußeren unbekanntesten Steuergrößen auftreten, liefert auch die erste Methode häufig gute Ergebnisse. Sie wird bevorzugte Anwendung bei Problemen mit einer die Zahl der Anfangsbedingungen übersteigenden Anzahl von Modellparametern finden. Angesichts der Vielzahl der physikalischen Freiheitsgrade eines realistischen Strukturmodells kann nur die Schätzung der wesentlich geringeren Zahl modaler Anfangswerte in Frage kommen. Der Parametervektor  $\mathbf{a}$  wird dazu um die modalen Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  und  $\dot{\mathbf{q}}_0$  ergänzt. Die Sensitivitätsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_{zk+1}}{\partial \mathbf{q}_{z0}} &= \mathbf{H}_z \frac{\partial \mathbf{q}_{zk}}{\partial \mathbf{q}_{z0}} + \mathbf{G}_z \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{zk}^*}{\partial \mathbf{q}_{zk}} \frac{\partial \mathbf{q}_{zk}}{\partial \mathbf{q}_{z0}} \\ \mathbf{D}_{zk+1}^{\mathbf{q}_0} &= (\mathbf{H}_z + \mathbf{G}_z \mathbf{F}_{zk}^{\mathbf{q}_0}) \mathbf{D}_{zk}^{\mathbf{q}_0} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Anfangswertempfindlichkeiten werden also in ähnlicher Weise wie die Parameterempfindlichkeiten bestimmt. Wichtig ist, daß die Berechnung wieder rekursiv erfolgen kann und daher nur die partiellen Ableitungen der Ergänzungskräfte nach den aktuellen Zustandsgrößen innerhalb eines Zeitschritts berechnet werden müssen. Es folgt daraus wieder die Empfindlichkeit der Ausgangsgrößen bezüglich der modalen Anfangswerte:

$$\mathbf{D}_{k+1}^{\mathbf{q}_0} = \frac{\partial \mathbf{y}_k^p}{\partial \mathbf{q}_{z0}} = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\Phi}_s \left[ \mathbf{F}_{sk+1}^{\mathbf{q}_0} \mathbf{D}_{zk+1}^{\mathbf{q}_0} + \underbrace{\mathbf{T} (\mathbf{H}_z + \mathbf{G}_z \mathbf{F}_{zk+1}^{\mathbf{q}_0}) \mathbf{D}_{zk}^{\mathbf{q}_0}}_{\mathbf{D}_{zk+1}^{\mathbf{q}_0}} \right] \quad (4.16)$$

Die Schätzgleichungen können nach einer Taylorlinearisierung der Ausgangsgrößen abgeleitet werden (s.a. Kapitel 2.3):

$$\mathbf{y}_k^p(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}, \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}_0) \approx \mathbf{y}_k^p(\mathbf{a}, \mathbf{q}_0) + \mathbf{D}_k^{\mathbf{a}} \Delta \mathbf{a} + \mathbf{D}_k^{\mathbf{q}_0} \Delta \mathbf{q}_0 \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta q_0 \end{bmatrix} = \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} D_k^{aT} D_k^a & D_k^{aT} D_k^{q_0} \\ D_k^{q_0T} D_k^a & D_k^{q_0T} D_k^{q_0} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n D_k^{aT} \varepsilon_k(a, q_0) \\ \sum_{k=1}^n D_k^{q_0T} \varepsilon_k(a, q_0) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Die Sensitivitätsmatrizen  $D_k$  werden nach der Gleichgewichtsiteration in jedem Zeitschritt berechnet (s.a. Bild 4.4).

### 4.2.3 Parameterschätzung in Verbindung mit Kalman-Zustandsschätzungen

Die zweite Methode vermeidet die Erweiterung des Parametervektors und verbindet statt dessen die Schätzung der Parameter des nichtlinearen Ergänzungssystems mit einer *Zustandsschätzung des linearen Teilsystems im Vorwärtszweig*. Diese Methode besitzt vor allem den Vorteil, daß die Abhängigkeit der geschätzten Ausgangsgrößen von den Anfangswerten nach Ablauf der Einschwingzeit des Zustandsschätzers verschwindet und sie zudem auch einen Ansatz zur Identifikation nichtlinearer Systeme unter stochastischer Erregung darstellt. Ein weiterer Nachteil der ersten Methode wird ebenfalls vermieden, der darin besteht, daß sich die Zustandstrajektorien des Modells bei fehlerhaften Modellparametern mit fortschreitender Zeit immer weiter von den tatsächlichen Trajektorien des Systems entfernen. Da die Zustandsgrößen von  $M_1$  wesentlich die Ausgangsgrößen des nichtlinearen Systems  $M_2$  bestimmen, können extrem fehlerhafte Zustandstrajektorien zu qualitativ verschiedenen Steuerungen führen, aus denen nicht mehr auf die erforderliche Parameterkorrektur geschlossen werden kann.

In der nachfolgenden Beschreibung wird zur Zustandsschätzung ein modales Kalman-Filter verwendet, ebenso wäre auch ein Zustandsbeobachter denkbar. Bei einer Zustandsschätzung werden, wie in Kapitel 2.4 beschrieben, Meßwerte benutzt, um die Zustandsgrößen einer Modellprädiktion zu korrigieren. Die Residuen von gemessenen und berechneten Ausgangsgrößen können über den gesamten Zeitverlauf durch ein entsprechendes Filterdesign (Kalman-Filter) nahezu beliebig klein gehalten werden. Wenn der Filterformulierung das exakte Systemmodell zugrunde liegt, gilt dies auch für die Zustandsgrößen, andernfalls nur approximativ. Natürlich müssen die Eingriffe des Filters in der Ableitung der Empfindlichkeitsfunktionen berücksichtigt werden, weil das Modell durch die Zustandsschätzung wesentlich modifiziert wird. Die Zustandsschätzung beinhaltet eine *Rückführung der*

Meßwerte innerhalb des Teilsystems  $M_1$ , d.h. nur  $M_1$  wird durch das Filter modifiziert. Die "äußere" Rückführung der Zustandsgrößen über  $M_2$  bleibt davon unberührt.

Im folgenden werden zur Zustandsschätzung die klassischen Kalman-Filter-Gleichungen verwendet, obwohl deren Ableitung auf der Voraussetzung linearen Systemverhaltens gegründet ist und die Systemmatrizen ebenfalls bekannt sein sollten. Für das Teilsystem  $M_1$ , auf das die Zustandsschätzung angewendet wird, trifft diese Annahme in vollem Umfang zu. Die Steuerungen durch das Teilmodell  $M_2$  werden als bekannte deterministische Steuergrößen betrachtet, die allerdings mit den Zustandsgrößen "rückwärtskorreliert" sind.

Die optimale Zustandsschätzung, wie sie in den Kalman-Filter-Gleichungen realisiert ist, läuft in zwei Stufen ab:

1. Prädiktion der Zustands-/Ausgangsgrößen auf der Basis vergangener Zustandswerte und bekannter deterministischer Eingangsgrößen.
2. Verbesserung der Prädiktion durch eine Bewertung der Ausgangsresiduen über Verstärkungs- oder Kalman-Matrix  $K_{k+1}$ .

Im vorliegenden Fall der modalen Systembeschreibung bedeutet das:

$$\text{modale Prädiktion: } \mathbf{q}_{zk+1}^p = \mathbf{H}_z \hat{\mathbf{q}}_{zk} + \mathbf{G}_z \boldsymbol{\varphi}_{zk}^* (\hat{\mathbf{q}}_{zk}, \hat{\mathbf{q}}_{zk+1}) \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\text{Zustandsverbesserung: } \hat{\mathbf{q}}_{zk+1} = \mathbf{q}_{zk+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1}^M - \mathbf{C}_s \boldsymbol{\Phi}_s \mathbf{q}_{sk+1}^p) \quad (4.19 \text{ b})$$

$$\text{mit } \mathbf{q}_{sk+1}^p = \boldsymbol{\varphi}_{zk+1}^* (\hat{\mathbf{q}}_{zk}, \hat{\mathbf{q}}_{zk+1}) + \mathbf{T} \mathbf{q}_{zk+1}^p \quad (4.19 \text{ c})$$

Die beiden Schritte können durch Einsetzen von Gl. 4.19 a und c in 4.19 b zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{zk+1} = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_s \boldsymbol{\Phi}_s \mathbf{T}') \mathbf{H} \hat{\mathbf{q}}_{zk} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_s \boldsymbol{\Phi}_s \mathbf{T}') \mathbf{G} \boldsymbol{\varphi}_{zk}^* (\hat{\mathbf{q}}_{zk}, \hat{\mathbf{q}}_{zk+1}) \\ & + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_k^M - \mathbf{C}_s \boldsymbol{\Phi}_s \boldsymbol{\varphi}_{sk}^*) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mit den Abkürzungen

$$\Gamma_{k+1} = (I - K_{k+1} C_S \Phi_S T') \quad (4.21 a)$$

$$\bar{H}_{zk+1} = \Gamma_{k+1} H_z ; \quad \bar{G}_{zk+1} = \Gamma_{k+1} G_z \quad (4.21 b,c)$$

$$\bar{q}_{zk+1} = K_{k+1} (y_{k+1}^M - C_S \Phi_S \varphi_{sk+1}^*) \quad (4.21 d)$$

folgen daraus die verbesserten Ausgangsgleichungen, jetzt mit *zeitvarianten Übertragungsmatrizen*:

$$\hat{y}_{k+1} = C_S \Phi_S [ \varphi_{sk+1}^* + T' (\bar{H}_{zk+1} q_{zk} + \bar{G}_{zk+1} \varphi_{zk}^* + \bar{q}_{zk+1}) ] \quad (4.22)$$

Die Anteile  $\varphi_{sk+1}^*$  und  $\bar{q}_{zk+1}$  müssen nur im Fall gemessener Beschleunigungen berücksichtigt werden. Die Kalman-Gainmatrix  $K_{k+1}$  wird entsprechend der in Gl. 2.4.3 angegebenen Beziehung berechnet:

$$K_{k+1} = P_{k+1}^* (C_S \Phi_S)^T [ C_S \Phi_S P_{k+1}^* (C_S \Phi_S)^T + R ]^{-1} \quad (4.23)$$

$R$  - Kovarianzmatrix des Meßrauschens

Die Kovarianzmatrix  $P_{k+1}$  der Zustandsschätzfehler ist hier:

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} C_S \Phi_S) P_{k+1}^* \quad (4.25)$$

und die Kovarianzmatrix  $P_{k+1}^*$  der Prädiktionsfehler:

$$P_{k+1}^* = \bar{H}_{zk+1} P_{k+1} \bar{H}_{zk+1} + Q \quad (4.26)$$

$Q$  - Kovarianzmatrix des Eingangsruschens

Die Parameterschätzung läuft analog zu dem in den Gleichungen 4.12 bis 4.14 angegebenen Schema ab, jetzt allerdings unter Verwendung der Matrizen nach Gl. 4.21 b,c. Dem Bild 4.4 ist zu entnehmen, daß die Kalman-Matrizen und die zeitvarianten Übertragungsmatrizen nur einmal zu Beginn eines Zeitschritts berechnet werden. Bei ausreichendem Speicherplatz ist es auch möglich, diese Matrizen für den gesamten Zeitverlauf vorzuberechnen, was insbesondere von Vorteil ist, wenn aufgrund der Parameteriteration mehrfache Zeitintegrationen nötig sind. Wegen der Aufteilung des Systems in  $M_1$  und  $M_2$  sind die Matrizen von den, während der Iteration veränderten, Parametern unabhängig.



Der Berechnungsschritt zur Rücktransformation der modalen in physikalische Koordinaten kann sehr zeitaufwendig sein, vor allem weil er innerhalb der Zeitschrittiteration aufgeführt wird. Es ist sinnvoll, diese Transformation auf die tatsächlich benötigten -zur Steuerung von  $M_2$  oder zum Vergleich mit Meßwerten- Systemfreiheitsgrade zu beschränken.

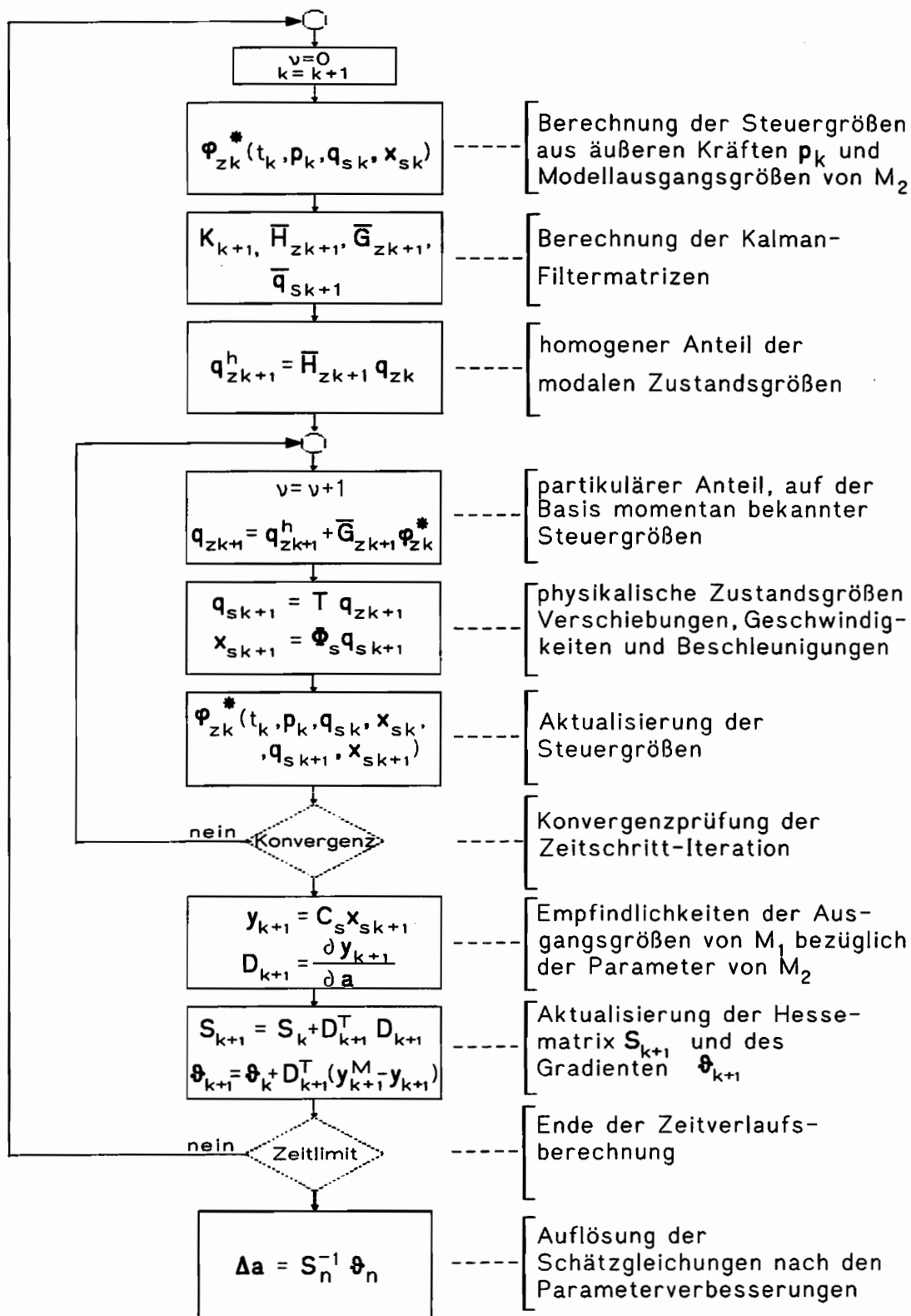


Bild 4.4: Ablaufdiagramm der wesentlichen Berechnungsschritte einer Parameterschätzung mit dem Rückführungsmodell in Verbindung mit einer Kalman-Filterung.

## 5. Dämpfung mechanischer Strukturen

### 5.1 Allgemeines

Die Entwicklung des Rückführungsmodells folgte primär aus dem Forschungsziel, einen Ansatz zur Identifikation von nichtlinearen Dämpfungsmechanismen in großen mechanischen Strukturen zu entwickeln. Einen Schwerpunkt sollten Reibungsmechanismen bilden, die durch verteilte Reibmodelle, wie das *Masing-Modell*, beschrieben werden können. Für diese Modelle mußte eine Beschreibungsform gefunden werden, die eine Implementierung innerhalb des Rückführungskonzeptes als Teilmodell  $M_2$  gestattet (s. Kapitel 4), was vor allem die Möglichkeit zur Berechnung der Empfindlichkeitsfunktionen für alle Parameter beinhaltet. Das iterative Schätzverfahren zur Bestimmung der Parameter, das im Rahmen der Rückführungsidentifikation verwendet wird, benötigt Startwerte, die durch ein Verfahren zur Bestimmung amplitudenabhängiger äquivalenter linearer Parameter nach Kapitel 3.1 bestimmt werden können. Voraussetzung dafür ist außerdem eine analytische Korrespondenz zwischen äquivalenten Frequenzen oder Dämpfungen und den Masing-Modellparametern, abhängig von einem Amplitudenmaß. Diese Beziehungen werden, wie auch die erforderliche Formulierung der Dämpfungskraft und der Parameterempfindlichkeit des Masing-Modells, in diesem Kapitel abgeleitet. Zuvor werden in knapper Form die bekanntesten Dämpfungsmodelle diskutiert, um den Stellenwert und die speziellen Eigenschaften des Masing-Modells im Kontext mit häufiger angewendeten Modellen zu verdeutlichen.

Die Standsicherheit und Gebrauchsfähigkeit von Tragwerken oder die Betriebssicherheit von Maschinen sind vielfach davon abhängig, daß eine Akkumulation von Energie, die Wind, Bodenbewegungen oder Antriebe in die Systeme einleiten, begrenzt werden kann, indem Energie dissipiert oder in angekoppelte Systeme abgestrahlt wird. Alle Prozesse, die bei einem Schwingungsvorgang, also einem periodischen Energieaustausch zwischen verschiedenen Energiespeichern, eine irreversible Umwandlung von kinetischer Energie oder Formänderungsenergie in andere Energieformen bewirken oder zu einem Energiestrom über die Grenzen des Systems führen, werden unter dem Begriff der Schwingungsdämpfung zusammengefaßt.

Eine Diskussion der Dämpfung erfordert zunächst eine Unterscheidung der verschiedenen Problemstellungen, die eine Untersuchung von Dämpfungsphänomenen motivieren. Im ingenieurwissenschaftlichen und -praktischen Bereich sind das vor allem

1. *Parametrische* und *nichtparametrische* Identifikation der Dämpfung oder Dämpfungsmessung.
2. *Modellierung*.
3. *Prognose* des Dämpfungsverhaltens von neu entworfenen Konstruktionen.

Sowohl die parametrische Identifikation als auch die Prognose setzen Modellvorstellungen von den in einer Struktur oder einem Material wirksamen Dämpfungsmechanismen voraus. Während in der Systemidentifikation das Modell verwendet wird, um aus der Beobachtung des Verhaltens des Systems, d.h. der Messung von Ausgangsgrößen, die wahrscheinlichsten Dämpfungsparameter zu schätzen, dient es in der Prognose zur Schätzung der Ausgangsgrößen oder ihrer Extremwerte auf der Basis geschätzter Parameter. Dämpfungsbeobachtung und -vorhersage stellen sehr unterschiedliche Anforderungen an ein Modell, so daß nicht notwendigerweise, wie häufig gefordert, ein optimales Modell existiert, das beiden Problemstellungen gerecht wird. Folglich reicht die Bandbreite der Dämpfungsmodelle von komplexen Werkstoffmodellen über phänomenologische Hysteresemodelle [Sorokin 1955] bis zu rein empirischen Dämpfungsformeln [Jeary 1986].

Unter Dämpfung ist zunächst -ohne eine Modellvorstellung von den ursächlichen Mechanismen- nur eine Verlustleistung zu verstehen, die im Kontext des jeweiligen realen Schwingungsvorgangs betrachtet werden muß. Jede objektive, d.h. nicht modellgebundene, Dämpfungsidentifikation müßte das Ziel haben, diese Verlustleistung zu messen, also Dämpfungskräfte und zugeordnete Verschiebungen, um im nächsten Schritt durch den Vergleich mit Systemzustandsgrößen Gesetzmäßigkeiten erkennen und adäquate Modelle formulieren zu können. Dämpfungskräfte sind aber im Vergleich mit den Trägheits- und Rückstellkräften von kleiner Größenordnung und können, mit wenigen Ausnahmen, nicht unmittelbar gemessen werden. Man ist statt dessen gezwungen, zur nichtparametrischen Dämpfungsmessung integrale Größen zu verwenden, bei periodischer Erregung die Verlustarbeit  $W_D$  der Dämpfungskräfte und bei freien Schwingungen die Amplitudenabnahme. Beide Größen werden in der Regel auf einen Schwingungszyklus bezogen, die

Verlustarbeit zudem auf die maximale Formänderungsenergie. Das Dämpfungsvermögen eines Materials oder einer Struktur wird somit durch die im allgemeinen amplitudenabhängigen, dimensionslosen Größen *Verlustfaktor* und *logarithmisches Dekrement* charakterisiert:

$$\text{Verlustfaktor: } \psi = \frac{W_d}{2\pi U} \quad (5.1.1)$$

$W_d$  - Verlustarbeit in einer  
Schwingungsperiode

$U$  - maximale Formänderungsenergie

$$\text{logarithmisches Dekrement: } \vartheta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \quad (5.1.2)$$

$x(t)$  - kinematische Größe

$T$  - Schwingungsperiode

Die Kraft-Weg-Beziehungen von Systemen mit Dissipation zeigen bei zyklischen Verformungen eine Hysterese, deren Flächeninhalt der Verlustarbeit  $W_d$  entspricht.

Der Verzicht auf die Beobachtung des Weges, auf dem ein Energieentzug bewirkt wird, reduziert natürlich erheblich die Möglichkeit zur Einsicht in die physikalischen Mechanismen der Dämpfung. Diese Mechanismen können nur mit Hilfe struktureller Modelle aufgedeckt werden, die aufgrund von Vorüberlegungen und Analysen der physikalischen Zusammenhänge aufgestellt und durch Systemidentifikation iterativ verbessert werden.

Für die Modellierung von Dämpfungsursachen und -phänomenen gelten prinzipiell die gleichen Grundsätze wie für die Systemidentifikation allgemein, vor allem muß im Zusammenhang mit den eingangs genannten unterschiedlichen Problemstellungen betont werden, daß ein Modell wesentlich durch seinen Zweck bestimmt wird. Generell kann man zwischen Modellen unterscheiden, die einen Dämpfungsmechanismus im physikalischen Sinn möglichst realistisch nachbilden und solchen, die global die Wirkungen unterschiedlicher Mechanismen möglichst einfach approximieren. Die physikalischen Modelle dienen vorrangig zur Erforschung von Dämpfungsursachen und unterstützen beispielsweise die Identifikation. Die Anpassung strukturell ungeeigneter Modelle erfordert häufig eine wesentlich höhere Modellordnung, und damit eine größere Anzahl von Parametern, als das physikalisch zutreffende Modell, etwa die Approximation einfacher Nichtlinearitäten durch Voltterrareihen.

Außerdem vermindern bereits im Experiment verwendete nichtphysikalische Modelle die Aussagekraft von Versuchsergebnissen, da die Versuchsbedingungen in diesem Fall ebenso die Parameterschätzung beeinflussen wie der Forschungsgegenstand (Werkstoff, Konstruktionselement) selbst. Wird beispielsweise eine Struktur im wesentlichen durch trockene Reibung gedämpft und durch ein Modell mit frequenzabhängigen Parametern beschrieben, die in Versuchen mit monofrequenter periodischer Erregung ermittelt wurden, dann können die Dämpfungsverhältnisse bei, häufig realistischer, polyfrequenter Erregung (Vibrationslinearisierung) völlig unzutreffend eingeschätzt werden [Ottl 1981, Bandstra 1983]. Etliche Dämpfungsuntersuchungen aus der Vergangenheit haben nur sehr begrenzten Nutzen, weil bei der Interpretation von Meßergebnissen zu einfache, bereits prognoseorientierte, Modelle unterstellt wurden. Für die Identifikation ist daher zu fordern, soweit als möglich physikalische Modelle zu verwenden, deren Parameter nicht durch äußere Bedingungen relativiert werden. Aus diesen Modellen können für Spezialfälle -harmonische Erregung oder freie Schwingungen- durchaus einfachere Formulierungen abgeleitet werden, die rechentechnischen Bedürfnissen besser entsprechen.

Das Hauptproblem der Dämpfungsprognose besteht in der Vielzahl von Dämpfungsmechanismen, die gewöhnlich in realen Strukturen wirksam sind. Die Schwingungen eines Fernmeldeturms werden beispielsweise durch das Dämpfungsvermögen der Werkstoffe Stahl und Beton und ihres Verbunds, des Bodens, der Ein- und Anbauten sowie der umgebenden Luft beeinflusst. Ebenso verwickelt können die Dämpfungsverhältnisse an einer Werkzeugmaschine sein, bei der Energie an den Kontaktflächen von Maschinenteilen und im Werkstoffgefüge dissipiert oder von Blechverkleidungen als Schall und über das Fundament in den Boden abgestrahlt wird. Die Einflüsse können nur schwer quantifiziert werden, weil sie zum Teil ungenügend erforscht sind oder weil die Dämpfungsparameter nur mit erheblicher Varianz angegeben werden können und zudem während der Lebensdauer eines Bauwerks oder einer Maschine nicht konstant sind. Die Dämpfung von Stahlbeton beispielsweise, die noch ausführlicher diskutiert wird, ist wesentlich durch die Risse in den Zugspannungszonen des Betons beeinflusst, deren Umfang und Ort nicht genau vorhersehbar sind. Als ein weiteres Beispiel können die Verschraubungen von Konstruktionsteilen angegeben werden [Ottl 1981, Gaul und Bohlen 1987], die durch die reibungsbehaftete Bewegung der Kontaktflächen gegeneinander dämpfungswirksam sind. Die Größe der Reibungskräfte ist von der Anpreßkraft der Verschraubung und der Beschaffenheit

der Oberflächen abhängig, also Einflüssen, die durch Korrosion, Temperatur und andere Einwirkungen Veränderungen unterworfen sind. Diesem Sachverhalt tragen stochastische Systemmodelle Rechnung. Aus den Bedingungen der Dämpfungsprognose kann man schließen, daß sie in vielen Fällen anstelle einer realistischen Beschreibung des Strukturverhaltens nur einen Grenzwert liefern kann.

## 5.2 Klassifizierung von Dämpfungsmechanismen

Eine reale Struktur besitzt eine Vielzahl unterschiedlicher Dämpfungsquellen. Ein Teil der gesamten Energiedissipation kommt durch Mechanismen zustande, die zwischen Strukturelementen (Bauteile, Anbauten, Lager) wirken oder durch Interaktion der Struktur mit der Umgebung (umgebende Luft, Boden, Abstrahlung von Energie). Diese Ursachen werden häufig als *Strukturdämpfung* bezeichnet, während die auf Materialebene wirksamen Mechanismen unter dem Begriff der *Materialdämpfung* zusammengefaßt sind. Die in der Regel nicht unmittelbar beobachtbaren physikalischen Mechanismen im mikroskopischen und submikroskopischen Bereich führen zu meßbaren makroskopischen Phänomenen, wie charakteristischen Hysteresen oder Abklingkurven, deren Ausprägung vom Schwingungstyp abhängt (Tabelle A1a und b). Ausführliche Darstellungen von Dämpfungsursachen finden sich bei Lazan [1968], Crandall [1970], Bert [1973], Nashif u.a.[1985] und Ottl [1985].

physikalische Ursachen	
Materialdämpfung	Strukturdämpfung
flüssige Reibung	Reibung mit umgebenden Medien (Luft, Wasser)
trockene Reibung	Bodendämpfung
Plastifizierung	Wellenausbreitung
Mikrorisse	Lagerreibung
kristalliner Schlupf	Reibung in Fügestellen
thermoelastische Effekte	diskrete Dämpfer
magnetoelastische Effekte	

Tabelle 5.1a: Klassifizierung der wichtigsten physikalischen Dämpfungsursachen.

Beobachtbare Dämpfungsphänomene	
Schwingung	Phänomen
zyklisch	statische Hysterese dynamische Hysterese Form der Frequenzgangortskurve Dispersion
transient	Form der Einhüllenden Dispersion
stochastisch	Übertragungseigenschaften statistische Momente der Systemantwort

Tabelle 5.1b: Klassifizierung beobachtbarer Dämpfungphänomene.

### **5.3 Modelle**

#### **5.3.1 Allgemeines**

Die Berücksichtigung von Dämpfungswirkungen auf Materialebene hat zur Folge, daß der Spannungszustand eines Körpers nicht mehr allein von den aktuellen Verzerrungen, sondern von seiner Verzerrungsgeschichte abhängt. Man unterscheidet Materialien mit nachlassendem Gedächtnis -der Einfluß von Verzerrungen klingt mit der Zeit ab- und solche mit perfektem Gedächtnis. Zur ersten Gruppe zählen die viskoelastischen Stoffe, deren Kennzeichen ein frequenzabhängiges Dämpfungsverhalten und eine dynamische Hysterese ist. Sie sind außerdem geeignet, Phänomene wie Kriechen und Relaxation zu beschreiben. Elastoplastische Stoffe besitzen ein perfektes Gedächtnis, das heißt, eingeprägte Verzerrungen bleiben zeitunabhängig erhalten und werden nur, unter bestimmten Voraussetzungen, von nachfolgenden Verformungen aufgehoben. Sie zeigen demzufolge auch bei sehr langsamen zyklischen Verformungen eine Hysterese. Stoffmodelle mit perfektem Gedächtnis eignen sich zur Beschreibung von Setzungen in Böden, trockener Reibung zwischen makroskopischen Strukturelementen oder von Verfestigungseffekten.

Die im folgenden angegebenen Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen können für die Betrachtung der Dämpfung auf Strukturebene auf Kraft-Verformungsbeziehungen übertragen werden.



### 5.3.2 Viskoelastische Modelle

Zur Beschreibung der Dissipationsvorgänge in Materialien werden überwiegend lineare viskoelastische Stoffgesetze verwendet, insbesondere das Kelvinmodell (Bild 5.1), das auch als Vergleichsmodell für andere Dämpfungsansätze dient. In manchen Anwendungsfällen genügt es, das Dämpfungsverhalten durch einen Parameter zu beschreiben, wie im Kelvinmodell durch den Viskositätskoeffizienten  $b$ , wenn das Niveau der Spannungs- und Dehnungsamplituden, sowie das Frequenzband genügend beschränkt bleiben. In diesem Sinne wird mit dem Kelvinmodell häufig Dämpfung in der einfachsten Form approximiert.

Die Beschreibung mechanischer Kontinua als Kelvinkörper führt, nach einer Ortsdiskretisierung, auf das in der Berechnung bequem zu handhabende Differentialgleichungssystem (Bezeichnungen s. Anhang B1):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (\text{B1.1})$$

Um solche Systeme mit den Methoden der Modalanalyse lösen zu können, muß die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  durch die Matrix  $\Phi$  der reellen Eigenvektoren diagonalisierbar sein. Von Caughey [1960] wurde als Voraussetzung angegeben, daß  $\mathbf{D}$  als Linearkombination von Potenzen der Massen- und Steifigkeitsmatrizen darstellbar sein muß:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \sum_{i=0}^m \alpha_i [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}]^i \quad (5.3.2.1)$$

Einen Spezialfall dieser Matrizenreihe stellt die Rayleighdämpfung dar, bei der nur die Koeffizienten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  von Null verschieden sind. Wenn die Bedingung nach Gl. 5.3.2.1 nicht erfüllt ist, beispielsweise weil die zu beschreibende Struktur diskrete Dämpferelemente besitzt, muß das quadratische Eigenwertproblem gelöst werden, das auf komplexe Eigenvektoren führt.

Zur Betrachtung eines größeren Frequenzbereichs muß das Kelvinmodell möglicherweise durch ein mehrparametrisches Modell ersetzt werden (Bild 5.1). Allgemein können lineare viskoelastische Stoffe durch die Beziehung

$$\sum_{i=0}^m q_i \frac{d^i \sigma}{d t^i} = \sum_{i=0}^n p_i \frac{d^i \varepsilon}{d t^i} \quad (5.3.2.2)$$

$\sigma$  - Spannung

$\varepsilon$  - Dehnung

$q_i, p_i$  - Stoffkonstante

beschrieben werden [Flügge 1967]. Nach einer Laplacetransformation folgt daraus, verschwindende Anfangsbedingungen vorausgesetzt, die Übertragungsbeziehung zwischen Spannungen und Dehnungen im Bildbereich:

$$Q(s) \sigma(s) = P(s) \epsilon(s) \quad (5.3.2.3)$$

$$\epsilon(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \sigma(s) = \frac{\sum_{i=0}^m q_i s^i}{\sum_{i=0}^n p_i s^i} \sigma(s) = G(s) \sigma(s) \quad (5.3.2.4)$$

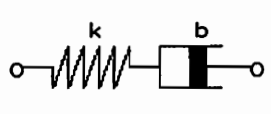
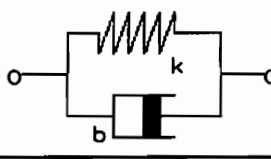
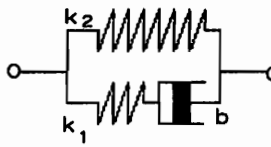
	Maxwell-Modell	$G_1(\omega) = \frac{1}{k}$	$G_2(\omega) = -\frac{1}{b\omega}$
	Kelvin-(Voigt-)Modell	$G_1(\omega) = \frac{k}{k^2 + b^2\omega^2}$	$G_2(\omega) = \frac{-s b}{k^2 + b^2\omega^2}$
	Poynting-Thomson-Modell	$G_1(\omega) = \frac{1 + \frac{k_2}{k_1}}{k_2 + \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)^2}$	$G_2(\omega) = \frac{b \frac{k_2}{k_1} - \omega b \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)}{k_2 + \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)^2}$

Bild 5.1: Einfache viskoelastische Ersatzmodelle und ihre Übertragungsfunktionen  $G(\omega) = G_1(\omega) + i G_2(\omega)$  im Frequenzbereich.

