



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

R. H. Frania

H. Waller

Entwicklung und Anwendung
spezieller finiter Elemente für
Kerbspannungsprobleme im
Maschinenbau

Heft Nr. 81



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr Universität Bochum**

**Rolf Helge Frania
und
Heinz Waller**

**Entwicklung und Anwendung spezieller
finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme
im Maschinenbau**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 81
Mai 1992**

© 1992

Arbeitsgruppe für Numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik
Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstraße 150
4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des
Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vor-
herigen Zustimmung der Autoren.

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
1. Einleitung	5
2. Differentialgleichung der technischen Scheibentheorie	6
3. Lösungsfunktionen des Differentialgleichungssystem	6
3.1 Inhomogene Lösung	6
3.2 Homogene Lösung in komplexer Darstellung	10
3.3 Lösungen bei der Benutzung der konformen Abbildung	11
4. Grundgleichungen für spezielle Scheibenelemente	15
4.1 Besonderheiten der Ansatzfunktionen, die Lösungen des Scheibendifferentialgleichungssystem sind	15
4.2 Funktional I : Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials	16
4.2.1 Formulierung des Variationsproblems	16
4.2.2 Übergang auf ein Teilgebiet	17
4.2.3 Darstellung des Funktionals I in diskretisierter Form	21
4.2.4 Verknüpfungsbeziehungen zwischen den Ansatzfreiwerten und den Knotenwerten (Berechnung von \mathbf{G} und \mathbf{g})	24
4.3 Funktional II : Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials	28
4.3.1 Formulierung des Variationsproblems	28
4.3.2 Übergang auf ein Teilgebiet	28
4.3.3 Darstellung des Funktionals II in diskretisierter Form	30
5. Die komplexen Funktionen Φ und Ψ als Ansatzfunktionen für die finite Elementlösung	32
6. Finites Element für ausgerundete Ecken	34
6.1 Die Funktionen $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ für die finite Elementlösung	36
6.2 Form der finiten Elemente und Berechnungsmethoden	39
6.2.1 Wahl des lokalen Koordinatensystems	39
6.2.2 Wahl der Reihenglieder	40
6.2.3 Randintegration	41
6.3 Auftretende Starrkörperanteile	41
7. Berechnung der Elementgrößen, nachdem die Elementknotenverschiebungen bekannt sind	43
7.1 Elemente, die auf der Basis von Funktional I entwickelt wurden	43
7.2 Elemente, die auf der Basis von Funktional II entwickelt wurden	43
7.2.1 Bestimmung der Starrkörperverschiebungen	44

8.	Beispielrechnungen	
8.1	Beispielrechnungen an einem Gebiet mit kreisförmigen Loch	49
8.2	Kreisförmige Außenkerbe	56
8.3	Dreieckloch in einer unendlichen Scheibe	58
8.4	Kerbspannungsanalyse von Schrauben-Mutter-Verbindungen	61
8.5	Zahnradberechnung	68
9.	Zusammenfassung der Ergebnisse	72
10.	Literaturverzeichnis	75

1. Einleitung

In dem vorliegenden Aufsatz werden spezielle finite Elemente entwickelt, die sich zur Berechnung von Bauteilen mit spannungskritischen Stellen einsetzen lassen.

Es werden finite Elementformulierungen angegeben, die auf der Basis von zwei unterschiedlichen Funktionalen ermittelt wurden. Die Gebietsansätze für die speziellen Elemente sollen dabei das Scheibendifferentialgleichungssystem sowie die Spannungsrandbedingungen auf einem Elementrand erfüllen.

Außerdem wird gefordert, daß sich die speziellen Elemente mit Standardelementen koppeln lassen. Damit wird gewährleistet, daß die speziellen Elemente nur an den spannungskritischen Stellen eingesetzt werden müssen und das übrige Gebiet durch Standardelemente diskretisiert werden kann.

Um die Nomenklatur der speziellen finiten Elementansätze verständlich zu machen, enthalten die Kapitel 2 und 3 einen kurzen Überblick über die technische Scheibentheorie und die Lösung mit komplexen Funktionen. In den darauffolgenden Kapiteln werden dann die zwei Funktionalen angegeben und die daraus resultierenden speziellen finiten Elementformulierungen erläutert.

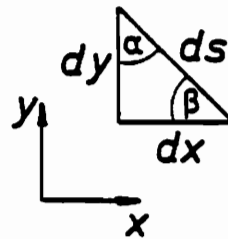
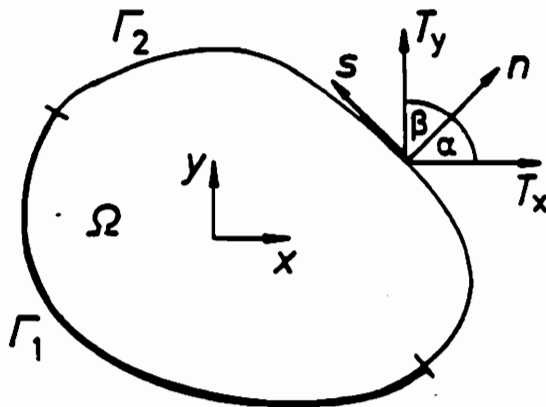
2. Differentialgleichungssystem der technischen Scheibentheorie

Das lineare partielle Differentialgleichungssystem läßt sich in Matrizen-schreibweise mit den Gebietsbezeichnungen aus Bild 2.1 in folgender Form an-geben:

$$\underbrace{D^T E D}_{\sigma} u + \bar{F} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (2.2)$$

$$n E D u = T = \bar{T} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (2.3)$$



Richtungskosinus:

$$n_x = \cos(\underbrace{n, x}_{\alpha}) = \frac{dy}{ds}$$

$$n_y = \cos(\underbrace{n, y}_{\beta}) = \frac{-dx}{ds}$$

Gebietsrand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Bild 2.1 : Bezeichnungsweisen

Definition der Matrizen und Vektoren in den Gleichungen (2.1) bis (2.3):

u : Vektor der gesuchten Verschiebungskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$

\bar{u} : Vorgegebene Randverschiebungen auf Γ_1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

\mathbf{T} : Randkräfte

$\bar{\mathbf{T}}$: Vorgegebene Randkräfte auf Γ_2

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ \sigma_{yy} n_y + \tau_{xy} n_x \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$\bar{\mathbf{F}}$: angreifende Volumenkräfte

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{F}_x &= \frac{P_x}{t} \\ \bar{F}_y &= \frac{P_y}{t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

t : Scheibendicke

\bar{F}_x : Volumenkraft in x-Richtung (pro Volumeneinheit)

\bar{F}_y : Volumenkraft in y-Richtung (pro Volumeneinheit)

\bar{P}_x : in Scheibenmittelfläche wirksame Kraft in x-Richtung
(Kraft pro Flächeneinheit)

\bar{P}_y : in Scheibenmittelfläche wirksame Kraft in y-Richtung
(Kraft pro Flächeneinheit)

\mathbf{D} : Operatormatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

\mathbf{n} : Richtungskosinus

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

\mathbf{E} : Matrix in Abhängigkeit von E , ν

Ebener Spannungszustand (ESZ)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{EVZ}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

E : Elastizitätsmodul

ν : Querkontraktionszahl

Spannungsvektor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

3. Lösungsfunktionen des Differentialgleichungssystems

Da die Ansatzfunktionen der speziellen finiten Elemente das Scheibendifferentialgleichungssystem erfüllen sollen, werden hier die Lösungen der Problemgleichungen (2.1) angegeben.

3.1 Inhomogene Lösungen

Problemgleichung (2.1) mit Spannungsgrößen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\bar{F}_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= -\bar{F}_y\end{aligned}\quad (3.1)$$

Für $\bar{F}_x = \text{const.}$ und $\bar{F}_y = \text{const.}$ erhält man Lösungen für σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} mit beliebigen Koeffizienten a und b in folgender Form.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= a \bar{F}_x x & ; & & \sigma_{yy} &= b \bar{F}_y y \\ \tau_{xy} &= -(1+b) \bar{F}_y x - (1+a) \bar{F}_x y\end{aligned}\quad (3.2)$$

Die Verschiebungsfunktionen erhält man mit den gegebenen Spannungsgrößen aus den Gleichungen

$$2 \mu u(x,y) = \int \left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] dx + f_1(y) \quad (3.3)$$

$$2 \mu v(x,y) = \int \left[\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] dy + f_2(x) \quad (3.4)$$

mit den Werkstoffgrößen

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.5)$$

und

$$\lambda = \begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \text{für den ebenen Spannungszustand (ESZ)} \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \end{cases} \quad (3.6)$$

bzw.

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \begin{cases} \frac{\nu}{1+\nu} & \text{ESZ} \\ \nu & \text{EVZ} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Homogene Lösung in komplexer Darstellung

Die Lösung der Problemgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

erhält man mit der Airyschen Spannungsfunktion $U(x,y)$ in folgender Form:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (3.9)$$

Die Verträglichkeitsbedingung

$$\Delta (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (3.10)$$

liefert mit

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta U \quad (3.11)$$

die biharmonische Gleichung

$$\Delta\Delta U = U_{xxxx} + 2U_{xxyy} + U_{yyyy} = 0 \quad (3.12)$$

Unter der Einschränkung, daß U eine reelle Funktion sein soll, erhält man mit den komplexen Funktionen $\Phi(z)$ und $X(z)$ die Lösung.

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{Re} [\bar{z} \Phi(z) + X(z)] \quad (3.13) \\ &= 1/2 [\bar{z} \Phi(z) + z \overline{\Phi(z)} + X(z) + \overline{X(z)}] \end{aligned}$$

Durch Überstreichen werden konjugiert komplexe Größen gekennzeichnet. Aus (3.9) erhält man mit der Substitution

$$X'(z) = \Psi(z) \quad (3.14)$$

nach einigen Rechnungen die Spannungsfunktionen.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} [\Phi' + \overline{\Phi'} - z \overline{\Phi''} - \overline{\Psi'}] \\ &= 2 \operatorname{Re} [\Phi'] - \operatorname{Re} [\bar{z} \Phi''] - \operatorname{Re} [\Psi'] \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} [\Phi' + \overline{\Phi'} + z \overline{\Phi''} + \overline{\Psi'}] \\ &= 2 \operatorname{Re} [\Phi'] + \operatorname{Re} [z \Phi''] + \operatorname{Re} [\Psi'] \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z} \Phi'' + \Psi'] \quad (3.17)$$

mit

$$z = x + i y \quad (3.18)$$

und

$$\bar{z} = x - i y \quad (3.19)$$

Der Strich ' kennzeichnet die Ableitung nach z.

Aus den Identitäten

$$2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.20)$$

und

$$2 \mu \frac{\delta v}{\delta y} = \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.21)$$

ergeben sich nach Einsetzen bekannter Beziehungen und anschließender Integration die Verschiebungsgrößen zu

$$2 \mu u = \operatorname{Re} [x \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \quad (3.22)$$

$$2 \mu v = \operatorname{Im} [x \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \quad (3.23)$$

mit

$$x = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{ESZ} \\ 3-4\nu & \text{EVZ} \end{cases} \quad (3.24)$$

Die resultierende Kraft auf einem Randstück ds mit der Dicke t bzw. deren Komponenten $(T_x t ds)$ und $(T_y t ds)$ erhält man aus folgenden Beziehungen:

$$T_x = \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \quad (3.25)$$

$$T_y = -\sigma_{yy} \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} \quad (3.26)$$

Mit der Kombination

$$T_x + i T_y = -i \frac{d}{ds} [\Phi + z \bar{\Phi}' + \bar{\Psi}] \quad (3.27)$$

erhält man schliesslich

$$F_x + i F_y = -i [\Phi + z \bar{\Phi}' + \bar{\Psi}] \Big|_A^B t. \quad (3.28)$$

Sind Spannungsgrößen \bar{T}_x und \bar{T}_y auf einem Randstück Γ_2 vorgeschrieben, so verwendet man die Randbedingungen in folgender Form:

$$\Phi + z \bar{\Phi}' + \bar{\Psi} = i \int_A^B (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds . \quad (3.29)$$

Die Integration zwischen dem festen Punkt A und dem variablen Punkt B wird so durchgeführt, daß sich beim Durchlauf der Randkurve das Gebiet Ω immer zur Linken befindetet.

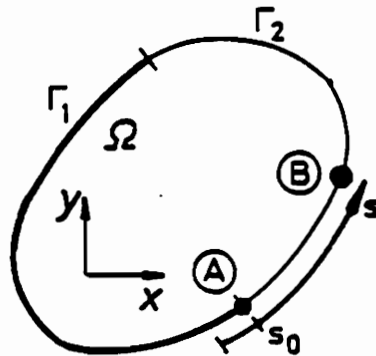


Bild 3.1 : Veranschaulichung der Integrationsrichtung

3.3 Lösungen bei der Benutzung der konformen Abbildung

Da hier spezielle finite Elemente entwickelt werden, deren Gebiet teilweise von einer "komplizierten" Randkurve begrenzt wird, ist die Konstruktion von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen, die die Randbedingungen exakt erfüllen (siehe Kapitel 4), sehr aufwendig. Für zweidimensionale Probleme hat sich die konforme Abbildung, die diese "komplizierten" Ränder auf eine geometrisch einfachere Randkurve abbildet, als sehr hilfreich erwiesen. Werden nun die komplexen Funktionen Φ und X bzw. Ψ nicht in der Originalebene (z - Ebene) sondern in einem transformierten Gebiet (ζ - Ebene) angesetzt, so muß das natürlich bei der Bildung von Ableitungen berücksichtigt werden. Um die Bezeichnungsweise nicht zu ändern, werden die Funktionen Φ und X bzw. Ψ im transformierten Gebiet mit dem Index t versehen:

$$\Phi_t(\zeta) = \Phi(z) = \Phi(f(\zeta)) \quad (3.30)$$

$$X_t(\zeta) = X(z) = X(f(\zeta)) \quad (3.31)$$

$$\Psi_t(\zeta) = \Psi(z) = \Psi(f(\zeta)) \quad (3.33)$$

Mit den Schreibvereinbarungen

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \Phi' \quad ; \quad \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = \Phi'' \quad ; \quad (3.34)$$

$$\frac{d\Phi_t(\zeta)}{d\zeta} = \dot{\Phi} \quad ; \quad \frac{d^2\Phi_t(\zeta)}{d\zeta^2} = \ddot{\Phi} \quad (3.35)$$

und der Abbildungsbeziehung

$$z = f(\zeta) \quad (3.36)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \dot{f}(\zeta) \quad (3.37)$$

erhält man für die ersten beiden komplexen Ableitungen von $\Phi(z)$ nach z folgende Ergebnisse:

$$\Phi' = \frac{d\Phi_t(\zeta)}{dz} = \frac{\dot{\Phi}_t(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad (3.38)$$

$$\Phi'' = \frac{d^2\Phi_t(\zeta)}{dz^2} = \frac{\ddot{\Phi}_t(\zeta)}{\dot{f}^2(\zeta)} - \dot{\Phi}_t(\zeta) \frac{\ddot{f}(\zeta)}{\dot{f}^3(\zeta)} \quad (3.39)$$

Nun lassen sich die Verschiebungs- und Spannungsgrößen in Abhängigkeit von Φ_t und Ψ_t angeben.

$$2\mu(u + iv) = x\Phi_t - f \frac{\bar{\Phi}_t}{\dot{f}} - \Psi \quad (3.40)$$

$$\sigma_{xx} - i\tau_{xy} = \frac{\bar{\Phi}_t}{\dot{f}} + \frac{\dot{\Phi}_t}{\dot{f}} - \bar{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}_t}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi}_t \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) - \frac{\dot{\Psi}_t}{\dot{f}} \quad (3.41)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \frac{\bar{\Phi}_t}{\dot{f}} + \frac{\dot{\Phi}_t}{\dot{f}} + \bar{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}_t}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi}_t \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}_t}{\dot{f}} \quad (3.42)$$

Die Randbedingung (3.29) erhält folgendes Aussehen.

$$\Phi_t + f(\zeta) \frac{\bar{\Phi}_t}{\bar{f}(\zeta)} + \bar{\Psi}_t = i \int_A^{\zeta(z)} (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds. \quad (3.43)$$

4. Grundgleichungen für spezielle Scheibenelemente

4.1 Besonderheiten der Ansatzfunktionen, die Lösungen des Scheibendifferentialgleichungssystems sind

Um die Besonderheiten herauszustellen, seien zunächst die Merkmale bei den Ansatzfunktionen der Standardelemente angeführt:

- a) Es werden für u und v dieselben Ansatzfunktionsterme verwendet.
- b) Die Ansatzterme sind für u und v mit verschiedenen freien Ansatzparametern $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ versehen. Hieraus ergibt sich, daß die Umrechnung der Spaltenvektoren $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ in die Vektoren der Knotenwerte \mathbf{u} bzw. \mathbf{v} für die Funktionen u und v getrennt erfolgen kann.

Im Gegensatz hierzu weisen Ansätze, die das homogene Scheibendifferentialgleichungssystem befriedigen, aufgrund ihrer Lösungseigenschaft folgende Charakterististiken auf:

- a) Für u und v ergeben sich bis auf ein paar Ausnahmen verschiedene Ansatzterme.
- b) Je ein Ansatzterm für u und ein Term für v sind (bis auf ein paar Ausnahmen) mit einem gemeinsamen Freiwert versehen. In Gleichungsform ausgedrückt erhält man hier:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{c} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \mathbf{c} \quad (4.2)$$

wobei \mathbf{c} die freien Parameter beinhaltet.

Zusätzlich zu den Funktionsfolgen mit noch bestimmbareren Koeffizienten kann noch ein fest vorgewählter Lösungsanteil, der sich aus u_p und v_p zusammensetzt, in die Ansatzfunktion aufgenommen werden. Dieser Lösungsanteil ohne Freiwert kann für folgende Zwecke verwendet werden:

a) zur Erfüllung der inhomogenen Differentialgleichung

oder

b) zur Erfüllung einer inhomogenen Randbedingung auf einem Teil des Randes (einschließlich der Erfüllung des Differentialgleichungssystems).

Ein Ansatz mit fest vorgewähltem Anteil (u_p, v_p) läßt sich darstellen durch:

$$u = u_p + \mathbf{U} \mathbf{c} \quad (4.3)$$

$$v = v_p + \mathbf{V} \mathbf{c} . \quad (4.4)$$

Aus dieser Form der speziellen Ansatzfunktionen wird ersichtlich, daß die Umrechnung der freien Ansatzparameter in Knotenwerte für u und v im allgemeinen nicht getrennt durchgeführt werden kann.

4.2 Funktional \mathbb{I} : Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials

4.2.1 Formulierung des Variationsproblems

Die zu dem Differentialgleichungssystem (2.1) und zu der Spannungsrandbedingung (2.3) gehörende Variationsaufgabe läßt sich als zu minimierendes Funktional \mathbb{II} in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{D}^T) \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \right] t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} \, t \, ds \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \right] t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} \, t \, ds = \text{Min.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierbei muß

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (4.6)$$

erfüllt sein.

Für die erste Variation von Π erhält man

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \frac{(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T) \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u})}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T} t \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \, t \, ds - \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} \, t \, ds \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \left[\frac{\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{F}}}{\phantom{\delta \mathbf{u}^T}} \right] t \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \left[\frac{\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}}}{\phantom{\delta \mathbf{u}^T}} \right] t \, ds = 0 \\ &\qquad = 0 \text{ Dgl. (2.1)} \qquad \qquad \qquad = 0, \text{Rb. (2.3)} \end{aligned}$$

wobei die Beziehung

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (4.8)$$

berücksichtigt wurde.

