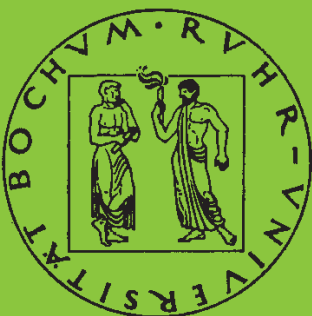


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Horst Lanzerath

**Zur Modalanalyse unter Verwendung der
Randelementemethode**

Heft Nr. 103



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Horst Lanzerath

**Zur Modalanalyse unter Verwendung der
Randelementemethode**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 103
1996

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

© 1996 Dr.-Ing. Horst Lanzerath
Mittelstraße 18
53902 Berresheim

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1992 bis 1996 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der *Arbeitsgruppe für numerische Methoden und Simulationstechnik* am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich recht herzlich für die Betreuung und Unterstützung meiner Arbeit. Durch zahlreiche fachliche Anregungen und interessante Diskussionen hat er diese Arbeit stets gefördert.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für sein Interesse und die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats.

Besonders möchte ich mich auch bei den Herren Andreas Eckstein und Dirk Eichel für die Hilfe bei der Lösung mechanischer Probleme und bei Herrn Matthias Bunte für die Rechnerbetreuung bedanken.

Allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe für numerische Methoden und Simulationstechnik vielen Dank für die gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung.

Meiner Frau und meiner Tochter danke ich für Unterstützung, Verständnis und Geduld während der Arbeit.

Berresheim, im Mai 1996

Horst Lanzerath

Dissertation eingereicht am: 08. Mai 1996

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1996

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung	1
1.2	Stand der Forschung	2
1.2.1	Zeitverlaufsberechnungen mit der REM	3
1.2.2	Ermittlung modaler Parameter mittels REM	3
1.3	Ziel dieser Arbeit	4
2	Grundlagen	6
2.1	Differentialgleichungen	6
2.1.1	Helmholtz-Gleichung	7
2.1.2	Navier'sche-Gleichungen	8
2.2	Das Prinzip der gewichteten Residuen	11
2.3	Fundamentallösungen	16
2.3.1	Reihenentwicklungen der Fundamentallösung	18
2.4	Herleitung der Randintegralgleichungen	19
2.5	Algebraisierung der Randintegralgleichungen	25
2.6	Spannungsberechnung mit der REM	29
2.7	Randelementtypen	30
2.7.1	Viereckselemente	30
2.7.2	Dreieckselemente	32
2.7.3	Verschiebungsansätze	34
2.7.4	Hybridelemente und diskontinuierliche Elemente	35
2.8	Numerische Integration	40

2.8.1	Reguläre Integrale	41
2.8.2	Nichtlineare Transformation	43
2.8.3	Fast-singuläre Integrale	44
2.8.4	Schwach-singuläre Integrale	51
2.8.5	Stark-singuläre Integrale	53
3	Eigenwertanalyse mit der Randelementemethode	66
3.1	Verfahren zur Eigenwertanalyse mit der Randelementemethode	66
3.1.1	Einleitung und Problemstellung	66
3.1.2	Verwendung der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung	67
3.1.3	Reihenentwicklungen mit variablem Entwicklungspunkt	68
3.1.4	Verwendung der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung	70
3.2	Einleitende Bemerkungen zur Eigenwertanalyse mit der REM	78
3.2.1	Rechts- und Linkseigenwertproblem	78
3.2.2	Eigenschaften der Systemmatrix bei den Eigenwerten	80
3.2.3	Ermittlung von Eigenvektoren	80
3.2.4	Verwendete Fundamentallösung	81
3.2.5	Direkte Lösung der charakteristischen Gleichung	82
3.2.6	Testbeispiele für die direkte Lösung	82
3.2.7	Formen der Systemmatrix	96
3.3	Linearisierung des Eigenwertproblems der REM	97
3.3.1	Günther'sche Expansion von Matrizen	97
3.3.2	QR-Algorithmus zur Lösung des speziellen Eigenwertproblems	101
3.3.3	QZ-Algorithmus zur Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems	103
3.4	Iterative Lösungsverfahren	107
3.4.1	Intervallschachtelungsverfahren	107
3.4.2	Newton-Verfahren	109
3.4.3	Sekantenverfahren	110
3.4.4	Konvergenzordnungen der einzelnen Verfahren	110
3.4.5	Newton-Verfahren in der Anwendung	112
3.4.6	Sekantenverfahren in der Anwendung	116

3.4.7	Kombination von Newton- und Sekantenverfahren	117
3.4.8	Durchlaufen eines Frequenzbereichs: Einsatz der inversen Funktion	118
3.5	TS - Algorithmus	121
3.5.1	Praktische Anwendung des TS-Algorithmus	126
3.6	Beispiele zur Eigenwertberechnung	139
3.6.1	Akustik-Würfel mit 54 Elementen	139
3.6.2	Kombination von Iterationsverfahren und QZ-/QR-Algorithmus	143
3.6.3	Einseitig eingespannter Balken mit 42 Elementen	145
3.7	Bestimmung von Eigenvektoren mit der Singulärwertzerlegung	147
3.8	Zusammenfassung der Eigenwertanalyse	151
4	Zeitbereichsberechnung mit der REM	153
4.1	Direkte Zeitbereichsverfahren	154
4.2	Frequenzbereich und Fourier-Transformation	157
4.3	Bildbereich und Laplace-Transformation	160
4.4	Modalanalyse	162
4.4.1	Grundlagen der Modalanalyse	162
4.4.2	Einsatzgebiete der Modalanalyse	169
4.5	Modalanalyse in Kombination mit der Randelementemethode	177
4.5.1	Berücksichtigung von Anfangsbedingungen	180
4.5.2	Verschiebungsberechnung für Punkte im Innern des Bauteils	181
4.5.3	Spannungsberechnung für Punkte im Innern des Bauteils	182
4.5.4	Anwendungsbeispiele	182
5	Zusammenfassung	197
Anhang A		199
A.1	Matrizenzerlegung	199
A.1.1	Eigenwertzerlegung	199
A.1.2	Singulärwertzerlegung	200
A.1.3	LU-Zerlegung von Matrizen	200

Anhang B	202
B.1 Determinantenverläufe des Balkens aus 42 Elementen (reell/komplex)	202
B.2 Vergleich der Determinantenverläufe berechnet mit FEM/REM	202
Anhang C	208
C.1 Reihenentwicklung der Fundamentallösung der 3D-Dynamik	208
Anhang D	210
D.1 Ableitungen der Fundamentallösung der 3D-Dynamik	210
D.2 Ableitungen der Fundamentalrandspannung der 3D-Dynamik	211
Anhang E	217
E.1 Partielle Integration	217
Literaturverzeichnis	219

Häufig verwendete Formelzeichen

3D	dreidimensional
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
ε_{ij}	Verzerrungstensor
ε	Radius
Γ	Rand des 3D-Gebietes Ω
κ	$\kappa = 1 / k$
λ, μ	Lamé'sche Konstanten
∇^2	Laplace-Operator
ν	Querkontraktionszahl
ω	Kreisfrequenz
ω_i	Eigenkreisfrequenz
Ω	3D-Gebiet
$\underline{\Phi}_{R,L}$	Modalmatrizen im Zustandsraum
ρ	Dichte
ρ_1, ρ_2	Koordinaten der nichtlinearen Transformation
σ_{ij}	Spannungstensor
\vec{b}	Vektor innerer Belastungen
$\underline{B}, \underline{A}$	Systemmatrizen der Randelementemethode, Randbedingungen eingebaut
\underline{B}^*	konjugiert komplexe, transponierte Matrix zu \underline{B}
\underline{c}^i	Matrix integralfreier Terme
c	Schallgeschwindigkeit
c_s	Scherwellengeschwindigkeit
c_p	Druckwellengeschwindigkeit
E	Elastizitätsmodul

FEM	Finite Elemente Methode
\vec{f}, \vec{F}	Vektor der bekannten Randgrößen der Randelementemethode
$\underline{G}, \underline{H}$	Systemmatrizen der Randelementemethode, ohne Randbedingungen
G	Schubmodul
i	imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
J	Jacobi-Determinante einer Koordinatentransformation
k	Wellenzahl
\underline{N}	Matrix der Formfunktionen
\vec{n}	Vektor der Flächennormalen
O	Landau-Symbol
\vec{p}	Vektor der Randspannungen
\vec{q}	Vektor modaler Koordinaten
REM, BEM	Randelementemethode
\vec{r}, r	Abstand Quellpunkt/Aufpunkt
$r_{,i}$	$r_{,i} = r_i / r$
t	Zeit
T_1	Periodendauer der ersten Eigenschwingung
t^*	normierte Zeit $t^* = t / T_1$
\vec{u}	Verschiebungsvektor
u	Schalldruck
$u^*, u_{ij}^*, p^*, p_{ij}^*$	Fundamentallösung
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
\vec{x}	Koordinaten im 3D-Raum
\vec{x}^i	Quellpunktkoordinaten
$\vec{x}(t), \vec{x}(\omega)$	Vektor der unbekannt Randgrößen
ξ_1, ξ_2	lokale Elementkoordinaten
\vec{x}_i, \vec{y}_i	Rechts-/Linkseigenvektoren
\underline{X}	Modalmatrix der Rechtseigenvektoren
\underline{Y}	Modalmatrix der Linkseigenvektoren
\vec{z}_R	Rechtseigenvektor im Zustandsraum
\vec{z}_L	Linkseigenvektor im Zustandsraum
\vec{z}	modaler Belastungsvektor

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Praxisorientierte Elastizitätsprobleme der Statik und Dynamik lassen sich in den wenigsten Fällen ausreichend mit analytischen Berechnungsverfahren lösen. Der Anwendungsbereich analytischer Verfahren wird häufig durch Vorgaben der Bauteilgeometrie sowie der Rand- und Anfangsbedingungen eingeschränkt. Numerische Verfahren finden dann ihre Anwendung.

Die Bedeutung numerischer Verfahren zur Lösung komplexer Problemstellungen ist mit den Möglichkeiten des Einsatzes leistungsfähiger Computer in ständigem Wachstum. Diese Entwicklung wird unter anderem davon geprägt, daß die Hardwarekosten in letzten Jahren stark gefallen sind. So spielen die Kosten für die Hardware gegenüber den Softwarekosten fast keine Rolle mehr. Viele Simulationsberechnungen sind heute bereits mit Hilfe preiswerter PC's möglich, die zur Grundausstattung jedes Büros gehören.

Zu den numerischen Methoden, die für physikalisch-technische Probleme weite Verbreitung gefunden haben, gehören die sogenannten *Netzmethoden*. Die wichtigsten Verfahren in der Kontinuumsmechanik sind die *Finite Elemente Methode (FEM)* und die *Randelementemethode (REM oder Boundary Element Method BEM)*.

Während die FEM bereits einen sehr hohen Entwicklungsstand erreicht hat, in der Ingenieurausbildung einen festen Platz einnimmt und in der Praxis vielseitig Verwendung findet, stellt die REM noch ein relativ neues Berechnungsverfahren dar. In der Lehre ist diese Methode noch wenig verbreitet und wird oft nur am Rande behandelt. So ist der Einsatz bis heute noch immer unter einschlägigen Fachleuten verbreitet, während die meisten Berechnungsingenieure wenig über dieses Verfahren wissen.

Unabhängig davon stellt sich für den Berechnungsingenieur die Frage, welche Methode für seine Problemstellungen am günstigsten einzusetzen ist, bzw. ob eine Kombination verschiedener Verfahren möglich und sinnvoll ist. Als wichtigste Kriterien für diese Entscheidung sind die zu erwartende Güte der Ergebnisse, die dafür erforderliche Zeit und die praktische Handhabung des jeweiligen Verfahrens zu nennen.

Während sich auf der einen Seite Einsatzgebiete herauskristallisiert haben, für die eines der Verfahren unter den genannten Kriterien als das beste angesehen werden kann, gibt es Bereiche in denen alternativ beide Verfahren eingesetzt werden können. Ein solcher Bereich ist die lineare Dynamik geschlossener Gebiete.

Die FEM bietet hier eine Vielzahl von effektiven Lösungsalgorithmen an. Sie verlangen nach einer Aufteilung des zu untersuchenden Bauteils in Elemente. Bei 3D-Problemen bedeutet dies die Diskretisierung des gesamten Bauteilvolumens in Volumenelemente. In der Praxis erweist sich die Modellbildung komplexer Bauteile als sehr mühsam und zeitaufwendig, ebenso wie spätere Änderungen des Rechenmodells. Es ergeben sich meist umfangreiche mathematische Modelle, welche in große mit speziellen Verfahren jedoch sehr effektiv lösbare Gleichungssysteme übergehen.

Die REM geht in der Anwendung auf linear-elastische statische und dynamische Probleme von dem Grundprinzip aus, das der Zustand im Innern des Körpers eindeutig bestimmt ist, wenn die Spannungen und Verschiebungen an der Oberfläche bekannt sind. Daher ist nur die Aufteilung der Oberfläche (des *Randes*) in Elemente erforderlich. Die Dimension der zu diskretisierenden Geometrie reduziert sich dabei um eins. Die Anzahl der Freiheitsgrade und die Größe des mathematischen Modells ist daher wesentlich kleiner als bei der FEM. Als Nachteil sind jedoch vollbesetzte, im allgemeinen nicht symmetrische Systemmatrizen zu nennen, die bei dynamischen Untersuchungen zudem frequenzabhängig bzw. zeitabhängig sind.

Die Spannungsberechnung und die Berechnung von Verschiebungen im Innern von Elementen erfolgt bei der FEM in einer Nachlaufrechnung mit den Ableitungen der Formfunktionen. Dies führt besonders bei der Spannungsberechnung oft zu fehlerhaften Ergebnissen an den Elementübergängen. Glättungsverfahren sind erforderlich. Auch treten Probleme auf, wenn sich komplexe Spannungsverläufe nicht mit den Formfunktionen darstellen lassen, z.B. in der Nähe von Spannungssingularitäten.

Bei der REM werden Größen im Innern von Bauteilen direkt mit Identitäten ebenfalls in einer Nachlaufrechnung bestimmt. Selbst durchgeführte statische Spannungsuntersuchungen zeigen bei ähnlichen Modellen oft wesentlich bessere Ergebnisse als bei der FEM. Dies ist auch bei der dynamischen Berechnung zu erwarten.

1.2 Stand der Forschung

Die Entwicklungsgeschichte der REM in der Anwendung auf elastodynamische Problemstellungen wird vielfach in der Literatur beschrieben ([68], [27], [31], [18]). Hier wird deshalb nur ein kurzer Überblick über die Entwicklung der Zeitverlaufsberechnung und die Ermittlung modaler Parameter mit der REM gegeben.

1.2.1 Zeitverlaufsberechnungen mit der REM

Dynamische Berechnungen mit Hilfe der REM wurden Ende der 60er Jahre zuerst auf der Basis von Fourier- und Laplace-Transformation im Frequenzbereich bzw. Bildbereich durchgeführt ([61], [58]). Bei diesen Verfahren ergeben sich prinzipiell der Statik ähnliche Gleichungssysteme. Sie können daher als eine direkte Weiterentwicklung der Verfahren, die in der Statik eingesetzt wurden [214], angesehen werden. Zeitverläufe ergeben sich durch Rücktransformation der im Frequenz- bzw. Bildbereich gewonnenen Informationen in den Zeitbereich.

Direkte Zeitverlaufsberechnungen auf der Basis zeitabhängiger Fundamentallösungen kommen seit Ende der 70er Jahren zum Einsatz ([53], [174], [177]) und werden auf verschiedenste Problemstellungen angewendet. Die Steigerung der Effizienz solcher Verfahren ist heute ein breiter Forschungsschwerpunkt ([231], [182], [132], [82], [220], [68], [4], [52]).

Neben diesen kommen noch spezielle Verfahren zum Einsatz, wie DRM (*Dual Reciprocity Method*) und MRM (*Multiple Reciprocity Method*) (Literatur siehe unten). Ziel dabei ist es, frequenz- bzw. zeitunabhängige Systemmatrizen zu erzeugen, auf die dann die numerische Integration im Zeitbereich angewendet werden kann (Ein vollständiger Überblick der Entwicklung dieser Verfahren wird in [3] gegeben.).

Die *Modalanalyse* stellt noch ein relativ neues Einsatzgebiet in Kombination mit der REM dar ([192], [84], [156], [157], [77]).

1.2.2 Ermittlung modaler Parameter mittels REM

Die Problematik der REM zur Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen besteht darin, daß die im Frequenzbereich resultierenden Systemmatrizen frequenzabhängig sind und den Frequenzparameter in stark-nichtlinearer Form enthalten.

Anfängliche Eigenfrequenzermittlungen verliefen folglich so, daß der Frequenzbereich mit vorgegebener Schrittweite durchlaufen wurde. Für die so gegebenen konkreten Frequenzen wurden die Systemmatrizen aufgestellt und dann entweder dynamische Nachgiebigkeiten oder Determinantenwerte berechnet ([65], [64], [145]).

Als weitere Entwicklung sind die Entwicklung von Verfahren, die auf partikulären Lösungen beruhen ([20], [210], [212], [211]) und die prinzipiell ähnliche DRM zu nennen ([2], [47], [187], [186], [37], [188], [189], [190], [191], [192], [204], [84], [123]). Diese Verfahren haben genau wie die später entwickelte MRM ([198], [197], [125], [124]) und ähnliche auf Reihenentwicklungen als Funktion des Frequenzparameters beruhenden Verfahren ([139], [140]) das Ziel, frequenzunabhängige Systemmatrizen zu erzeugen. Die so erzeugten Systemgleichungen können mit Hilfe von Matrizenexpansionen auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden. Diese sind dann für lineare Eigenwertlöser zugänglich ([20], [139], [140]).

In jüngerer Zeit werden, besonders in Kombination mit der MRM, iterative Verfahren zur Eigenwertanalyse eingesetzt ([118], [119], [120], [123], [122], [121], [126], [127], [125], [124]). Die praktische Anwendung bleibt jedoch fast ausschließlich auf skalare Probleme (3D-Helmholtz-Gleichung) beschränkt.

1.3 Ziel dieser Arbeit

Das dynamische Verhalten geschlossener, dreidimensionaler, linear-elastischer Bauteile kann, je nach Problemstellung, auf verschiedene Arten untersucht werden. Die am häufigsten eingesetzten Methoden sind dabei Verfahren, die auf der Fourier- oder Laplace-Transformation beruhen, direkte Zeitlösungsverfahren und die Modalanalyse. Während diese Verfahren für die FEM bereits hoch entwickelt sind und große Verbreitung gefunden haben, ist die Anwendung in Kombination mit der REM noch relativ neu und teilweise unerforscht. Besonders auf dem Gebiet der Modalanalyse sind bisher kaum Untersuchungen durchgeführt worden.

Die Problematik des Einsatzes der REM in der Modalanalyse liegt in der effektiven Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenformen sowie der Übersetzung der modalen Informationen in den Zeitbereich.

Die Eigenwertbestimmung wird maßgeblich von der numerischen Integration, die zum Aufstellen der Systemmatrizen erforderlich ist, und den Eigenwertalgorithmen bestimmt. Die numerische Integration beeinflusst sowohl die Geschwindigkeit der Eigenwertsuche als auch die erforderliche Genauigkeit der Eigenwerte. Daher müssen speziell auf die Singularitäten der REM zugeschnittene Integrationsverfahren gefunden werden, mit denen die Systemmatrizen möglichst schnell aufgestellt werden können.

Auf die Systemmatrizen sind Verfahren anzusetzen, mit denen die Eigenwerte und Eigenformen möglichst effektiv berechnet werden können. Wichtig dabei ist die exakte Untersuchung nahe zusammenliegender und mehrfacher Eigenwerte.

Beim Übersetzen modalen Informationen in den Zeitbereich ist zu beachten, daß die Systemmatrizen der REM im allgemeinen nur in begrenzten Frequenzbereichen mit Hilfe von frequenzunabhängigen Systemmatrizen angenähert werden können, und sich somit unterschiedliche Systemmatrizen zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben. Zudem ist die Systemmatrix, die die Koeffizienten der bekannten Randgrößen enthält, nur für Sonderfälle eine quadratische Matrix und damit invertierbar (siehe *Grundlagen*).

Ziel dieser Arbeit ist daher der Einsatz der REM in Kombination mit der Modalanalyse zur Lösung dreidimensionaler, linear-elastischer Probleme der Dynamik.

Der Einsatz der Modalanalyse mit der REM erfordert:

- **Aufstellen der Systemmatrizen der REM (Kapitel 2),**
- **Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenformen mit Hilfe dieser Systemmatrizen (Kapitel 3),**
- **Übersetzung der modalen Informationen in den Zeitbereich, um zeitabhängige Verschiebungen und Spannungen zu bestimmen (Kapitel 4).**

Dazu werden in **Kapitel 2** zunächst die Grundlagen der Randelemente-Methode bis zum effektiven Aufstellen der Systemmatrizen erläutert.

Ausgehend vom Prinzip der gewichteten Residuen werden die Randintegralgleichungen für 3D lineare Akustik und Dynamik hergeleitet.

Die lineare Akustik wird hier neben der Dynamik zusätzlich behandelt. Sie ist zur Erläuterung prinzipieller Verfahren wegen ihrer kompakteren Darstellungsmöglichkeiten gegenüber der Dynamik besser geeignet, ohne die Problematik zu vereinfachen.

Weiter werden die Ortsdiskretisierung sowie die verwendeten Elementtypen beschrieben.

Ein Hauptmerk gilt speziellen Verfahren der numerischen Integration, die zur effektiven Berechnung der Systemmatrizen eine wichtige Rolle spielen. Zudem werden Reihenentwicklungen der Fundamentallösung in Abhängigkeit des Frequenzparameters angegeben, die zur Generierung frequenzunabhängiger Systemmatrizen benötigt werden. Ziel dabei ist es, die REM so aufzubereiten, daß sie zur Eigenwertanalyse effektiv eingesetzt werden kann.

Grundsätzliche Verfahren zur Eigenwertanalyse mittels REM werden in **Kapitel 3** vorgestellt. Mit im Frequenzbereich abschnittsweise frequenzunabhängigen Systemmatrizen werden Iterationsverfahren entwickelt, die besonders in der Nähe der Eigenfrequenzen mit der Singulärwertzerlegung arbeiten. Zudem werden Verfahren eingesetzt, die mit Hilfe der Günther'schen Expansion zu linearen Eigenwertproblemen führen. Solche Verfahren haben besonders bei nahe zusammenliegenden und mehrfachen Eigenfrequenzen eine große Bedeutung und werden mit iterativen Verfahren kombiniert.

Die Berechnung von zeitabhängigen Zustandsgrößen mit Hilfe verschiedener Lösungstechniken der REM wird in **Kapitel 4** beschrieben. Hierbei wird der Schwerpunkt auf die Modalanalyse gesetzt, deren wichtigste Einsatzgebiete angegeben werden. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem zeitabhängige Systemantworten bei beliebiger transienter Belastung und beliebigen Anfangsbedingungen mit der REM ermittelt werden können. Eine Erweiterung auf die Berechnung von Verschiebungen und von Spannungen im Innern eines Bauteils wird vorgenommen und an Beispielen verifiziert. Parallel zu den Berechnungen mit der REM werden FEM-Berechnungen durchgeführt und die Ergebnisse verglichen.

Eine Zusammenfassung und Ausblick mit Vorschlägen für zukünftige Forschungsvorhaben bilden **Kapitel 5**.

Im **Anhang** werden zu verschiedenen Aspekten, die in den Kapiteln 2–4 behandelt werden, Ergänzungen aufgeführt.

Zuletzt werden die verwendeten **Literaturquellen** angegeben.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden zuerst die Differentialgleichungen der linearen Akustik und der linearen Dynamik angegeben. Anschließend werden mit dem Prinzip der gewichteten Residuen die zugehörigen Integraldarstellungen abgeleitet. Die Algebraisierung erfolgt mit Hilfe der REM unter Verwendung von Fundamentallösungen und lokalen Elementansätzen. Zuletzt wird die numerische Integration beschrieben, die zum Aufstellen der Systemmatrizen der REM eingesetzt wird.

2.1 Differentialgleichungen

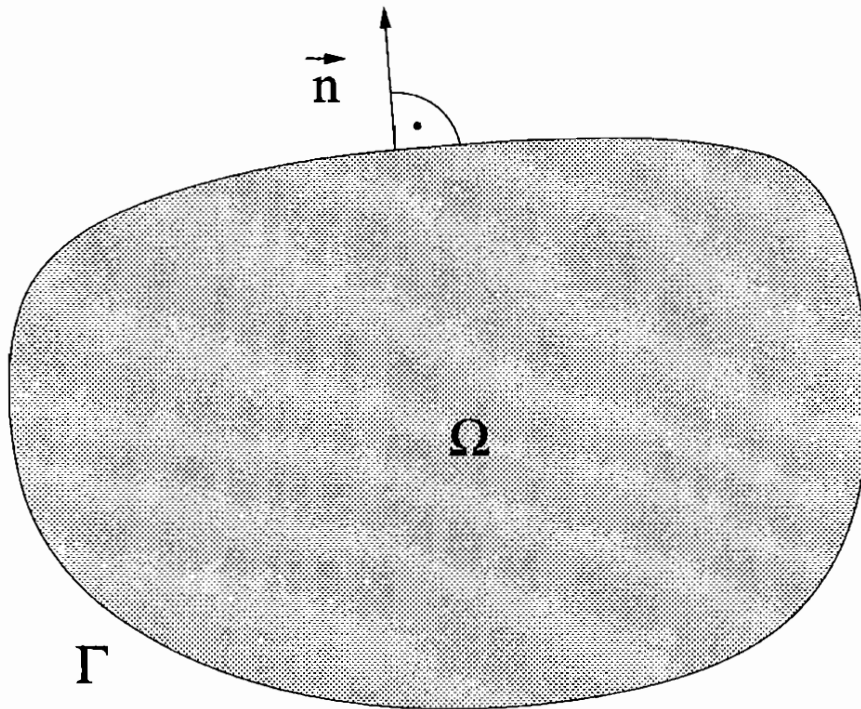
Die Lösung physikalischer Problemstellungen führt in vielen Fällen auf ein System von Differentialgleichungen mit vorgegebenen Randbedingungen. Diese sind dann vielfach Ausgangspunkt unterschiedlicher rechnerischer Untersuchungen. Für den Berechnungsingenieur ist es daher von äußerster Wichtigkeit, die Voraussetzungen, die bei der Herleitung von Differentialgleichungen getroffen wurden, genau zu kennen. Nur dann ist es ihm möglich Berechnungsergebnisse korrekt zu interpretieren, und zur praktischen Lösung von Problemen einzusetzen.

Dies gilt natürlich auch für die später gezeigte Eigenwertanalyse. Diese wird je auf eine skalare und eine vektorielle Differentialgleichung angewendet.

Als skalare Differentialgleichung tritt die Helmholtz-Gleichung auf, die bei der Beschreibung zeitharmonischer skalarer Wellenausbreitung (z.B. in der linearen Akustik) eine große Rolle spielt.

Die Navier'sche- (bzw. Lamé-Navier'sche-) Gleichungen für zeitharmonische Problemstellungen der Dynamik sind die zu untersuchenden vektoriellen Differentialgleichungen.

Dabei wird sich auf dreidimensionale (3D) Problemstellungen beschränkt. Das Gebiet Ω , für das die Differentialgleichungen Gültigkeit haben sollen, wird durch den Rand Γ begrenzt. Jedem Punkt auf dem Rand ist eine Flächennormale zugeordnet, die im folgenden mit \vec{n} bezeichnet wird und senkrecht auf der Randfläche stehen soll (Bild 2.1).

Abbildung 2.1: 3D-Gebiet mit Berandung und der Flächennormalen \vec{n}

2.1.1 Helmholtz-Gleichung

Skalare Wellenausbreitungsvorgänge in einem ruhenden, idealen Gas unter Annahme adiabater Zustandsänderungen werden durch die zeitabhängige, partielle 3D-Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}(\vec{x}, t) - \nabla^2 u(\vec{x}, t) = b(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

beschrieben. $u(\vec{x}, t)$ stellt dabei eine kleine (linearisierte) Druckschwankung um einen statischen Ruhedruck dar, c ist die Schallgeschwindigkeit. In $b(\vec{x}, t)$ sind innere Kräfte und die zeitliche Änderung des zugeführten Volumenstroms zusammengefasst.

Da das Anfangswertproblem in der Akustik nicht relevant ist, transformiert man die Wellengleichung in den Frequenzbereich. Dies führt für verschwindende Belastung $b(\vec{x}, t)$ auf zeitharmonische Zustandsgrößen und zur *Helmholtz-Gleichung*

$$\nabla^2 u(\vec{x}, \omega) + k^2 u(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{mit: } k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{Wellenzahl}) .$$

(Obwohl es sich in Gleichung (2.2) bei u um die Schalldruckamplitude handelt, wird die Bezeichnung u der Einfachheit halber beibehalten.).

Zur Lösung der Gleichung (2.2) sind die zu erfüllenden Randbedingungen zu beachten. Diese werden über den Druck u und dessen Ableitung in Normalenrichtung $p = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \text{grad } u$ formuliert.

In den später beschriebenen Beispielen werden Randbedingungen des Typs

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} & \text{auf } \Gamma_1 \\ p &= \bar{p} & \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{mit: } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

u.a. mit schallharten Wänden angesetzt. Dann gilt mit der Dichteänderung ρ und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} des Luftteilchens in einem kartesischen Koordinatensystem (Schallschnelle)

$$p = -\rho \frac{d\vec{v}}{d\tau} \cdot \vec{n} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

da die Wand unbeweglich ist und damit keine Beschleunigung vorhanden ist.

Der Einbau anderer Randbedingungen wird in der Literatur ausführlich beschrieben und hier nicht weiter behandelt.

2.1.2 Navier'sche-Gleichungen

Hergeleitet wird das Bewegungsgleichungssystem eines dynamisch belasteten, linear elastischen Kontinuums. Dabei wird ein dreidimensionaler, homogener Körper mit isotropem Materialverhalten angenommen. Initialspannungen, z.B. durch Temperatur hervorgerufen, werden nicht beachtet. Eine Volumenmomentendichte soll nicht vorliegen, es gilt das *Boltzmann'sche Axiom*.

Die Gleichgewichtsbedingung an einem infinitesimal kleinen Volumenelement des Gebietes Ω , das durch den Rand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ begrenzt wird, lautet unter Beachtung des Trägheitsterms

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}, t) + b_i(\vec{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.5)$$

Diese Gleichung wird die *Cauchy'sche Bewegungsgleichung* genannt. In Gleichung (2.5) sind die Volumenlasten in b_i zusammengefaßt, ρ ist die konstant angenommene Dichte des Körpers. Die Angabe der Zeit- und Ortsabhängigkeit (\vec{x}, t) wird zur einfacheren Darstellung in der weiteren Herleitung nicht mehr angegeben.

Mit Hilfe eines Stoffgesetzes wird der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen hergestellt. Für linear-elastische Materialien läßt sich das Stoffgesetz als erweitertes *Hooke'sches Gesetz* ausdrücken

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad . \quad (2.6)$$

Für isotropes Material gilt der Zusammenhang

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad . \quad (2.7)$$

λ und μ sind die Lamé'schen Konstanten, die sich aus Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl über die Beziehungen

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.8)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ausdrücken lassen (G = Schubmodul).

Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen läßt sich über die identische Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

formulieren.

Die Kombination der Gleichungen (2.5) bis (2.9) liefert schließlich die Navier'schen - Bewegungsgleichungen (auch *Lamé-Navier'sche Bewegungsgleichungen*)

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad . \quad (2.10)$$

Diese Gleichungen werden häufig mit Hilfe der Wellengeschwindigkeiten

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.11)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

umgeformt zu

$$(c_p^2 - c_s^2) u_{k,ki} + c_s^2 u_{i,kk} + \frac{b_i}{\rho} = \ddot{u}_i \quad . \quad (2.12)$$

c_p ist die Wellengeschwindigkeit einer Longitudinalwelle (rotationsfreie Welle) und c_s ist die Scherwellengeschwindigkeit (Äquivoluminalwelle). Warum es sich bei diesen Größen um Wellengeschwindigkeiten handelt, läßt sich mit Hilfe der Helmholtz-Zerlegung des Verschiebungsfeldes \vec{u} in einen rotationsfreien und einen divergenzfreien Anteil zeigen. Hier wird auf die Literatur verwiesen ([1], [72], [263]).

Transformation in den Frequenzbereich

Die zeitharmonische Darstellung ergibt sich mit Hilfe der Fouriertransformierten der Navier'schen Bewegungsgleichungen und $u_i = u_i(\vec{x}, \omega)$

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + b_i = -\rho \omega^2 u_i \quad . \quad (2.13)$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen (2.13) sind die Randbedingungen zu beachten

- geometrische Randbedingungen: $u_k = \bar{u}_k$ auf Γ_1
- statische Randbedingungen: $p_k = \bar{p}_k$ auf Γ_2 .

Darin sind p_k die Randspannungen, die sich aus dem Spannungstensor ableiten lassen

$$p_k = \sigma_{ik} n_i \quad (2.14)$$

mit

$$\sigma_{ik} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} u_{m,m} + G(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad .$$

2.2 Das Prinzip der gewichteten Residuen

Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen werden häufig Näherungsverfahren eingesetzt, deren Unbekannte im gesamten Gebiet (Gebietsverfahren) oder nur auf dem Rand (Randverfahren) liegen. Die wichtigsten dieser Verfahren sind das *Finite Differenzen Verfahren*, die *Finite Elemente Methode* und das *Randintegralverfahren*. Alle diese Verfahren können mit dem *Prinzip der gewichteten Residuen* hergeleitet werden, obwohl sie in ihrer Anwendungsform recht unterschiedlich erscheinen.

Mit diesem Prinzip werden nun Differentialgleichungen in Integralgleichungen überführt. Die grundlegenden Betrachtungen werden dabei mit Hilfe einer skalaren Funktion $u(\vec{x})$ auf einem Gebiet Ω , das durch den Rand Γ begrenzt wird, durchgeführt (Bild 2.1) (siehe auch *Herleitung der Differentialgleichungen*).

Der die Differentialgleichung beschreibende Differentialoperator wird mit L bezeichnet. Wird nun für die Funktion $u(\vec{x})$ eine Näherung $\tilde{u}(\vec{x})$ gewählt, läßt sich ein Fehler $f(\vec{x})$ definieren

$$L [\tilde{u}(\vec{x})] = f(\vec{x}) \quad . \quad (2.15)$$

Für diesen Fehler wird nun ein globales Fehlermaß vereinbart, indem $f(\vec{x})$ mit einer Wichtungsfunktion $w(\vec{x})$ multipliziert (*Gewichtung des Residuums*) und das Integral über dem Gebiet Ω gebildet wird

$$F = \int_{\Omega} f(\vec{x}) w(\vec{x}) d\Omega \quad . \quad (2.16)$$

Dieses Fehlermaß verschwindet für eine beliebige Wichtungsfunktion dann, wenn auch der Fehler $f(\vec{x})$ identisch verschwindet. Daher wird gefordert

$$F = \int_{\Omega} f(\vec{x}) w(\vec{x}) d\Omega = 0 \quad . \quad (2.17)$$

Das Fehlermaß existiert dann, wenn der Integrand in Gleichung (2.17) mindestens stückweise stetig ist [12]. Dies bedeutet, daß stückweise stetige Funktionen als Ansatz- und Wichtungsfunktion verwendet werden können. Diese ermöglichen eine wesentlich einfachere numerische Problembehandlung, da ihr Einsatz zu diskreten Berechnungsverfahren führt.

Mit Hilfe des gewichteten Residuums bzw. des globalen Fehlermaßes werden nun die Integralgleichungen ausgewählter Differentialgleichungen aufgestellt. Die Anwendung findet statt für die

- Poisson-Gleichung
- Helmholtz-Gleichung
- Navier'sche-Gleichung .

Die Helmholtz-Gleichung und die Navier'sche-Gleichung wurden im letzten Abschnitt hergeleitet. Die Poisson-Gleichung stellt den statischen Fall der Helmholtz-Gleichung dar und ergibt sich aus dieser durch den Grenzübergang $k \rightarrow 0$.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich wiederum auf ein 3D-Gebiet Ω mit dem Rand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (siehe Bild 2.1). Die Herleitungen der Integralgleichungen werden nun für die oben aufgeführten Gleichungen getrennt durchgeführt.

Poisson-Gleichung

Diese Gleichung wird hier gesondert neben der Helmholtz-Gleichung behandelt, weil die zugehörige Integraldarstellung mehrfach zur Erläuterung der prinzipiellen Verfahren zur Eigenwertanalyse (siehe Kapitel *Eigenwertanalyse*) eingesetzt wird.

Die Poisson-Gleichung lautet mit dem Laplace-Operator (∇^2) und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\vec{x}) &= b(\vec{x}) \quad \text{in } \Omega \\ u &= \bar{u} \quad \text{auf } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \bar{p} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad .$$

Das globale Fehlermaß wird mit der Wichtungsfunktion u^* aufgestellt (Auf die Koordinatenangabe (\vec{x}) wird im folgenden verzichtet.)

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad . \quad (2.19)$$

Die linke Seite der Gleichung wird mit Hilfe zweifacher partieller Integration (siehe Anhang E) bezüglich der Raumkoordinaten x_i umgeformt zu

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 u^* u d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} u d\Gamma \quad (2.20)$$

Mit $p^* = \partial u^* / \partial \vec{n}$ folgt aus Gleichung (2.19)

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* u d\Omega + \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad . \quad (2.21)$$

Durch geeignete Wahl der Wichtungsfunktion kann diese Integraldarstellung weiter vereinfacht werden. Dies wird später gezeigt.

Helmholtz–Gleichung

Die Integraldarstellung der Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.22)$$

kann direkt aus der Integraldarstellung der Poisson-Gleichung abgelesen werden, wenn dort $b = -k^2 u$ eingesetzt wird

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* u \, d\Omega + \int_{\Gamma} p u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = -k^2 \int_{\Omega} u u^* \, d\Omega \quad . \quad (2.23)$$

Navier'sche-Gleichung

Die Navier'sche-Gleichung im Frequenzbereich lautet in Indexschreibweise

$$(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + b_j + \rho \omega^2 u_j = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Das Fehlermaß wird mit den Wichtungsfunktionen u_j^* gebildet

$$\int_{\Omega} [(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii}] u_j^* \, d\Omega = - \int_{\Omega} [b_j + \rho \omega^2 u_j] u_j^* \, d\Omega \quad . \quad (2.25)$$

Die linke Seite wird durch zweifache partielle Integration (siehe Anhang E) umgeformt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii}] u_j^* \, d\Omega &= \int_{\Omega} [(\lambda + \mu) u_{i,ij}^* + \mu u_{j,ii}^*] u_j \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) u_{i,i} u_j^* n_j + \mu u_{j,i} u_j^* n_i] \, d\Gamma & \quad (2.26) \\ - \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) u_{i,i}^* u_j n_j + \mu u_{j,i}^* u_j n_i] \, d\Gamma & \quad . \end{aligned}$$

Die Randintegrale lassen sich über die Randspannungen ausdrücken

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) u_{i,i} u_j^* n_j + \mu u_{j,i} u_j^* n_i] \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} p_j u_j^* \, d\Gamma \\ \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) u_{i,i}^* u_j n_j + \mu u_{j,i}^* u_j n_i] \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} p_j^* u_j \, d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Damit folgt die Integraldarstellung

$$\int_{\Omega} [(\lambda + \mu)u_{i,ij}^* + \mu u_{j,ii}^* + \rho\omega^2 u_j^*] u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = 0. \quad (2.28)$$

Reduktion der Integralgleichungen

Durch geeignete Wahl der Wichtungsfunktion u^* bzw. u_i^* wird nun das Gebietsintegral in den Integralgleichungen bezüglich des Differentialoperators in Anwendung auf die Wichtungsfunktion ersetzt.

Poisson-Gleichung

Die Wichtungsfunktion u^* wird so gewählt, daß sie die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 u^* = -\delta(\vec{x}^i) \quad (2.29)$$

im unberandeten 3D-Gebiet erfüllt. Die Funktion $\delta(\vec{x}^i)$ ist die Dirac-Funktion mit Belastungspunkt \vec{x}^i . Sie wird über die integrale Aussage mit einer beliebigen Funktion $f(\vec{x})$ definiert

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) \delta(\vec{x}^i) d\Omega = \begin{cases} f(\vec{x}^i) & : \vec{x}^i \in \Omega \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases} \quad (2.30)$$

Mit dieser Eigenschaft folgt für das Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* u d\Omega = \int_{\Omega} u [-\delta(\vec{x}^i)] d\Omega = -u(\vec{x}^i) = -u^i \quad . \quad (2.31)$$

Damit ergibt sich die Integraldarstellung

$$-u^i + \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad . \quad (2.32)$$

Diese Gleichung wird für verschwindende Volumenlasten zu einer reinen Randintegraldarstellung. Sie gilt nach der Herleitung für Punkte (\vec{x}^i) im Innern des Gebietes Ω . Für Randpunkte ist eine Grenz Betrachtung erforderlich.

Helmholtz–Gleichung

Als Wichtungsfunktion wird die Lösung aufgrund einer Dirac-Belastung der skalaren Wellengleichung im Frequenzbereich

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = -\delta(\vec{x}^i) \quad (2.33)$$

gewählt. Damit folgt für das Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u^* + k^2 u^*] u \, d\Omega = \int_{\Omega} u [-\delta(\vec{x}^i)] \, d\Omega = -u(\vec{x}^i) = -u^i \quad . \quad (2.34)$$

Hier ergibt sich eine reine Randintegraldarstellung, weil die Helmholtz-Gleichung ohne Volumenbelastung angesetzt wurde

$$-u^i + \int_{\Gamma} p u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (2.35)$$

Im Kapitel *Eigenwertanalyse* wird als Wichtungsfunktion die Lösung der Poisson-Gleichung (2.29) gewählt. Die Verwendung dieser Lösung läßt das Volumenintegral auf der rechten Seite der Gleichung (2.23) nicht verschwinden. Die Integralgleichung ändert sich zu

$$-u^i + \int_{\Gamma} p u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = -k^2 \int_{\Omega} u u^* \, d\Omega \quad . \quad (2.36)$$

Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß die Randintegrale nicht mehr vom Frequenzparameter k abhängig sind. Diese Tatsache wird im Kapitel *Eigenwertanalyse* zur Formulierung alternativer Randintegralverfahren (*Dual Reciprocity Method*, *Multiple Reciprocity Method*) genutzt.

Navier'sche-Gleichung

Die Wichtungsfunktion ist die Lösung der Navier'schen-Gleichung im Frequenzbereich aufgrund einer Einheitslast. Diese Einheitslast kann nun in alle 3 Koordinatenrichtungen wirken. Dementsprechend ergibt sich für die Wichtungsfunktion eine Matrizendarstellung. u_{ij}^* bedeutet die Verschiebung eines Gebietspunktes in j -Richtung aufgrund Dirac-Belastung am Punkt \vec{x}^i in i -Richtung und ist Lösung von

$$(\lambda + \mu) u_{ki,ij}^* + \mu u_{kj,ii}^* + \rho \omega^2 u_{kj}^* = -\delta_{kj} \delta(\vec{x} - \vec{x}^i) \quad , \quad (2.37)$$

bzw. abkürzend

$$L^* = -\delta_{kj} \delta(\vec{x} - \vec{x}^i) \quad . \quad (2.38)$$

Aus dem ersten Volumenintegral der Gleichung (2.28) folgt damit

$$\int_{\Omega} L^* u_j d\Omega = - \int_{\Omega} u_j \delta_{kj} \delta(\vec{x} - \vec{x}^i) d\Omega = - u_k(\vec{x}^i) = - u_k^i \quad (2.39)$$

sowie die Integraldarstellung

$$- u_k^i + \int_{\Omega} b_j u_{kj}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_{kj}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{kj}^* u_j d\Gamma = 0 \quad . \quad (2.40)$$

p_{kj}^* ist der zu u_{kj}^* korrespondierende Randspannungszustand. Dieser kann aus den Spannungen

$$\sigma_{ijk}^* = \lambda u_{km,m}^* \delta_{ij} + \mu (u_{ki,j}^* + u_{kj,i}^*) \quad (2.41)$$

$$p_{kj}^* = n_i \sigma_{ijk}^*$$

bestimmt werden.

In [187] wird die Verwendung der Fundamentallösung der statischen Navier'schen-Gleichungen gezeigt. Diese führt zu einem nicht-verschwindenden Volumenintegral aufgrund des Trägheitsterms, aber zu frequenzunabhängigen Randintegralen.

2.3 Fundamentallösungen

Die speziellen Wichtungsfunktionen, die sich aufgrund der Dirac-Belastung ergeben, werden als Fundamentallösungen bezeichnet. Diese Fundamentallösungen lassen sich für viele Differentialgleichungen herleiten und sind auch für die hier untersuchten Differentialgleichungen bekannt. Auf eine Herleitung wird verzichtet, da diese vielfach in der Literatur in ausgezeichneter Form durchgeführt wird. Hier werden die Fundamentallösungen mit Literaturquellen angegeben.

Mit r wird der Abstand vom Belastungspunkt \vec{x}^i (*Quellpunkt*) zum Punkt \vec{x} (*Aufpunkt*), bei dem die Fundamentallösung betrachtet wird, bezeichnet.

Poisson-Gleichung

In ([34], [50]) wird die Fundamentallösung angegeben

$$u^* = \frac{1}{4 \pi r} \quad (2.42)$$

$$p^* = \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = - \frac{1}{4 \pi r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad .$$

Helmholtz-Gleichung

Die Fundamentallösung läßt sich beispielsweise aus [50] entnehmen

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{1}{4 \pi r} \cdot e^{-i k r} \\
 p^* &= \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{4 \pi r} \cdot \left[\frac{1}{r} + i k \right] \cdot e^{-i k r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Navier'sche-Gleichung

Ausführliche Herleitungen dieser Fundamentallösung sind in ([74], [1], [22]) zu finden.

Fundamentallösung

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^* &= \frac{1}{4 c_s^2 \pi \rho} (\delta_{ij} \psi - \chi r_{,i} r_{,j}) \\
 \psi &= \psi_1 \psi_2 - \psi_3 \psi_4 \\
 \psi_1 &= \frac{1}{r} e^{-\frac{i \omega r}{c_s}} \\
 \psi_2 &= \left(1 - \frac{c_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{c_s}{i \omega r} \right) \\
 \psi_3 &= \frac{1}{r} e^{-\frac{i \omega r}{c_p}} \\
 \psi_4 &= \left(-\frac{c_p^2}{\omega^2 r^2} + \frac{c_p}{i \omega r} \right) \frac{c_s^2}{c_p^2} \\
 \chi &= \chi_1 \chi_2 - \chi_3 \chi_4 \\
 \chi_1 &= \psi_1 \\
 \chi_2 &= \left(1 - \frac{3 c_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{3 c_s}{i \omega r} \right) \\
 \chi_3 &= \psi_3 \\
 \chi_4 &= \left(1 - \frac{3 c_p^2}{\omega^2 r^2} + \frac{3 c_p}{i \omega r} \right) \frac{c_s^2}{c_p^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Fundamentalrandspannung

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^* &= \frac{1}{4\pi} \left[A \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} + n_i r_{,j} \right) + B \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} r_{,i} r_{,j} + C n_j r_{,i} \right] \\
 A &= \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \\
 B &= \frac{4\chi}{r} - \frac{2d\chi}{dr} \\
 C &= \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{4\chi}{2r} \right) - 2 \frac{\chi}{r}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\frac{d\psi}{dr} = + \frac{\psi_1 \psi_2}{r} + \frac{\psi_3 \psi_4}{r} - \frac{i\omega}{c_s} \psi_1 \psi_2 + \frac{i\omega}{c_p} \psi_3 \psi_4 + \psi_1 \psi_5 - \psi_3 \psi_6$$

$$\frac{d\chi}{dr} = - \frac{\chi_1 \chi_2}{r} + \frac{\chi_3 \chi_4}{r} - \frac{i\omega}{c_s} \chi_1 \chi_2 + \frac{i\omega}{c_p} \chi_3 \chi_4 + \chi_1 \chi_5 - \chi_3 \chi_6$$

Eine ausführliche Interpretation der einzelnen Bestandteile der Fundamentallösung läßt sich in [15] nachlesen.

2.3.1 Reihenentwicklungen der Fundamentallösung

Hier wird zum einen eine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $\omega = 0$, zum anderen eine Taylor-Reihe mit variablem Entwicklungspunkt ω_0 angegeben.

Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $\omega = 0$

Die Fundamentallösung und die Fundamentalrandspannung werden in Taylor-Reihen mit Entwicklungspunkt $\omega = 0$ entwickelt (*Maclaurin'sche Form der Taylor-Reihe*). Die Reihenentwicklung wird durchgeführt, indem die Funktionen A , B , C , ψ und χ in Reihen entwickelt und mit dem Index N versehen werden. Die Reihenentwicklungen von Fundamentallösung und Fundamentalrandspannung setzen sich aus diesen Koeffizienten zusammen.

Die Reihenentwicklung wird zum einen durchgeführt, um bereichsweise frequenzunabhängige Systemmatrizen zu erzeugen, zum anderen ist sie erforderlich, um das *Starrkörperkriterium* (siehe später) einsetzen zu können. Zudem läßt sich zeigen, daß die Singularitäten bezüglich der Abstandsvariablen r nur in den frequenzunabhängigen (statischen) Anteilen enthalten sind. Die Reihenentwicklung ist in Anhang C aufgeführt.

Die dort mit dem Index *reg* bezeichneten Ausdrücke sind sowohl für verschwindendes r als auch

für verschwindendes ω regulär. Sie werden später zur indirekten Berechnung der integralfreien Terme und der Cauchy-Integrale benötigt.

Die Fundamentallösungen der Statik ergeben sich für $\omega = 0$.

Taylor-Reihe mit variablem Entwicklungspunkt ω_0

Im Anhang D ist eine weitere Taylor-Reihenentwicklung der Fundamentallösung aufgeführt. Dabei ist der Entwicklungspunkt der Reihenentwicklung variabel. Dargestellt werden nur die ersten beiden Ableitungen der Fundamentallösung und der Fundamentalrandspannung, um den enormen Aufwand dieser Reihenentwicklung zu verdeutlichen.

Diese Reihenentwicklung wird später zur Erzeugung bereichsweise frequenzunabhängiger Systemmatrizen, die in Kombination mit dem QZ- bzw. QR-Algorithmus benötigt werden, eingesetzt.

Die Fundamentallösung wird in eine Taylor-Reihe mit variablem Entwicklungspunkt ω_0 als Funktion der Kreisfrequenz ω entwickelt

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^*(\omega) &= u_{ij}^*(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{\partial^n u_{ij}^*(\omega)}{\partial \omega^n} \right|_{\omega_0} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \\
 &= u_{ij,0}^* + u_{ij,1}^* \cdot \omega + \dots + u_{ij,m}^* \cdot \omega^m + \dots \\
 p_{ij}^*(\omega) &= p_{ij}^*(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{\partial^n p_{ij}^*(\omega)}{\partial \omega^n} \right|_{\omega_0} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \\
 &= p_{ij,0}^* + p_{ij,1}^* \cdot \omega + \dots + p_{ij,m}^* \cdot \omega^m + \dots
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Werden die Terme $u_{ij,m}^*$ und $p_{ij,m}^*$ nun einzeln für sich in die Randintegralgleichung eingesetzt (siehe später), lassen sich frequenzunabhängige Systemmatrizen \underline{B}_m herleiten. (siehe auch *Verfahren zur Eigenwertanalyse*).

2.4 Herleitung der Randintegralgleichungen

Nachdem die Integraldarstellungen der Differentialgleichungen mit Hilfe des Prinzips der gewichteten Residuen unter Verwendung der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion aufgestellt worden ist, wird nun untersucht, wie diese Integraldarstellungen für Punkte \vec{x}^i auf dem Rand Γ aussieht. Dies ist erforderlich, da die Integralgleichungen in der gezeigten Form nur für Punkte des Gebiets Ω definiert sind.

Gelingt es, die Integraldarstellungen auch für Randpunkte aufzustellen, so lassen sich diese (mit Ausnahme der Volumenlasten) ausschließlich durch Randgrößen beschreiben. Erst dann werden die Integralgleichungen mit Hilfe der Randelementemethode numerisch lösbar.

Beim Übergang des *Quellpunktes* \bar{x}^i auf den Rand, zeigen die im letzten Abschnitt angegebenen Fundamentallösungen singuläres Verhalten. Für den 3D-Fall ist die Fundamentallösung u^* schwach-singulär, während die korrespondierende Größe p^* stark-singuläres Verhalten aufweist

$$u^* = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad p^* = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (2.47)$$

(mit dem *Landau-Symbol* O).

Nach Wheeler und Sternberg [263] ergibt sich für Randpunkte ein zusätzlicher Term

$$\int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = \oint_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma + c^i u^i \quad (2.48)$$

D.h. neben dem als Cauchy'scher Hauptwert zu berechnenden Integral $\oint_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma$ ergibt sich ein *integralfreier* Term.

Die Berechnung des integralfreien Terms, der von der Singularität der Fundamentallösung und von der Geometrie in der Umgebung des betrachteten Randpunktes \bar{x}^i abhängt, geschieht für alle Differentialgleichungen bzw. Integraldarstellungen auf gleiche Weise. Hier wird deshalb der Grenzübergang auf den Rand nur für das Beispiel der Navier'schen-Gleichung untersucht.

Verschieben des Quellpunktes auf den Rand

Wie im Abschnitt *Fundamentallösungen* gezeigt wurde, besteht die Fundamentallösung der zeit-harmonischen Navier'schen-Gleichung aus einem statischen Anteil, der alleine für das singuläre Verhalten verantwortlich ist, und einem Restterm, der reguläres Verhalten zeigt. Daher genügt es, wenn die Grenzbetrachtung nur für den statischen Anteil durchgeführt wird.

Der Grenzübergang wird prinzipiell wie folgt durchgeführt.

Der Rand des Gebietes wird in einen Kugelabschnitt um den zu betrachtenden Quellpunkt und eine Restfläche aufgeteilt. Der Kugelmittelpunkt wird dabei auf den *wahren* Rand gelegt, gehört aber für diese Betrachtung zum Innern des Gebietes Ω_ϵ (Bild 2.2). Strebt nun der Kugelradius ϵ gegen Null, wird der Kugelmittelpunkt zu einem Randpunkt.

Grenzbetrachtung

Gegeben sei ein Punkt \bar{x}^i auf dem Rand Γ eines Gebietes Ω . Eine Kugel mit dem Mittelpunkt bei \bar{x}^i und Radius ϵ trennt den Rand Γ_ϵ von Γ ab. Übrig bleibt ein Gebiet $\Omega_0 = \Omega - \Omega_\epsilon$. Die Oberfläche von Ω_ϵ wird durch Γ_ϵ beschrieben. Für das Gebiet Ω_0 gilt die Integralgleichung (siehe Gleichungen 2.28 und 2.38)

$$\int_{\Omega_0} L^* u_j \, d\Omega + \int_{\Omega_0} b_j u_{kj}^* \, d\Omega = - \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} p_j u_{kj}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} p_{kj}^* u_j \, d\Gamma \quad (2.49)$$

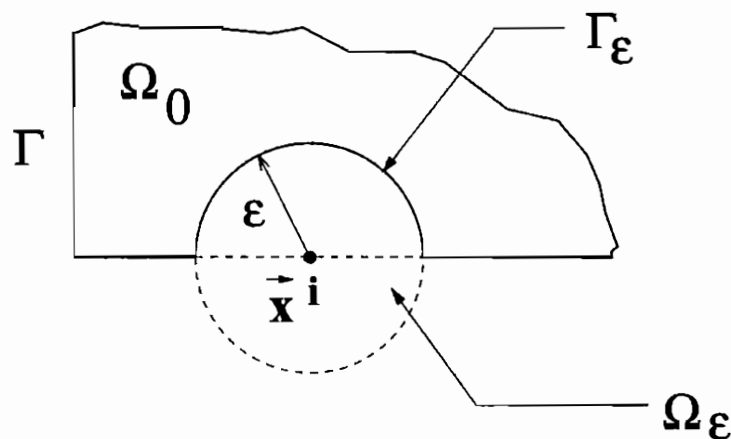


Abbildung 2.2: Aufspaltung des Integrationsgebiets

$$\text{mit} \quad \int_{\Omega_0} L^* u_j d\Omega = 0, \quad \text{da} \quad \vec{x}^i \notin \Omega_0 \quad . \quad (2.50)$$

Nun ist zu untersuchen, wie sich die Integrale verhalten, wenn der Radius ε verschwindet.

Linke Seite der Gleichung (2.49)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} b_j u_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} b_j u_{kj}^* d\Omega \quad (2.51)$$

Rechte Seite der Gleichung (2.49)

$$\int_{\Gamma} [u_j p_{kj}^* - u_{kj}^* p_j] d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [\dots] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} [\dots] d\Gamma \quad (2.52)$$

Zuerst werden die Integrale über Γ_ε betrachtet. Γ_ε bildet die Kugeloberfläche der Kugel mit dem Radius ε .

1. Integral

Mit der Einführung von Kugelkoordinaten (Bild 2.3, [95]) über die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon \sin\vartheta \cos\varphi \\ x_2 &= \varepsilon \sin\vartheta \sin\varphi \\ x_3 &= \varepsilon \cos\vartheta \quad , \end{aligned} \quad (2.53)$$

folgt mit Hilfe der Jacobi-Determinante $|\underline{J}| = \varepsilon^2 \sin\vartheta$ für die Abbildung eines Flächenelementes in den Kugelkoordinaten

$$d\Gamma = \varepsilon^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \quad . \quad (2.54)$$

Da u_{ij}^* eine Singularität der Ordnung $O\left(\frac{1}{r}\right)$ besitzt und in der Nähe von \vec{x}^i $|p_j| < \infty$ gilt, folgt für verschwindenden Radius ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{kj}^* p_j d\Gamma = 0 \quad .$$

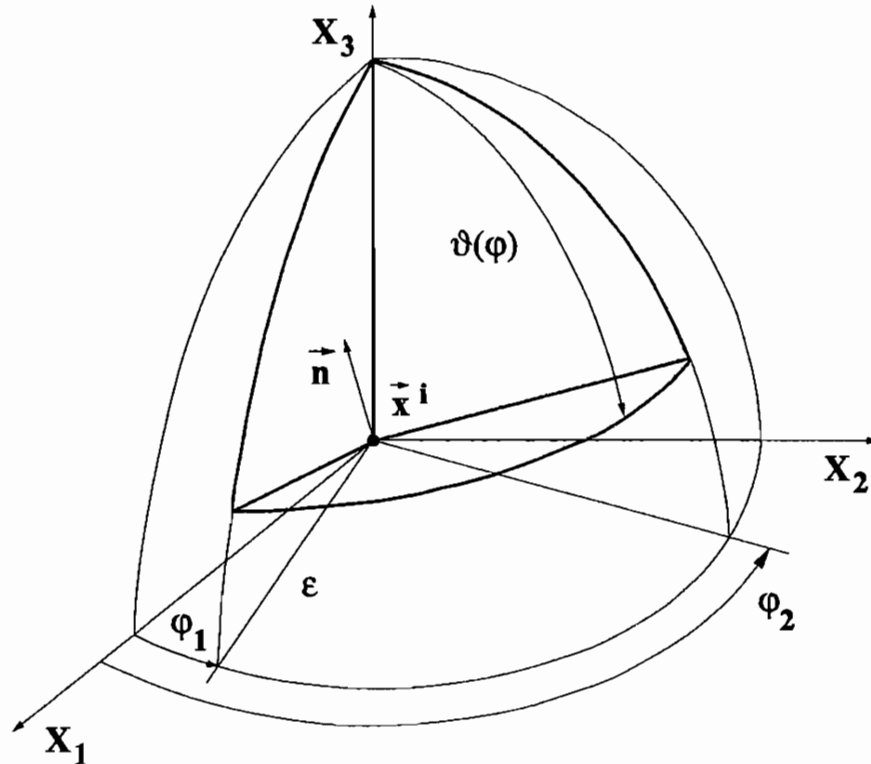


Abbildung 2.3: Einführung von Kugelkoordinaten

2. Integral

Das zweite Integral über Γ_ε verschwindet nicht, da p_{kj}^* eine Singularität der Ordnung $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ besitzt und der Integrand somit die Ordnung $O(1)$ hat.

Die Grenzbetrachtung $\varepsilon \rightarrow 0$ führt daher zu integralfreien Termen, die in einer Matrix c^i zusammengefaßt werden

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{kj}^* u_j d\Gamma = u_j^i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{kj}^* d\Gamma = c_{kj}^i u_j^i \quad . \quad (2.55)$$

Damit gilt zusammenfassend für die Integrale über Γ_ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [u_j p_{kj}^* - u_{kj}^* p_j] d\Gamma = c_{kj}^i u_j^i \quad . \quad (2.56)$$

Für die Integrale über $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u_j p_{kj}^* - u_{kj}^* p_j] d\Gamma = \int_{\Gamma} [u_j p_{kj}^* - u_{kj}^* p_j] d\Gamma \quad . \quad (2.57)$$

Die Existenz dieser Integrale wird in [104] nachgewiesen. Dabei ist, wie bereits bemerkt, das Integral

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_j p_{kj}^* d\Gamma \quad (2.58)$$

im Sinne eines Cauchy'schen Hauptwertes zu verstehen.

Berechnung der Matrix c^i der integralfreien Terme

c^i wird die *charakteristische Funktion* des Gebietes Ω_0 genannt. In [103] wird die Gleichung zur Berechnung dieser Matrix für beliebig geformte Randgeometrien in der Umgebung des Quellpunktes angegeben. Für technisch wichtige Ecken und Kanten gibt [95] die Lösung für den 3D-Fall in einer Form an, die eine direkte Berechnung der Terme aus c^i ermöglicht.

Dabei wird die Ecke bzw. Kante durch die Konfiguration in Bild (2.3) angegeben. Die Koeffizienten der symmetrischen Matrix c^i ergeben sich für einen konstanten Winkel $\vartheta = \hat{\vartheta}$ zu

$$c_{11}^i = \kappa \left[\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{\sin(2\varphi_2) - \sin(2\varphi_1)}{4} \right) (2 - 3 \cos \hat{\vartheta} + \cos^3 \hat{\vartheta}) + (1 - 2\nu) (\varphi_2 - \varphi_1) (1 - \cos \hat{\vartheta}) \right]$$

$$c_{22}^i = \kappa \left[\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{\sin(2\varphi_2) - \sin(2\varphi_1)}{4} \right) (2 - 3 \cos \hat{\vartheta} + \cos^3 \hat{\vartheta}) + (1 - 2\nu) (\varphi_2 - \varphi_1) (1 - \cos \hat{\vartheta}) \right]$$

$$c_{33}^i = \kappa \left[(\varphi_2 - \varphi_1) (1 - \cos^3 \hat{\vartheta}) + (1 - 2\nu) (\varphi_2 - \varphi_1) (1 - \cos \hat{\vartheta}) \right]$$

$$c_{12}^i = \kappa \left(\frac{\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1}{2} \right) (2 - 3 \cos \hat{\vartheta} + \cos^3 \hat{\vartheta})$$

$$c_{13}^i = \kappa (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \sin^3 \hat{\vartheta}$$

$$c_{23}^i = \kappa (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \sin^3 \hat{\vartheta}$$

$$\kappa = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad .$$

Eine ähnliche Schreibweise dieser Formeln ist für $\varphi_1 = 0$ in [16] zu finden. Zu bemerken ist, daß für glatte Ränder gilt

$$c_{ij}^i = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad .$$

In ähnlicher Weise lassen sich die integralfreien Terme der skalaren Gleichungen berechnen. Es ist an dieser Stelle zu bemerken, daß die explizite Berechnung der integralfreien Terme und der Cauchy'schen Hauptwerte für die hier dargestellten Fälle umgangen werden kann (eine Ausnahme bilden die später gezeigten Hybridelemente), wenn der *Starrkörperansatz* eingeführt wird. Die Verwendung des Starrkörperansatzes ist jedoch weniger effektiv als die direkte Berechnung, da die Integranden mit Hilfe von Reihenentwicklungen berechnet werden müssen.

Zusammenfassung der Integralgleichungen

Poisson-Gleichung

$$-c^i u^i + \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad . \quad (2.59)$$

Helmholtz-Gleichung

$$-c^i u^i + \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = 0 \quad . \quad (2.60)$$

Mit der statischen Fundamentallösung (Lösung der Poisson-Gleichung) als Wichtungsfunktion, ändert sich die Integralgleichung zu

$$-c^i u^i + \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = -k^2 \int_{\Omega} u u^* d\Omega \quad . \quad (2.61)$$

Navier'sche-Gleichung

$$-c_{kj}^i u_j^i + \int_{\Omega} u_{kj}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_{kj}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{kj}^* u_j d\Gamma = 0 \quad . \quad (2.62)$$

Gleichung (2.62) ist die *Somigliana-Identität* zur Verschiebungsberechnung.

Es ist zu erkennen, daß es sich für nicht-verschwindende Volumenlasten noch nicht um reine Randintegralgleichungen handelt. In den meisten technisch interessanten Problemstellungen ist es jedoch möglich, die Volumenintegrale in Randintegrale umzuformen. Dies geschieht für Eigengewichtskräfte und Zentrifugalkräfte, also Kräfte, die aus Potentialen abgeleitet werden können, mit Hilfe spezieller Lösungen. Die *Multiple Reciprocity Method* eignet sich ebenfalls dazu, Volumenintegrale in eine Summe von Randintegralen zu transformieren. Hier wird auf die entsprechende Literatur (speziell [197]) verwiesen.

Im folgenden wird angenommen, daß Volumenbelastungen auf den Rand transformierbar sind (dann entstehen noch zusätzliche Integrale mit bekannten Größen). Auf die Berücksichtigung dieser Integrale wird jedoch aus Gründen der kompakteren Darstellung verzichtet.

2.5 Algebraisierung der Randintegralgleichungen

Die Algebraisierung wird am Beispiel der Navier'schen-Gleichung vorgeführt. Die entsprechenden Herleitungen für die skalare Poisson- oder Helmholtz-Gleichung können daraus durch Reduktion der vektoriellen Größen auf skalare Größen entnommen werden und ergeben keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

Zur besseren Anschauung wird nun die Matrixschreibweise eingeführt.

Einführung der Matrixschreibweise

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{pmatrix} \quad \underline{p}^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{pmatrix}$$

Damit folgt die Matrizenrandintegralgleichung

$$\underline{c}^i \vec{u}^i + \int_{\Gamma} \underline{p}^* \vec{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \vec{p} \, d\Gamma \quad . \quad (2.63)$$

Zur numerischen Lösung der Gleichungen wird der Rand des Gebietes Γ in Integrationsabschnitte (*Elemente*) eingeteilt. Für die Randverschiebungen und Randspannungen werden lokale Ansätze gewählt, die als Koeffizienten die jeweiligen Knotenwerte enthalten

$$\vec{u} = \underline{N}^T \vec{u}_j \quad \vec{p} = \underline{N}^T \vec{p}_j \quad . \quad (2.64)$$

\vec{u}_j und \vec{p}_j sind Knotenverschiebungen und Knotenrandspannungen, \underline{N} die Matrix der Formfunktionen des betrachteten Elementes.

Die lokalen Ansätze gelten nur für das jeweilige Element, für das sie angesetzt werden und sind außerhalb dieses Elementes zu Null definiert.

Dieses Vorgehen entspricht dem Einsatz von stückweise stetigen Funktionen, die bei der Herleitung der Randintegralgleichungen mit dem Prinzip der gewichteten Residuen zulässig sind.

Für eine Zerlegung des Randes in n Elemente folgt

$$\underline{c}^i \bar{u}^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \bar{u} d\Gamma \right) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \bar{p} d\Gamma \right) \quad (2.65)$$

bzw. unter Berücksichtigung der lokalen Ansätze

$$\underline{c}^i \bar{u}^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N}^T d\Gamma \right) \bar{u}_j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N}^T d\Gamma \right) \bar{p}_j \quad (2.66)$$

Abkürzend kann geschrieben werden

$$\underline{c}^i \bar{u}^i + \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ij} \bar{u}_j = \sum_{j=1}^n \underline{g}_{ij} \bar{p}_j \quad (2.67)$$

Diese Gleichung gilt für jeden Quellpunkt \bar{x}^i . Jeder Randpunkt kann als Quellpunkt angenommen werden. Das Ergebnis ist nach Zusammenfassen der entsprechenden Koeffizienten von \hat{h}_{kk} und \underline{c}^i zu

$$\underline{h}_{kk} = \underline{c}^i + \hat{h}_{kk} \quad (2.68)$$

ein Gleichungssystem in der abgekürzten Form

$$\underline{G} \bar{p} = \underline{H} \bar{u} \quad (2.69)$$

Dabei wird beim Aufbau der Systemmatrizen \underline{H} und \underline{G} berücksichtigt, daß die Koeffizienten, die zu ein und derselben Randgröße gehören, zusammenzufassen sind.

Dieses Gleichungssystem ist unabhängig von der Art des Randwertproblems. Werden nun Randbedingungen berücksichtigt, treten sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite der Gleichung unbekannte und bekannte Randgrößen auf. Zur Bestimmung der unbekanntenen Größen ist eine Umordnung des Gleichungssystems erforderlich

$$\underline{B} \bar{x} = \underline{A} \bar{f} = \bar{F} \quad (2.70)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die unbekanntenen Randgrößen \bar{x} .

Die Integrale, die sich mit Hilfe der Elementansätze ergeben, haben je nach gewähltem Randelementtyp anderes Aussehen in der Schreibweise mit lokalen Koordinaten (siehe *Randelementtypen*). So ergeben sich für Viereckselemente Integrale des Typs

$$\begin{aligned} I_{i1} &= \int_{\xi_2=-1}^{+1} \int_{\xi_1=-1}^{+1} \underline{u}^*(\xi_1, \xi_2) \underline{N}_i^T(\xi_1, \xi_2) | \underline{J}(\xi_1, \xi_2) | d\xi_1 d\xi_2 \\ I_{i2} &= \int_{\xi_2=-1}^{+1} \int_{\xi_1=-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi_1, \xi_2) \underline{N}_i^T(\xi_1, \xi_2) | \underline{J}(\xi_1, \xi_2) | d\xi_1 d\xi_2 \quad , \end{aligned} \quad (2.71)$$

und für Dreieckselemente

$$\begin{aligned}
 I_{i1} &= \int_{\xi_2=0}^{+1} \int_{\xi_1=0}^{1-\xi_2} \underline{u}^*(\xi_1, \xi_2) \underline{N}_i^T(\xi_1, \xi_2) | \underline{J}(\xi_1, \xi_2) | d\xi_1 d\xi_2 \\
 I_{i2} &= \int_{\xi_2=0}^{+1} \int_{\xi_1=0}^{1-\xi_2} \underline{p}^*(\xi_1, \xi_2) \underline{N}_i^T(\xi_1, \xi_2) | \underline{J}(\xi_1, \xi_2) | d\xi_1 d\xi_2 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.72}$$

Die Behandlung dieser Integrale wird später im Abschnitt *Numerische Integration* ausführlich erläutert.

Starrkörperansatz

Es wird gezeigt, wie die Matrix \underline{c}^i der integralfreien Terme gemeinsam mit den Integralen, die als Cauchy-Hauptwerte zu verstehen sind, mit Hilfe des *Starrkörperansatzes* indirekt berechnet werden können. Diese indirekte Berechnung wird hier nur zu Testzwecken (Überprüfung der numerischen Integration stark-singulärer Integrale) verwendet. Aus Gründen der Effizienz beim Aufstellen der Systemmatrizen werden später nur die direkten Verfahren eingesetzt.

Die für einen auf dem Rand Γ des Gebiets Ω liegenden Quellpunkt \vec{x}^i auftretenden integralfreien Terme und Cauchy-Hauptwerte werden nach der Diskretisierung des Randes mit Hilfe von Elementen und Knoten in einer Matrix \underline{d}^i zusammengefaßt

$$\underline{d}^i = \underline{c}^i + \oint_{\Gamma_j} \underline{p}^* N_i J d\Gamma \quad .
 \tag{2.73}$$

Darin ist N_i die zum Randknoten \vec{x}^i gehörende Formfunktion bezüglich des Elementes j und J die *Jacobi-Determinante* der Transformation.

Die Matrix \underline{c}^i ist, wie in den Grundlagen gezeigt, nur von der Ordnung der Singularität von \underline{p}^* und der Randgeometrie in der Umgebung von \vec{x}^i abhängig. Für die hier untersuchten Fundamentallösungen tritt für den statischen Fall und den dynamischen Fall kein Unterschied in der Singularität auf. D.h. \underline{c}^i ist für Statik und Dynamik im Frequenzbereich gleich. Es gilt

$$\underline{c}_{stat}^i = \underline{c}_{dyn}^i \quad .
 \tag{2.74}$$

Gleichung (2.73) kann sowohl für die Statik als auch für die Dynamik aufgestellt werden

$$\begin{aligned}
 \underline{d}_{stat}^i &= \underline{c}_{stat}^i + \oint_{\Gamma_j} \underline{p}_{stat}^* N_i J d\Gamma \\
 \underline{d}_{dyn}^i &= \underline{c}_{dyn}^i + \oint_{\Gamma_j} \underline{p}_{dyn}^* N_i J d\Gamma \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.75}$$

Aus den Gleichungen (2.74) und (2.75) folgt

$$\underline{d}_{dyn}^i = \underline{d}_{stat}^i + \int_{\Gamma_j} [\underline{p}_{dyn}^* - \underline{p}_{stat}^*] N_i J d\Gamma \quad . \quad (2.76)$$

Die Differenz $[\underline{p}_{dyn}^* - \underline{p}_{stat}^*]$ ist regulär, wie im Abschnitt über die Fundamentallösungen gezeigt wurde (siehe *Reihenentwicklungen*).

Sind die statischen Koeffizienten \underline{d}_{stat}^i bekannt, können die entsprechenden dynamischen Koeffizienten \underline{d}_{dyn}^i mit Hilfe einer Integration regulärer Funktionen bestimmt werden.

Zu bestimmen ist noch \underline{d}_{stat}^i . Dies wird mit Hilfe des in der Literatur häufig sogenannten *Starrkörperansatzes* ausgeführt.

Für abgeschlossene Gebiete Ω gilt in der Statik für vernachlässigbare Volumenbelastung das Gleichungssystem in der abgekürzten Form

$$\underline{G} \vec{p} = \underline{H} \vec{u} \quad . \quad (2.77)$$

Wird nun angenommen, daß keine Randspannungen auftreten (kräftefreies System), und wird für \vec{u} eine Starrkörperverschiebung der Größe „1“ in eine der Koordinatenrichtungen angesetzt, folgt

$$\underline{H} \vec{u}_{starr} = \vec{0} \quad . \quad (2.78)$$

Starrkörperverschiebungen können gleichzeitig in alle drei Koordinatenrichtungen gewählt werden. Die Größe der jeweiligen Starrkörperverschiebung wird wieder zu „1“ gesetzt

$$\underline{U}_{starr}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{3K \times 3} \quad . \quad (2.79)$$

Damit folgt

$$\underline{H} \underline{U}_{starr} = \underline{0} \quad . \quad (2.80)$$

D.h. aber, daß die jeweiligen Submatrizen \underline{h}_{ii} aus \underline{H} , die ja die integralfreien Terme gemeinsam mit den Cauchy-Hauptwerten des Randpunktes \vec{x}^i enthalten, über die Summe der Nebendiagonalelemente berechnet werden können

$$\underline{h}_{ii} = - \sum_{i \neq j}^K \underline{h}_{ij} \quad (K = \text{Knotenzahl}) \quad . \quad (2.81)$$

2.6 Spannungsberechnung mit der REM

Die Spannungsberechnung mit der REM erfolgt in einer Nachlaufrechnung im Anschluß an die Berechnung der unbekannt Randgrößen. D.h. das Randverschiebungsfeld und das Randspannungsfeld des Bauteils sind als bekannt vorauszusetzen.

Der Spannungszustand eines homogenen Körpers aus isotropem Material kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes und mit $\underline{\epsilon} = def \vec{u}$ über die Verschiebungen ausgedrückt werden

$$\sigma_{ij} = \frac{2 G \nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} u_{m,m} + G (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (2.82)$$

Diese Gleichung kann auf zwei Arten gelöst werden. Zum einen durch numerische Differentiation des Verschiebungsfeldes, zum anderen durch das Einsetzen der abgeleiteten Somigliana-Identität.

Die letztere Methode liefert eine Randintegralgleichung zur Bestimmung des Spannungstensors, die *Somigliana-Spannungsidentität*, die für die hier betrachteten Fälle *Statik* und *Frequenzbereich* prinzipiell das gleiche Aussehen hat

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{\Gamma} \left[\frac{2 G \nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} u_{mk,m}^* + G (u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] p_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2 G \nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} p_{mk,m}^* + G (p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \quad , \end{aligned} \quad (2.83)$$

bzw. in abkürzender Schreibweise

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \quad . \quad (2.84)$$

S_{kij} und D_{kij} stellen die Fundamentalspannungskerne dar, die sich aus Gleichung (2.83) ablesen lassen.

In [74] werden diese Spannungskerne für Statik und Frequenzbereich explizit angegeben.

Die Identität (2.83) gilt für Punkte im Innern des Körpers. Die Behandlung von Spannungen auf dem Rand wird in ([92], [74], [114] und [155]) ausführlich beschrieben und hier nicht weiter betrachtet.

2.7 Randelementtypen

Es wurde bereits gezeigt, daß der Rand Γ eines Gebietes Ω beim Einsatz der Randelementmethode in Integrationsabschnitte (*Elemente*) unterteilt werden muß. Die Oberfläche eines 3D-Gebietes wird mit zweidimensionalen Elementen diskretisiert. Als Elementtypen werden Vierecks- und Dreieckselemente mit quadratischen Geometrieansätzen verwendet.

Zudem werden noch ebene Rechteckselemente und Dreieckselemente vorgestellt, da sie bei der Diskretisierung eine große Rolle spielen und wegen ihrer einfachen Handhabung oft in Kombination mit den erstgenannten Elementen verwendet werden.

Mit diesen Elementtypen ist die angenäherte oder exakte Abbildung fast jeder beliebigen Oberfläche möglich.

Für Sonderbereiche (z.B. Bruchmechanik), die hier nicht betrachtet werden, sind zudem spezielle Elementtypen entwickelt worden.

2.7.1 Viereckselemente

Quadratischer Geometrieansatz

Die Geometrie des Randstücks, das durch eine Element abgebildet werden soll, wird durch lokale Geometrieansätze angenähert, die als Koeffizienten die jeweiligen Knotenwerte enthalten (Bild 2.4). Die Elementkanten werden dabei durch quadratische Polynome beschrieben (deshalb *quadratische Ansätze*)

$$\vec{x}(\xi_1, \xi_2) = \underline{N}^T(\xi_1, \xi_2) \vec{x}_j \quad . \quad (2.85)$$

\vec{x}_j sind die Ortskoordinaten der jeweiligen Knoten, $\underline{N}(\xi_1, \xi_2)$ ist die Matrix der Formfunktionen des jeweiligen Elementes. (ξ_1, ξ_2) sind die lokalen Koordinaten (siehe Bild 2.5)

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi_1 \leq 1 \\ -1 &\leq \xi_2 \leq 1 \quad . \end{aligned}$$

Diese lokalen Ansätze gelten nur für das jeweilige Element, für das sie definiert sind. Der lokale Ansatz kann entweder mit 8 (Element der Serendipity-Klasse, [275]) oder mit 9 Knoten (Element der Lagrange-Klasse) erfolgen. Die Formfunktionen der Ansätze werden am Ende des Abschnitts tabelliert wiedergegeben.

Linearer Geometrieansatz (Rechteckselement)

Als weiteres Element wird hier das ebene Rechteckselement angegeben. Dieses hat nur Geometrie-knoten in den Ecken. Die Beschreibung der Elementgeometrie erfolgt durch

$$\vec{x}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} [\vec{x}_1 + \vec{x}_3 + \xi_1 (\vec{x}_3 - \vec{x}_2) + \xi_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)] \quad . \quad (2.86)$$

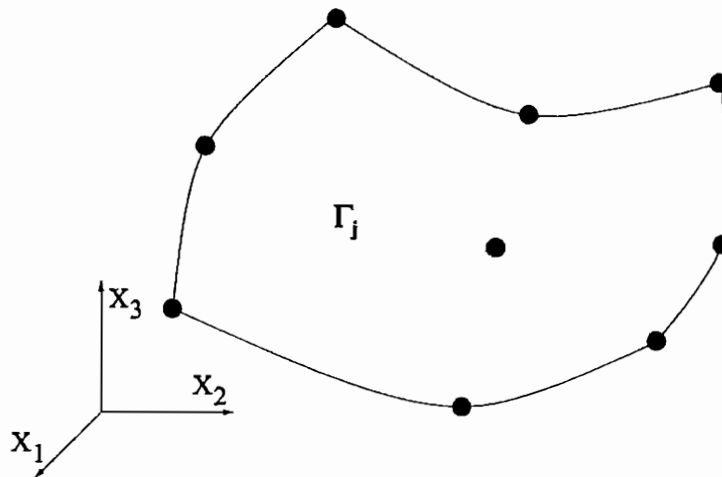


Abbildung 2.4: Randabschnitt angenähert durch Viereckselement

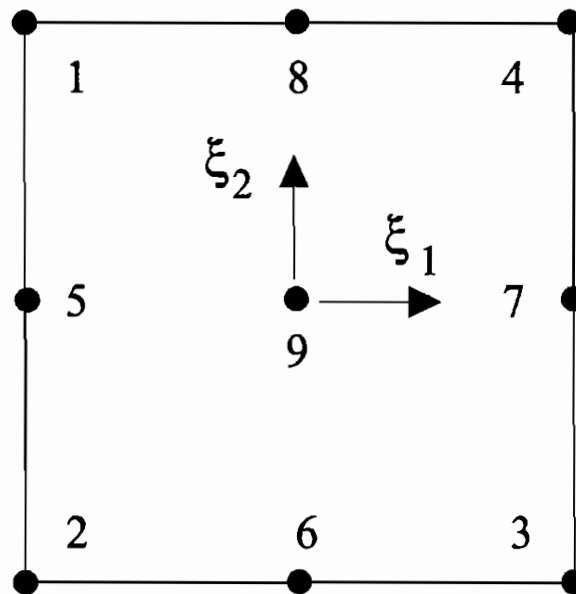


Abbildung 2.5: Definition lokaler Koordinaten und lokaler Knoten

Die Transformation des Flächenelementes $d\Gamma$ in globalen Koordinaten zu einem Flächenelement in lokalen Koordinaten geschieht mit Hilfe der *Jacobi-Matrix* (darin $\vec{r}^T = (x_1, x_2, x_3)$)

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \tag{2.87}$$

mit $|J(\xi_1, \xi_2)|$ als Jacobi-Determinante der Transformation. Für Rechteckselemente ergibt sich eine konstante Jacobi-Determinante

$$|J| = \frac{F}{4} \quad (\text{mit } F = \text{Elementfläche}) \tag{2.88}$$

2.7.2 Dreieckselemente

Quadratischer Geometrieansatz

Die Geometrieansätze sind prinzipiell die gleichen wie beim Viereckselement. Hier werden jedoch nur 6 Knoten pro Element eingesetzt. Für die lokalen Koordinaten (ξ_1, ξ_2) , die in Bild (2.7) angegeben werden, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi_1 \leq (1 - \xi_2) \\ 0 &\leq \xi_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.89)$$

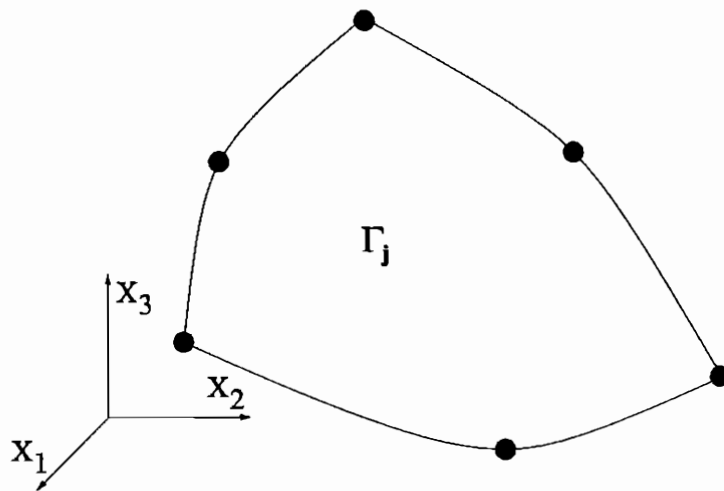


Abbildung 2.6: Randabschnitt angenähert durch quadratisches Dreieckselement

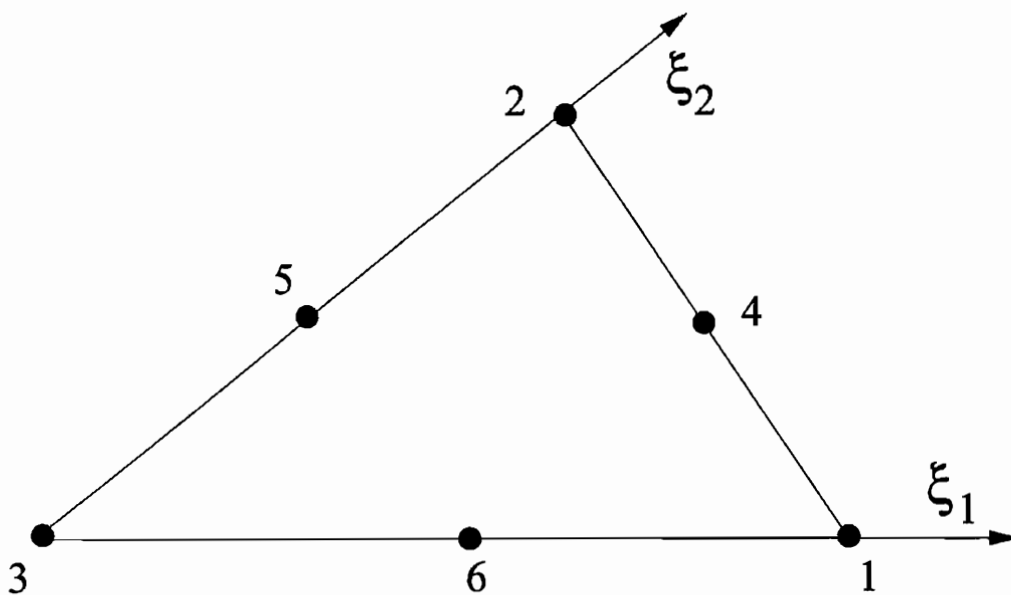


Abbildung 2.7: Definition lokaler Koordinaten und lokaler Knoten

Linearer Geometrieanatz

Das Dreieck hat nur Geometrieknoten in den Ecken und ist damit ein ebenes Element. Die Elementgeometrie wird durch die Gleichung

$$\vec{x}(\xi_1, \xi_2) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \xi_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \xi_2 + \vec{x}_3 \tag{2.90}$$

beschrieben. Die Jacobi-Determinante ist konstant

$$|J| = 2 \cdot F \quad (\text{mit } F = \text{Elementfläche}) \tag{2.91}$$

Formfunktionen

N_i	9-Knoten	8-Knoten
1	$\frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1)$
2	$\frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 - 1)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1)$
3	$\frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 - 1)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1)$
4	$\frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1)$
5	$\frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2^2)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)$
6	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 - 1)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2)$
7	$\frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 + 1)(1 - \xi_2^2)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2)$
8	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 + 1)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2)$
9	$(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)$	—

Tabelle 2.1: Formfunktionen des Viereckselements

N_i	6-Knoten
1	$2\xi_1^2 - \xi_1$
2	$2\xi_2^2 - \xi_2$
3	$1 - 3\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2$
4	$4\xi_1 \xi_2$
5	$4\xi_2(1 - \xi_1 - \xi_2)$
6	$4\xi_1(1 - \xi_1 - \xi_2)$

Tabelle 2.2: Formfunktionen des Dreieckselements

2.7.3 Verschiebungsansätze

Für die Randverschiebungen und Randspannungen werden lokale Ansätze gewählt, die die jeweiligen Knotenwerte als Koeffizienten enthalten

$$\vec{u} = \underline{N}^T \vec{u}_j \quad \vec{p} = \underline{N}^T \vec{p}_j \quad . \quad (2.92)$$

Dabei werden für Verschiebungen und Randspannungen jeweils die gleichen Formfunktionen verwendet, obwohl auch unterschiedliche Ansätze möglich sind.

