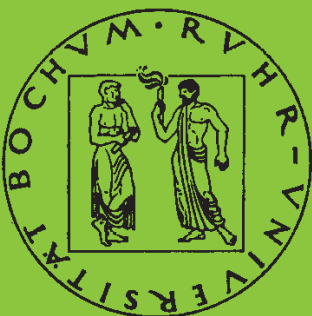


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Marc Mittelbach

**Simulation des Deformations- und
Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch
mit einem Kontinuums-Damage-Modell**

Heft Nr. 100



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

Marc Mittelbach

**Simulation des Deformations- und
Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch
mit einem Kontinuums-Damage-Modell**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 100
Dezember 1995

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

© 1995 Dr.-Ing. Marc Mittelbach
Düsselweg 5
42579 Heiligenhaus

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werkes oder auch von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Referates danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Übernahme des Koreferates.

Weiterhin möchte ich all jenen danken, die mich in der Entstehungsphase dieser Arbeit unterstützt haben. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Dr.-Ing. A. Meyers, Herrn Dr.-Ing. J. Körber, Herrn Dr.-Ing. B. Westerhoff und Herrn Dipl.-Ing. T. Nerzak, die mir wichtige Gesprächspartner waren, sowie Herrn Dipl.-Ing. T. Paul und Herrn cand.-ing. S. Tutaß für ihre Arbeit als studentische Hilfskräfte.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung im Sonderforschungsbereich 151 *Tragwerksdynamik* an der Ruhr-Universität Bochum.

Bochum, Dezember 1995

Marc Mittelbach

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Tag der Einreichung: 20.09.1995

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1995

Zusammenfassung

Zur Beschreibung des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe bei stoßartiger Belastung reichen herkömmliche viskoplastische Stoffgesetze nicht aus. Insbesondere die Schädigung durch Mikrodefekte wie Mikroporen, Mikrorisse und Mikroscherbänder, die durch viskoplastische Stoffgesetze im allgemeinen nicht berücksichtigt werden, kann bei hohen Prozeßgeschwindigkeiten nicht mehr vernachlässigt werden.

Grundlage der Materialbeschreibung in dieser Arbeit ist eine Kontinuums–Damage–Theorie, die unter Verwendung von internen Variablen thermodynamisch konsistent formuliert ist. Viskoplastische Deformationen werden durch ein Überspannungsmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung beschrieben. Die Materialschädigung durch Mikroscherbänder wird durch einen Schädigungstensor erfaßt, zur Berücksichtigung von Mikroporen wird eine skalarwertige interne Variable eingeführt, die als Porenvolumenanteil der in einem repräsentativen Volumenelement als gleichmäßig verteilt angenommenen Mikroporen interpretiert werden kann.

Die Parameteridentifikation erfolgt mittels Evolutionsstrategie, durch die parallele Evolution von Teilpopulationen auf unterschiedlichen Rechnern wird die Zahl der Zielfunktionsaufrufe deutlich gesteigert.

Ausgangspunkt bei der numerischen Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens ist das Prinzip der virtuellen Arbeit. Durch geometrische und physikalische Linearisierung wird unter Verwendung einer Update-Lagrange Formulierung und des isoparametrischen Konzepts ein Finite-Elemente-Algorithmus zur Lösung des nichtlinearen Problems entwickelt. Die Simulation des vertikalen Stoßes zeigt die Einsetzbarkeit des vorgestellten Kontinuums–Damage–Modells.

Summary

Usual viscoplastic material laws are not sufficient to describe the material behaviour of metals under impact loading. Generally, they do not take into account the damage caused by imperfections such as micro pores, micro cracks and micro shear bands, which cannot be neglected at high velocity deformations.

The constitutive behaviour of materials is described by a continuum damage theory, which is consistent with the second law of thermodynamics. Microstructural changes are described by internal variables. Viscoplastic deformations are considered using a flow rule of overstress type with isotropic and kinematic hardening. The damage caused by micro shear bands is described by a second order tensor. The influence of micro pores is taken into account by means of a scalar variable, which can be read as the void ratio in a representative volume element with a uniform distribution of voids.

The evolution strategy is used to identify the material parameters. The number of target function calls is increased by the parallel evolution of several populations on different computers.

Starting point of the numerical simulation of the deformation and damage behaviour is the principle of virtual work. A finite element formulation will be developed by means of geometrical and physical linearization together with an updated Lagrangian formulation and the isoparametric concept. The simulation of a vertical impact shows the application of the presented continuum damage model.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	<i>iv</i>
1. Einleitung	1
2. Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens	5
2.1 Homogenisierung	6
3. Ein Kontinuums-Damage-Modell zur Beschreibung des Hochgeschwindigkeitsverhaltens metallischer Werkstoffe	9
3.1 Hochgeschwindigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe	9
3.1.1 Experimentelle Ergebnisse und deren physikalische Interpretation	9
3.1.2 Versetzungsprozesse	13
3.1.3 Materialschädigung	14
3.2 Das Kontinuums-Damage-Modell von BRUHNS, DIEHL & FORNEFELD	18
3.3 Ein Ansatz zur Beschreibung der Schädigung durch Poren	24
3.3.1 Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\sigma}^0$	25
3.3.2 Die Evolutionsgleichung für die Beschreibung der Schädigung durch Mikroporen	27
3.3.3 Materialfunktionen zur Beschreibung der Evolution des Porenvolumenanteils ξ	28
3.3.4 Die Evolutionsgleichung für die schädigungsinduzierte Deformationsrate $\underline{\dot{\epsilon}}_{DP}^0$	29
3.4 Zusammenstellung der Evolutionsgleichungen für Modell 1.2	31
4. Parameteridentifikation — Ein Optimierungsproblem	35
4.1 Das Optimierungsproblem	35
4.1.1 Deterministische Verfahren	36

4.1.2	Stochastische Verfahren	37
4.2	Identifikation der Modellparameter mit Hilfe der Evolutionsstrategie	39
5.	Materialverhalten	43
5.1	Einaxiale Zugversuche mit konstanter Dehnungsrate	43
5.2	Vergleich von homogener Zug- und Druckbelastung	50
5.3	Einfluß von Anfangsschädigung bei homogener Druckbeanspruchung	52
5.4	Nichtmonotone Prozesse	55
6.	Erstellung einer Finite-Elemente-Formulierung	59
6.1	Formulierung des Gleichgewichts als Variationsproblem	59
6.2	Numerische Lösungsmethoden	61
6.2.1	Total-Lagrange Formulierung — Update-Lagrange Formulierung	62
6.2.2	Inkrementelle Zerlegung der Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen	64
6.2.3	Einbeziehung der Materialgleichungen	66
6.2.4	Diskretisierung mit isoparametrischen finiten Elementen	68
6.2.5	Zeitintegration der Bewegungsgleichungen mit dem NEWMARK-Verfahren	75
7.	Strukturverhalten — Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers	77
7.1	Zusammenstellung der Evolutionsgleichungen für Modell 1.2LD	80
7.2	Axialsymmetrische Berechnungen ohne Trägheitseinflüsse	83
7.2.1	Elastische Probleme	83
7.2.1.1	Zylinder unter Innendruck	83
7.2.1.2	Axiale Scherung	84
7.2.2	Plastische Probleme — Zugstab	86
7.3	Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers	91
7.3.1	Vertikaler Stoß eines zylindrischen Körpers auf eine starre, glatte Wand	92
7.3.2	Vertikaler Stoß eines starren zylindrischen Körpers auf eine Kreisplatte	97
7.4	Vergleich verschiedener Integrationsverfahren	104
8.	Schlußbetrachtung	111
	Anhang A: Materialfunktionen und Parameter des Modells 1.2LD	113

Anhang B: Spezialisierung des Modells 1.2 auf einachsige Makro- Spannungszustände	119
Anhang C: Aufbereitung des Modells 1.2LD für axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten	123
Anhang D: Kinematische Grundlagen der kontinuumsmecha- nischen Beschreibung	135
Literatur	143

Bezeichnungen

Vereinbarungen

a	Skalar
\vec{a}	Vektor
\underline{a}	Tensor 2. Stufe
$\underline{\underline{a}}$	Tensor 4. Stufe
$\dot{(\cdot)}$	substantielle Zeitableitung
$\overset{\nabla}{(\cdot)}$	mitrotierende Zeitableitung (allgemein)
$\overset{\square}{(\cdot)}$	mitrotierende Zeitableitung, $\overset{\square}{\underline{A}} = \dot{\underline{A}} - \underline{\Omega} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \underline{\Omega} - \underline{A} \operatorname{tr} \underline{D}_e$
$(\cdot)^\alpha _\beta$	kovariante Ableitung
$(\cdot)'$	Deviator
$(\cdot)_{,r}$	Erholungsanteil (<i>recovery</i>)
$[\]$	Matrix
$[\]^{-1}$	Inverse einer Matrix
$\{ \}$	Tupel
$\ \underline{(\cdot)} \ $	Tensornorm, $\ \underline{(\cdot)} \ = \sqrt{\underline{(\cdot)} \cdot \underline{(\cdot)}}$
$\underline{(\cdot)} \cdot \underline{(\cdot)}$	einfach verjüngendes Produkt
$\underline{(\cdot)} \cdot \cdot \underline{(\cdot)}$	doppelt verjüngendes Produkt
$\vec{(\cdot)} \otimes \vec{(\cdot)}$	dyadisches Produkt
$\operatorname{ant}(\underline{(\cdot)})$	antimetrischer Anteil eines Tensors
$\operatorname{sym}(\underline{(\cdot)})$	symmetrischer Anteil eines Tensors
$\det \underline{(\cdot)}$	Determinante eines Tensors

$\text{div } \underline{(\cdot)}$	Divergenz eines Tensors (Momentankonfiguration)
$\text{grad } \vec{(\cdot)}$	Gradient eines Tensors erster Stufe (Momentankonfiguration)
$\text{Grad } \vec{(\cdot)}$	Gradient eines Tensors erster Stufe (Ausgangskonfiguration)
$\text{tr } \underline{(\cdot)}$	Spur von $\underline{(\cdot)}$
$\vec{0}$	Nullvektor
$\underline{1}$	Einstensor
$[(\cdot)]_\alpha$	$[(\cdot)]_\alpha = (\cdot)$ falls Fließbedingung erfüllt, sonst 0
$\langle(\cdot)\rangle_\alpha$	$\langle(\cdot)\rangle_\alpha = (\cdot)$ falls Belastungsbedingung erfüllt, sonst 0

Lateinische Symbole

\underline{A}_{VL}	Mittelwert der lokalen versetzungsinduzierten Verzerrungen in der Nähe eines Mikrodefektes
\mathcal{B}	Momentankonfiguration
\mathcal{B}^o	Referenzkonfiguration
\mathcal{B}^*	Zwischenkonfiguration
$c_{\sigma\kappa}$	spezifische Wärmekapazität
c_T, c_A	Materialfunktionen
d_1, d_2, d_3, d_4, d_5	Materialfunktionen
$d_Z, d_{DS}, d_{DP}, d_{\Theta V}$	Materialfunktionen
\underline{D}	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten
D_{EW}	Eigenwerte des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten
\underline{D}_e	elastischer (reversibler) Anteil von \underline{D}
\underline{D}_i	inelastischer (irreversibler) Anteil von \underline{D}
\underline{D}_{VT}	durch thermisch aktivierte Versetzungsbewegung verursachter Anteil von \underline{D}
\underline{D}_D	schädigungsinduzierter Anteil von \underline{D}
\mathcal{D}	Dissipation

E	Elastizitätsmodul
$\underline{\mathbf{E}}_e$	elastisches GREENSches Verzerrungsmaß
\mathbb{E}^3	Euklidischer Anschauungsraum
F_T, F_A	Fließbedingungen im $(\underline{\sigma}, \Theta)$ -Raum
\mathcal{F}_T	verallgemeinerte Überspannungsfunktion
$\underline{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient
g	Enthalpie
g_T, g_A	Fließflächenradien
G_Z, G_{DS}, G_{DP}, G_V	Fließbedingungen im $(\underline{\sigma}^0, \Theta^0)$ -Raum
$\vec{g}_i, \vec{\mathbf{G}}_i$	kovarianter Basisvektor (aktuelle bzw. Ausgangskonfiguration)
$\vec{g}^i, \vec{\mathbf{G}}^i$	kontravarianter Basisvektor (aktuelle bzw. Ausgangskonfiguration)
g_{ij}	kovariante Metrik
g^{ij}	kontravariante Metrik
h_Z, h_{DS}, h_{DP}, h_V	Materialfunktionen
\mathcal{J}	Dichteverhältnis: Determinante des Deformationsgradienten $\underline{\mathbf{F}}$
\mathcal{J}_e	Determinante des elastischen Deformationsgradienten, $\mathcal{J}_e = \det \underline{\mathbf{V}}_e$ $\implies \mathcal{J}_e^2 = \det \underline{\mathbf{V}}_e^2 = \det (\underline{\mathbf{1}} + 2\underline{\mathbf{E}}_e) \approx 1 + 2\text{tr} \underline{\mathbf{E}}_e$
k	Wärmeleitfähigkeit
K	Materialfunktion
$\underline{\mathbf{L}}$	Geschwindigkeitsgradient
$\underline{\mathbf{L}}_i^*$	Geschwindigkeitsgradient; inelastischer Anteil; in der Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* definiert
LC	Belastungsbedingung
m	Materialfunktion
\vec{n}°	Einheitsnormalenvektor auf einer Körperoberfläche in der Ausgangskonfiguration
$\underline{\mathbf{n}}$	Einheitsnormalentensor an die Fließfläche

$\underline{\mathbf{N}}$	Richtungstensoren
PG	Prozeßgeschwindigkeit
\vec{q}	Wärmefluß
r_T, r_A	Materialfunktionen
r, z, φ	Zylinderkoordinaten
$\underline{\mathbf{S}}$	gewichteter CAUCHY-Spannungstensor
$\underline{\mathbf{S}}_K$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\underline{\mathbf{S}}_R$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
t	Zeit
\vec{u}	Verschiebungsvektor
u	Maß der Prozeßgeschwindigkeit (Prozeßgröße, Verhältnis der Dichte der beweglichen Versetzungen zur Gesamtversetzungsdichte)
u_{EQ}	Gleichgewichtswert von u
u_0	Gleichgewichtswert von u für langsame Prozesse
u_∞	Gleichgewichtswert von u für schnelle Prozesse
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
ΔV	repräsentatives Volumenelement
$\underline{\mathbf{W}}$	Spintensor
$\underline{\mathbf{W}}_i$	inelastischer Spintensor
$\underline{\mathbf{X}}_T, \underline{\mathbf{X}}_A$	kinematische Verfestigungstensoren
$\underline{\mathbf{Z}}^0$	Scherbandschädigungstensor

Griechische Symbole

$\vec{\alpha}_q$	interne Variable
$\underline{\epsilon}$	GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor
$\dot{\underline{\epsilon}}_D^0$	schädigungsinduzierte Verzerrungsrate
$\dot{\underline{\epsilon}}_v$	versetzungsinduzierte Verzerrungsrate

$\dot{\underline{\epsilon}}_{VA}$	mittlere Verzerrungsrate von ΔV infolge athermischer Versetzungsbewegung
$\dot{\underline{\epsilon}}_{VL}^0$	Mittelwert der lokalen versetzungsinduzierten Verzerrungsrate in der Nähe eines Mikrodefektes
$\dot{\underline{\epsilon}}_{VT}$	mittlere Verzerrungsrate von ΔV infolge thermisch aktivierter Versetzungsbewegung
η	Entropie
$\gamma_T, \gamma_A, \gamma_{VL}$	Plastische Verzerrungsraten
Γ_{jk}^i	CHRISTOFFEL-Symbol
κ	Maß für die Versetzungsdichte (isotrope Verfestigung)
$\lambda_2, \lambda_{3/0}, \lambda_{4/0}$	Materialparameter
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$	Materialparameter
$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$	Materialparameter
$\nu_Z, \nu_{DS}, \nu_{DP}$	Materialfunktionen
ω	Hilfsfunktion
$\underline{\Omega}$	Rotationsmaß einer objektiven Zeitableitung
$\Phi_T, \Phi_A, \Phi_{VL}$	Überspannungsfunktionen
ρ	Dichte
σ_F	Fließspannung bei statischen Prozessen
σ_0	Proportionalitätsgrenze
$\underline{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\underline{\sigma}^0$	Spannungskonzentrationstensor
τ_q	thermische Relaxationszeit
Θ^0	Temperaturkonzentration
Θ	Temperatur
Θ_0	Temperatur zu Beginn des Prozesses
ξ	Porenvolumenanteil

Exponenten

$(\cdot)^0$	Mittelwert 0. Ordnung eines Mikrofeldes
$(\cdot)'$	Deviator
$(\cdot)^0$	Größe in der Ausgangskonfiguration
$(\cdot)^*$	Größe in der Zwischenkonfiguration
$(\cdot)^*$	Funktion der aktuellen Größen (Funktion der Momentanwerte der inneren Variablen, nicht von deren Raten)

Indizes

$(\cdot)_D$	schädigungsinduziert
$(\cdot)_{DS}$	schädigungsinduzierter Teil durch Scherbänder
$(\cdot)_{DP}$	schädigungsinduzierter Teil durch Poren
$(\cdot)_i$	irreversibel
$(\cdot)_e$	reversibel
$(\cdot)_A$	athermisch
$(\cdot)_T$	thermisch aktiviert
$(\cdot)_V$	versetzungsinduziert
$(\cdot)_{VA}$	athermische Versetzung
$(\cdot)_{VD}$	viskos gedämpfte Versetzung
$(\cdot)_{VL}$	lokale Versetzung
$(\cdot)_{VT}$	thermisch aktivierte Versetzung
$(\cdot)_Z$	Scherbänder
$(\cdot)_\xi$	Poren

1. Einleitung

Bei vielen Lösungsvorschlägen zur Beschreibung des Verhaltens stoßartig belasteter Strukturen wird eine Lösung in einem Nahfeld S_n in der Nähe der Beanspruchung unterschieden von derjenigen im übrigen Gebiet S_f . Im allgemeinen wird dabei angenommen, daß die Deformationen in S_n inelastisch verlaufen. Der Spannungszustand ist dreidimensional, und die Auswirkungen von Wellenausbreitungen sind zu berücksichtigen. Im Gegensatz dazu wird in S_f elastisches Verhalten angenommen, und der Spannungszustand ist entweder ein- oder zweidimensional, so daß die üblichen Näherungen der Balken-, Platten- oder Schalentheorien eingeführt werden können.

Das Versagen solcher Strukturen unter dynamischer Beanspruchung wird häufig durch das Verhalten im Nahfeld beschrieben. Zwar gibt es auch Ausnahmen hiervon, z. B. wenn als Folge einer Wellenfokussierung ein Versagen in S_f beobachtet wird. Da die wesentlichen Eigenschaften dieser Welle jedoch durch die Lösung in der Nähe der Beanspruchung beschrieben werden, kommt insbesondere der Beschreibung des Materialverhaltens und der numerischen Simulation des Verformungsverhaltens in S_n eine besondere Rolle zu.

Untersuchungen des senkrechten Stoßes eines stumpfen zylindrischen Körpers auf eine Platte (Abbildung 1) zeigen, daß die Platte in einem Nahfeld S_n in der Nähe der Beanspruchung im wesentlichen zwei Versagensmechanismen aufweist. So ist einerseits "plugging" als Folge von Scherbandbildung zu beobachten, andererseits aber auch "spalling" durch Rißbildung als Folge von Zugwellenausbreitungen und deren Reflexion [1, 25, 94].

Zur Beschreibung des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen, also bei größeren Dehngeschwindigkeiten ($|\dot{\epsilon}| > 10^2 s^{-1}$), reichen herkömmliche viskoplastische Stoffgesetze nicht aus. Insbesondere kann die Schädigung durch Mikrodefekte wie Mikroporen, Mikrorisse und Mikroscherbänder, die durch viskoplastische Stoffgesetze im allgemeinen nicht berücksichtigt werden, bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen nicht mehr vernachlässigt werden. Denn schon bei moderaten Prozeßgeschwindigkeiten kann die durch den versetzungsbedingten Abbau von Spannungskonzentrationen an Mikrodefekten entstehende Wärme nicht mehr schnell genug abgeführt werden, es kommt zur lokalen Entfestigung. Bei höheren Prozeßgeschwindigkeiten können die Spannungskonzentrationen an Mikrodefekten nicht mehr abgebaut werden, so daß lokale Scherungen oder Brüche entstehen, während bei

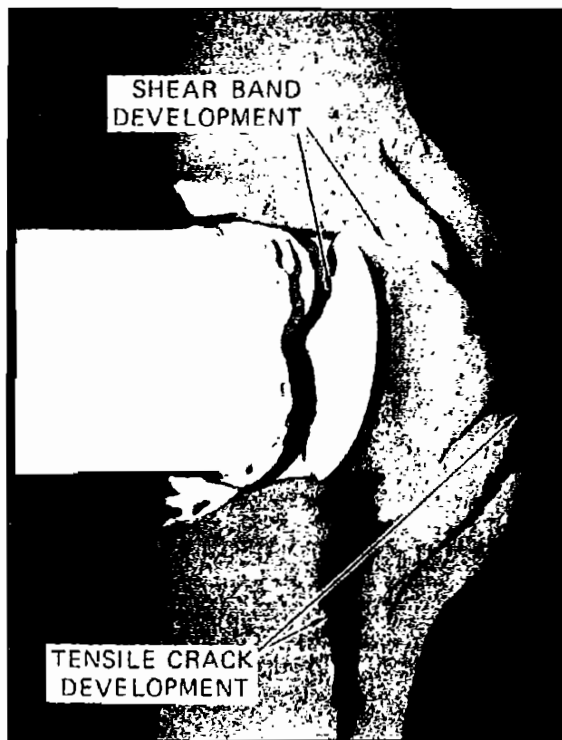


Abbildung 1: Vertikaler Stoß auf eine Platte [94]

sehr großen Prozeßgeschwindigkeiten eine homogene Defekterzeugung zu beobachten ist. Entstehung und Wachstum von Mikrodefekten ist nicht nur bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen zu erkennen, die Defekte treten hierbei jedoch sehr rasch und schon bei kleinen Dehnungen auf, während sie bei langsamen Prozessen erst nach sehr großen plastischen Deformationen relevant werden [41].

Die Kontinuumstheorie ist eine phänomenologische Feldtheorie, die ausgehend von makroskopischen Phänomenen (experimentellen Ergebnissen auf der Makroebene) mathematische Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens formuliert.

Der Kontinuumstheorie liegt die Modellvorstellung zugrunde, daß ein Körper aus unendlich vielen Massenpunkten besteht, also stetig mit Masse gefüllt ist und jedem Massenpunkt ein Punkt im Raum zugeordnet ist.

In Erweiterung dieser Modellvorstellung entstand das Modell eines geschädigten Kontinuums, bei dem mit Hilfe einer geeigneten Homogenisierungsvorschrift die auftretenden Mikrodefekte gemittelt werden. Da sich der Begriff des Kontinuums nicht ohne weiteres mit einem durch Poren, Scherbänder oder Risse geschädigten Werkstoff vereinbaren läßt, ist der Gültigkeitsbe-

reich solcher Kontinuums-Damage-Modelle begrenzt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit zwischen Mikro- und Makrodefekten unterschieden. Die Kontinuums-Damage-Theorie liefert neben der Beschreibung der CAUCHY-Spannungen, der Temperatur oder der Entstehung und des Wachstums der Mikrodefekte auch Kriterien für die Entstehung eines Makrodefektes sowie dessen Anfangsgestalt, so daß die Beschreibung der Ausbreitung des entstandenen Makrodefektes mit Methoden der Bruchmechanik ^[55] erfolgen kann.

Als Grundlage dieser Arbeit dient ein von BRUHNS, DIEHL & FORNEFELD ^[17,33,42] entwickeltes Kontinuums-Damage-Modell. Es handelt sich dabei um ein thermodynamisch konsistent formuliertes Stoffgesetz vom Überspannungstyp mit besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Mikroscherbänder.

Im Rahmen dieser Arbeit wird durch die Berücksichtigung der Schädigung durch Mikroporen ein weiterer Schädigungsmechanismus beschrieben, um die Anfangsphase des "spalling" besser simulieren zu können.

Nach einer Übersicht über die verschiedenen Betrachtungsweisen zur Beschreibung des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe in Kapitel 2 wird in Kapitel 3.1 auf das Deformationsverhalten bei Hochgeschwindigkeitsuntersuchungen eingegangen.

In Kapitel 3.2 wird das Kontinuums-Damage-Modell von BRUHNS, DIEHL & FORNEFELD vorgestellt und anschließend in Kapitel 3.3 um die Materialbeschreibung von Porenentstehung und Porenwachstum erweitert. Dabei wird auch der experimentellen Beobachtung Rechnung getragen, daß eine Rückbildung des Porenvolumens durch die auf eine Zugwelle folgende Druckwelle erfolgt.

Eine Zusammenstellung aller für die Materialbeschreibung benötigten Evolutionsgleichungen ist in Kapitel 3.4 gegeben.

Die in den Evolutionsgleichungen enthaltenen Materialfunktionen und Parameter ermöglichen die quantitative Materialbeschreibung. Aufgrund der Komplexität des vorgestellten Materialmodells und der dadurch bedingten Rechenzeit zur Bestimmung eines Zielfunktionswertes kommt der verwendeten Anpassungsstrategie eine besondere Bedeutung zu.

Die verwendete Evolutionsstrategie wird in Kapitel 4 beschrieben. Durch die Nutzung vieler vernetzter Workstations als virtuelle parallele Maschine kann die Anzahl der Zielfunktionsaufrufe deutlich erhöht werden.

Die Charakteristiken bei der Materialbeschreibung durch das vorgestellte Kontinuums-Damage-Modell lassen sich am besten an einachsigen Spannungszuständen verdeutlichen. Kapitel 5 zeigt das Materialverhalten beim einaxialen Zugversuch, erläutert die Einflüsse der unter-

schiedlichen internen Variablen und zeigt den Einfluß der Schädigung durch Mikroporen und Mikroscherbänder. Zudem wird das unterschiedliche Verhalten der Schädigung bei Zug- bzw. Druckbelastung verdeutlicht und der Einfluß auf die Materialantwort dargestellt.

Die in der Literatur vorgestellten Ergebnisse von Hochgeschwindigkeitsdeformationen werden immer auch vom Strukturverhalten der Proben beeinflusst. Mit Hilfe einer Finite-Elemente-Formulierung für axialsymmetrische Strukturen zur Berechnung von physikalisch und geometrisch nichtlinearem Materialverhalten (Kapitel 6) läßt sich bereits eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen bei hohen Deformationsgeschwindigkeiten simulieren. Das Deformations- und Schädigungsverhalten beim vertikalen Stoß wird anhand eines Aufstauchversuches (TAYLOR-Test) sowie des Stoßes eines zylindrischen Körpers auf eine Kreisplatte simuliert (Kapitel 7). Da der größte Teil der Rechenzeit für die Zeitintegration des Stoffgesetzes aufgewendet wird, werden in Kapitel 7.4 verschiedene implizite und explizite Integrationsverfahren auf ihre numerische Effizienz untersucht. Durch die Vorabintegration der Evolutionsgleichung für das Maß der Prozeßgeschwindigkeit und die anschließende Integration des reduzierten Differentialgleichungssystems läßt sich die Rechenzeit weiter verringern.

Für den interessierten Leser sind die Materialfunktionen und Parameter, die Aufbereitung des Kontinuums-Damage-Modells zur Beschreibung einachsiger sowie axialsymmetrischer Probleme und die kinematischen Grundlagen der kontinuumsmechanischen Beschreibung im Anhang angegeben.

2. Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens

Je nach Betrachtungsebene können zur Beschreibung des Materialverhaltens unterschiedliche Modelle zur Anwendung kommen. Auf atomarem Niveau beobachtet man unterschiedliche Gitterstrukturen und Defekte in Form von Leerstellen, Versetzungen oder Fremdatomen. Auf Mikroebene beobachtet man das Korngefüge eines polykristallinen Körpers, Defekte treten in Form von Mikroporen, Mikroscherbändern und Mikrorissen sowie Korngrenzen, Verunreinigungen und Einschlüssen auf. Betrachtet man eine Struktur, so beobachtet man Defekte wie Makrorisse und Löcher.

Die einzelnen Ebenen der Betrachtung eines Körpers und die zur Beschreibung der beobachteten Erscheinungen möglichen Idealisierungen (Modelle) sind:

- **Makroebene** (Kontinuumstheorie, bruchmechanische Modelle)
- **Mesoebene** (Kontinuums-Damage-Modelle)
- **Mikroebene** (metallphysikalische Modelle, mikromechanische Modelle)
- **Atomebene** (metallphysikalische Modelle, atomare Modelle)

Der Kontinuumstheorie liegt die Modellvorstellung zugrunde, daß ein Körper aus unendlich vielen Massenpunkten besteht, also stetig mit Masse gefüllt ist und jedem Massenpunkt ein Punkt im Raum zugeordnet ist. Diesen Punkten werden dann bestimmte physikalische Eigenschaften zugeordnet. Die Zustandsbeschreibung eines Körpers erfolgt an einem infinitesimalen, repräsentativen Volumenelement (RVE). Die Kontinuumstheorie ist eine phänomenologische Feldtheorie, die ausgehend von makroskopischen Phänomenen (experimentellen Ergebnissen auf der Makroebene) mathematische Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens formuliert.

Um diese Idealisierung durchführen zu können, muß das betrachtete Volumenelement ΔV groß genug sein, so daß die Fehler der Gitterstruktur sowie die auftretenden Mikrodefekte als statistisch homogen angenommen werden können ($\sqrt[3]{\Delta V}$ ist groß gegenüber Korndurchmesser d sowie Abstand und Größe der Defekte) und klein genug, um das Verhalten der Materie in ΔV durch Mittelwerte ausreichend genau zu beschreiben ($\sqrt[3]{\Delta V}$ ist sehr viel kleiner als die charakteristische Länge l_c des Körpers und der Belastung, z. B. kritische Wellenlänge einer Schockwelle beim Stoßversuch). [16]

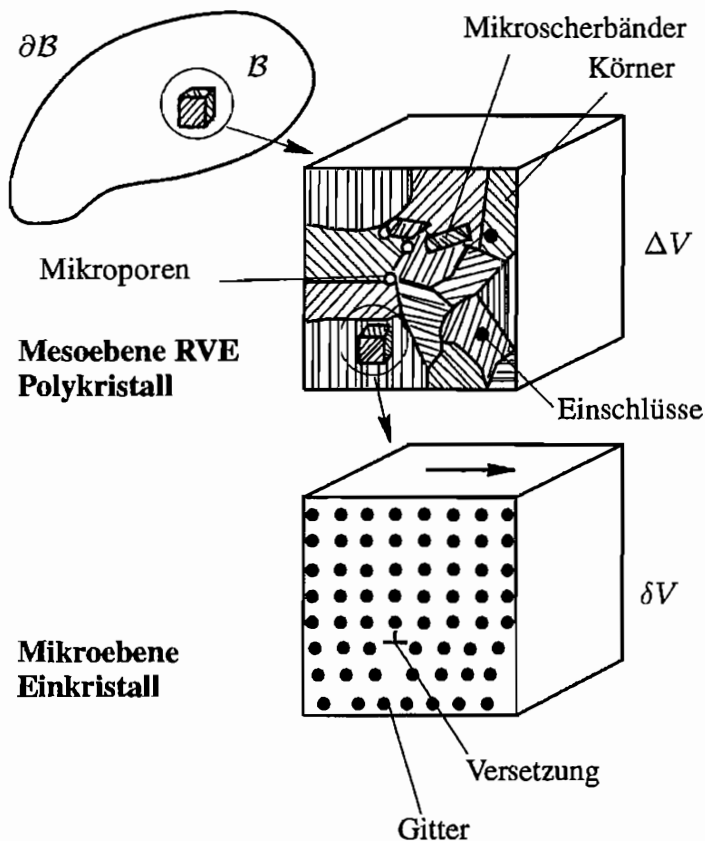


Abbildung 2: Verschiedene Ebenen der Betrachtung eines Körpers ^[16]

Ein solches repräsentatives Volumenelement ΔV ist in Abbildung 2 dargestellt.

Die Mittelung der auf der Mikroebene beobachteten Defekte wie Mikroporen, Mikroscherbänder und Mikrorisse mit einer geeigneten Homogenisierungsvorschrift ermöglicht die Beschreibung der Schädigung auf der Mesoebene mit Kontinuums-Damage-Modellen.

2.1 Homogenisierung

Betrachtet man das repräsentative Volumenelement ΔV eines Polykristalls in lokalen Koordinaten (Abbildung 3) und nimmt idealisierend an, daß ΔV eine endliche Anzahl an Defekten aufweist (die einzelnen Punkten $\vec{y}_\gamma \in \Delta V$ zugeordnet werden können), so läßt sich das Verhalten in ΔV durch Mikrofelder beschreiben. Sie enthalten jeweils einen quasihomogenen Anteil sowie einen Anteil aufgrund lokaler Störungen an den einzelnen Mikrodefekten (BRUHNS ^[16]). Die Mittelwertbildung dieser Mikrofelder bezeichnet man als Homogenisierung, die Mittelwerte der quasihomogenen Anteile beschreiben das versetzungsbedingte, viskoplastische Verhalten in ΔV , die Mittelwerte der lokalen Störungen charakterisieren die Materialschädigung.

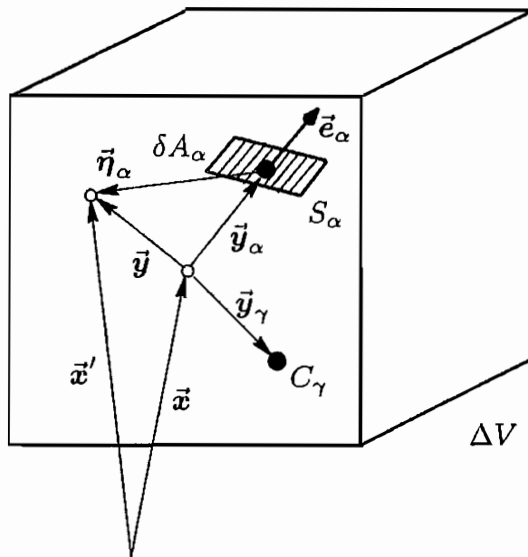


Abbildung 3: Repräsentatives Volumenelement ΔV mit Scherband S_α und 3D-Gitterfehler C_γ

Der Mittelwert H eines Mikrofeldes H_m kennzeichnet also das zugehörige Feld auf der Makroebene (MAUGIN ^[75]):

$$H(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} H_m(\vec{x}', t) f(\vec{y}) dV' \quad . \quad (2.1)$$

Dabei ist $f(\vec{y})$ eine spezielle Gewichtsfunktion, die es ermöglicht, $H(\vec{x}, t)$ als eine Reihe von Momenten von H_m darzustellen. Die Bestimmung der Mikrofelder erfordert die Lösung des entsprechenden Randwertproblems und ist deshalb auf Fälle mit speziellen Symmetrieeigenschaften beschränkt (siehe z. B. BISCHOFF-BEIERMANN ^[6]).

DIEHL ^[33] führt die entsprechend genäherten Mikrofelder deshalb a priori ein:

$$H_m(\vec{x}', t) = H_{ghom}(\vec{x}', t) + \sum_{\alpha} \frac{\Delta V_{\alpha}}{\Delta V} \hat{H}_{\alpha}(t) \delta(\vec{\eta}_{\alpha}) \quad . \quad (2.2)$$

Mit der gewichteten Mittelwertbildung erhält man daraus den Mittelwert H

$$H = \bar{H} + H^0 + \operatorname{div} \underline{H}^1 + \dots \quad , \quad (2.3)$$

mit den Momenten H^j . Die Reihenglieder höherer Ordnung können als makroskopische Zustandsgrößen der Kontinuumstheorie zur Beschreibung lokaler Spannungs- und Temperaturerhöhungen an den Mikrodefekten verwendet werden.

Durch die Berücksichtigung von Momenten höherer Ordnung läßt sich die Genauigkeit der Approximation systematisch verbessern.

Bei einer Theorie nullter Ordnung, die in Kapitel 3.2 Verwendung findet, ergeben sich durch die Mittelwertbildung z. B. die externen Variablen Spannung $\underline{\sigma}$, Temperatur Θ und die versetzungsbedingten Verzerrungen $\underline{\epsilon}_v$ zu

$$\underline{\sigma} = \langle \underline{\sigma}_{qhom} \rangle + \underline{\sigma}^0$$

$$\Theta = \langle \Theta_{qhom} \rangle + \Theta^0$$

$$\underline{\epsilon}_v = \langle \underline{\epsilon}_{v,qhom} \rangle + \underline{\epsilon}_v^0 .$$

3. Ein Kontinuums-Damage-Modell zur Beschreibung des Hochgeschwindigkeitsverhaltens metallischer Werkstoffe

3.1 Hochgeschwindigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe

3.1.1 Experimentelle Ergebnisse und deren physikalische Interpretation

Die experimentellen Untersuchungen zum Materialverhalten metallischer Werkstoffe bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen beschäftigen sich, neben der Messung von phänomenologischen Größen wie mittlerer Spannung und mittlerer Dehnung, hauptsächlich mit der Messung von Änderungen der Materialstruktur. Die Bestimmung der Materialstruktur erfolgt erst im Anschluß an den Belastungsprozeß. Hierbei werden in der Regel die gleichen Verfahren wie bei quasistatischen Prozessen verwendet.

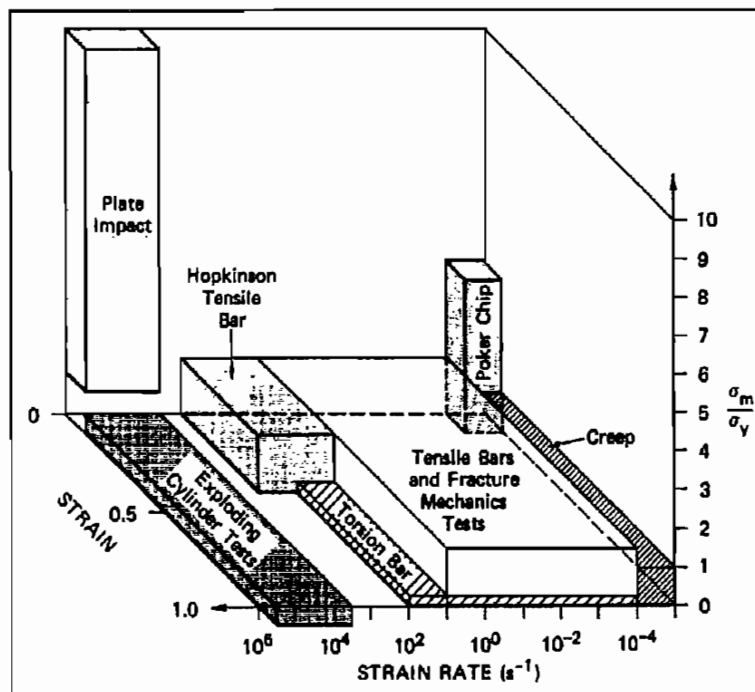


Abbildung 4: Bereich der Spannung, Dehnung und Dehngeschwindigkeit der verschiedenen experimentellen Untersuchungen [25]

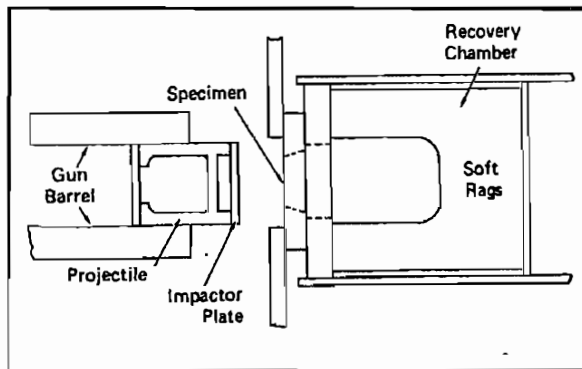


Abbildung 5: Schematischer Versuchsaufbau bei "Plate impact" Experimenten [25]

Im folgenden werden die wichtigsten Experimententypen zur Untersuchung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen ("Plate impact", "Tensile bar" und "Exploding cylinder") kurz vorgestellt. Eine umfassendere Übersicht der experimentellen Untersuchungen findet man z. B. bei CURRAN [25], JÄHN [50] oder FORNEFELD [42].

Die unterschiedlichen Bereiche von Spannung, Dehnung und Dehnungsrate, die sich mit den einzelnen Versuchen abdecken lassen, sind in Abbildung 4 schematisch dargestellt.

Plate impact

"Plate impact" Experimente [20, 25, 56, 37] erreichen Dehngeschwindigkeiten bis etwa 10^6 s^{-1} und liefern bereichsweise einen ebenen Verzerrungszustand. Abbildung 5 zeigt den schematischen Versuchsaufbau.

Die auftreffende Platte hat etwa die halbe Dicke der Zielplatte, der Durchmesser wird so gewählt, daß Wellenreflexionen der Plattenränder erst eintreten, nachdem die Schädigung auf Mikroebene stattgefunden hat. Aufgrund des dreiachsigen Spannungszustandes ist die Bestimmung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nur unter zusätzlichen Annahmen möglich. Der Versuch wird daher in der Regel zur Untersuchung von Wellenphänomenen verwendet, insbesondere zur Untersuchung von "spalling" [109].

CURRAN ET AL. [25] ermitteln mit diesem Versuchsaufbau die Entstehungsrate der Poren pro Volumeneinheit als Funktion der Spannung.

Tensile bar

"Tensile bar" Experimente (HOPKINSON-Bar, SHB-Test) sind besonders weit verbreitete Methoden zur Untersuchung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen. Der ursprünglich für Druckversuche entwickelte Versuchsaufbau läßt sich durch Modifikationen auch für Zug-,

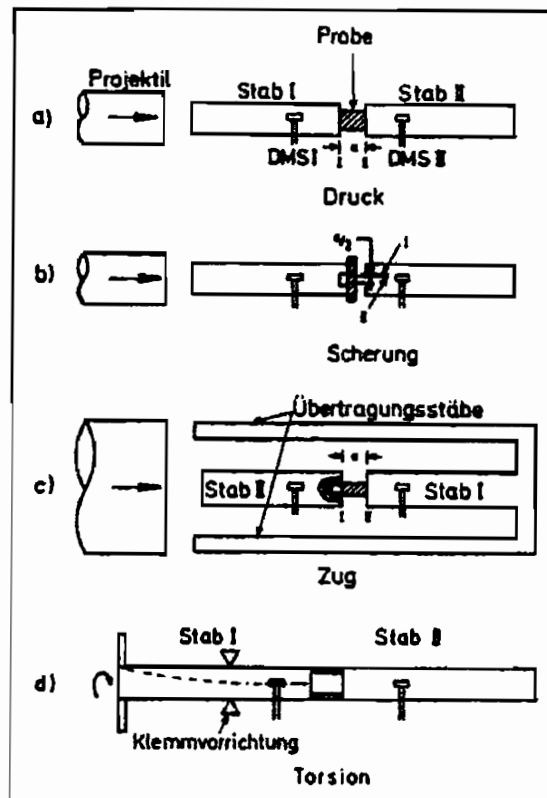


Abbildung 6: Unterschiedliche Ausführungen des HOPKINSON-Bar ^[50]

Scher- und kombinierte Beanspruchung verwenden.

Abbildung 6 zeigt die unterschiedlichen Ausführungen der SHB-Tests, bei denen die Probe zwischen zwei sich elastisch verhaltenden Stäben eingespannt ist. Der eine Stab dient zur Last-einleitung, der zweite zur Messung der durchlaufenden Welle. Die Länge der Stäbe muß so gewählt werden, daß Wellenreflexionen nur in der Probe auftreten. Mit Dehnungsmessstreifen an den beiden Stäben werden reflektierte und transmittierte Wellen gemessen und daraus die mittlere Spannung in der Probe bestimmt.

Exploding cylinder

“Exploding cylinder” Experimente (CFC-Test) werden zur Untersuchung der Scherbandausbreitung bei sehr hohen Deformationsgeschwindigkeiten verwendet. Eine mit Sprengstoff gefüllte zylindrische Probe wird durch die Detonation dynamisch aufgeweitet. Bei einer vorgegebenen Dehnung wird die Aufweitung durch den begrenzenden Zylinder der Versuchsanordnung (siehe Abbildung 7a) gestoppt. Dabei werden für einige Mikrosekunden Dehnraten von 10^3 – 10^4 s⁻¹ erreicht.

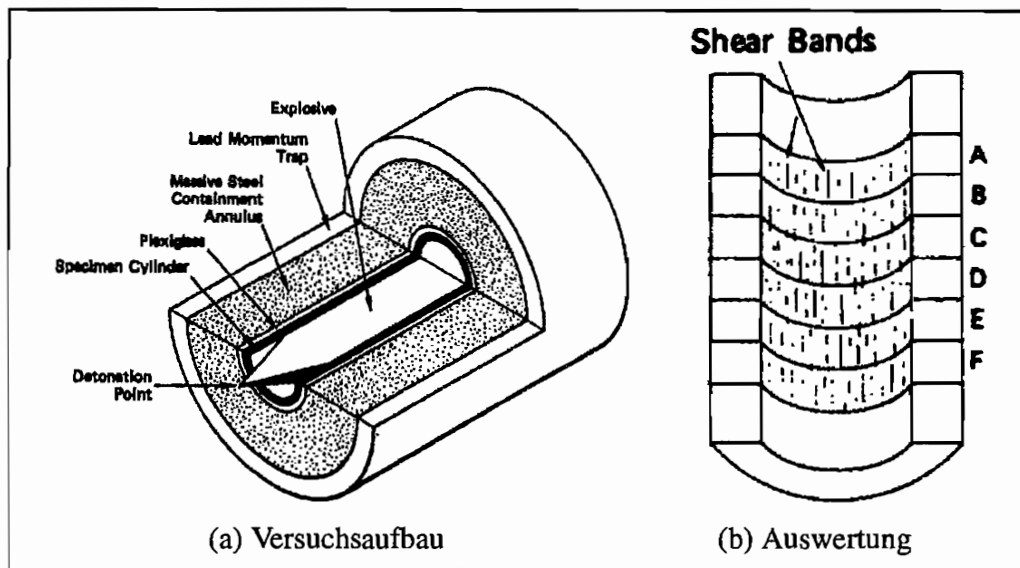


Abbildung 7: “Contained fragmented cylinder” (CFC-Test) zur Untersuchung der Scherbandausbreitung ^[93]

Gemessen wird die Anzahl, die Größe und die Verteilung der entstandenen Scherbänder in verschiedenen Schnitten und Abständen von der Oberfläche, siehe Abbildung 7b. Im Unterschied zu anderen Experimenten zur Scherbandentwicklung werden durch die Probengeometrie keine Spannungskonzentrationen erzeugt, die erreichbaren Dehnungen liegen deutlich über denen bei “Plate impact” Experimenten.

Aus den veröffentlichten experimentellen Ergebnissen (z. B. von HARDING ^[46]) ist ersichtlich, daß die Proportionalitätsgrenze σ_0 und die Spannung mit steigender Dehnrage zunimmt, bei großen Prozeßgeschwindigkeiten überproportional. Mit steigender Temperatur nehmen σ_0 sowie die $\sigma(\epsilon)$ Kurven hingegen ab. Die Versetzungsdichte steigt mit der Dehngeschwindigkeit und der Dehnung. Mikroporen bilden sich bei Hochgeschwindigkeitsversuchen, im Gegensatz zu langsamen Prozessen, bereits bei kleinen Dehnungen. Insbesondere duktile Materialien zeigen durch die Reflexion der Belastungswellen eine ausgeprägte Schädigung durch Poren, spröde Werkstoffe neigen eher zur Ribbildung. Unter hoher Druckbelastung neigen alle untersuchten Werkstoffe zur Bildung von Scherbändern.

Die bei den Experimenten im Mikrobereich beobachteten Deformationsmechanismen lassen sich im wesentlichen zwei Gruppen zuordnen:

- Versetzungsmechanismen
- Schädigungsmechanismen .

Andere Mechanismen, die auch bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen zu beobachten sind, sind z. B. Phasenumwandlungen ^[54], Rekristallisation oder Diffusion ^[2].

3.1.2 Versetzungsprozesse

Die Bewegung von Versetzungen ist der wichtigste Mechanismus bei der plastischen Verformung metallischer Werkstoffe (KRÖNER ^[64, 65], STECK ^[95]). Versetzungen sind Störungen des regelmäßigen Gitteraufbaus (siehe Abbildung 2), die das Abgleiten von Gitterebenen erleichtern und so die Fließgrenze eines Werkstoffs absenken.

Je nach Art der dominierenden Versetzungshindernisse lassen sich unterschiedliche Zusammenhänge für die Schergeschwindigkeiten angeben, man unterscheidet (BRUHNS ^[16]):

- **athermische Versetzungsbewegungen**, bei denen die Versetzungen durch Hindernisse wie 3D-Gitterfehler oder Korngrenzen behindert werden und nur durch Erhöhung der äußeren Lasten überwunden werden können (Spannungsaktivierung). Die zugehörige Versetzungsbewegung tritt sofort dann auf, wenn die Fließspannung erreicht ist.
- **thermisch aktivierte Versetzungsbewegungen**, bei denen die Versetzungen durch Punktfehler oder andere Versetzungen behindert werden und eine Erhöhung der Temperatur ausreicht, um durch Klettern oder Quergleiten die Hindernisse zu überwinden (thermische Aktivierung). Dabei tritt die durch thermische Aktivierung erreichbare Verzerrungsgeschwindigkeit in jedem Fall verzögert gegenüber der Spannungsänderung auf.
- **durch viskose Dämpfungsmechanismen kontrollierte Versetzungsbewegungen**, bei denen bei sehr hohen Spannungen in der Gleitebene die Versetzungen von diskreten Hindernissen kaum noch beeinflusst werden, jedoch eine Wechselwirkung der diskreten Hindernisse mit dem regulären Gitter auftritt.

Durch die Entstehung neuer Versetzungen wird die Fähigkeit metallischer Werkstoffe, sich plastisch zu verformen, anfänglich gesteigert. Mit wachsender Dichte der Versetzungen tritt jedoch eine gegenseitige Beeinflussung der Störungen im Gitter auf, es kommt zur *isotropen Verfestigung*.

Aufgrund der Gitterverzerrungen bei plastischen Deformationen wird im Werkstoff elastische Energie gespeichert, durch die eine weitere Behinderung von Versetzungsbewegungen ausgeht, es kommt zur *anisotropen bzw. kinematischen Verfestigung* ^[95].

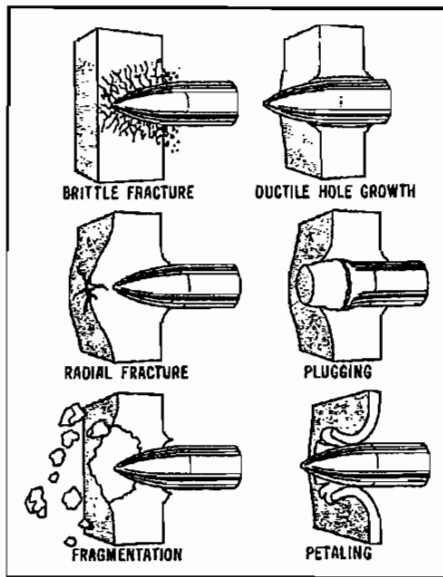


Abbildung 8: Schematische Darstellung typischer Versagensmechanismen ^[109]

3.1.3 Materialschädigung

Durch die Entstehung, das Anwachsen und die Vereinigung entstehender Defekte kommt es zur Schädigung des Materials. Ausgelöst werden solche Mikrodefekte in der Regel durch lokale Spannungs- und Temperaturkonzentrationen an Gitterfehlern der Mikrostruktur. Im Verlauf eines typischen Prozesses führt die Entstehung und das Anwachsen solcher Schädigungsprozesse schließlich zur Bildung eines Makrodefektes und später zum Versagen. Typische Versagensmechanismen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen sind in Abbildung 8 schematisch dargestellt. Die auf der Mikroskala beobachteten Defekte lassen sich drei Schädigungsarten zuordnen, es entstehen bzw. wachsen

- Mikroporen,
- Mikroscherbänder und
- Mikrorisse .

Je nach Werkstoff und Belastungsart treten die einzelnen Schädigungsformen besonders ausgeprägt auf, dies wird bereits durch die Auswahl unterschiedlicher Materialien für die Abbildungen 9–11 deutlich.

Poren

Insbesondere bei duktilen Materialien unter dynamischer Belastung beobachtet man die Entstehung von nahezu kugelförmigen kleinen Öffnungen. Diese Mikroporen entstehen durch

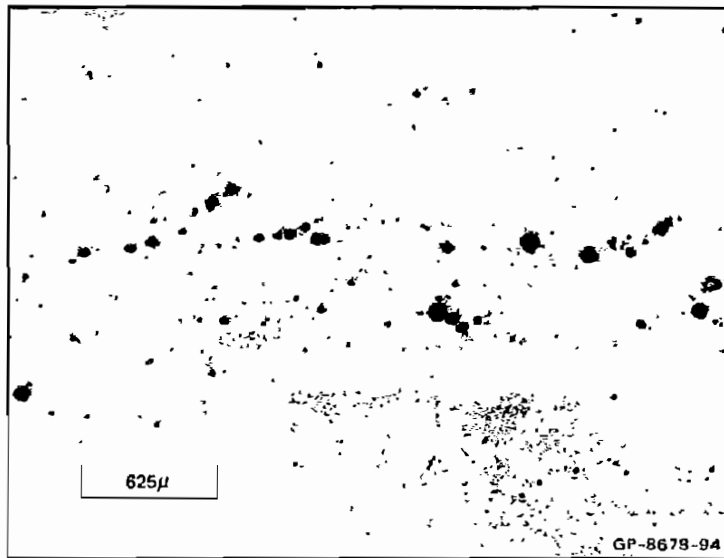


Abbildung 9: Schliffbild einer Aluminiumplatte nach stoßförmiger Belastung ^[92]

das Aufbrechen des Matrixmaterials durch die sich bildenden Zugwellen. Im Laufe des Belastungsprozesses kommt es zum Wachstum und zum Zusammenschluß dieser Defekte und schließlich zur Entstehung eines Makrorisses.

Abbildung 9 zeigt die nahezu kugelförmige Porenbildung im Schliffbild einer Aluminiumplatte nach einer stoßförmigen Belastung (SHOCKEY, CURRAN & SEAMAN ^[92]).

GURSON ^[45] entwickelt eine Fließbedingung für den geschädigten Teilbereich unter der Annahme eines idealplastischen Matrixmaterials mit kugel- bzw. zylinderförmigen Poren, Modifikationen dieses Ansatzes findet man z. B. bei TVERGAARD UND NEEDLEMAN ^[98] oder LAMMERING ET AL. ^[66]. KÖHNKE ^[61] koppelt ein ähnlich aufgebautes Porenwachstumsmodell von COCKS UND ASHBY ^[21] mit einem Makrorißmodell zur Beschreibung der Schädigung bei langsamen Prozessen. CURRAN, SEAMAN & SHOCKEY ^[24,22] beschreiben Porenbildung und Wachstum durch ein allgemeines Evolutionsgesetz, das sowohl Leerstellendiffusion als auch mechanische Entfestigung durch wachsende Mittelspannung und plastische Deformation berücksichtigt.

Scherbänder

Bei hohen Druckbeanspruchungen kommt es besonders häufig zu Scherbrüchen. Untersuchungen der Mikrostruktur zeigen die Fragmentierung des Bauteils, insbesondere durch Scherbänder und Risse (Abbildung 10).



Abbildung 10: Schliffbild einer Stahlplatte nach stoßförmiger Belastung [92]

Scherbänder sind in das Material eingelagerte, stark verzerrte Flächen (*“deformed bands”*) mit einer reduzierten Aufnahmefähigkeit von Schubbeanspruchungen. Bei vielen Stählen bewirken lokale Temperaturerhöhungen teilweise gleichzeitig lokale Phasenumwandlungen, so daß Scherbänder in Stahl häufig auch als weiße Zonen zu erkennen sind (*“transformed bands”*) [1]. Risse breiten sich entlang der Scherbänder aus, so daß die Kenntnis des Verhaltens der Scherbänder auch für die Bruchmechanik von Bedeutung ist.

Parameter zur Beschreibung von Scherbändern sind z. B. die Anzahl und Fläche pro Volumenelement ΔV , deren Wachstumsrate, Dicke sowie Scherwinkel. Durch die Auswertung von Schliffbildern nach dem CFC-Test und Korrelation der Messungen von Spannung und Dehnung, ermitteln SHOCKEY ET AL. [92,23] ein proportionales Anwachsen der Scherbandentstehungsrate mit der plastischen Dehnrate. Die Scherbandwachstumsrate verhält sich proportional zur plastischen Dehnrate und der Scherbandgröße.



Abbildung 11: Schliffbild einer Armco Eisenplatte nach stoßförmiger Belastung ^[92]

Risse

Im Gegensatz zu duktilen Materialien entstehen bei spröden Werkstoffen durch die bei dynamischer Belastung auftretenden Zugwellen hauptsächlich Mikrorisse.

Das Schliffbild einer Armco Eisenplatte nach stoßförmiger Belastung in Abbildung 11 zeigt eine Vielzahl kleiner Spaltrisse. Das Verhalten solcher Mikrorisse läßt sich sehr gut an durchsichtigen Materialien verfolgen, KALTHOFF ET AL. ^[55] verwenden z. B. Polycarbonatproben. Die experimentelle Auswertung erfolgt analog zur Untersuchung von Mikroporen durch die Auswertung von Schliffbildern.

