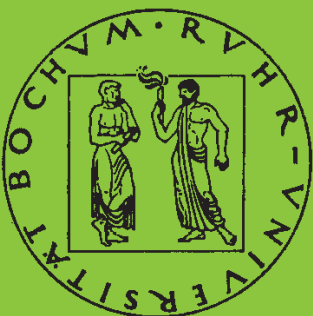


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

O. T. Bruhns

Große plastische Formänderungen

Heft Nr. 114



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

O.T. BRUHNS

Große plastische Formänderungen
Bad Honnef 1997

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 114
März 1998

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

© Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns
Lehrstuhl für Technische Mechanik
Ruhr-Universität Bochum
44780 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werkes oder auch von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Der Untersuchung und Beschreibung des inelastischen Verhaltens von Werkstoffen und Strukturen kommt innerhalb der Mechanik eine ständig wachsende theoretische und praktische Bedeutung zu.

Zum Zwecke des gemeinsamen Austausches der bisher an den verschiedenen Einrichtungen gewonnenen Erkenntnisse sowie insbesondere zur Information und Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses fand deshalb in der Woche vom 15. – 19. September 1997 im Physikzentrum Bad Honnef ein Seminar "Große plastische Formänderungen" statt. Nach entsprechenden Veranstaltungen in den Jahren 1977, 1979, 1982, 1985, 1988, 1991 und 1994 war dies bereits das achte Seminar zu diesem Thema.

Wie in den Vorjahren wurden inhaltlich die folgenden Schwerpunkte gesetzt:

- physikalische und kontinuumsmechanische Grundlagen inelastischen Materialverhaltens,
- die Berechnung großer plastischer Formänderungen mit Hilfe analytischer sowie numerischer Methoden,
- experimentelle Grundlagenuntersuchungen und
- technische Anwendungen.

Das vorliegende Heft enthält die Kurzfassungen der auf diesem Seminar gehaltenen Vorträge. Es soll damit jedem Teilnehmer die Gelegenheit geben, sich nochmals in aller Ruhe mit dem Vorgetragenen auseinanderzusetzen. Die vorgenommene Reihung der Beiträge gibt dabei den zeitlichen Ablauf des Seminars wieder.

Das Gelingen einer Tagung wird neben dem wissenschaftlichen Programm, zu dem die Teilnehmer selbst durch Vortrag und intensive Diskussion beitragen, ganz entscheidend auch durch die Organisation der Veranstaltung bestimmt. Es ist mir deshalb ein Anliegen, meinem Mitarbeiter, dem Herrn Dr.-Ing. P. Schießle, recht herzlich für seine Mühe im Zusammenhang mit der Vorbereitung und Durchführung des Seminars zu danken.

Bochum, März 1998

Otto T. Bruhns

Verzeichnis der Teilnehmer

Altenbach, Holm	Universität Halle-Wittenberg
Baaser, H.	TH Darmstadt
Becker, Hans-Jörg	Ruhr-Universität Bochum
Benedix, U.	TU Chemnitz-Zwickau
Bertram, Albrecht	Universität Magdeburg
Berger, S.	Universität Dortmund
Besdo, Dieter	Universität Hannover
Böhlke, Th.	Universität Magdeburg
Brämer, Klaus	TU Chemnitz-Zwickau
Brünig, Michael	Universität Dortmund
Bruhns, Otto T.	Ruhr-Universität Bochum
Brumund, J.	TU Dresden
Diebels, Stefan	Universität Stuttgart
Duderstadt, F.	Universität Magdeburg
Eberlein, R.	TH Darmstadt
Ehlers, Wolfgang	Universität Stuttgart
Elsen, St.	MPI Düsseldorf
Fehlhaber, T.	Universität Rostock
Fethke, K.	Universität Rostock
Fischer, Franz Dieter	Montanuniversität Leoben
Görke, K.	TU Chemnitz-Zwickau
Helm, Dirk	GH Kassel-Universität
Jansohn, W.	TH Darmstadt
John, Ralf	TU Dresden
Kirchner	TH Darmstadt
Kraska, Martin	TU Berlin
Kreißig, Reiner	TU Chemnitz-Zwickau
Kullig, E.	TU Dresden
Lambrecht, Matthias	Universität Stuttgart
Miehe, Christian	Universität Stuttgart
Mischke, R.	Universität Rostock
Naumenko, Konstantin	Universität Halle-Wittenberg

