

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Armin Lenzen

**Untersuchung von dynamischen Systemen
mit der Singulärwertzerlegung -
Erfassung von Strukturveränderungen**

Heft Nr. 94



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Armin Lenzen

**Untersuchung von dynamischen Systemen mit der
Singularwertzerlegung
—
Erfassung von Strukturveränderungen**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 94
1994

**Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum**

© 1994 **Dr.-Ing. Armin Lenzen
Gardelenbergstr.4
42499 Hückeswagen**

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Der von Ihnen eingesehene wissenschaftliche Bericht ist während meiner Tätigkeit am Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe numerische Methoden und Simulationstechnik, der Ruhr-Universität Bochum entstanden.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, auf dessen Initiative mir die Arbeit ermöglicht worden ist, danke ich für die ständige Bereitschaft zu zahlreichen anregenden fachlichen Diskussionen. Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für sein Interesse und die freundliche Unterstützung.

Dem Graduiertenkolleg "Computational Structural Dynamics" danke ich für die Aufnahme als Mitglied.

Den Mitarbeitern des Instituts danke ich für ihre Aufgeschlossenheit und ihr Entgegenkommen, die zu einem kooperativen Arbeitsklima führten, besonders den Herren M. Breidt, B. Burbaum, K. Gorontzi, H.-J. Michel, H. Müller und M. Petig.

Bochum, Juni 1994

Armin Lenzen

Dissertation eingereicht am : 28. Juni 1994

Tag der mündlichen Prüfung : 25. November 1994

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Bring' vor, was wahr ist;
Schreib' so, daß es klar ist;
Und verlicht's, bis es mit dir gar ist!

1897, Ludwig Boltzmann

Zusammenfassung

Mit dieser Arbeit wird eine *neue Methodik zur Schadenslokalisierung bzw. Strukturuntersuchung von dynamischen Systemen*, dies sind reale Ingenieurbauwerke wie z.B. Brücken, Schornsteine, Maschinen usw., vorgestellt. Die Strukturuntersuchung erfolgt dabei auf der Basis von experimentellen Schwingungsmeßdaten.

Bisherige dynamische Prüfmethode zur Schadenslokalisierung und Untersuchung von Ingenieurbauwerken sind unter dem Namen Identifikation von dynamischen Systemen bekannt. Diese Methoden beruhen häufig auf einem Abgleich eines numerischen Modells (z.B. einer Finite Elemente Methode) über gemessene Zustandsgrößen der Struktur (z.B. auf der Basis von Schwingungsmessungen) mit dem untersuchten realen Ingenieurbauwerk. Der Abgleich findet dabei mit geeignet gewählten Parametern des numerischen Modells statt. Die *Auswahl signifikanter Parameter für diesen Abgleich zwischen dem mathematischen Modell und den Meßgrößen* ist durchaus kein triviales Problem. Eine Schadenslokalisierung oder Identifikation einer Strukturveränderung stellt zusätzlich die Anforderung einer überschaubaren Selektion geeigneter Beurteilungsgrößen oder Maße dar.

Die skizzierten Probleme werden mit der vorgestellten *neuen Methodik zur Erfassung von Strukturveränderungen dynamischer Systeme* umgangen, da diese auf der Basis eines *systemtheoretischen Modellansatzes* beruhen. Dieser Modellansatz, in der mathematischen Regelungstechnik als Black box Modellierung oder Klemmenmodell bekannt, entwickelt das numerische Rechenmodell als Abbild der realen Struktur aus den gemessenen Schwingungsgrößen, den sogenannten Input- und Outputgrößen der Black box. Die Anwendung der verallgemeinerten *Singulärwertzerlegung*, als Rechenalgorithmus der numerischen Mathematik, bestimmt unter Berücksichtigung der verrauschten Meßgrößen die Modellparameter, die zunächst leider physikalisch nicht interpretierbar sind.

Eine geeignete Umformung der Parameter des Black box Modells, in die neu eingeführten und definierten *dynamischen Greenschen Einflußzahlen*, ermöglicht dann eine physikalische Interpretation des numerischen Modells. Interessant ist, daß diese Einflußzahlen in der Baustatik als statische Größen unter der Bezeichnung Einflußlinie bekannt sind. Der neue numerische Mehrstufenalgorithmus wird ausführlich vorgestellt.

Diese Methodik der numerischen Modellierung von Ingenieurbauwerken ermöglicht eine *handhabbare Untersuchung von Strukturveränderungen* bei dynamischen Systemen, mit Hilfe der signifikanten dynamischen Greenschen Einflußzahlen. Das numerische Rechenverfahren zur Erfassung von Strukturänderungen wird anhand von *Ergebnissen numerischer Simulationen und realer Messungen* erläutert und diskutiert, indem eine Zusatzmasse als Strukturänderung lokalisiert wird.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Problemskizze	5
2.1	Zielsetzung	5
2.2	Brücke Hückeswagen	7
2.2.1	Beschreibung des Meßobjektes	7
2.2.2	Ablauf der Messung	10
2.2.3	Meßergebnisse	12
2.2.4	Simulation	15
2.2.5	Bewertung	17
2.3	Problem der Modellfindung	18
3	Singulärwertzerlegung	21
3.1	Einleitung	21
3.2	Die Singulärwertzerlegung	22
3.3	Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung	24
3.4	Singulärwertzerlegung und lineare Abbildung	30
3.5	Pseudoinverse und Least Squares Lösung	35
3.6	Der Rang einer Matrix	39
4	Systemtheorie	43
4.1	Einleitung	43
4.2	Beschreibung dynamischer Systeme	44
4.3	Struktureigenschaften dynamischer Systeme	49
4.3.1	Steuerbarkeit	49
4.3.2	Beobachtbarkeit	54
4.4	Realisierung	56
4.5	Diskrete dynamische Systeme	57
4.6	Der Hankel Operator	58

5	Realisierung dynamischer Systeme	63
5.1	Einleitung	63
5.2	Analyse mit dem Zustandsraummodell	64
5.3	Das synthetische Modell als Realisierung	70
6	Erfassung von Strukturveränderungen	75
6.1	Einleitung	75
6.2	Die dynamischen Einflußzahlen	76
6.3	Berechnungsablauf	80
6.4	Simulation FEM	82
6.4.1	FEM-Modell	82
6.4.2	Realisierung 8x8 FEM	83
6.4.3	Realisierung 4x4 FEM	86
6.5	Messungen realer Versuch	89
6.5.1	Realisierung 4x4 Versuch mbx2	92
6.5.2	Realisierung 4x4 Versuch mbx3	96
6.6	Singuläre Werte und Hankelnorm	100
7	Parallele zur DFT	103
7.1	Hankelstruktur, Eigenvektoren, DFT	103
7.2	Beispiel Brücke in Hückeswagen	106
8	Zusammenfassung	111
A	Symbole und Bezeichnungen	115
A.1	Formelzeichen	115
A.2	Diverse Sonderzeichen	116
A.3	Abkürzungen	117
B	Darstellung der Berechnungen	119
B.1	Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m1	120
B.2	Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m5	131
B.3	Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m10	141
B.4	Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m14	151
B.5	Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m54	161
B.6	Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m104	170
B.7	Realisierung 4x4 , Messung mbo2 mbm2	179
B.8	Realisierung 4x4 , Messung mbo3 mbm3	188
	Literaturverzeichnis	199

Einleitung

Die Formulierung von mathematischen Modellen ist ein Kernpunkt bei der Untersuchung von natürlichen und künstlichen Objekten, deren Ursprung in der Natur und Technik aufzufinden ist. Die Abbildung der Objekte in die mathematische Sprache dient dabei sowohl der Analyse als auch der Synthese.

Technische Konstruktionen, künstliche Objekte, werden auf der Basis synthetischer Modelle entwickelt und überprüft, während natürliche Gegebenheiten, existierende Objekte, mit analytischen Modellen studiert werden. Ziel der Untersuchungen ist es, nähere Informationen und Erkenntnisse über die Objekte zu erhalten.

Das Grundproblem ist die geeignete Wahl eines mathematischen Modells, das die Realität möglichst genau abbildet, aber zugleich eine überschaubare Menge an interpretierbarer Information liefert.

Hier wird das Problemumfeld konkretisiert indem dynamische Systeme anhand von Meßdaten analysiert werden, um Änderungen in ihrem inneren Aufbau bzw. der Struktur zu erfassen.

Die mathematische Modellierung und Berechnung, die für eine Untersuchung von dynamischen Systemen erforderlich ist, setzt sich bei der vorgeschlagenen Methode aus der Verknüpfung von drei grundlegenden theoretischen Gebieten zusammen.

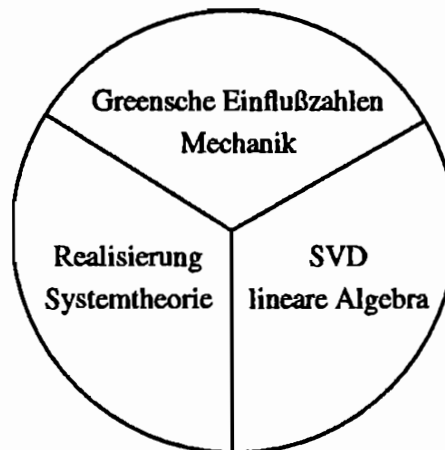
Die Greenschen Einflußzahlen der Mechanik bilden die Basis der physikalischen Interpretation, die Systemtheorie liefert die Theorie der Realisierung von dynamischen Systemen und die lineare Algebra als Teilgebiet der Mathematik, ermöglicht über die allgemeine Singulärwertzerlegung die digitale Berechnung.

Mit der Signifikanz der Greenschen Einflußzahlen wird die Erfassung von Strukturveränderungen möglich, da die Informationen über das dynamische System in komprimierter Form vorliegen. Das Zustandsraummodell der Systemtheorie dient in der Analyseform der Modellbildung, aus dem die Greenschen Zahlen entwickelt werden.

Die lineare Algebra stellt der Numerik mit der neuzeitlichen Entwicklung der verallgemeinerten Singulärwertzerlegung ein elegantes Werkzeug zur Verfügung.

Die neu vorgestellte Berechnungsmethode eignet sich sowohl zur Untersuchung von dynamischen Systemen als auch der Erfassung von Strukturveränderungen.

Die erforderlichen theoretischen Grundlagen werden ausführlich beschrieben und an dynamischen Systemen validiert.



- In Kapitel zwei wird an einem technischen Objekt, einer Brücke als dynamisches System, das Zuordnungsproblem zwischen Meßdaten und vorgegebenem mathematischem Modell skizziert. Hierbei wird deutlich, daß die mathematische Modellbildung das Kernproblem darstellt. Die nach mechanischen bzw. physikalischen Prinzipien aufgestellten Berechnungsmodelle bilden die realen Gegebenheiten nur unzulänglich ab. Deshalb wird für die weitere Untersuchung von dynamischen Systemen die Modellierung mit dem Zustandsraummodell der Systemtheorie bevorzugt, die unter dem Begriff Realisierung oder Black box Modell bekannt ist.
- In der linearen Algebra ist der numerische Algorithmus der Singulärwertzerlegung (SVD) entstanden. In der neueren mathematischen Literatur findet man verschiedene Verallgemeinerungen dieser Theorie. Da die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung den numerischen Kernalgorithmus einer Realisierung bildet, wird die SVD und die notwendige Theorie der linearen Algebra ausführlich in Kapitel drei dargestellt.
- Kapitel vier erläutert die Grundlagen der Systemtheorie linearer Systeme mit den mathematischen Realisierungseigenschaften Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit, die hier über die Theorie der linearen Algebra präzise dargestellt sind. Der Hankeloperator als Basis der Realisierungsmethodik bildet das Ende der systemtheoretischen Darstellung.
- Die Analyse- und Synthese- Methoden mit dem Zustandsraummodell der Systemtheorie sind in Kapitel fünf vorzufinden. Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung wird hier als das ideale numerische Werkzeug zur Untersuchung dynamischer Systeme in Zustandsraumform dargestellt.

- In Kapitel sechs werden die drei grundlegenden theoretischen Gebiete SVD, Realisierung und Greensche Einflußzahlen zu einer Berechnungsmethode assembliert. Die vorgestellte Methodik, zur Untersuchung dynamischer Systeme, wird dann durch Simulationsrechnungen und reale Messungen an einem speziellen Versuchsobjekt untersucht, ausführliche Berechnungen finden sich im Anhang.
- In Kapitel sieben findet ein interessanter Vergleich, der zum Ende von Kapitel zwei angedeutet wird, zwischen diskreter Fourier Transformation und Hankelmatrix statt. Danach wird anhand der Meßdaten aus Kapitel zwei demonstriert, wie zuverlässig die Berechnungsmethode anzuwenden ist.

Die Arbeit ist so aufgebaut, daß die Kapitel drei bis sechs eigenständige Teilgebiete darstellen, in die jeweils eine spezielle Einleitung einführt. Die Kapitel zwei und sieben bilden eine Einheit, wobei der Kapitelteil sieben die Kenntnis der vorgestellten Berechnungsmethodik erfordert.

Kapitel 2

2.1	Zielsetzung	5
2.2	Brücke Hückeswagen	7
2.2.1	Beschreibung des Meßobjektes	7
2.2.2	Ablauf der Messung	10
2.2.3	Meßergebnisse	12
2.2.4	Simulation	15
2.2.5	Bewertung	17
2.3	Problem der Modellfindung	18

Problemskizze

2.1 Zielsetzung

In den Jahren 1960 – 1970 ist in den Ingenieurwissenschaften mit der Entwicklung der Digitaltechnik eine Berechnungsmethode mit vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten unter dem Begriff FEM (Finite Elemente Methode) entstanden. Dieser Rechenalgorithmus basiert auf den Grundgesetzen der Mechanik bzw. den physikalischen Erkenntnissen, die durch die Möglichkeit der Diskretisierung mit dem Digitalrechner ihre Mächtigkeit zur Berechnung beispielsweise statischer und dynamischer Vorgänge zeigt.

Interessant ist die Beantwortung der Frage, inwieweit die Berechnungsergebnisse mit den realen Gegebenheiten übereinstimmen. Zur Überprüfung dieser Fragestellung ist es sinnvoll, einen Vergleich zwischen Berechnungsgrößen und gemessenen realen Größen des zugrundeliegenden Objektes anzustellen. Damit ist zum einen eine Aussage über die Genauigkeit des Rechenmodells möglich, zum anderen kann eine nachträgliche Verbesserung stattfinden.

Da dynamische Abläufe sehr komplizierter Natur sind, kann eine Berechnung sehr fehlerbehaftet sein. Der Grund ist eine unzureichende mathematische Darstellung der Realität, die bei der FEM in der Wahl nur annähernd genauer Theorien bzw. Ansatzfunktio-

nen ihren Ursprung hat. Über die Messung realer Vorgänge ist deshalb die Möglichkeit gegeben, die theoretischen Regelwerke bzw. die Berechnungsmodelle abzugleichen.

Im Ingenieurwesen werden die beschriebenen Ungenauigkeiten der Berechnung bis dato allgemein mit heuristischen Sicherheitsfaktoren berücksichtigt. Speziell bei dynamischen Fragestellungen sind jedoch auch hier genauere Berechnungen bzw. Einblicke in komplexe Zusammenhänge anzustreben.

Mit Schwingungsuntersuchungen können im Ingenieurwesen Aussagen über den Zustand von realen Strukturen getätigt werden. Die komplexen realen Strukturen sind beispielsweise große Turbinen, Maschinen und Rohrleitungssysteme aus dem Maschinenbau oder große Schornsteine, Türme, Gebäude und Brücken aus dem Bauwesen. Die Kenntnis des genauen Zustands gilt als ein Indikator für eine Strukturveränderung. Deshalb sind beispielsweise Schäden anhand von Schwingungsuntersuchungen lokalisierbar oder Maschinenzustandsüberwachungen planbar bzw. eine allgemeine Vorhersage über die Eigenschaft der Struktur möglich.

Hier soll insbesondere der Gesichtspunkt der Schadensfrüherkennung oder Schadenslokalisierung betrachtet werden, beispielhaft dafür ist die Riblokalisierung von Brückenbauwerken im Bauwesen. Aus fertigungstechnischen und materialtechnischen Gründen entstehen bei großen Brückenbauwerken aus Beton an Betonierabschnitten Koppelfugen. Dies sind bezogen auf die Lebensdauer einer Brücke große Schwachpunkte der Struktur, die ständig überwacht und nachzubessern sind.

Mit einer Schwingungsuntersuchung kann der Erfolg oder die Notwendigkeit einer Nachbesserung, die mit einem hohen Kostenaufwand verbunden ist, bestätigt werden. Ein großer Vorteil bei der Überprüfung ist der zerstörungsfreie Meßvorgang. Denkbar ist der ständige Einsatz eines Digitalrechners zur Überwachung der Struktur mit dynamischen Meßdaten.

Um das Vorhaben der Schadensfrüherkennung an Bauwerken zu konkretisieren wurden Meßstudien auf Autobahnbrücken der A 45 durchgeführt. Hierbei stellte sich deutlich heraus, daß die vorhandene Schwingungsmeßtechnik nicht ausreichend ist, um Brücken einer Größenordnung von ca. 600 m Länge realistisch zu untersuchen. Die gemessene Information mit drei vorhandenen Beschleunigungssensoren ist nicht repräsentativ um Aussagen über den Schwingungszustand zu tätigen.

Als Idealfall für eine Vorstudie zur Strukturuntersuchung kristallisierte sich die Brücke Hückeswagen, siehe Kapitel 2.2.1, heraus. Bezogen auf den erforderlichen Aufwand der Meßtechnik und den erforderlichen Meßablauf erscheint die Größenordnung der ca. 20 m langen Fußgängerbrücke optimal geeignet. Die Strukturänderung der Stahlkonstruktion wird durch eine Zusatzmasse simuliert. Nach einer anfänglichen dynamischen Nullmessung wird die Brücke mit der Zusatzmasse belastet, danach erfolgt eine erneute Schwingungsuntersuchung.

Die Zielsetzung ist durch eine vergleichende Studie der Schwingungsuntersuchungen den Ort der Strukturänderung zu lokalisieren, dies ist vergleichbar mit einer Schadenslokalisierung an der Struktur.

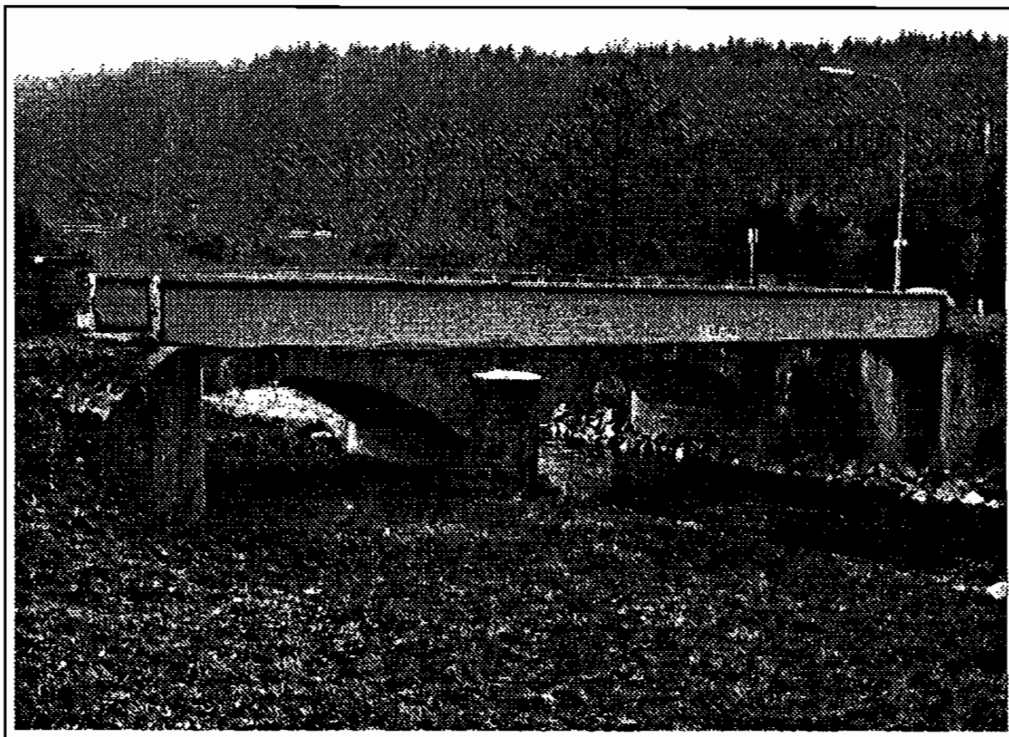
2.2 Brücke Hückeswagen

2.2.1 Beschreibung des Meßobjektes

Für den Zweck der genaueren Studie von dynamischen Eigenschaften einer realen Struktur wird die Fußgängerbrücke in Hückeswagen gewählt. Das Meßobjekt zeichnet sich durch ein gutes Signalrauschverhältnis bei Beschleunigungsmessungen aus und ist für die vorhandene, nicht aufwendige, Meßmimik akzeptabel.

Die Brücke ist eine ca. 20 m lange Stahlkonstruktion über die Wupper, Fluß im Bergischen Land, die als Behelfsbrücke für Fußgänger dient, direkt daneben eine parallelgelegene denkmalgeschützte Bogenbrücke, für den Fahrzeugverkehr, siehe Fotografien 2.1, 2.2.

Fotografie 2.1 Nordansicht der Brücke in Hückeswagen



Die Fußgängerbrücke ist aus einzelnen Blechen und Profilträgern zusammengesweißt. Die beiden Brückengeländer bilden die eigentliche Tragkonstruktion, die durch eine verhältnismäßig weiche Stahlplatte als Gehweg verbunden sind. Die beiden Hauptträger, als Geländer für den Passanten erkennbar, sind aus U-Profilen und Einzelblechen zusammengesweißt, wobei T-Profile die Beulsteifen bilden. Die Gehwegplatte ist seitlich an den Hauptträgern angeschweißt und mit auf der Brückenunterseite liegenden Winkelstücken versteift. Die Gehwegplatte ist zum Zweck der sicheren Wasserabführung mit leichtem Quergefälle in die Konstruktion eingepaßt.

Die Widerlager der Konstruktion bilden massige Stahlbetonwinkel auf denen die Brücke an vier Punkten aufliegt, die als Festlager und Loslager konstruiert sind. Die Hauptträger sind nicht gabelgelagert und deshalb horizontal allseitig frei.

Besonderheiten der Konstruktion sind erstens ein starker korrosionsbedingt schlechter Allgemeinzustand, zweitens ein einseitig längsgeführter Kabelkanal unter einem Hauptträger, drittens die nicht in einer Ebene liegenden Auflagerpunkte, eine Auslotung ergab einen Höhenunterschied von ca. 4 cm an einem Auflagerpunkt, aufgrund dessen die ideale Lagerbedingung vermutlich unzutreffend ist.

Tabelle 2.1 Querschnittswerte der Brücke in Hückeswagen

Hauptträgerquerschnittswerte			
m^4	m^2	m	
$0,354 \cdot 10^{-2}$	$0,147 \cdot 10^{-1}$	2,240	ST37

Fotografie 2.2 Südansicht der Brücke in Hückeswagen

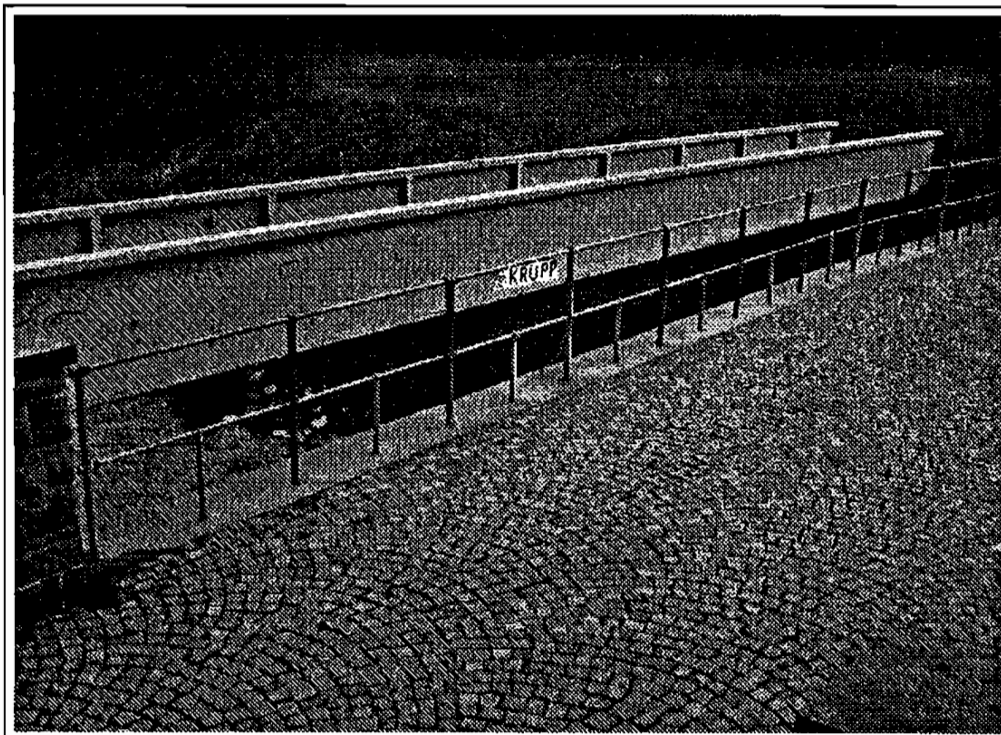
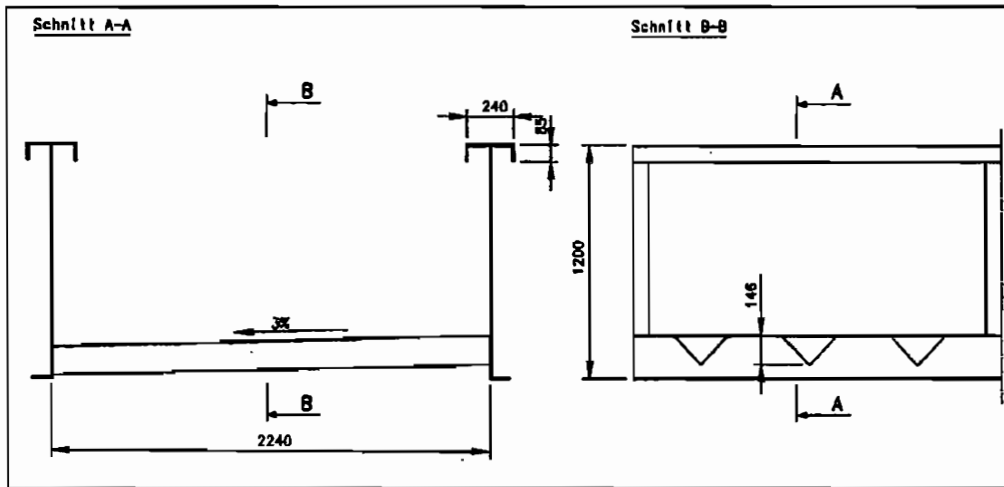
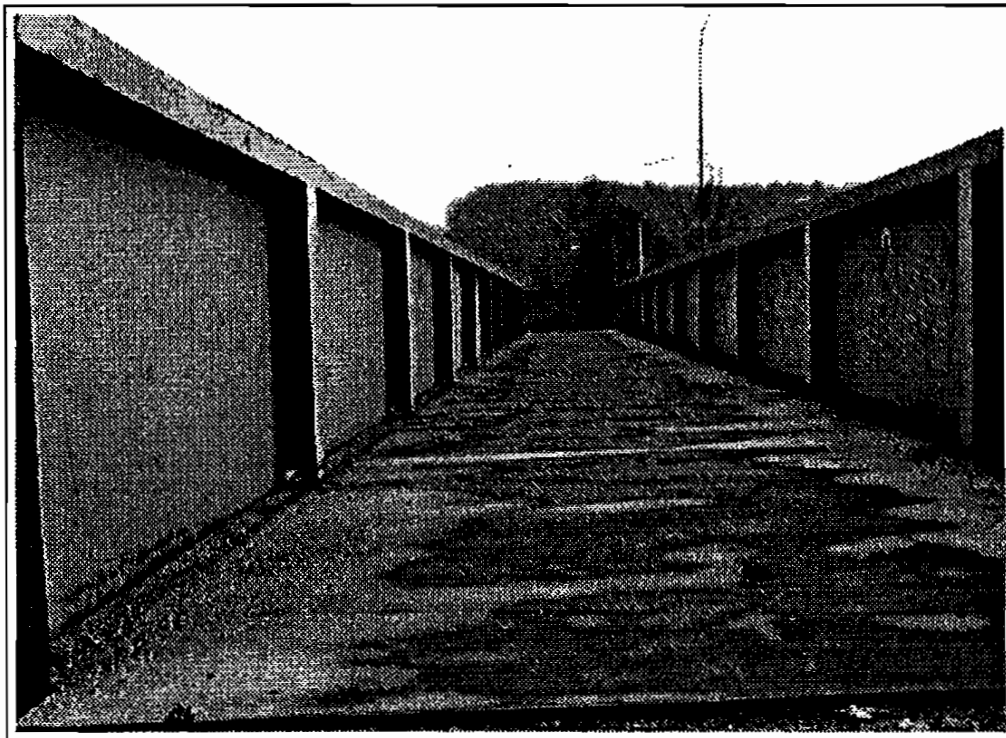


Bild 2.1 Querschnitt der Brücke in Hückeswagen



Fotografie 2.3 Gehweg der Brücke in Hückeswagen



2.2.2 Ablauf der Messung

Ziel der Messung ist eine Aussage über eine Strukturveränderung zu treffen. Die Basis für die Untersuchung bilden mit einem Digitalrechner aufgezeichnete Beschleunigungssignale. Als Strukturveränderung an dem Meßobjekt Fußgängerbrücke Hückeswagen bietet sich eine Massenveränderung bei der dynamischen Untersuchung an. Zum einen dient eine Zusatzmasse von ca. 350 kg auf dem Gehweg und zum anderen der nachträglich entfernte Kabelkanal jeweils als eine ca. 10 prozentige Veränderung der Eigenmasse.

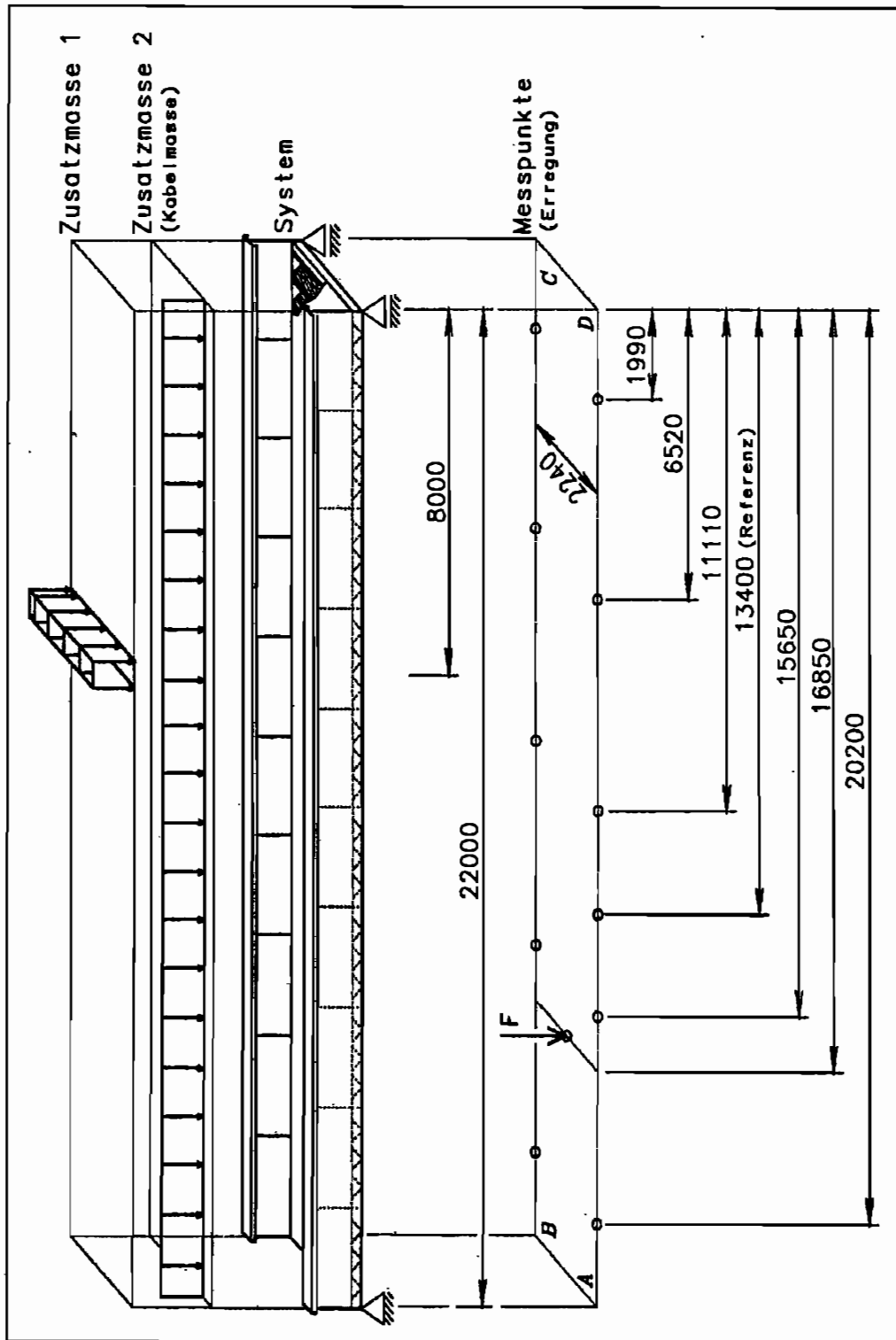
Tabelle 2.2 Lastfälle

Messung	Kabelkanal	Zusatzmasse
HO	mit	ohne
HM	mit	mit
NO	ohne	ohne
NM	ohne	mit

Die vorhandenen drei Beschleunigungssensoren erlauben eine zeitsynchrone Messung auf zwei ausgewählten Hauptträgerpunkten und einem Referenzmeßpunkt, der als Bezugspunkt von fünf aufeinanderfolgenden Messungen, die in ihrer Gemeinsamkeit eine Gruppenmessung bilden, dient. Die Messungen liefern in ihrer Gesamtheit eine Information über den Zustand der Struktur. Bezogen auf die möglichen Strukturänderungen und die damit verbundenen Urmessungen oder Nullmessungen sind vier Meßvorgänge zu protokollieren, siehe Tabelle 2.2 und Bild 2.2. Als Erregung für die dynamische Untersuchung der Brücke wird ein impulsartiger Vorgang mit einem Fallgewicht aus definierter Höhe genutzt.

Das die Rahmenbedingung, wie Samplefrequenz, Analogfiltereckfrequenz usw., optimal einzustellen sind, ist selbstverständlich und Voraussetzung einer jeden sinnvollen Untersuchung.

Bild 2.2 Prinzipskizze der Meßpunkte und Lastfälle



2.2.3 Meßergebnisse

Die aufgezeichneten Beschleunigungsmeßdaten werden auf signifikante Veränderungen untersucht, um damit Rückschlüsse über das Meßobjekt zu erhalten. Bei dynamischen Untersuchungen bietet sich das bekannte Verfahren der Modalanalyse an. Hierbei werden die Signalparameter Frequenz, Dämpfung, Amplitude und Phase als aussagefähige Kenngrößen eines Meßsignals gewählt, um den Informationsgehalt zu bewerten. Die Eigenschaften des untersuchten Objektes bilden sich in den Parametern ab, damit kann eine Strukturänderung erkannt werden.

Bei der gewählten Änderung, die Erhöhung der Masse, ist eine deutliche Frequenzreduktion und eine Abnahme der Amplitude bei gleichbleibender Schwingungsanregung zu erwarten. Die Phase bildet ein Hilfsmittel zur Synchronisation einzelner Meßkanäle untereinander, um so die Darstellung von Struktureigenformen zu ermöglichen, die möglicherweise über ihre Knotenverschiebung bzw. Formveränderung Rückschlüsse auf den Ort der Strukturänderung ermöglichen.

Die Strukturuntersuchung mit der Modalanalyse ist sinnvoll, wenn die Signalkenngrößen anhand des Frequenzspektrums eindeutig selektierbar sind und eine Zuordnung zwischen den Meßkanälen bzw. den einzelnen unterschiedlichen Messungen innerhalb von kleinen Frequenzbandbreiten möglich ist. Liegen jedoch innerhalb eines engbegrenzten Spektrums mehrere signifikante Frequenzen als Kenngrößen vor, ist eine eindeutige Zuordnung der Signalparameter zwischen den Meßkanälen und erst recht zwischen den Meßvorgängen nach einer Änderung der Struktur sehr problematisch bzw. unmöglich.

Die in den Meßdaten vorliegenden Schwebungseffekte, siehe Bild 2.3, die auf die Besonderheiten der Fußgängerbrückenkonstruktion zurückzuführen sind, verursachen in schmalen Frequenzbandbreiten die zuvor beschriebene Problematik, so daß die Interpretation der Datenkenngrößen als sehr schwierig einzustufen ist.

Konstruktiv ist die Brücke aus zwei Hauptträgern und einer Bodenplatte zusammengesetzt. Die Hauptträger bilden jeweils einzeln ein mechanisches Modell "Balken auf zwei Stützen" und werden über die relativ weiche Bodengruppe zu einem komplizierten dynamischen Koppelsystem zusammengefügt. Bedingt durch die konstruktiv baugleichen Hauptträger, fertigungstechnisch allerdings immer unterschiedlichen Stahlträger, liegen die Trägereigenfrequenzen von beiden Trägern in einem engen Spektralbereich. Bei dynamischen Erregungen führt der bauartbedingte Energieaustausch zwischen den Hauptträgern zu Schwebungserscheinungen an der Struktur.¹

Die numerische Bestimmung der Parameter gilt, bedingt durch die beschriebenen Eigenschaften der Meßsignale, als problematisch, da eine eindeutige Trennung der Signalparameter gefordert ist. Eine Selektion der Parameter mit bekannten Verfahren der Rechentchnik wie z.B. die FFT (Fast Fourier Transformation) oder die Prony-Methoden, wird durch die in Meßsignalen immer vorhandenen Rauschanteile zusätzlich erschwert.

Die Tabelle 2.3 zeigt die gemessenen Frequenzparameter der Schwingungsuntersuchung auf, siehe auch [7]. Die Parameter stellen eine erste Annäherung dar und sind stark fehlerbehaftet. Die Vielzahl von Schwebungsfrequenzen, vorhandene Störgeräusche durch die Meßkette, Umwelteinflüsse und vermutete Nichtlinearitäten, z.B. durch Auf-

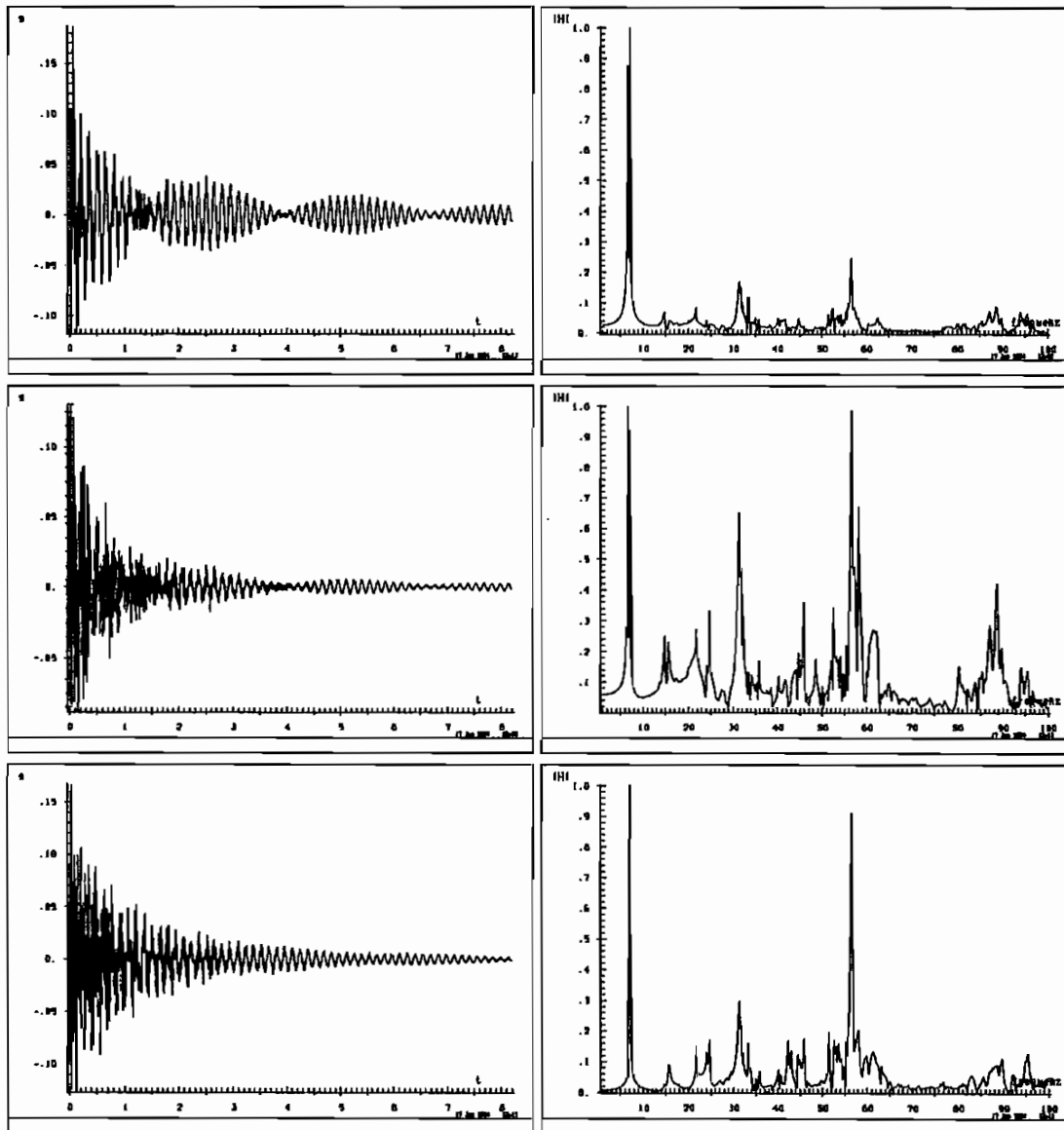
¹Tacoma Bridge 1959 USA

lagerreibung oder Lose in der Auflagerung, ermöglichen, mit den genannten Rechenmethoden auf der Basis einer modalen Analyse, leider keine zuverlässigen Aussagen. Der Parameterfehler liegt zudem in der gleichen Größenordnung wie die Parameteränderungen hervorgerufen durch eine Zusatzmasse, so daß signifikante Aussagen über eine Strukturänderung als unglaubwürdig zu bewerten sind.

Ein Vergleich unter den einzelnen Messungen über den Referenzkanal, zur Abstimmung und Normierung innerhalb einer Meßgruppe, siehe Kapitel 2.2.2, ist nicht praktikabel, da die Parameter nur unzulänglich bekannt sind.

Tabelle 2.3 Meßergebnisse, erste Grundschwingungen

Messung / Frequenz [Hz]				Eigenform
HM	HO	NM	NO	
6,76	6,97	6,54	6,64	1.T
6,48	6,57	6,96	7,18	1.B
14,75	14,72	14,89	14,88	?1
15,45	15,46	15,42	15,44	?2
24,67	24,62	21,62	21,61	2.B
31,49	31,77	38,10	37,82	2.T
45,80	45,80	45,22	44,65	3.B
T = Torsionsschwingung				
B = Biegeschwingung				
? = unbekannt				

Bild 2.3 Lastfall HO Meßsignal : Kanal 1(Ref.), 2 , 3 ; norm. Ampl.

2.2.4 Simulation

Zu Vergleichszwecken mit den Meßergebnissen und einer Unterstützung der Interpretation von identifizierten Parametern ist das Eigenschwingungsverhalten mit der Finite Elemente Methode abgebildet worden. Das Programmsystem MESY [51] erlaubt die Anwendung einer räumlichen FE-Simulation mit Timotshenko-Balkenelementen. Platten- oder Scheibenelemente sind in dem verfügbaren Programmbaukastensystem nicht enthalten.

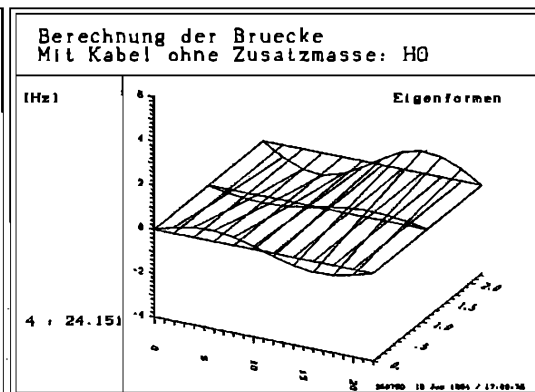
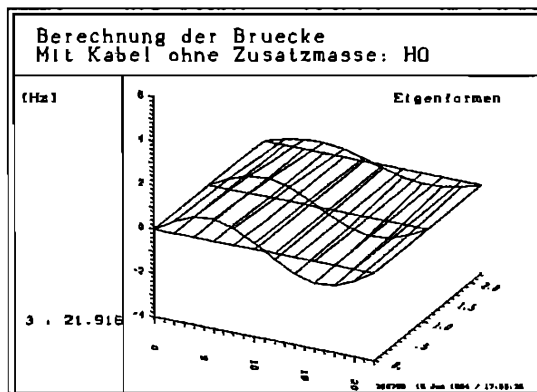
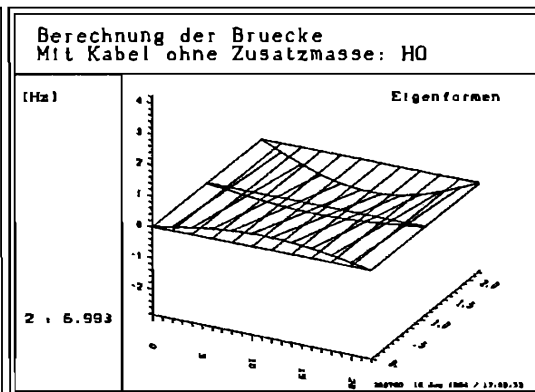
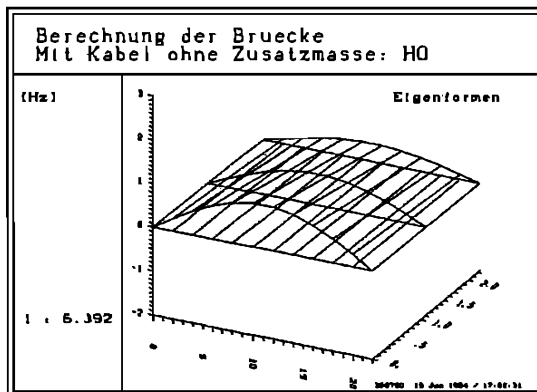
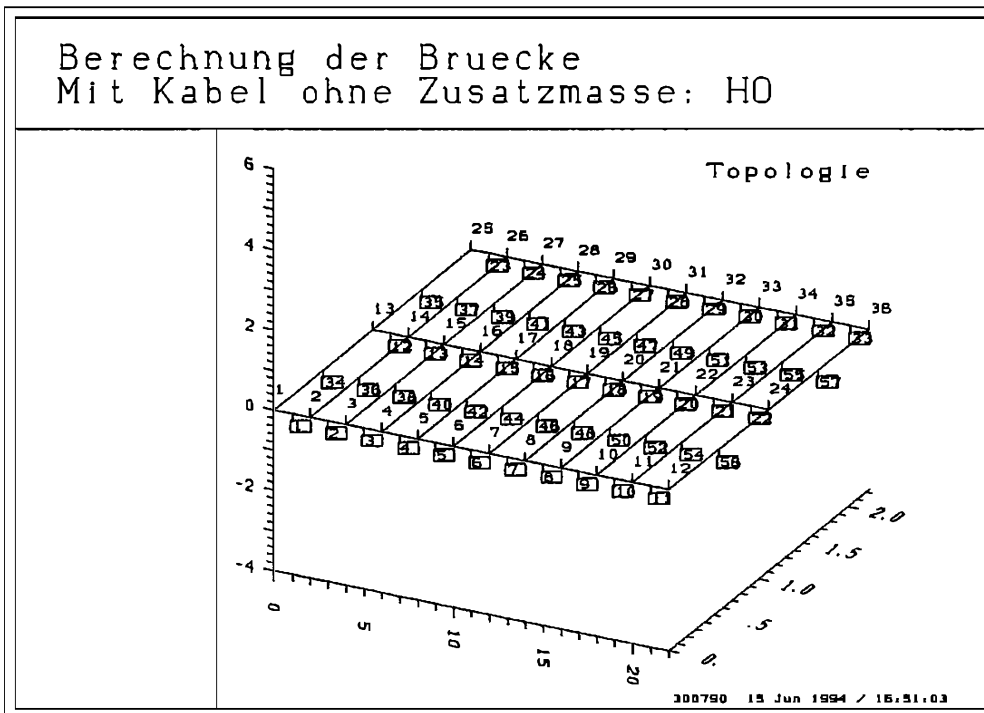
Die Hauptträger, auf beiden Seiten der Brücke, bilden bautechnisch beurteilt die eigentliche tragende Struktur, diese werden jeweils durch 11 Balkenelemente diskretisiert. Die weiche Bodengruppe wird aus einem groben Gitterrost mit 35 Balkenelementen gebildet, deren Steifigkeiten so gewählt werden, daß eine Biegeeigenform und eine Torsionseigenform in einem schmalen Frequenzbereich abzubilden sind. Da über die Bodenbleche keine Querschnittsinformationen vorliegen, ist die Vorgehensweise sinnvoll.

Eine Berechnung der vier Lastfälle, siehe Tabelle 2.2, und die Darstellung der ersten Eigenformen zeigt beispielhaft das Bild 2.4 und die Tabelle 2.4.

Tabelle 2.4 Simulation, erste Grundformen

Messung / Frequenz [Hz]				Eigenform
HM	HO	NM	NO	
6.106	6.392	6.326	6.674	1.B
6.826	6.993	7.015	7.163	1.T
21.121	21.916	21.833	22.788	2.B
23.752	24.151	24.459	24.806	2.T
36.361	37.428	36.399	37.468	P
38.676	39.499	39.514	40.521	3.B
42.483	45.299	43.190	46.948	3.T
45.235	50.486	46.848	51.192	4.B?P
53.002	55.340	53.967	56.462	P
55.383	55.868	56.273	56.814	5.B?P
56.284	56.593	57.610	58.020	P
59.812	60.898	60.640	61.661	P
61.036	61.133	62.761	62.875	P
64.525	66.910	65.388	67.771	P
65.558	66.957	68.610	70.336	P
72.360	73.067	73.322	73.980	P
75.067	76.004	76.803	77.790	P
77.572	80.836	78.462	81.711	P
86.610	88.272	87.595	89.283	P
87.801	88.371	92.811	93.496	P
P = Plattenschwingung T = Torsionsschwingung B = Biegeschwingung ? = unbekannt				

Bild 2.4 Lastsfall HO Finite Elemente Simulation als Beispiel der ersten Grundformen



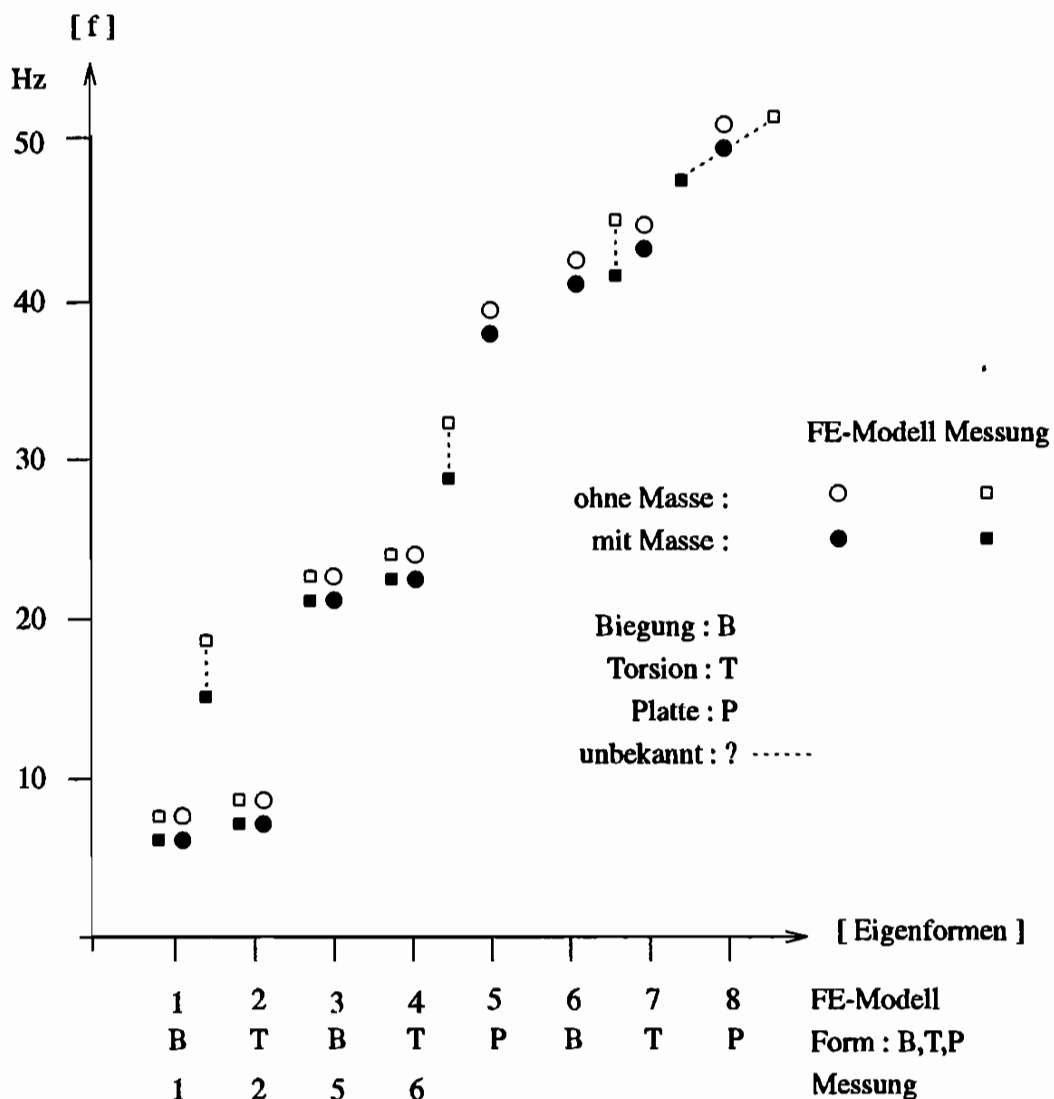
2.2.5 Bewertung

Die Analyse der Meßdaten erlaubt keinen Abgleich mit der Simulation. Die vorliegenden Meßdaten ermöglichen keine eindeutige Zuordnung zwischen Messung und der Simulation, siehe Tabellen 2.3, 2.4 und Bild 2.5.

Über die zwei niedrigsten Frequenzgruppen kann näherungsweise behauptet werden, daß Messung und Simulation abzugleichen wären, doch weitere Parallelen sind nicht vorhanden. Die Information in den Meßdaten enthalten Frequenzparameter, die in der Simulation nicht aufzufinden sind.

Da die erhaltenen Informationen zwischen Messung und Simulation äußerst unterschiedlich sind, erscheint ein weiterer Interpretationsversuch als zwecklos. Die Signifikanz der Parameter reicht nicht aus, um eine Strukturveränderung der Fußgängerbrücke zuverlässig festzustellen. Zum einen liegt das Problem in der unzulänglichen Erfäßbarkeit der Meßdatenparameter, zum anderen an der fehlerhaften Abbildung der Realität mit der Finite Elemente Methode.

Bild 2.5 Zuordnungsproblem



2.3 Problem der Modellfindung

Der Vergleich zwischen den Parametern der Meßsignale und denen der Simulation läßt deutlich werden wie problematisch eine mathematische Darstellung der Realität ist.

Der Abgleich zwischen den modalen Parametern der Messung und denen der Simulation ist bedingt durch die nicht eindeutige Zuordnung unmöglich. Sowohl in der Simulation als auch in den Meßdaten sind signifikante Parametergrößen erkennbar, die ein jeweiliges Vergleichsobjekt entbehren. Besonders deutlich wird dies an der gemessenen Frequenz von ca. 15 Hz, die mit dem Rechenmodell nicht erreichbar ist. Grundsätzlich kann man behaupten, daß eine Modellfindung über die Parameter Frequenz, Dämpfung, Amplitude und Phase nicht gelingen kann, da einige gemessene Größen nicht mit dem Finite Elemente Modell berechenbar sind.

Eine Möglichkeit das Problem der Modellfindung zu vereinfachen, ist die Einführung eines Ergänzungsmodells, daß dem Modell der FEM als mathematisches Modell hinzugefügt wird. Dieses Ergänzungsmodell ermöglicht mit justierbaren Parametergrößen einen Abgleich mit der gemessenen Realität [44]. Ein solcher Abgleich setzt aber eine ungefähre Kenntnis der realen Abläufe voraus, da dem Ergänzungsmodell ebenfalls eine mathematische Struktur bzw. physikalische Interpretation zugrunde liegt. Beschreibt ein Ergänzungsmodell beispielsweise physikalische Strukturdämpfungseigenschaften, so kann ein Abgleich zwischen gemessener Realität und mathematischem Modell über Dämpfungsparameter stattfinden. Beispielsweise wird damit dann die nicht zuzuordnende Frequenz von 15 Hz mit einem Parametermodell abgeglichen, daß physikalisch Dämpfungseigenschaften beschreiben soll. Die Problematik einer möglichen Fehlerinterpretation wird an dem Beispiel deutlich.

Die Problematik der Modellfindung ist im Allgemeinen mit unzureichenden mathematischen Ansätzen verbunden. Die Funktionensysteme, mit denen das mathematische Modell charakterisiert wird, sind nicht ausreichend, um die Realität abzubilden. In den Finite Elemente Methoden sind beispielsweise die Ansatzfunktionen der Elemente unzulänglich, bei der diskreten Fouriertransformation die nur annähernd richtigen e -Funktionen, mit dem ein Signal vermessen wird, um das Signalspektrum zu berechnen.

Bei der Diskretisierung der Fouriertransformation können nur wenige Spektrallinien genau abgebildet werden, was bei der DFT bekannterweise mit der äquidistanten Zeitrasterung in Zusammenhang steht.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \right) \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{j\omega t} \quad F(\omega) \right) d\omega
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bei der diskreten Fouriertransformation wird das kontinuierliche Spektrum mit

$$e^{-j(k\Delta\omega)}, \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{2.2}$$

auf nur N Funktionen abgebildet.

$$\begin{aligned}
 \text{Analyse: } F_{(k\Delta\omega)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(k\Delta\omega)(n\Delta t)} f_{(n\Delta t)} \\
 \text{Synthese: } f_{(n\Delta t)} &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{+j(n\Delta t)(k\Delta\omega)} F_{(k\Delta\omega)} \quad (2.3) \\
 \Delta\omega &= \frac{2\pi}{N\Delta t}; \quad k = 0, \dots, N-1; \quad n = 0, \dots, N-1 \\
 \Delta t & \text{ Zeitraster}
 \end{aligned}$$

Die DFT lautet in Matrizendarstellung in ihrer Synthesenform mit $w = e^{+j\Delta t\Delta\omega}$

$$\begin{bmatrix} f_{(0\Delta t)} \\ f_{(1\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{(n\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{((N-1)\Delta t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{00} & w^{01} & \dots & w^{0(N-1)} \\ w^{10} & \ddots & & \\ & & \vdots & \\ \vdots & & \dots w^{nk} \dots & \vdots \\ & & \vdots & \\ w^{(N-1)0} & & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{(0\Delta\omega)} \\ F_{(1\Delta\omega)} \\ \vdots \\ F_{(k\Delta\omega)} \\ \vdots \\ F_{((N-1)\Delta\omega)} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

oder kurz

$$[f] = \mathcal{F}[F] \quad (2.5)$$

Durch das äquidistante Δt werden die Ansatzfunktionen für die Analyse- bzw. Synthesgleichung festgelegt, damit ist eine genaue Berechnung einer Spektrallinie, die nicht einem Vielfachen von $\Delta\omega$ entspricht unmöglich bzw. nur näherungsweise gegeben. Hier wird die begrenzte Abbildungsmöglichkeit sehr klar, die Spalten der Matrix \mathcal{F} sind bedingt durch das Zeitraster Δt nicht notwendigerweise Signaleigenvektoren bzw. Funktionen. Deshalb läßt sich mit der DFT oder FFT der Signalverlauf nur ungefähr analysieren als auch synthetisieren.

Eine Verbesserung der mathematischen Darstellung ist zu erwarten, wenn man das Signal auf die tatsächlichen Eigenvektoren abbilden kann, beispielsweise mit dem Ansatz

$$\varphi_k = e^{(\delta_k + j\omega_k)\Delta t}; \quad F_k; \quad k = 0, \dots, \infty \quad (2.6)$$

gedämpfter e -Funktionen mit separierter komplexer Amplitude. Die verbesserte Synthesgleichung mit einem gesuchten Eigenvektorsystem lautet

$$\begin{aligned}
 f_{(n\Delta t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^n F_k ; \quad n = 0, \dots, \infty \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{(\delta_k + j\omega_k)\Delta t n} F_k \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

In Matrizenform folgt die Beschreibung

$$\begin{bmatrix} f_{(0\Delta t)} \\ f_{(1\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{(n\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{(\infty\Delta t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_{(N-1)}^0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \varphi_0^n & \varphi_1^n & \cdots & \varphi_{(N-1)}^n \\ \vdots & \vdots & & \\ \varphi_0^\infty & \varphi_1^\infty & \cdots & \varphi_{(N-1)}^\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

beispielsweise für N Ansatzfunktionen.

Die Matrix der Eigenvektoren stellt die Vandermondsche Form dar, die für unterschiedliche Eigenwerte immer linear unabhängig ist.

Das dieses Gleichungssystem einen sinnvollen Ansatz für eine Berechnungsmethode liefert wird in Kapitel 7.1 gezeigt.

3.1	Einleitung	21
3.2	Die Singulärwertzerlegung	22
3.3	Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung	24
3.4	Singulärwertzerlegung und lineare Abbildung	30
3.5	Pseudoinverse und Least Squares Lösung	35
3.6	Der Rang einer Matrix	39

Singulärwertzerlegung

3.1 Einleitung

Die Singulärwertzerlegung ist ein numerischer Algorithmus, der die Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in zwei unitäre¹ Matrizen und eine Diagonalmatrix ermöglicht. Dies kann man, bezogen auf rechteckige singuläre Formen, als eine Verallgemeinerung der klassischen Eigenwertzerlegung EVD (Eigenvalue Decomposition) einer quadratischen Matrix betrachten.

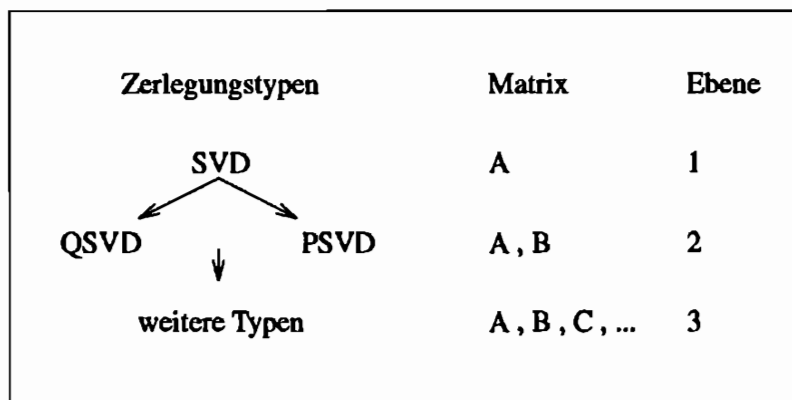
Die Ursprünge der Singulärwertzerlegung und deren theoretische mathematische Behandlung in der Literatur finden sich bei Beltrami, Jordan, Sylvester, Autonne, Eckart und Young in den Jahren 1873 bis 1936 [39]. Ein erster stabiler Programmcode wird im Jahr 1969 von Businger und Golub [8] vorgestellt.

In der neueren wissenschaftlichen Literatur wird die Singulärwertzerlegung einer Matrix mit der Kurzbezeichnung SVD (Singular Value Decomposition) oder OSVD (Ordinary Singular Value Decomposition) bezeichnet. Die theoretische Verallgemeinerung der SVD auf zwei Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$, bezeichnet mit GSVD (Generalized Singular Value Decomposition), wird in den Jahren 1976 und 1981 von Paige [43] und van Loan [35] beschrieben. Über den ersten numerisch zuverlässigen Algorithmus berichtet Paige [42] im Jahr 1986, Fernando und Hammarling [17] in 1987.

¹komplexe unitäre entsprechen reelle orthogonale Matrizen

Ab hier findet eine Unterscheidung der Zerlegung in eine Produktform PSVD (Product Singular Value Decomposition) und eine Quotientenform QSVD (Quotient Singular Value Decomposition) statt. Die QSVD hat die verallgemeinerte Eigenwertzerlegung GEVD (Generalized Eigenvalue Decomposition) als eine klassische Parallele in der Matrizentheorie. Weitere Verallgemeinerungen der Zerlegung auf mehrere sin-

Bild 3.1 Ebenen der Singulärwertzerlegung



guläre Matrizen $A_i \in \mathbb{K}^{n_{i-1} \times n_i}$, $i = 1, \dots, k$, sowie eine mögliche mathematische und sprachliche Vereinheitlichung, sind Gegenstand der augenblicklichen mathematischen Forschung [39]. Parallelen zu der Theorie der klassischen Eigenwertzerlegung finden sich keine, weshalb neue Impulse in der Forschung zu erwarten sind. Die Singulärwertzerlegung kann allgemein, je nach Anzahl von Matrizen, wie in Abbildung 3.1 verdeutlicht, auf drei Ebenen unterteilt werden.

Die Realisierung von numerischen Algorithmen in der dritten Ebene beschäftigen zur Zeit viele Wissenschaftler der linearen Algebra.

3.2 Die Singulärwertzerlegung

Die Einordnung der SVD zu allgemein bekannten numerischen Methoden ist wie folgt möglich.

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ repräsentiert eine lineare Transformation $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, als eine Abbildung aus einem Zahlenraum \mathbb{K}^n in \mathbb{K}^n bezogen auf eine Basis, siehe hierzu auch Kapitel 3.4. Die linearen Transformationen, deren Eigenvektoren eine Raumbasis aufspannen können, sind allgemein in einfache (e) und speziell als normale (n) mit $A^*A = AA^*$ sowie hermitesche (h) mit $A = A^*$ nach Matrizen zu klassifizieren [59].

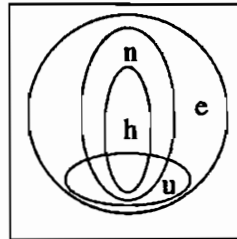
Unter Berücksichtigung der speziellen Jordan kanonischen Form einer Matrix mit verschiedenen (u) Eigenwerten, ermittelt mit der EVD, gilt $h \subset n \subset e$ und $u \subset e$, wie Bild 3.2 zeigt. Für den Fall h und n bilden die Eigenvektoren eine orthonormale Basis, dies gilt allgemein nicht für e .

Die allgemeine Jordan kanonische Form ist die Verallgemeinerung für mehrfach gleiche Eigenwerte einer quadratischen Matrix, die eine besondere EVD erfordert.

Eine rechteckige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beschreibt eine lineare Transformation $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ als eine Abbildung aus einem Zahlenraum \mathbb{K}^n in \mathbb{K}^m . Die SVD ermöglicht eine Zerlegung dieser rechteckigen Matrix, die mit der EVD nicht möglich ist. Deshalb kann dies, wie die allgemeine Jordan kanonische Form, als eine Verallgemeinerung der klassischen EVD, hier bezogen auf nicht quadratische Matrizen, betrachtet werden.

Bild 3.2 Lineare Transformationen in \mathbb{K}^n

e einfach
h hermitisch
n normal
u verschiedene EV



Die Singulärwertzerlegung SVD einer Matrix ist wie folgt definiert:

Theorem 3.1 (SVD, Standard Singulärwertzerlegung)

Es sei

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad (3.1)$$

eine Matrix, dann existieren zwei unitäre Matrizen:

$$U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ und } V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad (3.2)$$

so daß für $p = \min(m, n)$ gilt

$$U^*AV = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (3.3)$$

wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ist. [23] \square

Dabei werden die σ_i als singuläre Werte, die u_i als links singuläre Vektoren und die v_i als rechts singuläre Vektoren bezeichnet.

Als Sonderfälle sind zwei direkte Parallelen zwischen der EVD und der SVD vorhanden. Mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und den unitären Matrizen $X, U, V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt für den hermiteschen Fall,

$$\begin{aligned} \text{EVD} &: A = X \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X^* \\ \text{SVD} &: A = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) V^*, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$X = U = V$ als Eigenvektoren, λ_i als Eigenwerte und für den normalen Fall,

$$\begin{aligned} \text{EVD} &: A = X \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \text{diag}(e^{j\alpha_1}, \dots, e^{j\alpha_n}) X^* \\ \text{SVD} &: A = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) V^*, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$X = U, V^* = \text{diag}(e^{j\alpha_1}, \dots, e^{j\alpha_n}) X^*$ als Eigenvektoren, $\lambda_i = \sigma_i e^{j\alpha_i}$ als Eigenwerte mit $|\lambda_i| = \sigma_i$.

Andere Matrizen haben keine einfachen Zusammenhänge zwischen Eigenvektoren, Eigenwerten und der SVD.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen SVD und EVD ist mit dem Produkt $A^*A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ als hermitesche Matrix und deren Eigenwerten λ_j als

$$\begin{aligned} \text{EVD: } A^*A &= X \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X^* \\ \text{SVD: } A^*A &= V \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) V^* = V \Sigma_A^* U^* U \Sigma_A V^* \end{aligned} \quad (3.6)$$

zu verdeutlichen.

Theorem 3.2 (Der Rang einer Matrix)

Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ habe den Rang r , dann gilt mit den unitären Matrizen $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und der diagonal Matrix $\Sigma_A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Faktorisierung der Matrix A

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} = U^* A V \quad (3.7)$$

wobei für die singulären Werte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ gilt. [23] \square

Die SVD einer Matrix kennzeichnet ebenfalls die dyadische Darstellung, mit $U_r = U_{(1:m, 1:r)}$, $V_r = V_{(1:n, 1:r)}$ und $\Sigma_r = \Sigma_{(1:r, 1:r)}$, ist

$$A = U_r \Sigma_r V_r^* = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* \quad (3.8)$$

Die Struktur einer Matrix, als auch die eines linearen Operators, repräsentiert durch eine solche, wird durch die SVD deutlich offengelegt.

3.3 Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung

Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung von zwei singulären Matrizen wird durch den Algorithmus GSVD vollzogen, dabei soll hier der Quotient von zwei Matrizen QSVD behandelt werden.

Theorem 3.3 (QSVD, Quotient Singulärwertzerlegung)

Der Quotient zweier singulärer Matrizen AB^{-1} ist als eine verallgemeinerte Singulärwertzerlegung darstellbar. Zwei Matrizen,

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad (3.9)$$

und

$$B \in \mathbb{K}^{p \times n}, \quad (3.10)$$

mit gleicher Spaltenanzahl lassen sich in zwei unitäre Matrizen:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ und } \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p] \in \mathbb{K}^{p \times p}, \quad (3.11)$$

und eine invertierbare Matrix:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad (3.12)$$

zerlegen, so daß

$$\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{r+s}, \dots, \alpha_k, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{V}^* \mathbf{B} \mathbf{X} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}, \dots, \beta_k, 0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

ist und für die nichttrivialen Paare der singulären Werte gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_i = 1 \quad , \quad \beta_i = 0 \quad & i = 1, \dots, r, \\ \alpha_i < 1 \quad , \quad \beta_i > 0 \quad & i = r+1, \dots, r+s, \\ \alpha_i = 0 \quad , \quad \beta_i = 1 \quad & i = r+s+1, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Mit $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ für $i = r+1, \dots, r+s$ gilt zudem $1 > \alpha_{r+1} > \dots > \alpha_{r+s} > 0$ und $0 < \beta_{r+1} < \dots < \beta_{r+s} < 1$. [23] \square

Die $\alpha_i/\beta_i = \sigma_i$ werden auch entsprechend ihrem Verhältnis als unendlich, normal und null Paar gekennzeichnet.

Die klassische verallgemeinerte Eigenwertzerlegung GEVD (Generalized Eigenvalue Decomposition) lautet in der symmetrischen Form

$$\text{GEVD: } (\mathbf{A}^* \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B}^* \mathbf{B}) \mathbf{x}_i = 0. \quad (3.15)$$

Die GSVD beinhaltet mit dem normalen Paar $\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ und den zugehörigen Vektoren aus der Matrix \mathbf{X} die klassische Zerlegung. Mit Eigenvektoren \mathbf{x}_i und Eigenwerten $\lambda_i = \sigma_i^2$ gilt dann

$$\text{QSVD: } (\mathbf{A}^* \mathbf{U} \mathbf{U}^* \mathbf{A} - \sigma_i^2 \mathbf{B}^* \mathbf{V} \mathbf{V}^* \mathbf{B}) \mathbf{x}_i = 0. \quad (3.16)$$

In Blockmatrizen erscheint die Zerlegung QSVD in der folgenden Struktur.

Theorem 3.4 (QSVD, Rang und Struktur)

Der gemeinsame Rang der Blockmatrix $\mathbf{C}^* = (\mathbf{A}^* | \mathbf{B}^*)$ sei k mit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{p \times n}$, dann gilt mit den unitären Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{K}^{k \times k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \Sigma_A \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^* = \mathbf{U} \Sigma_A \mathbf{X}^{-1} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V} \Sigma_B \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^* = \mathbf{V} \Sigma_B \mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{U} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_A & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}^{m-k \times n-k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \\ \hline & & \mathbf{R}_{33} & \\ & & & \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{Q}^* \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{V} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_B & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}^{p-k \times n-k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \\ \hline & & \mathbf{R}_{33} & \\ & & & \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{Q}^*
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die Blockmatrizen $\mathbf{I}_A, \mathbf{S}_A, \mathbf{O}_A$ und $\mathbf{O}_B, \mathbf{S}_B, \mathbf{I}_B$ entsprechen dabei den singulären Paaren α_i, β_i . [42] \square

Es folgt die eine weitere verallgemeinerte Singulärwertzerlegung von zwei singulären Matrizen, hier jedoch als ein Produkt von zwei Matrizen.

Die PSVD bildet damit das Gegenstück zu der QSVD in der Ebene zwei.

Theorem 3.5 (PSVD, Produkt Singulärwertzerlegung)

Das Produkt zweier singulärer Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{B}^*$ ist durch eine verallgemeinerte Singulärwertzerlegung faktorisiert. Zwei verträgliche Matrizen,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n} \tag{3.19}$$

und

$$\mathbf{B}^* \in \mathbb{K}^{n \times p}, \tag{3.20}$$

lassen sich in zwei unitäre Matrizen:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ und } \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p] \in \mathbb{K}^{p \times p}, \tag{3.21}$$

und eine invertierbare Matrix:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{K}^{n \times n} \tag{3.22}$$

zerlegen, so daß

$$\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{X}^{-1} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{r+s}, \dots, \alpha_k, 0) \in \mathbb{K}^{m \times n} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{V}^* \mathbf{B} \mathbf{X} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}, \dots, \beta_k, 0) \in \mathbb{K}^{p \times n},$$

ist und für die nichttrivialen Paare der singulären Werte gilt:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \sqrt{\sigma_i} & , & & \beta_i &= \sqrt{\sigma_i} & & i &= 1, \dots, r, \\
 \alpha_i &= 1 & , & & \beta_i &= 0 & & i &= r+1, \dots, r+s, \\
 \alpha_i &= 0 & , & & \beta_i &= 1 & & i &= r+s+1, \dots, k.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mit $\alpha_i \beta_i = \sigma_i$ für $i = 1, \dots, r$ gilt $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$. [17] \square

Die $\alpha_i \beta_i = \sigma_i$ werden entsprechend ihrem Verhältnis als normal und null Paare bezeichnet. In Blockstruktur erscheint die Zerlegung PSVD in der folgenden Darstellung.

Theorem 3.6 (PSVD, Rang und Struktur)

Der gemeinsame Rang der Matrix $C = AB^*$ sei r mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B^* \in \mathbb{K}^{n \times p}$, dann gilt mit den unitären Matrizen $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$, der oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{k \times k}$ und $R^{-*} = S^*$:

$$A = U \Sigma_A \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} Q^* = U \Sigma_A X^{-1} \tag{3.25}$$

$$B = V \Sigma_B \begin{pmatrix} 0 & S^* \end{pmatrix} Q^* = V \Sigma_B X^*$$

$$A=U \left[\begin{array}{c|c} S_A & 0 \\ I_A & \\ \hline 0 & 0^{m-k \times n-k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & & R_{22} & R_{23} \\ & & & R_{33} \\ \hline 0^{n-k \times n-k} & & & 0 \end{array} \right] Q^* \tag{3.26}$$

$$B=V \left[\begin{array}{c|c} S_B & 0 \\ 0_B & \\ \hline 0 & 0^{p-k \times n-k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & S_{11}^* & & \\ & S_{21}^* & S_{22}^* & \\ & S_{31}^* & S_{32}^* & S_{33}^* \\ \hline 0^{n-k \times n-k} & & & 0 \end{array} \right] Q^*$$

Die Blockmatrizen S_A, I_A, O_A und $S_B, 0_B, I_B$ entsprechen dabei den singulären Paaren α_i, β_i . [17] □

Die Blöcke der beiden Zerlegungen QSVD und PSVD ändern sich mit dem Inhalt der zu faktorisierenden Matrizen A und B. Die Unterschiede der beiden Zerlegungen in der zweiten Ebene sind deutlich an den Theoremen 3.4 und 3.6 zu erkennen. Dabei ist zusätzlich darauf hinzuweisen, daß die Matrix X bei beiden Zerlegungen nicht identisch ist. Die Faktorisierung von X, in der QR Form, erfolgt aus Gründen der numerischen Stabilität[42].

Eine weitere Verallgemeinerung der Singulärwertzerlegung bildet die dritte Ebene. Hier werden k dimensionsverträgliche Matrizen faktorisiert.