Wegen der Ähnlichkeit von Gl. 5.3.2.4 mit der Hookschen Spannungs-Dehnungsbeziehung ist für  $G^{-1}$  auch die Bezeichnung "komplexer Elastizitätsmodul" gebräuchlich.

Wenn ein viskoelastisches Material durch einen Spannungssprung

$$\text{Zeitbereich: } \sigma_e(t) = 1 \quad (t > 0); \quad \text{Bildbereich: } \sigma_e(s) = \frac{1}{s}$$

belastet wird, resultiert daraus die zeitveränderliche Verzerrung

$$\epsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} = r(t) \sigma(0) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dr}{d\tau} d\tau \quad (5.3.2.5)$$

Diese Beschreibung der Verzerrungsantwort, oder im umgekehrten Fall der Spannungsantwort auf einen Dehnungssprung, als Faltungsintegral der Lastgeschichte mit den Sprungantworten  $r(t)$ , wird als Gedächtnisintegraldarstellung bezeichnet.

Bei einer harmonischen Erregung

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{j\omega t}$$

antwortet das lineare viskoelastische System mit dem ebenfalls harmonischen Dehnungszeitverlauf  $\epsilon(t)$ . Aus der Übertragungsfunktion  $G(\omega)$  können Amplitudengang  $\epsilon_0(\omega)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  zwischen  $\epsilon(t)$  und  $\sigma(t)$  berechnet werden.

$$G(\omega) = G_1(\omega) + j G_2(\omega)$$

$$\epsilon_0(\omega) = \sqrt{G_1^2(\omega) + G_2^2(\omega)} \quad (5.3.2.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)}$$

Die Dämpfungsarbeit in einem Schwingungszyklus folgt aus der Integration der Leistung  $P(t)$  über eine Periode:

$$P(t) = \text{Re}\{\sigma(t)\} \text{Re}\{\dot{\epsilon}(t)\} = -\sigma_0^2 \omega [G_1(\omega) \cos\omega t \sin\omega t + G_2(\omega) \cos^2\omega t]$$

$$W_d = \int_0^T P(t) dt = -\pi \sigma_0^2 G_2(\omega) \quad (5.3.2.7)$$

Die Verlustarbeit ist also von der zweiten Potenz der Spannungsamplitude abhängig und dem Imaginärteil der viskoelastischen Übertragungsfunktion proportional. Im einfachsten Fall des Kelvinkörpers steigt der Verlustfaktor  $\psi$  danach linear mit der Frequenz an:

$$G_2(\omega) = \frac{\omega b}{k^2 + b^2 \omega^2}$$

$$\text{dissipierte Arbeit } W_d = \frac{\pi \sigma_0^2 b \omega}{k^2 + b^2 \omega^2}$$

$$\text{maximale Form-} \quad U = \frac{1}{2} k \epsilon_0^2 = \frac{1}{2} k \sigma_0^2 (G_1^2(\omega) + G_2^2(\omega))$$

$$\text{änderungsenergie}$$

$$\text{Verlustfaktor } \psi = \frac{W_d}{2\pi U} = \frac{b}{k} \omega \quad (5.3.2.8)$$

In der normierten modalen Schwingungsgleichung

$$\ddot{q}(t) + 2 \xi \omega_0 \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

ist  $b = 2 \xi \omega_0$  und  $k = \omega_0^2$   
 $\xi$  - modales Dämpfungsmaß  
( $\xi = 1$  kritische Dämpfung)

$$\psi = \frac{2 \xi \omega_0}{\omega_0^2} \omega = 2 \xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

Für stationäre Schwingungen mit  $\omega = \omega_0$  gilt

$$\psi = 2 \xi$$

Äquivalente modale Dämpfungsmaße anderer Dämpfungsmodelle werden daher auch nach der folgenden Beziehung bestimmt:

$$\xi = \frac{\psi}{2} = \frac{W_d}{4\pi U} \quad (5.3.2.9)$$

Die Frequenzcharakteristik der Dämpfung nach Gl. 5.3.2.8 war häufig Anlaß für Kritik am Kelvinmodell als Äquivalenzmodell, weil für Strukturen überwiegend frequenzunabhängige Verlustfaktoren festgestellt worden sind. Zu verbesserten Modellen gelangt man unter anderem durch komplexere viskoelastische Formulierungen, indem man an eine gemessene Dämpfungscharakteristik im Frequenzbereich die Parameter von  $G(\omega)$  anpaßt. Bestimmte modellabhängige Relationen zwischen  $q_i$  und  $p_i$  müssen allerdings beachtet werden, um kausale Modelle zu erhalten [Flügge 1967]. Es sind aber auch nichtkausale Ansätze gebräuchlich, besonders das sogenannte Strukturdämpfungsmodell, das auf einen frequenzunabhängigen Verlustfaktor führt, und daher das oft beobachtete Dämpfungsverhalten von Strukturen sehr einfach annähert. Die frequenzabhängige komplexe Steifigkeit des Kelvin-Modells

$$E_k = k + j b \omega$$

wird durch eine komplexe Konstante ersetzt:

$$E_s = (1 + j h) k \quad (5.3.2.10)$$

Das entspricht einem zur Frequenz umgekehrt proportionalen Viskositätsbeiwert  $b$  und hat somit eine frequenzunabhängige Dämpfungscharakteristik zur Folge (Gl. 5.3.2.8). Das zur Beschreibung stationärer Schwingungen von Strukturen nützliche Dämpfungsmodell kann transiente Schwingungen nicht physikalisch richtig nachbilden [Crandall 1970]. Unter anderem von Bronowicki [1980] und Gaul u.a. [1985] werden physikalisch konsistente Näherungen angegeben.

Die Hinzunahme weiterer Feder- und Dämpferelemente zu den Grundmodellen nach Bild 5.1 verbessert zwar die Anpassungsmöglichkeiten an gemessenes Dämpfungsverhalten, erschwert aber sehr die Handhabung der Modelle und ist daher zur Anwendung auf reale Strukturen nicht mehr geeignet. Einfachere Formulierungen erhält man bei der Verwendung einer größeren Anzahl einfacher Anordnungen, beispielsweise paralleler Maxwellelemente (Bild 5.2). Die dynamische Kraft in einem Maxwellelement ist

$$F_i(t) = k_i y_i(t) \quad ; \quad b_i \dot{y}_i(t) + k_i y_i(t) = b_i \dot{x}(t)$$

Nach einer Laplacetransformation folgt daraus

$$Y_i(s) = \frac{1}{s + \frac{k_i}{b_i}} X(s) \quad s$$

Im Zeitbereich entspricht diese Beziehung einer Faltung (Operator \*) der Schwinggeschwindigkeit mit einer Exponentialfunktion:

$$y_i(t) = \dot{x}(t) * e^{-\frac{k_i}{b_i} t} = \int_0^t \dot{x}(t-\tau) e^{-\frac{k_i}{b_i} \tau} d\tau$$

$$F_i(t) = k_i \int_0^t \dot{x}(t-\tau) e^{-\frac{k_i}{b_i} \tau} d\tau$$

Die Gesamtkraft des Elements setzt sich aus der Summe der Anteile aus N Maxwellsträngen und der parallelen Feder zusammen. Die Bewegungsgleichung eines einfachen Einmassenschwingers lautet in diesem Fall :

$$m \ddot{x}(t) + k_0 x(t) + \int_0^t \left( \sum_{i=1}^N k_i e^{-\frac{k_i}{b_i} \tau} \right) \dot{x}(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (5.3.2.11)$$

Eine Anpassung an gemessene Dämpfungseigenschaften kann durch die 2N Parameter  $k_i$  und  $b_i$  vorgenommen werden. Für eine Systemidentifikation sind solche Modelle allerdings aufgrund der möglicherweise großen Parameteranzahl ebenfalls nicht gut geeignet. Man kann die konzentrierten Modellparameter aber auch durch verteilte Parameteransätze ersetzen. Innerhalb von Intervallen  $(k_u, k_o)$  und  $(b_u, b_o)$  wird dann eine kontinuierliche, durch eine Funktion  $\Phi(k, b, a)$  beschriebene Parameterverteilung gewählt. Der Vektor  $a$  umfaßt die Parameter der Verteilungsfunktion. Ein solches Modell geht auch durch  $N \rightarrow \infty$  aus dem diskreten Modell hervor. Anstelle einer Vielzahl von konzentrierten Parametern muß nur noch die wesentlich geringere Zahl von Parametern der Verteilungsfunktion identifiziert werden.

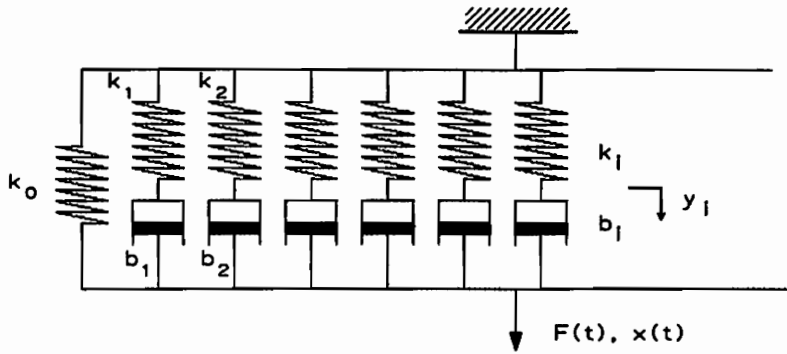


Bild 5.2: Biotmodell

Von Neubert [1963] wurde ein Biotmodell zur Beschreibung von Materialdämpfungen verwendet. Die Steifigkeit  $k_i$  ist bei diesem Modell in allen Strängen konstant, während die Viskosität, beschrieben durch die Zeitkonstante  $T=k/b_i$  eines Maxwellstrangs, innerhalb eines Intervalls  $(T_1, T_2)$  verteilt ist. Die Eigenschaften des Modells werden wesentlich von der Häufigkeit  $\Phi(T)$  bestimmt, mit der einzelne Viskositäten im Modell auftreten. Neubert wählte eine konstante Häufigkeitsverteilung

$$\Phi(T) = \left(\ln \frac{T_1}{T_2}\right)^{-1}$$

und erzielte damit innerhalb des Intervalls  $(T_1, T_2)$  eine fast konstante Dämpfungscharakteristik.

Bei Dämpfungsuntersuchungen realer Strukturen werden an Stelle der ellipsenähnlichen Hysteresen der linear-viskoelastischen Modelle oft Hysteresen mit Spitzen in den Umkehrpunkten gemessen. Diese Hystereseform kann auf Mechanismen mit perfektem Gedächtnis hinweisen, sie ist aber auch durch nichtlineare viskoelastische Stoffmodelle reproduzierbar. Die Anwendung eines kubisch-viskosen Stoffgesetzes auf Schwingungsprobleme einfacher Strukturen wurde von Luz [1966] untersucht. Mottershead und Stanway [1986] geben einen Identifikationsalgorithmus zur Schätzung der Parameter  $n$  und  $c_n$  von Dämpfungsgesetzen mit der Abhängigkeit der Dämpfungskraft von höheren Potenzen der Schwinggeschwindigkeit an:

$$F_d = c_n \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^n$$

### 5.3.3 Modelle mit trockener Reibung

Bei der Berücksichtigung trockener Reibung als Dämpfungsursache geht man überwiegend von der Modellvorstellung aus, daß der Bewegung eine geschwindigkeitsunabhängige Dämpfungskraft  $F_d$  entgegenwirkt:

$$F_d = H \operatorname{sign} \dot{x} \quad (5.3.3.1)$$

Das Reibelement mit dieser Eigenschaft wird mit einer Feder in Serie oder parallel geschaltet. Die Gleitreibungskraft ist bei realen Reibungsvorgängen in der Regel von der Haftkraft  $H$  verschieden und von einer charakteristischen Normalkraft abhängig:

$$F_G = \mu F_N$$

Der Reibungskoeffizient  $\mu$  wiederum, der im allgemeinen konstant angenommen wird, kann auch geschwindigkeitsabhängig sein. Die Reibungsmodelle werden aber, mit wenigen Ausnahmen, unter der Annahme verwendet:

$$F_G = H = \text{const}$$

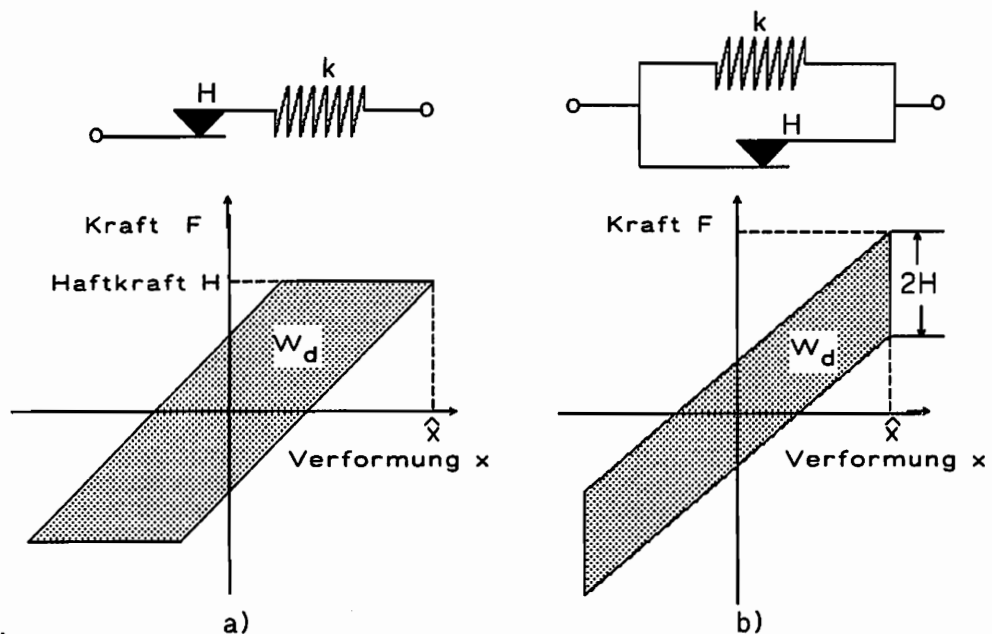


Bild 5.3: Reibmodelle und ihre Hystereseen, a) Prandtl-Modell, b) Coulomb-Modell

Ein zweiparametrisches Reibmodell kann nur sehr begrenzt die realen physikalischen Vorgänge nachbilden. Bei einem Einmassenschwinger mit einem Prandtl-Element, d.h. mit Feder und Reibelement in Serienanordnung [Timoshenko 1940], existiert beispielsweise nach Überschreitung der Haftkraft des Reibelements keine Begrenzung der Verformung bei ansteigender Kraft. Das Modell eignet sich zur Beschreibung von Setzungs- oder Versagensvorgängen und wird zur Modellierung von Reibungsvorgängen praktisch nur mit einer zusätzlich parallel geschalteten Feder verwendet. Wenn ein solches Modell eine nennenswerte Dämpfungswirkung besitzen soll, muß die Haftkraft genügend groß sein und daraus folgend auch die Federsteifigkeit  $k_1$  des Prandtl-Elements, da sonst die Haftkraft bei der Verformung nicht erreicht wird. Das hat die Konsequenz einer ausgeprägten bilinearen Steifigkeitscharakteristik des Elementes zur Folge.

Bei einer Parallelschaltung wird dagegen der Schwinger bis zur Überschreitung der Haftkraft blockiert und eine Bewegung der Masse ist in dieser Spanne nicht möglich. Dieses Phänomen tritt nur bei verformungsgesteuerter Bewegung nicht auf. Während im Fall eines diskreten reibungsbehafteten Einmassenschwingers das Verhalten durchaus physikalisch korrekt beschrieben wird, steht es bei transienten und kraftgesteuerten Schwingungen mechanischer Kontinua, etwa bei Einführung des Coulomb-Modells auf modaler Ebene, im Widerspruch zur Beobachtung. Eine bessere Übereinstimmung mit der Realität, und ein günstigeres Modellverhalten in Simulationsrechnungen, kann erreicht werden, wenn die Signum-Funktion (Gl. 5.3.3.1) mit der Unstetigkeit bei  $\dot{x} = 0$  durch eine stetige Funktion ersetzt wird, beispielsweise durch die Hyperbeltangensfunktion:

$$F_d(x, \dot{x}) = H \tanh(\alpha \dot{x}) \quad (5.3.3.2)$$

Eine Reihenentwicklung zeigt, daß sich das Verhalten dieses modifizierten Reibmodells bei kleinen Geschwindigkeitsamplituden viskosem Verhalten annähert und bei größeren Amplituden wieder die Charakteristik des Coulomb-Modells annimmt, wobei der Übergang durch den Parameter  $\alpha$  bestimmt wird:

$$\tanh(\alpha \dot{x}) \approx \alpha \dot{x} - \frac{(\alpha \dot{x})^3}{3} + 2 \frac{(\alpha \dot{x})^5}{15}$$

Die beschriebene Dämpfungscharakteristik kann aus dem Verlauf eines äquivalenten linearen Dämpfungsmaßes in Bild 5.4 abgelesen werden.



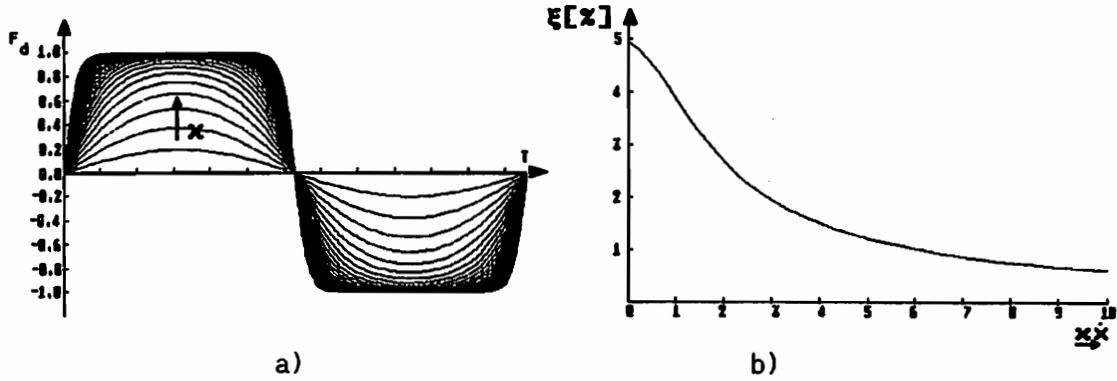


Bild 5.4: a) Dämpfungskraft nach Gl. 5.3.3.2 bei zyklischer Verformung für Parameterwerte  $0.2 \leq x \leq 5$ . b) Verlauf des äquivalenten linearen Dämpfungsmaßes  $\xi$  über der Amplitude. Die Werte wurden für transiente Schwingungen in Simulationsrechnungen bestimmt (s.a. Gl. 5.3.4.24).

Durch das quasiviskose Verhalten bei kleinen Amplituden wird in diesem Bereich auch die Frequenz minimal verringert. Gemäß der Beziehung

$$\omega_v = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

für viskose Körper hat die Frequenz des Hyperbeltangens-Modells den Grenzwert

$$\omega_{th} (x \rightarrow 0) = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{Hx}{2}\right)^2} ; \xi_{th} = \frac{Hx}{2\omega_0} \quad (5.3.3.3)$$

Mit größeren Amplituden nähert sich  $\omega_{th}$  wieder der Frequenz des ungedämpften Systems an, das Steifigkeitsverhalten ist also schwach überlinear.

Der Flächeninhalt der Hysterese des Parallelmodells unter zyklischer Belastung (Bild 5.3b) entspricht der in einem Zyklus dissipierten Energie:

$$W_d = 4 H \hat{x}$$

$$\xi_C = \frac{W_d}{4\pi U} = \frac{2 H}{\pi k \hat{x}} \quad (5.3.3.4)$$

Das äquivalente viskose Dämpfungsmaß  $\xi_C$  besitzt also, über der Amplitude aufgetragen, eine Hyperbelcharakteristik.

### 5.3.4 Masing-Modelle

Das Coulomb-Modell basiert auf der Annahme der Existenz einer konzentrierten Reibungsquelle mit definierter Haftkraft und einer Gleitreibungskraft von gleichem Betrag. Die Dämpfungsverhältnisse in realen Systemen entsprechen in der Regel nicht diesen einfachen Vorstellungen. Vielmehr sind die Reibungsquellen, d.h. die Mechanismen, die Energiedissipation durch trockene Reibung verursachen, örtlich verteilt und die charakteristischen Reibungskräfte variieren innerhalb gewisser Grenzen. In der Dämpfungsforschung wurden daher verschiedene Kombinationen der beschriebenen Grundmodelle untersucht, um zu besseren Übereinstimmungen mit beobachtetem Verhalten zu gelangen [s. Ottl 1981]

Wie bei den viskoelastischen Modellen ist es auch hier möglich, zu unendlichen Modellen überzugehen. Sie werden in der deutschsprachigen Literatur als *Masing-*, in der englischsprachigen überwiegend als *Iwan-Modelle* bezeichnet.

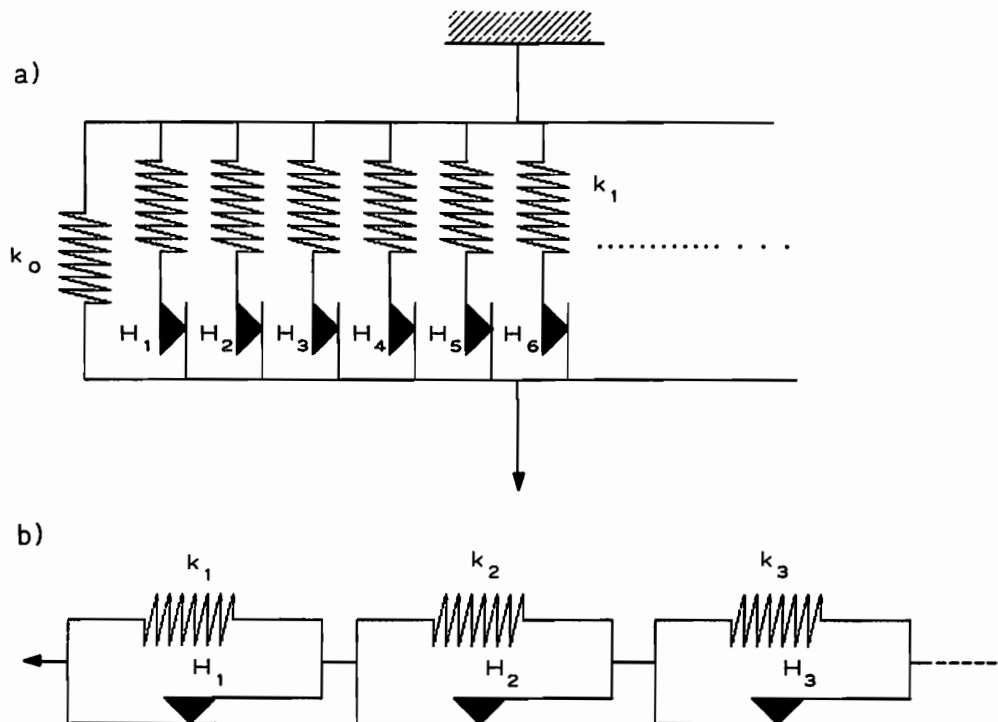


Bild 5.5: Grundtypen der unendlichen Modelle. a) Parallel-, b) Reihenmodell.

Von den beiden Grundtypen, Parallelschaltung von Prandtl-Elementen und Reihenschaltung von Coulomb-Elementen, wird im folgenden das Parallelmodell eingehender untersucht. Iwan [1967] hat das Modell zur Beschreibung

der Strukturdämpfung vorgeschlagen und die Berechnung der Dämpfungs- und Rückstellkräfte des Modells für periodische Erregung und konstant verteilte Haftkräfte angegeben. In der hier verwendeten Form besitzen alle Federn, mit Ausnahme der Feder im reibelementfreien Strang, die gleiche Steifigkeit  $k_1$ . Die Haftkräfte  $H_i$  liegen innerhalb eines Intervalls  $(\eta_U, \eta_O)$ . Die große Flexibilität des Modells besteht darin, daß die Häufigkeit, mit der verteilte Reibvorgänge mit unterschiedlichen Haftkräften innerhalb einer Struktur auftreten, durch eine *Verteilungsdichtefunktion*  $\Phi(\eta)$  berücksichtigt werden kann. Diese Modelle besitzen gegenüber zahlreichen anderen Hysteresemodellen den Vorteil, daß sie nur physikalisch realisierbares Verhalten beschreiben und damit die Möglichkeit der Energiegenerierung [Sandler 1978] nicht besteht.

Die Berechnung des Parallelmodells wird verformungsgesteuert vorgenommen, das heißt, zu einer gegebenen Verformung wird die sich einstellende Gesamtkraft berechnet. In einem allgemeinen Verformungszustand des Elements, wenn bereits eine Verformungsgeschichte vorliegt, tragen, außer der linearen Feder  $k_0$ , drei Anteile zur Gesamtkraft bei (s.a. Bild 5.11):

1. Die Kräfte in den momentan gleitenden Strängen.
2. Kräfte der Stränge, in denen bereits einmal die Haftkraft erreicht wurde und die jetzt elastisch sind.
3. Die Kräfte in den immer elastisch bleibenden Strängen

Die Stränge der ersten Gruppe sind dem unteren Teil des Haftkraftintervalls zugeordnet, die der dritten Gruppe dem oberen Teil. Die Kräfte beider Anteile können durch einfache Integration berechnet werden. Der zweite Anteil, der aus dem perfekten Gedächtnis des Modells resultiert, erschwert die Berechnung der Gesamtkraft erheblich. Eine Überschreitung der Haftkraft in einem Strang hinterläßt eine bleibende Vorspannung der zugehörigen Feder, die von der Verformungsrichtung abhängt. Bei der Berechnung der Gesamtkraft muß daher immer dort, wo in der Verformungsgeschichte eine Verformungsumkehr stattgefunden hat, eine Integrationsgrenze eingeführt werden. Diese Vorspannungen können auch als innere Zustandsgrößen bezeichnet werden, die zusätzlich zu den kinematischen Zustandsgrößen in die Beschreibung eines Systems aufgenommen werden müssen. Im Falle unregelmäßiger Verformungen wird eine solche Beschreibung nur noch schwer handhabbar. Zur Reduzierung dieses Aufwands bestehen zwei Möglichkeiten: Entweder muß die Anwendung auf einfache Verformungsvorgänge beschränkt bleiben oder es muß eine nachträgliche Diskretisierung des Modells vorgenommen werden. In der Mehrzahl der Fälle wird der erste Weg beschritten, wobei die Betrachtung zyklischer Verformungen überwiegt.

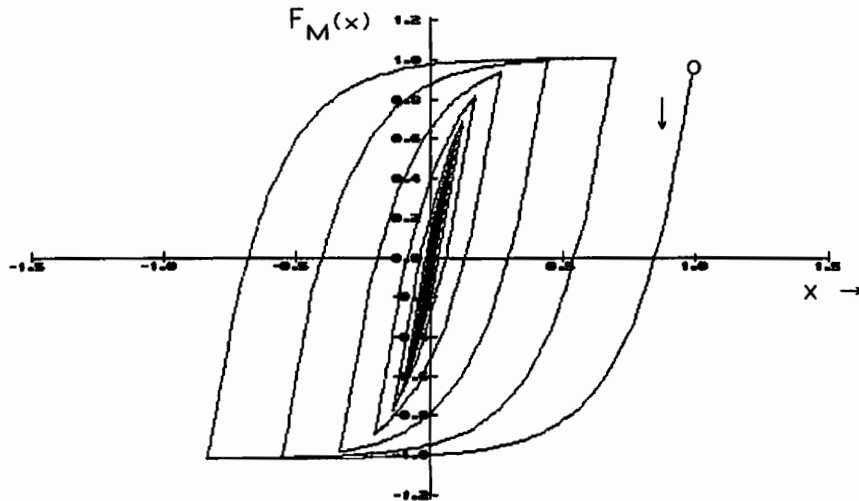


Bild 5.6: Verlauf der Gesamtkraft des Masing-Elementes während eines Abklingvorgangs, aufgetragen über der Verformungsamplitude.

Ein einzelnes Prandtl-Modell (s.Bild 5.3) innerhalb des Parallelmodells wird in den nachfolgenden Ableitungen auch als "Strang" bezeichnet.

Nach einer Verformung aus dem "jungfräulichen" Zustand in positiver Richtung vom maximalen Betrag  $\hat{x}$  setzt sich die Kraft im Element nur aus den rein *elastischen* Anteilen der Stränge zusammen, in denen die Haftkraft nicht erreicht wurde

$$F_{el}(\hat{x}) = \int_{k_1 \hat{x}}^{\eta_0} k_1 x \Phi(\eta) d\eta \quad (5.3.4.1)$$

$k_1$  - Federsteifigkeit der Prandtl-Stränge

$\hat{x}$  - Verformungsamplitude

$\Phi(\eta)$  - Verteilungsdichtefunktion der Haftkräfte

$\eta_0$  - Obere Grenze des Haftkraftintervalls

und den Kräften der Stränge mit *gleitenden* Elementen

$$F_{gl}(\hat{x}) = \int_0^{k_1 \hat{x}} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (5.3.4.2)$$

Während der Umkehrbewegung in Gegenrichtung kommen die Anteile der vormals gleitenden und jetzt elastischen Stränge hinzu :

$$F_M(x) = -\int_0^{\frac{k_1}{2}(\hat{x}-x)} \eta \Phi(\eta) d\eta + \int_{\frac{k_1}{2}(\hat{x}-x)}^{k_1 \hat{x}} [\eta - k_1(\hat{x}-x)] \Phi(\eta) d\eta + \int_{k_1 \hat{x}}^{\eta_0} k_1 x \Phi(\eta) d\eta \quad (5.3.4.3)$$

Die Hysterese bei zyklischer Verformung ist damit vollständig beschrieben. Auf der Basis dieser Gleichung kann auch eine äquivalente amplitudenabhängige Linearisierung vorgenommen werden, indem die Gesamtkraft durch die Rückföhrfunktion des Kelvinmodells, beispielsweise im Sinne der quadratischen Fehlernorm, approximiert wird:

$$F_M(x, \hat{x}) \approx a(\hat{x}) x + b(\hat{x}) \dot{x}$$

Es ist aber auch möglich, und dieser Weg soll hier verfolgt werden, den Einfluß der Modellparameter auf das Dämpfungsverhalten des Masing-Elements für zyklische Verformungen analytisch durch Berechnung des Verlustfaktors zu untersuchen und so für Schwingungen in der Eigenfrequenz zu äquivalenten linearen Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten zu gelangen. Dazu müssen wieder, wie bei den zuvor beschriebenen Modellen, die Verlustarbeit  $W_D$  und die maximale Formänderungsenergie  $U$  berechnet werden. Die Dissipation des Masingelements wird durch jene Prandtl-Stränge bestimmt, in denen während der Verformung die Haftkraft

$$H(\eta) = \eta$$

erreicht wird (Bild 5.7), das sind die Reibelemente, für die gilt:

$$\eta \leq k_1 \hat{x} \quad ; \quad \hat{x} - \text{Amplitude der zyklischen Verformung}$$

Mit  $H(\eta)$  wird die aktuelle, von der Verformungsamplitude und der Lastgeschichte abhängige Kraft eines Prandtl-Strangs bezeichnet, der durch die Haftkraft  $\eta$  gekennzeichnet ist.

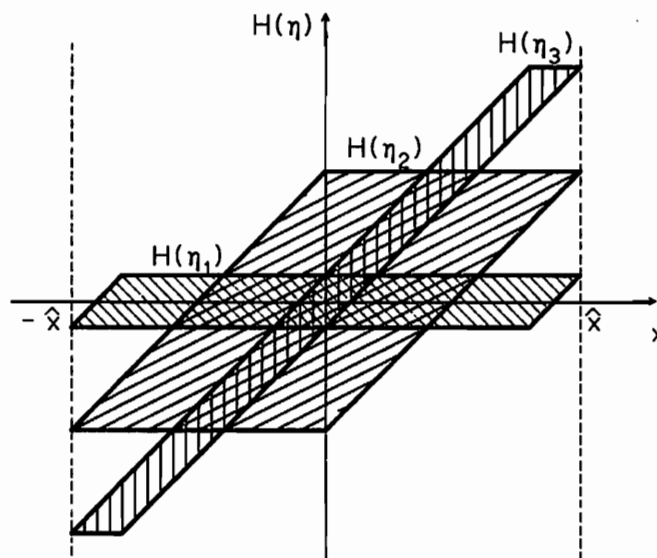


Bild 5.7: Hysterese von drei Prandtl-Strängen mit unterschiedlichen Haftkräften.