Der Ansatzgrad wird hier konstant, linear oder quadratisch gewählt. Bei konstanten Ansätzen wird angenommen, daß die Verschiebungen und Randspannungen innerhalb eines Elementes näherungsweise konstant angenommen werden können und entsprechen den jeweiligen Größen im Elementmittelpunkt.

Bei linearen und quadratischen Ansätzen werden die gleichen Formfunktionen wie für die Beschreibung der Geometrie gewählt.

Bezeichnungen

Je nach Ansatzgrad für Zustandsgrößen (Verschiebungen und Randspannungen) und Geometrie, wird eine Einteilung der Elemente in Klassen vorgenommen.

Eine Einteilung findet statt in

- isoparametrische Elemente (Ansatzgrade der Zustandsgrößen und der Geometrie gleich),
- superparametrische Elemente (der Ansatzgrad der Geometrie ist größer),
- subparametrische Elemente (der Ansatzgrad der Zustandsgrößen ist größer).

In den späteren Untersuchungen werden hauptsächlich subparametrische Elemente (lineare Geometrie, quadratische Ansätze für die Zustandsgrößen) verwendet.

2.7.4 Hybridelemente und diskontinuierliche Elemente

Die bisher beschriebenen Elemente gehören für lineare und quadratische Ansätze der Zustandsgrößen zu den kontinuierlichen Elementen. Sie werden als kontinuierlich bezeichnet, weil sie an ihren Grenzflächen nicht nur Geometrieknoten mit benachbarten Elementen gemeinsam haben, sondern auch die Knoten der Zustandsgrößen. An diesen Knoten ist dann die Stetigkeit der Verschiebung gewährleistet. Liegt ein solcher Knoten beispielsweise an einer Ecke oder Kante (bzw. allgemein an einer Stelle, an der die Flächennormalen der an den Knoten angrenzenden Elemente nicht alle gleich sind), so ist zwar die Verschiebung stetig, die Randspannungen werden aber i.a. unterschiedlich sein (siehe Bild 2.8). Dies ist besonders bei der Formulierung

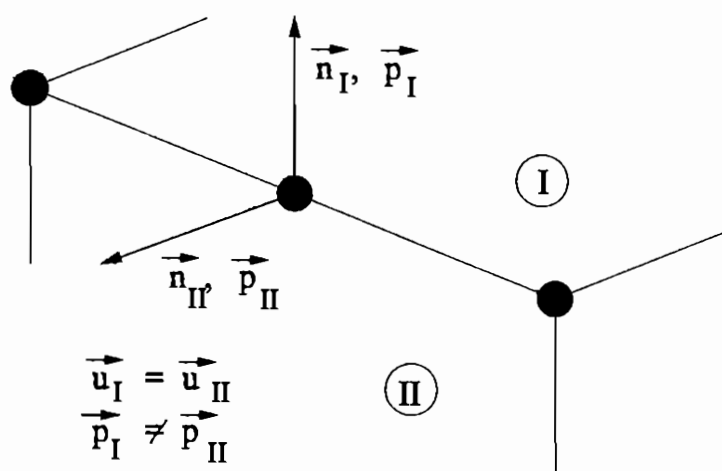


Abbildung 2.8: Kante mit zwei Elementen I und II

der Randbedingungen zu beachten. So dürfen pro Knoten nur eine unbekannte (bei skalaren Problemen) bzw. drei unbekannte Größen (bei vektoriellen Problemen) auftreten.

Da an Ecken und Kanten unterschiedliche Randspannungen pro Knoten auftreten können, ergeben sich in den Systemgleichungen

$$\underline{G} \vec{p} = \underline{H} \vec{u} \quad (2.93)$$

$$\underline{B} \vec{x} = \underline{A} \vec{f} = \vec{F}$$

rechteckige Systemmatrizen \underline{G} und \underline{A} . Für die Lösung des Gleichungssystems spielt dies keine Rolle, da die bekannten Randspannungen in einem Vektor \vec{F} zusammengefaßt werden.

Vielfach ist es jedoch wesentlich weniger aufwendig, bei der Modellbildung auf *diskontinuierliche Elemente* zurückzugreifen. Diese Elemente unterscheiden sich in der Geometriebeschreibung nicht von kontinuierlichen Elementen. Lediglich die Knoten der Verschiebungs- und Randspannungsansätze liegen nicht mehr auf den Elementrändern, sondern sind ins Innere des Elementes verschoben. Dies führt zu unstetigen *diskontinuierlichen* Verschiebungsverläufen an den Elementgrenzen, jedoch bei der Modellbildung zu Vereinfachungen.

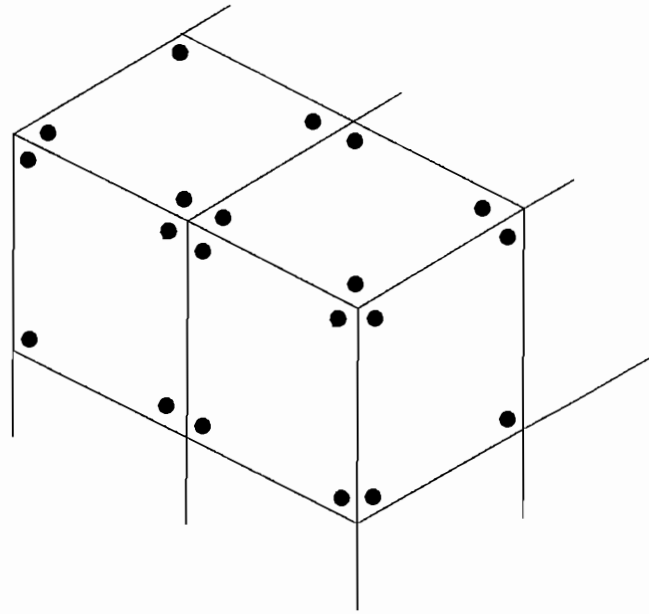


Abbildung 2.9: Beispiel: Knotenlage bei diskontinuierlichen Elementen

In den Tabellen (2.3, 2.4) werden die Formfunktionen angegeben und die Bilder (2.10) und (2.11) zeigen die Skizzen zur Lage der lokalen Knoten. Dabei wird bei den Viereckelementen $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ gesetzt. Die allgemeine Formulierung mit a_i wird in [213] angegeben. Die kontinuierlichen Elemente lassen sich mit $a = 1$ direkt aus den diskontinuierlichen herleiten.

Bei Dreieckselementen gelten die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \frac{\xi_1 - a_3}{a_4} & \xi'_2 &= \frac{\xi_2 - a_1}{a_4} \\ \xi'_3 &= \frac{\xi_3 - a_2}{a_4} & \xi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Nachteile beim Einsatz von diskontinuierlichen Elementen

Diskontinuierliche Elemente führen, neben den Unstetigkeiten im Verschiebungsverlauf, zu einer großen Anzahl neuer Knoten. Die Größe der Systemmatrizen wird daher i.a. stark ansteigen. Bei der Modellerstellung ergeben sich keine Änderungen gegenüber den kontinuierlichen Modellen, da die Geometrie gleich bleibt, und die Lage der Knoten für die Zustandsgrößen automatisch berechnet werden kann. Ebenfalls können die Knotengrößen mit Hilfe der Formfunktionen auf die Elementränder umgerechnet werden. Damit ist u.a. die Größe der Unstetigkeit quantifizierbar.

Um eine Reduktion der Freiheitsgrade beim Einsatz von diskontinuierlichen Elementen zu erzielen, werden *Hybridelemente* formuliert.

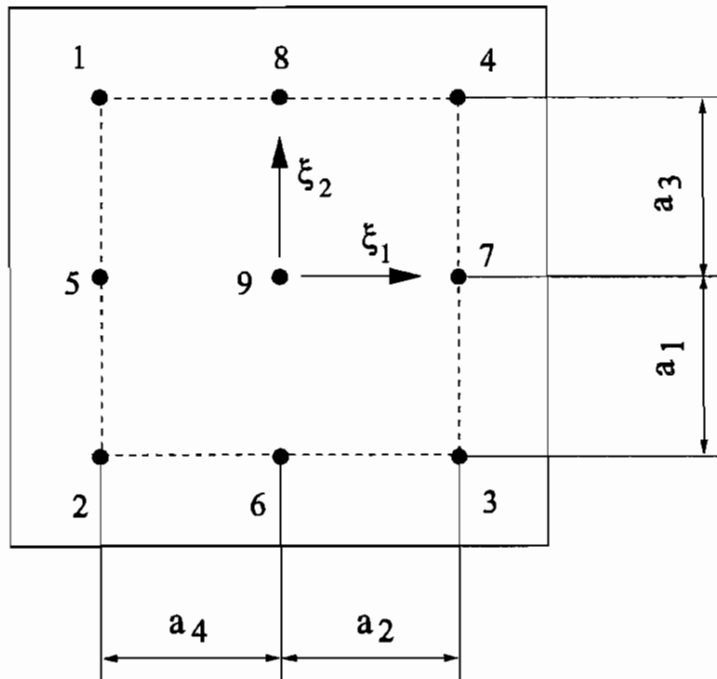


Abbildung 2.10: Definition lokaler Koordinaten und lokaler Knoten

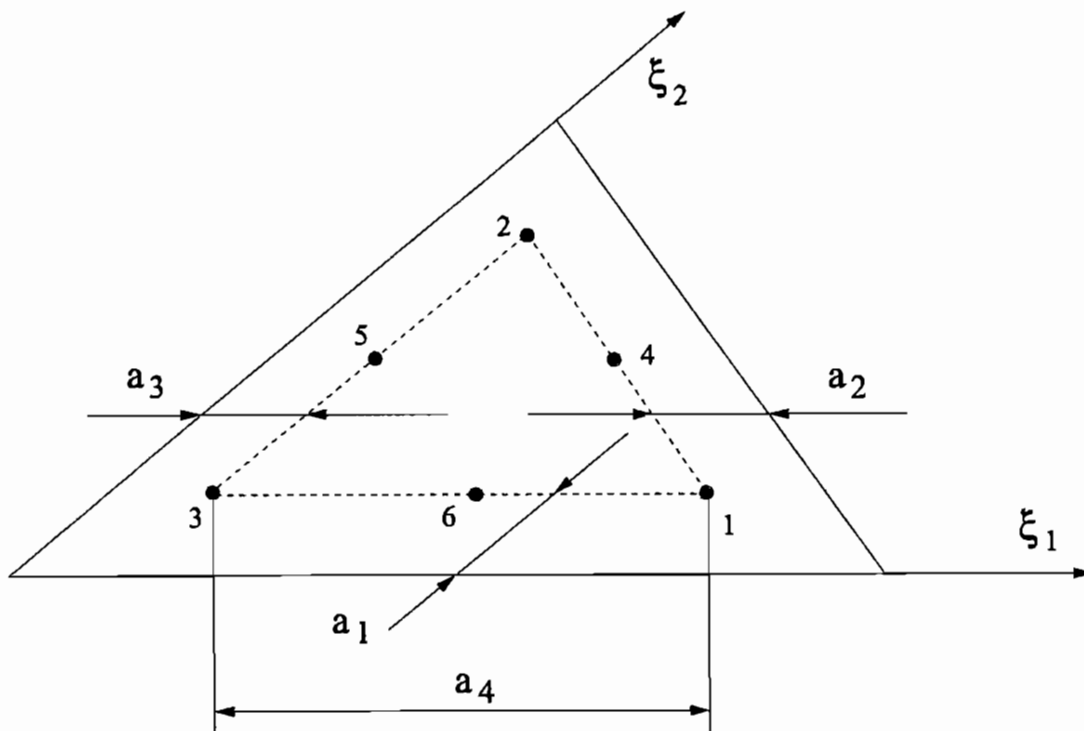


Abbildung 2.11: Definition lokaler Koordinaten und lokaler Knoten

N_i	9-Knoten
1	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 - a)\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 + a)$
2	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 - a)\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 - a)$
3	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 + a)\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 - a)$
4	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 + a)\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 + a)$
5	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 - a)\frac{1}{a^2}(a - \xi_2)(a + \xi_2)$
6	$\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 - a)\frac{1}{a^2}(a - \xi_1)(a + \xi_1)$
7	$\frac{\xi_1}{a^2}(\xi_1 + a)\frac{1}{a^2}(a - \xi_2)(a + \xi_2)$
8	$\frac{\xi_2}{a^2}(\xi_2 + a)\frac{1}{a^2}(a - \xi_1)(a + \xi_1)$
9	$\frac{1}{a^2}(a - \xi_1)(a + \xi_1)\frac{1}{a^2}(a - \xi_2)(a + \xi_2)$

Tabelle 2.3: Formfunktionen des diskontinuierlichen Viereckelementes

N_i	6-Knoten
1	$2\xi_1'^2 - \xi_1'$
2	$2\xi_2'^2 - \xi_2'$
3	$1 - 3\xi_1' - 3\xi_2' + 4\xi_1'\xi_2' + 2\xi_1'^2 + 2\xi_2'^2$
4	$4\xi_1' - \xi_2'$
5	$4\xi_2'(1 - \xi_1' - \xi_2')$
6	$4\xi_1'(1 - \xi_1' - \xi_2')$

Tabelle 2.4: Formfunktionen des diskontinuierlichen Dreieckselementes

Einsatz von Hybridelementen

Bei Hybridelementen werden nur die Knoten ins Elementinnere verschoben, die an eine Kante oder Ecke stoßen bzw. bei denen eine Änderung der vorgegebenen Randspannung auftritt. Die restlichen Knoten verbleiben auf den Elementrändern.

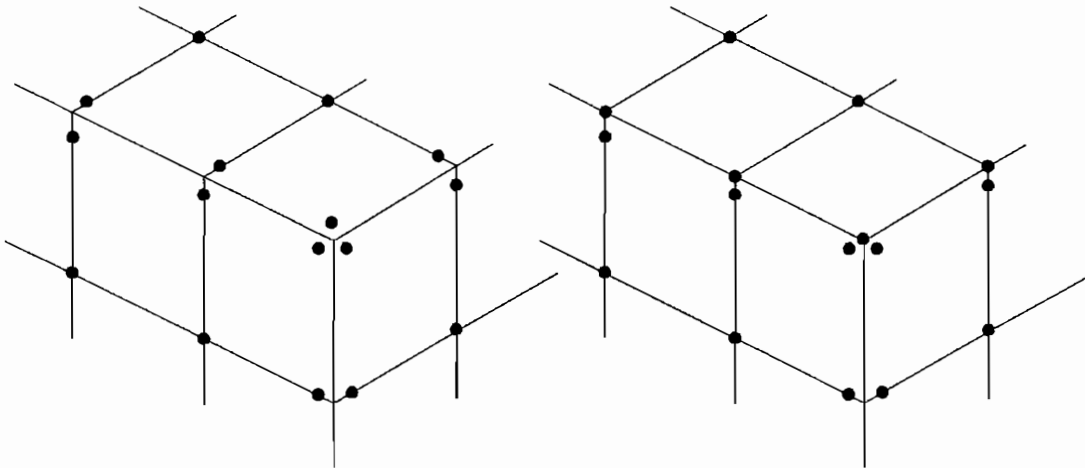


Abbildung 2.12: Beispiel: Knotenlage bei Hybridelementen

Die Formfunktionen entsprechen denen der diskontinuierlichen Elemente, die Parameter a_i sind lediglich entsprechend zu wählen.

Bild (2.12) verdeutlicht eine Problematik der Hybridelemente bei der numerischen Integration. Wird die Elemententeilung entsprechend des linken Bildes vorgenommen, ergeben sich Integrale des Typs, wie sie auch bei kontinuierlichen Elementen auftreten. In der Praxis werden jedoch die Knoten der Zustandsgrößen sehr nahe an die Ränder der Elemente gelegt, damit der Einfluß der Unstetigkeit in den Verschiebungen möglichst klein bleibt. Soll dann von einem solchen Knoten aus über ein benachbartes Element integriert werden, so ergeben sich fast-singuläre Integrale. Die Lösung solcher Integrale ist i.a. mit sehr viel numerischem Aufwand verbunden und führt zu ineffektiven Berechnungen.

Wird hingegen eine Knotenwahl wie auf dem rechten Bild getroffen, treten zwar keine fast-singulären Integrale auf, jedoch ergeben sich stark-singuläre Integrale. Zur Verdeutlichung kann man sich vorstellen, daß von dem Knoten auf der Ecke über das darunterliegende Element integriert wird. Es tritt ein stark-singuläres Integral auf, welches nicht vom Starrkörperkriterium erfaßt wird. Dies geschieht deshalb nicht, weil der Eckknoten nicht zum unteren Element gehört und damit auch keinen Anteil zu den Diagonalelementen liefert. Das stark-singuläre Integral ist direkt zu lösen. Die Verfahren dazu werden im Abschnitt *Numerische Integration* behandelt. Sie sind meist sehr viel effektiver als die Integration fast-singulärer Integrale.

2.8 Numerische Integration

Im Abschnitt 2.4 wurden die Randintegralgleichungen hergeleitet. Mit Hilfe einer Diskretisierung des Randes in Elemente wurde das gesamte Integrationsgebiet (der Rand Γ) in Integrationsabschnitte aufgeteilt. Unter Berücksichtigung der lokalen Ansätze für die Zustandsgrößen gilt für einen Randpunkt \vec{x}^i

$$\underline{c}^i \vec{u}^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N}^T d\Gamma \right) \vec{u}_j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N}^T d\Gamma \right) \vec{p}_j \quad . \quad (2.95)$$

Die Integranden der zu lösenden Integrale bestehen aus bekannten Funktionen. Für ebene Elemente ist die analytische Integration bezüglich der einzelnen Elemente möglich ([63], [10], [161]). Für gekrümmte Elemente muß die Integration numerisch durchgeführt werden. Eine analytische Integration ist wegen der komplexen Struktur der Integranden mit ortsabhängiger Jacobi-Determinante nicht möglich.

Die numerische Integration kann nach zwei grundsätzlichen Verfahren erfolgen. Zum einen stehen die Quadraturformeln nach *Newton-Cotes* zur Verfügung ([275], [24]), zum anderen die numerische Integration nach *Gauß-Legendre*, die hier als Standard-Gauß-Verfahren bzw. Gauß-Quadratur bezeichnet wird.

Mit der Newton-Cotes-Quadratur ist mit $(n+1)$ Funktionswerten (Stützstellen) die fehlerfreie Integration eines Polynoms n -ter Ordnung möglich. Die Gauß-Quadratur erlaubt mit n Funktionswerten die exakte Integration eines Polynoms $(2n-1)$ -ter Ordnung. Die Verwendung der Gauß-Quadratur ist wegen der geringeren Anzahl von Funktionswerten in den meisten Fällen vorteilhaft.

Hier bezieht sich daher die Darstellung der numerischen Integration auf die Gauß-Quadratur.

Bei der numerischen Integration spielt die Abstandsvariable r , die den Betrag des Abstands vom jeweiligen Quellpunkt \vec{x}^i zu einem Stützpunkt \vec{x} der numerischen Integration angibt, eine wichtige Rolle (siehe Bild 2.13).

Abhängig vom Betrag dieser Variablen, sind unterschiedliche Integrationsverfahren anzuwenden. Die Integrale, die zu lösen sind, werden in Klassen eingeteilt. Für $r_{min} > r_{grenz}$ sind die hier betrachteten Integranden im allgemeinen regulär (r_{min} ist der minimale Abstand vom Quellpunkt zum Element, über das momentan integriert wird, r_{grenz} stellt eine untere Grenze dar, bis zu der die Integranden als regulär betrachtet werden können). Die Integrale können dann mit dem Standard-Gauß-Verfahren gelöst werden.

Für $r_{min} \leq r_{grenz}$ spricht man von *fast-singulären Integralen*. Für den Fall, daß der Quellpunkt Punkt des Elementes ist, auf dem die Aufpunkte \vec{x} liegen, heißen die Integrale *singuläre Integrale*. Integrale der Ordnung $O\left(\frac{1}{r}\right)$ (Fundamentallösung) heißen für den 3D-Fall *schwach-singulär*, die der Ordnung $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (Fundamentalrandspannung) sind *stark-singulär*.

Je nach Typ der Integrale sind unterschiedliche Verfahren einzusetzen, um eine effektive numerische Berechnung zu ermöglichen. Dazu werden alle auftretenden Integrale direkt berechnet.

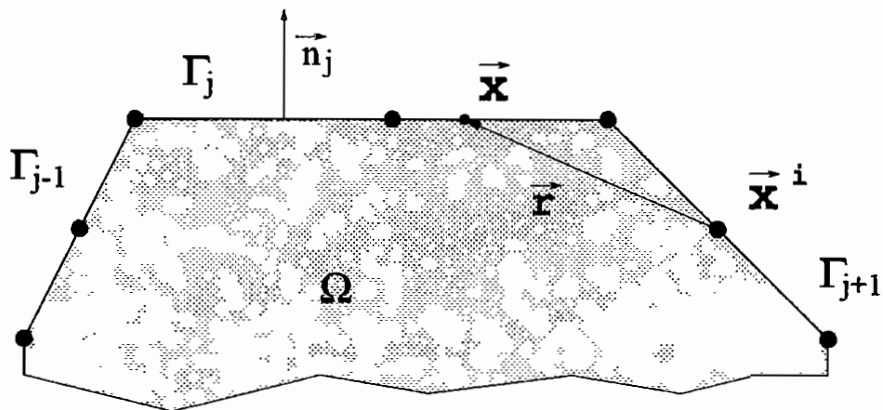


Abbildung 2.13: Abstand r vom Quellpunkt zu einem Integrationspunkt in einem anderen Element

Das Starrkörperkriterium (siehe *Algebraisierung der Randintegralgleichungen*) wird wegen der erforderlichen Reihenentwicklung nur in der Programmtestphase zu Vergleichsrechnungen eingesetzt.

Hier wird nun ein Konzept vorgestellt, bei dem die regulären Integrale mit dem Standard-Gauß-Verfahren berechnet werden. Die anderen Integraltypen werden mit Verfahren behandelt, die eine *nichtlineare Koordinatentransformation* gemeinsam haben. Es ist zu bemerken, daß neben dem Einsatz der nichtlinearen Transformation noch eine Reihe anderer Transformationen zum Einsatz kommen. Weit verbreitet ist die Transformation von lokalen Koordinaten in Polarkoordinaten.

Die einzelnen Integrationsverfahren werden nun vorgestellt und an Beispielen getestet.

2.8.1 Reguläre Integrale

Gauß-Quadratur

Das Verfahren wird hier nur prinzipiell vorgeführt. Eine ausführliche Darstellung ist in [40] zu finden. Zuerst erfolgt die Behandlung eines eindimensionalen Integrals, die Erweiterung auf zweidimensionale Integrale wird anschließend durchgeführt.

Die Aufgabe besteht darin, eine Näherungslösung für das Integral

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (2.96)$$

zu bestimmen. Dabei ist bereits eine Koordinatentransformation auf ein lokales Koordinatensystem mit den Grenzen $(-1 \leq \xi \leq 1)$ erfolgt.

Mit Hilfe der *Legendre-Polynome* (Kugelfunktionen) gelingt es, das Integral durch eine Summe von Produkten von n variablen Gewichtungsfaktoren w_i und Stützstellen (*Gaußkoordinaten*)

$f(\xi_i)$ anzunähern. Die n Stützstellen ξ_i sind dabei die Nullstellen des n -ten Legendre-Polynoms im Abschnitt $(-1 \leq \xi \leq 1)$

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad . \quad (2.97)$$

Bei zweidimensionalen Integralen in lokalen Koordinaten

$$I = \int_{\xi_2=-1}^{+1} \int_{\xi_1=-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.98)$$

wird genau wie bei der analytischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale vorgegangen. Mit der Gauß-Quadratur wird zuerst das innere Integral ausgewertet

$$I \approx \sum_{i=1}^{n_2} w_i \int_{-1}^{+1} f(\xi_i, \xi_2) d\xi_2 \quad , \quad (2.99)$$

dann die Auswertung des äußeren Integrals hinzugenommen

$$I \approx \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \xi_j) w_i w_j \quad . \quad (2.100)$$

Darin sind w_i, w_j die Wichtungsfaktoren und ξ_i, ξ_j die Gaußkoordinaten.

Diese Integrationsformeln gelten für Gebiete, die nach einer Koordinatentransformation auf lokale Koordinaten als Einheitsquadrat darstellbar sind. Prinzipiell lassen sich damit alle hier auftretenden regulären Integrale numerisch auswerten. Wird das Element in Dreieckskoordinaten abgebildet, können spezielle Integrationsformeln eingesetzt werden.

So läßt sich das Integral

$$I = \int_{\xi_2=0}^{+1} \int_{\xi_1=0}^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.101)$$

nach einem Vorschlag von *Hammer* [101] mit Hilfe einer Einfachsumme (*non-product-Formel*)

$$I \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f(\xi_1^j, \xi_2^j) w_j \quad (2.102)$$

darstellen.

Wichtungsfaktoren und Gaußkoordinaten sind für unterschiedliche Polynomgrade n tabelliert ([236], [234], [235]). Die Wahl der Integrationsordnung für die Integranden, die bei der Randelementmethode auftreten, läßt sich nach einem Vorschlag in [59] effektiv abschätzen.

Die restlichen Integraltypen neben den regulären Integralen werden, wie bereits angegeben, mit Verfahren gelöst, die auf der nichtlinearen Transformation basieren. Diese Transformation wird nun kurz beschrieben.

2.8.2 Nichtlineare Transformation

Die nichtlineare Transformation wird zur Transformation eines Integrals in lokalen Koordinaten (ξ_1, ξ_2) in ein Integral in Koordinaten (ρ_1, ρ_2) eingesetzt. Diese Transformation wird, ähnlich der Transformation in Polarkoordinaten, erst dann angewendet, wenn das Element über das integriert werden soll, in Abhängigkeit von der Lage des Quellpunktes \vec{x}^i in dreieckige Integrationsabschnitte eingeteilt worden ist. Diese Abschnitte stellen dabei keine Elemente dar, sondern sind lediglich als Integrationsgebiete zu verstehen. Bild (2.14) zeigt die Aufteilung eines ins lokale Koordinatensystem transformierten Vierecksgebietes in vier Abschnitte. Dabei wird angenommen, daß der singuläre Punkt \vec{x}^i zum Element gehört.

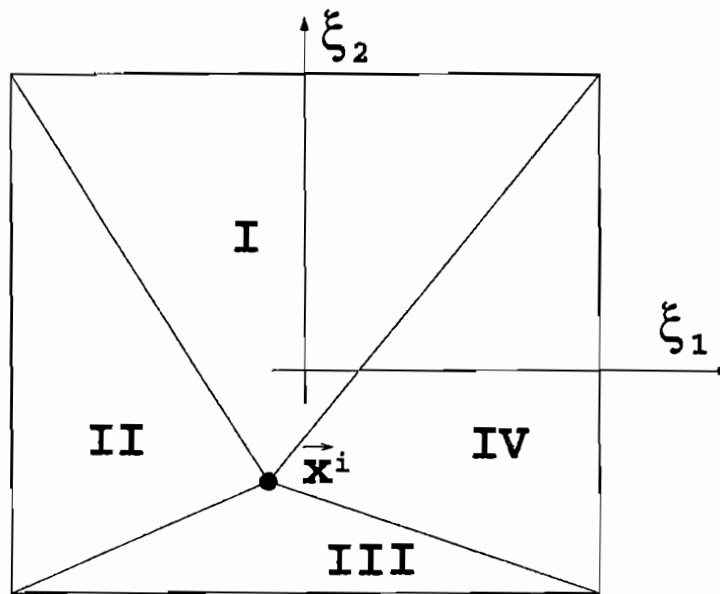


Abbildung 2.14: Elementaufteilung in Abhängigkeit des singulären Punktes

Nach der Elementunterteilung in dreieckige Abschnitte, wird nun für jedes dieser Dreiecke die nichtlineare Transformation durchgeführt. Sie lautet

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (1 - \rho_1) \xi_1^{(1)} + \rho_1 (1 - \rho_2) \xi_1^{(2)} + \rho_1 \rho_2 \xi_1^{(3)} \\ \xi_2 &= (1 - \rho_1) \xi_2^{(1)} + \rho_1 (1 - \rho_2) \xi_2^{(2)} + \rho_1 \rho_2 \xi_2^{(3)}\end{aligned}\quad (2.103)$$

Dabei sind die Eckknoten des Dreiecks nach Bild (2.15) definiert. Die Koordinaten $\xi_j^{(i)}$ stellen dabei die lokalen Koordinaten der Eckknoten (i) dar. Der Quellpunkt liegt jeweils beim lokalen Knoten (1) mit den lokalen Koordinaten $\xi_j^{(1)}$. Bild (2.15) stellt zudem die Änderung des Integrationsgebiets dar. Die Transformation hat die *Jacobi-Determinante*

$$\begin{aligned}|\vec{J}_{NL}| &= \left| \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \rho_1} \times \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \rho_2} \right| = J_{NL}^* \rho_1 \\ &= \left| \xi_1^{(1)} (\xi_2^{(2)} - \xi_2^{(3)}) - \xi_2^{(1)} (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(3)}) + \xi_1^{(2)} \xi_2^{(3)} - \xi_1^{(3)} \xi_2^{(2)} \right| \rho_1\end{aligned}\quad (2.104)$$

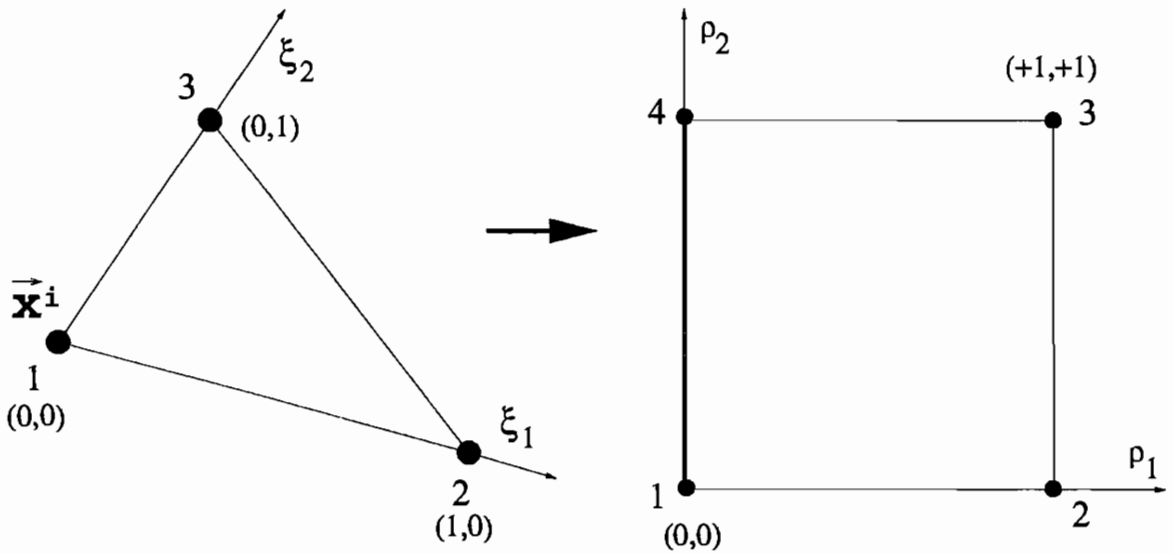


Abbildung 2.15: Transformation von lokalen zu nichtlinearen Koordinaten

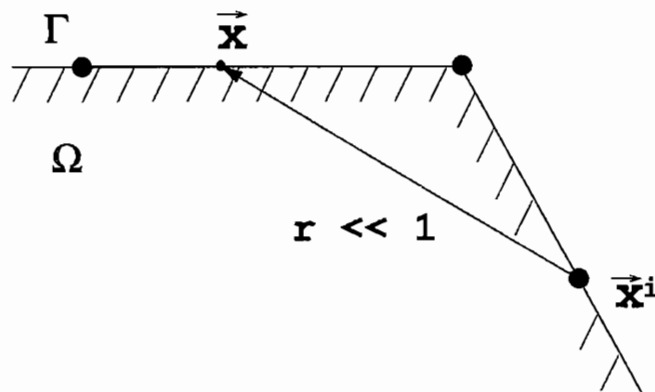
Hier ist bereits zu bemerken, daß die Jacobi-Determinante $J_{NL}^* = |\vec{J}_{NL}|$ die Integranden um eine Ordnung regularisiert, da

$$\lim_{(\rho_1, r) \rightarrow 0} \left(\frac{\rho_1}{r} \right) = O(1) \quad . \quad (2.105)$$

Die nichtlineare Transformation wird nun zur Berechnung fast-singulärer, schwach-singulärer und stark-singulärer Integrale eingesetzt.

2.8.3 Fast-singuläre Integrale

Fast-singuläre Integrale treten dann auf, wenn der Quellpunkt \vec{x}^i nahe dem Rand liegt, über den integriert werden soll ($r_{min} \leq r_{grenz}$) (siehe Bild 2.16).

Abbildung 2.16: Quellpunkt \vec{x}^i nahe dem Aufpunkt \vec{x}

Die Integrationskerne sind im mathematischen Sinn zwar regulär, sie ändern sich aber um den Quellpunkt sehr stark. Das Standard-Gauß-Verfahren ist nur mit sehr hohen Stützstellenzahlen für diese fast-singulären Integrale einsetzbar und daher nicht effektiv. Alternative Integrationsverfahren sind deshalb erforderlich.

Im hier gezeigten Verfahren wird zuerst der Punkt eines Elementes bestimmt, der den geringsten Abstand zum Quellpunkt hat. In Abhängigkeit von diesem Punkt (*Projektionspunkt*) erfolgt eine Aufteilung des Elementes in Integrationsgebiete. Diese haben den Projektionspunkt als *singulären Punkt* gemeinsam.

Die anschließend durchgeführte nichtlineare Transformation regularisiert um eine Ordnung. Zuletzt wird eine Radialtransformation durchgeführt. Hier kommt die $L^{-\frac{1}{5}}$ Transformation zum Einsatz.

Für singuläre Integrale kann das Verfahren in ähnlicher Weise angewendet werden. Dabei entfällt natürlich die Projektion des Quellpunktes.

Nichtlineare Transformation und Radialtransformation

Für die Integrale über ein Element kann abkürzend geschrieben werden

$$I = \int_{\Gamma} \frac{f}{r^{\alpha}} d\Gamma \quad (\alpha = 1, 2, 3 \text{ bei 3D-BEM}) \quad . \quad (2.106)$$

Im folgenden werden die Lösungsschritte kurz dargestellt.

a.) Transformation in das lokale Koordinatensystem

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{f}{r^{\alpha}} J d\xi_1 d\xi_2 \quad (J = \text{Jacobi-Determinante}) \quad (2.107)$$

b.) Ermittlung des Projektionspunktes

Zuerst muß der Punkt des Elementes ermittelt werden, der zum Quellpunkt den geringsten Abstand hat. Für gekrümmte Elemente wird diese Aufgabe numerisch mit dem Newton-Verfahren gelöst.

Für die häufig auftretenden ebenen Elemente wird der Durchstoßpunkt einer Geraden, die in Richtung der Flächennormalen des Elementes zeigt, mit der Elementebene bestimmt. Je nach Lage des Projektionspunktes zum Element ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

Hier soll der Projektionspunkt \vec{x}^{i*} im Element liegen (Bild 2.17).

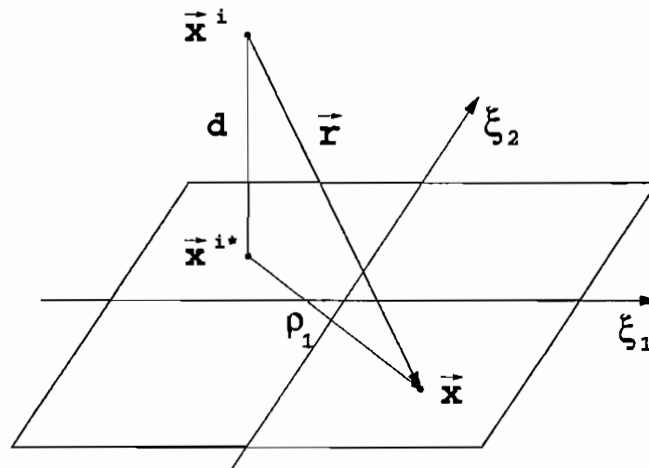


Abbildung 2.17: Projektion des Quellpunktes auf das Element

c.) *Aufteilung des Integrationsgebietes (Abb. 2.14) und nichtlineare Transformation*

Die nichtlineare Transformation fordert eine Aufteilung des Integrationsgebietes in dreieckige Teilintervalle. Die Integrale über die Teilintervalle müssen berechnet und addiert werden. Diese ergeben das Integral über das Element. Die nichtlineare Transformation ist für jedes Teildreieck durchzuführen.

Für das Integral folgt

$$I_j = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f}{r^\alpha} J J_{NL}^* \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 \quad (2.108)$$

d.) *Radialtransformation*

R wird als neue Variable eingeführt

$$\rho_1 d\rho_1 = r'^\alpha dR = \sqrt{\rho_1^2 + d^2}^\alpha dR \quad (2.109)$$

Damit folgt für das innere Integral aus I_j

$$I(\rho_2) = \int_0^1 \frac{f}{r^\alpha} J \rho_1 d\rho_1 = \int_{R(0)}^{R(1)} \frac{f}{r^\alpha} J r'^\alpha dR \quad \text{mit: } R = \int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 + d^2}^\alpha} \quad (2.110)$$

Das Integral wird durch r'^α regularisiert. Die Integration kann mit dem Standard-Gauß-Verfahren durchgeführt werden. R wird analytisch für verschiedene α bestimmt. Da die Integrationskerne unterschiedliche Ordnungen α aufweisen, ist es zur effektiven Berechnung sinnvoll, für alle Kerne eine einheitliche Radialtransformation zu verwenden. In der Praxis hat sich die $L^{-\frac{1}{5}}$ Transformation bewährt [109]. Dabei gilt

$$R = -(\rho_1 + d)^{-1/5} \quad (2.111)$$

$$r'^\alpha = [(-R)^{-5} - d] \cdot 5 \cdot (-R)^{-6}$$

Andere Radialtransformationen sind in [107], [106] [108] dargestellt. Bei sehr kleinen Abständen ist in radialer Richtung zusätzlich eine Aufteilung des Integrationsgebietes möglich.

Numerische Beispiele

1. Würfel unter Normalspannung (Bild 2.18)

Ein Würfel wird bis auf zwei gegenüberliegende Seiten jeweils in Richtung der Flächennormalen eingespannt. An den freien Seiten wird eine entgegengesetzte, jedoch vom Betrag gleich große Verschiebung u_x in Richtung der Flächennormalen vorgegeben. Dadurch entsteht überall im Würfel die gleiche Längsspannung σ_{xx} .

Bild (2.18) stellt die auf die analytische Lösung σ_a (Stabtheorie) normierten Längsspannungen $\sigma_n = \sigma_{xx} / \sigma_a$ (REM, 6 Elemente, Modell ähnlich Bild 3.4) in unmittelbarer Nähe einer der verschobenen Endflächen ($x \ll 1$) dar.

Der Wert für den Punkt auf dem Rand ($x = 0$) wird mit Hilfe der hypersingulären Spannungsidentität berechnet.

Dies ist erforderlich, da die Integranden zur Spannungsberechnung beim Übergang auf den Rand hypersingulär ($O\left(\frac{1}{r^3}\right)$) werden. Die Behandlung solcher hypersingulären Integrale wird in ([93], [96], [114]) ausführlich beschrieben und in [155] angewendet.

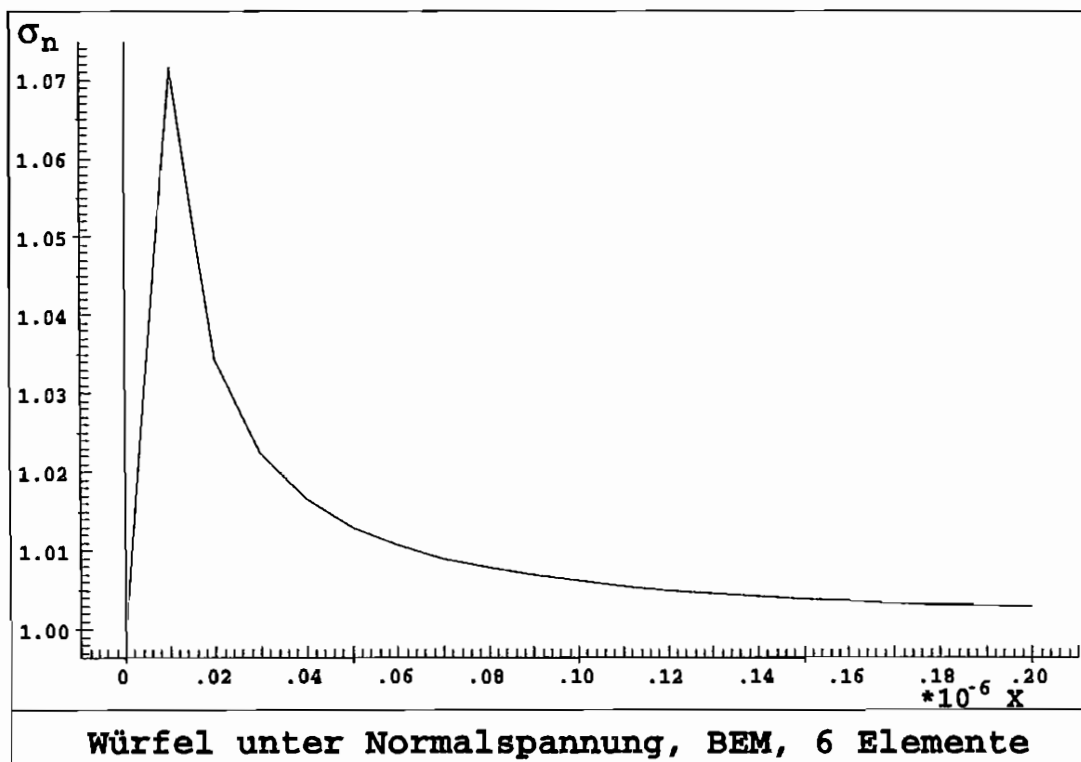


Abbildung 2.18: Rechenbeispiel Würfel: Spannungen in Randnähe

2. Integration über ein Testrechteck

Untersucht wird die Integration fast-singulärer Integrale über ein Testrechteck. Der Quellpunkt liegt im Koordinatenursprung. Der nächste Punkt des Elementes zum Quellpunkt ist ausschlaggebend für die Elementaufteilung in Dreiecksgebiete und ist der Schnittpunkt der linken Elementkante mit der Abszisse (siehe Bild 2.19).

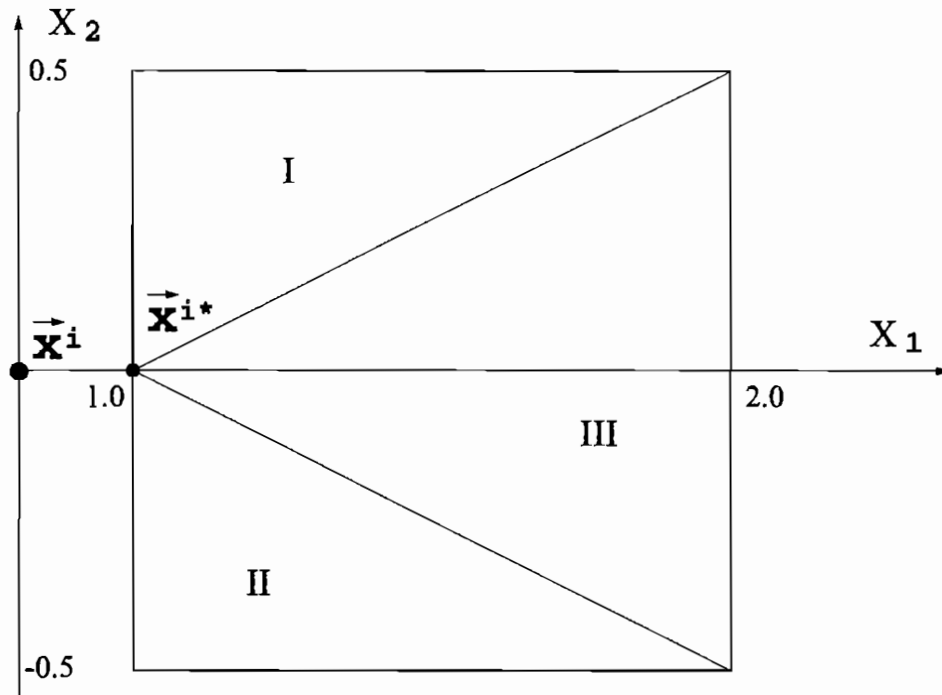


Abbildung 2.19: Elementaufteilung bei fast-singulären Integralen

Integriert werden die Funktionen

$$I_1 = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$$

$$I_2 = \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} d\Gamma \quad .$$
(2.112)

Die Ergebnisse werden für unterschiedliche Stützstellenzahlen angegeben (Tabelle 2.5). Als Vergleichsdaten werden die analytischen Ergebnisse aufgeführt. Zudem werden die Ergebnisse angegeben, die sich ergeben, wenn die Integrale als regulär betrachtet und mit der *non-product-Formel* nach *Hammer* unter Verwendung von 13 Stützstellen berechnet werden.

Die gleiche Untersuchung wird mit einer rechteckigen Fläche durchgeführt, die sich von der Fläche in Bild (2.19) nur dadurch unterscheidet, daß das Element bei $x_1 = 0.5$ die linke und bei $x_1 = 2.5$ die rechte Kante hat. Die Ergebnisse sind in Tabelle (2.6) dargestellt.

n	I_1	I_2
2	.67945399718D+00	.48030530297D+00
3	.67854313093D+00	.47794630770D+00
4	.67851976652D+00	.47784471663D+00
5	.67851927634D+00	.47784131374D+00
6	.67851926822D+00	.47784121701D+00
7	.67851926815D+00	.47784121467D+00
8	.67851926815D+00	.47784121463D+00
9	.67851926815D+00	.47784121462D+00
10	.67851926815D+00	.47784121462D+00
20	.67851926815D+00	.47784121462D+00
Exakt	.67851926815D+00	.47784121462D+00
Dreiecke 13	.67851933621D+00	.47784081315D+00

Tabelle 2.5: Integration über eine quadratische Fläche

Die Ergebnisse der Tabellen (2.5) und (2.6) zeigen, daß bei der Berechnung mit nichtlinearer Transformation Resultate erzielt werden können, die gleich den analytischen Ergebnissen sind.

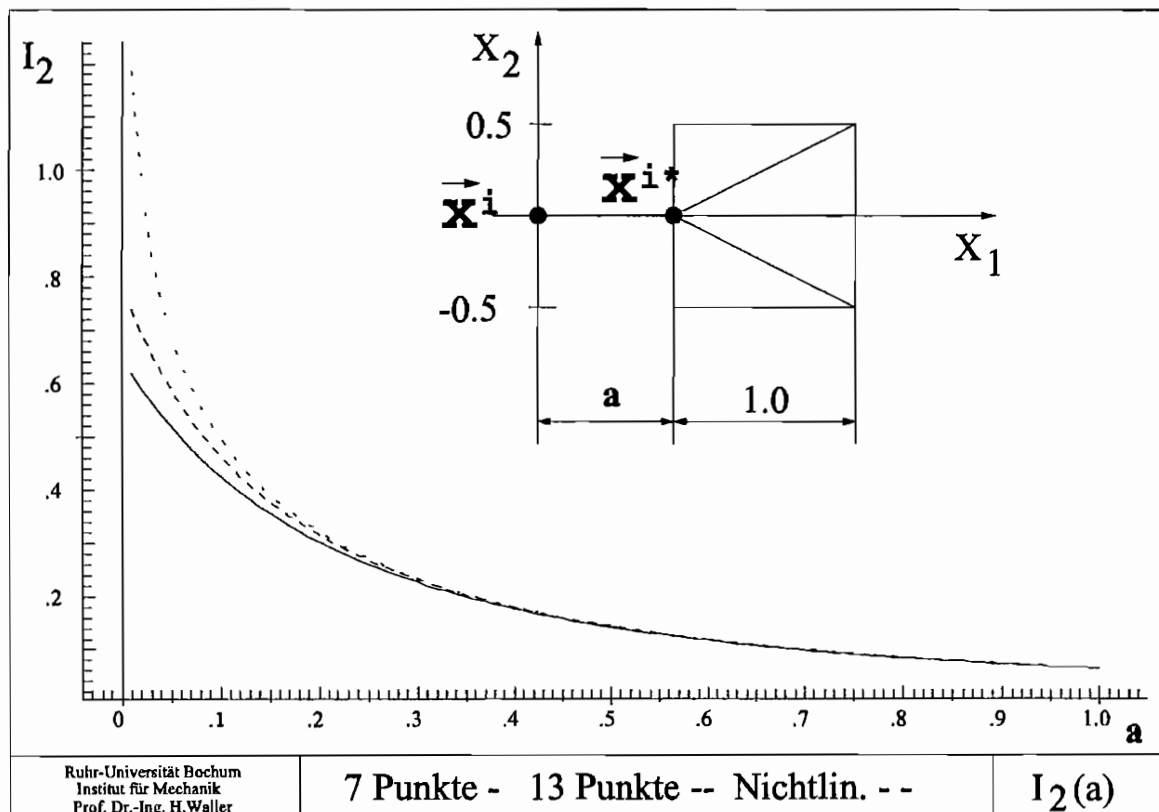
Die Genauigkeit ist dabei vom kleinsten Abstand des Quellpunktes zum Element abhängig. Je kleiner der Abstand, desto höher muß die Stützstellenzahl sein. Die Integration mit der *non-product-Formel* liefert bereits bei den hier relativ groß gewählten Abständen zwischen Quellpunkt und Element keine befriedigenden Ergebnisse mehr.

In Bild (2.20) werden die Ergebnisse der Berechnung mit der nichtlinearen Transformation (10×10 Stützstellen) und den *non-product-Formeln* (7 und 13 Stützstellen) für den variablen Abstand a verglichen.

Es zeigt sich, daß für kleine Abstände Quellpunkt/Element auf jeden Fall die Regularisierung einzusetzen ist, da sonst die Fehler der Integration nicht mehr abschätzbar sind.

n	I_1	I_2
2	.15564810690D+01	.14595658184D+01
3	.15454024932D+01	.14426641286D+01
4	.15434823643D+01	.14356977378D+01
5	.15431887737D+01	.14340562504D+01
6	.15431479701D+01	.14337468885D+01
7	.15431425419D+01	.14336940757D+01
8	.15431418282D+01	.14336854918D+01
9	.15431417336D+01	.14336841289D+01
10	.15431417210D+01	.14336839153D+01
20	.15431417190D+01	.14336838763D+01
Exakt	.15431417190D+01	.14336838763D+01
Dreiecke 13	.15428961753D+01	.14314157858D+01

Tabelle 2.6: Integration über eine Rechteckfläche



Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. H. Waller

7 Punkte - 13 Punkte -- Nichtlin. - -

$I_2(a)$

Abbildung 2.20: Unterschiedliche Verfahren für fast-singuläre Integrale im Vergleich

2.8.4 Schwach-singuläre Integrale

Die Lösung schwach-singulärer Integrale ($O\left(\frac{1}{r}\right)$) stellt keine Probleme dar, da mit Hilfe der Regularisierung die Singularität aufgehoben werden kann [262], [6], [98], [161], [106]. Es ist prinzipiell das gleiche Vorgehen wie bei fast-singulären Integralen anzuwenden. Je nach Lage des singulären Punktes (Quellpunkt) \vec{x}^i , ist eine Elementaufteilung im lokalen Koordinatensystem in Integrationsabschnitte erforderlich. Bei der hier eingesetzten nichtlinearen Transformation ergibt sich dann für alle Elementtypen eine gleiche Behandlung der einzelnen Integrationsabschnitte. Je nach Lage des Quellpunktes (die Lage ist von den verwendeten lokalen Ansätzen für die Zustandsgrößen abhängig), ergeben sich für dreieckige und viereckige Elemente die in Bild (2.21) dargestellten Aufteilungen. Der schwarze Punkt gibt jeweils die Lage des singulären Punktes an.

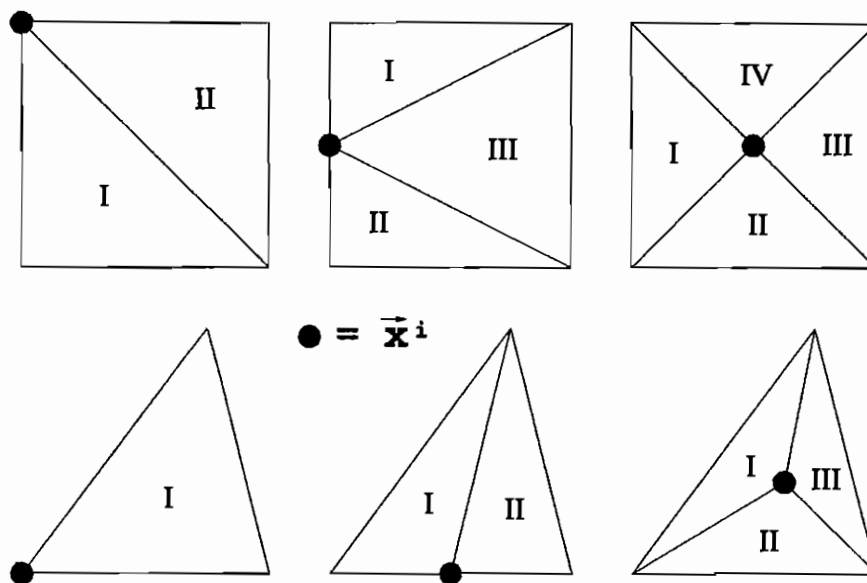


Abbildung 2.21: Elementaufteilung als Funktion des Quellpunktes

Beispiel quadratisches Gebiet

Untersucht wird das schwach-singuläre Integral über einer quadratischen Grundfläche der Größe 8×8 (Einheiten). Der Quellpunkt liegt im Elementinnern. Es erfolgt eine Aufteilung in 4 Integrationsgebiete über die mit jeweils 7×7 Stützstellen integriert wird (Bild 2.22). Die Resultate sind in Tabelle (2.7) angegeben. Dort sind auch das analytische und das Ergebnis einer Rechnung, bei der die Integrale als regulär (rein formal, 20×20 Stützstellen) betrachtet werden, angegeben.

Probleme treten bei schwach-singulären Integralen dann auf, wenn die Elemente sehr große Längen-Breitenverhältnisse aufweisen (Bild 2.23). Solche relativ langen Elemente treten z.B. beim Einsatz *adaptiver Netzverfeinerungsverfahren* auf. Dann empfiehlt es sich, das Element vor der Integration in zwei Abschnitte aufzuteilen. Dabei entsteht ein (möglichst) quadratisches Gebiet, welches den Quellpunkt enthält, und ein Restgebiet auf das die reguläre Integration angewendet werden kann.

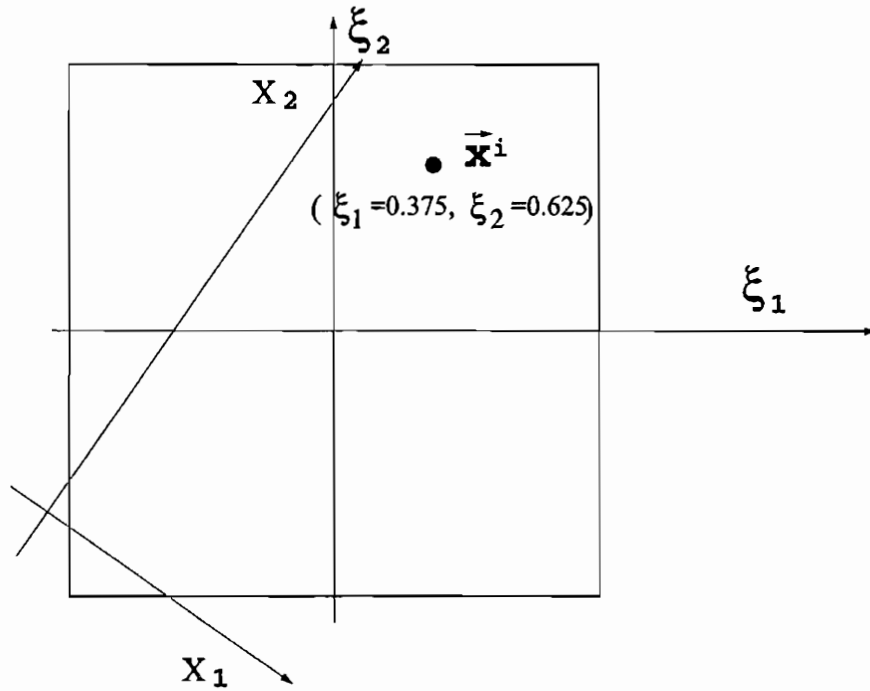


Abbildung 2.22: Quadratisches Gebiet der Kantenlänge 8x8

$1/r$	I
nichtlinear	25.0145659
analytisch	25.0145659
regulär	29.0474390

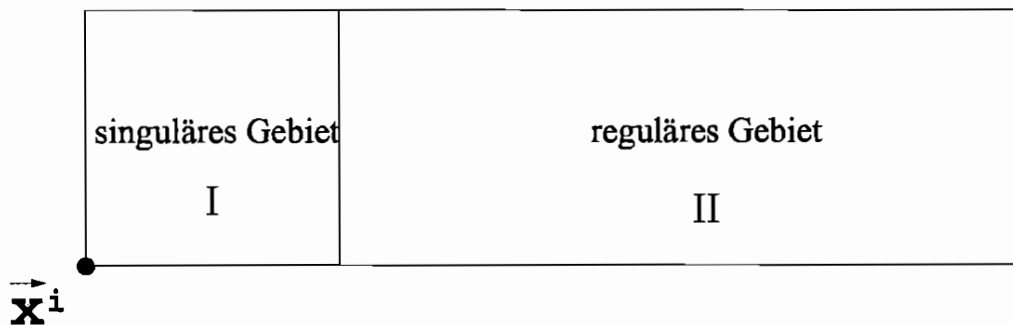
Tabelle 2.7: Integration der Funktion $1/r$ über eine quadratische Fläche

Abbildung 2.23: Aufteilung des Integrationsgebietes in zwei Teilgebiete

2.8.5 Stark-singuläre Integrale

Die Integrale bezüglich der Fundamentalrandspannung p_{ij}^* (Dynamik) bzw. p^* (skalare Differentialgleichung) besitzen im Dreidimensionalen die Ordnung $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Für den Fall, daß der Quellpunkt \vec{x}^i zum Element gehört, über das integriert werden soll, werden die Integrale stark-singulär und im allgemeinen unbegrenzt. Die Fundamentalrandspannung p_{ij}^* zeigt nun aber gewisse Symmetrieeigenschaften in der Umgebung des Quellpunktes. Die Integrale, die neben dem integralfreien Glied auftreten (siehe *Grundlagen*), werden daher endlich und als *Cauchy-Integrale* oder *Cauchy-Hauptwerte* bezeichnet. Die Endlichkeit der Integrale läßt sich an einem eindimensionalen Beispiel darstellen.

Dazu wird ein uneigentliches Integral, das in einem Intervall $a \leq t \leq b$ definiert und beim Punkt x , $a < x < b$ unbeschränkt ist, betrachtet [4]. Der singuläre Teil des Integranden wird durch eine Funktion $\frac{1}{t-x}$ beschrieben, der reguläre Teil $f(t)$ ist mindestens C^0 -stetig. Für ein solches Integral existiert bei symmetrischer Umgebung ε des Quellpunktes x der Cauchy-Hauptwert

$$\oint_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{t-x} dt \right] \quad (2.113)$$

Ebenfalls kann dieses Integral durch eine Summe von zwei Integralen, die *nur gemeinsam* existieren, ausgedrückt werden

$$\oint_a^x \frac{f(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x-\varepsilon}^x \frac{f(t)}{t-x} dt \right] \quad (2.114)$$

$$\oint_x^b \frac{f(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_x^{x+\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt \right] \quad .$$

Die letzten Integrale der rechten Seiten der Gleichungen (2.114) heben sich für ein symmetrisches Ausschlußgebiet ε nur dann gegenseitig auf, wenn für die Integranden I gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(x + \varepsilon) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(x - \varepsilon) \quad . \quad (2.115)$$

Diese Bedingung ist für die hier zu untersuchenden Integrale gegeben. Die verbleibenden Integrale der Gleichung (2.114) sind für den Fall, daß $f(t)$ C^1 -stetig ist, identisch mit einseitigen *Finite Part Integralen* [4]. Diese sind begrenzt, müssen aber für die numerische Lösung aufbereitet werden. Dazu sind unterschiedliche Verfahren entwickelt worden [153].

Eine wichtige Methode ist die *Singularität-Subtraktion* ([94], [99], [4]). Dieses Verfahren wird hier eingesetzt und nun beschrieben.

Singularität-Subtraktion

Prinzipiell funktioniert dieses Verfahren so, daß der reguläre Teil des Integranden in eine Taylor-Reihe mit dem Quellpunkt als Entwicklungspunkt entwickelt wird. Werden nun eine endliche Zahl Reihenglieder von der regulären Funktion abgezogen und auf der anderen Seite wieder hinzuaddiert, ändert sich das Integral nicht. Wird z.B. nur das erste Glied $f(x)$ einer Taylor-entwicklung berücksichtigt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_a^x \frac{f(t)}{t-x} dt &= \int_a^x \frac{f(t) - f(x)}{t-x} dt + f(x) \oint_a^x \frac{1}{t-x} dt \\ \oint_x^b \frac{f(t)}{t-x} dt &= \int_x^b \frac{f(t) - f(x)}{t-x} dt + f(x) \oint_x^b \frac{1}{t-x} dt \end{aligned} \quad (2.116)$$

D.h. die Integrale werden in reguläre Integrale (erste Integrale auf der rechten Seite von Gleichung 2.116) und in Restintegrale aufgespalten. Die regulären Integrale können mit Hilfe des Standard-Gauß-Verfahrens gelöst werden. Die Restintegrale sind, wie gezeigt, begrenzt und können aufgrund ihres einfachen Aufbaus analytisch gelöst werden

$$\begin{aligned} \oint_a^x \frac{1}{t-x} dt &= -\ln|a-x| \\ \oint_x^b \frac{1}{t-x} dt &= \ln|b-x| \end{aligned} \quad (2.117)$$

Mit Hilfe dieses Verfahrens werden nun die stark-singulären Integrale des 3D-Gebietes numerisch gelöst. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich die unbegrenzten Terme in der Umgebung des Quellpunktes gegenseitig aufheben, die Integrale daher begrenzt bleiben und als Cauchy-Hauptwerte zu behandeln sind. Das dies für die zweidimensionale Oberfläche erfüllt ist, wird vorab gezeigt.

Die stark-singulären Integrale der 3D-Randelementemethode werden in ihrer Singularität von Termen der Form

$$I = \frac{r_i}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{x_i - x_i^i}{r} \quad (2.118)$$

geprägt. Für die zweidimensionale Oberfläche gilt (siehe Bild 2.24)

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}^i}{r} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

Damit wird der Integrand bezüglich seines Vorzeichens von den Funktionen $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$

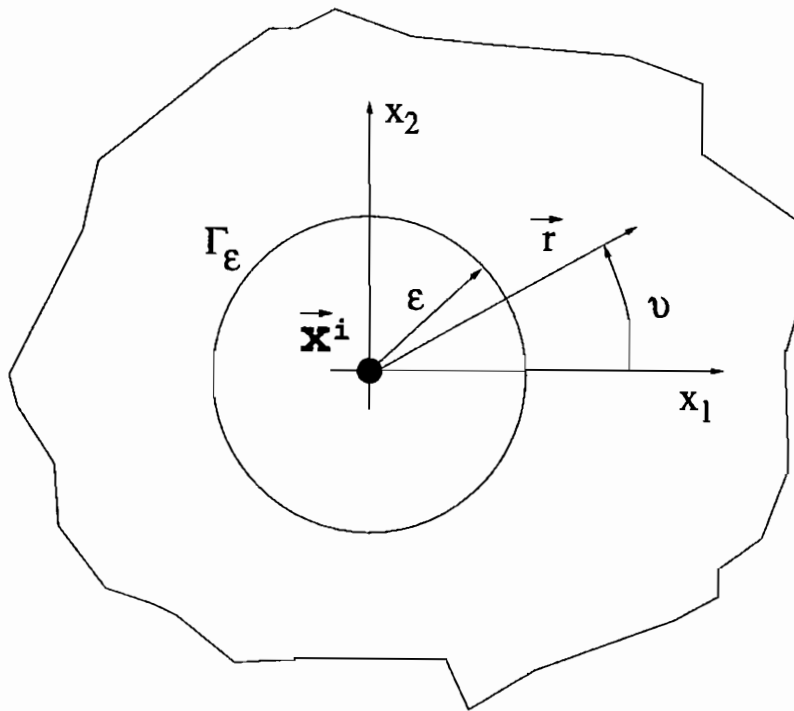


Abbildung 2.24: Ausschlußgebiet in der Umgebung des Quellpunkts

bestimmt. Bei einem Winkelsprung von π tritt ein Vorzeichenwechsel auf, d.h. es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(r = \epsilon, \vartheta) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(r = \epsilon, \vartheta + \pi) \quad . \quad (2.120)$$

Damit ist gewährleistet, daß sich die unbegrenzten Terme gegenseitig aufheben, d.h.

$$\oint_{\Gamma} \dots d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} \dots d\Gamma \quad . \quad (2.121)$$

Die Aufgabe besteht also darin, die Cauchy-Hauptwerte für Punkte des Randes Γ eines Gebietes Ω zu bestimmen.

Die Darstellung bezieht sich dabei auf die 3D-Dynamik. Da sich die Fundamentalrandspannung im Frequenzbereich als Summe eines stark-singulären statischen Anteils und eines regulären Restterms darstellen läßt, brauchen sich die Betrachtungen nur auf den statischen Anteil zu beziehen. Die Integrale des Restterms können mit Hilfe des Standard-Gauß-Verfahrens separat berechnet werden. Aus Gründen der übersichtlichen Darstellung wird hier auf die Kennzeichnung mit dem Index *stat* verzichtet.

Die Integrale haben die Form

$$\oint_{\Gamma} p_{ij}^* N^i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} p_{ij}^* N^i d\Gamma \quad . \quad (2.122)$$

Darin ist N^i die nicht-verschwindende Formfunktion am Quellpunkt.

Grenzen m Elemente an den Quellpunkt, setzt sich das Integral aus einer Summe von Teilintegralen über die einzelnen Elemente zusammen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* N^i d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m \int_{\Gamma^n - \Gamma_\varepsilon^n} p_{ij}^* N^i J^n d\xi_1 d\xi_2 \quad . \quad (2.123)$$

J^n stellt dabei die Jacobi-Determinante der einzelnen Elemente dar, die sich bei der Transformation von globalen zu lokalen Koordinaten ergibt. Die Integrale über die einzelnen Elemente werden nun getrennt voneinander integriert.

Der erste Schritt besteht darin, daß mit Hilfe einer geeigneten Transformation eine Regularisierung der Integranden um eine Ordnung vorgenommen wird. Üblich ist die Transformation nach Polarkoordinaten. Hier wird aber mit der nichtlinearen Transformation gearbeitet, um für alle Elementtypen eine einheitliche Behandlung zu erzielen. Diese Transformation wurde bereits vorher behandelt, eine Regularisierung um eine Ordnung findet mit Hilfe der Jacobi-Determinante statt.

Damit folgt für das Integral über ein Element

$$\int_{\Gamma^n - \Gamma_\varepsilon^n} p_{ij}^* N^i J^n d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\rho_2=0}^1 \int_{\rho_1=\alpha}^1 F_{ij}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \quad (2.124)$$

$$\text{mit:} \quad F_{ij} = p_{ij}^* N^i J^n J_{NL} \rho_1 \quad .$$

Auf das rechte Integral der Gleichung (2.124) wird die Subtraktions-Methode angewendet. Dazu ist der Integrand in eine *Laurent-Reihe* mit dem Quellpunkt als Entwicklungspunkt zu entwickeln. Die Laurent-Reihe ist deshalb gegenüber der Taylor-Reihe vorzuziehen, weil eine Aufspaltung des Integranden in einen singulären und einen regulären Teil nicht möglich ist. Die Reihenentwicklung geschieht in der Form, daß die einzelnen Glieder des Integranden in Reihen entwickelt werden

$$\begin{aligned} r_i = x_i - x_i^i &\approx \left[\frac{\partial x_i}{\partial \rho_1} \right]_{\rho_1=0} \rho_1 = A_i \rho_1 \\ &= \left(\left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_1} \right]_{\rho_1=0} + \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho_1} \right]_{\rho_1=0} \right) \rho_1 \quad . \end{aligned} \quad (2.125)$$

Damit

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \rho_1 \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \\ r &= \rho_1 A \quad \text{mit:} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\frac{x_i - x_i^i}{r} = \frac{r_i}{r} = \frac{A_i}{A} \quad .$$

Mit den dargestellten Gliedern der Reihenentwicklung wird eine neue Funktion F_{ij}^* gebildet

$$F_{ij}^*(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_1} f_{ij}(\rho_2) \quad . \quad (2.127)$$

Darin ist f_{ij} eine reguläre Funktion. Damit besitzt F_{ij}^* die gleiche Ordnung der Singularität wie F_{ij} , d.h.

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} (F_{ij} - F_{ij}^*) = O(1) \quad . \quad (2.128)$$

Unbekannt ist noch die untere Integrationsgrenze bezüglich ρ_1 . Für die Umgebung des singulären Punktes gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= (x_i - x_i^i)(x_i - x_i^i) \approx \rho_1^2 A^2 \\ \rightarrow \quad \alpha &\approx \frac{\varepsilon}{A} = \beta \varepsilon \quad . \end{aligned} \quad (2.129)$$

Endgültige Formulierung

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 \int_{\rho_1=\alpha(\varepsilon)}^1 F_{ij}^n(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \\ I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 \int_{\rho_1=\alpha}^1 (F_{ij}^n(\rho_1, \rho_2) - F_{ij}^{n*}(\rho_1, \rho_2)) d\rho_1 d\rho_2 \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 \int_{\rho_1=\alpha}^1 \frac{f_{ij}^n(\rho_2)}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Das letzte Integral der Gleichung (2.130) wird bezüglich der Koordinate ρ_1 analytisch integriert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_2=0}^1 f_{ij}^n(\rho_2) \ln \frac{1}{\beta} d\rho_2 = \int_{\rho_2=0}^1 f_{ij}^n(\rho_2) \ln \frac{1}{\beta} d\rho_2 \quad . \quad (2.131)$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, daß die unbegrenzten Terme in der Summe über alle an den Quellpunkt angrenzenden Elemente verschwinden

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \left(\sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 f_{ij}^n(\rho_2) \ln \frac{1}{\beta} d\rho_2 \right) = 0 \quad . \quad (2.132)$$

Damit folgt die Formulierung, die der numerischen Integration zugänglich ist

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 \int_{\rho_1=0}^1 \left(F_{ij}^n(\rho_1, \rho_2) - F_{ij}^{n*}(\rho_1, \rho_2) \right) d\rho_1 d\rho_2 \\
 &+ \sum_{n=1}^m \int_{\rho_2=0}^1 f_{ij}^n(\rho_2) \ln \frac{1}{\beta} d\rho_2 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.133}$$

Die Lösung des Integrals kann nun numerisch mit dem Standard-Gauß-Verfahren durchgeführt werden. Dazu ist allerdings noch eine lineare Koordinaten-Transformation erforderlich

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (\varphi_1 + 1)
 \tag{2.134}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2} (\varphi_2 + 1)$$

$$\text{mit: } J = \frac{1}{4} \quad \text{Jacobi-Determinante} \quad .$$

Damit

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{n=1}^m \int_{\varphi_2=-1}^1 \int_{\varphi_1=-1}^1 \left(F_{ij}^n(\varphi_1, \varphi_2) - F_{ij}^{n*}(\varphi_1, \varphi_2) \right) J d\varphi_1 d\varphi_2 \\
 &+ \sum_{n=1}^m \int_{\varphi_2=-1}^1 f_{ij}^n(\varphi_2) \ln \frac{1}{\beta} J^* d\varphi_2 \quad \text{mit: } J^* = \frac{1}{2} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.135}$$

Beispiele

Anhand zweier Beispiele wird die Berechnung stark-singulärer Integrale gezeigt. Untersucht wird ein quadratisches, ebenes Gebiet, das ein Oberflächenelement einer 3D-Oberfläche darstellen kann. Für dieses Gebiet existiert eine analytische Lösung [244].

Integration über eine quadratische Fläche

Über einer quadratischen Fläche (Bild 2.25) wird das Integral

$$I = \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}}{r^2} d\Gamma
 \tag{2.136}$$

berechnet. Der Quellpunkt \vec{x}^i befindet sich auf dem Element, das Integral ist folglich stark-singulär. Die Integration erfolgt in der Weise, daß das Integrationsgebiet in 4 Dreiecksflächen aufgeteilt wird (Bild 2.26). Die Integrale über die Dreiecksflächen werden getrennt voneinander berechnet und ergeben als Summe das Integral über die quadratischen Fläche. Tabelle (2.8)

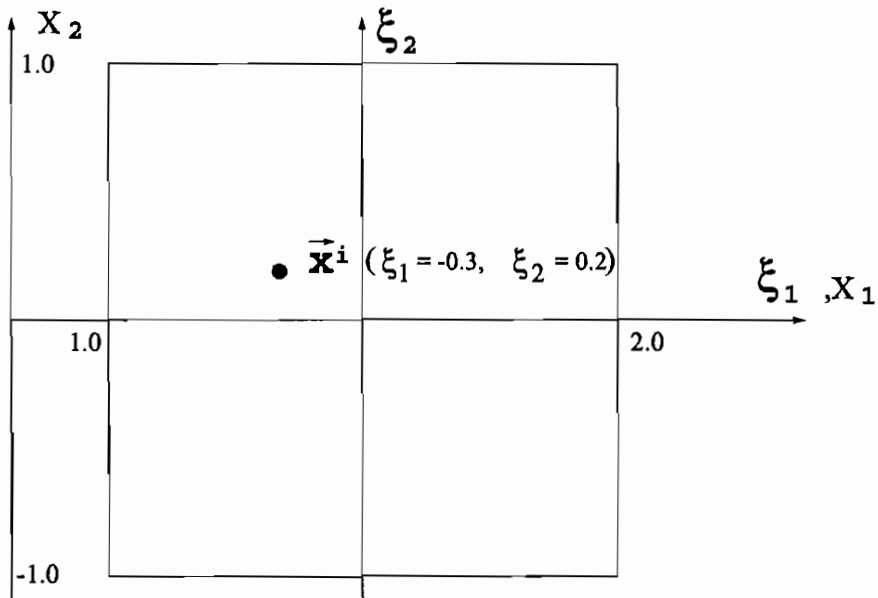


Abbildung 2.25: Integration über ein quadratisches Element

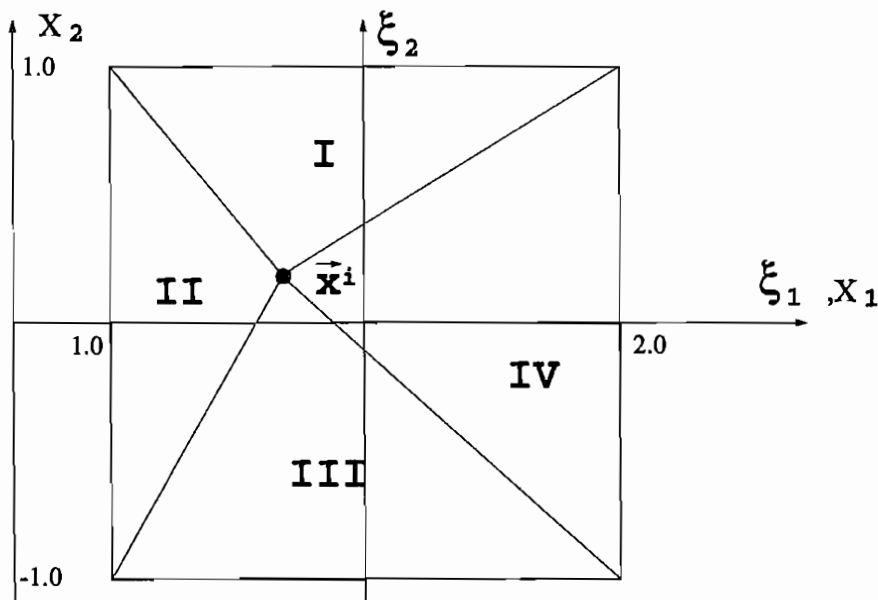


Abbildung 2.26: Aufteilung des Integrationsgebietes in 4 Dreiecksflächen

stellt die Ergebnisse für verschiedene Stützstellenzahlen der Gaußintegration dar. Die Doppelintegrale ergeben sich korrekt jeweils zu Null, die dargestellten Werte sind also identisch mit den Einfachintegralen und werden mit *nichtlinear* bezeichnet. Zum (rein theoretischen) Vergleich werden die Ergebnisse angegeben, die sich bei Betrachtung des Integrals als reguläres Integral ergeben (was natürlich fehlerhaft ist!). Das analytische Ergebnis wird nach [244] berechnet. Es

zeigt sich, daß bereits mit 7 Stützstellen ein ausreichend gutes Ergebnis erzielt wird. Die reguläre Integration liefert selbst bei 20 Stützstellen unbrauchbare Ergebnisse. Die Ergebnisse aus

n x n	nichtlinear	regulär
4x4	.87894960040D+00	-.46487196990D+01
5x5	.87901165872D+00	.55899486288D+00
6x6	.87901728630D+00	.35351275436D+02
7x7	.87901783049D+00	-.47515612752D+00
8x8	.87901788474D+00	.82763592274D+01
9x9	.87901789028D+00	-.27216690777D+00
10x10	.87901789085D+00	.36435480285D+00
20x20	.87901789092D+00	.11343452329D+01
exakt	.87901789092D+00	.87901789092D+00

Tabelle 2.8: Integration über eine quadratische Fläche

Tabelle (2.8) können direkt mit denen in [95] verglichen werden. In [95] ist das gleiche Beispiel aufgeführt, wird aber mit anderen Transformationen und anderer Aufteilung (4 Rechtecke) des Integrationsgebietes berechnet. Es ist zu beachten, daß in [95] eine Aufteilung in 4 Rechtecke erfolgt, die jedoch zur Integration wieder in jeweils 2 Dreiecke zerlegt werden. Über diese wird dann mit Hilfe der Radialtransformation integriert. D.h. es werden bei gleicher Stützstellenzahl pro Dreieck doppelt so viele Gesamtstützstellen gewählt als bei der hier dargestellten Lösung. Dies ist bei einem direkten Vergleich der Ergebnisse zu beachten.

Integration über eine quadratische Fläche, mehrere Elemente

Die Integration erfolgt wiederum über das quadratische Gebiet, das in Bild (2.25) dargestellt ist. Nun wird das Integrationsgebiet aber in 4 viereckige Elemente mit quadratischen Geometriensätzen eingeteilt. In Bild (2.27) ist die Aufteilung dargestellt. Die Koordinatenangaben beziehen sich auf das lokale Koordinatensystem. Diese Aufteilung bewirkt, daß die Doppelintegrale nicht verschwinden. Die Gesamtergebnisse sind natürlich identisch mit denen des letzten Beispiels und werden für unterschiedliche Stützstellenzahlen nach Einfach- und Doppelintegralen getrennt und als Summe aller dieser Integrale in Tabelle (2.9) dargestellt.

Das gleiche Integrationsgebiet wird nochmals, jedoch für eine andere Lage des Quellpunktes betrachtet (Bild 2.28). Die Ergebnisse sind in Tabelle (2.10) dargestellt. Die Ergebnisse in den Tabellen (2.9) und (2.10) zeigen, daß bereits mit Integrationsordnungen 7×7 sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Die Gesamtergebnisse können direkt mit den Ergebnissen in [95] verglichen werden. Die Teilergebnisse sind unterschiedlich, da die Elementaufteilung wegen fehlender Angaben nur ungefähr gleich gewählt werden konnte. In [95] wird mit der Radialtransformation als Regularisierung gearbeitet, während hier die nichtlineare Transformation eingesetzt wird.

