



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

T. Guo

Untersuchung des singulären  
Rißspitzenfeldes bei  
stationärem Rißwachstum in  
verfestigendem Material

Heft Nr. 85



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum**

**Tianmin Guo**

**Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes  
bei stationärem Rißwachstum  
in verfestigendem Material**

**Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 85  
Juni 1993**



**Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) Berlin und wurde von der Fakultät für Maschinenbau der Ruhr-Universität Bochum als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die Unterstützung und für die Übernahme des Referates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. F. Kalthoff danke ich für die Verbesserungsvorschläge und für die Übernahme des Korreferates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Brocks danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die ständige Unterstützung.

Weiterhin gilt mein herzlicher Dank allen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Hierbei ist besonders der Herr Dipl.-Ing. St. Fricke zu erwähnen, der bei der sprachlichen Formulierung geholfen hat.

Berlin, Juni 1993

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. J. F. Kalthoff

Tag der Einreichung: 27. 02. 1993

Tag der mündlichen Prüfung: 18. 06. 1993

©1993 Dr.-Ing. Tianmin Guo  
Kreuzbergstraße 23, 10965 Berlin

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit werden die asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses systematisch untersucht. Dabei besteht die Arbeit aus drei Teilen. Im ersten Teil handelt es sich um die systematischen Untersuchungen der Rißspitzenfelder, die Rißöffnungsprofile, das J-Integral, die Rißspitzenöffnung CTOD und eine neue Definition von dem Rißspitzenöffnungswinkels CTOA auf der Basis des stationär wachsenden Risses. Der zweite Teil behandelt die Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens, das in der Lage ist, die asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses zu ermitteln. Im dritten Teil wird der Spannungszustand an stationär wachsendem Riß in realen Proben durch numerische Simulationen von Experimenten untersucht.

## **Summary**

In the present paper the asymptotic near tip solutions in a steady state growing crack are systematically investigated. The paper is made of three parts. In the first part the asymptotic near tip solutions, the crack opening profile, the J-integral, the crack tip opening displacement CTOD and a new definition of the crack tip opening angle CTOA basing on the steady state growing crack are investigated. The second part deals with the development of a finite element method which is in a position to determine the asymptotic near tip solutions in a steady state growing crack. In the third part the stress state for a steady state growing crack in real specimens using numerical simulation of experiments is investigated.

# Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Zielsetzung und Umfang der Arbeit	6
2.	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Kontinuumsmechanische Grundlagen	9
2.1.1	Spannungen und Gleichgewichtsbedingung	9
2.1.2	Verzerrungen und Kompatibilitätsbedingung	11
2.1.3	Materialgesetze	12
2.2	Bruchmechanische Grundlagen	16
2.2.1	Linear elastisches Materialverhalten	17
2.2.2	Elastisch-plastisches Materialverhalten	18
2.2.3	Bruchkriterium und Reißwiderstandskurve	21
3.	Analytische Untersuchung des stationär fortschreitenden Reißspitzenfeldes	25
3.1	Asymptotische Betrachtungsweise	25
3.2	Reißspitzenfelder mit potenzförmigen Ansatzfunktionen	27
3.3	Aufstellung des Differentialgleichungssystems	30
3.4	Untersuchung des stationär fortschreitenden Reißöffnungsprofils	41
3.5	Berechnung einiger gängigen bruchmechanischen Parameter im Hinblick auf die Bruchkriterien	43
3.6	Neue Definition von Reißspitzenöffnungswinkel CTOA bzw. Reißspitzenöffnung CTOD	48
3.7	Numerische Lösung des Randwertproblems	52
4.	Ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung des asymptotischen Feldes des stationär fortschreitenden Risses	58

4.1	Formulierung des Randwertproblems	59
4.2	Das Galerkinsche Funktional	61
4.3	Finite-Elemente-Diskretisierung	65
4.4	Linearisierung	67
5.	Experimentelle Untersuchungen bei großem Reißwachstum	77
5.1	Beschreibung von Probengeometrien, Versuchsdurchführung und -auswertung	77
5.2	Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	85
6.	Spannungsanalysen nach der Methode der Finiten Elemente	90
6.1	Numerische Simulation des Reißwachstums	90
6.2	Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen	94
7.	Ergebnisse und Diskussion	96
8.	Zusammenfassung und Ausblick	132
9.	Literaturverzeichnis	135

# **1. Einleitung**

## **1.1 Problemstellung**

Die Bruchmechanik beschäftigt sich mit der Festigkeitsanalyse rißbehafteter Bauteile. Wegen ihrer praktischen Bedeutung wurde sie in den letzten Jahren erstaunlich rasch verbreitet. Ihre schnelle Entwicklung ist auf den vermehrten Einsatz hochfester Materialien und damit verbundenen notwendigen bruchmechanischen Untersuchungen zurückzuführen, da sie die Möglichkeit einer erheblich verbesserten Materialausnutzung bietet. Zur Bewertung solcher rißbehafteter Bauteile bedient sie sich der sogenannten globalen Bruchkriterien, die auf dem an Proben gemessenen Rißwiderstandsverhalten basieren.

Nach dem Spannungsintensitätskonzept wird der charakteristische bruchmechanische Beanspruchungsparameter aus dem singulären Spannungsfeld an der Rißspitze gewonnen. Hierzu gehört der bekannte Spannungsintensitätsfaktor  $K$  in der linear elastischen Bruchmechanik, der mit der Intensität der linear elastischen Nahfelder arbeitet. Ausgangspunkt ist die im Jahre 1957 erschienene Veröffentlichung von IRWIN /42/. Seine Arbeit baut auf bereits bekannten Untersuchungen von GRIFFITH /35/, WESTERGAARD /65/, SNEDDON /63/ und WILLIAMS /66/ auf. Weiterhin sind die Arbeiten von SNEDDON /63/ über asymptotische Lösungsansätze zu nennen, die maßgeblichen Anteil an der Entwicklung der Bruchmechanik hatten. Über die Kenntnis der Struktur der analytischen Nahfeldlösung und des tatsächlichen Spannungsfeldes am Riß in einer Probe oder einem Bauteil ist es nun möglich geworden, den bruchmechanischen Beanspruchungsparameter  $K$  und insbesondere seinen kritischen Wert beim Bruchversagen experimentell zu bestimmen.

Alternativ hierzu hat GRIFFITH /35/ instabiles Bruchversagen über eine Energie-Bilanz für den gesamten rißbehafteten Körper behandelt und als Beanspruchungsparameter die Energiefreisetzungsrate  $G$  eingeführt. Sie ist aus der der Probe bei Belastung zugeführten mechanischen Arbeit experimentell bestimmbar. Für den Fall linear-elastischen Materialverhaltens hat IRWIN den bekannten Zusammenhang zwischen  $G$  und  $K$



hergeleitet und damit eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der lokalen Spannungsintensität aus globalen experimentellen Daten, Last und Verformung, aufgezeigt.

In der elastisch-plastischen Bruchmechanik gibt es zwar keine allgemeingültigen Nahfelderlösungen wie in der linear elastischen Bruchmechanik, aber aus der HRR-Theorie /39,52/ ergibt sich für den stehenden Riß der Intensitätsparameter für die Rißspitzenfelder mit dem von RICE /53/ eingeführten J-Integral, das für hyperelastisches Material wegunabhängig ist und sich aus der Energiebilanz für die rißbehaftete Struktur herleiten sowie als Freisetzungsrates an der Rißspitze interpretieren läßt. Hier begründet sich seine Eignung als Kriterium für die Initiierung von duktilem Rißwachstum. Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß die oben genannten Eigenschaften näherungsweise auch für elastisch-plastisches Material bei stehendem Riß gelten.

Wegen der mathematischen Schwierigkeiten und der Komplexität des mechanischen Vorgangs fehlt nach wie vor ein kontinuumsmechanisch konsistent begründetes und experimentell abgesichertes Modell für das stabile Rißwachstum in duktilem Material und die dafür maßgebenden bruchmechanischen Parameter. HUTCHINSON und PARIS /38/ waren bestrebt, J als Bruchkriterium im Hinblick auf Rißwachstumsprobleme zu erweitern. Ihren Überlegungen zufolge kann der wachsende Riß nicht sofort die von J dominierte Zone überwinden. Solange der Bereich, wo nichtproportionale Belastungen und Entlastungen auftreten, im Vergleich mit dem von der HRR-Lösung dominierten Bereich klein sei, könne die HRR-Lösung bzw. das J-Integral die Rißspitze weiter charakterisieren und Rißwachstum steuern. Darüber hinaus wird das J-Integral aber auch in Form von den Rißwiderstandskurven  $J_R$  als kontrollierender Parameter für stabiles Rißwachstum verwendet. Aber unklar ist, welche physikalische Bedeutung das J-Integral beim Rißwachstum hat und wie das J-Integral ermittelt werden soll, da es bereits bei kleinem Rißwachstum die Wegunabhängigkeit verliert, wie in numerischen Untersuchungen /8,9/ bestätigt wurde, und das J-Integral nicht mehr der Intensitätsparameter des singulären Rißspitzenfeldes ist. Und aus vielen experimentellen Untersuchungen /34,43,44,46,55,57/ ist es bekannt, daß diese auf dem J-Integral basierenden Rißwiderstandskurven geometrieabhängig sind, so daß seit einigen Jahren unter dem all-

gemeinen Stichwort "Constraint-Einflüsse" intensiv Ansätze diskutiert werden, mit Hilfe eines zusätzlichen Parameters die Übertragbarkeit von  $J_R$ -Kurven zwischen verschiedenen Proben und Bauteilgeometrien sowie Belastungskonfigurationen sicherzustellen. Ein Weg dazu ist, die Mehrachsichtigkeit des Spannungszustandes durch den Quotient aus hydrostatischer und Misesscher Vergleichsspannung /3,13,14,22,45/ als zusätzlichen Parameter einzuführen. Aber die hier eingeführte Mehrachsichtigkeit hängt unter anderem vom Abstand  $r$  zur Rißspitze ab, so daß der Wert nicht eindeutig definiert werden kann. Ausgehend von der asymptotischen Reihenentwicklung der Spannungsansätze in der Bruchmechanik /65,52/ wird dabei von einigen Autoren vorgeschlagen, neben dem singulären einen weiteren konstanten Term der Reihe zur Beschreibung mitzunehmen. Dies ist das Konzept der T-Spannungen von HANCOCK /36/ bzw. der Q-Spannungen von SHIH /60/. Gegenüber einem Vorteil einer gesicherten mathematischen Begründung dieser Ansätze steht aber der Nachteil, daß beide Konzepte wiederum nur stehende Risse berücksichtigen.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß  $J$  als bruchmechanischer Parameter eine stark eingeschränkte Gültigkeit hat, die sich im Falle von duktilem Rißwachstum nach Rißinitiierung auf wenige Prozent des Restligamentes beschränkt. Für Leck-vor-Bruch-Analysen von Druckbehältern oder zur Beschreibung von langem Rißwachstum in Rohrleitungen sind die geometrieabhängigen  $J_R$ -Kurven ungeeignet. Für diese Problemstellungen sind Konzepte erforderlich, mit denen auch stationäres Rißwachstum (Bereich 3 im Bild 2.6a) beschrieben werden kann. Trotz vieler theoretischer Ansätze, über Leistungsbilanzen eine Trennung von plastisch dissipierter Arbeit und eigentlicher Brucharbeit zur Schaffung neuer Oberflächen pro Rißinkrement vorzunehmen, hat die energetische Behandlung des duktilen Rißwachstums bisher nicht zu praktisch nutzbaren Erfolgen geführt. Dies legt nahe, die Behandlung des Rißspitzenfeldes zur Grundlage der Suche nach einem geeigneten bruchmechanischen Beanspruchungsparameter zu machen.

Außer dem  $J$ -Integral sind noch weitere bruchmechanische Parameter wie CTOD (crack tip opening displacement), COD (crack opening displacement) und CTOA (crack tip

opening angle) in der Literatur zu finden. Nach McMEEKING /47/ sollte ein Bruchkriterium für stationäres duktils Rißwachstum auf dem Konzept von COD basieren, die einen bruchmechanischen Parameter für den stehenden Riß darstellt. CTOD ist ein bei stationären Rißproblemen bereits verwendeter Parameter. SHIH /59/ hat einen CTOD, nämlich  $\delta_t$  auf der Basis von der HRR-Theorie definiert, welcher ein lineares Verhältnis mit dem J-Integral hat. Ein anderer bei Rißwachstum häufig verwendeter CTOD ist von SCHWALBE und HELLMANN /57/ als  $\delta_5$ -Parameter eingeführt worden. Auch diese beiden Parameter sind keine geeigneten bruchmechanischen Parameter, wie die numerischen Untersuchungen /15,4/ gezeigt haben, da sie ebenfalls geometrieabhängig wie das J-Integral beim Rißwachstum sind. Nun haben numerische Untersuchungen von SHAM /58/, NARASIMHAN /49/ und BROCKS /15,26/ bestätigt, daß bei großem Rißwachstum CTOA vom Rißlängeninkrement unabhängig wird, und damit wird eine der notwendigen Bedingungen an ein Bruchkriterium für den stationär wachsenden Riß erfüllt. Es fehlt hier aber eine entsprechende Definition von CTOA, welche theoretisch konsistent sein und direkte Verbindung mit der Rißspitzenumgebung haben soll.

Um den Spannungs- und Verzerrungszustand an der wachsenden Rißspitze und damit die Änderung der vorhandenen bruchmechanischen Parameter besser zu verstehen, haben sich viele Autoren bemüht, eine neue asymptotische Lösung für stationäres Rißwachstum zu formulieren. Obwohl bisher keine allgemeine analytische Lösung für den wachsenden Riß entsprechend der HRR-Theorie für den stehenden Riß gefunden werden konnte, gibt es einige spezielle Lösungen. Für das elastisch-idealplastische Material wurde unter Voraussetzung quasistatischen und stationären Rißwachstums sowie kleiner Deformationen asymptotische Lösungen von CHITALEY und McCLINTOCK /21/ für Modus III, von RICE, DRUGAN und SHAM /54/, DRUGAN, RICE und SHAM /24/ und GAO /30/ für den ebenen Verzerrungszustand mit der v. Misesschen Fließbedingung, SLEPYON /62/ mit der Trescaschen Fließbedingung sowie CASTANEDA /17/ für den ebenen Spannungszustand gefunden. Nach ihren Arbeiten besitzt das Verzerrungsfeld bei einem wachsenden Riß eine logarithmische Singularität, also eine geringere als nach der HRR-Lösung für den stehenden Riß. Entsprechende Untersuchungen für verfestigendes Material sind weniger zahlreich. AMAZIGO und HUTCHINSON

/1/ haben die Lösungen nur für linear verfestigendes Material bei Modus I und Modus III angegeben. Sie verwenden ähnliche Lösungsansätze wie in der HRR-Theorie. Die Lösungen lassen jedoch mögliche Rückplastizierungen in den entlasteten Bereichen außer acht. Kürzlich hat CASTANEDA /18,19/ die Rückplastizierung der Rißufer für Modus I und II unter ebenem Verzerrungs- und Spannungszustand sowie unter Modus III untersucht und festgestellt, daß sich hierdurch die von AMAZIGO und HUTCHINSON erzielten Ergebnisse nicht wesentlich ändern. Kürzlich hat YUAN /67/ die Lösungen für Mixed Modus I und III gefunden.

Für das Material mit Potenzverfestigung liegen wegen der Schwierigkeit unterschiedlicher Singularitäten bei elastischen und plastischen Verzerrungsinkrementen /37/ noch weniger Ergebnisse vor. GAO und HWANG /31,32/ fanden bei potenzförmiger Ansatzfunktion mit Hilfe eines Schießverfahrens kein konvergierendes Ergebnis und versuchten es weiter mit einer logarithmischen Entwicklung der asymptotischen Lösung /33/. PAN /51/ veröffentlicht ebenfalls Lösungen mit logarithmischer Entwicklung aber unterschiedlicher Singularität wie bei GAO und HWANG. Die Gründe für die Unterschiede konnten bisher nicht geklärt werden. BARTH hat in seiner Dissertation /5/ versucht, durch ein selbst entwickeltes wegunabhängiges  $\tilde{J}$ -Integral diese Unterschiede zu erklären. Er weist darauf hin, daß die Singularität von GAO und HWANG der Deformationstheorie und PAN's Lösung der inkrementellen Theorie entspricht.

Nun beschränken sich die bereits existierenden analytischen Lösungen für den stationär wachsenden Riß jedoch nur auf die Singularitäten und die damit verbundenen Probleme und führen nicht zu vollständigen Lösungen. Wenn sie richtig sind, bleibt die Frage noch, welche Verhältnisse zwischen dem Intensitätsparameter und der äußeren Belastung bestehen, durch deren Bestimmung die vorhandenen bruchmechanischen Parameter besser verstanden werden können.

## **1.2. Zielsetzung und Umfang der Arbeit**

In dieser Arbeit soll ein Beitrag zur Beschreibung des stationären Rißwachstumsverhaltens mit Hilfe des lokalen singulären Rißspitzenfeldes geleistet werden. Ziel dieser Untersuchungen ist es, den Zusammenhang zwischen dem Intensitätsparameter dieses Feldes und konventionellen bruchmechanischen Beanspruchungsparametern wie  $J$ , CTOD und CTOA herzustellen, um damit zu einem Kriterium für die stationäre Ausbreitung eines Risses zu kommen. Dazu sind folgende Schritte erforderlich:

- 1) die Spannungs- und Verzerrungszustände des stationär wachsenden Risses für ebenen Spannungszustand (ESZ) und ebenen Verzerrungszustand (EVZ) zu finden und den mit den Belastungen verknüpften Amplitudenfaktor durch einen lokalen bruchmechanischen Beanspruchungsparameter darzustellen,
- 2) aus experimentellen Untersuchungen an verschiedenen Probengeometrien für langes Rißwachstum jenseits der üblichen Grenzen der "J-Dominanz" die bruchmechanischen Beanspruchungsdaten für stationäres Rißwachstum zu gewinnen, die die Grundlage für numerische Simulationen darstellen,
- 3) aus der Gegenüberstellung analytischer Nahfeldlösungen und numerischer Ergebnisse, die für verschiedene Probengeometrien aus elastisch-plastischen Rißwachstumssimulationen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode gefunden werden, Aussagen über die das Spannungs- und Verzerrungsfeld an der Rißspitze dominierenden Intensitätsparameter zu gewinnen,
- 4) die Beschreibung des Rißwiderstandsverhaltens mit dem Intensitätsparameter zu ermöglichen und dadurch eine sichere Abschätzung eines möglicherweise zu erwartenden stabilen Rißwachstums in Bauteilen zu treffen.

Dabei werden zunächst im Kapitel 2 dieser Arbeit die erforderlichen Grundlagen für die

analytische Untersuchung kurz erläutert, wobei sie in einem kontinuumsmechanischen und einem bruchmechanischen Teil beschrieben werden.

Im Kapitel 3 wird dann das Differentialgleichungssystem zur Lösung des stationär wachsenden Rißspitzenfeldes aufgestellt und mit Hilfe eines Schießverfahrens numerisch gelöst. Als Folgerung werden zuerst die Rißöffnungsprofile untersucht und dann einige gängige bruchmechanische Beanspruchungsparameter im Hinblick auf die Rißwachstumskriterien berechnet. Durch eine neue Definition des Rißspitzenöffnungswinkels CTOA bzw. der Rißspitzenöffnung CTOD werden die möglicherweise darauf basierenden Rißwachstumskriterien diskutiert.

Im Kapitel 4 handelt es sich als Alternative zu dem im Kapitel 3 erwähnten numerischen Verfahren um ein neues Finite-Elemente-Verfahren, das zur Lösung des asymptotischen Rißspitzenfeldes entwickelt werden soll.

Im Kapitel 5 werden die experimentellen Untersuchungen bei großem Rißwachstum beschrieben und die Frage diskutiert, inwieweit die Annahme von stationärem Rißwachstum das reale Verhalten der Proben angemessen beschreibt, also der analytische Ansatz im Kapitel 3 darauf anwendbar ist. Die experimentell bestimmten Rißwiderstandskurven dienen als Steuerkurven für Rißwachstumssimulationen nach der Finite-Elemente-Methode, die im Kapitel 6 beschrieben wird. Im Kapitel 7 werden die Rechenergebnisse dargestellt und sie im Zusammenhang mit den aus der Rißwachstumssimulation ermittelten Ergebnisse diskutiert. Im darauf folgenden Kapitel 8 werden die ganzen Untersuchungen und die dadurch erzielten Ergebnisse zusammengefaßt.

Hierzu sollen noch die für diese analytische Untersuchung notwendigen Voraussetzungen und Einschränkungen angegeben werden:

- . Kontinuumsmechanik
- . ebene Probleme ( ESZ, EVZ )

- . kleine Deformationen
- . Mode I - Belastungsfall
- . stationäres Rißwachstum
- . Riß bewegt sich quasi statisch
- . inkrementelle elastisch-plastische Theorie
- . homogenes und isotropes Materialverhalten
- . lineare Verfestigung

## 2. Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel behandelt die theoretischen Grundlagen, die für die Beschreibung der vorliegenden Arbeit notwendig sind, und gliedert sich in einen kontinuumsmechanischen und einen bruchmechanischen Teil. Hier werden die Gleichungen mit Indexschreibweise geschrieben, d.h. über gleiche Indizes innerhalb eines Termes ist zu summieren und partielle Ableitungen werden durch ein vorgestelltes Komma gekennzeichnet, wobei  $i, j, k = x, y, z$  ist. Für ebene Probleme wird ein Polarkoordinatensystem eingeführt, bei dem alle Größen dann mit  $r$  und  $\theta$  als Indizes dargestellt werden. In diesem Fall werden die Größen als einzelne Komponenten gesehen und sind nicht über gleiche Indizes eines Termes zu summieren. Die stattfindenden Bewegungen sind quasi-statisch und das Material ist als homogen und isotrop angenommen. Die Theorie legt kleine Deformationen zugrunde.

### 2.1. Kontinuumsmechanische Grundlage

#### 2.1.1 Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen

Im Sinne einer kontinuumsmechanischen Betrachtung können auf einen Körper die Kräfte wirken, dadurch werden im Inneren des Körpers Spannungen hervorgerufen, die den Beanspruchungszustand charakterisieren. In jedem Punkt eines beanspruchten Körpers herrscht im allgemeinen ein anderer Spannungszustand, den man durch den Spannungstensor als Feldgröße beschreibt. Der Zugang zu dieser Größe erfolgt über den Spannungsvektor, der als Grenzwert

$$\underline{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{Q}}{\Delta A} = \frac{d\underline{Q}}{dA} , \quad (2.1)$$

definiert ist, wobei  $\underline{Q}$  die Kraft,  $A$  die Fläche und  $\underline{s}$  der Spannungsvektor ist ( siehe Bild 2.1).



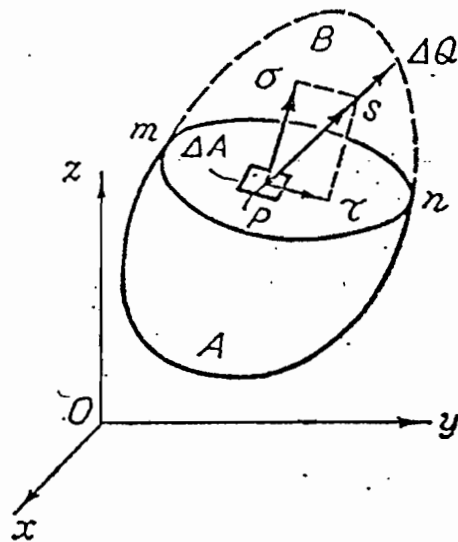


Bild 2.1. Definition der Spannung

Der Spannungsvektor wird auf seiner gerichteten Fläche in normale und tangentiale Richtungen zerlegt, wodurch die entsprechenden Größen als Normalspannungen und Schubspannungen genannt sind. In einem räumlichen Fall kann der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  den beanspruchten Zustand vollständig beschreiben. Von dem Spannungstensor können ein deviatorischer und ein hydrostatischer Anteil abgespalten werden:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} , \quad (2.2)$$

wobei  $s_{ij}$  Deviator,  $\sigma_{kk}$  Spur von dem Spannungstensor und  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol sind. Aus der Mechanik folgt, daß die Spannungszustände benachbarter materieller Punkte nicht unabhängig voneinander sind. Das Spannungsfeld  $\sigma_{ij}$  muß noch die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, die unter Voraussetzung von quasistatischem Fall und ohne Berücksichtigung von Volumenkräften im Körper lauten:

$$\sigma_{ij,j} = 0 . \quad (2.3)$$

Für das ebene Problem werden sie im Polar-Koordinatensystem wie folgt geschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierdurch kann eine Airysche Spannungsfunktion  $\phi(r,\theta)$  gemäß

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad , \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad , \\ \sigma_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

eingeführt werden, die die Gleichgewichtsbedingungen (2.4) befriedigen kann.

### 2.1.2 Verzerrungen und Kompatibilitätsbedingung

Durch die Einwirkung der äußeren Belastungen tritt eine mehr oder weniger starke Verformung des Körpers auf, die durch den Verschiebungsvektor  $u_i$  gekennzeichnet ist. In der Kontinuumsmechanik sind die absoluten Lageänderungen der Materialteilchen nur wenig interessant, da er auch die Starrkörperbewegung beinhaltet. Hier interessieren besonders die relativen Änderungen benachbarter Teilchen, weil nur sie mit den Spannungen verknüpft sind. Ein geeignetes Maß für diese Verformungen ist der Greensche Verzerrungstensor /12/, der für kleine Deformationen, nämlich bei Vernachlässigung der nichtlinearen Terme, durch folgende kinematische Beziehungen

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \quad (2.6)$$

definiert ist.

Für das ebene Problem kann die Gleichung (2.6) im Polar-Koordinatensystem umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad , \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad .\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die Gleichungen (2.7) geben drei Verzerrungskomponenten für das ebene Problem, die aber nicht unabhängig voneinander sind, da als Eingangsgrößen nur zwei Verschiebungen benutzt werden. Sie müssen eine zusätzliche Bedingung erfüllen, die Kompatibilitätsbedingung heißt. Da es sich in dieser Arbeit um das Rißwachstum handelt, muß die Kompatibilitätsbedingung zu jedem beliebigen Zeitpunkt gelten. Unter Voraussetzung kleiner Deformationen wird dies im Polar-Koordinatensystem wie folgt geschrieben:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\partial r} = 0 \tag{2.8}$$

Diese Gleichung (2.8), die die Stetigkeit des Verschiebungs- und Verzerrungsfeldes garantiert, d.h. im Kontinuum treten keine Klaffungen oder Überlappungen auf, wird im nächsten Kapitel als Bestimmungsgleichung für die Spannungsfunktion  $\phi$  benutzt.

### 2.1.3 Materialverhalten

Für die phänomenologische Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten nimmt man nun aufgrund makroskopischer Betrachtungen an, daß es bei rein elastischen Zustandsänderungen reversible Verzerrungsänderungen und bei elastisch-plastischen

Zusandsänderungen irreversible Verzerrungsänderungen gibt. Das Inkrement des gesamten Verzerrungstensors kann additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p . \quad (2.9)$$

Je nach Art der Spannungs-Verzerrungs-Verknüpfung unterscheidet man zwischen totalen und inkrementellen Stoffgesetzen. Für hyperelastisches Materialverhalten existiert eine Potentialfunktion

$$w = \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} , \quad (2.10)$$

die Formänderungsenergiedichte nach GREEN /12/, deren Wert nur von den Endverzerrungen und nicht von dem Belastungsweg abhängt. Dann gilt

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} , \quad (2.11)$$

also ein finites Stoffgesetz. Im Sonderfall linear elastischen isotropen Materialverhaltens hat das Stoffgesetz die bekannte Form des HOOKEschen Gesetzes:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) , \quad (2.12)$$

wobei E und  $\nu$  Materialkonstante sind.

Eine andere wichtige Größe in der Kontinuumsmechanik und Bruchmechanik ist die potentielle Energie eines Körpers, die bei Vernachlässigung von Volumenkräften definiert ist als

$$\Pi = \int_V w dV - \int_A T_i u_i dA , \quad (2.13)$$

wobei w die Formänderungsenergiedichte und  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  ist.

Diese Größe hat eine wichtige Extremaleigenschaft. Wenn sich ein elastischer Körper in statischem Gleichgewicht befindet, so ist seine gesamte potentielle Energie minimal. Sie ist in der Elastizitätstheorie ein sehr wichtiges Hilfsmittel zum Auffinden der Näherungslösungen [77].

Bei dem elastisch-plastischen Materialverhalten benutzt man meistens die inkrementellen Stoffgesetze, da die plastischen Verformungen nicht mehr allein vom Endspannungszustand bestimmt werden, vielmehr sind sie vom gesamten Belastungsweg bzw. der gesamten Belastungsgeschichte abhängig. Aus diesem Grund wird hier kurz die inkrementelle Theorie der Plastizität erläutert.

Ein Körper wird belastet, dadurch wird im Inneren des Körpers Beanspruchung hervorgerufen, die mit der Belastung zunimmt. Bevor die Beanspruchung eine bestimmte kritische Größe ( Fließbeginn ) erreicht, treten im Körper nur elastische Verformungen auf, die dem HOOKEschen Gesetz (2.12) folgt. Bei Erreichen und Überschreiten dieser kritischen Größe werden die plastischen Verformungen hervorgerufen. Mit dieser kritischen Größe wird die sogenannte Fließbedingung formuliert, die bei Beginn und Fortsetzung der plastischen Verformungen ständig erfüllt werden muß. Die bekannte Fließbedingung stammt von v. MISES, und sie ist für metallische Werkstoffe besonders geeignet. Sie lautet unter Voraussetzung der isotropen Verfestigung:

$$F = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ji} - k^2 ( \epsilon^p ) = 0 \quad . \quad (2.14)$$

wobei  $\epsilon^p$  akkumulierte plastische Vergleichsdehnung ist und  $k^2$  eine skalare Variable ist, die durch einen Zugversuch bestimmbar ist. Verwendet man zur Beschreibung des plastischen Fließvorgangs die sogenannte Fließregel

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (2.15)$$

so gilt mit (2.14)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 3 \lambda s_{ij} \quad . \quad (2.16)$$

Bei Verwendung eines linear verfestigenden Materials

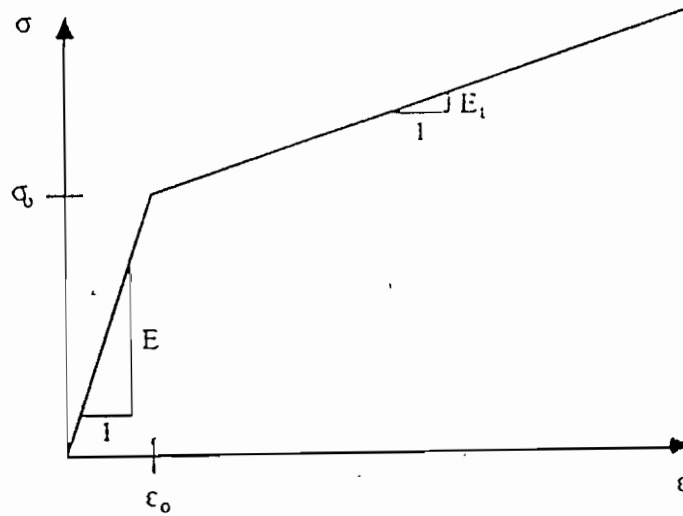


Bild 2.2. Bilineares Materialverhalten

wird die Gleichung (2.16) durch Ableitung von (2.14) und Elimination von  $\lambda$  wie folgt:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\omega}{E} \frac{3}{2} \frac{\sigma_v}{\sigma_v} s_{ij} \quad , \quad (2.17)$$

wobei  $\omega=1/\alpha-1$  und  $\sigma_v$  die Vergleichsspannung sind. Berücksichtigt man das elastisch-plastische Problem, so gilt das Stoffgesetz mit (2.12) und (2.17)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{E} [ (1 + \nu) \dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \omega \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} s_{ij} ] & (\dot{\sigma}_v \geq 0) \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{E} [ (1 + \nu) \dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} ] & (\dot{\sigma}_v \leq 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wie man erkennt, ist die obere Gleichung von (2.18) für elastisch-plastischen Belastungsfall und die untere für elastischen bzw. elastisch entlasteten Fall gültig.

## 2.2 Bruchmechanische Grundlage

Die Bruchmechanik befaßt sich mit der Festigkeitsanalyse rißbehafteter Bauteile. Ihre wesentliche Aufgabe ist die Ermittlung materialspezifischer Kenngrößen, die eine quantitative Aussage über die Widerstandsfähigkeit eines Werkstoffes gegenüber der Ausbreitung von Rissen in Bauteilen unter Betriebsbedingungen darstellt und damit zur Werkstoffauswahl, Dimensionierung und Ermittlung der voraussichtlichen Lebensdauer von Konstruktionen herangezogen werden kann. Bruchmechanische Konzepte ergänzen im Bereich der Festigkeitslehre die klassischen elastizitäts- und plastizitätstheoretischen Bemessungsgrundlagen.

Die allgemeinen Beanspruchungen eines Risses setzen sich nach /42/ aus drei grundlegenden Belastungsarten zusammen (Siehe Bild 2.3). Die Überlagerung der verschiedenen Belastungsarten wird als 'Mixed Mode' bezeichnet. In dieser Arbeit wird nur der Mode I Belastungsfall betrachtet.

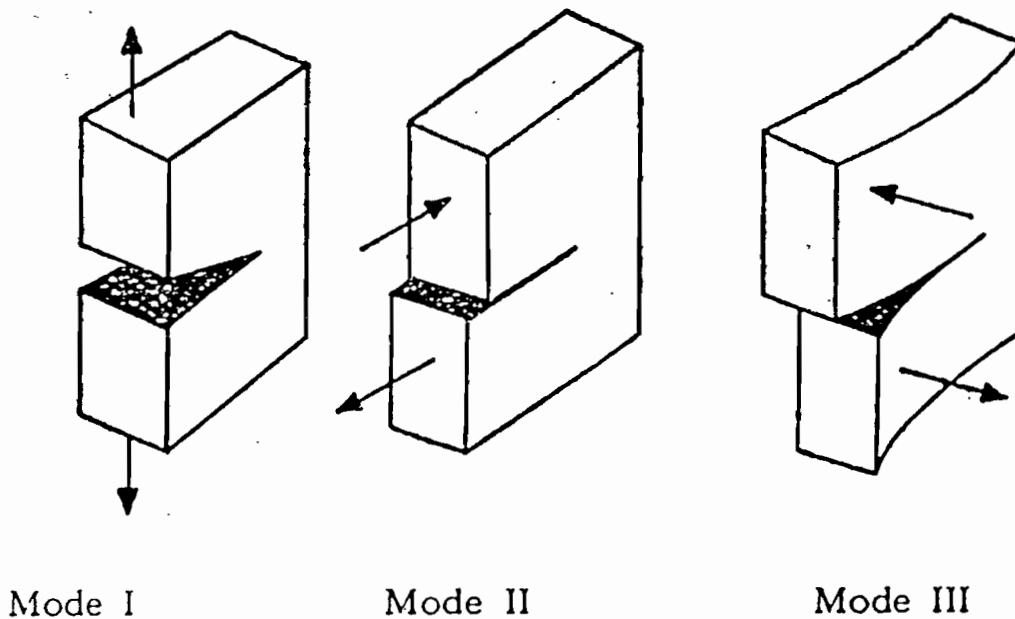


Bild 2.3. Grundlegende Belastungsarten nach IRWIN

## 2.2.1 Linear elastisches Materialverhalten

Die von GRIFFITH /35/ und IRWIN /42/ entwickelte linear elastische Bruchmechanik gestattet die quantitative Beschreibung der von Rissen oder anderen Fehlstellen ausgehenden Bruchvorgänge, solange die möglicherweise auftretenden plastischen Verformungen entsprechend klein sind. So findet die linear elastische Bruchmechanik heute in vielen technischen Bereichen praktische Anwendung.

Bei der theoretischen Behandlung des Rißproblems wird der Riß durch einen mathematischen Schnitt modelliert wie /42,35/. Das Randwertproblem führt deshalb auf singuläre Spannungen und Verzerrungen an der Rißspitze. Die asymptotische Lösung für  $r \rightarrow 0$  hat die Form

$$\sigma_{ij} ( r, \theta ) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I f_{ij} ( \theta ) \quad , \quad (2.19)$$

wobei die Winkelfunktion  $f_{ij}(\theta)$  nur von dem Material und der Belastungsart abhängig ist und  $K_I$  der sogenannte Spannungsintensitätsfaktor ist, der mit der äußeren Belastung und der Probengeometrie sowie dem Belastungszustand verknüpft ist.

Die bruchmechanische Bewertung rißbehafteter Bauteile ist nach dem Intensitätskonzept auf den Vergleich der Intensitäten der asymptotischen Felder zurückgeführt worden. Die Intensitäten können im allgemeinen durch verschiedene bruchmechanische Größen formuliert werden. Für das linear elastische Materialverhalten ist die von GRIFFITH eingeführte Energiefreisetzungsrate  $G$  nutzbar. Sie ist die Energie, die der negativen Änderung der potentiellen Energie des elastischen Körpers (2.13) um eine infinitesimale Rißverlängerung  $\Delta a$  entspricht, und ist definiert als

$$G = - \frac{\partial \pi}{\partial a} \quad . \quad (2.20)$$

In vielen Bereichen werden Erhaltungssätze benutzt, um z.B. die Intensität des singulären Spannungen durch ein wegunabhängiges Integral zu ermitteln. Derartige Integral,



das von RICE /53/ erstmal in die Bruchmechanik eingeführt wurde, ist definiert als

$$J = \int_{\Gamma} ( w n_x - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j ) ds \quad . \quad (2.21)$$

$\Gamma$  ist eine beliebige die Rißspitze umfahrende Kurve und  $w$  die elastische Formänderungsenergiedichte sowie  $n_j$  der Normaleinheitsvektor auf  $\Gamma$ . In /53/ wurde bewiesen, daß das J-Integral bei Verwendung hyperelastisches Stoffgesetzes die Wegunabhängigkeit besitzt.

Bei linear elastischem Materialverhalten ist dieses J-Integral mit der Energiefreisetzungsrate  $G$  identisch. Zwischen dem Intensitätsfaktor  $K_I$  (2.19) und dem J-Integral (2.21) bzw. der Energiefreisetzungsrate  $G$  (2.20) gibt es folgende Beziehung:

$$J = G = \frac{K_I^2}{E'} \quad , \quad (2.22)$$

wobei  $E' = E$  für ESZ und  $E' = E / (1-\nu^2)$  für EVZ sind.

### 2.2.2 Elastisch-plastisches Materialverhalten

Für das elastisch-plastische Materialverhalten wurde die Bruchmechanik im Jahre 1968 durch HUTCHINSON, RICE und ROSENGREN /39,40,52/ weitergeführt. Die nach den Initialen der Autoren benannte HRR-Feld-Theorie wird seither in der elastisch-plastischen Bruchmechanik häufig zur Bewertung von Spannungszuständen an der Rißspitze herangezogen und begründet die Bedeutung des J-Integrals als lokalen Beanspruchungsparameter /47/. Darauf aufbauend haben KUMAR, GERMAN und SHIH /78/ den sogenannten Engineering Approach begründet.

Die HRR-Lösung, die von drei Autoren mit der Deformationstheorie der Plastizität gefunden wurde, benutzt potenzverfestigendes Material

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{E} \quad (2.23)$$

und die potenzförmigen Ansatzfunktionen für Spannungen

$$\sigma_{ij} = K_\sigma r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (2.24)$$

Die HRR-Lösung folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \sigma_0 \left( \frac{1}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 J_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 J_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad , \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\alpha$  und  $n$  die Materialkonstante sind.

Das J-Integral wurde längs eines Kreises um die Rißspitze ermittelt und in (2.25) als Intensitätsparameter eingesetzt. Es ist wie  $K_I$  (2.19) in der linear elastischen Bruchmechanik von der äußeren Belastung und dem Beanspruchungszustand abhängig, jedoch hier hängen die Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  und die Singularität  $s$  sowie  $I_n$  von dem Materialverhalten ab.

Beim realen Materialverhalten sind demgegenüber noch zusätzliche Betrachtungen notwendig, da es aus der numerischen Untersuchung /47/ eine Prozeßzone an der Rißspitze gibt, wo die großen Deformationen, die Nichtproportionalitten und auch die eigentliche Trennung der Materialteilchen stattfinden, die durch Vergrößerung und Zusammensetzung der Mikrodefekte (z.B. Poren) hervorgerufen werden. Sie findet man z.B. in /79/, was hier aber nicht weiter vertieft wird.

Um Anwendung des Intensittskonzeptes für das reale Materialverhalten zu finden, muß die Dominanz der HRR-Felder gesichert sein. Aus den numerischen Untersuchungen

/38,47/ wurde gezeigt ( Siehe Bild 2.4), daß die Prozeßzone vollständig in das vorliegende asymptotische Feld eingebettet ist und die Dominanz der HRR-Felder sowie somit das Intensitätskonzept weiterhin gesichert sind.

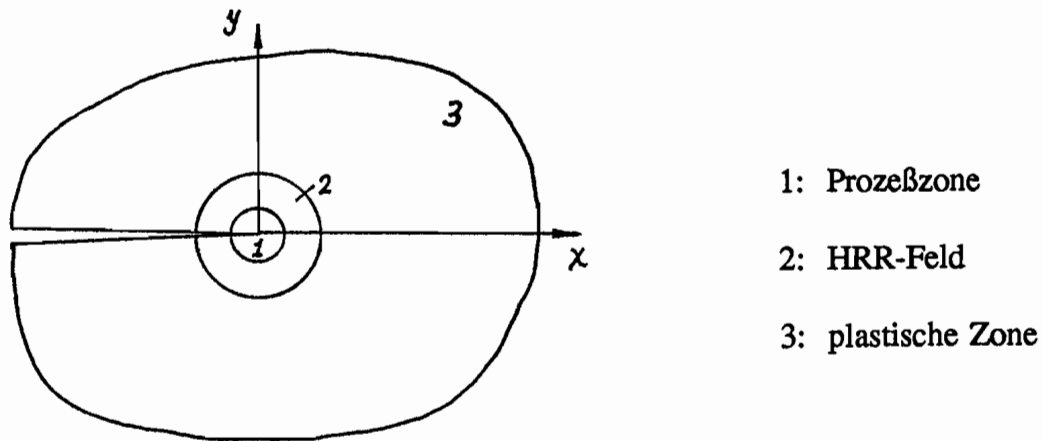


Bild 2.4. Gültigkeitsbereich des HRR-Feldes

Aus den HRR-Feldern läßt sich die Rißspitzenöffnung einfach definieren. Nach dem Vorschlag von TRACEY /85/ hat SHIH /59/ die Rißspitzenöffnung  $\delta_t$  durch den Schnittpunkt der  $45^\circ$ -Sekanten mit dem deformierten Rißufer definiert (Siehe Bild 2.5), so läßt sich ein linearer Zusammenhang zwischen  $J$  und  $\delta_t$  ableiten:

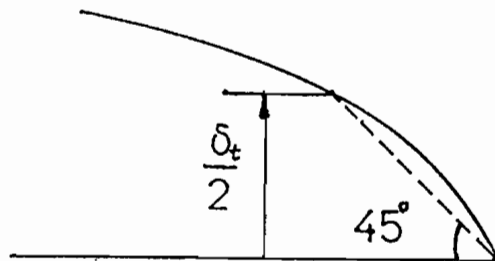


Bild 2.5. Definition der Rißspitzenöffnung  $\delta_t$

$$\delta_t = d_n \frac{J}{\sigma_0} \quad , \quad (2.26)$$

wobei

$$d_n = (\alpha \epsilon_0)^{\frac{1}{n}} \frac{2}{I_n} [ \bar{u}_x(\pi) + \bar{u}_y(\pi) ]^{\frac{1}{n}} \bar{u}_y(\pi) . \quad (2.27)$$

Dieser Zusammenhang wurde durch numerische Untersuchungen /59,4/ bestätigt. Damit kann das J-Integral durch leicht erfaßbare Parameter ermittelt werden.

### 2.2.3 Bruchkriterium und Rißwiderstandskurve

Unter Kriterium versteht man die auf einer Modellvorstellung oder Hypothese beruhende mathematische Formulierung einer Bedingung, unter der ein definierter physikalischer Zustand in einen davon abgegrenzten anderen Zustand übergeht. In der Festigkeitsanalyse wird mit Hilfe eines Kriteriums häufig ein zulässiger von einem unzulässigen Zustand abgegrenzt. Die diesen Übergang charakterisierende Größe wird bei Erfüllung des Kriteriums als kritischer Wert bezeichnet. Im allgemeinen wird sie durch folgende Ungleichung

$$\Lambda ( \sigma_{ij}, \epsilon_{ij} ) \leq \Lambda_c \quad (2.28)$$

dargestellt. Dabei ist  $\Lambda$  ein aus dem durch äußere Belastung hervorgerufenen Spannungs- und Verzerrungszustand eindeutig berechenbarer Beanspruchungsparameter, und  $\Lambda_c$  ist eine Materialkenngröße, die nicht von dem Beanspruchungszustand bzw. der geometrischen Konfiguration der Struktur abhängt, und durch möglichst einfache Versuche bestimmt werden kann. Die Aufgabe der Bruchmechanik ist es, einen geeigneten Beanspruchungsparameter  $\Lambda$  zu finden, sowie eine Methode für die experimentelle Bestimmung des materialspezifischen kritischen Wertes anzugeben.

In der linear elastischen Bruchmechanik wurde aus der Überlegung, daß zum Vortreiben eines Risses eine gewisse Mindestenergie notwendig ist, mit Hilfe der Ener-

giebilanz nach GRIFFITH /35/ die Energiefreisetzungsrate  $G$  als Bruchkriterium eingeführt:

$$G \leq G_c \quad . \quad (2.29)$$

IRWIN /42/ interpretiert

$G$  als Rißfortschrittskraft und

$G_c$  als Rißwiderstandskraft .

Nach dem Zusammenhang von (2.22) folgt man aus (2.29) das Spannungsintensitätskriterium

$$K_I \leq K_{Ic} \quad . \quad (2.30)$$

Also arbeitet man in der linear elastischen Bruchmechanik nach dem Intensitätskonzept. Dieses Konzept kann über die linear elastische Bruchmechanik hinaus in die elastisch-plastische Bruchmechanik verallgemeinert werden. Da in diesem Fall die Spannungsverteilung an der Rißspitze nicht mehr durch den Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$ , sondern durch das J-Integral als Intensitätsfaktor beschrieben wird, wird dann das J-Integral als Rißinitierungskriterium in duktilem Material formuliert:

$$J \leq J_{Ic} \quad . \quad (2.31)$$

Aus Experimenten hat man erfahren, daß bei rißbehafteten Bauteilen mit duktilem Materialverhalten vor dem schließlichen Zerstörungsbruch ein mehr oder weniger großes stabiles Rißwachstum auftritt. Dieses Rißwachstum kann zu jeder Zeit durch Unterbrechung der äußeren Belastung zum Stillstand gebracht werden. Dieses Phänomen kann durch folgende Bilder 2.6 schematisch dargestellt werden. Das Bild 2.6a stellt die konventionelle Rißwiderstandskurve  $J_R(\Delta a)$  dar, die drei Bereiche besitzt. In dem ersten Bereich tritt das Ausrunden des stehenden Risses durch große Deformationen auf, es findet hier keine Trennung der Materialteilchen statt. Im zweiten Bereich findet das eigentliche stabile Rißwachstum statt. Die  $J_R$ -Kurve steigt kontinuierlich, so daß in jedem Punkt der Rißwiderstandskurve ein spezielles Rißspitzenfeld vorliegt, dessen Berechnung nur für starr-idealplastisches Materialverhalten analytisch möglich ist /5/.