Theorem 3.7 (P-Q-SVD, allgemeine Singulärwertzerlegung²)

Es seien k Matrizen

$$A_1 \in \mathbb{K}^{n_0 \times n_1}, A_2 \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_2}, \dots, A_k \in \mathbb{K}^{n_{k-1} \times n_k} \tag{3.27}$$

mit kompatiblen Dimensionen gegeben, dann existieren zwei unitäre Matrizen

$$U \in \mathbb{K}^{n_0 \times n_0}, V \in \mathbb{K}^{n_k \times n_k} \tag{3.28}$$

und $k - 1$ quasidiagonale Blockmatrizen

$$D_j \in \mathbb{R}^{n_{j-1} \times n_j}, \quad j = 1, \dots, k-1 \tag{3.29}$$

²Hier findet ein Bruch in der Definition der zu faktorisierenden Matrizen statt. Mit $A_1 = A, A_2^T = B$ für $k = 2$ entsteht der Bezug zu den Theoremen 3.3 und 3.5. Ein neuer Vorschlag zur einheitlichen Definition, der hier berücksichtigt ist, findet sich in [39].

$$D_j = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{I}_j^1 & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_j^1 & & & \\ & \mathbf{I}_j^2 & & \\ & \mathbf{0}_j^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_j^{j-1} \\ & & & \mathbf{0}_j^{j-1} \\ & & & \mathbf{I}_j^{j-1} \\ \hline \mathbf{0} & & & \mathbf{0}_j^j \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{n_{j-1} \times n_j} \quad (3.30)$$

mit den diagonalen Blöcken

$$\mathbf{I}_j^1 \in \mathbf{R}^{r_j^1 \times r_j^1}, \dots, \mathbf{I}_j^j \in \mathbf{R}^{r_j^j \times r_j^j} \quad (3.31)$$

und den Nullblöcken

$$\mathbf{0}_j^1 \in \mathbf{R}^{r_j^1 \times r_j^1}, \dots, \mathbf{0}_j^{j-1} \in \mathbf{R}^{(r_{j-1}^{j-1} - r_j^{j-1}) \times r_j^{j-1}}, \quad \mathbf{0}_j^j \in \mathbf{R}^{(n_{j-1} - r_{j-1} - r_j^j) \times (n_j - r_j)}, \quad (3.32)$$

wobei

$$r_0 = 0 \quad ; \quad r_j = \text{Rang}(\mathbf{A}_j) = \sum_{i=1}^j r_j^i \quad (3.33)$$

ist, und einer weiteren quasidiagonalen Blockmatrix

$$S_k = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{S}_k^1 & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_k^1 & & & \\ & \mathbf{S}_k^2 & & \\ & \mathbf{0}_k^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{S}_k^{k-1} \\ & & & \mathbf{0}_k^{k-1} \\ & & & \mathbf{S}_k^{k-1} \\ \hline \mathbf{0} & & & \mathbf{0}_k^k \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{n_{k-1} \times n_k} \quad (3.34)$$

mit den diagonalen Blöcken

$$\mathbf{S}_k^1 \in \mathbf{R}^{r_k^1 \times r_k^1}, \dots, \mathbf{S}_k^k \in \mathbf{R}^{r_k^k \times r_k^k} \quad (3.35)$$

und den Nullblöcken

$$\mathbf{0}_k^1 \in \mathbf{R}^{r_k^1 \times r_k^1}, \dots, \mathbf{0}_k^{k-1} \in \mathbf{R}^{(r_{k-1}^{k-1} - r_k^{k-1}) \times r_k^{k-1}}, \quad \mathbf{0}_k^k \in \mathbf{R}^{(n_{k-1} - r_{k-1} - r_k^k) \times (n_k - r_k)}, \quad (3.36)$$

wobei

$$r_k = \text{Rang}(\mathbf{A}_k) = \sum_{i=1}^k r_k^i \quad (3.37)$$

ist, und $k - 1$ nichtsingulären Matrizen

$$\mathbf{Z}_j, \mathbf{V}_j \in \mathbb{K}^{n_j \times n_j}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (3.38)$$

so daß für die Faktorisierung der k Matrizen gilt :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Z}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{X}_2^{-1} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_{k-1} &= \mathbf{Z}_{k-2} \mathbf{D}_{k-1} \mathbf{X}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{Z}_{k-1} \mathbf{S}_k \mathbf{V}_1^* . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dabei gilt für eine Produktzerlegung

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{X}_j \quad (3.40)$$

und für eine Quotientenzerlegung

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{X}_j^{-*} . \quad (3.41)$$

Die beiden Typen P- und Q-Faktorisierung sind immer und auch in Mischformen möglich, jedoch mit jeweilig unterschiedlichen Matrizen \mathbf{Z}_j . [39] □

Drei Szenarien sollen beispielhaft das Theorem 3.7 erläutern. Das Theorem 3.3 läßt sich als eine Q-Typ Zerlegung einordnen. Für die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{X}_1^{-*} \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^* = \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (3.42)$$

gilt der Quotient mit $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_1^{-*}$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^* = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_2^* \quad (3.43)$$

als ein Beispiel für die zweite Ebene der allgemeinen Zerlegung. Das Theorem 3.5 ist eine P-Typ Faktorisierung.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{X}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^* = \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (3.44)$$

Mit $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_1$ erhält man das Produkt

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_2^* . \quad (3.45)$$

An den Gleichungen 3.42 und 3.44 erkennt man deutlich, daß beide Typen einer Faktorisierung immer möglich sind. Eine Mischform bilden beispielsweise die fünf Matrizen und deren gemeinsame Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{X}_2^{-1} \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{X}_2^{-*} \mathbf{D}_3 \mathbf{X}_3^{-1} \\ \mathbf{A}_4 &= \mathbf{X}_3^{-*} \mathbf{D}_4 \mathbf{X}_4^{-1} \\ \mathbf{A}_5 &= \mathbf{X}_4 \mathbf{S}_5 \mathbf{V}_2^* . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Als PQQP-SVD oder PQ²P-SVD gilt damit

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3^{-*} \mathbf{A}_4^{-*} \mathbf{A}_5 = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_3 \mathbf{S}_5 \mathbf{V}_2^* \quad (3.47)$$

für eine Zerlegung in der Ebene fünf, in der auch noch die Zerlegungstypen P⁴ Q⁰, P³ Q¹, ..., P¹ Q³, P⁰ Q⁴ möglich sind.

Das Theorem 3.7 ist von dem Autor aus Gründen der Vollständigkeit mit aufgenommen worden. Hiermit findet eine Vereinheitlichung der Singulärwertzerlegung und deren Definitionen statt [39]. Inwieweit die theoretischen Überlegungen numerisch zu realisieren sind, ist aktueller Forschungsstand in der Numerik. Zu der Zerlegung in der Ebene drei sind keine klassischen Parallelen der EVD vorhanden, daher können in Zukunft von diesem Themenkreis neue Impulse für die angewandte Mathematik erfolgen.

3.4 Singulärwertzerlegung und lineare Abbildung

Der Begriff der linearen Abbildung entspricht dem der linearen Transformation sowie dem linearen Operator. Eine Matrix \mathbf{A} repräsentiert dabei den linearen Operator, der einen Vektorraum \mathcal{V} in einen Vektorraum \mathcal{W} abbildet, mit der allgemeinen Notation

$$f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \quad (3.48)$$

einer Abbildung oder speziell für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die einen Vektorraum $\mathcal{V} \in \mathbb{K}^n$ in einen Vektorraum $\mathcal{W} \in \mathbb{K}^m$ abbildet

$$\mathbf{A}^{m \times n}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m. \quad (3.49)$$

Die Metrik der Vektorräume \mathcal{V} und \mathcal{W} sei durch die Euklidische Vektornorm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \quad (3.50)$$

bestimmt, die als Skalarprodukt oder inneres Produkt ein Maß, eine Vektorlänge in die Raumbeschreibung einführt

Es sei \mathcal{V} ein Unterraum von \mathbb{K}^n , dann ist \mathcal{V}^\perp das orthogonale Komplement zu \mathcal{V} und enthält alle zu \mathcal{V} orthogonalen Vektoren in \mathbb{K}^n . Mit den Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} gilt dann

$$\mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{y} \in \mathcal{V}\}, \quad (3.51)$$

dabei ist \mathcal{V}^\perp ein nicht leerer Unterraum, da immer der Nullvektor $\{\mathbf{0}\}$ enthalten ist.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ ist daher immer eindeutig in seine orthogonalen Projektionen $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und $\mathbf{v}^\perp \in \mathcal{V}^\perp$ der Unterräume \mathcal{V} und \mathcal{V}^\perp aus \mathbb{K}^n zerlegbar

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp. \quad (3.52)$$

Ist der Vektorraum \mathbb{K}^n eindeutig in zwei Unterräume \mathcal{V} und \mathcal{V}^\perp aufzuteilen, dann drückt dies die direkte Summe

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp \quad (3.53)$$

der beiden Unterräume mit $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ aus.

Die lineare Transformation repräsentiert durch die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bildet einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ in $Ax \in \mathbb{K}^m$, den Bildraum $\mathcal{R}(A)$, ab. Der Bildraum $\mathcal{R}(A)$ ist der Wertebereich (range) der Transformation $y = Ax$, der Nullraum $\mathcal{N}(A)$ beinhaltet die homogene Lösung $Ax = 0$ den Kern (kernel) der Abbildung.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \{y \in \mathbb{K}^m, y = Ax \text{ für } x \in \mathbb{K}^n\} \\ \mathcal{N}(A) &= \{x \in \mathbb{K}^n, Ax = 0\} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Der adjungierte Operator $A^* \in \mathbb{K}^{n \times m}$ beschreibt eine Transformation aus \mathbb{K}^m in \mathbb{K}^n entsprechend mit $\mathcal{R}(A^*)$ und $\mathcal{N}(A^*)$.

Theorem 3.8 (Fundamentalsatz der linearen Algebra)

Ein Operator $A^{m \times n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ beschreibe die Abbildung aus einem Vektorraum \mathbb{K}^n in \mathbb{K}^m , der adjungierte Operator sei $A^*{}^{n \times m} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$, dann gelten für den Euklidischen Vektorraum die grundlegenden Beziehungen [53]

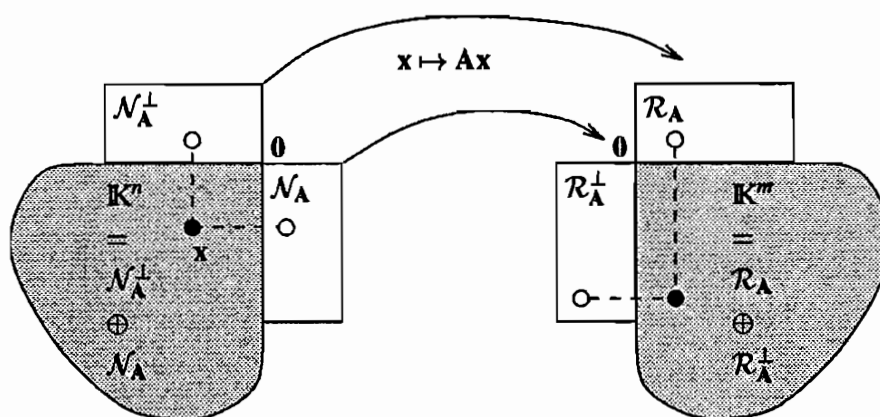
$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \mathcal{N}(A^*)^\perp \\ \mathcal{N}(A) &= \mathcal{R}(A^*)^\perp \\ \mathcal{R}(A^*) &= \mathcal{N}(A)^\perp \\ \mathcal{N}(A^*) &= \mathcal{R}(A)^\perp \quad .\square \end{aligned} \tag{3.55}$$

Die eindeutige Zerlegung der Vektorräume und der entsprechenden Abbildung läßt sich durch die eindeutige Zerlegung in Unterräume mit orthogonalen Komplementen charakterisieren, als

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^m &= \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) \\ \mathbb{K}^n &= \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*), \end{aligned} \tag{3.56}$$

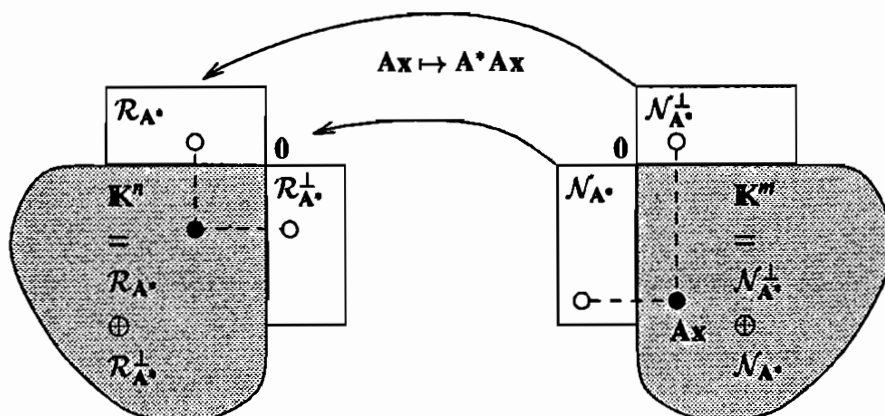
wie Bild 3.3 und 3.4 verdeutlicht.

Bild 3.3 Lineare Transformation



Die lineare Transformation ist allgemein beschreibbar durch die vier Vektorräume bzw. die Projektionen in diese. Die vier Strukturen stehen dabei in engem Zusammenhang. Die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ stellen die Bilder der Basisvektoren aus dem Raum \mathbb{K}^n dar, weshalb der zugehörige Bildbereich einer Abbildung durch die möglichen Linearkombinationen der Spalten der Matrix beschrieben wird. Die linear unabhängigen

Bild 3.4 Lineare adjungierte Transformation



Spalten r kennzeichnen den Vektorraum $\mathcal{R}(A)$, den Spaltenraum, über die Dimension $\dim(\mathcal{R}(A)) = r$. Der Nullraum $\mathcal{N}(A)$ hat dann die Dimension $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - r$. Dabei gilt die fundamentale Eigenschaft, daß die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen immer der Anzahl der linear unabhängigen Spalten entspricht. Der Rang

$$\text{rg}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^*)), \quad (3.57)$$

die Anzahl der linear unabhängigen Spalten bzw. Zeilen, charakterisiert die Raumdimensionen, für die adjungierte Transformation gilt entsprechendes.

Theorem 3.9 (Rang, Struktur einer linearen Abbildung)

Der Operator $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ kennzeichnet eine Abbildung des Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ in $Ax \in \mathbb{K}^m$. Die Dimensionen der vier Unterräume $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^*)$ und $\mathcal{N}(A^*)$ wird über den Rang $\text{rg}(A) = r$ des Operators bestimmt [53].³

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) & \text{ Spaltenraum von } A : & \dim(\mathcal{R}(A)) &= r \\ \mathcal{N}(A) & \text{ Nullraum von } A : & \dim(\mathcal{N}(A)) &= n - r \\ \mathcal{R}(A^*) & \text{ Zeilenraum von } A : & \dim(\mathcal{R}(A^*)) &= r \\ \mathcal{N}(A^*) & \text{ linker Nullraum von } A : & \dim(\mathcal{N}(A^*)) &= m - r \quad \square \end{aligned} \quad (3.58)$$

Drei wichtige Eigenschaften einer linearen Abbildung $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ sind unter anderen besonders hervorzuheben.

Definition 3.1 (Eigenschaften einer Abbildung)

Eine Abbildung $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ ist

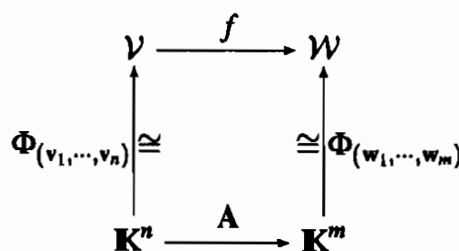
- surjektiv (on to), wenn für jedes $w \in \mathcal{W}$ folgt $f(v) = w$ als $v \in \mathcal{V}$,
- injektiv, wenn für jedes $v, v' \in \mathcal{V}$ und $f(v) = f(v')$ folgt, daß gilt $v = v'$,
- bijektiv (one to one) für surjektive und injektive Eigenschaften.

³Zeilenraum von $A \hat{=} \text{Spaltenraum von } A^*$, linker Nullraum von $A \hat{=} \text{Nullraum von } A^*$

Eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ hat deshalb eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ als eindeutiges Urbild, daß in der Matrizen­theorie als Inverse dargestellt wird. Der Zusammenhang zwischen einem linearen Operator und einer Matrix findet über die eindeutige Zuordnung der Basisvektoren statt, mit denen die Vektorräume beschrieben oder vermessen werden. Dieser Zusammenhang ist eine bijektive Abbildung Φ zwischen der eigentlichen Transformation $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ und dem Repräsentanten als Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die Basisvektoren sind dabei $\{v_1 \cdots v_n\}$, $\{w_1 \cdots w_m\}$ und bilden jeweils eine bijektive Abbildung zwischen \mathcal{V} und \mathbb{K}^n bzw. \mathcal{W} und \mathbb{K}^m , so daß gilt

$$f = \Phi(w_1, \dots, w_m)A\Phi^{-1}(v_1, \dots, v_n). \tag{3.59}$$

Das kommutative Diagramm verdeutlicht diesen Zusammenhang.



Die Transformation zwischen Vektorräumen wird mit Matrizen als Rechenhilfsmittel für den Digitalrechner handhabbar. Die linearen Operatoren sind nur bezüglich einer den Vektorraum beschreibenden Basis definiert, auch wenn oft die kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ mit $e_i \in \mathbb{K}^n : (0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0)$ und $e_i = 1$ impliziert wird. Die Basen bilden ein Stützgerüst, eine Hilfskonstruktion, zur Beschreibung der Vektorräume.

Beispielhaft sei der Zusammenhang an der linearen Transformation $A^{m \times n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{W}$ und den Skalaren ξ_i, η_i nochmals verdeutlicht. Mit $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^m \eta_i w_i$ gilt

$$\text{Matrix (A)} := \left[\begin{array}{c|ccc|c} A v_1 & \dots & A v_n & \end{array} \right], \tag{3.60}$$

als Anwendung der Transformation auf die einzelnen Basisvektoren v_i aus dem Raum \mathcal{V} . Dann folgt für die lineare Transformation $y = Ax$ mit

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} = \text{Matrix (A)} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

als die entsprechende Matrixgleichung bezogen auf die Basen $\{v_i\}$ und $\{w_i\}$. In den Spalten einer Matrix stehen daher die Bilder der Basisvektoren v_i .

Eine Abbildung A zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorunterräumen $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ findet nach dem Fundamentalsatz der linearen Algebra, Theorem 3.8, zwischen vier Vektorräumen statt. Ist die Transformation $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ durch die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ repräsentiert, dann liefert die SVD von A unitäre Basen zur Beschreibung der vier fundamentalen Unterräume $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}^\perp(A)$, $\mathcal{N}^\perp(A)$ und $\mathcal{N}(A)$ eines Operators.

Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit dem $\text{rg}(A) = r$ ist nach Theorem 3.2 zerlegbar in

$$A = [U_1 U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

mit den singulären Werten

$$\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \quad (3.63)$$

und

$$\Sigma_2 = \text{diag}\{0, \dots, 0\}. \quad (3.64)$$

Die unitären Untermatrizen $U_1^{m \times r}$, $U_2^{m \times (n-r)}$, $V_1^{n \times r}$ und $V_2^{n \times (m-r)}$ bilden dann die Basen zur Beschreibung der Unterräume $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}^\perp(A)$, $\mathcal{N}^\perp(A)$ und $\mathcal{N}(A)$ der Reihenfolge entsprechend. Die vier fundamentalen Räume von

$$A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \quad (3.65)$$

werden wie folgt durch die SVD beschrieben :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\sigma_r} \end{array} & \\ \mathcal{N}^\perp(A) & \begin{array}{c} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{array} \\ & & \mathcal{R}(A) \end{array}$$

$$(3.66)$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{0} \end{array} & \\ \mathcal{N}(A) & \begin{array}{c} \mathbf{v}_{r+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \end{array}$$

Die Struktur von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, siehe Bild 3.3, ist mit der Kenntnis von $\text{rg}(A)$ bzw. σ_r und den damit gegebenen Basen der Unterräume offengelegt, wobei die Abbildungen zwischen diesen klar durch die jeweiligen Abbildungen unter den Vektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i erkennbar bzw. vereinfacht wird. Die adjungierte Transformation, siehe Bild 3.4,

$$A^*: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \quad (3.67)$$

ergibt in zerlegter Darstellung :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\sigma_r} \end{array} & \\ \mathcal{N}^\perp(A^*) & \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r \end{array} \\ & & \mathcal{R}(A^*) \end{array}$$

$$(3.68)$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{0} \end{array} & \\ \mathcal{N}(A^*) & \begin{array}{c} \mathbf{u}_{r+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \end{array}$$

Verbunden mit der Zerlegung in die vier fundamentalen Unterräume eines linearen Operators sind die Transformationen auf die jeweiligen Räume, als sogenannte Projektoren.

Definition 3.2 (Projektor, Projektion auf einen Unterraum)

Ein spezieller Projektor \mathbf{P}_U ist eine unitäre Projektion auf einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{K}^n$ wenn für \mathbf{P}_U

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{P}_U) &= U \\ \mathbf{P}_U^2 &= \mathbf{P}_U \\ \mathbf{P}_U^* &= \mathbf{P}_U\end{aligned}\tag{3.69}$$

gilt. Bildet $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ eine unitäre Basis für den Unterraum U , dann folgt für

$$\mathbf{P}_U = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^*}{\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_i} = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i} = \mathbf{U} \mathbf{U}^*,\tag{3.70}$$

als Summe über $\text{rg}(\mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}) = 1$ Projektoren $\mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_U \mathbf{x} &\in U \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_U) \mathbf{x} &\in U^\perp.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Ist durch die SVD von $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^*$ die Struktur durch $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ und $[\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2], [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ bekannt, dann gibt es vier surjektive Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} &= \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^* \\ \mathbf{P}_{\mathcal{R}^\perp(\mathbf{A})} &= \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^* = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}^*)} &= \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^* \\ \mathbf{P}_{\mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}^*)} &= \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^* = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}^*)}\end{aligned},\tag{3.72}$$

als unitäre Projektoren auf die fundamentalen Unterräume einer linearen Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

3.5 Pseudoinverse und Least Squares Lösung

Das Gleichungssystem $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $m > n = \text{rg}(\mathbf{A})$ nennt man überbestimmt, wobei die Lösung für gesuchtes \mathbf{x} gefunden wird, indem ersatzweise die Funktion $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p$ mit einer geeigneten Fehlernorm $p = 1, 2, \infty$ gelöst wird. Wählt man $p = 2$, so lautet die differenzierbare Funktion $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, mit der Lösung für \mathbf{x} durch die Gradientengleichung $\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^* (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, die auch als Normalengleichung

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{y}\tag{3.73}$$

zur Lösung von

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\tag{3.74}$$

bekannt ist. Die Normalengleichung ist bei vollem Spaltenrang ein symmetrisch positiv definites gut konditioniertes Gleichungssystem. Die Fehlernorm $p = 2$ hat zudem den Vorteil, daß sie bei unitären Transformationen \mathbf{U} erhalten bleibt und deshalb ein äquivalentes Problem $\|(\mathbf{U}^* \mathbf{A}) \mathbf{x} - (\mathbf{U}^* \mathbf{y})\|_2$ einfacher lösbar sein kann, die Norm ist eine Invariante unter der Transformation.

Diese Lösung für das überbestimmte Gleichungssystem $y = Ax$ nennt man auch Lösung im Sinn der kleinsten Fehlerquadrate (Least Squares).

Allgemeingültigkeit hat die Lösung durch die Normalengleichung nicht, da voller Spaltenrang $m > n = \text{rg}(A)$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ vorausgesetzt worden ist. Ist das Gleichungssystem singular, so hat der Lösungsweg über die Normalengleichung keine Gültigkeit, da $m \geq n > \text{rg}(A)$ bzw. $\dim(\mathcal{N}(A)) \neq 0$, weshalb zu jeder Lösung von $y = Ax$ noch eine homogene Lösung $Ax = 0$ aus dem Nullraum addiert werden kann, als ein nicht eindeutiges Problem zur Bestimmung von x .

Damit das singuläre Gleichungssystem Eindeutigkeit erlangt, wird die Zusatzforderung $\min \|x\|_2$ eingeführt. Diese Bedingung bedeutet, daß der gesuchte Lösungsvektor von allen Möglichen $x \in \mathbb{K}^n$ die kleinste Euklidische Vektornorm $\|x\|_2$ haben soll. Durch Ausnutzen der eingeführten Metrik des Raumes, hier durch die $p = 2$ Norm, wird das defekte Problem eindeutig.

Es sei $y \in \mathbb{K}^m$ und $x \in \mathbb{K}^n$, dann lassen sich die Vektoren eindeutig in die komplementären Unterräume, siehe Theorem 3.8, zerlegen. Mit

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &\in \mathcal{N}(A)^\perp \subseteq \mathbb{K}^n \\ \bar{x}_2 &\in \mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{K}^n \\ \bar{y}_1 &\in \mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{K}^m \\ \bar{y}_2 &\in \mathcal{R}(A)^\perp \subseteq \mathbb{K}^m\end{aligned}\tag{3.75}$$

lautet die Zerlegung für die Vektoren x und y

$$\begin{aligned}x &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ y &= \bar{y}_1 + \bar{y}_2\end{aligned}\tag{3.76}$$

in die Komponenten aus den vier fundamentalen Unterräumen, mit $\bar{x}_1 \perp \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 \perp \bar{y}_2$. Die Basen zur Beschreibung der Unterräume seien durch die unitären Matrizen U und V bzw. deren Untermatrizen $U_1^{m \times r}$, $U_2^{m \times (m-r)}$ und $V_1^{n \times r}$, $V_2^{n \times (m-r)}$ gebildet. Die Projektion der Vektoren x und y auf die Unterräume sind $\bar{x}_1 \perp \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 \perp \bar{y}_2$ projiziert durch die Projektoren $P_{\mathcal{R}(A)}$, $P_{\mathcal{R}(A)}^\perp$, $P_{\mathcal{R}(A^*)}$ und $P_{\mathcal{R}(A^*)}^\perp$.

$$\begin{aligned}y &= Ax \\ UU^*y &= AVV^*x \\ \sum_{i=1}^m P_{u_i} y &= A \sum_{i=1}^n P_{v_i} x \\ (\sum_{i=1}^r P_{u_i} + \sum_{i=r+1}^m P_{u_i}) y &= A (\sum_{i=1}^r P_{v_i} + \sum_{i=r+1}^n P_{v_i}) x \\ (P_{\mathcal{R}(A)} + P_{\mathcal{R}(A)}^\perp) y &= A (P_{\mathcal{R}(A^*)} + P_{\mathcal{R}(A^*)}^\perp) x \\ (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) &= A (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\end{aligned}\tag{3.77}$$

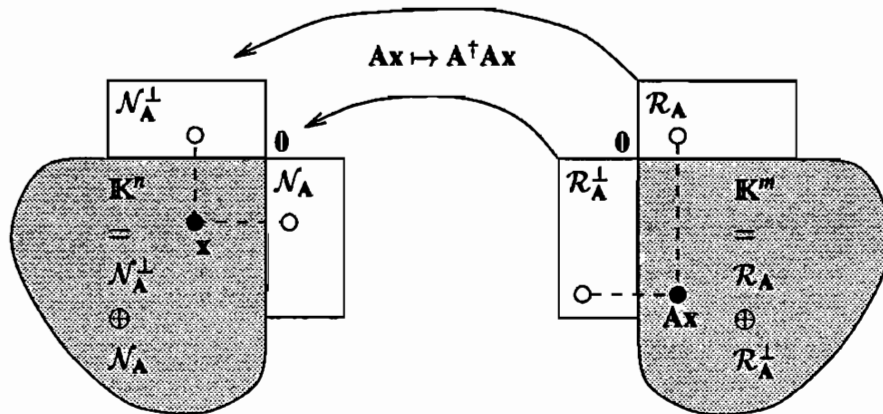
Da $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^*)) = \text{rg}(A) = r$ gilt, ist der Operator A mit

$$AV_2 \equiv 0\tag{3.78}$$

eine eindeutige Transformation zwischen $\mathcal{N}^\perp(A) = \mathcal{R}(A^*)$ und $\mathcal{R}(A)$

$$AV_1 \equiv AV \equiv U_1\tag{3.79}$$

Bild 3.5 Pseudoinverse



in den Spaltenraum, siehe Bild 3.3. Der Umkehroperator A^\dagger die Pseudoinverse, ist folglich mit

$$A^\dagger U_2 \equiv 0 \tag{3.80}$$

eine eindeutige Transformation zwischen $\mathcal{N}(A^*)^\perp = \mathcal{R}(A)$ und $\mathcal{R}(A^*)$

$$A^\dagger U_1 \equiv A^\dagger U \equiv V_1 \tag{3.81}$$

in den Zeilenraum, siehe Bild 3.5. Betrachtet man eine Abbildung A und deren Umkehrung nur zwischen Spaltenraum $\mathcal{R}(A)$ und Zeilenraum $\mathcal{R}(A^*)$, so ist eine inverse Transformation auch im singulären Fall als LS Lösung immer gegeben.

Der Vektor

$$\mathbf{x}_{LS} = A^\dagger \mathbf{y} \tag{3.82}$$

soll die Lösung für

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \tag{3.83}$$

erfüllen und von allen möglichen Lösungen \mathbf{x} die kleinste Norm $\|\mathbf{x}\|_2$ haben. Mit

$$\mathbf{x}_{LS} = A^\dagger \mathbf{y} = A^\dagger (\bar{\mathbf{y}}_1 + \bar{\mathbf{y}}_2) = A^\dagger \bar{\mathbf{y}}_1 \tag{3.84}$$

ergibt sich \mathbf{x}_{LS} direkt als Lösung von $\bar{\mathbf{y}}_1$, der projizierten orthogonalen Komponente von \mathbf{y} auf den Unterraum $\mathcal{R}(A^*)$, der aus allen Vektoren \mathbf{Ax} mit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ besteht. Unter der Annahme, daß \mathbf{x}' eine weitere Lösung ist, gilt

$$\mathbf{Ax}' = \mathbf{Ax}_{LS} = \mathbf{y}_1 \tag{3.85}$$

entsprechend

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{LS}) = \mathbf{0}. \tag{3.86}$$

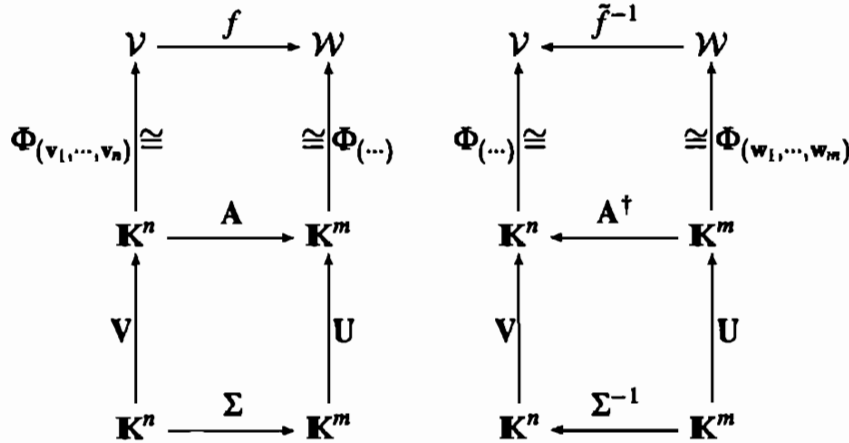
Das bedeutet folglich $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{LS}) \in \mathcal{N}(A)$, weshalb mit $\mathbf{x}_{LS} \perp (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{LS})$ $\mathbf{x}_{LS} \in \mathcal{N}(A)^\perp$ gilt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{LS} + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{LS}). \tag{3.87}$$

Daher ist mit

$$\|\mathbf{x}'\|_2 = \|\mathbf{x}_{LS}\|_2 + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{LS}\|_2 > \|\mathbf{x}_{LS}\|_2 \tag{3.88}$$

sofort ersichtlich, daß $\|x_{LS}\|$ auch die zweite Forderung $\min \|x\|_2$ zur eindeutigen Lösung erfüllt. Ist diese lineare Transformation f gegeben, repräsentiert durch die Matrix A , und wird eine Umkehrabbildung f^{-1} gesucht, so stellt die pseudoinverse Matrix A^\dagger diese als LS Lösung \tilde{f}^{-1} dar, bezogen auf die gewählte Metrik des Vektorraumes.



Die SVD der Matrix A ermöglicht über die Aufteilung der Matrizen U und V , als mögliche Basen der vier fundamentalen Unterräume der Transformation, verbunden mit der Kenntnis von $r = \text{rg}(A)$ eine Offenlegung der Operatorstruktur. Die Matrizen $U_1^{m \times r}$, $U_2^{m \times (m-r)}$ und $V_1^{n \times r}$, $V_2^{n \times (n-r)}$ bilden eine neue Basis in der die Transformation A , bzw. der Repräsentant die Matrix A , eine einfache Form annimmt.

Das Gleichungssystem $y = Ax$ mit y und x in Raumstruktur zerlegten Komponenten

$$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = A^{m \times n} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \tag{3.89}$$

vereinfacht sich mit der SVD der Matrix A zu

$$\begin{aligned} U^* \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} &= \Sigma V^* \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix}^{m \times m} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} &= \Sigma \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix}^{n \times n} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{m \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}^{m \times 1} \right) &= \Sigma \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{n \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}^{n \times 1} \right) \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^{r \times r} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.90}$$

womit eine vollständige Entkopplung der Gleichungen vorliegt. Die Pseudoinverse $\Sigma^\dagger = \Sigma_1^{-1}$ ist dabei klar erkennbar.

$$\begin{array}{ccc} & v_1 & \xleftarrow{\sigma_1^{-1}} u_1 \\ \mathcal{N}^\perp(A) & \vdots & \mathcal{R}(A) \\ & v_r & \xleftarrow{\sigma_r^{-1}} u_r \\ \hline & v_{r+1} & \xleftarrow{0} \\ 0 & \vdots & \mathcal{R}(A)^\perp \\ & v_m & \xleftarrow{0} \end{array} \tag{3.91}$$

Durch die Projektion von \mathbf{y} und \mathbf{x} auf die raumbeschreibenden Basen gilt

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^r |\sigma_i x_{1i} - y_{1i}|^2 + \sum_{i=r+1}^n |0 \cdot x_{2i} - y_{2i}|^2, \quad (3.92)$$

mit den Vektorkomponenten $x_{1i} = \sigma_i^{-1} y_{1i}$ und $x_{2i} = 0$ als skalare Gleichung für die Forderung

$$\min \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (3.93)$$

Die *LS* Lösung und damit die Pseudoinverse sind mit der SVD einfach handhabbar. Ist der Rang r der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $r = m = n$, so hebt sich die zweite Summe $\sum_{i=r+1}^n$ auf. Dann liegt die Inverse der Matrix \mathbf{A} ohne Ausnutzen der Norm, bzw. der Metrik des Vektorraumes, vor.

Der Fehler, der bei der *LS* Lösung auftritt, beträgt

$$\rho_{LS}^2 = \sum_{i=r+1}^n |y_{2i}|^2. \quad (3.94)$$

Das ist der Anteil von \mathbf{y} , der in den Nullraum des adjungierten Operators projiziert wird, $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^*) = \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$.

3.6 Der Rang einer Matrix

Der Rang, theoretisch eindeutig durch die von Null verschiedenen Singulärwerte gekennzeichnet, legt die Dimensionen der vier fundamentalen Unterräume einer linearen Transformation fest. Bei der digitalen praktischen Verarbeitung von Daten ist die Rangbestimmung durch Quantisierungsfehler bzw. Unschärfen kein triviales Problem, da die theoretische unendliche Genauigkeit nicht existiert.

Definition 3.3 (Matrixnormen)

Die Frobenius Norm und die $p = 2$ Norm einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ lassen sich durch die singulären Werte σ_i wie folgt beschreiben

- $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_p^2$, $p = \min\{m, n\}$
- $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$.

Theorem 3.10 (Abstand einer Matrix zu einer rangdefekten Matrix)

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ und die SVD

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*, \quad (3.95)$$

dann gilt für $k < \text{rg}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*, \quad (3.96)$$

mit

$$\min_{\text{rg}(\mathbf{B})=k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}, \quad (3.97)$$

als der kleinste Abstand von \mathbf{A} zu der defekten Matrix mit dem Rang $k < \text{rg}(\mathbf{A}) = r$. [23] \square

Praktisch läßt sich zu jedem theoretischen singulären Wert $\sigma_i = 0$ eine unendlich kleinen Zahl ϵ hinzufügen, bedingt durch eine Unschärfe der Darstellung. Damit liegt jede Matrix mit einem kleinstmöglichen Abstand ϵ zu Matrizen mit vollem Rang. Deshalb ist der theoretische Rang bezogen auf die Zahlenquantisierung unbekannt und ist mit dem Digitalrechner unbestimmbar.

Interessanter ist deshalb die Information wie weit der Abstand (bzw. die Nähe) zu einer Matrix mit theoretisch bekanntem Rang ist.

Die numerische Berechnung der singulären Werte σ_i sind unempfindlich gegen Störungen, so daß damit eine Rangabschätzung sinnvoll erscheint.

Für eine ungestörte Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $\text{rg}(A) = r = n$ für $m \geq n$ gilt theoretisch

$$U^*AV = \text{diag}\{\sigma_1 \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0\} \quad (3.98)$$

und für die gestörte Matrix $A + \delta A = \tilde{A}$

$$\tilde{U}^*\tilde{A}\tilde{V} = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_1 \cdots, \tilde{\sigma}_r, 0, \cdots, 0\}. \quad (3.99)$$

Es ist [41] die berechtigte Annahme zu treffen, daß aus Gründen der Unempfindlichkeit der Singulärwerte gegenüber Störungen bzw. Fehlern in der numerischer Rechnung bzw. Zahlendarstellung gilt

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \|\delta A\|_2 \equiv \sigma_{1,(\delta A)} \quad , \quad (3.100)$$

womit für jedes $i \leq r = \text{rg}(A)$ mindestens

$$\|\delta A\|_2 \geq \sigma_i \quad , \quad (3.101)$$

als Norm der Fehlermatrix δA gelten muß, damit

$$\tilde{U}^*\tilde{A}\tilde{V} = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_1 \cdots, \tilde{\sigma}_{i-1}, 0, \cdots, 0\} \quad (3.102)$$

gilt und so eine gestörte Matrix $A + \delta A = \tilde{A}$ mit $\text{rg}(\tilde{A}) < i$ entsteht.

Mit anderen Worten muß die Störung durch $\|\delta A\|_2$ mindestens σ_i betragen, um einen Rangdefekt zu verursachen.

In der praktischen Anwendung liegt die gestörte Matrix $\tilde{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ häufig als Ersatz für B vor. Ein mögliches Maß γ zur Abschätzung des Fehlerproblems bietet dann die Darstellungsgenauigkeit im Digitalrechner bzw. die Quantisierung der Zahlen (D/A-Wandler bei Meßdaten). Wählt man den möglichen Fehler als ein Vielfaches der Darstellungsgenauigkeit γ , so gilt

$$\|B - \tilde{B}\|_2 \leq \gamma \|\tilde{B}\|_2 \quad (3.103)$$

für das Maß der Abschätzung.

Auf die singulären Werte bezogen gilt dann

$$\|\tilde{B}\|_2 = \tilde{\sigma}_1 \quad , \quad |\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \gamma \tilde{\sigma}_1 \quad . \quad (3.104)$$

Deshalb ist mit der Annahme

$$\sigma_1 > \gamma \cdot \tilde{\sigma}_1, \cdots, \sigma_i > \gamma \cdot \tilde{\sigma}_1, \sigma_{i+1} \leq \gamma \cdot \tilde{\sigma}_1, \cdots, \sigma_m \leq \gamma \cdot \tilde{\sigma}_1 \quad (3.105)$$

gerechtfertigt zu setzen

$$\sigma_1 \neq 0, \dots, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \dots, \sigma_m = 0 \quad . \quad (3.106)$$

Der numerische Rang der Matrix \mathbf{B} ist dann als $\text{rg}(\mathbf{B}) = i$ anzunehmen, siehe Kapitel 6.6.

Ist der Abstand zwischen σ_i und σ_{i+1} zudem signifikant groß, so ist die Annahme zusätzlich durch den großen Unterschied sinnvoll, da dies theoretisch zu erwarten ist.

Die Vorteile der SVD bei der numerischen Rangberechnung gegenüber der Bestimmung mit der EVD Methode sind leicht zu verdeutlichen. Mit $\sigma_i^2 = \lambda_i$ gilt

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{U}^* \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^* = \mathbf{V} \Sigma^2 \mathbf{V}^*, \quad (3.107)$$

als Beziehung zwischen EVD und SVD, siehe Kapitel 3.2. Die Reihenfolge Quadratur und EVD zur Rangberechnung hat den großen Nachteil, daß kleine Zahlen $\varepsilon > 0$ in der Nähe der Darstellungsgenauigkeit γ bei der Berechnung von ε^2 unter die Genauigkeitsgrenze von γ fallen. Die Matrix mit vollem Rang

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

ist mit $\varepsilon^2 < \gamma$ durch "unnötiges Quadrieren"

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon^2 \end{bmatrix} = \text{bezogen auf } \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

von einer singulären Matrix nicht zu unterscheiden. Der direkte Berechnungsweg über die SVD ist offensichtlich besser und ratsam.

Kapitel 4

4.1	Einleitung	43
4.2	Beschreibung dynamischer Systeme	44
4.3	Struktureigenschaften dynamischer Systeme	49
	4.3.1 Steuerbarkeit	49
	4.3.2 Beobachtbarkeit	54
4.4	Realisierung	56
4.5	Diskrete dynamische Systeme	57
4.6	Der Hankel Operator	58

Systemtheorie

4.1 Einleitung

Damit dynamische Vorgänge der Natur, technischer Konstruktionen, wirtschaftlicher Abläufe, chemischer Prozesse usw. mathematisch beschreibbar werden, ist es erforderlich Abbildungen ihrer Eigenschaften auf mathematische Modelle zu übertragen. Eine mögliche Beschreibungsweise bzw. Modellbildung ist die Systemtheorie, deren Ursprünge in den Jahren von 1955 – 1960 zu finden sind.

Die Systemtheorie ist eine abstrakte Modellierung dynamischer Abläufe, die als eine Verallgemeinerung der Newtonschen Betrachtungsweise gilt. Die Eigenschaften des zu beschreibenden Problems werden nach dem Kausalitätsprinzip in die mathematische Sprache übersetzt, die Abbildung der Dynamik auf der Basis des Ursache-Wirkungs-Flusses aus der Vergangenheit in die Zukunft untersucht.

Das System als mathematisches Modell verarbeitet Ereignisse, Energie, Information usw., die als Eingangsgrößen zu definieren sind. Die Umwandlung der Eingänge durch das System ist an den Ausgangsgrößen meßbar. Der im allgemeinen abstrakte Zustandsraum koppelt die Eingangsgrößen (Input) mit den Ausgangsgrößen (Output) und beschreibt als ein Kernmodell die Systemdynamik. Die Input Output Elemente des mathe-

matischen Modells bezeichnet man als externe Größen, während der Zustandsraum eine interne Größe darstellt. Die Zustandsraumdimension ist dabei im Normalfall kleinster Ordnung, um den Informationsgehalt aus der Vergangenheit in die Zukunft zu übertragen.

Das Klemmenmodell ist, in der allgemeinen üblichen Betrachtung, interpretierbar als eine Black box. Sind jedoch Teilsysteme der inneren Struktur bekannt, nach Auffassung des Autors eine synthetische Darstellung beispielsweise durch Finite Elemente Methoden, gilt die Beschreibung der Systemtheorie auch für diese Sonderfälle.

Die grundlegende mathematische Formulierung der Systemtheorie ist die Vektordifferentialgleichung erster Ordnung, die mit Anlehnung an die lineare Algebra ein mächtiges Werkzeug darstellt, das der digitalen Verarbeitung sofort zugänglich ist.

4.2 Beschreibung dynamischer Systeme

Die Zustandsvariablen spannen einen Vektorraum auf, der sich auf ausgezeichnete Basiskoordinaten bezieht [27] [12]. In einem Vektorraum ist das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert. Ein linearer Operator

$$L: \mathbf{K}_{[t_0, t]}^q \rightarrow \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p \quad (4.1)$$

ist mit \mathbf{T} definiert, als eine Transformation eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathbf{K}_{[t_0, t]}^q$ in einen Vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p$ $L(\mathbf{u}) = \mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{T}_{t, \sigma} \mathbf{u}_\sigma \, d\sigma \quad (4.2)$$

Der adjungierte lineare Operator L' ist über

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, L(\mathbf{u}) \rangle &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{y}'(t) \mathbf{T}_{(t, \sigma)} \mathbf{u}(\sigma) \, d\sigma \, dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{u}'(t) \mathbf{T}'_{(\sigma, t)} \mathbf{y}(\sigma) \, d\sigma \, dt \\ &= \langle \mathbf{u}, L'(\mathbf{y}) \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

definiert und bildet mit \mathbf{T}' einen Vektor \mathbf{y} in einen Vektor \mathbf{u} mit $L'(\mathbf{y}) = \mathbf{u}$ als

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{T}'_{(\sigma, t)} \mathbf{y}(\sigma) \, d\sigma \quad (4.4)$$

ab. Die Integralgleichung bildet die Lösung der inhomogenen Vektordifferentialgleichung erster Ordnung, die in der Systemtheorie [27] als grundlegendes mathematisches Modell dient. Der Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen (Input) \mathbf{u} und den Ausgangsgrößen (Output) \mathbf{y} als Differentialgleichung lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

und ist allgemeiner zu verstehen, als eine klassische Differentialgleichung. Der Vektor \mathbf{x} bildet die Zustandsgröße und verbindet über die Zustandsraumgleichung Input und Output.

Das adjungierte Vektordifferentialgleichungssystem ist als antikausales System interpretierbar und bildet mit

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}'(t) & \mathbf{C}'(t) \\ \mathbf{B}'(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

die zugehörige Differentialgleichung des adjungierten integralen Operators. Die Matrizen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ und $\mathbf{C}(t)$ bilden in ihrer Gesamtheit eine Realisierung

$$\mathcal{S}\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\}, \quad (4.7)$$

die ein dynamisches System mit der Impulsantwort \mathbf{T} als linearer Operator vollständig beschreibt, entsprechend \mathbf{T}' und $\bar{\mathcal{S}}$. Die Input und Output Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{y} sind meßbare Größen des dynamischen Systems, während der Zustandsraum eine nicht meßbare abstrakte Größe, beschrieben durch den Vektor \mathbf{x} , darstellt. Die homogene Vektordifferentialgleichung für den Zustandsraum lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad , \quad (4.8)$$

mit der Fundamentalmatrix

$$\Phi_{(t,t_0)} \quad (4.9)$$

als Lösung

$$\dot{\Phi}_{(t,t_0)} = \mathbf{A}(t)\Phi_{(t,t_0)} \quad . \quad (4.10)$$

Die adjungierte Zustandsraumgleichung ergibt sich aus der Forderung, daß das innere Vektorraumprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für beliebige Anfangsbedingungen konstant ist, mit

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = -\mathbf{A}'(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.11)$$

aus dem differenzierten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sofort über

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{x}}'(t)\mathbf{x}(t)) &= \dot{\bar{\mathbf{x}}}'(t)\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{x}}'(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \bar{\mathbf{x}}'(t)(-\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{x}}'(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die adjungierte Gleichung des Zustandsraum überträgt die Originallösung rückwärts bezogen auf die Zeit. Die zugehörige Fundamentallösung

$$\Phi'_{(t_0,t)} \quad (4.13)$$

ergibt sich aus der Forderung

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \Phi_{(t,t_0)}^{-1}\Phi_{(t,t_0)} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{I} &= \frac{d}{dt}\{\Phi_{(t,t_0)}^{-1}\Phi_{(t,t_0)}\} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Phi_{(t,t_0)}^{-1}\right)\Phi_{(t,t_0)} + \Phi_{(t,t_0)}^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Phi_{(t,t_0)}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Phi_{(t,t_0)}^{-1} + \Phi_{(t,t_0)}^{-1}\mathbf{A}(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

als Transponierte

$$\frac{d}{dt}(\Phi_{(t,t_0)}^{-1})' = -\mathbf{A}'_{(t)}(\Phi_{(t,t_0)}^{-1})'. \quad (4.15)$$

Aus Gründen der eindeutigen Darstellung wird die Gleichung in

$$\dot{\bar{\Phi}}_{(t,t_0)} = -\mathbf{A}'_{(t)}\bar{\Phi}_{(t,t_0)} \quad (4.16)$$

umbenannt. Damit gilt die Beziehung

$$\bar{\Phi}_{(t,t_0)} \equiv (\Phi_{(t,t_0)}^{-1})' \equiv \Phi'_{(t,t_0)}. \quad (4.17)$$

Mit der Fundamentallösung für den Zustandsraum gilt in integraler Form die Beziehung zwischen Input \mathbf{u} und Output \mathbf{y}

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_0(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{T}_{(t,\sigma)} \mathbf{u}_\sigma d\sigma \\ &= \mathbf{C}_{(t)} \Phi_{(t,t_0)} \mathbf{x}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{C}_{(t)} \Phi_{(t,\sigma)} \mathbf{B}_\sigma \mathbf{u}_\sigma d\sigma \\ &= \mathbf{C}_{(t)} \Phi_{(t,t_0)} \mathbf{x}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{C}_{(t)} \Phi_{(t,t_0)} \Phi_{(t_0,\sigma)} \mathbf{B}_\sigma \mathbf{u}_\sigma d\sigma \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit dem Wichtungsmuster

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(t,\sigma)} &= \dots \quad \text{für } t \geq \sigma \\ &= 0 \quad \quad \quad \text{für } t < \sigma \end{aligned} \quad (4.19)$$

als die allgemeine Lösung der Vektordifferentialgleichung. Die adjungierte Integraltransformation ergibt für die antikausale Realisierung $\bar{\mathcal{S}}\{-\mathbf{A}'_{(t)}, \mathbf{C}'_{(t)}, \mathbf{B}'_{(t)}\}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(t) &= \bar{\mathbf{y}}_0(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{T}'_{(t,\sigma)} \bar{\mathbf{u}}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{B}'_{(t)} \bar{\Phi}_{(t,t_0)} \bar{\mathbf{x}}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{B}'_{(t)} \bar{\Phi}_{(t,\sigma)} \mathbf{C}'_{(\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{B}'_{(t)} \bar{\Phi}_{(t,t_0)} \bar{\mathbf{x}}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{B}'_{(t)} \bar{\Phi}_{(t,t_0)} \bar{\Phi}_{(t_0,\sigma)} \mathbf{C}'_{(\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit der Forderung

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_{(t,\sigma)} &= \dots \quad \text{für } \sigma \geq t \\ &= 0 \quad \quad \quad \text{für } \sigma < t \end{aligned} \quad (4.21)$$

für den adjungierten Operator

$$L' : \mathbf{K}_{[t_0,t]}^p \rightarrow \mathbf{K}_{[t_0,t]}^q \quad (4.22)$$

bzw. der Wichtung \mathbf{T}' zwischen $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{K}_{[t_0,t]}^q$ und $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{K}_{[t_0,t]}^p$.

Da die Zustandsraumgrößen nicht direkt meßbar sind, ist die Wahl der Koordinaten für die Raumbeschreibung nicht eindeutig. Es ist möglich Zustandsraumtransformationen ohne eine Änderung in der Wichtung \mathbf{T} , zwischen Input und Output, zu erzeugen. Verschiedene Systeme mit gleicher Impulsantwort unterscheiden sich damit in den Zustandsraumkoordinaten. Die Forderung der Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit ist an die Koordinatentransformation $\mathbf{P}(t)$ zu stellen, dann gilt mit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\xi(t), \tag{4.23}$$

für die Realisierung

$$\mathcal{S}_1\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\} \quad , \tag{4.24}$$

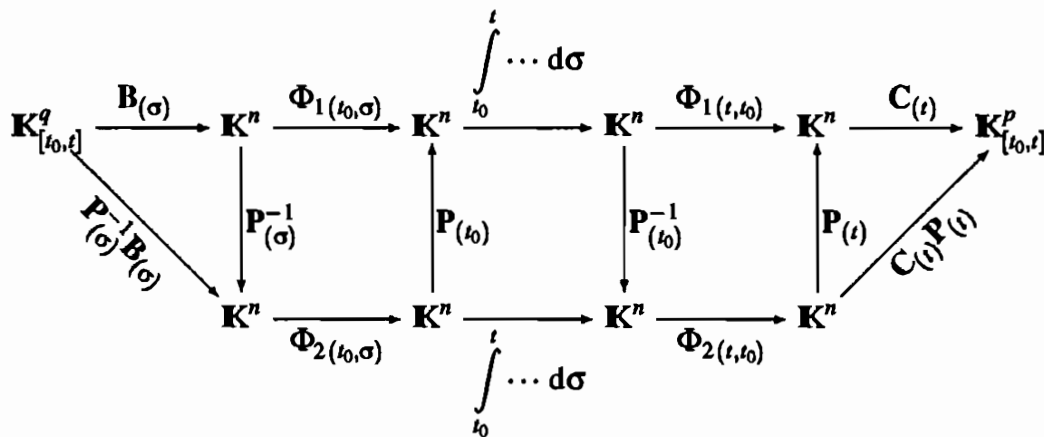
die transformierte Zustandsraumbeziehung

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t)\dot{\mathbf{P}}(t) & \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{4.25}$$

als eine von vielen alternativen Realisierungen

$$\mathcal{S}_2\{\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t)\dot{\mathbf{P}}(t), \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t)\} \quad . \tag{4.26}$$

Diese Gruppe von Transformationen, die in dem folgenden kommutativen Diagramm dargestellt sind, sind Ähnlichkeitstransformationen oder Ljapunov Transformationen und vergleichbar mit der Methode der Variation der Konstanten in der Differentialgleichungstheorie.



Eine wichtige Zustandstransformation folgt aus der Bedingung

$$\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t)\dot{\mathbf{P}}(t) \equiv \mathbf{0} \tag{4.27}$$

oder gleichwertig

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t). \tag{4.28}$$

Mit der Wahl von $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{I}$ ist die Fundamentallösung $\Phi_{(t,t_0)}$ eine spezielle Lösung. Mit $\mathbf{P}(t) = \Phi_{(t,t_0)}$ hat die Zustandsraumdarstellung die einfache Gestalt

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Phi_{(t_0,t)}\mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t)\Phi_{(t,t_0)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

mit der bemerkenswerten Eigenschaft, daß der Zustandsraum keine Feedbackvariable hat.

$$\mathbf{K}_{[t_0, t]}^q \xrightarrow{\Phi_{(t_0, t)} \mathbf{B}(t)} \mathbf{K}^n \xrightarrow{\int_{t_0}^t \dots d\sigma} \mathbf{K}^n \xrightarrow{\mathbf{C}(t) \Phi_{(t, t_0)}} \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p$$

Die Realisierung

$$\mathcal{S}_2\{\mathbf{0}, \Phi_{(t_0, t)} \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t) \Phi_{(t, t_0)}\} \quad (4.30)$$

verdeutlicht offensichtlich den Bezug zu der integralen Lösungsform. Die Integralgleichung erhält als Lösung für den inhomogenen Anteil der Vektordifferentialgleichung mit

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{T}(t, \sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{C}(t) \Phi_{(t, t_0)} \int_{t_0}^t \Phi_{(t_0, \sigma)} \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathcal{P}(t) \int_{t_0}^t \mathcal{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.31)$$

und für die adjungierte Transformation

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{T}'(t, \sigma) \bar{\mathbf{u}}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{B}'(t) \Phi_{(t, t_0)} \int_{t_0}^t \Phi_{(t_0, \sigma)} \mathbf{C}'(\sigma) \bar{\mathbf{u}}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathcal{Q}'(t) \int_{t_0}^t \mathcal{P}'(\sigma) \bar{\mathbf{u}}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.32)$$

eine einfache Darstellung. Die Realisierung $\mathcal{S}_2\{\mathbf{0}, \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t)\}$

$$\mathbf{K}_{[t_0, t]}^q \xrightarrow{\mathcal{Q}(t)} \mathbf{K}^n \xrightarrow{\int_{t_0}^t \dots d\sigma} \mathbf{K}^n \xrightarrow{\mathcal{P}(t)} \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p$$

und die antikausale $\bar{\mathcal{S}}_2\{\mathbf{0}, \mathcal{P}'(t), \mathcal{Q}'(t)\}$

$$\mathbf{K}_{[t_0, t]}^q \xleftarrow{\mathcal{Q}'(t)} \mathbf{K}^n \xleftarrow{\int_{t_0}^t \dots d\sigma} \mathbf{K}^n \xleftarrow{\mathcal{P}'(t)} \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p$$

in diesen Formen verdeutlichen die enge Beziehung zwischen einem Operator und seinem Adjungierten in einem Vektorraum.

Als Spezialfall zeitvarianter Systeme gilt das stationäre Wichtungsmuster mit

$$\mathbf{T}_{(t,\sigma)} = \mathbf{T}_{(t+\tau,\sigma+\tau)} \quad (4.33)$$

für alle t, σ, τ der reellen Zahlen. Die Darstellung der Vektordifferentialgleichung bzw. der Integralgleichung vereinfacht sich erheblich. Die Lösung der Fundamentalmatrix, die für den allgemeinen zeitvarianten Fall nur in Sonderfällen analytisch bekannt ist, wird im zeitinvarianten Fall durch die Exponentialfunktion, definiert über die unendliche Reihe

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{A}^0 \frac{(t-t_0)^0}{0!} + \mathbf{A}^1 \frac{(t-t_0)^1}{1!} + \mathbf{A}^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots, \quad (4.34)$$

gebildet.

Für die Realisierung $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ lautet die Lösung mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(t)} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{B}_{(t)} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_{(t)} &= \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.35)$$

und der Fundamentalmatrix

$$\Phi_{(t,t_0)} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}. \quad (4.36)$$

Die zugehörige adjungierte Realisierung $\bar{\mathcal{S}}\{-\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{B}'\}$ ist mit

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}'_{(t)} &= -\mathbf{A}' \\ \mathbf{C}'_{(t)} &= \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'_{(t)} &= \mathbf{B}' \end{aligned} \quad (4.37)$$

und der Fundamentallösung

$$\bar{\Phi}_{(t,t_0)} = e^{-\mathbf{A}'(t-t_0)} \quad (4.38)$$

ebenfalls bekannt.

Die Transformation in den Zustandsraum vereinfacht sich mit

$$\mathbf{P}_{(t)} = \mathbf{P} \quad (4.39)$$

als

$$\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{P}\xi_{(t)}, \quad (4.40)$$

womit diese Koordinatentransformation dennoch nicht eindeutig ist, wie zuvor schon angemerkt wurde.

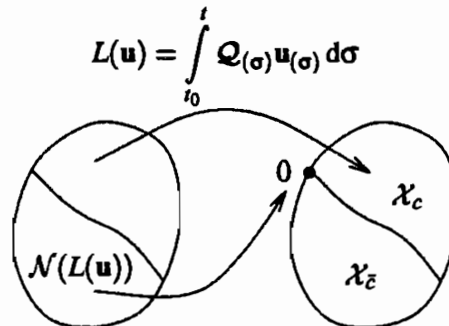
4.3 Struktureigenschaften dynamischer Systeme

4.3.1 Steuerbarkeit

Der Begriff Steuerbarkeit beschreibt eine Eigenschaft der mathematischen Darstellung eines dynamischen Systems. Die Beschreibung ist keine Aussage über das physikalische Modell, das mit der Systemtheorie mathematisch beschrieben wird.

Mathematisch betrachtet ist die Steuerbarkeit eine Charakterisierung des Systems $\mathcal{S}\{0, \mathcal{P}(t), \mathcal{Q}(t)\}$ durch bestimmte Besonderheiten, die durch die lineare Transformation mit dem Systemteil $\mathcal{Q}(t)$ und deren Vektorräumen verbunden sind. Diese Struktureigenschaft des mathematischen Systems ist physikalisch mit der Frage interpretierbar,

Bild 4.1 Steuerbarkeit



ob eine bestimmte Zustandsänderung in einem Zeitintervall mit minimalem Energieaufwand durch eine Steuerung möglich ist.

Die Aussage über die Steuerbarkeit ist an den Besonderheiten der linearen Transformation $L: \mathbf{K}_{[t_0, t]}^q \rightarrow \mathbf{K}^n$ definiert durch

$$L(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^t \mathcal{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \quad (4.41)$$

und den Vektorräumen des Operators zu treffen.

Theorem 4.1 (Fundamentalsatz der Strukturuntersuchung)

Eine lineare Abbildung

$$L: \mathbf{K}_{[t_0, t_1]}^r \rightarrow \mathbf{K}^s \quad (4.42)$$

ist definiert mit

$$L(\mathbf{z}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{E}(\sigma) \mathbf{z}(\sigma) d\sigma, \quad (4.43)$$

dann entspricht der Bildbereich \mathcal{R} dem der konstanten nicht negativ definiten symmetrischen Abbildung

$$\mathbf{W}_{(t_0, t_1)} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{E}(\sigma) \mathbf{E}'(\sigma) d\sigma, \quad (4.44)$$

was bedeutet

$$\mathcal{R}(L(\mathbf{z})) = \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}). \quad (4.45)$$

Die Elemente von $\mathbf{E}(\sigma)$ bilden kontinuierliche Funktionen auf $[t_0, t_1]$. Bedingt durch die Symmetrie des Operators $\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}$ gilt die eindeutige spezielle Zerlegung des Raumes \mathbf{K}^s in

$$\mathbf{K}^s = \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}). \quad (4.46)$$

Mit der Kenntnis von Theorem 4.1 hat Kalman [29] einen konstanten künstlichen Operator definiert, wodurch eine Vorschrift zur numerischen Bestimmung der Steuerbarkeit gegeben ist. Mit der Zustandsraumtransformation

$$\xi(t) = \Phi_{(t_0, t)} \mathbf{x}(t), \quad \xi_{(t_0)} = \mathbf{I} \mathbf{x}_{(t_0)} \quad (4.47)$$

und der Steuergleichung

$$\dot{\xi}(t) = \Phi_{(t_0, t)} \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (4.48)$$

entsteht für das Zeitintervall $[t_0, t_1]$ die Gleichung

$$\xi_{(t_1)} - \xi_{(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{(t_0, \sigma)} \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma. \quad (4.49)$$

Mit dem speziellen Input

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}'(t) \bar{\Phi}_{(t_0, t)} \bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{B}'(t) \Phi'_{(t_0, t)} \bar{\mathbf{x}}_0, \quad (4.50)$$

konstruiert durch die adjungierte Fundamentalmatrix, entsteht der Operator $\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}$ mit

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{(t_0, \sigma)} \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{B}'(\sigma) \Phi'_{(t_0, \sigma)} d\sigma \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \Delta \xi &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Q}(\sigma) \mathbf{Q}'(\sigma) d\sigma \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \Delta \xi &= \mathbf{W}_{(t_0, t_1)} \bar{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Da mit Theorem 4.1 gilt

$$\mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) = \mathcal{R}(L(\mathbf{u})), \quad (4.52)$$

ist über diese Beziehung an dem konstanten Operator $\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}$ eine Information über die Steuerbarkeit als mathematische Systemeigenschaft abzulesen. Ist der Rang

$$\text{rg}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) = \dim(\mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})) < n \quad (4.53)$$

kleiner als die Zustandsraumdimension n gilt das System als nicht steuerbar. Die Zerlegung

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \quad (4.54)$$

verdeutlicht diesen Zusammenhang, da

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})) > 0 \quad (4.55)$$

für ein nicht steuerbares System impliziert wird. Liegt $\Delta \xi$ im Bildbereich der linearen Transformation

$$\Delta \xi \in \mathcal{R}(L(\mathbf{u})) = \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \quad (4.56)$$

mit

$$L(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma, \quad (4.57)$$

ist eine Transformation

$$\Delta \xi = \Phi(t_0, t_1) \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_0) \quad (4.58)$$

durch einen entsprechenden Input \mathbf{u} möglich, die physikalisch als Steuerung interpretiert wird.

Ist eine Steuerung mit dem Input \mathbf{u} möglich, dann ist die Energie, zu

$$E = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 dt \quad (4.59)$$

definiert, minimal. Es gilt

$$\Delta \xi = \mathbf{W}_{(t_0, t_1)} \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (4.60)$$

mit der Pseudoinversen $\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger$

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \Delta \xi \quad , \quad (4.61)$$

als spezieller Inputvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{B}'(t) \Phi'(t_0, t) \bar{\mathbf{x}}_0 \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \Delta \xi. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die minimale erforderliche Energie für die Transformation $\Delta \xi$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E &= \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}(\sigma)\|_2^2 d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Delta \xi' \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \mathbf{Q}'(\sigma) \mathbf{Q}(\sigma) \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \Delta \xi d\sigma \\ &= \Delta \xi' \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \mathbf{W}_{(t_0, t_1)} \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \Delta \xi \\ &= \langle \Delta \xi, \mathbf{W}_{(t_0, t_1)}^\dagger \Delta \xi \rangle, \end{aligned} \quad (4.63)$$

womit dem künstlichen Operator $\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}$ ein direkter physikalischer Bezug zugewiesen wird.

Der Bildraum $\mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})$ und der Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})$ bilden zwei Unterräume des Zustandsraumes, die als steuerbare (controllable) und nicht steuerbare Räume von Kalman [28] klassifiziert werden.

Definition 4.1 (Steuerbarkeit, zeitvariantes System)

Eine mathematische Struktureigenschaft von \mathcal{S} ist die Steuerbarkeit, die den Zustandsraum \mathbf{K}^n in

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_c &\equiv \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \\ \mathcal{X}_{\bar{c}} &\equiv \mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \equiv \mathcal{R}^\perp(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) \quad , \end{aligned} \quad (4.64)$$

einen steuerbaren und nichtsteuerbaren Unterraum, mit

$$\mathbf{K}^n = \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}} \quad (4.65)$$

aufteilt. Eine Aussage über die Raumdimensionen ist an dem $\text{rg}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})$ der Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(t_0, t_1)} &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{(t_0, \sigma)} \mathbf{B}_{(\sigma)} \quad \mathbf{B}'_{(\sigma)} \Phi'_{(t_0, \sigma)} \, d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Q}_{(\sigma)} \quad \mathbf{Q}'_{(\sigma)} \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.66)$$

möglich. Dabei wird \mathcal{S} vollständig steuerbar genannt, wenn

$$\text{rg}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) = n. \quad (4.67)$$

Bei zeitinvarianten Systemen $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ vereinfacht sich die Untersuchung der Steuerbarkeit erheblich. Die Grundlage bildet der folgende Zusammenhang, der eine Spezialisierung von Theorem 4.1 darstellt.

Theorem 4.2 (spez. Fundamentalsatz der Strukturuntersuchung)

Für ein zeitinvariantes System gilt für $\mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)})$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(t_0, t_1)} &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{E}_{(\sigma)} \quad \mathbf{E}'_{(\sigma)} \, d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{F}(t_0 - \sigma)} \mathbf{G}_{(\sigma)} \quad \mathbf{G}'_{(\sigma)} e^{-\mathbf{F}'(\sigma - t_0)} \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.68)$$

eine Vereinfachung ohne Bezug zu einem Zeitintervall über

$$\mathbf{E} = [\mathbf{F}^0 \mathbf{G} | \mathbf{F}^1 \mathbf{G} | \dots | \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{G}], \quad (4.69)$$

so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) &= \mathcal{R}(\mathbf{E}) \\ \mathcal{N}(\mathbf{W}_{(t_0, t_1)}) &= \mathcal{N}(\mathbf{E}') \end{aligned} \quad (4.70)$$

sind. \square

Diese Tatsache folgt sofort aus der Exponentialfunktion der Fundamentalmatrix für zeitinvariante Systeme und dem Satz von Cayley-Hamilton.

Definition 4.2 (Steuerbarkeit, zeitinvariantes system)

Der Zustandsraum \mathbf{K}^n ist in

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_c &\equiv \mathcal{R}(\mathbf{Q}) \\ \mathcal{X}_{\bar{c}} &\equiv \mathcal{N}(\mathbf{Q}') \end{aligned} \quad (4.71)$$

einen steuerbaren und nichtsteuerbaren Unterraum, mit

$$\mathbf{K}^n = \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}} \quad (4.72)$$

aufgeteilt. Dabei werden die Raumdimensionen über $\text{rg}(\mathbf{Q})$ bestimmt.

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{A}^0 \mathbf{B} | \mathbf{A}^1 \mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \quad (4.73)$$

Das System ist vollständig steuerbar, wenn gilt

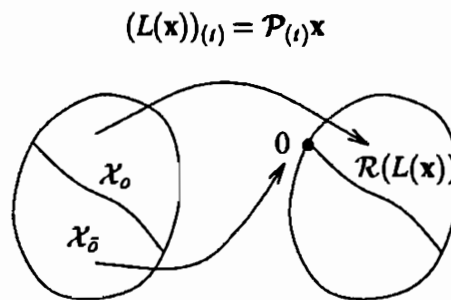
$$\text{rg}(\mathcal{Q}) = n. \quad (4.74)$$

Die Struktureigenschaft der Steuerbarkeit für eine mathematische Systembeschreibung kann allgemein über die Rangbestimmung einer konstanten Matrix festgelegt werden. Dies gilt sowohl für den zeitinvarianten als auch für den zeitvarianten Fall. Die Raumdimensionen der Unterräume einer linearen Transformation sind mit Kenntnis der Ranggröße bekannt.

4.3.2 Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit bildet eine weitere Eigenschaft der mathematischen Systembeschreibung $\mathcal{S}\{0, \mathcal{P}_{(t)}, \mathcal{Q}_{(t)}\}$. Der Systemteil \mathcal{P} und die damit gegebene lineare Transformation werden mathematisch charakterisiert. Die Besonderheiten, gegeben durch

Bild 4.2 Beobachtbarkeit



den Operator und die zugehörigen Vektorräume, dienen als Grundlage der Untersuchung, ob Beobachtbarkeit vorhanden ist. Die lineare Transformation $L: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p$ ist definiert als

$$(L(\mathbf{x}))_{(t)} = \mathcal{P}_{(t)}\mathbf{x}. \quad (4.75)$$

Aussagen über die Vektorräume einer linearen Transformation sind grundsätzlich auch an dem adjungierten Operator $L': \mathbf{K}_{[t_0, t]}^p \rightarrow \mathbf{K}^n$ zu treffen, da mit Theorem 3.8 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(L(\cdot)) &= \mathcal{N}(L'(\cdot))^\perp \\ \mathcal{N}(L(\cdot)) &= \mathcal{R}(L'(\cdot))^\perp. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Der adjungierte Operator ist über $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert zu

$$L'(\bar{\mathbf{u}}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}'_{(\sigma)} \bar{\mathbf{u}}_{(\sigma)} d\sigma, \quad (4.77)$$

mit $\mathcal{P}'_{(t)}$ dem Systemteil des adjungierten System $\bar{\mathcal{S}}\{0, \mathcal{P}'_{(t)}, \mathcal{Q}'_{(t)}\}$. Der Begriff Beobachtbarkeit entspricht damit dem der Steuerbarkeit des adjungierten Systems. Auf diesen Zusammenhang [58] wird in der Literatur nicht immer deutlich hingewiesen.

Die Strukturuntersuchung auf Beobachtbarkeit ist mit den gleichen mathematischen Werkzeugen der Untersuchung auf Steuerbarkeit möglich, wobei die Aussagen an den komplementären Vektorräumen getroffen werden.

Definition 4.3 (Beobachtbarkeit, zeitvariantes System)

Eine mathematische Struktureigenschaft von \mathcal{S} ist die Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit $\bar{\mathcal{S}}$, die den Zustandsraum \mathbf{K}^n in

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_o &\equiv \mathcal{R}(\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)}) \\ \mathcal{X}_{\bar{o}} &\equiv \mathcal{N}(\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)}) \equiv \mathcal{R}^\perp(\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)}) \quad ,\end{aligned}\quad (4.78)$$

einen beobachtbaren und nichtbeobachtbaren Unterraum, mit

$$\mathbf{K}^n = \mathcal{X}_o \oplus \mathcal{X}_{\bar{o}} \quad (4.79)$$

aufteilt. Eine Aussage über die Raumdimensionen ist an dem $\text{rg}(\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)})$ der Matrix

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)} &= \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}_{(t_0, \sigma)} \mathbf{C}'_{(\sigma)} \mathbf{C}_{(\sigma)} \bar{\Phi}'_{(t_0, \sigma)} d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}'_{(\sigma)} \quad \mathcal{P}_{(\sigma)} \quad d\sigma\end{aligned}\quad (4.80)$$

möglich. Dabei wird \mathcal{S} vollständig beobachtbar, $\bar{\mathcal{S}}$ vollständig steuerbar genannt, wenn

$$\text{rg}(\bar{\mathbf{W}}_{(t_0, t_1)}) = n. \quad (4.81)$$

Bei zeitinvarianten Systemen $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ bzw. $\bar{\mathcal{S}}\{-\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{B}'\}$ vereinfacht sich die Untersuchung der Struktur auf Beobachtbarkeit, zudem wird der Zusammenhang mit der Steuerbarkeit des adjungierten System $\bar{\mathcal{S}}$ besonders deutlich.

Definition 4.4 (Beobachtbarkeit, zeitinvariantes System)

Der Zustandsraum \mathbf{K}^n ist in

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_o &\equiv \mathcal{N}(\mathcal{P})^\perp \equiv \mathcal{R}(\mathcal{P}') \\ \mathcal{X}_{\bar{o}} &\equiv \mathcal{R}(\mathcal{P}')^\perp \equiv \mathcal{N}(\mathcal{P})\end{aligned}\quad (4.82)$$

einen beobachtbaren, adjungiert steuerbaren, und nichtbeobachtbaren Unterraum mit

$$\mathbf{K}^n = \mathcal{X}_o \oplus \mathcal{X}_{\bar{o}} \quad (4.83)$$

aufgeteilt. Dabei werden die Raumdimensionen über $\text{rg}(\mathcal{P}') = \text{rg}(\mathcal{P})$ bestimmt.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}' &= [\mathbf{A}'^0 \mathbf{C}' | \mathbf{A}'^1 \mathbf{C}' | \dots | \mathbf{A}'^{n-1} \mathbf{C}'] \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.84)$$

Das System ist vollständig beobachtbar, adjungiert steuerbar, wenn gilt

$$\text{rg}(\mathcal{P}') = \text{rg}(\mathcal{P}) = n. \quad (4.85)$$

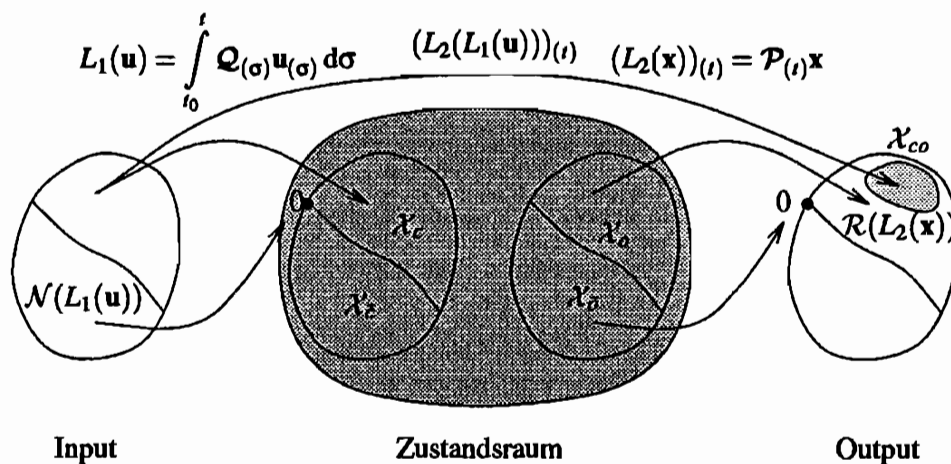
Der Autor hat zur Beschreibung der Struktureigenschaft Beobachtbarkeit den Weg über die adjungierte Steuerbarkeit gewählt, um so eine neue physikalisch zu interpretierende mathematische Größe, die Beobachtbarkeit, zu vermeiden. Zudem ist unter dem Gesichtspunkt der linearen Algebra eine Darstellung in dieser Form selbstverständlich.

4.4 Realisierung

Der Begriff Realisierung beschreibt die Existenz der Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_{(t)}$, $\mathbf{B}_{(t)}$, $\mathbf{C}_{(t)}$, die einem bestimmten Wichtungsmuster $\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$ zugeordnet sind. Ist eine Realisierung existent, dann beschreibt diese das Input Output Verhalten eines dynamischen Systems \mathcal{S} . Da der Zustandsraum unbekannt ist, er ist nicht direkt meßbar, bleibt die Zustandsraumdimension zunächst eine unbekannte Größe. Deshalb gibt es theoretisch unendlich viele Realisierungen, die ein identisches Klemmenverhalten aufweisen. Addiert man beispielsweise eine Steuergleichung zu einer gegebenen Realisierung, ohne das diese einen Einfluß auf den Output nimmt, erhöht sich sofort die Zustandsraumdimension, das Klemmenverhalten bleibt jedoch gleich.

Die Minimalrealisierung hat die Struktureigenschaft der kleinstmöglichen Zustandsraumdimension zur Beschreibung des Systemverhalten, es darf keine Zustandsraumordnung möglich sein, die kleiner ist und dabei das gleiche Klemmenverhalten aufweist. Grundlage für die Bestimmung einer Minimalrealisierung bilden die Struktureigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit. Sind diese beiden Struktureigenschaf-

Bild 4.3 Struktur der Realisierung



ten gegeben, dann ist mit minimaler Systemordnung ohne Informationsverlust eine Realisierung möglich. Bis auf eine mögliche Ähnlichkeitstransformation im Zustandsraum liegen dann die Systemgrößen $\mathbf{A}_{(t)}$, $\mathbf{B}_{(t)}$, $\mathbf{C}_{(t)}$ für das Wichtungsmuster $\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$ als Minimalrealisierung fest.

Die Strukturkriterien Steuerbarkeit und Beobachtung klassifizieren den Zustandsraum in sich vier einander ausschließende Teilzustandsraumvektoren bzw. vier Unterräume.

Diese Aufteilung des Zustandsraum wird Kalman kanonische Zerlegung genannt, das System $\mathcal{S}\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\}$ unterteilt sich entsprechend in vier Untersysteme.

Definition 4.5 (Kalman kanonische Zustandsform)

Nach Kalman ist der Zustandsraum, über die Strukturkriterien Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, in vier exklusive Zustände aufteilbar

1. $\mathbf{x}_{co} \in \mathcal{X}_o \cap \mathcal{X}_c$
 2. $\mathbf{x}_{c\bar{o}} \in \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}}$
 3. $\mathbf{x}_{\bar{c}o} \in \mathcal{X}_{\bar{c}} \cap \mathcal{X}_o$
 4. $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \in \mathcal{X}_{\bar{c}} \cap \mathcal{X}_{\bar{o}}$.
- (4.86)

Dabei stellen sich die Systemgrößen nach einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation wie folgt dar.

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(t)}^{22} & \mathbf{A}_{(t)}^{21} & \mathbf{A}_{(t)}^{24} & \mathbf{A}_{(t)}^{23} \\ & \mathbf{A}_{(t)}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{(t)}^{13} \\ & & \mathbf{A}_{(t)}^{44} & \mathbf{A}_{(t)}^{43} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_{(t)}^{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(t)}^2 \\ \mathbf{B}_{(t)}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2(t)} \\ \mathbf{x}_{1(t)} \\ \mathbf{x}_{4(t)} \\ \mathbf{x}_{3(t)} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_{(t)}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{(t)}^3 \end{bmatrix}$$

Die neuen Zustandsraumkoordinaten zeitvarianter Systeme und damit auch die Struktur sind nicht notwendigerweise zeitunabhängig.

Für die erforderliche Koordinatentransformation im Zustandsraum wird von Kalman [28] eine nichtorthogonale Ähnlichkeitstransformation für den zeitinvarianten Fall vorgeschlagen. Nach Kenntnis des Autors ist das Problem einer stabilen numerischen Transformation zur Berechnung der Kalman kanonischen Form für zeitvariante Systeme noch ungelöst.

Eine Minimalrealisierung besteht bezogen auf die Definition 4.5 nur aus dem Teilsystem

$$\mathcal{S}\{\mathbf{A}_{(t)}^{11}, \mathbf{B}_{(t)}^1, \mathbf{C}_{(t)}^1\} \quad (4.88)$$

Dieses vollkommen steuerbare und beobachtbare Teilsystem entspricht der Impulsantwort. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß bei einer blackbox Interpretation, siehe Bild 4.3, bezogen auf die Klemmengrößen der Realisierung noch ein zusätzlicher Systemanteil hinzutritt, weshalb

$$\mathcal{S}\{\mathbf{A}_{(t)}^{11}, \mathbf{A}_{(t)}^{13}, \mathbf{A}_{(t)}^{31}, \mathbf{B}_{(t)}^1, \mathbf{C}_{(t)}^1, \mathbf{C}_{(t)}^1\} \quad (4.89)$$

für diese Systembetrachtung gilt und daher allgemeiner als die Definition der Impulsantwort ist.

4.5 Diskrete dynamische Systeme

In der Darstellung von dynamischen Systemen in den vorausgehenden Kapiteln ist impliziert worden, daß Systemparameter als kontinuierliche Zeitfunktion vorliegen. Die

diskrete Beschreibung erfaßt die Dynamik nur zu bestimmten Zeitpunkten.

$$\dots < t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots \quad (4.90)$$

Eine weitere Vereinfachung bedingt die Forderung der äquidistanten Zeitdiskretisierung.

$$t_{k+1} - t_k = \Delta t = \text{konst.} > 0 \quad (4.91)$$

Bei der Voraussetzung eines konstanten Eingangs über einen Zeitschritt Δt stellen sich diskrete zeitinvariante dynamische Systeme mit der Abkürzung $t_k \hat{=} k$ als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

dar. Die Zusammenhänge zwischen den zeitkontinuierlichen und diskreten Systemgrößen lautet damit wie folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \sigma)} \mathbf{B} d\sigma \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Die Struktureigenschaften dynamischer kontinuierlicher Systeme, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, sind direkt auf diskrete dynamische Systeme übertragbar.