SHOCKEY ET AL. ^[92] benutzen zur Beschreibung der Mikrorisse das gleiche Evolutionsgesetz wie auch für Mikroporen. GERARD UND BASTE ^[43] entwickeln konstitutive Beziehungen für Werkstoffe mit Mikrorissen und berücksichtigen dabei den Einfluß von Öffnen und Schließen der Mikrorisse.

Die meisten Untersuchungen zu Rissen bewegen sich allerdings auf Makroebene und beschäftigen sich mit der Ausbreitung von Makrorissen, z. B. KALTHOFF ^[57].

3.2 Das Kontinuums-Damage-Modell von BRUHNS, DIEHL & FORNEFELD

Das Kontinuums-Damage-Modell ist Teil eines baukastenartig aufgebauten Materialmodells zur Beschreibung der bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen beobachteten Erscheinungen.

Bei der Beschreibung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen unterscheidet man zwei Phasen:

- Phase 1, von $t = 0$ (Beginn der Belastung) bis $t = t^*$ (Zeitpunkt der Entstehung eines Makrodefektes), kann mit den Methoden der Kontinuumsmechanik durch eine Kontinuums-Damage-Theorie beschrieben werden.
- Phase 2, für $t > t^*$, erfordert zusätzlich die Betrachtung des Wachstums des entstandenen Makrodefektes mit den Methoden der Bruchmechanik und läßt sich durch eine Fragmentierungstheorie beschreiben.

Abbildung 12 zeigt die Unterteilung des Materialmodells in einzelne Bausteine.

Gerade bei Stoßvorgängen mit kurzzeitig ablaufenden Prozessen ist bei der Formulierung von Materialmodellen zur Beschreibung dieser Vorgänge zu beachten, daß hierbei Deformationsmechanismen beobachtet werden, die neben Scher- und Abgleitvorgängen bzw. anderen Schädigungsmechanismen die gesamte Skala der Verzerrungsgeschwindigkeiten beinhalten (BRUHNS^[11]). Ein Materialmodell zur Beschreibung von Stoßvorgängen muß also nicht nur das Deformationsverhalten schneller Prozesse wiedergeben können, sondern auch das langsamer Prozesse.

Die vorliegende Fassung der Kontinuums-Damage-Theorie berücksichtigt nur thermisch aktivierte Versetzungsmechanismen und die Schädigung durch Mikroscherbänder sowie Mikroporen. Sie wird in Anlehnung an die Arbeiten von DIEHL^[33] und FORNEFELD^[42] mit Version 1.2 bezeichnet. Diese, durch einige Vereinfachungen aus dem allgemeinen Werkstoffmodell hervorgegangene Fassung des Kontinuums-Damage-Modells, ist gültig für den Bereich

- thermisch aktivierter versetzungsinduzierter Deformationen
- Dehnungsraten von ca. $10^{-4}s^{-1} - 10^5s^{-1}$
- der Schädigung durch Mikroscherbänder und Mikroporen sowie moderater schädigungsinduzierter Deformationen
- hinreichend monotoner und radialer Prozesse (ohne lange Haltezeiten bei hohen Temperaturen).

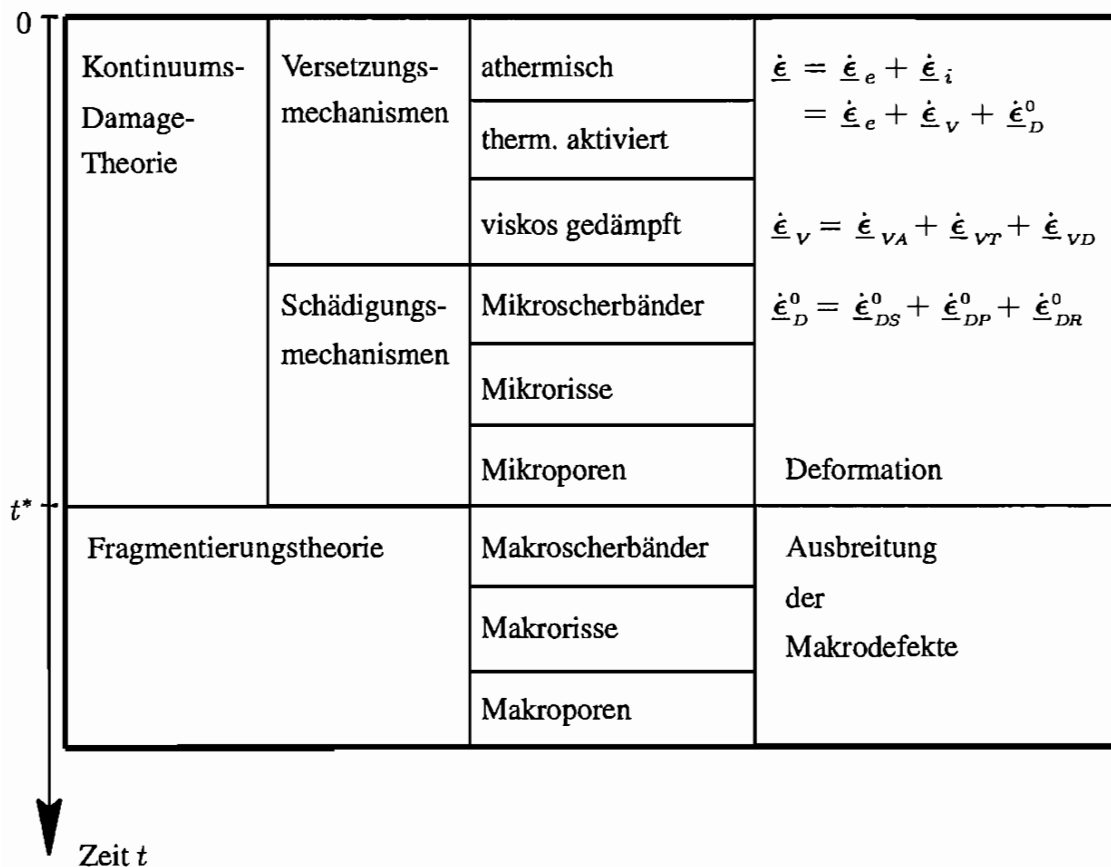


Abbildung 12: Baukasten des Materialmodells

Das Kontinuums-Damage-Modell ist gekennzeichnet durch die additive Aufspaltung der Verzerrungsrate in reversible und verschiedene irreversible Anteile sowie die Einführung zusätzlicher interner Variablen, welche Änderungen der Materialstruktur infolge inelastischer Deformation erfassen. Dazu werden folgende Variablen eingeführt:

- Variablen der versetzungsinduzierten Prozesse

$\underline{\epsilon}_{vT}$ mittlere Verzerrung von ΔV infolge thermisch aktivierter Versetzungsbewegungen

κ mittlere Versetzungsdichte in ΔV (isotrope Verfestigung)

\underline{X}_T kinematischer Verfestigungstensor infolge thermisch aktivierter Prozesse

u Verhältnis der Dichte der beweglichen Versetzungen zur Gesamtversetzungsdichte (Maß für die Prozeßgeschwindigkeit)

- Variablen der schädigungsinduzierten Prozesse

- $\underline{\sigma}^0$ Spannungskonzentrationstensor (Mittelwert der lokalen Spannungsspitzen an 2- und 3-dimensionalen Gitterfehlern)
- Θ^0 Mittelwert lokaler Temperaturkonzentrationen in der Nähe eines Mikrodefektes
- \underline{Z}^0 Scherband-Schädigungs-Tensor
- $\underline{\xi}$ Variable zur Beschreibung der Porenschädigung
- $\underline{\epsilon}_{DS}^0$ mittlere Verzerrung eines repräsentativen Volumenelementes ΔV infolge mikrolokalischer Scherungen
- $\underline{\epsilon}_{DP}^0$ mittlere Verzerrung eines repräsentativen Volumenelementes ΔV infolge mikrolokalischer Porenbildung und Porenwachstum
- $\underline{\epsilon}_{VL}^0$ mittlere Verzerrung von ΔV infolge lokaler Versetzungsbewegungen an Spannungskonzentrationen

Die Thermodynamik stellt den Zusammenhang zwischen allen Variablen dar, da das zu wählende thermodynamische Potential (hier wird die freie Enthalpie verwendet) und das Wärmeleitungsgesetz von den internen Variablen abhängen. Im einzelnen werden Evolutionsgleichungen für folgende Variablen benötigt:

- Variablen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

- $\underline{\epsilon}_e$ elastische reversible Verzerrung
- η Entropie
- \vec{q} Wärmefluß

Für diese Variablen werden im folgenden Evolutionsgleichungen angegeben, die zum Teil noch an Nebenbedingungen (Fließbedingung, Belastungsbedingung) geknüpft sind:

- Die Fließbedingung dient dabei zur Festlegung, unter welcher Belastung inelastische Formänderungen im Werkstoff auftreten (siehe auch Abbildung 13).
- Die Belastungsbedingung muß erfüllt sein, damit plastisches Fließen möglich ist (eine Belastung führt dann von einem plastischen Zustand zu einem anderen plastischen Zustand).
- Die internen Variablen sind künstliche, mathematische Größen, die die Vorgeschichte des Materials beschreiben. Zu Beginn des betrachteten Prozesses ($t = 0$) sei das Material

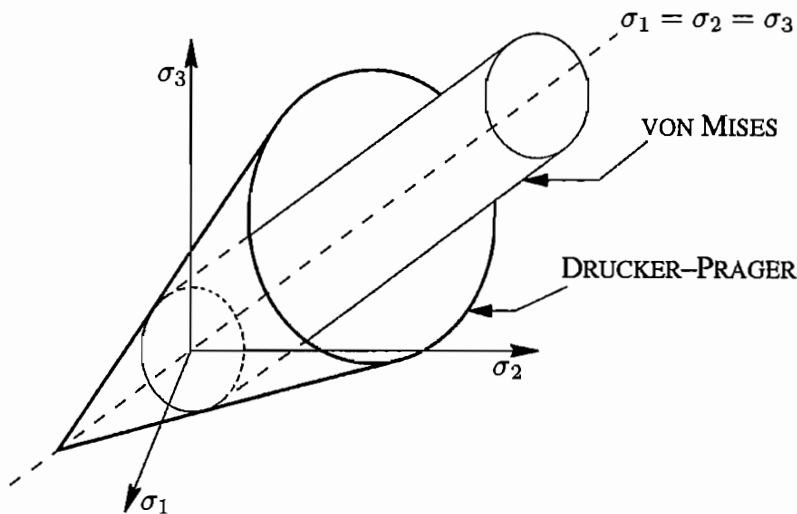


Abbildung 13: Darstellung isotroper Fließbedingungen im Hauptspannungsraum

“ohne Vorgeschichte”, so daß die internen Variablen den Anfangswert Null erhalten.

- Die Prozeßvariablen haben im Gegensatz zu den internen Variablen keinen Einfluß auf die innere Energie und können daher auch als “energieneutral” bezeichnet werden. Zu den Prozeßvariablen zählen z. B. u und $\underline{\epsilon}_{VL}^0$.

Die Einführung der Variablen $\underline{\xi}$ und $\underline{\epsilon}_{DP}^0$ erfolgte bereits im Vorgriff auf die Erweiterung des Modells zur Beschreibung von Porenschädigung in Kapitel 3.3.

Abbildung 14 zeigt qualitativ das über die Nebenbedingungen gesteuerte zeitliche Einsetzen der schädigungsrelevanten internen Variablen und deren Einfluß auf die Spannung bei einem Zugversuch mit konstanter Dehnrage. Zum Vergleich ist der Spannungsverlauf ohne Berücksichtigung der Schädigung sowie bei ausschließlicher Berücksichtigung von Scherbandschädigung eingezeichnet.

Da die Nebenbedingungen für die Schädigung im $(\underline{\sigma}^0, \Theta^0)$ -Raum formuliert werden, ist der qualitative Verlauf der lokalen Spannungskonzentrationen ebenfalls aufgetragen. Bei einer Dehnung ϵ_A erreichen die Spannungskonzentrationen einen Wert, der zur Bildung von Mikroporen führt. Durch einen weiteren Anstieg von $\underline{\sigma}^0$ entstehen bei einer Dehnung ϵ_B durch den Tensor \underline{Z}^0 beschriebene Mikroscherbänder. Der Einfluß reiner Scherbandschädigung ($\xi = 0$) auf die Spannung tritt verzögert auf, da die schädigungsinduzierte Verzerrungsrate $\underline{\dot{\epsilon}}_{DS}^0$ über eine eigene Fließ- und Belastungsbedingung gesteuert wird und erst bei größeren Spannungskonzentrationen (Dehnung ϵ_C) einsetzt.

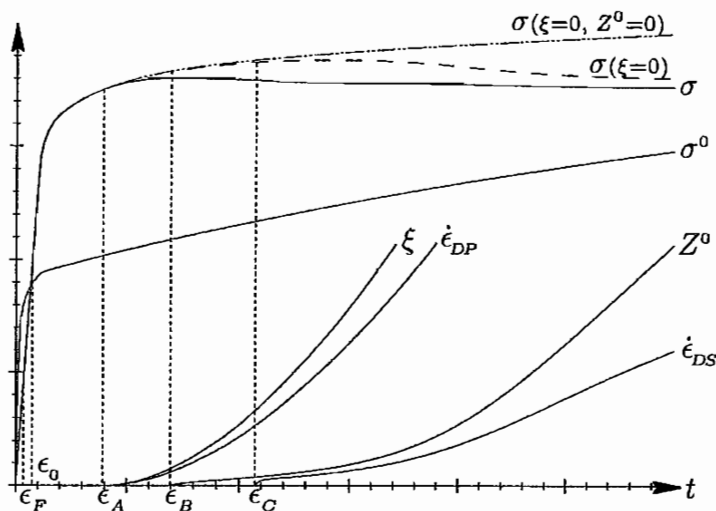


Abbildung 14: Zeitliches Einsetzen der schädigungsrelevanten Variablen

Das Verhältnis der Dichte der beweglichen Versetzungen zur Gesamtversetzungsdichte

$$u = \frac{N_{mob}}{N} \quad (3.1)$$

läßt sich als Maß für die Prozeßgeschwindigkeit interpretieren. Für die Prozeßgeschwindigkeit selber, die bestimmte Versuchsbedingungen charakterisiert, lassen sich unterschiedliche Definitionen einführen. PITZER^[82] schlägt vor,

$$PG = \sqrt{\dot{\underline{\sigma}}' \cdot \dot{\underline{\sigma}}'} \quad (3.2)$$

als Prozeßgeschwindigkeit zu verwenden. DIEHL^[33] benutzt

$$PG = \max\{0, \|\dot{\underline{\epsilon}}\| + \chi_{u1} \dot{\Theta}\} \quad (3.3)$$

dies entspricht im wesentlichen einem Ansatz der Form

$$PG = \sqrt{\dot{\underline{\epsilon}} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}} \quad (3.4)$$

mit einer Einbeziehung von Temperaturänderungen zur Beschreibung nicht-isothermer Prozesse. Negative Prozeßgeschwindigkeiten beim Abkühlen werden ausgeschlossen. Diese Definition ist bei einaxialer Formulierung jedoch nicht identisch mit

$$PG = \max\{0, |\dot{\epsilon}| + \chi_{u1} \dot{\Theta}\} \quad (3.5)$$

siehe FORNEFELD^[42].

ROTT^[85] verwendet als Prozeßgeschwindigkeit

$$PG = |\dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}| \quad (3.6)$$

bei der Anwendung von FE-Formulierungen auf Grundlage der Weggrößenmethode ist dann jedoch eine zusätzliche Iteration nötig, so daß WESTERHOFF^[103] als Prozeßgeschwindigkeit

$$PG = |\dot{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{n}| \quad (3.7)$$

einführt.

Um insbesondere für die Anpassung der Materialfunktionen einen einfachen Ansatz für die Prozeßgeschwindigkeit zu erhalten, wird im Rahmen dieser Arbeit

$$PG = \max\{0, |\dot{\epsilon}_{EW}|_{max} + \chi_{u1} \dot{\Theta}\} \quad (3.8)$$

verwendet, dabei sind $\dot{\epsilon}_{EW}$ die Eigenwerte von $\dot{\underline{\epsilon}}$ ($|\dot{\epsilon}_{EW}|_{max}$ ist damit der betragsmäßig größte Eigenwert). Dies führt bei einachsigen Spannungszuständen auf die Gleichung (3.5).

3.3 Ein Ansatz zur Beschreibung der Schädigung durch Poren

Die bei duktilem Material auftretende Materialschädigung durch Mikroporen läßt sich durch eine schwache Verteilung von kleinen kugelförmigen Poren charakterisieren (BARBEE ET AL. [3], FELDMÜLLER [41]). Abbildung 15 zeigt die schwache Verteilung von nahezu kugelförmigen Poren im Schlibbild einer CK15 Zugprobe (FELDMÜLLER [41]).

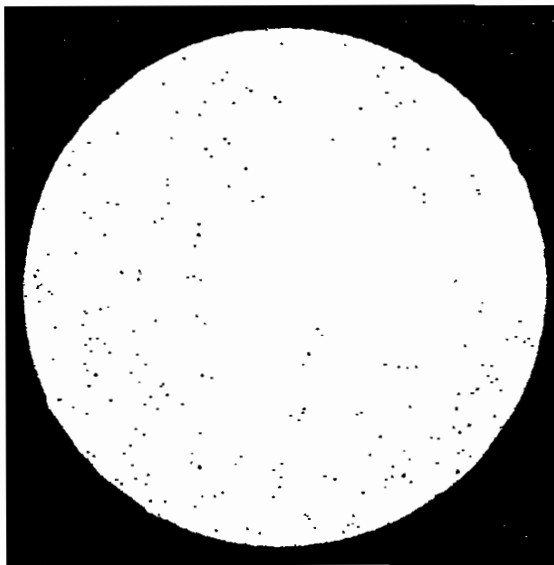


Abbildung 15: Schlibbild einer CK15 Zugprobe [41]

Ist der Abstand zweier benachbarter Poren in einem repräsentativen Volumenelement ΔV sehr viel größer als ihre charakteristische Länge, können Wechselwirkungen vernachlässigt werden. Weiterhin können die Mikroporen als gleichmäßig verteilt in ΔV angenommen werden.

Ein solches repräsentatives Volumenelement ist in Abbildung 2 dargestellt.

Durch die Wellenausbreitung und deren Reflexion beim Stoßversuch treten sowohl Druck- als auch Zugspannungen in einer Struktur auf. Dabei ist zu beobachten, daß die durch eine Zugwelle entstehenden Mikroporen sich durch die anschließende Druckwelle wieder etwas zurückbilden. Abbildung 16 zeigt die Porenvolumenverteilung im Umfeld des Stoßes zu verschiedenen Zeiten. Das Porenvolumen erreicht seinen maximalen Wert nach $t = 2.8\mu s$ und verringert sich anschließend wieder (gestrichelte Kurve).

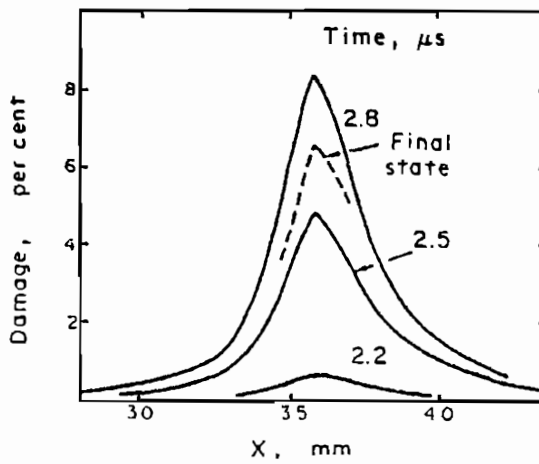


Abbildung 16: Porenvolumenverteilung zu verschiedenen Zeiten nach DAVISON, STEVENS & KIPP [31]

3.3.1 Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\sigma}^0$

Die lokalen Spannungen $\underline{\sigma}^0$, wie auch die mittleren Spannungen $\underline{\sigma}$, sind im allgemeinen nicht koaxial. Die Ursache für die Nichtkoaxialität von $\underline{\sigma}^0$ und $\underline{\sigma}$ in einem ansonsten isotropen Polykristall ist in den durch die Schädigungsvariablen \underline{Z}^0 und $\underline{\xi}$ beschriebenen Mikrodefekten zu sehen.

Die anisotrope Verknüpfung von $\underline{\sigma}^0$ und $\underline{\sigma}$ soll unter Verwendung von Darstellungssätzen für Tensorfunktionen durch eine isotrope Verknüpfung von $\underline{\sigma}^0$ mit $\underline{\sigma}$ sowie den Schädigungsvariablen $\underline{\sigma}^0$, \underline{Z}^0 und $\underline{\xi}$ approximiert werden. [33]

Beschränkt man sich dabei auf Polynome und tensoriell höchstens lineare Terme und vernachlässigt die mit $(\text{tr } \underline{\sigma})$ zu erzeugenden Anteile, so erhält man einen Ansatz der Form

$$\underline{\sigma}^0 = \underline{\underline{D}} \underline{\sigma} \quad (3.9)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = d_1 \underline{\sigma} + d_2(\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}^0) + d_3(\underline{Z}^0 \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{Z}^0) + d_4(\underline{\xi} \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\xi}) . \quad (3.10)$$

Beschränkt man sich auf eine skalarwertige Variable zur Beschreibung der Schädigung durch Poren, z. B. ξ als Porenvolumenanteil, vereinfacht sich (3.10) zu

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = d_1 \underline{\sigma} + d_2(\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}^0) + d_3(\underline{Z}^0 \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{Z}^0) + 2d_4 \xi \underline{\sigma} \quad . \quad (3.11)$$

Um auch langsame Prozesse, bei denen versetzungsbedingt ein Abbau der Spannungskonzentrationen an Mikrodefekten erfolgt, beschreiben zu können, wird der Ansatz (3.9) phänomenologisch begründet um einen Abklingterm erweitert:

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\sigma}} - \dot{\underline{\sigma}}^{0*} \quad . \quad (3.12)$$

Dieser Abklingterm ist so einzuführen, daß er bei schnellen Prozessen vernachlässigbar ist und bei langsamen Prozessen den Abbau der Spannungskonzentrationen an Mikrodefekten durch lokale Versetzungsbewegungen bewirkt.

Da die Nebenbedingungen für die Schädigung im $(\underline{\sigma}^0, \Theta^0)$ -Raum formuliert werden, ist ein hinreichend großer Wert von $\|\underline{\sigma}^0\|$ nötig, damit ein Anwachsen der Schädigung stattfinden kann. Bei zunehmender Schädigung nimmt die Spannung aber ab, folglich würden auch (setzt man voraus, daß $\underline{\underline{D}}$ positiv definit ist) die Spannungskonzentrationen abnehmen, und es würde zu einem Stillstand der Schädigung kommen. Deshalb wird ein weiterer Wachstumsanteil eingeführt, der ein Anwachsen von $\underline{\sigma}^0$ mit der plastischen Leistung bewirkt:

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\sigma}} + (\underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_{VT}) \underline{\underline{M}} - \dot{\underline{\sigma}}^{0*} \quad . \quad (3.13)$$

DIEHL ^[33] schlägt hierzu einen Ansatz für $\underline{\underline{M}}$ der Form

$$\underline{\underline{M}} = K d_5 \underline{\sigma}^0 \quad (3.14)$$

vor, der im Rahmen dieser Arbeit übernommen wird. Dieser Ansatz ist allerdings in Verbindung mit dem Abklingterm $\dot{\underline{\sigma}}^{0*}$ nicht in der Lage, bei langsamen Prozessen Bildung und Anwachsen von Poren zu beschreiben (die Nebenbedingungen für die Schädigung durch Mikroporen werden ebenfalls im $(\underline{\sigma}^0, \Theta^0)$ -Raum formuliert), wie sie bei großen plastischen Deformationen zu beobachten sind. Hierzu müßte entweder

- der mit der plastischen Leistung gekoppelte Wachstumsanteil so formuliert werden, daß er bei sehr großen plastischen Deformationen auch bei langsamen Prozessen gegenüber dem Abklingterm dominiert und so wieder ein Anwachsen der Spannungskonzentrationen bewirkt,
- die Nebenbedingungen für die Schädigung durch Mikroporen im $(\underline{\sigma}, \Theta)$ -Raum formuliert werden oder
- die Evolutionsgleichung für $\dot{\xi}$ um einen verzerrungsgesteuerten Wachstumsanteil erweitert werden.

3.3.2 Die Evolutionsgleichung für die Beschreibung der Schädigung durch Mikroporen

Aufgrund der in Kapitel 3.3 beschriebenen Erkenntnisse soll hier eine skalarwertige innere Variable ξ zur Beschreibung der Schädigung durch Mikroporen eingeführt werden, die als Porenvolumenanteil interpretiert werden kann.

Dabei soll nicht zwischen Entstehung und Wachstum der Mikroporen unterschieden werden, die Evolution der Schädigung durch Poren verläuft, wie auch die der anderen Schädigungsvariablen, spannungskontrolliert im $(\underline{\sigma}^0, \Theta^0)$ -Raum.

Als Fließbedingung G_{DP} für die Evolution der Schädigung durch Poren wird deshalb eine DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung^[36] der Form

$$G_{DP} = \sqrt{\underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'}} + \nu_{DP} \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DP} \geq 0 \quad (3.15)$$

gewählt (siehe auch Abbildung 13). Um neben dem Entstehen und Wachstum von Mikroporen bei Zugbelastung auch eine Verminderung des Porenvolumens bei Druckbelastung zu ermöglichen, wird die Evolution des Porenvolumenanteils ξ durch einen Wachstums- und einen Erholungsterm beschrieben, die an unterschiedliche Belastungsbedingungen geknüpft sind.

Für die Bildung bzw. das Wachstum neuer Poren wird gefordert, daß

$$LC_{DP1} = \left. \frac{\partial G_{DP}}{\partial \dot{\underline{\sigma}}^0} \cdot \dot{\underline{\sigma}}^0 \right|_{\text{spontan}} > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 > 0 \quad (3.16)$$

ist. Eine Verringerung des Porenvolumens soll möglich sein, wenn

$$LC_{DP1} = \left. \frac{\partial G_{DP}}{\partial \dot{\underline{\sigma}}^0} \cdot \dot{\underline{\sigma}}^0 \right|_{\text{spontan}} > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 < 0 \quad (3.17)$$

ist. Die Evolution des Porenvolumenanteils ξ läßt sich dann durch eine Gleichung der Form

$$\dot{\xi} = [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} - [d_{DP2}]_{DP} \xi \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2} \quad (3.18)$$

mit

$$\begin{aligned} [d_{DP1}]_{DP} &= \begin{cases} d_{DP1} & , \text{ falls } G_{DP} \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} &= \begin{cases} LC_{DP1} & , \text{ falls } LC_{DP1} > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ [d_{DP2}]_{DP} &= \begin{cases} d_{DP2} & , \text{ falls } G_{DP} \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2} &= \begin{cases} LC_{DP1} & , \text{ falls } LC_{DP1} > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 < 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

beschreiben.

Der Übergang von Mikro- zu Makroschädigung ist fließend, da die Abmessungen eines Mikrodefektes, der noch mit Hilfe der Homogenisierungsvorschrift ausreichend gut durch Mittelwerte beschrieben werden kann, vom Material und dem aufgetragenen Spannungszustand abhängig ist.

SCHIESSE ^[86] entwickelt ein Bruchkriterium für elastisch–plastisches Materialverhalten, das den Materialzustand einschließlich des Spannungszustandes berücksichtigt. Ausgangspunkt ist die Bilanz der beim Bruch umgesetzten Energiebeträge. Bei Schädigungsfortschritt wird elastische Energie freigesetzt und durch die Vergrößerung der Oberflächen wird die potentielle Oberflächenenergie erhöht. Kommt es zu einem instabilen Schädigungsfortschritt, d.h. zum Bruch, nimmt die gesamte potentielle Energie ab. Er führt dazu eine kritische, elastische Schädigungs–Verzerrungs–Energiefreisetzungsrates ein, weist aber auch auf die Schwierigkeiten zur Bestimmung der in den Bruchkriterien auftretenden Materialfunktionen hin.

Häufig wird als Kriterium für das Entstehen eines Makrodefektes ein kritisches Porenvolumen definiert. Auch wenn die Definition einer solchen kritischen Schädigung kein akzeptables Bruchkriterium liefert, da der Belastungszustand völlig unberücksichtigt bleibt, erscheint es zur Festlegung des Überganges von Mikro- zu Makroschädigung ausreichend.

KÖNKE ^[60] geht von einer oberen zulässigen Grenze für den Porenvolumenanteil von $\xi_c = 0.20$ aus, FELDMÜLLER ^[41] ermittelt bei seinen Messungen an Stahl CK15 einen Wert von $\xi_c \geq 0.15$. Auch TVERGAARD & NEEDLEMAN ^[98] und PERZYNA ^[81] gehen davon aus, daß ein Verschmelzen der Poren bei einem Porenvolumen von $\xi_c = 0.15$ beginnt.

Dieser Wert wird auch im Rahmen dieser Arbeit als kritischer Wert für das Porenvolumen angenommen, bei dem der Gültigkeitsbereich der Materialbeschreibung durch ein Kontinuums-Damage-Modell endet.

3.3.3 Materialfunktionen zur Beschreibung der Evolution des Porenvolumenanteils ξ

- Der Ausdruck $\nu_{DP} \text{tr} \underline{\sigma}^0$ beschreibt den Einfluß des lokalen hydrostatischen Spannungszustandes auf die Porenbildung. Bisher gibt es keinen Hinweis auf eine Abhängigkeit dieser Einflüsse von anderen Größen, weshalb hier

$$\nu_{DP} = \text{konst.} \tag{3.19}$$

angesetzt wird.

- Die Funktion h_{DP} soll den Einfluß des “adiabatic heating” erfassen.

Mit $\frac{dh_{DP}}{d\Theta^0} < 0$ können dann auch Mikroporen bei niedrigen lokalen Spannungen, aber hohen Temperaturkonzentrationen entstehen. Dies wird erreicht durch einen Ansatz der Form:

$$h_{DP}(\Theta^0) = \frac{h_{DP0}}{1 + \chi_{\xi 0} \Theta^0} \quad (3.20)$$

- Um einen glatten Kurvenverlauf $\xi(t)$ zu erhalten, müssen die Funktionen d_{DP1} und d_{DP2} mit der Fließfunktion G_{DP} verschwindende Funktionen von G_{DP} sein. Dies läßt sich durch einen Ansatz der Form

$$d_{DP} \sim \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi}}\right) \quad (3.21)$$

erreichen.

Mit der in der Viskoplastizität üblichen Terminologie lassen sich die Materialfunktionen d_{DP1} , d_{DP2} dann als beschränkte Überspannungsfunktionen bezeichnen, der Quotient G_{DP}/χ_{ξ} ist die zugehörige Überspannung. Um die in Experimenten beobachtete Abhängigkeit des Porenwachstums von der Temperatur zu berücksichtigen, werden für die Materialfunktionen d_{DP1} und d_{DP2} folgende Ansätze gewählt:

$$d_{DP1}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0, \xi) = (\vartheta_1(\Theta) + \vartheta_2(\Theta) \xi) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi 1}}\right) \quad (3.22)$$

$$d_{DP2}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0) = \vartheta_3(\Theta) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi 2}}\right) \quad (3.23)$$

3.3.4 Die Evolutionsgleichung für die schädigungsinduzierte Deformationsrate $\dot{\underline{\epsilon}}_{DP}^0$

Die Volumenänderung eines repräsentativen Volumenelementes ergibt sich aus der ersten Invarianten des Dehnungstensors $\underline{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{\epsilon}) &= \ln\left(\frac{dV}{dV^0}\right) \\ &= \ln\left(\frac{dV}{dV^*} \frac{dV^*}{dV^0}\right) \\ &= \ln\left(\frac{dV}{dV^*}\right) + \ln\left(\frac{dV^*}{dV^0}\right) \\ &= \text{tr}(\underline{\epsilon}_e) + \text{tr}(\underline{\epsilon}_i) \quad . \end{aligned}$$

Da die durch Versetzungsprozesse sowie durch Scherband-Schädigung induzierten Verzerrungen isochor verlaufen, sind die inelastischen Volumenänderungen ausschließlich auf veränderte Porenvolumen zurückzuführen.

Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\underline{\dot{\epsilon}}_{DP}^0) &= \text{tr}(\underline{\dot{\epsilon}}_i) = \frac{d(\text{tr}(\underline{\epsilon}_i))}{dt} \\
 &= \frac{d\left(\ln\left(\frac{dV^*}{dV^0}\right)\right)}{dt} \\
 &= \frac{d\left(\ln\left(\frac{\rho^0}{\rho^*}\right)\right)}{dt} \\
 &= \frac{\rho^*}{\rho^0} \frac{d\left(\frac{\rho^0}{\rho^*}\right)}{dt} \\
 &= -\frac{\dot{\rho}^*}{\rho^*} .
 \end{aligned}$$

Mit der Interpretation der Schädigungsvariable ξ als Porenvolumenanteil

$$\rho^* = \rho^0 (1 - \xi)$$

erhält man die schädigungsinduzierte Deformationsrate $\underline{\dot{\epsilon}}_{DP}^0$:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_{DP}^0 = \frac{\dot{\xi}}{3(1 - \xi)} \mathbf{1} . \quad (3.24)$$

Dieser Definition liegen die Volumina in der fiktiven Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* (siehe Kapitel 7) zugrunde, damit auch große reversible Volumenänderungen, wie sie bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen auch bei kleinen elastischen Gestaltsänderungen aufgrund großer Drücke auftreten, keinen Einfluß auf die Schädigungsvariable ξ haben.

3.4 Zusammenstellung der Evolutionsgleichungen für Modell 1.2

Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariablen

Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\sigma}^0$:

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\sigma}} + K d_5(\underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_{VT}) \underline{\sigma}^0 - m \underline{\sigma}^0 \quad (3.25)$$

$$\underline{\underline{D}} \dot{\underline{\sigma}} = d_1 \dot{\underline{\sigma}} + d_2(\underline{\sigma}^0 \cdot \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\sigma}^0) + d_3(\underline{Z}^0 \cdot \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{Z}^0) + 2d_4 \xi \dot{\underline{\sigma}}$$

Der Scherband-Schädigungs-Tensor \underline{Z}^0 :

$$\dot{\underline{Z}}^0 = [d_z]_z \langle \langle LC_z \rangle \rangle \left(\mu_3(\underline{\sigma}')^2 + (\mu_4 + \omega) \underline{Z}^0 \right) \quad (3.26)$$

$$G_z = \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \nu_z \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_z \geq 0 \quad (3.27)$$

$$LC_z = (2\underline{\sigma}^{0'} - \nu_z \underline{\mathbf{1}}) \cdot (\dot{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\sigma}^0) > 0 \quad (3.28)$$

Der Porenvolumenanteil ξ :

$$\dot{\xi} = [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} - [d_{DP2}]_{DP} \xi \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2} \quad (3.29)$$

$$G_{DP} = \sqrt{\underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'}} + \nu_{DP} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DP} \geq 0 \quad (3.30)$$

$$LC_{DP1} = \left(\frac{\underline{\sigma}^{0'}}{\sqrt{I_2^{0'}}} + \nu_{DP} \underline{\mathbf{1}} \right) \cdot (\dot{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\sigma}^0) > 0 \quad (3.31)$$

Die durch Porenbildung/Porenwachstum induzierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{\epsilon}}_{DP}^0$:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{DP}^0 = \frac{\dot{\xi}}{3(1-\xi)} \underline{\mathbf{1}} \quad (3.32)$$

Die durch Scherband-Schädigung induzierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{\epsilon}}_{DS}^0$:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{DS}^0 = [d_{DS}]_{DS} \langle \langle \langle LC_{DS} \rangle \rangle \rangle \frac{\underline{\sigma}'}{\|\underline{\sigma}'\|} \quad (3.33)$$

$$G_{DS} = \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \nu_{DS} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DS} \geq 0 \quad (3.34)$$

$$LC_{DS} = (2\underline{\sigma}^{0'} - \nu_{DS} \underline{\mathbf{1}}) \cdot (\dot{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\sigma}^0) > 0 \quad (3.35)$$

Die Temperaturkonzentration Θ^0 :

$$\dot{\Theta}^0 = [d_{\Theta v}]_v \quad (3.36)$$

Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{\epsilon}}_{vL}^0$:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{vL}^0 = \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\underline{\sigma}^{o'}}{\|\underline{\sigma}^{o'}\|} \quad (3.37)$$

$$G_v = \underline{\sigma}^{o'} \cdot \underline{\sigma}^{o'} - h_v \geq 0 \quad (3.38)$$

Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{\epsilon}}_{vT}$:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}_T}{\|\underline{\sigma}' - \underline{X}_T\|} \quad (3.39)$$

$$F_T = (\underline{\sigma}' - \underline{X}_T) \cdot (\underline{\sigma}' - \underline{X}_T) - g_T \geq 0 \quad (3.40)$$

Der kinematische Verfestigungstensor \underline{X}_T :

$$\dot{\underline{X}}_T = c_T \dot{\underline{\epsilon}}_{vT} \quad (3.41)$$

Die Versetzungsdichte κ :

$$\dot{\kappa} = K \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_{vT} \quad (3.42)$$

Die Evolutionsgleichung für die innere Variable $\vec{\alpha}_q$:

$$\dot{\vec{\alpha}}_q = \text{grad } \Theta - \frac{1}{\tau_q} \vec{\alpha}_q \quad (3.43)$$

Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit :

$$\ddot{u} = -c (\alpha + PG) \dot{u} - \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 (u - u_{EQ}(PG)) \quad (3.44)$$

$$\text{mit: } PG = \max\{0, |\dot{\epsilon}_{EW}|_{\max} + \chi_{u1} \dot{\Theta}\} \quad (3.45)$$

Variablen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

Die reversible Verzerrung $\underline{\epsilon}_e$:

$$\underline{\epsilon}_e = \left(\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \lambda_3 \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right) \underline{1} + \lambda_4 \underline{\sigma} \quad (3.46)$$

Die Entropie η :

$$\rho \eta = \lambda_1(\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \nu_4 \kappa \quad (3.47)$$

Der Wärmefluß \vec{q} (MAXWELL-CATTANEO-Wärmeleitungsgleichung):

$$\tau_q \dot{\vec{q}} + \vec{q} = -k \operatorname{grad} \Theta \quad (3.48)$$

Diese Verallgemeinerung der FOURIER'schen Wärmeleitungsgleichung verhindert, daß sich lokal aufgebrauchte Temperaturänderungen unendlich schnell ausbreiten und kann deshalb die auftretenden instationären Zustände besser beschreiben.

Aus der allgemeinen Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\rho \dot{g} = \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{\epsilon}_e - \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_i + \rho \Theta \dot{\eta} + \rho \dot{\Theta} \eta + \operatorname{div} \vec{q} - \rho r \quad (3.49)$$

ergibt sich in Verbindung mit dem speziellen Ansatz für die freie Enthalpie g

$$\begin{aligned} \rho g = & \frac{1}{2} \lambda_1 (\Theta - \Theta_0)^2 + \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \frac{1}{2} \lambda_3 (\|\underline{Z}^0\|) (\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 (\|\underline{Z}^0\|) \operatorname{tr} \underline{\sigma}^2 \\ & + \frac{1}{2} \mu_6 \Theta^{02} + \vartheta_1 \xi + \frac{1}{2} \vartheta_2 \xi^2 - \frac{1}{2} \vartheta_3 \xi^2 \\ & - \frac{1}{2} \mu_1 (\operatorname{tr} \underline{\sigma}^0)^2 - \frac{1}{2} \mu_2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}^{02} + \mu_3 \underline{N}_{zE}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{Z}^0 + \frac{\mu_4 \operatorname{tr} \underline{Z}^{02}}{2(1 + \mu_5 \operatorname{tr} \underline{Z}^{02})} \\ & - \nu_1 \underline{\sigma} \cdot \underline{X}_A - \nu_2 \underline{\sigma} \cdot \underline{X}_T - \rho \gamma_1(\kappa) - \rho \gamma_2(\kappa) (\Theta - \Theta_0) - \frac{1}{2} \frac{k}{\tau_q \Theta} \underline{\alpha}_q \cdot \underline{\alpha}_q \end{aligned} \quad (3.50)$$

und den zuvor angegebenen Evolutionsgleichungen unter Vernachlässigung volumenverteilter Wärmequellen:

$$\begin{aligned} \rho c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} + \lambda_2 \Theta \operatorname{tr} \underline{\dot{\sigma}} = & (1 - \nu_3 K \kappa - \nu_4 K \Theta_0 - \nu_2 c_T) \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_{vT} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_{Ds} \\ & + \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_{DP} + \rho \frac{\partial g}{\partial \xi} \dot{\xi} + \mu_6 \Theta^0 [d_{\Theta v}]_v + [d_z]_z \langle \langle LC_z \rangle \rangle \frac{\rho \partial g}{\partial \underline{Z}^0} \cdot \frac{\rho \partial g}{\partial \underline{Z}^0} \\ & + \mu_1 m (\operatorname{tr} \underline{\sigma}^0)^2 + \mu_2 m \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\sigma}^0 - \operatorname{div} \vec{q} \end{aligned} \quad (3.51)$$

4. Parameteridentifikation — Ein Optimierungsproblem

Die in Kapitel 3.4 aufgeführten Evolutionsgleichungen enthalten zur quantitativen Beschreibung des Materialverhaltens der betrachteten metallischen Werkstoffe Materialfunktionen und Materialparameter (siehe Anhang A). Die Bestimmung dieser Materialparameter erfolgt in der Regel durch Anpassung an experimentell gewonnene Daten. Aufgrund der Kopplung des zugrundeliegenden Differentialgleichungssystems ist eine sukzessive Ermittlung der Materialkoeffizienten oft nicht möglich und es muß zur Ermittlung einzelner Parameter das gesamte Differentialgleichungssystem integriert werden.

Die Forderung der möglichst genauen Übereinstimmung von Experiment und Modell führt auf ein Optimierungsproblem.

4.1 Das Optimierungsproblem

Als Optimierungsproblem bezeichnen wir die Aufgabe, einen Extremwert (z. B. ein Minimum) einer Zielfunktion f zu finden:

$$f(\vec{x}^*) = \min_{\vec{x} \in \mathcal{G}} f(\vec{x}) \quad , \quad (4.1)$$

dabei ist $\vec{x}^* \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ das globale Minimum.

Als allgemeine Zielfunktion zur Bestimmung von Materialparametern inelastischer Stoffgesetze erhält man

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n w_i (r_i(\vec{x}))^2 \quad (4.2)$$

mit:

w_i Wichtungsfaktoren

r_i Residuen

\vec{x} Parametervektor, $\vec{x} \in \mathcal{G}$

\mathcal{G} zulässiges Gebiet, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$

und als Restriktionen z. B. :

$$\vec{x}_l \leq \vec{x} \leq \vec{x}_u \quad (4.3)$$

\vec{x}_l untere Schranke

\vec{x}_u obere Schranke

Eine analytische Betrachtung dieser Extremwertaufgabe ist bei komplexen Werkstoffmodellen nicht möglich.

Die Verfahren zur Lösung dieses Optimierungsproblems lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- deterministische Verfahren sowie
- stochastische Verfahren

4.1.1 Deterministische Verfahren

Bei deterministischen Verfahren zur Optimierung wird die Suchrichtung

$$\vec{x}^{(k)} \longrightarrow \vec{x}^{(k+1)} \quad (4.4)$$

durch eine mathematische Vorschrift festgelegt.

Bei Abstiegsverfahren wird z. B. folgende Vorschrift verwendet

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \vec{d}^{(k)} \quad (4.5)$$

mit:

$\alpha^{(k)}$ Schrittweite

$\vec{d}^{(k)}$ Suchrichtung

Je nach Wahl von $\vec{d}^{(k)}$ erhält man unterschiedliche Gradientenverfahren, von denen hier nur einige erwähnt werden:

$$\vec{d}^{(k)} = -\nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad \text{Verfahren des steilsten Abstiegs}$$

$$\vec{d}^{(k)} = -\nabla^2 f(\vec{x}^{(k)})^{-1} \cdot \nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad \text{NEWTON-Verfahren}$$

$$\vec{d}^{(k)} = -\underline{H}^{(k)-1} \cdot \nabla f(\vec{x}^{(k)}) \quad \text{Quasi-NEWTON-Verfahren}$$

Entsprechend gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Schrittweite $\alpha^{(k)}$ (ARMJO-Verfahren, Bisektions-Verfahren etc.).

Diese Verfahren der freien Minimierung bilden die Grundlage der Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen mit Schranken. Als Verfahren sind hier insbesondere zu nennen:

- projizierte Gradientenverfahren, z. B. GAUSS-SEIDEL Verfahren, NEWTON-ähnliche Verfahren, Verfahren von BERTSEKAS [5]
- projizierte LAGRANGE-Verfahren, z. B. Sequentielle Quadratische Optimierung (SQP) [87], Sequentielle Nichtlineare Optimierung (SNP)

Eine Übersicht dieser Verfahren sowie deren Anwendung zur Strukturoptimierung für Stabtragwerke findet man bei MAHNKEN [73].

Voraussetzung für die Anwendung dieser Verfahren ist jedoch die Stetigkeit der Zielfunktion f bzw. die der benötigten Ableitungen im betrachteten Gebiet \mathcal{G} . So spricht man von

\mathbb{C}^0 -Stetigkeit, falls	$f(\vec{x}^{(k)})$	stetig ist,
\mathbb{C}^1 -Stetigkeit, falls	$\nabla f(\vec{x}^{(k)})$	stetig ist,
\mathbb{C}^2 -Stetigkeit, falls	$\nabla^2 f(\vec{x}^{(k)})$	stetig ist

und so fort.

Sofern diese Stetigkeiten nicht gesichert sind, fehlt die Voraussetzung für die Anwendung der oben genannten Verfahren. Ansonsten verfügen deterministische Verfahren über die schnellste Konvergenz, insbesondere wenn man bereits eine gute Anfangsnäherung für das Optimum kennt.

4.1.2 Stochastische Verfahren

Im Gegensatz zu deterministischen Verfahren sind stochastische Verfahren absolut konvergenzsicher, die Konvergenzgeschwindigkeit gegen das Optimum ist jedoch gering.

Stochastische Verfahren stellen keine Stetigkeitsanforderungen an die Zielfunktion, so daß sie universell eingesetzt werden können. Die wichtigsten Verfahren sind:

- Evolutionsstrategien
- Genetische Algorithmen
- Monte-Carlo-Methoden

Die **Monte-Carlo-Methoden** zählen zu den direkten Suchmethoden. Es wird eine stochastisch verteilte Wolke zulässiger Punkte erzeugt und der Punkt mit dem bestem Zielfunktionswert wird

als Optimum angenommen. Modifikationen dieser Methode konstruieren aus der Punktwolke ein kleineres Suchgebiet und wiederholen den Vorgang. Zu dieser Klasse von Verfahren läßt sich auch die “Complex Methode” nach BOX^[96] zählen, bei der sich an einen stochastischen Schritt (zufällige Ermittlung einer Wolke zulässiger Punkte, aus der ein Polyeder aufgespannt wird) ein deterministischer Schritt anschließt, bei dem der schlechteste Zielfunktionswert über den geometrischen Schwerpunkt der restlichen Ecken des Polyeders gespiegelt wird. Tritt im Spiegelpunkt keine Verkleinerung des Zielfunktionswertes auf oder liegt dieser außerhalb des zulässigen Gebietes \mathcal{G} , so wird er zum Schwerpunkt hin verschoben.

Evolutionsstrategien zur Optimierung technischer Systeme nutzen die Auswahlverfahren der biologischen Evolution. Dabei werden zufällige Varianten (Mutationen) der vorgegebenen Startparameter erzeugt, und in einem anschließenden Aussonderungsprozeß (Selektion) — die Populationsgröße wird in der Regel konstant gehalten — werden unvorteilhafte Parametersätze aussortiert.

Unterschiede gibt es in der Wahl der Qualitätsfunktionen, die eine Bewertung / Selektion der Lösungen durchführen, sowie den beteiligten Verfahren zur Erzeugung neuer Parametersätze^[89]:

- Zufällige Auswahl zweier Parametersätze aus der Population
- Veränderung zufällig ausgewählter Parameter dieser Parametersätze (Mutation)
- Vertauschung einzelner Parameter dieser Parametersätze (Rekombination)
- Vertauschung einzelner Parameter eines Chromosoms des Parametersatzes (Inversion)
- Ersetzung eines Parameters mit dem Wert 0 durch den Wert eines anderen Parameters (Translokation)
- Belegung zufällig ausgewählter Parameter mit dem Wert 0 (Deletion)
- Getrennte Entwicklung einer Teilpopulation (Isolation)
- Spiegelung einzelner, zufällig ausgewählter Parameter an der Mitte des zugelassenen Wertebereiches dieses Parameters (Intrachromosomale Rekombination)
- Erzeugung eines neuen Parametersatzes durch zufällig wechselnde Übernahme der Parameter der so modifizierten Parametersätze (crossing over)

Diese Verfahren werden durch bestimmte Verfahrensparameter gesteuert, die sich im Laufe der Evolution ebenfalls ändern. RECHENBERG^[84] spricht in diesem Zusammenhang von einer lernenden Population.

Um die Möglichkeit der Inversion sinnvoll einsetzen zu können, müssen die Parameter innerhalb eines Parametersatzes so zu Chromosomen zusammengefaßt werden, daß sie entweder die gleiche Größenordnung haben oder aber in einem bestimmten Zusammenhang stehen. Hat die Kombination Parameter p_i groß und Parameter p_k klein den gleichen Effekt wie Parameter p_i klein und Parameter p_k groß, kann man die Möglichkeiten der Inversion gut nutzen.

Einen Überblick über die verschiedenen Varianten der Evolutionsstrategien sowie eine Eingruppierung findet man bei SCHÖNEBURG ^[88] sowie bei SCHWEFEL ^[91]. BRAASCH ^[9] vergleicht die 1/5-Erfolgsregel nach RECHENBERG ^[84] und die (λ, μ) -Strategie nach SCHWEFEL ^[90] und stellt einen Algorithmus zur Vektorisierung dieser Optimierungsverfahren vor.

Genetische Algorithmen versuchen, ebenso wie Evolutionsstrategien, die Vorgänge der biologischen Evolution in mathematische Modelle und Algorithmen zu fassen. Der Hauptunterschied liegt in der Codierung der Chromosomen. Genetische Algorithmen ^[48, 88] speichern den Parametervektor in binärer Codierung ab. Dies führt zu Problemen bei der Steuerung der Mutationen, denn die Größe der Sprünge im Parameterraum läßt sich kaum den praktischen Gegebenheiten des Optimierungsproblems anpassen.

4.2 Identifikation der Modellparameter mit Hilfe der Evolutionsstrategie

Aufgrund der Komplexität des entwickelten Materialmodells ist es sehr schwierig, Aussagen über die Stetigkeit der Zielfunktion sowie deren Ableitungen zu treffen, so daß die Anwendung von deterministischen Verfahren zur Identifikation der Modellparameter fragwürdig erscheint.

Im Zeichen zunehmender Rechnerkapazitäten hat sich außerdem der Blickwinkel deutlich vom Anspruch der maximalen Konvergenzgeschwindigkeit (und damit Spezialisierung) weg in Richtung Konvergenzsicherheit (also Universalität) bewegt, so daß ein in Maßen erhöhter Rechenaufwand heutzutage von eher untergeordneter Bedeutung ist.

Insbesondere die heutige Rechnerstruktur — viele Workstations in einem Netzwerk statt eines Großrechners — bietet den Vorteil, mehrere Rechner in einem Netzwerk zu einer parallelen virtuellen Maschine zusammenfassen zu können. Die Rechenleistung wird dann nicht mehr durch die Leistungsfähigkeit besonders aufwendiger und teurer Chip-Technologie, sondern durch die Anzahl der beteiligten Workstations bestimmt und ist nahezu unbegrenzt. In der Regel stellt die Programmierung paralleler Systeme hohe Anforderungen an den Entwickler, gerade aber für die Anwendung der Evolutionsstrategie bieten sich auch sehr einfache Umsetzungen an.

Bei dem hier vorgestellten Algorithmus führen dabei alle Rechner eine eigenständige Evolution jeweils einer Population (Gruppe von Parametervektoren) durch. Von Zeit zu Zeit wird ihre Population (durch Mutation/Selektion verbesserte Parameterkombinationen) in einer Datei abgelegt. Ein gesonderter Prozeß (*Master-Slave Prinzip*) liest diese Dateien, kombiniert bzw. selektiert und erstellt eine neue, verbesserte Population. Diese wird von den einzelnen Evolutionsprozessen eingelesen und als neue Startpopulation verwendet. Diese Vorgehensweise ermöglicht auch die Einbeziehung deterministischer Verfahren, einzelne *Slave Prozesse* können

die Konvergenzgeschwindigkeit gegen ein (in der Regel lokales) Minimum vergrößern. Bei der anschließenden Suche nach besseren Lösungen mit stochastischen Verfahren müssen die Verfahrensparameter so eingestellt werden, daß diese Nebenminima auch wieder verlassen werden können.

Durch diese Vorgehensweise wird der Kommunikationsaufwand auf ein Minimum reduziert, und auch der Ausfall eines beteiligten Rechners bzw. eine Instabilität des Netzes beeinflussen den Optimierungsprozeß nicht. Kein Prozeß muß auf einen anderen warten, keine spezielle Software oder Programmierkenntnisse sind erforderlich, und auch auf heterogenen Netzwerken ist diese Vorgehensweise ohne Probleme durchführbar.

Die für die Identifikation der Modellparameter erforderlichen Versuche sind noch nicht vollständig an einem Material durchgeführt worden. Dies liegt zu einem großen Teil daran, daß in der Regel für experimentelle Untersuchungen jeweils speziell ein Material gewählt wird, das die zu untersuchende Eigenschaft besonders ausgeprägt zeigt. Die Anpassung erfolgt deshalb an ein fiktives Vergleichsmaterial ^[42], welches das Verhalten einer großen Klasse metallischer Werkstoffe repräsentiert.

Erleichtert wird die Identifikation der Modellparameter durch den modularen Aufbau des Stoffgesetzes und die Trennung von versetzungsinduzierten sowie schädigungsinduzierten Prozessen. So können in einem ersten Anpassungsschritt der Einfluß der Schädigung und die in Verbindung damit in Kapitel 3.2 eingeführten internen Variablen vernachlässigt werden, wodurch sich das komplizierte Stoffgesetz erheblich vereinfacht. Aufbauend auf den für die Materialschädigung durch Scherbänder ermittelten Materialparametern werden nun die neu hinzugekommenen Parameter abgeschätzt.

Betrachten wir dazu zuerst einen einaxialen, homogenen Zugversuch. Als erstes wird festgelegt, bei welchem Wert der Spannungskonzentration σ^0 Porenentstehung/Porenwachstum beginnen soll. Mit diesem Wert und der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Temperaturkonzentration Θ^0 lassen sich die Werte in der Fließbedingung (3.15), ν_{DP} sowie h_{DP}

$$h_{DP}(\Theta^0) = \frac{h_{DP0}}{1 + \chi_{\epsilon 0} \Theta^0}$$

abschätzen und ihre Wertebereiche für die Optimierung eingrenzen. Der Einfluß der Poren auf die Spannungskonzentrationen wird in einer ersten Näherung zu Null gesetzt (Materialfunktion $d_4 \approx 0$)

$$d_4(\zeta) = \frac{\chi_{s17}}{(1 + \chi_{s18} \zeta)^{\chi_{s19}}},$$

so daß in der ersten Optimierungsphase nur die Parameter der Materialfunktion d_{DP1}

$$d_{DP1}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0, \xi) = (\vartheta_1(\Theta) + \vartheta_2(\Theta) \xi) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi 1}}\right)$$

$$\text{mit: } G_{DP} = \sqrt{\underline{\sigma}^{0T} \cdot \underline{\sigma}^{0T}} + \nu_{DP} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DP} \geq 0$$

ermittelt werden müssen.

Erfolgt die Anpassung zunächst nur für ein Temperaturniveau, entfällt die Abhängigkeit der Parameter $\vartheta_1(\Theta)$, $\vartheta_2(\Theta)$ von der Temperatur Θ .

Entsprechend wird unter Zugrundelegung einer homogenen Druckbeanspruchung bei der Bestimmung der Parameter der Materialfunktion d_{DP2}

$$d_{DP2}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0) = \vartheta_3(\Theta) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi 2}}\right)$$

vorgegangen.

Die so ermittelten Materialparameter sind im Anhang A aufgeführt.

5. Materialverhalten

Anhand einfacher Belastungszustände lassen sich die Effekte, die ein Materialmodell beschreiben kann, am besten aufzeigen. Im folgenden werden Ergebnisse von einaxialen Testrechnungen mit dem entwickelten Kontinuums-Damage-Modell dargestellt.

Neben der Spannungsantwort beim einaxialen Zugversuch und dem Verlauf der internen Variablen wird das unterschiedliche Verhalten der Schädigung bei Zug- und Druckbelastung, sowie der Einfluß einer Anfangsschädigung untersucht.

Einfache, nicht monotone Prozesse wie Geschwindigkeitwechselfersuche, zyklische Belastungsprozesse, Kriech- und Relaxationsrechnungen ergänzen die Materialbeschreibung.

