



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

J. Pohé

Ein Beitrag zur
Stoffgesetzentwicklung für
polykristallines Eis

Heft Nr. 83



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

Jörg Pohé

Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung
für polykristallines Eis

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 83

Februar 1993

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Referates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. O. Mahrenholtz danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Mein herzlicher Dank gilt ferner all denen, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Ganz besonders hervorzuheben ist hier Herr Dr.-Ing Burkhard Bischoff-Beiermann, der mir als Arbeitskollege in den vergangenen Jahren stets Diskussionspartner war und wertvolle Anregungen gab. Frau cand.-Ing. Uta Müller danke ich für die stetige Unterstützung bei meiner Arbeit und der Erstellung der Druckvorlagen.

Februar 1993

Jörg Pohé

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. O. Mahrenholtz

Tag der Einreichung: 13.11.1992

Tag der mündlichen Prüfung: 05.02.1993

©1993

Dr.-Ing Jörg Pohé
Schulstr. 31a
4650 Gelsenkirchen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung:

In dieser Arbeit wird ein Konzept zur Ermittlung eines Stoffgesetzes für polykristallines Eis vorgestellt. Mikromechanische Effekte werden dabei in einer phänomenologischen Betrachtungsweise zusammengefaßt.

Die Herleitung der konstitutiven Gleichungen mit einem Satz von internen Zustandsvariablen steht in engem Zusammenhang zu dem hier zu verwendenden thermodynamischen Rahmen. Die notwendige Erfüllung der thermodynamischen Konsistenz beeinflußt sowohl die funktionalen Beziehungen der Evolutionsgleichungen als auch die Materialfunktionen.

Eine Anpassungsstrategie wird vorgestellt, mit deren Hilfe unbekannte Funktionen und Parameter sukzessive unter Nutzung physikalischer Assoziationen zu bestimmen sind.

Verifikationsrechnungen weisen auf die Anwendbarkeit dieses Modells auch bei unterschiedlichsten Belastungspfaden hin.

Abschließend dienen Strukturrechnungen mit einem FE-Programmpaket zur Untersuchung der Tauglichkeit dieses Stoffgesetzes für numerisch aufwendige Berechnungsverfahren.

Summary

In this thesis a concept for the determination of a constitutive law for polycrystalline ice is presented. Micromechanical effects are summarized concentrating on a phenomenological aspect.

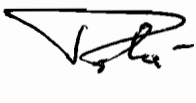
The development of the constitutive equations with a set of internal state variables is closely connected with the thermodynamical frame which is used here. The realization of the necessary thermodynamical consistence affects the functional relations of the evolution equations as well as those functions that describe the material behaviour.

A new concept for adaptation is introduced and with the help of this strategy unknown functions and parameters can be determined step by step using the physical background.

Calculations for verification show the applicability of this model even to different loading cases.

Finally, structured calculations with a FE-programme are of use for the examination of the qualification of this constitutive law for complex computations.

Frau Brodeweg in Erinnerung an eine
gemeinsame Zeit am Lehrstuhl und besten
Wünschen für die Zukunft überreicht.

Jörg 

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	<i>iv</i>
1. Einleitung	1
2. Grundlegende Materialbeschreibung	4
2.1 Ausgewählte Erscheinungsformen von Eis	4
2.1.1 Kristallstruktur des Monokristalls	4
2.1.2 Isotropes polykristallines Eis	6
2.1.3 Anisotropes polykristallines Eis	6
2.1.4 Meereis	7
2.2 Verformungsmechanismen	9
2.2.1 Elastische Eigenschaften	9
2.2.2 Mikromechanik der inelastischen Polykristallverformung	10
2.2.3 Versetzungsmechanismen	11
2.2.4 Rekristallisation	13
2.2.5 Rißbildung und Mikrobrüche	14
3. Stoffgesetze für polykristallines Eis – Überblick	17
3.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
3.2 Kurzer geschichtlicher Abriß der Erforschung plastischer Deformationen bei polykristallinem Eis	17
3.3 Das Modell von SINHA	18
3.4 Das Modell von KARR und CHOI.	20
3.5 Das Modell von GLOCKNER und SZYSZKOWSKI.	22
3.6 Das Modell von SJÖLIND.	27
3.7 Das Modell von BISCHOFF–BEIERMANN.	28
3.8 Das Modell von BRUHNS.	32

4. Das polykristalline Stoffgesetz	35
4.1 Allgemeine Vorbetrachtungen zur Thermodynamik	35
4.2 Thermodynamischer Rahmen für phänomenologische Theorien	35
4.3 Konstitutive Gleichungen	42
4.4 Thermodynamische Konsistenz	49
5. Anpassung	56
5.1 Aufbereitung der Versuchsergebnisse	56
5.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	56
5.1.2 Beginn der Mikrobrüche	57
5.1.3 Spannungsmaximum	59
5.1.4 Residuumspeannung	61
5.1.5 Wendepunktspannung	63
5.2 Bestimmung der idealen Druckkurven	65
5.3 Aufbereitung des Stoffgesetzes zur Ermittlung der Materialfunk- tionen	66
5.4 Ermittlung der Materialfunktion c	70
5.5 Separation der tensorwertigen internen Variablen ξ	78
5.6 Ermittlung der Arrheniuskoeffizienten	87
5.7 Nichtisotherme Rechnungen	88
6. Verifikationsrechnungen	93
6.1 Einaxialer Druck mit konstanter Dehnungsrate	93
6.2 Kriechen bei konstantem Druck	98
6.3 Relaxation	103
7. Strukturverhalten	109
7.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	109
7.2 Aufbereitung des Stoffgesetzes	109
7.3 Erweiterung des FE-Programmpakets	111
7.4 Ergebnisse	112
7.4.1 Kontrollrechnungen	112
7.4.2 Scheibe unter Eigengewicht	113
7.4.3 Kragsscheibe	114
7.4.4 Trapezscheibe	119
7.4.5 Gelochte Scheibe	122

8. Zusammenfassung und Ausblick	127
Literaturverzeichnis	130
Anhang I	144

Bezeichnungen

Skalare Größen:

A	: Parameter, Fläche (GLOCKNER, SZYSZKOWSKI)
B	: Zustandsraum
D_0	: Diffusionskoeffizient
E	: Elastizitätsmodul
F	: Fließfunktion
G	: Schubmodul
I_1	: Erste Invariante
I_2	: Zweite Invariante
\hat{I}_2	: Zweite Invariante der effektiven Spannungen, gebildet mit ξ
I_3	: Dritte Invariante
J_2	: Zweite Invariante der reduzierten effektiven Spannungen
K	: Kompressionsmodul
M	: Materialeigenschaften
Q	: Aktivierungsenergie
R	: allgemeine Gaskonstante
S_i	: polykristalline Eisform
T	: Temperatur
Z	: Zustandsvariablen
a_i	: Koeffizienten des Polynomansatzes, Koeffizienten von Materialfunktionen
b_i	: Koeffizienten des Polynomansatzes
c	: Materialfunktion
c_1, c_2	: durch Aufspaltung aus c entstandene Materialfunktionen
c_i	: Koeffizienten des Polynomansatzes
c_{ij}	: Komponenten des Elastizitätstensors $\underline{\underline{E}}$
c_p	: spezifische Wärmekapazität
c_r	: Materialfunktion

c_v	: Materialfunktion
d	: Korndurchmesser, Abstand der Versetzungsquellen (BISCHOFF-BEIERMANN)
d_1	: Koeffizient der Materialfunktion c_{v3}
d_i	: Koeffizienten des Polynomansatzes
e_i	: Koeffizienten der Materialfunktion c_{v1}
f	: Materialfunktion
f_1	: Materialfunktion zur Anpassung der Dissipationsfunktion
g	: Materialfunktion der effektiven inelastischen Arbeit γ , Materialfunktion der isotropen Verfestigung
j	: Materialfunktion (GLOCKNER-SZYSZKOWSKI)
k	: Parameter
k_i	: Koeffizienten von Materialfunktionen
r	: spezifische Energiequellen
r_i	: Korrelationskoeffizient
s	: Entropie
t	: Zeit
u	: spezifische innere Energie
$v_{i,j}$: partielle Ableitungen der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors (in Kap. 7)
w	: spezifische Formänderungsarbeit
Φ	: Dissipationspotential, Überspannungsfunktion
Λ	: Überspannung
α	: Temperatureausdehnungskoeffizient, Parameter
β	: Parameter, Dissipationsfunktion
γ	: modifizierte inelastische Arbeit
ε	: Dehnung
κ	: inelastische Arbeit
κ_i	: Koeffizienten der Regressionsfunktionen
λ_i	: Koeffizienten der Regressionsfunktionen
μ	: Quellenverteilungsdichte (BISCHOFF-BEIERMANN)
ν	: Querkontraktionszahl
ξ	: Komponente des Tensors $\underline{\xi}$
ϱ	: Dichte

σ	: Spannung
σ_m	: v. Mises Vergleichsspannung
σ_{mc}	: Spannung beim Einsetzen von Mikrobrüchen im einaxialen Druckversuch
σ_{ps}	: Spannungsmaximum im einaxialen Druckversuch
σ_{res}	: Residuumspeicherung im einaxialen Druckversuch
σ_{wp}	: Wendepunktspannung im einaxialen Druckversuch
$\sigma_{1.1res}$: 110% Residuumspeicherung im einaxialen Druckversuch
τ	: Schubspannung
φ	: spezifische freie (Helmholtz-) Energie
φ_i	: Koeffizienten der Überspannungsfunktion
$\dot{\eta}$: Entropieproduktion aufgrund interner Strukturänderungen
ψ	: spezifische freie (Gibbs-) Enthalpie
ω	: Schadensfunktion (GLOCKNER-SZYSZKOWSKI)

Vektoren:

\vec{F}	: Äußere Kraft in Strukturberechnungen
\vec{N}_i	: Normalenvektoren in Verbindung mit Mikrorissen (KARR, CHOI)
\vec{V}	: Damage-Vektor (SJÖLIND)
b	: Burgers-Vektor (BISCHOFF-BEIERMANN)
\vec{q}	: Wärmeflußvektor
\vec{v}	: Geschwindigkeitsvektor
$\vec{\omega}$: Mikroriß (KARR, CHOI)

Tensoren zweiter Stufe:

\underline{B}	: Tensor zur Beschreibung der thermischen Ausdehnung
\underline{D}	: Verzerrungsgeschwindigkeit, Schädigungstensor (KARR, CHOI)
\underline{S}	: gewichteter Cauchy-Spannungstensor
$\underline{\tilde{S}}$: Kugeltensor des gewichteten Cauchy-Spannungstensors
\underline{T}	: Deviator des gewichteten Cauchy-Spannungstensors
\underline{W}	: Tensor der Rotationsgeschwindigkeit
$\underline{\varepsilon}$: Dehnungstensor

$\underline{\mathbf{n}}$: Normalentensor, gebildet aus den effektiven Spannungen
$\underline{\mathbf{n}}_v$: Normalentensor, gebildet aus den reduzierten effektiven Spannungen
$\underline{\Sigma}_0$: Makroskopische Anfangsspannung (BISCHOFF-BEIERMANN)
$\underline{\xi}$: tensorwertige interne Variable
$\underline{\sigma}$: Spannungstensor
$\underline{\sigma}_{ES}$: Eigenspannungstensor der Mikroebene (BISCHOFF-BEIERMANN)
$\underline{\tau}$: Spannungsdeviator (BISCHOFF-BEIERMANN)
$\underline{\alpha}$: interne Zustandsvariable

Tensoren vierter Stufe:

$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$: gewichteter Elastizitätstensor
$\underline{\underline{\mathbf{M}}}$: Nachgiebigkeitstensor
$\underline{\underline{\beta}}$: Anisotropietensor (SJÖLIND)

Indizes (tiefgestellt):

<i>Ref</i>	: Referenzwert
<i>a</i>	: axialer Anteil (BISCHOFF-BEIERMANN)
<i>b</i>	: basaler Anteil (BISCHOFF-BEIERMANN)
<i>d</i>	: unmittelbar dissipierter Anteil
<i>e</i>	: elastischer Anteil (SINHA)
<i>h</i>	: nicht (sofort) dissipierter Anteil, hexagonale Struktur
<i>i</i>	: irreversibel, Laufindex, inelastisch (BISCHOFF-BEIERMANN)
<i>max</i>	: in der vorliegenden Problematik maximal auftretender Wert
<i>p</i>	: prismatischer Anteil (BISCHOFF-BEIERMANN)
<i>r</i>	: reversibel, entfestigende Einflüsse beschreibend (in Verbindung mit internen Variablen)
<i>v</i>	: verfestigende Einflüsse beschreibend
<i>0</i>	: zur Normierung benutzte Größe

Indizes (hochgestellt):

- * : Referenzzustand, aus elastischen Vorgängen resultierend
- ** : Referenzzustand, aus inelastischen Vorgängen resultierend
- 0 : Ausgangszustand

Symbolik :

- \mathcal{F} : Funktional
- \vec{x} : Vektor
- \underline{x} : Tensor zweiter Stufe
- $\text{tr}(\underline{x})$: Spur eines Tensors zweiter Stufe
- $\underline{\underline{x}}$: Tensor vierter Stufe
- (\dots) : Zeitableitung
- $(\dots)^\nabla$: Objektive Zeitableitung (Lee-Ableitung)
- $(\dots)^T$: Transponierte eines Tensors
- Δ : Differenz
- \cdot : Vektorprodukt
- $:$: doppeltskalares Produkt
- \otimes : dyadisches Produkt
- grad : Gradient eines Vektors, Gradient eines Skalars
- div : Divergenz eines Vektors
- $|(\dots)|$: Betrag
- $\|(\dots)\|$: euklidische Norm eines Tensors
- $\langle \dots \rangle$: Föppl-Symbole (BRUHNS)
- $\langle \dots \rangle$: Mittelung über ein definiertes Volumen (BISCHOFF-BEIERMANN)

1. Einleitung

Eis ist ein Stoff, der für viele im privaten Leben in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftritt. Die aktive Nutzung reicht von Speiseeis über den Eiswürfel zur Getränkekühlung bis zur Lauffläche vieler Sportarten (Eishockey, Eiskunstlauf, Rodeln, usw.).

Unter wirtschaftlich- industriellen Aspekten ist Eis sicherlich der Festkörper, welcher fast ohne jegliche menschliche Eingriffsmöglichkeit in großen Mengen entsteht und einem Nutzen häufig Probleme im Umgang gegenüberstehen. Zugefrorene Straßen im Winter oder vereiste Wasserfahrwege bzw. das Einfrieren von Schiffen sind Beispiele für einen aus wirtschaftlicher Sicht störenden Einfluß des Eises auf das Geschehen.

Besonders in nordischen Regionen, die sicher mit einem regelmäßigen Aufkommen bedeutender Eismassen rechnen können und müssen, hat dies zu einer Nutzung dieser Erscheinungen geführt. Eine passive Form dieser Nutzung stellt beispielsweise die Verwendung von Eisdecken auf Seen oder Flüssen als Verkehrswege oder für Veranstaltungen dar. Aber auch eine aktive Nutzung als Werkstoff für Hallen o.ä. findet besonders in letzter Zeit zumindest im Bereich der Forschung steigende Beachtung.

Die Grundlagenforschung betrachtet neben dem hier angesprochenen weiterhin Eis, welches bis heute praktisch nicht kommerziell genutzt wird. Eisberge, Gletscher und atmosphärisches Eis sind Schwerpunktsgebiete auf diesem Sektor.

Die Nutzung des Eises, aber auch jede Problematik im Zusammenhang mit Eis, erfordert ausreichende Kenntnisse über diesen Stoff. Eine Hauptfragestellung in Verbindung mit Ingenieurwissenschaften im allgemeinen ist jene nach der maximalen Beanspruchung, die Eis auf ein angrenzendes Bauteil ausübt und die Bestimmung der Last, die ohne Gefahr auf eine Eisdecke aufgebracht werden kann. Der hierzu erforderliche, mathematisch beschriebene Zusammenhang zwischen einer Belastung und Verformungen wird häufig als Stoffgesetz bezeichnet¹. Es stellt im Rahmen komplexer Strukturberechnungen gewissermaßen eine "innerste Schleife" dar.

¹ Es ist anzumerken, daß es sich dabei in aller Regel nicht um Gesetze im Sinne von

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Entwicklung eines solchen Stoffgesetzes für Eis.

Zur Realisierung wird im 2. Kapitel eine grundlegende Materialbeschreibung vorgenommen. Die darin angedeutete Vielfalt der Erscheinungsformen erfordert hinsichtlich der Modellbildung eine klare Abgrenzung dessen, was beschrieben werden soll.

Das vorzustellende Stoffgesetz beschränkt sich auf isotropes, polykristallines Eis.

Ein anschließender Überblick der mikromechanischen Vorgänge unterstützt einerseits die phänomenologische Formulierung und dient andererseits zum Verständnis der internen Abläufe.

Da jede Modellbildung vor dem Hintergrund der bereits existierenden Gesetze zu sehen ist, folgt zunächst im 3. Kapitel die Vorstellung einiger Arbeiten, die eine große Akzeptanz besitzen bzw. deren Einfluß auf das folgende Modell unterstrichen werden soll.

Das 4. Kapitel enthält nun den Kern der gesamten Ausführungen. Eine besondere Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang der Einbindung in die Thermodynamik zu. Eine große Abhängigkeit des Eises von der Temperatur ist sofort einsichtig. Aus diesem Grunde wird auch im Modell diese Beziehung angestrebt. (Erwähnt sei in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß die Celsiusskala ihren Nullpunkt am sog. Eispunkt hat, der die Gleichgewichtstemperatur zwischen Eis, flüssigem und gasförmigem Wasser bei dem Druck einer Normalatmosphäre darstellt.) Eine Konsistenz hinsichtlich thermodynamischer Gesetze soll gegeben sein. Diese Forderung mit ihren Konsequenzen für die aufzustellenden Gleichungen und die im 5. Kapitel anschließende Anpassung wird diskutiert.

Die Anpassung ist eng mit der Stoffgesetzformulierung verbunden. Materialfunktionen und -parameter, die in den Evolutionsgleichungen nur im Hinblick auf grundsätzliche Abhängigkeiten benannt wurden, sind in diesem 5. Kapitel für den konkret vorliegenden Werkstoff zu formulieren. Hierzu erfolgt eine Aufbereitung der Versuchsergebnisse sowie eine Strategie mit dem Ziel einer möglichst einfachen, d.h. sukzessiven Ermittlung unbekannter Größen.

Kapitel 6 dient zur Verifikation des entwickelten und angepaßten Modells an weitere,

Naturgesetzen handelt, sondern eher von Modellen gesprochen werden kann. Da diese Begrifflichkeit jedoch eingebracht und weithin akzeptiert ist, wird auch in dieser Arbeit in der Modellbildung gelegentlich von Stoff"gesetzen" gesprochen.

in der Anpassung nicht berücksichtigte Belastungspfade.

Komplexe geometrische Aufgaben erfordern spezielle Lösungsmethoden. Eine Einbindung in eine Finite-Elemente-Formulierung mit einigen exemplarisch ausgewählten Strukturen enthält abschließend Kapitel 7.

2. Grundlegende Materialbeschreibung

2.1 Ausgewählte Erscheinungsformen von Eis

2.1.1 Kristallstruktur des Monokristalls

Wasser (H_2O) kristallisiert in Abhängigkeit der Temperatur und des Druckes in unterschiedlichen Erscheinungsformen. Die mit Eis II bis Eis IX bezeichneten Formen treten aufgrund sehr hoher erforderlicher Drücke und/oder sehr tiefer Temperaturen in der Natur praktisch nicht auf. Diese Zustände sind außerdem nach HOBBS (1974) und GLEN (1974) häufig äußerst instabil (Abb.1).

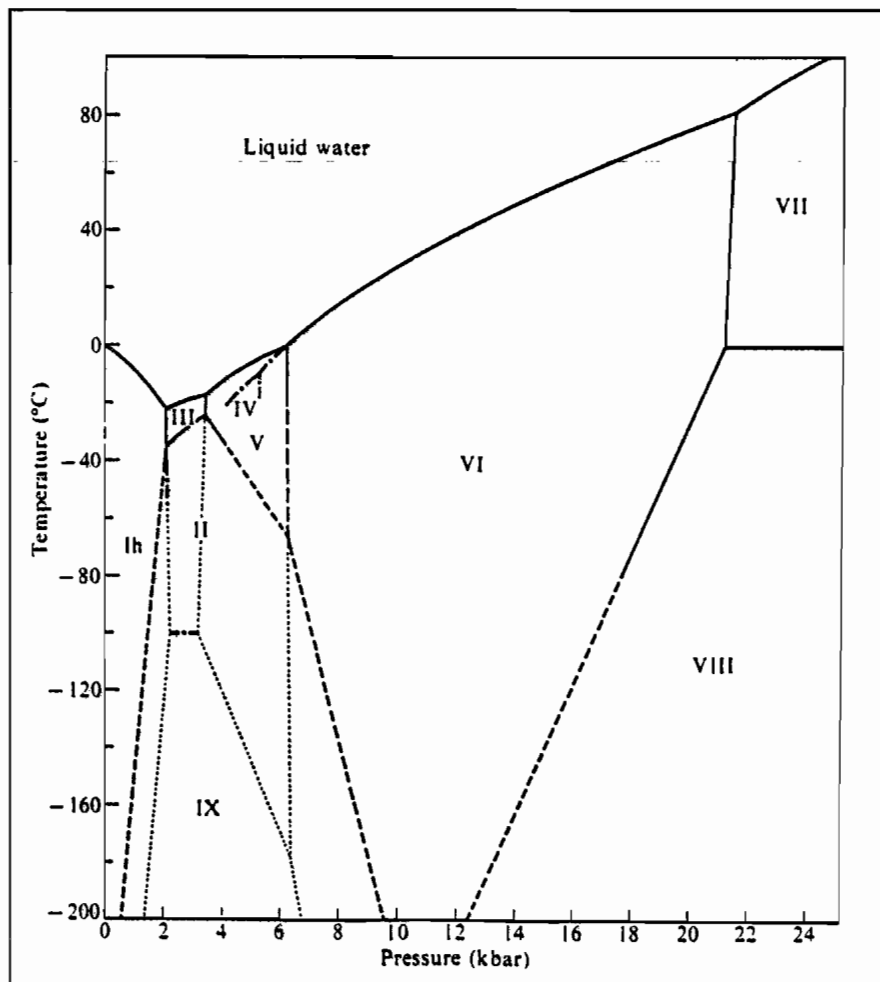


Abb. 1: Phasendiagramm (HOBBS (1974))

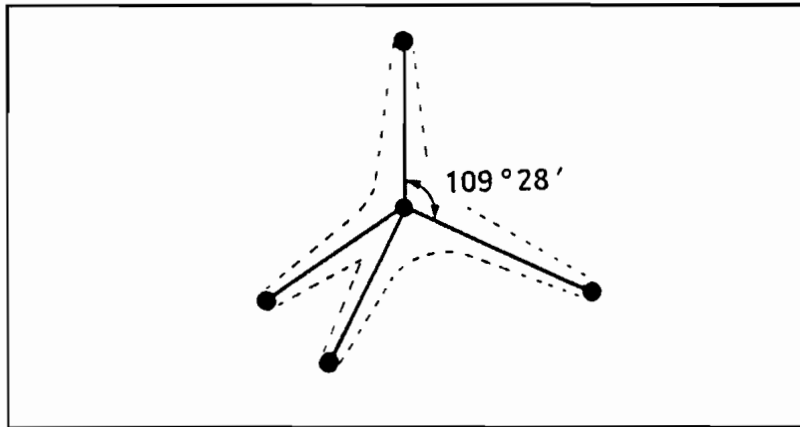


Abb. 2: Tetraeder des hexagonalen Kristallgitters (MICHEL (1978))

Unter natürlich vorkommenden Temperaturen und bei Atmosphärendruck bildet sich Eis I_h . Der Index h weist auf die hexagonale Struktur hin.

Seit BRAGG (1922) ist bekannt, daß in natürlichem Eis jedes O-Atom mit 4 Nachbaratomen ein nahezu ideales Tetraeder bildet (Abb.2).

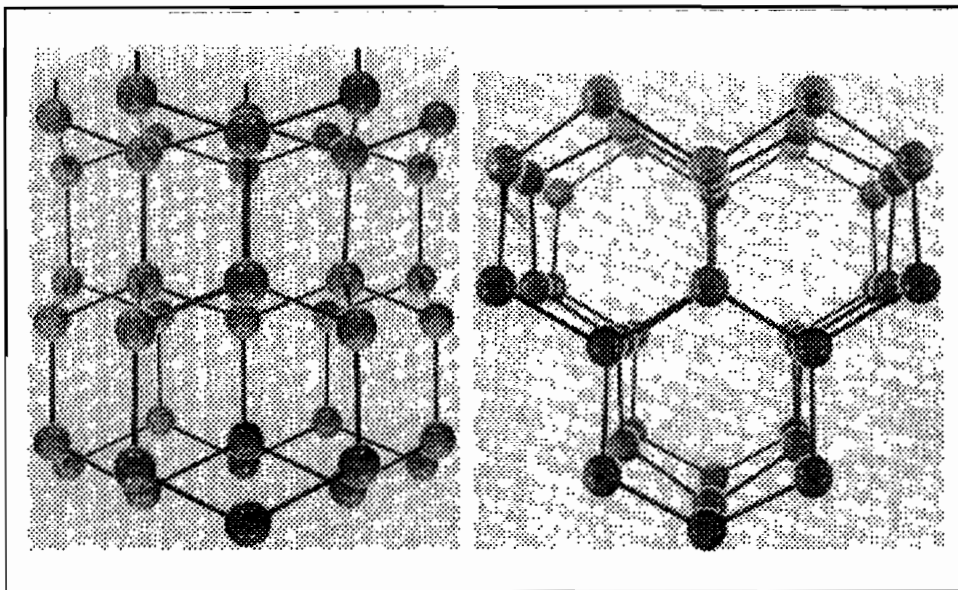


Abb. 3: Kristallstruktur von polykristallinem Eis I_h (HOBBS (1974))

Ein kontinuierlicher Aufbau dieser Tetraeder zu einem Gitter führt auf die in Abb.3 dargestellte Kristallstruktur. Das jeweils zwischen zwei O-Atomen liegende H-Atom ist zur besseren Übersicht nicht eingezeichnet.

Abb.3 verdeutlicht den Charakter übereinanderliegender, gestapelter Ebenen. Die einzelnen Atome liegen dabei stets etwas unterhalb bzw. oberhalb dieser sog. Basalebene. Dadurch kommt es zur Stapelfolge abbaabbaa... der hexagonalen Struktur¹. Die basalen Gleitebenen, die zwischen den Basalebene in den O-atomfreien Flächen liegen, ermöglichen bevorzugt Gleitprozesse und stellen die Ursache der Anisotropie des (Mono-)Kristalls dar. Bei MICHEL (1978) werden die Basalebene mit einem Stapel Spielkarten verglichen, wodurch eine leichte Verschieblichkeit symbolisiert werden soll. Eine Verformung in Richtung der c-Achsen, d.h. senkrecht zu den Basalebene (bzw. Spielkarten), tritt jedoch erst bei sehr großen Belastungen auf.

2.1.2 Isotropes polykristallines Eis

Isotropie bei polykristallinem Eis bedeutet eine regellose Orientierung der c-Achsen der einzelnen Kristalle. Die Anisotropieeigenschaften des Monokristalls sind bei einer makroskopischen Betrachtungsweise verschmiert. Nach LLIBOUTRY (1965) findet sich diese Form in der Natur z.B. in Gletschern, die noch keine (großen) Verformungen erfahren haben.

Isotropes polykristallines Eis ist die bevorzugt untersuchte Art. Zur Erfassung und Steuerung von Einflußgrößen wie z.B. Korndurchmesser oder Gasgehalt verwendet man häufig sog. Labor- oder Kunsteis, das unter bekannten und reproduzierbaren Bedingungen hergestellt wird. COLE (1979) gibt einen Überblick der Problematiken und deren Lösungen in der Technik zur Herstellung von solchen Laboreisproben, mit denen auch die hier (Kapitel 5 und Kapitel 6) verwendeten Versuche durchgeführt wurden.

2.1.3 Anisotropes polykristallines Eis

Im Gegensatz zu dem im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten, isotropen Eis treten bei Anisotropen Vorzugsrichtungen der c-Achsen der einzelnen Kristalle in einer Eisschicht auf. Neben der Möglichkeit, dies im Labor künstlich herzustellen, findet man in der Natur in Gewässern in Abhängigkeit von der Stömungsgeschwindigkeit

¹ Gelegentlich findet man Bezeichnungsweisen, bei denen zwei Ebenen (aa oder bb) zu einer Schicht A bzw. B zusammengefaßt werden. Die Stapelfolge der Schichten lautet dann ABABABAB... .

u.a. folgende, wesentliche Erscheinungsformen des sekundären Eises, welches sich an das Oberflächeneis und das primäre Eis in Tiefen ab wenigen Zentimetern anschließt:

- S1 säulenförmiges Eis; bevorzugt vertikale Orientierung der c-Achsen.
- S2 säulenförmiges Eis; bevorzugt horizontale regellose Orientierung der c-Achsen.
- S3 säulenförmiges Eis; bevorzugt horizontale ausgerichtete Orientierung der c-Achsen.

S1 Eis findet man in Teichen, Wasserreservoirs, Flüssen mit geringer Fließgeschwindigkeit, nicht jedoch im Meer. Es ist charakterisiert durch ausgesprochen große Körner, die mit der Tiefe noch wachsen. Die Korngestalt ist ungleichmäßig. Das mechanische Verhalten kann mit dem des Monokristalls verglichen werden.

S2 Eis entwickelt im Laufe des Wachstums Kristallkörner, die nach 5 bis 20 cm Länge ungünstig orientierte Körner so verdrängt haben, daß die Abweichung der c-Achsen von der Horizontalen nur wenige Grad beträgt (MICHEL (1978)). In dieser horizontalen Ebene sind die c-Achsen der langgestreckten Körner regellos orientiert. Das Eis verhält sich demnach plananisotrop. Die Anisotropieachse liegt dabei parallel zur Wachstumsrichtung. S2 Eis bildet sich als Frischwassereis oder (häufig einjähriges) Meereis.

S3 Eis formt sich in den unteren Bereichen von dicken Eiskecken. Die Ausrichtung der c-Achsen ist parallel zueinander in horizontalen Ebenen. Es verhält sich mechanisch orthotrop mit den Hauptanisotropierichtungen

- parallel zur c-Achsenrichtung (horizontal),
- parallel zur Wachstumsrichtung (vertikal),
- senkrecht zur c-Achsen- und Wachstumsrichtung (horizontal).

Weiterführende Betrachtungen dieser Klassifizierung der Eisstruktur finden sich z.B. bei MICHEL (1978).

2.1.4 Meereis

Ca. 12% der gesamten Erdoberfläche ist von Meereis bedeckt. Die Zusammensetzung des Meerwassers, welches der Ursprung dieser Eisschichten ist, variiert dabei hinsichtlich des Salzgehaltes und nimmt beispielsweise in den Deltas großer Flüsse

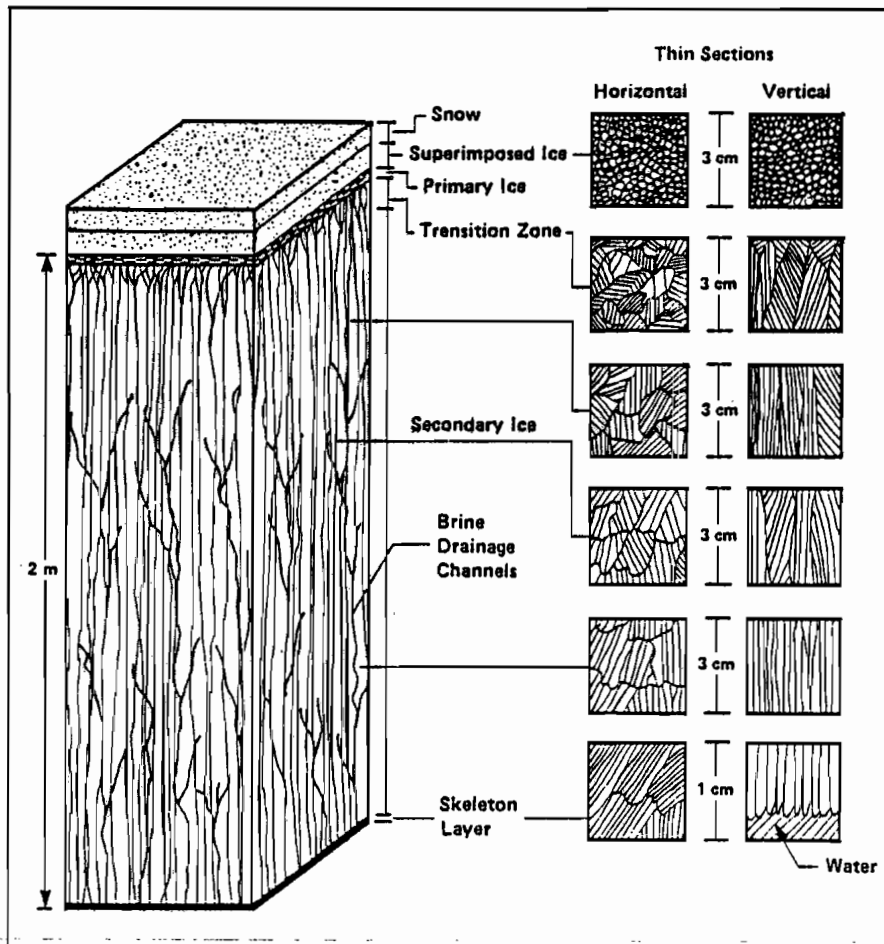


Abb. 4: Struktur von säulenförmigem, einjährigem Meer-eis (SANTAOJA (1990) aus: SCHWARZ, WEEKS (1977))

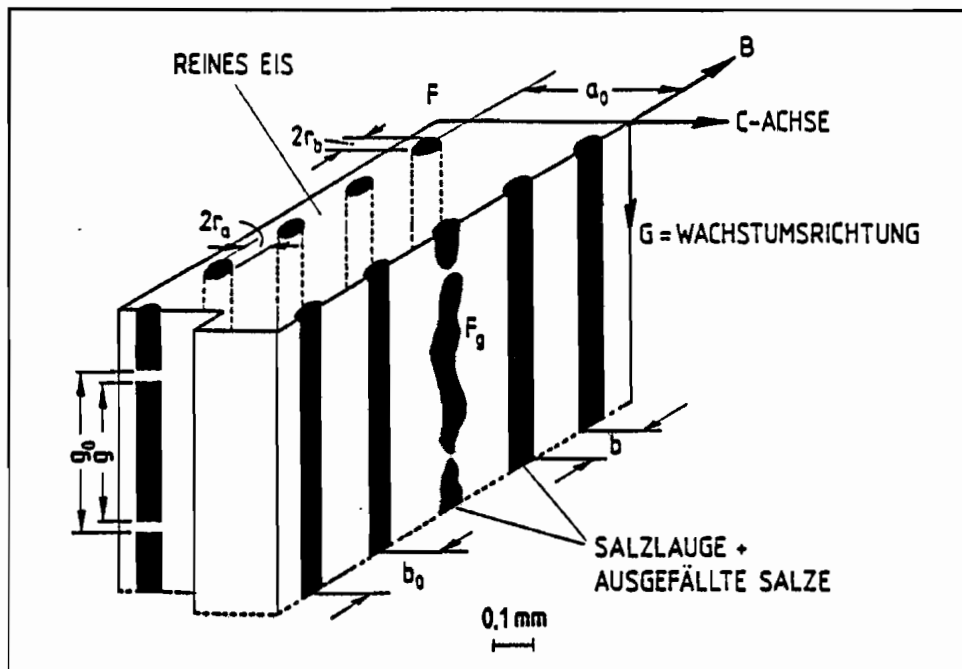


Abb. 5: Modell zur Salzeinlagerung bei Meereis (HÄUSLER (1989) nach: ASSUR (1958))

stark ab. Der mittlere Salzgehalt kann mit ca.0.4% angegeben werden und setzt sich, bezogen auf die Trockenmasse, wie folgt zusammen (MICHEL (1978)).

<i>NaCl</i>	<i>MgCl₂</i>	<i>Na₂SO₄</i>	<i>CaCl₂</i>	<i>KCl</i>	<i>NaHCO₃</i>	Weitere	Total
68,1%	14,44%	11,37%	3,19%	1,91%	0,55%	0,44%	100%

Abb.4 zeigt die typische Struktur von säulenförmigem, einjährigem Eis.

Der wesentliche Unterschied zu Frischwassereis im Hinblick auf die Zusammensetzung und das mechanische Verhalten sind die Salzlaugentaschen (*brine pockets*) (Abb.5).

Eine Stoffgesetzformulierung für Meereis, bei welcher unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsgesetze harnstoff- bzw. natriumchloriddotiertes Eis verwendet wird, findet sich z.B. bei HÄUSLER (1989).

2.2 Verformungsmechanismen

2.2.1 Elastische Eigenschaften

MALVERN (1969) gibt folgende Definition für ein elastisches Verhalten: "Ein Material ist (ideal) elastisch, wenn ein Körper, der aus diesem Material besteht, vollständig seine Ursprungsform zurückerhält, nachdem die Last, die die Verformung hervorgerufen hat, entfernt wurde."

Für hexagonale Strukturen, so auch für Eis I_h , enthält der Elastizitätstensor $\underline{\underline{E}}$ nur 5 linear unabhängige Größen. DANTL (1968) hat diese als Funktion der normierten Temperatur bestimmt.

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 12.904(1 - 1.489 \cdot 10^{-3}T - 1.85 \cdot 10^{-6}T^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 0.3\% \\
 c_{12} &= 6.487 (1 - 2.072 \cdot 10^{-3}T - 3.62 \cdot 10^{-6}T^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 2.0\% \\
 c_{13} &= 5.622 (1 - 1.874 \cdot 10^{-3}T) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 7.0\% \\
 c_{33} &= 14.075(1 - 1.629 \cdot 10^{-3}T - 2.93 \cdot 10^{-6}T^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 0.4\% \\
 c_{44} &= 2.819 (1 - 1.601 \cdot 10^{-3}T - 3.62 \cdot 10^{-6}T^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 0.7\%
 \end{aligned}$$

Die elastischen Parameter für isotropes polykristallines Eis sind von vielen Experimentatoren gemessen worden und streuen über einen Bereich mit dem Faktor 5. MICHEL (1978) gibt einen kurzen Überblick der Ergebnisse, die unter bekannten Versuchsbedingungen bestimmt wurden. Die Materialkonstantengleichung, die einen Zusammenhang dieser Parameter beschreibt, ist dabei nicht berücksichtigt worden.

Autor	E	G	ν
	$\cdot 10^3 \text{ MPa}$	$\cdot 10^3 \text{ MPa}$	
EWING ET AL. (1934)	9.17	3.36	0.36
NORTHWOOD (1947)	9.80	3.68	0.33
GOLD (1958)	9.94	3.80	0.31

Die beschriebenen elastischen Eigenschaften und die daraus resultierenden elastischen Verformungen treten in polykristallinem Eis stets in Verbindung mit inelastischen Verformungen auf. Es existiert oberhalb des absoluten Nullpunktes der Temperatur keine Grenze (Fließgrenze), die einen rein elastischen Bereich definiert (FROST, ASHBY (1982)).

2.2.2 Mikromechanik der inelastischen Polykristallverformung

Das Verformungsdiagramm von SHOJI, HIGASHI (1978) ermöglicht einen Einblick in die Abhängigkeiten der jeweils wesentlichen Verformungsmechanismen von der Temperatur und der Schubspannung.

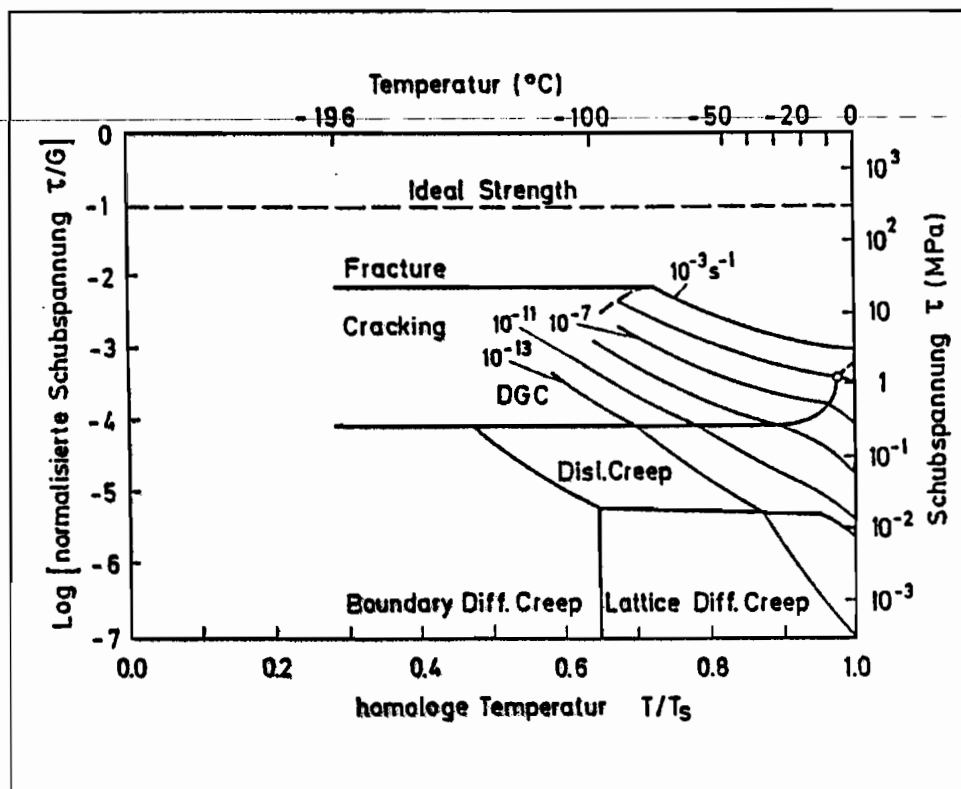


Abb. 6: Verformungsdiagramm nach SHOJI, HIGASHI (1978) für polykristallines Eis (Korndurchmesser $d=2\text{mm}$).

Im häufig interessierenden Temperaturbereich -5°C bis -20°C treten bei sehr kleinen Spannungen Gitterdiffusionsbewegungen (*lattice diff. creep*) auf. Höhere

Spannungen zwischen 10^{-2}MPa und 1MPa bewirken Versetzungsbewegungen. Die Abgrenzung dieses Bereiches zum Auftreten von Rissen liegt im Gegensatz zu sehr niedrigen Temperaturen hier nicht bei einer konstanten Spannung vor. Ein Absenken der Temperatur und/oder eine Erhöhung der Schubspannung führt folglich zum Einsetzen von Spaltrissen. Dies geht einher mit einer Zunahme der Dehnungsrate (diagonale Linienzüge). Bei einer Rate von $10^{-3} \frac{1}{s}$ ist Versagen des Werkstoffes durch Spröbruch zu erwarten.

2.2.3 Versetzungsmechanismen

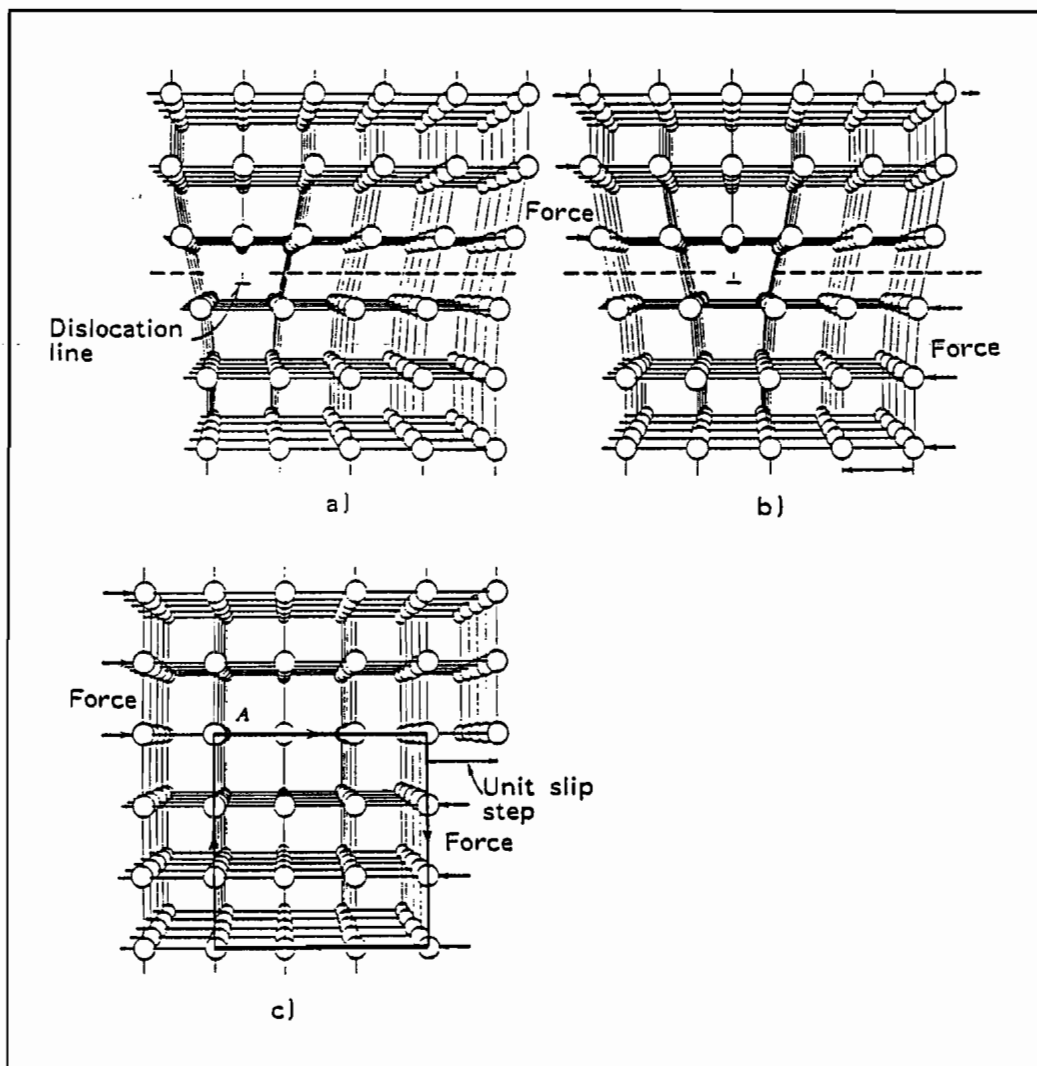


Abb. 7: Schematische Entwicklung einer Stufenversetzung nach HERZBERG (1976) aus: SANTAOJA (1990).

BISCHOFF-BEIERMANN (1992a) diskutiert auf Basis der Untersuchungen von HUT-

CHINSON (1977) und ASHBY, DUVAL (1985) Versetzungsbewegungen aufgrund großer inelastischer Verformungen bei nur vier unabhängigen Gleitsystemen. Den schematischen Ablauf einer Stufenversetzung zeigt Abb.7.

Der Einfluß der "harten" bzw. "weichen" (basalen) Gleitebenen auf die Deformationsgeschwindigkeit wird bei MICHEL (1978), WEERTMANN (1973) und ASHBY, DUVAL (1985) kontrovers behandelt. MICHEL betont den Einfluß der "weichen", WEERTMANN den der "harten" Gleitsysteme und ASHBY, DUVAL gehen von einer gleichgroßen Bedeutung aus. BISCHOFF-BEIERMANN kommt unter Berücksichtigung des Verformungsdiagramms (Abb.6) zu dem Schluß, daß das Wandern von Versetzungen der Hauptverformungsmechanismus ist und berücksichtigt den Einfluß der "harten" und der "weichen" Gleitsysteme in seinen Ausführungen. Als Folge dieser Modellbetrachtung (Taylor-Modell) sind entstehende Eigenspannungen im Kristall zu berücksichtigen.

SANTAOJA (1990) beschreibt die Versetzungsbewegungen bei Eis mit dem Ergebnis, sie seien vernachlässigbar bei allen Temperaturen. Der Grund liege in der Bildung von L- und D-Bjerrum-Defekten, die zwangsläufig bei Versetzungen in Eis auftreten. Diese Defekte (zwei Protonen oder keins auf einer O-O-Verbindung) erforderten eine zu große Spannung, um Versetzungen zu bewegen.

HÄULSER (1989) weist in diesem Zusammenhang jedoch darauf hin, daß die bei 0K am Atom "festgefrorenen" Protonen sich bei höheren Temperaturen umordnen können, ohne Bjerrum-Defekte zu erzeugen.

COLE (1992) beschreibt in einem Übersichtsartikel u.a. die Entwicklung der Untersuchungen von Versetzungsprozessen. In diesem Zusammenhang sei auf die dort erwähnten Arbeiten von LIU ET AL (1992a, b) hingewiesen. Mit Hilfe der Röntgen-Topografie sind Versetzungen und Korngrenzen beobachtet worden. Es werden Bilder vorgestellt, die eine Versetzungsquelle an einer Korngrenze bei vorgegebener Scherbelastung zeigen.

WEI, DEMPSEY (1992) untersuchen mikroskopisch mittels einer speziellen Ätztechnik Versetzungsbewegungen und die Plastizität in Eis. Sie kommen zu dem Schluß, daß Versetzungen in den nicht-basalen Ebenen durch Serien von Sprüngen charakterisiert sind. Weiterhin zeigen sich Versetzungsbewegungen an den Rißspitzen der Eiskristalle durch die Beobachtung von Versetzungsanhäufungen und versetzungsfreien Zonen, die durch das Rißspitzenfeld hervorgerufen werden.

2.2.4 Rekristallisation

Eine fundamentale und bis heute aktuelle Arbeit zum Thema Rekristallisation bei der "experimentellen Untersuchung zur Plastizität von Eis" ist von STEINEMANN (1958b) vorgestellt worden. Darin wird zwischen para- und postkinematischer Rekristallisation unterschieden. Die erstgenannte setzt bereits während der Belastung ein, die zweite nach der Belastung.

Rekristallisation geht einher mit Gefügeumwandlungen. Als Induktionsperiode bezeichnet man gerade den Zeitraum bis zum Beginn, als Wachstumsperiode den Zeitraum zwischen Beginn und Ende dieser Umwandlungen.

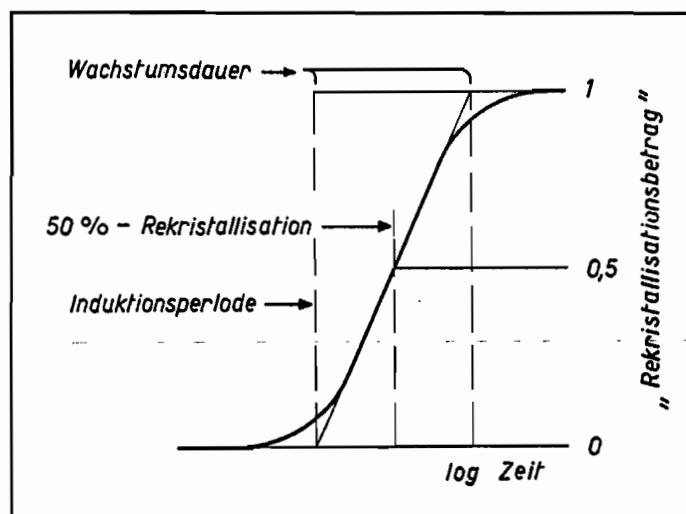


Abb. 8: Schematischer Verlauf einer kinematischen Rekristallisation (STEINEMANN (1958))

Durch eine Umorientierung von ungünstig liegenden Körnern in Bezug auf ein leichtes Abgleiten erfolgt in einem ursprünglich isotropen Material eine Ausrichtung der Basalebene. Abb.8 zeigt schematisiert die Zeitabhängigkeit dieses Vorgangs.

Rekristallisation führt also bei einer Beibehaltung der Last(-Richtung) zu einer Entfestigung im Material. Die treibende Kraft ist dabei ein Potentialgefälle, das aus Eigenspannungen (aus dem Taylor-Modell mit "weichen" und "harten" Gleitebenen, siehe Kapitel 2.2.3) und Spannungskonzentrationen herrührt (BISCHOFF-BEIERMANN (1992a)).

Nach STEINEMANN ist die Rekristallisation nach 5 Gesetzen beschreibbar:

- Zum Einsatz der Rekristallisation ist ein minimaler Deformationsgrad erforder-

lich. Er wird als kritische Deformation bezeichnet. Dieser fällt mit steigender Temperatur.

- Mit steigender Temperatur wird ein bestimmter Rekristallisationsbetrag früher erreicht. Dies umfaßt sowohl die Wachstums- als auch die Induktionsperiode.
- Auch mit steigender Spannung wird ein bestimmter Rekristallisationsbetrag zu früheren Zeiten erreicht. Dies gilt ebenfalls für die Wachstums- und Induktionsperiode.
- Mit steigender Spannung setzt parakinematische Rekristallisation ein. Dabei setzt der sichtbare Beginn der Gefügewandlung mit steigender Spannung bei höheren Deformationen ein.
- Nach einer Rekristallisation infolge Verformungen unter hohen Spannungen setzt eine gleichmäßige Kornvergrößerung ein. Diese Kornvergrößerung erlaubt die Ausprägung bestimmter Vorzugsorientierungen der c-Achsen, die ein basales Gleiten und damit Verformungen bei geringeren Belastungen ermöglichen kann. Die Korngröße wird wesentlich durch die Spannung und weniger durch die Temperatur bestimmt.

2.2.5 Rißbildung und Mikrobrüche

Wird im Eis durch eine äußere Last oder durch Eigenspannungen die Zugfestigkeit auf Kristallebene überschritten, entstehen Mikrobrüche. Nach Untersuchungen von HAWKES, MELLOR (1972) ist dies bei Druckversuchen ab Dehnungen von 0.1% bis 0.3% beobachtet worden. Eine Abhängigkeit von der Dehnungsrate war nicht offensichtlich. Die Anzahl der Brüche stieg mit der Spannung, bis es schließlich zum Zusammenwachsen der Brüche und damit zum Versagen des Prüfkörpers kam.

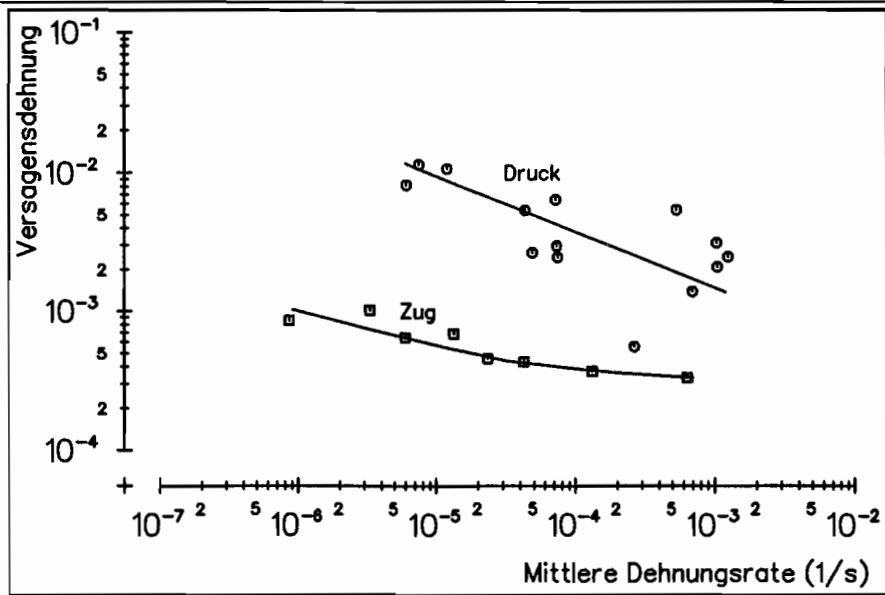


Abb. 9: Versagensdehnung als Funktion der mittleren Dehnungsrate (HAWKES, MELLOR (1972)).

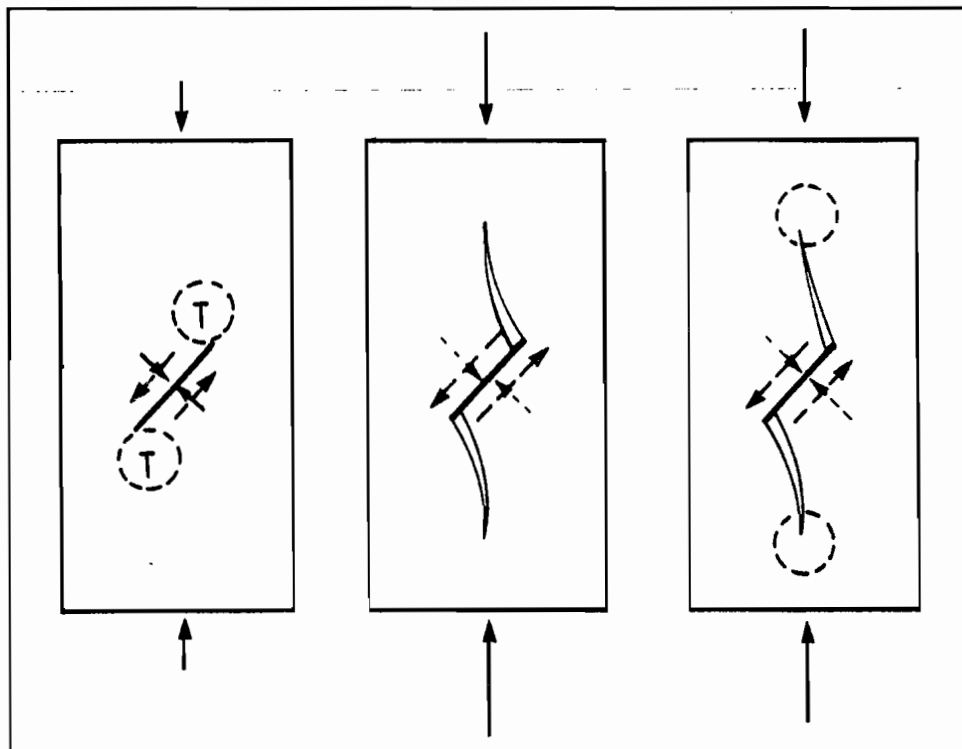


Abb. 10: Das Entstehen von "wing-cracks" (SCHULSON (1990)).

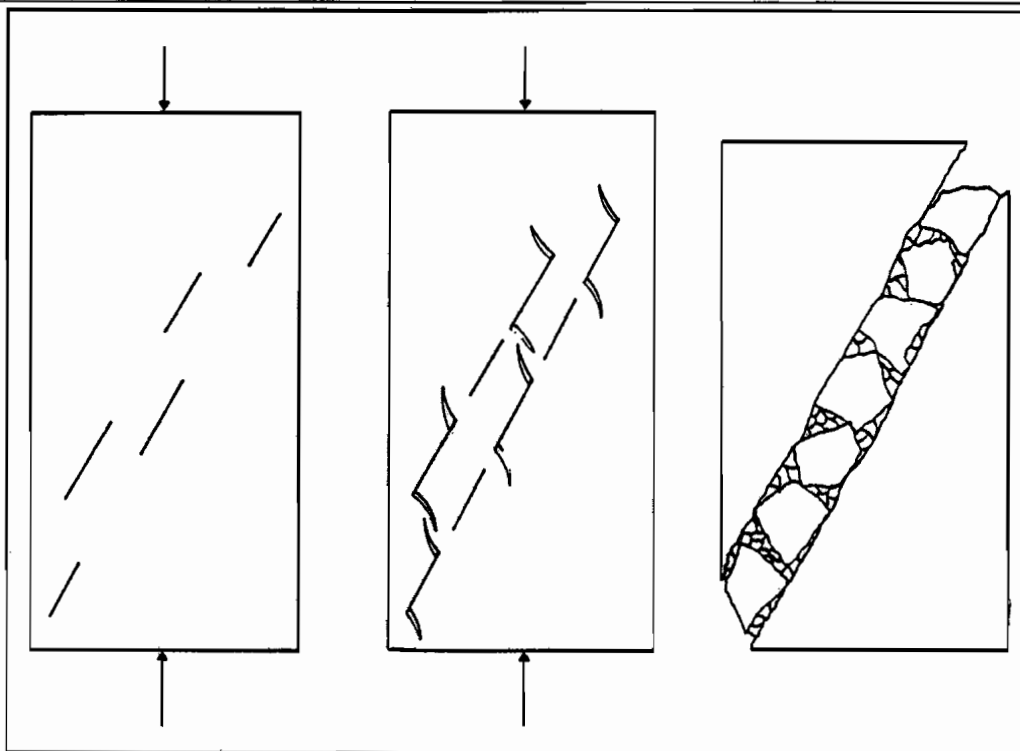


Abb. 11: Auftreten erster Mikrobrüche bis zum Versagen (SCHULSON (1990)).

Die im Druckversuch durch erste Mikrobrüche entstehenden Risse haben bei HAWKES, MELLOR eine Orientierung ihrer Ebene nahezu parallel zur Belastungsrichtung. Im Zugversuch dagegen finden sich Risse vornehmlich senkrecht zur Richtung der aufgetragenen Last. Eine interne Spannungssteigerung in den Rissspitzen ist die Folge, die zu einem deutlich früheren Versagen des Materials unter (globaler) Zugbelastung führt (Abb.9).

Zur Erklärung der Vorgänge von ersten Mikrobrüchen bis zum Versagen unter Druck verwendet SCHULSON (1990) das Modell der "wing-cracks". Nach einem Abgleitprozeß entstehen durch Zugspannung initiierte Risse, die paarweise die Form von "Schwingen" haben (Abb.10).

Fortgesetztes Belasten des Materials führt dann zu Spannungskonzentrationen in den gestrichelt eingezeichneten Kreisen in Abb.10. Ein Zusammenwachsen der Risse und schließlich das komplexe Abgleiten zweier Flächen führen zum Versagen (Abb.11).