4.6 Der Hankel Operator

Der Hankeloperator [22] [26] stellt eine besondere lineare Transformation dar, wobei die inhärenten Komponenten denen der Wichtung $\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$ entsprechen. Der kontinuierliche Hankeloperator

$$L: \mathbf{K}_{(0,\infty)}^q \rightarrow \mathbf{K}_{(0,\infty)}^p \quad (4.94)$$

ist definiert zu

$$(L(\mathbf{v}))_{(t)} = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t+\tau)} \mathbf{B} \mathbf{v}_{(\tau)} d\tau. \quad (4.95)$$

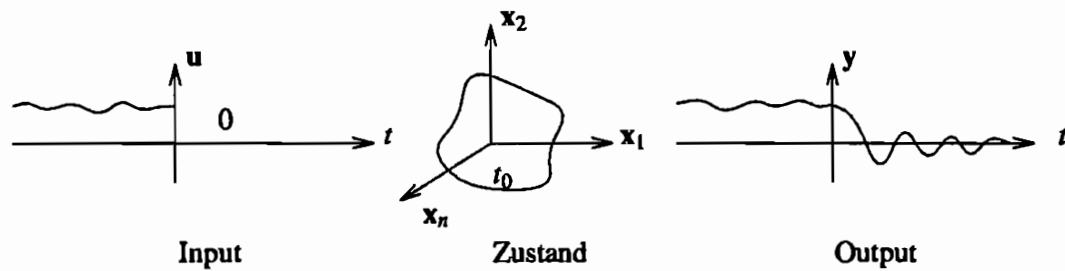
Für den speziellen Input, siehe Bild 4.4,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(t)} &= \mathbf{v}_{(-t)} & \text{für } t \leq 0 \\ &= \mathbf{0} & t > 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

ergibt sich mit $\tau = -\sigma$

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} e^{\mathbf{A}(t_0-\sigma)} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(\sigma)} d\sigma \quad (4.97)$$

Bild 4.4 Hankeloperator



und damit für den Output $t > 0$

$$y(t) = \mathcal{P}(t) \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{Q}(\sigma) u(\sigma) d\sigma, \quad (4.98)$$

als eine Abbildung der Vergangenheit in die Zukunft über den Zustand zur Zeit t_0 .

$$y(t) = \mathcal{P}(t) x_0; \quad x_0 = \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{Q}(\sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (4.99)$$

Die beiden Komponenten $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(\sigma)$ der Hankeltransformation entsprechen denen für die Wichtung $\mathbf{T}(t, \sigma)$ der zeitinvarianten Realisierung $\mathcal{S}\{A, B, C\}$ nach einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation im Zustandsraum.

Zum Zeitpunkt t_0 gilt für die \mathcal{P} Komponente

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{P}(t) x_0 = C e^{A(t-t_0)} x_0 \\ y(t) &= C A^0 x_0 + C A^1 \frac{(t-t_0)}{1!} x_0 + C A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} x_0 + \dots \\ \dot{y}(t) &= C A^1 x_0 + C A^2 \frac{(t-t_0)}{1!} x_0 + C A^3 \frac{(t-t_0)^2}{2!} x_0 + \dots \\ \ddot{y}(t) &= \dots \end{aligned} \quad (4.100)$$

und für die \mathcal{Q} Komponente

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{Q}(\sigma) u(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{t_0} e^{A(t_0-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma \\ &= A^0 B \int_{-\infty}^{t_0} u(\sigma) d\sigma + A^1 B \int_{-\infty}^{t_0} \frac{(t_0-\sigma)}{1!} u(\sigma) d\sigma + A^2 B \int_{-\infty}^{t_0} \frac{(t_0-\sigma)^2}{2!} u(\sigma) d\sigma + \dots \\ &= A^0 B u_{(t_0)}^0 + A^1 B u_{(t_0)}^1 + A^2 B u_{(t_0)}^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.101)$$

als Darstellung unter Berücksichtigung der Definition der Matrizenexponentialfunktio-

on. In Matrizenblockform zum Zeitpunkt t_0 ergibt sich die unendliche Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(t_0)} \\ \dot{\mathbf{y}}_{(t_0)} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{(t_0)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0 \\ \mathbf{CA}^1 \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}^0\mathbf{B} & \mathbf{A}^1\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(t_0)}^0 \\ \mathbf{u}_{(t_0)}^1 \\ \mathbf{u}_{(t_0)}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

$$[\mathbf{y}] = \mathcal{P} \mathcal{Q} [\mathbf{u}]$$

mit $[\mathbf{y}] \in \mathbb{K}^{\infty \times 1}$, $[\mathbf{u}] \in \mathbb{K}^{\infty \times 1}$, $\mathcal{P} \in \mathbb{K}^{\infty \times n}$ und $\mathcal{Q} \in \mathbb{K}^{n \times \infty}$. Die Matrizen \mathcal{P} und \mathcal{Q} sind aus der Strukturuntersuchung in Kapitel 4.3 bekannt.

Die diskrete Parallele der Hankeltransformation wird durch eine zweifach unendliche Matrix repräsentiert, die ebenfalls von besonderer Form ist. Der diskrete Output y_k lautet für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{(k-l)}\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{(l-1)} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{(k-0)} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{(l-1)} \end{aligned} \quad (4.103)$$

und bildet die gleiche Transformation zwischen Vergangenheit und Zukunft wie zuvor in der kontinuierlichen Darstellung.

$$y_k = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{(k-0)}\mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{(l-1)} \quad (4.104)$$

Diese unendliche Summe ausgeschrieben für die Zeitpunkte $l = -0, -1, \dots, -\infty$ ergibt den doppelt unendlich diskreten Hankeloperator

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^1\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} & \dots \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{-1} \\ \mathbf{u}_{-2} \\ \mathbf{u}_{-3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

$$[\tilde{\mathbf{y}}] = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{Q}} [\tilde{\mathbf{u}}]$$

$$[\tilde{\mathbf{y}}] = \tilde{\mathbf{H}} [\tilde{\mathbf{u}}]$$

mit $[\tilde{\mathbf{y}}] \in \mathbb{K}^{\infty \times 1}$, $[\tilde{\mathbf{u}}] \in \mathbb{K}^{\infty \times 1}$, $\tilde{\mathcal{P}} \in \mathbb{K}^{\infty \times n}$ und $\tilde{\mathcal{Q}} \in \mathbb{K}^{n \times \infty}$. Bemerkenswert ist die besondere Form der Hankelmatrix in der blockdyadischen Zerlegung. Die Matrizen $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ sind die diskreten Formen für die Strukturuntersuchung auf Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit.

Die Hankelmatrix setzt sich aus den Markov-Parametern mit den Blöcken

$$\tilde{\mathbf{h}}_k = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (4.106)$$

zusammen und hat trotz unendlicher Form einen endlichen Rang [19], der der Systemordnung entspricht. Die Markov-Parameter bilden die unendliche Reihe der diskreten

$$\mathbf{R}_{(z)} = \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{I}z - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}z^{-k} \quad (4.107)$$

bzw. kontinuierlichen

$$\mathbf{R}_{(s)} = \mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}s^{-k} \quad (4.108)$$

Systemübertragungsfunktion \mathbf{R} nach der \mathcal{Z} - bzw. Laplace-Transformation. Dies ist hier nur vollständigheitshalber erwähnt, da in dieser Arbeit die Markov-Parameter nicht direkt verwendet werden.

5.1	Einleitung	63
5.2	Analyse mit dem Zustandsraummodell	64
5.3	Das synthetische Modell als Realisierung	70

Realisierung dynamischer Systeme mit der verallgemeinerten Singularwertzerlegung

5.1 Einleitung

Die Systemtheorie gilt als Grundlage für die Abbildung dynamischer Abläufe von realen Gegebenheiten in eine mathematische Sprache. Das Zustandsraummodell dient sowohl der Analyse als auch zur Synthese der Dynamik. Eine Realisierung beinhaltet alle Parameter einer Zustandsraumdarstellung, die bei einer konkreten Untersuchung der realen Ereignisse in die Berechnungsmethode einfließen.

Das mathematische Modell der Systemtheorie ermöglicht eine Analyse der Realität, über die gemessenen Input und Output Signale, durch eine Black box Realisierung, die auch als Klemmenmodell bezeichnet wird. Die erforderlichen Systemparameter werden aus dem gemessenen Klemmenverhalten bestimmt. Die synthetische Realisierung berechnet im Gegensatz dazu die unbekannt Systemparameter aus Gesetzmäßigkeiten und Regelwerken spezieller problemorientierter Theorien. Ein bekanntes Beispiel für die synthetische Beschreibungsweise ist die Finite Elemente Methode.

Die Theorie der Singularwertzerlegung, mit Ursprung in der linearen Algebra, stellt in diesem Problemumfeld ein geeignetes mathematisches Werkzeug dar, um die Modellstruktur der Systemtheorie offenzulegen. Die einzelnen Systemkomponenten sind nach der Zerlegung direkt zugänglich und interpretierbar. Vorteilhaft ist dabei zudem, daß ei-

ne sehr stabile numerische Realisierung für den Digitalrechner existiert.

Die erläuterte Black box Realisierung mit der QSVD ist von dem Autoren entwickelt worden und nach dessen Kenntnis neu.

5.2 Analyse mit dem Zustandsraummodell

Durch die Messung von Input und Output wird das mathematische Modell in der Systemtheorie als ein Klemmenmodell bestimmt. Die Wahl der Input- und Outputgrößen legt somit den Bezug zwischen der physikalischen Realität und der mathematischen Abbildung fest.

Für eine Analyse mit dem Hankeloperator der Systemtheorie, siehe Kapitel 4.6, ist ein spezielles Testsignal als Eingang in das zu untersuchende reale System erforderlich. Hier bieten sich die Impulsfunktion sowie die Einheitssprungfunktion als Ein- Ausschaltvorgang, zu einem bestimmten wählbaren Zeitpunkt t_0 an, dabei muß das System in einem stationären Zustand ausharren.

Ein spezielles kontinuierliches Eingangssignal ist die Impulsfunktion oder Delta-Funktion.

$$\begin{aligned} \delta_{(t)} &= \infty \quad \text{für } t = 0 \\ &= 0 \quad \text{für } t \neq 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Mit den besonderen Eigenschaften als eine verallgemeinerte Funktion oder Pseudofunktion bewirkt sie eine Filterung bei der Multiplikation mit üblichen Funktionen wie folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} \varphi_{(t)} dt = \varphi_{(0)} \quad (5.2)$$

und kann über die partielle Integration als Ableitung der Einheitssprungfunktion definiert werden. Das Analogon in der diskreten Darstellung ist die Pulsfunktion.

Die Einheitssprungfunktion ist vergleichbar mit einem Schaltvorgang und als

$$\begin{aligned} U_{(t-t_0)} &= 1 \quad \text{für } t > t_0 \\ &= 0 \quad \text{für } t \leq t_0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

definiert.

Wird eine spezielle Eingangsfunktion für den Input $\mathbf{u} \in \mathbf{K}^q$ eines dynamischen Systems derart gewählt, daß gilt

$$\mathbf{u}_{1(t)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{spez.};} \quad \mathbf{u}_{2(t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{spez.};} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{q(t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{spez.}} \quad , \quad (5.4)$$

dann läßt sich der Hankeloperator aus den Einzelmessungen, die durch die Aufeinanderfolge der separierenden Eingangsgrößen entkoppelt vorliegen, aufbauen.

Die i Einzelmessungen, bezugnehmend auf äquidistante diskrete Ausgangsgrößen, ergeben sich für den speziellen Input mit

$$\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{b}}_i \quad , \quad i = 1, \dots, q \quad (5.5)$$

aus der Hankeltransformation, siehe Kapitel 4.6,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{\mathbf{u}}] \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathcal{P}} \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \tilde{\mathcal{Q}}[\tilde{\mathbf{u}}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

zum Zeitpunkt t_0 zu

$$\begin{aligned} y_{11} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0\tilde{\mathbf{b}}_1 & y_{12} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0\tilde{\mathbf{b}}_2 & y_{1q} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0\tilde{\mathbf{b}}_q \\ y_{21} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1\tilde{\mathbf{b}}_1 & y_{22} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1\tilde{\mathbf{b}}_2 & y_{2q} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1\tilde{\mathbf{b}}_q \\ y_{31} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2\tilde{\mathbf{b}}_1 & y_{32} &= \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2\tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & y_{3q} = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2\tilde{\mathbf{b}}_q \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Der Zusammenbau der Einzelmessungen, synchronisiert über die Zeit, ergibt die Systemantwort in Blockformulierung

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1q} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2q} \\ y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3q} \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_q \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

auf das spezielle Eingangssignal. Die Linearität der invarianten Zustandsraumdarstellung bedingt eine Zeitshiftinvarianz der Impulsantwort, deshalb läßt sich der Hankeloperator über

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2q} \\ y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3q} \\ y_{41} & y_{42} & \dots & y_{4q} \\ \vdots & & & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3q} \\ y_{41} & y_{42} & \dots & y_{4q} \\ y_{51} & y_{52} & \dots & y_{5q} \\ \vdots & & & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^3 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^4 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^0 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^1 \\ \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{A}^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

usw. sofort als unendliche Matrix $\tilde{\mathbf{H}}_1 \in \mathbf{K}^{\infty \times \infty}$ zusammensetzen, bezogen auf \mathbf{x}_{01} den Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_0 als Transformationszeitpunkt aus der Vergangenheit

in die Zukunft.

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \cdots & \mathbf{y}_{1q} \\ \hline \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \cdots & \mathbf{y}_{2q} \\ \mathbf{y}_{31} & \mathbf{y}_{32} & \cdots & \mathbf{y}_{3q} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \mathbf{y}_{\infty 1} & \mathbf{y}_{\infty 2} & \cdots & \mathbf{y}_{\infty q} \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \cdots & \mathbf{y}_{2q} & \mathbf{y}_{\infty 1} & \mathbf{y}_{\infty 2} & \cdots & \mathbf{y}_{\infty q} \\ \hline \mathbf{y}_{31} & \mathbf{y}_{32} & \cdots & \mathbf{y}_{3q} & \cdots & & & \vdots \\ \mathbf{y}_{41} & \mathbf{y}_{42} & \cdots & \mathbf{y}_{4q} & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{array} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \tilde{\mathbf{h}}_1 & \tilde{\mathbf{h}}_2 & \tilde{\mathbf{h}}_{\infty} \\ \hline \tilde{\mathbf{h}}_2 & \tilde{\mathbf{h}}_3 & \cdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_3 & \tilde{\mathbf{h}}_4 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{h}}_{\infty} & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^1\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} & \dots \end{array} \right] \quad (5.10)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \tilde{\mathcal{P}}_{01} \tilde{\mathcal{Q}}_{01} ; \mathbf{x}_{01}$$

Die Zeitshiftinvarianz kann ebenfalls global auf die gesamte Hankelmatrix angewendet werden, da der Hankeloperator eine lineare Transformation ist. Die unendliche Matrix $\tilde{\mathbf{H}}_2 \in \mathbb{K}^{\infty \times \infty}$ repräsentiert mit

$$\tilde{\mathbf{H}}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} \tilde{\mathbf{h}}_2 & \tilde{\mathbf{h}}_3 & \tilde{\mathbf{h}}_{\infty} \\ \hline \tilde{\mathbf{h}}_3 & \tilde{\mathbf{h}}_4 & \cdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_4 & \tilde{\mathbf{h}}_5 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{h}}_{\infty} & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^1\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} & \dots \end{array} \right] \quad (5.11)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_2 = \tilde{\mathcal{P}}_{02} \tilde{\mathcal{Q}}_{02} ; \mathbf{x}_{02}$$

auch den Hankeloperator, hier allerdings mit dem Transformationsbezugspunkt \mathbf{x}_{02} . Die Gültigkeit der Linearität erlaubt weitere denkbare Repräsentanten für den Hankeloperator.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_3 &= \tilde{\mathcal{P}}_{03} \tilde{\mathcal{Q}}_{03} ; \mathbf{x}_{03} \\ \tilde{\mathbf{H}}_4 &= \tilde{\mathcal{P}}_{04} \tilde{\mathcal{Q}}_{04} ; \mathbf{x}_{04} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.12)$$

Signifikant ist die Feststellung, daß die Zustände $\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}, \dots, \mathbf{x}_{0\infty}$, zu den jeweiligen Zeitpunkten t_0 , in einem Zustandstransformationsverhältnis stehen,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{02} &= \tilde{\mathbf{A}}^1 \mathbf{x}_{01} \\ \mathbf{x}_{03} &= \tilde{\mathbf{A}}^2 \mathbf{x}_{01} \\ \mathbf{x}_{04} &= \tilde{\mathbf{A}}^3 \mathbf{x}_{01} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.13)$$

für die Bedingung

$$t_{01} < t_{02} < t_{03} \dots \quad (5.14)$$

gültig bei äquidistanter Messung und Linearität. Da sich grundsätzlich jeder Hankeloperator dyadisch in die Komponenten $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ zerlegen läßt, gilt allgemein

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_1 &= \tilde{\mathcal{P}}_{01} \tilde{\mathcal{Q}}_{01} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathcal{Q}} \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &= \tilde{\mathcal{P}}_{02} \tilde{\mathcal{Q}}_{02} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathcal{Q}} \\ \tilde{\mathbf{H}}_3 &= \tilde{\mathcal{P}}_{03} \tilde{\mathcal{Q}}_{03} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathcal{Q}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.15)$$

für die Voraussetzung der Zeitshiftinvarianz. Die Matrizen $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ sind linear unabhängige Formen, sie stellen die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeits-Matrizen dar. Wählt man t_i als Bezugspunkt für \mathbf{x}_{0i} , so lautet die Faktorisierung der zwei Hankelmatrizen $\tilde{\mathbf{H}}_i$ und $\tilde{\mathbf{H}}_k$ über die blockdyadische Zerlegung mit $t_i < t_k$ und \mathbf{x}_{0k}

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_i &= \tilde{\mathcal{P}}_i \tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathcal{Q}} \\ \tilde{\mathbf{H}}_k &= \tilde{\mathcal{P}}_k \tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^{(k-i)} \tilde{\mathcal{Q}}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

da $\mathbf{x}_{0k} = \mathbf{A}^{(k-i)} \mathbf{x}_{0i}$ ist.

Theorem 5.1 (Realisierung durch zwei Hankelmatrizen)

Jeder Hankeloperator ist grundsätzlich in zwei linear unabhängige Matrizen $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ zerlegbar. Unter der Voraussetzung, daß sich zwei Hankelmatrizen $\tilde{\mathbf{H}}_k$ und $\tilde{\mathbf{H}}_i$, die den gleichen Hankeloperator von einem dynamischen System repräsentieren, in

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{\mathcal{P}}_i \tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathcal{Q}} \quad (5.17)$$

und

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \tilde{\mathcal{P}}_k \tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^{(k-i)} \tilde{\mathcal{Q}} \quad (5.18)$$

gleichzeitig dyadisch zerlegen lassen, wobei mit $t_i < t_k$ und \mathbf{x}_{0i} als Bezugspunkt der globalen Zeitshiftinvarianz gilt, dann ist eine Realisierung $\mathcal{S}\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\}$ bestimmbar zu

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathcal{Q}} = \left[\tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{B}} \mid \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{B}} \mid \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{B}} \mid \dots \right] \quad (5.19)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathcal{P}}_{(1:p,1:n)}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathcal{Q}}_{(1:n,1:q)} \quad (5.20)$$

und

$$\tilde{\mathcal{P}}_1^\dagger \tilde{\mathcal{P}}_k = \tilde{\mathcal{P}}^\dagger \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{A}}^{(k-1)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(k-1)}. \quad (5.21)$$

Der Beweis folgt direkt aus der Gültigkeit von Theorem 3.3 als eine dyadische Zerlegung in der Form

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \check{\mathbf{U}}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{U}\Sigma_{\tilde{\mathbf{H}}_1}\mathbf{X}^{-1} \quad (5.22)$$

und

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \check{\mathbf{V}}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{V}\Sigma_{\tilde{\mathbf{H}}_k}\mathbf{X}^{-1} \quad (5.23)$$

von zwei Matrizen, mit alleinig gemeinsamen normalen nichttrivialen singulären Wertepaaren und zugehörigen Vektoren, da sich Bildraum und Nullraum für den einen darzustellenden Operator entsprechen müssen. \square

Mit der QSVD ist die Faktorisierung in drei nicht singuläre Matrizen möglich. Damit ergibt sich aus der gleichzeitigen dyadischen Zerlegung von zwei Hankelmatrizen unter Ausnutzung der globalen Shiftinvarianz eine Realisierung $\mathcal{S}\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\}$, wobei die Parameter bis auf eine immer mögliche Ähnlichkeitstransformation \mathbf{P} bestimmt sind $\mathcal{S}\{\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{P}}\}$. Das Parameteridentifikationsverfahren beschränkt sich nicht auf den dargestellten diskreten Fall, sondern gilt auch für kontinuierliche Systeme bzw. Hankelmatrizen mit entsprechenden Meßsignalen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Struktur der Hankelmatrix, die durch die Markov-Parameter gebildet wird, unberücksichtigt bleibt. Diese Struktur ist bei veräuschten unscharfen Signalen nicht vorhanden. Im Gegensatz dazu ist jede Hankelmatrix $\tilde{\mathbf{H}}$ in eine dyadische Blockform der $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ Matrizen zu faktorisieren, auch dann, wenn die inhärente Struktur durch Rauscheffekte zerstört ist. Deshalb ist ein Ansatz zur Bestimmung einer Realisierung mit der globalen Shiftinvarianz der Hankelmatrix allgemeingültiger als Verfahren, die die innere Struktur einer Hankelmatrix ausnutzen. Zu nennen sind die bekannten Algorithmen von Zeiger und McEwen [60] und Kung [32], die auf der Grundlage der Realisierung von Ho [25] entstanden sind und deren Modellbasis auf einer exakten Hankelmatrix aufbaut und daher bei verrauschten Signalen nur näherungsweise gültig sind.

Eine Realisierung $\mathcal{S}\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\}$ ist mit der QSVD bestimmbar, indem beispielsweise für $\mathbf{x}_{02} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{01}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_1 &= \check{\mathbf{U}}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{U}\Sigma_{\tilde{\mathbf{H}}_1}\mathbf{X}^{-1} = \tilde{\mathcal{P}}_1\tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathcal{Q}} \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &= \check{\mathbf{V}}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{V}\Sigma_{\tilde{\mathbf{H}}_2}\mathbf{X}^{-1} = \tilde{\mathcal{P}}_2\tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathbf{A}}^1\tilde{\mathcal{Q}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathcal{P}}_{(1:p,1:n)} = \check{\mathbf{U}}_{(1:p,1:n)} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathcal{Q}}_{(1:n,1:q)} = \mathbf{X}_{(1:n,1:q)}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \tilde{\mathcal{P}}_1^\dagger \tilde{\mathcal{P}}_2 = \check{\mathbf{U}}^\dagger \check{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

aus der Zerlegung folgt. Diese Darstellung ist exakt gültig für die gemeinsamen nichttrivialen normalen singulären Werte und Vektoren $\alpha_i < 1$ und $\beta_i > 0$, bezogen auf die

mögliche Rechnergenauigkeit γ . Die zwei zu faktorisierenden Matrizen werden durch eine gemeinsame QR-Zerlegung

$$\tilde{\mathbf{H}}_{ges} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1 \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (5.26)$$

in der QSVD vorverarbeitet [43], [23]. Diese Vorstufe der allgemeinen Faktorisierung dient der gemeinsamen Rangbestimmung, damit liegt ebenso der gemeinsame Zeilennullraum $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{H}}_1) \cap \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{H}}_2)$ fest. Die Bestimmung des gemeinsamen Nullraumes erfolgt mit der QR-Zerlegung grundsätzlich auf der Basis der Rechnergenauigkeit γ und erlaubt deshalb keine Interpretation bei der Rangstimmung, allerdings ist diese Vorstufe in der allgemeinen Berechnung der Faktorisierung durch eine bessere Rangbestimmung [2] austauschbar.

Bei der Verarbeitung von verrauschten Meßdaten liegt die Darstellung der Zahlen, bedingt durch die Quantisierung des D/A-Wandlers usw., weit oberhalb der Rechnergenauigkeit.

- Digitalrechner: $2^{-52} = 4,50 \cdot 10^{-16}$
 - D/A-Wandler: $2^{-12} = 2,44 \cdot 10^{-4}$
- (5.27)

Die aufgeführten Zahlen stellen beispielhaft den großen Unterschied dar, der sich in Abhängigkeit der eingesetzten Hardware und Software ändert.

Die in der QSVD inhärente QR-Zerlegung, als Vorstufe der Faktorisierung und Rangbestimmung, ist durch die Abstimmung auf die Rechnergenauigkeit γ für eine Meßdatenverarbeitung ungeeignet. Eine Interpretation der vorliegenden Daten und der Rangbestimmung ist leider nicht gegeben, wie dies bei der SVD möglich ist. Um dennoch eine Realisierung $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ mit der QSVD zu bestimmen muß die Rangbestimmung bei Daten, die nicht in der Rechnergenauigkeit γ vorliegen, über eine externe Berechnung, die der QSVD vorzuschalten ist, bestimmt werden.

Über die Rangbestimmung mit der SVD findet eine Trennung der Meßsignale in einen Signalraum und Rausraum statt. Diese Strukturierung, bedingt durch die Trennung, ist dabei mit dem Bildraum und Nullraum einer linearen Transformation vergleichbar. Die Interpretation ist sinnvoll, da unterhalb der Zahlendarstellung γ im Digitalrechner ebenfalls Rauschen vorliegt, hier jedoch im Vergleich zum Meßrauschen auf einem anderen Potential.

Für die externe Rangberechnung mit der SVD ist die Annahme zu treffen, daß weißes Rauschen vorliegt, dann folgt

$$\hat{\mathbf{H}}_{ges} = \tilde{\mathbf{H}}_{ges} + \hat{\mathbf{H}}_{ges} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_1 \\ \hat{\mathbf{H}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

als die gemessene verrauschte Hankelmatrix $\hat{\mathbf{H}}_{ges}$ mit der berechneten Faktorisierung. Die Unterteilung in den Signalraum

$$\tilde{\mathbf{H}}_{ges} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1 \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

und den Rauschraum

$$\hat{\mathbf{H}}_{ges} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_1 \\ \hat{\mathbf{H}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

ist an der Strukturierung über die singulären Werte mit den zugehörigen Vektoren direkt ersichtlich. Die singulären Werte σ_i bilden dabei einen direkten Bezug zu dem Energiegehalt eines Signales, der als Quadratwurzel σ_i entspricht. Die Vektoren der Matrix \mathbf{V}_1 spannen den gemeinsamen Zeilenraum als einen Unterraum auf. Die Projektion, siehe Kapitel 3.2, der Daten mit dem Projektor $\mathbf{P}_{\mathbf{V}_1}$ auf diesen Raum selektiert zwischen Rausch- und Signalgehalt.

$$\tilde{\mathbf{H}}_{ges} = \hat{\mathbf{H}}_{ges} \mathbf{P}_{\mathbf{V}_1} \quad (5.31)$$

Liegt eine besondere Datenstruktur vor, so kann eine erhebliche Reduktion bei der Berechnung berücksichtigt werden. Die beiden Hankelmatrizen $\hat{\mathbf{H}}_1$ und $\hat{\mathbf{H}}_2$ beinhalten einen großen Anteil redundanter Information.

$$\hat{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{1a} \\ \hat{\mathbf{H}}_{1b} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{H}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{2a} \\ \hat{\mathbf{H}}_{2b} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Die Teilmatrizen $\hat{\mathbf{H}}_{1b}$ und $\hat{\mathbf{H}}_{2a}$ enthalten die gleichen Daten, so daß mit

$$\hat{\mathbf{H}}_{1b} \equiv \hat{\mathbf{H}}_{2a} \quad (5.33)$$

der Aufwand bei der Berechnung der SVD stark vermindert werden kann.

$$\hat{\mathbf{H}}_{ges., red.} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{1a} \\ \hat{\mathbf{H}}_{1b} \\ \hat{\mathbf{H}}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Die Selektion zwischen Signal- und Rauschraum erfolgt wie zuvor beschrieben, so daß für die Berechnung der Realisierung $\mathcal{S}\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\}$ mit der QSVD die Hankelmatrizen

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{1a} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{1b} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{H}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{2a} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{2b} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

endgültig bereit stehen.

5.3 Das synthetische Modell als Realisierung

Das Zustandsraummodell der Systemtheorie stellt eine synthetische Abbildung realer Vorgänge dar, wenn die Realisierung $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ aus bekannten Teilen zusammengesetzt ist. Die Teilsysteme der Struktur werden durch eigenständige Prinzipie oder Regelwerke aufgestellt und in eine Vektordifferentialgleichung erster Ordnung umgeformt. Eine bekannte synthetische Zustandsraumdarstellung bildet die Finite Elemente Methode [56][57], die aus Teilsystemen wie Massen-, Dämpfer- und Steifigkeitselementen zu einer linearen Differentialgleichung zusammengesetzt wird.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (5.36)$$

Die Gleichung mit der Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbf{K}^{s \times s}$, Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbf{K}^{s \times s}$ und Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbf{K}^{s \times s}$ beschreibt die Beziehungen zwischen den als Eingang gewählten Kraftgrößen $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{K}^s$ und den Ausgängen $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{K}^s$, als Weggrößen mit entsprechenden Ableitungen, die als Geschwindigkeit und Beschleunigung zu deuten sind. Die Darstellung als Sonderfall in der Systemtheorie wird direkt klar, wenn man beachtet, daß für die Wahl der Koordinaten $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ eine feste Abhängigkeit gilt. Die Erhöhung der Eingänge bedingt ebenso die Vergrößerung der Anzahl von Ausgängen und eine Anpassung der Parametermatrizen, diese Abhängigkeiten sind in der Systemtheorie unbekannt. Nach Umformung auf eine Vektordifferentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (5.37)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t),$$

gilt dies mit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (5.38)$$

als die Zustandsraumdarstellung der Systemtheorie. Im Gegensatz zur Systemtheorie, wo der Zustandsraum nicht direkt physikalisch zu deuten ist, wird mit $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{2s \times 2s}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{K}^{2s \times s}$ und $\mathbf{C} \in \mathbf{K}^{s \times 2s}$, der Raum in Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Wegen beschrieben.

Theoretisch gelten die Finite Elemente Methoden immer als steuerbar bzw. beobachtbar und bilden so eine Minimalrealisierung. Um die physikalischen Gegebenheiten jedoch brauchbar abzubilden, ist sehr oft eine große Anzahl von Freiheitsgraden unumgänglich, da die Ansatzfunktionen der Elemente die Realität nur ungenügend darstellt. Durch den hohen Grad der Diskretisierung wird das Rechenmodell damit nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar, und somit gibt es ein Modell kleinerer Ordnung bezogen auf die numerische Darstellungsgenauigkeit γ . Die theoretische Minimalrealisierung ist nicht mehr gegeben, da die Eindeutigkeit bei der Abbildung auf die Ansatzfunktionen bei großer Diskretisierungsanzahl redundanzbedingt verloren geht.

Das Zustandsraummodell kann auch beispielsweise aus mehreren Steuergleichungen oder Meßgleichungen zu einem Gesamtmodell aufgebaut werden, so daß keine Minimalrealisierung vorliegt. Durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation der Realisierung kann eine Minimalrealisierung bestimmt werden.

Die Kalman kanonische Form, siehe Definition 4.5, oder die balanced (ausgeglichene) Realisierung und die principal axis (Hauptachsen) Realisierung sind bekannte Zustandsformen für die Berechnung einer Minimalrealisierung. Die beiden zuletzt genannten Realisierungsformen, die bezogen auf die Beschreibung in Kapitel 4.4 neueren Datums sind und eng mit der Theorie der Singulärwertzerlegung zusammenhängen und deshalb erst hier aufgeführt werden, lassen sich wie folgt skizzieren.

Definition 5.1 (balanced, principal axis Zustandsform)

Eine Realisierung $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ liegt nach einer Ähnlichkeitstransformation in principal axis Form vor, wenn die Matrizen

$$\mathbf{P}'\mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}' \quad (5.39)$$

diagonale Form haben [40]. Sind zudem die Matrizen nach dieser Transformation gleich, dann gilt die vorliegende Form als balanced Realisierung.

Mit dem Algorithmus der PSVD, siehe Theorem 3.5, ist eine geeignete Ähnlichkeitstransformation berechenbar, dabei dient die Hankeltransformation

$$\mathbf{H} = \mathcal{P}\mathcal{Q} \quad (5.40)$$

als die Berechnungsbasis einer gegebenen Realisierung $\mathcal{S}_1\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\}$ mit

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_1 = \left[\mathbf{A}_1^0\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{A}_1^1\mathbf{B}_1 \mid \dots \mid \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \right]. \quad (5.41)$$

Als Grundlage dient die Tatsache, daß die Eigenwerte und Vektoren als Moden zweiter Ordnung von

$$\mathcal{P}'\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{Q}' \quad (5.42)$$

bei einer Ähnlichkeitstransformation invariant sind [17]. Die Berechnung erfolgt mit der PSVD, ohne die explizite Berechnung des Produktes, auf numerisch stabilem Weg. Die gesuchte kontragrediente Transformation für $\mathcal{S}_1\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\}$ lautet

$$\mathcal{S}_2\{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{P}, \mathbf{P}^1\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{P}\} = \mathcal{S}_2\{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2\} \quad (5.43)$$

mit

$$\mathbf{P}'\mathcal{P}'_1\mathcal{P}_1\mathbf{P} = \mathcal{P}'_2\mathcal{P}_2 = \text{diag}\{\cdot\} \quad (5.44)$$

und

$$\mathbf{P}^{-1}\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}'_1\mathbf{P}^{-1} = \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}'_2 = \text{diag}\{\cdot\}, \quad (5.45)$$

da dann

$$\mathbf{P}'\mathcal{P}'_1\mathcal{P}_1\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}'_1\mathbf{P}^{-1} = \mathcal{P}'_2\mathcal{P}_2\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}'_2 = \text{diag}^2\{\cdot\} \quad (5.46)$$

auf Diagonalgestalt der quadratischen Eigenwerte transformiert wird.

Die PSVD vereinfacht die Ermittlung der Transformation mit

$$\mathcal{P}_1 = \mathbf{U}\Sigma_{\mathcal{P}_1}\mathbf{X}^{-1}, \quad \mathcal{Q}'_1 = \mathbf{V}\Sigma_{\mathcal{Q}'_1}\mathbf{X}'. \quad (5.47)$$

Die gesuchte kontragrediente Transformation wird durch die invertierbare Matrix \mathbf{X} gebildet.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}'_1 &= \mathbf{X}'^{-1}\Sigma_{\mathcal{P}'_1}\mathbf{U}'\mathbf{U}\Sigma_{\mathcal{P}_1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\Sigma_{\mathcal{Q}_1}\mathbf{V}'\mathbf{V}\Sigma_{\mathcal{Q}'_1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{X}'^{-1}\Sigma_{\mathcal{P}_1}^2\Sigma_{\mathcal{Q}_1}\mathbf{X}' \end{aligned} \quad (5.48)$$

Wählt man $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ erhält man die Diagonalform, in Gestalt der gemeinsamen singulären Werte mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathbf{U}\Sigma_{\mathcal{P}_1}\mathbf{X}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^0}{\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{n-1}}{\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^0}{\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^1} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{n-1}}{\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{n-1}} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{U}\Sigma_{\mathcal{P}_1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathcal{P}_2\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (5.49)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \mathbf{X}\Sigma_{\mathcal{Q}_1}\mathbf{V}' \\ &= \left[\mathbf{A}_1^0\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{A}_1^1\mathbf{B}_1 \mid \dots \mid \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \right] \\ &= \mathbf{P}^{-1} \left[\mathbf{A}_2^0\mathbf{B}_2 \mid \mathbf{A}_2^1\mathbf{B}_2 \mid \dots \mid \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2 \right] \\ &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\Sigma_{\mathcal{Q}_1}\mathbf{V}' \\ &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathcal{Q}_2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2'\mathcal{P}_2 = \Sigma_{\mathcal{P}_1}^2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\mathcal{P}_1} & \\ \hline \mathbf{0}_{\mathcal{P}_1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_2' = \Sigma_{\mathcal{Q}_1}^2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{\mathcal{Q}_1}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{\mathcal{Q}_1} & \\ \hline \mathbf{I}_{\mathcal{Q}_1} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Anhand der singulären Werte $\Sigma_{\mathcal{P}_1}$ und $\Sigma_{\mathcal{Q}_1}$ mit den zugehörigen Vektoren der Matrix $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ ist das System $\mathcal{S}_2\{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2\}$ in die Teilzustandsräume $\mathbf{x}_{c\bar{o}}$, $\mathbf{x}_{c\bar{o}}$, $\mathbf{x}_{\bar{c}o}$ und $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$

zerlegbar.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{11} & \mathbf{A}_2^{12} & \mathbf{A}_2^{13} & \mathbf{A}_2^{14} \\ \mathbf{A}_2^{21} & \mathbf{A}_2^{22} & \mathbf{A}_2^{23} & \mathbf{A}_2^{24} \\ \mathbf{A}_2^{31} & \mathbf{A}_2^{32} & \mathbf{A}_2^{33} & \mathbf{A}_2^{34} \\ \mathbf{A}_2^{41} & \mathbf{A}_2^{42} & \mathbf{A}_2^{43} & \mathbf{A}_2^{44} \end{bmatrix} & \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^1 \\ \mathbf{B}_2^2 \\ \mathbf{B}_2^3 \\ \mathbf{B}_2^4 \end{bmatrix} & \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2^1 & \mathbf{C}_2^2 & \mathbf{C}_2^3 & \mathbf{C}_2^4 \end{bmatrix} & & & & & & (5.52)
 \end{aligned}$$

Das Teilsystem $\mathcal{S}_2^1\{\mathbf{A}_2^{11}, \mathbf{B}_2^1, \mathbf{C}_2^1\}$ stellt eine principal axis Realisierung als Minimalrealisierung dar. Bei gleichen singulären Werten, bedingt durch die PSVD, gilt die Realisierung als ausgeglichen. In [16] wird mit der PSVD auf die Kalman kanonische Zustandsform transformiert.

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung kann bei der synthetischen Form einer Realisierung der steuerbare und beobachtbare Anteil ermittelt werden, um damit eine Systemreduktion durchzuführen.

6.1	Einleitung	75
6.2	Die dynamischen Einflußzahlen	76
6.3	Berechnungsablauf	80
6.4	Simulation FEM	82
6.4.1	FEM-Modell	82
6.4.2	Realisierung 8x8 FEM	83
6.4.3	Realisierung 4x4 FEM	86
6.5	Messungen realer Versuch	89
6.5.1	Realisierung 4x4 Versuch m _b x2	92
6.5.2	Realisierung 4x4 Versuch m _b x3	96
6.6	Singuläre Werte und Hankelnorm	100

Erfassung von Strukturveränderungen

6.1 Einleitung

Für die Erfassung von Strukturveränderungen ist es erforderlich, signifikante Maße zu definieren, um darüber Rückschlüsse auf eine mögliche Veränderung zu erhalten.

Aus der Schwingungsdifferentialgleichung der Mechanik, dem synthetischen Zustandsraummodell, sind die Parameter Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen als Strukturkenngößen eines mathematischen Modells für eine Interpretation bzw. eine Untersuchung direkt zugänglich. Hierbei stellt sich jedoch die Frage, an welchem bzw. mit welchem der drei Parameter eine Veränderung gemessen werden soll, da a priori grundsätzlich nicht festzulegen ist, wie sich ein dynamisches System verändert und woran dies mathematisch erkennbar wird, es sei denn der Fall, daß durch einen bestimmten Modellansatz, wie zum Beispiel mit einem nichtlinearen Ergänzungsmodell

zur Dämpfungsmodellierung [44], nur einer der Parameter bevorzugt wird.

In diesem Kapitel werden als Maße für eine Strukturänderung die dynamischen Einflußgrößen gewählt. Die Herleitung dieser Größen ist direkt aus einer vorliegenden Systemrealisierung $\mathcal{S}\{A, B, C\}$ abzuleiten. Die dynamischen Einflußzahlen ergeben sich aus der Spektralzerlegung des Operators $T_{(t,\sigma)}$ der Systemtheorie. In den Einflußgrößen, die auch als Greensche Zahlen in der Mechanik bekannt sind, kann man sich den Informationsgehalt, den die drei Parametermatrizen der Schwingungsdifferentialgleichung beschreiben, in komprimierter Form vorliegend denken, weshalb eine Auswahl eines bestimmten Parameters der Schwingungsdifferentialgleichung nicht erforderlich wird.

Der Ansatz zur Erfassung einer dynamischen System- bzw. Strukturveränderung in dieser Form ist nach Kenntnis des Autors neu und wird hier erstmals mit dieser Darstellung, anhand von Simulationsrechnungen und realen Messungen, untersucht.

6.2 Die dynamischen Einflußzahlen

Aus der Mechanik bzw. Physik ist die Greensche Funktion als Lösung der Biegedifferentialgleichung bekannt. Die Greensche Lösung stellt allgemein, als die Inverse einer Differentialgleichung bzw. des Differentialgleichungsoperators, die gesuchte Lösung in integraler Form dar.

In der klassischen Mechanik stellen die sogenannten Deltazahlen δ_{ij} , als diskrete Werte der Greenschen Lösung, den Einfluß einer Einzellast als Ursache j (Input), in Form der Biegelinie (Output) als Wirkung am Ort i dar. Auffallend ist, daß hier das Prinzip von Ursache und Wirkung direkt studiert werden kann und im Bereich der Baustatik unter der Bezeichnung Einflußlinie bekannt ist.

Der Wichtungsoperator $T_{(t,\sigma)}$ aus der Systemtheorie ist, als ein integraler Lösungsoperator der Zustandsraumgleichung, vergleichbar mit der Greenschen Lösung. Nach einer Jordanzerlegung der Zustandsraumgleichung bzw. Ähnlichkeitstransformation in einfacher Form, kann pro Systemeigenfunktion i eine Matrix $F_{(dyn,i)}$ definiert werden, die die Einflüsse zwischen Input und Output des Systems an einer Polstelle der Übertragungsfunktion darstellt.

Liegt eine Realisierung $\mathcal{S}\{A, B, C\}$ für einen dynamischen Prozeß vor, so ist im allgemeinen der Zustandsraum nur bis auf eine immer mögliche Ähnlichkeitstransformation der Zustandsraumvariablen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\xi(t) \quad (6.1)$$

bestimmt. Der Zustandsraum unterliegt, da er nicht direkt meßbar ist, mit seinen Parametern keiner physikalischen Interpretierbarkeit, Sonderfälle wie in Kapitel 5.3 seien ausgeschlossen.

Mit der Zustandsraumtransformation der Fundamentallösung

$$\Phi_{(t,t_0)} = e^{A(t-t_0)} \quad (6.2)$$

auf Jordan kanonische Form, unter der Annahme nur einfacher Diagonalförm, läßt sich eine physikalisch zu interpretierende Realisierung \mathcal{S} finden.

$$e^{J(t-t_0)} = \mathbf{P}_1^{-1} e^{A(t-t_0)} \mathbf{P}_1 \quad (6.3)$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{P}_1 = \text{konst.}$ ändert die Raumkoordinaten als Eigenvektoren so ab, daß die Systemeigenwerte der Matrix \mathbf{A} in Diagonalf orm der Matrix \mathbf{J} vorliegen. Die Fundamentallösung liegt damit in entkoppelter Form mit

$$\Phi_{(t,t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \quad (6.4)$$

vor. Die Systemparameter ändern ihre Gestalt

$$\mathcal{S}_1\{\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{P}_1\} = \mathcal{S}_1\{\mathbf{J}, \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{P}_1\} \quad (6.5)$$

entsprechend. Die Fundamentallösung bildet selber ebenso eine mögliche Zustandsraumtransformation, siehe Kapitel 4.2. Mit

$$\mathbf{P}_{2(t)} = \Phi_{(t,t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

transformiert sich der Zustandsraum in die Form ohne Feedbackvariable

$$\mathcal{S}_2\{0, \mathbf{P}_{2(t)}^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_{2(t)}\} = \mathcal{S}_2\{0, \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t)\} \quad (6.7)$$

dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) &= \Phi_{(t_0,t)}\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{B} = e^{\mathbf{J}(t_0-t)}\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{B} = e^{\mathbf{J}(t_0-t)}\mathbf{F}_{\mathcal{Q}} \\ \mathcal{P}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{P}_1\Phi_{(t,t_0)} = \mathbf{C}\mathbf{P}_1e^{\mathbf{J}(t-t_0)} = \mathbf{F}_{\mathcal{P}}e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

hier als Spezialfall der zeitinvarianten Form. Die Integralgleichung als inhomogene Lösung der Zustandsraumgleichung läßt sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{T}(t,\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathcal{P}(t) \int_{t_0}^t \mathcal{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{F}_{\mathcal{P}}e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{J}(t_0-\sigma)} \mathbf{F}_{\mathcal{Q}} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (6.9)$$

darstellen. Die Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeits- Operatoren $\mathcal{P}(t)$ und $\mathcal{Q}(t)$ erscheinen in bemerkenswert ausgezeichnete r Form, nachdem die Ähnlichkeitstransfor-

mation durchgeführt ist.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{f}_{\mathcal{P},1} e^{\lambda_1(t-t_0)} & \dots & \mathbf{f}_{\mathcal{P},n} e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{array} \right] \\
 \mathcal{Q}^*(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},1}^* e^{-\lambda_1^*(t-t_0)} & \dots & \mathbf{f}_{\mathcal{Q},n}^* e^{-\lambda_n^*(t-t_0)} \end{array} \right] \\
 \mathcal{Q}(t) &= \left[\begin{array}{c} e^{\lambda_1(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},n} \end{array} \right] \quad \mathcal{P}^*(t) = \left[\begin{array}{c} e^{-\lambda_1^*(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{P},1}^* \\ \vdots \\ e^{-\lambda_n^*(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{P},n}^* \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Definition 6.1 (dynamische Einflußzahlen)

Die Lösungsvektorfunktionen in $\mathcal{P}(t)$ und $\mathcal{Q}(t)$ liegen pro Systemeigenfunktion in entkoppelter dyadischer Form vor.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(t) &= \mathcal{P}(t) \int_{t_0}^t \mathcal{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\
 &= \mathbf{F}_{\mathcal{P}} e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{J}(t_0-\sigma)} \mathbf{F}_{\mathcal{Q}} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\mathcal{P},i} e^{\lambda_i(t-t_0)} \langle e^{-\lambda_i^*(\sigma-t_0)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}^* \mathbf{u}(\sigma) \rangle d\sigma \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{\mathcal{P},i} \langle \mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}^* \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{dyn,i} \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Die Matrix $\mathbf{F}_{dyn,i} \in \mathbb{K}^{p \times q}$, die sich dyadisch aus den Vektoren $\mathbf{f}_{\mathcal{P},i}$ und $\mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}$ für jede Systemeigenfunktion e^{λ_i} aufbauen läßt, kennzeichnet die dynamischen Einflußzahlen des Systems. Die im allgemeinen komplexe Matrix beinhaltet die konstanten Gewichte der Systemübertragung zwischen Input und Output, als verallgemeinerte Amplitude und Phase der Systemeigenfunktionen.

Für den Spezialfall der einfachen Jordan Form läßt sich der Transformationsoperator $\mathbf{T}(t,\sigma)$ durch seine Spektralzerlegung

$$\mathbf{T}(t,\sigma) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{dyn,i} e^{\lambda_i(t-\sigma)} \tag{6.12}$$

in eine einfache physikalisch zu interpretierende Form überführen.

Die zeitinvariante Realisierung mit einfachen Eigenwerten kann durch drei Parametergruppen völlig gleichwertig gekennzeichnet werden.

- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$
 - $\mathcal{P}_{(t)}, \mathcal{Q}_{(t)}$
 - $\mathbf{F}_{dyn,i}, \lambda_i$ für $i = 1, \dots, n$
- (6.13)

Die letzte Gruppe liegt in der Form der Greenschen Einflußzahlen vor, die aus der Physik und dem Ingenieurwesen bekannt ist. In der Systemtheorie ist dieser Spezialfall vergleichbar mit einer Gilbert Realisierung [20].

Die Integralgleichung erster Art bzw. das Faltungsintegral

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{F}_{dyn,i} e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \quad (6.14)$$

stellt sich nach einer Laplacetransformation [13] wie folgt dar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{dyn,i} \frac{1}{(s - \lambda_i)} \mathbf{u}(s) \\ &= \mathbf{R}(s) \mathbf{u}(s). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Systemübertragungsfunktion $\mathbf{R}(s)$ mit einfachen Polen $s = \lambda_i$, in der Darstellung als Partialbruchzerlegung, und die Einflußzahlenmatrix $\mathbf{F}_{dyn,i}$ lassen sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= \sum_i \mathbf{F}_{dyn,i} \frac{1}{(s - \lambda_i)} \\ \mathbf{F}_{dyn,i} &= \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \mathbf{R}(s) \end{aligned} \quad (6.16)$$

in Bezug setzen [20]. Die $\mathbf{F}_{dyn,i}$ bilden die Residuen der Partialbruchzerlegung an den entsprechenden Nennernullstellen.

Beimerkenswert ist die Tatsache, daß über die Transformation in einfache Jordan Form, Anordnung der Eigenwerte nach fallender Amplitude und Phase im Zeigerdiagramm des Einheitskreises und Normierung der Eigenvektoren nach der Euklidischen Vektornorm, die ansonsten mehrdeutige Zustandstransformation \mathbf{P} zu vereinheitlichen ist. Auf die Berechnung der dynamischen Einflußzahlen hat die Normierung der Ähnlichkeitstransformation keine Auswirkung.

Physikalisch stellt die Spalte j der Matrix $\mathbf{F}_{(dyn,i)}$ den Einfluß an den p Ausgängen auf einen selektiven Eingangskanal j mit einer Erregung in Systemeigenfunktion dar. Der dynamische Fall ist prinzipiell direkt vergleichbar mit der statischen Interpretation der Deltazahlen. Diese Form der Darstellung, des Operators $\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$ eines dynamischen Systems, bietet deshalb ebenso wie in der Baustatik die Einflußlinien, eine einfache Möglichkeit, die dynamische Einflüsse mit den in Definition 6.1 erklärten dynamische Einflußzahlen, zu studieren.

6.3 Berechnungsablauf

In diesem Kapitel wird der Berechnungsablauf für die Bestimmung einer Strukturveränderung beschrieben. Der Vorgang setzt sich aus drei Berechnungsphasen zusammen, die jeweils für eine sogenannte Nullmessung und Systemmessung durchgeführt werden. Die Nullmessung bestimmt dabei den Systemoriginalzustand vor einer Strukturänderung, die Systemmessung beschreibt eine Messung nach einer erfolgten Strukturänderung.

Die grundlegende theoretische Basis ergibt sich aus den Kapiteln 3.2 und 5.2, Kapiteln 4 und 5.2 sowie Kapitel 6.2. Die Kernpunkte sind in der linearen Algebra als Singulärwertzerlegung, in der Systemtheorie als Realisierung und in der Mechanik als Greensche Einflußgrößen zu finden und sind bereits ausführlich beschrieben.

- Nullmessung, Realisierung $\mathcal{S}_1\{A, B, C\}$ bzw. $\mathcal{S}_1\{F_{dyn,i}, \lambda_i\}$
- Systemmessung, Realisierung $\mathcal{S}_2\{A, B, C\}$ bzw. $\mathcal{S}_2\{F_{dyn,i}, \lambda_i\}$
- Differenzbildung von \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 , Interpretation

Für beide Meßvorgänge wird eine Realisierung in der Form von dynamischen Einflußzahlen berechnet, siehe Bild 6.1. Danach schließt sich eine Interpretation in der Art einer

Bild 6.1 Bestimmung einer Realisierung, dyn. Einflußzahlen

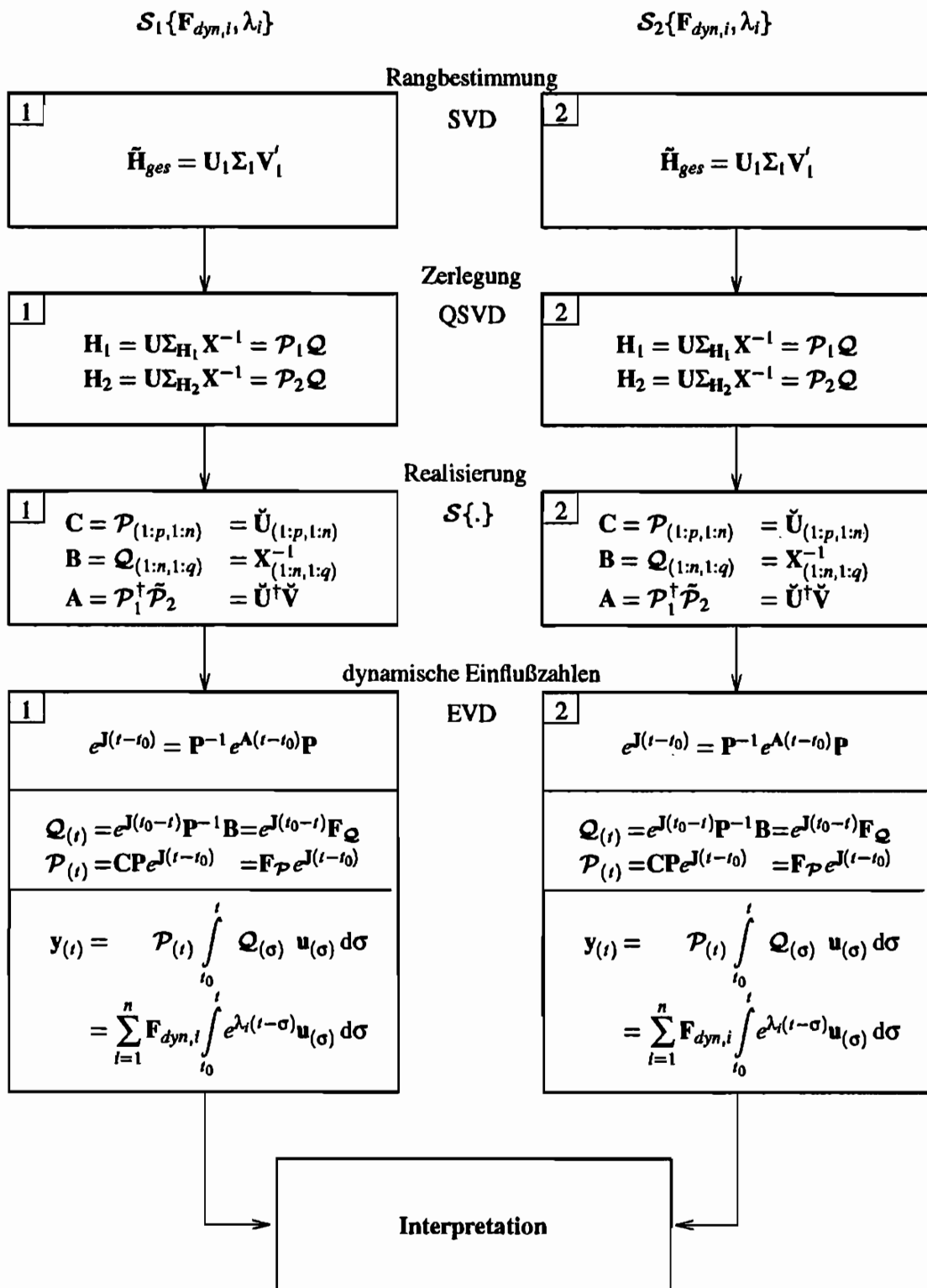
1. Selektion von Signal- und Rauschraum, Rangbestimmung (Kap. 3.2, 5.2)
 - Aufbau der Gesamthankelmatrix H_{ges} .
 - SVD, Rangbestimmung, Festlegung des gemeinsamen Zeilenraumes
 2. Zerlegung (Kap. 5.2)
 - QSVD, Zerlegung der Hankelmatrizen $H_1 \quad H_2$
 3. Realisierung (Kap. 4)
 - Bestimmung der Parameter einer Realisierung $\mathcal{S}\{A, B, C\}$
 4. Dynamische Einflußzahlen (Kap. 6.2)
 - EVD, Ähnlichkeitstransformation, einfache Jordanform
 - Dynamische Einflußzahlen $F_{dyn,i}, \lambda_i$ für $i = 1, \dots, n$
-

Differenzbildung der Einflußzahlen zwischen System- und Nullmessung an, die sich aus der Linearität des Modellansatzes begründet. Die Zuordnung der beiden jeweiligen Wichtungsmuster einer Realisierung bzw. der Zerlegung

$$F_{dyn,i}, \lambda_i \text{ für } i = 1, \dots, n \quad (6.17)$$

erfolgt dabei über die Systemeigenfunktionen mit den entsprechenden Frequenz- und Dämpfungsparametern.

Bild 6.2 Ablaufschema der Erfassung von Strukturveränderungen



6.4 Simulation FEM

6.4.1 FEM-Modell

Das Verfahren zur Erfassung von Strukturveränderungen wird anhand einer Finite Elemente Simulation verifiziert. Dabei stellt das Berechnungsmodell eine einfache mechanische Struktur als einen "Balken auf zwei Stützen" dar.

Die dynamische Berechnung zur Erzeugung der Input- und Outputgrößen, die als Meßdaten für eine Realisierung verwendet werden, erfolgt in der synthetischen Form, siehe Kapitel 5.3, der Zustandsraumgleichung durch eine numerische Integration. Die phy-

Tabelle 6.1 Querschnittswerte FEM

Querschnittswerte			
m^4	m^2	m	
$0,294 \cdot 10^{-7}$	$0,224 \cdot 10^{-3}$	2,5	ST37

sikalischen Parameter der mechanischen Struktur zeigt die Tabelle 6.1. Das FEM der Simulation bildet damit eine Black box, die mit der Realisierung dargestellt wird.

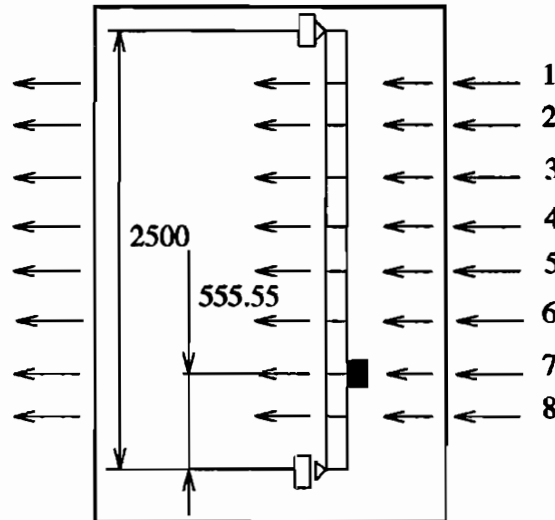
Nach einer Nullmessung der Simulation, wird das mechanische System mit einer Zusatzmasse an einem Knoten belegt. Diese Veränderung des idealisierten Balkenmodells soll die Strukturveränderung simulieren, deren Lage anhand der dynamischen Einflußzahlen durch eine sogenannte Systemmessung, nach einem Abgleich mit der Nullmessung, erkannt werden soll.

Die Klemmengrößen der Black box werden dabei im Fall der Realisierung 8x8 an allen Knoten der FEM Simulation gemessen und im Fall der Realisierung 4x4 an vier ausgewählten Knoten. Die Erregung des Simulationsmodells bildet ein Impuls, die Weggrößen der FEM Berechnung idealisieren den Output der Black box.

- FEM 8x8 Realisierung
 - Nullmessung f10
 - Masse 1% f10m1
 - Masse 5% f10m5
 - Masse 10% f10m10
- FEM 4x4 Realisierung
 - Nullmessung f104
 - Masse 1% f10m14
 - Masse 5% f10m54
 - Masse 10% f10m104

6.4.2 Realisierung 8x8 FEM

Bild 6.3 Simulation Fem 8x8

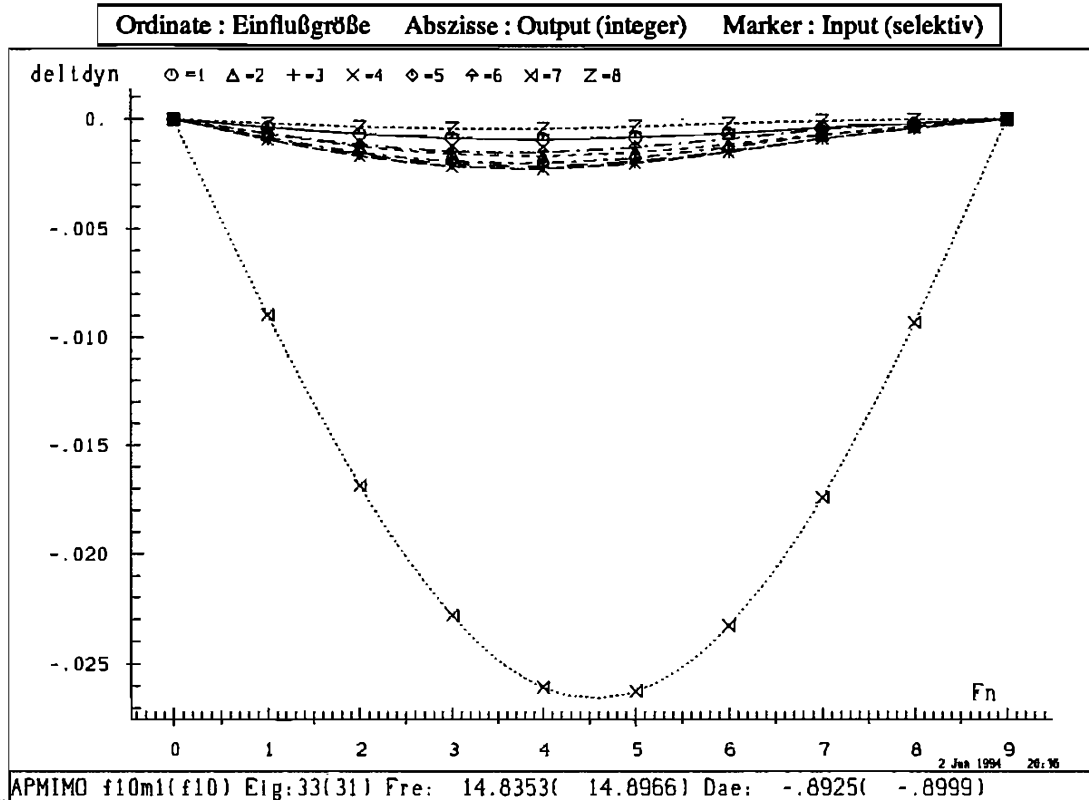


Die Berechnungen 6.1 bis 6.4 der Realisierung 8x8 FEM zeigen exemplarisch die Differenz zwischen Nullmessung und Systemmessung der Einflußzahlen, die im Anhang ausführlich dargestellt wird. An der Darstellung der Simulationsergebnisse ist eine Strukturänderung von 1 % deutlich lokalisierbar. Die Berechnungen mit einer Zusatzmasse von 5 % und 10 % weisen Zahlenwerte mit größeren Beträgen auf. Dies ist physikalisch sinnvoll und unterstreicht deshalb die Stabilität der Rechnung.

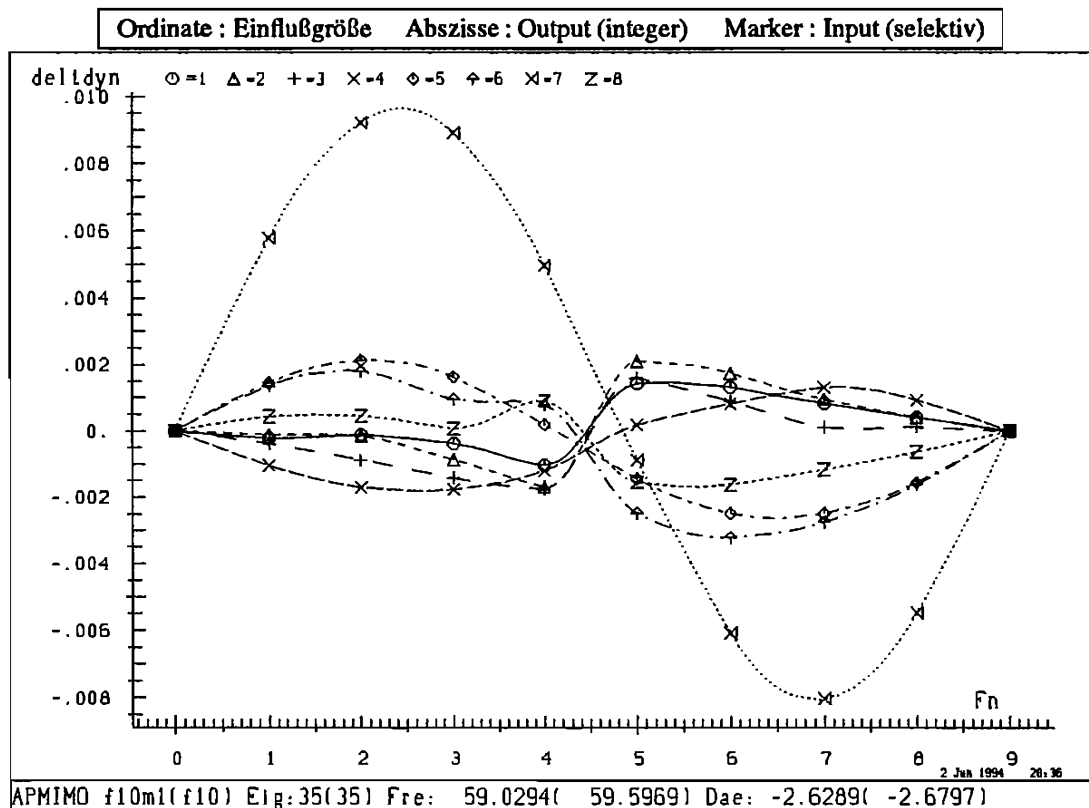
- + Einflußlinie 7 deutet eindeutig auf die Lage der Strukturveränderung bei 555.55 mm
- + bei allen Systemeigenfrequenzen ist die Signifikanz der dynamischen Einflußlinie 7 vorhanden
- + geringe Strukturänderung von 1 % meßbar
- + physikalisch sinnvoll auch bei 5 % und 10 % Strukturänderung
- + numerisch stabile Eigenschaften

Die Ergebnisse lassen eine einwandfreie Schlußfolgerung zu und sind grundsätzlich alle als sehr positiv zu bewerten. Berücksichtigt man zusätzlich die Form der dynamische Einflußzahlen, die in den Eigenformen eines mechanischen Modells als "Balken auf zwei Stützen" erscheinen, so wird die positive Wertung damit untermauert.

Berechnung 6.1 Einflußgrößen f10 f10m1

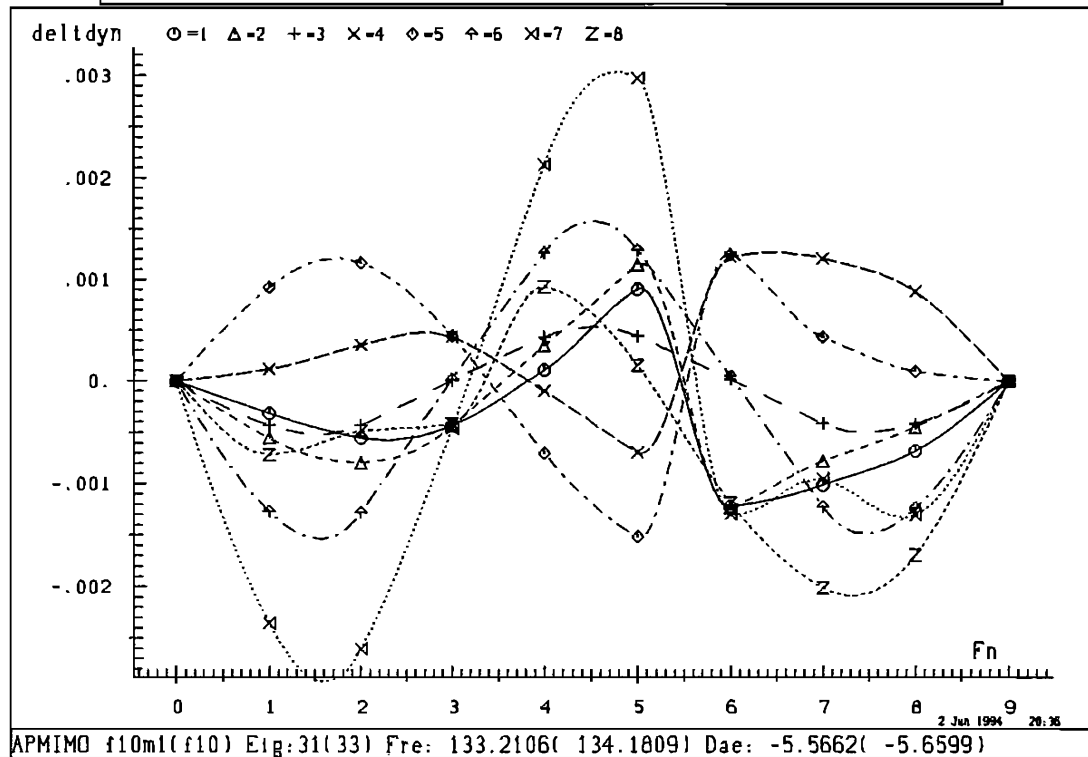


Berechnung 6.2 Einflußgrößen f10 f10m1



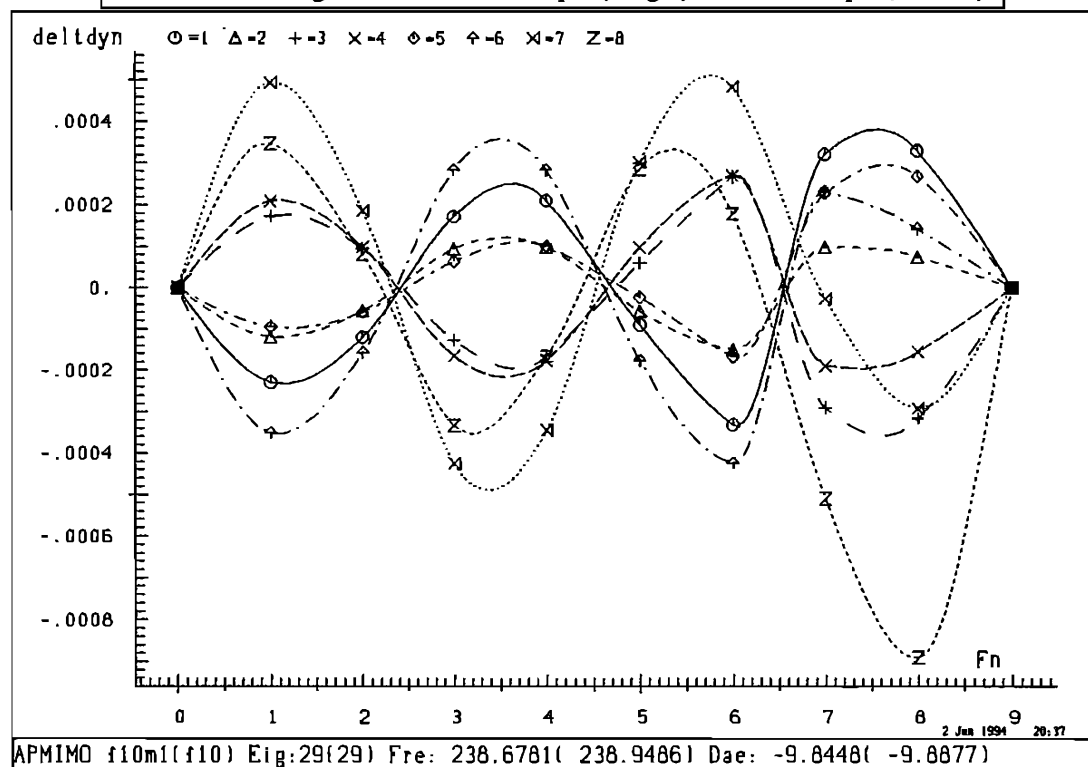
Berechnung 6.3 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



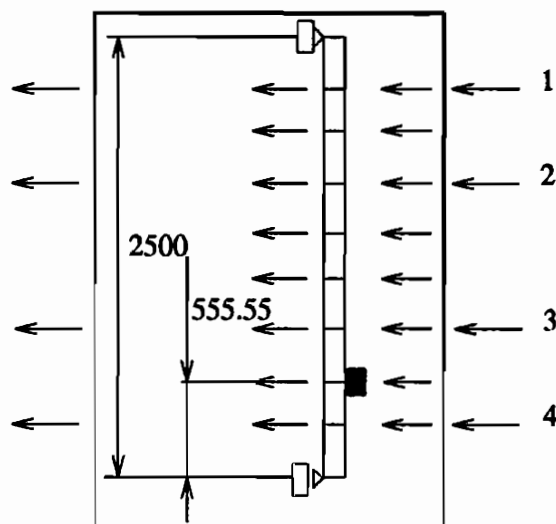
Berechnung 6.4 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



6.4.3 Realisierung 4x4 FEM

Bild 6.4 Simulation Fem 4x4



Die Simulation Realisierung 4x4 FEM ist in den Berechnungen 6.5 bis 6.8 an vier Bildern beispielhaft mit den ersten Systemfrequenzen aufgeführt. Die restlichen Berechnungen von Nullmessung und Systemmessung und die entsprechende Differenzbildung sind im Anhang aufzufinden.

Die Zahlenwerte der dynamischen Einflußlinien für die Fem 4x4 Simulationsrechnungen 1%, 5% und 10% sind mit denen der Realisierung 8x8 FEM identisch, wobei die Zuordnung 1-1, 2-3, 3-6 und 4-8 der Meßkanalnumerierung berücksichtigt werden muß. Der Ort der Strukturänderung liegt nicht direkt an einem Meßkanal, daher sind die Beträge der dynamischen Einflußzahlen kleiner. Der gemessene Informationsgehalt ist, in Bezug zu der FEM 8x8 Simulation, auf die Hälfte reduziert.

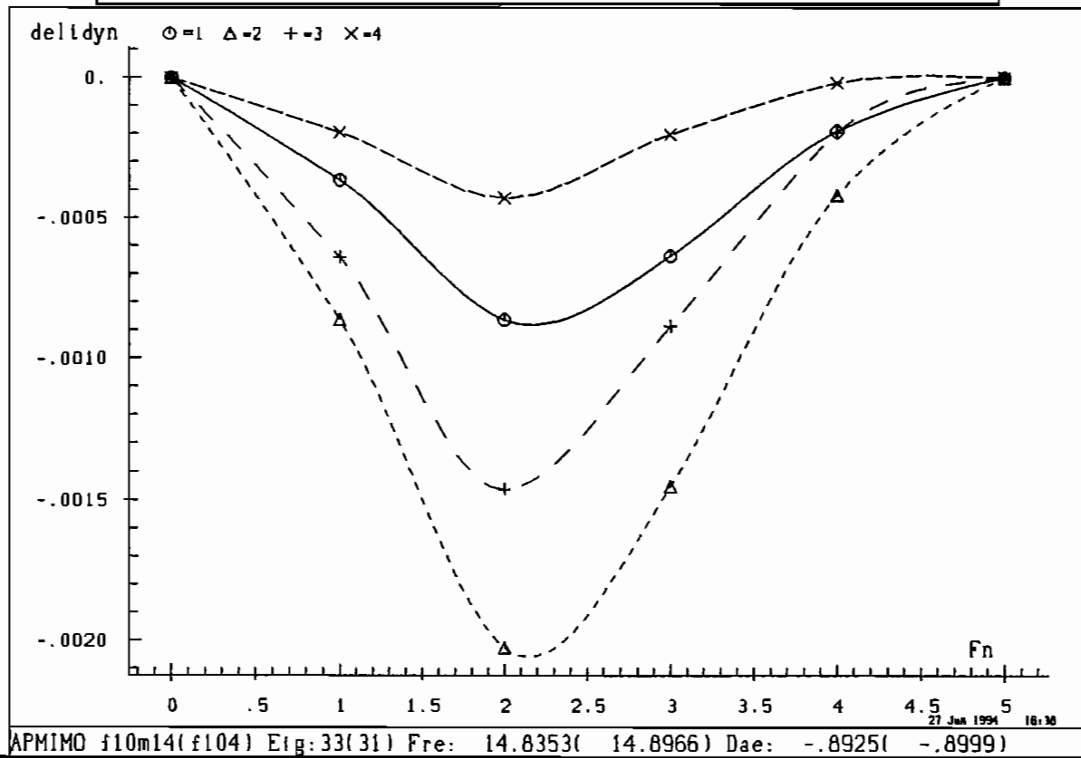
Bis auf die Einflußzahlen in der Grundsystemfrequenz liefern die dynamischen Einflußlinien an alle anderen Systemfrequenzen einen zuverlässigen Hinweis darauf, daß die Strukturänderung zwischen dem dritten und dem vierten Meßkanal aufzufinden ist.

- + die Gesamtheit der Einflußlinien weist auf die Lage der Strukturänderung zwischen dem dritten und dem vierten Meßkanal hin
- + die Ergebnisse sind identisch mit der Simulation 8x8 FEM
- + durch die geringere Anzahl von Meßkanälen ist ein Informationsverlust vorhanden, der besonders in der ersten Systemfrequenz deutlich wird

Die Ergebnisse sind in ihrer Gesamtheit als sinnvoll bewertbar und lassen die Bestimmung der Position der Strukturänderung zu. Signifikant ist, im Vergleich zu der Simulation 8x8 FEM, der eingetretene Informationsverlust, der an der ersten Systemfrequenz stark bemerkbar wird.