4.2.2 Übergang auf ein Teilgebiet

Wird nun Π nicht für den gesamten Lösungsbereich, sondern für ein Teilgebiet i mit der Fläche A^i (s. Bild 4.1) angeschrieben, so erhält man mit dem Verschiebungsansatz :

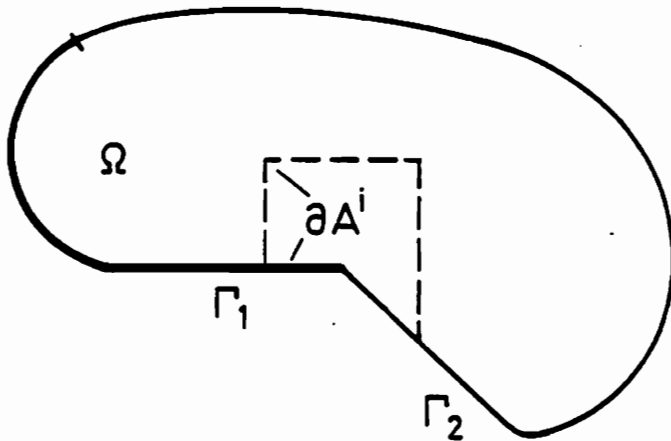
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

\mathbf{u}_h : homogener Lösungsanteil des Differentialgleichungssystems

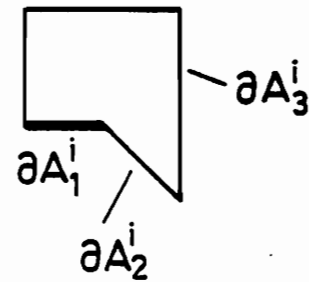
\mathbf{u}_p : vorgewählter partikulärer Lösungsanteil zur Erfüllung der inhomogenen Differentialgleichungen.

und den geänderten Gebietsbezeichnungen das Funktional Π^i in folgender Form:

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^T \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_h t \, ds + \int_{\partial A^i} \mathbf{u}_h^T \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_p t \, ds - \int_{\partial A_2^i} \mathbf{u}_h^T \bar{\mathbf{T}} t \, ds \\ & + \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_p t \, ds - \int_{A^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T [\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_p] t \, dA^i \\ & - \int_{A^i} \mathbf{u}_p^T \bar{\mathbf{F}} t \, dA^i - \int_{\partial A_2^i} \mathbf{u}_p^T \bar{\mathbf{T}} t \, ds . \end{aligned} \quad (4.10)$$



spezielles Element i:



Gebietsrand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

R.B: $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\bar{\mathbf{u}}}$ auf Γ_1

$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\bar{\mathbf{T}}}$ auf Γ_2

$$\partial A^i = \partial A_1^i + \partial A_2^i + \partial A_3^i$$

$$\partial A_1^i \subset \Gamma_1$$

$$\partial A_2^i \subset \Gamma_2$$

Bild 4.1: Gebietsbezeichnungen

Die Erfüllung der Verschiebungsrandbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \quad (\text{mit} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_h) \quad (4.11)$$

erfolgt in der Form

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial A_1^i \quad (4.12)$$

und

$$\mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial A_1^i. \quad (4.13)$$

Mit Berücksichtigung von (4.12) und den Beziehungen

$$\mathbf{u}_h^T = [u_h \ v_h] \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u}_p^T = [u_p \ v_p] \quad (4.15)$$

$$\mathbf{n} \in \mathbf{D} \mathbf{u}_h = \mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} T_{xh} \\ T_{yh} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{n} \in \mathbf{D} \mathbf{u}_p = \mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} T_{xp} \\ T_{yp} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

erhält man für Π^i :

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^T \mathbf{T}_h \ t \ ds + \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \mathbf{u}_h^T \mathbf{T}_p \ t \ ds - \int_{\partial A_2^i} \mathbf{u}_h^T \bar{\mathbf{T}} \ t \ ds + \\ &\quad + \text{Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung } \mathbf{u}_p \text{ enthalten.} \\ &= \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} [u_h T_{xh} + v_h T_{yh}] \ t \ ds + \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} [u_h T_{xp} + v_h T_{yp}] \ t \ ds + \\ &\quad - \int_{\partial A_2^i} [u_h \bar{T}_x + v_h \bar{T}_y] \ t \ ds + \quad (4.18) \\ &\quad + \text{Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung } \mathbf{u}_p \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Die speziellen Lösungsanteile u_p sind für eine Näherungslösung nicht relevant.

Wenn durch geeignete Wahl der Ansatzfunktionen nicht nur die Verschiebungsrandbedingungen, sondern auch die Spannungsrandbedingungen

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \partial A_2^i \quad (4.19)$$

mit

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \left(\frac{\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_h}{\mathbf{u}} \right) = \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_h \quad (4.20)$$

in der Form

$$\mathbf{T}_h = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial A_2^i \quad (4.21)$$

$$\mathbf{T}_p = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \partial A_2^i \quad (4.22)$$

erfüllt werden können, so erhält man den vereinfachten Ausdruck für Π^i in der Form:

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^T \mathbf{T}_h \, t \, ds + \int_{\partial A_3^i} \mathbf{u}_h^T \mathbf{T}_p \, t \, ds + \\ &\quad + \text{Terme, die Anteile aus der speziellen Lösung } \mathbf{u}_p \text{ enthalten.} \\ &= \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[u_h T_{xh} + v_h T_{yh} \right] t \, ds + \int_{\partial A_3^i} \left[u_h T_{xp} + v_h T_{yp} \right] t \, ds + \\ &\quad + \text{Terme, die Anteile aus der speziellen Lösung } \mathbf{u}_p \text{ enthalten.} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Gleichung (4.23) ist für folgende Fälle gültig:

(4.24)

a) ∂A_1^i ist nicht vorhanden und die Randbedingung

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \partial A_2^i$$

wird exakt erfüllt.

b) ∂A_2^i ist nicht vorhanden und die Randbedingung

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial A_1^i$$

wird exakt erfüllt.

c) $\partial A_1^i, \partial A_2^i$ sowie ∂A_3^i sind vorhanden und die Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial A_1^i$$

und

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \partial A_2^i$$

werden exakt erfüllt.

d) ∂A_1^i und ∂A_2^i sind nicht vorhanden, d.h. das Element ist vollkommen von anderen Elementen eingeschlossen.

4.2.3 Darstellung des Funktionals \mathbb{I} in diskretisierter Form

Für den Bereich eines speziellen Elementes werden folgende Ansätze für die Lösungsfunktion des Differentialgleichungssystems verwendet.

Verschiebungsfunktionen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_p + \mathbf{U} \mathbf{c} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_p + \mathbf{V} \mathbf{c}. \quad (4.26)$$

Spannungsterme:

Aus

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \mathbf{T} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

erhält man entsprechend (4.25) und (4.26):

$$T_x = T_{xp} + T_{xh} = T_{xp} + T_x \mathbf{c} \quad (4.28)$$

$$T_y = T_{yp} + T_{yh} = T_{yp} + T_y \mathbf{c} \quad (4.29)$$

\mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{T}_x , \mathbf{T}_y sind Zeilenvektoren.

\mathbf{c} ist ein Spaltenvektor, der die Ansatzfreiwerte enthält.

Setzt man die Ansätze für \mathbf{u} und \mathbf{T} in die Beziehung (4.18) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \left[\mathbf{U}^T \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_x^T \mathbf{U} + \mathbf{V}^T \mathbf{T}_y + \mathbf{T}_y^T \mathbf{V} \right] t \, ds \, \mathbf{c} + \\ &+ \mathbf{c}^T \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \left[\mathbf{U}^T \mathbf{T}_{xP} + \mathbf{V}^T \mathbf{T}_{yP} \right] t \, ds - \mathbf{c}^T \int_{\partial A_2^i} \left[\mathbf{U}^T \bar{\mathbf{T}}_x + \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{T}}_y \right] t \, ds . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der Vektor \mathbf{c} , der die Ansatzfreiwerte enthält, wird nun in folgender Weise mit dem Elementknotenverschiebungsvektor \mathbf{q} verknüpft:

$$\mathbf{c} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{g} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} . \quad (4.31)$$

Die Ermittlung der Matrix \mathbf{G} und des Spaltenvektors \mathbf{g} wird im Kapitel 4.2.4 besprochen.

Mit (4.31) und den Vereinbarungen

$$\mathbf{H} = \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}^T \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_x^T \mathbf{U} + \mathbf{V}^T \mathbf{T}_y + \mathbf{T}_y^T \mathbf{V} \right] t \, ds \quad (4.32)$$

(Symmetrische Matrix)

$$\mathbf{r}_P = \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \left[\mathbf{U}^T \mathbf{T}_{xP} + \mathbf{V}^T \mathbf{T}_{yP} \right] t \, ds \quad (4.33)$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \int_{\partial A_2^i} \left[\mathbf{U}^T \bar{\mathbf{T}}_x + \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{T}}_y \right] t \, ds \quad (4.34)$$

erhält man schließlich das zu minimierende Funktional in der Form

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{G}^T [\mathbf{H} \mathbf{g} + \mathbf{r}_p - \bar{\mathbf{r}}] + \quad (4.35)$$

+ Terme, die \mathbf{q} bzw. \mathbf{q}^T nicht enthalten.

\mathbf{q} : Knotenwerte des betrachteten Elementes

\mathbf{G} : erläutert in Kapitel 4.2.4

\mathbf{g} : erläutert in Kapitel 4.2.4 (nur vorhanden, wenn eine spezielle Lösung vorgegeben ist)

∂A_2^i : Teil des Elementrandes ∂A^i , auf dem \bar{T}_x und \bar{T}_y vorgegeben sind.

∂A_3^i : Teil des Elementrandes ∂A^i , der die Grenze zu Nachbarelementen darstellt.

Für die erste Variation ergibt sich aus (4.35)

$$\begin{aligned} \delta \Pi^i &= \frac{\partial \Pi^i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial \Pi^i}{\partial \mathbf{q}^T} \\ &= \delta \mathbf{q}^T \left[\underbrace{\mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G}}_{\mathbf{K}} \mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{g} + \mathbf{G}^T \mathbf{r}_p - \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{r}}}_{-\bar{\mathbf{p}}} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

bzw.

$$\delta \Pi^i = \delta \mathbf{q}^T [\mathbf{K} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{p}}] \quad (4.37)$$

mit

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \quad (4.38)$$

und

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{G}^T [-\mathbf{H} \mathbf{g} - \mathbf{r}_p + \bar{\mathbf{r}}] . \quad (4.39)$$

Tritt einer der unter (4.24) genannten Fälle auf, so sind alle Integrationen nur noch über den Elementrand ∂A_3^i durchzuführen und der Ausdruck für $\bar{\mathbf{r}}$ entfällt.

4.2.4 Verknüpfungsbeziehung zwischen den Ansatzfreiwerten und den Knotenwerten (Berechnung von G und g)

Um Verschiebungselemente sinnvoll koppeln zu können, müssen für benachbarte Elemente gleichartige Knotenwerte und zwischen den Knoten gleichartige Elementverschiebungsverläufe (linear, quadratisch, etc.) vorliegen. Für Scheibenprobleme erwiesen sich die diskreten Verschiebungswerte u und v als ausreichende Knotengrößen. Bei Verschiebungselementen, die auf der Basis von Funktional I (4.5) erstellt werden, müssen die Elementansätze \mathbf{u} die geometrischen Übergangsbedingungen von vornherein erfüllen und somit auf den Elementrändern einen zur Kopplung geeigneten Verschiebungsverlauf $\tilde{\mathbf{u}}$ exakt annehmen. Da die Kopplung von speziellen Elementen und Standardelementen gewährleistet sein soll, erscheint es sinnvoll, die polynomförmigen Ansatzfunktionen der Standardelemente als geeignete Randverschiebungsverläufe $\tilde{\mathbf{u}}$ zu wählen. Mit dem gewählten Polynomgrad ist sogleich auch die Anzahl der auf jeder Seite erforderlichen Knotenwerte festgelegt, nach deren sinnvoller Wahl sich dann der für eine Kopplung geeignete Randverschiebungsverlauf $\tilde{\mathbf{u}}$ stückweise angeben läßt.

Da es bei speziellen Elementen vorkommen kann, daß die Ansatzfunktionen \mathbf{u} für den Innenbereich den polynomförmigen Randverschiebungsverlauf $\tilde{\mathbf{u}}$ nicht exakt annehmen können, soll mit Hilfe der Fehlerquadratmethode eine optimale Approximation der Verschiebungsverläufe erzielt werden.

Explizit lautet die Minimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}]^T [\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [(\tilde{u} - u) (\tilde{v} - v)] \begin{bmatrix} \tilde{u} - u \\ \tilde{v} - v \end{bmatrix} ds \quad (4.40) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [(\tilde{u} - u)^2 + (\tilde{v} - v)^2] ds \quad \longrightarrow \text{Min.}
 \end{aligned}$$

Die Funktionsverläufe \tilde{u} und \tilde{v} beinhalten die Knotenwerte des Elementes und werden in Abhängigkeit von einer Randkoordinate s stückweise linear oder quadratisch gewählt, je nachdem mit welchen Standardelementen das spezielle Element gekoppelt werden soll. u und v stellen die Verläufe der speziellen Gebietsansätze auf dem Rand dar.

Setzt man die Beziehungen

$$\tilde{u}(s) = \tilde{U}(s) \underline{u} \quad (\underline{u}: \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (4.41)$$

$$\tilde{v}(s) = \tilde{V}(s) \underline{v} \quad (\underline{v}: \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (4.42)$$

und

$$u(s) = u_p(s) + u_h(s) = u_p(s) + \mathbf{U}(s) \mathbf{c} \quad (4.43)$$

$$v(s) = v_p(s) + v_h(s) = v_p(s) + \mathbf{V}(s) \mathbf{c} \quad (4.44)$$

in (4.40) ein, so erhält man für den Rand ∂A_3^i , an dem andere Elemente gekoppelt sind:

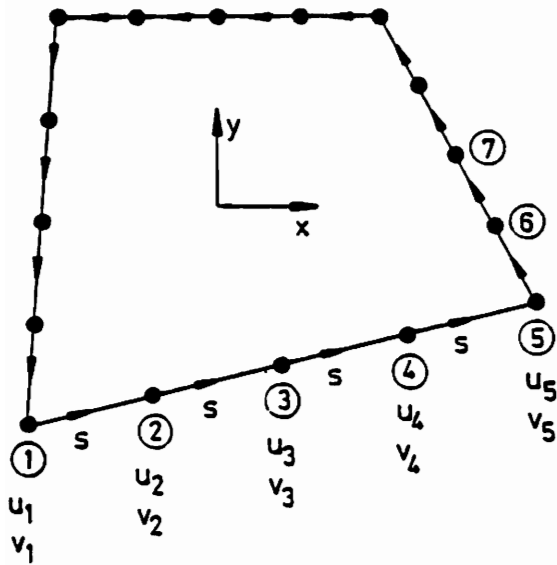
$$J = \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} [\underline{u}^T \tilde{U}^T \tilde{U} \underline{u} - 2 \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T \tilde{U} \underline{u} - 2 u_p \tilde{U} \underline{u} + \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{c} + 2 \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T u_p + u_p^2] ds \quad (4.45)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} [\underline{v}^T \tilde{V}^T \tilde{V} \underline{v} - 2 \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \tilde{V} \underline{v} - 2 v_p \tilde{V} \underline{v} + \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{c} + 2 \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T v_p + v_p^2] ds .$$

Da bei Standardelementen die gleichen Polynomansätze für die Verschiebungsgrößen verwendet werden, gilt:

$$\tilde{U}(s) = \tilde{V}(s) . \quad (4.46)$$

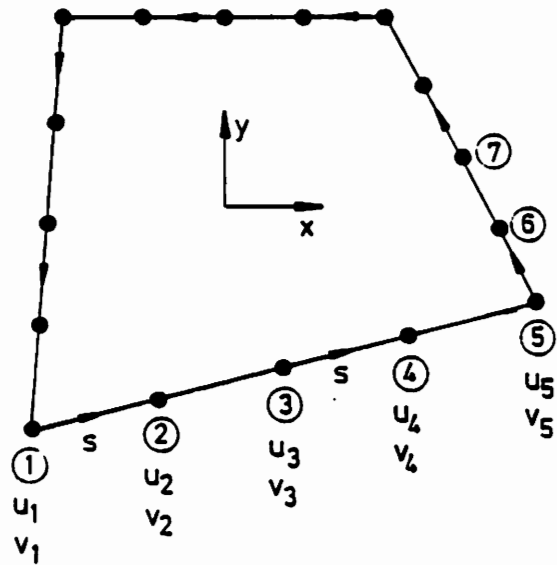
Die Zeilenvektoren $\mathbf{U}(s)$ und $\mathbf{V}(s)$ werden abschnittsweise so definiert, daß sie zwei (für lineare Ansatzfunktionen) bzw. drei (für quadratische Ansatzfunktionen) von Null verschiedene Terme enthalten. Die Position dieser Terme hängt von dem zugehörigen Spaltenvektor für die Knotenverschiebungen ab.



Annahme linearer Randverschiebungen zwischen den

Knoten ① - ②
 ② - ③
 ③ - ④

u. s. w.



Annahme quadratischer Randverschiebungen zwischen den

Knoten: ① - ② - ③
 ③ - ④ - ⑤
 u. s. w.

Bild 4.2 Zum Verlauf der abschnittsweise definierten Randkoordinaten s

Beispiel für den Aufbau von \underline{U} bzw. \underline{V} für einen linearen Randverschiebungsverlauf:

$$\underline{\underline{U}}(s) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{s}{s_{12}}\right) & \frac{s}{s_{12}} & \underline{0} & & \\ 0 & \left(1 - \frac{s}{s_{23}}\right) & \frac{s}{s_{23}} & \underline{0} & \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{s}{s_{34}}\right) & \frac{s}{s_{34}} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

zwischen Knoten
① und ② ($0 \leq s \leq s_{12}$)

zwischen Knoten
② und ③ ($0 \leq s \leq s_{23}$)

zwischen Knoten
③ und ④ ($0 \leq s \leq s_{34}$)

Schließlich erhält man die Bedingungsgleichung für ein Minimum aus

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}^T} = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

zu

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}^T} = -\mathbf{L} \mathbf{q} + \mathbf{Q} \mathbf{c} + \mathbf{r}_p = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

mit:

$$\mathbf{Q} = \int_{\partial A_3^i} [\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \mathbf{V}^T \mathbf{V}] ds \quad (4.51)$$

$$\mathbf{L} = \left[\int_{\partial A_3^i} \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{U}} ds \quad \vdots \quad \int_{\partial A_3^i} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{V}} ds \right] \quad (4.52)$$

$$\mathbf{r}_p = \int_{\partial A_3^i} [\mathbf{U}^T u_p + \mathbf{V}^T v_p] ds \quad (4.53)$$

Die Verknüpfungsbeziehung (4.31) läßt sich nun explizit darstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_p \\ &= \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.54)$$

mit

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{L} \quad (4.55)$$

und

$$\mathbf{g} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_p \quad (4.56)$$

4.3 Funktional II: Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials

4.3.1 Formulierung des Variationsproblems

Bei Verwendung des Funktionals I (4.5) wird die Erfüllung der geometrischen Randbedingung $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf Γ_1 vorausgesetzt. Diese Einschränkung kann durch Addition eines Zusatztermes fallengelassen werden.