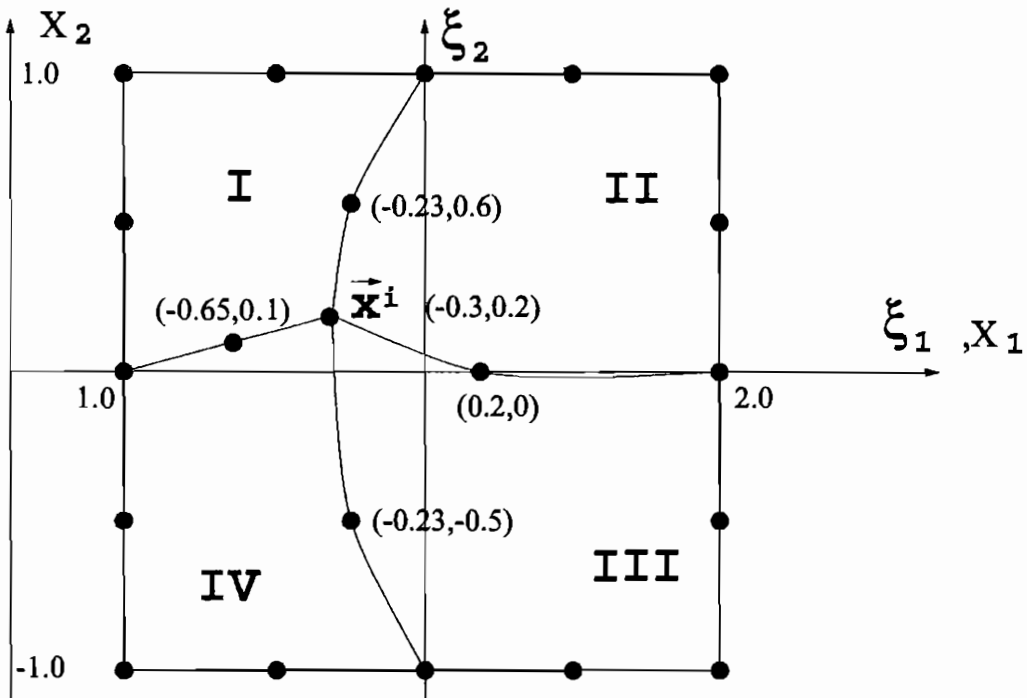


Abbildung 2.27: 1. Aufteilung des Integrationsgebietes in 4 Teilflächen

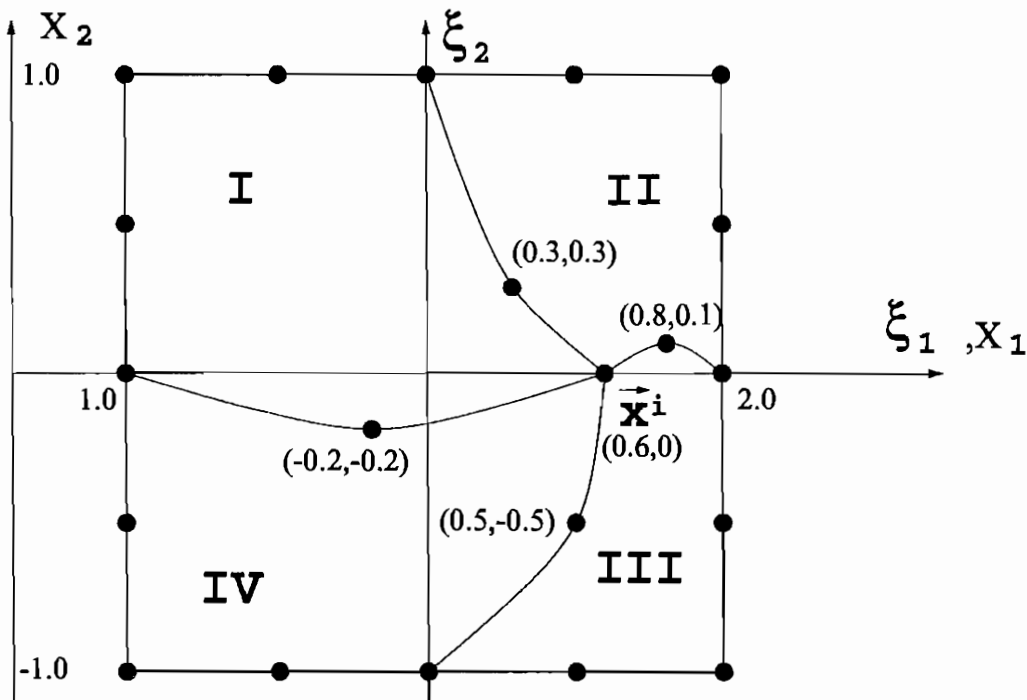


Abbildung 2.28: 2. Aufteilung des Integrationsgebietes in 4 Teilflächen

n = 4		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	.21963246329D-02	.47013718701D+00
	einfach	.31864830280D+00	-.18536906014D+00
Element II	doppel	.33452037668D+00	.32717879232D+00
	einfach	-.64472000261D+00	-.40537727660D+00
Element III	doppel	.73036153763D+00	-.12943567717D+00
	einfach	.95556790282D-01	-.33944570729D+00
Element IV	doppel	.53149189742D-01	-.40271180165D-01
	einfach	-.13689403087D-01	-.25410877016D+00
GESAMT		.87602311607D+00	-.55669169221D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 5		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	.22210949057D-02	.47019244307D+00
	einfach	.31859529534D+00	-.18538265893D+00
Element II	doppel	.33791973591D+00	.32483074461D+00
	einfach	-.64420374957D+00	-.40641795690D+00
Element III	doppel	.73045266651D+00	-.12954966823D+00
	einfach	.95592724420D-01	-.33949409201D+00
Element IV	doppel	.52714106888D-01	-.39624011081D-01
	einfach	-.14040031215D-01	-.25379852877D+00
GESAMT		.87925184319D+00	-.55924372825D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 6		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	.22165763806D-02	.47019370078D+00
	einfach	.31860031334D+00	-.18538419543D+00
Element II	doppel	.33753795115D+00	.32510719207D+00
	einfach	-.64430652683D+00	-.40628503562D+00
Element III	doppel	.73046479880D+00	-.12954723717D+00
	einfach	.95597640764D-01	-.33949398564D+00
Element IV	doppel	.52805523726D-01	-.39551092032D-01
	einfach	-.13992937879D-01	-.25374537676D+00
GESAMT		.87892333945D+00	-.55870602979D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 7		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	.22169513560D-02	.47019308364D+00
	einfach	.31859999784D+00	-.18538390548D+00
Element II	doppel	.33760719345D+00	.32508226058D+00
	einfach	-.64428905430D+00	-.40629978808D+00
Element III	doppel	.73046502338D+00	-.12954630923D+00
	einfach	.95597760904D-01	-.33949362833D+00
Element IV	doppel	.52816642314D-01	-.39560725503D-01
	einfach	-.13985255742D-01	-.25374939049D+00
GESAMT		.87902925920D+00	-.55875840289D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00

n = 8		r_1 / r^2	r_2 / r^2
Element I	doppel	.22169415561D-02	.47019316297D+00
	einfach	.31860000885D+00	-.18538393433D+00
Element II	doppel	.33759915850D+00	.32508357794D+00
	einfach	-.64429175834D+00	-.40629841198D+00
Element III	doppel	.73046496017D+00	-.12954625487D+00
	einfach	.95597737032D-01	-.33949360337D+00
Element IV	doppel	.52815497767D-01	-.39562300283D-01
	einfach	-.13985749269D-01	-.25375040004D+00
GESAMT		.87901679626D+00	-.55875816395D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 9		r_1 / r^2	r_2 / r^2
Element I	doppel	.22169395149D-02	.47019315637D+00
	einfach	.31860000918D+00	-.18538393225D+00
Element II	doppel	.33760037774D+00	.32508364289D+00
	einfach	-.64429136916D+00	-.40629850385D+00
Element III	doppel	.73046495424D+00	-.12954625692D+00
	einfach	.95597734490D-01	-.33949360388D+00
Element IV	doppel	.52815278840D-01	-.39562198897D-01
	einfach	-.13985886010D-01	-.25375036919D+00
GESAMT		.87901803884D+00	-.55875806573D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 10		r_1 / r^2	r_2 / r^2
Element I	doppel	.22169398925D-02	.47019315670D+00
	einfach	.31860000909D+00	-.18538393236D+00
Element II	doppel	.33760024212D+00	.32508359786D+00
	einfach	-.64429142170D+00	-.40629850407D+00
Element III	doppel	.73046495419D+00	-.12954625741D+00
	einfach	.95597734451D-01	-.33949360407D+00
Element IV	doppel	.52815288618D-01	-.39562170886D-01
	einfach	-.13985883395D-01	-.25375035274D+00
GESAMT		.87901786326D+00	-.55875806697D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
n = 20		r_1 / r^2	r_2 / r^2
Element I	doppel	.22169398584D-02	.47019315670D+00
	einfach	.31860000910D+00	-.18538393236D+00
Element II	doppel	.33760025812D+00	.32508360550D+00
	einfach	-.64429141574D+00	-.40629850282D+00
Element III	doppel	.73046495423D+00	-.12954625743D+00
	einfach	.95597734465D-01	-.33949360408D+00
Element IV	doppel	.52815292177D-01	-.39562171861D-01
	einfach	-.13985881288D-01	-.25375035288D+00
GESAMT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00
EXAKT		.87901789092D+00	-.55875805922D+00

Tabelle 2.9: 1. Integration über eine quadratische Fläche

n = 4		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10196996967D+01	.91076856470D+00
	einfach	-.13920035247D+00	-.81650102523D-01
Element II	doppel	.12087952243D+01	.73468925516D+00
	einfach	.17609925619D+00	-.97611999887D+00
Element III	doppel	-.82105880026D+00	-.10326221527D+01
	einfach	-.92899029740D+00	-.23370111627D-01
Element IV	doppel	-.26250057952D+00	.87912047768D+00
	einfach	-.33338609342D+00	-.42824774450D+00
GESAMT		-.21199413393D+01	-.17431812690D-01
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 5		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10202353584D+01	.90964373188D+00
	einfach	-.13945884331D+00	-.82116992796D-01
Element II	doppel	.12091038040D+01	.73397347828D+00
	einfach	.17628343979D+00	-.97634219922D+00
Element III	doppel	-.81929725993D+00	-.10146857313D+01
	einfach	-.92085843550D+00	-.19027918235D-01
Element IV	doppel	-.26238240948D+00	.87949285829D+00
	einfach	-.33327759254D+00	-.42820523103D+00
GESAMT		-.21101226554D+01	.27319958947D-02
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 6		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204068300D+01	.90961116801D+00
	einfach	-.13954621836D+00	-.82128812969D-01
Element II	doppel	.12090689554D+01	.73399110260D+00
	einfach	.17626299542D+00	-.97632568729D+00
Element III	doppel	-.82192080969D+00	-.10175508951D+01
	einfach	-.92285445927D+00	-.19017553502D-01
Element IV	doppel	-.26241887517D+00	.87950747749D+00
	einfach	-.33328225473D+00	-.42819143211D+00
GESAMT		-.21150974964D+01	-.10463284912D-03
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 7		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204287388D+01	.90962547544D+00
	einfach	-.13955714361D+00	-.82121801777D-01
Element II	doppel	.12090645287D+01	.73398906625D+00
	einfach	.17626510528D+00	-.97632674567D+00
Element III	doppel	-.82113480048D+00	-.10173514889D+01
	einfach	-.92250953516D+00	-.19219404272D-01
Element IV	doppel	-.26242024285D+00	.87950360792D+00
	einfach	-.33328347771D+00	-.42819206147D+00
GESAMT		-.21140043047D+01	-.93352500020D-04
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00

n = 8		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204294016D+01	.90962865050D+00
	einfach	-.13955753615D+00	-.82120270452D-01
Element II	doppel	.12090648139D+01	.73399040751D+00
	einfach	.17626490070D+00	-.97632669496D+00
Element III	doppel	-.82128874937D+00	-.10173014291D+01
	einfach	-.92254467861D+00	-.19149636286D-01
Element IV	doppel	-.26241987858D+00	.87950345694D+00
	einfach	-.33328341591D+00	-.42819219784D+00
GESAMT		-.21141939456D+01	.32286278223D-04
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 9		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204291457D+01	.90962897884D+00
	einfach	-.13955741738D+00	-.82120114091D-01
Element II	doppel	.12090649803D+01	.73399028430D+00
	einfach	.17626491946D+00	-.97632669533D+00
Element III	doppel	-.82126898414D+00	-.10173260152D+01
	einfach	-.92254672601D+00	-.19165132286D-01
Element IV	doppel	-.26241986487D+00	.87950349364D+00
	einfach	-.33328340394D+00	-.42819219077D+00
GESAMT		-.21141756422D+01	-.73908534136D-05
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 10		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204290898D+01	.90962898257D+00
	einfach	-.13955738988D+00	-.82120112091D-01
Element II	doppel	.12090649606D+01	.73399026865D+00
	einfach	.17626491783D+00	-.97632669566D+00
Element III	doppel	-.82126946923D+00	-.10173198721D+01
	einfach	-.92254465393D+00	-.19162705505D-01
Element IV	doppel	-.26241986825D+00	.87950349506D+00
	einfach	-.33328340460D+00	-.42819218952D+00
GESAMT		-.21141739973D+01	.11714046081D-05
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00
n = 20		$r_{,1} / r^2$	$r_{,2} / r^2$
Element I	doppel	-.10204290842D+01	.90962897683D+00
	einfach	-.13955738700D+00	-.82120114814D-01
Element II	doppel	.12090649590D+01	.73399027122D+00
	einfach	.17626491795D+00	-.97632669561D+00
Element III	doppel	-.82126989726D+00	-.10173208210D+01
	einfach	-.92254515661D+00	-.19162921770D-01
Element IV	doppel	-.26241986835D+00	.87950349472D+00
	einfach	-.33328340471D+00	-.42819218960D+00
GESAMT		-.21141749212D+01	.14505063817D-12
EXAKT		-.21141749212D+01	.00000000000D+00

Tabelle 2.10: 2. Integration über eine quadratische Fläche

Kapitel 3

Eigenwertanalyse mit der Randelementemethode

In diesem Kapitel werden zuerst grundsätzliche Verfahren zur Eigenwertanalyse mit Hilfe der REM vorgestellt. Es folgt die Untersuchung der bei der Eigenwertanalyse benötigten REM-Systemmatrizen. Anschließend werden Methoden zur Bestimmung von Eigenfrequenzen mit der REM entwickelt und an Beispielen getestet.

3.1 Verfahren zur Eigenwertanalyse mit der Randelementemethode

3.1.1 Einleitung

In diesem Abschnitt werden verschiedene Verfahren zur Aufbereitung der Randelementemethode für die Eigenwertanalyse gezeigt. Diese Verfahren werden anhand der Helmholtz-Gleichung vorgestellt, da diese eine übersichtliche Darstellung ermöglicht.

Die Helmholtz-Gleichung (siehe *Grundlagen*) ist eine partielle Differentialgleichung der skalaren Zustandsgröße Schalldruck (bzw. Schalldruckänderung um einen statischen Druck). Die zugehörige Fundamentallösung ist in kompakter Form darstellbar. Die hier gezeigten Untersuchungen beziehen sich auf dreidimensionale Gebiete.

Die Anwendung der anschließend erläuterten Verfahren auf die Dynamik ergeben prinzipiell keine neuen Probleme gegenüber der Akustik. D.h. die Verfahren können direkt auf Probleme der Dynamik übertragen werden. In der Dynamik liegt die vektorielle Navier'sche-Differentialgleichung vor, die skalare Fundamentallösung der Akustik expandiert zu einer Matrix von Fundamentallösungen (siehe Kapitel 2). Die Darstellung ist wesentlich aufwendiger als bei der skalaren Formulierung, liefert aber keine neuen Erkenntnisse. Daher wird auf die Darstellung der Dynamik verzichtet und an den entsprechenden Stellen auf die Literatur verwiesen. Die Verfahren, die nun vorgestellt werden, unterscheiden sich in erster Linie durch die Art der als Gewichtungsfunktion verwendeten Fundamentallösung.

Untersucht werden direkte Verfahren, *Reihenentwicklungsverfahren*, die *DRM* (Dual Reciprocity Method), die *MRM* (Multiple Reciprocity Method) sowie das Verfahren der *partikulären Lösungen*. Bis auf die direkten Verfahren, haben sie das Ziel, frequenzunabhängige Systemmatrizen zu erzeugen und damit eine Linearisierung der Eigenwertaufgaben vorzubereiten.

(Bemerkung: Für die DRM und MRM werden in der Literatur durchweg die englischen Bezeichnungen verwendet. Diese werden auch hier übernommen. Eine Übersetzung ins Deutsche findet nicht statt.)

Problemstellung

Gegeben ist ein geschlossenes Gebiet Ω mit Berandung $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, auf dem die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (3.1)$$

gelten soll. u stellt den Schalldruck dar, k ist der Frequenzparameter. Der Rand Γ ist in Gebiete Γ_1 und Γ_2 aufgeteilt. Auf Γ_1 ist der Schalldruck, auf Γ_2 die Schallschnelle vorgegeben

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{auf} \quad \Gamma_1 \\ p &= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \bar{p} \quad \text{auf} \quad \Gamma_2 \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gesucht sind die Eigenwerte k_i für das Gebiet Ω mit den vorgegebenen Randbedingungen.

3.1.2 Verwendung der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung

Die Fundamentallösung und ihre Ableitung nach der Flächennormalen \vec{n} lautet

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{4 \pi r} \cdot e^{-i k r} \\ p^* &= \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{4 \pi r} \cdot \left[\frac{1}{r} + i k \right] \cdot e^{-i k r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wird diese Fundamentallösung verwendet, ergeben sich in der resultierenden Integraldarstellung keine Volumenintegrale aufgrund von Trägheitstermen

$$c^i u^i = \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma \quad . \quad (3.4)$$

Der Frequenzparameter k tritt in stark-nichtlinearer und transzendenten Form in u^* und p^* auf.

Die Diskretisierung der Randes führt zu der Matrixgleichung (siehe Kapitel 2)

$$\underline{G}(k) \vec{p}(k) = \underline{H}(k) \vec{u}(k) \quad . \quad (3.5)$$

Einbau der Randbedingungen und Umordnen der Gleichungen nach bekannten Randgrößen \vec{f} und unbekanntem Randgrößen \vec{x} liefert

$$\underline{B}(k) \vec{x}(k) = \underline{A}(k) \vec{f}(k) \quad . \quad (3.6)$$

Für die Eigenwertberechnung gilt :

$$\eta(k) = \det [\underline{B}(k)] = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Die Lösungsverfahren dieses Eigenwertproblems werden später in diesem Kapitel vorgestellt.

3.1.3 Reihenentwicklungen mit variablem Entwicklungspunkt

Mit Hilfe von Reihenentwicklungen der Fundamentallösungen sollen frequenzunabhängige Systemmatrizen erzeugt werden. Diese werden später bei der Eigenwertanalyse eingesetzt.

Die Fundamentallösung (3.3) wird in eine Taylor-Reihe mit variablem Entwicklungspunkt k_0 als Funktion des Frequenzparameters k entwickelt

$$\begin{aligned} u^*(k) &= u^*(k_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{\partial^n u^*(k)}{\partial k^n} \right|_{k_0} \frac{(k - k_0)^n}{n!} \\ &= u_0^* + u_1^* \cdot k + \dots + u_m^* \cdot k^m + \dots \\ p^*(k) &= \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = p^*(k_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{\partial^n p^*(k)}{\partial k^n} \right|_{k_0} \frac{(k - k_0)^n}{n!} \\ &= p_0^* + p_1^* \cdot k + \dots + p_m^* \cdot k^m + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dieser Reihenansatz wird in die Randintegralgleichung der Helmholtz-Gleichung (3.4) eingesetzt

$$\begin{aligned} c^i u^i &= \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma \\ c^i u^i &= \int_{\Gamma} (u_0^* + u_1^* \cdot k + \dots + u_m^* \cdot k^m + \dots) p \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} (p_0^* + p_1^* \cdot k + \dots + p_m^* \cdot k^m + \dots) u \, d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c^i u^i &= \int_{\Gamma} u_0^* p \, d\Gamma + \dots + k^m \int_{\Gamma} u_m^* p \, d\Gamma + \dots \\
 &- \int_{\Gamma} p_0^* u \, d\Gamma - \dots - k^m \int_{\Gamma} p_m^* u \, d\Gamma - \dots \quad . \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Die Integrale der einzelnen Reihenglieder in Gleichung (3.9) lassen sich nun getrennt berechnen. Es ergeben sich frequenzunabhängige Systemmatrizen \underline{B}_i , die mit Potenzen k^i zu multiplizieren sind. Damit läßt sich die frequenzabhängige Systemmatrix $\underline{B}(k)$ mit Hilfe von ρ frequenzunabhängigen Systemmatrizen \underline{B}_i näherungsweise ausdrücken und wird (nur an dieser Stelle) mit $\check{\underline{B}}(k)$ bezeichnet

$$\underline{B}(k) \approx \check{\underline{B}}(k) = \underline{B}_0 + \underline{B}_1 k + \underline{B}_2 k^2 + \dots + \underline{B}_\rho k^\rho \quad . \quad (3.10)$$

Die Matrix $\check{\underline{B}}(k)$ ist nur in einem bestimmten Frequenzbereich Δk gültig, der von der Anzahl der berücksichtigten Reihenglieder und der Lage des Entwicklungspunktes k_0 abhängig ist (siehe Bild 3.1). Die Breite des Frequenzbereichs Δk ist für eine vorgegebene Anzahl Reihenglieder vom maximal im Modell auftretenden Abstand Quellpunkt/Aufpunkt $r = r_{max}$ abhängig. Für $\rho = 5$ und $r_{max} = 1m$ ergibt sich beispielsweise $\Delta k \approx \pi$.

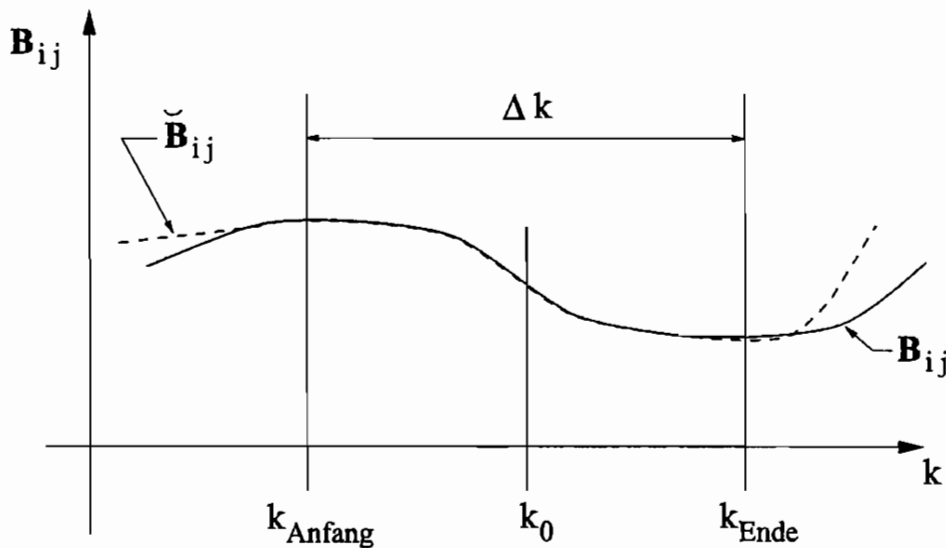


Abbildung 3.1: Gültigkeitsbereich Δk der Matrix $\check{\underline{B}}(k)$

Die frequenzunabhängigen Systemmatrizen \underline{B}_i werden für jeden zu betrachtenden Frequenzabschnitt Δk nur einmal aufgestellt. In diesem Frequenzabschnitt werden dann für beliebige Frequenzen k Systemmatrizen $\check{\underline{B}}(k)$ mit Hilfe der Gleichung (3.10) aufgestellt. Neben den Matrizen \underline{B}_i brauchen sonst keine anderen Systemmatrizen bestimmt zu werden.

Es ist zu bemerken, daß die frequenzunabhängigen Matrizen zwar prinzipiell getrennt berechnet werden, die praktische Durchführung aber so aussieht, daß alle Matrizen gleichzeitig aufgestellt

werden. D.h. die numerische Integration wird nur einmal, jedoch mit mehreren unterschiedlichen Integranden durchgeführt. Der Aufwand zum Erstellen von ρ Matrizen \underline{B}_i erfordert daher nur unwesentlich mehr numerischen Aufwand als das Erstellen der frequenzabhängigen Systemmatrix $\underline{B}(k)$ für einen konkreten Frequenzwert k .

Die Ableitungen der Fundamentallösung der Dynamik, die zur Reihenentwicklung erforderlich sind, werden bis zum quadratischen Glied im Anhang D angegeben. Im Anhang C ist zudem eine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $\omega = 0$ angegeben. Deren Einsatz macht Untersuchungen im tieffrequenten Frequenzbereich möglich.

In den folgenden Abschnitten werden Verfahren vorgestellt, die mit den frequenzunabhängigen Matrizen arbeiten. Die Matrizen werden sowohl bei den später beschriebenen direkten und iterativen Verfahren zur Eigenwertanalyse eingesetzt wie auch beim TS-Algorithmus und bei der Linearisierung des Eigenwertproblems mit Hilfe der Günther'schen Expansion (QR/QZ-Algorithmus).

3.1.4 Verwendung der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

(In der Dynamik wird analog die Fundamentallösung der Statik eingesetzt [187], [186], [37], [188], [189], [190], [191], [192], [195].)

Statt der im letzten Abschnitt beschriebenen Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung, wird die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung (siehe *Grundlagen*)

$$\nabla^2 u^* = -\delta(\vec{x}^i) \quad (3.11)$$

als Gewichtungsfunktion verwendet. Diese lautet für den 3D Fall

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (3.12)$$

$$p^* = \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \quad .$$

Die resultierende Integraldarstellung der Helmholtz-Gleichung mit u^* als Gewichtungsfunktion, enthält nun ein Volumenintegral

$$c^i u^i = - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma + k^2 \int_{\Omega} u^* u(x) \, d\Omega \quad . \quad (3.13)$$

Mit $u(x)$ werden hier die Verschiebungen im Innern des Gebietes Ω gekennzeichnet. Randgrößen werden wegen der übersichtlicheren Darstellung nicht mit Koordinatenangaben versehen. In Gleichung (3.13) liegt der Frequenzparameter k explizit vor, da k in u^* und p^* nicht auftaucht. Allerdings ist ein Volumenintegral auszuwerten.

Das Volumenintegral kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Diese Verfahren werden im folgenden kurz vorgestellt.

Volumenzellen-Integration

Bei dieser Methode wird neben der Diskretisierung des Randes auch das Gebiet Ω in Integrationsgebiete eingeteilt. Unter Verwendung lokaler Ansätze wird über diese Teilgebiete integriert. Der Vorteil der Randelementemethode, die Diskretisierung nur des Randes, geht dabei verloren. Die Diskretisierung des Gebietes und des Randes führt zu der Matrixgleichung

$$\underline{H} \vec{u} - \underline{G} \vec{p} = k^2 \underline{F} \vec{u}(x) \quad . \quad (3.14)$$

Darin ist $\vec{u}(x)$ der Vektor der Schalldruckwerte an den konkreten Stützstellen in Ω , die Matrix \underline{F} enthält die Integrale der Produkte von Fundamentallösung und Formfunktionen über den Volumenzellen.

Die letzte Gleichung gilt für Kollokationspunkte (Quellpunkte) auf dem Rand des Gebietes. Für Innenpunkte gilt die Gleichung mit dem Geometriekoeffizienten $c = 1$ in der Form

$$\vec{u}(x) + \underline{H}_i \vec{u} - \underline{G}_i \vec{p} = k^2 \underline{F}_i \vec{u}(x) \quad . \quad (3.15)$$

Nun werden die Randbedingungen in die Gleichungen (3.14) und (3.15) eingebaut und die Gleichungen nach bekannten und unbekanntem Größen geordnet. Der Vektor \vec{x} enthält die nichtverschwindenden Größen auf dem Rand

$$\underline{D} \vec{x} = k^2 \underline{F} \vec{u}(x) \quad (3.16)$$

$$\vec{u}(x) + \underline{D}_i \vec{x} = k^2 \underline{F}_i \vec{u}(x) \quad . \quad (3.17)$$

Der Vektor \vec{x} wird eliminiert, indem Gleichung (3.16) mit \underline{D}^{-1} multipliziert wird und das Ergebnis in Gleichung (3.17) eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} \vec{x} &= k^2 \underline{D}^{-1} \underline{F} \vec{u}(x) \\ \vec{u}(x) + \underline{D}_i \left(k^2 \underline{D}^{-1} \underline{F} \vec{u}(x) \right) &= k^2 \underline{F}_i \vec{u}(x) \\ \Rightarrow \vec{u}(x) &= k^2 \left(\underline{F}_i - \underline{D}_i \underline{D}^{-1} \underline{F} \right) \vec{u}(x) \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mit den Abkürzungen $\lambda = 1/k^2$ und $\underline{Z} = \left(\underline{F}_i - \underline{D}_i \underline{D}^{-1} \underline{F} \right)$ ergibt sich das spezielle Eigenwertproblem

$$\underline{Z} \vec{u}(x) = \lambda \vec{u}(x) \quad . \quad (3.19)$$

Die Matrix \underline{Z} ist unabhängig vom Frequenzparameter k bzw. λ . Die Eigenwerte können mit Standardverfahren (z.B. QR-Algorithmus) bestimmt werden.

Dual Reciprocity Method (DRM)

Bei der DRM wird durch Hinzunahme einer weiteren Integralgleichung das Volumenintegral

$$I = k^2 \int_{\Omega} u^* u(x) d\Omega \quad (3.20)$$

eliminiert. Die zusätzliche Integralgleichung resultiert aus der Annahme, daß $u(x)$ in Ω aus einem Potential abgeleitet werden kann. Die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \Psi(x) = u(x) \quad (3.21)$$

soll gelten. Die zu dieser Gleichung zugehörige Integraldarstellung mit der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung u^* kann z.B. mit Hilfe des Reziprozitätssatzes hergeleitet werden (daher der Name DRM des Verfahrens)

$$\begin{aligned} c^i \Psi^i(x) + \int_{\Gamma} p^* \Psi(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \Psi(x)}{\partial \vec{n}} d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} \nabla^2 \Psi(x) u^* d\Omega = - \int_{\Omega} u(x) u^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.22)$$

Für das Volumenintegral I kann geschrieben werden

$$I = k^2 \int_{\Omega} u^* u(x) d\Omega = -k^2 \left[c^i \Psi^i(x) + \int_{\Gamma} p^* \Psi(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \Psi(x)}{\partial \vec{n}} d\Gamma \right] \quad (3.23)$$

Diskretisierung des Randes und Hinzunahme der Randintegrale der Helmholtzgleichung führt mit $\Psi' = \partial \Psi / \partial \vec{n}$ zu

$$\underline{H} \vec{u} - \underline{G} \vec{p} = -k^2 \left(\underline{H} \vec{\Psi}(x) - \underline{G} \vec{\Psi}' \right) \quad (3.24)$$

Die Funktion $\Psi(x)$ ist darin noch unbekannt. Sie muß aus Gleichung (3.21) bestimmt werden. Dies ist im allgemeinen nicht direkt möglich. Daher wird für $u(x)$ ein Ansatz der Form

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{m=1}^{N+L} C_m(x) \alpha_m \quad (3.25)$$

gewählt. $C_m(x)$ sind dabei bekannte Funktionen, α_m sind unbekannte Koeffizienten. N ist die Anzahl der Stützstellen auf dem Rand, L ist eine Anzahl von Stützstellen in Ω , die optional zusätzlich berücksichtigt werden (siehe Bild 3.2)

$$\Psi(x) = \sum_{m=1}^{N+L} D_m(x) \alpha_m$$

$$\Psi' = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial \vec{n}} = \sum_{m=1}^{N+L} \frac{\partial D_m(x)}{\partial \vec{n}} \alpha_m \quad .$$
(3.26)

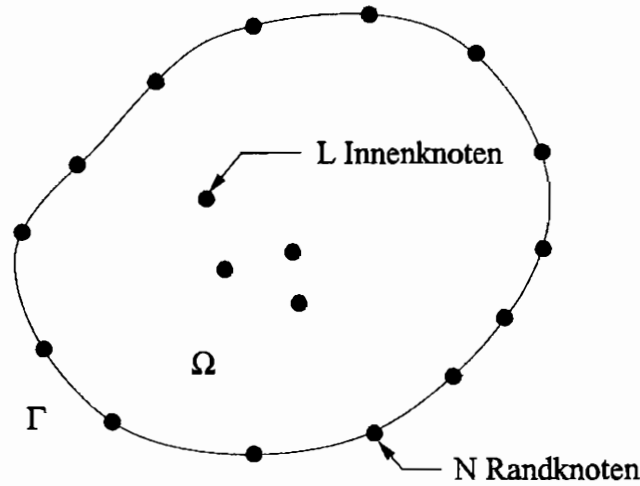


Abbildung 3.2: Rand- und Innenknoten bei der DRM

Die Gleichung (3.24) kann mit diesen Funktionen und der Abkürzung $\underline{S} = (\underline{H} \underline{D} - \underline{G} \underline{T}) \underline{C}^{-1}$ und dem Einsetzen von Stützstellenkoordinaten in ein allgemeines Eigenwertproblem umgeformt werden [123]

$$\vec{\Psi} = \underline{D} \vec{\alpha}$$

$$\vec{\Psi}' = \underline{T} \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \underline{C}^{-1} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \underline{H} \vec{u} - \underline{G} \vec{p} = -k^2 \underline{S} \vec{u} \quad .$$
(3.27)

Nach Einführung der Randbedingungen ist dieses Eigenwertproblem mit dem Frequenzparameter k lösbar

$$\underline{K} \vec{u} = k^2 \underline{M} \vec{u} \quad .$$
(3.28)

Mit $\underline{A} = \underline{K}^{-1} \underline{M}$ und $\lambda = \frac{1}{k^2}$ folgt das spezielle Eigenwertproblem

$$\underline{A} \vec{u} = \lambda \vec{u} \quad .$$
(3.29)

Nardini und Brebbia weisen darauf hin, daß wegen der nichtsymmetrischen Matrix \underline{A} einige Eigenwerte komplex sein können. Diese Eigenfrequenzen treten jedoch bei höheren Frequenzen auf, die im allgemeinen von geringerem Interesse sind. In [84] wird ebenfalls auf das Auftreten solcher Eigenfrequenzen hingewiesen, die physikalisch nicht interpretiert werden können. Da sie aber einen relativ großen Imaginärteil besitzen, ist eine Trennung von physikalisch sinnvollen Eigenwerten möglich.

In [2] wird das Verfahren angewendet, ohne die Matrix \underline{C} zu invertieren.

Probleme treten mit den frei zu wählenden Funktionen C_m auf. Nardini und Brebbia empfehlen Funktionen der Typenklassen

- Elemente des Pascal'schen Dreiecks,
- Trigonometrische Funktionen,
- Funktionen der Abstandsvariablen r ,

deren Qualität aber vorweg nicht abgeschätzt werden kann. Eine ausführliche Darstellung von Funktionen ist in [47] nachzulesen.

Als Beispiel wird $C_m = R - r_m$ gewählt [119] ($R =$ beliebige Konstante, z.B. größte Geometrieabmessung, $r_m =$ Abstand vom jeweiligen Quellpunkt zu einem Randstützstellenpunkt).

Mit dieser Wahl der Funktionen C_m folgt

$$D_m = \frac{1}{4} R r_m^2 - \frac{1}{9} R r_m^3 \quad (3.30)$$

$$T_m = \left(\frac{1}{2} R r_m - \frac{1}{3} r_m^2 \right) \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} \quad .$$

Die Auswahl von Innenpunkten stellt ein weiteres Problem der Methode dar. Die Lage dieser Innenpunkte ist entscheidend für die Qualität der Ergebnisse, und die Auswahl erfordert viel Erfahrung. Prinzipiell ist die Lösung auch ohne Innenpunkte möglich, führt aber in der Praxis zu weniger guten Resultaten [204].

Die Anwendung der DRM auf Probleme der Dynamik wurde erstmals in [187] und in weiteren Veröffentlichungen derselben Autoren ([186],[37],[188],[189],[190],[191],[192]) ausführlich beschrieben (Die Bezeichnung DRM wird dort jedoch erst ab 1986 verwendet.).

In [204] werden die Anwendungen der DRM auf verschiedenen Gebieten zusammengefaßt. Sowohl die Wahl der Funktionen C_m usw. als auch Kriterien zur Auswahl von Innenpunkten werden in diesen Veröffentlichungen angegeben bzw. diskutiert.

Weitere Anwendungen auf Probleme der Elastodynamik sind in [84] aufgeführt.

Multiple Reciprocity Method (MRM)

Bei dieser Methode wird durch wiederholten Einsatz von Reziprozitätsbeziehungen und den daraus resultierenden Integralgleichungen versucht, das Volumenintegral schrittweise in eine Summe von Randintegralen zu transformieren.

Die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung wird hier mit u_0^* bezeichnet.

Im ersten Schritt wird eine Funktion u_1^* erzeugt, die die Poisson-Gleichung $\nabla^2 u_1^* = u_0^*$ erfüllt. Für diese neue Fundamentallösung wird das Reziprozitätstheorem angewendet. Es folgt die Integralgleichung

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_1^* u(x) d\Omega + k^2 \int_{\Omega} u_1^* u(x) d\Omega - \int_{\Gamma} p_1^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} u_1^* p d\Gamma = 0 \quad . \quad (3.31)$$

Darin ist $p_1^* = \partial u_1^* / \partial \vec{n}$.

Mit $\nabla^2 u_1^* = u_0^*$ folgt schließlich

$$\int_{\Omega} u_0^* u(x) d\Omega = -k^2 \int_{\Omega} u_1^* u(x) d\Omega + \int_{\Gamma} p_1^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u_1^* p d\Gamma \quad . \quad (3.32)$$

D.h. das Volumenintegral wird durch ein anderes Volumenintegral plus Randintegrale ersetzt. Im zweiten Schritt wird über die Poisson-Gleichung $\nabla^2 u_2^* = u_1^*$ eine weitere Fundamentallösung definiert. Analog zum Vorgehen des ersten Schritts folgt

$$\int_{\Omega} u_1^* u(x) d\Omega = -k^2 \int_{\Omega} u_2^* u(x) d\Omega + \int_{\Gamma} p_2^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u_2^* p d\Gamma \quad . \quad (3.33)$$

Dieses Verfahren wird schrittweise wiederholt. Schließlich folgt für ausreichend großes n die Konvergenz des Volumenintegrals gegen Null (Beweis des Konvergenzkriteriums siehe [198])

$$c^i u^i + \sum_{j=0}^n (-k^2)^j \int_{\Gamma} [p_j^* u - u_j^* p] d\Gamma = (-1)^n (k^2)^{n+1} \int_{\Omega} u_n^* u(x) d\Omega \quad . \quad (3.34)$$

bzw. für ausreichend großes n und verschwindendes Volumenintegral

$$c^i u^i + \sum_{j=0}^n (-k^2)^j \int_{\Gamma} [p_j^* u - u_j^* p] d\Gamma = 0 \quad . \quad (3.35)$$

Damit liegt eine reine Randintegraldarstellung vor. Diskretisierung des Randes und Einführung von Matrizen liefert

$$\sum_{j=0}^n (-k^2)^j [\underline{H}_j \vec{u} - \underline{G}_j \vec{p}] = \vec{0} \quad . \quad (3.36)$$

Die Matrizen \underline{H}_j und \underline{G}_j sind dabei frequenzunabhängig.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \underline{H}_0 - k^2 \underline{H}_1 + \dots + (-k^2)^n \underline{H}_n \\ \underline{G} &= \underline{G}_0 - k^2 \underline{G}_1 + \dots + (-k^2)^n \underline{G}_n\end{aligned}\tag{3.37}$$

folgt

$$\underline{H} \vec{u} = \underline{G} \vec{p} \quad .\tag{3.38}$$

Fundamentallösungen u_j^* , die sich mit Hilfe der Poisson-Gleichungen bestimmen lassen, lauten

$$\begin{aligned}u_j^* &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2j)!} \cdot r^{2j-1} \\ p_j^* &= \frac{\partial u_j^*}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2j-1}{(2j)!} \cdot r^{2j-2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \vec{n}}\end{aligned}\tag{3.39}$$

(u_j^* und p_j^* sind für $j \geq 1$ reguläre Funktionen).

In ([198], [197]) wird der Beweis gebracht, daß sich die gleichen Matrizen \underline{H}_j und \underline{G}_j ergeben, wenn der Realteil der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung in eine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $k_0 = 0$ entwickelt wird. In diesem Sinne ist das Verfahren dann auch zu betrachten. Für große k sind daher mehr Reihenglieder erforderlich als für kleine k .

Die Lösung des Eigenwertproblems kann mit den Verfahren durchgeführt werden, die im später in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Die Anwendung der MRM auf Probleme der Dynamik wird in [198] beschrieben. In ([139], [140]) wird die MRM mit anschließender Matrizenexpansion auf akustische Probleme angewendet.

Methode der partikulären Lösungen

Ähnlich dem Ansatz der DRM wird hier für $u(x)$ ein Ansatz mit vollständigen Polynomen gewählt

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) \alpha_m\tag{3.40}$$

(Verwendete Formelzeichen siehe DRM).

Mit diesem Ansatz werden über die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 u^0(x) = -k^2 \hat{u}(x)\tag{3.41}$$

partikuläre Lösungen $u^0(x)$ bestimmt. Die zu dieser Poisson-Gleichung gehörende Integraldarstellung mit der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung u^* als Gewichtungsfunktion lautet

$$c^i u^{i0} + \int_{\Gamma} p^* u^0 d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* p^0 d\Gamma = k^2 \int_{\Omega} u^* \hat{u}(x) d\Omega \quad (3.42)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\underline{H} \vec{u}^0 - \underline{G} \vec{p}^0 = k^2 \underline{B}_0 \hat{u}(x_i) \quad . \quad (3.43)$$

Mit der Integraldarstellung der Helmholtz-Gleichung unter Verwendung der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma = k^2 \int_{\Omega} u^* u(x) d\Omega \quad (3.44)$$

bzw.

$$\underline{H} \vec{u} - \underline{G} \vec{p} = k^2 \underline{B} u(x_i) \quad (3.45)$$

folgt durch Subtraktion der letzten beiden Matrixgleichungen

$$\underline{H} \vec{u} - \underline{G} \vec{p} = \underline{H} \vec{u}^0 - \underline{G} \vec{p}^0 + \vec{E} \quad . \quad (3.46)$$

wobei sich $\vec{E} = k^2 [\underline{B} u(x_i) - \underline{B}_0 \vec{u}(x_i)]$ aus den Integralen des Typs

$$E = k^2 \int_{\Omega} u^* [u(x) - \hat{u}(x)] d\Omega \quad (3.47)$$

zusammensetzt. Durch geeignete Wahl von $\hat{u}(x)$ kann das Residuum E vernachlässigbar klein gemacht werden.

Es ist zu erkennen, daß dieses Verfahren für $u^0(x) = -k^2 \Psi(x)$ der DRM entspricht.

Das Eigenwertproblem ergibt sich analog zu dem der DRM. Ansätze $\hat{u}(x)$ und partikuläre Lösungen sowie praktische Anwendungsbeispiele für Akustik und Dynamik werden z.B. in ([20], [210], [212], [211]) gezeigt.

3.2 Einleitende Bemerkungen zur Eigenwertanalyse mit der Randelementemethode

3.2.1 Rechts- und Linkseigenwertproblem

Wie bereits zu Anfang dieses Kapitels hergeleitet, ergibt sich mit Hilfe der Randelementemethode folgendes Eigenwertproblem

$$\underline{B}(k) \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.48)$$

Nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$ sind nur dann vorhanden, wenn die notwendige Bedingung für die Existenz von Eigenwerten

$$\eta(k) = \det [\underline{B}(k)] = 0 \quad (3.49)$$

erfüllt ist. Dies ist das charakteristische Polynom der Gleichung (3.48). Die Funktion $\eta(k)$ ist also nach Nullstellen hin zu untersuchen. Die Frequenzparameter k_i , für die $\eta(k) = 0$ erfüllt ist, sind die Eigenwerte (Eigenfrequenzen), die zugehörigen Lösungsvektoren \vec{x} sind die Eigenvektoren (Eigenformen).

Der Eigenwertaufgabe (3.48) ist die Aufgabe der konjugiert komplexen, transponierten Matrix $\underline{B}^*(k)$

$$\underline{B}^*(k) \vec{y} = \vec{0} \quad , \quad (3.50)$$

die auch in der Form

$$\vec{y}^T \underline{B}(k) = \vec{0} \quad (3.51)$$

geschrieben werden kann, zugeordnet. Beide Eigenwertaufgaben (3.48), (3.50) haben die gleichen Eigenwerte. Die Eigenvektoren werden Linkseigenvektoren \vec{y} und Rechtseigenvektoren \vec{x} genannt.

Im folgenden Text sind mit der Bezeichnung *Eigenvektoren* jeweils die Rechtseigenvektoren gemeint.

Eine Variante des Eigenwertproblems

Hier soll noch auf eine Variante ([118], [119], [120], [123], [122], [121], [126], [127], [125], [124]) des Eigenwertproblems eingegangen werden.

Ausgangspunkt ist die Gleichung

$$\underline{B}(k) \vec{x} = \underline{A}(k) \vec{f} = \vec{F} \quad . \quad (3.52)$$

Nach *Cramer* kann eine Komponente x_i über die Determinanten berechnet werden

$$x_i = \frac{\det [\underline{R}^*(k)]}{\det [\underline{B}(k)]} \quad . \quad (3.53)$$

$\underline{R}^*(k)$ entsteht aus $\underline{B}(k)$, indem die i -te Spalte durch \vec{F} ersetzt wird

$$\underline{R}^* = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{m-1}, \vec{F}, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n) \quad . \quad (3.54)$$

Die Belastung \vec{f} wird nun so gewählt, daß nur die m -te Komponente ungleich Null ist

$$f_j = \begin{cases} -\eta & : j = m \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (3.55)$$

Damit folgt für \underline{R}^*

$$\underline{R}^* = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{m-1}, -\eta \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n) \quad . \quad (3.56)$$

Die Determinante von \underline{R}^* wird in anderer Form ausgedrückt

$$\det [\underline{R}^*(k)] = \eta \det [\underline{R}(k)] \quad (3.57)$$

$$\underline{R} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{m-1}, -\vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n) \quad .$$

Weiter folgt

$$x_i = \frac{\eta(k) \det [\underline{R}(k)]}{\det [\underline{B}(k)]} \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow \eta(k) = \frac{\det [\underline{B}(k)]}{\det [\underline{R}(k)]} \cdot x_i \quad .$$

Die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems ergibt sich mit der Forderung $\eta = 0$. Die Komponente x_i kann beliebig vorgewählt werden. Hier wird $x_i = 1$ gesetzt

$$\eta(k) = \frac{\det [\underline{B}(k)]}{\det [\underline{R}(k)]} = 0 \quad . \quad (3.59)$$

Vorteile dieser Methode sind die Normierung des Determinantenwertes sowie bessere Konvergenz gegen Null im Bereich der Eigenwerte. Als Nachteile sind die Auswertung zweier Matrizen und die Problematik des Falls der singulären Matrix \underline{R} zu nennen.

3.2.2 Eigenschaften der Matrix $\underline{B}(k)$ bei den Eigenwerten k_i

Bei den Eigenfrequenzen wird $\eta(k) = \det [\underline{B}(k)] = 0$. Die Matrix $\underline{B}(k)$ wird für die Fälle, wo der Frequenzparameter gleich einem Eigenwert ist, singulär. Der dann vorliegende Rangabfall gibt die Vielfachheit des jeweiligen Eigenwertes an und ist entscheidend für die Bestimmung der Eigenvektoren.

D.h. neben der Forderung der verschwindenden Determinante kann auch der Rangabfall als Kriterium für die Existenz von Eigenwerten herangezogen werden. Der Rangabfall kann z.B. mit Hilfe der Eigenwertzerlegung oder der Singulärwertzerlegung ermittelt werden. Diese Verfahren werden später erläutert.

3.2.3 Ermittlung von Eigenvektoren

Für einen Rangabfall $d = 1$ gibt es zu jedem Eigenwert k_i genau einen linear unabhängigen Eigenvektor \vec{x}_i , alle übrigen sind zu diesem proportional. Der Eigenvektor ist nur bis auf einen willkürlichen Faktor festlegbar. D.h. der Eigenvektor gibt eine Richtung vor, seine Länge ist frei wählbar ([276], [277]).

Für $d > 1$ (mit $d = p =$ Vielfachheit des Eigenwertes) existieren genau $d > 1$ linear unabhängige Vektoren. Lösungen $\vec{x}_i^{(1)}$ bis $\vec{x}_i^{(d)}$ können durch Vorgabe von d Komponenten ermittelt werden. Die allgemeine Lösung mit d freien Parametern c_k wird folgendermaßen angegeben:

$$\vec{x}_i = c_1 \vec{x}_i^{(1)} + \dots + c_d \vec{x}_i^{(d)} \quad . \quad (3.60)$$

Bei mehrfachen Eigenwerten der Vielfachheit $p > 1$ können i.a. nur die Schranken für den möglichen Rangabfall

$$1 \leq d_i \leq p_i \quad (3.61)$$

angegeben werden.

Bei $d_i < p_i$ fehlen $(d_i - p_i)$ Eigenvektoren (sie fallen zusammen). Diese fehlenden Eigenvektoren können mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \underline{B}(k_i) \vec{x}_i^{(1)} &= \vec{0} \\ \underline{B}(k_i) \vec{x}_i^{(2)} &= \vec{x}_i^{(1)} \\ \underline{B}(k_i) \vec{x}_i^{(3)} &= \vec{x}_i^{(2)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

als Hauptvektoren bestimmt werden.

In den hier untersuchenden Systemen tritt in der Systemmatrix $\underline{B}(k_i)$ jeweils ein Rangabfall $d_i = p_i$ auf. Der Fall $d_i < p_i$ tritt z.B. bei Systemen mit kritischer Dämpfung auf, wird hier aber nicht weiter betrachtet. Mehrfache Nullstellen treten in physikalischen Systemen nur sehr selten auf, da Symmetrien i.a. nicht wirklich vorhanden sind (Toleranzen). Erst die mathematische Beschreibung des physikalischen Systems führt zu solchen Erscheinungen.

3.2.4 Verwendete Fundamentallösung

Die hier durchgeführten Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf geschlossene Gebiete. Zudem werden ungedämpfte Systeme vorausgesetzt. Am Beispiel der Fundamentallösung u^* der Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = \delta_R + i 0 \quad (3.63)$$

wird erläutert, welche Teile der Fundamentallösung zur Eigenwertbestimmung berücksichtigt werden müssen.

Die Fundamentallösung lautet

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} [\cos(kr) + i \sin(kr)] = u_R^* + i \cdot u_I^* \quad (3.64)$$

Diese Fundamentallösung besteht aus zwei Anteilen. Zum einen aus dem Realteil u_R^* , der Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 u_R^* + k^2 u_R^* = \delta_R \quad (3.65)$$

ist und dem Imaginärteil u_I^* , der die homogene Differentialgleichung

$$\nabla^2 u_I^* + k^2 u_I^* = 0 \quad (3.66)$$

erfüllt. Der Realteil u_R^* ist zwar für sich schon Lösung der Gleichung (3.63), der Imaginärteil u_I^* wird aber zum Befriedigen der *Sommerfeld'schen Abstrahlbedingung* hinzugefügt. Bei den hier betrachteten geschlossenen Gebieten liegt jedoch keine Wellenabstrahlung und damit verbundene geometrische Dämpfung vor. Als Folge verschwinden die Integrale des Imaginärteils über dem geschlossenen Gebiet. Der Imaginärteil braucht daher theoretisch nicht berücksichtigt zu werden. Auf beiden Seiten der Somigliana-Identität tritt für den Imaginärteil das gleiche Integral auf. In der Systemgleichung $\underline{B} \vec{x} = \underline{A} \vec{f}$ ergeben sich daher keine zusätzlichen resultierenden Terme.

Beim untersuchten Eigenwertproblem $\underline{B} \vec{x} = \vec{0}$ bleiben jedoch die Imaginärteile vorhanden, da nur eine der beiden Systemmatrizen berücksichtigt wird. Sie können als zusätzliche Forderung eingesetzt werden.

So gilt bei der Berechnung mit der reellen Matrix \underline{B} (d.h. nur die reelle Fundamentallösung wird verwendet) $\eta(k) = \det[\underline{B}(k)] = 0$ als einzige Forderung. Wird der Imaginärteil jedoch beachtet, ergibt sich für $\eta(k) = 0$ die zusätzliche Bedingung, daß der Imaginärteil ebenfalls verschwinden muß.

Diese zusätzliche Bedingung führt in der praktischen Anwendung, besonders bei der Untersuchung mehrfacher Nullstellen des charakteristischen Polynoms, zu besser interpretierbaren Ergebnissen und läuft darauf hinaus, das Betragsminimum von $\eta(k)$ zu lokalisieren.

Die Verwendung der komplexen Fundamentallösung für geschlossene Gebiete stellt also kein Fehler dar. Sie führt zu einer in der praktischen Anwendung hilfreichen Zusatzbedingung zur Identifikation von Eigenwerten.

Diese Überlegungen gelten in gleicher Weise auch für die Dynamik. Auch hier ist die Berechnung sowohl mit reeller als auch mit komplexer Fundamentallösung möglich.

Im folgenden Abschnitt wird die Verwendung der beiden Fundamentallösungen (rein reell und komplex) zur Bestimmung von Eigenfrequenzen untersucht. Dabei wird jeweils der direkt ermittelte Verlauf von $\eta = \eta(k)$ dargestellt.

3.2.5 Direkte Lösung der charakteristischen Gleichung

Bei der direkten Lösung wird $\eta(k)$ für konkrete Werte k_i berechnet und als Funktion von k_i dargestellt. Anhand der Kurvenverläufe können die Eigenwerte abgeschätzt werden. Diese sind allerdings nur im Rahmen der Schrittweite genau.

Die Berechnungen werden zum einen nur mit dem Realteil u_R^* der Fundamentallösung u^* und zum anderen mit u^* selbst durchgeführt. Im ersten Fall ergibt sich eine reelle Systemmatrix \underline{B} , im zweiten Fall ist \underline{B} komplex.

3.2.6 Testbeispiele für die direkte Lösung

Zwei Testbeispiele werden behandelt. Ein Beispiel, das auf der (skalaren) Helmholtz-Gleichung basiert und ein Beispiel aus der Elastodynamik (vektorielles Differentialgleichungssystem).

Würfel als Akustik-Beispiel

Als Beispiel soll ein Würfel dienen, bei dem an einer Seite ein Schalldruck (Schalldruckänderung um einen statischen Ruhedruck) $u = 0$ vorgegeben wird. Auf den anderen Außenseiten soll die Schallschnelle in Normalenrichtung mit $\text{grad } u \cdot \vec{n} = \vec{v}_n = 0$ vorgegeben sein (siehe Bild 3.3).

Analytische Lösung

Die analytischen Lösungen ([148],[198]) werden durch die Gleichung (3.67) beschrieben

$$k_E = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{t + \frac{1}{2}}{L_z}\right)^2} \quad (3.67)$$

mit $m, n, t = 0, 1, 2, \dots$

Die Eigenwerte k_E , die untersucht werden, sind in Tabelle (3.1) angegeben (analytische Werte, mit p = Vielfachheit der Nullstelle, Nr. = Nummerierung der Eigenwerte im folgenden Text).

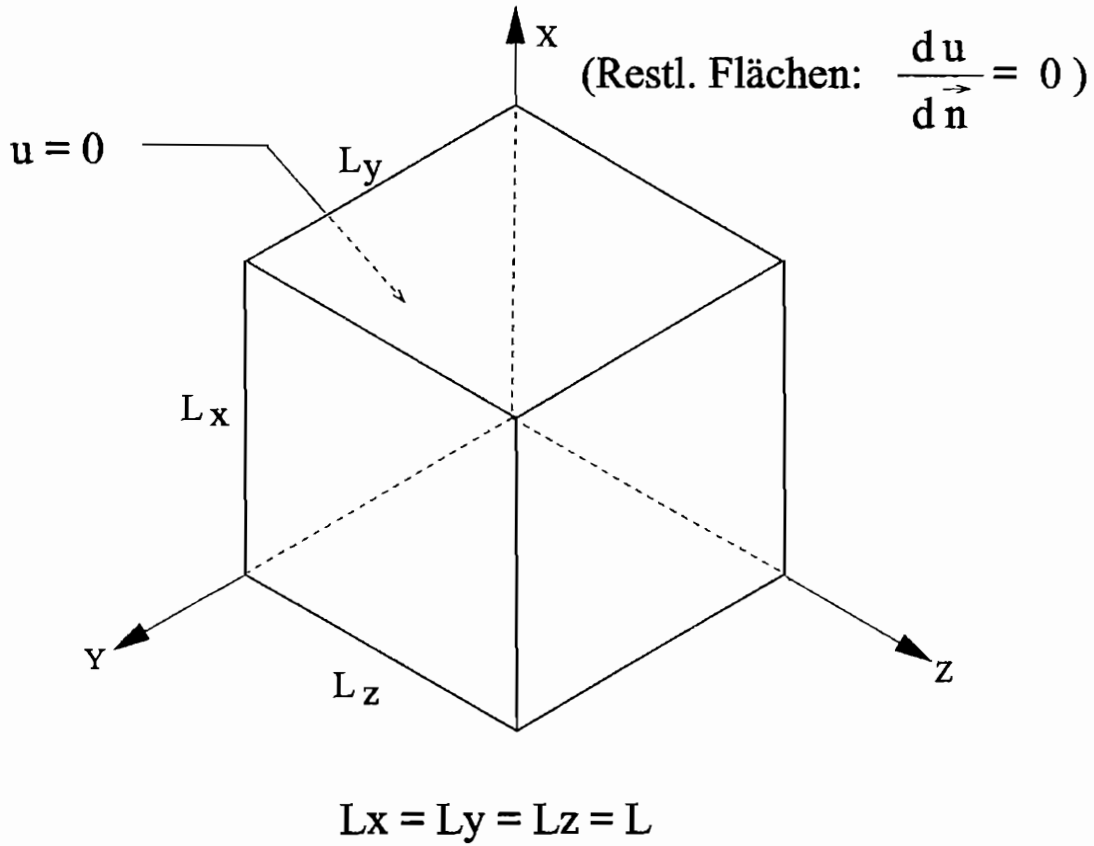


Abbildung 3.3: Modell des Akustik-Würfels

Nr.	p	m n t	k_E
1	1	000	5.23
2	2	001,110	15.71
3	3	002,021,201	26.18
4	3	003,131,311	36.65
5	4	013,103,230,320	38.12

Tabelle 3.1: Vielfachheit p der Eigenwerte k_E des Akustik-Würfels

Drei unterschiedliche Diskretisierungsmodelle werden verwendet. Die Modelle unterscheiden sich nicht in ihren Abmessungen, lediglich die Anzahl der Elemente pro Seitenfläche ist verschieden. Die Seitenlängen L werden zu $L_x = L_y = L_z = L = 0.3 \text{ m}$ gewählt.

Zum Einsatz kommen Randelemente mit quadratischen Ansätzen für Druck und Schallschnelle (9-Knoten Elemente) sowie linearer Geometriebeschreibung.

Modell mit 6 Elementen und 26 Knoten

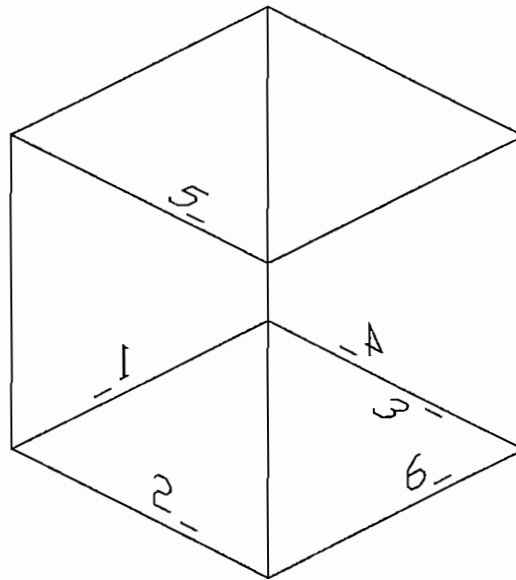


Abbildung 3.4: Diskretisierungsmodell mit 6 Randelementen

Modelle mit 54 und 150 Elementen

Pro Würfelseite erfolgt eine Einteilung in 9 bzw. 25 Elemente. Das Modell mit 54 Elementen hat 164 Knoten, das mit 150 Elementen hat 452 Knoten (Bild 3.5).

Bereich um den 1. Eigenwert

Dargestellt werden zuerst die Determinanten für alle drei Modelle bei reeller Rechnung (Abb. 3.6, 3.7). Es folgen die entsprechenden Kurven für komplexe Rechnung (Abb. 3.8, 3.9, 3.10). Dabei werden sowohl Real- und Imaginärteil als auch der Betrag der Determinanten angegeben. Der Eigenwert wird mit den drei Modellen exakt abgebildet, da selbst das Modell mit 6 Elementen die zugehörige Eigenform relativ gut wiedergeben kann.

Die Determinantenwerte werden jeweils auf den ersten Wert im Intervall normiert. Diese Normierung ist erforderlich, da sich die Determinante im gesamten betrachteten Frequenzbereich sehr stark in ihrer Größe ändert.

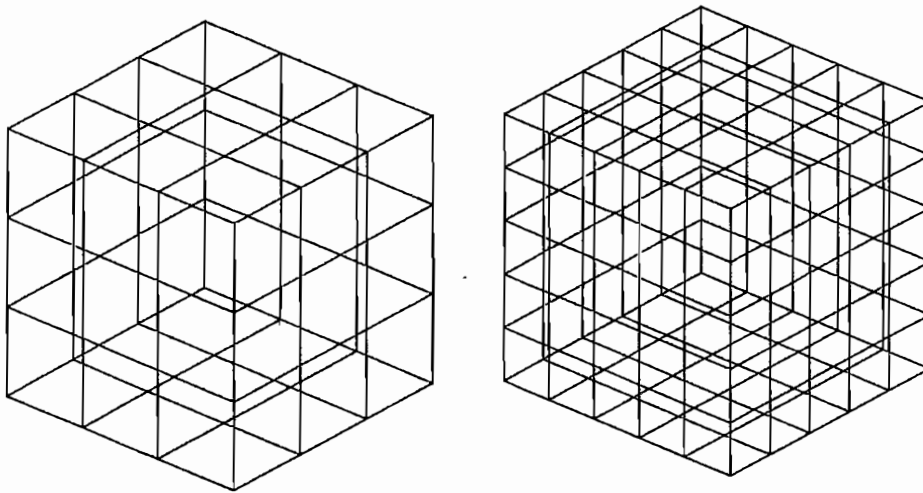


Abbildung 3.5: Diskretisierungsmodelle mit 54 (links) und 150 Elementen

Bereich um den 2. Eigenwert

Angegeben wird der Betrag der Determinantenwerte (Abb. 3.11, 3.12), da er einen direkten Vergleich von komplexer und reeller Rechnung erlaubt. Mit dem Modell aus 6 Elementen kann die Lage des Eigenwertes nur grob mit Hilfe der komplexen Rechnung abgeschätzt werden. Bei der reellen Rechnung ergeben sich zwei Nulldurchgänge in der Nähe des zweifachen Eigenwertes. Das Modell ist zu grob, um die entsprechenden Eigenformen abzubilden.

Bereich um den 3. Eigenwert

Hier werden nur die Ergebnisse des Modells mit 54 Elementen dargestellt. Das Modell mit 6 Elementen ist zu grob, das mit 150 Elementen liefert annähernd die gleichen Kurven. Mit Hilfe des Betrags wird gezeigt, daß bei reeller Rechnung wiederum das Problem auftritt, die Nullstelle genau zu lokalisieren (Abb. 3.13).

Bereich um den 4. und 5. Eigenwert

Es werden nur die Beträge der Determinanten für komplexe und reelle Rechnung dargestellt. Dabei werden das Modell mit 54 Elementen und das Modell mit 150 Elementen verglichen (Abb. 3.14, 3.15).

Bei der reellen Rechnung ergibt sich zwischen der 3-fach und der 4-fach Nullstelle ein physikalisch nicht zu erklärendes Minimum für das Modell mit 150 Elementen. Die Eigenwerte können jedoch an den Stellen des Betragsminimums der komplexen Rechnung eindeutig gefunden werden. Das Modell mit 54 Elementen erlaubt nur eine grobe Abschätzung der Eigenwerte. Eine ausreichende Abbildung der Eigenformen ist mit diesem Modell nicht mehr möglich.

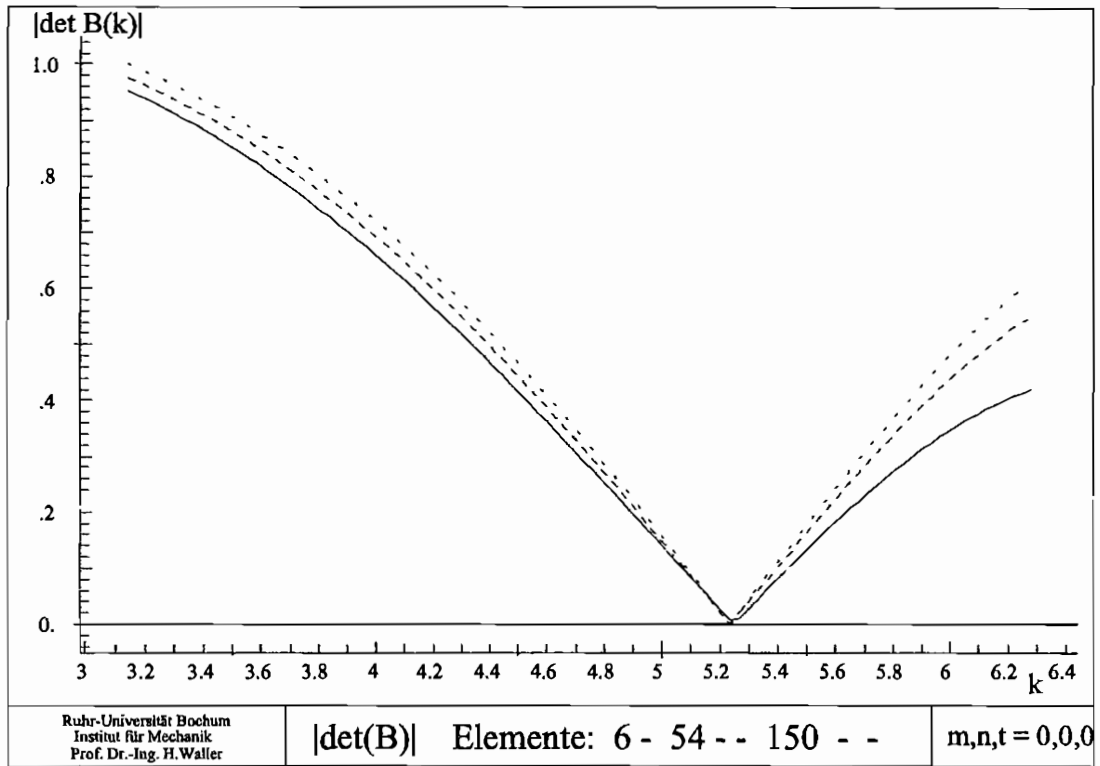


Abbildung 3.6: Betrag bei reeller Rechnung

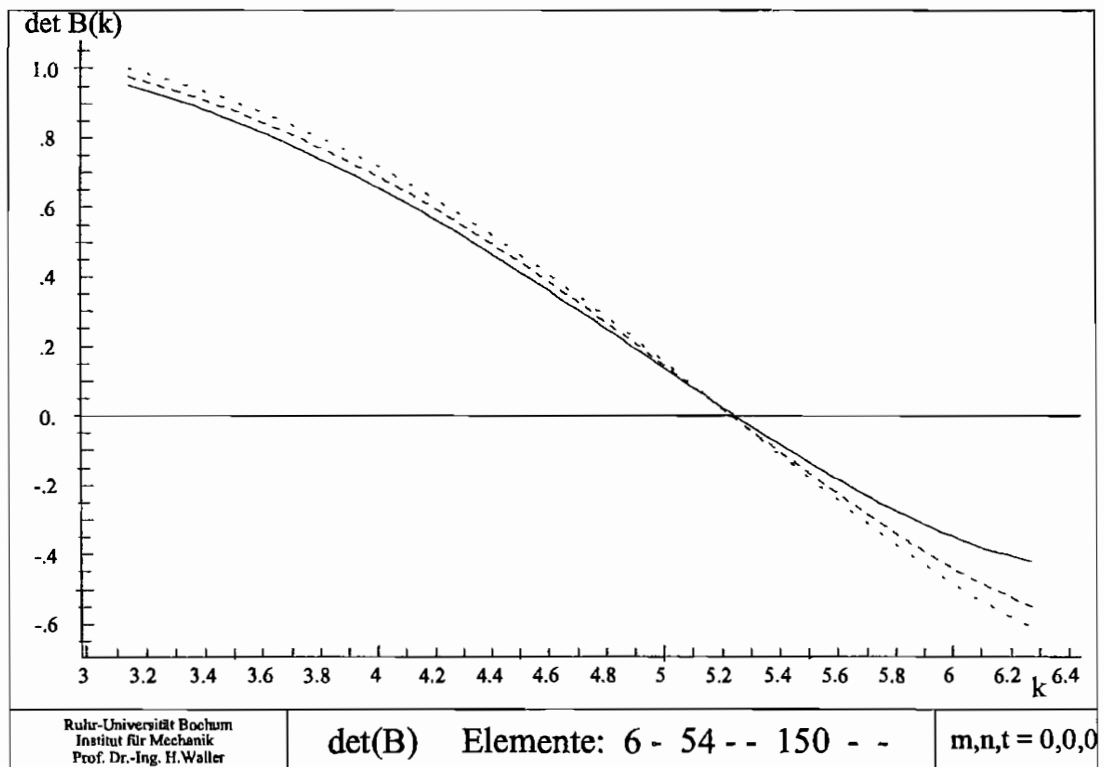


Abbildung 3.7: Determinante bei reeller Rechnung

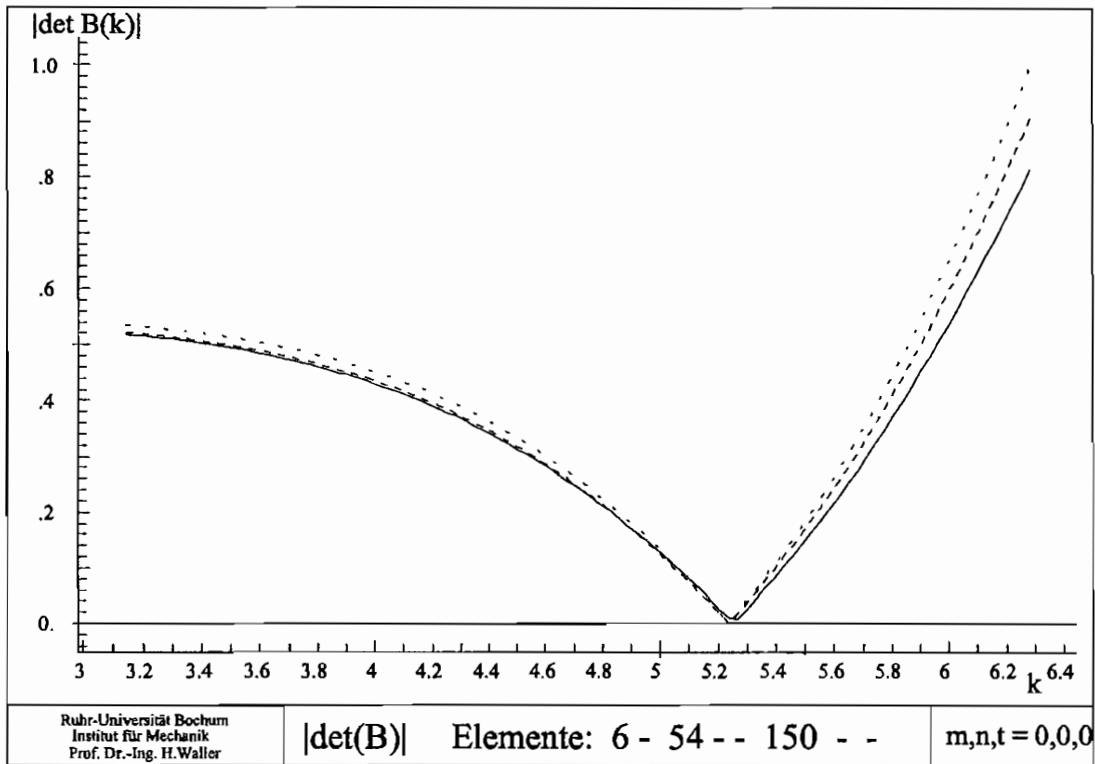


Abbildung 3.8: Betrag bei komplexer Rechnung

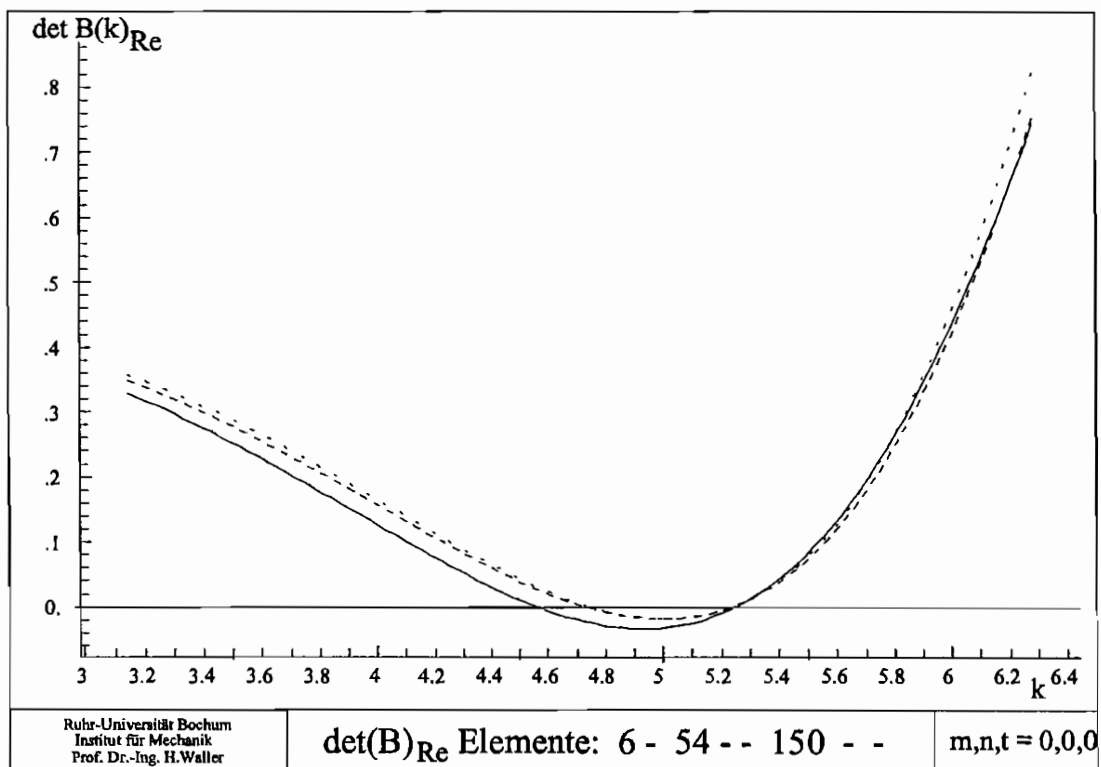


Abbildung 3.9: Realteil bei komplexer Rechnung

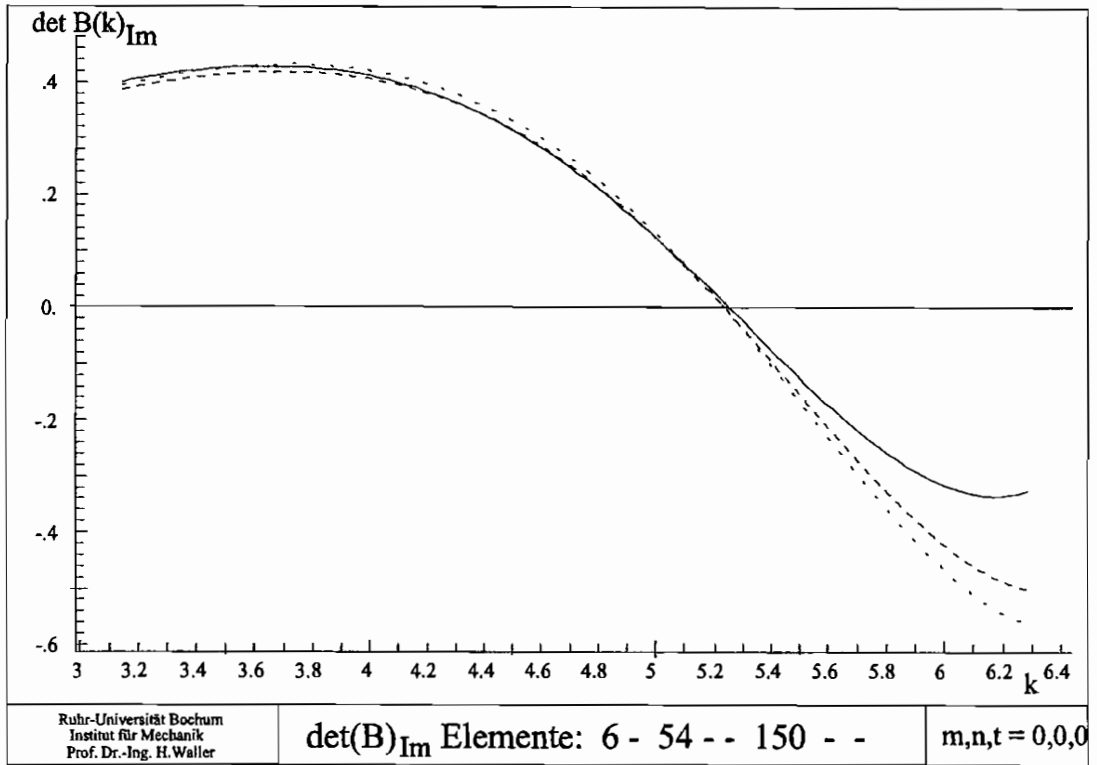


Abbildung 3.10: Imaginärteil bei komplexer Rechnung

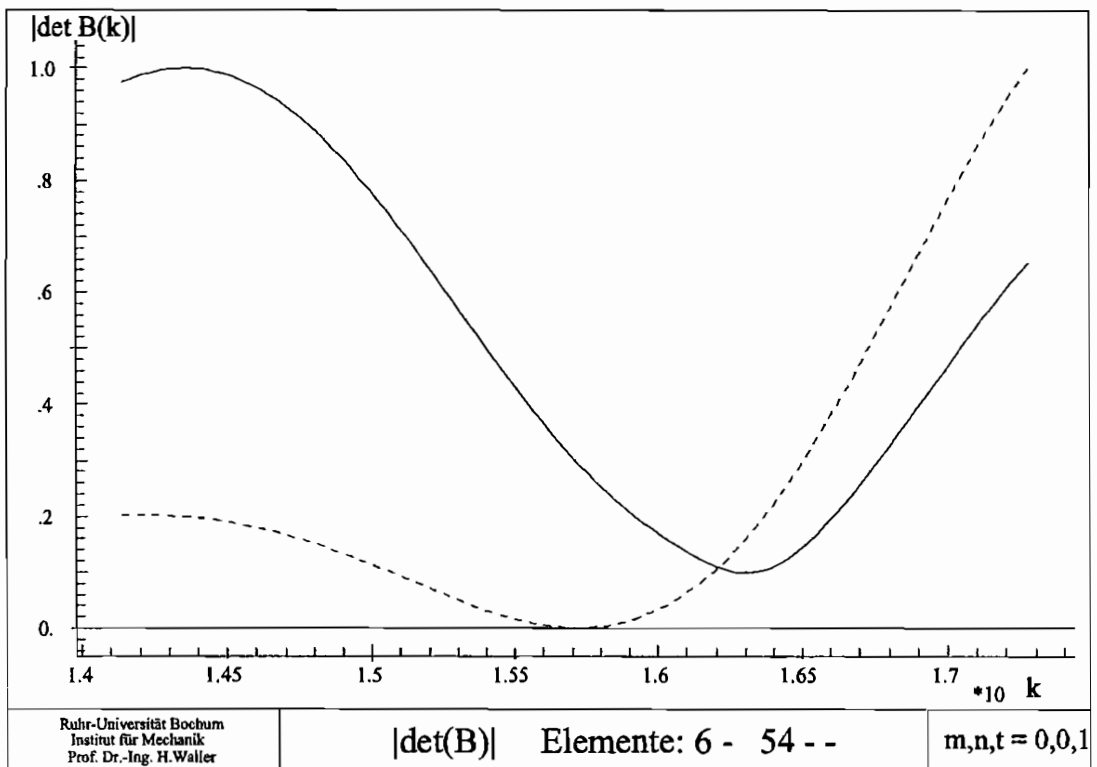


Abbildung 3.11: Betrag bei komplexer Rechnung

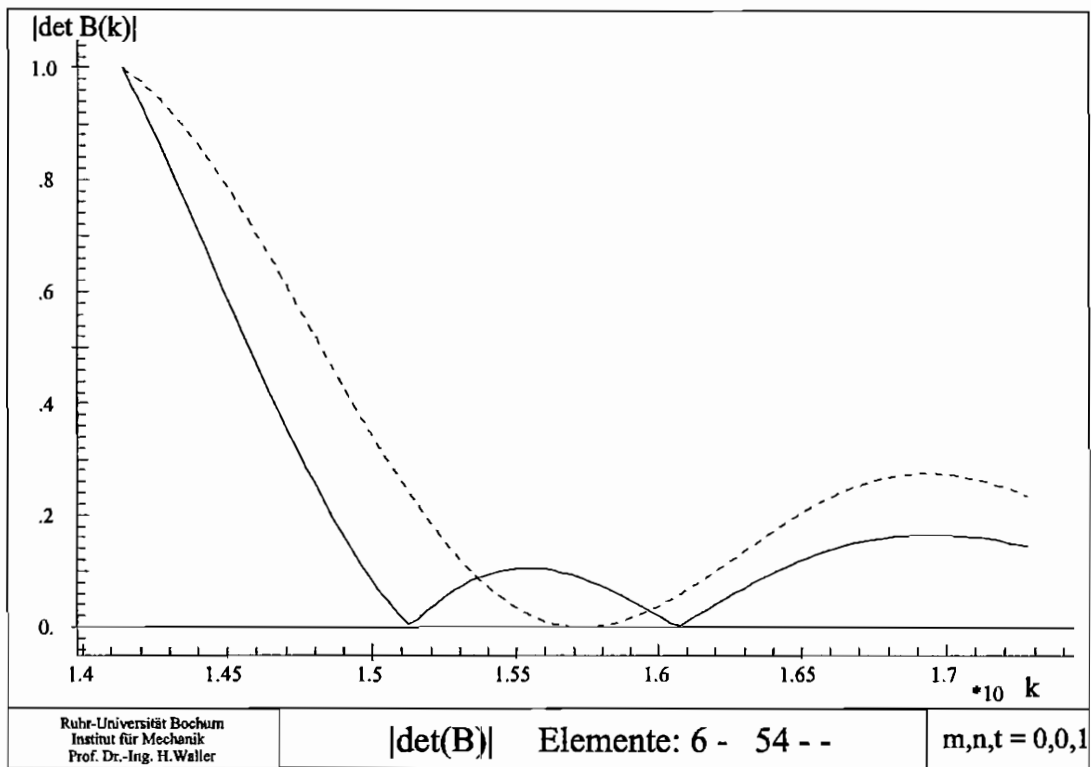


Abbildung 3.12: Betrag bei reeller Rechnung

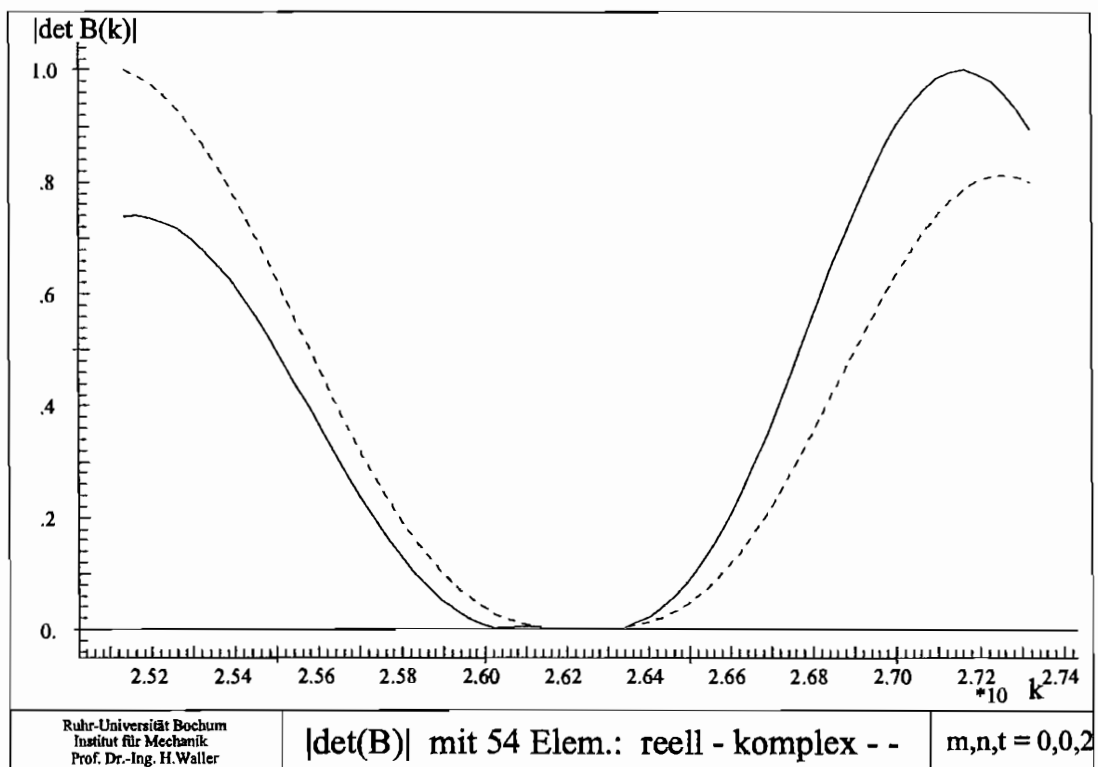


Abbildung 3.13: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

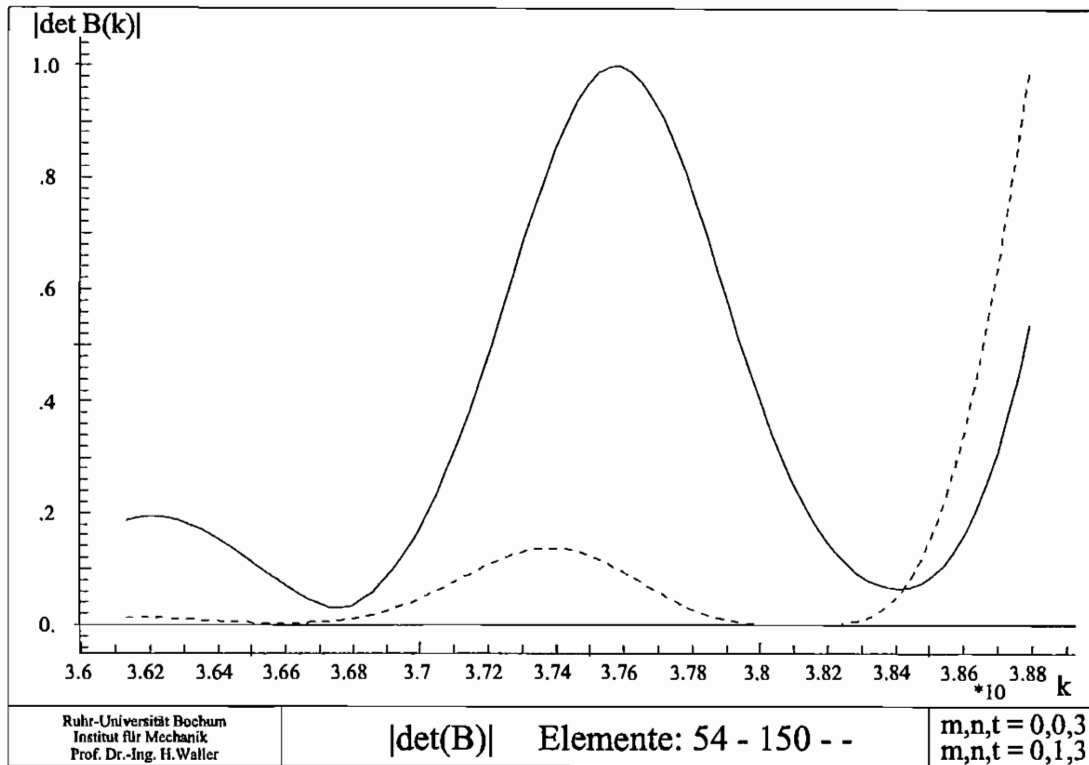


Abbildung 3.14: Betrag bei komplexer Rechnung

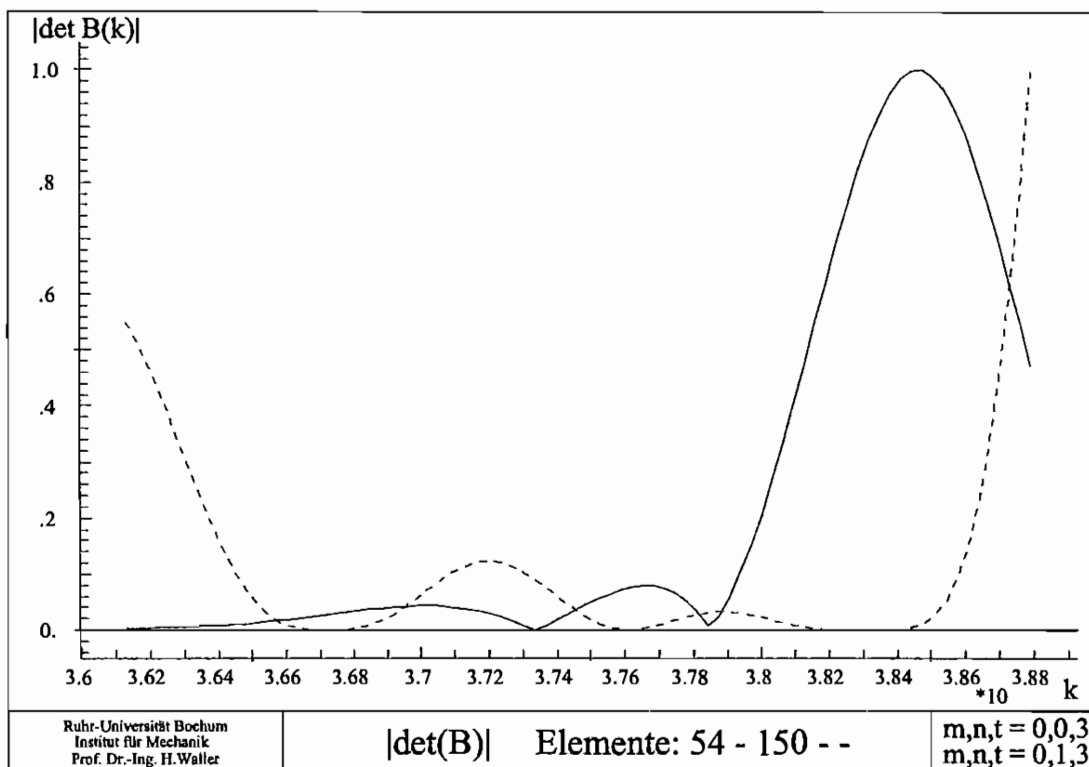


Abbildung 3.15: Betrag bei reeller Rechnung

Einseitig eingespannter 3-D Balken

Ein einseitig eingespannter Balken (Abb. 3.16) wird auf seine Eigenfrequenzen hin untersucht. Dabei wird die Berechnung mit reeller und mit komplexer Systemmatrix \underline{B} durchgeführt. Dargestellt werden die Frequenzbereiche in der Umgebung der ersten drei Längseigenfrequenzen, der ersten drei Torsionseigenfrequenzen und der ersten sechs Biegeeigenfrequenzen. Da der Balken bezüglich seiner Breite und Höhe Symmetrie aufweist, treten die Biegeeigenfrequenzen mit der Vielfachheit $p = 2$ auf. Längs- und Torsionseigenfrequenzen besitzen die Vielfachheit $p = 1$. An dieser Stelle werden jeweils nur 3 Kurvenverläufe abgebildet (Abb. 3.17, 3.18, 3.19). Weitere Kurvenverläufe sind im Anhang B dargestellt. Als analytische Vergleichswerte dienen

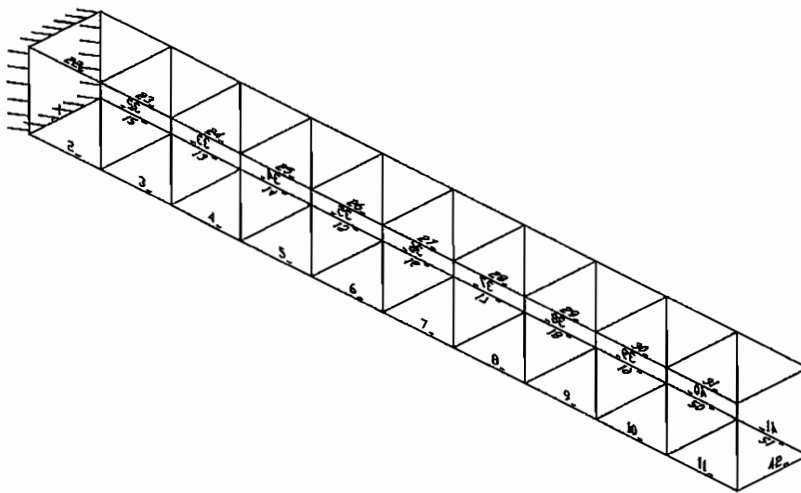


Abbildung 3.16: Modell eines einseitig fest eingespannten Balkens: $L = 10b$, $b = h$

die Eigenfrequenzen der elementaren Stab- und Torsionsstabtheorie sowie der Balkentheorie nach Timoshenko ([160], [246], [247]). In Tabelle (3.2) sind diese Werte neben den mit ähnlichem Modell berechneten FEM-Werten dargestellt. Die FEM-Daten stehen in Klammern.