5.1 Einaxiale Zugversuche mit konstanter Dehnungsrate

Die folgenden Abbildungen zeigen den Einfluß der Schädigung durch Mikroporen und Mikroscherbänder auf das Materialverhalten beim einaxialen Zugversuch mit konstanter Dehnungsrate (durchgezogene Linien). Zum Vergleich wurden die Ergebnisse der viskoplastischen Rechnung (Berücksichtigung von Versetzungsmechanismen, Prozeßgeschwindigkeit und Temperatureinfluß) gestrichelt dargestellt.

Die Berücksichtigung der Schädigungsmechanismen führt zu den in Abbildung 17 dargestellten Spannungsverläufen, die Evolution der internen Variablen wird in den Abbildungen 18 bis 25 gezeigt.

Gemeinsam ist allen Berechnungen:

- Berechnung bis zu einer Dehnung von $\epsilon/\epsilon_F = 60$ ($\rightarrow \epsilon \sim 8.5\%$).
- Die Ausgangstemperatur beträgt $\Theta_0 = 300$ K.
- Die Fließspannung beträgt $\sigma_F = 300$ MPa.
- Darstellung der viskoplastischen Vergleichsrechnung mit Berücksichtigung von Temperaturänderungen durch gestrichelte Linien.
- Dehngeschwindigkeitsbereich von 10 Zehnerpotenzen ($\dot{\epsilon} = 10^{-4} s^{-1}$ bis $\dot{\epsilon} = 10^5 s^{-1}$).

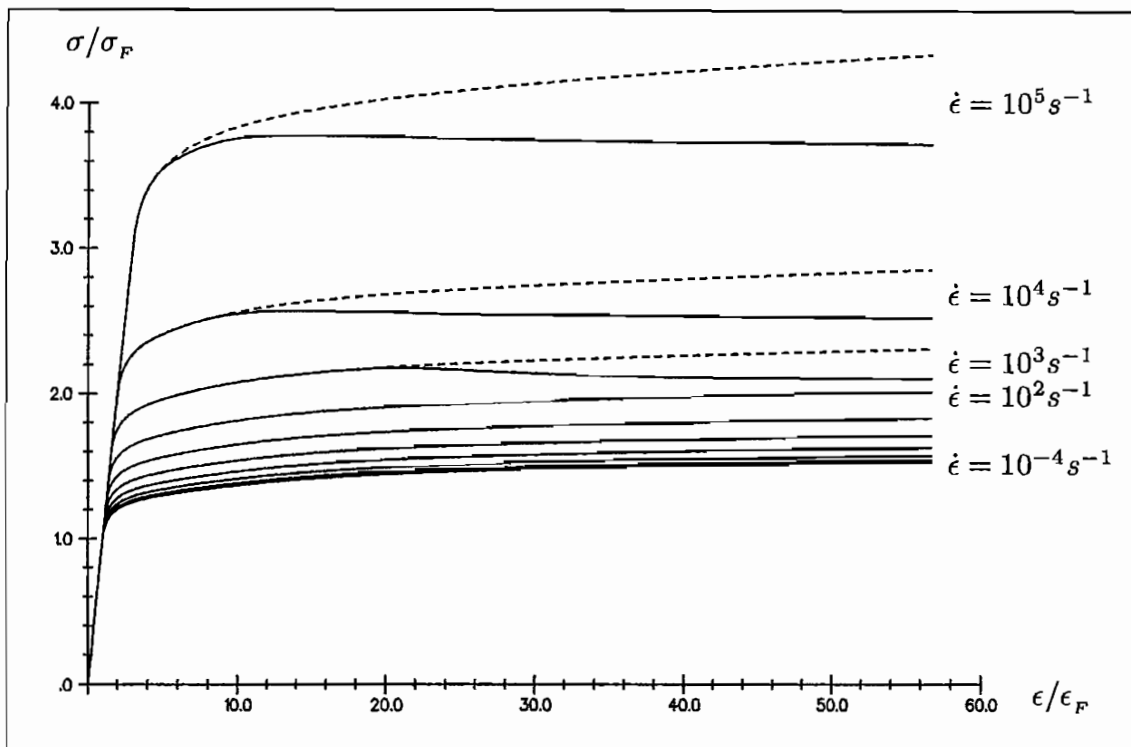


Abbildung 17: Vergleich der Berechnungen mit und ohne Schädigung bei homogenen Zugversuchen mit konstanter Dehnungsrate

Deutlich zu erkennen ist der Einfluß der Dehnungsrate auf die Spannungs–Dehnungs Beziehung und die Zunahme der Proportionalitätsgrenze bei sehr großen Prozeßgeschwindigkeiten, wie sie auch in den Experimenten (z. B. bei HARDING ^[46]) zu beobachten ist.

Bei Prozessen mit einer Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon} > 10^2 \text{s}^{-1}$ kann eine deutliche Entfestigung durch die Schädigung beobachtet werden (Abbildung 17), langsamere Prozesse zeigen bei den dargestellten Dehnungen keinen Einfluß der Schädigung auf die Spannungs–Dehnungs–Kurve.

Die kinematische Verfestigung \underline{X}_T wird durch die Mikroschädigung kaum beeinflusst, die mittlere Versetzungsdichte κ verringert sich bei hohen Prozeßgeschwindigkeiten mit zunehmender Dehnung. Die Temperatur steigt von $\Theta_0 = 300\text{K}$ auf fast 330K (bei $\dot{\epsilon} = 10^5 \text{s}^{-1}$ und $\epsilon = 8,5\%$).

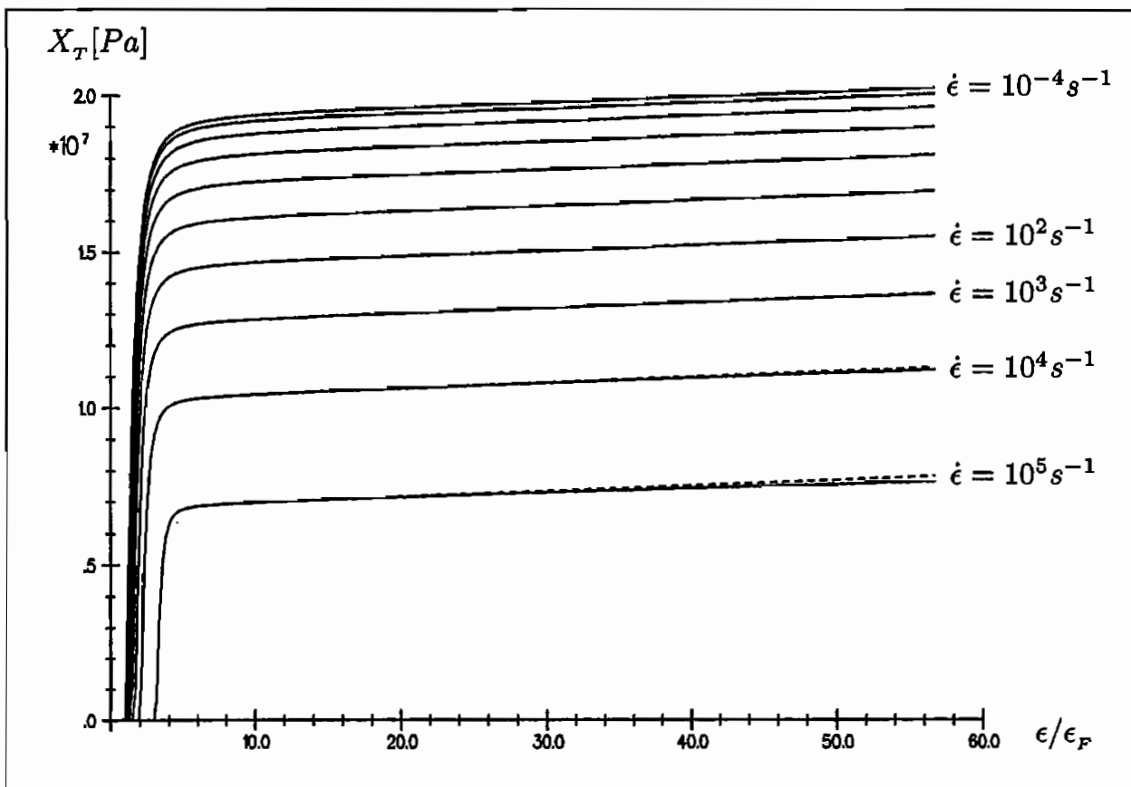


Abbildung 18: Evolution der kinematischen Verfestigung X_T

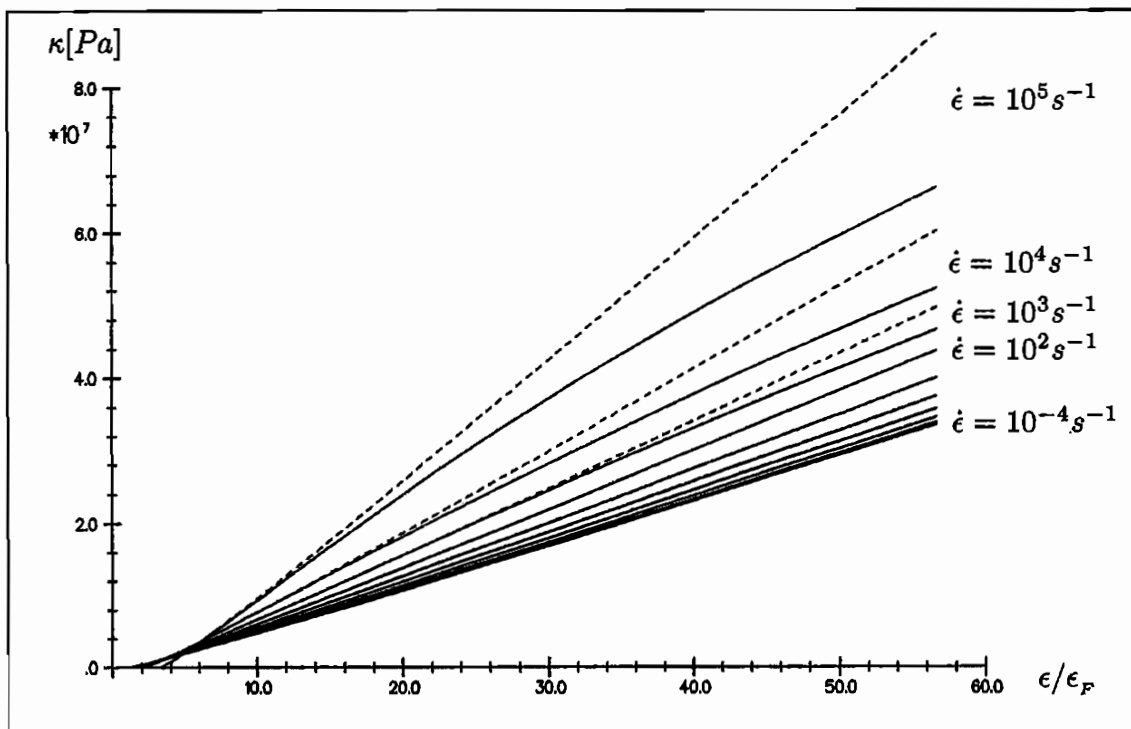


Abbildung 19: Evolution der mittleren Versetzungsdichte κ

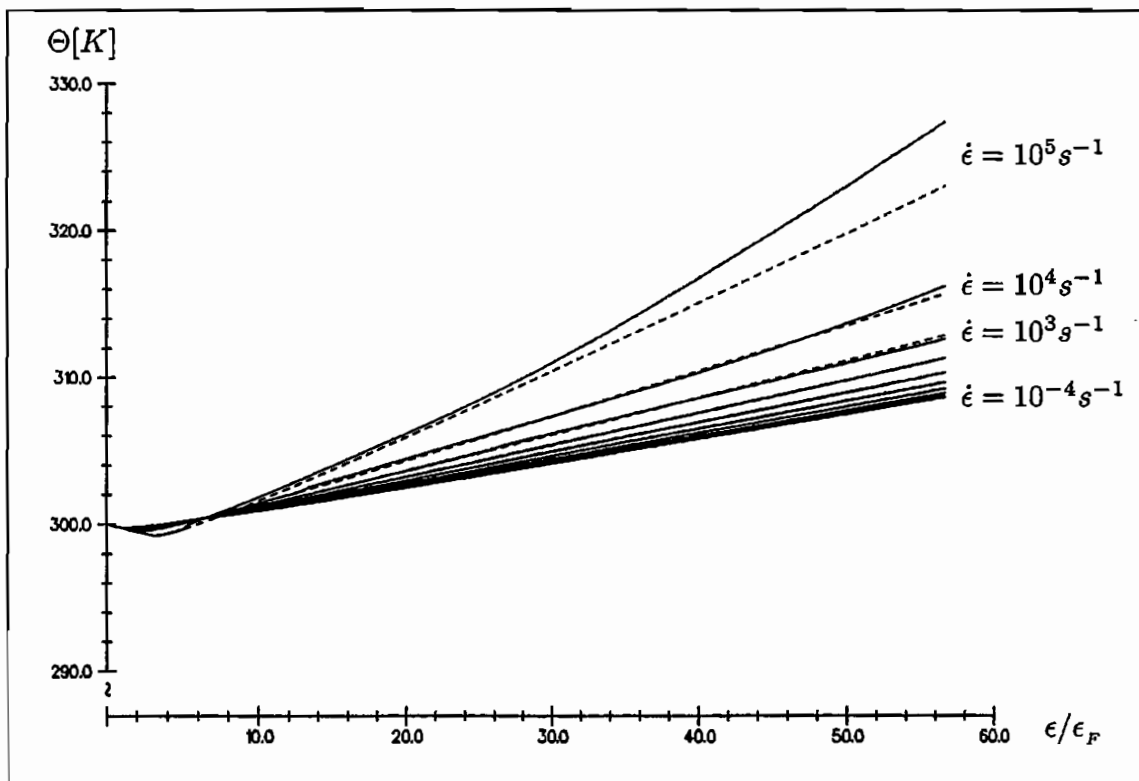


Abbildung 20: Temperaturverlauf Θ mit und ohne Schädigung

Im Mittelpunkt der schädigungsrelevanten Größen steht die Entwicklung der Spannungskonzentrationen, da diese (zusammen mit den Temperaturkonzentrationen Θ^0 , Abbildung 21) über die im (σ^0, Θ^0) -Raum formulierten Nebenbedingungen die Scherbandentwicklung und die Entstehung bzw. das Wachstum der Mikroporen steuern. Bei kleineren Prozeßgeschwindigkeiten bauen sich die Spannungskonzentrationen sehr schnell ab, so daß keine Schädigung auftritt.

Die interne Variable ϵ_{vL}^0 beschreibt lokale Versetzungsbewegungen und bewirkt über den Abklingterm $m \underline{\sigma}^0$ in der Evolutionsgleichung der Spannungskonzentrationen (siehe Gleichung (3.25) und die Materialfunktion m im Anhang A) einen Abbau der lokalen Spannungen an Mikrodefekten. Sind die lokalen Spannungserhöhungen abgebaut, stagnieren die lokalen, versetzungsinduzierten Verzerrungen ϵ_{vL}^0 . Dies führt zu den Überschneidungen der Kurvenverläufe in Abbildung 23. Abbildung 22 zeigt, daß die bei langsamen Prozeßgeschwindigkeiten auftretenden lokalen Spannungskonzentrationen durch lokale Versetzungen rasch abgebaut werden. Hochdynamische Prozesse ($\dot{\epsilon} = 10^4 s^{-1}$, $\dot{\epsilon} = 10^5 s^{-1}$) laufen hingegen so schnell ab, das es nicht zu lokalen Versetzungsbewegungen kommt.

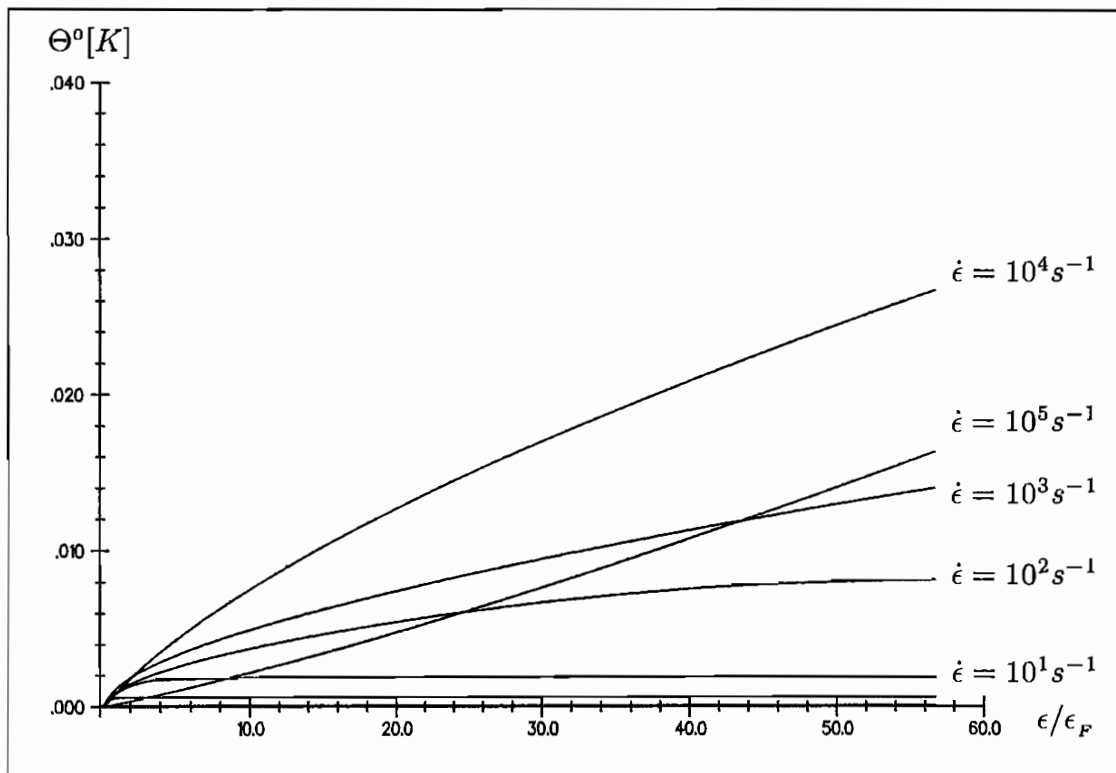


Abbildung 21: Evolution der Temperaturkonzentration Θ^0

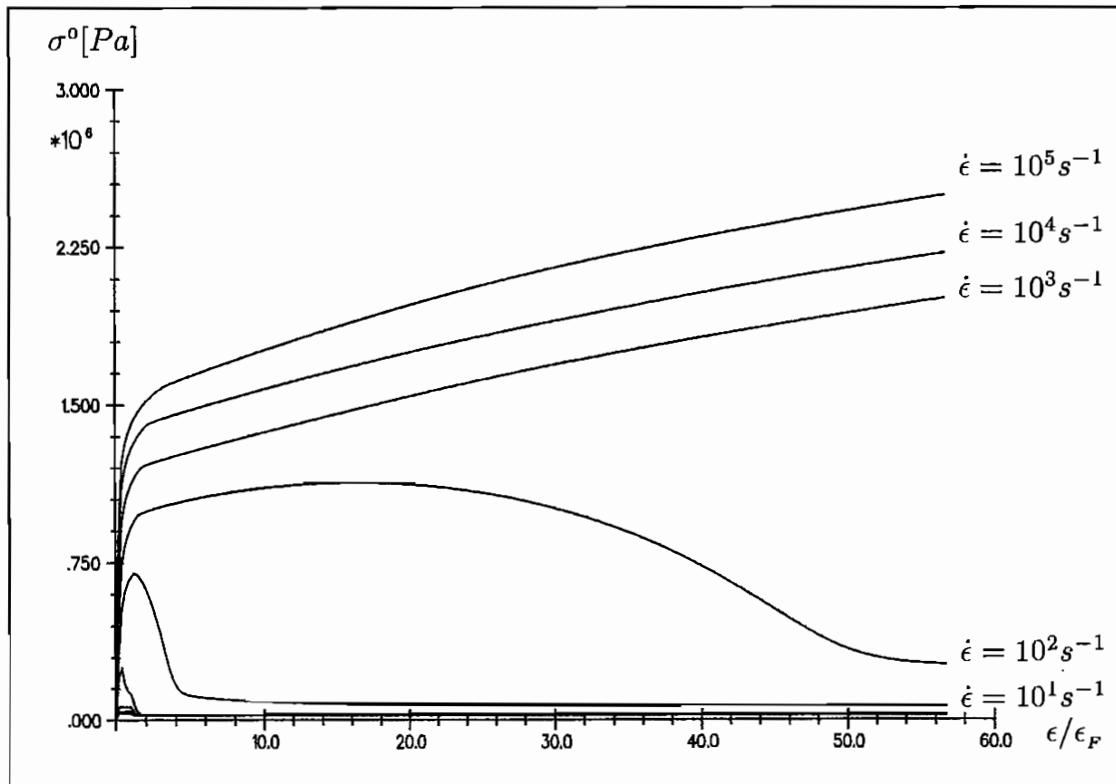


Abbildung 22: Verlauf der Spannungskonzentrationen σ^0

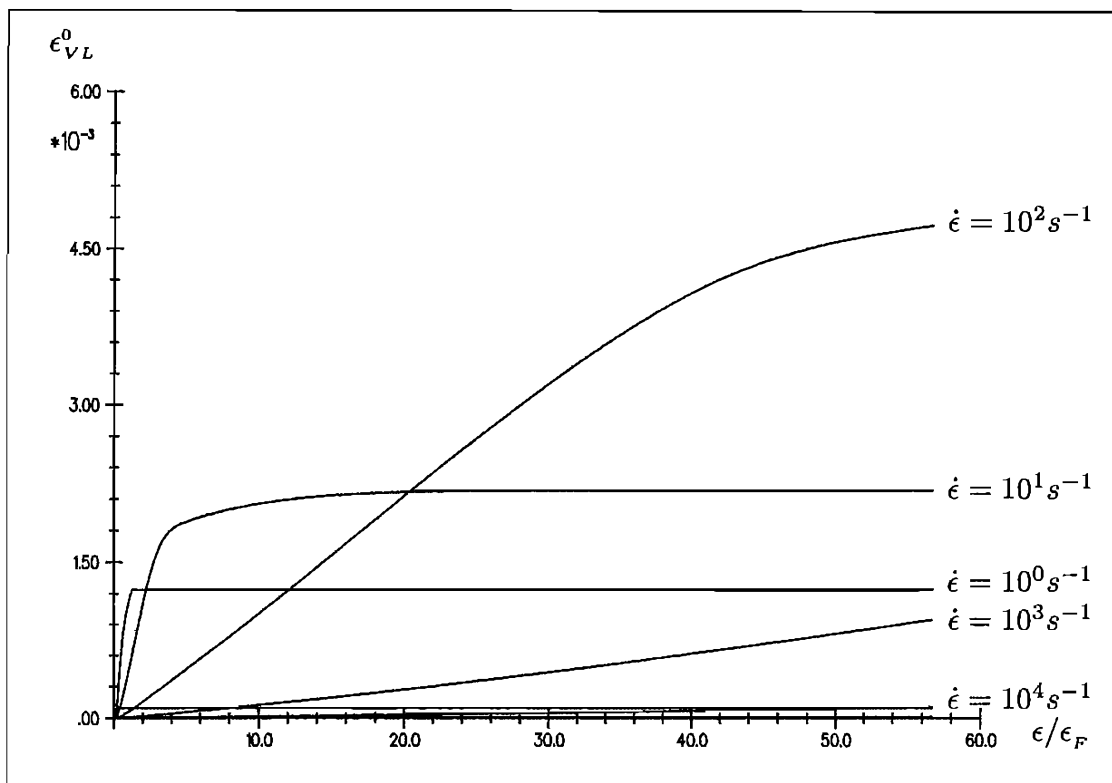


Abbildung 23: Evolution von ϵ_{VL}^0 infolge lokaler Versetzungsbewegungen

Bei moderaten Dehngeschwindigkeiten $10^1 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^2 \text{ s}^{-1}$ können die Spannungskonzentrationen nur langsam abgebaut werden, bei hochdynamischen Prozessen steigen sie stetig an, und die Kriterien $G_z > 0$ bzw. $G_{DP} > 0$ können erfüllt werden.

Dies führt zum Einsetzen der Schädigung durch Porenentstehung/Wachstum sowie zur Bildung von Mikroscherbändern.

Abbildung 24 zeigt das allmähliche Anwachsen des Porenvolumenanteils ξ . Bei Prozeßgeschwindigkeiten unter 10^3 s^{-1} tritt in dem dargestellten Bereich bis 8.5% Dehnung keine Bildung von Mikroporen auf.

Die Entwicklung der Mikroschädigung durch Scherbänder ist in Abbildung 25 durch die Komponente Z^0 (siehe Anhang B) des Scherbandschädigungstensors \underline{Z}^0 graphisch dargestellt. Die anderen Komponenten zeigen qualitativ den gleichen Verlauf, liegen jedoch zahlenmäßig deutlich unter den Werten für Z^0 .

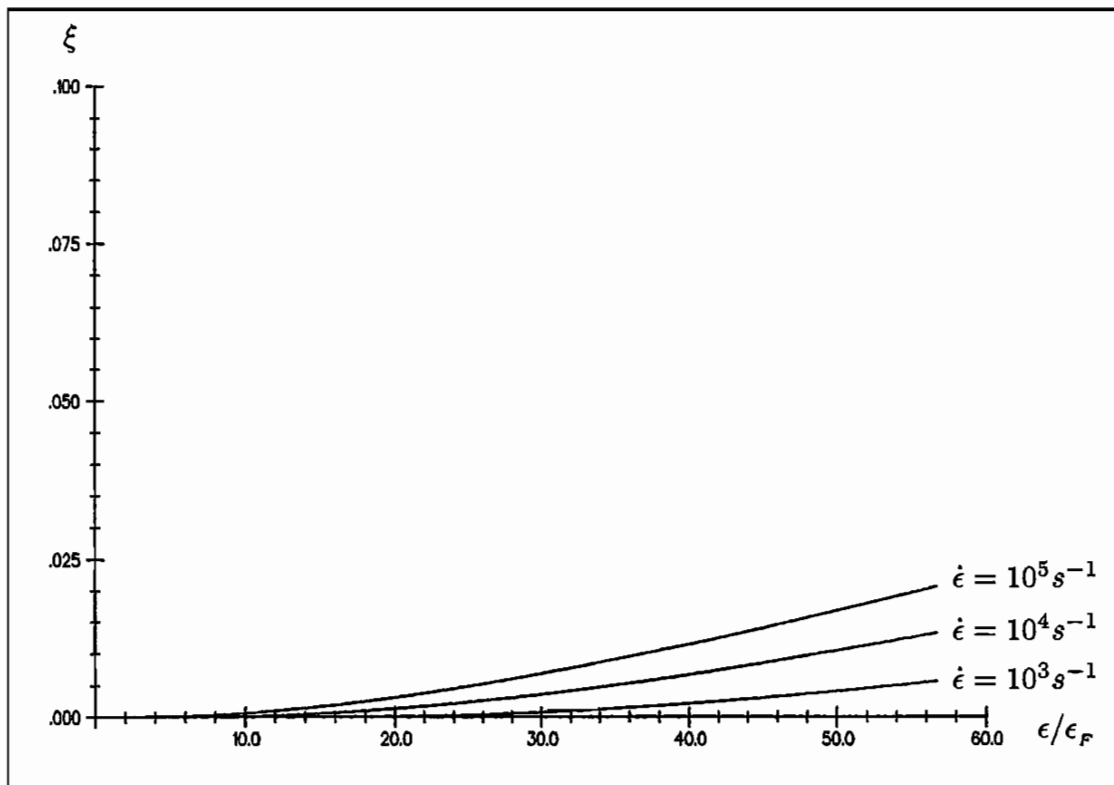


Abbildung 24: Entwicklung des Porenvolumenanteils ξ

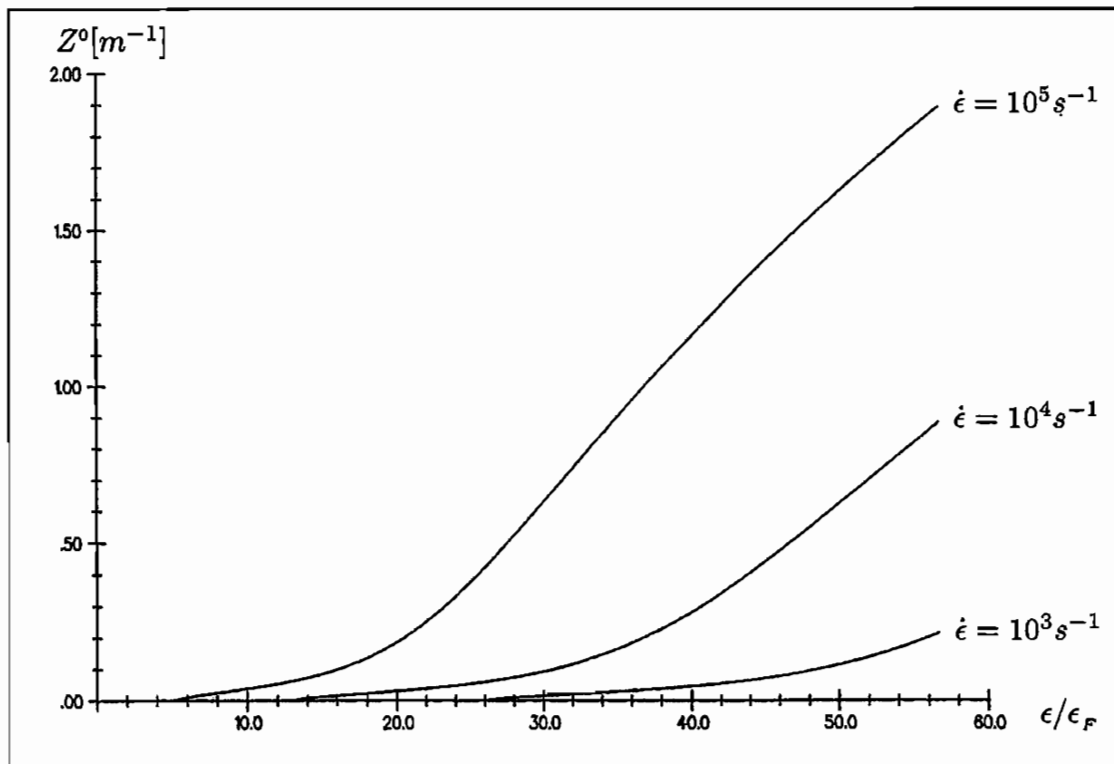


Abbildung 25: Evolution der Scherbandschädigung Z^0

5.2 Vergleich von homogener Zug- und Druckbelastung

Das Materialverhalten metallischer Werkstoffe ist abhängig von der Belastungsrichtung, insbesondere die untersuchten Schädigungsmechanismen zeigen unter Zugbelastung ein anderes Verhalten als unter Druckbelastung.

Bei Druckbelastung ist die Entstehung und das Wachstum der Mikroscherbänder deutlich stärker ausgeprägt als bei Zugbelastung [92].

Mikroporen hingegen können nur unter Zugbelastung entstehen bzw. wachsen, bei Druckbelastung ist allenfalls ein Schließen der Poren möglich. Im Experiment beobachtet man eine Rückbildung des Porenvolumens bei großen Drücken [31].

Der Betrag der Spannungen liegt beim Druckversuch auch bei großen Prozeßgeschwindigkeiten noch über dem beim Zugversuch (Abbildung 26), da sich der Werkstoff stärker isotrop verfestigt (Abbildung 27) und die Entfestigung bei großen Deformationsraten weniger ausgeprägt ist, da keine Schädigung durch Mikroporen auftritt.

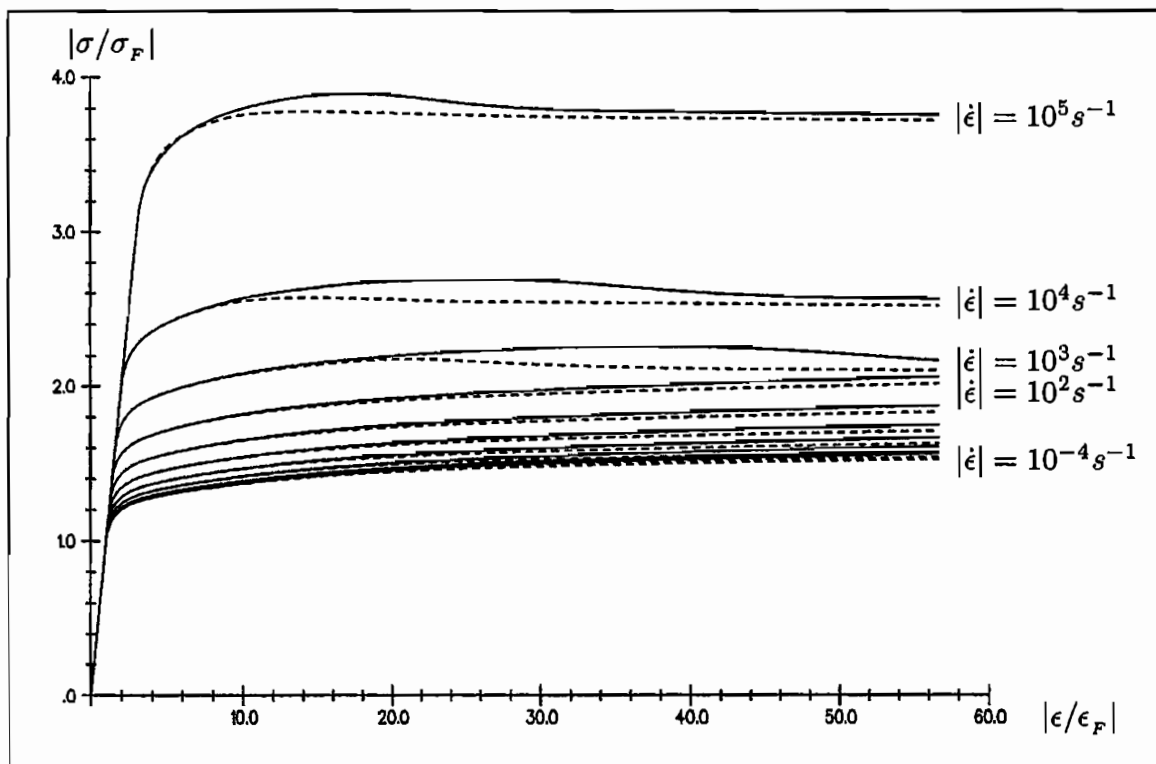


Abbildung 26: Vergleich der betragsmäßigen Spannungen unter Zugbelastung (gestrichelte Kurven) bzw. Druckbelastung (durchgezogene Kurven)

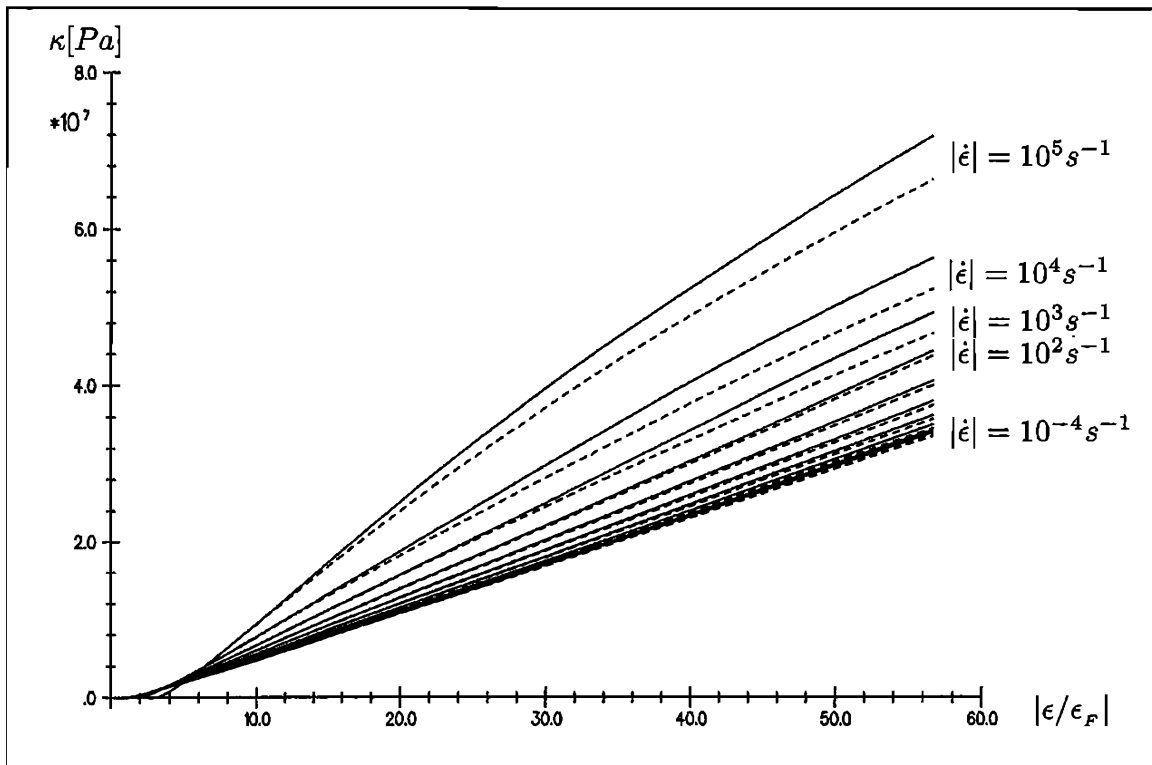


Abbildung 27: Evolution der mittleren Versetzungsdichte κ (Zugkurven gestrichelt)

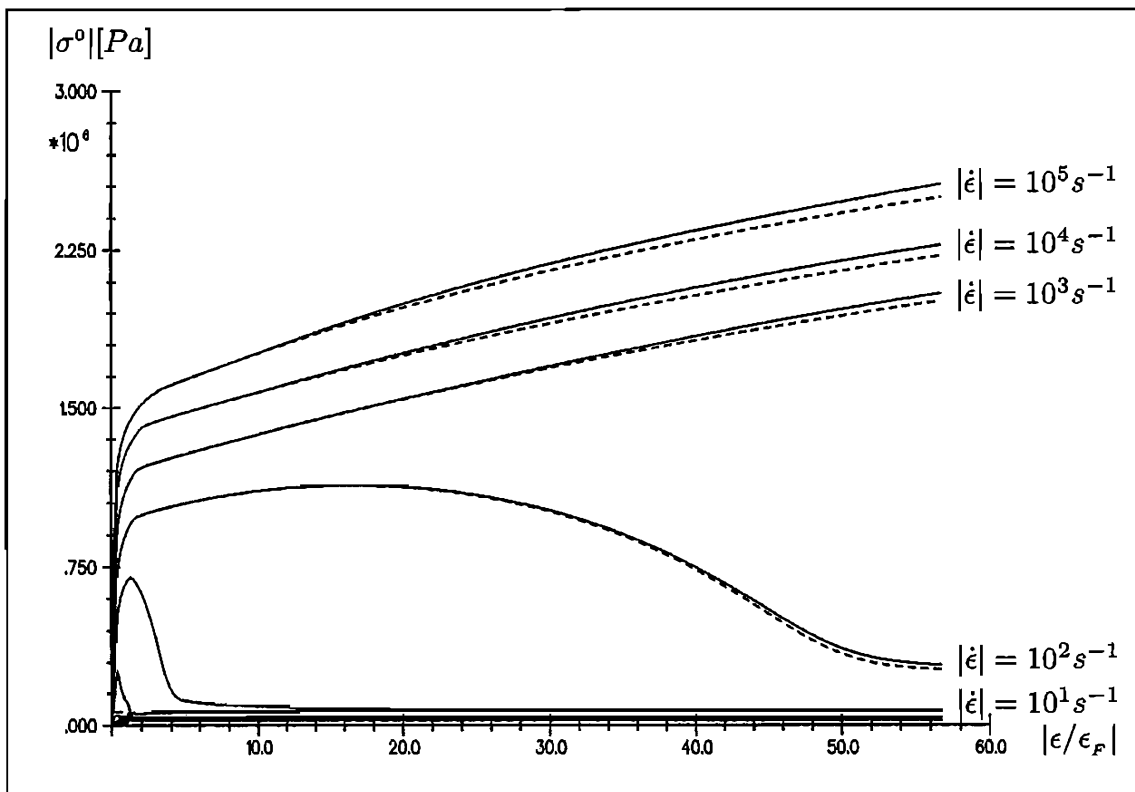


Abbildung 28: Verlauf der Spannungskonzentrationen σ^0 (Zugkurven gestrichelt)

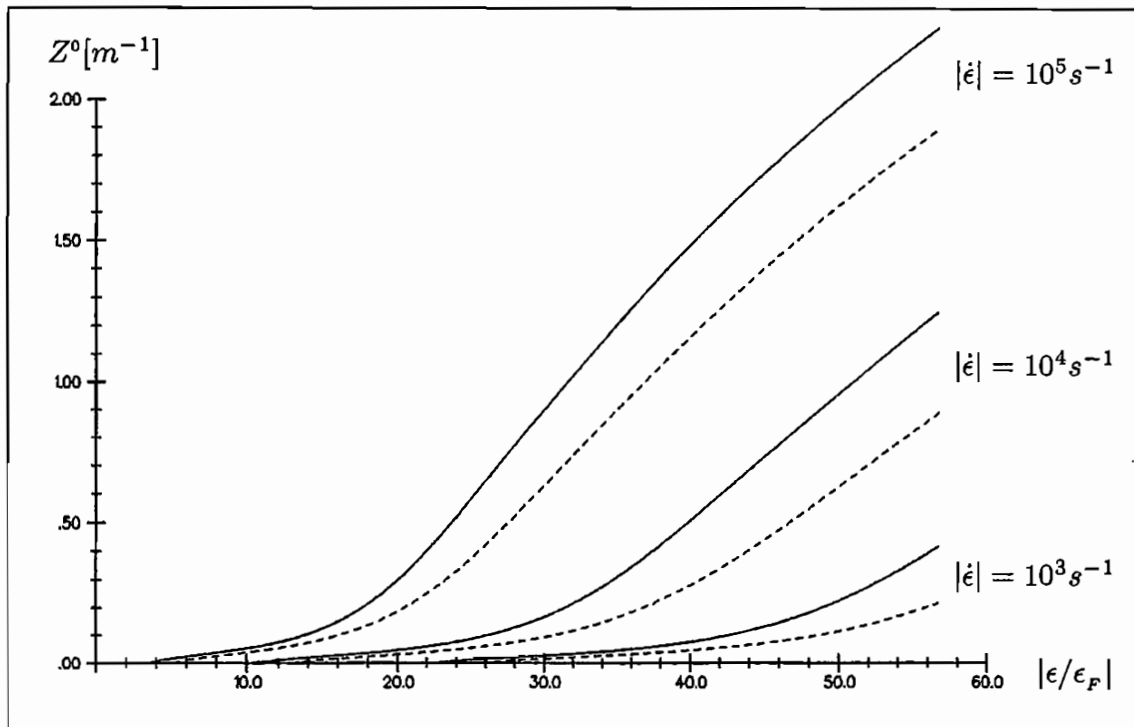


Abbildung 29: Evolution der Scherbandschädigung Z^0 unter Zugbelastung (gestrichelte Kurven) bzw. Druckbelastung (durchgezogene Kurven)

Durch die verwendete Fließbedingung (Gleichung 3.27) für die Entwicklung von Z^0 setzt die Schädigung durch Mikroscherbänder (Abbildung 29) beim Druckversuch (durchgezogene Kurven) früher ein und ist deutlich größer als beim einaxialen Zugversuch (gestrichelte Kurven). Dadurch, aber hauptsächlich durch die größere Versetzungsdichte κ (Abbildung 27), vergrößern sich auch die lokalen Spannungskonzentrationen $\underline{\sigma}^0$ in Abbildung 28.

5.3 Einfluß von Anfangsschädigung bei homogener Druckbeanspruchung

Die folgenden Abbildungen zeigen den Einfluß einer Anfangsschädigung in Form eines Porenvolumenanteils von 5% auf das Materialverhalten bei homogener Druckbeanspruchung. Dargestellt sind einaxiale Druckkurven ohne Anfangsschädigung (durchgezogene Kurven) sowie mit Anfangsschädigung (gestrichelte Kurven).

Die Mikrodefekte bewirken eine zusätzliche Entfestigung des Materials bei Deformationsraten von $|\dot{\epsilon}| > 10^2 \text{s}^{-1}$ (Abbildung 30). Das Porenvolumen (Abbildung 31) verringert sich durch die Druckbelastung bei großen Prozeßgeschwindigkeiten und die in Abbildung 32 dargestellten Spannungskonzentrationen sind nicht mehr so groß wie unter Druckbelastung ohne Anfangsschädigung, so daß auch die Schädigung durch Mikroscherbänder geringer ausfällt (Abbildung 33).

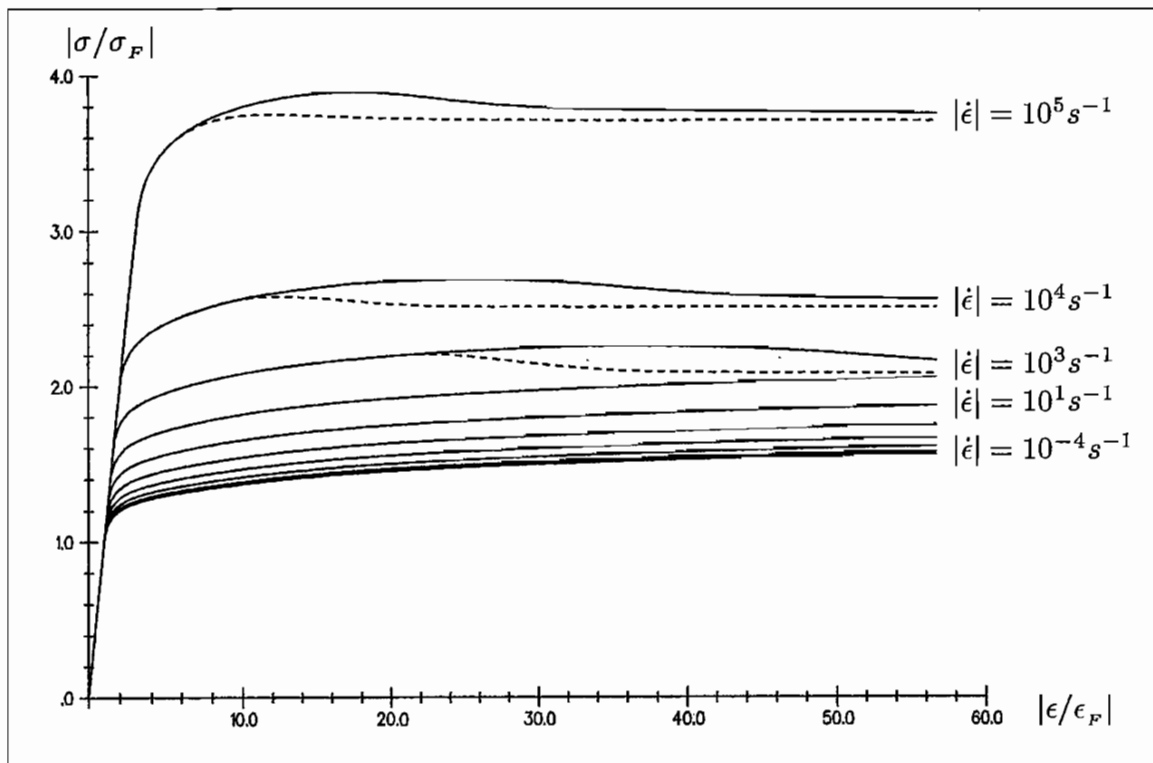


Abbildung 30: Verlauf der Druckspannungen mit und ohne Anfangsporenvolumen

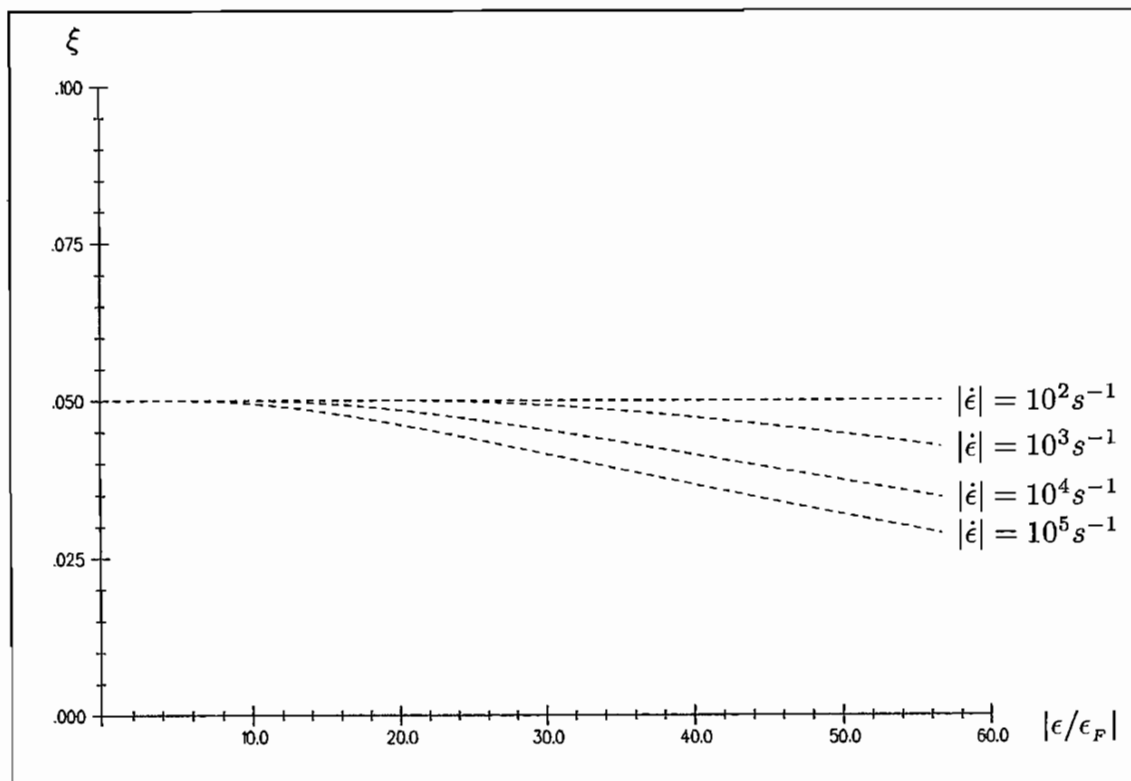


Abbildung 31: Entwicklung des Porenvolumenanteils ξ

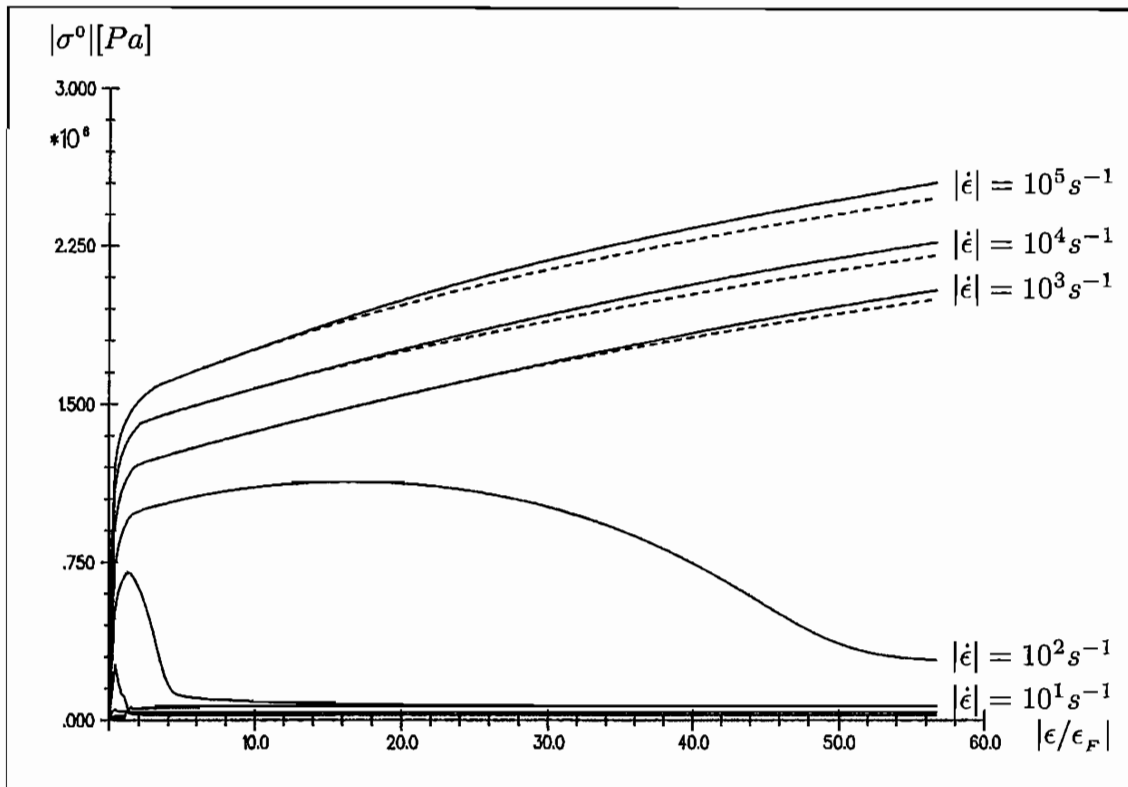


Abbildung 32: Verlauf der Spannungskonzentrationen σ^0

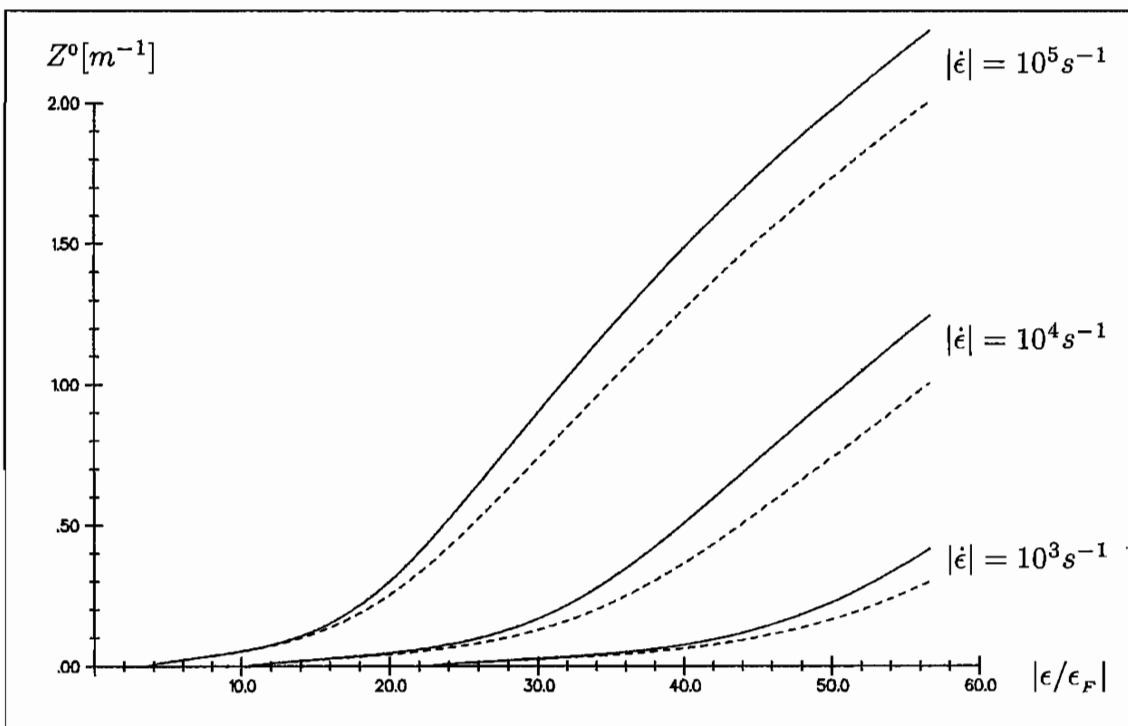


Abbildung 33: Evolution der Scherbandschädigung Z^0

5.4 Nichtmonotone Prozesse

Zyklische Rechnungen mit konstanter Dehnungsrate von $|\dot{\epsilon}| = 10^{-2} s^{-1}$ (Dehnschwingbreite von 2%) bzw. $|\dot{\epsilon}| = 10^2 s^{-1}$ (Dehnschwingbreite von 3%) sind in Abbildung 34 dargestellt. Geplottet sind jeweils die ersten 10 Zyklen (durchgezogene Linien) sowie gestrichelt die Spannungs–Dehnungs–Kurven des 30. Zyklus ($|\dot{\epsilon}| = 10^{-2} s^{-1}$, innere Kurve) bzw. 15. Zyklus ($|\dot{\epsilon}| = 10^2 s^{-1}$, äußere Kurve).

Man erkennt zunächst eine Verfestigung durch die Vergrößerung der Versetzungsdichte und dann eine thermische Entfestigung.

Abbildung 35 zeigt zwei Geschwindigkeitswechselversuche. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der konstant schnellen Rechnungen gestrichelt eingezeichnet.

Typisch für das Modell ist, daß die Kurve des Geschwindigkeitswechselversuches bei moderaten Belastungsgeschwindigkeiten, bei denen der Einfluß der Schädigung gering ist, immer unterhalb der konstant schnellen Rechnung verläuft. Dies liegt an der geschwindigkeitsabhängigen Evolution der versetzungsrelevanten internen Variablen.