3. Stoffgesetze für polykristallines Eis – Überblick

3.1 Allgemeine Vorbetrachtungen

Jedes Stoffgesetz, das entwickelt wird, ist eine Fortsetzung der Modellbildung bereits existierender Gesetze. Sie werden in einem unterschiedlich großen Umfang ergänzt bzw. variiert, wobei fundamentale Neuerungen eher eine Ausnahme darstellen.

Aus diesem Grunde folgt nach einem kurzen geschichtlichen Abriß der Forschung auf dem Gebiet der plastischen Deformationen von polykristallinem Eis die Vorstellung einiger ausgewählter Stoffgesetze. Wesentliche Kriterien, ein Modell aus der Menge der bestehenden Gesetze herauszugreifen und hier zu erläutern, sind dabei die allgemeine Akzeptanz und der Einfluß auf das hier entwickelte Modell.

3.2 Kurzer geschichtlicher Abriß der Erforschung plastischer Deformationen bei polykristallinem Eis

Erste Tests an polykristallinem Eis stammen bereits aus dem 19. Jahrhundert. REUSCH (1864), PFAFF (1875) und KOCH (1885) zeigten, daß die Dehnungsrate von der Spannung, der Temperatur und der Kornorientierung abhängt. Sie vermuteten, daß es sich bei Eis nicht um ein einfaches Newtonsches Material handelt, da keine lineare Beziehung zwischen Spannung und Dehnungsrate vorliegt. Eine exakte Gleichung, die diese Größen enthält, ist jedoch nicht gefunden worden.

OROWAN (1947) und NYE (1951) haben später die Annahme getroffen, daß es sich bei Eis um einen idealplastischen Körper handele.

Der Beginn neuerer Untersuchungen ist eng mit dem Namen JOHN W. GLEN verbunden. In Arbeiten der Jahre 1952, 1953 und 1955 berichtet er über Ergebnisse von Tests mit Druckbelastung, die in einem Labor an Blocks aus Eis mit willkürlich orientierten Kristallen durchgeführt wurden. GLEN beobachtete nach einer plötzlich aufgebrachten Last eine ebenfalls schlagartig auftretende Dehnung, die dann, langsamer werdend (primäres Kriechen), in einer stationären Kriechphase (sekundäres Kriechen) endet. Bei Spannungen über einem kritischen Wert kam es zu einem erneuten, beschleunigten Kriechen. Dies wird als tertiäres Kriechen bezeichnet. GLEN nahm

an, daß dieser Vorgang durch Rekristallisation hervorgerufen wird, bei welcher in Bezug auf einen Abgleitprozeß besser orientierte Körner produziert werden. "Glen's law" zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungsratenbeziehung ist als Grundlage der weiteren Forschung auf diesem Gebiet zu sehen.

In neuerer Zeit zeigt sich eine breite Auffächerung der Tätigkeiten von Grundlagenarbeiten bis zur Eismechanik². Einflüsse der Stoffgesetzformulierungen bei metallischen Werkstoffen, insbesondere bei Stahl, finden sich auch bei Eis wieder. Mit einiger zeitlicher Verzögerung in Bezug auf entsprechende "Stahl-Modelle" werden z.B. Damage-Einflüsse oder das Konzept der internen Variablen in Eismodelle eingebracht³. Dem großen Einfluß der Temperatur wird Rechnung getragen, indem thermodynamisch konsistente Formulierungen, teils isotherm, teils allgemeingültig, entwickelt werden⁴. Immer größere Bedeutung kommt nicht zuletzt auch einer unkomplizierten Einbindung in Strukturberechnungsverfahren (FEM, BEM) zu, um komplexe (reale) Probleme lösen zu können⁵.

3.3 Das Modell von SINHA

Das von SINHA in seiner Ursprungsform 1978 vorgestellte phänomenologische Modell hat allgemein große Anerkennung gefunden und dient heute noch häufig zu Vergleichsrechnungen.

Der Grundgedanke dieses eindimensionalen Stoffgesetzes liegt in einer additiven Aufspaltung der Dehnung in einen elastischen (ϵ), einen verzögert elastischen (d) und einen viskosen Anteil (v).

$$\epsilon(\sigma, T, t) = \epsilon_e(\sigma) + \epsilon_d(\sigma, T, t) + \epsilon_v(\sigma, T, t).$$

Die elastische Dehnung führt mit einem temperaturunabhängigen Elastizitätsmodul E_0 auf

² Definition: *Eismechanik bezeichnet die Disziplinen der Mechanik, die zur Lösung angewandter Problemstellungen die speziellen Materialeigenschaften des Eises berücksichtigen.*

³ SANTAJOJA (1990); MAHRENHOLTZ, WU, KÖNIG (1990)

⁴ MATTHIES (1989); SJÖLIND (1987, 1990); HANSEN, BROWN (1988); HÄULSER, MATTHIES, MOORE (1990)

⁵ HÄUSLER (1989); MAHRENHOLTZ, WU (1991a, 1991b)

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0}.$$

Der Ansatz der verzögert elastischen Dehnung lautet für polykristalline Materialien

$$\varepsilon_d = c_1 \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^s \left\{ 1 - \exp[-a_T t]^b \right\}$$

mit

$$a_T = \frac{1}{t_0} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right).$$

c_1, s, t_0, b sind darin zu bestimmende Materialparameter. Der Wert für s kann nach SINHA grundsätzlich zwischen 1 und 4 liegen. Bei der Anwendung dieser allgemeinen Gleichung auf Eis beträgt gemäß SINHA (1979) $s = 1$. Für die viskose Dehnung wird

$$\varepsilon_v = \dot{\varepsilon}_{v_1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n t$$

mit

$$\dot{\varepsilon}_{v_1} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

angenommen. Der Exponent n hat den Wert 3. A ist eine Konstante, die jedoch in Abhängigkeit der Größenordnung der Spannung zu setzen ist.

In neueren Arbeiten (z.B. (1988), (1989a, b), (1991)) ist das Modell, welches seit 1982 physikalisch interpretiert wird, auf Damage-Prozesse erweitert worden. Der verzögert elastische Anteil, der den Gleitprozessen an Korngrenzen zugeordnet wird, lautet in diesen Formulierungen

$$\varepsilon_v \rightarrow \varepsilon_{v_c} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{v_1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \left(1 + \frac{\pi^2}{12\sqrt{3}} N d^2 \sqrt{n} \right) dt.$$

Hierin ist N die Anzahl der Cracks pro Flächeneinheit und d der Korndurchmesser.

Als Bestimmungsgleichung für N folgt aus dem Ansatz

$$N = N_c \exp[\psi(\bar{x} - \bar{x}_c)]$$

mit

$$\bar{x} = \varepsilon_d d$$

$$N = N_c \left(\exp \left\{ \psi \left[c_1 d_1 \left(\frac{\sigma}{E} \right)^s \left\{ 1 - \exp \left[-(a_T t)^b \right] \right\} - \bar{x}_c \right] \right\} - 1 \right)$$

Die letztgenannte Gleichung enthält weitere zu bestimmende Materialparameter.

Das Modell ist ursprünglich zur Beschreibung des primären und sekundären Kriechens entwickelt worden. Nicht zuletzt die allgemeine Akzeptanz weist auf die gute Eignung des Modells für diese Belastungsart hin.

Eine Erweiterung auf konstante Dehnungsraten ist mit

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon} \Delta t$$

und

$$\sigma \rightarrow \Delta \sigma,$$

$$t \rightarrow \Delta t$$

vollzogen worden.

3.4 Das Modell von KARR UND CHOI.

Der Ausgangspunkt der Modellentwicklung war das unter Kapitel 3.3 vorgestellte, einaxiale Modell von SINHA (1978).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + c_1 \frac{d_1}{d} \left(\frac{\sigma}{E} \right)^s \left[1 - \exp \left(-(a_T t)^b \right) \right] + K_n \sigma^n.$$

Der zweite Summand in der Spannungs-Dehnungsbeziehung kann in guter Näherung durch die Evolutionsgleichung (OHNO ET AL. (1985))

$$\dot{\varepsilon}_d = A(K\sigma - \varepsilon_d)$$

beschrieben werden.

Für polykristallines Eis, welches im undeformierten bzw. ungeschädigten Zustand aufgrund einer willkürlichen Orientierung der Kristallstruktur als isotrop angesehen werden kann, ist eine Verallgemeinerung auf eine dreidimensionale Form vorgenommen worden.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_d + \underline{\underline{\varepsilon}}_v$$

mit

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{K}}_e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e$$

und den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_d = A \left[\frac{3}{2} K \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_d \right],$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_v = \frac{3}{2} K_n (\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}})^{\frac{n-1}{2}} \underline{\underline{T}}.$$

Die letztgenannte Gleichung ist die generalisierte Form des "power-law" (BETTEN (1986)).

Durch den Übergang auf sog. effektive Größen (siehe auch SJÖLIND (1987)) wird der Einfluß der Materialschädigung in das Stoffgesetz eingebracht.

Der effektive Spannungsdeviator $\tilde{\underline{\underline{T}}}$ wird dann

$$\tilde{\underline{\underline{S}}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{K}}_e : \underline{\underline{K}}^{-1} + \underline{\underline{K}}^{-1} : \underline{\underline{K}}_e \right] \underline{\underline{S}},$$

$$\tilde{\underline{\underline{T}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\underline{\underline{S}}}).$$

$\underline{\underline{K}}$ beinhaltet neben dem isotropen, ungeschädigten Anteil $\underline{\underline{K}}_e$ den Einfluß der Schädigung in Abhängigkeit eines Schädigungstensors $\underline{\underline{D}}$ (KRAJCIHOVIC (1985))

$$\underline{\underline{D}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \bar{\omega}(\theta, \phi) \underline{\underline{N}}(\theta, \phi) \sin \phi d\theta d\phi.$$

$\underline{\underline{N}}$ ist dabei das dyadische Produkt zwischen dem Normalenvektor $\vec{\underline{N}}_K$ eines Mikrobruches und dem Normalenvektor $\vec{\underline{N}}_L$ der Fläche, auf die $\vec{\underline{N}}_K$ projiziert wird.

Der Vektor $\vec{\omega}$ beschreibt die Größe ω der Mikrorisse und deren Orientierung \vec{N}_K . Für die Entwicklung von $\vec{\omega}$ werden Evolutionsgleichungen der Form

$$\frac{d\omega^{(i)}}{d\varepsilon_d} = f^{(i)}(\omega^{(i)}, \underline{S}, \dot{\varepsilon}_d)$$

angenommen, die im wesentlichen Korngrenzbrüche und transgranulare Brüche beschreiben.

Das Modell eignet sich aufgrund seiner Struktur grundsätzlich zur Berechnung ein- und mehraxialer Belastungen. Zur Modellierung der Schädigung wird zwischen Zug und Druck unterschieden.

In Abb.12 und 13 sind Rechnungen mit Versuchsergebnissen von MELLOR, COLE (1982) im Vergleich dargestellt. Dabei handelt es sich um repräsentative einaxiale Kriechkurven und Spannungs-Dehnungskurven.

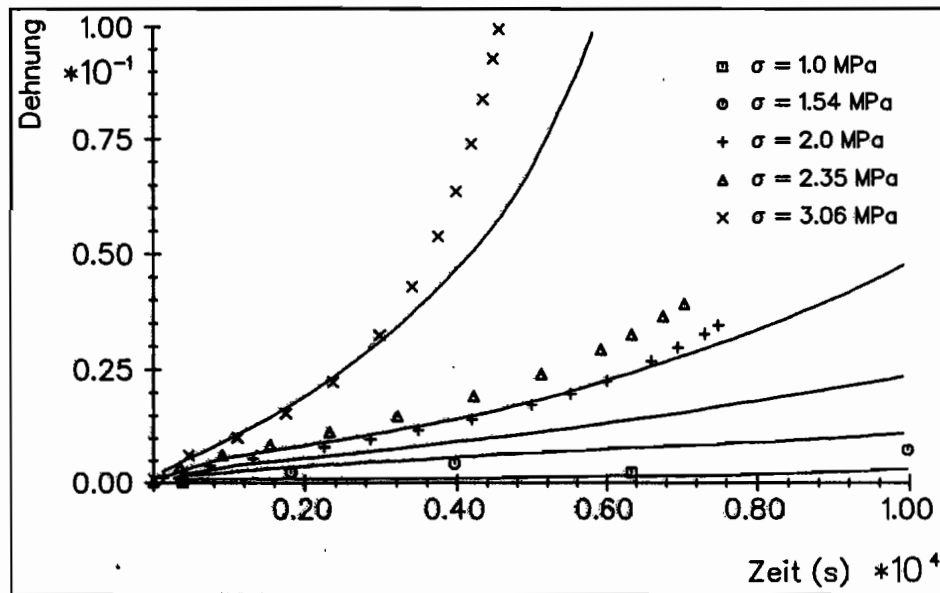


Abb. 12: Einaxiale Kriechkurven; Rechnung (durchgezogene Linien) und Experiment (Zentralsymbole)

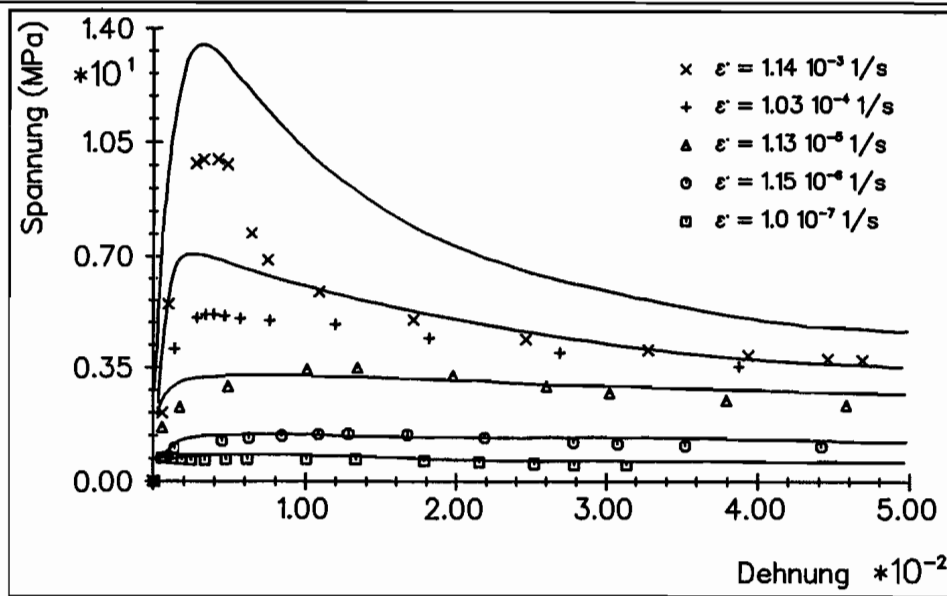


Abb. 13: Einaxiale Spannungs–Dehnungskurven; Rechnung (durchgezogene Linien) und Experiment (Zentralsymbole)

3.5 Das Modell von GLOCKNER und SZYSZKOWSKI.

Dieses Stoffgesetz ist wie das Modell von KARR UND CHOI zunächst in einer einaxialen Formulierung entwickelt worden. Eine Erweiterung auf mehrdimensionale Probleme, die dann zusätzlich auch Schädigungseinflüsse berücksichtigt, folgte später.

Auch bei GLOCKNER und SZYSZKOWSKI ist der Ausgangspunkt eine additive Aufspaltung der Dehnung in einen elastischen, einen reversibel viskosen und einen bleibend viskosen Anteil.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_r + \varepsilon_v.$$

Die Wirkungsweise dieses Modells läßt sich auf einfache Weise als rheologisches Modell (verallgemeinertes Burger–Modell) veranschaulichen (Abb.14).

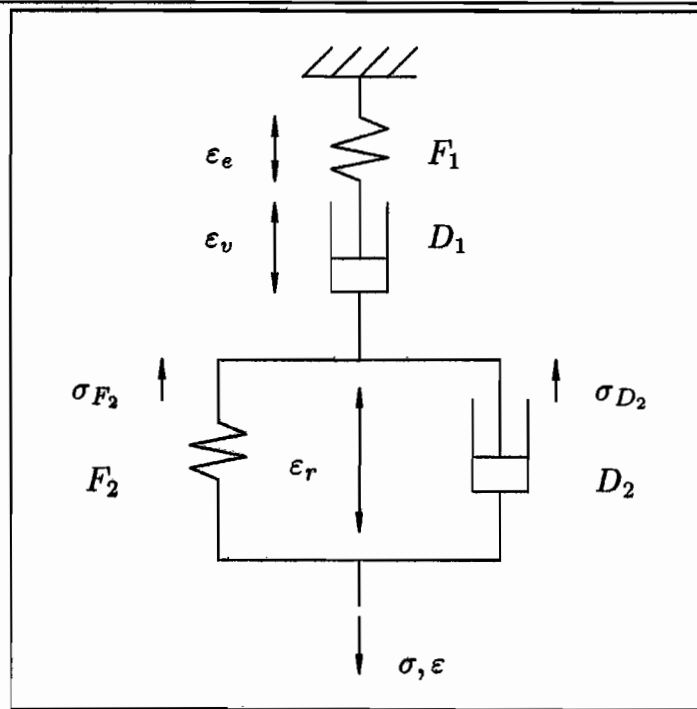


Abb. 14: Rheologisches Modell

Die getroffenen Annahmen für die Spannungs-Dehnungsbeziehungen der einzelnen Elemente lauten

$$\sigma = E_1 \varepsilon_e,$$

$$(\sigma_{D_2})^n = \nu_2 \frac{d\varepsilon_r}{dt},$$

$$(\sigma_{F_2})^n + c\sigma^{n-1}\sigma_{F_2} = E_2\varepsilon_r,$$

$$\sigma^n = \frac{\nu_1}{1 + \alpha \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_T} \right)} \frac{d\varepsilon_v}{dt}.$$

$E_1, E_2, n, \nu_1, \nu_2, c, \alpha$ und ε_T sind hierin noch zu bestimmende Materialparameter.

Die Erweiterung auf mehraxiale Probleme geht von der Formulierung eines Leistungspotentials aus. Die daraus sich ergebenden Dehnungsraten lauten

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{1}{E} \left((1 + \nu) \underline{\dot{\mathbf{S}}} - \nu \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{S}}) \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{\nu_2} \frac{d}{dt} \int_0^t \left(\underline{\tilde{\mathbf{S}}}(\tau) \right)^n j(t - \tau) d\tau,$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_v = \frac{1}{\nu_1} \left(\tilde{\underline{\mathbf{S}}}(t) \right)^n$$

mit

$$\tilde{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{T}} \left[\frac{3}{2} \left\| \frac{\sqrt{\underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{T}}}}{\underline{\mathbf{T}}} \right\|^{n-1} \right].$$

Die Auswirkungen von Mikrobrüchen werden durch die Einführung von "wahren Spannungen" modelliert. Mit der sog. "Schadensfunktion" ω als Flächenverhältnis

$$\omega = \frac{A - A_{eff}}{A}$$

folgt für den bleibend viskosen Anteil der Dehnungsrate

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_v = \frac{1}{\nu_1} \left(\frac{\tilde{\underline{\mathbf{S}}}}{1 - \omega(t)} \right)^n \left(1 + \alpha \left(\frac{\sqrt{\underline{\varepsilon}}_v : \underline{\varepsilon}}_v}{\varepsilon_T} - 1 \right)^\alpha \right).$$

Das Evolutionsgesetz der Schadensfunktion ω lautet

$$\dot{\omega} = K \left(\frac{S_{max}}{1 - \omega} \right)^\Gamma \frac{1}{(1 - \omega)^{\eta - \Gamma}}.$$

S_{max} ist darin die größte Zugspannung und wird bei Druck zu Null. K, Γ, η sind Stoffparameter.

Die Modellierung der Materialschädigung bei Druck erfolgt demnach durch den skalaren Parameter α und die Abhängigkeit von der zweiten Invarianten der bleibend viskosen Dehnung.

1989 ist der Einbau des Modells in eine Finite-Elemente-Formulierung mit entsprechenden Testrechnungen vorgestellt worden.

Dieses Stoffgesetz, welches besonders im Hinblick auf eine gute Handhabung entwickelt wurde (geringe Anzahl von Materialparametern), ist hinsichtlich einaxialer Belastungen verifiziert worden. Eine Temperaturabhängigkeit ist nicht vorhanden.

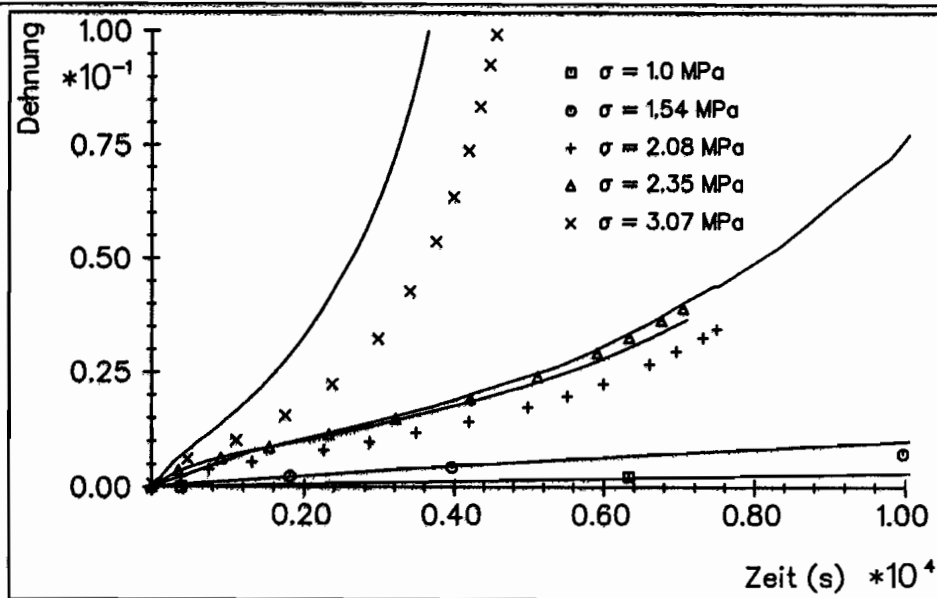


Abb. 15: Einaxiale Kriechkurven; Rechnung (durchgezogene Linien) und Experiment (Zentralsymbole)

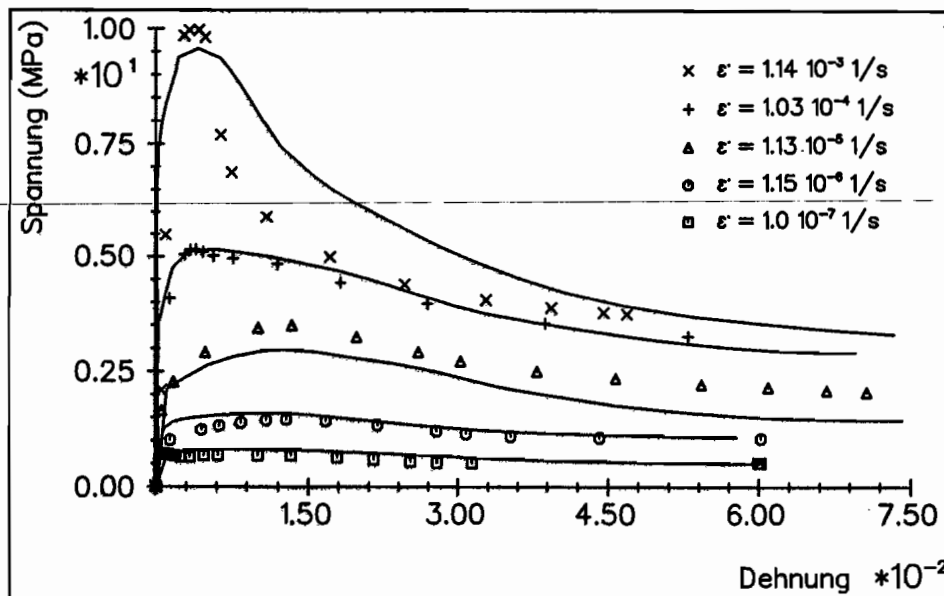


Abb. 16: Einaxiale Spannungs-Dehnungskurven; Rechnung (durchgezogene Linien) und Experiment (Zentralsymbole)

Abb.15 und 16 zeigen einaxiale Kriechkurven bzw. Spannungs-Dehnungskurven mit konstanter Dehnungsrate. Die experimentellen Vergleichskurven stammen wiederum von MELLOR, COLE (1982). Die Rechnungen weisen vergleichbare Spannungen bzw. Dehnungsraten gegenüber denen von KARR und CHOI auf.

3.6 Das Modell von SJÖLIND.

Eine allgemeine, dreidimensionale Theorie von SJÖLIND unter Berücksichtigung thermodynamischer Restriktionen ist der Rahmen zur Entwicklung eines Modells, welches viskoelastisches und sprödes Verhalten des Eises über eine große Bandbreite von Dehnungsraten beschreiben kann.

Ausgehend vom 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik kann

$$\left(\underline{\mathbf{S}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \rho_0 \left(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{q}}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_v} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_v - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{V}}^{(\alpha)}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{V}}}^{(\alpha)} - \frac{Q_i}{T} \underline{\mathbf{q}} = \rho_0 \Phi \geq 0$$

gefordert werden. Hierin sind

$\underline{\mathbf{S}}$	zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Green-Lagrange Dehnungstensor
T	absolute Temperatur
$\underline{\mathbf{q}}$	Temperaturgradient
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$	viskoser Dehnungstensor (als interne Zustandsvariable)
$\underline{\mathbf{V}}^{(\alpha)}$	Damage-Vektor (als interne Zustandsvariable)
$\alpha = 1, 2, \dots, n$	
Φ	Dissipationsfunktion
ψ	spezifische freie Helmholtz-Energie

Die vorangegangene Formulierung wird in 4 Gleichungen aufgeteilt, die als thermodynamische Restriktionen angesehen werden.¹

Die Dissipationsfunktion Φ , die den Prozeß der irreversiblen Entropieproduktionsrate beschreibt, wird in Form von 4 unabhängigen Anteilen als

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2^{(1)} + \Phi_2^{(2)} + \Phi_2^{(3)}$$

angesetzt. Φ_1 ist darin das Dissipationspotential für viskoses Fließen mit

¹ Es ist anzumerken, daß diese Aufspaltung, die in ähnlicher Form auch in der vorliegenden Arbeit Verwendung findet, keinesfalls eindeutig ist, sondern nur eine Möglichkeit zur Erfüllung der Ausgangsformulierung darstellt.

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v = \lambda \frac{\partial \Phi_1}{\partial \underline{\underline{S}}}$$

und die $\Phi_2^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ sind zusätzliche Potentiale, die drei unabhängigen Mikrobruchfeldern zugeordnet sind.

$$\dot{\underline{\underline{V}}}^{(\alpha)} = \nu^{(\alpha)} \frac{\partial \Phi_2^{(\alpha)}}{\partial \underline{\underline{R}}^{(\alpha)}} \quad ; \quad \alpha = 1, 2, 3$$

$$\underline{\underline{R}}^{(\alpha)} = \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{V}}^{(\alpha)}}$$

Die freie Helmholtz-Energie ψ wird explizit als Funktion benötigt. Sämtliche Ausführungen beziehen sich auf eine isotherme Prozeßführung.

Eine Erweiterung auf anisotropes Kriechverhalten basiert auf dem Ansatz

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{S}},$$

womit der viskose Dehnungstensor zu

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v = \lambda \frac{\partial \Phi_1(\underline{\underline{\tau}})}{\partial \underline{\underline{\tau}}} : \underline{\underline{\beta}}$$

wird.

3.7 Das Modell von BISCHOFF-BEIERMANN.

Basis der Modellbildung für ein selbstkonsistentes Stoffgesetz sind bei BISCHOFF-BEIERMANN (1992a) die Lösung des Einschlußproblems sowie die monokristallinen Materialgleichungen. Die Modellierung der Stoffeigenschaften erfolgt auf der Mikroebene und wird durch Mittelung über ein definiertes Volumen auf die Makroebene übertragen.

Die Formulierung auf der Mikroebene (die für den Monokristall unmittelbar als Stoffgesetz gilt) geht von einer additiven Zusammensetzung der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{d}}_i$ eines dominierenden basalen Anteils (b), eines prismatischen (p) und eines axialen Anteils (a) aus.

$$\underline{\mathbf{d}}_i = \underline{\mathbf{d}}_b + \underline{\mathbf{d}}_p + \underline{\mathbf{d}}_a.$$

Der Zusammenhang zwischen basaler Verzerrungsgeschwindigkeit und dem Spannungsdeviator $\underline{\tau}_b$ lautet

$$\underline{\mathbf{d}}_b = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \underline{\tau}_b$$

mit

$$\tau_b = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\tau}_b : \underline{\tau}_b},$$

$$\dot{\gamma}_b = b\lambda_b v(\tau_b),$$

$$\dot{\lambda}_b = \left(\frac{1}{\pi G b} \int_0^{\tau_b} \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} d\bar{\tau} - \lambda_b \right) \frac{2}{d} v(\tau_b),$$

$$v(\tau_b) = k_{vb} \tau_b.$$

Hierin ist b der Burgers-Vektor, d der Abstand der (Frank-Read) Versetzungsquellen, μ die Quellenverteilungsdichte und k_{vb} eine Materialkonstante.

In einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit der Richtung $\vec{\mathbf{n}}$ der Achse der transversalen Isotropie (Kristallachse) und dessen 2-Achse mit der Richtung des Schubspannungsvektors $\vec{\mathbf{t}} = \underline{\tau}_b \cdot \vec{\mathbf{n}}$ zusammenfällt, vereinfachen sich $\underline{\tau}_b$ bzw. $\underline{\mathbf{d}}_b$ zu

$$\underline{\tau}_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_b \\ 0 & \tau_b & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{d}}_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_b \\ 0 & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_b & 0 \end{pmatrix}.$$

Die prismatische Verzerrungsgeschwindigkeit lautet analog

$$\underline{\mathbf{d}}_p = \frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p} \underline{\tau}_p$$

mit

$$\underline{\tau}_p = \begin{pmatrix} 0 & \tau_p & 0 \\ \tau_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{d}_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_p & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für ein Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit \vec{n} und dessen 2-Achse mit einer der Hauptschubspannungsrichtungen zusammenfällt. $\dot{\gamma}_p$ ist von BISCHOFF-BEIERMANN wegen fehlender experimenteller Daten nicht entwickelt worden.

Für die axiale Verzerrungsgeschwindigkeit folgt

$$\underline{d}_a = \frac{3\dot{\epsilon}_a}{2\sigma_a} \underline{\tau}_a$$

mit

$$\sigma_a = \frac{3}{2} \left(\vec{n} \otimes \vec{n} - \frac{1}{3} \underline{\mathbf{1}} \right) : \underline{\sigma}$$

und

$$\underline{d}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_a \end{pmatrix}, \quad \underline{\tau}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_a \end{pmatrix}$$

in einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit \vec{n} zusammenfällt. $\dot{\epsilon}_a$ wurde ebenfalls aufgrund mangelnder Experimente nicht entwickelt.

Die Abb.17 und 18 zeigen repräsentativ für das monokristalline Stoffgesetz Vergleiche zwischen Rechnung und Experiment beim einaxialen Kriechen unter konstanter Spannung sowie bei Spannungs-Dehnungsverläufen mit konstanter Dehnungsrate.

Als Folge der bereits erwähnten Mittelung läßt sich die makroskopische inelastische Dehnungsrate \underline{D}_i berechnen zu.

$$\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0) = \langle \underline{d}_i(\underline{\sigma}, \vec{n}, \zeta) \rangle.$$

Die Spannungen innerhalb eines Kornes mit der Orientierung \vec{n} lassen sich berechnen sich aus der makroskopischen Anfangsspannung $\underline{\Sigma}_0$ und der Eigenspannung der Mikroebene $\underline{\sigma}_{ES}$.

$$\underline{\sigma}(\underline{\sigma}_{ES}, \underline{\Sigma}_0) = \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\Sigma}_0$$

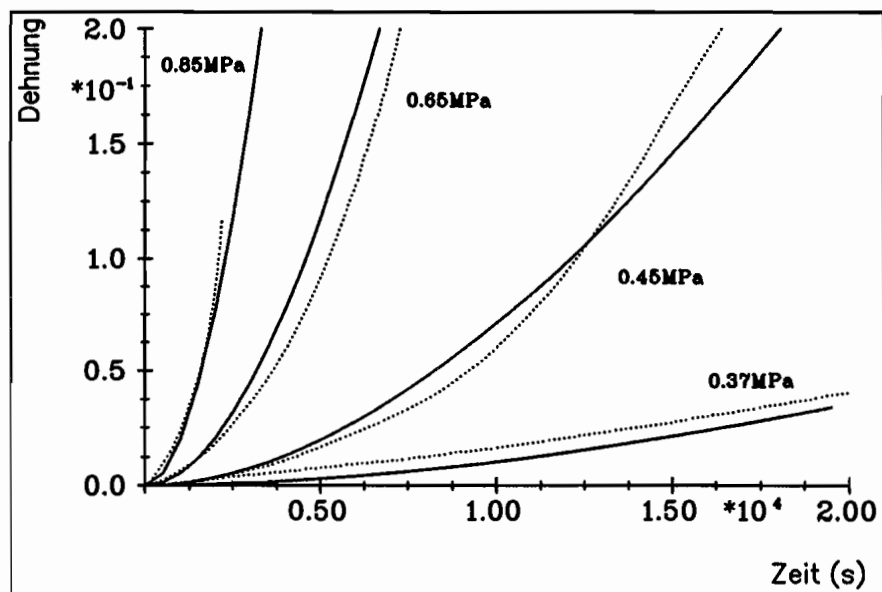


Abb. 17: Vergleich von Rechnungen (durchgezogene Linien) mit Kriechversuchen von GRIGGS, COLES (1954) (gepunktete Linien). $T_0 = -10^{\circ}C$.

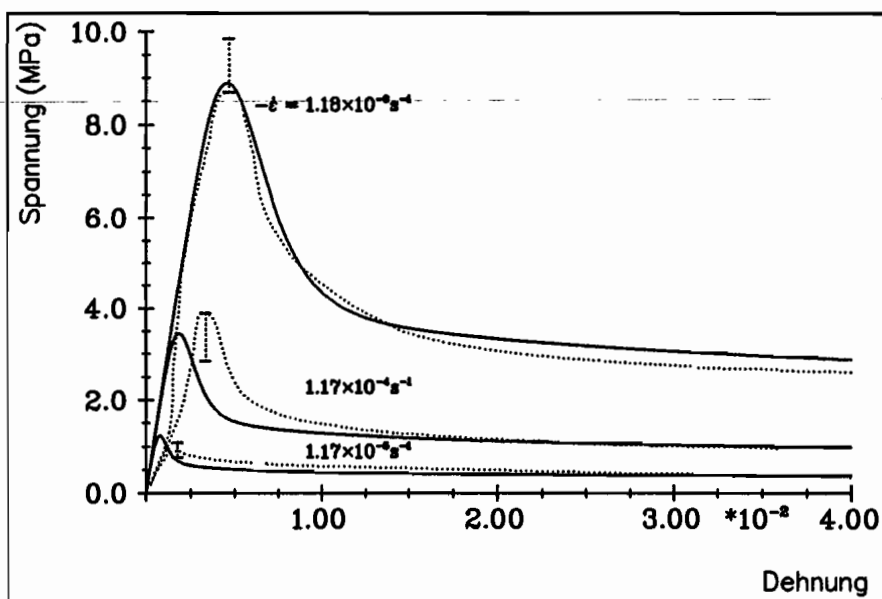


Abb. 18: Vergleich von Rechnungen (durchgezogene Linien) mit Versuchen bei konstanter Dehnungsrate von JONES, BRUNET (1978) (gepunktete Linien). $T_0 = -5^{\circ}C$

mit

$$\underline{\sigma}_{ES} = \underline{\mathbf{E}} : (\underline{\mathbf{D}}_i(\underline{\Sigma}_0) - \underline{\mathbf{d}}_i(\underline{\sigma}) - \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{M}}) : \underline{\sigma}_{ES}).$$

Die interne Zustandsfunktion ζ ist für jeden einzelnen Kristall nach

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}(\underline{\sigma}, \zeta)$$

zu entwickeln. $\underline{\mathbf{M}}$ ist der Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten und $\underline{\mathbf{B}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$ zwei weitere Tensoren 4. Stufe, die mit bekannten Werkstoffkenngrößen gebildet werden können. Verifikationsrechnungen zu den bereits mehrfach angesprochenen Versuchen von MELLOR, COLE (1982) liegen bisher nicht vor.

3.8 Das Modell von BRUHNS.

Da dieses Modell für die vorliegende Arbeit von Bedeutung ist, folgt an dieser Stelle ein Erörterung der wesentlichen Aspekte, obwohl es sich nicht um ein Stoffgesetz für polykristallines Eis handelt.

Mit dem von BRUHNS entwickelten Stoffgesetz, das auch unter dem Namen INTER-ATOM-Modell bekannt ist, sind ursprünglich in erster Linie austenitische Stähle bei hohen Temperaturen modelliert worden. Die Grundideen des Überspannungskonzeptes (PERZYNA) sowie der internen Variablen sind in modifizierter Weise in das hier später vorzustellende "Eis-Modell" übernommen worden.

Es wird davon ausgegangen, daß die gesamten Deformationen einen inelastischen Anteil beinhalten, der geschwindigkeitsabhängig und irreversibel ist und nur oberhalb einer Grenzspannung auftritt. Bei quasistatischer Prozeßführung möge das Materialverhalten durch ein elastisch-plastisches Gesetz dargestellt werden. Folglich wird die gesamte aktuelle Spannung $\underline{\sigma}$ in einen athermischen (statischen) Anteil $\underline{\bar{\sigma}}$ und einen thermisch aktivierten (viskosen) Anteil $\underline{\bar{\bar{\sigma}}}$ zerlegt.

$$\underline{\sigma} = \underline{\bar{\sigma}} + \underline{\bar{\bar{\sigma}}}.$$

Der erste Anteil muß als statische (Fließ-) Spannung den Randbedingungen einer statischen (geschwindigkeitsunabhängigen) Theorie erfüllen. Dies ist beispielsweise die statische Fließbedingung. Der zweite Anteil wird gewöhnlich als Überspannung (LIU, KREMPL (1979)) bezeichnet und kann als Abstand des aktuellen Spannungszustandes zur Fließfläche interpretiert werden.

Das hier verwendete Konzept der internen Variablen in der Kontinuumsmechanik basiert auf der Annahme, daß der Zustand eines Körpers durch einen Satz externer und interner Variablen vollständig beschrieben werden kann. Die internen Größen sollen in ihrer Evolution am Materialverhalten auf der Mikroebene orientiert sein.

BRUHNS führt zur Beschreibung kinematischer und isotroper Verfestigung je eine tensorielle und eine skalare interne Variable ein, deren Entwicklungsgleichungen im allgemeinen Fall

$$\overset{\nabla}{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{c}}_1(\Lambda; q) : \underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{c}}_2(\Lambda; q) : \underline{\alpha},$$

$$\dot{\kappa} = \underline{d}_1(\Lambda; q) : \underline{\underline{D}}_i - d_2(\Lambda; q)\kappa$$

lauten. Da endliche Formänderungen berechnet werden, tritt bei tensoriellen Größen anstelle der materiellen Ableitung eine objektive Zeitableitung. Diese wird durch ein $\overset{\nabla}$ symbolisiert.

$\Lambda = \{\underline{\underline{S}}, T\}$ (Externe Zustandsgrößen),

$q = \{\underline{\alpha}, \kappa\}$ (Interne Zustandsgrößen).

Die Fließbedingung folgt zu

$$F = f(\underline{\underline{S}} - \underline{\alpha}) - g(T, \kappa) \geq 0.$$

Unter Vernachlässigung möglicher thermoelastischer Kopplungseffekte hat der elastische Anteil der Dehnungsrate die Form

$$\underline{\underline{D}}_e = \underline{\underline{M}}(T) : \overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{B}}\dot{T}.$$

$\underline{\underline{M}}$ ist der Nachgiebigkeitstensor und $\underline{\underline{B}}$ beschreibt die thermische Ausdehnung.

Der inelastische Anteil $\underline{\underline{D}}_i$ lautet unter Voraussetzung der Gültigkeit der modifizierten Normalenregel

$$\underline{\underline{D}}_i = \gamma(\cdot)\Phi(\sqrt{f} - \sqrt{g}, T)\sqrt{\frac{1}{f}} \langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{S}}} \rangle.$$

Die Föppl-Symbole $\langle \rangle$ setzen im Falle $F \leq 0$ die inelastische Dehnungsrate zu Null.

Reduziert auf isotropes Materialverhalten, welches bei anwendungsnahen Problemen häufig angenommen werden kann, vereinfacht sich das Gleichungssystem (unter Verwendung des v. Mises-Fließkriteriums) zu

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) \underline{\mathbf{1}} \right] + \beta \dot{T} \underline{\mathbf{1}} + 2\gamma \Phi < \underline{\mathbf{n}} >,$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = c_1 2\gamma \Phi < \underline{\mathbf{n}} > - c_2 \underline{\underline{\alpha}},$$

$$\dot{\kappa} = 2\gamma \Phi < \sqrt{g} > - d_2 \kappa,$$

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\underline{\mathbf{f}}_S}{\|\underline{\mathbf{f}}_S\|}, \quad \underline{\mathbf{f}}_S = \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{S}}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß dieses Stoffgesetz für eine konkrete Problemstellung der Praxis entwickelt wurde, hat es sich ausgezeichnet bewährt. Eine Implementierung erfolgte in die kommerziellen FE-Programme LUNTUS, ADINA und ABAQUS. PITZER (1988) benutzte dieses Modell zum Vergleich verschiedener FE-Formulierungen. ROTT (1991) hat eine Weiterentwicklung vorgestellt, die u.a. den problematischen Übergang zum quasistatischen Prozeß verbessert. BRAASCH (1992) vergleicht das INTERATOM-Modell mit den Stoffgesetzen von CHABOCHE, ROUSSELIER (1983a, b) und ROBINSON, BAROLOTTA (1985) mit dem Ziel einer Optimierung der Materialfunktionen sowie einer durch den Vergleich geförderten Entwicklung neuer Modellvarianten.

4. Das polykristalline Stoffgesetz

4.1 Allgemeine Vorbetrachtungen zur Thermodynamik

Festkörperdeformationen sind im allgemeinen Fall unmittelbar mit der Problematik thermodynamischer Einflüsse verbunden. Neben den Grundgleichungen der Mechanik sind weitere zu erfüllen, die aufgrund einer ausgewählten thermodynamischen Theorie bereitstehen. Dabei ist die Wahl solch einer Theorie auch im Hinblick auf das zu betrachtende thermomechanische Problem nicht eindeutig. Abb.19 gibt einen Überblick repräsentativ ausgewählter Teildisziplinen (MUSCHIK (1981)).

Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf phänomenologische Theorien der Nichtgleichgewichtsthermodynamik.

Betrachtet man den Übergang von der Mechanik zu der Thermostatik, so ist dieser problemlos, da definierte Größen hinzutreten. Dies sind insbesondere die Temperatur und die Entropie. Beide sind durch Meßvorschriften im Gleichgewicht festgelegt. Im Nichtgleichgewicht erhebt sich aber grundsätzlich die Frage nach der Definition dieser Größen. Weiterhin sind die Wahl des Zustandsraumes (groß, klein), die Art der Dissipationsungleichungen (zeitlich lokal, zeitlich global) und der Zusammenhang zwischen Entropiedichte und dem Wärmeübergang (universell, materialabhängig) Kriterien zur Differenzierung verschiedener Disziplinen der Thermodynamik (MUSCHIK (1981)).

4.2 Thermodynamischer Rahmen für phänomenologische Theorien

Vor dem Hintergrund dieser kurzen Vorbetrachtungen ist ein von LEHMANN (1988, 1989A, B, C) beschriebener allgemeiner Rahmen phänomenologischer Theorien bei Festkörpern, insbesondere polykristallinen Materials, zu betrachten.

Es gelte folgende Annahme:

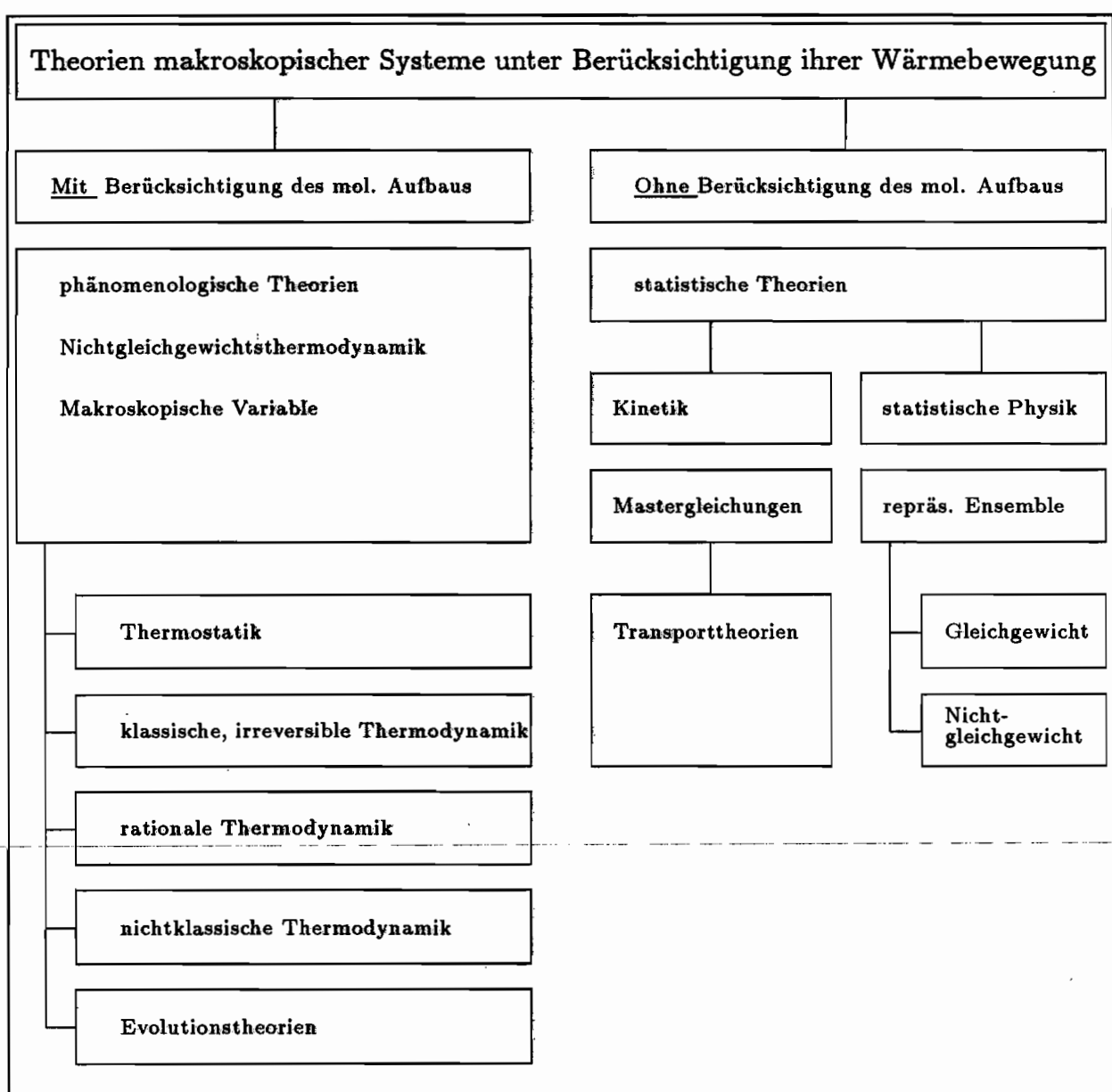


Abb. 19: Ausgewählte Theorien der Thermodynamik

- Es ist stets davon auszugehen, daß der Körper als ein klassisches Kontinuum angesehen werden kann, selbst wenn Schädigungen durch Mikrodefekte auftreten.

Das ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, daß die Kinematik der Körper sich vollständig auf die Angabe der Verschiebungen der Körperpunkte gegenüber einem gegebenen Raum als Funktionen des Ortes und der Zeit zurückführen läßt (LEHMANN (1976)).

FELDMÜLLER hat 1991 eine Anwendung des zu beschreibenden Rahmens auf isotrop

geschädigte Materialien vorgestellt.

Die zweite fundamentale Annahme lautet:

- Der thermodynamische Zustand eines jeden Materiepunktes kann eindeutig durch einen Satz von internen und externen Zustandsvariablen beschrieben werden, selbst wenn der gesamte Körper nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist.

Diese Annahme entspricht der Definition eines sog. "großen" Zustandsraumes¹.

Dabei ist zu beachten, daß "alle Materialeigenschaften zu einem Zeitpunkt t durch die Zustandsvariablen $Z(t)$ zum gleichen Zeitpunkt bestimmt" sein müssen (MUSCHIK (1981)). Durch die Wahl einer phänomenologischen Materialtheorie ist die Bestimmung aller Eigenschaften aber auf die Modellierung der als wesentlich erachteten Materialphänomene beschränkt.

Unter Berücksichtigung des auftretenden mechanischen Materialverhaltens und aus den bisherigen Annahmen folgen bei LEHMANN (1989A, B, C) vier Prozeßbeschreibungen:

1. Die klassische reversible Thermodynamik.
2. Die klassische irreversible Thermodynamik.
3. Nichtdissipative thermodynamische Prozesse als eine Folge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen, die sich im Gegensatz zu 1. nicht durch thermodynamische Zustandsfunktionen beschreiben lassen, weil teilweise reversible Prozesse in Verbindung mit Wechselwirkungen zwischen externer Arbeit und interner mechanischer Energie auftreten. Diese Energie ist in der Mikrostruktur gespeichert.
4. Dissipative thermodynamische Prozesse, die ebenfalls als eine Folge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen betrachtet werden, für die aber kein Potential definiert werden kann.

Zur Beschreibung der Materialeigenschaften M in diesem Zustandsraum sollen zunächst die reversible Dehnung $\underline{\epsilon}_r$ und die Entropie s und als interne Zustandsvariablen ein Satz $\underline{\alpha}_i$ bereitstehen. $\underline{\alpha}_i$ seien später näher zu bestimmende Tensoren. Die auf die Masse bezogene spezifische innere Energie läßt sich somit als

¹ Definition: Ein Zustandsraum heißt groß, wenn Materialeigenschaften M durch zeitlich lokale Abbildungen definiert sind.

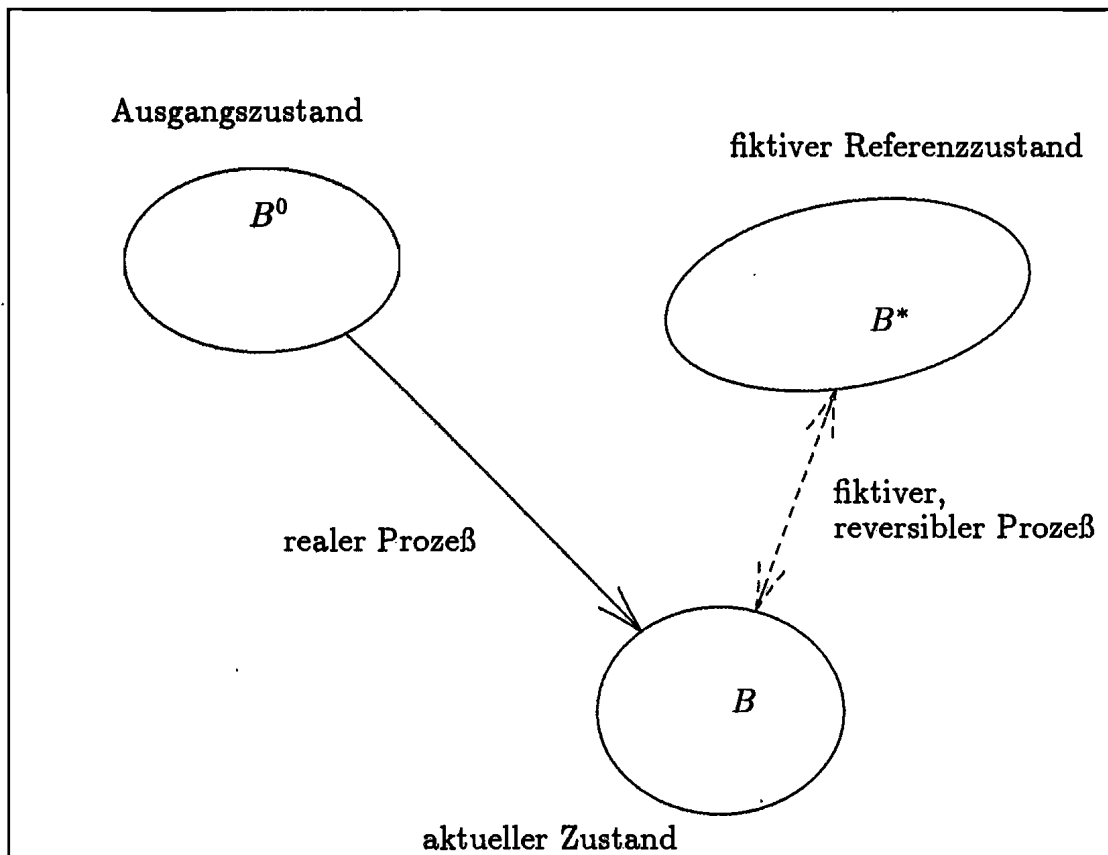


Abb. 20: Referenzzustand B^*

$$u = u(\underline{\varepsilon}_r, s, \underline{\alpha}_i) \quad (4.1)$$

angeben. Der erste Hauptsatz, die Bilanzgleichung über zu- und abgeführte Energie, lautet mit dem Wärmeflußvektor \vec{q} , der spezifischen Arbeit w und den spezifischen Energiequellen r

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} + r. \quad (4.2)$$

Die gesamte Formänderungsleistung \dot{w} läßt sich additiv in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufspalten.

$$\dot{w} = \dot{w}_r + \dot{w}_i. \quad (4.3)$$

Mit Hilfe eines fiktiven Referenzzustandes gelingt es, den reversiblen Teil zu beschreiben (Abb.20).

Dieser Referenzzustand zeichnet sich dadurch aus, daß er makroskopisch spannungsfrei ist, die Referenztemperatur T^* besitzt und die internen Variablen beim Übergang von B nach B^* konstant gehalten werden.

Der somit ebenfalls festgelegte inelastische Anteil der Formänderungsleistung ist nun gemäß den getroffenen Annahmen 3. und 4. in einen unmittelbar dissipierten und einen nicht (sofort) dissipierten Anteil aufzuspalten.

$$\dot{w}_i = \dot{w}_d + \dot{w}_h. \quad (4.4)$$

In (4.4) ist \dot{w}_d der sofort dissipierte Anteil und \dot{w}_h der Teil der Leistung, der die Wechselwirkung zwischen der äußeren Arbeit und jener, die in der Struktur gespeichert ist, wiedergibt. Aufgrund der physikalischen Bedeutung ist ersichtlich, daß

$$\dot{w}_d \geq 0 \quad (4.5)$$

gelten muß und im allgemeinen Fall

$$\dot{w}_h \neq 0 \quad (4.6)$$

ist, da durch die Wechselwirkung dieser Anteil der Leistung zu- und abnehmen kann. Der erste Hauptsatz lautet damit

$$\dot{u} = \dot{w}_r + \dot{w}_d + \dot{w}_h - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + r. \quad (4.7)$$

Die spezifische innere Energie kann in die hier besser geeignete spezifische freie Enthalpie überführt werden. Mit

$$\varphi = u - Ts \quad (4.8)$$

für die spezifische freie (Helmholtz-) Energie φ und

$$\psi = \varphi - \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r \quad (4.9)$$

für die spezifische freie (Gibbs-) Enthalpie ψ folgt

$$\begin{aligned}\psi &= u - \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - Ts \\ &= \psi(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_i),\end{aligned}\quad (4.10)$$

worin $\underline{\mathbf{S}}$ den gewichteten Cauchy-Spannungstensor

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.11)$$

darstellt. Die zeitliche Ableitung von Gleichung (4.10) lautet

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \frac{1}{\varrho_0} \underline{\dot{\mathbf{S}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r - \dot{T}s - T\dot{s} \quad (4.12)$$

und das vollständige Differential ergibt sich zu

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\alpha}}_i} : \underline{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i. \quad (4.13)$$

Aus Gleichung (4.12) und (4.13) werden die thermische Zustandsgleichung

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r &= -\varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}} \\ &= \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_i)\end{aligned}\quad (4.14)$$

und die kalorische Zustandsgleichung

$$\begin{aligned}s &= -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ &= s(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_i)\end{aligned}\quad (4.15)$$

entnommen. Durch Einsetzen von Gleichung (4.14) und (4.15) in (4.13) lautet die Rate der spezifischen freien Enthalpie

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\varrho_0} \underline{\dot{\mathbf{S}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - s\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\alpha}}_i} : \underline{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i. \quad (4.16)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (4.7) in (4.12) und einem Vergleich mit (4.16) folgt die Bilanzgleichung

$$\dot{w}_r + \dot{w}_d + \dot{w}_h - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + r = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i + \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\dot{\epsilon}}_r + T \dot{s}. \quad (4.17)$$

Unter Verwendung von

$$\dot{w}_r = \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\dot{\epsilon}}_r \quad (4.18)$$

verbleibt in (4.17) nur die Bilanzierung der spezifischen Entropie (Gibbs-Gleichung).

$$T \dot{s} = \dot{w}_d + \dot{w}_h - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + r - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i \geq 0. \quad (4.19)$$

Eine mögliche Aufspaltung von (4.19) aufgrund der zu Anfang getroffenen Annahme, daß dissipative und nichtdissipative Prozesse auftreten, sind die Gleichungen (4.20) und (4.21).

Betrachtet man einen Teil der Entropieänderung \dot{s} als reversiblen Entropietransport (LEHMANN (1989A, B, C))

$$T \dot{s}_r = -\frac{T}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}}{T} \right) + \dot{w}_h - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i - T \dot{\eta} + r, \quad (4.20)$$

so folgt

$$T \dot{s}_d = \dot{w}_d - \frac{1}{\rho T} \bar{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T) + T \dot{\eta} \geq 0, \quad (4.21)$$

worin $\dot{\eta}$ die Entropieproduktion aufgrund interner Strukturänderungen des Materials beschreibt.

Aus Gleichung (4.20) kann jener Anteil, der (visko-)plastische Formänderungen beschreibt, separiert werden.

$$\dot{w}_h - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i - T \dot{\eta} + r = 0. \quad (4.22)$$

$$T\dot{s}_r = -\frac{T}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}}{T} \right). \quad (4.23)$$

Die Ungleichung (4.21) und die Gleichung (4.22) müssen erfüllt werden. Dies ist in beiden Fällen von weiteren Ansätzen abhängig, die für $\dot{w}_d, \dot{w}_h, \dot{\eta}$ und die $\underline{\alpha}_i$ zu treffen sind. Weiterhin ist für den Wärmeflußvektor $\bar{\mathbf{q}}$ eine geeignete Wärmeübergangsgleichung aufzustellen.

Aus (4.19) ist die Differentialgleichung zur Berechnung der Temperatur zu formulieren. Mit dem vollständigen Differential der Entropie aus Gleichung (4.15)

$$-\dot{s} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i \quad (4.24)$$

folgt mit (4.23)

$$c_p \dot{T} = \dot{w}_d + T\dot{\eta} - r - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + T \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\alpha}_i} : \underline{\dot{\alpha}}_i \right\}. \quad (4.25)$$

Hierin stellt c_p die spezifische Wärmekapazität dar.

$$c_p = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}. \quad (4.26)$$

Sie ist im allgemeinen Fall eine Funktion der Temperatur.

4.3 Konstitutive Gleichungen

Basierend auf der Annahme aus Gleichung (4.3) gelte auch für die Dehnungsraten

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}_r + \underline{\mathbf{D}}_i. \quad (4.27)$$

Beschränkt man den Einfluß der internen Variablen $\underline{\alpha}_i$ auf das inelastische Materialverhalten, so kann (4.10) in

$$\psi(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\alpha}_i) = \psi^*(\underline{\mathbf{S}}, T) + \psi^{**}(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\alpha}_i) \quad (4.28)$$

aufgespaltet werden. Für ein isotropes, elastisches Material kann für ψ^* der Ansatz

$$\psi^*(\underline{\mathbf{S}}, T) = -\frac{1}{2\rho_0} \left\{ \frac{1}{9K} (\text{tr } \underline{\mathbf{S}})^2 + \frac{1}{2G} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{S}} + 2\alpha(T - T^*) \text{tr } \underline{\mathbf{S}} \right\} \quad (4.29)$$

gemacht werden. Mit der thermischen Zustandsgleichung (4.14) folgt

$$\underline{\varepsilon}_r = \frac{1}{9K} (\text{tr } \underline{\mathbf{S}}) \underline{\mathbf{1}} + \frac{1}{2G} \underline{\mathbf{S}} + \alpha(T - T^*) \underline{\mathbf{1}} \quad (4.30)$$

und weiter

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_r = \frac{1}{9K} (\text{tr } \underline{\dot{\mathbf{S}}}) \underline{\mathbf{1}} + \frac{1}{2G} \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \alpha \dot{T} \underline{\mathbf{1}}. \quad (4.31)$$

Diese Gleichung kann unter Verwendung von

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.32)$$

und

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.33)$$

umgeformt werden in

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_r = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{1 - 2\nu}{3(1 + \nu)} (\text{tr } \underline{\dot{\mathbf{S}}}) \underline{\mathbf{1}} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\mathbf{1}}. \quad (4.34)$$

Der reversible Anteil der Verzerrungsrate enthält gemäß (4.34) keine viskosen Anteile. Diese treten ausschließlich in der inelastischen Komponente $\underline{\mathbf{D}}_i$ auf.