Der Flächeninhalt einer Hysterese ist

$$\bar{W}_d(\eta) = 4 \eta \left( \hat{x} - \frac{\eta}{k_1} \right) \quad (5.3.4.4)$$

oder nach Substitution des Kraftparameters  $\eta$  durch den Verschiebungsparameter  $u$ :

$$\begin{aligned} \eta &= k_1 u \\ \bar{W}_d(u) &= 4 k_1 u (\hat{x} - u) \end{aligned} \quad (5.3.4.5)$$

Die Verlustarbeit im gesamten Masingelement wird durch Integration über die mit  $\Phi(\eta)$  (bzw.  $\Phi(u)$ ) bewerteten Dissipationsbeträge in den Einzelsträngen berechnet:

$$\begin{aligned} W_d(\hat{x}) &= \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) \bar{W}_d(u) du \\ W_d(\hat{x}) &= 4 k_1 \left[ \hat{x} \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) u du - \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) u^2 du \right] \end{aligned} \quad (5.3.4.6)$$

Die Formänderungsenergie wird in der gleichen Weise berechnet:

$$\text{Prandtelemente mit } H(\eta) = \eta: \quad \bar{U} = \frac{1}{2} k_1 \Phi(u) u^2 \quad (5.3.4.7 a)$$

$$\text{Prandtelemente mit } H(\eta) \leq \eta: \quad \bar{U} = \frac{1}{2} k_1 \Phi(u) \hat{x}^2 \quad (5.3.4.7 b)$$

Die gesamte Formänderungsenergie des Elements ist, die parallele Feder eingerechnet:

$$U(\hat{x}) = \frac{1}{2} k_0 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} k_1 \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) u^2 du + \frac{1}{2} k_1 \hat{x}^2 \int_{\frac{\eta_0}{k_1}}^{\frac{\eta_0}{k_1}} \Phi(u) du \quad (5.3.4.8)$$

Für Auslenkungen  $\hat{x} \geq \frac{\eta_0}{k_1}$

das heißt ohne verbleibende rein elastische Anteile im Element, verschwindet das zweite Integral und im ersten Integral wird die obere Integrationsgrenze durch die des zweiten Integrals ersetzt. Mit den Abkürzungen

$$J_0 = \int_{\frac{\eta_0}{k_1}}^{\frac{\eta_0}{k_1}} \Phi(u) du \quad (5.3.4.9 a)$$

$$J_1 = \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) u du \quad (5.3.4.9 b)$$

$$J_2 = \int_0^{\hat{x}} \Phi(u) u^2 du \quad (5.3.4.9 c)$$

folgt für den Verlustfaktor

$$\psi = \frac{4}{\pi} \frac{\hat{x} J_1 - J_2}{v \hat{x}^2 + J_2 + \hat{x}^2 J_0} \quad ; \quad v = \frac{k_0}{k_1} \quad (5.3.4.10)$$

Die Verteilung  $\Phi(u)$  wird zunächst *konstant* angenommen:

$$\int_0^{\frac{\eta_0}{k_1}} \Phi(u) \, du = 1 \quad \rightarrow \quad \Phi(u) = \frac{\mu}{\hat{x}} \quad (5.3.4.11)$$

Die Amplitude  $\hat{x}$  der zyklischen Verformung kann auf die Intervallgrenze  $\eta_0$  bezogen werden:

$$\hat{x} = \mu \frac{\eta_0}{k_1} \quad (5.3.4.12)$$

Der Parameter  $\mu$  charakterisiert im folgenden für das Modell mit konstanter Verteilungsfunktion die Verformungsamplitude. Es wird zunächst der Fall  $\mu \leq 1$  betrachtet, für den auch bei maximaler Verformung noch rein elastische Anteile im Element verbleiben:

$$J_0 = 1 - \mu \quad ; \quad J_1 = \frac{\mu \hat{x}}{2} \quad ; \quad J_2 = \frac{\mu \hat{x}^2}{3} \quad (5.3.4.13)$$

Damit kann das äquivalente modale Dämpfungsmaß berechnet werden:

$$\begin{aligned} \xi_z(\mu \leq 1) &= \frac{\psi}{2} = \frac{2}{\pi} \frac{\hat{x} J_1 - J_2}{v \hat{x}^2 + J_2 + \hat{x}^2 J_0} \\ \xi_z(\mu \leq 1) &= \frac{\mu}{\pi [3(1+v) - 2\mu]} \end{aligned} \quad (5.3.4.14)$$

Für  $\mu \geq 1$  folgt:

$$J_0 = 0 \quad ; \quad J_1 = \frac{\hat{x}}{2\mu} \quad ; \quad J_2 = \frac{\hat{x}^2}{3\mu^2} \quad (5.3.4.15)$$

$$\xi_z(\mu \geq 1) = \frac{3\mu - 2}{\pi [3\mu^2 v + 1]} \quad (5.3.4.16)$$

Das Dämpfungsmaß steigt im Bereich  $0 \leq \mu \leq 1$  monoton an und besitzt im Bereich  $\mu \geq 1$  ein Maximum bei

$$\hat{\mu} = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{3v}} \quad (5.3.4.17 \text{ a})$$

$$\xi(\hat{\mu}) = \frac{3}{2\pi} \left[ \sqrt{v(4v+1)} + 2v \right]^{-1} \quad (5.3.4.17 \text{ b})$$

Die Lage des Maximums wird also bei konstanter Dichtefunktion  $\Phi(u)$  der Verteilung wesentlich durch die maximale Haftkraft des Elements beeinflusst. Der Betrag des Dämpfungsmaximums kann durch das Verhältnis der Federsteifigkeiten

$$\nu = \frac{k_0}{k_1} \quad (5.3.4.18)$$

bestimmt werden. Im Grenzfall  $\nu=0$ , das entspricht einem Modell ohne parallele Feder, beschreibt das Element elastoplastisches Verhalten mit vollständigem Fließen bei  $\mu=1$ . Ein Dämpfungsmaximum existiert in diesem Fall natürlich nicht, das Verhalten des Elements ist nach Überschreitung der maximalen Haftkraft  $\eta_0$  prinzipiell mit dem Prandtl-Modell nach Bild 5.3a vergleichbar.

Die für die Dämpfungscharakteristik des Masing-Elements mit konstanter Verteilungsfunktion maßgebliche Intervallgrenze  $\eta_0$  ist in Verbindung mit Simulationsmodellen nur schwer identifizierbar. Hierfür eignen sich die Parameter stetiger Funktionen wegen der Differenzierbarkeit der Funktionen wesentlich besser. Stetige Verteilungsfunktionen  $\Phi(u)$  mit dem Definitionsbereich

$$0 \leq u \leq \infty$$

und mit der Eigenschaft

$$\Phi(u \rightarrow \infty) = 0$$

sind daher einfacher zu behandeln. Prinzipiell geeignet ist aus diesen Gründen, und aus physikalischen Überlegungen heraus ebenfalls, die Dichtefunktion der *Normalverteilung*:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.3.4.19)$$

Die zwei zusätzlichen Parameter, Mittelwert und Streuung der Haftkräfte, verleihen dem Element zwar für die Identifikation eine größere Anpassungsfähigkeit, können aber bei der Parameterschätzung Schwierigkeiten bereiten, weil aus der in den Meßwerten enthaltenen Dämpfungsinformation drei Parameter, die Federsteifigkeit  $k_1$  eingerechnet, geschätzt werden müssen, die möglicherweise nur eine geringe Signifikanz besitzen. Hervorzuheben ist, daß die Funktion einen über den Mittelwert einstellbaren Extremwert besitzt, und damit das Coulomb-Element mit

$$\sigma \rightarrow 0 \text{ und } \nu \ll 1$$

physikalisch sinnvoll angenähert werden kann.



Die Annahme, daß die Reibungsvorgänge, die das Dämpfungselement beschreiben soll, überwiegend durch Haftkräfte kleiner Größenordnung charakterisiert sind, motiviert die Wahl einer *Exponentialverteilung*:

$$\Phi(u) = \alpha e^{-\alpha u} \quad (5.3.4.20)$$

Für diese Funktion wird wieder das äquivalente Dämpfungsmaß berechnet, um den Einfluß des Parameters  $\alpha$  zu untersuchen:

$$J_0 = e^{-\alpha \hat{x}} \quad (5.3.4.21 a)$$

$$J_1 = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha \hat{x}} (1 + \alpha \hat{x})] \quad (5.3.4.21 b)$$

$$J_2 = \frac{2}{\alpha^2} - e^{-\alpha \hat{x}} \left( \hat{x}^2 + \frac{2\hat{x}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right) \quad (5.3.4.21 c)$$

$$\xi_z(\alpha, \hat{x}) = \frac{2}{\pi} \frac{\hat{x} \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha \hat{x}} (1 + \alpha \hat{x})] - \frac{2}{\alpha^2} + e^{-\alpha \hat{x}} \left( \hat{x}^2 + \frac{2\hat{x}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right)}{\sqrt{\hat{x}^2 + \frac{2}{\alpha^2} - e^{-\alpha \hat{x}} \left( \hat{x}^2 + \frac{2\hat{x}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right) + \hat{x}^2 e^{-\alpha \hat{x}}}}$$

Mit dem Amplitudenmaß  $\lambda$  und der Abkürzung

$$\lambda = \alpha \hat{x} \quad (5.3.4.22)$$

folgt daraus der Ausdruck

$$\xi_z(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda - 2 + e^{-\lambda} (2 + \lambda)}{\sqrt{\lambda^2 + 2 - 2e^{-\lambda} (\lambda + 1)}} \quad (5.3.4.23)$$

In Bild 5.8a ist exemplarisch ein äquivalentes Dämpfungsmaß für das Modell mit konstanter Verteilungsdichtefunktion über der Anfangsamplitude einer abklingenden Schwingung aufgetragen. Die Ergebnisse wurden in Simulationsrechnungen über einen Schwingungshalbzyklus aus dem logarithmischen Dekrement  $\vartheta^*$  bestimmt:

$$\vartheta^* = \ln\left(-\frac{x(0)}{x(\frac{T}{2})}\right) ; \quad \xi_T = \frac{\vartheta^*}{\sqrt{\pi^2 + \vartheta^{*2}}} \quad (5.3.4.24)$$

Die Dämpfungsmaße  $\xi_T$  stimmen qualitativ mit den über die Gl. 5.3.4.14/16 bestimmten Maßen  $\xi_z$  überein, die Abweichungen der Beträge sind aus den unterschiedlichen Kriterien der äquivalenten Linearität zu erklären.

Das Bild 5.8b zeigt den Verlauf einer äquivalenten Kreisfrequenz in Abhängigkeit von der Amplitude, der ebenfalls nach der Halbzyklusbedingung berechnet wurde. Aus dieser Kurve kann die Eigenschaft der Unterlinearität der Masing-Elemente abgelesen werden, die für die realistische Nachbildung des beobachteten Verhaltens von Strukturen sehr wesentlich ist.

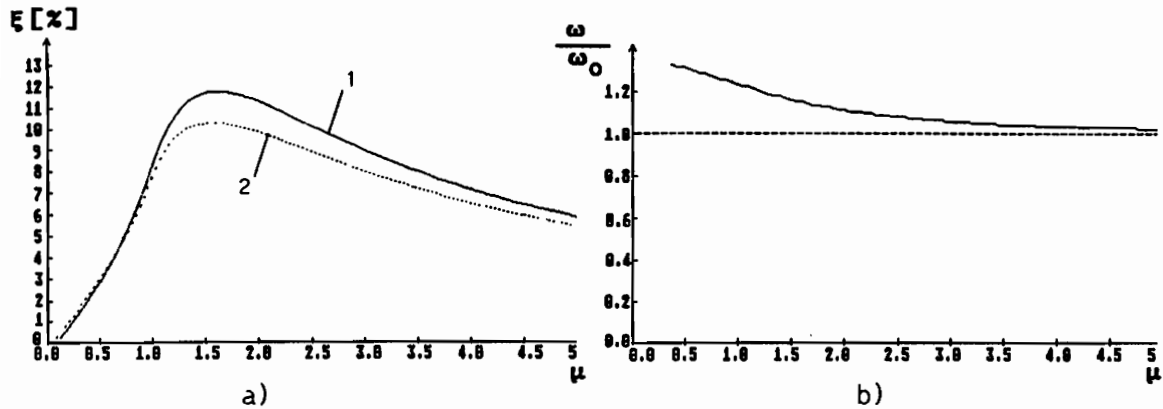


Bild 5.8: a) Äquivalentes Dämpfungsmaß für ein Masingelement mit konstanter Verteilungsdichtefunktion und  $\nu=1$  in Abhängigkeit von der Amplitude  $\mu$ . Kurve 1 - Transiente Schwingung, Kurve 2 - Zyklische Verformung. b) Verhältnis der äquivalenten Frequenz zur Frequenz des ungedämpften Schwingers (transiente Schwingung).

Für geringe Dämpfungen kann auch näherungsweise eine äquivalente Kreisfrequenz durch die Gleichsetzung von kinetischer und potentieller Energie eines Einmassenschwingers berechnet werden:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 = U$$

$$\omega_z(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2U}{m\hat{x}^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2U}{k_0\hat{x}^2}} \quad (5.3.4.25)$$

$\omega_0$  - Frequenz des Schwingers ohne Masing-Element

Für große Amplituden gilt:

$$U(\hat{x} \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} k_0 \hat{x}^2$$

und damit

$$\omega_z(\hat{x} \rightarrow \infty) = \omega_0$$

Wenn, wie bisher angenommen, die Verteilungsfunktion normiert ist (Gl. 5.3.4.11), speichert das Masing-Element bei sehr kleinen Amplituden die  $1/\nu$ -fache Formänderungsenergie der parallelen Feder  $k_0$  (s.a. Gl. 5.3.4.7). Die Frequenz ist in diesem Fall

$$\omega_z(\hat{x} \rightarrow 0) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\nu}}$$

Man beachte, daß diese Eigenschaften unabhängig von der Verteilungsfunktion sind.

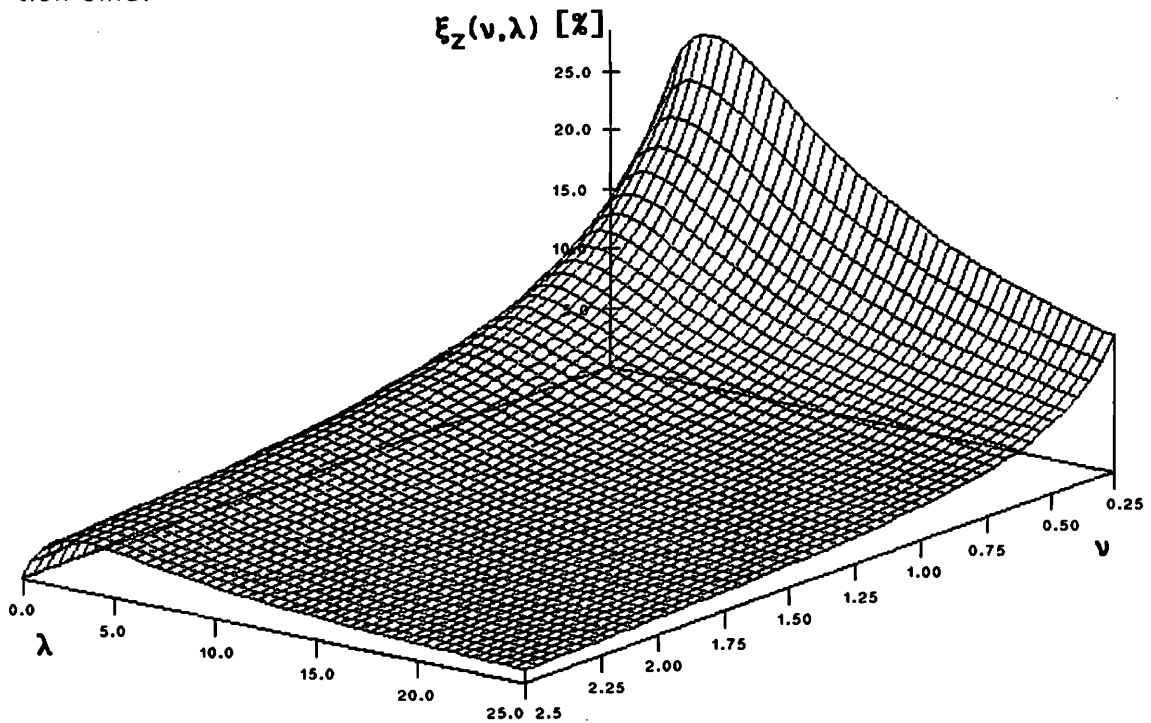


Bild 5.9: Äquivalentes lineares Dämpfungsmaß  $\xi_z(\nu, \lambda)$  für Elemente mit Exponentialverteilung der Haftkräfte (Gl. 5.3.4.23).  $0.25 \leq \nu \leq 2.5$ ,  $0 \leq \lambda \leq 25$ .

Unterlineares Verhalten mechanischer Körper resultiert häufig aus der Gleitung von kraftschlüssig verbundenen Struktur- oder Materialelementen relativ zueinander, nach der Überschreitung einer Grenzspannung. Weiter zugeführte mechanische Arbeit wird nicht in Formänderungsenergie umgesetzt, sondern dissipiert. Beispiele hierfür sind Plastifizierungen, Gleitungen verschraubter Strukturknoten oder der Verbund von Bewehrung und Beton in Stahlbetonbauteilen. Das Masingelement kann prinzipiell sowohl die aus diesen Vorgängen resultierenden Steifigkeitsänderungen als auch die damit verbundene Dissipationsmechanismen modellieren. Derzeit eignen sich die Modelle allerdings wegen der häufig nicht quantifizierbaren Einflüsse auf die

betrachteten Mechanismen nur bedingt zur quantitativen Prognose des Verhaltens von Strukturen, sondern eher für qualitative Simulationsstudien und zur Systemidentifikation.

Die Identifikation von nichtlinearen Systemen kann, wie in Kapitel 4 gezeigt, besonders effizient mit Simulationsmodellen vorgenommen werden, weil diese Methode nur lokale Linearisierungen in der Umgebung von Zustands-trajektorien erfordert, die, im Gegensatz zu globalen Linearisierungen, den Charakter der Nichtlinearität nicht verfälschen. In eine für diese Zwecke geeignetere Form kann auch das Masingmodell überführt werden, wenn innerhalb des Haftkraftintervalls ( $\eta_u, \eta_o$ ) eine Diskretisierung mit konstanter Subintervallbreite  $\Delta\eta$  vorgenommen wird. Gegenüber den unmittelbar diskret aufgebauten Ersatzmodellen besitzt diese Vorgehensweise den Vorteil, daß die Parameteranzahl, ähnlich wie bei den Biotmodellen, wesentlich geringer ist. Zur Charakterisierung des Dämpfungsverhaltens von Strukturen oder Materialien eignet sich zudem eine Verteilungsfunktion besser als Vielzahl unabhängiger Parameter.

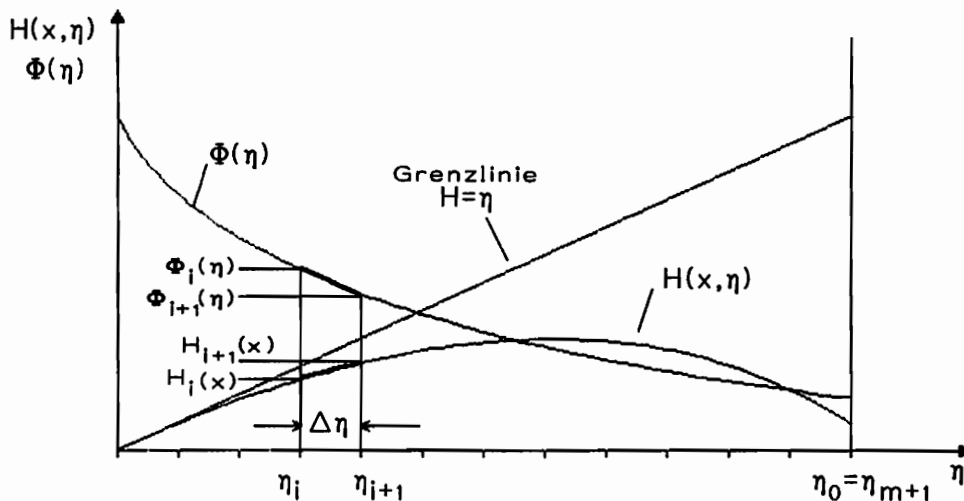


Bild 5.10: Diskretisierung des Masing-Elements.

Der Verformungszustand innerhalb des Elements wird durch eine stückweise lineare Funktion  $H(\eta)$  beschrieben und deren Parameter durch die Ordinaten der Intervallgrenzen  $H_i(x)$  ausgedrückt. Der Beitrag eines Subintervalls  $(\eta_i, \eta_{i+1})$  zur Gesamtkraft beträgt

$$F_{M_i}(x) = \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \left[ H_i(x) + (\eta - \eta_i) \frac{H_{i+1}(x) - H_i(x)}{\Delta\eta} \right] \Phi(\eta) d\eta ; \quad (\text{A.3.4.26 a})$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\eta_i = i \Delta\eta$$

$$H_i(x) = H(x, \eta_i)$$

m - Anzahl der Subintervalle

$$F_M(x) = \sum_{i=1}^m F_{M_i}(x) \quad (\text{5.3.4.26 b})$$

Diese Beziehung gilt für alle, durch die  $H_i(x)$  gekennzeichneten Verformungszustände des Elements. Die inneren Zustandsgrößen  $H_i(x_k)$  können in der Simulation sehr einfach rekursiv berechnet werden:

$$H_i(x_k) = \begin{cases} H_i(x_{k-1}) + k_1(x_k - x_{k-1}), & |H_i(x_k)| < \eta_i \\ \eta_i \operatorname{sign}(x_k - x_{k-1}), & |H_i(x_k)| \geq \eta_i \end{cases} \quad (\text{5.3.4.27})$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Verformungsberechnung des übergeordneten Strukturmodells, dessen Bestandteil das Masing-Modell ist, inkrementell (Index k) vorgenommen wird. Aufgrund der angenommenen Linearität von  $H(\eta)$  innerhalb eines Subintervalls ist auch folgende physikalisch notwendige Bedingung erfüllt:

$$H(\eta) \leq \eta \quad \text{für } \eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1}$$

Bei der Berechnung der Kraftanteile treten Integrale der Form

$$P_i = \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \Phi(\eta) d\eta \quad \text{und} \quad Q_i = \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (\text{5.3.4.28})$$

auf. Mit diesen Abkürzungen folgt aus Gl. 5.3.4.26 a für einen Anteil  $F_{M_i}(x)$ :

$$F_{M_i}(x) = H_i \underbrace{\left[ P_i(1+i) - \frac{1}{\Delta\eta} Q_i \right]}_{A_i} + H_{i+1} \underbrace{\left[ \frac{1}{\Delta\eta} Q_i - i P_i \right]}_{B_i} \quad (\text{5.3.4.29})$$

und für die Gesamtkraft des Elements:

$$F_M(x) = h^T \psi ; \quad h = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} ; \quad \psi = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 + A_1 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{5.3.4.30})$$

Wenn die Subintervallbreite  $\Delta\eta$  genügend klein gewählt wird, kann auch  $\Phi(\eta)$  stückweise linear angenähert werden. Die Integrale vereinfachen sich entsprechend:

$$\begin{aligned}
 P_i &= \frac{1}{\Delta\eta} (\Phi_i + \Phi_{i+1}) \\
 Q_i &= \Delta\eta^2 \left[ \Phi_i \left( \frac{i}{2} + \frac{1}{6} \right) + \Phi_{i+1} \left( \frac{i}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \quad (5.3.4.31) \\
 F_{M_i} &= \frac{\Delta\eta}{3} \left[ H_i \Phi_i + \frac{1}{2} H_{i+1} \Phi_i + \frac{1}{2} H_{i+1} \Phi_i + H_{i+1} \Phi_{i+1} \right]
 \end{aligned}$$

Die Beziehung zur Berechnung der Gesamtkraft lautet dann im Fall eines zeitdiskreten Systems:

$$F_{M_k}(x_k) = h_k^T(k_1, x_k | x_{k-1}) \mathbf{\Lambda}(\Delta\eta) \Phi(\mathbf{a}) \quad (5.3.4.32)$$

$\mathbf{a}$  - Parameter der Verteilungsdichtefunktion  
 $\mathbf{\Lambda}(\Delta\eta)$  - Diskretisierungsabhängige Koeffizientenmatrix entspr. Gl. 5.3.4.31

Die Schreibweise  $h_k^T(k_1, x_k | x_{k-1})$  verdeutlicht, daß der innere Zustandsvektor außer von der aktuellen Verformung auch von der Verformungsgeschichte abhängig ist. In dieser Form kann das Dämpfungsmodell unmittelbar zur Identifikation mit dem später beschriebenen Rückführungsmodell verwendet werden.

Für eine Identifikation mit einem Simulationsmodell werden die zeitabhängigen Empfindlichkeitsfunktionen der Elementkräfte benötigt. Die Empfindlichkeiten der Parameter der Verteilungsfunktion sind einfach zu bestimmen, weil der Vektor  $\Phi$  im allgemeinen -analytische Verteilungsfunktionen vorausgesetzt- analytisch differenziert werden kann:

$$\frac{\partial F_{Mk}}{\partial a_l} = h_k^T \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \Phi(\mathbf{a})}{\partial a_l} \quad (5.3.4.33)$$

Die Kräfte mehrerer, eventuell modal in die Systembeschreibung eingeführter Masing-Modelle, werden im Vektor  $f_{Mk}$  zusammengefaßt. Die Empfindlichkeitsfunktionen des Vektors bilden dann die Matrix  $D_k^a$ :

$$\frac{\partial f_{Mk}}{\partial \mathbf{a}} = D_k^a$$

Bis hier unterscheidet sich die Behandlung von Elementen des Masing-Typs bei der Identifikation, auch stellvertretend für andere Elemente mit Unstetigkeiten, nicht von der einfacheren, analytischen Dämpfungsfunktionen ohne innere Zustandsgrößen. Die Berechnung der den Parameter  $k_1$  betreffenden Empfindlichkeit erfordert dagegen eine andere Behandlung, weil die entsprechende Information in dem rekursiv berechneten Vektor  $\mathbf{h}_k$  der inneren Zustandsgrößen enthalten ist. Die Änderung der Kraft  $F_{Mk}$  in einem Zeitschritt kann durch die nichtlineare Zustandsänderung  $\Delta \mathbf{h}_k$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 F_{Mk} &= F_{Mk-1} + \Delta F_{Mk} = (\mathbf{h}_{k-1}^T + \Delta \mathbf{h}_{k-1}^T) \mathbf{\Lambda} \Phi(\mathbf{a}) \\
 \frac{\partial F_{Mk}}{\partial k_1} &= \left( \frac{\partial \mathbf{h}_{k-1}^T}{\partial k_1} + \frac{\partial (\Delta \mathbf{h}_{k-1}^T)}{\partial k_1} \right) \mathbf{\Lambda} \Phi(\mathbf{a}) \\
 &= \frac{\partial F_{Mk-1}}{\partial k_1} + \frac{\partial (\Delta \mathbf{h}_{k-1}^T)}{\partial k_1} \mathbf{\Lambda} \Phi(\mathbf{a})
 \end{aligned} \tag{5.3.4.34}$$

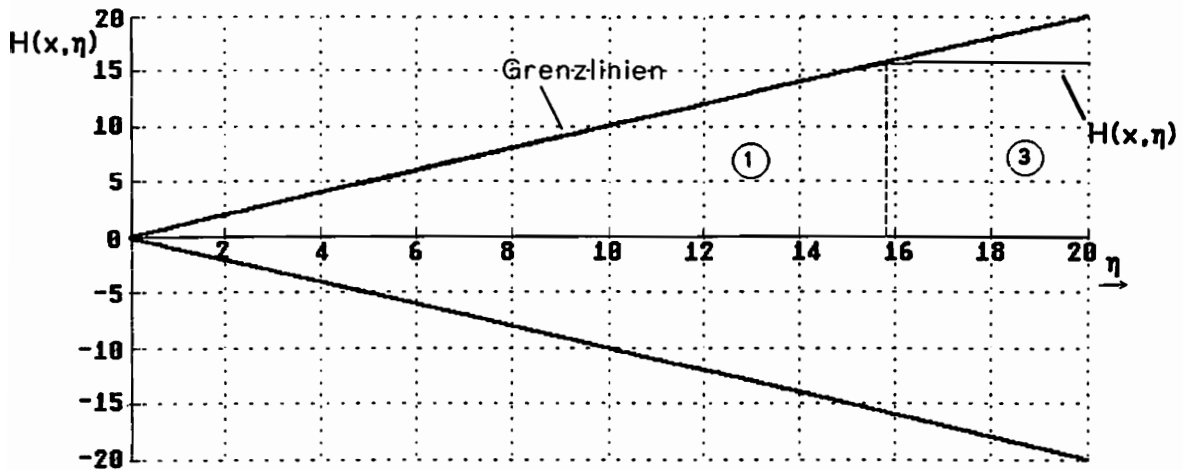
Wenn innerhalb des Masing-Elementes die Haftkraft  $\eta_i$  bei einer Verformung zu Beginn eines Zeitschritts schon erreicht ist und im betrachteten Zeitschritt keine Verformungsumkehr stattfindet, liefert das Vektorelement  $h_{ik}$  natürlich keine Information über den Steifigkeitsparameter  $k_1$  und die Empfindlichkeitsfunktion ist

$$\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial k_1} = 0$$

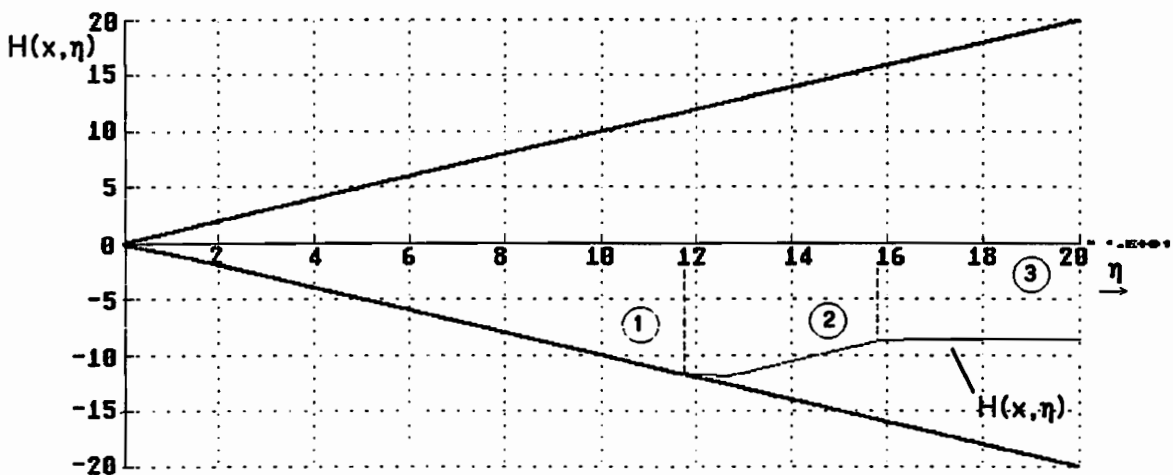
Andernfalls ändert sich die durch  $h_{ik-1}$  ausgedrückte Kraft um einen von dem Parameter  $k_1$  und dem Verformungsinkrement  $\Delta x_k$  abhängigen Betrag und die Empfindlichkeit zum Zeitpunkt  $t_k$  ist:

$$\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial k} = \Delta x_k$$

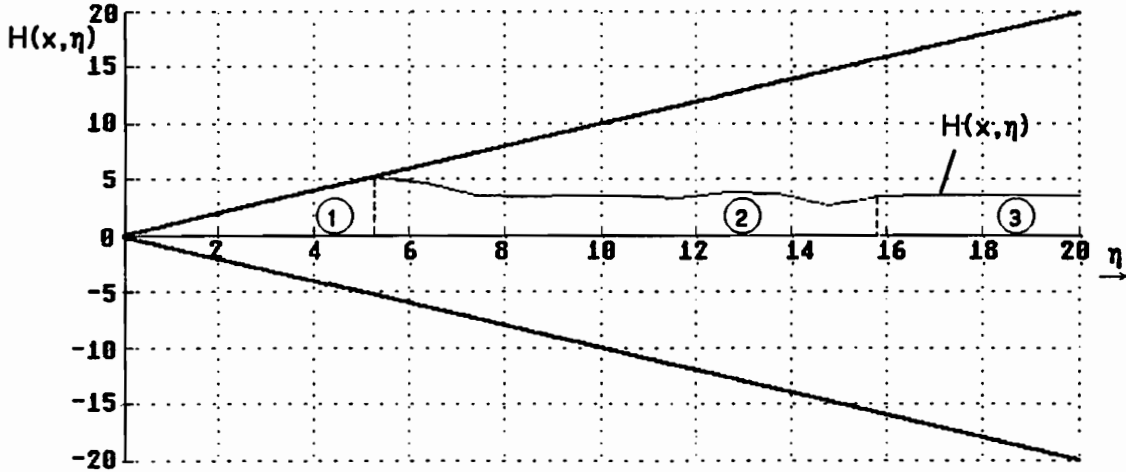
Nach der Gleichgewichtsiteration in jedem Zeitschritt der Simulationsberechnung sind die Verformungsinkremente bekannt und die Matrix der Empfindlichkeitsfunktionen kann, nach dem für einen Matrixkoeffizienten angegebenen Schema in Gl. 5.3.4.34, rekursiv berechnet werden. Zur Klarstellung wird noch einmal darauf hingewiesen, daß aufgrund der digitalen Simulation als gewählter Strukturberechnungsmethode, nur Zustandsänderungen zu diskreten Zeitpunkten betrachtet werden. Um mit diesen Beziehungen eine Systemidentifikation durchführen zu können, muß eine geeignete Systemformulierung gefunden werden, in der die Empfindlichkeitsfunktionen zur Parameterschätzung verwendet werden können. Diese Formulierung wurde in Kapitel 4 abgeleitet.



a)



b)



c)

Bild 5.11: Verformungszustände des Masing-Elementes, a) nach einer Auslenkung, die die bisherige Lastgeschichte "löscht", b) und c) spätere Zustände während eines Abklingvorgangs. Die Ziffern 1-3 kennzeichnen die Bereiche: 1 - momentan gleitend, 2 - momentan elastisch, 3 - bis zur momentanen Verformung immer elastisch.



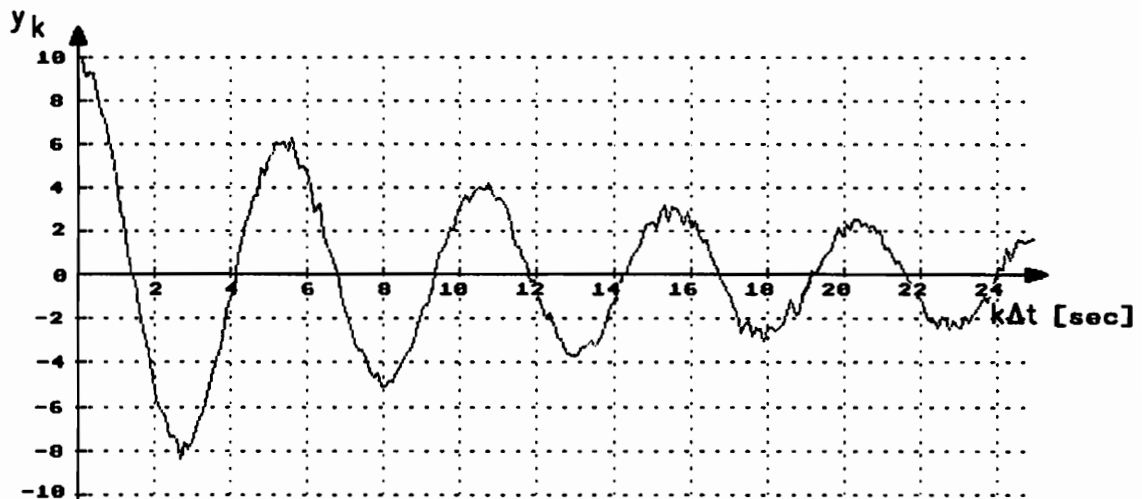
## 6. Anwendungen des Rückführmodells

### Beispiel 1: Masing-Element mit exponentiell verteilten Haftkräften

Für die Diskussion der Eigenschaften des entwickelten Identifikationsverfahrens und den Vergleich der verschiedenen Varianten wird zunächst eine einfache Simulation eines nichtlinearen Mechanismus, der durch zwei Parameter bestimmt ist, gewählt. Eine mechanische Struktur, deren Gestalt und physikalische Eigenschaften aufgrund einer modalen Einführung des Mechanismus nicht näher beschrieben werden muß, wird im ersten Mode durch ein Masing-Element mit exponentiell verteilten Haftkräften gedämpft (s. Kap. 5.3.4). Die simulierten Meßwerte einer Ausgangsgröße werden von normalverteiltem Rauschen überlagert.