Vergleich der Determinantenverläufe von FEM und BEM

Die Determinantenverläufe werden zum einen mit der Randelementemethode, zum anderen mit der Methode der Finiten Elemente berechnet und auf gleiche Art normiert. Hier werden nur drei Kurvenverläufe (Abb. 3.20, 3.21, 3.22) dargestellt. Die restlichen Kurven befinden sich ebenfalls in Anhang B. Es zeigt sich wiederum, daß bei einfachen und doppelten Nullstellen mit dem Realteil der Systemmatrix gearbeitet werden kann. Es treten keine nennenswerten Unterschiede zwischen der Rechnung mit reeller und komplexer Systemmatrix auf.

Der Vergleich mit den Ergebnissen der FEM zeigt gute Übereinstimmung. Unterschiede in den Eigenfrequenzen sind zwar erkennbar, jedoch relativ gering.

Zug	Biegung	Torsion
$\omega \cdot s$	$\omega \cdot s$	$\omega \cdot s$
	0.71 (0.71) 4.32 (4.33)	
11.11 (11.11)		7.85 (7.85)
	11.48 (11.58) 21.06 (21.43)	
		23.55 (23.56)
	32.39 (33.32)	
33.32 (33.31)		39.25 (39.27)
	44.90 (46.76)	
55.55 (55.55)		

Tabelle 3.2: Erste Eigenfrequenzen eines einseitig eingespannten Balkens (FEM-Werte in Klammern)

Ergebnisdiskussion

Die Analyse der direkt berechneten Determinantenwerte zeigt, daß je nach Vielfachheit des jeweilig zu untersuchenden Eigenwertes, unterschiedliche Kriterien zur Bestimmung des Eigenwertes anzuwenden sind. Bei einfachen Nullstellen liegt der Eigenwert dort, wo der Nulldurchgang der Determinante ist. Bei mehrfachen oder nahe zusammenliegenden Eigenwerten sind spezielle Verfahren anzuwenden. Diese werden später anhand von Beispielen erläutert. Für Eigenwerte mit einer Vielfachheit $p > 2$ empfiehlt es sich beispielsweise, mit der komplexen Matrix zu rechnen und das Betragsminimum zu suchen.

Im folgenden Abschnitt werden nun Verfahren vorgestellt, die die effektive Bestimmung von Nullstellen erlauben. Dabei wird zwischen Methoden unterschieden, die auf einer Matrizenexpansion basieren und solchen, die als iterative Suchverfahren bezeichnet werden können. Zu der ersten Sorte zählen QR- und QZ-Algorithmus mit vorheriger Reihenentwicklung der Systemmatrix \underline{B} und Günther'scher Matrizenexpansion, zur zweiten Sorte zählen Newton- und Sekantenverfahren sowie der TS-Algorithmus.

Es ist noch zu bemerken, daß sich in beiden Beispielen die Determinantenwerte über dem untersuchten Frequenzbereich sehr stark in ihrer Größe ändern. Da iterative Verfahren aber einen Vergleichswert als Abbruchkriterium haben müssen, ist der Einsatz des Determinantenwertes in Kombination mit iterativen Verfahrens problematisch. Es ist deshalb sinnvoller, mit einer anderen Größe als der Determinante zu arbeiten. Später in diesem Kapitel werden solche Größen mit Hilfe der kleinsten *Singulärwerte* bestimmt.

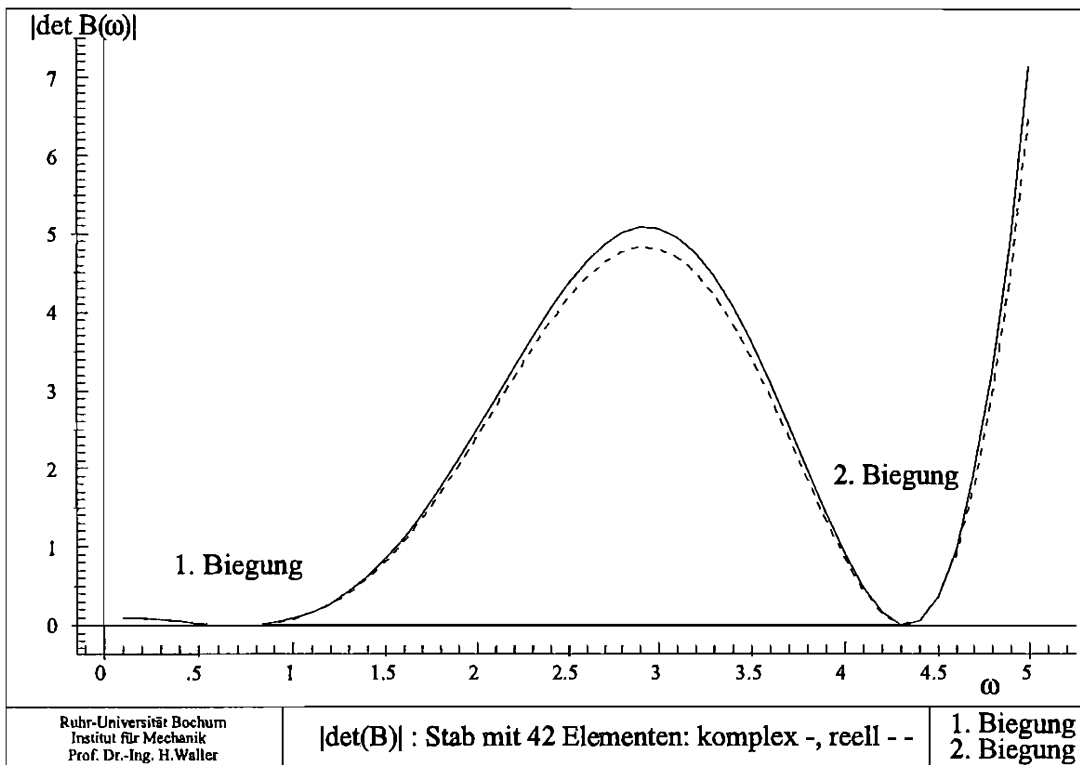


Abbildung 3.17: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

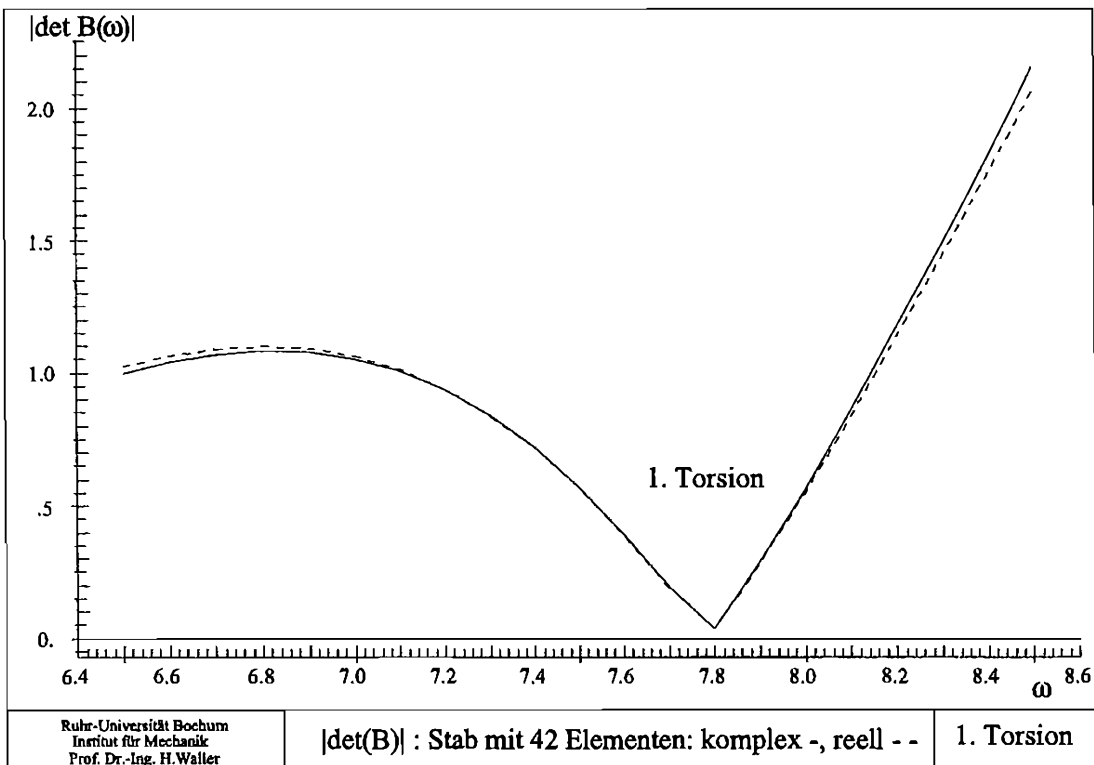


Abbildung 3.18: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

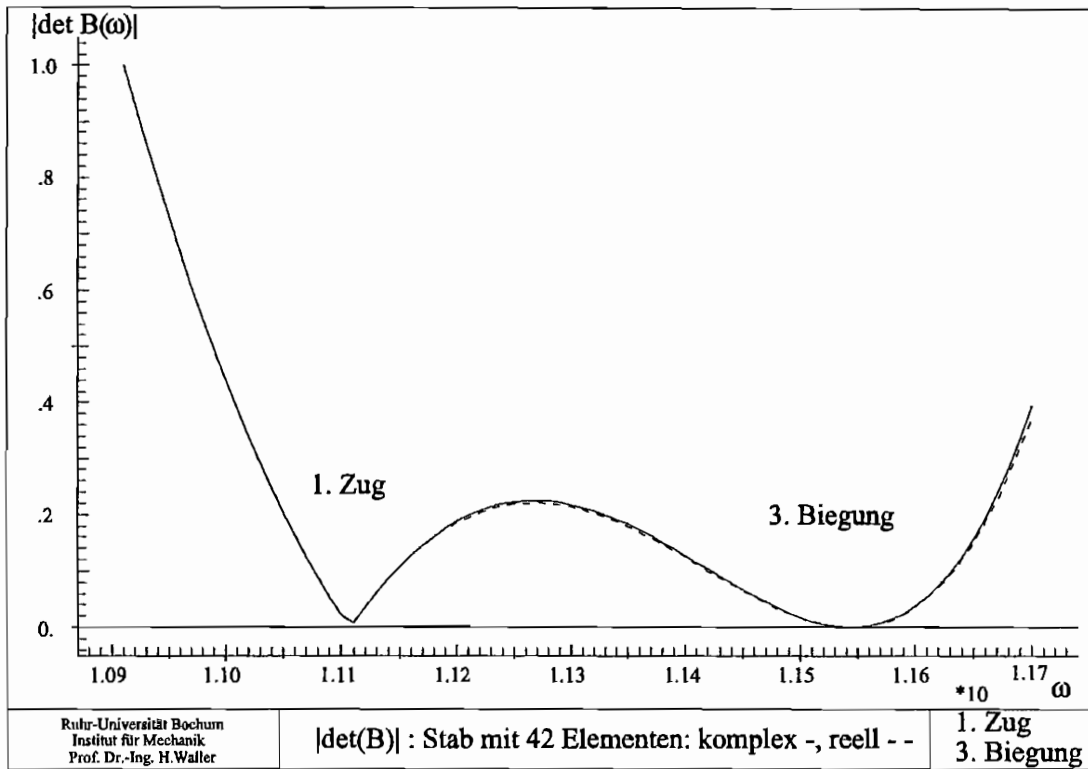


Abbildung 3.19: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

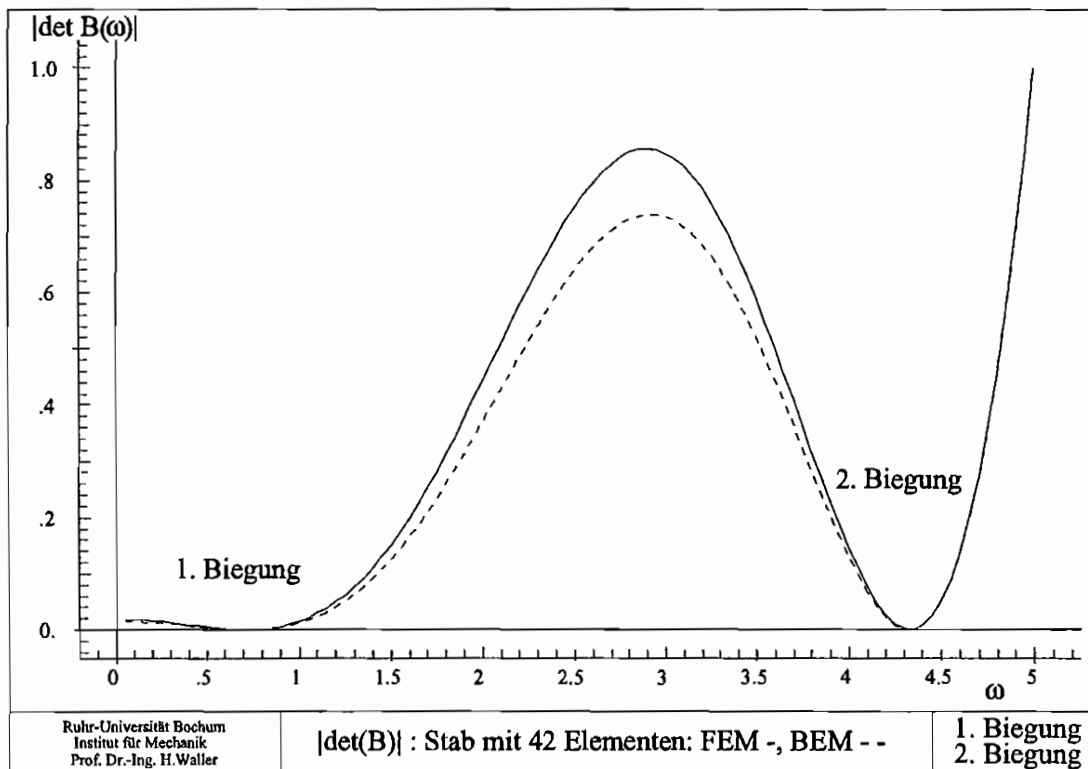


Abbildung 3.20: Vergleich FEM mit BEM

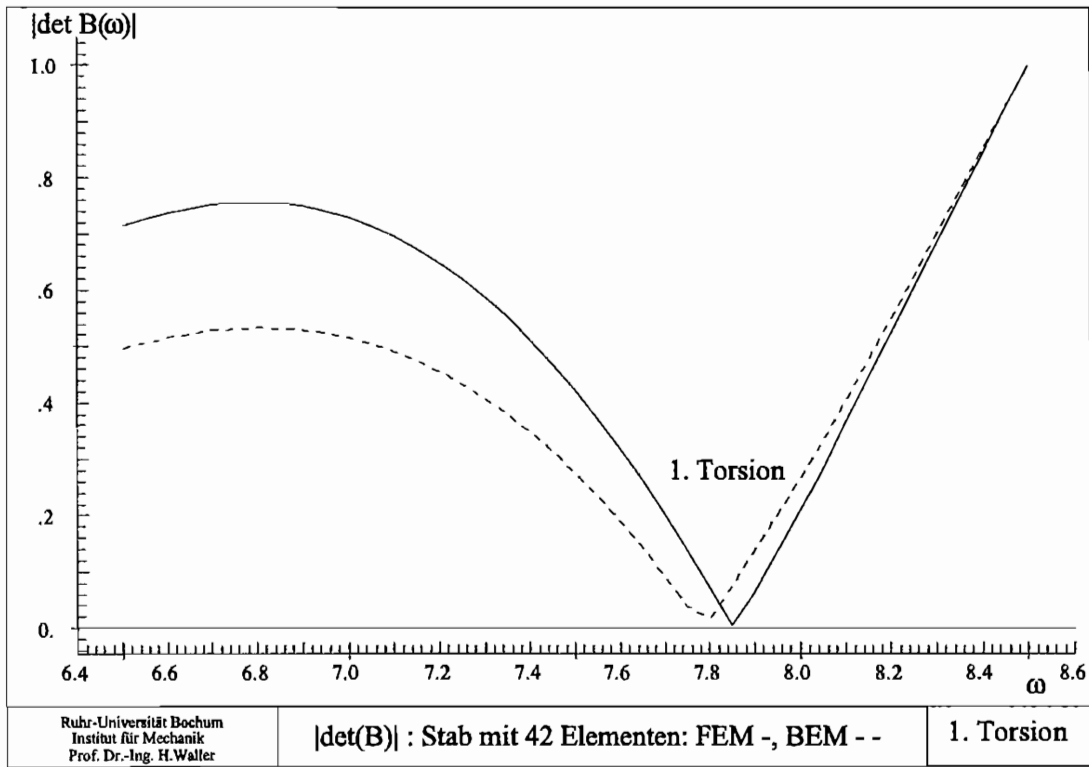


Abbildung 3.21: Vergleich FEM mit BEM

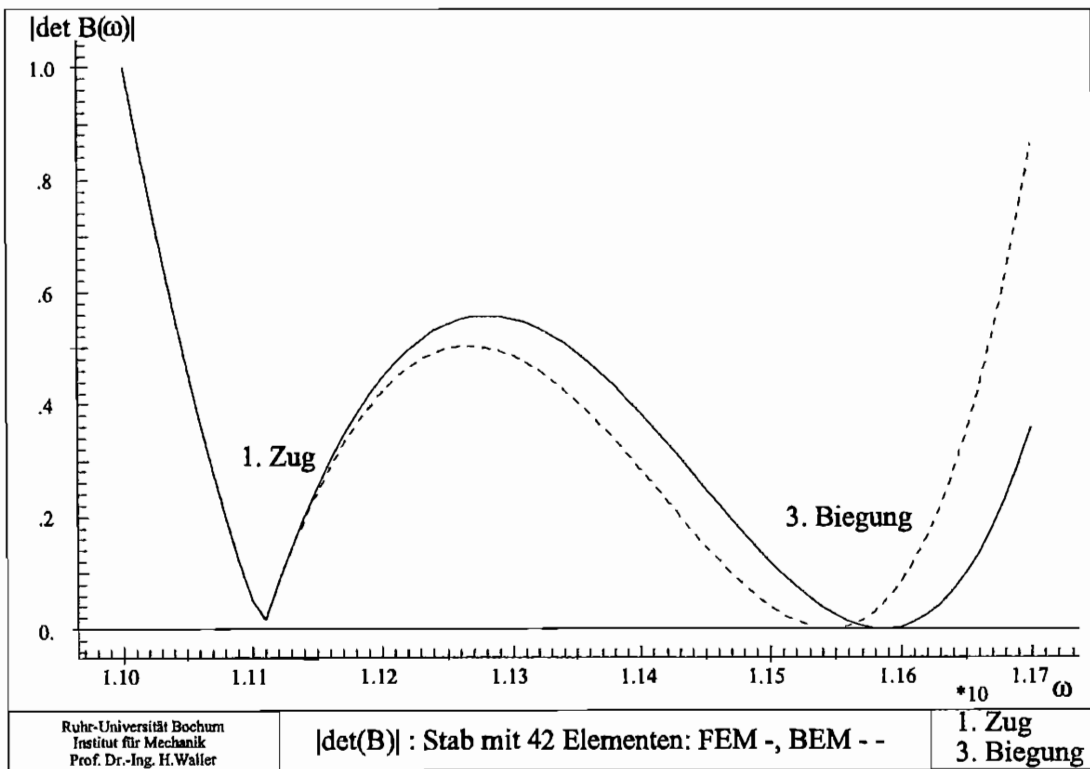


Abbildung 3.22: Vergleich FEM mit BEM

3.2.7 Formen der Systemmatrix $\underline{B}(k)$

Wie bereits gezeigt, ist es besonders in Frequenzbereichen mit mehrfachen oder nahe zusammenliegenden Eigenwerten sinnvoll, mit der komplexen statt der reellen Systemmatrix zu arbeiten. Die komplexe Systemmatrix $\underline{B}(k)$ kann nun auf verschiedene Arten eingesetzt werden.

Als **erstes** wird direkt mit der komplexen Matrix gearbeitet. Die resultierenden Determinantenwerte sind komplex. Die verwendeten Eigenwertlösungsverfahren müssen sowohl mit dem Realteil als auch mit dem Imaginärteil bzw. dem daraus zu berechnenden Betrag arbeiten.

Die **zweite** Möglichkeit besteht darin, die komplexe Matrix in eine reelle Matrix mit doppelter Seitenlänge zu expandieren

$$\underline{B}^R = \begin{bmatrix} \underline{U} & -\underline{V} \\ \underline{V} & \underline{U} \end{bmatrix} \quad \text{aus: } \underline{B} = \underline{U} + i \underline{V} \quad . \quad (3.68)$$

Die Determinante von \underline{B}^R entspricht dem Betragsquadrat der Determinante von \underline{B} , die Determinantenwerte sind daher reelle Größen.

Eine **dritte** Möglichkeit besteht in der Multiplikation der Matrix mit ihrer konjugiert komplexen transponierten Matrix \underline{B}^* . Das Produkt hat ebenfalls das Betragsquadrat der Determinante von \underline{B} als Determinante, eine reelle Größe. Die so entstandene Matrix ist zudem hermitesch. Spezielle Verfahren können angewendet werden, die diese Eigenschaft ausnutzen. Zudem kann der Speicherbedarf fast halbiert werden, d.h. der benötigte Speicherplatz ist gleich dem einer reellen Matrix gleicher Kantenlänge.

Es gilt:

$$\det [\underline{B}^R] = \det [\underline{B} \underline{B}^*] = |\det [\underline{B}]|^2 \quad . \quad (3.69)$$

Die Berechnung mit \underline{B}^R und $\underline{B} \underline{B}^*$ (bzw. $\underline{B}^* \underline{B}$) hat den Vorteil, daß direkt die Größe zur Verfügung steht, deren Minimum die Lage eines Eigenwertes anzeigt: der Betrag der Determinante von \underline{B} .

Als Nachteil der Verwendung von \underline{B}^R ist der doppelte Speicherplatzbedarf gegenüber \underline{B} zu nennen. Für die Rechnung mit $\underline{B} \underline{B}^*$ ist eine zusätzliche Multiplikation erforderlich.

Bei der Berechnung zeigen sich nur unwesentliche Unterschiede in den Ergebnissen. In Tabelle (3.3) werden die Resultate der drei Möglichkeiten verglichen. Dargestellt sind die Determinantenwerte bzw. Betragsquadrate für den im letzten Abschnitt dargestellten Akustik-Würfel (54 Elemente) im Bereich um den 4. Eigenwert (siehe Tabelle 3.1). Die Werte sind jeweils auf den Determinantenwert bei der Wellenzahl $k = 36.128 \text{ 1/m}$ normiert.

$\frac{k}{1/m}$	36.20	36.25	36.30
$ \det [\underline{B}] ^2$	1.071379	1.040707	0.9144718
$\det [\underline{B}^R]$	1.071326	1.040714	0.9144209
$\det [\underline{B} \underline{B}^*]$	1.071467	1.040780	0.9143875

Tabelle 3.3: Determinantenwerte bei beliebig ausgewählten Frequenzen für verschiedene Formen der Systemmatrix

3.3 Linearisierung des Eigenwertproblems der REM

In den folgenden Abschnitten werden Verfahren vorgeführt, die auf der Linearisierung des Eigenwertproblems basieren. Die Linearisierung setzt eine Reihenentwicklung der Systemmatrix $\underline{B}(k)$ mit Hilfe einer endlichen Anzahl frequenzunabhängiger Matrizen (die als Matrizen-tupel bezeichnet werden) voraus. Mit der Reihenentwicklung und der damit vorgenommenen Günther'schen Expansion gelingt die Linearisierung. Der Einsatz linearer Eigenwertlöser wird möglich.

3.3.1 Günther'sche Expansion von Matrizen

Eine nichtlineare Eigenwertaufgabe der Form

$$\underline{B}(k) \vec{x} = \vec{0} \quad (3.70)$$

mit dem (Rechts-)Eigenvektor \vec{x} und dem Matrizen-tupel

$$\underline{B}(k) \approx \underline{B}_0 + \underline{B}_1 k + \underline{B}_2 k^2 + \dots + \underline{B}_\rho k^\rho \quad , \quad (3.71)$$

kann mit Hilfe elementarer Substitutionen in ein lineares Eigenwertproblem transformiert werden (siehe [276] [277]). Für die Berechnung des Eigenvektors gilt :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 \quad ; \quad k \cdot \vec{x} = \vec{x}_1 \quad \dots \quad k^i \cdot \vec{x} = \vec{x}_i \quad (3.72)$$

mit: $i = 0, \dots, \rho$.

Die Eigenwert-Aufgabe nimmt dann folgendes Aussehen an

$$\underline{B}_0 \vec{x}_0 + \underline{B}_1 \vec{x}_1 + \dots + \underline{B}_\rho \vec{x}_\rho = \vec{0} \quad . \quad (3.73)$$

Mit der Regel

$$\vec{x}_{i+1} = k \cdot \vec{x}_i \quad \text{mit: } i = 0, 1, \dots, \rho - 1 \quad ,$$

die sich aus der Definition (3.73) ergibt, kann das lineare Block-Matrizenystem

$$\tilde{\underline{A}} \vec{x} = k \cdot \tilde{\underline{C}} \vec{x} \quad (3.74)$$

mit

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\underline{B}_{\rho-1} & -\underline{B}_{\rho-2} & \dots & -\underline{B}_1 & -\underline{B}_0 \\ \underline{I} & & & & \underline{0} \\ & & \ddots & & \underline{0} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & & & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{B}_\rho & \underline{0} & \dots & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \underline{0} & & & & \underline{I} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^T = (\vec{x}_{\rho-1}; \vec{x}_{\rho-2}; \dots; \vec{x}_0)^T$$

aufgestellt werden. Wobei die nicht aufgeführten Elemente von $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\underline{C}}$ zu Null gesetzt werden.

Analog kann für die Berechnung der Linkseigenvektoren \vec{y} die Eigenwertgleichung

$$\vec{y}^T \underline{B}(k) = \vec{0} \quad (3.75)$$

aufgestellt werden. Für die Linkseigenvektoren kann man die gleichen Substitutionen wie bei den Rechtseigenvektoren einführen

$$\vec{y} = \vec{y}_0 \quad ; \quad k \cdot \vec{y} = \vec{y}_1 \quad ; \quad k^i \cdot \vec{y} = \vec{y}_i \quad (3.76)$$

mit: $i = 0, \dots, \rho$

$$\Rightarrow \vec{y}_{i+1} = k \vec{y}_i \quad i = 0, 1, \dots, \rho - 1 \quad .$$

Somit ändern sich die Matrizen \tilde{A} und \tilde{C} für die Bestimmung der Linkseigenvektoren nicht. Lediglich die Position des Vektors verschiebt sich analog der Eigenwertgleichung (3.75)

$$\vec{y}^T \tilde{A} = k \cdot \vec{y}^T \tilde{C} \quad (3.77)$$

$$\text{mit: } \vec{y}^T = (\vec{y}_{\rho-1}; \vec{y}_{\rho-2}; \dots; \vec{y}_0)^T .$$

\tilde{A} und \tilde{C} haben die Größe $n^* = \rho \cdot n$. Dem Nachteil eines stark gestiegenen Speicherplatzbedarfes aufgrund der größeren Matrizen, steht der Vorteil gegenüber, daß für die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren ein linearer Eigenwertlöser (QR- bzw. QZ-Algorithmus) benutzt werden kann.

Ist die Matrix \underline{B}_ρ invertierbar, kann Gleichung (3.74) in das spezielle Eigenwertproblem

$$\tilde{C}^{-1} \tilde{A} \vec{x} = k \cdot \underline{I} \vec{x} \quad (3.78)$$

überführt werden.

Die folgende Untersuchung zeigt jedoch, daß dies nicht möglich ist. Die Matrix \underline{B}_ρ ist singulär.

Betrachtet wird das Beispiel des Akustik-Würfels mit 54 Elementen (siehe Bilder 3.3 und 3.5). Die Konditionszahlen κ_i (basierend auf der euklidischen Norm) der Matrizen \underline{B}_i des Matrixentupels werden in Tabelle (3.4) aufgeführt. Die Konditionszahlen sind auf die Konditionszahl der Matrix \underline{B}_0 $\kappa_0 = 8753$ normiert. Die Matrizen sind bei einer beliebigen Wellenzahl k_0 , die einen ausreichenden Abstand von einem Eigenwert hat, entwickelt worden.

i	κ_i
0	1.00D+00
1	1.03D+08
2	1.69D+03
3	1.01D+08
4	1.23D+05
5	1.16D+07
6	0.85D+07
7	1.13D+07

Tabelle 3.4: Konditionszahlen der Matrizen \underline{B}_i

Die Konditionszahlen zeigen, daß das spezielle Eigenwertproblem in dieser Form nicht aufgestellt werden kann. Um dennoch mit dem speziellen Eigenwertproblem arbeiten zu können, wird die Berechnung mit dem *inversen Eigenwert* eingeführt.

Berechnung mit dem inversen Eigenwert

Ausgangsgleichung ist das Matrizenpolynom $\underline{B}(k)$ mit dem zugehörigen Eigenwertproblem

$$\underline{B}(k) \vec{x} = (\underline{B}_0 + \underline{B}_1 k + \underline{B}_2 k^2 + \dots + \underline{B}_\rho k^\rho) \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.79)$$

Diese Gleichung wird durch k^ρ dividiert

$$(\underline{B}_0 \frac{1}{k^\rho} + \underline{B}_1 \frac{k}{k^\rho} + \underline{B}_2 \frac{k^2}{k^\rho} + \dots + \underline{B}_\rho) \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.80)$$

Die Substitution $\kappa = \frac{1}{k}$ bzw. $\kappa^n = \frac{1}{k^n}$ führt zum Eigenwertproblem

$$\hat{\underline{B}}(k) \vec{x} = (\underline{B}_\rho + \underline{B}_{\rho-1} \kappa + \dots + \underline{B}_1 \kappa^{\rho-1} + \underline{B}_0 \kappa^\rho) \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.81)$$

Die Günther'sche Expansion dieses Matrizenpolynoms liefert folgende Matrizen

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\underline{B}_1 & -\underline{B}_2 & \dots & -\underline{B}_{\rho-1} & -\underline{B}_\rho \\ \underline{I} & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & \underline{0} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \underline{0} & & & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\tilde{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{B}_0 & \underline{0} & \dots & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \underline{0} & & & & \underline{I} \end{bmatrix}$$

Die Matrix \underline{B}_0 ist dann invertierbar, wenn am Entwicklungspunkt kein Eigenwert vorliegt. Liegt ein Eigenwert vor, ist eine Reihenentwicklung nicht mehr erforderlich, da der Eigenwert bereits gefunden wurde. Die Matrizenexpansion kann mit einem anderen Entwicklungspunkt neu beginnen. Ist die Matrix \underline{B}_0 fast-singulär (der letzte Singulärwert ist relativ klein bzw. mehrere Singulärwerte sind klein), empfiehlt es sich, Verfahren auf die vorliegenden Matrizen $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\underline{C}}$ anzuwenden.

Bei invertierbarem \underline{B}_0 kann das allgemeine Eigenwertproblem (3.74) in das spezielle überführt werden. Dazu wird das Matrizenpolynom mit \underline{B}_0^{-1} von links multipliziert

$$(\underline{B}_0^{-1} \underline{B}_\rho + \underline{B}_0^{-1} \underline{B}_{\rho-1} \kappa + \dots + \underline{B}_0^{-1} \underline{B}_1 \kappa^{\rho-1} + \underline{I} \kappa^\rho) \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.83)$$

Die Günther'sche Expansion führt mit der Abkürzung $\underline{B}_0^{-1} \underline{B}_n = \underline{B}_n^*$ zu den beiden Matrizen

$$\tilde{A}^* = \begin{bmatrix} -\underline{B}_1^* & -\underline{B}_2^* & \dots & -\underline{B}_{\rho-1}^* & -\underline{B}_\rho^* \\ \underline{I} & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & \underline{0} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \underline{0} & & & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\tilde{C}^* = \underline{I} \quad .$$

Die Art der Expansion entscheidet nun darüber, welche Verfahren zur Lösung des linearisierten Eigenwertproblems eingesetzt werden können.

Wird das allgemeine Eigenwertproblem gelöst (wenn \underline{B}_0 nicht invertierbar ist) kann der QZ-Algorithmus eingesetzt werden, da er speziell für diesen Fall entwickelt worden ist.

Der QR-Algorithmus kann eingesetzt werden, wenn das spezielle Eigenwertproblem (\underline{B}_0 ist invertierbar) möglich ist. Diese beiden Verfahren werden in folgenden Abschnitt kurz beschrieben.

3.3.2 QR-Algorithmus zur Lösung des speziellen Eigenwertproblems

Der QR-Algorithmus dient zur Lösung des speziellen Eigenwertproblems

$$\underline{A}_0 \vec{x} = k \underline{I} \vec{x} \quad . \quad (3.85)$$

QR-Zerlegung einer Matrix

Jede Matrix \underline{A}_0 der Größe $n \times n$ kann in das Produkt einer unitären Matrix \underline{Q}_0^* und einer oberen Dreiecksmatrix \underline{R}_0 zerlegt werden. Für reguläre Matrizen \underline{A}_0 kann die Zerlegung mit Hilfe des modifizierten Gram-Schmidt Verfahrens erfolgen [39]

$$\underline{A}_0 = \underline{Q}_0^* \underline{R}_0 \Rightarrow \underline{R}_0 = \underline{Q}_0 \underline{A}_0 \quad . \quad (3.86)$$

Nun wird eine neue Matrix \underline{A}_1 definiert, die aus einer Ähnlichkeitstransformation hervorgeht und damit die gleichen Eigenwerte wie \underline{A}_0 hat

$$\underline{A}_1 = \underline{R}_0 \underline{Q}_0^* = \underline{Q}_0 \underline{A}_0 \underline{Q}_0^* \quad . \quad (3.87)$$

Dieser Schritt wird wiederholt, es werden weitere Ähnlichkeitstransformationen durchgeführt

$$\underline{A}_{i+1} = \underline{Q}_i \underline{A}_i \underline{Q}_i^* \quad . \quad (3.88)$$

Die Matrix \underline{A}_{i+1} konvergiert dabei gegen eine obere Dreiecksmatrix. Bei ausreichend kleinen Nebendiagonalelementen unterhalb der Hauptdiagonalen, können die Eigenwerte als Hauptdiagonalelemente von \underline{A}_{i+1} abgelesen werden.

Modifikationen des QR-Algorithmus

Die Konvergenz des Verfahrens kann gesteigert werden, wenn bei jedem Iterationsschritt eine Spektralverschiebung vorgenommen wird

$$\underline{A}_i = \underline{Q}_i^* \underline{R}_i + \sigma_i \underline{I} \Rightarrow \underline{R}_i = \underline{Q}_i \underline{A}_i - \sigma_i \underline{Q}_i \quad . \quad (3.89)$$

Damit folgt

$$\underline{A}_{i+1} = \underline{R}_i \underline{Q}_i^* + \sigma_i \underline{I} = \underline{Q}_i \underline{A}_i \underline{Q}_i^* \quad . \quad (3.90)$$

Der Rechenaufwand wird verringert, wenn vor der Iteration eine orthogonale Ähnlichkeitstransformation der Matrix \underline{A}_0 auf Hessenberg-Form erfolgt. Der QR-Algorithmus liefert bei der so erzeugten Bandstruktur besonders schnell die gewünschten Ergebnisse.

Eine *Hessenberg-Matrix* ist eine Matrix, die sich als Summe einer Dreiecksmatrix und einer Matrix, die nur eine Kodiagonale direkt neben der Hauptdiagonalen ungleich Null hat, ergibt.

Transformation auf Hessenberg-Form

Mit Hilfe der Transformationsmatrix \tilde{Q} wird die Matrix \underline{A}_0 in eine Hessenberg-Matrix \underline{H}_0 überführt. Dazu wird die Gleichung

$$\underline{A}_0 \vec{x} = k \underline{I} \vec{x} \quad (3.91)$$

mit einer unitären Matrix \tilde{Q} erweitert

$$\underline{A}_0 \tilde{Q}^* \tilde{Q} \vec{x} = k \tilde{Q}^* \tilde{Q} \vec{x} \quad . \quad (3.92)$$

Ein neuer Vektor \vec{z} wird eingeführt

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{Q}} \vec{x} &= \vec{z} \\ \Rightarrow \underline{A}_0 \underline{\tilde{Q}}^* \vec{z} &= k \underline{\tilde{Q}}^* \vec{z} \quad .\end{aligned}\tag{3.93}$$

Multiplikation von links mit $\underline{\tilde{Q}}$ liefert

$$\underline{\tilde{Q}} \underline{A}_0 \underline{\tilde{Q}}^* \vec{z} = k \underline{I} \vec{z} \tag{3.94}$$

oder

$$\underline{H}_0 \vec{z} = k \underline{I} \vec{z} \quad . \tag{3.95}$$

Die Transformationsmatrix $\underline{\tilde{Q}}$ ergibt sich dabei iterativ als Produkt vieler Einzelmatrizen. Die Eigenwerte des Systems ändern sich durch die Umformungen nicht.

Der QR-Algorithmus ist nun auf das transformierte Problem anzuwenden.

3.3.3 QZ–Algorithmus zur Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

Ist die Umformung des allgemeinen Eigenwertproblems wegen (Fast-) Singularität der Matrix \underline{B} nicht möglich, muß das allgemeine Eigenwertproblem direkt gelöst werden.

Zur Lösung dieser Problemstellung (singuläre oder fast-singuläre Matrix \underline{B}_0 und damit auch $\underline{\tilde{C}}$), ist der QZ-Algorithmus entwickelt worden ([184], [136], [206], [207], [181], [80]). Dieser löst das allgemeine Eigenwertproblem, ohne dabei $\underline{\tilde{C}}$ zu invertieren und stellt die Verallgemeinerung des QR-Algorithmus dar.

Ausgangspunkt ist der Satz über die *Allgemeine Schur Zerlegung*, dessen Beweis in [85] und [184] aufgeführt wird. Für die beiden Matrizen $\underline{\tilde{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\underline{\tilde{C}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existieren unitäre Transformationsmatrizen \underline{Q} und \underline{Z} , so daß $\underline{Q}^* \underline{\tilde{A}} \underline{Z} = \underline{T}$ und $\underline{Q}^* \underline{\tilde{C}} \underline{Z} = \underline{S}$ obere Dreiecksmatrizen sind. Die Eigenwerte des allgemeinen Eigenwertproblems k_i ergeben sich zu

$$k_i = \frac{t_{ii}}{s_{ii}} \quad | \quad s_{ii} \neq 0 \quad . \tag{3.96}$$

Für den Fall $s_{ii} = 0$ ist eine Fallunterscheidung bezüglich des Eigenwertes erforderlich [184].

Diese Fälle treten aber für den hier betrachteten Problemkreis nicht auf, da mit $s_{ii} = 0$ die Matrix \underline{B}_0 singulär ist und damit ein Eigenwert gefunden ist. Die Reihenentwicklung kann mit einem anderem Entwicklungspunkt erneut erfolgen.

Nun werden die Einzelschritte des QZ-Algorithmus kurz erläutert.

1. Schritt (Vorbereitungsschritt)

Im ersten Schritt erfolgt die Transformation der Matrix \tilde{C} auf obere Dreiecksform $\tilde{C}_0 = \underline{Q} \tilde{C}$.

Natürlich muß die Transformation mit \underline{Q} auf der linken Seite der Gleichung $\tilde{A} \vec{x} = k \tilde{C} \vec{x}$ ebenfalls ausgeführt werden

$$\tilde{A}_0 = \underline{Q} \tilde{A} \quad . \quad (3.97)$$

Jetzt erfolgen die Transformationen von \tilde{A}_0 auf Hessenberg-Form, ohne daß \tilde{C}_0 die Dreiecksform verliert.

Diese Transformationen werden iterativ durchgeführt und bestehen aus zwei Teilschritten.

Im ersten Teilschritt erfolgt eine Transformation mit der Absicht, \tilde{A}_0 auf Hessenberg-Form zu bringen. Diese Transformation ist natürlich auch auf \tilde{C}_0 anzuwenden, wobei deren Dreiecksform zunächst verloren geht

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1a} &= \underline{Q}_1 \tilde{A}_0 \\ \tilde{C}_{1a} &= \underline{Q}_1 \tilde{C}_0 \quad . \end{aligned} \quad (3.98)$$

Im zweiten Teilschritt wird eine weitere Transformation durchgeführt. Diese bringt \tilde{C}_{1a} zurück auf Dreiecksform, ohne das Ergebnis der Transformation des ersten Teilschrittes auf \tilde{A}_0 aufzuheben

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1b} &= \tilde{A}_{1a} \underline{Z}_1 \\ \tilde{C}_{1b} &= \tilde{C}_{1a} \underline{Z}_1 \quad . \end{aligned} \quad (3.99)$$

Diese Art der Transformation wird solange durchgeführt, bis die Matrix \tilde{A}_{ib} Hessenberg-Form annimmt. Abkürzend wird gesetzt

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \tilde{A}_{ib} \\ \hat{C} &= \tilde{C}_{ib} \quad . \end{aligned} \quad (3.100)$$

Der Vorteil dieser Vorabrechnung liegt darin, daß bei weiteren Transformationen weniger Rechenaufwand erforderlich ist. Die Vorzüge der Hessenberg-Matrix und der Dreiecksmatrix können bei den folgenden Operationen (Multiplikationen, Matrizenzerlegungen) vorteilhaft eingesetzt werden.

2. Schritt (eigentlicher QZ-Schritt)

Nun wird ein Algorithmus gesucht, der die Matrix \hat{A} auf Dreiecksform reduziert, wobei die Dreiecksform von \hat{C} nicht zerstört werden darf.

Dazu werden zuerst (rein formal!) $\hat{D} = \hat{A} \hat{C}^{-1}$ und $\hat{C} \vec{x} = \vec{x}^*$ gesetzt und damit das allgemeine Eigenwertproblem (formal) in das spezielle Eigenwertproblem überführt

$$\hat{A} \vec{x} = k \cdot \hat{C} \vec{x} \Rightarrow \hat{D} \vec{x}^* = k \cdot \underline{I} \vec{x}^* \quad . \quad (3.101)$$

Analog zum QR-Algorithmus wird eine QR-Zerlegung mit Spektralverschiebung durchgeführt

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \underline{Q}^* \underline{R} + \sigma \underline{I} \\ \underline{Q} \hat{D} &= \underline{R} + \sigma \underline{Q} \quad . \end{aligned} \quad (3.102)$$

Einsetzen von $\hat{D} = \hat{A} \hat{C}^{-1}$ führt zu

$$\begin{aligned} \underline{Q} \hat{A} &= \underline{R} \hat{C} + \sigma \underline{Q} \hat{C} \\ \underline{Q} (\hat{A} - \sigma \hat{C}) &= \underline{R} \hat{C} = \underline{S} \quad . \end{aligned} \quad (3.103)$$

Da \underline{R} und \hat{C} Dreiecksform haben, muß \underline{S} auch Dreiecksform besitzen. Die Transformation von \underline{S} auf Dreiecksform wird schrittweise durchgeführt. Pro Iterationsschritt werden dabei zwei Teilschritte durchlaufen.

1. Teilschritt

Durch Multiplikation mit \underline{Q}_1 wird $(\hat{A} - \sigma \hat{C})$ spaltenweise auf Dreiecksform gebracht. Diese Transformation wird auch mit der Matrix \hat{C} durchgeführt. Diese Matrix verliert dabei ihre Dreiecksform. Um diese Dreiecksform wieder herzustellen, erfolgt eine weitere Transformation der Form

$$\begin{aligned} \underline{Q}_1 (\hat{A} - \sigma \hat{C}) \underline{Z}_1 &= \hat{T} \\ \underline{Q}_1 \hat{C} \underline{Z}_1 &= \hat{C}_1 \quad . \end{aligned} \quad (3.104)$$

Diese Schritte werden solange wiederholt, bis \underline{S} Dreiecksform angenommen hat.

2. Teilschritt

Nun wird

$$\hat{A}_1 = \underline{Q} \hat{A} \underline{Z} = \underline{S} \underline{Z} + \sigma \underline{Q} \hat{C} \underline{Z} \quad (3.105)$$

gebildet. Erst wenn \hat{A}_1 Dreiecksform hat, wird der Algorithmus gestoppt. Ist dies nicht der Fall, wird der Algorithmus mit \hat{A}_1 und \hat{C}_1 wiederholt. Als Ausgangsgleichung dient dann $\hat{A}_1 \vec{x} = k \hat{C}_1 \vec{x}$. Nach n Iterationen sind \hat{A}_n und \hat{C}_n auf Dreiecksform gebracht. Die Eigenwerte können aus den Diagonalelementen berechnet werden (s.o.).

Berechnung der Eigenvektoren beim QZ-Algorithmus

Für die Berechnung der Eigenvektoren beim QZ-Algorithmus wird zunächst die Eigenwertgleichung betrachtet. Für den Rechtseigenvektor gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \vec{x} &= k \tilde{C} \vec{x} \\ \underline{Q} \tilde{A} \underline{Z} \vec{z}_R &= k \underline{Q} \tilde{C} \underline{Z} \vec{z}_R \\ \hat{A}_n \vec{z}_R &= k \hat{C}_n \vec{z}_R \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\text{mit: } \vec{x} = \underline{Z} \vec{z}_R \quad .$$

Wobei \underline{Q} die Multiplikationen aller Transformationen links von \tilde{A} bzw. \tilde{C} sind und \underline{Z} die Multiplikationen aller Transformationen rechts von \tilde{A} bzw. \tilde{C} . Diese Gleichung kann man so umformen, daß auf der rechten Seite der Nullvektor steht

$$(\hat{A}_n - k \hat{C}_n) \vec{z}_R = \vec{0} \quad . \quad (3.107)$$

Da \hat{A}_n und \hat{C}_n obere Dreiecksform besitzen, hat der Klammerausdruck ebenfalls Dreiecksform. Somit kann durch Einsetzen von k und rekursiver Ermittlung des letzten Elementes von \vec{z}_R der Eigenvektor berechnet werden. \vec{x} ist durch die Definition $\vec{x} = \underline{Z} \vec{z}_R$ ebenfalls gegeben.

Auf ähnliche Weise erfolgt die Berechnung des Linkseigenvektors. Jedoch gilt hier :

$$\vec{z}_L = \vec{y}^T \underline{Q} \quad . \quad (3.108)$$

3.4 Iterative Lösungsverfahren für das nichtlineare Eigenwertproblem

Die bisher beschriebenen Verfahren basieren auf einer Reihenentwicklung der Systemmatrix $\underline{B}(k)$ und anschließender Polynomexpansion, die z.B. als Günther'sche Expansion ausgeführt werden kann. Der große Vorteil dieses Vorgehens besteht in der Einsatzmöglichkeit linearer Eigenwertlöser. Nachteilig ist jedoch die Größe der resultierenden Systemmatrizen $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\underline{C}}$. Während $\underline{B}(k)$ die Größe $n \times n$ hat, haben $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\underline{C}}$ die Seitenlänge $n^* = \rho n$ (ρ ist der Grad des Matrizenpolynoms).

Dem praktischen Einsatz sind durch den enorm gestiegenen Speicherplatzbedarf Grenzen gesetzt. In diesem Abschnitt werden daher Verfahren vorgestellt, die mit Matrizen der ursprünglichen Dimension $n \times n$ der Matrix $\underline{B}(k)$ arbeiten.

Die Verfahren werden zuerst allgemein vorgestellt, dann speziell auf die gegebene Problemstellung angewendet.

Die Aufgabe besteht darin, Nullstellen der stetigen Funktion $\eta(k) = \det [\underline{B}(k)]$ in einem Intervall $I = [a, b]$ zu bestimmen.

3.4.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei den Intervallschachtelungsverfahren wird versucht, zunächst ein Teilintervall $I_0 \subset I$ zu finden, in dem $\eta(k)$ eine Nullstelle besitzt. Mit Hilfe eines Testpunktes k_N wird dann ein neues Intervall $I_1 \subset I_0$ bestimmt. Das Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ kann mit Hilfe zweier Punkte a_0, b_0 , $a \leq a_0 < b_0 \leq b$ ermittelt werden, wenn gilt

$$\eta(a_0) \cdot \eta(b_0) < 0 \quad . \quad (3.109)$$

Die Funktion $\eta(k)$ wechselt dann im Intervall I_0 mindestens einmal das Vorzeichen und besitzt damit in I_0 mindestens eine Nullstelle.

In den weiteren Schritten wird nun die Nullstelle k_E als Endpunkt eines Intervalls $I_j = [a_j, b_j]$ mit $\eta(a_j) \cdot \eta(b_j) < 0$ angenommen.

Die Vorschrift dafür lautet:

1. k_{Nj} wird vorgewählt mit $a_j < k_{Nj} < b_j$
2. falls $\eta(k_{Nj}) = 0$ ist $k_{Nj} = k_E$, sonst wird gesetzt

$$\bullet a_{j+1} = \begin{cases} a_j & : \eta(a_j) \cdot \eta(k_{Nj}) < 0 \\ k_{Nj} & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\bullet \quad b_{j+1} = \begin{cases} k_{Nj} & : \eta(a_j) \cdot \eta(k_{Nj}) < 0 \\ b_j & : \text{sonst} \end{cases} .$$

Spezielle Verfahren werden nach der Wahl des Testpunktes k_{Nj} unterschieden. Hier werden das Intervallhalbierungsverfahren und die Regula Falsi angegeben.

Intervallhalbierungsverfahren (Bisektionsmethode)

Der Testpunkt k_{Nj} wird nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$k_{Nj} = \frac{a_j + b_j}{2} . \quad (3.110)$$

Bei jedem Schritt wird ein Teilintervall halber Länge gewählt, indem $\eta(k)$ das Vorzeichen wechselt. Bereits nach 10 Schritten ist das aktuelle Intervall I_j auf $1/1024$ des gegebenen Intervalls I reduziert.

Regula Falsi

k_{Nj} wird als Nullstelle der Sekante durch die Punkte $[a_j, \eta(a_j)]$ und $[b_j, \eta(b_j)]$ gewählt

$$k_{Nj} = a_j - \frac{b_j - a_j}{\eta(b_j) - \eta(a_j)} \eta(a_j) . \quad (3.111)$$

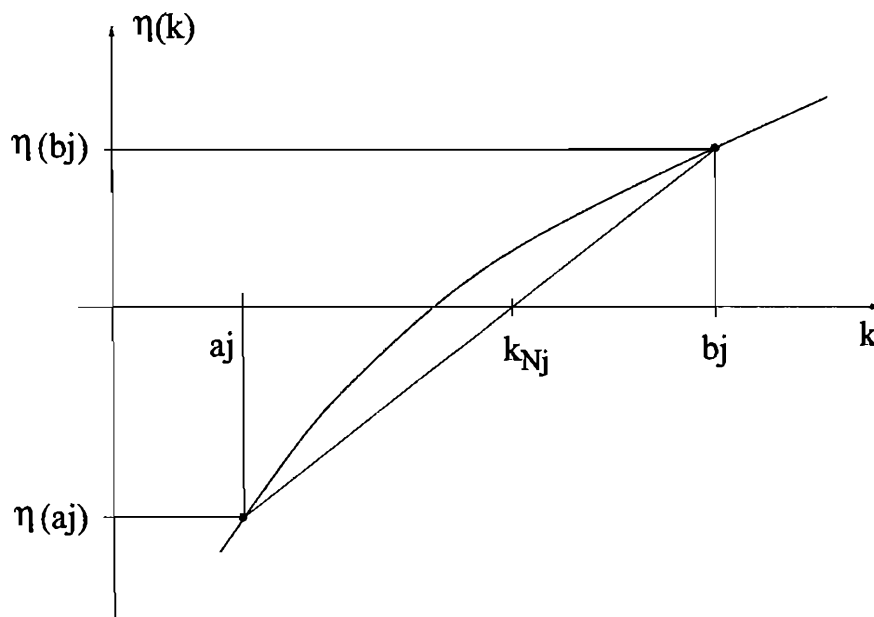


Abbildung 3.23: Regula Falsi

3.4.2 Newton-Verfahren

Eine Funktion $\eta(k)$ kann mit Hilfe ihrer Taylorentwicklung näherungsweise ausgedrückt werden. Wird die Taylorentwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen, folgt

$$\eta(k_{i+1}) \approx \eta(k_i) + \eta'(k_i) (k_{i+1} - k_i) \quad . \quad (3.112)$$

Wird nun gefordert, daß bei k_{i+1} eine Nullstelle der Taylorentwicklung liegt $\eta(k_{i+1}) = 0$, folgt die Iterationsformel

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\eta(k_i)}{\eta'(k_i)} \quad . \quad (3.113)$$

Die Funktion wird durch eine Gerade angenähert, die im Entwicklungspunkt k_i den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung wie die Funktion selbst hat. Die Nullstelle der Geraden wird als nächste Näherung an die Nullstelle k_E der Funktion gewählt.

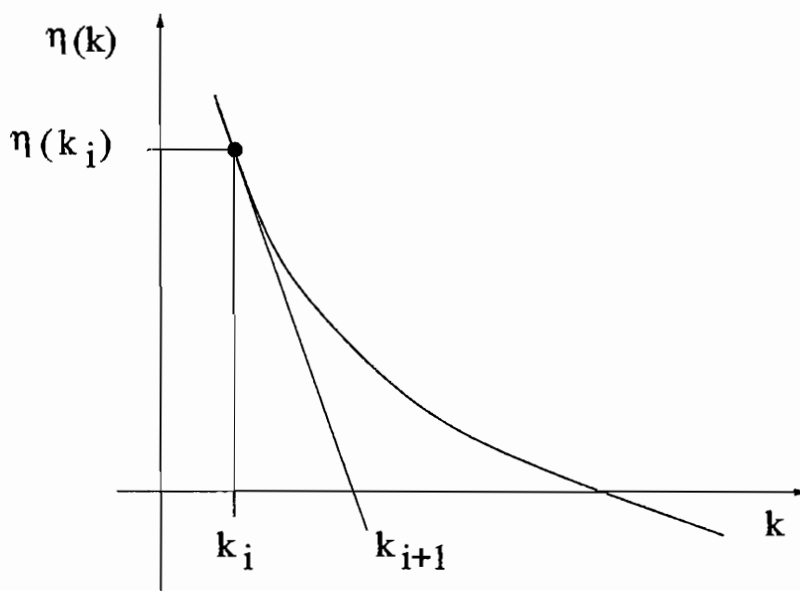


Abbildung 3.24: Newton-Verfahren

Newton-Verfahren höherer Ordnung

Sollen Iterationsformeln höherer Ordnung ρ hergeleitet werden, ist die Taylorreihe erst nach dem Glied der Ordnung ρ abzubrechen. Wird die Taylorreihe beispielsweise nach dem quadratischen Glied abgebrochen, ergibt sich die Iterationsformel

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\eta(k_i)}{\eta'(k_i)} \left(1 + \frac{\eta(k_i) \eta''(k_i)}{2 [\eta'(k_i)]^2} \right) \quad . \quad (3.114)$$

Die Konvergenzkriterien solcher Iterationsformel sind jedoch sehr schwer zu überprüfen ([248]).

3.4.3 Sekantenverfahren

Dieses Verfahren zeigt gegenüber der Regula Falsi bessere Konvergenz, die Einschließungseigenschaft (Nullstelle immer zwischen a_j und b_j) geht aber verloren.

Nach der Newton'schen Interpolationsformel bis zum linearen Glied gilt

$$\eta(k_{i+1}) \approx \eta(k_i) + \eta'(k_i) (k_{i+1} - k_i) \quad . \quad (3.115)$$

Daraus folgt

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\eta(k_i)}{\eta'(k_i)} \quad . \quad (3.116)$$

Die Ableitung $\eta'(k_i)$ kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\eta'(k_i) = \lim_{k_i \rightarrow k_{i+1}} \frac{\eta(k_{i+1}) - \eta(k_i)}{k_{i+1} - k_i} \quad . \quad (3.117)$$

Für k_{i+1} in der Nähe von k_i kann $\eta'(k_i)$ durch den Differenzenquotienten angenähert werden

$$\eta'(k_i) \approx \frac{\eta(k_{i+1}) - \eta(k_i)}{k_{i+1} - k_i} \quad . \quad (3.118)$$

Diese Gleichung wird in die Iterationsformel eingesetzt

$$k_{i+2} = k_{i+1} - \eta(k_{i+1}) \frac{k_{i+1} - k_i}{\eta(k_{i+1}) - \eta(k_i)} \quad . \quad (3.119)$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die Sekante durch die Punkte $[k_i, \eta(k_i)]$ und $[k_{i+1}, \eta(k_{i+1})]$ gelegt, und der Schnittpunkt der Sekante mit der Abszisse k_{i+2} berechnet wird (Bild 3.25). Der Vorteil des Sekantenverfahrens gegenüber dem Newton-Verfahren liegt darin, daß $\eta'(k)$ nicht ausgewertet werden muß.

Statt der Interpolation mit Hilfe einer Geraden kann das Verfahren auch alternativ mit quadratischer Interpolationsformel benutzt werden. Die auftretenden Ableitungen werden durch Differenzenquotienten angenähert.

3.4.4 Konvergenzordnungen der einzelnen Verfahren

Jedem der Verfahren wird eine Konvergenzordnung zugewiesen ([29]). Sie charakterisiert die Konvergenzgeschwindigkeit in der Nähe der Lösung und ist ein Maß für die Güte des Verfahrens.

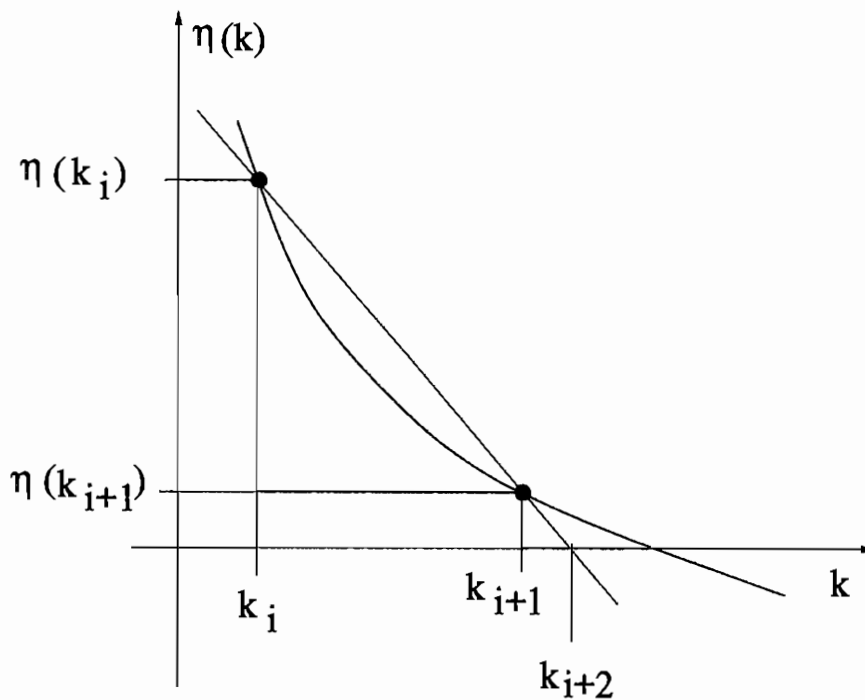


Abbildung 3.25: Sekantenverfahren

Ein Verfahren hat mindestens die Ordnung p ($p \geq 1$), wenn für $i \rightarrow \infty$

$$|k_{i+1} - k_E| \leq C |k_i - k_E|^p \quad (3.120)$$

mit einer Zahl $C > 0$ gilt. Das Iterationsverfahren heißt dann auch Verfahren p -ter Ordnung. Daß die Konvergenzordnung auch ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit ist, läßt sich wie folgt erklären.

Wird angenommen, daß $|k_{i+1} - k_E| < 1$ und C sich nicht allzusehr ändert, konvergiert ein Iterationsverfahren umso schneller, je größer die Ordnung p ist.

Die Herleitungen der Konvergenzordnungen der einzelnen Verfahren ist sehr aufwendig. In [248] werden die Herleitungen für das Newton- und das Sekantenverfahren gezeigt. In [29] wird die Konvergenzordnung für die Regula Falsi angegeben. Eine Zusammenfassung wird in der folgenden Tabelle (Tab. 3.5) angegeben. Bei der Bisektionsmethode ist die Ordnung p nicht im Sinne der Gleichung (3.120) definiert. Es gilt die Abschätzung

$$|k_{Ni} - k_E| \leq \frac{1}{2^{i+1}} (b_0 - a_0) \quad (3.121)$$

Für das Newton-Verfahren und das Sekantenverfahren gelten Kriterien für die Konvergenzeigenschaft. Erst wenn diese erfüllt sind, nehmen die Verfahren lokale oder globale Konvergenz (Newton-Verfahren) bzw. lokale Konvergenz (Sekantenverfahren) an. Die Kriterien werden in der später aufgeführten Anwendung der Verfahren dargestellt.

Verfahren	Konvergenzordnung
Regula Falsi	1
Newton-Verfahren	2
Sekanten-Verfahren	1,618

Tabelle 3.5: Mindestkonvergenzordnung von Iterationsverfahren

In der Literatur (z.B. [248],[102]) werden die vorgestellten Verfahren in Beispielen für verschiedene Funktionen verglichen. Newton- und Sekantenverfahren zeigen bei Berücksichtigung der Konvergenzkriterien die geringste Anzahl von Iterationen zur Annäherung an eine Nullstelle mit vorgegebener maximaler Abweichung.

Daher werden diese beiden Verfahren nun als Grundlage zur Entwicklung geeigneter Verfahren zur Lösung der charakteristischen Gleichung $\det[\underline{B}(k)] = 0$ gewählt.

3.4.5 Newton-Verfahren in der Anwendung

Im folgenden wird gezeigt, wie das Newton-Verfahren auf die charakteristische Gleichung $\eta(k) = \det[\underline{B}(k)]$ angewendet wird.

Die Iterationsformel lautet

$$k_{i+1} = k_i - \eta(k_i) / \frac{d\eta}{dk}(k_i) \quad . \quad (3.122)$$

In dieser Gleichung ist $\frac{d\eta}{dk}(k_i)$ eine noch unbekannte Größe. Diese wird nun bestimmt.

Dazu wird zunächst ein linearer Ansatz für die Systemmatrix $\underline{B}(k + \Delta k)$ gewählt

$$\underline{B}(k + \Delta k) \approx \underline{B}(k) + \underline{B}'(k) \Delta k \quad . \quad (3.123)$$

Damit folgt das Eigenwertproblem zu

$$[\underline{B}(k) + \underline{B}'(k) \Delta k] \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.124)$$

Jetzt ist das kleinste $|\Delta k|$ gesucht, welches diese Gleichung erfüllt.

Das weitere Vorgehen kann auf verschiedene Arten erfolgen. Diese werden später ausführlicher erläutert. Prinzipiell wird die letzte Gleichung dabei von links mit \underline{B}^{-1} multipliziert.

Mit der Abkürzungen $\underline{E} = \underline{B}^{-1} \underline{B}'$ und $\Delta k = \mu$ folgt die Gleichung

$$[\underline{I} + \underline{E} \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.125)$$

Die Matrix $\underline{E} \mu$ wird für kleine μ als kleine Störung der Einheitsmatrix betrachtet. Für die Determinante gilt dann näherungsweise

$$\det[\underline{I} + \underline{E} \mu] \approx \det[\underline{I}] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \det(\underline{I})}{\partial I_{ij}} \mu e_{ij} \quad . \quad (3.126)$$

Da $\frac{\partial \det(\underline{I})}{\partial I_{ij}}$ die Änderung nur eines Elementes aus \underline{I} beschreibt, folgt aufgrund des Aufbaus von \underline{I}

$$\frac{\partial \det(\underline{I})}{\partial I_{ij}} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases} \quad . \quad (3.127)$$

Aus Gleichung (3.126) ergibt sich

$$1 + \mu \sum_{i=1}^n e_{ii} = 0 \quad . \quad (3.128)$$

Die gesuchte Größe $\mu = \Delta k$ kann durch Umstellen bestimmt werden

$$\mu = - \frac{1}{\sum_{i=1}^n e_{ii}} = \Delta k \quad . \quad (3.129)$$

Da angesetzt wurde

$$k_{i+1} = k_i + \Delta k = k_i - \eta(k_i) / \frac{d\eta}{dk}(k_i) \quad , \quad (3.130)$$

folgt mit

$$\mu = \Delta k = - \eta(k_i) / \frac{d\eta}{dk}(k_i) - \frac{1}{\sum_{i=1}^n e_{ii}} \quad (3.131)$$

schließlich die gesuchte Iterationsformel

$$k_{i+1} = k_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^n e_{ii}} \quad . \quad (3.132)$$

Es wurde darauf hingewiesen, daß die Matrix \underline{E} auf verschiedene Arten aufgestellt werden kann. Die beiden wichtigsten Methoden werden nun kurz beschrieben.

Aufstellen der Störungsmatrix $\underline{E} \mu$

Ist die Matrix $\underline{B}(k)$ regulär, kann die LU-Zerlegung mit Pivotisierung effektiv eingesetzt werden. Wird die Matrix $\underline{B}(k)$ jedoch im Laufe der Iteration zunehmend singular, stellt die Singulärwertzerlegung das stabilere Verfahren dar. Beide Methoden werden im Anhang grundsätzlich beschrieben. Hier erfolgt nun die Anwendung.

Die LU-Zerlegung mit Pivotisierung

Ausgangsgleichung ist das Eigenwertproblem mit linearem Ansatz für \underline{B}

$$[\underline{B}(k) + \underline{B}'(k) \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad . \quad (3.133)$$

Nun wird die Matrix \underline{B} bei gleichzeitiger Pivotisierung in das Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix mit Hilfe der LU-Zerlegung zerlegt: $\underline{P} \underline{B} = \underline{L} \underline{U}$.

$$[\underline{P} \underline{B} + \underline{P} \underline{B}' \mu] \vec{x} = \vec{0}$$

$$[\underline{L} \underline{U} + \underline{P} \underline{B}' \mu] \vec{x} = \vec{0}$$

$$[\underline{I} + \underline{L}^{-1} \underline{P} \underline{B}' \underline{U}^{-1} \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad (3.134)$$

$$[\underline{I} + \underline{E} \mu] \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{mit } \underline{E} = \underline{L}^{-1} \underline{P} \underline{B}' \underline{U}^{-1} \quad .$$

Die Singulärwertzerlegung

Die Matrix $\underline{B}(k)$ wird mit Hilfe der Singulärwertzerlegung in das Produkt

$$\underline{B}(k) = \underline{Q} \underline{\Sigma} \underline{P}^* \quad (3.135)$$

zerlegt. \underline{Q} und \underline{P} sind dabei unitäre Matrizen, $\underline{\Sigma}$ ist eine Diagonalmatrix reeller Koeffizienten. Einsetzen in das Eigenwertproblem liefert

$$[\underline{Q} \underline{\Sigma} \underline{P}^* + \underline{B}' \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad (3.136)$$

$$[\underline{\Sigma} + \underline{Q}^* \underline{B}' \underline{P} \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad .$$

Die einzelnen Zeilen i der letzten Gleichung werden durch die Diagonalelemente Σ_{ii} dividiert (Sind diese Null, ist der Eigenwert bereits gefunden, der Algorithmus kann gestoppt werden.)

$$[\underline{I} + \underline{E} \mu] \vec{x} = \vec{0} \quad (3.137)$$

$$\text{mit: } \underline{E} = \underline{\Sigma}^{-1} \underline{Q}^* \underline{B}' \underline{P} \quad .$$

Bemerkungen zu den beiden Verfahren

Nähert man sich im Laufe des Iterationsprozesses dem Eigenwert, werden die Diagonalelemente sehr klein. Die Bildung der Matrix \underline{U}^{-1} ist daher numerisch nicht sehr stabil. Die Singulärwertzerlegung funktioniert auch bei singulären Matrizen stabil. D.h. in unmittelbarer Nähe des Eigenwertes empfiehlt es sich, statt der LU-Zerlegung die Singulärwertzerlegung einzusetzen.

Singulärwertzerlegung

Wird $\underline{B}(k)$ singulär (bzw. numerisch singulär), kann dies mit Hilfe der verschwindenden Singulärwerte festgestellt werden (Anwendung dieses Kriterium: siehe *TS-Algorithmus*).

LU-Zerlegung mit Pivotisierung

Die Singularität von \underline{B} kann mit Hilfe der verschwindenden Diagonalelemente von \underline{U} festgestellt werden.

Abschätzung der Qualität des Startwertes beim Newton-Verfahren

Die Konvergenzbedingung für den Startwert k_0 wird aufgestellt. Dazu ist die Berechnung der Funktion $\eta_0 = \det [\underline{B}(k_0)]$ und deren ersten beiden Ableitungen erforderlich.

Mit $\mu_0 = k_1 - k_0$ folgen die Abschätzungen für die Ableitungen zu

$$\eta'_0 = \left. \frac{d \eta(k)}{d k} \right|_{k=k_0} = - \frac{\eta_0}{\mu_0} \quad (3.138)$$

$$\eta''_0 = \left. \frac{d^2 \eta(k)}{d k^2} \right|_{k=k_0} = \frac{\eta_0}{\mu_0^2} \{ 1 + \mu'_0 \} \quad .$$

In der zweiten Ableitung tritt μ'_0 auf. Dieses kann näherungsweise mit Hilfe der Differenzrechnung bestimmt werden

$$\mu'_0 = \frac{1}{\varepsilon} \{ \mu(k_0 + \varepsilon) - \mu(k_0) \} \quad . \quad (3.139)$$

Darin ist ε eine kleine Abweichung von k_0 .

Mit den Ableitungen η'_0 und η''_0 kann das Konvergenzkriterium angewendet werden. Konvergenz zu einem Wert k_E liegt dann vor, wenn gilt

$$|h'_0| = \frac{|k_1 - k_0| |\eta''_0|}{|\eta'_0|} \leq 1 \quad (3.140)$$

3.4.6 Sekantenverfahren in der Anwendung

Das Sekantenverfahren kann in der bereits beschriebenen Form direkt zur Nullstellensuche eingesetzt werden, da Ableitungen des charakteristischen Polynoms nicht explizit berechnet werden müssen, sondern durch Differenzen angenähert werden.

Hier wird das Sekantenverfahren nun angewendet, um eine mehrfache Nullstelle zu lokalisieren, d.h. die Stelle zu finden, wo der Betrag von $\eta(k)$ minimal ist. Dabei wird von einer komplexen Systemmatrix ausgegangen. Für reelle Matrizen verschwindet der Imaginärteil.

Die komplexe Determinante $\eta(k) = \det[\underline{B}(k)] = \det\underline{B}_R + i \det\underline{B}_I$ wird zum Betrag genommen und die Ableitung nach dem Frequenzparameter durchgeführt

$$\begin{aligned} |\det[\underline{B}]| &= \sqrt{\det\underline{B}_R^2 + \det\underline{B}_I^2} \\ \frac{d|\det[\underline{B}]|}{dk} &= |\det[\underline{B}]|' = \frac{\det\underline{B}_R \det\underline{B}_R' + \det\underline{B}_I \det\underline{B}_I'}{|\det[\underline{B}]|} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Wie beim Newton-Verfahren gezeigt, gilt näherungsweise

$$\eta' = (\det[\underline{B}(k)])' = (\det\underline{B}_R)' + i (\det\underline{B}_I)' = \sum_{i=1}^n e_{ii} \eta \quad (3.142)$$

Mit $\sum_{i=1}^n e_{ii} \eta$ ist es also möglich, $(\det[\underline{B}_R])'$ und $(\det[\underline{B}_I])'$ zu bestimmen. Damit kann $|\det[\underline{B}]|'$ berechnet werden.

Ein Eigenwert tritt dort auf, wo $|\det[\underline{B}]|' = 0$ ist. Die Aufgabe besteht nun darin, diese Nullstellen von $(|\eta|)' = (|\det[\underline{B}]|)'$ mit Hilfe des Sekantenverfahrens zu bestimmen.

Mit der Abkürzung $f(k) = f = |\eta|'$ folgt die Iterationsformel

$$k_{i+2} = k_{i+1} - f(k_{i+1}) \frac{k_{i+1} - k_i}{f(k_{i+1}) - f(k_i)} \quad (3.143)$$

Abschätzung der Qualität des Startwertes des Sekantenverfahrens

Zur Abschätzung des Startwertes sind f' und f'' erforderlich ([248]). Diese Ableitungen können aber nur mit sehr großem Aufwand über Differenzenquotienten näherungsweise berechnet werden. Diese Abschätzung erfordert also wesentlich mehr Aufwand als für einen Iterationsschritt. Da der Startwert aber entscheidend für die Konvergenz des Verfahrens ist, wird im folgenden eine Kombination von Newton- und Sekantenverfahren vorgeschlagen, die eine Überprüfung des Startwertes erlaubt.

3.4.7 Kombination von Newton- und Sekantenverfahren

Handelt es sich beim zu untersuchenden Eigenwert um einen Eigenwert der Vielfachheit $p = 1$, so kann das Newton-Verfahren mit der reellen Matrix eingesetzt werden.

Liegt ein Eigenwert mit einer Vielfachheit $p \geq 2$ vor, wird die Rechnung mit der komplexen Matrix durchgeführt. Der Eigenwert liegt dort, wo das Betragsminimum des Determinantenwertes ist.

Um dieses Minimum zu finden, wird zuerst das Newton-Verfahren mit der Funktion $\eta(k)$ durchgeführt. Tritt während der Iteration eine Verletzung des Konvergenzkriteriums auf, startet das Sekantenverfahren mit der Ableitung $|\eta'|$ und führt im Laufe des Iterationsprozesses zu deren Nullstelle.

Die Vorgehensweise wird an einem Beispiel erläutert.

Beispiel $f(k) = \sin(k) - 1.1$

Untersucht wird die Funktion $f(k) = \sin(k) - 1.1$. Diese Funktion hat im Bereich $0 \leq k \leq \pi$ absolut den kleinsten Wert bei $k_E = \frac{\pi}{2}$. Dieses Minimum soll aufgefunden werden. Dazu wird zuerst das Newton-Verfahren auf $f(k)$ angewendet. Bei Abbruch durch Verletzen des Konvergenzkriteriums, wird mit dem Sekantenverfahren, angewendet auf $|f(k)'|$, fortgefahren. In Bild (3.26) ist der Startwert für das Newton-Verfahren bei $k = 0.1$ gewählt und mit $NE0$ bezeichnet. Mit zwei Newton-Iterationen wird die Abzisse $k = 1.56$ ($NE2$) erreicht. Dort wird das Konvergenzkriterium nicht erfüllt. Das Sekantenverfahren wird nun auf die Ableitung des Determinantenbetrags angewendet. Mit 3 Iterationsschritten des Sekantenverfahrens wird der Wert $k = 1.57079633$ erreicht, der mit dem analytischen Wert $k = \frac{\pi}{2}$ gut übereinstimmt. Die Abweichung der Steigung vom exakten Wert Null liegt in der Größenordnung 10^{-16} . Wird nur ein Sekanten-Iterationsschritt ausgeführt liegt dieser Fehler bei 10^{-3} . In Tabelle (3.6) sind die Ergebnisse der Iteration aufgeführt.

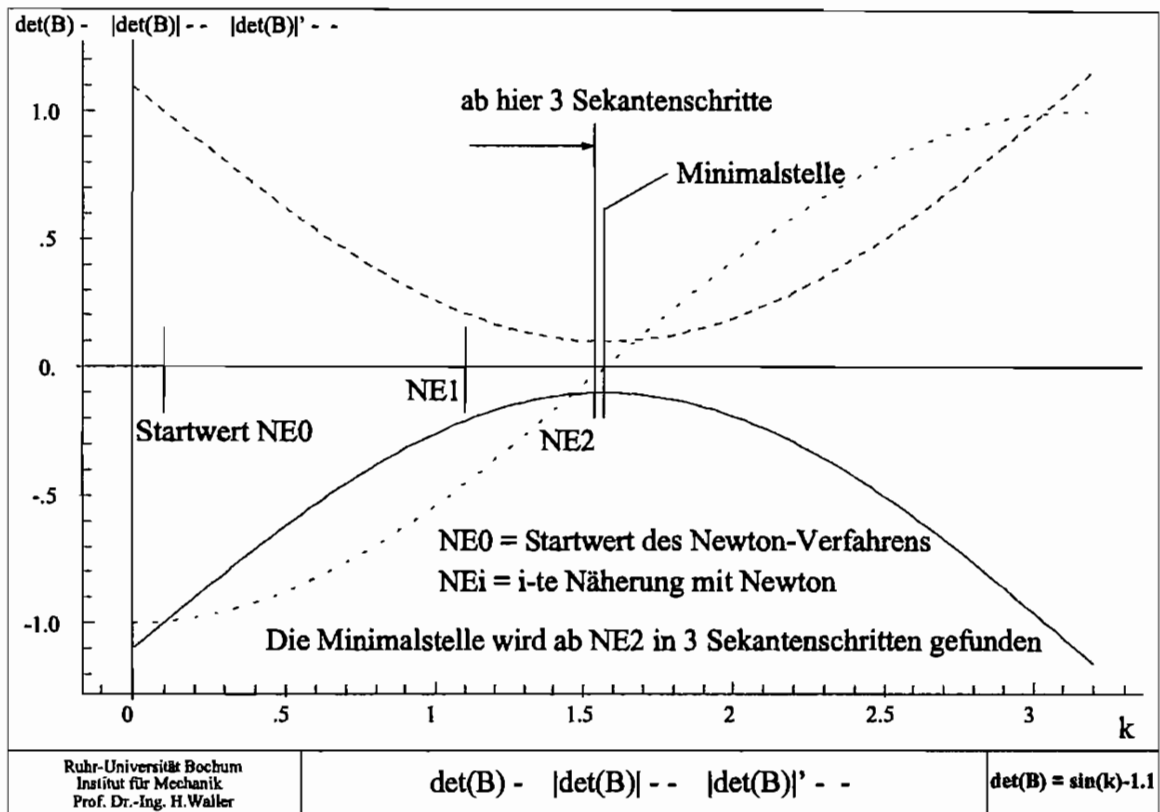


Abbildung 3.26: Kombination von Newton- und Sekantenverfahren

3.4.8 Durchlaufen eines Frequenzbereichs: Einsatz der inversen Funktion

Ist eine Nullstelle der Determinante oder das Minimum des Betrags gefunden, besteht nun die Aufgabe darin, das nächstgelegene lokale Maximum der Determinante zu finden. Gelingt dies, kann von dort die nächste Nullstelle bzw. das nächste Betragsminimum gesucht werden. Dazu wird mit der invertierten Funktion gearbeitet. Da das Konvergenzkriterium zur Bestimmung der Startwertqualität benötigt wird, wird zuerst das Newton-Verfahren eingesetzt. Anschließend, wenn das Konvergenzkriterium versagt, kommt das Sekantenverfahren zum Einsatz (bei ausreichender Nähe zur Maximalstelle, die durch die Inversion zur Minimalstelle wird).

Definition der inversen Funktion $f(k)$

Für das Newton-Verfahren werden die inverse Funktion und ihre Ableitungen definiert

$$\begin{aligned}
 f(k) &= f = \frac{1}{\eta(k)} \quad \text{mit:} \quad \eta(k) = \det [(\underline{B}(k))] \\
 f' &= -\frac{\eta'}{\eta^2} \\
 f'' &= 2 \frac{\eta'^2}{\eta^3} - \frac{\eta''}{\eta^2}
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

ITER	Verfahren	k	$\det [\underline{B}(k)]$	$ \det [\underline{B}(k)] '$
0	Newton	.100000000D+00	-.100016658D+01	-.995004165D+00
1	Newton	.110518834D+01	-.206451236D+00	-.448966152D+00
2	Newton	.156502531D+01	-.100016652D+00	-.577098521D-02
1	Sekante	.157101299D+01	-.100000023D+00	.216666178D-03
2	Sekante	.157079633D+01	-.100000000D+00	-.115751637D-08
3	Sekante	.157079633D+01	-.100000000D+00	-.612323376D-16

Tabelle 3.6: Iterationsprozeß des kombinierten Verfahrens

Für die Ableitungen gilt näherungsweise mit $\mu = (k_{i+1} - k_i)$

$$\eta' = -\frac{\eta}{\mu} \rightarrow f' = \frac{\sum_{i=1}^n e_{ii}}{\eta} \quad (3.145)$$

$$\eta'' = \frac{\eta}{\mu^2} (1 + \mu') \rightarrow f'' = \frac{1}{\eta \mu^2} (1 - \mu') \quad . \quad (3.146)$$

Mit diesen Größen sind sowohl das Konvergenzkriterium als auch der nächste Näherungswert des Newton-Verfahrens berechenbar

$$k_{i+1} = k_i - \frac{f}{f'} = k_i + \mu \quad . \quad (3.147)$$

Mit dem Sekantenverfahren wird die Stelle gesucht, wo der Betrag von f sein Minimum hat (dort hat $|\eta|$ das Maximum). Die Ableitung der Betragsfunktion wird gebildet

$$|f(k)| = \frac{1}{|\eta(k)|} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \quad (3.148)$$

$$|f(k)|' = (-g g' - h h') |f|^3 \quad (3.149)$$

$$\text{mit: } g = \Re(\eta), h = \Im(\eta) \quad .$$

Um ein lokales Maximum zu finden wird zuerst das Newton-Verfahren mit der inversen Funktion eingesetzt. Bei Verletzen des Konvergenzkriteriums wird das Sekantenverfahren mit der Ableitung des Betrags der inversen Funktion eingesetzt.

Beispiel $\eta(k) = \sin(k) - 1.1$

Untersucht wird die Funktion $\eta(k) = \sin(k) - 1.1$. Diese Funktion hat im Bereich $\pi/2 \leq k \leq 5\pi/2$ absolut gesehen ein Maximum bei $k_E = 3\pi/2$. Diese Stelle soll aufgefunden werden. Dazu wird zuerst das Newton-Verfahren auf $f(k) = 1/\eta(k)$ angewendet. Bei Abbruch durch Verletzen des Konvergenzkriteriums, wird mit dem Sekantenverfahren, angewendet auf $|f(k)|'$, fortgefahren.

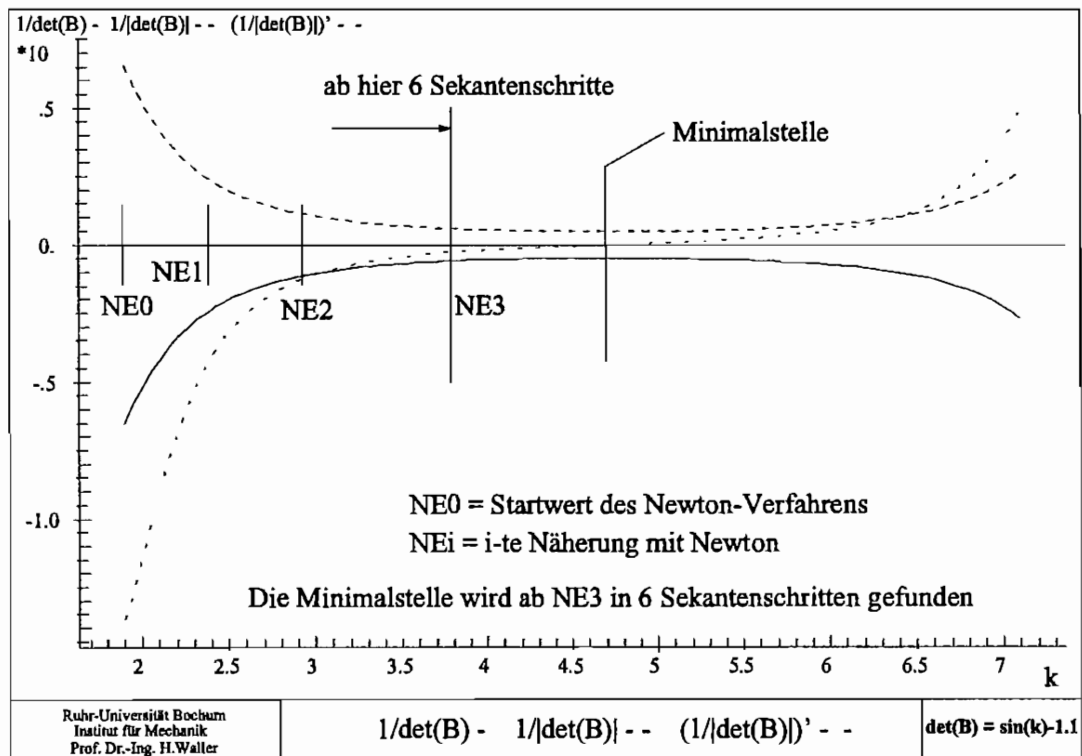


Abbildung 3.27: Kombination von Newton- und Sekantenverfahren

In Bild (3.27) ist der Startwert für das Newton-Verfahren $k = 1.9$ gewählt und mit $NE0$ bezeichnet. In Tabelle (3.7) sind die Iterationsschritte aufgeführt.

Iteration	Verfahren	k	$f(k)$	$ f(k) '$
0	Newton	.190000000D+01	-.650618458D+01	.136849889D+02
1	Newton	.237542491D+01	-.245929201D+01	.435811109D+01
2	Newton	.293972720D+01	-.111172534D+01	.121083671D+01
3	Newton	.385787358D+01	-.569286721D+00	.244443815D+00
1	Sekante	.403344055D+01	-.532415166D+00	.178009502D+00
2	Sekante	.448559709D+01	-.482068786D+00	.522535951D-01
3	Sekante	.467347538D+01	-.476362202D+00	.882808186D-02
4	Sekante	.471166963D+01	-.476190535D+00	.163117157D-03
5	Sekante	.471238864D+01	-.476190476D+00	.778520587D-07
6	Sekante	.471238898D+01	-.476190476D+00	.125285168D-13

Tabelle 3.7: Iterationsprozeß des kombinierten Verfahrens

3.5 Taylor-Entwicklung des Schur-Komplements (TS-Algorithmus)

Eine Matrixgleichung mit der vom Frequenzparameter $k = \omega/c$ ($c =$ Wellengeschwindigkeit) abhängigen Matrix $\underline{B}(k)$ der Größe $n \times n$ und den Vektoren \vec{x} und \vec{r}

$$\underline{B}(k) \vec{x} = \vec{r} \quad (3.150)$$

wird in Blockmatrizen aufgeteilt (Diese Blockaufteilung dient der Herleitung einer reduzierten Systemmatrix $\underline{B}_{jjred}(k)$, die später definiert wird.).