Der inelastische Anteil der Dehnungsrate ist ebenfalls abhängig von der Spannung und der Temperatur. Zur vollständigen Beschreibung des Materials reicht dies aber nicht aus, da beispielsweise verschiedene Belastungspfade, die auf den selben Punkt im Spannungs-Dehnungsraum führen, aufgrund der Prozeßgeschichte einen unterschiedlichen internen (Spannungs-)Zustand hervorrufen. Das weitere Verhalten kann dann bei gleicher Belastung fundamental differieren.

Eine Möglichkeit zur Vervollständigung des Satzes notwendiger Prozeßgrößen ist die Einführung der bereits oben angesprochenen internen Variablen. Aus diesen Betrachtungen folgt zunächst

$$\underline{\mathbf{D}}_i = \underline{\mathbf{D}}_i(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{S}}, T, \alpha_i). \quad (4.35)$$

(4.35) enthält den deviatorischen Teil des gewichteten Cauchy-Spannungstensors

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{S}}. \quad (4.36)$$

Der zweite Summand ist dabei der den hydrostatischen Druck beschreibende Kugeltensor

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\mathbf{S}})\underline{\mathbf{1}}. \quad (4.37)$$

Ein Ansatz, der sich bei Hochtemperaturmetallen bewährt hat, ist die verallgemeinerte Normalenregel (BRUHNS (1987); LEHMANN (1987))

$$\underline{\mathbf{D}}_i = \Phi(\Lambda) \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{S}}}. \quad (4.38)$$

Hierin sind Φ die Überspannungsfunktion der Überspannung Λ und F die Fließfunktion. Im Gegensatz zu diesen Formulierungen bei metallischen Werkstoffen soll hier die Fließspannung, die in einem Stoffgesetz einen rein elastischen Bereich abgrenzt, zu Null definiert werden. Die klassische Fließfunktion

$$F \equiv f(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{S}}, \alpha_i) - g(T, \alpha_i) = 0 \quad (4.39)$$

mit der Materialfunktion g als der maßgeblichen Größe für die Fließflächenaufweitung reduziert sich auf

$$F \equiv f(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{S}}, \alpha_i). \quad (4.40)$$

Die Fließfläche entartet damit zu einem Punkt. HAUPT und TSAKMAKIS (1987) betrachten in diesem Zusammenhang solche Modelle mit verschwindender Fließfläche von z.B. MILLER, HART, KRIEG sowie WALKER und KREMPL als Sonderfälle der klassischen Viskoplastizität.

Als Formulierung in den Spannungsinvarianten lautet der Ansatz der Fließfläche

$$f = \mathcal{F}_1(I_1(\underline{\underline{S}}, \underline{\alpha}_i)) + \mathcal{F}_2(I_2(\underline{\underline{T}}, \underline{\alpha}_i)) + \mathcal{F}_3(I_3(\underline{\underline{T}}, \underline{\alpha}_i)). \quad (4.41)$$

Die erste Invariante I_1 beschreibt in (4.41) den Einfluß des hydrostatischen Druckes. Das Funktional \mathcal{F}_3 der dritten Invarianten I_3 kann insbesondere bei anisotropem Material als ein Maß für den Spannungszustand angesetzt werden (HOOKE (1980)). Betrachtet man in diesem Zusammenhang jedoch das Modell von SJÖLIND (1987) hinsichtlich des Dissipationspotentials, so zeigt sich, daß auch bei dieser Analyse anisotroper Kriechverformungen der Einfluß der dritten Invarianten als klein angenommen wird und nur eine Abhängigkeit von I_2 vorliegt.

$$\Phi_1 = \Phi_1(I_2(\underline{\underline{T}})) \quad (4.42)$$

mit

$$I_2(\underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}. \quad (4.43)$$

MAHREHOLTZ, WU und KÖNIG (1990) wählen für das Dissipationspotential Φ den Ansatz

$$\Phi(\underline{\underline{T}}) = \sqrt{3I_2 + \beta \frac{I_3}{\sqrt{I_2}}} \quad (4.44)$$

mit

$$I_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad (4.45)$$

$$I_3 = \det \underline{\underline{T}}. \quad (4.46)$$

Bei isotropem Material ist von einer symmetrischen Funktion des Kriechpotentials auszugehen, so daß in dem Ansatz von MAHREHOLTZ ET AL. $\beta = 0$ zu setzen ist. Gemäß dem Caley-Hamilton-Prinzip setzt PALATHINGAL (1989) ein Funktional dritter Ordnung für einen dem Kriechpotential vergleichbaren Ausdruck an.

$$\underline{\sigma}^3 - I_1 \underline{\sigma}^2 + I_2 \underline{\sigma} - I_3 = 0. \quad (4.47)$$

Annahmen über die Unabhängigkeit der Kriechrate vom hydrostatischen Druck und eine Vernachlässigung der dritten Invarianten führen auch hier zu einer Abhängigkeit von I_2 .

Eine Erweiterung des Nortonschen "power law" auf kompressible Materialien mit einem modifizierten Deviator

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\sigma} - \alpha(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{\mathbf{1}}, \quad (4.48)$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \quad (4.49)$$

stellten PATEL, VENTAKATRAMAN und VAFAKOS bereits 1960 vor. Diese empirische Formulierung wenden MAHREHOLTZ und WU (1991c) zur Untersuchung des Kriechverhaltens von Eisplatten an.

In dieser Arbeit soll zunächst ebenfalls eine Beschränkung auf die zweite Invariante als wesentliche Einflußgröße der Fließfunktion stattfinden. Das Produkt möge jedoch über eine reduzierte Spannung (BRUHNS (1987)) gebildet werden.

$$F = J_2, \quad (4.50)$$

$$J_2 = (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\alpha}_1) : (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\alpha}_1), \quad (4.51)$$

$$\underline{\xi}_v = \underline{\alpha}_1. \quad (4.52)$$

Die interne Variable $\underline{\xi}_v$ entspricht formal dem Verfestigungstensor vieler Stoffgesetze für metallische Werkstoffe und wird im folgenden häufig einfach "Verfestigung"

genannt, obwohl mikromechanisch (siehe Kapitel 2) eine differenziertere Betrachtung vorzusehen ist.

Bei viskoplastischen Stoffgesetzen ist die Überspannung ein Maß für den Abstand eines Spannungspunktes zur Fließfläche. Die Überspannungsfunktion in (4.38) beschreibt als empirisch zu ermittelnde skalare Funktion den Bezug zwischen einem Spannungsfunktional und der inelastischen Dehnungsrate (BRUHNS, PITZER (1991); SZEPAN (1989)). Aufgrund der punktförmigen Fließfläche fällt hier die Formulierung der Überspannung auf die zweite Invariante der effektiven Spannungen zurück .

Die im weiteren als Materialfunktion zu betrachtende Größe

$$\Phi = \Phi(I_2), \quad (4.53)$$

$$I_2 = (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2) : (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2), \quad (4.54)$$

$$\underline{\xi}_r = \underline{\alpha}_2 \quad (4.55)$$

kann explizit nur im Rahmen der Anpassung angegeben werden. $\underline{\xi}_r$ ist hier eine zweite interne tensorwertige Variable, die als ein Maß für Rekristallisations- und Versetzungsprozesse angesehen werden kann und im weiteren Verlauf vereinfachend mit "Entfestigung" bezeichnet wird. Sie geht in der effektiven Spannung in die Materialfunktion (4.53) ein, hat jedoch keinen Einfluß auf die Lage des Fließpunktes.

An dieser Stelle muß hervorgehoben werden, daß der hier gewählte Ansatz mit zwei tensorwertigen internen Variablen auch pragmatische Gründe im Hinblick auf die Anpassung hat. Aufgrund der Belastungsantworten des Materials auf komplexerer Belastungspfade ist dies eine praktikable Lösung. Ferner können dann die oben dargelegten mikromechanischen Deutungen gegeben werden.

Eine Erweiterung von (4.38) auf unterschiedliche Temperaturniveaus ist mit der Arrheniusgleichung möglich.

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (4.56)$$

Basierend auf den Formulierungen für die Diffusion von Atomen oder Molekülen durch einen Festkörper (1. Fick'sches Gesetz) ist von SHEWMAN die Form in (4.56) gefunden worden (siehe hierzu auch TIEMANN (1991)). D_0 und die Aktivierungsenergie Q variieren mit der Art der Diffusion, nicht aber mit der Temperatur. R ist die allgemeine Gaskonstante.

GLEN formulierte bereits 1953 für eine gegebene konstante Spannung den Zusammenhang zwischen der minimalen Kriechrate $\dot{\epsilon}$ und der Temperatur als

$$\dot{\epsilon} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (4.57)$$

mit $A = konst$ (siehe auch Kapitel 2.2).

Dieser Ansatz ist in vielen weiteren Arbeiten aufgegriffen worden. BARNES (1971) postuliert eine Abhängigkeit der Aktivierungsenergie Q von der Temperatur. SINHA (1978) verwendet in seinem weithin anerkannten, ursprünglich phänomenologischen Stoffgesetz (siehe auch Kap. 3.3) ebenfalls einen Ansatz gemäß Gleichung (4.56) zur Modellierung der Dehnungsrate im Punkt des sekundären Kriechens. Weitere Ansätze dieser Art finden sich z.B. bei LIU, HSU (1982), SEGO, MORGENSTERN (1983) und STECK (1988).

Eingebracht in (4.38) folgt für die inelastische Dehnungsrate mit einer Normierung in J_2

$$\underline{\mathbf{D}}_i = D_0 \Phi(I_2) \frac{1}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial \underline{\mathbf{S}}} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (4.58)$$

Die Entwicklung der internen Variablen, die den inneren Zustand des Körpers beschreiben, hängt neben den von außen vorgegebenen Zustandsgrößen wesentlich von der Prozeßgeschichte ab. Aus Differentialgleichungen erster Ordnung als Evolutionsgleichungen sind die aktuellen Werte bestimmbar.

$$\dot{\underline{\xi}}_v^\nabla = c_v(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\alpha}_i) \underline{\mathbf{D}}_i - c_{v3}(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r) \underline{\xi}_v, \quad (4.59)$$

$$\dot{\underline{\xi}}_r^\nabla = c_r(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\alpha}_i) \underline{\mathbf{D}}_i - c_{r3}(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r) \underline{\xi}_r. \quad (4.60)$$

In den Ansätzen (4.59) und (4.60) ist in den jeweils ersten Summanden eine noch unbestimmte Materialfunktion c_v und c_r enthalten, die vom Spannungsdeviator $\underline{\mathbf{T}}$ und allen internen Variablen abhängen möge. Die letzten beiden Summanden sind Erholungsterme. Sie enthalten dagegen nur Größen der Spannung $\underline{\mathbf{T}}$ sowie der tensorwertigen internen Variablen.

Die Form dieser Summanden bzw. Evolutionsgleichungen ist dabei stets eng verbunden mit der in Kap.4.4 aufzuzeigenden thermodynamischen Konsistenz zu sehen.

Es hat sich bestätigt, daß zur vollständigen Modellierung eine weitere interne Variable erforderlich ist. Als ein geeignetes Maß erscheint die monoton wachsende effektive inelastische Arbeit. Erweitert um die Materialfunktion

$$g = g(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r) \quad (4.61)$$

lautet der Ansatz

$$\dot{\gamma} = g(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r)(\underline{\mathbf{T}} - \underline{\xi}_v + \underline{\xi}_r) : \underline{\mathbf{D}}_i \quad (4.62)$$

4.4 Thermodynamische Konsistenz

Die in Kapitel 4.3 beschriebene additive Aufspaltung der Dehnungsrate führt mit Gleichung (4.4) auf

$$\dot{w}_d + \dot{w}_h = \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i \quad (4.63)$$

Der sofort dissipierte Anteil der Formänderungsleistung \dot{w}_d möge dabei die folgende Form haben:

$$\dot{w}_d = \frac{\beta}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i \quad (4.64)$$

Während bei bisherigen Betrachtungen an Metallen der sofort dissipierte Anteil bei ca. 90% liegt, β also häufig als konstanter Wert 0.9 angesetzt wird (FARREN, TAYLOR (1925)), liegen im Fall von polykristallinem Eis vergleichbare experimentelle

Ergebnisse nicht vor. β soll daher zunächst als Funktion aller externen und internen Zustandsgrößen gewählt werden.

$$\beta = \beta(\underline{\mathbf{T}}, T, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r, \gamma). \quad (4.65)$$

Bringt man (4.59) - (4.64) in (4.22) ein, so folgt

$$\frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} : \underline{\xi}_v^\nabla + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r} : \underline{\xi}_r^\nabla + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + T \dot{\eta} - r \quad (4.66)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i &= c_v \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} : \underline{\mathbf{D}}_i - c_{v3} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} : \underline{\xi}_v - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} : \underline{\xi}_r \right\} \\ &+ c_r \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r} : \underline{\mathbf{D}}_i - c_{r3} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r} \underline{\xi}_r - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r} : \underline{\xi}_v \right\} \\ &+ g \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\xi}_v + \underline{\xi}_r) : \underline{\mathbf{D}}_i \\ &+ T \dot{\eta} - r. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Diese Bilanzgleichung (4.67) muß erfüllt werden. Eine explizite Kenntnis des Potentials ψ , also der spezifischen freien Enthalpie, ist dazu nicht zwangsläufig erforderlich. Eine Aufspaltung von Gleichung (4.67) in der unten aufgeführten Weise ist hierzu als eine Lösungsmöglichkeit zu sehen.

$$\frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} g. \quad (4.68)$$

$$0 = c_v \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} + c_r \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r} + g \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} (\underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r). \quad (4.69)$$

$$0 = -c_{v3} \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_v} + c_{r3} \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}_r}. \quad (4.70)$$

$$0 = c_{v3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{v}}} - c_{r3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{r}}}. \quad (4.71)$$

$$T \dot{\eta} = r. \quad (4.72)$$

(4.70) und (4.71) sind identisch. (4.68) und (4.70) in (4.69) liefert

$$0 = c_v \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{v}}} + c_r \frac{c_{v3}}{c_{r3}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{v}}} + \frac{1}{\rho_0} (1 - \beta) (\xi_{\underline{r}} - \xi_{\underline{v}}) \quad (4.73)$$

und damit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{v}}} = \frac{(1 - \beta) (\xi_{\underline{r}} - \xi_{\underline{v}})}{\rho_0 \left(c_v + \frac{c_{v3}}{c_{r3}} c_r \right)}. \quad (4.74)$$

Gleichung (4.73) in Gleichung (4.70) führt auf

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\underline{r}}} = \frac{(1 - \beta) (\xi_{\underline{v}} - \xi_{\underline{r}})}{\rho_0 \left(c_v + \frac{c_{v3}}{c_{r3}} c_r \right)} \frac{c_{v3}}{c_{r3}}. \quad (4.75)$$

In Verbindung mit Gleichung (4.26) stellen (4.68), (4.74) und (4.75) vier Gleichungen für die Differentiale in ψ dar, die erfüllt werden müssen. Dies kann durch partielle Differentiation und Gleichsetzen gemäß Abb. 21 erfolgen.

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ -\frac{c_p}{T} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \frac{1}{\rho_0 g} (1 - \beta) \right\}. \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{\underline{v}}} \left\{ -\frac{c_p}{T} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \frac{1}{\rho_0} (1 - \beta) c_{r3} \frac{\xi_{\underline{v}} - \xi_{\underline{r}}}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\}. \quad (4.77)$$

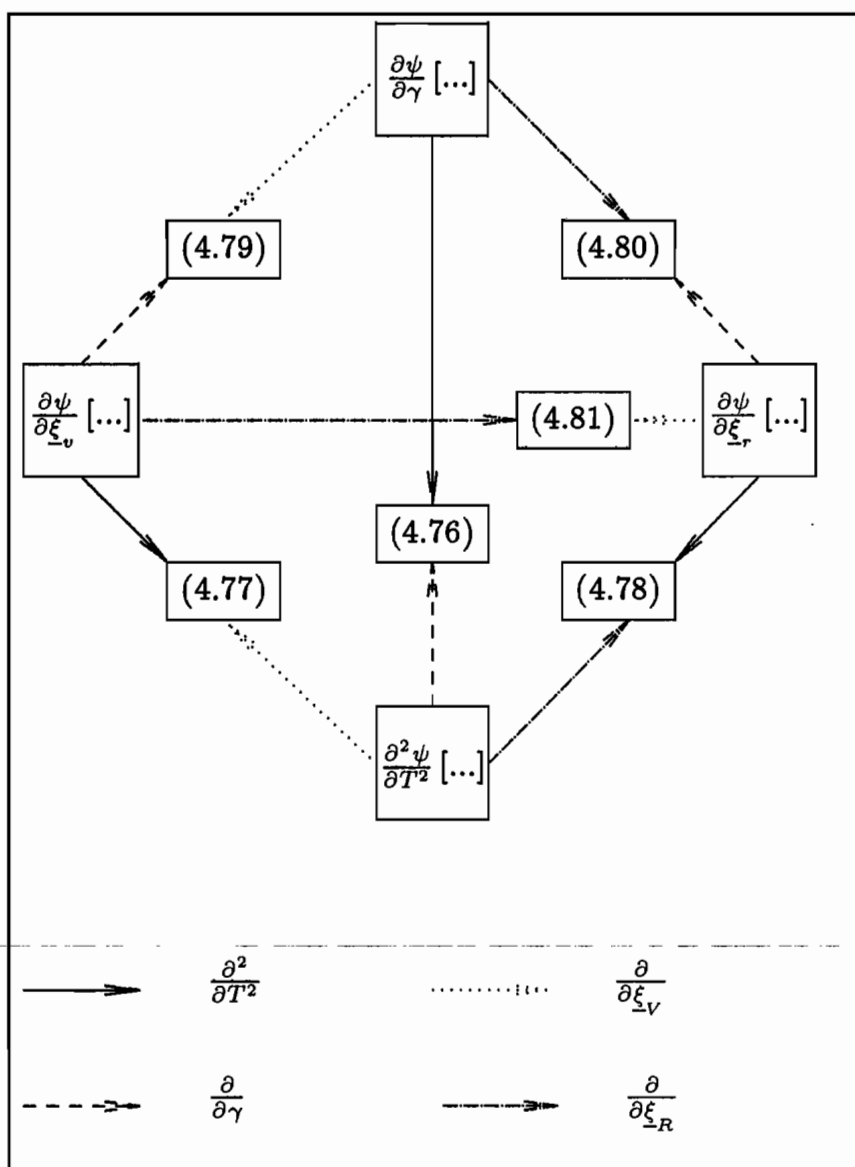


Abb. 21: Gleichzusetzende Differentiale zur thermodynamischen Konsistenz

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r} \left\{ -\frac{c_p}{T} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) c_{v3} \frac{\xi_v - \xi_r}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\}. \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{1}{\varrho_0 g} (1 - \beta) \right\} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) c_{r3} \frac{\xi_v - \xi_r}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\}. \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) \right\} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) c_{v3} \frac{\xi_v - \xi_r}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\}. \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_r} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) c_{r3} \frac{\underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\} = \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_v} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (1 - \beta) c_{v3} \frac{\underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r}{c_v c_{r3} + c_r c_{v3}} \right\}. \quad (4.81)$$

(4.76) - (4.81) sind die 6 Integrabilitätsbedingungen für eine thermodynamische Konsistenz. Die auftretenden Materialfunktionen sind durch diese Gleichungen bzw. die weiteren Ausführungen hinsichtlich der noch zu erfolgenden Anpassung eingeschränkt.

Die ersten 3 Bedingungen sind identisch erfüllt, wenn sämtliche Materialfunktionen unabhängig von der Temperatur sind. Eine Anpassung dieser Funktionen bei unterschiedlichen Temperaturniveaus mit anschließendem "curve fitting" ist folglich bei dem hier betrachteten thermodynamischen Rahmen nicht konsistent.

Zur Erfüllung von (4.79) - (4.81) werden folgende Ansätze gemacht:

$$c_v(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\alpha}_i) = c_{v1}(\gamma) c_{v2}(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r). \quad (4.82)$$

$$c_r(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\alpha}_i) = c_{r1}(\gamma) c_{r2}(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r). \quad (4.83)$$

$$\beta = 1 - \frac{g}{c_{r3}} (c_{v1} c_{r3} + c_{r1} c_{v3}). \quad (4.84)$$

$$c_{v3} = k c_{r3}. \quad (4.85)$$

(4.85) in (4.84) liefert:

$$\beta = 1 - g(c_{v1} + c_{r1} k). \quad (4.86)$$

Weiterhin möge gelten

$$c_{v2} = c_{r2}. \quad (4.87)$$

(4.82), (4.83), (4.86) und (4.87) in (4.79) ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{1}{\varrho_0} (c_{v1} + c_{r1}k) \right\} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{g}{\varrho_0} (c_{v1} + c_{r1}k) \frac{\xi_v - \xi_r}{c_{v1}c_{r2}c_{r3} + c_{r1}c_{r2}kc_{r3}} \right\}. \quad (4.88)$$

Da in dieser Gleichung (auf der linken Seite) c_{v1} und c_{r1} keine Funktion von ξ_v sind und (auf der rechten Seite) g , c_{r2} und c_{r3} keine Funktion von γ sind, ist (4.88) bzw. (4.79) erfüllt. Durch (4.85) ergibt sich in (4.80) der gleiche Zusammenhang, so daß auch diese Bedingung erfüllt ist.

(4.79) und (4.80) werden auch erfüllt, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{c_{v3}}{c_{r3}} \right\} = 0 \quad (4.89)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r} \left\{ \frac{c_{v3}}{c_{r3}} \right\} = 0 \quad (4.90)$$

gilt, da dann ebenfalls die linken Seiten identisch Null sind. In dem Fall entfällt (4.85).

Aus (4.81) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_r} \left\{ \frac{g}{\varrho_0} (c_{v1} + c_{r1}k) c_{r3} \frac{\xi_v - \xi_r}{c_{v1}c_{r2}c_{r3} + c_{r1}c_{r2}kc_{r3}} \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{g}{\varrho_0} (c_{v1} + c_{r1}k) kc_{r3} \frac{\xi_v - \xi_r}{c_{v1}c_{r2}c_{r3} + c_{r1}c_{r2}kc_{r3}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

(4.91) läßt sich reduzieren auf

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_r} \left\{ \frac{g}{c_{r2}} \right\} \otimes (\underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r) - \frac{g}{c_{r2}} \underline{\mathbf{1}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_v} \left\{ k \frac{g}{c_{r2}} \right\} \otimes (\underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r) + k \frac{g}{c_{r2}} \underline{\mathbf{1}}. \quad (4.92)$$

(4.92) kann mit

$$k = -1 \quad (4.93)$$

sowie einer Formulierung von g und c_{r2} in effektiven Spannungen und dem Spannungsdeviator gemäß (4.54) erfüllt werden.

$$g = g(\underline{\mathbf{T}} - \underline{\xi}_v + \underline{\xi}_r, \underline{\mathbf{T}}). \quad (4.94)$$

$$c_{r2} = c_{r2}(\underline{\mathbf{T}} - \underline{\xi}_v + \underline{\xi}_r, \underline{\mathbf{T}}). \quad (4.95)$$

Der Ansatz (4.84) für die Dissipationsfunktion β erfüllt in Verbindung mit den weiteren Restriktionen der Materialfunktionen die Integrierbarkeitsbedingungen. Eine Modifizierung von β im Zuge einer Anpassung an Versuche zur Untersuchung des Dissipationsanteils der inelastischen Formänderungsarbeit ist unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen weiterhin möglich.

5. Anpassung

5.1 Aufbereitung der Versuchsergebnisse

5.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen

Die von MELLOR und COLE (1982) vorgestellten Versuchsergebnisse an Eisproben bilden die Basis der Anpassung einaxialer monotoner Belastungspfade. Die Aufbereitung des Materials zur Probe ist bei COLE (1979) nachzulesen. Ergänzende Auswertungen finden sich bei MELLOR und COLE (1983); COLE (1983A, B, 1984, 1985, 1988); COLE und GOULD (1989). Eine Anwendung der Versuchsergebnisse ist u.a. von SZYSZKOWSKI, GLOCKNER (1985) und GLOCKNER, SZYSZKOWSKI (1990) vorgenommen worden. Die experimentellen Ergebnisse dienen auch hier zur Anpassung und Verifikation eines mehraxialen Stoffgesetzes.

Die Schar der Druckversuche unter konstanter Dehnungsrate (CD-Tests) kann zur Auffindung bestimmter Charakteristika, die die Formulierung der Materialfunktionen unterstützen sollen, aufbereitet werden. Dazu dienen Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungsraten, die an herausragenden Punkten zu formulieren sind.

Abb. 22 zeigt den typischen Verlauf einer Spannungs-Dehnungskurve bei einer exemplarisch gewählten konstanten Dehnungsrate $\dot{\epsilon} = 2.25 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$. Besonders gekennzeichnet sind hierin

1. der Beginn der Mikrobrüche,
2. das Spannungsmaximum und
3. die Residuumspannung.

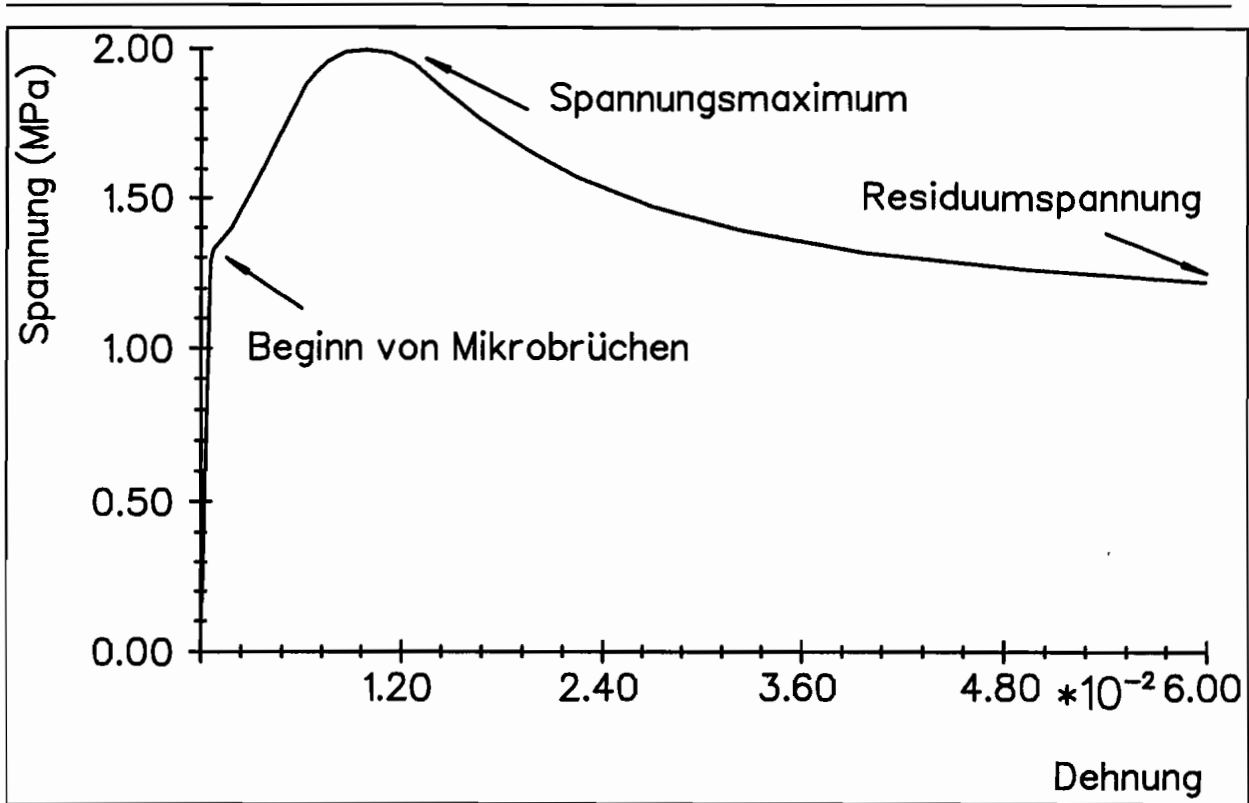


Abb. 22: Typischer Spannungs–Dehnungsverlauf bei konstanter Dehnungsrate für polykristallines Eis

5.1.2 Beginn der Mikrobrüche

Der Beginn der Mikrobrüche stellt anschaulich das erste Abweichen des Verlaufes von einer linearen Spannungs–Dehnungsbeziehung dar. Ebenfalls treten ab diesem Wert akustische Emissionen auf, die aus den Mikrobrüchen herrühren (COLE, LAWRENCE (1981)).

Trägt man nun die jeweils vorgegebenen Dehnungsraten über der Spannung beim Beginn der Brüche doppeltlog. auf, so folgt Abb.23.

Das Verhalten kann in guter Näherung durch

$$\sigma_{mc} = \lambda_1 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\kappa_1} \quad (5.1)$$

mit

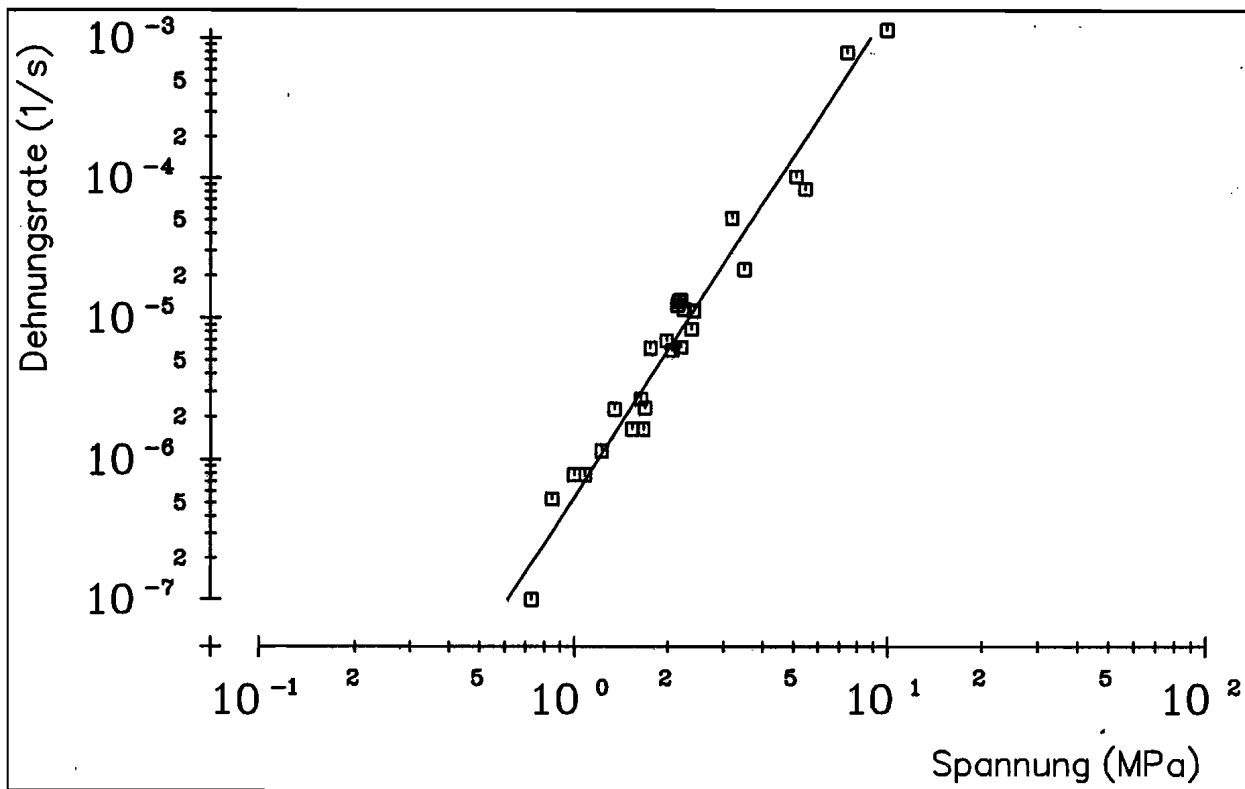


Abb. 23: Beginn der Mikrobrüche

$$\lambda_1 = 65.56 \text{ MPa},$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{s},$$

$$\kappa_1 = 0.290$$

dargestellt werden. Die Berechnung der Koeffizienten der Regressionsfunktion erfolgte nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Der Korrelationskoeffizient r_1 beträgt 0.9795.

In Abb.23 ist diese Gleichung als Regressionsgerade eingezeichnet.

Eine analytische Funktion zur Beschreibung der Dehnungswerte beim Beginn der Mikrobrüche erscheint jedoch fragwürdig. Aus Abb.24 ist ersichtlich, daß die Dehnungen über ein sehr breites Band streuen. Die Ursache hierfür ist in dem stark variierenden anfänglichen Tangentenmodul (Abb.25) zu sehen.

Abb.25 erlaubt wie auch Abb.24 nur sehr global die Aussage, daß Tangentenmodul und Dehnung tendenziell mit steigender Dehnungsrate zunehmen.

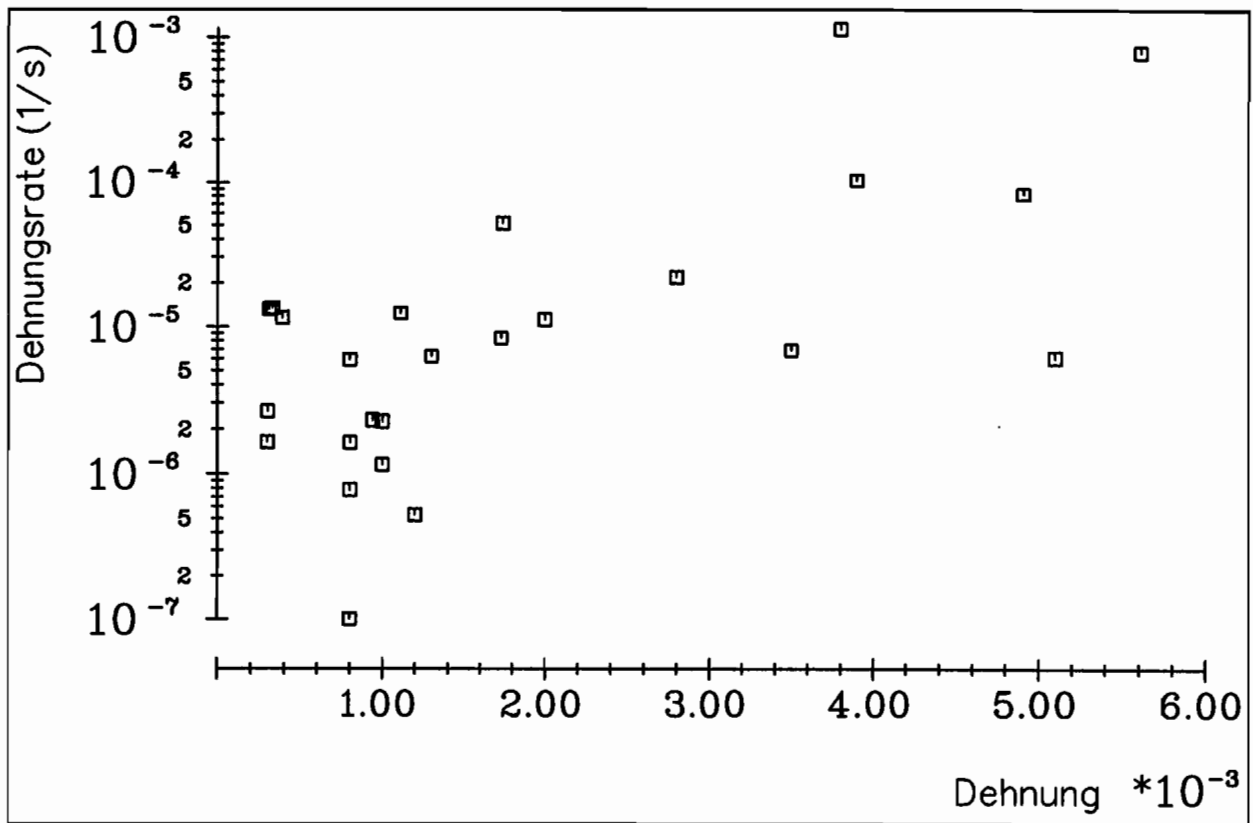


Abb. 24: Beginn der Mikrobrüche

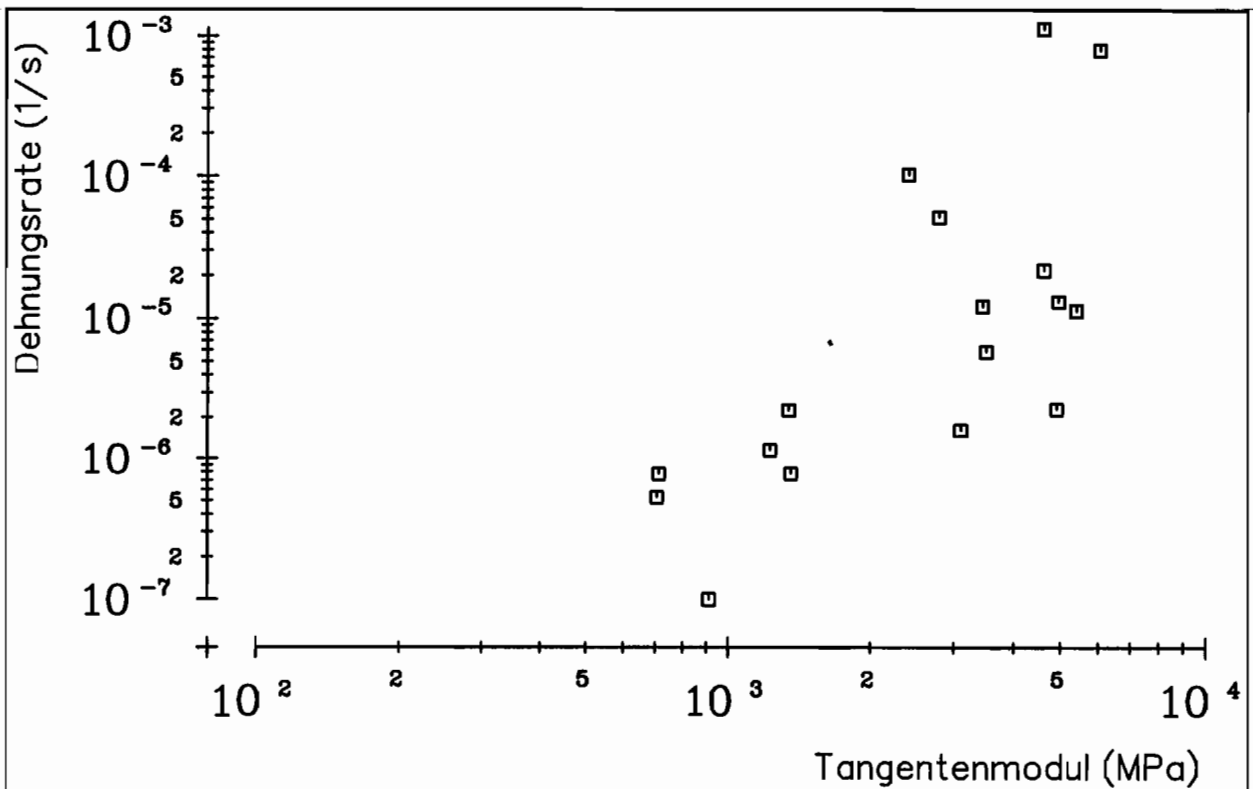


Abb. 25: Anfänglicher Tangentenmodul

5.1.3 Spannungsmaximum

Der zweite in Abb.22 herausgestellte Punkt ist das im einaxialen Druckversuch auftretende Spannungsmaximum. Eine vergleichbare Darstellung zu Abb.23 ist hier Abb.26.

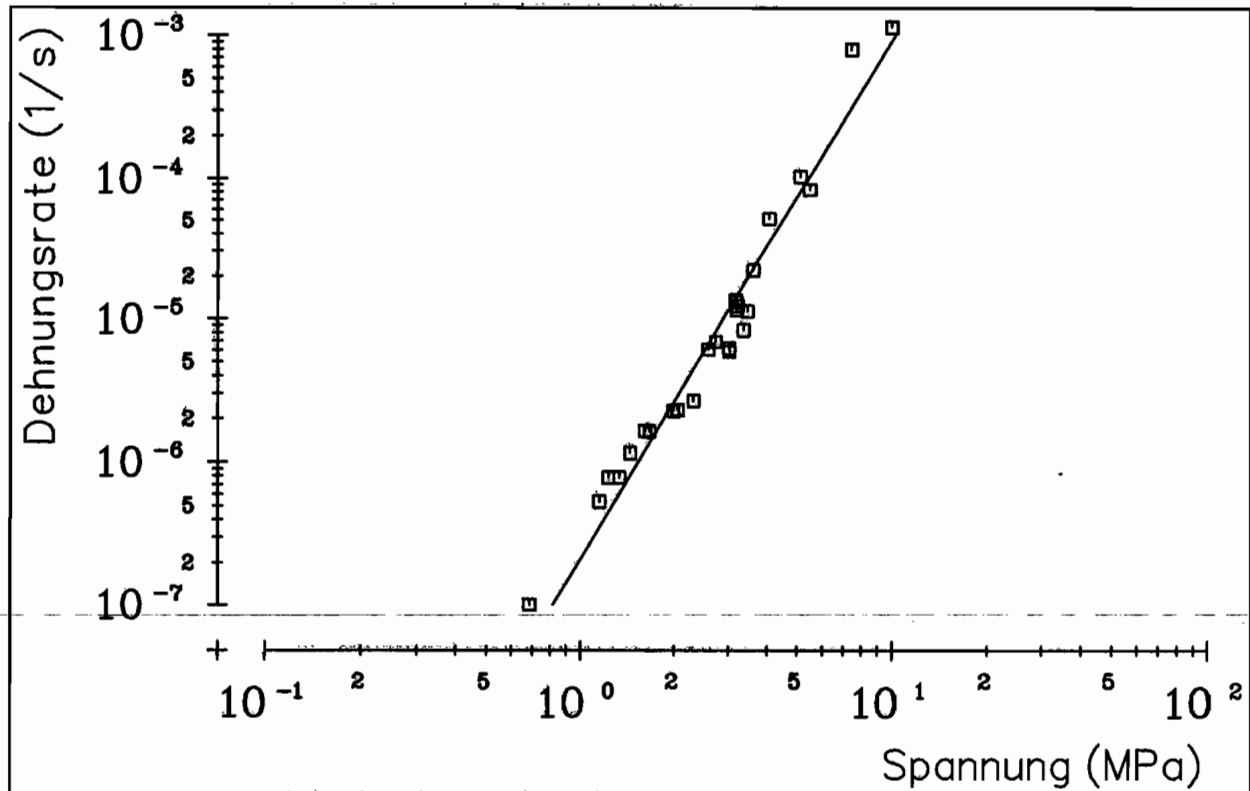


Abb. 26: Spannungsmaximum

Der lineare Verlauf der Regressionsgeraden führt auf

$$\sigma_{ps} = \lambda_2 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\kappa_2} \quad (5.2)$$

mit

$$\lambda_2 = 69.41 \text{ MPa},$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{s},$$

$$\kappa_2 = 0.276.$$

Der Korrelationskoeffizient hat hierbei den Wert

$$r_2 = 0.9809.$$

Die Dehnung in Abb.27 beim Erreichen der Maximalspeannung streut in einem Bereich von ca. 0.25% bis 1.5%. Auffällig ist in diesem Zusammenhang ein Sprung der Dehnungen zu kleinen Werten ab einer Dehnungsrate von ca. $10^{-4} \frac{1}{s}$.

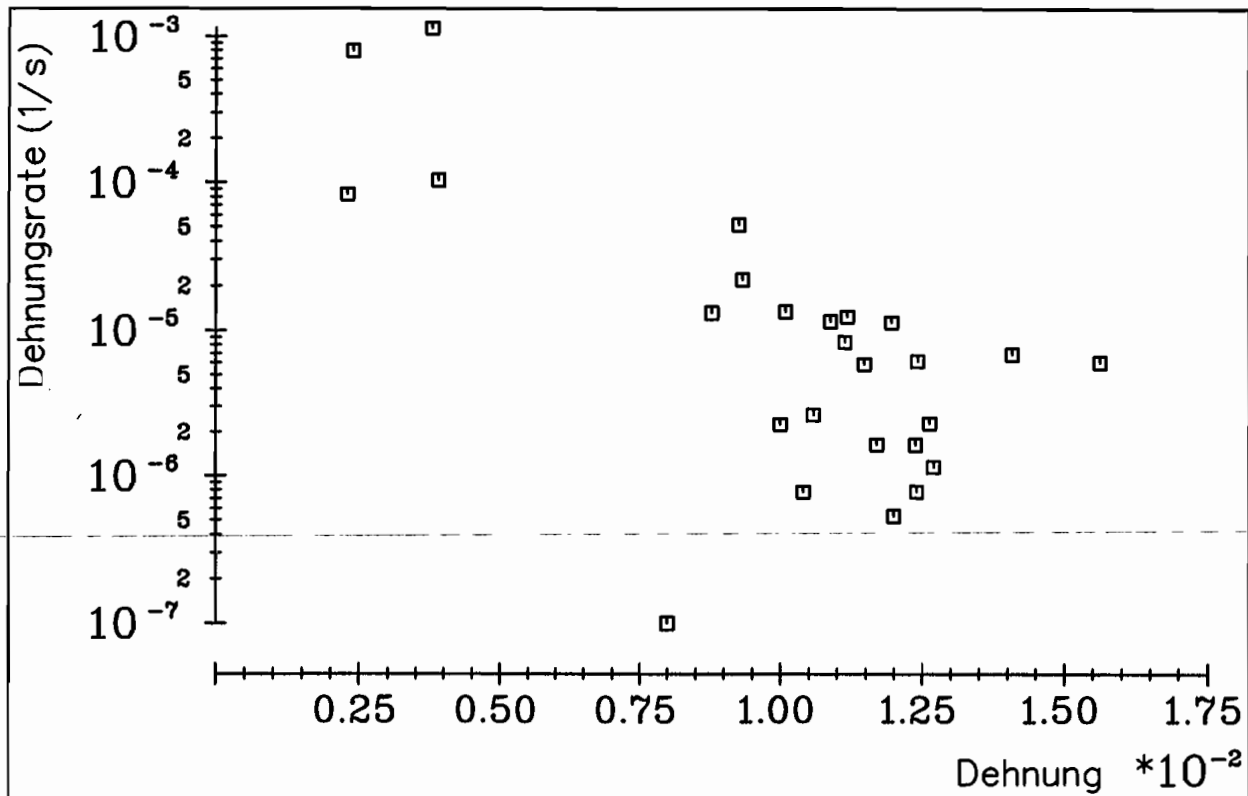


Abb. 27: Spannungsmaximum

Unterhalb dieser Rate ist eine leichte Tendenz zu geringeren Dehnungswerten bei steigender Prozeßgeschwindigkeit erkennbar.

5.1.4 Residuumspeannung

Die Residuumspeannung sei jener Wert, der im Experiment bei einer Dehnung von 10% auftritt bzw. zu erwarten ist. Da einige Versuche vorzeitig abgebrochen wurden, sind die entsprechenden Spannungswerte extrapoliert worden (vgl. MELLOR, COLE (1983)).

Auch hier ist wiederum als Regressionsfunktion der Ansatz

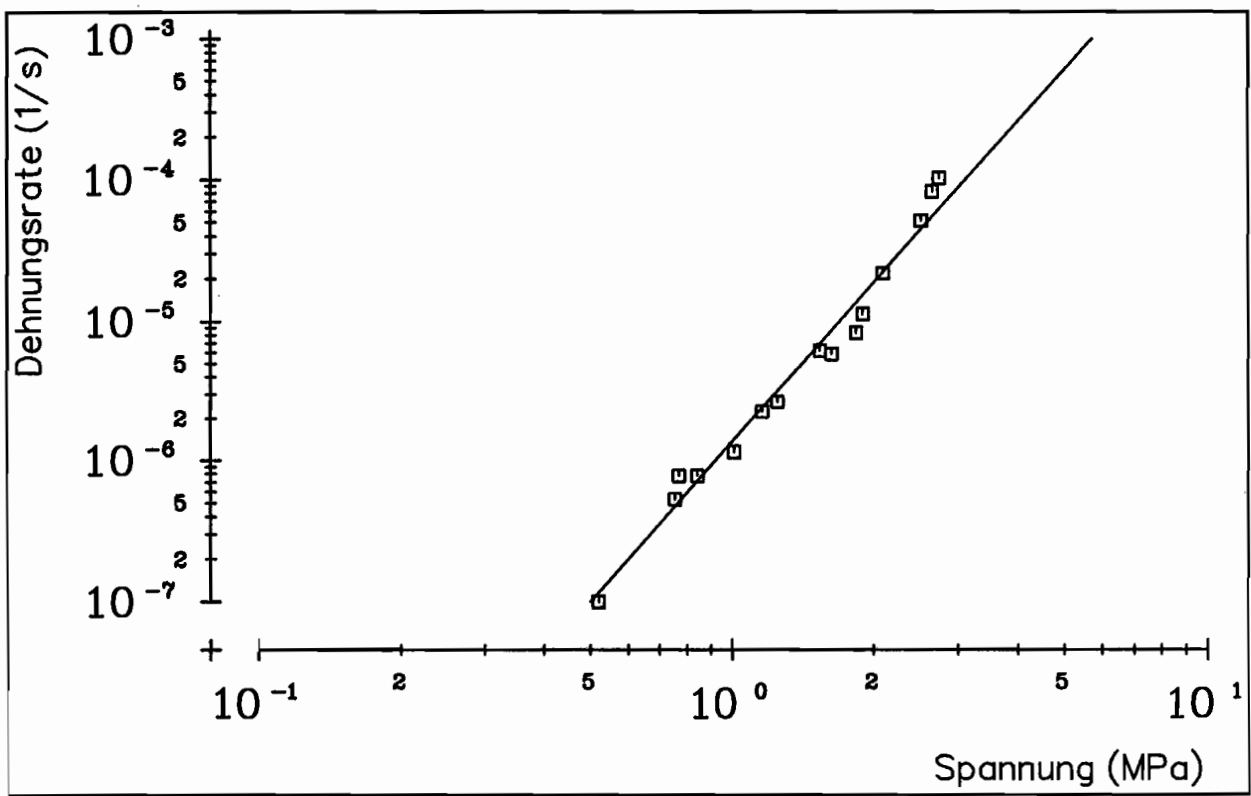


Abb. 28: Residuumsprung

$$\sigma_{res} = \lambda_3 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\kappa_3} \quad (5.3)$$

mit

$$\lambda_3 = 31.6 \text{ MPa},$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{s},$$

$$\kappa_3 = 0.255$$

gewählt worden. Der Korrelationskoeffizient beträgt in diesem Fall

$$r_3 = 0.989.$$

5.1.5 Wendepunktspannung

Zusätzlich zu den drei besprochenen Charakteristika ist ein solches Vorgehen auch für den Wendepunkt

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2} = 0 \quad (5.4)$$

möglich. Problematischer ist jedoch die Bestimmung der Wertepaare, da nur Kurvenverläufe der Versuche vorliegen, die eine grafische Auswertung erforderlich machen.

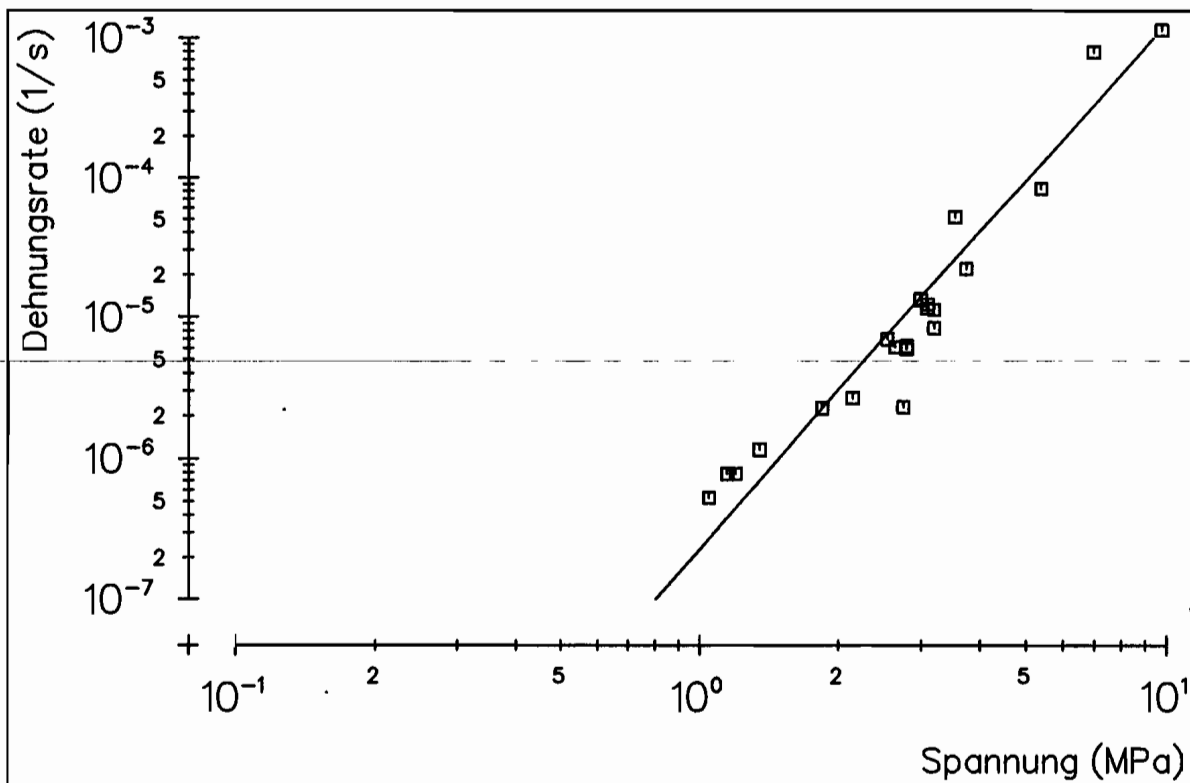


Abb. 29: Wendepunkt

Abb.29 weist unter Berücksichtigung dieser Tatsache im Mittel eine größere Abweichung der Spannungen von der Regressionskurve auf. Dies wird nicht zuletzt durch einen vergleichsweise schlechten Korrelationskoeffizienten von

$$r_4 = 0.96$$

deutlich. Zu Kontrollzwecken bei weiterführenden Betrachtungen erscheint es jedoch

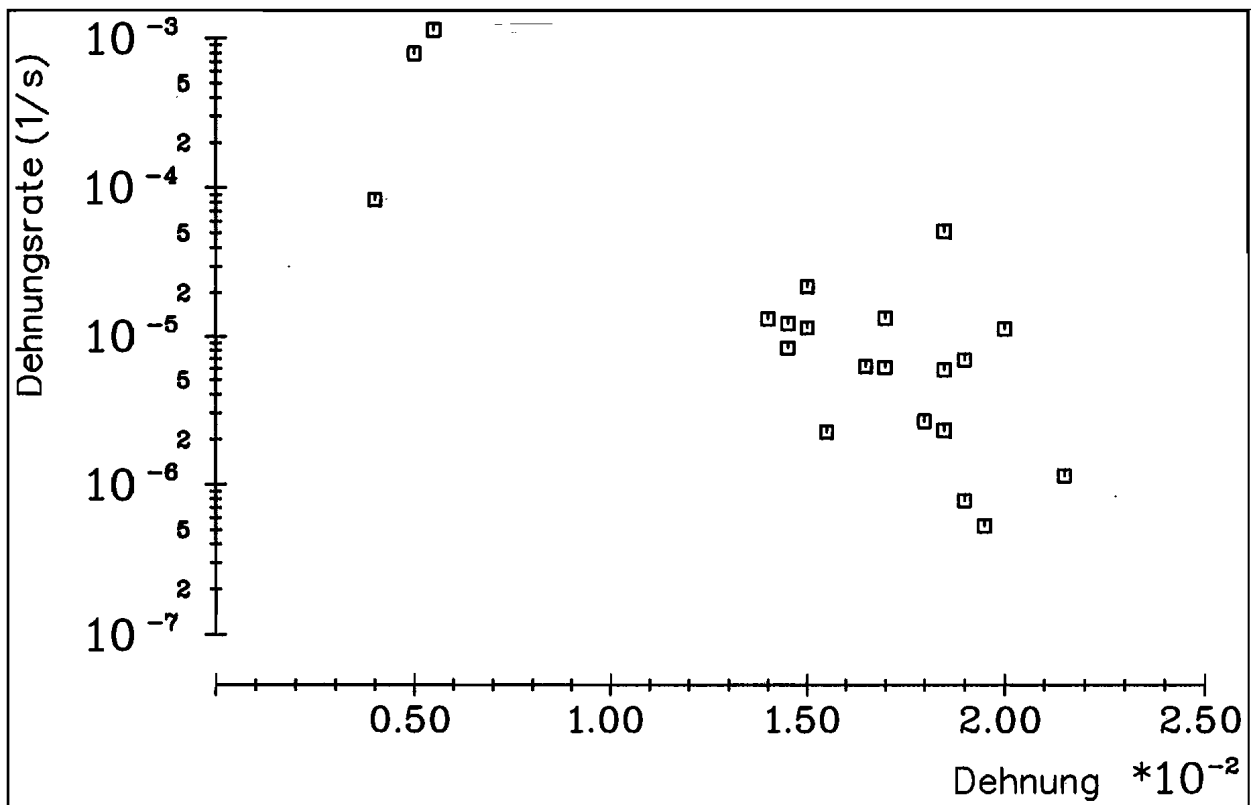


Abb. 30: Wendepunkt

trotzdem als ein zu berücksichtigendes Charakteristikum. Der Ansatz der Regressionsgeraden lautet auch hier

$$\sigma_{wp} = \lambda_4 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\kappa_4} \quad (5.5)$$

mit

$$\lambda_4 = 59.5 \text{ MPa},$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{s},$$

$$\kappa_4 = 0.267.$$

Die Streuung der Dehnungen am Wendepunkt (Abb.30) kann qualitativ mit der beim Spannungsmaximum (Abb.27) verglichen werden.

5.2 Bestimmung der idealen Druckkurven

Mit Hilfe der bereits ermittelten Zusammenhänge zwischen Spannung und Dehnungsrate an charakteristischen Punkten lassen sich Druckkurven konstruieren, die in den folgenden Ausführungen als "ideale Druckkurven" bezeichnet werden. Diese dienen später als Basis für die Ermittlung der Materialfunktionen.

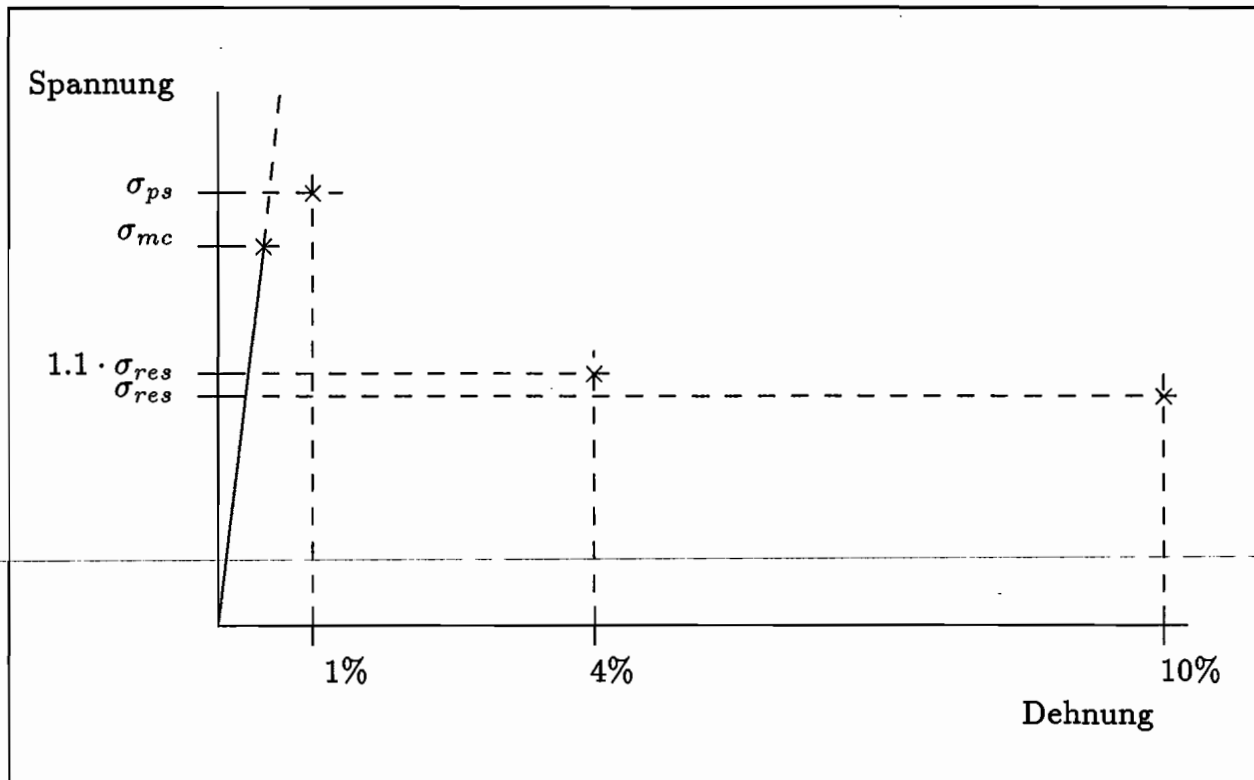


Abb. 31: Charakteristische Punkte bei der Konstruktion idealer Druckkurven

Abb.31 stellt die Spannungswerte beim Beginn der Mikrobrüche, beim Maximum und dem Residuumswert dar. Zusätzlich ist die Anfangssteigung (E-Modul = $7,5\text{GPa}$) sowie aus Praktikabilitätsgründen ein 110%-Residuumswert bei 4% Dehnung eingetragen.