Nerzak, Thomas	Ruhr-Universität Bochum
Pawelski, Hartmut	Universität Hannover
Pawelski, Oskar	MPI Düsseldorf
Pollak, Burkhard	TH Darmstadt
Pyttel, Th.	TU Dresden
Rasp, W.	MPI Düsseldorf
Reese, Stefanie	TH Darmstadt
Röhr, Udo	Universität Rostock
Rost, Alexander	TH Darmstadt
Sansour, Carlo	TH Darmstadt
Schreiber, Lothar	GH Kassel-Universität
Schröder, Jörg	Universität Stuttgart
Sichov, Andrei	Universität Halle-Wittenberg
Svendsen, Bob	BAM - Berlin
Tsakmakis, Charalambos,	TH Darmstadt
Türke, Karsten	Universität Karlsruhe (T.H.)
Volk, W.	Universität Stuttgart
Wellerdick, N.	Universität Hannover
Weng, Stephan	Ruhr-Universität Bochum
Wittich, H.	TU Braunschweig
Zorn, Ch.	TU Braunschweig

Verzeichnis der Vortragsthemen

A. Bertram	
Unterschiedliche Zugänge zur finiten Plastizität	7
O. Häusler, Ch. Tsakmakis	
Thermodynamical Consistent Formulation of Finite Deformation Anisotropic Plasticity Laws	11
S. Reese	
Multiplikative Thermo-Viskoplastizität – eine Analogie zur Elastoplastizität	15
H. Pawelski	
Plastifizierung von Metallen durch Elastomere	19
W. Ehlers, S. Diebels, W. Volk	
Die Bedeutung der Kompatibilitätsbedingung für mikropolare, elastisch-plastische Reibungsmaterialien	23
M. Brünig	
Numerische Simulation elastisch-plastischer Deformationen kristalliner Festkörper	27
H. Wittich, J. Thesing, A. Ziegenbein	
Simulation kristallplastischer Fließvorgänge unter Berücksichtigung von großen Deformationen	31
F. Duderstadt	
Mikro-Makro-Untersuchungen an Polykristallen	35
M. Kraska	
Randbedingungen und Anfangsorientierungen für Polykristallsimulationen mit Finiten Elementen	39
N. Wellerdick-Wojtasik	
Generierung und Beurteilung von diskreten isotropen Orientierungsverteilungen	43
H.-J. Becker	
Simulation des Verformungsverhaltens polykristallinen Eises	47
R. Eberlein	
Zur Berechnung plastischer Formänderungen bei Schalenverschnidungen	51

E. Kullig, J. Brummund, G. Landgraf, V. Ulbricht Berechnung von Blechumformprozessen auf der Grundlage der Abbildung von Flächen	55
R. John, T. Pyttel, V. Ulbricht Nichtlineare Schalentheorie mit plastischer Anisotropie	59
A. Sichov Eine verbesserte Schalentheorie und ihre Anwendung auf Probleme der Kriechmechanik	63
L. Schreiber Anpassung eines Schädigungsmodells an Wöhlerkurven im elastischen Bereich	67
H. Baaser Zur Beschreibung des duktilen Rißfortschritts in einem Kreiszyylinderrohr	71
K. Naumenko Analyse der Spannungsumlagerung in dünnwandigen Bauteilen infolge von Kriech- und Schädigungsvorgängen	75
K. Türke Homogenisierung in der Schädigungsmechanik mit Makroelementen	79
Th. Nerzak Numerische Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder	83
M. Lambrecht, Ch. Miehe On the Localization Analysis of Frictional Materials	87
C. Zorn, F. Thielecke Einfluß von Modellskalierung und Versuchsplanung auf die Identifizier- barkeit von Werkstoffparametern	95
U. Benedix Identifikation von Materialparametern mit semianalytischer Sensiti- vitätsanalyse	99
K. Brämer Zum Eindringversuch mit kugelförmigen Indenter	103
D. Helm, P. Haupt Experimentelle Ermittlung des Verhältnisses von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit in Festkörpern	107