Modellparameter:

Modalgrößen:	Eigenfrequenz	$\omega_0 = 1.00 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
	Eigenvektorkomponente	$\varphi_A = 0.0312$
Masing-Element:	Verteilungsparameter	$\alpha = 10.0$
	Federsteifigkeit	$k_1 = 1.0 \quad (\nu = 1.0)$
	Diskretisierungsintervall	$\eta_0 = 1.0$
		$\Delta\eta = 0.05$



*Bild 6.1: Modellierung verteilter trockener Reibung als modale Dämpfung mit einem Masing-Element: Zeitverlauf der Verschiebung eines Systemknotens. Zunächst wird eine transiente Schwingung untersucht, um die Mitschätzung der Anfangswerte mit dem Schätzverfahren mit kombinierter Kalman-Filterung vergleichen zu können.*

Anfangswerte  $q_{10} = 0.312 \hat{=} y_0 = 10.0 ; \dot{q}_{10} = 0.0$   
 Varianz des Meßrauschens  $\sigma_v^2 = 0.25$   
 Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.10 \text{ sec, } 100 \text{ Meßwerte}$

Die Parameter des Masing-Elements werden für die Identifikation mit dem Rückführmodell vorgeschätzt und mit einem Newtonverfahren iterativ verbessert.

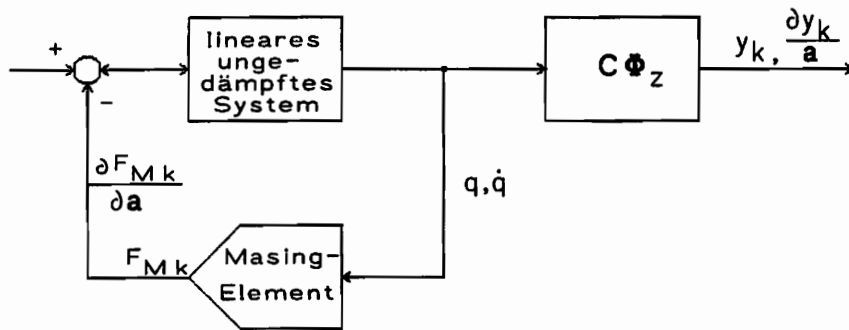


Bild 6.2: Unterteilung des nichtlinearen Systems.

Zunächst wird die Konvergenz des Verfahrens untersucht, wenn die Anfangsbedingungen  $q_0$  und  $\dot{q}_0$  als bekannt vorausgesetzt und somit lediglich die beiden Parameter  $\alpha$  und  $k_1$  des Masing-Elementes geschätzt werden. Die in der Schätzung zum Aufbau von Hessematrix und Gradient benötigten Empfindlichkeitsfunktionen der Ausgangsgröße bezüglich der Parameter unterscheiden sich um etwa eine Größenordnung (s. Bild 6.4 a und b). Die Schätzung wird daher durch eine Skalierung der Hessematrix (Kap. 2.3.5) deutlich stabilisiert.

Aus Bild 6.3, das den Verlauf der Parameterfehler  $\epsilon_\alpha$  und  $\epsilon_k$  sowie den Ausgangsfehler  $\epsilon_r$  während der Iteration zeigt, kann die rasche Konvergenz der Schätzung abgelesen werden.

$$\epsilon_\alpha = \frac{\alpha_i - \alpha_{ex}}{\alpha_{ex}} \times 100 [\%] ; \quad \epsilon_k = \frac{k_i - k_{ex}}{k_{ex}} \times 100 [\%]$$

$$\epsilon_r = \frac{\sum \epsilon_k^2}{\sum y_k^2} \times 100 [\%]$$

Die Startwerte der Parameter wurden bei allen folgenden Schätzungen gleich gewählt:

$$\epsilon_{\alpha 0} = +50 \% ; \quad \epsilon_{k 0} = -25 \%$$

Der verbleibende Parameterfehler ( $\epsilon_{\alpha 5} = -0,5 \%$ ,  $\epsilon_{k 5} = 0,6 \%$ ), der nach 5 Iterationen nicht weiter reduziert werden kann, ist auf das überlagerte Meßrauschen zurückzuführen, ohne das Rauschen konvergieren die Parameter gegen die exakten Werte.

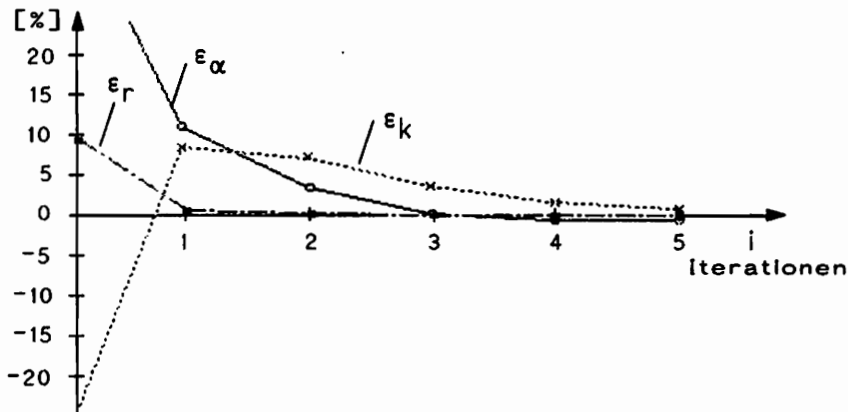
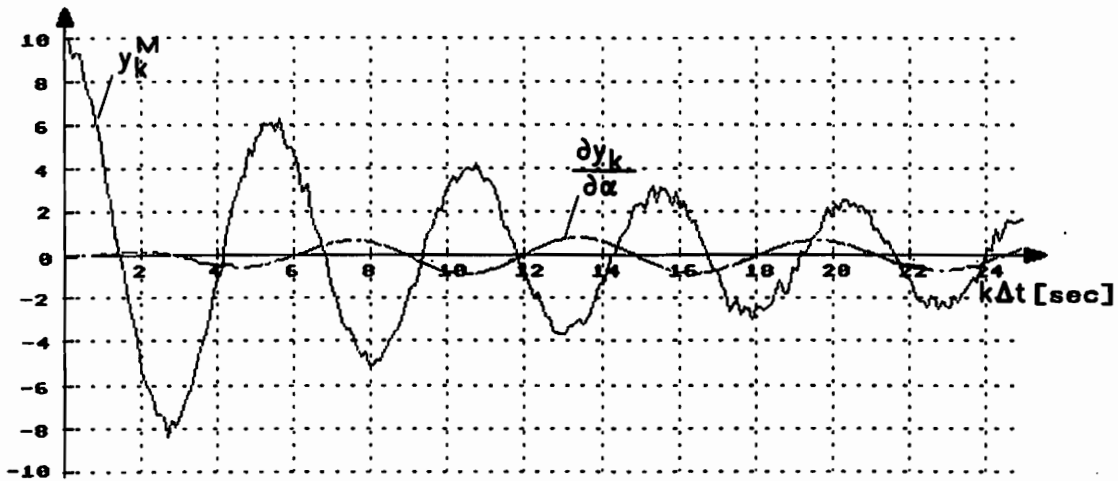


Bild 6.3: Verlauf der Parameterfehler und des Ausgangsfehlers während der iterativen Schätzung.  $\epsilon_{\alpha 5} = -0,5\%$ ,  $\epsilon_{k 5} = +0,6\%$ .

Mit der folgenden Schätzung wird das Konvergenzverhalten bei extrem unscharfen Anfangsbedingungen untersucht:

$$\epsilon_A = \frac{q_{0y} - q_{0ex}}{q_{0ex}} \times 100 [\%]; \quad \epsilon_{A0} = -150\%$$

Die Parameterschätzungen der ersten Iteration sind in solchen Fällen unbrauchbar, weil sie auf völlig willkürlichen Zustandstrajektorien basieren und zudem die Ausgangsgrößen bei transienten Schwingungen in der Regel empfindlicher bezüglich der Anfangsbedingungen sind als in Bezug auf die Parameter. In Kapitel 4 wurden die möglichen Wege diskutiert, trotzdem zu brauchbaren Parameterschätzungen zu gelangen. Die erste Möglichkeit ist die Einbeziehung der Anfangswerte in die Schätzung. Wegen der großen Anfangswertempfindlichkeit der Ausgänge kann es günstiger sein, in den ersten Iterationen nur die Anfangswerte zu verbessern und die Parameter erst hinzuzunehmen, wenn das Fehlermaß nicht weiter reduziert werden kann.



a)

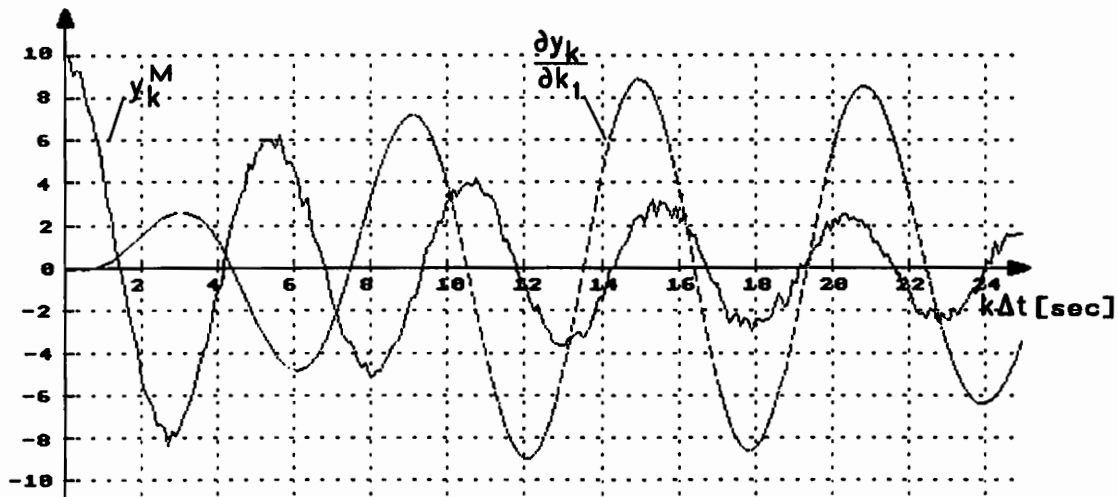


Bild 6.4: Empfindlichkeitsfunktionen der Ausgangsgröße bezüglich der Parameter  $\alpha$  und  $k_1$ .

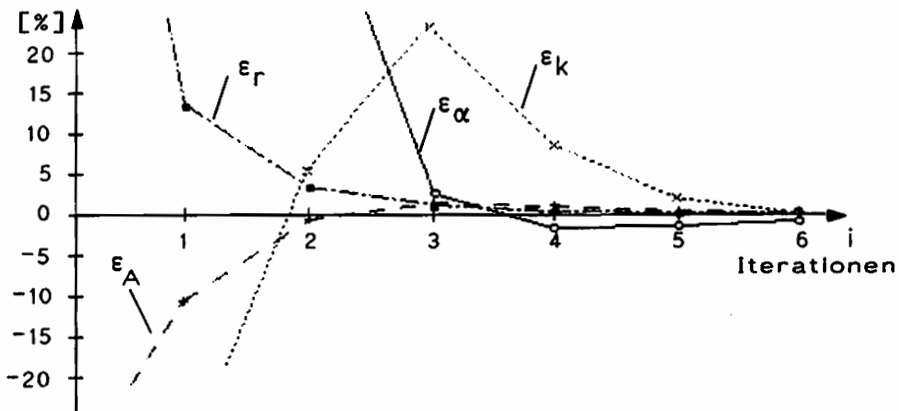


Bild 6.5: Fehlerverlauf bei unbekanntem Anfangsbedingungen.  $\epsilon_{\alpha 6} = -0.8\%$ ,  $\epsilon_{k 6} = -0.4\%$ ,  $\epsilon_{A 6} = -0.1\%$ .

Aus dem Fehlerverlauf in Bild 6.5 ist zu entnehmen, daß die Parameter erst nach wesentlicher Verbesserung der Anfangsverschiebung konvergieren, dann aber ähnlich genau geschätzt werden wie in der ersten Schätzung nach Bild 6.3. In der Regel vergrößert aber eine größere Parameteranzahl -wie hier durch die Anfangsbedingungen- die Varianz der Parameterschätzung, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde.

Die alternative Lösung des Parameterschätzproblems über eine kombinierte Zustandsschätzung mit einem Kalman-Filter wird im folgenden untersucht. Das Bild 6.7a zeigt den Verlauf der geschätzten und der vorgegebenen Ausgangsgröße bei fehlerhaften Parametern. Das Kalman-Filter korrigiert die falschen Anfangswerte schon nach wenigen Zeitschritten, so daß auf der Basis der geschätzten Zustandstrajektorie als Voraussetzung für die Parameterschätzung ein realistischer Verlauf der nichtlinearen Dämpfungskraft und der Empfindlichkeitsfunktion berechnet werden können. Aus dem Fehlerverlauf in Bild 6.6 ist die rasche Konvergenz der Parameter ablesbar. Die Berechnung der Schätzgleichungen wird erst nach dem Einschwingen des Filters gestartet, in diesem Beispiel nach den ersten 25 Meßwerten.

Es wäre voreilig, aus diesen guten Ergebnissen auf eine Überlegenheit der kombinierten Zustands- und Parameterschätzung für alle Anwendungsfälle zu schließen. Der Vorzug des Filters -die Erzielung korrekter Zustandstrajektorien als Grundlage einer korrekten Berechnung der Ausgangsgrößen des nichtlinearen Teilsystems- kann ebenso in einen Nachteil umschlagen, weil die gute Anpassung der Ausgangsgrößen mit einer reduzierten Empfindlichkeit bezüglich der Parameter verbunden ist. Das bedeutet, je besser das Filter imstande ist, gravierende Modellfehler zu kompensieren, desto geringer wirken sich die Parameteränderungen auf das Fehlermaß aus und desto größer ist folglich die Varianz der Schätzwerte.

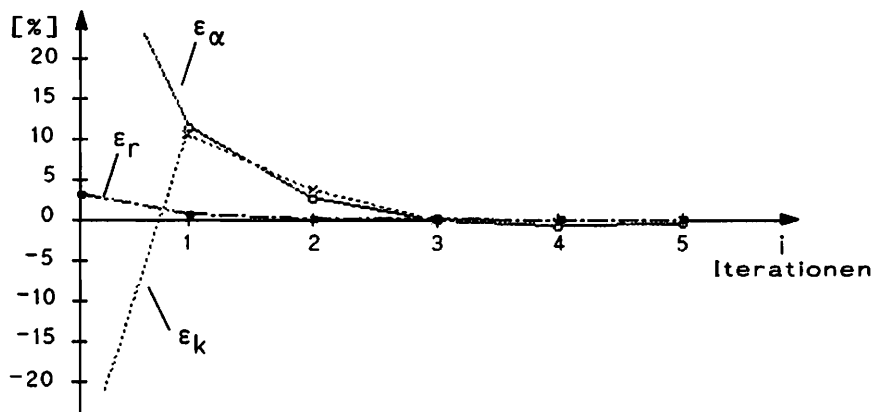
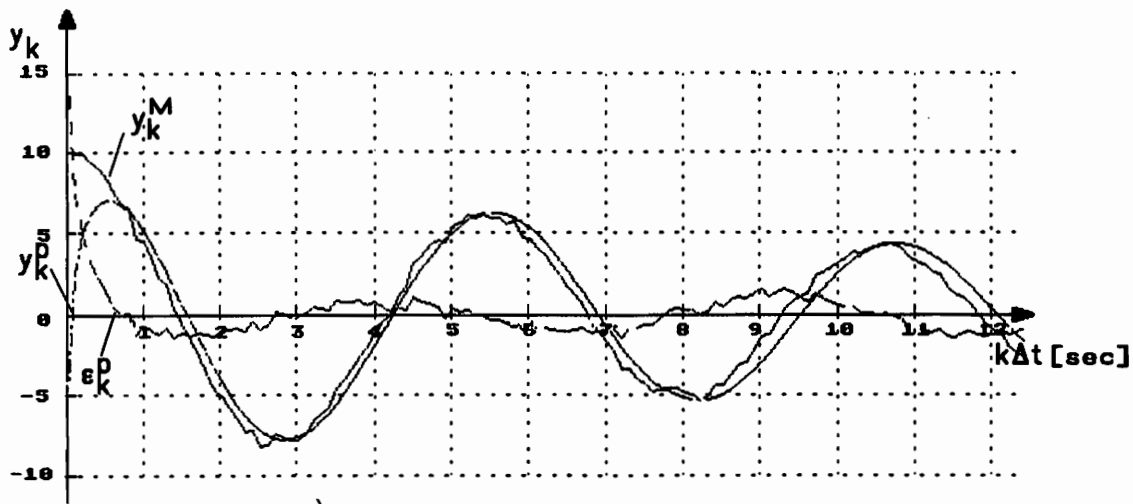
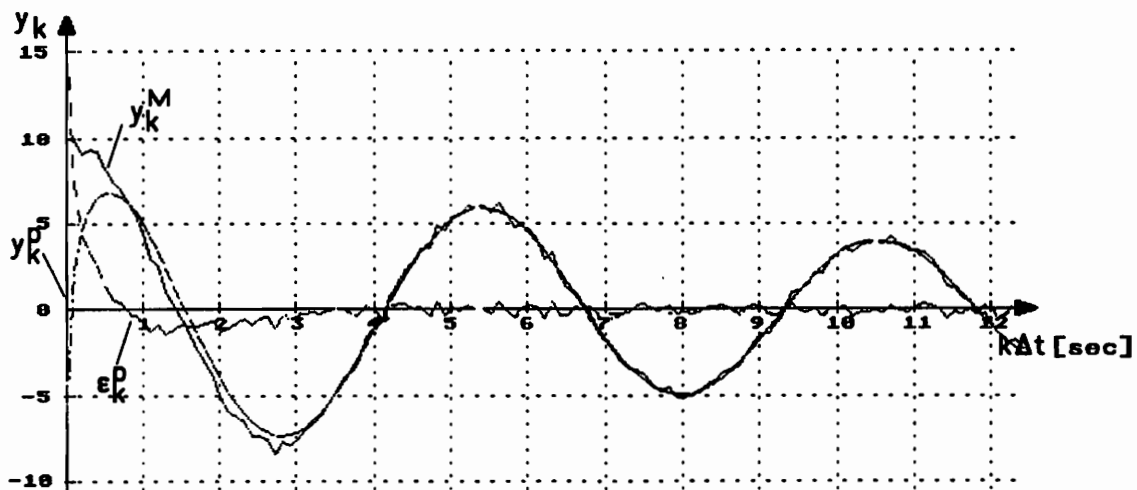


Bild 6.6: Fehlerverlauf bei der Schätzung mit Kalman-Filterung.

Ungünstig ist bei Schätzungen auf der Basis transientscher Schwingungen mit Zustandsschätzern auch der Verlust der notwendigen Einschwingphase der Filter, weil in dieser Phase die größten Ausgangsamplituden auftreten und damit bessere Signal-Rausch-Verhältnisse vorherrschen. Die Schätzung wird in den Bereich mit höheren Rauschanteilen verschoben. Das erklärt den, in der grafischen Darstellung nicht erkennbaren Unterschied der stationären Fehler von  $\epsilon_r = 0.24\%$  ohne Kalman-Filter gegenüber  $\epsilon_r = 0.47\%$  mit Filter. Das verwendete Fehlermaß ist im übrigen bei Verwendung eines Zustandsschätzers nur bedingt als ein Maß für die Güte der Parameterschätzung zu verwenden, weil die Annäherung der geschätzten Ausgangsgrößen an die Meßwerte durch entsprechende Wahl der Kovarianzmatrizen  $Q$  und  $R$  in weiten Grenzen beeinflusst werden kann. Aussagekräftig ist nur der Fehlerverlauf während der Iteration bei konstanten Kovarianzmatrizen.



a)



b)

Bild 6.7: Verlauf der gemessenen und der mittels Kalman-Filter geschätzten Ausgangsgröße, a) mit fehlerhaften Parametern des Masing-Elementes, b) mit geschätzten Parametern.

Die Schätzung kann mit einer modifizierten Bootstrap-Methode durchgeführt werden, indem nach der beschriebenen Parameterschätzung mit kombinierter Zustandsschätzung die Anfangswerte allein geschätzt werden, was meistens unproblematisch ist, wenn für die Parameter schon gute Näherungen vorliegen. Rückwärtsfilterungen, das heißt Schätzungen mit invers formulierten Filtern (mit Zeitumkehr), sind ebenfalls denkbar, wurden vom Autor in Verbindung mit dem Rückführungsmodell aber nicht erprobt.

Ein weitere Alternative wäre, das Kalman-Filter nach dem Einschwingen "abzuschalten", in der Vermutung, daß korrekte Zustandsgrößen vorliegen, vergleichbar mit der Schätzung unter der Annahme bekannter Anfangsbedingungen. Das Kalman-Filter liefert aber nicht die exakten Zustandsgrößen, sondern ihre Schätzungen mit minimaler Varianz. Wegen des großen Einflusses der Anfangsbedingungen auf die Zustandstrajektorien, den die zweite Schätzung (s.o.) gezeigt hat, führt diese Vorgehensweise in der Regel zu merklich verzerrten Parameterschätzungen.

Nun soll die Identifikation unter stochastischer Erregung untersucht werden, die für die Untersuchung realer Systeme besonders bedeutsam ist und die das Rückführungsmodell prinzipiell ermöglicht, wenn das Simulationsmodell durch Kopplung mit einem Kalman-Filter in der Lage ist, den nicht prognostizierbaren stochastischen Trajektorien des Systems zu folgen. Bild 6.8 zeigt den Zeitverlauf einer Systemantwort. Zunächst wird angenommen, daß der Zeitverlauf der Kraft bekannt ist, also mit einer regellosen deterministischen Kraft gerechnet wird.

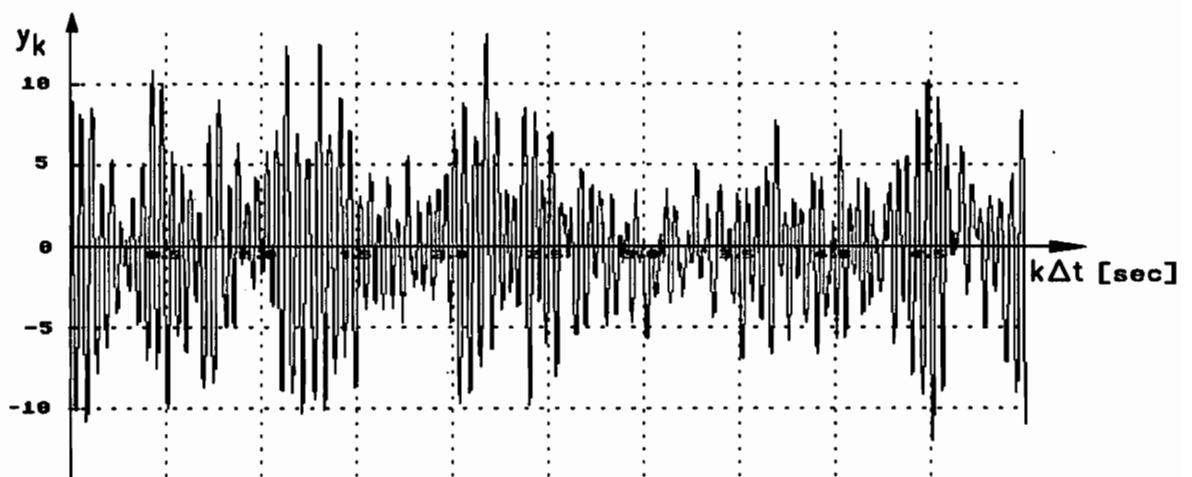


Bild 6.8: Zeitverlauf der Systemantwort unter stochastischer Erregung.

Die Parameter der Simulation werden geringfügig verändert:

Zeitschrittweite:  $\Delta t = 0.25$  sec

Einschwingphase:  $n_1 = 100$  Meßwerte

Schätzung:  $n_2 = 400$  "

In Bild 6.9 ist der Fehlerverlauf dargestellt. Die Parameter konvergieren, wie zu erwarten, sehr rasch. Eine Simulation ohne Kalman-Filter würde, über einen solch langen Zeitraum, auch bei bekannten Anfangsbedingungen zu schlechteren Ergebnissen führen, weil geringe Ungenauigkeiten in den Meßwerten der Erregung divergierende Trajektorien nach sich ziehen. Für die Identifikation unter Laborbedingungen ist die meßbare, regellose Erregung aufgrund der breitbandigen Anregung und beliebig langen Meßzeiten meistens optimal.

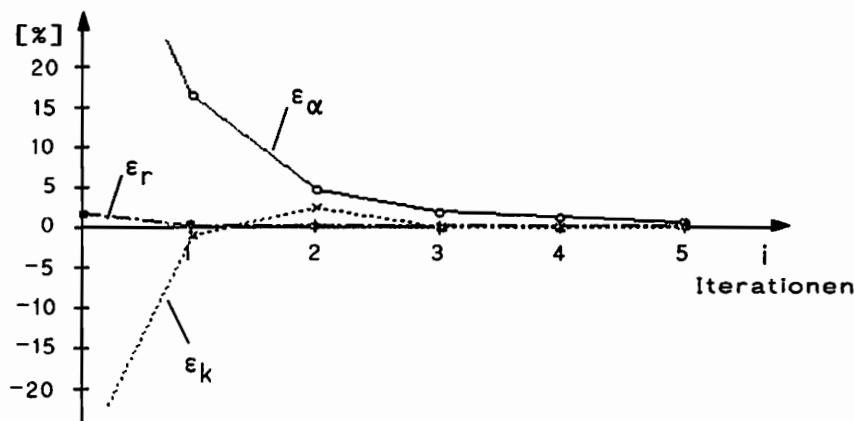


Bild 6.9: Fehlerverlauf während der Schätzung mit Kalman-Filterung und bekanntem Zeitverlauf der Erregung.

Die Annahme unbekannter Erregung, die den Bedingungen der Freifeldmessung entspricht, offenbart nun ein Dilemma der Kalman-Filterung, wenn sie als Unterstützung einer Parameterschätzung nichtlinearer Modelle dienen soll. Im Gegensatz zur Schätzung linearer Modelle, die wesentlich schwächere Anforderungen an das Erreichen der korrekten Zustandstrajektorien stellen, muß das Kalman-Filter hier, trotz unbekannter Steuergrößen, den tatsächlichen Systemtrajektorien so gut folgen, daß die nichtlinearen Funktionen und die Gradienten mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden können. Folgt das Filter aber zu gut, d.h. sind die Eingriffe des Filters zur Korrektur der Zustandsschätzwerte gegenüber dem Prädiktionsanteil dominant, ist aus den Ausgangsfehlern, die ja die Parameterschätzung steuern, die Systemdynamik nicht mehr erkennbar, d.h. die Modellausgangsgrößen werden zu geringempfindlich bezüglich der Schätzgrößen.



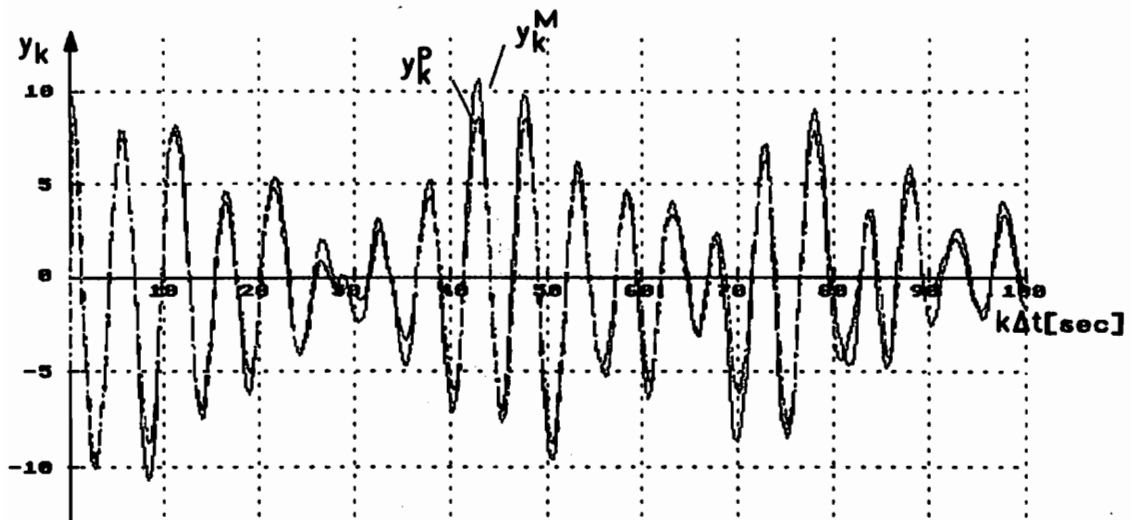


Bild 6.10: Meßwerte und Schätzwerte der Ausgangsgrößen bei unbekannter Erregung.

Dementsprechend sind die Schätzwerte auch auf der Basis wesentlich längerer Meßzeiten, es wurden 2000 Beobachtungswerte verwendet, erheblich ungenauer als bei den bisher vorgestellten Ergebnissen. Bei gleichen Vorschätzungen wie in den obigen Beispielen konnte nur eine grobe Annäherung erreicht werden:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha 5} &= 11.55 \% \\ \epsilon_{k 5} &= -17.34 \%\end{aligned}$$

Anzumerken ist aber, daß die Identifikation *linearer Ergänzungsmodelle*, beispielsweise von Steifigkeitsmatrizen, *unter unbekannter Erregung* zu guten Ergebnissen geführt hat.

In diesem Anwendungsbeispiel wurde gezeigt, daß mit dem Rückführmodell nichtlineare Mechanismen auch unter der Voraussetzung unbekannter Anfangsbedingungen und verrauschter Meßwerte identifiziert werden können. Die Zustandsgrößen, die zur Berechnung des Einflusses der unbekannt Komponenten zu jedem Zeitpunkt bekannt sein müssen, wurden entweder über eine, zur Parameterschätzung simultane Anfangswertschätzung bestimmt, sowie alternativ über eine Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter.

## Beispiel 2: Identifikation einer lokalen Nichtlinearität

Nichtlineares Verhalten mechanischer Strukturen kann durch große Verformungen (geometrische Nichtlinearität), nichtlineare Stoffgesetze (physikalische Nichtlinearität) oder durch nichtlineare Mechanismen in den Kontaktflächen an den Verbindungsstellen von Strukturelementen bedingt sein. Häufig verhält sich ein Material nur in räumlich sehr begrenzten Zonen hoher Beanspruchung nichtlinear, was beispielsweise in Rahmenstrukturen zur Ausbildung plastischer Gelenke führt. In solchen Fällen besitzt die Nichtlinearität, innerhalb einer sonst überwiegend linearen Struktur, lokalen Charakter. Ein weiteres Beispiel einer örtlich konzentrierten Nichtlinearität ist ein Riß innerhalb eines Bauteils, der sich während eines Schwingungsvorgangs öffnen und schließen kann und so die örtliche Steifigkeit während der Schwingung in weiten Grenzen verändert [s. Zastra 1986]. Sehr oft besitzen die Lagerungen von Strukturen nichtlineare Feder- und Dämpfungseigenschaften, wie die Gummifedern von Motorlagern, Gleitlager rotierender Wellen oder der Baugrund unter einem Tragwerk. Sie können teilweise ebenfalls den lokalen Nichtlinearitäten zugerechnet werden. Eine genauere Kenntnis der Eigenschaften dieser Elemente durch Systemidentifikation kann zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von Strukturen entscheidend sein.

In diesem Beispiel wird, exemplarisch für den wichtigen Fall lokaler Nichtlinearitäten, ein konzentriertes Reibelement innerhalb eines Balkenmodells identifiziert. Ein solches Reibelement könnte innerhalb eines Stabtragwerks, zur Modellierung der bei der Verformung auftretenden Reibmomente, in einer Schraubverbindung angeordnet sein und von den relativen Verdrehungen der verbundenen Stabenden gesteuert werden. Das Reibelement in diesem Beispiel simuliert vereinfacht die Reibungsdämpfung infolge Krümmung innerhalb eines Balkenelementes und ist von den Relativverdrehungen der Balkenendknoten abhängig:

$$F_M = H_i \text{sign} (\dot{x}_{k_{i+1}} - \dot{x}_{k_i})$$

$H_i$  - Haftmoment im Balkenelement  $i$

$\dot{x}_{k_i}$  - zeitliche Ableitung der Verdrehung am Knoten  $i$   
zum Zeitpunkt  $k$

Mit diesem Beispiel sollen noch einmal die wichtigsten Probleme verdeutlicht werden, die sich bei der nichtlinearen Identifikation stellen und es soll die Lösungsansätze aufzeigen, die das Rückführungsmodell, verglichen mit

möglichen Alternativansätzen, dafür bereitstellt. Ein nichtlinearer Mechanismus innerhalb einer Struktur kann oft durch ein Kraftgesetz beschrieben werden, in das Zustandsgrößen der Struktur –im vorliegenden Beispiel  $\dot{x}_{ki}$  und  $\dot{x}_{ki+1}$ – und Parameter –hier das Haftmoment  $H_i$ – eingehen. Wenn der Einfluß der zu identifizierenden Komponente auf die meßbaren Ausgangsgrößen  $y_k^M$  berechenbar sein soll, für eine Identifikation natürlich Voraussetzung, muß ein Strukturmodell existieren, daß sowohl die korrekten Systemzustandsgrößen zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  liefert als auch Ausgangsgrößen als Vergleichsgrößen zu den Meßwerten. Vergleichsgrößen im Zeitbereich kann das Modell nur dann liefern, wenn es mit dem realen beobachteten System synchronisiert ist und gegen Synchronisationsstörungen durch ungenau gemessene Systemeingangsgrößen oder kleinere Modellfehler, beides führt ohne Korrekturmaßnahmen zur Divergenz einer reinen Parallelrechnung, stabil ist. Das Rückführungsmodell beinhaltet eine Zustandsschätzung, die durch die Rückführung von Ausgangsfehlern eine Synchronisierung mit dem realen System bewirkt. Eine Zustandsschätzung ohne die hier vorgenommene Teilsystemaufspaltung würde, wie in Kapitel 3 angedeutet, immer eine sehr aufwendige nichtlineare Filterung erfordern. Auf die durch die modale Beschreibung möglichen rechentechnischen Erleichterungen bei Zeitintegration und Zustandsschätzung müßte ebenfalls verzichtet werden.