Aussagen über die Lage des Wendepunktes können zu Kontrollzwecken der Kurvengüte herangezogen werden.

Der Verlauf zwischen diesen Punkten muß qualitativ mit dem experimentell beobachtbaren Verhalten übereinstimmen. Weiterhin sind vorgegebene Randbedingungen zu erfüllen und schließlich ist im Sinne einer effektiven Bearbeitung ein möglichst einfacher funktioneller Zusammenhang zu suchen. Aus diesen Gründen sind die drei Abschnitte durch jeweils ein Polynom bestimmt worden.

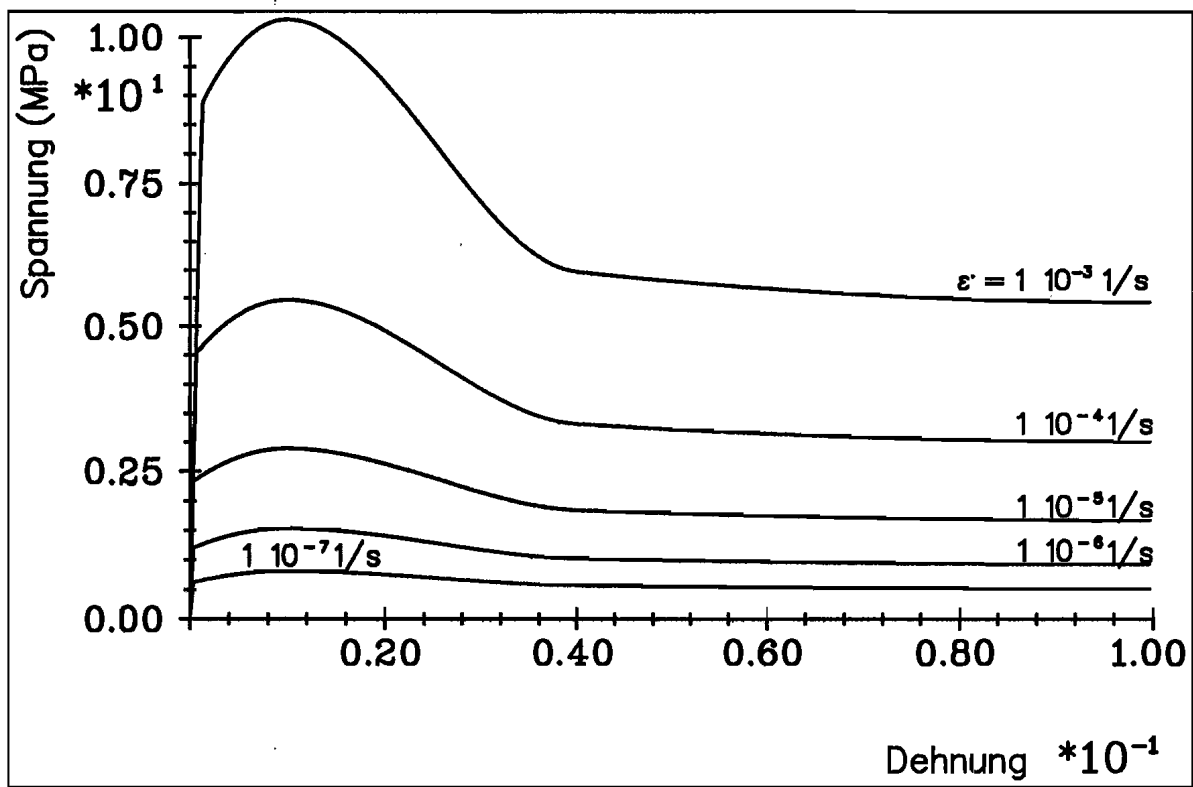


Abb. 32: Ausgewählte ideale Druckkurven mit konstanter Dehnungsrate

$$\sigma(\varepsilon) = a_i + b_i(\varepsilon - \varepsilon_i) + c_i(\varepsilon - \varepsilon_i)^2 + d_i(\varepsilon - \varepsilon_i)^3. \quad (5.6)$$

Als Randbedingungen sind neben den Stützstellen

$$\sigma(\varepsilon_i) = \sigma_i, \quad (5.7)$$

weiterhin die Stetigkeit der ersten Ableitung bei σ_{ps} und $\sigma_{1,res}$ und eine horizontale Tangente bei σ_{res} gefordert. Daraus folgt für die Bereiche II (σ_{ps} bis $\sigma_{1,res}$) und III ($\sigma_{1,res}$ bis σ_{res}) ein Polynomansatz dritten Grades sowie für den ersten Bereich (σ_{mc} bis σ_{ps}) ein Polynom zweiten Grades. Der niedrige Grad in diesem Bereich hat sich als erforderlich herausgestellt, da bei höheren Ansätzen, die zusätzlich eine C^1 -Stetigkeit bei σ_{mc} erfüllen, ein Überschwingen zu beobachten ist. Der auftretende Knick bei σ_{mc} beeinflusst jedoch in keiner Weise die weitere Anpassung.

Der Anfangsbereich bis zum Beginn der Mikrobrüche läßt sich durch eine Gerade mit konstanter Steigung beschreiben.

Anhang I enthält die Koeffizienten der Polynome.

Abb.32 zeigt nach dieser Vorgehensweise bestimmte, ausgewählte Druckkurven im Bereich der Dehnungsraten von $\dot{\epsilon} = 10^{-7} \frac{1}{s}$ bis $10^{-3} \frac{1}{s}$.

5.3 Aufbereitung des Stoffgesetzes zur Ermittlung der Materialfunktionen

Ziel der hier vorgestellten Anpassungsstrategie für unbekannte Materialparameter und -funktionen ist es, eine möglichst einfache Ermittlung dieser Größen zu erreichen. Dazu ist anzustreben, daß die Einflüsse der Parameter erfaßt und weitgehend separiert werden können. Eine sukzessive Bestimmung einzelner bzw. weniger Größen ist der Bearbeitung eines vollständigen Satzes von Parametern vorzuziehen.

Dies zu realisieren ist eng mit der Formulierung des Stoffgesetzes und daher mit der Problemstellung verbunden. Eine jede separierbare Anpassung ist folglich nur auf der Basis der speziellen Stoffgesetzformulierung zu erarbeiten.

Geht man von der in Gleichung (4.40) beschriebenen, punktförmigen Fließfläche und einer Überspannung als Maß für den Abstand Spannungspunkt-Fließkurve aus, so folgt mit Gleichung (4.53) der Bezug der Überspannung auf den Spannungsnullpunkt im Gegensatz zu den Modellen mit einem ausgeprägten, rein elastischen Materialverhalten.

Zur Bestimmung dieser Gleichung (4.53) ist ferner die Annahme zu treffen, daß in den in Kap.5.1 zugrundegelegten, einaxialen Druckkurven im Bereich einer anfänglichen quasi-linearen Spannungs-Dehnungsbeziehung auftretende Ver- bzw. Entfestigungseinflüsse klein seien. Dies ist folglich auch für die internen Variablen gültig, die dieses Verhalten beschreiben.

Die Berücksichtigung des Temperatureinflusses geht erst ab Kap. 5.6 in die Anpassung ein.

Mit $\varrho_0 \approx \varrho$ und

$$\underline{\mathbf{T}} = \frac{\sigma}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

folgt für diese Belastung aus Gleichung (4.58) bei $\sigma \neq 0$

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{8}{3}} \Phi(I_2(\underline{\mathbf{T}})). \quad (5.9)$$

Die oben getroffenen Annahmen bzgl. eines quasi-linearen Spannungs-Dehnungsverlaufes gelten für den Bereich, der im Experiment mit dem Einsetzen der Mikrobrüche begrenzt wird. Mit dem Ansatz

$$\Phi = \varphi_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{\varphi_2} \quad (5.10)$$

mit

$$\sigma_0 = 1 \text{ MPa}, \quad (5.11)$$

der für diesen Belastungsfall bei kleinen Dehnungen und damit (zur Anpassung) ohne Berücksichtigung der anfänglichen, kleinen Ver- bzw. Entfestigungsanteile auf

$$\Phi = \varphi_1 \left(\frac{2}{3} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \right)^{\varphi_2} \quad (5.12)$$

zurückgeführt werden kann, folgt durch Umstellen von Gleichung (5.1) und Gleichsetzen

$$2\varphi_2 = \frac{1}{\kappa_1}, \quad (5.13)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\varphi_1} \right)^{\frac{1}{\varphi_2}} \frac{3}{2}}. \quad (5.14)$$

Die Zahlenwerte von φ_1 und φ_2 ergeben sich zu

$$\varphi_1 = 6.7116 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s},$$

$$\varphi_2 = 1.724.$$

Abb.33 zeigt den anfänglichen Spannungs-Dehnungsverlauf in Belastungsrichtung für Dehnungsraten von $10^{-3} \frac{1}{s}$ bis $10^{-7} \frac{1}{s}$. Aufgrund der im Experiment aufgetretenen

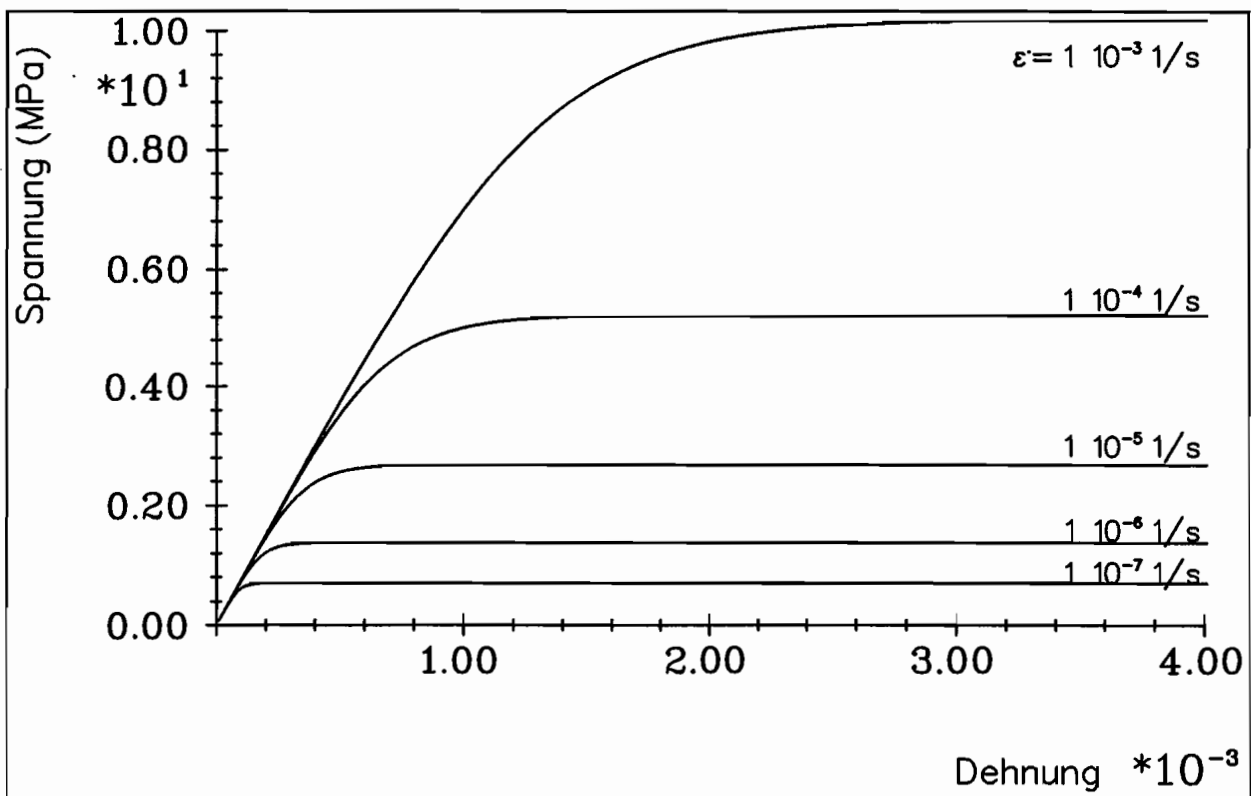


Abb. 33: Anfänglicher Spannungsverlauf ohne Ver- bzw. Entfestigungsprozesse

starken Streuung der Elastizitätsmoduli ist dieser Wert im Rahmen der Versuchsdaten für die Rechnung sinnvoll zu setzen. Der gewählte Elastizitätsmodul beträgt hier 7.5 GPa .

Es folgt für den einaxialen Fall, jetzt mit bereits bestimmter Materialfunktion Φ ,

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sqrt{\frac{8}{3}} \varphi_1 \left(\frac{2}{3\sigma_0^2} \left(\sigma - \frac{3}{2}\xi_v + \frac{3}{2}\xi_r \right)^2 \right)^{\varphi_2} \quad (5.15)$$

mit

$$\underline{\xi}_v = \xi_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

und

$$\underline{\xi}_r = \xi_r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

5.4 Ermittlung der Materialfunktion c

Aufgrund der hier vorliegenden einaxialen Versuche ist eine Trennung des Einflusses der Eigenspannungen einerseits und der Rekristallisationseinflüsse andererseits nicht möglich. Der Spannungsverlauf erlaubt auf Basis der bisherigen Annahmen nur Aussagen über die Summe sämtlicher interner Vorgänge. Aus diesem Grund möge zunächst der Tensor

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}_v - \underline{\xi}_r \quad (5.18)$$

gebildet werden. Entsprechend gilt für die Materialfunktionen aus den Gleichungen (4.59), (4.60) und (5.18)

$$c(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}, \gamma) = c_v(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r, \gamma) - c_r(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}_v, \underline{\xi}_r, \gamma). \quad (5.19)$$

Die Erholungsterme aus (4.59) und (4.60) sind in späteren Schritten anzupassen.

Aufgrund der thermodynamischen Restriktionen und den damit verbundenen Ansätzen ((4.82), (4.83) und (4.87)) erhält man ferner

$$c(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}, \gamma) = c_1(\gamma)c_2(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}), \quad (5.20)$$

$$c_1(\gamma) = c_{v1}(\gamma) - c_{r1}(\gamma). \quad (5.21)$$

Es folgt die Evolutionsgleichung der in Gleichung (5.18) gebildeten tensorwertigen internen Variablen $\underline{\xi}$ zu

$$\dot{\underline{\xi}} = c_1(\gamma)c_2(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi})\underline{\mathbf{D}}_i. \quad (5.22)$$

Für c_2 soll nun der Ansatz gemäß Gleichung (4.95) in der folgenden Form gemacht werden:

$$c_2(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}) = a_1 \left(\frac{\hat{I}_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2}, \quad (5.23)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{2}{3} \left(\sigma - \frac{3}{2} \xi \right)^2. \quad (5.24)$$

Die Gleichungen (5.9), (4.53), (5.22) und (5.23) ergeben damit

$$\dot{\xi} = c_1(\gamma) k_1 \left(\frac{\hat{I}_2}{\sigma_0^2} \right)^{k_2}, \quad (5.25)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{8}{3}} a_1 \varphi_1, \quad (5.26)$$

$$k_2 = a_2 + \varphi_2 \quad (5.27)$$

und weiterhin

$$\dot{\xi} = c_1(\gamma) k_1 \left(\frac{2}{3\sigma_0^2} \left(\sigma - \frac{3}{2} \xi \right)^2 \right)^{k_2}. \quad (5.28)$$

Die Materialfunktion g der modifizierten, effektiven inelastischen Arbeit γ kann gemäß (4.94) unter Verwendung von Gleichung (5.18) in ähnlicher Form wie (5.25) angesetzt werden.

$$g(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\xi}) = a_3 \left(\frac{\hat{I}_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_4}. \quad (5.29)$$

$\dot{\gamma}$ lautet einaxial

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma - \frac{3}{2} \xi \right) k_3 \left(\frac{2}{3\sigma_0^2} \left(\sigma - \frac{3}{2} \xi \right)^2 \right)^{k_4}, \quad (5.30)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{8}{3}} a_3 \varphi_1, \quad (5.31)$$

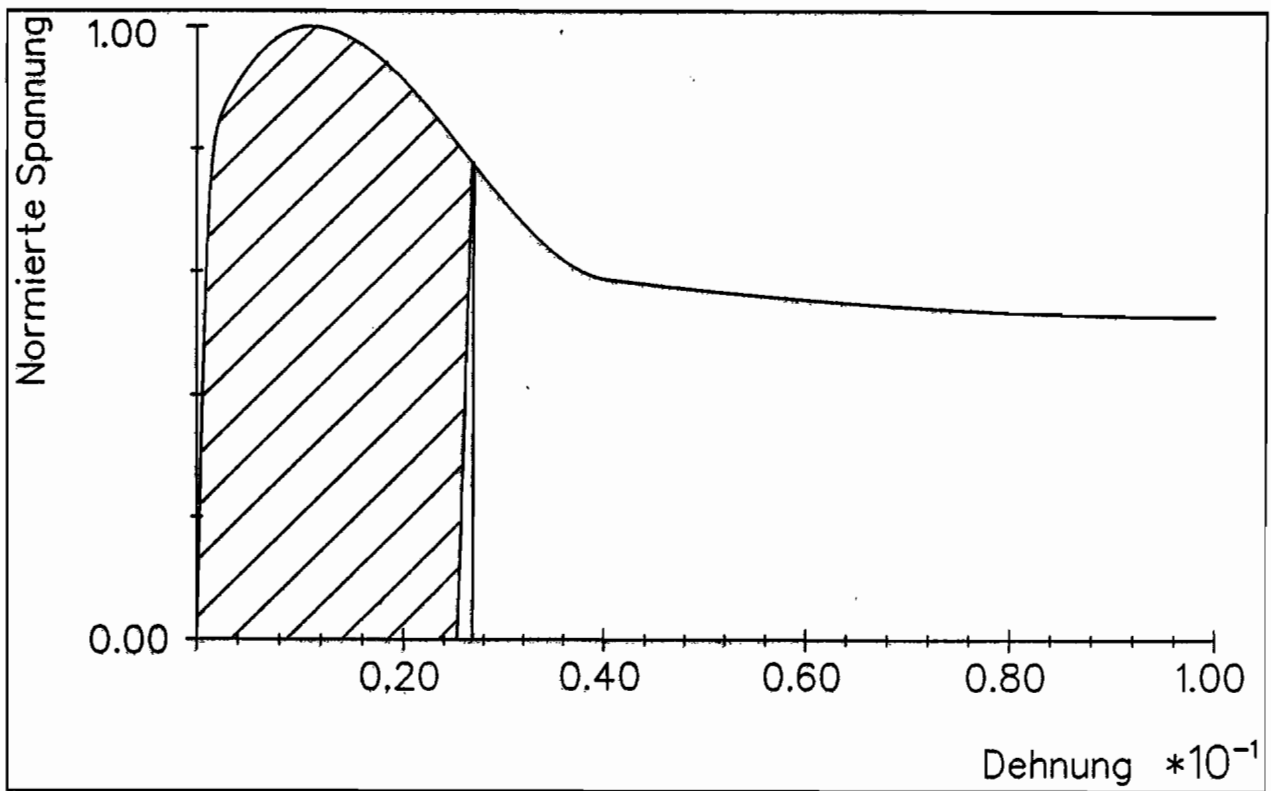


Abb. 34: Inelastische Arbeit

$$k_4 = a_4 + \varphi_2. \quad (5.32)$$

In Gleichung (5.28) und (5.30) ist neben der gesuchten Funktion c_1 und der abhängigen Variablen γ die Größe der Ver- bzw. Entfestigung ξ unbekannt, da diese nicht aus Versuchskurven unmittelbar abgelesen werden kann. Unter Zuhilfenahme der inelastischen Arbeit κ läßt sich diese jedoch auf Basis der bisherigen Annahmen ableiten.

$$\dot{\kappa} = \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i. \quad (5.33)$$

$$\dot{\kappa} = \sigma \dot{\epsilon}_i. \quad (5.34)$$

Gleichung (5.34) gilt für den hier betrachteten Sonderfall der einaxialen Belastung. κ ist als Fläche unterhalb der Spannungs-Dehnungskurve, abzüglich der elastischen Arbeit, meßbar.

In Abb.34 ist dies der schraffierte Bereich.

Bei bekannten Ansatzfunktionen (siehe Anhang I) der idealen Druckkurven ist eine direkte Berechnung der inelastischen Arbeitsrate möglich.

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2E} \right\} \quad (5.35)$$

bzw.

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) \left(1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right). \quad (5.36)$$

Mit den Gleichungen(5.18), (5.34) und (5.36) kann (5.15) nun so geschrieben werden, daß auf Basis der bisherigen Ansätze die Verfestigung ξ eindeutig berechenbar ist.

$$\xi = \frac{2}{3} \left(\sigma(\varepsilon) - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_0 \left(\dot{\varepsilon} \frac{1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}{\varphi_1 \sqrt{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{1}{2\varphi_2}} \right). \quad (5.37)$$

Für die Bestimmung von c_1 in Gleichung (5.28) ist die Kenntnis der Steigung dieser internen Variablen erforderlich.

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon}. \quad (5.38)$$

Aus diesen Beziehungen resultiert

$$\dot{\xi} = \frac{2}{3} \dot{\varepsilon} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{3\sigma_0}{8\varphi_1\varphi_2 E} \left(\frac{1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}{\varphi_1 \sqrt{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{1-2\varphi_2}{2\varphi_2}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{2\varphi_2}} \right). \quad (5.39)$$

Einsetzen von (5.37) und (5.38) in (5.28) und (5.30) führt auf c_1 und $\dot{\gamma}$.

$$c_1 = \frac{2}{3k_1} \left(1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^{-\frac{k_2}{\varphi_2}} \dot{\varepsilon}^{1-\frac{k_2}{\varphi_2}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{3\sigma_0}{8\varphi_1\varphi_2 E} \left(\frac{1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}{\varphi_1 \sqrt{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{1-2\varphi_2}{2\varphi_2}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{2\varphi_2}} \right), \quad (5.40)$$

$$\dot{\gamma} = 2k_3\sigma_0 \left(\dot{\varepsilon} \frac{1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}{\varphi_1 \sqrt{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{2k_4+1}{2\varphi_2}}. \quad (5.41)$$

Mit

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (5.42)$$

bzw.

$$\int \partial \gamma = \frac{1}{\dot{\varepsilon}} \int \dot{\gamma} \partial \varepsilon \quad (5.43)$$

und

$$\frac{2k_4+1}{2\varphi_2} = 1 \quad (5.44)$$

erhält man die modifizierte inelastische Arbeit γ zu

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k_3}{\varphi_1} \sigma_0 \left(\left(1 - \frac{1}{E} b_i\right) (\varepsilon - \varepsilon_i) - \frac{1}{E} c_i (\varepsilon - \varepsilon_i)^2 - \frac{1}{E} d_i (\varepsilon - \varepsilon_i)^3 \right) \quad (5.45)$$

unter Voraussetzung der Polynomansätze $\sigma(\varepsilon)$ gemäß Anhang I.

Es ist zu beachten, daß aufgrund von Gleichung (5.44) γ unabhängig von der Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}$ ist. Der noch zu bestimmende Parameter k_4 lautet damit

$$k_4 = \varphi_2 - \frac{1}{2}. \quad (5.46)$$

c_1 ist nach der Formulierung (5.40) ausschließlich eine Funktion der Dehnung ε und deren Rate und beinhaltet die in Gleichung (5.25) eingeführten Parameter k_1 und k_2 .

Während k_1 und auch k_3 aus Gleichung (5.45) geschwindigkeitsunabhängig sind, kann mit k_2 die Lage der Materialfunktion bei verschiedenen Geschwindigkeiten relativ zueinander beeinflusst werden. k_1 und k_3 können damit zunächst auf 1.0 gesetzt werden.

Es ist nun k_2 so zu wählen, daß sich für verschiedene Werte von $\dot{\epsilon}$ gleiche Verläufe $c_1(\gamma)$ ergeben.

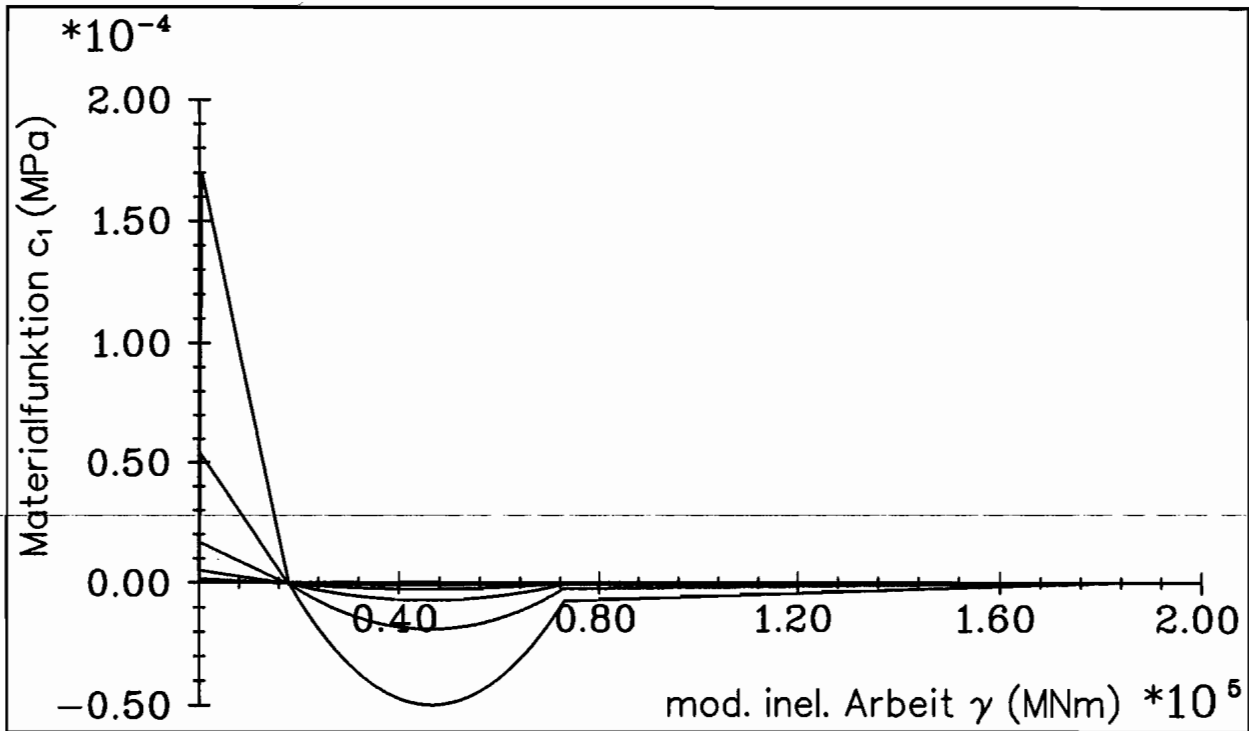


Abb. 35: Materialfunktion $c_1(\gamma)$ bei $k_2 = 3.0$

In Abb.36 sind mit $k_2 = 2.26$ Materialfunktionen c_1 für $\dot{\epsilon} = 10^{-7\frac{1}{3}}$ bis $10^{-3\frac{1}{3}}$ aufgetragen. In Verbindung mit Abb.35, die einen Zwischenschritt bei noch nicht optimierter Wahl von k_2 darstellt, ist der Einfluß dieses Parameters offensichtlich.

Während der Verlauf der Kurven in Abb.36 bei negativen c_1 recht gut übereinstimmt, ist im Anfangsbereich ein Auffächern bei Annäherung an $\epsilon = 0$ festzustellen. Dies ist dadurch begründet, daß als ein charakteristischer Punkt der Kurven der Beginn der Mikrobrüche angesetzt worden ist, welcher im Gegensatz zum Spannungsmaximum und Residuumswert nicht bei einem konstanten Dehnungswert auftritt (siehe auch Abb. 24).

Ein Nachrechnen der Druckkurven auf Basis des Stoffgesetzes, sowie der (bzw. einer) ermittelten Materialfunktion $c_1(\gamma)$ führt zu dem in Abb.37 gezeigten Verlauf.

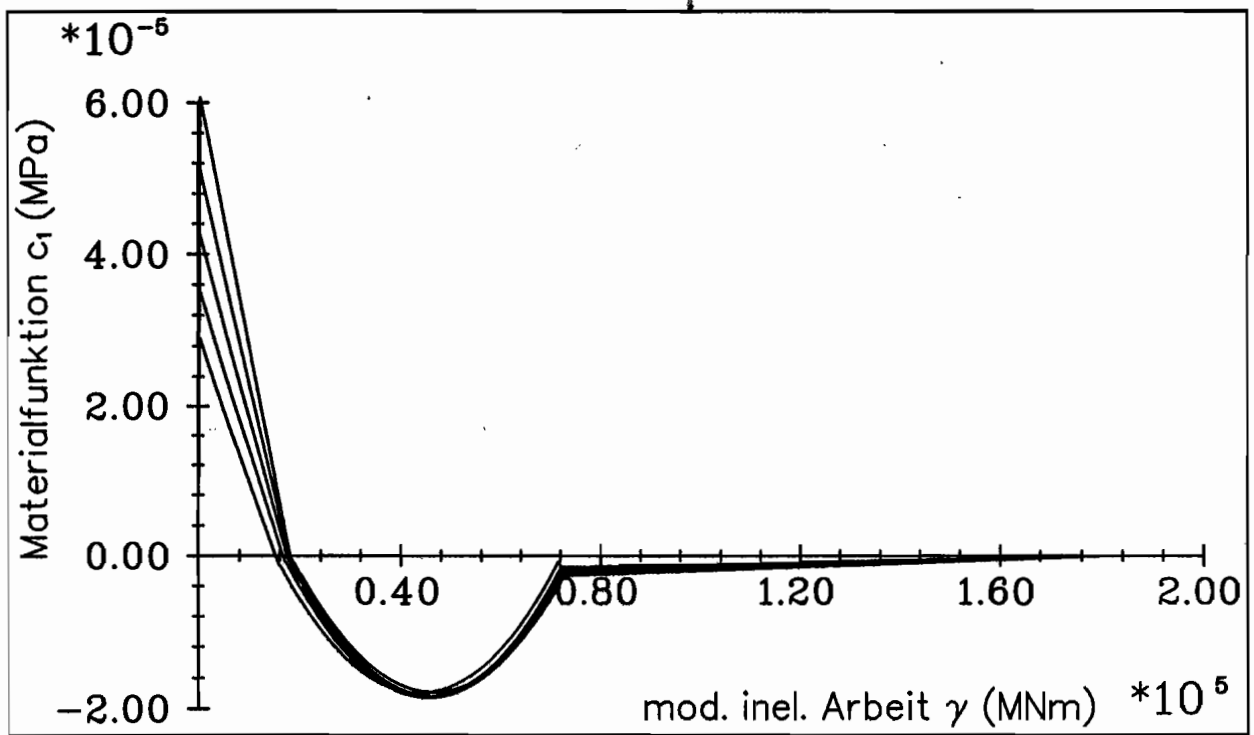


Abb. 36: Optimierte Parameterwahl für die Materialfunktion $c_1(\gamma)$ mit $k_2 = 2.26$

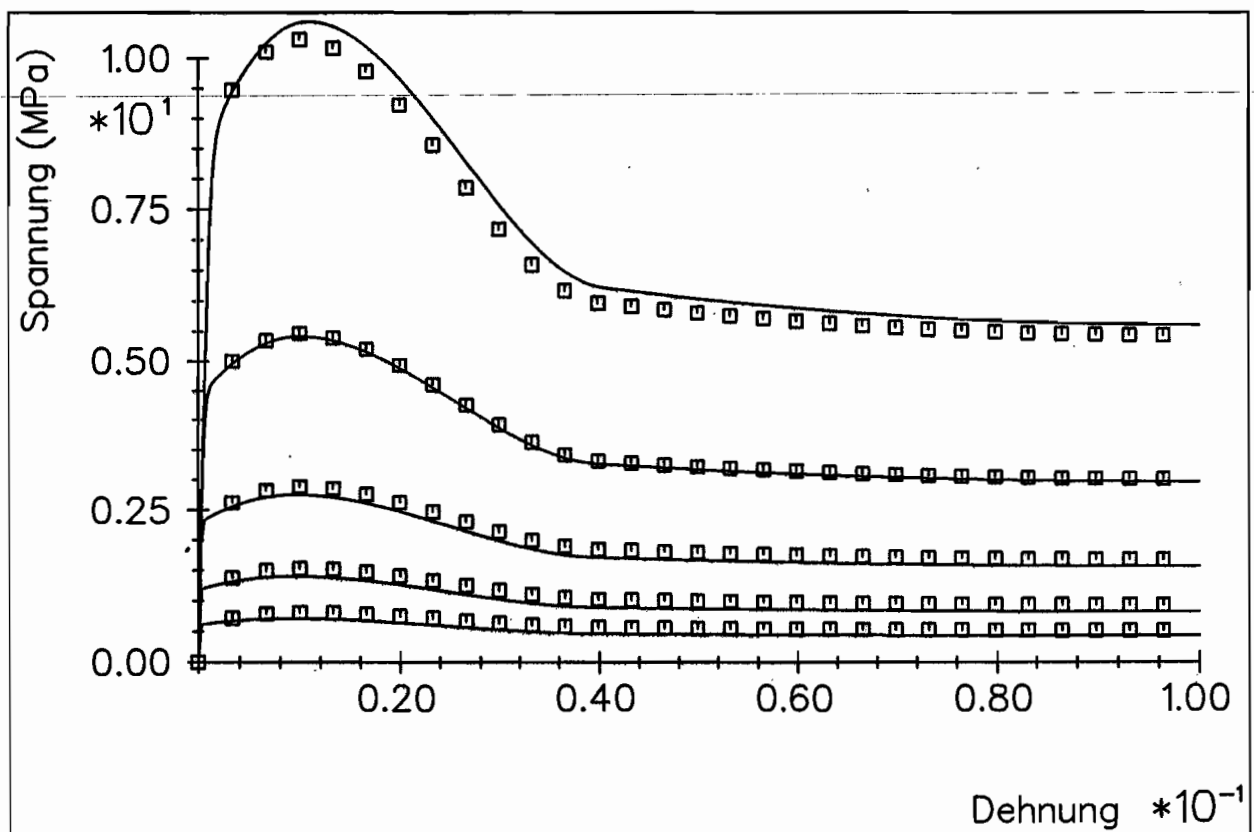


Abb. 37: Vergleich zwischen idealen Kurven (Zentralsymbole) und Rechnungen (durchgezogene Linien)

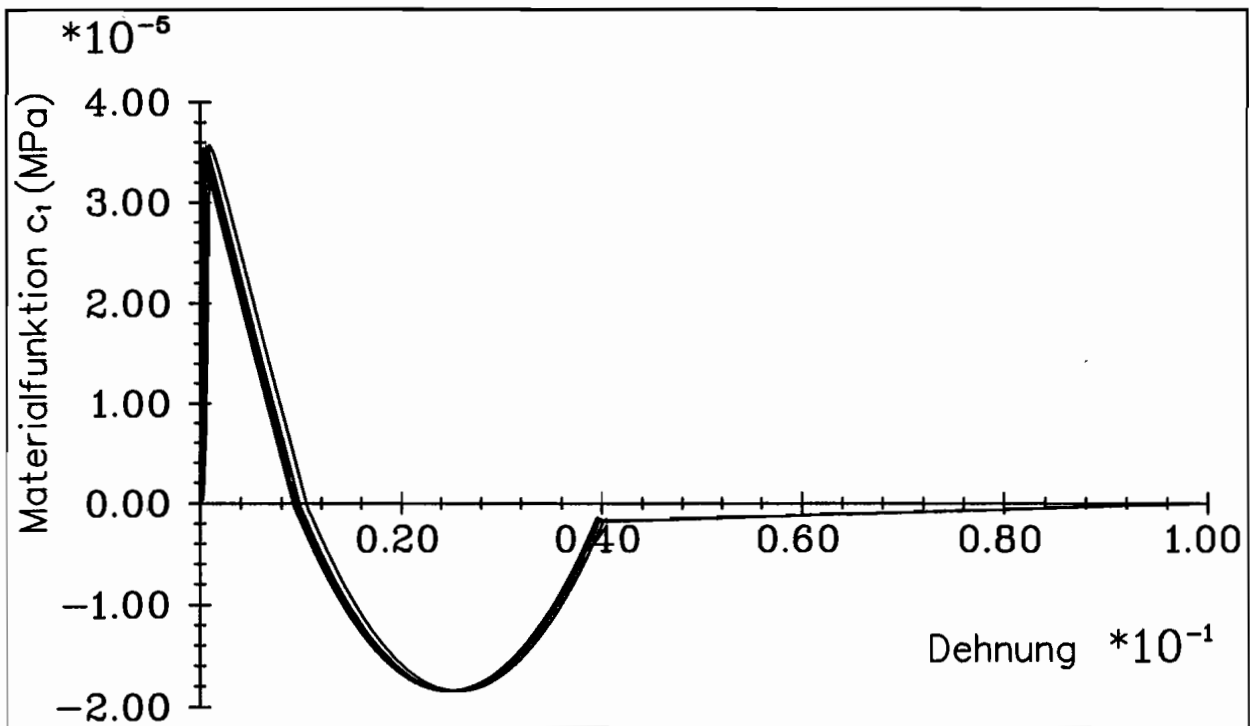


Abb. 38: Materialfunktion nach der Stoffgesetzentegration

Die Druckkurve mit der Geschwindigkeit der ausgewählten Funktion c_1 kann nahezu exakt wiedergegeben werden. Bei anderen Geschwindigkeiten treten aufgrund des Auffächerns in Abb.36 kleine Abweichungen zu den zu Vergleichszwecken gezeigten idealen, vorgegebenen Kurven auf. Knicke der Materialfunktion haben keinen Einfluß auf die Rechnungen und finden sich in diesen nicht wieder.

Abb.38 zeigt ein erneutes Auftragen von c_1 über ε , welches jetzt aus der Stoffgesetzentegration bestimmt wurde. Das anfänglich geringe Streuband resultiert hier aus dem unterschiedlich großen Einfluß der linearen Spannungs-Dehnungsbeziehung bis zum Erreichen der Mikrobruchspannung.

Der Verlauf der Ver- bzw. Entfestigung wird in Abb.39 deutlich. Einer verschwindenden Verfestigung im anfänglich linearen Bereich der Spannungs-Dehnungsbeziehung folgt nach einem steileren Anstieg bei 1% Dehnung der Maximalwert. Der Wendepunkt aus Abb.37 entspricht dem Nulldurchgang dieser internen Variablen. Im Zuge einer anwachsenden Dehnung tritt bei allen Geschwindigkeiten Entfestigung auf. Die Rate dieser Größe geht für $\varepsilon \approx 10\%$ gegen Null.

In einer etwas ungewohnten Darstellung (Abb.40) werden charakteristische Punkte deutlich. ξ über c_1 aufgetragen stellt die Beziehung zwischen der internen Variablen und der in der Evolutionsgleichung stehenden Materialfunktion dar.

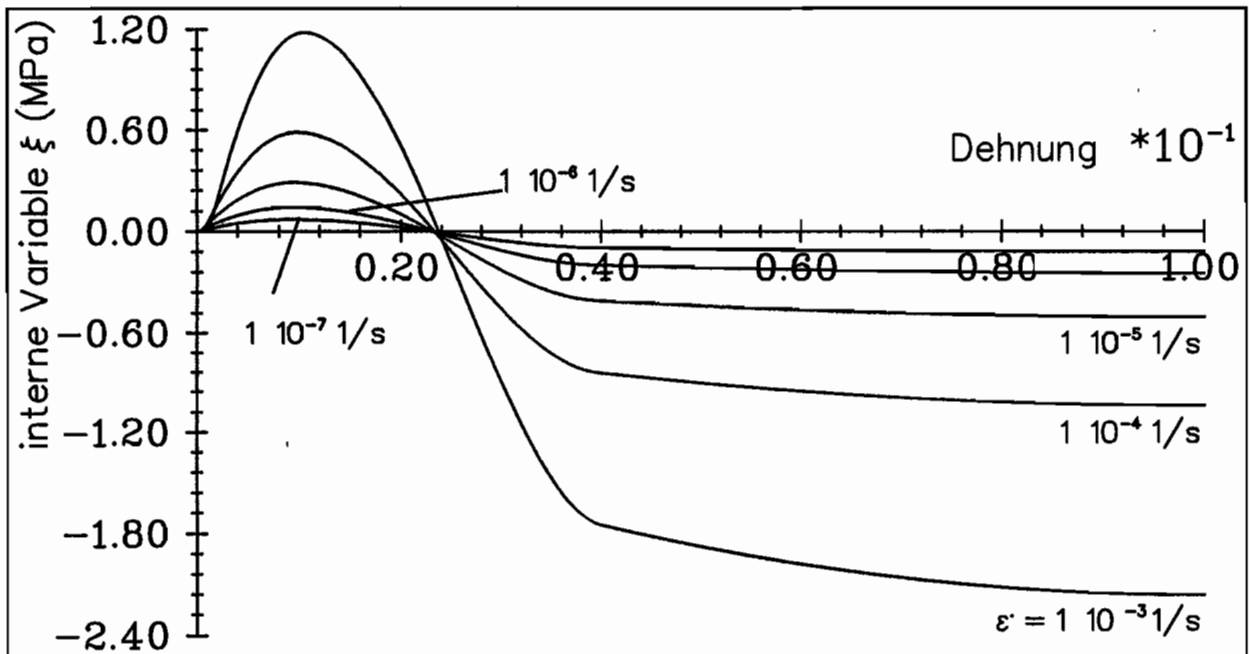


Abb. 39: Ver- bzw. Entfestigung beim einaxialen Druck

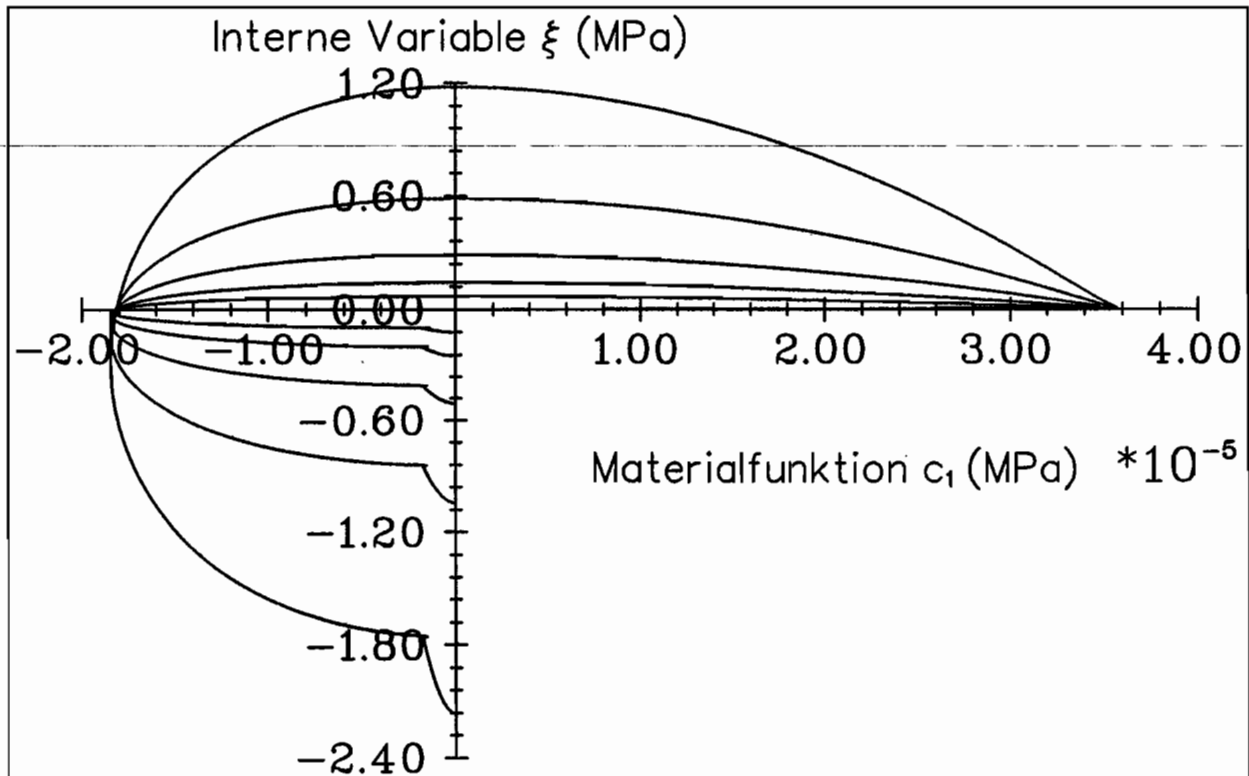


Abb. 40: Beziehung zwischen der internen Variablen ξ und der Materialfunktion c_1

Maximum und Wendepunkt aus Abb.39 treten als Nulldurchgänge bei c_1 bzw. ξ auf. Das bei minimalem c_1 feststellbare Auswandern zu negativen Werten für ξ ist eine

Folge des Streubandes aus Abb.38.

5.5 Separation der tensorwertigen internen Variablen $\underline{\xi}$

In Kap.5.4 sind zur Anpassung monotoner Druckkurven die internen Variablen $\underline{\xi}_v$ und $\underline{\xi}_r$ zu $\underline{\xi}$ zusammengefaßt worden. Dies wurde zur Ermittlung der Materialfunktionen erforderlich, da aus den vorliegenden Experimenten keine analytische Trennung der Einflüsse möglich ist. Die Rechnung zeigt, daß dies für konstante Belastungen auch im Modell nicht benötigt wird.

Erweitert man das Spektrum der zu rechnenden Belastungspfade beispielsweise dahingehend, daß sich nach einer anfänglichen Belastung die Lastrichtung ändert und eine Haltezeit bei verschwindender äußerer Spannung auftritt, zeigt sich die Problematik bei nur einer internen Variablen.

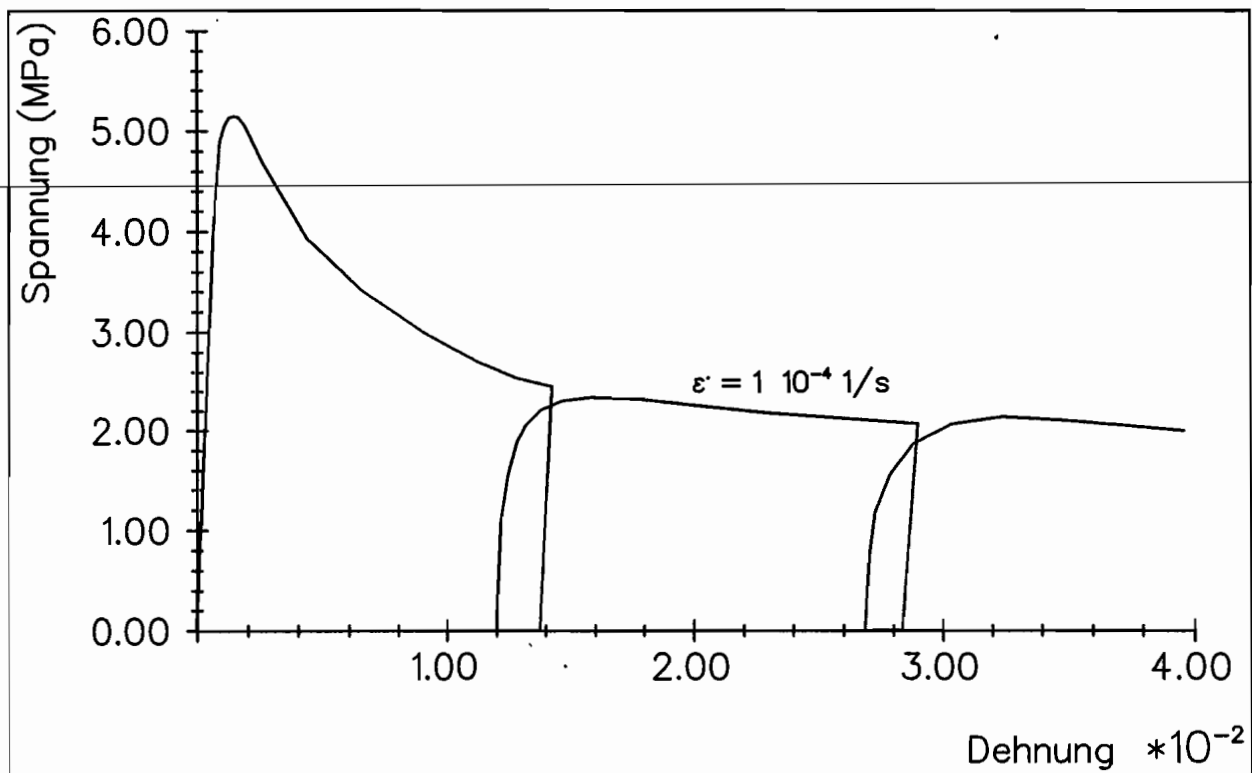


Abb. 41: Versuch mit Zwischenentlastung (STONE ET. AL (1989))

Da im Gegensatz zu vielen anderen Werkstoffen die einaxiale Druckkurve nicht monoton verläuft (siehe z.B. Abb.22), tritt ein Wendepunkt in der Darstellung der Spannung über der Dehnung auf. Die Folge ist, daß eine gewählte interne Variable ξ ab diesem Punkte negativ wird.

Eine Separation gemäß (5.18) erzeugt aus (4.58) weiterhin ohne Berücksichtigung des Temperatureinflusses einaxial

$$\dot{\varepsilon} = \Phi(I_2) \frac{1}{\sqrt{J_2}} \frac{4}{3} \left(\sigma - \frac{3}{2} \xi_v \right). \quad (5.47)$$

In diesem Zusammenhang ist besonders zu beachten, daß im Gegensatz zum klassischen Ansatz das Vorzeichen der Dehnungsrate hier offensichtlich nur vom Verfestigungsanteil abhängt. Spaltet man nun ξ in zwei stets positive Summanden ξ_v und ξ_r auf, so ist gewährleistet, daß bei Eigenspannungen, die größer als die äußeren Spannungen sind, die Dehnungsrichtung von gerade diesen positiven Eigenspannungen vorgegeben wird. Während bei klassischen Formulierungen hier eine Zunahme der Dehnungen zu erwarten ist, weist dieses "Eis-Modell" eine Dehnungsabnahme auf, die dem in Abb.41 experimentell beobachteten Verlauf bei verschwindender äußerer Belastung entspricht.

Die Aufspaltung von ξ ist eng mit der ermittelten Materialfunktion $c_1(\gamma)$ verbunden. c_{v1} und c_{r1} (siehe Gleichung (5.21)) sind dabei aus geeigneten Zeitstandsversuchen zu bestimmen. Da diese derzeit noch nicht vorliegen, ist ein Ansatz der Form

$$c_{v1}(\gamma) = e_1 \exp(-e_2 \gamma) \quad (5.48)$$

verwendet worden. e_1 und e_2 sind hierin Konstanten mit den Werten

$$e_1 = 5.1 \cdot 10^{-5},$$

$$e_2 = 5.66 \cdot 10^{-5}.$$

Die internen Ver- bzw. Entfestigungsprozesse weisen bei konstanten Belastungen einen Verlauf gemäß Abb.42 bzw. Abb.43 auf.

Die Evolutionsgleichungen lauten aus (4.59) und (4.60)

$$\dot{\xi}_v^\nabla = c_{v1}(\gamma) a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} \underline{\mathbf{D}}_i - c_{v3} \xi_v, \quad (5.49)$$

$$\dot{\xi}_r^\nabla = c_{r1}(\gamma) a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} \underline{\mathbf{D}}_i - c_{r3} \xi_r \quad (5.50)$$

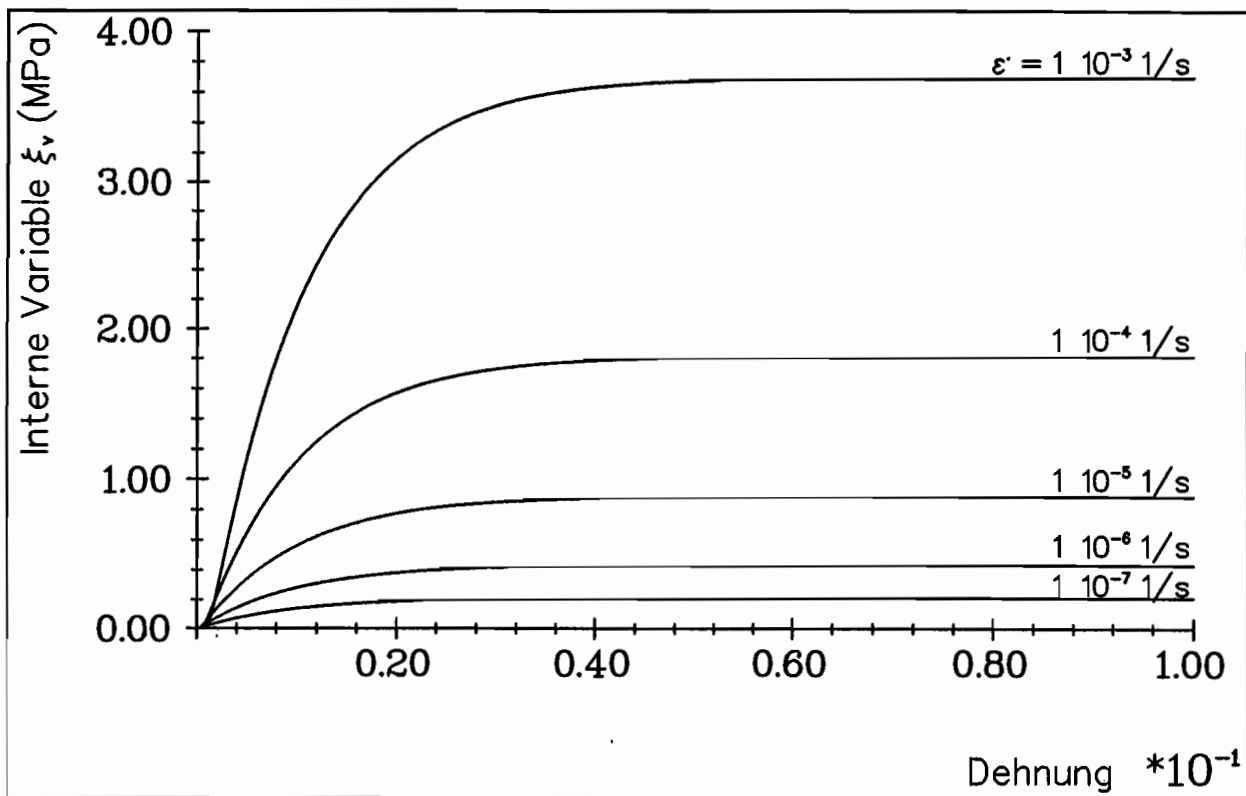


Abb. 42: Verfestigung bei einaxialen Druckversuchen

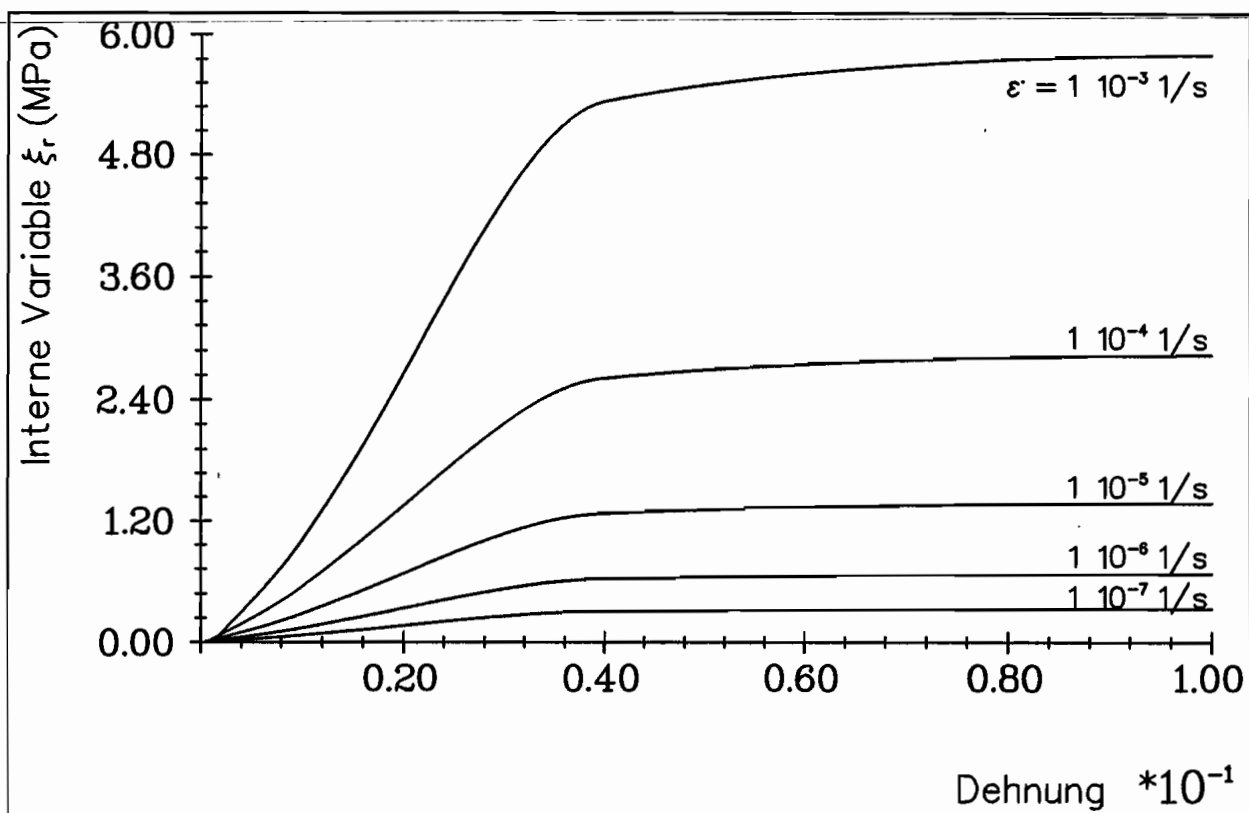


Abb. 43: Entfestigung bei einaxialen Druckversuchen

bzw.

$$\dot{\xi}_v = c_{v1}(\gamma)a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} \dot{\epsilon}_i - c_{v3}\xi_v, \quad (5.51)$$

$$\dot{\xi}_r = c_{r1}(\gamma)a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} \dot{\epsilon}_i - c_{r3}\xi_r. \quad (5.52)$$

Der jeweils erste Summand der Gleichungen (5.49), (5.50) bzw. (5.51), (5.52) wurde in der bisher durchgeführten Anpassung bestimmt. In Verbindung mit Gleichung (5.47) und Zeitstandversuchen (z.B. Abb.41) wird deutlich, daß an dieser Stelle zusätzliche Variationsterme (Erholungsterme) benötigt werden, die die zeitliche Veränderung der internen Größen steuern. Es ist sicherzustellen, daß nach einer Vorgeschichte bei verschwindender äußerer Spannung die Dehnungen abnehmen und die Dehnungsrate in Abhängigkeit einer experimentell noch zu ermittelnden Dehnungsbeziehung im Laufe dieses Prozesses verschwindet.

Erst die Berücksichtigung der Variationsterme ermöglicht eine Anpassung an diese Kurven.

Aus den thermodynamischen Restriktionen (Gleichung (4.85) und (4.93)) folgt

$$c_{v3} = -c_{r3}. \quad (5.53)$$

In Anlehnung an den Ansatz nach ARMSTRONG-FREDERICK (1966) gelte

$$c_{v3} = c_{v3}(\|\underline{\mathbf{D}}_i\|, \underline{\mathbf{T}}, \alpha_i). \quad (5.54)$$

Mit

$$c_{v3} = d_1 c_{r1}(\gamma) \frac{\|\underline{\mathbf{D}}_i\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \quad (5.55)$$

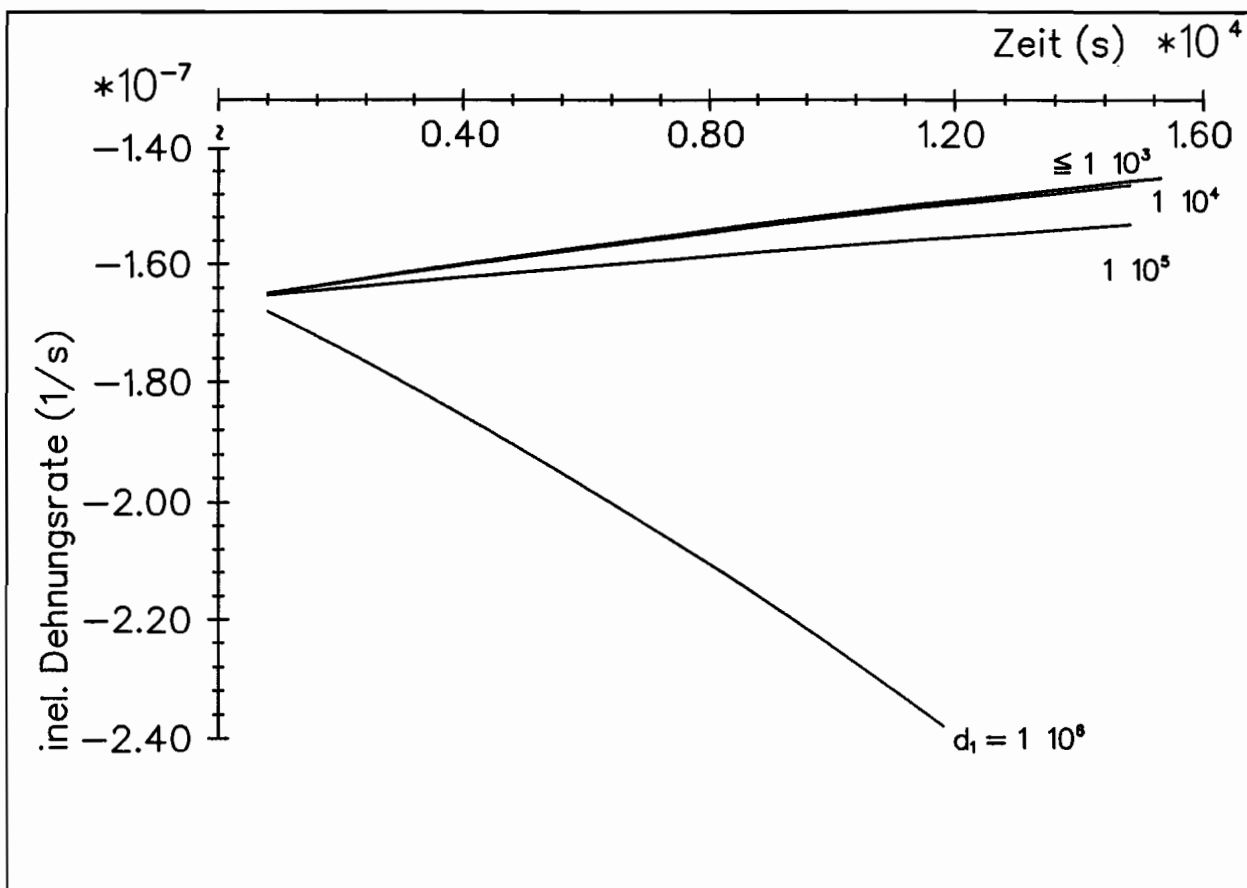


Abb. 44: Parameterstudie für d_1

ist gewährleistet, daß im Entlastungsfall mit negativem $\dot{\epsilon}$ die Rate von ξ_r stets negativ bleibt. Ebenfalls ist ein Abbau der als Eigenspannung interpretierbaren Größe ξ_v gegeben. d_1 ist hierin ein Parameter zur Anpassung der Kriechphase bei verschwindender äußerer Belastung.