Die Größe der Blockmatrizen ist in Abbildung (3.28) abzulesen.

$$\underline{B}(k) = \begin{pmatrix} \underline{B}_{jj}(k) & \underline{B}_{jk}(k) \\ \underline{B}_{kj}(k) & \underline{B}_{kk}(k) \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_j \\ \vec{x}_k \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_j \\ \vec{r}_k \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

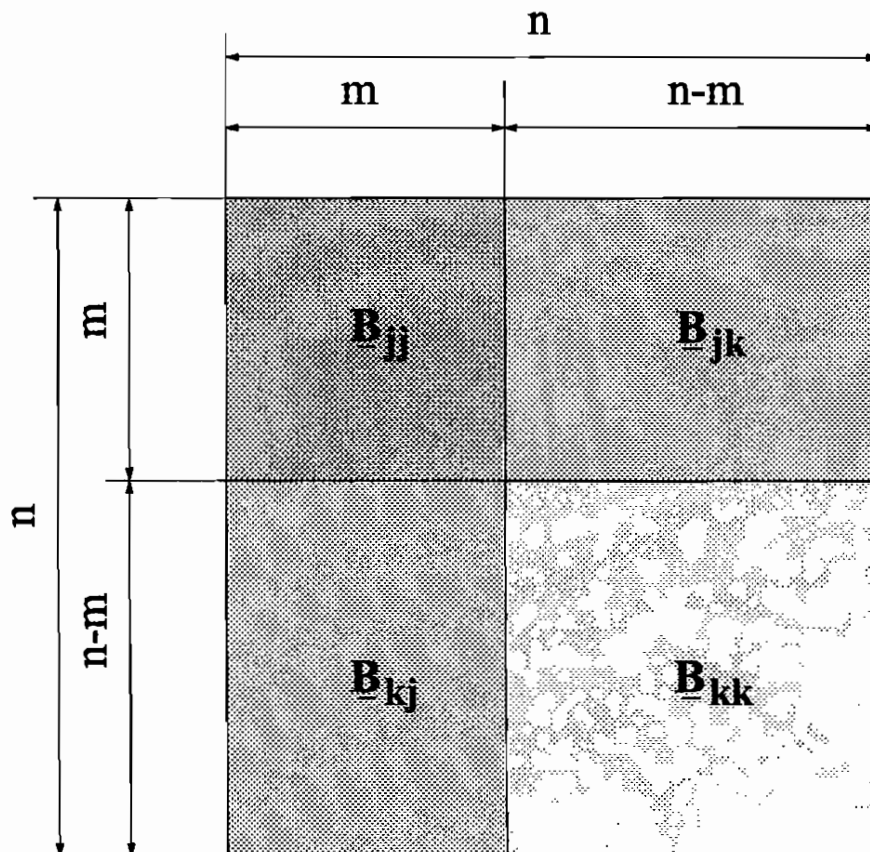


Abbildung 3.28: Blockaufteilung der Matrix $\underline{B}(k)$ in 4 Untermatrizen

Mit den Blockmatrizen wird die Matrixgleichung in zwei Teilgleichungen aufgespalten. Durch Multiplikation der zweiten Teilgleichung mit $-\underline{B}_{jk}(k) \underline{B}_{kk}^{-1}(k)$ und anschließender Addition

der beiden Gleichungen, reduzieren sich die Matrizen zu (der Frequenzparameter k wird hier zur einfacheren Darstellung weggelassen)

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{jj} \vec{x}_j + \underline{B}_{jk} \vec{x}_k &= \vec{r}_j \\
 \underline{B}_{kj} \vec{x}_j + \underline{B}_{kk} \vec{x}_k &= \vec{r}_k \quad | \quad -\underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \cdot \\
 -\underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \underline{B}_{kj} \vec{x}_j - \underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \underline{B}_{kk} \vec{x}_k &= -\underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \vec{r}_k \\
 -\underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \underline{B}_{kj} \vec{x}_j - \underline{B}_{jk} \vec{x}_k &= -\underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \vec{r}_k
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\Rightarrow (\underline{B}_{jj} - \underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \underline{B}_{kj}) \vec{x}_j = \vec{r}_j - \underline{B}_{jk} \underline{B}_{kk}^{-1} \vec{r}_k \quad .$$

Das Eigenwertproblem ergibt sich für $\vec{r} = \vec{0}$. Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{jjred}(k) &= \underline{B}_{jj}(k) - \underline{B}_{jk}(k) \underline{B}_{kk}^{-1}(k) \underline{B}_{kj}(k) \\
 \vec{x}_j &= \vec{x}_{jred}
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

vereinfacht sich Gleichung (3.150) zu

$$\underline{B}_{jjred}(k) \vec{x}_{jred} = \vec{0} \quad . \tag{3.154}$$

$\underline{B}_{jjred}(k)$ wird als **Schur-Komplement** bezeichnet.

Die Entwicklung des Schur-Komplement in eine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt Λ ergibt

$$\underline{B}_{jjred}(k) = \underline{B}_{jjred}(\Lambda) + \dot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi^2 + \dots \quad ; \quad \xi = k - \Lambda \quad .$$

Mit $(\dot{}) = \partial/\partial k$, $(\ddot{}) = \partial^2/\partial k^2$. $\dot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda)$ und $\ddot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda)$ werden durch partielles Ableiten bestimmt

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{jjred}(\Lambda) &= \underline{B}_{jj}(\Lambda) - \underline{B}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 \dot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda) &= \dot{\underline{B}}_{jj}(\Lambda) - \dot{\underline{B}}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - \underline{B}_{jk}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - \underline{B}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kj}(\Lambda) \\
 \ddot{\underline{B}}_{jjred}(\Lambda) &= \ddot{\underline{B}}_{jj}(\Lambda) - \ddot{\underline{B}}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - \underline{B}_{jk}(\Lambda) \ddot{\underline{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - \underline{B}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \ddot{\underline{B}}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - 2 \dot{\underline{B}}_{jk}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \underline{B}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - 2 \underline{B}_{jk}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kj}(\Lambda) \\
 &\quad - 2 \dot{\underline{B}}_{jk}(\Lambda) \underline{B}_{kk}^{-1}(\Lambda) \dot{\underline{B}}_{kj}(\Lambda) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

Wird $\underline{B}(\Lambda)$ vor der Blockzerlegung mit Hilfe einer Diagonaltransformation (siehe Anhang A) $\underline{L} \underline{B}(\Lambda) \underline{R} = \underline{\tilde{B}}(\Lambda) = \text{diag} [(\underline{\tilde{B}}(\Lambda))]$ auf Diagonalform gebracht, so verschwinden $\underline{\tilde{B}}_{jk}$ und $\underline{\tilde{B}}_{kj}$

$$\underline{\tilde{B}}_{jk}(\Lambda) = \underline{\tilde{B}}_{kj}(\Lambda) = 0 \quad . \quad (3.156)$$

Die Gleichungen (3.155) vereinfachen sich deshalb zu

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{B}}_{jjred}(\Lambda) &= \underline{\tilde{B}}_{jj}(\Lambda) \\ \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jjred}(\Lambda) &= \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jj}(\Lambda) \\ \ddot{\underline{\tilde{B}}}_{jjred}(\Lambda) &= \ddot{\underline{\tilde{B}}}_{jj}(\Lambda) - 2 \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jk}(\Lambda) \underline{\tilde{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \dot{\underline{\tilde{B}}}_{kj}(\Lambda) \quad . \end{aligned} \quad (3.157)$$

Da $\underline{\tilde{B}}(\Lambda) = \text{diag} [\underline{\tilde{B}}(\Lambda)]$, gilt die Gleichung

$$\underline{\tilde{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) = \text{diag} [\underline{\tilde{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda)] = \text{diag} [\frac{1}{\tilde{b}_{kki}}] \quad ; \quad i = m+1, \dots, n \quad .$$

In Gleichung (3.157) werden die ersten beiden Ableitungen der Systemmatrix nach dem Frequenzparameter k benötigt. Wenn \underline{B} als Matrizenpolynom vorliegt, kann dies auf die folgende Art geschehen

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial k} = \dot{\underline{B}} = \underline{B}_1 + 2 \underline{B}_2 k + 3 \underline{B}_3 k^2 + \dots + \varrho \underline{B}_\varrho k^{\varrho-1} \quad (3.158)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial k^2} = \ddot{\underline{B}} = 2 \underline{B}_2 + 6 \underline{B}_3 k + 12 \underline{B}_4 k^2 + \dots + \varrho(\varrho-1) \underline{B}_\varrho k^{\varrho-2} \quad .$$

Anschließend sind die Transformationen $\underline{L} \dot{\underline{B}}(\Lambda) \underline{R} = \dot{\underline{\tilde{B}}}(\Lambda)$, $\underline{L} \ddot{\underline{B}}(\Lambda) \underline{R} = \ddot{\underline{\tilde{B}}}(\Lambda)$ durchzuführen.

Wird die Taylor-Entwicklung nach den ersten drei Gliedern abgebrochen, so entsteht ein Matrizenpolynom zweiten Grades mit $\xi = k - \Lambda$ als Variable. Die Determinante dieses Polynoms wird zu Null gesetzt, da mit $\det [\underline{\tilde{B}}_{jjred}] = 0$ auch $\det [\underline{\tilde{B}}(k)] = 0$ ist

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{B}}_{jjred}(k) &= \underline{\tilde{B}}_{jjred}(\Lambda) + \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\underline{\tilde{B}}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi^2 \\ &= \underline{A}_0 + \underline{A}_1 \cdot \xi + \underline{A}_2 \cdot \xi^2 \end{aligned} \quad (3.159)$$

- $\underline{A}_0 = \underline{\tilde{B}}_{jj}(\Lambda)$
- $\underline{A}_1 = \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jj}(\Lambda)$
- $\underline{A}_2 = \frac{1}{2} \cdot \ddot{\underline{\tilde{B}}}_{jj}(\Lambda) - \dot{\underline{\tilde{B}}}_{jk}(\Lambda) \underline{\tilde{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \dot{\underline{\tilde{B}}}_{kj}(\Lambda) \quad .$

Für kleine reduzierte Matrizen kann die Determinante explizit ausgerechnet werden. Bei größeren Problemen kann der QR- bzw. QZ-Algorithmus mit vorangegangener Günther'scher Expansion eingesetzt werden. Die Expansion der quadratischen Ersatzaufgabe (3.159) sieht dann wie folgt aus

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{B}}_{jjred}(k) \vec{x}_{jred} &= [\underline{A}_0 + \underline{A}_1 \xi + \underline{A}_2 \xi^2] \vec{x}_{jred} = \vec{0} \\ \underline{A}_j \vec{z}_j &= \xi \underline{C}_j \vec{z}_j \end{aligned} \quad (3.160)$$

mit:

$$\underline{A}_j = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{A}_0 & -\underline{A}_1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C}_j = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \end{pmatrix} ; \quad \vec{z}_j = \begin{pmatrix} \vec{x}_{jred} \\ \xi \vec{x}_{jred} \end{pmatrix} .$$

Von den resultierenden Werten ξ_i wird der Betragskleinste ausgewählt [277]. Der neue Entwicklungspunkt ergibt sich zu $\Lambda_{i+1} = \Lambda_i + \xi_i$. Alternativ zur Auswahl des betragskleinsten ξ_i , kann auch der Wert ausgewählt werden, bei dem die Determinante von \underline{B} minimal ist. Die Berechnung der Determinantenwerte ist für große Dimensionen m allerdings sehr aufwendig, wird aber für $m = 1$ eingesetzt.

Iterativ werden so neue Entwicklungspunkte Λ_{i+1} berechnet. Der Algorithmus wird dann gestoppt, wenn Λ_i in ausreichender Nähe zu einem Eigenwert liegt.

Für den Sonderfall, daß die Matrix \underline{B} der Größe $n \times n$ in Blöcke der Seitenlängen, die sich aus $m = 1$ ergeben, aufgeteilt wird, reduziert sich die Matrix $\underline{B}_{jj}(k)$ zum Skalar $b_{jj}(k)$. Die Rechteckmatrizen $\underline{B}_{kj}(k)$ und $\underline{B}_{jk}(k)$ werden zu Spalten- und Zeilenvektoren mit $(n - 1)$ Elementen (siehe Bild 3.29)

$$\underline{B}_{jj}(k) \rightarrow b_{jj}(k) \quad \underline{B}_{jk}(k) \rightarrow \vec{B}_{jk}^T(k) \quad \underline{B}_{kj}(k) \rightarrow \vec{B}_{kj}(k) .$$

Abbildung (3.29) verdeutlicht diese Blockaufteilung einer Matrix der Größe $n \times n$ in $(1, n - 1)$ für ein beliebiges Skalar b_{jj} .

Das Schur-Komplement verändert sich somit zu :

$$b_{jjred}(k) = b_{jj}(k) - \vec{B}_{jk}^T(k) \underline{B}_{kk}^{-1} \vec{B}_{kj}(k) .$$

Die Reihenentwicklung des Schur-Komplements bis zum quadratischen Glied mit Entwicklungspunkt Λ , ergibt

$$\tilde{b}_{jjred}(k) = \tilde{b}_{jjred}(\Lambda) + \dot{\tilde{b}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\tilde{b}}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi^2 . \quad (3.161)$$

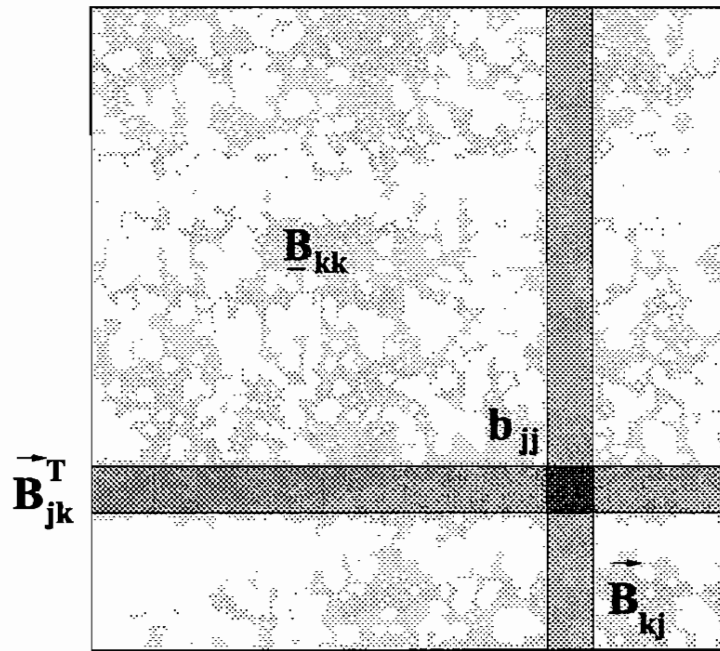


Abbildung 3.29: Blockaufteilung (j, k) der Matrix $\underline{B}(k)$

Wegen $\vec{B}_{jk}^T = \vec{B}_{kj} = \vec{0}$ folgt

$$\begin{aligned} \check{b}_{jjred}(\Lambda) &= \check{b}_{jj}(\Lambda) \\ \dot{b}_{jjred}(\Lambda) &= \dot{b}_{jj}(\Lambda) \\ \ddot{b}_{jjred}(\Lambda) &= \ddot{b}_{jj}(\Lambda) - 2 \cdot \vec{B}_{jk}^T(\Lambda) \cdot \underline{\check{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda) \cdot \vec{B}_{kj}(\Lambda) \end{aligned} \quad (3.162)$$

Da $\underline{\check{B}}(\Lambda) = \text{diag} [\underline{\check{B}}(\Lambda)]$ ist, gilt die Gleichung

$$\ddot{b}_{jjred}(\Lambda) = \ddot{b}_{jj}(\Lambda) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \dot{b}_{jki}(\Lambda) \cdot \frac{1}{\check{b}_{kki}(\Lambda)} \cdot \dot{b}_{kji}(\Lambda) \quad \text{mit } i \neq j \quad (3.163)$$

Es ergibt sich ein Polynom zweiten Grades mit $\xi = k - \Lambda$ als Variable. Dieses Polynom wird zu Null gesetzt, da mit $\check{b}_{jjred}(k) = 0$ auch $\det [\underline{\check{B}}(k)] = 0$ ist

$$\begin{aligned} \check{b}_{jjred}(k) &= \check{b}_{jjred}(\Lambda) + \dot{b}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi + \frac{1}{2} \cdot \ddot{b}_{jjred}(\Lambda) \cdot \xi^2 \\ &= a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.164)$$

- $a_0 = \check{b}_{jj}(\Lambda)$
- $a_1 = \dot{b}_{jj}(\Lambda)$
- $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \ddot{b}_{jj}(\Lambda) - \sum_{i=1}^n \dot{b}_{jki}(\Lambda) \cdot \check{b}_{kki}^{-1}(\Lambda) \cdot \dot{b}_{kji}(\Lambda) \quad \text{mit: } i \neq j$

Aus dieser quadratischen Gleichung werden ξ_1 und ξ_2 ermittelt. Da zwei ξ -Werte zur Verfügung stehen, kann entweder der betragskleinste Wert gewählt werden, oder es wird derjenige ξ -Wert zur Ermittlung des nächsten Entwicklungspunktes gewählt, dessen Determinante $\det [\underline{B}(\Lambda + \xi)]$ den kleineren Wert annimmt und somit die bessere Näherung an den gesuchten Eigenwert ist. Mit dem neuen Entwicklungspunkt wird der TS-Algorithmus wiederholt. Der Abbruch dieses Iterationsprozesses erfolgt, wenn $\Lambda_i \simeq k_i$ ist.

3.5.1 Praktische Anwendung des TS-Algorithmus

Die praktische Anwendung hängt in starkem Maße von der Art der verwendeten Diagonaltransformation ab. Hier wird der Einsatz der Eigenwertzerlegung und der Singulärwertzerlegung dargestellt. Beide Verfahren sind im Anhang A erläutert. Als **Beispiel 1** wird zunächst der einseitig eingespannte Balken (Bild 3.16) betrachtet.

Eigenwertzerlegung

Bei der Eigenwertzerlegung sind die Elemente der aus der Transformation resultierenden Diagonalmatrix die Eigenwerte der Matrix $\underline{B}(k_i)$, also die Eigenwerte der Matrix \underline{B} für einen konkreten Wert k_i des Frequenzparameters k . D.h. mit dem TS-Algorithmus wird z.B. für $m = 1$ der kleinste Eigenwert minimiert bzw. dessen Nullstelle in Abhängigkeit von k gesucht. Um abschätzen zu können, ob der TS-Algorithmus diese Aufgabe überhaupt ausführen kann, werden in den folgenden Abbildungen die **Eingangsdaten** für den Algorithmus dargestellt. Eingangsdaten sind die Daten, mit denen der Algorithmus arbeiten muß. Wird z.B. $m = 1$ gewählt, sind die Eingangsdaten die kleinsten Eigenwerte als Funktion des Frequenzparameters. Für $m = \varrho$ sind die Eingangsdaten das Produkt der ϱ -kleinsten Eigenwerte. Bild (3.30) zeigt den Verlauf des kleinsten Eigenwertes über k . Die Bilder (3.31) und (3.32) zeigen Ausschnitte des Bereichs der beiden nahe zusammenliegenden Längs- und Biegeeigenfrequenzen.

Es zeigt sich, daß der TS-Algorithmus mit $m = 1$ angewendet nur dann Ergebnisse liefert, wenn der Startpunkt der Iteration ausreichend nahe am Eigenwert k_i gewählt wird. Ansonsten ist keine Konvergenz zu erwarten. Der Algorithmus wird z.B. in den Konvergenzbereich eines anderen Eigenwertes springen. Damit wird aber ein Eigenwert übersprungen.

Erst bei großem m (hier im Beispiel wird $m = 42$ gewählt) funktioniert der TS-Algorithmus zufriedenstellend. Die Abbildungen (3.31) und (3.32) zeigen die Eingangsdaten für $m = 24$ und $m = 42$. Bei $m = 24$ ist die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte noch zu gering. Für $m = 42$ ergibt sich qualitativ der gleiche Verlauf, wie ihn auch $\det [\underline{B}(k)]$ liefert. Die Nullstellen können mit Hilfe des Verfahrens bestimmt werden.

Allerdings ist dazu die Auswertung der Determinante einer $m \times m$ -Matrix und die Bestimmung der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms erforderlich. Diese Aufgabe kann mit der oben bereits gezeigten Günther'schen Expansion und des QR- bzw. QZ-Algorithmus gelöst werden.

Großer Aufwand ist erforderlich, wenn der Startwert für den TS-Algorithmus nicht ausreichend

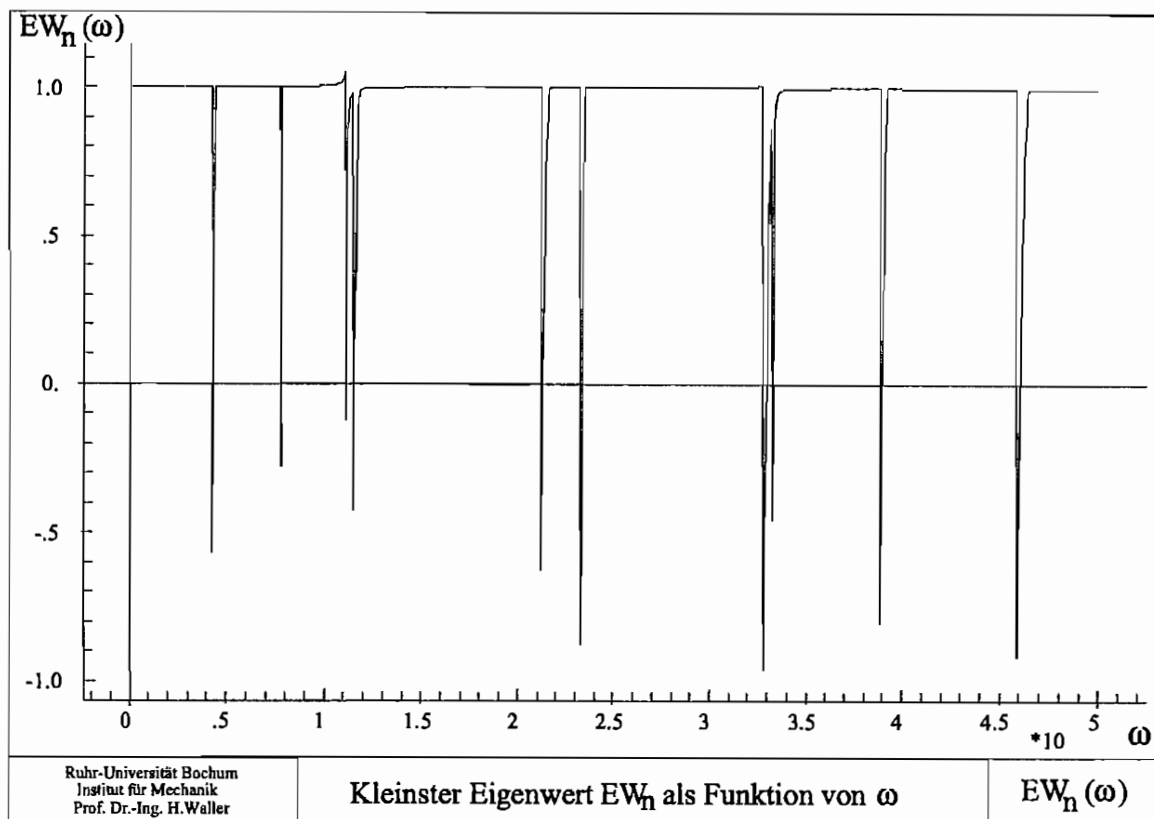


Abbildung 3.30: Der kleinste Eigenwert von $\underline{B}[k(\omega)]$ über der Frequenz

nah zum zu untersuchenden Eigenwert gewählt werden kann. Befindet sich der Startwert jedoch in der Nähe des Eigenwertes, führt das Verfahren unter Verwendung der Eigenwertzerlegung zur Nullstelle.

Singulärwertzerlegung

Die Elemente der Diagonalmatrix sind die Singulärwerte der Matrix $\underline{B}(k_i)$. Für $m = 1$ wird mit dem TS-Algorithmus also der kleinste Singulärwert minimiert. Die Eingangsdaten für $m = 1$ (d.h. der kleinste Singulärwert als Funktion des Frequenzparameters) und für $m = 2$ sowie $m = 3$ (Produkt der zwei bzw. drei kleinsten Singulärwerte) sind in den Bildern (3.33), (3.34) und (3.35) für ausgewählte Frequenzbereiche und in Bild (3.36) für den gesamten untersuchten Frequenzbereich dargestellt. In Bild (3.37) wird die Konditionszahl $\kappa(\omega) = \frac{SW(1)}{SW(n)}$ der Matrix $\underline{B}(\omega)$ dargestellt ($SW(n)$, $SW(1)$: kleinster und größter Singulärwert von $\underline{B}(\omega)$).

Es zeigt sich (Bild 3.36), daß die Berücksichtigung der letzten drei Singulärwerte bereits zu der für die Iteration erforderlichen glatten Kurve führt. Die Minimierung nur des letzten Singulärwertes ($m = 1$) kann nicht ausgeführt werden, da die Konvergenz nur für Startwerte in unmittelbarer Nähe des untersuchten Eigenwertes gewährleistet ist.

Für $m = 3$ kann die Lösung der quadratischen Ersatzaufgabe entweder mit der Günther'schen Expansion und anschließendem Einsatz des QR- bzw. QZ-Algorithmus oder durch explizites Ausrechnen der Determinante erfolgen. Im letzten Fall ergibt sich ein Polynom 6. Ordnung als

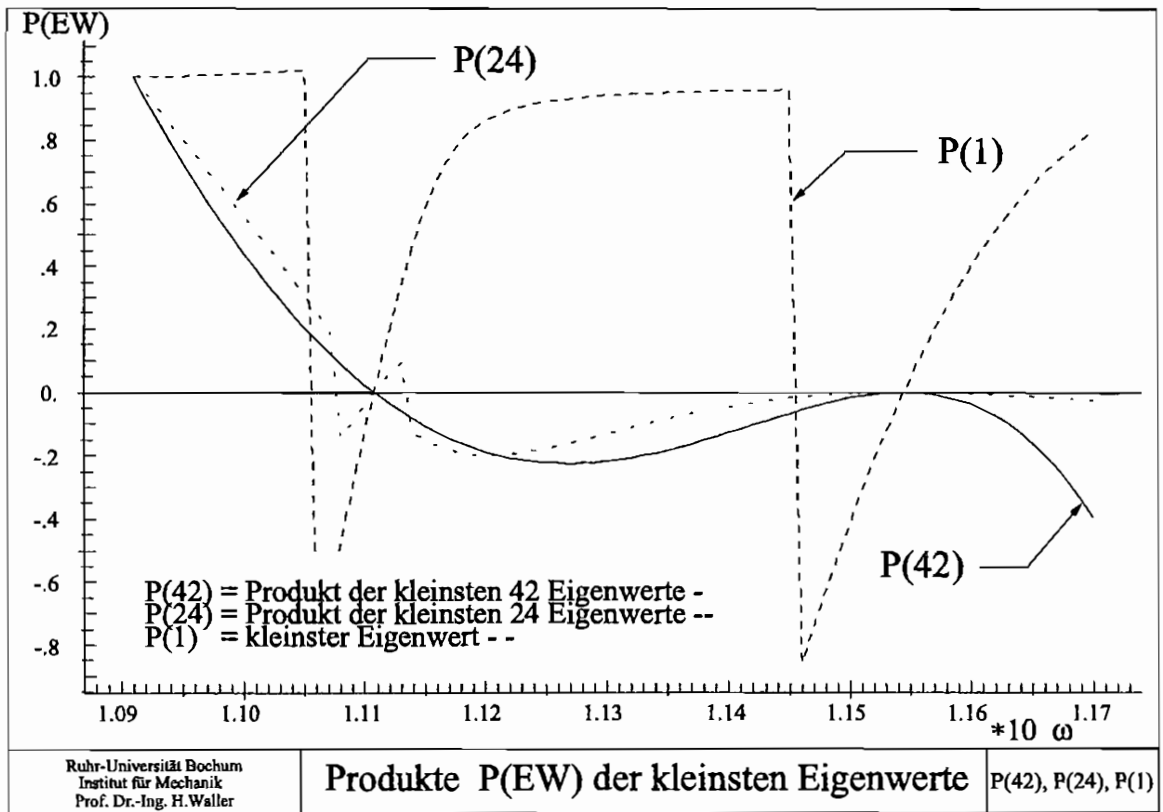


Abbildung 3.31: Darstellung der kleinsten Eigenwerte über der Frequenz

charakteristisches Polynom. Die Nullstellen sind mit Hilfe numerischer Verfahren (z.B. Newton-Iteration) für einen vorgegebenen Frequenzbereich zu berechnen.

Die Koeffizientenmatrix zum reduzierten Eigenwertproblem

$$\tilde{B}_{jjred}(k) \vec{x}_{jred} = [\underline{A}_0 + \underline{A}_1 \cdot \xi + \underline{A}_2 \cdot \xi^2] \vec{x}_{jred} \tag{3.165}$$

sieht wie folgt aus:

$$\begin{vmatrix} a_{011} + a_{111} \xi + a_{211} \xi^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{033} + a_{133} \xi + a_{233} \xi^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.166}$$

Mit Hilfe der Singulärwerte lassen sich also Eingangsdaten für die iterativen Verfahren finden, die über dem gesamten Frequenzbereich annähernd von der gleichen Größenordnung sind (mit Ausnahme der Nähe der Eigenwerte). D.h. der erforderliche Vergleichswert für das Abbruchkriterium der Iterationsverfahren kann beispielsweise für $\omega = 0$, also mit der statischen Systemmatrix berechnet werden.

Wichtig ist auch die Tatsache, daß nur die kleinsten Singulärwerte oder Eigenwerte eingesetzt werden. Diese lassen sich effektiv z.B. mit Hilfe der inversen Vektoriteration nährungsweise bestimmen.

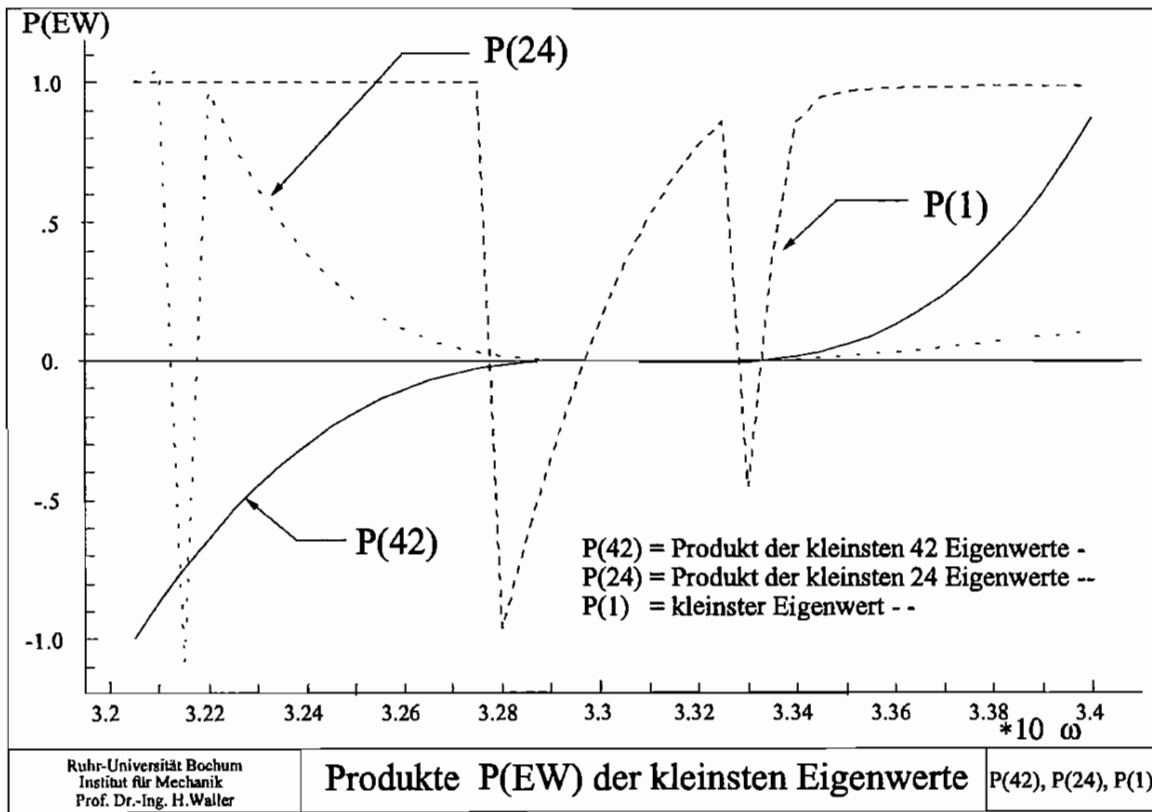


Abbildung 3.32: Darstellung der kleinsten Eigenwerte über der Frequenz

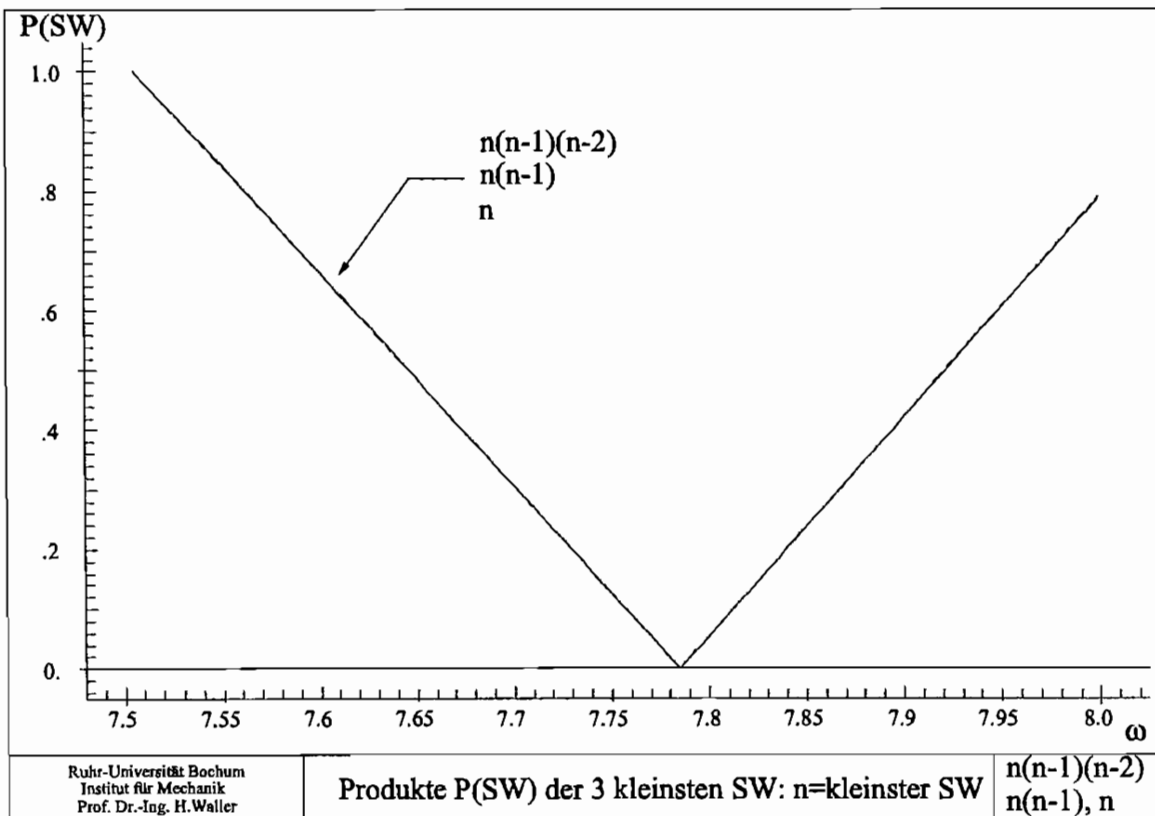


Abbildung 3.33: Darstellung der kleinsten Singulärwerte über der Frequenz

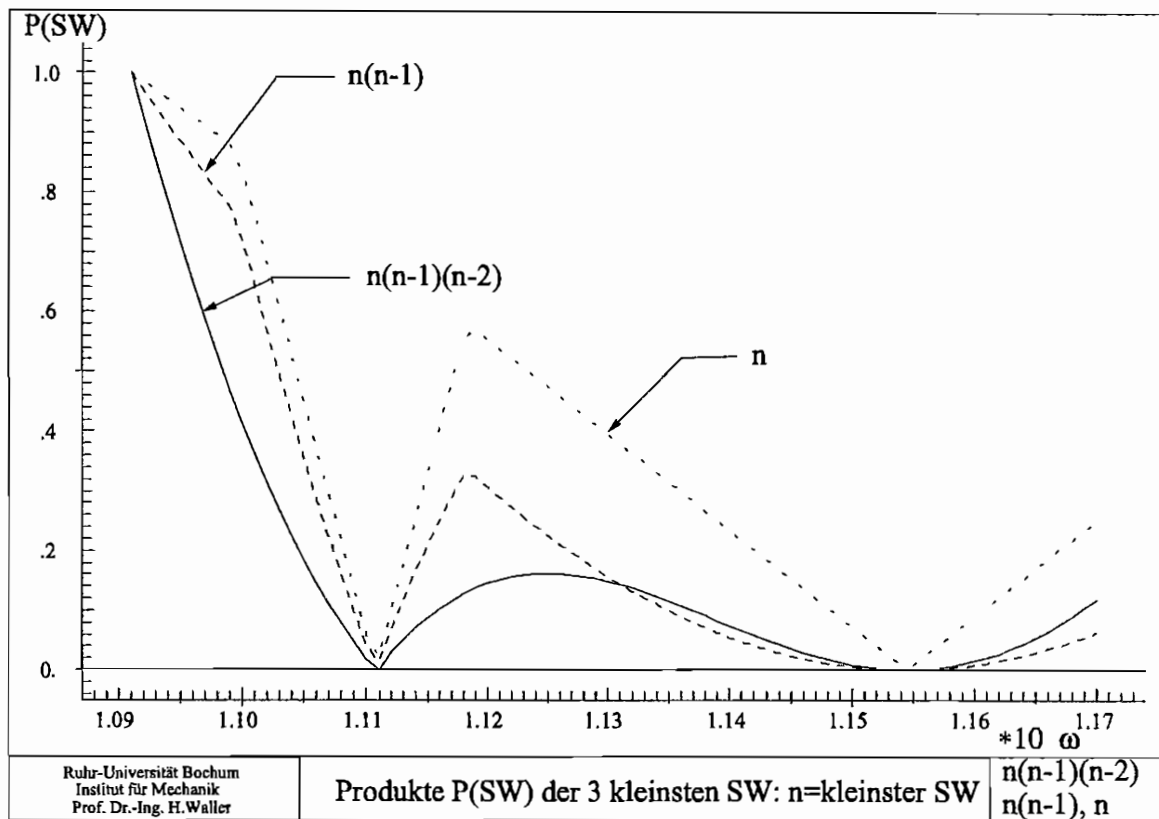


Abbildung 3.34: Darstellung der kleinsten Singulärwerte über der Frequenz

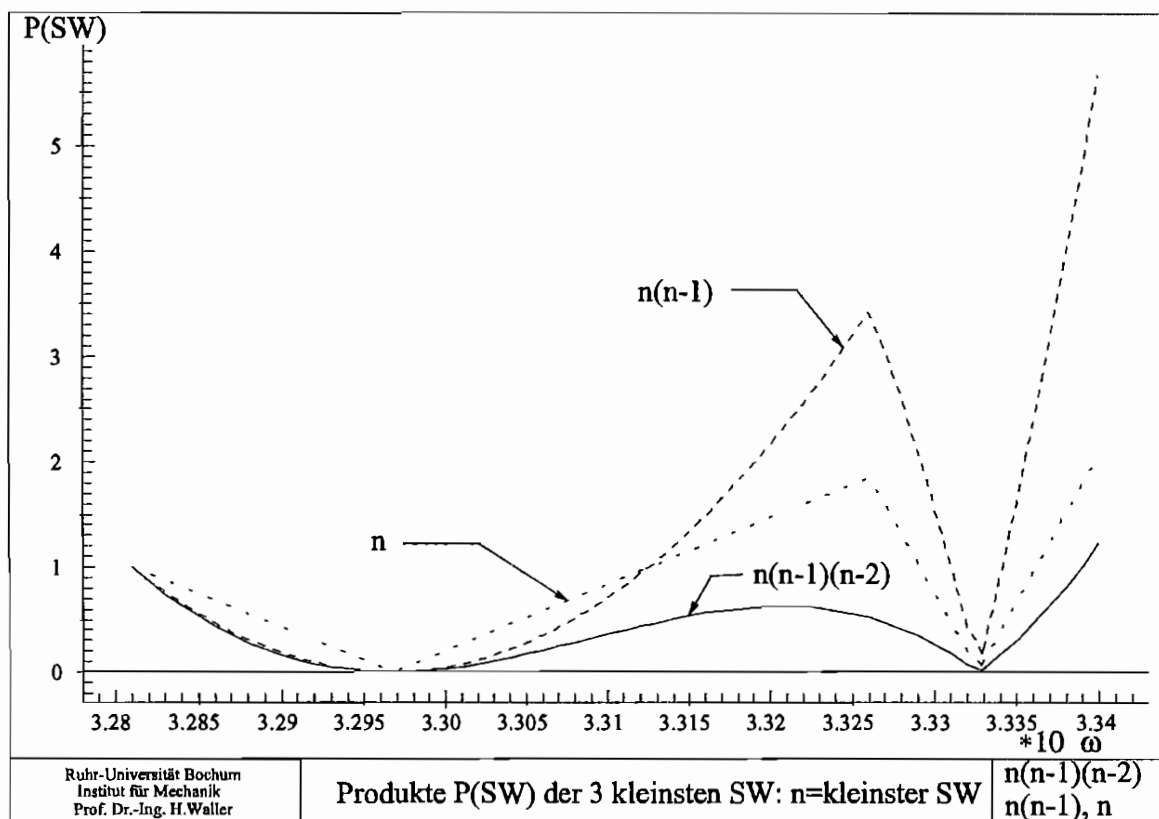


Abbildung 3.35: Darstellung der kleinsten Singulärwerte über der Frequenz

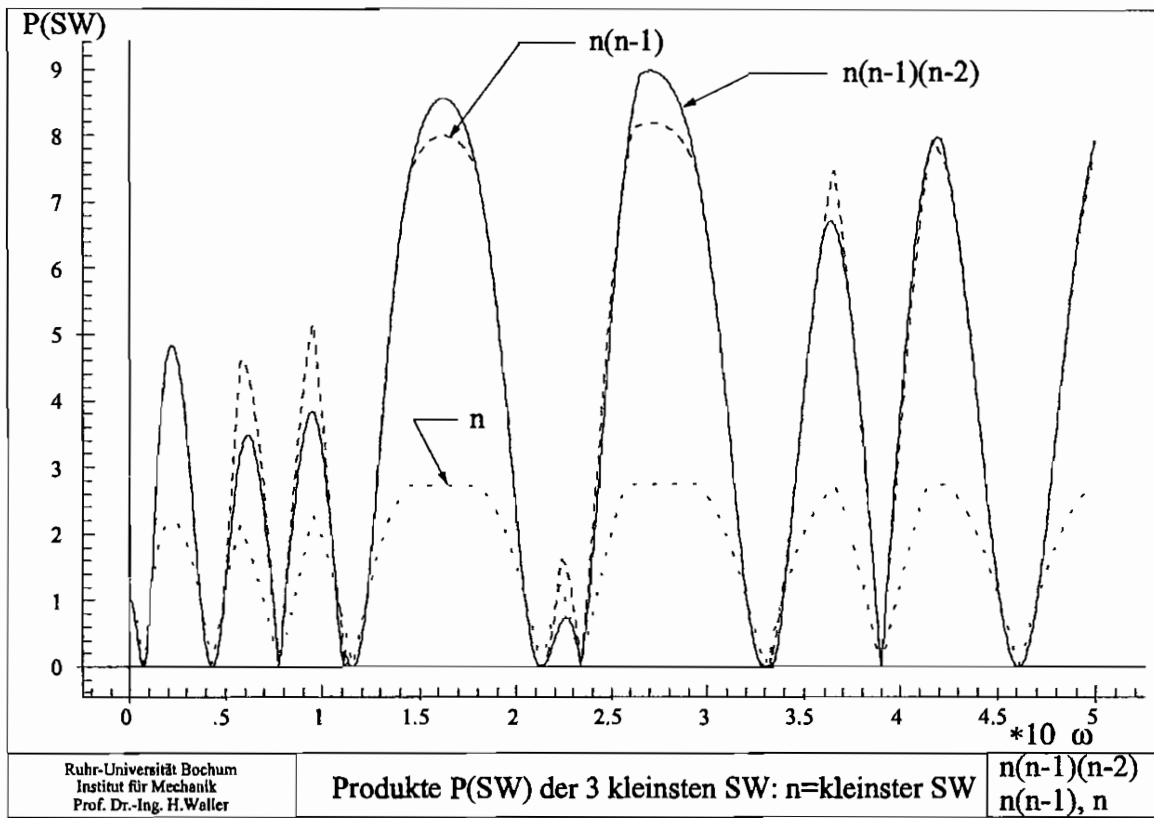


Abbildung 3.36: Darstellung der kleinsten Singulärwerte über der Frequenz

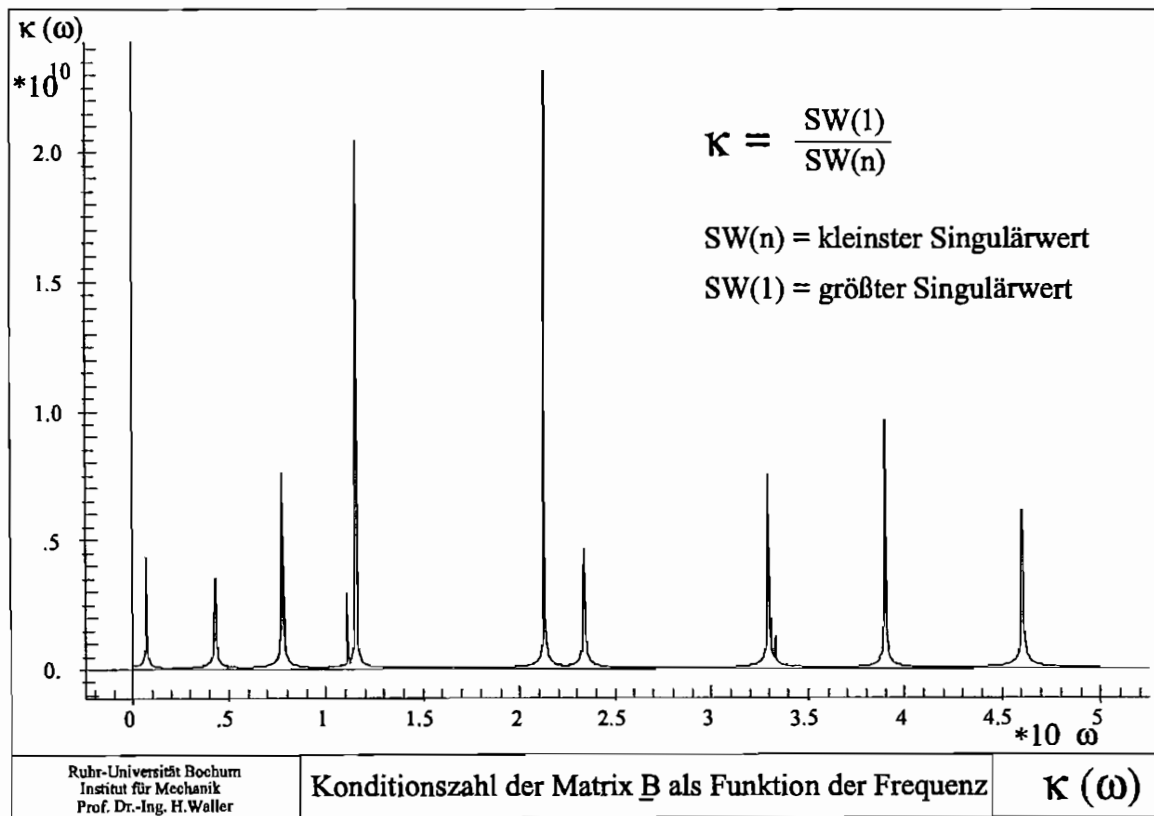


Abbildung 3.37: Darstellung der Konditionszahl der Matrix $\underline{B}(\omega)$

Beispiel 2: dicke Platte

Als weiteres Beispiel wird eine rundum fest eingespannte, rechteckige Platte (siehe Bild 3.38) betrachtet. Der Frequenzparameter wird auf die erste Eigenfrequenz normiert. Dargestellt wird der Frequenzbereich ab dem zweiten Eigenwert. Verglichen werden die Berechnungen mit komplexer und reeller Systemmatrix. Der Bereich um den ersten Eigenwert wird weggelassen, da hier keine Unterschiede zwischen den Verläufen bei komplexer und reeller Berechnung auftreten.

Zum einen wird der kleinste Singulärwert (Bilder 3.39, 3.40), zum anderen wird das Produkt der letzten 5 Singulärwerte (Bilder 3.41,3.42) dargestellt. Zuletzt wird die Konditionszahl gezeigt (Bild 3.43), die prinzipiell den Kehrwert des kleinsten Singulärwertes darstellt.

Es ist zu erkennen, daß die reelle Rechnung zu einer Anzahl von Eigenfrequenzen führt, die physikalisch keine Bedeutung haben. Diese können mit Hilfe der komplexen Rechnung ausgeschlossen werden. Physikalisch sinnvolle Eigenwerte sind für komplexe und reelle Rechnung gleich.

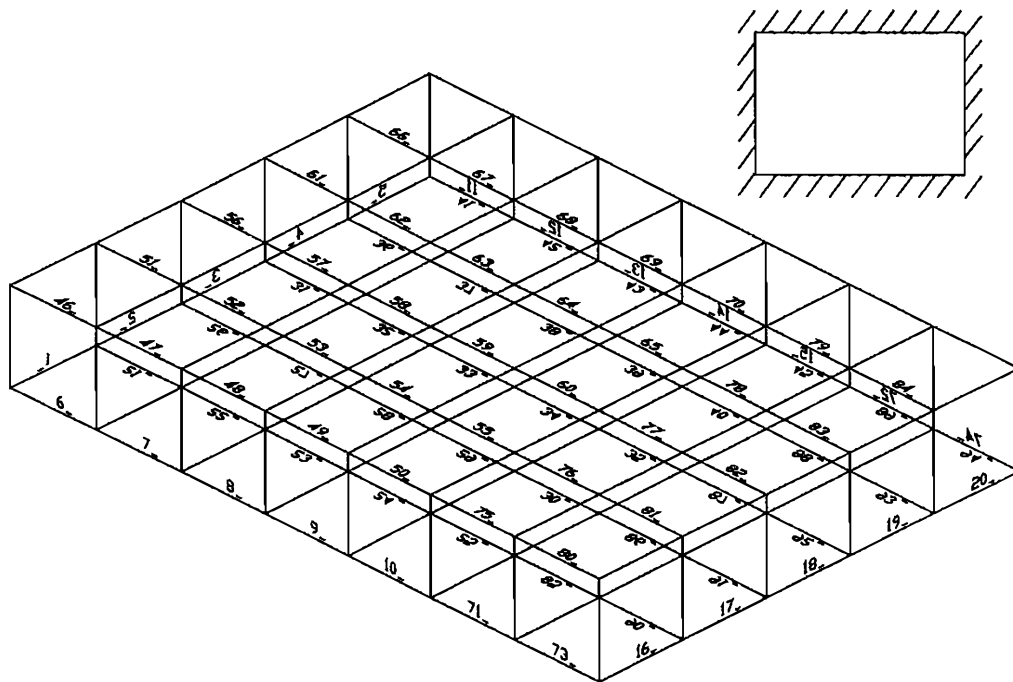


Abbildung 3.38: Dicke Rechteckplatte mit rundum fester Einspannung

Beispiel 3: Einseitig eingespannte Welle

Eine einseitig eingespannte Welle (siehe Bild 3.44) wird bezüglich der ersten vier Eigenfrequenzen (Eigenformen Bild 3.45) untersucht. Dargestellt werden Produkte der kleinsten Singulärwerte als Funktion der Frequenz (Bilder 3.46 und 3.47) sowie die Konditionszahl der frequenzabhängigen Systemmatrix $\underline{B}(\omega)$ (Bild 3.48).

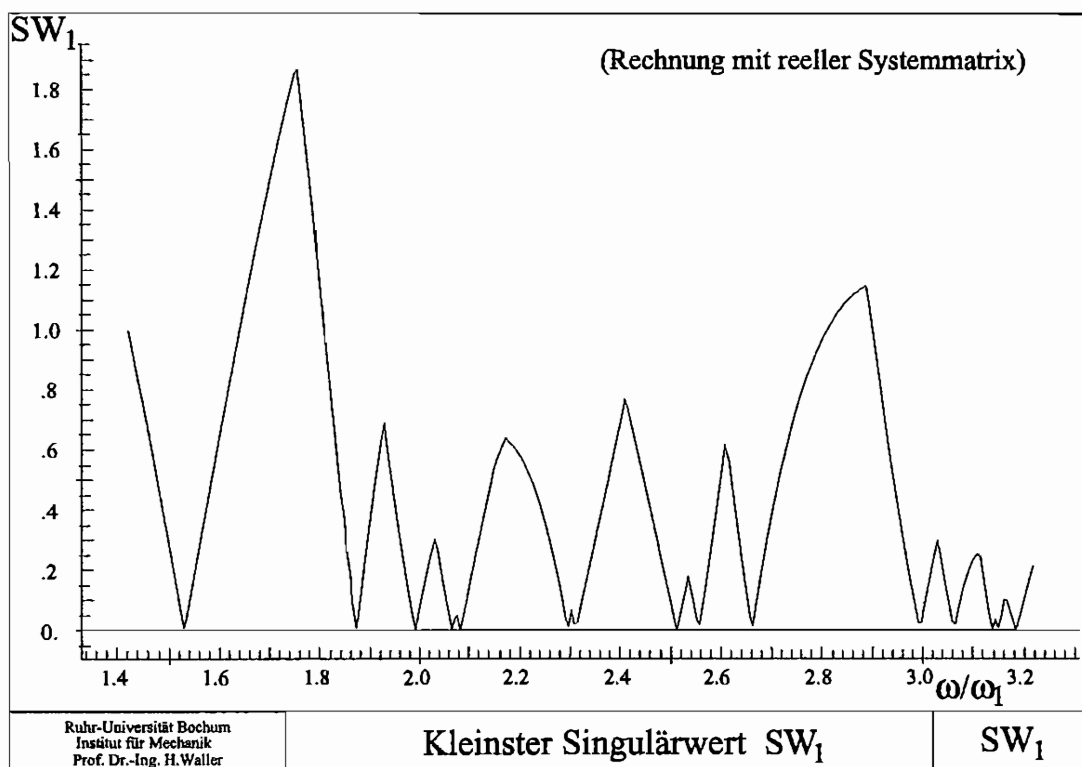


Abbildung 3.39: Rechteckplatte: kleinster Singulärwert über der normierten Frequenz (reelle Rechnung)

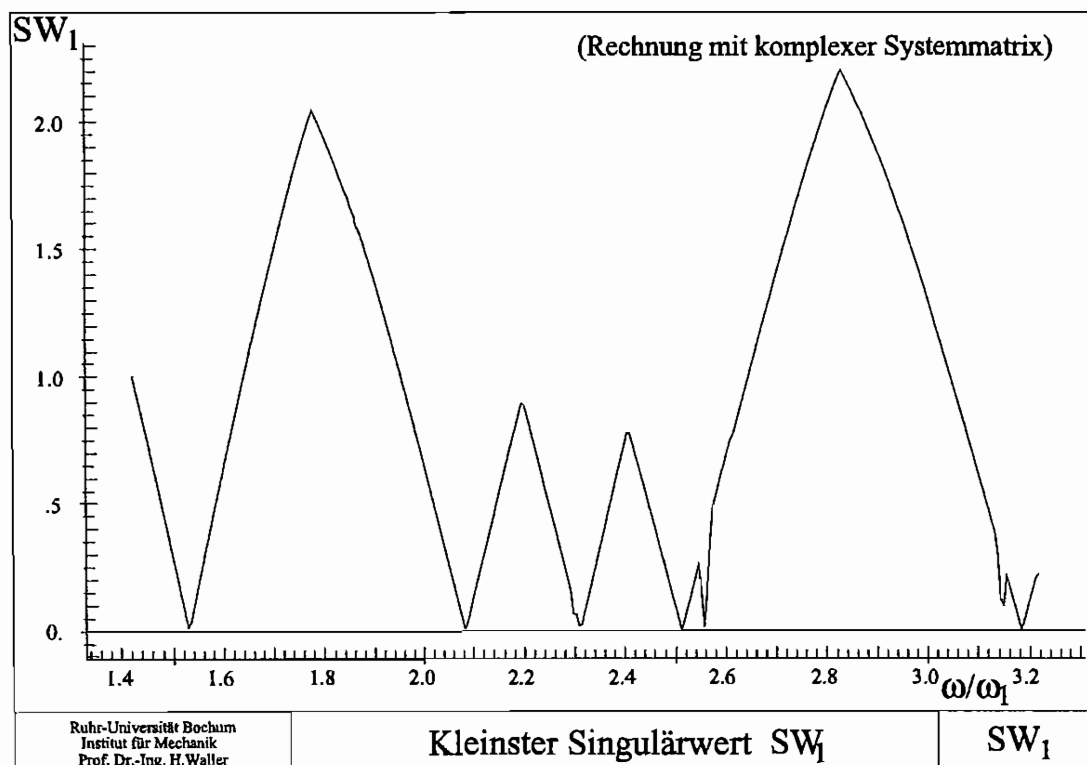


Abbildung 3.40: Rechteckplatte: kleinster Singulärwert über der normierten Frequenz (komplexe Rechnung)

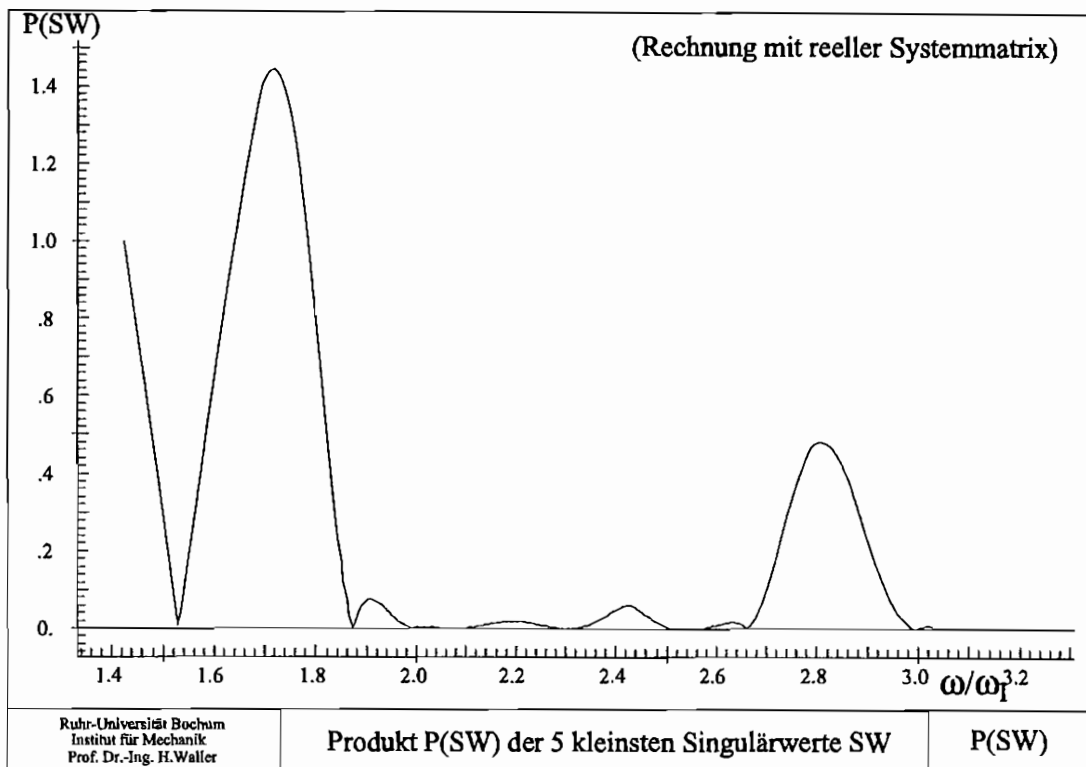


Abbildung 3.41: Rechteckplatte: Produkt der kleinsten Singulärwerte über der normierten Frequenz (reelle Rechnung)

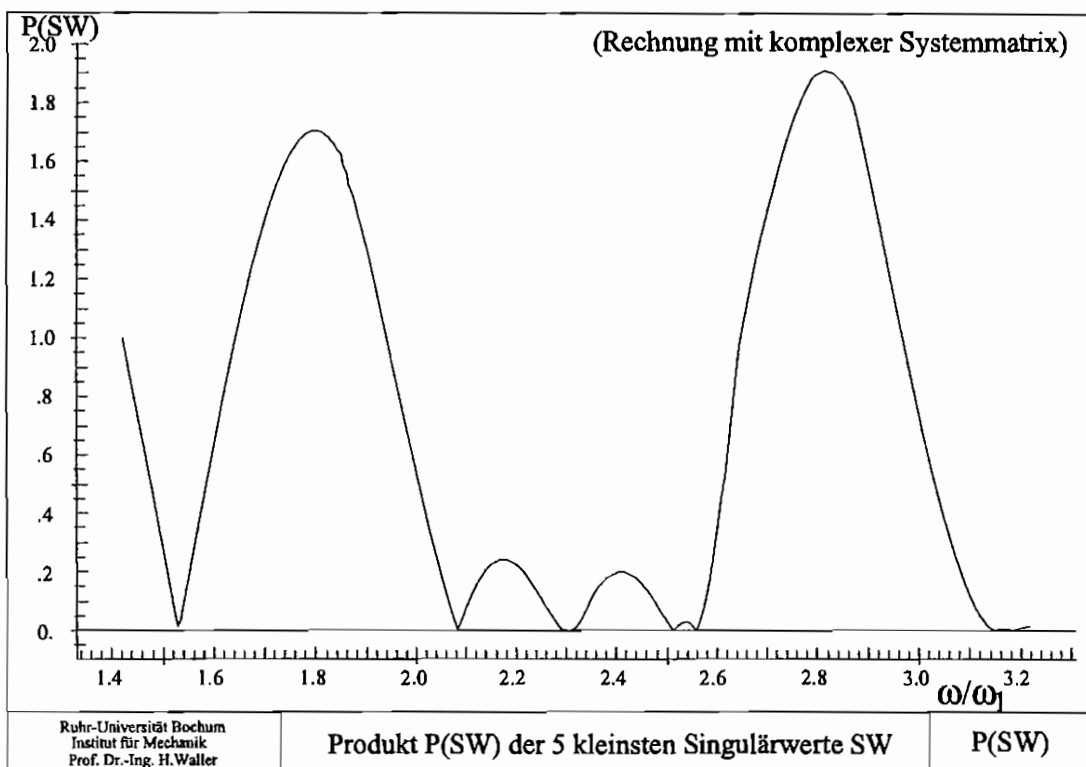


Abbildung 3.42: Rechteckplatte: Produkt der kleinsten Singulärwerte über der normierten Frequenz (komplexe Rechnung)

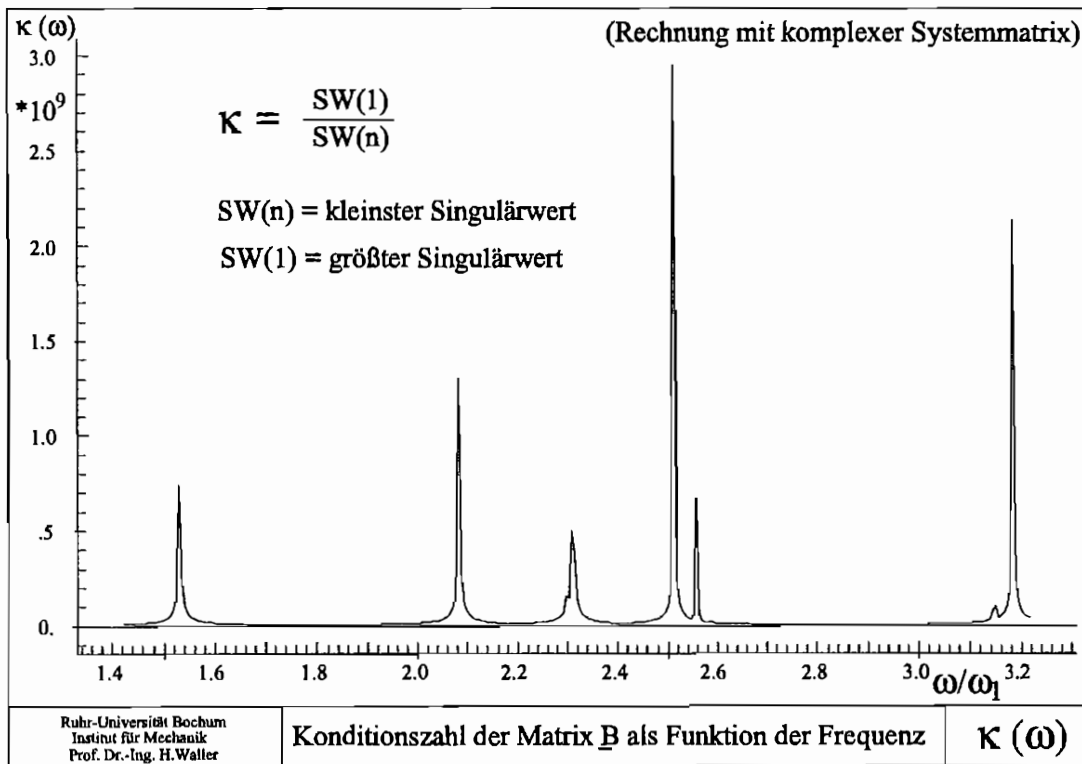


Abbildung 3.43: Rechteckplatte: Konditionszahl der Matrix \underline{B} über der normierten Frequenz (komplexe Rechnung)

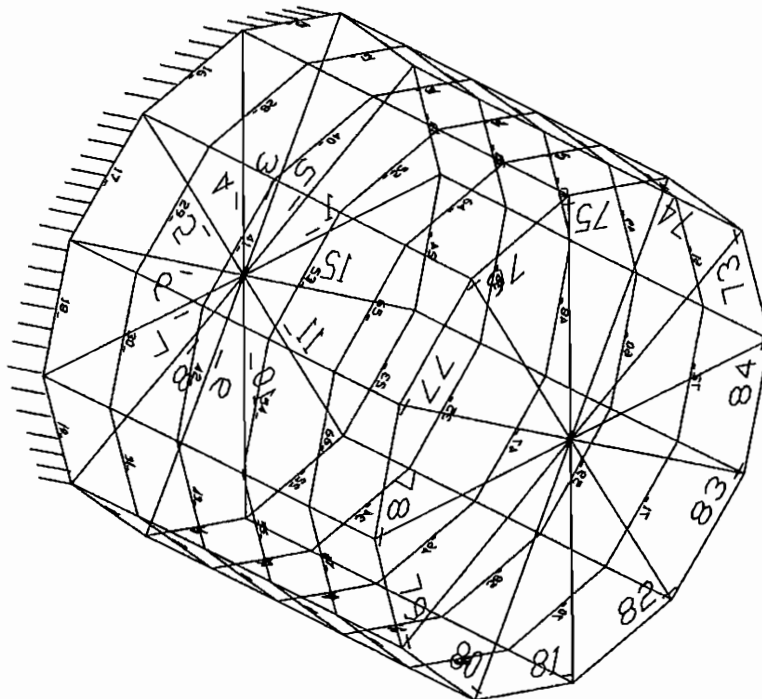


Abbildung 3.44: Dicke Welle mit einseitig fester Einspannung

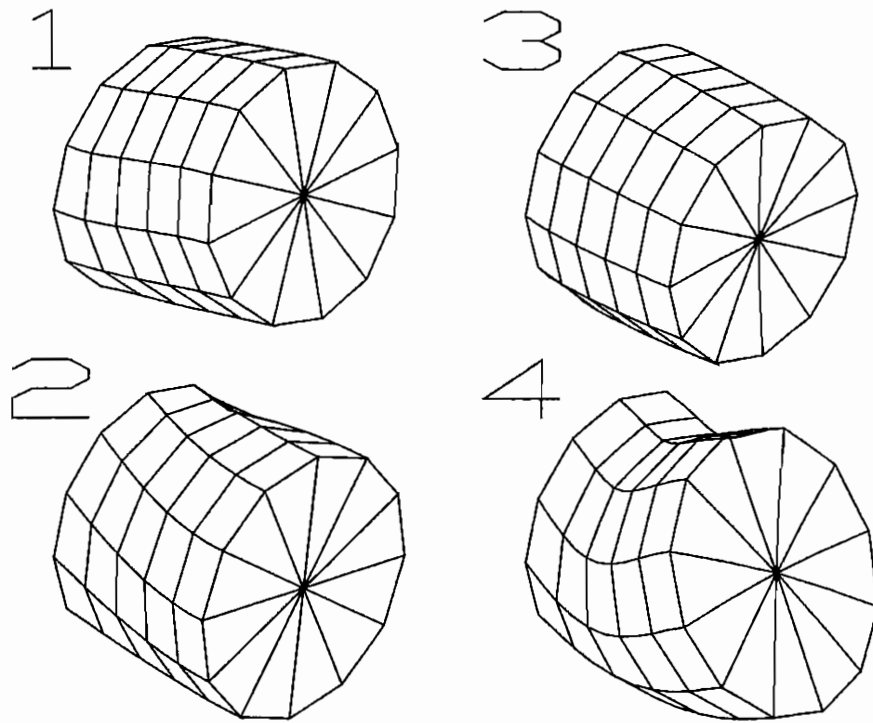


Abbildung 3.45: Erste vier Eigenformen der Welle (links fest eingespannt)

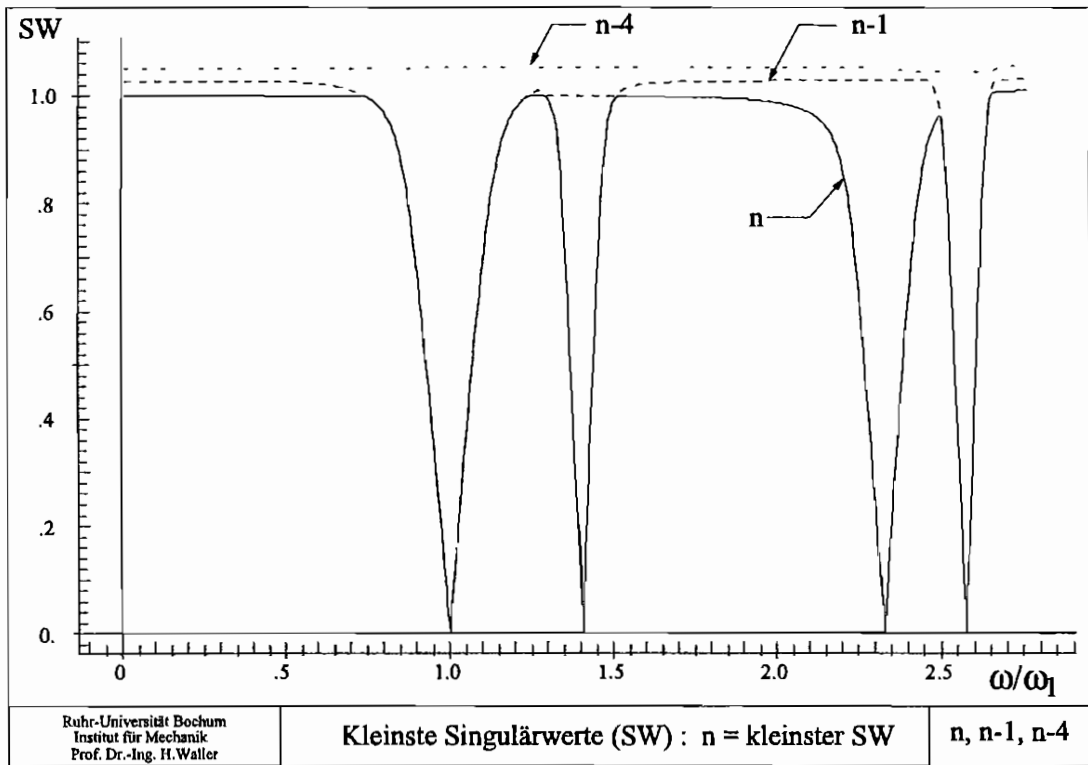


Abbildung 3.46: Welle: kleinste Singulärwerte (komplexe Rechnung)

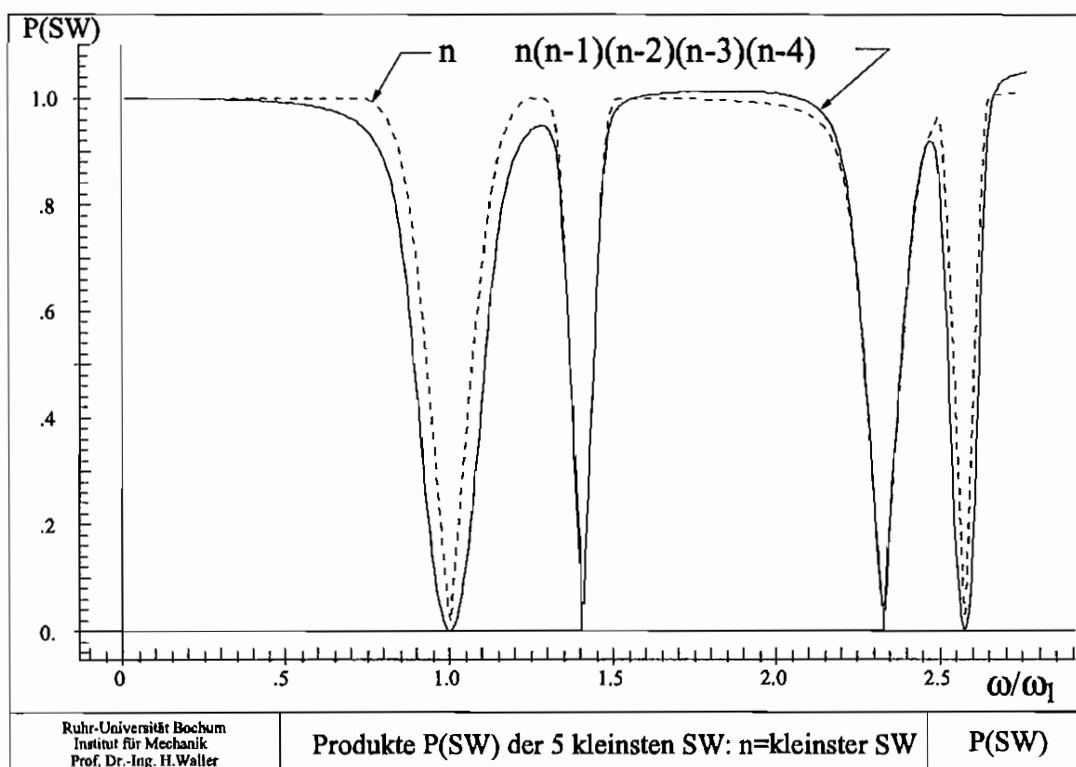


Abbildung 3.47: Welle: Produkt der kleinsten Singulärwerte über der normierten Frequenz (komplexe Rechnung)

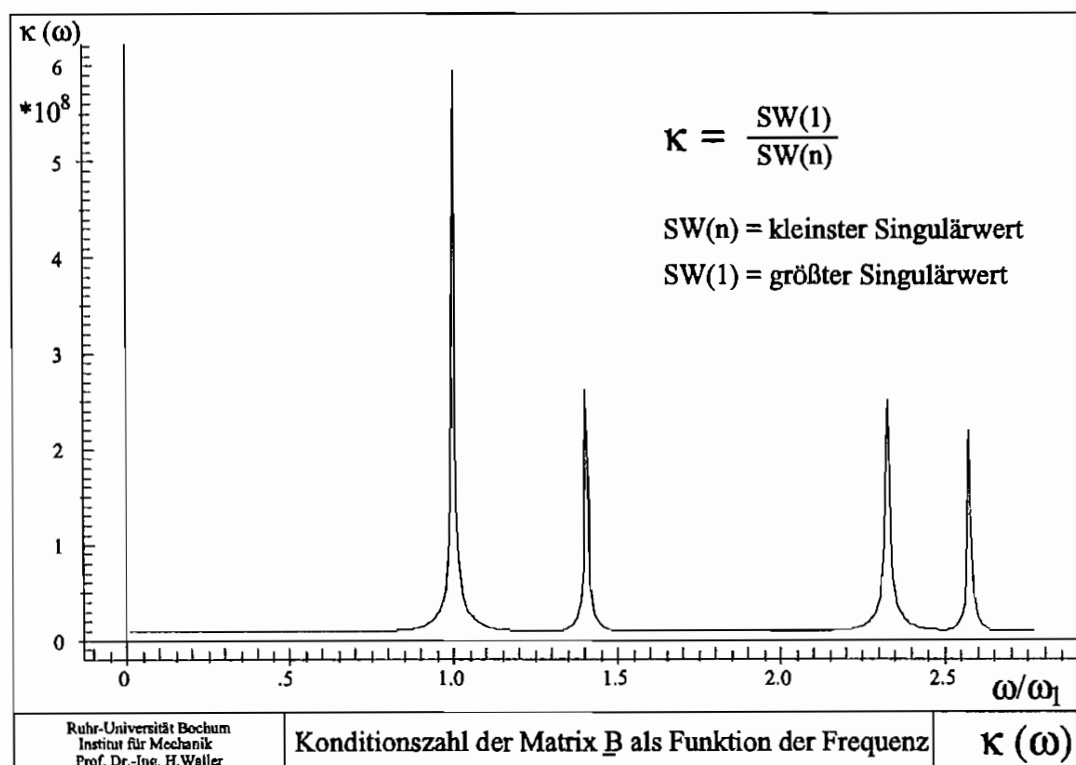


Abbildung 3.48: Welle: Konditionszahl der Matrix B über der normierten Frequenz (komplexe Rechnung)

Kombination von Eigenwertzerlegung und Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung liefert schon für $m = 5$ Eingangsdaten, die vom TS-Algorithmus verarbeitet werden können. Es empfiehlt sich jedoch ca. 10 Singulärwerte bei der Berechnung mitzunehmen. Der TS-Algorithmus minimiert dann das Produkt der m kleinsten Singulärwerte.

Da die Singulärwerte jedoch positive reelle Zahlen sind, können Nullstellen in der praktischen Rechnung nur als lokale Minima lokalisiert werden. Die Eigenwertzerlegung mit $m = 1$ führt aber immer zu einem Nulldurchgang beim Eigenwert.

Eine Kombination von Singulärwert- und Eigenwertzerlegung sieht daher so aus, daß zuerst die Singulärwertzerlegung eingesetzt wird. Bei ausreichender Nähe zum gesuchten Eigenwert (Kriterium: Rangabfall) wird die Eigenwertzerlegung eingesetzt. Diese führt dann zum Eigenwert beim Nulldurchgang des kleinsten Eigenwertes.

3.6 Beispiele zur Eigenwertberechnung

3.6.1 Akustik-Würfel mit 54 Elementen

Untersucht werden die ersten beiden Eigenwerte in z-Richtung des Würfels (Bild 3.5, links, Tabelle 3.8). Ergebnisse werden mit QZ, QR, TS, Newton (NE) und Sekantenverfahren(SE) ermittelt und mit dem jeweiligen analytischen Wert normiert. Anschließend werden die Eigenformen dargestellt. Tabelle (3.9) enthält die auf gleiche Art normierten ersten Komponenten des 1. und des 2. Eigenvektors im Vergleich. Diese sind für alle Verfahren bei gleicher Normierung annähernd gleich groß. In den grafischen Darstellungen der Eigenformen ergeben sich keine Unterschiede. Ein Vergleich der Rechnungen mit komplexer und reeller Systemmatrix ergibt keine nennenswerten Abweichungen. Lediglich bei mehrfachen Nullstellen treten Unterschiede auf, die später diskutiert werden.

	$\frac{k_1}{k_{1an}}$	$\frac{k_2}{k_{2an}}$
QZ	1.0001	1.0008
QR	1.0001	1.0008
TS	1.0001	1.0008
NE	1.0001	1.0008
SE	1.0001	1.0008

Tabelle 3.8: Normierte 1. und 2. Eigenfrequenz

	1. Eigenvektor	2. Eigenvektor
QZ	5.2332	15.672
QR	5.2333	15.672
TS	5.2333	15.445
NE	5.2333	15.445
SE	5.2333	15.445

Tabelle 3.9: Normierte 1. Komponente des 1. und 2. Eigenvektors

Alle Verfahren führen zu den gleichen Eigenwerten. Unterschiede zu den analytischen Werten sind nicht durch die Verfahren, sondern durch die Diskretisierung des Randes bedingt.

Bei den folgenden Darstellung der Eigenvektoren (Abb. 3.49, 3.50) ist der Schalldruck jeweils in Richtung der Flächennormalen aufgetragen. Die Eigenformen werden in der Darstellung mit Hilfe von Geraden angenähert.

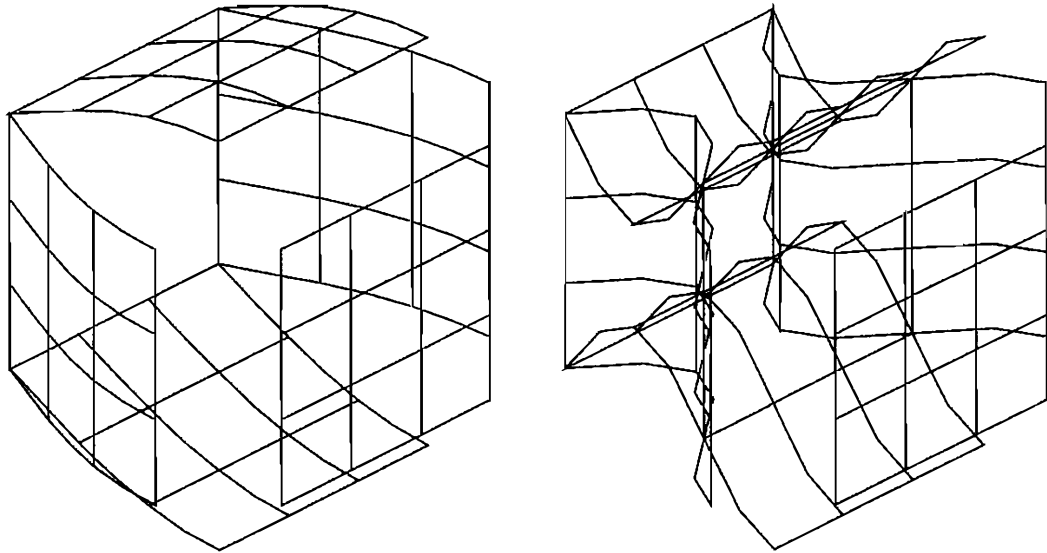


Abbildung 3.49: Eigenvektoren der Eigenwerte 000 (links) und 001

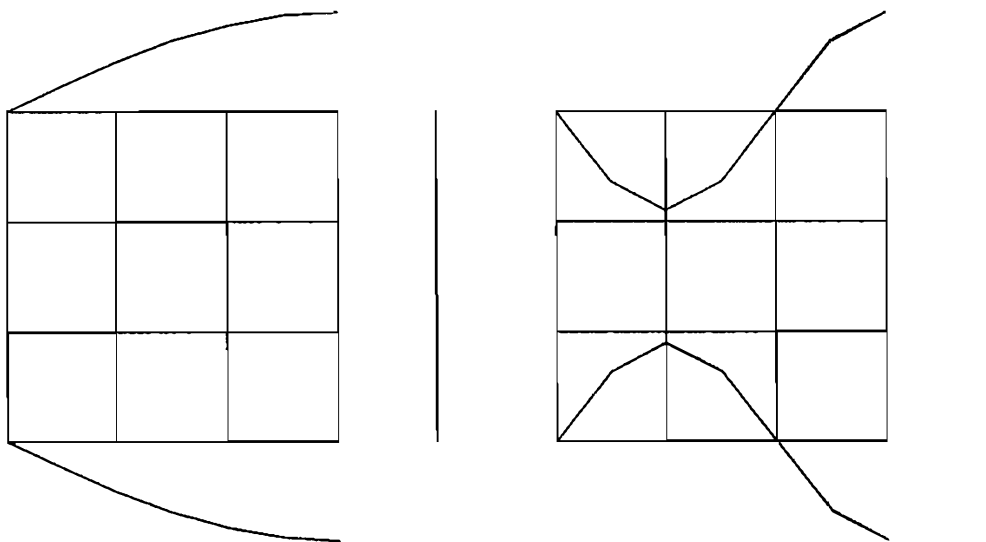


Abbildung 3.50: Eigenvektoren der Eigenwerte 000 (links) und 001 (Draufsicht)

1. Eigenwert des Akustik-Würfels

Nun erfolgt eine detaillierte Untersuchung des 1. Eigenwertes. Die Iterationsverfahren werden vom gleichen Startwert aus gestartet und mit dem gleichen Abbruchkriterium gestoppt. Dargestellt werden neben dem Determinantenwert auch die beiden kleinsten Singulärwerte. Die Frequenzen werden auf die jeweiligen analytischen Werte normiert.

Newton-Verfahren

Iteration	k_1/k_{1an}	$det [\underline{B}]$	SV(n)	SV(n-1)
0	0.668450	.316095D+10	.177360D+00	.389494D+00
1	1.204103	.166288D+09	.603468D-01	.155144D+00
2	0.857906	.646037D+09	.596148D-01	.353987D+00
3	1.014037	.385272D+08	.496329D-02	.306208D+00
4	1.000036	.906804D+05	.113060D-04	.318866D+00
5	1.000069	.202120D+00	.252023D-10	.318837D+00
6	1.000069	.337375D-06	.420671D-16	.318837D+00

Tabelle 3.10: Iterationsschritte des Newton-Verfahrens

TS-Algorithmus

Iteration	k_1/k_{1an}	$det [\underline{B}]$	SV(n)	SV(n-1)
0	0.668450	.316095D+10	.177360D+00	.389494D+00
1	0.943799	.307496D+11	.177360D+00	.389494D+00
2	0.999916	.842643D+08	.214742D-01	.356401D+00
3	1.000069	.429355D+03	.552734D-04	.318977D+00
4	1.000069	.265199D-04	.281596D-09	.318838D+00

Tabelle 3.11: Iterationsschritte des TS-Algorithmus

Sekanten-Verfahren

Iteration	k_1/k_{1an}	$det [\underline{B}]$	SV(n)	SV(n-1)
0	0.668450	.316095D+10	.177360D+00	.389494D+00
0	0.859436	.635866D+09	.588700D-01	.353949D+00
1	0.907528	.358407D+09	.367106D-01	.354332D+00
2	0.969654	.969214D+08	.112997D-01	.346678D+00
3	0.992681	.218648D+08	.268104D-02	.325561D+00
4	0.999391	.196499D+07	.244634D-03	.319454D+00
5	1.000052	.466906D+05	.582161D-05	.318852D+00
6	1.000069	.103963D+03	.129632D-07	.318837D+00
7	1.000069	.552220D-02	.688561D-12	.318837D+00

Tabelle 3.12: Iterationsschritte des Sekanten-Verfahrens

2. Eigenwert des Akustik-Würfels

Beim zweiten Eigenwert liegt bei den analytischen Ergebnissen eine doppelte Nullstelle vor (Die Eigenwerte 001 und 110). Wegen der Diskretisierung des Randes ergeben sich hier aber zwei unterschiedliche Eigenwerte in unmittelbarer Nachbarschaft. Der Unterschied kommt zustande, weil zwei von der Form völlig unterschiedliche Eigenformen vorliegen. Während 001 eine Eigenform in z -Richtung ist, liegt bei 110 keine Beteiligung einer Schwingungskomponente in z -Richtung vor.