Das Funktional II lautet:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{D}^T) \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \right] t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} \, t \, ds + \\ & - \int_{\Gamma_1} \mathbf{T}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, t \, ds \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$[\mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}]^T$$

Für die erste Variation erhält man

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \left[\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{F}} \right] t \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \left[\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}} \right] t \, ds \\ & \qquad \qquad \qquad = 0 \text{ Dgl. (2.1)} \qquad \qquad \qquad = 0 \text{ Rb. (2.3)} \\ & + \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{T}^T \left[\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \right] t \, ds = 0 \quad . \\ & \qquad \qquad \qquad = 0 \text{ Rb. (2.2)} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Das erweiterte Funktional (4.57) dient als Ausgangspunkt für das sogenannte "hybride Weggrößenverfahren".

4.3.2 Übergang auf ein Teilgebiet

Betrachtet man analog zu Kapitel 4.2.2 ein Teilgebiet aus dem Lösungsgebiet (s. Bild 4.1), so kann durch eine Modifikation der Erweiterungsterm

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) t \, ds \quad (4.59)$$

nicht nur auf dem Gebietsrand Γ zur Anpassung von u an \bar{u} , sondern auch auf die Zwischenelementgrenze ∂A_3^i zur Erzielung einer guten Annäherung zwischen u und einem für die Kopplung geeigneten Verschiebungsverlauf \tilde{u} ausgewertet werden.

Für den zu betrachteten Teilbereich (s. Bild 4.1) kann der Erweiterungsterm in der Form

$$\int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \mathbf{T}^T (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) t \, ds \quad (4.60)$$

angewendet werden, wenn man vereinbart, daß

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \quad (4.61)$$

gesetzt wird.

Damit können die Ansatzfunktionen für den Innenbereich des Elementes frei gewählt werden, ohne von vornherein Übergangsbedingungen erfüllen zu müssen. Mit den Bezeichnungen des Teilgebietes erhält man für das Funktional Π :

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \int_{A^i} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{D}^T) \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \right] t \, ds + \\ & - \int_{\partial A_2^i} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} t \, ds - \int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \mathbf{T} (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) t \, ds . \end{aligned} \quad (4.62)$$

Mit den Ansätzen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_h \quad (4.63)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_p + \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u}_h = \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_h \quad (4.64)$$

geht die Gleichung (4.62) in

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^T \mathbf{T}_h t ds + \int_{\partial A^i} \mathbf{u}_h \mathbf{T}_p t ds - \int_{\partial A^i} \mathbf{u}_h \bar{\mathbf{T}} t ds + \\ & + \text{Terme, die } \mathbf{u}_p \text{ und } \mathbf{T}_p \text{ enthalten} + \quad (4.65) \\ & + \int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \frac{[\mathbf{T}_h^T \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{T}_p^T \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{T}_h^T \mathbf{u}_h - \mathbf{T}_h^T \mathbf{u}_p - \mathbf{T}_p^T \mathbf{u}_h - \mathbf{T}_p^T \mathbf{u}_p] t ds}{\mathbf{T}^T (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})} \end{aligned}$$

über. Wenn einer der unter (4.24) genannten Fälle auftritt, so ergibt sich schließlich mit den Beziehungen (4.14) bis (4.17) der Funktionalausdruck zu:

$$\begin{aligned} \Pi^i = & - \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (u_h T_{xh} + T_{xh} u_h + v_h T_{yh} + T_{yh} v_h) \right] t ds + \\ & - \int_{\partial A_3^i} [T_{xh} u_p + T_{yh} v_p] t ds + \quad (4.66) \\ & + \int_{\partial A_3^i} [T_{xh} \tilde{u} + T_{yh} \tilde{v}] t ds + \int_{\partial A_2^i} [T_{xp} \tilde{u} + T_{yp} \tilde{v}] t ds \\ & + \text{Terme, die } u_p, v_p, T_p \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

4.3.3 Darstellung des Funktionals II in diskretisierter Form

Für den Bereich eines speziellen Elementes sollen wieder die Ansätze (4.25) bis (4.29) aus Kapiteln 4.2.3 verwendet werden. Außerdem gilt für die Randverschiebungsansätze:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{u} \quad (4.67)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{v} \quad (4.68)$$

Mit den Vereinbarungen

$$\mathbf{H} = \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} [\mathbf{U}^T \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_x^T \mathbf{U} + \mathbf{V}^T \mathbf{T}_y + \mathbf{T}_y^T \mathbf{V}] t ds \quad (4.69)$$

$$\mathbf{L} = \left[\int_{\partial A_3^i} \mathbf{T}_x^T \mathbf{U} \, t \, ds \quad \vdots \quad \int_{\partial A_3^i} \mathbf{T}_y^T \mathbf{V} \, t \, ds \right] \quad (4.70)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \left[\begin{array}{c} \int_{\partial A_3^i} \mathbf{U}^T \mathbf{T}_{xp} \, t \, ds \\ \int_{\partial A_3^i} \mathbf{V}^T \mathbf{T}_{yp} \, t \, ds \end{array} \right] \quad (4.71)$$

$$\mathbf{r}_p = \int_{\partial A_3^i} \left[\mathbf{T}_x^T u_p + \mathbf{T}_y^T v_p \right] t \, ds \quad (4.72)$$

$$\mathbf{q} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right] \quad (4.73)$$

erhält man schließlich das Funktional Π in der Form:

$$\Pi^i = -\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{r}_p + \mathbf{c}^T \mathbf{L} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{r}}_p + \quad (4.74)$$

+ weitere Terme, die \mathbf{c} und \mathbf{q} nicht enthalten.

Hieraus ergibt sich aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial \mathbf{c}^T} = -\mathbf{H} \mathbf{c} - \mathbf{r}_p + \mathbf{L} \mathbf{q} = 0 \quad (4.75)$$

die Beziehung zwischen den Ansatzfreiwerten und den Knotengrößen.

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{q} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_p \quad (4.76)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Beziehung (4.75) ergibt sich

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{q}^T \mathbf{L}^T \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{q}}_{\mathbf{K}} - \underbrace{\mathbf{q}^T \left[\mathbf{L}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_p - \tilde{\mathbf{r}}_p \right]}_{\bar{\mathbf{p}}} + \quad (4.77)$$

+ Terme, die \mathbf{q} nicht enthalten.

Wird der Vektor \mathbf{c} wieder als allgemeiner Ausdruck (Gleichung 4.31) benutzt, so ergibt sich mit

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{q} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_p = \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{g} \quad (4.78)$$

die Matrix \mathbf{G} zu

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \quad (4.79)$$

und der Spaltenvektor \mathbf{g} zu

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_p. \quad (4.80)$$

Setzt man diese Beziehungen in (4.77) ein, so erhält man

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{g} + \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{r}}_p + \quad (4.81)$$

+ Terme ohne \mathbf{q} .

Dieser Ausdruck für das Funktinal Π weist eine ähnliche Form auf wie das Funktional I in Gleichung (4.35), wobei aber die Verknüpfungsmatrizen \mathbf{G} und \mathbf{g} auf verschiedene Weise ermittelt werden. Die Gleichungen für die Matrix \mathbf{H} sind in beiden Fällen formal identisch. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, daß für die Berechnung von \mathbf{H} die Ansatzfunktionen im 1. Fall (Funktional I, Weggrößenverfahren) Starrkörperanteile enthalten müssen, wohingegen im 2. Fall (Funktional II, hybrides Weggrößenverfahren) wegen der Inversion von \mathbf{H} keine Starrkörperanteile vorhanden sein dürfen. Beim hybriden Weggrößenverfahren sind die Starrkörperanteile in der \mathbf{L} -Matrix bzw. in den Vektoren $\tilde{\mathbf{U}}$ und $\tilde{\mathbf{V}}$ enthalten.

5. Die komplexen Funktionen Φ und Ψ als Ansatzfunktionen für die finite Elementlösung

Im Kapitel 4 wurden Ansätze für die Verschiebungen und Spannungen angegeben (4.25 bis 4.29). Andererseits ist die Lösung der Problemgleichung (3.8) mit Hilfe der komplexen Funktionen Φ und Ψ im Kapitel 3.2 wiedergegeben.

Hier sollen nun die Funktionen Φ und Ψ quasi als Ansatzfunktionen für einen wohl definierten Elementbereich aufgefaßt werden, so daß die Gebietsansätze 4.25 bis 4.26 übergehen in

$$u = u_p + \mathbf{U} \mathbf{c} = u_p + f_1(\Phi, \Psi, z, f_1^*(\alpha)) \quad (5.1)$$

$$v = v_p + \mathbf{V} \mathbf{c} = v_p + f_2(\Phi, \Psi, z, f_2^*(\alpha)). \quad (5.2)$$

Dabei können die Funktionen f_1 und f_2 auch Ableitungen von Φ und Ψ enthalten. $f_1^*(\alpha)$ und $f_2^*(\alpha)$ sollen die Werkstoffkenngrößen repräsentieren. In ähnlicher Weise lassen sich auch die zu diesen Verschiebungsansätzen gehörenden Spannungsgrößen darstellen. Die Ansatzfreiwerte \mathbf{c} sind jeweils in Φ und Ψ enthalten. Die Struktur von Φ und Ψ hängt im wesentlichen vom betrachteten Elementbereich ab. Im Hinblick auf die zu betrachtenden finiten Elementbereiche wird es hier als sinnvoll angesehen, die Funktionen Φ und Ψ in der transformierten ζ -Ebene anzusetzen und das Gebiet als Teil eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs zu betrachten. Die Transformation aus der z -Ebene in die ζ -Ebene soll so gewählt werden, daß der Koordinatenursprung in den Mittelpunkt eines Einheitskreises übergeht. Dabei soll beachtet werden, daß das transformierte Gebiet den Einheitskreis nicht vollständig als Gebietsberandung aufweist.

Falls die oben genannten Bedingungen nicht für das vollständige Gebiet in der z -Ebene zu erfüllen sind, so muß eine geeignete Unterteilung in mehrere Teilgebiete vorgenommen werden.

Für das beschriebene Gebiet in der ζ -Ebene können die Funktionen Φ und Ψ allgemein in der Form

$$\Phi_t(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j + b_0 \ln \zeta + b_1 \zeta \ln \zeta \quad (5.3)$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k + d \ln \zeta \quad (5.4)$$

angegeben werden. Dabei sind a_j , c_k , b_0 und d im allgemeinen komplexe Konstanten, und b_1 ist reell. Diese allgemeinen Ansätze erhält man über Eindeutigkeitsbetrachtungen der Verschiebungen und Spannungen /2/. Dabei ist zu beachten, daß diese Eindeutigkeiten nur in dem zu betrachtenden Gebiet verlangt werden.

Wird die exakte Erfüllung von Spannungsrandbedingungen verlangt, so sind laut Gleichung 3.41 die Koeffizienten von Φ und Ψ nicht unabhängig voneinander wählbar. Die hier dargestellten Ausführungen werden in Kapitel 6 am Beispiel eines Elementes für ausgerundete Ecken verdeutlicht.

6. Finites Element für ausgerundete Ecken

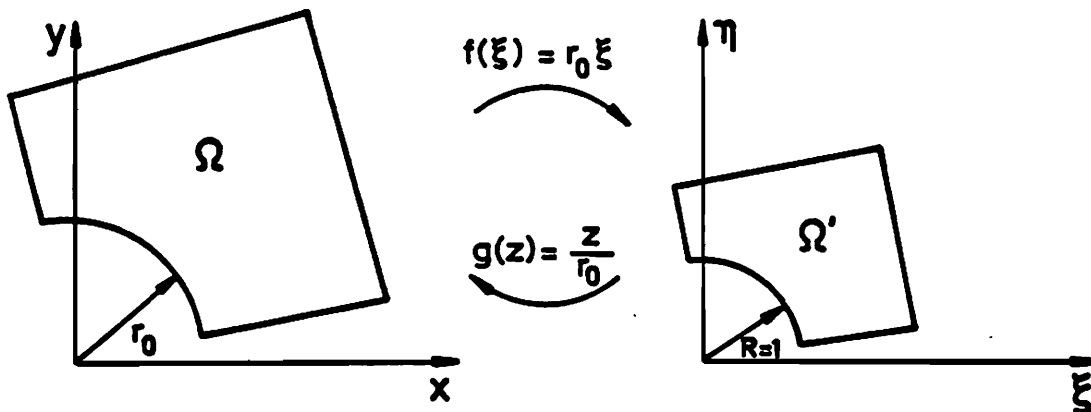


Bild 6.1: Konforme Abbildung auf den Einheitskreis

Für dieses Element soll die homogene Spannungsrandbedingung auf dem Teil des Einheitskreises $|\zeta| = 1$ erfüllt werden.

Aus der Randbedingungsgleichung (3.41)

$$\Phi_t(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}_t(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} + \Psi(\zeta) = 0 \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (6.1)$$

erhält man mit dem Ansatz für $\Phi_t(\zeta)$

$$\Phi_t(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j + b_0 \ln \zeta + b_1 \zeta \ln \zeta \quad (6.2)$$

die Funktion Ψ in der Form

$$\Psi(\zeta) = -\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}_t(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad (6.3)$$

In dieser Gleichung sollen nun die Besonderheiten, die auf dem Einheitskreis gelten, berücksichtigt werden.

Auf dem Einheitskreis $|\zeta| = R = 1$ gilt

$$\overline{\zeta^j} = \zeta^{-j} \quad (6.4)$$

$$\overline{\ln \zeta} = -\ln \zeta \quad (6.5)$$

Daraus folgt für die Abbildungsfunktion

$$f(\zeta) = r_0 \zeta \quad (6.6)$$

$$\dot{f}(\zeta) = r_0 \quad (6.7)$$

$$\text{und } \overline{f(\zeta)} = r_0 \zeta^{-1} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (6.8)$$

Damit läßt sich die konjugiert komplexe Funktion zu $\Phi_t(\zeta)$ auf dem Einheitskreis wie folgt darstellen

$$\overline{\Phi_t(\zeta)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{a_j} \zeta^{-j} - \overline{b_0} \ln \zeta - \underbrace{b_1 \zeta^{-1} \ln \zeta}_{\text{reell}} \quad (6.9)$$

Außerdem gilt

$$\overline{f(\zeta)} \frac{\overline{\Phi_t(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} = \zeta^{-1} \dot{\Phi}(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-2} + b_0 \zeta^{-2} + b_1 \zeta^{-1} (\ln \zeta + 1) \quad (6.10)$$

Damit erhält man für $\Psi_t(\zeta)$

$$\Psi(\zeta) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^{-j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-2} + \overline{b_0} \ln \zeta - b_0 \zeta^{-2} - b_1 \zeta^{-1} \quad (6.11)$$

6.1 Die Funktionen $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ für die finite Elementlösung

Für die finite Elementlösung kann man nicht unendlich viele Reihenglieder verwenden. Deshalb werden für den jeweiligen Anwendungsfall endliche Summationsgrenzen gewählt. Die Funktionen Φ_t und Ψ haben dann folgende Gestalt:

$$\Phi_t(\zeta) = \sum_{j=-N}^M a_j \zeta^j + b_0 \ln \zeta + b_1 \zeta \ln \zeta \quad (6.12)$$

$$\Psi(\zeta) = -\sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-1} - \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-2} + \bar{b}_0 \ln \zeta - b_0 \zeta^{-2} - b_1 \zeta^{-1} \quad (6.13)$$

Die komplexen Koeffizienten a_j und b_0 sowie der reelle Koeffizient b_1 stellen die Freiwerte \underline{c} für die finite Elementrechnung dar. Um nun die reellen Funktionen $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ berechnen zu können, ist es notwendig, die Funktionen Φ_t und Ψ_t einzusetzen und dann den Realteil vom Imaginärteil zu trennen.

Um die komplexen Multiplikationen durchzuführen, werden nun folgende komplexen Schreibweisen vereinbart.

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \alpha_j + i \beta_j \\ b_0 &= \gamma_0 + i \delta_0 \\ b_1 &= \gamma_1 \end{aligned} \right\} \text{Ansatzfreiwerte} \quad (6.14)$$

$$\zeta^j = \operatorname{Re}(\zeta^j) + i \operatorname{Im}(\zeta^j) \quad (6.15)$$

$$\ln \zeta = \operatorname{Re}(\ln \zeta) + i \operatorname{Im}(\ln \zeta) \quad (6.16)$$

mit

$$\operatorname{Re}(\zeta^j) = R^j \cos j \Theta \quad (6.17)$$

$$\operatorname{Im}(\zeta^j) = R^j \sin j \Theta \quad (6.18)$$

$$\operatorname{Re}(\ln \zeta) = \ln R \quad (6.19)$$

$$\operatorname{Im} (\ln \zeta) = \Theta \quad (6.20)$$

Nach dem Einsetzen in die Gleichungen (3.38) bis (3.40) erhält man:

$$2 \mu u(z) = \operatorname{Re} [x \Phi_t(\zeta) - \zeta \bar{\Phi} - \bar{\Psi}] \quad (6.21)$$

$$= \sum_{j=-N}^M \begin{bmatrix} \{ x \operatorname{Re}(\zeta^j) + \operatorname{Re}(\zeta^{-j}) + \\ -j [\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{j-1}) + \operatorname{Im}(\zeta^{j-1}) - \operatorname{Re}(\zeta^{j-2})] \} \\ \{ -x \operatorname{Im}(\zeta^j) + \operatorname{Im}(\zeta^{-j}) + \\ -j [-\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{j-1}) + \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{j-1}) + \operatorname{Im}(\zeta^{j-2})] \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \{ \operatorname{Re}(\ln \zeta) [x-1] - \operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) + \operatorname{Re}(\zeta^{-2}) \} \\ \{ \operatorname{Im}(\ln \zeta) [-x-1] - \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) + \operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Im}(\zeta^{-2}) \} \\ \{ \operatorname{Re}(\ln \zeta) \operatorname{Re}(\zeta) [x-1] + \operatorname{Im}(\ln \zeta) \operatorname{Im}(\zeta) [-x-1] - \operatorname{Re}(\zeta) + \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$2 \mu v(z) = \operatorname{Im} [x \Phi_t(\zeta) - \zeta \bar{\Phi}(\zeta) - \bar{\Psi}] \quad (6.22)$$