Abb.44 veranschaulicht den Einfluß von d_1 . Bei der hier gewählten Vorbelastung (Dehnungsrate $1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$; Belastung bis $\epsilon = 0.03$; Entlastung bis $\sigma = 0 \text{ MPa}$) verschwindet für $d_1 \leq 1 \cdot 10^3$ der Einfluß der Variationsterme. In einem Bereich von $d_1 = 1 \cdot 10^5$ bis $1 \cdot 10^6$ liegt dagegen eine obere Grenze bei der Wahl von d_1 , da ab diesem Wert keine Abnahme der Dehnungsrate in der Erholungsphase (äußere Belastung identisch Null) auftritt.

Da die erforderlichen Versuchsergebnisse zur Anpassung dieses Parameters derzeit noch nicht vorliegen, ist

$$d_1 = 1.0 \quad (5.56)$$

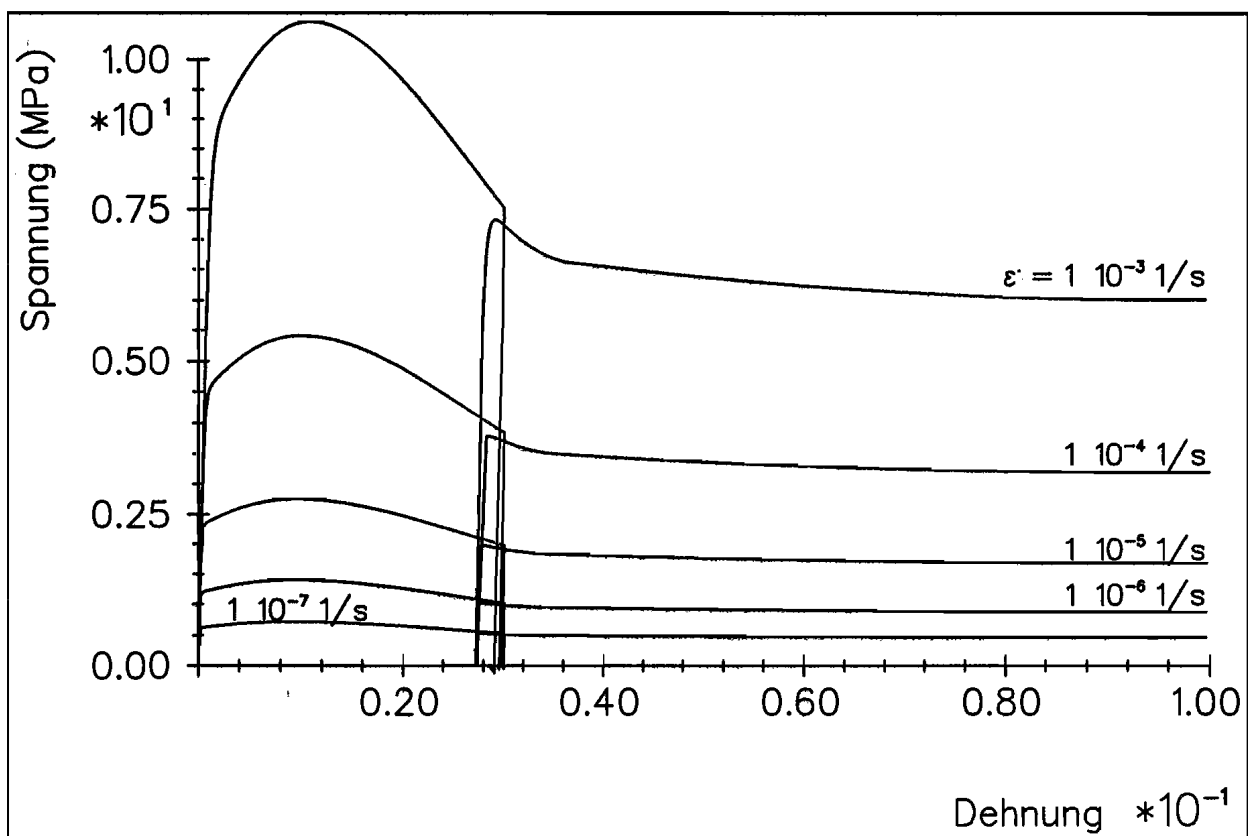


Abb. 45: Einaxiale Druckkurven mit Zwischenentlastung

gesetzt worden.

Die Schar der Druckkurven mit Zwischenentlastung bei Dehnungsraten zwischen $1 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}$ und $1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$ zeigt Abb.45. Bei allen Geschwindigkeiten tritt im Spannungs-Dehnungsverlauf kein Überschwingen beim erneuten Erreichen der Entlastungsspannung auf.

Die Abnahme der Dehnungen während der Erholungsphase ist in Abb.46 dargestellt. Auch bei mehrmaligem Entlasten (Abb.47) ist der gleiche charakteristische Verlauf zu beobachten.

In Abb.48 liegt eine anfängliche Belastungsphase mit einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$ vor, die nach der Zwischenentlastung auf $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$ angehoben wurde.

Der in Abb.49 dargestellte Spannungsverlauf resultiert aus einer ersten Belastung bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$, einer zweiten bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$ und einer dritten bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$.

Die Tendenz der Zwischenentlastungen und erneuten Belastungen ist experimentell in Abb.50 (STONE, JORDAAN, JONES, MCKENNA (1989)) verifiziert worden. Da mit unterschiedlichen Versuchsparametern im Gegensatz zu MELLOR und COLE (1982,

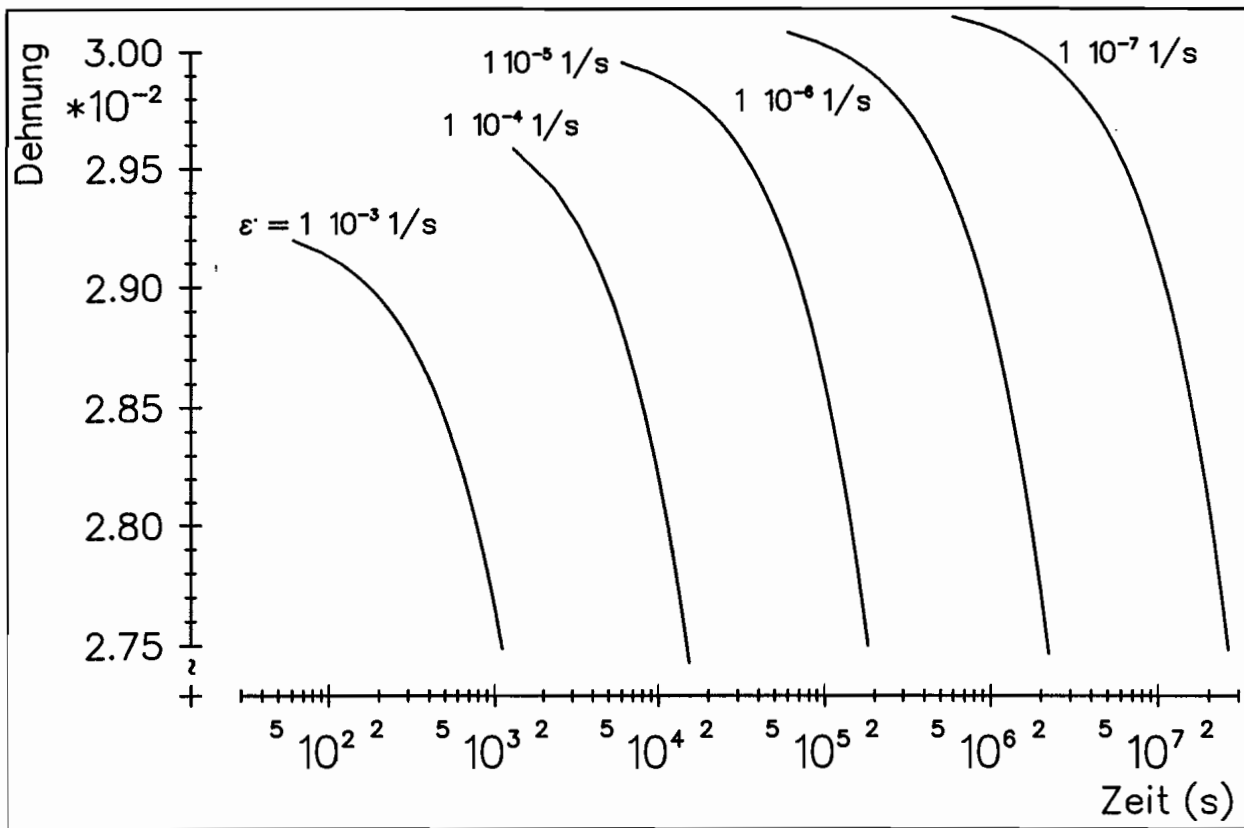


Abb. 46: Dehnungsverlauf während der Erholungsphase ohne äußere Last

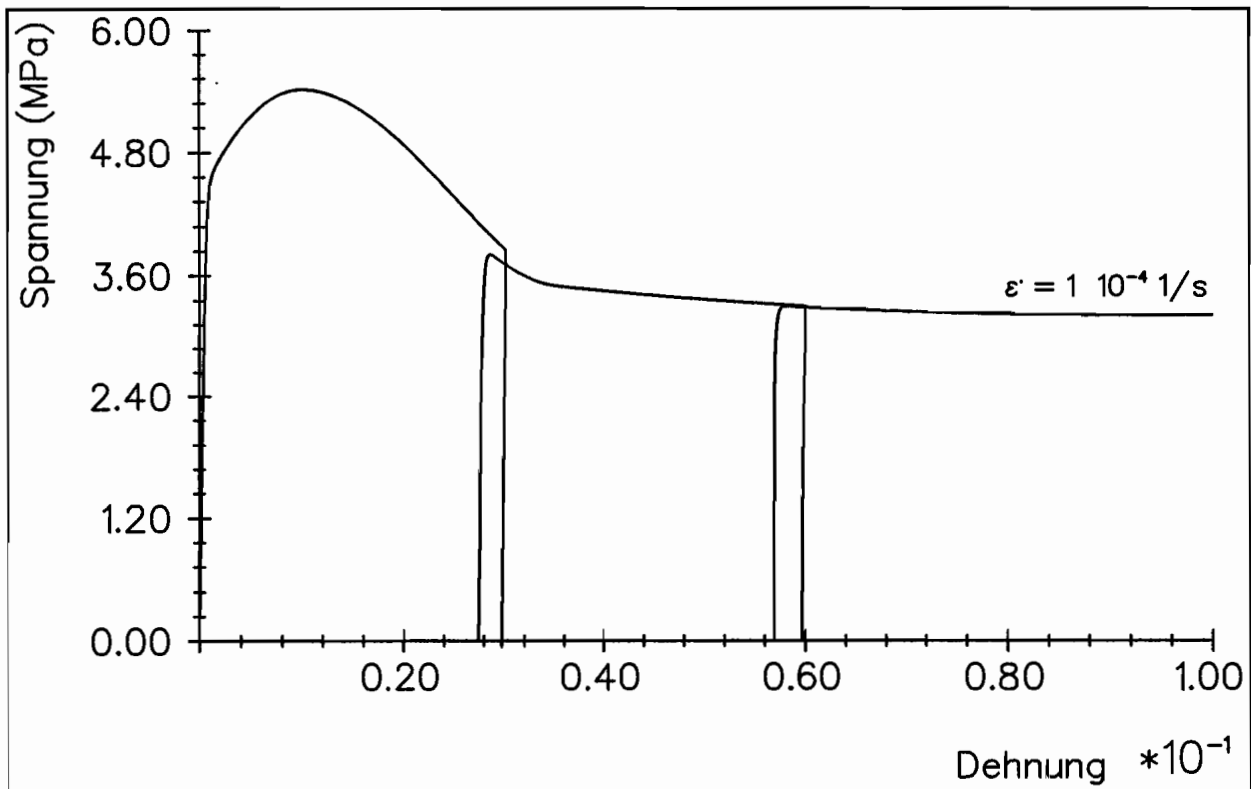


Abb. 47: Einaxialer Druckversuch mit mehrmaliger Zwischenentlastung

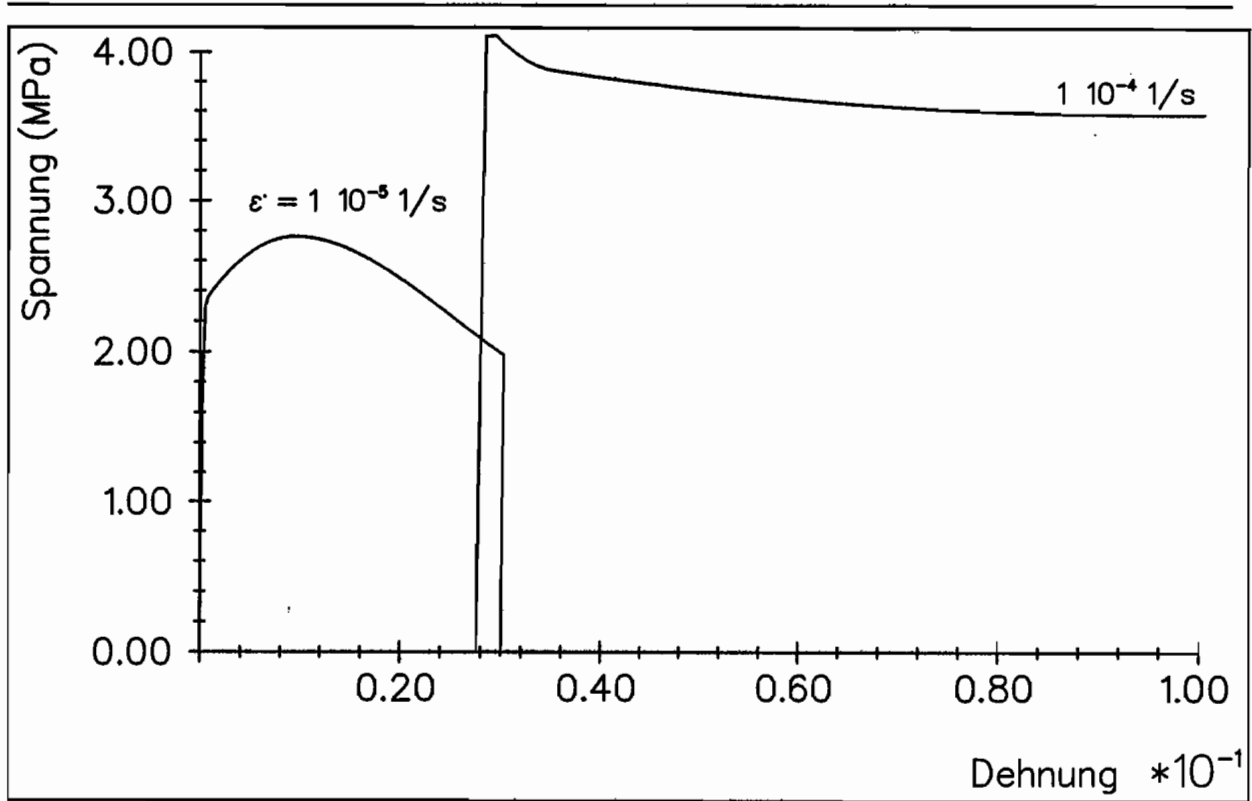


Abb. 48: Zwischenentlastung mit erhöhter Dehnungsrate bei Wiederbelastung

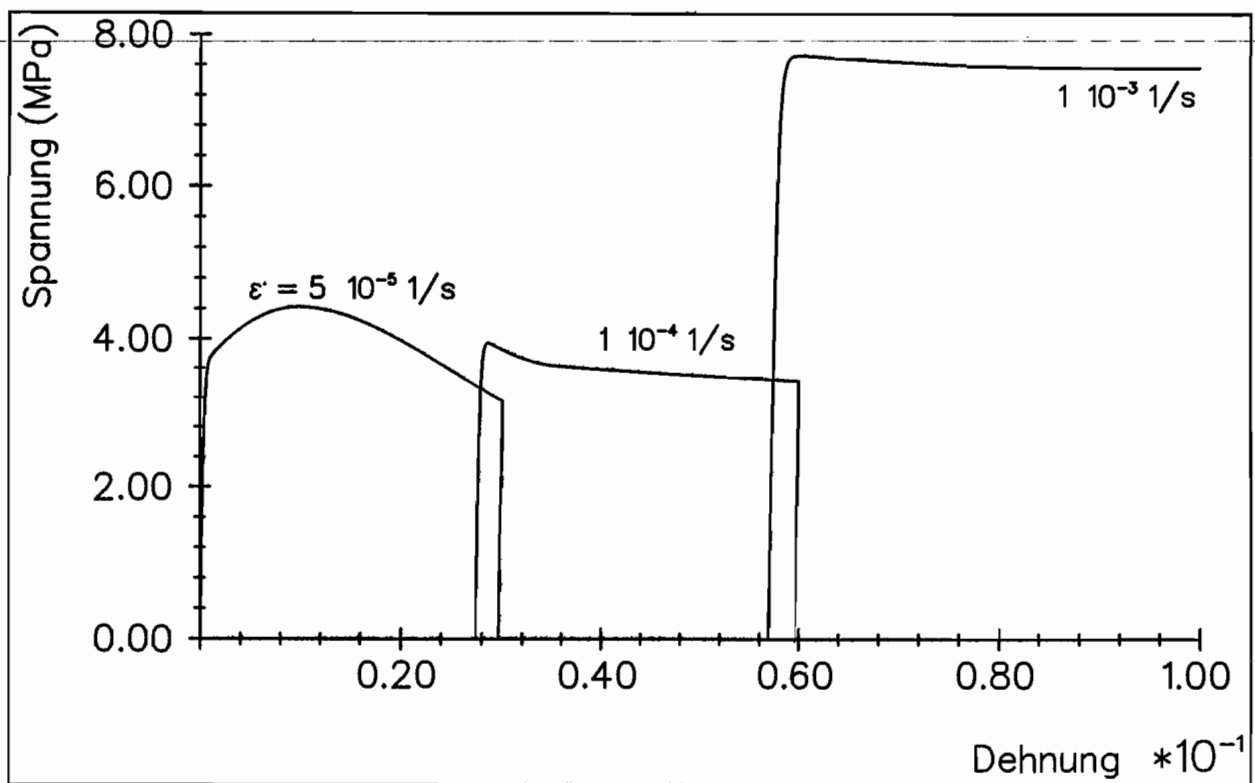


Abb. 49: Mehrfache Zwischenentlastung mit erhöhter Dehnungsrate bei Wiederbelastung

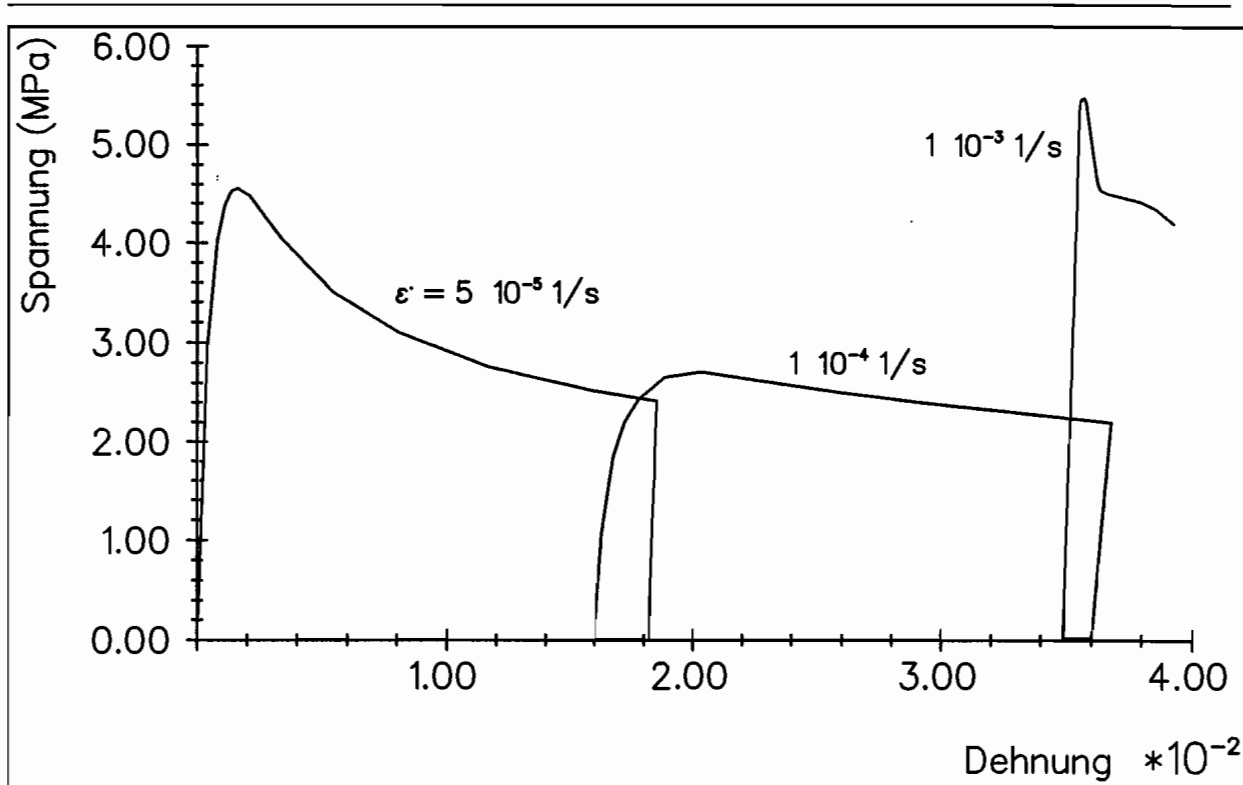


Abb. 50: Versuch mit mehreren Zwischenentlastungen (STONE ET. AL) (1989))

1983) gearbeitet worden ist, mögen diese Kurven zu einem qualitativen Vergleich herangezogen werden.

Eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment zeigt sich in Größe und Lage der lokalen Spannungsmaxima in Abb.49 und Abb.50, wobei das jeweilige Spannungsmaximum im Versuch ausgeprägter ist und bei einer geringeren Dehnung auftritt. Der Spannungsanstieg nach dem Zeitstand bei verschwindender äußerer Spannung erfährt in den experimentellen Untersuchungen einen "weicheren" Übergang auf das neue Spannungsniveau.

5.6 Ermittlung der Arrheniuskoeffizienten

Die in Kapitel 4.3 eingeführte Arrheniusgleichung (4.56) ist in Bezug auf die vorliegenden Experimente von MELLOR und COLE (1982) anzupassen. Dabei wird D_0 bei einer Referenztemperatur, hier $T_{Ref} = 268 \text{ K}$, zu

$$D_0 = \left(\exp \left(-\frac{Q}{RT_{Ref}} \right) \right)^{-1} \quad (5.57)$$

bestimmt. Mit der Aktivierungsenergie

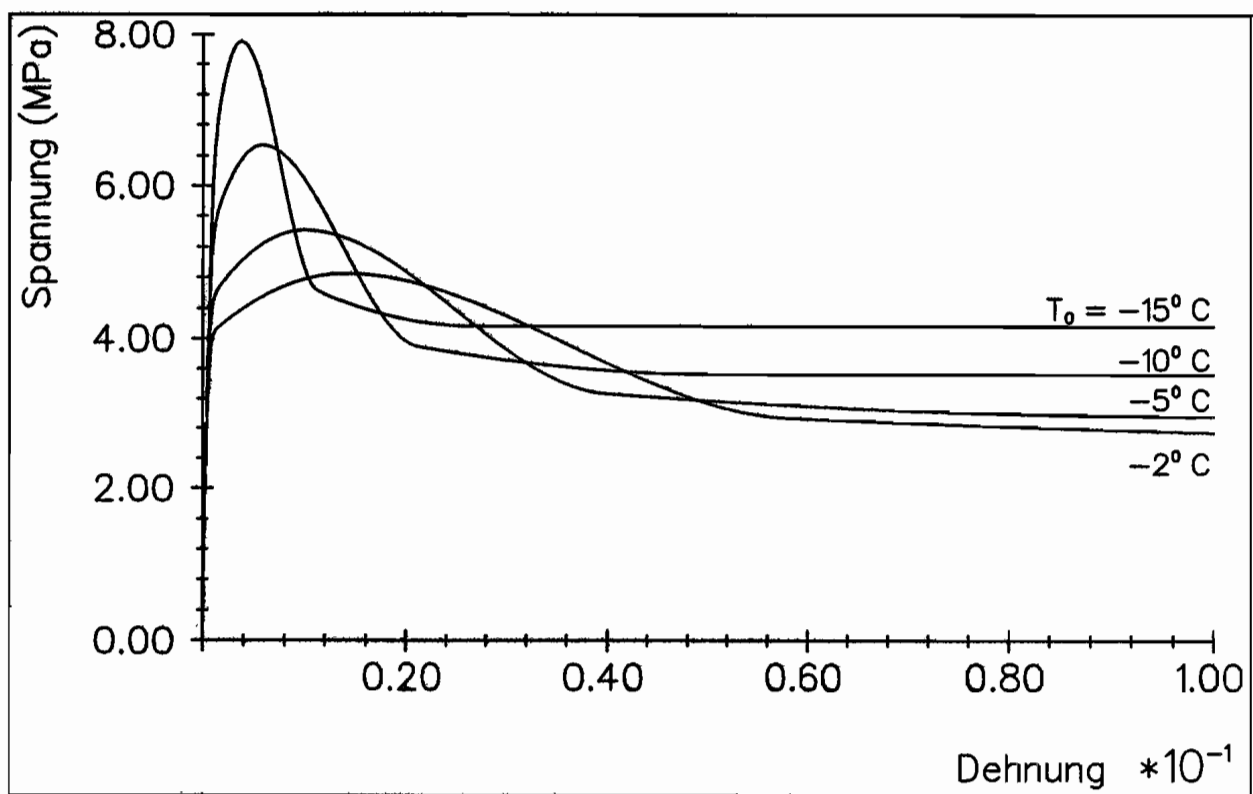


Abb. 51: Einaxialer Druckversuch bei verschiedenen Temperaturniveaus

$$Q = 78000 \frac{J}{mol}$$

und der allgemeinen Gaskonstanten

$$R = 8.3145 \frac{J}{mol \cdot K}$$

folgt

$$D_0 = 8.046 \cdot 10^{14}$$

Abb. 51 enthält Vergleichsrechnungen bei verschiedenen Temperaturen $T_0 = -2^\circ C, -5^\circ C, -10^\circ C$ und $-15^\circ C$.

Deutlich ist ein Anstieg der Spannungswerte mit Abnahme der Temperatur, sowie eine Verlagerung der Spannungsmaxima zu geringeren Dehnungswerten zu beobachten. Zum Vergleich enthält Abb.52 den einaxialen Druckversuch bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$ mit zwei Zwischenentlastungen bei $T_0 = -5^\circ C$ und $-10^\circ C$. Neben der Verschiebung

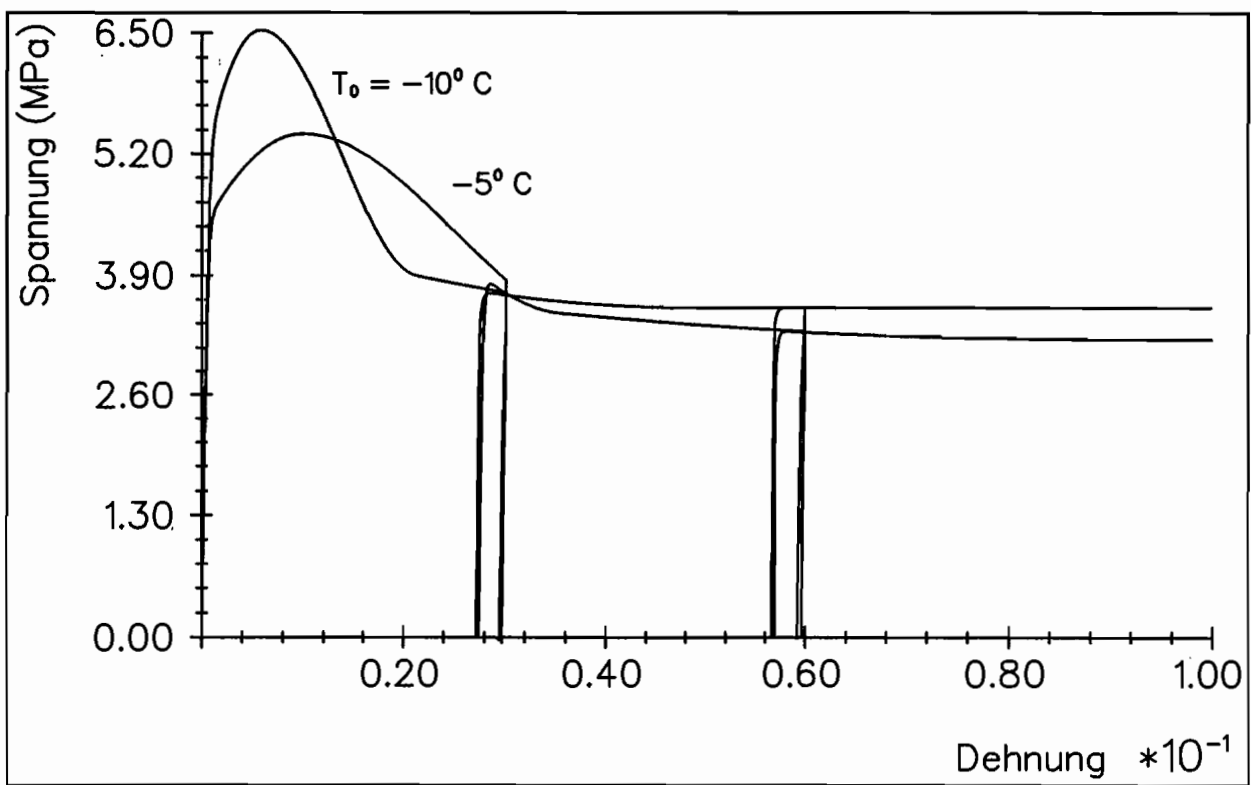


Abb. 52: Druckversuch mit Zwischenentlastungen bei verschiedenen Temperaturniveaus

des Spannungsmaximums zu geringeren Dehnungswerten fällt ein früheres Erreichen der Residuumschubspannung bei der geringeren Temperatur auf.

5.7 Nichtisotherme Rechnungen

Die bisherigen Rechnungen sind unter der Voraussetzung einer isothermen Prozeßführung durchgeführt worden. Für sehr langsame Belastungsvorgänge, die eine stetig ausreichende Wärmeabfuhr ermöglichen, ist diese Annahme sinnvoll und berechtigt. Schnellere Prozesse führen jedoch grundsätzlich zu einer Temperaturerhöhung im Material, die stark von der Wärmeübergangsmöglichkeit an angrenzende Medien (Wasser, Luft, Stahl, ...) abhängt. Dieser Übergang ist Thema der Wärmetechnik und soll hier nicht näher vertieft werden.

Aus Gleichung (4.25) und einer Vernachlässigung der Koppelterme (SZEPAN (1989); FELDMÜLLER (1991)) folgt als Bestimmungsgleichung für den Temperaturgradienten

$$\dot{T} = \frac{1}{c_p} \left(\dot{w}_d + T\dot{\eta} - r - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} \right) \quad (5.58)$$

Es soll nun in den weiteren Betrachtungen eine adiabate Prozeßführung als Sonderfall betrachtet werden. Eine Verallgemeinerung ist problemlos möglich.

Mit Gleichung (4.64), (4.72) und

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad (5.59)$$

folgt der Temperaturgradient

$$\dot{T} = \frac{\beta}{c_p \varrho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}}_i. \quad (5.60)$$

In dem hier betrachteten Temperaturintervall betragen die Zahlenwerte der spezifischen Wärmekapazität c_p und der Dichte ϱ

$$c_p = 1.93 \frac{kJ}{kgK},$$

$$\varrho = 0.92 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}.$$

Der Ansatz für die skalare Dissipationsfunktion β in Gleichung (4.86) mit (4.93) kann ohne Beeinträchtigung der Integrabilitätsbedingungen als

$$\beta = 1 - g |c_1(\gamma)| f_1 \quad (5.61)$$

formuliert werden.

Weiterführende Experimente werden eine exakte Bestimmung des dissipierten und nichtdissipierten Anteils der spezifischen Formänderungsarbeit untersuchen, wodurch eine Verifizierung von β und f_1 möglich wird; derzeit ist zur Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik zu gewährleisten, daß

$$a_3 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_4} c_{1max}(\gamma) < 1 \quad (5.62)$$

gegeben ist. Mit

$$f_1 = a_3 \quad (5.63)$$

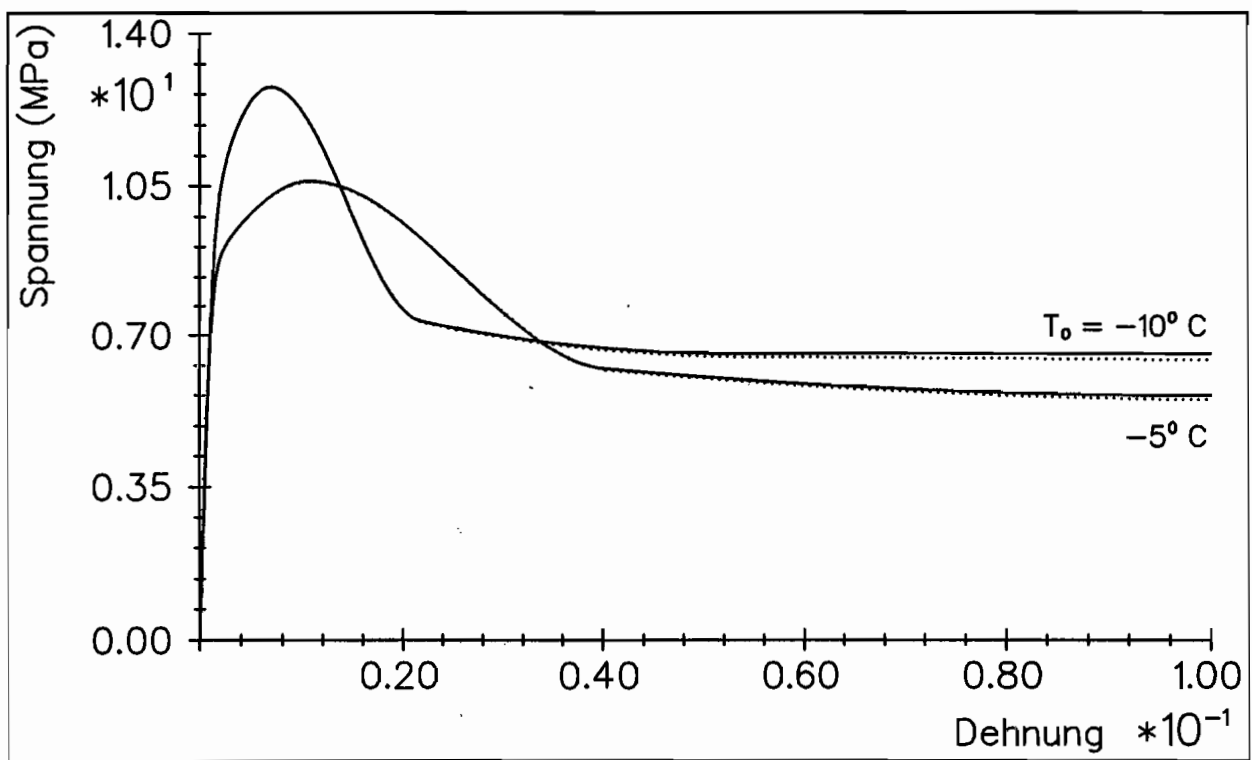


Abb. 53: Einaxialer Druckversuch mit adiabater (gepunktete Linie) und isothermer (durchgezogene Linie) Prozeßführung.

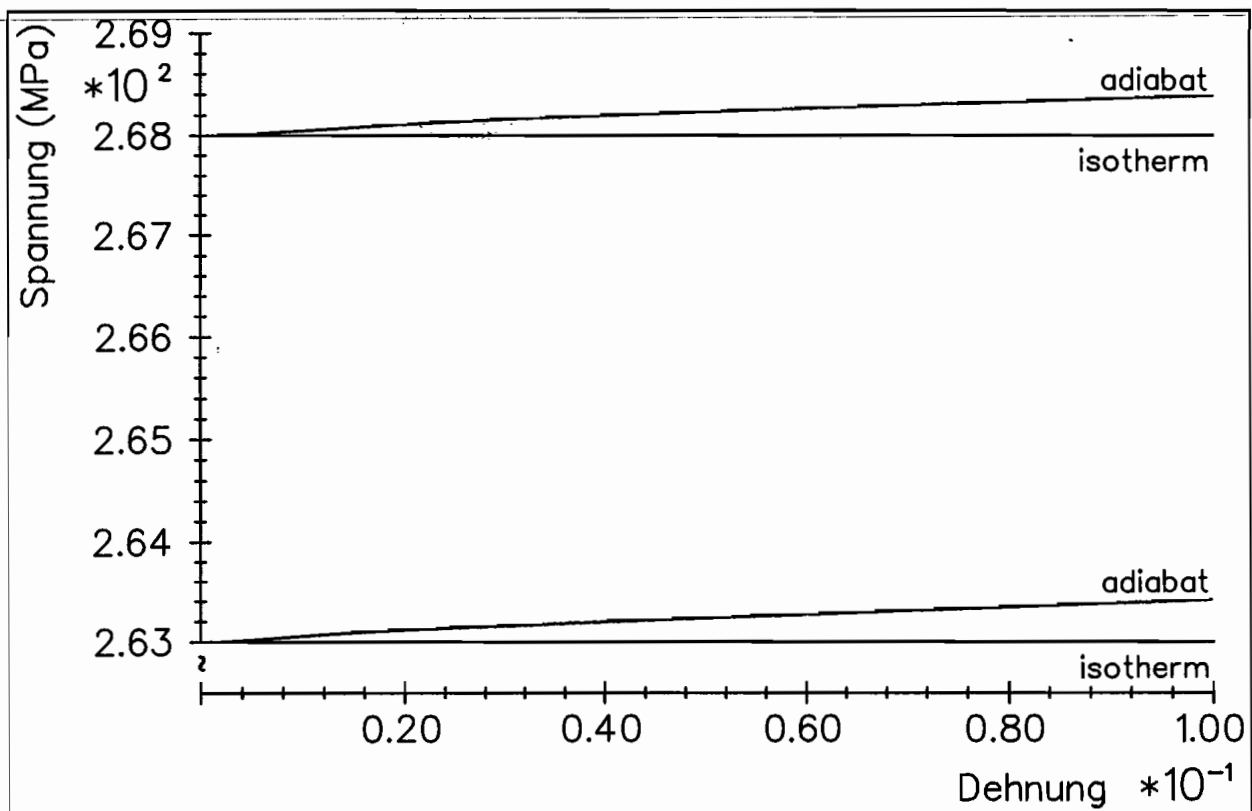


Abb. 54: Temperaturentwicklung zum einaxialen Druckversuch

sind Vergleichsrechnungen zwischen adiabaten und isothermen Prozessen durchgeführt worden.

Abb.53 zeigt für zwei Temperaturniveaus, $T_0 = -10^0 C$ bzw. $-5^0 C$, einaxiale Druckversuche bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$. Die Erwärmung des Materials um maximal $0.41 K$ bzw. $0.39 K$ bei $\epsilon = 10\%$ (siehe Abb.54) führt nur zu einer geringen Absenkung der Spannung. Der Einfluß der Temperaturänderung ist klein gegenüber der Bedeutung des Temperaturniveaus.

6. Verifikationsrechnungen

6.1 Einaxialer Druck mit konstanter Dehnungsrate

Zur Verifikation der Anpassung an ideale Druckkurven sind Versuche mit den entsprechenden Prozeßgeschwindigkeiten nachzurechnen. Als Basis dienen hier die bereits angesprochenen Ergebnisse von MELLOR und COLE (1982).

Es stehen 25 experimentell ermittelte Kurven zur Verfügung, die zur übersichtlicheren Darstellung auf die Abb.55, 57, 59 und 61 verteilt wurden.

Die zugehörigen Rechnungen (Abb.56, 58, 60, 62) sind in Bezug auf das Koordinatensystem dargestellt, welches durch die jeweiligen Experimente vorgegeben wurde.

Abb.55 und Abb.56 zeigen die Vergleichspaare im Bereich der Dehnungsraten von $1 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}$ bis $1.64 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$. Maximalwerte, Spannungsverläufe und Residuumswerte werden durch die Rechnungen angemessen wiedergegeben. Zu berücksichtigen ist dabei eine vorhandene Streubreite der Experimente, die besonders durch Versuche mit relativ geringeren Spannungen bei höheren Geschwindigkeiten und differierende Kurven bei gleichen Dehnungsraten deutlich wird. Überschwinger beim Einsetzen von Mikrobrüchen und Schwankungen des anfänglichen Tangentenmoduls werden durch das Stoffgesetz nicht wiedergegeben. Eine Reproduzierbarkeit dieser Phänomene ist jedoch auch nicht gewährleistet.

Die aufgrund der nur geringfügig variierten Geschwindigkeit gebildeten zwei Stränge in Abb.58 finden sich bei den Experimenten (Abb.57) weit gefächert wieder. Die Spannungswerte der vier Kurven bei $\dot{\epsilon} \approx 6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$ liegen in der Rechnung dabei etwas unterhalb eines (gedachten) gemittelten Verlaufes.

Ein ähnliches Verhalten liegt bei den Ergebnissen in Abb.59 und Abb.60 vor. Die Streuung der Experimente ist hier jedoch geringer als im voranbetrachteten Paar.

Aus den Abb.61 und 62 ist ersichtlich, daß eine gute Wiedergabe des Versuchs bis zu einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} \approx 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$ vorliegt. Bei höheren Geschwindigkeiten weichen die rechnerisch ermittelten Kurven besonders im Dehnungsbereich nach

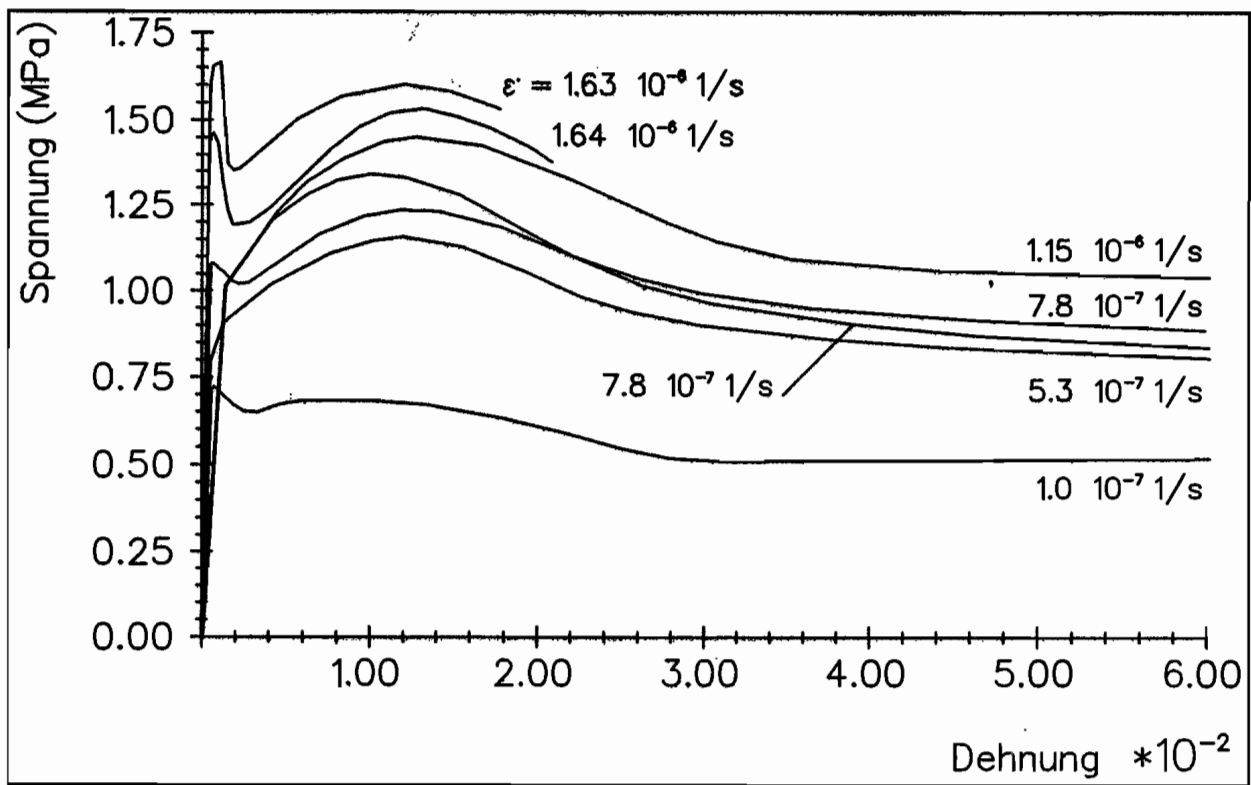


Abb. 55: Experimente zum einaxialen Druckversuch (MELLOR, COLE (1982))

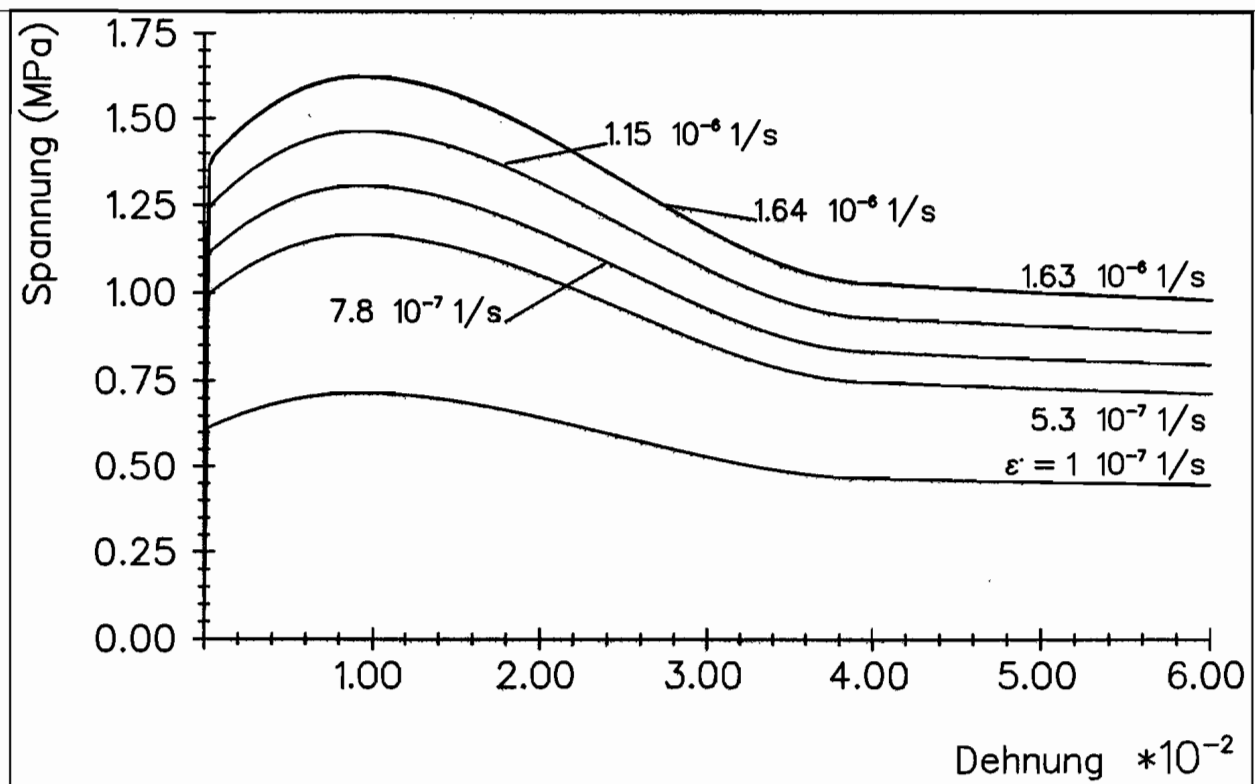


Abb. 56: Rechnungen zum einaxialen Druckversuch

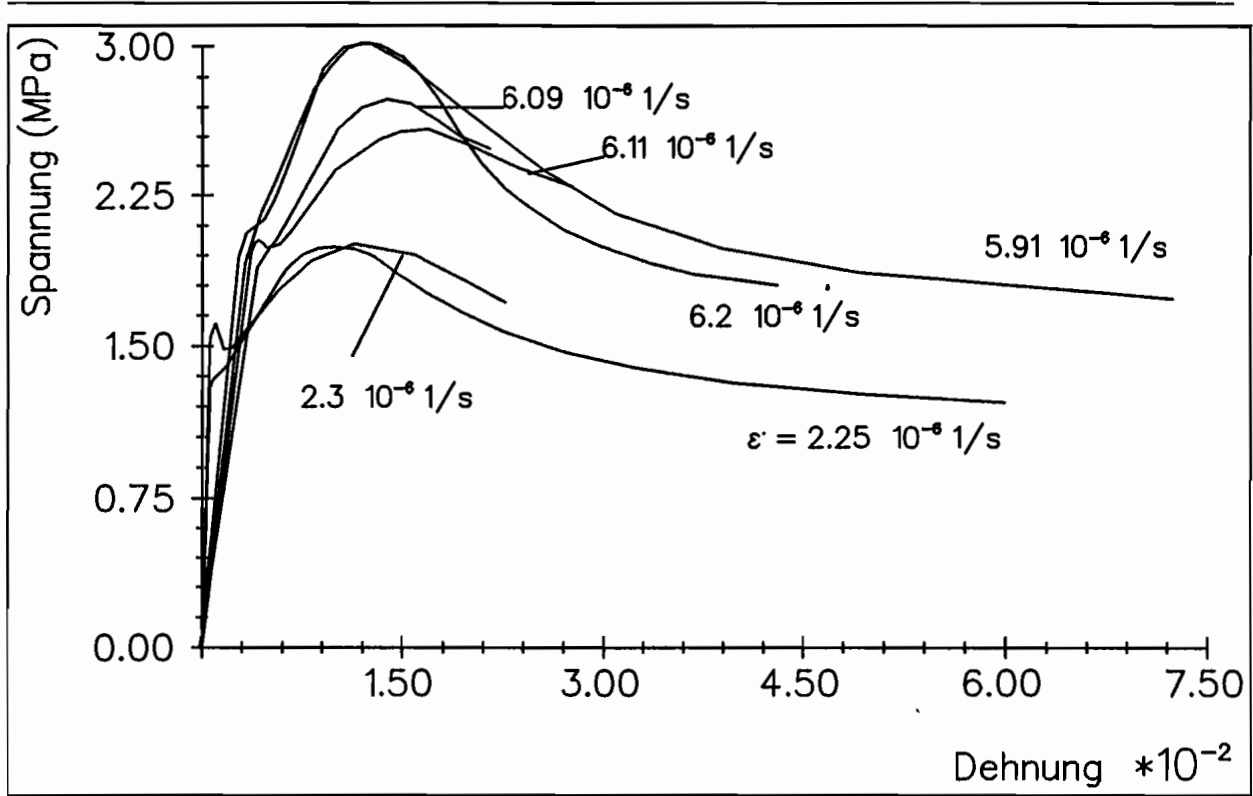


Abb. 57: Experimente zum einaxialen Druckversuch (MELLOR, COLE (1982))

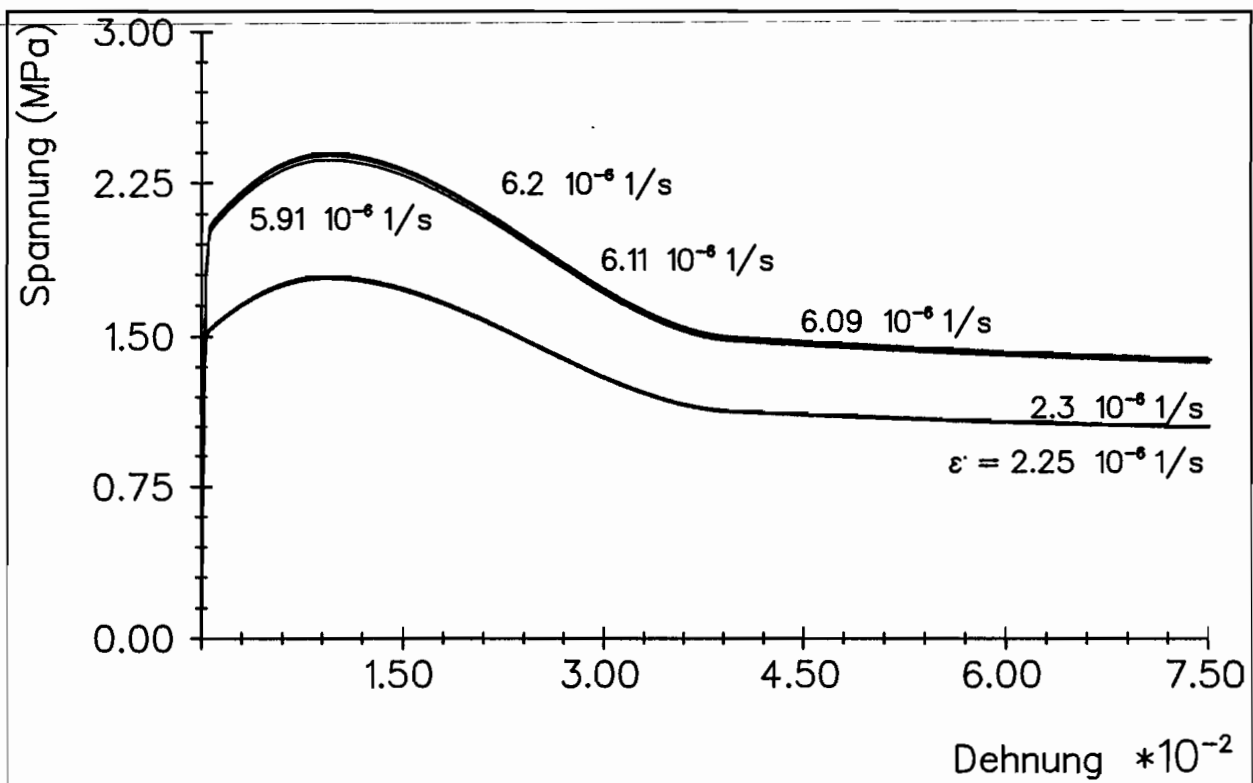


Abb. 58: Rechnungen zum einaxialen Druckversuch

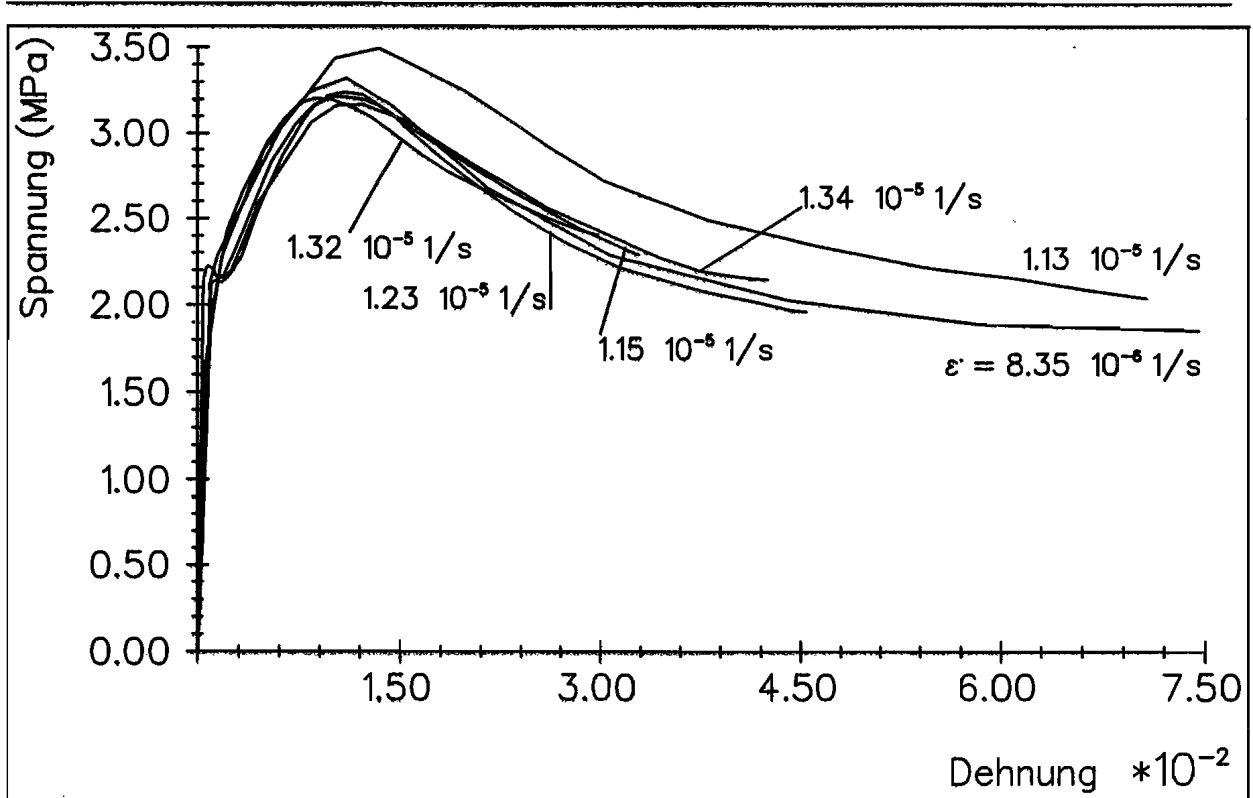


Abb. 59: Experimente zum einaxialen Druckversuch (MELLOR, COLE (1982))

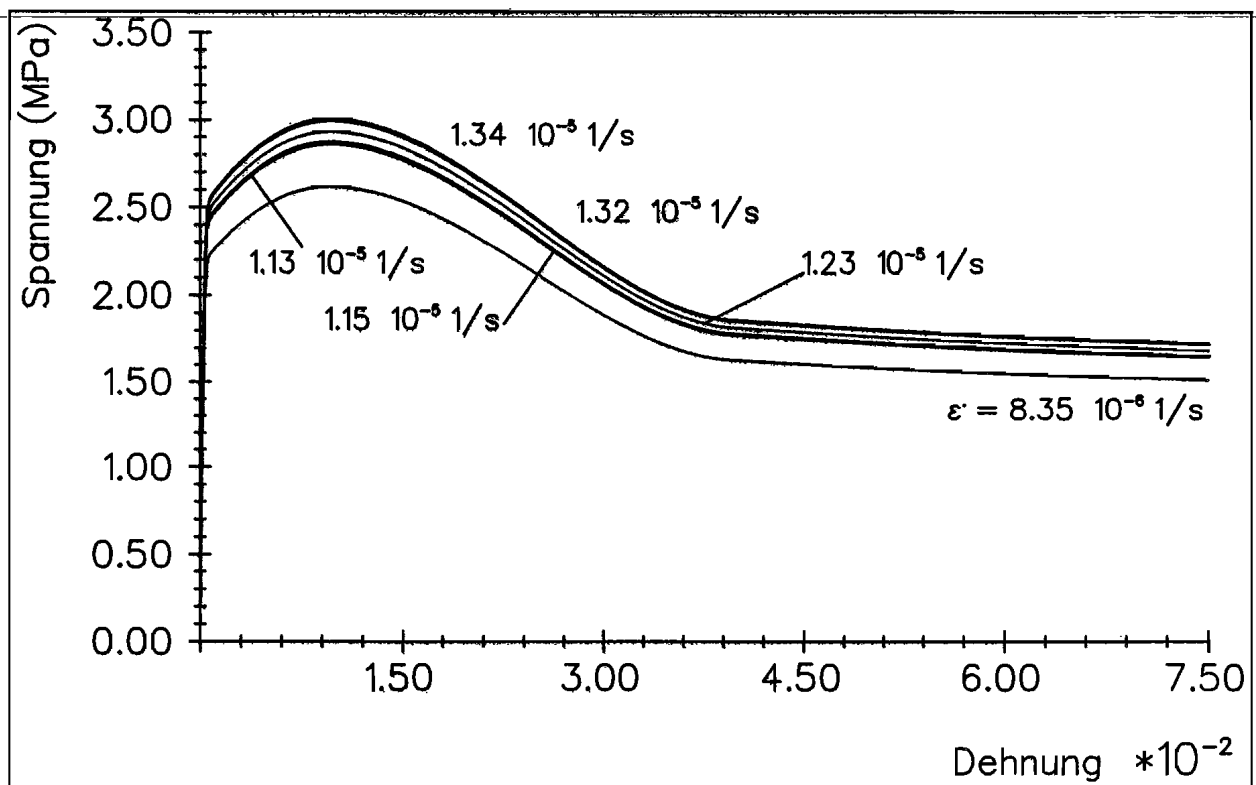


Abb. 60: Rechnungen zum einaxialen Druckversuch

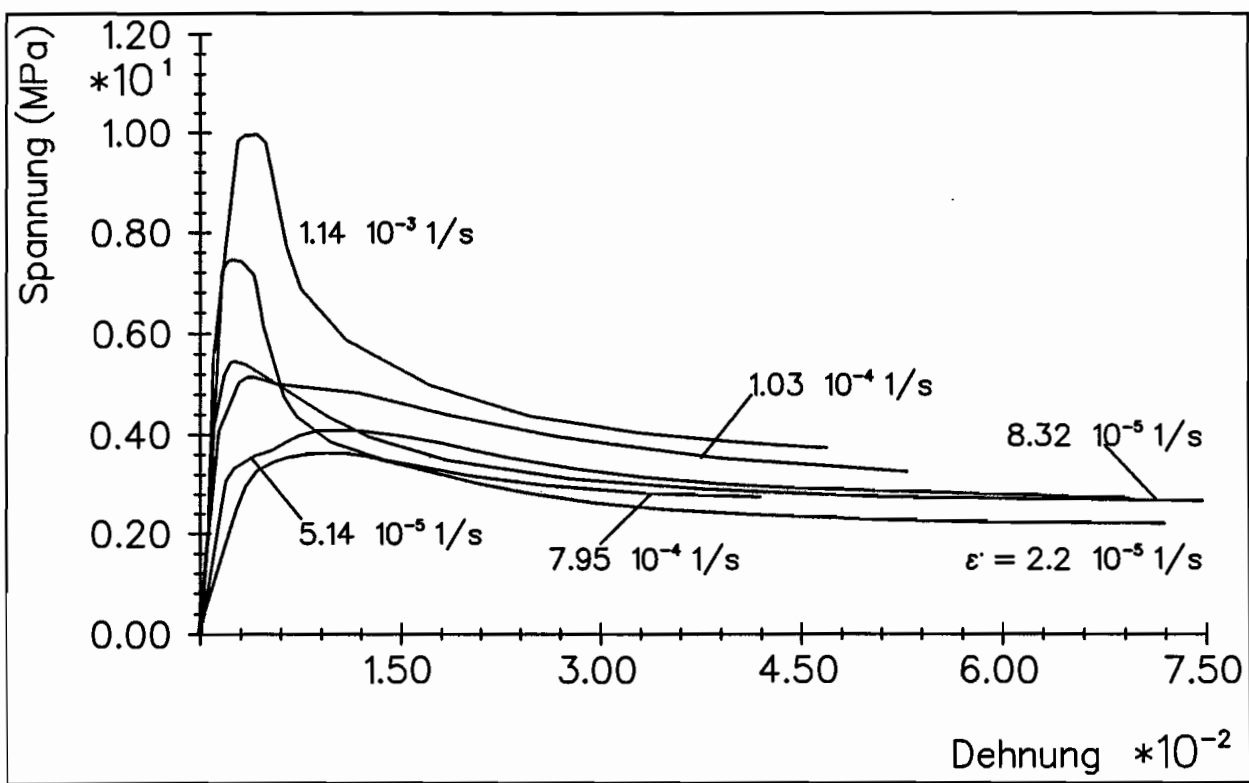


Abb. 61: Experimente zum einaxialen Druckversuch (MELLOR, COLE (1982))

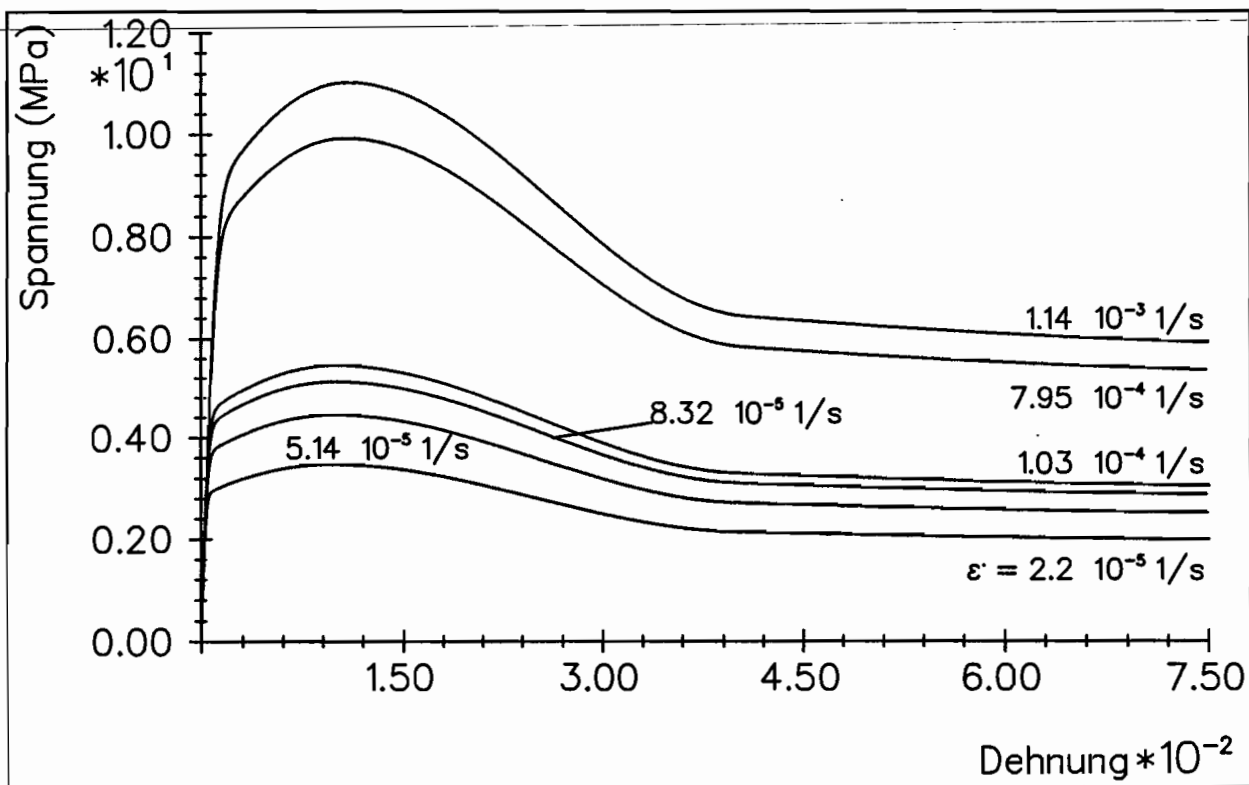


Abb. 62: Rechnungen zum einaxialen Druckversuch

dem Spannungsmaximum stark von den Experimenten ab. Der erheblich größere Betrag der Steigung und somit der frühere Spannungsabbau kann bedeuten, daß in diesem Geschwindigkeitsbereich Effekte auftreten, die von der bisherigen Modellbildung nicht oder nicht ausreichend erfaßt werden. Für eingehendere Untersuchungen scheinen neben Spannungs-Dehnungsverläufen Auswertungen interner Strukturveränderungen nicht nur hilfreich, sondern erforderlich zu sein.