Die Rechnungen mit komplexer und reeller Systemmatrix ergeben einen unterschiedlichen Abstand der beiden Eigenwerte. Bei der Rechnung mit reeller Matrix liegen die beiden Eigenwerte weiter auseinander als bei der komplexen Rechnung. Die Iterationsverfahren können bei der reellen Rechnung beide Eigenwerte lokalisieren. Bei der komplexen Rechnung ist dies nicht mehr möglich.

Hier empfiehlt es sich, das Sekantenverfahren auf die Ableitung des Betrags der Determinante nach dem Frequenzparameter anzuwenden. Die Bilder (3.51) und (3.52) zeigen die normierten Determinantenwerte bzw. ihre Ableitungen als Funktion des normierten Frequenzparameters. Das Sekantenverfahren liefert genau die Stelle des Nulldurchgangs der Ableitung durch die Abzisse.

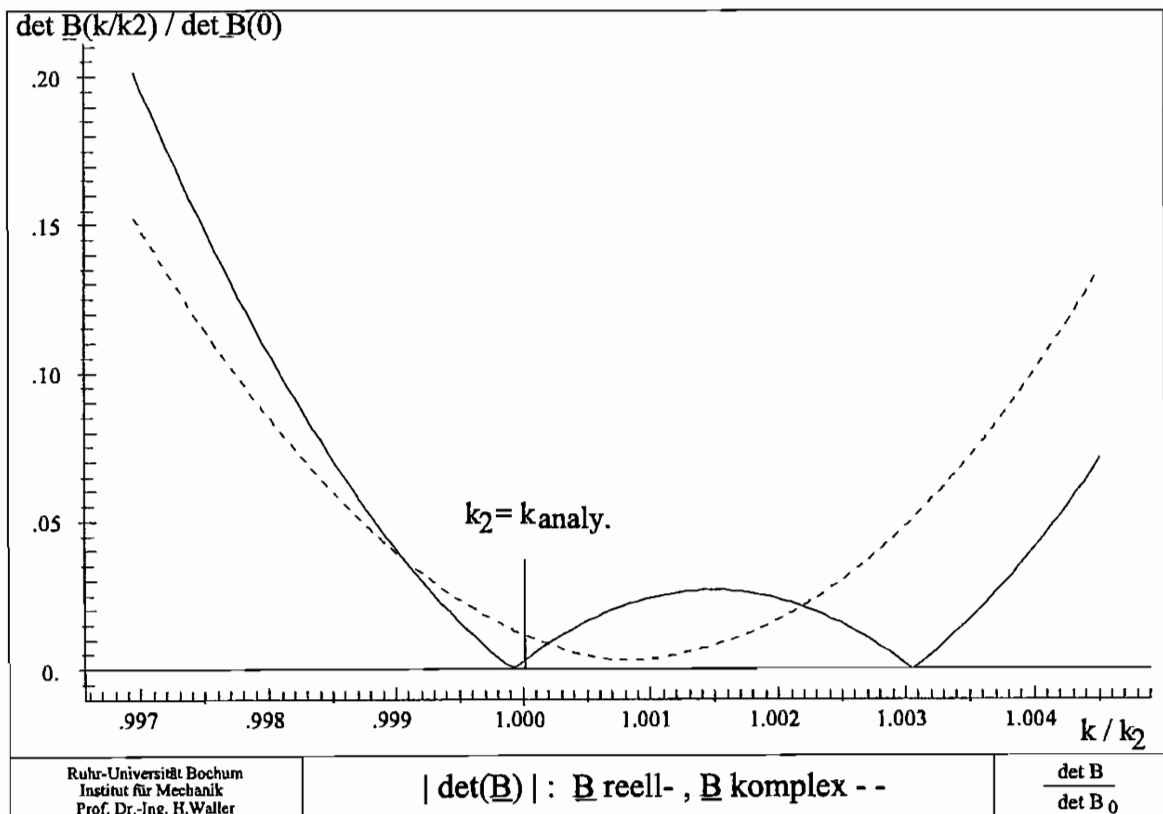


Abbildung 3.51: Normierte Betragswerte der Determinante im Bereich des 2. Eigenwertes

QZ/QR liefern die Eigenwerte, zu denen die Eigenvektoren physikalisch sinnvoll sind. Die anderen Verfahren liefern bei nahe zusammenliegenden Eigenwerten keine verlässlichen Ergebnisse,

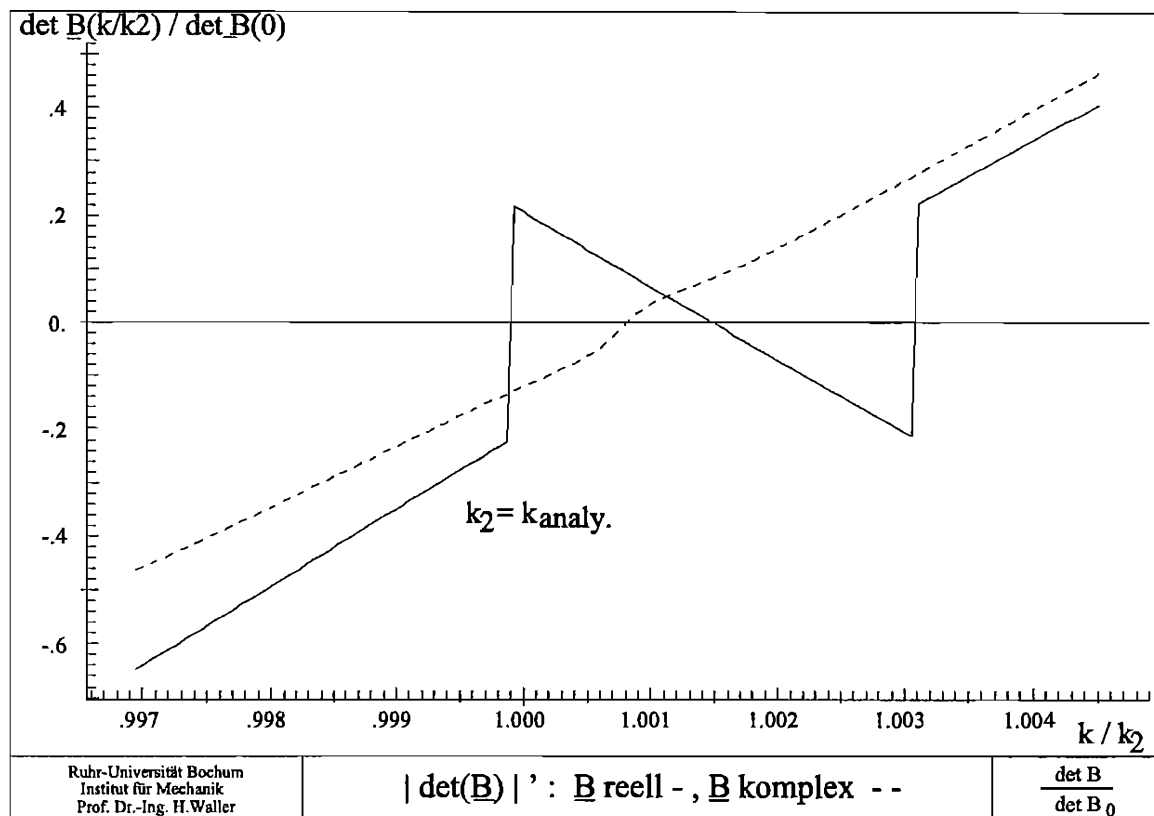


Abbildung 3.52: Normierte Ableitungen der Determinantenbeträge um den 2. Eigenwert

da nur eine der beiden Nullstellen gefunden wird. Welcher der beiden Eigenwerte gefunden wird, hängt dabei vom Startwert ab. Dem Anwender wird auch nicht über die verschwindenden Singulärwerte mitgeteilt, daß zwei Eigenwerte in unmittelbarer Nähe vorliegen, da jeweils nur der kleinste Singulärwert verschwindet. Der Anwender muß daher annehmen, daß eine einfache Nullstelle vorliegt (Dies ist mathematisch korrekt, da die Eigenwerte sich ja leicht unterscheiden. Der Rangabfall darf daher nur eins sein.).

Um nun alle Eigenwerte in einem bestimmten Frequenzbereich auffinden zu können, wird ein kombiniertes Verfahren vorgeschlagen.

3.6.2 Kombination von Iterationsverfahren und QZ-/QR-Algorithmus

Mit Hilfe der Iterationsverfahren wird sich dem Eigenwert genähert. Bei ausreichender Nähe (über kleinsten Singulärwert abschätzbar), wird der QZ-Algorithmus eingesetzt. Es ist dann ausreichend mit $\rho = 2$ für die Reihenentwicklung des Matrizenpolynoms (siehe Gleichungen 3.8 und 3.10) zu arbeiten. Der QZ-Algorithmus liefert dann alle Eigenwerte und Eigenvektoren, auch wenn sie sehr nahe zusammenliegen.

Tabelle (3.14) zeigt die Ergebnisse mit Hilfe des kombinierten Verfahrens für das Würfelbeispiel an ausgewählten Eigenwerten. Die Rechnung wurde mit komplexer Systemmatrix und QZ-Algorithmus durchgeführt. Die Vielfachheit p bezieht sich auf die analytischen Ergebnisse, die mit k_{ian} bezeichnet werden.

Tabelle (3.13) zeigt die Ergebnisse für die beiden Systemmatrizen und die verschiedenen Verfahren. QZ- bzw. QR-Algorithmus liefern beide Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Die Eigenvektoren sind für beide Arten der Berechnung bei gleicher Normierung jeweils identisch, obwohl sie bei anderen Frequenzen auftreten.

Eigenwert	$B(k)$	Newton	Sekante	TS	QZ/QR
001	reell	0.99990	0.99990	0.99990	0.99990
001	komplex	1.00082	1.00091	1.00253	1.00079
110	reell	1.00305	1.00305	0.99991	1.00305
110	komplex	1.00082	1.00091	1.00253	1.00104

Tabelle 3.13: Normierte Eigenwerte 001 und 110 bei reeller und komplexer Rechnung

m n t	p	k_i/k_{ian}
001	2	1.00080
110		1.00104
002	3	1.00220
021		1.00258
201		1.00206
003	3	1.00186
131		1.00298
311		1.00529
013	4	1.00512
103		1.00511
230		1.00820
320		1.00814

Tabelle 3.14: Mehrfache Eigenwerte (komplexe Rechnung)

3.6.3 Einseitig eingespannter Balken mit 42 Elementen

Ein einseitig eingespannter Balken wird auf seine Eigenfrequenzen hin untersucht. Berechnet werden die ersten drei Längseigenfrequenzen, die ersten drei Torsionseigenfrequenzen und die ersten sechs Biegeeigenfrequenzen (Tabellen 3.15, 3.16, 3.17). Da der Balken bezüglich seiner Breite und Höhe Symmetrie aufzeigt, treten die Biegeeigenfrequenzen mit der Vielfachheit $p = 2$ auf. Längs- und Torsionseigenfrequenzen besitzen die Vielfachheit $p = 1$. Die Ergebnisse sind nach den in der Bildunterschrift angegebenen Größen normiert (In den Formeln bedeuten: c_p = Druckwellengeschwindigkeit, A = Querschnittsfläche, I_T = Torsionsträgheitsmoment, $I_x = I_y = I$ = Flächenmoment zweiter Ordnung, I_p = polares Flächenmoment zweiter Ordnung, E = E-Modul, G = Schubmodul, l = Stablänge.).

Eigenwert	p	FEM	Newton	Sekante	TS	QZ/QR
1.Biegung	2	1.86987	1.86927	1.86902	1.86929	1.86934 1.86934
2.Biegung	2	4.60679	4.60339	4.60290	4.60349	4.60383 4.60383
3.Biegung	2	7.53409	7.52161	7.52017	7.51983	7.51743 7.51743
4.Biegung	2	10.24783	10.21181	10.21319	10.21421	10.21566 10.21566
5.Biegung	2	12.77450	12.70616	12.70834	12.70758	12.70898 12.70898
6.Biegung	2	15.13567	15.02355	15.02361	15.02298	15.02290 15.02290

Tabelle 3.15: Normierte erste 6 Biegeeigenfrequenzen $\lambda_B : \lambda_B^4 = \omega^2 \frac{A}{c_p \cdot I} \cdot l$

Bei der letzten Biegeeigenfrequenz ergeben sich mit Hilfe des QZ-Algorithmus zwei Eigenwerte mit konjugiert komplexem Imaginärteil. Dieser ist zwar verschwindend klein, deutet aber darauf hin, daß hier nach dem Betragsminimum der Determinante zu suchen ist. Dazu eignet sich das vorher beschriebene Sekantenverfahren in Anwendung auf die Ableitung des Betrags der Determinante nach der Frequenz. Dieses liefert die Eigenfrequenz beim gleichen Werte wie der QZ-Algorithmus.

Eigenwert	p	FEM	Newton	Sekante	TS	QZ/QR
1.Zug	1	1.00012	0.99999	0.99999	0.99999	1.00385
2.Zug	1	1.99947	2.00019	2.00019	2.00019	1.99963
3.Zug	1	3.00063	3.00102	3.00102	3.00093	2.99965

Tabelle 3.16: Normierte erste 3 Längseigenfrequenzen $k_L = \frac{\omega l}{\pi c_p} + 0.5$

Eigenwert	p	FEM	Newton	Sekante	TS	QZ/QR
1.Torsion	1	1.04333	1.03883	1.03883	1.03883	1.03892
2.Torsion	1	2.13068	2.11788	2.11788	2.11788	2.11790
3.Torsion	1	3.21804	3.20011	3.20011	3.20011	3.20011

Tabelle 3.17: Normierte erste 3 Torsionseigenfrequenzen $k_T = \frac{\omega l}{\pi c_T} + 0.5$ mit $c_T^2 = \frac{GI_T}{\rho I_p}$

3.7 Bestimmung von Eigenvektoren mit der Singulärwertzerlegung

Bei den iterativen Verfahren zur Eigenwertbestimmung wird u.a. die Singulärwertzerlegung eingesetzt. Mit dieser werden nun ebenfalls die Eigenvektoren bestimmt.

Rechtseigenvektoren

Das Eigenwertproblem lautet

$$\underline{B}(\omega) \vec{x}(\omega) = \vec{0} \quad . \quad (3.167)$$

Die Systemmatrix $\underline{B}(\omega)$ wird für den Eigenwert ω_i aufgestellt. Diese singuläre Matrix wird mit Hilfe der Singulärwertzerlegung zerlegt

$$\underline{B}(\omega_i) \vec{x}_i(\omega_i) = (\underline{Q} \underline{\Sigma} \underline{P}^T)_i \vec{x}_i(\omega_i) = \vec{0} \quad . \quad (3.168)$$

Linksmultiplikation mit \underline{Q}^T liefert

$$(\underline{\Sigma} \underline{P}^T)_i \vec{x}_i(\omega_i) = \vec{0} \quad . \quad (3.169)$$

Da $\underline{\Sigma}$ die Diagonalmatrix der Singulärwerte ist und der letzte Singulärwert für einen Eigenwert der Vielfachheit $p = 1$ zu Null wird, verschwindet die letzte Zeile von $(\underline{\Sigma} \underline{P}^T)_i$ identisch.

Das verbleibende Gleichungssystem wird gelöst, indem die letzte Komponente von $\vec{x}_i(\omega_i)$ zu eins vorgegeben wird und die rechte Spalte von $(\underline{\Sigma} \underline{P}^T)_i$ auf die rechte Seite der Gleichung (3.169) geschrieben wird. Da jede Zeile des resultierenden Gleichungssystems j mit Σ_j multipliziert wird, braucht die Multiplikation mit $\underline{\Sigma}$ in Gleichung (3.169) nicht explizit ausgeführt zu werden.

Es folgt das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} p_{11}^T & p_{12}^T & \cdots & p_{1(n-1)}^T \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{(n-1)1}^T & p_{(n-1)2}^T & \cdots & p_{(n-1)(n-1)}^T \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -p_{1n}^T \\ \vdots \\ -p_{(n-1)n}^T \end{bmatrix}_i \quad (3.170)$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{P}_{red,i}^T \vec{x}_{red,i} = \vec{f}_{red,i} \quad .$$

Die Lösung ergibt mit der vorgegebenen Komponente x_{ni} den Rechtseigenvektor zu ω_i .

Bei Eigenwerten der Vielfachheit $p > 1$ sind p Singulärwerte verschwindend. D.h. es müssen p -fach p Komponenten von \vec{x}_i so vorgewählt werden, daß die resultierenden Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.

Für $p = 2$ beispielsweise werden je zweimal die letzten beiden Komponenten von \vec{x}_i vorgegeben

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_{(n-1)i} = 0 \quad \text{und} \quad x_{ni} = 1 \\ 2) \quad & x_{(n-1)i} = 1 \quad \text{und} \quad x_{ni} = 0 \end{aligned} \quad (3.171)$$

Bei der Wahl 1) verschwindet die vorletzte Spalte von $(\underline{P}^T)_i$, die letzte Spalte stellt mit negativem Vorzeichen die rechte Seite $\vec{f}_{red,i}$ dar.

Bei der Wahl 2) verschwindet die letzte Spalte von $(\underline{P}^T)_i$, die vorletzte Spalte stellt mit negativem Vorzeichen die rechte Seite $\vec{f}_{red,i}$ dar.

Es ergeben sich zwei Eigenvektoren, die eine *Eigenebene* über die Beziehung

$$\vec{x} = \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2 \quad (3.172)$$

aufspannen. α und β sind beliebige Konstanten.

Als Beispiel dazu wird eine einseitig eingespannte Welle (siehe Bild 3.44) untersucht (Die Diskretisierung erfolgte mit quadratischen Elementen, die hier in der Darstellung mit Hilfe von Geraden angenähert werden.). Bild (3.45) zeigt die ersten vier Eigenformen der Welle. Wegen der Rotationssymmetrie treten die Biegeeigenfrequenzen mit der Vielfachheit $p = 2$ auf. D.h. zu jeder Biegeeigenfrequenz lassen sich zwei Eigenvektoren bestimmen, die die Eigenebene nach Gleichung (3.172) aufspannen.

Die Bilder (3.53) und (3.54) zeigen jeweils die Komponenten des freien Wellenendes der beiden Eigenvektoren senkrecht zur Wellenachse bei den ersten beiden Biegeeigenfrequenzen. Durch geeignete Wahl von α und β sind die beiden Eigenvektoren so normiert, daß sie senkrecht aufeinander stehen. Die Linien *CL* geben die Lage des Mittelpunktes der Endflächen in unverformter Lage an.

Linkseigenvektoren

Das Eigenwertproblem wird hier mit der transponierten (bei komplexer Rechnung mit der konjugiert komplexen, transponierten) Systemmatrix aufgestellt

$$\underline{B}^T(\omega) \vec{y}(\omega) = \vec{0} \quad (3.173)$$

Für die Systemmatrix $\underline{B}^T(\omega)$ kann mit Hilfe der Singulärwertzerlegung für einen Eigenwert ω_i geschrieben werden

$$\underline{B}^T(\omega_i) \vec{y}_i(\omega_i) = (\underline{Q} \underline{\Sigma} \underline{P}^T)_i^T \vec{y}_i(\omega_i) = (\underline{P} \underline{\Sigma} \underline{Q}^T)_i \vec{y}_i(\omega_i) = \vec{0} \quad . \quad (3.174)$$

Linksmultiplikation mit \underline{P}^T liefert

$$(\underline{\Sigma} \underline{Q}^T)_i \vec{y}_i(\omega_i) = \vec{0} \quad . \quad (3.175)$$

In gleicher Weise wie beim Rechtseigenwertproblem ergibt sich bei Vorgabe der letzten Komponente des Eigenvektors ein Gleichungssystem für die restlichen Komponenten in der Form

$$\underline{Q}_{red,i}^T \vec{y}_{red,i} = \vec{g}_{red,i} \quad . \quad (3.176)$$

Die Lösung ergibt mit der vorgegebenen Komponente y_{ni} den Linkseigenvektor zu ω_i . Eigenvektoren mehrfacher Eigenwerte werden analog den Rechtseigenvektoren bestimmt.

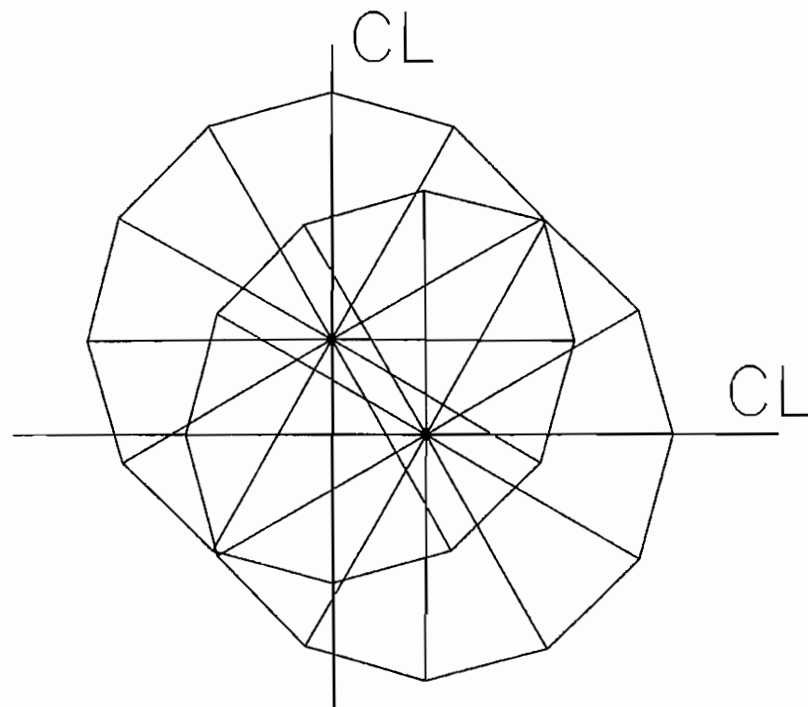


Abbildung 3.53: Endflächenverschiebungen bei der ersten Biegeeigenfrequenz

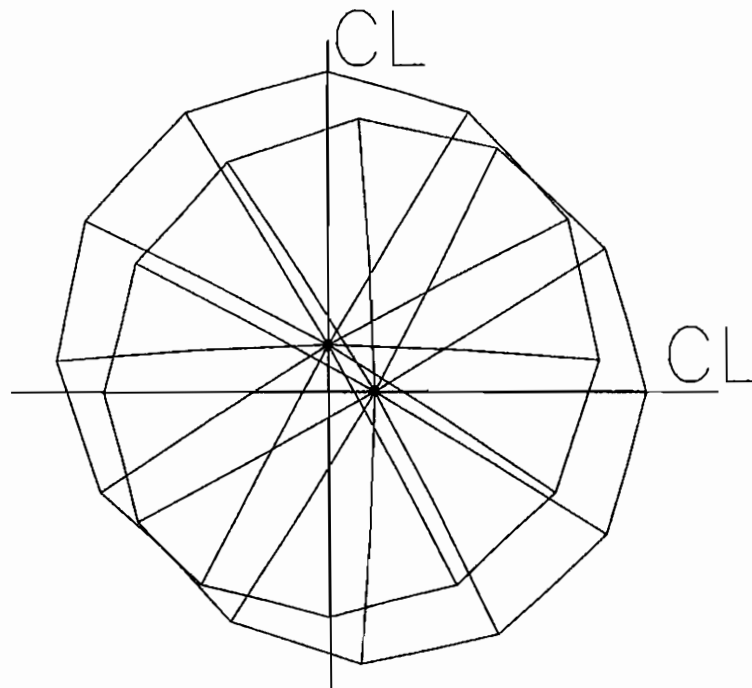


Abbildung 3.54: Endflächenverschiebungen bei der zweiten Biegeeigenfrequenz

3.8 Zusammenfassung der Eigenwertanalyse

In diesem Kapitel werden verschiedene Verfahren zur Eigenwertanalyse des nichtlinearen Eigenwertproblems, das sich bei der REM ergibt, eingesetzt.

Neben den direkten Verfahren, bei denen ein Frequenzbereich mit vorgegebener Schrittweite durchlaufen wird und die nur im Rahmen der Schrittweite genau sind, werden sowohl iterative Verfahren als auch Methoden eingesetzt, die auf der Linearisierung des Eigenwertproblems beruhen.

Bei allen Verfahren erweist es sich als sinnvoll, mit bereichsweise frequenzunabhängigen Systemmatrizen zu arbeiten. Dazu werden Reihenentwicklungen der Fundamentallösungen angegeben, die das Aufstellen solcher Matrizen ermöglichen.

Es zeigt sich, daß ein sicheres Auffinden der Eigenwerte nur unter Verwendung sowohl des Realteils als auch des Imaginärteils der Fundamentallösung des Frequenzbereichs möglich ist. Dies bedeutet den Einsatz komplexer Systemmatrizen.

Rechenzeit und Speicherbedarf lassen sich jedoch reduzieren, wenn statt mit der Systemmatrix \underline{B} mit der hermiteschen $\underline{B}^* \underline{B}$ gerechnet wird. Diese Matrix benötigt nur den Speicherplatz einer reellen Matrix mit gleicher Anzahl Zeilen und Spalten. Zudem sind die Eigenwerte gleich den Singulärwerten von \underline{B} und damit, genau wie die Determinantenwerte, reelle Größen.

Beim Newton-Verfahren und dem TS-Algorithmus sind Diagonalzerlegungen der Systemmatrix erforderlich. Es erweist sich als sinnvoll, hier die Singulärwertzerlegung einzusetzen, da diese auch für singuläre Matrizen sehr stabiles Verhalten zeigt. Zudem erweisen sich die kleinsten Singulärwerte der Systemmatrix \underline{B} als stabiles Kriterium zum Auffinden von Eigenwerten. Während die Determinante im gesamten Frequenzbereich sehr starken Schwankungen der Größe unterliegt und ein Abbruchkriterium der Iterationsprozesse nur sehr schwer festzulegen ist, können entweder der kleinste oder das Produkt von wenigen kleinsten Singulärwerten als sicheres Abbruchkriterium angesetzt werden. Als Vergleichswert für den Abbruch der Iteration dienen die entsprechenden Werte der statischen Rechnung. Die Güte dieses Abbruchkriteriums wird an mehreren Beispielen gezeigt.

Der TS-Algorithmus wird zudem mit Hilfe der Singulärwertzerlegung und der Eigenwertzerlegung eingesetzt. Dabei wird während des Iterationsprozesses entweder der kleinste oder das Produkt der n kleinsten Singulärwerte minimiert. Die kleinsten Singulärwerte lassen sich effektiv mit Hilfe der inversen Vektoriteration in Anwendung auf die Matrix $\underline{B}^* \underline{B}$ berechnen. Bei ausreichender Nähe zum Eigenwert wird dann die Eigenwertzerlegung eingesetzt, die den kleinsten Eigenwert oder Produkte der kleinsten Eigenwerte minimiert. Die Eigenwerte haben den Vorteil, daß sie im Gegensatz zu den stets positiven Singulärwerten vorzeichenbehaftet sind.

Zum Durchlaufen größerer Frequenzbereiche wird die inverse Funktion definiert. Zuerst wird mit Hilfe iterativer Verfahren und einer Funktion (die z.B. als Produkt der 3 kleinsten Singulärwerte definiert werden kann) ein Eigenwert bestimmt. Anschließend wird mit Hilfe der inversen Funktion das nächste Maximum iterativ aufgesucht. Von dort aus startet dann erneut der Iterationsprozeß mit der eigentlichen Funktion.

Die Linearisierung des Eigenwertproblems erfolgt mit Hilfe der durch die Reihenentwicklung der Fundamentallösung gewonnenen, frequenzunabhängigen Systemmatrizen und anschließender Günther'scher Matrizenexpansion.

Es wird gezeigt, wie neben dem QZ-Algorithmus auch der QR-Algorithmus eingesetzt werden kann. Dieser wird unter Einsatz des inversen Eigenwertes auf das spezielle Eigenwertproblem angewendet und benötigt deshalb nur den halben Speicherbedarf des QZ-Algorithmus, der auf das spezielle Eigenwertproblem angesetzt wird.

Die Kombination von iterativen Verfahren und Linearisierung sowie QR- und QZ-Algorithmus wird eingesetzt, um nahe zusammenliegende und mehrfache Eigenwerte sicher aufzufinden. Dazu werden zuerst die iterativen Verfahren eingesetzt. Bei ausreichender Nähe zum Eigenwert erfolgt die Linearisierung des Eigenwertproblems mit Hilfe nur weniger frequenzunabhängiger Systemmatrizen.

In Beispielen werden die verschiedenen Methoden verglichen.

Kapitel 4

Berechnungen im Zeitbereich mit der Randelementemethode

Die grundsätzlichen Verfahren zur Berechnung zeitabhängiger Lösungen von partiellen Differentialgleichungen werden beschrieben (Die Entwicklungsgeschichte dieser Verfahren wird ausführlich z.B. in [68], [27], [31] und [18] beschrieben.). Zur Erläuterung der Verfahren wird eine skalare Wellengleichung im 3D-Raum mit Anfangsbedingungen und Randbedingungen auf dem Rand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ mit verschwindenden Volumenlasten $b(\vec{x}, t) = 0$ gewählt (siehe *Grundlagen*)

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}(\vec{x}, t) - \nabla^2 u(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingungen: } u(\vec{x}, t = 0) &= u_0 \\ \dot{u}(\vec{x}, t = 0) &= \dot{u}_0 = v_0 \\ \text{Randbedingungen: } u(\vec{x}, t) &= \bar{u} \quad \vec{x} \in \Gamma_1 \\ p(\vec{x}, t) &= \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial \bar{n}} = \bar{p} \quad \vec{x} \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Gesucht ist nun das dynamische Verhalten des Systems, welches durch die Differentialgleichung beschrieben wird. Je nachdem welche physikalischen Größen gefragt sind, können verschiedene Verfahren eingesetzt werden:

1. direkte Zeitbereichsverfahren
2. Fourier-Transformation
3. Laplace-Transformation
4. Modalanalyse

Diese Verfahren werden nun kurz beschrieben.

4.1 Direkte Zeitbereichsverfahren

Direkte Zeitbereichsverfahren werden dann eingesetzt, wenn zeitabhängige Lösungen $u(\vec{x}, t)$ direkt gesucht sind. Mit ihnen wird die Systemantwort durch direkte, meist numerische Integration bestimmt. Direkte Verfahren erlauben zudem die effiziente Behandlung nichtlinearer Problemstellungen und eignen sich für Aufgaben mit hohem Frequenzgehalt. Sie werden sowohl für erzwungene als auch für freie Schwingungen mit vorgegebenen Anfangsbedingungen eingesetzt.

Der Einsatz direkter Lösungsverfahren in Kombination mit Randelementen wird besonders zur Lösung von Wellenproblemen in halbbunendlichen und unendlichen Gebieten eingesetzt, da die Effekte der Wellenabstrahlung erfaßt werden. Hier ist aber zu bemerken, daß, ähnlich wie im Frequenzbereich, Anteile von sog. *fiktiven Eigenfrequenzen* bei solchen Außenraumproblemen auftreten, die zu Verfälschungen führen und die besonderer Techniken bedürfen [36].

Ausführliche Beschreibungen der Geschichte der Zeitverlaufsrechnung mit Randelementen werden in ([36], [68]) gegeben.

Beim direkten Lösungsverfahren wird das Prinzip der gewichteten Residuen mit einer orts- und zeitabhängigen Fundamentallösung $u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau)$ als Gewichtsfunktion angewendet. Die Fundamentallösung ist die Lösung der Gleichung (4.1) in einem unendlichen Vollraum mit einer Impulslast zum Zeitpunkt τ am Ort \vec{x}^i ([68], [22], [182])

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - \nabla^2 u^* = \delta(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) \quad (4.3)$$

und lautet für 3D-Gebiete

$$\begin{aligned} u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) &= \frac{1}{4 \pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) \\ p^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) &= \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{4 \pi r} \left(-\frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) + \frac{1}{c} \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) \right) \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mit dieser Fundamentallösung wird Gleichung (4.1) gewichtet und die Integration über Raum und Zeit ausgeführt

$$-\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} \ddot{u}(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla^2 u(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau = 0 \quad (4.5)$$

Der erste Ausdruck wird zweifach nach der Zeit partiell integriert

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \ddot{u}(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} u(\vec{x}, \tau) \ddot{u}^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau \\ + \int_{\Omega} \left[u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0) v_0 - u_0 \frac{\partial u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0)}{\partial \tau} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der mittlere Ausdruck aus Gleichung (4.5) wird zweifach partiell nach den Raumkoordinaten integriert

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \nabla^2 u(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} u(\vec{x}, \tau) \nabla^2 u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau \\ + \int_0^t \int_{\Gamma} p(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau &- \int_0^t \int_{\Gamma} u(\vec{x}, \tau) p^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau \quad . \quad (4.7) \end{aligned}$$

Damit folgt aus Gleichung (4.5)

$$\begin{aligned} - \frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} u(\vec{x}, \tau) \ddot{u}^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau &- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0) v_0 - u_0 \frac{\partial u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0)}{\partial \tau} \right] d\Omega \\ + \int_0^t \int_{\Omega} u(\vec{x}, \tau) \nabla^2 u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau &+ \int_0^t \int_{\Gamma} p(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau \\ - \int_0^t \int_{\Gamma} u(\vec{x}, \tau) p^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau &= 0 \quad . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Mit der Eigenschaft der Fundamentallösung bzw. der Dirac-Funktion ([182], [231])

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - \nabla^2 u^* \right] u(\vec{x}, \tau) d\Omega d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} u(\vec{x}, \tau) \delta(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Omega d\tau = u(\vec{x}^i, t) = u^i(t) \quad , \quad (4.9)$$

folgt für einen beliebigen Punkt des Gebietes und nach einer Grenzbetrachtung auch für Randpunkte

$$\begin{aligned} c^i u^i(t) &= - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0) v_0 - u_0 \frac{\partial u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0)}{\partial \tau} \right] d\Omega + \int_0^t \int_{\Gamma} p(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\Gamma} u(\vec{x}, \tau) p^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\Gamma d\tau \quad (4.10) \end{aligned}$$

Für verschwindende Anfangsbedingungen resultiert eine reine Randintegraldarstellung.

Gleichung (4.10) läßt sich für den hier gegebenen Fall der skalaren 3D-Wellengleichung (4.1) durch Einsetzen der Fundamentallösung in die *Kirchhoff'sche Integralgleichung*

$$\begin{aligned} c^i u^i(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(\vec{x}, t - \frac{r}{c}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} u(\vec{x}, t - \frac{r}{c}) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{rc} \left(\frac{\partial u(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}} \right) d\Gamma \\ &- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0) v_0 - u_0 \frac{\partial u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, 0)}{\partial \tau} \right] d\Omega \quad (4.11) \end{aligned}$$

überführen. In dieser Gleichung ist keine Zeitintegration mehr enthalten. Für andere Probleme

(z.B. 2D-Wellenausbreitung, Dynamik) ist eine solche Darstellung nicht möglich. Die Zeitintegration ist dann mit Hilfe einer Diskretisierung der Zeit durchzuführen. Dieses Vorgehen wird nun prinzipiell gezeigt. Ausgangspunkt ist Gleichung (4.10).

Für die Feldvariablen werden Separationsansätze bezüglich Zeit und Raum gewählt. Hier wird z.B. davon ausgegangen, daß die Feldvariablen während eines kleinen Zeitraums Δt näherungsweise als konstant angenommen werden können (*konstanter Zeitansatz*)

$$u(\vec{x}, \tau) = \sum_{n=1}^N u^n(\vec{x}) \Phi_n(\tau) \quad (4.12)$$

$$p(\vec{x}, \tau) = \sum_{n=1}^N p^n(\vec{x}) \Phi_n(\tau) \quad (4.13)$$

mit

$$\Phi_n(\tau) = \begin{cases} 1 & : (n-1)\Delta t \leq \tau \leq n\Delta t \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_n(\tau) = H[\tau - (n-1)\Delta t] - H[\tau - n\Delta t]$$

(mit der Heaviside-Funktion $H(t)$).

Für die Integrale bezüglich der Zeit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t p(\vec{x}, \tau) u^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\tau &= \sum_{n=1}^N p^n(\vec{x}) \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} u^*(\vec{x}, N\Delta t, \vec{x}^i, \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^N p^n(\vec{x}) G^{N-n+1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t u(\vec{x}, \tau) p^*(\vec{x}, t, \vec{x}^i, \tau) d\tau &= \sum_{n=1}^N u^n(\vec{x}) \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} p^*(\vec{x}, N\Delta t, \vec{x}^i, \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^N u^n(\vec{x}) F^{N-n+1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Zeitintegrale für einen Zeitschritt Δt können analytisch gelöst werden ([22], [182]). Es ergibt sich die Randintegraldarstellung

$$c^i u^{iN}(t) = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} [G^{N-n+1} p^n(\vec{x}) - F^{N-n+1} u^n(\vec{x})] d\Gamma \quad (4.16)$$

Zur räumlichen Diskretisierung wird eine Einteilung des Integrationsgebietes Γ in M Elemente vorgenommen. Pro Element werden A Knoten (lokale Knoten) vereinbart.

Beispielsweise werden folgende lokale, isoparametrische Ansätze gewählt:

$$\begin{aligned} x_i &= N_\alpha X_{i\alpha} & \alpha &= 1, \dots, A \\ u^n &= N_\alpha U_\alpha^n \\ p^n &= N_\alpha P_\alpha^n \end{aligned} \quad (4.17)$$

Hier werden für Geometrie und Feldvariable die gleichen Formfunktionen verwendet. Unterschiedliche Ansätze sind ebenfalls möglich.

Nach einer Transformation auf lokale Koordinaten (Elementkoordinaten) folgt

$$\begin{aligned} c^i u^{iN}(t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha=1}^A [P_\alpha^n \int_{-1}^{+1} G^{N-n+1} N_\alpha(\xi_1, \xi_2) |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \\ &- U_\alpha^n \int_{-1}^{+1} F^{N-n+1} N_\alpha(\xi_1, \xi_2) |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2] \end{aligned} \quad (4.18)$$

(ξ_1, ξ_2 sind lokale Koordinaten, $|J(\xi_1, \xi_2)|$ ist die Jacobi-Determinante der Transformation von globalen zu lokalen Koordinaten.).

Diese Gleichung kann nun für jeden Randpunkt \vec{x}^i aufgestellt werden. Es folgt ein Matrixgleichungssystem

$$\sum_{n=1}^N [\underline{G}^{N-n+1} \vec{P}^n - \underline{F}^{N-n+1} \vec{U}^n] = \vec{0} \quad (4.19)$$

Für einen diskreten Zeitpunkt t ergeben sich so viele Unbekannte wie Gleichungen, vorausgesetzt die Feldgrößen der Vergangenheit sind bekannt. Umstellen der Gleichung (4.19) nach bekannten und unbekanntem Randgrößen liefert

$$\begin{aligned} \underline{B} \vec{X}^n &= \underline{A} \vec{Y}^n - \sum_{n=1}^{N-1} [\underline{G}^{N-n+1} \vec{P}^n - \underline{F}^{N-n+1} \vec{U}^n] \\ \underline{B} \vec{X}^n &= \underline{A} \vec{Y}^n + \vec{R}^N \end{aligned} \quad (4.20)$$

Damit sind die Feldgrößen zu jedem Zeitpunkt t berechenbar. \vec{R}^N enthält dabei die Informationen der vorhergehenden Zeitschritte.

Ausführliche Darstellungen des direkten Verfahrens in Anwendung auf Probleme der Dynamik können in ([231], [177], [18], [17], [27], [36]) nachgelesen werden.

4.2 Frequenzbereich und Fourier-Transformation

Für eine bestimmte Klasse von Problemstellungen, wie z.B. Systeme unter harmonischer Erregung, frei schwingende Systeme und Eigenwertprobleme, ist es sinnvoller und weniger umständ-

lich, im Frequenzbereich statt im Zeitbereich zu arbeiten. Für dieses Vorgehen spricht zudem, daß die das System beschreibenden Gleichungen stark vereinfacht werden und damit einer Lösung wesentlich zugänglicher sind. So werden aus Faltungen im Zeitbereich einfache Produkte, Zeitableitungen werden zu Multiplikationen des Typs $(i\omega)$. Oft ermöglichen solche Vereinfachungen eine analytische Lösung des Problems. Ein weiterer Grund, im Frequenzbereich zu arbeiten, basiert auf der Möglichkeit, mit Hilfe von Fourierreihen jede beliebige periodische Erregerfunktion durch eine Summe harmonischer Funktionen auszudrücken. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips ist dann die Lösung des Problems auffindbar. Die Teillösungen können mit der inversen Fourier-Transformation in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

Mit der Fourier-Transformation können unterschiedliche Aufgabenstellungen untersucht werden. Bei der Verwendung der beidseitigen Fourier-Transformation (in dieser Weise ist die Fourier-Transformation üblicherweise definiert) wird davon ausgegangen, daß sich das System zum Beginn der Untersuchung im eingeschwungenen Zustand befindet.

Die einseitige Fourier-Transformation (für $t \geq 0$) berücksichtigt die Anfangsbedingungen und führt in der allgemeinen Form zur Laplace-Transformation [194]. Hier wird ausschließlich die beidseitige Fourier-Transformation untersucht, da diese bei der späteren Eigenwertanalyse eine wichtige Rolle spielt.

Fourier-Transformation

Die zeitabhängige Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}(\vec{x}, t) - \nabla^2 u(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.21)$$

wird mit harmonischen Ansätzen für die Feldgrößen

$$u(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

in eine frequenzabhängige Differentialgleichung überführt

$$\nabla^2 u(\vec{x}, \omega) + k^2 u(\vec{x}, \omega) = 0 \quad , \quad (4.23)$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$. Dies entspricht der (beidseitigen) Fourier-Transformation. Mit dem Prinzip der gewichteten Residuen und der Fundamentallösung des Frequenzbereichs kann die Randintegraldarstellung hergeleitet werden (siehe *Grundlagen*)

$$c^i u^i = \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma \quad . \quad (4.24)$$

Die Diskretisierung des Randes führt zu der Matrixgleichung

$$\underline{G}(\omega) \vec{p}(\omega) = \underline{H}(\omega) \vec{u}(\omega) \quad . \quad (4.25)$$

Einbau von Randbedingungen und Umordnung des Gleichungssystems liefern

$$\underline{B}(\omega) \vec{Y}(\omega) = \vec{F}(\omega) \quad . \quad (4.26)$$

Diese Gleichung wird nun für konkrete Werte ω_i bzw. k_i aufgestellt und die Lösungen $\vec{Y}(\omega_i)$ der unbekanntenen Randgrößen bestimmt. Mit Hilfe der diskreten Fourier-Rücktransformation können bei ausreichender Stützstellenzahl ω_i im Frequenzbereich die zeitabhängigen Größen $\vec{y}(t)$ berechnet werden.

Diskrete Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation wird durch die folgende Transformationsgleichung definiert

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Damit die Fourier-Transformation angewendet werden kann, muß die Konvergenzbedingung

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty \quad (4.28)$$

erfüllt sein. Die Randelementemethode liefert $Y(\omega)$ nur für N diskrete, äquidistante (hier so gewählt) Stützstellen Y_n . Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt dann mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation, die wie folgt definiert ist ([260], [259])

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-i2\pi \frac{nl}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_l &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{i2\pi \frac{nl}{N}} \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} y_l &= y(t_l) & Y_n &= Y(\omega_n) & \omega_n &= n \frac{2\pi}{T} \\ t_l &= l \frac{T}{N} & T &= N \Delta t & \Delta t &= t_{l+1} - t_l \quad . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Im Frequenzbereich wird nur ein endliches Intervall $0 \leq \omega \leq N \frac{2\pi}{T}$ betrachtet, daher ergibt sich im Zeitbereich auch nur ein Intervall $0 \leq t \leq T$.

Bei der Transformation können systematische Fehler (Spiegelungsfehler, Rückfaltungsfehler) auftreten. Wie deren Einfluß minimiert wird, ist in ([260], [259]) ausführlich beschrieben.

Die praktische Ausführung der diskreten Fourier-Transformation wird mit dem von *Codey und Tuckey* 1965 entwickelten Algorithmus der *Fast-Fourier-Transformation* (FFT) durchgeführt. Dieser Algorithmus nutzt spezielle Eigenschaften der Kreisfunktionen und ermöglicht auch die effektive Berechnung bei einer größeren Anzahl von Stützstellenwerten.

4.3 Bildbereich und Laplace-Transformation

Die im letzten Abschnitt behandelte Fourier-Transformation kann nur dann angewendet werden, wenn die Konvergenzbedingung erfüllt ist. Diese Bedingung ist aber für eine Klasse von Funktionen (wie z.B. Sprungfunktion bzw. Heaviside-Funktion) nicht erfüllt. Wird die Funktion $y(t)$ mit $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$, konstant) multipliziert und der einseitigen Fourier-Transformation unterworfen [194], folgt

$$F [e^{-\alpha t} y(t)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\alpha t} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad . \quad (4.31)$$

Mit der Laplace-Variablen $s = \alpha + i\omega$ folgt die Laplace-Transformation

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \quad (4.32)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} Y(s) e^{st} ds \quad .$$

Die zu erfüllende Konvergenzbedingung ändert sich gegenüber der Fourier-Transformation zu

$$\int_0^{\infty} | e^{-\alpha t} y(t) | dt < \infty \quad . \quad (4.33)$$

Diese Bedingung wird für die meisten technisch interessanten Funktionen erfüllt. Damit ist die Laplace-Transformation gegenüber der Fourier-Transformation für eine erweiterte Funktionsklasse anwendbar. Mit der Laplace-Transformation ist damit ein mächtiges Werkzeug gegeben, mit dem es u.a. möglich ist, Faltungsintegrale im Bildbereich zu lösen, und anschließend die Zeitantwort mittels Rücktransformation zu bestimmen. Die Laplace-Transformation findet besonders bei Problemen mit Einschaltvorgängen, Einschwingvorgängen und Stoßvorgängen Anwendung.

Laplace-Transformation

Die zeitabhängige Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}(\vec{x}, t) - \nabla^2 u(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.34)$$

wird mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich transformiert

$$\frac{1}{c^2} [s^2 u(\vec{x}, s) - s u_0 - v_0] - \nabla^2 u(\vec{x}, s) = 0 \quad (4.35)$$

bzw.

$$\frac{1}{c^2} s^2 u(\vec{x}, s) - \nabla^2 u(\vec{x}, s) = \frac{1}{c^2} s u_0 + \frac{1}{c^2} v_0 = F(\vec{x}, s) \quad (4.36)$$

Mit der Methode der gewichteten Residuen und der Fundamentallösung

$$u^* = \frac{1}{4 \pi r} \cdot e^{-s \frac{r}{c}} \quad (4.37)$$

$$p^* = \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}}$$

kann die Integralgleichung

$$c^i u^i(s) - \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Omega} F(\vec{x}, s) u^* d\Omega \quad (4.38)$$

hergeleitet werden. Für nicht-verschwindende Anfangsbedingungen und Volumenlasten ist das Volumenintegral zu Randintegralen zu transformieren (z.B. mit der Multiple Reciprocity Method, MRM). Dann ergibt sich ebenso wie für verschwindendes $F(\vec{x}, s)$ eine reine Randintegraldarstellung

$$c^i u^i(s) = \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma \quad (4.39)$$

Die Diskretisierung des Randes in Elemente führt, analog zur Herleitung bei der Fouriertransformation, zu

$$\underline{B}(s) \vec{Y}(s) = \vec{F}(s) \quad (4.40)$$

Diese Gleichung ist für konkrete Werte s auszuwerten und dann die Rücktransformation in den Zeitbereich vorzunehmen.

In [16] wird auf die Problematik der Rücktransformation in den Zeitbereich hingewiesen. Wegen der Diskretisierung im Bildbereich neigt die numerische Rücktransformation zur Instabilität. Diese Instabilität wird durch die Anwendung alternativer Verfahren vermieden.

4.4 Modalanalyse

Die Modalanalyse stellt neben den bisher beschriebenen Verfahren ein weiteres wichtiges Verfahren zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens von Strukturen dar. Mit ihrer Hilfe gelingt es in vielen Fällen einen detaillierten Einblick in das Schwingungsverhalten zu gewinnen, da eine Entkopplung der Schwingungsanteile stattfindet. Die Möglichkeit der Reduktion der modalen Freiheitsgrade macht zudem einige Problemstellungen (z.B. Strukturregelungen) erst praktikabel.

Hier werden zunächst die theoretischen Grundlagen der Modalanalyse beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, daß die in einer Struktur auftretende Dämpfung viskos, d.h. geschwindigkeitsproportional angenommen werden kann. Eine weitere Vereinfachung des Dämpfungsmodells ist dann möglich, wenn trotz Dämpfung die Form der Eigenformen weitgehend erhalten bleibt. Die modale Dämpfung findet dann ihre Anwendung.

Anschließend werden Anwendungsgebiete gezeigt, in denen die Modalanalyse häufig eingesetzt wird.

Zuletzt erfolgt die Anwendung der Modalanalyse in Kombination mit der Methode der Randelemente.

4.4.1 Grundlagen der Modalanalyse

Es wird davon ausgegangen, daß bereits ein mathematisches Modell einer realen Struktur aufgestellt worden ist. Weiter wird angenommen, daß die in der realen Struktur auftretenden Dämpfungseigenschaften durch ein geschwindigkeitsproportionales Dämpfungsmodell angenähert werden können. Die dynamischen Eigenschaften des Modells mit n Freiheitsgraden sollen mit der Bewegungsgleichung

$$\underline{M} \ddot{\vec{x}}(t) + \underline{D} \dot{\vec{x}}(t) + \underline{K} \vec{x}(t) = \vec{f}(t) \quad (4.41)$$

beschrieben werden. Darin sind \underline{M} , \underline{D} und \underline{K} die Systemmatrizen (Massenmatrix, Dämpfungsmatrix, Steifigkeitsmatrix), welche frequenz- und zeitunabhängig angenommen werden. $\vec{x}(t)$ ist der Vektor der unbekanntenen Zustandsgrößen. Auf der rechten Seite der Gleichung sind in $\vec{f}(t)$ die bekannten Systemerregungen zusammengefaßt.

Mit Hilfe der Modalanalyse erfolgt nun die Transformation der Gleichung (4.41) in den *Modalraum*. Zuerst wird der Fall des ungedämpften Systems, dann der des modal-gedämpften Systems und zuletzt der Fall der allgemeinen viskosen Dämpfung beschrieben.

Ungedämpfte Systeme

Für ungedämpfte Systeme wird die Dämpfungsmatrix \underline{D} zur Nullmatrix. Die Differentialgleichung lautet

$$\underline{M} \ddot{\vec{x}}(t) + \underline{K} \vec{x}(t) = \vec{f}(t) \quad . \quad (4.42)$$

Das Eigenwertproblem folgt für $\vec{f}(t) = \vec{0}$ mit dem Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(\omega) e^{i \omega t} \quad (4.43)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \vec{x}(t) = -\lambda \vec{x}(t)$$

(mit $\vec{x} = \vec{x}(\omega)$) zu

$$\underline{K} \vec{x} = \lambda \underline{M} \vec{x} \quad . \quad (4.44)$$

Das zugehörige *Linkseigenwertproblem* kann mit dem *Linkseigenvektor* $\vec{y} = \vec{y}(\omega)$ wie folgt geschrieben werden

$$\vec{y}^T \underline{K} = \lambda \vec{y}^T \underline{M} \quad . \quad (4.45)$$

Dabei sind die Eigenwerte beider Probleme gleich.

Für zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_i \neq \lambda_k$ folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$\underline{K} \vec{x}_i = \lambda_i \underline{M} \vec{x}_i \quad (4.46)$$

$$\vec{y}_k^T \underline{K} = \lambda_k \vec{y}_k^T \underline{M} \quad .$$

Erweiterung mit \vec{x}_i bzw. \vec{y}_k^T liefert

$$\vec{y}_k^T \underline{K} \vec{x}_i = \vec{y}_k^T \lambda_i \underline{M} \vec{x}_i \quad (4.47)$$

$$\vec{y}_k^T \underline{K} \vec{x}_i = \vec{y}_k^T \lambda_k \underline{M} \vec{x}_i \quad .$$

Subtraktion der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$0 = (\lambda_i - \lambda_k) \vec{y}_k^T \underline{M} \vec{x}_i \quad , \quad (4.48)$$

und für $\lambda_i \neq \lambda_k$ folgt

$$0 = \bar{y}_k^T \underline{M} \bar{x}_i \quad . \quad (4.49)$$

Gleichung (4.49) zeigt die Orthogonalität der Eigenvektoren unterschiedlicher Eigenwerte. Tritt für die Matrix $(\underline{K} - \lambda_i \underline{M})$ der charakteristischen Gleichung

$$\det [\underline{K} - \lambda_i \underline{M}] = 0 \quad (4.50)$$

ein Rangabfall auf, der gleich der Vielfachheit der Eigenwerte λ_i ist, nennt man das Matrizenpaar \underline{K} , \underline{M} diagonalähnlich. Ein Rangabfall, der ungleich der Vielfachheit ist, kann z.B. bei Systemen mit kritischer Dämpfung auftreten.

Für diagonalähnliche Matrizen, die hier vorausgesetzt werden, lassen sich die Eigenvektoren so normieren, daß

$$\bar{y}_k^T \underline{M} \bar{x}_i = \delta_{ik} \quad . \quad (4.51)$$

Daraus folgt

$$\bar{y}_k^T \underline{K} \bar{x}_i = \delta_{ik} \lambda_i \quad . \quad (4.52)$$

Die normierten Eigenvektoren werden in *Modalmatrizen* angeordnet

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \\ \underline{X} &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Mit den Modalmatrizen wird eine Transformation der Systemmatrizen \underline{K} , \underline{M} auf Diagonalf orm durchgeführt

$$\begin{aligned} \underline{Y}^T \underline{K} \underline{X} &= \text{diag} [\lambda_i] = \underline{\Lambda} \\ \underline{Y}^T \underline{M} \underline{X} &= \underline{I} \end{aligned} \quad (4.54)$$

(Es ist zu bemerken, daß die Einheitsmatrix hier in korrekter Darstellung die Einheit einer Masse hat [259]. Diese Einheit spielt bei Einheitenkontrollen eine wichtige Rolle, wird hier aber aus Gründen der einfacheren Schreibweise vernachlässigt. Diese Vernachlässigung führt bis auf die falschen Einheiten zu keinerlei Problemen.).

Die Eigenschaft der Modalmatrizen, die Systemmatrizen zu diagonalisieren, wird bei der Modaltransformation eingesetzt. Für den Vektor $\vec{x}(t)$ wird dabei der Ansatz

$$\vec{x}(t) = \underline{X} \vec{q}(t) \quad (4.55)$$

(mit $\vec{q}(t)$ = Modalkoordinaten) gewählt und in Gleichung (4.42) eingesetzt

$$\underline{M} \underline{X} \ddot{\vec{q}}(t) + \underline{K} \underline{X} \vec{q}(t) = \vec{f}(t) \quad (4.56)$$

Linksmultiplikation mit \underline{Y}^T liefert n entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\underline{Y}^T \underline{M} \underline{X} \ddot{\vec{q}}(t) + \underline{Y}^T \underline{K} \underline{X} \vec{q}(t) = \underline{Y}^T \vec{f}(t) \quad (4.57)$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{I} \ddot{\vec{q}}(t) + \underline{\Lambda} \vec{q}(t) = \underline{Y}^T \vec{f}(t) \quad .$$

Diese Differentialgleichungen können getrennt für sich gelöst werden. Dazu sind die Anfangsbedingungen in modale Koordinaten zu transformieren

$$\vec{x}_0 = \underline{X} \vec{q}_0 \quad (4.58)$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \underline{X} \dot{\vec{q}}_0 \quad .$$

Multiplikation von links mit $\underline{Y}^T \underline{M}$ liefert

$$\underline{Y}^T \underline{M} \vec{x}_0 = \underline{Y}^T \underline{M} \underline{X} \vec{q}_0 = \vec{q}_0 \quad (4.59)$$

$$\underline{Y}^T \underline{M} \dot{\vec{x}}_0 = \underline{Y}^T \underline{M} \underline{X} \dot{\vec{q}}_0 = \dot{\vec{q}}_0 \quad .$$

Mit diesem Vorgehen wird die Invertierung der Modalmatrix \underline{X} vermieden. Die Rücktransformation in physikalische Koordinaten erfolgt über

$$\vec{x}(t) = \underline{X} \vec{q}(t) \quad (4.60)$$

Je nach Problemstellung ist zur Berechnung der Zeitantwort oft nur die Berücksichtigung weniger Eigenschwingungsanteile erforderlich. Eine Begrenzung auf diese interessierenden Schwingungsanteile kann mit Hilfe der Modalanalyse durchgeführt werden. Dazu werden die Modalmatrizen nur mit den Eigenvektoren aufgebaut, die für die Problemlösung von Interesse sind.

Die rücktransformierte Zeitantwort enthält dann natürlich nur die berücksichtigten modalen Informationen (siehe *Einsatzgebiete der Modalanalyse*).

Modal gedämpfte Systeme

Für viele praktische Berechnungen hat sich gezeigt, daß mit dem Dämpfungsmodell *viskose Dämpfung* akzeptable Ergebnisse erzielt werden können. Für eine Klasse von Anwendungen zeigt sich (besonders für schwach gedämpfte Systeme), daß die Eigenformen von gedämpften Strukturen denen der ungedämpften Strukturen ähnlich sind. Dann wird oft die *Bequemlichkeitshypothese* angewendet. Dabei wird die Dämpfungsmatrix als eine lineare Kombination aus Steifigkeits- und Massenmatrix dargestellt

$$\underline{D} = \alpha \underline{K} + \beta \underline{M} \quad . \quad (4.61)$$

Diese Matrix \underline{D} läßt sich mit den Modalmatrizen ebenfalls diagonalisieren

$$\underline{Y}^T \underline{D} \underline{X} = \text{diag} [\Delta_i] \quad . \quad (4.62)$$

Die entkoppelten Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$\underline{I} \ddot{\vec{q}}(t) + \text{diag} [\Delta_i] \dot{\vec{q}}(t) + \text{diag} [\lambda_i] \vec{q}(t) = \underline{Y}^T \vec{f}(t) \quad (4.63)$$

λ_i = Eigenwerte des ungedämpften Systems

Δ_i = $2 D_i \omega_i$ (modale Dämpfung)

D_i = Dämpfungsgrad .

Der Vorteil dieser Methode liegt (neben der Diagonalisierung von \underline{D}) darin, daß mit den Modalmatrizen des ungedämpften Systems gearbeitet werden kann.

Allgemein viskos-gedämpfte Systeme

Im ersten Schritt wird zur Gleichung (4.41) eine triviale Gleichung hinzugefügt (nach *Duncan*)

$$\underline{M} \ddot{\vec{x}}(t) - \underline{M} \dot{\vec{v}}(t) = \vec{0} \quad \text{mit:} \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \quad . \quad (4.64)$$

Durch Hinzunahme dieser Gleichung wird Gleichung (4.41) in ein $2n$ -dimensionales Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, die *Zustandsraumdarstellung*, überführt

$$\begin{pmatrix} \underline{D} & \underline{M} \\ \underline{M} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{K} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(t) \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{D} & \underline{M} \\ \underline{M} & \underline{0} \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{K} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{M} \end{pmatrix} \quad \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} \vec{f}(t) \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

$$\underline{B} \dot{\vec{z}}(t) + \underline{A} \vec{z}(t) = \vec{h}(t) \quad . \quad (4.67)$$

Für $\vec{h}(t) = \vec{0}$ ergibt sich mit dem Ansatz $\vec{z} = \vec{z}_R e^{\lambda t}$ das Eigenwertproblem

$$(\underline{B} \lambda + \underline{A}) \vec{z}_R = \vec{0} \quad . \quad (4.68)$$

Das korrespondierende Linkseigenwertproblem wird durch die Gleichung

$$(\underline{B} \lambda + \underline{A})^T \vec{z}_L = (\underline{B}^T \lambda + \underline{A}^T) \vec{z}_L = \vec{0} \quad (4.69)$$

$$\text{bzw.} \quad \vec{z}_L^T (\underline{B} \lambda + \underline{A}) = \vec{0}$$

definiert. Die Lösung der Eigenwertprobleme führt zu der Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte, die für die beiden Eigenwertprobleme gleich sind

$$\det [\underline{B} \lambda + \underline{A}] = 0 \quad . \quad (4.70)$$

Den paarweise konjugiert-komplexen Eigenwerten, die jeweils Informationen über Dämpfung und Eigenfrequenz enthalten

$$\begin{aligned} \lambda_{i(1)} &= -\sigma_i + i \omega_i \\ \lambda_{i(2)} &= -\sigma_i - i \omega_i \quad , \end{aligned} \quad (4.71)$$

lassen sich die paarweise konjugiert-komplexen Eigenvektoren \vec{z}_{Ri} und \vec{z}_{Li} zuordnen

$$\vec{z}_{Ri} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{Ri} \\ \lambda_i \vec{x}_{Ri} \end{pmatrix} \quad \vec{z}_{Li} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{Li} \\ \lambda_i \vec{x}_{Li} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.72)$$

Aus diesen Eigenvektoren werden die Modalmatrizen $\underline{\Phi}_R$ und $\underline{\Phi}_L$ gebildet

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_R &= (\vec{z}_{R1}, \vec{z}_{R2}, \dots, \vec{z}_{R2n}) \\ \underline{\Phi}_L &= (\vec{z}_{L1}, \vec{z}_{L2}, \dots, \vec{z}_{L2n}) \quad . \end{aligned} \quad (4.73)$$

Die Eigenvektoren werden mit Hilfe der Matrix \underline{B} normiert, so daß gilt

$$\underline{\Phi}_L^T \underline{B} \underline{\Phi}_R = \underline{I} \quad (4.74)$$

(Auf das Problem der Einheit der Einheitsmatrix wurde schon beim ungedämpften System eingegangen.).

Für die so normierten Eigenvektoren gilt weiterhin

$$\underline{\Phi}_L^T \underline{A} \underline{\Phi}_R = -\underline{\Lambda} = -diag [\lambda_i] \quad . \quad (4.75)$$

Diese Transformationseigenschaften werden nun ausgenutzt, indem in Gleichung (4.67) die Koordinatentransformation

$$\vec{z}(t) = \underline{\Phi}_R \vec{q}(t) \quad (4.76)$$

vorgenommen wird und anschließend mit $\underline{\Phi}_L^T$ von links multipliziert wird

$$\underline{I} \vec{\dot{q}}(t) - \underline{\Lambda} \vec{q}(t) = \underline{\Phi}_L^T \vec{h}(t) = \vec{p}(t) \quad . \quad (4.77)$$

(\vec{p} = modaler Lastvektor).

Damit ist eine Entkopplung der Bewegungsgleichungen vorgenommen. Es ergeben sich $2n$ unabhängige Differentialgleichungen, die unter Beachtung der Anfangsbedingungen (siehe *ungedämpftes System*) getrennt voneinander gelöst werden können.

Die Rücktransformation in physikalische Koordinaten erfolgt mit

$$\vec{z}(t) = \underline{\Phi}_R \vec{q}(t) \quad . \quad (4.78)$$

4.4.2 Einsatzgebiete der Modalanalyse

In der praktischen Anwendung wird die Modalanalyse auf verschiedenen Gebieten der Schwingungsanalyse eingesetzt. Große Verbreitung hat sie auf den Gebieten gefunden, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden. Es wird darauf hingewiesen, daß hier nur eine Klassifizierung der Verfahren vorgenommen wird, jedoch keine Bewertung in der Reihenfolge liegt.

Strukturmodifikationstechnik und Substrukturtechnik

Die Strukturmodifikationstechnik ist eine wichtige Methode für die Untersuchung technischer Systeme. Sie wird sowohl in der Entwicklungs- bzw. Konstruktionsphase als auch bei der Analyse bereits vorhandener Systeme eingesetzt. Sie nutzt die Entkopplungseigenschaft der modalen Analyse dazu, das Schwingverhalten des Systems in ausgesuchten, wichtigen Eigenformen durch Strukturänderungen unter Berücksichtigung unterschiedlicher Gütekriterien zu optimieren (*Schwachstellenanalyse*).

Die Änderung der Schwingungsparameter infolge der Modifikationen werden zunächst rein rechnerisch untersucht. Dabei werden nur die Modalparameter der Eigenschwingungen berücksichtigt, die für die Problemstellung und die weiteren Untersuchungen von Interesse sind. Als Basiseingangsgrößen des Optimierungsprozesses dienen entweder Meßwerte einer vorhandenen Struktur oder Berechnungsergebnisse der ursprünglichen, zu optimierenden Struktur.

Zur Durchführung von Strukturmodifikationen existieren verschiedene Modifikationsverfahren, die je nach Zielen und Anforderungen entwickelt und angewendet werden (Matrix-Perturbations-Technik [46], Empfindlichkeitsanalyse [162], Modal-Korrektur-Verfahren [162]).

Die Substrukturtechnik wird auf große, komplizierte Gesamtstrukturen angewendet. Dabei wird die Gesamtstruktur in Teilstrukturen unterteilt. Die dynamischen Untersuchungen werden rechnerisch oder experimentell an den Teilstrukturen durchgeführt und die modalen Parameter für jede Teilstruktur separat ermittelt. Die anschließende starre oder elastische Kopplung aller Teilstrukturen (*Substrukturkopplung*) führt zu den modalen Parametern der Gesamtstruktur.

Dieses Vorgehen ermöglicht die effektive Optimierung von Teilstrukturen, ohne dabei jeweils die Gesamtstruktur komplett neu zu untersuchen. Auf der anderen Seite kann der Einfluß der jeweiligen Teilstruktur auf das Schwingungsverhalten der Gesamtstruktur beurteilt werden.

In [162] wird die Kombination von Empfindlichkeitsanalyse, Modal-Korrektur-Verfahren und elastischer Kopplung zur Optimierung von großen Strukturen bezüglich ihres Schwingungsverhaltens eingesetzt. [202] wendet das Modal-Korrektur-Verfahren zur Auslegung von Schwingungstilgern an.

Identifikation modaler Schwingungsparameter im Frequenzbereich

Mit der Systemidentifikation am realen System kann die Qualität eines Berechnungsmodells überprüft und eventuell verbessert werden. Es hat sich gezeigt, daß ein solches Vorgehen zu einer wesentlich verbesserten Wiedergabe von Randbedingungen (die z.T. im realen System stark nichtlinear sind) führt, da viele Parameter theoretisch nur schwer oder gar nicht zu erfassen sind.

Der Vergleich von gemessenen und berechneten Daten erfolgt dabei meist nicht direkt, sondern über geeignete Größen, mit denen sich das Schwingungsverhalten charakterisieren läßt. Solche Größen sind z.B. Übertragungsfunktionen (*nichtparametrische Identifikation*), Koeffizienten von Übertragungsfunktionen oder modale Parameter (Eigenfrequenzen, Dämpfungen, Eigenformen, *parametrische Identifikation*).

Eine große Anzahl solcher Verfahren beruht auf der Optimierung der modalen Schwingungsparameter in der Form, daß die mit den geschätzten Eigenschwingungen berechneten Übertragungsfunktionen möglichst gut mit den Gemessenen in Übereinstimmung gebracht werden.

Sehr verbreitet und weit entwickelt sind *Curve-Fitting Verfahren*, bei denen die gemessene Übertragungsfunktion durch eine analytische Funktion angenähert wird und anschließend die modalen Größen ermittelt werden.

In [260] wird neben dem *Circle-Fit Verfahren (Kreisapproximation)* ein weiteres Verfahren angegeben, welches speziell zur Bestimmung modaler Parameter linearer Systeme mit geschwindigkeitproportionaler Dämpfung entwickelt wurde. Mit diesen Verfahren können z.B. aus einem Ausschwingversuch und der daraus gewonnenen Fouriertransformierten direkt die modalen Parameter für ausgewählte Schwingungsformen ermittelt werden. Dazu wird jeweils mit dem Spektrum im Bereich der jeweiligen Eigenfrequenz (in der Umgebung von *Peaks*) gearbeitet. Die mit der Identifikation ermittelten modalen Parameter können direkt in die Systembeschreibung mit Modalkoordinaten eingebaut werden. Mit dem Verfahren der *Identifikation von Strukturmatrizen durch modale Rücktransformation* kann auf die Systemmatrizen in physikalischen Koordinaten geschlossen werden.

Die modalen Parameter können nicht nur zur Verbesserung von Rechenmodellen genutzt werden, sondern dienen zudem

- zur Vorhersage von Belastungen und Systemantworten,
- zu Stabilitätsberechnungen und zur Stabilitätskontrolle,
- zur Schadensfrüherkennung bei einer Veränderung des Systemverhaltens.

Schadensfrüherkennung und Schadenslokalisierung

Schadensfrüherkennung kann mit Hilfe *modaler Beobachter* [260] durchgeführt werden. Diese rekonstruieren aus Meßdaten an zugänglichen Stellen eines Systems den gesamten Schwingungszustand. Damit ist z.B. die Beobachtung von Schwingungsamplituden auch an Stellen möglich, die nicht meßtechnisch erfaßt werden können. Auf gleiche Weise kann auch eine Restlebensdauerabschätzung an solchen Stellen durchgeführt werden.

Schadenslokalisierung kann mit dem Verfahren der Strukturmodifikationstechnik durchgeführt werden. Bei größeren Systemen ist eine Kombination mit der Substrukturtechnik erforderlich. Da die Einflüsse der Änderungen von Teilsystemen auf die Gesamtstruktur darstellbar sind, ist umgekehrt bei einer Änderung des Gesamtsystemverhaltens auf Änderungen in der Teilstruktur zu schließen.

Identifikationsverfahren können auch zur Schadenslokalisierung eingesetzt werden. Vergleiche von modalen Parametern ungeschädigter und geschädigter Struktur lassen auf den Ort des Schadens schließen. Anwendungen auf unterschiedliche Problemstellungen werden in [260] behandelt.

Zeitverlaufsberechnungen mit der Modalanalyse

Zeitverlaufsberechnungen können mit der modalen Analyse sowohl für komplette Frequenzspektren als auch für ausgewählte Frequenzinhalte (siehe folgenden Abschnitt) durchgeführt werden.

Dabei werden direkte Integrationsverfahren oder analytische Zeitintegration im Modalraum durchgeführt. Letzteres Verfahren wird eingesetzt, wenn die Belastungsfunktion z.B. mit Hilfe konstanter, linearer oder quadratischer Funktionen stückweise angenähert werden kann.

In Modalkoordinaten ergibt sich für ein allgemein viskos-gedämpftes System folgendes entkoppelte Gleichungssystem (der Fall des ungedämpften Systems bzw. des modal-gedämpften Systems kann daraus problemlos abgeleitet werden, siehe *Grundlagen Modalanalyse*)

$$\vec{\dot{q}}(t) - \underline{\Lambda} \vec{q}(t) = \underline{\Phi}_L^T \vec{h}(t) = \vec{p}(t) \quad . \quad (4.79)$$

($\vec{p}(t)$ = modaler Lastvektor),

bzw. für jede einzelne modale Koordinate $q_i(t)$

$$\dot{q}_i(t) - \lambda_i q_i(t) = \vec{z}_{Li}^T \vec{h}(t) = p_i(t) \quad , \quad (4.80)$$

mit den Anfangsbedingungen $q_{0,i}$. Zur Lösung wird die Differentialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation im Bildbereich abgebildet

$$s q_i(s) - \lambda_i q_i(s) = p_i(s) + q_{0,i} \quad . \quad (4.81)$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird $q_i(s)$ in zwei Anteile zerlegt

$$q_i(s) = q_{i,h}(s) + q_{i,p}(s) \quad . \quad (4.82)$$

$q_{i,h}(s)$ ergibt sich aus Gleichung (4.81), wenn als rechte Seite nur die Anfangsbedingungen $q_{0,i}$ eingesetzt werden

$$s q_{i,h}(s) - \lambda_i q_{i,h}(s) = q_{0,i} \quad . \quad (4.83)$$

Auflösung nach $q_{i,h}(s)$ und Rücktransformation in den Zeitbereich liefert

$$q_{i,h}(s) = \frac{q_{0,i}}{s - \lambda_i} \quad (4.84)$$



$$q_{i,h}(t) = q_{0,i} e^{\lambda_i t} \quad (4.85)$$

$q_{i,h}(t)$ beschreibt die Systemantwort aufgrund der Anfangsbedingungen und stellt somit die homogene Lösung der Gleichung (4.80) dar.

Die partikuläre Lösung von (4.80) folgt aus der Gleichung

$$s q_{i,p}(s) - \lambda_i q_{i,p}(s) = p_i(s) \quad (4.86)$$

Sie lautet im Bildbereich

$$q_{i,p}(s) = p_i(s) \cdot \frac{1}{s - \lambda_i} \quad (4.87)$$

Da es sich um ein Produkt zweier Funktionen im Bildbereich handelt, ergibt die Rücktransformation in den Zeitbereich ein Faltungsintegral

$$q_{i,p}(t) = \int_0^t e^{\lambda_i (t - \tau)} p_i(\tau) d\tau \quad (4.88)$$

Für bestimmte Klassen von Belastungen läßt sich das Faltungsintegral analytisch lösen (z.B. für konstante Belastung $p_i(t) = p_i = \textit{konstant}$). Für beliebige Belastungen kann die Lösung des Faltungsintegrals zum einen mit Hilfe numerischer Integration bestimmt werden, zum anderen mit Hilfe stückweiser Approximation der Belastungsfunktion durch bekannte Funktionen.

Wird die Belastungsfunktion z.B. durch stückweise konstante Funktionen angenähert (siehe Bild 4.1), läßt sich eine analytische Lösung für einen Zeitabschnitt berechnen. Mit dieser analytischen Lösung kann dann von den Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t auf die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ geschlossen werden (darin ist Δt der Zeitabschnitt, über den die Belastungsfunktion als konstant angenommen wird).

Die zum Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ berechneten Zustandsgrößen dienen dann als neue Anfangsbedingungen zur Berechnung eines neuen Zeitschritts. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis der interessierende Zeitraum überschritten ist. Die Formeln für dieses Übertragungsverfahren im Zeitbereich werden für konstante und lineare Ansätze der Belastungsfunktion in [260] angegeben.

Sind die einzelnen Verläufe der Modalkoordinaten als Funktion der Zeit $q_i(t) = q_{i,h}(t) + q_{i,p}(t)$ bestimmt, erfolgt die Rücktransformation in physikalische Koordinaten und liefert somit die Zeitantwort des Systems (siehe *Grundlagen Modalanalyse*)

$$\vec{z}(t) = \underline{\Phi}_R \vec{q}(t) \quad . \quad (4.89)$$

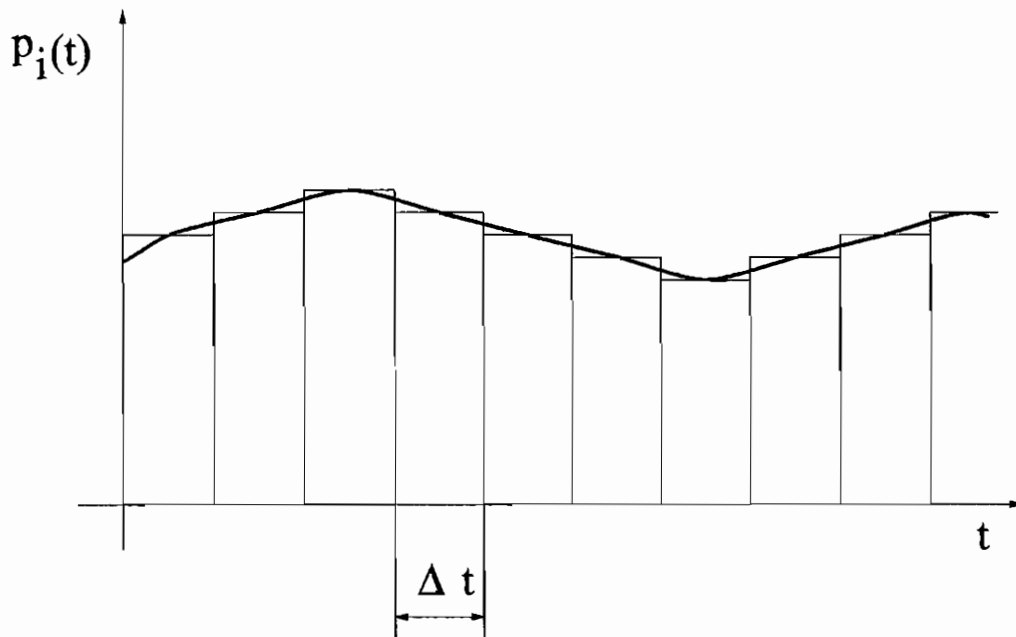


Abbildung 4.1: Approximation der Belastungsfunktion durch stückweise konstante Ansätze

Untersuchungen mit reduzierter Modalordnung

Der Wunsch einer möglichst genauen Beschreibung des Schwingungsverhaltens einer realen Struktur führt vielfach zu mathematischen Modellen mit vielen Freiheitsgraden. Mit Hilfe der Modalanalyse können diese Freiheitsgrade auf die für die aktuelle Untersuchung erforderlichen (modalen) Freiheitsgrade reduziert werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß sich das Problem mit nur wenigen ausgewählten Eigenformen beschreiben läßt.

Die Reduktion der Freiheitsgrade findet im Modalraum über eine Auswahl zu berücksichtigender Eigenformen statt. Die Modalmatrizen sind demzufolge nicht mehr quadratisch sondern rechteckig. Die Anzahl der Spalten entspricht dabei der Anzahl der berücksichtigten Eigenformen, die Anzahl der Zeilen entspricht den Modellfreiheitsgraden in physikalischen Koordinaten.

Mit Hilfe dieser Freiheitsgradreduktion werden technische Problemstellungen oft erst lösbar. So sind z.B. Strukturregelungen größerer Strukturen ohne modale Reduktion nicht realisierbar, da Echtzeitrechnungen mit allen Freiheitsgraden zur Zeit unmöglich sind.

Eine Möglichkeit, die Anzahl der Freiheitsgrade wesentlich zu reduzieren, bietet das Verfahren der modalen Beobachter [260]. Die Beobachtertheorie wird dazu eingesetzt, innere, nicht meßbare Zustandsgrößen der realen Struktur direkt über den Modalraum des mathematischen Modells abzuschätzen. Dabei wird die Reduktion der modalen Koordinaten angewendet. In [232] wird dieses Verfahren direkt in Kombination mit einem Regelalgorithmus eingesetzt. Dabei werden die zu regelnden Zustandsgrößen des realen Systems mit Hilfe der reduzierten Daten des Beobachters indirekt geregelt.

Kriterien zur Datenreduktion

Es stellt sich nun die Frage, wieviele und welche der Eigenformen zur angenährten Berechnung des dynamischen Systemverhaltens berücksichtigt werden müssen und wie diese auszuwählen sind. Grundsätzlich kann gesagt werden, daß die Eigenformen mitzunehmen sind, die noch merklich angeregt werden.

Das einfachste Verfahren zur Auswahl geht dabei über die Eigenfrequenzen und zugehörigen Dämpfungen. Die Kenntnis des Frequenzbereichs, der für die Untersuchung von Interesse ist, kann zu einer groben Auswahl führen. Ebenfalls kann eine Auswahl anhand der Dämpfungsparameter durchgeführt werden, wenn angenommen wird, daß Eigenformen mit großen Dämpfungswerten relativ schnell abklingen und dann an Bedeutung für das weitere Systemverhalten verlieren.

Eine weitere Möglichkeit der Auswahl von Eigenformen geht von der Größe der Eigenformen aus. Da Eigenformen jedoch zunächst nur eine Richtung besitzen, aber beliebig normiert werden können, liegt das Problem in einer einheitlichen Normierung aller Eigenvektoren. Solche Verfahren werden in [201] angegeben. Andere Normierungsverfahren nutzen (falls vorhanden) Daten von bereits untersuchten, ähnlichen Vorgängermodellen (*Modal Assurance Criterion* [73]).

In [149] werden Auswahlkriterien aufgeführt, die auf der Abbildungsgenauigkeit von Anfangsauslenkungen, Anfangsgeschwindigkeiten und Erregerkraft basieren. Diese werden nun kurz aufgeführt.

Abbildungsgenauigkeit der Anfangsauslenkungen und Anfangsgeschwindigkeiten

Ausgangspunkt ist die Zustandsraumdarstellung (siehe *Grundlagen Modalanalyse*)

$$\underline{B} \ddot{\vec{z}}(t) + \underline{A} \dot{\vec{z}}(t) = \vec{h}(t) \quad ; \quad \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{A} = n \times n \quad (4.90)$$

Nun wird ein Differenzvektor $\vec{\delta}_1$ der Anfangsbedingungen gebildet

$$\vec{\delta}_1 = \vec{z}_{0,n} - \vec{z}_{0,m} \quad \text{mit } (m < n) \text{ Eigenformen} \quad . \quad (4.91)$$

Einführung der modalen Anfangsbedingungen $\vec{q}_{0,i}$ mit der reduzierten Modalmatrix $\underline{\Phi}_{R,m}$ des Rechtseigenwertproblems führt zu

$$\vec{z}_{0,m} = \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_{0,m} \quad (4.92)$$

und

$$\vec{\delta}_1 = \vec{z}_{0,n} - \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_{0,m} \quad (4.93)$$

Die Anfangsbedingungen können aber mit der reduzierten Modalmatrix $\underline{\Phi}_{L,m}$ des Linkseigenwertproblems auch in der Form

$$\vec{q}_{0,m} = \underline{\Phi}_{L,m}^T \underline{B} \vec{z}_{0,n} \quad (4.94)$$

ausgedrückt werden (siehe *Grundlagen Modalanalyse*).

Damit ergibt sich für den Differenzvektor

$$\vec{\delta}_1 = \vec{z}_{0,n} - \underline{\Phi}_{R,m} \underline{\Phi}_{L,m}^T \underline{B} \vec{z}_{0,n} \quad (4.95)$$

$$\vec{\delta}_1 = \left(\underline{I} - \underline{\Phi}_{R,m} \underline{\Phi}_{L,m}^T \underline{B} \right) \vec{z}_{0,n} \quad .$$

Der Anwender muß nun problemspezifisch abschätzen, ab welcher Größe der Differenz ausreichend viele Eigenformen berücksichtigt werden.

Abbildungsgenauigkeit der Erregerkraft

In die Zustandsraumdarstellung

$$\underline{B} \vec{z}(t) + \underline{A} \vec{z}(t) = \vec{h}(t) \quad (4.96)$$

wird der modal reduzierte Zustandsvektor $\vec{z}_m = \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_m$, ($m < n$) eingesetzt

$$\underline{B} \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_m + \underline{A} \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_m = \vec{h}(t) \quad (4.97)$$

Linksmultiplikation mit $\underline{\Phi}_{L,m}^T$ liefert das entkoppelte System

$$\vec{q}_m - \text{diag} [\lambda_i] \vec{q}_m = \underline{\Phi}_{L,m}^T \vec{h}(t) \quad (4.98)$$

$$\rightarrow \vec{q}_m = \underline{\Phi}_{L,m}^T \vec{h}(t) + \text{diag} [\lambda_i] \vec{q}_m \quad .$$

Gleichung (4.98) wird in (4.97) eingesetzt

$$\underline{B} \underline{\Phi}_{R,m} \left(\underline{\Phi}_{L,m}^T \vec{h}(t) + \text{diag} [\lambda_i] \vec{q}_m \right) + \underline{A} \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_m = \vec{h}(t) \quad . \quad (4.99)$$

Es folgt

$$\underline{B} \underline{\Phi}_{R,m} \underline{\Phi}_{L,m}^T \vec{h}(t) + \left(\underline{B} \text{diag} [\lambda_i] + \underline{A} \right) \underline{\Phi}_{R,m} \vec{q}_m = \vec{h}(t) \quad . \quad (4.100)$$

Der eingeklammerte Teil der Gleichung (4.99) entspricht dem Eigenwertproblem und muß verschwinden. D.h. der vordere Teil entspricht der Näherung von $\vec{h}(t)$ mit $(m < n)$ Eigenformen.

Der Differenzvektor ergibt sich demnach zu

$$\vec{\delta}_2 = \left(\underline{B} \underline{\Phi}_{R,m} \underline{\Phi}_{L,m}^T - \underline{I} \right) \vec{h}(t) \quad . \quad (4.101)$$

Der Anwender hat nun mit seinem Wissen über das zu untersuchende System die Größe des Differenzvektors zu interpretieren.

Zusätzliche Bemerkungen zur Reduktion

Die Möglichkeit zur Reduktion der Eigenformen kann bei diskreten Verfahren wie dem Gebietsverfahren FEM oder dem Randverfahren REM dazu genutzt werden, um Eigenformen, die vom diskreten System nicht mehr darstellbar sind, vornweg auszuschließen.

Bei FEM und REM wird eine Elemententeilung des Gebietes bzw. des Randes vorgenommen. Die Anzahl von Stützstellen im Gebiet bzw. auf dem Rand ist jedoch begrenzt. Mit einer begrenzten Anzahl Stützstellen ist der Stützstellenabstand aber endlich. D.h. unter Beachtung des *Shannon-Theorems* können bei einer vorgegebenen Stützstellenzahl mit vorgeschriebenem Abstand nur Eigenformen bis zu einer bestimmten Frequenz abgebildet werden.

Nach Shannon müssen pro Wellenlänge λ_w mindestens zwei Stützstellen (Abtastpunkte) vorhanden sein, damit die zur Wellenlänge gehörende Eigenform dargestellt werden kann ($c = \lambda_w f$: $c =$ Wellengeschwindigkeit).

In der Praxis werden wegen der bei FEM und REM verwendeten Näherungsansätze oft noch mehr Stützstellen benötigt. Verschiedene Kriterien, die die Anzahl der Knotenpunkte pro Wellenlänge beschreiben sind in der Literatur aufgeführt.

Mit solchen Kriterien ist dann über die Modalanalyse eine grobe Reduktion auf die darstellbaren modalen Größen möglich. Der *Overhead* von Informationen, die nicht darstellbar sind, bleibt ohne Bedeutung.

4.5 Modalanalyse in Kombination mit der Randelementemethode

Es wird gezeigt, wie die Modalanalyse mit den Systemmatrizen, die mit der REM im Frequenzbereich ermittelt werden, durchgeführt werden kann. Dabei geht es um die Berechnung von Zeitverläufen der in der Matrixgleichung auftretenden Randgrößen.

Mit Hilfe der REM kann im Frequenzbereich die Systemgleichung (siehe Grundlagen)

$$\underline{G}(\omega) \vec{p}(\omega) = \underline{H}(\omega) \vec{u}(\omega) \quad (4.102)$$

hergeleitet werden. Die Vektoren \vec{u} und \vec{p} enthalten dabei die Randverschiebungen und Randspannungen. Zur Bestimmung der unbekanntenen Größen ist eine Umordnung des Gleichungssystems erforderlich

$$\underline{B}(\omega) \vec{x}(\omega) = \underline{A}(\omega) \vec{f}(\omega) \quad (4.103)$$

Es ist zu bemerken, daß die Systemmatrizen \underline{G} und \underline{A} Rechteckmatrizen sein können, während \underline{H} und \underline{B} quadratisch sind.

Um eine Rücktransformation in den Zeitbereich vorzunehmen, wird für die beiden Systemmatrizen der Gleichung (4.103) ein Ansatz mit frequenzunabhängigen Systemmatrizen gewählt

$$(\underline{B}_{st} - \omega^2 \underline{B}_d) \vec{x}(\omega) = (\underline{A}_{st} - \omega^2 \underline{A}_d) \vec{f}(\omega) \quad (4.104)$$

(Dieser Ansatz wird aus der Erfahrung gemacht, daß sich linear-elastische, schwingende, mechanische Systeme mit Hilfe Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschreiben lassen.)