$$= \sum_{j=-N}^M \begin{bmatrix} \{ x \operatorname{Im}(\zeta^j) - \operatorname{Im}(\zeta^{-j}) + \\ + j [\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{j-1}) - \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{j-1}) - \operatorname{Im}(\zeta^{j-2})] \} \\ \{ x \operatorname{Re}(\zeta^j) + \operatorname{Re}(\zeta^{j-1}) \\ + j [\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{j-1}) + \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{j-1}) - \operatorname{Re}(\zeta^{j-2})] \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \{ \operatorname{Im}(\ln \zeta) [x+1] + \operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Im}(\zeta^{-2}) \} \\ \{ \operatorname{Re}(\ln \zeta) [x-1] + \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) + \operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Re}(\zeta^{-2}) \} \\ \{ \operatorname{Re}(\ln \zeta) \operatorname{Im}(\zeta) [x-1] + \operatorname{Im}(\ln \zeta) \operatorname{Re}(\zeta) [x+1] - \operatorname{Im}(\zeta) - \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(\zeta) = \frac{1}{r_0} \{ 2 \operatorname{Re} [\dot{\Phi}_t(\zeta)] - \operatorname{Re} [\bar{\zeta} \ddot{\Phi}(\zeta)] - \operatorname{Re} [\dot{\Psi}(\zeta)] \} \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \begin{bmatrix} j \{ 2 \operatorname{Re} (\zeta^{-j}) - (j-1) [\operatorname{Re} (\zeta^{j-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2})] \\ - \operatorname{Re} (\zeta^{-j-1}) + (j-2) \operatorname{Re} (\zeta^{j-3}) \} \\ j \{ -2 \operatorname{Im} (\zeta^{j-1}) - (j-1) [-\operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{j-2})] \\ - \operatorname{Im} (\zeta^{-j-1}) - (j-2) \operatorname{Im} (\zeta^{j-3}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \{ \operatorname{Re} (\zeta^{-1}) + \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-2}) - 2 \operatorname{Re} (\zeta^{-3}) \} \\ \{ -3 \operatorname{Im} (\zeta^{-1}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) - \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-2}) + 2 \operatorname{Im} (\zeta^{-3}) \} \\ \{ 2 \operatorname{Re} (\ln \zeta) + 2 - \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-1}) - \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-1}) - \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{yy} (\zeta) = \frac{1}{r_0} \{ 2 \operatorname{Re} [\dot{\Phi}_t (\zeta)] + \operatorname{Re} [\bar{\zeta} \ddot{\Phi} (\zeta)] + \operatorname{Re} [\dot{\Psi} (\zeta)] \} \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \begin{bmatrix} j \{ 2 \operatorname{Re} (\zeta^{-j}) + (j-1) [\operatorname{Re} (\zeta^{j-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2})] \\ + \operatorname{Re} (\zeta^{-j-1}) - (j-2) \operatorname{Re} (\zeta^{j-3}) \} \\ j \{ -2 \operatorname{Im} (\zeta^{j-1}) + (j-1) [-\operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{j-2})] \\ + \operatorname{Im} (\zeta^{-j-1}) + (j-2) \operatorname{Im} (\zeta^{j-3}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \{ 3 \operatorname{Re} (\zeta^{-1}) - \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) - \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-2}) + 2 \operatorname{Re} (\zeta^{-3}) \} \\ \{ - \operatorname{Im} (\zeta^{-1}) - \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) + \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-2}) - 2 \operatorname{Im} (\zeta^{-3}) \} \\ \{ 2 \operatorname{Re} (\ln \zeta) + 2 + \operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{-1}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{-1}) + \operatorname{Re} (\zeta^{-2}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{r_0} \{ \operatorname{Im} [\bar{\zeta} \ddot{\Phi}] + \operatorname{Im} [\dot{\Psi}] \} \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \begin{bmatrix} j \{ (j-1) [\operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2}) - \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{j-2})] \\ + \operatorname{Im} (\zeta^{-j-1}) - (j-2) \operatorname{Im} (\zeta^{j-3}) \} \\ j \{ (j-1) [\operatorname{Re} (\zeta) \operatorname{Re} (\zeta^{j-2}) + \operatorname{Im} (\zeta) \operatorname{Im} (\zeta^{j-2})] \\ - \operatorname{Re} (\zeta^{-j-1}) - (j-2) \operatorname{Re} (\zeta^{j-3}) \} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \{-\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-2}) + \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-2}) + \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) + 2\operatorname{Im}(\zeta^{-3})\} \\ \{-\operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-2}) - \operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-2}) - \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) + 2\operatorname{Re}(\zeta^{-3})\} \\ \{\operatorname{Re}(\zeta) \operatorname{Im}(\zeta^{-1}) - \operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta^{-1}) + \operatorname{Im}(\zeta^{-2})\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \partial_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}.$$

Damit sind die in (5.1) und (5.2) definierten Funktionen f_1 und f_2 explizit wiedergegeben. Die Ansatzfreiwerte \mathbf{c} lassen sich nun durch die Koeffizienten der Reihenglieder in Φ_t und Ψ_t ausdrücken.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \\ \gamma_0 \\ \partial_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{-N} \\ \alpha_{-N-1} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{-N} \\ \vdots \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

6.2 Form der finiten Elemente und Berechnungsmethoden

6.2.1 Wahl des lokalen Koordinatensystemes

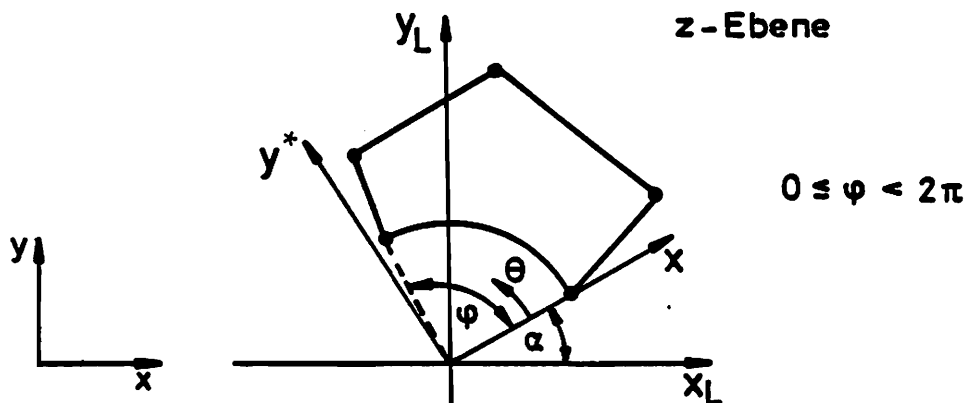


Bild 6.2: Allgemeine Lage eines finiten Elementes

Bild 6.2 stellt die allgemeine Lage eines finiten Elementes in der z-Ebene dar. In

den Beispielrechnungen wurde die Lage der Elementknoten bezogen auf das im Kreismittelpunkt liegende Koordinatensystem (x_L, y_L) angegeben. Die x_L - bzw. y_L - Achse liegt dabei parallel zu den Achsen des globalen Koordinatensystem. Um zu gewährleisten, daß der Winkel θ des Elementbereiches, bei allgemeiner Lage des finiten Elementes, tatsächlich im Bereich 0 bis 2π liegt, wurde das (x^*, y^*) - System als lokales Koordinatensystem gewählt. Dazu wurde folgende Transformationsformel benutzt.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} . \quad (6.27)$$

Nach der Bestimmung der Bereichsansätze im (ζ^*, η^*) -System (durch konforme Abbildung der z^* -Ebene auf die ζ^* -Ebene) erfolgte die Rücktransformation

$$\begin{bmatrix} u_L \\ v_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\sigma_{x_L x_L} = \frac{1}{2} (\sigma_{x^* x^*} + \sigma_{y^* y^*}) + \frac{1}{2} (\sigma_{x^* x^*} - \sigma_{y^* y^*}) \cos(-2\alpha) + \tau_{x^* y^*} \sin(-2\alpha) \quad (6.29)$$

$$\sigma_{y_L y_L} = \frac{1}{2} (\sigma_{x^* x^*} + \sigma_{y^* y^*}) - \frac{1}{2} (\sigma_{x^* x^*} - \sigma_{y^* y^*}) \cos(-2\alpha) + \tau_{x^* y^*} \sin(-2\alpha) \quad (6.30)$$

$$\tau_{x_L y_L} = -\frac{1}{2} (\sigma_{x^* x^*} - \sigma_{y^* y^*}) \sin(-2\alpha) + \tau_{x^* y^*} \cos(-2\alpha) \quad (6.31)$$

6.2.2. Wahl der Reihenglieder

In den Ansatzfunktionen sind die Summationsgrenzen N und M als allgemeine Größen verwendet worden. Die Wahl dieser Größen hängt von der Anzahl der Freiheitsgrade , bzw. von der Anzahl der Elementknoten und vom verwendeten Funktional ab. Bezeichnet man die Knotenzahl mit K, so stellt sich folgende Wahl als günstig heraus.

$$\begin{aligned} \text{Funktional I :} \quad & N = \text{Int} (K/2) \\ & M = K - N \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Funktional II:} \quad & N = \text{Int} (K/2) \\ & M = N . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Int bedeutet eine Integerdivision (z.B. $\text{Int } 9/2=4$)

6.2.3 Randintegration

Die zu berechnenden Integralmatrizen wurden mit Hilfe einer Gauß'schen Quadraturformel von zu wählender Ordnung ermittelt. Die benötigten Ordinaten und Wichtungsfaktoren sind der einschlägigen Literatur entnommen. Um Quadraturformeln mit wenigen Punkten zur Anwendung zu bringen, wurde ein Integrationsintervall in mehrere Teilintervalle unterteilt. Für die Beispielrechnung wurde eine Unterteilung in 10 Intervalle vorgenommen, für die jeweils eine 3-Punkte-Quadraturformel zur Anwendung kam.

6.3 Auftretende Starrkörperanteile

In den betrachteten Beispielen führen die Funktionen

$$\Phi_{\zeta} (\zeta) = \alpha_0 + i \beta_0 + i \beta_1 \zeta \quad (6.34)$$

und

$$\Psi_{\zeta} (\zeta) = - \alpha_0 + i b_0 \quad (6.35)$$

zu verschwindenden Spannungsgrößen.

Mit der Vereinbarung

$$\zeta = \text{Re} (\zeta) + i \text{Im} (\zeta) = \xi + i \eta \quad (6.36)$$

erhalten wir die Verschiebung zu

$$\begin{aligned} 2 \mu u &= \operatorname{Re} [x \Phi_t - \zeta \bar{\Phi}_t - \bar{\Psi}_t] \\ &= (x+1) (\alpha_0 - \beta_1 \eta) \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} 2 \mu v &= \operatorname{Im} [x \Phi_t - \zeta \bar{\Phi}_t - \bar{\Psi}_t] \\ &= (x+1) (\beta_0 + \beta_1 \zeta) . \end{aligned} \quad (6.38)$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Funktionsanteile α_0 und β_0 Starrkörperverschiebungen in ζ - bzw. η -Richtung bewirken. Der Anteil $i\beta_1\zeta$ stellt eine Rotation dar.

Da nach Voraussetzung die Ansatzfunktionen bei Anwendung des Funktinals II (hybrides Weggrößenverfahren) keine Starrkörperanteile enthalten dürfen, müssen hierbei die Werte für α_0 , β_0 und β_1 zu Null gesetzt werden.

Die Starrkörperverschiebungen können in folgender allgemeiner Form angegeben werden:

In ζ -Richtung:

$$u_{ST} = u_0 - \beta^* \eta \quad (6.39)$$

In η -Richtung:

$$v_{ST} = v_0 + \beta^* \zeta . \quad (6.40)$$

Für das reine Weggrößenverfahren auf der Basis von Funktional I gilt:

$$u_0 = \frac{x+1}{2 \mu} \alpha_0 \quad (6.41)$$

$$v_0 = \frac{x+1}{2 \mu} \beta_0 \quad (6.42)$$

$$\beta^* = \frac{x+1}{2 \mu} \beta_1 . \quad (6.43)$$

7. Berechnung der Elementgrößen, nachdem die Elementknotenverschiebungen bekannt sind

7.1 Elemente, die auf der Basis von Funktional I entwickelt wurden

Ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{q} + \bar{\mathbf{p}} = 0 \quad (7.1)$$

mit

\mathbf{K} : Gesamtsteifigkeitsmatrix

\mathbf{q} : Vektor der gesuchten Knotenverschiebungen

$\bar{\mathbf{p}}$: Gesamtbelastungsvektor

gelöst, und sind somit alle Knotenverschiebungen bekannt, so können die Ansatzfreiwerte für jedes Element mit der Gleichung (4.54) bestimmt werden. Damit lassen sich die interessierenden Elementgrößen u , v , σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} aus den Gleichungen (6.21) bis (6.25) innerhalb des Elementgebietes und auf dessen Rand bestimmen.

7.2 Elemente, die auf der Basis von Funktional II entwickelt wurden

Hier wird ebenfalls vorausgesetzt, daß das Gleichungssystem (7.1) gelöst ist und somit die Knotenverschiebungen bekannt sind. Die Ansatzfreiwerte lassen sich aus Gleichung (4.76) berechnen. Da aber nach Voraussetzung die Ansatzfunktionen über dem Elementbereich keine Starrkörperanteile beinhalten dürfen, so ergeben sich bei der Berechnung der Verschiebungsgrößen über dem Elementgebiet nur Anteile, die die Starrkörperverschiebung nicht berücksichtigen können. Um die wirklichen Elementverschiebungen zu erhalten, müssen die Starrkörperbewegungen hinzu addiert werden. Auf die Spannungsberechnung haben die Starrkörperanteile keinen Einfluß.

7.2.1 Bestimmung der Starrkörperverschiebungen

In Kapitel 6.3 wurde die allgemeine Gleichung für Starrkörperverschiebungen wie folgt angegeben

$$u_{ST} = u_0 - \beta^* \eta \quad (7.2)$$

$$v_{ST} = v_0 + \beta^* \zeta \quad (7.3)$$

Da die Knotenverschiebungen eines Elementes durch die finite Elementrechnung bekannt sind und damit auch die Ansatzfreiwerte für dieses Element ermittelt werden können, so ist es auch möglich, die Knotenverschiebungen mit Hilfe der Ansatzfunktionen (6.21) und (6.22) zu berechnen. Diese Verschiebungsgrößen enthalten aber keine Starrkörperanteile. Damit müssen sich die Starrkörperverschiebungen auch in folgender Form angeben lassen:

$$u_{ST_i} = u_i - u_{E_i} = (u - u_E)_i \quad (7.4)$$

$$v_{ST_i} = v_i - v_{E_i} = (v - v_E)_i$$

Dabei bedeutet:

u_{ST_i} , v_{ST_i} : Starrkörperverschiebungen des Knoten i des Elements,

u_i , v_i : Verschiebungsgrößen des Knoten i , die aus der finiten Elementrechnung ermittelt wurden,

u_{E_i} , v_{E_i} : Verschiebungsgrößen des Knoten i , die aus den Elementansatzfunktionen ermittelt wurden,

$(u - u_E)_i$
 $(v - v_E)_i$: Differenz der berechneten Verschiebungsgrößen am Knoten i .

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$u_0 - \beta^* \eta_i = (u-u_E)_i \quad (7.6)$$

$$v_0 + \beta^* \zeta_i = (v-v_E)_i \quad (7.7)$$

mit

(ζ_i, η_i) : Koordinaten des i-ten Knoten .

Betrachtet man nun einen Knoten, so ergeben sich für drei Unbekannte u_0, v_0 und β^* nur zwei Bedingungsgleichungen. Da diese Werte aber für das gesamte betrachtete Gebiet konstant bleiben sollen, kann man eine weitere Bedingungsgleichung für den Knoten k hinzuziehen

$$u_0 - \beta^* \eta_k = (u-u_E)_k \quad (7.8)$$

$$\left[\text{oder } v_0 + \beta^* \zeta_k = (v-v_E)_k \right]. \quad (7.9)$$

Diese Methode zur Bestimmung von u_0, v_0 und β^* erwies sich in der Praxis aber als unzureichend. Je nachdem, welche zusätzliche Bedingungsgleichung, (7.8) oder (7.9), oder welcher Knoten k gewählt wurde, ergaben sich voneinander abweichende Ergebnisse. Dadurch wurde die Genauigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Knotenpunkte abhängig. Diese Ungenauigkeiten sind wohl dadurch zu erklären, daß alle relevanten Größen durch numerische Näherungsverfahren bestimmt wurden. Um möglichst genaue Ergebnisse für die Starrkörperverschiebungen zu bekommen, soll die Fehlerquadratmethode zur Minimierung des Fehlers herangezogen werden.

Die Minimierungsaufgabe lautet in diskretisierter Form:

$$F = \sum_{i=1}^k \{ [u_{ST_i} - (u-u_E)_i]^2 + [v_{ST_i} - (v-v_E)_i]^2 \} \rightarrow \text{Min.} \quad (7.10)$$

k ist hier die Anzahl der Knoten auf dem Elementrand.

Aus den Gleichungen (7.2) und (7.3) erhält man:

$$u_{ST_i} = u_0 - \beta^* \eta_i = [1 \quad 0 \quad -\eta_i] \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$= \mathbf{U}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST}$$

$$v_{ST_i} = v_0 + \beta^* \zeta_i = [1 \quad 0 \quad -\zeta_i] \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Damit ergibt sich (7.10) zu

$$F = \sum_{i=1}^k \{ \mathbf{U}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - (u-u_E)_i \}^2 + [\mathbf{V}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - (v-v_E)_i]^2 \} \quad (7.13)$$

$$= \sum_{i=1}^k \{ \mathbf{c}_{ST}^T \mathbf{U}_{ST_i}^T \mathbf{U}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - 2 \mathbf{c}_{ST} \mathbf{U}_{ST_i} (u-u_E)_i + (u-u_E)_i^2 \} +$$

$$+ [\mathbf{c}_{ST}^T \mathbf{V}_{ST_i}^T \mathbf{V}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - 2 \mathbf{c}_{ST} \mathbf{V}_{ST_i} (v-v_E)_i + (v-v_E)_i^2] \} .$$

Mit der Minimumbedingung

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}} = 0 \quad (7.14)$$

erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}_{ST}} = \sum_{i=1}^k 2 \mathbf{U}_{ST_i}^T \mathbf{U}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - 2 \mathbf{U}_{ST_i}^T (u-u_E)_i +$$

$$+ 2 \mathbf{V}_{ST_i}^T \mathbf{V}_{ST_i} \mathbf{c}_{ST} - 2 \mathbf{V}_{ST_i}^T (v-v_E)_i] = \mathbf{0} . \quad (7.15)$$

Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^k [\mathbf{U}_{ST_i}^T \mathbf{U}_{ST_i} + \mathbf{V}_{ST_i}^T \mathbf{V}_{ST_i}] \mathbf{c}_{ST} = \sum_{i=1}^k [\mathbf{U}_{ST_i}^T (u-u_E)_i + \mathbf{V}_{ST_i}^T (v-v_E)_i] . \quad (7.16)$$

In Matrixschreibweise ausgedrückt, ergibt sich:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_{ST} = \mathbf{b} , \quad (7.17)$$

mit der Matrix **A**

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \left[\mathbf{U}_{ST_i}^T \mathbf{U}_{ST_i} + \mathbf{V}_{ST_i}^T \mathbf{V}_{ST_i} \right] \quad (7.18)$$

und dem Vektor **b**

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \left[\mathbf{U}_{ST_i}^T (u - u_E)_i + \mathbf{V}_{ST_i}^T (v - v_E)_i \right]. \quad (7.19)$$

Für die Berechnung des Vektors \mathbf{c}_{ST} , in dem die unbekannt GröÖen u_0 , v_0 und β^* zusammengefaÖt sind, erhalt man schließlich:

$$\mathbf{c}_{ST} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} . \quad (7.20)$$

Schreibt man die Matrix **A** explizit aus, erhalt man nach der Invertierung die symmetrische Matrix \mathbf{A}^{-1} in folgender Form

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{k R - S^2 - T^2} \begin{bmatrix} R - \frac{1}{k} S^2 & -\frac{1}{k} ST & T \\ -\frac{1}{k} ST & R - \frac{1}{k} T^2 & -S \\ T & -S & k \end{bmatrix} . \quad (7.21)$$

Darin bedeutet:

k = Anzahl der vorhandenen Knoten auf dem Elementrand

$$R = \sum_{i=1}^k (\zeta_i^2 + \eta_i^2)$$

$$S = \sum_{i=1}^k \zeta_i \quad T = \sum_{i=1}^k \eta_i$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^k \zeta_i \cdot \sum_{i=1}^k \zeta_i & T^2 &= \sum_{i=1}^k \eta_i \cdot \sum_{i=1}^k \eta_i \\ ST &= \sum_{i=1}^k \zeta_i \sum_{i=1}^k \eta_i \end{aligned} \quad (7.22)$$

Den Vektor **b** erhält man explizit in der Form:

$$\underline{b} = \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^b (u - u_E)_i \\ \sum_{i=1}^n (v - v_E)_i \\ \sum_{i=1}^k \zeta_i (v - v_E)_i - \sum_{i=1}^k \eta_i (u - u_E)_i \end{array} \right] \quad (7.23)$$

8.1 Beispielrechnung an einem Gebiet mit kreisförmigem Loch

Um die Ergebnisse, die mit den entwickelten finiten Elementen erzielt wurden, mit auf anderen Wegen gewonnenen Ergebnissen zu vergleichen, sind mehrere Beispielrechnungen durchgeführt worden. Hier soll anhand eines Problems, dessen Lösung auf analytischem Wege gelungen ist (z.B. in /3/ auf Seite 142), die Ergebnisse aufgezeigt und verglichen werden. Die Erkenntnisse, die aus anderen Beispielrechnungen gewonnen wurden, werden in Kapitel 9 besprochen. Die Beispielrechnung soll an einer unendlichen Scheibe mit einem kreisförmigen Loch unter Zugbelastung durchgeführt werden. Dabei soll ein ebener Spannungszustand zugrunde gelegt werden.