Zur Berechnung der Empfindlichkeitsbeziehung zwischen einem gesuchten Parameter und einer gemessenen Größe, in diesem Beispiel etwa der Empfindlichkeit  $d_{kji}$  einer am Knoten  $j$  gemessenen Verschiebung  $x_{kj}$  für den Einfluß des Haftmomentes  $H_i$

$$d_{kji} = \frac{\partial x_{kj}}{\partial H_i}$$

muß der zur Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen verwendete Integrationsalgorithmus herangezogen werden, weil eine analytische Empfindlichkeitsfunktion ebensowenig hergeleitet werden kann wie die analytische Lösung der Differentialgleichung. Im Rückführungsmodell wird zur Zeitintegration eine matrizielle Übertragungsbeziehung verwendet, die auch die Berechnung der Empfindlichkeiten, wie in Gl. 4.12 gezeigt, wesentlich vereinfacht. Eine solche Übertragungsbeziehung oder Differenzgleichung stellen natürlich auch die Gleichungen B1.11 des physikalischen zeitdiskreten Systems dar, und das Rückführungsmodell könnte ohne weiteres auf der Basis dieser Gleichungen, unter Beibehaltung aller weiteren Vorzüge, auch nicht-modal formuliert werden. Die Zustandsschätzung würde aber dann, auf der

Basis der gleichen Zahl von Meßgrößen, die Schätzung eines Vektors wesentlich höherer Dimension erfordern (Verschiebungen und Geschwindigkeiten aller Systemfreiheitsgrade zu jedem Zeitpunkt). Auf die a priori Information über Relationen zwischen Freiheitsgraden, die in den Eigenvektoren enthalten ist, wird dann verzichtet. Wenn beispielsweise nach der modalen Zerlegung einer gemessenen Ausgangsgröße sehr zuverlässig die Zahl der Moden bekannt ist, die einen betrachteten Schwingungsvorgang bestimmen, wird infolge der linearen Bindungen durch die entsprechenden Eigenvektoren die Zahl der möglichen Zustände, die die Freiheitsgrade annehmen können, wesentlich eingeschränkt und die Varianz der Zustandsschätzungen folglich verringert.

Die Verbindung eines linearen und eines nichtlinearen Systems erfordert allerdings eine sehr sorgfältige Wahl der angemessenen Zahl von Moden, weil mit dem nichtlinearen Mechanismus eine Modenkopplung verbunden ist. Eine lokale Nichtlinearität führt beispielsweise in jedem Zeitschritt auf einen physikalischen Steuervektor, der bei der modalen Transformation im allgemeinen Anteile, d.h. modale Anfachungs- oder Dämpfungskräfte, für alle Moden liefert. Durch die große Dämpfung höherer Moden realer Systeme bleibt die Zahl relevanter Eigenformen trotzdem begrenzt. Zu bedenken ist bei der Diskussion der modalen Reduktion auch, daß das reale mechanische Kontinuum eine unendliche Zahl von Moden besitzt, von denen jedes diskrete Modell nur eine sehr begrenzte Zahl nachzubilden imstande ist, die höheren Moden zudem mit geringer Genauigkeit, so daß eine durch modale Zerlegung von Meßwerten begründete Reduzierung der Freiheitsgrade zu keiner Verschlechterung des Modells führen muß.

In diesem Simulationsbeispiel wird angenommen, daß sowohl der Ort des gedämpften Balkenelements als auch der Betrag des Haftmomentes unbekannt sind. Für eine erste Schätzung wird die Kenntnis der Anfangsbedingungen vorausgesetzt und in einem zweiten Versuch werden die Zustandsgrößen wieder mitgeschätzt. Der Anfangszustand in physikalischen Koordinaten ist bei Verwendung einer reduzierten Modalmatrix im allgemeinen nicht exakt rekonstruierbar, weil der physikalische Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  durch eine abgebrochene modale Reihe  $\Phi \mathbf{q}_0^r$  approximiert wird:

$$\mathbf{x}_0 \approx \Phi \mathbf{q}_0^r \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_0^r = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0$$

$\mathbf{q}_0^r$  - reduzierter Vektor der modalen  
Anfangswerte

Die genaue Kenntnis des Anfangszustandes ist allerdings nur in seltenen Fällen bedeutsam. Für die Identifikation ist, soweit anstelle der Kalman-Filtrierung die Variante der zusätzlichen Anfangswertschätzung angewendet wird, nur die Kenntnis der für den Verlauf der Zustandstrajektorien wesentlichen modalen Anfangswerte wichtig.

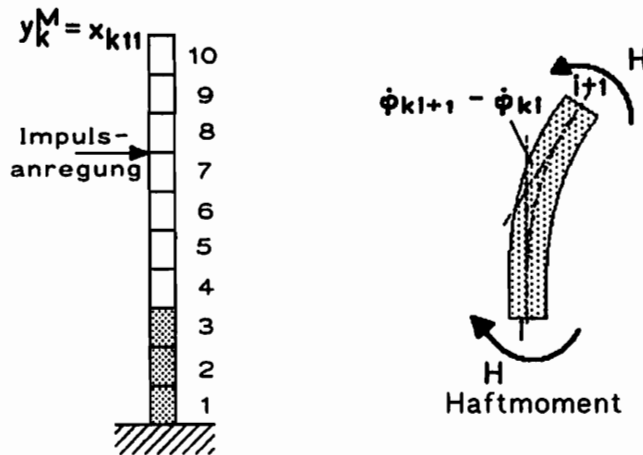


Bild 6.11: Diskretisierung der durch ein Reibelement gedämpften Struktur.

Das Simulationsmodell dient als Vorlauf zur Identifikation eines realen Tragwerks, daher wurden zur Modellierung, etwas vereinfacht, die Daten eines Industriekamins aus Stahlbeton verwendet:

Elastizitätsmodul	$E = 3.0 \times 10^{10}$	N/m <sup>2</sup>
Dichte	$\rho = 2.5 \times 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
Basis-Schaftdurchmesser	$d_u = 18.0$	m
Mündungsdurchmesser	$d_o = 10.0$	m
Wanddicke	$s = 0.4$	m
Schafthöhe	$h = 220.0$	m

Zur Schätzung werden die ersten 7 Eigenfrequenzen verwendet:

$f_1 = 0.27$ Hz	$f_4 = 11.16$ Hz	$f_7 = 31.81$ Hz
$f_2 = 1.35$ Hz	$f_5 = 16.53$ Hz	
$f_3 = 6.20$ Hz	$f_6 = 23.32$ Hz	

Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.0025$  sec

Aufgrund der begrenzten Information eines einzelnen Meßkanals können selbstverständlich nicht in allen Elementen Reibungsquellen angenommen werden, um den tatsächlichen Ort der Dämpfung zu ermitteln. Statt dessen

werden zur Schätzung gleichzeitig nur in den unteren drei Balkenelementen nichtlineare Dämpfer angesetzt. Für alle Reibelemente werden die gleichen Parameterstartwerte gewählt:

$$H_1 = H_2 = H_3 = 2.5 \times 10^5 \text{ Nm}$$

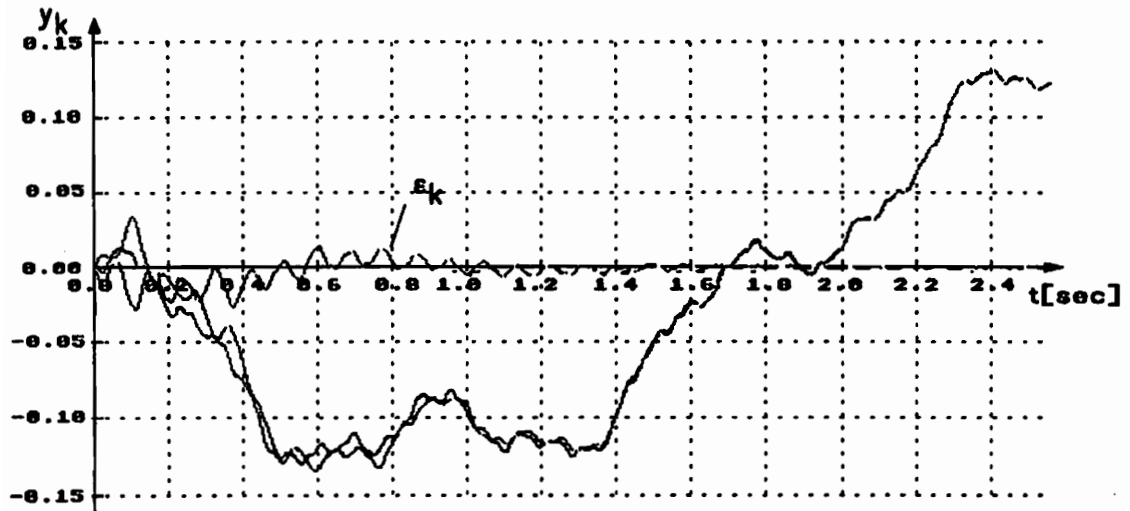
Weil nur ein Balkenelement tatsächlich ein Reibelement enthält, ist zu erwarten, daß zwei Parameter gegen Null streben, während die Schätzung des Haftmomentes des korrekten Elementes gegen den wahren Parameterwert konvergiert, zudem hier kein Meßrauschen angenommen wurde. In der Tabelle 6.1 sind die Schätzwerte der einzelnen Iterationsschritte wiedergegeben.

Iteration	$H_1$ $\times 10^5$ [Nm]	$H_2$ $\times 10^5$ [Nm]	$H_3$ $\times 10^5$ [Nm]
1	2.50	2.50	2.50
2	1.44	6.57	2.11
3	0.58	8.79	1.31
4	0.06	9.34	0.43
5	0.00	9.38	0.09

Tabelle 6.1: Schätzwerte der Haftmomente in den Iterationsschritten 1 bis 5.

In der zu schätzenden Struktur liegt das Reibelement im zweiten Balkenelement und besitzt ein Haftmoment von  $9.40 \times 10^5$  Nm. Die Beobachtung nur einer Ausgangsgröße genügt also in diesem Fall, um mit Hilfe des Rückführungsmodells den Einfluß eines lokalen nichtlinearen Elementes zu quantifizieren.

Werden auch die Anfangsbedingungen als unbekannt angenommen, bietet sich die Verwendung des Kalman-Filters zur Zustandsschätzung an, da die 7 in der numerischen Rechnung eingesetzten Moden sonst die Schätzung von 14 unbekanntem Anfangswerten von modalen Verschiebungen und Geschwindigkeiten erforderten. Das Bild 6.12 zeigt den Verlauf der "gemessenen" Verschiebung an Knoten 11 und die entsprechende Modellausgangsgröße. Der ebenfalls im Bild dargestellte Verlauf des Residuums beider Größen klingt mit fortschreitende Zeit rasch ab.



*Bild 6.12: Ausgangsgrößen des Simulationsmodells und des Schätzmodells mit Kalman-Filterung.*

Im Verlauf des Filterfehlers bildet sich in diesem Beispiel das nichtlineare Element so gering signifikant ab, daß eine Schätzung nur bei Ansatz jeweils eines Reibelementes erfolgreich ist. Wie das Bild 6.12 zeigt, ist der mit 1024 Simulationswerten der Schätzung zugrunde gelegte Zeitabschnitt relativ kurz, so daß vor allem der Einfluß des Reibelementes auf die Moden mit längeren Schwingungsperioden kaum ausgewertet werden kann. Nach 4 Iterationen wurde, nach gleichem Startwert wie in der ersten Schätzung, das Haftmoment mit einer Genauigkeit von  $\varepsilon_H = +3.4 \%$  ermittelt.

### **Beispiel 3: Dämpfung eines Stahlbetonbalkens durch verteilte Reibung**

Im Anhang A sind einige Bemerkungen zur Dämpfung von Stahlbetonteilen angeführt, sowie Ergebnisse aus Schwingungsversuchen mit Stahlbetonbalken. Es wird festgestellt, daß Stahlbetonkörper wesentlich durch trockene Reibung gedämpft werden. Die Quelle der Reibung ist dabei nicht eindeutig lokalisierbar, man muß von einer, sich über das ganze Volumen erstreckenden Reibung, mit einer örtlich unterschiedlichen Intensität der Reibungskräfte ausgehen. Die im Anhang erwähnte, von Dieterle [1981] vorgeschlagene Modellierung der Stahlbetondämpfung durch ein zusammengesetztes Dämpfungsmodell, also mit viskoser Dämpfung und trockener Reibung, ist ein erster Annäherungsschritt an die Realität, läßt aber verschiedene Fragen offen. Aus den oben genannten Gründen ist die Beschreibung der verteilten Reibung durch ein konzentriertes Reibelement unrealistisch. Zudem kann das Coulomb'sche Reibelement nicht die in den Versuchen ermittelten, zum Teil beträchtliche amplitudenabhängigen Eigenfrequenzänderungen nachbilden, die zwar teilweise aus dem Öffnen und Schließen der Betonrisse herrühren, teilweise aber auch in Zusammenhang mit den Dissipationsmechanismen stehen, wie in Kapitel 5.3 erläutert wird. Den Anstieg der Dämpfung mit der Amplitude bis zu einem Maximum und die anschließende langsame Verminderung des Dämpfungsmaßes, wie sie aus den Ergebnissen der Schwingungsversuche hervorgehen und das Dämpfungsverhalten im Gebrauchszustand, d.h. mit unvollständiger Ribbildung, charakterisieren, können mit dem zusammengesetzten Dämpfungsmodell ebenfalls nicht beschrieben werden.

Die Reibungsquellen besitzen, abhängig vom Ort, unterschiedlichen Einfluß auf das Schwingungsverhalten, der durch die Verteilungsfunktion eines Masing-Elementes abgebildet werden kann. Das Masing-Element berücksichtigt außerdem, daß Reibquellen existieren, deren Haftkräfte erst nach Überschreiten eines bestimmten Amplitudenniveaus erreicht werden und somit erst dann dissipativ wirksam werden, während gleichzeitig durch das "Losbrechen" des Reibelementes Steifigkeit abgebaut wird. Es wäre möglich, zur Modellierung der Stahlbetondämpfung Masing-Elemente auf der Ebene der Balkenelemente einzuführen und durch charakteristische Verformungsgrößen, etwa eine mittlere Krümmung, zu steuern. Für jedes Element wäre eine Verteilungsfunktion zu identifizieren, die den Einfluß der im Element verteilten Reibungsmechanismen auf den Element-Schnittlastvektor beschreiben würde. Diese Modellierung müßte aber, angesichts der Vielzahl der für das Strukturmodell eines realen Systems erforderlichen Elemente,



schon im Ansatz auf kleine Systeme beschränkt bleiben und besitzt daher keinen praktischen Wert. Erfolgversprechender ist in dieser Hinsicht die Einführung des Masing-Elementes auf modaler Ebene, weil sich die verteilte Reibung ebenso charakteristisch wie auf das einzelne Element, global auf die Schwingungen in einer Eigenform auswirkt. Auch wenn in diesem Ansatz das Maß der Kopplung von Moden, die durch nichtlineare Wirkungen immer zustande kommt, beachtet werden muß, ist er doch unmittelbar auf große Strukturen anwendbar. Im Zusammenhang mit der Identifikation mit dem Rückführungsmodell spricht zudem die Möglichkeit der empirischen Modellierung des linearen Vorwärtsmodells für diese Vorgehensweise, weil ein adäquates lineares physikalisches Zustandsraummodell im allgemeinen schwieriger zu erstellen ist, und unter Umständen zusätzliche Korrekturansätze, beispielsweise für Steifigkeits- oder Massenmatrizen, im Rückführteil benötigt, was die Identifikation natürlich kompliziert. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, sei noch einmal wiederholt: Wenn ein nichtlinearer Mechanismus auf Elementebene (oder auf der Ebene des Stoffgesetzes) eingeführt wird, ist zur Identifikation die Kenntnis der physikalischen Zustandsgrößen erforderlich, ähnlich wie bei lokalen Nichtlinearitäten, die das Vorwärtsmodell korrekt liefern muß, während bei modaler Beschreibung nur die äquivalenten Eigenfrequenzen durch Anpassung bestimmt werden müssen und die Kenntnis der Eigenvektorkomponenten am Ort der Aufnahme der Meßgrößen notwendig ist. Diese schwächeren Forderungen können auch bei großen Strukturen leicht erfüllt werden.

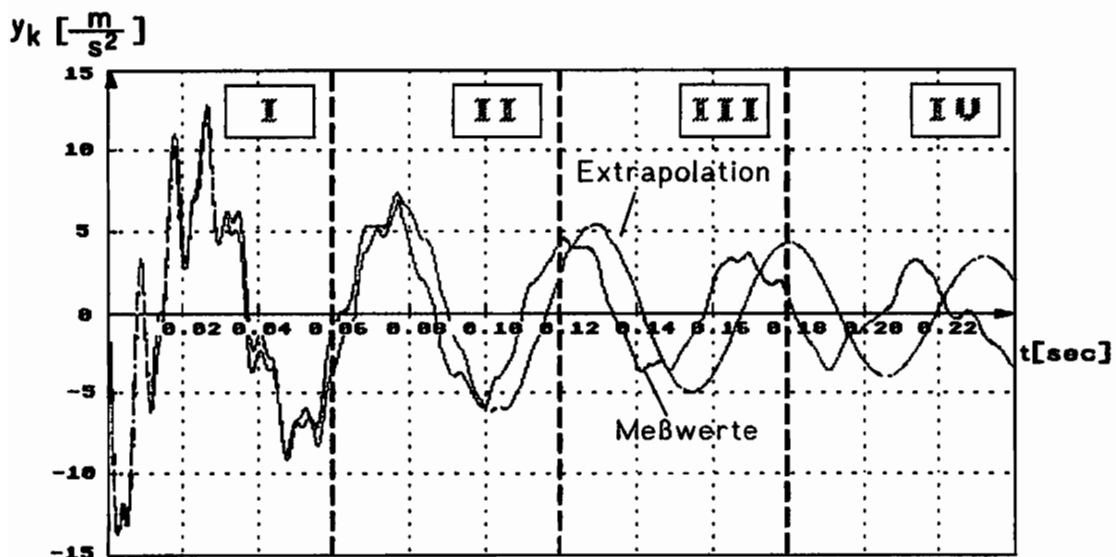


Bild 6.13: Abklingende Schwingungen eines impulserregten Stahlbetonbalkens. (Beschleunigung in der Balkenmitte). Zeitschrittweite  $\Delta t=0.25$  Millisekunden. Das im Abschnitt I angepaßte lineare Modell wird mit konstanten Parametern extrapoliert.

Für dieses Beispiel wird der gemessene Abklingvorgang eines Stahlbetonbalkens vom Typ AII aus der im Anhang A angegebenen Versuchsreihe herausgegriffen und in zwei Moden ein Masing-Element mit exponentiell verteilten Haftkräften (vgl. Gl. 5.3.4.20) mit zusätzlicher viskoser Dämpfung an die Meßwerte angepaßt. Die Vorschätzungen der Parameter können aus einer modalen Zerlegung kurzer Zeitabschnitte des Abklingvorgangs, unter Zuhilfenahme der Beziehungen der äquivalenten linearen Dämpfung nach Gl. 5.3.4.23, bestimmt werden:

$$\xi(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda - 2 + e^{-\lambda}(\lambda+2)}{\nu\lambda^2 + 2 - 2e^{-\lambda}(\lambda+1)} \quad (5.3.4.23)$$

i	Mode 1			Mode 3		
	f <sub>1</sub>	ξ <sub>1</sub>	q̂ <sub>1</sub>	f <sub>3</sub>	ξ <sub>3</sub>	q̂ <sub>3</sub> × 10 <sup>-2</sup>
I	20.11	3.8	0.157	115.94	4.9	0.323
II	20.87	4.6	0.108	116.44	2.8	0.044
III	21.42	4.7	0.073	120.53	1.7	0.020
IV	22.17	2.8	0.044	121.96	1.4	0.018

*Tabelle 6.2: Identifizierte äquivalente lineare Parameter in den Zeitabschnitten 1 bis 4. Die Dämpfungsmaße ξ<sub>i</sub> setzen sich aus einem konstanten, amplitudenunabhängigen viskosen Anteil ξ<sub>vi</sub> und einem äquivalent linearisierten Anteil ξ<sub>ei</sub> zusammen, ξ<sub>i</sub> = ξ<sub>vi</sub> + ξ<sub>ei</sub>.*

Wie wenig eine Extrapolation des im Abschnitt I angepaßten Modells über diesen Abschnitt hinaus die Meßwerte im weiteren Verlauf zu approximieren vermag, zeigt das Bild 6.13. Sowohl Dämpfung als auch Frequenz ändern sich infolge der Veränderung des Amplitudenniveaus. Die in den Abschnitten I bis IV identifizierten äquivalenten modalen Parameter sind in der Tabelle 6.2 aufgeführt.

Zur Berechnung des Amplitudenmaßes λ in Gl. 5.3.4.24 müssen die Parameter α<sub>i</sub> und ν<sub>i</sub> vorgeschätzt werden. Dazu wird geprüft, welche Parameter die Gl. 5.3.4.24 am besten erfüllen, wenn die stückweise identifizierten Dämpfungsmaße (Anteile ξ<sub>ei</sub>) nach Tabelle 6.2 eingesetzt werden:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \hat{q}_1 k_{11} \quad \alpha_i - \text{Parameter der Exponentialverteilung}$$

$$\lambda_3 = \alpha_3 \hat{q}_3 k_{13} \quad k_{1i} - \text{Federsteifigkeit des Masing-Elementes}$$

$$v_i = \frac{k_{0i}}{k_{1i}} \quad k_{0i} - \text{Steifigkeit des Schwingers (Modes) ohne Masing-Element (hier}=\omega_0^2)$$

$$\hat{q}_i - \text{modale Amplitude}$$

Für die  $\hat{q}_i$  sind die identifizierten modalen Anfangsamplituden der einzelnen Abschnitte einzusetzen. Für sehr kleine und sehr große Amplituden verschwindet der Dämpfungseinfluß des Masing-Elementes und die tatsächlich vorhandene Restdämpfung der Struktur muß durch eine zusätzliche viskose Dämpfung beschrieben werden, für die hier eine Vorschätzung von  $\xi_{vi}=1.4\%$  in beiden Moden gewählt wird, und von der angenommen wird, daß sie sich im ganzen Amplitudenbereich der Masing-Dämpfung überlagert. Die Differenzen aus identifizierten Dämpfungsmaßen und dem viskosen Anteil sind in Bild 6.15 eingetragen, um Vorschätzungen für die Steifigkeitsparameter  $v_i$  zu gewinnen. Dabei kann außerdem Bild 5.9 zu Hilfe genommen werden, in dem das Dämpfungsmaß  $\xi_i(\alpha_i, v_i)$  über dem Steifigkeitsverhältnis  $v_i$  und dem Amplitudenmaß  $\lambda_i$  aufgetragen ist. Folgende Vorschätzungen wurden nach diesem Schema ausgewählt:

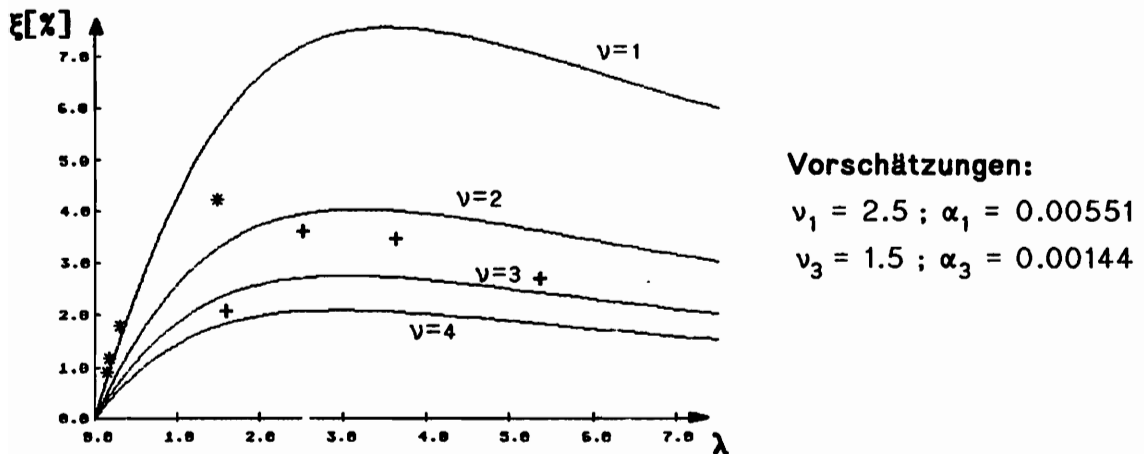


Bild 6.14: Äquivalente lineare Dämpfungsmaße für Steifigkeitsparameter  $v=1-4$  in Abhängigkeit vom Amplitudenmaß  $\lambda$  nach Gl. 5.3.4.23. Die Symbole markieren die identifizierten äquivalenten linearen Maße, abzüglich des geschätzten konstanten viskosen Anteils von  $\xi_{vi} = 1.4\%$ . (+) Mode 1, (\*) Mode 3.

Mit diesen Vorschätzungen wird eine Identifikation mit dem Rückführungsmodell gestartet. Die modalen Anfangswerte werden in einer Schätzung bestimmt, für die nur auf den Meßwerten des in Bild 6.13 markierten ersten

Abschnitts basiert, weil innerhalb eines kurzen Zeitabschnitts die Modellparameter gering signifikant sind, und der Modellfehler im wesentlichen durch die Anfangswerte bestimmt ist, insbesondere, weil in der vorherigen linearen Anpassung die Frequenzen des ersten Abschnittes sehr genau identifiziert wurden. Aus der weiteren Schätzung, zu der alle Meßwerte verwendet werden ( $n = 960$ ), können die Anfangswerte dann ausgespart bleiben. Das lineare Vorwärtsmodell wird durch die ersten 3 symmetrischen Moden (Mode 1, 3 und 5) beschrieben, wobei für die ersten beiden die im Abschnitt I identifizierten Frequenzen nach Tabelle 6.2 eingesetzt werden. Die Frequenzerhöhung mit sinkender Amplitude wird durch die zwei Masing-Elemente modelliert. Für Mode 5, der, weil er bereits im ersten Zeitabschnitt abklingt, durch kein Masing-Element gedämpft werden soll, wird zusätzlich eine konstante lineare Dämpfung eingesetzt, während die ersten Moden nur durch das Modell in der Rückführung (Viskosität + Masing-Element) gedämpft werden.

$$f_5 = 221.2 \text{ Hz}$$

$$\xi_5 = 2.5 \%$$

Das Ergebnis der iterativen Anpassung ist durch die Zeitverläufe der geschätzten und der gemessenen Beschleunigung in der Balkenmitte in Bild 6.15 dargestellt, wobei die Schätzung auf die folgenden Parameter führte:

$$\xi_{v1} = 1.76 \%; \quad \alpha_1 = 0.007785; \quad v_1 = 1.86$$

$$\xi_{v3} = 3.41 \%; \quad \alpha_3 = 0.000553; \quad v_3 = 1.22$$

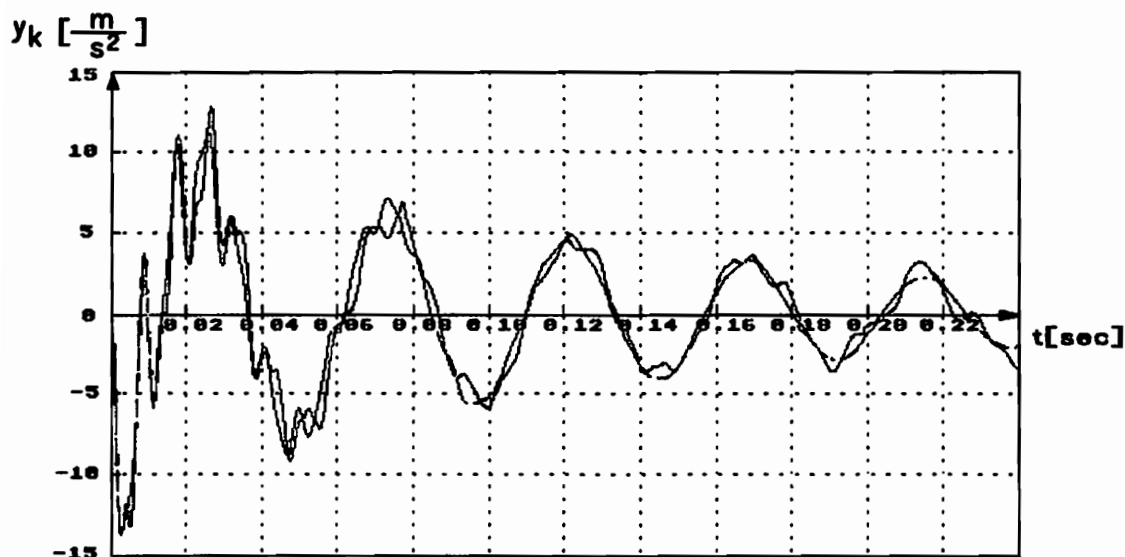


Bild 6.15: Modellanpassung mit Masing-Elementen. Relativer Fehler  $\epsilon_r = 5.4\%$ . (Zur Definition des Fehlers s. Beispiel 1).

Die gute Anpassung stützt die Annahme, daß Strukturen, deren Dissipationsmechanismen vorwiegend durch verteilte trockene Reibung charakterisiert sind, in guter Näherung durch, um viskose Dämpfungsanteile ergänzte, Masing-Modelle beschrieben werden können. Es wurde gezeigt, daß die Modelle, wenn sie auf modaler Ebene eingeführt werden, keinen großen Aufwand bei der numerischen Berechnung erfordern und daher auf für die praktische Anwendung interessant sind. Eine solch gute Anpassung wie in diesem Beispiel ist allerdings nicht in jedem Fall möglich, weil die Kopplung der Moden nicht immer vernachlässigt werden kann. Schwierig ist derzeit noch die Frage nach der korrekten Wahl der Modellparameter zu beantworten, die in dieser Anwendung die Systemidentifikation geliefert hat. Hier können nur durch zahlreiche Versuche Fortschritte erzielt werden. Zunächst sollte die hier gezeigte Modellierung durch Masing-Elemente als Vorschlag für eine verbesserte Beschreibung der Stahlbetondämpfung ohne den Einsatz komplizierter Stoffgesetze verstanden werden. Als wesentliches Mittel der Modellschätzung und -validierung wird mit dem Rückführungsmodell eine Methode vorgestellt, die die Erforschung realer Systeme wirksam unterstützen kann.

## **7. Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Identifikation strukturmechanischer Systeme vorgestellt, wobei besonderes Gewicht auf die Berücksichtigung der vielfältigen nichtlinearen Mechanismen in realen Strukturen gelegt wird, wie trockene Reibung, nichtlineare Steifigkeiten oder höheren Potenzen der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskräfte. Die Identifikationsmethode soll insbesondere die Aufdeckung physikalischer Zusammenhänge unterstützen, die durch experimentell oder analytisch abgeleitete parametrische Modellansätze beschrieben werden können. Der Zweck einer nichtlinearen Systemanalyse besteht häufig der Ermittlung von Verzweigungspunkten, Grenzzyklen oder anderer qualitativer Charakteristiken von Systemen unter extremen Bedingungen, die die Grenzen der Nutzbarkeit eines technischen Systems markieren. Dazu müssen seine Eigenschaften bekannt sein, die sich zuverlässig nur durch *Beobachtung* des Systemverhaltens im Betriebs- oder Gebrauchszustand oder unter Einwirkung spezieller Testsignale gewinnen lassen. Für die Identifikation steht daher die Untersuchung des quantitativen Einflusses nichtlinearer Komponenten auf das Systemverhalten in beschränkten Regionen des Zustandsraums, die durch die Umgebung der Trajektorien des linearisierten Systems gegeben sind, im Vordergrund.

Der entwickelte Ansatz beschreibt das reale System durch ein *lineares Zustandsmodell* mit *nichtlinearer Rückführung*. Das *lineare Teilmodell* wird empirisch, durch Identifikation eines äquivalenten linearen Modells, oder analytisch, durch eine Finite-Element-Modell, in das alle bekannten Daten der Struktur eingehen, modelliert. **Das Modell in der Rückführung enthält Ansätze für den unbekanntem, im allgemeinen nichtlinearen Teil des Gesamtsystems. Auf diesen Ansatz führte der Grundgedanke, nach den notwendigen Steuerungen des linearisierten Systemmodells zu fragen, die seine Ausgangsgrößen in eine größtmögliche Übereinstimmung mit den Meßgrößen bringen, um von diesen Steuerungen auf nichtlineare Systemeigenschaften schließen zu können.** Die Menge der Steuerungen muß aufgrund der Vielzahl möglicher Lösungen beschränkt sein. In der gewählten Form beschränken sie sich auf solche, die von einem Modell mit vorgegebener Struktur generiert werden können, wenn es selbst durch die Zustandsgrößen des linearen Teilmodells gesteuert wird. Die Zustandsgrößen des linearen Systems werden hierzu mit Hilfe eines Kalman-Filters geschätzt. Die Identifikation ist auf die Bestimmung der Parameter des nichtlinearen Teilmodells in der Rückführung begrenzt.

Zustandsschätzung und Parameterschätzung werden vereinfacht, vielfach auch erst ermöglicht, wenn das lineare System modal, mit Beschränkung auf die wesentlichen, einen konkreten Schwingungszustand kennzeichnenden Eigenformen, beschrieben werden kann. Voraussetzung dafür ist, daß die Zustandsgrößen trotz des nichtlinearen Systemverhaltens in einer reduzierten modalen Basis beschrieben werden können. In dieser Arbeit wird nur der Fall betrachtet, daß das lineare Modell im Vorwärtszweig des Gesamtsystems die modale Basis liefert und diese, weil auch die Parameter dieses Teilsystems bei der Identifikation unverändert bleiben, im ganzen Beobachtungszeitraum konstant ist. Die Zustandsschätzung kann dann modal, mit a priori bekannten Parametern durchgeführt werden.