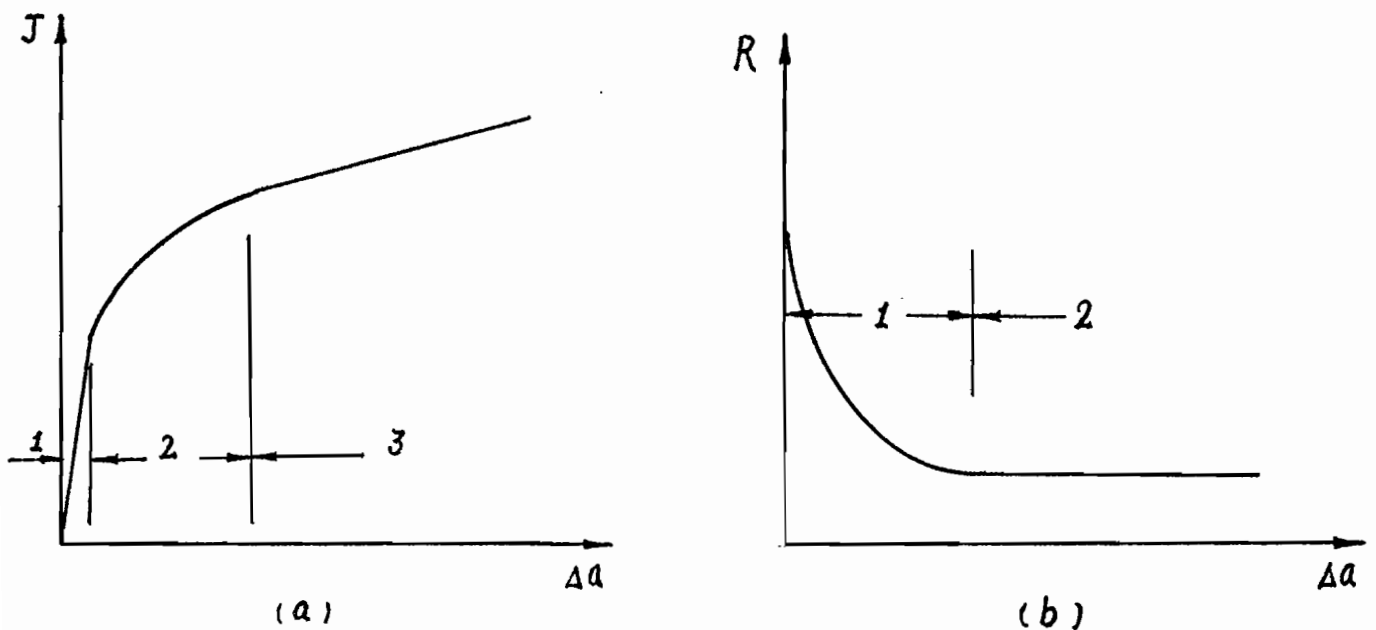


Bild 2.6. Qualitativer Verlauf einer Rißwiderstandskurve

Im dritten Bereich hat die  $J_R$ -Kurve (schematisch) konstante Steigung. In diesem Bereich wird die Rißausbreitung formal als stationäres Rißwachstum bezeichnet. Aber hierzu weist es auf das Paradoxon auf, daß der so definierte Rißwiderstand bei stationärem Rißwachstum immer zunimmt, was man dagegen für stationäres Rißwachstum einen konstanten Wert erwarten würde. Der Grund dafür ist, daß für dissipative Prozesse  $J$  nicht mehr die Energiefreisetzungsrates im GRIFFITHSchen Sinne, für die die Definition  $J = -\partial\pi/\partial a$  gilt, sondern lediglich eine akkumulierende Größe der in die Probe hineingesteckten äußeren Arbeit.  $J$  sagt damit nichts über den tatsächlichen momentanen Rißwiderstand aus /87/.

Nun hat TURNER /88/ den Rißwiderstand im ursprünglichen GRIFFITHSchen Sinne über die Dissipationsrate  $R = dU_{dis}/Bda$  definiert. Die Definition des Rißwiderstandes als Rate, also als Ableitung nach einer momentanen wachsenden Rißlänge, fügt sich besser in den Begriffsrahmen der inkrementellen Plastizitätstheorie ein als die kumulative und von der Belastungsgeschichte abhängige Größe  $J$ . Dann ist die Rißwiderstandskurve  $R(\Delta a)$  sieht nicht mehr wie die  $J_R$ -Kurve aus, wie im Bild 2.6b schematisch dargestellt. Sie besitzt zwei Bereiche. Im ersten Bereich hat die Kurve fallende Tendenz und entspricht dem eigentlichen stabilen Rißwachstum. Der zweite Bereich hat einen konstanten stationären Endwert und beschreibt den stationären Rißwachstum. Bereits vor

TURNERs Einführung des Begriffs der Dissipationsrate haben KLEMM & KALTHOFF /89/ zur Beschreibung der "Rißlaufenergie" mit einer ähnlichen Definition wie TURNER eingeführt und diese über eine Messung der Bruchwärme experimentell bestimmt. Sofern plastische Zonen nur in der Umgebung der Rißspitze und als Folge der Rißausbreitung auftreten, sind die Definitionen nach /88/ und /89/ im stationären Bereich identisch /90/. In diesem stationären Bereich sieht man in einem mitbewegten Koordinatensystem immer das gleiche Umfeld an der Rißspitze und die Zeitableitung kann dann durch seine Ortsableitung ersetzt werden.

In der elastisch-plastischen Bruchmechanik werden  $J_{IC}$ ,  $J_I$  und die  $J_R$ -Kurve solange als gültige Rißwiderstandsparameter angesehen, wie  $J$  noch als Intensitätsparameter das Rißspitzenfeld entsprechend der HRR-Theorie kontrolliert. Hierfür werden entsprechende restriktive Einschränkungen für Probenform und -größe sowie ggf. die Länge des zulässigen Rißwachstums und Anfangssteigung der  $J_R$ -Kurve /86,91/ gemacht. Im Falle des stehenden Risses hat  $J$  als Kennwert gegen Spaltbruch im spröde-duktilen Übergangsbereich,  $J_{IC}$ , oder gegen duktile Rißinitiierung,  $J_I$ , seine unbestrittene Berechtigung, es verliert aber mit wachsendem Riß zunehmend seine theoretische Begründung und ist unter keinen Umständen zur Beschreibung von stationärem Rißwachstum geeignet, da es spätestens hier nicht mehr Intensitätsparameter des singulären Feldes sein kann. Wie Bild 2.6a schematisch zeigt, steigt  $J$  weiter an, während das lokale Spannungsfeld an der Rißspitze unverändert bleibt. Aus diesem Grund wird im nächsten Kapitel (auch Zweck dieser Arbeit) versucht, durch Untersuchung des stationär wachsenden Rißspitzenfeldes einen geeigneten Beanspruchungsparameter zu finden.

### 3. Analytische Untersuchung der stationär fortschreitenden Rißspitzenfelder

Wie schon im Kapitel 2.2 erwähnt, liegt wegen der mathematischen Schwierigkeiten und der Komplexitäten des mechanischen Vorgangs für das stabile Rißwachstum beim duktilen Materialverhalten die Lösung nur bedingt vor. Vornehmlich sind die durch Übertragung von der HRR-Lösung bzw. dem wegunabhängigen J-Integral für stehenden Riß auf den stabil wachsenden Riß verursachten Schwierigkeiten ungeklärt. In diesem Kapitel wird versucht, durch Untersuchung der Spannungs- und Verzerrungszustände an der Rißspitze des stationär wachsenden Risses die bisher existierenden Bruchparameter besser verstehen zu können und möglicherweise auch einen anderen geeigneten Beanspruchungsparameter zu empfehlen.

#### 3.1. Asymptotische Betrachtungsweise

In der Bruchmechanik handelt es sich um rißbehaftete Struktur (Siehe Bild 3.1).

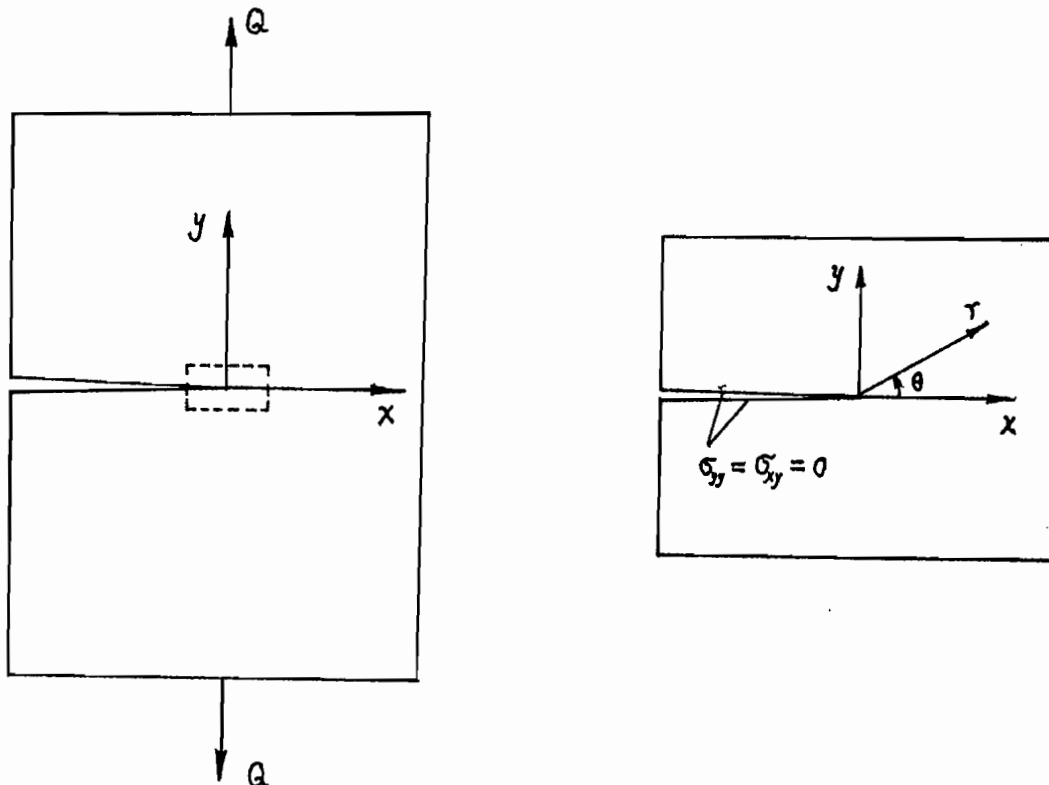


Bild 3.1 Definition des Teilgebietes in einer Struktur



Die vollständige Lösung des mechanischen Vorgangs für dieses Problem wird im allgemeinen durch folgende unendliche Reihe /11/ dargestellt:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \Phi_k(\theta) \quad . \quad (3.1)$$

Aber wegen der mathematischen Schwierigkeiten und insbesondere bei Erfüllung der vorliegenden Randbedingungen ist sie ein analytisch unlösbares Problem in der Elastizitäts- bzw. Plastizitätstheorie. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wird in der Bruchmechanik versucht, nicht die gesamte Struktur, sondern nur ein Teilgebiet direkt an der Rißspitze zu betrachten (siehe Bild 3.1b). Nun beschränken sich die Randbedingungen auf die beiden freien Rißoberflächen. So eine Betrachtungsweise war in der linear elastischen und auch der elastisch-plastischen Bruchmechanik sehr erfolgreich und wird deshalb asymptotische Betrachtungsweise genannt. Hier in dieser Arbeit wird sie weiter benutzt.

Durch diese Umstellung von der gesamten Struktur auf ein Teilgebiet konnte das komplizierte Randwertproblem auf ein Eigenwertproblem reduziert werden. Von der Gleichung (3.1) ist bekannt, daß die Lösung durch jeden einzelnen Term summiert wird, der eine spezielle Lösung des Eigenwertproblem darstellt /11/. Je nach dem, wie groß das betrachtete Teilgebiet gewählt wird, müssen entsprechend viele Summenterme zur Ermittlung der Lösung herangezogen werden.

Man interessiert sich in der Bruchmechanik besonders für die Lösung in einem sehr kleinen Gebiet direkt an der Rißspitze, so daß die Gleichung (3.1) auf einen einzigen Term der Lösungsfunktion reduziert werden kann, die zur Beschreibung des vorliegenden Problems hinreichend ist und als Nahfeldlösung bzw. asymptotische Lösung bezeichnet wird. Da die asymptotische Lösung in einem sehr kleinen Gebiet um die Rißspitze für die bruchmechanische Bewertung ausreichend ist, können bei der Ermittlung der Nahfeldlösung wesentliche Vereinfachungen durchgeführt werden, die auf die asymptotische Betrachtungsweise zurückzuführen sind.

### 3.2. Rißspitzenfelder mit potenzförmigen Ansatzfunktionen

Die im letzten Abschnitt erwähnte asymptotische Betrachtungsweise läßt sich von einem Randwertproblem auf ein Eigenwertproblem reduzieren. Die allgemeine Ansatzfunktion (3.1) und die im Bild (3.1b) dargestellten Randbedingungen können dann durch folgende Gleichungen formuliert werden:

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \check{\Phi}(\theta) \quad , \quad (3.2)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) &= 0 \quad , \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die obige Ansatzfunktion (3.2) kann für die Airysche Spannungsfunktion und auch für die Spannungen bzw. Verzerrungen sowie die Verschiebungen gemacht werden. Zusätzlich müssen hier noch die beiden Randbedingungen (3.3) an der freien Oberfläche sowie ihre Umformulierungen erfüllt werden.

In der Bruchmechanik werden von der allgemeinen Ansatzfunktion (3.2) ausgehend meistens die folgenden zwei Funktionen genommen, nämlich:

Potenzförmige Ansatzfunktion

$$\Phi(r, \theta) = A r^{-s} \check{\Phi}(\theta) \quad . \quad (3.4)$$

Dabei ist A der Amplitudenfaktor und in der Lösung des Eigenwertproblems unbestimmbar. Er beschreibt die Intensität des Feldes und ist vom konkret vorliegenden Problem abhängig. s ist hier die sogenannte Singularitätsstärke und  $\check{\Phi}(\theta)$  ist die Winkelfunktion. Diese beiden können in der Lösung des Eigenwertproblems ermittelt werden und sind nur von dem Materialverhalten abhängig, d.h. für ein bestimmtes Material und einen bestimmten Spannungszustand sind sie konstant.

Diese Ansatzfunktion (3.4) wird in der linear elastischen Bruchmechanik für die Spannungen verwendet, wobei A dem bekannten Spannungsintensitätsfaktor K entspricht

und die Singularitätsstärke  $s$  immer gleich 0,5 ist. In der elastisch-plastischen Bruchmechanik für den stehenden Riß bzw. in der HRR-Theorie wird ebenfalls die Ansatzfunktion (3.4) benutzt, dabei ist der Amplitudenfaktor  $A$  durch das wegunabhängige J-Integral als Intensitätsparameter dargestellt und  $s$  ist von der Materialkonstanten  $n$  beim potenzverfestigenden Material (Siehe 2.22) abhängig. Für eine ähnliche Betrachtung mit der Ansatzfunktion (3.4) für das stationäre Rißwachstum bei einem potenzverfestigenden Material ist es schwer, die Inkonsistenz der Singularitäten in der Belastungszone und Entlastungszone zu überwinden /37/.

Nun wurde folglich von AMAZIGO und HUTCHINSON /1/ die Untersuchung für Modus III und Modus I ESZ und EVZ mit der Ansatzfunktion (3.4) für das stationär wachsende Riß bei einem linear verfestigenden Material durchgeführt und die Spannungen sowie Verzerrungsinkremente gefunden. Die Lösungen lassen jedoch die mögliche Rückplastizierung nahe des Rißufers außer acht (Bild 3.3). Später hat CASTANEDA /18,19 20/ die Untersuchung mit Berücksichtigung der Rückplastizierung für das gleiche Material durchgeführt und ebenfalls die Spannungen und Verzerrungsinkremente gefunden. Er hat damit festgestellt, daß sich die von AMAZIGO und HUTCHINSON erzielten Ergebnisse nicht wesentlich ändern und daß die Rückplastizierungszone für den ebenen Spannungszustand so klein ist, daß man sie vernachlässigen kann.

Als Alternative verwendet man in der Bruchmechanik auch die logarithmische Ansatzfunktion für den stationär wachsenden Riß:

$$\Phi(r, \theta) = \left( \ln \frac{A}{r} \right)^s \tilde{\Phi}(\theta) \quad . \quad (3.5)$$

Bereits für elastisch-idealplastisches Materialverhalten beim wachsenden Riß wurden viele Untersuchungen /21,54,24,30,62,17/ durchgeführt. Nach diesen Arbeiten hat das Verzerrungsfeld eine Form von (3.5), wobei hier die Singularität  $s$  in diesem Fall gleich Eins ist. Entsprechende Untersuchungen für den stationär wachsenden Riß bei einem potenzverfestigenden Materialverhalten wurden von GAO und HWANG /31,32,33/ sowie PAN /51/ mit dieser Ansatzfunktion durchgeführt. Das Problem hier liegt darin,

daß die Singularitäten  $s$  von GAO & HWANG und PAN unterschiedlich sind und durch die mathematischen Schwierigkeiten mit dieser Ansatzfunktion (3.5) die Singularität  $s$  und die Winkelfunktion  $\tilde{\Phi}(\theta)$  nicht mehr in einer entkoppelten Form von dem Radius  $r$  sowie dem Amplitudenfaktor  $A$  allein durch die Materialkonstante  $n$  wie in der HRR-Theorie bestimmbar sind, sie müssen zusammen mit dem Radius  $r$  und dem Amplitudenfaktor  $A$  als Ganzes gelöst werden /5/, d.h., die für eine bestimmte Probe ermittelten Ergebnisse sind nicht mehr auf andere Proben mit den unterschiedlichen Geometrien übertragbar und nur unter Voraussetzung des Kleinbereichsfließens möglich /5/.

Aus diesem Grund wird hier in dieser Arbeit die Potenzansatzfunktion (3.4) benutzt und das linear verfestigende Material verwendet. Wie oben schon erläutert, beschränken sich die existierenden Lösungen für das linear verfestigende Material nur auf die Singularitäten und die damit verbundenen Probleme. Sie kommen nicht zu vollständigen Lösungen. Überigens, es wurden in diesen Lösungen die bereits vorhandenen bruchmechanischen Parameter und deren Änderungen nicht untersucht, daher konnte sie nicht zur bruchmechanischen Bewertung verwendet werden. Wir möchten uns deshalb in dieser Arbeit bestreben, die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen zu finden und dann basierend auf diesen Lösungen die vorhandenen bruchmechanischen Parameter und deren Änderungen zu untersuchen, um zu erfahren, ob sie noch in der Lage sind, das stationäre Rißwachstum zu beschreiben, und möglicherweise neue Beanspruchungsparameter durch Formulierung und Definition zu empfehlen. Damit könnte auch erfahren werden, welche Verhältnisse zwischen dem Amplitudenfaktor  $A$  und den äußeren Belastungen entstehen.

Die Airysche Spannungsfunktion wird in einer ähnlichen Form wie (3.4) gemacht:

$$\phi(r, \theta) = A \sigma_0 r^{-s+2} \tilde{\phi}(\theta) \quad , \quad (3.6)$$

wobei der Amplitudenfaktor  $A$  durch  $A\sigma_0$  und die Singularität durch  $s-2$  ersetzt werden. Die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen folgen dann in der Form

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(r,\theta) &= A \sigma_0 r^{-s} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\
e_{ij}(r,\theta) &= A e_0 r^{-s} \bar{e}_{ij}(\theta) \quad , \\
u_i(r,\theta) - u_i^0 &= A e_0 r^{-s+1} \bar{u}_i(\theta) \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

wobei  $u_i^0$  die Starrkörperverschiebungen sind.

### 3.3. Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Im Abschnitt 2.2.3. wurde kurz die Rißwiderstandskurve erläutert. Im dritten Bereich der Rißwiderstandskurve (Bild 2.6a) liegt das sogenannte stationäre Rißwachstum vor. Kennzeichnend für das stationäre Rißwachstum ist die Zeitinvarianz der Feldgrößen bei einer Beschreibung im mitbewegten Koordinatensystem, so daß die materielle Zeitableitung durch ihre Ortsableitung ersetzt werden kann (siehe Bild 3.2).

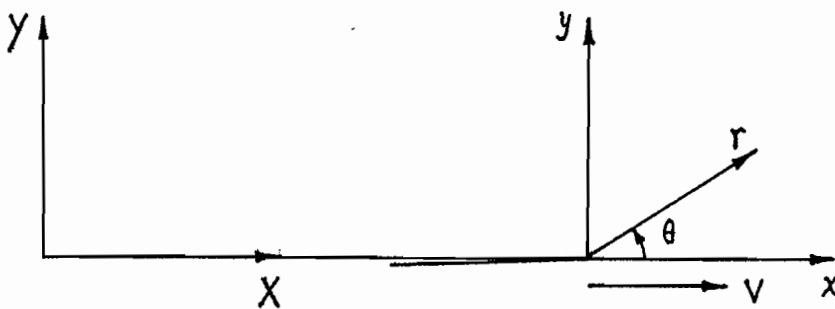


Bild 3.2 Koordinatensysteme beim stationären Rißwachstum

Zwischen den beiden Koordinatensystemen besteht folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
X &= a_0 + v t + x \quad , \\
Y &= y \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

wobei  $a_0$  die Ausgangsrißlänge und  $v$  die konstante Rißwachstumsgeschwindigkeit darstellt.

Mit Hilfe der Transformationsformel (3.8) und unter Anwendung der Kettenregel sowie

beim Einhalten der Zeitinvarianz im mitbewegten Koordinatensystem folgt die Beziehung:

$$\frac{d}{dt} = -v \frac{\partial}{\partial x} = -v \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (3.9)$$

Diese Bedingung fordert die zeitliche Änderung der Feldgrößen in einem raumfesten Materialteilchen, damit ein mitbewegter Beobachter ein stationäres Feld erkennt. Sie führt zu erheblichen Vereinfachungen bei der Lösung des elastisch-plastischen Randwertproblems für stationär wachsenden Riß. Mit (3.9) erhalten wir die materiellen Zeitableitungen der Spannungen für den stationär wachsenden Riß im Polar- bzw. Zylinder-Koordinatensystem unter Berücksichtigung von (3.9)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr} &= v \left[ -\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - 2 \sigma_{r\theta} \right) \right] \\ &= v A \sigma_0 r^{-s-1} [s \dot{\sigma}_{rr} \cos \theta + (\dot{\sigma}_{rr}' - 2 \dot{\sigma}_{r\theta}) \sin \theta] \quad , \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= v \left[ -\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \sigma_{r\theta} \right) \right] \\ &= v A \sigma_0 r^{-s-1} [s \dot{\sigma}_{\theta\theta} \cos \theta + (\dot{\sigma}_{\theta\theta}' + 2 \dot{\sigma}_{r\theta}) \sin \theta] \quad , \\ \dot{\sigma}_{r\theta} &= v \left[ -\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) \right] \\ &= v A \sigma_0 r^{-s-1} [s \dot{\sigma}_{r\theta} \cos \theta + (\dot{\sigma}_{r\theta}' + \dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\theta\theta}) \sin \theta] \quad , \\ \dot{\sigma}_{zz} &= v \left[ -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \theta} \right] \\ &= v A \sigma_0 r^{-s-1} [s \dot{\sigma}_{zz} \cos \theta + \dot{\sigma}_{zz}' \sin \theta] \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der Annahme vieler Arbeiten z.B. /18,19,20,31,32/ entsprechend läßt sich das stationär wachsende Rißspitzenfeld in drei Bereiche teilen (Bild 3.3).

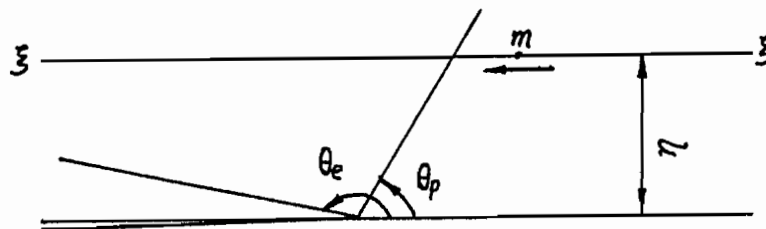


Bild 3.3 Winkelbereiche an der stationär wachsenden Rißspitze

Der Winkel  $\theta_p$  charakterisiert die Entlastungszone und der Winkel  $\theta_e$  die Rückplastizierungszone. Wie schon im Kapitel 3.2. erwähnt, sind die von AMAZIGO und HUTCHINSON erzielten Ergebnisse ohne Rückplastizierung und die von CASTANEDA gefundenen Lösungen mit Rückplastizierung fast identisch. Besonders ist die Rückplastizierungszone für den ebenen Spannungszustand so klein, daß sie vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit zunächst die Belastungs- und Entlastungszone angenommen.

Für die unterschiedlichen Bereiche gelten die unterschiedlichen Stoffgesetze (2.18). Im Belastungsbereich gilt das Stoffgesetz

ESZ:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{E} \left[ (\dot{\sigma}_{rr} - \nu \dot{\sigma}_{\theta\theta}) + \omega \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) \right] , \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \left[ (\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \nu \dot{\sigma}_{rr}) + \omega \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) \right] , \quad (3.11) \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \dot{\sigma}_{r\theta} + \omega \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \sigma_{r\theta} \right] . \end{aligned}$$

EVZ:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{rr} - \nu (\dot{\sigma}_{\theta\theta} + \dot{\sigma}_{zz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) \right] , \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{\theta\theta} - \nu (\dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} (2 \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) \right] , \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \dot{\sigma}_{r\theta} \right. \\ &\quad \left. + \omega \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \sigma_{r\theta} \right] , \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{zz} - \nu (\dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} (2 \sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
 \sigma_v^2 &= \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2, & \text{für ESZ} \\
 \sigma_v^2 &= \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2 & \text{für EVZ} \\
 &+ \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sigma_{zz} .
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Im Entlastungsbereich sind nur die linear elastischen Terme von (3.11) und (3.12) zu berücksichtigen. Zur Unterscheidung, in welchem Bereich das Materialteilchen liegt und welches Stoffgesetz dafür gilt, wird folgende Bedingung überprüft:

$$\dot{\sigma}_v = -\nu \left[ \frac{\partial \sigma_v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \theta} \right] \geq 0 . \tag{3.14}$$

Dabei ist im Belastungsbereich  $\dot{\sigma}_v$  größer als Null und im Entlastungsbereich kleiner als Null. In der kritischen Phase ist sie gleich Null, so daß aus dieser Bedingung (3.14) der Winkel  $\theta_p$ , der die beiden Bereiche charakterisiert, zu bestimmen ist.

Zwischen Airyscher Spannungsfunktion, die in dieser Arbeit als Lösungsfunktion verwendet wird, und Spannungen (2.5) bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= A \sigma_0 r^{-s} \check{\sigma}_{rr}(\theta) \\
 &= A \sigma_0 r^{-s} [ \check{\phi}'' + (2 - s) \check{\phi} ] , \\
 \sigma_{\theta\theta} &= A \sigma_0 r^{-s} \check{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) \\
 &= A \sigma_0 r^{-s} (2 - s) (1 - s) \check{\phi} , \\
 \sigma_{r\theta} &= A \sigma_0 r^{-s} \check{\sigma}_{r\theta}(\theta) \\
 &= A \sigma_0 r^{-s} [ - (1 - s) \check{\phi}' ] .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Für die Spannungsfunktion ist die Bestimmungsgleichung die Kompatibilitätsbedingung (2.8). Durch Einsetzen von (3.11) bzw. (3.12) in die Kompatibilitätsbedingung (2.8) und bei Berücksichtigung von (3.9) bzw. (3.10) und (3.15) wird die Gleichung (2.8) nach der höchsten Ableitung aufgelöst, ergibt sich



ESZ:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{(5)} &= F ( \tilde{\phi}', \tilde{\phi}'', \tilde{\phi}''', \tilde{\phi}^{(4)}, \alpha, s, \theta ) \quad , \quad \theta \leq \theta_p \\ \tilde{\phi}^{(5)} &= F ( \tilde{\phi}', \tilde{\phi}'', \tilde{\phi}''', \tilde{\phi}^{(4)}, s, \theta ) \quad , \quad \theta > \theta_p\end{aligned}\quad (3.16)$$

EVZ:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{(5)} &= F ( \tilde{\phi}', \tilde{\phi}'', \tilde{\phi}''', \tilde{\phi}^{(4)}, \alpha, s, \theta, \sigma_{zz} ) \quad , \quad \theta \leq \theta_p \\ \tilde{\phi}^{(5)} &= F ( \tilde{\phi}', \tilde{\phi}'', \tilde{\phi}''', \tilde{\phi}^{(4)}, s, \theta, \sigma_{zz} ) \quad . \quad \theta > \theta_p\end{aligned}\quad (3.17)$$

Hier wird auf die langen Ausdrücke verzichtet. Zur Lösung der obigen Differentialgleichungen (3.16) und (3.17), die linear in der höchsten Ableitung sind, ist es zweckmäßig, die Differentialgleichungen mit fünfter Ordnung jeweils in ein System von fünf Differentialgleichungen mit erster Ordnung umzuwandeln. Darauf wird im Abschnitt 3.7. eingegangen. Hier sei nur noch festgehalten, daß die Gleichungen (3.16) und (3.17) nicht linear und aber homogen in  $\tilde{\phi}$  sind, d.h. mit  $\tilde{\phi}$  ist auch  $\mu\tilde{\phi}$  eine Lösung. Dabei ist  $\mu$  ein beliebiger Multiplikator. Dies kann ausgenutzt werden, um die Lösung geeignet zu normieren.

Um das Differentialgleichungssystem (3.16) und (3.17) zu lösen, braucht man noch die Randbedingungen. An den spannungsfreien RiBoberflächen folgen

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} ( r, \theta = \pm \pi ) &= 0 \quad , \\ \sigma_{r\theta} ( r, \theta = \pm \pi ) &= 0 \quad .\end{aligned}\quad (3.18)$$

Mit Hilfe von (3.15) werden die Bedingungen (3.18) in

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} ( \theta = \pm \pi ) &= 0 \quad , \\ \tilde{\phi}' ( \theta = \pm \pi ) &= 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

umformuliert. Unter Ausnutzung der Symmetrie des Modus I Belastungsfalls können noch zwei weitere Bedingungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}'(\theta = 0) &= 0, \\ \tilde{\phi}'''(\theta = 0) &= 0.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Durch Einsetzen von (3.20) in (3.16) und (3.17) wird eine zusätzliche Bedingung erhalten:

$$\begin{aligned}ESZ &: \\ \tilde{\phi}^{(4)}(0) &= F [ \tilde{\phi}(0), \tilde{\phi}''(0), s, \alpha ] , \\ EVZ &: \\ \tilde{\phi}^{(4)}(0) &= F [ \tilde{\phi}(0), \tilde{\phi}''(0), s, \alpha, \tilde{\sigma}_{zz}(0) ] .\end{aligned}\quad (3.21)$$

Weil  $\tilde{\sigma}_{zz}$  im ebenen Verzerrungszustand als ein weiterer Unbekannter in (3.17) gesehen wird, muß hier noch eine Bedingung gefunden werden:

EVZ :

$$\tilde{\sigma}_{zz}(0) = F_1 [ \tilde{\phi}(0), \tilde{\phi}''(0), s, \alpha ] .\quad (3.22)$$

Wie schon erwähnt, werden hier zwei unterschiedliche Bereiche behandelt, nämlich die Belastungszone und die Entlastungszone. Die oben erhaltenen Randbedingungen reichen für die vorliegenden Probleme noch nicht aus, dazu sind noch sogenannte Übergangsbedingungen notwendig, um die entsprechende Stetigkeit des Rißspitzenfeldes sicherzustellen. Hierzu müssen die Spannungen und Verschiebungen in der Übergangsstelle stetig sein, nämlich

$$\begin{aligned}[\sigma_{ij}] &= 0, \\ [\tilde{\sigma}_{ij}] &= 0, \\ [u_i] &= 0, \\ [\dot{u}_i] &= 0.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Durch Umformulierung von (3.23) können die folgenden Übergangsbedingungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}
[\tilde{\phi}] &= 0, \\
[\tilde{\phi}'] &= 0, \\
[\tilde{\phi}'' ] &= 0, \\
[\tilde{\phi}''' ] &= 0, \\
[\tilde{\sigma}_{zz}] &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

Weil in (3.16) und (3.17) die fünfte Ableitung von  $\tilde{\phi}$  betroffen wird, muß hier noch eine Bedingung hinzugefügt werden. Aus der Überlegung von

$$\left[ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right] = 0
\tag{3.25}$$

folgt eine zusätzliche Bedingung für  $\tilde{\phi}^{(4)}$

$$\begin{aligned}
ESZ &: \\
\tilde{\phi}^{(4)} \sin\theta |_{\theta_p^+} &= \tilde{\phi}^{(4)} \sin\theta + \omega f \left( \tilde{\sigma}_{rr} - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \right) |_{\theta_p^-}, \\
EVZ &: \\
\tilde{\phi}^{(4)} \sin\theta (1 - \nu^2) |_{\theta_p^+} &= (1 - \nu^2) \sin\theta \tilde{\phi}^{(4)} |_{\theta_p^-} \\
&+ \frac{\omega}{2} f [ (2 \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{zz}) \\
&+ \nu (2 \tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}) ] |_{\theta_p^-},
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

$$f = -s \sin\theta + \cos\theta \frac{\tilde{\sigma}_v'}{\tilde{\sigma}_v} + \sin\theta \frac{\tilde{\sigma}_v'' \tilde{\sigma}_v - \tilde{\sigma}_v' \tilde{\sigma}_v'}{(\tilde{\sigma}_v)^2}.
\tag{3.27}$$

Das Differentialgleichungssystem (3.16) und (3.17) wird mit Hilfe der Randbedingungen (3.19), (3.20), (3.21) und (3.22) sowie der Übergangsbedingungen (3.24) und (3.26) durch die im nächsten Abschnitt bzw. im Kapitel 4 näher beschriebenen numerischen Verfahren gelöst.

Zur Beschreibung der Verzerrungen des asymptotischen Nahfeldes ist außer dem Amplitudenfaktor A, welcher durch einen bruchmechanischen Parameter umformuliert werden kann, die Winkelfunktion  $\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta)$  durch die Stoffgesetze (3.11) und (3.12) zu bestimmen.

Die elastischen Verzerrungen können bei Berücksichtigung der Winkelanteile durch das HOOKEsche Gesetz bestimmt werden:

ESZ:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_{rr}^e &= \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} \quad , \\
 \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^e &= \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} \quad , \\
 \tilde{\epsilon}_{r\theta}^e &= (1 + \nu) \sigma_{r\theta} \quad , \\
 \tilde{\epsilon}_{zz}^e &= -\nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

EVZ:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_{rr}^e &= \sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \quad , \\
 \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^e &= \sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \quad , \\
 \tilde{\epsilon}_{r\theta}^e &= (1 + \nu) \sigma_{r\theta} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Die plastischen Verzerrungen werden im Belastungsbereich und Entlastungsbereich getrennt behandelt. Im Belastungsbereich sind die plastischen Verzerrungen durch die Stoffgesetze (3.11) und (3.12) zu beschreiben, wobei die materielle Zeitableitung durch die entsprechende Ortsableitung (3.9) ersetzt werden kann. Sie lauten im Belastungsbereich:

ESZ:

$$\begin{aligned}
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{rr}^{p'} + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{rr}^p - 2 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p &= \psi_{rr}(\theta) \\
 &= \omega g(\theta) \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) \quad , \\
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^{p'} + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^p + 2 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p &= \psi_{\theta\theta}(\theta) \\
 &= \omega g(\theta) \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) \quad , \\
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^{p'} + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p + \sin\theta (\tilde{\epsilon}_{rr}^p - \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^p) &= \psi_{r\theta}(\theta) \\
 &= \omega g(\theta) \frac{3}{2} \sigma_{r\theta} \quad , \\
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{zz}^{p'} + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{zz}^p &= \psi_{zz}(\theta) \\
 &= -\frac{\omega}{2} g(\theta) (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

EVZ:

$$\begin{aligned}
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{rr}^p{}' + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{rr}^p - 2 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p &= \kappa_{rr}(\theta) \\
 &= \frac{\omega}{2} g(\theta) (2 \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{zz}) \\
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^p{}' + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{\theta\theta} + 2 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p &= \kappa_{\theta\theta}(\theta) \\
 &= \frac{\omega}{2} g(\theta) (2 \tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{zz}) \\
 \sin\theta \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p{}' + \cos\theta s \tilde{\epsilon}_{r\theta}^p + \sin\theta (\tilde{\epsilon}_{rr}^p - \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}^p) &= \kappa_{r\theta}(\theta) \\
 &= \omega g(\theta) \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_{r\theta}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dabei ist

$$g(\theta) = s \cos\theta + \sin\theta \frac{\tilde{\sigma}_v'}{\tilde{\sigma}_v} \tag{3.32}$$

und sind  $\tilde{\sigma}_v$  und  $\tilde{\sigma}_v'$  durch (3.13) zu bestimmen.

Um diese Differentialgleichungssysteme (3.30) und (3.31) lösen zu können, sind noch die Anfangsbedingungen notwendig, die durch Behandlung von (3.30) und (3.31) unter Ausnutzung des Modus I Belastungsfalls erfolgen können. Sie lauten im allgemeinen ESZ:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p(0) = \frac{1}{s} \psi_{ij}(0) \quad , \tag{3.33}$$

EVZ:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p(0) = \frac{1}{s} \kappa_{ij}(0) \quad . \tag{3.34}$$

Nun sind noch die plastischen Verzerrungen im Entlastungsbereich zu bestimmen. In der Plastizitätstheorie wird erfahren, daß der mechanische Vorgang im Entlastungsfall durch das elastische Stoffgesetz, hier nämlich das HOOKEsche Gesetz, bestimmt wird, aber d.h. nicht, daß die vor der Entlastung auftretenden plastischen Verzerrungen verschwunden sind. Sie werden in diesem Fall erhalten bleiben. Aus der Überlegung, daß sich das im stationären Rißwachstumsfeld liegende Materialteilchen mit der

konstanten Geschwindigkeit  $v$  längs Gegenrichtung des Risses bewegt, sind die plastischen Verzerrungen durch folgende Beziehung zu bestimmen:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p(\theta) = \left[ \frac{\sin(\theta_p)}{\sin(\theta)} \right]^s \tilde{\epsilon}_{ij}^p(\theta_p) \quad , \quad \theta_p \leq \theta \leq \pi \quad (3.35)$$

Hier ist zu beachten, daß die in den Gleichungen (3.30), (3.31) und (3.33) bzw. (3.34) durch  $\sin\theta$  hervorgerufene mögliche Singularität zur Lösung der plastischen Verzerrungen durch entsprechende Approximationen zu überwinden ist.

Die Verschiebungen können mit Hilfe von (2.7) durch Umformulierung wie folgt erhalten werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(\theta) &= \frac{1}{1-s} \tilde{\epsilon}_{rr}(\theta) \quad , \\ \tilde{u}_\theta'(\theta) &= \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}(\theta) - \frac{1}{1-s} \tilde{\epsilon}_{rr}(\theta) \quad , \\ \tilde{u}_\theta(\theta) &= \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{1-s} \tilde{\epsilon}_{rr}'(\theta) - 2 \tilde{\epsilon}_{r\theta}(\theta) \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die Differentialgleichungen und die entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen zur Lösung der Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen des stationär wachsenden Rißspitzenfeldes wurden bereits aufgestellt. Sie werden durch numerische Verfahren gelöst, die im Abschnitt 3.7. bzw. im Kapitel 4 näher beschrieben werden.

Nun kann jetzt die Frage gestellt werden, welche bruchmechanischen Beanspruchungsparameter auf der Basis der bereits ermittelten Nahfeldlösungen in der Lage sind, das große stationäre Rißwachstum zu beschreiben, und wie sie definiert werden sollen. Der Zugang zu diesem Problem ist grundsätzlich durch folgende zwei Möglichkeiten zu realisieren. Eine Möglichkeit könnte von der Betrachtung der den Riß fortreibenden Energie ausgehen. Dieses Konzept war in der elastisch-plastischen Bruchmechanik für stehenden Riß sehr erfolgreich. Dazu kann das von RICE /53/ eingeführte J-Integral als den Energiefluß zur Rißspitze /48/, der zur Bildung neuer Rißoberfläche dient, bzw. als rißtreibende thermodynamische Kraft interpretiert werden, und das J-Integral ist nach der HRR-Theorie zugleich Intensitätsfaktor des singulären Spannungs- und Verzerrungsfeldes. Hierauf begründet sich seine Eignung als

Rißinitiierungskriterium, da die grundlegende Annahme der Deformationstheorie, nämlich hyperelastisches Materialverhalten, nicht zu entscheidenden Widersprüchen führte.

Im Falle von großem stationären Rißwachstum mit Entlastungsprozessen hat das J-Integral jedoch keine Bedeutung mehr, wie numerische und theoretische Untersuchungen /15/ zeigen. Wenn das J-Integral für das Rißspitzenfeld wirksam sein soll, muß es einen endlichen Grenzwert für  $r \rightarrow 0$  besitzen. Dieser existiert jedoch nur dann, wenn die Verzerrungsenergiedichte von der Singularitätsordnung  $r^{-1}$  ist. Alle existierenden Untersuchungen über die Feldsingularitäten bei elastisch-plastischen Rißwachstum /24,54,1/ deuten jedoch auf geringere Singularitätsordnungen hin. NILSSON und STAHLÉ /50/ kommen zu dem Schluß, daß das Konzept der Energiebilanz zur Formulierung vom Rißwachstumskriterium nur bei asymptotisch elastischem Materialzustand an der Rißspitze sinnvoll ist.

Wenn die Energiebilanzen für das Modell der singulären Rißspitze keinen Beitrag zur Formulierung eines Rißwachstumskriteriums liefern können, verbleibt als weiterer Problemlösungsansatz der Zugang über Intensitätsparameter für das singuläre Rißspitzenfeld.

Zu diesem Zweck werden in den nächsten Abschnitten die Rißspitzenformen und einige existierende bruchmechanische Parameter untersucht, um zu erfahren, ob sie noch in der Lage sind, das große stationäre Rißwachstum zu beschreiben. Möglicherweise können dann neue bruchmechanische Parameter durch entsprechende Definition eingeführt werden.

### 3.4. Untersuchung des stationär fortschreitenden Riböffnungsprofils

Im letzten Abschnitt 3.3. wurden bereits die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen für das stationäre Ribwachstum bis auf den freien Amplitudenfaktor  $A$  ermittelt. Hiermit kann zuerst das Öffnungsprofil des stationär wachsenden Risses untersucht werden. Durch Bestimmung des Riböffnungsprofils kann man dann genauere Informationen über die Beanspruchung der Ribspitze erfahren.

Das Riböffnungsprofil wird durch die Verschiebungen  $u_x$  und  $u_y$  an der freien Riboberfläche beschrieben und im folgenden Bild 3.4 qualitativ dargestellt:

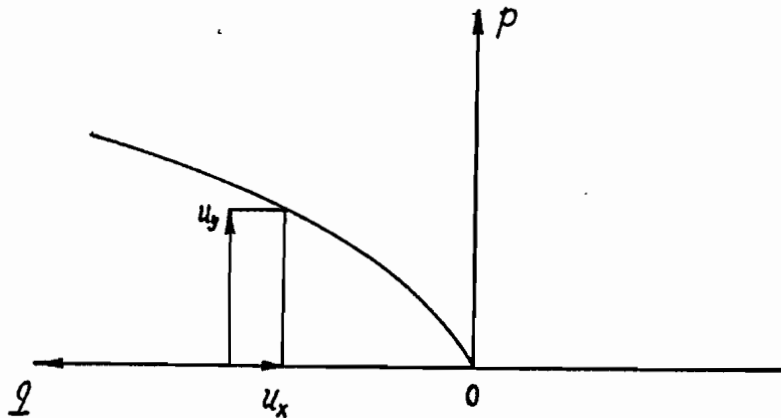


Bild 3.4 Ribspitzenöffnungsprofil

Die Verschiebungen an der freien Riboberfläche lauten nach (3.7)

$$\begin{aligned} u_x(r, \pi) &= A \varepsilon_0 r^{-s+1} \bar{u}_x(\pi) \quad , \\ u_y(r, \pi) &= A \varepsilon_0 r^{-s+1} \bar{u}_y(\pi) \quad . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Gemäß der im Bild 3.4 skizzierten Geometrie ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} p &= u_y(r, \pi) = A \varepsilon_0 r^{-s+1} \bar{u}_y(\pi) \quad , \\ q &= r - u_x(r, \pi) = r - A \varepsilon_0 r^{-s+1} \bar{u}_x(\pi) \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$



In diesem p-q-Koordinatensystem bildet sich das tatsächliche Riffnungsprofil. Die Gleichungen (3.38) stellen die sogenannten Parametergleichungen für das Riffnungsprofil mit dem Parameter r dar. Durch Elimination des Parameters r folgt aus (3.38) eine eindeutige Funktion:

$$q = \left( \frac{p}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{1}{-s+1}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p \quad (3.39)$$

Sie gibt das tatsächliche Riffnungsprofil für den stationär wachsenden Riß wieder, das in der Literatur sowohl für den stehenden Riß als auch für den wachsenden Riß bis jetzt nirgendwo gefunden wurde. Eine entsprechende Untersuchung für den stehenden Riß auf der Basis von der HRR-Theorie ist auch möglich.

Mit Hilfe von (3.39) können noch die Eigenschaften des tatsächlichen Riffnungsprofiles weiter untersucht und diskutiert werden. Dazu muß man zunächst seine Ableitungen bilden. Die erste Ableitung lautet demnach

$$\frac{d q}{d p} = \frac{1}{1-s} \left( \frac{p}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{s}{1-s}} \frac{1}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \quad (3.40)$$

Die erste Ableitung (3.40) sagt, daß sie an der Rißspitze immer einen Wert  $-\bar{u}_x/\bar{u}_y$  annimmt, wenn p gleich Null ist. Je nach dem, was für einen Wert  $\bar{u}_x$  besitzt, kann das Riffnungsprofil an der Rißspitze entweder einen spitzen Winkel bilden, wie im Bild 3.4 gezeigt oder einen strumpfen Winkel darstellen, während  $\bar{u}_y$  physikalisch gesehen immer einen positiven Wert einnimmt. Diese Tatsache ist durch die Rechenergebnisse der im letzten Abschnitt 3.3. durchgeführten Untersuchungen bestätigt worden, wobei  $\bar{u}_x(\pi)$  für ebenen Spannungszustand (ESZ) einen negativen Wert und für ebenen Verzerrungszustand (EVZ) einen positiven Wert hat. Eine entsprechende Untersuchung von AMSTUTZ und SEEGER /2/ mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode hat die ähnlichen Eigenschaften für stehenden Riß gezeigt, die in der Basis der HRR-Theorie mit Hilfe von (3.39) bestätigt werden können. Es wurde dabei darauf hingewiesen, daß diese Eigenschaften dann zu erfahren sind, wenn man hinreichend feine Elementierung für das Rißspitzenfeld vornimmt. Bei einem positiven  $\bar{u}_x(\pi)$  für ebenen

Verzerrungszustand (EVZ) hat das Ribffnungsprofil einen negativen Grenzwert mit

$$q_G = -s (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{\frac{1}{s}} \left[ (1-s) \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \right]^{\frac{1-s}{s}} \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \quad (3.41)$$

Die zweite Ableitung folgt aus (3.39):

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{s}{(1-s)^2} \left( \frac{p}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \left( \frac{1}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^2 \quad (3.42)$$

Die zweite Ableitung (3.42) zeigt, daß sie immer größer als Null ist, wenn p einen positiven Wert nimmt. Dies gewährleistet, daß die Krümmung des Ribffnungsprofils konvex ist, wie im Bild 3.4 qualitativ dargestellt, und nicht umgekehrt.