Die Matrizen \underline{B}_{st} und \underline{A}_{st} ergeben sich für den statischen Fall mit $\omega = 0$. \underline{B}_d und \underline{A}_d sind zunächst unbekannte Matrizen.

Es wird nun davon ausgegangen, daß bereits m Eigenwerte mit den zugehörigen Links- und Rechtseigenvektoren bestimmt worden sind. Verfahren dazu werden im folgenden Kapitel ausführlich beschrieben.

Gleichung (4.104) wird nun von links mit der (im allgemeinen reduzierten) Modalmatrix der Linkseigenvektoren \underline{Y}^T multipliziert, gleichzeitig erfolgt die Einführung der modalen Koordinaten mit Hilfe der Modalmatrix der Rechtseigenvektoren \underline{X}

$$\vec{x} = \underline{X} \vec{q} \quad (4.105)$$

\vec{q} der Vektor der Modalkoordinaten. Aus Gleichung (4.104) folgt

$$\underline{Y}^T (\underline{B}_{st} - \omega^2 \underline{B}_d) \underline{X} \vec{q}(\omega) = \underline{Y}^T (\underline{A}_{st} - \omega^2 \underline{A}_d) \vec{f}(\omega) \quad . \quad (4.106)$$

Wird nun angenommen, daß die Systemmatrizen \underline{A}_i und \underline{B}_i für den gesamten Frequenzbereich gleich bleiben, kann eine Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der inversen Fouriertransformation erfolgen

$$\begin{aligned} \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \vec{q}(\omega) - \omega^2 \underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X} \vec{q}(\omega) &= \underline{Y}^T \underline{A}_{st} \vec{f}(\omega) - \omega^2 \underline{Y}^T \underline{A}_d \vec{f}(\omega) \\ &\quad \circ \\ \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \vec{q}(t) + \underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X} \ddot{\vec{q}}(t) &= \underline{Y}^T \underline{A}_{st} \vec{f}(t) + \underline{Y}^T \underline{A}_d \ddot{\vec{f}}(t) \quad . \end{aligned} \quad (4.107)$$

Die Matrizenprodukte $\underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X}$ und $\underline{Y}^T \underline{A}_d$ sind in Gleichung (4.107) noch unbekannt. Die rechte Seite der Gleichung (4.107) kann reduziert werden, wenn die Belastungsfunktion $\vec{f}(t)$ als stückweise konstant oder linear approximiert wird (siehe Bild 4.1). Dann verschwindet $\ddot{\vec{f}}(t)$ während des betrachteten Zeitschritts, für den diese Annahme getroffen wurde.

Zur Berechnung von $\underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X}$ wird die Systemgleichung (4.104) bei den Eigenwerten aufgestellt und von links mit der (reduzierten) Modalmatrix der Linkseigenvektoren multipliziert. Für jeden in der Betrachtung berücksichtigten Eigenwert folgt eine Gleichung des Typs

$$\underline{Y}^T (\underline{B}_{st} - \omega_i^2 \underline{B}_{d,i}) \vec{x}_i = \vec{0} \quad . \quad (4.108)$$

\vec{x}_i ist der zu ω_i korrespondierende Rechtseigenvektor. Aus Gleichung (4.108) folgt durch Umstellen

$$\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \vec{x}_i = \omega_i^2 \underline{Y}^T \underline{B}_{d,i} \vec{x}_i \quad . \quad (4.109)$$

Wird Gleichung (4.109) für m Eigenwerte aufgestellt und die zugehörigen Gleichungen mit Hilfe der Modalmatrix der Rechtseigenvektoren zusammengefaßt, folgt

$$\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} = \underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X} \text{diag}[\omega_i^2] \quad . \quad (4.110)$$

D.h. das zur Rücktransformation in den Zeitbereich erforderliche Produkt $\underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X}$ kann mit Hilfe der Matrix \underline{B}_{st} , den Modalmatrizen und den Eigenwerten indirekt bestimmt werden

$$\underline{Y}^T \underline{B}_d \underline{X} = \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \underline{\Lambda}^{-1} \quad , \quad (4.111)$$

$$\text{mit:} \quad \underline{\Lambda} = \text{diag}[\omega_i^2] \quad .$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (4.107)

$$\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \vec{q}(t) + \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \underline{\Lambda}^{-1} \ddot{\vec{q}}(t) = \underline{Y}^T \underline{A}_{st} \vec{f}(t) \quad . \quad (4.112)$$

Es ist zu beachten, daß die Eigenwerte und Eigenvektoren mit unterschiedlichen Systemmatrizen $\underline{B}(\omega)$ ermittelt worden sind. D.h. die Matrix $\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X}$ ist keine Diagonalmatrix. Zur Abkürzung wird die Matrix \underline{K} eingeführt

$$\underline{K} = \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \quad \text{mit:} \quad \underline{K}_{m \times m} \quad . \quad (4.113)$$

Diese Matrix ist quadratisch und hat als Kantenlänge die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte m

$$\underline{K} \vec{q}(t) + \underline{K} \underline{\Lambda}^{-1} \ddot{\vec{q}}(t) = \underline{Y}^T \underline{A}_{st} \vec{f}(t) \quad . \quad (4.114)$$

Eine Entkopplung wird durch Linksmultiplikation mit \underline{K}^{-1} erzielt, anschließend wird noch von links mit $\underline{\Lambda}$ multipliziert

$$\underline{\Lambda} \vec{q}(t) + \underline{I} \ddot{\vec{q}}(t) = \underline{\Lambda} \underline{K}^{-1} \underline{Y}^T \underline{A}_{st} \vec{f}(t) = \vec{f}^*(t) \quad . \quad (4.115)$$

Somit ergeben sich m entkoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die je für sich gelöst werden können

$$\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t) = f_i^*(t) \quad . \quad (4.116)$$

Modale Dämpfung kann in Gleichung (4.116) direkt eingebaut werden. Im Abschnitt *Zeitverlaufsberechnungen mit der Modalanalyse* wird darauf hingewiesen, daß für bestimmte Belastungen analytische Lösungen möglich sind.

Bemerkung zur Matrix \underline{K}

Hier wird vorausgesetzt, daß die Matrix \underline{K} invertierbar ist. Dies ist für die Verwendung der Links- und Rechtseigenvektoren bzw. den entsprechenden Modalmatrizen möglich. Wird die Linksmodalmatrix statt mit den Linkseigenvektoren mit den Rechtseigenvektoren gebildet (was prinzipiell möglich ist und die Berechnung der Linkseigenvektoren überflüssig macht), kann \underline{K} singular werden. Dann ist eine Entkopplung nicht möglich, Gleichung (4.114) muß als Gleichungssystem gelöst werden.

Tabelle (4.1) zeigt die Singulärwerte der Matrix \underline{K} für das anschließend behandelte Beispiel eines einseitig eingespannten Quaders unter Längsbelastung (Die Singulärwerte sind dabei auf den größten Singulärwert normiert.). Berücksichtigt werden die ersten 4 Längseigenformen. Dabei wird \underline{K} zum einen mit der Modalmatrix der Linkseigenvektoren gebildet, zum anderen werden statt den Linkseigenvektoren die Rechtseigenvektoren in die Linksmodalmatrix eingesetzt. Es zeigt sich, daß sich für den zweiten Fall relativ kleine Singulärwerte ergeben. Der Quotient des größten und des kleinsten Singulärwertes ergibt die Konditionszahl. Diese ist für den zweiten Fall wesentlich höher als für den ersten. Es empfiehlt sich daher, mit den Linkseigenvektoren und der daraus erstellten Modalmatrix zu arbeiten.

Nr.	$SV(\underline{K}_{Y\tau})$	$SV(\underline{K}_{X\tau})$
1	.100000000000D+01	.100000000000D+01
2	.205427993768D+00	.260181346766D-03
3	.803856133424D-01	.889056781645D-05
4	.130149635579D-01	.142674272679D-05

Tabelle 4.1: Singulärwerte von \underline{K} (Längseigenformen)

Ein ähnliches Ergebnis wird für den später gezeigten querbelasteten Quader erhalten und in Tabelle (4.2) (Berücksichtigung von 4 Quereigenformen) dargestellt.

Nr.	$SV(\underline{K}_{Y\tau})$	$SV(\underline{K}_{X\tau})$
1	.100000000000D+01	.100000000000D+01
2	.412236136025D+00	.433280443308D-01
3	.129683376136D+00	.631990220973D-03
4	.563180778394D-01	.528854385775D-04

Tabelle 4.2: Singulärwerte von \underline{K} (Quereigenformen)

4.5.1 Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

Zur Lösung von Gleichung (4.116) sind Anfangsbedingungen, die in physikalischen Koordinaten gegeben sind und mit \vec{x}_0 bezeichnet werden, zu beachten. In \vec{x}_0 treten neben Verschiebungsgrößen auch Randspannungen auf. Diese sind, je nach Vorgabe der Verschiebungen, eventuell in einer statischen Vorlaufrechnung mit den Matrizen \underline{A}_{st} und \underline{B}_{st} zu bestimmen.

Die Anfangsbedingungen werden modal transformiert

$$\vec{x}_0 = \underline{X} \vec{q}_0 \quad . \quad (4.117)$$

Da \underline{X} im allgemeinen eine Rechteckmatrix ist, kann \vec{q}_0 nicht direkt aus der Gleichung (4.117) durch Inversion von \underline{X} bestimmt werden. Daher wird mit $\underline{Y}^T \underline{B}_{st}$ von links multipliziert

$$\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \vec{x}_0 = \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \underline{X} \vec{q}_0$$

bzw. (4.118)

$$\underline{Y}^T \underline{B}_{st} \vec{x}_0 = \underline{K} \vec{q}_0 \quad .$$

Daraus läßt sich \vec{q}_0 bestimmen

$$\vec{q}_0 = \underline{K}^{-1} \underline{Y}^T \underline{B}_{st} \vec{x}_0 \quad . \quad (4.119)$$

Nachdem die Gleichungen (4.116) mit den transformierten Anfangsbedingungen (4.119) gelöst sind, erfolgt die Rücktransformation in physikalische Koordinaten

$$\vec{x}(t) = \underline{X} \vec{q}(t) \quad . \quad (4.120)$$

$\vec{x}(t)$ beschreibt die unbekanntenen Randgrößen als Funktion der Zeit im allgemeinen bei reduzierter Modalordnung.

4.5.2 Verschiebungsberechnung für Punkte im Innern des Bauteils

Es wird vorausgesetzt, daß zu jeder Eigenkreisfrequenz ω_i auch die entsprechende Eigenform (Rechtseigenvektor) \vec{x}_i bekannt ist. Wird nun der Vektor der bekannten Randgrößen aus dem Eigenvektor und den vorgeschriebenen Randbedingungen gebildet, lassen sich die Verschiebungen von Innenpunkten mit Hilfe der Somigliana-Identität für Innenpunkte berechnen (siehe *Grundlagen*). Es wird also eine Schwingung in der Eigenform angenommen.

Die so ermittelten Verschiebungskomponenten stehen in einem festen Verhältnis zu den Komponenten der Eigenform, sie können (nur) für diese Betrachtung als zusätzliche *Komponente* des Eigenvektors aufgefaßt werden. D.h. ist der Zeitverlauf der Randgrößen bezüglich der jeweiligen Eigenfrequenz bekannt, ist auch der Zeitverlauf der Innenpunktverschiebungen bekannt.

4.5.3 Spannungsberechnung für Punkte im Innern des Bauteils

Der Spannungszustand im Innern eines homogenen Körpers aus isotropem Material kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes und mit $\underline{\varepsilon} = \text{def } \vec{u}$ über die Verschiebungen ausgedrückt werden. Für Innenpunkte gilt:

$$\sigma_{ij} = \frac{2 G \nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} u_{m,m} + G (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (4.121)$$

Diese Gleichung kann auf zwei Arten gelöst werden. Zum einen durch numerische Differentiation des Verschiebungsfeldes, zum anderen mit Hilfe der *Somigliana-Spannungsidentität* (siehe *Grundlagen*)

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \quad . \quad (4.122)$$

Wird nun die Somigliana-Spannungsidentität für einen Innenpunkt bei einer Eigenfrequenz und den entsprechenden Komponenten der zugehörigen Eigenform sowie den vorgeschriebenen Randbedingungen als Randgrößen aufgestellt (es wird wieder eine Schwingung in einer Eigenform betrachtet), steht der Spannungstensor in einem festen Verhältnis zu den Komponenten der Eigenform und damit auch zu den Zeitverläufen der Randgrößen.

Für jede einzelne Eigenform läßt sich so mit den entsprechenden modalen Lasten ein Spannungstensor aufstellen. Die korrespondierenden Spannungszustände geben Auskunft über die Belastung des Bauteils bei der Schwingung in der zugehörigen Eigenform. Sie bieten daher die Möglichkeit, genau festzustellen, welche Eigenformen die größten Anteile zum Spannungszustand beitragen und erlauben damit z.B. eine Schwachstellenanalyse.

Die einzelnen Spannungszustände sind zuletzt zu superponieren und ergeben die zeitabhängigen Spannungsverläufe.

4.5.4 Anwendungsbeispiele

Länglicher Quader (Stab/Balken)

Ein einseitig eingespannter, dreidimensionaler Quader der Abmessungen $l \times b \times h = (20 \times 2 \times 1.6) \text{ m}^3$ wird am freien Ende mit einer zum Zeitpunkt $t = 0$ einsetzenden (sprungartigen) Last beaufschlagt. Zum einen wird die Belastung in Längsrichtung, zum anderen in Querrichtung aufgegeben (siehe Prinzipskizzen 4.2). Die Belastung führt zu Wellenausbreitung in diesem, aufgrund seiner länglichen Geometrie als Stab bzw. Balken aufzufassenden Bauteil.

Längsbelastung

Betrachtet werden die Verschiebungen eines Punktes am freien Ende des Stabes ($x = l$) und in der Mitte bei ($x = \frac{l}{2}$). Für einen eindimensionalen Stab existiert eine analytische Lösung,

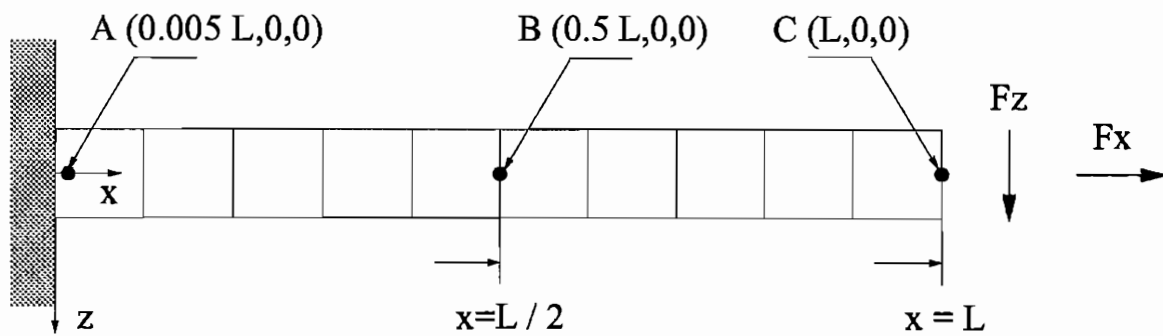


Abbildung 4.2: Belastungsrichtungen des Quaders und Innenpunkte A und B

zusätzlich erfolgt die Berechnung mit einem in der Diskretisierung und den verwendeten Ortsansätzen ähnlichen FEM-Modell. Die bei der Modalanalyse berücksichtigten Eigenwerte werden in Tabelle (4.3), die zugehörigen Eigenformen in Bild (4.3) gezeigt. Die Eigenwerte sind dabei auf die erste Längseigenfrequenz normiert.

Nr.	Zug (ω_i/ω_1)	
	REM	FEM
1	1.0	1.0
2	3.0	3.0
3	5.0	5.0
4	7.0	7.0

Tabelle 4.3: Normierte erste Eigenfrequenzen in Belastungsrichtung (längs)

Die zeitlichen Verschiebungsverläufe werden in den Bildern (4.4) und (4.5) dargestellt. Die Auslenkung ist dabei auf den Wert bei statischer Belastung gleicher Größe und Richtung, die Zeit mit Hilfe der Periodendauer der ersten Eigenfrequenz normiert.

Verschiebungen und Spannungen im Innern des Quaders

Mit den oben beschriebenen Verfahren werden die Verschiebungen und Spannungen an verschiedenen Punkten im Innern des Quaders berechnet. Bild (4.2, siehe oben) zeigt die Lage der Punkte A und B. Bild (4.6) zeigt die Verschiebung in Längsrichtung des Punktes A. Der zeitliche Verschiebungsverlauf des Punktes B ist identisch mit dem des Randpunktes, dargestellt in Bild (4.5). Die Bilder (4.7) und (4.8) stellen die Normalspannungen dieser Punkte als Funktion der Zeit im Vergleich mit der FEM dar. Bei der Berechnung der Verschiebung des Punktes A ergeben sich bei der FEM Probleme, die wahrscheinlich auf die Ableitung der Innenpunktverschiebungen mit Hilfe der Formfunktionen zurückzuführen sind.

Die Spannung bei Punkt B wurde bei der FEM mit einem verfeinerten Gitter, das bei Punkt B einen Knotenpunkt hat, berechnet. Mit dem ursprünglichen Gitter war die Spannung im

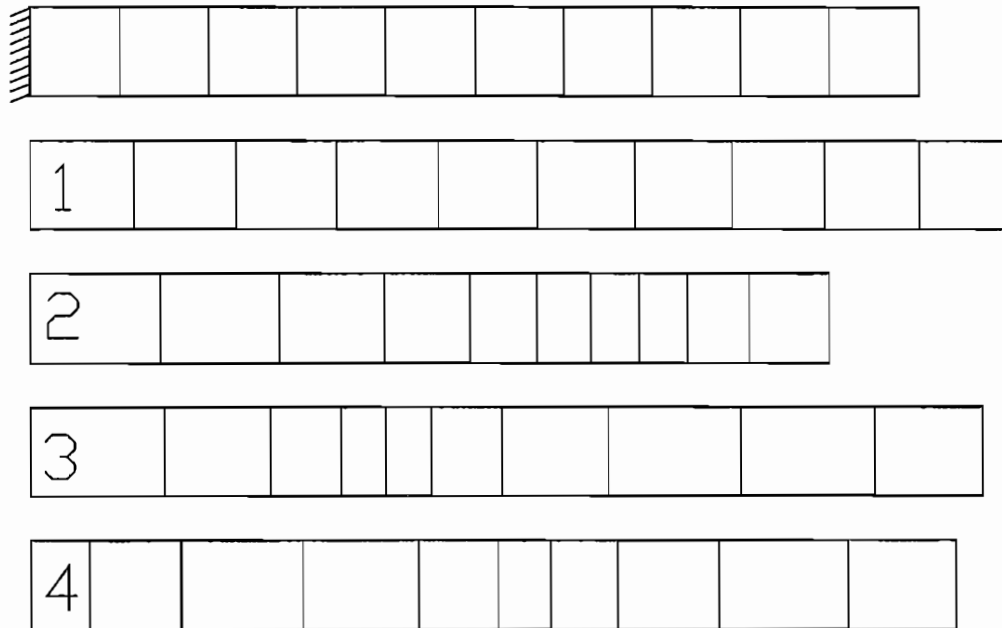


Abbildung 4.3: Längseigenformen des Quaders

Innern eines Elementes nicht genau genug abbildbar. Bei der FEM werden die Spannungen an anderen Stellen als den Elementknoten in einer Nachlaufrechnung mit Hilfe der Formfunktionen aus den Verschiebungen abgeleitet. Hier wurden quadratische Formfunktionen verwendet, mit denen der komplexe Spannungsverlauf wahrscheinlich nicht abbildbar ist. Die REM macht hier keine Probleme, da direkt mit der Somigliana-Spannungsidentität gerechnet wird. Die Spannungen werden also nicht aus den Formfunktionen abgeleitet. Gleiches gilt für die Verschiebungen im Bauteilinneren.

Verschiebungen bei unterschiedlichen Belastungen

Der Quader wird am freien Ende mit zwei unterschiedlichen Belastungsfunktionen beaufschlagt. Die Belastung setzt in beiden Fällen zum Zeitpunkt $t = 0$ ein.

Zum einen handelt es sich um eine aus Sprungfunktionen zusammengesetzte Funktion, zum anderen um eine bei $t = 0$ einsetzende Sinus-Belastung. Bild (4.9) zeigt den Zeitverlauf, Bild (4.10) das Leistungsspektrum (normiert auf den Maximalwert) der Längsverschiebung eines Punktes bei $x = L$ infolge der Sinus-Belastung.

Alle bei der Modalanalyse berücksichtigten Frequenzen sind im Signal neben einem Anteil, der mit der Erregerfrequenz schwingt, enthalten.

Bild (4.11) gibt die Antwort eines Punktes bei $x = L$ aufgrund der Sprungbelastung an. Die Belastung wird zum Zeitpunkt $t = T_1$ ($T_1 =$ Periodendauer der 1. Eigenform) weggenommen.

Die Ergebnisse stimmen sehr gut mit den Vergleichswerten der FEM überein.

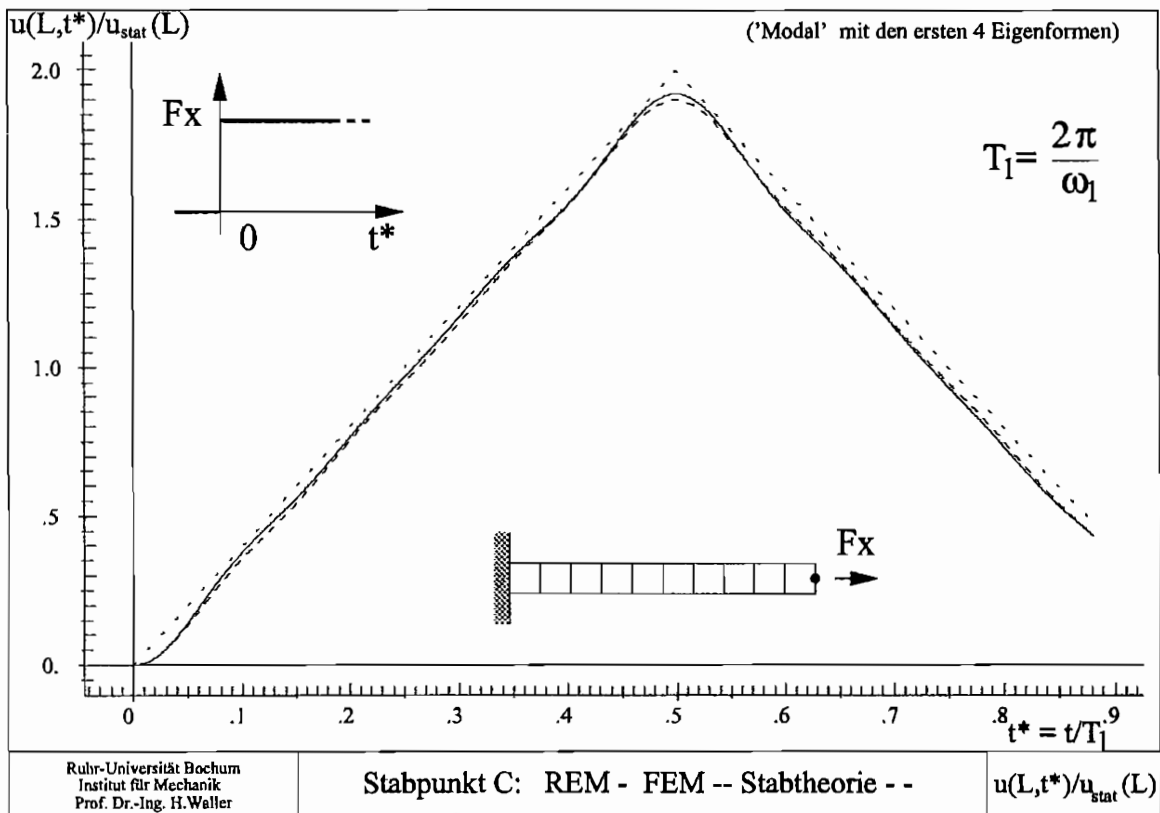


Abbildung 4.4: Längsverschiebung eines Punktes bei $x = l$

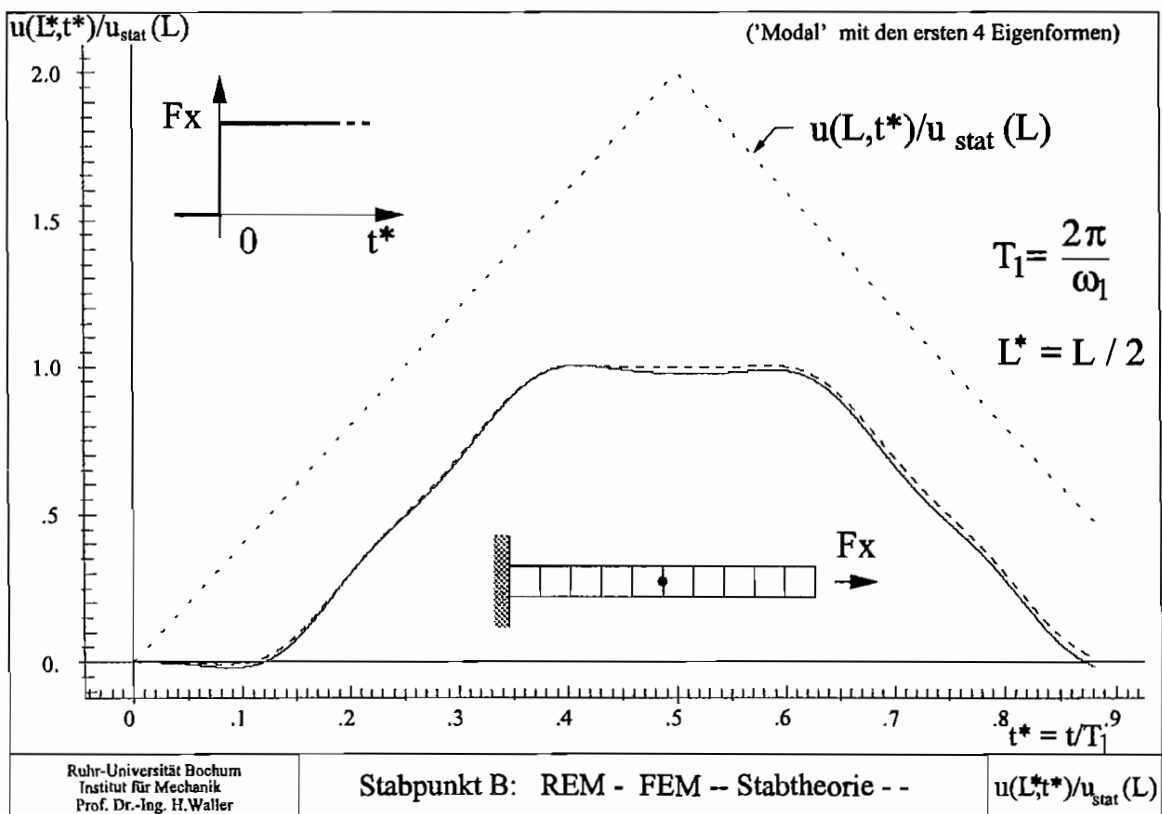


Abbildung 4.5: Längsverschiebung eines Punktes bei $x = l/2$

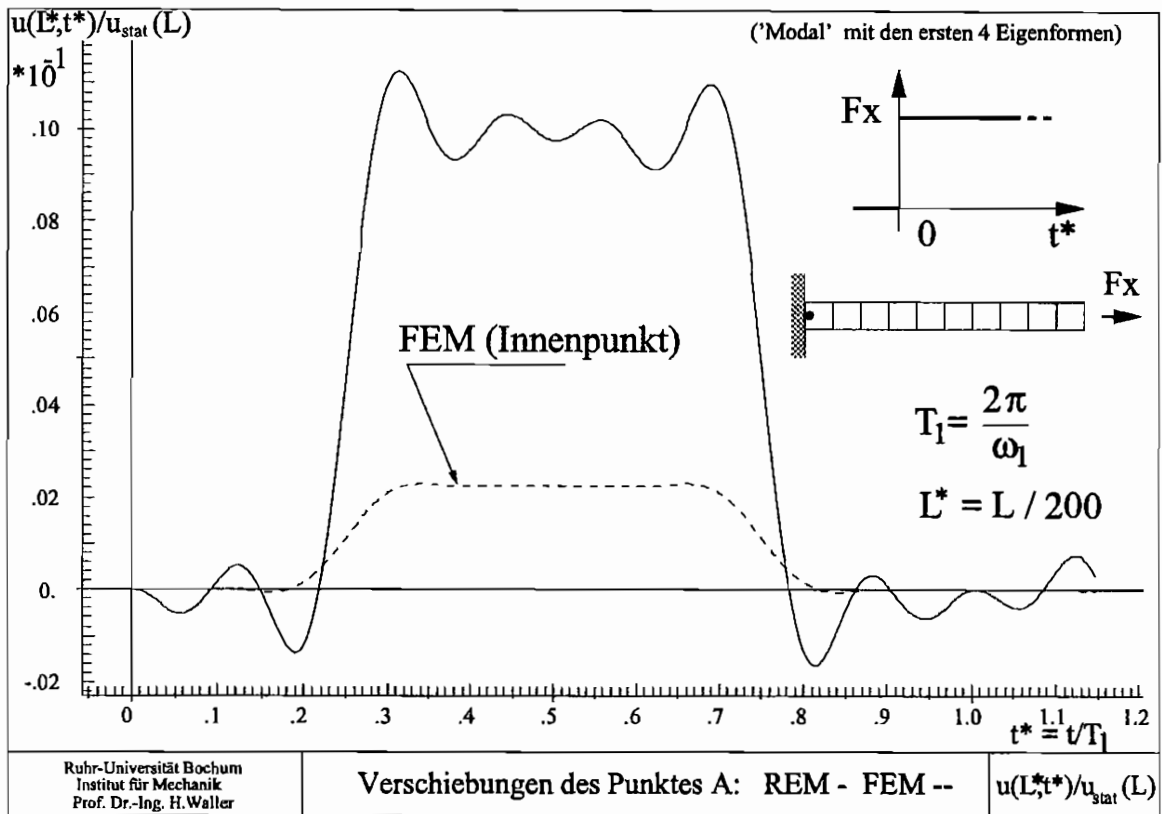


Abbildung 4.6: Längsverschiebung eines Punktes bei $x = L/200$

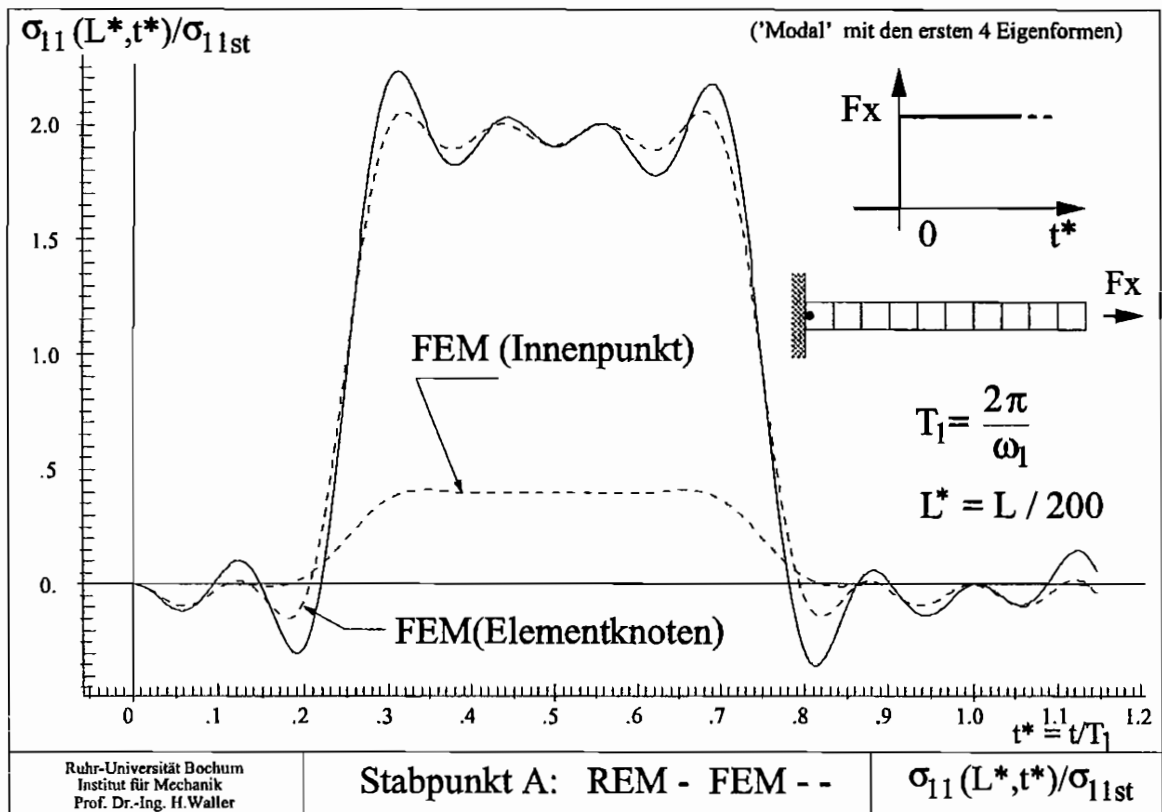


Abbildung 4.7: Längsspannung des Punktes A des Quaders

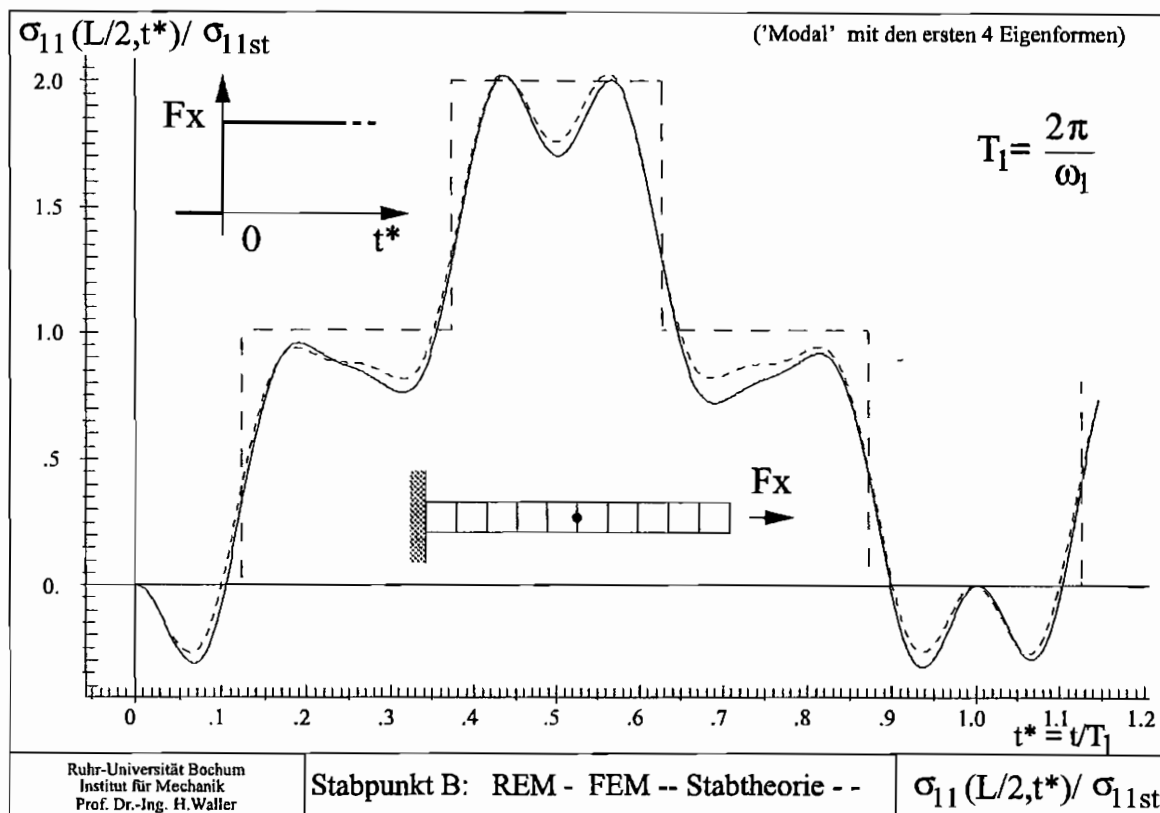


Abbildung 4.8: Längsspannung des Punktes B des Quaders

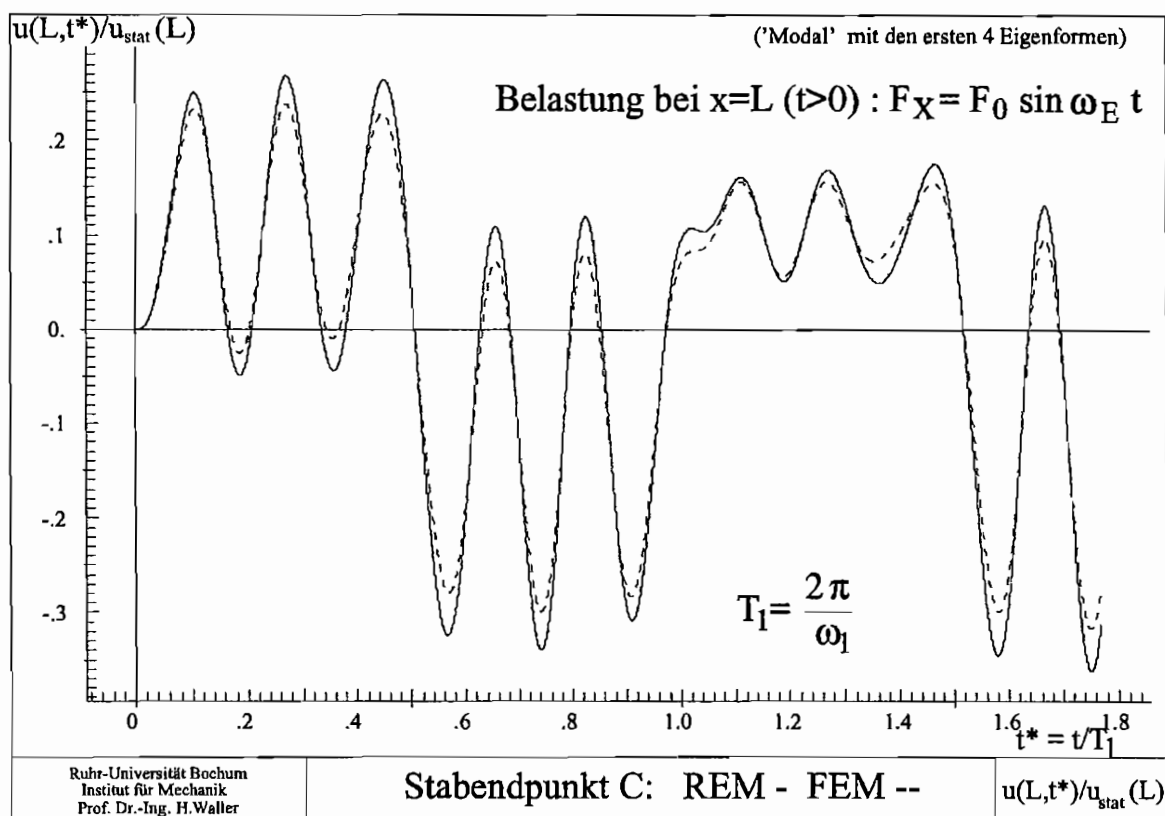


Abbildung 4.9: Verschiebung eines Punktes bei $x = L$ bei Sinus-Last

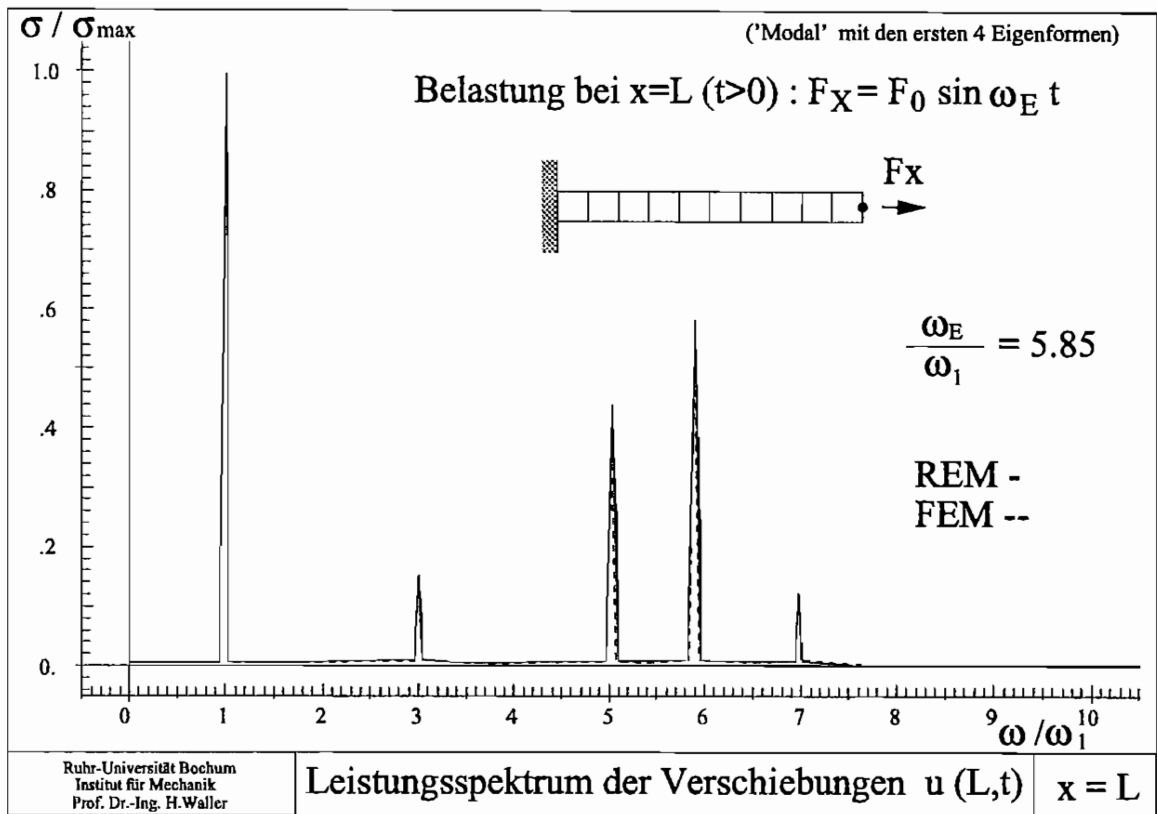


Abbildung 4.10: Leistungsspektrum der Verschiebung eines Punktes bei $x = L$

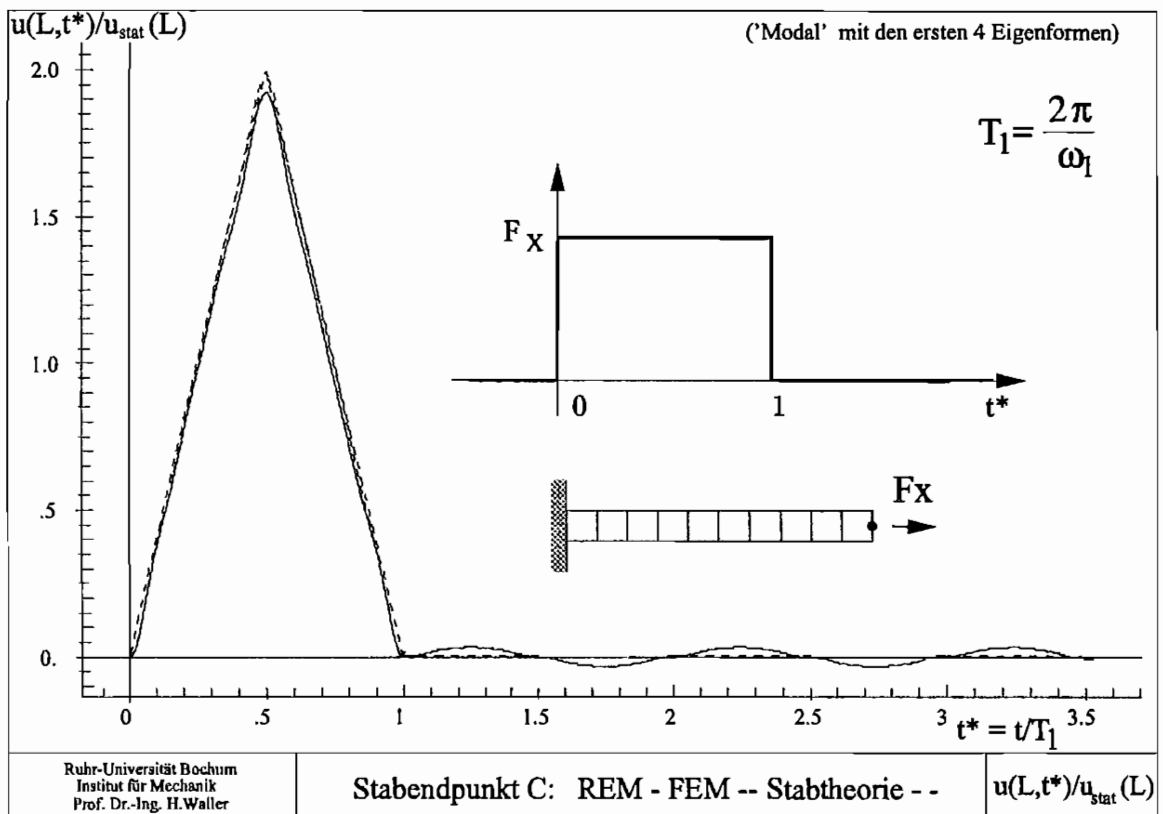


Abbildung 4.11: Verschiebung eines Punktes bei $x = L$

Querbelastung

Untersucht werden Verschiebungen des Quaders an der Stelle $x = L$ für eine Belastung in z-Richtung nach Bild (4.2). Die berücksichtigten Eigenformen in Querrichtung der Belastung werden in Bild (4.13) gezeigt, die entsprechenden Eigenwerte (normiert auf die erste Quereigenfrequenz) in Tabelle (4.4). Zum Vergleich werden die FEM-Ergebnisse, die auf die erste mit der REM ermittelte Eigenfrequenz in Querrichtung normiert sind, angegeben.

Vergleichsrechnungen werden mit der FEM durchgeführt. Die Verschiebungen werden wieder mit der statischen Verschiebung, die Zeit mit Hilfe der Periodendauer der ersten Eigenschwingung normiert (Bild 4.12).

Bild (4.14) zeigt die Verschiebungen des Quaders für unterschiedliche Zeiten. Die Zahl neben den Einzelbildern gibt jeweils den Multiplikator n an, mit dem die auf die Periodendauer der ersten Eigenschwingung normierte Zeit $t^* = \frac{t}{T_1} = n^* \frac{\Delta t}{T_1} = n^* \Delta t^*$ berechnet werden kann ($\Delta t^* = 0.001378$, $n^* = (n \cdot 100) - 50$).

Nr.	Biegung (ω_i/ω_1)	
	REM	FEM
1	1.000	0.991
2	6.153	6.088
3	16.726	16.552
4	31.491	31.215

Tabelle 4.4: Normierte erste Eigenfrequenzen in Belastungsrichtung (quer)

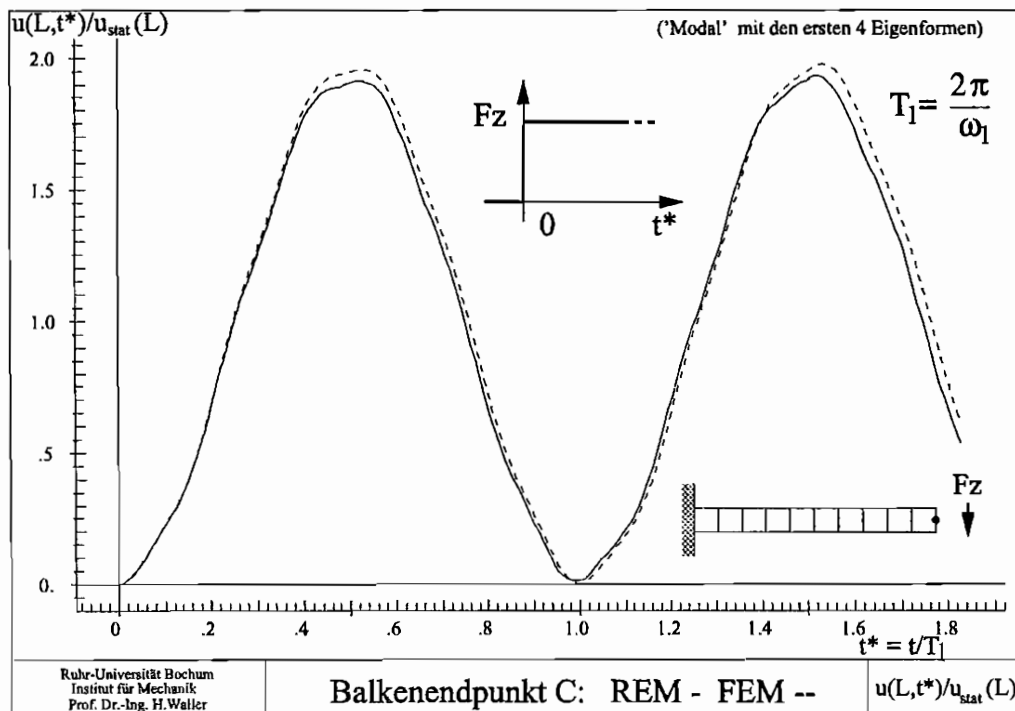


Abbildung 4.12: Querverschiebung eines Punktes bei $x = l$

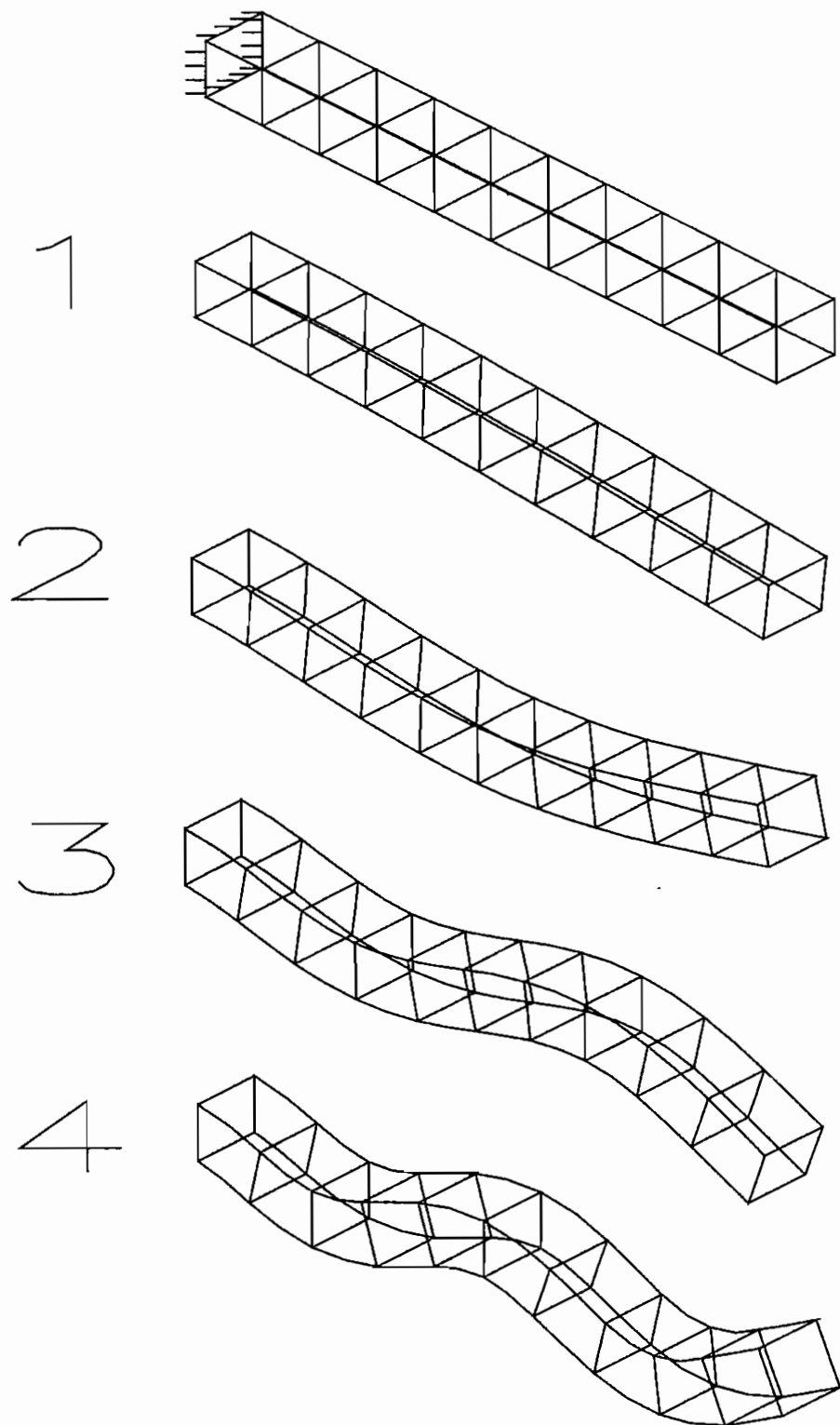


Abbildung 4.13: Quereigenformen des Quaders

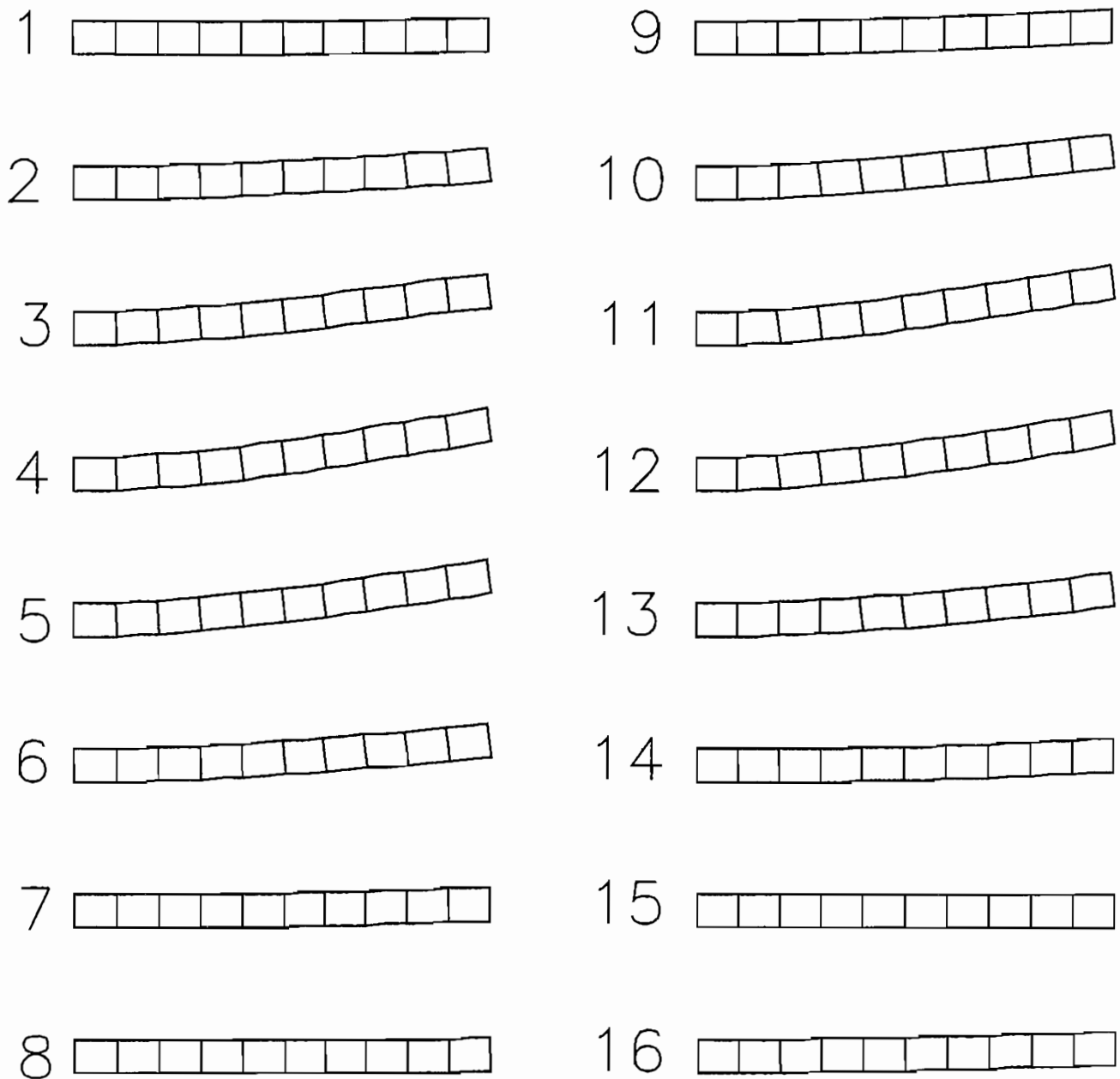


Abbildung 4.14: Querverschiebung des Quaders als Funktion der Zeit: $t^* = [(n \cdot 100) - 50] dt^*$

Anfangsbedingungen

Der Quader wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus einer vorgeschriebenen Ruhelage losgelassen und die so entstehende Schwingung untersucht. Als Anfangsauslenkung wird die Form der ersten Eigenform gewählt. Die Eigenform wird so normiert, daß das Quaderende die Anfangsauslenkung $u_0(l, y, z) = u_0$ erfährt. Wird der Quader aus dieser Lage losgelassen, muß die Schwingung genau mit der zu der Eigenform gehörenden Eigenkreisfrequenz in der Eigenform erfolgen. Bild (4.15) zeigt die Verschiebung eines Punktes bei $x = l$. Die Zeit ist auf die Periodendauer der Eigenfrequenz, deren Eigenform als Anfangsauslenkung vorgesehen ist, normiert. Die Amplitude muß bei diesem Punkt gleich dem vorgeschriebenen Wert u_0 sein.

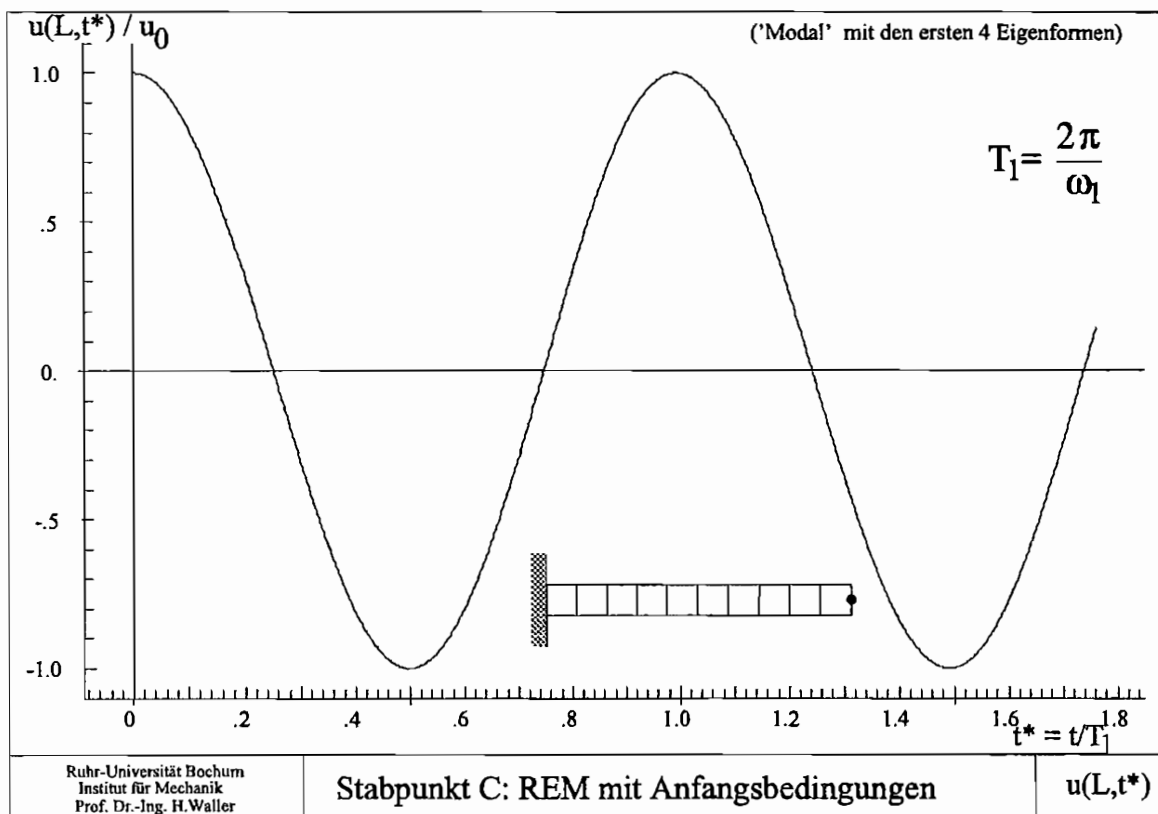


Abbildung 4.15: Verschiebung eines Punktes bei $x = l$

Dicke Platte

Ein dicke Platte der Abmessungen $l \times b \times h = (28 \times 20 \times 4) \text{ m}^3$ wird rundum fest eingespannt, Bild (3.38). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Element mit einer sprungartigen Last beaufschlagt. Die resultierende Wellenausbreitung in der Platte wird untersucht. Die bei der Modalanalyse berücksichtigten Eigenfrequenzen (auf die erste Eigenfrequenz normiert) und Eigenformen werden in Tabelle (4.5) und in Bild (4.17) dargestellt. Die Bezeichnung der Eigenformen wird wie in der Literatur üblich mit (i/j) durchgeführt (i gibt die Anzahl der Schwingungsbäuche in die x -Richtung, j die Anzahl in y -Richtung an.).

Bilder (4.18) und (4.19) zeigen die Verschiebungen der Platte für unterschiedliche Zeiten. Bild (4.19) stellt dabei den Einschwingvorgang dar, Bild (4.18) den Zeitverlauf über einem größeren Zeitraum. Die Zahl neben den Einzelbildern gibt jeweils den Multiplikator n an, mit dem die auf die Periodendauer der ersten Eigenschwingung ($1/1$) normierte Zeit $t^* = \frac{t}{T_1} = n^* \frac{\Delta t}{T_1} = n^* \Delta t^*$ berechnet werden kann ($\Delta t^* = 0.014$, $n^* = (n \cdot 100) - 50$ bzw. $n^* = n$). Die Bilder (4.20) und (4.21) zeigen den zeitlichen Verlauf der beiden Punkte A und B der Skizze (4.16) im Vergleich mit den Resultaten einer FEM Rechnung.

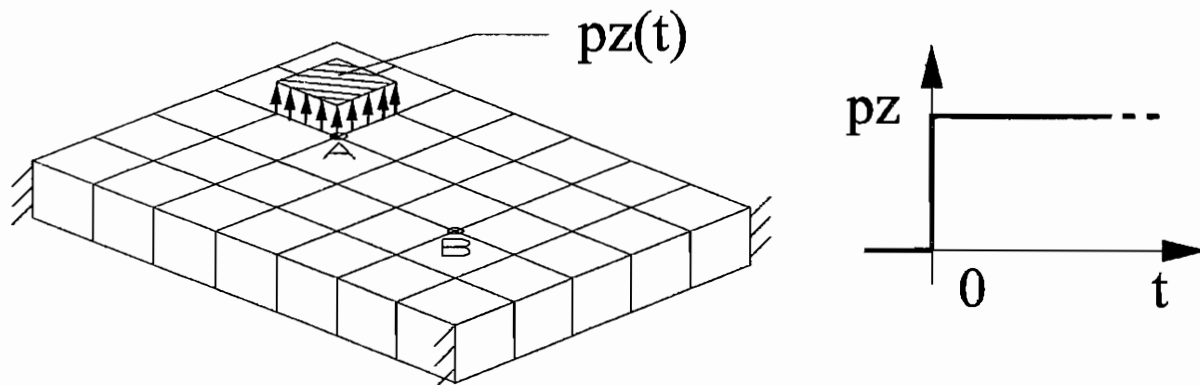


Abbildung 4.16: REM-Modell einer rundum fest eingespannten, dicken Platte

Bezeichnung	Kreisfrequenz ω_i/ω_1	
	REM	FEM
-		
1/1	1.000	1.000
2/1	1.531	1.526
1/2	2.082	2.097
3/1	2.311	2.315
2/2	2.513	2.502
3/2	3.185	3.150

Tabelle 4.5: Normierte erste Eigenfrequenzen einer dicken Platte

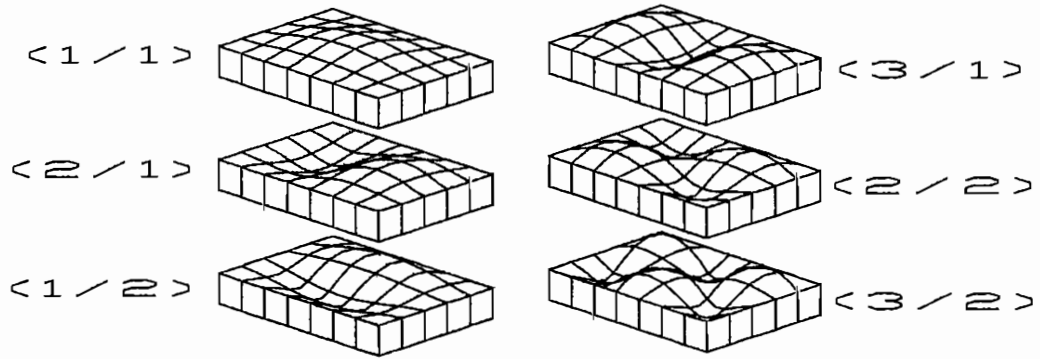


Abbildung 4.17: Eigenformen einer dicken Platte

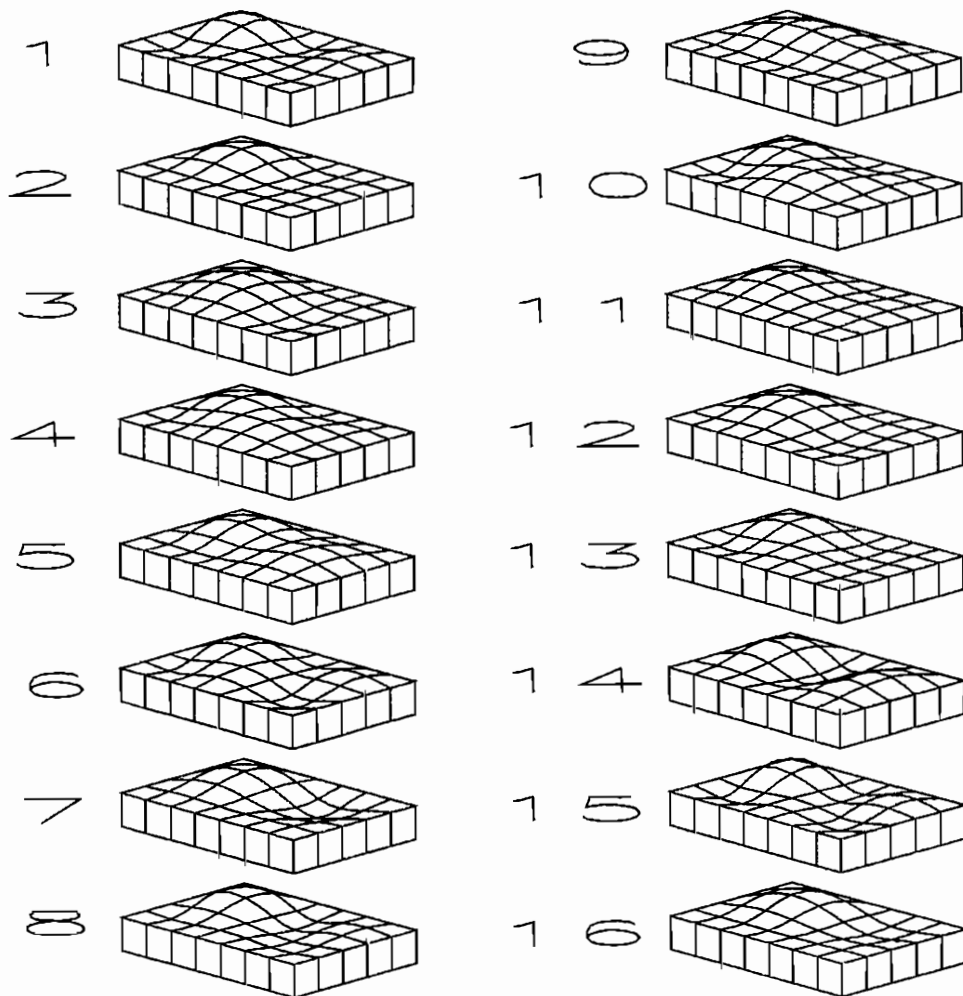


Abbildung 4.18: Verschiebungen der Platte: $t^* = [(n \cdot 100) - 50] dt^*$

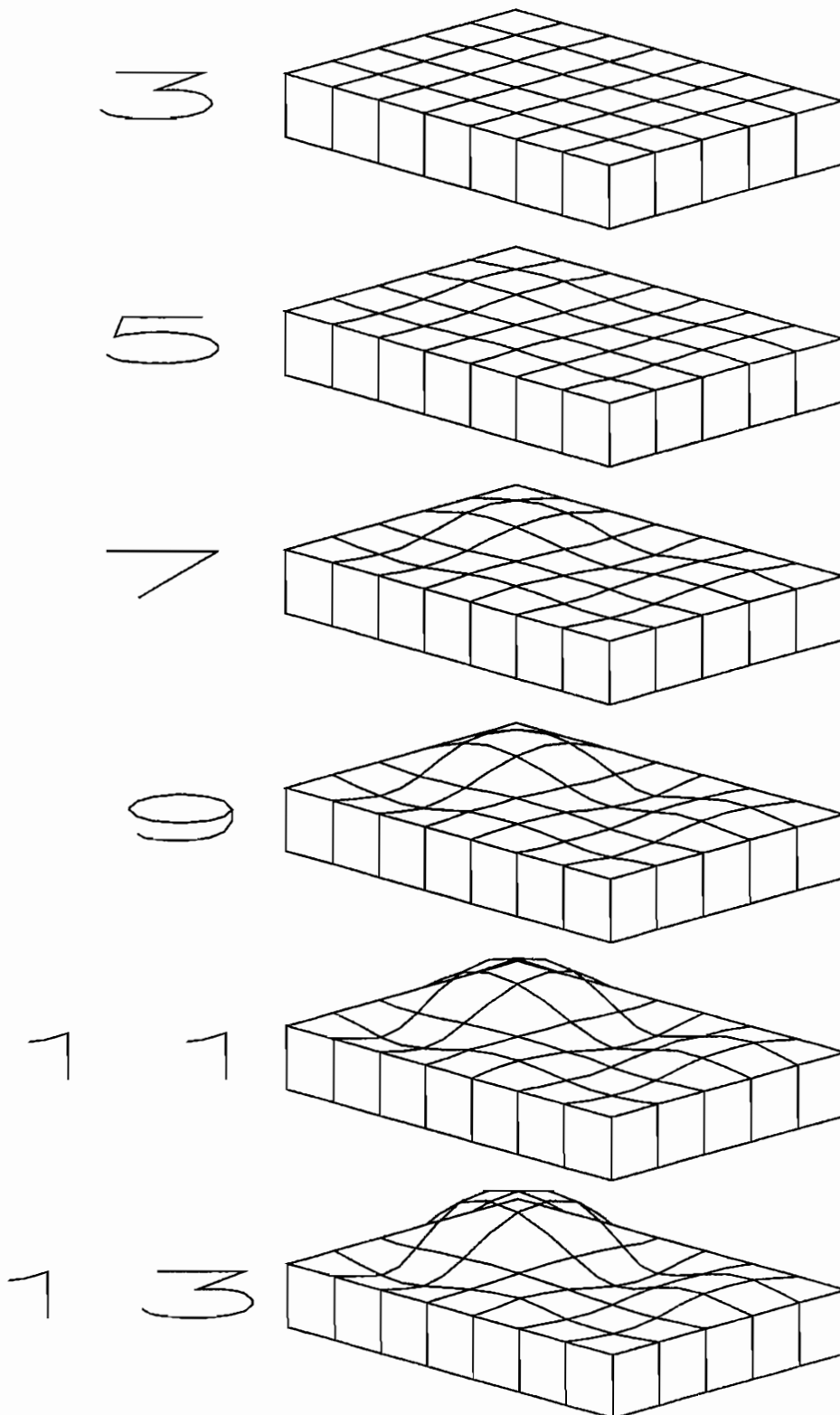


Abbildung 4.19: Einschwingvorgang der Platte: $t^* = n \cdot 10 dt^*$

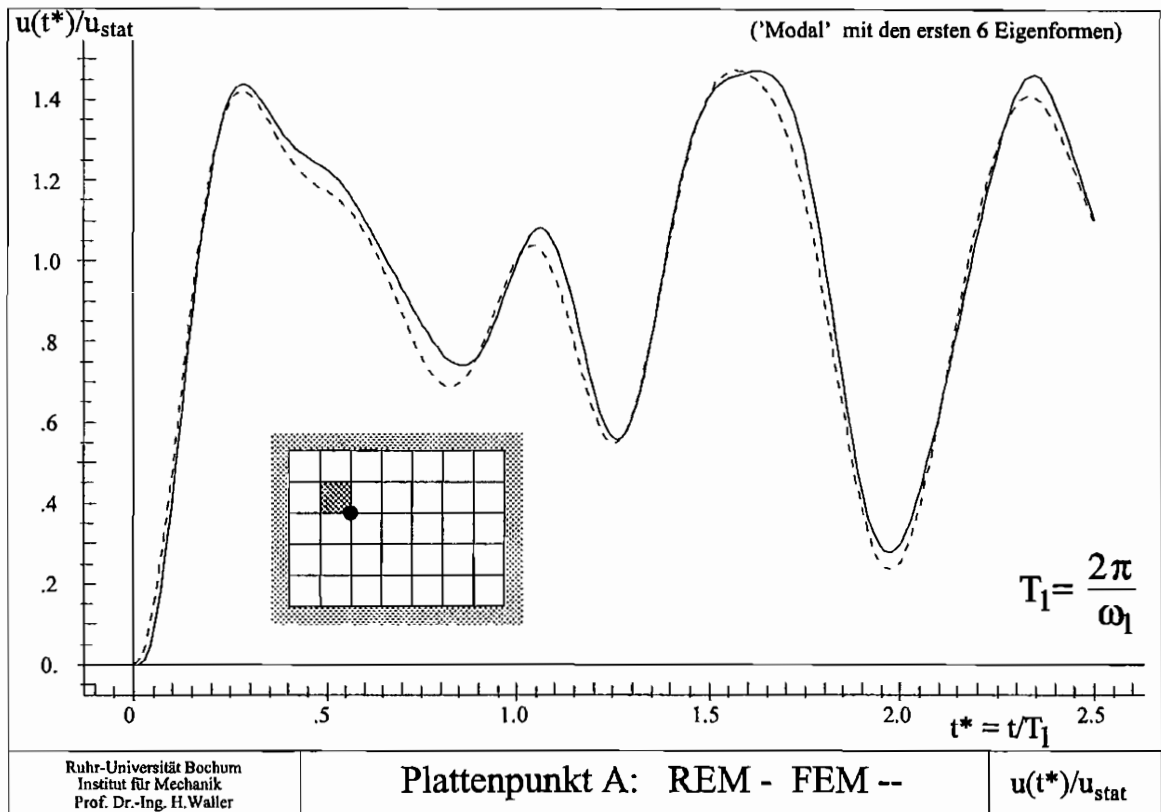


Abbildung 4.20: Verschiebungen der Platte als Funktion der Zeit

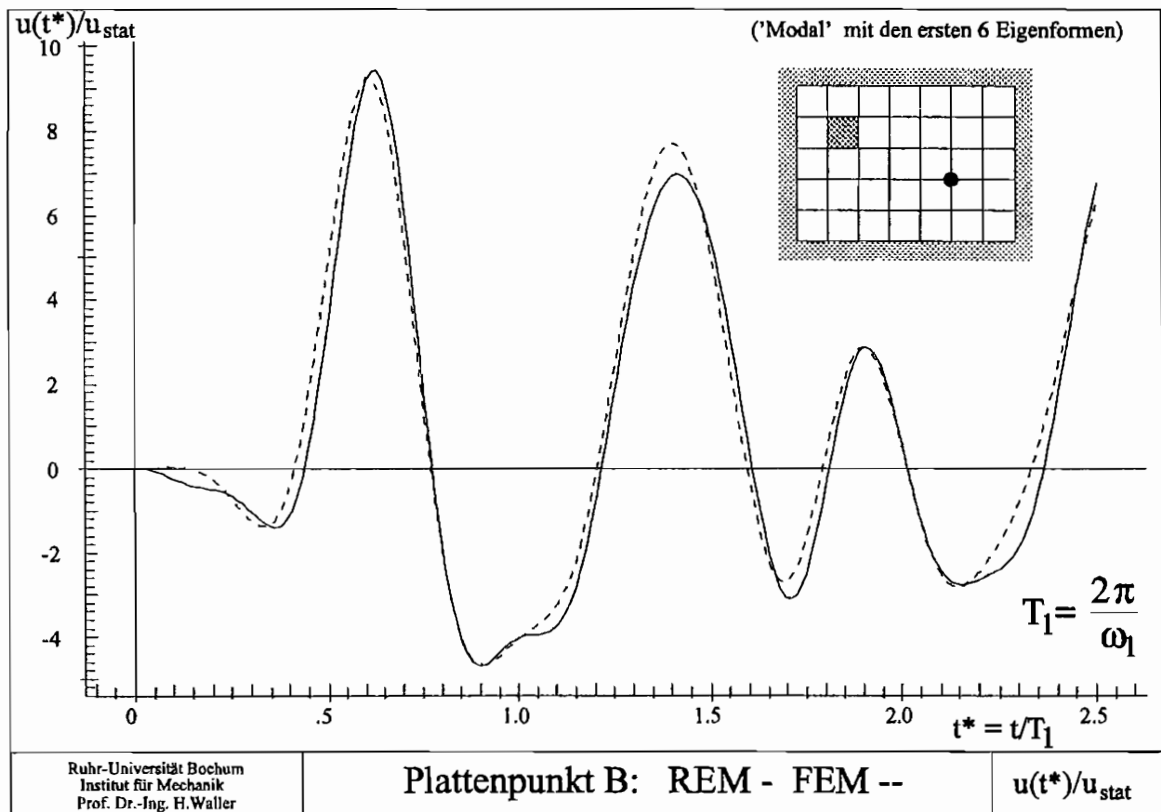


Abbildung 4.21: Verschiebungen der Platte als Funktion der Zeit

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die Modalanalyse wird in Kombination mit der Randelementemethode zur Lösung dreidimensionaler, linear-elastischer Probleme der Dynamik eingesetzt. Die Vorgehensweise kann grob in drei Schritte unterteilt werden:

- Aufstellen der Systemmatrizen der REM,
- Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenformen,
- Übersetzung der modalen Informationen in den Zeitbereich.

Zum **Aufstellen der Systemmatrizen der REM** wird ein einheitliches Integrationsschema für alle Typen von Elementen auf der Basis der nichtlinearen Transformation zur Berechnung fast-singulärer, singulärer und stark-singulärer Integrale entwickelt.

Bei fast-singulären Integralen wird die nichtlineare Transformation in Kombination mit einer Radialtransformation und in Abhängigkeit des Elementpunktes, der den kleinsten Abstand zum Quellpunkt hat, angewendet.

Zur Lösung stark-singulärer Integrale wird die nichtlineare Transformation mit Hilfe eines neuen Reihenansatzes eingesetzt. Damit wird ein effektives, direktes Aufstellen der Systemmatrizen ermöglicht.

Zur **Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen** werden unterschiedliche Methoden entwickelt.

Zum Einsatz kommen der QR-Algorithmus unter Verwendung des inversen Eigenwertes, der QZ-Algorithmus, der TS-Algorithmus unter Einsatz der Singulärwertzerlegung (SVD) und der Eigenwertzerlegung (EVD) sowie der Kombination von SVD und EVD, das Sekantenverfahren und das Newton-Verfahren in Kombination mit der SVD und Links-Rechts-Zerlegung (LU).

Frequenzbereiche werden mit Hilfe von Taylor-Reihenentwicklungen in Abhängigkeit des Frequenzparameters mit variablem Entwicklungspunkt und unter Einsatz der *inversen Funktion* durchlaufen. Als Kriterium für den Rangabfall der Systemmatrix wird der kleinste oder das Produkt der 3 bis 5 kleinsten Singulärwerte gewählt.

Wird nur mit dem kleinsten Singulärwert gearbeitet, kann die inverse Vektoriteration mit der Matrix $\underline{B}^* \underline{B}$ durchgeführt werden. Die Verwendung der komplexen Matrix $\underline{B}^* \underline{B}$, die hermitesch ist und daher nur den Speicherplatzbedarf einer reellen Matrix und reelle Eigenwerte hat, ermöglicht das eindeutige Auffinden der Eigenwerte (Stichwort: *fiktive Eigenfrequenzen*).

Zum sicheren Auffinden von mehrfachen und nahe zusammenliegenden Eigenwerten, werden iterative Verfahren in Kombination mit Verfahren, die auf der Basis von Reihenentwicklungen der Systemmatrizen und Günther'scher Expansion beruhen, eingesetzt. Die SVD dient zur Berechnung von Eigenformen einfacher oder mehrfacher Eigenfrequenzen.

Die Ergebnisse der REM werden mit FEM-Resultaten und, wenn möglich, mit analytischen Lösungen verglichen.

Die **Übersetzung modaler Informationen in Zeitbereichslösungen** geschieht mit einem sehr übersichtlichen und leicht verständlichen sowie einfach anzuwendenden Verfahren. Dieses Verfahren funktioniert für alle Elementtypen, der Einbau modaler Dämpfung ist problemlos möglich. Es lassen sich fast beliebige Anfangsbedingungen und Belastungsfunktionen berücksichtigen.

In einem zweiten Schritt erfolgt eine Erweiterung, die sowohl die Bestimmung von Verschiebungen als auch von Spannungen (kompletter Spannungstensor) an beliebigen Bauteilpunkten (d.h. auch im Bauteilinnern) in Nachlaufrechnungen zuläßt. Dabei wird mit *zusätzlichen modalen Koordinaten* gearbeitet. Die Berechnung von 3D-Bauteilen bezüglich Verschiebungen und Spannungen bei beliebigen Belastungen und Anfangsbedingungen ist damit möglich.

Alle Berechnungsergebnisse werden mit Ergebnissen der FEM verglichen. Dabei werden bei beiden Berechnungsverfahren (REM und FEM) Modelle mit ähnlicher Diskretisierung und ähnlichen Formfunktionen verwendet (Bei der FEM kommen 20-Knoten Quaderelemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen zum Einsatz.). Die Beispiele zeigen gute Übereinstimmungen der Berechnungsergebnisse. Bei der Spannungs- und Verschiebungsberechnung liefert die REM für Punkte im Bauteilinnern bessere Ergebnisse als die FEM, da keine Ableitung dieser Größen aus den Formfunktionen (wie bei der FEM) erforderlich ist.

Ausblick

Bei Einsatz von QR- und QZ-Algorithmus wird die spezielle Struktur der Matrizen, die sich aus der Günther'schen Expansion ergeben, bisher nicht ausgenutzt. Die Entwicklung eines Verfahrens, das diese Struktur berücksichtigt, führt zu Einsparungen an Rechenzeit und Speicherplatzbedarf.

Große Frequenzbereiche können grob untersucht werden, wenn Reihenentwicklungen der Systemmatrizen eingesetzt werden, die nur ein Reihenglied enthalten, das direkt von der Lage des Entwicklungspunktes abhängig ist. Die restlichen Reihenglieder werden mit Hilfe äquidistanter Stützstellen nur einmal aufgestellt und dann für alle Teilbereiche der Untersuchung eingesetzt. Die Bereitstellung solcher Reihenentwicklungen könnte bei der Abschätzung der Eigenwerte hilfreich sein und sinnvoll mit iterativen Verfahren verknüpft werden.

Anhang A

Matrizenzerlegung

A.1 Diagonalzerlegung von Matrizen

Bei den verschiedenen Verfahren zur Nullstellenbestimmung des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix \underline{B} , werden u.a. Diagonalzerlegungen vorgenommen. Hier werden zwei Transformationen aufgeführt, die eine Matrix in Diagonalf orm überführen:

1. Eigenwertzerlegung
2. Singulärwertzerlegung

A.1.1 Eigenwertzerlegung

Die Eigenwertzerlegung einer Matrix $\underline{A}_{(n \times n)}$ ([276], [277]) wird prinzipiell in zwei Arbeitsschritten durchgeführt.

Zuerst erfolgt eine linksseitige Äquivalenztransformation auf eine obere Dreiecksmatrix. Dies geschieht durch partielle Reduktion der Spalten nach unten, eventuell (im singulären Fall) mit Spaltentausch

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{L} \underline{A} \quad . \quad (\text{A.1})$$

Im zweiten Schritt wird die Diagonalmatrix durch Zeilen- oder Spaltenreduktion erzeugt

$$\hat{\underline{A}} = \underline{D} = \underline{L} \underline{A} \underline{R} \quad . \quad (\text{A.2})$$

\underline{D} hat folgendes Aussehen

$$\underline{D}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \underline{D}_R & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} ; \quad \underline{D}_{R(r \times r)} \quad . \quad (\text{A.3})$$

Der Rangabfall der Matrix \underline{A} kann direkt mit $(n - r)$ abgelesen werden.

Die praktische Durchführung kann mit Hilfe des QR-Algorithmus erfolgen. Die Matrix \underline{A} wird in $\underline{A} = \underline{Q} \underline{R}$ zerlegt. \underline{Q} ist eine unitäre Matrix, \underline{R} ist eine obere Dreiecksmatrix. Mit $\underline{Q}^* = \underline{Q}^{-1}$ folgt $\underline{Q}^* \underline{A} = \underline{R}$.

Der letzte Schritt ist die Diagonalisierung. Diese kann mit Hilfe einer Reihe Householder-Transformationen durchgeführt werden ([85]). Die Determinante von \underline{A} ergibt sich als Produkt der Diagonalelemente (Eigenwerte von \underline{A}) der Matrix \underline{D} .

A.1.2 Singulärwertzerlegung

Ausgangspunkt für die Singulärwertzerlegung ([102]) ist das Produkt $\underline{C} = \underline{A} \underline{A}^*$, wobei \underline{A} den Rang r besitzt. Die Eigenwerte von $\underline{A} \underline{A}^*$ sind $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$, die gleichzeitig Eigenwerte von $\underline{A}^* \underline{A}$ und reell sind. \underline{V} ist die Modalmatrix der orthogonalen Eigenvektoren von $\underline{A}^* \underline{A}$ und \underline{U} die entsprechende Matrix zu $\underline{A} \underline{A}^*$.