6.2 Kriechen bei konstantem Druck

Mit den in Kap.5 ermittelten Materialfunktionen und -parametern, die unabhängig vom Belastungspfad stets gelten müssen, sind Kriechkurven zu verifizieren. Aufgrund homogener experimenteller Randbedingungen in Bezug auf die zur Anpassung verwendeten Versuche eignen sich besonders die von MELLOR und COLE (1982) gefundenen Kurven. Randeffekte durch unterschiedliche Oberflächengüte, verschiedene Belastungseinrichtungen, differierende Stoffzusammensetzungen, Korngröße usw. lassen sich in ihrem Einfluß minimieren. Eine Modellierung dieser Eigenschaften ist durch weitergehende Annahmen möglich, erfordert aber zuallererst deren Erfassung als Meßgröße.

Zur besseren Übersicht ist die Schar der Experimente auf drei Abbildungen verteilt worden. Bei Spannungen im Bereich von $\sigma = 0.8 \text{ MPa}$ bis 1.84 MPa folgt den Antworten des Modells bei der im Experiment vorhandenen Temperatur von -5°C eine Vergleichsrechnung bei -10°C .

Es ist stets davon auszugehen, daß die Last zu Beginn sehr schnell auf die Probe aufgebracht wurde. Genaue Rampenwerte dieser Belastungsphase sind jedoch nicht gemessen worden.

Eine besonders auffällige Problematik der Kriechkurvenversuche zeigt sich bereits in Abb.63, die einen Spannungsbereich bis $\sigma = 1.84 \text{ MPa}$ abdeckt. Der von polykristallinen Materialien zu erwartende Anstieg der Dehnungsraten bei konstanter Dehnung und steigender Spannung findet sich nicht kontinuierlich wieder. Die Kriechkurve bei $\sigma = 1.25 \text{ MPa}$ weist zu gleichen Zeiten größere Dehnungen auf als jener Verlauf mit der größeren äußeren Spannung von $\sigma = 1.54 \text{ MPa}$. Eine Erhöhung der Spannung würde demzufolge zu einer Verringerung der Dehnung führen; nicht materialbedingte, physikalische Phänomene, sondern experimentell begründete Schwankungen scheinen die Ursache dafür zu sein. Die Stoffgesetzantwort (Abb.64 und 65) weist dieses Verhalten daher nicht auf. Eine Erhöhung der Spannung

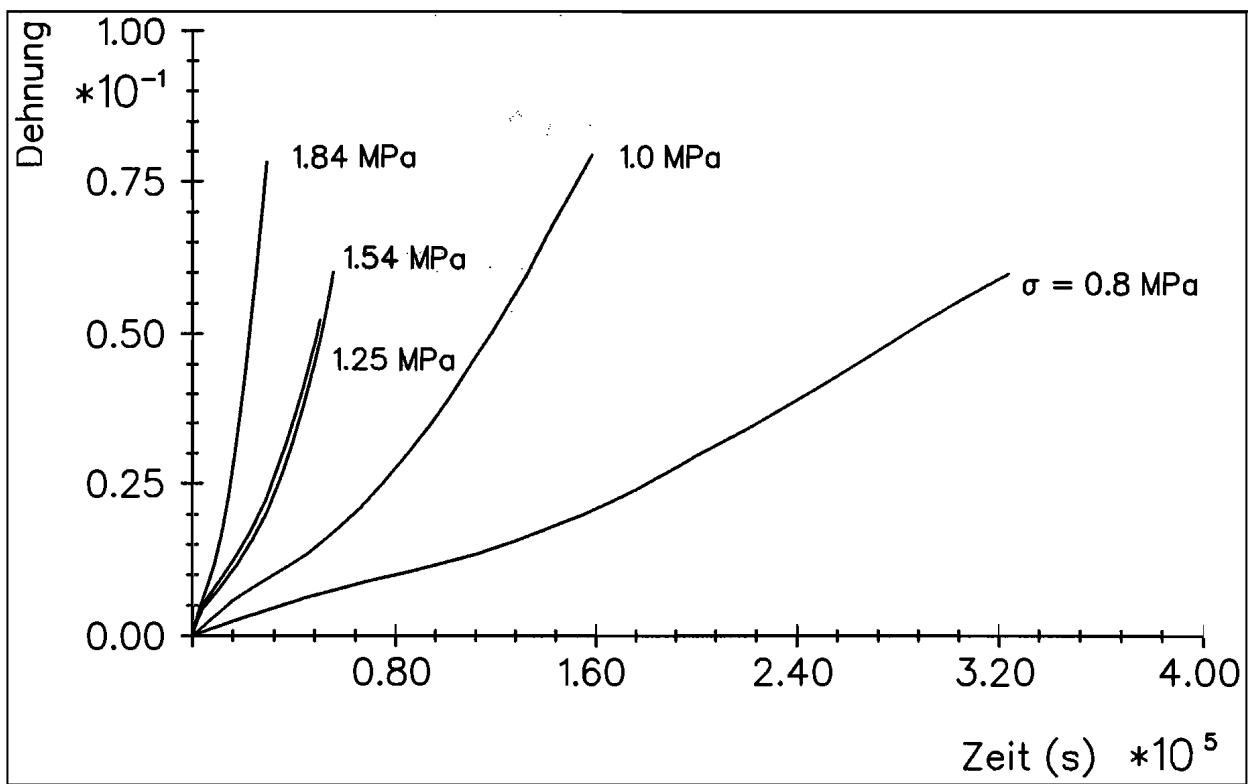


Abb. 63: Experimente zu einaxialen Kriechversuchen (MELLOR, COLE (1982))

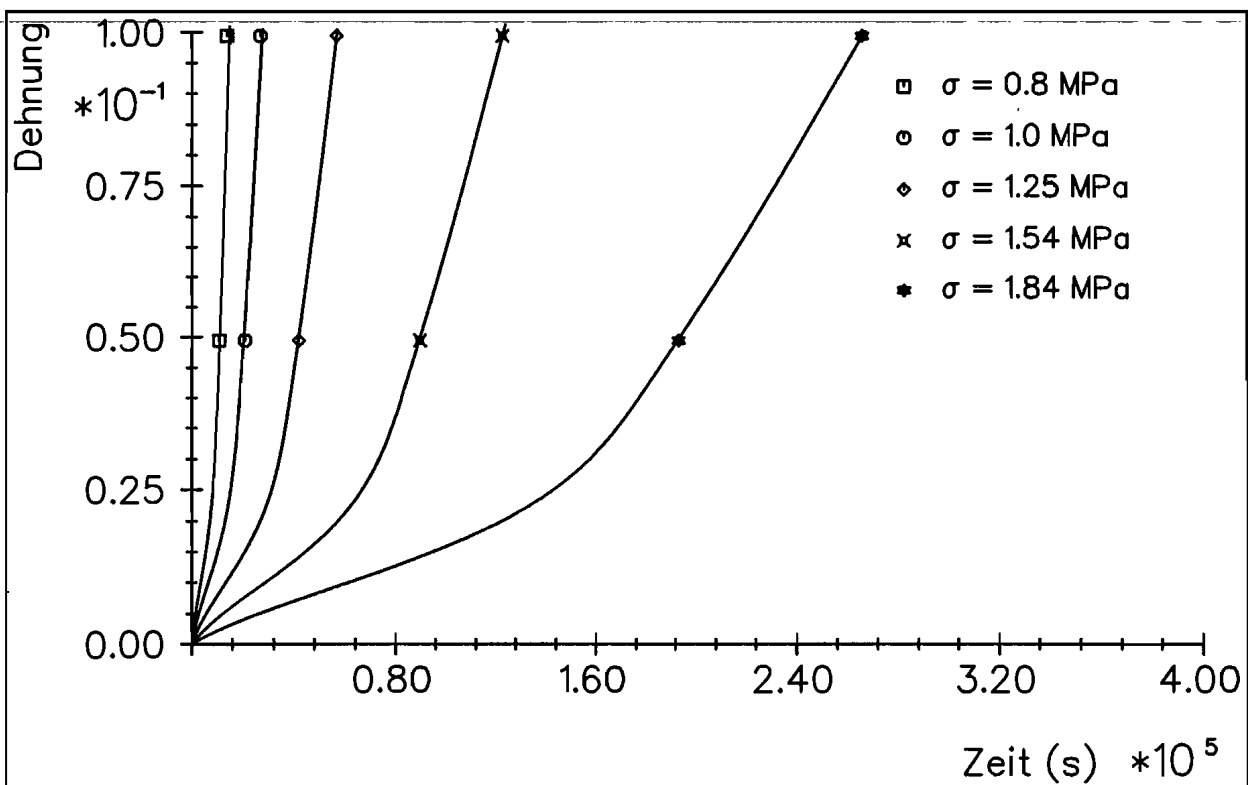


Abb. 64: Rechnungen zu einaxialen Kriechversuchen

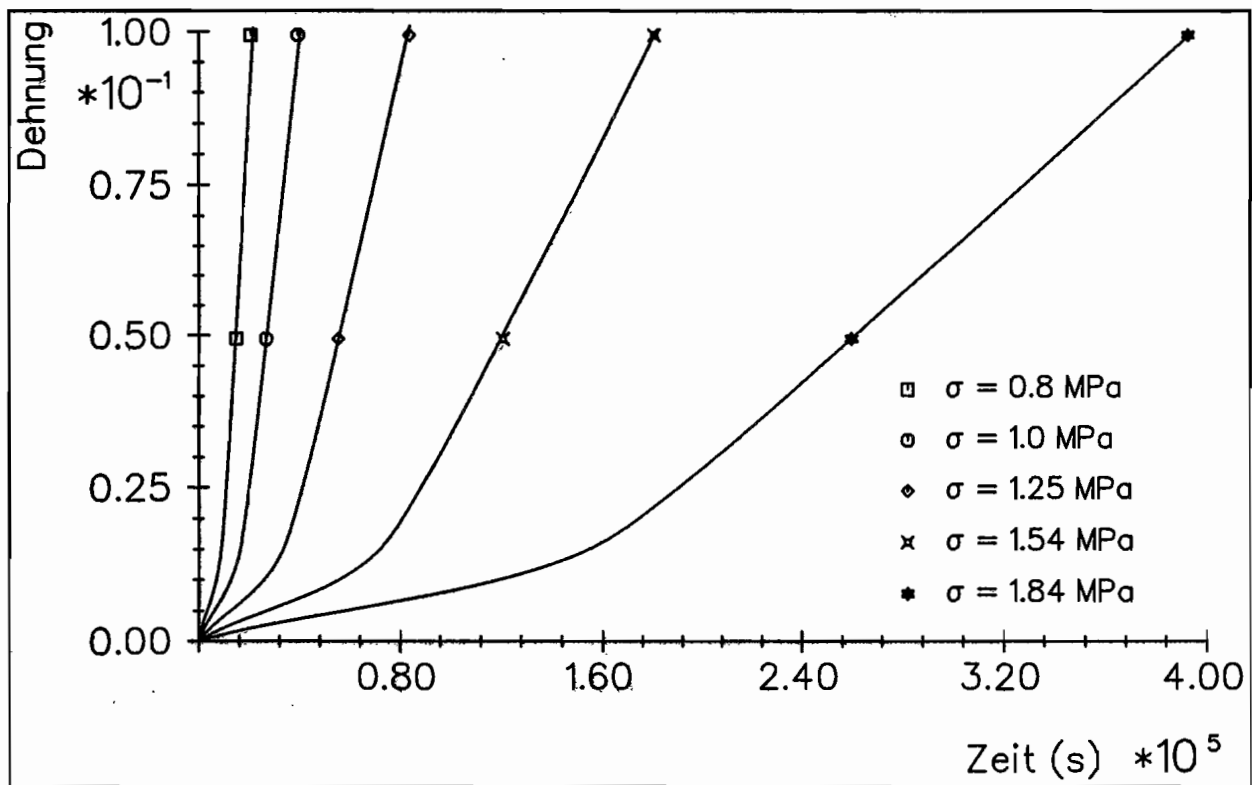


Abb. 65: Rechnungen zu einaxialen Kriechversuchen bei -10°C

bewirkt hier kontinuierlich eine Erhöhung der Dehnung.

Wird die Temperatur von -5°C auf -10°C (in der Rechnung) abgesenkt, ist bei allen Kurven das Erreichen konstanter Dehnungswerte nach jeweils längeren Zeiten abzulesen. Tiefere Temperaturen fordern zum Erreichen gleicher Dehnungen nach gleichen Zeiten höhere Spannungen.

Auch bei den Kurven in Abb.66, 68 und den dazugehörigen Rechnungen in Abb.67, 69 liegt dieser Sachverhalt vor. Besonders deutlich ist dies bei $\sigma = 3.65 \text{ MPa}$, $\sigma = 3.67 \text{ MPa}$ und $\sigma = 3.71 \text{ MPa}$, deren experimentelle Kurven weit streuen, während die Antworten des Modells proportional zur Belastung beieinander liegen.

In Abb.70 ist der Temperatureinfluß auf das Kriechverhalten bei $\sigma = 3.26 \text{ MPa}$ aufgezeigt. Eine Verringerung der Temperatur bei gleichen Zeiten bewirkt eine Abnahme der Dehnung. Weiterhin wandern die Punkte des sekundären Fließens ($\dot{\epsilon}_{min}$) mit fallender Temperatur zu geringeren Dehnungswerten.

Bei $T_0 = -10^{\circ}\text{C}$ ist neben der isothermen Rechnung zum Vergleich eine solche mit adiabaten Randbedingungen dargestellt. Der Einfluß dieser Prozeßführung ist gering. Das wird aus der nur minimalen Abweichung dieser Kurve zu größeren Dehnungen bei gleichen Zeiten deutlich. Die Temperaturerhöhung bei einer Dehnung von 10%

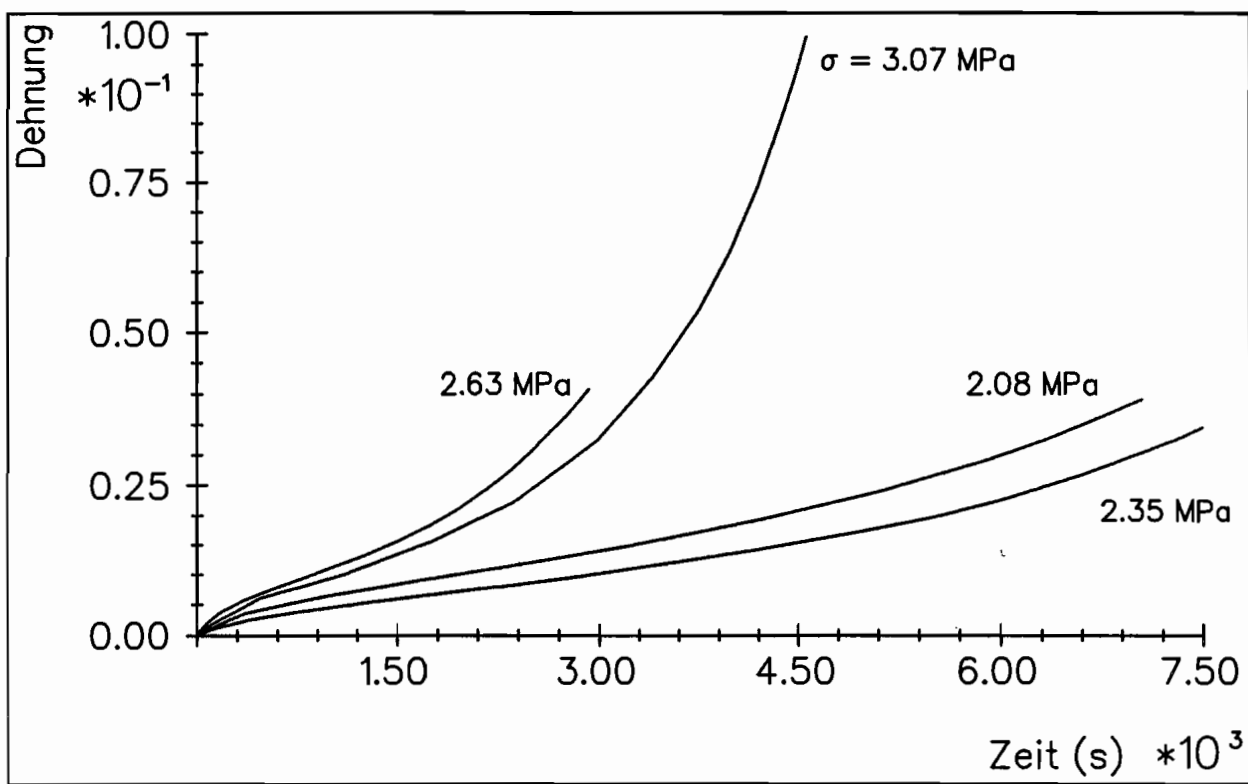


Abb. 66: Experimente zu einaxialen Kriechversuchen (MELLOR, COLE (1982))

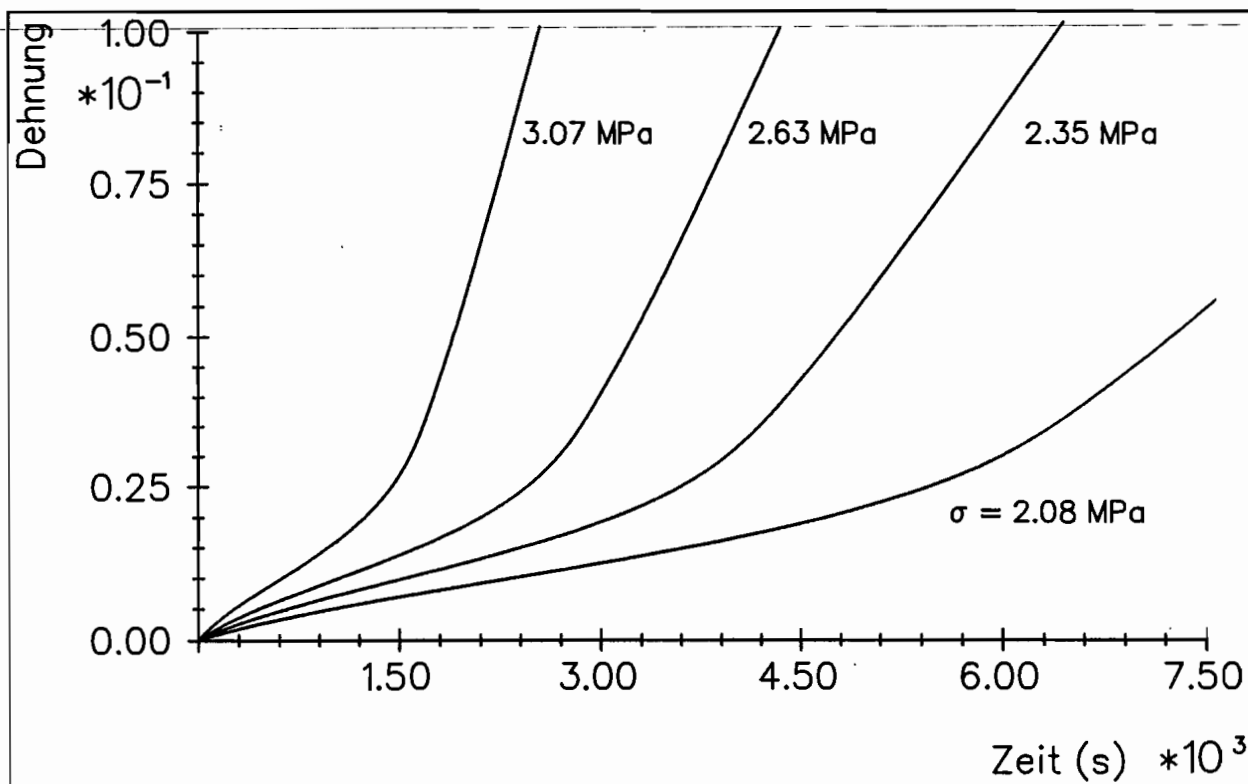


Abb. 67: Rechnungen zu einaxialen Kriechversuchen

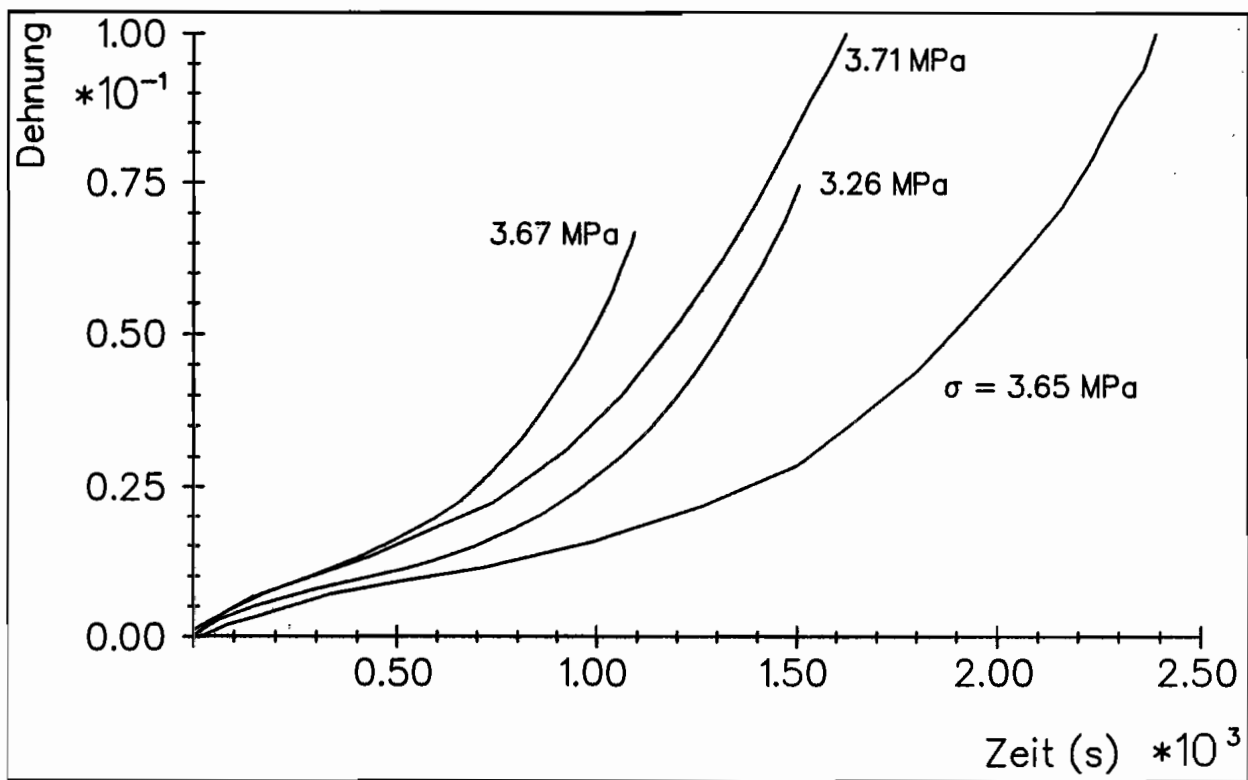


Abb. 68: Experimente zu einaxialen Kriechversuchen (MELLOR, COLE (1982))

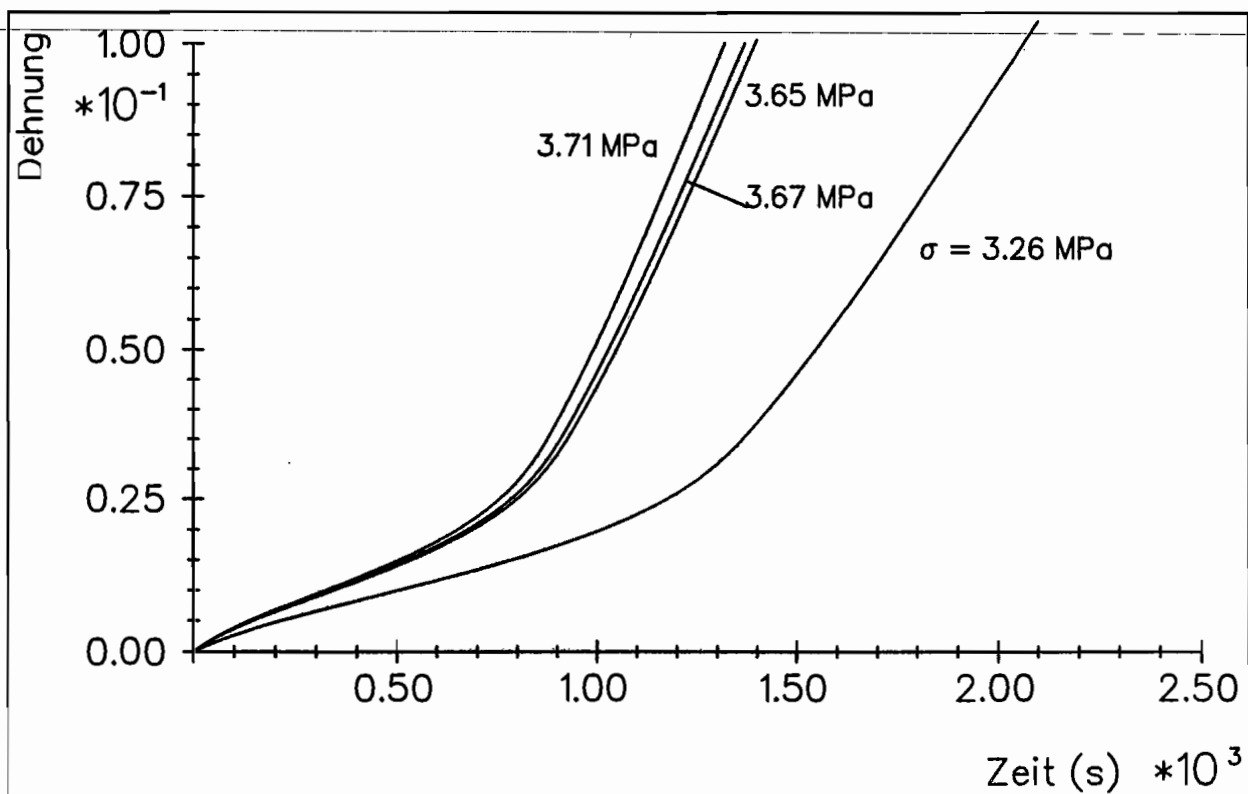


Abb. 69: Rechnungen zu einaxialen Kriechversuchen

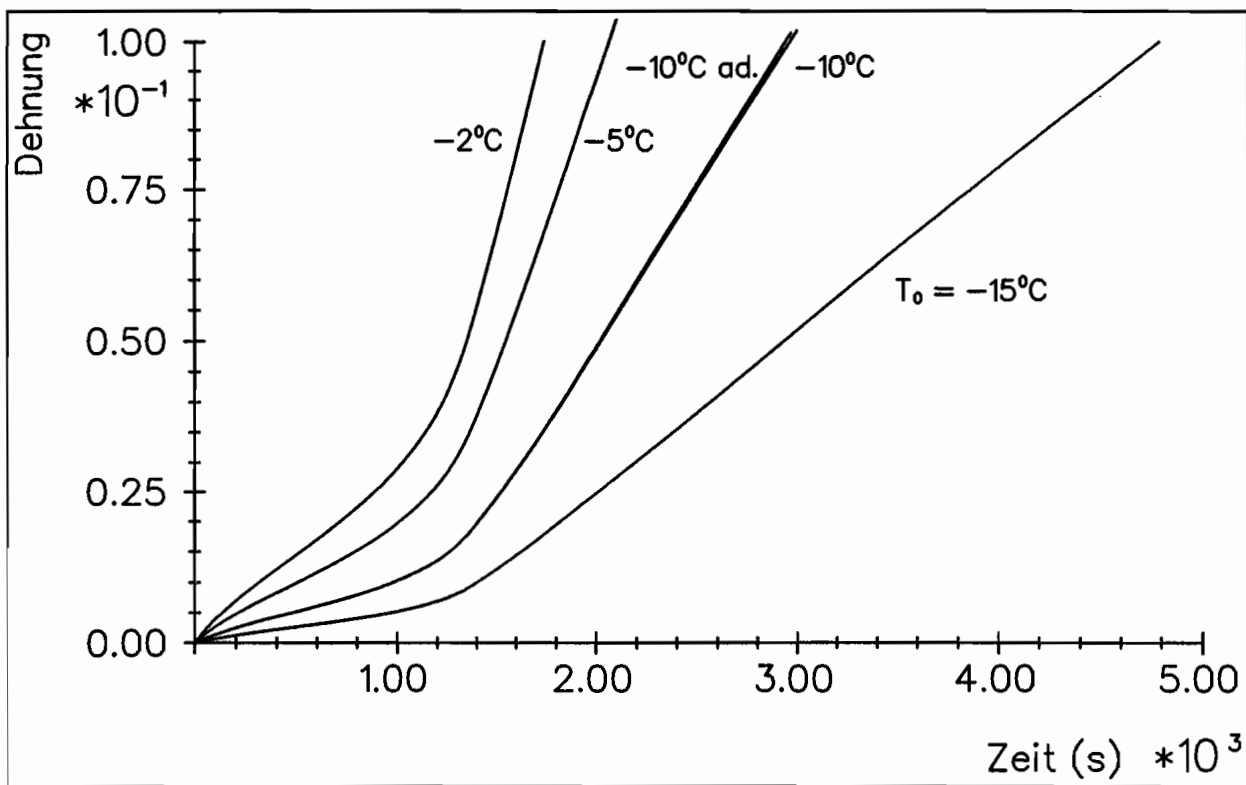


Abb. 70: Rechnungen zu einaxialen Kriechversuchen bei unterschiedlichen Temperaturniveaus ($\sigma = 3.26 \text{ MPa}$)

beträgt 0.186 K .

Aus Untersuchungen der Kriechkurven bei MELLOR und COLE (1982, 1983) ist hervorgegangen, daß bei der betrachteten Temperatur $T_0 = -5^\circ\text{C}$ die Punkte des sekundären Fließens aller Versuche bei $\varepsilon \approx 1\%$ liegen. Die Dehnungsrate über der Spannung doppeltlog. aufgetragen (vergl. auch Abb.26, einaxialer Druck) ist in guter Näherung durch eine Gerade zu interpolieren. Die in Abb.71 eingetragene Kurve stellt das Ergebnis der Rechnung dar. Es liegt folglich eine gute Übereinstimmung zu den mit Zentralsymbolen dargestellten Experimenten vor.

6.3 Relaxation

Wird nach einer Belastungsgeschichte die aktuelle Prüfkörperlänge konstant gehalten, so bauen sich die aufgebrauchten Spannungen als Funktion dieser Vorgeschichte, der Temperatur, der Zeit und in Abhängigkeit der Eisstruktur ab (siehe GLEN (1975)). Man spricht von Relaxation.

In den folgenden Abbildungen sind Spannungs-Zeitverläufe als Ergebnis der voran-

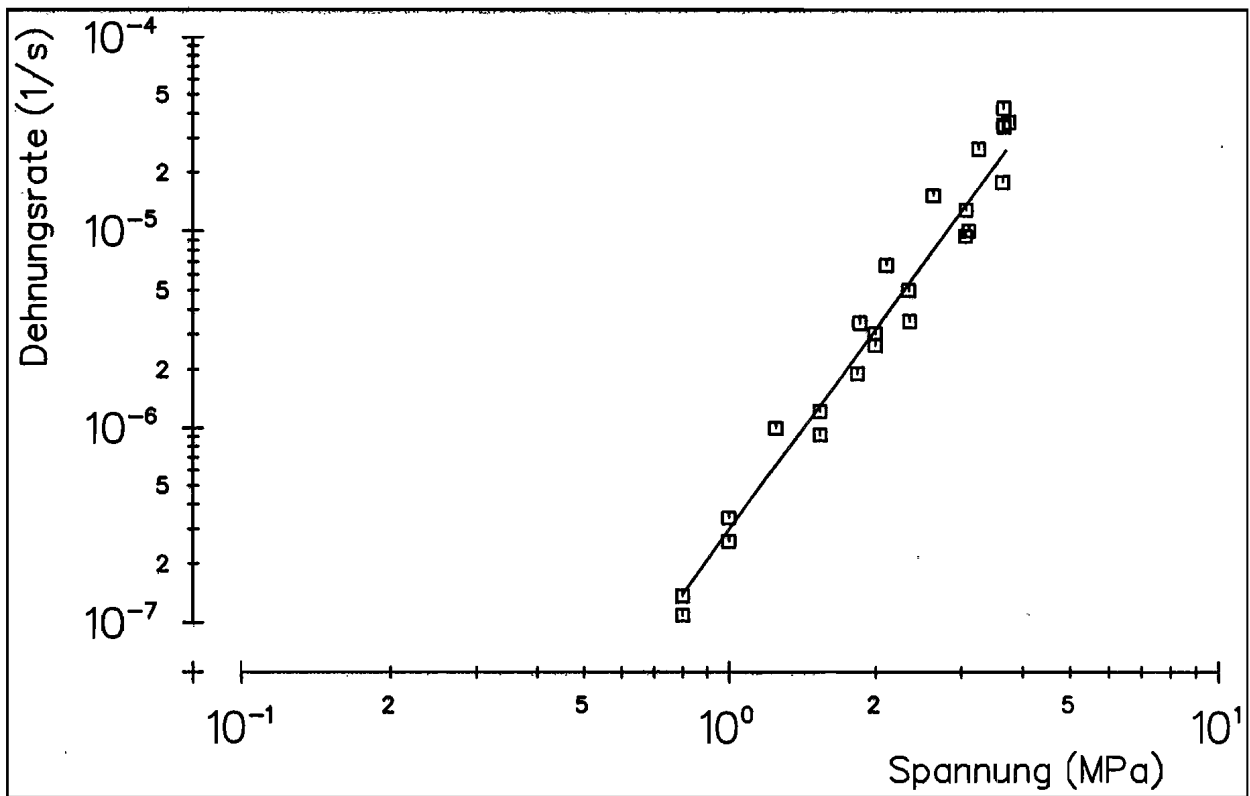


Abb. 71: Sekundäres Kriechen. Zentralsymbole stellen die Versuche, die durchgezogene Linie die Rechnung dar.

gegangenen Modellbildung und -anpassung dargestellt; entsprechende Versuchsdaten liegen derzeit nicht vor.

Eine schnell aufgebrachte Spannung von jeweils 1 bis 4 *MPa* führt gemäß Abb.72 im gesamten Zeitverlauf zu einem starken Abbau der Spannungen. Auffallend ist die geringe Spannungsdifferenz trotz erheblich differierender Anfangsspannungen nach bereits kurzen Zeiten.

Eine Veränderung der Vorgeschichte zu einer langsamer aufgebrachten Last gemäß Abb.73 weist auf die Bedeutung der Vorbelastung für das Relaxationsverhalten hin. Es sind Rechnungen mit konstanten Dehnungsraten von $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}$, $1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$ und $2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$ bis zu der Zeit durchgeführt worden, die bei der am langsamsten aufgebrachten Vorlast eine Dehnung von $\epsilon = 1\%$ hervorruft. Trotz geringerer Differenzen der Spannungsstartwerte im Vergleich zu Abb.72 tritt in den Residuumspannungen eine größere Bandbreite auf.

Zur weiteren Untersuchung des Einflusses der Vorgeschichte auf das Relaxationsverhalten sind in Abb.74 4 Rechnungen dargestellt, die bei 1 *MPa*, jedoch unterschiedlichen Zeiten, relaxieren. Die betrachteten Dehnungsraten betragen $5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}$ bzw.

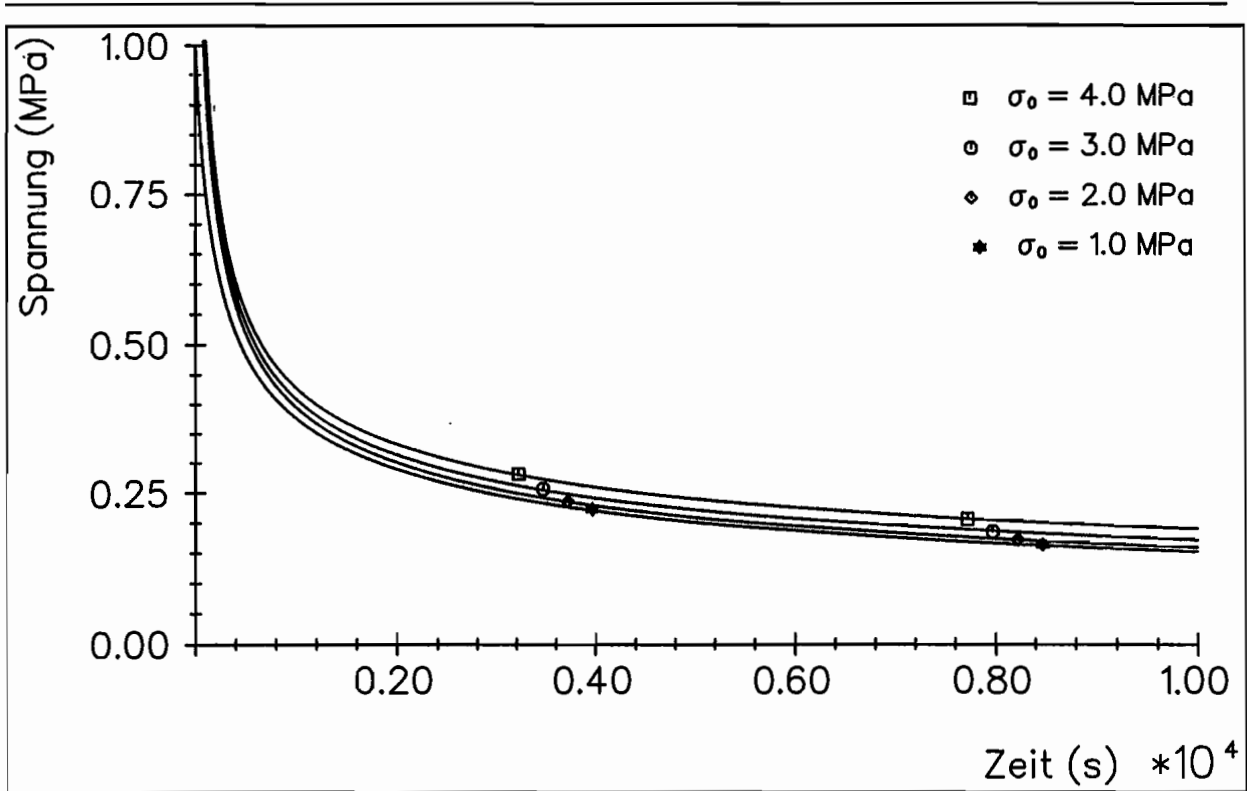


Abb. 72: Relaxation mit verschiedenen Anfangsspannungen

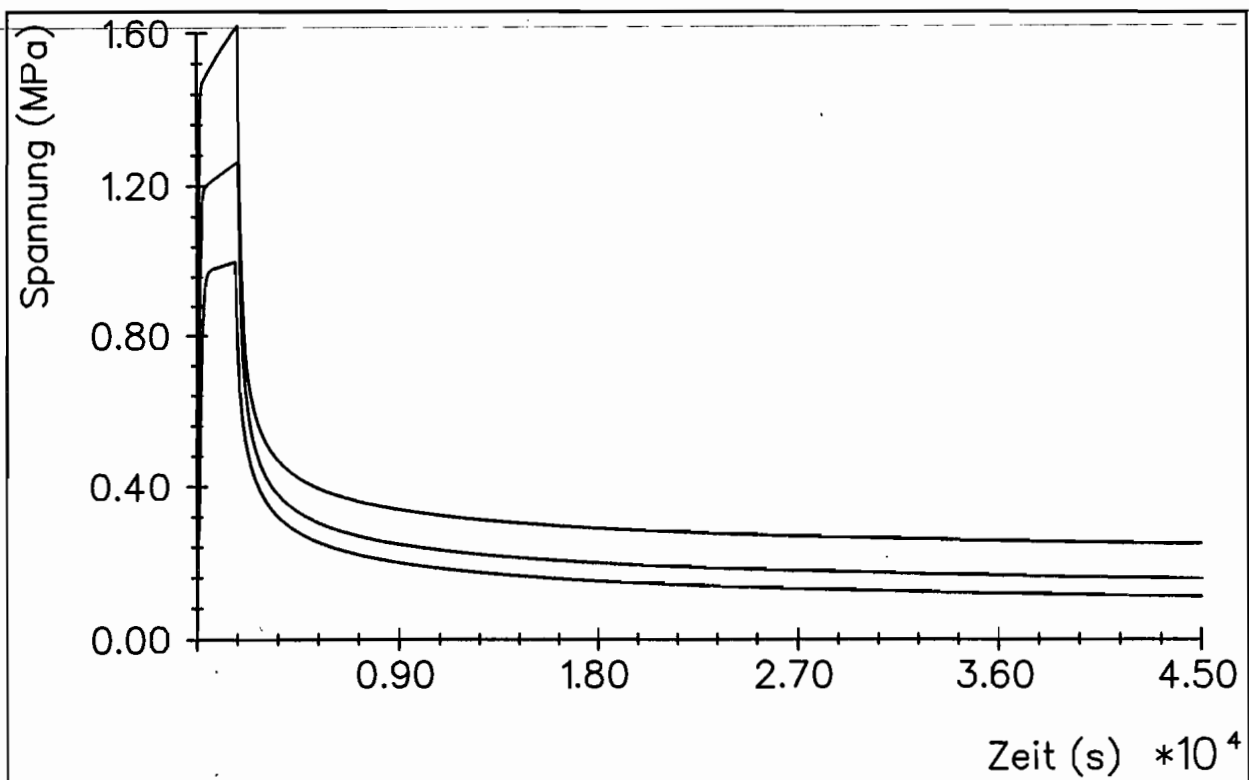


Abb. 73: Relaxation mit unterschiedlicher Vorgeschichte

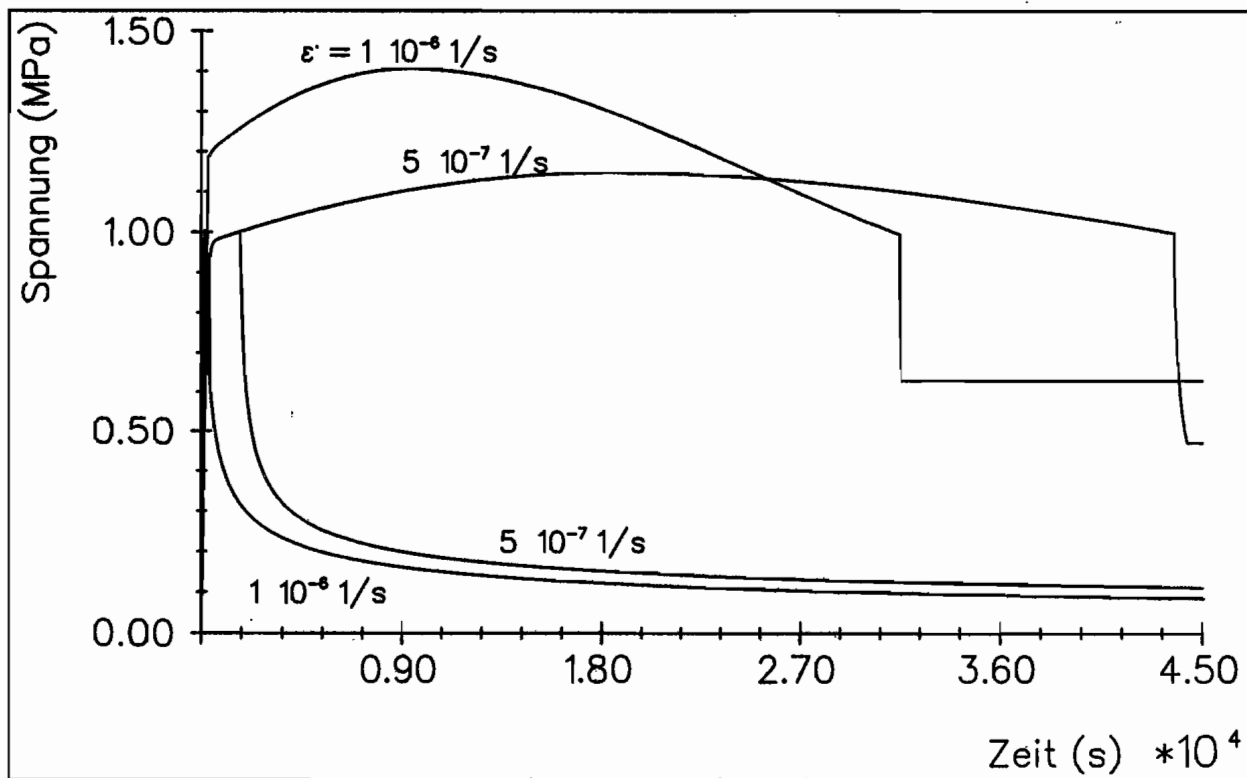


Abb. 74: Relaxation mit unterschiedlicher Vorgeschichte

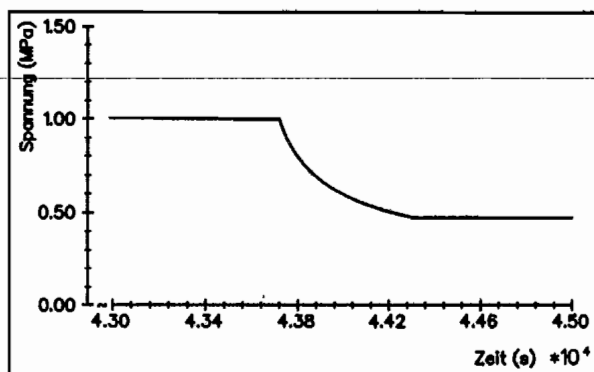


Abb. 75: Ausschnittvergrößerung der zweiten Relaxationsphase bei $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}$

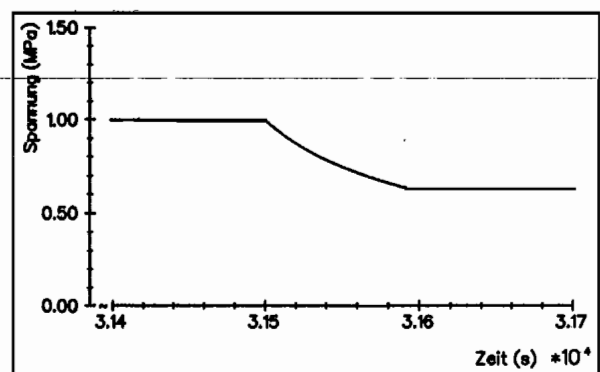


Abb. 76: Ausschnittvergrößerung der zweiten Relaxationsphase bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$

$1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$.

Die Relaxationskurven nach dem jeweils erstmaligen Erreichen der Spannung von 1 MPa weisen qualitativ den Verlauf aus Abb.72 bzw. Abb.73 auf. Eine höhere Dehnungsrate führt hier jedoch aufgrund einer geringeren Verfestigung des Materials zu einem größeren Spannungsabbau.

Beim jeweils zweiten Erreichen der Relaxationsspannung ist nun bei der größeren

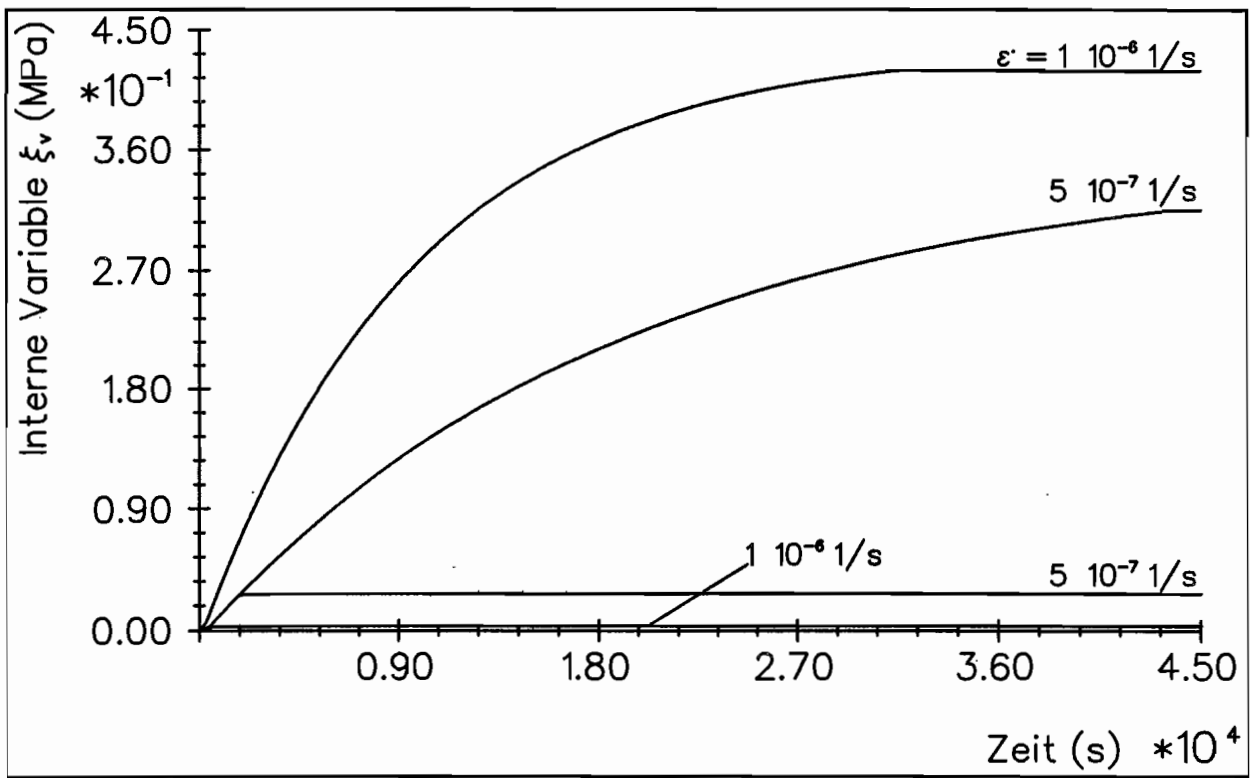


Abb. 77: Verfestigung bei Relaxationsrechnungen mit unterschiedlicher Vorgeschichte

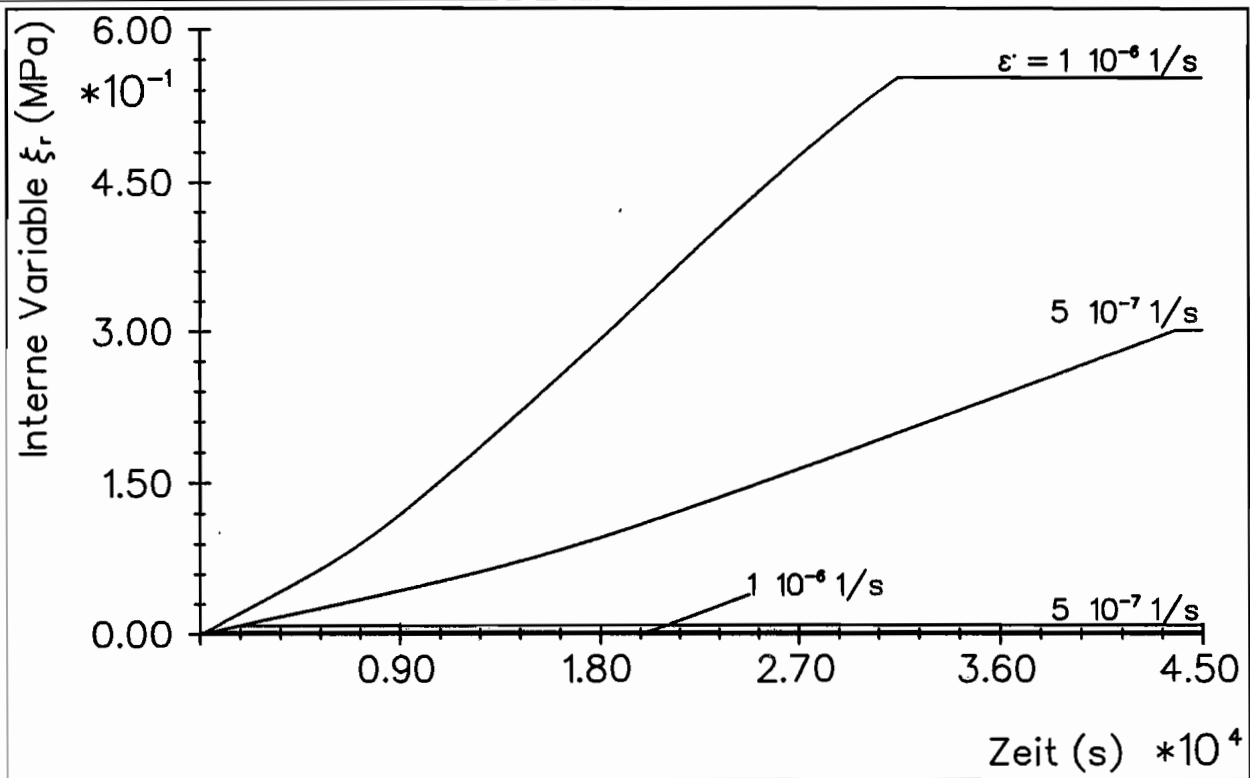


Abb. 78: Entfestigung bei Relaxationsrechnungen mit unterschiedlicher Vorgeschichte

Dehnungsrate ein erheblich schnellerer Spannungsabfall zu einem geringeren Residuumswert (Abb.76) im Vergleich zu Abb.75 und besonders zu den oben besprochenen Relaxationsrechnungen deutlich. Der leichte Knick beim Erreichen der Residuumspannungen in Abb.75 und 76 ist dadurch begründet, daß bei Relaxationsrechnungen aufgrund der nur geringfügig auftretenden Änderungen der internen Variablen die Differenz $\sigma - \xi_v$ in der Entwicklungsgleichung der inelastischen Dehnungsrate zu Null wird.

Da implizit in den Evolutionsgleichungen eine C^0 -Stetigkeit der Spannungen enthalten ist, kann in Abhängigkeit der Entwicklung von ξ_v diese Unstetigkeit der Spannungsrate bei Relaxationsrechnungen auftreten.

7. Strukturverhalten

7.1 Allgemeine Vorbetrachtungen

Die Basis der Untersuchungen komplexer Strukturen ist ein von FORNEFELD (1990) und ROTT (1991) entwickeltes nichtkommerzielles Programmpaket. Hierin ist die Methode der finiten Elemente zur Berechnung großer, isothermer Formänderungen herangezogen worden. Eine Erweiterung auf nichtisotherme Vorgänge findet sich bei FELDMÜLLER (1991). Die Grundlagen dieses Verfahrens sollen an dieser Stelle nicht näher erörtert werden; es sei auf die genannten Arbeiten sowie einschlägige Grundlagenliteratur verwiesen.