### 3.5. Berechnung einiger gängiger bruchmechanischer Parameter im Hinblick auf das Bruchkriterium

In diesem Abschnitt wird versucht, einige in der Literatur verwendete bruchmechanische Parameter wie das J-Integral, die Ribspitzenffnung CTOD und den Ribspitzenffnungswinkel CTOA aus der im vorigen Abschnitten hergeleiteten Gleichungen zu berechnen, damit ein mögliches, auf den Intensitätsparameter basierendes Bruchkriterium für das stationäre Rißwachstum verwirklicht werden kann.

Zuerst wird das RICEsche J-Integral behandelt, wobei das J-Integral aus der Definition (2.21) wie folgt geschrieben wird:

$$J = \int_{\Gamma} \left( w \, dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \, ds \right) \quad (3.43)$$

Der Integrationspfad kann so gewählt werden, daß er längs eines Kreises mit dem Radius  $r_a$  hinreichend nah um die Rißspitze fährt, d.h. in einem Gebiet, in dem das in vorigen Abschnitten ermittelte asymptotische Spannungs- und Verzerrungsfeld liegt. Durch Ableitung und Umformung ergibt sich das J-Integral

$$J = A^2 \sigma_0 \epsilon_0 r_a^{-2s+1} I_\alpha \quad , \quad (3.44)$$

wobei

$$\begin{aligned} I_\alpha = & \int_0^{\theta_p} [ (1 + \nu) \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{ji} - \nu \check{\sigma}_{kk}^2 + \omega \check{\sigma}_v^2 ] \cos\theta \, d\theta \\ & + \int_{\theta_p}^{\pi} [ (1 + \nu) \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{ji} - \nu \check{\sigma}_{kk}^2 \\ & + \omega (\sin\theta_p)^{2s} \check{\sigma}_v^2(\theta_p) (\sin\theta)^{-2s} ] \cos\theta \, d\theta \\ & - 2 \int_0^{\pi} [ (1 - s) \cos\theta ( \check{\sigma}_{rr} \check{u}_r + \check{\sigma}_{r\theta} \check{u}_\theta ) \\ & + \sin\theta ( \check{\sigma}_{rr} ( \check{u}_\theta - \check{u}_r' ) - \check{\sigma}_{r\theta} ( \check{u}_r + \check{u}_\theta' ) ) ] \, d\theta \end{aligned} \quad (3.45)$$

Wenn die Gleichung (3.44) nach dem Amplitudenfaktor A aufgelöst und in das Spannungs- und Verzerrungsfeld (3.7) eingesetzt wird, ist das Spannungs- und Verzerrungsfeld mit J als Intensitätsparameter wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r,\theta) &= \sigma_0 \left( \frac{J}{\sigma_0 \epsilon_0 I_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} r_a^{s-\frac{1}{2}} r^{-s} \check{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \epsilon_{ij}(r,\theta) &= \epsilon_0 \left( \frac{J}{\sigma_0 \epsilon_0 I_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} r_a^{s-\frac{1}{2}} r^{-s} \check{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad , \end{aligned} \quad (3.46)$$

wobei  $r_a$  ein bestimmter Integrationsradius und r eine beliebige Koordinatenkomponente ist.

In der Gleichung (3.44) ist zu sehen, daß das J-Integral hier nicht mehr wegunabhängig wie in der HRR-Theorie für stehenden Riß ist. Was für ein Radius gewählt werden soll, ist wesentlich, weil das Spannungs- und Verzerrungsfeld (3.46) direkte Verbindung mit

dem J-Integral hat.

Ein anderer Weg zur Bestimmung des Amplitudenfaktors A ist, die geeigneten empirischen globalen Größen wie Rißspitzenöffnung CTOD und Rißspitzenöffnungswinkel CTOA auf der konsistent theoretischen Grundlage zu definieren. Hierzu folgt man zunächst einem Vorschlag von TRACEY /85/ für die Rißspitzenöffnung CTOD, die von SHIH /59/ definiert wurde, wobei die Rißspitzenöffnung  $\delta_t$  durch den Schnittpunkt der k-Sekanten mit dem deformierten Rißufer definiert wird. Die Vorgehensweise ist

$$\begin{aligned} q &= \left( \frac{p}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{1}{-s+1}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p \quad , \\ q &= k p \quad . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Durch Elimination von q und nach Auflösung von p ergibt sich

$$p_1 = \left( k + \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \right)^{\frac{1-s}{s}} (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{\frac{1}{s}} \quad . \quad (3.48)$$

Der Schnittpunkt  $p_1$  wird dann erhalten, wenn

$$\left( \bar{u}_x + k \bar{u}_y \right) \geq 0 \quad . \quad (3.49)$$

Mit (3.38) bekommt man

$$r_1 = \left( \bar{u}_x + k \bar{u}_y \right)^{\frac{1}{s}} (A \epsilon_0)^{\frac{1}{s}} \quad . \quad (3.50)$$

So wird die Rißspitzenöffnung  $\delta_1$  definiert durch

$$\delta_1 = 2 p_1 = 2 \left( A \epsilon_0 \bar{u}_y \right)^{\frac{1}{s}} \left( k + \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \right)^{\frac{1-s}{s}} \quad . \quad (3.51)$$

Wenn k in der Gleichung (3.51) gleich Eins ist, entspricht  $\delta_1$  der von SHIH definierten Rißspitzenöffnung  $\delta_t$ . Wenn die Gleichung (3.51) nach dem Amplitudenfaktor A aufgelöst und in das Spannungs- und Verzerrungsfeld eingesetzt wird, folgt dann

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{[B_\alpha]^s} \left(\frac{r}{\delta_1}\right)^{-s} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= \sigma_0 \frac{1}{[B_\alpha]^s} \left(\frac{r}{\delta_1}\right)^{-s} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad ,\end{aligned}\tag{3.52}$$

wobei

$$B_\alpha = 2 \bar{u}_y [\bar{u}_x + k \bar{u}_y]^{\frac{1-s}{s}} \quad .\tag{3.53}$$

Wenn das J-Integral längs des Kreises mit dem Radius  $r_1$  (3.50) ermittelt wird, ergibt sich das J-Integral

$$J_1 = (A \varepsilon_0)^{\frac{1}{s}} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\bar{u}_x + k \bar{u}_y)^{\frac{1-2s}{s}} I_\alpha \quad .\tag{3.54}$$

Zwischen  $\delta_1$  (3.51) und  $J_1$  (3.54) besteht noch folgende lineare Beziehung:

$$\delta_1 = d_\alpha \frac{J_1}{\sigma_0}\tag{3.55}$$

mit

$$d_\alpha = 2 \varepsilon_0 \bar{u}_y (\bar{u}_x + k \bar{u}_y) \frac{1}{I_\alpha} \quad .\tag{3.56}$$

Nach Elimination des Amplitudenfaktors A aus (3.54) sowie durch Einsetzen in (3.7) folgt das Spannungs- und Verzerrungsfeld

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left[ \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0 I_\alpha C_\alpha} \right]^s \left(\frac{J_1}{r}\right)^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= \left[ \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0 I_\alpha C_\alpha} \right]^s \left(\frac{J_1}{r}\right)^s \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad ,\end{aligned}\tag{3.57}$$

mit

$$C_\alpha = (\bar{u}_x + k \bar{u}_y)^{\frac{1-2s}{s}} \quad .$$

Es ist in den obigen Gleichungen erstaunlich zu sehen, daß das Spannungs- und Verzerrungsfeld (3.52) bzw. (3.57) und die Beziehung von  $\delta_1$  und  $J_1$  (3.55) ziemlich ähnliche Formen haben wie in der HRR-Theorie für stehenden Riß.

Hiernach wird noch versucht, einen entsprechenden Rißspitzenöffnungswinkel CTOA zu definieren. Dazu braucht man zuerst die Ableitung des Rißöffnungsprofils an der Stelle  $r_1$ :

$$\tan\left(\frac{CTOA}{2}\right) = \left. \frac{dq}{dp} \right|_{r_1} = \frac{1}{1-s} \left( k + \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \right) - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \quad (3.58)$$

In der Gleichung (3.58) ist der Amplitudenfaktor  $A$  verschwunden, und der Rißspitzenöffnungswinkel CTOA ist dann konstant, wenn der Vorfaktor  $k$  festgelegt ist. Damit ist er als Intensitätsparameter für das Spannungs- und Verzerrungsfeld unmöglich zu begründen. Das kann darauf zurückgeführt werden, daß man von Anfang an einen festen Vorfaktor eingesetzt hat. Aus diesem Grund wird weiter versucht, durch einen anderen Weg einen Rißspitzenöffnungswinkel CTOA zu definieren. Hierzu wird folgendes Bild beobachtet:

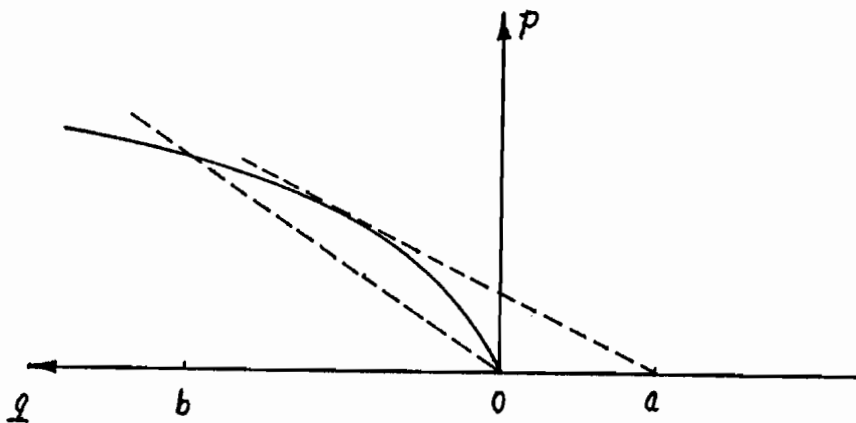


Bild 3.5 Bildung eines Rißöffnungswinkels CTOA

Wird zuerst ein bestimmtes  $q = b$  vorgegeben, folgt der Schnittpunkt

$$b = \left( \frac{p_b}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{1}{1-s}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p_b \quad (3.59)$$

In dieser Gleichung (3.59) den Schnittpunkt  $p_b$  analytisch aufzulösen, ist nicht möglich, weil sie eine nichtlineare Gleichung ist und nur numerisch gelöst werden kann. Ebenfalls ist bei einem vorgegebenen  $a$  der Schnittpunkt  $p_a$  durch folgende Gleichung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{1-s} \frac{1}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \left( \frac{p_a}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{s}{1-s}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \right] p_a - a \\ = \left( \frac{p_a}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{1}{1-s}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p_a \end{aligned} \quad (3.60)$$

In dieser Gleichung (3.60) ist es auch unmöglich, den Schnittpunkt  $p_a$  analytisch aufzulösen. Sie ist ebenfalls eine nichtlineare Gleichung. Deshalb wird hier dieser Weg nicht beschritten.

### 3.6. Neue Definition von Rißspitzenöffnungswinkel CTOA bzw.

#### Rißspitzenöffnung CTOD

Im letzten Abschnitt 3.5. wurde über die mögliche Definition des Rißspitzenöffnungswinkels CTOA diskutiert und darauf hingewiesen, daß es durch die im Abschnitt 3.5. erwähnte Vorgehensweise entweder wegen der Nichtlinearität der Bestimmungsgleichung des Schnittpunktes oder wegen des verschwindenden Amplitudenfaktors  $A$  kaum möglich ist, eine entsprechende Definition des Rißspitzenöffnungswinkels CTOA in Bezug auf das stationär wachsende Rißspitzenfeld einzuführen. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt nochmal die Eigenschaften des tatsächlichen Rißöffnungsprofils analysiert, und zwar wird zuerst die Gleichung (3.59) und (3.60) betrachtet. Bei der Lösung des Schnittpunktes kann der Schnittpunkt

deshalb analytisch aus (3.59) und (3.60) nicht berechnet werden, weil die Vorgehensweise durch den zweiten Term der Gleichung für das tatsächliche Rißöffnungsprofil (3.39) a priori gestört wurde. Die Frage ist nämlich, ob der Schnittpunkt durch Elimination des zweiten Termes von (3.39) analytisch gelöst werden kann und wie er gelöst wird. Demnach wird eine Parabel verwendet, um einen Schnittpunkt analytisch zu bekommen. Das kann in folgender Weise gelöst werden:

$$q = \left( \frac{p}{A \epsilon_0 \bar{u}_y} \right)^{\frac{1}{1-s}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p \quad , \quad (3.61)$$

$$q = k p^2 - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} p \quad .$$

Durch Elimination von  $q$  und nach Auflösung von  $p$  folgt der Schnittpunkt

$$p_2 = k^{-\frac{1-s}{1-2s}} (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{-\frac{1}{1-2s}} \quad . \quad (3.62)$$

Die notwendige Bedingung für einen tatsächlichen Schnittpunkt ist nämlich

$$s \neq \frac{1}{2} \quad . \quad (3.63)$$

Diese Bedingung gewährleistet einen Schnitt für das elastisch-plastische Materialverhalten, aber keinen Schnittpunkt bei linear elastischem Materialverhalten, für das die Lösungen des asymptotischen Feldes bereits existieren.

In diesem Schnittpunkt mit  $p_2$  kann ein entsprechender Rißspitzenöffnungswinkel CTOA definiert werden durch

$$\omega_2 = \cot \left( \frac{CTOA}{2} \right) = \frac{q_2}{p_2} \quad (3.64)$$

$$= k^{-\frac{s}{1-2s}} (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{-\frac{1}{1-2s}} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \quad .$$

In dem selben Schnittpunkt entspricht dem Rißspitzenöffnungswinkel CTOA (3.64) auch eine Rißspitzenöffnung CTOD



$$\delta_2 = 2 p_2 = 2 k^{-\frac{1-s}{1-2s}} (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{-\frac{1}{1-2s}} \quad (3.65)$$

Zwischen  $\omega_2$  (3.64) und  $\delta_2$  (3.65) besteht noch folgende lineare Beziehung

$$\omega_2 = \frac{k}{2} \delta_2 - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}_y} \quad (3.66)$$

Wird nach dem Amplitudenfaktor A in den Gleichungen (3.64) und (3.65) aufgelöst und dieser in das Spannungs- und Verzerrungsfeld (3.7) eingesetzt, folgen die Spannungen und Verzerrungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{k^{s-1}}{\bar{u}_y} \left( \frac{\delta_2}{2} \right)^{2s-1} r^{-s} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \epsilon_{ij}(r, \theta) &= \frac{k^{s-1}}{\bar{u}_y} \left( \frac{\delta_2}{2} \right)^{2s-1} r^{-s} \bar{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad , \end{aligned} \quad (3.67)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{k^{-s}}{\bar{u}_y^{2s}} [\omega_2 \bar{u}_y + \bar{u}_x]^{2s-1} r^{-s} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad , \\ \epsilon_{ij}(r, \theta) &= \frac{k^{-s}}{\bar{u}_y^{2s}} [\omega_2 \bar{u}_y + \bar{u}_x]^{2s-1} r^{-s} \bar{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Mit (3.38) erhält man

$$r_2 = k^{-\frac{1}{1-2s}} (A \epsilon_0 \bar{u}_y)^{-\frac{2}{1-2s}} \quad (3.69)$$

Wenn das J-Integral (3.44) längs eines Kreises mit dem Radius  $r_2$  ermittelt wird, ergibt sich das J-Integral

$$J_2 = k^{-1} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{I_\alpha}{[\bar{u}_y(\pi)]^2} \quad (3.70)$$

Hier ist zu sehen, daß das J-Integral von (3.70) nicht mehr von dem Amplitudenfaktor A sondern lediglich von dem Materialverhalten und dem Spannungszustand abhängig

ist. Damit ist es nicht möglich, das so ermittelte J-Integral als Intensitätsparameter für das Spannungs- und Verzerrungsfeld zu begründen. Aber aus den elastisch-plastischen Rißwachstumssimulationen nach der Finite-Elemente-Methode /15/ hat man erfahren, daß das im Nahfeld ermittelte J-Integral zwar wegabhängig ist, aber nach einer Übergangsphase, wo das stationäre Rißwachstum auftritt, quasi konstant bleibt. Die Frage ist nämlich, ob das so ermittelte J-Integral in der Lage ist, das große stationäre Rißwachstum zu beschreiben, und wie es in der Praxis zu bestimmen ist, da der Integrationsradius  $r_2$  von dem Amplitudenfaktor  $A$  abhängig ist.

Die Verzerrungsenergiedichte im Polar-Koordinatensystem wird in folgender Weise abgeleitet:

$$\begin{aligned}
 w_e ( r, \theta ) &= A^2 \sigma_0 \varepsilon_0 r^{-2s} s_e \\
 w_p^B ( r, \theta ) &= A^2 \sigma_0 \varepsilon_0 r^{-2s} s_p^B - \frac{\omega}{2} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \\
 w_p^E ( r, \theta ) &= A^2 \sigma_0 \varepsilon_0 r^{-2s} s_p^E - \frac{\omega}{2} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 s_e &= [ ( 1 + \nu ) \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{ji} - \nu \check{\sigma}_{kk}^2 ] / 2 \quad , \\
 s_p^B &= \omega \check{\sigma}_v^2 / 2 \quad , \\
 s_p^E &= \omega ( \sin\theta / \sin\theta_p )^{-2s} \check{\sigma}_v^2 (\theta_p) / 2 \quad .
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Für die in dem mit  $r_2$  als Kreisradius umschlossenen Bereich benötigte Verzerrungsenergie folgt

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{r_2} \int_{-\pi}^{\pi} w ( r, \theta ) r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2 ( 1 - s )} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{S_\alpha}{[ \check{u}_y(\pi) ]^2} r_2 - \frac{\omega}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \pi r_2^2
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

mit

$$\begin{aligned}
S_{\alpha} &= \int_0^{\pi} [ (1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \nu \sigma_{kk}^2 ] d\theta \\
&+ \omega \left[ \int_0^{\theta_p} \sigma_{\nu}^2 d\theta + \int_{\theta_p}^{\pi} \left( \frac{\sin\theta}{\sin\theta_p} \right)^{-2s} \sigma_{\nu}^2(\theta_p) d\theta \right] .
\end{aligned}
\tag{3.74}$$

Die Verzerrungsenergiedichte (3.71) und die Verzerrungsenergie (3.73) haben bis auf den zweiten Term die ähnlichen Formen wie in der HRR-Theorie /16/.

In dem letzten Abschnitt 3.5. und diesem Abschnitt 3.6. wurden die bruchmechanischen Parameter wie das J-Integral, CTOD und CTOA bereits auf der Basis des stationär wachsenden Rißspitzenfeldes ermittelt und auch als Intensitätsparameter für das Spannungs- und Verzerrungsfeld begründet. Welcher von ihnen in der Lage ist, das große stationäre Rißwachstum zu beschreiben, muß experimentell und durch numerische Rißwachstumssimulation nach der Finite-Elemente-Methode untersucht werden.

### 3.7. Numerische Lösung des Randwertproblems

Die bereits im Abschnitt 3.3. abgeleiteten Differentialgleichungssysteme (3.16) und (3.17) für den nur noch von dem Winkel  $\theta$  abhängigen Anteil der Spannungsfunktion  $\tilde{\phi}(\theta)$  sind explizit von fünfter Ordnung. Sie sind nichtlinear aber homogen. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen (3.16) und (3.17) werden im Bereich von  $\theta = 0$  bis  $\theta = \pi$  zusammen mit den Rand- und Übergangsbedingungen (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.24) und (3.26) gesucht.

Zur Lösung solcher Randwertprobleme werden in der Praxis meist Differenzenverfahren, Finite-Elemente-Verfahren und Schießverfahren benutzt. Bei dem Differenzenverfahren werden die auftretenden Ableitungen durch geeignete Differenzenquotienten ersetzt. Schwierigkeiten ergeben sich meist bei Differenzenquotienten höherer Ordnung zur Erfüllung der Randbedingungen, so daß hier Maßnahmen erforderlich sind, die einen gewissen Aufwand erfordern. Bei dem Finite-

Elemente-Verfahren sind die Randwertprobleme durch Variationsprinzip umzuformulieren. Schwierig ist es, eine geeignete sogenannte schwache Form durch Umformulierung zu finden. Als Alternative wird dieses Verfahren zur Lösung des vorliegenden Problems im nächsten Kapitel näher behandelt.

Wir wollen das Schießverfahren zur Lösung dieses Problems benutzen. Das Schießverfahren läßt sich in Einzelschießverfahren und Mehrzielschießverfahren aufteilen. Beim einfachen Schießverfahren wird das Lösungsintervall nicht unterteilt, in dem das entsprechende Anfangsproblem gelöst wird. Beim Mehrzielschießverfahren wird das Lösungsintervall innerhalb des gesuchten Bereichs unterteilt. In jedem Intervall wird ein entsprechendes Anfangswertproblem gelöst. Das Problem liegt darin, daß die für dieses Verfahren benötigten Startwerte schwer zu schätzen sind, so daß bei den zu grob geschätzten Startwerten dieses Verfahren versagen kann. Wenn die Lösung sich innerhalb des Intervalls nicht sehr stark ändert, wird meist zuerst das Einzelschießverfahren benutzt, um die Lösung finden zu können. Hierzu wird das Einzelschießverfahren kurz beschrieben. Wir folgen hier den entsprechenden Ausführungen von /16/.

Dazu sind zunächst die Differentialgleichungen (3.16) und (3.17) fünfter Ordnung in ein System erster Ordnung mit fünf bzw. sechs Differentialgleichungen umzuwandeln, denen eine zusätzliche Differentialgleichung für den Eigenwert  $s$  hinzugefügt wird. Hierzu werden die Zuordnungen

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \tilde{\Phi} \quad , \\
 g_2 &= \tilde{\Phi}' \quad , \\
 g_3 &= \tilde{\Phi}'' \quad , \\
 g_4 &= \tilde{\Phi}''' \quad , \\
 g_5 &= \tilde{\Phi}^{(4)} \quad , \\
 g_6 &= s \quad , \\
 g_7 &= \tilde{\sigma}_{zz}
 \end{aligned}
 \tag{3.75}$$

getroffen, deren Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
g_1' &= \tilde{\phi}' \quad , \\
g_2' &= \tilde{\phi}'' = g_1'' \quad , \\
g_3' &= \tilde{\phi}''' = g_2'' = g_1''' \quad , \\
g_4' &= \tilde{\phi}^{(4)} = g_3'' = g_2''' = g_1^{(4)} \quad , \\
g_5' &= \tilde{\phi}^{(5)} = g_4'' = g_3''' = g_2^{(4)} = g_1^{(5)} \quad , \\
g_6' &= 0 \quad , \\
g_7' &= \tilde{\sigma}_{zz}' \quad .
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Die Randbedingungen (3.19), (3.20), (3.21) und (3.22) werden auch umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
g_1(\pi) &= 0 \quad , \\
g_2(\pi) &= 0 \quad , \\
g_2(0) &= 0 \quad , \\
g_4(0) &= 0 \quad , \\
g_5(0) - F [ g_1(0), g_3(0), s, \alpha ] &= 0 \quad , \\
g_5(0) - F [ g_1(0), g_3(0), g_7(0), s, \alpha ] &= 0, \text{ für EVZ} \\
g_7(0) - F_1 [ g_1(0), g_3(0), s, \alpha ] &= 0. \quad \text{für EVZ}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Weil dieses Differentialgleichungssystem homogen ist, ist hier eine entsprechende Normierung erforderlich:

$$\tilde{\sigma}_v(0) - 1 = 0 \quad . \tag{3.78}$$

Durch Einführung eines Parameters  $t$  lassen sich die Anfangswerte (3.77) auf ein System mit zwei Unbekannten reduzieren, wobei

$$t = \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(0)}{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(0)} \tag{3.79}$$

ist. Dadurch wird noch ein Vorteil gewonnen, daß  $t$  bei linear elastischem Materialverhalten gleich Eins ist. Durch Einsetzen von (3.79) in (3.78) und bei Berücksichtigung von (3.16) und (3.17) werden folgende Anfangswerte in Abhängigkeit von  $s$  und  $t$  ermittelt:

ESZ :

$$\begin{aligned}
 g_1(0) &= \frac{1}{(2-s)(1-s)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}} , \\
 g_3(0) &= \left( t - \frac{1}{1-s} \right) \frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}} , \\
 g_5(0) &= F(s, t, \alpha) ,
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

EVZ:

$$\begin{aligned}
 g_1(0) &= \frac{1}{(1-s)(2-s)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1 + t_1^2 - (t+1)t_1}} , \\
 g_3(0) &= \left( t - \frac{1}{1-s} \right) \frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1 + t_1^2 - (t+1)t_1}} , \\
 g_5(0) &= F(s, t, \alpha) , \\
 g_7(0) &= \frac{t_1}{\sqrt{t^2 - t + 1 + t_1^2 - (t+1)t_1}} ,
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

wobei

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega + 2\nu}{1 + \omega} (1 + t) . \tag{3.82}$$

Mit Hilfe von (3.80), (3.81) und (3.82) sind die Differentialgleichungssysteme lediglich von  $s$  und  $t$  abhängig, die aber noch die beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 g_1(\pi) &= 0 , \\
 g_2(\pi) &= 0 ,
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

erfüllen müssen.

Die Bestimmungsgleichungen können dann leicht gebildet werden. Sie werden ausgeschrieben:

$$\underline{G}(s, t) = \begin{bmatrix} g_1(\pi, s, t) - 0 \\ g_2(\pi, s, t) - 0 \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (3.84)$$

wobei es sich um ein nichtlineares, algebraisches Gleichungssystem für die gesuchten Größen  $s$  und  $t$  handelt, das mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens

$$\underline{u}^{(i+1)} = \underline{u}^{(i)} - \underline{DG}^{-1}(\underline{u}^{(i)}) \underline{G}(\underline{u}^{(i)}) \quad (3.85)$$

iterativ gelöst wird. Dabei ist  $\underline{u}$  gleich  $(s, t)^T$ . Das Newtonsche Verfahren fordert die Ableitungen

$$\underline{DG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\pi; s, t)}{\partial s} & \frac{\partial g_1(\pi; s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2(\pi; s, t)}{\partial s} & \frac{\partial g_2(\pi; s, t)}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Die auftretenden Ableitungen sind wegen der Nichtlinearität der Differentialgleichungen (3.16) und (3.17) analytisch kaum lösbar. Deshalb werden die Ableitungen numerisch durch vorwärtsgenommene Differenzenquotienten gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial s} &= \frac{g_i(\pi; s + \Delta s, t) - g_i(\pi; s, t)}{\Delta s}, \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} &= \frac{g_i(\pi; s, t + \Delta t) - g_i(\pi; s, t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Bei praktischen Berechnungen hat sich herausgestellt, daß das Newtonsche Verfahren nicht immer konvergiert. Deshalb wird ein gedämpftes Newtonsches Verfahren benutzt, das darauf beruht, den Zuwachs der Lösungen pro Iterationsschritt bei Überschreitung gewisser Fehlertoleranzen zu begrenzen. Einzelheiten findet man in /16/.

Zur Lösung wurde folgende Rechenstrategie verwendet:

- mit Hilfe von den Startwerten  $s$  und  $t$  werden die Anfangsbedingungen bestimmt,

- mit diesen Anfangsbedingungen wird der Entlastungswinkel gerechnet,
- Bildung der jeweiligen Terme im Newtonschen Verfahren
- Berechnung und Bildung von (3.84) mit den aktuellen Werten und Vergleich mit der vorgegebenen Genauigkeit. Wenn die Genauigkeit nicht erreicht wird, wird die Rechnung weiter iteriert,
- Bei Erfüllung der Genauigkeit wird die gewonnene Datenbasis gespeichert und kann für die Ausgabe der mechanischen Größen verwendet werden,
- Die Rechnung fängt mit dem rein elastischen Materialverhalten an. Die nachfolgende Rechnung wird immer bei Verwendung der aktuellsten, bereits gerechneten Ergebnisse als Startwerte durchgeführt,
- Die Lösungen werden im Bereich von  $\theta=0$  bis  $\theta=\pi \cdot 10^{-4}$  gesucht, weil das Differentialgleichungen (3.16) und (3.17) wegen der stationären Bedingung (3.9) an der Stelle  $\theta=\pi$  singular sind.

Die gesamten Rechnungen wurden durch folgende Gleichungen geprüft. Die gewonnenen Verzerrungen wurden durch die Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 \epsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial \epsilon_{\theta\theta}}{\partial r} = 0 \quad (3.88)$$

geprüft. Für ebenen Verzerrungszustand wurde  $\epsilon_{zz} = 0$  als eine weitere Kontrolle benutzt. Bei den ermittelten Verschiebungen wurden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta'(\theta) &= \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}(\theta) - \frac{1}{1-s} \tilde{\epsilon}_{rr}(\theta) \quad , \\ \tilde{u}_\theta(\theta) &= \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{1-s} \tilde{\epsilon}_{rr}'(\theta) - 2 \tilde{\epsilon}_{r\theta}(\theta) \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

benutzt, wobei eine als Kontrollgleichung verwendet wurde. Die beiden Gleichungen liefern identische Ergebnisse. Deshalb werden die im Kapitel 7 dargestellten Ergebnisse vielseitig gesichert.



#### **4. Ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung des asymptotischen Feldes des stationär fortschreitenden Risses**

Die Finite-Elemente-Methode wurde in den vergangenen Jahrzehnten als universelles Hilfsmittel zur Behandlung von komplexen Fragenstellungen des Ingenieurwesens sehr rasch verbreitet, die zuvor nicht oder nur sehr unvollkommen beantwortet werden können. Durch moderne elektronische Technik erlaubt sie in Verbindung mit Computern grundsätzlich die Lösung auch extrem schwieriger Probleme mit beliebiger Genauigkeit, allerdings steht dem ein nicht erträglicher Aufwand entgegen. So gilt die Finite-Elemente-Methode heutzutage als wichtigste Methode, mit der bisher schwierige Probleme zu numerischen Lösungen geführt werden können, was man noch vor einigen Jahren nicht erwarten konnte.

Ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung des asymptotischen Feldes wurde zuerst von SYMINGTO, ORTIZ und SHIH /64/ für Mixed Mode entwickelt. SHIH nennt in /74/ den Grund, daß die asymptotische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen vierter Ordnung bei stehendem Riß mit Schießverfahren numerisch nicht immer stabil war. Daher wurde in /64/ versucht, das Randwertproblem für Mixed Mode bei stehendem Riß als Variationsaufgabe zu formulieren und daraus ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung dieses Problems zu entwickeln. Ein ähnliches Problem liegt bei stationär wachsendem Riß zur Lösung des asymptotischen Feldes mit Hilfe vom Schießverfahren auch vor. Hier kann die Rechnung wegen grob geschätzter Startwerte und der starken Gradienten der gesuchten Lösung zur Divergenz geführt werden. Aber das Problem hierbei ist natürlich, daß eine stationär bewegte Zone in ein ruhendes Feld eingebettet werden muß. Ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung des asymptotischen Feldes bei stationär laufendem Riß wurde von DAEN & HUTCHINSON /75/ bzw. VOIGT /76/ entwickelt, wobei das Verfahren prinzipiell wie die übliche Finite-Elemente-Methode ist und nur die Fließbedingung und Fließregel durch die entsprechende stationäre Bedingung (3.9) umformuliert werden. Dazu ist eine feine Elementierung für das Rißspitzenfeld notwendig, so daß großer numerischer Aufwand wie bei üblicher Finite-Elemente-Rißwachstumssimulation die Folge ist. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel versucht, in Anlehnung an die Arbeit von /64/ ein

spezielles singuläres Rißspitzenelement zur Lösung des stationär wachsenden Rißspitzenfeldes durch Umformulierung des Randwertproblems entwickeln zu können.

#### 4.1. Formulierung des Randwertproblems

Zur Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens berücksichtigen wir zuerst das Problem zur Lösung des asymptotischen Feldes bei stationärem Rißwachstum. Das allgemeine Randwertproblem läßt sich, wie im Bild 3.1 dargestellt, auf ein Eigenwertproblem reduzieren. Die Randbedingungen beschränken sich nur auf die beiden freien Rißufer. Die entsprechenden Randbedingungen sind im Polar-Koordinatensystem

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} ( r, \theta = \pm \pi ) &= 0 \quad , \\ \sigma_{r\theta} ( r, \theta = \pm \pi ) &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die Gleichgewichtsbedingung (2.3) liefert die folgenden Verhältnisse zwischen Spannungen und Airyscher Spannungsfunktion

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \quad , \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad , \\ \sigma_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \quad .\end{aligned}\tag{4.2}$$

Als Bestimmungsgleichung für die Spannungsfunktion  $\phi$  ist die Kompatibilitätsbedingung im Polar-Koordinatensystem wie folgt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\dot{\epsilon}_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\dot{\epsilon}_{rr}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\dot{\epsilon}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\gamma_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial\dot{\epsilon}_{\theta\theta}}{\partial r} = 0 \quad .\tag{4.3}$$

wobei  $\gamma_{r\theta} = 2\epsilon_{r\theta}$ .

In der Kompatibilitätsbedingung (4.3) sind die Verzerrungssinkremente, die mit Hilfe eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes durch die Spannungsfunktion zu ersetzen sind,

implizit von der Spannungsfunktion abhängig. Wie im letzten Kapitel schon erwähnt, beschränken wir uns nur auf ein linear verfestigendes Materialverhalten und auf den ebenen Spannungszustand. Bei ebenem Verzerrungszustand ist die Vorgehensweise gleich wie bei ESZ. Dazu hat man das Recht, einen Ansatz mit potenzförmiger Funktion darstellen zu können. Das Stoffgesetz gilt für ESZ:

elastisch:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \quad , \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \quad , \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{r\theta} \quad , \end{aligned} \quad (4.4)$$

elastisch-plastisch:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{E} [ (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) + \omega \frac{\sigma_v}{\sigma_v} (\sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta}) ] \quad , \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [ (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) + \omega \frac{\sigma_v}{\sigma_v} (\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr}) ] \quad , \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{E} [ (1 + \nu) \sigma_{r\theta} + \omega \frac{3}{2} \frac{\sigma_v}{\sigma_v} \sigma_{r\theta} ] \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der Ansatz lautet nach (3.7)

$$\begin{aligned} \phi ( r, \theta ) &= A \sigma_0 r^{-s+2} \check{\phi} (\theta) \quad , \\ \sigma_{ij} ( r, \theta ) &= A \sigma_0 r^{-s} \check{\sigma}_{ij} (\theta) \quad , \\ \epsilon_{ij} ( r, \theta ) &= A \epsilon_0 r^{-s} \check{\epsilon}_{ij} (\theta) \quad , \\ u_i ( r, \theta ) - u_i^{\circ} &= A \epsilon_0 r^{-s+1} \check{u}_i (\theta) \quad , \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei  $u_i^{\circ}$  die Starrkörperverschiebungen sind.

Mit diesen separaten Ansatzfunktionen (4.6) kann dieses zweidimensionale Randwertproblem auf ein eindimensionales Randwertproblem zurückgeführt werden, und zwar werden die Gleichung (4.1), (4.2) umformuliert:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\pi) &= 0, \\ \tilde{\phi}'(\pi) &= 0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \tilde{\phi}'' + (2-s)\tilde{\phi}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2-s)(1-s)\tilde{\phi}, \\ \sigma_{r\theta} &= -(1-s)\tilde{\phi}'.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Durch Ableitungen und Elimination des Amplitudenfaktors A und des Radius r lautet die Kompatibilitätsbedingung (4.3) dann

$$\dot{\epsilon}''_{rr} + (s+1)\dot{\epsilon}_{rr} + s(s+1)\dot{\epsilon}_{\theta\theta} + s\dot{\gamma}'_{r\theta} = 0.\tag{4.9}$$

Die Gleichung (4.7), (4.8) und (4.9) bilden ein eindimensionales Randwertproblem zur Lösung des stationär bewegten Rißspitzenfeldes, wobei hier die materielle Zeitableitung durch stationäre Bedingung (3.9) ersetzt wird.

#### 4.2. Das Galerkinsche Funktional

Das im letzten Abschnitt erwähnte Randwertproblem ist wegen elastisch-plastischen Materialverhaltens nicht mehr linear und im allgemeinen analytisch unlösbar. Um dieses Problem lösen zu können, bemüht man sich um eine Näherungslösung. Dazu bietet sich die Finite-Elemente-Methode an, die als führendes Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen bezeichnet wird. Dabei wird überwiegend in der Festkörpermechanik die Finite-Elemente-Methode ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeiten als ein bereichsweises Ritz-Verfahren formuliert, das auf dem Gesamtpotential beruht. Bei dem vorliegenden Problem existieren die virtuellen Arbeiten bzw. das Gesamtpotential nicht mehr, weil man sich nicht mit der gesamten Struktur beschäftigt, sondern sich um eine asymptotische Lösung bemüht, die nur für die Rißspitzenumgebung gilt. Stattdessen läßt sich die Finite-Elemente-Formulierung direkt aus dem Differentialgleichungssystem ableiten, für die sich die Verfahren der gewichteten Residuen anbieten. Diese Verfahren können durch folgende allgemeine Formulierung dargestellt werden. Das Differentialgleichungssystem wird in der Form

$$\begin{aligned} L [ \xi ( x ) ] - \beta(x) &= 0 & , & & x \in \Omega \\ B [ \xi ( x ) ] - \eta(x) &= 0 & , & & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit dem Operator L im Gebiet  $\Omega$  und B auf dem Rand  $\partial\Omega$  dargestellt. Zur Approximation der gesuchten Funktion  $\xi$  wird dabei der Ansatz

$$\xi^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\xi}_i \quad (4.11)$$

verwendet, der eingesetzt in (4.10) unter Annahme der Erfüllung aller Randbedingungen die exakte Lösung dann liefert, wenn (4.10) erfüllt ist. Im allgemeinen wird jedoch ein Rest R verbleiben, der Residuum genannt wird:

$$R = L [ \xi^* ] - \beta \quad (4.12)$$

Für die exakte Lösung ist dieser Rest natürlich Null. Eine gute Näherungslösung muß gewährleisten, daß R klein in allen Punkten des Lösungsbereichs ist. Die verschiedenen Verfahren des gewichteten Residuums unterscheiden sich in den Kriterien für die Berechnung der Parameter  $\alpha_i$ , damit ein gewichtetes Mittel des Restes verschwindet.

Bei dem Galerkin-Verfahren werden die Parameter  $\alpha_i$  bestimmt durch

$$\int_{\Omega} \bar{\xi}_i R \, d\Omega = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.13)$$

wobei  $\Omega$  der Lösungsbereich ist.

Das Verfahren des kleinsten Quadrates fordert, daß das Integral des Quadrates des Restes in Bezug auf die Parameter  $\alpha_i$  minimiert wird:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{\Omega} R^2 \, d\Omega = 0 \quad . \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen von (4.11) erhält man die folgende Gleichungen

$$\int_{\Omega} R L [ \xi_i ] d\Omega = 0 \quad . \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.15)$$

Dazu gibt es noch die Verfahren der Kollokationen. Hiernach wird der Rest R an n einzelnen Punkten des Bereichs oder in n Teilbereichen gleich Null gesetzt, um ein System für die Parameter  $\alpha_i$  zu bekommen. Die Verfahren der Kollokationen lassen sich für eine numerische Umsetzung in eine Finite-Elemente-Formulierung nur sehr begrenzt einsetzen, weil im Vorhinein alle Kollokationspunkte oder Teilbereiche festgelegt werden müssen. Für die praktische Umsetzung in eine Finite-Elemente-Formulierung sind daher die Verfahren von Galerkin und dem kleinsten Quadrate gewöhnlich vorzuziehen [23,28,29]. Bei dem vorliegenden Problem ist aber hier deshalb das Galerkin-Verfahren zu wählen, um eine geeignete Finite-Elemente-Formulierung zu finden, weil durch das Quadrat des Restes die gewichtete Gleichung (4.15) einerseits mathematisch schwer zu behandeln ist, um eine sogenannte schwache Form für die Finite-Elemente-Formulierung zu ermitteln, weil es sich in (4.15) um einen doppelte Differentialoperator L handelt, und andererseits ist das Galerkin-Verfahren in den Wärmeübertragungs- und Fluidmechanikproblemen oft benutzt und auch sehr erfolgreich. Deshalb wollen wir hier mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens eine Finite-Elemente-Formulierung ermitteln.

Bei dem vorliegenden Problem muß die Testfunktion die entsprechenden Randbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \xi(\pi) &= 0 \\ \xi'(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.16)$$

Man multipliziert die Kompatibilitätsbedingung (4.9) mit der Testfunktion und integriert sie von  $-\pi$  bis  $+\pi$ , und das Galerkinsche Funktional ist

$$G = \int_{-\pi}^{+\pi} [ \ddot{\xi}_{rr} + (s+1) \dot{\xi}_{rr} + s(s+1) \dot{\xi}_{\theta\theta} + s \dot{\gamma}_{r\theta} ] \xi d\theta = 0 \quad . \quad (4.17)$$

Durch Integration der entsprechenden Ableitungen und bei Berücksichtigung der Randbedingungen wird die Gleichung (4.17) in folgender Form umgeschrieben:

$$G = \int_{-\pi}^{+\pi} [ \bar{\xi}'' \dot{\epsilon}_{rr} + (s+1) \bar{\xi} \dot{\epsilon}_{rr} + s(s+1) \bar{\xi} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - s \bar{\xi}' \dot{\gamma}_{r\theta} ] d\theta = 0 \quad (4.18)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie für Mode I Belastungsfall folgt die Gleichung (4.18)

$$\int_0^{\pi} [ \bar{\xi}'' \dot{\epsilon}_{rr} + (s+1) \bar{\xi} \dot{\epsilon}_{rr} + s(s+1) \bar{\xi} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - s \bar{\xi}' \dot{\gamma}_{r\theta} ] d\theta = 0 \quad (4.19)$$

Als Alternative kann das Galerkinsche Funktional direkt von der Kompatibilitätsbedingung (4.3) ausgehend formuliert werden, wobei die Testfunktion  $\xi(r,\theta)$  mit (4.3) multipliziert wird und sie dann mit  $r$  von  $r_i$  bis  $r_a$  und  $\theta$  von  $-\pi$  bis  $+\pi$  integriert wird.  $r_i$  und  $r_a$  sind innerer und äußerer Radius, sie sind beliebig im Nahfeld gewählt und haben keinen Einfluß auf die Lösung der Winkelanteile. Das Galerkinsche Funktional ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{r_i}^{r_a} [ - ( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} ) \dot{\epsilon}_{rr} - r \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \\ & \quad + ( \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} ) \dot{\gamma}_{r\theta} ] dr d\theta \\ & + \int_{-\pi}^{\pi} [ \xi \dot{\epsilon}_{rr} + ( r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi ) \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \dot{\gamma}_{r\theta} \\ & \quad - r \xi \frac{\partial \dot{\epsilon}_{\theta\theta}}{\partial r} ]_{r_i}^{r_a} d\theta = 0 \quad (4.20) \end{aligned}$$

Man setzt die Testfunktion mit der separaten Form wie (4.6) in die Gleichung (4.20) ein und bekommt dann die eindimensionale Gleichung (4.19). Die eindimensionale Gleichung (4.19) kann weiter in vektorieller Schreibweise umgeschrieben werden:

$$\int_0^{\pi} ( \underline{D} \bar{\xi} )^T \underline{\dot{\epsilon}} d\theta = 0 \quad (4.21)$$

wobei

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\underline{D} \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}'' + (s+1) \bar{\xi} \\ s(s+1) \bar{\xi} \\ -s \bar{\xi}' \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Wie oben angeführt, ist das komplizierte zweidimensionale Problem (4.20) durch die Ansatzfunktionen (4.6) auf eine einfache eindimensionale Schwachform (4.21) zurückgeführt worden.

### 4.3. Finite-Elemente-Diskretisierung

Im letzten Abschnitt wurde die Schwachform (4.21) zur Lösung des asymptotischen Nahfeldes bei stationär wachsendem Riß gefunden. In diesem Abschnitt wird diese Gleichung als Ausgangsgleichung zur Formulierung der entsprechenden Finite-Elemente benutzt.

In der Gleichung (4.21) wird die Spannungsfunktion gesucht. Dabei sind die Verzerrungsgeschwindigkeiten von den Spannungen und deren Geschwindigkeiten abhängig und durch das inkrementelle Stoffgesetz (4.4) und (4.5) zu ersetzen. Die Zeitableitung wird durch die entsprechende stationäre Bedingung (3.9) ersetzt, so daß in der Gleichung (4.21) die Ableitung dritter Ordnung von der Spannungsfunktion auftritt. Aus diesem Grund ist eine gewöhnliche Lagrangesche Approximation nicht mehr in der Lage, die hier auftretenden höheren Ableitungen genauer zu beschreiben. Eine Alternative dazu ist nämlich die in der Praxis auch häufig verwendete, besonders in der Balken- und Plattentheorie benutzte Hermitesche Approximation. Ein Hermitesches Polynom hat nach /68/ eine allgemeine Form



$$N_{mi}^n(\theta) \quad (4.24)$$

und ist ein Polynom der Ordnung  $2n+1$ , das für  $\theta=\theta_i$  fordert

$$\frac{d^k N}{d\theta^k} = 1 \quad , \quad k = m \text{ für } m = 0 \text{ bis } n \quad (4.25)$$

und

$$\frac{d^k N}{d\theta^k} = 0 \quad , \quad k \neq m \text{ oder wenn } \theta = \theta_j \quad . \quad (4.26)$$

Weil hier in der Gleichung (4.21) ein eindimensionales Problem und die Ableitung dritter Ordnung untersucht wird, wird ein Element mit zwei Knoten gewählt. Die entsprechenden Interpolationsfunktionen dazu werden beschrieben durch

$$\begin{aligned} N_1(\theta) &= 1 - 10 \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 + 15 \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 - 6 \left(\frac{\theta}{h}\right)^5, \\ N_2(\theta) &= \theta - 6 h^2 \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 + 8 h \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 - 3 h \left(\frac{\theta}{h}\right)^5, \\ N_3(\theta) &= \frac{h^2}{2} \left[ \left(\frac{\theta}{h}\right)^2 - 3 \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 + 3 \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 - \left(\frac{\theta}{h}\right)^5 \right], \\ N_4(\theta) &= 10 \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{h}\right)^5, \\ N_5(\theta) &= -h \left[ 4 \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 - 7 \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 + 3 \left(\frac{\theta}{h}\right)^5 \right], \\ N_6(\theta) &= \frac{h^2}{2} \left[ \left(\frac{\theta}{h}\right)^3 - 2 \left(\frac{\theta}{h}\right)^4 + \left(\frac{\theta}{h}\right)^5 \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

wobei  $h$  in (4.27) die Elementlänge ist.