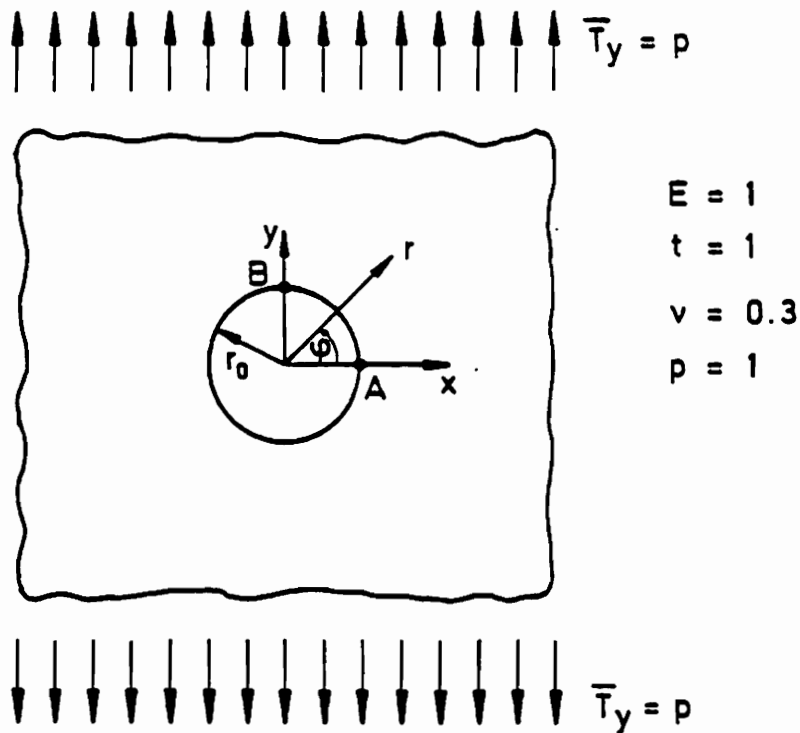


Bild 8.1: Unendliche Scheibe mit Kreisloch unter Zugbelastung

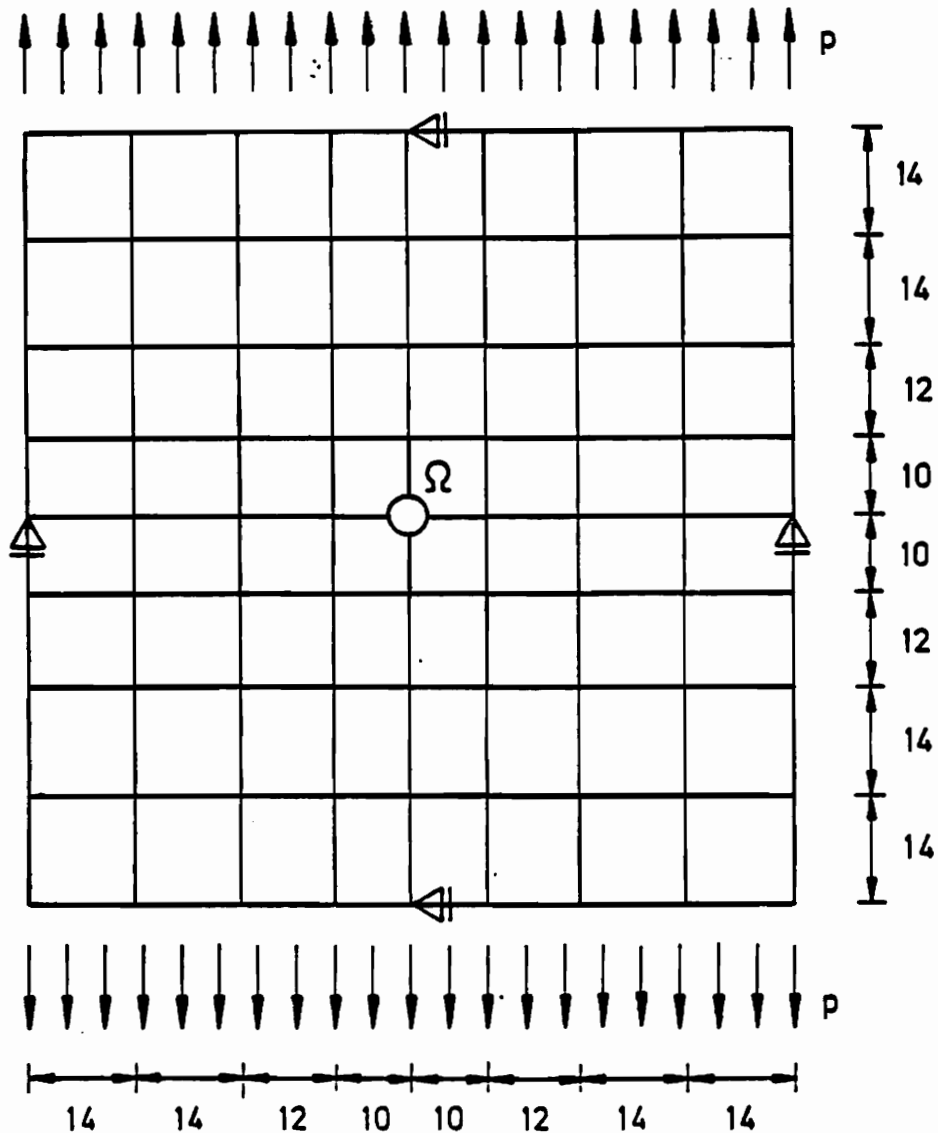
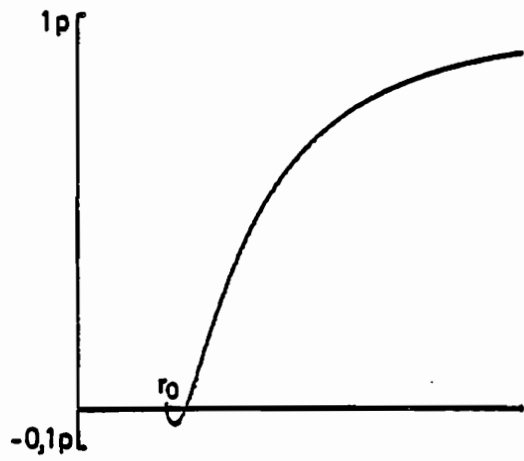
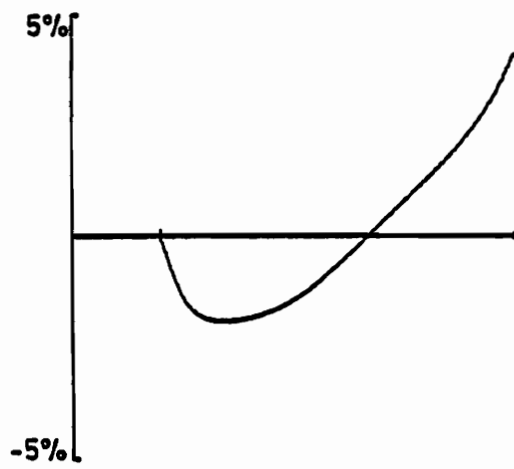


Bild 8.2: Finite Elementeinteilung des numerisch behandelten Ersatzsystems

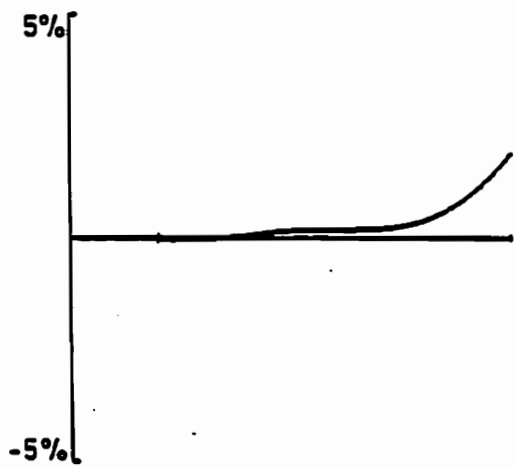
Um einen möglichst guten Überblick über die auftretenden Differenzen der analytischen Lösung und der finiten Elementlösung zu bekommen, sollen hier keine Zahlenkolonnen aufgeführt werden, sondern die Ergebnisse grafisch dargestellt werden. Alle Vergleiche beziehen sich auf das finite Element, das in Bild 8.2 mit Ω gekennzeichnet wurde. Insbesondere sollen auch die Ergebnisse verglichen werden, die mit den finiten Elementen der unterschiedlichen Funktionale erzielt wurden.



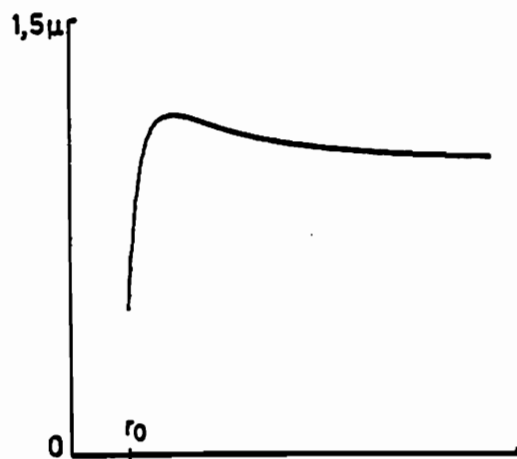
Funktion : σ_{yy}
Winkel = 90°



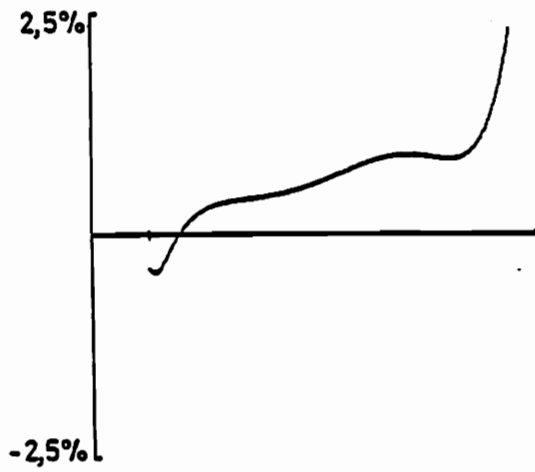
Funktional I
Maximale prozentuale
Abweichung = 4.1 %



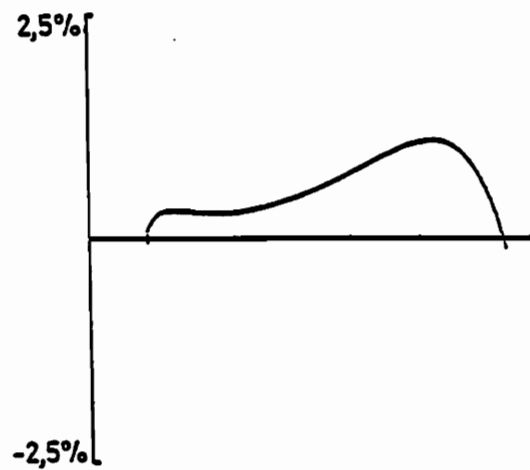
Funktional II
Maximale prozentuale
Abweichung = 1.9 %