In den dargestellten Anwendungen des entwickelten Ansatzes werden vorrangig simulierte oder im Experiment untersuchte Strukturen mit Reibungsdämpfung behandelt. Die Beispiele wurden so gewählt, daß die Simulationen und Schätzungen, ebenso wie die Meßdatenerfassung, noch auf einem Kleinrechner durchgeführt werden konnten. Auf eine Einschränkung der Anwendbarkeit der Methode auf kleine Systeme kann daraus nicht geschlossen werden.

Zahlreiche Strukturen in der Realität sind durch *verteilte Reibungsmechanismen* gekennzeichnet, das heißt, trockene Reibung findet an vielen, über die Struktur verteilten Punkten statt, wobei jeweils örtlich unterschiedliche Haft- und Gleitreibungskräfte auftreten. Diese Mechanismen können nicht mehr detailliert abgebildet werden, sondern müssen durch globale Beschreibungen, beispielsweise durch *Masing-Elemente*, erfaßt werden. Die Aufbereitung dieser Dämpfungs- und Steifigkeitsmodelle für eine Identifikation mit dem Rückführungsmodell wird in dieser Arbeit ebenfalls abgehandelt.

Für weitere Forschungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Identifikation strukturmechanischer Systeme ist das Augenmerk besonders auf die stochastischen Schwingungen zu richten, weil damit die -vielmals einzig durchführbare- Untersuchung nichtlinearer Systeme unter natürlichen Anregungen ermöglicht wird. In dieser Arbeit wurde die Thematik nur am Rande behandelt, da in diesem Zusammenhang das Problem optimaler Zustandsschätzung bei gleichzeitig genügend großer Parameterempfindlichkeit nicht befriedigend gelöst werden konnte. Die guten Ergebnisse mit transienten und erzwungenen Schwingungen, sowie der Identifikation linearer Teilmodelle in der Rückführung unter stochastischen Schwingungen, lassen aber Fortschritte auch in dieser Richtung erwarten.

## **8. Literatur**

- Ahlberendt, N. und Kempe, V.** (1984): *Analyse stochastischer Systeme* ; R. Oldenbourg Verlag München.
- Aoki, M.** (1987): *State Space Modelling of Time series*; Springer-Verlag Heidelberg.
- Aström, K.J.** (1980): Maximum Likelihood and Prediction Error Methods; Automatica 16, 551-574.
- Axelsson, O.** (1987): A generalized conjugate gradient, least square method; Numer. Meth. 51, 209-227.
- Badenhausen, K.** (1986): Identifikation der Modellparameter elastomechanischer Systeme aus Schwingungsversuchen; Diss. Kassel.
- Bandstra, J.P.** (1983): Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in continuous and discrete vibrating systems; Journ. Vibr., Acoust., Stress a. Rel. in Design 105, 382-392.
- Baruh, H. und Meirovitch, L.** (1985): Parameter identification in distributed systems; Journ. of Sound a. Vibr. 101(4), 551-564.
- Bathe, K.-J.** (1986): *Finite-Element-Methoden* ; Springer-Verlag Heidelberg.
- Beck, J.V. und Arnold, K.J.** (1977): *Parameter Estimation in Engineering and Science*; John Wiley & Sons New York.
- Belliveau, J.G.** (1976): Identification of viscous damping in structures from modal information; Journal of Appl. Mech. 43(2), 335-339.
- Beneveniste, A. und Chaure, C.** (1981): AR and ARMA identification algorithms of Levinson type: An innovation approach; IEEE Trans. on Autom. Control, AC-26(6), 1243-1261.
- Bert, C.W.** (1973): Material damping: An introductory review of math. models, measures and experimental techniques; Journ. of Sound and. Vibr. 29(2), 129-153.
- Billings, S.A.** (1980): Identification of nonlinear systems - A survey ; IEEE Proc. 127(6), 272-285.
- Billings, S.A. und Voon, W.S.F.** (1984): Least squares parameter estimation algorithms for nonlinear systems ; Int. Journal of System Science 15, 601-615.
- Blaquière, A.** (1966): *Nonlinear System Analysis*; Academic Press New York.
- v. Blaricum, M.L. und Mitra, R.** (1978): Problems and solutions associated with Prony's Method for processing transient data; IEEE Trans. on Antennas a. Prop. AP-26(1), 174-182.
- Box, G.E.P. und Jenkins, G.M.** (1976): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*; Holden-Day San Francisco.



- Brammer, K. und Siffling, G.** (1985): *Kalman-Bucy-Filter* ; R. Oldenbourg Verlag München.
- Bronowicki, A.J.** (1980): Structural damping in the time domain ; Conf. Dyn. Resp. of Struct., Atlanta.
- Busby, H.R., Nopporn, C. und Singh, R.** (1986): Experimental modal analysis of nonlinear systems: A feasibility study; Journ. of Sound and Vibr. 108(3), 415-427.
- Caughey, T.K.** (1960): Classical normal modes in damped linear dynamic system; Journ. Appl. Mech. 27, 269-271.
- Caughey, T.K.** (1986): On the Response of nonlinear oscillators to stochastic excitation; Prob. Eng. Mech. 1(1), 2-4.
- Cawley, P. und Rigner, L.G.** (1986): Rapid measurement of modal properties using FFT analyzers with random excitation; Journ. of Vib., Acoust., Stress a. Rel. in Des. 108(10), 394-398.
- Chang, T.P., Mochio, T. und Samaras, E.** (1986): Seismic response analysis of nonlinear structures; Prob. Eng. Mech. 1(3), 157-166.
- Clough, R.W. und Penzien, J.** (1975): *Dynamics of Structures* ; McGraw-Hill New York.
- Cottin, N.** (1987): Versuchsoptimierung für die parametrische Identifikation linearer elastomechanischer Systeme - Parameteranpassung des Rechenmodells; Tag. Hannover.
- Crandall, S.H.** (1970): The role of damping in vibration theory; Journ. of Sound and Vibr. 11(1), 3-18.
- Darwin, D. und Nmai, C.K.** (1986): Energy dissipation in RC beams under cyclic load; Journ. Struct. Eng. 112, 1829-1846.
- Davies, P. und Hammond, J.K.** (1984): A comparison of Fourier and parametric methods for structural system identification; Journ. Vib., Acoustics, Stress a. Rel. in Design 106, 40-48.
- Debchaudhury, Y.A.** (1985): Periodic response of yielding structures; Journ. of Eng. Mech. 111(8), 977-994.
- Diekman, K.** (1981): Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren; Diss. Bochum.
- Dieterle, R.** (1981): Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden Stahlbetonträgern in gerissenem und ungerissenem Zustand; Diss. Zürich.
- Dieterle, R. und Bachmann, H.** (1979): Versuche über den Einfluß der Ribbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken; ETH Zürich, Institut f. Baustatik und Konstr.
- Dowell, E.H.** (1983): The behavior of a linear, damped modal system with a nonlinear spring-mass-dry-friction damper system attached; Journ. of Sound and Vibr. 89(1), 65-84.

- Fasol, K.H. und Jörgl, H.P.** (1980): Principles of model building and identification; *Automatica* 16, 505-518.
- Flesch, R.** (1980): Das Dämpfungsverhalten schwingender Stahlbetontragwerke ; Diss Wien.
- Flügge, W.** (1967): *Viscoelasticity* ; Waltham Mass.
- Fogel, E. und Huang, Y.F.** (1982): On the value of information in system identification - bounded noise case; *Automatica* 18(2), 229-238.
- Gaul, L., Bohlen, S. und Kempfele, S.** (1985): Transient and forced oscillations of systems with constant hysteretic damping; *Mech. Res. Commun.* 12(4), 187-201.
- Gaul, L. und Bohlen, S.** (1987): Identification on nonlinear structural joint models and implementation in discretized structure models; 11th Bienn. Conf. Mech. Vib. and Noise, Boston.
- Gawronski, W. und Natke, H.G.** (1986): On ARMA models for vibrating systems; *Prob. Eng. Mech.* 1(3), 150-156.
- Geis, M., Schmidt, R. und Waller, H.** (1986): Schadensfrüherkennung an Großmaschinen durch Systemidentifikation; *BWK* 38(6).
- Gersch, W.** (1970): Estimation of the autoregressive part of a mixed AR-MA time series; *IEEE Trans. on Autom. Control* , 583-588.
- Gersch, W., Nielsen, N.N. und Akaike, H.** (1973): Maximum Likelihood estimation of structural parameters from random vibration data; *Journ. of Sound a. Vibr.* 31(3), 295-308.
- Gersch, W.** (1974): On the achievable accuracy of structural system parameter estimation; *Journ. of Sound a. Vibr.* 34(1), 63-79.
- Gersch, W. und Martinelli, F.** (1979): Estimation of structural system parameters from stationary and non-stationary ambient vibrations; *Journ. of Sound a. Vibr.* 65, 303-318.
- Goodwin, C.G. und Payne, R.L.** (1977): *Dynamic System Identification - Experiment Design and Data Analysis*; Academic Press New York.
- Goodwin, C.G. und Sin, K.S.** (1984): *Adaptive Filtering, Prediction and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey.
- Haber, R.** (1985): Nonlinearity tests for dynamic processes; *Proc. 7th IFAC Symp. on Syst. Param. Estimation, York.*, 409-414.
- Hagedorn, P.** (1978): *Nichtlineare Schwingungen* ; Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden.
- Hagedorn, P.** (1987): Nichtlinearitäten in der Schwingungstechnik: Einige Probleme und Lösungswege; Hannover.
- Hammerstein, A.** (1930): Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendung; *Acta Math.* 54, 117-176.

- Hamming, R.W.** (1987): *Digitale Filter* ; VCH-Verlag Weinheim .
- Hiller, M.** (1983): *Mechanische Systeme*; Springer-Verlag Heidelberg.
- Hillmer, P.** (1987): Berechnung von Stabtragwerken mit lokalen Nichtlinearitäten unter Verwendung der Laplace-Transformation; Diss. Bochum.
- Hippe, P und Wurmthaler, C.** (1985): *Zustandsregelung*, Springer-Verlag Heidelberg.
- Hoffmann, K.-H. und Sprekels, J.** (1985): On the identification of coefficients of elliptic problems by asymptotic regularization; Num. Funct. Analysis and Optim. 7, 157-177.
- Honig, M.L. und Messerschmidt, D.G.** (1984): *Adaptive Filters* , Kluwer Academic Publishers Boston.
- Hsu, C.S.** (1980): A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems; Journ. of Appl. Mech. 47, 931-939.
- Ibrahim, S.R.** (1985): Advances in the time domain modal identification and modelling of structures; 2. Int. Symp. on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Aachen.
- Isermann, R.** (1980): Practical aspects of process identification; Automatica 16, 575-587.
- Isermann, R.** (1988): *Identifikation dynamischer Systeme, Band I und II* ; Springer-Verlag Heidelberg.
- Iwan, W.D.** (1966): A distributed-element model for hysteresis and its steady-state response; Journ. of Appl. Mech. 893-900.
- Iwan, W.D. und Cifuentes, A.O.** (1986): A model for system identification of degrading structures; Earthquake Eng. a. Struct. Dyn. 14, 877-890.
- Iwan, W.D., Moser, M.A. und Paparizos, L.G.** (1987): The stochastic response of strongly nonlinear systems with Coulomb damping elements; IUTAM Symp. Innsbruck.
- Jakoby, W.** (1987): Rekursive Parameteridentifikationsalgorithmen für stochastische nichtlineare Systeme; VDI-Fortschrittberichte 8(139).
- Jayakumar, P. und Beck, J.L.** (1987): System identification using nonlinear structural models; Proc. of the Workshop in Lambrecht/Pfalz.
- Jeary, A.P.** (1986): Damping of tall buildings - a mechanism and a predictor; Earthquake Eng. a. Struct. Dyn. 14, 753-750.
- Jazwinski, A.H.** (1970): *Stochastic Processes and Filtering Theorie*; Academic Press New York.
- Kaltofen, V.** (1981): Probabilistische Sicherheitsanalyse von Bauwerken unter außergewöhnlicher Belastung; Diss. Bochum.
- Kay, S.M.** (1988): *Modern Spectral Estimation*; Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

- Kirshenboim, J. und Ewins, D.J.** (1984): A method for recognizing structural nonlinearities in steady state harmonic testing; Journ. of Vibr., Acoust., Stress and Rel. 106, 49-52.
- Köhne, M.** (1977): Zustandsbeobachter für Systeme mit verteilten Parametern - Theorie, Anwendung; VDI-Fortschrittberichte 8(26).
- Korenew, B.G.** (Herausg. 1953): Dynamik von Baukonstruktionen; VEB Verlag Technik Berlin.
- Kortmann, M. und Unbehauen, H.** (1987): Identification methods for nonlinear MISO-systems; Proc. IFAC Symp. on AC, München, 225-230.
- Kozin, F.** (1987): The method of statistical linearization for nonlinear stochastic vibrations; IUTAM Symp. Innsbruck 1987.
- Krawietz, A.** (1986): *Materialtheorie*; Springer Verlag Heidelberg.
- Krebs, V.** (1980): *Nichtlineare Filterung*; R. Oldenbourg Verlag München.
- Kreuzer, E.** (1987): *Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme*; Springer-Verlag Heidelberg.
- Lai, A.Y. und Hsieh, S.H.** (1987): Threshold modeling of nonlinear dynamic systems; 11th Bienn. Conf. Mech. Vib. and Noise, Boston.
- Lazan, B.J.** (1968): *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*; Pergamon Press Oxford.
- Lehmann, T.** (1979): *Elemente der Mechanik IV*; Vieweg Verlag Braunschweig.
- Lenk, H.** (1964): Über das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken; Diss. Stuttgart.
- Leonhardt, F.** (1976): *Vorlesungen über Massivbau*; Springer-Verlag Heidelberg.
- Li, S. und Dickinson, B.W.** (1988): Application of the Lattice Filter to robust estimation of AR and ARMA models; IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc. 36(4), 502-512.
- Lierse, J.** (1980): *Dehnungs- und Durchbiegungsmessungen an Massivbauwerken*; Werner Verlag Düsseldorf.
- Ljung, L.** (1979): Asymptotic behavior of the extended Kalman filter; IEEE AC-23, 770-783.
- Ljung, L.** (1981): Frequency domain versus time domain methods in system identification; Automatica 17, 71-86.
- Ljung, L.** (1987): *System Identification*; Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- Luz, E.** (1966): Gedämpfte Schwingungen kontinuierlicher Gebilde bei Annahme eines nichtlinearen viskoelastischen Stoffgesetzes; Diss. Stuttgart.
- Luz, E.** (1986): Bestimmung von Bauwerksparametern und -zuständen mit Hilfe von Schwingungsmessungen unter stochastischer Anregung; Materialprüfung 28(16), 173-177.
- Maffezoni, C. und Marchese, V.** (1981): Structural parameter estimation in power systems; Automatica 17, 263-279.

- Marko, H.** (1977): *Methoden der Systemtheorie* ; Springer-Verlag Heidelberg.
- Martin, R.S., Peters, G. und Wilkinson, J.H.** (1970): The QR-algorithm for real Hessenberg-matrices; Numer. Math. 14, 219-231.
- Masri, S.F., Bekey, G.A., Sassi, H. und Caughey, T.K.** (1980): Identification of a class of nonlinear systems; Conf. Dyn. Resp. of Structures, Atlanta.
- Masri, S.F. und Werner, S.D.** (1985): An evaluation of a class of practical optimization techniques for structural dynamics applications; Earthq. Eng. and Struct. Dynamics, 13, 635-649.
- Masri, S.F., Miller, R.K., Saud, A.F. und Caughey, T.K.** (1987): Mean-Square response of hysteretic oscillators und nonstationary random excitation; IU-TAM Symp. Innsbruck.
- Maybeck, P.S.** (1982): *Stochastic Models, Estimation and Control* ; Academic Press New York.
- Meyer, I.F.** (1988): Ein werkstoffgerechtes Schädigungsmodell und Stababschnittselement für Stahlbeton unter zyklischer nichtlinearer Beanspruchung; Diss. Bochum.
- Mohler, S.S.** (Editor, 1988): *Nonlinear Time Series and Signal Processing*; Springer-Verlag Heidelberg.
- Mottershead, J.E. und Stanway, R.** (1986): Identification of n-th power velocity damping; Journ. of Sound and Vibr. 105(2), 309-319.
- Nashif, A.D., Jones, D. und Henderson, J.** (1985): *Vibration Damping* ; John Wiley & Sons New York.
- Natke, H.G.** (1983): *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse* ; Vieweg Verlag Braunschweig.
- Natke, H.G.** (1987): Input and damping identification within the frequency domain; Int. Journ. of Analyt. a. Exp. Modal Analysis 2, 92-98.
- Natke, H.G.** (1988): Updating computational models in the frequency domain based on measured data - a survey; Prob. Eng. Mech. 3(1), 28-35.
- Nayfeh, A.H. und Mook, D.T.** (1979): *Nonlinear Oscillations* ; John Wiley & Sons.
- Neubert, H.K.** (1963): A simple model representing internal damping in solid materials; Aeronautic Quarterly 16, 187-210.
- Ottl, D.** (1981): Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung; VDI-Forschungsheft 603.
- Ottl, D.** (1985): Nichtlineare Dämpfung in Raumfahrtstrukturen; VDI-Fortschrittberichte 73.
- Papoulis, A.** (1984): *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* ; 2nd Edition, McGraw-Hill New York.
- Peleg, K. und Shpigler, S.** (1986): Dynamic matching of acceleration transducers; Journ. of Dynamic Syst., Meas. and Control 108(12), 306-313.

- Peterka, V.** (1981): Bayesian system identification; *Automatica* 17, 41-53.
- Poggio, A.J. und v. Blaricum, M.L.** (1978): Evaluation of a processing technique for transient data; *IEEE Transactions AP-26*, 165-173.
- Priestley, M.B.** (1981): *Spectral Analysis and Time Series*; Academic Press London.
- Putenpura, S. und Sinha, N.K.** (1986): Robust bootstrap methods for joint estimation of states and parameters of a linear system; *Journ. Dyn. Syst., Measurement and Control* 108, 255-263.
- Renker, G.** (1989): Identifikation von Tragwerkseigenschaften unter stochastischer Erregung; Tagung "Baudynamik", Innsbruck.
- Ruppert, M.** (1982): Reglersynthese mit Hilfe der mehrgliedrigen Evolutionsstrategie; Diss. Duisburg.
- Sandler, I.S.** (1978): On the uniqueness and stability of endochronic theories of material behavior; *Journ. Appl. Mech.* 45, 263-266.
- Schlittgen, R. und Streitberg, B.H.J.** (1987): *Zeitreihenanalyse*; R. Oldenbourg Verlag München.
- Schmidt, R.** (1988): Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen; Diss. Bochum.
- Schueller, G.I.** (1985): Current trends in systems reliability; 4th Int. Conf. Struct. Safety and. Reliab., Kobe, Japan.
- Schwartz, M. und Shaw, I.** (1975): *Signal Processing*; McGraw-Hill New York.
- Simon, M. und Tomlinson, G.R.** (1984): Use of the Hilbert Transform in modal analysis of linear and nonlinear systems; *Journ. of Sound a. Vibr.* 96(4), 421-436.
- Stoica, P. und Söderström, T.** (1982): Instrumental variable methods for identification of Hammerstein systems; *Int. Journ. Control* 35, 459-476.
- Strejc, V.** (1980): Least Squares parameter estimation; *Automatica* 16, 535-550.
- Sundararajan, N.** (1987): Experimental evaluation of flexible structure identification using Lattice Filters; *Automatica* 23(5), 571-579.
- Suzuki, K. und Nakashima, A.** (1983): Dampings estimation method using spectral analysis technique based on the autoregressive model fitting; *Bulletin JSME* 26(215), 832-838.
- Taoka, G.T.** (1980): Damping measurements of tall structures; *Conf. Dynamic Resp. of Structures*, Atlanta.
- Tassios, T.P. und Vintzeleou, E.N.** (1987): Concrete-to-concrete friction; *Journ. Struct. Eng.* 113, 822-849.

- Tauchnitz, T.** (1986): Zur Identifikation, Regelung und Zustandsschätzung nichtlinearer Mehrgrößensysteme mit Hilfe von Ansatzfunktionen; VDI-Fortschrittberichte 8(119).
- Teichen, K.H.** (1968): Über die innere Dämpfung von Beton; Diss. Stuttgart.
- Tomlinson, G.R.** (1980): An analysis of the distortion effects of Coulomb damping on the vector plots of lightly damped systems; Journ of Sound and Vibr. 71(3), 443-451.
- Twelmeier, H. und Schneefuß, J.** (1982): Zusammenstellung und Beurteilung von Meßverfahren zur Ermittlung der Beanspruchungen in Stahlbetonbauteilen; Deutscher Ausschuß f. Stahlbet. Heft 330.
- Unbehauen, H. und Rao, G.P.** (1987): *Identification of continuous Systems*; North-Holland System and Control Series 10.
- Unbehauen, H.** (1987): *Regelungstechnik, Bd. III*; Vieweg Verlag Braunschweig.
- Vajda, S., Valko, P. und Godfrey, K.R.** (1987): Direct and indirect least squares methods in continuous-time parameter estimation; Automatica 26(6), 707-718.
- Vanmarcke, E.H.** (1972): Properties of spectral moments with applications to random vibrations; Proc. of the ASCE, Journ. of the Eng. Mech. Div., 425-446.
- Wahba, G.** (1980): Parameter estimation in linear dynamic systems; IEEE AC-25, 235-238.
- Waller, H. und Krings, W.** (1975): *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*; Bibl. Inst. Mannheim.
- Walsh, G.R.** (1975): *Methods of Optimization*; John Wiley & Sons London.
- Wedig, W.** (1984): Parameterschätzungen dynamischer Systeme nach dem Prinzip der minimalen Anregungsenergie; Ing.-Archiv 54, 388-399.
- Wedig, W.** (1987): Stochastische Schwingungen - Simulation, Schätzung und Stabilität; ZAMM 67, T34-T42.
- Wellstead, P.E.** (1981): Non-Parametric methods of system identification; Automatica 17, 55-69.
- Wen, Y.K.L.** (1976): Method for random vibration of hysteretic systems; Journ. Eng. Div., Proc. ASCE 102, 249-263.
- Yang, Y.** (1985): A time domain identification technique: The oversized Eigenmatrix method (OEM); Journ. of Vibr., Acoust., Stress a. Rel. 107, 53-59.
- Zastrau, B.** (1986): Zur Anwendung von Kontaktelementen für die Berechnung des Schwingungsverhaltens gerissener Balken; ZAMM 66(4).
- Zielke, G.** (1970): Numerische Berechnung von benachbarten inversen Matrizen und linearen Gleichungssystemen; Vieweg-Verlag Braunschweig.

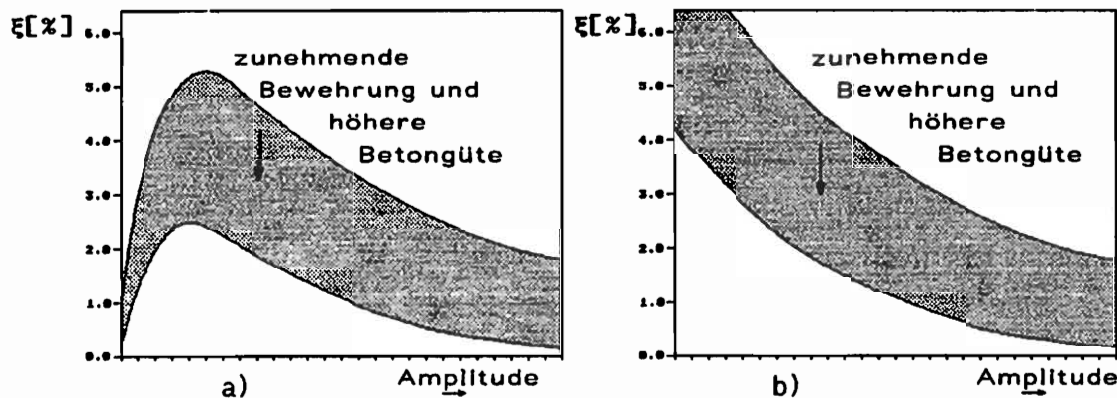
## ANHANG A

### A. Anmerkungen und Versuche zur Dämpfung von Stahlbeton

#### A.1. Dämpfungsmodelle für Stahlbetonkörper

Die vorliegende Arbeit hatte die Entwicklung experimenteller und numerischer Methoden als Beitrag zu einer verbesserten Erforschung von Dämpfungsmechanismen zum Ziel, wobei die *Dämpfungscharakteristik* von Stahlbetontragwerken von besonderem Interesse war. Weil hierzu die Untersuchung der Ursachen und parametrischen Abhängigkeiten der Dissipation in Stahlbetonkörpern von untergeordneter Bedeutung ist, wird im folgenden nur eine kurze Einführung in die Problematik der Stahlbetondämpfung gegeben und mit der Darstellung und Diskussion einiger Schwingungsversuche mit Stahlbetonbalken verbunden.

In allen in der Literatur dokumentierten Laborversuchen zur experimentellen Bestimmung von Dämpfungsgrößen stahlbewehrter Betonkörper wurden bei Verwendung linear-viskoser Dämpfungsmodelle große Streuungen der Modellparameter festgestellt. Die Aufmerksamkeit richtete sich in den Untersuchungen zunächst vorwiegend auf den Baustoff Beton, der aufgrund seiner Zusammensetzung als ursächlich für das relativ große Dämpfungsvermögen



*Bild A.1: Qualitativer Verlauf gemessener modaler Dämpfungsmaße von Stahlbetonbalken in Abhängigkeit von der Verformungsamplitude, a) Erstbelastung und Wiederbelastung nach geringen und mittleren Beanspruchungen, b) Wiederbelastung nach sehr hoher Beanspruchung bis zur Fließgrenze.*

von Stahlbetonbauten betrachtet wurde. Lenk stellte 1964 in seinen Ergebnissen aus Versuchen mit Biegebalken qualitativ den Zusammenhang zwischen der Rißbildung in den Probekörpern und der Veränderung der Dämpf-



fungskenngrößen heraus. Dieterle und Bachmann führten 1979 Dämpfungsuntersuchungen an Stahlbetonbalken gezielt unter dem Aspekt des Einflusses der Ribbildung durch, und ermittelten eine sehr charakteristische Abhängigkeit eines äquivalenten linearen Dämpfungsparameters von der Lastgeschichte und der Verformungsamplitude des Probekörpers (Bild A.1).

Andere Parameterabhängigkeiten, mit Ausnahme des Bewehrungsgehalts und in geringerem Maße der Betongüte, treten dem gegenüber in den Hintergrund. Qualitativ und quantitativ vergleichbare Ergebnisse wurden vom Autor in eigenen Versuchen erzielt, die am Ende dieses Kapitels dokumentiert sind.

Die Dämpfungscharakteristik in Bild A.1 a zeigt, daß eine erstmalige dynamische Belastung eines Stahlbetonkörpers, falls der Beton zu diesem Zeitpunkt nicht bereits nennenswerte Risse durch Schwinden, Temperaturlasten oder statische Vorlasten aufweist, zu einem Anstieg des Dämpfungsvermögens mit steigender Verformungsamplitude führt, im Fall freier Schwingungen etwa mit steigender Anfangsauslenkung oder -geschwindigkeit. Nach weiteren Steigerungen des Verformungsniveaus verringert sich die Dämpfung wieder, teilweise auf kleinere Werte als zuvor bei kleinsten Amplituden. In einer solchen Erstbelastungsphase bilden sich im Beton dort Risse, wo Zugspannungen die geringe Betonzugfestigkeit überschreiten. Wenn der Stahlbetonkörper nach sehr großen Verformungen erneut belastet wird, hat er sich infolge von Mikro- und Makroribbildungen gegenüber der Erstbelastung strukturell verändert und besitzt eine andere Dämpfungscharakteristik. Die Dämpfungen sind nun bei kleinsten Amplituden sehr hoch und fallen mit steigender Auslenkung monoton auf ähnlich kleine Werte wie in der ersten Phase ab, teilweise darunter (Bild A.1 b). Der Bewehrungsgrad beeinflusst das Dämpfungsvermögen ebenfalls, und zwar verringert sich die Dämpfung mit steigendem Längsbewehrungsgrad.

Die nachfolgenden Bemerkungen zu den Ursachen der Stahlbetondämpfung sind nach verschiedenen in der Literatur dokumentierten Ergebnissen zitiert, die auf Versuchen mit Zementstein, unbewehrtem und bewehrtem Beton basieren. Entsprechende Literaturzusammenstellungen finden sich in den Arbeiten von Teichen [1968] und Dieterle [1981]. In einer kurzen Zusammenfassung nach Dieterle lauten die Ergebnisse:

Das Dämpfungsvermögen von **Zementmörtelproben** ist nahezu frequenzunabhängig, und ebenso von der Beanspruchung unabhängig. Mit

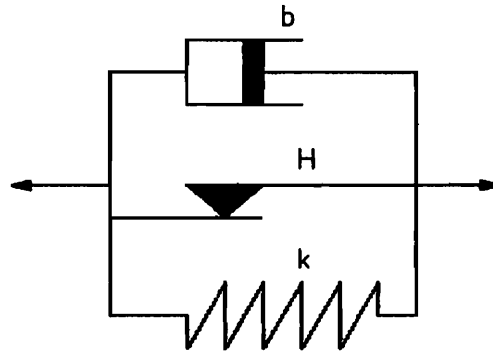
zunehmenden Wassergehalt steigt die Dämpfung deutlich an, bzw. sinkt sie infolge Austrocknung mit zunehmendem Probenalter zunächst stark, nach etwa vier Wochen nicht mehr signifikant.

Die Dämpfung **unbewehrter Betonproben** ist geringer als die Dämpfung des Mörtels allein. Das verminderte Dämpfungsvermögen resultiert aus einem, durch Hinzufügung der Zuschläge bedingten Rückgang des Porenanteils und einem daraus folgenden geringeren Wassergehalt. Eine Dämpfungsursache ist aus der Zusammensetzung des Betons zu erklären, der aus Zementmörtel und Kornzuschlägen mit typischen Abmessungen von 0 bis ungefähr 18 mm (Staudambeton bis 200 mm) besteht. Zwischen Zementmatrix und dem darin eingebetteten Korn können *Mikrorisse* entstehen, in denen bei Verformungen Energie durch trockene Reibung dissipiert werden kann.

Die oben erläuterte Dämpfungscharakteristik von **Stahlbetonkörpern** kann zum Teil durch bekannte Mechanismen der Interaktion von Beton und Stahlbewehrung erklärt werden. Die Risse in den Betonzugzonen öffnen sich bei einer Verformung und bleiben an den Rißufern normalspannungsfrei, während die Stahlstäbe stark gedehnt werden und einen beträchtlichen Anteil der Formänderungsenergie speichern. Zwischen Stahl und Beton muß daher in der Umgebung der Risse eine Relativbewegung stattfinden [Leonard 1979, Darwin und Nmai 1986], bei der ein vermutlich großer Teil der Energie dissipiert wird.

Die beschriebenen Einflüsse bestimmen das Dämpfungsverhalten von Stahlbetonbauteilen im Gebrauchszustand, also bei geringen und mittleren Belastungen. Bei hoher Belastung werden weitere Mechanismen wirksam, vorrangig die Plastifizierung des Stahls, die einen starken Anstieg der Dissipation bewirkt [s. Meyer 1988].

Dieterle hat aus den bekannten Dämpfungsursachen und den Versuchsergebnissen geschlossen, daß zur Beschreibung der Stahlbetondämpfung ein Dämpfungsmodell gewählt werden muß, das sowohl ein viskoses Dämpfungselement als auch ein Element zur Nachbildung der trockenen Reibung enthält, in der Literatur ist dieses Modell auch als "zusammengesetzte Dämpfung" bekannt (Bild A.2)



*Bild A.2: Von Dieterle vorgeschlagendes Dämpfungsmodell für Stahlbetonbauteile.*

Dieser Ansatz berücksichtigt erstmals die wesentliche Rolle der trockenen Reibung bei der Energiedissipation in Stahlbetonbauteilen und kann die gemessenen Dämpfungscharakteristik nach Bild A.1b qualitativ erklären, weil das zur Feder parallel angeordnete Reibelement einen hyperbelartigen Dämpfungsverlauf über der Amplitude besitzt (s.a. Gl. 5.3.3.4) und das viskose Element die Restdämpfung bei großer Verformung modelliert. Allerdings wird in der Realität die Größe der Reibungskräfte örtlich unterschiedlich sein und zudem von Lastzuständen abhängen, so daß die Beschreibung durch nur eine Reibungskraft möglicherweise eine zu große Vereinfachung darstellt. Masing-Elemente besitzen, kombiniert mit einem viskosen Dämpfungselement, wesentlich mehr Freiheitsgrade zur Anpassung an ein beobachtetes Verhalten und sind, wie schon gezeigt wurde, auch zur Systemidentifikation geeignet. Die Dämpfungscharakteristik der Masing-Modelle entspricht zudem der gemessenen Charakteristik nach Bild A.1a für Stahlbetonkörper im Gebrauchszustand.

## A.2 Schwingungsversuche mit Stahlbetonbalken

Das Ziel der nachfolgend vorgestellten Versuche war eine Untersuchung der Amplitudencharakteristik der Dämpfung von Stahlbetonkörpern, für die exemplarisch Balken identischer Abmessung und Betongüte gewählt wurden. Der Bewehrungsgrad wurde in vier Stufen variiert (s. Tabelle A.1) und von jedem Typ wurden zwei Balken getestet. Zur Ermittlung der Dämpfungskennwerte sollten die in dieser Arbeit vorgestellten Identifikationsmethoden erprobt werden, die prinzipiell auch zur Auswertung von Feldmessungen an großen Strukturen geeignet sind. Daher wurden zur Schwingungsanregung der Probekörper keine, bei großen Bauwerken nur schwer realisierbare, stationäre Erregungen oder Anfangsauslenkungen gewählt, sondern eine mehrere Eigenformen zugleich anregende Impulsbelastung aufgebracht.