Die Spannungsfunktion wird approximiert durch

$$\tilde{\phi}(\theta) = \sum_{i=1}^6 N_i(\theta) w_i \quad , \quad (4.28)$$

und die Testfunktion und deren Ableitungen werden dargestellt durch

$$\underline{D} \underline{\xi} = \sum_{i=1}^6 \underline{D} N_i(\theta) v_i \quad . \quad (4.29)$$

Durch Einsetzen von (4.28) und (4.29) in (4.21) folgt

$$\underline{F}(\underline{w}) = \sum_{e=1}^n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underline{B}_L^T \underline{\dot{\xi}}(\underline{w}) d\theta = 0 \quad , \quad (4.30)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_6]^T \\ \underline{N} &= [N_1, N_2, \dots, N_6] \quad , \end{aligned} \quad (4.31)$$

und

$$\underline{B}_L = \underline{D} \underline{N} = \begin{bmatrix} N_1'' + (s+1)N_1 & \dots & N_6'' + (s+1)N_6 \\ s(s+1)N_1 & \dots & s(s+1)N_6 \\ -sN_1' & \dots & -sN_6' \end{bmatrix} \quad , \quad (4.32)$$

In der Gleichung (4.30) sind  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die Koordinaten eines Elementes und über  $e$  alle Elemente aufzusummieren. Die Gleichungen (4.30) sind wegen des elastisch-plastischen Materialverhaltens nicht mehr linear. Um diese Gleichungen lösen zu können, ist die entsprechende Linearisierung notwendig.

#### 4.4. Linearisierung

Im letzten Abschnitt 4.3. wurden bereits die zu lösenden Gleichungen (4.30) durch Finite-Elemente-Diskretisierung ermittelt. Sie sind im allgemeinen nicht linear, aber homogen. Die Homogenität der Gleichungen wird durch eine erforderliche Normierung zur Lösung des Problems ausgenutzt. Die entsprechende Normierung erfolgt wie im Abschnitt 3.7.

Die Gleichungen (4.30) können in folgender Weise umgeschrieben werden:

$$\underline{F}(s, \underline{w}) = \sum_{e=1}^n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underline{B}_L^T(s) \underline{\dot{\epsilon}}[\underline{\sigma}(w, s), \underline{\sigma}'(w, s), s] d\theta = 0. \quad (4.33)$$

Die Singularitätsstärke  $s$  ist in der Gleichung (4.33) ebenfalls eine Unbekannte. Die erforderliche Linearisierung wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} d\underline{F}(s, \underline{w}) &= \frac{\partial \underline{F}}{\partial s} ds + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{w}} d\underline{w} \\ &= \sum_{e=1}^n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \left( \frac{\partial \underline{B}_L^T}{\partial s} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{B}_L^T \frac{\partial \underline{\dot{\epsilon}}}{\partial s} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \underline{B}_L^T \left( \frac{\partial \underline{\dot{\epsilon}}}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{w}} + \frac{\partial \underline{\dot{\epsilon}}}{\partial \underline{\sigma}'} \frac{\partial \underline{\sigma}'}{\partial \underline{w}} \right) d\underline{w} \right] d\theta. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Spannungen und deren Ableitungen sind nach (4.8)

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \underline{B}_{R1} \underline{w}, \\ \underline{\sigma}' &= \underline{B}_{R2} \underline{w}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= [\underline{\sigma}_{rr}, \underline{\sigma}_{\theta\theta}, \underline{\sigma}_{r\theta}]^T, \\ \underline{\sigma}' &= [\underline{\sigma}'_{rr}, \underline{\sigma}'_{\theta\theta}, \underline{\sigma}'_{r\theta}]^T, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\underline{B}_{R1} = \begin{bmatrix} N_1'' + (2-s)N_1 & \cdots & N_6'' + (2-s)N_6 \\ (2-s)(1-s)N_1 & \cdots & (2-s)(1-s)N_6 \\ -(1-s)N_1' & \cdots & -(1-s)N_6' \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\underline{B}_{R2} = \begin{bmatrix} N_1''' + (2-s)N_1' & \dots & N_6''' + (2-s)N_6' \\ (2-s)(1-s)N_1' & \dots & (2-s)(1-s)N_6' \\ -(1-s)N_1'' & \dots & -(1-s)N_6'' \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Wenn die stationäre Bedingung (3.9) berücksichtigt wird, lautet das Stoffgesetz folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\epsilon}}_{rr}^e \\ \dot{\underline{\epsilon}}_{\theta\theta}^e \\ \dot{\underline{\gamma}}_{r\theta}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \sigma_{rr} \cos\theta + \sin\theta \sigma_{rr}' - 2 \sin\theta \sigma_{r\theta} - \nu s \sigma_{\theta\theta} \cos\theta \\ - \nu \sin\theta \sigma_{\theta\theta}' - 2 \nu \sin\theta \sigma_{r\theta} \\ s \sigma_{\theta\theta} \cos\theta + \sin\theta \sigma_{\theta\theta}' + 2 \sin\theta \sigma_{r\theta} - \nu s \sigma_{rr} \cos\theta \\ - \nu \sin\theta \sigma_{rr}' + 2 \nu \sin\theta \sigma_{r\theta} \\ 2 (1 + \nu) (s \sigma_{r\theta} \cos\theta + \sigma_{r\theta}' \sin\theta \\ + \sigma_{rr} \sin\theta - \sigma_{\theta\theta} \sin\theta) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\epsilon}}_{rr}^p \\ \dot{\underline{\epsilon}}_{\theta\theta}^p \\ \dot{\underline{\gamma}}_{r\theta}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega (s \cos\theta + \frac{\sigma_v'}{\sigma_v} \sin\theta) (\sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta}) \\ \omega (s \cos\theta + \frac{\sigma_v'}{\sigma_v} \sin\theta) (\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr}) \\ 3 \omega (s \cos\theta + \frac{\sigma_v'}{\sigma_v} \sin\theta) \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Die Ableitungen nach (4.39) folgen

$$d \underline{\dot{\epsilon}}^e = \left( \underline{e}_s + \underline{e}_1 \underline{B}_{s1} + \underline{e}_2 \underline{B}_{s2} \right) ds + \left( \underline{e}_1 \underline{B}_{R1} + \underline{e}_2 \underline{B}_{R2} \right) d\omega \quad (4.41)$$

Die in der Gleichung (4.41) auftretenden einzelnen Terme sind :

$$\underline{e}_s = \begin{bmatrix} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \cos\theta \\ (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \cos\theta \\ 2 (1 + \nu) \sigma_{r\theta} \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} s \cos\theta & -v s \cos\theta & -2(1+v) \sin\theta \\ -v s \cos\theta & s \cos\theta & 2(1+v) \sin\theta \\ 2(1+v) \sin\theta & -2(1+v) \sin\theta & 2(1+v) s \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\underline{\underline{e}}_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta & -v \sin\theta & 0 \\ -v \sin\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \sin\theta \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\underline{\underline{B}}_{s1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 -N_i w_i \\ \sum_{i=1}^6 (2s-3) N_i w_i \\ \sum_{i=1}^6 N_i' w_i \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\underline{\underline{B}}_{s2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 -N_i' w_i \\ \sum_{i=1}^6 (2s-3) N_i' w_i \\ \sum_{i=1}^6 N_i'' w_i \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Die Ableitungen nach (4.34) werden beschrieben durch

$$\underline{\underline{d}}\underline{\underline{e}}^P = \omega \left[ \underline{\underline{B}}_s + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}_{s1} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}}_{s2} \right] ds + \omega \left[ \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}_{R1} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}}_{R2} \right] d\underline{\underline{w}} \quad (4.47)$$

Dabei folgen die entsprechenden einzelnen Terme:

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ b_{3s} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Die in (4.48), (4.49) und (4.50) auftretenden Komponenten sind

$$b_{1s} = \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) \cos\theta$$

$$b_{2s} = \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) \cos\theta$$

$$b_{3s} = 3 \sigma_{r\theta} \cos\theta$$

$$b_{11} = \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) a_1 + F$$

$$b_{12} = \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) a_2 - \frac{1}{2} F$$

$$b_{13} = \left( \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) a_3$$

$$b_{21} = \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_1 - \frac{1}{2} F$$

$$b_{22} = \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_2 + F$$

$$b_{23} = \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_3$$

$$b_{31} = 3 \sigma_{r\theta} a_1$$

$$b_{32} = 3 \sigma_{r\theta} a_2$$

$$b_{33} = 3 \sigma_{r\theta} a_3 + 3 F$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) a_4 \\
c_{12} &= \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) a_5 \\
c_{13} &= \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) a_6 \\
c_{21} &= \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_4 \\
c_{22} &= \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_5 \\
c_{23} &= \left( \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{rr} \right) a_6 \\
c_{31} &= 3 \sigma_{r\theta} a_4 \\
c_{32} &= 3 \sigma_{r\theta} a_5 \\
c_{33} &= 3 \sigma_{r\theta} a_6
\end{aligned}$$

Die Parameter  $a_i$  folgen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_1 - \frac{\sin\theta}{2} \frac{\sigma_v'}{\sigma_v^3} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \\
a_2 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_2 - \frac{\sin\theta}{2} \frac{\sigma_v'}{\sigma_v^3} (2 \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \\
a_3 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_3 - \frac{\sin\theta}{2} \frac{\sigma_v'}{\sigma_v^3} 6 \sigma_{r\theta} \\
a_4 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_4 \\
a_5 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_5 \\
a_6 &= \frac{\sin\theta}{\sigma_v} v_6
\end{aligned}$$

Dazu entspricht

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{\sigma_v'}{2 \sigma_v^2} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{2 \sigma_v} (2 \sigma_{rr}' - \sigma_{\theta\theta}') \\
v_2 &= -\frac{\sigma_v'}{2 \sigma_v^2} (2 \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + \frac{1}{2 \sigma_v} (2 \sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{rr}') \\
v_3 &= -\frac{\sigma_v'}{2 \sigma_v^2} 6 \sigma_{r\theta} + \frac{1}{2 \sigma_v} 6 \sigma_{r\theta}' \\
v_4 &= \frac{1}{2 \sigma_v} - (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \\
v_5 &= \frac{1}{2 \sigma_v} - (2 \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \\
v_6 &= \frac{1}{2 \sigma_v} 6 \sigma_{r\theta}
\end{aligned}$$

Die Vergleichsspannung und deren Ableitung sowie F folgen:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2$$

$$\begin{aligned}
\sigma_v' &= \frac{1}{2 \sigma_v} (2 \sigma_{rr} \sigma_{rr}' - \sigma_{rr}' \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta}' \\
&\quad + 2 \sigma_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta}' + 6 \sigma_{r\theta} \sigma_{r\theta}')
\end{aligned}$$

$$F = s \cos\theta - \frac{\sigma_v'}{\sigma_v} \sin\theta$$

Die in (4.34) auftretende Ableitung folgt

$$\frac{\partial \underline{B}^T}{\partial s} = \begin{bmatrix} N_1 & (2s+1)N_1 & -N_1' \\ N_2 & (2s+1)N_2 & -N_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ N_6 & (2s+1)N_6 & -N_6' \end{bmatrix}$$

Die auf der Basis eines beliebigen Elementes gegründeten Gleichungen (4.33) und (4.34) werden mit gewöhnlicher Finite-Elemente-Technik in das Gesamtsystem eingebaut. Damit kann ein n-tes algebraisches Gleichungssystem mit n+1 Unbekannten



erhalten werden. Dazu ist eine zusätzliche Gleichung notwendig, die durch erforderliche wie im Abschnitt 3.7. benutzte Normierung hinzugefügt werden muß. Das Gleichungssystem wird mit dem gedämpften Newton-Verfahren gelöst. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix hat eine Struktur in der Form:

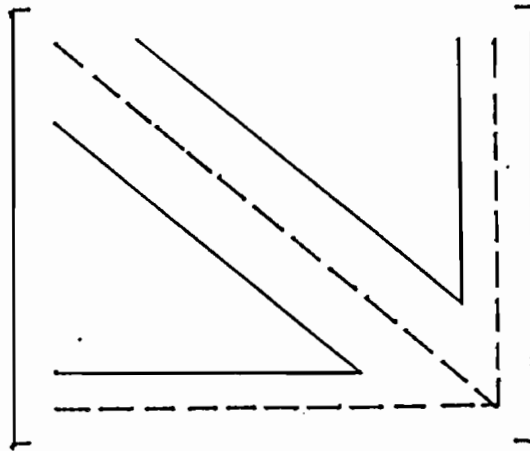


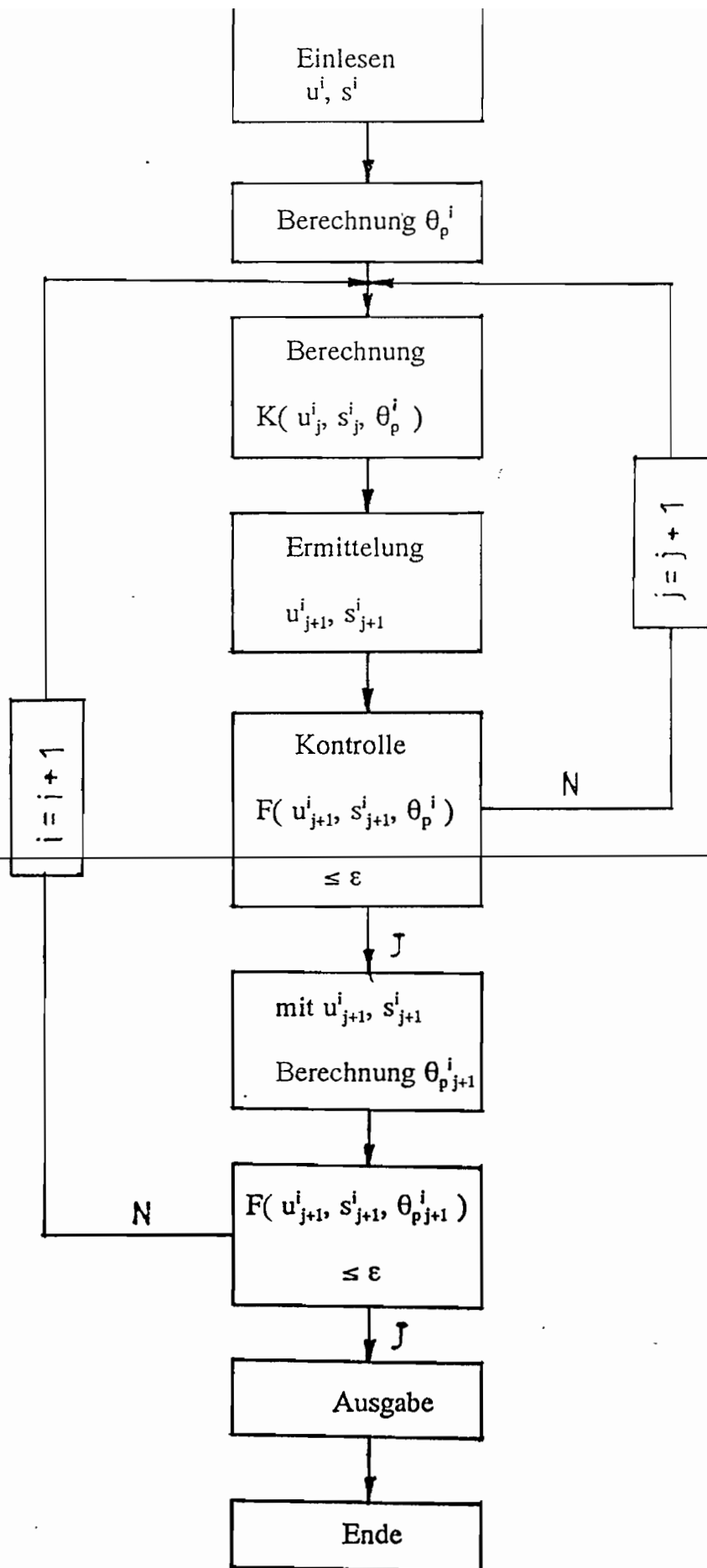
Bild 4.1. Struktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Bei der Berechnung wird noch die Maßnahme getroffen, unter der der Entlastungswinkel bei dem Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix innerhalb des Newton-Verfahrens zuerst festgehalten und dann iterativ gerechnet wird, weil das Verfahren wegen des empfindlichen Entlastungswinkels, der einen Einfluß auf die Systemsteifigkeitsmatrix hat, zur Divergenz führen kann. Die Rechenstrategie wird wie folgt dargestellt:

- Die Berechnung fängt mit dem rein elastischen Materialverhalten an. Für die nachfolgende Berechnung werden immer die bereits ermittelten und aktuellsten Ergebnisse als Startwerte benutzt.
- Mit den Startwerten wird der Entlastungswinkel gerechnet.
- Damit wird die Systemsteifigkeitsmatrix aufgebaut.
- Dann wird das Gleichungssystem gelöst und werden die Ergebnisse mit der vorgegebenen Genauigkeit verglichen. Wenn die Genauigkeit nicht erreicht wird, wird die Rechnung weiter iteriert.

- Bei Erfüllung der Genauigkeit werden die gewonnenen Ergebnisse gespeichert und können für die Ausgabe mechanischer Größen verwendet werden.

Als Beispiel wird die Berechnung mit hundert Elementen durchgeführt. Die Rechenstrategie kann durch folgendes Blockbild verdeutlicht werden.



## 5. Experimentelle Untersuchungen bei großem Rißwachstum

In den vorangegangenen Kapiteln 3 und 4 wurden die asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses bereits ermittelt. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit diese Ergebnisse auf das reale Rißwiderstandsverhalten von Bruchmechanik-Proben und Bauteilen übertragbar und anwendbar sind. Ihre Beantwortung umfaßt zwei Teilaspekte, die nacheinander zu behandeln sind. Zunächst ist zu prüfen, ob sich stationäres Rißwachstum an Proben überhaupt einstellt, und welches die Indizien und Bedingungen hierfür sind. Als zweites ist zu untersuchen, inwieweit sich das tatsächliche Spannungsfeld in der Umgebung der Rißspitze durch die analytischen Lösungen beschreiben läßt. Die Beantwortung der zweiten Frage ist nicht unmittelbar aus dem Experiment möglich, da diese Spannungen nicht direkt meßbar sind. Hierfür müssen numerische Simulationen der Versuche nach der Methode der Finiten Elemente durchgeführt werden. Im folgenden wird zunächst die experimentelle Vorgehensweise für großes duktiles Rißwachstum an Bruchmechanik-Proben beschrieben und die Ergebnisse diskutiert. Das anschließende Kapitel 6 behandelt dann die numerische Simulation der Versuche.

### 5.1 Beschreibung von Probengeometrien, Versuchsdurchführung und -auswertung

Für die Experimente wurde der im Rahmen des Forschungsprojektes verwendete warmgewalzte Stahl StE 460 ausgewählt. Die chemische Zusammensetzung ( Massen % ) und die mechanischen Eigenschaften ( T - Probenlage,  $20 \pm 2^\circ \text{C}$ ,  $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ) des untersuchten Stahls sind folgende:

StE 460:

C	Mn	Mo	Ni	Si	Cr	V	Cu	Al	P	S	N <sub>2</sub>
0.17	1.52	0.01	0.62	0.28	0.04	0.18	0.03	0.01	0.009	0.009	0.012

Untere Streckgrenze  $R_{el}$  N/mm<sup>2</sup>                      470 ± 10

Zugfestigkeit $R_m$	N/mm <sup>2</sup>	635 ± 12
Bruchdehnung $A_{10}$	%	21 ± 2
Lüdersdehnung $A_{Lu}$	%	1.9 ± 0.1
Brucheinschnürung Z	%	67 ± 3

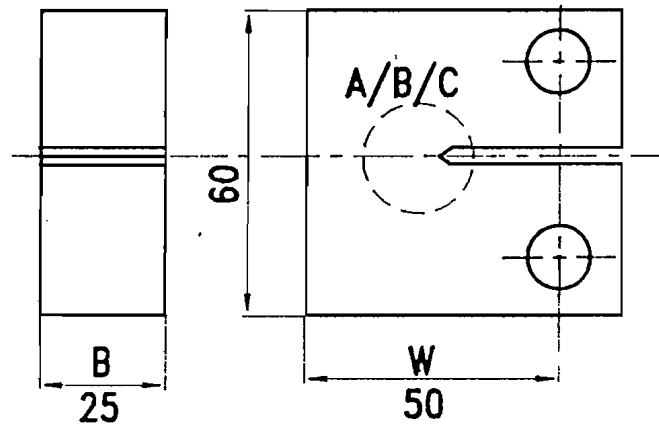
Als Versuchsproben wurden zwei nach ihrer Belastungskonfiguration und dem daraus resultierenden plastischen Constraint sehr gegensätzliche Probenformen ausgewählt:

- überwiegend biegebelastete Kompaktzugproben CT (Bild 5.1)
- zugbelastete Scheiben mit Mittenriß CCT (Bild 5.2).

Es hat sich in vielen Untersuchungen des Rißwiderstandsverhalten, z.B. /3,4,9,34,43,44/, gezeigt, daß diese Proben die beiden Extreme des "In-Plane Constraint", d.h. der Dehnungsbehinderung in Ligamentrichtung, repräsentieren, und damit das Spektrum unterschiedlichen Rißwiderstandsverhaltens eingrenzen. Andere Probenarten oder Bauteile liegen je nach dem Verhältnis von Zug- zu Biegeanteil in diesem Spektrum /13,14/. ~~Formen und Abmessungen der untersuchten Proben sind den folgenden Bildern~~ 5.1 und 5.2 zu entnehmen.

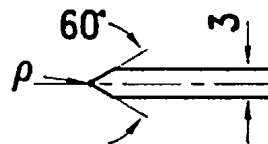
Probenvorbereitung und Versuchsdurchführung erfolgten nach den Richtlinien von ASTM/69/, DVM/70/ und EGF/80/. Für die Erzeugung der Schwingungsrisse sowie für die quasi-statische Zugbelastung der Proben wurden servohydraulisch geregelte 300 KN-, 1 MN- und 20 MN-Universalprüfmaschinen benutzt. Nach der Einbringung des Schwingungsanrisses wurden die Proben seitengekerbt, um im anschließenden statischen Versuch eine möglichst gerade Rißfront zu erhalten. Wegen der Randeinflüsse an glatten Oberflächen zeigen die statischen Risse bei ungekerbten Proben sonst die bekannte Daumennagelform, bei der die Rißfront in Probenmitte voreilt. Andererseits ist die Seitenkerbung erst nach dem Anschwingen der Probe sinnvoll, um die Kerbe exakt in die Ebene des Schwingungsrisse legen zu können.

Die Versuche an den Bruchmechanik-Proben dienten dazu, experimentelle Rißwiderstandskurven  $J_R(\Delta a)$  als Eingabedaten für die numerischen



Detail

A

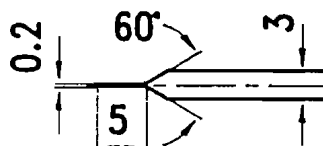


Kerbe:

$\rho = 0.1 \text{ mm}$

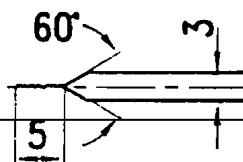
$\rho = 0.25 \text{ mm}$

B



0.2 mm Sägeschnitt

C



Schwingungsriss

Breite

$W = 50 \text{ mm}$

Dicke

$B = 25 \text{ mm}$

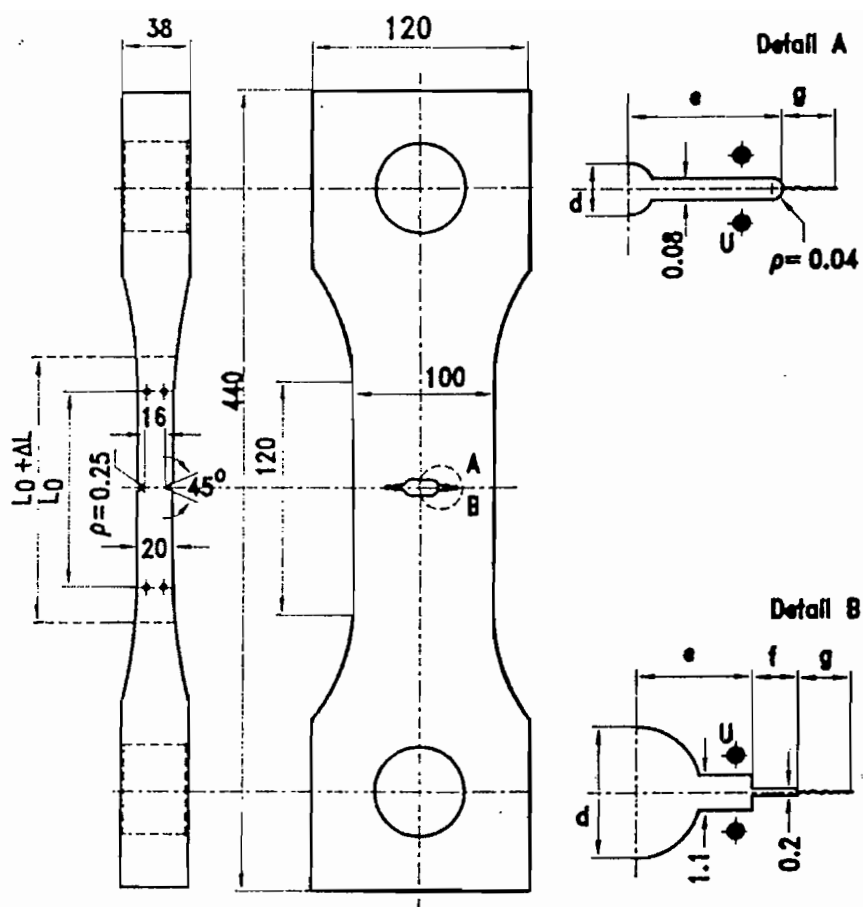
Netto-Dicke

$B_n = 19 \text{ mm}$

Anfangsrißlänge

$a_0 = 29.385 \text{ mm}$

Bild 5.1 Maße der untersuchten Kompaktzugprobe CT



	$a_0/W_0$	$d$	$e$	$f$	$g$
Detail A	0.2	2	8		2
	0.5		23		
	0.8		38		
Detail B	0.5	10	21	2	2
	0.8		36		

Breite  $W = 50 \text{ mm}$   
 Dicke  $B = 20 \text{ mm}$   
 Netto-Dicke  $B_n = 16 \text{ mm}$   
 Anfangsrißlänge  $a_0 = 25 \text{ mm}$

Bild 5.2 Maße der untersuchten Zugscheibe mit Mittenriß CCT

Rißwachstumssimulationen zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungsfeldes am Riß aufzunehmen. Hierzu wurden während der statischen Belastung die Kräfte  $F$ , die Verschiebung  $V_L$  in der Lastangriffslinie der CT-Probe bzw. die Probenverlängerung  $\Delta L$  der CCT-Probe aufgenommen. Die Rißlängenbestimmung erfolgte mittels einer Gleichstrom-Potentialsonde. Versuchs- und Meßaufbau für die  $J_R$ -Kurven-Bestimmung sind im folgendem Blockbild 5.3 am Beispiel einer CT-Probe dargestellt. Nach Beendigung des statischen Versuchs wurden die Proben aufgebrochen und die Flächen von Schwingungsriß und duktilem Riß ausgemessen. Die Versuche wurden vom Labor "Werkstoffzustand und mechanische Eigenschaften 1.13" der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) durchgeführt.

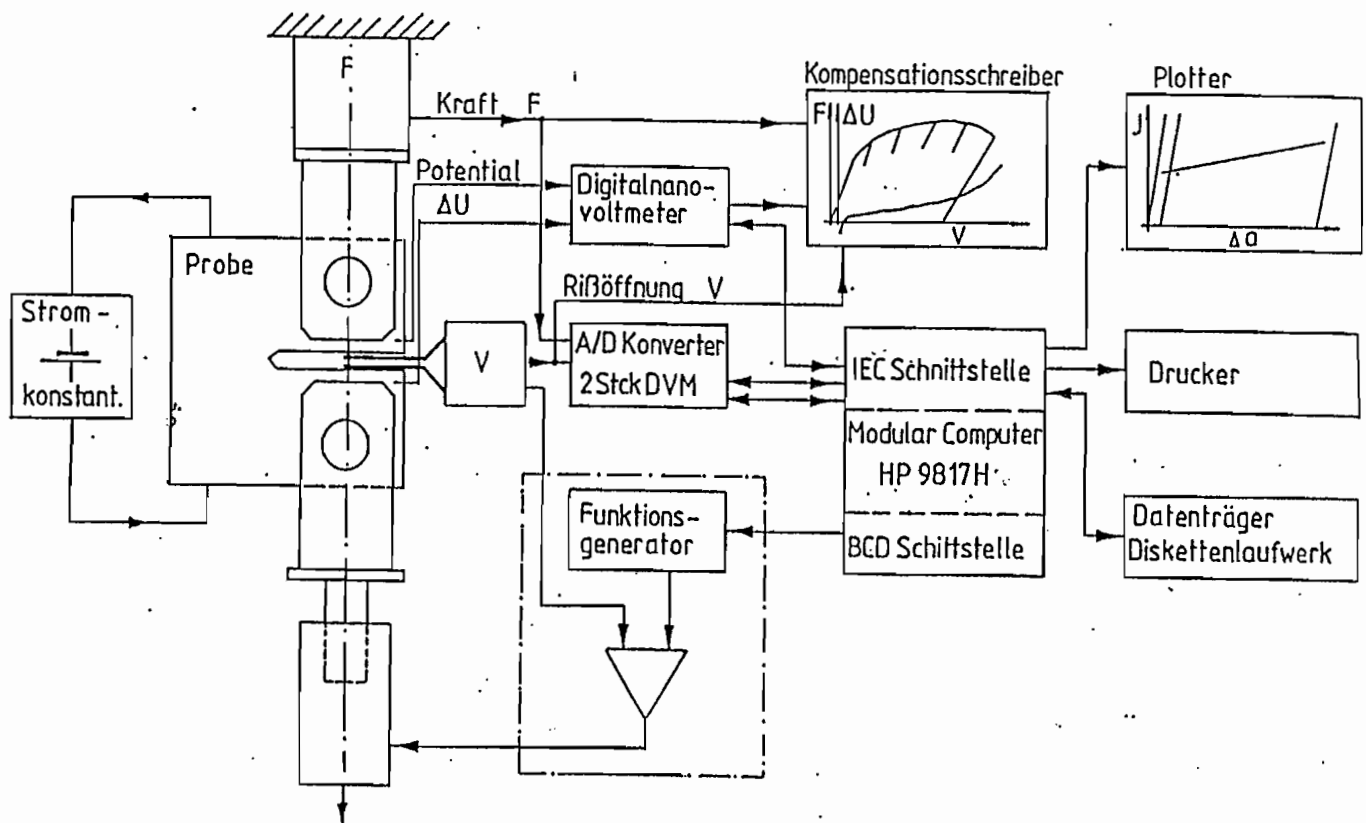


Bild 5.3 Blockbild des Meßplatzes zur Ermittlung mechanischer Werkstoffeigenschaftswerte



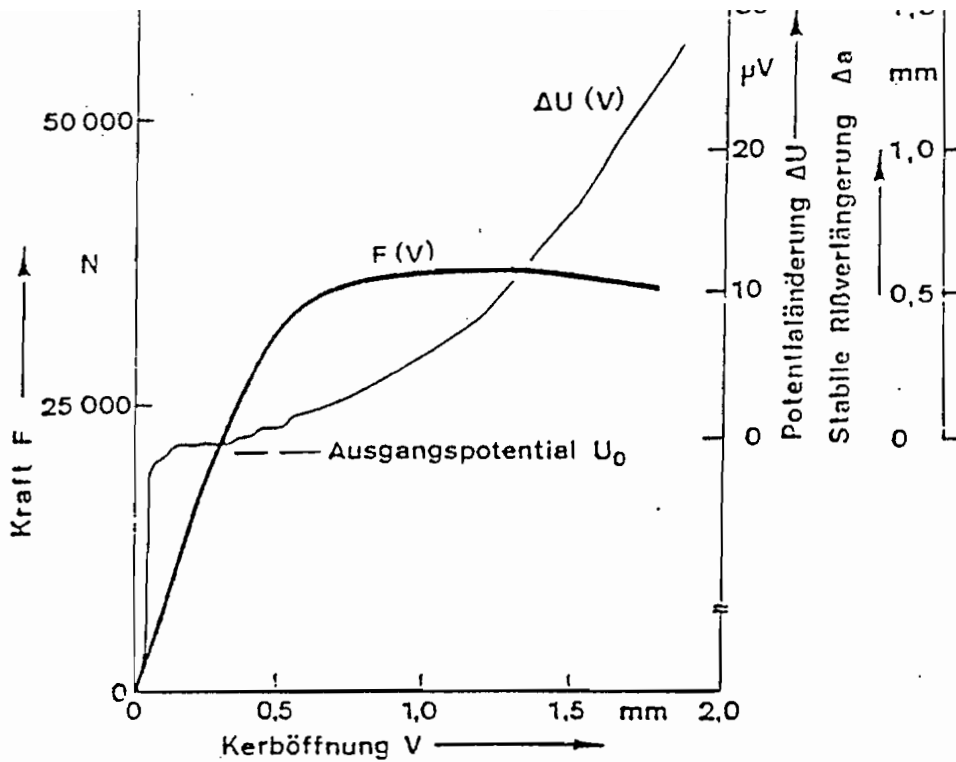


Bild 5.4 Kraft-Kerböffnungs (F-V)-sowie Potential-Kerböffnungs (U-V)-schiebe einer CT-Probe

Das Bild 5.4 zeigt Beispiele für Schriebe, wie sie während des Zugversuchs mit einer elektronisch geregelten Prüfmaschine aufgenommen worden sind. Für die Versuchsauswertung und Ergebnisse der Kompaktzugprobe CT erfolgte die Bestimmung der  $J_R(\Delta a)$ -Kurve und  $J_i$ -Wert in Anlehnung an /69, 70, 80/. Die verwendete Gleichung ist

$$J_i = \eta \frac{U_i}{B (W - a_0)} ,$$

wobei  $U_i$  die geleistete Arbeit bei der Reißinitiierung,  $B$  die Probendicke,  $W - a_0$  das Anfangsprobenligament und  $\eta = 2 \sim 2.27$  den Vorfaktor bezeichnen. Für den Bereich des stabilen Reißwachstums wurde für die  $J$ -Bestimmung die folgende Gleichung nach ASTM E 1152-87 /86/ benutzt:

$$J_n = J_n^e + J_n^p$$

$$J_n^e = \frac{K^2 (1 - \nu^2)}{E}$$

$$J_n^P = \left[ J_{n-1}^P + \left( \frac{\eta_n}{b_n} \right) \frac{A_n^P - A_{n-1}^P}{B_N} \right] \left[ 1 - \gamma_n \frac{(a_n - a_{n-1})}{b_n} \right],$$

wobei:

$$\eta_n = 2.0 + 0.522 \frac{b_n}{W}, \quad \gamma_n = 1.0 + 0.76 \frac{b_n}{W}$$

und  $A_n^P$  ist im Bild 5.4a zu nehmen.

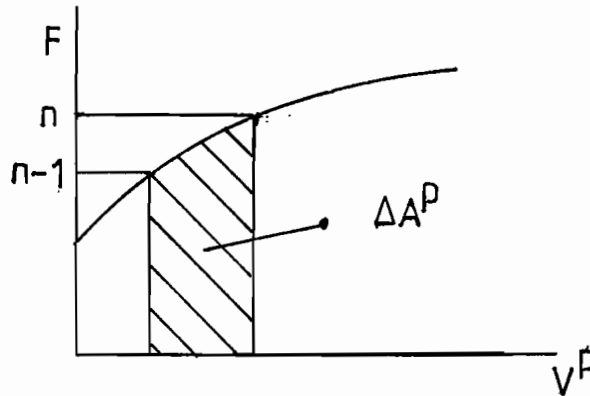


Bild 5.4a

Bei dem Versuch für Zugscheibe mit Mittenriß CCT wurden folgende Bilder aufgenommen:

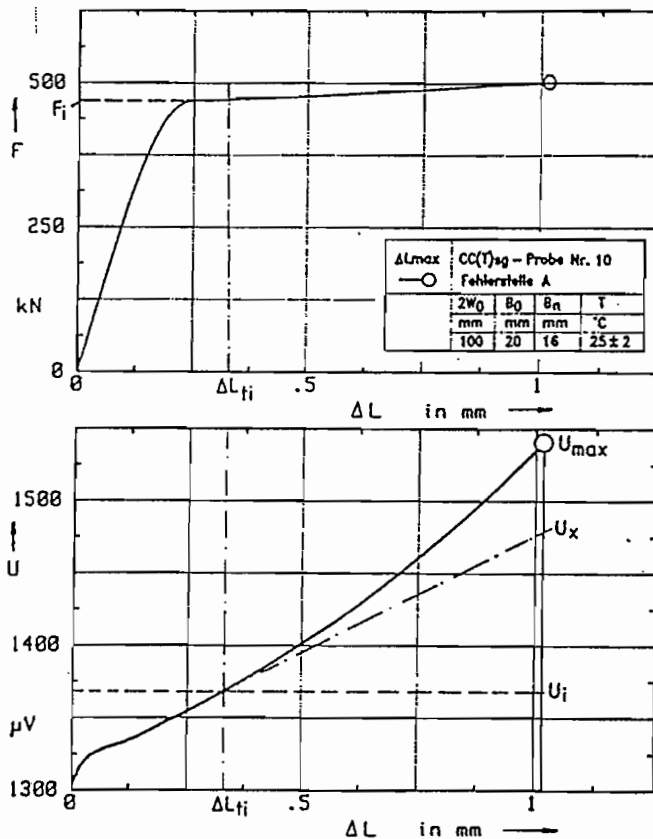


Bild 5.5 Kraft-Verschiebungs (F- $\Delta L$ )-sowie Potential-Verschiebungs (U- $\Delta L$ )-schiebe einer CCT-Probe

Die J-Integralbestimmung erfolgte für CCT-Probe unter Bezug auf die ermittelten Kraft-Globalverschiebungskurve F- $\Delta L$ . Dabei wurde der J-Wert für den Beginn des stabilen Rißwachstums  $J_i$  nach Rice und Mitarb. /82/ unter Verwendung des folgenden Ansatzes bestimmt:

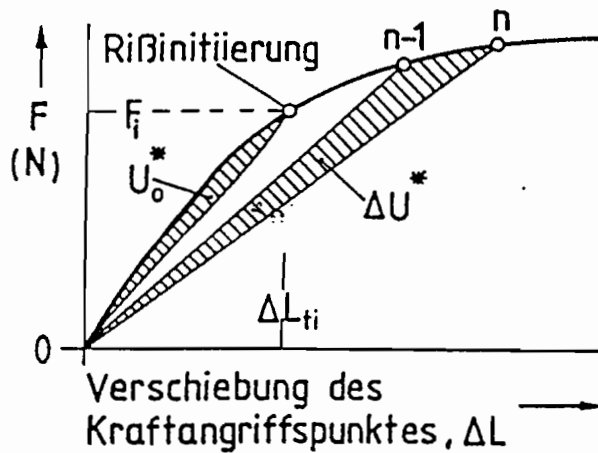


Bild 5.6 Schema zur Ermittlung der Energiebeträge  $U_o^*$ ,  $\Delta U^*$  aus dem F- $\Delta L$ -Diagramm für CCT-Probe

$$J_i = \frac{K^2 (1 - \nu^2)}{E} + \frac{U_o}{B (W - a_o)}$$

Für den Bereich des stabilen Rißwachstums wurde für die J-Bestimmung die folgende Gleichung nach HELLMANN und SCHWALBE /83/ benutzt, wobei n-1 und n die fortlaufenden Auswertungsschritte im Versuchsschrieb entsprechend dem Bild 5.6 bezeichnet:

$$J_n = J_{n-1} + \frac{2 \Delta U^*}{B (b_{n-1} + b_n)} + \frac{2 (K_n^2 b_n - K_{n-1}^2 b_{n-1})}{E (b_{n-1} + b_n)}$$

Die für den Rißöffnungsmodus I geltende Spannungsintensität K wurde unter Bezug auf TADA und Mitarb. /84/ bestimmt. E ist Elastizitätsmodul des Werkstoffes. Die Ermittlung der Energiebeträge  $U_o$  und  $\Delta U^*$  erfolgte entsprechend dem Bild 5.6, wobei  $F_i$  und  $\Delta L_{ti}$  aufgrund der im Bild 5.5 gekennzeichneten charakteristischen Steigungsänderung der Potential-Rißaufweitung-Kurve U- $\Delta L$  festgelegt wurde. B entspricht der Probendicke und  $b_n$  dem Ligament  $W-a_n$ .

## 5.2 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Die durch die Experimente zu ermittelnden Reißwiderstandskurven  $J_R(\Delta a)$  konnten dann aus mehreren Reißwachstumsversuchen für CT und CCT mit Hilfe der Regressionskurven in der Form

$$J_R = b_1 \cdot (b_2 + \Delta a)^c \quad \left( \frac{N}{mm} \right)$$

entsprechend der Empfehlung EGF P1-90 /80/ angepaßt werden. Die für die obige Gleichung notwendigen Parameter folgen für

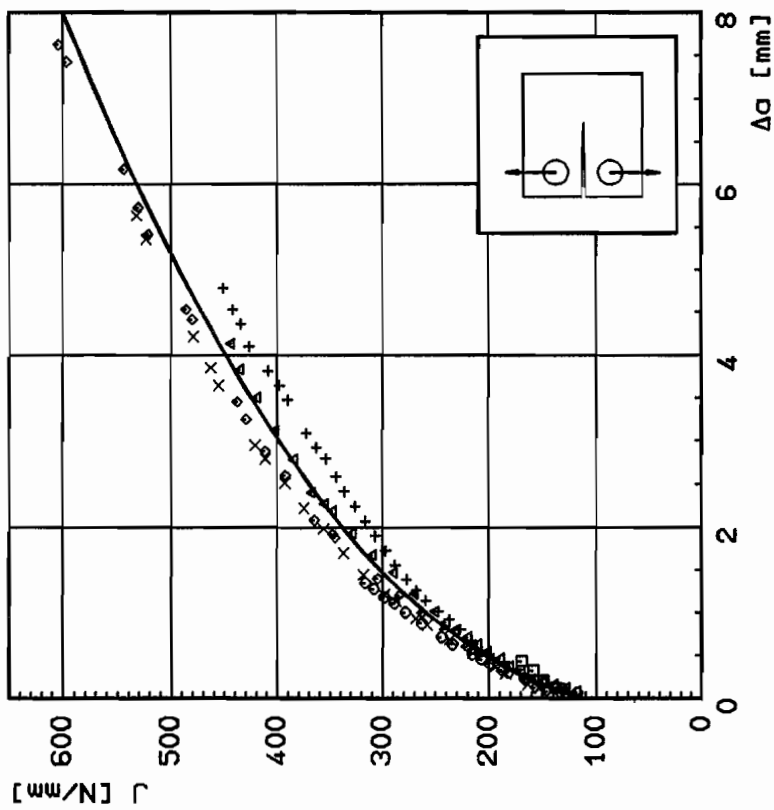
$$\text{CT :} \quad b_1 = 241.164; \quad b_2 = 0.176; \quad c = 0.434$$

$$\text{CCT :} \quad b_1 = 430.098; \quad b_2 = 0.195; \quad c = 0.737$$

Als Versuchsergebnisse sind die Reißwiderstandskurven  $J_R(\Delta a)$  und die J-Reißmodulkurven für CT und CCT in den Bildern 5.7 und 5.8 dargestellt. Zusätzlich sind noch in den Bildern 5.9 die CTOD-Reißmodulkurven, nämlich  $\delta_5$ -Reißmodulkurven, für CT und CCT dargestellt, die zwar nicht direkt aus den Experimenten, sondern aus der Finite-Elemente-Simulation ermittelt wurden, aber dieser Parameter  $\delta_5$  kann auch leicht in Experimenten während des Reißwachstums gemessen werden.

Weil in der vorliegenden Arbeit stationäres Reißwachstum behandelt wird, muß man sich nun die Frage stellen: Gibt es stationäres Reißwachstum in der Realität und woran macht es sich bemerkbar. Hierzu können nun die Experimente mit großem Reißwachstum an CT- und CCT-Proben herangezogen werden, die gezielt unter Verletzung der üblichen Gültigkeitskriterien /69,70,80/ durchgeführt wurden, um das Auftreten von stationärem Reißwachstum zu verifizieren. Die Frage ist jetzt, worin sich stationäres Reißwachstum im Experiment äußert. Im analytischen Ansatz ist es klar: Die lokale Zeitableitung einer Feldgröße  $\Phi$  verschwindet, also  $\partial\Phi/\partial t=0$ . Und aus einer Finite-Elemente-Berechnung kann man erkennen, daß sich alle Feldgrößen an der Reißspitze nach einer Anlaufphase während des weiteren Reißwachstums nicht mehr ändern. Aber dies kann man im

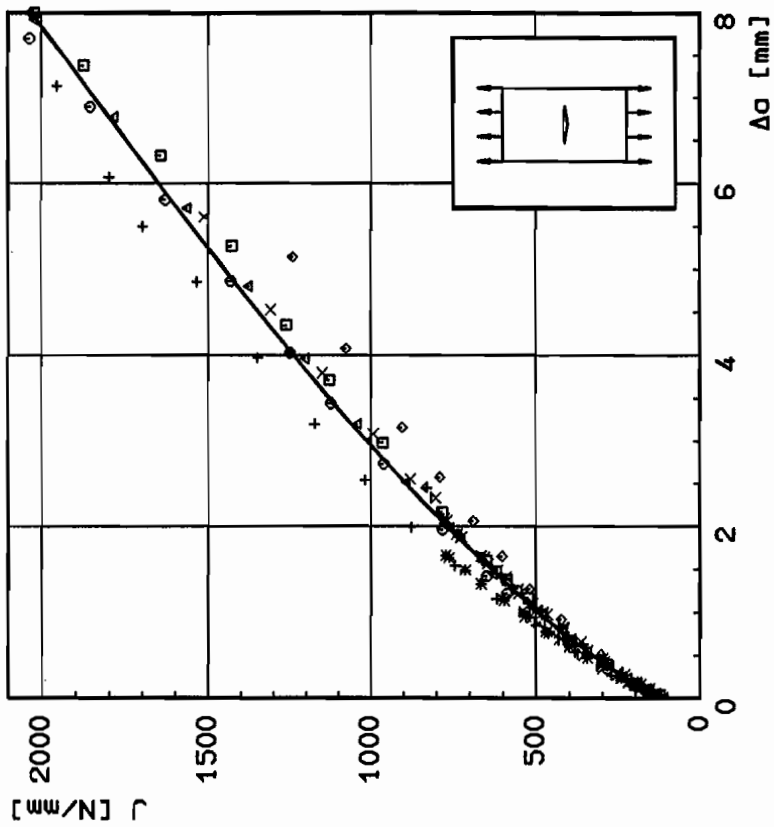
Experiment nicht messen. Dennoch kann man aus den experimentellen Ergebnissen auf stationäres Rißwachstum schließen. Aus den Bildern 5.8 und 5.9 ist zu erkennen, daß  $dJ/da$  und  $d\delta_5/da$  gegen konstante, stationäre Werte streben, wie es auch in den FE-Simulationen auftritt. Zwar sind die Parameter  $J$  und  $\delta_5$  wegen ihrer Abhängigkeit von der Probengeometrie keine übertragbaren bruchmechanischen Beanspruchungsparameter, sie stellen aber Zustandsgrößen des Rißwachstumsprozesses dar, die anzeigen, ob Zustandsänderungen transient oder stationär erfolgen. Nach 1 bis 2 mm Rißwachstum ist demnach die transiente Phase etwa abgeschlossen und näherungsweise stationäres Rißwachstum eingetreten.