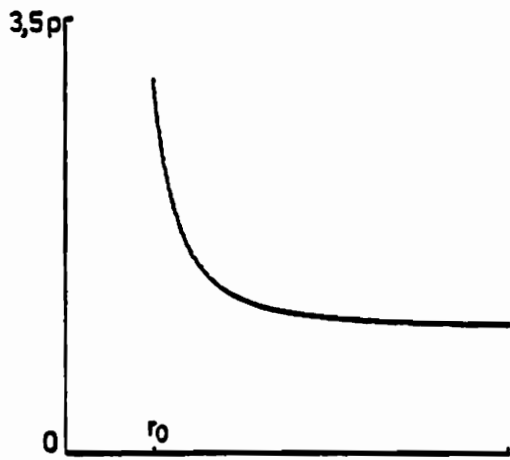
Funktion : σ_{yy}
Winkel = 45°



Funktional I
Maximale prozentuale
Abweichung = $2,3\%$

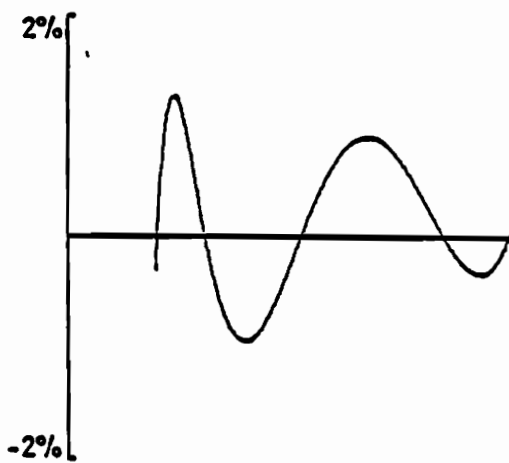


Funktional II
Maximale prozentuale
Abweichung = $1,1\%$



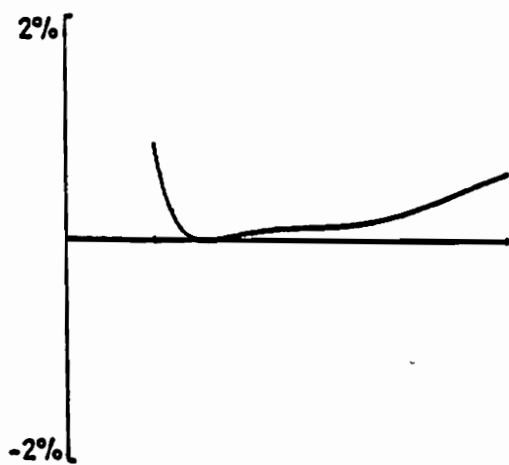
Funktion : σ_{yy}

Winkel = 0°



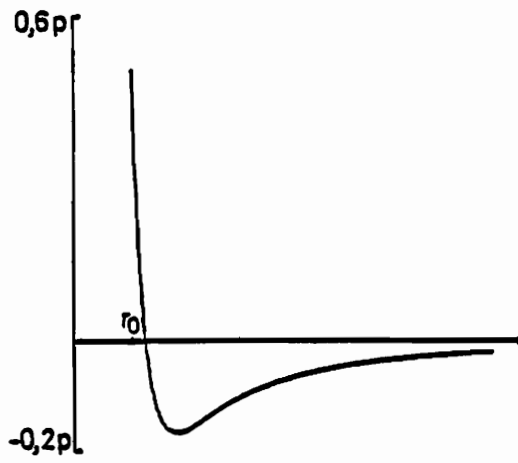
Funktional I

Maximale prozentuale
Abweichung = 1.27 %



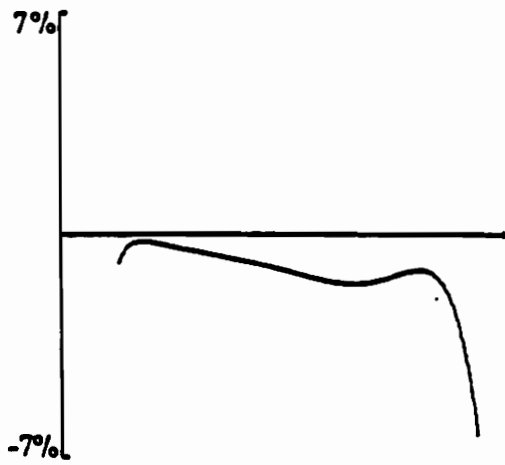
Funktional II

Maximale prozentuale
Abweichung = 0.865 %



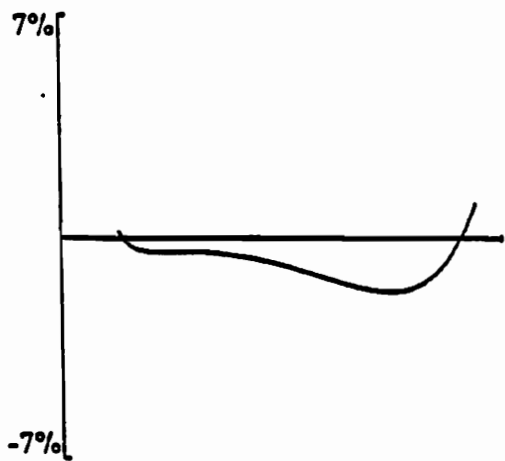
Funktion : σ_{xx}

Winkel = 45°



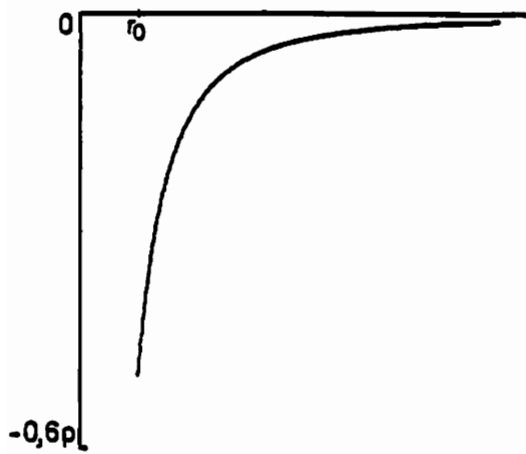
Funktional I

Maximale prozentuale
Abweichung = 62 %



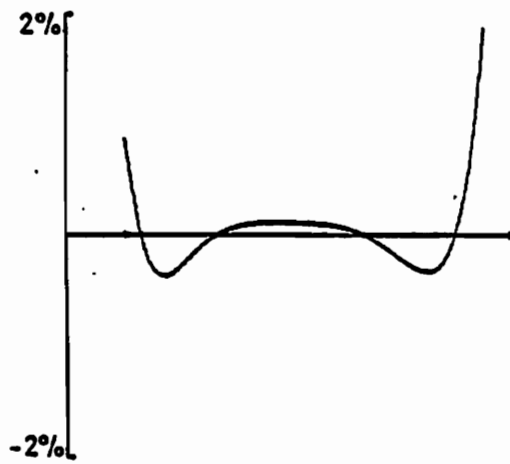
Funktional II

Maximale prozentuale
Abweichung = 1.66 %



Funktion : τ_{xy}

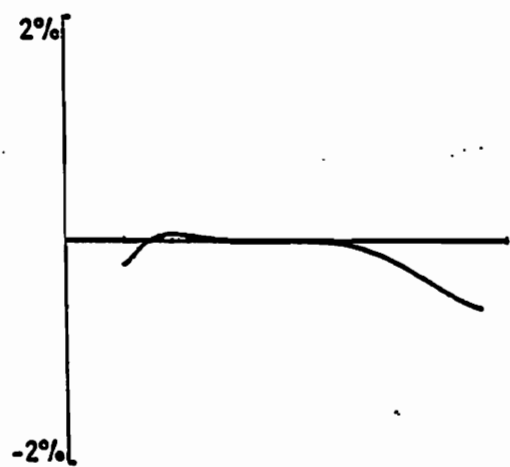
Winkel = 45°



Funktional I

Maximale prozentuale

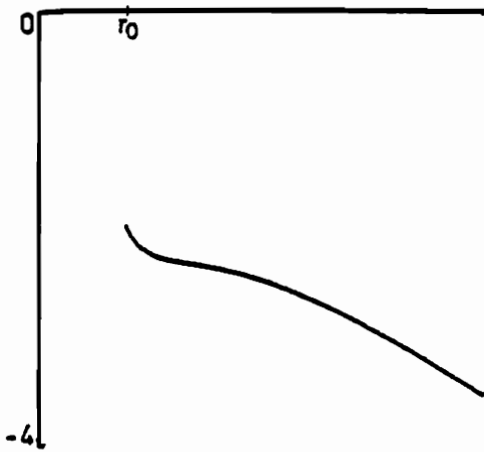
Abweichung = 1.86 %



Funktional II

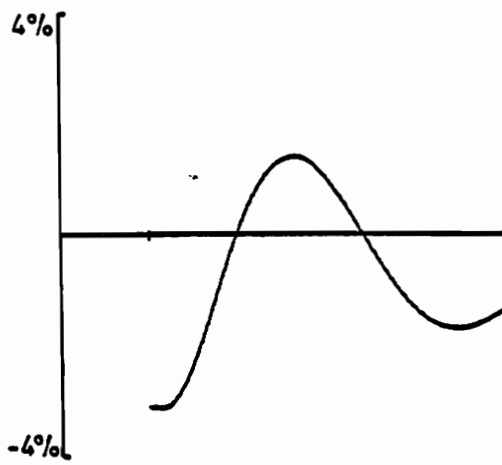
Maximale prozentuale

Abweichung = 0.61 %



Funktion : u

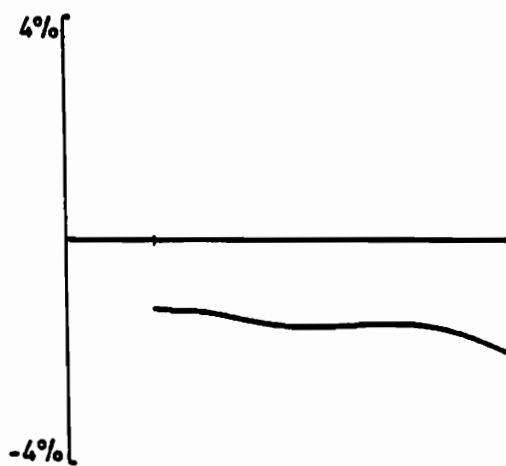
Winkel = 0°



Funktional I

Maximale prozentuale

Abweichung = 3.11 %



Funktional II

Maximale prozentuale

Abweichung = 2.03 %

8.2 Kreisförmige Außenkerbe

L. Föppl und G. Sonntag /11/ geben die Lösung für die auftretende Maximalspannung an kreisförmigen Außenkerben folgendermaßen an.

$$\sigma_{\max} = p \left(1 + 2 \sqrt{\frac{t}{\rho}} \right)$$

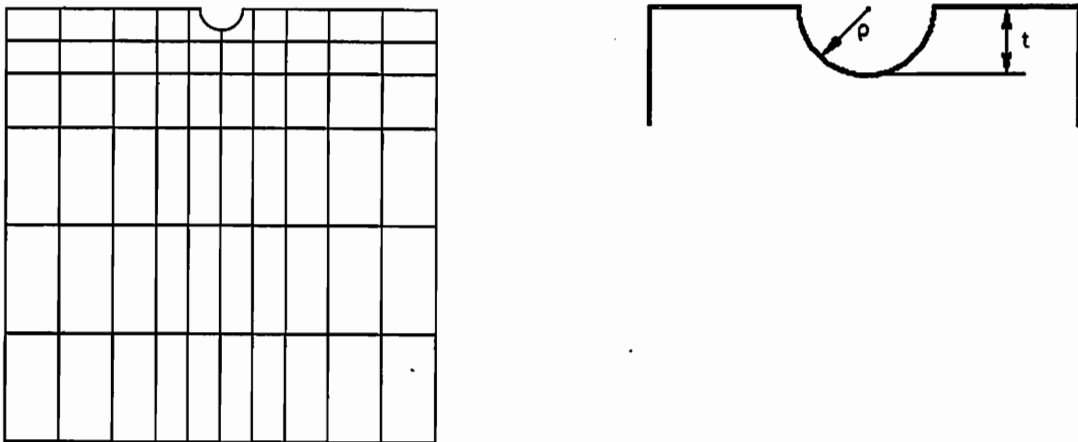


Bild 8.2.1 : Erläuterung der Größen ρ und t

Für die Berechnung mit den speziellen finiten Elementen wurde jeweils angenommen : $t=\rho$ und $p=1$

Die äußeren Abmessungen der speziellen finiten Elemente wurde konstant gehalten und der Radius von $\rho=1$ bis $\rho=4$ variiert.

Es stellte sich heraus, daß bis zum Radius $\rho=4$ beide Funktionale gute Ergebnisse lieferten (s. Bild 8.2.2).

Beim Radius $\rho=4$ funktionierte die Anpassung der inneren Ansatzfunktionen auf die am Rande vorgegebenen Ansatzfunktionen von Standardelementen bei Funktional I nicht mehr (s. Bild 8.2.3). Beim Funktional II trat dieser Effekt erst bei größeren Radien auf.

Es ist also darauf zu achten, daß die Teilkreisberandung nicht zu nahe an der Elementbegrenzung liegt.

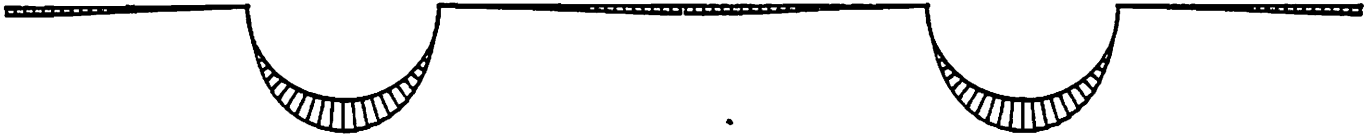


Bild 8.4.2: Randspannungsverlauf bei einer Außenkerbe ($1 \leq p \leq 4$)

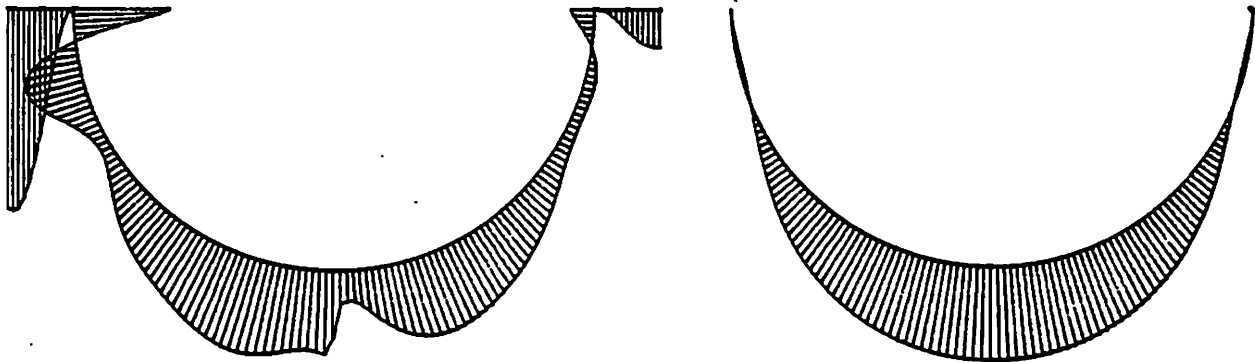


Bild 8.4.3: Randspannungsverlauf bei einer Außenkerbe ($p = 4$)

8.3 Dreieckloch in einer unendlichen Scheibe

G. N. Sawin /10/ hat für isotrope Scheiben die durch ein Loch geschwächt sind näherungsweise analytische Lösungen angegeben. Dabei benutzte er die konforme Abbildung um Löchern der unterschiedlichsten Geometrie auf den Einheitskreis abzubilden. Die Abbildungsfunktion stellt sich dabei als eine Potenzreihe dar. Durch Abbruch dieser Reihe nach einem gewählten Reihenglied und durch die Benutzung der Spannungsfunktionen erhält man dann näherungsweise analytische Lösungen.

Hier soll die Spannungsverteilung an einem dreieckigen Loch berechnet werden um sie mit den Ergebnissen von G. N. Sawin zu vergleichen.

Der Radius für die Ecken wurde hier zu

$$r = \frac{1}{14} H^* \quad \text{mit } H^* = 3 H$$

gewählt. Dabei gibt H^* die wirkliche Höhe des Dreiecks an. In /10/ ist die Höhe wohl irrtümlich mit H bezeichnet worden.

Diese Wahl entspricht dem zweigliedrigen Ansatz für die konforme Abbildung. Im Originalgebiet hat das dreieckige Loch damit krummlinige Seitenbegrenzungen. Beim dreigliedrigen Ansatz ähneln die Seitenbegrenzungen zwar mehr einer Geraden, bleiben aber dennoch krummlinig. Der Krümmungsradius in den Ecken nimmt aber dabei ab.

Für die Berechnung mit finiten Elementen werden die Seiten als Geraden dargestellt.

In Bild 8.3.1 ist die finite Elemententeilung dargestellt. Bild 8.3.2 veranschaulicht den Randspannungsverlauf am dreieckigen Loch.

Lösung nach Sawin für $\alpha = 90^\circ$ und $\theta = 0^\circ$:

Zweigliedriger Ansatz	+11.00
Dreigliedriger Ansatz	+17.60

Lösung mit speziellen FEM +13.41

Die Lösung mit speziellen finiten Elementen liegt also zwischen den von Sawin angegebenen Ergebnissen. Dies war zu erwarten, da mit dem Ausrundungsradius des zweigliedrigen Ansatzes aber mit geraden Seitenbegrenzungen gerechnet wurde.

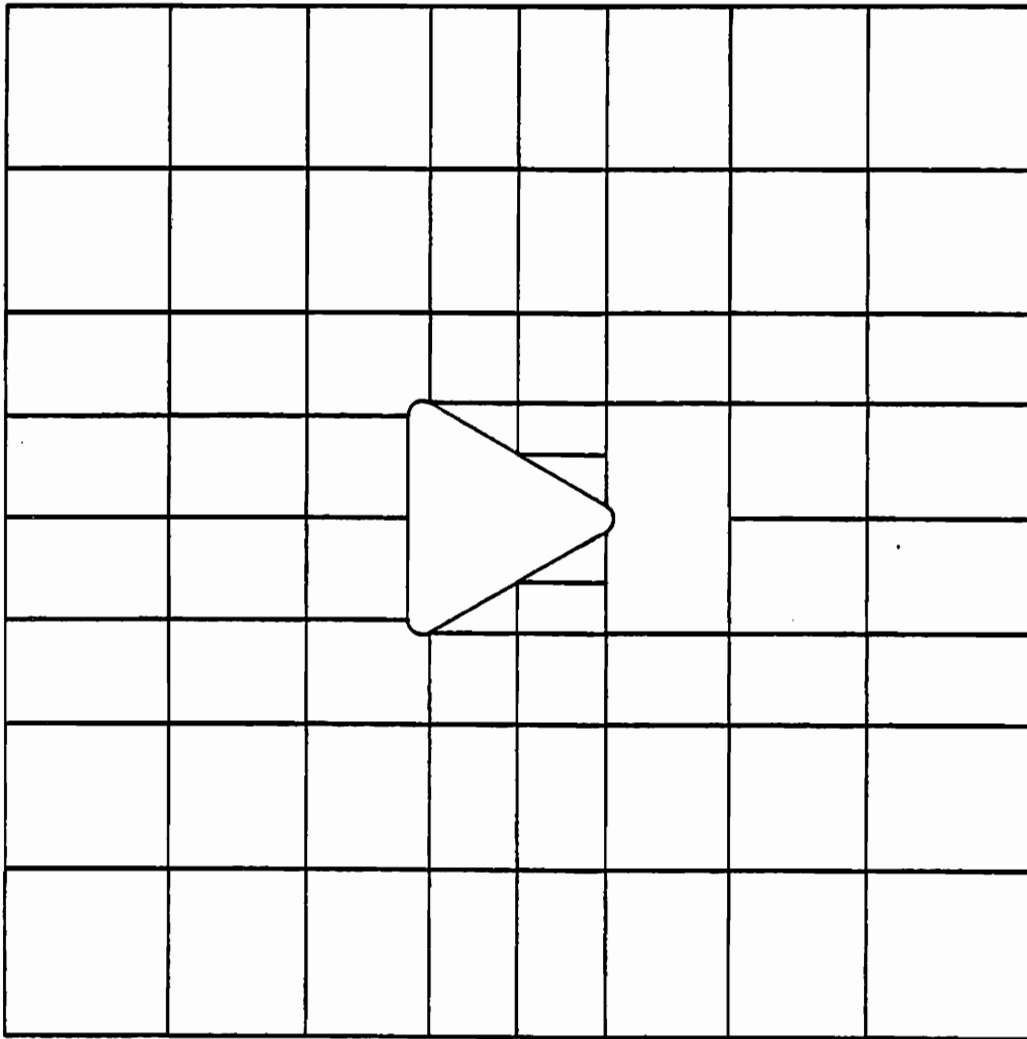


Bild 8.3.1 : Finite Elementeinteilung für die Scheibe mit dreieckigem Loch

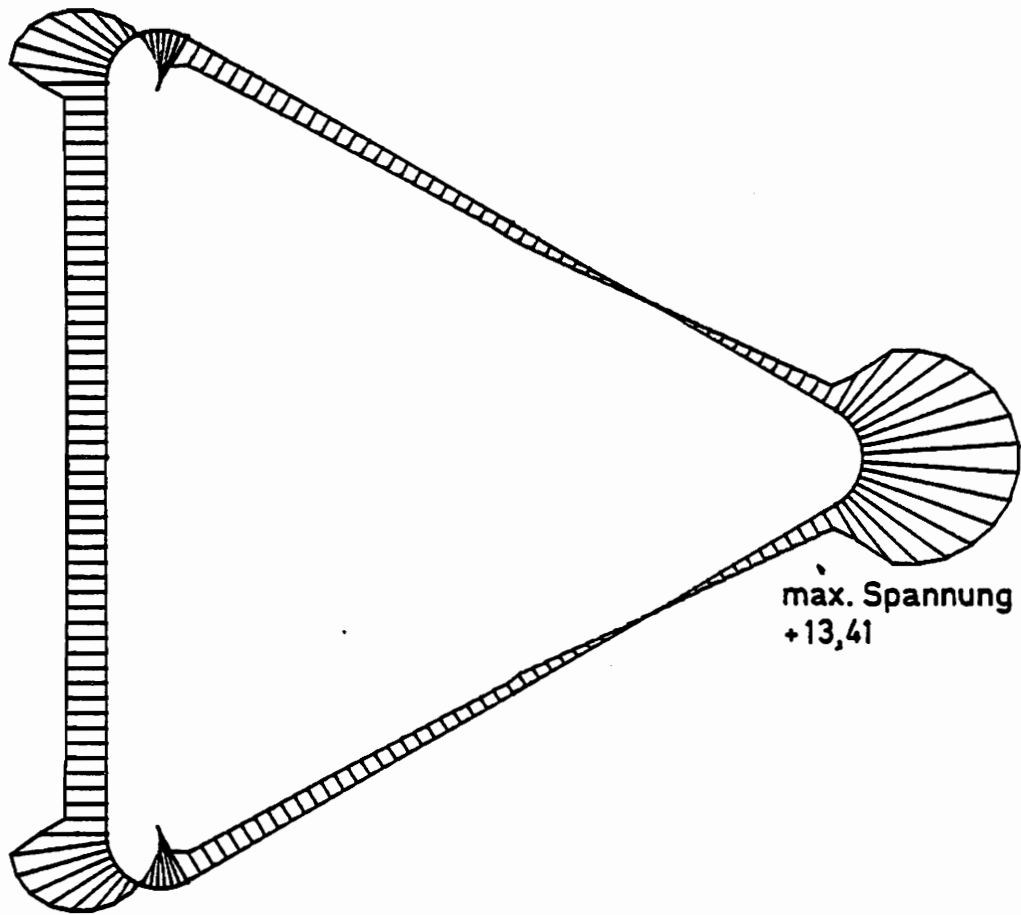


Bild 8.3.3 : Randspannungsverlauf am dreieckigem Loch

8.4 Kerbspannungsanalyse von Schrauben-Mutter-Verbindungen

In dem Aufsatz "Genauere Kerbspannungsanalyse von Schrauben-Mutter-Verbindungen" [VDI-Z 122(1980)Nr.11] hat Schnack Ergebnisse von verschiedenen Berechnungsmethoden veröffentlicht. Hier sollen die mit den speziellen finiten Elementen gewonnenen Resultate mit denen von Schnack angegebenen Ergebnissen verglichen werden.

Die Geometrie und die Belastung sind dem Aufsatz von Schnack entnommen. Die Index i bezeichnet die belastete Kerbe (von links gezählt).

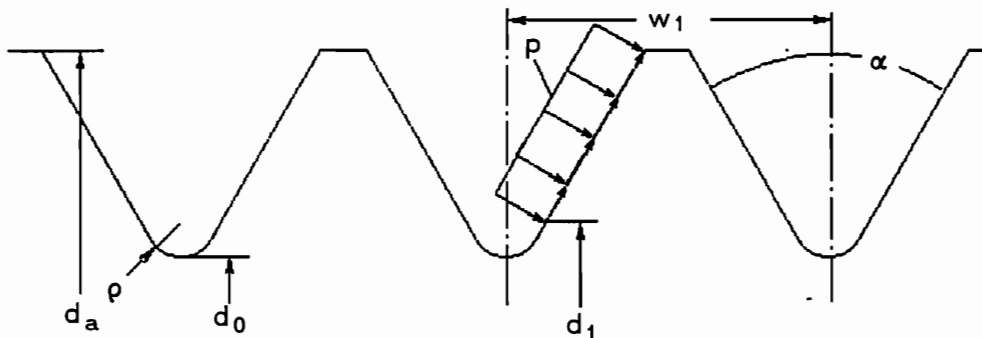


Bild 8.4.1 : Modellgewinde mit Vermaßung

- | | | | |
|--------|------------------|----------|-----------------------------|
| d_a | Außendurchmesser | d_1 | Innendurchmesser der Mutter |
| d_0 | Kerndurchmesser | α | Flankenwinkel |
| ρ | Krümmungsradius | p | eingeleitete Spannung |
| w_1 | Teilung | | Bolzenlänge |

Modell	ρ	w_1	d_0	d_a	d_1		α
A_i	0.2	4.2	10.2	16.2	10.6	60.0	60
C_i	0.6	4.6	10.2	16.2	11.0	60.0	60

Tabelle 8.4.1: Modellabmessungen in mm

Die Belastung durch die Mutter erzeugt eine konstante Normalspannung p_n die

auf die Flanke (1 oder 2) drückt. Außerdem wird durch den Reibwert μ eine konstante Schubspannung p_t verursacht.

$$p_t = \mu p_n \quad \text{mit } \mu = 0.15$$

Die Randspannung wird so gewählt, daß sich aus der resultierenden Kraft eine Nennspannung von 1 N/mm^2 im engsten Querschnitt des Gewindebolzens ergibt. Dadurch gibt die maximale Spannung den Wert des Kerbfaktors an.