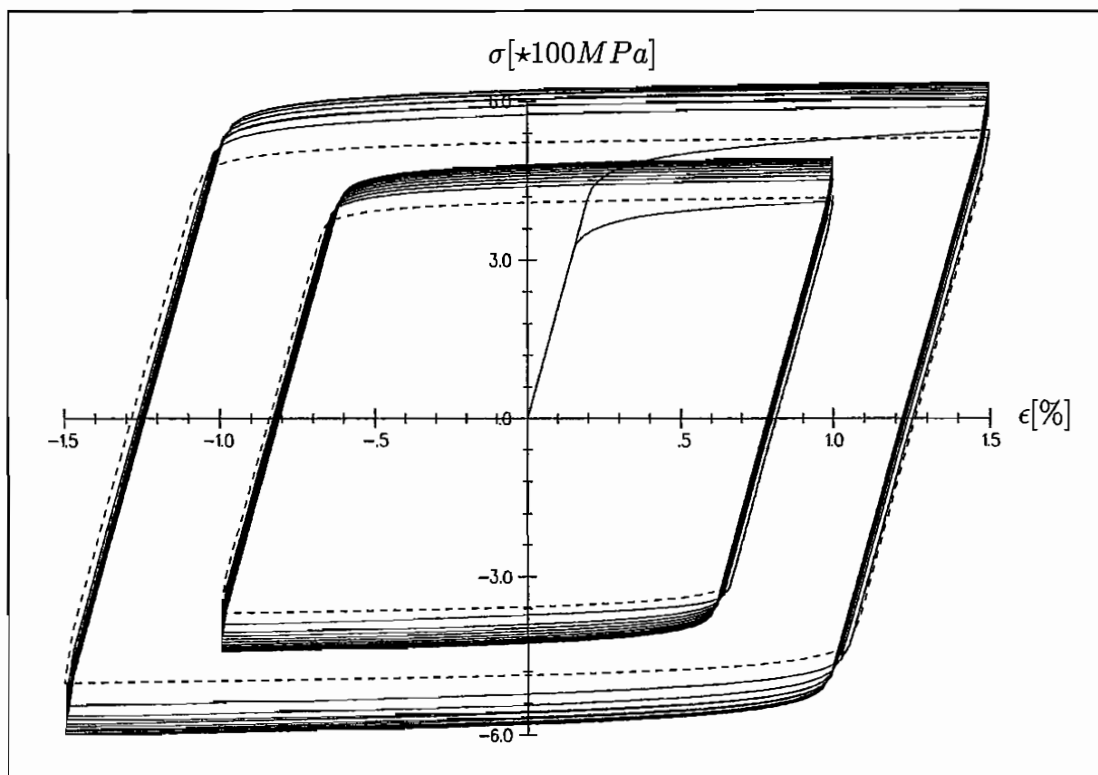


Abbildung 34: Zyklische Rechnungen mit konstanter Dehnungsrate von $|\dot{\epsilon}| = 10^{-2} s^{-1}$ bzw. $|\dot{\epsilon}| = 10^2 s^{-1}$

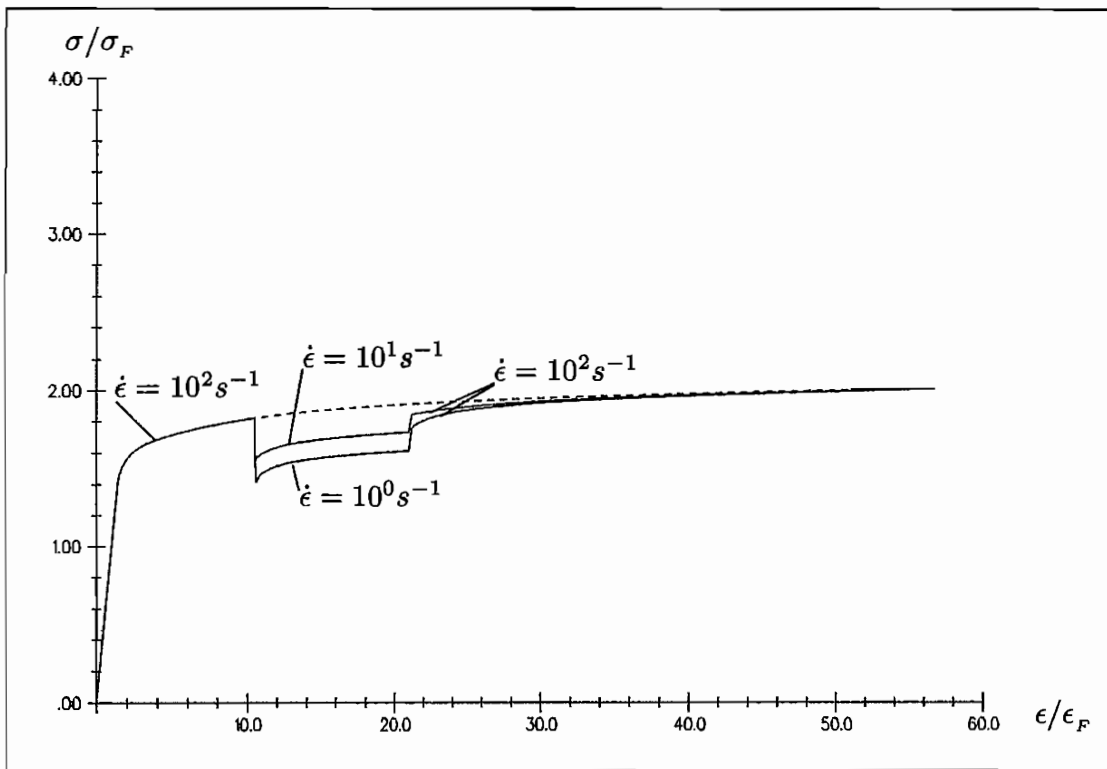


Abbildung 35: "Strain-rate-jump-test" mit bereichsweise konstanten Dehnungsraten

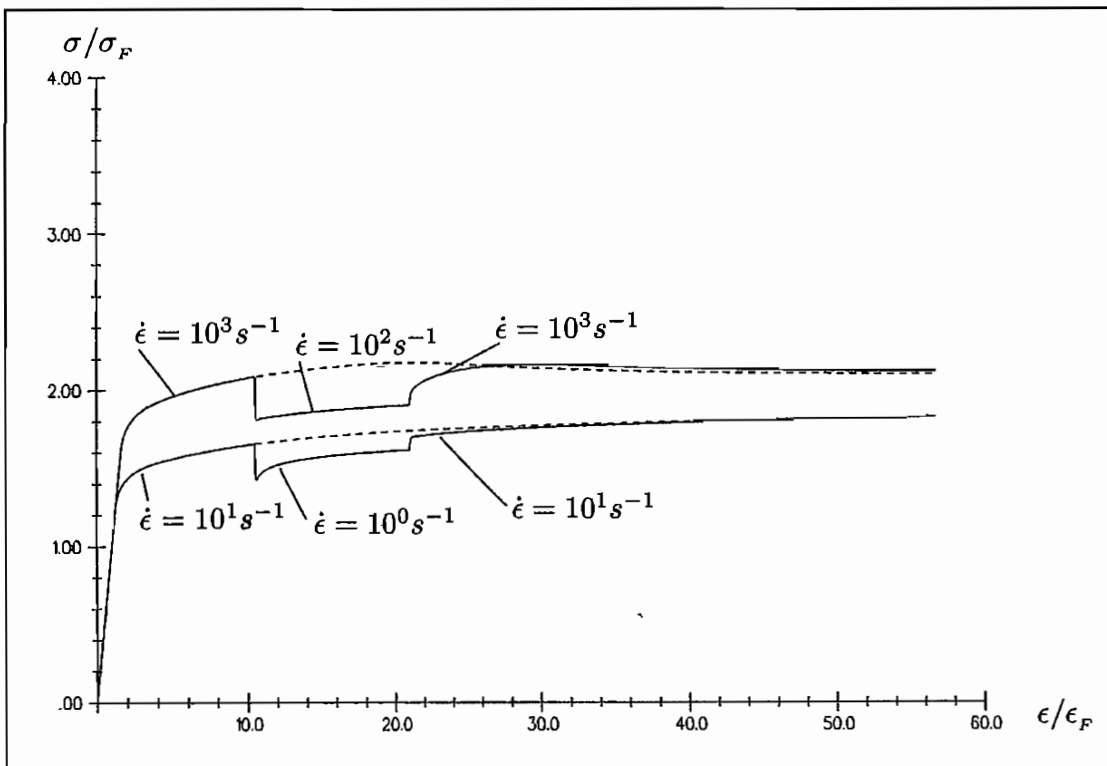


Abbildung 36: "Strain-rate-jump-test" mit bereichsweise konstanten Dehnungsraten

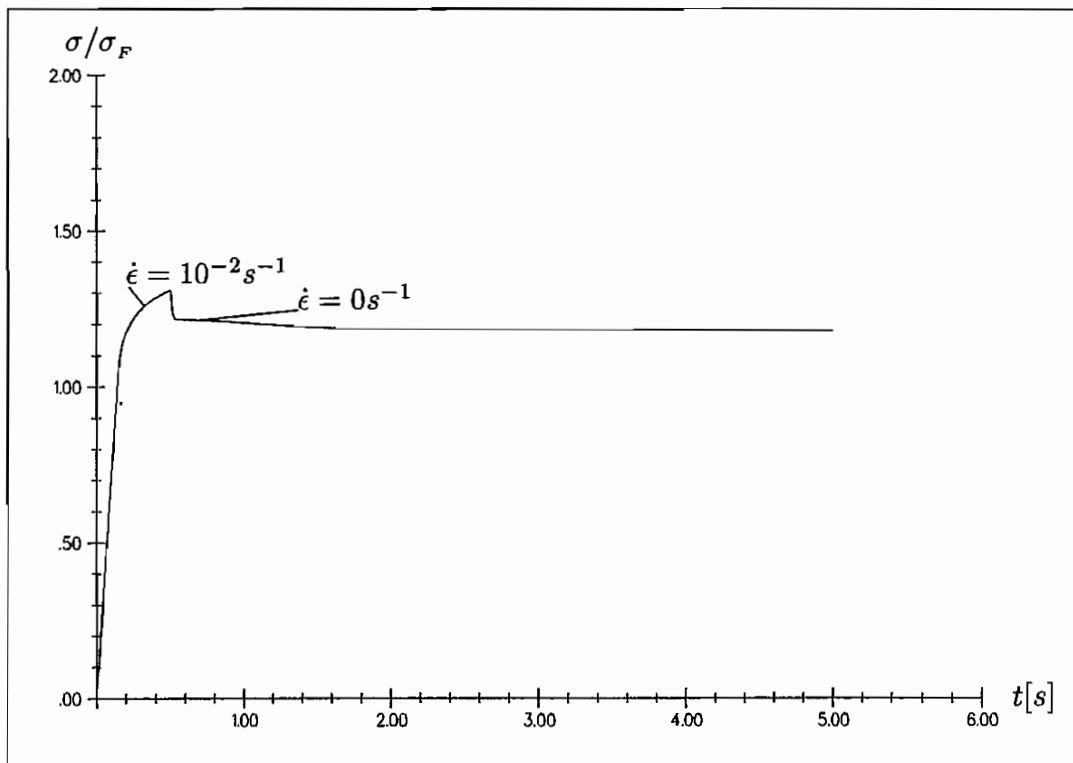


Abbildung 37: Relaxationsverhalten nach einer Belastung mit $\dot{\epsilon} = 10^{-2} s^{-1}$ bis zu einer Dehnung von 0.5%

Bei schnelleren Prozessen hingegen, bei denen die Evolution der schädigungsrelevanten internen Variablen aufgrund der geringeren Belastung nach dem Sprung der Prozeßgeschwindigkeit niedriger ausfällt, kann die σ - ϵ -Kurve dadurch auch oberhalb der Rechnung des durchgängig schnellen Prozesses liegen (Abbildung 36).

Das durch das vorgestellte Kontinuums-Damage-Modell beschriebene Relaxationsverhalten ist in Abbildung 37 anhand einer Beispielrechnung dargestellt. Nach einer Belastung mit $\dot{\epsilon} = 10^{-2} s^{-1}$ bis zu einer Dehnung von 0.5% wird die Dehnung konstant gehalten. Der zunächst steile Abfall der Spannung geht rasch in eine flache $\sigma(t)$ -Kurve über. Sobald die Überspannung ganz abgebaut ist, bleibt die Spannung konstant.

Zum Abschluß wird das Kriechverhalten simuliert. Nach einer Belastung mit konstanter Spannungsrate von $\dot{\sigma} = 2.5 \cdot 10^3 MPa s^{-1}$ auf $\sigma = 500 MPa \approx 1.6 \bar{\sigma}_F$ wird die Spannung konstant gehalten.

Man erkennt in Abbildung 38 die Zunahme der Dehnung (bezogen auf die Fließdehnung) mit der Zeit, bei höheren Haltespannungen sowie bei schnellerer Belastung nehmen die Kriechdehnungen noch deutlich zu.

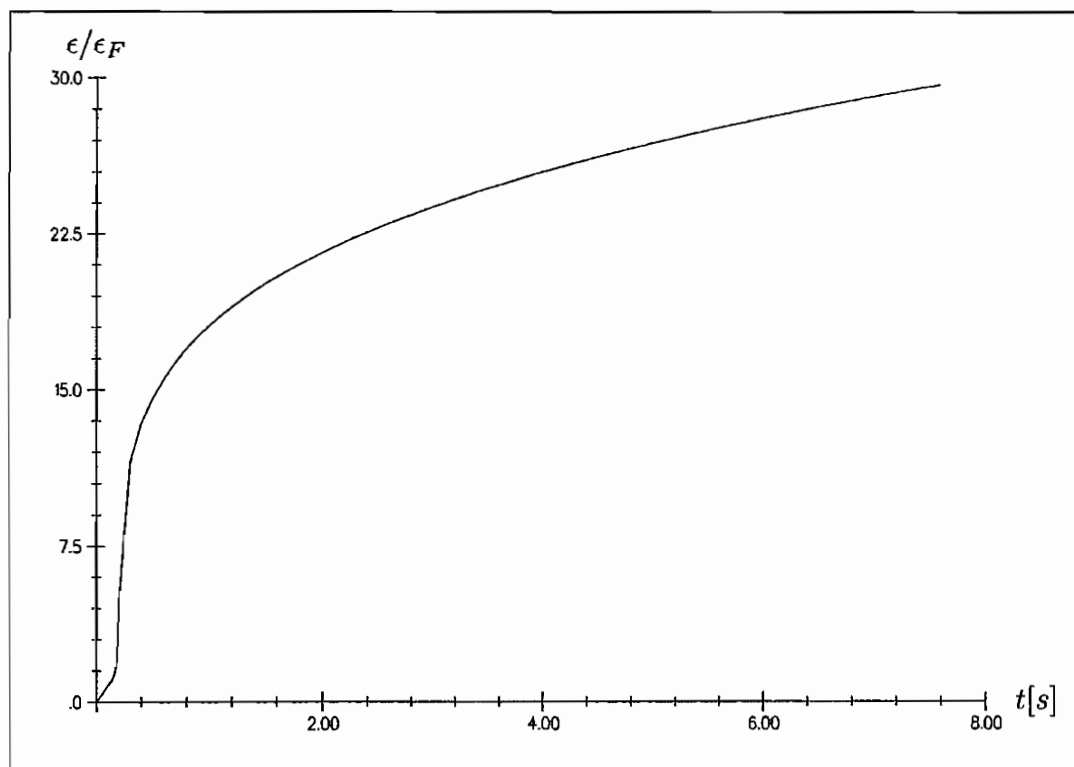


Abbildung 38: Kriechverhalten nach einer Belastung mit $\dot{\sigma} = 2.5 \cdot 10^3 \text{MPa s}^{-1}$ auf eine Spannung von $\sigma = 500 \text{MPa} \approx 1.6 \bar{\sigma}_F$

6. Erstellung einer Finite-Elemente-Formulierung

6.1 Formulierung des Gleichgewichts als Variationsproblem

Aus der lokalen Formulierung des Impulssatzes bezogen auf die Momentankonfiguration, d.h.

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho(\vec{f} - \ddot{\vec{u}}) = \vec{0} \quad , \quad (6.1)$$

erhält man durch Skalarmultiplikation mit dem virtuellen Verschiebungsfeld $\delta\vec{u}$ und Integration über das aktuelle Volumen \mathcal{B} das *Prinzip der virtuellen Arbeit* als schwache Formulierung des Gleichgewichts:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \delta\vec{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}} \rho(\ddot{\vec{u}} - \vec{f}) \cdot \delta\vec{u} \, dV \quad . \quad (6.2)$$

Nach Anwendung des Divergenztheorems (GAUSSscher Integralsatz) ^[32], ^[59]

$$\iiint_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \underline{A} \, dV = \iint_{\partial\mathcal{B}} \underline{A} \cdot \vec{n} \, dA \quad (6.3)$$

$$\text{mit: } ^{[32]} \quad \operatorname{div} (\underline{A}^T \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{div} \underline{A} + \underline{A} \cdot \operatorname{grad} \vec{b} \quad (6.4)$$

und dem Theorem von CAUCHY (Abbildung 39)

$$\vec{t} \, dA = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} \, dA \quad (6.5)$$

erhält man:

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \operatorname{grad} (\delta\vec{u}) \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{t} \cdot \delta\vec{u} \, dA + \int_{\mathcal{B}} \rho(\vec{f} - \ddot{\vec{u}}) \cdot \delta\vec{u} \, dV \quad . \quad (6.6)$$

Aufgrund der Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$ kann der Gradient von $\delta\vec{u}$ im Integrand der linken Seite von Gleichung (6.6) durch seinen symmetrischen Anteil ersetzt werden.

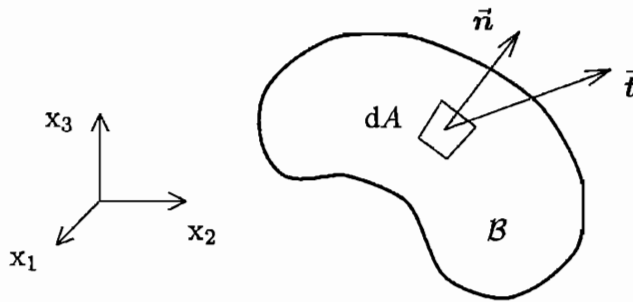


Abbildung 39: Spannungsvektor \vec{t} am verformten Körper

Die zu dem CAUCHYSchen Spannungstensor energetisch konjugierte, virtuelle Verzerrungsgröße (siehe MACVEAN ^[72]) ist also die Variation des ALMANSISchen Verzerrungstensors \underline{e} :

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{e} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA + \int_{\mathcal{B}} \rho (\vec{f} - \ddot{\vec{u}}) \cdot \delta \vec{u} \, dV \quad . \quad (6.7)$$

Bei dem nach CAUCHY definierten Spannungsvektor \vec{t} wird ein aktueller Kraftvektor auf ein aktuelles, orientiertes Flächenelement dA bezogen, man bleibt also konsequent in der Momentankonfiguration \mathcal{B} .

Der Zustand des betrachteten Körpers \mathcal{B} zur Zeit $t + \Delta t$ ist im allgemeinen unbekannt. Während bei der linearen Berechnung angenommen wird, daß die Verschiebungen infinitesimal klein sind, so daß sich die Konfiguration nicht ändert, muß bei den hier betrachteten, großen Deformationen immer die aktuelle Konfiguration betrachtet werden. Da sich die Konfiguration des Körpers \mathcal{B} laufend ändert, erhält man die CAUCHYSchen Spannungen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ nicht einfach dadurch, daß man zur CAUCHYSchen Spannung $\underline{\sigma}$ zur Zeit t einen Spannungszuwachs addiert, der allein aus der Verzerrung des Materials hervorgeht, da sich die Komponenten des CAUCHYSchen Spannungstensors auch durch eine Starrkörperrotation ändern. Durch die Wahl geeigneter Spannungs- und Verzerrungsmaße, die invariant gegenüber einer Starrkörperdrehung sind, läßt sich diese Problematik umgehen. Häufig wird dazu als Spannungsmaß der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \underline{S}_K und als energetisch konjugiertes Verzerrungsmaß der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor \underline{e} verwendet:

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{S}_K \cdot \delta \underline{e} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA + \int_{\mathcal{B}} \rho (\vec{f} - \ddot{\vec{u}}) \cdot \delta \vec{u} \, dV \quad . \quad (6.8)$$

Diese Form des *Prinzips der virtuellen Arbeit* ist Ausgangspunkt bei der Beschreibung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (z. B. BATHE ^[4], HUGHES ^[49], ZIENKIEWICZ UND TAYLOR ^[107,108], WRIGGERS ^[105] und ZHONG ^[106]).

Um die Integration in Gleichung (6.8) durchführen zu können, wird das Gebiet \mathcal{B} in diskrete Teilgebiete, die finiten Elemente, zerlegt. Die Integration erfolgt dann auf Elementebene, die unbekanntes Größen werden elementweise durch Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der Elementknotenwerte ausgedrückt. Die Diskretisierung in finite Elemente überführt auf diese Weise Gleichung (6.8) in ein linearisiertes Gleichungssystem der Form:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\vec{u}} + \underline{K} \cdot \vec{u} = \vec{F} \quad , \quad (6.9)$$

mit der Massenmatrix \underline{M} , der Steifigkeitsmatrix \underline{K} , dem Verschiebungsvektor \vec{u} und dem Lastvektor \vec{F} .

Eine andere Möglichkeit zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen geht von dem *Prinzip der gewichteten Residuen* aus (KÖRBER ^[63,62], WESTERHOFF ^[103]).

6.2 Numerische Lösungsmethoden

Die Ermittlung des Gleichgewichtszustandes erfordert bestimmte Näherungen, da das Gleichungssystem aufgrund verschiedener Nichtlinearitäten nicht direkt lösbar ist.

Das Gleichgewicht ist beispielsweise in Größen der aktuellen Konfiguration formuliert, bei der Berücksichtigung von großen Deformationen kann nicht mehr davon ausgegangen werden, daß diese näherungsweise gleich bleibt, man spricht von *geometrischer Nichtlinearität*.

Außerdem reicht die Kenntnis der aktuellen Konfiguration nicht aus. Um Größen wie die Spannungen zu bestimmen, benötigt man zusätzlich Informationen über die Belastungsgeschichte, dies bezeichnet man als materielle oder *physikalische Nichtlinearität*.

Eine weitere Nichtlinearität stellen sich *ändernde Randbedingungen* im Laufe der Belastung einer Struktur dar, wie sie zum Beispiel bei Kontaktproblemen auftreten.

Zur Behandlung der verschiedenen Nichtlinearitäten und zeitabhängigen Phänomene verwendet man zweckmäßigerweise eine inkrementelle Formulierung. Hierbei wird die Last in vielen kleinen Schritten aufgebracht und die Steifigkeitsmatrix zu Beginn jedes Lastschrittes neu berechnet. Da die hierbei entstehenden Fehler akkumulieren würden, wird in jedem Lastschritt eine Gleichgewichtsiteration durchgeführt.

Ein weit verbreitetes Verfahren, das auch hier zur Anwendung kommt, ist die modifizierte NEWTON–RAPHSON–Iteration, bei der die Steifigkeitsmatrix zu Beginn eines Lastschrittes aufgestellt und während der Iteration konstant gehalten wird.

6.2.1 Total-Lagrange Formulierung — Update-Lagrange Formulierung

In der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (6.8) sind alle auftretenden Größen auf die verformte Lage bezogen. Die Konfiguration zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ist jedoch nicht bekannt, so daß diese Gleichung nicht direkt gelöst werden kann. Eine Näherungslösung kann ermittelt werden, indem alle Variablen auf eine zuvor berechnete Gleichgewichtskonfiguration bezogen werden und die dadurch erhaltene Gleichung linearisiert wird.

Da bei inkrementeller Vorgehensweise die Lösungen zu den Zeiten $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t$ bekannt sind, können alle diese Konfigurationen als Bezugskonfiguration verwendet werden. In der Regel verwendet man aber entweder den unverformten Ausgangszustand (*Total-Lagrange Formulierung*) oder die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes (*Update-Lagrange Formulierung*).

Zur Unterscheidung werden zusätzliche Indizes auf der linken Seite der Tensoren eingeführt. Der obere Index kennzeichnet die aktuelle Konfiguration, während der untere die Bezugskonfiguration angibt. Sind beide Konfigurationen identisch, kann der untere Index entfallen. Koordinaten und Verschiebungen tragen nur einen linken oberen Index zur Kennzeichnung der Konfiguration. ${}^{t+\Delta t}\vec{u}$ bezeichnet also die Verschiebung von der unverformten Ausgangskonfiguration zur Zeit 0 in die unbekannte aktuelle Konfiguration zur Zeit $t+\Delta t$. Die Verschiebung vom Zustand zur Zeit t in die Lage $t+\Delta t$ wird dann mit $\vec{u} = {}^{t+\Delta t}\vec{u} - {}^t\vec{u}$ bezeichnet (BATHE [4]).

Total-Lagrange Formulierung

Bei der *Total-Lagrange Formulierung* wird der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{S}}_K$ auf die Konfiguration zur Zeit 0 bezogen, die virtuelle Formänderungsarbeit ergibt sich damit zu

$$\delta W = \int_{\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{S}}_K \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\epsilon}} \, {}^0dV \quad . \quad (6.10)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet dann

$$\int_{\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{S}}_K \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\epsilon}} \, {}^0dV = \int_{\partial\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}\vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, {}^0dA + \int_{\mathcal{B}} \rho({}^{t+\Delta t}\vec{f} - {}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{u}}) \cdot \delta \vec{u} \, {}^0dV \quad . \quad (6.11)$$

Update-Lagrange Formulierung

Bei der *Update-Lagrange Formulierung* wird der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ${}^{t+\Delta t}_t \underline{\mathbf{S}}_K$ auf die Konfiguration zur Zeit t bezogen, die virtuelle Formänderungsarbeit ergibt sich damit zu

$$\delta W = \int_{{}^t\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}_t \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_t \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \, {}^t dV \quad . \quad (6.12)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet dann

$$\int_{{}^t\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}_t \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_t \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \, {}^t dV = \int_{{}^t\partial\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}_t \vec{\mathbf{t}} \cdot \delta \vec{\mathbf{u}} \, {}^t dA + \int_{{}^t\mathcal{B}} \rho ({}^{t+\Delta t}_t \vec{\mathbf{f}} - \ddot{\vec{\mathbf{u}}}) \cdot \delta \vec{\mathbf{u}} \, {}^t dV \quad . \quad (6.13)$$

Beide Formulierungen liefern identische numerische Ergebnisse, die Verwendung der *Total-Lagrange Formulierung* führt allerdings zu einer komplexeren Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix ^[4], so daß im folgenden die *Update-Lagrange Formulierung* verwendet wird.

Setzt man richtungstreue Belastungen voraus, lassen sich die äußeren Belastungen aus der Anfangskonfiguration des Körpers berechnen. Bei Verwendung verschiebungsbezogener isoparametrischer Elemente (Kapitel 6.2.4) können die bei kinetischen Berechnungen auftretenden Trägheitskräfte als unabhängig von der Deformation angenommen werden ^[4], so daß die Massenmatrix ebenfalls aus der Anfangskonfiguration berechnet werden kann und deshalb nur einmal vor der inkrementellen Lösung ermittelt wird. Zudem kann bei den hier betrachteten Problemen der Einfluß der volumenhaft angreifenden, äußeren Lasten $\vec{\mathbf{f}}$ vernachlässigt werden, so daß Gleichung (6.13) in folgende Form übergeht:

$$\int_{{}^t\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}_t \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_t \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \, {}^t dV = \int_{{}^0\partial\mathcal{B}} {}^{t+\Delta t}_0 \vec{\mathbf{t}} \cdot \delta \vec{\mathbf{u}} \, {}^0 dA - \int_{{}^0\mathcal{B}} \rho {}^{t+\Delta t}_0 \ddot{\vec{\mathbf{u}}} \cdot \delta \vec{\mathbf{u}} \, {}^0 dV \quad . \quad (6.14)$$

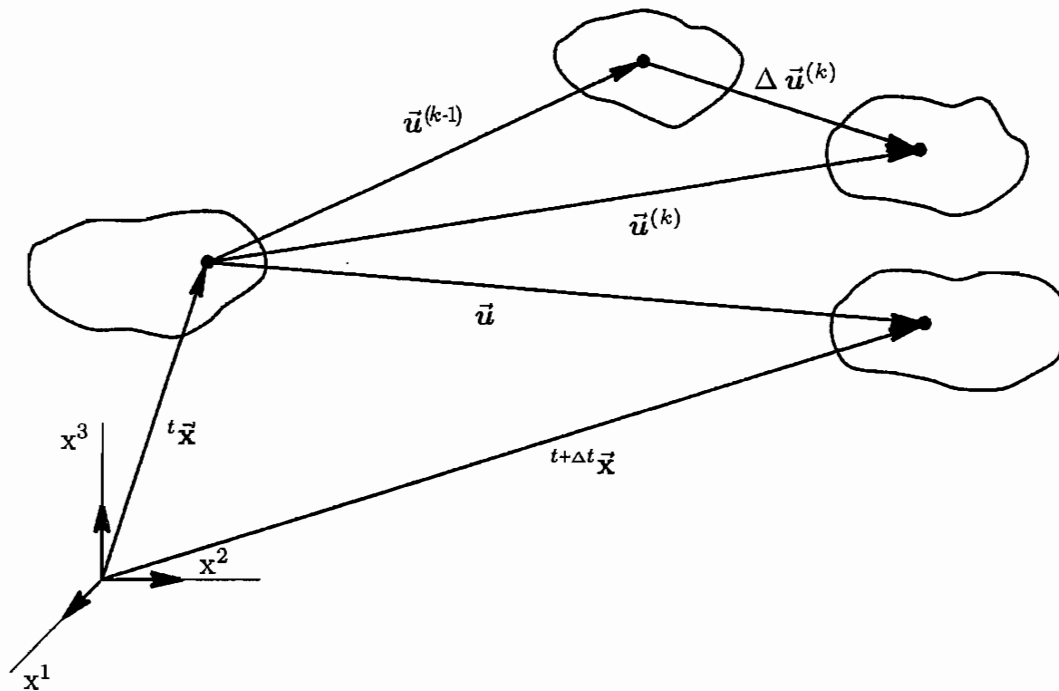


Abbildung 40: Approximation der Verschiebung \vec{u} durch $\vec{u}^{(k)}$

6.2.2 Inkrementelle Zerlegung der Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen

Zur Durchführung der Gleichgewichtssiteration mit dem bereits erwähnten modifizierten NEWTON-RAPHSON-Iterationsverfahren werden die Inkremente der Knotenpunktverschiebungen \vec{u} durch die Folge $\vec{u}^{(k)}$ approximiert (Abbildung 40):

$$\vec{u} = {}^{t+\Delta t}\vec{u} - {}^t\vec{u} = {}^{t+\Delta t}\vec{x} - {}^t\vec{x} \approx \vec{u}^{(k)} = \vec{u}^{(k-1)} + \Delta \vec{u}^{(k)} \quad (6.15)$$

$$\text{mit: } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad \vec{u}^{(0)} = \vec{0} \quad (6.16)$$

Bei der Variation der Verschiebung in Gleichung (6.14) entfällt dann die im jeweiligen Iterationsschritt konstante Größe $\delta \vec{u}^{(k-1)}$ und man erhält

$$\delta \vec{u} \approx \delta \vec{u}^{(k)} = \delta \vec{u}^{(k-1)} + \delta(\Delta \vec{u}^{(k)}) = \delta \Delta \vec{u}^{(k)} \quad (6.17)$$

Ebenso lassen sich die Spannungen inkrementell zerlegen, der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{S}}_K$ kann somit durch

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{S}}_K \approx \underline{\underline{S}}_K^{(k)} = \underline{\underline{S}}_K^{(k-1)} + \Delta \underline{\underline{S}}_K^{(k)} \quad (6.18)$$

$$\text{mit: } k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.19)$$

also durch einen bekannten Anteil $\underline{\underline{S}}_K^{(k-1)}$ und einen Zuwachs $\Delta \underline{\underline{S}}_K^{(k)}$ angenähert werden.

Der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor läßt sich in einen linearen Anteil ${}^t \underline{\underline{e}}$ und einen nichtlinearen Anteil ${}^t \underline{\underline{\eta}}$ aufspalten

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}} = {}^t \underline{\underline{e}} = {}^t \underline{\underline{e}} + {}^t \underline{\underline{\eta}} \quad (6.20)$$

mit den Komponenten (in kartesischen Koordinaten):

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i}) \quad (6.21)$$

$${}^t \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^t u_{n,i} {}^t u_{n,j} \quad (6.22)$$

Darin bezeichnet ${}^t u_{i,j}$ die Ableitung von $u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i$ nach der Koordinate ${}^t x_j$.

Für die Variation $\delta {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}$ ergibt sich daraus unter Verwendung von Gleichung (6.17)

$$\delta {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}} \approx \delta {}^t \underline{\underline{e}}^{(k)} = \delta {}^t \underline{\underline{e}}^{(k)} + \delta {}^t \underline{\underline{\eta}}^{(k)} = \delta \Delta {}^t \underline{\underline{e}}^{(k)} + \delta \Delta {}^t \underline{\underline{\eta}}^{(k)} \quad (6.23)$$

mit den Komponenten (in kartesischen Koordinaten):

$$\delta {}^t e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (\delta \Delta {}^t u_{i,j}^{(k)} + \delta \Delta {}^t u_{j,i}^{(k)}) \quad (6.24)$$

$$\delta {}^t \eta_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \delta \Delta {}^t u_{n,i}^{(k)} ({}^t u_{n,j}^{(k-1)} + \Delta {}^t u_{n,j}^{(k)}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{n,i}^{(k-1)} + \Delta {}^t u_{n,i}^{(k)}) \delta \Delta {}^t u_{n,j}^{(k)} \quad (6.25)$$

Faßt man die in $\Delta {}^t u_{n,i}^{(k)}$ linearen Anteile aus den Gleichungen (6.24) und (6.25) zu einer neuen Variablen $\delta \Delta {}^t \underline{\underline{e}}^{(k)}$ und die nichtlinearen Anteile in $\delta \Delta {}^t \underline{\underline{\eta}}^{(k)}$ zusammen, ergibt sich

$$\delta \Delta {}^t e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (\delta \Delta {}^t u_{i,j}^{(k)} + \delta \Delta {}^t u_{j,i}^{(k)}) + \frac{1}{2} \delta \Delta {}^t u_{n,i}^{(k)} {}^t u_{n,j}^{(k-1)} + \frac{1}{2} {}^t u_{n,i}^{(k-1)} \delta \Delta {}^t u_{n,j}^{(k)} \quad (6.26)$$

$$\delta \Delta {}^t \eta_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \delta \Delta {}^t u_{n,i}^{(k)} \Delta {}^t u_{n,j}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta {}^t u_{n,i}^{(k)} \delta \Delta {}^t u_{n,j}^{(k)} \quad (6.27)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der geometrisch linearisierten Form lautet dann

$$\int_{\mathcal{B}} \Delta \underline{\mathbf{S}}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} \, {}^t dV + \int_{\mathcal{B}} \Delta \underline{\mathbf{S}}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\boldsymbol{\eta}}^{(k)} \, {}^t dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{S}}_K^{(k-1)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\boldsymbol{\eta}}^{(k)} \, {}^t dV =$$

$$\int_{\partial \mathcal{B}} {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta \Delta \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \, {}^0 dA - \int_{\mathcal{B}} {}^0 \rho \, {}^{t+\Delta t} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} \cdot \delta \Delta \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \, {}^0 dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{S}}_K^{(k-1)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} \, {}^t dV. \quad (6.28)$$

Das Produkt $\Delta \underline{\mathbf{S}}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\boldsymbol{\eta}}^{(k)}$ kann gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden [4] und wird deshalb in der Iteration nicht berücksichtigt.

6.2.3 Einbeziehung der Materialgleichungen

Die bisher hergeleiteten Gleichungen sind noch unabhängig vom dem verwendeten Materialmodell. Die konstitutiven Gleichungen werden dazu benötigt, die Inkremente des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors $\Delta \underline{\mathbf{S}}_K^{(k)}$ in Gleichung (6.28) zu bestimmen.

Der Spannungszuwachs läßt sich durch numerische Integration mit dem expliziten EULER-Verfahren näherungsweise durch

$$\Delta \underline{\mathbf{S}}_K \approx {}^t \dot{\underline{\mathbf{S}}}_K \Delta t \quad (6.29)$$

berechnen.

Da das vorgestellte Kontinuums-Damage-Modell in CAUCHY-Spannungen formuliert worden ist, muß die substantielle Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors aus diesen berechnet werden. Aus

$${}^\tau \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} \underline{\mathbf{F}} \cdot {}^\tau \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \underline{\mathbf{F}}^T, \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad (6.30)$$

erhält man die substantielle Ableitung des CAUCHY-Spannungstensors

$${}^\tau \dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{{}^\tau \dot{\rho}}{{}^t \rho} \underline{\mathbf{F}} \cdot {}^\tau \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \underline{\mathbf{F}}^T + \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} \left(\dot{\underline{\mathbf{F}}} \cdot {}^\tau \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \underline{\mathbf{F}}^T + \underline{\mathbf{F}} \cdot {}^\tau \dot{\underline{\mathbf{S}}}_K \cdot \underline{\mathbf{F}}^T + \underline{\mathbf{F}} \cdot {}^\tau \underline{\mathbf{S}}_K \cdot \dot{\underline{\mathbf{F}}}^T \right). \quad (6.31)$$

Die dafür benötigte substantielle Zeitableitung des Deformationsgradienten $\underline{\mathbf{F}}$ wird gemäß Gleichung (D.12) berechnet. Benötigt werden in Gleichung (6.29) die Spannungen zum Zeitpunkt $\tau = t$, für diesen Zeitpunkt gilt

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{W}}, \quad {}^t \underline{\mathbf{S}}_K = {}^t \underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

Mit der hier verwendeten objektiven Zeitableitung der CAUCHY-Spannungen gemäß Gleichung (7.3) und (7.5)

$$\underline{\overset{\nabla}{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\Omega} \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\sigma} \operatorname{tr} \underline{D}_e \quad (6.32)$$

erhält man

$${}^t \dot{\underline{S}}_K = {}^t \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} + {}^t \underline{\sigma} \operatorname{tr} \underline{D}_e - \frac{{}^t \dot{\rho}}{{}^t \rho} {}^t \underline{\sigma} + ({}^t \underline{\Omega} - {}^t \underline{L}) \cdot {}^t \underline{\sigma} - {}^t \underline{\sigma} \cdot ({}^t \underline{\Omega} + {}^t \underline{L}^T) \quad (6.33)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\operatorname{tr} \underline{D}$, sowie $\underline{\Omega} = \underline{W} - \underline{W}_i$ ergibt sich dann

$${}^t \dot{\underline{S}}_K = {}^t \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} + {}^t \underline{\sigma} (\operatorname{tr} \underline{D}_e + \operatorname{tr} \underline{D}) - {}^t \underline{D} \cdot {}^t \underline{\sigma} - {}^t \underline{\sigma} \cdot {}^t \underline{D} - {}^t \underline{W}_i \cdot {}^t \underline{\sigma} + {}^t \underline{\sigma} \cdot {}^t \underline{W}_i \quad (6.34)$$

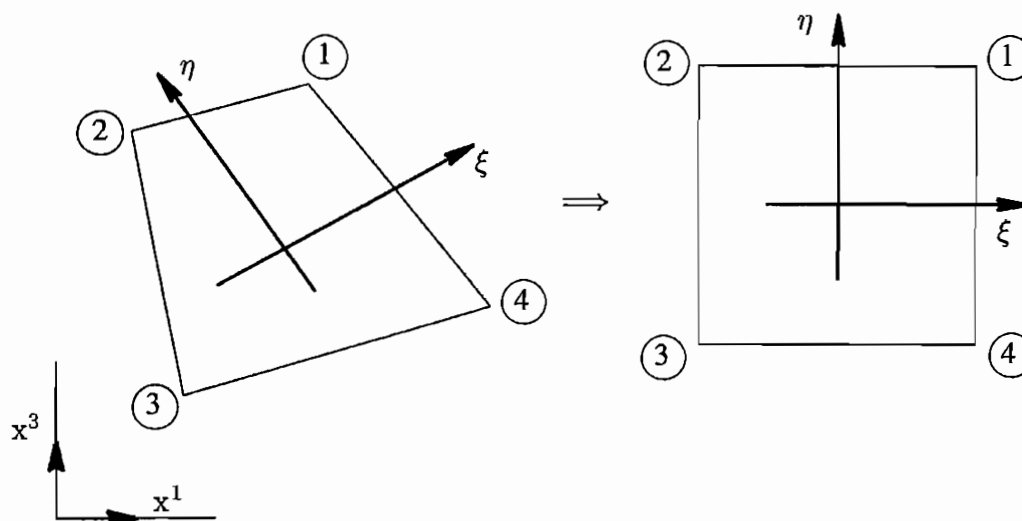


Abbildung 41: Isoparametrisches 4-Knotenelement

6.2.4 Diskretisierung mit isoparametrischen finiten Elementen

Zur Aufstellung der Finite-Elemente-Matrizen müssen noch Ansatzfunktionen auf Elementenebene formuliert werden. Grundgedanke der isoparametrischen finiten Elemente ist es, die Koordinaten und Verschiebungen eines beliebigen Punktes innerhalb eines Elementes durch die Elementkoordinaten und die Elementverschiebungen zu interpolieren. Die verwendete Interpolationsfunktion, die auch Formfunktion genannt wird, muß die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen, die natürlichen (statischen) Randbedingungen werden von vornherein im integralen Sinn erfüllt.

Als Ansatzfunktionen werden dazu vollständige Polynomansätze gewählt. Der Grad der Polynome richtet sich nach der höchsten Ableitung m im Funktional des Variationsproblems. Die Ansatzfunktionen müssen die Randbedingungen bis zur Ordnung $m - 1$ erfüllen, man spricht von einem C^{m-1} -Variationsproblem.

Die für das vorliegende Variationsproblem erforderliche C^0 -Stetigkeit erreicht man durch LAGRANGESche Polynome. Kubische HERMITE-Polynome würden zum Beispiel eine C^1 -Stetigkeit gewährleisten [62].

Bei der Diskretisierung mit isoparametrischen finiten Elementen werden für die Interpolation der Koordinaten dieselben Formfunktionen h_i verwendet wie für die Interpolation der Verschiebungen. Die Formfunktionen sind noch abhängig von der Anzahl der Elementknoten. Es läßt sich keine generelle Aussage treffen, welches Element am effizientesten ist. MIEHE [76]

bevorzugt bei komplizierten Materialmodellen ein bilineares 4-Knotenelement, während FORNEFELD [42] mit 8- oder 12-Knotenelementen bessere Ergebnisse erzielt.

Die Formfunktionen h_i für den einfacheren Fall des in Abbildung 41 dargestellten bilinearen 4-Knotenelementes lauten:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ h_2 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \\ h_3 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ h_4 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \quad . \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Berechnung von axialsymmetrischen Problemen in Kapitel 7 wird bei der Aufstellung der Matrizen bereits von einem Zylinderkoordinatensystem ausgegangen. Dadurch erhält man ein ebenes Problem mit den Verschiebungen

$$u_1 = u_1(x^1, x^3) \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = u_3(x^1, x^3) \quad .$$

Für die Interpolation der Geometrie und der Verschiebung erhält man

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{x}_{i\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 3 \quad (6.35)$$

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{u}_{i\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 3 \quad (6.36)$$

dabei ist N die Anzahl der Elementknoten.

Die in Gleichung (6.28) auftretenden Größen werden dementsprechend als Funktion der Verschiebungsinkremente $\Delta u_\alpha^{(k)}$ ausgedrückt:

$$\Delta u_\alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \Delta \hat{u}_{i\alpha}^{(k)} \quad , \quad \alpha = 1, 3 \quad . \quad (6.37)$$

Zur Berechnung ist noch die kovariante Ableitung der Inkremente der diskreten Knotenverschiebungen in krummlinigen Koordinaten (siehe Anhang D) zu bilden:

$$\begin{aligned} \text{Grad } \Delta \vec{u}^{(k)} &= \frac{\partial}{\partial t x^\beta} \Delta u_\alpha^{(k)} t \vec{g}^\alpha t \vec{g}^\beta = (\Delta_t u_{\alpha,\beta}^{(k)} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Delta u_\gamma^{(k)}) t \vec{g}^\alpha t \vec{g}^\beta \\ &= \sum_{i=1}^N \left({}_i h_{i,\beta}(\xi, \eta) \Delta \hat{u}_{i\alpha}^{(k)} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma h_i(\xi, \eta) \Delta \hat{u}_{i\gamma}^{(k)} \right) t \vec{g}^\alpha t \vec{g}^\beta . \end{aligned}$$

Die zu integrierenden Terme in Gleichung (6.28) lassen sich damit auf Elementebene berechnen, man erhält:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{S}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{e}^{(k)} &\approx \Delta \underline{S}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{e}^{(k)} \\ \Delta \underline{S}_K^{(k)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\eta}^{(k)} &\approx 0 \\ \underline{S}_K^{(k-1)} \cdot \delta \Delta_t \underline{\eta}^{(k)} &= [\delta \Delta \vec{u}^{(k)}]^T [\underline{B}_{nl}^{(1)}]^T [\underline{S}_K^{(k-1)*}] [\underline{B}_{nl}^{(1)}] [\Delta \vec{u}^{(k)}] \\ {}^{t+\Delta t} \vec{t} \cdot \delta \Delta \vec{u}^{(k)} &= [\delta \Delta \vec{u}^{(k)}]^T [\underline{H}]^T [{}^{t+\Delta t} \vec{t}] \\ {}^{t+\Delta t} \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \Delta \vec{u}^{(k)} &= [\delta \Delta \vec{u}^{(k)}]^T [\underline{H}]^T [\underline{H}] [{}^{t+\Delta t} \ddot{\vec{u}}^{(k)}] \\ \underline{S}_K^{(k-1)} \cdot \delta \Delta_t \underline{e}^{(k)} &= [\delta \Delta \vec{u}^{(k)}]^T [\underline{B}_l^{(k)}]^T [\underline{S}_K^{(k-1)}] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} [\Delta \underline{S}_K^{(k)}] &= [\underline{C}^*] [\Delta_t \underline{e}^{(k)}] + \{[\vec{q}]\} \Delta t \\ [\delta \Delta_t \underline{e}^{(k)}] &= [\underline{B}_l^{(k)}] [\delta \Delta \vec{u}^{(k)}] \\ [\text{Grad } \Delta \vec{u}^{(k)}] &= [\underline{B}_{nl}^{(1)}] [\Delta \vec{u}^{(k)}] \\ [\Delta_t \underline{e}_l^{(1)}] &= [\Delta_t \underline{e}^{(1)}] = [\underline{B}_l^{(1)}] [\Delta \vec{u}^{(1)}] \\ [\vec{q}] &= [\vec{q}_{v_T}] + [\vec{q}_{D_S}] + [\vec{q}_{D_P}] + [\vec{q}_\Theta] . \end{aligned}$$

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* aus Gleichung (6.28) läßt sich somit durch eine Matrixgleichung auf Elementebene der Form

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{C}}^*] [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}] \, {}^t dV_e + \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{S}}_K^{(0)*}] [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}] \, {}^t dV_e \right\} [\Delta \vec{\mathbf{u}}^{(k)}] = \\
& + \int_{\partial \mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{H}}]^T [{}^{t+\Delta t} \vec{\mathbf{t}}] \, {}^0 dA_e - \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(k)}]^T [\underline{\mathbf{S}}_K^{(k-1)}] \, {}^t dV_e - \left\{ {}^0 \rho \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{H}}]^T [\underline{\mathbf{H}}] \, {}^t dV_e \right\} [{}^{t+\Delta t} \vec{\mathbf{u}}^{(k)}] \\
& - \left\{ \Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}]^T [\vec{\mathbf{q}}_{VT}] \, {}^t dV_e \right\} - \left\{ \Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}]^T [\vec{\mathbf{q}}_{DS}] \, {}^t dV_e \right\} \\
& - \left\{ \Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}]^T [\vec{\mathbf{q}}_{DP}] \, {}^t dV_e \right\} - \left\{ \Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_i^{(1)}]^T [\vec{\mathbf{q}}_{\Theta}] \, {}^t dV_e \right\} \quad (6.38)
\end{aligned}$$

beschreiben.

$[\underline{\mathbf{B}}_i^{(k)}]$ ist die lineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix im k -ten Iterationsschritt:

$$[\underline{\mathbf{B}}_i^{(k)}] = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1}(1+{}^t u_{1,1}^{(k-1)}) & {}^t h_{1,1} {}^t u_{3,1}^{(k-1)} & {}^t h_{2,1}(1+{}^t u_{1,1}^{(k-1)}) & \dots & {}^t h_{N,1} {}^t u_{3,1}^{(k-1)} \\ h_1({}^t x^1 + u_1^{(k-1)}) & 0 & h_2({}^t x^1 + u_1^{(k-1)}) & \dots & 0 \\ {}^t h_{1,3} {}^t u_{1,3}^{(k-1)} & {}^t h_{1,3}(1+{}^t u_{3,3}^{(k-1)}) & {}^t h_{2,3} {}^t u_{1,3}^{(k-1)} & \dots & {}^t h_{N,3}(1+{}^t u_{3,3}^{(k-1)}) \\ {}^t h_{1,1} {}^t u_{1,3}^{(k-1)} + & {}^t h_{1,3} {}^t u_{3,1}^{(k-1)} + & {}^t h_{2,1} {}^t u_{1,3}^{(k-1)} + & & {}^t h_{N,3} {}^t u_{3,1}^{(k-1)} + \\ {}^t h_{1,3}(1+{}^t u_{1,1}^{(k-1)}) & {}^t h_{1,1}(1+{}^t u_{3,3}^{(k-1)}) & {}^t h_{2,3}(1+{}^t u_{1,1}^{(k-1)}) & \dots & {}^t h_{N,1}(1+{}^t u_{3,3}^{(k-1)}) \end{bmatrix}$$

$[\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}]$ ist die Gradienten-Verschiebungsmatrix; da diese lediglich zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix benötigt wird, muß sie bei der verwendeten modifizierten NEWTON-RAPHSON-Iteration nur im 1-ten Iterationsschritt berechnet werden:

$$[\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}] = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,1} & 0 & {}^t h_{3,1} & 0 & \dots & {}^t h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,1} & 0 & {}^t h_{3,1} & \dots & 0 & {}^t h_{N,1} \\ {}^t x^1 h_1 & 0 & {}^t x^1 h_2 & 0 & {}^t x^1 h_3 & 0 & \dots & {}^t x^1 h_N & 0 \\ {}^t h_{1,3} & 0 & {}^t h_{2,3} & 0 & {}^t h_{3,3} & 0 & \dots & {}^t h_{N,3} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,3} & 0 & {}^t h_{2,3} & 0 & {}^t h_{3,3} & \dots & 0 & {}^t h_{N,3} \end{bmatrix}$$

Die Spannungs-Verzerrungsmatrix $[\underline{C}^*]$ ergibt sich zu:

$$[\underline{C}^*] = \begin{bmatrix} 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma^{11} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 + \sigma^{11} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} + \sigma^{11} & -\sigma^{13} \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 + \sigma^{22} & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^4 - \sigma^{22} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 + \sigma^{22} & 0 \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} + \sigma^{33} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 + \sigma^{33} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma^{33} & -\sigma^{13} \\ 0 & \sigma^{13} \left(\frac{1}{t_{x1}}\right)^2 & 0 & \frac{1}{2}(2G - \sigma^{33} - \sigma^{11}) \end{bmatrix}$$

$[S_K^{(k-1)*}]$ ist die Spannungs-Metrikmatrix:

$$[S_K^{(k-1)*}] = \begin{bmatrix} {}^{(k-1)}S_K^{11} t_g^{11} & 0 & 0 & {}^{(k-1)}S_K^{13} t_g^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(k-1)}S_K^{11} t_g^{33} & 0 & 0 & {}^{(k-1)}S_K^{13} t_g^{33} \\ 0 & 0 & {}^{(k-1)}S_K^{22} t_g^{22} & 0 & 0 \\ {}^{(k-1)}S_K^{13} t_g^{11} & 0 & 0 & {}^{(k-1)}S_K^{33} t_g^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(k-1)}S_K^{13} t_g^{33} & 0 & 0 & {}^{(k-1)}S_K^{33} t_g^{33} \end{bmatrix}$$

Der Lastvektor $[\vec{q}]$ setzt sich aus einem viskoplastischen Anteil, schädigungsinduzierten Anteilen sowie einem Temperaturlastvektor zusammen:

$$[\vec{q}] = -2G \begin{bmatrix} D_{vT}^{11} + \frac{2}{2G} \sigma^{13} W_{i3}^1 \\ D_{vT}^{22} \\ D_{vT}^{33} - \frac{2}{2G} \sigma^{13} W_{i3}^1 \\ D_{vT}^{13} - \frac{1}{2G} W_{i3}^1 (\sigma^{11} + \sigma^{33}) \end{bmatrix} - 2G \begin{bmatrix} D_{DS}^{11} \\ D_{DS}^{22} \\ D_{DS}^{33} \\ D_{DS}^{13} \end{bmatrix} - 2G \begin{bmatrix} D_{DP}^{11} \\ D_{DP}^{22} \\ D_{DP}^{33} \\ D_{DP}^{13} \end{bmatrix} - 2G \begin{bmatrix} D_{\Theta}^{11} \\ D_{\Theta}^{22} \\ D_{\Theta}^{33} \\ D_{\Theta}^{13} \end{bmatrix}$$

Die Interpolationsmatrix $[\underline{H}]$ enthält die Formfunktionen h_i :

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & \dots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix}$$

n_s	r_i	w_i
2	-0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	-0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
4	-0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	-0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454

Tabelle 1: Stützstellen r_i und Wichtungsfaktoren w_i der GAUß-Quadratur Formeln für die Ordnungen $n_s = 2, 3, 4$

Zur Integration der Gleichung (6.38) werden die globalen Koordinaten ${}^t x^\alpha$ auf die lokalen Koordinaten ξ und η transformiert. Man erhält

$$\int_{\mathcal{B}_e} [\dots]({}^t x^1, {}^t x^3) {}^t dV_e = 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\dots](\xi, \eta) {}^t x^1(\xi, \eta) \det[\underline{\mathbf{J}}] d\xi d\eta \quad (6.39)$$

mit der JACOBI-Matrix $\underline{\mathbf{J}}$

$$[\underline{\mathbf{J}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x^1}{\partial \xi} & \frac{\partial {}^t x^3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial {}^t x^1}{\partial \eta} & \frac{\partial {}^t x^3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Die partiellen Ableitungen nach ${}^t x^\alpha$ in den Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen müssen ebenfalls durch die Ableitungen nach den lokalen Koordinaten ξ und η ersetzt werden:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x^1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial {}^t x^1} & \frac{\partial \eta}{\partial {}^t x^1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial {}^t x^3} & \frac{\partial \eta}{\partial {}^t x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{J}}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Bei der numerischen Integration werden die Werte nur an diskreten Punkten, den Stützstellen, ausgewertet. Bei isoparametrischen Verfahren hat sich die GAUß-Quadratur als besonders effektiv erwiesen. Das Volumenintegral aus Gleichung (6.39) wird dann durch eine Summenformel angenähert:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_e} {}^t dV_e &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} {}^t x^1(\xi, \eta) \det[\underline{\mathbf{J}}] d\xi d\eta \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} w_i w_j {}^t x^1(r_i, r_j) \det[\underline{\mathbf{J}}] \Big|_{(r_i, r_j)}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

je nach der Ordnung n_s erhält man die Stützstellen r_i und Wichtungsfaktoren w_i aus Tabelle 1.