J-Rißwiderstandskurven

Probe: CTsg,  $V=50$ ,  $B_n=19$ ,  $\alpha/W=0.59$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{mL}=460\text{MPa}$ ,  $R_m=623\text{MPa}$   
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13,  $J_I=117$   
 Ausgleichskurven:  $J=b_1 \cdot \Delta a^c$   
 $b_1=241.164$ ,  $b_2=0.176$ ,  $c=0.434$

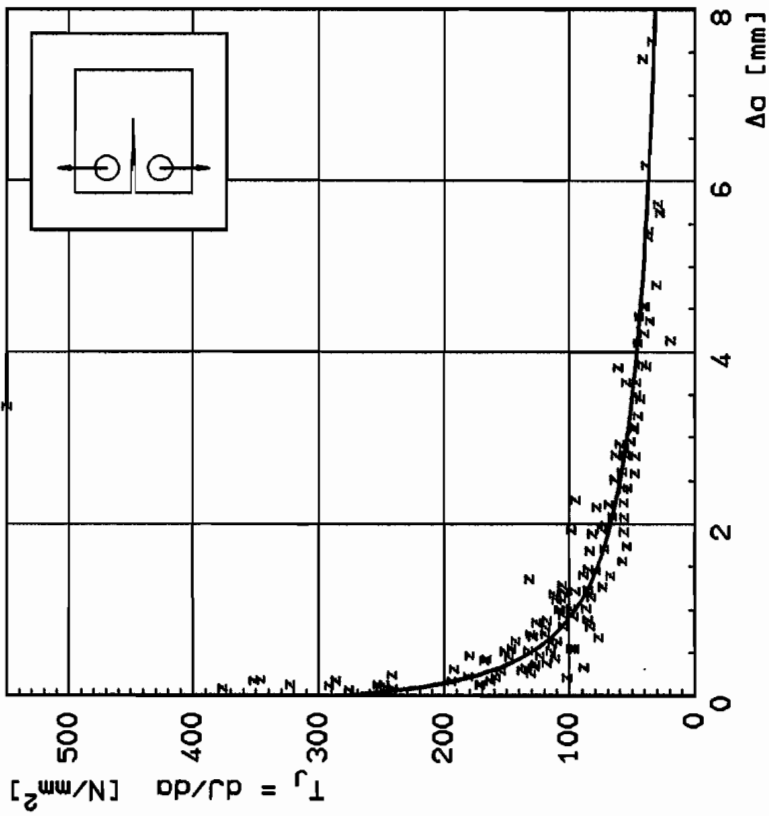
Bild 5.7a



J-Rißwiderstandskurven

Probe: CCTsg,  $V=50$ ,  $B_n=16$ ,  $\alpha/W=0.49$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{mL}=460\text{MPa}$ ,  $R_m=623\text{MPa}$   
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13,  $J_I=127$   
 Ausgleichskurven:  $J=b_1 \cdot \Delta a^c$   
 $b_1=430.098$ ,  $b_2=0.195$ ,  $c=0.737$

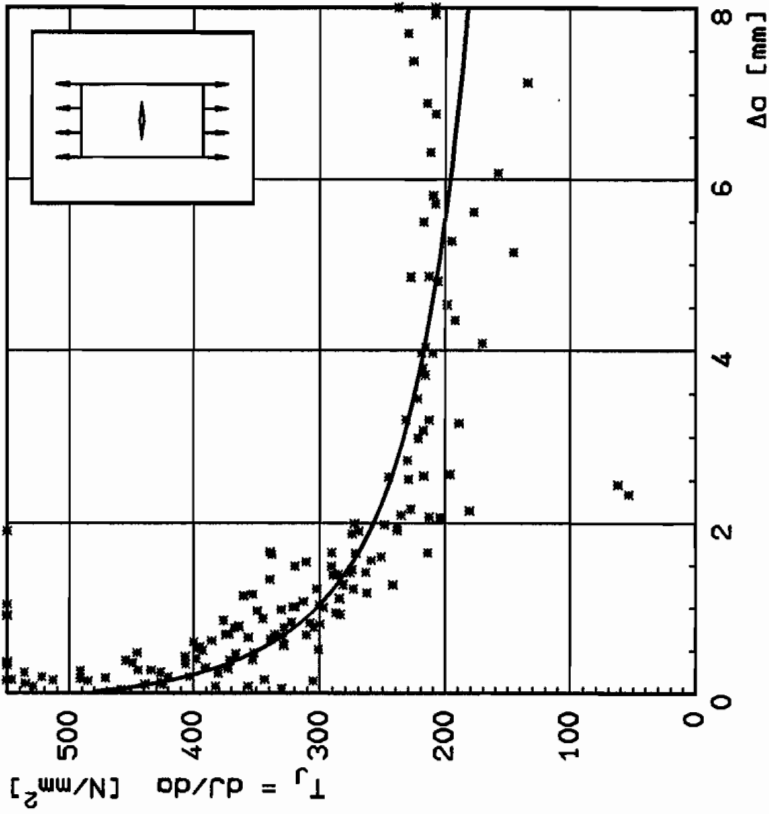
Bild 5.7b



J-Reißmodul

Probe: CTsg, W=50, B<sub>n</sub>=19, a/W=0.59  
 Werkstoff: StE 460(3), R<sub>0L</sub>=460MPa, R<sub>m</sub>=623MPa  
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13  
 Ausgleichskurven:  $J=b_1 \cdot (b_2 + \Delta a)^c$

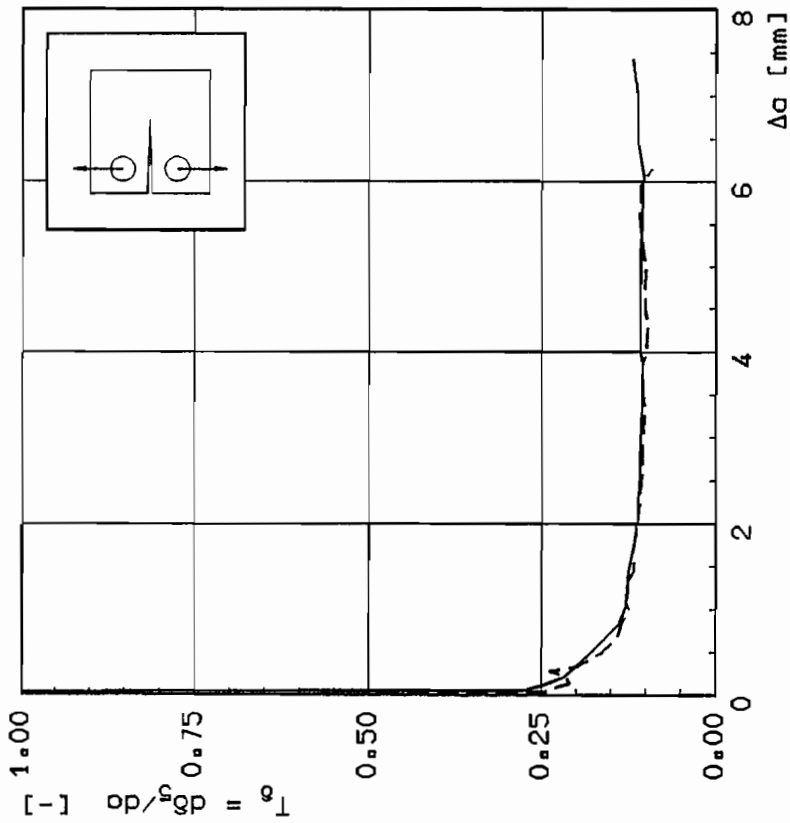
Bild 5.8a



J-Reißmodul

Probe: CCTsg, W=50, B<sub>n</sub>=16, a/W=0.49  
 Werkstoff: StE 460(3), R<sub>0L</sub>=460MPa, R<sub>m</sub>=623MPa  
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13  
 Ausgleichskurven:  $J=b_1 \cdot (b_2 + \Delta a)^c$

Bild 5.8b

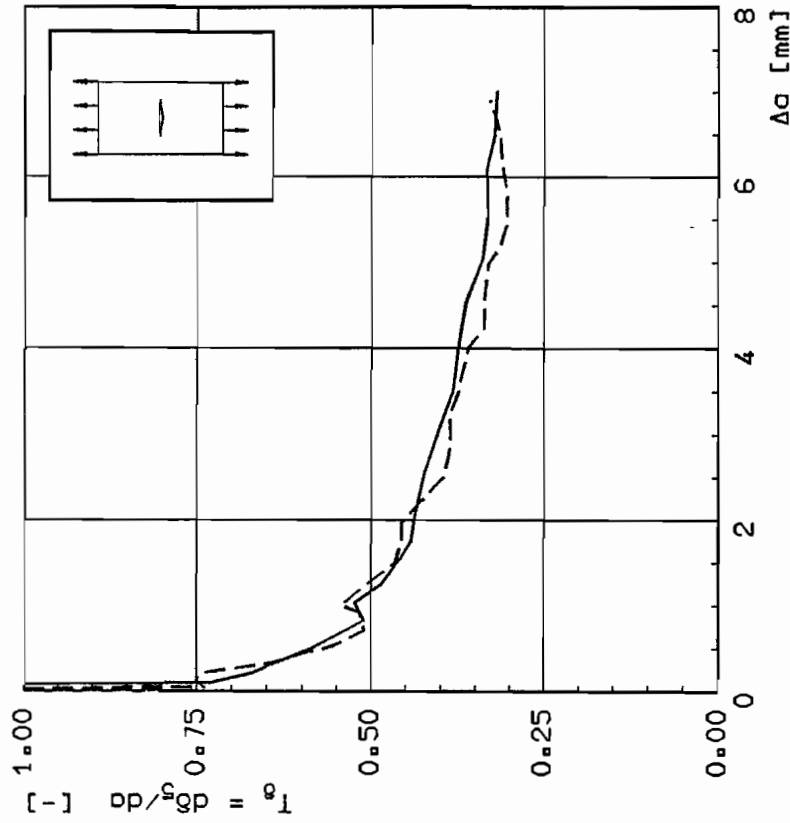


CTOD-Reißmodul

Probe: CTsg,  $a_0=29.4\text{mm}$ ,  $\Delta a_{\text{max}}=7.42\text{mm}$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{eL}=460\text{MPa}$   
 Rechnung: ADINA, J-gesteuert, 2D, EVZ  
 Rechnung: EPF, J-gesteuert, 2D, EVZ

--- ADINA  
 — EPF

Bild 5.9a



CTOD-Reißmodul

Probe: CCTsg,  $a_0=24.6\text{mm}$ ,  $\Delta a_{\text{max}}=7.0\text{mm}$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{eL}=460\text{MPa}$   
 Rechnung: ADINA, J-gesteuert, 2D, EVZ  
 Rechnung: EPF, J-gesteuert, 2D, EVZ

--- ADINA  
 — EPF

Bild 5.9b



## **6. Spannungsanalysen nach der Methode der Finiten Elemente**

Mit den im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Experimenten wurden die erforderlichen Daten für Detailanalysen des Spannungs- und Verzerrungsfeldes an der Reißspitze, das unmittelbaren Messungen nicht zugänglich ist, bereitgestellt. Diese Analysen erfolgen durch numerische Simulation der Versuche mit der Methode der Finiten Elemente. Das Verfahren wird im folgenden kurz vorgestellt.

### **6.1 Numerische Simulation des Reißwachstums**

Die FE - Analysen wurden mit dem universellen Programm ADINA //, Version 5.0 durchgeführt. Das Programm arbeitet inkrementell, indem ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand zur Zeit  $t$  das Variationsprinzip für einen Belastungszuwachs während  $\Delta t$  formuliert und der neue Gleichgewichtszustand zur Zeit  $t+\Delta t$  berechnet wird. Das nichtlineare Gleichungssystem enthält als Unbekannte die Verschiebungsinkremente  $\Delta u$ , und seine Lösung erfolgt iterativ durch Näherungsverfahren (NEWTON - oder BFGS - Methode). Als Konvergenzkriterium ist für Reißwachstumssimulationen das Kraftkriterium zu verwenden, da das Energiekriterium bei Knotenlösung versagt.

Das Programm stellt dem Benutzer isoparameterische Elemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen und ein inkrementelles elastisch-plastisches Materialmodell mit der von MISESschen Fließbedingung und isotroper Verfestigung zur Verfügung. In das ADINA-Programm wurden zusätzlich die von SIEGELE und SCHMITT /61/ entwickelten Reißwachstumsroutinen "IWM - Crack" implementiert, die das Reißwachstum durch eine Kombination von Knotenversetzungen und Knotenfreisetzungen ( node shift and node release ) simulieren (Siehe Bild 6.1).

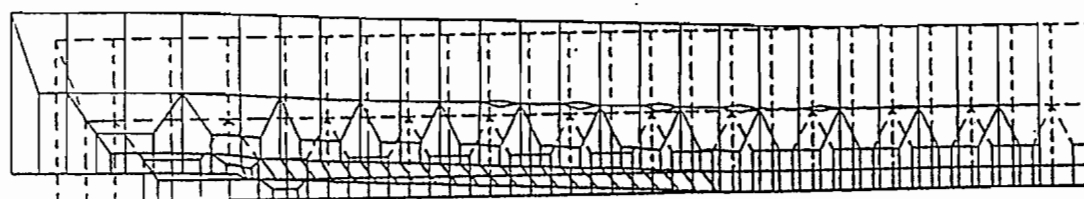
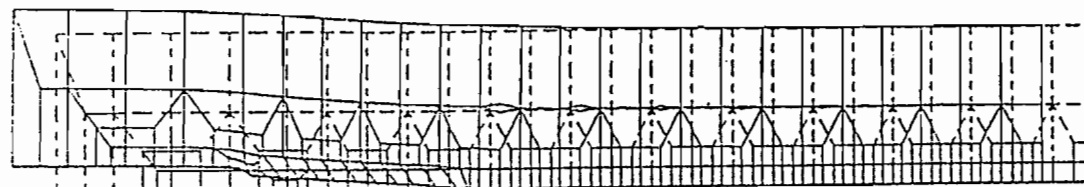
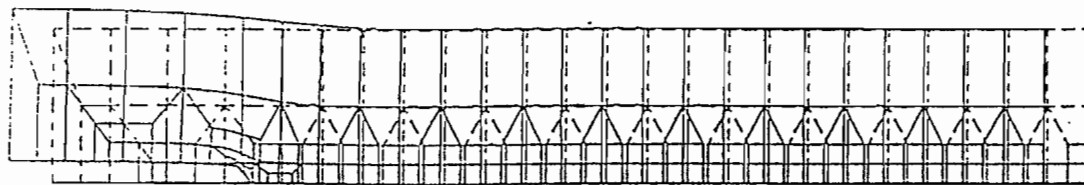


Bild 6.1a. Kombinierte Knotenversetzungs und -freisetzungsmethode  
im FhIWM - Modell

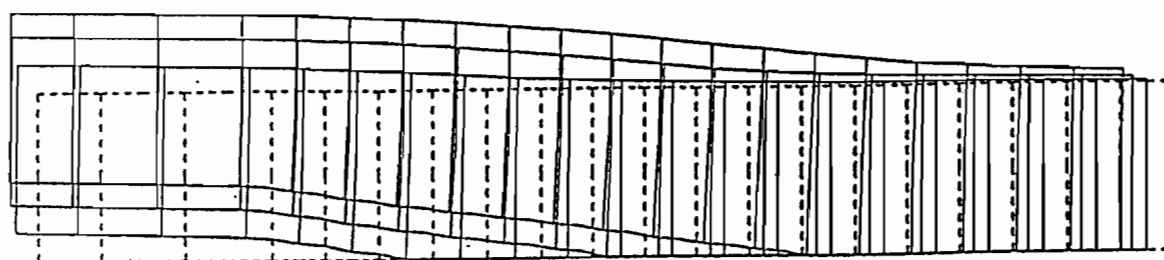


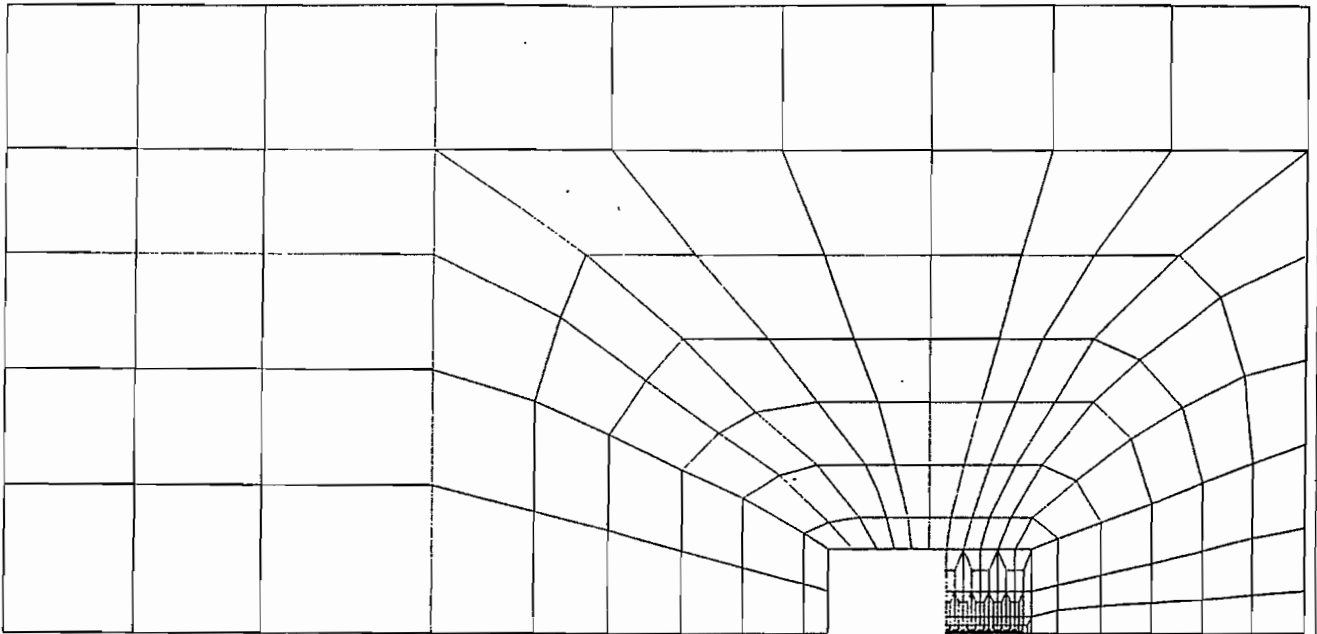
Bild 6.1b. Knotenfreisetzung im EPF - Modell

Für die Rißwachstumssimulation wird noch ein anderes Modell /15/ verwendet, das lediglich mit Knotenfreisetzungen arbeitet. Die gewissen Vor - und Nachteile für die beiden Modelle und den Vergleich der erzielten Ergebnisse mit beiden Modellen kann man in /72,73/ finden.

Die Finite-Elemente-Rechnungen werden verschiebungsgesteuert, d.h. durch Vorgabe der Verschiebung des Lastangriffspunktes  $V_L$  gefahren, da eine Kraftsteuerung unter fallender Last - Verformung - Kurve in ADINA nicht realisierbar ist. Das Rißwachstum kann entweder über eine  $V_L$  - Rißwiderstandskurve oder eine J - Rißwiderstandskurve aus dem Experiment gesteuert werden.

Um die aus der Finite-Elemente-Rißwachstumssimulation ermittelten Ergebnisse mit den analytischen Lösungen des stationären Rißwachstums vergleichen zu können, ist es notwendig, eine hinreichend feine Elementierung im Rißspitzenfeld vorzusehen. Das kann wegen der zu großen Anzahl der Systemfreiheitsgrade die Rechenkapazitäten überschreiten. Um die Anzahl der Systemfreiheitsgrade und damit den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, wird deshalb ein Ausschnitt aus der Gesamtprobe gewählt (Siehe Bild 6.2). Die Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnung für die Gesamtprobe wurden vom Referat "Rechnerische Werkstoff - und Bauteileanalyse der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) bereitgestellt /4/.

Der Systemausschnitt und das damit maximal mögliche Rißwachstum ist so zu wählen, daß stationäres Rißwachstum zu erwarten ist. Als Vorgabe werden die erforderlichen zeitlichen Verläufe der Verschiebungsrandbedingungen aus der vorangegangenen Finite-Elemente-Berechnung der Gesamtprobe bestimmt. Das Rißwachstum wird über eine ausgewählte Verschiebungsgröße gesteuert, und die hierfür erforderlichen Rißwiderstandskurve sind ebenfalls der Finite-Elemente-Analyse der Gesamtprobe zu entnehmen. Die Einzelheiten der Vorgehensweise findet man in /95/.



CT-25.25150K/20/8 KNOTEN/  
Gesamtausschnitt-CT Probe

ELEMENTNETZ

FG: 0.445

Proj.ebene YZ

Koordinat. transformation  $\psi_x$ :

Knoten: 1443

Verk: 0.50

$\psi_y$ : 0.00

El.grup.: 1

Wink: 35.00

$\psi_z$ : 0.00

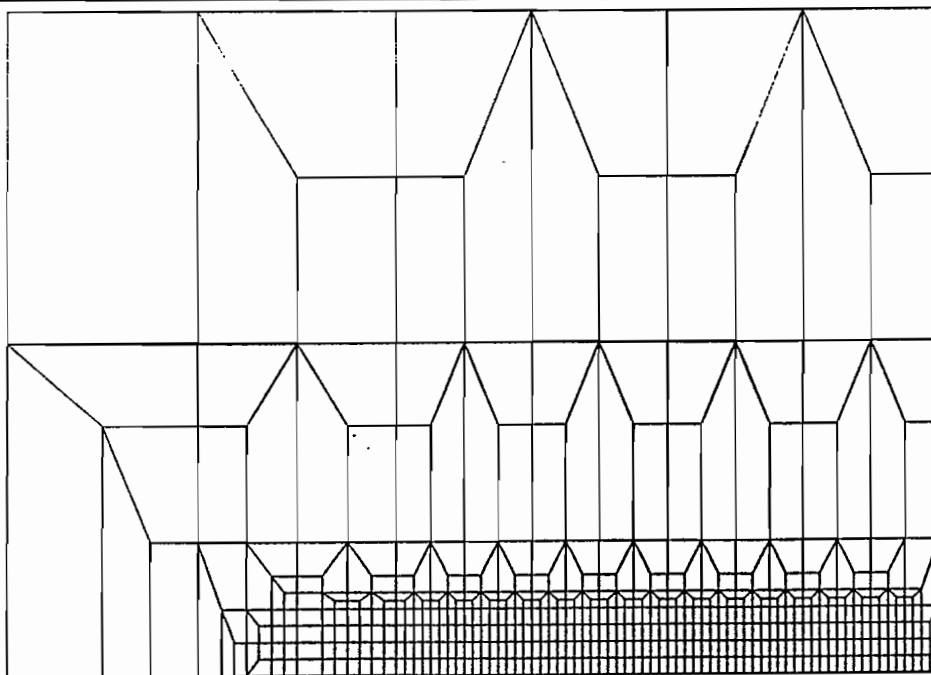
Blatt Nr.: 3



**BAM**

REF 1.01

3: 7:91 16:32:35 PLOTFEM 6.01



CT25.2515GK/20/alpha=0.03/HNO/EVZ/R-0=29.4mm/Modell 8(b1)/Aus.Rissumgeb.  
femdat.dal (sdlp14\_\*.\*)

ELEMENTNETZ

FG: 3.50

Proj.ebene YZ

Koordinat. transformation  $\psi_x$ :

Knoten: 1638

Verk: 0.50

$\psi_y$ : 0.00

El.grup.: 1

Wink: 30.00

$\psi_z$ : 0.00

Blatt Nr.: 1



**BAM**

REF 1.01

Bild 6.2

31: 7:91 13:54:03 PLOTFEM 6.01

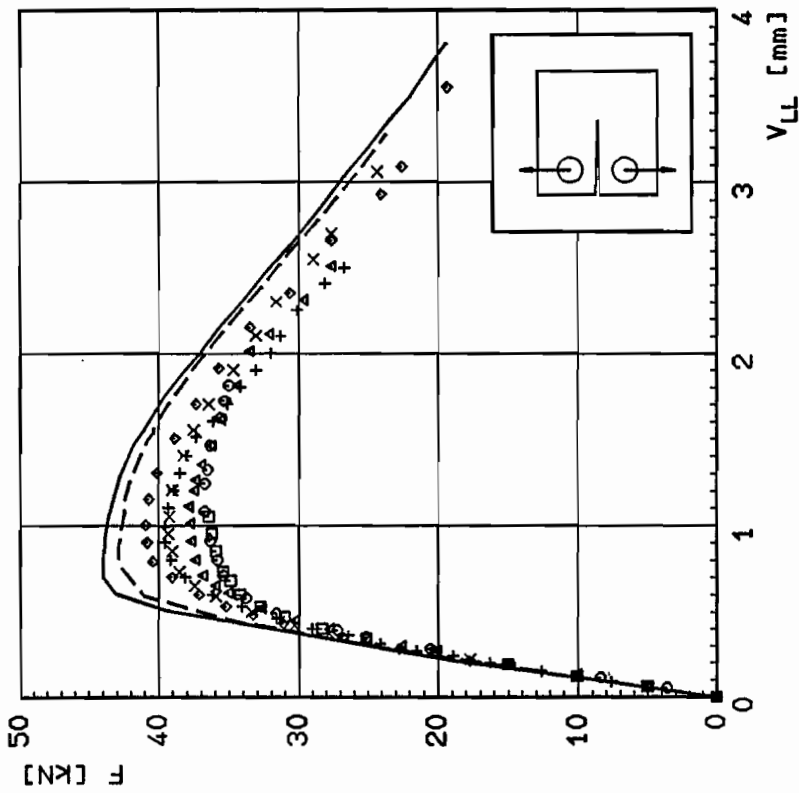
Um die Ergebnisse mit den analytischen Lösungen vergleichen zu können, wird deshalb zuerst ein bilineares Material verwendet. Die Materialwerte sind:

$E = 210\,000\text{ MPa}$	( Elastizitätsmodul )
$E_T = 6300\text{ MPa}$	( Verfestigungsmodul )
$\alpha = E_T / E = 0.03$	( Verfestigungskoeffizient )
$\nu = 0.3$	( Querkontraktion )
$\sigma_0 = 460\text{ MPa}$	( Fließspannung )

## 6.2 Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen

---

Hierzu werden die folgenden globalen Ergebnisse Kräfte  $F$  über Verschiebung  $V_L$  im Lastangriffspunkt für Kompaktzugprobe CT und Probenverlängerung  $\Delta L$  für Zugscheibe mit Mittenriß CCT aus der vorangegangenen Finite-Elemente-Berechnung im Vergleich mit den aus Experimenten ermittelten Ergebnissen dargestellt. Die Bilder zeigen nicht nur qualitativ sondern quantitativ gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen aus der Finite-Elemente-Simulation und den Experimenten.

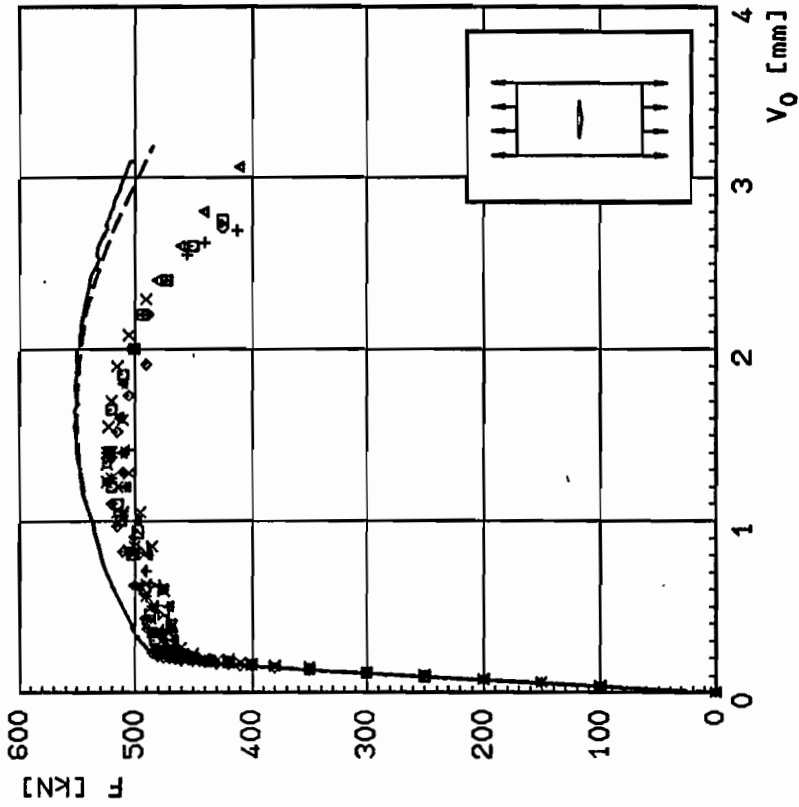


Last-Verschleibung-Kurven

Probe: CTsg,  $V=50$ ,  $B_n=19$ ,  $a_0/V=0.59$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{eL}=460\text{MPa}$ ,  $R_m=623\text{MPa}$   
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13  
 Rechnung: ADINA, J-gesteuert, 2D, EVZ  
 Rechnung: EPF, J-gesteuert, 2D, EVZ

- Experimente
- - - ADINA
- EPF

Bild 6.3a



Last-Verschleibung-Kurven

Probe: CCTsg,  $V=50$ ,  $B_n=16$ ,  $a_0/V=0.49$   
 Werkstoff: StE 460(3),  $R_{eL}=460\text{MPa}$ ,  $R_m=623\text{MPa}$   
 Versuche: Einprobenmethode, BAM-1.13  
 Rechnung: ADINA, J-gesteuert, 2D, EVZ  
 Rechnung: EPF, J-gesteuert, 2D, EVZ

- Experimente
- - - ADINA
- EPF

Bild 6.3a

## 7. Ergebnisse und Diskussion

In diesem Kapitel werden zunächst die Lösungen des asymptotischen, stationär wachsenden Rißspitzenfeldes dargestellt und mit den bereits existierenden Ergebnissen verglichen. Anschließend werden die Lösungen durch das Schießverfahren (SV) und das im Kapitel 4 entwickelte Finite-Elemente-Verfahren (FEV) gegenübergestellt. Danach werden die asymptotischen Lösungen und die numerischen Ergebnisse aus der Rißwachstumssimulation nach der Finite-Elemente-Methode miteinander verglichen. Dabei werden die Ergebnisse ausführlich diskutiert.

Hierzu werden die folgenden Bilder graphisch dargestellt:

- . Vergleich der Spannungsverteilung mit den Ergebnissen von CASTANEDE (Bild 7.1)
- . Singularitätsstärke  $s$  in Abhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten  $\alpha$  (Bild 7.2)
- . Entlastungswinkel  $\theta_p$  in Abhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten  $\alpha$  (Bild 7.3)
- . Spannungsverteilungen  $\tilde{\sigma}_{ij}$  in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  (Bild 7.4 und 7.5)
- . Verzerrungsverteilungen  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  (Bild 7.6 und 7.7)
- . Verschiebungsverteilungen  $\tilde{u}_i$  in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  (Bild 7.8 und 7.9)
- . Rißöffnungsprofile (Bild 7.10)
- . Vergleich der nach SV und FEV ermittelten Singularitäten (Bild 7.11a)
- . Vergleich der nach SV und FEV ermittelten Entlastungswinkel (Bild 7.11b)
- . Vergleich der nach SV und FEV ermittelten Spannungsverteilungen (Bild 7.12)
- . stationär wachsende Rißspitzenfelder aus FE-Simulation des Rißwachstums (Bild 7.13)
- . Vergleich der Spannungsverteilungen aus FE-Simulation und asymptotischer Lösung (Bild 7.14)

. Vergleich der Verzerrungsverteilungen aus FE-Simulation und asymptotischer Lösung  
(Bild 7.15)

In den Bildern 7.1 bis 7.10 werden die durch das Schießverfahren erzielten asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses bis auf die Amplitude für den ebenen Spannungszustand (ESZ) und den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) dargestellt. Wie schon im Kapitel 3 erläutert, sind die Singularitätsstärken, Entlastungswinkel, Winkelfunktionen der Spannungen von AMAZIGO und HUTCHINSON ohne Rückplastizierung und von CASTANEDA mit Rückplastizierung bereits ermittelt worden. In der folgenden Tabelle werden deshalb zuerst die Singularität  $s$  und der Entlastungswinkel  $\theta_p$  im Vergleich zu den von CASTANEDA erzielten Ergebnissen dargestellt.

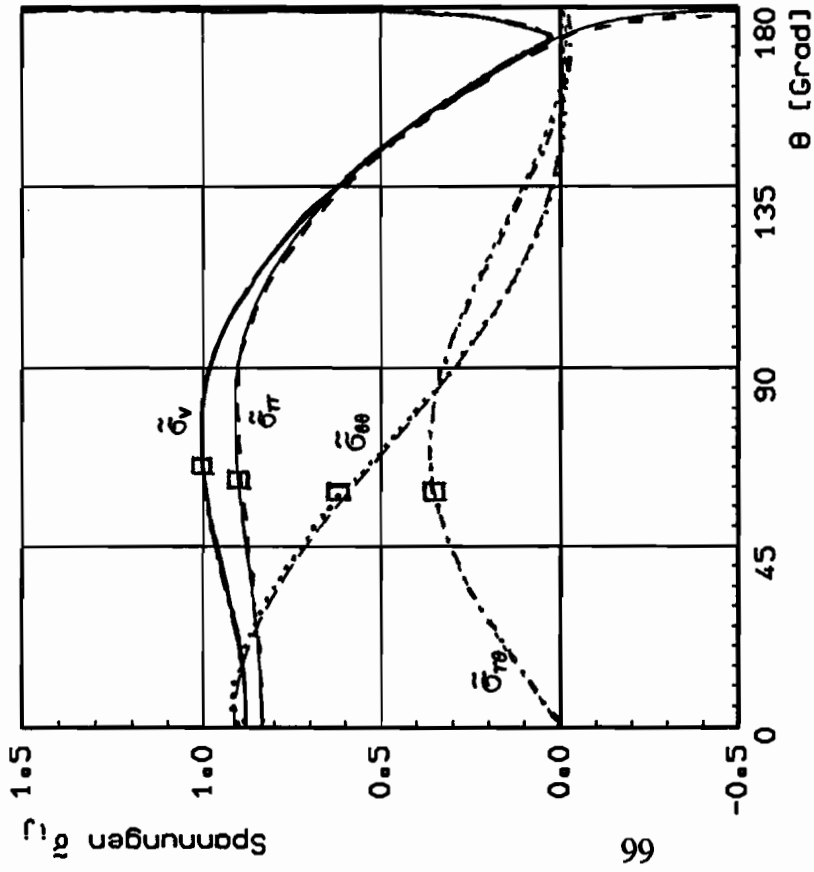
ESZ :					EVZ :			
$\alpha$	$s$	$s^*$	$\theta_p$	$\theta_p^*$	$s$	$s^*$	$\theta_p$	$\theta_p^*$
1.0	0.5	0.5	1.395	1.395	0.5	0.5	1.547	1.547
0.5	0.420	0.420	1.410	1.410	0.442	0.442	1.717	1.717
0.2	0.310	0.310	1.353	1.371	0.300	0.300	1.988	1.988
0.1	0.237	0.237	1.285	1.285	0.197	0.197	2.174	2.153
0.05	0.178	0.178	1.214	1.214	0.139	0.142	2.390	2.280
0.01	0.086	0.086	1.067	1.066	0.089	0.080	2.732	2.360

\* : die Ergebnisse von CASTANEDA

Aus der Tabelle ist zu sehen, daß die beiden Ergebnisse für ESZ identisch sind und daß sich die Ergebnisse für EVZ nur bei sehr kleiner Verfestigung etwas von den von CASTANEDA erzielten Ergebnissen abweichen. Als Beispiel zeigen die Bilder 7.1 die Vergleiche der Spannungsverteilungen für ESZ und EVZ mit den bereits vorhandenen Ergebnissen von CASTANEDA bei  $\alpha=0.75$ . Die beiden Ergebnisse stimmen sehr gut überein. Außerdem ist in den Bildern 7.2 zu sehen, daß die Singularitätsstärken desto stärker abnehmen, je weniger verfestigend das Material ist. Sie fallen für ESZ und EVZ nicht mehr zusammen wie in der HRR-Theorie für den stehenden Riß. Die Bilder 7.3



zeigen die Verläufe des Entlastungswinkels  $\theta_p$ . Der Entlastungswinkel für ESZ ist desto kleiner, je weniger verfestigend das Material ist. Im Gegensatz zum ESZ nimmt der Entlastungswinkel für EVZ mit immer schwächeren Verfestigungskoeffizienten  $\alpha$  zu. CASTANEDA hat die gleichen Schlußfolgerungen erzielt. Dies bedeutet, daß die Annahme, daß das Rißspitzenfeld zwei Zonen besitzt, nicht zu großen Abweichung führt, wodurch eine Vereinfachung zur Lösung des asymptotischen Nahfeldes gewonnen wird.

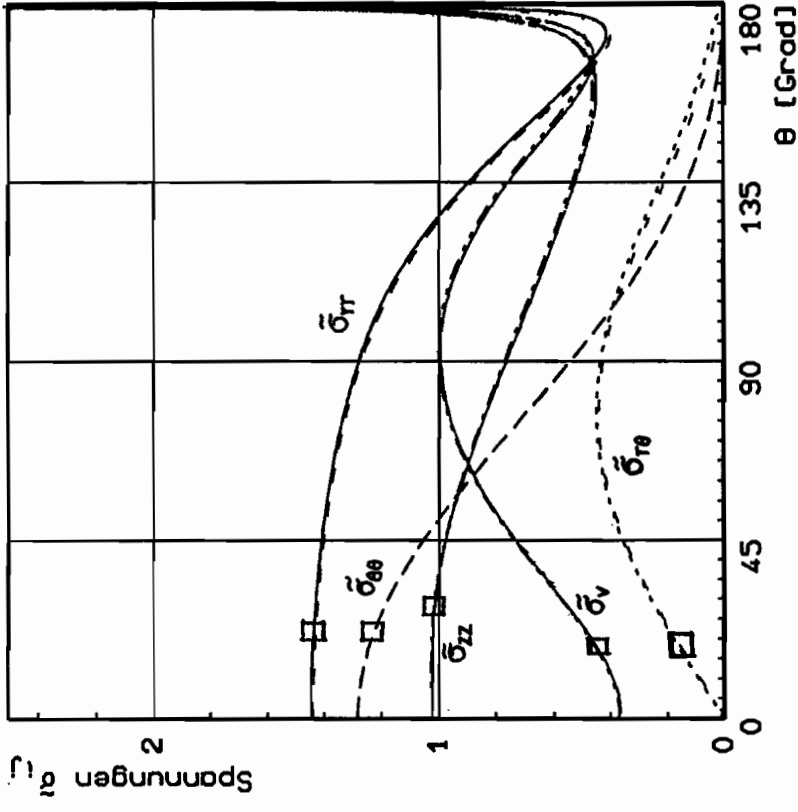


### Asymptotische Lösung (ESZ)

Vergleich mit den Ergebnissen von Ponte Castaneda  
 $\alpha = 0.75, \nu = 0.3$ , Normiert auf  $\bar{\sigma}_{\nu}(\theta_p) = 1$

— Ponte Castaneda

Bild 7.1a

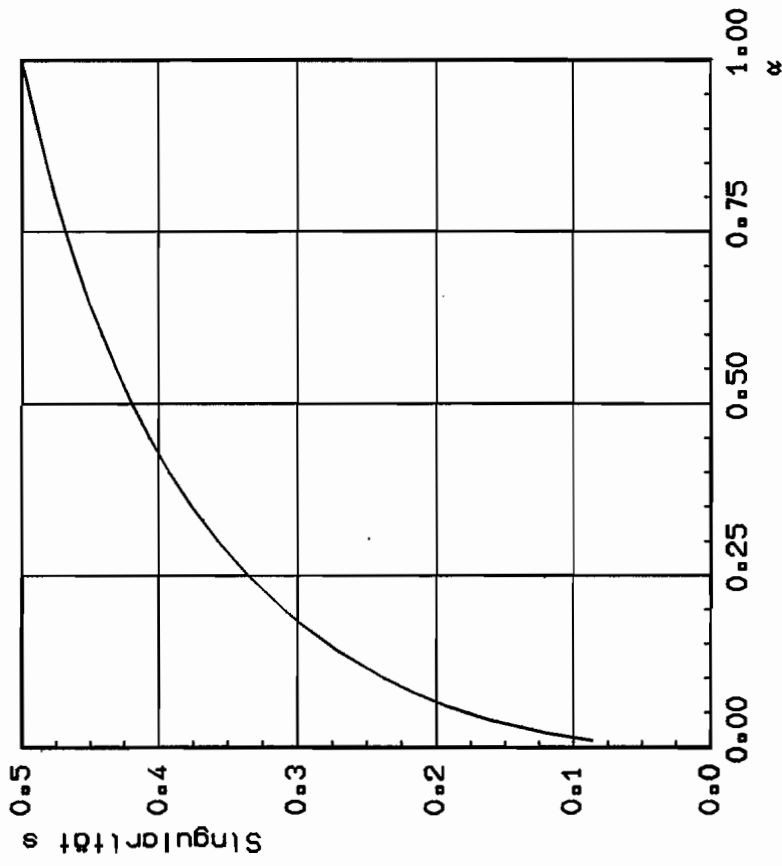


### Asymptotische Lösung (EVZ)

Vergleich mit den Ergebnissen von Ponte Castaneda  
 $\alpha = 0.75, \nu = 0.3$ , Normiert auf  $\bar{\sigma}_{\nu}(\theta_p) = 1$

— Ponte Castaneda

Bild 7.1b

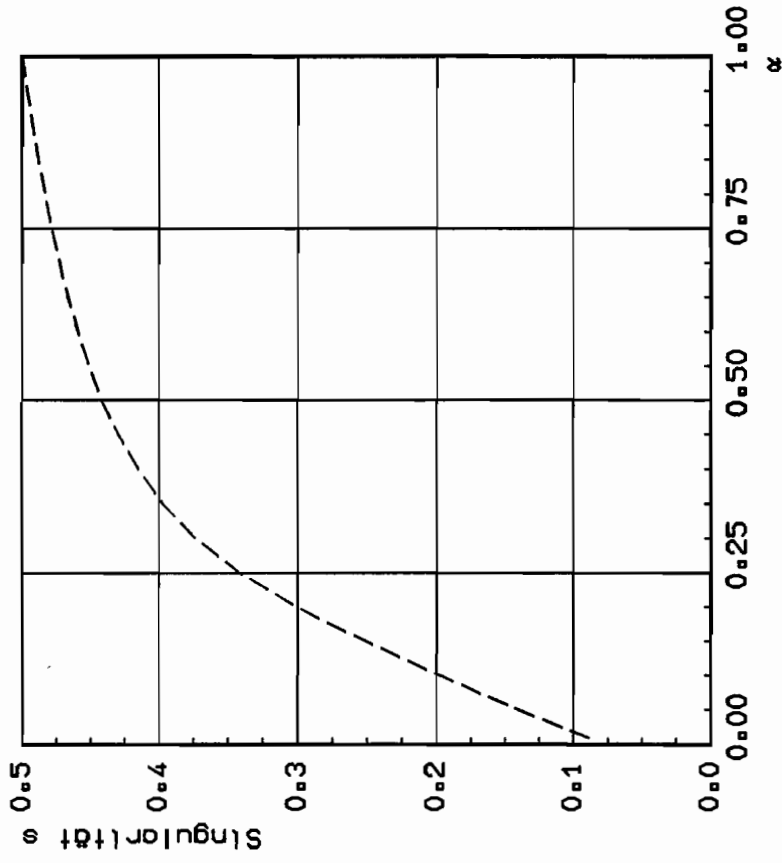


Asymptotische Lösung

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

— EVZ

Bild 7.2a

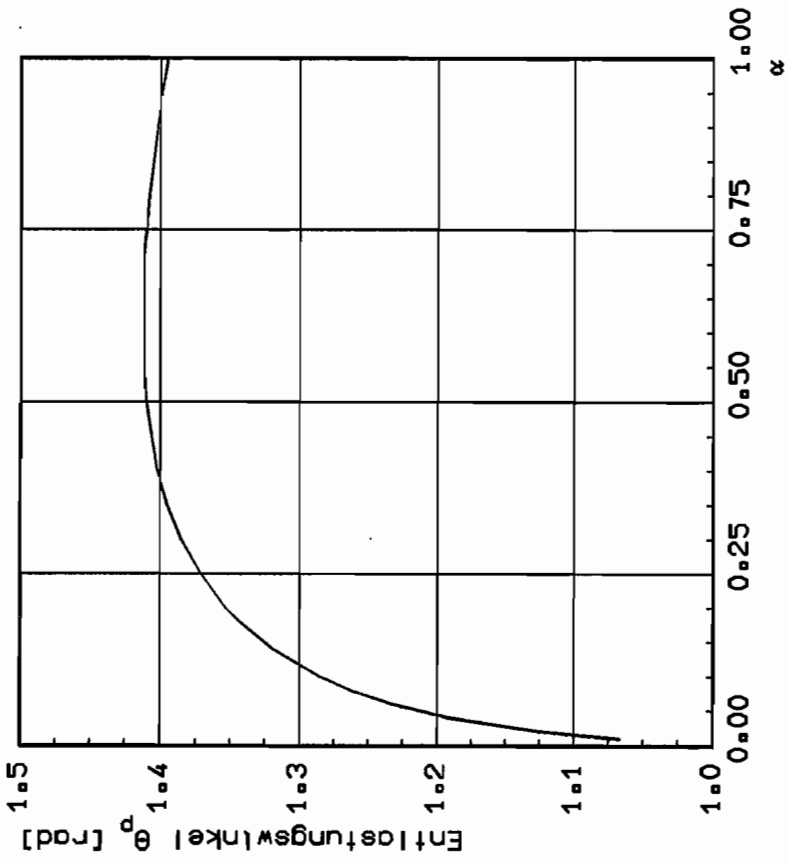


Asymptotische Lösung

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

--- EVZ

Bild 7.2b

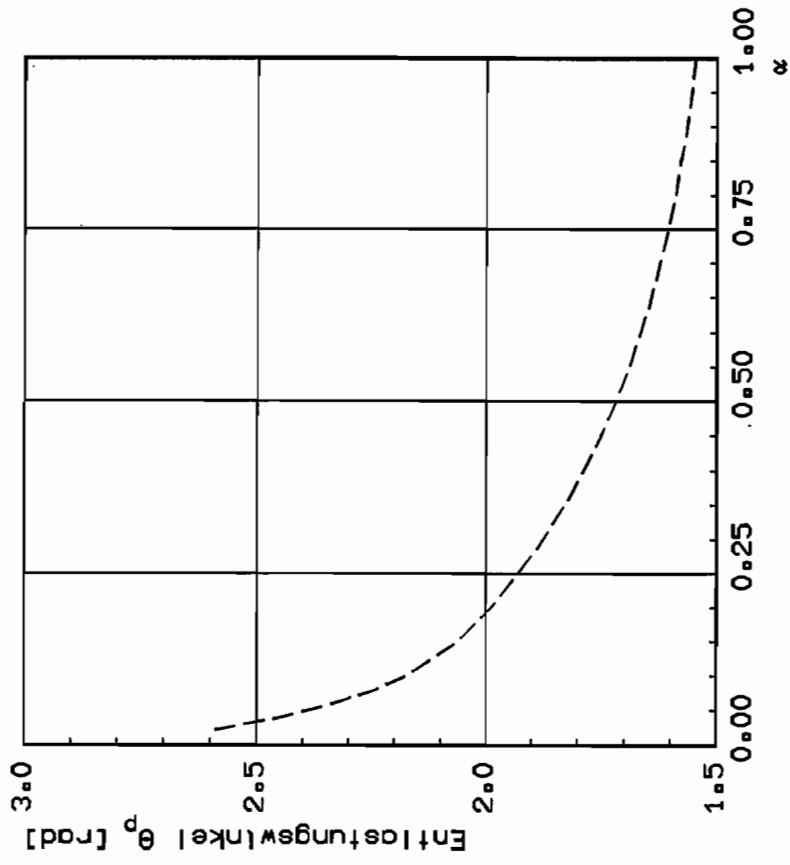


Asymptotische Lösung

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

— ESZ

Bild 7.3a



Asymptotische Lösung

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

--- EVZ

Bild 7.3b

Die Bilder 7.4, 7.5, 7.6 und 7.7 für Spannungen und Verzerrungen zeigen die Verteilungen in der Rißspitzenumgebung. Hier ist zu sehen, daß die Spannungen  $\tilde{\sigma}_{xx}$  und  $\tilde{\sigma}_v$  bei ESZ sowie  $\tilde{\sigma}_{xx}$ ,  $\tilde{\sigma}_{zz}$  und  $\tilde{\sigma}_v$  bei EVZ und die Verzerrungen  $\tilde{\epsilon}_{yy}$ ,  $\tilde{\gamma}_{xy}$  bei ESZ und EVZ sehr große Werte am freien Rißufer besitzen. Daß dies nicht nur ein "numerischer Effekt" durch das verwendete Schießverfahren ist, verdeutlichen die Vergleiche mit den nach dem FE-Verfahren ermittelten asymptotischen Spannungsverteilungen (Bilder 7.12a,c) und mit den Ergebnissen der Rißfortschrittssimulationen (Bilder 7.14a,b und 7.15a,b), die das gleiche Phänomen zeigen. Dennoch soll im folgenden auch der Versuch einer physikalischen Erklärung im Rahmen des hier verwendeten geometrisch linearen Modell (trotz singulärer Spannungs- und Verzerrungsfelder an der Rißspitze) unternommen werden.