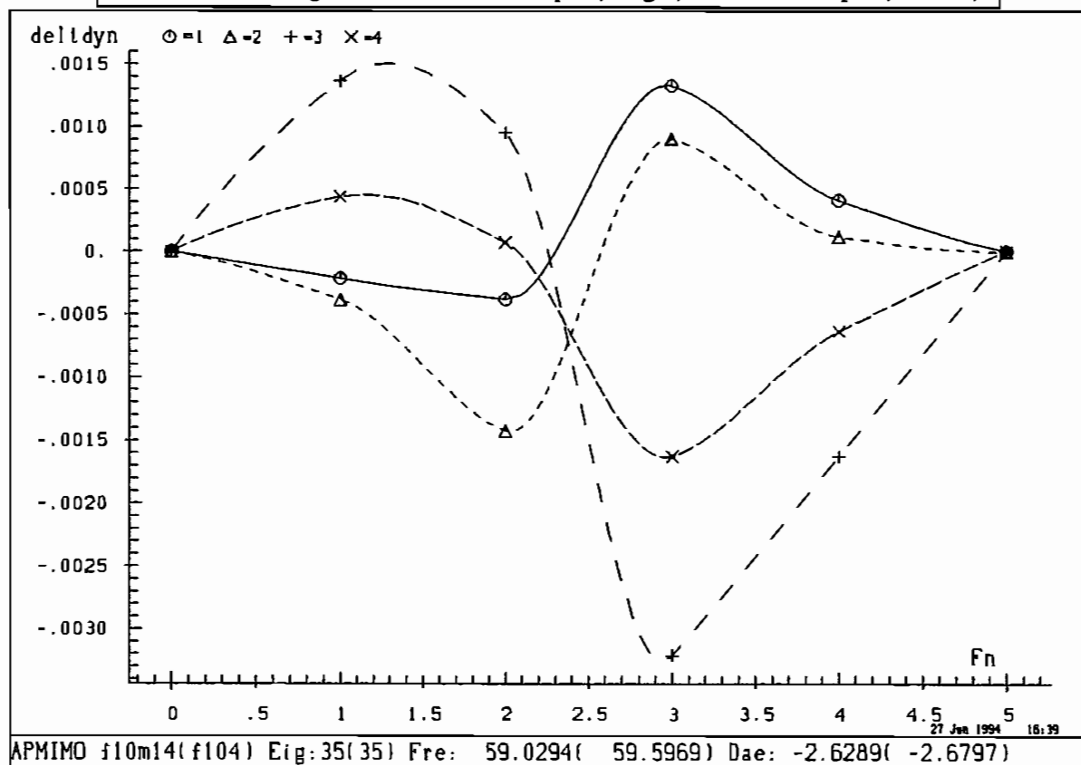
Berechnung 6.5 Einflußgrößen f104 f10m14

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

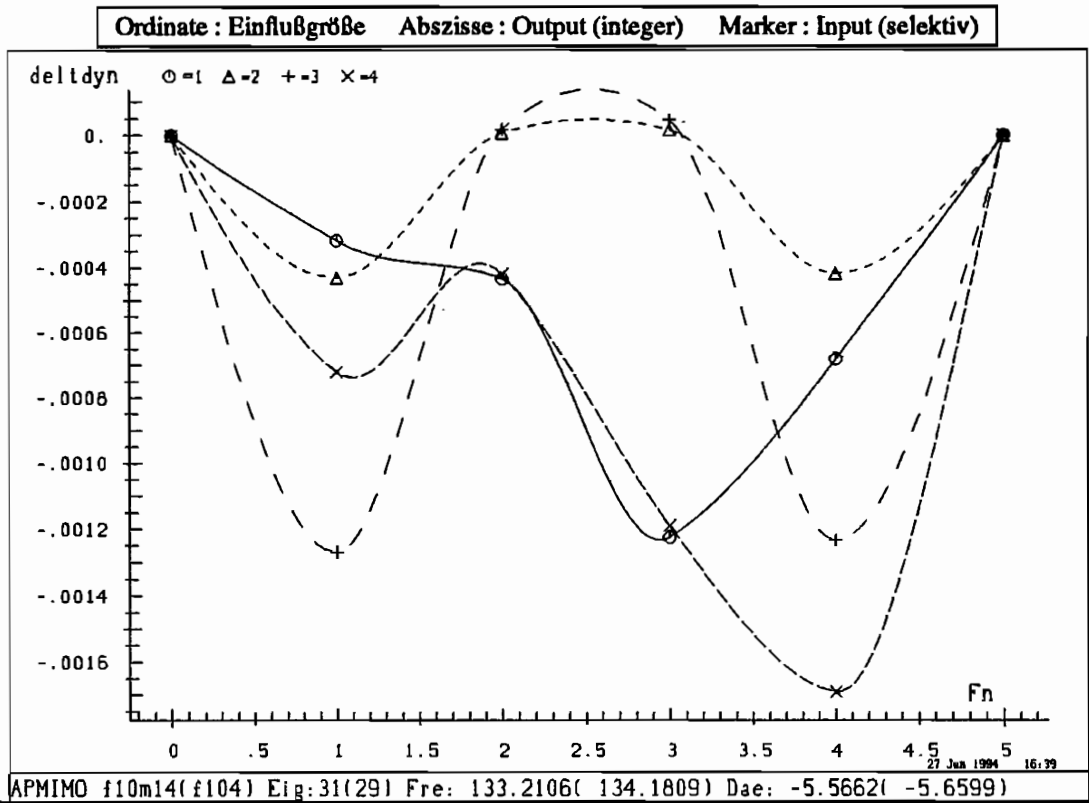


Berechnung 6.6 Einflußgrößen f104 f10m14

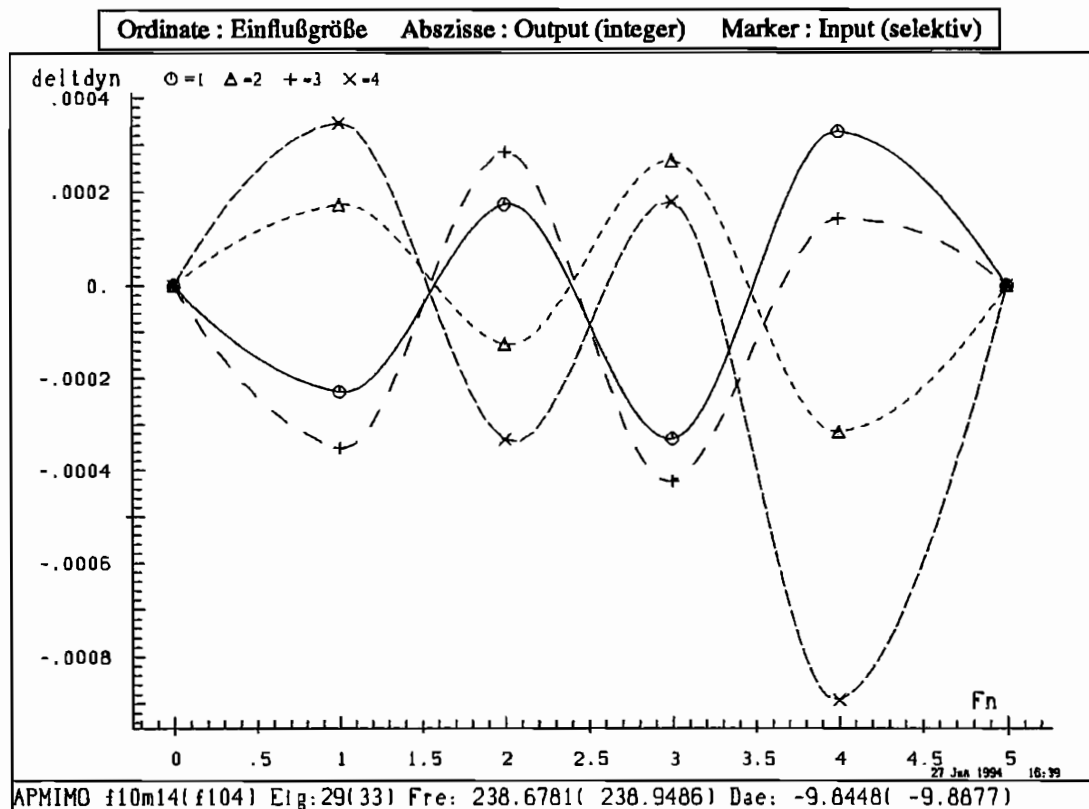
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



Berechnung 6.7 Einflußgrößen f104 f10m14



Berechnung 6.8 Einflußgrößen f104 f10m14



6.5 Messungen realer Versuch

Die Methode zur Erfassung von Strukturänderungen soll an einem realen Versuchsmodell überprüft werden. Im Gegensatz zu den Simulationsrechnungen muß hier mit Unschärfen in den Meßsignalen gerechnet werden, die durch die Meßkette verursacht werden.¹ Die Informationen in den Meßsignalen der realen Struktur sind deshalb prinzipbedingt fehlerbehaftet.

Das Versuchsmodell, siehe Bild 6.1, setzt sich aus zwei konstruktiv gleichen Trägern zusammen, die durch weiche Blechstreifen gekoppelt sind. Mit diesem Modell soll das Schwingungsverhalten der Brücke Hückeswagen qualitativ auf das Labormodell abgebildet werden. Die Querschnittswerte der beiden "Balken auf zwei Stützen" sind pro Träger der Tabelle 6.2 zu entnehmen. Die weiche Kopplung der beiden ideal gelagerten

Tabelle 6.2 Querschnittswerte Versuchsmodell

Querschnittswerte			
m^4	m^2	m	
$0,294 \cdot 10^{-7}$	$0,224 \cdot 10^{-3}$	2,5	ST37

Träger führt zu ähnlichen Schwebungserscheinungen, wie dies in den Untersuchungen zu der Brücke Hückeswagen vorliegt. Damit kann so die gleiche Problematik an einem Labormodell [4] [5] studiert werden. Die Schwebungen treten dabei, in Abhängigkeit der Koppelungszahl, bei jeder Systemeigenfrequenz auf.

Mit vier Beschleunigungssensoren, die den Systemoutput messen, wird die Struktur, das Koppelschwingersystem, an einem Balken untersucht. Der angekoppelte Balkenteil liefert die Schwebungseffekte, die an eine Signalidentifikation harte Anforderungen stellt, wie aus Kapitel 2.2.3 bekannt ist. Die Erregung, als Input des Systems, bildet eine impulsartige Anfangsauslenkung.

- FEM 4x4 Realisierung
 - Nullmessung mbo2
 - Masse 10% mbm2
- FEM 4x4 Realisierung
 - Nullmessung mbo3
 - Masse 10% mbm3

¹Bei der FEM ist digitales Rauschen vorhanden, siehe Kapitel 5.2.

Fotografie 6.1 Versuchsstand

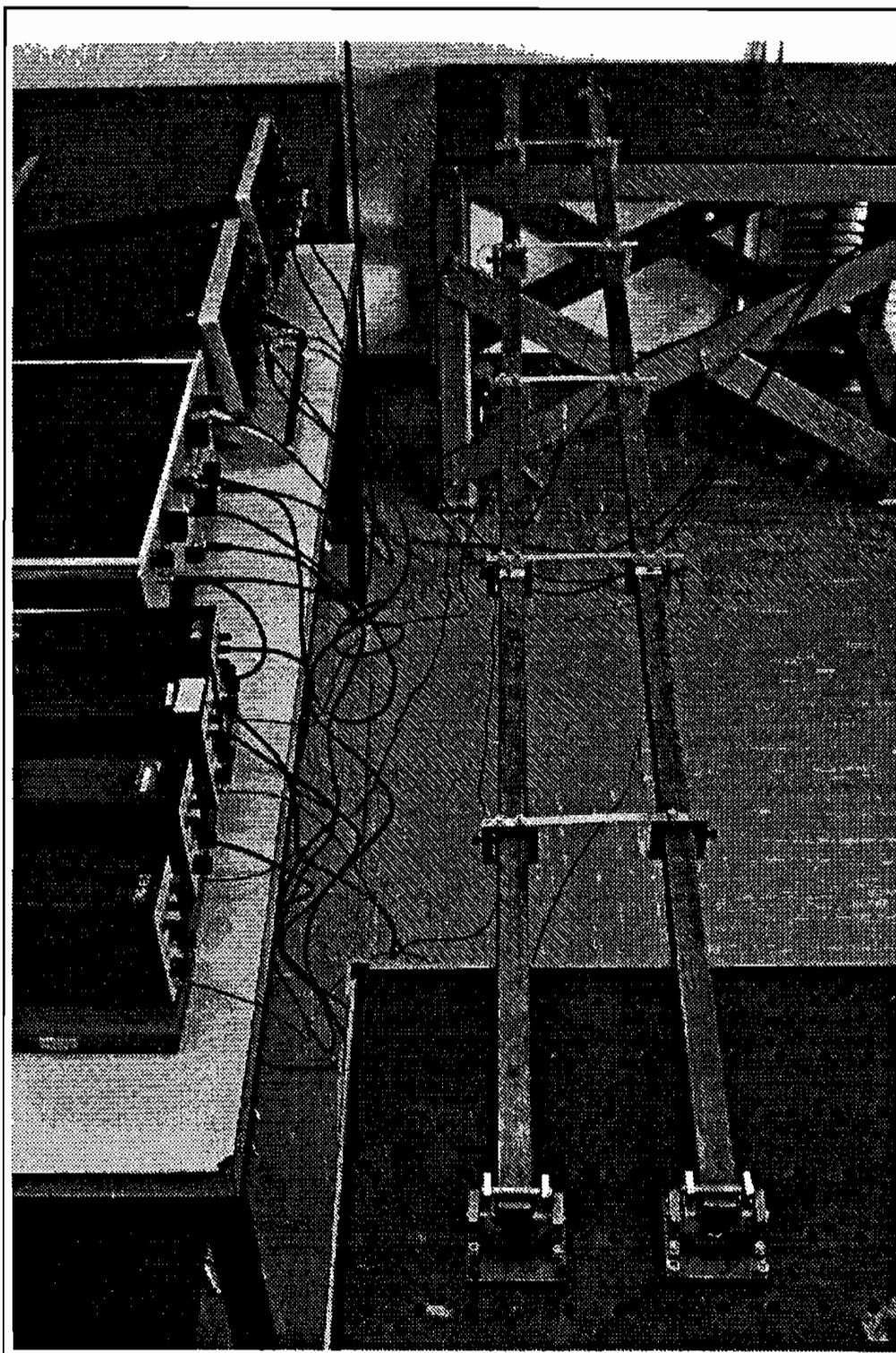
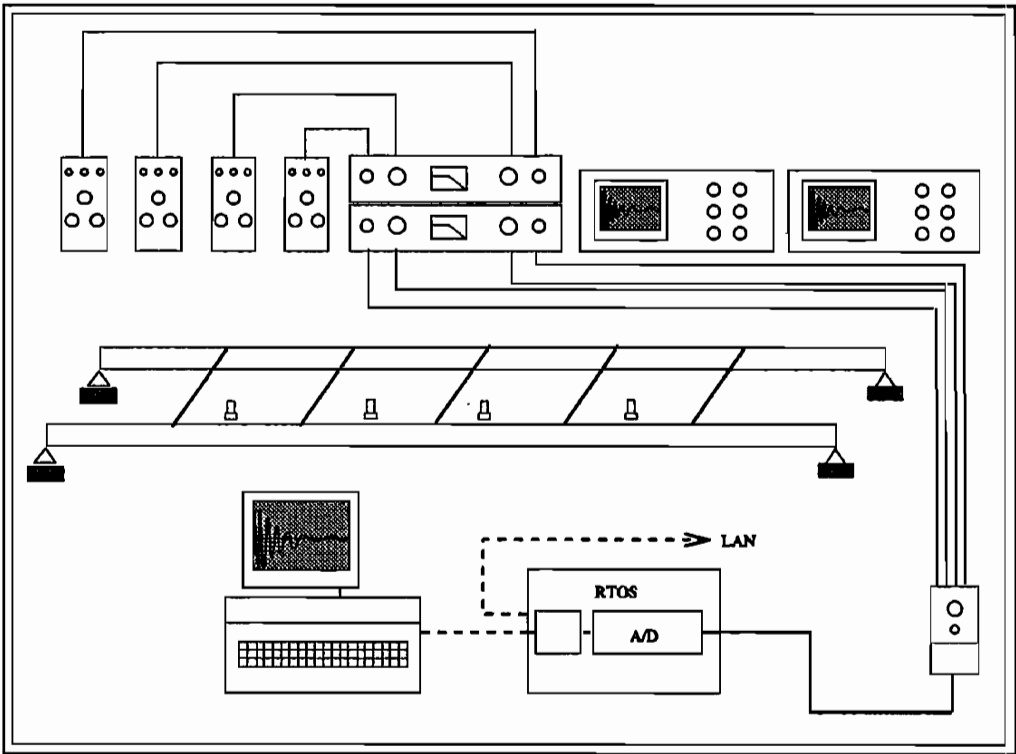
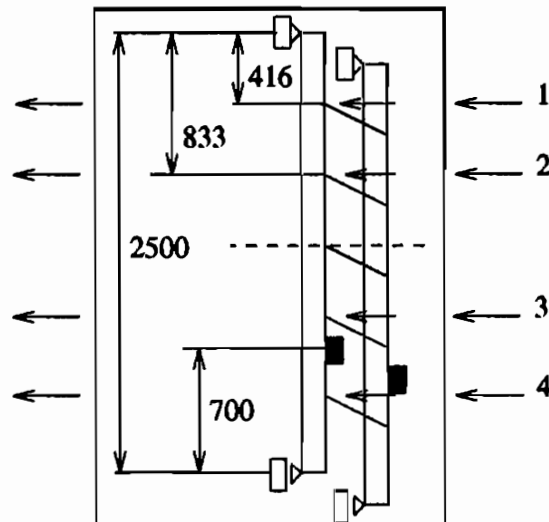


Bild 6.5 Prinzipskizze Meßkette



6.5.1 Realisierung 4x4 Versuch mbx2

Bild 6.6 Messung mbx2



Die realen Messungen mbx2 mit den anschließenden Berechnungen der Realisierung von Nullmessung, Systemmessung und Einflußlinienuntersuchung sind in den Abbildungen Berechnung 6.9 bis 6.13 und im Anhang demonstriert.

Die erwarteten Schwebungserscheinungen werden mit den zwei ersten Systemeigenfrequenzen zuverlässig identifiziert. Der hier gegebene Informationsgehalt genügt jedoch nicht, um anhand der ersten Formen eine Strukturänderung zu lokalisieren, dies entspricht den Erfahrungen der Simulation Fem 4x4 und Fem 8x8.

Die zweite und vierte Systemfrequenz mit der zugehörigen dynamischen Einflußzahlendifferenz deuten eindeutig auf eine Änderung zwischen Meßkanal drei und vier.

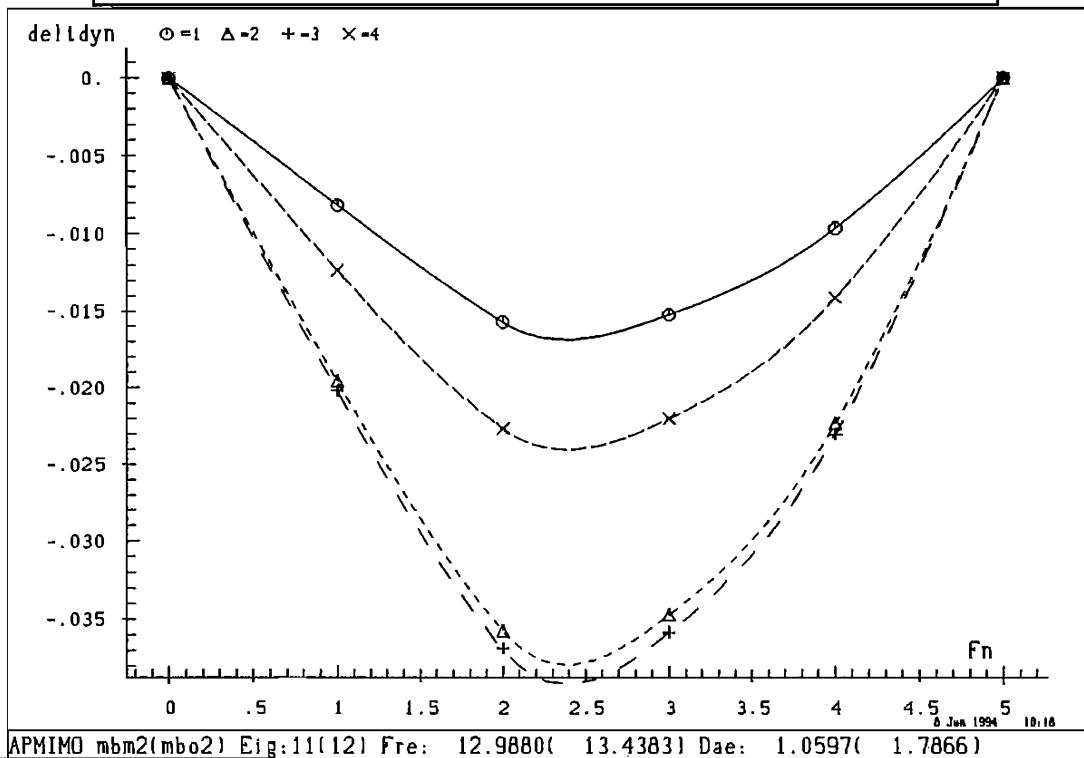
Die Einflußliniendifferenzen an der dritten Systemfrequenz sind vollkommen ausgeglichen. Dies läßt den Schluß zu, daß die Strukturänderung in einem Knoten der Form liegen muß, da nur hier kein Einfluß über diese Form erkannt werden kann.

Die Strukturänderung liegt, zusammenfassend, anhand der dynamischen Einflußzahlen beurteilt, mittig zwischen dem dritten und vierten Meßkanal bei ca. 625 mm, die tatsächliche Lage beträgt 700 mm. Damit liefert die Berechnungsmethode sehr präzise Informationen über die Position einer Strukturänderung.

- + die Ergebnisse sind physikalisch sinnvoll
- + die Erfassung der Strukturänderung einer realen Struktur ist über die Berechnungsmethode eindeutig möglich, auch bei problematischen Schwebungserscheinungen in den Meßsignalen

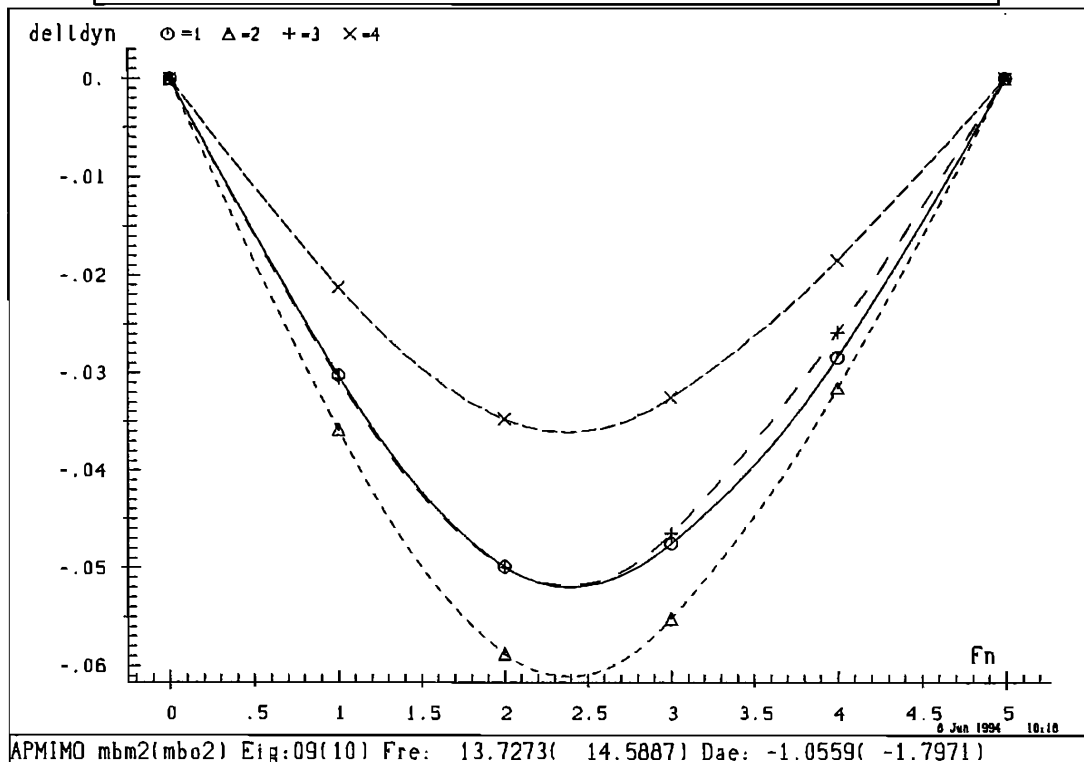
Berechnung 6.9 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



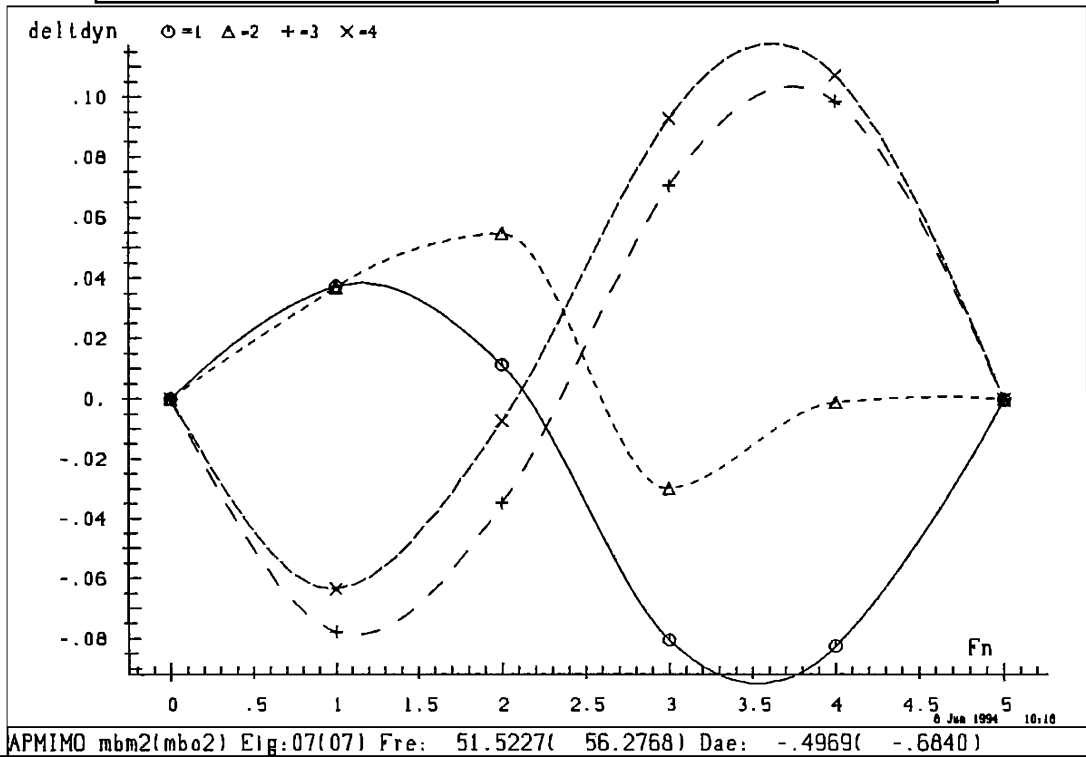
Berechnung 6.10 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



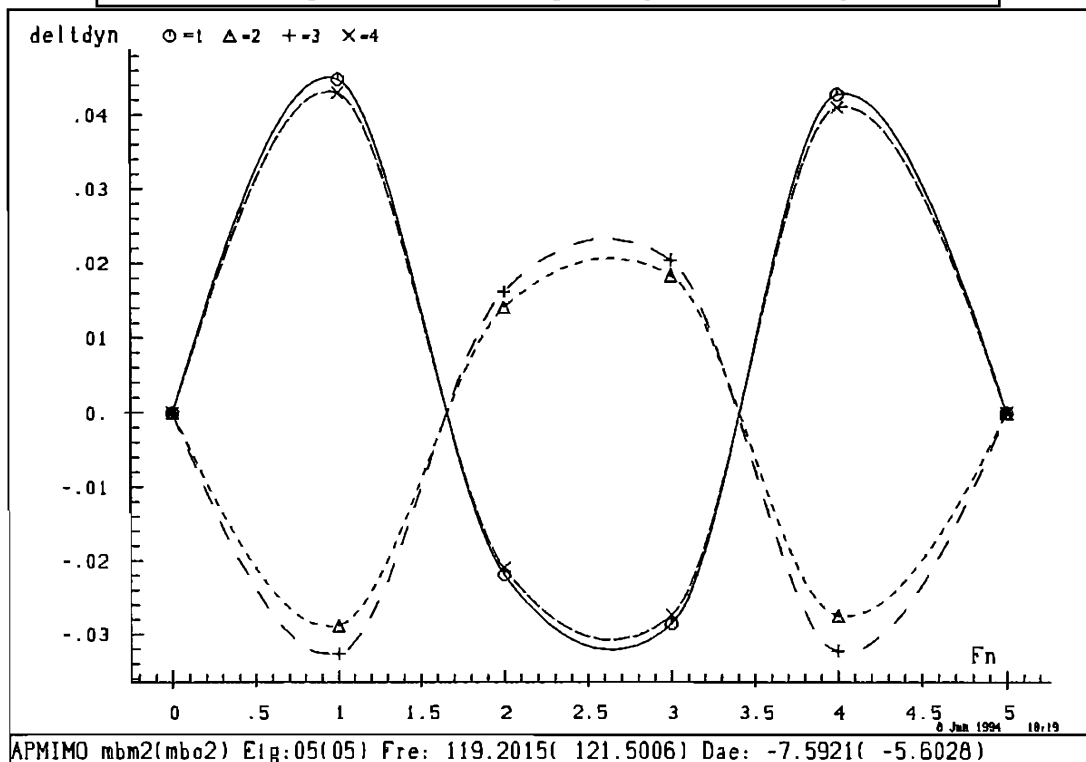
Berechnung 6.11 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

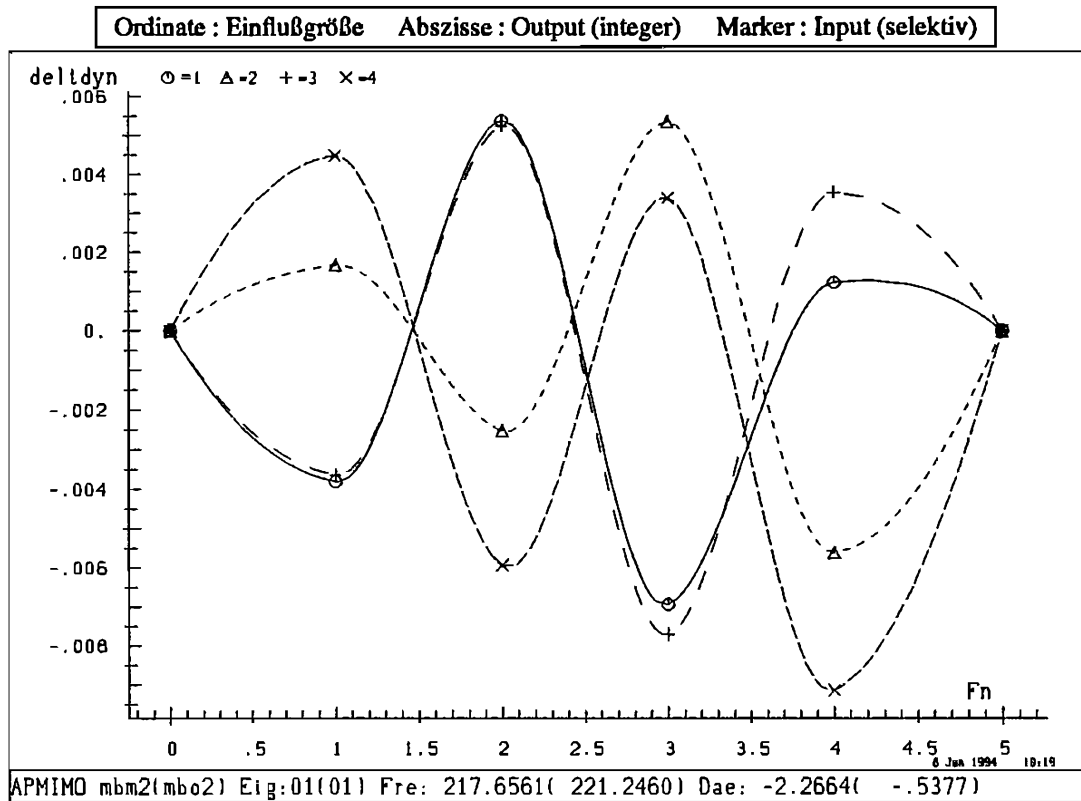


Berechnung 6.12 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

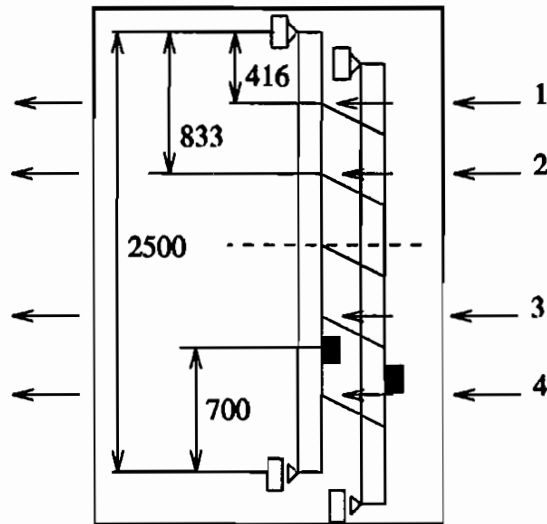


Berechnung 6.13 Einflußgrößen mbo2 mbm2



6.5.2 Realisierung 4x4 Versuch mbx3

Bild 6.7 Messung mbx3



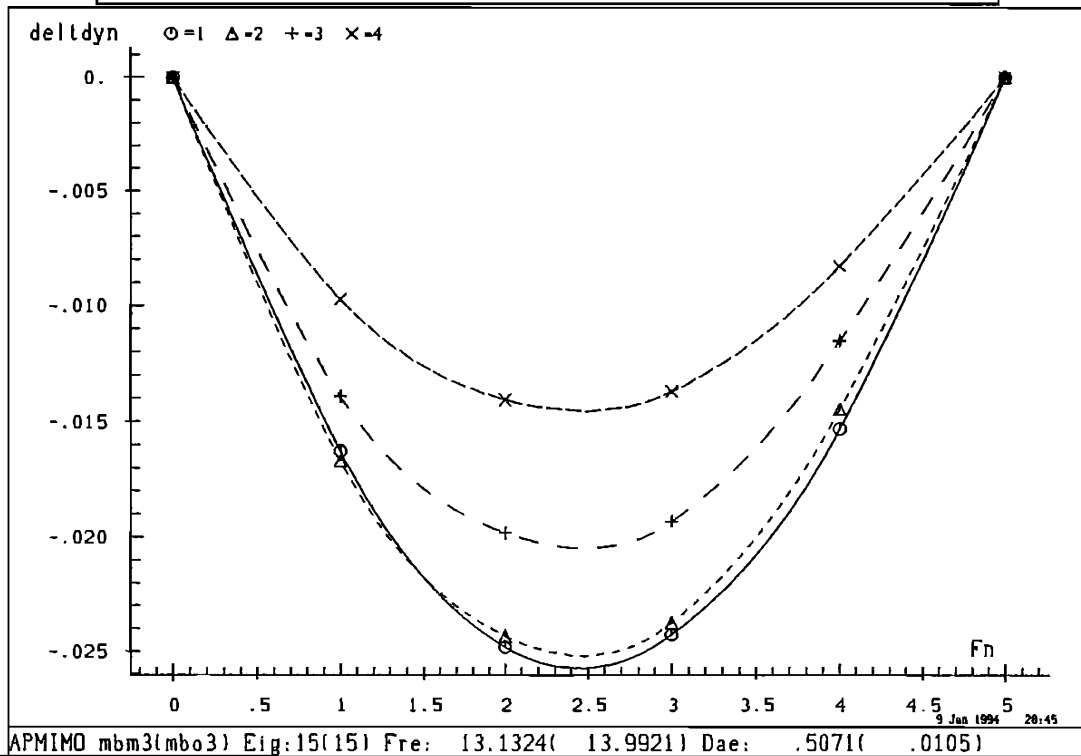
Die realen Messungen mbx3 dienen als Kontrollmessungen der Untersuchungen in mbx2. Die Darstellung ist in den Berechnungen 6.14 bis 6.18 als auch im Anhang zu finden. Die Ergebnisse bestätigen die Messungen und Berechnungen zu den Versuchen zu mbx2.

Zusätzlich treten hierbei auch Schwebungsfrequenzen in der zweiten und dritten Einflußzahlenform auf. Die Zahlenwerte, in diesen zusätzlichen Formen, lassen die gleiche Interpretation und Schlußfolgerung zu, wie dies in mbx2 demonstriert ist.

- + identische Ergebnisse zu mbx2, reproduzierbare Strukturuntersuchung
- + auch bei Schwebungsformen sinnvolle physikalische Interpretation möglich

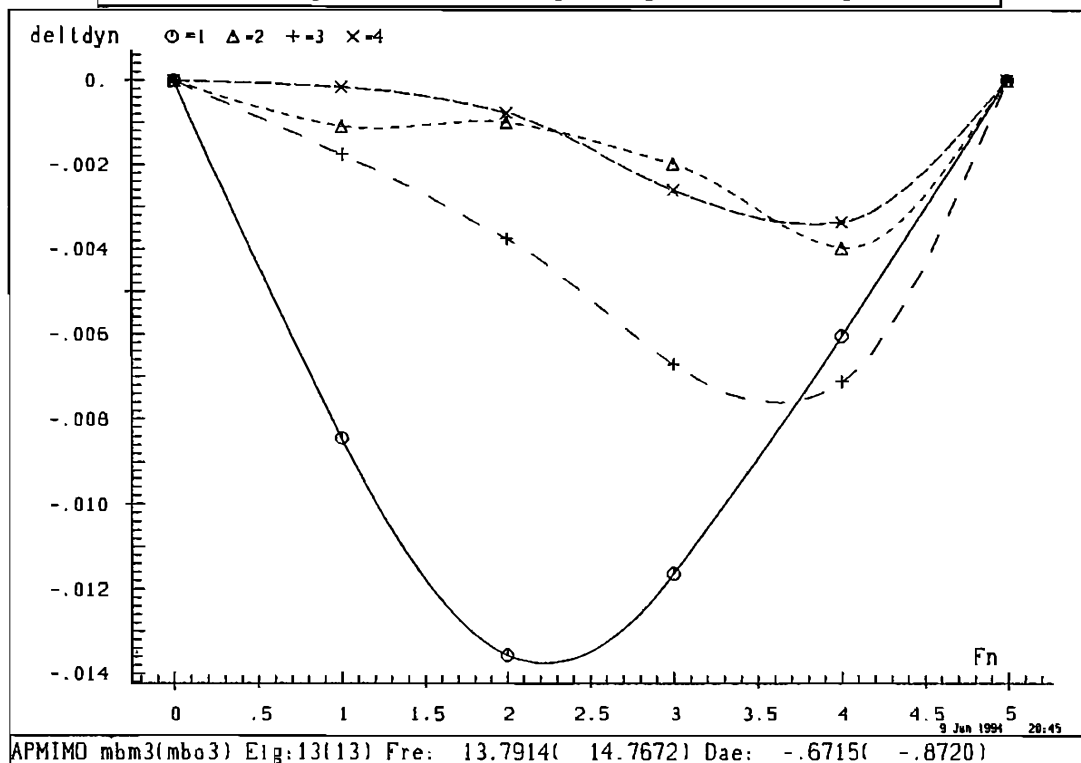
Berechnung 6.14 Einflußgrößen mbo3 mbm3

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



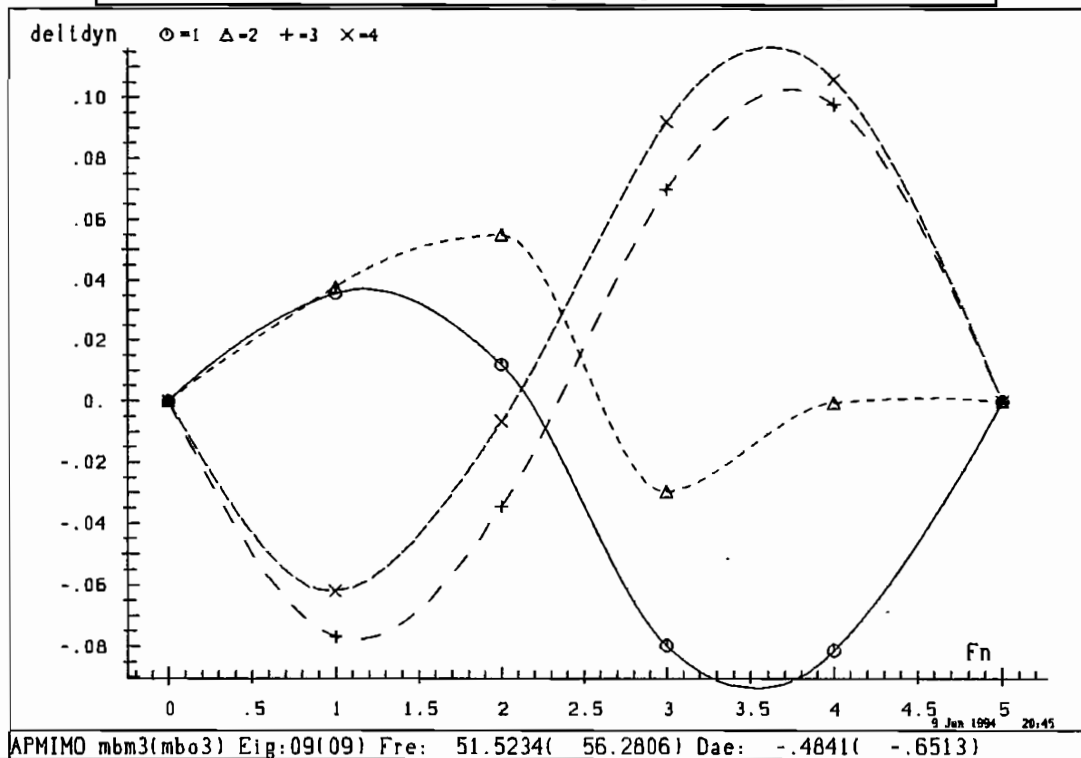
Berechnung 6.15 Einflußgrößen mbo3 mbm3

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



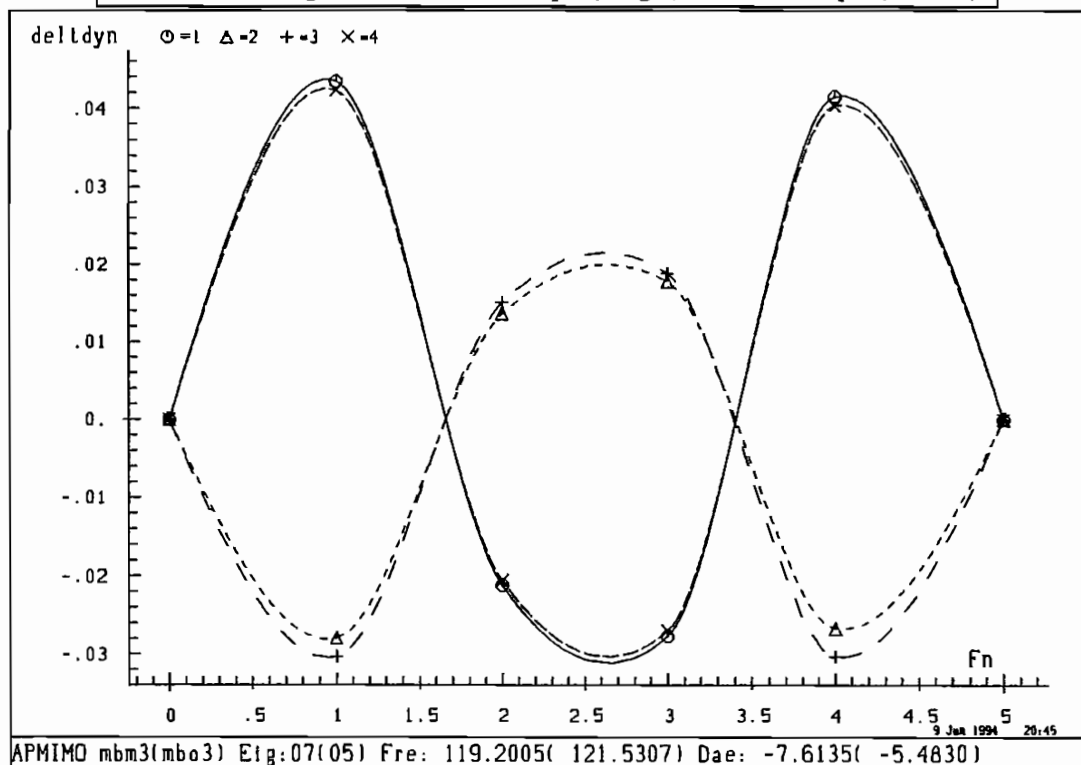
Berechnung 6.16 Einflußgrößen mbo3 mbm3

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

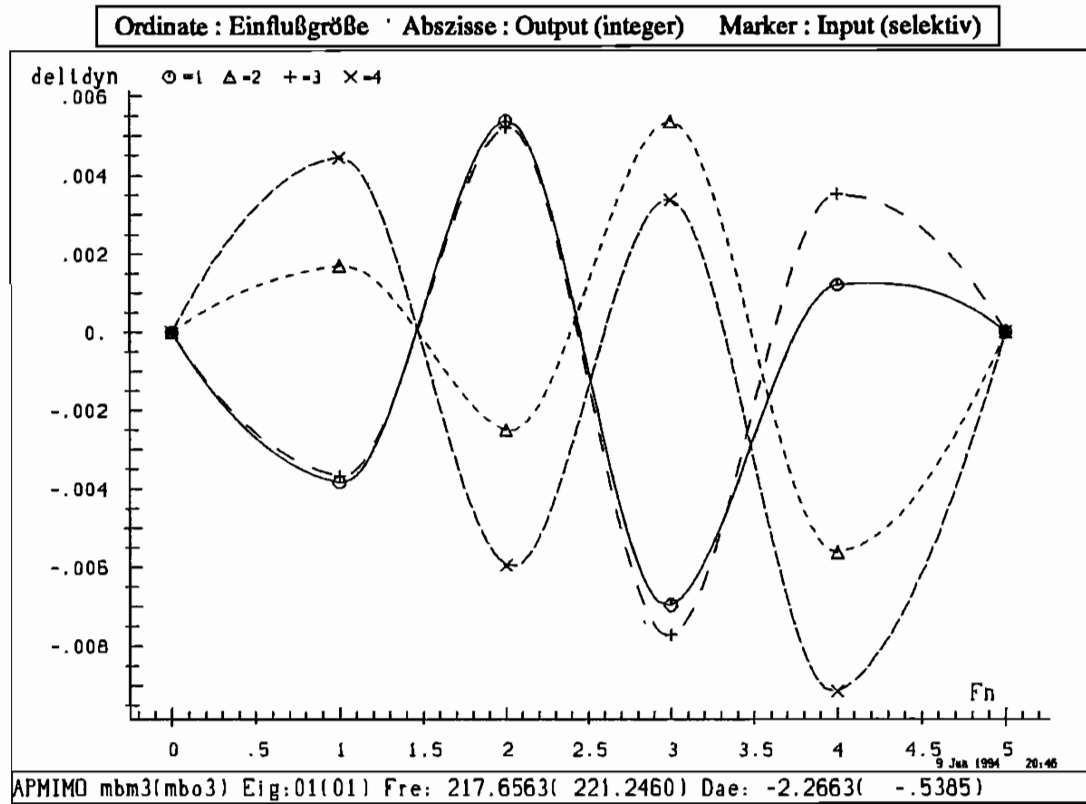


Berechnung 6.17 Einflußgrößen mbo3 mbm3

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



Berechnung 6.18 Einflußgrößen mbo3 mbm3



6.6 Singuläre Werte und Hankelnorm

Wie in den Kapiteln 4.6 und 5.2 ausführlich beschrieben, läßt sich über die Zerlegung der theoretisch unendlich dimensionalen Hankelmatrix eine Realisierung $\mathcal{S}\{A, B, C\}$ erstellen. Diese Realisierung repräsentiert ein dynamisches Modell. Die Hankelmatrix hat immer einen endlichen Rang, so daß die Matrix praktisch mit dem Digitalrechner mit einer endlichen Dimension angenähert bzw. geschätzt werden kann. Der Rang der Hankelmatrix ist anhand der Auswahl der von Null verschiedenen Singulärwerte zu bestimmen, siehe Kapitel 3.6.

Die Hankelmatrix stellt die Abbildung der Vergangenheit in die Zukunft über den Zustand zum Zeitpunkt t_0 für ein dynamisches System dar, siehe Kapitel 4.6.

$$[\tilde{y}] = \tilde{H}[\tilde{u}] \quad (6.18)$$

Wählt man für den Eingang z. B. die Vektornorm

$$\|[\tilde{u}]\|_2 = 1 \quad , \quad (6.19)$$

so ergibt sich für die quadratische bzw. $p=2$ Norm der Hankelmatrix

$$\|\tilde{H}\|_2^2 = \max \frac{\|\tilde{H}[\tilde{u}]\|_2^2}{\|[\tilde{u}]\|_2^2} = \max \frac{[\tilde{u}]' \tilde{H}' \tilde{H} [\tilde{u}]}{[\tilde{u}]' [\tilde{u}]} \quad . \quad (6.20)$$

Mit $[\tilde{u}]$ als einen Eigenvektor x von $\tilde{H}' \tilde{H}$ bildet der Ausdruck den Rayleigh Quotienten, der mit dem größten Eigenwert und zugehörigem Eigenvektor die quadratische Norm darstellt.

Die Norm berechnet sich somit aus der Quadratwurzel des maximalen Eigenwertes

$$\lambda_{max}^{1/2} = \|\tilde{H}\|_2 = \max \frac{\|\tilde{H}x\|_2}{\|x\|_2} \quad . \quad (6.21)$$

Die Norm $\|\tilde{H}\|_2$ stellt ein Maß für den maximalen Betrag dar, mit dem der Eingang $[\tilde{u}]$, unter Bezugnahme auf die Vektornorm, vergrößert werden kann, um in den Ausgang $[\tilde{y}]$ transformiert zu werden. Liegt der Eingang $[\tilde{u}]$ z.B. als Eigenvektor x zugehörig zu λ_{max} vor, so tritt die maximale Verstärkung um $\lambda_{max}^{1/2}$ ein.

Aus numerischen Gründen, siehe Kapitel 3.6, wählt man bei der Berechnung der Norm die SVD, da hiermit numerisch stabile Ergebnisse, ohne eine tatsächliche Quadratur, berechenbar sind. Die singulären Werte entsprechen den Quadratwurzeln der Eigenwerte.

$$EVD : \lambda_i^{1/2} = \sigma_i : SVD \quad (6.22)$$

Die Norm $\|\tilde{H}\|_2$ der Hankelmatrix berechnet sich dann zu

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \|\tilde{H}\|_2 \quad , \quad (6.23)$$

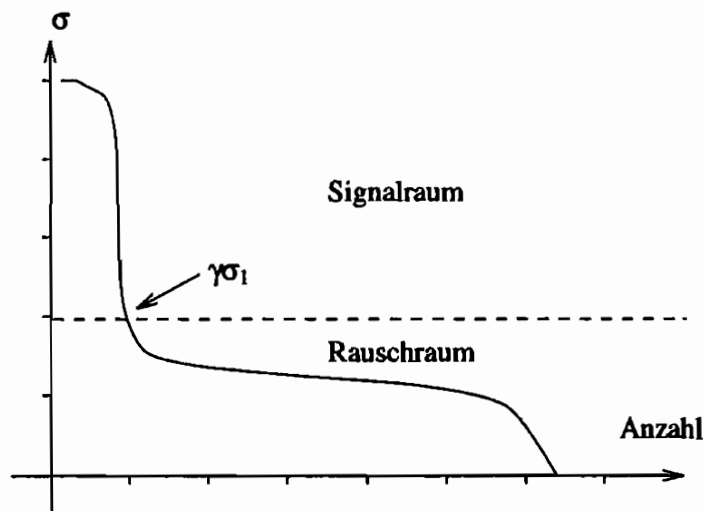
wie in Kapitel 3.2 schon aufgezeigt wurde.

Die Gesamtheit der singulären Werte stellen, wie für σ_1 mit zugehörigem Basisvektor beschrieben, Maße für die Verstärkung bzw. Übertragung zwischen Input und Output

durch die Black Box dar. Die singulären Werte kennzeichnen damit die Energie, die das System mit σ_i bezogen auf seine Basisvektoren, übertragen kann.

Deshalb ist es sinnvoll zwischen einem Rauschraum und einem Signalraum bei der Rangbestimmung, siehe Kapitel 5.2, zu unterscheiden. Der Signalraum wird durch die signifikanten singulären Werte gekennzeichnet, während die betragsmäßig kleinen singulären Werte den Rauschraum identifizieren. Die Zahlenquantisierung hat dabei einen starken Einfluß. Die Genauigkeit der Zahlendarstellung γ als ein Vielfaches von σ_1 bildet einen Grenzwert bei der Unterscheidung zwischen Signalraum und Rauschraum, siehe Kapitel 3.6. Der Potentialunterschied der singulären Werte stellt mit der Zahlenquantisierung ein Kriterium für die Selektion der Systemordnung, die die Anzahl der singulären Werte aus dem Signalraum kennzeichnet, dar. Das Bild 6.8 verdeutlicht in einer Skizze den Zusammenhang. Die Zahlenquantisierung γ eines D/A-Wandlers und

Bild 6.8 Skizze zur Selektion der Singulärwerte



eines Digitalrechners beträgt beispielhaft

- Digitalrechner: $2^{-52} = 4,50 \cdot 10^{-16}$
 - D/A-Wandler: $2^{-12} = 2,44 \cdot 10^{-4}$
- (6.24)

Die folgenden Bilder zeigen reale Berechnungen von Singulärwerten mit unterschiedlicher Zahlenquantisierung.

Das Bild 6.9 hat seinen Ursprung in einer Signalsimulation in Rechnergenauigkeit. Die Schranke $\gamma\sigma_1$ beträgt $1,12 \cdot 10^{-14}$. Hierbei trifft die Genauigkeitsgrenze sehr gut mit der Anzahl der Systemordnung überein.

Das Bild 6.10 entstammt einer realen Messung mit verrauschtem Meßsignal und Zahlenquantisierung 12-bit. Die Schranke $\gamma\sigma_1$ beträgt 0.014. Eine Unterscheidung der beiden Räume ist hierbei problematischer, da der Potentialunterschied der Singulärwerte abgenommen hat. Es sind jedoch anhand eines treppenförmigen Verlaufes der Singulärwertkurve oberhalb der Genauigkeitsgrenze singuläre Werte von Signalgrößen zu lokalisieren.

Grundsätzlich ist festzustellen, daß oberhalb der Genauigkeitsgrenze $\gamma\sigma_1$ die Singulärwerte aus dem Signalraum aufzufinden sind. Diese Auswahl führt immer zu einem stabilen dynamischen System, welches das tatsächliche Verhalten ausreichend beschreibt.

Bild 6.9 Singulärwerte, Signalsimulation

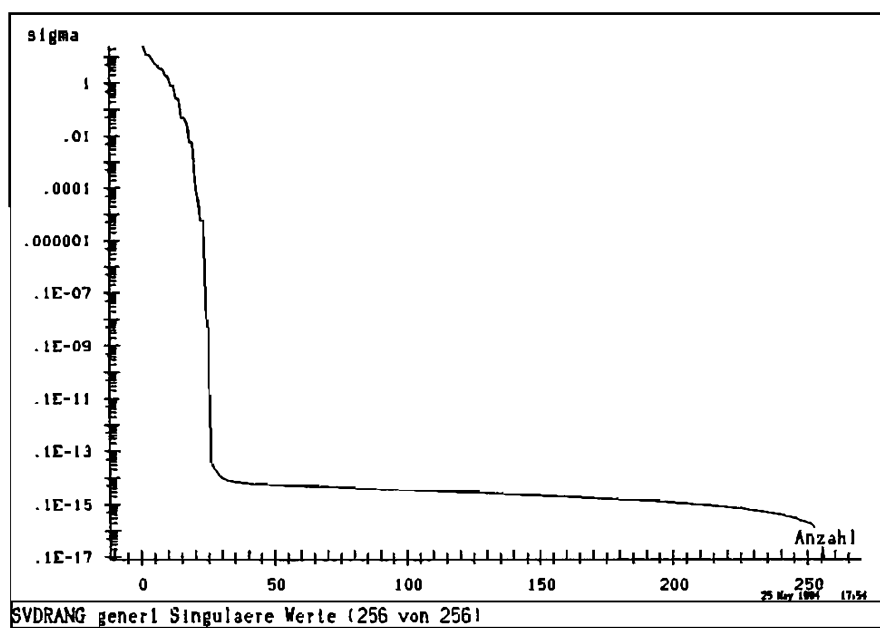
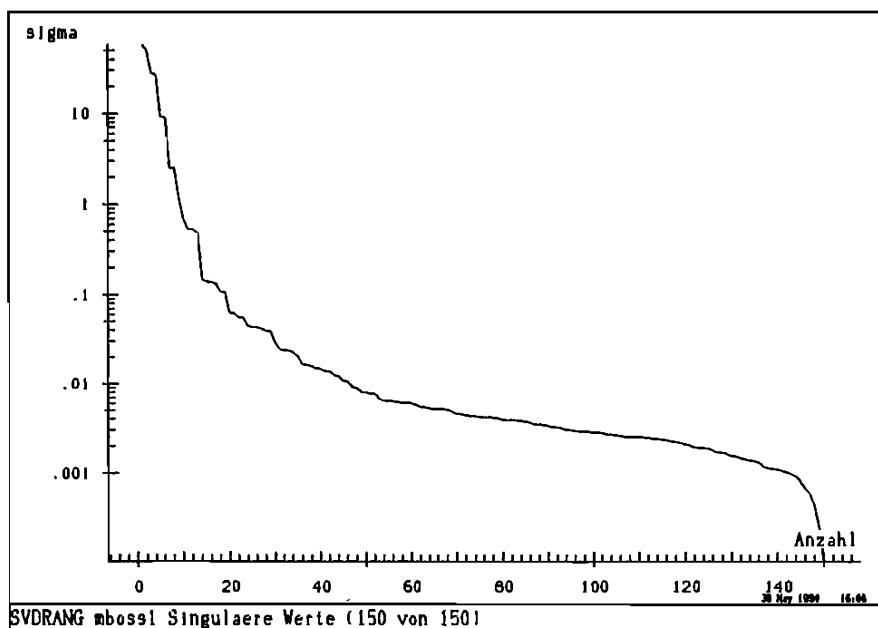


Bild 6.10 Singulärwerte, reale Messung



7.1	Hankelstruktur, Eigenvektoren, DFT	103
7.2	Beispiel Brücke in Hückeswagen	106

Parallele zur DFT

7.1 Hankelstruktur, Eigenvektoren, DFT

In diesem Kapitel wird die Parallele zwischen der Hankelmatrixzerlegung und der DFT als ein Spezialfall erläutert. Bei der harmonischen Analyse werden die Ansatzfunktionen als ungedämpfte e -Funktionen für eine Untersuchung eines Signales verwendet. Zusätzlich bedingt die Diskretisierung mit der äquidistanten Zeitrasterung eines Meßvorganges die Abbildung auf ein starres Muster von Funktionen mit denen das Signal vermessen werden soll.

Die nicht justierbaren Ansatzfunktionen, die in einer DFT verwendet werden, sind deshalb für eine Analyse denkbar ungeeignet, wenn das zu analysierende Signal nicht ebenso aus dem gleichen Funktionensystem aufgebaut ist. Im Gegensatz dazu liefert die Suche nach in dem Signal inhärenten Funktionen eine bessere Darstellungsmöglichkeit und damit eine bessere Analyse.

Die Zerlegung einer Hankelmatrix in eine dyadische Form stellt ein wirksames Hilfsmittel bei der Berechnung von Systemen dar, siehe Kapitel 4.6. Aus Kapitel 2.3 ist eine Meßsignaldarstellung in Eigenvektoren aus gedämpften e -Funktionen bekannt.

$$\begin{bmatrix} f_{(0\Delta t)} \\ f_{(1\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{(n\Delta t)} \\ \vdots \\ f_{(\infty\Delta t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_{(N-1)}^0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \varphi_0^n & \varphi_1^n & \cdots & \varphi_{(N-1)}^n \\ \vdots & \vdots & & \\ \varphi_0^\infty & \varphi_1^\infty & \cdots & \varphi_{(N-1)}^\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Das Signal wird aus linear unabhängigen Eigenvektoren zusammengesetzt. Verschiebt man dieses Signal nur jeweils eine Zeitschritt Δt so folgt

$$\begin{bmatrix} f_{(1\Delta t)} \\ f_{(2\Delta t)} \\ f_{(3\Delta t)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_{(N-1)}^0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & & \varphi_{(N-1)}^1 \\ \varphi_0^2 & \varphi_1^2 & & \varphi_{(N-1)}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^1 \\ \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ \vdots \\ \varphi_{(N-1)}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\begin{bmatrix} f_{(2\Delta t)} \\ f_{(3\Delta t)} \\ f_{(4\Delta t)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_{(N-1)}^0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & & \varphi_{(N-1)}^1 \\ \varphi_0^2 & \varphi_1^2 & & \varphi_{(N-1)}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^2 \\ \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \\ \vdots \\ \varphi_{(N-1)}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

usw.

Baut man aus den Signalvektoren eine Hankelstruktur auf, so läßt sich die Hankelform dyadisch in die Eigenvektoren zerlegen, wobei $f_{(i\Delta t)} \equiv f_i$ ist.

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_\infty \\ f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ f_\infty & & & & \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_{(N-1)}^0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & & \varphi_{(N-1)}^1 \\ \varphi_0^2 & \varphi_1^2 & & \varphi_{(N-1)}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \cdots \\ F_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^0 & \varphi_1^0 & \varphi_2^0 & \cdots \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \varphi_{(N-1)}^0 & \varphi_{(N-1)}^1 & \varphi_{(N-1)}^2 & \cdots \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \left[\mathbf{a}_0 \mid \mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_{(N-1)} \right] \begin{bmatrix} F_0 & & & \\ & F_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_0 \\ \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

Für N Ansatzfunktionen bzw. Eigenvektoren ergibt sich die Dyade

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}'_k \quad (7.4)$$

der Signalhankelmatrix. Stellt man sich das Meßsignal als Output eines SISO Systems vor, so sind die Eigenvektoren aus den Polstellen φ_i des Systems aufgebaut, die komplexe Amplitude F_i ist das Residuum der rationalen Übertragungsfunktion $R(s)$ eines

SISO Systems, da gilt

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \varphi_k^n. \quad (7.5)$$

Die komplett um einen Zeitschritt verschobene Hankelmatrix lautet

$$\tilde{\mathbf{H}}_2 = \left[\mathbf{a}_0 \mid \mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_{(N-1)} \right] \begin{bmatrix} F_0 & & & \\ & F_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 & & & \\ & \varphi_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_0 \\ \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(N-1)} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Mit den Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1 = \left[\mathbf{a}_0 \mid \mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_{(N-1)} \right] \begin{bmatrix} F_0 & & & \\ & F_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_0 \\ \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(N-1)} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \varphi_0 & & & \\ & \varphi_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

folgt mit der Ähnlichkeitstransformation $\tilde{\mathbf{P}}$ auf einfache Jordan Form der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ einer Realisierung

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{P}}^{-1}, \quad (7.8)$$

der Zusammenhang zu Kapitel 4.3, den Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsmatrizen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_1 &= \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{I} \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &= \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{Z}}_2 \end{aligned} \quad (7.9)$$

als eine Parallele der bekannten Hankelmatrixzerlegung.

Deutlich wird, daß bei der Analyse über eine Hankelzerlegung die Shiftinvarianz der e -Funktionen den Kernpunkt bildet. Hierbei bleibt das Funktionensystem noch justierbar und kann deshalb signalangepaßt gesucht werden. Dies führt dann zu verständlicherweise wesentlich besseren Analysemöglichkeiten, da nach einer Hankelzerlegung die Signaleigenfunktionen bekannt sind, im Gegensatz zur DFT, wo diese vorab geschätzt werden.

7.2 Beispiel Brücke in Hückeswagen

Aus Kapitel 2.2.2 ist die Problematik Meßdatenanalyse aus dem Versuch Brücke in Hückeswagen bekannt. Mit der Analyse über eine Hankelmatrixzerlegung können wesentlich zuverlässigere Untersuchungen angestellt werden, was im folgenden, anhand einer Signaluntersuchung mit den Bildern 7.1 bis 7.5 demonstriert wird.

Über die SVD ist eine stabile Berechnung mit nur wenigen Signaleigenformen möglich, die das Signal trotz des hohen Rauschgehaltes und dem vermuteten nichtlinearen Signalanteil sehr gut beschreiben.

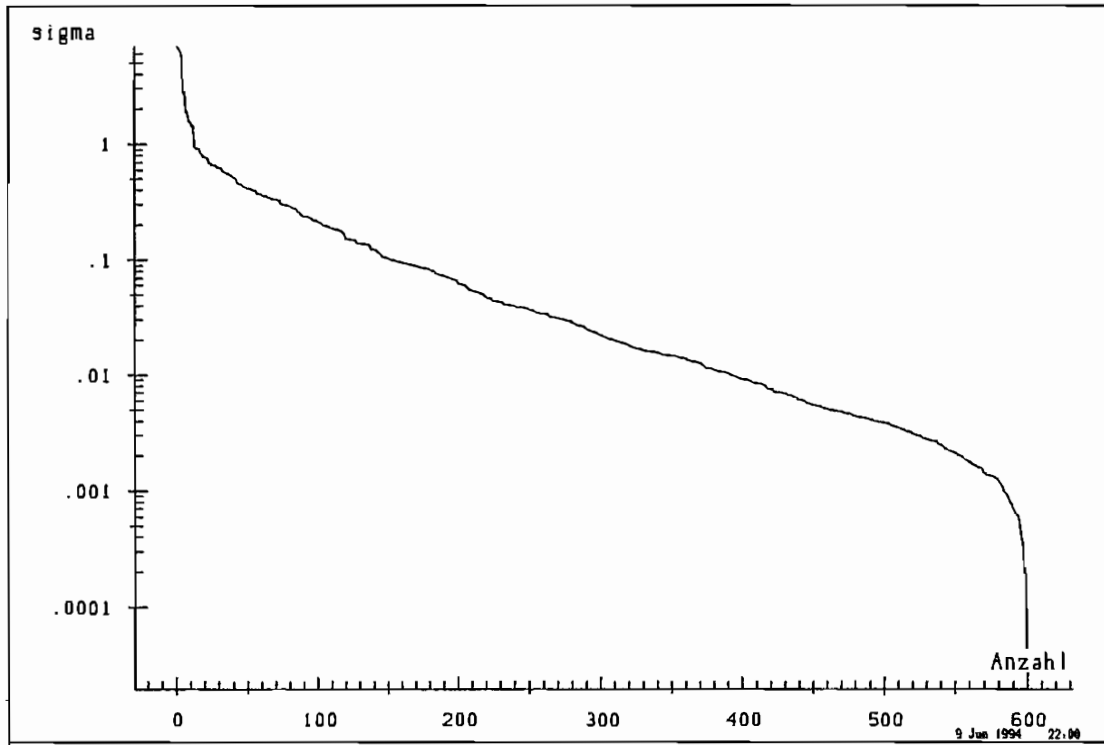
Die Simulation des Meßsignales mit nur 12 Signalparametern, siehe Bild 7.2 und 7.4 ergibt eine gute Annäherung an die originale Form. Die 12 Parameter bilden dabei die Parameteranteile an dem Signal, die den höchsten Energiegehalt beinhalten, da ihr Anteil an dem Singulärwertverlauf sehr signifikant ist.

Bei der Wahl von 42 Parametern, siehe Bild 7.3 und 7.5, treten weitere Parameter in Gruppen von nahe zusammenliegenden Frequenzanteilen auf. Im Vergleich zu der synthetischen Darstellung mit nur 12 Parametern bleiben die bereits bekannten Parameter in ihrer Größenordnung erhalten. Die hinzugetretenen Anteile lassen, durch ihre Vielfältigkeit in einer engen Bandbreite, auf einen nichtlinearen Signalanteil schließen, wie in Kapitel 2.2.3 vermutet worden ist, da die parasitären Parameteranteile durch eine schwache Änderung der Kernfrequenzen auftreten.

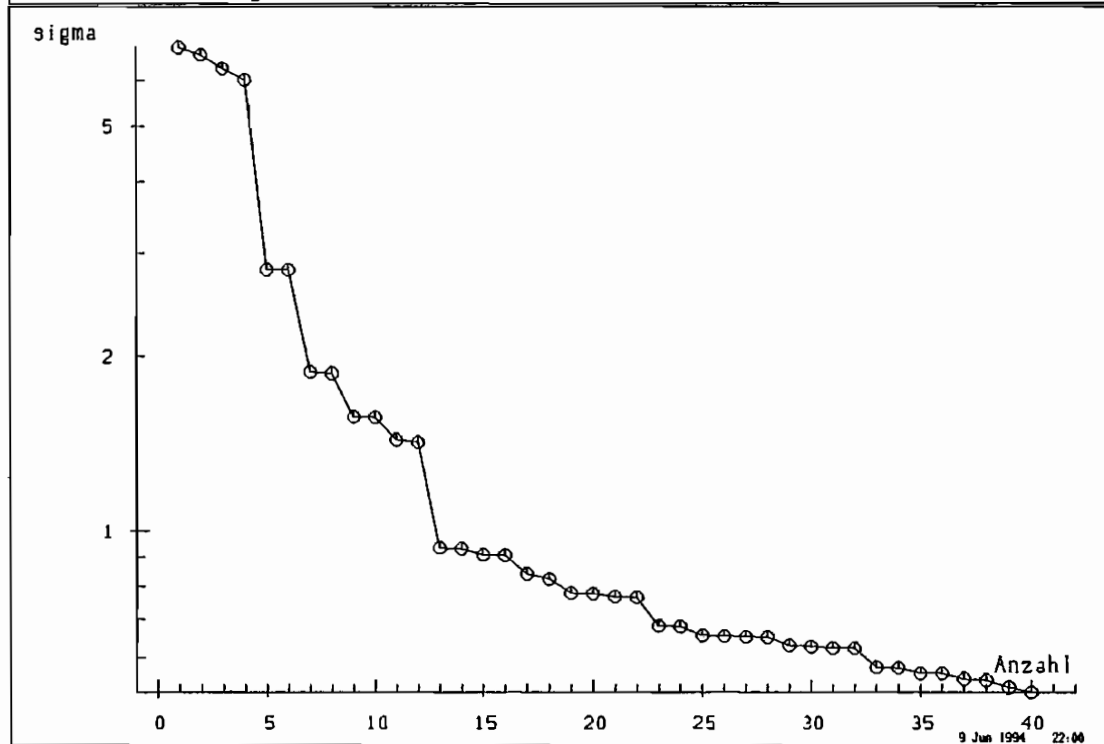
Die Berechnungsmethode bleibt allerdings trotzdem stabil, was auf die guten numerischen Eigenschaften der Singulärwertzerlegung zurückzuführen ist, siehe Kapitel 3.6, da im Gegensatz zu den klassischen Prony Methoden der Schritt der Quadratur bei der LS-Schätzung entfällt.

Ein weiterer Vorteil ist die implizite Realisierung eines SISO Systems, die bei der Signaluntersuchung über die Zerlegung der Hankelstruktur entsteht. Stehen mehrere Meßkanäle für eine Untersuchung zur Verfügung, dann entsteht mit dem gleichen Berechnungsschema der Zerlegung ein MIMO System. Dies ist dann sofort in die Realisierungsform der dynamischen Einflußzahlen überführbar und der in Kapitel 6.2 erklärten Interpretation zugänglich. Vergleicht man ein SISO System mit einem MIMO System so wird sofort deutlich, daß die Greenschen Zahlen für den dynamischen Fall vergleichbar mit verallgemeinerten komplexen Amplituden sind.

Bild 7.1 HO : Singulärwerte, der Hankelmatrix



SVDRANG mhoss1 Singulaere Werte (600 von 600)



SVDRANG mhoss1 Singulaere Werte (040 von 600)

Bild 7.2 HO : Realisierung, 12 Signalparameter

Nr.	Amplitude	Phase	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
12	.034148413	-2.91476	-.38911	-41.23919	-6.56342
10	.030788140	-2.16081	-.29177	-43.48720	-6.92120
8	.023688019	.28177	-2.66506	-196.99592	-31.35287
6	.003856425	3.10467	-.19609	-209.39638	-33.32647
4	.004264059	1.06994	-.35243	-328.17063	-52.22998
2	.014288421	.29798	-.74639	-354.45933	-56.41396

Bild 7.3 HO : Realisierung, 42 Signalparameter

Nr.	Amplitude	Phase	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
42	.002355774	.91970	-.41584	-211.32814	-33.63392
40	.004168310	-2.41096	-.13529	-208.75754	-33.22479
38	.002063773	-2.26152	-.76331	-220.50721	-35.09481
36	.023231730	.61443	-2.59992	-195.75072	-31.15469
34	.002562845	2.18460	-.91896	-155.14742	-24.69248
32	.003938640	-.18242	-1.83645	-138.34081	-22.01762
30	.005502650	1.31615	-1.12806	-92.95916	-14.79491
28	.029303963	-2.17223	-.25653	-43.50414	-6.92390
26	.033779748	-2.86822	-.38912	-41.20075	-6.55730
24	.010428877	2.36329	-5.49367	-270.13942	-42.99402
22	.009434478	-2.16038	-2.78417	-281.97744	-44.87810
20	.008466830	3.00704	-1.34890	-324.19554	-51.59732
18	.004389296	-.44808	-.49586	-329.68507	-52.47101
16	.002362915	2.07269	-.30105	-340.41462	-54.17867
14	.000154878	.83581	.19495	-347.16086	-55.25237
12	.014054590	.13823	-.74101	-354.65589	-56.44524
10	.002726937	-.66743	-.84695	-550.58530	-87.62837
8	.003821591	2.93759	-.92112	-557.33598	-88.70278
6	.004223783	1.57037	-1.09465	-588.84093	-93.71695
4	.004520326	1.10109	-1.18222	-600.79922	-95.62017
2	.003657215	-1.94600	-1.14218	-680.46353	-108.29913

Bild 7.4 HO : Realisierung, 12 Signalparameter

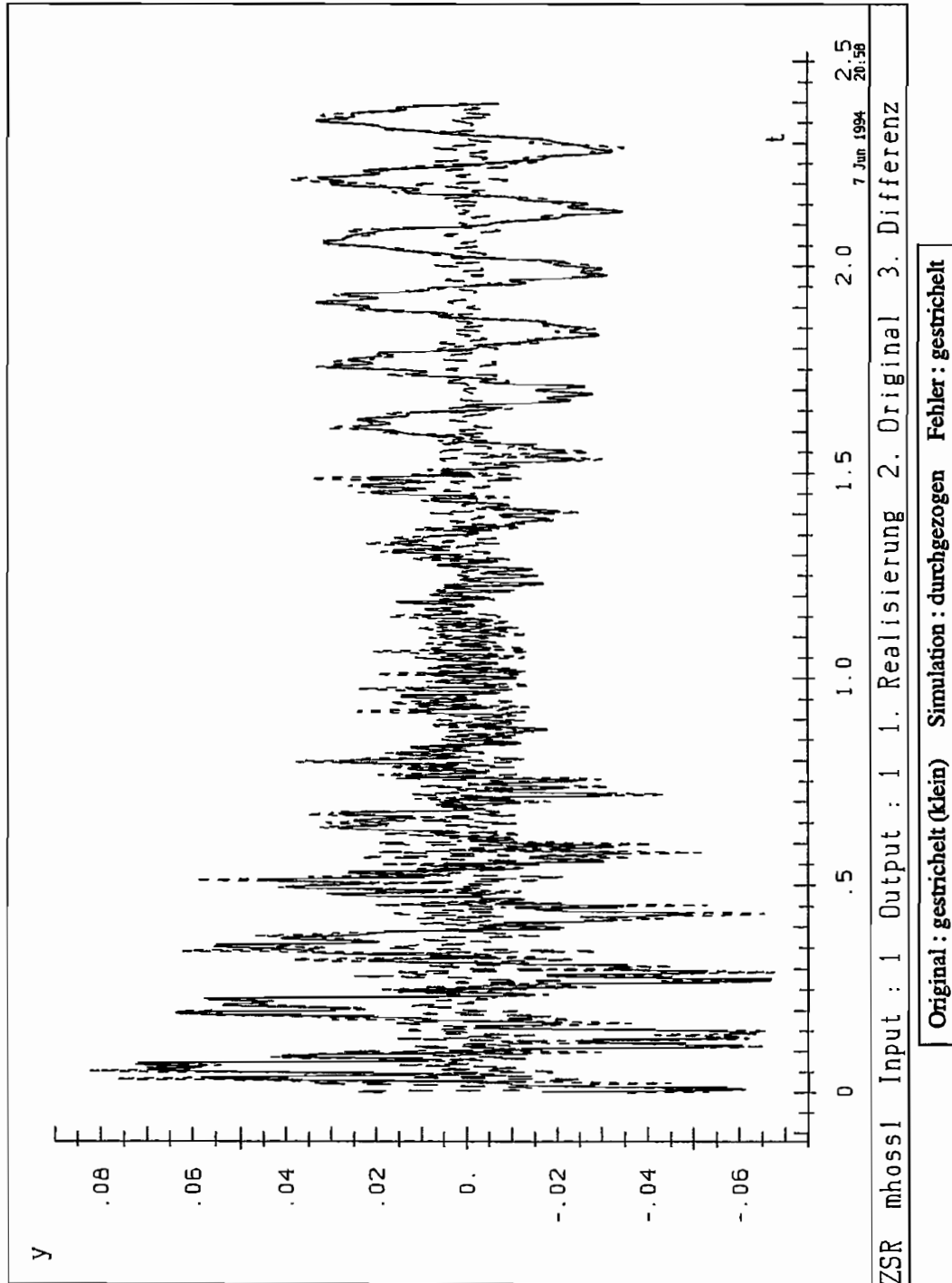
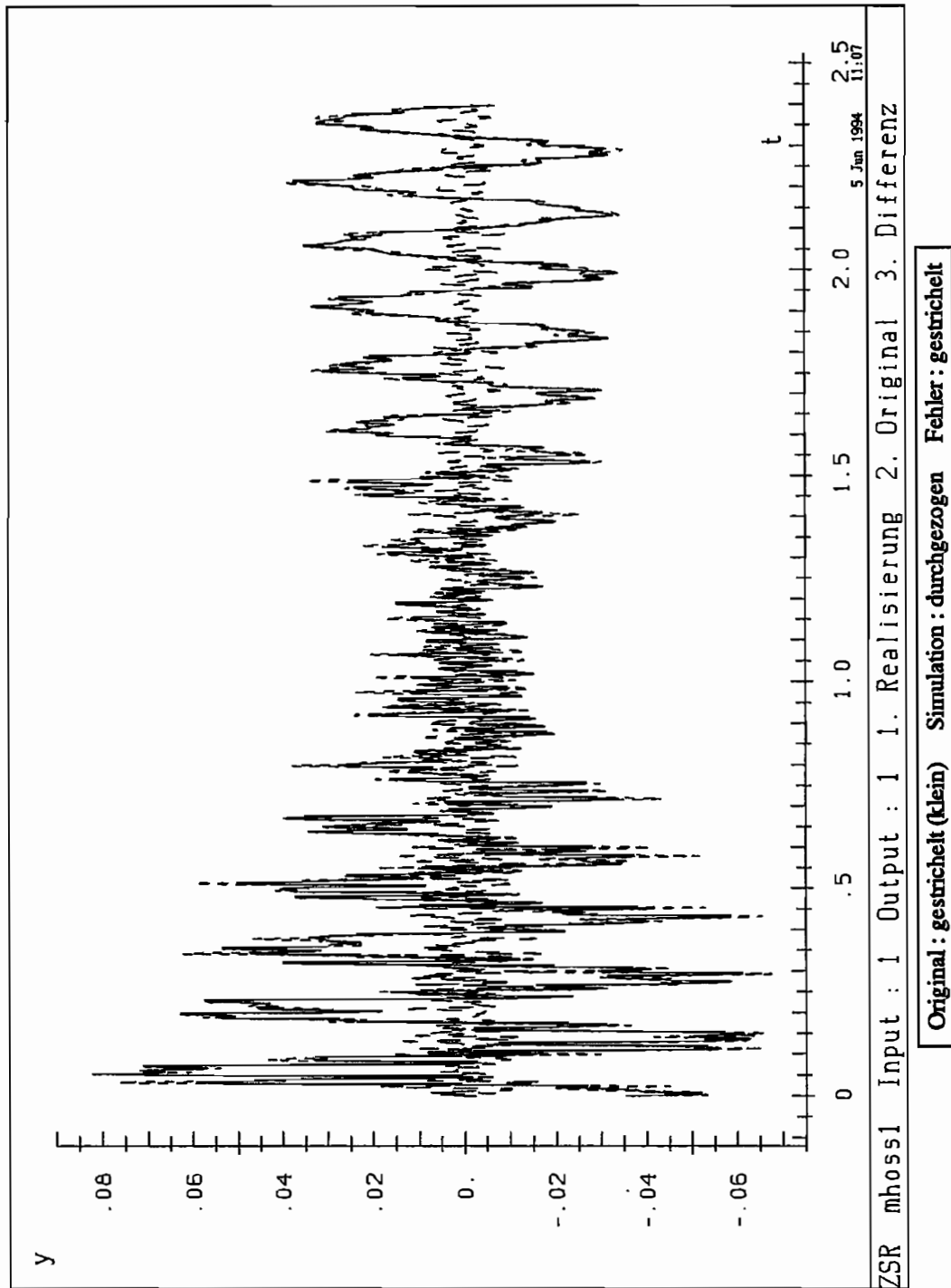


Bild 7.5 HO : Realisierung, 42 Signalparameter

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Berechnungsmethode vorgestellt, die sich zur Untersuchung dynamischer Systeme und der Erfassung von Strukturänderungen eignet.

Die mathematische Modellierung der dynamischen Systeme erfolgt auf der Basis systemtheoretischer Grundlagen, in Form einer Black box Realisierung. Als numerischer Kernalgorithmus wird die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung QSVD angewendet, eine neue Weiterentwicklung der Zerlegungsform SVD einer Matrix. Nach einer speziellen Umformung der Realisierung in die Greenschen Einflußzahlen, über eine Spektralzerlegung des integralen Lösungsoperators der Zustandsraumvektordifferentialgleichung, ist das Modell physikalisch sehr einfach interpretierbar.