Aus den einzelnen Integralen erhält man das linearisierte Gleichungssystem auf Elementebene:

$\int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{C}}^*] [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}] {}^t dV_e = [\underline{\mathbf{k}}_l]$	inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
$\int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{S}}_K^{(0)*}] [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}] {}^t dV_e = [\underline{\mathbf{k}}_{nl}]$	inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung
$\int_{\partial \mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{H}}]^T [{}^{t+\Delta t} \vec{t}] {}^0 dA_e = [\vec{r}_t]$	äußerer Elementlastvektor
$\int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(k)}]^T [\underline{\mathbf{S}}_K^{(k-1)}] {}^t dV_e = [\vec{f}^{(k-1)}]$	Vektor der Lasten aus Elementspannungen
$\Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\vec{q}_{VT}] {}^t dV_e = [\vec{r}_{VT}]$	viskoplastischer Elementlastvektor
$\Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\vec{q}_{DS}] {}^t dV_e = [\vec{r}_{DS}]$	Elementlastvektor aufgrund Scherbandschädigung
$\Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\vec{q}_{DP}] {}^t dV_e = [\vec{r}_{DP}]$	Elementlastvektor aufgrund Porenschädigung
$\Delta t \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\vec{q}_\theta] {}^t dV_e = [\vec{r}_\theta]$	Temperaturlastvektor
${}^0 \rho \int_{\mathcal{B}_e} [\underline{\mathbf{H}}]^T [\underline{\mathbf{H}}] {}^t dV_e = [\underline{\mathbf{m}}]$	konsistente Elementmassenmatrix

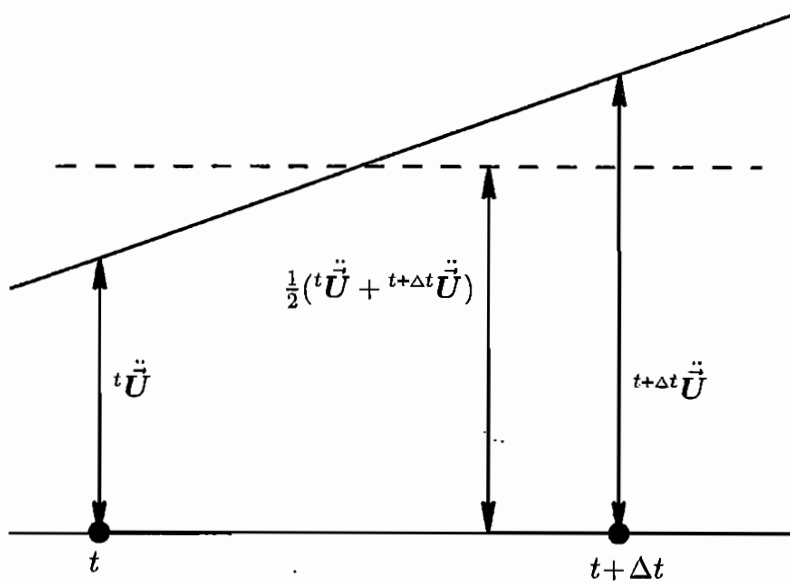


Abbildung 42: NEWMARKS Methode der konstanten mittleren Beschleunigung

Der Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen, -massenmatrizen und -lastvektoren liefert das geometrisch und physikalisch linearisierte Gleichungssystem:

$$[\underline{M}] [{}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{U}}^{(k)}] + [\underline{K}_l + \underline{K}_{nl}] [\Delta \vec{U}^{(k)}] = \quad (6.43)$$

$$[\vec{R}_t] - [\vec{F}^{(k-1)}] - \{[\vec{R}_{vT}]\} - \{[\vec{R}_{DS}]\} - \{[\vec{R}_{DP}]\} - \{[\vec{R}_\Theta]\} \quad .$$

6.2.5 Zeitintegration der Bewegungsgleichungen mit dem NEWMARK-Verfahren

Das verbreitetste Verfahren zur Zeitintegration der Bewegungsgleichungen dynamischer Probleme ist das Verfahren von NEWMARK^[79]. Das NEWMARKSche Integrationsschema ist eine Erweiterung der linearen Beschleunigungsmethode.

Ausgehend von der Annahme einer konstanten mittleren Beschleunigung im Zeitschritt $[t, t+\Delta t]$ ergibt sich die Vorschrift

$${}^{t+\Delta t}\vec{U} = {}^t\vec{U} + \Delta t {}^t\dot{\vec{U}} + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - \beta_2) {}^t\ddot{\vec{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} \beta_2 {}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{U}} \quad (6.44)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\vec{U}} = {}^t\dot{\vec{U}} + \Delta t(1 - \beta_1) {}^t\ddot{\vec{U}} + \Delta t \beta_1 {}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{U}} \quad (6.45)$$

$$\text{mit: } \beta_1 \geq 0.50 \quad \text{und} \quad \beta_2 \geq 0.25(0.50 + \beta_1)^2 \quad . \quad (6.46)$$

Dies führt zu einer Kombination der Zeitintegration der Bewegungsgleichungen mit der Gleichgewichtsiteration.

Die Parameter β_1 und β_2 können so gewählt werden, daß man eine hinreichende Integrationsgenauigkeit und Stabilität der Integration erreicht. Für die Parameter wird hier $\beta_1 = 0.50$ und $\beta_2 = 0.25$ gewählt, daraus ergibt sich die unbedingt stabile Methode der konstanten mittleren Beschleunigung. Einen Vergleich anderer Parameterkombinationen zur Berechnung elastischer Stoßprobleme findet man z. B. bei WRIGGERS ^[104]. Eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes von NEWMARK findet man bei ZIENKIEWICZ & TAYLOR ^[108].

7. Strukturverhalten — Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers

Zur Berechnung des Strukturverhaltens axialsymmetrischer Probleme ist das vorliegende Materialmodell in das Finite-Elemente-Programm FEAP [80,97,107,108] implementiert worden. Dazu muß das in Kapitel 3 entwickelte Stoffgesetz auf die Beschreibung von großen Deformationen erweitert werden. Das so entstandene Materialmodell wird mit Modell 1.2LD (LD für Large Deformation) bezeichnet.

Um die Trennung der reversiblen und irreversiblen Anteile auch bei großen Formänderungen zu erreichen, wird in Verbindung mit einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten \underline{F} eine Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* (Abbildung 43) eingeführt (LEE UND LIU [69], LEE [67]), die jedoch nicht eindeutig ist, da noch eine beliebige Starrkörperrotation von \mathcal{B}^* möglich ist.

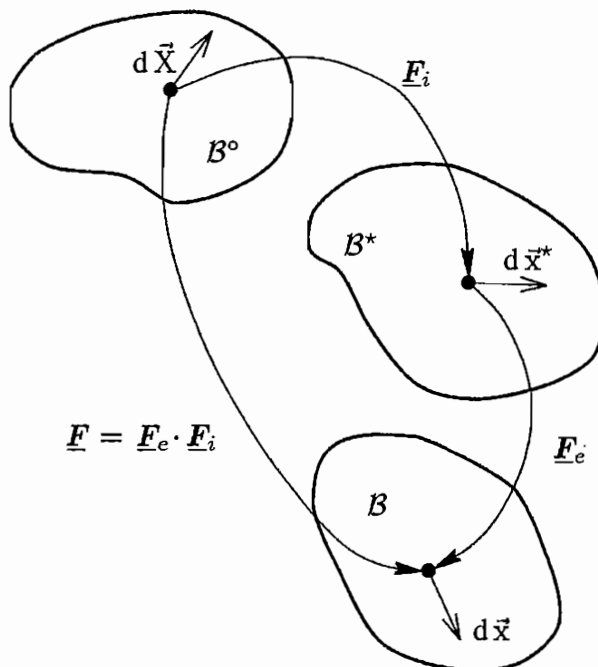


Abbildung 43: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

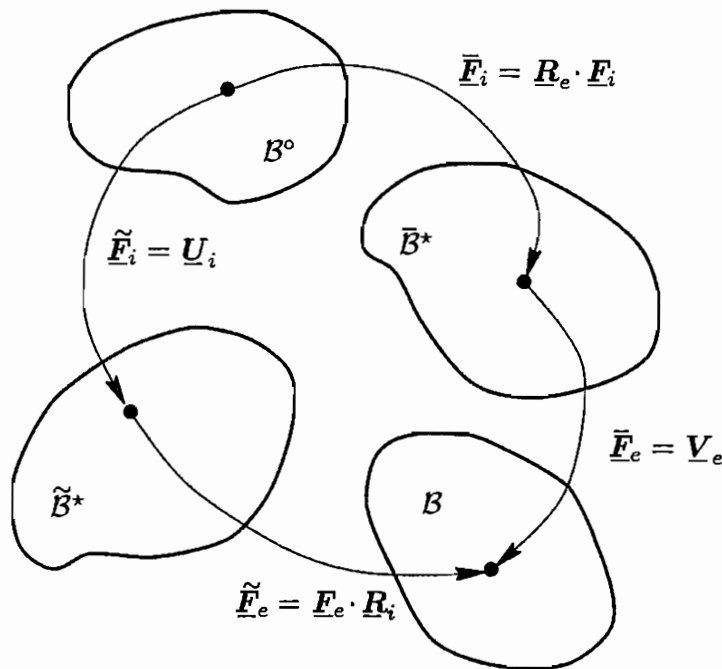


Abbildung 44: Spezielle Zwischenkonfigurationen

Um die Probleme der Mehrdeutigkeit der Zwischenkonfiguration B^* zu umgehen, gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. durch Wahl einer

- speziellen Zwischenkonfiguration \bar{B}^* , Aufteilung von $\underline{F}_e = \underline{V}_e \underline{R}_e$ in Streckung+Drehung (LEE^[68])
- speziellen Zwischenkonfiguration \tilde{B}^* , Aufteilung von $\underline{F}_i = \underline{R}_i \underline{U}_i$ in Streckung+Drehung \rightsquigarrow isokline Konfiguration (MANDEL^[74])
- speziellen Zwischenkonfiguration, \underline{R} so wählen, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Zwischenkonfiguration verschwindet (WANG^[101])
- speziellen Zeitableitung

Im Gegensatz zu LEHMANN^[71] orientieren wir uns an der Vorgehensweise der isoklinen Konfiguration^[13]. Durch Einführung einer zusätzlichen Gleichung für den plastischen Spin \underline{W}_i (DAFALIAS^[26,27,28] erreicht man eine additive Aufspaltung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{D} :

$$\underline{D} = \underline{D}_e + \underline{D}_i \quad . \quad (7.1)$$

Entsprechend kann eine weitere Zwischenkonfiguration eingeführt werden, um den inelastischen Anteil des Deformationsgradienten \underline{F}_i in einen versetzungsinduzierten und einen schädigungsinduzierten Anteil aufzuspalten^[30,83,86].

Überlagerte Starrkörperrotation eines Materieelementes dürfen keinen Einfluß auf das Materialverhalten haben. Dies führt zur Einführung einer mitrotierenden Zeitableitung. Eine vergleichende Übersicht mitrotierender Zeitableitungen findet man bei WEGENER [102].

An die zu verwendende objektive Zeitableitung wird die Forderung gestellt, daß sie die "chain-rule property" erfüllen muß:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \underline{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{\partial \Xi}{\partial \underline{\mathbf{A}}} \cdot \overset{\nabla}{\dot{\underline{\mathbf{A}}}} \quad (7.2)$$

(für ein beliebiges Potential Ξ und einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe $\underline{\mathbf{A}}$).

Es werden folgende objektive Zeitableitungen eingeführt:

$$\overset{\nabla}{\dot{\underline{\mathbf{A}}}} = \dot{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Omega}} \quad (7.3)$$

$$\text{mit: } \underline{\boldsymbol{\Omega}} = \underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}_e - \underline{\mathbf{W}}_i \approx \underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}_i \quad (7.4)$$

und

$$\overset{\square}{\dot{\underline{\mathbf{A}}}} = \overset{\nabla}{\dot{\underline{\mathbf{A}}}} - \underline{\mathbf{A}} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{D}}_e \quad (7.5)$$

Die inneren Variablen aus Kapitel 3 werden dann in der Zwischenkonfiguration eingeführt und müssen anschließend in die Momentankonfiguration transformiert werden (siehe DIEHL [33]).

7.1 Zusammenstellung der Evolutionsgleichungen für Modell 1.2LD

Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariablen

Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\underline{\sigma}}^0$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\sigma}} + K d_5 (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}}_{\nu_T}) \underline{\underline{\sigma}}^0 - m \underline{\underline{\sigma}}^0 \quad (7.6)$$

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\sigma}} = d_1 \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 (\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 (\underline{\underline{Z}}^0 \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{Z}}^0) + 2d_4 \xi \underline{\underline{\sigma}}$$

Der Scherband-Schädigungs-Tensor $\underline{\underline{Z}}^0$:

$$\underline{\underline{Z}}^0 = [d_z]_z \langle\langle LC_z \rangle\rangle \left(\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\underline{\underline{\sigma}}')^2 + (\mu_4 + \omega) \underline{\underline{Z}}^0 \right) \quad (7.7)$$

$$G_z = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\underline{\sigma}}^{0'} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{0'} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^0 - h_z \geq 0 \quad (7.8)$$

$$LC_z = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} \underline{\underline{\sigma}}^{0'} - \nu_z \underline{\underline{1}} \right) \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\underline{\sigma}}) > 0 \quad (7.9)$$

Der Porenvolumenanteil ξ :

$$\dot{\xi} = [d_{DP1}]_{DP} \langle\langle LC_{DP1} \rangle\rangle_{DP1} - [d_{DP2}]_{DP} \xi \langle\langle LC_{DP1} \rangle\rangle_{DP2} \quad (7.10)$$

$$G_{DP} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}^{0'} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{0'}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \nu_{DP} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^0 - h_{DP} \geq 0 \quad (7.11)$$

$$LC_{DP1} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}^{0'}}{\sqrt{I_2^{0'}}} + \nu_{DP} \underline{\underline{1}} \right) \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\underline{\sigma}}) > 0 \quad (7.12)$$

Die durch Porenbildung/Porenwachstum induzierte Verzerrungsrate $\underline{\underline{D}}_{DP}$:

$$\underline{\underline{D}}_{DP} = \frac{\dot{\xi}}{3(1-\xi)} \underline{\underline{1}} \quad (7.13)$$

Die durch Scherband-Schädigung induzierte Verzerrungsrate $\underline{\underline{D}}_{DS}$:

$$\underline{\underline{D}}_{DS} = [d_{DS}]_{DS} \langle\langle\langle LC_{DS} \rangle\rangle\rangle \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\|\underline{\underline{\sigma}}'\|} \quad (7.14)$$

$$G_{DS} = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\underline{\sigma}}^{0'} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{0'} - \frac{\nu_{DS}}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^0 - h_{DS} \geq 0 \quad (7.15)$$

$$LC_{DS} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} \underline{\underline{\sigma}}^{0'} - \nu_{DS} \underline{\underline{1}} \right) \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^0 + m \underline{\underline{\sigma}}) > 0 \quad (7.16)$$

Die Temperaturkonzentration Θ^0 :

$$\dot{\Theta}^0 = [d_{\Theta v}]_v \quad (7.17)$$

Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\overset{\square}{\underline{A}}_{vL}$:

$$\overset{\square}{\underline{A}}_{vL} = \mathcal{J}_e^2 \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\underline{\sigma}^{0'}}{\|\underline{\sigma}^{0'}\|} + \underline{A}_{vL} \text{tr} \underline{D}_e \quad (7.18)$$

$$G_v = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - h_v \geq 0 \quad (7.19)$$

Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate \underline{D}_{vT} :

$$\underline{D}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}_T}{\|\underline{\sigma}' - \underline{X}_T\|} \quad (7.20)$$

$$F_T = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} (\underline{\sigma}' - \underline{X}_T) \cdot (\underline{\sigma}' - \underline{X}_T) - g_T \geq 0 \quad (7.21)$$

Der kinematische Verfestigungstensor \underline{X}_T :

$$\overset{\square}{\underline{X}}_T = \mathcal{J}_e c_T \underline{D}_{vT} \quad (7.22)$$

Die Versetzungsdichte κ :

$$\dot{\kappa} = K \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{vT} \quad (7.23)$$

Die Evolutionsgleichung für die innere Variable $\underline{\alpha}_q$:

$$\overset{\nabla}{\underline{\alpha}}_q = \mathcal{J}_e \text{grad} \Theta - \frac{1}{\tau_q} \underline{\alpha}_q \quad (7.24)$$

Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit :

$$\ddot{u} = -c (\alpha + PG) \dot{u} - \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 (u - u_{EQ}(PG)) \quad (7.25)$$

$$\text{mit: } PG = \max\{0, |D_{EW}|_{\max} + \chi_{u1} \dot{\Theta}\} \quad (7.26)$$

Die Evolutionsgleichung für den plastischen Spin \underline{W}_i :

$$\underline{W}_i = \gamma_{TW} [\Phi_{TW}]_T \frac{\underline{X}_T \cdot \underline{\sigma}' - \underline{\sigma}' \cdot \underline{X}_T}{\|\underline{\sigma}'\| \|\underline{X}_T\|} \quad (7.27)$$

Variablen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

Die reversible Verzerrung \underline{E}_e :

$$\underline{E}_e = \left(\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \lambda_3 \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right) \underline{1} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \lambda_4 \underline{\sigma} \quad (7.28)$$

Die Entropie η :

$$\mathcal{J}_{e\rho} \eta = \lambda_1(\Theta - \Theta_0) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \lambda_2 \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \nu_4 \kappa \quad (7.29)$$

Der Wärmefluß \vec{q} :

$$\tau_q \overset{\nabla}{\vec{q}} + \vec{q} = - \mathcal{J}_e k \operatorname{grad} \Theta \quad (7.30)$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet dann unter Vernachlässigung volumenverteilter Wärmequellen :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{e\rho} c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} + \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e} \Theta \operatorname{tr} \overset{\nabla}{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e} \Theta (\operatorname{tr} \underline{\sigma})(\operatorname{tr} \underline{D}_e) &= \mathcal{J}_e \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{DS} + \mathcal{J}_e \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{DP} \\ &+ \mathcal{J}_e \left(1 - \frac{\nu_3 K \kappa}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_4 K \Theta_0}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_2 c_T}{\mathcal{J}_e^2} \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{VT} + \mu_6 \Theta^0 [d_{\Theta V}]_V + \mu_1 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} (\operatorname{tr} \underline{\sigma}^0)^2 \\ &+ \mu_2 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\sigma}^0 + (\vartheta_1 + \vartheta_2 \xi) [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} + \vartheta_3 \xi^2 [d_{DP2}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \left(\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\underline{\sigma}')^2 + (\mu_4 + \omega) \underline{Z}^0 \right) \cdot (\overset{\nabla}{\underline{Z}}^0 - \underline{Z}^0 \operatorname{tr} \underline{D}_e) - \operatorname{div} \vec{q} \quad (7.31) \end{aligned}$$

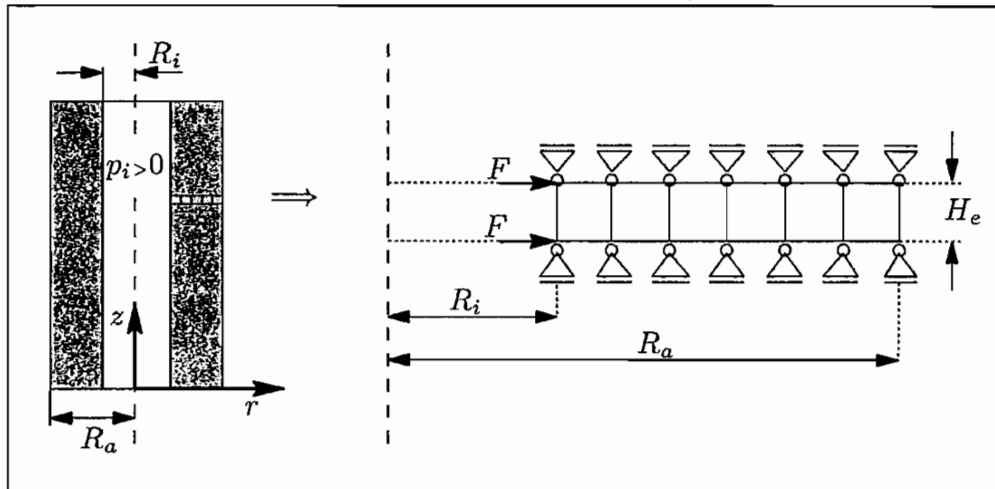


Abbildung 45: Rohr unter Innendruck

7.2 Axialsymmetrische Berechnungen ohne Trägheitseinflüsse

7.2.1 Elastische Probleme

Das Verhalten einer Finite-Element-Formulierung kann am besten an einfachen Strukturrechnungen mit bekannten elastischen Vergleichslösungen untersucht werden. Für das unendliche dickwandige Rohr unter Innendruck sowie die axiale Scherung findet man unter bestimmten Voraussetzungen analytische Vergleichslösungen in der Literatur (BRUHNS/LEHMANN^[19]). In den folgenden Berechnungen werden jeweils ungeglättete Werte der Spannungen in den Gaußpunkten (Zentralsymbole) den analytischen Lösungen (durchgezogene Linien) gegenübergestellt. Bei großen Elementzahlen werden nicht alle Gaußpunkte dargestellt.

7.2.1.1 Zylinder unter Innendruck

Ein klassisches Beispiel, das häufig zur Untersuchung inhomogener Spannungszustände (bei gleichzeitiger geometrischer Nichtlinearität) herangezogen wird, ist das unendliche dickwandige Rohr unter Innendruck.

Die Berechnung erfolgte für eine Struktur mit sechs bzw. hundert 4-Knoten-Elementen und einer Belastung von $F = 1\text{N}$. Dies entspricht einem Innendruck von $p_i = \frac{2F}{2\pi R_i H_e} = 31.83\text{N/mm}^2$ (bei $R_i = 0.1\text{mm}$, $R_a = 0.7\text{mm}$, $H_e = 0.1\text{mm}$, $F = 1\text{N}$). Die Belastung erfolgte in einem Lastschritt. Abbildung 46 gibt die Finite-Elemente-Lösung im Vergleich zur analytischen Spannungsverteilung wieder. Die Güte der Lösung läßt sich durch eine größere

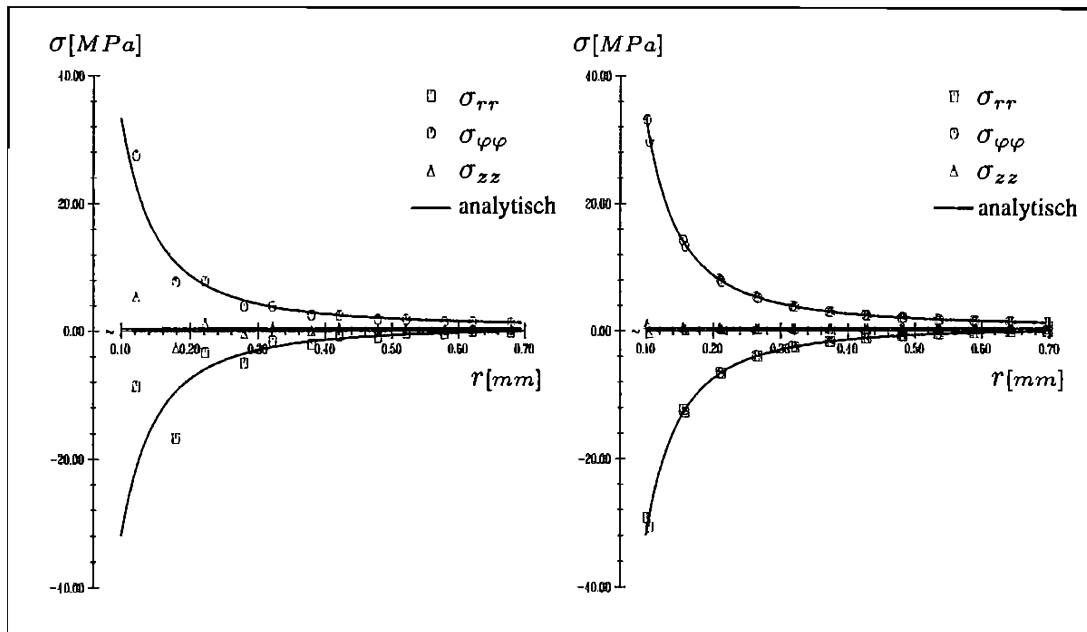


Abbildung 46: Dickwandiges Rohr unter Innendruck (links sechs, rechts hundert 4-Knoten-Elemente)

Anzahl an Elementen oder aber durch die Verwendung von höherwertigen, z. B. 12-Knoten-Elementen, deutlich verbessern. Fast die gleiche Ergebnisgüte wie mit hundert 4-Knoten-Elementen erhält man auch mit nur zwei 12-Knoten-Elementen [42].

7.2.1.2 Axiale Scherung

Als weiteres Beispiel für ein linear elastisches Problem betrachten wir die axiale Scherung.

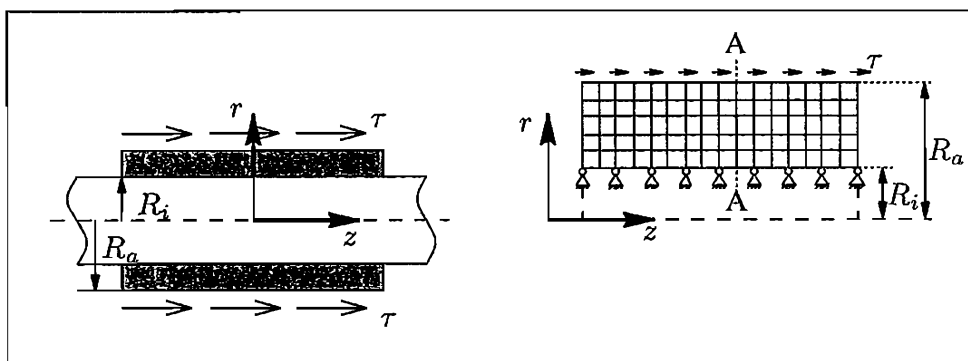


Abbildung 47: Axiale Scherung

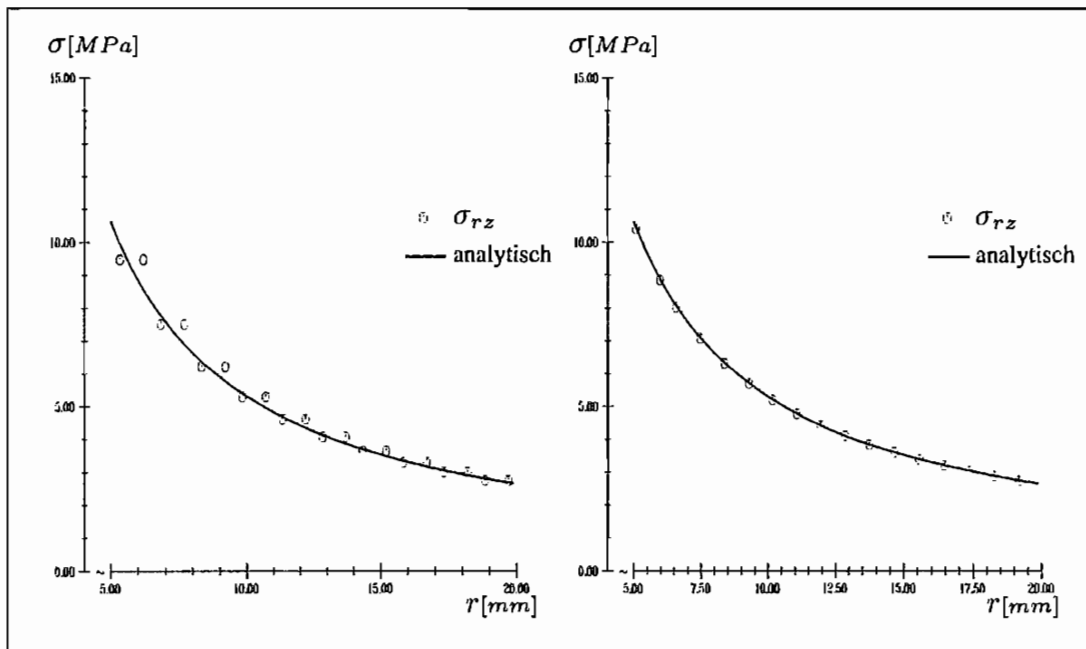


Abbildung 48: FE-Berechnung mit 10 (links) bzw. 50 (rechts) Elementen in radialer Richtung (Schnitt A-A)

Diese tritt z. B. dann auf, wenn eine Hülse wie in Abbildung 47 in axialer Richtung belastet wird.

Die Umsetzung der konstanten Schubspannung τ in entsprechende Knotenkräfte ergibt :

$$\tau = \frac{{}^{(i)}F_l + {}^{(i)}F_r}{2\pi R_a H_e} = 5.3 \text{ N/mm}^2 \quad .$$

$$\text{mit:} \quad {}^{(i)}F_l = {}^{(i)}F_r = 250 \text{ N}, \quad R_i = 5 \text{ mm}, \quad R_a = 20 \text{ mm}, \quad H_e = 1.5 \text{ mm} \quad .$$

Die Berechnung erfolgte mit einer Struktur von zehn bzw. fünfzig Elementen in radialer Richtung unter Benutzung eines 4-Knoten-Elementes. Die Belastung wurde in einem Schritt aufgebracht.

Auch hier lässt sich eine Verbesserung der Ergebnisse durch Erhöhung der Elementanzahl in radialer Richtung erzielen (Abbildung 48).

7.2.2 Plastische Probleme — Zugstab

Zur Kontrolle des inelastischen Verhaltens wurde die Finite-Elemente-Simulation eines Zugstabes mit der eindimensionalen Stoffgesetzintegration verglichen. Verwendung fand eine einfache FE-Struktur mit einem axialsymmetrischen Element. Durch geeignete Lagerung wird ein einaxialer Spannungszustand erreicht.

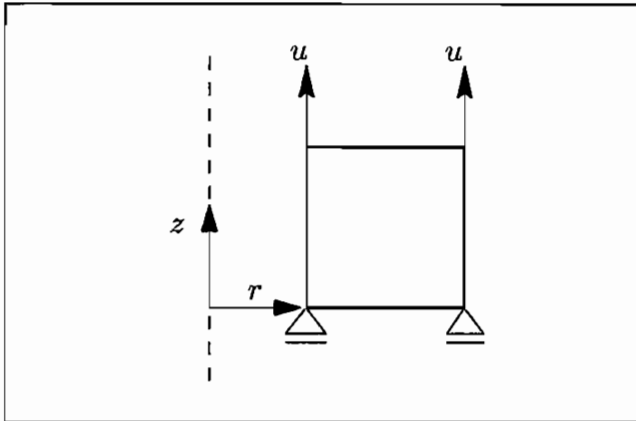


Abbildung 49: FE-Struktur für den Zugversuch

Die Berechnungen wurden mit Berücksichtigung der Schädigung durch Mikroscherbänder sowie Mikroporen durchgeführt und jeweils mit den Ergebnissen der einaxialen Stoffgesetzintegration aus Kapitel 5.1 verglichen, Trägheitskräfte wurden vernachlässigt. Um eine nahezu konstante Prozeßgeschwindigkeit zu erreichen, wurde die Verschiebung gleichmäßig in 850 Lastschritten aufgebracht.

Gemeinsam ist allen Berechnungen:

- Berechnung bis zu einer Dehnung von $\epsilon/\epsilon_F = 60$ ($\rightarrow \epsilon \sim 8.5\%$).
- Die Ausgangstemperatur beträgt $\Theta_0 = 300$ K.
- Die Fließspannung beträgt $\sigma_F = 300$ MPa.
- Darstellung der FE-Ergebnisse durch gestrichelte Linien.
- Darstellung der einaxialen Stoffgesetzintegration durch durchgezogene Linien.
- Dehngeschwindigkeitsbereich von $\dot{\epsilon} = 10^5 s^{-1}$ bis $\dot{\epsilon} = 10^0 s^{-1}$ sowie zum Vergleich die quasistatische Kurve mit $\dot{\epsilon} = 10^{-4} s^{-1}$.

Der Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kurven in Abbildung 50 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung von der Finite-Elemente-Simulation mit der direkten Integration der einaxialen Formulierung des vorgestellten Kontinuums-Damage-Modells.

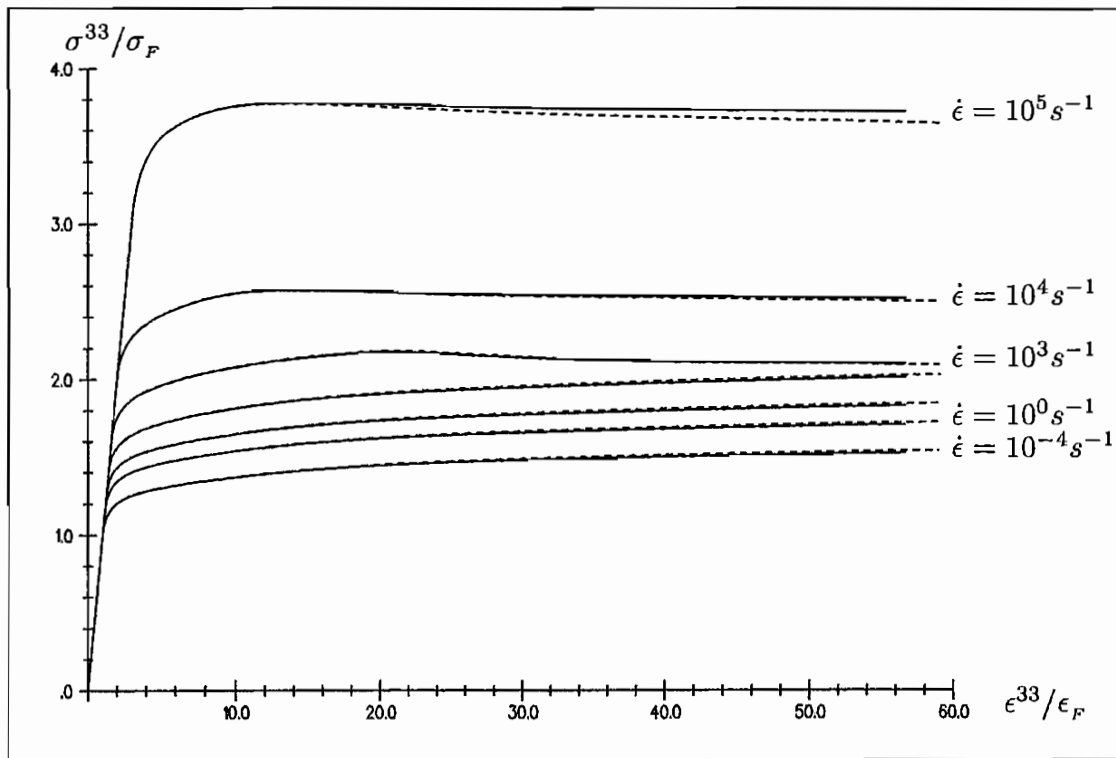


Abbildung 50: Verlauf der Axialspannung σ^{33} unter Berücksichtigung von Schädigung (FE-Ergebnisse gestrichelt, Stoffgesetzintegration durchgezogen)

Geringfügige Abweichungen der Spannungen sind erst bei größeren Dehnungen sowie bei sehr großen Prozeßgeschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} = 10^5 s^{-1}$) zu erkennen.

Die Vorhersage der kinematischen Verfestigung (Abbildung 51) stimmt bei beiden Berechnungsmethoden überein, bei der isotropen Verfestigung in Abbildung 52 zeigt sich ab einer Dehnung von ca. 2% eine geringfügige Abweichung zwischen FE-Simulation und Stoffgesetzintegration, die mit steigender Dehnung größer wird.

Dies liegt darin begründet, daß die Dehnrage in Zugrichtung, und damit die Prozeßgeschwindigkeit, durch die verwendete Belastung nicht wirklich konstant gehalten werden kann. Dadurch, daß die Dehnrage $\dot{\epsilon}^{33}$ mit zunehmender Dehnung leicht abnimmt, liegt auch die isotrope Verfestigung der Probe bei der FE-Simulation unter der durch Integration der einaxialen Stoffgesetzformulierung berechneten Kurve.

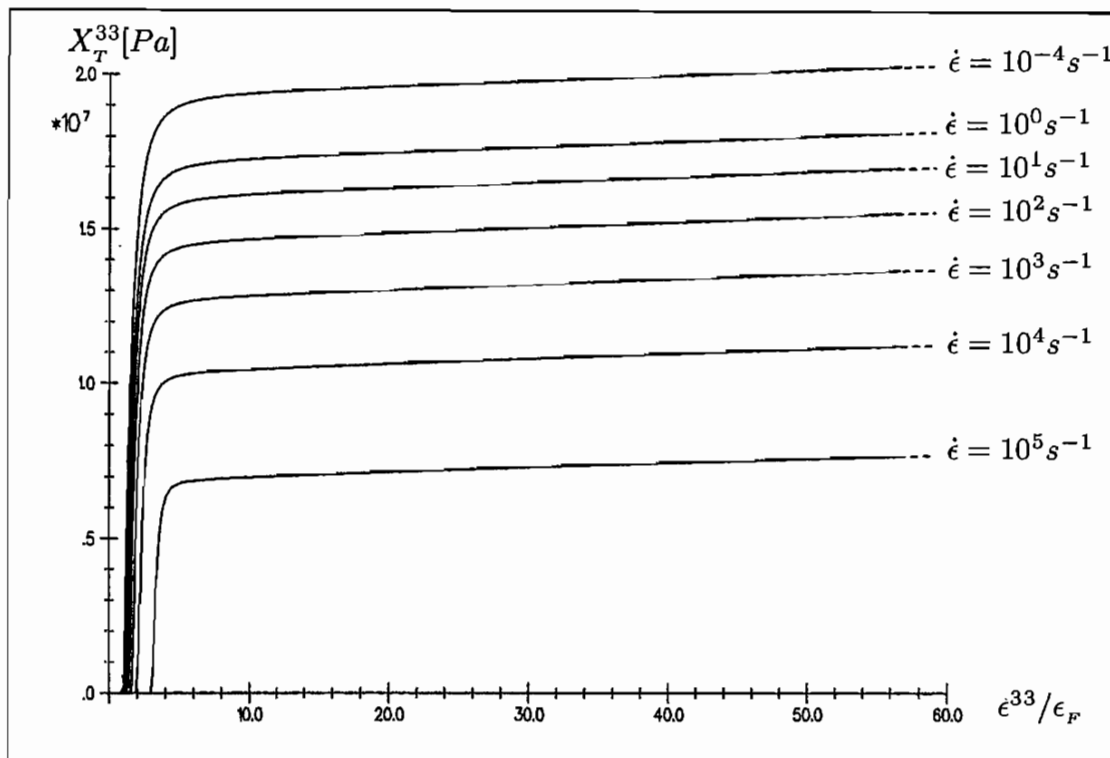


Abbildung 51: Verlauf der kinematischen Verfestigung X_T^{33} (mit Schädigung)

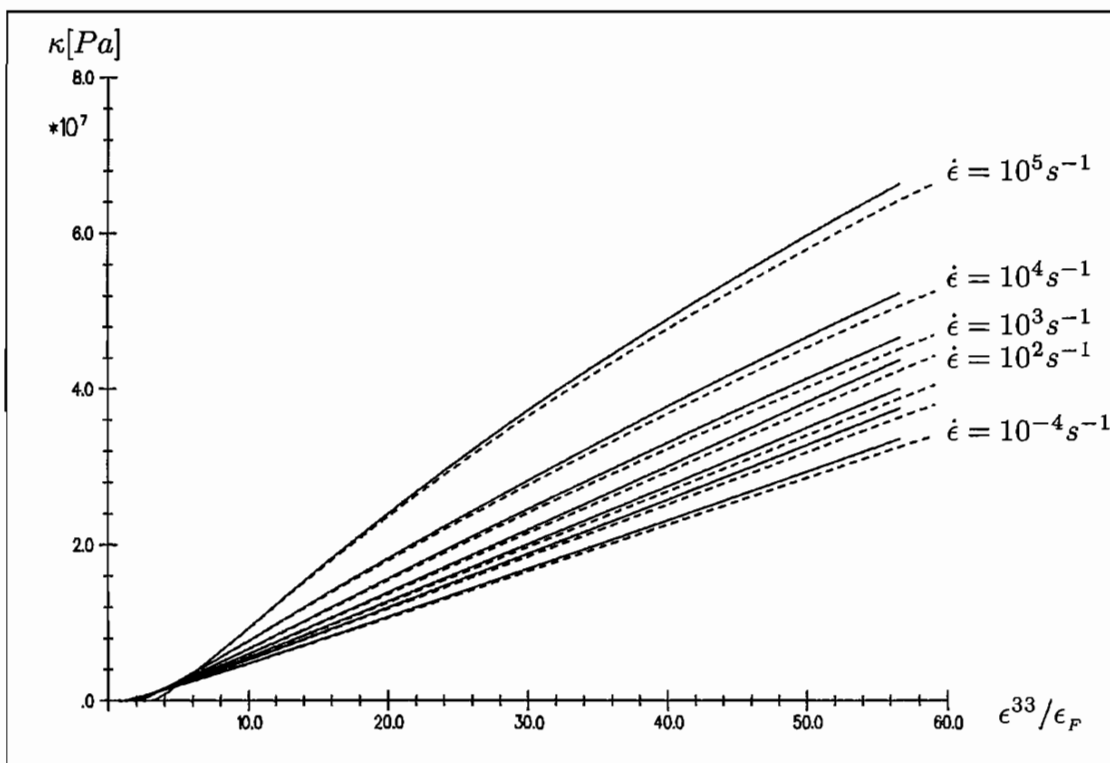


Abbildung 52: Verlauf der isotropen Verfestigung κ (mit Schädigung)

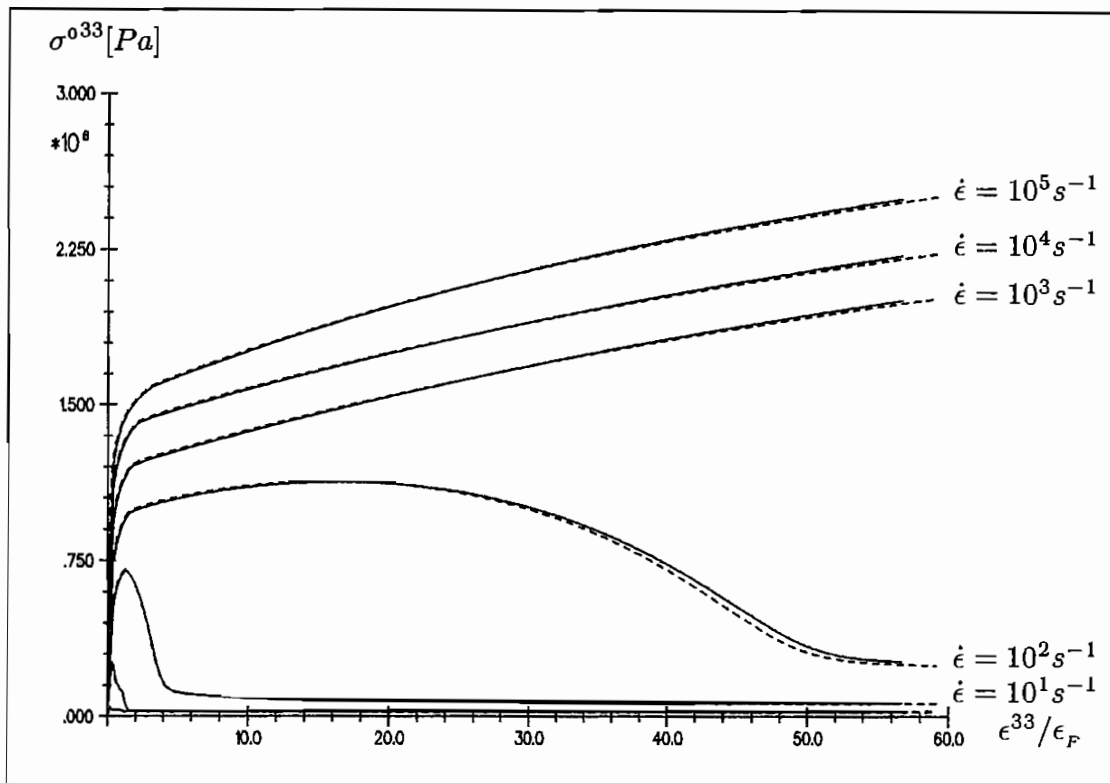


Abbildung 53: Verlauf der Spannungskonzentration σ^{033} (FE-Ergebnisse gestrichelt, Stoffgesetzintegration durchgezogen)

In den folgenden Abbildungen sind die Verläufe der internen Variablen zur Beschreibung der Materialschädigung in Abhängigkeit der Dehnung in axialer Richtung (ϵ^{33}) dargestellt. Auch hierbei wird die gute Übereinstimmung zwischen der Finite-Elemente-Simulation des Zugversuches und der einaxialen Stoffgesetzintegration deutlich.

Abbildung 53 zeigt den Verlauf der lokalen Spannungskonzentrationen σ^{033} , diese bewirken (zusammen mit den Temperaturkonzentrationen Θ^0) über die im (σ^0, Θ^0) -Raum formulierten Fließ- und Belastungsbedingungen die Evolution der Mikroschädigung durch Mikroscherbänder und Mikroporen.

Abbildung 54 zeigt die Entwicklung des Porenvolumenanteils ξ , Abbildung 55 stellt den Verlauf der Komponente Z^{033} des Scherbandschädigungstensors \underline{Z}^0 dar.

Wie beim Verlauf der isotropen Verfestigung liefert die FE-Simulation auch etwas geringere Werte für die Schädigungsvariablen ξ und \underline{Z}^0 , da die Prozeßgeschwindigkeit bei der Finite-Elemente-Modellierung mit zunehmender Dehnung leicht abfällt.

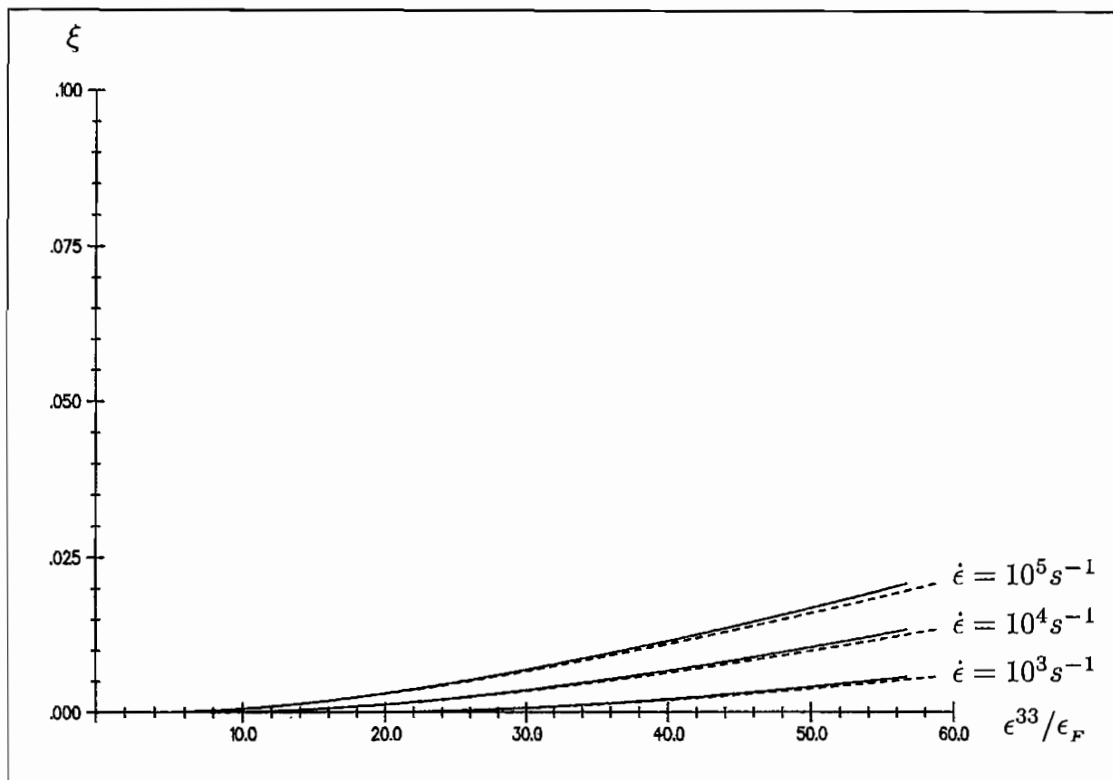


Abbildung 54: Verlauf des Porenvolumenanteils ξ

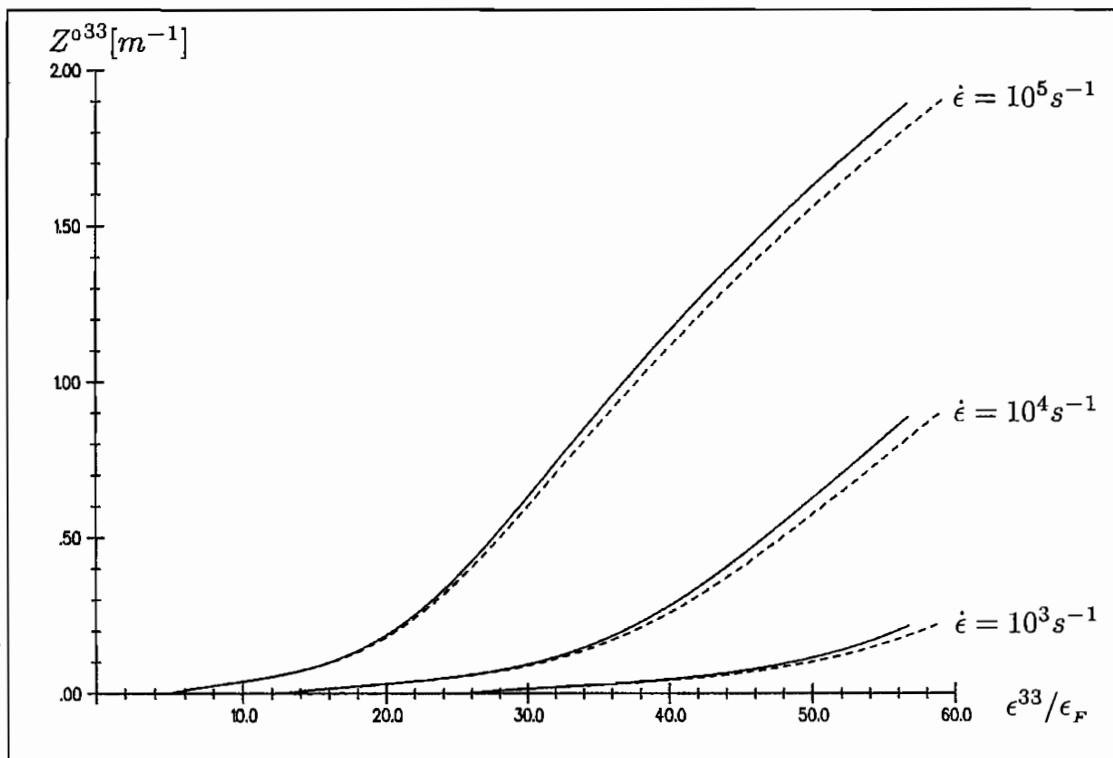


Abbildung 55: Verlauf der Schädigungsvariablen Z^{033}

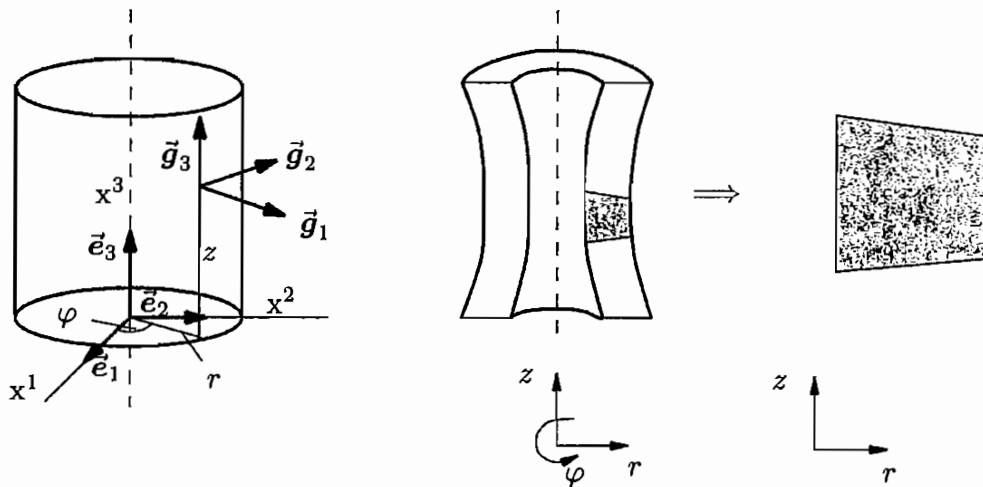


Abbildung 56: Ringelement für rotationsymmetrische Strukturen

7.3 Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers

Mit Hilfe einer Finite-Elemente-Formulierung für axialsymmetrische Strukturen zur Berechnung von physikalisch und geometrisch nichtlinearem Materialverhalten (siehe Kapitel 6) läßt sich bereits eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen bei hohen Deformationsgeschwindigkeiten simulieren.

Dies wird im folgenden anhand zweier ausgewählter Beispiele verdeutlicht. Im ersten Beispiel wird ein Aufstachversuch simuliert, bei dem ein zylindrischer Körper auf eine starre, glatte Wand stößt (Abbildung 57a).

Das zweite Beispiel zeigt die numerische Simulation des Durchschlagversuches, bei dem ein starrer zylindrischer Körper auf eine eingespannte Kreisplatte stößt (Abbildung 57b).

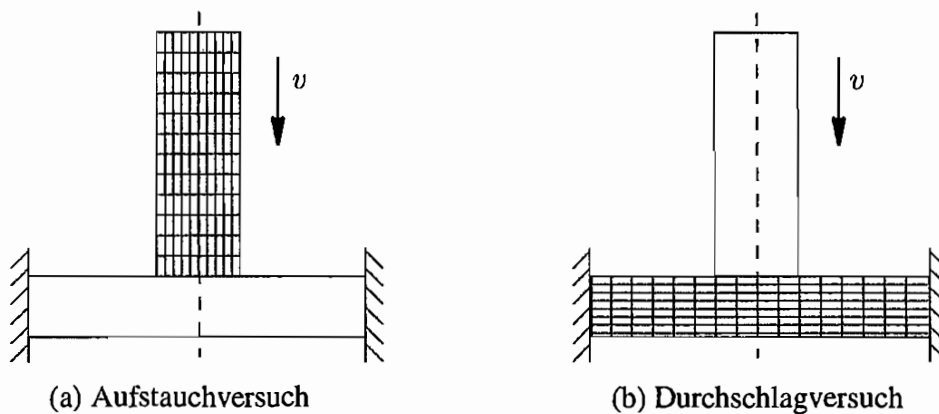


Abbildung 57: Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers

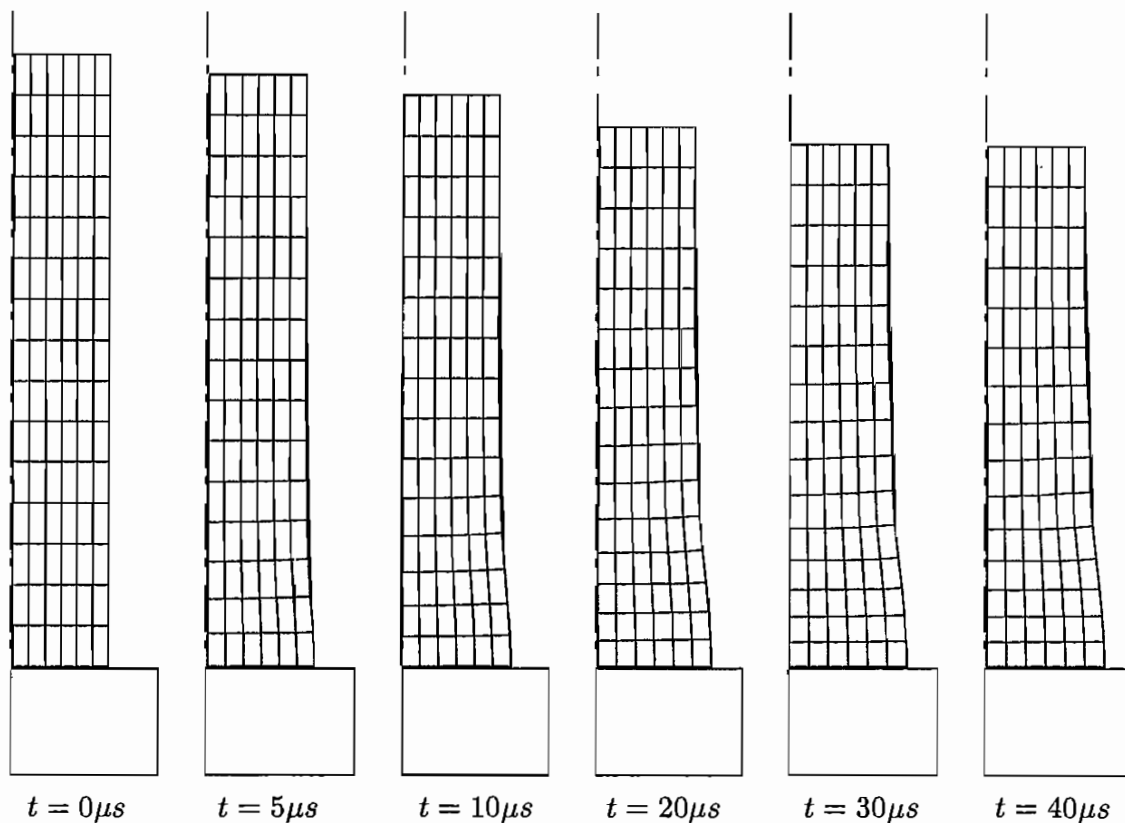


Abbildung 58: Ausgangskonfiguration und verformter Zustand zu verschiedenen Zeiten beim Aufstauchversuch (Verformungen 4-fach vergrößert)

7.3.1 Vertikaler Stoß eines zylindrischen Körpers auf eine starre, glatte Wand

Beim Aufstauchversuch stößt ein zylindrischer Körper gegen eine starre Wand. Der von TAYLOR 1948 entwickelte Versuch wird wegen der einfachen Durchführbarkeit häufig als Vergleichsmöglichkeit für numerische Simulationen verwendet [8, 42, 52, 106]. Versuchsparameter sind, neben unterschiedlichen Werkstoffen, die Auftreffgeschwindigkeit v und die Geometrie der Probe.

Abbildung 58 zeigt die numerische Simulation des Deformationsverhaltens einer zylindrischen Vollprobe mit 60.0 mm Länge und 20.0 mm Durchmesser, die mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s auf eine starre, glatte Wand trifft. Die Deformation des Körpers ändert sich zwischen 30 und $40\mu\text{s}$ kaum noch; nach etwa $42\mu\text{s}$ wechselt die Kontaktkraft das Vorzeichen und zeigt damit an, daß der Zylinder sich wieder von der Wand ablöst.