Wir betrachten ein Materieteilchen m nahe der Rißspitze in der Belastungszone  $\theta < \theta_p$  (siehe Bild 3.3) im Abstand  $\eta$  zum Ligament. Während der Riß mit der Geschwindigkeit  $v$  ins Material hineinwächst (siehe Bild 3.2), bewegt sich das Materieteilchen m demgegenüber mit der Geschwindigkeit

$$\xi = \dot{r} \cos\theta - \eta \dot{\theta} = -v \quad (7.1)$$

relativ zur Rißspitze hin. Während dieses Prozesses durchläuft das Teilchen eine Belastungsgeschichte, bis es die Grenze zum Entlastungsbereich  $\xi = \eta \cot\theta_p$  erreicht hat. Seine Verzerrungsenergiedichte besteht aus einem elastischen und einem plastischen Anteil

$$w(r,\theta) = A^2 \sigma_0 \epsilon_0 r^{-2s} \frac{1}{3} [(1+\nu)\tilde{\sigma}_v^2 + \frac{1-2\nu}{2}\tilde{\sigma}_{kk}^2 + \frac{3}{2}\omega\tilde{\sigma}_v^2] - \frac{\omega}{2}\sigma_0\epsilon_0. \quad (7.2)$$

Da der letzte Term nicht von  $r$  abhängt, kann er im asymptotischen Fall vernachlässigt werden. Die Verzerrungsenergiedichte wächst also mit abnehmenden  $\xi$  nach der Gleichung

$$w(\eta,\theta) = A^2 \sigma_0 \epsilon_0 \left(\frac{\eta}{\sin\theta}\right)^{-2s} [\tilde{w}_e(\theta) + \tilde{w}_p(\theta)] \quad (7.3)$$

und erreicht den höchsten Wert bei  $\xi_p = \eta \cot\theta_p$ . Für kleine Werte  $\eta$  wird  $w$  sehr groß

und für ein Materieteilchen im Ligament,  $\eta \rightarrow 0$ , wächst sie wegen der Singularität von Spannungen und Verzerrungen über alle Grenzen. Nach dem Überschreiten des Grenzwinkels  $\theta_p$  erfolgt eine Entlastung mit  $\dot{\sigma}_v < 0$ . Weil das Material elastisch-plastisch ist und bei Bealstungs- und Entlastungsprozessen unterschiedliches Verhalten zeigt, kann der plastische Anteil der Verzerrungen nicht wiedergewonnen werden, bleibt also in dem Teilchen zurück. Das heißt, daß alle Materieteilchen auf einer Linie  $\eta = \text{const}$  und  $\xi < \xi_p$  gleiche plastische Verzerrungen erfahren haben. Insbesondere für  $\eta \rightarrow 0$  sind diese bleibenden Verzerrungsanteile über alle Grenzen groß. Die Verzerrungskomponente  $\gamma_{xy}$  kann auch nicht durch gleich große elastische Verzerrungsanteile bei Entlastung kompensiert werden, da auf den freien Rißufern  $\sigma_{xy}$  unabhängig vom Abstand zur Rißspitze verschwindet. Aufgrund des Potenzansatzes Gl. (3.7) würden die Winkelfunktionen der Verzerrungen für  $\eta \rightarrow 0$ , also  $\theta \rightarrow \pi$  diese Singularitäten zeigen müssen (Bilder 7.6 und 7.7).

Bei allen Entlastungsprozessen in elastisch-plastischen Kontinua bleiben wegen der einzuhaltenden Kompatibilitätsbedingungen Eigenspannungen im Körper zurück, sofern es sich nicht um homogene Spannungs- und Verzerrungszustände handelt. Diese Eigenspannungen sind um so größer, je größer die Verzerrungsgradienten im Körper zum Zeitpunkt der Entlastung waren. Die größten Verzerrungsgradienten haben Materiebereiche nahe dem Ligament erfahren, so daß für  $\eta \rightarrow 0$  und  $\xi < \xi_p$ , also  $\theta \rightarrow \pi$ , auch die verbliebenen Eigenspannungen über alle Grenzen wachsen müssen, und zwar unabhängig vom Abstand zur Rißspitze,  $|\xi| \rightarrow r$ . Während also die Winkelfunktionen der Spannungskomponenten  $\tilde{\sigma}_{yy}$  und  $\tilde{\sigma}_{xy}$  wegen der Randbedingungen auf dem freien Rißufer verschwinden, müssen  $\tilde{\sigma}_{xx}$  beim ESZ und  $\tilde{\sigma}_{xx}$  und  $\tilde{\sigma}_{zz}$  beim EVZ für  $\theta \rightarrow \pi$  singularär werden (Bilder 7.4 und 7.5). Selbst wenn man in der Nähe des Rißufers eine Rückplastizierungszone einführt (siehe Bild 3.3), bleiben die Spannungen am Rißufer über alle Grenzen groß (siehe die Diskussion bei YUAN & BROCKS /92/ und CASTANEDA /18/). Also, dies ist nicht ein numerischer Effekt durch die hier verwendeten numerischen Verfahren und sondern durch das in der Bruchmechanik verwendete Rißmodell verursacht. Hinsichtlich der unendlich großen Spannungen an der Rißspitze in der linear elastischen Bruchmechanik und in der elastisch-plastischen Bruchmechanik für den stehenden Riß, nämlich der HRR-Theorie, ist eine Prozeßzone

direkt an der Rißspitze eingeführt worden, wo die asymptotischen Nahfeldlösungen nicht gelten. Hiernach deutet es hin, daß an der stationär wachsenden Rißspitze auch eine Prozeßzone eingeführt werden müßte, wo das Verhalten durch die asymptotischen Lösungen nicht ganz richtig beschrieben werden kann.

In Bildern 7.6 und 7.7 ist noch zu sehen, daß  $\tilde{\gamma}_{xy}$  am Rißufer vom Materialverhalten abhängt und unterschiedliche Vorzeichen hat. Dies kann darauf zurückgeführt werden, daß die Bestimmungsgleichung für  $\tilde{\gamma}_{xy}^P$  (3.35) von der plastischen Verzerrung  $\tilde{\gamma}_{xy}^P$  in der Entlastungslinie abhängt, die aber vom Materialverhalten abhängig ist. Hierzu werden die entsprechenden Werte für  $\tilde{\gamma}_{xy}^P(\theta_p)$  wie folgt gegeben:

$\alpha:$	0.5	0.1	0.05	0.03	
$\tilde{\gamma}_{xy}^P:$	0.0827	$-0.972 \cdot 10^{-2}$	$-0.212 \cdot 10^{-1}$	$-0.228 \cdot 10^{-1}$	(ESZ)
	0.392	-0.792	-0.716	-0.766	(EVZ)

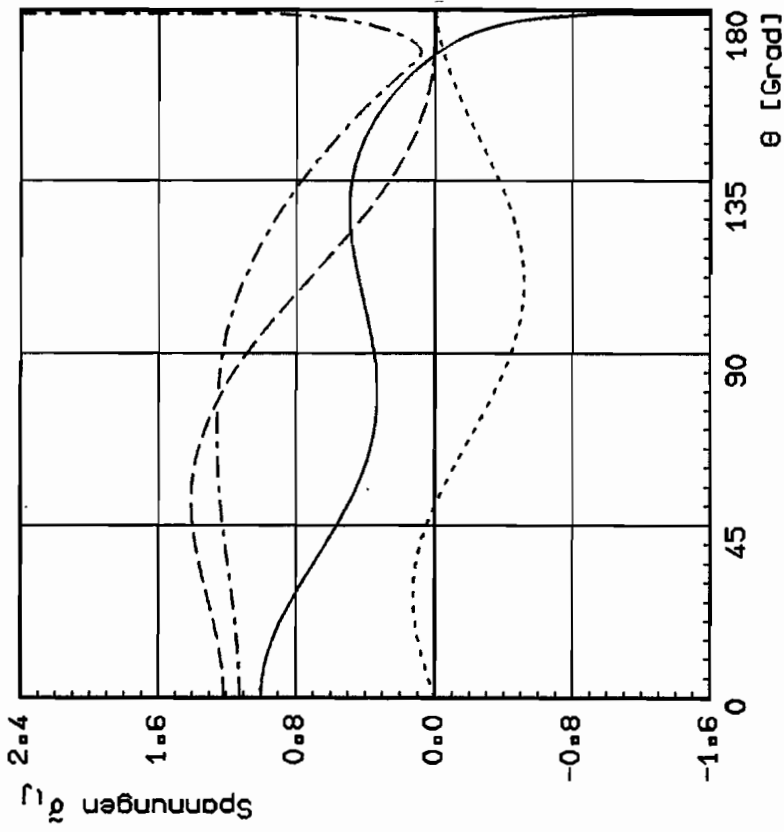
An den freien Rißufern  $\theta = \pi$  muß natürlich auch nicht mehr, wie im Ligament  $\theta=0$ , die "Symmetriebedingung"  $\gamma_{xy} = 0$  eingehalten werden (Bilder 7.6 und 7.7), da die Materieteilchen für  $\theta \rightarrow +\pi$  und  $\theta \rightarrow -\pi$  nicht mehr verbunden sind und keine Kompatibilitätsbedingung über den Riß hinweg gilt. Dies wurde auch in /93/ durch Untersuchung des stationär dynamischen wachsenden Rißspitzenfeldes bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten mit Finite-Elemente-Methode bestätigt.

Die Winkelfunktionen der Spannungen sind so normiert, daß  $\tilde{\sigma}_{xx}(0)=1$  ist. Man kann also nicht Spannungen diskutieren, denn sie hängen von der Amplitude A ab und die wiederum wird von der Verfestigung abhängen. Es können nur relative Aussagen zum Verhältnis von Spannungskomponenten zueinander gemacht werden.  $\tilde{\sigma}_{yy}/\tilde{\sigma}_{xx}$  und  $\tilde{\sigma}_v/\tilde{\sigma}_{xx}$  bei ESZ im Ligament ( $\theta=0$ ) nehmen zu mit abnehmendem  $\alpha$  (geringerer Verfestigung).  $\tilde{\sigma}_{yy}/\tilde{\sigma}_{xx}$  bei EVZ im Ligament ( $\theta=0$ ) nehmen zu mit abnehmendem  $\alpha$  (geringerer Verfestigung) wie bei ESZ. Aber für  $\alpha < 0.05$  ist  $\tilde{\sigma}_{yy} < \tilde{\sigma}_{xx}$ . Da in  $\sigma_v$  die Quadrate der Hauptspannungsdifferenzen eingehen, wird  $\tilde{\sigma}_v/\tilde{\sigma}_{xx}$  mit abnehmendem  $\alpha$  erst kleiner, bis  $\tilde{\sigma}_{xx}=\tilde{\sigma}_{yy}=\tilde{\sigma}_{zz}$  also  $\tilde{\sigma}_v=0$  bei etwa  $\alpha=0.05$  wird, danach steigt  $\tilde{\sigma}_v/\tilde{\sigma}_{xx}$  wieder an. Ein Nachweis dieser Effekte bei EVZ mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wegen des hohen Rechenaufwandes bei Variation des Verfestigungskoeffizienten  $\alpha$  und hinreichend

feiner Elementierung nicht praktikabel. Die Verzerrungen  $\tilde{\epsilon}_{yy}$  und  $\tilde{\epsilon}_{zz}$  bei ESZ streben mit wachsendem  $\alpha$  im Bereich  $0 < \theta < 135^\circ$  gegen konstante Werte +1 bzw. -1.  $\tilde{\epsilon}_{xx}/\tilde{\epsilon}_{yy}$  nehmen mit  $\alpha$  ab. Dies wurde auch in /93/ durch Untersuchung des stationär dynamischen wachsenden Rißspitzenfeldes bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten mit FEM bestätigt. Die Verschiebung  $\tilde{u}_y$  für ESZ bei etwa  $\theta = 90^\circ$  im Bild 7.8 nimmt zu mit der abnehmenden Verfestigung und erreicht seine größten Werte im Rißspitzenfeld, während die Verschiebung  $\tilde{u}_y$  für EVZ im Bild 7.9 die größten Werte nahe dem Rißufer erfährt.

Besonders ist es in Bildern 7.8 und 7.9 erwähnenswert, daß die Verschiebung  $\tilde{u}_x$  am Rißufer bei EVZ einen positiven Wert und bei ESZ einen negativen Wert einnimmt. Dies ist die Ursache, warum die Rißöffnungsprofile (Bild 7.10) bei EVZ einen strumpfen und bei ESZ einen spitzen Winkel bilden.



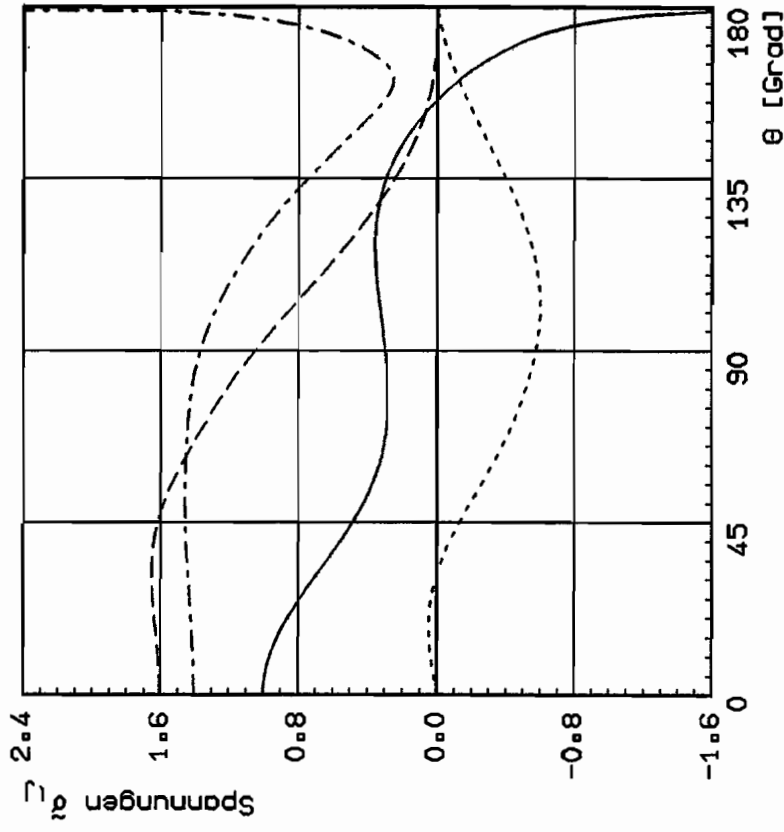


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 80.79^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

—  $\bar{\sigma}_{xx}$   
 - -  $\bar{\sigma}_{yy}$   
 ···  $\bar{\sigma}_{xy}$   
 - · -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.4a

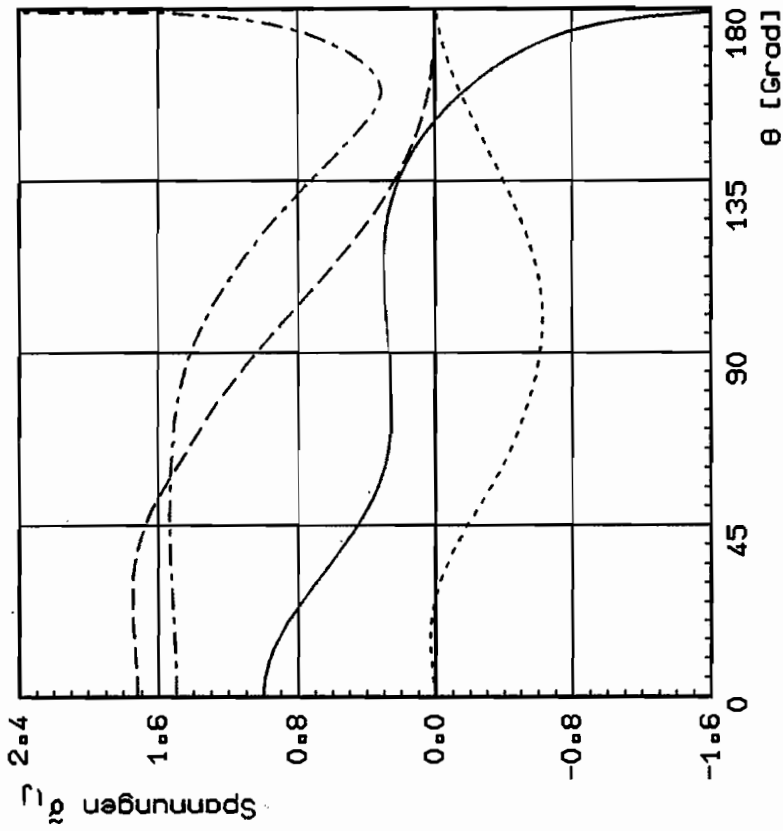


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 73.63^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

—  $\bar{\sigma}_{xx}$   
 - -  $\bar{\sigma}_{yy}$   
 ···  $\bar{\sigma}_{xy}$   
 - · -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.4b

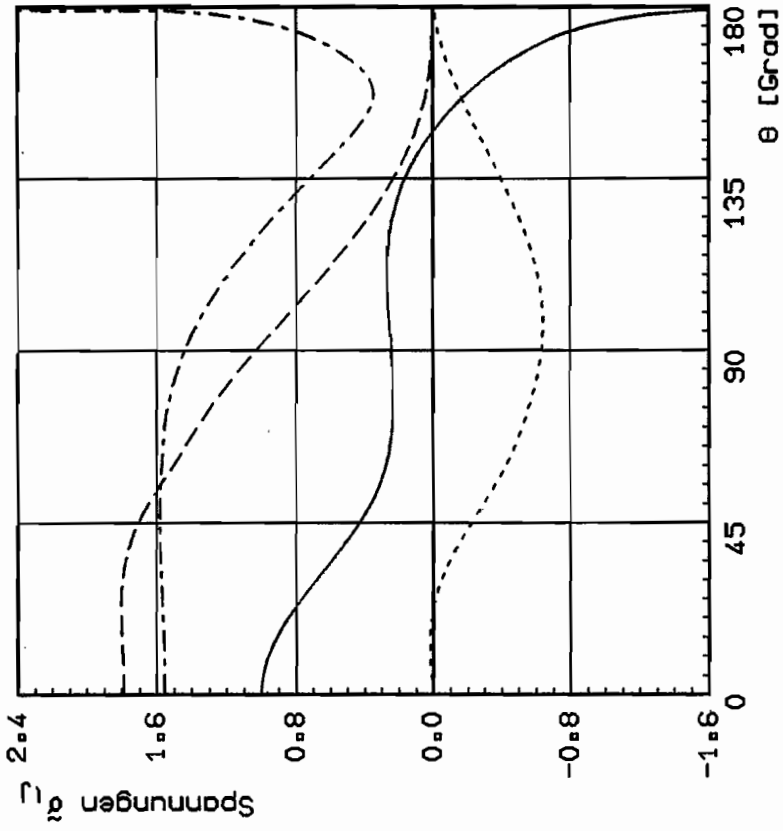


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 69.56^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\bar{\sigma}_{xx}$
- -  $\bar{\sigma}_{yy}$
- .....  $\bar{\sigma}_{xy}$
- · -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.4c

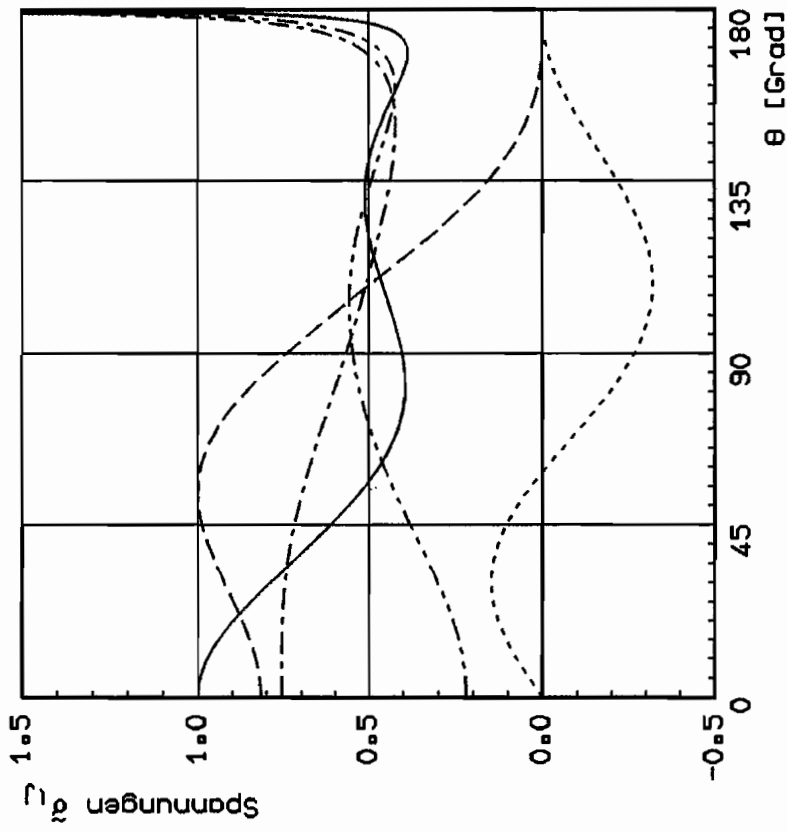


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 66.63^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\bar{\sigma}_{xx}$
- -  $\bar{\sigma}_{yy}$
- .....  $\bar{\sigma}_{xy}$
- · -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.4d

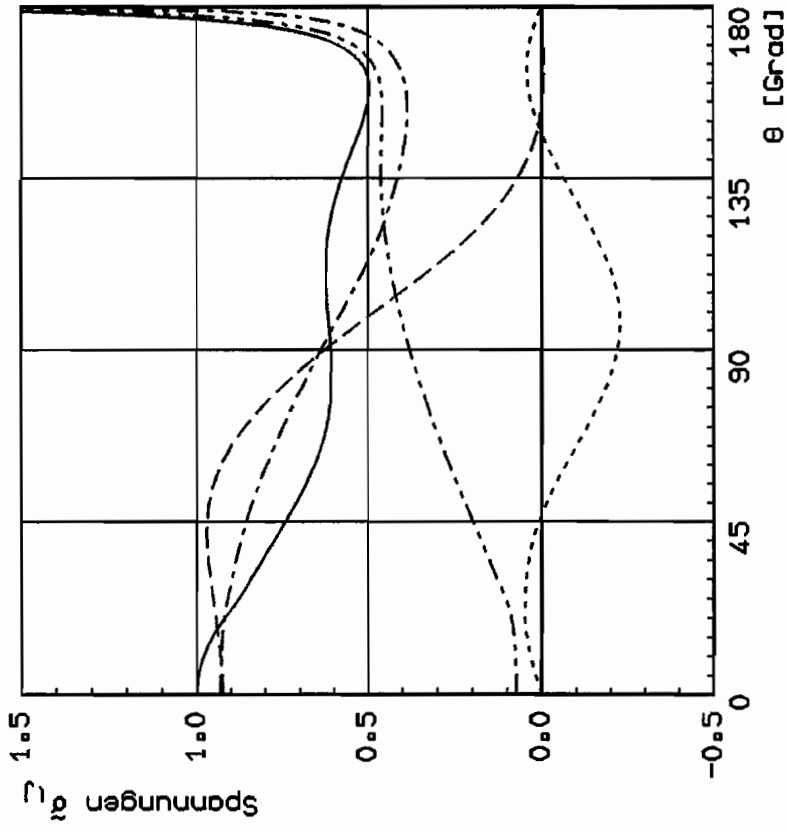


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 98.38^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\bar{\sigma}_{xx}$
- -  $\bar{\sigma}_{yy}$
- ·  $\bar{\sigma}_{xy}$
- ·  $\bar{\sigma}_{zz}$
- -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.5a

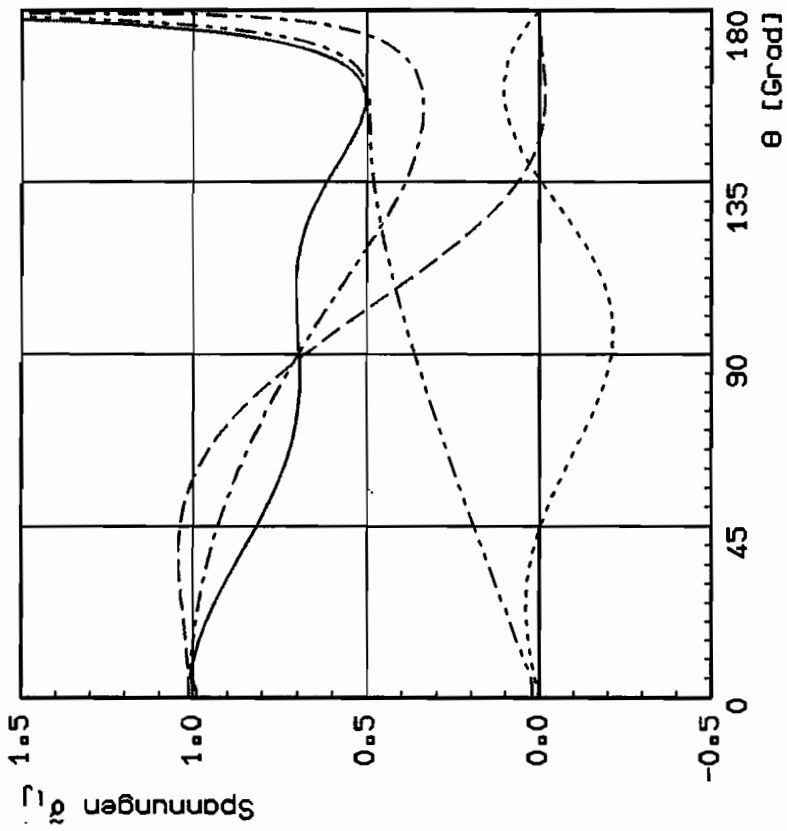


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 124.56^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\bar{\sigma}_{xx}$
- -  $\bar{\sigma}_{yy}$
- ·  $\bar{\sigma}_{xy}$
- ·  $\bar{\sigma}_{zz}$
- -  $\bar{\sigma}_v$

Bild 7.5b

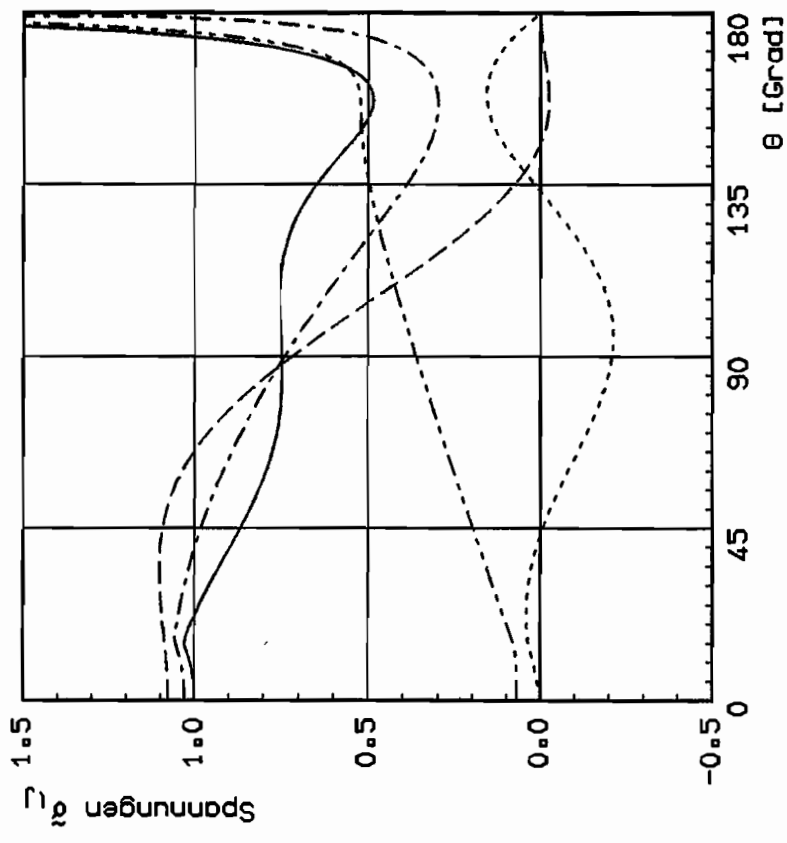


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 136.88^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\tilde{\sigma}_{xx}$
- -  $\tilde{\sigma}_{yy}$
- · ·  $\tilde{\sigma}_{xy}$
- · -  $\tilde{\sigma}_{zz}$
- - -  $\tilde{\sigma}_v$

Bild 7.5c

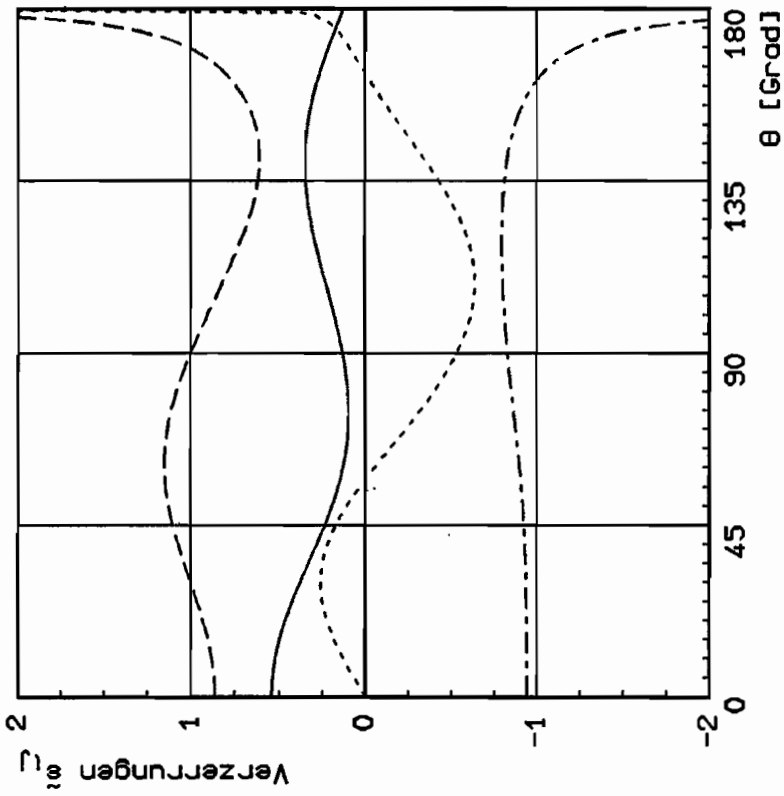


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 144.27^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{\sigma}_{xx}(0) = 1$

- $\tilde{\sigma}_{xx}$
- -  $\tilde{\sigma}_{yy}$
- · ·  $\tilde{\sigma}_{xy}$
- · -  $\tilde{\sigma}_{zz}$
- - -  $\tilde{\sigma}_v$

Bild 7.5d

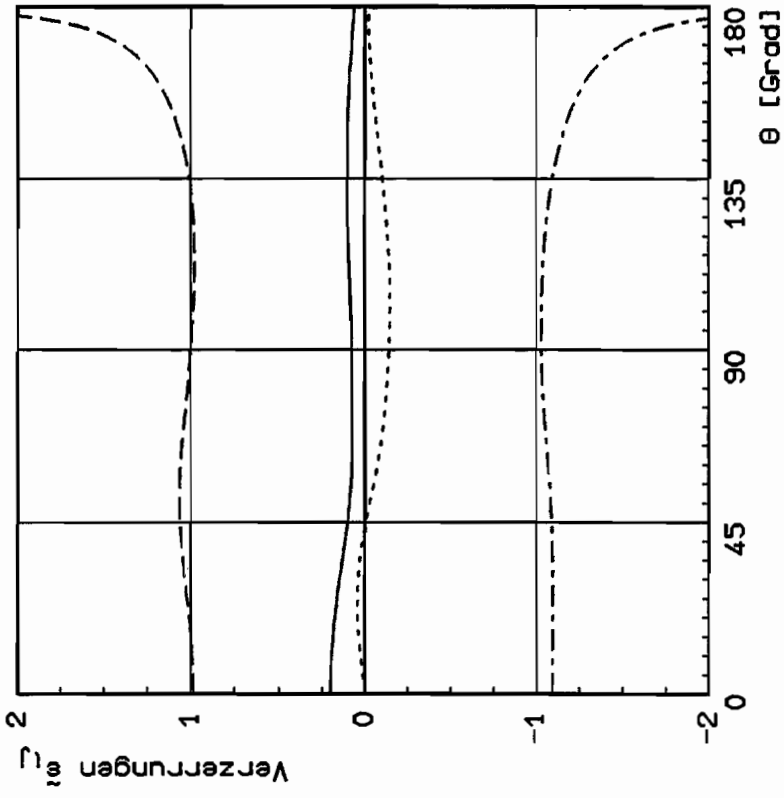


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 80.79^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\epsilon_{xx}$   
 - -  $\epsilon_{yy}$   
 .....  $\epsilon_{xy}$   
 - · -  $\epsilon_{zz}$

Bild 7.6a

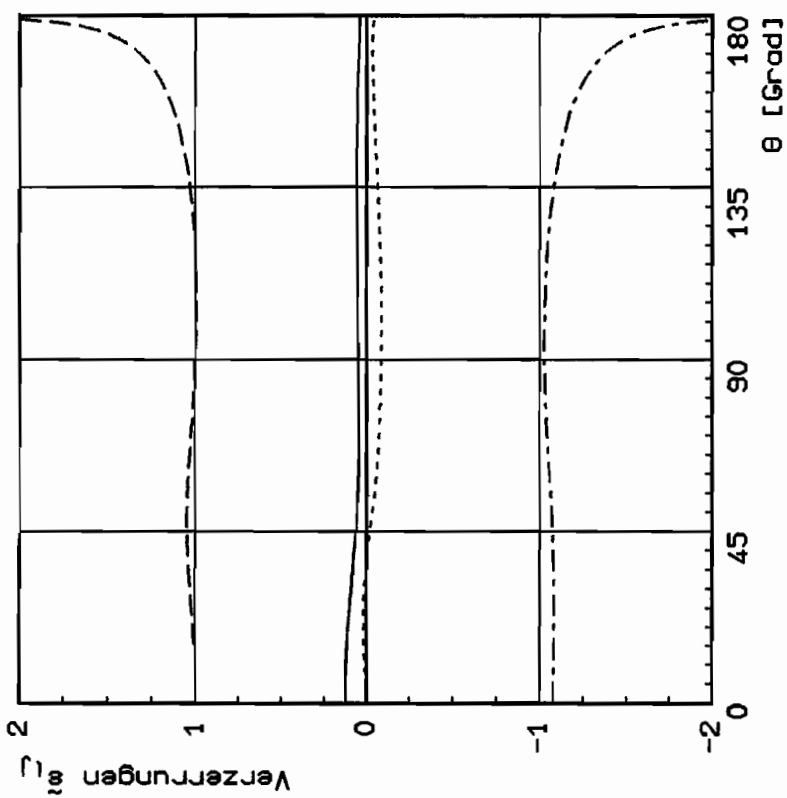


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 73.63^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\epsilon_{xx}$   
 - -  $\epsilon_{yy}$   
 .....  $\epsilon_{xy}$   
 - · -  $\epsilon_{zz}$

Bild 7.6b

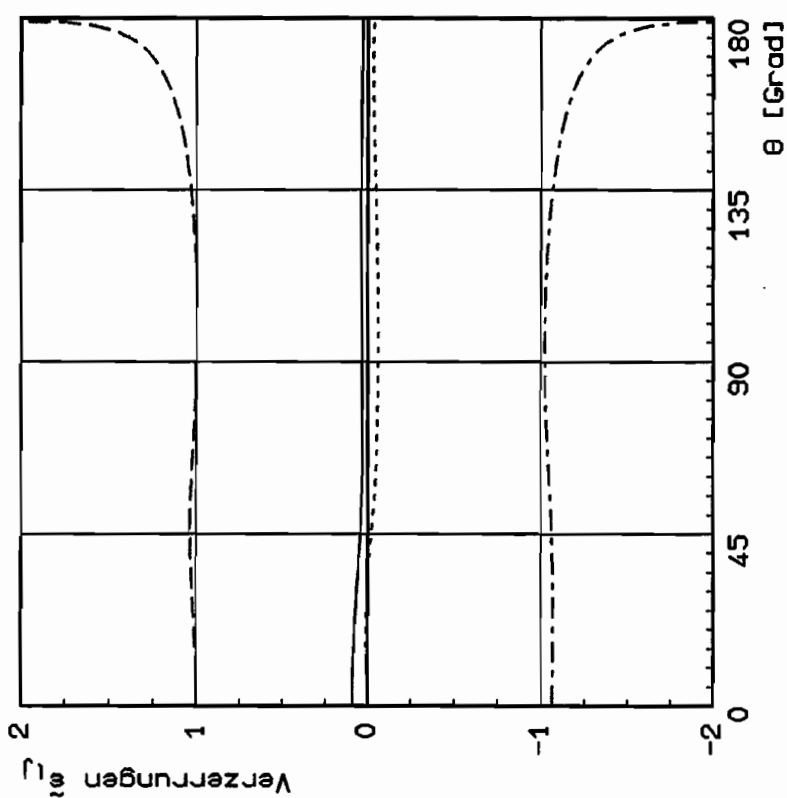


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\kappa = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 69.56^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{e}_{yy}(90^\circ) = 1$

- $\tilde{e}_{xx}$
- -  $\tilde{e}_{yy}$
- ...  $\tilde{e}_{xy}$
- .  $\tilde{e}_{zz}$

Bild 7.6c

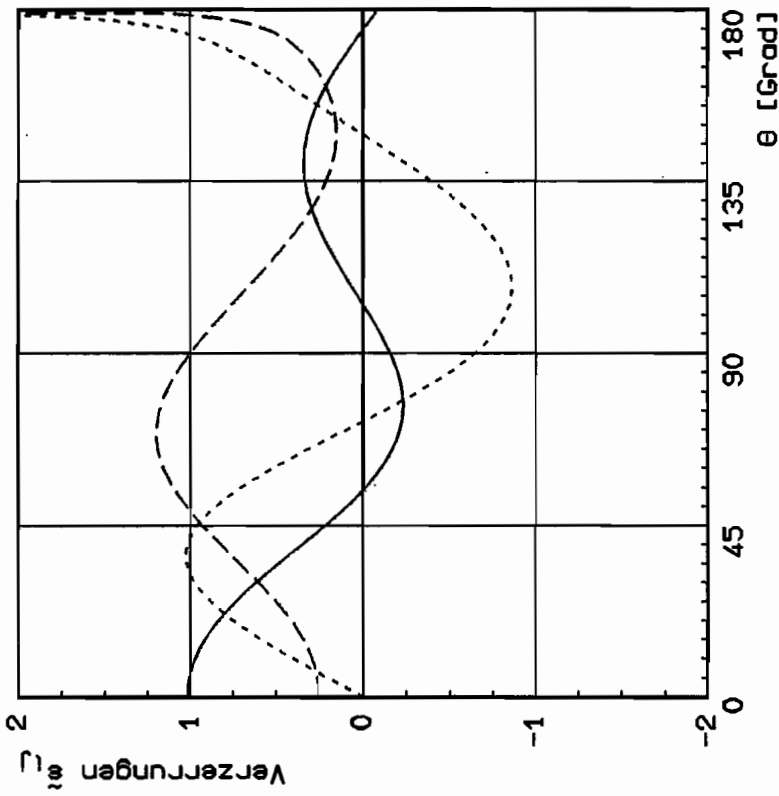


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\kappa = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 66.63^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{e}_{yy}(90^\circ) = 1$

- $\tilde{e}_{xx}$
- -  $\tilde{e}_{yy}$
- ...  $\tilde{e}_{xy}$
- .  $\tilde{e}_{zz}$

Bild 7.6d

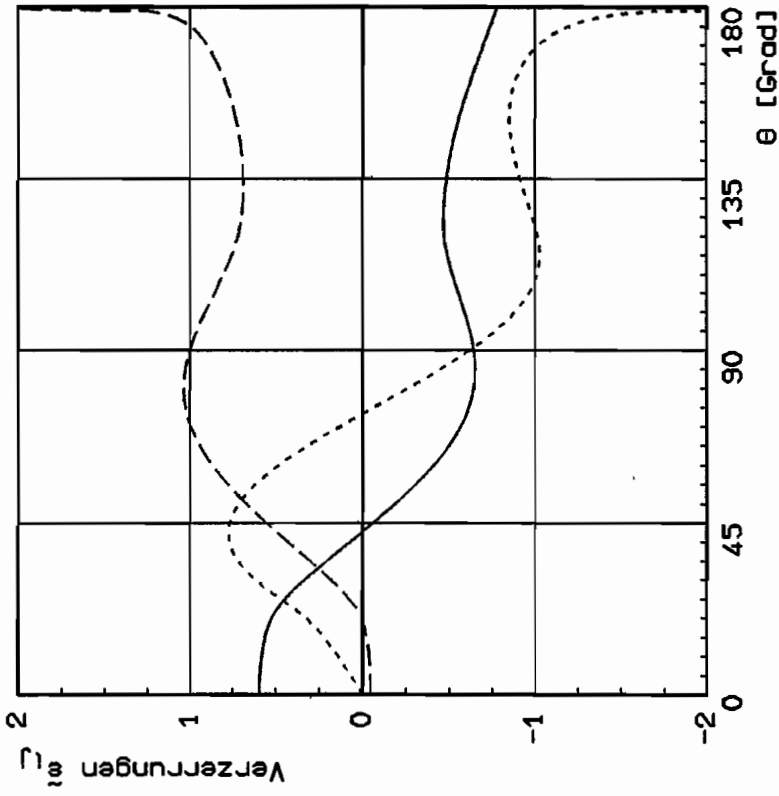


Asymptotische Lösung (EVZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 98.38^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\epsilon_{xx}$   
 - -  $\epsilon_{yy}$   
 ···  $\gamma_{xy}$

Bild 7.7a

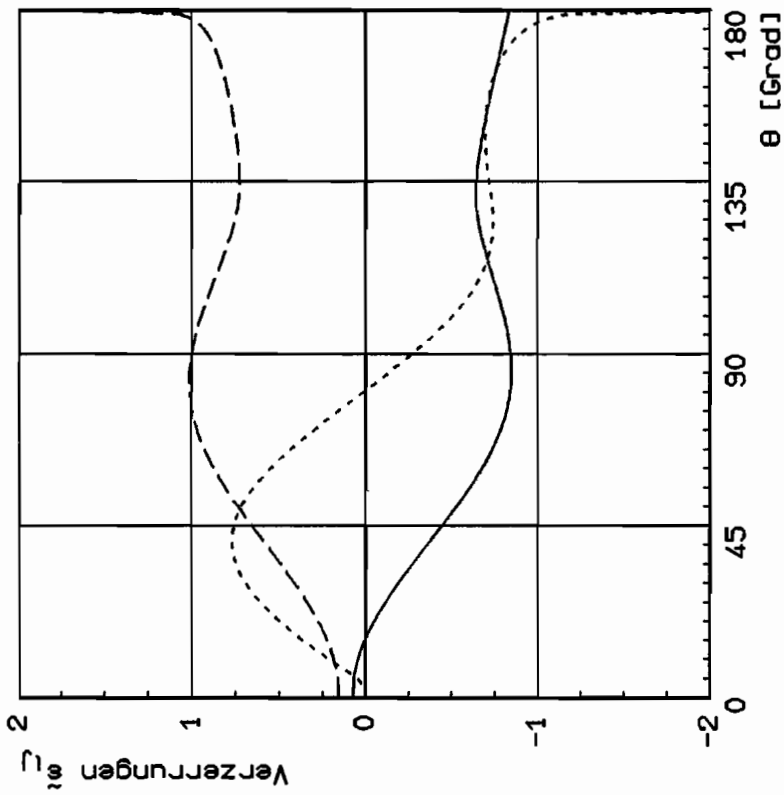


Asymptotische Lösung (EVZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 124.56^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\epsilon_{xx}$   
 - -  $\epsilon_{yy}$   
 ···  $\gamma_{xy}$