Das dynamische System wird durch die Information der Meßdaten in den Input- und Output-Kanälen als Klemmenmodell oder Black box Modell repräsentiert. Dies hat den Vorteil, daß ein Abgleich, mit einem aus speziellen Regelwerken und Gesetzmäßigkeiten der Physik aufgebauten synthetischen Rechenmodell, beispielsweise der FEM, entfallen kann. Der Abgleich bzw. die Zuordnung zwischen Meßgrößen und synthetischem Modell ist durchaus kein triviales Problem, wie in Kapitel zwei dargestellt ist.

Bei der synthetischen Form zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens, beispielsweise mit der Schwingungsdifferentialgleichung zweiter Ordnung, sind die Parameter Dämpfung, Steifigkeit und Masse enthalten. Eine Untersuchung der dynamischen Systemeigenschaften hat die drei Parameter zu bewerten, da diese die Systemeigenschaften beeinflussen. Damit die Interpretation vereinfacht wird, wählt man häufig einen Parameter aus, um das Systemverhalten zu untersuchen bzw. einen Abgleich zwischen gemessener Realität und theoretischem Modell durchzuführen. Dadurch wird jedoch impliziert, daß die anderen Parameter vernachlässigbare Einflüsse auf das Schwingungsverhalten haben. Im Gegensatz dazu liegt der Informationsgehalt der drei Parameter, nach der Einführung der Greenschen Einflußzahlen, in komprimierter Form vor, das Problem der Selektion nur eines Systemparameters existiert hierbei nicht. Dies ist

ein großer Vorteil, da das dynamische Systemverhalten an nur einem signifikanten Parameter beurteilt werden kann.

Die dynamischen Einflußzahlen eignen sich deshalb hervorragend zur Untersuchung dynamischer Systeme und der Erfassung von Strukturänderungen, sie stellen die Information der Systemübertragungsfunktion an den Polstellen dar. Die Charakteristik an diesen ausgezeichneten Punkten reicht für eine Systembeschreibung vollkommen aus. Das dynamische System wird mit speziellen Testsignalen am Eingang erregt, wobei gleichzeitig die Ausgangsgrößen gemessen werden. Dabei muß das System in einem stationären Zustand ausharren, damit auf einen selektiven impulsförmigen Eingang die Systemantwort an den Ausgängen gemessen werden kann. Die Shiftinvarianz als spezielle Eigenschaft des Hankeloperators, der aus den gemessenen Ausgangsgrößen aufgebaut wird, ermöglicht die Identifikation des systemtheoretischen Modells.

Die theoretisch unendliche Hankelmatrix mit endlichem Rang enthält einen großen Anteil redundanter Informationen, sowie bei Meßsignalen zusätzliche Rauschanteile. Über die Rangbestimmung, mit der Methodik der SVD, kann eine Selektion zwischen Rauschraum und Signalraum getroffen werden. Interessant ist dabei, daß man hier prinzipiell Signalrauschen und digitales Rauschen vergleichen kann, wenn der Potentialunterschied der singulären Werte berücksichtigt wird.

Die verallgemeinerte Quotientenform der Singulärwertzerlegung eignet sich ideal um die Realisierung eines dynamischen Systems zu bestimmen. Dabei werden hier zwei Hankelmatrizen gleichzeitig zerlegt. Unter Berücksichtigung der Shiftinvarianz der beiden Hankelmatrizen sind die Systemparameter des Zustandsraummodells direkt aus den faktorisierten Hankelmatrizen bestimmbar. Der innere Aufbau einer Hankelmatrix bleibt hier, im Gegensatz zu anderen Methoden, unberücksichtigt, da bei verrauschten Meßdaten diese besondere Strukturierung entfällt. Liegt eine Realisierung vor, so kann über eine grundsätzlich immer mögliche Ähnlichkeitstransformation eine weitere, von prinzipiell unendlich vielen Realisierungsformen, gefunden werden. Eine mögliche Zustandsraumtransformation ist die einfache Jordan kanonische Form, über die eine besondere Realisierungsform bestimmbar ist. Aus dieser Realisierungsform können dann durch eine dyadische Zerlegung die dynamischen Einflußzahlen mit den Systemeigenfunktionen entwickelt werden, die physikalisch gut interpretierbar sind, da sie in integraler Gestalt den Wichtungoperator des dynamischen Systems repräsentieren.

Das Berechnungsverfahren wird mit Simulationsrechnungen und realen Meßdaten validiert. Die umfangreichen Ergebnisse zeigen stabile numerische Eigenschaften und eignen sich zur Erfassung von Strukturänderungen, was demonstriert wird.

Ein offensichtlicher Nachteil der Methodik ist die Erfordernis spezieller Testsignale als Systemeingang, die als Ein- Aus- Schaltsignale oder Impulse vorliegen müssen, um eine Realisierung mit den Eigenschaften der Hankelmatrix zu berechnen. Dieser Nachteil kann umgangen werden, wenn man mit einem erhöhten Aufwand an Meßtechnik die Eingangssignale messen kann. Eine neuartige Methode [38], die auch auf der SVD basiert, zeigt vielversprechende Ergebnisse.

Abschließend ist darauf hinzuweisen, daß die guten Berechnungsergebnisse auf die Methode der Singulärwertzerlegung zurückzuführen sind. Dieser Algorithmus, der in der Domäne der linearen Algebra entwickelt wurde und in neuerer Zeit durch weitere Verallgemeinerungen erweitert wird, hat sehr stabile numerische Eigenschaften. Die Anwendungen der SVD finden sich zur Zeit in der digitalen Bildverarbeitung, Signalerken-

nung, Biomedizin und Medizin. Besonders hervorzuheben sind die folgenden Punkte als ausgewählte Anwendungsgebiete.

- Rangbestimmung
- Strukturbestimmung eines linearen Operators
- Least Squares Schätzung
- Lösung von linearen Gleichungen
- Realisierung
- Approximationen niedriger Ordnung

Die weitere Entwicklung auf diesem Gebiet ist äußerst vielversprechend, da zur Zeit Möglichkeiten über Parallelisierungen der SVD Berechnung und die Entwicklung von speziellen Prozessoren für eine Echtzeitanwendung erforscht werden. Weitere neue Anwendungen sind in der Zukunft mit Sicherheit zu erwarten.

Symbole und Bezeichnungen

A.1 Formelzeichen

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vektoren
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Matrix bzw. Operator aus dem Zusammenhang
$\mathbf{A}_{(1:m, 1:n)}$	erste m Zeilen, erste n Spalten von \mathbf{A}
α, β, σ	singuläre Werte
λ	Eigenwert
φ	Eigenvektoren
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonalmatrix
$\text{dim}(\cdot)$	Dimension
$\delta_{(t)}$	Dirac Pseudofunktion
f	Abbildung
$\Phi_{(t, \sigma)}$	Fundamentalmatrix
F	komplexe Amplitude
\mathcal{F}	Fourier Operator
\mathbf{h}_k	Markov-Parameter
$\mathbf{f}_P, \mathbf{f}_Q$	Greenscher Vektor
$\mathbf{F}_{dyn}, \delta_{ij}$	Greensche Einflußzahlen
\mathbf{H}	Hankelmatrix
$L(\cdot)$	Linearer Operator
λ	Eigenwerte
$\mathcal{N}(\cdot)$	Nullraum
\mathbf{J}	Jordan Matrix
$\mathbf{P}, \mathbf{P}_{(t)}$	Zustandsraumtransformation
$\mathcal{P}, \mathcal{P}_{(t)}$	Beobachtbarkeitsmatrix
\mathbf{P}_U	Projektor auf einen Unterraum \mathcal{U}

$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(t)$	Steuerbarkeitsmatrix
$\text{rg}(\cdot)$	Rang einer Matrix
\mathbf{R}	Systemübertragungsfunktion
$\mathcal{R}(\cdot)$	Bildraum
$\mathcal{S}\{A, B, C\}$	Realisierung
$\bar{\mathcal{S}}\{-A', B, C\}$	adjungierte Realisierung
Σ	Matrix der singulären Werte
t	kontinuierlicher Zeitverlauf
$\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$	Wichtungsmuster, Impulsantwort einer Realisierung
$\mathbf{u}(t)$	Inputvektor
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{Q}$	orthonormale bzw. unitäre Matrix
$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U}$	Vektorräume
\mathbf{W}	symmetrische Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{Z}	Vandermondsche Matrix
$\bar{\mathbf{W}}$	symmetrische Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsraumvektor
\mathcal{X}_c	steuerbarer Zustandsraum (controllable)
$\mathcal{X}_{\bar{c}}$	nicht steuerbarer Zustandsraum
\mathcal{X}_o	beobachtbarer Zustandsraum (observable)
$\mathcal{X}_{\bar{o}}$	nicht beobachtbarer Zustandsraum
$\xi(t)$	transformierter Zustandsvektor
ξ, η, ϵ	Skalar
$\mathbf{y}(t)$	Outputvektor

A.2 Diverse Sonderzeichen

\mathbb{C}	komplexe Zahlen
\mathbb{K}	aus dem Zusammenhang \mathbb{R} oder \mathbb{C}
$\mathbb{K}^{m \times n}$	Zahlenkörper der Dimension $m \times n$
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\in	Element aus
\cap	Schnittmenge
\subset	Untermenge
'	transponiert
H	konjugiert transponiert
*	aus dem Zusammenhang ' oder H
\perp	orthogonales Komplement
\dagger	Pseudoinverse
\oplus	direkte Summe von Vektorräumen
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Vektornorm
$\ \cdot\ _F$	Frobenius Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	inneres Vektorprodukt
$\cdot \times \langle \cdot$	äußeres Vektorprodukt
-	adjungiert
\sim	diskret

0 Nullmatrix

A.3 Abkürzungen

DFT	Diskrete Fourier Transformation
EVD	Eigenvalue Decomposition
FFT	Fast Fourier Transformation
FEM	Finite Elemente Methode
GEVD	Generalized Eigenvalue Decomposition
GSVD	Generalized Singular Value Decomposition
OSVD	Ordinary Singular Value Decomposition
QSVD	Product Singular Value Decomposition
QSVD	Quotient Singular Value Decomposition
SISO	Single Input Single Output System
MIMO	Multi Input Multi Output System
SVD	Singular Value Decomposition

--

Darstellung der Berechnungen

1. Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung

- Singulärwerte, Original und Ausschnitt
- Tabelle, Frequenz und Dämpfung

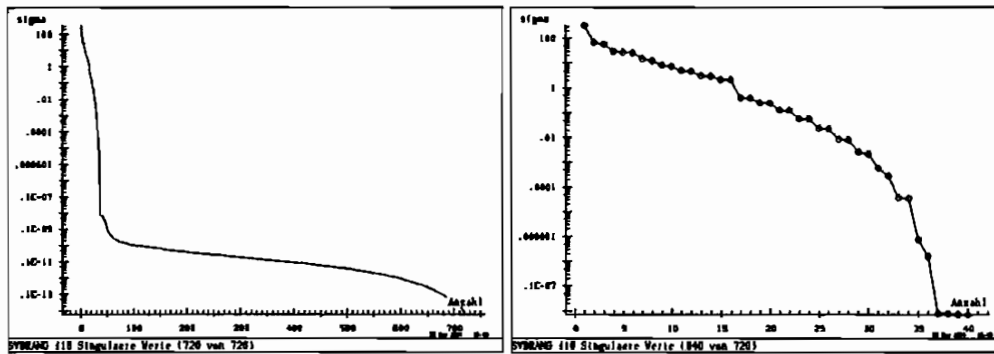
2. Einflußgrößen

- Nullmessung
- Systemmessung
- Systemänderung (interpolierte Differenz als mechanisches Balkenmodell)

B.1 Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m1

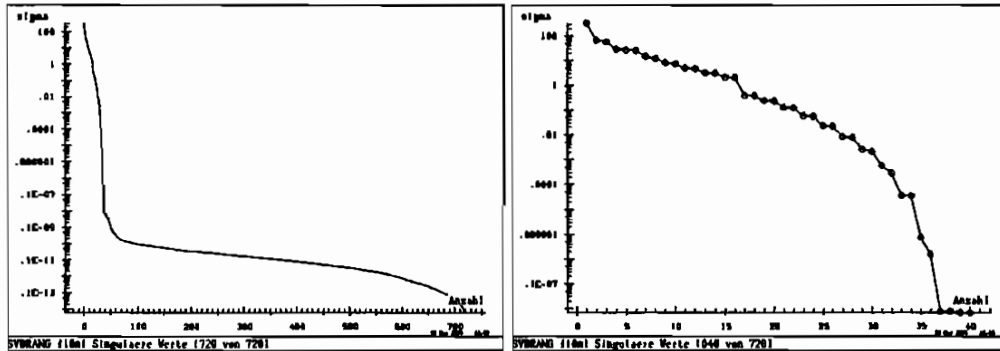
- Realisierung für ein System mit 8 Eingängen und 8 Ausgängen
- Nullmessung : f10
- Systemmessung : f10m1
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 1% an Knoten 7
- Messung an allen FEM Knotenpunkten
- Masse liegt an einem Knoten

Berechnung B.1 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.67972	-374.45853	-59.59693
35	-2.67972	374.45853	59.59693
34	-5.65985	-843.08370	-134.18094
33	-5.65985	843.08370	134.18094
32	-.89985	-93.59811	-14.89660
31	-.89985	93.59811	14.89660
30	-9.88774	-1501.35829	-238.94859
29	-9.88774	1501.35829	238.94859
28	-15.47315	-2353.90181	-374.63511
27	-15.47315	2353.90181	374.63511
26	-22.58515	-3409.55108	-542.64691
25	-22.58515	3409.55108	542.64691
24	-31.23393	-4682.27098	-745.20657
23	-31.23393	4682.27098	745.20657
22	-39.23374	-6186.88070	-984.67265
21	-39.23374	6186.88070	984.67265
20	-115.45092	-10187.99636	-1621.46998
19	-115.45092	10187.99636	1621.46998
18	-132.67072	-8414.15698	-1339.15467
17	-132.67072	8414.15698	1339.15467
16	-148.95469	-12679.94155	-2018.07538
15	-148.95469	12679.94155	2018.07538
14	-204.15753	-15645.60976	-2490.07613
13	-204.15753	15645.60976	2490.07613
12	-285.29507	-19162.00775	-3049.72825
11	-285.29507	19162.00775	3049.72825
10	-401.25948	-23293.43034	-3707.26458
9	-401.25948	23293.43034	3707.26458
8	-755.57425	-32876.64665	-5232.48083
7	-755.57425	32876.64665	5232.48083
6	-928.66678	-38548.17950	-6135.13331
5	-928.66678	38548.17950	6135.13331
4	-940.63430	-36913.62935	-5874.98658
3	-940.63430	36913.62935	5874.98658
2	-560.05771	-27992.19788	-4455.09666
1	-560.05771	27992.19788	4455.09666

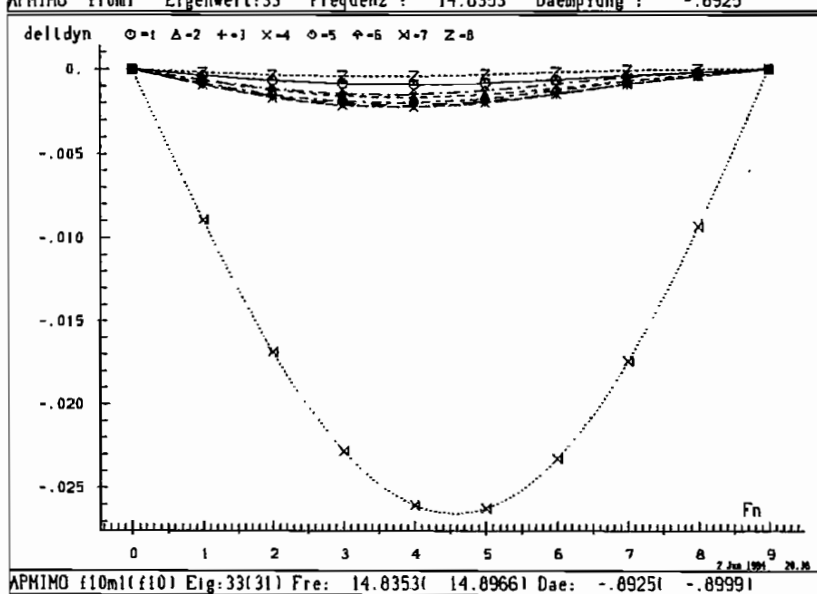
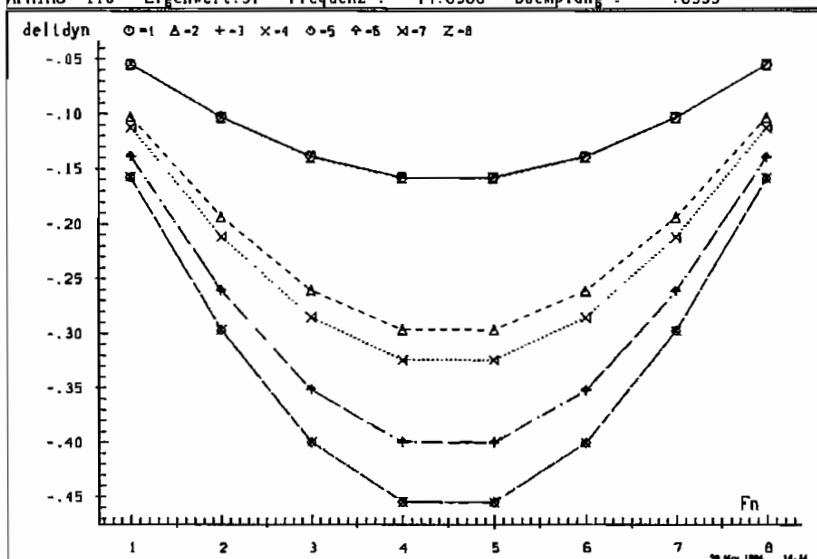
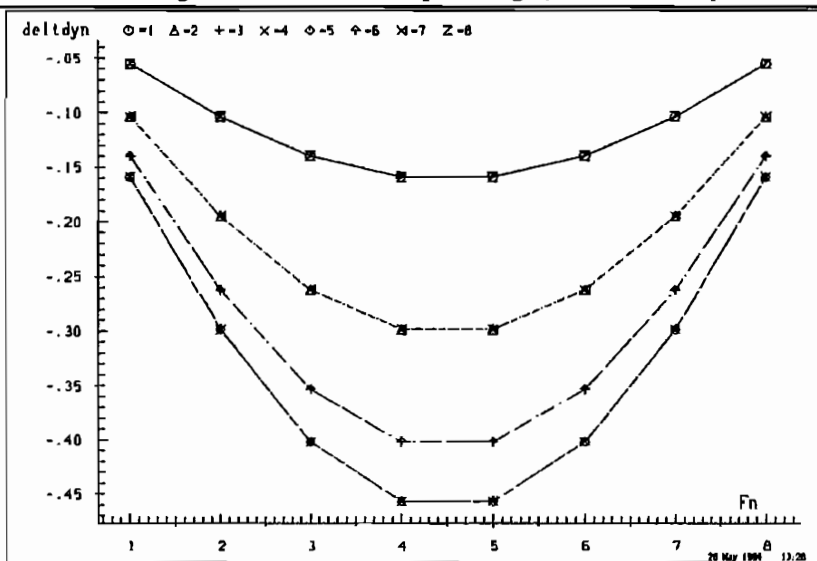
Berechnung B.2 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m1



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.62893	-370.89288	-59.02944
35	-2.62893	370.89288	59.02944
34	-.89253	-93.21320	-14.83534
33	-.89253	93.21320	14.83534
32	-5.56616	-836.98671	-133.21057
31	-5.56616	836.98671	133.21057
30	-9.84477	-1499.65881	-238.67811
29	-9.84477	1499.65881	238.67811
28	-15.47531	-2351.15476	-374.19790
27	-15.47531	2351.15476	374.19790
26	-22.26629	-3383.54418	-538.50778
25	-22.26629	3383.54418	538.50778
24	-30.28195	-4636.10824	-737.85954
23	-30.28195	4636.10824	737.85954
22	-38.21158	-6159.05362	-980.24383
21	-38.21158	6159.05362	980.24383
20	-132.67098	-8414.15954	-1339.15508
19	-132.67098	8414.15954	1339.15508
18	-116.71866	-10155.00465	-1616.21919
17	-116.71866	10155.00465	1616.21919
16	-149.12304	-12576.41629	-2001.59882
15	-149.12304	12576.41629	2001.59882
14	-202.11116	-15551.70292	-2475.13039
13	-202.11116	15551.70292	2475.13039
12	-283.93321	-19145.16512	-3047.04767
11	-283.93321	19145.16512	3047.04767
10	-402.32061	-23275.10609	-3704.34818
9	-402.32061	23275.10609	3704.34818
8	-559.48011	-27885.11133	-4438.05331
7	-559.48011	27885.11133	4438.05331
6	-928.67029	-38548.22029	-6135.13981
5	-928.67029	38548.22029	6135.13981
4	-939.21481	-36900.28866	-5872.86334
3	-939.21481	36900.28866	5872.86334
2	-752.29452	-32784.30562	-5217.78429
1	-752.29452	32784.30562	5217.78429

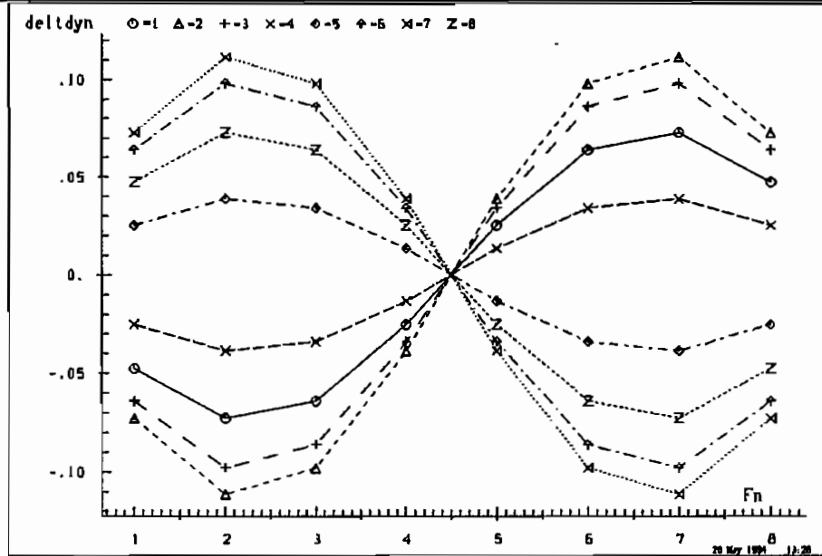
Berechnung B.3 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

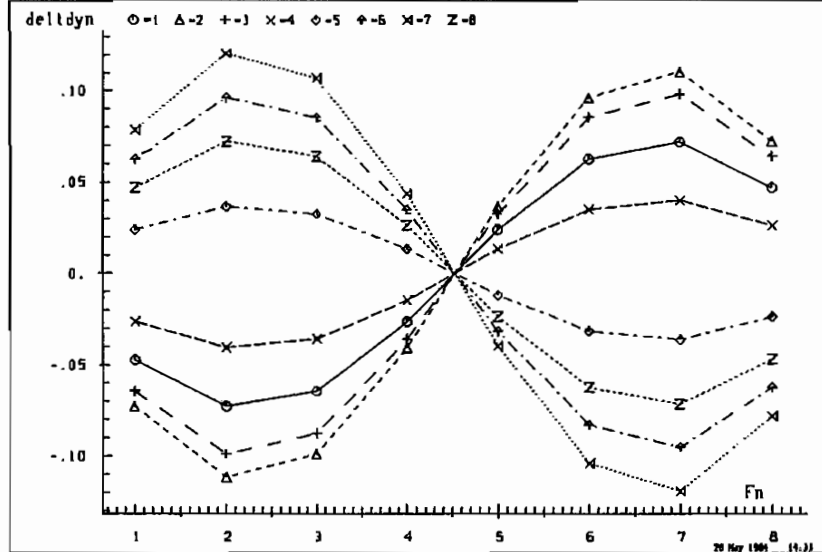


Berechnung B.4 Einflußgrößen f10 f10m1

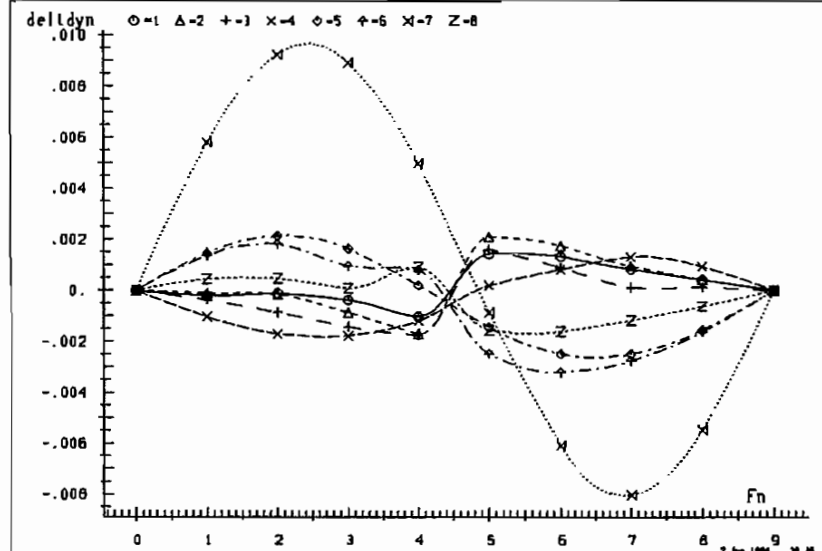
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:35 Frequenz : 59.5969 Daempfung : -2.6797



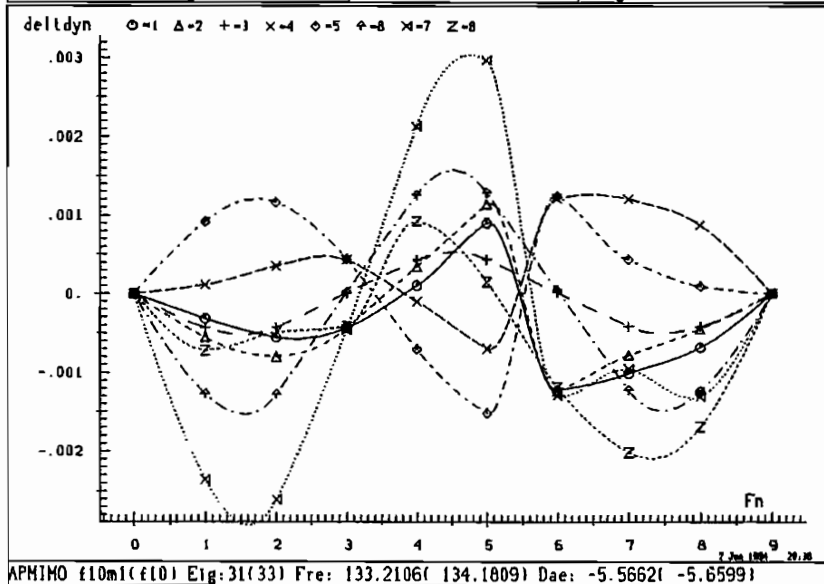
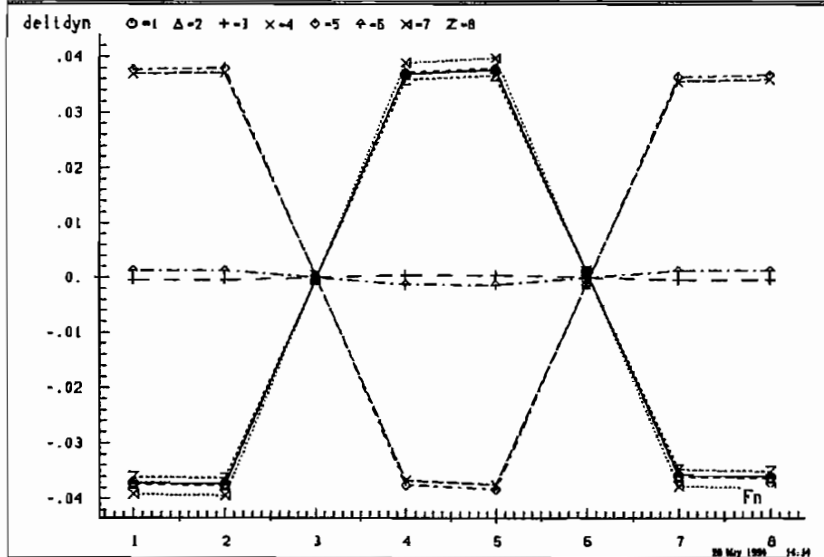
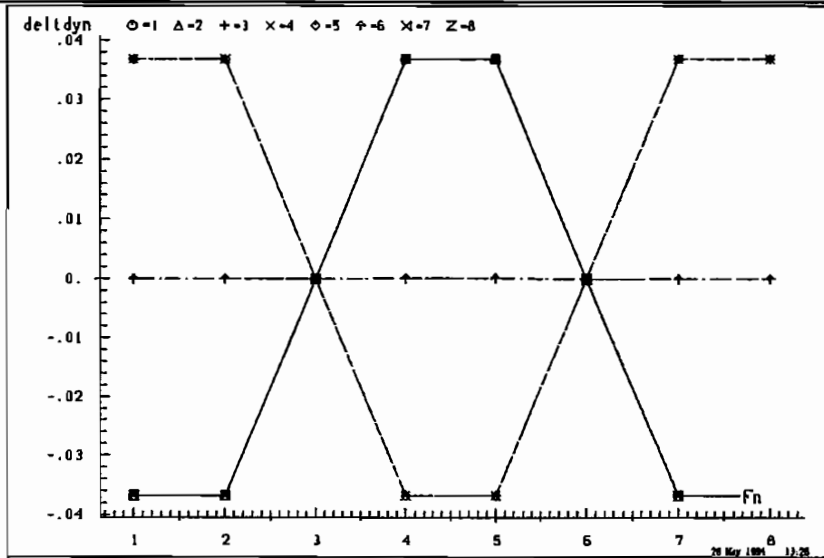
APHIMO f10m1 Eigenwert:35 Frequenz : 59.0294 Daempfung : -2.6289



APHIMO f10m1(f10) Eig:35(35) Fre: 59.0294(59.5969) Dae: -2.6289(-2.6797)

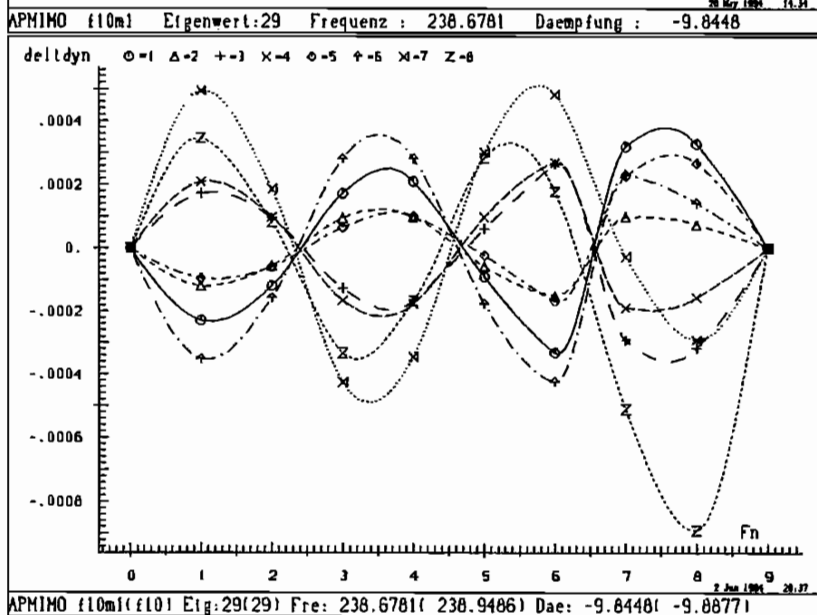
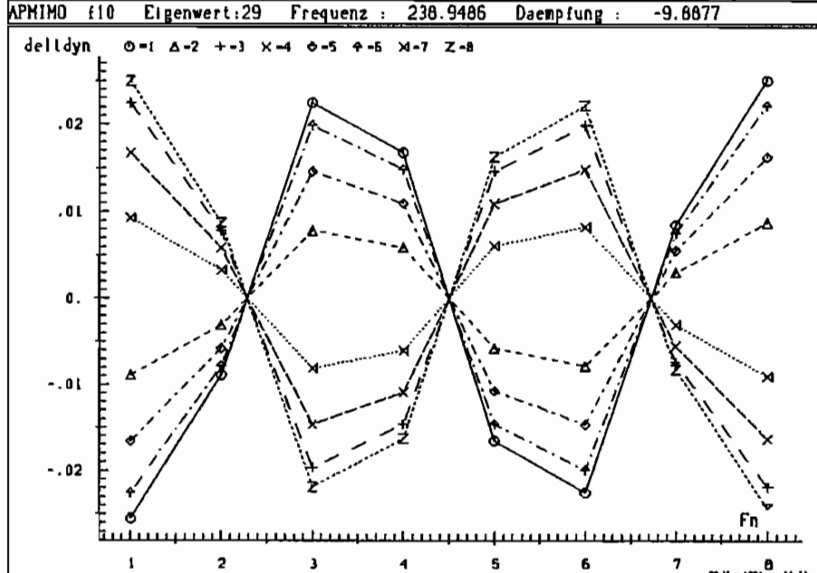
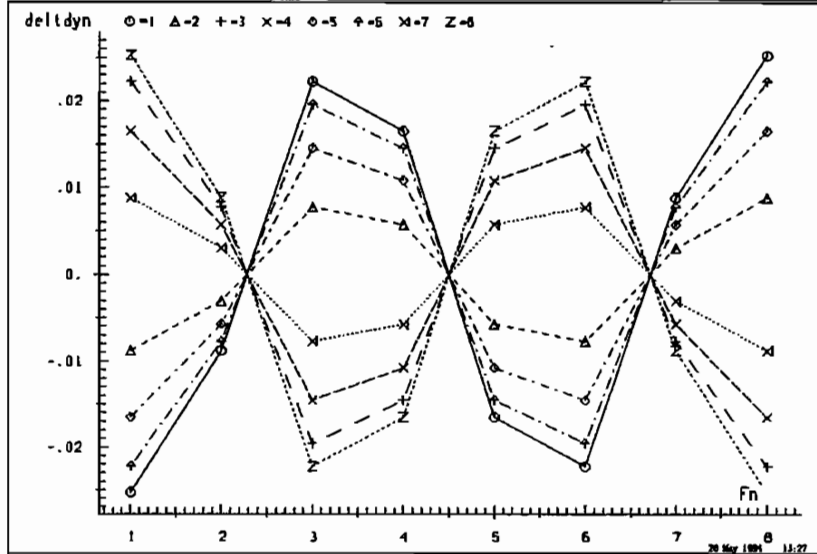
Berechnung B.5 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



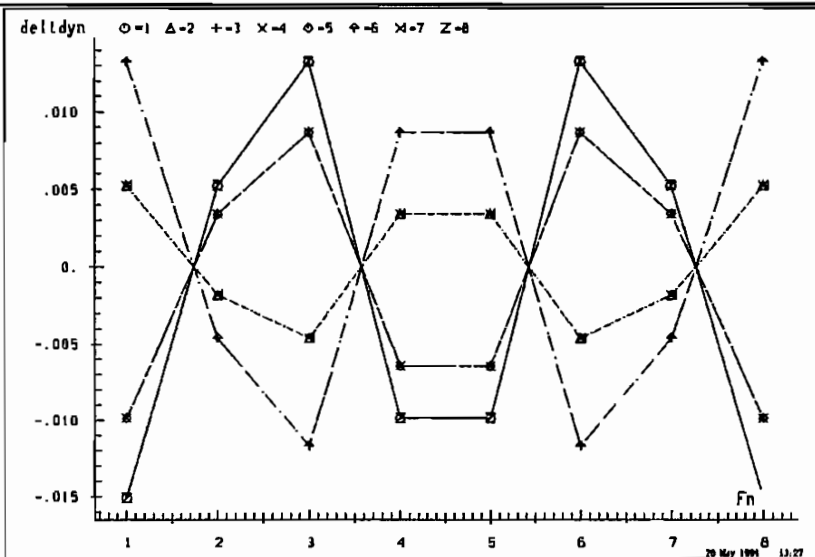
Berechnung B.6 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

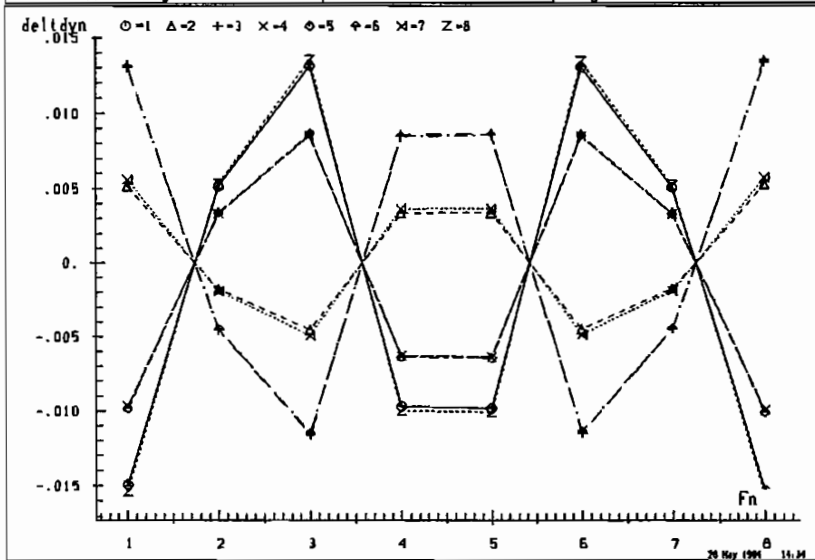


Berechnung B.7 Einflußgrößen f10 f10m1

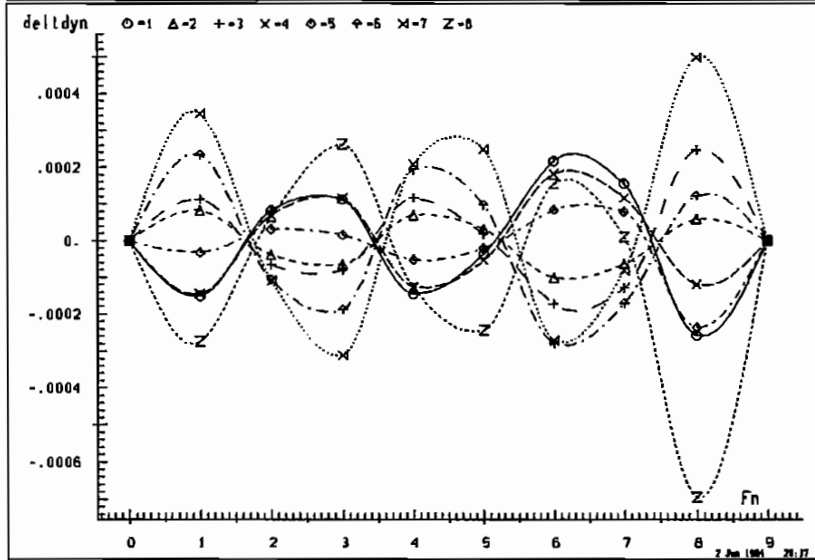
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APM10 f10 Eigenwert:27 Frequenz : 374.6351 Daempfung : -15.4731



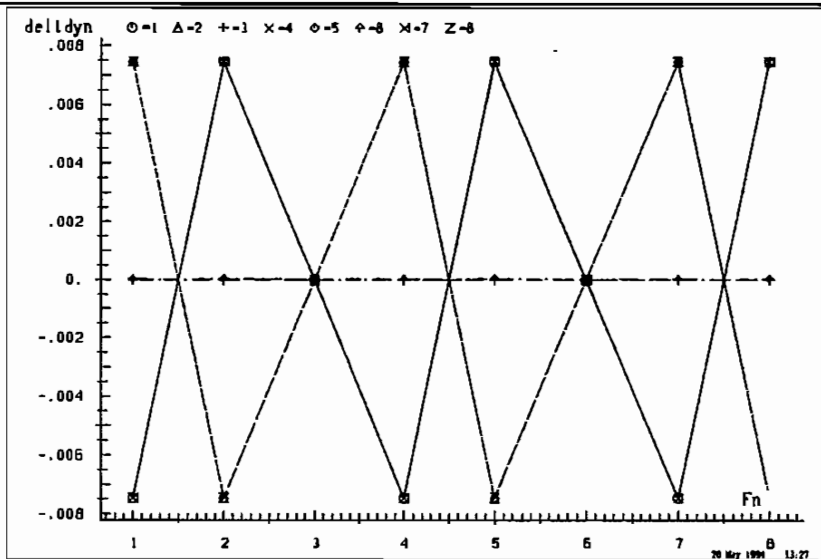
APM10 f10m1 Eigenwert:27 Frequenz : 374.1979 Daempfung : -15.4753



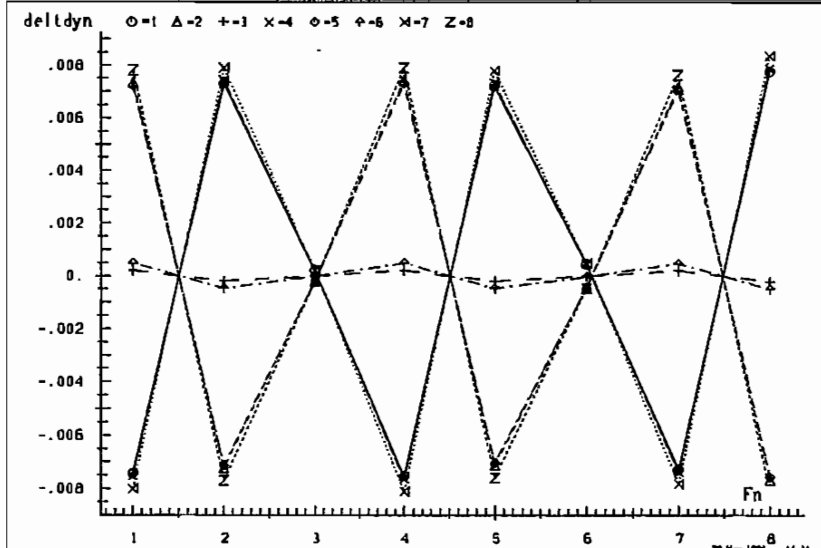
APM10 f10m1(f10) Eig:27(27) Fre: 374.1979(374.6351) Dae:-15.4753(-15.4731)

Berechnung B.8 Einflußgrößen f10 f10m1

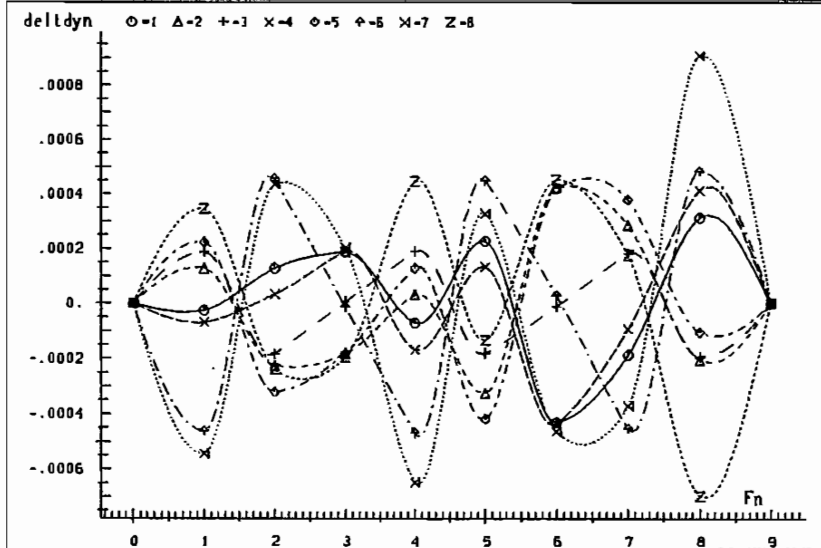
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO f10 Eigenwert:25 Frequenz : 542.6469 Daempfung : -22.5851



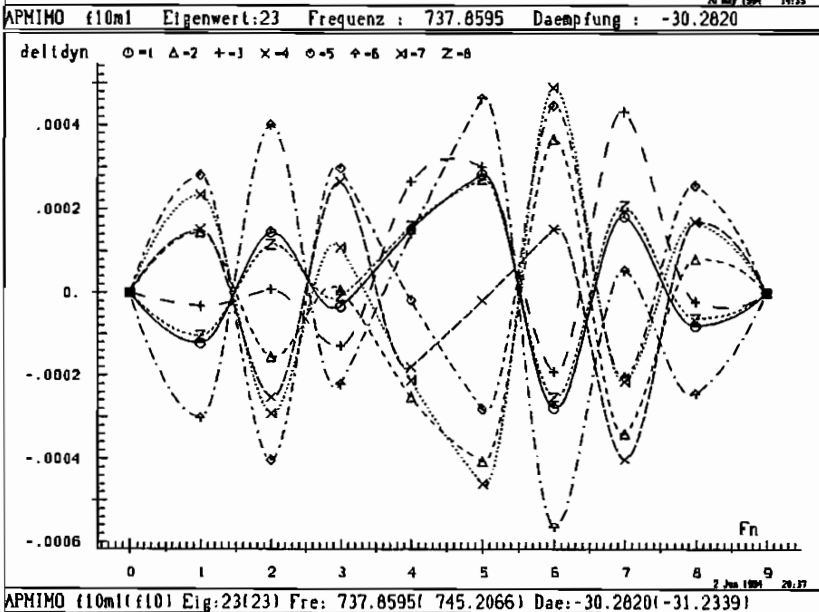
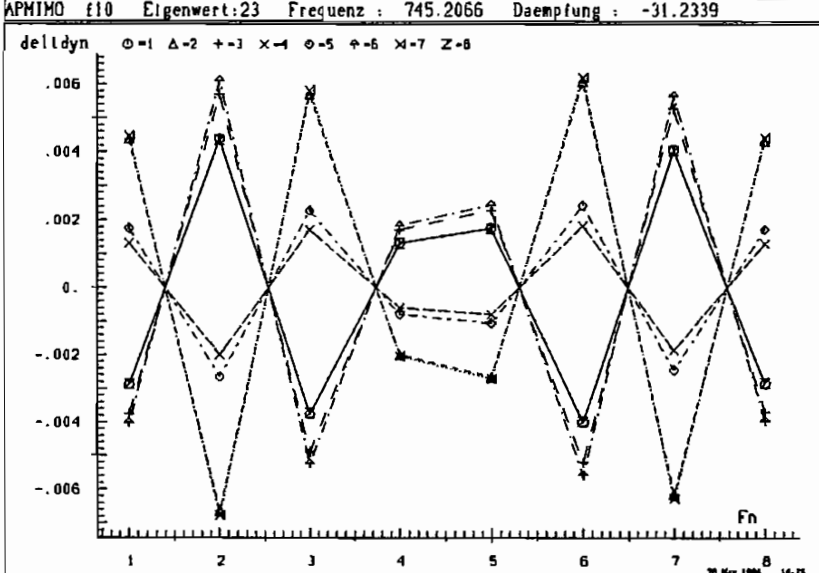
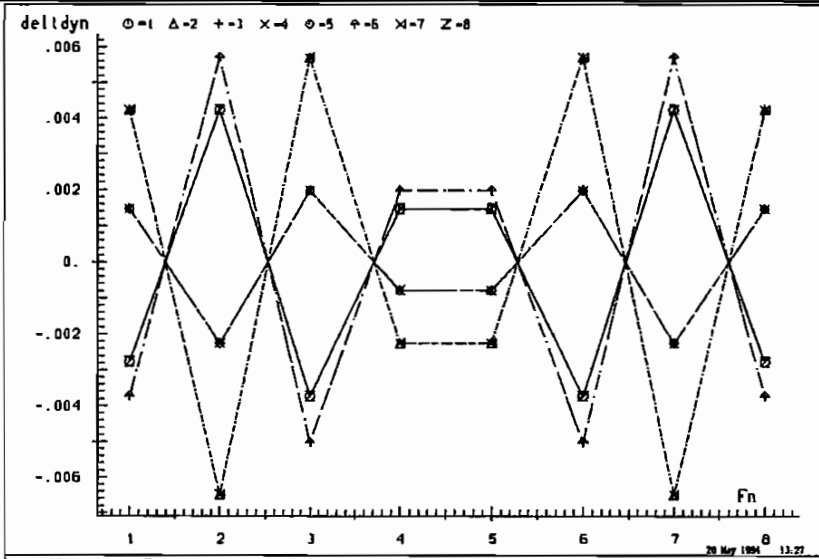
APMIMO f10m1 Eigenwert:25 Frequenz : 538.5078 Daempfung : -22.2663



APMIMO f10m1(f10) Eig:25(25) Fre: 538.5078(542.6469) Dae:-22.2663(-22.5851)

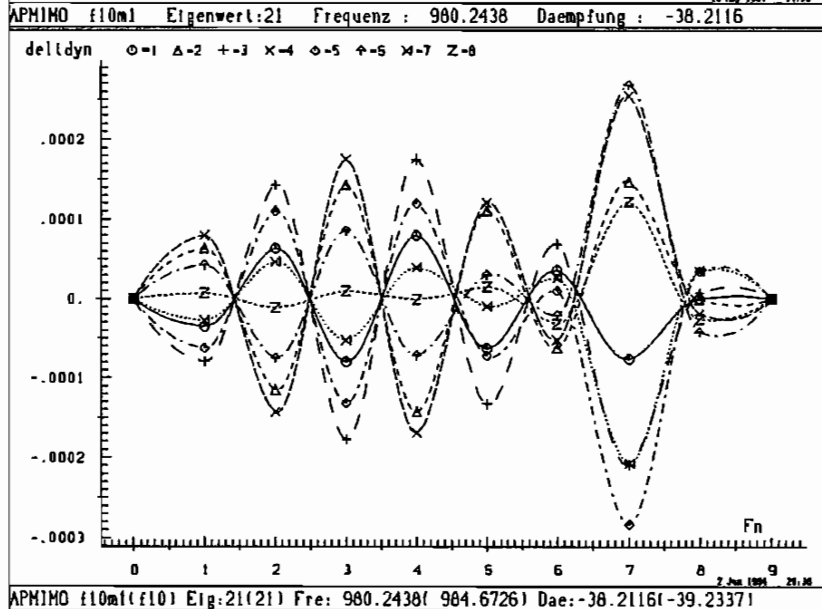
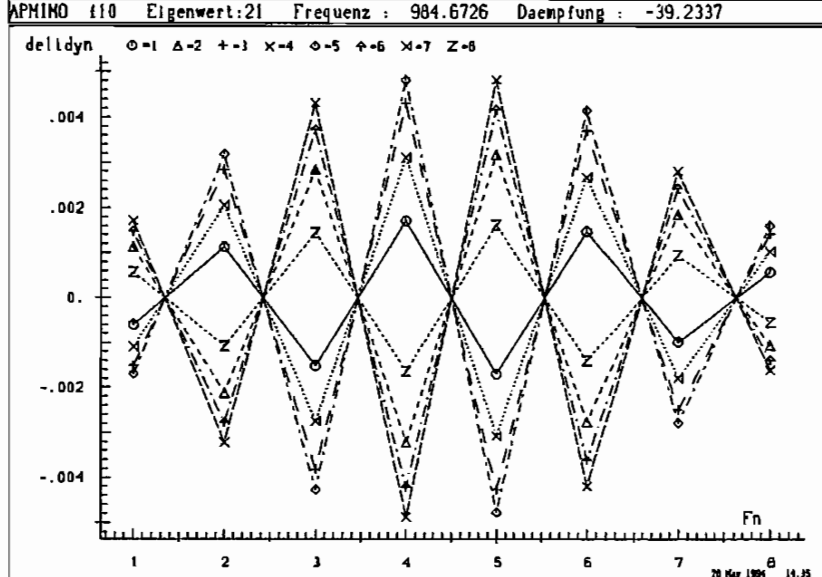
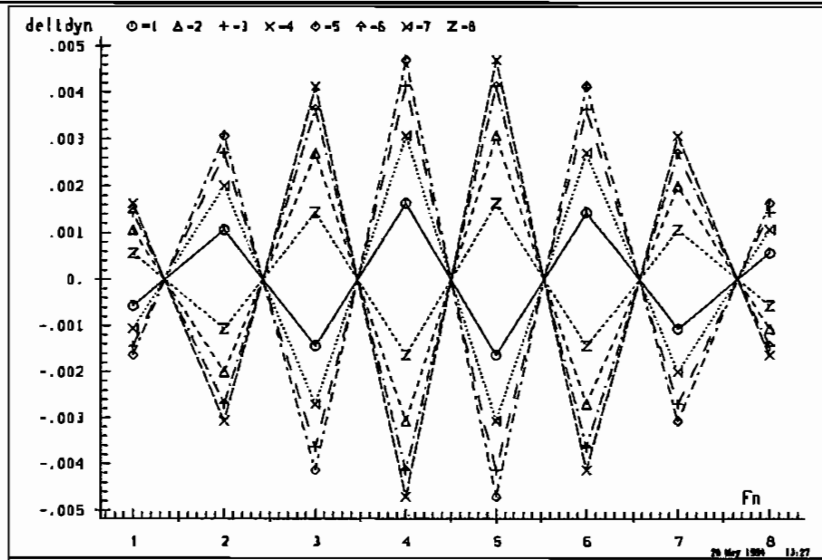
Berechnung B.9 Einflußgrößen f10 f10m1

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



Berechnung B.10 Einflußgrößen f_{10} f_{10m1}

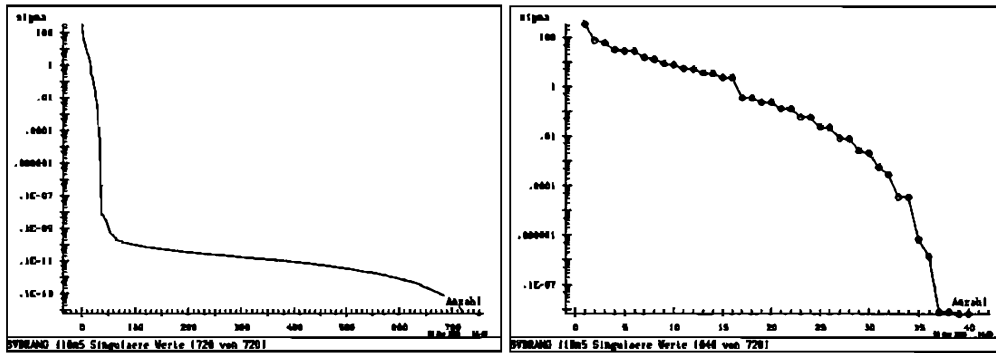
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



B.2 Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m5

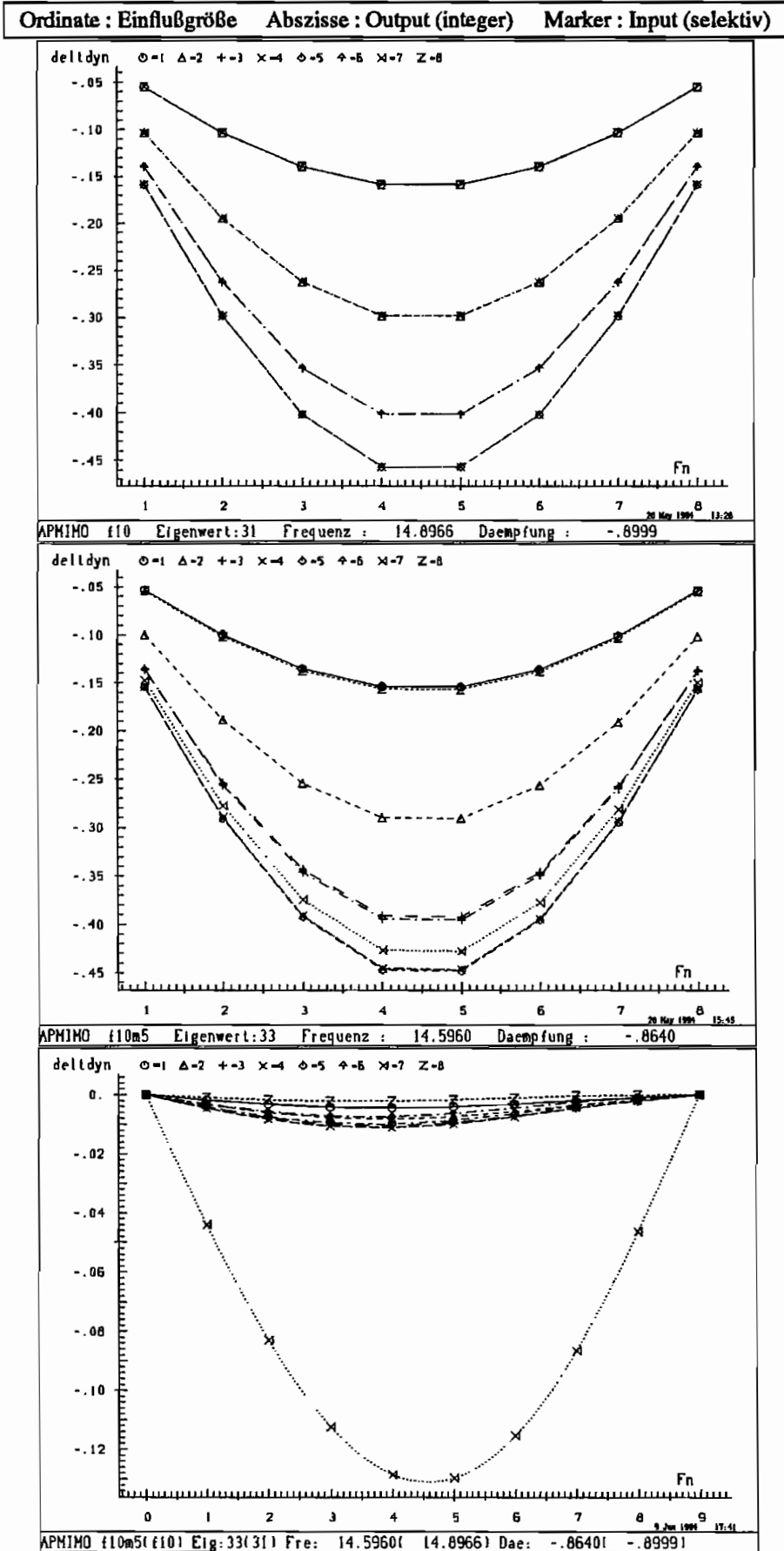
- Realisierung für ein System mit 8 Eingängen und 8 Ausgängen
- Nullmessung : f10
- Systemmessung : f10m5
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 5% an Knoten 7
- Messung an allen FEM Knotenpunkten
- Masse liegt an einem Knoten

Berechnung B.11 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m5



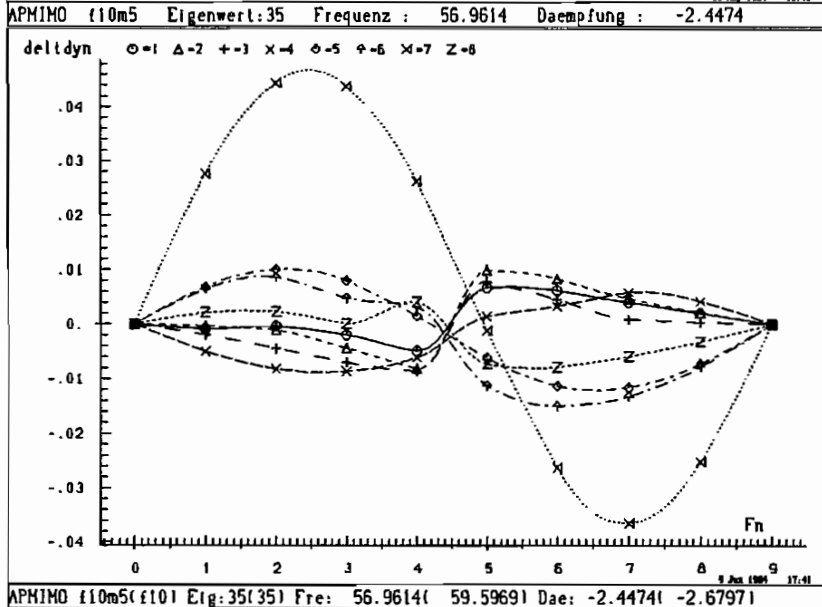
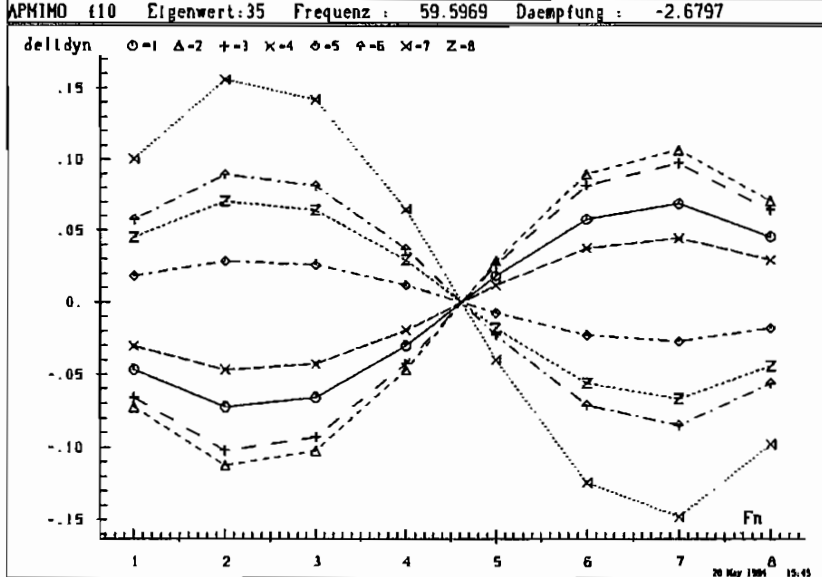
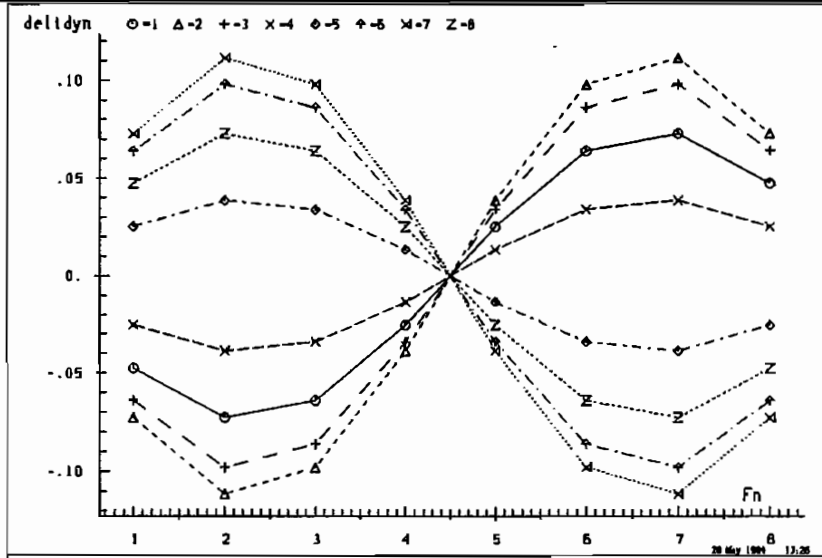
Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.44744	-357.89890	-56.96138
35	-2.44744	357.89890	56.96138
34	-.86402	-91.70916	-14.59597
33	-.86402	91.70916	14.59597
32	-5.26991	-816.74864	-129.98958
31	-5.26991	816.74864	129.98958
30	-9.70862	-1494.08477	-237.79098
29	-9.70862	1494.08477	237.79098
28	-15.48315	-2341.47660	-372.65757
27	-15.48315	2341.47660	372.65757
26	-21.14533	-3295.62550	-524.51509
25	-21.14533	3295.62550	524.51509
24	-27.82396	-4507.06621	-717.32187
23	-27.82396	4507.06621	717.32187
22	-36.04352	-6089.27924	-969.13889
21	-36.04352	6089.27924	969.13889
20	-132.67094	-8414.16739	-1339.15633
19	-132.67094	8414.16739	1339.15633
18	-120.78138	-10057.71514	-1600.73508
17	-120.78138	10057.71514	1600.73508
16	-149.04316	-12311.31061	-1959.40594
15	-149.04316	12311.31061	1959.40594
14	-197.26177	-15348.81051	-2442.83906
13	-197.26177	15348.81051	2442.83906
12	-281.02308	-19108.62671	-3041.23240
11	-281.02308	19108.62671	3041.23240
10	-404.92303	-23231.72471	-3697.44382
9	-404.92303	23231.72471	3697.44382
8	-557.79304	-27638.73969	-4398.84204
7	-557.79304	27638.73969	4398.84204
6	-744.81538	-32592.66444	-5187.28365
5	-744.81538	32592.66444	5187.28365
4	-928.68363	-38548.30534	-6135.15334
3	-928.68363	38548.30534	6135.15334
2	-936.31572	-36873.61448	-5868.61801
1	-936.31572	36873.61448	5868.61801

Berechnung B.12 Einflußgrößen f10 f10m5

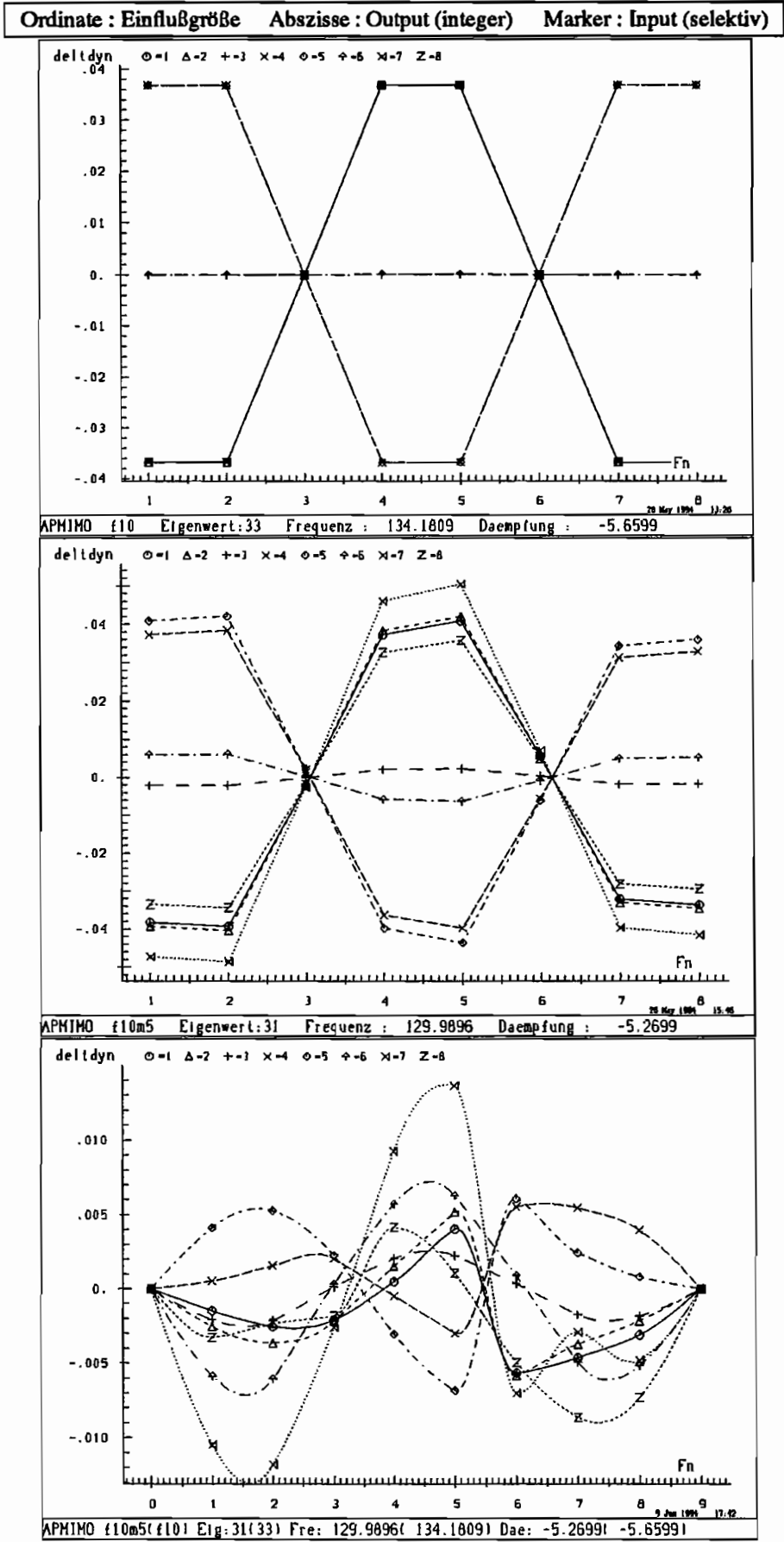


Berechnung B.13 Einflußgrößen f10 f10m5

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

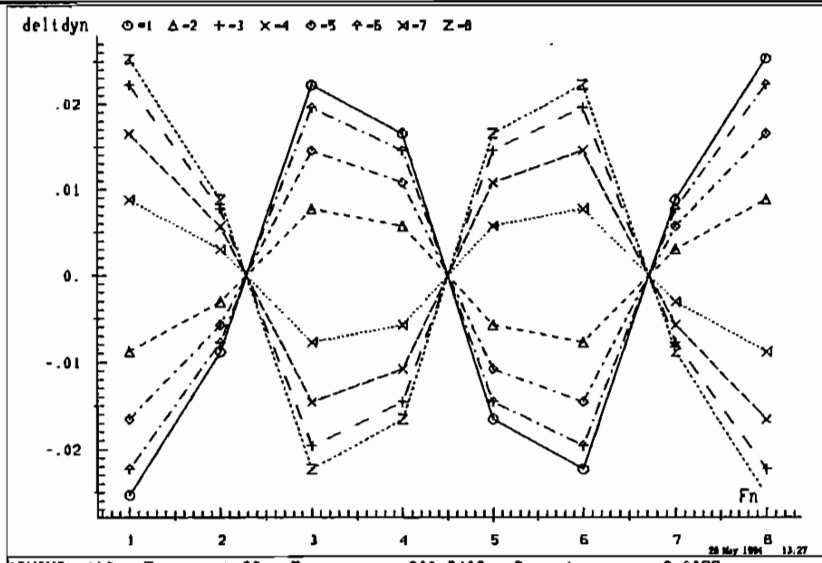


Berechnung B.14 Einflußgrößen f10 f10m5

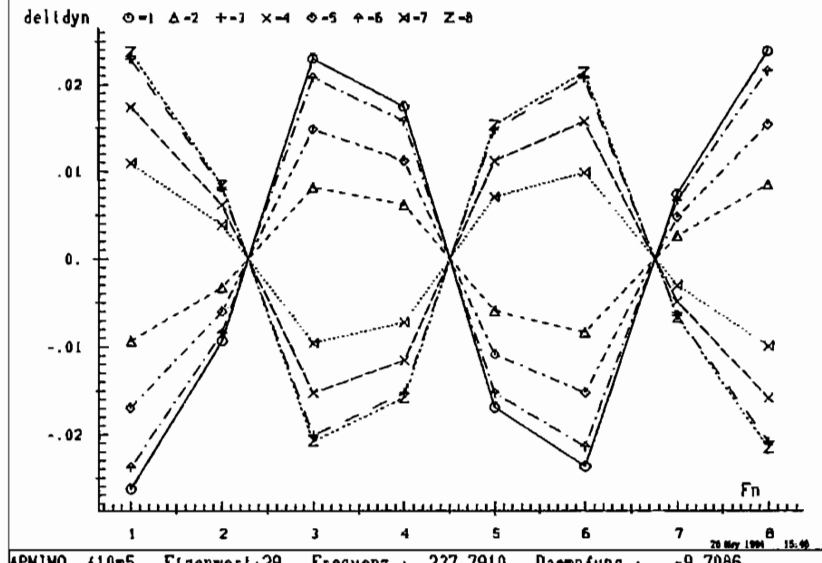


Berechnung B.15 Einflußgrößen f10 f10m5

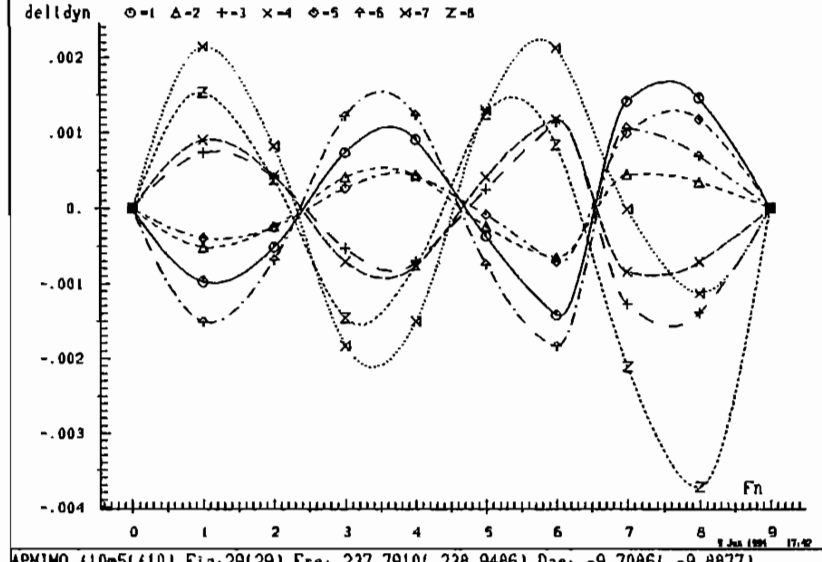
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APKIMO f10 Eigenwert:29 Frequenz : 238.9486 Daempfung : -9.8877



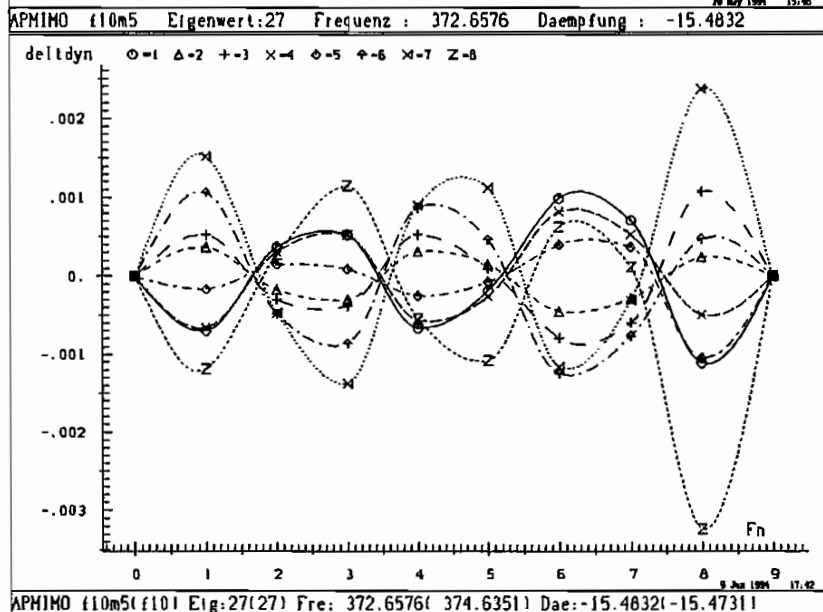
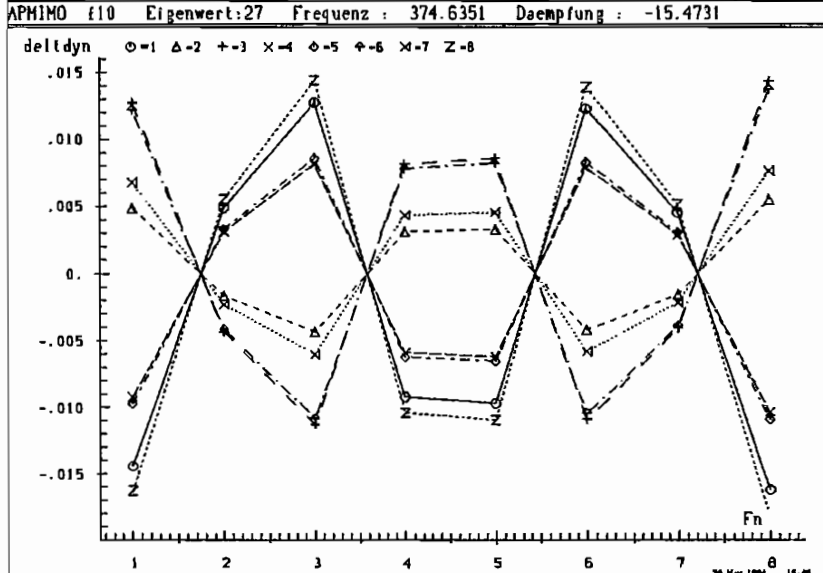
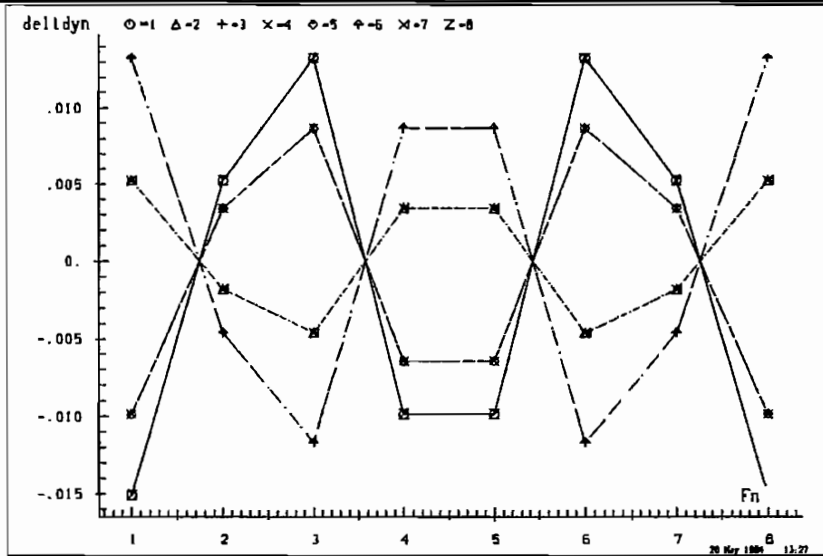
APKIMO f10m5 Eigenwert:29 Frequenz : 237.7910 Daempfung : -9.7086



APKIMO f10m5(f10) Eig:29(29) Fre: 237.7910(238.9486) Dae: -9.7086(-9.8877)