Die Spannungsverteilung σ^{33} (Spannung in Längsrichtung beim Schnitt quer zur Längsrich-

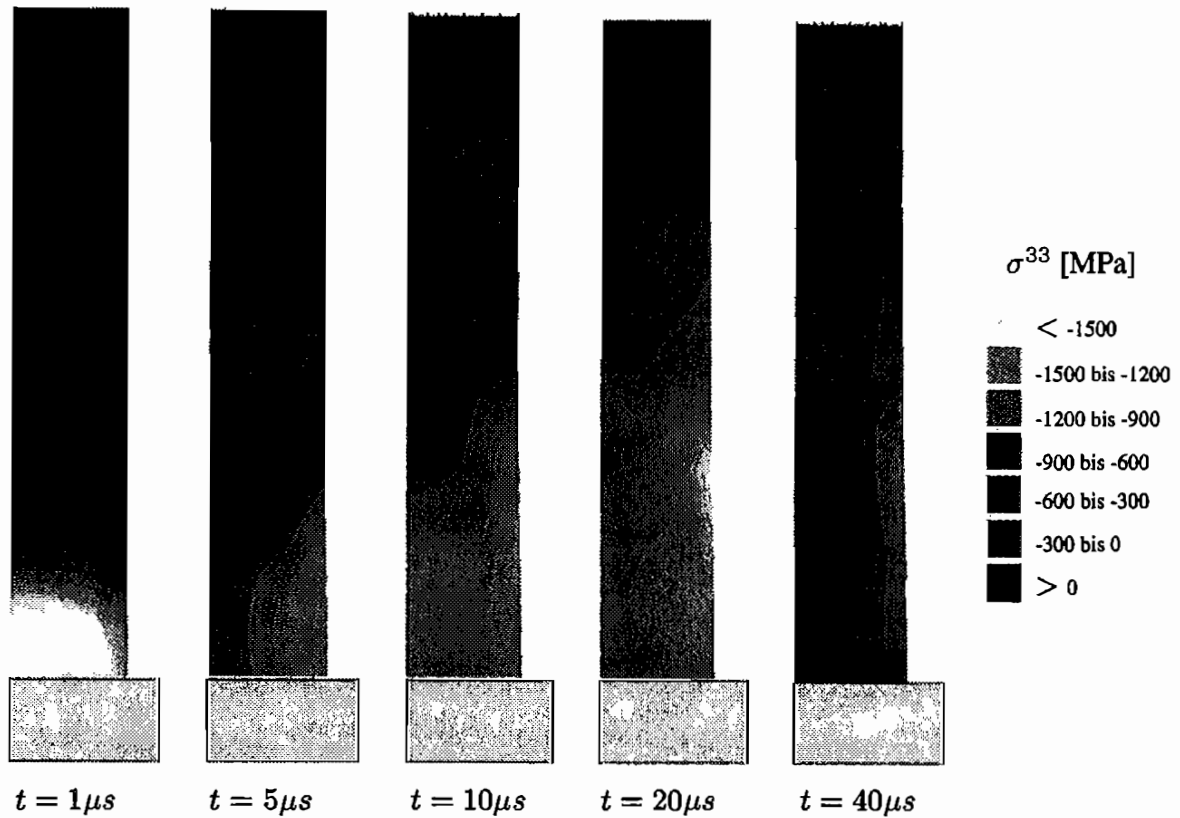


Abbildung 59: Spannungsverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Aufstachversuch

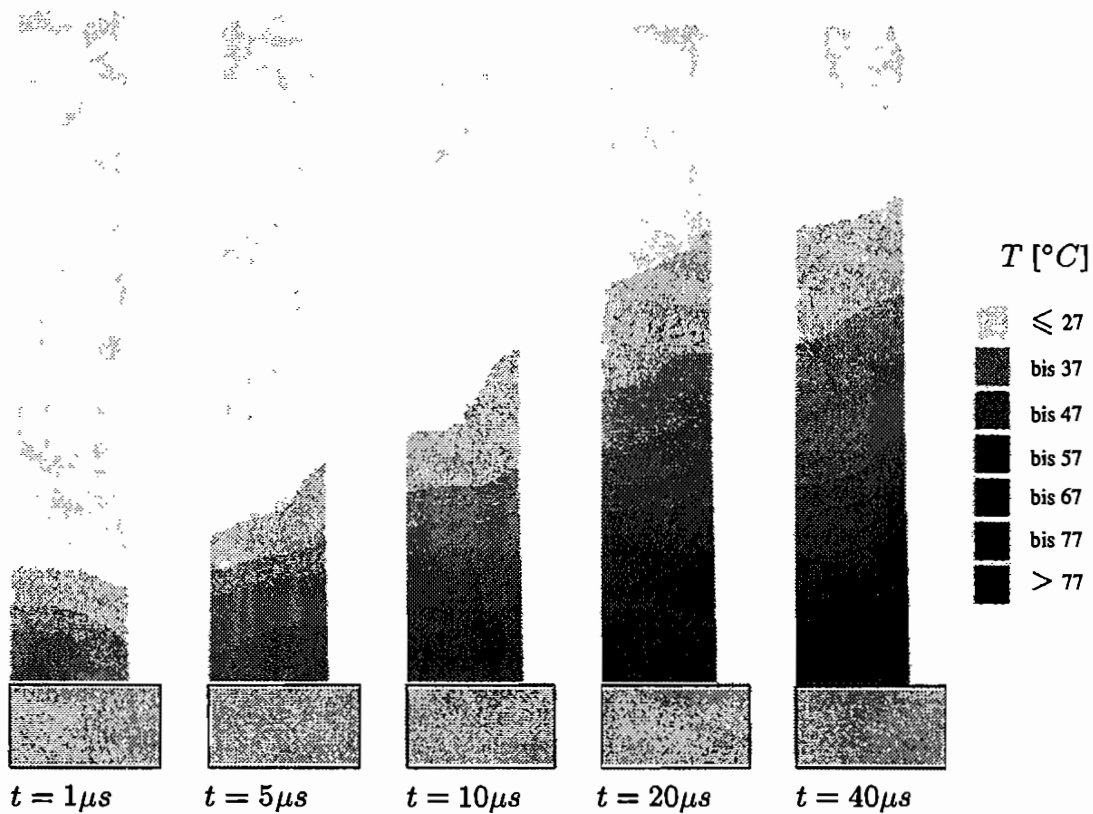


Abbildung 60: Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Aufstachversuch

ung) ist zu verschiedenen Zeiten in Abbildung 59 graphisch dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der rasche Abbau der Spannungsspitzen an der Kontaktfläche. Der zeitliche Verlauf der Spannungen im Kontaktbereich ist für zwei Stellen (im Zentrum des Stoßes bei $r = 0 \text{ mm}$ und am Randknoten bei $r = 10 \text{ mm}$) in den Abbildungen 61 und 62 verdeutlicht.

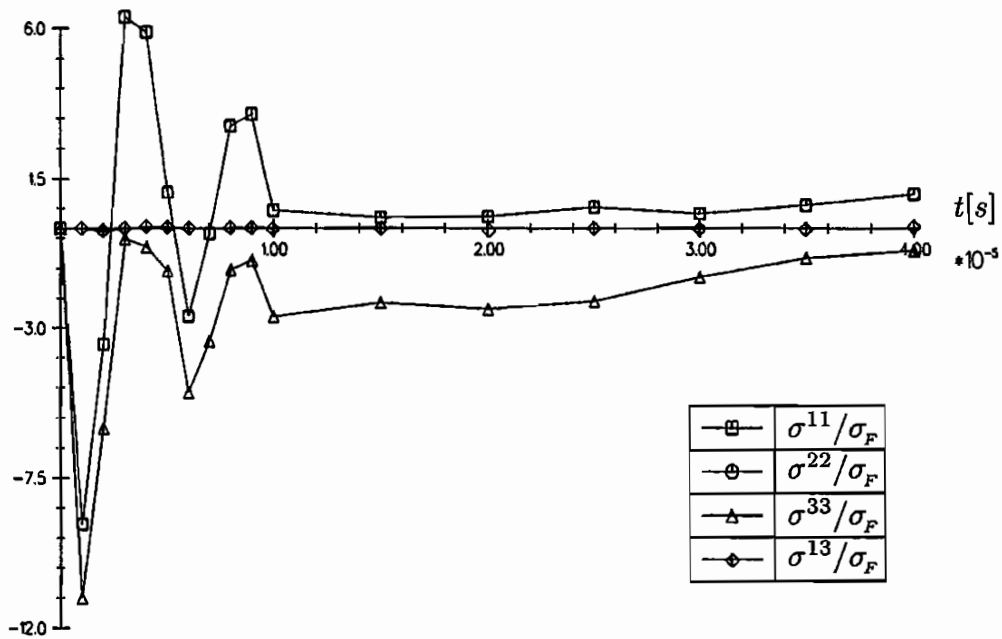


Abbildung 61: Spannungsverlauf im Kontaktbereich an der Stelle $r = 0 \text{ mm}$

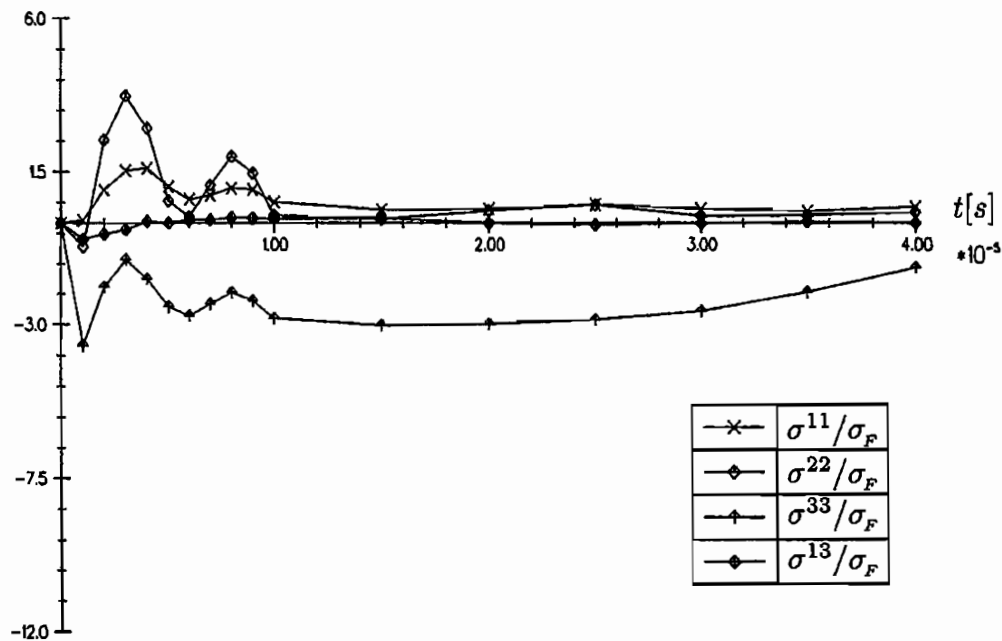


Abbildung 62: Spannungsverlauf im Kontaktbereich an der Stelle $r = 10 \text{ mm}$

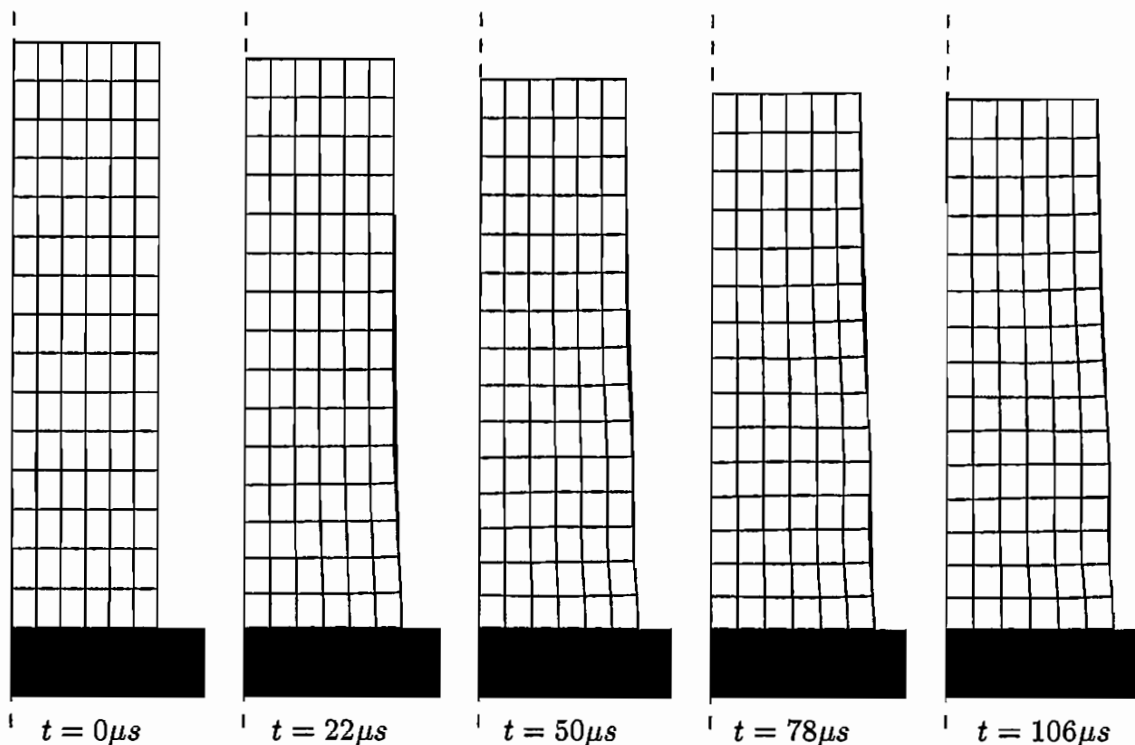


Abbildung 63: Ausgangskonfiguration und verformter Zustand zu verschiedenen Zeiten beim Aufstauchversuch mit $v = 207.4 \text{ m/s}$

Abbildung 60 zeigt eine Erwärmung um über 35°C durch die plastischen Deformationen im Kontaktbereich. Wärmeleitung wurde dabei vernachlässigt, da der betrachtete Prozeß im Bereich von wenigen Mikrosekunden abläuft. Die Länge der zylindrischen Probe verkürzt sich bei der Deformation auf 57.7 mm .

Deutlich stärker wird die Erwärmung bei größeren Auftreffgeschwindigkeiten. Experimentelle Ergebnisse des Deformationsverhaltens für Stoßgeschwindigkeiten von $v = 183.8 \text{ m/s}$ bis $v = 243.0 \text{ m/s}$ findet man bei BOIS ET AL. [8]. Abbildung 63 zeigt die Simulation des Deformationsverhaltens einer zylindrischen Probe, die mit einer Geschwindigkeit von $v = 207.4 \text{ m/s}$ auf eine starre, glatte Wand trifft. Die Probe mit einer Ausgangslänge von 160.0 mm und einem Durchmesser von 81.0 mm hat sich nach $50 \mu\text{s}$ auf 150.1 mm und nach $106 \mu\text{s}$ auf 145.1 mm verkürzt.

Die experimentellen Untersuchungen von BOIS ET AL. [8] für den Werkstoff *30 NCD 16*, mit einer etwas größeren Proportionalitätsgrenze als das verwendete Modell, ermitteln für diesen Aufstauchversuch mit $v = 207.4 \text{ m/s}$ eine Probenlänge von 152.1 mm nach $50 \mu\text{s}$ und 147.0 mm nach $106 \mu\text{s}$.

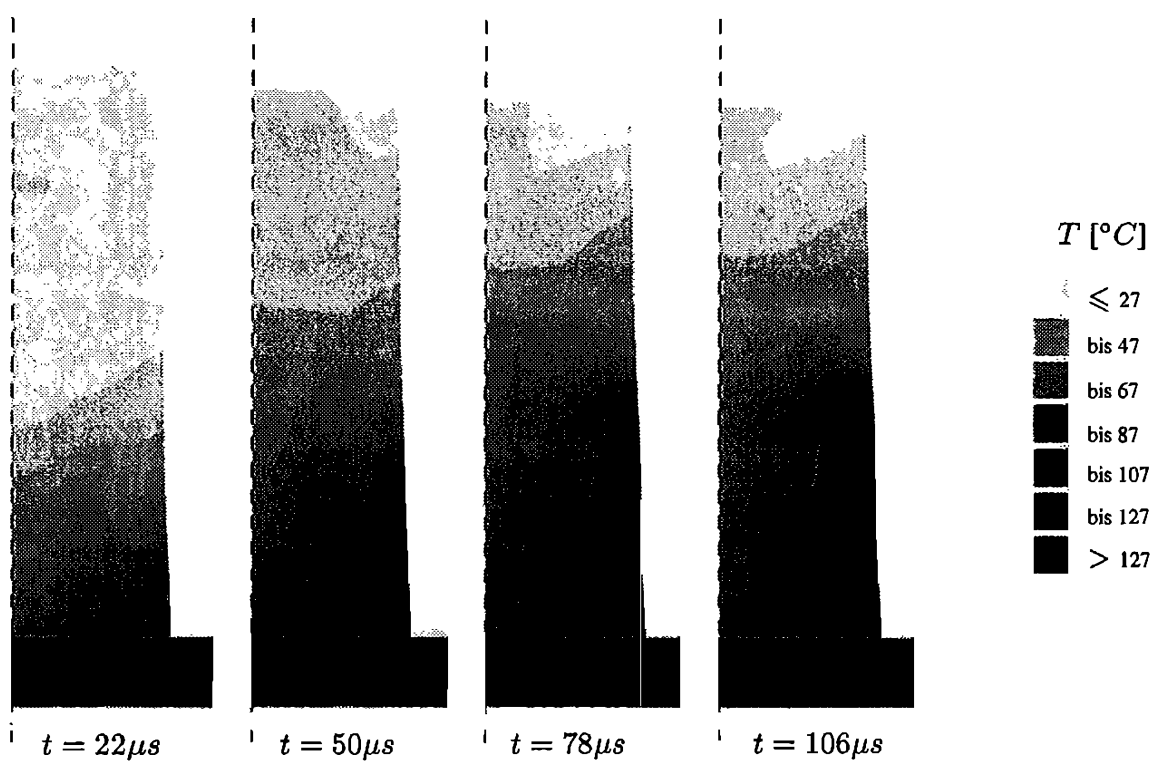


Abbildung 64: Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Aufstauchversuch mit $v = 207.4 m/s$

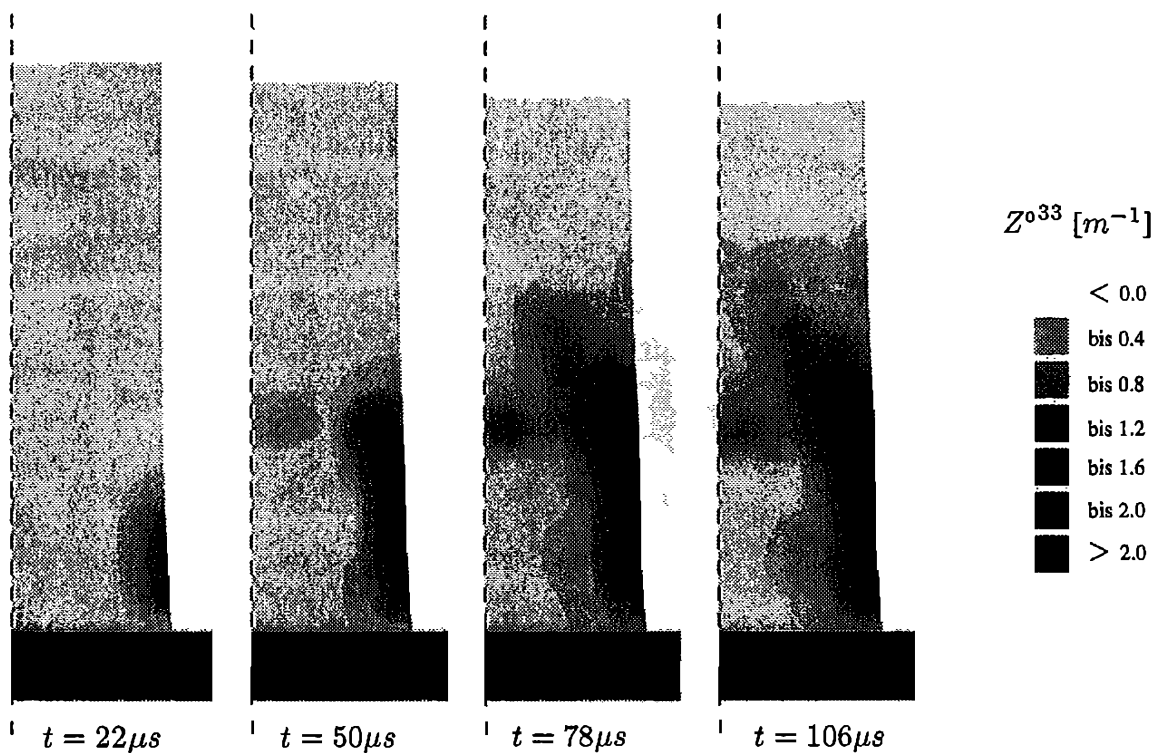


Abbildung 65: Verteilung der Z^{033} Komponente des Schädigungstensors Z^0 zu verschiedenen Zeiten beim Aufstauchversuch mit $v = 207.4 m/s$

Die Temperaturverteilung in Abbildung 64 zeigt eine Erwärmung um über 110°C . Die Entwicklung des Schädigungstensors \underline{Z}° ist am Beispiel der Komponente Z^{033} in Abbildung 65 verdeutlicht.

7.3.2 Vertikaler Stoß eines starren zylindrischen Körpers auf eine Kreisplatte

Die numerische Simulation der Anfangsphase des Durchschlagversuches, bei dem ein starrer zylindrischer Körper auf eine eingespannte Kreisplatte stößt, ist in Abbildung 66 gezeigt.

Dargestellt wird das Deformations- und Schädigungsverhalten einer 10 mm starken Kreisplatte mit einem Durchmesser von 300 mm für zwei unterschiedliche Projektile. Die gleichschweren Projektile (Masse $m = 3.18\text{ kg}$) mit dem Durchmesser 30 mm (Projektile 1, durchgezogene Linien) und 20 mm (Projektile 2, gestrichelte Linien) stoßen mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s vertikal auf die am Rand eingespannte Kreisplatte.

Die Ergebnisse der Simulation sind jeweils für die Zeitpunkte $20\mu\text{s}$ und $40\mu\text{s}$ nach dem Auftreffen dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die stärkere Durchbiegung der Kreisplatte beim Stoß des zylindrischen Körpers mit dem kleineren Durchmesser von 20 mm . Nach $40\mu\text{s}$ hat sich die Kreisplatte bereits 3.4 mm gesenkt, während bei einem Durchmesser des stoßenden Zylinders von 30 mm erst eine Durchsenkung von 2.5 mm zu verzeichnen ist (Abbildung 66).

Zur Veranschaulichung des Zustandes der Struktur sind für diese Zeitpunkte auch die Spannungs- und Temperaturverläufe sowie die Verteilung der Schädigung in den Abbildungen 67 bis 72 gegenübergestellt.

Während beim Stoß des zylindrischen Körpers mit 30 mm Durchmesser nur geringe Temperaturerhöhungen von maximal 40°C nach $40\mu\text{s}$ (Abbildung 68) und nur eine geringe Schädigung des Materials (Abbildung 69) zu erkennen ist, zeigt die Platte beim Stoß des Körpers mit 20 mm Durchmesser bereits eine deutlich ausgeprägte Schädigung (Abbildung 72). Die Temperaturverteilung nach $40\mu\text{s}$ in Abbildung 71 zeigt Temperaturerhöhungen um über 100°C .

Die deutlich erhöhte Temperatur sowie die Scherbandverteilung deuten bereits das als "plugging" bezeichnete Ausstanzen eines Plattenteils in der zweiten Phase des Durchschlagversuches an.

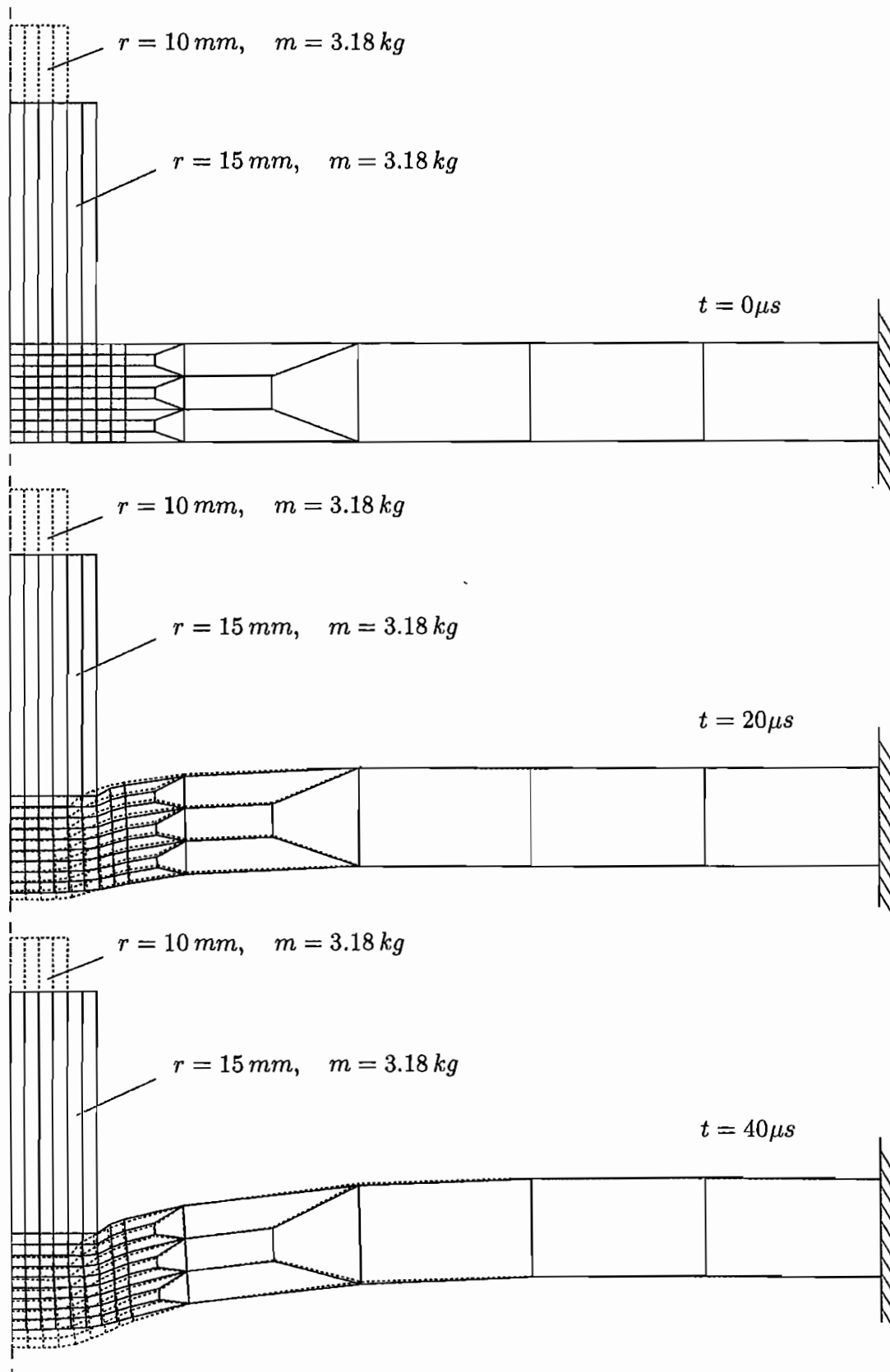


Abbildung 66: Numerische Simulation des Durchschlagversuches mit $v = 100\text{ m/s}$
(Verformungen 2-fach vergrößert)

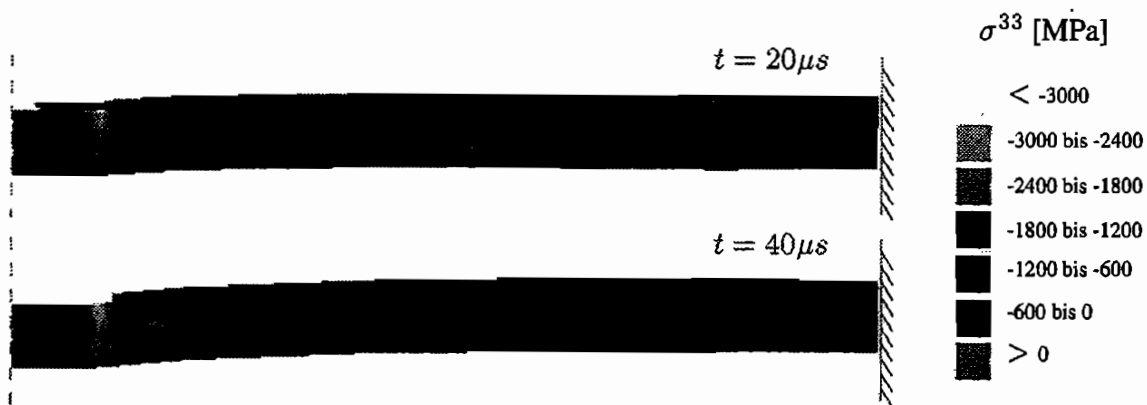


Abbildung 67: Spannungsverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100 \text{ m/s}$ ($\varnothing 30 \text{ mm}$, $m = 3.18 \text{ kg}$)

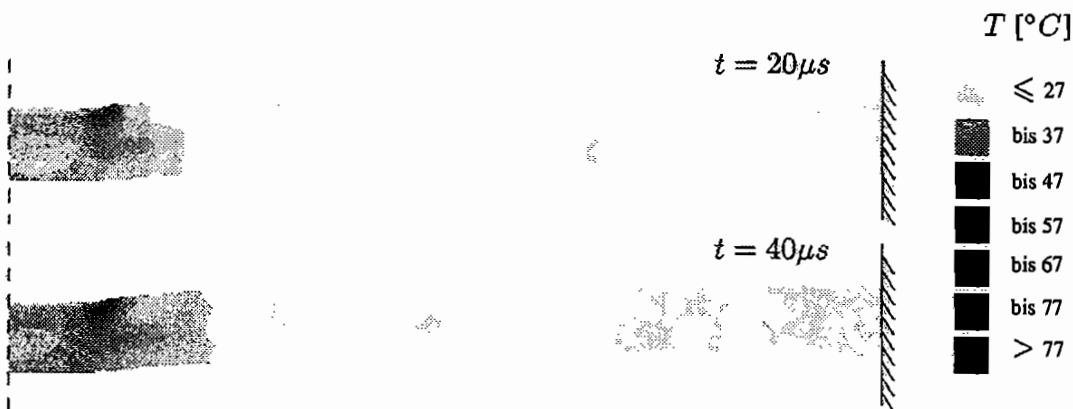


Abbildung 68: Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100 \text{ m/s}$ ($\varnothing 30 \text{ mm}$, $m = 3.18 \text{ kg}$)

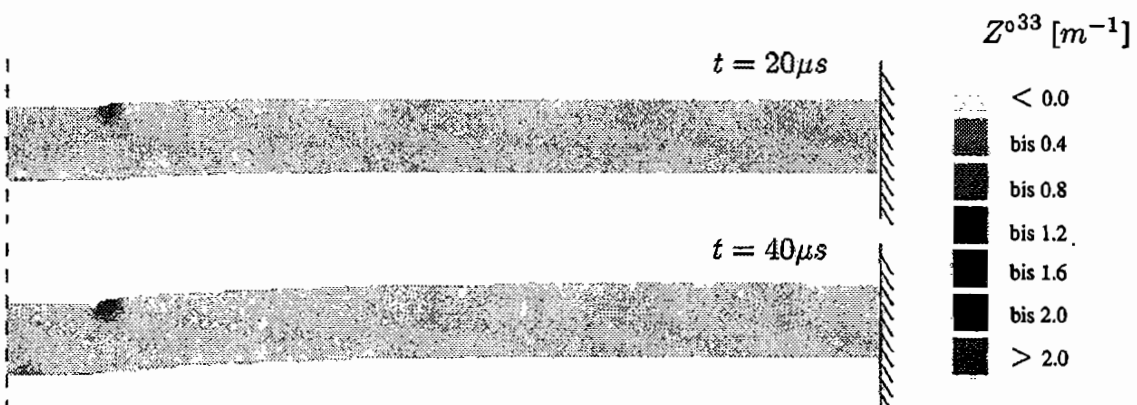


Abbildung 69: Verteilung der Z^{33} Komponente des Schädigungstensors Z^0 zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100 \text{ m/s}$ ($\varnothing 30 \text{ mm}$, $m = 3.18 \text{ kg}$)

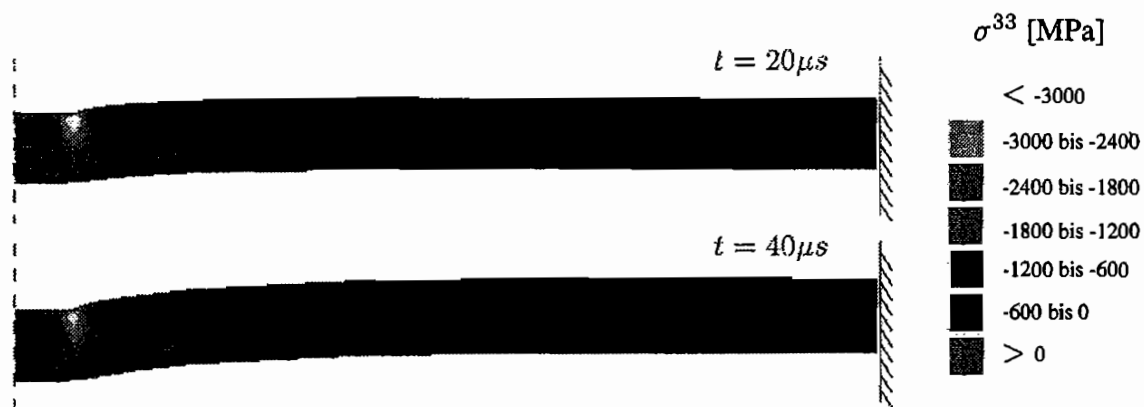


Abbildung 70: Spannungsverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100\text{ m/s}$ ($\varnothing 20\text{ mm}$, $m = 3.18\text{ kg}$)

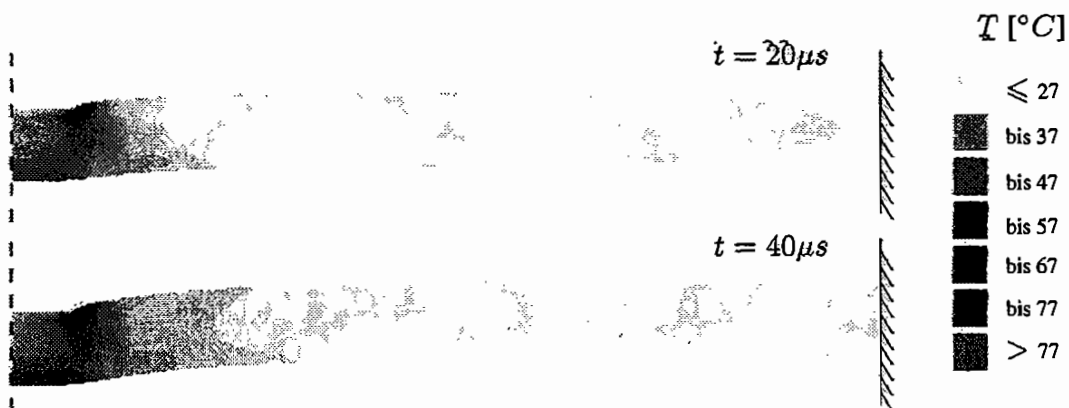


Abbildung 71: Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100\text{ m/s}$ ($\varnothing 20\text{ mm}$, $m = 3.18\text{ kg}$)

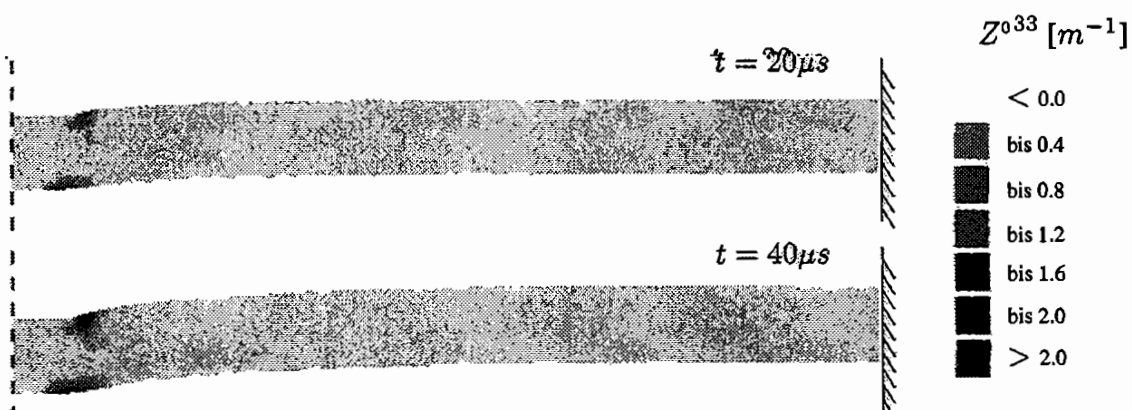


Abbildung 72: Verteilung der Z^{033} Komponente des Schädigungstensors Z^0 zu verschiedenen Zeiten beim Durchschlagversuch mit $v = 100\text{ m/s}$ ($\varnothing 20\text{ mm}$, $m = 3.18\text{ kg}$)

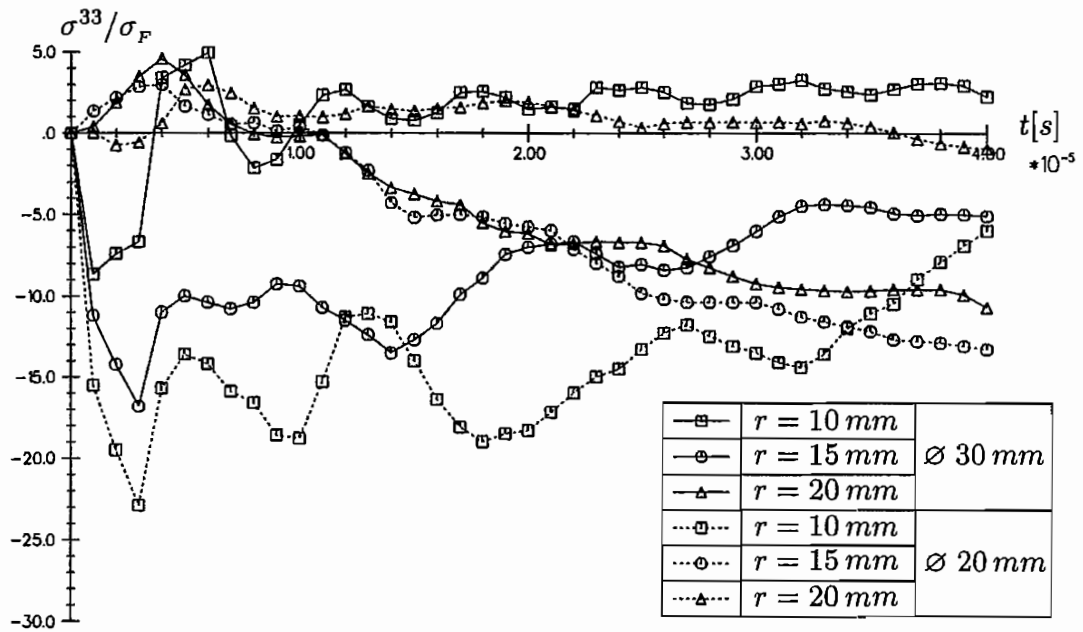


Abbildung 73: Spannungsverlauf im Kontaktbereich bei $r = 10, 15, 20\text{ mm}$

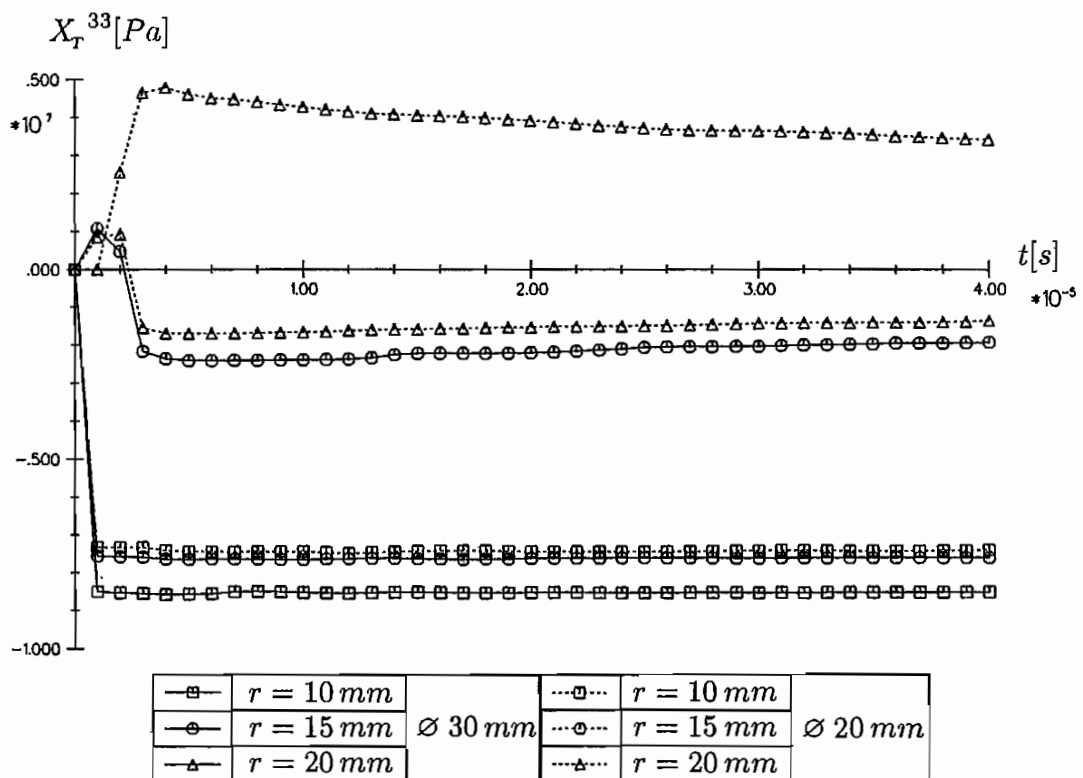


Abbildung 74: Verlauf der kinematischen Verfestigung (Komponente X_T^{33}) im Kontaktbereich bei $r = 10, 15, 20\text{ mm}$

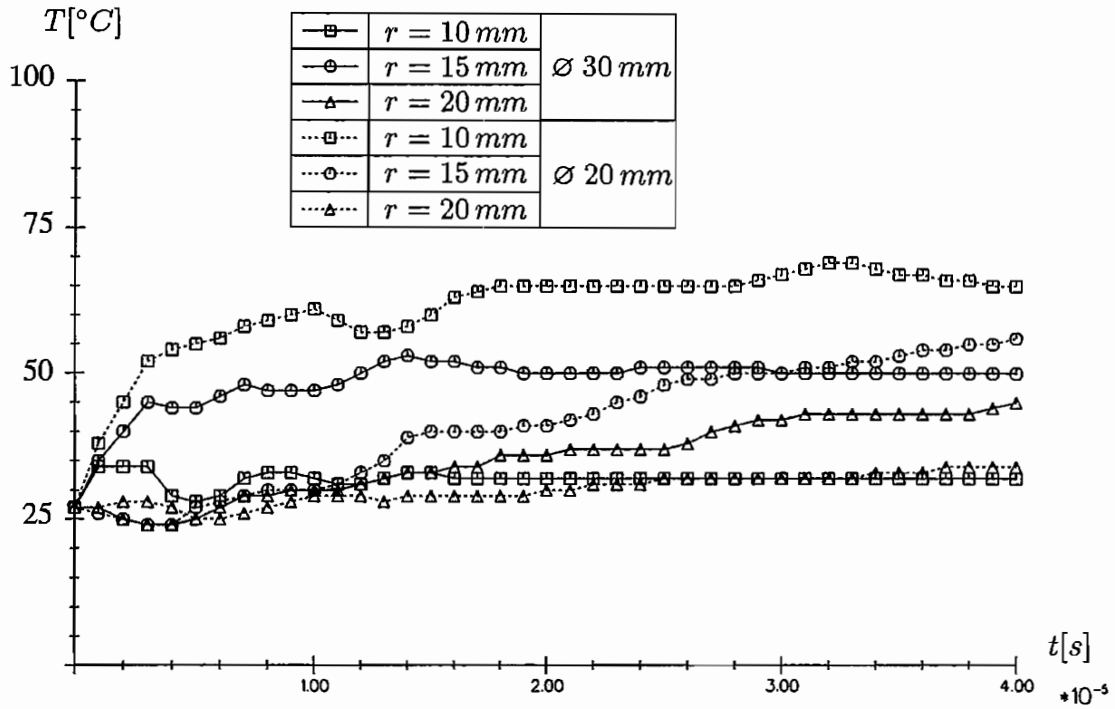


Abbildung 75: Temperaturverlauf im Kontaktbereich bei $r = 10, 15, 20\text{ mm}$

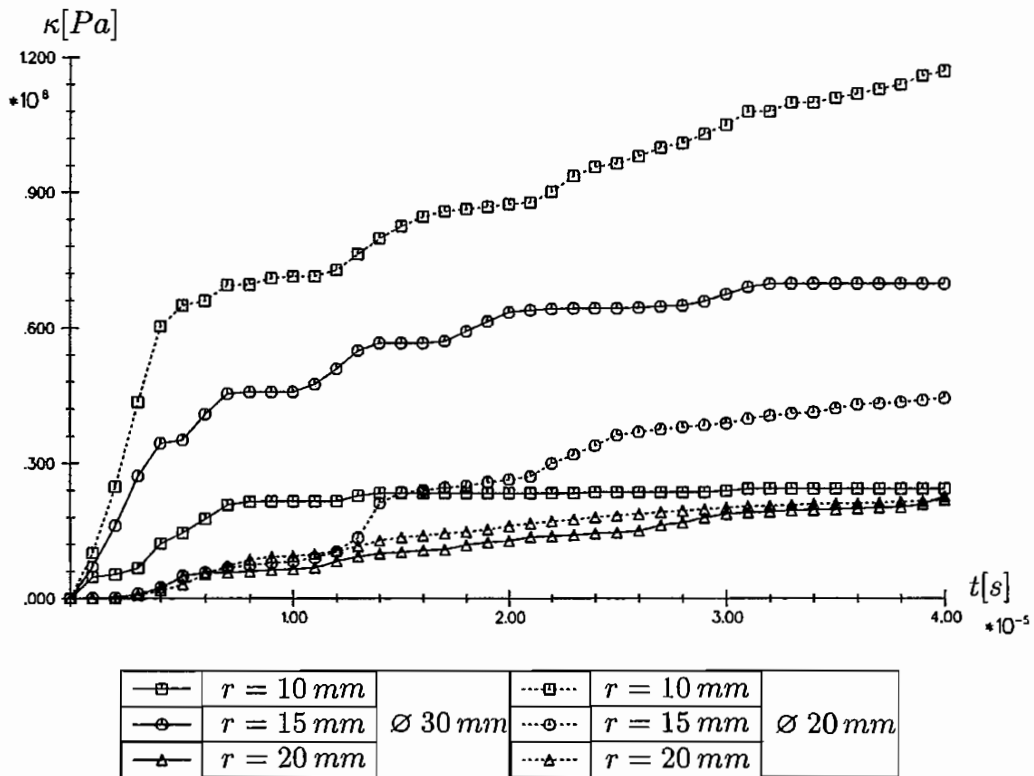


Abbildung 76: Zeitlicher Verlauf der isotropen Verfestigung bei $r = 10, 15, 20\text{ mm}$

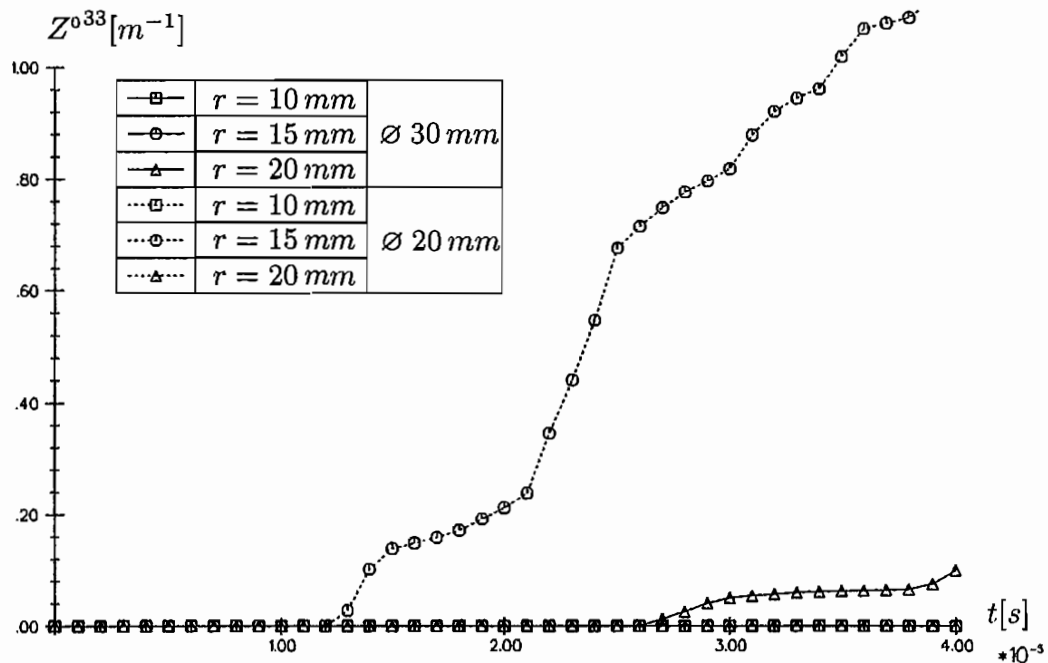


Abbildung 77: Schädigungsverlauf im Kontaktbereich bei $r = 10, 15, 20 \text{ mm}$

In den Abbildungen 73 bis 77 sind die zeitlichen Verläufe von Spannung (Komponente σ^{33}), Temperatur T , Schädigung (Komponente Z^{033}), isotroper sowie kinematischer Verfestigung für drei Stellen im Kontaktbereich angegeben. Gestrichelt eingezeichnet sind wiederum die Verläufe beim Stoß des zylindrischen Körpers mit dem Durchmesser 20 mm .

Ersichtlich ist, daß die Schädigung im Abstand von etwa 5 mm um den Außenradius des auftreffenden Projektils entsteht, in den anderen Bereichen der Platte ist sie vernachlässigbar, so daß diese Kurven in Abbildung 77 bei $Z^{033} \approx 0.0 \text{ m}^{-1}$ liegen.

7.4 Vergleich verschiedener Integrationsverfahren

Die Rechenzeit bei der numerischen Simulation des vertikalen Stoßes wird im wesentlichen durch die Zeitintegration des Materialmodells bestimmt. Daher kommt dem gewählten Integrationsverfahren zur Zeitintegration des Kontinuums-Damage-Modells eine besondere Bedeutung bei.

Die zahlreichen Algorithmen zur numerischen Integration von Anfangswertproblemen der Form

$$\{\dot{\mathbf{y}}\} = \{\mathbf{f}\}(\{\mathbf{y}\}, t) \quad (7.32)$$

mit

$$\{\mathbf{y}\}(t_0) = \{\mathbf{y}_0\} \quad (7.33)$$

lassen sich auf folgende Weise einteilen ^[100]:

I. Klassifikation nach der Integrationsart:

1. explizite Verfahren
2. Predictor-Corrector Verfahren
3. implizite Verfahren

II. Klassifikation nach Anzahl der verwendeten vorangehenden Werte:

1. Einschrittverfahren
2. Mehrschrittverfahren
3. Extrapolationsverfahren

Die numerischen Integrationsalgorithmen berechnen den Funktionswert ${}^{t^i + \Delta t^i}\{\mathbf{y}\}$ zur Zeit $t^i + \Delta t^i$ im allgemeinen nach der Näherungsformel

$${}^{t^i + \Delta t^i}\{\mathbf{y}\} = \sum_{j=0}^k a_j {}^{t^i - j\Delta t^i}\{\mathbf{y}\} + \sum_{m=-1}^l b_m {}^{t^i - m\Delta t^i}\{\dot{\mathbf{y}}\} \quad (7.34)$$

Die Evolutionsgleichungen für das Kontinuums-Damage-Modell stellen ein Anfangswertproblem dar, das numerisch integriert werden muß. Nach Reduktion der Ordnung der Differentialgleichung für das Maß der Prozeßgeschwindigkeit u

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} = \ddot{u} &= -c(\alpha + PG)v - \frac{c^2}{4}(\alpha + PG)^2\{u - u_{EQ}(PG)\} \end{aligned} \quad (7.35)$$

erhält man ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Faßt man die Gleichungen zu einem n -Tupel $\{y\}$ zusammen, ergibt sich ein Anfangswertproblem gemäß Gleichung (7.32).

Dieses System enthält noch eine gegenseitige Abhängigkeit der Raten von Temperatur $\dot{\Theta}$, Spannung $\overset{\square}{\sigma}$ und den schädigungsinduzierten Verzerrungsraten \underline{D}_{DS} und \underline{D}_{DP} . Separiert man diese Gleichungen und eliminiert die schädigungsinduzierte Verzerrungsrate \underline{D}_{DP} aus den Gleichungen für $\dot{\Theta}$, $\overset{\square}{\sigma}$ und \underline{D}_{DS} , erhält man ein Gleichungssystem erster Ordnung der Form (siehe auch Anhang C):

$$\begin{bmatrix}
 [A]^{\sigma\sigma} & [A]^{\sigma\Theta} & [A]^{\sigma D} \\
 [A]^{\Theta\sigma} & [A]^{\Theta\Theta} & [A]^{\Theta D} \\
 [A]^{D\sigma} & [A]^{D\Theta} & [A]^{DD}
 \end{bmatrix}_{9 \times 9}
 \begin{bmatrix}
 \overset{\square}{\sigma}^{11} \\
 \overset{\square}{\sigma}^{22} \\
 \overset{\square}{\sigma}^{33} \\
 \overset{\square}{\sigma}^{13} \\
 \dot{\Theta} \\
 D_{DS}^{11} \\
 D_{DS}^{22} \\
 D_{DS}^{33} \\
 D_{DS}^{13}
 \end{bmatrix}_{9 \times 1}
 =
 \begin{bmatrix}
 v_{1,1} - D_{VT}^{11} - A_8 LC_{DP10} \\
 \frac{v_1}{(x_1)^3} - D_{VT}^{22} - \frac{A_8}{(x_1)^2} LC_{DP10} \\
 v_{3,3} - D_{VT}^{33} - A_8 LC_{DP10} \\
 \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) - D_{VT}^{13} \\
 \Theta_1 + \Theta_2 LC_{z0} + \Theta_3 LC_{DP10} \\
 A_0 \sigma'^{11} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{22} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{33} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{13} LC_{DS0}
 \end{bmatrix}_{9 \times 1} ,$$

das aufgrund der Belastungsbedingungen (7.12) und (7.16) nichtlinear ist. Sowohl die iterative Lösung dieses Gleichungssystems als auch die Integration des Differentialgleichungssystems erfordert eine feine Unterteilung der Schrittweite, da die verschiedenen Bausteine des Kontinuums-Damage-Modells nacheinander aktiviert werden und jeweils eine kleine Schrittweite zur Erfassung der Übergänge notwendig ist.

Die numerische Steifheit dieses Materialmodells resultiert im wesentlichen aus den Evolutionsgleichungen für das Maß der Prozeßgeschwindigkeit u sowie für die Spannungskonzentrationen $\overset{\square}{\sigma}^0$. Dies liegt zum einen an der indirekten Abhängigkeit der Evolutionsgleichungen von u (über die Materialfunktionen, siehe Anhang A) und ist zum anderen durch die Evolutionsgleichung für u selbst (Abhängigkeit von der Prozeßgeschwindigkeit und damit von der Temperatur) begründet. Die sich aufgrund des Temperatureinflusses ständig verändernde Prozeßgeschwindigkeit PG erfordert eine feine Unterteilung der Schrittweite bei der Integration des Differentialgleichungssystems.

Eine Reduzierung der Rechenzeit kann durch die Vorabintegration von \ddot{u} für einen gegebenen Belastungsschritt und der anschließenden Verwendung eines konstanten Wertes für die Änderung des Maßes der Prozeßgeschwindigkeit ($\dot{u} = konst.$) erreicht werden. Zur Integration der separierten Differentialgleichung für \ddot{u} wird ein Standard RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM-Algorithmus mit konstanter Schrittweite ^[29] sowie ein RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM-Algorithmus mit Schrittweitensteuerung benutzt. Letzterer führte aber trotz erhöhter Rechenzeiten nicht zu genaueren Ergebnissen.

Unabhängig von diesen Vereinfachungen bestimmt im wesentlichen der jeweils gewählte Algorithmus zur Zeitintegration die erreichte Genauigkeit, Stabilität und Rechengeschwindigkeit. Die Anforderung, Ergebnisse hoher Genauigkeit mit möglichst geringem Aufwand zu erzielen, hatte zur Folge, daß eine Vielzahl unterschiedlicher Varianten der Integrationsverfahren entwickelt wurde.