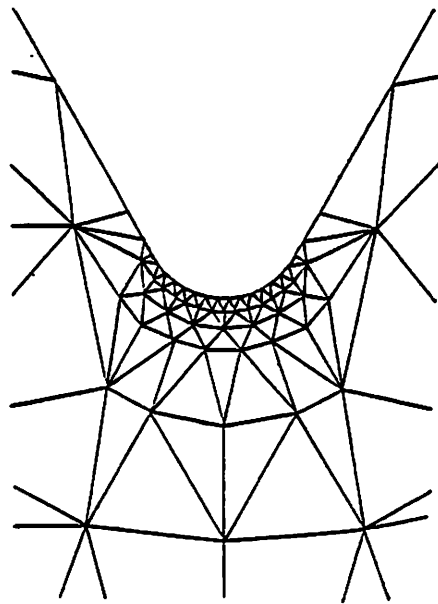


Bild 8.4.2 : Netzwerk im Kerbgrund nach E. Schnack

Bild 8.4.2 zeigt die gewählte finite Elementeinteilung im Kerbgrund nach E. Schnack. Bild 8.4.3 zeigt die Elementeinteilung mit den speziellen Elementen, wobei das Gewinde noch einmal vergrößert dargestellt wurde.

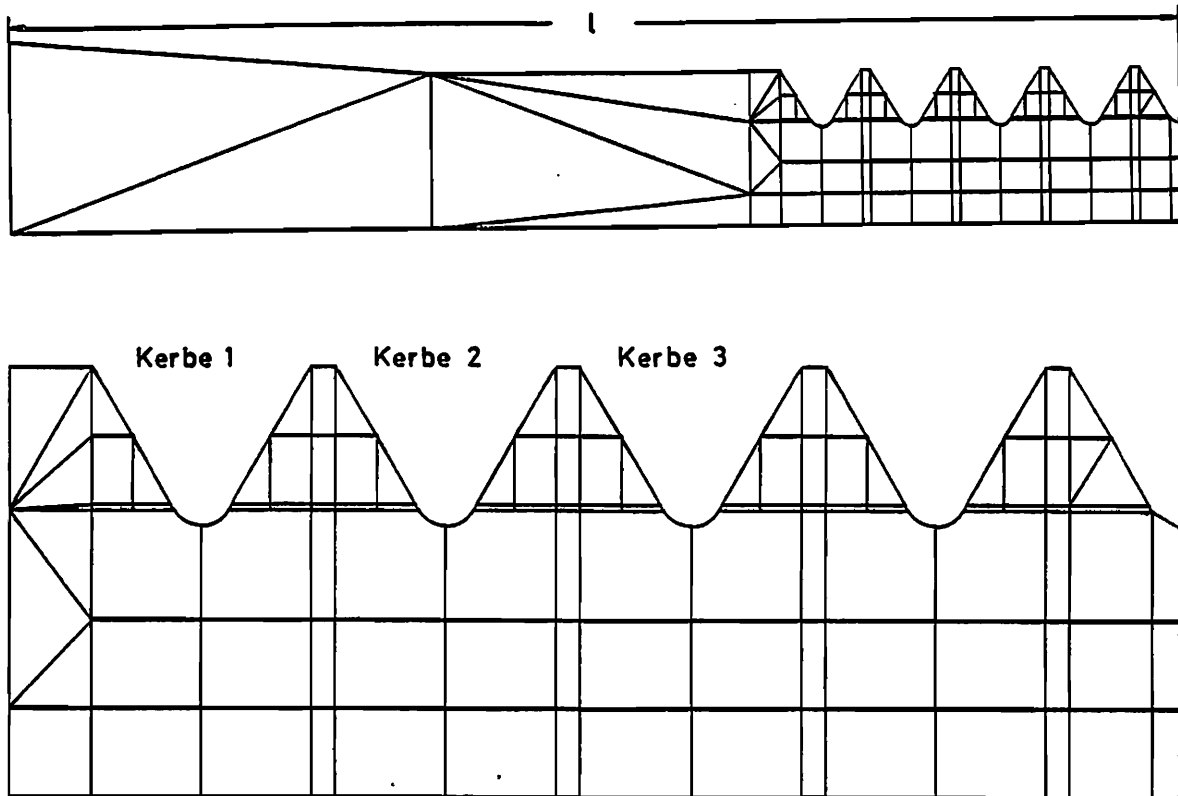


Bild 8.4.3 : Elementeinteilung mit speziellen finiten Elementen

In der Tabelle 8.4.2 sind die Ergebnisse und die prozentualen Abweichungen der einzelnen Berechnungsmethoden aufgelistet.

Modell	α_{FEM}	α_{IV}	$\Delta\alpha_{IV}$	$\alpha_{I FEM}$	$\alpha_{II FEM}$	$\Delta\alpha_{I 1}$	$\Delta\alpha_{I 2}$	$\Delta\alpha_{II 1}$	$\Delta\alpha_{II 2}$
A ₁	12.45	12.95	4.02	12.90	12.87	3.49	0.62	3.26	0.62
A ₂	11.74	12.20	3.92	12.39	12.31	5.25	1.53	4.63	0.89
C ₁	7.90	8.12	2.78	8.08	8.10	2.23	0.5	2.47	0.25
C ₂	7.71	8.06	4.54	7.95	7.95	2.25	1.38	2.25	1.38

Tabelle 8.4.2 Kerbfaktoren α nach verschiedenen Berechnungsmethoden

α_{FEM} Kerbfaktor nach der FEM-Berechnung von E. Schnack

α_{IV} Kerbfaktor nach einem numerischen Integralgleichungsverfahren

$$\Delta\alpha_{IV} = \left| \frac{\alpha_{IV} - \alpha_{FEM}}{\alpha_{FEM}} \right| 100, \text{ relative Abweichung in Prozent}$$

α_{IFEM} Kerbfaktor der FEM-Berechnung mit Funktional I

α_{IIFEM} Kerbfaktor der FEM-Berechnung mit Funktional II

$$\Delta\alpha_{I1} = \left| \frac{\alpha_{FEM} - \alpha_{IFEM}}{\alpha_{IFEM}} \right| 100, \text{ relative Abweichung in Prozent}$$

$$\Delta\alpha_{I2} = \left| \frac{\alpha_{IV} - \alpha_{IFEM}}{\alpha_{IFEM}} \right| 100, \text{ relative Abweichung in Prozent}$$

$$\Delta\alpha_{II1} = \left| \frac{\alpha_{FEM} - \alpha_{IIFEM}}{\alpha_{IIFEM}} \right| 100, \text{ relative Abweichung in Prozent}$$

$$\Delta\alpha_{II2} = \left| \frac{\alpha_{IV} - \alpha_{IIFEM}}{\alpha_{IIFEM}} \right| 100, \text{ relative Abweichung in Prozent.}$$

Die Bilder 8.4.4 (nach E.Schnack) und 8.4.5 bzw. 8.4.6 (spezielle finite Elemente) stellen jeweils den Randspannungsverlauf für das Modell C₂ dar.

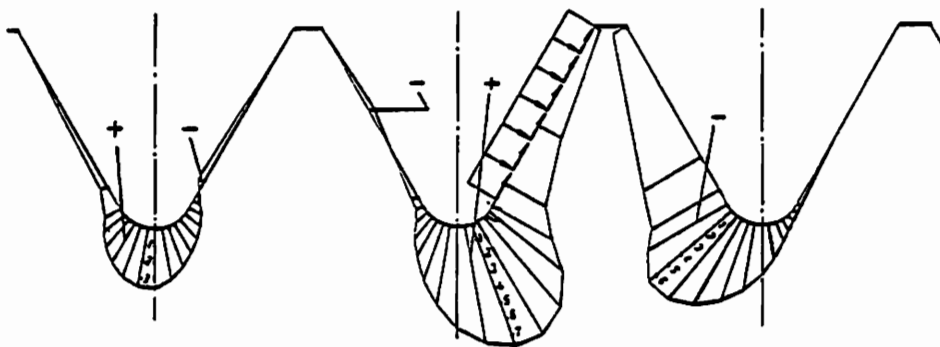


Bild 8.4.4: Auf die Nennspannung bezogener Randspannungsverlauf in den Kerben 1, 2 und 3 für das Modell C₂ nach E. Schnack

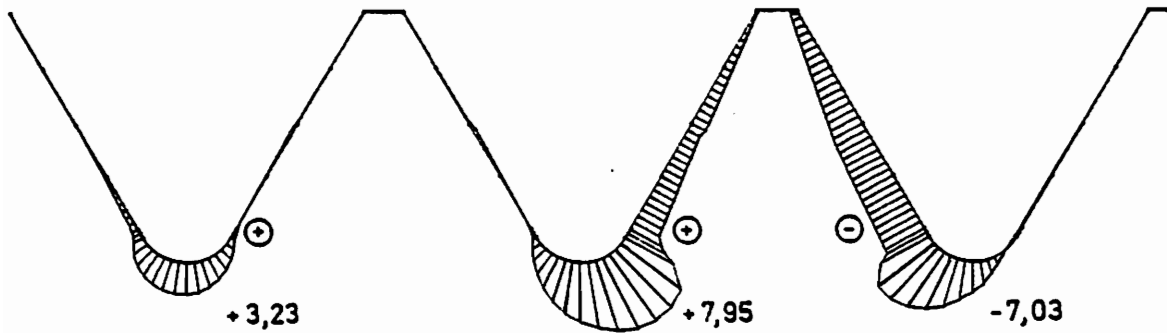


Bild 8.4.5 : wie Bild 8.1.4 aber mit speziellen finiten Elementen nach Funktional I

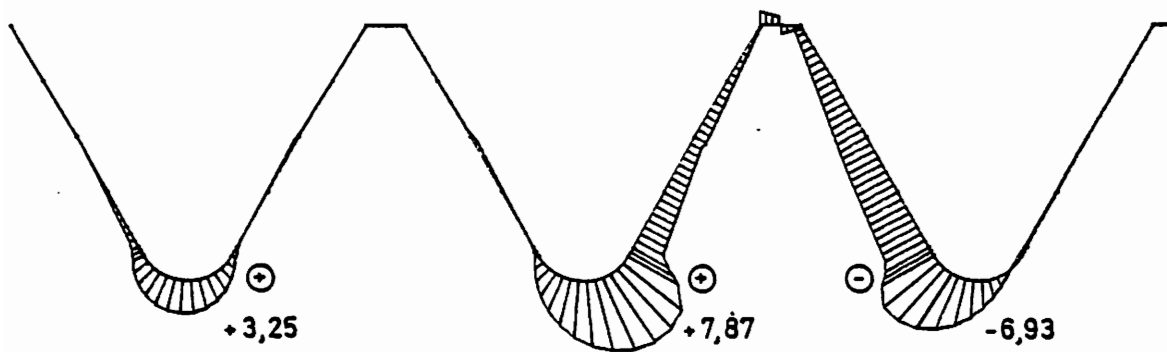


Bild 8.4.6 : wie Bild 8.1.4 aber mit speziellen finiten Elementen nach Funktional II

Wie aus den Bildern 8.4.5 und 8.1.6 zu ersehen ist, unterscheiden sich die Ergebnisse aus dem Funktional I und Funktional II nur unwesentlich. Deshalb wird in den weiteren Darstellungen auf die Ergebnisse des Funktionals II verzichtet.

Darstellung der Ergebnisse für das Modell C_1 .

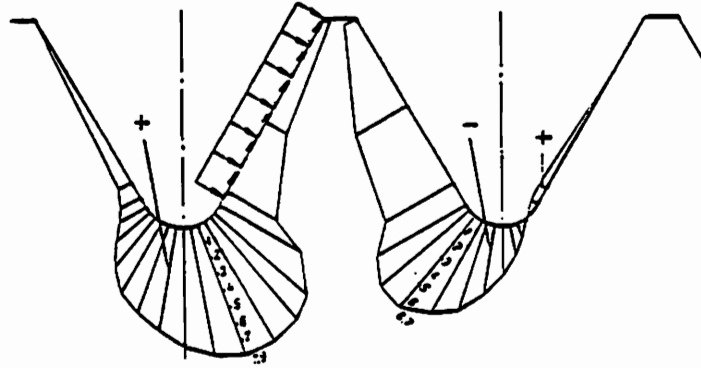


Bild 8.4.7 : Auf die Nennspannung bezogener Randspannungsverlauf in den Kerben 1 und 2 für das Modell C_1 nach E. Schnack

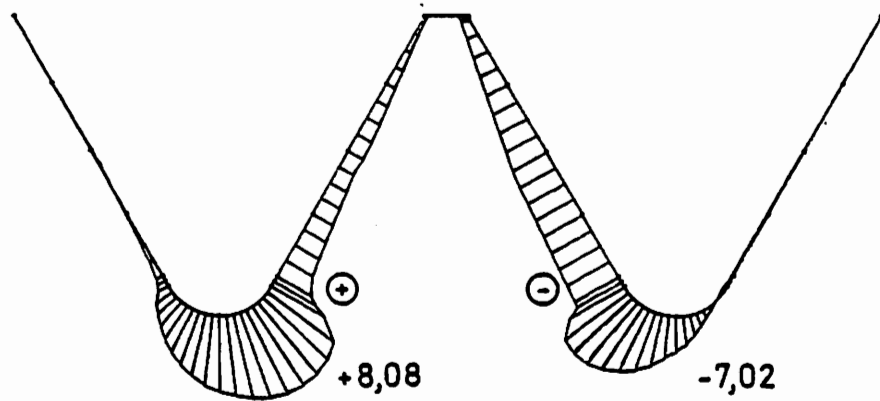


Bild 8.4.8 : wie Bild 8.4.7 aber mit speziellen finiten Elementen nach Funktional I

Darstellung der Ergebnisse für das Modell A_1 und A_2 .

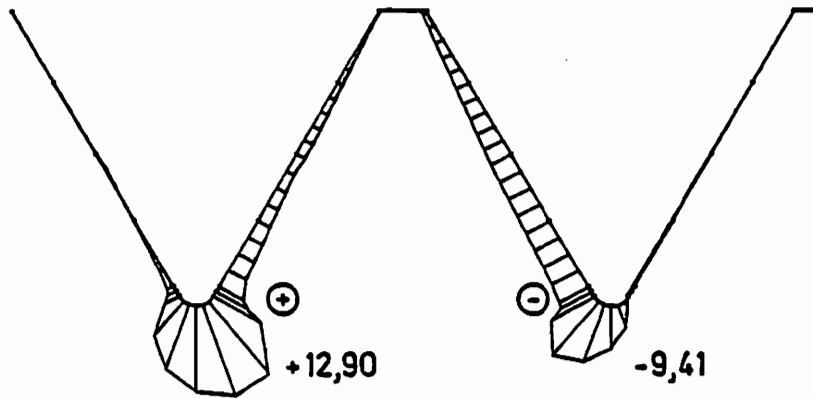


Bild 8.4.9 : Auf die Nennspannung bezogener Randspannungsverlauf in den Kerben 1 und 2 für das Modell A (Funktional I)

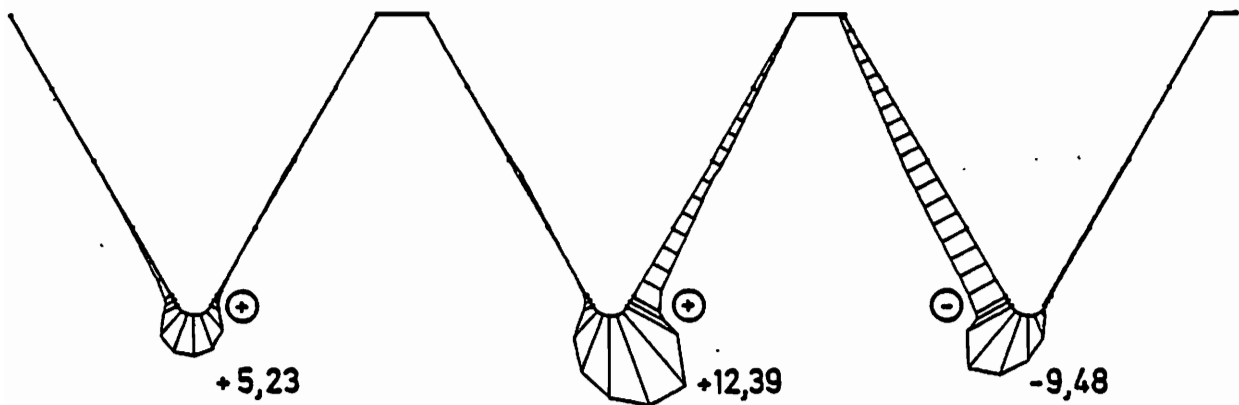


Bild 8.4.10 : Auf die Nennspannung bezogener Randspannungsverlauf in den Kerben 1, 2 und 3 für das Modell A (Funktional II)

Da die Zeichnungen von E. Schnack einen anderen Maßstab haben ist bei den Bildern nur auf den qualitativen Verlauf zu achten.

Abschließend ist zu bemerken, daß die Ergebnisse mit den speziellen Elementen etwas näher an den Ergebnissen aus dem Integralgleichungsverfahren liegen. Der qualitative Verlauf der Randspannungen ist denen der von E. Schnack gewonnenen Ergebnissen sehr ähnlich.

8.5 Zahnradberechnung

In seiner Dissertationsarbeit "Verformungen und Zahnfußspannungen von ringförmigen Rädern in Planetengetrieben" /9/ hat W. Barth u.a. einige Zahnradberechnungen mit der FEM-Methode durchgeführt. Die Resultate eines dieser Beispiele (ab S. 442) soll hier mit den Ergebnissen aus der Berechnung mit speziellen finiten Elemente verglichen werden.