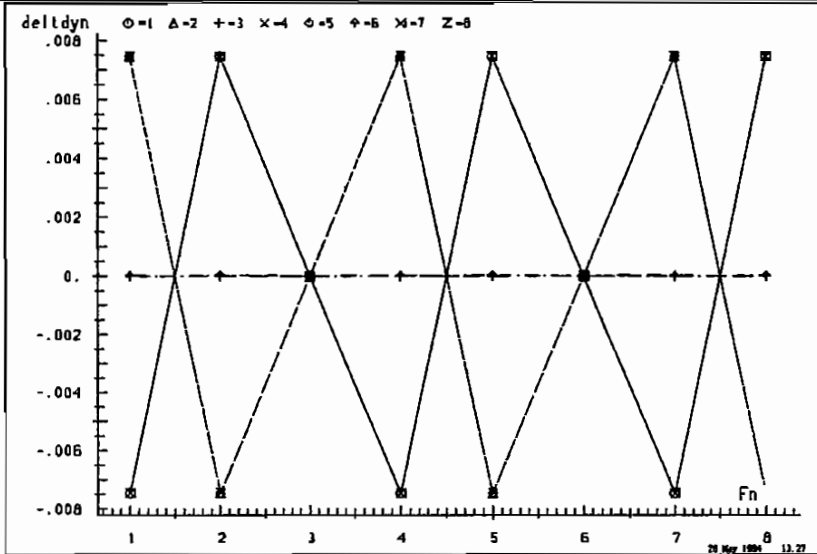
Berechnung B.16 Einflußgrößen f10 f10m5

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

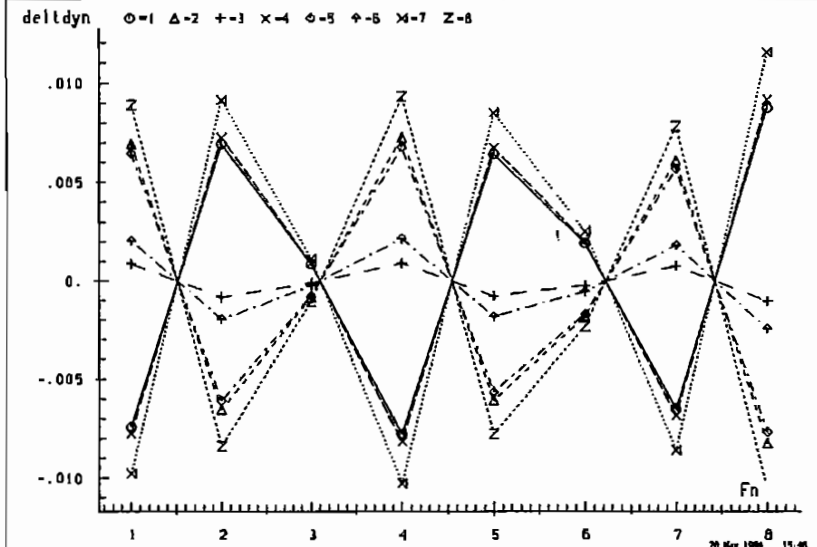


Berechnung B.17 Einflußgrößen f10 f10m5

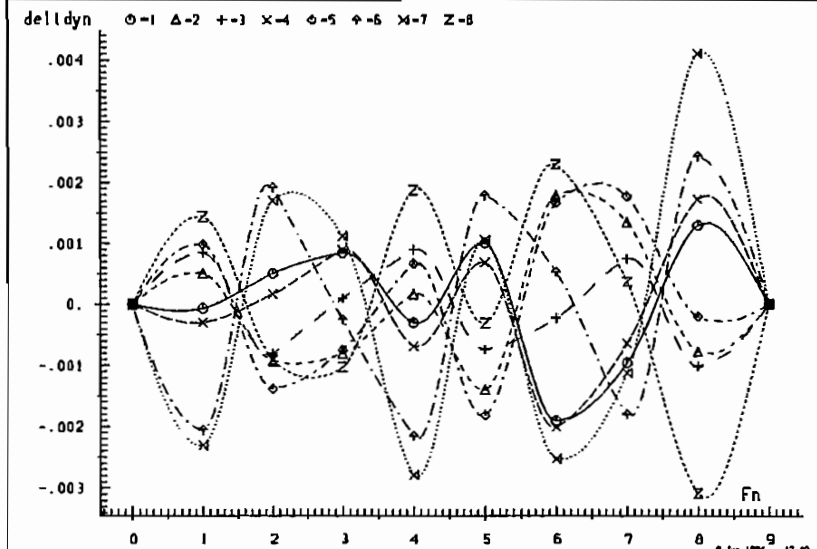
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:25 Frequenz : 542.6469 Daempfung : -22.5851



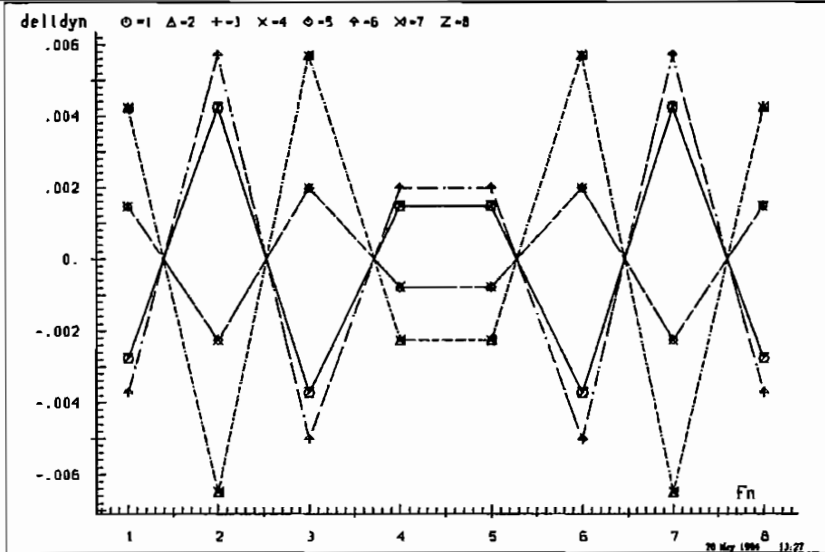
APHIMO f10m5 Eigenwert:25 Frequenz : 524.5151 Daempfung : -21.1453



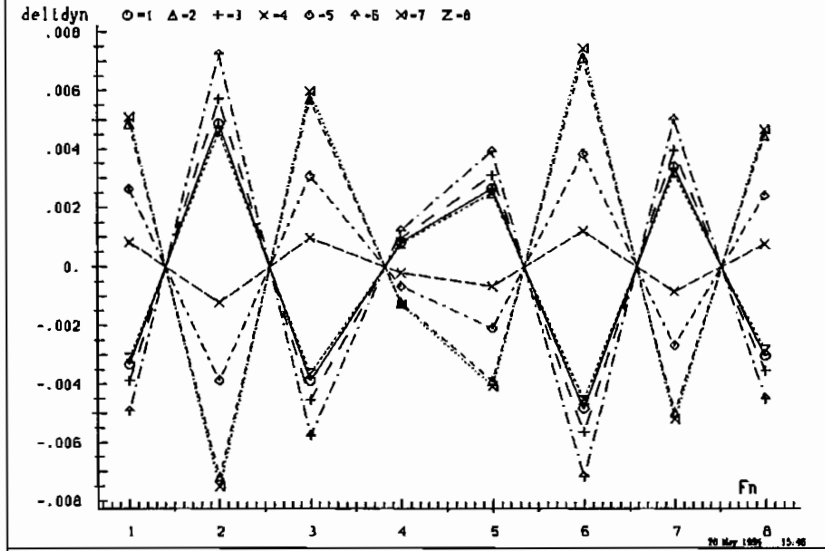
APHIMO f10m5(f10) Eig:25(25) Fre: 524.5151(542.6469) Dae:-21.1453|-22.5851|

Berechnung B.18 Einflußgrößen f10 f10m5

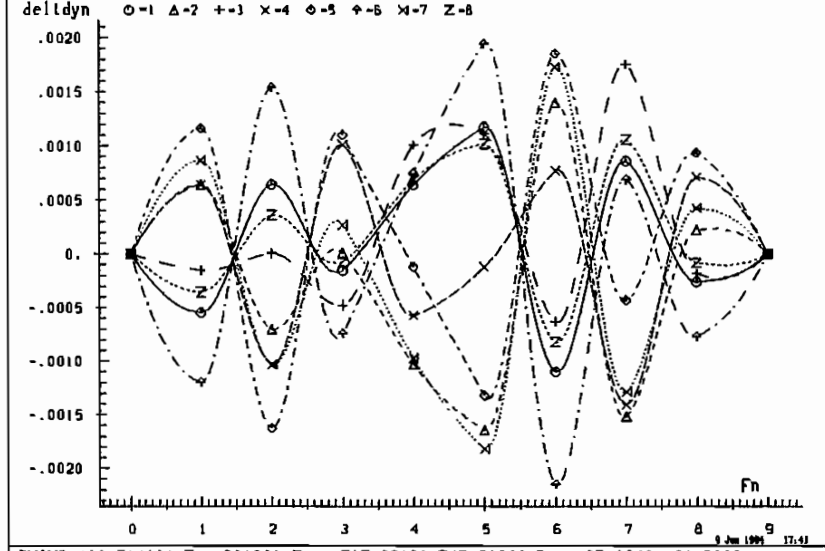
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:23 Frequenz : 745.2066 Daempfung : -31.2339



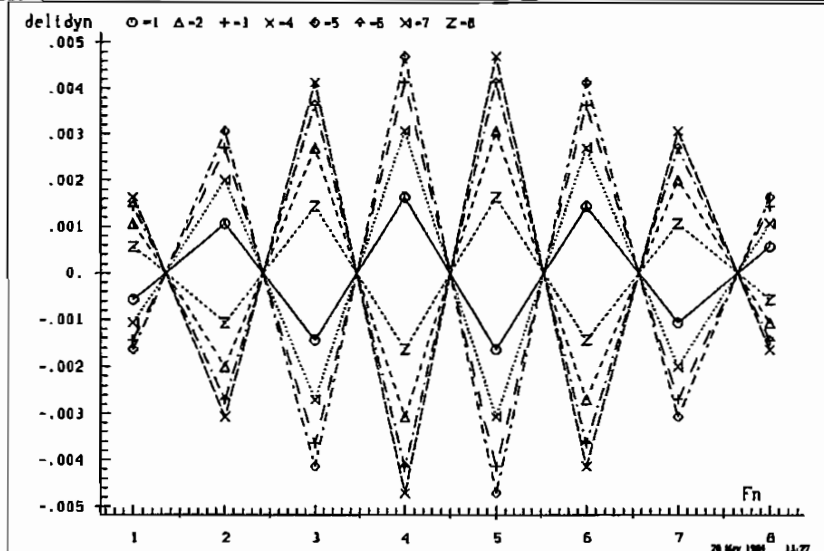
APHIMO f10m5 Eigenwert:23 Frequenz : 717.3219 Daempfung : -27.8240



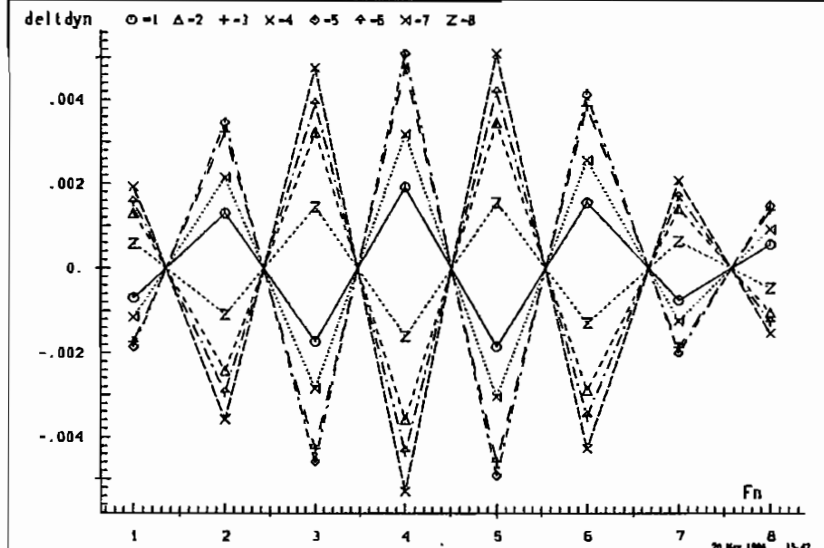
APHIMO f10m5(f10) Eig:23(23) Fre: 717.3219(745.2066) Dae:-27.8240(-31.2339)

Berechnung B.19 Einflußgrößen f10 f10m5

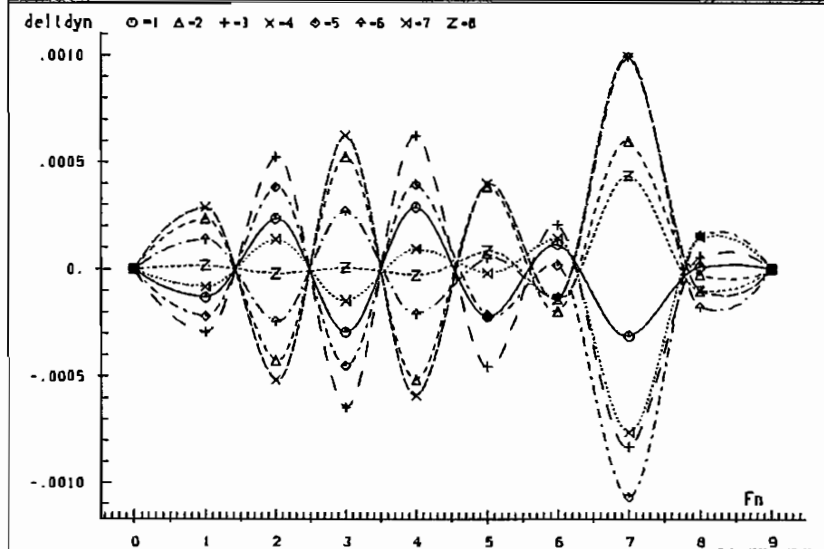
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:21 Frequenz : 984.6726 Daempfung : -39.2337



APHIMO f10m5 Eigenwert:21 Frequenz : 969.1389 Daempfung : -36.0435

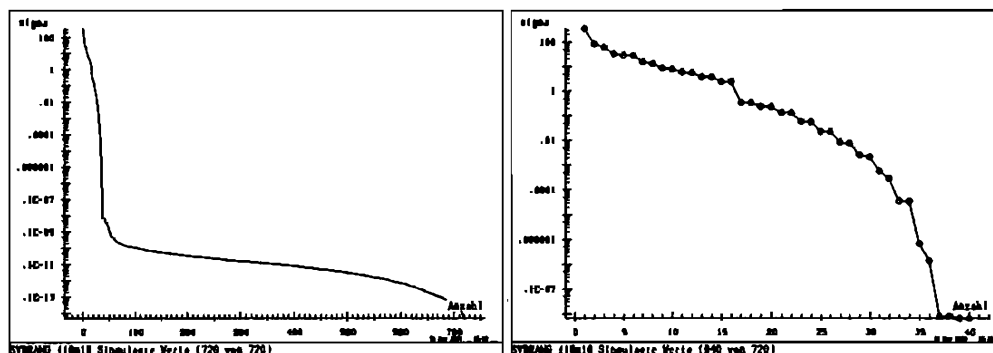


APHIMO f10m5(f10) Eig:21(21) Fre: 969.1389(984.6726) Dae:-36.0435(-39.2337)

B.3 Realisierung 8x8 , Simulation FEM f10 f10m10

- Realisierung für ein System mit 8 Eingängen und 8 Ausgängen
- Nullmessung : f10
- Systemmessung : f10m10
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 10% an Knoten 7
- Messung an allen FEM Knotenpunkten
- Masse liegt an einem Knoten

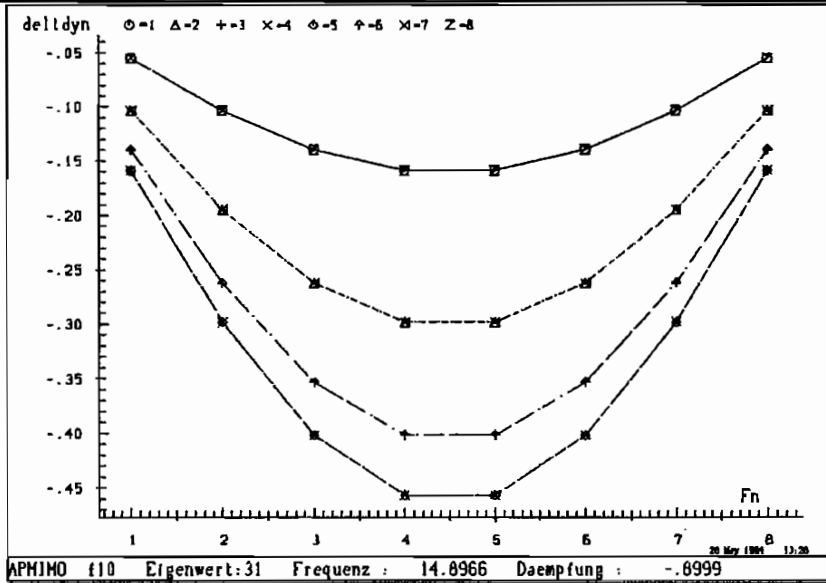
Berechnung B.20 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m10



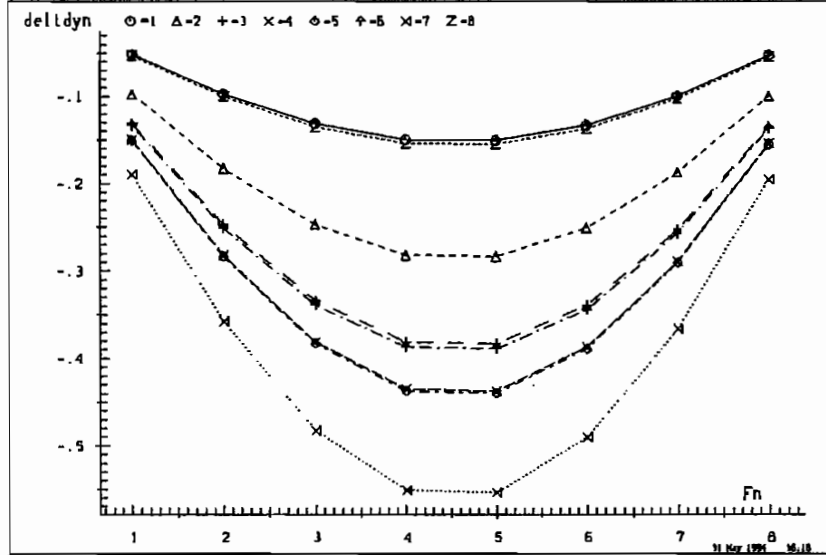
Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.26286	-344.11151	-54.76705
35	-2.26286	344.11151	54.76705
34	-.83012	-89.90676	-14.30911
33	-.83012	89.90676	14.30911
32	-5.02084	-798.19602	-127.03684
31	-5.02084	798.19602	127.03684
30	-9.59204	-1489.04211	-236.98841
29	-9.59204	1489.04211	236.98841
28	-15.49146	-2331.75553	-371.11042
27	-15.49146	2331.75553	371.11042
26	-20.11922	-3215.47295	-511.75842
25	-20.11922	3215.47295	511.75842
24	-26.37067	-4417.00604	-702.98835
23	-26.37067	4417.00604	702.98835
22	-34.99300	-6045.52427	-962.17507
21	-34.99300	6045.52427	962.17507
20	-132.67068	-8414.17312	-1339.15724
19	-132.67068	8414.17312	1339.15724
18	-124.09965	-9983.41885	-1588.91046
17	-124.09965	9983.41885	1588.91046
16	-148.39743	-12144.67667	-1932.88532
15	-148.39743	12144.67667	1932.88532
14	-194.44118	-15241.66386	-2425.78614
13	-194.44118	15241.66386	2425.78614
12	-279.47434	-19088.83055	-3038.08174
11	-279.47434	19088.83055	3038.08174
10	-406.52584	-23205.87013	-3693.32894
9	-406.52584	23205.87013	3693.32894
8	-556.53630	-27497.53606	-4376.36879
7	-556.53630	27497.53606	4376.36879
6	-740.59323	-32493.97442	-5171.57665
5	-740.59323	32493.97442	5171.57665
4	-928.69373	-38548.34996	-6135.16044
3	-928.69373	38548.34996	6135.16044
2	-934.83872	-36860.29696	-5866.49846
1	-934.83872	36860.29696	5866.49846

Berechnung B.21 Einflußgrößen f10 f10m10

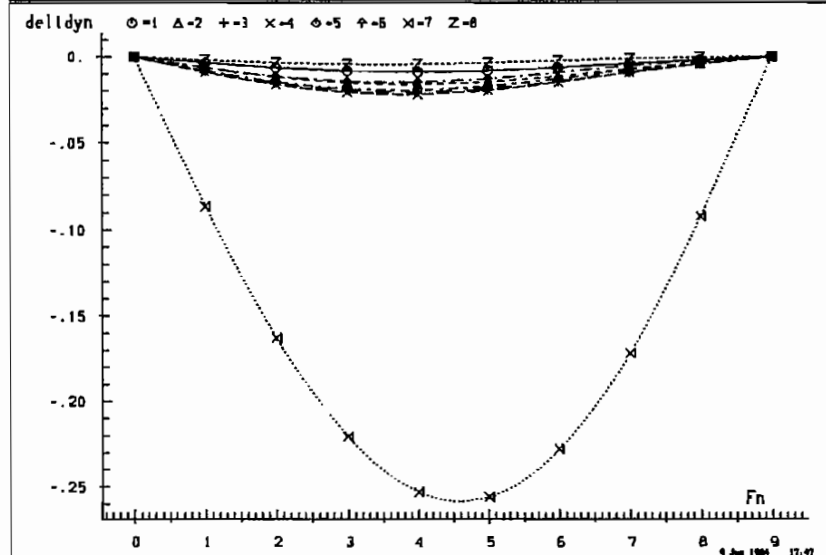
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:31 Frequenz : 14.8966 Daempfung : -.8999

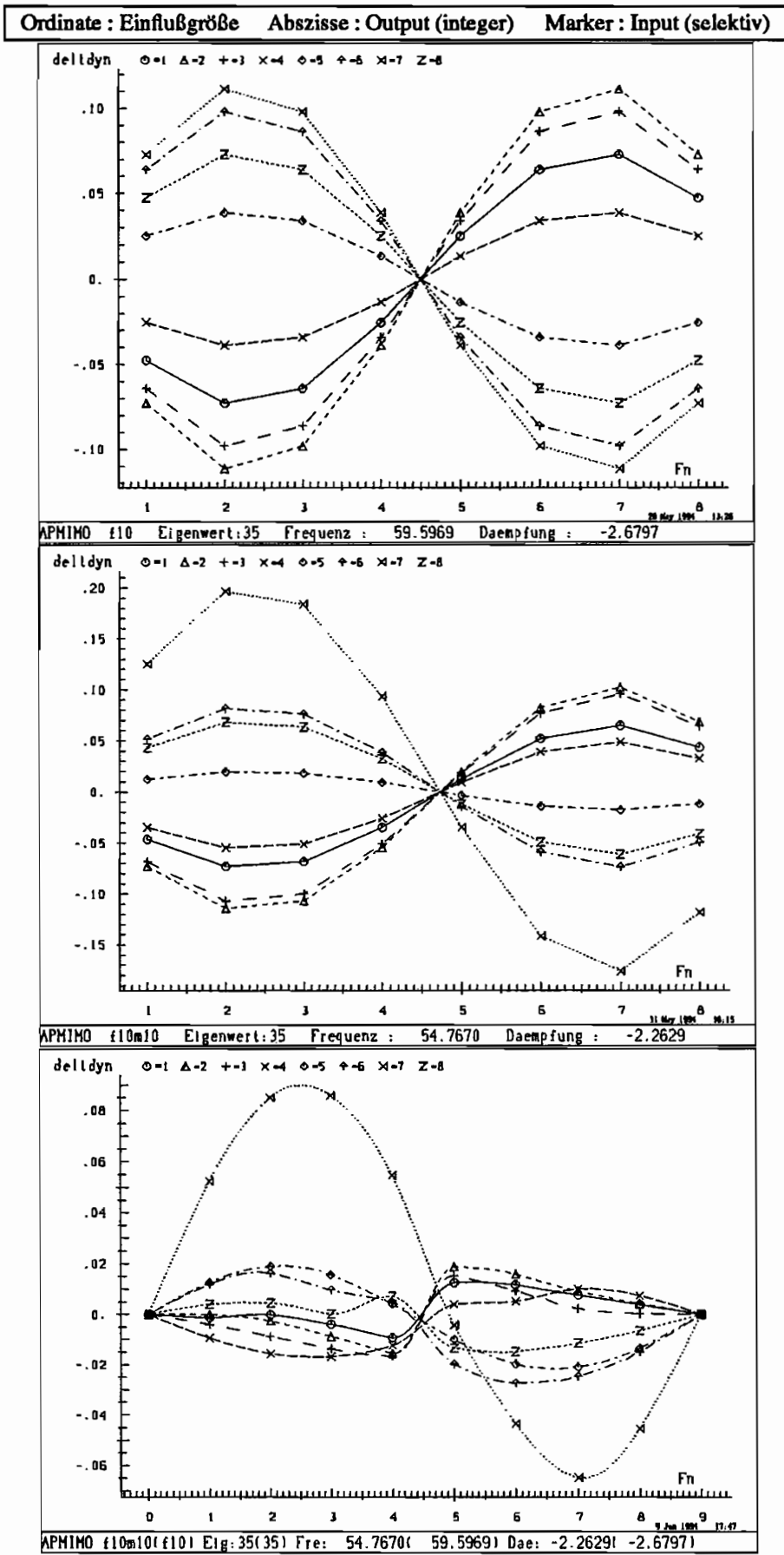


APHIMO f10m10 Eigenwert:33 Frequenz : 14.3091 Daempfung : -.8301



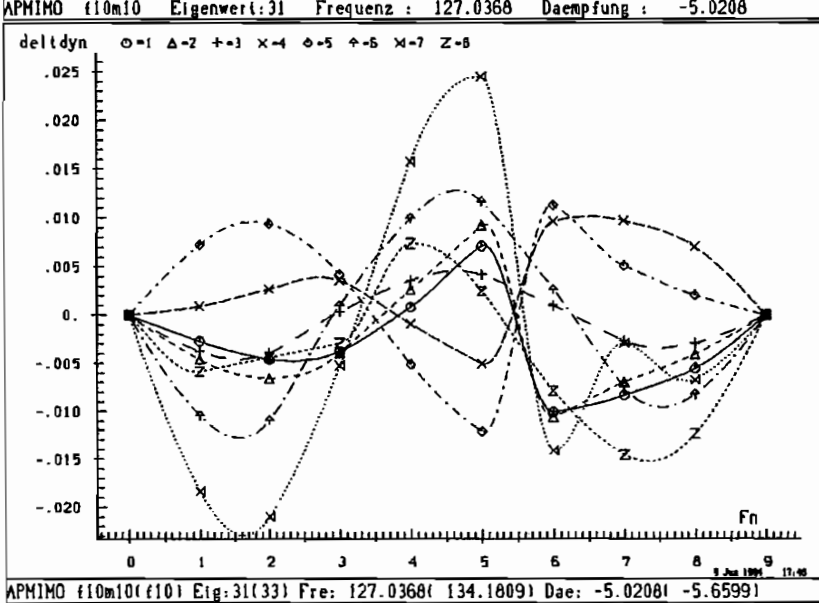
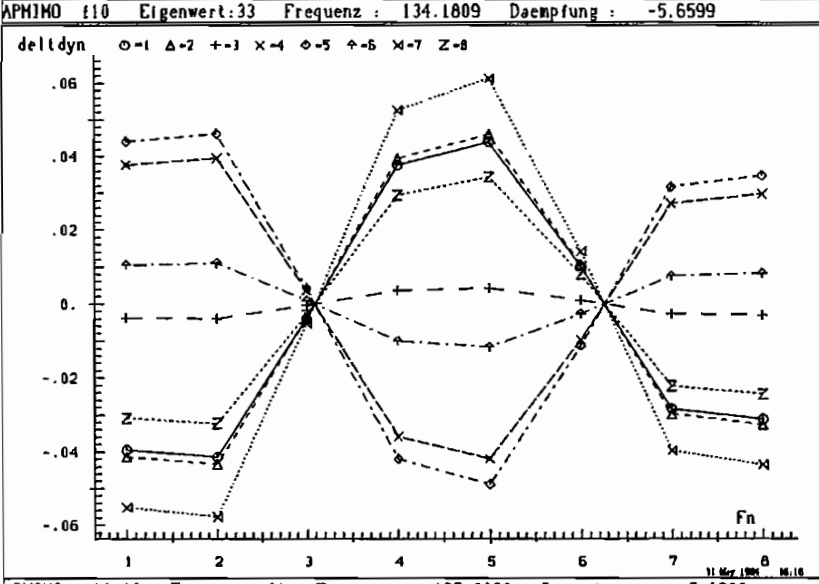
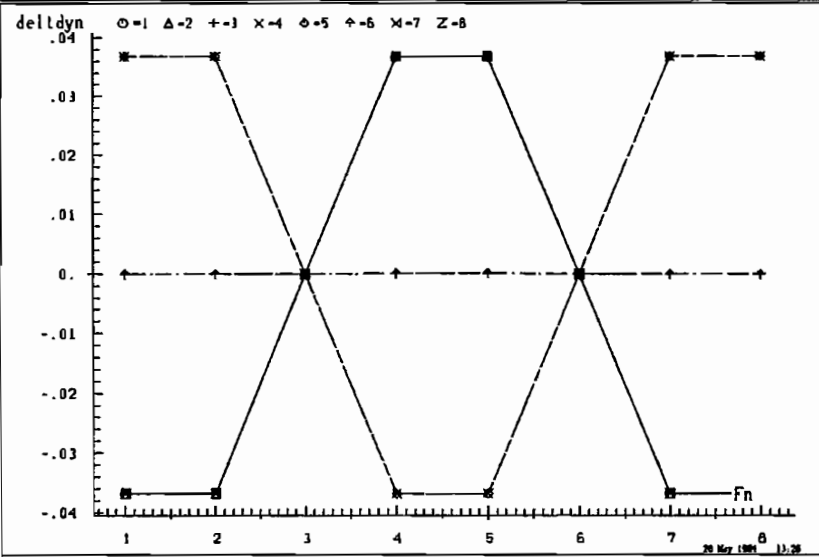
APHIMO f10m10(f10) Eig:33(31) Fre: 14.3091(14.8966) Dae: -.8301(-.8999)

Berechnung B.22 Einflußgrößen f10 f10m10



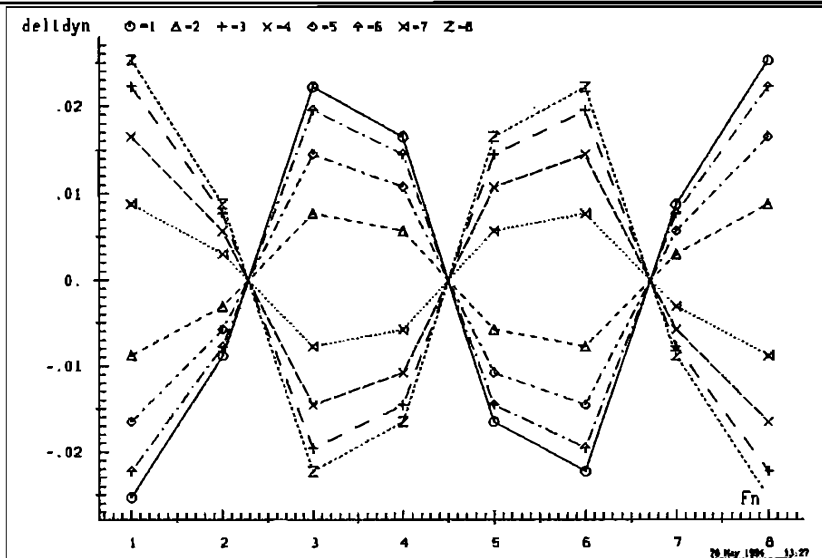
Berechnung B.23 Einflußgrößen f10 f10m10

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

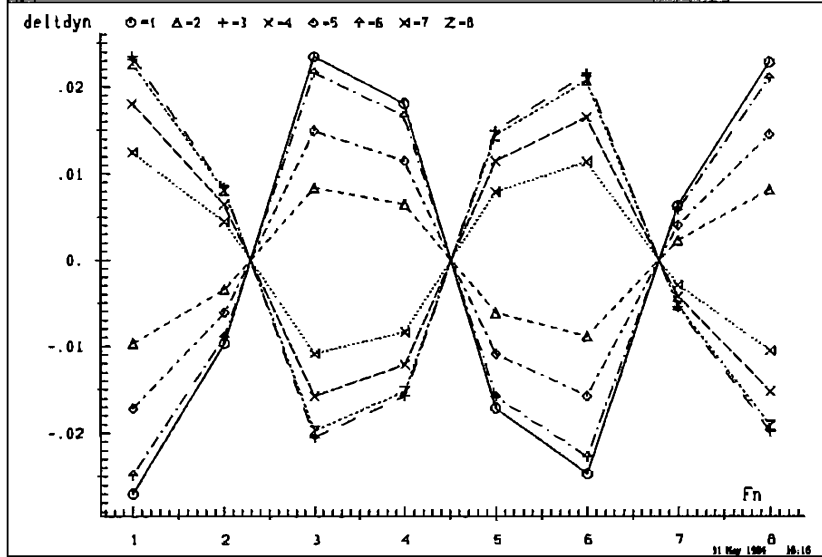


Berechnung B.24 Einflußgrößen f10 f10m10

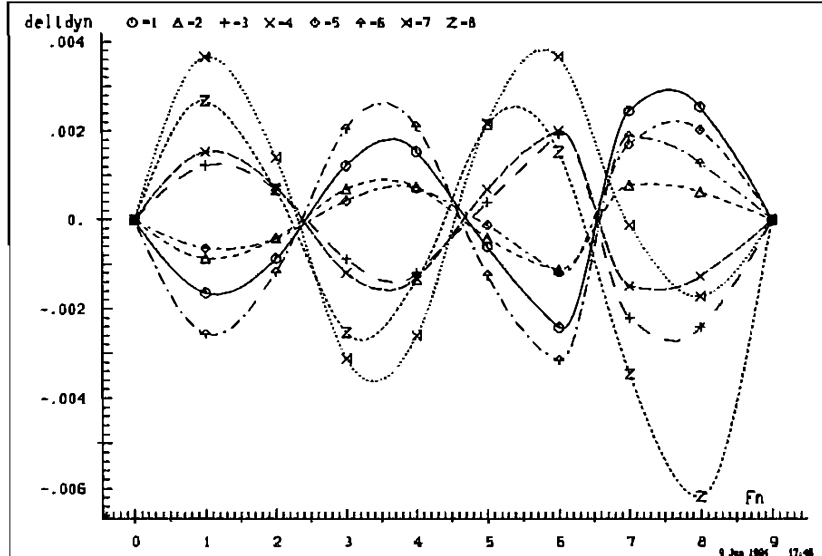
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO f10 Eigenwert:29 Frequenz : 238.9486 Daempfung : -9.8877



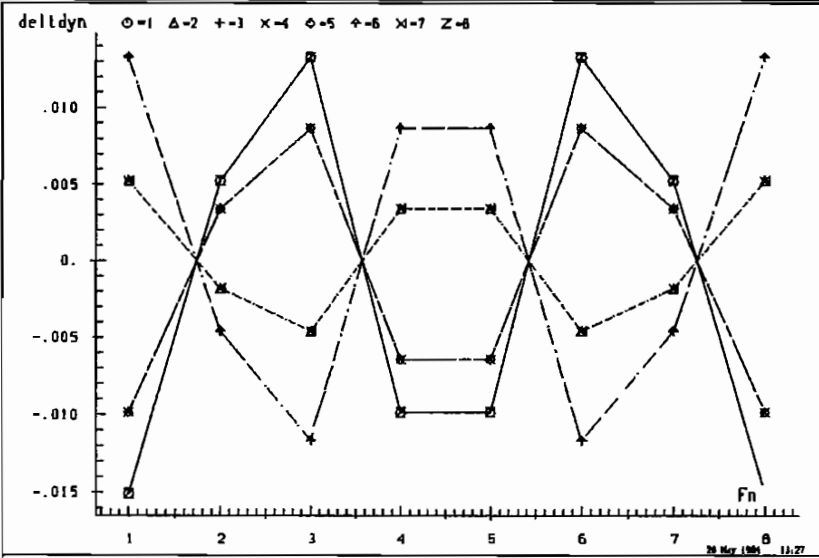
APMIMO f10m10 Eigenwert:29 Frequenz : 236.9884 Daempfung : -9.5920



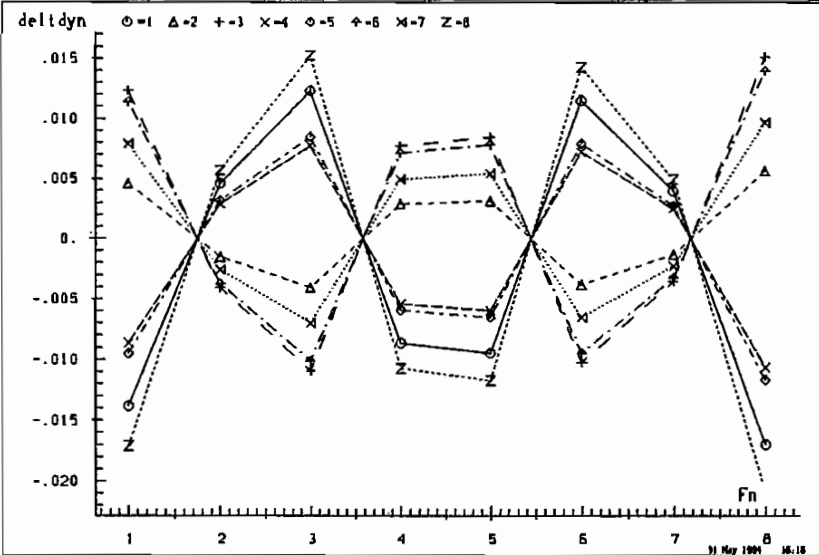
APMIMO f10m10(f10) Eig:29(29) Fre: 236.9884(238.9486) Dae: -9.5920(-9.8877)

Berechnung B.25 Einflußgrößen f10 f10m10

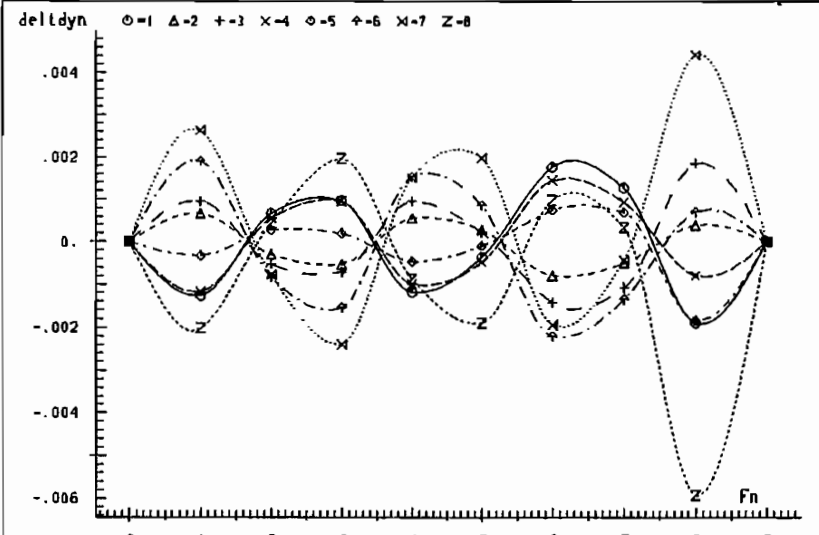
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f10 Eigenwert:27 Frequenz : 374.6351 Daempfung : -15.4731



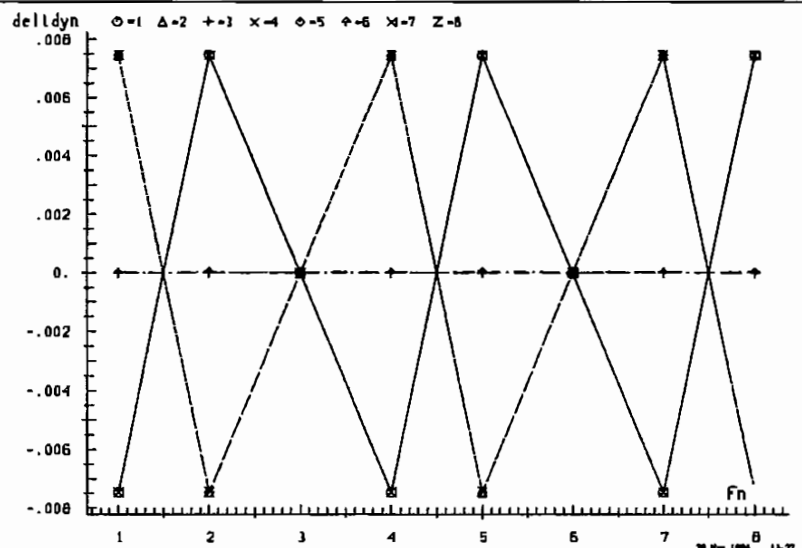
APHIMO f10m10 Eigenwert:27 Frequenz : 371.1104 Daempfung : -15.4915



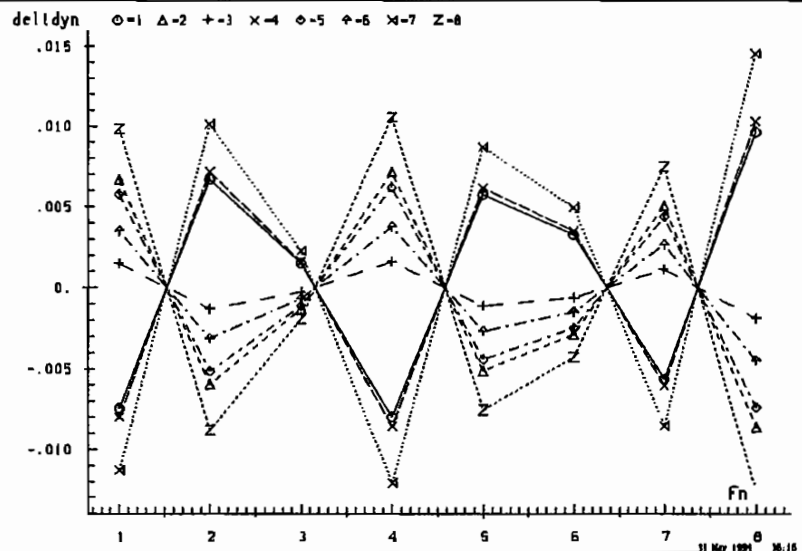
APHIMO f10m10(f10) Eig:27(27) Fre: 371.1104(374.6351) Dae:-15.4915(-15.4731)

Berechnung B.26 Einflußgrößen f10 f10m10

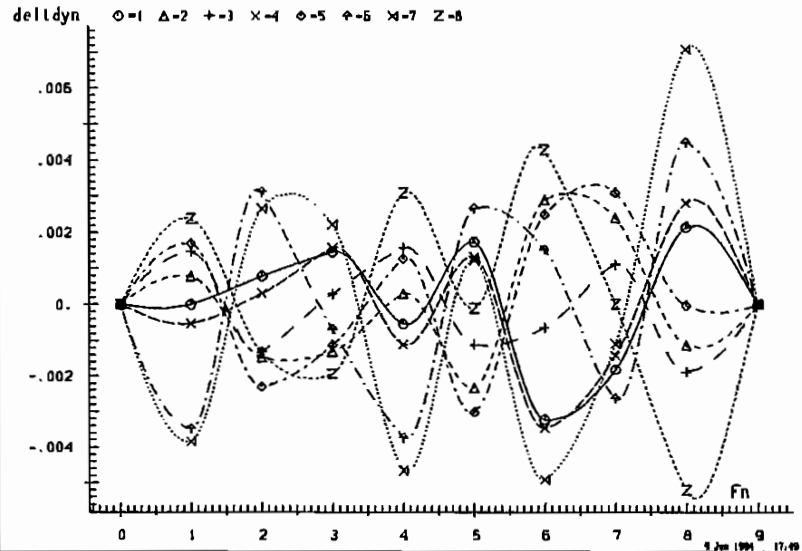
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APM10 f10 Eigenwert:25 Frequenz : 542.6469 Daempfung : -22.5851



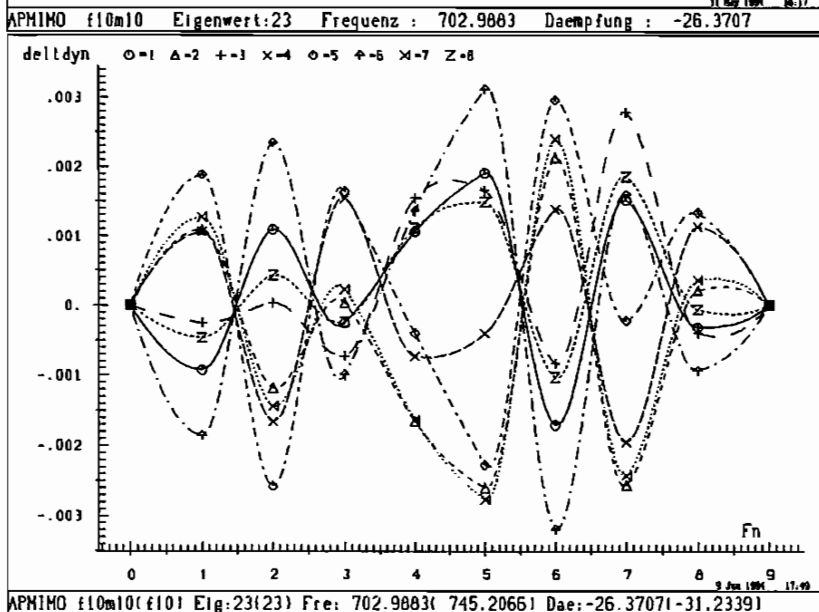
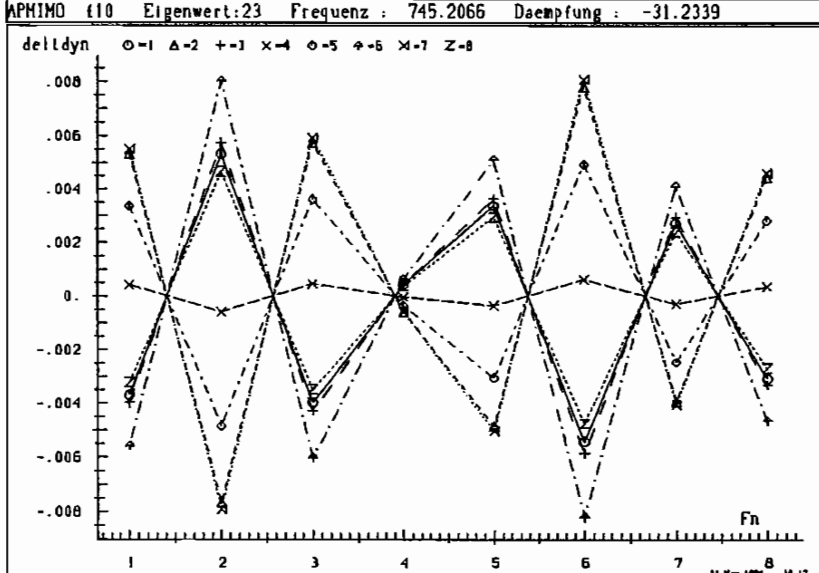
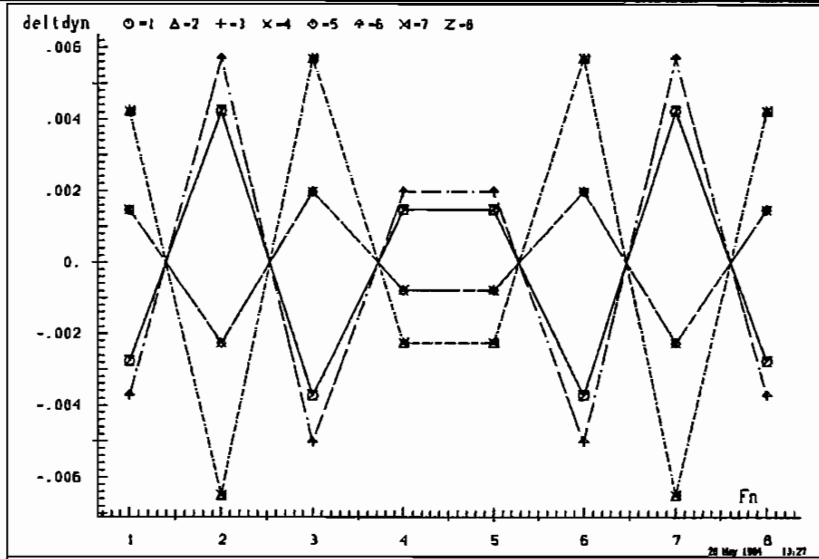
APM10 f10m10 Eigenwert:25 Frequenz : 511.7584 Daempfung : -20.1192



APM10 f10m10(f10) Eig:25(25) Fre: 511.7584(542.6469) Dae:-20.1192(-22.5851)

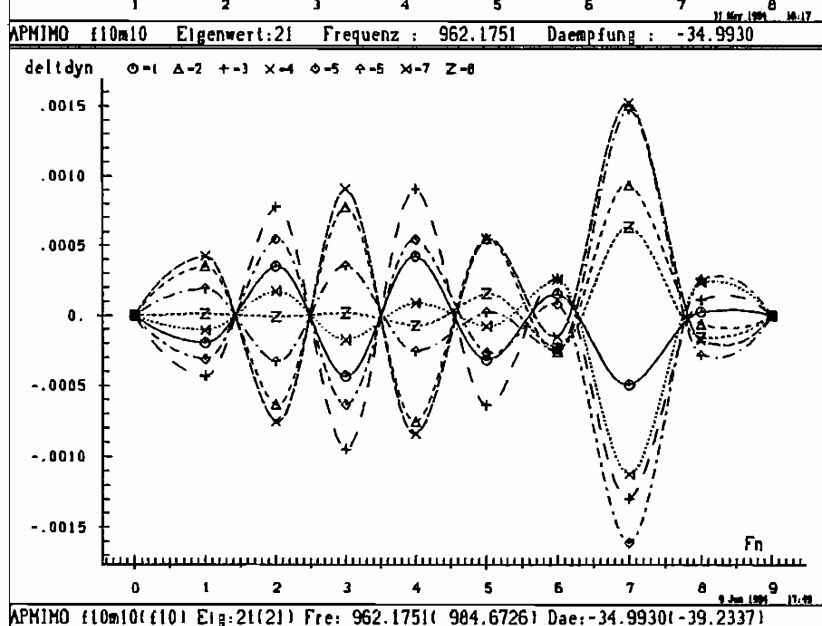
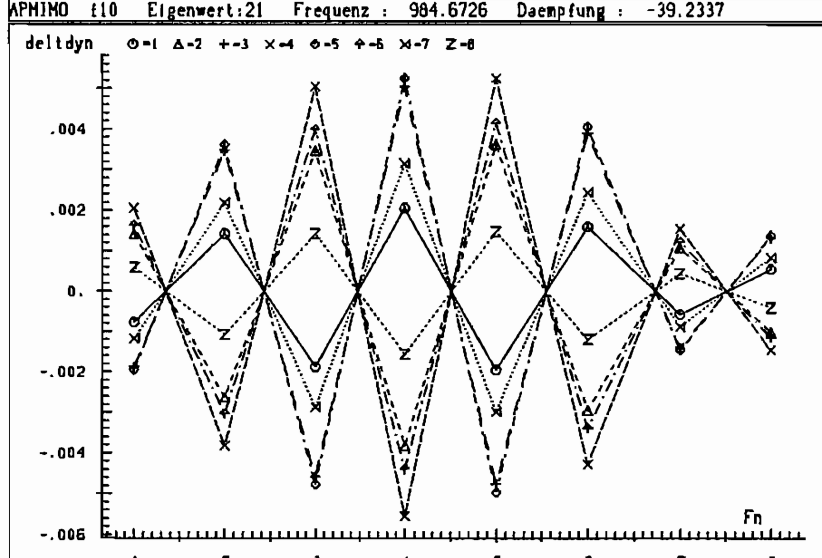
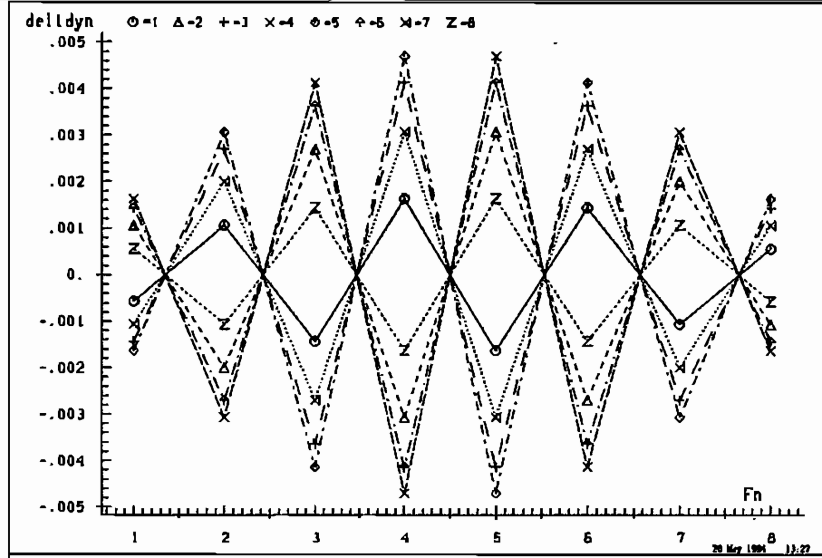
Berechnung B.27 Einflußgrößen f10 f10m10

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



Berechnung B.28 Einflußgrößen f10 f10m10

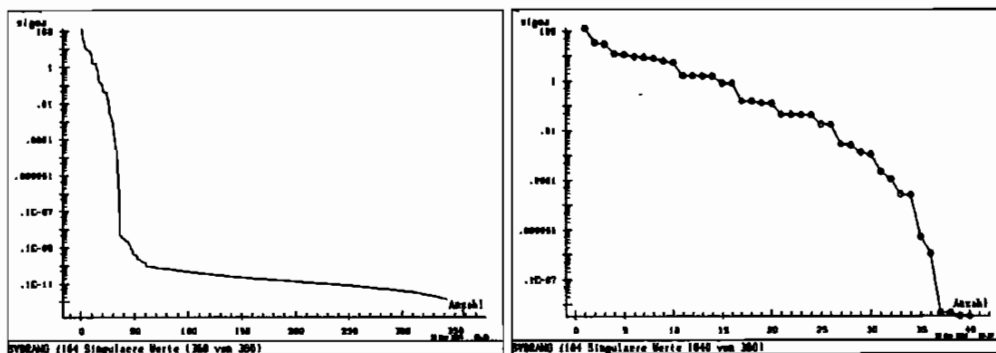
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



B.4 Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m14

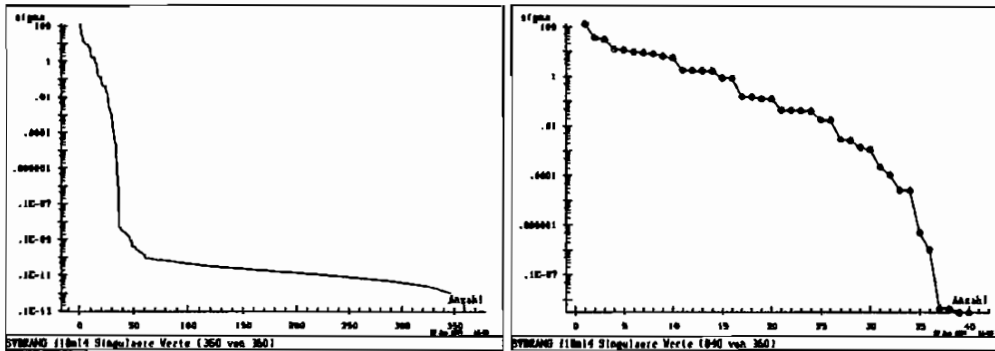
- Realisierung für ein System mit 4 Eingängen und 4 Ausgängen
- Nullmessung : f104
- Systemmessung : f10m14
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 1 % an Knoten 7
- Messung an ausgewählten FEM Knotenpunkten
- Masse liegt nicht an einem ausgewählten Knoten

Berechnung B.29 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f104



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.67972	-374.45853	-59.59693
35	-2.67972	374.45853	59.59693
34	-9.88774	-1501.35829	-238.94859
33	-9.88774	1501.35829	238.94859
32	-.89985	-93.59811	-14.89660
31	-.89985	93.59811	14.89660
30	-5.65985	-843.08370	-134.18094
29	-5.65985	843.08370	134.18094
28	-22.58515	-3409.55108	-542.64691
27	-22.58515	3409.55108	542.64691
26	-15.47315	-2353.90181	-374.63511
25	-15.47315	2353.90181	374.63511
24	-39.23374	-6186.88070	-984.67265
23	-39.23374	6186.88070	984.67265
22	-31.23393	-4682.27098	-745.20657
21	-31.23393	4682.27098	745.20657
20	-115.45092	-10187.99636	-1621.46998
19	-115.45092	10187.99636	1621.46998
18	-132.67083	-8414.15720	-1339.15471
17	-132.67083	8414.15720	1339.15471
16	-204.15753	-15645.60976	-2490.07613
15	-204.15753	15645.60976	2490.07613
14	-148.95469	-12679.94155	-2018.07538
13	-148.95469	12679.94155	2018.07538
12	-401.25948	-23293.43034	-3707.26458
11	-401.25948	23293.43034	3707.26458
10	-285.29507	-19162.00775	-3049.72825
9	-285.29507	19162.00775	3049.72825
8	-928.75785	-38548.19544	-6135.13585
7	-928.75785	38548.19544	6135.13585
6	-755.57424	-32876.64665	-5232.48083
5	-755.57424	32876.64665	5232.48083
4	-940.63419	-36913.62944	-5874.98659
3	-940.63419	36913.62944	5874.98659
2	-560.05770	-27992.19789	-4455.09666
1	-560.05770	27992.19789	4455.09666

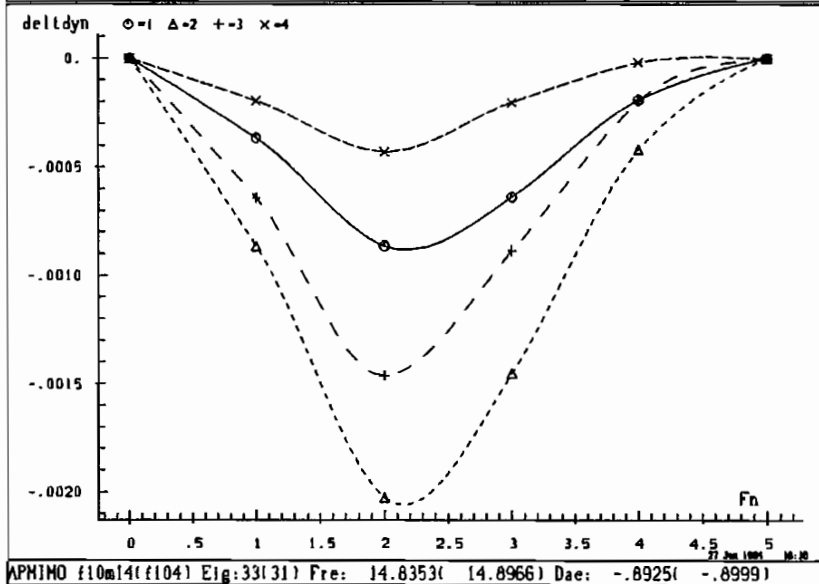
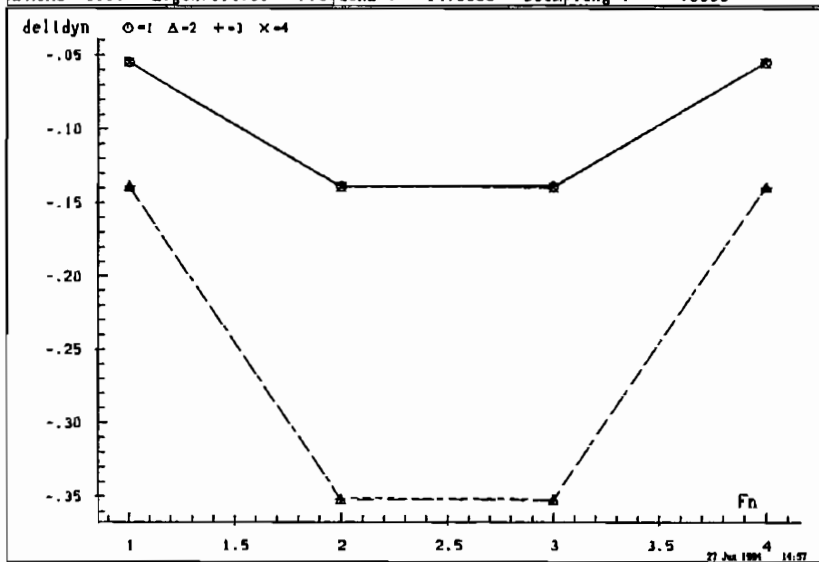
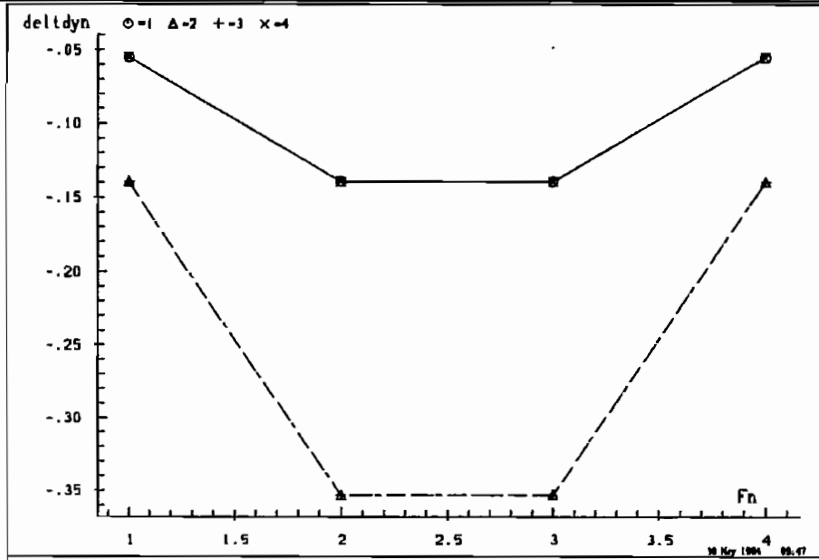
Berechnung B.30 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m14



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.62893	-370.89288	-59.02944
35	-2.62893	370.89288	59.02944
34	-.89253	-93.21320	-14.83534
33	-.89253	93.21320	14.83534
32	-5.56616	-836.98671	-133.21057
31	-5.56616	836.98671	133.21057
30	-9.84477	-1499.65881	-238.67811
29	-9.84477	1499.65881	238.67811
28	-15.47531	-2351.15476	-374.19790
27	-15.47531	2351.15476	374.19790
26	-22.26629	-3383.54418	-538.50778
25	-22.26629	3383.54418	538.50778
24	-30.28195	-4636.10824	-737.85954
23	-30.28195	4636.10824	737.85954
22	-38.21158	-6159.05362	-980.24383
21	-38.21158	6159.05362	980.24383
20	-132.67099	-8414.15979	-1339.15512
19	-132.67099	8414.15979	1339.15512
18	-116.71866	-10155.00465	-1616.21919
17	-116.71866	10155.00465	1616.21919
16	-149.12304	-12576.41629	-2001.59882
15	-149.12304	12576.41629	2001.59882
14	-202.11116	-15551.70292	-2475.13039
13	-202.11116	15551.70292	2475.13039
12	-283.93321	-19145.16512	-3047.04767
11	-283.93321	19145.16512	3047.04767
10	-402.32061	-23275.10609	-3704.34819
9	-402.32061	23275.10609	3704.34819
8	-928.75764	-38548.23618	-6135.14234
7	-928.75764	38548.23618	6135.14234
6	-939.21472	-36900.28875	-5872.86336
5	-939.21472	36900.28875	5872.86336
4	-752.29451	-32784.30562	-5217.78430
3	-752.29451	32784.30562	5217.78430
2	-559.48010	-27885.11134	-4438.05331
1	-559.48010	27885.11134	4438.05331

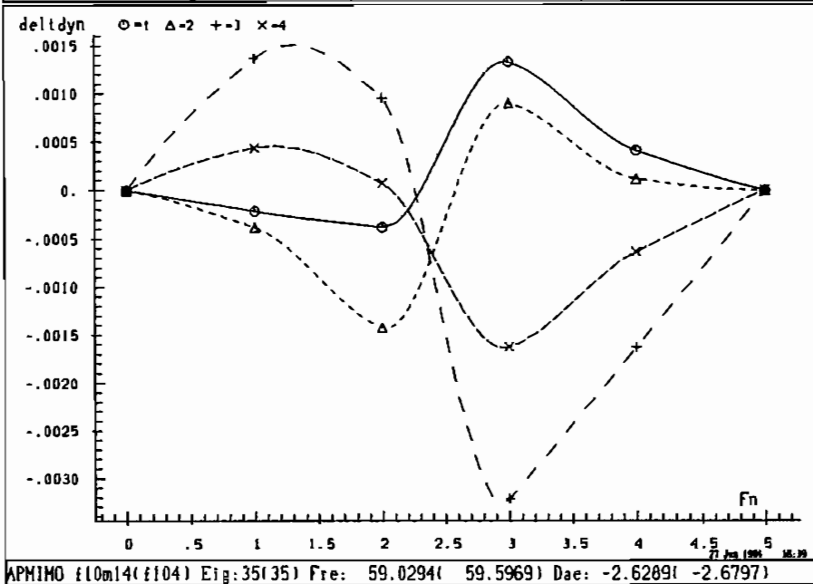
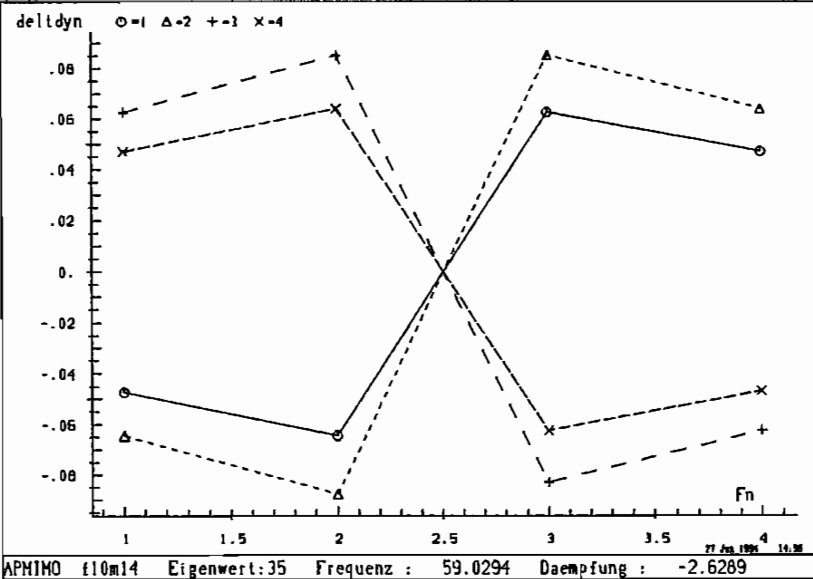
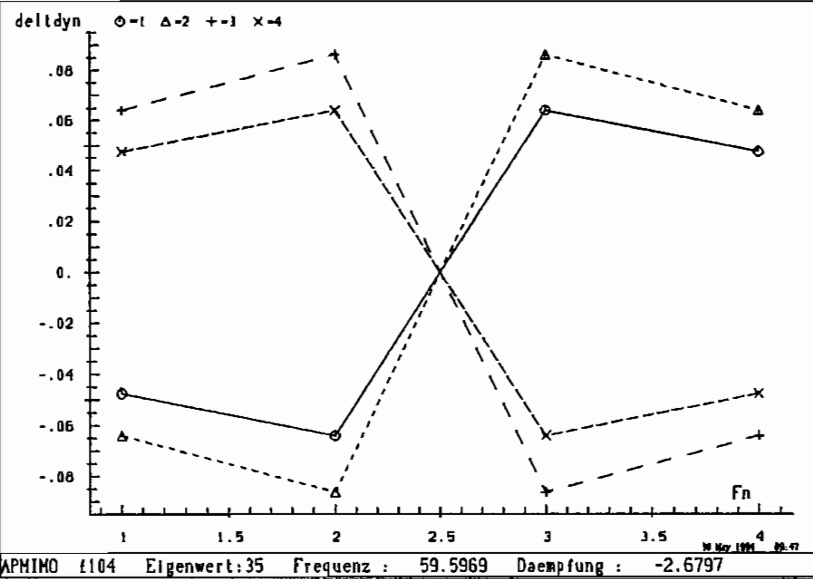
Berechnung B.31 Einflußgrößen f104 f10m14

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



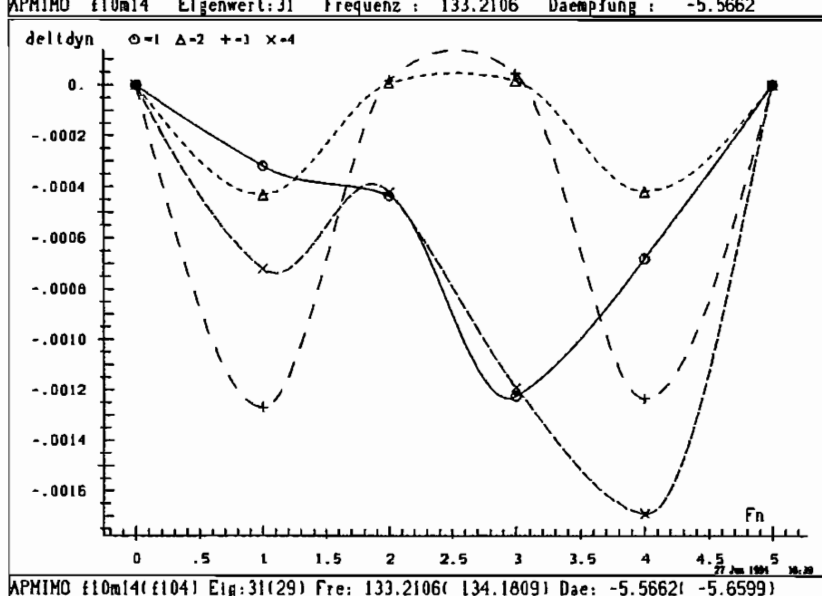
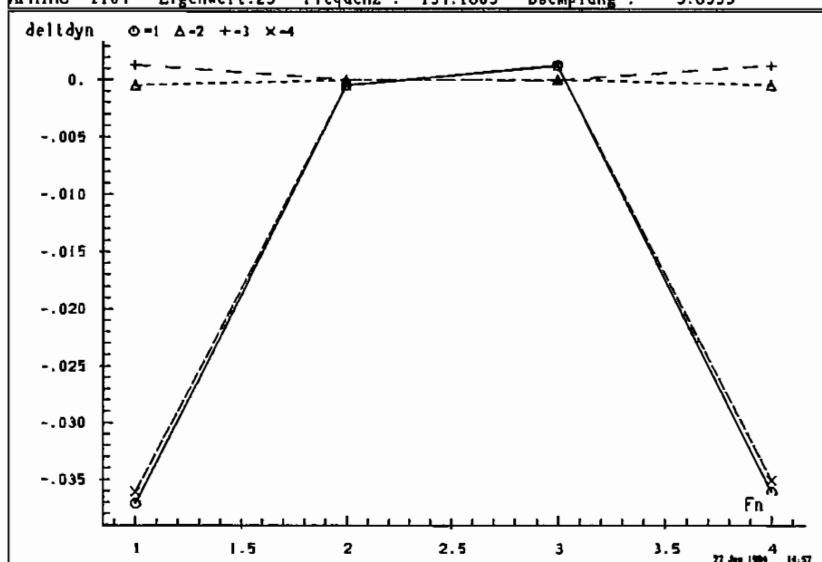
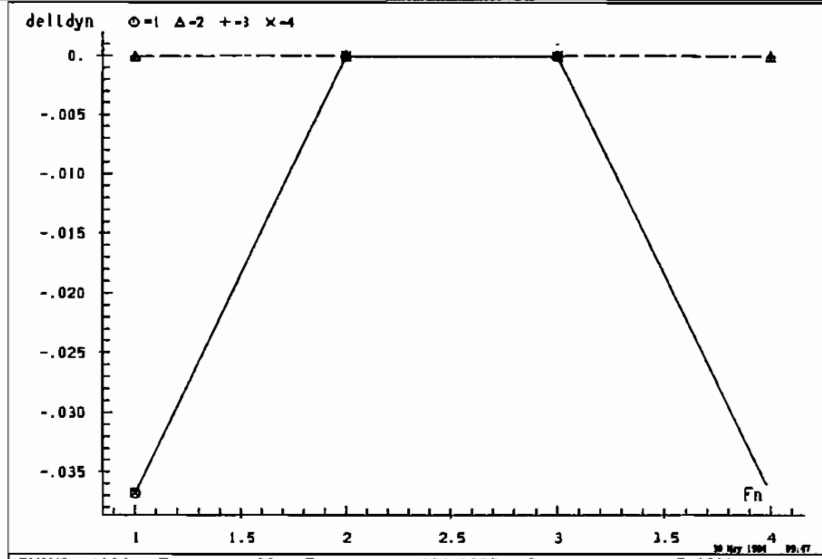
Berechnung B.32 Einflußgrößen f104 f10m14

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



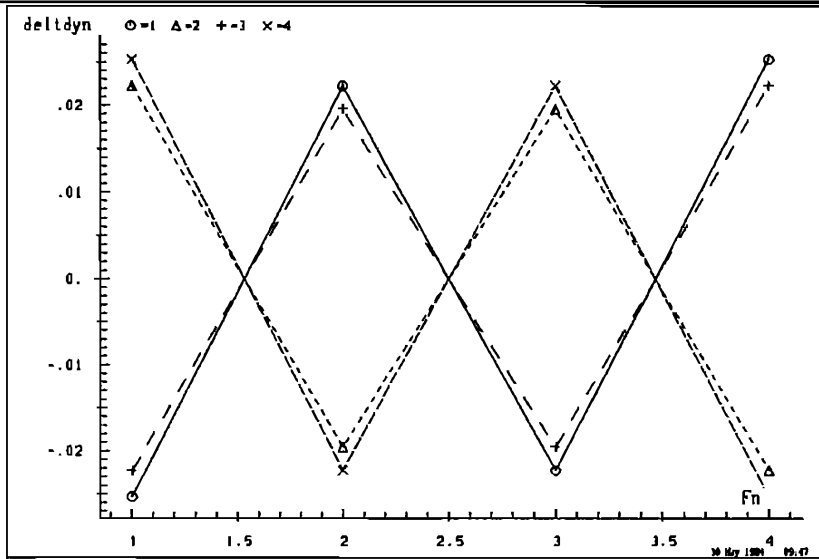
Berechnung B.33 Einflußgrößen f104 f10m14

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

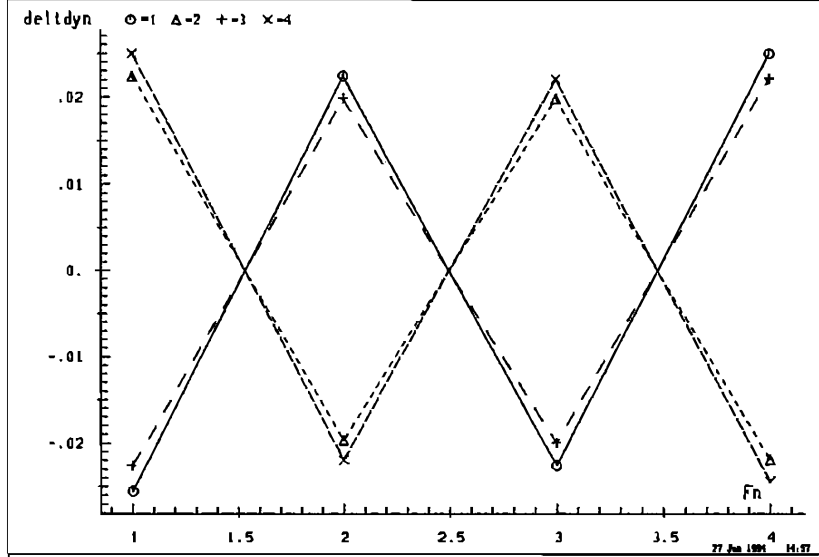


Berechnung B.34 Einflußgrößen f104 f10m14

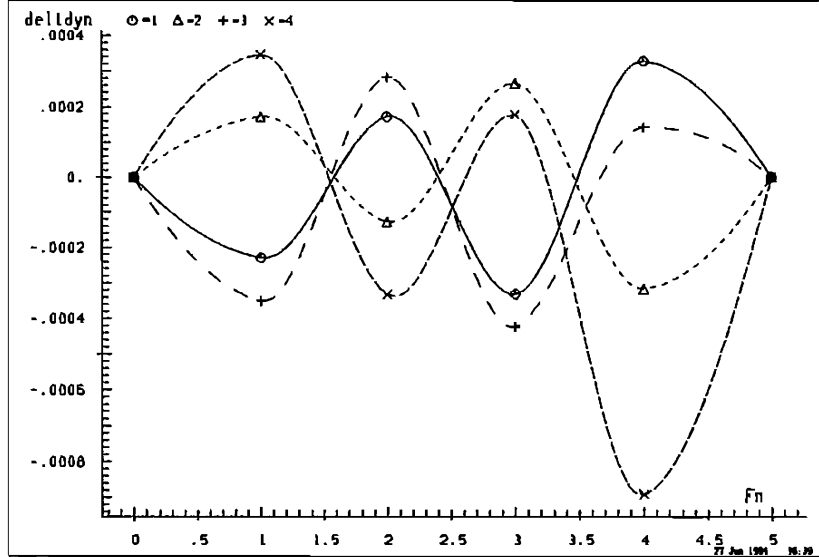
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APM10 f104 Eigenwert:33 Frequenz : 238.9486 Daempfung : -9.8877



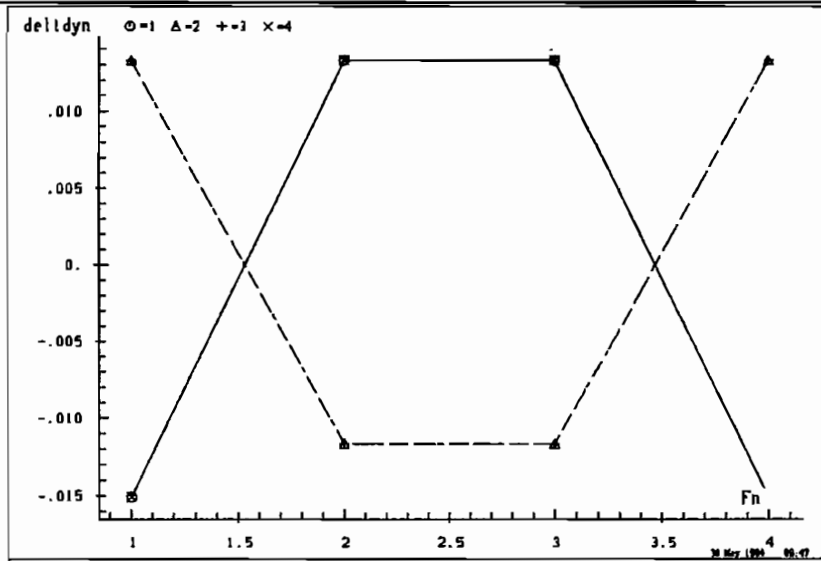
APM10 f10m14 Eigenwert:29 Frequenz : 238.6781 Daempfung : -9.8448



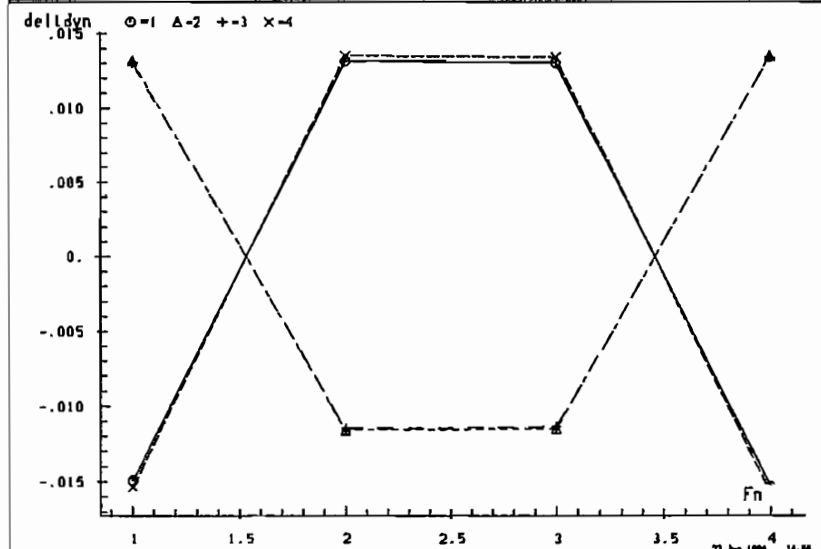
APM10 f10m14(f104) Eig:29(33) Fre: 238.6781(238.9486) Dae: -9.8448(-9.8877)

Berechnung B.35 Einflußgrößen f104 f10m14

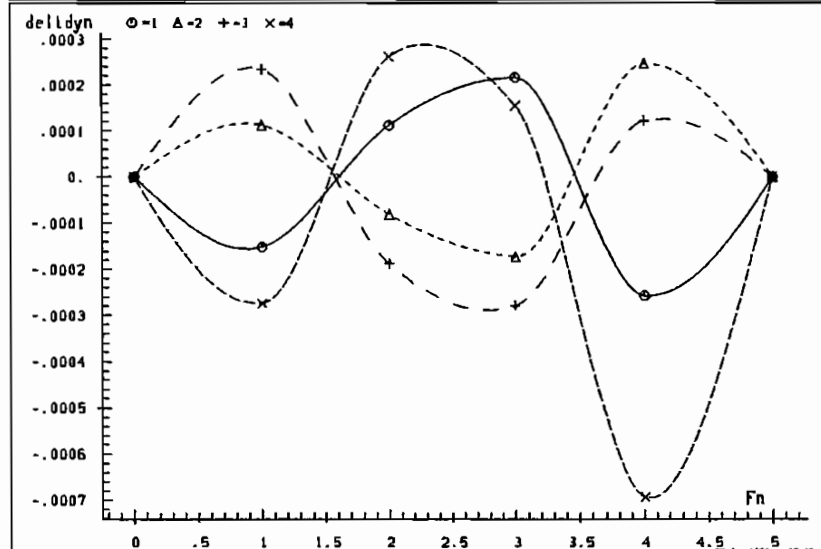
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO f104 Eigenwert:25 Frequenz : 374.6351 Daempfung : -15.4731