Mehrschrittverfahren berücksichtigen mehrere zurückliegende Funktionswerte bei der Integration und erfordern dazu eine zusätzliche Startrechnung, die mit einem Einschrittverfahren durchgeführt werden muß. Hauptnachteil der Mehrschrittverfahren bei der Integration des vorliegenden Kontinuums-Damage-Modells ist, daß die Schrittweite während des Rechenlaufs nur schwer verändert werden kann (WALLER ^[100]). Aus Gründen der numerischen Effizienz kommen daher hier nur *Einschrittverfahren* zur Anwendung.

Das einfachste *explizite Integrationsverfahren* ist die explizite Einschrittformel nach EULER (Polygonzugmethode):

$${}^{t^i + \Delta t^i} \{ \mathbf{y} \} = {}^{t^i} \{ \mathbf{y} \} + \Delta t^i {}^{t^i} \{ \dot{\mathbf{y}} \} \quad . \quad (7.36)$$

Dieses Verfahren mit der Konsistenzordnung 1 eignet sich jedoch nicht zur Integration des Materialmodells, da es sehr instabil ist.

Ein seit den 20er Jahren bekanntes Verfahren ist das klassische RUNGE-KUTTA-Verfahren vierter Ordnung. Es handelt sich um ein einfaches aber wirksames explizites Verfahren, um relativ genaue Ergebnisse in annehmbarer Zeit zu erhalten. Hier wird der Zeitschritt bei gegebenem ${}^{t^i} \{ \mathbf{y} \}$ zur Zeit t^i mit der Schrittweite Δt^i zum nächsten Wert ${}^{t^i + \Delta t^i} \{ \mathbf{y} \}$ zur Zeit $t^i + \Delta t^i$ über die Berechnung von 4 Hilfsgrößen ausgeführt. Man kann zeigen, daß für hinreichend 'vernünftige' Differentialgleichungen (d.h. $\{ \mathbf{f} \}(\{ \mathbf{y} \}, t)$ muß genügend oft differenzierbar sein) die so berechneten Werte ${}^{t^i} \{ \mathbf{y} \}$ die wahre Lösung beliebig genau annähern, wenn die Schrittweite Δt^i nur klein genug gewählt wird. Die klassische RUNGE-KUTTA-Formel ist deshalb so populär, da sie vierter Ordnung ist, das heißt bereits durch Versechsfachung der Schrittzahl erhält man

im Idealfall ein $6^4 = 1296$ mal genaueres Ergebnis ^[47].

Einigermaßen zuverlässige Aussagen kann man jedoch nur über den Fehler pro Schritt machen. Um Ergebnisse ernsthaft verwenden zu können, reicht die Kenntnis, daß man die Genauigkeit der numerischen Lösung beliebig steigern kann, nicht aus. Man braucht eine konkrete Fehlerabschätzung oder noch besser eine Fehlersteuerung, indem man die gewünschte Genauigkeit vorgibt und der Algorithmus die Ergebnisse mit dieser Genauigkeit liefert. Eine größere Genauigkeit erreicht man durch eine Schrittweitensteuerung. Hierzu wird der entstandene Fehler abgeschätzt und mit einer vorgegebenen Obergrenze verglichen. Ist der Fehler zu groß, wird der Schritt mit einer kleineren Schrittweite wiederholt, andernfalls erhöht man die Schrittweite für den nächsten Schritt. Diese individuelle Steuerung der Schrittweite steigert stets auch die Effizienz des Verfahrens, da sich das numerische Verhalten fast aller Differentialgleichungen mal schnell und dann wieder sehr langsam ändert, so daß eine konstante Schrittweitenwahl nicht sinnvoll ist. ^[47]

In den 60er Jahren wurden unter anderem von FEHLBERG ^[39,40] eingebettete Verfahren entwickelt, die auch die Grundlage der moderneren Verfahren von DORMAND & PRINCE ^[34,35] sind. Das Prinzip beruht darauf, zwei aufeinander abgestimmte RUNGE-KUTTA-Formeln 'auf einmal' zu berechnen, wobei eine der Ordnung q und die zweite der Ordnung p ist. Eines der Ergebnisse ist genauer als das andere, und ihre Differenz folglich eine Abschätzung für den Fehler:

$$\begin{aligned} \{f\}_0 &= \{f\}(t^i\{y\}, t^i) \\ \{f\}_m &= \{f\}(t^i\{y\} + \Delta t^i \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} \{f\}_j, t^i - m\Delta t^i) \quad m = 1, s-1 \\ t^{i+\Delta t^i}\{y\} &= t^i\{y\} + \Delta t^i \sum_{m=0}^{s-1} b_m \{f\}_m \quad (\text{Ordnung } q) \quad (7.37) \\ t^{i+\Delta t^i}\{\hat{y}\} &= t^i\{y\} + \Delta t^i \sum_{m=0}^{s-1} \hat{b}_m \{f\}_m \quad (\text{Ordnung } p) \end{aligned}$$

Mit dieser Fehlerabschätzung kann die Schrittweite gesteuert werden. Die Formel der Ordnung q wird als Ergebnis weiterverwendet, während die Formel der Ordnung p nur zur Differenzbildung und Fehlerabschätzung benutzt wird. Im allgemeinen Rechenschema ist s die Anzahl der Zwischenschritte. Als Beispiel eines bewährten neueren Verfahrens sei hier die Formel RK5(4)7FS von DORMAND & PRINCE ^[34] genannt. Die Bezeichnung bedeutet 'RUNGE-KUTTA $q=5$. ($p=4$.) Ordnung mit $s=7$ Zwischenschritten, FSAL und S.'

FSAL bezeichnet die Eigenschaft 'First Same As Last' und heißt, daß das Verfahren die Anzahl

Bezeichnung	q	p	s	Bemerkung
RK4	4		12	*
FEHLBERG RK7(8)	7	8	13	
DOPRI RK5(4)7FM	5	4	7	hohe Genauigkeit
DOPRI RK5(4)7FS	5	4	7	hohe Stabilität
DOPRI RK5(4)7FC	5	4	7	Kompromiß aus M und S
DOPRI RK5(4)6M	5	4	6	hohe Genauigkeit
DOPRI RK6(5)8S	6	5	8	hohe Stabilität
DOPRI RK6(5)8C	6	5	8	Kompromiß aus M und S

Tabelle 2: Untersuchte explizite Integrationsverfahren

der Zwischenschritte s geringfügig vermindern kann, indem das letzte berechnete Zwischenergebnis eines erfolgreichen Schrittes ohne Neuberechnung als erstes Zwischenergebnis des nächsten Schrittes verwendet wird. Der letzte Buchstabe dient der feineren Unterscheidung, für welchen Spezialfall die Formel erstellt wurde (siehe Tabelle 2).

Implizite Integrationsverfahren zeichnen sich insbesondere durch ihre guten Stabilitätseigenschaften auch bei großen Zeitschritten aus. Ein großer Nachteil bei der Integration nichtlinearer Differentialgleichungssysteme besteht allerdings darin, daß in jedem Zeitschritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muß. Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} \{f_1\} &= \{f\}(t^i \{y\}, t^i) \\ \{f_2\} &= \{f\}(t^{i-j\Delta t^i} \{y\}, t^i - m\Delta t^i) \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$t^{i+\Delta t^i} \{y\} = t^i \{y\} + \Delta t^i [\gamma \{f_1\} + (1 - \gamma) \{f_2\}] \quad , \quad \gamma \neq 0$$

erhält man mit der Wahl der Koeffizienten zu $m = j = 1$ und $\gamma = 0.5$ die bekannteste

* Dieses Integrationsverfahren ist kein eingebettetes Verfahren und besitzt daher keine Kontrollordnung. Die Schrittweitensteuerung wird durch eine Vergleichsrechnung mit halbiertes Schrittweite realisiert.

Integrationsformel dieses Aufbaus, die Trapezregel. Die Wahl der Parameter zu $m = j = 0.5$ und $\gamma = 0$ führt auf eine implizite Mittelpunktsregel.

Implizite Verfahren
Trapezregel
Mittelpunktsregel

Tabelle 3: Untersuchte implizite Integrationsverfahren

Ein Vergleich der Rechenzeiten der untersuchten expliziten und impliziten Integrationsverfahren unter folgenden Rahmenbedingungen

- Berechnung eines Aufstauchversuchs mit $v = 100 \text{ m/s}$
- Diskretisierung mit 90 4-Knoten-Elementen
- Zugelassen wird ein relativer Fehler bei der Stoffgesetzintegration von 0.001
- Zeitschritte bei der Integration der Bewegungsgleichungen (Kombiniert mit der modifizierten NEWTON-RAPHSON-Iteration) von $\Delta t = 0.1 \mu\text{s}$ (die dann durch die Schrittweitensteuerung je nach Größe des relativen Fehlers noch feiner unterteilt werden)
- Vollständiges Modell 1.2LD unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses und der Schädigung für eine Ausgangstemperatur $\Theta_0 = 27^\circ \text{C}$
- Rechenzeit ist die auf einer SUN SPARCstation20 benötigte CPU-Zeit

ist in Tabelle 4 aufgeführt.

Alle Verfahren sind mit einer Schrittweitensteuerung ausgestattet und liefern im Rahmen der geforderten Genauigkeit gleichwertige Ergebnisse für den Spannungsverlauf sowie die internen Variablen.

Während das extrem steife, nicht modifizierte Differentialgleichungssystem sehr große Rechenzeiten benötigt, erreicht man durch die betrachtete Modifikation eine starke Verringerung der Integrationszeiten.

Besonders auffallend ist der gravierende Unterschied der Rechenzeiten der einzelnen Verfahren bei der Integration des nicht modifizierten Systems, während bei Vorabintegration von \ddot{u} insbesondere die Verfahren von DORMAND & PRINCE eng beieinander liegen.

Integrationsverfahren	Rechenzeit ohne Modifikation	Rechenzeit Vorabintegration von \ddot{u}
RK4	197 756 s	78 558 s
FEHLBERG RK7(8)	142 938 s	36 935 s
DOPRI RK5(4)7FM	51 817 s	11 362 s
DOPRI RK5(4)7FS	43 709 s	11 755 s
DOPRI RK5(4)7FC	42 217 s	12 193 s
DOPRI RK5(4)6M	48 606 s	11 325 s
DOPRI RK6(5)8S	55 060 s	13 906 s
DOPRI RK6(5)8C	42 914 s	13 599 s
implizite Trapezregel	225 945 s	44 671 s
implizite Mittelpunktsregel	161 239 s	43 755 s

Tabelle 4: Gegenüberstellung der Rechenzeiten verschiedener Integrationsverfahren für die Berechnung eines Aufstauchversuchs mit $v = 100 \text{ m/s}$

Die eingebetteten, expliziten Integrationsverfahren von DORMAND & PRINCE erweisen sich für das betrachtete Problem als die besten Verfahren.

8. Schlußbetrachtung

Zur Beschreibung des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen wurde das Kontinuums-Damage-Modell von BRUHNS, DIEHL & FORNEFELD um die Berücksichtigung eines weiteren Schädigungsmechanismus erweitert, um insbesondere die Anfangsphase des "spalling" als Folge von Zugwellenausbildungen und deren Reflexion besser simulieren zu können.

Dazu wurde eine skalarwertige interne Variable als Porenvolumenanteil der in einem repräsentativen Volumenelement als gleichmäßig verteilt angenommenen Mikroporen eingeführt. Der vorgestellte Ansatz ist auch in der Lage, eine Rückbildung des Porenvolumens durch die auf eine Zugwelle folgende Druckwelle zu beschreiben.

Das entwickelte Kontinuums-Damage-Modell ist gültig für die erste Phase eines Hochgeschwindigkeitsprozesses bis zur Entstehung eines Makrodefektes. Es ist in der Lage, Prozesse im Dehnratenbereich von $10^{-4} s^{-1}$ bis $10^5 s^{-1}$ zu beschreiben, bei denen thermisch aktivierte Versetzungsbewegungen vorliegen.

Die in den Evolutionsgleichungen enthaltenen Materialfunktionen und Parameter zur quantitativen Materialbeschreibung wurden mit Hilfe der Evolutionsstrategie ermittelt. Durch die getrennte Evolution von Teilpopulationen auf verschiedenen Rechnern wurde ein weiterer Baustein der biologischen Evolution, die Isolation, erfolgreich eingesetzt, um die Zahl der Zielfunktionsaufrufe zu erhöhen und die Dauer der Anpassung zu verkürzen.

Zur Simulation des vertikalen Stoßes eines zylindrischen Körpers wurde ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit eine inkrementelle Finite-Elemente-Formulierung entwickelt. Durch geometrische und physikalische Linearisierung wurde unter Verwendung einer Update-Lagrange-Formulierung und des isoparametrischen Konzepts der Algorithmus zur Lösung des nichtlinearen Problems formuliert.

Da der größte Teil der Rechenzeit bei der Simulation des vertikalen Stoßes für die Zeitintegration des Stoffgesetzes aufgewendet wird, wurden verschiedene explizite und implizite Integrationsverfahren auf ihre numerische Effizienz untersucht. Die besten Ergebnisse werden mit den eingebetteten, expliziten Runge-Kutta-Formeln von DORMAND & PRINCE erreicht.

Durch die Vorabintegration der Evolutionsgleichung für das Maß der Prozeßgeschwindigkeit und die anschließende Integration des reduzierten Differentialgleichungssystems konnte die Rechenzeit für einen Aufstauchversuch drastisch gesenkt werden, ohne die Genauigkeit der Ergebnisse zu verschlechtern.

Die Möglichkeiten der Ergänzungen sind vielfältig und sollten in erster Linie auf die Einbeziehung von Makrodefekten und dem damit verbundenen Übergang zur zweiten Phase der Materialbeschreibung abzielen.

Durch die Einbeziehung von Reibung an den Kontaktstellen kann die Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden noch weiter verbessert werden.

Anhang A: Materialfunktionen und Parameter des Modells 1.2LD

Zusammenstellung der für das Modell 1.2LD an fiktive einachsige Prozesse angepaßten Materialfunktionen und Materialparameter. Alle Materialparameter sind auf SI-Einheiten bezogen, so daß jeweils nur die Maßzahlen angegeben sind.

Es werden die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}\zeta &:= \frac{1}{\mathcal{J}_e} \|\underline{\mathbf{Z}}^0\| \\ \varsigma &:= \frac{1}{\mathcal{J}_e} \|\underline{\boldsymbol{\sigma}}^0\| \\ \varepsilon &:= \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vL}^0\| .\end{aligned}$$

Hierbei wird die Determinante \mathcal{J}_e benötigt:

$$\mathcal{J}_e = \det \underline{\mathbf{V}}_e \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}_e^2 = \det \underline{\mathbf{V}}_e^2 = \det (\underline{\mathbf{1}} + 2\underline{\mathbf{E}}_e) \approx 1 + 2\text{tr} \underline{\mathbf{E}}_e .$$

Mit Hilfe von (7.28) erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_e^2 &\approx 1 + 2 \left(3\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \frac{1}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \right) \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{J}_e^2 - 1}{2} &\approx 3\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + (3\lambda_{30} + \lambda_{40}) \left(1 + \frac{k_1 \zeta}{1 + k_2 \zeta} \right) \frac{1}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = f(\mathcal{J}_e) .\end{aligned}$$

Entwickelt man die Funktion $f(\mathcal{J}_e)$ in eine Taylorreihe um $\mathcal{J}_e = 1$ und bricht diese nach dem linearen Glied ab, so erhält man

$$\begin{aligned}f(\mathcal{J}_e) &\approx f(1) + f'(1)(\mathcal{J}_e - 1) \\ &\approx 3\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + (3\lambda_{30} + \lambda_{40}) \left(1 + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|} \right) \text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \\ &\quad - (3\lambda_{30} + \lambda_{40}) \left(1 + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|} + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{(1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|)^2} \right) \text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} (\mathcal{J}_e - 1)\end{aligned}$$

und damit eine quadratische Gleichung für \mathcal{J}_e :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_e^2 + \mathcal{J}_e \left(2\text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} (3\lambda_{30} + \lambda_{40}) \left(1 + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|} + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{(1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|)^2} \right) \right) \\ = \left(1 + 6\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + 2\text{tr} \underline{\boldsymbol{\sigma}} (3\lambda_{30} + \lambda_{40}) \left(2 + \frac{2k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|} + \frac{k_1 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|}{(1 + k_2 \|\underline{\mathbf{Z}}^0\|)^2} \right) \right) .\end{aligned}$$

Bei der Berechnung kleiner Deformation kann der Einfluß der Determinante \mathcal{J}_e vernachlässigt werden:

$$\mathcal{J}_e \approx 1 .$$

1) Materialfunktionen zur Beschreibung thermisch aktivierter Versetzungsmechanismen:

- Der Fließflächenradius g_T

$$g_T(\kappa, \Theta, u) = \Gamma_{T1}^{(0)}(\kappa, \Theta) \Gamma_{T1}^{(1)}(\kappa, \Theta) \Gamma_{T2}(u)$$

mit:

$$\Gamma_{T1}^{(0)}(\kappa, \Theta) = g_{T0} \left(1 - \chi_{gt4} \arctan \left(\chi_{gt5} \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - 1 \right) \right) \right) \left(1 + \frac{\chi_{gt1} \kappa + \chi_{gt3} \kappa^2}{1 + \chi_{gt2} \kappa} \right)^2$$

$$\Gamma_{T1}^{(1)}(\kappa, \Theta) = 1 - \chi_{gt9} \arctan \left(\chi_{gt10} \kappa \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - 1 \right) \right)$$

$$\Gamma_{T2}(u) = \chi_{gt6} + \frac{\chi_{gt7}}{u^{\chi_{gt8}}}$$

$$\begin{aligned} \chi_{gt1} &= 1.6 \cdot 10^{-7} & \chi_{gt2} &= 1.8 \cdot 10^{-6} & \chi_{gt3} &= 3.44 \cdot 10^{-15} \\ \chi_{gt4} &= 0.33 & \chi_{gt5} &= 2 & \chi_{gt6} &= -0.253 \\ \chi_{gt7} &= 0.1196 & \chi_{gt8} &= 0.517 & \chi_{gt9} &= 0.64 \\ \chi_{gt10} &= 10^{-8} & g_{T0} &= 6 \cdot 10^{16} \end{aligned}$$

- Der Gleichgewichtswert der Prozeßgeschwindigkeit u_{EQ}

$$u_{EQ}(PG) = u_0 - 2(u_0 - u_\infty) \left(U(PG) \right)^2 + (u_0 - u_\infty) \left(U(PG) \right)^4$$

$$\text{mit: } U(PG) = \frac{1}{\chi_{u2}} \log \left(1 + \chi_{u3} PG \right)$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 10^{-2} & u_\infty &= 0.0 \\ \chi_{u3} &= 2.6034 \cdot 10^4 & \chi_{u2} &= 10.177 \end{aligned}$$

- Die Überspannungsfunktion Φ_T

$$\Phi_T(\mathcal{F}_T) = 1 - e^{(-\chi_{t6} \mathcal{F}_T)}$$

$$\mathcal{F}_T = \frac{\frac{1}{\mathcal{F}_e} \sqrt{(\underline{\sigma}' - \underline{X}_T) \cdot (\underline{\sigma}' - \underline{X}_T)} - \sqrt{g_T}}{\sqrt{g_T}}$$

$$\chi_{t6} = 25$$

- Die plastische Verzerrungsrate γ_T

$$\gamma_T(\kappa, u) = \chi_{t7} u_{EQ}^{-1}(u) \left(\chi_{t1} + \chi_{t2} e^{-\chi_{t3} \kappa} + \chi_{t4} e^{-\chi_{t5} \kappa} \right)$$

$$u_{EQ}^{-1}(u) = \frac{1}{\chi_{u3}} \left[-1 + 10^{\left(\chi_{u2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{u_0 - u}{u_0 - u_\infty}}} \right)} \right]$$

$$\begin{array}{lll} \chi_{t1} = 1.47 & \chi_{t2} = -0.4387 & \chi_{t3} = 9.424 \cdot 10^{-6} \\ \chi_{t4} = 0.3008 & \chi_{t5} = 5.6233 \cdot 10^{-7} & \chi_{t7} = 0.83283 \end{array}$$

- Die Materialfunktion c_T

$$c_T(\kappa) = \chi_{ct6} \left(e^{C(\kappa)} - 1 \right)$$

$$C(\kappa) = \chi_{ct1} + \chi_{ct2} e^{-\chi_{ct3} \kappa} + \chi_{ct4} e^{-\chi_{ct5} \kappa}$$

$$\begin{array}{lll} \chi_{ct1} = 0.832 & \chi_{ct2} = 3.535 & \chi_{ct3} = 1.099 \cdot 10^{-6} \\ \chi_{ct4} = 3.687 & \chi_{ct5} = 4.68 \cdot 10^{-7} & \chi_{ct6} = 10^7 \end{array}$$

- Die Funktion $K(\kappa, \Theta)$

$$K(\kappa, \Theta) \equiv K(\kappa) = \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_{max}} \right)$$

$$\kappa_{max} = 1.0 \cdot 10^9$$

2) Materialfunktionen zur Beschreibung der Schädigung

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für $\underline{\sigma}^0$

$$d_1(\varsigma, u) = \chi_{s01} e^{-\chi_{s02} u - \chi_{s03} \varsigma}$$

$$d_2(\varsigma) = \chi_{s04} e^{-\chi_{s05} \varsigma}$$

$$d_3(\varsigma) = \frac{\chi_{s06}}{(1 + \chi_{s07} \varsigma)^{\chi_{s08}}}$$

$$d_4(\varsigma) = \frac{\chi_{s17}}{(1 + \chi_{s18} \varsigma)^{\chi_{s19}}}$$

$$d_5(\varsigma) = \frac{\chi_{s09}}{(1 + \chi_{s10} \varsigma)^{\chi_{s11}}}$$

$$m(\varsigma, \varepsilon) = \frac{\chi_{s12} \varepsilon}{(1 + \chi_{s13} \varsigma)^{\chi_{s14}} (1 + \chi_{s15} \varepsilon)^{\chi_{s16}}}$$

$$\begin{array}{lll} \chi_{s01} = 13 & \chi_{s02} = 10^3 & \chi_{s03} = 7 \cdot 10^{-6} \\ \chi_{s04} = 6 \cdot 10^{-8} & \chi_{s05} = 2.3 \cdot 10^{-5} & \\ \chi_{s06} = 10^5 & \chi_{s07} = 3.5 \cdot 10^{-5} & \chi_{s08} = 5.5 \\ \chi_{s09} = 1.2 & \chi_{s10} = 6.6 \cdot 10^{-3} & \chi_{s11} = 2 \\ \chi_{s12} = 2 \cdot 10^7 & \chi_{s13} = 2 \cdot 10^{-6} & \chi_{s14} = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi_{s015} &= 1 & \chi_{s016} &= 1 \\ \chi_{s017} &= 5 \cdot 10^{-3} & \chi_{s018} &= 1 \cdot 10^{-7} & \chi_{s019} &= 16 \end{aligned}$$

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für \underline{Z}^0

$$h_Z(\Theta^0) = \frac{h_{z0}}{1 + \chi_{z1} \Theta^0}$$

$$d_Z(\zeta, g_Z) = \frac{d_{z0}}{(1 + \chi_{z2} \zeta)^{\chi_{z3}}} \arctan(g_Z)$$

$$g_Z = G_Z / h_{z0}$$

$$G_Z = \frac{1}{J_e^2} \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \frac{1}{J_e} \nu_Z \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 - h_Z \geq 0$$

$$\nu_Z = 3 \cdot 10^4 \quad h_{z0} = 1.75 \cdot 10^{12} \quad d_{z0} = 1.06667 \cdot 10^{-18}$$

$$\chi_{z1} = 2 \quad \chi_{z2} = 0.8 \quad \chi_{z3} = 3$$

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für $\underline{\epsilon}_{DS}^0$

$$h_{DS}(\zeta) = \frac{h_{DS0}}{1 + \frac{2}{\pi} \chi_{z4} \arctan(\chi_{z5} \zeta)}$$

$$d_{DS}(\zeta, g_{DS}) = \frac{d_{DS0} \zeta}{1 + \chi_{z6} \zeta} \arctan(\chi_{z7} g_{DS})$$

$$g_{DS} = G_{DS} / h_{DS0}$$

$$G_{DS} = \frac{1}{J_e^2} \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \frac{1}{J_e} \nu_{DS} \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DS} \geq 0$$

$$\nu_{DS} = 3 \cdot 10^4 \quad h_{DS0} = 3.5 \cdot 10^{12} \quad d_{DS0} = 3.674235 \cdot 10^{-15}$$

$$\chi_{z4} = 35 \quad \chi_{z5} = 1 \quad \chi_{z6} = 0.1$$

$$\chi_{z7} = 10^2$$

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für ξ

$$h_{DP}(\Theta^0) = \frac{h_{DP0}}{1 + \chi_{\xi0} \Theta^0}$$

$$d_{DP1}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0, \xi) = (\vartheta_1(\Theta) + \vartheta_2(\Theta) \xi) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi1}}\right)$$

$$d_{DP2}(\Theta, \underline{\sigma}^0, \Theta^0) = \vartheta_3(\Theta) \arctan\left(\frac{G_{DP}}{\chi_{\xi2}}\right)$$

$$G_{DP} = \frac{1}{J_e} \sqrt{\underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'}} + \frac{1}{J_e} \nu_{DP} \operatorname{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DP} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \nu_{DP} &= 1.39 \cdot 10^{-2} & h_{DP0} &= 1.33 \cdot 10^6 \\ \vartheta_1(\Theta) &= 2.2 \cdot 10^{-6} & \vartheta_2(\Theta) &= 4.5 \cdot 10^{-5} & \vartheta_3(\Theta) &= 6 \cdot 10^{-5} \\ \chi_{\varepsilon_0} &= 8.7 & \chi_{\varepsilon_1} &= 4.2 \cdot 10^7 & \chi_{\varepsilon_2} &= 3 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für $\underline{\varepsilon}_{vL}^0$

$$\Phi_{vL}(g_v) = g_v = \frac{\frac{1}{\mathcal{J}_\varepsilon} \sqrt{\underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'}} - \sqrt{h_v}}{\sqrt{h_v}}$$

$$\gamma_{vL} = 0.6124 \quad h_v = 3 \cdot 10^9$$

- Die Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für Θ^0

$$d_{\Theta^0}(u, \Theta^0, g_v) = T_1(u) \left(1 - \frac{T_2(u) \Theta^0}{1 + T_2(u) \Theta^0} \right) g_v$$

$$T_1(u) = \chi_{\Theta_1} (1 + \chi_{\Theta_2} e^{-\chi_{\Theta_3} u})$$

$$T_2(u) = \chi_{\Theta_4} u^{\chi_{\Theta_5}}$$

$$\chi_{\Theta_1} = 10^{-2} \quad \chi_{\Theta_2} = 7.5 \cdot 10^4 \quad \chi_{\Theta_3} = 5 \cdot 10^2$$

$$\chi_{\Theta_4} = 2 \cdot 10^{14} \quad \chi_{\Theta_5} = 4$$

3) Materialfunktionen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

- Die Materialfunktionen zur Beschreibung des Einflusses der Schädigung auf das thermoelastische Verhalten

$$\omega(\zeta, \underline{\sigma}) = \frac{1}{\mathcal{J}_\sigma^2} \frac{k_1}{2(1+k_2\zeta)^2 \zeta} \left(\lambda_{3/0} (\text{tr} \underline{\sigma})^2 + \lambda_{4/0} \text{tr} \underline{\sigma}^2 \right)$$

$$\frac{\lambda_3(\zeta)}{\lambda_{3/0}} = \frac{\lambda_4(\zeta)}{\lambda_{4/0}} = 1 + \frac{k_1 \zeta}{1 + k_2 \zeta} \quad ; \quad \lambda_{3/0} = \frac{-\nu}{E} \quad ; \quad \lambda_{4/0} = \frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2G}$$

$$k_1 = 300 \quad E = 2.1 \cdot 10^{11} \quad (\lambda_{3/0} = -1.4338821 \cdot 10^{-12})$$

$$k_2 = 1000 \quad \nu = 0.30111524 \quad (\lambda_{4/0} = 6.1957868 \cdot 10^{-12})$$

- Die Materialfunktionen aus der Differentialgleichung von u

$$PG = \max\{0, |D_{EW}|_{\max} + \chi_{u1} \dot{\Theta}\}$$

$$c = 5 \cdot 10^4 \quad \alpha = 10^{-4} \quad \chi_{u1} = 10^{-5}$$

• Die Parameter aus der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{lll}
 \rho = 7.5 \cdot 10^3 & \lambda_2 = 10^{-5} & c_{\sigma\kappa} = 480 \\
 \tau_q = 2.53 \cdot 10^{-8} & k = 12 & \mu_1 = 6.76 \cdot 10^{-9} \\
 \mu_2 = 6.76 \cdot 10^{-9} & \mu_3 = 3.5 \cdot 10^{-17} & \mu_4 = 10^7 \\
 \mu_6 = 1.1 \cdot 10^8 & \nu_2 = 1.677 \cdot 10^{-12} & \nu_3 = 5 \cdot 10^{-11} \\
 \nu_4 = 1.66 \cdot 10^{-4} & &
 \end{array}$$

4) Materialfunktionen für den inelastischen Spin

$$\Phi_{TW}(\mathcal{F}_T) = \Phi_T(\mathcal{F}_T)$$

$$\gamma_{TW}(u) = \chi_{t10} u_{EQ}^{-1}(u)$$

$$\chi_{t10} = 0.979$$

Anhang B: Spezialisierung des Modells 1.2 auf einachsige Makro-Spannungszustände

Für die Betrachtung von einachsigen Makro-Spannungszuständen können die in Kapitel 3.4 aufgeführten Evolutionsgleichungen vereinfacht werden.

Für die Matrixdarstellung der Tensoren erhält man bei einem einachsigen Spannungszustand:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_q^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_q^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_T = X_T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_q & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_q \end{pmatrix}, \quad \underline{Z}^0 = \begin{pmatrix} Z^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_q^0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_q^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\epsilon}_{DS}^0 = \epsilon_{DS}^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\epsilon}_{vL}^0 = \epsilon_{vL}^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine ausführliche Umformung aller Evolutionsgleichungen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Die Spezialisierung der Evolutionsgleichung der durch Scherbandschädigung induzierten Dehnung $\underline{\epsilon}_{DS}^0$ wird hier, exemplarisch für alle anderen Gleichungen, ausführlich angegeben. Aus der allgemeinen Gleichung

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{DS}^0 = [d_{DS}]_{DS} \lll LC_{DS} \rrr \frac{\underline{\sigma}'}{\|\underline{\sigma}'\|}$$

erhält man die Evolutionsgleichung für einachsige Spannungszustände, indem man für $\underline{\sigma}$ die Matrixdarstellung eines einachsigen Spannungszustands

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vorgibt. Daraus ergibt sich:

$$\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma$$

$$\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{\sigma}'\|^2 = \left(\frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2\right) = \frac{2}{3}\sigma^2$$

$$\|\underline{\sigma}'\| = \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma|$$

Damit folgt für die xx-Komponente von $\underline{\epsilon}_{DS}^0$:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{zzDS}^0 &\equiv \dot{\epsilon}_{DS}^0 = [d_{DS}]_{DS} \langle\langle LC_{DS} \rangle\rangle \frac{\frac{2}{3}\sigma}{\sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma|} \\ &= [d_{DS}]_{DS} \langle\langle LC_{DS} \rangle\rangle \sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariablen

Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\sigma}^0$:

$$\dot{\sigma}^0 = (d_1 + 2d_2\sigma^0 + 2d_3Z^0 + 2d_4\xi)\dot{\sigma} + K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{vT} \sigma^0 - m \sigma^0$$

$$\dot{\sigma}_q^0 = K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{vT} \sigma_q^0 - m \sigma_q^0$$

Der Scherbandschädigungstensor \underline{Z}^0 :

$$\dot{Z}^0 = [d_z]_z \langle\langle LC_z \rangle\rangle \left(\frac{4}{9}\mu_3\sigma^2 + (\mu_4 + \omega)Z^0\right)$$

$$\dot{Z}_q^0 = [d_z]_z \langle\langle LC_z \rangle\rangle \left(\frac{1}{9}\mu_3\sigma^2 + (\mu_4 + \omega)Z_q^0\right)$$

$$G_z = \frac{2}{3}(\sigma^0 - \sigma_q^0)^2 - \nu_z(\sigma^0 + 2\sigma_q^0) - h_z \geq 0$$

$$\begin{aligned} LC_z &= \left(\frac{4}{3}(\sigma^0 - \sigma_q^0) - \nu_z\right)(d_1 + 2d_2\sigma^0 + 2d_3Z^0 + 2d_4\xi)\dot{\sigma} \\ &\quad + \left(\frac{4}{3}(\sigma^0 - \sigma_q^0) - \nu_z\right)K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{vT} \sigma^0 \\ &\quad - \left(\frac{4}{3}(\sigma^0 - \sigma_q^0) + 2\nu_z\right)K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{vT} \sigma_q^0 > 0 \end{aligned}$$

Der Porenvolumenanteil ξ :

$$\dot{\xi} = [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} - [d_{DP2}]_{DP} \xi \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2}$$

$$G_{DP} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma^0 - \sigma_q^0| + \nu_{DP}(\sigma^0 + 2\sigma_q^0) - h_{DP} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
LC_{DP1} &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sign}(\sigma^0 - \sigma_q^0) + \nu_{DP} \right) (d_1 + 2d_2 \sigma^0 + 2d_3 Z^0 + 2d_4 \xi) \dot{\sigma} \\
&+ \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sign}(\sigma^0 - \sigma_q^0) + \nu_{DP} \right) K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{VT} \sigma^0 \\
&- \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sign}(\sigma^0 - \sigma_q^0) - 2\nu_{DP} \right) K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{VT} \sigma_q^0 > 0
\end{aligned}$$

Die durch Porenbildung/Porenwachstum induzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{DP}^0$:

$$\dot{\epsilon}_{DP}^0 = \frac{\dot{\xi}}{3(1-\xi)}$$

Die durch Scherband-Schädigung induzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{DS}^0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{DS}^0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} [d_{DS}]_{DS} \langle\langle LC_{DS} \rangle\rangle \operatorname{sign}(\sigma) \\
G_{DS} &= \frac{2}{3} (\sigma^0 - \sigma_q^0)^2 - \nu_{DS} (\sigma^0 + 2\sigma_q^0) - h_{DS} \geq 0 \\
LC_{DS} &= \left(\frac{4}{3} (\sigma^0 - \sigma_q^0) - \nu_{DS} \right) (d_1 + 2d_2 \sigma^0 + 2d_3 Z^0 + 2d_4 \xi) \dot{\sigma} \\
&+ \left(\frac{4}{3} (\sigma^0 - \sigma_q^0) - \nu_{DS} \right) K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{VT} \sigma^0 \\
&- \left(\frac{4}{3} (\sigma^0 - \sigma_q^0) + 2\nu_{DS} \right) K d_5 \sigma \dot{\epsilon}_{VT} \sigma_q^0 > 0
\end{aligned}$$

Die Temperaturkonzentration Θ^0 :

$$\dot{\Theta}^0 = [d_{\Theta v}]_v$$

Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vL}^0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{vL}^0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \operatorname{sign}(\sigma^0 - \sigma_q^0) \\
G_v &= \frac{2}{3} (\sigma^0 - \sigma_q^0)^2 - h_v \geq 0
\end{aligned}$$

Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vT}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{vT} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_T [\Phi_T]_T \operatorname{sign}\left(\frac{2}{3}\sigma - X_T\right) \\
F_T &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\sigma - X_T\right)^2 - g_T \geq 0
\end{aligned}$$

Der kinematische Verfestigungstensor \underline{X}_T :

$$\dot{X}_T = c_T \dot{\epsilon}_{vT}$$

Die Versetzungsdichte κ :

$$\dot{\kappa} = K \sigma \dot{\epsilon}_{vT}$$

Die Evolutionsgleichung für die innere Variable $\bar{\alpha}_q$:

$$\dot{\alpha}_q = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{1}{\tau_q} \alpha_q$$

Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit :

$$\ddot{u} = -c(\alpha + PG) \dot{u} - \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 (u - u_{BQ}(PG))$$

$$\text{mit: } PG = \max\{0, |\dot{\epsilon}| + \chi_{u1} \dot{\Theta}\}$$

Variablen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

Die reversible Verzerrung $\underline{\epsilon}_e$:

$$\epsilon_e = \lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \frac{\lambda_3}{\lambda_{3/0}} \frac{\sigma}{E}$$

Die Entropie η :

$$\rho \eta = \lambda_1(\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 \sigma + \nu_4 \kappa$$

Der Wärmefluß \vec{q} :

$$\tau_q \dot{q} + q = -k \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet dann unter Vernachlässigung volumenverteilter Wärmequellen :

$$\begin{aligned} \rho c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} + \lambda_2 \Theta \dot{\sigma} &= (1 - \nu_3 K \kappa - \nu_4 K \Theta_0 - \nu_2 c_T) \sigma \dot{\epsilon}_{vT} + \sigma \dot{\epsilon}_{Ds}^0 \\ &+ \mu_6 \Theta^0 [d_{\Theta v}]_v + \mu_1 m (\sigma^0 + 2\sigma_q^0)^2 + \mu_2 m (\sigma^{02} + 2\sigma_q^{02}) \\ &+ \sigma \dot{\epsilon}_{DP}^0 + \rho \frac{\partial g}{\partial \xi} \dot{\xi} + \left(\frac{2}{9} \mu_3^2 \sigma^4 + \frac{4}{9} \mu_3 (\mu_4 + \omega) \sigma^2 (2Z^0 + Z_q^0) \right. \\ &\left. + (\mu_4 + \omega)^2 (Z^{02} + 2Z_q^{02}) \right) [d_z]_z \langle\langle LC_z \rangle\rangle - \frac{\partial q}{\partial x} \end{aligned}$$

Anhang C: Aufbereitung des Modells 1.2LD für axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten

Zur Berechnung des Lastvektors müssen nach jedem Schritt der Gleichgewichtsiteration die Spannungen sowie die internen Variablen durch eine Zeitintegration von t bis $t + \Delta t$ numerisch ermittelt werden. Das vorliegende Materialmodell enthält eine Kopplung der zeitlichen Ableitungen von Spannung, Temperatur sowie den schädigungsinduzierten Verzerrungen, so daß die Zeitintegration des Differentialgleichungssystems nicht direkt erfolgen kann. In jedem Zeitschritt wird daher erst ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $\underline{\underline{\sigma}}$, $\dot{\Theta}$ und $\underline{\underline{D}}_{DS}$ sowie $\underline{\underline{D}}_{DP}$ gelöst.

Ausgangspunkt der Materialbeschreibung ist eine additive Aufspaltung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{D}}$ in einen reversiblen und verschiedene irreversible Anteile:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_e + \underline{\underline{D}}_i$$

$$\underline{\underline{D}}_e = \text{sym}(\underline{\underline{V}}_e \underline{\underline{V}}_e^{-1}) = \mathcal{J}_e^{-1} \underline{\underline{V}}_e = \mathcal{J}_e^{-2} \underline{\underline{E}}_e$$

$$\text{mit: } \mathcal{J}_e = \det \underline{\underline{V}}_e \implies \mathcal{J}_e^2 = \det \underline{\underline{V}}_e^2 = \det(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{E}}_e) \approx 1 + 2\text{tr} \underline{\underline{E}}_e$$

$$\underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{D}}_{vT} + \underline{\underline{D}}_{DS} + \underline{\underline{D}}_{DP}$$

Mit dem hier verwendeten GREENSchen Verzerrungsmaß

$$\underline{\underline{E}}_e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{V}}_e^2 - \underline{\underline{1}})$$

erhält man unter Voraussetzung von thermoelastischem Materialverhalten die reversible Verzerrung $\underline{\underline{E}}_e$:

$$\underline{\underline{E}}_e \approx \left(\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \lambda_3 \text{tr} \underline{\underline{S}}_K \right) \underline{\underline{1}} + \lambda_4 \underline{\underline{S}}_K$$

$$\underline{\underline{E}}_e \approx \lambda_2 \dot{\Theta} \underline{\underline{1}} + \lambda_3 \text{tr} \underline{\underline{S}}_K \underline{\underline{1}} + \lambda_4 \underline{\underline{S}}_K$$

Der reversible Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten lautet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_e &= \mathcal{J}_e^{-2} \underline{\underline{E}}_e \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \lambda_2 \dot{\Theta} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \lambda_3 \text{tr} \underline{\underline{S}}_K \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \lambda_4 \underline{\underline{S}}_K \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \lambda_2 \dot{\Theta} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e^3} \lambda_3 \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e^3} \lambda_4 \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man eine Bestimmungsgleichung für $\underline{\sigma}$:

$$\underline{\sigma} \frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} + \text{tr} \underline{\sigma} \underline{1} \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} = \underline{D} - \underline{D}_{VT} - \underline{D}_{DS} - \underline{D}_{DP} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e^2} \dot{\underline{1}}$$

$$\underline{\sigma}^{11} \left(\frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \right) + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \left(\underline{\sigma}^{22} (x^1)^2 + \underline{\sigma}^{33} \right) = D^{11} - D_{VT}^{11} - D_{DS}^{11} - D_{DP}^{11} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e^2} \dot{\underline{1}}$$

$$\underline{\sigma}^{22} \left(\frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \right) + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \frac{1}{(x^1)^2} \left(\underline{\sigma}^{11} + \underline{\sigma}^{33} \right) = D^{22} - D_{VT}^{22} - D_{DS}^{22} - D_{DP}^{22} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e^2 (x^1)^2} \dot{\underline{1}}$$

$$\underline{\sigma}^{33} \left(\frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \right) + \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} \left(\underline{\sigma}^{11} + \underline{\sigma}^{22} (x^1)^2 \right) = D^{33} - D_{VT}^{33} - D_{DS}^{33} - D_{DP}^{33} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e^2} \dot{\underline{1}}$$

$$\underline{\sigma}^{13} \frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} = D^{13} - D_{VT}^{13} - D_{DS}^{13}$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet für adiabate Prozesse unter Vernachlässigung volumenverteilter Wärmequellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_e \rho c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} + \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e} \Theta \text{tr} \underline{\nabla} \underline{\sigma} - \frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_e} \Theta (\text{tr} \underline{\sigma})(\text{tr} \underline{D}_e) &= \mathcal{J}_e \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{DS} + \mathcal{J}_e \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{DP} \\ &+ \mathcal{J}_e \left(1 - \frac{\nu_3 K \kappa}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_4 K \Theta_0}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_2 c_T}{\mathcal{J}_e^2} \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{VT} + \mu_6 \Theta^0 [d_{\Theta V}]_V + \mu_1 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} (\text{tr} \underline{\sigma}^0)^2 \\ &+ \mu_2 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\sigma}^0 + (\vartheta_1 + \vartheta_2 \xi) [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} + \vartheta_3 \xi^2 [d_{DP2}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \left(\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\underline{\sigma}')^2 + (\mu_4 + \omega) \underline{Z}^0 \right) \cdot (\underline{Z}^0 - \underline{Z}^0 \text{tr} \underline{D}_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_e \rho c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} &= \mathcal{J}_e \left[\sigma^{11} D_{DS}^{11} + \sigma^{22} D_{DS}^{22} (x^1)^4 + \sigma^{33} D_{DS}^{33} + 2\sigma^{13} D_{DS}^{13} \right] + \mu_6 \Theta^0 [d_{\Theta V}]_V \\
&+ \mathcal{J}_e \left[\sigma^{11} D_{VT}^{11} + \sigma^{22} D_{VT}^{22} (x^1)^4 + \sigma^{33} D_{VT}^{33} + 2\sigma^{13} D_{VT}^{13} \right] \left[1 - \frac{\nu_3 K \kappa}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_4 K \Theta_0}{\mathcal{J}_e} - \frac{\nu_2 c_T}{\mathcal{J}_e^2} \right] \\
&+ \left(\vartheta_1 + \vartheta_2 \xi + \frac{\mathcal{J}_e}{3(1-\xi)} [\sigma^{11} + \sigma^{22} (x^1)^2 + \sigma^{33}] \right) [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1}(\underline{\sigma}) \rangle_{DP1} \\
&+ \left(\vartheta_3 \xi - \frac{\mathcal{J}_e}{3(1-\xi)} [\sigma^{11} + \sigma^{22} (x^1)^2 + \sigma^{33}] \right) \xi [d_{DP2}]_{DP} \langle LC_{DP1}(\underline{\sigma}) \rangle_{DP2} \\
&+ \mu_1 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} \left[\sigma^{011} + \sigma^{022} (x^1)^2 + \sigma^{033} \right]^2 - \frac{\lambda_2 \Theta}{\mathcal{J}_e} \left[\bar{\sigma}^{11} + \bar{\sigma}^{22} (x^1)^2 + \bar{\sigma}^{33} \right] \\
&+ \mu_2 \frac{m}{\mathcal{J}_e^2} \left[(\sigma^{011})^2 + (\sigma^{022})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{033})^2 + 2(\sigma^{012})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{013})^2 + 2(\sigma^{023})^2 (x^1)^2 \right] \\
&+ \frac{d_z}{\mathcal{J}_e^2} \left\{ \left[\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left((\sigma'^{11})^2 + (\sigma'^{13})^2 \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{011} \right]^2 + \left[\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\sigma'^{22})^2 (x^1)^2 + (\mu_4 + \omega) Z^{022} \right]^2 (x^1)^4 \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left((\sigma'^{13})^2 + (\sigma'^{33})^2 \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{033} \right]^2 + 2(\mu_4 + \omega)^2 \left[(Z^{012})^2 + (Z^{023})^2 \right] (x^1)^2 \right. \\
&+ \left. 2 \left[\frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left(\sigma'^{11} \sigma'^{13} + \sigma'^{13} \sigma'^{33} \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{013} \right]^2 \right\} \langle LC_z(\underline{\sigma}) \rangle
\end{aligned}$$

Dies läßt sich auch verkürzt schreiben als:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_e \rho c_{\sigma\kappa} \dot{\Theta} &= \Theta_1 + \Theta_2 \langle LC_z(\underline{\sigma}) \rangle + \Theta_3 \langle LC_{DP1}(\underline{\sigma}) \rangle - \frac{\lambda_2 \Theta}{\mathcal{J}_e} \left[\bar{\sigma}^{11} + \bar{\sigma}^{22} (x^1)^2 + \bar{\sigma}^{33} \right] \\
&+ \mathcal{J}_e \left[\sigma^{11} D_{DS}^{11} + \sigma^{22} D_{DS}^{22} (x^1)^4 + \sigma^{33} D_{DS}^{33} + 2\sigma^{13} D_{DS}^{13} \right]
\end{aligned}$$

Die durch Scherband-Schädigung induzierte Verzerrungsrate \underline{D}_{DS} :

$$\underline{D}_{DS} = [d_{DS}]_{DS} \lll LC_{DS} \rrr \frac{\underline{\sigma}'}{\|\underline{\sigma}'\|}$$

$$D_{DS}^{11} = A_0 \lll LC_{DS}(\underline{\sigma}^{\square}) \rrr \sigma'^{11}$$

$$D_{DS}^{22} = A_0 \lll LC_{DS}(\underline{\sigma}^{\square}) \rrr \sigma'^{22}$$

$$D_{DS}^{33} = A_0 \lll LC_{DS}(\underline{\sigma}^{\square}) \rrr \sigma'^{33}$$

$$D_{DS}^{13} = A_0 \lll LC_{DS}(\underline{\sigma}^{\square}) \rrr \sigma'^{13}$$

$$\text{mit: } A_0 = \frac{[d_{DS}]_{DS}}{\sqrt{(\sigma'^{11})^2 + (\sigma'^{22})^2 (x^1)^4 + (\sigma'^{33})^2 + 2(\sigma'^{13})^2}}$$

ist noch an folgende Fließbedingung G_{DS} und Belastungsbedingung LC_{DS} geknüpft:

$$G_{DS} = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \frac{\nu_{DS}}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DS}$$

$$G_{DS} = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \left((\sigma^{0'11})^2 + (\sigma^{0'22})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{0'33})^2 + 2(\sigma^{0'12})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{0'13})^2 + 2(\sigma^{0'23})^2 (x^1)^2 \right) - \frac{\nu_{DS}}{\mathcal{J}_e} (\sigma^{011} + \sigma^{022} (x^1)^2 + \sigma^{033}) - h_{DS}$$

$$\begin{aligned} LC_{DS} = LC_z &= \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} \underline{\sigma}^{0'} - \nu_z \underline{\mathbf{1}} \right) \cdot \left(\underline{\sigma}^{\square 0} + m \underline{\sigma}^0 \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} \underline{\sigma}^{0'} - \nu_z \underline{\mathbf{1}} \right) \cdot \left(\underline{\mathbf{D}} \underline{\sigma}^{\square} + K d_5 (\underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{D}}_{vT}) \underline{\sigma}^0 \right) \end{aligned}$$

Durch ausmultiplizieren und umsordieren läßt sich die Belastungsbedingung auf folgende Form bringen:

$$LC_z = LC_{z1} \underline{\sigma}^{\square 11} + LC_{z2} \underline{\sigma}^{\square 22} + LC_{z3} \underline{\sigma}^{\square 33} + LC_{z4} \underline{\sigma}^{\square 13} + LC_{z0}$$

$$\begin{aligned}
LC_z = & \bar{\sigma}^{\square 11} \left\{ \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'11} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{011} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{011} + 2d_4 \xi \right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'13} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) \right\} \\
& + \bar{\sigma}^{\square 22} \left\{ \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'22} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e (x^1)^2} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{022} (x^1)^2 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{022} (x^1)^2 + 2d_4 \xi \right) (x^1)^4 \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'12} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) (x^1)^4 + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'23} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) (x^1)^4 \right\} \\
& + \bar{\sigma}^{\square 33} \left\{ \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'33} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{033} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{033} + 2d_4 \xi \right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'13} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) \right\} \\
& + \bar{\sigma}^{\square 13} \left\{ \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'11} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) + \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'33} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'13} \left(d_1 + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 (\sigma^{033} + \sigma^{011}) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 (Z^{011} + Z^{033}) + 2d_4 \xi \right) \right\} \\
& + d_5 \kappa \left\{ \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'11} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \sigma^{011} + \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'22} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e (x^1)^2} \right) (x^1)^4 \sigma^{022} + \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'33} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \right) \sigma^{033} \right. \\
& \left. + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \sigma^{012} + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'13} \sigma^{013} + \frac{4}{\mathcal{J}_e^2} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \sigma^{023} \right\}
\end{aligned}$$

Die durch Poren-Schädigung induzierte Verzerrungsrate \underline{D}_{DP} :

$$\underline{D}_{DP} = \frac{\dot{\xi}}{3(1-\xi)} \underline{\mathbf{1}}$$

$$D_{DP}^{11} = D_{DP}^{22} (x^1)^2 = D_{DP}^{33} = (A_6 - A_7) LC_{DP1}(\bar{\underline{\sigma}})$$

$$\text{mit: } A_6 = \frac{\langle [d_{DP1}]_{DP} \rangle_{DP1}}{3(1-\xi)} \quad A_7 = \frac{\xi \langle [d_{DP2}]_{DP} \rangle_{DP2}}{3(1-\xi)}$$

$$A_8 = (A_6 - A_7)$$

Durch ausmultiplizieren und umsordieren läßt sich die Belastungsbedingung auf folgende Form bringen:

$$LC_{DP1}(\bar{\underline{\sigma}}) = LC_{DP11} \bar{\sigma}^{\square 11} + LC_{DP12} \bar{\sigma}^{\square 22} + LC_{DP13} \bar{\sigma}^{\square 33} + LC_{DP14} \bar{\sigma}^{\square 13} + LC_{DP10}$$

Aus diesen Evolutionsgleichungen resultiert das nachfolgende Gleichungssystem, welches zur Bestimmung der Raten in jedem Zeitschritt gelöst werden muß:

$$\begin{bmatrix}
 [A]^{\sigma\sigma} & [A]^{\sigma\Theta} & [A]^{\sigma D} \\
 [A]^{\Theta\sigma} & [A]^{\Theta\Theta} & [A]^{\Theta D} \\
 [A]^{D\sigma} & [A]^{D\Theta} & [A]^{DD}
 \end{bmatrix}_{9 \times 9}
 \begin{bmatrix}
 \dot{\sigma}^{11} \\
 \dot{\sigma}^{22} \\
 \dot{\sigma}^{33} \\
 \dot{\sigma}^{13} \\
 \dot{\Theta} \\
 D_{DS}^{11} \\
 D_{DS}^{22} \\
 D_{DS}^{33} \\
 D_{DS}^{13}
 \end{bmatrix}_{9 \times 1}
 =
 \begin{bmatrix}
 v_{1,1} - D_{VT}^{11} - A_8 LC_{DP10} \\
 \frac{v_1}{(x_1)^3} - D_{VT}^{22} - \frac{A_8}{(x_1)^2} LC_{DP10} \\
 v_{3,3} - D_{VT}^{33} - A_8 LC_{DP10} \\
 \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) - D_{VT}^{13} \\
 \Theta_1 + \Theta_2 LC_{z_0} + \Theta_3 LC_{DP10} \\
 A_0 \sigma'^{11} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{22} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{33} LC_{DS0} \\
 A_0 \sigma'^{13} LC_{DS0}
 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

mit: $[A]^{\sigma D} = [\underline{1}]_{4 \times 4}$ $[A]^{DD} = [\underline{1}]_{4 \times 4}$

$[A]^{\Theta\Theta} = [J_e \rho c_{\sigma\kappa}]_{1 \times 1}$ $[A]^{D\Theta} = [\vec{0}]_{4 \times 1}$

$$[A]^{\sigma\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{J_e^2} \\ \frac{\lambda_2}{J_e^2 (x_1)^2} \\ \frac{\lambda_2}{J_e^2} \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

$$[A]^{\Theta\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_e} \lambda_2 \Theta - \Theta_2 LC_{z_1} - \Theta_3 LC_{DP11} \\ \frac{1}{J_e} \lambda_2 \Theta (x_1)^2 - \Theta_2 LC_{z_2} - \Theta_3 LC_{DP12} \\ \frac{1}{J_e} \lambda_2 \Theta - \Theta_2 LC_{z_3} - \Theta_3 LC_{DP13} \\ -\Theta_2 LC_{z_4} - \Theta_3 LC_{DP14} \end{bmatrix}_{1 \times 4}
 \quad
 [A]^{\Theta D} = \begin{bmatrix} -J_e \sigma^{11} \\ -J_e \sigma^{22} (x_1)^4 \\ -J_e \sigma^{33} \\ -2 J_e \sigma^{13} \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

$$[A]^{D\sigma} = \begin{bmatrix} -A_0 \sigma'^{11} LC_{DS1} & -A_0 \sigma'^{11} LC_{DS2} & -A_0 \sigma'^{11} LC_{DS3} & -A_0 \sigma'^{11} LC_{DS4} \\ -A_0 \sigma'^{22} LC_{DS1} & -A_0 \sigma'^{22} LC_{DS2} & -A_0 \sigma'^{22} LC_{DS3} & -A_0 \sigma'^{22} LC_{DS4} \\ -A_0 \sigma'^{33} LC_{DS1} & -A_0 \sigma'^{33} LC_{DS2} & -A_0 \sigma'^{33} LC_{DS3} & -A_0 \sigma'^{33} LC_{DS4} \\ -A_0 \sigma'^{13} LC_{DS1} & -A_0 \sigma'^{13} LC_{DS2} & -A_0 \sigma'^{13} LC_{DS3} & -A_0 \sigma'^{13} LC_{DS4} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$[A]^{\sigma\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_4 + \lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP11} & \frac{\lambda_3(x^1)^2}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP12} & \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP13} & A_8 LC_{DP14} \\ \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3(x^1)^2} + \frac{A_8}{(x^1)^2} LC_{DP11} & \frac{\lambda_4 + \lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} + \frac{A_8}{(x^1)^2} LC_{DP12} & \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3(x^1)^2} + \frac{A_8}{(x^1)^2} LC_{DP13} & \frac{A_8}{(x^1)^2} LC_{DP14} \\ \frac{\lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP11} & \frac{\lambda_3(x^1)^2}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP12} & \frac{\lambda_4 + \lambda_3}{\mathcal{J}_e^3} + A_8 LC_{DP13} & A_8 LC_{DP14} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_4}{\mathcal{J}_e^3} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Die substantielle CAUCHY-Spannungsrate $\dot{\underline{\sigma}}$ lautet unter Verwendung der eingeführten objektiven Zeitableitung:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\overset{\square}{\sigma}} + (\underline{W} - \underline{W}_i) \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot (\underline{W} - \underline{W}_i) + \underline{\sigma} \operatorname{tr} \underline{D}_e$$

$$\dot{\sigma}^{11} = \overset{\square}{\sigma}^{11} + \sigma^{13}(v_{1,3} - v_{3,1}) - 2\sigma^{13}W_{i3}^1 + \sigma^{11}(\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{\sigma}^{22} = \overset{\square}{\sigma}^{22} - \frac{2}{x^1} v_1 \sigma^{22} + \sigma^{22}(\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{\sigma}^{33} = \overset{\square}{\sigma}^{33} + \sigma^{13}(v_{3,1} - v_{1,3}) + 2\sigma^{13}W_{i3}^1 + \sigma^{33}(\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{\sigma}^{13} = \overset{\square}{\sigma}^{13} + \frac{1}{2}\sigma^{11}(v_{3,1} - v_{1,3}) + \frac{1}{2}\sigma^{33}(v_{1,3} - v_{3,1}) + (\sigma^{11} - \sigma^{33})W_{i3}^1 + \sigma^{13}(\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate \underline{D}_{vT} :

$$\underline{D}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}_T}{\|\underline{\sigma}' - \underline{X}_T\|}$$

$$D_{vT}^{11} = A_1 (\sigma'^{11} - X_T^{11})$$

$$D_{vT}^{22} = A_1 (\sigma'^{22} - X_T^{22})$$

$$D_{vT}^{33} = A_1 (\sigma'^{33} - X_T^{33})$$

$$D_{vT}^{13} = A_1 (\sigma'^{13} - X_T^{13})$$

mit:

$$A_1 = \frac{\gamma_T [\Phi_T]_T}{\sqrt{(\sigma'^{11} - X_T^{11})^2 + (\sigma'^{22} - X_T^{22})^2 (x^1)^4 + (\sigma'^{33} - X_T^{33})^2 + 2(\sigma'^{13} - X_T^{13})^2}}$$