Bild 7.7b

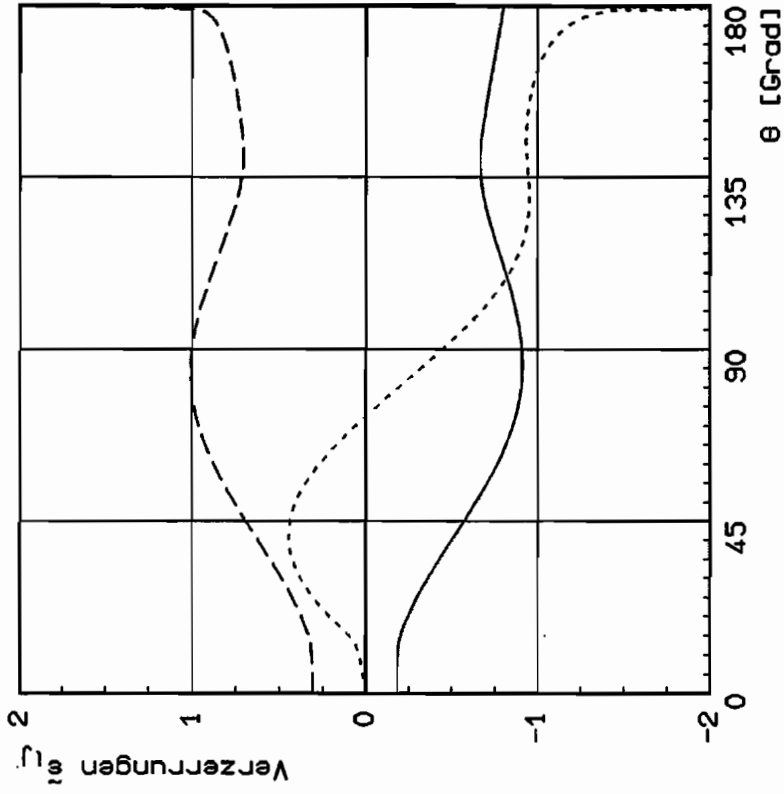


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 136.88^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\bar{\epsilon}_{xx}$   
 - - -  $\bar{\epsilon}_{yy}$   
 .....  $\tau_{xy}$

Bild 7.7c



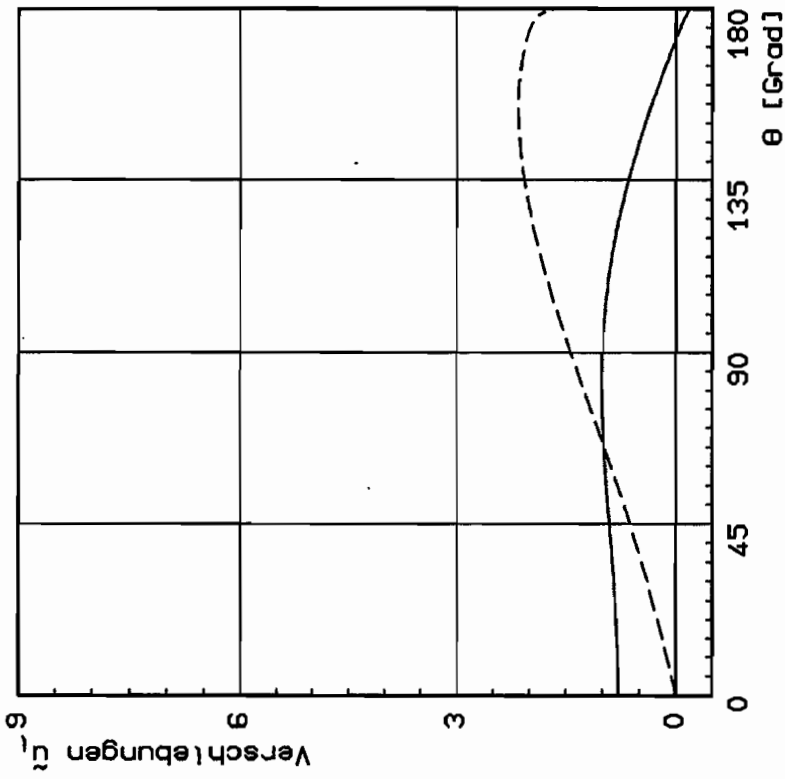
Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 144.27^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\bar{\epsilon}_{xx}$   
 - - -  $\bar{\epsilon}_{yy}$   
 .....  $\tau_{xy}$

Bild 7.7d



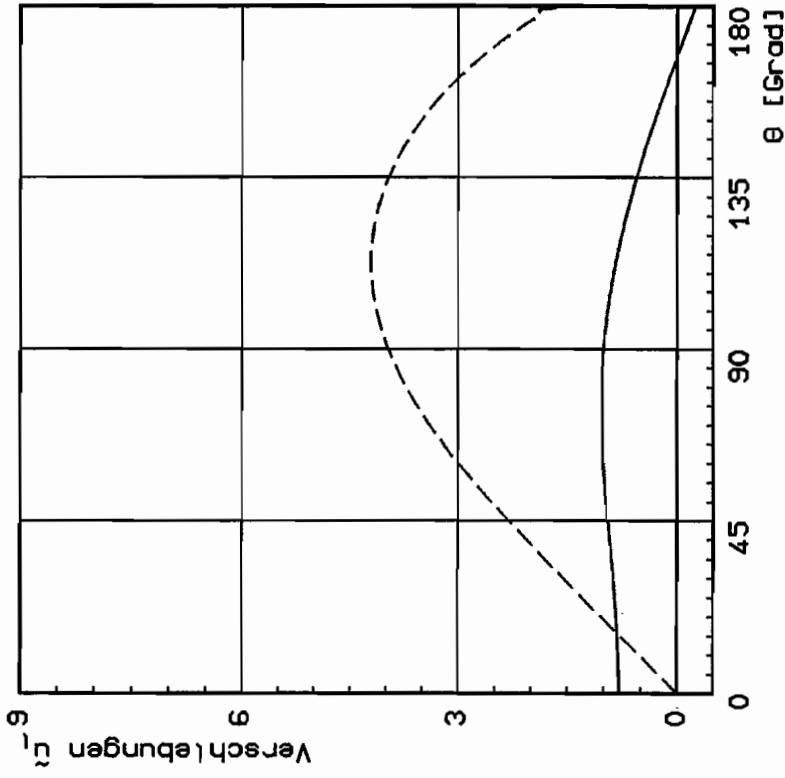


Asymptotische Lösung (ESZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 80.79^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.8a

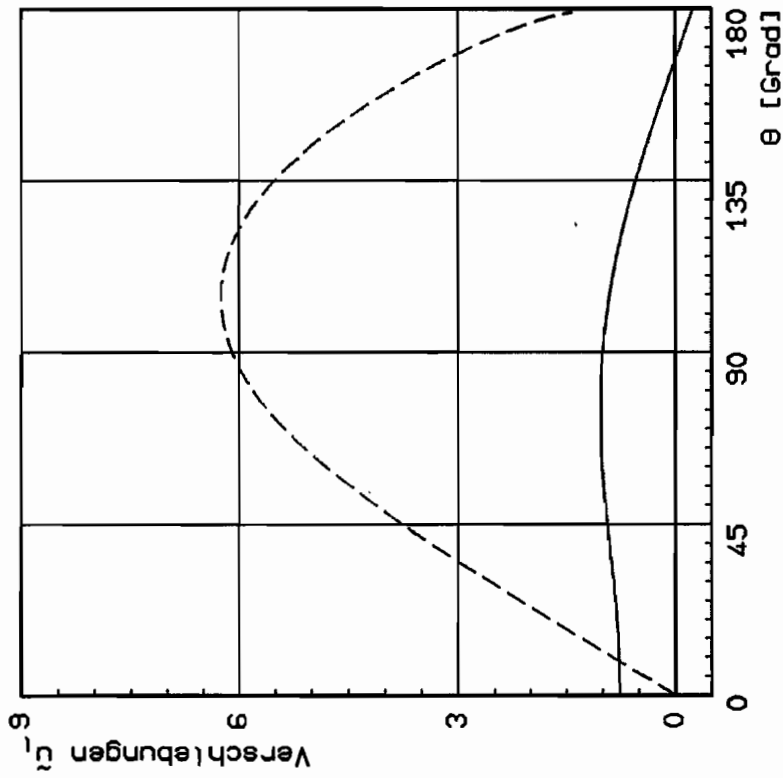


Asymptotische Lösung (ESZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 73.63^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.8b

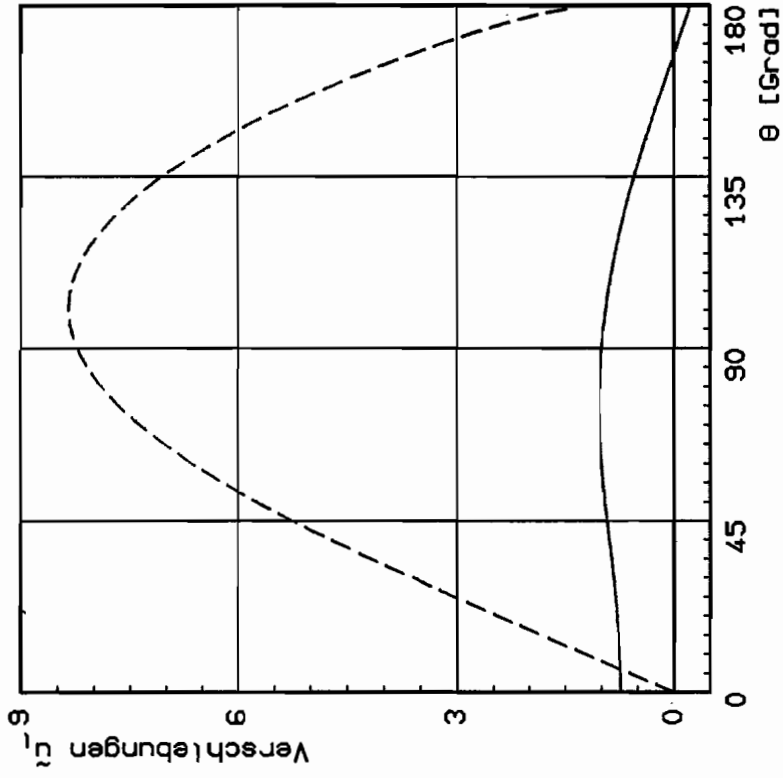


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 69.56^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.8c

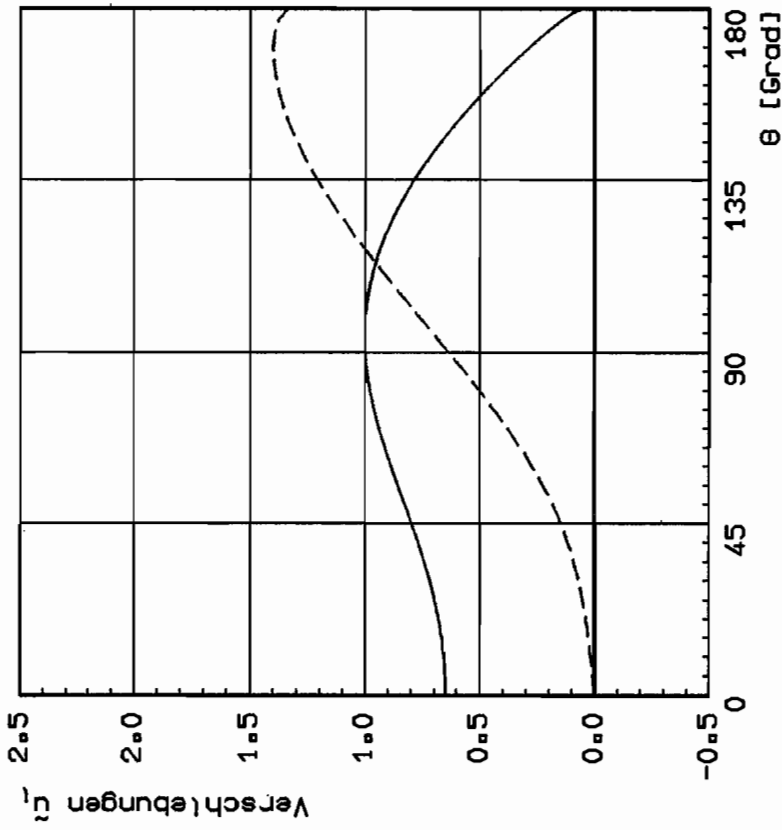


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 66.63^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.8d

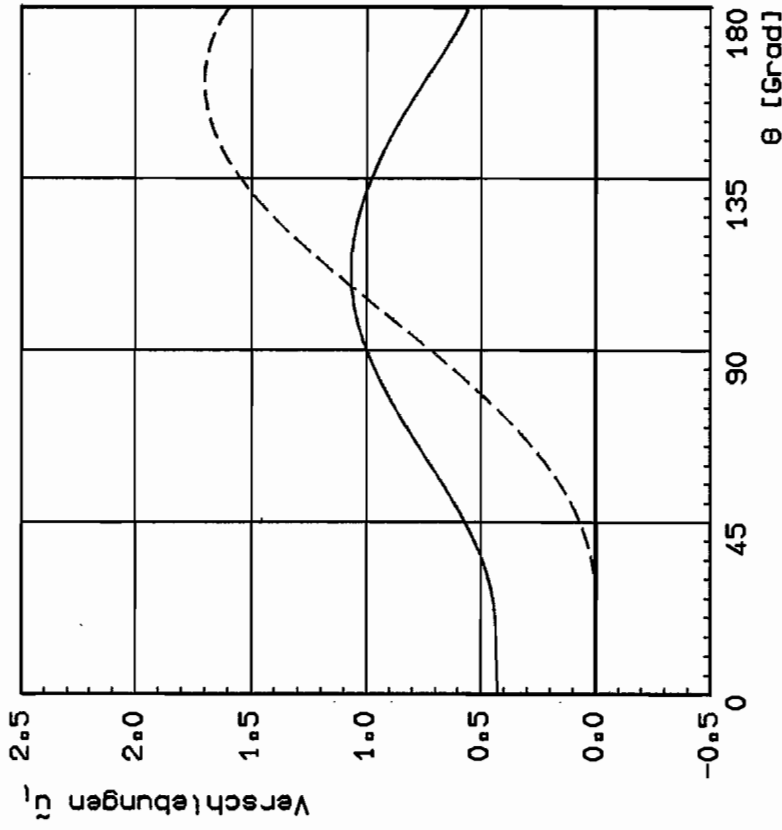


Asymptotische Lösung (EVZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3, \theta_p = 98.38^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.9a

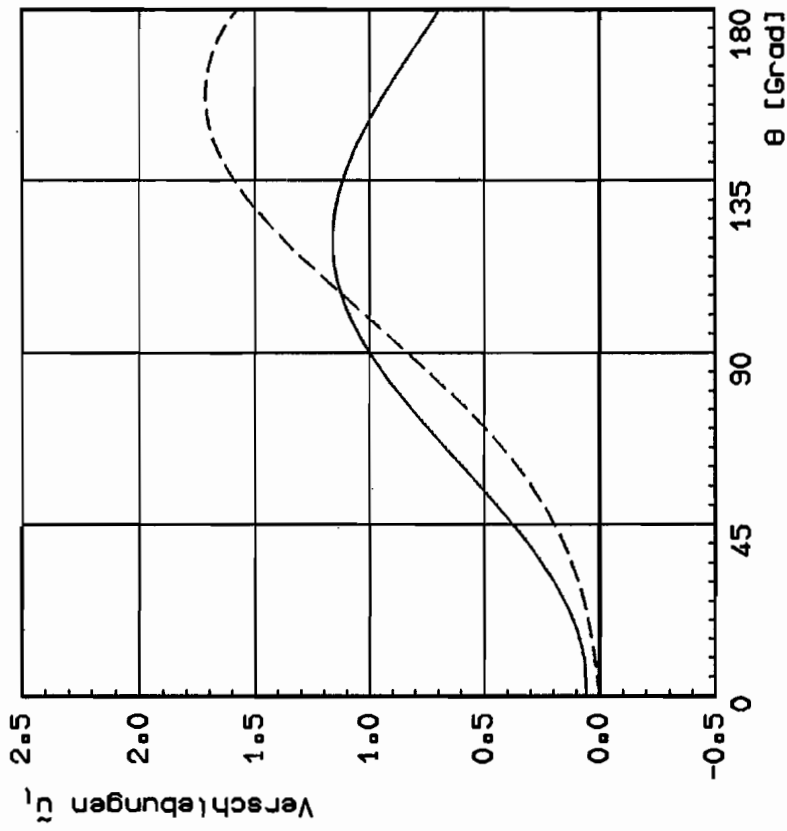


Asymptotische Lösung (EVZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.10, \nu = 0.3, \theta_p = 124.56^\circ$   
 Normiert auf  $\bar{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\bar{u}_x$   
 - - -  $\bar{u}_y$

Bild 7.9b

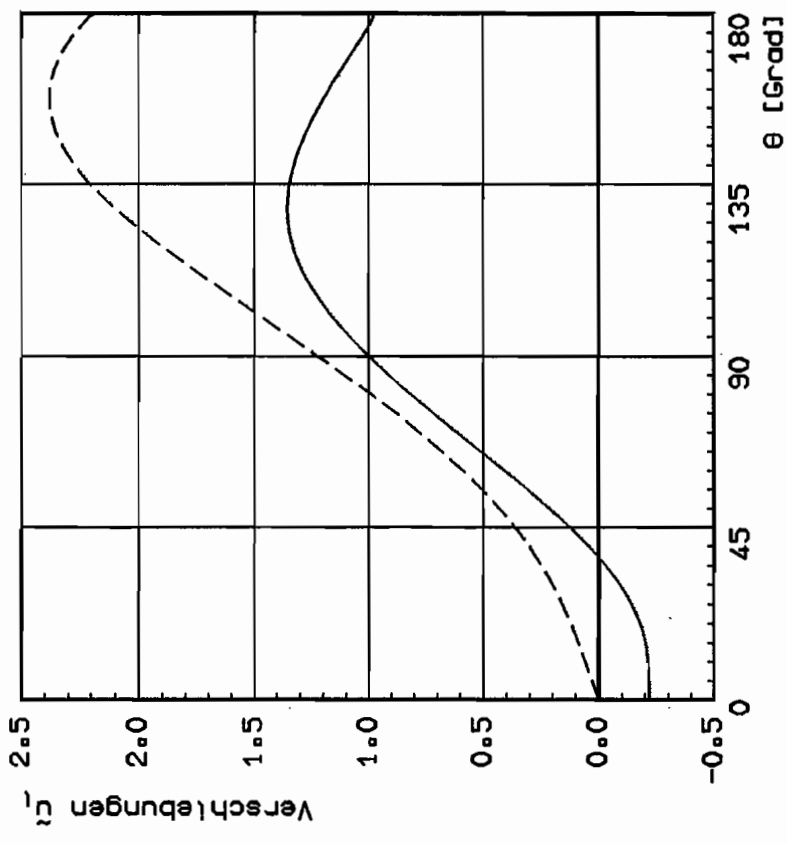


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.05, \nu = 0.3, \theta_p = 136.88^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\tilde{u}_x$   
 ---  $\tilde{u}_y$

Bild 7.9c

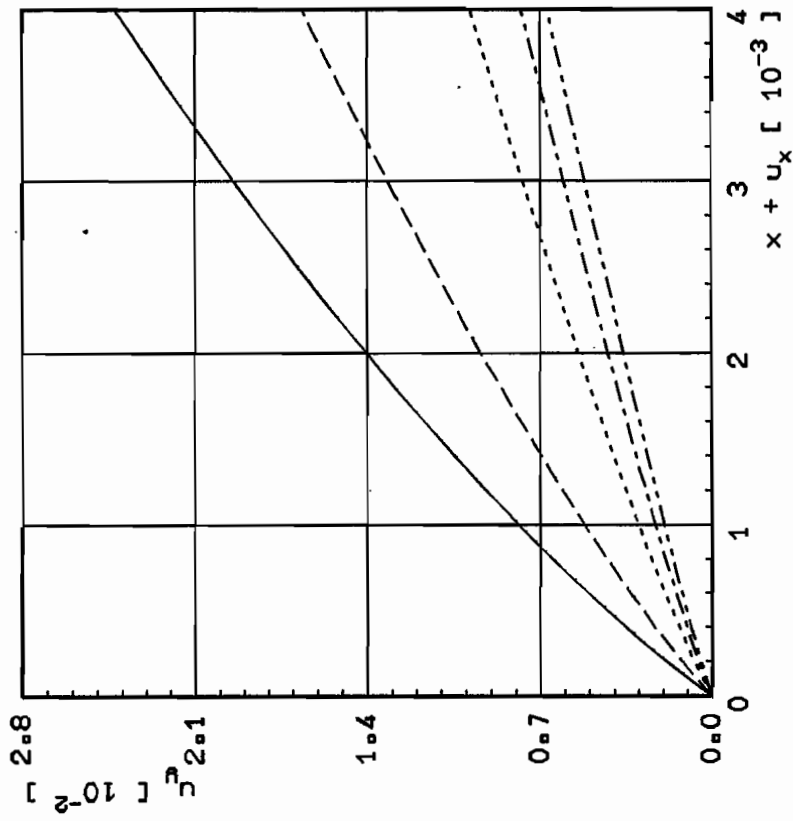


Asymptotische Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, \theta_p = 144.27^\circ$   
 Normiert auf  $\tilde{u}_x(90^\circ) = 1$

—  $\tilde{u}_x$   
 ---  $\tilde{u}_y$

Bild 7.9d

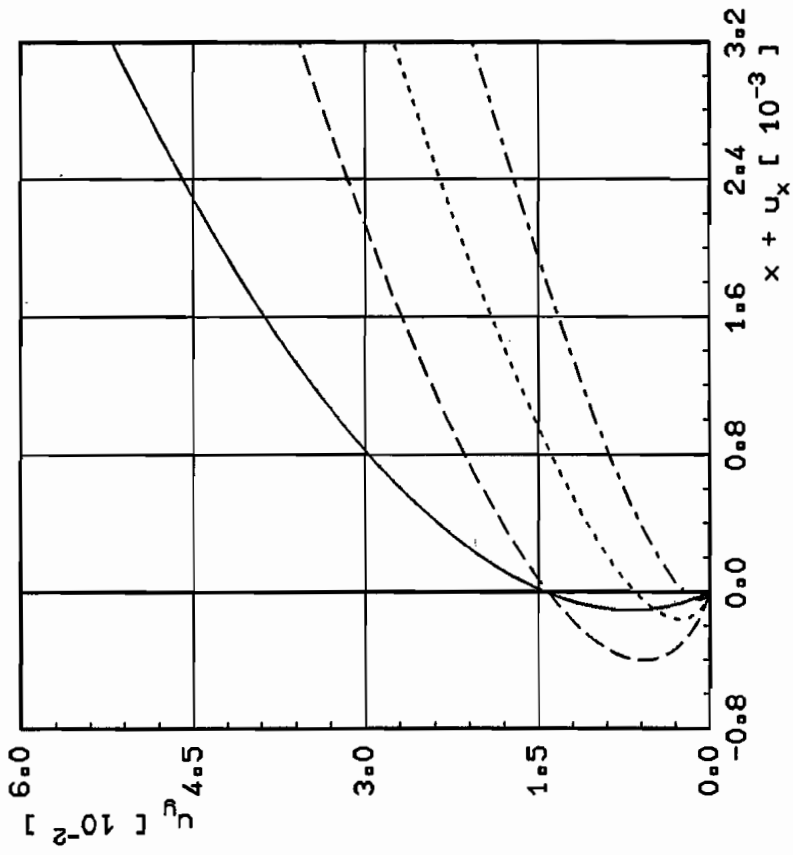


Rissprofil (ESZ)

$A \cdot \sigma_0 \cdot \bar{u}_y(\pi) = 1$

- $\alpha = 0.50$
- - -  $\alpha = 0.30$
- .....  $\alpha = 0.10$
- · - ·  $\alpha = 0.05$
- · - ·  $\alpha = 0.03$

Bild 7.10a



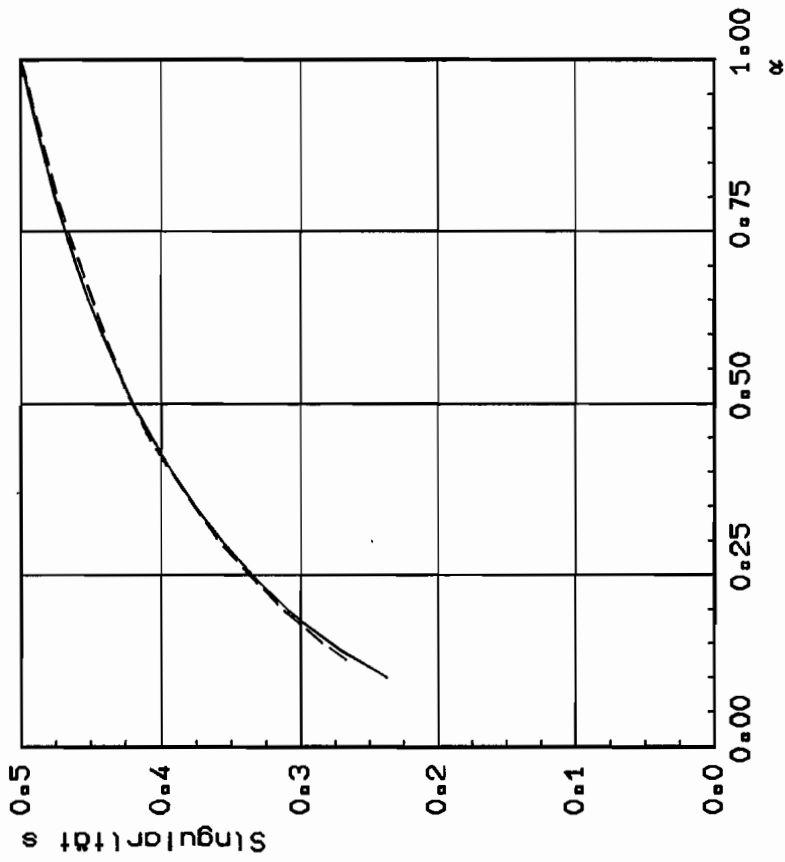
Rissprofil (EVZ)

$A \cdot \sigma_0 \cdot \bar{u}_y(\pi) = 1$

- $\alpha = 0.50$
- - -  $\alpha = 0.10$
- .....  $\alpha = 0.05$
- · - ·  $\alpha = 0.03$

Bild 7.10b

Die Bilder 7.11 und 7.12 zeigen Vergleiche zwischen den Lösungen nach dem Schießverfahren (SV) und dem im Kapitel 4 entwickelten Finite-Elemente-Verfahren (FEV). Die Singularitäten in Abhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten stimmen sehr gut überein. Demgegenüber liegt der nach dem FE-Verfahren berechneten Entlastungswinkel  $\theta_p$  niedriger als nach dem Schießverfahren. Dies könnte dadurch verursacht sein, daß die Systemsteifigkeitsmatrix innerhalb des NEWTON-Verfahrens zuerst mit einem bestimmten Entlastungswinkel aufgebaut wurde und der Entlastungswinkel dann iterativ gelöst wurde. Die Winkelfunktionen der Spannungen nach beiden Verfahren stimmen gut überein. Lediglich  $\tilde{\sigma}_{xx}$  aus dem FE-Verfahren ist nahe dem Reißufer kleiner, was darauf zurückzuführen ist, daß infolge der Diskretisierung große Gradienten nicht abgebildet werden können.

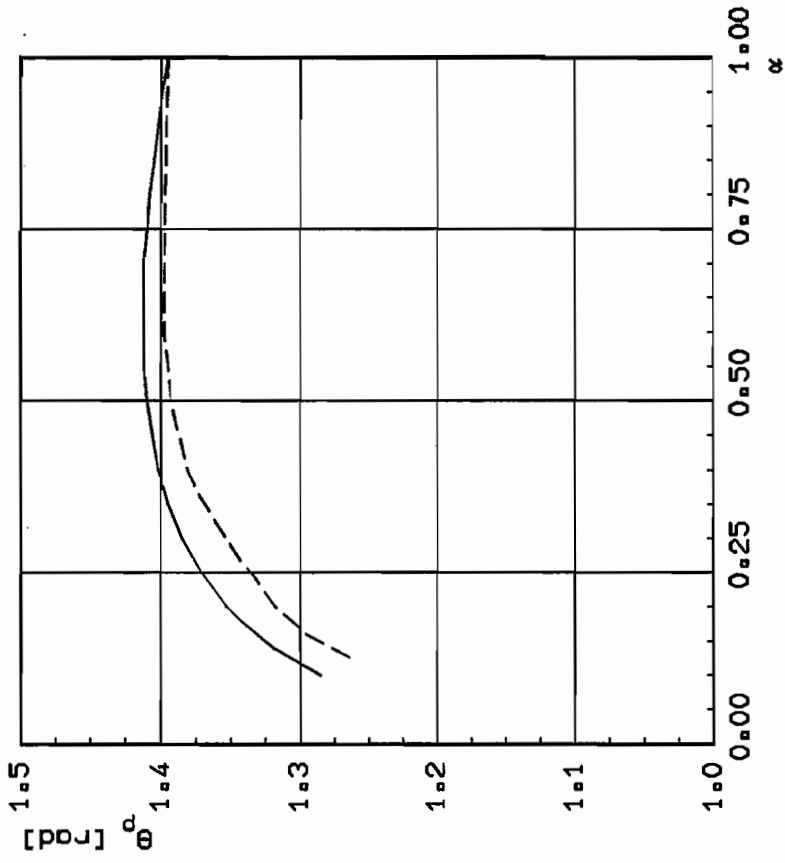


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.11a

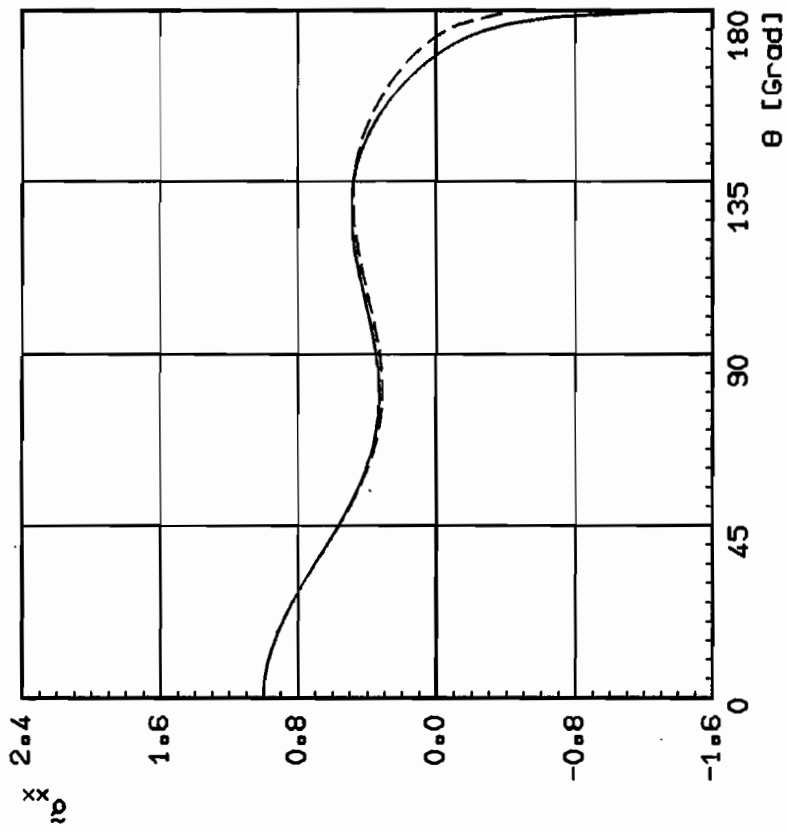


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff:  $\nu = 0.3$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.11b

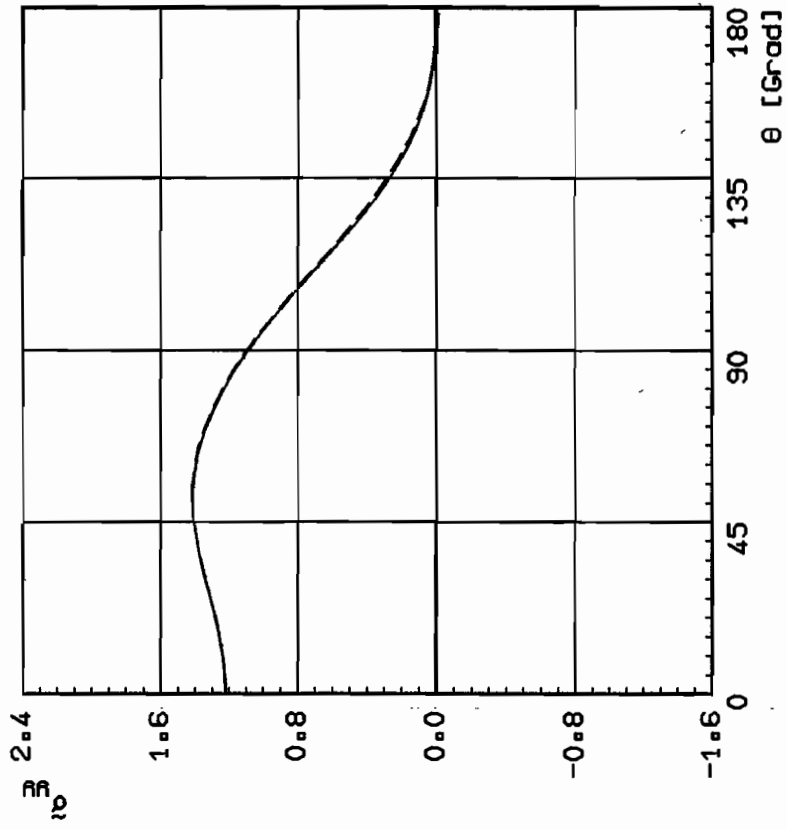


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12a



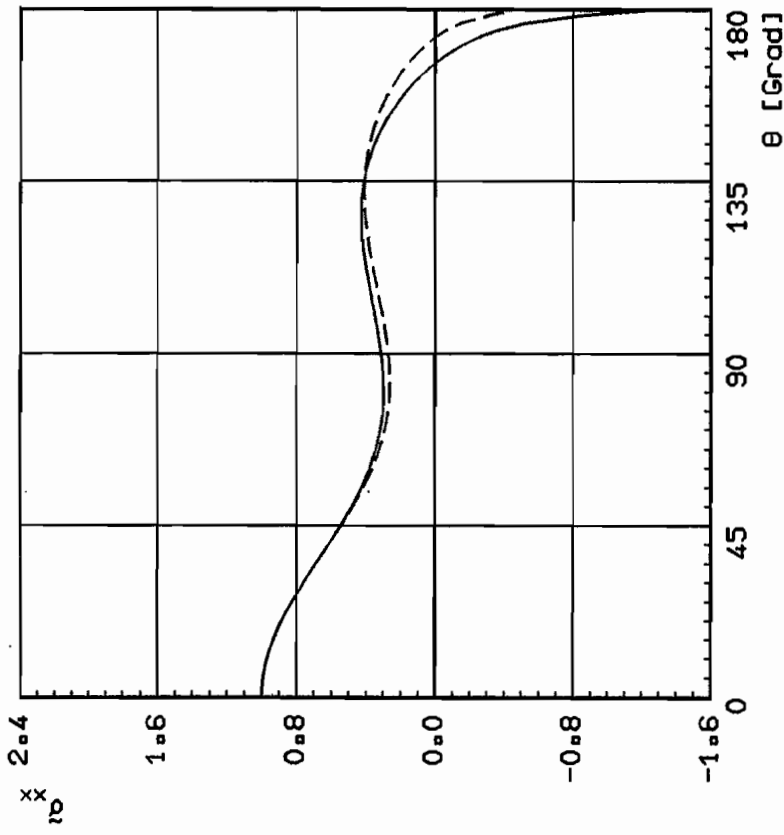
Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.50, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12b



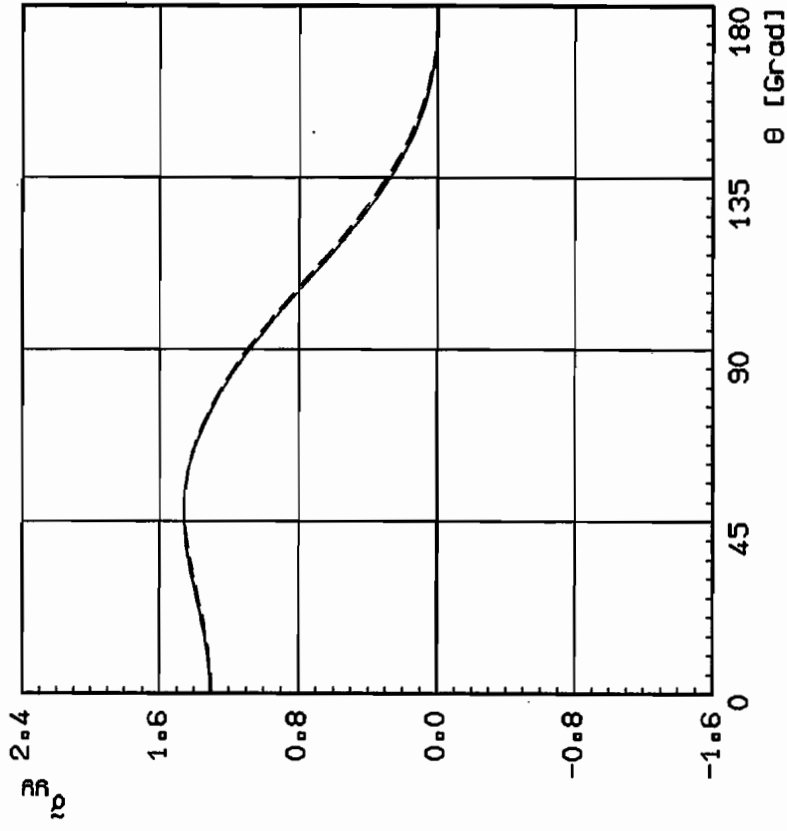


Asymptotische Lösung (ESZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.25, \gamma = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{u}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12c

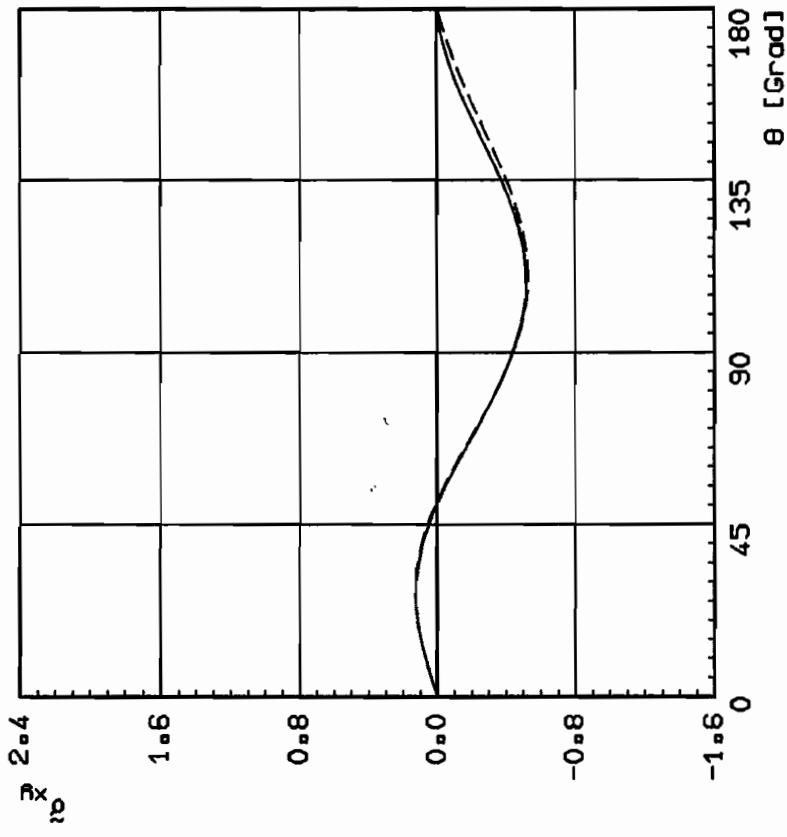


Asymptotische Lösung (ESZ)

Billinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.25, \gamma = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{u}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12d

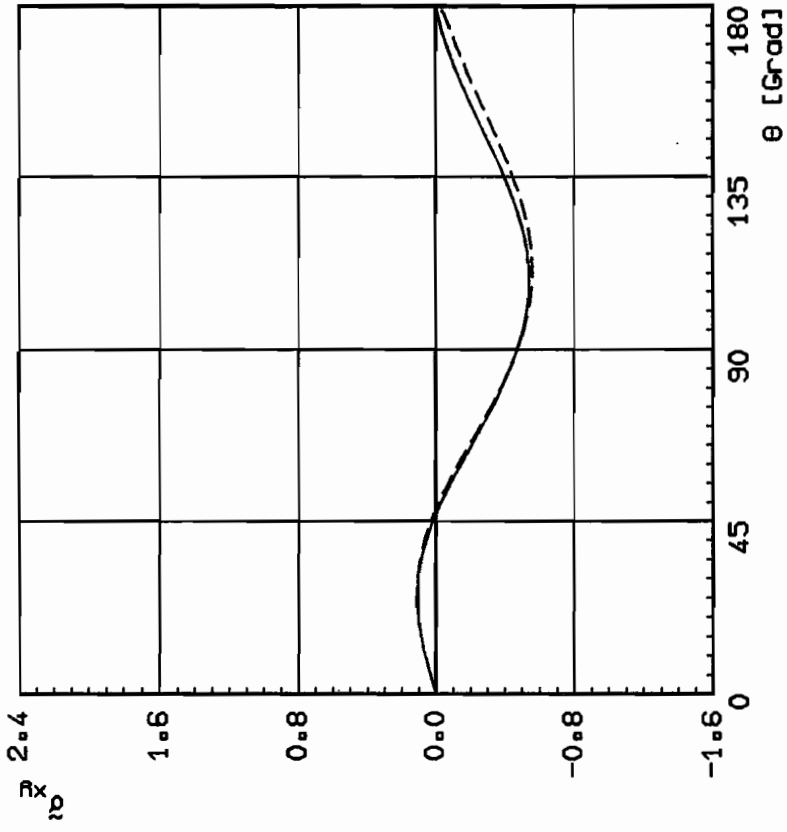


Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.50, \gamma = 0.3$   
 Normiert auf  $\tilde{\sigma}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12e



Asymptotische Lösung (ESZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\nu = 0.25, \gamma = 0.3$   
 Normiert auf  $\tilde{\sigma}_{xx}(0) = 1$

— SV  
 --- FEV

Bild 7.12f

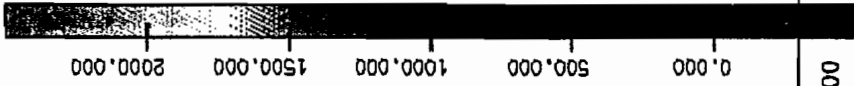
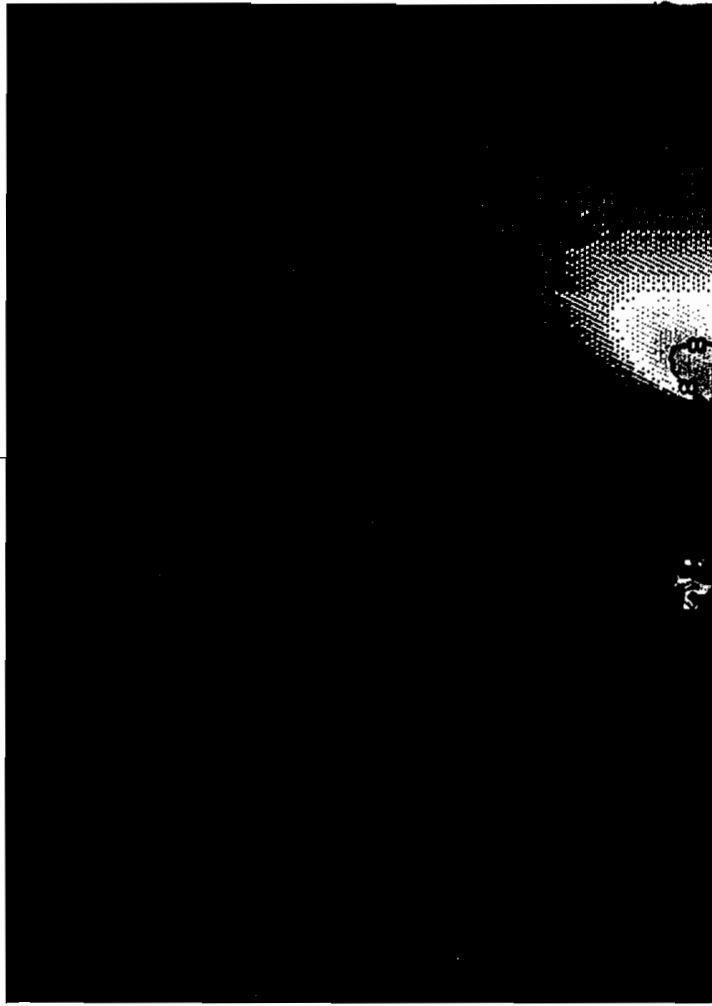
Die Bildfolge 7.13a,b,c für  $\Delta a=1, 1.5, 2$  mm veranschaulicht den Vorgang des stationären Rißwachstums am Beispiel der Normalspannungskomponente  $\sigma_{yy}$  (in der Bildlegende aufgrund der Konventionen des Zeichenprogramms als "Z-Komponente" bezeichnet). Das Spannungsfeld wird vor der Rißspitze hergeschoben und ändert sich nach einer Anlaufphase nicht mehr.

Die Bilder 7.14a,b und 7.15a,b stellen die normierten, längs zwei Radien ermittelten Spannungen und Verzerrungen aus einer FE-Simulation (Kapitel 6) dar, die anzeigen, daß sie nicht vom gewählten Radius abhängen. In den Bildern 7.14c,d und 7.15 c,d werden die Winkelfunktionen aus der analytischen Lösung für  $\alpha=0.03$  mit den entsprechend normierten Ergebnissen aus der FE-Simulation des stationären Rißwachstums verglichen. Die Spannungs- und Verzerrungsverteilungen stimmen qualitativ gut überein. Lediglich die Schubverzerrung zeigen für  $\theta > \pi/3$  größere Abweichungen; ähnliche Effekte sind bereits vom HRR-Feld für den stehenden Riß bekannt (siehe BROCK & OLSCHESKI /94/). Es dürfen hier auch keine zu hohen Erwartungen an diesen Vergleich gestellt werden, denn

- durch die am Systemausschnitt (Bild 6.2) aufgebrauchten Randbedingungen, die aus einem gröber elementierten Modell einer Probe bestimmt wurden, werden Störungen in das Rißnahfeld eingebracht,
- das verwendete FE-Netz ist trotz der Verfeinerung im Rißspitzennahfeld noch relativ grob,
- das für die Simulation des Rißwachstums erforderliche rechteckige Elementnetz läßt nur näherungsweise die Festlegung von Pfaden mit konstantem Radius zu.

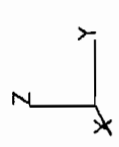
Die Vergleiche mit den FE-Ergebnissen, die numerische Simulationen von R-Kurven-Versuchen darstellen, zeigen, daß die hergeleiteten analytischen Lösungen das reale Rißnahfeld richtig beschreiben. Insbesondere tritt auch der starke Anstieg der Spannungskomponente  $\sigma_{xx}$  und der Vergleichsspannung  $\sigma_v$  am freien Rißufer in der FE-Lösung auf. Verfeinerte FE-Simulationen auf der Grundlage von Versuchsdaten erscheinen erforderlich, um quantitative Aussagen über die Größe der Zone machen zu können, in der das hier hergeleitete Nahfeld dominiert. Wie bei entsprechenden Untersuchungen des HRR-Feldes bei stehenden Rissen muß man auch hier erwarten, daß dieser Bereich von der Probengeometrie abhängen wird.