Bei der Durchführung von Versuchen zur Ermittlung von Dämpfungskenngrößen besteht in besonderem Maße die Gefahr, daß die Ergebnisse durch nicht quantifizierbare Störeinflüsse verfälscht werden. Eine wesentliche Störungsquelle sind die Lagerungen der Probekörper. Es können sowohl ungewollte Reibkräfte oder -momente in den Lagern dem Körper Energie entziehen und so eine zu große Dämpfung im untersuchten Körper selbst vortäuschen, als auch, mit der gleichen Auswirkung auf die Meßergebnisse, Energie durch Abstrahlung über die Lager in angekoppelte Versuchsvorrichtungen und Fundamente entzogen werden.

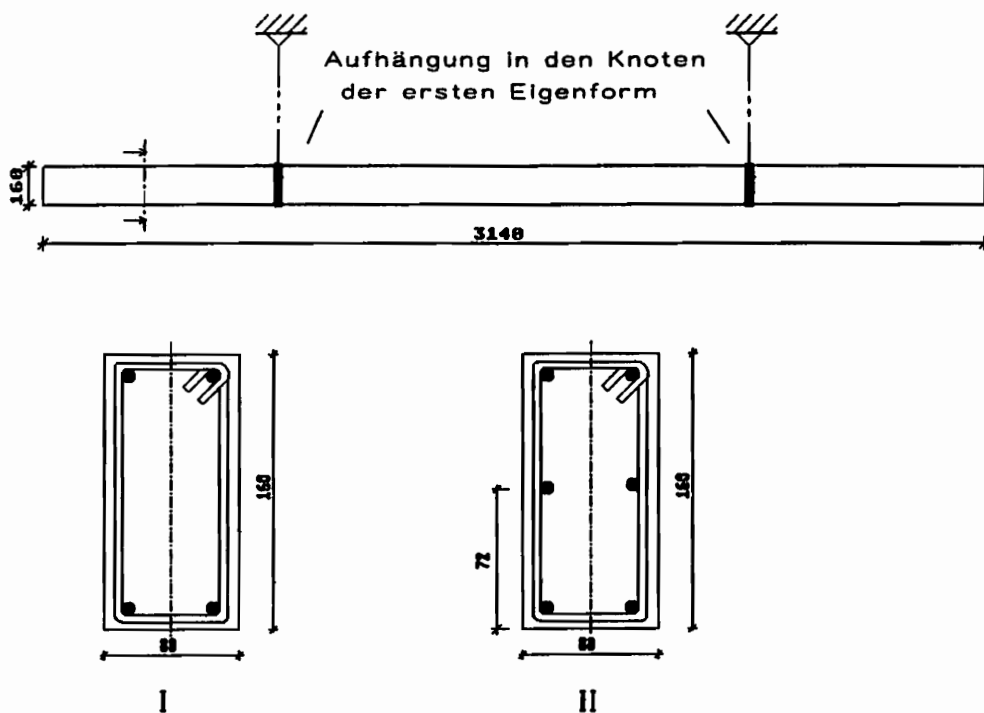


Bild A.3: Abmessungen und Bewehrung der Balkentypen I und II.

Zur Minimierung dieser Einflüsse wurden die Balken an dünnen Seilen in den Schwingungsknoten der ersten Eigenform aufgehängt und durch Stoßanregung horizontal zu transienten Biegeschwingungen um die "schwache" Balkenachse (Bild A.3) angeregt. Wie Vergleichsmessungen an einem Aluminiumbalken gleicher Länge -mit sehr geringer Materialdämpfung- zeigten, kann die Dämpfung durch Lagereinflüsse bei dieser Aufhängung vernachlässigt werden.

Typ	AI		AII		BI		BII	
Längsbewehrung	4 x $\Phi$ 6 mm		6 x $\Phi$ 6 mm		4 x $\Phi$ 8 mm		6 x $\Phi$ 8 mm	
Bügelbewehrung	53 Bügel $\Phi$ 4 mm		53 Bügel $\Phi$ 4 mm		53 Bügel $\Phi$ 4 mm		53 Bügel $\Phi$ 4 mm	
Würfel 20x20x20 cm Druckfestigkeit $\frac{N}{mm^2}$	30.4	28.9	35.9	30.7	33.5	29.1	31.3	29.1
Zylinder $\Phi$ 15 x 30 cm Druckfestigkeit $\frac{N}{mm^2}$	27.1	27.1	29.6	26.5	27.1	26.4	28.0	25.5
Biegezugprobe 70x15x15 cm Biegezugfest. $\frac{N}{mm^2}$	4.03	3.62	3.57	4.03	4.46	3.48	3.63	4.48

Tabelle A.1: Bewehrung der Balken und Ergebnisse der Prüfungen nach DIN 1048.

Die Intensität der Stoßanregung wurde in drei Schritten gesteigert, nach jeder höheren Belastung, die zur vermehrten Ribbildung in den Zugbereichen der Probekörper führte, wurde ein, der ersten Belastung vergleichbarer Impuls aufgebracht. Die Impulsaufbringung durch einen gummierten Metallhammer ( $m=4$  kg) in der Balkenmitte stellte sicher, daß außer den symmetrischen Eigenformen 1, 3 und 5 keine antimetrischen Formen angeregt wurden. Wegen des modalen Modellansatzes der Identifikation sollte die gegenseitige Beeinflussung der Moden möglichst gering gehalten werden. Zur Auswertung der transienten Schwingungsantworten diente die in Kapitel 3 beschriebene Methode der stückweisen Anpassung eines linearen Modells an die Beobachtungswerte innerhalb kurzer Zeitabschnitte, das, bezogen auf die Anfangsamplitude eines Schwingungsanteils innerhalb eines Zeitabschnitts, eine Aussage über die Abhängigkeit äquivalenter linearer Dämpfungs- und Frequenzmaße von der Amplitude gestattet. Als Bezugsgröße für die Darstellung der Amplitudenabhängigkeit wurde die Beschleunigungsantwort in der Balkenmitte gewählt. Diese identifizierten Parameter werden in den nachfolgenden Diagrammen für die vier getesteten Balkentypen und

die Eigenfrequenzen 1 und 3 dargestellt. Der ebenfalls angeregte 5. Mode klingt infolge der hohen Frequenz ( $f_3 \approx 400$  Hz) so rasch ab, daß ein nachweisbarer Anteil nur in den ersten Abschnitten enthalten ist. Die Länge der Zeitabschnitte, innerhalb derer ein lineares Modell angepaßt werden soll, muß einerseits genügend groß gewählt werden, um den Dämpfungseinfluß auf einen modalen Schwingungsanteil feststellen zu können. Abhängig von der Qualität der Meßwerte und der Anregung des betreffenden Modes kann als Mindestlänge eine halbe Schwingungsperiode angegeben werden. Zu große Zeitabschnitte gestatten dagegen keine Rückschlüsse mehr auf die Abhängigkeit der Parameter von der Amplitude. Eine optimale Wahl der Zeitfenster kann daher, bei dem Abstand der Eigenfrequenzen der hier untersuchten Balken, nur unter Berücksichtigung von zwei Moden getroffen werden. Natürlich müssen zur *Anpassung* alle in der Schwingungsantwort enthaltenen Moden berücksichtigt werden.

Mit dem Steifigkeitsverlust durch die Rißbildung in Zugspannungsbereichen des Betons ist eine deutliche Absenkung der Eigenfrequenzen verbunden. Diese Veränderung der Schwingungscharakteristik verdeutlicht der in Bild A.4 gezeigte Vergleich der Fourier-Transformierten der gemessenen Beschleunigungsantworten eines Balkens im ungerissenen und im gerissenen Zustand. Die Verbreiterung der Peaks an den Stellen der Eigenfrequenzen weist auf den Anstieg der Dämpfung hin. Während es sich in Bild A.4 um die Antworten eines Balkens vom Typ BII handelt, zeigt das Bild A.5 die entsprechenden Ergebnisse eines wesentlich schwächer bewehrten Balkens vom Typ AI.

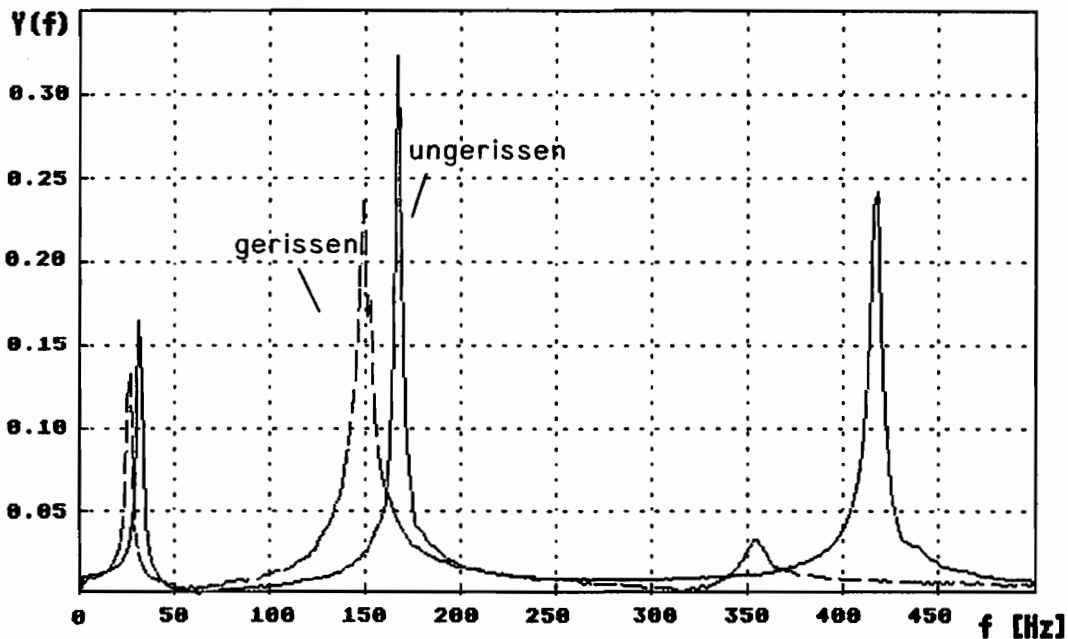


Bild A.4: Verschiebung der Balken-Eigenfrequenzen nach der Rißbildung infolge der Stoßerregung, Balkentyp BII. Die Antwort des gerissenen Balkens ist mit unterbrochener Linie dargestellt.

Der Vergleich der Antworten der gerissenen Balken zeigt, daß bei etwa gleicher Frequenzänderung der stärker bewehrte Balken noch sehr deutlich in drei Eigenformen schwingt, während die Spektraldarstellung der Antworten des schwach bewehrten Balkens etliche Zwischenpeaks besitzt und ein insgesamt höheres Rauschniveau zeigt.

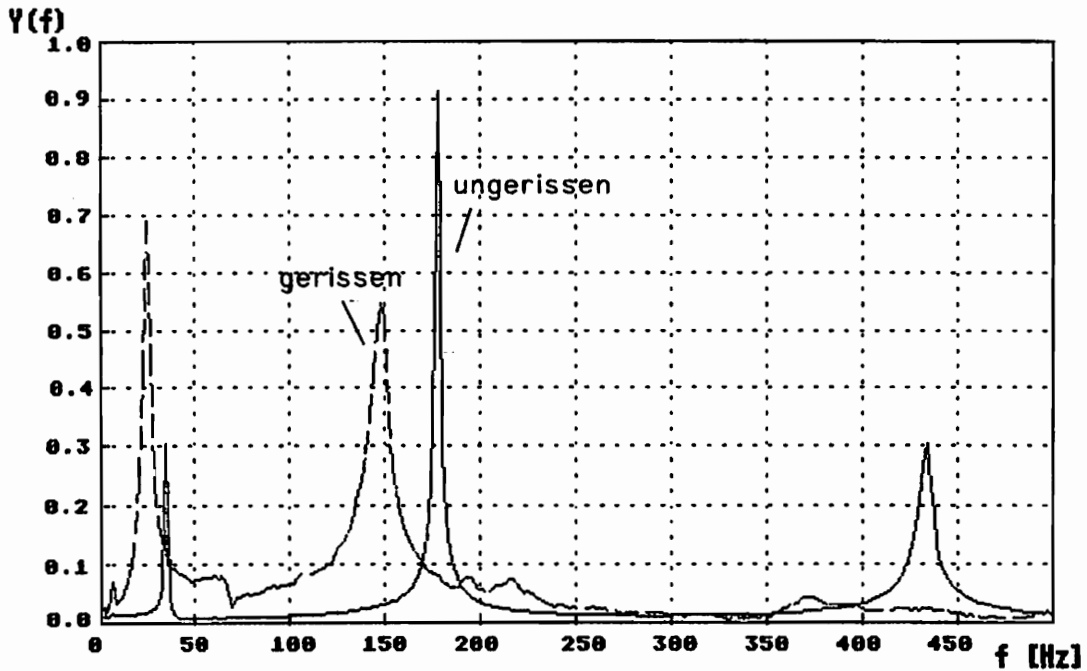


Bild A.5: Beträge der Fourier-Transformierten der Schwingungsantworten eines schwach bewehrten Stahlbetonbalkens vom Typ AI vor und nach der Ribbildung.

Die Charakteristiken der Amplitudenabhängigkeit von Dämpfung und Eigenfrequenz entsprechen bei einigen, besonders den stärker bewehrten Balken, in den Versuchen mit höherer Anfangserregung, der *Charakteristik eines Masing-Elementes*. Diese zeigt (vgl. Bilder 5.8 und 5.9) ein Ansteigen des äquivalenten linearen Dämpfungsmaßes mit wachsender Amplitude bis auf einen Maximalwert und im weiteren Verlauf einen hyperbelähnlichen Abfall mit asymptotischer Annäherung an den Wert  $\xi=0$ . Diese starke Abnahme der Dämpfung wird, wie die Versuchsergebnisse zeigen, aufgrund der in geringem Maße neben der Reibungsdämpfung immer vorhandenen viskosen Dämpfung, im realen Körper begrenzt. Im Beispiel 3, Kapitel 6, werden die Parameter eines Masing-Elementes mit zusätzlicher viskoser Dämpfung an die gemessene Charakteristik angepaßt. Bei den schwächer bewehrten Balken ist diese Anpassung nur in Ausnahmen möglich, weil der Verlauf der Dämpfung über der Amplitude weniger signifikant ist und die Parameter stärker streuen.

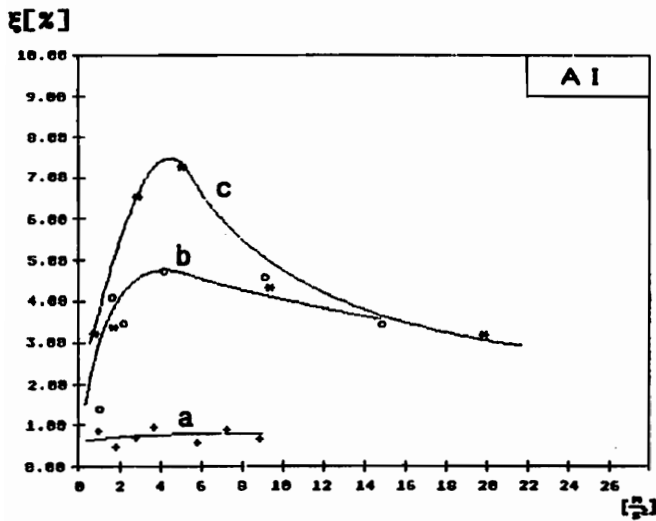


Bild A.6: Dämpfungsmaß, 1. Eigenfrequenz.

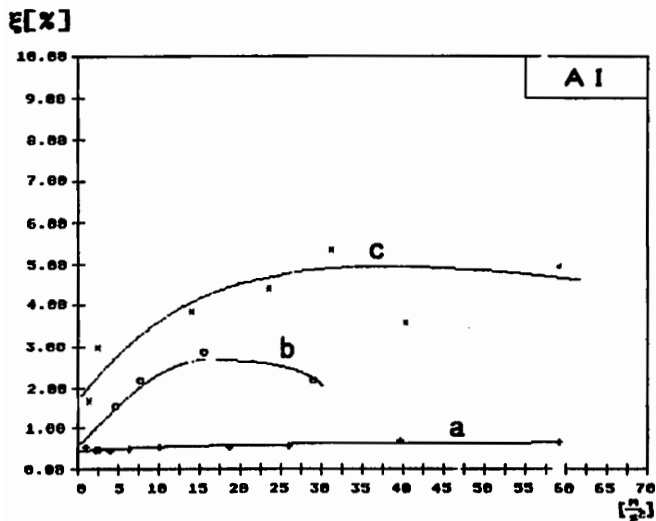


Bild A.7: Dämpfungsmaß, 3. Eigenfrequenz.

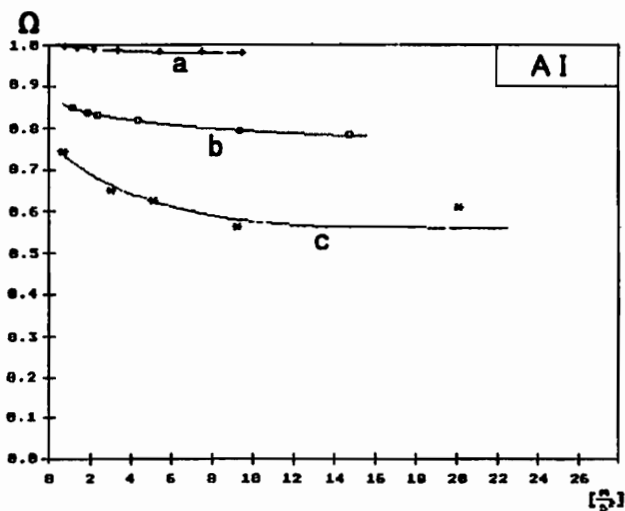


Bild A.8: Eigenfrequenzverhältnis (1).

$f_{01} = 30.5 \text{ Hz.}$

Das in den nebenstehenden Diagrammen über der Beschleunigungsamplitude aufgetragene äquivalente lineare Dämpfungsmaß  $\xi$  ist in Prozent der kritischen Dämpfung angegeben. Die Kennzeichnung des Balkentyps findet sich oben rechts in allen Diagrammen. Die Markierungen a-b-c der eingezeichneten Kurven entsprechen der Reihenfolge der Versuche, Die zur Kurve a gehörenden Ergebnisse (Marker +) wurden aus der ersten Balkenanregung gewonnen, b (o) aus der folgenden und c (\*) aus der letzten, also nach maximaler Ribbildung.

Zu jedem Balkentyp sind ausserdem Diagramme mit den Verhältnissen der amplitudenabhängigen identifizierten Eigenfrequenzen zur jeweiligen Eigenfrequenz des ungerissenen Balkens (Betrag s.Bildtitel) bei minimaler Schwingungsamplitude angegeben:

$$\Omega = \frac{f_j(\hat{x})}{f_{0j}}$$

Von jedem Balkentyp werden jeweils die Ergebnisse eines Balkens dargestellt.



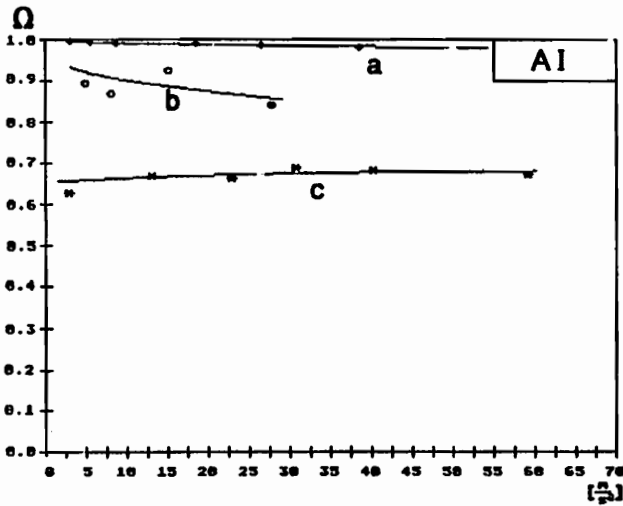


Bild A.9: Eigenfrequenzverhältnis (3).  
 $f_{03} = 175.5 \text{ Hz}$ .

Der Verlauf der Dämpfungsmaße bestätigt größtenteils die in Bild A.1 a angegebene Charakteristik. In einigen Fällen konnte keine genügende Impulsanregung aufgebracht werden, um den Amplitudenbereich mit abfallender Dämpfung zu erreichen.

Die Dämpfung der schwach bewehrten Balken steigt erwartungsgemäß auf die höchsten Werte (A I, A II). Ebenso ist der Steifigkeitsabfall der schwächer bewehrten Balken größer, was sich an der größeren Reduzierung der Eigenfrequenz zeigt.

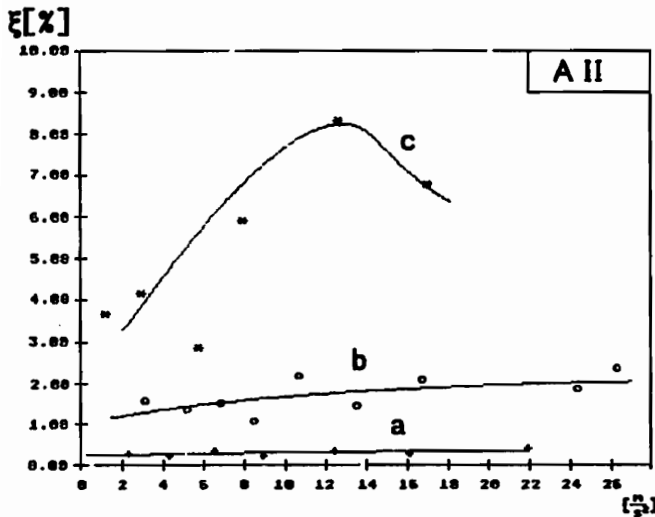


Bild A.10: Dämpfungsmaß, 1. Eigenfrequenz.

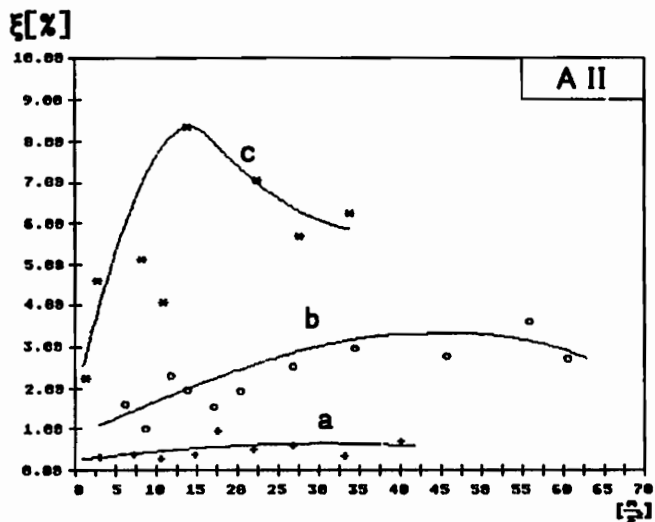


Bild A.11: Dämpfungsmaß, 3. Eigenfrequenz.

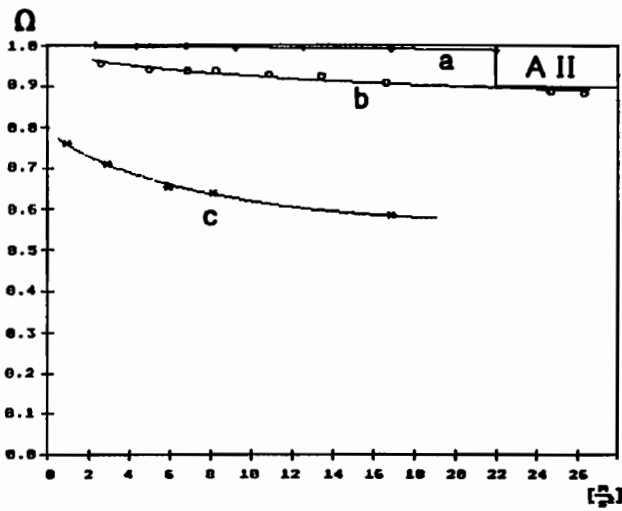


Bild A.12: Eigenfrequenzverhältnis (1).

$f_{01} = 32.5$  Hz.

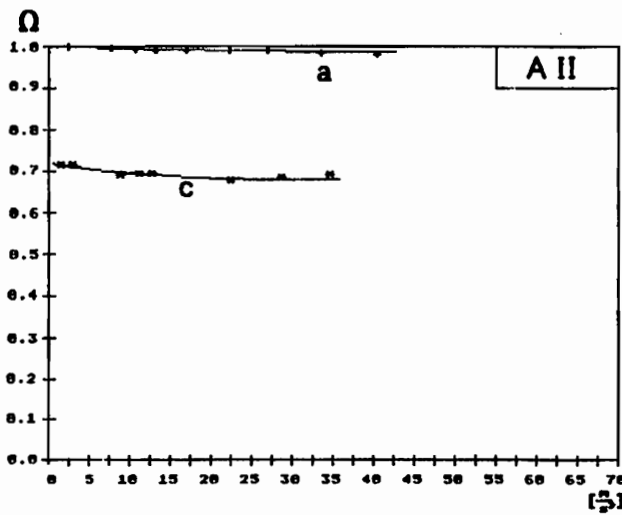


Bild A.13: Eigenfrequenzverhältnis (3).

$f_{03} = 167.0$  Hz.

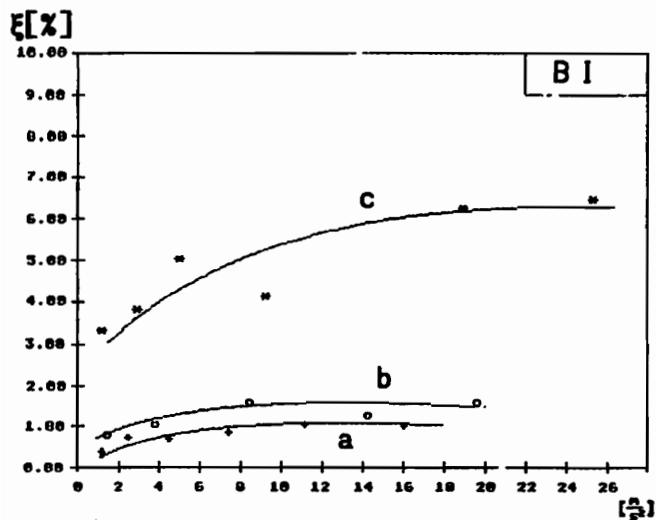


Bild A.14: Dämpfungsmaß, 1. Eigenfrequenz.

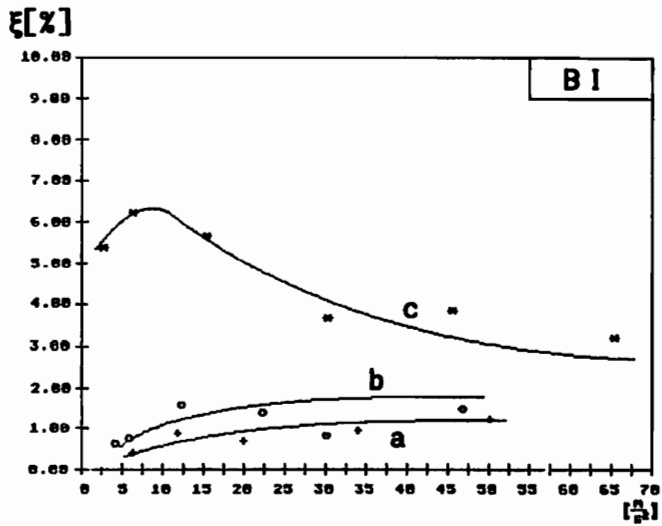


Bild A.15: Dämpfungsmaß, 3. Eigenfrequenz.

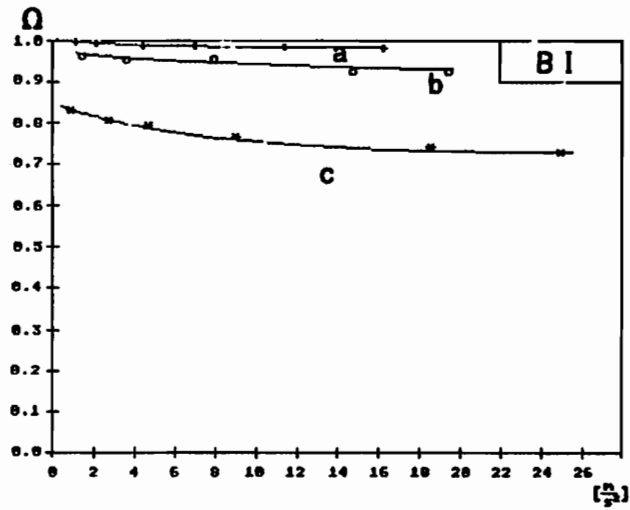


Bild A.16: Eigenfrequenzverhältnis (1).

$f_{01} = 32.5 \text{ Hz}$ .

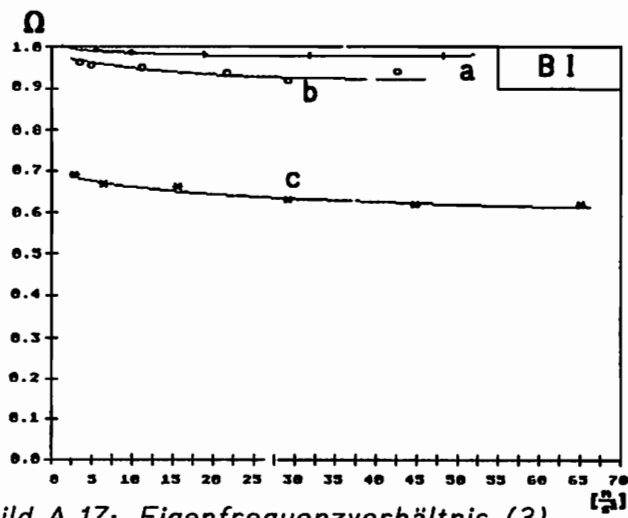


Bild A.17: Eigenfrequenzverhältnis (3).

$f_{03} = 175.0 \text{ Hz}$ .

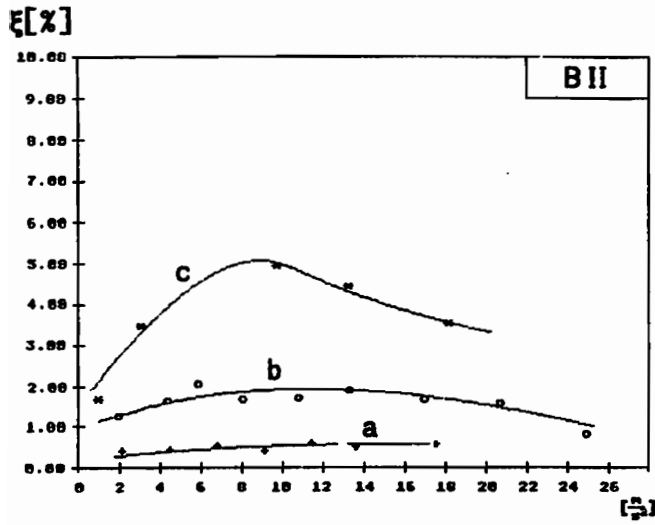


Bild A.18: Dämpfungsmaß, 1. Eigenfrequenz.

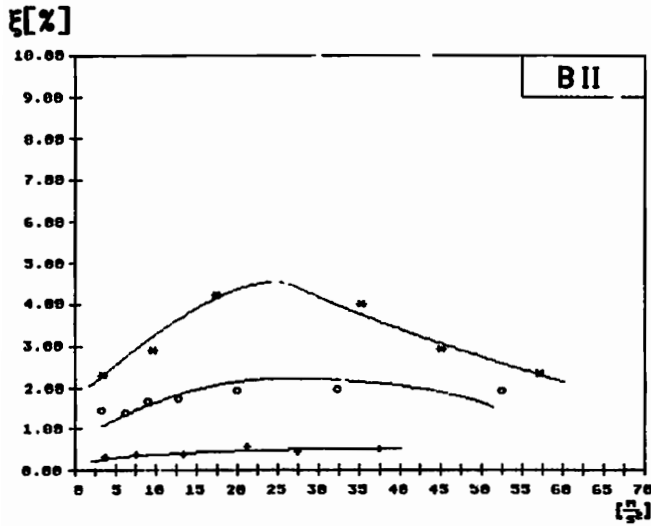


Bild A.19: Dämpfungsmaß, 3. Eigenfrequenz.

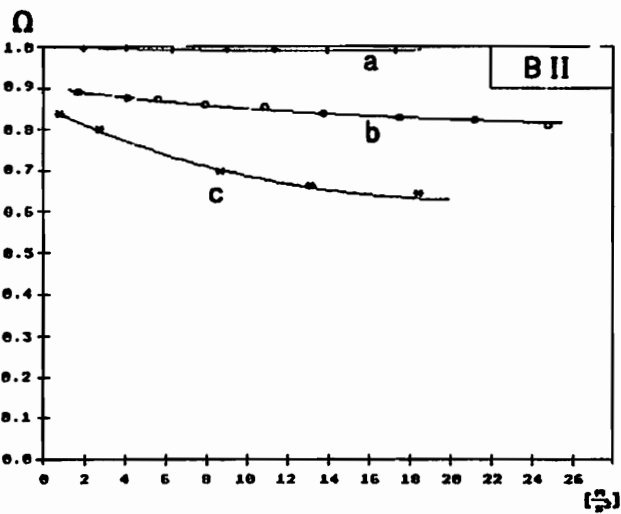


Bild A.20: Eigenfrequenzverhältnis (1).

$f_{01} = 32.5 \text{ Hz.}$

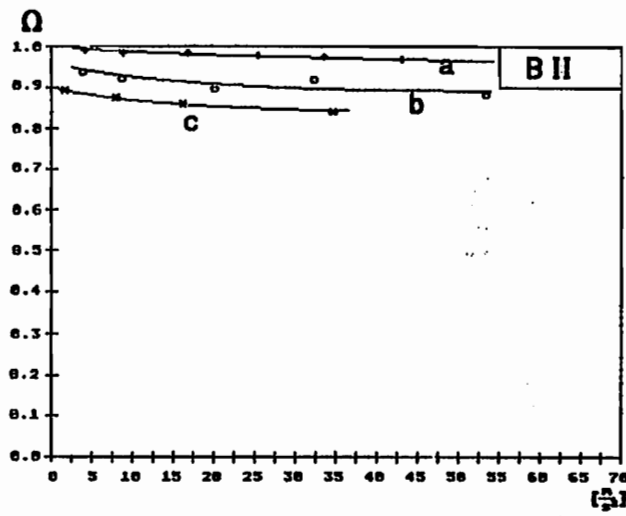


Bild A.21: Eigenfrequenzverhältnis (3).