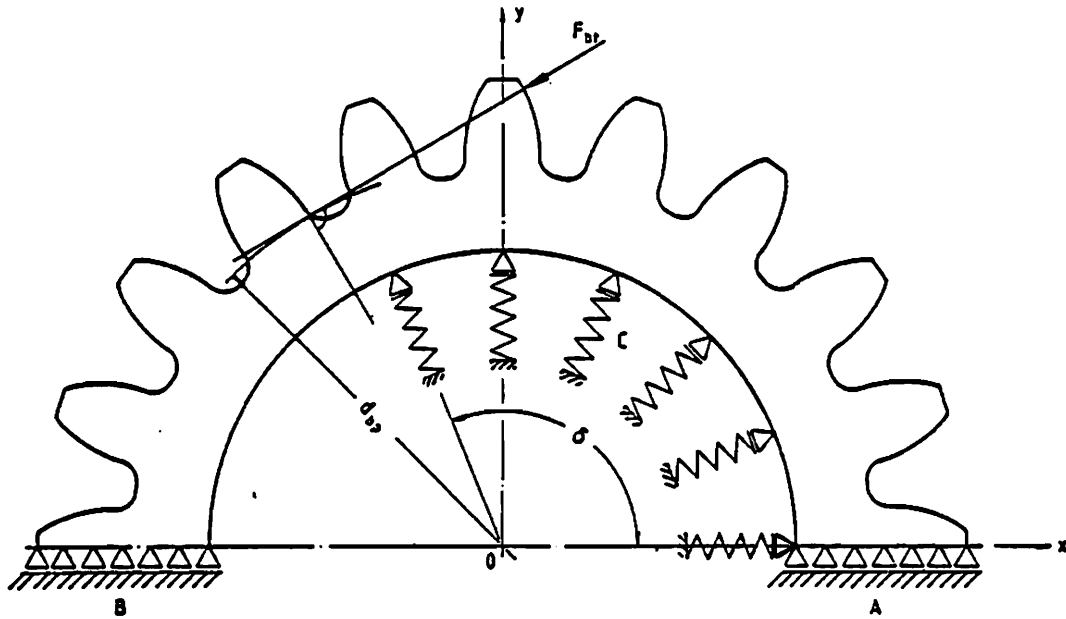


Bild 8.5.1: Mechanische Einzelheiten des Planetenrad-Scheibenmodells

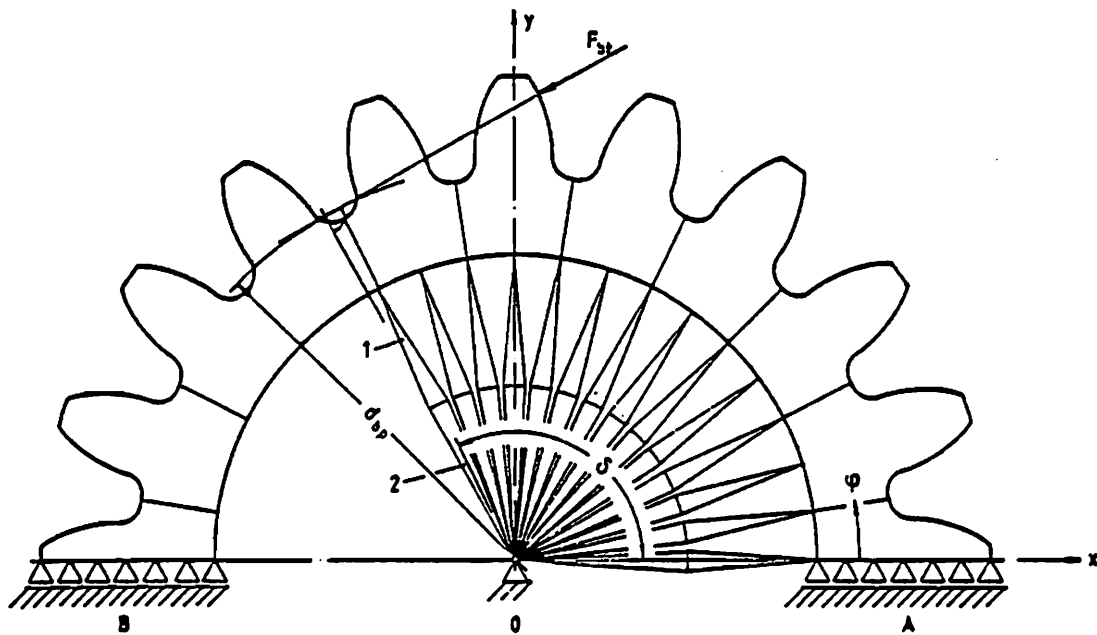


Bild 8.5.2 : Simulation der Federsteifigkeiten durch finite Dreieckselemente

Die Federn entsprechen den elastischen Widerständen der Wälzkörper in radialer Richtung . Die Zahnnormalkraft F_{bt} hat die Richtung der den Grundkreis tangierenden Eingriffslinie der Radpaarung.

Die nachgiebigen Dreieckelemente 1 haben einen E-Modul der sich aus den bekannten Wälzlagersteifigkeiten ergibt. Die Elemente 2 haben einen sehr großen E-Modul und verhalten sich annähernd starr.

W. Barth gibt an, daß er einen Zahn mit 348 Dreieckelementen diskretisiert hat. In Bild 8.5.3 ist die Diskretisierung eines Zahnes mit Hilfe der speziellen Elemente zu sehen. Bild 8.5.4 zeigt die gesamte finite Elemententeilung eines Halbzahnrades.

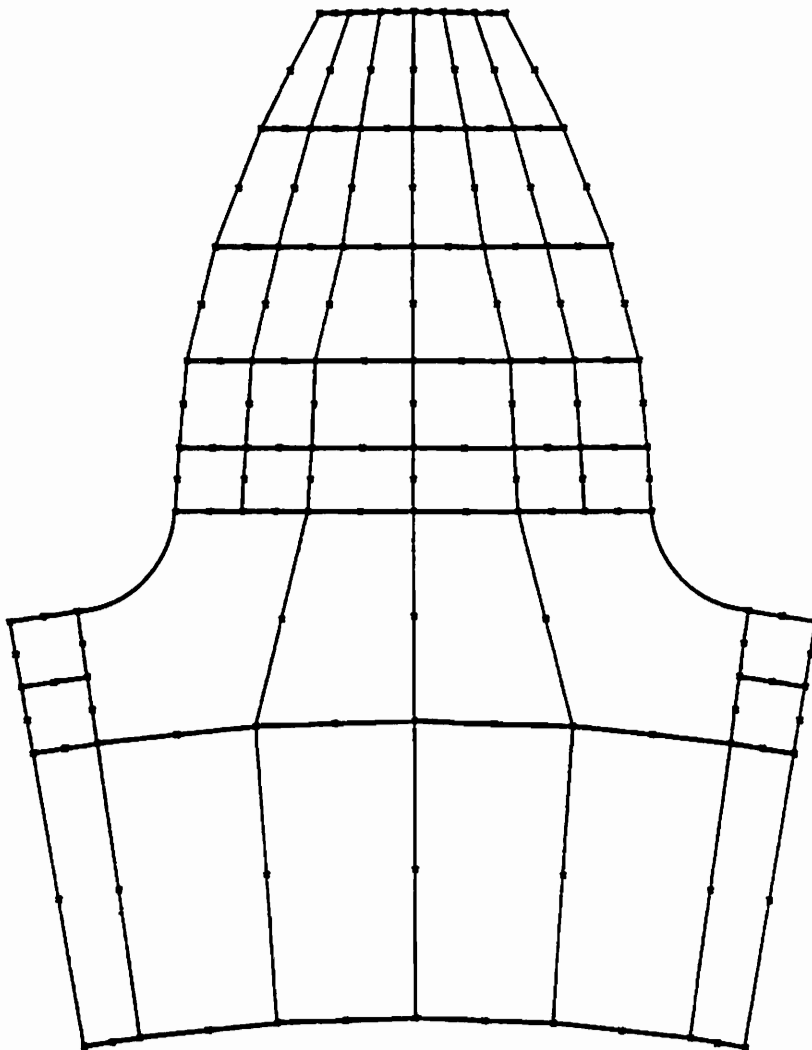


Bild 8.5.3 : Finite Elemententeilung eines Zahnes mit speziellen finiten Elementen

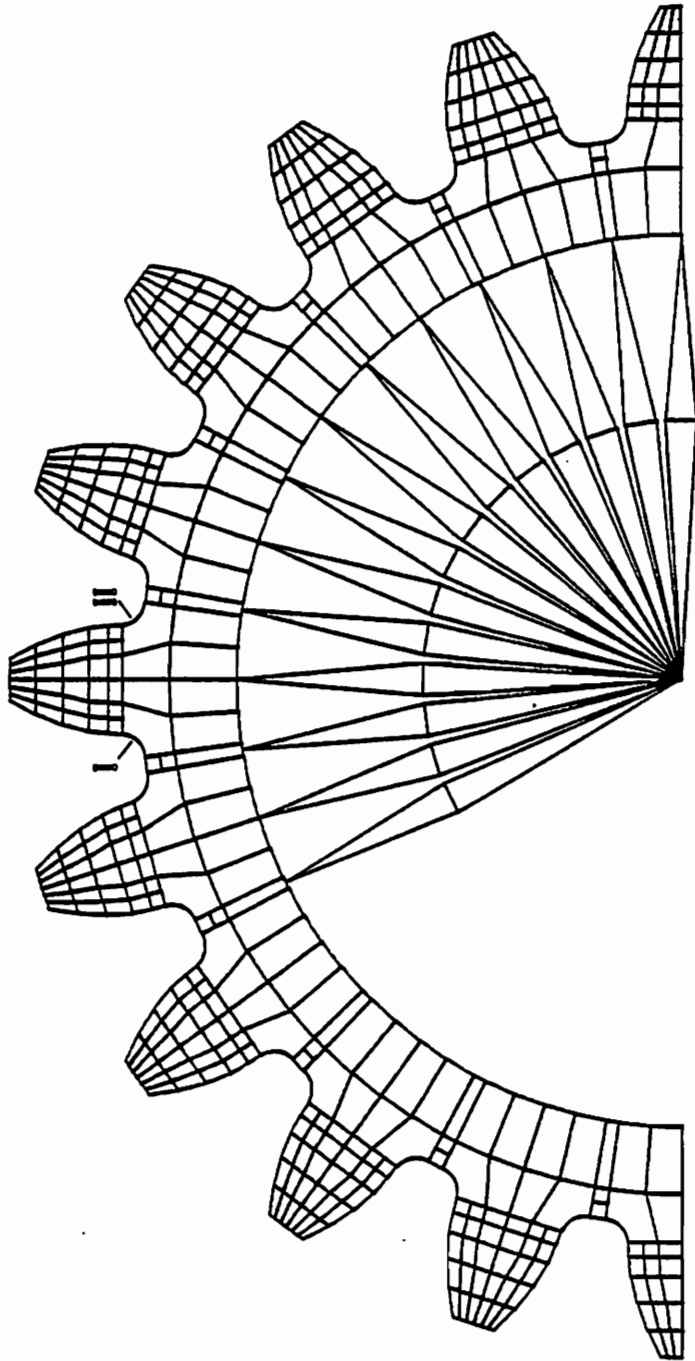


Bild 8.5.4: Finite Elementeinteilung für ein Halbzahnrads

Zahnradabmessungen :

Zähnezahl	20
Modul	4.0 mm
Profilverschiebungsf.	0.0
Kopfkürzungsfaktor	0.0
Innendurchmesser	58.0 mm
Ringdickenfaktor	1.6

Bezugsprofil des Werkzeuges

nach DIN 3972 :

Kopfhöhenfaktor	1.15
Kopfradiusfaktor	0.228
Protuberanz	0.0 mm
Protuberanzwinkel	0.0 Grad

Barth gibt zwei maximale Spannungen an :

maximale Zugspannung im Bereich II : 256.7 N/mm²

maximale Druckspannung im Bereich I : -315.88 N/mm²

Berechnung mit speziellen finiten Elementen :

maximale Zugspannung im Bereich II : 222.4 N/mm²

maximale Druckspannung im Bereich I : -312.2 N/mm²

Im Bild 8.5.5 sind die mit den speziellen finiten Elementen berechneten Spannungsverläufe am Fußkreis dargestellt.

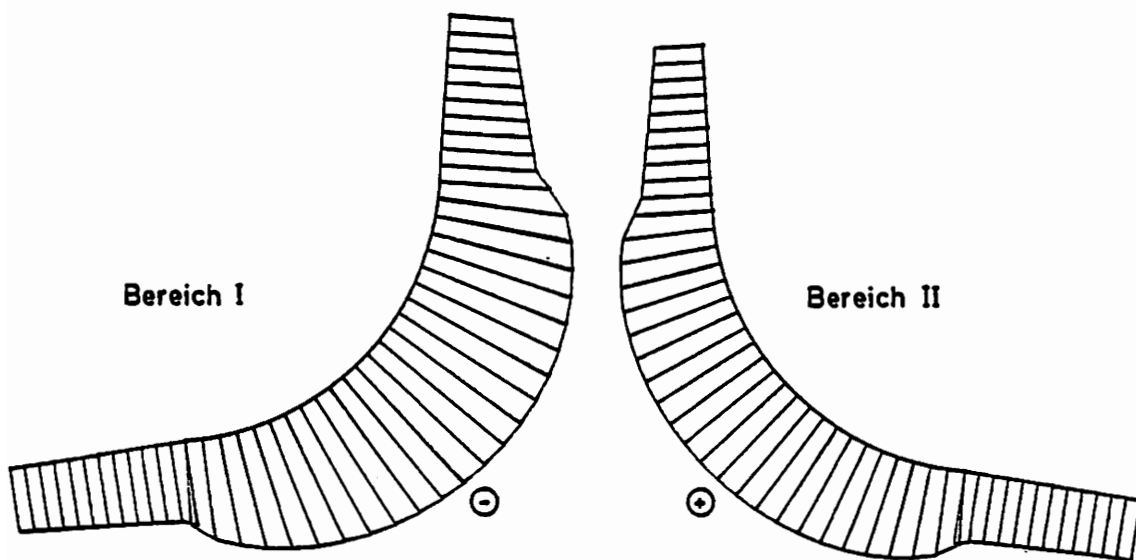


Bild 8.5.5 : Spannungsverlauf am Fußkreis

9. Zusammenfassung der Ergebnisse

Wie man aus den Ergebnissen des Kapitels 8 ersehen kann, führen die Ansätze der speziellen finiten Elemente zu guten Ergebnissen. Allerdings ist zu beachten, daß bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen die Randintegrationen, speziell über die Ränder die zum Lochrand führen, sehr genau durchgeführt werden müssen.

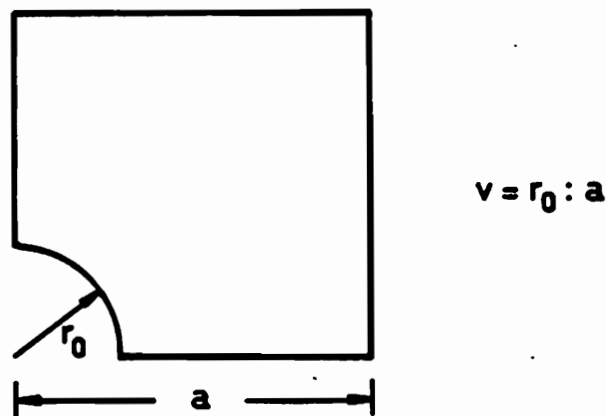


Bild 9.1 : Darstellung des Verhältnisses v

Außerdem war festzustellen, daß das Verhältnis Lochradius zu Elementaußenabmessung, im weiteren als v bezeichnet, einen wesentlichen Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse hat. Dies ist in der Tatsache begründet, daß die Gebietsansätze bei kleinen Elementabmessungen innerhalb eines kleinen Gebietes gezwungen werden, die erforderlichen Randverschiebungsverläufe anzunehmen. Dies ist besonders bei den Elementen festzustellen, die auf der Basis von Funktional I entwickelt wurden. Dort führte bereits ein Verhältnis $v=1:2$ zu nicht mehr befriedigenden Ergebnissen (Abweichungen von über 20 % zu der analytischen Lösung). Im Gegensatz dazu wiesen die maximalen Spannungsgrößen, die mit den Elementen auf der Basis von Funktional II ermittelt wurden, nur eine prozentuale Abweichung von ca. 3 % zu der analytischen Lösung auf. Bei dem Verhältnis $v= 1:5$ (siehe Beispiel im Kapitel 8) lag diese Abweichung bei 0.86 %. Bei den Elementen 1. Art (Funktional I) ist es durch Einführung von Wichtungsfaktoren bei der Integration über die Elementränder, die zum Kreisloch führen,

die also nicht mit Standartelementen gekoppelt sind, gelungen, bessere Ergebnisse zu erzielen. Aber auch diese Ergebnisse waren gegenüber den Ergebnissen, die mit Elementen 2. Art (Funktional II) erzielt wurden, nicht sehr genau. Durch Wahl anderer Verschiebungsverläufe an Elementgrenzen, die nicht mit Standartelementen gekoppelt werden müssen, wird eine Verbesserung der Resultate erwartet. Diese Verbesserung in der Wahl der Randverschiebungsverläufe sollten dann hauptsächlich bei den Elementen 2. Art noch bessere Ergebnisse liefern und damit ein noch günstigeres Verhältnis v erlauben. Die vorliegenden Ergebnisse (hauptsächlich mit Elementen 2. Art) erlauben eine grobe finite Elemententeilung in kritischen Bereichen eines Maschinenbauteiles (Einspringende ausgerundete Ecken, Bereiche mit Löchern), ohne daß die damit verbundene Reduzierung der Freiheitsgrade zu schlechteren Ergebnissen führt. Bei der Behandlung von Gebieten mit einer komplizierteren Randkurve (Evolventen) stellte es sich heraus, daß es im allgemeinen nicht mehr möglich ist, eine geschlossene analytische finite Elementformulierung, wie sie hier für eine Kreisberandung entwickelt wurde, zu finden ist. Die Ursache liegt darin, daß keine geeignete analytisch verwertbare, konforme Abbildung auf ein einfacheres Gebiet gefunden werden konnte. Da sich aber die hier benutzte allgemeine finite Elementformulierung als ein effektives Werkzeug für die Berechnung von Bauteilen an spannungskritischen Stellen erwies, wird es als sinnvoll angesehen, diese Methode durch numerische Verfahren auch für allgemeinere, komplizierte Gebietsbegrenzungen in Anwendung zu bringen.

11. Literaturverzeichnis:

- /1/ Piltner, R.: Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen. Fortschrittsbericht VDI-Z, Reihe 1 Nr. 96, Düsseldorf 1982
- /2/ Mußchelischwili, N.I.: Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie Carl Hauser Verlag, München 1971
- /3/ Girkmann, K.: Flächentragwerke. Springer Verlag, Wien 1963
- /4/ Sokolnikoff, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity. Mc Graw-Hill Book Company INC., Toronto 1956
- /5/ Schnack, E.: An optimization procedure for stress concentration by the finite element technique. Int. J. Num. Meth. Engng. Bd. 14 (1979) Nr. 1 S. 115/124
- /6/ Schnack, E.: Genaue Kernspannungsanalyse von Schrauben-Mutter-Verbindungen. VDI-Z 122, 11, S. 101/109
- /7/ Jirousek, J. and Guex, L.: The Hybrid-Treffitz finite element model and its application to plate bending. Int. J. Num. Meth. Engng. Vol 23 No 4 1986
- /8/ Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Springer Verlag, Berlin 1958
- /9/ Barth, W.: Verformungen und Zahnfußspannungen von ringförmigen Rädern in Planetgetrieben. Dissertation Ruhr-Universität-Bochum 1987. Schriftenreihe "Lehrstuhl für Maschinenelemente und Getriebetechnik" Heft 87.5
- /10/ Sawin, G.N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. VEB Verlag Technik, Berlin 1956
- /11/ Föppl, L. und Sonntag, G.: Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. Verlag von R. Oldenbourg 1951

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34** **Helmut Stumpf:**
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35** **Bernd Kaempf:**
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36** **Alfred Kraft:**
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37** **Petrisor Mazilu:**
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38** **Klaus-Detlef Mickley:**
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39** **Lutz-Peter Nolte:**
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40** **Ulrich Blix:**
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41** **Peter Becker:**
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42** **Dietmar Bouchard:**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43** **Uwe Zdebel:**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44** **Jan Kubik:**
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45** **Horst J. Klepp:**
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46** **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47** **Franz Karl Labisch:**
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48** **J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49** Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50** Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51** Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52** W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53** Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54** Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55** Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56** Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57** Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58** Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59** Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60** Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61** Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62** Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63** O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64** Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65** Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66** Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturelle Systeme
- Nr. 69 Berthold Schleck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 81**