3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
= = = = =  
100.00  
400.00  
700.00  
1000.00  
1500.00  
2000.00  
2500.00



0.000 1.000 2.000 3.000 4.000 5.000  
-4.000 -3.000 -2.000 -1.000 0.000 1.000 2.000 3.000 4.000 5.000  
R A S T E R 1.000

CT25.25%SK/2D/alpha=0.03/MND/EVZ/R-0=29.4mm/Modell 8(bi)/Ausschnitt Rts  
ADINA FE-RECHNUNG  
SPANNUNGEN Z-KOMP. EL. TYP 201 LS.:134  
FC: 2.70 Knoten: 1639 El. grup.: 1 Blatt Nr.: 7  
Proj.ebene YZ Verk: 0.50 Wink: 30.00  
Koordinat. transformation  $\phi_x$ : 0.00  $\phi_y$ : 0.00  $\phi_z$ : 0.00



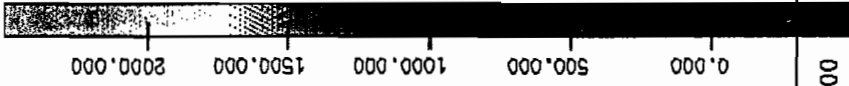
**BAM**  
REF 1.01

$\lambda_0 = 1mm$

Bild 7.13a

24.10.91 08:15:03 PLOTFEM 6.01

0.000  
 1.000  
 2.000  
 3.000  
 4.000  
 5.000  
 6.000  
 7.000  
 8.000  
 9.000  
 = 100.00  
 = 400.00  
 = 700.00  
 = 1000.00  
 = 1500.00  
 = 2000.00  
 = 2500.00



R A S T E R 1.000  
 -4.000 -3.000 -2.000 -1.000 0.000 1.000 2.000 3.000 4.000 5.000

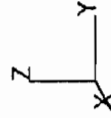
$d_0 = 1.45 \text{ mm}$

Bild 7.13b

CT25.25ZSBK/2D/alpha=0.03/MNO/EVZ/R-0=29.4mm/Modell 8(b1)/Ausschnitt Ris  
 ADINA FE-RECHNUNG

SPANNUNGEN Z-KOMP. EL.TYP 201 LS.:174

FG: 2.70 Knoten: 1639 El.-grup.: 1 Blatt Nr.: 9  
 Proj.-ebene YZ Verk: 0.50 Wink: 30.00  
 Koordinat.transformation  $\varphi_x$ : 0.00  $\varphi_y$ : 0.00  $\varphi_z$ : 0.00

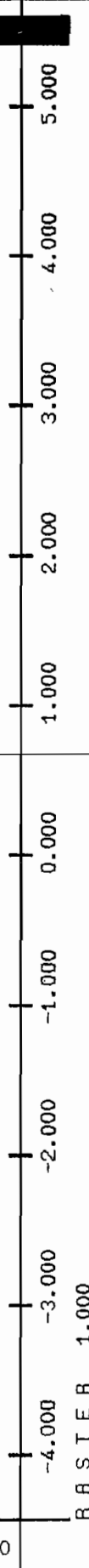
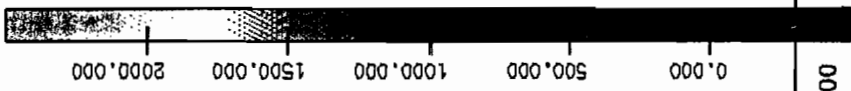


**BAM**

REF 1.01

24.10.91 08:20:38 PLOTFEM 6.01

3 = 100.00  
 4 = 400.00  
 5 = 700.00  
 6 = 1000.00  
 7 = 1500.00  
 8 = 2000.00  
 9 = 2500.00



CT25.25ISK/2D/alpha=0.03/MNO/EVZ/R-0=29.4mm/Modell 8(bi)/Ruschnittt Ris  
 ADINA FE-RECHNUNG  
 SPANNUNGEN Z-KOMP. EL. TYP 201 LS.:214

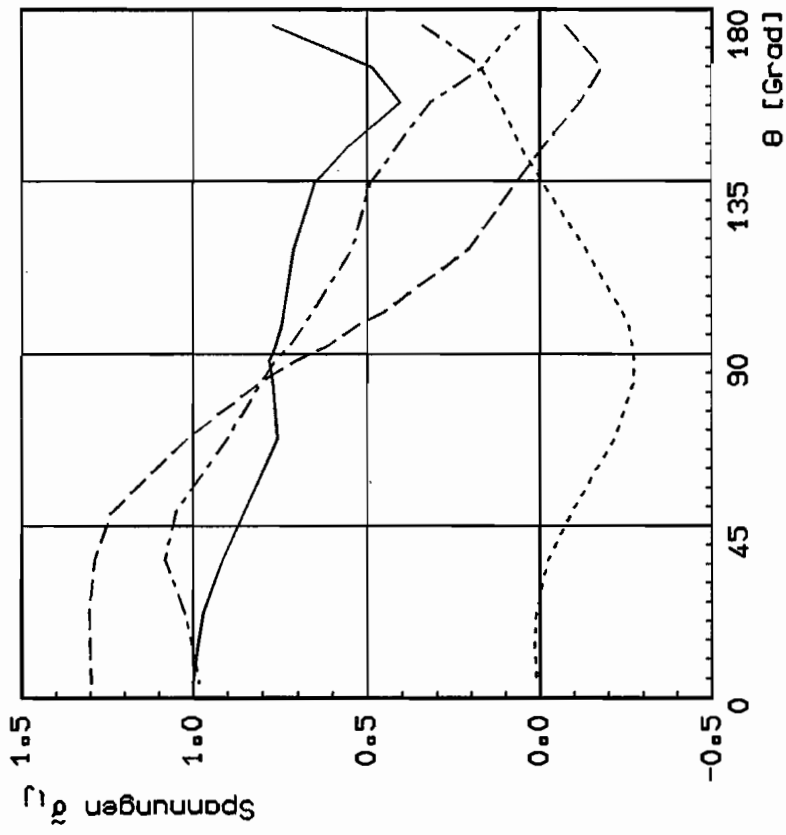
FG: 2.70	Knoten: 1639	El. grup.: 1	Blatt Nr.: 11
Proj. ebene YZ	Verk: 0.50	Wink: 30.00	
Koordinat. transformation	$\phi_x$ : 0.00	$\phi_y$ : 0.00	$\phi_z$ : 0.00

**BAM**  
 REF 1.01

$\Delta 0 = 2mm$

Bild 7.13c

24.10.91 08:25:54 PLOTFEM 6.01

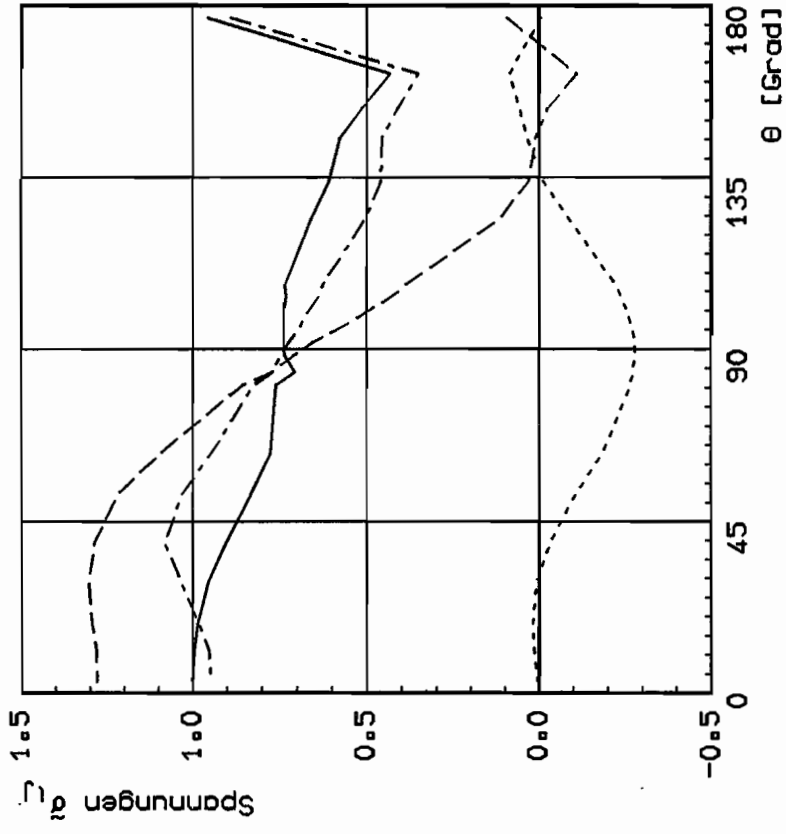


Spannungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $r = 0.31$  mm  
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

—  $\bar{\sigma}_{xx}$   
 - -  $\bar{\sigma}_{yy}$   
 ···  $\bar{\sigma}_{xy}$   
 - ·  $\bar{\sigma}_{zz}$

Bild 7.14a

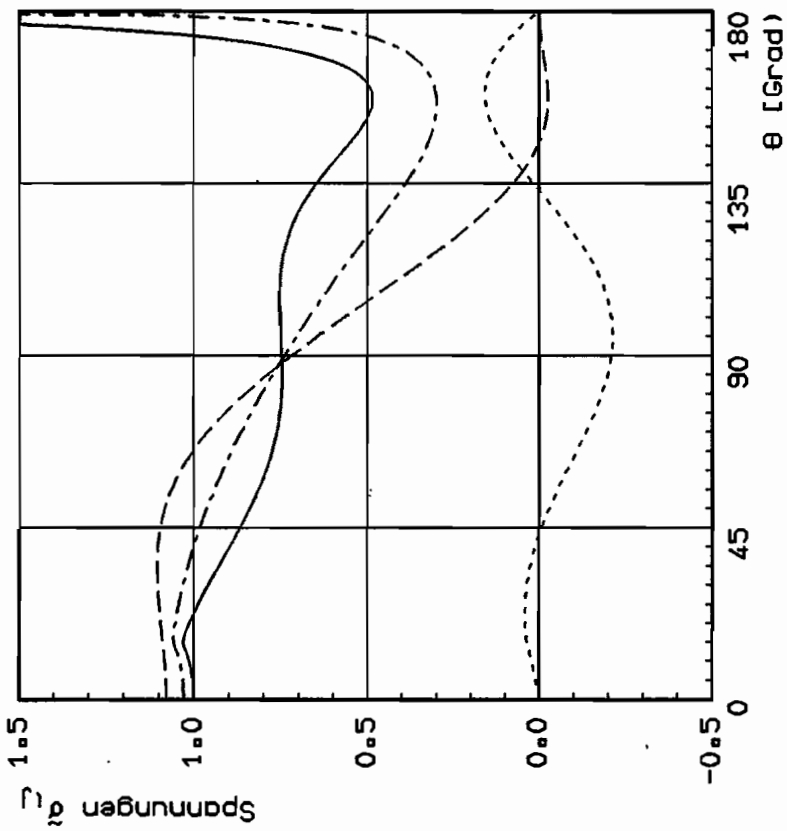


Spannungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $r = 0.41$  mm  
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

—  $\bar{\sigma}_{xx}$   
 - -  $\bar{\sigma}_{yy}$   
 ···  $\bar{\sigma}_{xy}$   
 - ·  $\bar{\sigma}_{zz}$

Bild 7.14b

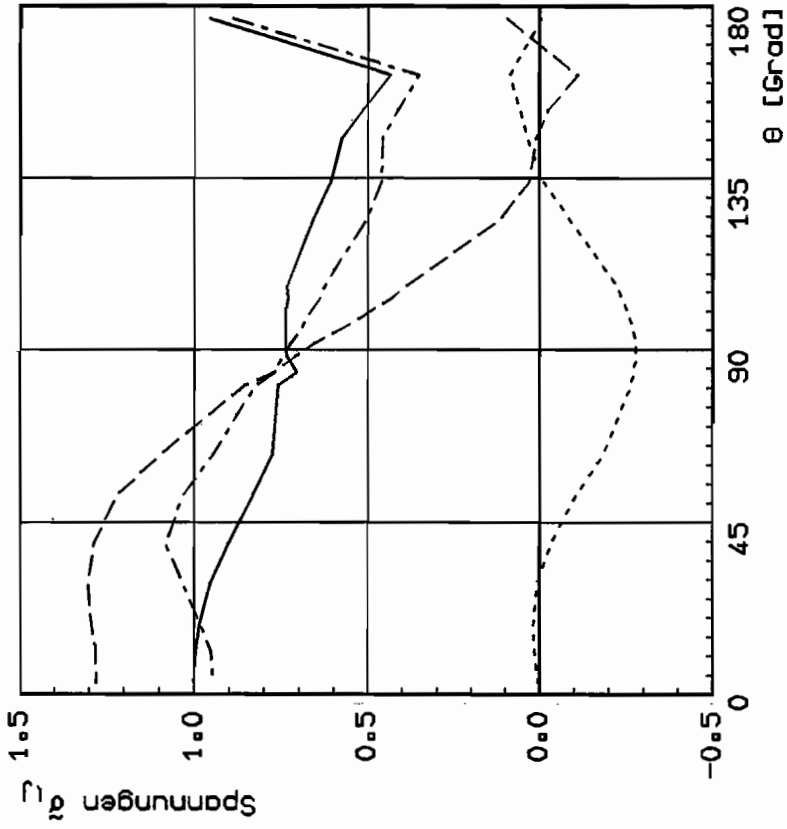


Spannungen aus asymp. Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

$\bar{\sigma}_{xx}$  (solid line)  
 $\bar{\sigma}_{yy}$  (dashed line)  
 $\bar{\sigma}_{xy}$  (dotted line)  
 $\bar{\sigma}_{zz}$  (dash-dot line)

Bild 7.14c



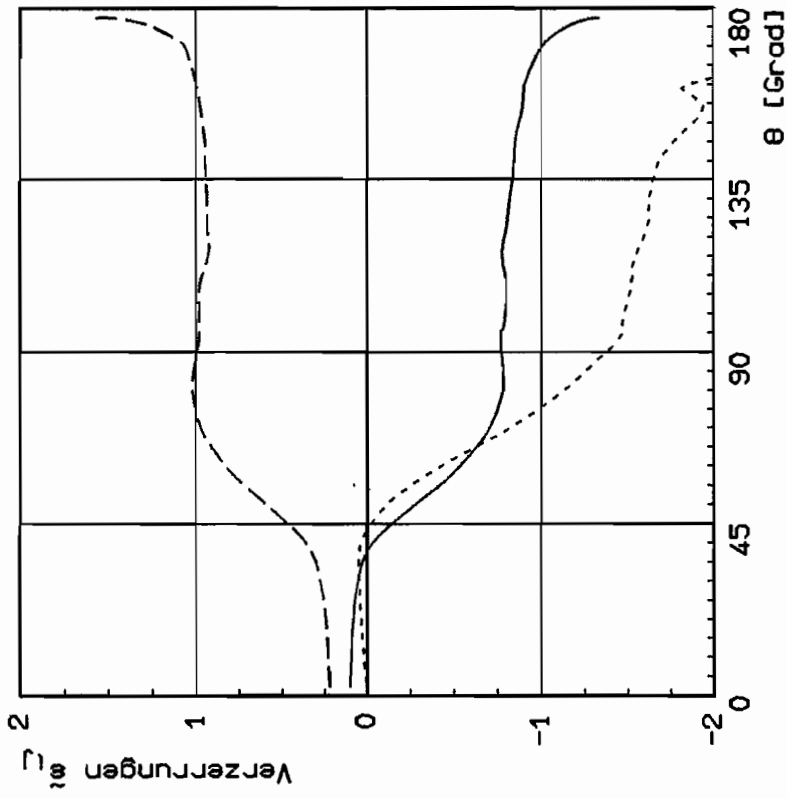
Spannungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\bar{\sigma}_{xx}(0) = 1$

$\bar{\sigma}_{xx}$  (solid line)  
 $\bar{\sigma}_{yy}$  (dashed line)  
 $\bar{\sigma}_{xy}$  (dotted line)  
 $\bar{\sigma}_{zz}$  (dash-dot line)

Bild 7.14d



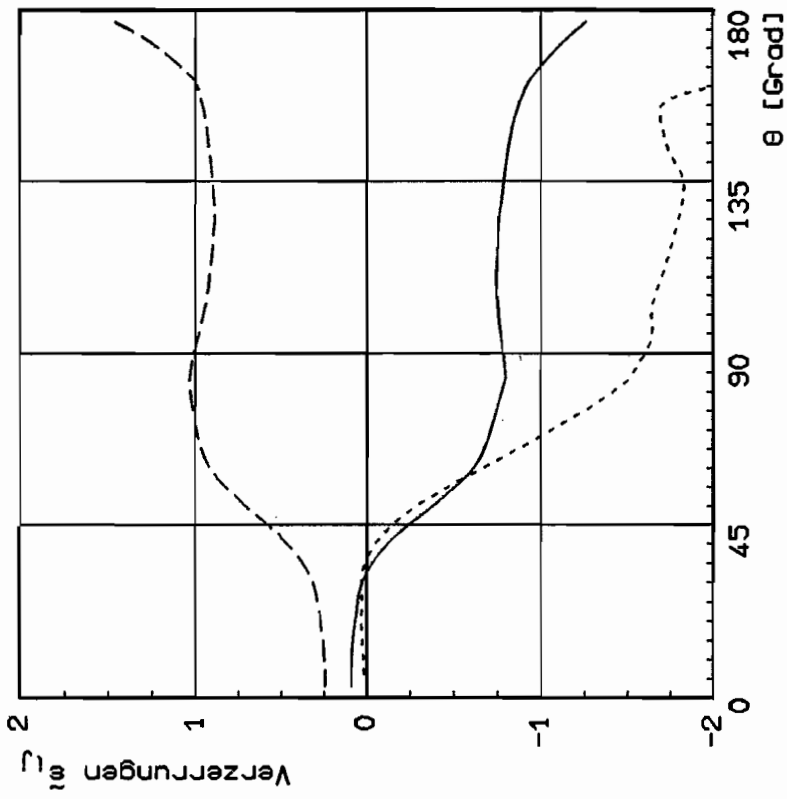


Verzerrungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, r = 0.31 \text{ mm}$   
 Normiert auf  $\tilde{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

- $\tilde{\epsilon}_{xx}$
- - -  $\tilde{\epsilon}_{yy}$
- .....  $\tilde{\epsilon}_{xy}$

Bild 7a15a

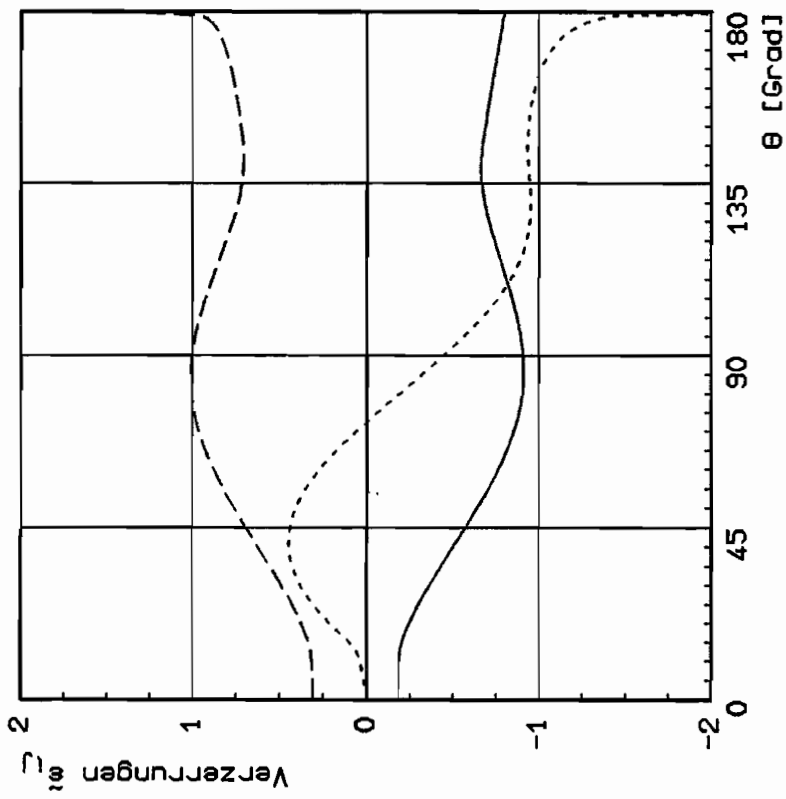


Verzerrungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3, r = 0.41 \text{ mm}$   
 Normiert auf  $\tilde{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

- $\tilde{\epsilon}_{xx}$
- - -  $\tilde{\epsilon}_{yy}$
- .....  $\tilde{\epsilon}_{xy}$

Bild 7a15b

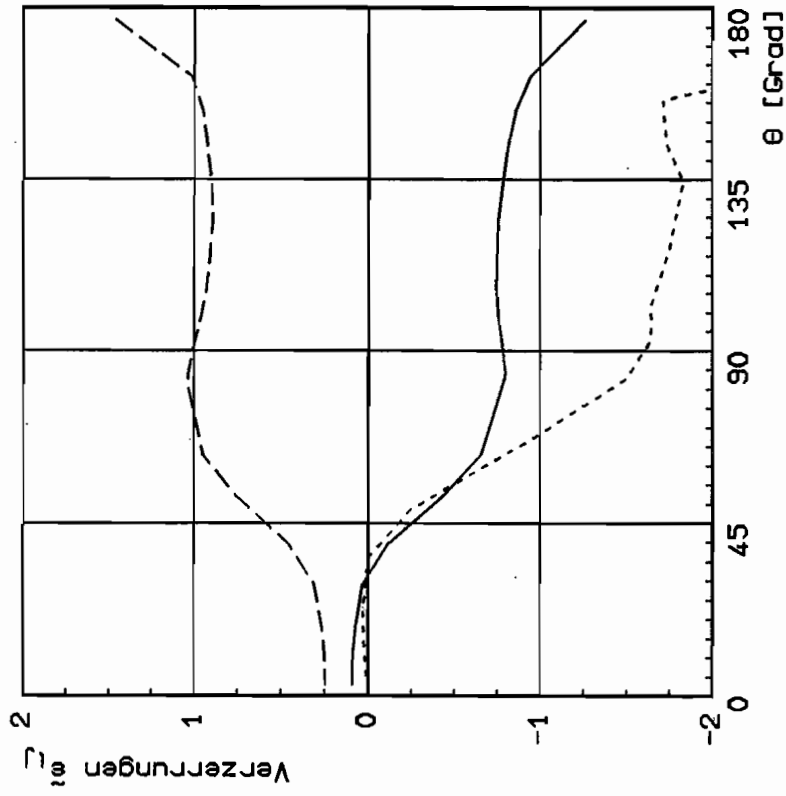


Verzerrungen aus asymp. Lösung (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\tilde{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\tilde{\epsilon}_{xx}$   
 - - -  $\tilde{\epsilon}_{yy}$   
 .....  $\tilde{\tau}_{xy}$

Bild 7.15c



Verzerrungen aus FE-Simulation (EVZ)

Bilinearer Werkstoff  
 $\alpha = 0.03, \nu = 0.3$   
 Normiert auf  $\tilde{\epsilon}_{yy}(90^\circ) = 1$

—  $\tilde{\epsilon}_{xx}$   
 - - -  $\tilde{\epsilon}_{yy}$   
 .....  $\tilde{\tau}_{xy}$

Bild 7.15d

## 8. Zusammenhang und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses auf der Grundlage der inkrementellen Theorie der Plastizität systematisch untersucht. Dabei besteht die Arbeit hauptsächlich aus drei Teilen. Im ersten Teil handelt es sich um die systematischen Untersuchungen der Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen sowie die Rißöffnungsprofile, einige gängige bruchmechanische Parameter wie das J-Integral, die Rißspitzenöffnung CTOD, und eine neue Definition von dem Rißspitzenöffnungswinkel CTOA bzw. CTOD auf der Basis des stationär wachsenden Risses. Der zweite Teil behandelt die Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens, das in der Lage ist, die asymptotischen Nahfeldlösungen des stationär wachsenden Risses zu ermitteln. In dritten Teil wird der Spannungszustand an stationär wachsendem Riß in realen Proben durch numerische Simulation von Experimenten untersucht.

~~Es ist gelungen, daß die Verzerrungen und die Verschiebungen für die stationär wachsenden Rißspitzenfelder analytisch ermittelt wurden. Die Rispitzenffnungsprofile können durch eine analytische eindeutige Funktion gegeben werden. Die Rispitzenffnungsprofile für ESZ und EVZ besitzen unterschiedliche Eigenschaften wegen der unterschiedlichen Verschiebungsverläufe an der freien Rioberflche. Bei ESZ hat die Rißspitze einen spitzen Winkel gebildet, während die Rißspitze bei EVZ einen strumpfen Winkel gezeigt hat. Dies wurde sowohl bei bereits existierenden Lösungen des stationär wachsenden Risses als auch bei der HRR-Theorie für stehenden Riß bisher nirgendwo dargestellt.~~

Obwohl das J-Integral beim stationären Rißwachstum wegabhängig ist, kann es jedoch über einen geeignet definierten Integrationsradius eine direkte Bedeutung als Intensitätsparameter des Rißspitzenfeldes besitzen. In Verallgemeinerung einer von TRACEY /85/ vorgeschlagenen CTOD - Definition wurde dieser Radius aus dem Schnittpunkt der von der Rißspitze ausgehenden Geraden mit dem Riprofil gewonnen. In diesem Falle haben das Spannungs- und Verzerrungsfeld sowie der Zusammenhang

zwischen dem J-Integral und dem so definierten CTOD ganz ähnliche Formen wie in der HRR-Theorie für den stehenden RiB.

Es gelingt erstmals eine neue Definition des RiBspitzenöffnungswinkels CTOA auf der theoretisch konsistenten Basis, indem ein Schnittpunkt mit einer Parabel zur RiBoberfläche ermittelt wird. Der so definierte CTOA und CTOD haben einen linearen Zusammenhang und können auch als Intensitätsparameter für das RiBspitzenfeld des stationären RiBwachstums begründet werden. Interessant ist, daß das mit diesem Schnittpunkt als Integrationsradius ermittelte J-Integral nicht mehr von dem Amplitudenfaktor A für das RiBspitzenfeld abhängig ist und lediglich von den Spannungszuständen abhängt. Bei einem bestimmten Spannungszustand ist es dann eine Materialkonstante. Die hier berechneten und eingeführten bruchmechanischen Parameter, welche in der Lage sind, das große stationäre RiBwachstum zu beschreiben, müssen durch Experimente und numerische RiBwachstumssimulationen weiter geprüft werden.

~~Es wurde in der Diskussion über das mathematische RiBmodell ausführlich behandelt und darauf hingewiesen, daß ein so definiertes RiBmodell beim stationär wachsenden RiB die großen Spannungen und großen Verzerrungen am RiBufer zur Folge gebracht hat.~~

Das Finite-Elemente-Verfahren, das zur Lösung der asymptotischen Felder des stationär wachsenden Risses entwickelt wird, ist grundsätzlich in der Lage, die asymptotischen Nahfelder zu ermitteln. In den Ergebnissen zeigt sich, daß dieses Verfahren, das einen niedrigeren Entlastungswinkel liefert, durch Veränderung der Iterationsstrategie modifiziert werden kann.

Die an zwei Probengeometrien durchgeführten Experimente mit großem RiBwachstum haben gezeigt, daß nach einer Übergangsphase von 1 bis 2 mm RiBverlängerung eine angenähert stationäre RiBausbreitung erfolgt. Diese Phase wurde numerisch simuliert, um das Spannungs- und Verzerrungsfeld zu untersuchen und mit den analytischen Lösungen zu vergleichen. Es hat sich gezeigt, daß die globalen Ergebnisse wie Kraft-

Verschiebung F-V aus Experimenten and numerischen Simulationen gut übereinstimmen. Ferner wurden die Ergebnisse aus numerischen Simulationen mit analytischen Lösungen verglichen. Die Ergebnisse zeigen sowohl für Spannungen als auch für Verzerrungen qualitativ sehr gute Übereinstimmung.

Um das hier in dieser Arbeit eingeführte Modell für die praktische Anwendung nutzbar machen zu können, sind insbesondere noch systematische Untersuchungen für verschiedene Proben mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode erforderlich. Außerdem soll noch ein Bestimmungsverfahren entwickelt werden, um die eingeführten bruchmechanischen Parameter meßbar zu machen. Weiterhin muß experimentell untersucht werden, welcher bruchmechanische Parameter in der Lage ist, das große stationäre Rißwachstum zu beschreiben. Ferner soll noch das Finite-Elemente-Verfahren durch Veränderung der Iterationsstrategie modifiziert werden.

## **9. Literatureuren**

- /1/ AMAZIGO,J.C. & HUTCHINSON,J.W.: "Crack tip fields in steady crack growth with linear strain hardening"; J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25 ( 1977 ), pp 81 - 97**
- /2/ AMSTUTZ,H. & SEEGER,T.: "Untersuchungen zur Rißnahfeldapproximation mit Finiten Elementen"; Bericht der TH Darmstadt, 1991**
- /3/ AURICH,D. & SOMMER,E.: "The effect of constraint on elastic plastic fracture"; Steel Research 59 ( 1988 ), pp 358 - 367**
- /4/ AURICH,D. et al.: "Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte"; BAM-Forschungsbericht 174, Berlin: Bundesanstalt für Materialforschung und - prüfung, ( 1990 )**

---

- /5/ BARTH,F.J.: "Berechnung theoretischer Rißwiderstandskurven auf der Basis des asymptotischen Rißwachstumsfeldes"; Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1991**
- /6/ BATHE,K.-J.: "Finite - Elemente - Methoden"; Springer Verlag, 1986**
- /7/ BATHE,K.-J.: "A finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis"; Report ARD 87-10, ADINA Engineering Inc., Watertown/MA ( 1987 )**
- /8/ BROCKS,W. & YUAN,H.: "Numerical investigations on the significance of J for large stable crack growth"; Eng. Fracture Mechanics, Vol. 32 ( 1989a ), pp 459 - 468**
- /9/ BROCKS,W. & YUAN,H.: "Numerical studies on ductile crack growth"; Proceeding of European Symposium on Elastic-Plastic Fracture Mechanics, ed. by J.D.BlaueI and K.-H. Schwalbe, ( 1991 )**

- /10/ BROCKS,W. & YUAN,H.: "Untersuchung bruchmechanischer Parameter auf der Grundlage der Inkrementellen Plastizitätstheorie im Hinblick auf ein Kriterium für stabiles Rißwachstum in duktilem Material"; DFG - Abschlußbericht, 1990
- /11/ BROCKS,W. & OLSCHESKI,J.: "Bruchmechanik I und II"; Vorlegungsskripte
- /12/ BROCKS,W. & BURTH,K.: "Plastizitätstheorie I und II"; Vorlesungsskripte
- /13/ BROCKS,W. & NOACK,H.D.: "Elastic-plastic J analysis for an inner surface flaw in a pressure vessel"; Experimental Mechanics ( 1987 ), pp 205 - 209
- /14/ BROCKS,W., KÜNECKE,G., NOACK,H.D. & VEITH,H.: "Zur Übertragbarkeit von Bruchmechanikparametern von Proben auf Bauteile aufgrund von FEM-Analysen"; Berichtsband 13. MPA-Seminar Stuttgart, ( 1987 ) pp 3.1 - 3.24
- /15/ BROCKS,W. & YUAN,H.: "FE-Analysen des Rißwiderstandsverhaltens dünner Proben bei großem Rißwachstum" ; BAM-Bericht 1.01 90/4, Berlin: Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung
- /16/ BROCKS,W., KLINGBEIL,D. & OLSCHESKI,J.: "Lösung der HRR-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik"; Forschungsbericht 175, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung(BAM), Berlin ( 1990 )
- /17/ CASTANEDA,P.P.: "Asymptotic fields of a perfectly-plastic, plane-stress mode II growing crack"; J. Applied Mech., Vol. 53 ( 1986 ), pp. 831 - 833
- /18/ CASTANEDA,P.P.: "Asymptotic fields in steady crack growth with linear strain hardening"; J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35 ( 1987a ), pp. 227 - 268
- /19/ CASTANEDA,P.P.: "Asymptotic analysis of a mode I crack propagating steadily in a deformation theory material"; J. Appl. Mech., Vol. 54 ( 1987b ), pp. 79 - 87

- /20/ CASTANEDA,P.P.: "Plastic stress intensity factors in steady crack growth"  
J. Mech. Phys. Solids Vol. 54 ( 1987c ), pp. 379 - 387
- /21/ CHITALY,A.D. & McCLINTOCK,F.A.: "Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear"; J. Mech. Phys. Solids Vol.19 ( 1971 ), pp. 147 - 163
- /22/ CLAUSMEYER,H., KUBMAUL,K. & ROOS,E.: "Der einfluß des Spannungszustandes auf den Versagensablauf angerissener Bauteile aus Stahl"  
Mat.-Wiss. u. Werkstofftech. 20 ( 1989 ), pp. 101 - 117
- /23/ CRANDALL,S.H.: "Engineering Analysis", Mc Graw-Hill, 1956
- /24/ DRUGAN,W.J., RICE,J.R. & SHAM,T.L.: "Asymptotic analysis of growing plane strain tensile cracks in elastic-ideally-plastic solids"; J. Mech. Phys. Solids Vol. 30 ( 1982 ), pp. 447 - 473
- 
- /25/ DRUGAN,W.J.: "On the asymptotic continuum analysis of quasi-static elastic-plastic crack growth and related problems"; J. Appl. Mech. 52 ( 1985 ), pp. 601 - 605
- /26/ BARTMANN,S.; BROCKS,W. & KOHLER,S.: "FE-Analyse des Reißwiderstandsverhaltens seitengekerbter Proben"; Berichtsband der 22. Vortragsveranstaltung des DVM-Arbeitskreis Bruchvorgänge, Berlin: Deutscher Verband für Materialforschung und - prüfung, 1990
- /27/ FRICKE,ST.: "Numerische Analyse des Spannungsnahfeldes bei stationärer Reißausbreitung in duktilen Werkstoffen"; Diplomarbeit der Technischen Universität Berlin, 1991
- /28/ FINLAYSON,B.A.: "The Methode of Weighted Residual and Variational Principles"; Academic Press, New York, 1972



- /29/ FAIRWEATHER,G.: "Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations"; Marcel Dekker, Inc. 1978
- /30/ GAO,Y.C.: "Asymptotic dynamic solution to the mode I propagating crack tip field"; Int. J. of Fracture, Vol. 29 ( 1985 ), pp. 171 - 180
- /31/ GAO,Y.C. & HWANG,K.C.: "Elastic-plastic fields in steady crack growth in a strain hardening material"; in Proc. of 5th Int. Conf. of Fracture: Advances in Fracture and Research, ed. by D.Francois et al., ( 1981a ), pp. 669-682
- /32/ GAO,Y.C. & HWANG,K.C.: "Elastic-plastic fields in steady crack growth"; in Proc. IUTAM symp. on three Dimensional Constitutive Relationships and Ductile Fracture, ed. by S.Nemat-Nasser ( 1981b ), pp. 417-434
- /33/ GAO,Y.C., ZHANG,X.T. & HWANG,K.C.: "The asymptotic near tip solution for mode III crack in steady growth in power hardening media"; Int. J. of Fracture, Vol. 21 ( 1983 ), pp. 301-317
- /34/ GARWOOD,S.J.: "Effect of specimen geometry on crack growth resistance"; ASTM STP 677 ( 1979 ), pp. 511-532
- /35/ GRIFFITH,A.A.: "The phenomena of rupture and flow"; Solids Phil. Trans. Roy. Soc. London, A221, 1921, pp. 163-198
- /36/ HANCOCK,J.W., REUTER,W.G. & PARKS,D.M.: "J-T approach to the analysis of constraint effects in fracture"; ASTM Symposium on Constraint Effects in Fracture, Indianapolis 1991
- /37/ HUTCHINSON,J.W.: "Crack tip singularity fields in nonlinear fracture mechanics: A survey of current status"; in proc. of 5th Int. Conf. on Fracture (ICF%), Advances in Fracture Research, ed.by D.Francois et al. (1981), pp. 2669-2684

- /38/ HUTCHINSON,J.W. & PARIS,P.C.: "Stability analysis of J-controlled crack growth"; in Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668, ed. by J.D.Landes et al. (1979), pp. 37-63
- /39/ HUTCHINSON,J.W.: "Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material"; Journal of mech. phys. solids 16 (1986), pp. 13-31
- /40/ HUTCHINSON,J.W.: "Plastic stress and strain fields at a crack tip"; Journal of mech. phys.solids 16 (1968), pp. 337-347
- /41/ INGLIS,C.E.: "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners"; Trans. Roy. Inst. Naval Arch. 60, 1913, pp. 219-230
- /42/ IRWIN,G.R.: "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate"; Journal of applied mechanics 24, 1957, pp. 361-364
- ~~/43/ JULISCH,P. & STADTMÜLLER,W.: "Valuation of a ductile vessel rupture by R-curve analysis with CT specimens and wide plate tests"; Trans. 8th SMIRT (1985), G3/1~~
- /44/ KAISER,H.J., HAGEDORN,K.E. & PAWELSKI,O.: "Investigation on the influence of specimen geometry on stable crack growth"; Arch. Eisenhüttenwes. 56 (1984), pp. 339-343
- /45/ KORDISCH,H. & SOMMER,E.: "3D-Effects affecting the precision of lifetime predictions"; 19th Nat. Symp. on Fracture Mechanics, ATSM STP 969 (9188), pp. 73-87
- /46/ McCABE,D.E., LANDES,J.D. & ERNST,H.A.: "Prediction of heavy section performance of nuclear vessel steels from surveillance size specimen"  
Trans. 7th SMIRT (1983), G2/4

- /47/ McMEEKING,R.M.: "Finite deformation analysis of crack tip opening in elastic plastic materials and implications for fracture initiation"; J. Mech. phys. Solids, Vol 25 (1977), pp. 357-381
- /48/ MORAN,B. & SHIH,C.F.: "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance"; Report ONR 0365/2, Brown University, Providence (1986)
- /49/ NARASIMHAN,R., ROSAKIS,A.J. & HALL,J.F.: "A finite element study of stable crack growth under plane stress conditions in elastic-perfectly-plastic solids"; Caltech. Report SM 86-22 (1986)
- /50/ NILSSON,F. & STAHL,P.: "Crack growth criteria and crack tip models" Solid Mechanics Archives 34 (1988), pp.193-238
- /51/ PAN,H.: "The asymptotic analysis of near tip fields of plane stress mode I crack growth quasi-statically in steady in elastic power hardening materials"; in Proc. of Int. Conf. Fracture and Fracture Mechanics, ed. by C.Ouyang,M.Sakata, C.L.Chow (1987), pp. 300-307
- /52/ RICE,J.R. & ROSENGREN,G.F.: "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material"; Journal mech. phys. solids 16 (1968), pp. 1-12
- /53/ RICE,J.R.: "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks"; Journal of applied mechanics, Vol. 35 (1968), pp. 379-386
- /54/ RICE,J.R., DRUGUN,W.J. & SHAM,T.L.: "Elastic-plastic analysis of growing cracks"; in Fracture Mechanics, 12th Conf. ASTM STP 700, pp. 189-221
- /55/ ROOS,E., EISELE,U. & SILCHER,H.: "A procedure for the experimental assessment of the J-integral by means of specimens of different geometries"; Int.

- /56/ SAUER / SZABO: "Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs", Teil III
- /57/ SCHWALBE,K.-H. & HELLMANN,D.: "Correlation of stable crack growth with the J-integral and the crack tip opening displacement, effects of geometry, size and material"; GKSS Report 84/E/37, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH (1984)
- /58/ SHAM,T.-L.: "A finite element study of the asymptotic near tip fields for mode I plane strain cracks growing stably in elastic ideally plastic solids"; Elastic-Plastic-Fracture: 2nd Symp., Vol. I-Inelastic Crack Analysis,ASTM STP 803,ed. by C.F.SHIH & J.P.GUDAS (1983), pp.I 52-79
- /59/ SHIH,C.F.: "Relationship between the J-integral and the COD for stationary end extending cracks" ; J. of Mech. Phys. Solids, Vol. 29 (1981), pp. 305-326
- 
- /60/ SHIH,C.F.: "A framework for quantifying crack tip constraint to surface flaws"; ASTM-Symposium on Constraint Effects in Fracture, Indianapolis, 1991
- /61/ SIEGELER,D. & SCHMITT,W.: "Determination and simulation of stable crack growth in ADINA"; Computer & Structures 17 (1983), pp.697-703
- /62/ SLEPYAN,L.L.: "Growing crack during plane deformation of an elastic plastic body"; ANSSSR, Mekhanika Tverdogo Tela, Vol. 9 (9174), pp. 57-67 .
- /63/ SNEDDON,T.N.: "The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid"; Proc. Roy. Soc. A 187 (1946), pp. 229-260
- /64/ SYMITONG,M., SHIH,C.F. & ORTIZ,M.  
Brown University Report MRG / DMR8714665 / 1, Oct. 1988

- /65/ WESTERGAARD,H.M.: "Bearing pressures and cracks"; J. Appl. Mech. 6 (1939), pp. 49-53
- /66/ WILLIAMS,M.L.: "On the stress distribution at the base of a stationary crack"; J. Appl. Mech. 24 (1957), pp. 109-114
- /67/ YUAN,H. & CORNEC,A.: "Asymptotic Analysis of Steady State Crack Extension of Combined Mode I and III in Elastic-Plastic Materials with Linear Hardening"; 23rd National Symposium on Fracture Mechanics June 1991
- /68/ ZIENKIEWICZ,O.C.:"The Finite Element Method", 3rd. ed., Mcgraw Hill Book Company (1977)
- /69/ American Society for Testing and Materials: "Standard Test Method for  $J_{IC}$ , a measure of fracture toughness"; ASTM E 813 (1981)
- ~~/70/ Deutscher Verband für Materialprüfung: "Ermittlung von Reißinitiiierungswerten und Reißwiderstandskurven bei Anwendung des J-Integrals"; DVM-Markblatt 002 (1987)~~
- /71/ GARWOOD,S.J., ROBINSON,J.N. & TURNER,C.E.: "The measurement of crack growth resistance curves using the J-integral"; Int. J. of Fracture 11 (1975), 528-
- /72/ BROCKS,W.; SERCE,O.: "Rechnerische Simulation und Analyse des lokalen Reißfortschritts in Bauteilen nach dem J-Konzept unter Berücksichtigung lokaler Spannungszustände in Reißfrontnähe und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen"; DFG-Zwischenbericht 1990
- /73/ BROCKS,W.; SERCE,O.; STEIGER,T. & SCHICKER,J.: "Rechnerische Simulation und Analyse des lokalen Reißfortschritts in Bauteilen nach dem J-Konzept unter Berücksichtigung lokaler Spannungszustände in Reißfrontnähe und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen"; DFG-2. Zwischenbericht 1991

- /74/ SHIH,C.F.: "Elastic-Plastic Analysis of Combined Mode Crack Problem";  
Dissertation, Harvard University 1973
- /75/ DEAN,R.-H. & HUTCHINSON,J.-W.: "Quasi-Static Crack Growth in Small Scale  
Yielding"; Fracture Mechanics, 12th Conference, ASTM STP 700, 1980, pp 383-  
405
- /76/ VOIGT,A.: "FE-Berechnung der asymptotischen Felder eines stationär bewegten  
Risses bei elastisch-plastischem Materialverhalten", GAMM-Seminar Erlangen  
1991
- /77/ HAHN,H.-G.: "Technische Mechanik fester Körper"; Hansa Verlag,München 1990
- /78/ KUMAR,V.; GERMAN,M.-D. & SHIH,C.-F.: "An Engineering Approach for  
Elastic Plastic Fracture"; Report NP-1931, Schenectady: General Electric  
Comp.,1981
- 
- /79/ FELDMÜLLER,A.: "Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter  
Kontinua"; Mitteilung Nr. 75, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum,  
1991
- /80/ EUROPEAN GROUP ON FRACTURE: "EGF Recommendations for determining  
the fracture resistance of ductile materials"; EGF p1-90 (1989)
- /81/ AURICH,D.; "Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer  
Versagenskonzepte auf der Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiet  
der Komponentensicherheit"; BAM-Forschungsbericht 137, Bundesanstalt für  
Materialforschung und -prüfung (BAM), 1987
- /82/ RICE,J.R.; P.C.PARIS und J.E.MERKLER: "Some Further Results of J-Integral  
Analysis and Estimates"; ASTM STP 536, 1973, 231 - 245

- /83/ HELLMANN,D. und K.H.SCHWALBE: " Geometry and Size Effectes on J-R and  $\delta$ -R-Curves under Plane Stress Conditions"; ASTM STP 833, 1984, 577 - 605
- /84/ TADA,H.; P.C.PARIS und G.R.IRWIN: "The Stress Analysis of Cracks Handbook"; Del. Res. Corp. Hellertown (pennsylvania), 1973, 2.1 - 2.9
- /85/ TRACEY,D.C.: "Finite element solutions for crack tip behaviour in small scale yielding"; Trans. ASME, Ser. H.J.Engng:Materials & Technol. 98 (1976), S. 146-151
- /86/ American Society for Testing and Materials: "Standard Test Methode for Determining J-R Curves"; ASTM E 1152 (1987)
- /87/ BROCKS,W.: "Die Dissipationsrate als Rißwiderstand"; Materialprüfung, 34. Jahrgang 1992, s. 350-353
- ~~/88/ TURNER,C.E.: "Re-Assessment of Ductile Tearing Resistence, Part I: The Geometry Dependence of J-R-Curves in Fully Plastic Bending, Part II: Energy Dissipation Rate and Associated R-Curves on Normalized Axes, In: Firrao, D. (Hrsg): Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures. ECF8, Turin 1990, Vol. II. EMAS, Warley 1990, s. 933-949, s. 951-968~~
- /89/ KLEMM,W. & KALTHOFF,J.F.: "Beschreibung des Werkstoffverhaltens bei schneller Rißausbreitung in Rohrfernleitungsstählen mit einem neu festgelegten Kennwert". Berichtsband 18. Vortragsveranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge. Deutscher Verband für Materialprüfung, Berlin 1986
- /90/ MEMHARD,D. & KLEMM,W.: "Zusammenhang zwischen Rißlaufenergie und J-Rißwiderstandskurven". Berichtsband 24. Vortragsveranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge. Deutscher Verband für Materialprüfung, Berlin 1992
- /91/ DVM-Merlblatt 003: "Ermittlung von Rißinitiierungswerten und

Rißwiderstandskurven bei Anwendung des J-Integrals", Deutscher Verband für Materialprüfung, Berlin 1987

/92/ YUAN,H. & BROCKS,W.: "Notes on plastic reloading zone in the asymptotic analysis of elastic-plastic crack extension", Archive of Applied Mechanics 61 (1991), pp 471-478

/93/ DENG,X.M. & ROSAKIS,A.J.: "Dynamic crack propagation in elastic perfectly plastic solids under plane stress conditions"; J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 5, pp 683-722 (1991)

/94/ BROCKS,W. & OLSCHIEWSKI,J.: "On J-dominance of crack-tip fields in largely yielded 3-D structures"; Int. J. Solids Structures, Vol. 22, pp 693-708 (1986)

/95/ AURICH, D. et al: "Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte"; BAM-Forschungsbericht 192, Berlin: Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, (1993)

---





## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- 
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15     Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- 
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- 
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- 
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Korbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis

Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15

Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in  
verfestigendem Material

---





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 85**