Mit der Diagonalmatrix $\underline{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_i)$; $\sigma_i = +\sqrt{\lambda_i}$; $i = 1, \dots, r$ und $\sigma_i = 0$, $i > r$ ist die Singulärwertzerlegung von \underline{A} möglich

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^* ; \underline{A}^* = \underline{V} \underline{\Sigma} \underline{U}^* \quad . \quad (\text{A.4})$$

Mit Hilfe der Singulärwerte kann die Determinante von $\underline{A} \underline{A}^*$ berechnet werden

$$\det [\underline{A} \underline{A}^*] = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad . \quad (\text{A.5})$$

Diese Determinante entspricht dem Betragsquadrat der Determinante von \underline{A} . Mit Hilfe der Singulärwerte kann der Rang der Matrix \underline{A} ermittelt werden

$$\text{Rang} (\underline{A}) = \text{Rang} (\underline{A}^*) = \text{Rang} (\underline{A}^* \underline{A}) = \text{Rang} (\underline{A} \underline{A}^*) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Zur praktischen Durchführung der Singulärwertzerlegung kann prinzipiell der QR-Algorithmus auf $\underline{A} \underline{A}^*$ angewendet werden. In [85] werden Verfahren erläutert, die eine Berechnung ohne explizite Bildung von $\underline{A} \underline{A}^*$ erlauben. Die Singulärwertzerlegung stellt ein sehr stabiles Verfahren, besonders für fast-singuläre und singuläre Matrizen dar.

A.1.3 LU-Zerlegung von Matrizen

Die Matrix \underline{A} wird in das Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix zerlegt

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad . \quad (\text{A.7})$$

\underline{L} hat auf der Hauptdiagonalen Einsen. Wegen $\underline{A} = \underline{L} \underline{U}$ folgt

$$\det [\underline{A}] = \det [\underline{L} \underline{U}] = \det [\underline{L}] \det [\underline{U}] = \det [\underline{U}] \quad (\text{A.8})$$

und damit

$$\det [\underline{A}] = \det [\underline{U}] = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn} \quad . \quad (\text{A.9})$$

D.h. die Determinante von \underline{A} kann direkt als Produkt der Diagonalelemente der Matrix \underline{U} abgelesen werden.

Oft ist es aus Stabilitätsgründen erforderlich, die LU-Zerlegung mit gleichzeitiger partieller Pivotisierung einzusetzen. Wird das Gauß'sche Eliminationsverfahren mit partieller Pivotisierung zur Berechnung der oberen Dreiecksmatrix \underline{U} eingesetzt

$$\underline{M}_{n-1} \underline{E}_{n-1} \dots \underline{M}_1 \underline{E}_1 \underline{A} = \underline{U} \quad , \quad (\text{A.10})$$

folgt

$$\underline{P} \underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad . \quad (\text{A.11})$$

Darin ist $\underline{P} = \underline{E}_{n-1} \underline{E}_{n-2} \dots \underline{E}_1$ das Produkt der Permutationsmatrizen \underline{E}_j und selbst wieder Permutationsmatrix. Die Permutationsmatrix ist eine Einheitsmatrix mit einer Neuordnung ihrer Reihen. Sie bewirkt, daß Zeilen einer Matrix, mit der sie multipliziert wird, vertauscht werden. Die praktische Anwendung der Permutationsmatrizen auf die Matrix \underline{A} sieht so aus, daß nur die entsprechenden Zeilen der Matrix \underline{A} vertauscht werden. Die Matrixmultiplikationen brauchen daher nicht explizit durchgeführt zu werden.

Für Permutationsmatrizen gilt:

- $\underline{P}^{-1} = \underline{P}^T$
- Produkt zweier Permutationsmatrizen ist wieder eine Permutationsmatrix
- $\det [\underline{P}] = \pm 1 \quad .$

Anhang B

Determinanten des Balkens aus 42 Elementen

B.1 Determinantenverläufe des Balkens aus 42 Elementen (reell/komplex)

Dargestellt werden die Determinantenverläufe im Bereich der Eigenfrequenzen des Balkens aus 42 Elementen. Verglichen werden die Werte der Randelementemethode bei Berechnung mit komplexer und reeller Systemmatrix $\underline{B}(k)$ (Bilder B.1,B.2,B.3,B.4,B.5).

Weitere Kurven sind im Abschnitt *Eigenwertanalyse* aufgeführt.

B.2 Vergleich der Determinantenverläufe berechnet mit FEM/REM

Dargestellt werden die Determinantenverläufe im Bereich der Eigenfrequenzen des Balkens aus 42 Elementen. Verglichen werden die Werte der Randelementemethode mit denen der Finiten Elemente Methode. Die Rechenmodelle sind in bezug auf die Diskretisierung gleich gewählt (Bilder B.6,B.7,B.8,B.9,B.10).

Weitere Kurven sind im Abschnitt *Eigenwertanalyse* aufgeführt.

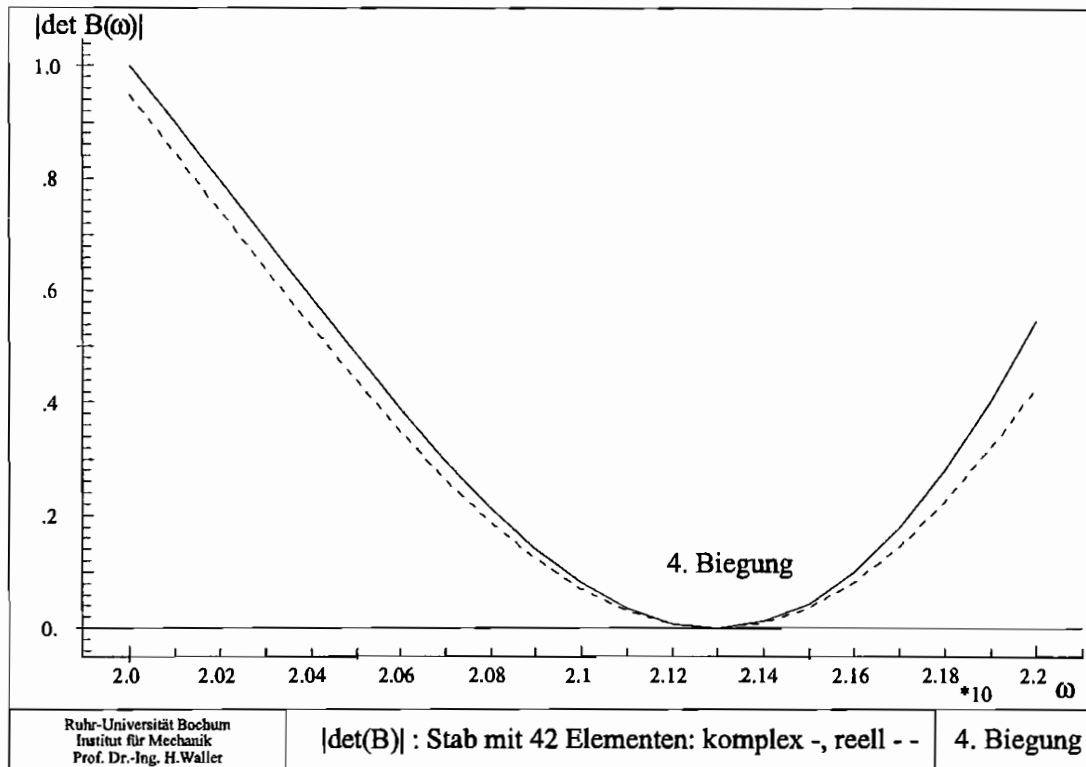


Abbildung B.1: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

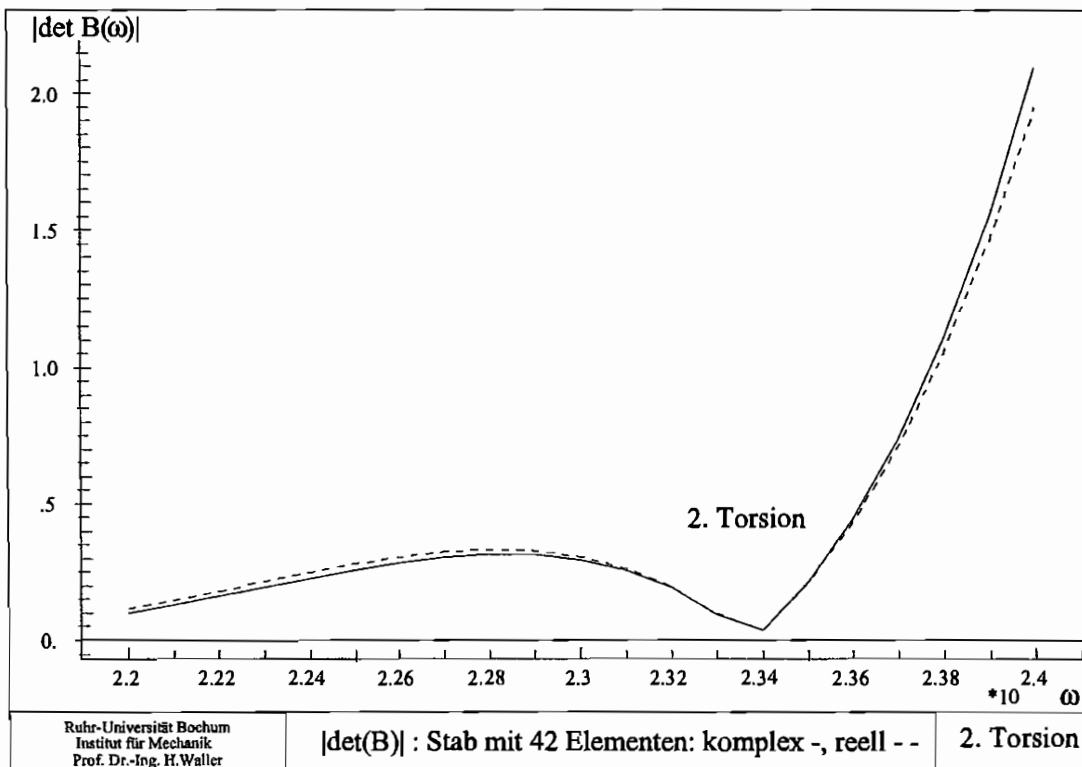


Abbildung B.2: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

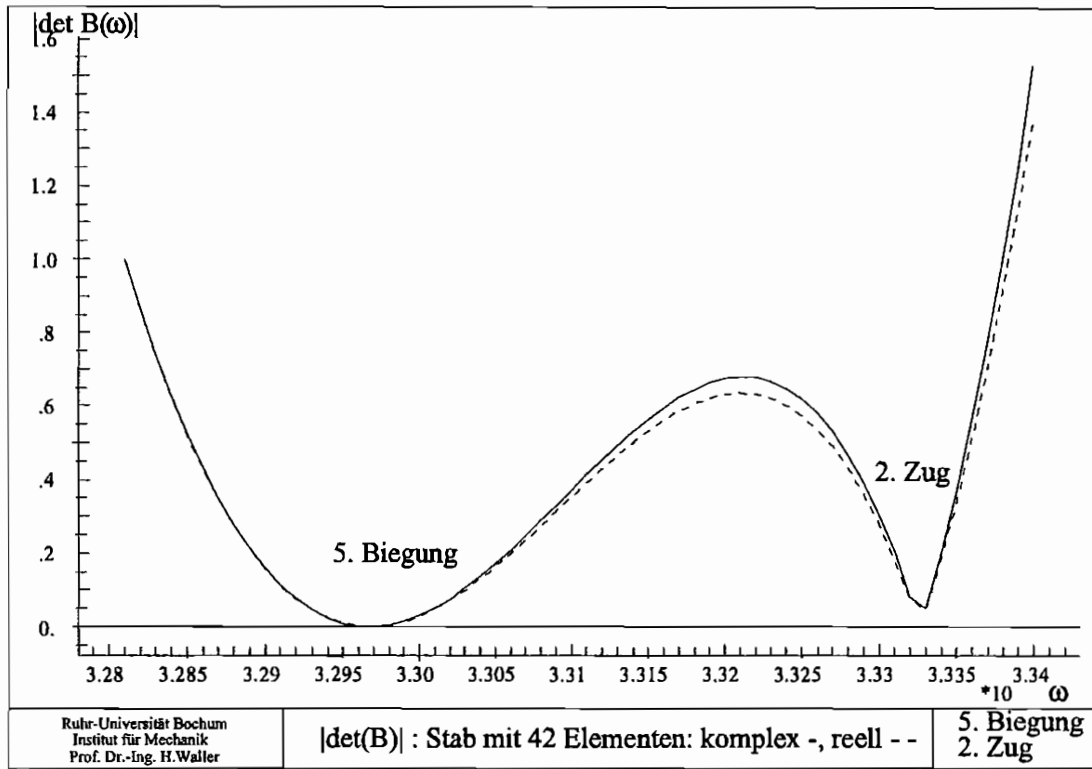


Abbildung B.3: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

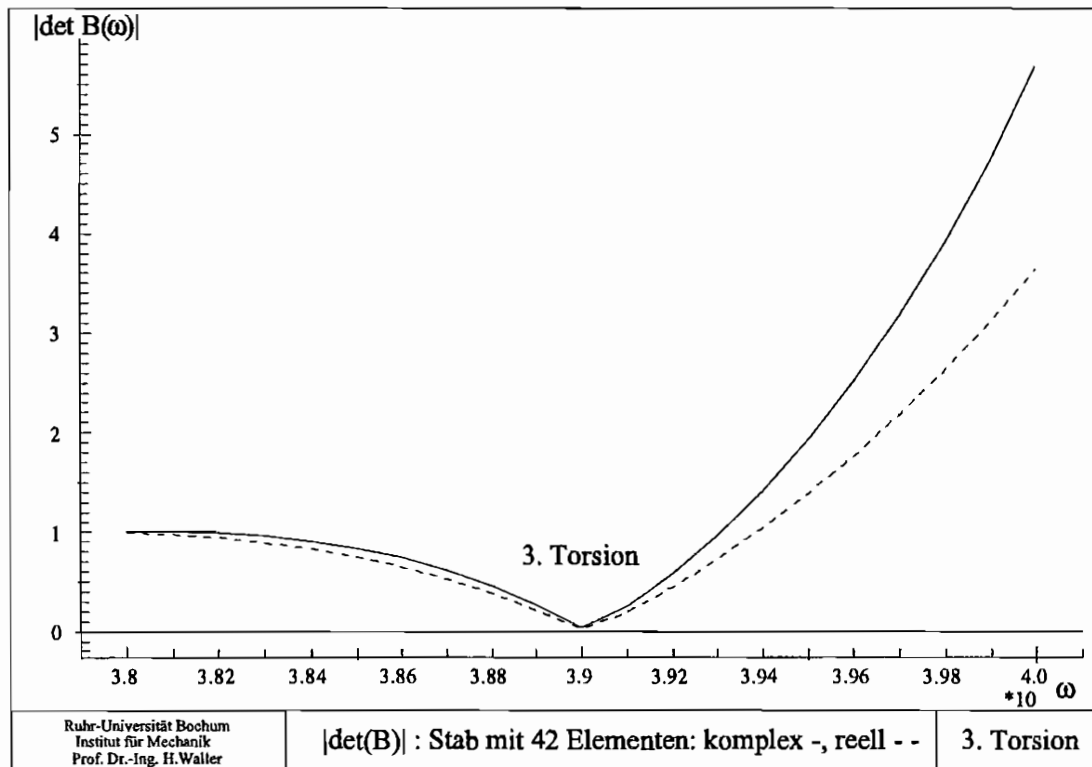


Abbildung B.4: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

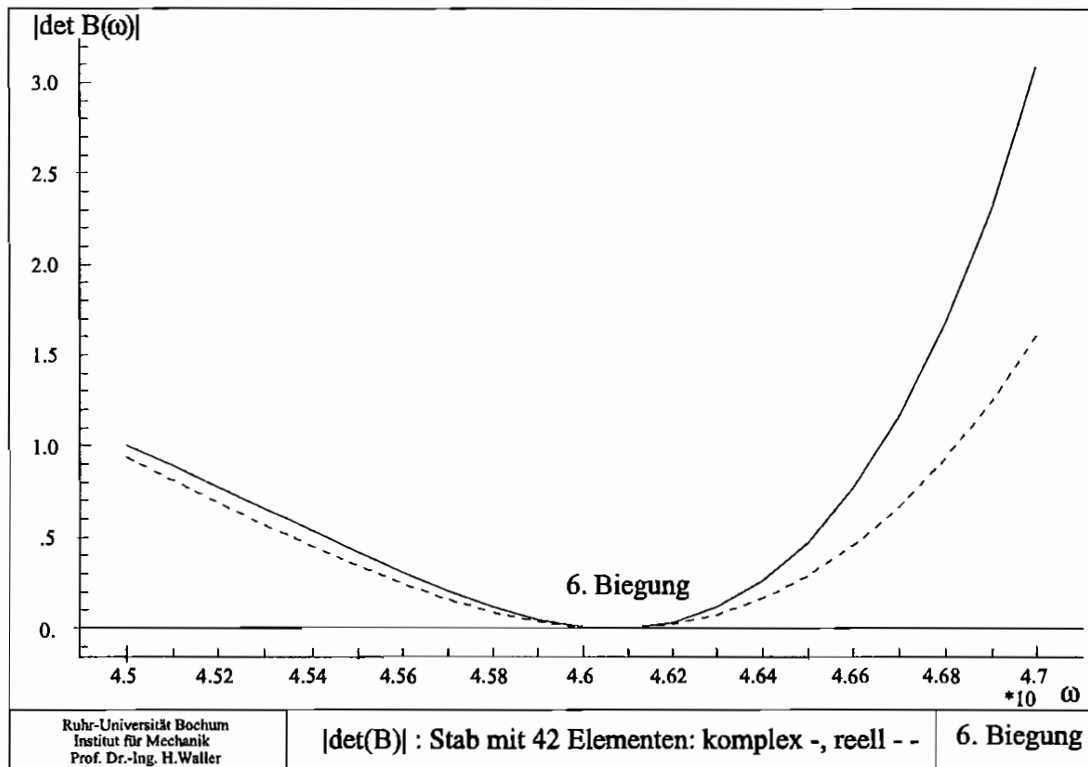


Abbildung B.5: Betrag bei komplexer und reeller Rechnung

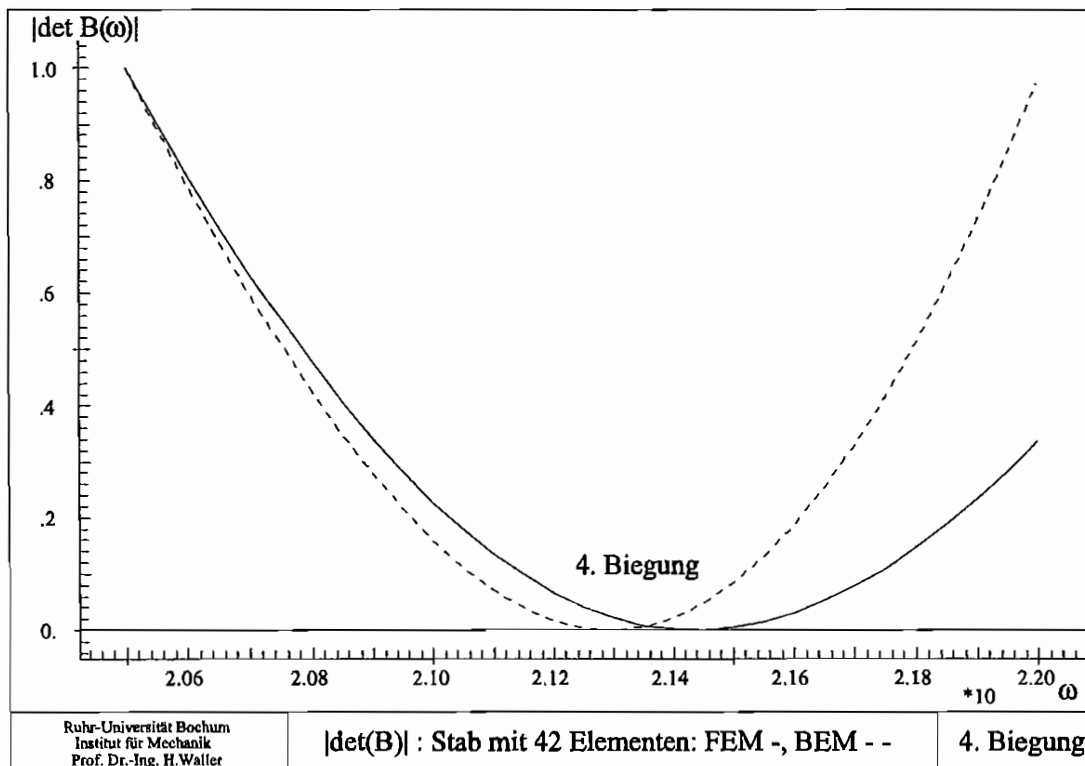


Abbildung B.6: Vergleich FEM mit BEM

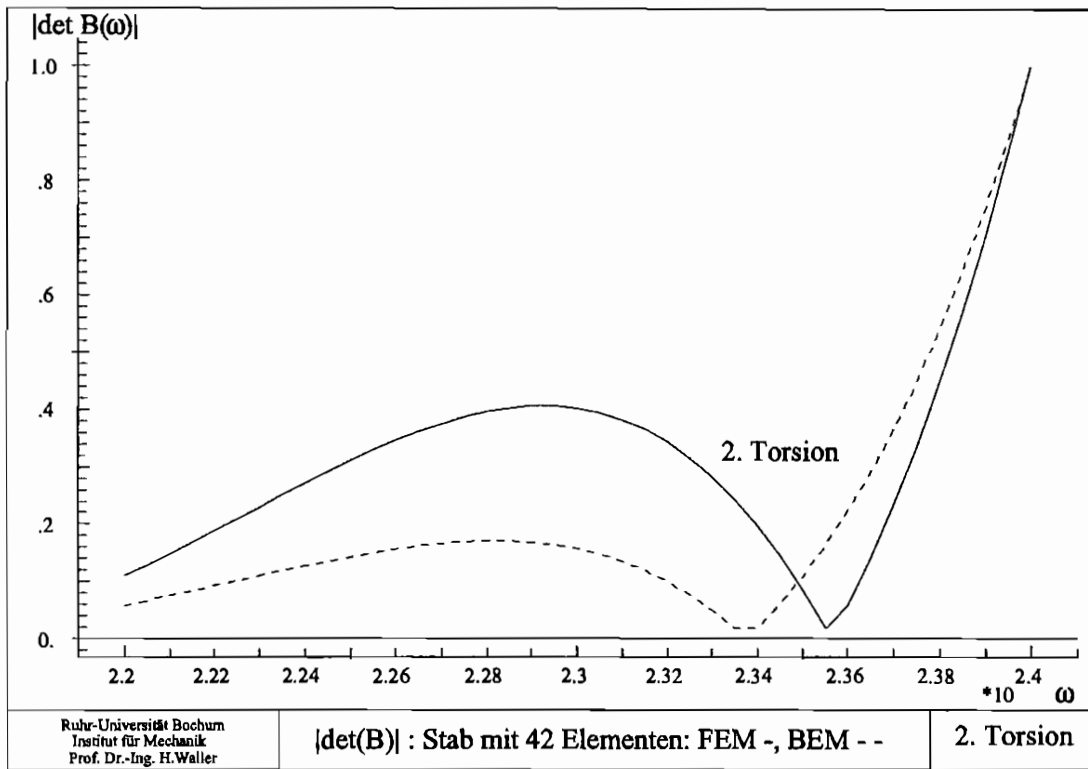


Abbildung B.7: Vergleich FEM mit BEM

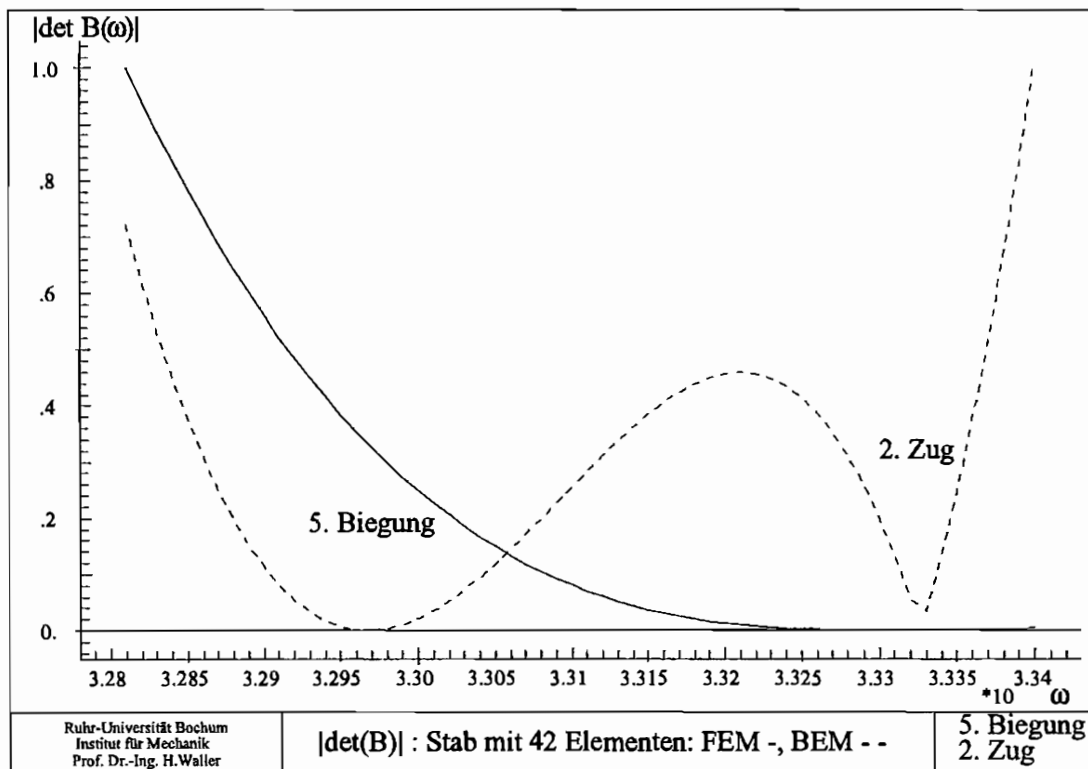


Abbildung B.8: Vergleich FEM mit BEM

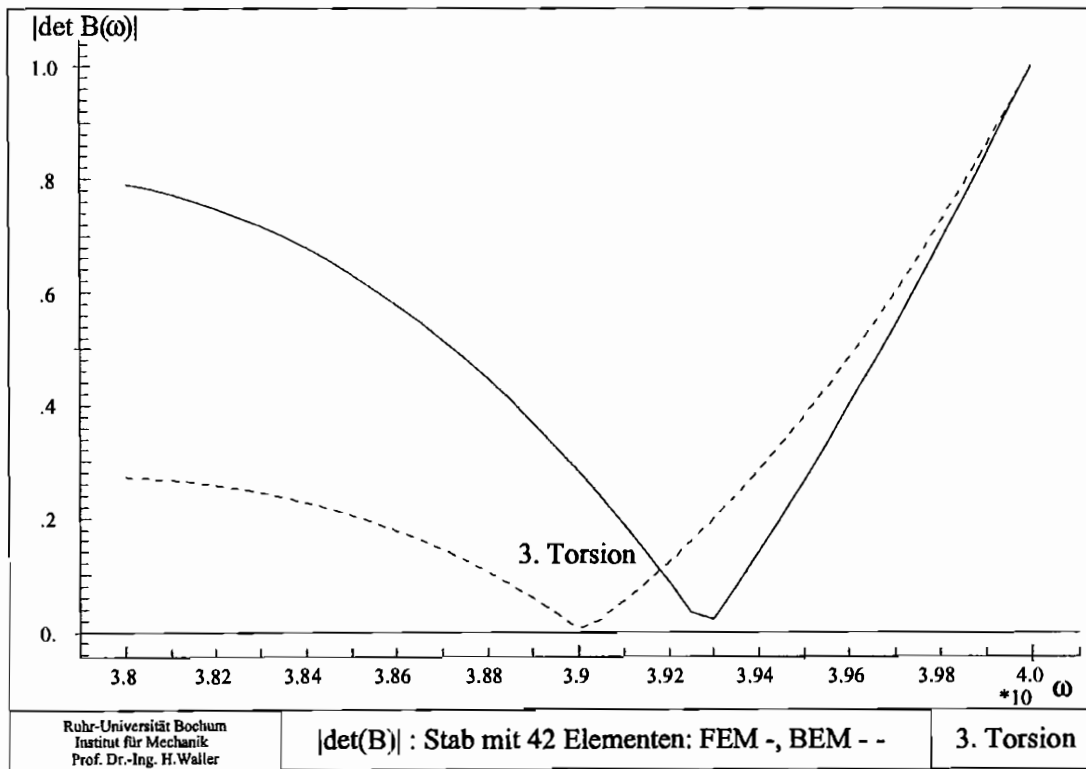


Abbildung B.9: Vergleich FEM mit BEM

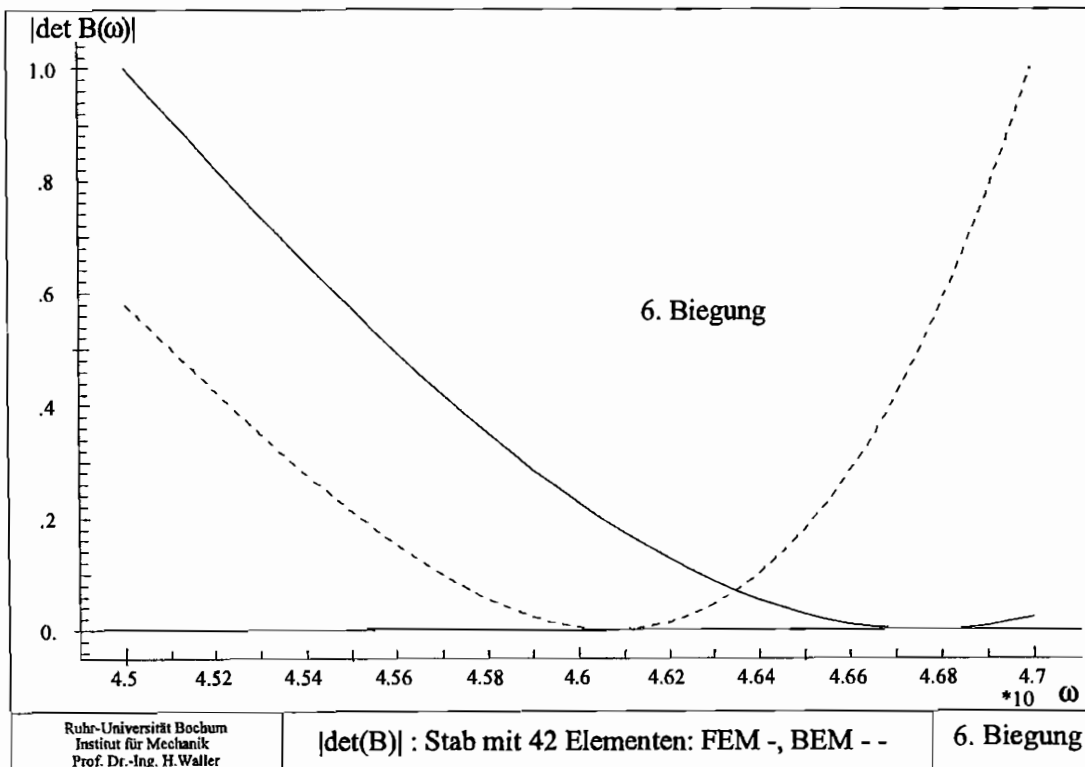


Abbildung B.10: Vergleich FEM mit BEM

Anhang C

Fundamentallösung der 3D-Dynamik

C.1 Reihenentwicklung der Fundamentallösung

Die Fundamentallösung und die Fundamentalrandspannung werden in Taylor-Reihen mit Entwicklungspunkt $\omega = 0$ entwickelt. Die Reihenentwicklung wird durchgeführt, indem die Funktionen A , B , C , ψ und χ in Reihen entwickelt und mit dem Index N (*Näherung*) versehen werden. Die Reihenentwicklungen von Fundamentallösung und Fundamentalrandspannung setzen sich aus diesen Koeffizienten zusammen.

$$u_{ijN}^* = \frac{1}{4 cs^2 \pi \rho} (\delta_{ij} \psi_N - \chi_N r_{,i} r_{,j}) \quad (\text{C.1})$$

$$\psi_N = \psi_{stat} + \psi_{reg} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2r} \cdot \left(1 + \frac{cs^2}{cp^2} \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(n+3)(n+1)!} \left[n+2 + \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+3} \right] \cdot \left(\frac{-i\omega}{cs} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\chi_N = \chi_{stat} + \chi_{reg} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2r} \cdot \left(1 - \frac{cs^2}{cp^2} \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot r^n}{(n+3)(n+1)!} \left[1 - \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+3} \right] \cdot \left(\frac{-i\omega}{cs} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$p_{ijN}^* = \frac{1}{4\pi} \left[A_N \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} + n_i r_{,j} \right) + B_N \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} r_{,i} r_{,j} + C_N n_j r_{,i} \right] \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
A_N &= A_{stat} + A_{reg} & (C.5) \\
&= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{cs^2}{cp^2} - \frac{\omega^2}{cs^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!(n+2)(n+4)} \left[1 + \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+4} \right] \cdot \left(\frac{-i\omega r}{cs} \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_N &= B_{stat} + B_{reg} & (C.6) \\
&= -\frac{3}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{cs^2}{cp^2} \right) + \frac{\omega^2}{cs^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n!(n+2)(n+4)} \left[1 - \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+4} \right] \cdot \left(\frac{-i\omega r}{cs} \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_N &= C_{stat} + C_{reg} & (C.7) \\
&= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{cs^2}{cp^2} \\
&\quad - \frac{\omega^2}{cs^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4) \left(\frac{cp^2}{cs^2} - 2 \right) \cdot \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+4} - 2 \left[1 - \left(\frac{cs}{cp} \right)^{n+4} \right]}{n!(n+2)(n+4)} \cdot \left(\frac{-i\omega r}{cs} \right)^n
\end{aligned}$$

Die mit dem Index *reg* bezeichneten Ausdrücke sind sowohl für verschwindendes r als auch für verschwindendes ω regulär.

Die Fundamentallösungen der Statik ergeben sich für $\omega = 0$.

$$u_{ij\,stat}^* = \frac{1}{4\,cs^2\,\pi\,\rho} (\delta_{ij}\,\psi_{stat} - \chi_{stat}\,r_{,i}\,r_{,j}) \quad (C.8)$$

$$\psi_{stat} = \frac{1}{2\,r} \cdot \left(1 + \frac{cs^2}{cp^2} \right) \quad (C.9)$$

$$\chi_{stat} = -\frac{1}{2\,r} \cdot \left(1 - \frac{cs^2}{cp^2} \right) \quad (C.10)$$

$$p_{ij\,stat}^* = \frac{1}{4\,\pi} \left[A_{stat} \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} + n_i r_{,j} \right) + B_{stat} \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} r_{,i} r_{,j} + C_{stat} n_j r_{,i} \right] \quad (C.11)$$

$$A_{stat} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{cs^2}{cp^2} \quad (C.12)$$

$$B_{stat} = -\frac{3}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{cs^2}{cp^2} \right) \quad (C.13)$$

$$C_{stat} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{cs^2}{cp^2} \quad (C.14)$$

Anhang D

Ableitungen der Fundamentallösung

Die Ableitungen der Fundamentallösung der 3D-Dynamik werden nach der Kreisfrequenz ω durchgeführt und mit $()'$ (1. Ableitung) und $()''$ (2. Ableitung) bezeichnet.

D.1 Ableitungen der Fundamentallösung

$$u_{ij}^{*'} = \frac{1}{4 cs^2 \pi \rho} (\delta_{ij} \psi' - \chi' r_{,i} r_{,j}) \quad (D.1)$$

$$u_{ij}^{*''} = \frac{1}{4 cs^2 \pi \rho} (\delta_{ij} \psi'' - \chi'' r_{,i} r_{,j})$$

$$\psi' = + \frac{\psi_1}{\omega} - \frac{cs^2 \psi_3}{cp^2 \omega} - \frac{2cs^2 \psi_1}{\omega^3 r^2} + \frac{2cs^2 \psi_3}{\omega^3 r^2} - \frac{2ics \psi_1}{\omega^2 r} + \frac{2ics^2 \psi_3}{cp \omega^2 r} + \frac{i \psi_1 r}{cs} \quad (D.2)$$

$$\chi' = + \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3cp^2}{\omega^2 r^2} - \frac{3i cp}{\omega r}\right) r}{cp^3} - \frac{ics \psi_1 \left(1 - \frac{3cs^2}{\omega^2 r^2} - \frac{3ics}{\omega r}\right) r}{cs}$$
$$- \frac{3cs^2 \psi_3 (2cp + i \omega r)}{cp \omega^3 r^2} + \frac{3cs \psi_1 (2cs + i \omega r)}{\omega^3 r^2}$$

$$\psi'' = - \frac{3\psi_1}{\omega^2} + \frac{3cs^2 \psi_3}{cp^2 \omega^2} + \frac{6cs^2 \psi_1}{\omega^4 r^2} - \frac{6cs^2 \psi_3}{\omega^4 r^2} + \frac{6ics \psi_1}{\omega^3 r} - \frac{6ics^2 \psi_3}{cp \omega^3 r}$$
$$- \frac{i \psi_1 r}{cs \omega} + \frac{ics^2 \psi_3 r}{cp^3 \omega} + \frac{\psi_1 r^2}{cs^2}$$
$$\chi'' = + \frac{9\psi_1}{\omega^2} - \frac{9cs^2 \psi_3}{cp^2 \omega^2} - \frac{18cs^2 \psi_1}{\omega^4 r^2} + \frac{18cs^2 \psi_3}{\omega^4 r^2} - \frac{18ics \psi_1}{\omega^3 r} + \frac{18ics^2 \psi_3}{cp \omega^3 r}$$
$$+ \frac{3i \psi_1 r}{cs \omega} - \frac{3ics^2 \psi_3 r}{cp^3 \omega} - \frac{\psi_1 r^2}{cs^2} + \frac{cs^2 \psi_3 r^2}{cp^4} \quad (D.3)$$

D.2 Ableitungen der Fundamentalrandspannung

$$p_{ij}^*{}' = \frac{1}{4\pi} \left[A' \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} + n_i r_{,j} \right) + B' \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} r_{,i} r_{,j} + C' n_j r_{,i} \right] \quad (D.4)$$

$$p_{ij}^*{}'' = \frac{1}{4\pi} \left[A'' \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} + n_i r_{,j} \right) + B'' \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} r_{,i} r_{,j} + C'' n_j r_{,i} \right] \quad (D.5)$$

$$A' = A_{11} + (A_{12} + A_{13}) \frac{1}{r} \quad (D.6)$$

$$A'' = A_{21} + (A_{22} + A_{23}) \frac{1}{r} \quad (D.7)$$

$$B' = \frac{1}{r} B_{11} + B_{12} + \frac{1}{r} B_{13} \quad (D.8)$$

$$B'' = \frac{1}{r} B_{21} + B_{22} + \frac{1}{r} B_{23} \quad (D.9)$$

$$C' = C_{11} \frac{1}{r} + \left(-2 + \frac{cp^2}{cs^2} \right) \left(C_{12} + (C_{13} + C_{14} + C_{15}) \frac{1}{r} \right) \quad (D.10)$$

$$C'' = C_{21} \frac{1}{r} + \left(-2 + \frac{cp^2}{cs^2} \right) \left(C_{22} + (C_{23} + C_{24} + C_{25}) \frac{1}{r} \right) \quad (D.11)$$

$$A_{11} = \frac{ics^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^2 r^2} + \frac{icp}{\omega r} \right)}{cp^3} - \frac{i\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r} \right)}{cs} - \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r} \right)}{cp^2 r} + \frac{\psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r} \right)}{r} \quad (D.12)$$

$$A_{12} = \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp(1-\frac{icp}{\omega r})}{\omega^2 r} \right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics(1-\frac{ics}{\omega r})}{\omega^2 r} \right) - \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp(1-\frac{icp}{\omega r})}{\omega r} \right) r}{cp^3} + \frac{i\psi_1 \left(1 - \frac{3ics(1-\frac{ics}{\omega r})}{\omega r} \right) r}{cs} \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & - \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp^2 \omega} - \psi_1 \left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) + \frac{cs^2 \psi_3}{\omega^3 r^2} + \frac{ics^2 \psi_3}{cp \omega^2 r} \\
& + \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp \omega^2 r} - \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right) r}{cp^3} \\
& - \frac{i \omega \psi_1 \left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r}{cs} - \frac{\omega \psi_1 \left(1 - \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & \frac{2ics^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r} \right)}{cp^3} - \frac{2i \psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r} \right)}{cs} - \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{12cp^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2icp}{\omega^3 r} \right)}{cp^2 r} \\
& + \frac{\psi_1 \left(\frac{12cs^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2ics}{\omega^3 r} \right)}{r} + \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^2 r^2} + \frac{icp}{\omega r} \right) r}{cp^4} - \frac{\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r} \right) r}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) \\
& - \frac{2ics^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r}{cp^3} + \frac{2i \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r}{cs} \\
& - \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} + \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} = & \frac{2cs^2 \psi_3}{cp^2 \omega^2} + \frac{2cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp^2 \omega^2} - \psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{2ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) \\
& - \frac{4cs^2 \psi_3}{\omega^4 r^2} - \frac{4ics^2 \psi_3}{cp \omega^3 r} - \frac{2ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp \omega^3 r} + \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right) r}{cp^3 \omega} \\
& - \frac{i \omega \psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{2ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) r}{cs} - \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} \\
& - \frac{2\omega \psi_1 \left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r^2}{cs^2} - \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2} \\
& + \frac{i \omega \psi_1 \left(1 - \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^3}{cs^3}
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$B_{11} = + 4 \left(- \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) \right)$$

$$+ \left(\frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r}{cp^3} - \frac{i\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r}{cs} \right) \quad (D.18)$$

$$B_{12} = -2 \left(\frac{3ics^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^2 r^2} + \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp^3} - \frac{3i\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r}\right)}{cs} \right. \\ \left. - \frac{3cs^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r}\right)}{cp^2 r} + \frac{3\psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r}\right)}{r} \right) \quad (D.19)$$

$$B_{13} = -2 \left(\frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) \right) \\ + \frac{ics^2 \omega \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cp^3} - \frac{i\omega \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\ + \frac{cs^2 \omega \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} - \frac{\omega \psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2} \right) \quad (D.20)$$

$$B_{21} = 4 \left(-\frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right) \right) \\ + \frac{2ics^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cp^3} - \frac{2i\psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\ + \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} - \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2} \right) \quad (D.21)$$

$$B_{22} = -2 \left(\frac{6ics^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r}\right)}{cp^3} - \frac{6i\psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r}\right)}{cs} \right) \\ - \frac{3cs^2 \psi_3 \left(\frac{12cp^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2icp}{\omega^3 r}\right)}{cp^2 r} + \frac{3\psi_1 \left(\frac{12cs^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2ics}{\omega^3 r}\right)}{r} \\ + \frac{3cs^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{icp}{\omega r}\right) r}{cp^4} - \frac{3\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r}\right) r}{cs^2} \right) \quad (D.22)$$

$$\begin{aligned}
B_{23} = & - 2 \left(\frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) \right. \\
& + \frac{ics^2 \omega \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) r}{cp^3} - \frac{i\omega \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) r}{cs} \\
& + \frac{2cs^2 \omega \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r^2}{cp^4} + \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r^2}{cp^4} \\
& - \frac{2\omega \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) r^2}{cs^2} - \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r^2}{cs^2} \\
& \left. - \frac{ics^2 \omega \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r^3}{cp^5} + \frac{i\omega \psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r^3}{cs^3} \right) \quad (D.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} = & - 2 \left(- \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) \right) \\
& + \left(\frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r}{cp^3} - \frac{i\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r}{cs} \right) \quad (D.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} = & \frac{-2ics^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^2 r^2} + \frac{icp}{\omega r} \right)}{cp^3} + \frac{2i\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r} \right)}{cs} \\
& + \frac{2cs^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r} \right)}{cp^2 r} - \frac{2\psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r} \right)}{r} \quad (D.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} = & - 2 \left(- \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r} \right) \right) \\
& + \left(\frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r}{cp^3} - \frac{i\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r} \right) r}{cs} \right) \quad (D.26)
\end{aligned}$$

$$C_{14} = - \frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r} \right)}{cp^2 \omega} - \psi_1 \left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r} \right)}{\omega^2 r} \right) + \frac{cs^2 \psi_3}{\omega^3 r^2} + \frac{ics^2 \psi_3}{cp\omega^2 r}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp \omega^2 r} - \frac{ics^2 \psi_3 \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right) r}{cp^3} - \frac{i\omega \psi_1 \left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\
& - \frac{\omega \psi_1 \left(1 - \frac{ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
C15 = & - \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) \\
& + \frac{ics^2 \omega \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cp^3} - \frac{i\omega \psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\
& + \frac{cs^2 \omega \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} - \frac{\omega \psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
C21 = & - 2 \left(- \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right) \right) \\
& + \frac{2ics^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cp^3} - \frac{2i\psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\
& + \left(\frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} - \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2} \right)
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
C22 = & \frac{-4ics^2 \psi_3 \left(\frac{-4cp^2}{\omega^3 r^2} - \frac{icp}{\omega^2 r}\right)}{cp^3} + \frac{4i\psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^3 r^2} - \frac{ics}{\omega^2 r}\right)}{cs} + \frac{2cs^2 \psi_3 \left(\frac{12cp^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2icp}{\omega^3 r}\right)}{cp^2 r} \\
& - \frac{2\psi_1 \left(\frac{12cs^2}{\omega^4 r^2} + \frac{2ics}{\omega^3 r}\right)}{r} - \frac{2cs^2 \psi_3 \left(\frac{2cp^2}{\omega^2 r^2} + \frac{icp}{\omega r}\right) r}{cp^4} + \frac{2\psi_1 \left(\frac{2cs^2}{\omega^2 r^2} + \frac{ics}{\omega r}\right) r}{cs^2}
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
C23 = & - 2 \left(- \frac{cs^2 \psi_3 \left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)}{cp^2} + \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right) \right) \\
& + \frac{2ics^2 \psi_3 \left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cp^3} - \frac{2i\psi_1 \left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right) r}{cs} \\
& + \left(\frac{cs^2 \psi_3 \left(1 - \frac{3icp \left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cp^4} - \frac{\psi_1 \left(1 - \frac{3ics \left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right) r^2}{cs^2} \right)
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
C24 = & \frac{2cs^2\psi_3}{cp^2\omega^2} + \frac{2cs^2\psi_3\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp^2\omega^2} - \psi_1 \left(\frac{-4cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{2ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) \\
& - \frac{4cs^2\psi_3}{\omega^4 r^2} - \frac{4ics^2\psi_3}{cp\omega^3 r} - \frac{2ics^2\psi_3\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{cp\omega^3 r} + \frac{ics^2\psi_3\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)r}{cp^3\omega} \\
& - \frac{i\omega\psi_1\left(\frac{-4cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{2ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)r}{cs} - \frac{cs^2\psi_3\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)r^2}{cp^4} \\
& + \frac{2\omega\psi_1\left(\frac{cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right)r^2}{cs^2} - \frac{\psi_1\left(1 - \frac{ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^2}{cs^2} \\
& + \frac{i\omega\psi_1\left(1 - \frac{ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^3}{cs^3}
\end{aligned} \tag{D.32}$$

$$\begin{aligned}
C25 = & - \frac{cs^2\psi_3\left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)}{cp^2} - \psi_1 \left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r} \right) \\
& + \frac{ics^2\omega\psi_3\left(\frac{-12cp^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6icp\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)r}{cp^3} - \frac{i\omega\psi_1\left(\frac{-12cs^2}{\omega^4 r^2} - \frac{6ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^3 r}\right)r}{cs} \\
& + \frac{2cs^2\omega\psi_3\left(\frac{3cp^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3icp\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right)r^2}{cp^4} + \frac{cs^2\psi_3\left(1 - \frac{3icp\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^2}{cp^4} \\
& - \frac{2\omega\psi_1\left(\frac{3cs^2}{\omega^3 r^2} + \frac{3ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega^2 r}\right)r^2}{cs^2} - \frac{\psi_1\left(1 - \frac{3ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^2}{cs^2} \\
& - \frac{ics^2\omega\psi_3\left(1 - \frac{3icp\left(1 - \frac{icp}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^3}{cp^5} + \frac{i\omega\psi_1\left(1 - \frac{3ics\left(1 - \frac{ics}{\omega r}\right)}{\omega r}\right)r^3}{cs^3}
\end{aligned} \tag{D.33}$$

Es wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\psi_1 = \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{cs}}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{cp}}$$

Anhang E

Partielle Integration

E.1 Partielle Integration mit dem Gauß'schen Integralsatz

Betrachtet werden 3D-Gebiete Ω , die durch den Rand Γ begrenzt werden. Die Flächennormale eines Randpunktes nach außen wird mit \vec{n} bezeichnet. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes wird die im Kapitel *Grundlagen* verwendete partielle Integration durchgeführt.

Gauß'scher Integralsatz

Skalare Funktion F

$$\int_{\Omega} F_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} F n_i d\Gamma \quad (\text{E.1})$$
$$\int_{\Omega} \text{grad } F d\Omega = \int_{\Gamma} F \vec{n} d\Gamma$$

Vektorfunktion \vec{F}

$$\int_{\Omega} F_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} F_i n_i d\Gamma \quad (\text{E.2})$$
$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{F} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Tensoren 2. Stufe F_{ij}

$$\int_{\Omega} F_{i,jj} d\Omega = \int_{\Gamma} F_{ij} n_j d\Gamma \quad (\text{E.3})$$
$$\int_{\Omega} \nabla \underline{F} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \underline{F} d\Gamma$$

Mit diesem Integralsatz gilt für das Produkt zweier Funktionen F und G in kartesischen Koordinaten x_i

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(F G)}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma} F G n_i d\Gamma = \int_{\Omega} F \frac{\partial G}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} G \frac{\partial F}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{E.4})$$

bzw. in anderer Reihenfolge

$$\int_{\Omega} F \frac{\partial G}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma} F G n_i d\Gamma - \int_{\Omega} G \frac{\partial F}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{E.5})$$

Die letzte Gleichung stellt die Formel der *partiellen Integration* dar.

Literaturverzeichnis

- [1] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1976.
- [2] A. Ali, C. Rajakumar, and S. M. Yunus. „On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:1271–1282, 1991.
- [3] M. H. Aliabadi, B. C. A, and M. J. „State-of-the Art on Boundary Elements and Dual Method/Reciprocity Techniques“. *Boundary Elements Communications*, 6(5):229–236, 1995.
- [4] M. H. Aliabadi and C. A. Brebbia. *Advanced Formulations in Boundary Element Methods*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.
- [5] M. H. Aliabadi and W. S. Hall. „Weighted Gaussian methods for three-dimensional boundary element kernel integration“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 3:89–96, 1987.
- [6] M. H. Aliabadi, W. S. Hall, and T. T. Hibbs. „Exact singularity cancelling for the potential kernel in the boundary element method“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 3:123–128, 1987.
- [7] S. Amini and P. J. Harris. „A comparison between various boundary integral formulations of the exterior acoustic problem“. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 84(1):59–75, 1990.
- [8] S. Amini, P. J. Harris, and D. T. Wilton. *Lecture Notes in Engineering 77, Coupled boundary and finite element methods for the solution of the dynamic fluid-structure interaction problem*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [9] S. Amini and D. T. Wilton. „An investigation of boundary element methods for the exterior acoustic problem“. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 54:49–65, 1986.
- [10] M. Analoui, H. Tsuboi, and T. Nakata. „Analytical integration of singular boundary-value kernels over flat triangular surface patch“. 1990.
- [11] H. Antes. „Boundary element methods in dynamic interaction problems“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 73(4–5):63–67, 1993.

- [12] H. Antes, M. Ottenstreuer, and G. Schmid. *Randelemente*. Seminar WS 1981/82, Institut für konstruktiven Ingenieurbau und Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1982.
- [13] H. Antes and P. D. Panagiotopoulos. *The Boundary Integral Approach to Static and Dynamic Contact Problems*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.
- [14] H. Antes, B. Steinfield, and G. Tröndle. „Recent developments in dynamic stress analyses by time domain BEM“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(4):176–184, 1991.
- [15] L. Auersch-Saworski. *Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch Bodenerschütterung*. Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1988.
- [16] J. Balas, S. J., and S. V. *Stress Analysis by Boundary Element Methods*. Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [17] K. Banerjee, S. Ahmad, and D. Manolis. „Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by boundary element method“. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14:933–949, 1986.
- [18] K. Banerjee, S. Ahmad, and D. Manolis. „Advanced elastodynamic analysis“. In *Boundary Element Methods in Mechanics - Vol 3*. Computational Mechanics Publications, 1987.
- [19] P. K. Banerjee. „Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape“. *International Journal of Mechanical Science*, pages 293–303, 1976.
- [20] P. K. Banerjee, S. Ahmad, and H. C. Wang. „A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1299–1309, 1988.
- [21] P. K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, Maidenhead, UK, 1987.
- [22] P. K. Banerjee and K. Prasanta. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, London, 1993.
- [23] P. K. Banerjee and R. B. Wilson. *Developments in Boundary Element Methods-5*. Elsevier Applied Science, London, New York, 1989.
- [24] K. J. Bathe. *Methode der finiten Elemente*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [25] R. Bausinger and G. Kuhn. *Die Boundary-Element-Methode*. expert verlag, Ehningen, 1987.
- [26] P. Becker. *Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden*. Dissertation, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1984.

- [27] D. E. Beskos and D. L. Karabalis. *Boundary Element Methods in Mechanics: Dynamic Soil-Structure Interaction*. Elsevier Science Publishers B V, BI, 1987.
- [28] R. A. Bialecki, R. Dallner, and G. Kuhn. „Minimum distance calculation between a source point and a boundary element“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(3):211–218, 1993.
- [29] D. Braess. „*Numerische Mathematik für Ingenieure*“. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 1991.
- [30] C. A. Brebbia. „*Topics in Boundary Element Research*“. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [31] C. A. Brebbia. „Applications of boundary elements in transient elastodynamics“. 1985.
- [32] C. A. Brebbia. *Boundary Elements 10*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [33] C. A. Brebbia. *Boundary Element Technology VI*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991.
- [34] C. A. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary Elements: an Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1988.
- [35] C. A. Brebbia, J. Dominguez, and F. Paris. *Boundary Elements 14*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.
- [36] C. A. Brebbia and G. Maier, editors. *Boundary Elements 7*, Proceedings of the 7th international conference, Italy, September 1985. Springer-Verlag.
- [37] C. A. Brebbia and D. Nardini. „Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure“. *Int. Jour. Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 2, 1983.
- [38] C. A. Brebbia, W. Wendland, and G. Kuhn. *Boundary Elements 9*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [39] R. Bronson. „*Theory and Problems of Matrix Operations*“. McGraw-Hill, New York, 1989.
- [40] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1977.
- [41] T. Burczynski and P. Fedelinski. „Boundary elements in shape design sensitivity analysis an optimal design of vibrating structures“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:195–202, 1992.
- [42] F. Caestecker, G. Dhondt, and H. Wynendaele. „Short communication: Concerning boundary elements – the Mindlin-formulas for stresses at internal points“. *Engineering Analysis*, 1(3):158–161, 1984.
- [43] T. G. Carne. „*Modal Testing and Analysis*“. The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1987.

- [44] M. Cerrolaza and E. Alarcon. „A bi-cubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary methods“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:987–999, 1989.
- [45] G. Chen. *Boundary Element Methods*. Academic Press, London, 1992.
- [46] S. H. Chen and Y. L. Liu. „Substructure analysis of complex structure with weak connections using matrix perturbation“. In *Proceeding of IMAC-III, Orlando*, 1985.
- [47] A. H. Cheng, O. Lafe, and S. Grilli. „Dual-reciprocity BEM based on global interpolation functions“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(4):303–311, 1994.
- [48] C. C. Chien, H. Rajiyah, and S. N. Atluri. „On the evaluation of hypersingular integrals arising in the boundary element method for linear elasticity“. *Computational Mechanics*, 8:57–70, 1991.
- [49] S. Chuhan, Zhang; Chongmin and O. A. Pekau. „Infinite boundary elements for dynamic problems of 3-D half space“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:447–462, 1991.
- [50] R. D. Ciskowski and C. A. Brebbia. *Boundary Element Methods in Acoustics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991.
- [51] H. B. Coda and W. S. Venturini. „Alternative boundary element formulation for elastodynamics“. In *Boundary Elements 12*, pages 518–534. Computational Mechanics Publications, 1990.
- [52] H. B. Coda and W. S. Venturini. „Three dimensional elastodynamic formulation with domain initial conditions“. In *Boundary Elements 17*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- [53] D. M. Cole, D. D. Kosloff, and J. B. Minster. „A numerical boundary integral equation method for elastodynamics“. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 68(5):1331–1357, 1978.
- [54] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [55] D. E. Cormack and D. Rosen. „The gauge conditions for singular integrals: a powerful concept for BEM analysis“. In *Boundary Elements 17*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- [56] M. Cristescu and G. Loubignac. „Gaussian quadrature formulas for functions with singularities in $1/r$ over triangles and quadrangles“. *Recent Advances in Boundary Element Methods*, 1978.
- [57] S. H. Crook and R. Smith. „Numerical residual calculation and error estimation for boundary element methods“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:159–164, 1992.

- [58] T. A. Cruse. „A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:341–355, 1968.
- [59] T. A. Cruse. „Numerical solutions in three dimensional elastostatics“. *International Journal of Solids and Structures*, 5:1259–1274, 1969.
- [60] T. A. Cruse. „An improved boundary–integral equation method for three dimensional elastic stress analysis“. *Computer and Structures*, 4:741–754, 1974.
- [61] T. A. Cruse and F. J. Rizzo. „A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:244–259, 1968.
- [62] T. A. Cruse and W. Suwito. „On the Somigliana stress identity in elasticity“. *Computational Mechanics*, 11(1):1–10, 1993.
- [63] K. Davey and S. Hinduja. „Analytical integration of linear three-dimensional triangular elements in BEM“. *Applied Mathematical Modelling*, 13:450–461, 1989.
- [64] G. de Mey. „A simplified integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(1340–1342), 1976.
- [65] G. de Mey. „Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by an integral equation“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(59–66), 1976.
- [66] F. A. de Paula and J. C. Telles. „A comparison between point collocation and Galerkin for stiffness matrices obtained by boundary elements“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3):123–128, 1989.
- [67] J. L. Dohner, R. Shoureshi, and R. J. Bernahrd. „Transient analysis of three–dimensional wave propagation using the boundary element method“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:621–634, 1987.
- [68] J. Dominguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.
- [69] J. Dominguez and R. Abascal. „On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity“. *Engineering Analysis*, 1(3):128–134, 1984.
- [70] J. Dominguez and T. Meise. „On the use of the BEM for wave propagation in infinite domains“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(3):132–138, 1991.
- [71] N. A. Dumont. „A procedure for the semi–analytical evaluation of generally singular integrals that occur in the three–dimensional boundary element analysis“. In *Boundary Elements 17*. Computational Mechanics Publications, 1995.

- [72] A. C. Eringen and E. S. Suhubi. „*Elastodynamics, Volume II, Linear Theory*“. Academic Press, New York, 1975.
- [73] D. J. Ewins. „*Modal testing: theory and practice*“. Research Studies Press, Taunton, Somerset, 1994.
- [74] C. Fiedler. *Über die Berechnung von Feldgrößen der Elastostatik und Elastodynamik mit der Randelementmethode*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr, Hamburg, 1993.
- [75] C. Fiedler and L. Gaul. „Limiting procedures and calculation of boundary stresses in three dimensional boundary element method“. *Advances in Computational Mechanics*, pages 311–322, 1994.
- [76] W. Flügge. *Viscoelasticity*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [77] P. A. Fotiu, H. Irshik, and F. Ziegler. „Modal analysis of elastic-plastic vibrations by integral equations“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14(1):81–97, 1994.
- [78] P. M. Frank. „*Empfindlichkeitsanalyse dynamischer Systeme*“. Oldenbourg Verlag, München, 1976.
- [79] C. Fritzen. „*Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems*“. ASME Publication Nr. 5-DET-91, 1985.
- [80] S. Garbow, B. „The QZ-Algorithm to solve the generalized eigenvalue problem for complex matrices“. *ACE Transactions on Mathematical Software*, 4(4):404–410, 1978.
- [81] L. Gaul and C. Fiedler. „Improved calculation of field variables in the domain based on BEM“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11(3):257–264, 1993.
- [82] L. Gaul, M. Schanz, and C. Fiedler. „Boundary element methods for viscoelastic continua in frequency- and time-domain“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 73(4–5):T68–T74, 1993.
- [83] N. Geers and R. Klees. „Out-of-core solver for large dense nonsymmetric linear systems“. *IABEM 93*, 1993.
- [84] M. Geis. *Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode*. Dissertation, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1989.
- [85] G. H. Golub and C. F. Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1991.
- [86] I. R. Gonsalves and D. J. Shippy. „Direct boundary integral equations for elastodynamics in 3-D half-spaces“. *Computational Mechanics*, 6:279–292, 1990.
- [87] P. Gravert. *Numerische Simulation extremer Scherwellen im Zeitbereich mit direkter Randelementmethode und Zeitschrittverfahren*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 7, Nr 132, Düsseldorf, 1987.

- [88] L. J. Gray. „Evaluation of hypersingular integrals in the boundary element method“. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3-5):165–174, 1991.
- [89] L. J. Gray and L. L. Manne. „Hypersingular integrals at a corner“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11(4):327–334, 1993.
- [90] H. Gründemann. „A general procedure transferring domain integrals onto boundary integrals in BEM“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(4):214–222, 1989.
- [91] M. Guiggiani. „Computing principal-value integrals in 3-D BEM for time-harmonic elastodynamics—a direct approach“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 8:141–149, 1992.
- [92] M. Guiggiani. „Hypersingular integral equations and superaccurate stress evaluation“. *Boundary Elements*, XV(1):413–428, 1993.
- [93] M. Guiggiani. „Hypersingular formulation for boundary stress evaluation“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1994.
- [94] M. Guiggiani and P. Casalini. „Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1711–1720, 1987.
- [95] M. Guiggiani and A. Gigante. „A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method“. *Transactions of the ASME*, 57:906–915, 1990.
- [96] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T. J. Rudolphi, and F. J. Rizzo. „A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations“. *Transactions of the ASME*, 59:604–614, 1992.
- [97] L. Hadjиков. „A joint numerical investigation of the gear stress“. *Engineering Analysis*, 4(3):155–159, 1987.
- [98] W. S. Hall. „Integration methods for singular boundary element integrals“. *Boundary Elements*, 10:219–236, 1988.
- [99] W. S. Hall. *The Boundary Element Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [100] W. S. Hall and T. T. Hibbs. „Subtraction, expansion and regularising transformation methods for singular kernel integrations in elastostatics“. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3-5):313–323, 1991.
- [101] P. C. Hammer, O. J. Marlowe, and A. H. Stroud. „Numerical integration over simplexes and cones“. 1956.
- [102] G. Hämmerlin and K. H. Hoffmann. *Numerische Mathematik*. Springer, Berlin, 1992.
- [103] F. Hartmann. „Computing the C-Matrix in non-smooth boundary points“. In *New Developments in Boundary Element Methods*. Butterworths, London, 1980.

- [104] F. Hartmann. „The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces“. *Journal of Elasticity*, 11(4), 1981.
- [105] F. Hartmann. „*Methode der Randelemente*“. Springer-Verlag, 1987.
- [106] K. Hayami. „Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method“. *Boundary Elements*, 10:237–264, 1992.
- [107] K. Hayami and C. A. Brebbia. „A new coordinate transformation method for singular and nearly singular integrals over general curved boundary elements“. *Boundary Elements*, 9:375–399, 1987.
- [108] K. Hayami and H. Matsumoto. „A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(2):143–154, 1994.
- [109] K. Hayami, H. Matsumoto, and K. Moroga. „Improvement and implementation of PART: Numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals“. *Boundary Elements*, 14:605–618, 1992.
- [110] Y. Hayashi and I. Takahashi. „An efficient time-domain soil-structure interaction analysis based on the dynamic stiffness of an unbounded soil“. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21:787–798, 1992.
- [111] J. O. Hildenbrand. *Hypersinguläre Integralgleichungen in der Randelementemethode – Berechnung der Integrale und Anwendung bei linearelastischen Aufgaben*. Dissertation, Technische Mechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1994.
- [112] S. Hirose. „Boundary integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(3):146–154, 1991.
- [113] T. V. Hromadka and J. A. Walker. „Solution of parabolic equations using an eigenvalue method for time advancement“. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 18:1–5, 1993.
- [114] O. Huber, A. Lang, and G. Kuhn. „Evaluation of the stress tensor in 3D elastostatics by direct solving of hypersingular integrals“. *Computational Mechanics*, 12:39–50, 1993.
- [115] Y. Huh and G. Willms. *Ermittlung des Schwingungsverhaltens starrer Gründungskörper mit der Randelementmethode*. SFB 151, Ruhr-Universität Bochum, 1984.
- [116] M. Jäger. *Lärmschutz bei bewegten Quellen: Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens*. Dissertation, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig, 1993.
- [117] P. Juhl. „A numerical study of the coefficient matrix of the boundary element method near characteristic frequencies“. *Journal of Sound and Vibration*, 175(1):39–50, 1994.
- [118] N. Kamiya and E. Andoh. „Robust boundary element scheme for Helmholtz eigenvalue equation“. In *Boundary Elements 13*, pages 839–850. Computational Mechanics Publications, 1991.

- [119] N. Kamiya and E. Andoh. „Eigenvalue analysis by boundary element method “. In *Boundary Elements 14*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [120] N. Kamiya and E. Andoh. „Relation between multiple reciprocity formulation and conventional formulation“. In *Boundary Elements 14*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [121] N. Kamiya and E. Andoh. „A note on multiple reciprocity integral formulation for the Helmholtz equation“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 9:9–13, 1993.
- [122] N. Kamiya and E. Andoh. „Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method“. *Journal of Sound and Vibration*, 160(2):279–287, 1993.
- [123] N. Kamiya and E. Andoh. „Standard eigenvalue analysis by boundary–element method“. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 9:489–495, 1993.
- [124] N. Kamiya and E. Andoh. „Eigenvalue analysis schemes and boundary formulations: recent developements “. In *Boundary Elements 17*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- [125] N. Kamiya and E. Andoh. „Eigenvalue determination by boundary-type schemes“. *Boundary Elements Communications*, 6(3):113–116, 1995.
- [126] N. Kamiya, E. Andoh, and K. Nogae. „Eigenvalue analysis by the boundary element method: new developments“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(3):151–162, 1993.
- [127] N. Kamiya, K. Nogae, and S. Q. Xu. „An adaptive boundary element for eigenvalue problems with the Helmholtz equation: simplified h–scheme“. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 19:143–147, 1994.
- [128] A. Kanarachos and C. Provatidis. „Performance of mass matrices for the bem dynamic analysis of wave propagation problems“. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 63:155–165, 1987.
- [129] J. H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, and S. N. Atluri. *Advances in Boundary Element Techniques*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [130] D. L. Karabalis and D. E. Beskos. „Dynamic response of 3–D rigid surface foundations by time domain boundary element method“. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12:73–93, 1984.
- [131] D. L. Karabalis and D. E. Beskos. „Dynamic response for 3-D embedded foundations by the boundary element method“. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 56:91–119, 1986.
- [132] D. L. Karabalis and D. C. Rizos. „An advanced direct time domain boundary element method for 3-d elastodynamic problems“. 1993.

- [133] A. J. Kassab and R. S. Nordlund. „Efficient implementation of the Fourier dual reciprocity boundary element method using two-dimensional fast Fourier transforms“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(2):93–102, 1993.
- [134] J. T. Katsikadelis and M. S. Nerantzaki. „The boundary element method applied to dynamic problems“. In *Boundary Elements 14*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [135] S. E. Kattis, D. Polyzos, and D. E. Beskos. „Dynamic response analysis of 3-D elastic systems by an improved frequency domain BEM“. In *Boundary Elements 16*, pages 521–528. Computational Mechanics Publications, 1994.
- [136] L. Kaufmann. „Some Thoughts on the QZ-Algorithm for solving the generalized eigenvalue problem“. *ACE Transactions on Mathematical Software*, 3(1):65–75, 1977.
- [137] K. Kawaguchi and N. Namiya. „An adaptive BEM by sample point error analysis“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:255–262, 1992.
- [138] D. J. Kidger and M. Smith. „Eigenvalues and eigenmodes of 8-node brick elements“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 8:193–205, 1992.
- [139] S. M. Kirkup and S. Amini. „Modal analysis of acoustically-loaded structures via integral equation methods“. *Computer and Structures*, 40(5):1279–1285, 1991.
- [140] S. M. Kirkup and S. Amini. „Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:321–330, 1993.
- [141] E. Kita and N. Kamiya. „Recent studies on adaptive boundary element methods“. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 19:21–32, 1994.
- [142] M. Kitahara. *Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and thin Plates*. Elsevier, Amsterdam, 1985.
- [143] M. Kitahara and K. Nakagawa. „Boundary integral equation methods in three dimensional elastodynamics“. *Boundary Elements*, 7:6 27–6 36, 1985.
- [144] M. Kitahara and K. Nakagawa. „Analytical treatment of free term for 3-dimensional elastodynamic BEM“. 1990.
- [145] S. Kobayashi. „Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics“. pages 775–784, 1983.
- [146] S. Kobayashi. „Elastodynamics“. In *Boundary Element Methods in Mechanics – Vol 3*. Computational Mechanics Publications, 1987.
- [147] S. Kobayashi and N. Nishimura. „Transient stress analysis of tunnels and caverns of arbitrary shape due to travelling waves“. *Development in BEM*, 2:177–210, 1982.
- [148] F. G. Kollmann. „*Maschinenakustik*“. Springer, Berlin, 1993.

- [149] W. Krings and H. Waller. „Zur Berechnung von Bauwerksschwingungen bei Kraftwerken“. *Bauingenieur*, 54:291–298, 1979.
- [150] G. Krishnasamy, F. J. Rizzo, and T. J. Rudolphi. „Continuity requirements for density functions in the boundary integral equation method“. *Computational Mechanics*, 9(4):267–284, 1992.
- [151] G. Krishnasamy, L. W. Schmerr, T. J. Rudolphi, and F. J. Rizzo. „Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering“. *Transactions of the ASME*, 57:401–414, 1990.
- [152] G. Kuhn and J. Hildenbrand. „Ein Vergleich der innerhalb der direkten REM wichtigsten numerischen Lösungsverfahren“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 70(6):T722–T725, 1990.
- [153] H. Kutt. „The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part-integration“. *Numer. Math.*, 24:205–210, 1975.
- [154] H. Lanzerath. *Anwendung der Methode der Randelemente mit Ansatzverfahren zur Bestimmung der singulären Randintegrale*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1992.
- [155] H. Lanzerath and A. Eckstein. „Statische 3D Spannungsberechnung mit BEM/FEM“. In *Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller*. Ruhr-Universität Bochum, 1995.
- [156] K. Latz. *Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund mittels frequenzunabhängiger Randelemente-Systemmatrizen*. Dissertation, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig, 1993.
- [157] K. Latz and H. Antes. „Ermittlung frequenzunabhängiger Randelement-Systemmatrizen für Schwingungsprobleme“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 73(4):T170–T173, 1993.
- [158] M. H. Lean and A. Wexler. „Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with curvature“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:211–228, 1985.
- [159] L. Lee and T. W. Wu. „An enhanced CHIEF method for steady-state elastodynamics“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(2):75–83, 1993.
- [160] T. Lehmann. *„Elemente der Mechanik: Band IV“*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1984.
- [161] H. Li and G. Han. „A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:2071–2098, 1985.
- [162] L. Li. *„Modalsynthese-Technik und ihre Anwendung bei nichtproportional gedämpften Schwingungssystemen“*. Fortschr.-Bericht VDI Reihe 11 Nr. 152, Düsseldorf, 1991.

- [163] Y. C. Li and T. D. Bui. „Coupling techniques in boundary-combined methods for solving elliptic problems with singularities“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(4):305–320, 1993.
- [164] Y. S. Li and T. Obata. „Some improvements of accuracy and efficiency in three dimensional direct boundary element method“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1451–1464, 1992.
- [165] H. Liao and Z. Xu. „A method for direct evaluation of singular integral in direct boundary element method“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1473–1485, 1992.
- [166] S. T. Lie. „Evaluation of singular boundary element kernels using polar coordinates system over a flat quadratic triangle in elastostatics“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10:173–177, 1992.
- [167] Y. Liu and T. J. Rudolphi. „Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(6):301–311, 1991.
- [168] W. Looser. „*Modalanalyse und Modifikationsrechnung*“. Dissertation, ETH, Zürich, 1983.
- [169] L. Lun, G. Beer, and J. L. Meek. „Efficient evaluation of integrals of order $1/r$ $1/r^2$ $1/r^3$ using Gauss quadrature“. *Engineering Analysis*, 2(3):118–123, 1985.
- [170] E. Lutz. „Exact Gaussian quadrature methods for near-singular integrals in the boundary element method“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:233–245, 1992.
- [171] E. Lutz, L. J. Gray, and A. R. Ingraffea. „An overview on integration methods for hypersingular boundary integrals“. In *Boundary Elements 13*. Computational Mechanics Publications, 1991.
- [172] J. Mackerle. „A guide to the literature on finite and boundary element techniques and software“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3), 1989.
- [173] J. Mackerle. „An information retrieval system for finite element and boundary element literature and software“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11:177–187, 1993.
- [174] G. D. Manolis. „A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:73–91, 1983.
- [175] G. D. Manolis and P. K. Banerjee. „Conforming versus non-conforming boundary elements in three-dimensional elastostatics“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:1885–1904, 1986.
- [176] G. D. Manolis and D. E. Beskos. „Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:573–599, 1981.

- [177] W. J. Mansur. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the Boundary Element Method*. Dissertation, Faculty of engineering and applied science civil engineering, Southampton, 1983.
- [178] W. J. Mansur, F. C. Araujo, and J. Malaghini. „Solution of BEM systems of equations via iterative techniques“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1823–1841, 1992.
- [179] V. Mantic. „A new formula for the c-matrix in the Somigliana identity“. *Journal of Elasticity*, 33:191–201, 1993.
- [180] V. Mantic and F. Paris. „On the Cauchy principal value of the surface integral in the boundary integral equation of 3D elasticity“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(4):289–292, 1993.
- [181] R. S. Martin and J. H. Wilkinson. „Similarity reduction of a general matrix to Hessenberg form“. *Numer. Math.*, 12:349–368, 1968.
- [182] T. Meise. *Randelementverfahren zur Berechnung der Ausbreitung skalarer Wellen im 3D-Zeit- und Frequenzbereich*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [183] Y. Mi and M. H. Aliabadi. „Semi-analytical integration method for 3D near-hypersingular integrals“. In *Boundary Elements 16*, pages 423–430. Computational Mechanics Publications, 1994.
- [184] C. B. Moler and G. W. Stewart. „An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems“. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(2):241–256, 1971.
- [185] R. K. Nakaguma. *Three Dimensional Elastostatics using the Boundary Element Method*. PhD Thesis, University of Southampton, 1979.
- [186] D. Nardini. „A new approach to free vibration analysis using boundary elements“. *Applied Mathematical Modelling*, 7:157–162, 1983.
- [187] D. Nardini and C. A. Brebbia. „A new approach to free vibration analysis using boundary elements“. In *Boundary Elements IV*. Springer-Verlag, 1982.
- [188] D. Nardini and C. A. Brebbia. „Transient Dynamic Analysis by the boundary element method“. In *Boundary Elements V*. Springer-Verlag, 1983.
- [189] D. Nardini and C. A. Brebbia. „Applications of an alternative boundary element procedure in elastodynamics“. 1985.
- [190] D. Nardini and C. A. Brebbia. „Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis“. In *Topics in Boundary Element Research*. Springer-Verlag, 1985.
- [191] D. Nardini and C. A. Brebbia. „The solution of parabolic and hyperbolic problems using an alternative boundary element formulation“. In *Boundary Elements VII*. Springer-Verlag, 1985.

- [192] D. Nardini and C. A. Brebbia. „Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition“. In *Boundary Elements VIII*. Springer-Verlag, 1986.
- [193] H. G. Natke. „Einführung in die Theorie der Zeitreihen- und Modalanalyse: Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme“. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1983.
- [194] H. G. Natke. „Baudynamik“. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [195] A. C. Neves and C. A. Brebbia. „The multiple reciprocity method applied in elasticity“. In *Boundary Elements 12*, pages 313–326. Computational Mechanics Publications, 1990.
- [196] A. C. Neves and C. A. Brebbia. „The multiple reciprocity method applied to thermal stress problems“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(3):443–455, 1992.
- [197] A. J. Nowak. „Convergence studies of the MRM“. In *Boundary Element Technology VIII*, pages 369–382. Computational Mechanics Publications, 1993.
- [198] A. J. Nowak and A. C. Neves. *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1994.
- [199] J. T. Oden. *Applied Functional Analysis*. Prentice-Hall, INC, New Jersey, 1979.
- [200] M. Ottenstreuer. *Ein Beitrag zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Baugrund unter Verwendung des Verfahrens der Randelemente*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [201] S. M. Pandit. „Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space“. John Wiley, Sons, 1991.
- [202] B. J. Park. „Optimale Auslegung von Gummidrehschwingungstilgern/-dämpfern für Antriebsstränge unter besonderer Berücksichtigung ihres Temperaturganges“. Dissertation, Berlin, 1986.
- [203] P. W. Partridge. „New developments in the dual reciprocity method“. In *Boundary Elements 17*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- [204] P. W. Partridge and C. A. Brebbia. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1992.
- [205] O. J. Pereira and P. Parreira. „Direct evaluation of Cauchy-principal-value integrals in boundary elements for infinite and semi-infinite three-dimensional domains“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(4):313–320, 1994.
- [206] G. Peters and J. H. Wilkinson. „ $Ax = \lambda Bx$ and the generalized eigenvalue problem“. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7(4):479–492, 1970.
- [207] G. Peters and J. H. Wilkinson. „Eigenvectors of real and complex matrices by LR and QR triangularizations“. *Numer. Math.*, 16:181–204, 1970.

- [208] G. Prasad and J. H. Kane. „Boundary formulations for sensitivities of three –dimensional stress invariants“. *Computer and Structures*, 43(6):1165–1174, 1992.
- [209] G. Prasad and J. H. Kane. „Sparse blocked ordering and zone condensation in boundary element analysis“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:145–157, 1992.
- [210] S. T. Raveendra and P. K. Banerjee. „BEM analysis of free vibration problems using polynomial particular integrals“. *International Journal of Solids and Structures*, 29(16):2023–2037, 1992.
- [211] S. T. Raveendra and P. K. Banerjee. „Eigenvalue analysis by boundary element method“. In *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods VII*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [212] S. T. Raveendra and P. K. Banerjee. „Polynomial particular solutions based boundary element analysis of acoustic eigenfrequency problems“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(9):1787–1802, 1992.
- [213] J. J. Rego Silva, L. C. Wrobel, and J. C. F. Telles. „A new family of continuous/discontinuous three-dimensional boundary elements with application to acoustic waves propagation“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(10):1661–1679, 1993.
- [214] F. J. Rizzo. „An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics“. *Quart. Appl. Math.*, 25, 1967.
- [215] F. J. Rizzo, D. J. Shippy, and M. Rezayat. „A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:115–129, 1985.
- [216] D. Rosen and D. E. Cormack. „Analysis of singular and near-singular integrals by the continuation approach“. *Boundary Element Technology IX*, 9:309–316, 1994.
- [217] T. Rudolphi, R. Agarwal, and A. Mitra. „Coupling boundary integral equations with non-singular functional equations by exterior collocation“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(5):245–251, 1991.
- [218] T. J. Rudolphi. „The use of simple solutions in the regularization of hypersingular boundary integral equations“. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3–5):269–278, 1991.
- [219] T. J. Rudolphi and S. Youn. „Computational alternatives for hypersingular boundary integral equations“. 1993.
- [220] M. Schanz, L. Gaul, and H. Antes. „Numerical damping and instability of a 3–D BEM time–stepping algorithm“. *IABEM*, 1993.
- [221] Schatz, Thomee, and Wendland. *Boundary Element Methods for Elliptic Problems*. Birkhäuser–Verlag, ISBN:376432211X, 1990.

- [222] H. A. Schenk. „Improved integral formulation for acoustic radiation problems“. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44(1):41–58, 1968.
- [223] E. Schnack. „Macro-Elements for 2D- and 3D-elasticity with BEM“. 1990.
- [224] P. S. Shaw. „The sum of H_{ik} in BEM“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10:359–361, 1992.
- [225] V. Sladek and J. Sladek. „Improved computation of stresses using the boundary element method“. *Applied Mathematical Modelling*, 10:249–255, 1985.
- [226] V. Sladek and J. Sladek. „Elimination of the boundary layer effect in BEM computation of stresses“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 7:539–550, 1991.
- [227] V. Sladek and J. Sladek. „Time marching analysis of boundary integral equations in two-dimensional elastodynamics“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(6):285–293, 1991.
- [228] V. Sladek and J. Sladek. „On a new BEM formulation for 3D problems in linear elasticity“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:273–275, 1992.
- [229] V. Sladek and J. Sladek. „Time marching analysis of boundary integral equations in two-dimensional elastodynamics“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:21–29, 1992.
- [230] V. Sladek, J. Sladek, and M. Tanaka. „Eigenvalue analysis of three-dimensional Helmholtz equation“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11(2):165–170, 1993.
- [231] B. Steinfeld. *Numerische Berechnung dreidimensionaler Kontaktprobleme Bauwerk–Boden mittels zeitabhängiger Randintegralgleichungen der Elastodynamik*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1993.
- [232] M. Straßberger. „Strukturregelung mit Piezo-Aktoren“. In *Computational Structural Dynamics*. Graduiertenkolleg, Ruhr-Universität Bochum, 1996.
- [233] J. S. Strenkowski and R. D. Ciskowski. „Use of the fast Fourier transform to improve direct numerical integration schemes for transient structural response“. *Computer and Structures*, 33(1):149–154, 1989.
- [234] A. Stroud. „Integration formulas and orthogonal polynomials“. *SIAM J. Numer. Anal.*, 4:381–389, 1967.
- [235] A. Stroud. „Integration formulas and orthogonal polynomials II“. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7(2):271–276, 1970.
- [236] A. Stroud and D. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall, 1966.
- [237] H. Takemiya and B. Steinfeld. „Transient 3D Lamb's solution by classical approach and direct boundary element method“. *Structural Dynamics–EURODYN'93*, pages 307–314, 1993.

- [238] M. Tanaka. „Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method“. *Engineering Analysis*, 5(4):182–188, 1988.
- [239] W. Tang. *Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM : a generalized approach*. Springer, Berlin, 1988.
- [240] J. C. Telles. „A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:959–973, 1987.
- [241] J. C. Telles and R. F. Oliveira. „Third degree polynomial transformation for boundary element integrals: further improvements“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(2):135–141, 1994.
- [242] P. S. Theocaris. „Numerical solution of singular integral equation methods“. pages 733–771, 1981.
- [243] P. S. Theocaris, N. Ioakidimis, and A. Chrysakis. „On the application of numerical integration rules to the solution of some singular integral equations“. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 24:1–11, 1980.
- [244] P. S. Theocaris, N. Ioakidimis, and G. Kazantzakis. „On the numerical evaluation of two-dimensional principal value integrals“. pages 629–634, 1980.
- [245] P. S. Theocaris and G. Kazantzakis. „On the numerical evaluation of two- and three-dimensional Cauchy principal-value integrals“. *Acta Mechanica*, 39:105–115, 1981.
- [246] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. „*Theory of Elasticity*“. McGraw-Hill Company, New York, 1934.
- [247] S. P. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver. „*Vibration Problems in Engineering*“. John Wiley, New York, 1974.
- [248] W. Törnig and P. Spellucci. *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Springer, Berlin, 1988.
- [249] J. Trevelyan. *Boundary Elements for Engineers*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1994.
- [250] T. Triantafyllidis. „3-D time domain BEM using half-space Green’s function“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(3):115–124, 1991.
- [251] C. Tsai. „Analyses of three-dimensional dam-reservoir interactions based on BEM with particular integrals and semi-analytical solution“. *Computer and Structures*, 43(5):863–872, 1992.
- [252] C. Tsai, G. C. Lee, and R. L. Ketter. „Solution of the dam-reservoir interaction problem using a combination of FEM, BEM with particular integrals, modal analysis and substructuring“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:219–232, 1992.

- [253] C. S. Tsai, G. C. Lee, and C. S. Yeh. „Time-domain analyses of three-dimensional dam-reservoir interactions by BEM and semi-analytical method“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10:107–118, 1992.
- [254] G. Tsamasphyros, P. S. Theocaris, and C. A. Stassinakis. „A numerical solution of singular integral equations without using special collocation points“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:421–430, 1983.
- [255] K. Türke and E. Schnack. „Three-Dimensional Coupling technique of FEM and BEM with nonconforming elements“. *IABEM*, 1993.
- [256] M. Virow. *Berechnung akustischer Feldprobleme mit der erweiterten Helmholtz - Gleichung*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig, 1993.
- [257] O. von Estorff. *Zur Berechnung der dynamischen Wechselwirkung zwischen Bauwerken und ihrer Umgebung mittels zeitabhängiger Randintegralgleichungen*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [258] T. von Petersdorff. *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder- Singularitäten und Approximation mit Randelementmethoden*. Dissertation, Fachbereich Mathematik, TH Darmstadt, 1989.
- [259] H. Waller and W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1975.
- [260] H. Waller and R. Schmidt. *Schwingungslehre für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989.
- [261] A. I. Wanderlingh. „Technical note: comparison of boundary element and finite element methods for linear stress analysis-technical program results“. *Engineering Analysis*, 3(3):177–180, 1986.
- [262] J. Watson and J. Lachat. „Effective numerical treatment of boundary integral equations“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 1976.
- [263] L. T. Wheeler and E. Sternberg. „Some Theorems in Classical Elastodynamics“. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31:51–90, 1968.
- [264] E. L. Wilson and J. Penzien. „Evaluation of orthogonal damping matrices“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4(12):5–10, 1972.
- [265] D. T. Wilton. „Improved integral formulation for acoustic radiation problems“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 1993.
- [266] T. W. Wu and M. Stern. „Boundary integral equations in three-dimensional elastostatics using the Boussinesq-Cerruti fundamental solution“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(2):94–102, 1991.

- [267] G. Yan and F. B. Lin. „Treatment of corner node problems and its singularity“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(1):75–81, 1994.
- [268] W. H. Yang. „A method for eigenvalues of sparse λ -Matrices“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:943–948, 1983.
- [269] D.-H. Yu. „The numerical computation of hypersingular integrals and its application in BEM“. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 18:103–109, 1993.
- [270] J. D. Zhang. „A boundary integral equation approach for the calculation of gradients and higher order derivatives in solid mechanics problems“. *Computational Mechanics*, 10:1–21, 1992.
- [271] H. Zhao and R. A. Adey. „A numerical study on the elements of shape optimum design“. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:339–349, 1992.
- [272] Z. Zhao. *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization using the Boundary Element Method*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [273] Z. Zhao. „Stress and stress gradient evaluation—a BEM approach“. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 19:45–52, 1994.
- [274] Zhong. „A new way to measure the accuracy of the BEM solution“. *Communication in Applied Numerical Methods*, 8:301–309, 1992.
- [275] O. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag, München, 1984.
- [276] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil I*. Springer, Berlin, 1984.
- [277] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil II*. Springer, Berlin, 1984.



Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazitu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer struktureller Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schießle:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 103**