Der kinematische Verfestigungstensor \underline{X}_T :

$$\dot{\underline{X}}_T = \mathcal{J}_e c_T \underline{D}_{vT} + (\underline{W} - \underline{W}_i) \cdot \underline{X}_T - \underline{X}_T \cdot (\underline{W} - \underline{W}_i) + \underline{X}_T \operatorname{tr} \underline{D}_e$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_T^{11} &= \mathcal{J}_e c_T A_1 (\sigma'^{11} - X_T^{11}) + X_T^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2X_T^{13} W_{i3}^1 + X_T^{11} (\text{tr} \underline{D}_e) \\ \dot{X}_T^{22} &= \mathcal{J}_e c_T A_1 (\sigma'^{22} - X_T^{22}) - \frac{2}{x^1} v_1 X_T^{22} + X_T^{22} (\text{tr} \underline{D}_e) \\ \dot{X}_T^{33} &= \mathcal{J}_e c_T A_1 (\sigma'^{33} - X_T^{33}) + X_T^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2X_T^{13} W_{i3}^1 + X_T^{33} (\text{tr} \underline{D}_e) \\ \dot{X}_T^{13} &= \mathcal{J}_e c_T A_1 (\sigma'^{13} - X_T^{13}) + \frac{1}{2} (X_T^{11} - X_T^{33}) (v_{3,1} - v_{1,3}) + (X_T^{11} - X_T^{33}) W_{i3}^1 + X_T^{13} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

Die Versetzungsdichte κ :

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= K \underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{vT} \\ \dot{\kappa} &= K A_1 (\sigma^{11} (\sigma'^{11} - X_T^{11}) + \sigma^{22} (\sigma'^{22} - X_T^{22}) (x^1)^4 + \sigma^{33} (\sigma'^{33} - X_T^{33}) + 2\sigma^{13} (\sigma'^{13} - X_T^{13}))\end{aligned}$$

Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit :

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= -c (\alpha + PG) \dot{u} - \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 (u - u_{EQ}(PG)) \\ \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -c (\alpha + PG) v - \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 (u - u_{EQ}(PG))\end{aligned}$$

mit:

$$PG = \max\{0, |D_{EW}|_{max} + \chi_{u1} \dot{\Theta}\}$$

Die Evolutionsgleichung für den plastischen Spin \underline{W}_i :

$$\begin{aligned}\underline{W}_i &= \gamma_{TW} [\Phi_{TW}]_T \frac{\underline{X}_T \cdot \underline{\sigma}' - \underline{\sigma}' \cdot \underline{X}_T}{\|\underline{\sigma}'\| \|\underline{X}_T\|} \\ W_{i3}^1 &= -W_{i1}^3 = \frac{A_2 (X_T^{11} \sigma'^{13} + X_T^{13} \sigma'^{33} - X_T^{13} \sigma'^{11} - X_T^{33} \sigma'^{13})}{\sqrt{(\sigma'^{11})^2 + (\sigma'^{22})^2 (x^1)^4 + (\sigma'^{33})^2 + 2(\sigma'^{13})^2}}\end{aligned}$$

mit:

$$A_2 = \frac{\gamma_{TW} [\Phi_{TW}]_T}{\sqrt{(X_T^{11})^2 + (X_T^{22})^2 (x^1)^4 + (X_T^{33})^2 + 2(X_T^{13})^2}}$$

Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariablen

Der Spannungskonzentrationstensor $\underline{\sigma}^0$:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}}^0 &= d_1 \underline{\dot{\sigma}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 (\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{\sigma}^0) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 (\underline{Z}^0 \cdot \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{Z}^0) + 2d_4 \xi \underline{\dot{\sigma}} \\ &\quad + K d_5 (\underline{\sigma} \cdot \underline{D}_{vT}) \underline{\sigma}^0 - m \underline{\sigma}^0 + (\underline{W} - \underline{W}_i) \cdot \underline{\sigma}^0 - \underline{\sigma}^0 \cdot (\underline{W} - \underline{W}_i) + \underline{\sigma}^0 \text{tr} \underline{D}_e \\ \dot{\sigma}^{011} &= d_1 \dot{\sigma}^{11} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 (\sigma^{011} \dot{\sigma}^{11} + \dot{\sigma}^{11} \sigma^{011}) + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 (\sigma^{011} Z^{011} + Z^{011} \dot{\sigma}^{11}) + 2d_4 \xi \dot{\sigma}^{11} \\ &\quad + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{011} - m \sigma^{011} + \sigma^{013} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2\sigma^{013} W_{i3}^1 + \sigma^{011} (\text{tr} \underline{D}_e) \\ \dot{\sigma}^{012} &= \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 (\sigma^{012} \dot{\sigma}^{11} + \dot{\sigma}^{11} \sigma^{012} + \sigma^{023} \dot{\sigma}^{13} + \dot{\sigma}^{13} \sigma^{023} (x^1)^2) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 (Z^{012} \dot{\sigma}^{11} + \dot{\sigma}^{11} Z^{012} + Z^{023} \dot{\sigma}^{13} + \dot{\sigma}^{13} Z^{023} (x^1)^2) \\ &\quad + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{012} - m \sigma^{012} + \frac{1}{2} \sigma^{023} (v_{1,3} - v_{3,1}) - \sigma^{012} \frac{1}{x^1} v_1 - \sigma^{023} W_{i3}^1 + \sigma^{012} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^{013} &= d_1 \dot{\sigma}^{13} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \left(\dot{\sigma}^{13} (\sigma^{011} + \sigma^{033}) + \sigma^{013} (\dot{\sigma}^{11} + \dot{\sigma}^{33}) \right) + 2d_4 \xi \dot{\sigma}^{13} + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{013} \\ &\quad - m \sigma^{013} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 \left(\dot{\sigma}^{13} (Z^{011} + Z^{033}) + Z^{013} (\dot{\sigma}^{11} + \dot{\sigma}^{33}) \right) + \frac{1}{2} \sigma^{011} (v_{3,1} - v_{1,3}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^{033} (v_{1,3} - v_{3,1}) + \sigma^{011} W_{i3}^1 - \sigma^{033} W_{i3}^1 + \sigma^{013} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^{022} &= d_1 \dot{\sigma}^{22} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{022} \dot{\sigma}^{22} (x^1)^2 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{022} \dot{\sigma}^{22} (x^1)^2 + 2d_4 \xi \dot{\sigma}^{22} + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{022} \\ &\quad - m \sigma^{022} - \frac{2v_1}{x^1} \sigma^{022} + \sigma^{022} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^{023} &= \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \left(\sigma^{023} \dot{\sigma}^{33} + \sigma^{012} \dot{\sigma}^{13} + \sigma^{023} \dot{\sigma}^{22} (x^1)^2 \right) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 \left(Z^{023} \dot{\sigma}^{33} + Z^{012} \dot{\sigma}^{13} + Z^{023} \dot{\sigma}^{22} (x^1)^2 \right) \\ &\quad + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{023} - m \sigma^{023} + \frac{1}{2} \sigma^{012} (v_{3,1} - v_{1,3}) - \sigma^{023} \frac{1}{x^1} v_1 + \sigma^{012} W_{i3}^1 + \sigma^{023} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^{033} &= d_1 \dot{\sigma}^{33} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \left(\dot{\sigma}^{13} \sigma^{013} + \dot{\sigma}^{33} \sigma^{033} \right) + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 \left(\dot{\sigma}^{13} Z^{013} + Z^{033} \dot{\sigma}^{33} \right) + 2d_4 \xi \dot{\sigma}^{33} \\ &\quad + d_5 \dot{\kappa} \sigma^{033} - m \sigma^{033} + \sigma^{013} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2\sigma^{013} W_{i3}^1 + \sigma^{033} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

Der Scherbandschädigungstensor \underline{Z}^0 :

$$\dot{\underline{Z}}^0 = [d_z]_z \langle \langle LC_z \rangle \rangle \left\{ \frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\underline{\sigma}')^2 + (\mu_4 + \omega) \underline{Z}^0 \right\} + (\underline{W} - \underline{W}_i) \cdot \underline{Z}^0 - \underline{Z}^0 \cdot (\underline{W} - \underline{W}_i) + \underline{Z}^0 \text{tr} \underline{D}_e$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}^{011} &= A_3 \left\{ \frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left((\sigma'^{11})^2 + (\sigma'^{13})^2 \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{011} \right\} + Z^{013} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2Z^{013} W_{i3}^1 \\ &\quad + Z^{011} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\dot{Z}^{012} = A_3 \left\{ (\mu_4 + \omega) Z^{012} \right\} + \frac{1}{2} Z^{023} (v_{1,3} - v_{3,1}) - Z^{012} \frac{1}{x^1} v_1 - Z^{023} W_{i3}^1 + Z^{012} (\text{tr} \underline{D}_e)$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}^{013} &= A_3 \left\{ \frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left(\sigma'^{11} \sigma'^{13} + \sigma'^{13} \sigma'^{33} \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{013} \right\} + \frac{1}{2} (Z^{011} - Z^{033}) (v_{3,1} - v_{1,3}) \\ &\quad + (Z^{011} - Z^{033}) W_{i3}^1 + Z^{013} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

$$\dot{Z}^{022} = A_3 \left\{ \frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} (\sigma'^{22})^2 (x^1)^2 + (\mu_4 + \omega) Z^{022} \right\} - \frac{2}{x^1} v_1 Z^{022} + Z^{022} (\text{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{Z}^{023} = A_3 \left\{ (\mu_4 + \omega) Z^{023} \right\} + \frac{1}{2} Z^{012} (v_{3,1} - v_{1,3}) - \frac{1}{x^1} v_1 Z^{023} + Z^{012} W_{i3}^1 + Z^{023} (\text{tr} \underline{D}_e)$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}^{033} &= A_3 \left\{ \frac{\mu_3}{\mathcal{J}_e} \left((\sigma'^{13})^2 + (\sigma'^{33})^2 \right) + (\mu_4 + \omega) Z^{033} \right\} + Z^{013} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2Z^{013} W_{i3}^1 \\ &\quad + Z^{033} (\text{tr} \underline{D}_e)\end{aligned}$$

mit: $A_3 = [d_z]_z \langle \langle LC_z \rangle \rangle$

$$G_z = \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \underline{\sigma}^{0'} \cdot \underline{\sigma}^{0'} - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_z$$

$$\begin{aligned}G_z &= \frac{1}{\mathcal{J}_e^2} \left((\sigma^{0'11})^2 + (\sigma^{0'22})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{0'33})^2 + 2(\sigma^{0'12})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{0'13})^2 + 2(\sigma^{0'23})^2 (x^1)^2 \right) \\ &\quad - \frac{\nu_z}{\mathcal{J}_e} (\sigma^{011} + \sigma^{022} (x^1)^2 + \sigma^{033}) - h_z\end{aligned}$$

Der Porenvolumenanteil ξ :

$$\dot{\xi} = [d_{DP1}]_{DP} \langle LC_{DP1} \rangle_{DP1} - [d_{DP2}]_{DP} \xi \langle LC_{DP1} \rangle_{DP2}$$

$$G_{DP} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \sqrt{\underline{\sigma}^{0'..} \underline{\sigma}^{0'}} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \nu_{DP} \text{tr} \underline{\sigma}^0 - h_{DP}$$

$$G_{DP} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \sqrt{(\sigma^{0'11})^2 + (\sigma^{0'22})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{0'33})^2 + 2(\sigma^{0'12})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{0'13})^2 + 2(\sigma^{0'23})^2 (x^1)^2} \\ + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} (\sigma^{011} + \sigma^{022} (x^1)^2 + \sigma^{033}) - h_{DP}$$

Durch ausmultiplizieren und umsordieren läßt sich die Belastungsbedingung auf folgende Form bringen:

$$LC_{DP1}(\underline{\sigma}) = LC_{DP11} \bar{\sigma}^{11} + LC_{DP12} \bar{\sigma}^{22} + LC_{DP13} \bar{\sigma}^{33} + LC_{DP14} \bar{\sigma}^{13} + LC_{DP10}$$

$$LC_{DP1} = \bar{\sigma}^{11} \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'11}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{011} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{011} + 2d_4 \xi \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'13} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) \right\} \\ + \bar{\sigma}^{22} \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'22}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e (x^1)^2} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{022} (x^1)^2 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{022} (x^1)^2 + 2d_4 \xi \right) (x^1)^4 \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'12} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) (x^1)^4 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'23} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) (x^1)^4 \right\} \\ + \bar{\sigma}^{33} \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'33}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \left(d_1 + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{033} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{033} + 2d_4 \xi \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'13} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) \right\} \\ + \bar{\sigma}^{13} \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'11}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) + \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'33}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \left(\frac{2}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{013} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{013} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{023} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{023} \right) + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 \sigma^{012} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 Z^{012} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'13} \left(d_1 + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_2 (\sigma^{033} + \sigma^{011}) + \frac{1}{\mathcal{J}_e} d_3 (Z^{011} + Z^{033}) + 2d_4 \xi \right) \right\} \\ + d_5 \kappa \left\{ \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'11}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \sigma^{011} + \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'22}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e (x^1)^2} \right) (x^1)^4 \sigma^{022} + \left(\frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\sigma^{0'33}}{A_4} + \frac{\nu_{DP}}{\mathcal{J}_e} \right) \sigma^{033} \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'12} (x^1)^2 \sigma^{012} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'13} \sigma^{013} + \frac{2}{\mathcal{J}_e} \sigma^{0'23} (x^1)^2 \sigma^{023} \right\}$$

mit:

$$A_4 = \sqrt{(\sigma^{0'11})^2 + (\sigma^{0'22})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{0'33})^2 + 2(\sigma^{0'12})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{0'13})^2 + 2(\sigma^{0'23})^2 (x^1)^2}$$

Die Temperaturkonzentration Θ^0 :

$$\dot{\Theta}^0 = [d_{\Theta v}]_v$$

Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{A}}_{vL}$:

$$\dot{\underline{A}}_{vL} = \mathcal{J}_e^2 \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\underline{\sigma}^{o'}}{\|\underline{\sigma}^{o'}\|} + (\underline{W} - \underline{W}_i) \cdot \underline{A}_{vL} - \underline{A}_{vL} \cdot (\underline{W} - \underline{W}_i) + 2 \underline{A}_{vL} \operatorname{tr} \underline{D}_e$$

$$\dot{A}_{vL}^{11} = A_5 \sigma^{o'11} + A_{vL}^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2A_{vL}^{13} W_{i3}^1 + 2A_{vL}^{11} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{A}_{vL}^{12} = A_5 \sigma^{o'12} + \frac{1}{2} A_{vL}^{23} (v_{1,3} - v_{3,1}) - A_{vL}^{12} \frac{1}{x^1} v_1 - A_{vL}^{23} W_{i3}^1 + 2A_{vL}^{12} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{A}_{vL}^{13} = A_5 \sigma^{o'13} + \frac{1}{2} (A_{vL}^{11} - A_{vL}^{33}) (v_{3,1} - v_{1,3}) + (A_{vL}^{11} - A_{vL}^{33}) W_{i3}^1 + 2A_{vL}^{13} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{A}_{vL}^{22} = A_5 \sigma^{o'22} - \frac{2}{x^1} v_1 A_{vL}^{22} + 2A_{vL}^{22} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{A}_{vL}^{23} = A_5 \sigma^{o'23} + \frac{1}{2} A_{vL}^{12} (v_{3,1} - v_{1,3}) - \frac{1}{x^1} v_1 A_{vL}^{23} + A_{vL}^{12} W_{i3}^1 + 2A_{vL}^{23} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

$$\dot{A}_{vL}^{33} = A_5 \sigma^{o'33} + A_{vL}^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2A_{vL}^{13} W_{i3}^1 + 2A_{vL}^{33} (\operatorname{tr} \underline{D}_e)$$

mit:

$$A_5 = \frac{\mathcal{J}_e^2 \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v}{\sqrt{(\sigma^{o'11})^2 + (\sigma^{o'22})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{o'33})^2 + 2(\sigma^{o'12})^2 (x^1)^2 + 2(\sigma^{o'13})^2 + 2(\sigma^{o'23})^2 (x^1)^2}}$$

Die Komponenten des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{D} werden durch die Geschwindigkeiten der Körperpunkte v^α zum Zeitpunkt τ mit $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ ausgedrückt.

Die Spur von \underline{D} lautet dann:

$$\operatorname{tr} \underline{D} = v_{1,1} + \frac{v_1}{x^1} + v_{3,3}$$

$$\operatorname{tr} \underline{D}_e = \operatorname{tr} \underline{D} - \operatorname{tr} \underline{D}_i = \operatorname{tr} \underline{D} - \frac{\dot{\xi}}{(1-\xi)} = \operatorname{tr} \underline{D} - 3(A_6 - A_7) LC_{DPI}(\underline{\sigma})$$

Die Geschwindigkeitskomponenten der Körperpunkte werden mit dem isoparametrischen Ansatz und der Annahme $\tau v^\alpha = \text{konst.}$ näherungsweise als Differenzenquotienten aus den Knotenkoordinaten \hat{x}_i^α bestimmt.

$$\begin{aligned} \tau \vec{v} &= \tau v^\alpha \tau \vec{g}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \tau \hat{x}_i^\alpha \right) \tau \vec{g}_\alpha \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \left({}^{t+\Delta t} \hat{x}_i^\alpha - {}^t \hat{x}_i^\alpha \right) \tau \vec{g}_\alpha \end{aligned}$$

Aus den Knotenkoordinaten \hat{x}_i^α lassen sich auch die Koordinaten der Körperpunkte x^α zum Zeitpunkt τ berechnen.

$$\begin{aligned} \tau x^\alpha &= v^\alpha (\tau - t) + {}^t x^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \left[{}^{t+\Delta t} \hat{x}_i^\alpha \frac{\tau - t}{\Delta t} + {}^t \hat{x}_i^\alpha \left(1 - \frac{\tau - t}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

Anhang D: Kinematische Grundlagen der kontinuumsmechanischen Beschreibung

Konfiguration

Die Bewegung eines materiellen Körpers kann durch die Bewegung seiner materiellen Punkte beschrieben werden.

Im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit auftretenden großen plastischen Deformationen ist es erforderlich, die jeweils aktuelle Geometrie des zu untersuchenden Körpers zu betrachten, da sich diese im allgemeinen wesentlich ändert.

Abbildung 78 zeigt die unverformte Ausgangskonfiguration eines Körpers zum Zeitpunkt t^0 zusammen mit der verformten (aktuellen) Konfiguration des Kontinuums zum Zeitpunkt t .

Bei der Beschreibung der Deformationen können raumfeste (Abbildung 78) bzw. körperfeste (Abbildung 79) Koordinatensysteme Verwendung finden. Beide Betrachtungsweisen sind bei LEHMANN^[71] gegenübergestellt. In der vorliegenden Arbeit werden raumfeste Koordinaten verwendet, da diese Vorteile bei der Definition der konstitutiven Gleichungen aufweisen^[71].

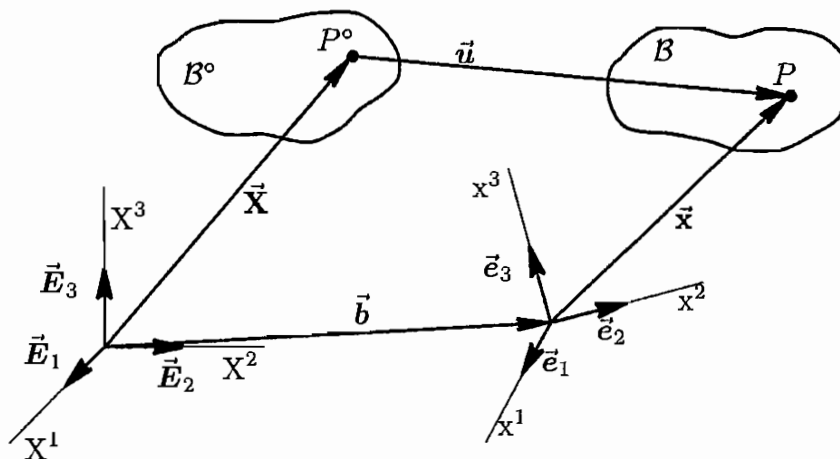


Abbildung 78: Aktuelle- und Ausgangskonfiguration in körperfesten Koordinaten

Neben dem kartesischen Koordinatensystem X^α bzw. x^α mit den Basisvektoren \vec{e}_α ist in der Abbildung 80 ein krummliniges, ebenfalls raumfestes Koordinatensystem x^α mit den Basisvektoren \vec{g}_α eingezeichnet. Dabei handelt es sich bei der Betrachtung axialsymmetrischer

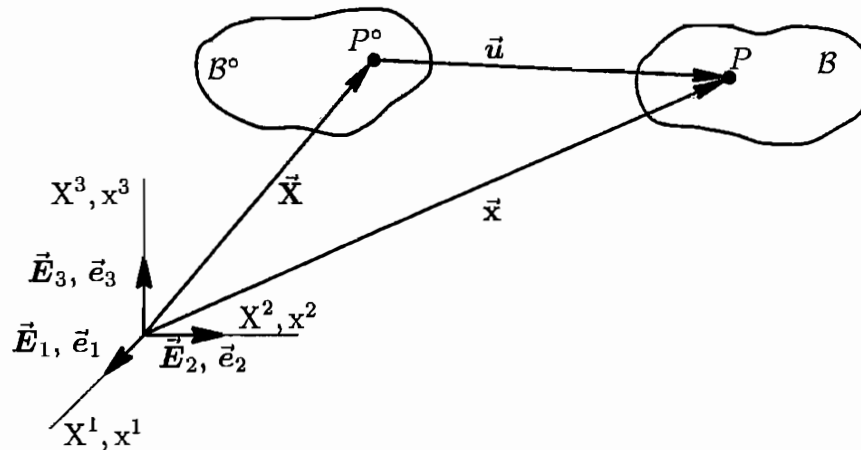


Abbildung 79: Aktuelle- und Ausgangskonfiguration in raumfesten Koordinaten

Probleme in der Regel um ein Zylinderkoordinatensystem.

Die Abbildung 80 zeigt einen Körper in seinem Ausgangszustand B^0 (Zeitpunkt t^0) und in einem deformierten Zustand B (Zeitpunkt t).

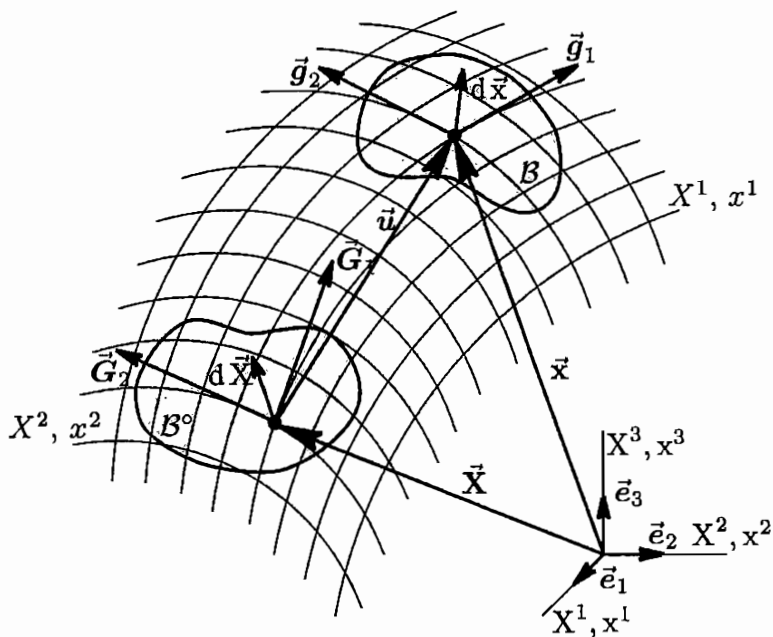


Abbildung 80: Einführung krummliniger Koordinaten

Die materiellen Körperpunkte sind durch die Angabe ihrer Anfangskoordinaten

$$X^\alpha = x^\alpha(t^0) \quad (\text{D.1})$$

eindeutig identifiziert. Ihre Bewegungen lassen sich durch die Zuordnung

$$x^\alpha = x^\alpha(X^\rho, t) \quad (\text{D.2})$$

beschreiben.

Die ortsabhängigen Basisvektoren \vec{g}_α sind definiert als partielle Ableitung des Ortsvektors \vec{x} nach den Koordinaten x^α

$$\vec{g}_\alpha(x^\rho) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (X^\rho \vec{e}_\rho)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (X^\rho)}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\rho \quad , \quad (\text{D.3})$$

und die dazu reziproken Basisvektoren \vec{g}^α berechnen sich mit der Beziehung

$$\vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad , \quad \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Zur Unterscheidung spricht man von den kovarianten Basisvektoren \vec{g}_α und den kontravarianten Basisvektoren \vec{g}^α . Die ko- bzw. kontravarianten Komponenten des Metrikensors lauten

$$g_{\alpha\beta}(x^\rho) = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta \quad (\text{D.5})$$

$$g^{\alpha\beta}(x^\rho) = \vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}^\beta \quad . \quad (\text{D.6})$$

Mit dem Metrikensor lassen sich Tensoren von der einen Basis auf die andere umrechnen:

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \quad . \quad (\text{D.7})$$

Deformation

Um die Verzerrungen anzugeben, denen der Körper beim Übergang vom Ausgangszustand in den aktuellen Zustand unterworfen ist, verwendet man den Deformationsgradienten $\underline{\mathbf{F}}$, mit dem ein Linienelement der Ausgangskonfiguration

$$d\vec{X} = dX^\alpha \vec{G}_\alpha \quad (\text{D.8})$$

in die aktuelle Konfiguration

$$d\vec{x} = dx^\alpha \vec{g}_\alpha \quad (\text{D.9})$$

transformiert wird:

$$d\vec{x} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\vec{X} \quad , \quad \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^\alpha{}_\beta \vec{g}_\alpha \vec{G}^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} \vec{g}_\alpha \vec{G}^\beta \quad (\text{D.10})$$

Die inverse Transformation

$$d\vec{X} = \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot d\vec{x} \quad , \quad \underline{\mathbf{F}}^{-1} = (\underline{\mathbf{F}}^{-1})^\alpha_\beta \vec{\mathbf{G}}_\alpha \vec{\mathbf{g}}^\beta = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{\mathbf{G}}_\alpha \vec{\mathbf{g}}^\beta \quad (\text{D.11})$$

bildet ein Linienelement der aktuellen Konfiguration eindeutig in die Ausgangskonfiguration ab.

Durch die substantielle Zeitableitung des Deformationsgradienten $\underline{\mathbf{F}}$, die als partielle Ableitung nach der Zeit t bei festgehaltenen Körperkoordinaten X^ρ berechnet wird, ergibt sich

$$\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{D}{dt}(\underline{\mathbf{F}}) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X^\rho} (F^\alpha_\beta) \vec{\mathbf{g}}_\alpha \vec{\mathbf{G}}^\beta + F^\alpha_\beta \dot{\vec{\mathbf{g}}}_\alpha \vec{\mathbf{G}}^\beta \quad . \quad (\text{D.12})$$

Die in (D.12) auftretende zeitliche Ableitung der Basisvektoren $\vec{\mathbf{g}}_\alpha$ lässt sich durch Verwendung der CHRISTOFFELsymbole zweiter Art $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ mit den Basisvektoren selbst in Beziehung setzen [70]

$$\dot{\vec{\mathbf{g}}}_\beta = v^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \vec{\mathbf{g}}_\alpha \quad . \quad (\text{D.13})$$

In [59] wird zur Berechnung der CHRISTOFFELsymbole der folgende Ausdruck abgeleitet

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\gamma\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho}) \quad . \quad (\text{D.14})$$

Die kontravarianten Komponenten v^γ des Geschwindigkeitsvektors eines Körperpunktes ergeben sich aus der substantiellen Zeitableitung des momentanen Ortsvektors \mathbf{x} , die mit festgehaltenen X^ρ auszuführen ist

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{D\vec{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X^\rho} (x^\alpha) = \vec{\mathbf{g}}_\alpha \dot{x}^\alpha = v^\alpha \vec{\mathbf{g}}_\alpha \quad . \quad (\text{D.15})$$

Multipliziert man $\dot{\underline{\mathbf{F}}}$ mit $\underline{\mathbf{F}}^{-1}$, so folgt daraus

$$\dot{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X^\mu} (F^\alpha_\rho) (F^{-1})^\rho_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma \right) \vec{\mathbf{g}}_\alpha \vec{\mathbf{g}}^\beta = (v^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma) \vec{\mathbf{g}}_\alpha \vec{\mathbf{g}}^\beta \quad (\text{D.16})$$

Im Gegensatz zu der partiellen Ableitung $v^\alpha_{,\beta}$ ist die in (D.16) auftretende kovariante Ableitung

$$v^\alpha|_\beta = v^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma \quad (\text{D.17})$$

ein Tensor zweiter Stufe. Dieser wird zur Definition des Geschwindigkeitsgradienten $\underline{\mathbf{L}}$ verwendet

$$\underline{\mathbf{L}} = \text{grad } \vec{\mathbf{v}} = v^\alpha|_\beta \vec{\mathbf{g}}_\alpha \vec{\mathbf{g}}^\beta \quad . \quad (\text{D.18})$$

Der Geschwindigkeitsgradient \underline{L} wird in den symmetrischen Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D} und den antimetrischen Tensor der Rotationsgeschwindigkeit \underline{W} aufgeteilt

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \quad , \quad (\text{D.19})$$

mit

$$\underline{D} = d^{\alpha}_{\beta} \vec{g}_{\alpha} \vec{g}^{\beta} = \frac{1}{2} (v^{\alpha} |_{\beta} + v_{\beta} |^{\alpha}) \vec{g}_{\alpha} \vec{g}^{\beta} \quad , \quad (\text{D.20})$$

$$\underline{W} = \omega^{\alpha}_{\beta} \vec{g}_{\alpha} \vec{g}^{\beta} = \frac{1}{2} (v^{\alpha} |_{\beta} - v_{\beta} |^{\alpha}) \vec{g}_{\alpha} \vec{g}^{\beta} \quad . \quad (\text{D.21})$$

Wie bei allen Tensoren lassen sich auch die Komponenten der kovarianten Ableitung mit den Metrikoeffizienten in die jeweils reziproke Basis umrechnen

$$v_{\beta} |^{\alpha} = g_{\beta\gamma} v^{\gamma} |_{\rho} g^{\rho\alpha} \quad . \quad (\text{D.22})$$

Dem in (D.21) angegebenen Tensor der Rotationsgeschwindigkeit kommt im Zusammenhang mit den im Stoffgesetz auftretenden Zeitableitungen tensorieller Größen besondere Bedeutung zu.

Verzerrungsmaß

Der Verschiebungsvektor \vec{u} ist definiert (siehe Abbildung 80) als:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \quad (\text{D.23})$$

und liefert eine Beziehung zwischen dem materiellen, auf die Ausgangskonfiguration \mathcal{B}° bezogenen, Deformationsgradienten \underline{F} und dem materiellen Verschiebungsgradienten:

$$\text{Grad } \vec{u} = \underline{F} - \vec{G}_i \otimes \vec{G}^i \quad . \quad (\text{D.24})$$

Mit dem Deformationsgradienten \underline{F} läßt sich die Differenz der Quadrate der Linienelemente im aktuellen (verformten) und im Ausgangszustand berechnen:

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X} = d\vec{X} \cdot \left(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{1} \right) \cdot d\vec{X} = d\vec{X} \cdot (2\underline{\epsilon}) \cdot d\vec{X} \quad . \quad (\text{D.25})$$

Der so definierte GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor $\underline{\epsilon}$ läßt sich durch die Verschiebungen ausdrücken:

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + (\text{Grad } \vec{u})^T + \text{Grad } \vec{u} (\text{Grad } \vec{u})^T) \quad . \quad (\text{D.26})$$

Zylinderkoordinaten

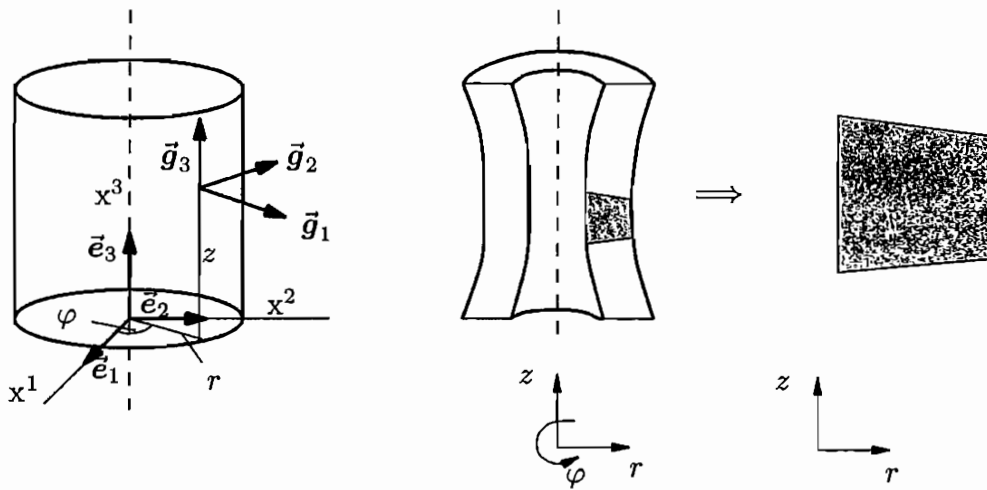


Abbildung 81: Zylinderkoordinatensystem für axialsymmetrische Probleme

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten x^α und den Zylinderkoordinaten r, φ, z lautet:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi \\ x^2 &= r \sin \varphi \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Aus dem Ortsvektor

$$\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha = r \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \varphi \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \quad (\text{D.28})$$

erhält man mit (D.3) die ortsabhängigen kovarianten Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 &= -r \sin \varphi \vec{e}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{g}_3 &= \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

An dieser Stelle wird für die Zylinderkoordinaten r, φ, z folgende Nomenklatur eingeführt:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \\ x^2 &= \varphi \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Die Metriken berechnen sich aus (D.5) und (D.6) :

$$\begin{array}{cc} \text{kovariante Metrik} & \text{kontravariante Metrik} \\ g_{\alpha\beta}(x^\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & g^{\alpha\beta}(x^\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{x^1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (\text{D.31})$$

Die CHRISTOFFELSymbole ergeben sich nach (D.14) zu:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{D.32})$$

Die Gleichungen (D.27) bis (D.32) gelten bei der Beschreibung beliebiger Prozesse. Die im folgenden betrachtete Beschränkung auf bezüglich der x^3 -Achse rotationssymmetrische Probleme bedeutet, daß die partiellen Ableitungen nach x^2 entfallen. Tritt zusätzlich keine Torsion um die x^3 -Achse auf, so entstehen auch keine Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten in x^2 -Richtung. Mit diesen Vereinfachungen erhält man die folgenden kovarianten Ableitungen der Verschiebungen:

$$u_{\alpha|\beta} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & u_{1,3} \\ 0 & x^1 u_1 & 0 \\ u_{3,1} & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad u^{\alpha|\beta} = \begin{bmatrix} u^1_{,1} & 0 & u^1_{,3} \\ 0 & \frac{1}{x^1} u_1 & 0 \\ u^3_{,1} & 0 & u^3_{,3} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{D.33})$$

Der LAGRANGESche Verzerrungstensor $\underline{\epsilon}$ aus (D.26) berechnet sich mit (D.7) und (D.33) zu:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ 0 & x^1 u_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \underline{g}^{\alpha} \underline{g}^{\beta} \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2 & 0 & u_{1,3} u_{1,1} + u_{3,3} u_{3,1} \\ 0 & (u_1)^2 & 0 \\ u_{1,3} u_{1,1} + u_{3,3} u_{3,1} & 0 & (u_{1,3})^2 + (u_{3,3})^2 \end{bmatrix} \underline{g}^{\alpha} \underline{g}^{\beta} \quad . \quad (\text{D.34})$$

Weiterhin erhält man mit

$$v^{\alpha}_{,\beta} = \begin{bmatrix} v^1_{,1} & 0 & v^1_{,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ v^3_{,1} & 0 & v^3_{,3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.35})$$

die gemischtvarianten Maßzahlen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors \underline{D}

$$d^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} v^1_{,1} & 0 & \frac{1}{2}(v^1_{,3} + v^3_{,1}) \\ 0 & \frac{1}{x^1} v^1 & 0 \\ \frac{1}{2}(v^1_{,3} + v^3_{,1}) & 0 & v^3_{,3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.36})$$

und des Spintensors \underline{W}

$$w^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(v^1_{,3} - v^3_{,1}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(v^1_{,3} - v^3_{,1}) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w^1_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -w^1_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{D.37})$$

Substantielle Zeitableitung eines Tensors in Zylinderkoordinaten

Unter Verwendung der objektiven Zeitableitung (7.3):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\nabla} \underline{\sigma} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega} \quad (\text{D.38})$$

mit:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= \frac{D}{dt} \underline{\sigma} = \frac{D}{dt} \{ \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \} \\ &= \dot{\sigma}^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta + \sigma^{\alpha\beta} \dot{\vec{g}}_\alpha \vec{g}_\beta + \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \dot{\vec{g}}_\beta \\ &= \dot{\sigma}^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta + \sigma^{\alpha\beta} (v^\alpha|_\alpha - v^\alpha_{,\alpha}) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta + \sigma^{\alpha\beta} (v^\alpha|_\beta - v^\alpha_{,\beta}) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\alpha \\ &= \left(\dot{\sigma}^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} (v^\alpha|_\alpha - v^\alpha_{,\alpha}) + \sigma^{\alpha\beta} (v^\beta|_b - v^\beta_{,b}) \right) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega} &= \Omega^\alpha_b \vec{g}_\alpha \vec{g}^b \cdot \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta - \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \cdot \Omega^a_x \vec{g}_a \vec{g}^x \\ &= \Omega^\alpha_b \sigma^{\alpha\beta} \delta_a^b \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta - \sigma^{\alpha\beta} g_{ba} \Omega^a_x \vec{g}_\alpha \vec{g}^x \\ &= \Omega^\alpha_a \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta - \sigma^{\alpha\beta} g_{ba} g^{\beta x} \Omega^a_x \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \\ &= \Omega^\alpha_a \sigma^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta - \sigma^{\alpha\beta} \Omega_b^\beta \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \\ &= \left((w^\alpha_a - W_i^\alpha_a) \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} (w^\beta_b - W_i^\beta_b) \right) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

$$\underline{\nabla} \underline{\sigma} = \nabla^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta = \overset{\square}{\sigma}^{\alpha\beta} \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta + \sigma^{\alpha\beta} (\text{tr} \underline{D}_e) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta \quad (\text{D.41})$$

erhält man die substantielle Zeitableitung eines Tensors in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{\alpha\beta} &= (w^\alpha_a - W_i^\alpha_a - v^\alpha|_a + v^\alpha_{,\alpha}) \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \left(w^\beta_b - W_i^\beta_b - v^\beta|_b + v^\beta_{,b} \right) + \overset{\square}{\sigma}^{\alpha\beta} \\ &= (w^\alpha_a - W_i^\alpha_a - \Gamma_{a\gamma}^\alpha v^\gamma) \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \left(w^\beta_b - W_i^\beta_b - \Gamma_{a\gamma}^\beta v^\gamma \right) + \overset{\square}{\sigma}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Literatur

- [1] Y. BAI UND B. DODD. „Adiabatic Shear Localization: Occurrences, Theories and Applications“. Pergamon Press (1992).
- [2] H. BALKE, W. POMPE UND H. WEBER. Zum Diffusionskriechen von Polykristallen mit stochastisch angeordneten Korngrenzen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM) **75**, 219 – 220 (1995).
- [3] T.W. BARBEE JR., L. SEAMAN, R. CREWDSON UND D. CURRAN. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals. Journal of Materials **7**(3), 393 – 401 (1972).
- [4] K.J. BATHE. „Finite-Elemente-Methoden“. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1986).
- [5] D.P. BERTSEKAS. Projected newton methods for optimization problems with simple constraints. SIAM Journal on Control and Optimization **20**, 221 – 246 (1982).
- [6] B. BISCHOFF-BEIERMANN. „Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **82** (1992).
- [7] T.Z. BLAZYNSKI (Herausgeber). „Materials at high strain rates“. Elsevier Applied Science (1987).
- [8] D. BOIS, A. GRAVE UND M.L. MEYNIEL. Numerical simulations of impact tests on a rigid wall. In C.Y. CHIEM, H.-D. KUNZE UND L.W. MEYER (Herausgeber), „Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials“, Band 2, Seiten 929 – 936. Proc. IMPACT'87, DGM Informationsgesellschaft (1988).
- [9] H. BRAASCH. „Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze“. Bericht Nr. 92-71, TU Braunschweig, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig (1992).
- [10] D. BRAESS. „Finite Elemente“. Springer Verlag (1992).

-
- [11] O.T. BRUHNS. Einige Bemerkungen zur Beschreibung inelastischer Prozesse im Bereich hoher Deformationsgeschwindigkeiten. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **67**(4), T181 – T183 (1987).
- [12] O.T. BRUHNS. A continuum damage theory for high strain rate deformations of metals with application to impact problems. In M. JONO UND T. INOUE (Herausgeber), „Mechanical Behaviour of Materials-VI“, Band 1, Seiten 499 – 506. Proc. ICM-6, Pergamon Press (1991).
- [13] O.T. BRUHNS. Shear band formation in impact problems. In P. WRIGGERS UND W. WAGNER (Herausgeber), „Nonlinear computational mechanics“, Seiten 399 – 417. Springer Verlag (1991).
- [14] O.T. BRUHNS. Zur Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbandbildung bei der Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe. In P. MAYR, O. VÖHRINGER UND H. WOHLFAHRT (Herausgeber), „E. Macherauch - Festschrift“, Seiten 227 – 236. DGM (1991).
- [15] O.T. BRUHNS. A continuum damage model for the description of high strain rate deformations. In D. BESDO UND E. STEIN (Herausgeber), „Finite Inelastic Deformations — Theory and Applications“, Seiten 47 – 56. IUTAM-Symposium Hannover 1991, Springer Verlag (1992).
- [16] O.T. BRUHNS. Neue Materialgleichungen der Plastomechanik. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **73**(4-5), T6 – T19 (1993).
- [17] O.T. BRUHNS UND H. DIEHL. An internal variable theory of inelastic behaviour at high rates of strain. *Archives of Mechanics* **41**(4), 427 – 460 (1989).
- [18] O.T. BRUHNS, H. DIEHL UND W. FORNEFELD. A continuum damage theory for high strain rate deformations of metals with application to impact problems. In W.B. KRÄTZIG ET AL. (Herausgeber), „Structural Dynamics“, Band 1, Seiten 81 – 87. Proc. EURO DYN '90, Balkema (1991).
- [19] O.T. BRUHNS UND TH. LEHMANN. „Elemente der Mechanik II“. Vieweg (1994).
- [20] R.J. CLIFTON UND P. KUMAR. Dislocation configurations due to plate impact. In K. KAWATA UND J. SHIOIRI (Herausgeber), „High Velocity Deformation of Solids, IUTAM-Symposium Tokyo 1977“. Springer Verlag (1978).
- [21] A.C.F. COCKS UND M.F. ASHBY. Intergranular fracture during powerlaw creep under multiaxial stresses. *Metal Science* Seiten 395 – 402 (1980).

-
- [22] D.R. CURRAN. Dynamic fracture. In J.A. ZUKAS, T. NICHOLAS, H.F. SWIFT, L.B. GRESCUK UND D.R. CURRAN (Herausgeber), „Impact Dynamics“, Seiten 333 – 366. John Wiley & Sons (1982).
- [23] D.R. CURRAN UND L. SEAMAN. Computational models for nucleation, growth, and coalescence of adiabatic shear bands. *Journal de Physique* **8**, 395 – 401 (1985).
- [24] D.R. CURRAN, L. SEAMAN UND D.A. SHOCKEY. Linking dynamic fracture to microstructural processes. In M.A. MEYERS UND L.E. MURR (Herausgeber), „Shock waves and high-strain-rate phenomena in metals“. Plenum Press (1981).
- [25] D.R. CURRAN, L. SEAMAN UND D.A. SHOCKEY. Dynamic failure of solids. *Physics Reports* **147**(5 & 6), 253 – 388 (1987).
- [26] Y.F. DAFALIAS. A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations. In A. SAWCZUK UND G. BIANCHI (Herausgeber), „Plasticity today, modelling, methods and applications“. Elsevier Applied Science Publishers London and New York (1983).
- [27] Y.F. DAFALIAS. The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations. *Mech. Materials* **3**, 223 – 233 (1984).
- [28] Y.F. DAFALIAS. The plastic spin. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 865 – 871 (1985).
- [29] J. DANKERT. „Numerische Methoden der Mechanik“. Springer Verlag, Wien, New York (1977).
- [30] L. DAVISON UND M.E. KIPP. Calculation of spall damage accumulation in ductile metals. In K. KAWATA UND J. SHIOIRI (Herausgeber), „High Velocity Deformation of Solids , IUTAM-Symposium Tokyo 1977“, Seiten 163 – 175. Springer Verlag (1978).
- [31] L. DAVISON, A.L. STEVENS UND M.E. KIPP. Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *J. Mech. Phys. Solids* **25**, 11 – 28 (1977).
- [32] R. DE BOER. „Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure“. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982).
- [33] H. DIEHL. „Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **66** (1989).
- [34] J.R. DORMAND UND P.J. PRINCE. A family of embedded Runge–Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **6**, 19 – 26 (1980).

-
- [35] J.R. DORMAND UND P.J. PRINCE. A reconsideration of some embedded Runge–Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **15**, 203 – 211 (1986).
- [36] D.C. DRUCKER UND W. PRAGER. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly Applied of Mathematics* **X(2)**, 157 – 165 (1952).
- [37] J. EFTIS, J.A. NEMES UND P.W. RANGLES. Viscoplastic analysis of plate-impact spallation. *International Journal of Plasticity* **7**, 15 – 39 (1991).
- [38] G. ENGELN-MÜLLGES UND F. REUTER. „Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN 77-Programmen“. BI Wissenschaftsverlag (1988).
- [39] E. FEHLBERG. Klassische Runge–Kutta Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle. *Computing* **4**, 93 – 106 (1969). mit Berichtigung in Band 5 (1970), S.184.
- [40] E. FEHLBERG. Klassische Runge–Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing* **6**, 60 – 71 (1970).
- [41] A. FELDMÜLLER. „Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **75** (1991).
- [42] W. FORNEFELD. „Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **73** (1990).
- [43] A. GERARD UND S. BASTE. A constitutive relation for microcracked materials including the effects of microcrack opening-closing. *International Journal of Engineering Sciences* **32(4)**, 557 – 567 (1994).
- [44] W. GOLDSMITH. „Impact — The theory and physical behaviour of colliding solids“. Edward Arnold (1960).
- [45] A.L. GURSON. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I — yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology* **99**, 2 – 15 (1977).
- [46] J. HARDING. The effect of high strain rate on material properties. In T.Z. BLAZYNSKI (Herausgeber), „Materials at high strain rates“, Seiten 133 – 186. Elsevier Applied Science (1987).

-
- [47] G. HEINZEL. Moderne Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. *c't* Heft 8, 172 – 185 (1992).
- [48] J. HOLLAND. „Adaptation in Natural and Artificial Systems“. MIT Press, Cambridge (1992).
- [49] T.J.R. HUGHES. „The Finite Element Method — Linear static and dynamic finite element analysis“. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1987).
- [50] F. JÄHN. „Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Fließspannungen von metallischen Werkstoffen bei höchsten Dehngeschwindigkeiten“. Dissertation, Universität Karlsruhe (1979).
- [51] K.L. JOHNSON. „Contact mechanics“. Cambridge University Press (1985).
- [52] W. JOHNSON. „Impact strength of materials“. Edward Arnold (1972).
- [53] L.M. KACHANOV. „Introduction to continuum damage mechanics“. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht / Boston / Lancaster (1986).
- [54] B. KAEMPF UND O.T. BRUHNS. Zur Kopplung thermomechanischer Prozesse auf der Basis eines Mikro-Makro-Modells. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* 74(4), 13 – 16 (1994).
- [55] J.F. KALTHOFF UND D.A. SHOCKEY. Instability of cracks under impulse loads. *Journal of Applied Physics* 48(3), 986 – 993 (1977).
- [56] J.F. KALTHOFF, D.A. SHOCKEY UND H. HOMMA. Short pulse fracture mechanics. *Inst. Phys. Conf. Ser.* 70, 205 – 211 (1984).
- [57] J.F. KALTHOFF, S. WINKLER UND W. BÖHME. A novel procedure for measuring the impact fracture toughness k_{I_d} with precracked charpy specimens. *Journal de Physique* 46(C5), 179 – 186 (1985).
- [58] N. KIKUCHI UND J.T. ODEN. „Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite element methods“. SIAM (1988).
- [59] E. KLINGBEIL. „Tensorrechnung für Ingenieure“. Hochschultaschenbücher 197. Wissenschaftsverlag, Mannheim (1989).
- [60] C. KÖNKE. „Kopplung eines mikromechanischen Porenwachstumsmodells mit einem Makrorißmodell zur Beschreibung der Schädigung in duktilen Materialien“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1993).

-
- [61] C. KÖNKE. Simulation der Schädigung vom Porenwachstum bis zum Makroriß für duktile Materialien. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **75**, 229 – 230 (1995).
- [62] J. KÖRBER. „Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik* **88** (1994).
- [63] J. KÖRBER. Entwicklung einer Finite-Element-Formulierung mit den Methoden der gewichteten Residuen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **74**(4), 211 – 213 (1994).
- [64] E. KRÖNER. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Erg. angew. Math.* **5**, 1 – 79 (1958).
- [65] E. KRÖNER. Zur Plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metallurgica* **9**, 155 – 161 (1961).
- [66] R. LAMMERING, R.B. PECHERSKI UND E. STEIN. Theoretical and computational aspects of large plastic deformations involving strain-induced anisotropy and developing voids. *Archives of Mechanics* **42**(3), 347 – 375 (1990).
- [67] E.H. LEE. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics* **36**, 1 – 6 (1969).
- [68] E.H. LEE. Some comments on elastic-plastic analysis. *Int. J. Solids Struct.* **17**, 859 – 872 (1981).
- [69] E.H. LEE UND D.T. LIU. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics* **38**(1), 19 – 27 (1967).
- [70] TH. LEHMANN (Herausgeber). „Große elasto-plastische Formänderungen“, *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik* **1**, Ruhr-Universität Bochum (1976).
- [71] TH. LEHMANN. General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations. In TH. LEHMANN (Herausgeber), „The Constitutive Law in Thermoplasticity“, Seiten 379 – 463. *CISM-Courses and Lectures, No 281*, Springer Verlag (1984).
- [72] D.B. MACVEAN. Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *ZAMP* **19**(11), 157 – 185 (1968).
- [73] R. MAHNKEN. „Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik“. Dissertation, Universität Hannover (1992).

-
- [74] J. MANDEL. „Plasticité classique et viscoplasticité“. Nummer 97 in Courses and Lectures. Springer, New York, International Centre for Mechanical Sciences, Udine (1971).
- [75] G.A. MAUGIN. „The Thermomechanics of Plasticity and Fracture“. Cambridge University Press (1992).
- [76] C. MIEHE. „Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse“. Dissertation, Universität Hannover (1988).
- [77] M. MITTELBACH, C. VOGD, L.S. FLETCHER UND G.P. PETERSON. The interfacial pressure distribution and thermal conductance of bolted joints. *Journal of Heat Transfer* **116**, 823 – 828 (1994).
- [78] S. NEMAT-NASSER. Phenomenological theories of elastoplasticity and strain localization at high strain rates. *Appl. Mech. Rev.* **45**(3), 19 – 45 (1992).
- [79] N.M. NEWMARK. A method for computation of structural dynamics. *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.* **85**, 67 – 94 (1959).
- [80] T. PAUL. Entwicklung eines FE-Elementes für axialsymmetrische Strukturen zur Berechnung von physikalisch und geometrisch nichtlinearem Materialverhalten. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1994).
- [81] P. PERZYNA. On constitutive modelling of dissipative solids for plastic flow, instability and fracture. In A. SAWCZUK UND G. BIANCHI (Herausgeber), „Plasticity today“. Elsevier Applied Science Publishers London and New York (1985).
- [82] M. PITZER. „Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 61 (1988).
- [83] P.J. RABIER. Some remarks on damage theory. *International Journal of Engineering Science* **27**(1), 29 – 54 (1989).
- [84] I. RECHENBERG. „Evolutionsstrategie“. Frd. Frommann Verlag (1973).
- [85] U. ROTT. „Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 76 (1991).
- [86] P. SCHIESSE. „Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 89 (1994).

-
- [87] K. SCHITTKOWSKI. The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented lagrangian type line search function. *Numerische Mathematik* **38**, 83 – 114 (1981).
- [88] E. SCHÖNEBURG, F. HEINZMANN UND S. FEDDERSON. „Genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien: Eine Einführung in Theorie und Praxis der simulierten Evolution“. Addison–Wesley GmbH (1994).
- [89] L. SCHREIBER. Parameteridentifikation bei Stoffmodellen mit der Evolutionsstrategie. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **71**(4-5), 343 – 345 (1993).
- [90] H.-P. SCHWEFEL. „Evolutionsstrategie und numerische Optimierung“. Dissertation, TU Berlin (1975).
- [91] H.-P. SCHWEFEL. „Evolution and Optimum Seeking“. John Wiley & Sons (1995).
- [92] D.A. SHOCKEY, D.R. CURRAN UND L. SEAMAN. Computer modeling of microscopic failure processes under dynamic loads. In K. KAWATA UND J. SHIOIRI (Herausgeber), „High Velocity Deformation of Solids, IUTAM - Symposium Tokyo 1977“, Seiten 149 – 162. Springer Verlag (1978).
- [93] D.A. SHOCKEY UND D.C. ERLICH. Metallurgical influences on shear band activity. In M.A. MEYERS UND L.E. MURR (Herausgeber), „Shock waves and high-strain-rate phenomena in metals“. Plenum Press (1981).
- [94] D.A. SHOCKEY, L. SEAMAN UND D.R. CURRAN. Microfailure models and their application to nonlinear dynamic fracture problems. In N. PERRONE UND S.N. ATLURI (Herausgeber), „Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics“, Band 35 aus „AMD“, Seiten 79 – 105. ASME (1979).
- [95] E. STECK. Zur Berücksichtigung von Vorgängen im Mikrobereich metallischer Werkstoffe bei der Entwicklung von Stoffmodellen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **75**(5), 331 – 341 (1995).
- [96] W.H. SWANN. Constrained optimization by direkt search. In P.E. GILL UND W. MURRAY (Herausgeber), „Numerical Methods for Constrained Optimization“, Seiten 208 – 210. Academic Press Inc. (1974).
- [97] R.L. TAYLOR UND P. WRIGGERS. „FEAP, Description and Users–Manual“ (1990).
- [98] V. TVERGAARD UND A. NEEDLEMAN. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica* **32**(1), 157 – 169 (1984).

-
- [99] H. WALLER UND W. KRINGS. „Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik“. BI Wissenschaftsverlag (1975).
- [100] H. WALLER UND R. SCHMIDT. „Schwingungslehre für Ingenieure“. BI Wissenschaftsverlag (1989).
- [101] Y.S. WANG. A simplified theory of the constitutive equations of metal plasticity at finite deformation. *Journal of Applied Mechanics* **40**, 941 – 947 (1973).
- [102] K. WEGENER. Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp. *Braunschweiger Schriften zur Mechanik 2, Mechanik - Zentrum der Technischen Universität Braunschweig* (1991).
- [103] B. WESTERHOFF. „Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 99 (1995).
- [104] P. WRIGGERS. „Zur Berechnung von Kontakt- und Stoßproblemen elastischer Körper mit Hilfe der Finite-Element-Methode“. Dissertation, Universität Hannover (1981).
- [105] P. WRIGGERS, O. SCHERF UND C. CARSTENSEN. An adaptive finite element model for frictionless contact problems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **75**, 37 – 40 (1995).
- [106] Z.-H. ZHONG. „Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems“. Oxford University Press (1993).
- [107] O.C. ZIENKIEWICZ UND R.L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 1. McGraw-Hill Book Company, London, 4. Auflage (1989).
- [108] O.C. ZIENKIEWICZ UND R.L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 2. McGraw-Hill Book Company, London, 4. Auflage (1989).
- [109] J.A. ZUKAS. Stress waves and fracture. In T.Z. BLAZYNSKI (Herausgeber), „Materials at high strain rates“, Seiten 219 – 242. Elsevier Applied Science (1987).

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
(Juli 1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung (Dezember 1985)

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationsymmetrischer Last (Juli 1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 100**