Sämtliche Strukturrechnungen dieser Arbeit sind mit Scheibenelementen durchgeführt worden (siehe auch WESTERHOFF (1991)). Aufgrund der großen Effektivität (BATHE (1986)) finden isoparametrische Ansätze für 4-Knotenelemente Verwendung.

7.2 Aufbereitung des Stoffgesetzes

Im Rahmen der Gleichgewichtsiteration müssen die konstitutiven Gleichungen über einen Zeitschritt integriert werden. Mit der Jaumann-Ableitung als Sonderfall der Lee-Ableitung (LEE, MALLETT und WERTHEIMER) folgt

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} + \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{W}}, \quad (7.1)$$

$$\dot{\underline{\xi}}_v = \underline{\overset{\nabla}{\xi}}_v + \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\xi}_v - \underline{\xi}_v \cdot \underline{\mathbf{W}}, \quad (7.2)$$

$$\dot{\underline{\xi}}_r = \underline{\overset{\nabla}{\xi}}_r + \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\xi}_r - \underline{\xi}_r \cdot \underline{\mathbf{W}}. \quad (7.3)$$

Mit

$$\underline{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} [(\text{grad } \vec{v}) - (\text{grad } \vec{v})^T] \quad (7.4)$$

folgt

$$\dot{\sigma}_{11} = \sigma_{12}(v_{1,2} - v_{2,1}) + 2G \left(v_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}) - N2n_{v11} \right), \quad (7.5)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \sigma_{12}(v_{2,1} - v_{1,2}) + 2G \left(v_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}) - N2n_{v22} \right), \quad (7.6)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22})(v_{2,1} - v_{1,2}) + 2G \left(\frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) - N2n_{v12} \right), \quad (7.7)$$

$$\dot{\xi}_{v11} = \xi_{v12}(v_{1,2} - v_{2,1}) + c_{v1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v11} - d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{v11}, \quad (7.8)$$

$$\dot{\xi}_{v22} = \xi_{v12}(v_{2,1} - v_{1,2}) + c_{v1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v22} - d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{v22}, \quad (7.9)$$

$$\dot{\xi}_{v12} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_{v11} - \dot{\xi}_{v22})(v_{2,1} - v_{1,2}) + c_{v1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v12} - d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{v12}, \quad (7.10)$$

$$\dot{\xi}_{r11} = \xi_{r12}(v_{1,2} - v_{2,1}) + c_{r1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v11} + d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{r11}, \quad (7.11)$$

$$\dot{\xi}_{r22} = \xi_{r12}(v_{2,1} - v_{1,2}) + c_{r1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v22} + d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{r22}, \quad (7.12)$$

$$\dot{\xi}_{r12} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_{r11} - \dot{\xi}_{r22})(v_{2,1} - v_{1,2}) + c_{r1} a_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_2} 2Nn_{v12} + d_1 c_{r1} 2N \frac{\|\underline{\mathbf{n}}_v\|}{\|\underline{\xi}_r\|} \xi_{r12}, \quad (7.13)$$

$$\dot{\gamma} = \alpha_3 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{a_3} 2N \underline{\mathbf{n}} : \underline{\mathbf{n}}_v. \quad (7.14)$$

Neben den Gleichungen (4.51) und (4.54) sind hierin folgende Abkürzungen verwendet worden:

$$N = D_0 \frac{1}{\sqrt{J_2}} \varphi_1 \left(\frac{I_2}{\sigma_0^2} \right)^{\varphi_2} \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right), \quad (7.15)$$

$$\underline{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \xi_{v_{11}} + \xi_{r_{11}} & \sigma_{12} - \xi_{v_{12}} + \xi_{r_{12}} \\ 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \xi_{v_{22}} + \xi_{r_{22}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \xi_{v_{11}} - \xi_{r_{11}} + \xi_{v_{22}} - \xi_{r_{22}} \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

$$\underline{\mathbf{n}}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \xi_{v_{11}} & \sigma_{12} - \xi_{v_{12}} \\ \sigma_{12} - \xi_{v_{12}} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \xi_{v_{22}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \xi_{v_{11}} + \xi_{v_{22}} \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) & 0 \\ \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) & v_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

$$v_{3,3} = -\frac{\nu}{1-\nu}(v_{1,1} + v_{2,2}) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} 2N(n_{v_{11}} + n_{v_{22}}). \quad (7.19)$$

7.3 Erweiterung des FE-Programmpakets

Das von ROTT (1991) und FORNEFELD (1990) entwickelte FORTRAN-Programm zur Berechnung allgemeiner axialsymmetrischer Deformationen ist in seiner Grundform übernommen und aufgrund der modularen Bauweise den speziellen Anforderungen angepaßt worden.

Zunächst ist das oben beschriebene Stoffgesetz implementiert worden. Da das hier angewandte Konzept der internen Variablen strukturell vergleichbar mit jener Formulierung von ROTT ist, stellt dieser Einbau keine grundlegende Schwierigkeit dar.

Zu dem vorhandenen axialsymmetrischen Element ist ein Scheibenelement (siehe auch WESTERHOFF (1991)) hinzugefügt worden. Es stehen 4-, 8- und 12-Knotenelemente bereit.

Als Ergänzung zum vorhandenen Präprozessor und dem FE-Kernprogramm ist ein Postprozessor zur grafischen Aufbereitung der Ergebnisse entwickelt worden. Die Schnittstelle ist hierbei eine *Restart-Datei*, auf der der jeweils letzte Zeitschritt sowie alle erforderlichen Elemente der Arbeitsfelder abgespeichert werden. Wesentliche Merkmale dieses Postprozessors sind:

- Darstellung des Verschiebungsfeldes,
- Spannungsdarstellung, 2-dimensional mit Höhenlinien und Graustufenrastierung,
- Spannungsdarstellung, 3-dimensional mit Höhenlinien oder als Netzstruktur.

Die besonders bei 4-Knotenelementen häufig auftretenden Sprünge der Höhenlinien an Elementgrenzen sind durch einen Interpolationsalgorithmus ausgeglichen worden. Dieser berechnet zunächst die Spannungswerte der Gausspunkte an den Knoten. Der endgültige Knotenwert folgt dann aus einer Mittelung der Spannungen der Elemente, die diesen Knoten enthalten. In Verbindung mit den Elementmittelpunkten lassen sich so eindeutig Ebenen, die durch drei Punkte bestimmt sind, aufspannen. Eine Stetigkeit zu angrenzenden Elementen ist damit gewährleistet.

Zur Realisierung der Grafik fand die Programmbibliothek ERLGRAPH 2.10M Verwendung.

7.4 Ergebnisse

7.4.1 Kontrollrechnungen

Zur Überprüfung der vorgenommenen Änderungen und Ergänzungen am FE-Programmpaket sowie zum Ausschalten von Programmierfehlern dienen die folgenden Testrechnungen (Abb.79).

Ein einfaches System, bestehend aus 4 in einer Reihe angebrachten Scheibenelementen, erfährt eine Belastung durch eine konstante Verschiebungsrate. Da es für das beobachtete inelastische Materialverhalten keine analytische Lösung gibt, ist das

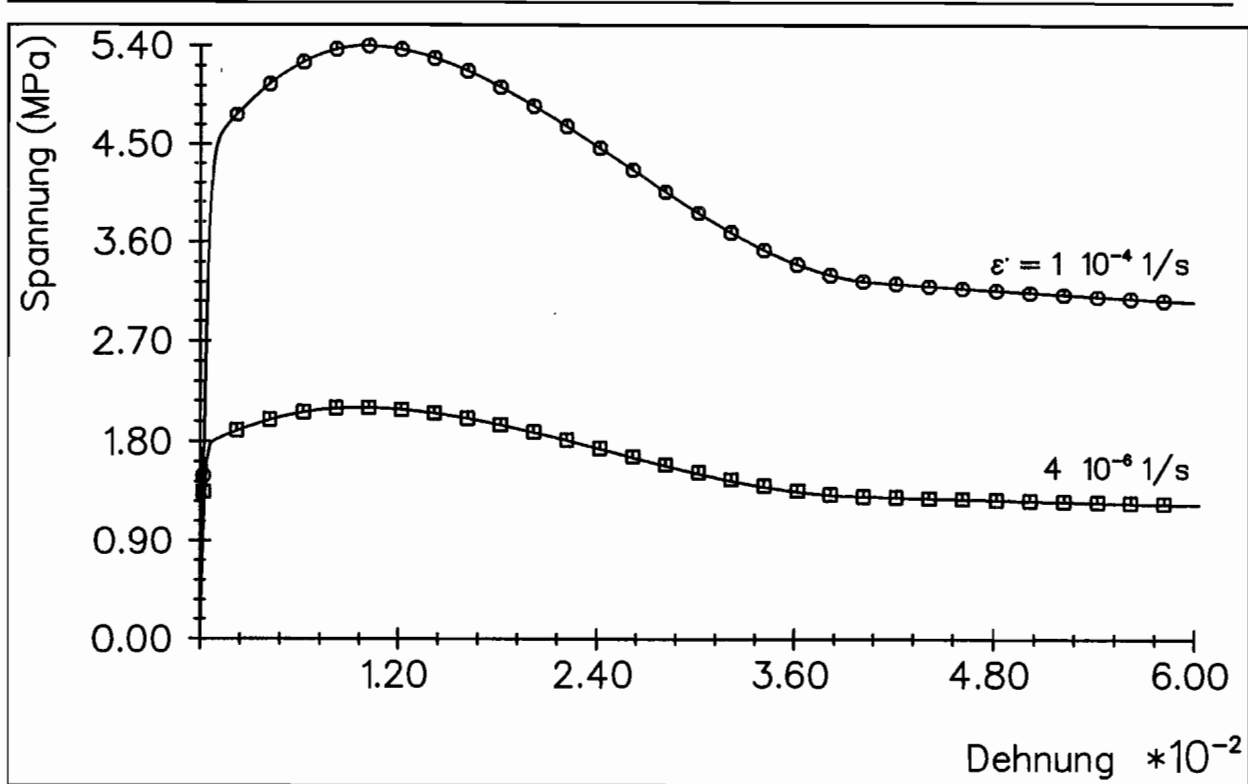


Abb. 79: Kontrollrechnungen bei konstanter Dehnungsrate; Vergleich zwischen Stoffgesetzingegration (durchgezogene Linie) und FE-Rechnung (Zentral-symbole)

Ergebnis dieser FE-Rechnung mit der numerischen Stoffgesetzingegration, die unabhängig von Strukturen ist, zu vergleichen. Abb.79 zeigt für zwei verschiedene Geschwindigkeiten die Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind deckungsgleich.

7.4.2 Scheibe unter Eigengewicht

Eine bezüglich der vertikalen Achse symmetrische Scheibe erfahre eine Belastung durch Eigengewicht. Gerechnet wurde aus Symmetriegründen – wie auch bei weiteren symmetrischen Strukturen – nur eine Hälfte.

Abb.80 zeigt den Spannungsverlauf nach $1 \cdot 10^8$ Sekunden der Vergleichsspannung σ_m , d.h. der Wurzel der zweiten Spannungsinvarianten. Gerechnet wurde mit 156 4-Knotenelementen. Die Dichte ist mit $\rho = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ vorgegeben worden.

Die Gewichtsbelastung ist so diskretisiert worden, daß diese an den Knoten verteilt angreift. Dabei wirke an jedem Knoten ein Viertel der Elementkraft je Element, d.h.

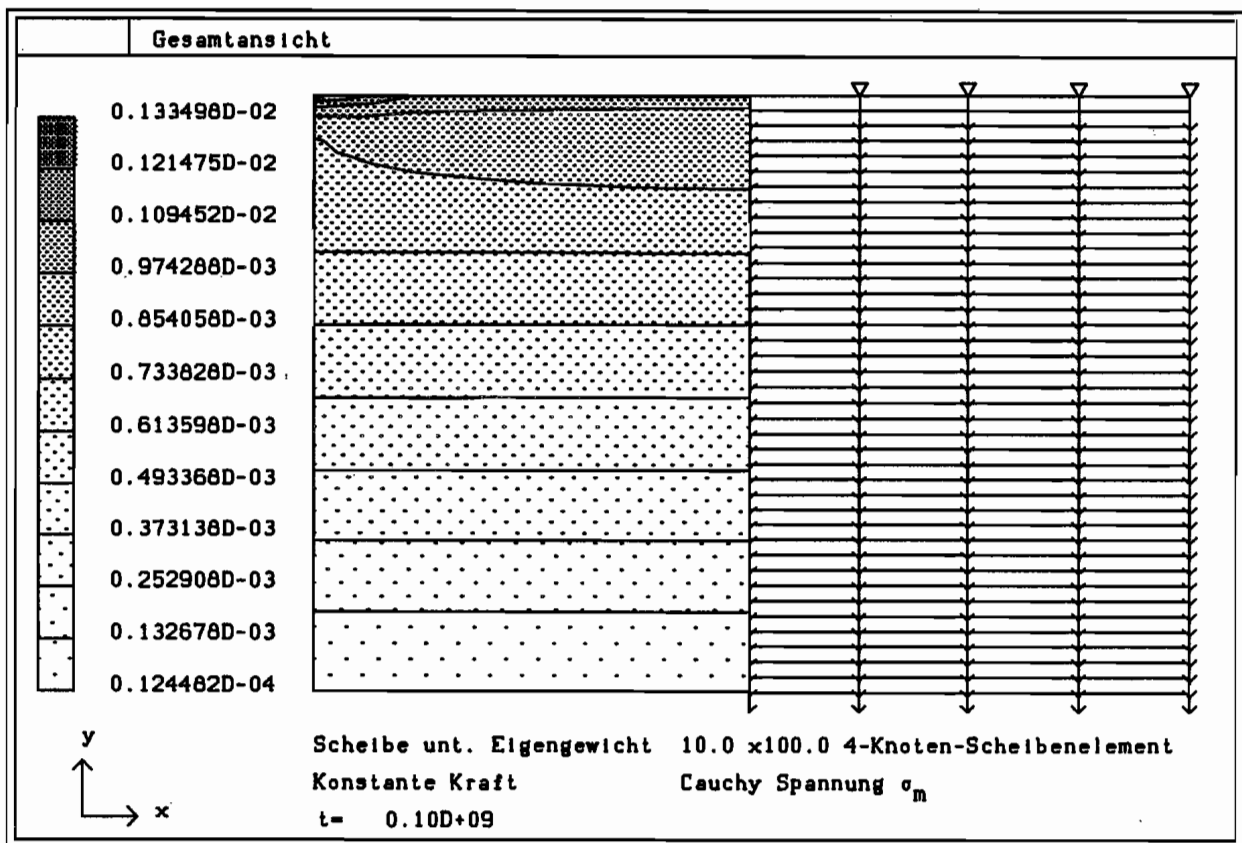


Abb. 80: Scheibe unter Eigengewicht

Eckknoten sind mit einem Viertel, Randknoten mit der Hälfte und innenliegende Knoten mit der gesamten Elementkraft beaufschlagt.

Der Verlauf der Vergleichsspannung weist an den äußeren zweiwertigen Auflagern eine deutliche Spannungserhöhung auf. Diese resultiert aus den Spannungskomponenten σ_{xx} , die aus der behinderten Querkontraktion an den Lagern herrühren. Mit zunehmendem Abstand von dieser Lagerung homogenisiert sich der Spannungszustand und nimmt zum freien Ende bis zu einem Minimalwert ab.

7.4.3 Kragsscheibe

Eine aus 40 Elementen bestehende Kragsscheibe wird am freien Ende durch eine Einzelkraft \vec{F} belastet. Die Anordnung der Elemente, der Lagerung sowie das Verschiebungsfeld nach 2 Sekunden, welches um den Faktor 2 vergrößert dargestellt ist, enthält Abb.81.

Eine Analyse der auftretenden Vergleichsspannungen soll nach unterschiedlich langen Haltezeiten der aufgebrachtten Kraft durchgeführt werden. Die Abb.82–85 enthalten

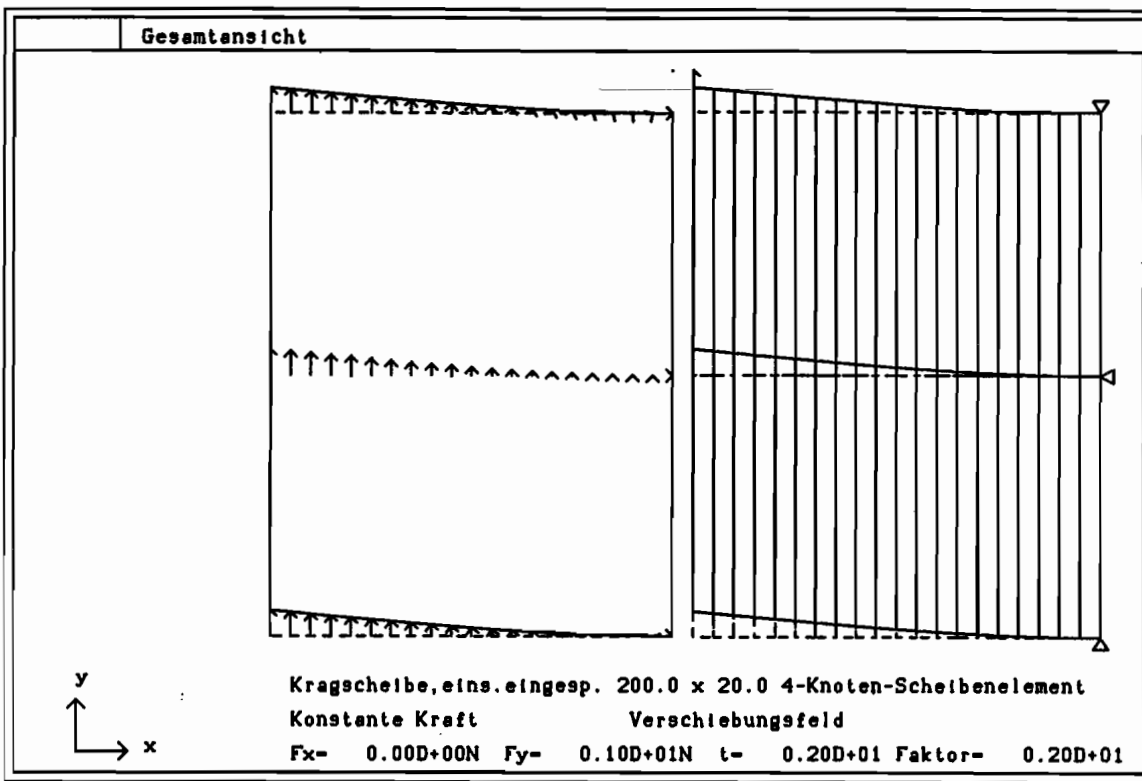


Abb. 81: Verschiebungsfeld der Kragsscheibe

die Ergebnisse nach 2 Sek., 200 Sek., 800 Sek. und 1000 Sek. mit konstanter Belastung.

Mit einer einheitlich gewählten Graustufenrastrung ist eine Homogenisierung der Spannungen bei konstanten x -Werten deutlich. Der Bereich geringster Belastung (Abb.82) verkleinert sich mit zunehmender Zeit, während sich die Bereiche hoher Belastung nur geringfügig verändern. Das jeweils auftretende Spannungsmaximum nimmt nach einem hohen Wert bei $t = 2$ Sekunden zunächst ab, um dann wiederum anzusteigen. Diese Schwingung ist in dem verzögert auftretenden Einfluß der tensorwertigen internen Variablen begründet, die zudem in der Summe in Abhängigkeit der Belastungsdauer einen Vorzeichenwechsel durchlaufen.

Bei der Betrachtung der Normalenkomponenten des Spannungstensors in x - und y -Richtung (Abb.86 und 87) sind neben den zu erwartenden Verläufen Einflüsse der Spannungseinleitungsstelle sowie bei Abb.87 ein deutlicher Anstieg der Spannungen an den beiden äußeren Lagern zu sehen. Diese Lagerungseinflüsse finden sich verstärkt bei lagerungsnahen Elementen und späteren Zeitschritten wieder (siehe auch Kap.7.4.2).

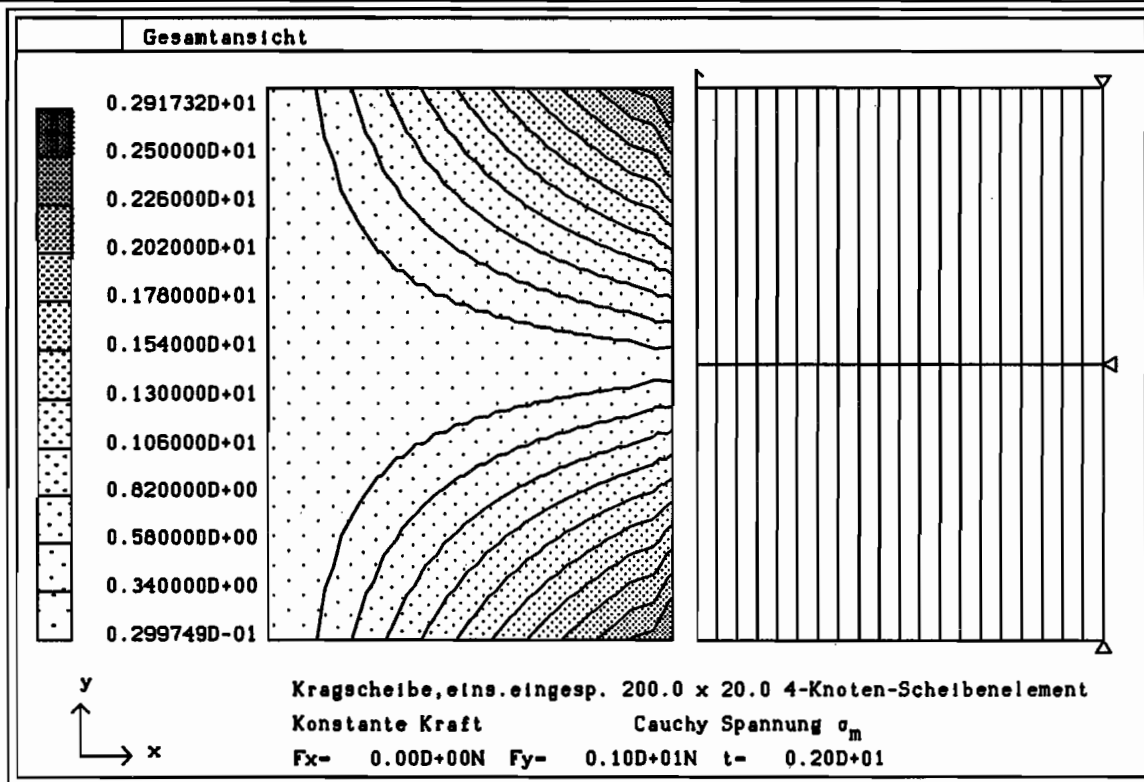


Abb. 82: Vergleichsspannung σ_m nach 2 Sekunden

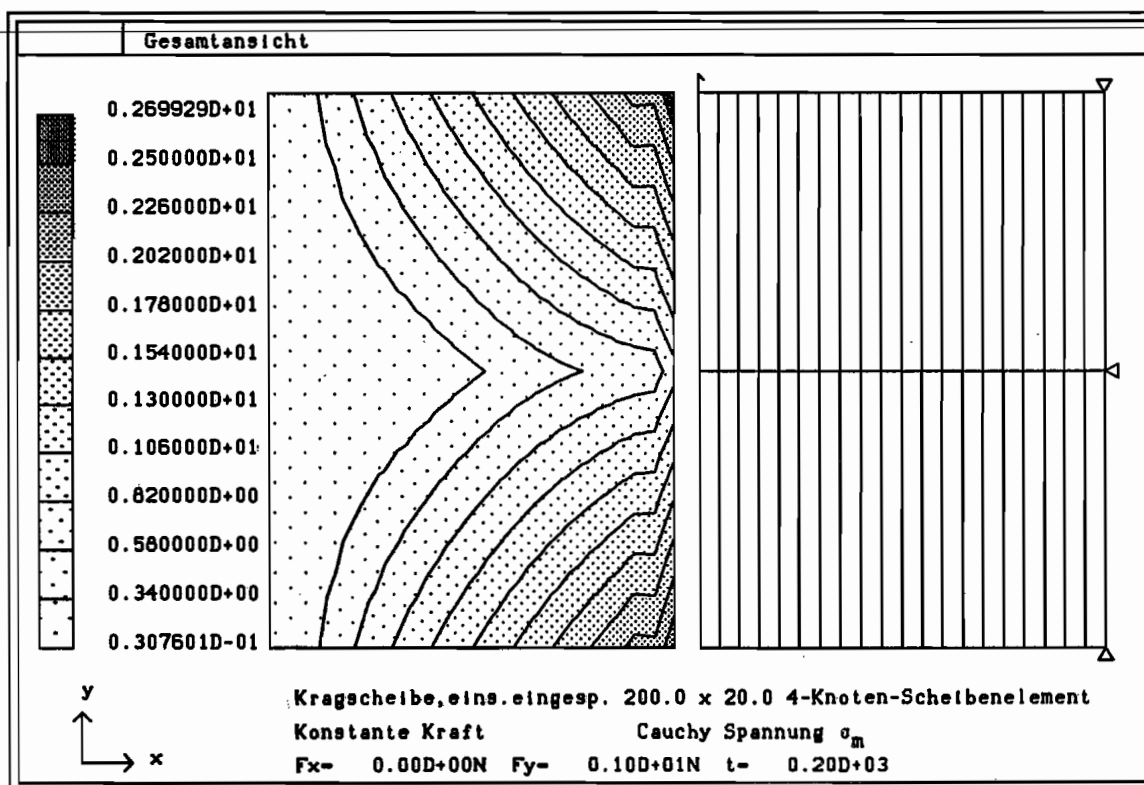


Abb. 83: Vergleichsspannung σ_m nach 200 Sekunden

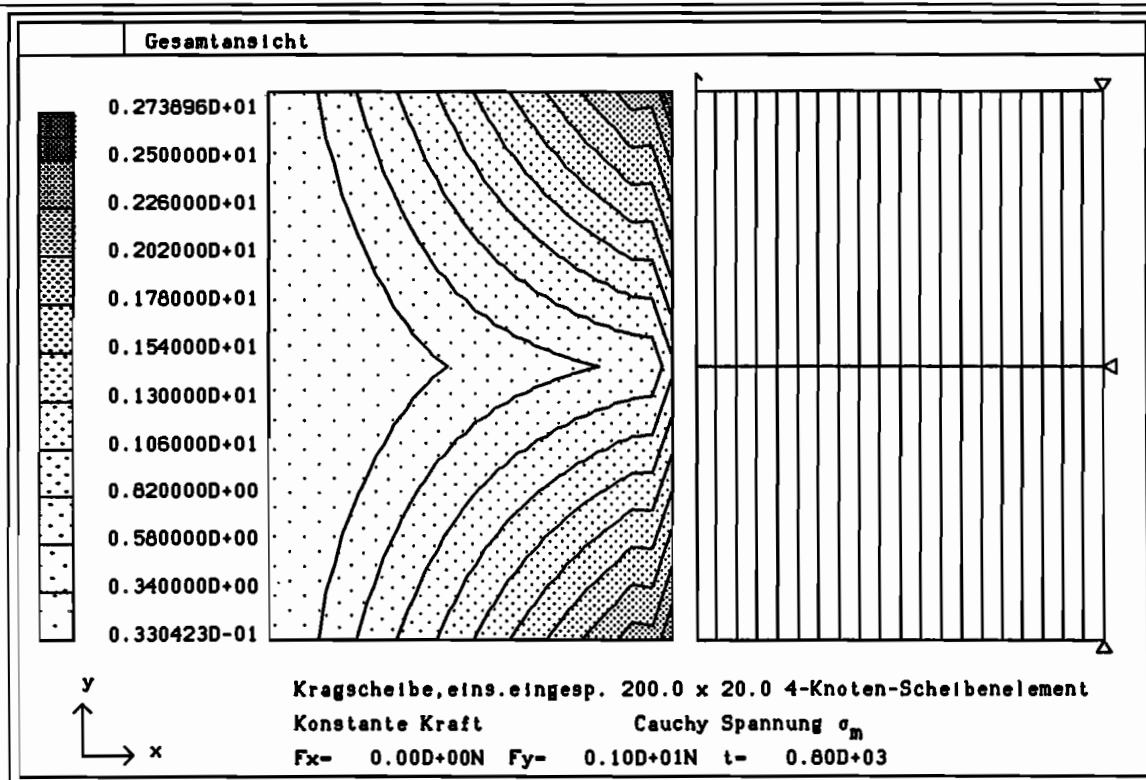


Abb. 84: Vergleichsspannung σ_m nach 800 Sekunden

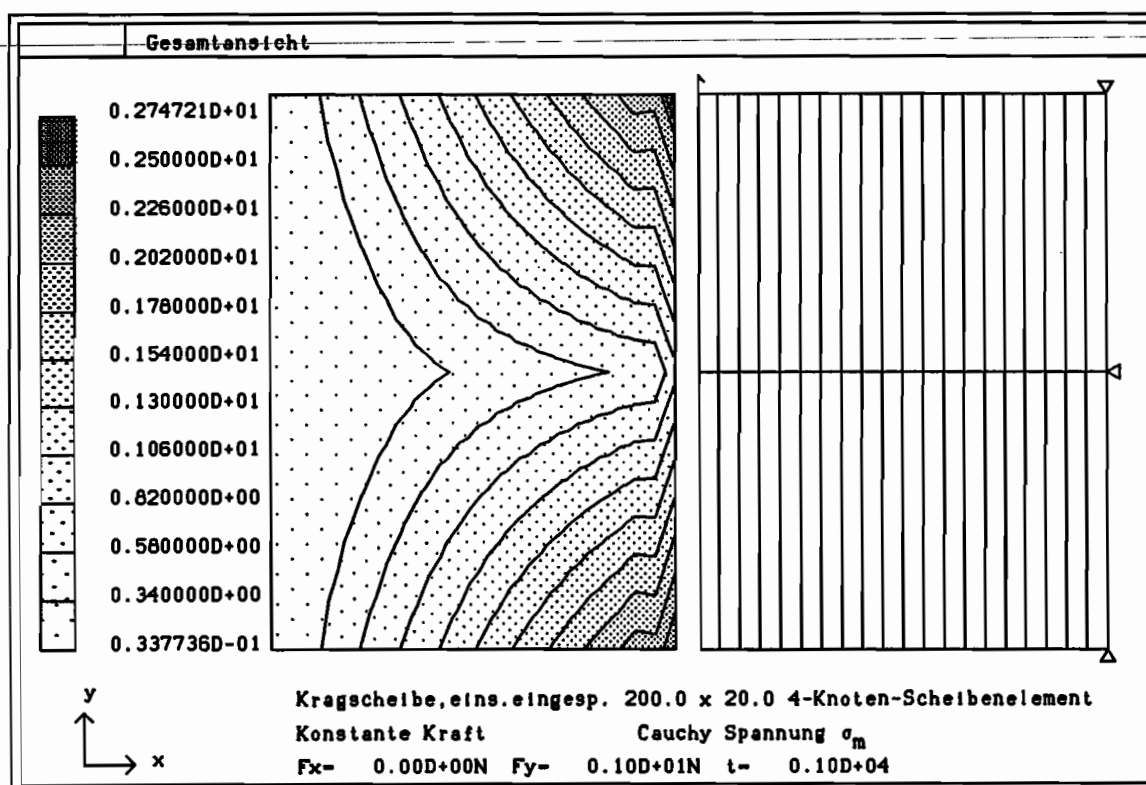


Abb. 85: Vergleichsspannung σ_m nach 1000 Sekunden

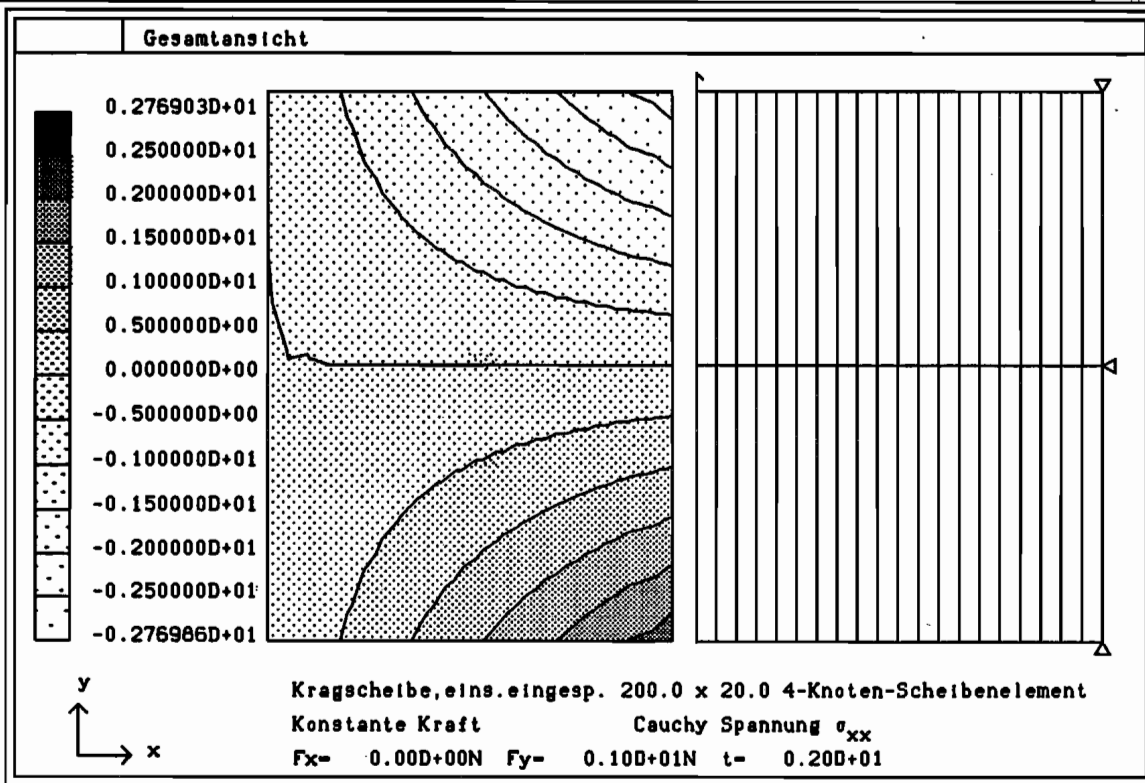


Abb. 86: Normalspannungen der Kragscheibe in x-Richtung

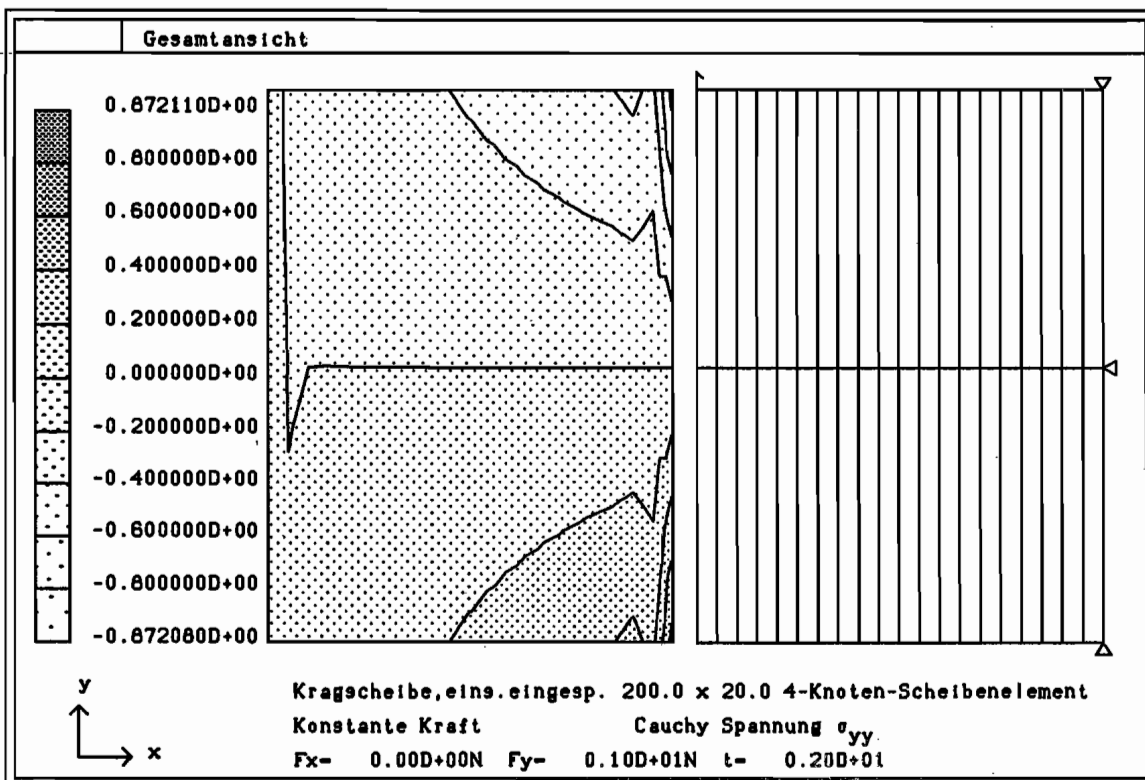


Abb. 87: Normalspannungen der Kragscheibe in y-Richtung

7.4.4 Trapezscheibe

Eine sich verjüngende, einseitig gelagerte Trapezscheibe wird am unteren Ende mit einer konstanten Verschiebungsrate beaufschlagt. Die Struktur besteht aus 164 4-Knoten-Scheibenelementen, wobei zwecks einer Netzverfeinerung zur Einspannseite zwei Reihen von Übergangselementen eingebracht wurden.

Das Verschiebungsfeld nach 3800 Sekunden zeigt Abb.88.

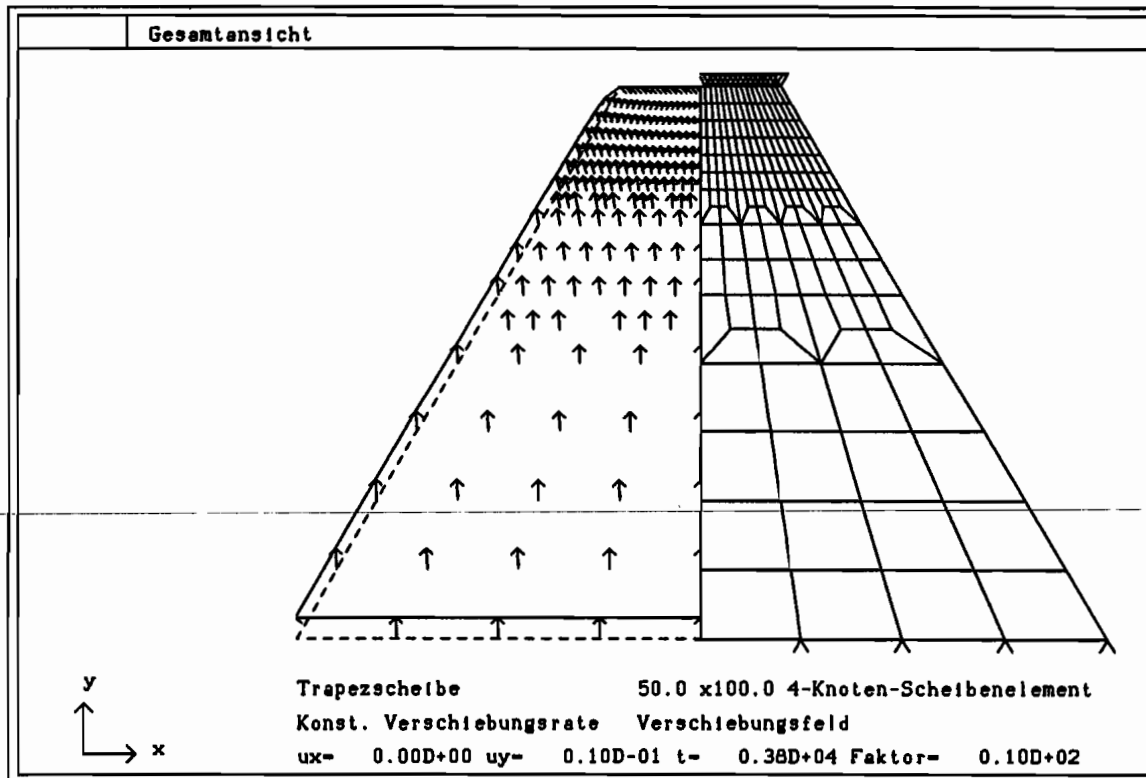


Abb. 88: Verschiebungsfeld der Trapezscheibe

Zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten wird die jeweilige Spannungsantwort dieser Scheibe dargestellt. Nach 100 Sekunden zeigt sich in Abb.89 an den äußeren Lagern die typische Spannungserhöhung im Bild der Vergleichsspannungen. Der Maximalwert beträgt 2.49 MPa .

Mit fortschreitender Zeit prägt sich diese Spannungsspitze aus. Abb.90 enthält einen ähnlichen Verlauf der Höhenlinien, jedoch mit einem deutlich höheren Maximalwert von 3.96 MPa .

Nach großen Zeiten tritt dann eine Umlagerung der höchstbelasteten Bereiche zur Symmetrieachse auf. Dies geht einher mit einer Abnahme des Maximums auf 3.09 MPa (Abb.91).

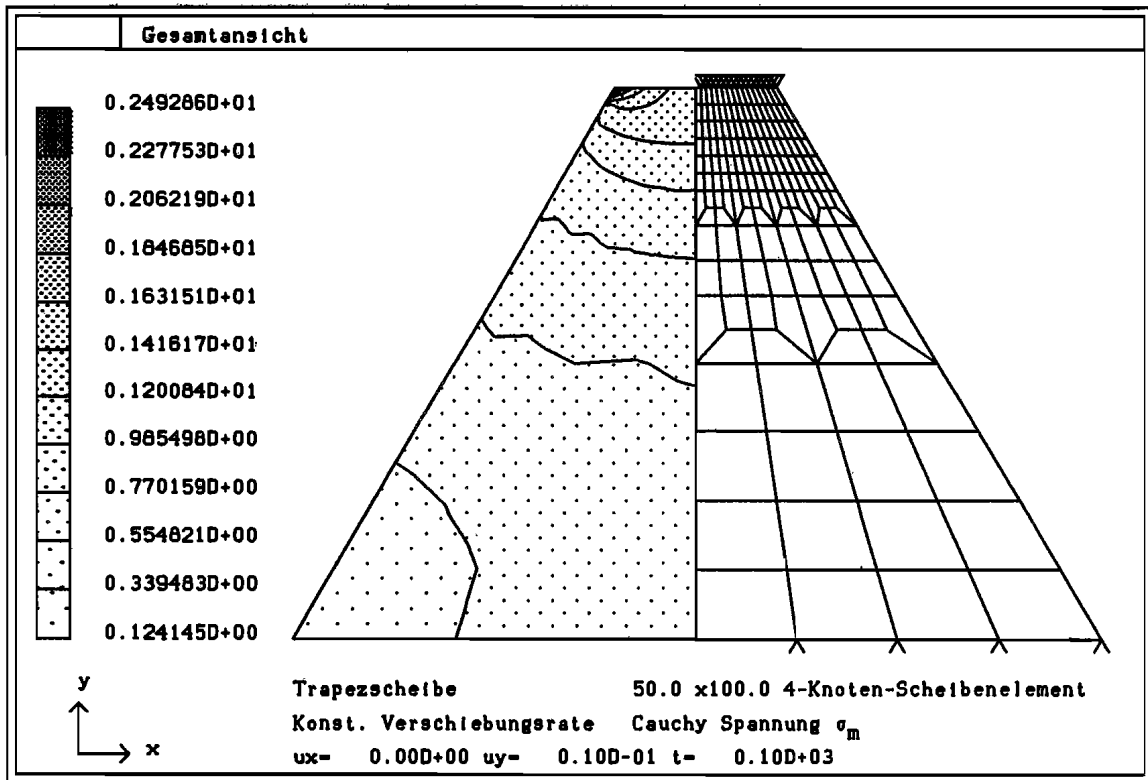


Abb. 89: Trapezscheibe nach 100 Sekunden

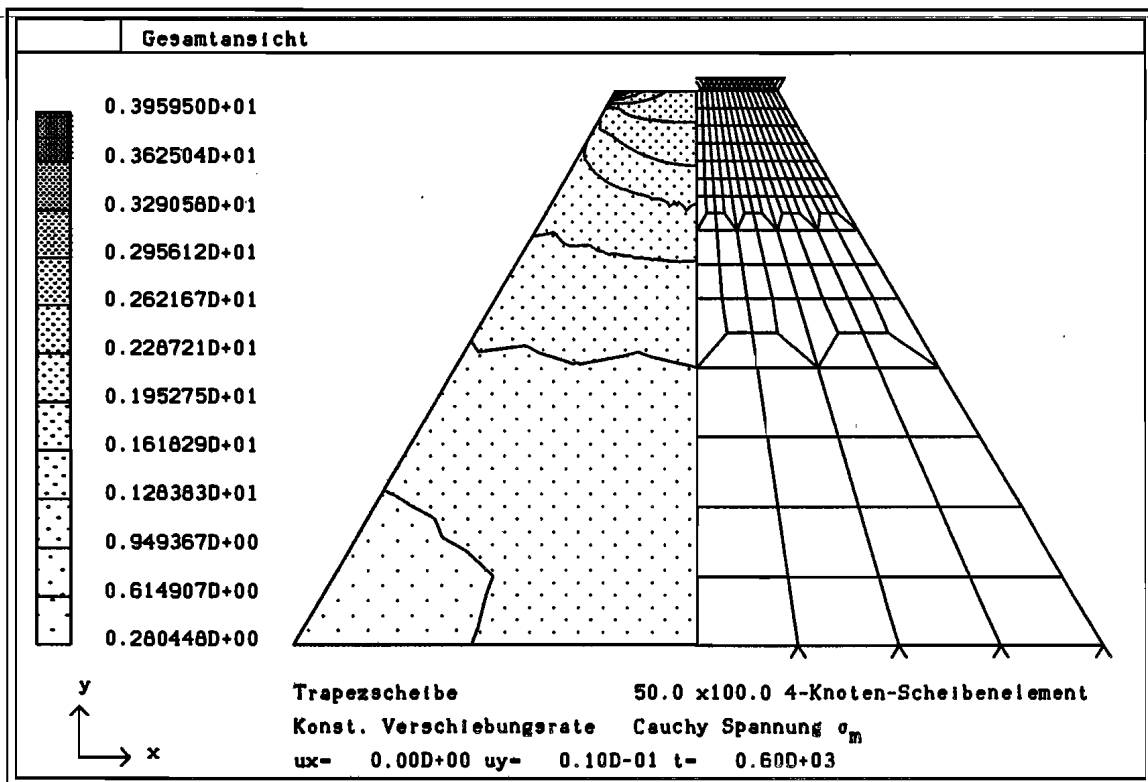


Abb. 90: Trapezscheibe nach 600 Sekunden

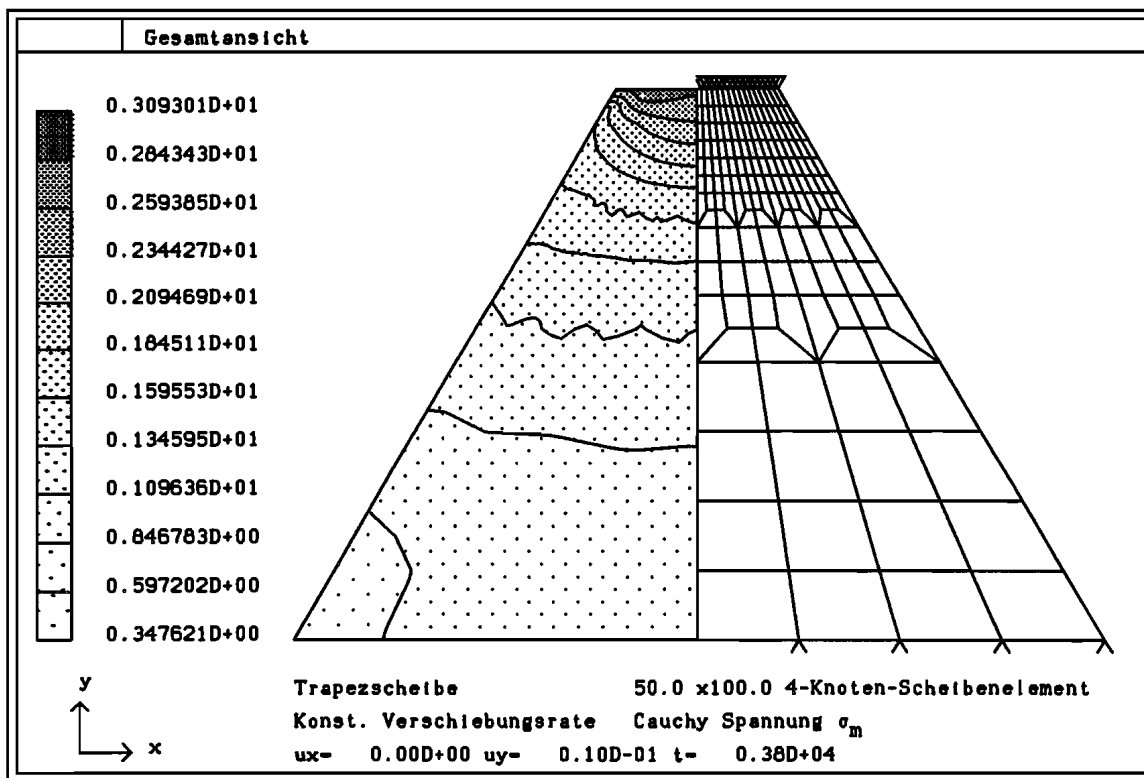


Abb. 91: Trapezscheibe nach 3800 Sekunden

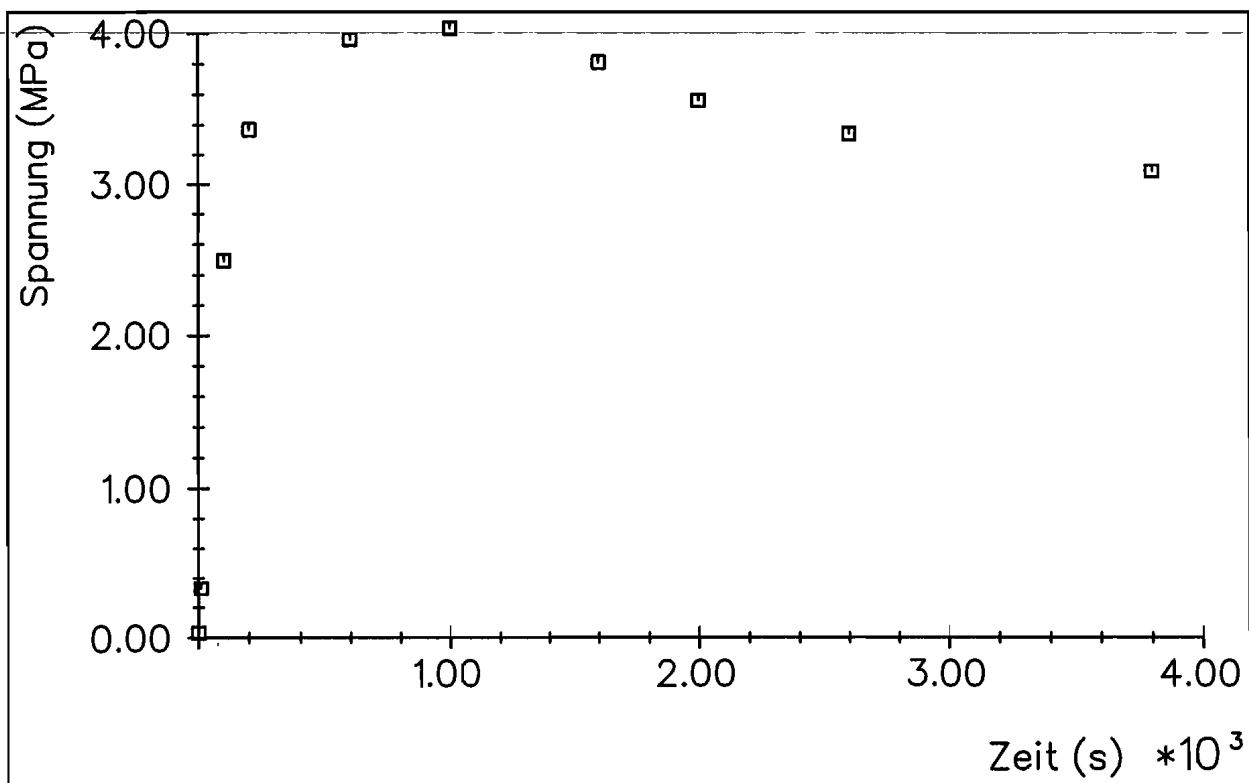


Abb. 92: Spannungsmaxima nach verschiedenen Belastungsdauern

Betrachtet man die Lage der Spannungsmaxima im $\sigma - t$ Diagramm (Abb.92), so zeigt sich nach einem schnellen Anstieg das Erreichen eines Extremwertes sowie der Übergang zu einem Residuumswert. Zu beachten ist hierbei jedoch, daß die Maxima nicht zwangsläufig an exakt der gleichen Stelle der Struktur auftreten.

Bei den durchgeführten Rechnungen mit Übergangselementen hat sich gezeigt, daß diese qualitativ gegenüber "normalen" Elementen problematisch sind. Höhenlinien im Bereich dieser Elemente weisen starke lokale Schwankungen auf, die in der ungünstigen Elementgeometrie begründet sind. Es ist folglich darauf zu achten, daß Übergangselemente in ausreichend großer Entfernung von kritischen bzw. zu beobachtenden Strukturbereichen liegen.

7.4.5 Gelochte Scheibe

Als abschließendes Beispiel in diesem Kapitel soll die klassische gelochte Scheibe untersucht werden. Vergleichsrechnungen, die jedoch auf Basis eines Stoffgesetzes für Stahl durchgeführt wurden, finden sich u.a. bei ZIENKIEWICZ (1991).

Aus Symmetriegründen ist nur ein Viertel der gesamten Scheibe betrachtet worden. Die Randbedingungen an den Symmetrieschnitten sind entsprechend zu wählen. Der Lochrand ist frei verschieblich. Es wird eine konstante Streckenlast mit der resultierenden Kraft \vec{F} aufgebracht.

Das Verschiebungsfeld in Abb.93 weist neben einer ellipsoiden Verformung des Lochrandes eine kontinuierlich steigende Verbreiterung der Scheibe bis zur horizontalen Symmetrieachse auf. Dabei geht die Absenkung an der Krafteinleitungsfläche über in eine Absenkung am oberen Lochrand sowie eine Zunahme der Breite der Scheibe.

Die Normalspannungskomponente in x-Richtung weist einen deutlichen Anstieg zum oberen Pol des Loches auf (Abb.94 und Abb.95). Dabei nimmt mit zunehmender Zeit der Maximalwert leicht ab; es erfolgt eine Umlagerung auf das Nahfeld des Extremalwertes, wo sich der Spannungsgradient verringert.

Wie in der zweidimensionalen Darstellung deutlich wird, existieren zu beiden ausgewählten Zeiten spannungsfreie Zonen bzgl. dieser Komponente.

Die Lage der Extrema sowie die Tendenz der Gradienten der y-Spannungskomponente zeigt Abb.96. Der betragsmäßig größte Wert tritt am seitlichen Rand des Loches auf, während an der unbelasteten und freien Seite ein für diesen Belastungs- und Spannungszustand typisches Nebenextremum zu beobachten ist. Die zeitliche Änderung

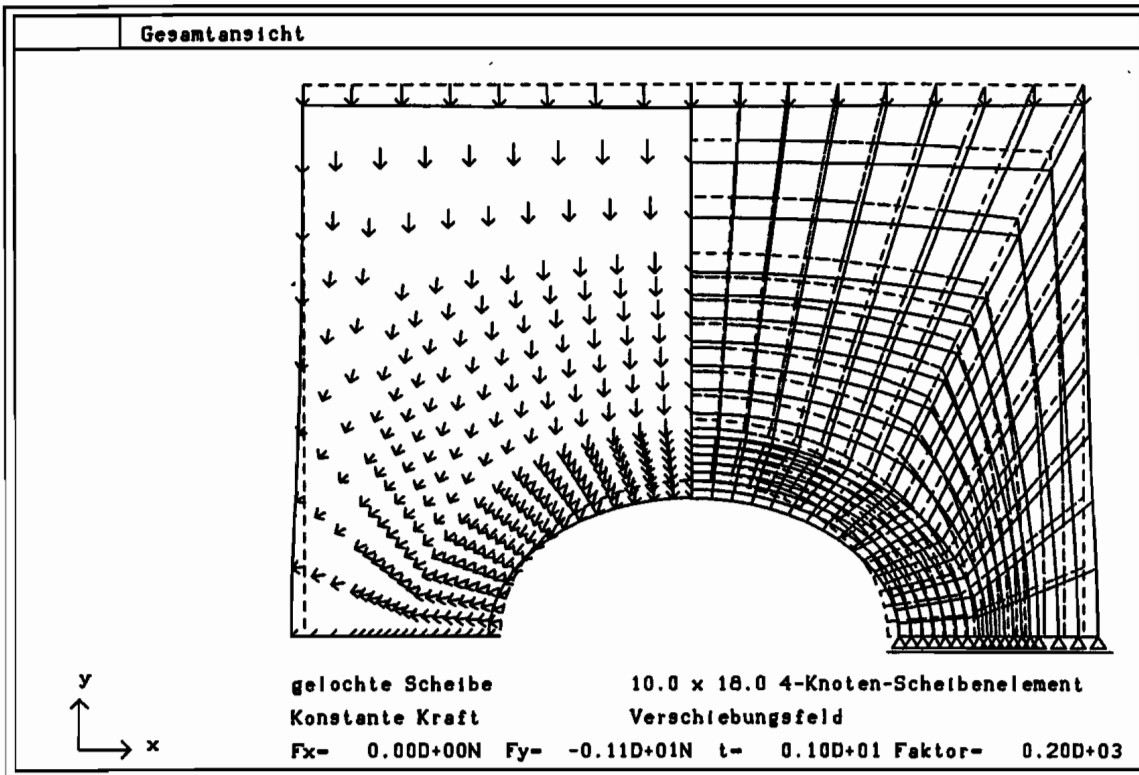


Abb. 93: Verschiebungsfeld der gelochten Scheibe

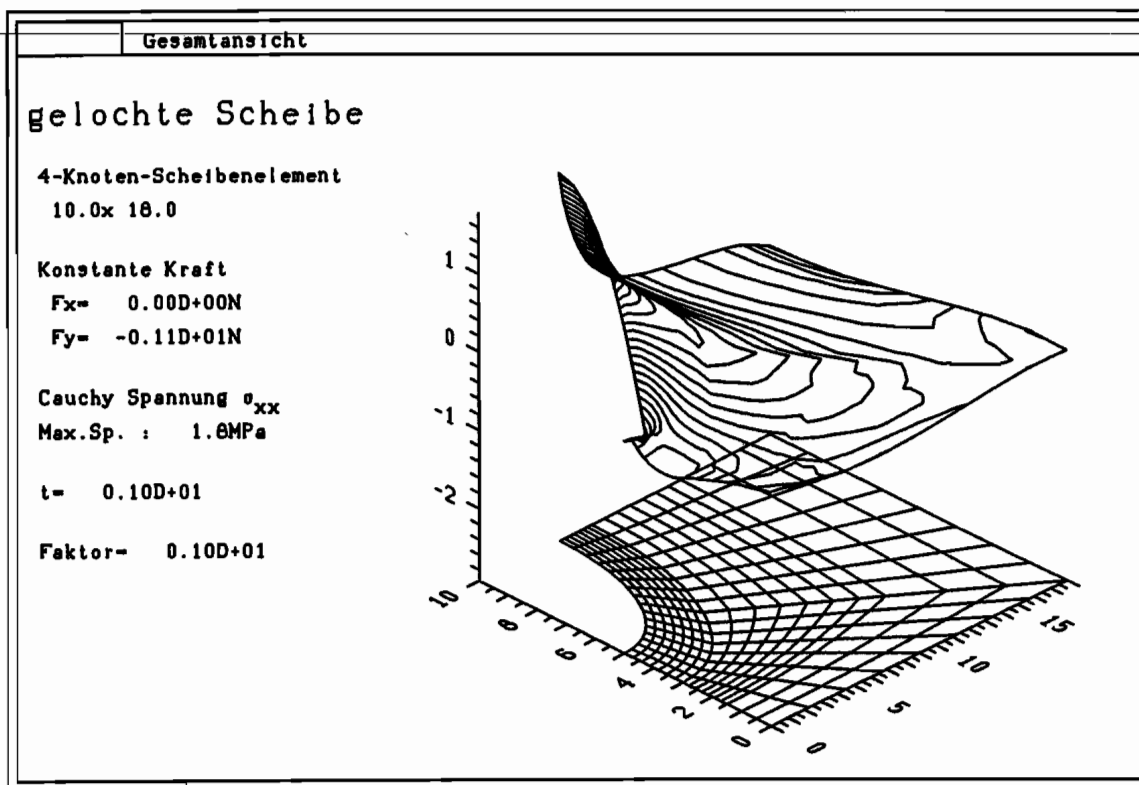


Abb. 94: Normalspannungskomponente in x-Richtung der gelochten Scheibe

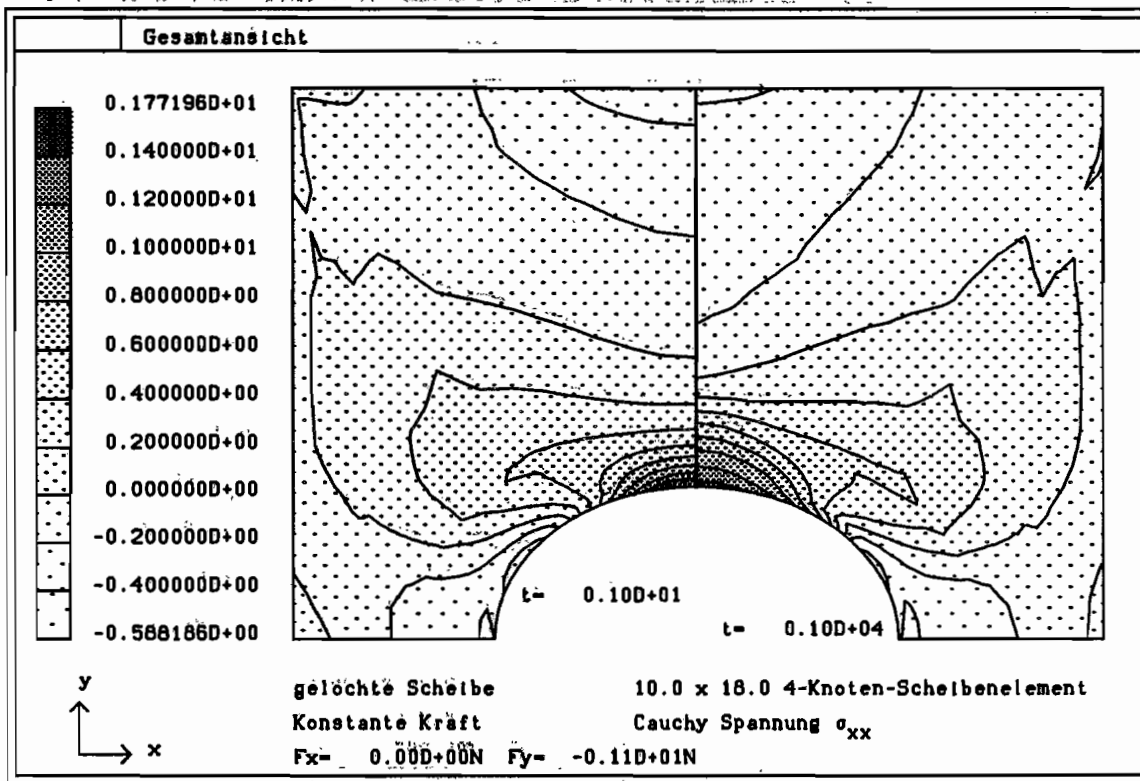


Abb. 95: Vergleich der Normalspannungskomponente in x-Richtung der gelochten Scheibe zu zwei Zeitpunkten

(Abb.97) verhält sich vergleichbar jener, die bei der x-Komponente auftritt; eine Abnahme des betragsmäßigen Maximums geht einher mit einer (leichten) Homogenisierung des Umfeldes.