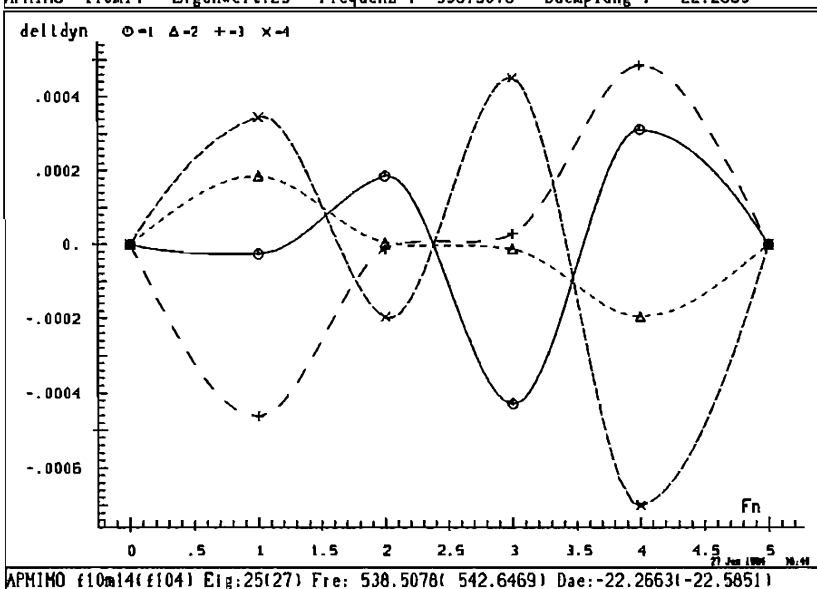
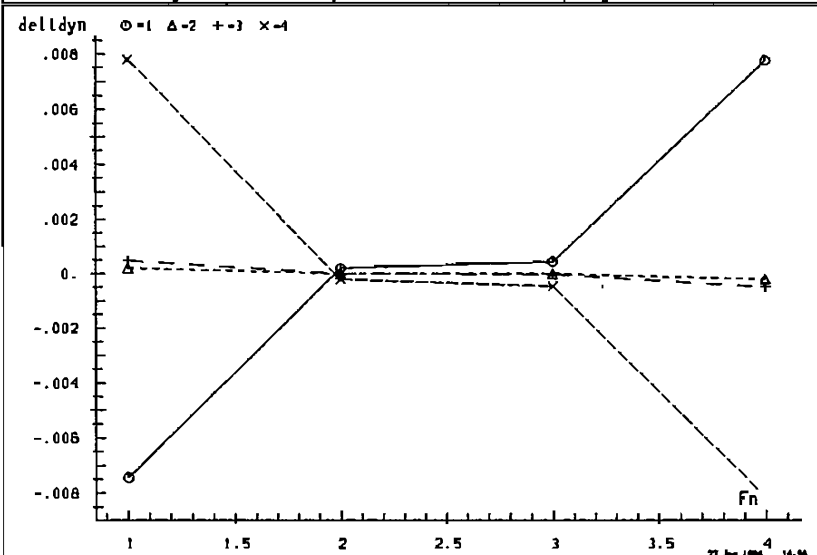
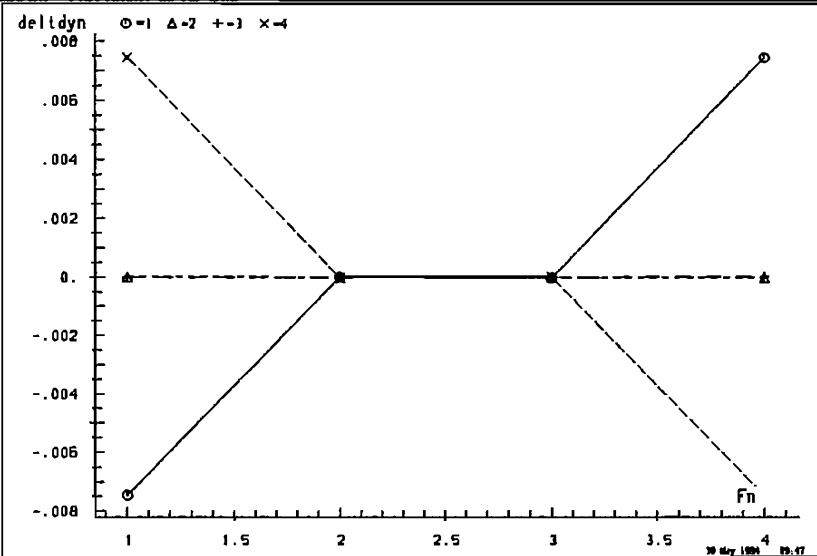
APMIMO f10m14 Eigenwert:27 Frequenz : 374.1979 Daempfung : -15.4753



APMIMO f10m14(f104) Eig:27(25) Fre: 374.1979(374.6351) Dae:-15.4753(-15.4731)

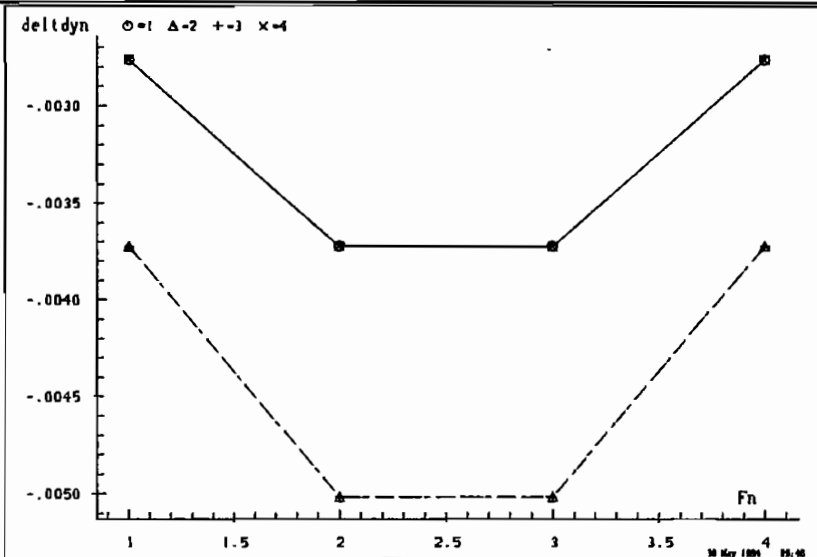
Berechnung B.36 Einflußgrößen f104 f10m14

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

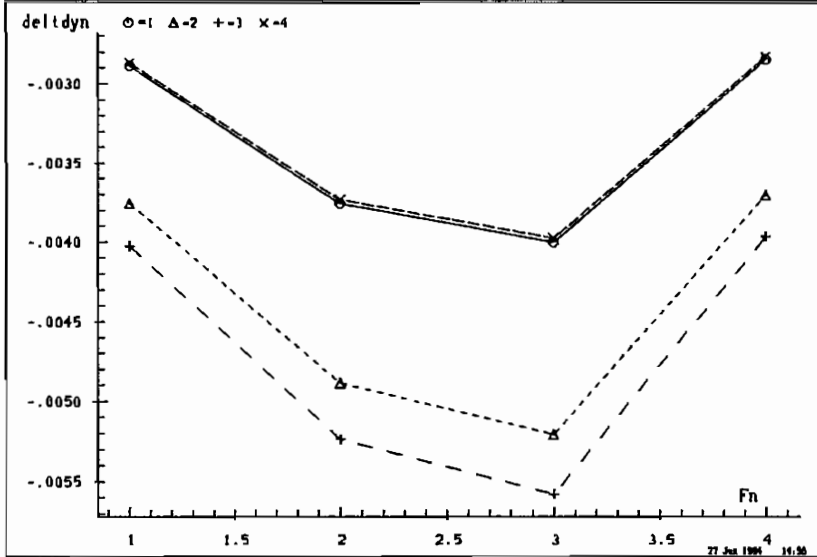


Berechnung B.37 Einflußgrößen f104 f10m14

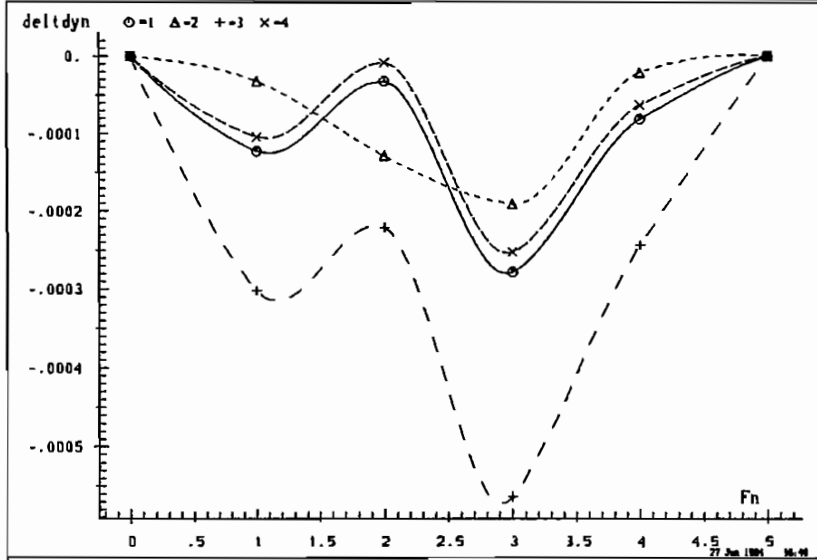
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO f104 Eigenwert:21 Frequenz : 745.2066 Daempfung : -31.2339



APMIMO f10m14 Eigenwert:23 Frequenz : 737.8595 Daempfung : -30.2820

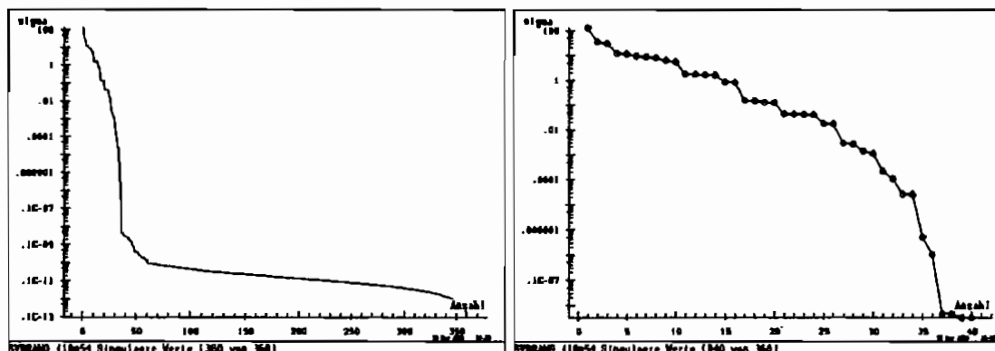


APMIMO f10m14(f104) Eig:23(21) Fre: 737.8595(745.2066) Dae:-30.2820(-31.2339)

B.5 Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m54

- Realisierung für ein System mit 4 Eingängen und 4 Ausgängen
- Nullmessung : f104
- Systemmessung : f10m54
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 5 % an Knoten 7
- Messung an ausgewählten FEM Knotenpunkten
- Masse liegt nicht an einem ausgewählten Knoten

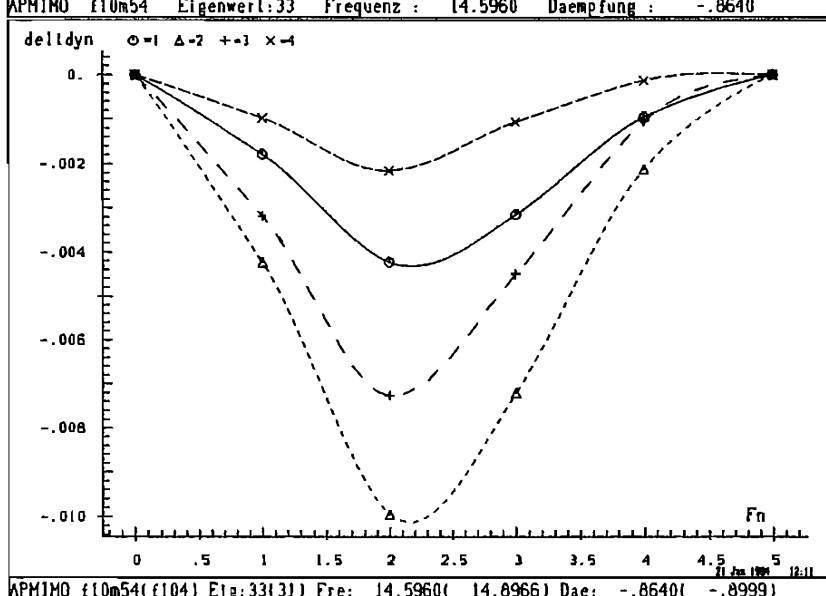
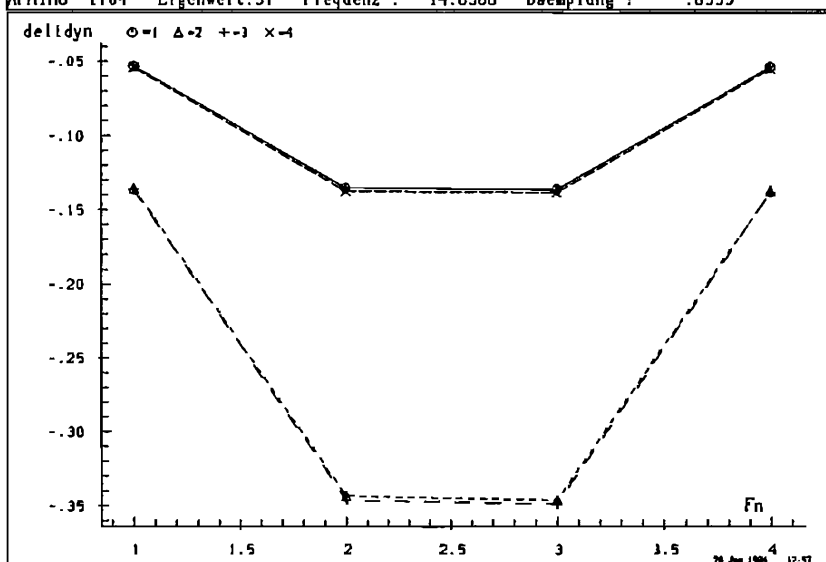
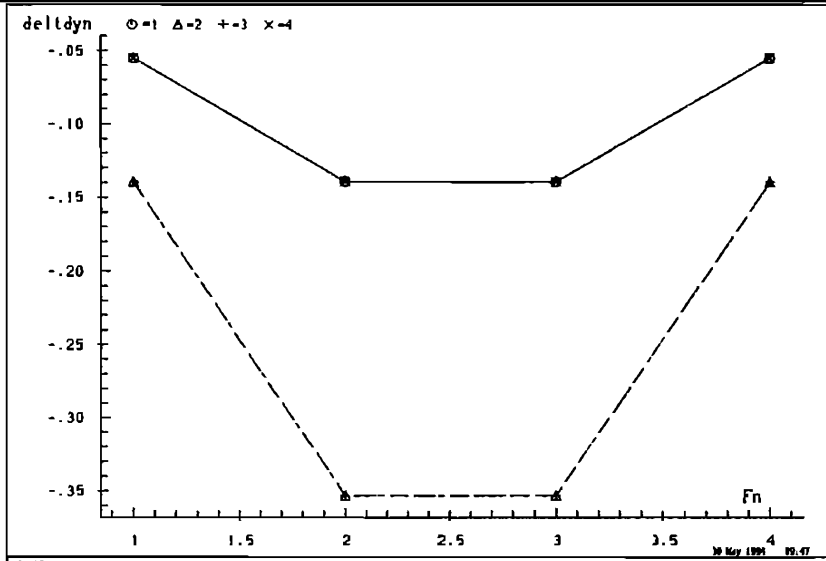
Berechnung B.38 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m54



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.44744	-357.89890	-56.96138
35	-2.44744	357.89890	56.96138
34	-.86402	-91.70916	-14.59597
33	-.86402	91.70916	14.59597
32	-5.26991	-816.74864	-129.98958
31	-5.26991	816.74864	129.98958
30	-9.70862	-1494.08477	-237.79098
29	-9.70862	1494.08477	237.79098
28	-15.48315	-2341.47660	-372.65757
27	-15.48315	2341.47660	372.65757
26	-21.14533	-3295.62550	-524.51509
25	-21.14533	3295.62550	524.51509
24	-27.82396	-4507.06621	-717.32187
23	-27.82396	4507.06621	717.32187
22	-36.04352	-6089.27924	-969.13889
21	-36.04352	6089.27924	969.13889
20	-132.67096	-8414.16744	-1339.15634
19	-132.67096	8414.16744	1339.15634
18	-120.78138	-10057.71514	-1600.73508
17	-120.78138	10057.71514	1600.73508
16	-149.04316	-12311.31061	-1959.40594
15	-149.04316	12311.31061	1959.40594
14	-197.26177	-15348.81051	-2442.83906
13	-197.26177	15348.81051	2442.83906
12	-281.02308	-19108.62671	-3041.23240
11	-281.02308	19108.62671	3041.23240
10	-404.92303	-23231.72471	-3697.44382
9	-404.92303	23231.72471	3697.44382
8	-557.79304	-27638.73970	-4398.84204
7	-557.79304	27638.73970	4398.84204
6	-928.76219	-38548.32015	-6135.15570
5	-928.76219	38548.32015	6135.15570
4	-936.31563	-36873.61457	-5868.61803
3	-936.31563	36873.61457	5868.61803
2	-744.81538	-32592.66445	-5187.28366
1	-744.81538	32592.66445	5187.28366

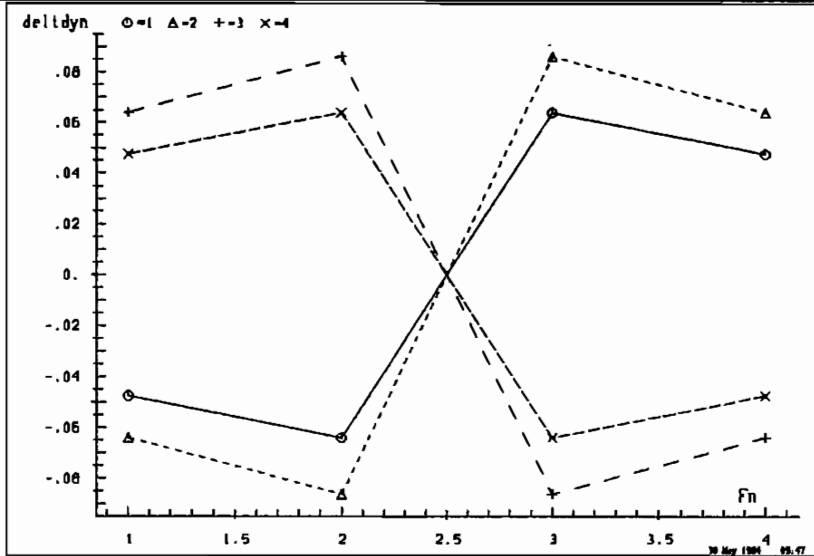
Berechnung B.39 Einflußgrößen f104 f10m54

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

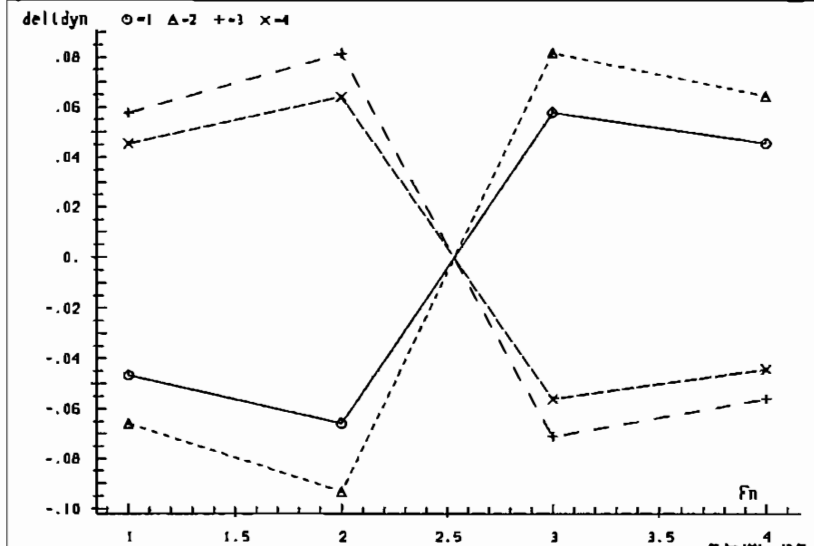


Berechnung B.40 Einflußgrößen f104 f10m54

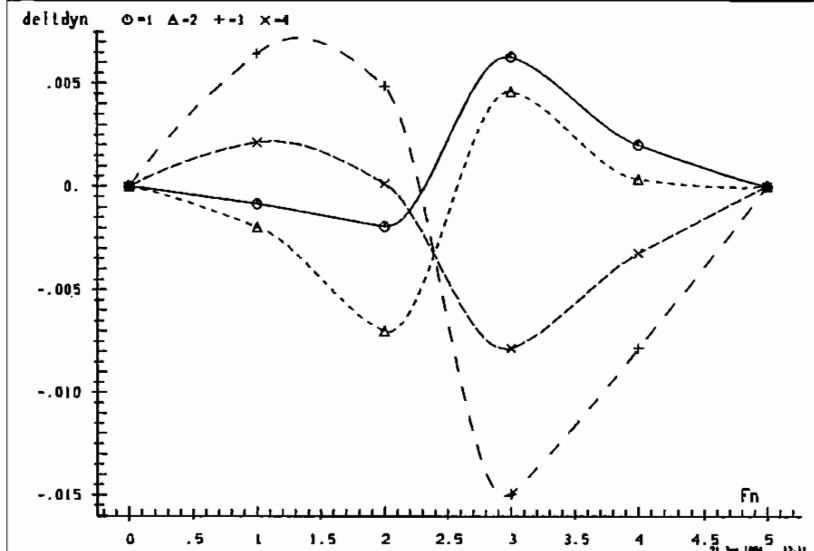
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO f104 Eigenwert:35 Frequenz : 59.5969 Daempfung : -2.6797



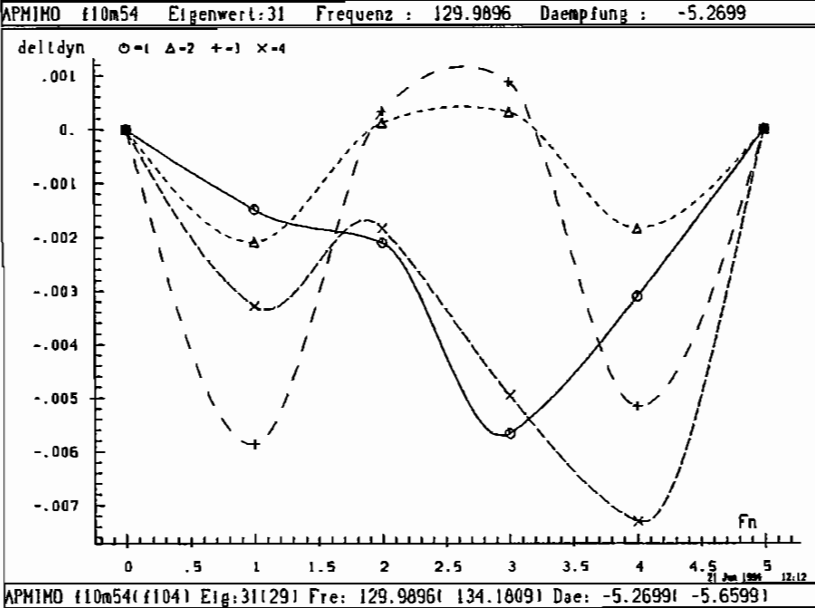
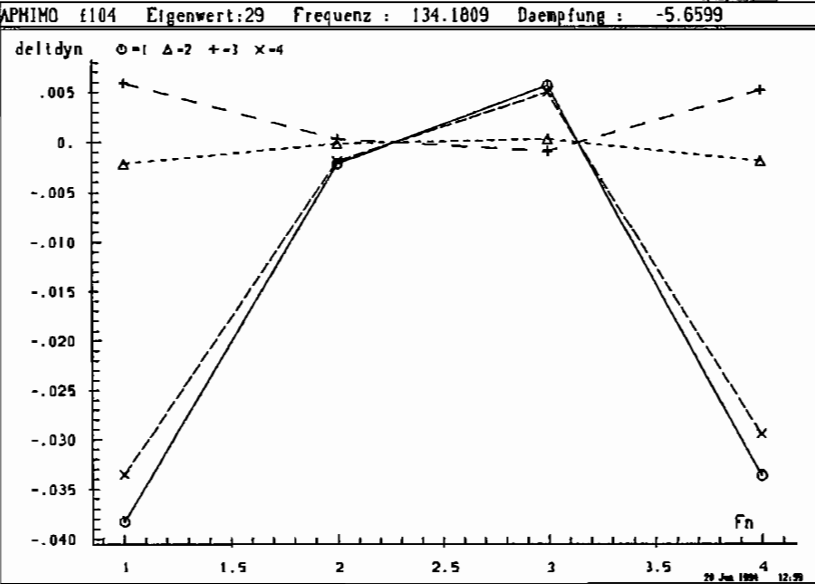
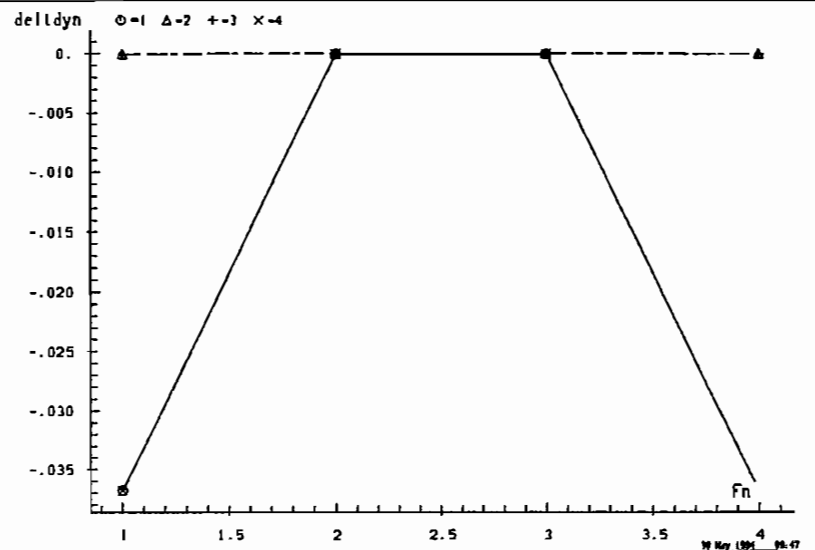
APMIMO f10m54 Eigenwert:35 Frequenz : 56.9614 Daempfung : -2.4474



APMIMO f10m54(f104) Eig:35(35) Fre: 56.9614(59.5969) Dae: -2.4474(-2.6797)

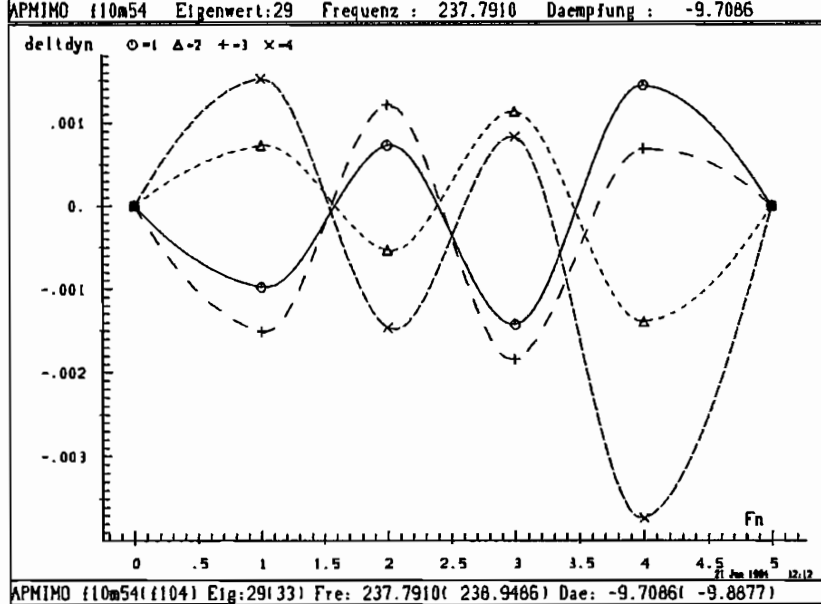
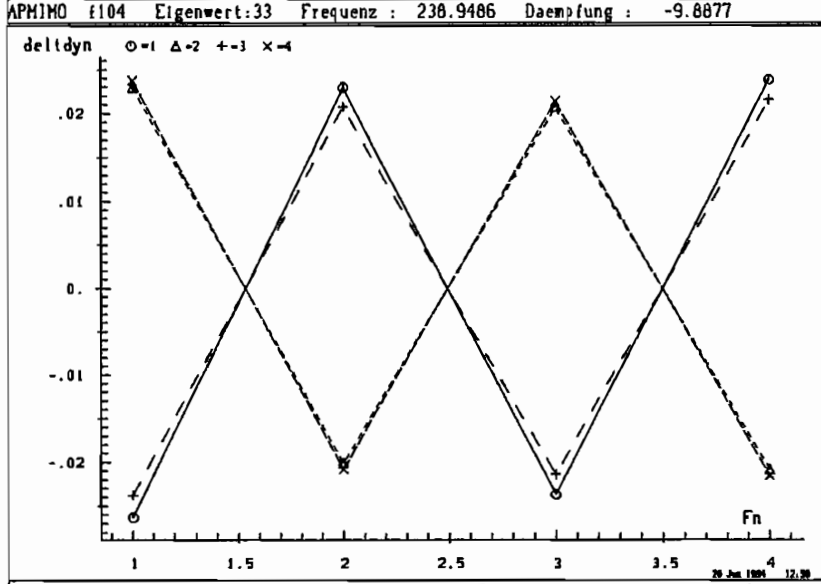
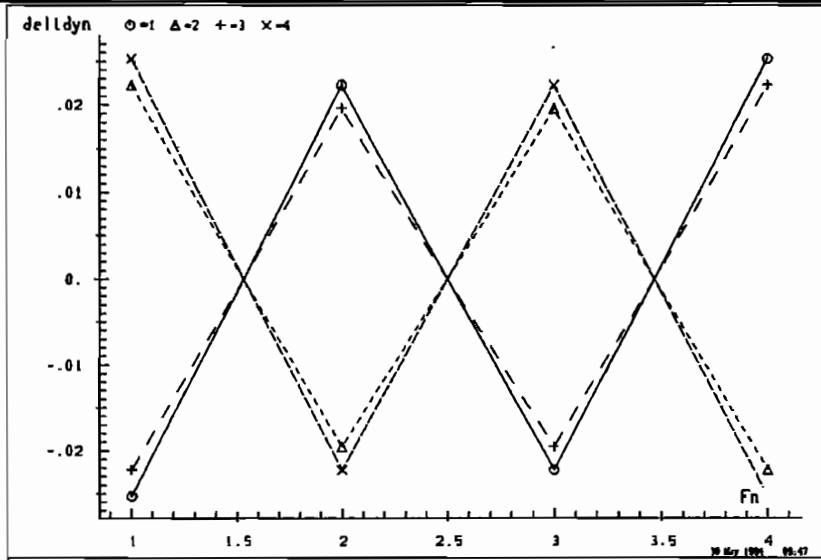
Berechnung B.41 Einflußgrößen f104 f10m54

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



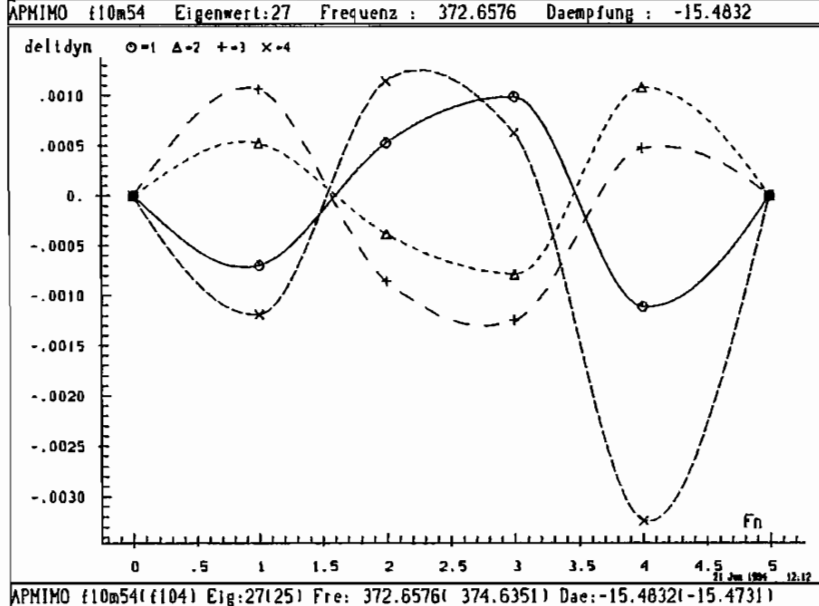
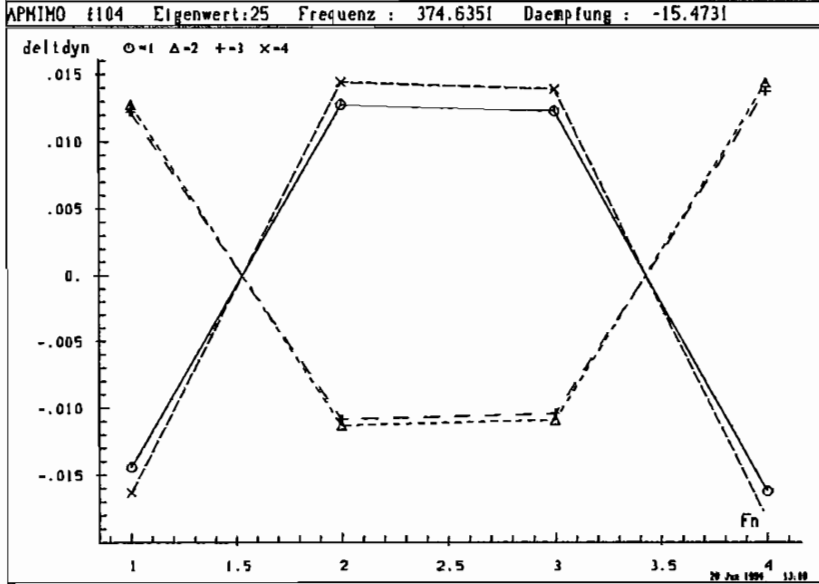
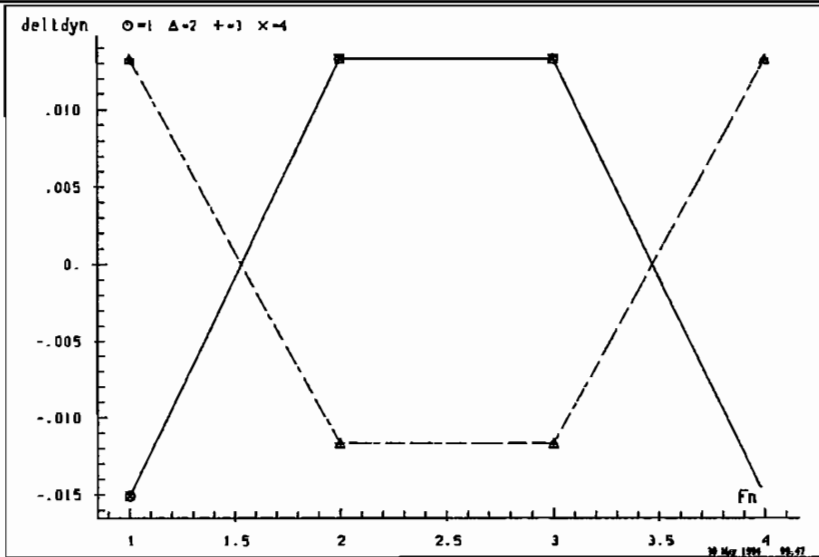
Berechnung B.42 Einflußgrößen f104 f10m54

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



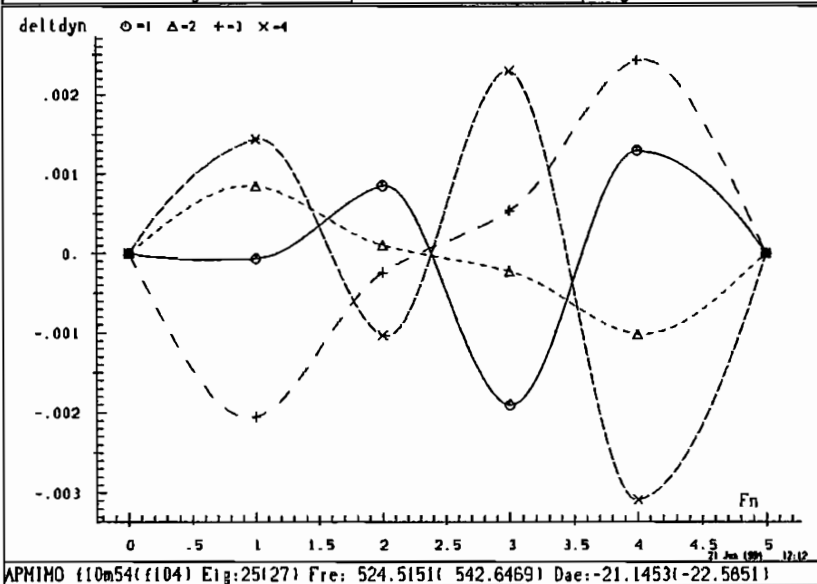
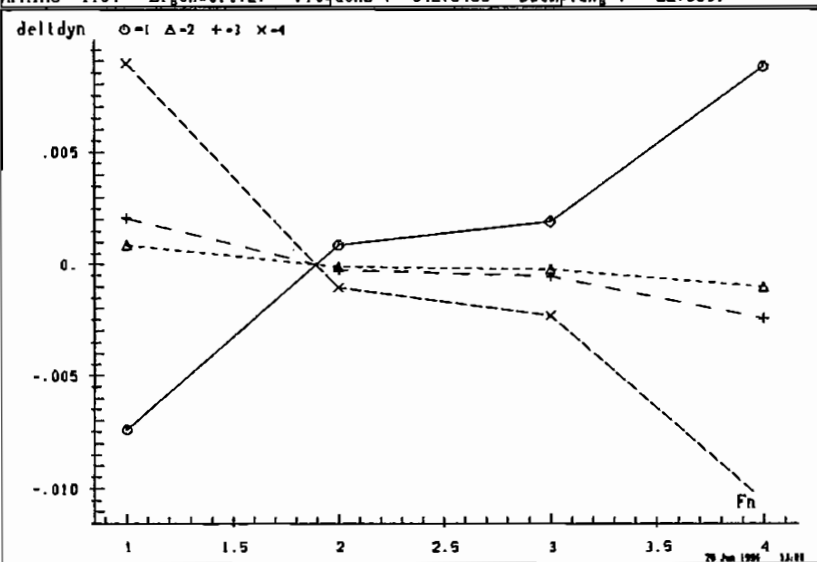
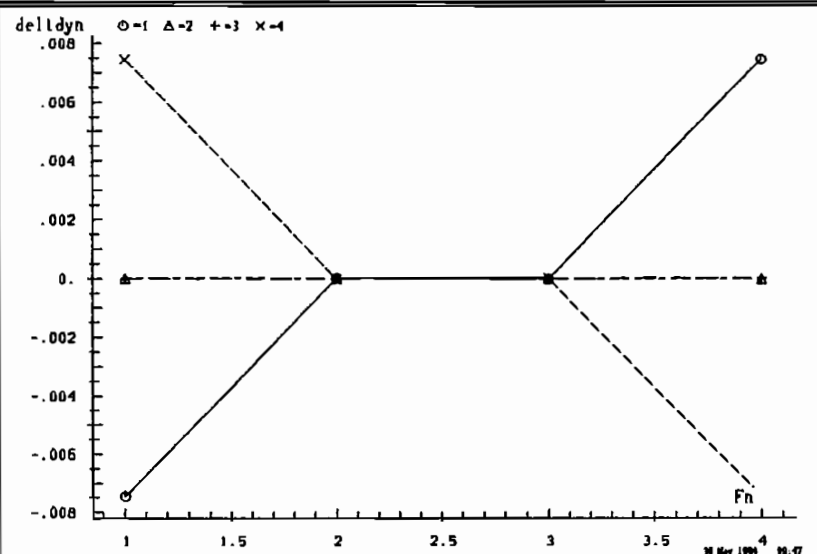
Berechnung B.43 Einflußgrößen f104 f10m54

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



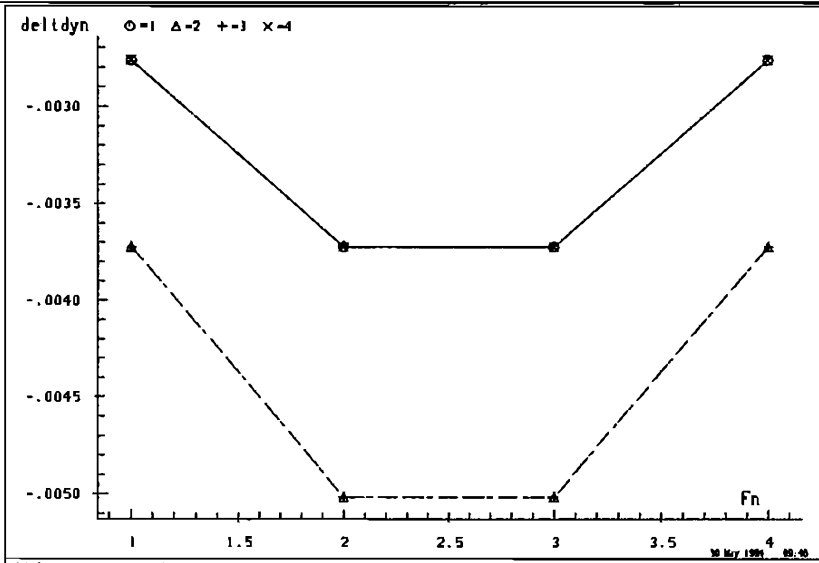
Berechnung B.44 Einflußgrößen f104 f10m54

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

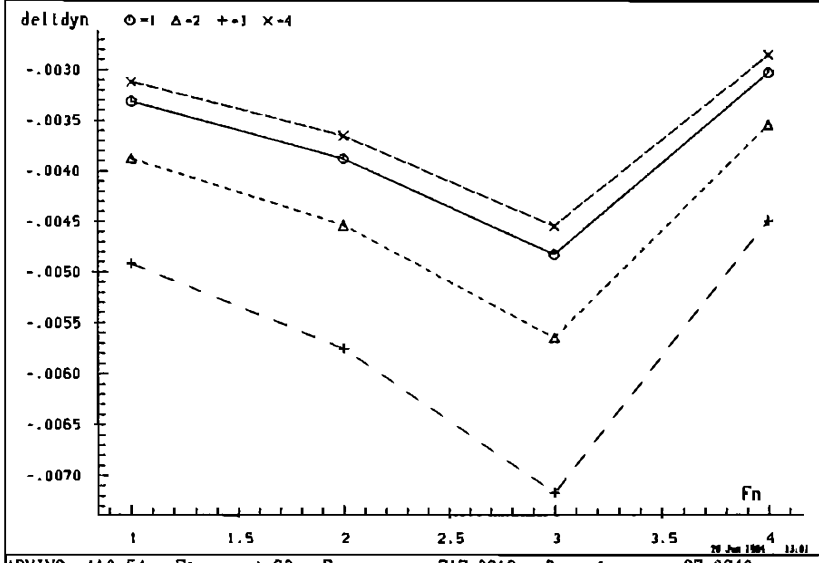


Berechnung B.45 Einflußgrößen f104 f10m54

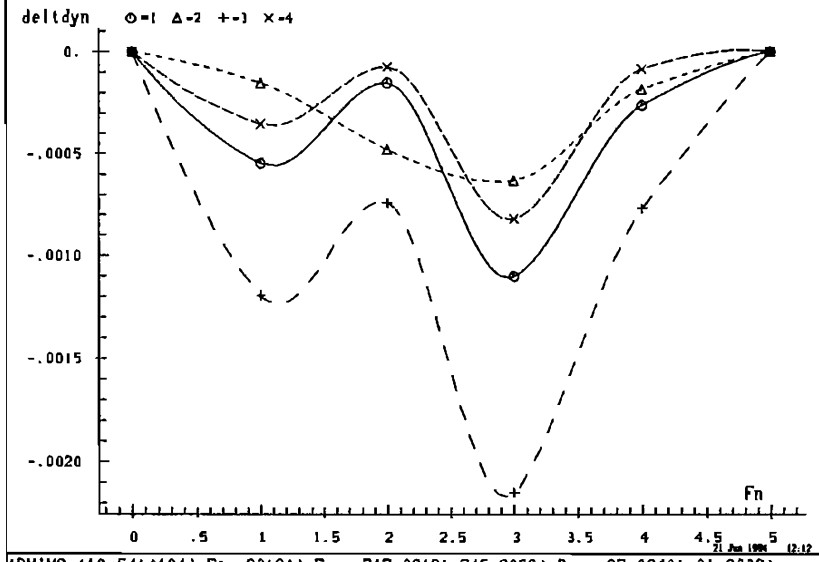
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f104 Eigenwert:21 Frequenz : 745.2066 Daempfung : -31.2339



APHIMO f10m54 Eigenwert:23 Frequenz : 717.3219 Daempfung : -27.8240

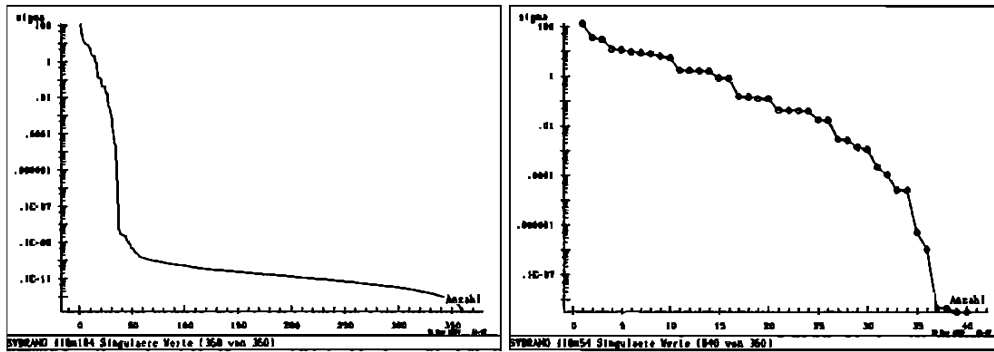


APHIMO (f10m54(f104) Eig:23(21) Fre: 717.3219(745.2066) Dae:-27.8240(-31.2339)

B.6 Realisierung 4x4 , Simulation FEM f104 f10m104

- Realisierung für ein System mit 4 Eingängen und 4 Ausgängen
- Nullmessung : f104
- Systemmessung : f10m104
- Finite Elemente Simulation
- Änderung der Masse von 10 % an Knoten 7
- Messung an ausgewählten FEM Knotenpunkten
- Masse liegt nicht an einem ausgewählten Knoten

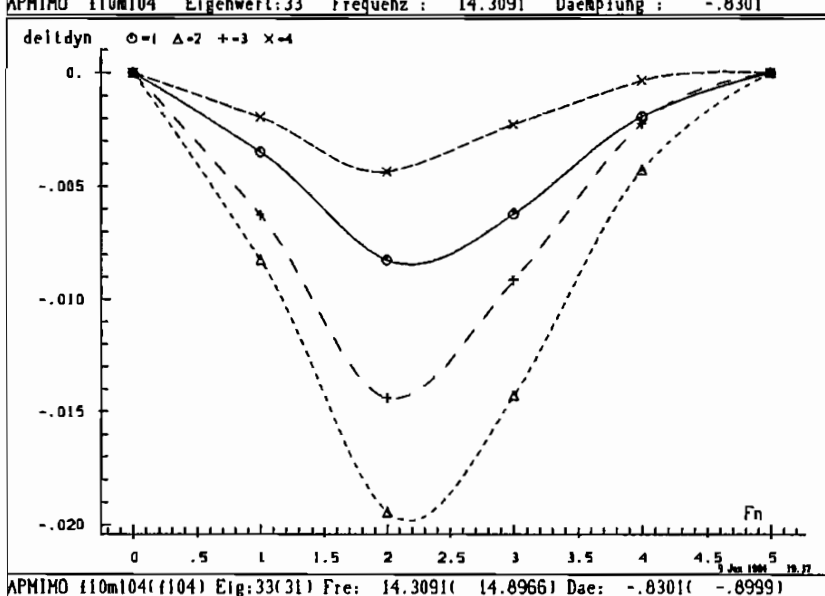
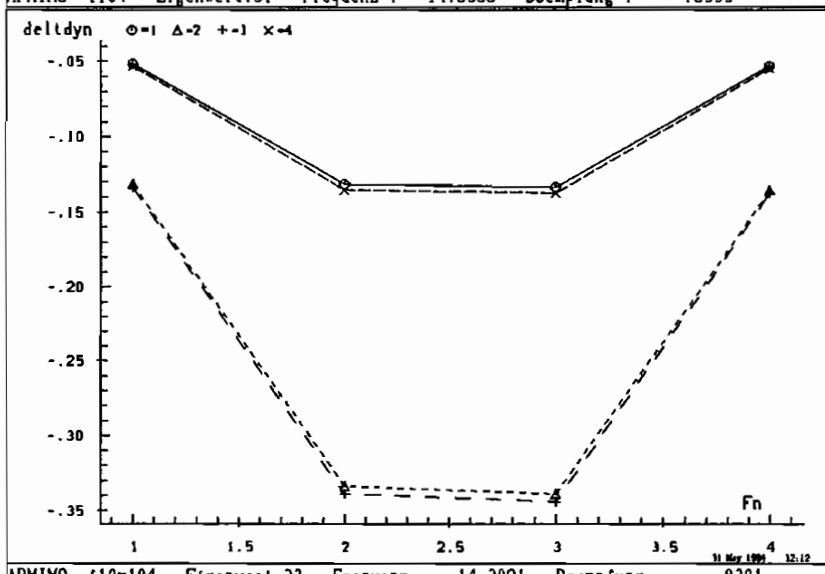
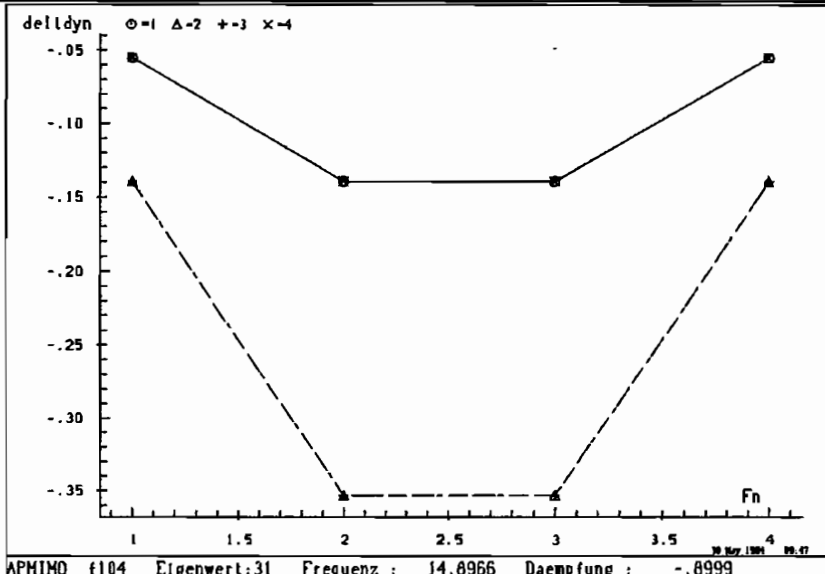
Berechnung B.46 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung f10m104



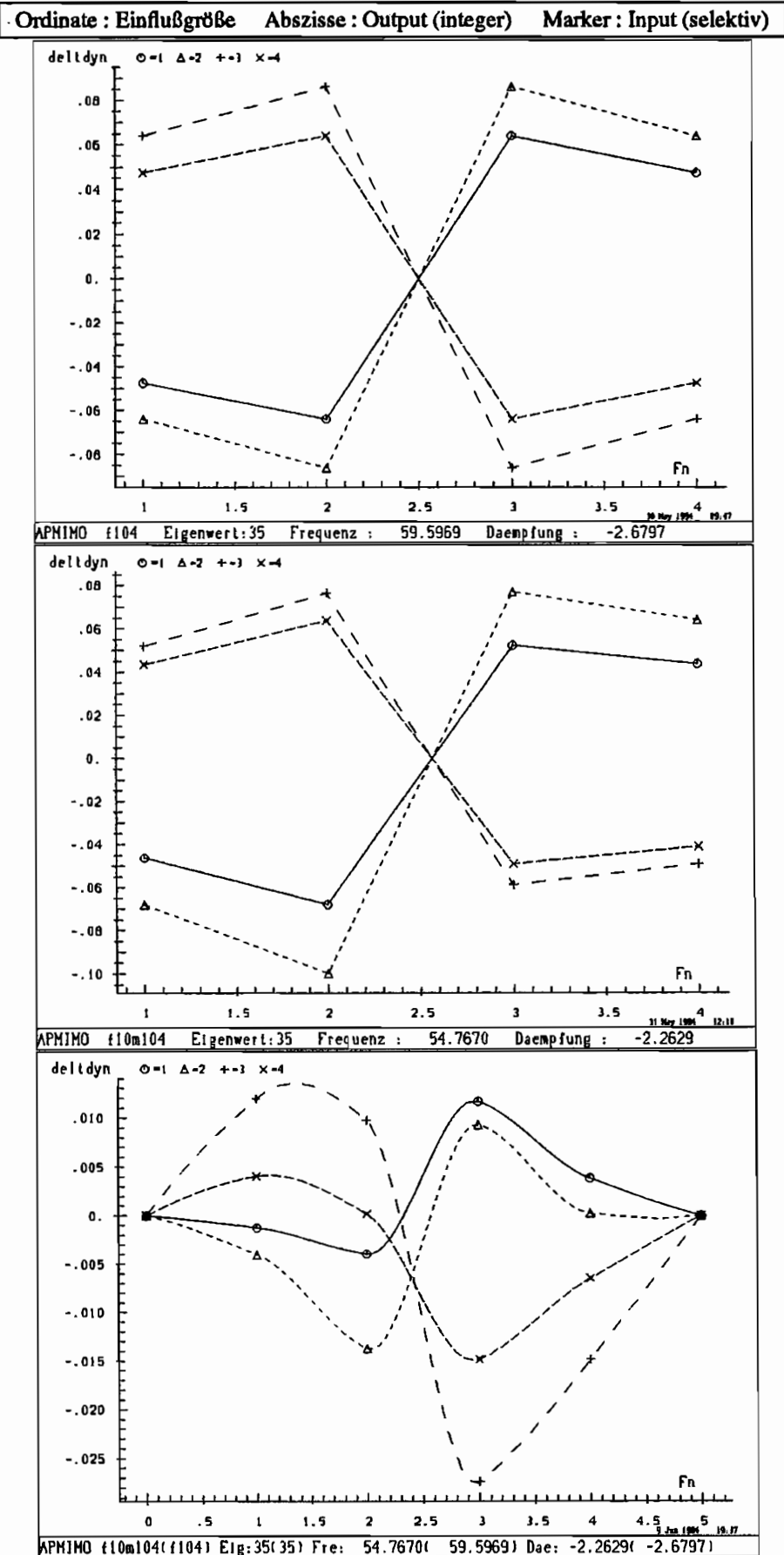
Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
36	-2.26286	-344.11151	-54.76705
35	-2.26286	344.11151	54.76705
34	-.83012	-89.90676	-14.30911
33	-.83012	89.90676	14.30911
32	-5.02084	-798.19602	-127.03684
31	-5.02084	798.19602	127.03684
30	-9.59204	-1489.04211	-236.98841
29	-9.59204	1489.04211	236.98841
28	-15.49146	-2331.75553	-371.11042
27	-15.49146	2331.75553	371.11042
26	-20.11922	-3215.47295	-511.75842
25	-20.11922	3215.47295	511.75842
24	-26.37067	-4417.00604	-702.98835
23	-26.37067	4417.00604	702.98835
22	-34.99300	-6045.52427	-962.17507
21	-34.99300	6045.52427	962.17507
20	-132.67082	-8414.17308	-1339.15724
19	-132.67082	8414.17308	1339.15724
18	-124.09965	-9983.41885	-1588.91046
17	-124.09965	9983.41885	1588.91046
16	-148.39743	-12144.67667	-1932.88532
15	-148.39743	12144.67667	1932.88532
14	-194.44118	-15241.66386	-2425.78614
13	-194.44118	15241.66386	2425.78614
12	-279.47434	-19088.83055	-3038.08174
11	-279.47434	19088.83055	3038.08174
10	-406.52584	-23205.87013	-3693.32894
9	-406.52584	23205.87013	3693.32894
8	-556.53629	-27497.53607	-4376.36879
7	-556.53629	27497.53607	4376.36879
6	-928.76589	-38548.36306	-6135.16253
5	-928.76589	38548.36306	6135.16253
4	-934.83863	-36860.29705	-5866.49848
3	-934.83863	36860.29705	5866.49848
2	-740.59323	-32493.97442	-5171.57665
1	-740.59323	32493.97442	5171.57665

Berechnung B.47 Einflußgrößen f104 f10m104

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

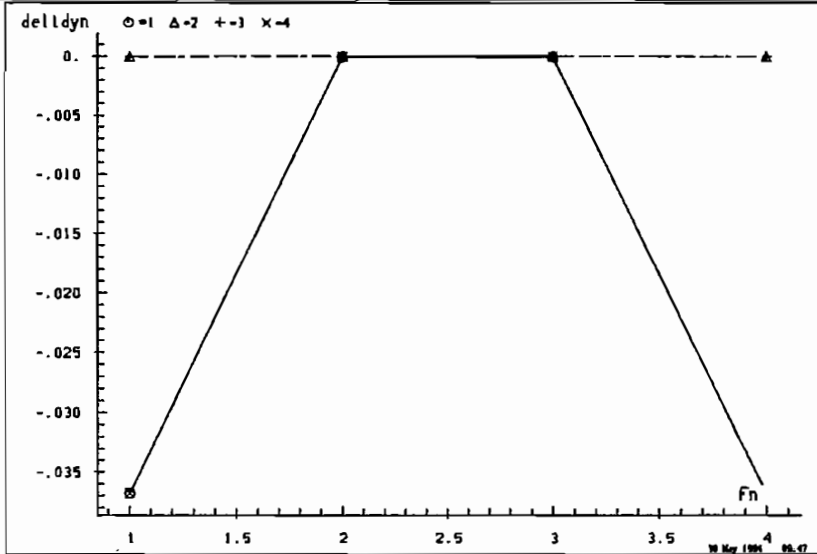


Berechnung B.48 Einflußgrößen f104 f10m104

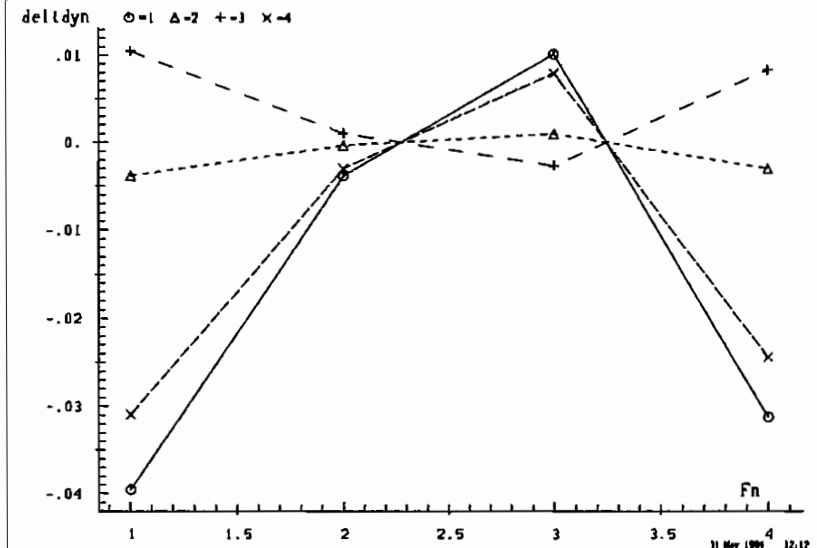


Berechnung B.49 Einflußgrößen f104 f10m104

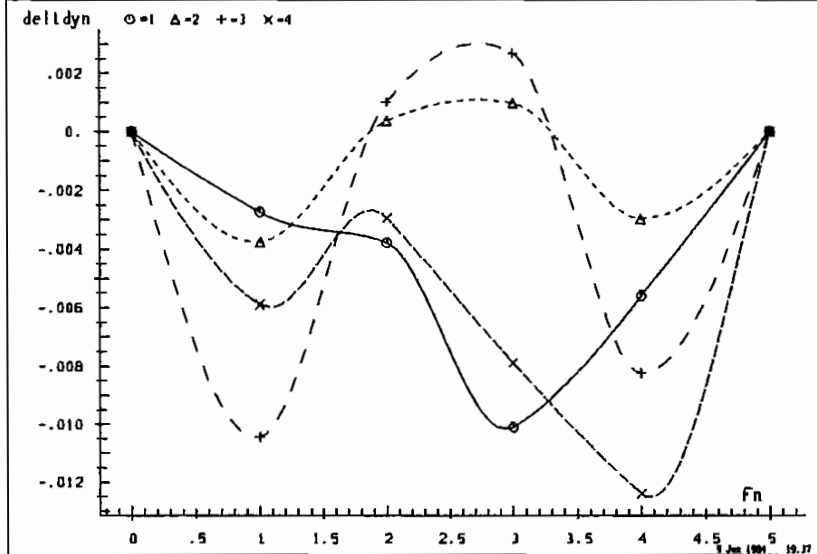
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO f104 Eigenwert:29 Frequenz : 134.1809 Daempfung : -5.6599



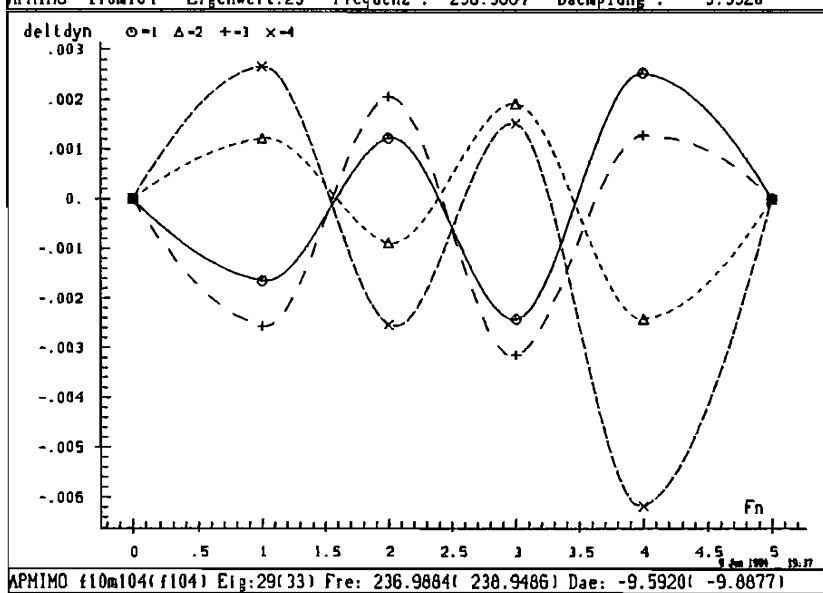
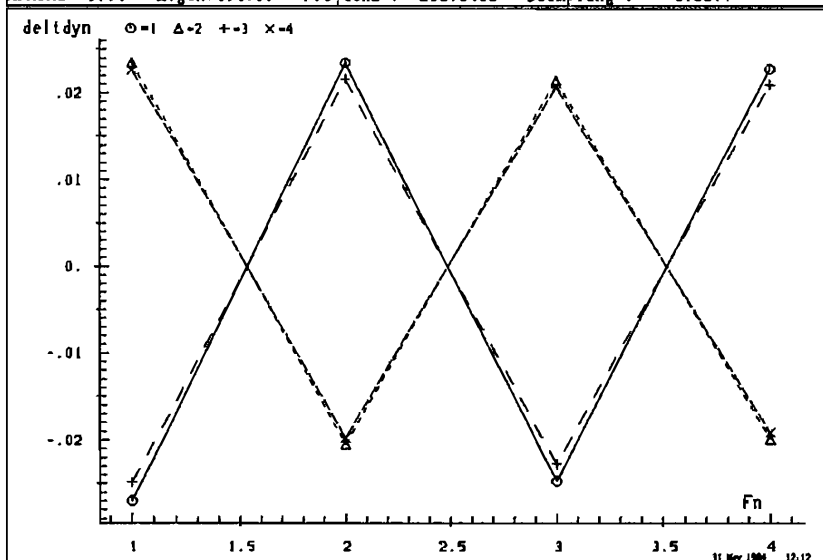
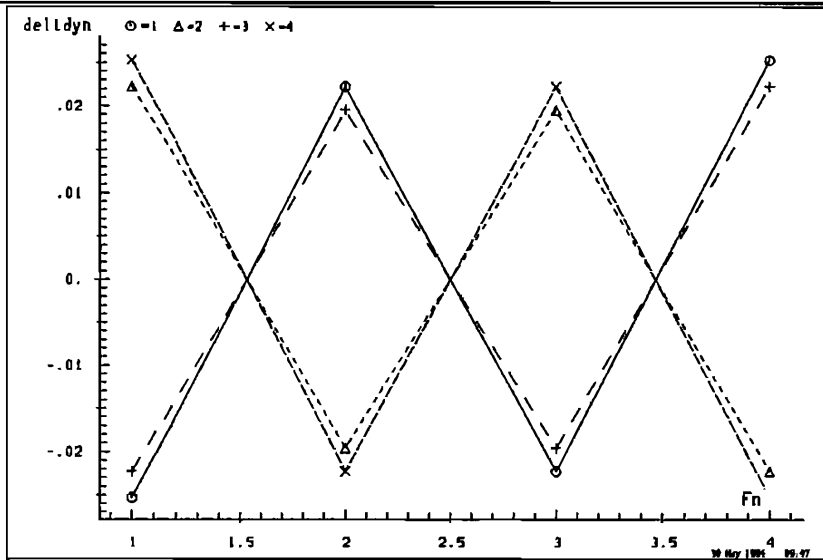
APHIMO f10m104 Eigenwert:31 Frequenz : 127.0368 Daempfung : -5.0208



APHIMO f10m104(f104) Eig:31(29) Fre: 127.0368(134.1809) Dae: -5.0208(-5.6599)

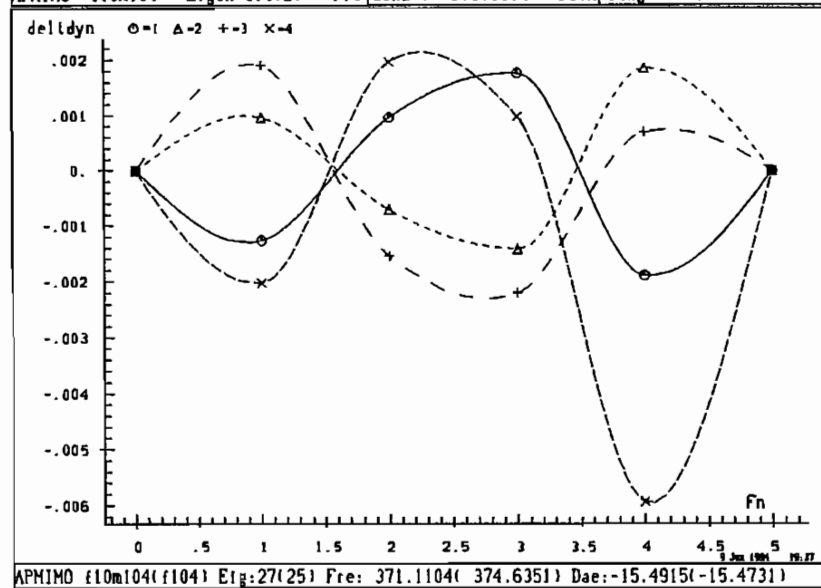
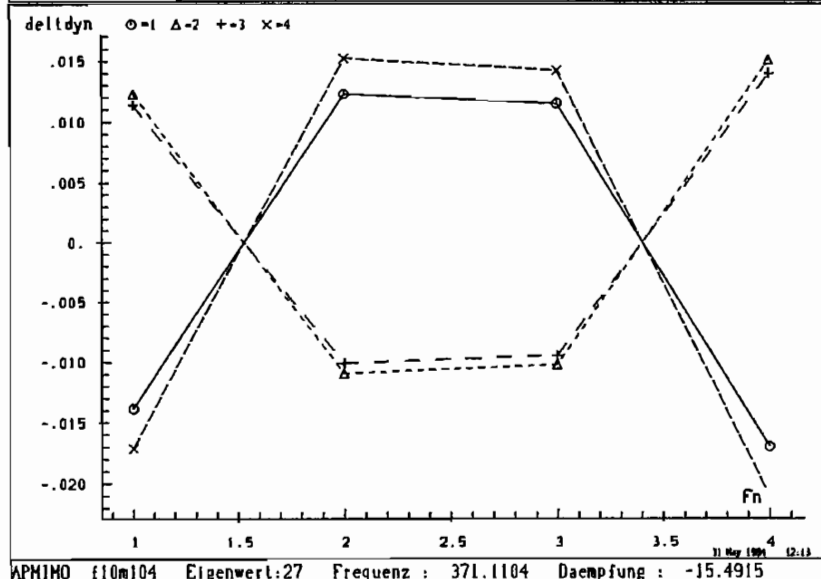
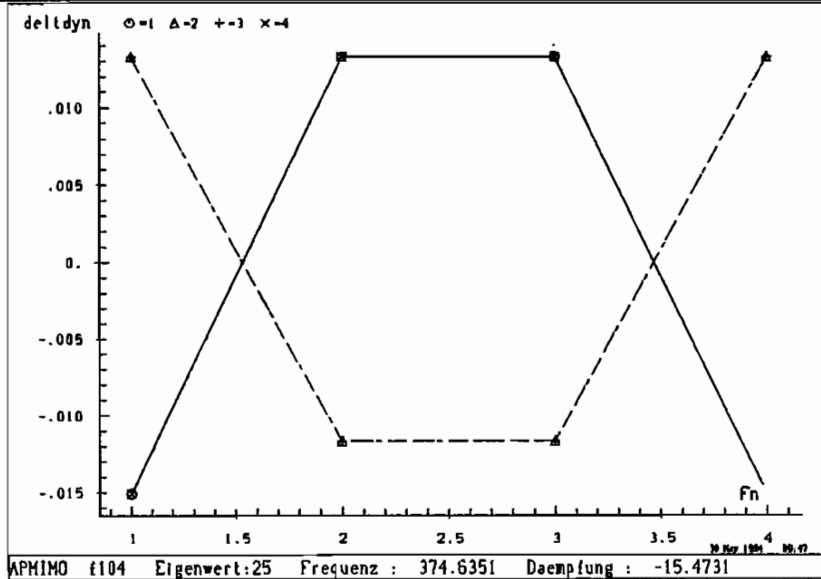
Berechnung B.50 Einflußgrößen f104 f10m104

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



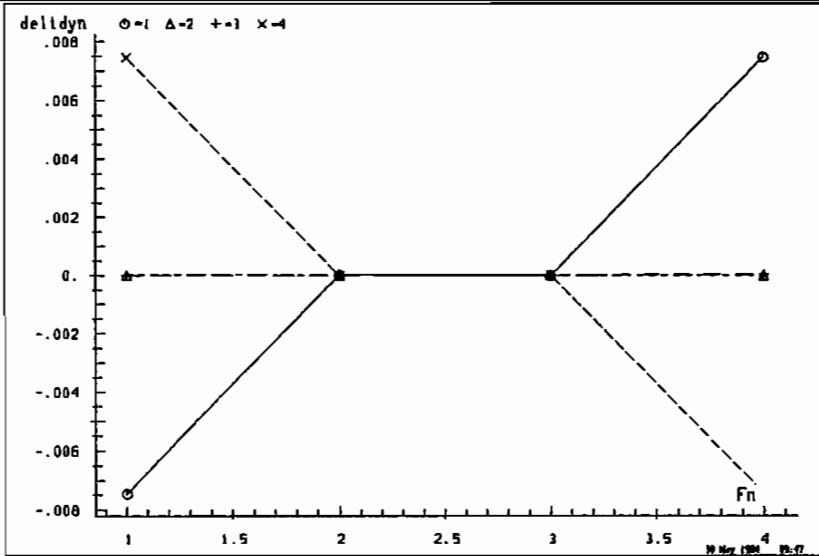
Berechnung B.51 Einflußgrößen f104 f10m104

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

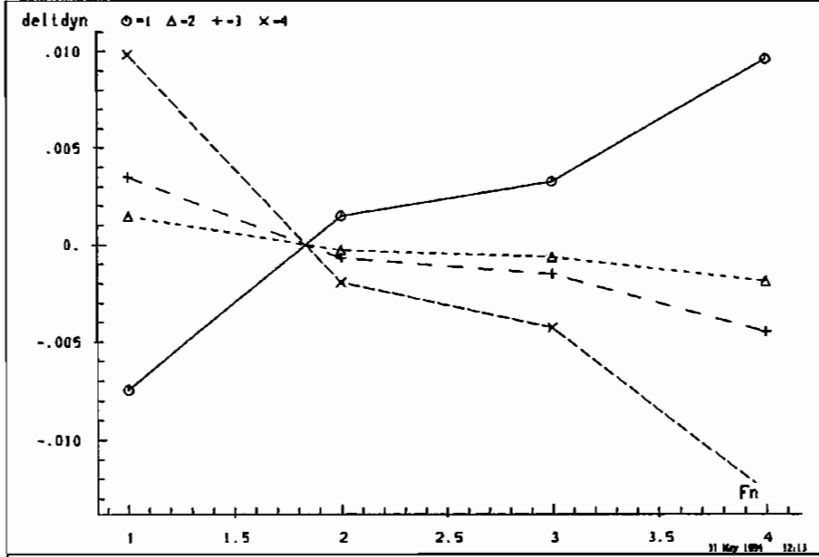


Berechnung B.52 Einflußgrößen f104 f10m104

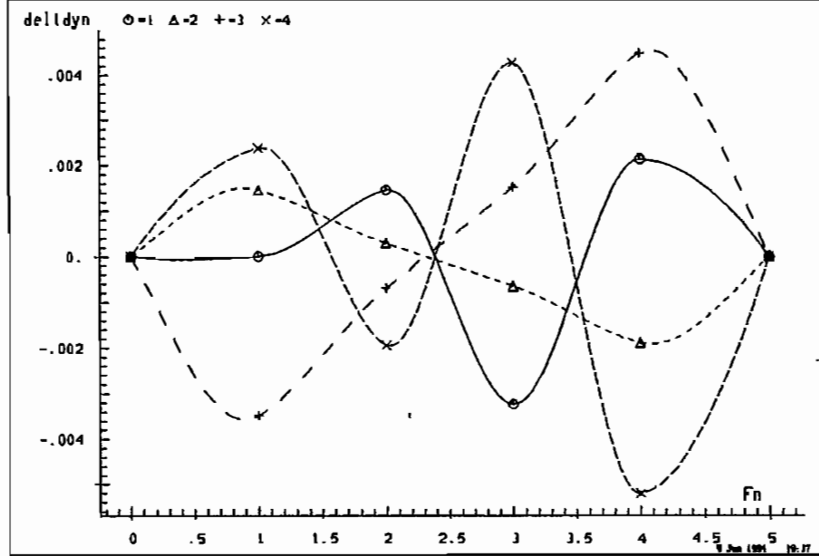
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHMO f104 Eigenwert:27 Frequenz : 542.6469 Dämpfung : -22.5851

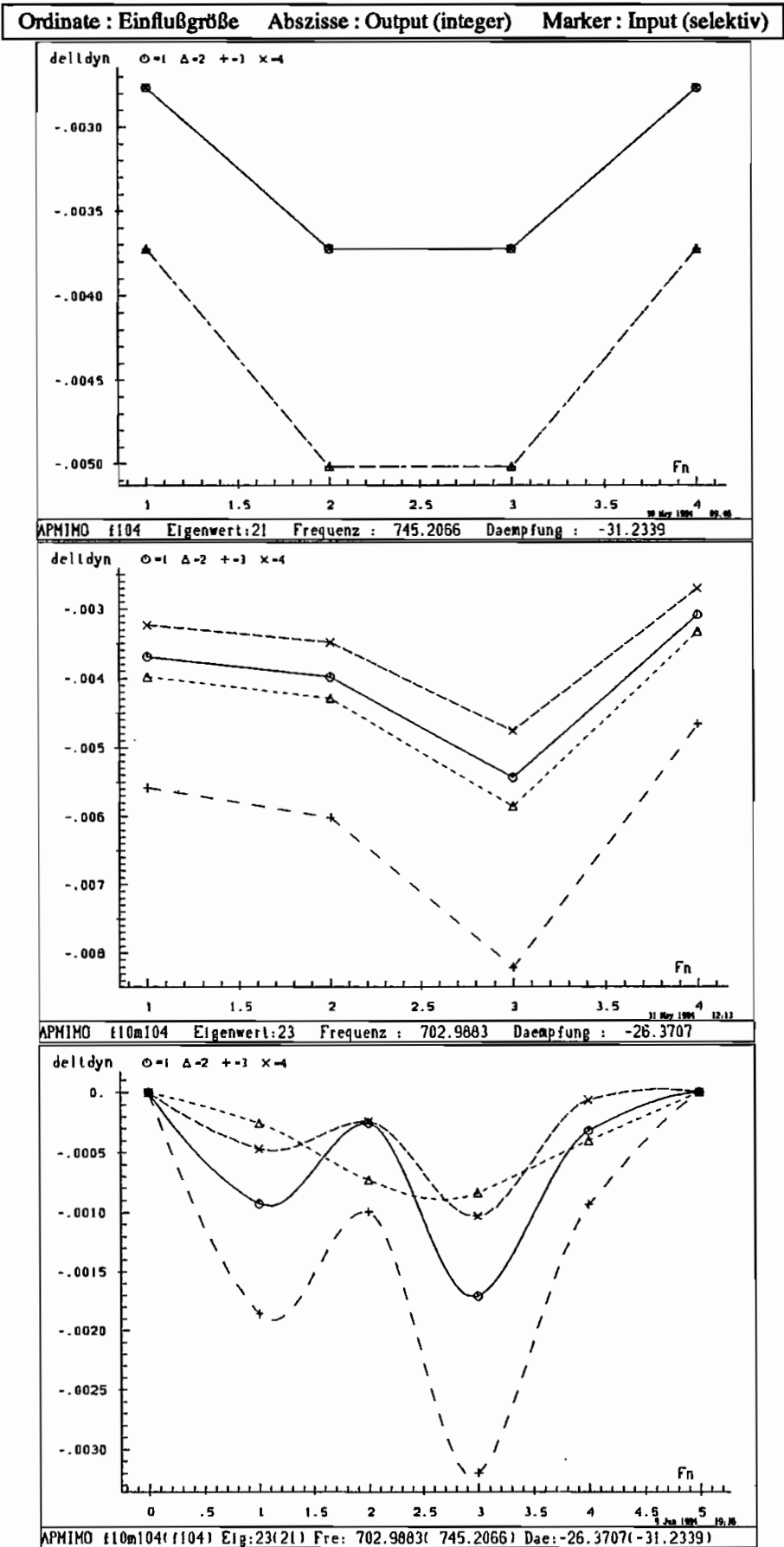


APHMO f10m104 Eigenwert:25 Frequenz : 511.7584 Dämpfung : -20.1192



APHMO f10m104(f104) Eig:25(27) Fre: 511.7584(542.6469) Dae:-20.1192(-22.5851)