$f_{03} = 167.5 \text{ Hz}$ .

## Anhang B

### B1 Einige Grundlagen der mathematischen Beschreibung mechanischer Systeme

Eine kontinuumsmechanische Tragwerkstheorie liefert eine orts- und zeitkontinuierliche Beschreibung des mechanischen Kontinuums in Form einer partiellen Differentialgleichung. Die Durchführung einer Ortsdiskretisierung mit Finite-Element-, Randelement- oder Differenzenmethoden führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Zeit:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (\text{B1.1})$$

$\mathbf{M}$  - Massenmatrix ;  $\mathbf{p}(t)$  - Systemerregungen

$\mathbf{D}$  - Dämpfungsmatrix ;  $\mathbf{x}(t)$  - Verschiebungen

$\mathbf{K}$  - Steifigkeitsmatrix ;  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  - Geschwindigkeiten

$\ddot{\mathbf{x}}(t)$  - Beschleunigungen

Die Gl. B1.1 beschreibt ein lineares zeitkontinuierliches System. Nichtlineare Mechanismen können durch verschiebungs- und geschwindigkeitsabhängige Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen berücksichtigt werden. Die Massenmatrix kann in den meisten strukturmechanischen Anwendungen als konstant angenommen werden, wenn die Verformungen klein bleiben. Für nichtlineare Systeme wird auch die allgemeinere Darstellung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{p}(t) \quad (\text{B1.2})$$

verwendet. Zur Lösung von Gl. B1.1 können verschiedene Wege beschrritten werden:

1. *Integraltransformation.* Das Differentialgleichungssystem wird in ein komplexes algebraisches Gleichungssystem überführt.
2. *Modalanalyse.* Das Gleichungssystem B1.1 wird durch eine Lineartransformation entkoppelt.
3. *Numerische Integration.*

Die Methode der Integraltransformationen ist, bis auf wenige Ausnahmen [s.Hillmer 1987], auf lineare Systeme beschränkt. Die Anwendung der Laplacetransformation [s. Marko 1977] auf Gl. B1.1 liefert bei verschwindenden Anfangsbedingungen das komplexe Gleichungssystem

$$(M s^2 + D s + K)X(s) = P(s) \quad (B1.3)$$

$$x(t=0) \equiv 0; \quad \dot{x}(t=0) \equiv 0; \quad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}; \quad P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \text{Variable der Laplace-Transformation}$$

das, nach Auflösung nach den Verschiebungen im Laplaceraum, durch Rücktransformation auf die Zeitverläufe der kinematischen Größen führt:

$$X(s) = (M s^2 + D s + K)^{-1} P(s) \quad (B1.4)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung

$$(M s^2 + K)X(s) = 0 \quad (B1.5)$$

$$s = j\omega$$

liefert die Eigenfrequenzen  $\omega_i$  und Eigenvektoren des ungedämpften Systems. Die orthogonalen Eigenvektoren  $x_i$  werden gewöhnlich auf die Massenmatrix normiert

$$x_i^T M x_i = 1 \quad (B1.6)$$

und in der *Modalmatrix*  $\Phi$  zusammengefaßt. Diejenigen Eigenformen in  $\Phi$ , von denen aufgrund der Bandbreite oder der Verteilung der Erregerkräfte bekannt ist, daß sie während eines betrachteten Schwingungsvorgangs nicht angeregt werden, können eliminiert werden. Die Beschränkung auf die *wesentlichen Moden* führt im allgemeinen zu einer drastischen Reduzierung des Berechnungsaufwandes. Eine Lineartransformation mit der Modalmatrix entkoppelt das Gleichungssystem B1.1. (Die Voraussetzungen für die Dämpfungsmatrix werden in Kapitel 5 genannt).

$$x(t) = \Phi q(t); \quad \dot{x}(t) = \Phi \dot{q}(t); \quad x(t) = \Phi \ddot{q}(t);$$

$$\ddot{q}(t) + 2 \Xi \omega \dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \Phi^T p(t) = f(t) \quad (B1.7)$$

$\Xi$  - Diagonalmatrix der modalen Dämpfungen  $\xi_i$

$\omega$  - " " " Eigenfrequenzen  $\omega_i$

$f(t)$  - modale Erregung

Das mechanische System kann auch im *Zustandsraum* beschrieben werden, der von den Verschiebungen und Geschwindigkeiten aufgespannt wird. Die Gl. B1.1 wird dazu nach den Beschleunigungen aufgelöst:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B1.8 a})$$

Wenn das System am Eingang durch den stochastischen Prozeß  $\mathbf{w}(t)$  gestört ist, lauten die Zustandsgleichungen:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (\text{B1.8 b})$$

Die Ausgangsgrößen gehen über die Beobachtungsmatrix  $\mathbf{C}$  aus den Zustandsgrößen hervor und werden durch das Meßrauschen  $\mathbf{v}(t)$  gestört:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (\text{B1.8 c})$$

Die allgemeine Lösung der deterministischen Vektordifferentialgleichung B1.8a der physikalischen Zustandsgrößen ist

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (\text{B1.9})$$

Nach einer *Zeitdiskretisierung* mit  $\Delta t$  folgt daraus die Rekursionsgleichung

$$\mathbf{z}(t+\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \left[ \mathbf{z}(t) + \int_t^{t+\Delta t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \quad (\text{B1.10})$$

Wenn der Steuervektor  $\mathbf{u}(\tau)$  innerhalb eines Zeitschritts analytisch approximiert werden kann, wird die Gl. B1.10 durch eine Matrizengleichung ersetzt:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k \quad (\text{B1.11 a})$$

Für das am Eingang gestörte System gilt:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{B1.11 b})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{B1.11 c})$$



$$t = k\Delta t; \quad u(\tau) \approx U_A(\tau) u_k; \quad z_k = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \\ \dot{x}_{k1} \\ \dot{x}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{kn} \end{bmatrix}$$

$$A_d = e^{A\Delta t}$$

$$B_d = \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t-\tau)} B U_A(\tau) d\tau$$

$U_A(\tau)$  - Matrix der Ansatzfunktionen für den Verlauf der Steuergrößen innerhalb eines Zeitschritts

$u_k$  - Vektor der Steuergrößen, und eventuell ihrer Ableitungen, zum Zeitpunkt  $t_k$

Eine solche zeitdiskrete Übertragungsbeziehung kann dazu analog auch in Modalkoordinaten formuliert werden. Grundlage ist die Lösung der modalen Bewegungsgleichungen (Gl. 4.4) anstelle der physikalischen Lösung Gl. B.1.9:

$$q_{zk+1} = H_z q_{zk} + G_z f_{zk} \quad (B1.12 a)$$

$$q_{zk+1} = H_z q_{zk} + G_z f_{zk} + w_{qk} \quad (B1.12 b)$$

$$y_k = C \Phi_z q_{zk} + v_k \quad (B1.12 c)$$

Ausgangsgrößen  $y_k = \begin{bmatrix} y_{k1} \\ y_{k2} \\ \vdots \\ y_{kr} \\ y_{kl} \end{bmatrix}$

$$H_z = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & H_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & H_{mm} \end{bmatrix}; \quad G_z = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & G_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & G_{mm} \end{bmatrix}$$

$$q_{zk} = \begin{bmatrix} q_{k1} \\ \dot{q}_{k1} \\ \vdots \\ q_{km} \\ \dot{q}_{km} \end{bmatrix}; \quad f_{zk} = \begin{bmatrix} f_{k1} \\ \dot{f}_{k1} \\ \vdots \\ f_{km} \\ \dot{f}_{km} \end{bmatrix} \quad (B1.13)$$

Die zeitinvarianten Blockdiagonalmatrizen  $H_z$  und  $G_z$  setzen sich aus den 2x2-Matrizen  $H_i$  und  $G_i$  zusammen:

$$H_i = \begin{bmatrix} h_{11}^i & h_{12}^i \\ h_{21}^i & h_{22}^i \end{bmatrix}; \quad G_i = \begin{bmatrix} g_{11}^i & g_{12}^i \\ g_{21}^i & g_{22}^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 h_{11}^i &= e^{\delta_i \Delta t} \left[ \cos \omega_i \Delta t - \frac{\delta_i}{\omega_i} \sin \omega_i \Delta t \right] \\
 h_{12}^i &= \frac{1}{\omega_i} e^{\delta_i \Delta t} \sin \omega_i \Delta t \\
 h_{21}^i &= -\frac{1}{\omega_i} e^{\delta_i \Delta t} (\omega_i^2 + \delta_i^2) \sin \omega_i \Delta t \\
 h_{22}^i &= e^{\delta_i \Delta t} \left[ \cos \omega_i \Delta t + \frac{\delta_i}{\omega_i} \sin \omega_i \Delta t \right] \\
 g_{11}^i &= \frac{1}{\omega_i^2 + \delta_i^2} \left[ 1 + \frac{1}{\omega_i^2} e^{\delta_i \Delta t} (\delta_i \sin \omega_i \Delta t - \omega_i \cos \omega_i \Delta t) \right] \\
 g_{12}^i &= \frac{1}{\omega_i^2 + \delta_i^2} \left\{ \Delta t + \frac{2\delta_i}{\omega_i^2 + \delta_i^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\omega_i (\omega_i^2 + \delta_i^2)} e^{\delta_i \Delta t} [(\delta_i^2 - \omega_i^2) \sin \omega_i \Delta t - 2\omega_i \delta_i \cos \omega_i \Delta t] \right\} \\
 g_{21}^i &= \frac{1}{\omega_i} e^{\delta_i \Delta t} \sin \omega_i \Delta t \\
 g_{22}^i &= g_{11}^i
 \end{aligned}
 \tag{B1.14}$$

$\omega_i = \omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_i^2}$ , Frequenz der gedämpften Schwingung  
im Mode i

$\omega_{0i}$  - Eigenfrequenz im Mode i

$\xi_i$  - modale Dämpfung

$\delta_i = -\omega_{0i} \xi_i$ , Abklingkonstante

$\Delta t$  - Zeitschrittweite

Für die Identifikation in Verbindung mit einer Zustandsschätzung ist das Konzept der *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* bedeutsam. Bezogen auf das zeitdiskrete System B1.11 gilt:

Das System ist *vollständig zustandssteuerbar* im Intervall  $0 \leq k \leq n$ , wenn für alle Anfangszustände  $\mathbf{z}_0$  ein Steuervektor  $\mathbf{u}_k$  existiert, der das System in endlicher Zeit in einen vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{z}_n$  überführt. Zur Definition der notwendigen und hinreichenden Bedingung wird die  $(p \times 4n^2)$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathbf{sz}}$  gebildet, für die gelten muß:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{sz}} = \left[ \mathbf{B}_d \mid \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mid \dots \mid \mathbf{A}_d^{2n-1} \mathbf{B}_d \right], \quad \text{Rang} \left[ \mathbf{W}_{\mathbf{sz}} \right] = 2n \tag{B1.15}$$

Das System ist *vollständig ausgangssteuerbar* im Intervall  $0 \leq k \leq n$ , wenn für alle Ausgangsgrößen  $y_0$  ein Steuervektor  $u_k$  existiert, der die Ausgangsgröße in endlicher Zeit in eine vorgegebene Ausgangsgröße  $y_n$  überführt. Analog zur Definition der Zustandssteuerbarkeit muß für die  $(l \times 4n^2)$ -Matrix  $W_{sa}$  gelten:

$$W_{sa} = [C B_d | C A_d B_d | \dots | C A_d^{2n-1} B_d], \quad \text{Rang} [W_{sa}] = l \quad (\text{B1.16})$$

Das System ist *vollständig beobachtbar*, wenn für bekannte Systemmatrizen  $A_d$ ,  $B_d$  und  $C$ , sowie bekannter Steuerung  $u_k$  aus dem Ausgangsvektor  $y_k$  über ein endliches Intervall  $0 \leq k \leq n$  der Anfangszustand  $z_0$  eindeutig bestimmt werden kann. Für die  $(2n \times 2n)$ -Matrix  $W_{bz}$  muß gelten:

$$W_{bz} = \begin{bmatrix} C \\ C A_d \\ C A_d^2 \\ \vdots \\ C A_d^{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{Rang} [W_{bz}] = 2n \quad (\text{B1.17})$$

## B2 Die Methode von Prony

Zur Approximation der Ausgangsgrößen eines Systems, die ein Gemisch von  $m$  freien gedämpften Schwingungen bilden, wird ein komplexer Exponentialsummenansatz gewählt [s.van Blaricum und Mitra 1978]:

$$y_k = \sum_{i=1}^{2m} A_i e^{\lambda_i k \Delta t} = \sum_{i=1}^{2m} A_i \mu_i^k \quad (\text{B 2.1})$$

mit den unbekanntenen komplexen Eigenwerten

$$\lambda_i = \delta_i + j \omega_i \quad ; \quad \mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \quad (\text{B2.2})$$

des beobachteten Systems. Der nächste Schritt besteht in der Aufstellung eines Polynoms in  $\mu$  mit den Wurzeln  $\mu_i$ , aus denen unmittelbar auf die Systemfrequenzen und -dämpfungen geschlossen werden kann.

$$P(\mu) = \sum_{i=0}^{2m} \alpha_i \mu^i = \prod_{i=1}^{2m} (\mu - \mu_i) \quad (\text{B2.3})$$

Die Gl. B2.1 wird dazu, jeweils nach Multiplikation mit einem Polynomkoeffizienten  $\alpha_i$ ,  $2m$  mal addiert:

$$\sum_{i=0}^{2m} \alpha_i y_i = \sum_{i=0}^{2m} \alpha_i \sum_{j=1}^{2m} A_j \mu_j^i = \sum_{j=1}^{2m} A_j P(\mu_j) \quad (\text{B2.4})$$

Wegen  $P(\mu_j)=0$  folgt

$$\sum_{i=0}^{2m} \alpha_i y_i = 0 \quad (\text{B2.5})$$

oder mit  $\alpha_{2m}=1$

$$y_k = - \sum_{i=0}^{2m-1} \alpha_i y_{k-2m+i} \quad (\text{B2.6})$$

Aus dem Vergleich mit der Beschreibung des AR-Modells mit  $p=2m$  (Gl. 2.2.1) folgt

$$a_i = - \alpha_{2m-1-i} \quad , \quad i=1, 2, \dots, 2m \quad (\text{B2.7})$$

Diese Beziehungen können auch aus dem Zustandsraummodell eines dynamischen Systems abgeleitet werden. Die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems für die Systemzustände lautet (s. Anhang B1):

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_0 = \mathbf{U}(t) \mathbf{z}_0 \quad (\text{B2.8})$$

Wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  die Eigenwerte  $\lambda_i$  besitzt, lauten die Eigenwerte von

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}; \quad e^{\lambda_i t} = \mu_{it} \quad (\text{B2.9})$$

und erfüllen die charakteristische Gleichung

$$\det[\mathbf{U}(t) - \mu_t \mathbf{I}] = \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k \mu_t^k = P(\mu_t) = 0 \quad (\text{B2.10})$$

Beim Übergang zu einer zeitdiskreten Beschreibung folgt mit der Beobachtungs- oder Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  für die Systemausgangsgrößen  $\mathbf{y}_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+\Delta t) &= \mathbf{U}(\Delta t) \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (\text{B2.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C} \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C} \mathbf{A}_d^2 \mathbf{z}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{2m} &= \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{2m} \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

Die Multiplikation der Gleichungen jeweils mit  $\alpha_k$  und anschließender Summation führt auf

$$\alpha_0 \mathbf{y}_0 + \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \alpha_{2m} \mathbf{y}_{2m} = \mathbf{C} (\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_d + \dots + \alpha_{2m} \mathbf{A}_d^{2m}) \mathbf{z}_0$$

Daraus folgt mit Gl. B2.10 und dem Satz von Cayley-Hamilton [s. Waller und Krings 1975]:

$$(\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_d + \dots + \alpha_{2m} \mathbf{A}_d^{2m}) = \mathbf{0}$$

wieder Gleichung B2.5.

### **B3 Die STD-Methode von Ibrahim**

Wie bei der Methode von Prony wird auch von Ibrahim [1985] ein Exponentialsummenansatz verwendet:

$$y^T = \psi^T M \quad \begin{array}{l} \psi_i \text{ - Ansatzkoeffizienten} \\ y \text{ - Meßgröße } y(i\Delta t) \\ M_{ij} = e^{\lambda_i(j-1)\Delta t} \end{array} \quad (B3.1)$$

Mehrere Meßreihen oder auch Sequenzen einer Messung werden zur Meßmatrix  $Y$  zusammengefaßt:

$$Y = \Psi M \quad (B3.2)$$

Die Multiplikation von  $M$  mit einer Diagonalmatrix  $\alpha$

$$\alpha = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 r \Delta t} & & & \\ & e^{\lambda_2 r \Delta t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_m r \Delta t} \end{bmatrix}$$

beschreibt eine um  $r$  Schritte zeitverschobene Meßmatrix  $\hat{Y}$

$$\hat{Y} = \Psi \alpha M \quad (B3.3)$$

Unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit von  $M$  und  $Y$  kann die Matrix  $\Psi$ , die nur von Anfangsbedingungen abhängt, in Gl. B3.3 eliminiert werden.

$$\hat{Y} M^{-1} = Y M^{-1} \alpha \quad (B3.4)$$

Eine Umformung mit  $Y^{-1} \hat{Y} M^{-1} = M^{-1} \alpha$  und  $H = Y^{-1} \hat{Y}$

führt auf das Eigenwertproblem

$$H m_j = m_j \alpha_j ; \quad m_j \text{ - Spalte } j \text{ von } M^{-1} \quad (B3.5)$$

Die Matrix  $H$ , die durch den Vergleich zeitverschobener Meßwerte bestimmt werden kann, besitzt *Hessenbergform*, nur die letzte Spalte  $h_{2m}$  enthält Systeminformation:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots\dots 0 & h_{1,2m} \\ 1 & 0 & \dots\dots 0 & h_{2,2m} \\ 0 & 1 & 0 & \dots\dots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & h_{2m,2m} \end{bmatrix} \quad (\text{B3.6})$$

Die Eigenwerte von Hessenbergmatrizen können effizient mit dem *QR-2-Schritt-Algorithmus* von Martin, Peters und Wilkinson [1970] bestimmt werden. Die Koeffizienten  $h_j$  stimmen betragsmäßig wieder mit den Koeffizienten der Gl. B2.5 überein, da die Eigenwertbedingung

$$\det ( H - \mu I ) = 0$$

im Fall  $r=1$ , der durch Nachabtastung der Meßwerte immer erfüllt werden kann, wieder auf ein identisches charakteristisches Polynom führt.

### B4 Yule-Walker-Gleichungen

Das Modell eines autoregressiven Prozesses lautet (s. Gl. 2.2.1):

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_p y_{k-p} + \epsilon_k$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit  $y_{k-\tau}$  und Bildung des Erwartungswertes der resultierenden Produkte folgt eine Differenzengleichung für die Kovarianzfunktion  $\Phi_\tau$ :

$$\begin{aligned} E[y_k y_{k-\tau}] &= a_1 E[y_{k-1} y_{k-\tau}] + \dots + a_p E[y_{k-p} y_{k-\tau}] + E[\epsilon_k y_{k-\tau}] \\ &= \Phi_{-\tau} \qquad \qquad = \Phi_{1-\tau} \qquad \qquad \qquad = \Phi_{p-\tau} \qquad \qquad \qquad \Phi_\tau = \Phi_{-\tau} \end{aligned}$$

Aufgrund der vorausgesetzten Unkorreliertheit von  $y_{k-\tau}$  und  $\epsilon_k$  ist  $E[\epsilon_k y_{k-\tau}] = 0$ . Die optimalen AR-Parameter beschreiben also auch die Autokovarianzfunktion  $\Phi_\tau$  des Prozesses, bzw. nach Normierung auf  $\Phi_0$  die Autokorrelationsfunktion  $\rho_\tau$ :

$$\rho_\tau = \frac{\Phi_\tau}{\Phi_0}$$

Die Beziehungen für die  $\rho_\tau$  werden als *Yule-Walker-Gleichungen* [s. Box und Jenkins 1976] bezeichnet und können entweder, bei gegebener Autokorrelationsfunktion, nach den Koeffizienten  $a_j$  aufgelöst werden oder im umgekehrten Fall kann aus einem angepaßten AR-Modell die Autokorrelationsfunktion abgeleitet werden:

$$\rho_\tau = a_1 \rho_{\tau-1} + a_2 \rho_{\tau-2} + \dots + a_p \rho_{\tau-p} \tag{B4.1}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & & \rho_{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \dots & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \tag{B4.2}$$



### **B5 Levinson-Durbin-Rekursion**

Der Algorithmus von Levinson und Durbin [s. Honig u. Messerschmidt 1984] ermöglicht die rekursive Berechnung der Autoregressionskoeffizienten der Modellstufe  $p+1$  aus den Koeffizienten der Stufe  $p$  und den Werten der empirischen, das heißt auf der Grundlage stochastischer Meßwerte geschätzten Autokorrelationsfunktion  $\rho_\tau$ :

$$a_i^{p+1} = a_i^p - a_{p+1}^{p+1} a_{p+1-i}^p \quad (\text{B5.1})$$

$$a_{p+1}^{p+1} = \frac{\chi^{p+1}}{Q^p} \quad (\text{B5.2})$$

$$Q^{p+1} = Q^p [1 - (a_{p+1}^{p+1})^2] \quad (\text{B5.3})$$

$$\chi^{p+1} = \rho_{p+1} - \sum_{i=1}^p a_i^p \rho_{p-i} \quad (\text{B5.4})$$

$Q^p$  beschreibt den Fehler in der Approximationsstufe  $p$  und ist daher als ein Maß für die Modellgüte geeignet. Die Folge der Koeffizienten  $a_{p+1}$  bildet die partielle Autokorrelationsfunktion (PAKF). Wie in Kap. 2 erwähnt wurde, streben die Werte der PAKF von AR( $p$ )-Prozessen für Lags oberhalb der korrekten Modellordnung gegen Null. Diese Eigenschaft folgt auch aus den Gleichungen der Levinson-Durbin-Rekursion, wenn unterstellt wird, daß eine optimale Approximationsstufe existiert, oberhalb der sich der Fehler  $Q^p$  nicht mehr wesentlich ändert (Gl. A5.3).

### B6 Lattice-Filter

In der Theorie der Lattice-Filter [Beneviste und Chaure 1981] dienen die Werte der PAKF allein zur Beschreibung stationärer stochastischer Prozesse, sie werden in diesem Zusammenhang auch als Reflexionskoeffizienten oder PARTIAL- CORrelation- Coefficients bezeichnet. Für die Lattice-Filter wird die identische Vor- und Rückwärtskorrelation stationärer Prozesse ausgenutzt, daß heißt, daß zur Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion stationärer Prozesse die gleichen AR-Koeffizienten gelten. Die Lattice-Gleichungen lauten:

$$e^p = e^{p-1} - a_p^p z^{-1} r^{p-1} \quad (B6.1)$$

$$r^p = z^{-1} r^{p-1} - a_p^p e^{p-1} \quad (B6.2)$$

$$a_p^p = \frac{\sum_k^n e_k r_{k-1}}{\sum_k^n e_k^2} \quad (B6.3)$$

$e^p$  und  $r^p$  bezeichnen die Fehler der Vorwärts-, bzw. der Rückwärtsprädiktion in der Approximationsstufe (Modellordnung)  $p$ .

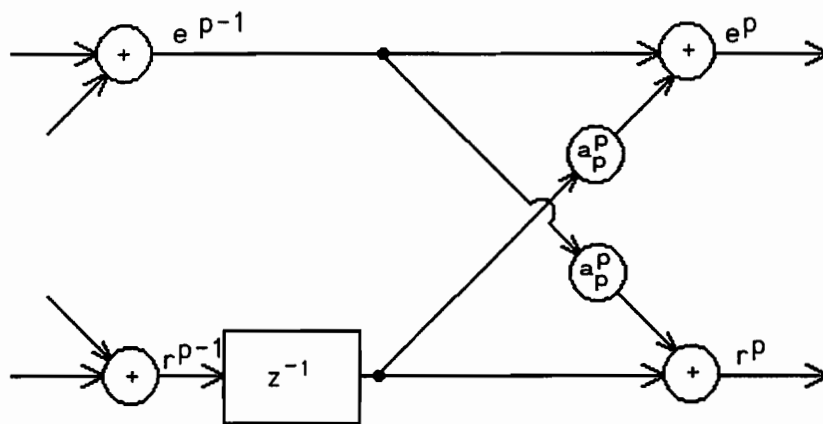


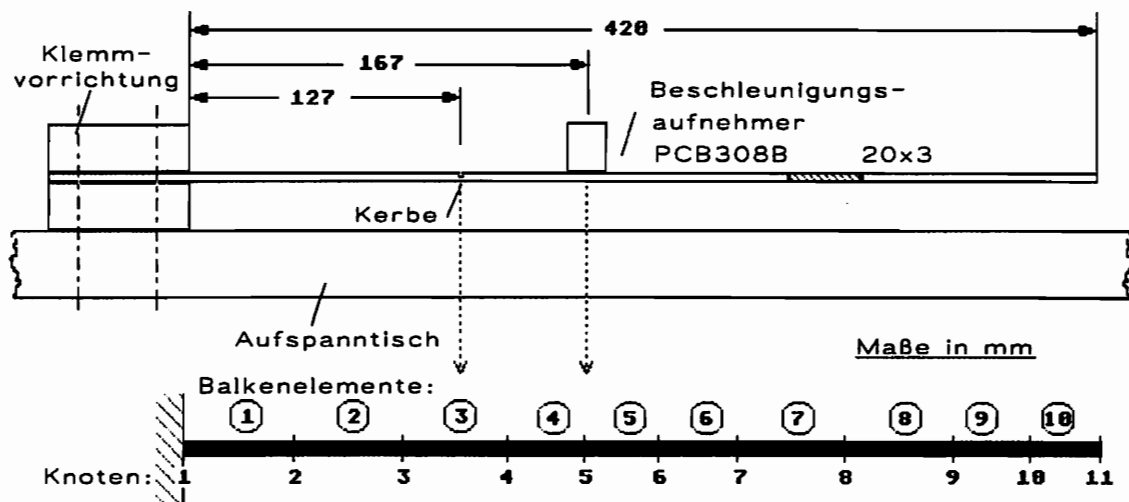
Bild B6.1: Struktur der Latticefilter

## ANHANG C

### C Identifikation von Steifigkeitsänderungen eines Stahlkragbalkens als Beispiel zur Anwendbarkeit des Rückführungsmodells auf Probleme der Schadensfrüherkennung.

Die wohl häufigste Anwendung von Identifikationsverfahren bei der Untersuchung mechanischer Systeme dient der Überprüfung von Steifigkeitsannahmen. Schäden an Maschinenteilen und tragenden Teilen von Bauwerken sind in der Regel mit Steifigkeitsänderungen verbunden, daher hat die Identifikation von Steifigkeitseigenschaften auch in der Maschinen- und Bauwerksüberwachung eine große Bedeutung.

Schmidt [1988] hat Methoden der indirekten Identifikation und der adaptiven Zustandsbeobachtung zur Anpassung der Steifigkeitsmatrix eines Kragbalkens verwendet, der zur Simulation einer Schädigung mit einer Querkerbe versehen wurde (Bild C.1).



$$E = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\rho = 7.85 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\text{Aufnehmermasse } m_A = 90 \text{ g}$$

Bild C.1: Abmessungen des Kragbalkens und Modellierung.

Bei der von Natke entwickelten indirekten Identifikation werden die Elementmatrizen des Systems zu Substrukturen zusammengefaßt und nach Multiplikation mit einem Korrektorkoeffizienten zur Gesamtmatrix assem-

bliert. Die Koeffizienten werden über die Minimierung eines in den Eigenfrequenzen formulierten Fehlerfunctionals iterativ bestimmt, wobei in jedem Iterationsschritt das Eigenwertproblem des korrigierten Systems gelöst werden muß [Natke 1983]. Die Koeffizienten geben Auskunft über die örtliche Verteilung der von der ursprünglichen Annahme abweichenden Steifigkeit. Schmidt benutzte bei seiner methodischen Untersuchung unterschiedliche Substruktur- und Modenanzahlen, die Ergebnisse sind in der Tabelle C.1 dargestellt. Bei einer Zusammenfassung der Balkenelemente in 5 Abschnitte gleicher Länge ermittelte er für den Bereich der Kerbe eine *Steifigkeitsminderung von -12.7%*, nachdem zuvor das Vergleichsmodell an die identifizierten Eigenfrequenzen des unbeschädigten Balkens angepaßt wurde.

i	Eigenfrequenzen des unbeschädigten Balkens [Hz]	Eigenfrequenzen des Balkens mit Kerbe [Hz]	modale Dämpfung $\xi$ [%]
1	14.2	13.97	0.43
2	89.2	88.60	0.45
3	245.0	245.00	0.37
4	485.7	485.70	0.29

*Tabelle C.1: Identifizierte Eigenfrequenzen und modale Dämpfungsmaße des Balkens im unbeschädigten und beschädigten Zustand nach Schmidt [1988].*

Die Identifikation mit dem Rückführungsmodell kann in ähnlicher Weise vorgenommen werden, indem die Anteile der Substruktur-Korrekturen an den elastischen Rückstellkräften des Systems als Steuergrößen  $\varphi_{ek}^*$  betrachtet werden (vgl. Gl. 4.7):

$$\varphi_{ek}^* = - \Phi^T \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x_k$$

- $K_i$  - Steifigkeitsmatrix der Substruktur i
- $\alpha_i$  - zu identifizierender Substrukturkoeffizient.
- $x_k$  - Verschiebungen der Systemknoten
- r - Anzahl der Substrukturen

Aufgrund der Linearität der Steuergrößen in den gesuchten Parametern lautet die Empfindlichkeitsfunktion hier einfach:

$$\frac{\partial \varphi_{ek}^*}{\partial \alpha_i} = - \Phi^T K_i x_k$$

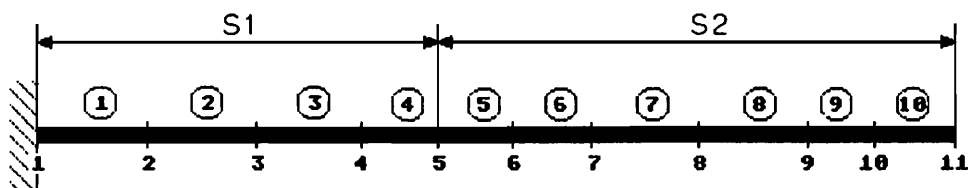
Der Balken wird durch eine impulsförmige Last am Ende angeregt und die transienten Schwingungen durch ein AR(12)-Modell modal identifiziert. Die hierbei ermittelten Dämpfungswerte gehen in die Berechnung der Zeitübertragungsmatrizen nach Gl. B1.14 ein. Als Frequenzen werden dagegen die mit dem Balkenmodell ohne Berücksichtigung der Querschnittschwächung berechneten Eigenfrequenzen verwendet (Tabelle C.2), d.h. als Referenzmodell dient ein Rechenmodell.

i	Berechnete Eigenfrequenzen des unbeschädigten Balkens [Hz]	Identifizierte Eigenfrequenzen des Balkens mit Kerbe [Hz]	modale Dämpfung $\xi$ [%]
1	13.6	13.3	0.92
2	66.3	66.5	0.26
3	221.6	209.6	0.57
4	471.5	407.7	0.29

*Tabelle C.2: Identifizierte und berechnete Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenzen des Balkens mit Kerbe liegen aufgrund der größeren Masse des Beschleunigungssensors unter den von Schmidt ermittelten Werten.*

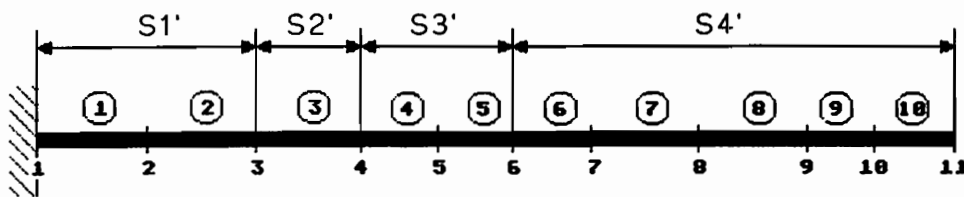
Die Identifikation soll den Index des Elementes liefern, dessen Steifigkeit sich infolge des -hier durch die Kerbe simulierten- Schadens verringert hat. Die Meßergebnisse enthalten nur begrenzte Information über das Gesamtsystem, weil nur eine kinematische Größe, die Beschleunigung, an einem Punkt des Systems beobachtet wurde. Es ist daher zwecklos, eine gleichzeitige Anpassung aller 10 Elemente zu versuchen. Günstiger ist, zunächst nur zwei Substrukturen zu bilden, um eine Aussage zu gewinnen, in welchem Teil eine signifikante Änderung aufgetreten ist. In nachfolgenden Schritten kann dieser Strukturteil immer feiner aufgeteilt werden, bis das betreffende Element identifiziert ist. Die Anpassung bei dieser Aufteilung des Balkens:

Substruktur	Elemente
S1	1, 2, 3, 4
S2	5,6,7,8,9,10



wies eindeutig auf eine Veränderung innerhalb von S1 hin. Danach wurde die folgende Aufteilung gewählt:

Substruktur	Elemente
S1'	1, 2
S2'	3
S3'	4,5
S4'	6,7,8,9,10



Substruktur S3 soll die Versteifung des Balkens durch den applizierte Beschleunigungssensor berücksichtigen. Identifiziert wurden folgende Koeffizienten:

Substruktur	Identifizierte Koeffizienten $\alpha_i$
S1'	+1.2%
S2'	-21.0%
S3'	+5.9%
S4'	+1.7%

Tabelle C.3: Identifizierte Substrukturkoeffizienten.

Die Ergebnisse zeigen sehr klar die Steifigkeitsminderung im Balkenelement 3 und ebenso deutlich den versteifenden Einfluß des Sensors auf die Elemente 4 und 5. Der Identifikationsansatz des Rückführungsmodells eignet sich also ebenfalls zur Detektion von Schädigungen, wenn es sich auch bei der hier gezeigten Anwendung um eine sehr einfache Struktur handelt.

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells



- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-stationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der  
Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 68**