Die Konsequenz der bisherigen Betrachtungen zur gelochten Scheibe ist der Verlauf der Vergleichsspannung σ_m . Extrema treten am oberen und seitlichen Lochrand auf, und ein Nebenmaximum zeigt sich am freien Rand. Die zeitliche Änderung der Höhenlinienbilder ist wiederum verbunden mit einer Abnahme der Spannung sowie einer Abnahme der Gradienten in der Struktur.

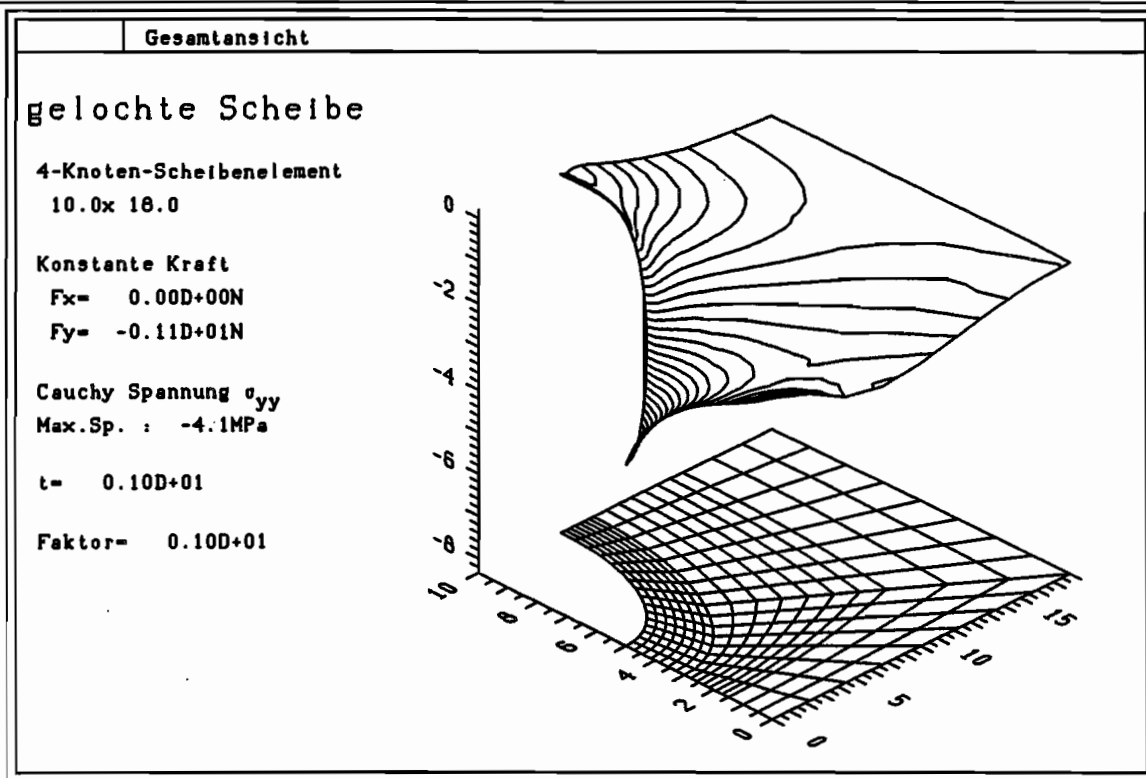


Abb. 96: Normalspannungskomponente in y-Richtung der gelochten Scheibe

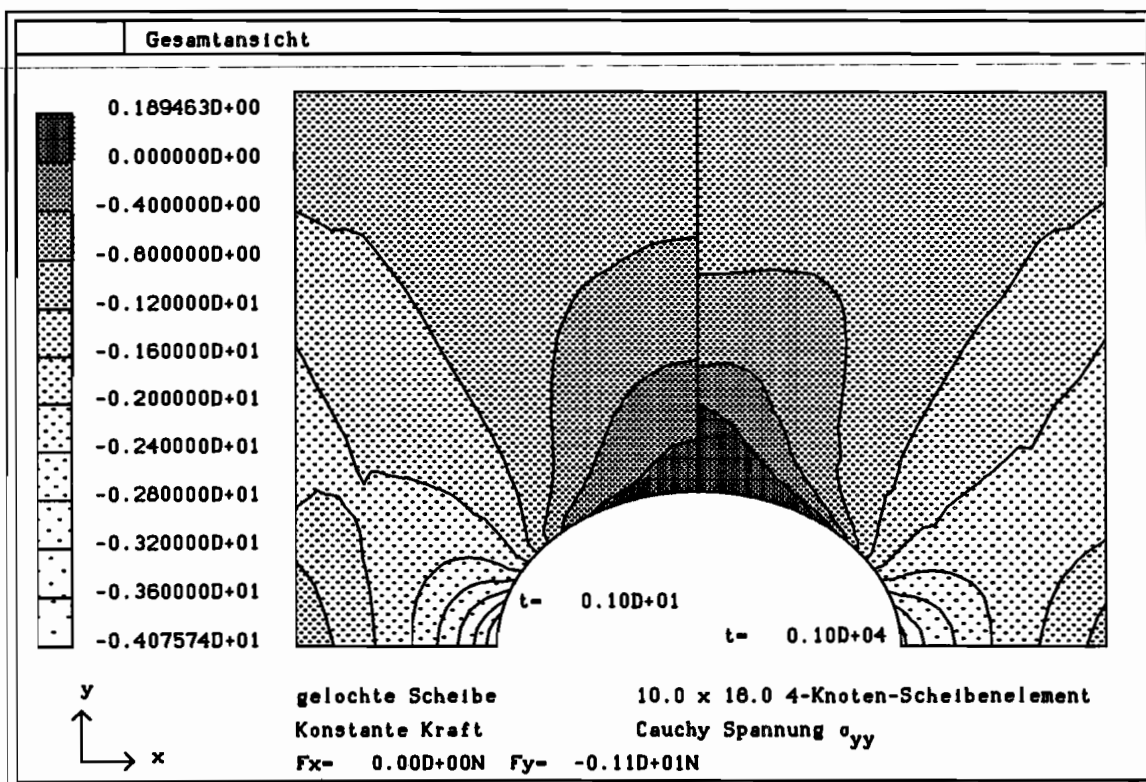


Abb. 97: Vergleich der Normalspannungskomponente in y-Richtung der gelochten Scheibe zu zwei Zeitpunkten

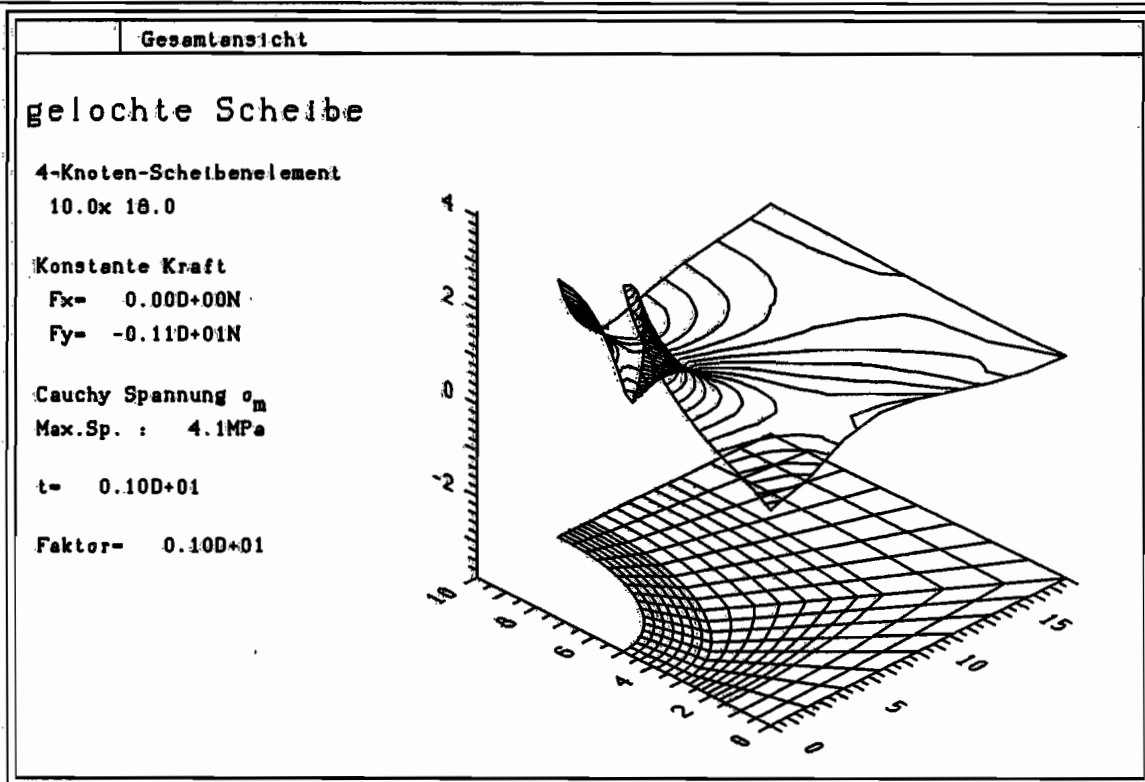


Abb. 98: Vergleichsspannung der gelochten Scheibe

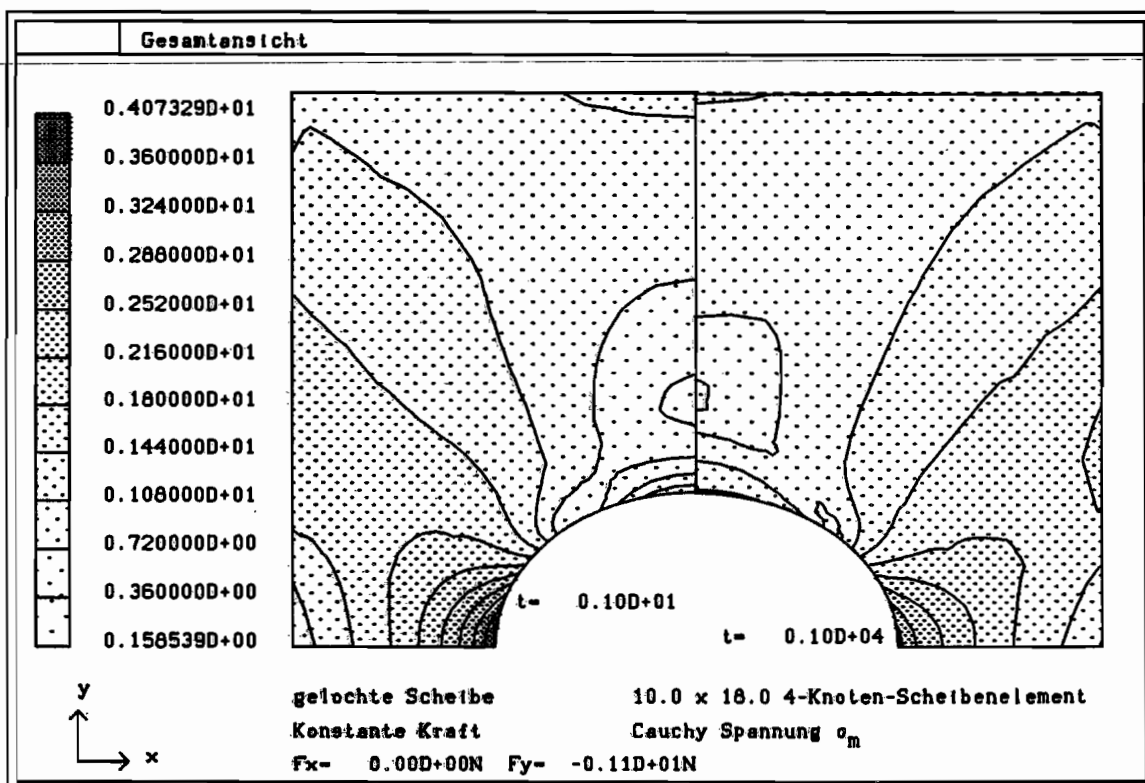


Abb. 99: Vergleichsspannung der gelochten Scheibe zu zwei Zeitpunkten

8. Zusammenfassung und Ausblick

Es ist ein mehrdimensionales, thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis vorgestellt worden.

Aufgrund der vielfältigen Erscheinungsformen, die unter dem Begriff Eis zusammengefaßt werden, erfolgte zunächst eine begriffliche Klärung und Einteilung der wichtigsten Eisformen. Verformungsmechanismen, die mikromechanisch zu erklären sind, geben daran anschließend einen Einblick in die Abläufe, die in phänomenologischen Modellen gemittelt beschrieben werden.

Nach einem kurzen Überblick bestehender Stoffgesetze folgte die Aufbereitung der Rahmenbedingungen des vorgestellten Modells. Eine thermodynamische Theorie ist aufgezeigt worden, die in Verbindung mit den konstitutiven Gleichungen eine Erfüllung der thermodynamischen Hauptsätze gewährleistet. Die daraus für die Formulierung der Evolutionsgleichungen entstandenen Restriktionen sind berücksichtigt worden.

Neben den adiabaten und isothermen Sonderfällen lassen sich unter Zuhilfenahme einer geeigneten Wärmeübergangsgleichung grundsätzlich mit dem Modell auch allgemeine Prozesse realisieren.

Im Gegensatz zu vielen Stoffgesetzen, die Werkstoffe bei höheren Temperaturen beschreiben, enthält dieses Modell für den Hochtemperaturwerkstoff Eis keine Fließgrenze, die einen rein elastischen Bereich abgrenzt. Die aus der Plastizität bzw. Viskoplastizität bekannte Fließfläche reduziert sich auf einen Fließpunkt.

Mit dem Konzept der internen Variablen, die phänomenologisch die tatsächlichen Abläufe im Material beschreiben, ist eine Erfassung der wesentlichen Einflüsse angestrebt worden. Diese werden durch zwei tensorwertige Größen modelliert, die mikromechanische Vorgänge repräsentieren und einerseits zu einer Verfestigung, andererseits zu einer Entfestigung des Materials führen. Da diese Mechanismen im Laufe einer Belastungsgeschichte nicht zwangsläufig monoton sind, enthalten die Evolutionsgleichungen Erholungsterme.

Das vorgestellte Modell beinhaltet kein Schädigungsmaß, dessen Einführung unmittelbar an die Möglichkeit einer entsprechenden Auswertung vorhandener Versuche gebunden ist. Die Güte der Vorhersage einer Belastungsantwort ist davon unbeeinflusst; Abbruchkriterien, die ein Versagen des Werkstoffes (insbesondere bei makroskopischem Zug) repräsentieren, müssen ohne Damage-Größen ggf. extern vorgegeben werden.

Die Anpassung des hier vorgestellten Modells beruht auf Experimenten, die der Literatur entnommen sind. Mittels Regressionsrechnungen an charakteristischen Punkten einaxialer Spannungs-Dehnungskurven ist es gelungen, analytische, idealisierte Kurven zu bestimmen. Mit deren Hilfe konnte eine Strategie entwickelt werden, die eine sukzessive Ermittlung unbekannter Parameter und Funktionen vorsieht. Dies setzte eine weitgehende Separierung der Einflüsse unbekannter Größen voraus. Ausgeführte Rechnungen mit Belastungspfaden bzw. -arten, die nicht in die Anpassung eingeflossen sind, zeigen ebenfalls eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Experimenten.

Die hier durchgeführten Strukturberechnungen mit einem nichtkommerziellen FE-Programmpaket haben die Verwendbarkeit des Modells für komplexe Aufgaben angedeutet. An exemplarisch ausgewählten Scheibengeometrien sind Rechnungen mit konstanter (Linien-)Last bzw. konstanter Verschiebungsrate durchgeführt worden. Ein Ausbau dieser Berechnungen ist nach den bisher gewonnenen Erkenntnissen unabhängig von der Stoffgesetzformulierung und damit nur eine Frage der umgebenden Hard- und Softwarelandschaft.

Ausblickend ist festzustellen, daß mit dieser Arbeit viele Anknüpfungspunkte für die Zukunft geschaffen werden sollten. Besonders erstrebenswert erscheint im Hinblick auf fortzuführende Aktivitäten in der Stoffgesetzentwicklung eine Kombination aus Modellbildung und begleitendem Versuchsprogramm. Zur Erfassung materialbedingter Struktureinflüsse wie Anisotropie, Einschlüsse, Korngrößen u.a. ist zu prüfen, ob eine Kombination mit mikromechanisch formulierten Modellen dazu beitragen kann, die Vorteile dieser Betrachtungsweisen miteinander zu kombinieren. Zur Optimierung der Handhabung der Stoffgesetze in Bezug auf eine große Varianz im betrachteten Material ist mittelfristig der Übergang zu einer definierten Serie von Standardversuchsergebnissen, die in die Anpassung eingehen, anzustreben.

Eistypen und Belastungsarten charakterisieren die Erfordernisse an das Modell. Eine zielorientierte Strategie, wie sie in dieser Arbeit dargestellt wurde, kann als ein Weg in eine übersichtliche Aufbereitung des vorhandenen Wissens dienen.

Literaturverzeichnis

- ARMSTRONG, P. J.; FREDERICK, C. O.: A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect. C. E. G. B. Report RD/B/N 731 (1966)
- ASHBY, M. F.; DUVAL, P.: The Creep of Polycrystalline Ice. Cold Regions Science and Technology, Vol. 11 (1985) 285-300
- ASSUR, A.: Composition of Sea Ice and its Tensile Strength. Arctic Sea Ice. U. S. National Academy of Sciences - National Research Council, Washington, D. C., Publication 598 (1958) 106-138
- ASSUR, A.: Some Promising Trends in Ice Mechanics. Physics and Mechanics of Ice (1980) Symposium Copenhagen 1979
-
- AXELRAD, D.R.; MUSCHIK, W.: Constitutive Laws and Microstructure. Proceedings of the Seminar Wissenschaftskolleg-Institute for Advanced Study, Springer-Verlag, Berlin (1987) 3-23
- BAKER, ROBERT W.: The Influence of Ice-Crystal Size on Creep. Journal of Glaciology, Vol.21, No.085 (1978)
- BARNES, P.; TABOR, D.; WALKER, F. R. S. and J. C. F.: The Friction and Creep of Polycrystalline Ice. Proc. Roy. Soc. Lond. A., Volume 324 (1971) 127-155
- BATHE, K. J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag (1986)
- BAZANT, ZDENEK P.; KIM, JIN-KNEUN : Fracture Theory for Nonhomogenous Brittle Materials with Application to Ice. Civil Eng. in the Arctic Offshore, Proc. of the Conf. Arctic'85, NY (1985) 917-930
- BECKER, E.; BÜRGER, W.: Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher Mechanik, B. G. Teubner Stuttgart (1975)
- BETTEN, J.: Applications of Tensor Functions to the Formulations of Constitutive Equations Involving Damage and Initial Anisotropy. Eng. Fract. Mech. 25, (1986) 573-584

- BISCHOFF-BEIERMANN, BURKHARD: Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie. Diss. (1992); Mitt. Inst. Mech., 82, Ruhr-Univ. Bochum (1992a)
- BISCHOFF-BEIERMANN, BURKHARD: persönliche Mitteilungen (1992b)
- BRAASCH, HARALD: Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Werkstoffmodelle. Bericht Nr. 92-71 aus dem Institut für Statik der TU Braunschweig (1992)
- BRAGG, W. H.: The Crystal Structure of Ice. Proc. Phys. Soc., 34 (1922) 98-108
- BROWN, R. L.: Constitutive Equation for Sea Ice Based on Microstructure and Irreversible Thermodynamics. 6. Intern. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium (1987)
- BROWN, STUART B.; KIM, KWON H.; ANAND, LALLIT : An Internal Variable Constitutive Model for Hot Working of Metals. International Journal of Plasticity, Vol.5 (1989) 95-130
- BRUHNS, O. T.: Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer elastoplastischer Deformationen. Ingenieur-Archiv 46 (1977)
- BRUHNS, O. T.: On the Constitutive Relations of Austenitic Stainless Steels. Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications (1987)
- BRUHNS, O. T.; PITZER, M.: Some Remarks on Integration Procedures for a Viscoplastic Constitutive Law. International Journal of Plasticity, Vol. 7 (1991) 235-254
- BUTKOVICH, T. R.; LANDAUER, J. K.: The Flow Law for Ice. Int. Ass. of Scientific Hydrology, Symposium of Chamonix, Pub. No.47 (1958)
- CANNON, N. P.; SCHULSON, E. H.; SMITH, T. R.; FROST, H. J.: Wing Cracks and Brittle Compressive Fracture. Acta Metallurgica et Materialia (1990)
- CHABOCHE, J.L.; ROUSSELIER, G.: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept. J. Pressure Vessel Technology (ASME), Vol. 105 (1983a) 153-158
- CHABOCHE, J.L.; ROUSSELIER, G.: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel. J. Pressure Vessel Technology (ASME), Vol. 105 (1983b) 159-164

- CHOI, K.; KARR, DALE G.: A Damage Mechanics Model for Uniaxial Creep and Cyclic Loading of Polycrystalline Ice. Proc. of the 8th International OMAE Symposium, Vol. 4, New York (1989) 75-82
- CHUNG, JIN S.: Ice Mechanics. Applied Mechanics Reviews, Vol. 40, No.9 (1987)
- COLE, DAVID M.: Preparation of Polycrystalline Ice Specimens for Laboratory Experiments. Cold Regions Science and Technology, 01 (1979) 153-159
- COLE, DAVID M.: The Relationship between Creep and Strength Behavior of Ice at Failure. Cold Regions Science and Technology, 08 (1983a) 189-197
- COLE, DAVID M.: The Effect of Stress Application Rate on the Creep Behaviour of Polycrystalline Ice. Journal of Energy Resources Technology, Vol. 105, No. 4 (1983b) 454-459
- COLE, DAVID M.: The Influence of Grain Size on the Ductility of Ice. Proceedings of the 3rd OMAE Symposium, Vol.3 (1984) 150-157
- COLE, DAVID M.: Grain Size and the Compressive Strength of Ice. Journal of Energy Resources Technology, Vol.107 (1985) 369-374
- COLE, DAVID M.: Strain Energy Failure Criterion for S2 Freshwater Ice in Flexure. Proceedings of the 9th IAHR Symposium, Vol.1, Sapporo (1988) 206-215
- COLE, DAVID M.: Ice Physics and Micromechanics: A Review of Selected Topics. Proceedings of the IAHR Symposium on Ice 1992, Vol. 2, Banff, Alberta, Canada (1992) 1087-1099
- COLE, DAVID M., GOULD, L. D.: Uniaxial Tension/Compression Tests on Ice—Preliminary Results. Proceedings of the 8th OMAE Symposium, Vol. 4, New York (1989) 37-41
- COLE, DAVID M.; LAWRENCE, WILLIAM, F. ST.: Acoustic Emissions from Ice. Third Conference on Acoustic Emission, Pennsylvania State University (1981)
- DANTL, G.: Die elastischen Moduln von Eis-Einkristallen. Physik der kondensierten Materie, Bd. 7, Springer-Verlag, Berlin (1968) 390-397
- DILLON, HOWARD B.; ANDERSLAND, O. B.: Deformation Rates of Polycrystalline Ice. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967)
- DOBERT, J.: Seeamtsverhandlung "Gotland II". Schiff und Hafen, Vol. 35, No. 10 (1983) 99-103

- DUVAL, PAUL: Anelastic Behaviour of Polycrystalline Ice. *Journal of Glaciology*, Vol.21, No.085 (1978)
- DUVAL, PAUL: Creep and Fabrics of Polycrystalline Ice under Shear and Compression. *Journal of Glaciology*, Vol. 87, No. 95 (1981) 129-140
- EWING, M.; GRARY, A. P.; THORNE, A. M.: Propagation of Elastic Waves in Ice. Pt. 1, *Phys.* 5 (1934) 165-168
- FARREN, W. S.; TAYLOR, G. I.: The Heat Developed During Plastic Extension of Metals. *Proc. Royal Soc., London* (1925) 422-451
- FELDMÜLLER, ANDREAS: Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua. Diss. (1991); *Mitt. Inst. Mech.*, 75, Ruhr-Univ. Bochum (1991)
- FISH, ANATOLY M.: Shape of Creep Curves in Frozen Soils and Polycrystalline Ice. *Can. Geotech. J.* 24 (1987) 623-629
- FORNEFELD, WERNER: Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells. Diss. (1990); *Mitt. Inst. Mech.*, 73, Ruhr-Univ. Bochum (1990)
-
- FRANTZISKONIS, G.: Damage and Free Edge Effects in Laminated Composites. Energy and Stability Propositions. *Acta Mechanica*, 77 (1989) 213-230
- FROST, H. J., ASHBY, M. F.: *Deformation Mechanism Maps*. Pergamon Press, Oxford, USA (1982)
- GLEN, J. W.: Experiments on the Deformation of Ice. *Journal of Glaciology* 2 (1952) 111-114
- GLEN, J. W.: Rate of Flow of Polycrystalline Ice. *Nature*, Vol. 172, No. 4381 (1953)
- GLEN, J. W.: The Creep of Polycrystalline Ice. *Proc. R. Soc.* A228 (1955) 519-538
- GLEN, J. W.: The Flow Law of Ice. *Int. Ass. of Scientific Hydrology, Symposium of Chamonix*, Pub. No.47 (1958)
- GLEN, JOHN W.: *The Physics of Ice*. CRREL, Monograph II-C2a (1974)
- GLEN, JOHN W.: *The Mechanics of Ice*. CRREL, Monograph II-C2b (1975)
- GLEN, JOHN W.: Fifty Years of Progress in Ice Physics. *Journal of glaciology*, Special issue (1987) 52-59

- GLEN, J. W.; JONES, S. J.: The Deformation of Ice Single Crystals at Low Temperatures. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967)
- GLOCKNER, P. G.; SZYSZKOWSKI, W.: An Engineering Multiaxial Constitutive Model for Nonlinear Time-Dependent Materials. International Journal of Solids Structures Vol.26, No.1 (1990) 73-82
- GOLD, L. W.: Some Observations on the Dependence of Strain on Stress for Ice. Can. Journ. Phys., 36 (1958) 1263-1275
- GOLD, L. W.: Deformation Mechanisms in Ice. Ice and Snow, The M.I.T. Press (1963)
- GOLD, L. W.: Time to Formation of First Cracks in Ice. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967)
- GOLD, L. W.; SINHA, N. K.: The Rheological Behaviour of Ice at Small Strains. Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979 (1980)
- HANSEN, A. C.; BROWN, R. L.: An Integral State Variable Approach to Constitutive Theories for Granular Materials with Snow as an Example. Mechanics of Materials, 7 (1988) 109-119
- HARPER, B. D.: A Uniaxial Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relation for Ice. Journal Energy Resources Technology, Vol. 108, No. 2 (1986) 156-160
- HAUPT, P.; TSAKMAKIS, CH.: Über viskoplastische Materialmodelle mit Über-
spannung. ZAMM, 67, (1987) T195
- HAUPT, P.; TSAKMAKIS, CH.: Einige grundsätzliche Eigenschaften von plastischen
und viskoplastischen Materialmodellen. ZAMM, 69, 5, (1989) T509-T511
- HAWKES, IVOR; MELLOR, MALCOLM : Deformation and Fracture of Ice Under
Uniaxial Stress. Journal of Glaciology, Vol.11, No.061 (1972)
- HERZBERG, R. W.: Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials.
John Wiley & Sons, New York, USA (1976)
- HOBBS P. V.: Hobbs, Ice Physics, Clarendon Press Oxford (1974)
- HOOKE, R. LEB.; MELLOR, MALCOLM ; ET AL.: Mechanical Properties of
Polycrystalline Ice: An Assessment of Current Knowledge and Priorities for
Research. Cold Regions Science and Technology, 3 (1980) 263-275

- HUTTER, K.; WILLIAMS, F. M.: Theory of Floating Ice Sheets. Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979 (1980)
- HÄUSLER, FRANZ U.: Comparison between Different Yield Functions for Saline Ice. Annals of Glaciology 4 (1983)
- HÄUSLER, FRANZ U.: Beitrag zur Ermittlung der Kräfte beim Eisbrechen. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Nr.484, Dissertation (1989)
- HÄUSLER, FRANZ U.; MATTHIES, H.G.; MOORE, C.S.: Sea Ice under Complex Stress States-Constitutive Modelling and Testing. Proceedings of IUTAM-/IAHR Symposium on Ice Structure Interaction (1990)
- HUTCHINSON, J.W.: Creep and Plasticity of Hexag. Polycrystals as Related to Single Crystal Slip. Metallurgical Transactions A, Vol. 8A (1977) 1465-1469
- JONES, STEPHEN J.: The Confined Compressive Strength of Polycrystalline Ice. Journal of Glaciology, Vol.28, No.098 (1982)
- JONES, STEPHEN J.; BRUNET, JEAN-GUY : Deformation of Ice Single Crystals Close to the Melting Point. Journal of Glaciology, Vol.21, No.085 (1978)
-
- JORDAAN, I.J.: Numerical and Finite Element Techniques in Calculation of Icestructure Interaction. Proc. of IAHR Symposium on Ice 1986, Iowa City, Iowa, Vol. II (1986) 405-441
- KARR, DALE G.: Constitutive Equations for Ice as a Damaging Material. Proc. of the Conference Arctic'85, New York (1985a) 908-916
- KARR, DALE G.: A Damage Mechanics Model for Uniaxial Deformation of Ice. Journal of Energy Resources Technology, Vol.107 (1985b) 363-368
- KARR, DALE G.; CHOI, KYUNGSIK : A Three-Dimensional Constitutive Damage Model for Polycrystalline Ice. Mechanics of Materials 8 (1989) 55-66
- KOCH, R. F.: Beiträge zur Kenntnis der Elastizität des Eises. (1885) Annln Phys. Chem. bnd N.P. 25, 438-450
- KOCKS, U. F.; WESTLAKE, D.G.: Trans. TMS-AIME, Vol. 239 (1967) 1107 (zitiert nach: Hutchinson, 1977)
- KOX, GORDON F.N.; RICHTER-MENGE, JAQUELINE : Triaxial Compression Testing of Ice. Civil Eng. in the Arctic Offshore, Proc. of the Conf. Arctic'85, NY (1985) 476-488

- KUEHN, G.A.; SCHULSON, E.M.; NIXON, W.A.: The Effects of Prestrain on the Compressive Ductile-to-Brittle Transition in Ice. Proceedings of the 9th IAHR Symposium, Vol.1, Sapporo (1988) 109-117
- LAURENT, P.; BATISSE, M.: Cinetique de la Récrystallisation de l'Aluminium I. Revue de Metallurgie, XLIX, No.7 (1952a)
- LAURENT, P.; BATISSE, M.: Cinetique de la Récrystallisation de l'Aluminium II. Revue de Metallurgie, XLIX, No.8 (1952b)
- LAWRENCE, WILLIAM F. ST.; COLE, DAVID M.: Acoustic Emissions from Polycrystalline Ice. Cold Regions Science and Technology, 5 (1982) 183-199
- LE GAC; H.; DUVAL, P.: Constitutive Relations for the Non Elastic Deformation of Polycrystalline Ice. Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979 (1980)
- LEE, E.H.; MALLETT, R. L.; WERTHEIMER, T. B.: Stress Analysis for Anisotropic Hardening in Finite-Deformation Plasticity. Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, (1983), 554-560
- LEE, R. W.; SCHULSON, E. M.: The Strength and Ductility of Ice under Tension. Proceedings of the 5th OMAE Symposium, Vol. 4, Tokio (1986) 298-302
- LEHMANN, TH.: Internal Variables in Thermoplasticity. unveröffentlicht
- LEHMANN, TH.: Einige Betrachtungen zur Thermodynamik großer elasto-plastischer Formänderungen. Acta Mechanica 20 (1974) 187-207
- LEHMANN, TH.: Große elasto-plastische Formänderungen. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 1 (1976)
- LEHMANN, TH.: On a Generalized Constitutive Law for Finite Deformations in Thermo-plasticity and Thermo-viscoplasticity. Constitutive Laws for Engineering Materials (Desai, Krempl, Kundu, ed) Elsevier; New York, Amsterdam, London (1987) 173-184
- LEHMANN, TH.: On the Influence of the Coupling between Mechanical and Thermal Processes in Elastic Bifurcation. Arch. Mech., 40, 1, Warszawa (1988) 81-96
- LEHMANN, TH.: Some Thermodynamical Considerations on Inelastic Deformations Including Damage Processes. Acta Mechanica 79 (1989a) 1-24
- LEHMANN, TH.: On the Balance of Energy and Entropy at Inelastic Deformations of Solid Bodies. Eur. J. Mech., A/Solids, No.3 (1989b) 235-251

- LEHMANN, TH.: On Dissipation Connected with Plastic Deformations. ZAMM, 69, 5 (1989c) T511-T513
- LEHMANN, TH.: Thermodynamical Foundations of Large Inelastic Deformations of Solid Bodies Including Damage. Int. J. Plasticity, 7 (1991) 79-98
- LIU, F.; BAKER, I.; YAO, G.; DUDLEY, M.: Dynamic Observations of Dislocation Sources at Grain Boundaries in Ice. Philosophical Magazin (1992a) (in press)
- LIU, F.; BAKER, I.; YAO, G.; DUDLEY, M.: Dislocations and Grain Boundaries in Polycrystalline Ice: A Preliminary Study by Synchrotron X-Ray Topography. Journal of Material Science (1992b) (in press)
- LIU, Y. J.; HSU, T., R.: On the Multidimensional Creep Deformation of Ice by Finite Element Analysis. Journal of Energy Resources Technology, Vol. 104, No. 3 (1982) 193-198
- LIU, M. C. M.; KREMPL, E.: A Uniaxial Viscoplastic Model Based on Strain and Overstress. J. Mech. Phys. Solids 27 (1979) 377-391
- LLIBOUTRY, L.: Traité de Glaciologie. Tome I et II, Masson et Cie, Paris (1965)
- MAHRENHOLTZ, O. H.; PALATHINGAL, P.: Creep Behaviour of Fresh-Water Ice. Proceedings 12th CANCAM, Ottawa, Canada (1989)
- MAHRENHOLTZ, O. H.; WU, Z.: Application of Continuum Damage Mechanics to the Creep Analysis of Polycrystalline Ice. Proceedings of the 13. Canadian Congress of Applied Mechanics, CANCAM' 91, (1991a) 378-379
- MAHRENHOLTZ, O. H.; WU, Z.: Numerical Simulation of Viscoelastic Behaviour of Ice Structures. Proceedings of the 11. POAC Conference, Newfoundland, Canada (1991b)
- MAHRENHOLTZ, O. H.; WU, Z.: Creep of Circular Ice Plates: Analysis and Experiment. Proceedings of the 10. OMAE, Stavanger, Norway, (1991c) 47-53
- MAHRENHOLTZ, O. H.; WU, Z.; KÖNIG, J. A.: Creep of Ice under Multiaxial Loading: Analysis and Experiment. Proceedings of CSME, Toronto, Canada (1990)
- MALVERN, L.E.: Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1969)
- MATTHIES, HERMANN G.: The Rate Problem for Complex Material Behaviour with Internal Variables. 2. Intern. Conf. on Computational Plasticity, COMPLAS 1, Barcelona (1989)

- MCKENNA, RICHARD F.; JORDAAN, IAN J.: Constitutive Relations for Creep of Ice. Proceedings of the 9th IAHR Symposium, Sapporo, Vol. 3 (1988) 47-58
- MCKENNA, R.F.; JORDAAN, I.J.; XIAO, J.: Finite Element Modelling of the Damage Process in Ice. Abaqus User's Conference Proceedings (1990) 385-400
- MCKENNA, R. F., MEYSSONNIER, J., JORDAAN, I. J.: Peak Pressures from a Damage Model for Ice in Compression. Proceedings of the 8th IAHR Symposium, New York, Vol. 4 (1989) 67-73
- MELLOR, MALCOLM : Mechanical Properties of Polycrystalline Ice. Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979 (1980)
- MELLOR, MALCOLM : Strain Measurements on Dumbbell Specimens. Cold Regions Science and Technology, 08 (1983) 075-077
- MELLOR, MALCOLM; COLE, DAVID M.: Cyclic Loading and Fatigue in Ice. Cold Regions Science and Technology, 04 (1981) 041-053
- MELLOR, MALCOLM; COLE, DAVID M.: Deformation and Failure of Ice under Constant Stress or Constant Strain-Rate. Cold Regions Science and Technology, 05 (1982) 201-219
- MELLOR, MALCOLM; COLE, DAVID M.: Stress/Strain/Time Relations for Ice under Uniaxial Compression. Cold Regions Science and Technology, 06 (1983) 207-230
- MICHEL, BERNARD : Ice Mechanics. Les Presses de l'Université Laval, Quebec (1978)
- MICHEL, BERNARD : Mechanical Model of Creep of Polycrystalline Ice with Cracking Activity. Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979 (1980)
- MORLAND, L. W.: Constitutive Laws for Ice. Cold Regions Science and Technology, 01 (1979) 101-108
- MORLAND, L. W.; SPRING, U.: Viscoelastic Fluid Relation for the Deformation of Ice. Cold Regions Science and Technology, 04 (1981) 255-268
- MUSCHIK, W.: Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich. ZAMM 61 (1981) T213-T219
- NADREAU, JEAN-PAUL; MAWWAR, A.M.; WANG, Y.S.: Triaxial Testing of Freshwater Ice at Low Confining Pressures. Proceedings of the 7th OMAE Symposium, Vol.4, Houston (1988) 117-124

- NADREAU, JEAN-PAUL; MICHEL, BERNARD : Yield and Failure Envelope for Ice Under Multiaxial Compressive Stresses. Cold Regions Science and Technology, 13 (1986) 75-82
- NORTHWOOD, T. D.: Some Determination of the Elastic Properties of Ice. Can. Journ. Res. A., 25 (1947) 88-95
- NYE, J. F.: The Flow of Glaciers and Ice-Sheets as a Problem in Plasticity. Proc. R. Soc. A239 (1951) 546-558
- OROWAN, E.: Discussion Meeting. J. Glaciol. 1 (1947) 231-240
- PALATHINGAL, PIUS : Some Laboratory Test Results on the Creep Behaviour of Fresh Water Ice. Proceedings of Int. Conf. POAC' 89, Lulea, Schweden (1989)
- PARAMESWARAN, V.R.: Fracture Criterion for Ice Using a Dislocation Model. Journal of Glaciology, Vol.28, Nr.98, Cambridge (1982) 161-169
- PAFF, F.: Versuche über die Plasticität des Eises. (1875) Annln Phys. Chem. 155, 169-176
- PITZER, MARTIN: Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes. Diss. (1988); Mitt. Inst. Mech., 61, Ruhr-Univ. Bochum (1988)
- POHÉ, JÖRG: Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz für polykristallines Eis. ZAMM 71 (1991a) T275-T278
- POHÉ, JÖRG: Ein thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis. in: O.T. Bruhns: Große plastische Formänderungen, Bad Honnef (1991b)
- POHÉ, JÖRG: Eis als Anwendungsfall für ein thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz. ZAMM 72 (1992a) T151-T154
- POHÉ, JÖRG: Entwicklung und Anwendung eines mehraxialen Stoffgesetzes für polykristallines Eis. In: D. Besdo: Numerische Methoden der Plastomechanik, Neustadt a. Rbge., (1992b) (in press)
- POHÉ, JÖRG: On a Thermodynamical Consistent Constitutive Law Based on the Concept of Internal Variables. Mechanics Research Communication (1992c) (in press)
- POHÉ, JÖRG; BRUHNS, OTTO T.: On a Constitutive Law for Polycrystalline Ice Based on the Concept of Internal Variables. Proceedings of the 11th International Ice Symposium, Banff, Canada (1992) 49-60

- RABOTNOV, YU. N.: Creep Problems in Structural Members. North Holland Publishing Company, Amsterdam, London (1969)
- REUSCH, E.: Beiträge zur Lehre vom Eis. (1864) Annln Phys. Chem. 121 573-578
- ROBINSON, D. N.; BARTOLOTTA, P. A.: Viscoplastic Constitutive Relationships with Dependence on Thermomechanical History. NASA CR-174836 (1985)
- ROTT, ULFERT: Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen. Diss. (1991); Mitt. Inst. Mech., 76, Ruhr-Univ. Bochum (1991)
- SANTAOJA, KARI: Continuum Damage Mechanics Approach to Describe the Uniaxial Microcracking of Ice. Proceedings of the 9th IAHR Symposium on Ice, Vol.1, Sapporo (1988a)
- SANTAOJA, KARI: Three-Dimensional Ductile Constitutive Equation for Ice. Proceedings of the 7th OMAE Symposium, Vol.4, Houston (1988b) 1-9
- SANTAOJA, KARI: Continuum Damage Mechanics Approach to Describe the Multi-dimensional Microcacking of Ice. Proc. of the 8th OMAE Symposium, Vol.4, New York (1989)
- ~~SANTAOJA, KARI: Mathematical Modelling of Deformation Mechanisms in Ice. Technical Research Center of Finland (VTT), Research Reports, Vol.676, Espoo (1990)~~
- SCHULSON, ERLAND M.: An Analysis of the Brittle to Ductile Transition in Polycrystalline Ice. Cold Regions Science and Technology, 1 (1979) 87-91
- SCHULSON, ERLAND M.: The Fracture of Ice Ih. Journal de Physique, Colloque C1, No.3, Tome 48 (1987)
- SCHULSON, ERLAND M.: The Brittle Compressive Fracture of Ice. Acta Metallurgica et Materialia (1990)
- SCHWARZ, J.; WEEKS, W. F.: Engineering Properties of Sea Ice. Journal of Glaciology, 64 (1977) 2357-2367
- SEGO, DAVID C.; MORGENSTERN, NORBERT R.: Deformation of Ice under Low Stress. Canadian Geotechnical Journal, Vol.20 (1983) 587-602
- SEGO, DAVID C.; MORGENSTERN, NORBERT R.: Punch Indentation of Polycrystalline Ice. Canadian Geotechnical Journal, Vol.22 (1985) 226-233
- SHOJI, H., HIGASCHI, A.: A Deformation Mechanism Map of Ice. Journal of Glaciology, Vol. 21, No. 085 (1978) 419-427

- SINHA, NIRMAL K.: Short-Term Rheology of Polycrystalline Ice. *Journal of Glaciology*, Vol.21, No.085 (1978)
- SINHA, NIRMAL K.: Creep Model of Ice for Monotonically Increasing Stress. *Cold Regions Science and Technology*, 08 (1983) 025-033
- SINHA, NIRMAL K.: Effective Poisson's Ratio of Isotropic Ice. 6.Intern. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium (1987)
- SINHA, NIRMAL K.: Crack-Enhanced Creep in Polycrystalline Material: Strain-Rate Sensitive Strength and Deformation of Ice. *Journal of Material Science* 23 (1988) 4415-4428
- SINHA, NIRMAL K.: Ice and Steel—A Comparison of Creep and Failure. *Mechanics of Creep Brittle Materials-1*, Proc. Euromech - 239, 1988, Leicester, U. K., 1988, Elsevier Applied Science Publishers, London (1989a) 201-212
- SINHA, NIRMAL K.: Microcrack-Enhanced Creep in Polycrystalline Material at Elevated Temperature. *Acta Metallurgica*, Vol. 37, No. 11 (1989b) 3107-3118
- SINHA, NIRMAL K.: Microfracturing and Creep Dilatation in Polycrystalline Columnar-Grained and Equiaxed Ice. *Proceedings of the 4th International Conference on Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures* (1990) 345-354
- SINHA, NIRMAL K.: Cracking Kinetics and Failure on Repeated Loadings of Ice. *International Symposium on Fatigue and Fracture in Steel and Concrete Structures* (1991) 137-150
- SJÖLIND, STIG-GÖRAN : A Constitutive Model for Ice as a Damaging Visco-Elastic Material. *Cold Regions Science and Technology*, 41 (1987) 247-262
- SJÖLIND, STIG-GÖRAN : Continuum Damage Modelling of Polycrystalline Ice. *Proceedings of the 10th International Symposium on Ice* (1990)
- SMITH, LEONARD L.; CHEATHAM, J. B. JUN.: Plasticity of Ice and Sand-Ice Systems. *Journal of Engineering for Industry* 1975
- SPRING, U.; MORLAND, L. W.: Viscoelastic Solid Relations for the Deformation of Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 05 (1982) 221-234
- SPRING, U.; MORLAND, L. W.: Integral Representations for the Viscoelastic Deformation of Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 06 (1983) 185-193

- STECK, ELMAR A.: A Stochastic Model for the Interaction of Plasticity and Creep in Metals. *Nuclear Engineering and Design* 114 (1989) 285-294
- STEINEMANN, SAMUEL: Thermodynamics and Mechanics of Ice at the Melting Point. *Int. Ass. of Scientific Hydrology, Symposium of Chamonix, Pub. No.47* (1958a)
- STEINEMANN, SAMUEL: Experimentelle Untersuchung zur Plastizität von Eis. *Kommissionsverlag, Kümmerly & Frey AG., Geographischer Verlag, Bern* (1958b)
- STONE, B. M.; JORDAAN, I. J.; JONES, S. J., MCKENNA, R. F.: Damage of Isotropic Polycrystalline Ice under Moderate Confining Pressure. *Proceedings of the 8th Int. Conf. on Port and Ocean Engineering* (1989)
- SUNDER, SHYAM S.; WU, MAO S.: Crack Nucleation Due to Elastic Anisotropy in Polycrystalline Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 18 (1990) 29-47
- SZEPAN, FRANK: Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung. *Diss. (1989); Mitt. Inst. Mech., 70, Ruhr-Univ. Bochum* (1989)
- SZYSZKOWSKI, W.; GLOCKNER, P. G.: Modelling the Time-Dependent Behaviour of Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 11 (1985) 003-021
- SZYSZKOWSKI, W.; GLOCKNER, P. G.: On a Multiaxial Constitutive Law for Ice. *Mechanics of Materials*, 5 (1986) 49-71
- SZYSZKOWSKI, W.; GLOCKNER, P. G.: Modelling the Mechanical Properties of Ice. *6. Intern. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium* (1987)
- SZYSZKOWSKI, W.; GLOCKNER, P. G.: A Numerical Method for Creep Computation Including Heredity. *Finite Elements in Analysis and Design* 6 (1989) 33-44
- TIEMANN, PETER: Untersuchung des Temperatureinflusses auf den Werkstoff Eis. *Studienarbeit, Inst. f. Mechanik, Ruhr-Univ. Bochum* (1991)
- TIMCO, G. W.; FREDERKING, R. M. W.: Confined Compression Tests: Outlining the Failure Envelope of Columnar Sea Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 12 (1986) 13-28
- VINOGRADOV, A.M.: Creep Properties of Ice: Theory and Experiment. *Civil Eng. in the Arctic Offshore, Proc. of the Conf. Arctic'85, NY* (1985) 447-455
- VINOGRADOV, A.M.: Constitutive Modeling of Ice. *Proceedings of the 6th OMAE Symposium, Vol.4* (1987) 181-188

-
- VOITKOVSKY, K. F.: The Relaxation of Stresses in Ice. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967)
- VYALOV, S. S.; ERMAKOV, V. F.: Simplified Method of Testing Ice for Creep and Relaxation. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967)
- WEERTMAN, J.: Creep of Ice. Physics and Chemistry of Ice, Roy. Soc. Can., Ottawa (1973)
- WEI, YINGCHANG, DEMPSEY, JOHN P.: Dislocation Motion and Plasticity of Ice. Proceedings of the IAHR Symposium on Ice 1992, Vol. 2, Banff, Alberta, Canada (1992) 1100-1114
- WESTERHOFF, BERND: Entwicklung eines Finite Elemente Programms zur Berechnung einer gelochten Scheibe bei viskoplastischem Materialverhalten. Diplomarbeit, Inst. f. Mechanik, Ruhr-Univ. Bochum (1991)
- WOOD, J. A.: The Role of Irreversible Thermodynamics and Rheology in the Regelation-Flow Phenomenon. Cold Regions Science and Technology, 18 (1990) 133-145
- ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method. Volume 2. McGraw-Hill Book Company, London (1991)
-

Anhang I

Koeffizienten der Polynome für ideale Druckkurven:

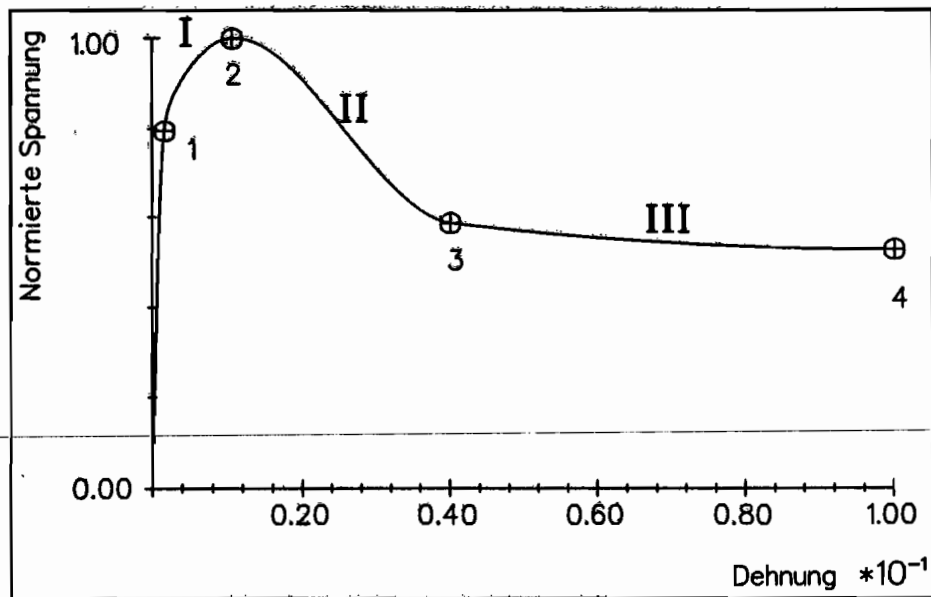


Abb. 100: Bereiche der idealen Druckkurven

Bereich I:

$$\sigma = a_1 + b_1(\varepsilon - \varepsilon_1) + c_1(\varepsilon - \varepsilon_1)^2$$

mit

$$a_1 = \sigma_1$$

$$b_1 = -2c_1 h_1$$

$$c_1 = \frac{1}{h_1^2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$h_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

Bereich II:

$$\sigma = a_2 + b_2(\varepsilon - \varepsilon_2) + c_2(\varepsilon - \varepsilon_2)^2 + d_2(\varepsilon - \varepsilon_2)^3$$

mit

$$a_2 = \sigma_2$$

$$b_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{2}{h_2} \left(2 \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{\varepsilon_3 - \varepsilon_4} - 3d_2 h_2^2 \right)$$

$$d_2 = \frac{2}{h_2^3} \left(\sigma_2 - \sigma_3 + h_2 \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{\varepsilon_3 - \varepsilon_4} \right)$$

$$h_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$$

Bereich III:

$$\sigma = a_3 + b_3(\varepsilon - \varepsilon_3) + c_3(\varepsilon - \varepsilon_3)^2 + d_3(\varepsilon - \varepsilon_3)^3$$

mit

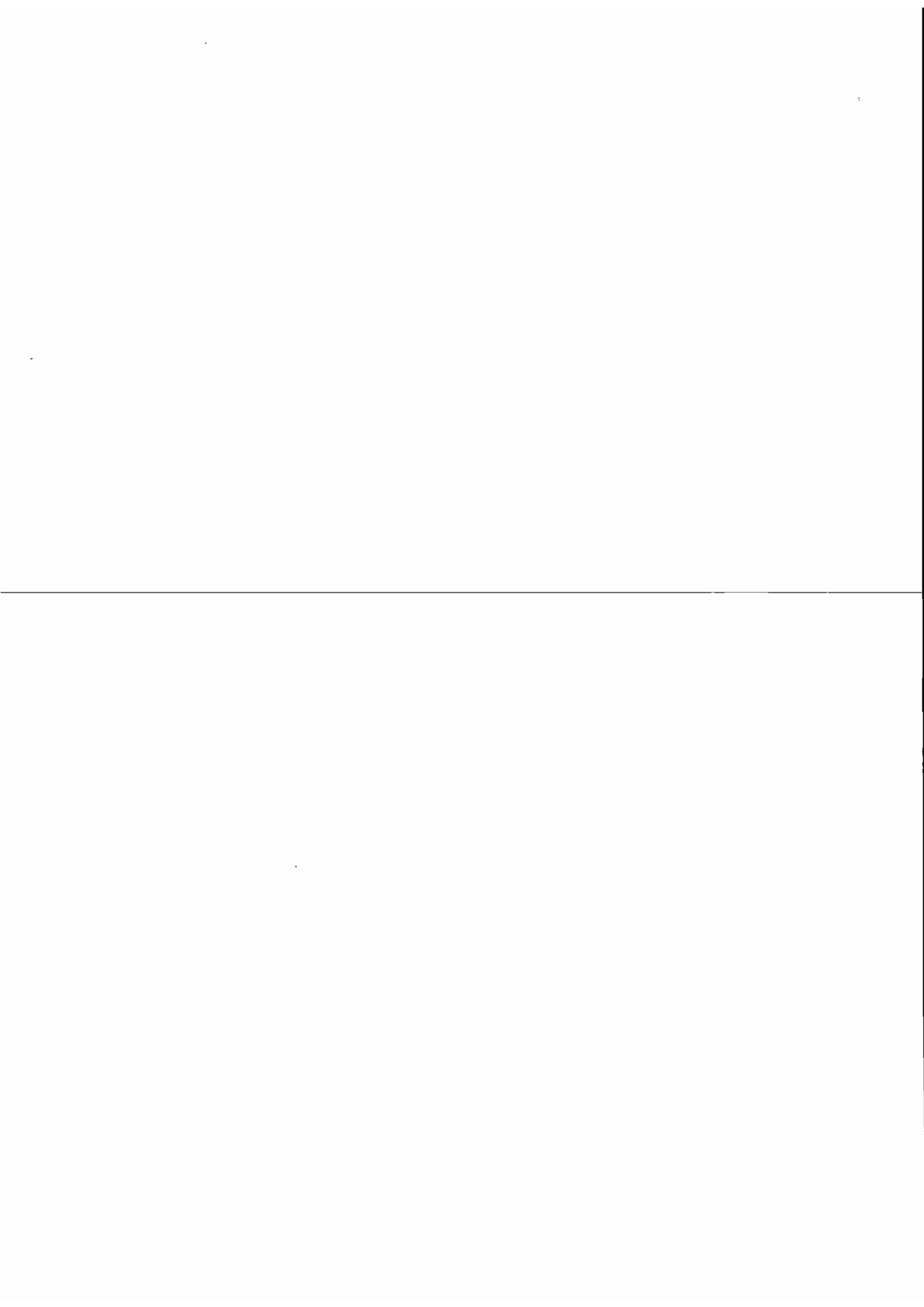
$$a_3 = \sigma_3$$

$$b_3 = 2c_2 h_2 + 3d_2 h_2^2$$

$$c_3 = \frac{1}{2h_3} (-b_3 - 3d_3 h_3^2)$$

$$d_3 = \frac{2}{h_3^3} \left(\sigma_3 - \sigma_4 + \frac{b_3 h_3}{2} \right)$$

$$h_3 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$$



Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

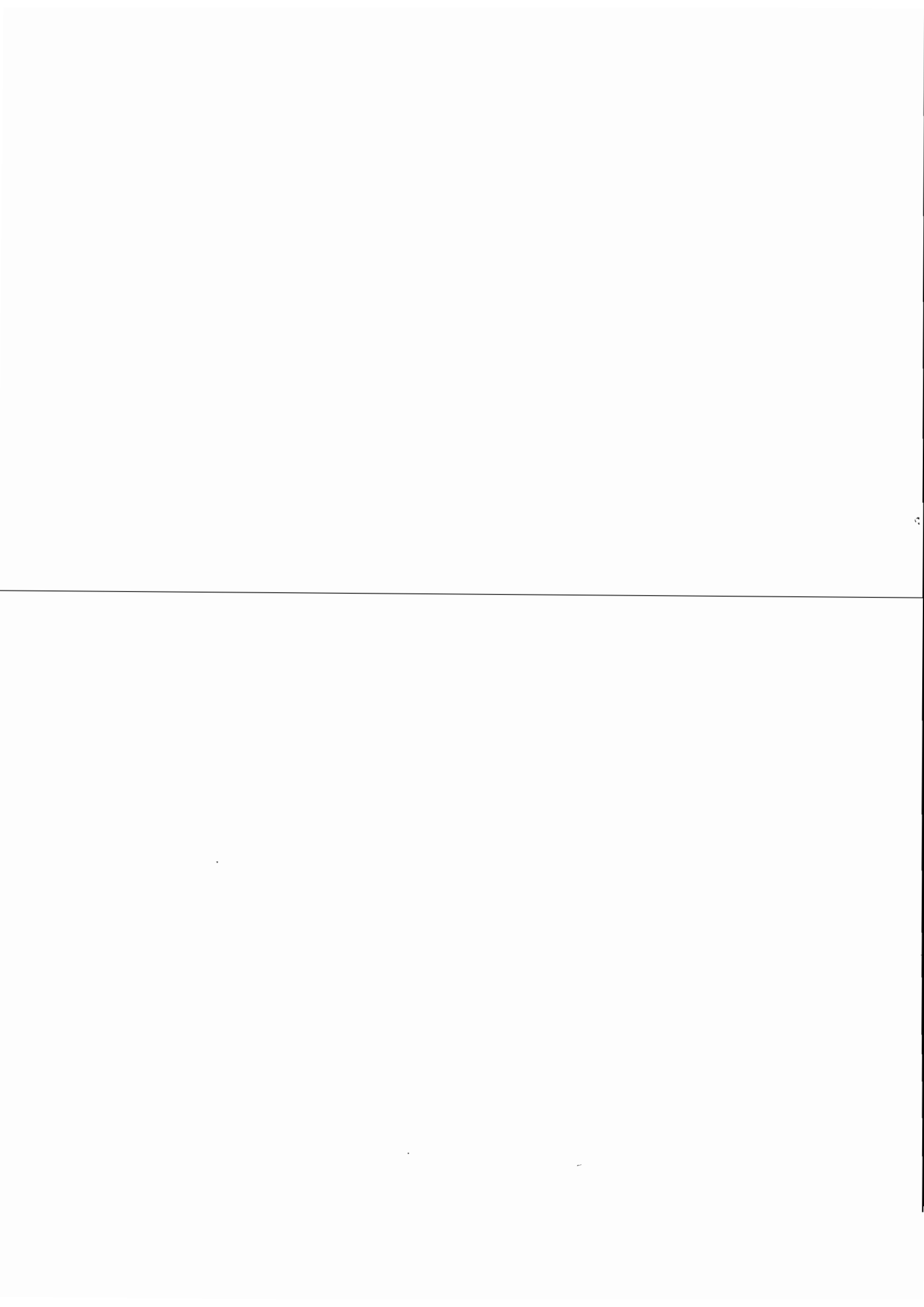
- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Blehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und Ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
-
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
-
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 **Helmut Stumpf:**
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 **Bernd Kaempf:**
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 **Alfred Kraft:**
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 **Petrusor Mazilu:**
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 **Klaus-Detlef Mickley:**
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 **Lutz-Peter Nolte:**
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 **Ulrich Blix:**
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 **Peter Becker:**
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 **Dietmar Bouchard:**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 **Uwe Zdebel:**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 **Jan Kubik:**
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 **Horst J. Klepp:**
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 **Franz Karl Labisch:**
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 **J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
-
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohe':
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 83**