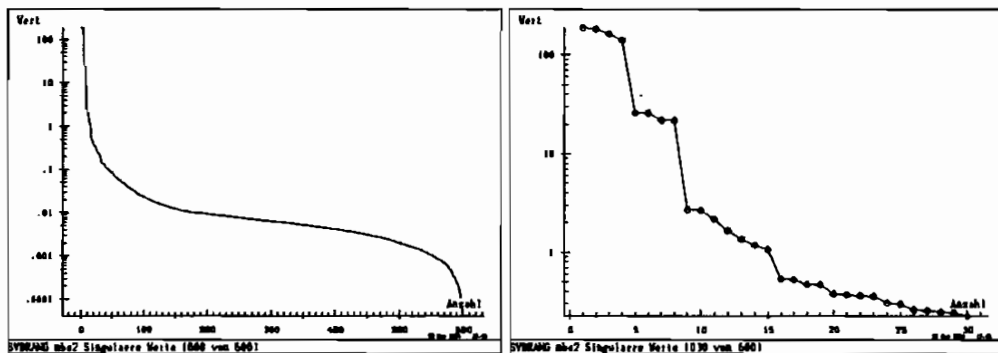
Berechnung B.53 Einflußgrößen f104 f10m104



B.7 Realisierung 4x4 , Messung mbo2 mbm2

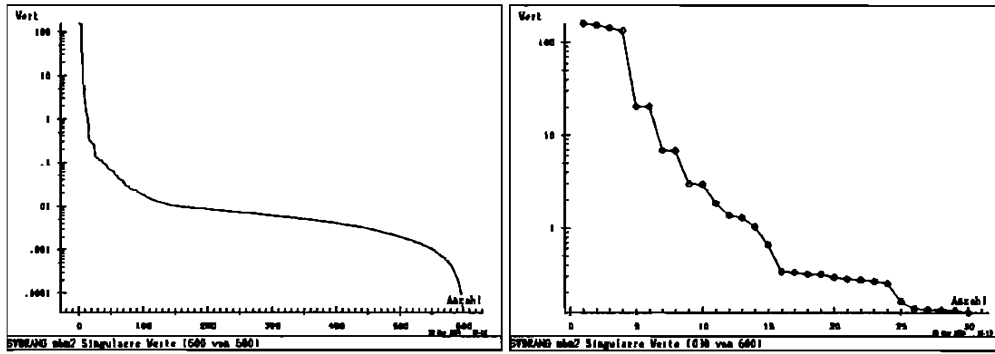
- Realisierung für ein System mit 4 Eingängen und 4 Ausgängen
- Nullmessung : mbo2
- Systemmessung : mbm2
- Reale Messung am Versuchsstand
- Änderung der Masse von ca. 10 % bei 70 cm
- Messung an einem Koppelschwingerbalken

Berechnung B.54 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung mbo2



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
13	1.78660	-84.43546	-13.43832
12	1.78660	84.43546	13.43832
11	-1.79714	-91.66349	-14.58870
10	-1.79714	91.66349	14.58870
9	-.63248	.00000	.00000
8	-.68402	-353.59736	-56.27677
7	-.68402	353.59736	56.27677
6	-5.60283	-763.41054	-121.50056
5	-5.60283	763.41054	121.50056
4	-8.97944	-851.91328	-135.58621
3	-8.97944	851.91328	135.58621
2	-.53771	-1390.12944	-221.24597
1	-.53771	1390.12944	221.24597

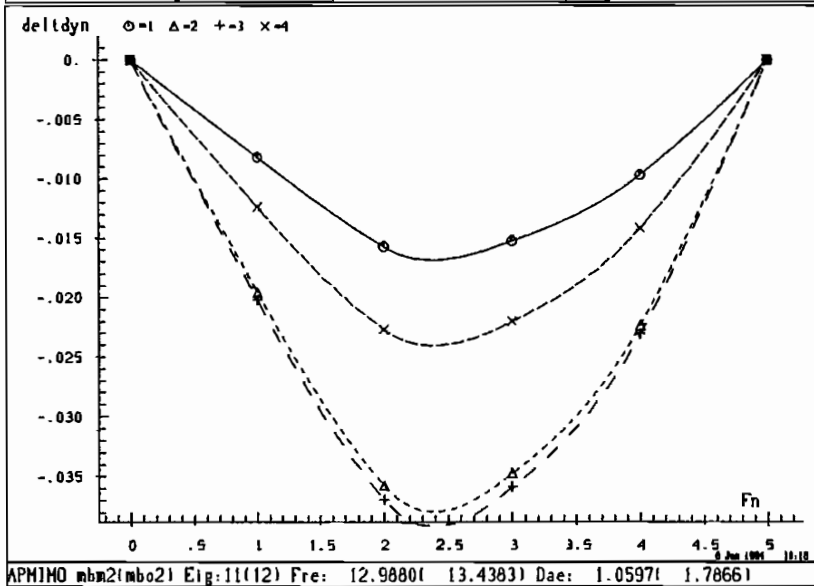
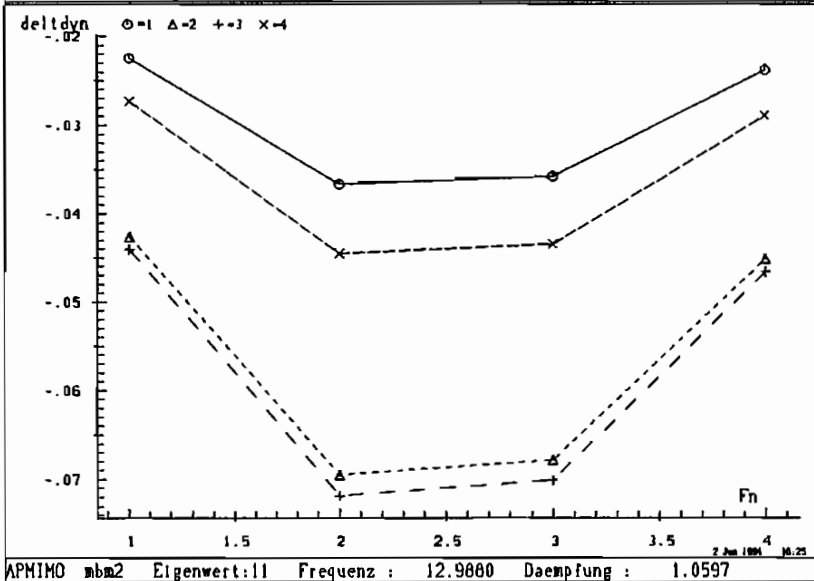
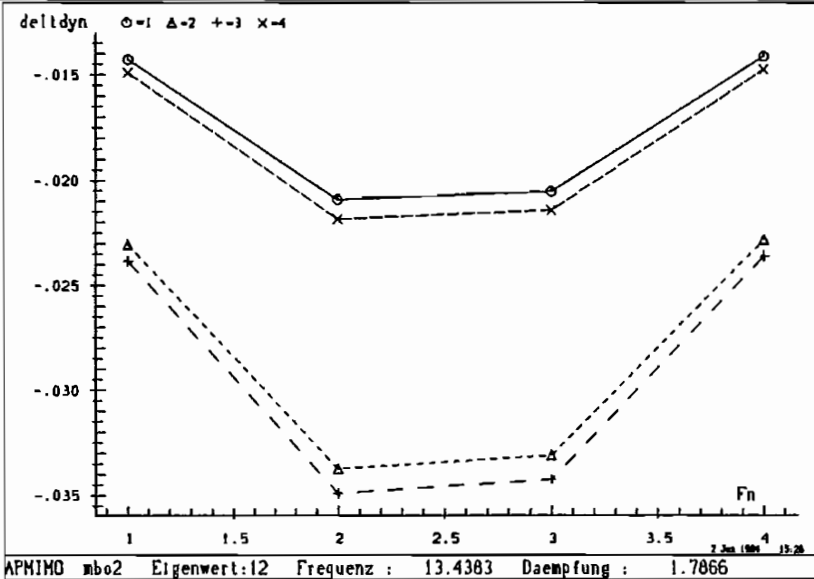
Berechnung B.55 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung mbm2



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
14	.08741	.00000	.00000
13	1.34536	.00000	.00000
12	1.05975	-81.60584	-12.98797
11	1.05975	81.60584	12.98797
10	-1.05588	-86.25143	-13.72734
9	-1.05588	86.25143	13.72734
8	-.49692	-323.72691	-51.52274
7	-.49692	323.72691	51.52274
6	-7.59210	-748.96500	-119.20148
5	-7.59210	748.96500	119.20148
4	-11.39742	-807.24070	-128.47635
3	-11.39742	807.24070	128.47635
2	-2.26643	-1367.57382	-217.65613
1	-2.26643	1367.57382	217.65613

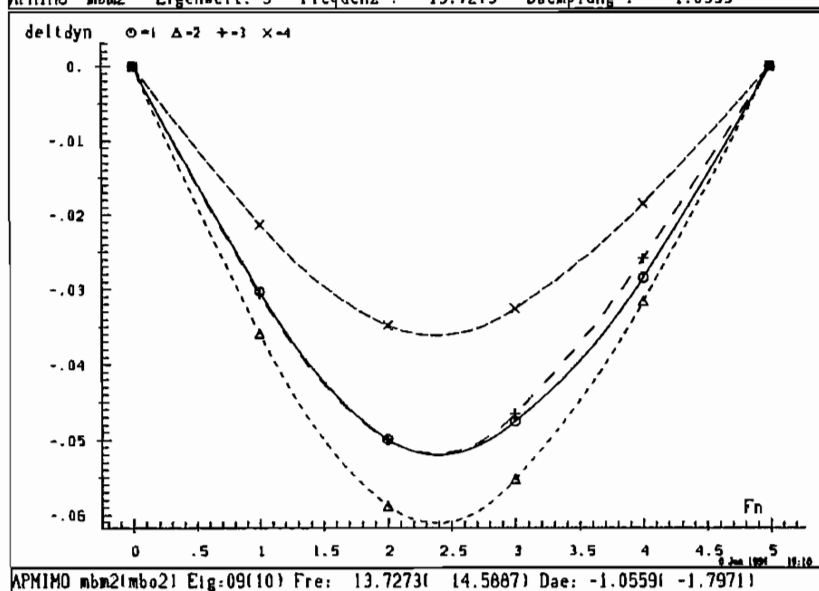
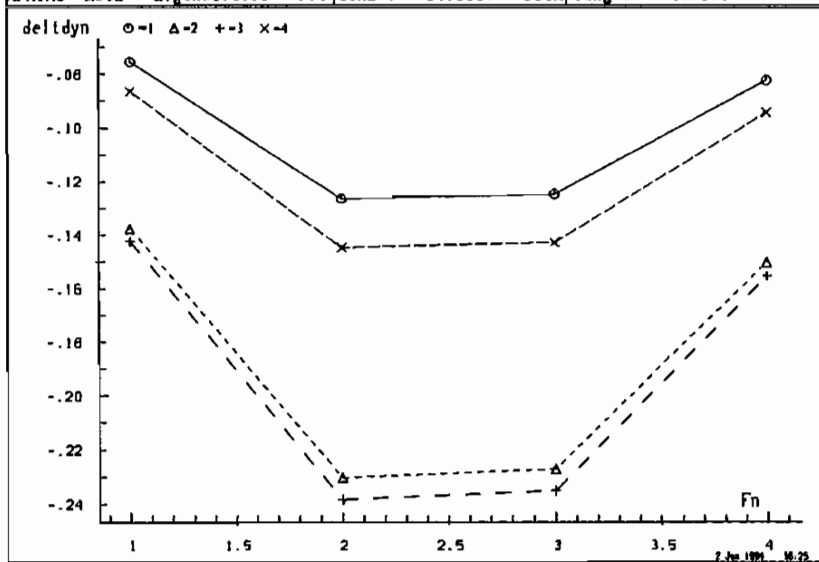
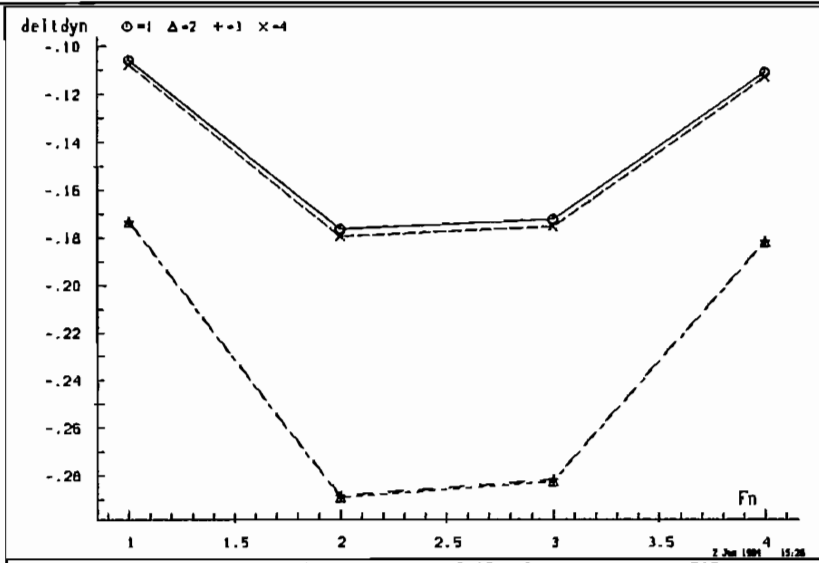
Berechnung B.56 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



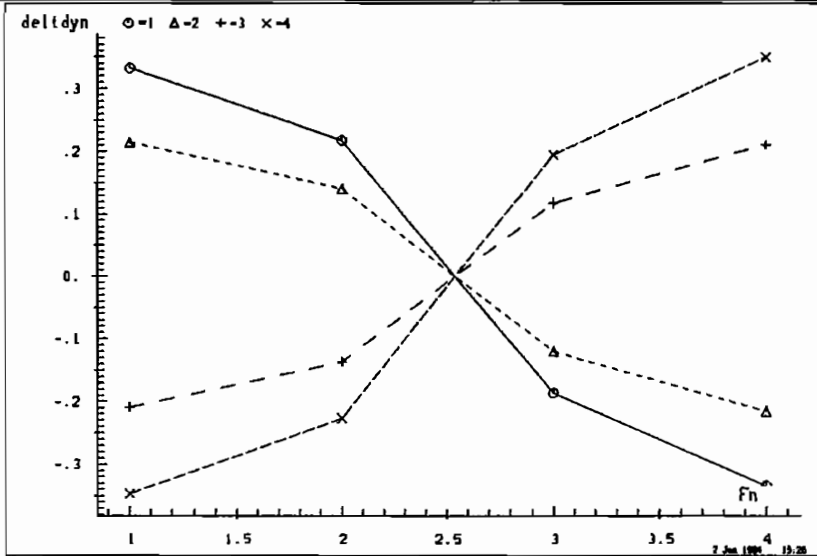
Berechnung B.57 Einflußgrößen mbo2 mbm2

Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)

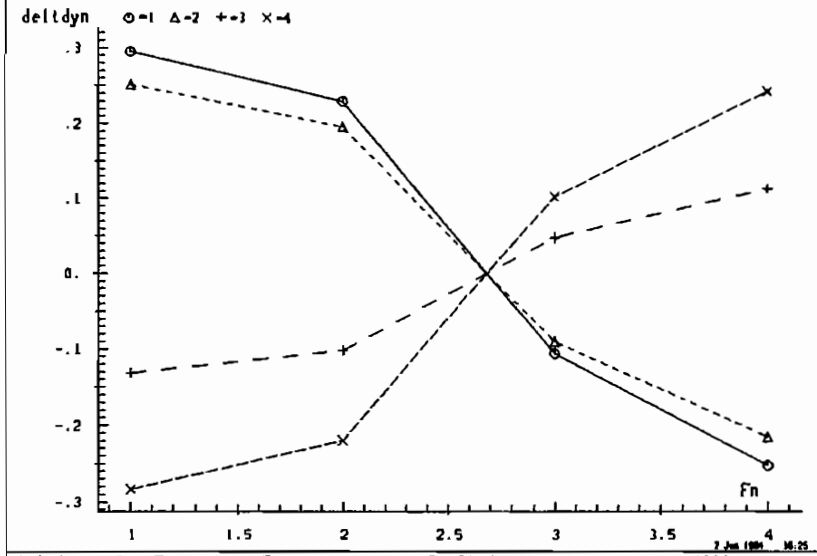


Berechnung B.58 Einflußgrößen mbo2 mbm2

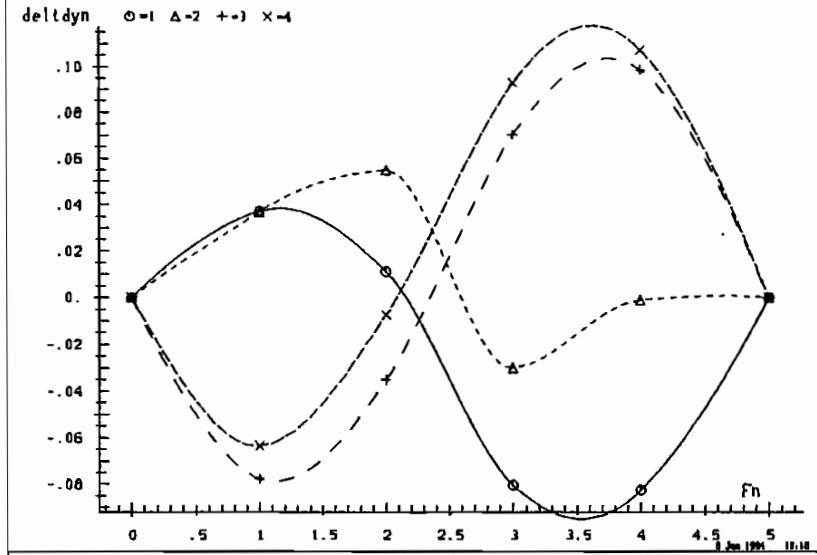
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APH1M0 mbo2 Eigenwert: 7 Frequenz : 56.2768 Daempfung : -.6840

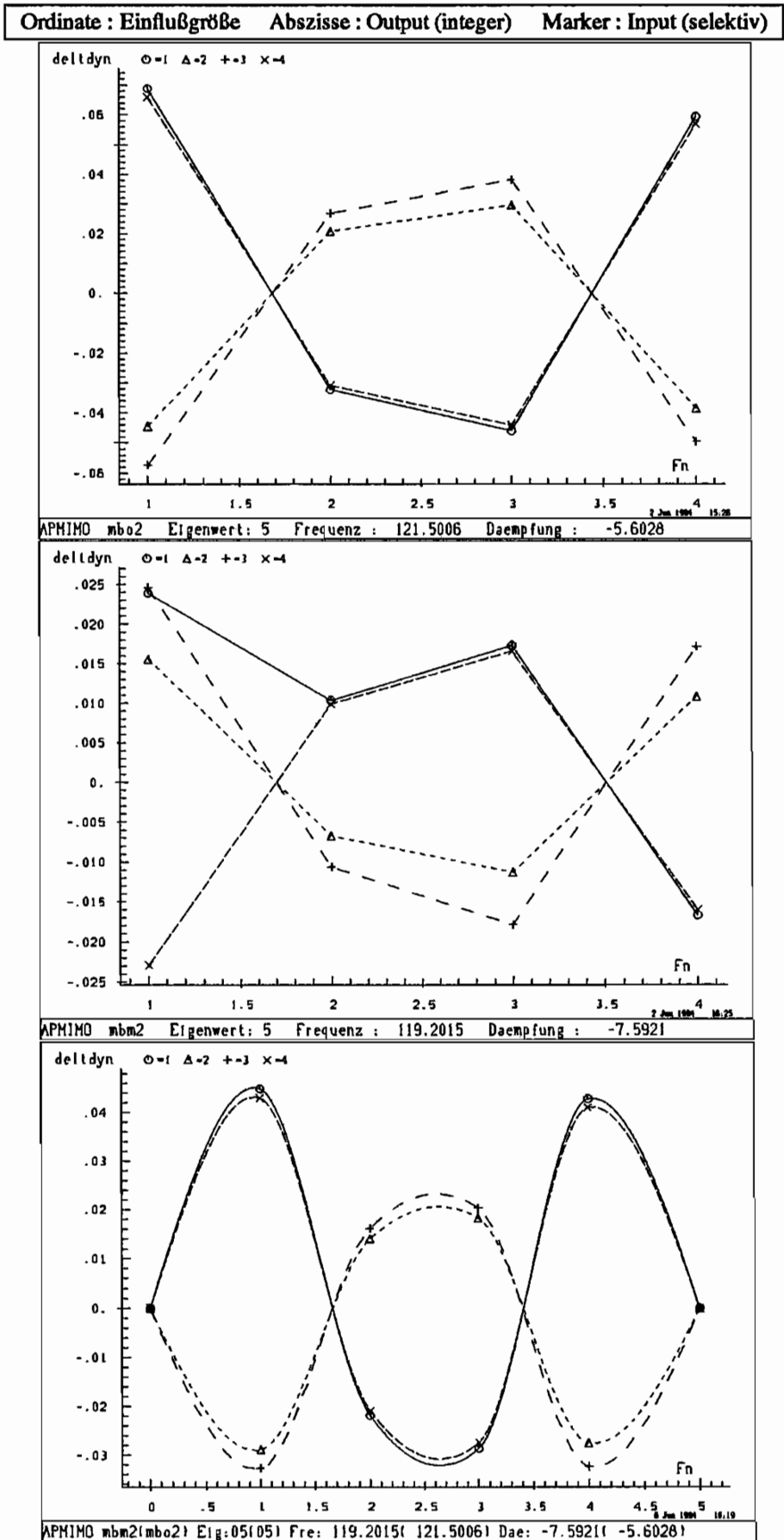


APH1M0 mbm2 Eigenwert: 7 Frequenz : 51.5227 Daempfung : -.4969



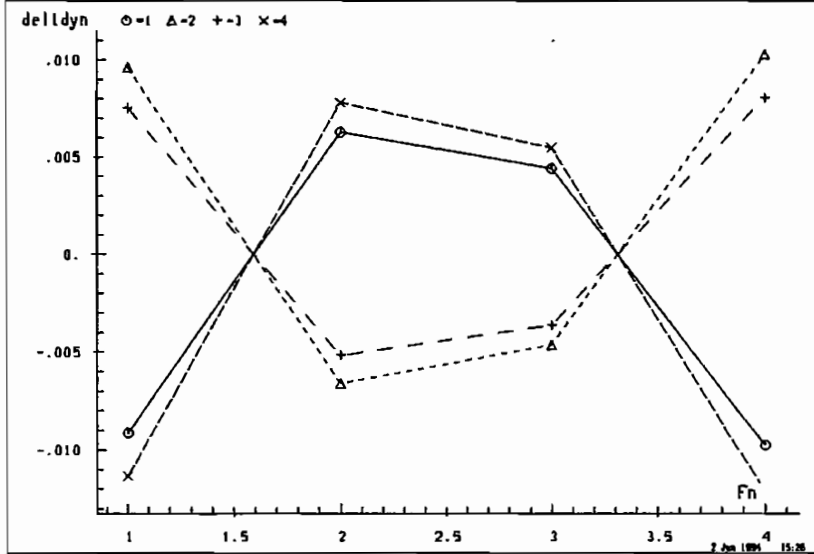
APH1M0 mbm2(mbo2) Eig: 07(07) Fre: 51.5227(56.2768) Dae: -.4969(-.6840)

Berechnung B.59 Einflußgrößen mbo2 mbm2

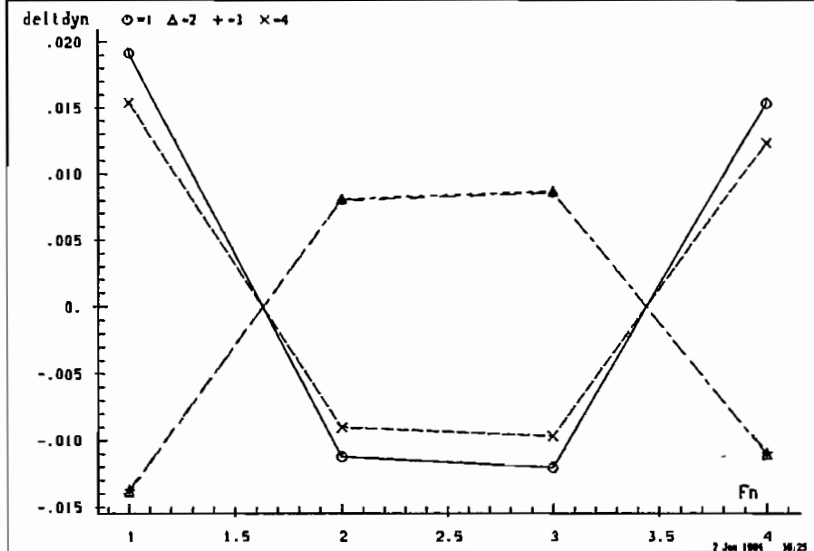


Berechnung B.60 Einflußgrößen mbo2 mbm2

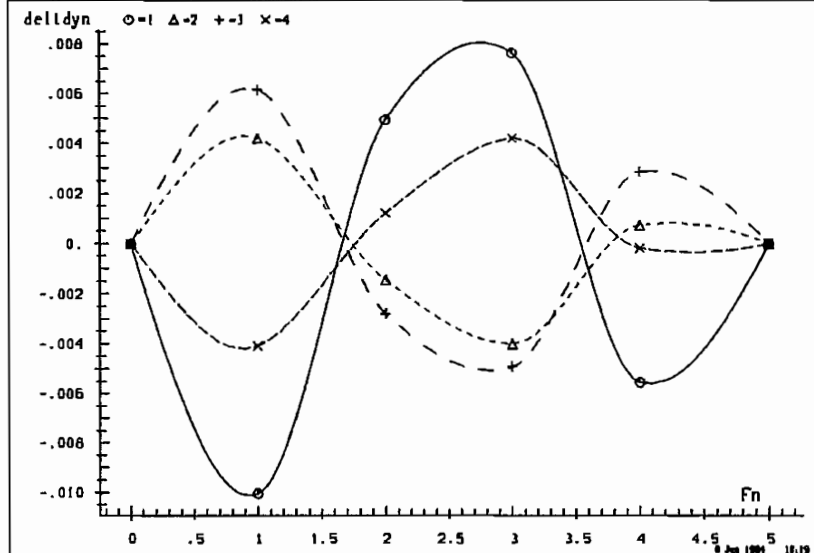
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO mbo2 Eigenwert: 3 Frequenz : 135.5862 Daempfung : -8.9794



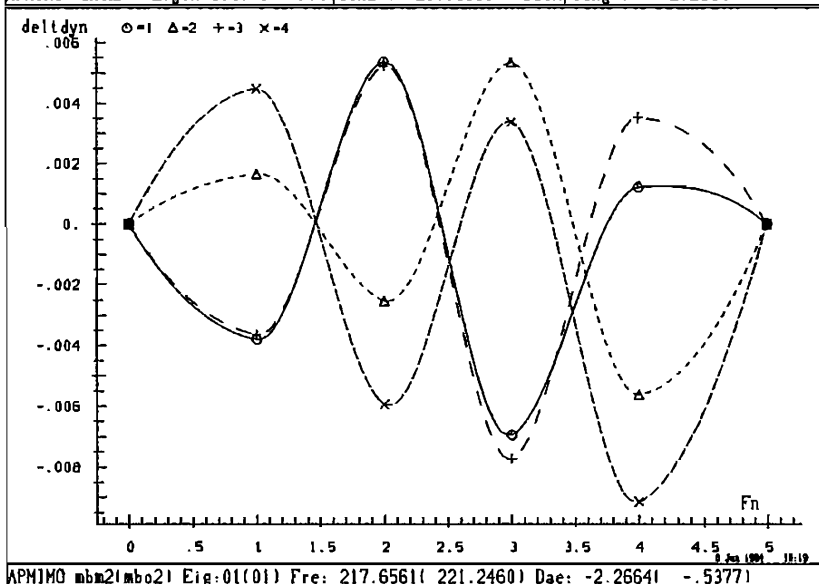
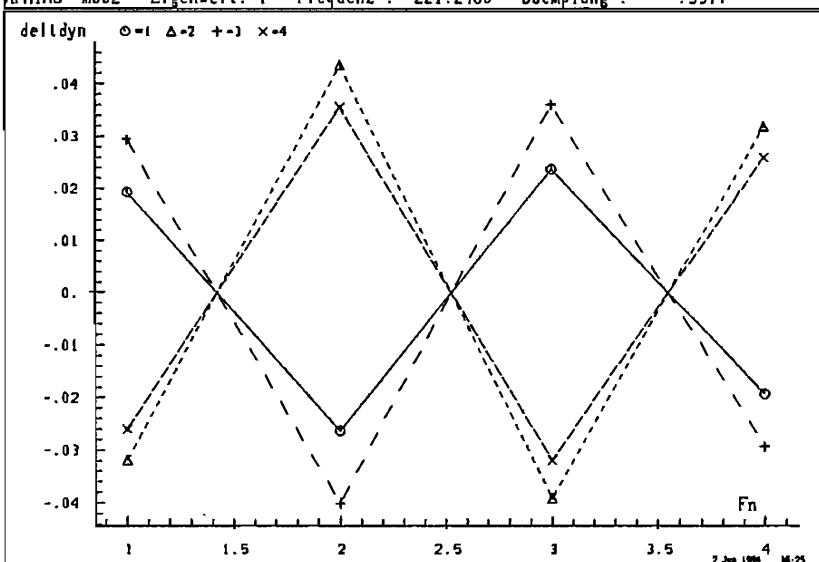
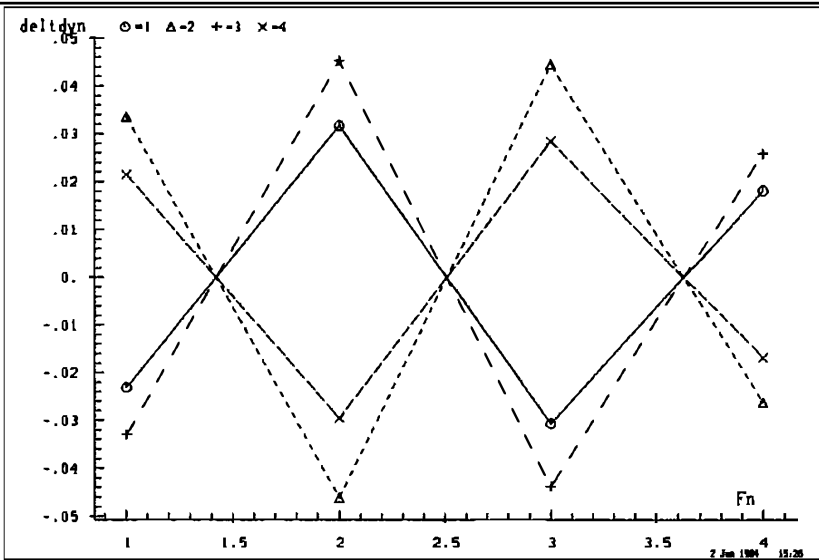
APMIMO mbm2 Eigenwert: 3 Frequenz : 128.4763 Daempfung : -11.3974



APMIMO mbm2(mbo2) Eig:03(03) Fre: 128.4763(135.5862) Dae:-11.3974(-8.9794)

Berechnung B.61 Einflußgrößen mbo2 mbm2

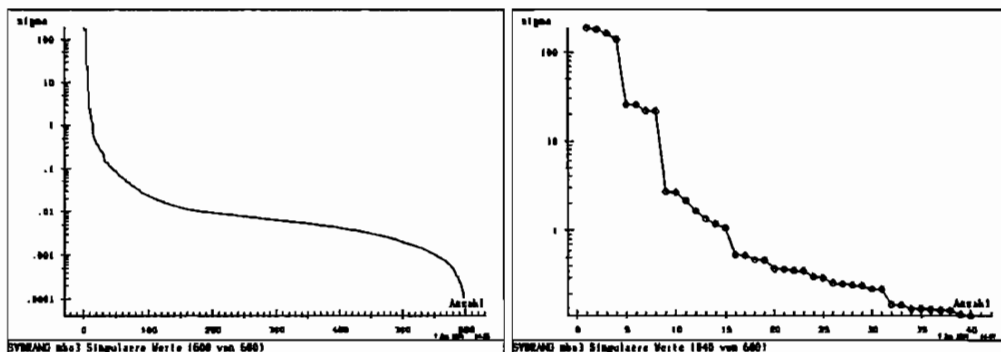
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



B.8 Realisierung 4x4 , Messung mbo3 mbm3

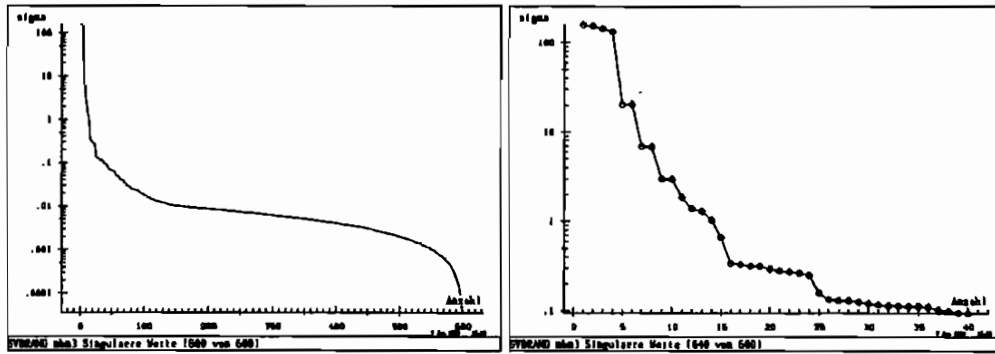
- Realisierung für ein System mit 4 Eingängen und 4 Ausgängen
 - Nullmessung : mbo3
 - Systemmessung : mbm3
 - Reale Messung am Versuchsstand
 - Änderung der Masse von ca. 10 % bei 70 cm
 - Messung an einem Koppelschwingerbalken
- — — — —

Berechnung B.62 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung mbo3



Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
19	-.42796	.00000	.00000
18	.05701	.00000	.00000
17	-4.31983	.00000	.00000
16	.01050	-87.91509	-13.99212
15	.01050	87.91509	13.99212
14	-.87200	-92.78488	-14.76717
13	-.87200	92.78488	14.76717
12	-4.83807	-331.68865	-52.78989
11	-4.83807	331.68865	52.78989
10	-.65129	-353.62124	-56.28057
9	-.65129	353.62124	56.28057
8	-5.89616	-742.42050	-118.15989
7	-5.89616	742.42050	118.15989
6	-5.48302	-763.59970	-121.53067
5	-5.48302	763.59970	121.53067
4	-9.15995	-851.71167	-135.55412
3	-9.15995	851.71167	135.55412
2	-.53851	-1390.12971	-221.24601
1	-.53851	1390.12971	221.24601

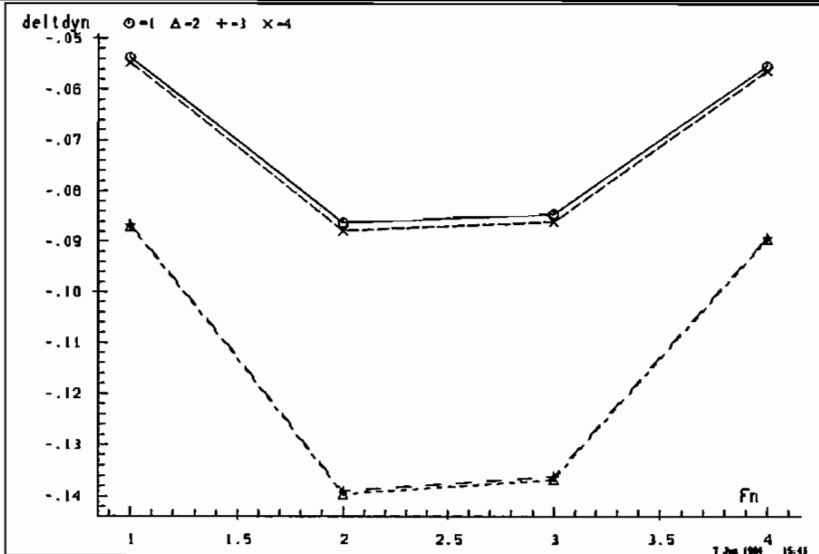
Berechnung B.63 Singulärwerte, Frequenz und Dämpfung mbm3



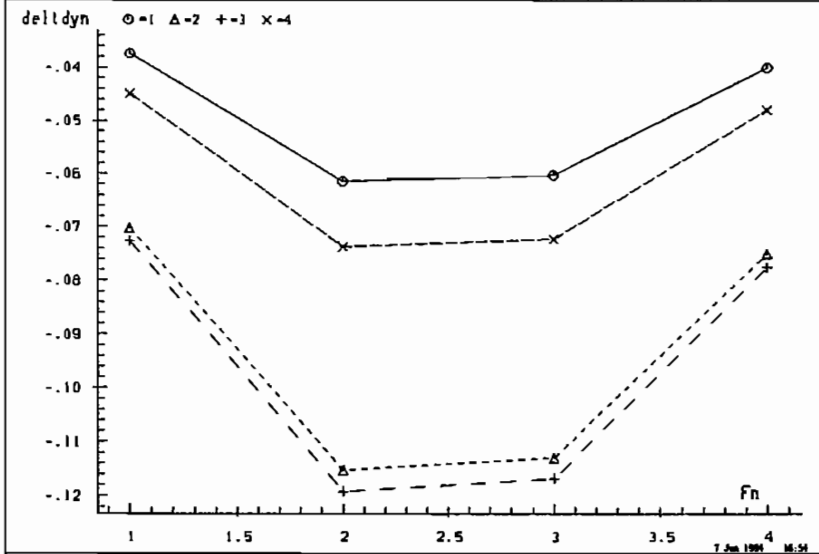
Nr.	Dämpfung	Kreisfrequenz	Frequenz
19	-.11385	.00000	.00000
18	.77947	-7.22850	-1.15045
17	.77947	7.22850	1.15045
16	.50712	-82.51319	-13.13238
15	.50712	82.51319	13.13238
14	-.67155	-86.65379	-13.79138
13	-.67155	86.65379	13.79138
12	-2.08601	-310.60200	-49.43384
11	-2.08601	310.60200	49.43384
10	-.48412	-323.73108	-51.52340
9	-.48412	323.73108	51.52340
8	-7.61350	-748.95858	-119.20046
7	-7.61350	748.95858	119.20046
6	-1.60357	-706.71050	-112.47647
5	-1.60357	706.71050	112.47647
4	-11.37443	-807.26282	-128.47987
3	-11.37443	807.26282	128.47987
2	-2.26631	-1367.57462	-217.65626
1	-2.26631	1367.57462	217.65626

Berechnung B.64 Einflußgrößen mbo3 mbm3

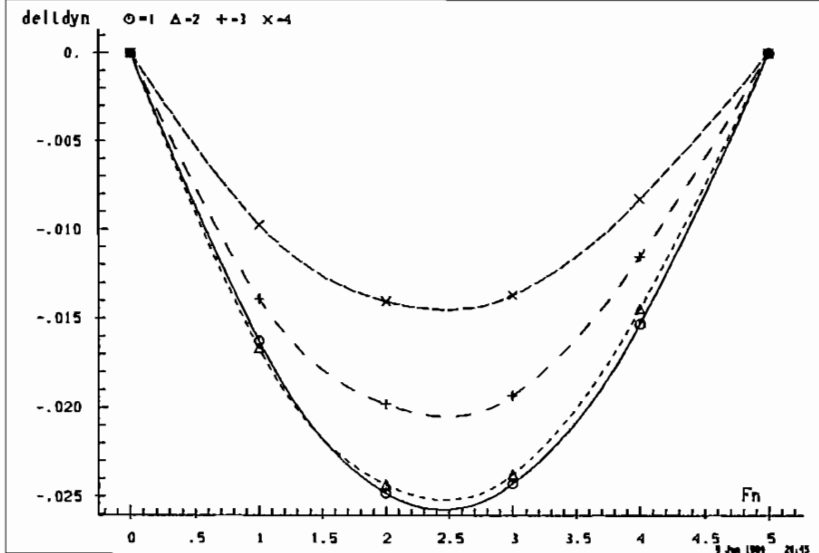
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APM10 mbo3 Eigenwert:15 Frequenz : 13.9921 Daempfung : .0105

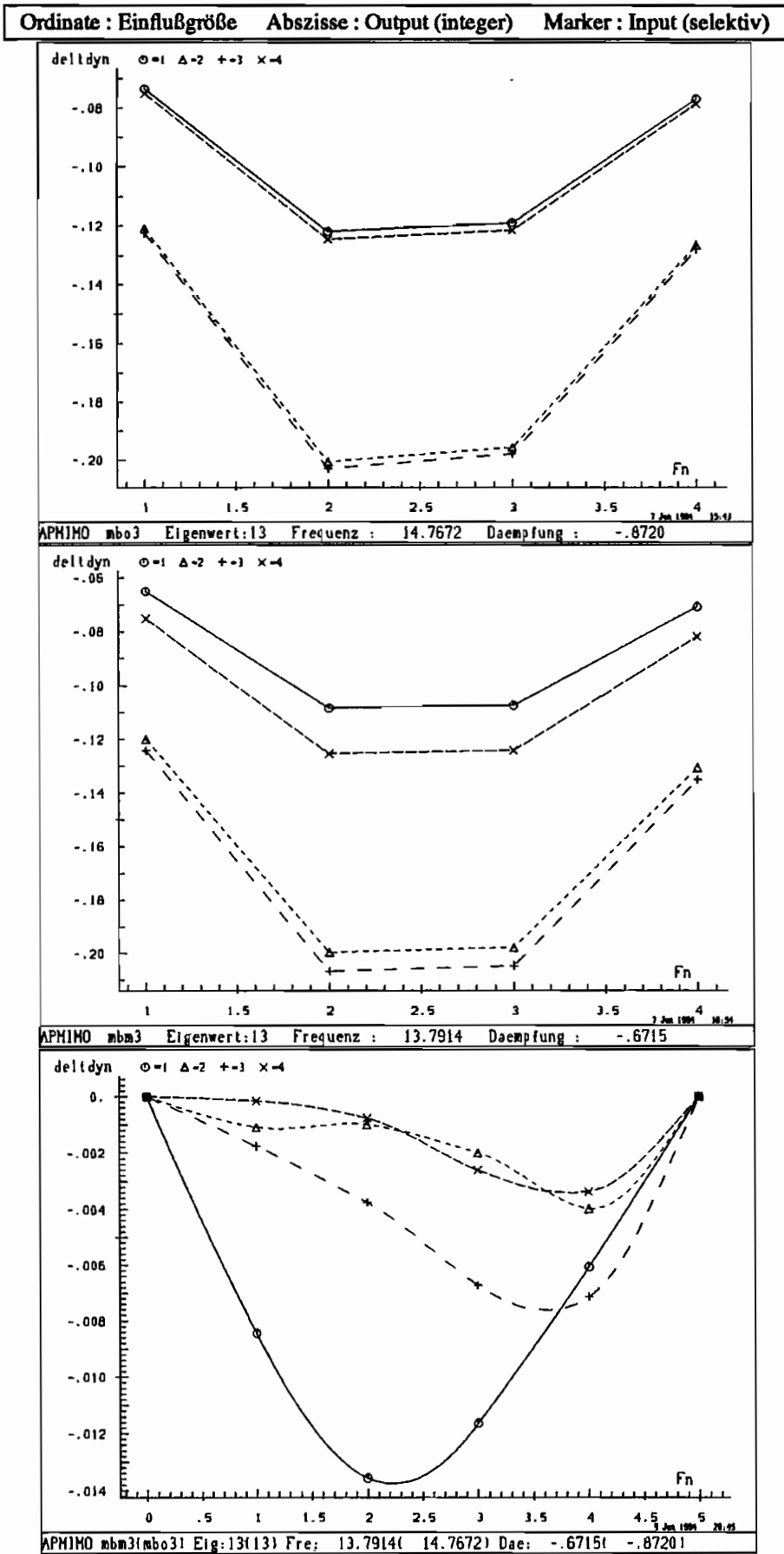


APM10 mbm3 Eigenwert:15 Frequenz : 13.1324 Daempfung : .5071

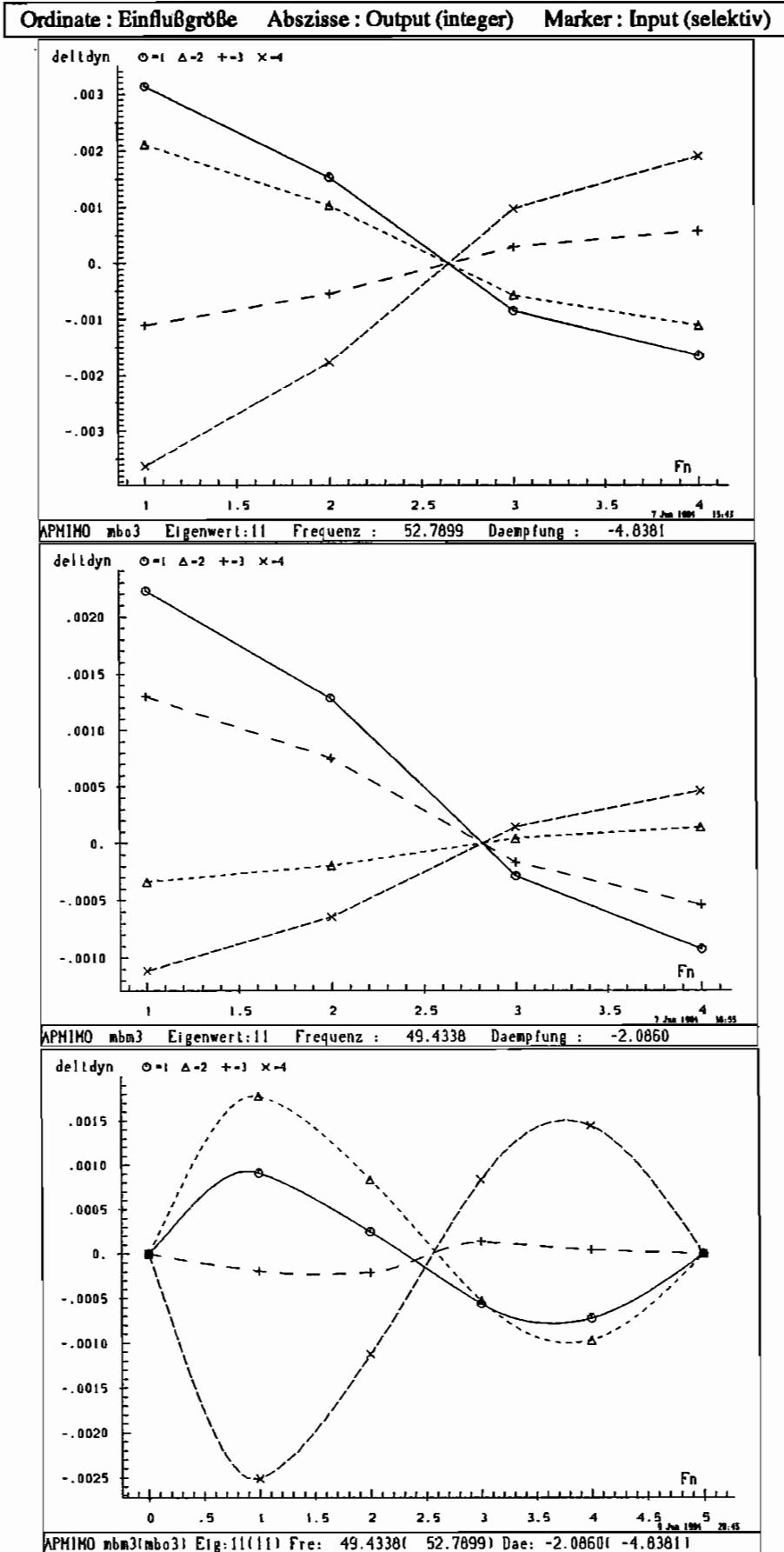


APM10 mbo3(mbo3) Eig:15(15) Fre: 13.1324(13.9921) Dae: .5071(.0105)

Berechnung B.65 Einflußgrößen mbo3 mbm3

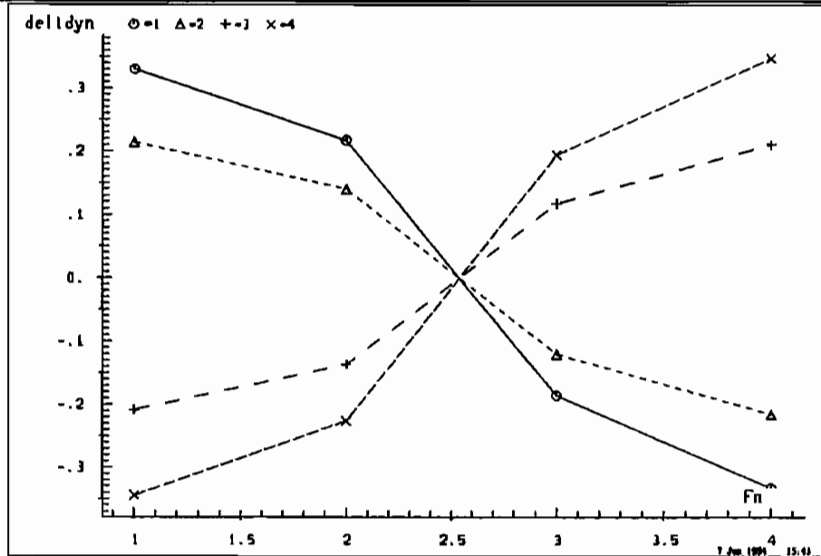


Berechnung B.66 Einflußgrößen mbo3 mbm3

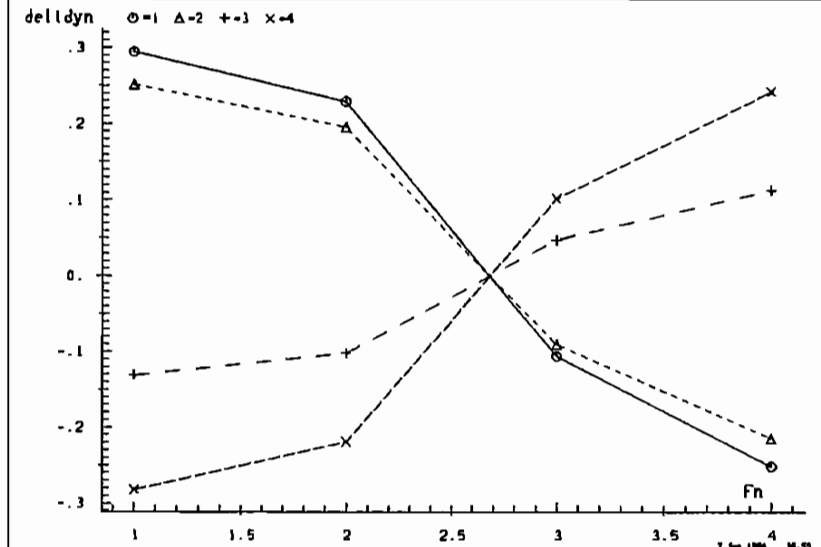


Berechnung B.67 Einflußgrößen mbo3 mbm3

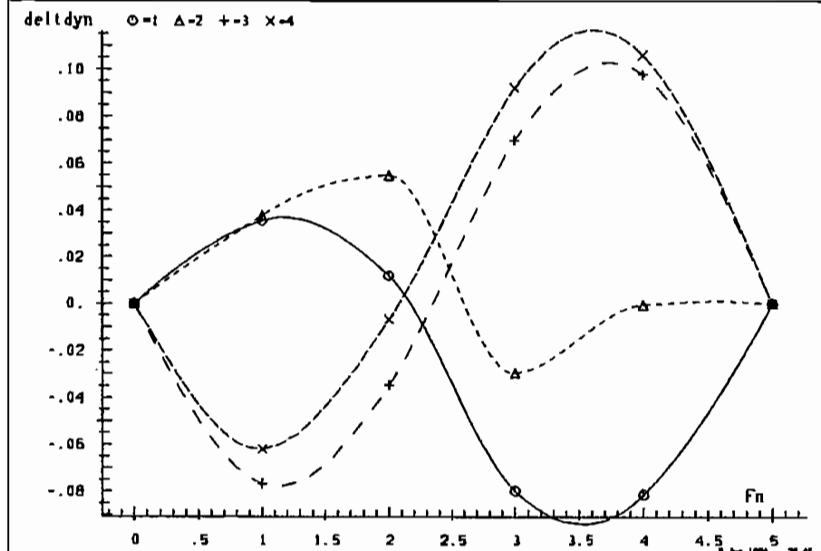
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMHO mbo3 Eigenwert: 9 Frequenz : 56.2806 Daempfung : -.6513



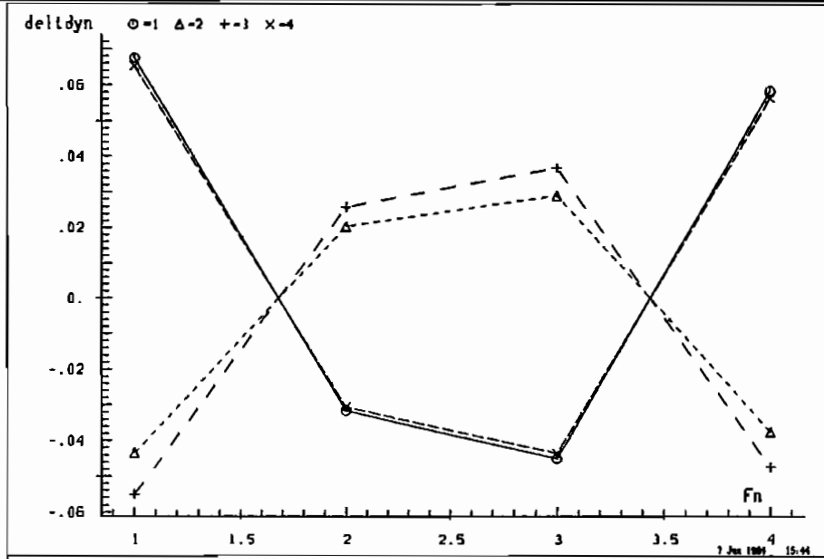
APMHO mbm3 Eigenwert: 9 Frequenz : 51.5234 Daempfung : -.4841



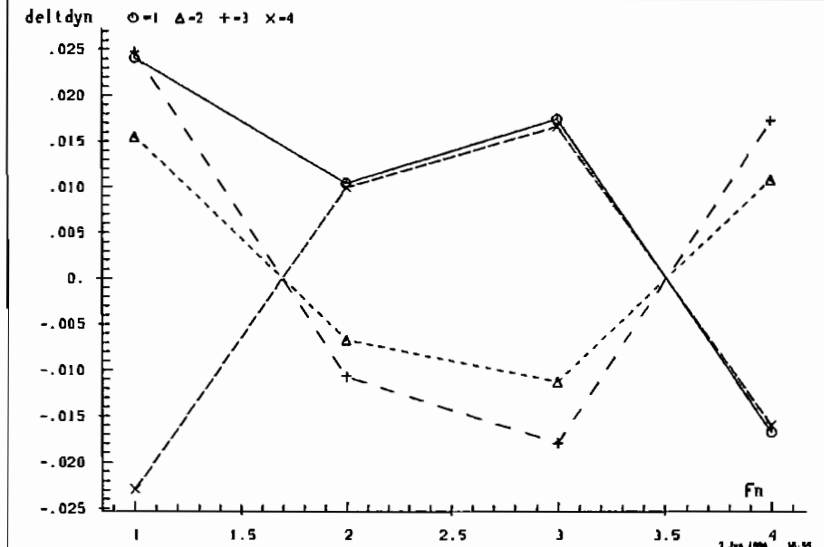
APMHO mbm3(mbo3) Eig:09(09) Fre: 51.5234(56.2806) Dae: -.4841(-.6513)

Berechnung B.68 Einflußgrößen mbo3 mbm3

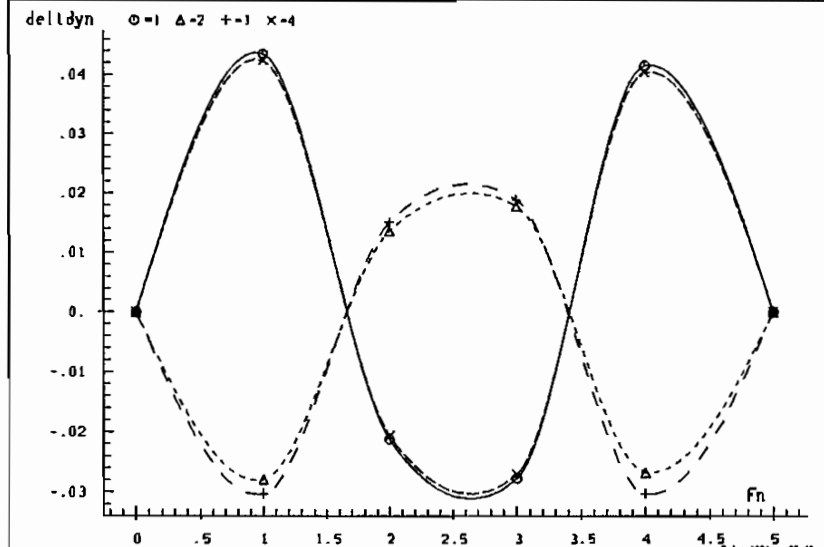
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO mbo3 Eigenwert: 5 Frequenz : 121.5307 Daempfung : -5.4830



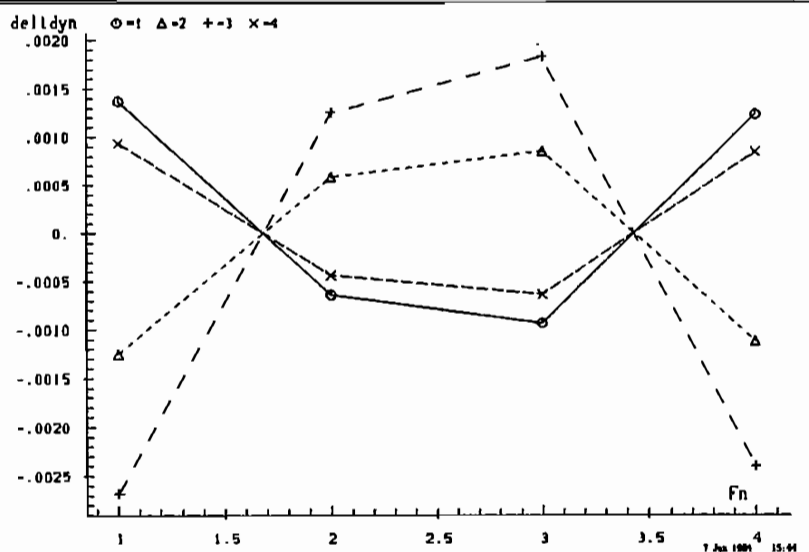
APMIMO mbm3 Eigenwert: 7 Frequenz : 119.2005 Daempfung : -7.6135



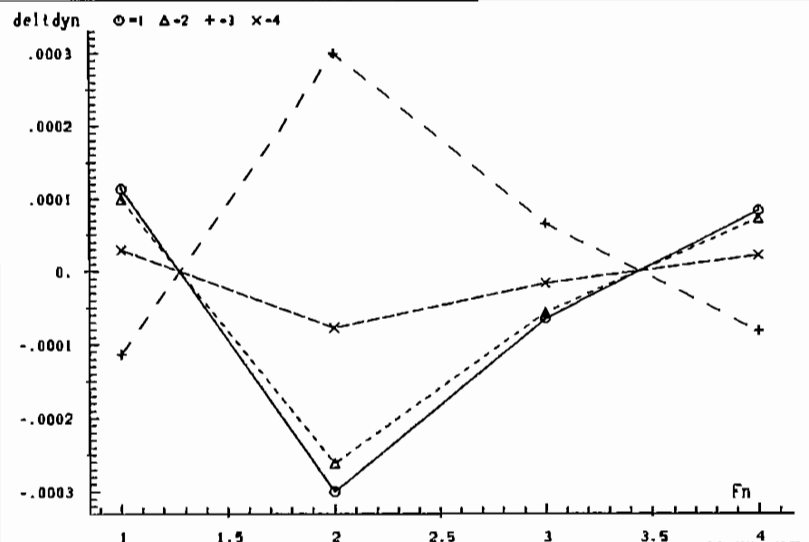
APMIMO mbm31mbo31 Eig:07(05) Fre: 119.2005(121.5307) Dae: -7.6135(-5.4830)

Berechnung B.69 Einflußgrößen mbo3 mbm3

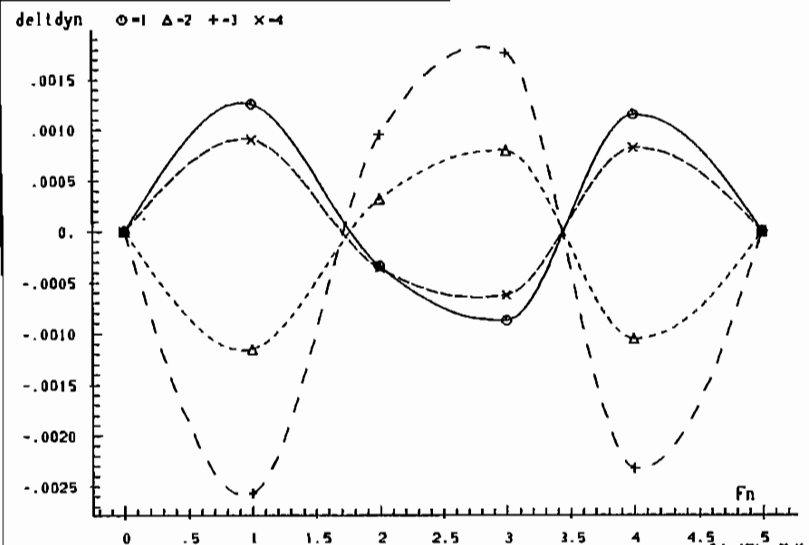
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO mbo3 Eigenwert: 7 Frequenz : 118.1599 Daempfung : -5.8962



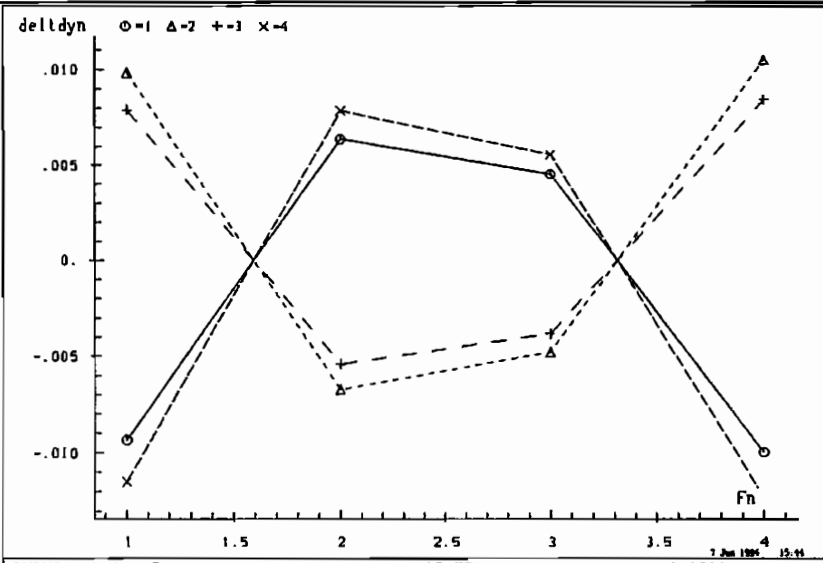
APMIMO mbm3 Eigenwert: 5 Frequenz : 112.4765 Daempfung : -1.6036



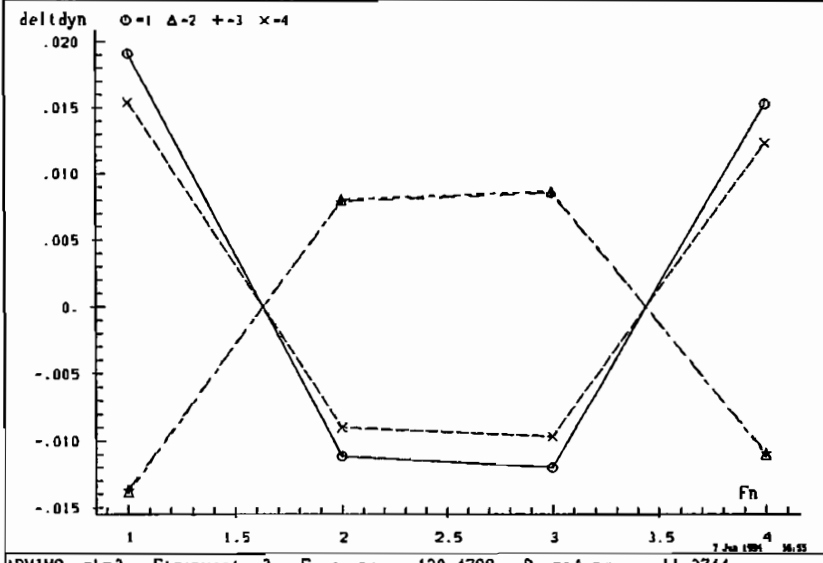
APMIMO mbm3|mbm3 Eig:05(07) Fre: 112.4765(118.1599) Dae: -1.6036(-5.8962)

Berechnung B.70 Einflußgrößen mbo3 mbm3

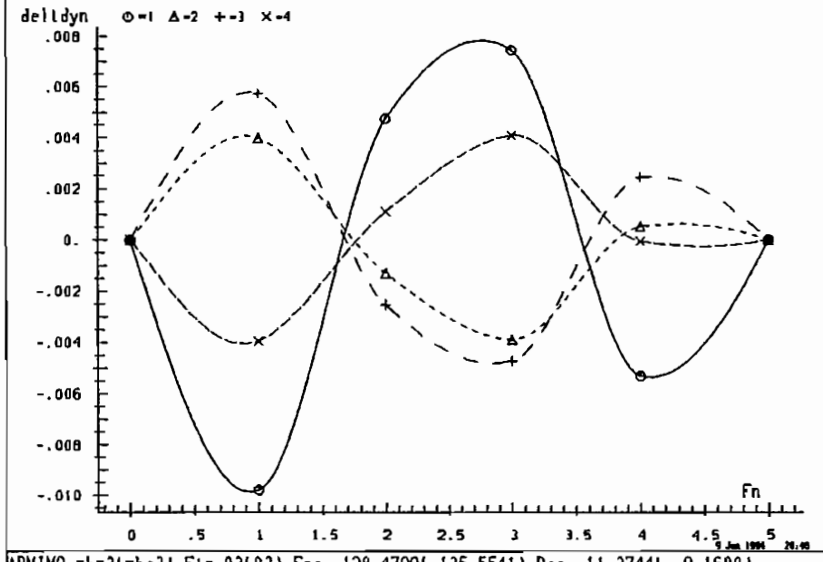
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APHIMO mbo3 Eigenwert: 3 Frequenz : 135.5541 Daempfung : -9.1600



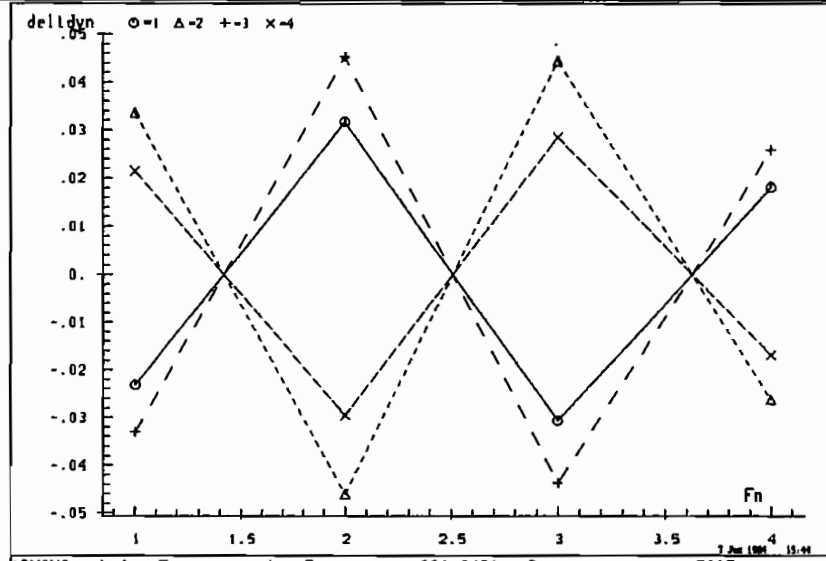
APHIMO mbm3 Eigenwert: 3 Frequenz : 128.4799 Daempfung : -11.3744



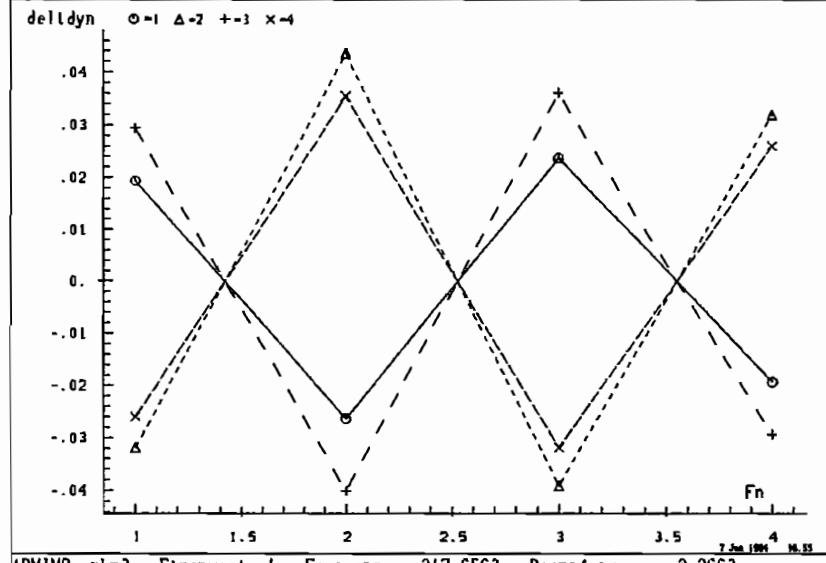
APHIMO mbm3(mbo3) Eig:03(03) Fre: 128.4799(135.5541) Dae:-11.3744(-9.1600)

Berechnung B.71 Einflußgrößen mbo3 mbm3

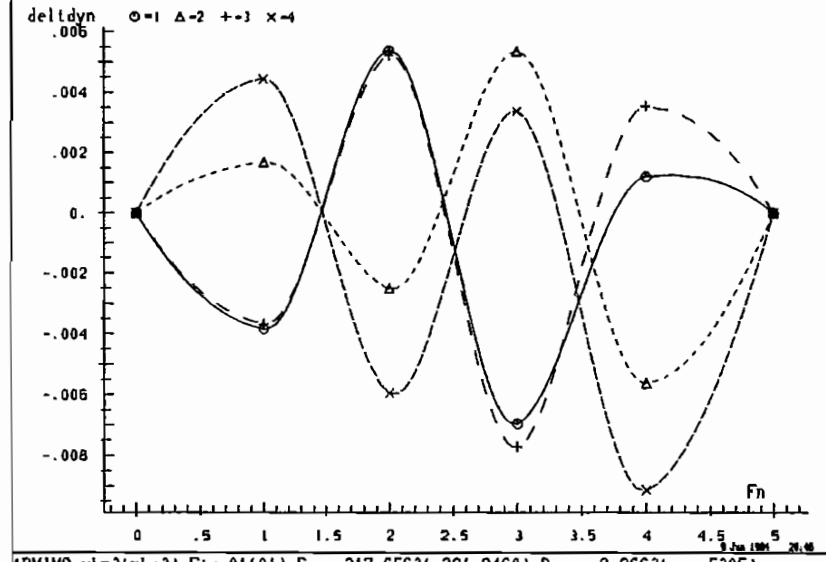
Ordinate : Einflußgröße Abszisse : Output (integer) Marker : Input (selektiv)



APMIMO mbo3 Eigenwert: 1 Frequenz : 221.2460 Daempfung : -.5385



APMIMO mbm3 Eigenwert: 1 Frequenz : 217.6563 Daempfung : -2.2663



APMIMO mbm3(mbo3) Eig:01(01) Fre: 217.6563(221.2460) Dae: -2.2663(-.5385)

Literaturverzeichnis

- [1] Thomas S. Alexander. *Adaptive Signal Processing*. Springer – Verlag, 1986.
- [2] Z. Bai und J. Demmel. *Computing the Generalized Singular Value Decomposition*. No UCB/CSD 91/645. Computer Science Division Univ. of Calif. Berkeley, 1991.
- [3] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw Hill, 1970.
- [4] M. Breidt. *Konstruktion und Bau eines Versuchsstandes zur Schwingungsuntersuchung eines gekoppelten Balkensystems*. Universität Bochum, Konst. Entwurf Institut für Mechanik, 1993.
- [5] M. Breidt. *Parameteridentifikation von mechanischen Modellen mit der verallg. Singulärwertzerlegung*. Universität Bochum, Diplomarbeit Institut für Mechanik, 1994.
- [6] W. Bunse und A. Bunse-Gestner. *Numerische lineare Algebra*. Teubner – Verlag, 1985.
- [7] B. Burbaum. *Meßwertuntersuchungen und Simulation einer komplexen realen Struktur zum Zweck der Modalanalyse*. Universität Bochum, Diplomarbeit Institut für Mechanik, 1991.
- [8] P. Businger und G. Golub. *ACM Algorithm 358*. Communications of the ACM, 1969.
- [9] L. Collatz. *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. Springer, 1968.
- [10] L. Collatz. *Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Stuttgart, 1990.
- [11] R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik Teil 1 u. 2*. Springer, 1968.
- [12] C. A. Desoer. *A Second Course On Linear Systems*. Van Nostarnd Reinhold Company, New York, 1970.
- [13] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. Oldenburg, 1985.

- [14] M. L. Eaton. *Multivariate Statistics*. John Wiley, 1983.
- [15] D. K. Faddejew und W. N. Faddejewa. *Num. Methoden der linearen Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1970.
- [16] V. Fernando und S. Hammarling. *The Kalman Reachability/Observability Canonical Form and the H₂SVD*. NAG Technical Report, 1987.
- [17] V. Fernando und S. Hammarling. *A Product Induced Singular Value Decomposition*. NAG Technical Report, 1987.
- [18] P. Funk. *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Springer, 1970.
- [19] F. R. Gantmacher. *Matrizentheorie*. Springer, 1986.
- [20] G. E. Gilbert. *Controllability and Observability in Multivariable Control Systems*. SIAM J. Contr. Vol. 2, 1963.
- [21] P. E. Gill, W. Murray, und M. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, 1981.
- [22] K. Glover. *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L[∞]-error bounds*. Int. J. Control Vol. 39 No. 6, 1984.
- [23] G. Golub und C. Loan van. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore London, 1989.
- [24] G. Golub und P. Van Dooren. *Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms*. Springer, 1991.
- [25] B. L. Ho und R. E. Kalman. *Effective construction of linear state-variable models from input/output functions*. Regelungstechnik Heft 12, 1966.
- [26] I. S. Iohvidov. *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms*. Birkhäuser, 1982.
- [27] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [28] R. E. Kalman. *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*. SIAM J. Control Vol. 1 No. 2, 1963.
- [29] R. E. Kalman und Ho Y. C. *Controllability of Linear Dynamical Systems*. Cont. to Differential Equations John Wiley New York, 1963.
- [30] E. Kamke. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen Teil 1 u. 2*. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1967.
- [31] K. Klotter. *Technische Schwingungslehre*. Springer-Verlag, 1981.
- [32] S. Kung. *A new Identification and Model Reduction Algorithm via Singular Value Decomposition*. Proc. 12 Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Comp., Conf. Rec. Asilomar Nov., 1978.

-
- [33] H. Kwakernaak und S. Raphael. *Modern Signals and Systems*. Prentice Hall, 1991.
- [34] Peter Lancaster. *Theory of matrices*. Academic Press, 1969.
- [35] C. Loan van. *Generalizing the Singular Value Decomposition*. SIAM J. Num. Anal. Vol. 13 No. 1, March, 1976.
- [36] D. G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley, 1979.
- [37] E. Mandelung. *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer – Verlag, 1957.
- [38] M. Moonen und B. Moor de. *On- and Off-line identification of linear state-space models*. Int. J. Contr. Vol. 1, 1990.
- [39] Bart Moor de und Hongyuan Zha. *A Tree of Generalizations of the Ordinary Singular Value Decomposition*. Linear Algebra and its Applications, 1991.
- [40] B. C. Moore. *Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction*. IEEE Trans. on Auto. Contr. Vol. Ac-26 No. 1, Feb., 1981.
- [41] C. C. Paige. *Properties of Numerical Algorithms Related to Computing Controllability*. IEEE Trans. on Auto. Contr. No. 1 Feb., 1981.
- [42] C. C. Paige. *Computing the Generalized Singular Value Decomposition*. SIAM J. Sci. Stat. Comp. Vol.7 No. 8, October, 1986.
- [43] C. C. Paige und M. A. Saunders. *Towards a Generalized Singular Value Decomposition*. SIAM J. Num. Anal. Vol. 18 No. 3, June, 1981.
- [44] G. Renker. *Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme*. Universität Bochum, Institut für Mechanik, 1989.
- [45] G. F. Roach. *Greens Functions*. Cambridge University Press, 1982.
- [46] R. Sauer und Szabo I. *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs Teil 1 - 4*. Springer – Verlag, 1968.
- [47] H. Schlitt. *Systemtheorie für regellose Vorgänge*. Springer, 1960.
- [48] H. Schlitt und F. Dittrich. *Statistische Methoden der Regelungstechnik*. BI Hochschultaschenbuch 526, 1972.
- [49] W. Schmeidler. *Integralgleichungen mit Anwendung in der Physik und Technik*. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1950.
- [50] W. Schmeidler. *Lineare Operatoren im hilbertschen Raum*. Teubner – Verlag, 1954.
- [51] K. H. Schrader. *MeSy – Einführung in das Konzept und Benutzeranleitung für das Programm MESY-MINI*. KIB , Ruhr Universität Bochum, 1978.

- [52] M. R. Spiegel. *Laplace Transformation Theorie und Anwendung*. Mc Graw Hill Bock Company, 1970.
- [53] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [54] G. Strang und J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall, 1973.
- [55] K. Takeuchi, H. Yanai, und B. N. Mukherjee. *The Foundations of Multivariate Analysis*. Wiley Eastern Limited, 1982.
- [56] H. Waller und W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. Bibliographisches Institut, 1974.
- [57] H. Waller und R. Schmidt. *Schwingungslehre für Ingenieure*. Bibliographisches Institut, 1989.
- [58] L. Weiss. *On the Structur Theory of Linear Differential Systems*. SIAM J. Control Vol. 1 No. 6, 1968.
- [59] Zadeh und Desoer. *Linear System Theory*. Krieger New York, 1979.
- [60] H. P. Zeiger und A. J. McEwen. *Approximate Linear Realizations of Given Dimension via Ho Algorithm*. IEEE Trans. on Auto. Cont., 1974.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 **Helmut Stumpf:**
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 **Bernd Kaempf:**
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 **Alfred Kraft:**
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 **Petrisor Mazilu:**
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 **Klaus-Detlef Mickley:**
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 **Lutz-Peter Nolte:**
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 **Ulrich Blix:**
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 **Peter Becker:**
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 **Dietmar Bouchard:**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 **Uwe Zdebel:**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 **Jan Kubik:**
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 **Horst J. Klepp:**
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 **Franz Karl Labisch:**
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 **J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 **Karl-Heinz Bürger:**
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode

- Nr. 68 **Günter Renker:**
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 **Berthold Schieck:**
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 **Frank Szepan:**
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 **Christian Scholz:**
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 **J. Badur/H. Stumpf:**
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 **Werner Fornefeld:**
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 **J. Saczuk/H. Stumpf:**
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 **Andreas Feldmüller:**
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 **Ulfert Rott:**
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 **Thomas Heinrich Pingel:**
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 **O. T. Bruhns:**
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 **J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:**
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 **J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:**
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 **R. H. Frania/H. Waller:**
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 **B. Bischoff-Beiermann:**
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 **J. Pohé:**
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 **U. Kikillus:**
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15

- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in
verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet
auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter
Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von
Strukturveränderungen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 94**