W. Jansohn, Ch. Tsakmakis Formulierung und Integration von Materialgleichungen der Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität bei großen Deformationen	111
B. Svendsen A thermodynamic formulation of elastoplasticity with kinematic hardening at large deformation	115
Ch. Miehe, J. Schröder, J. Schotte Computational Micro-Macro-Transition in Thermoplastic Analysis of Polycrystalline Materials	119
Ch. Miehe, S. Schley Large-Strain Thermoplastic Analysis of Shell-Like Structures	127
S. Weng Adaptive Bone Remodelling	137
B. Pollak Ein Bogenlängenverfahren für Stabilitätsprobleme bei ratenabhängiger Werkstoffbeschreibung	141
S. Diebels, P. Ellsiepen, W. Ehlers Zeitintegration viskoplastischer Zweiphasenmodelle	145

Unterschiedliche Zugänge zur finiten Plastizität

Albrecht Bertram

Einleitung

Ziel dieses Beitrages ist es, verschiedene klassische Ansätze der finiten Plastizität in einen gemeinsamen Rahmen zu stellen und darin auf ihren Gültigkeitsbereich zu untersuchen und zu vergleichen. Dazu wird eine Rahmenordnung aufgestellt für Materialmodelle, die die charakteristischen Merkmale elastoplastischen Materialverhaltens aufweisen (s. [1, 2, 7, 11]). Als solche seien benannt: (1) die Existenz von elastischen Bereichen, und (2) die Gleichheit des elastischen Verhaltens innerhalb dieser Bereiche. Im Sinne der *Rationalen Mechanik* soll diese Rahmenordnung auf einer Systematik beruhen, in der die Deformationsprozesse als unabhängige Variablen, die Spannungs-Antworten hingegen als abhängige gewählt werden. Dabei wird eine materielle Darstellung der Variablen aus Invarianzgründen bevorzugt.

Materialien mit isomorphen elastischen Bereichen

Der rechte Cauchy-Green-Tensor C berechnet sich aus dem Deformationsgradienten F gemäß $C = F^T F$. Als leistungskonjugierten materiellen Spannungstensor S benutzen wir die Zurückziehung des Cauchyschen Spannungstensors T auf die Bezugsplatzierung $S = F^{-1} T F^{-T}$, der symmetrisch und invariant gegen Euklidische Transformationen (Beobachterwechsel, überlagerte Starrkörperbewegungen) ist. Es ist ein seit langem bekanntes Ergebnis der *Rationalen Mechanik*, daß sich für alle einfachen Materialien die momentanen materiellen Spannungen als Funktional des C -Prozesses darstellen lassen bei identischer Erfüllung des Prinzips der materiellen Objektivität. Eine Formulierung in F selbst würde dies nicht leisten und ist deshalb ungünstig.

Annahme 1: Das Material befindet sich zu jedem Zeitpunkt eines beliebigen Deformationsprozesses in einem *elastischen Bereich* $\{\mathcal{E}_p, h_p\}$, wobei

- \mathcal{E}_p eine abgeschlossene, wegzusammenhängende Untermenge des Dehnungsraums der symmetrischen positiv-definiten Tensoren ist, die die momentane Konfiguration enthält:
 $C(t) \in \mathcal{E}_p$;

- h_p ein elastisches Gesetz definiert auf \mathcal{E}_p ist, das die momentanen Spannungen liefert:

$$S(t) = h_p[C(t)] .$$

Dabei soll sich das Material auch für alle Prozeßfortsetzungen, die in \mathcal{E}_p bleiben, elastisch verhalten, d.h. der elastische Bereich bleibt solange konstant und die Spannungen sind weiterhin durch h_p gegeben. Verläßt dagegen der C -Prozeß den ehemaligen elastischen Bereich durch Überschreiten der Grenzen von \mathcal{E}_p , so wechselt es zwangsläufig in einen anderen. Wir bezeichnen derartige Zustände als *Fließzustände*, die *plastische* Prozeßabschnitte kennzeichnen.

Bei vielen metallischen Werkstoffen stellt man experimentell fest, daß sich die elastischen Konstanten im elastischen Bereich selbst nach großen plastischen Deformationen nur vernachlässigbar wenig geändert haben. Wir wollen dies präzise fassen in der

Annahme 2: Sind $\{\mathcal{E}_0, h_0\}$ und $\{\mathcal{E}_p, h_p\}$ zwei elastische Bereiche, so soll es eine invertierbare lineare Abbildung \mathbf{P} geben, so daß die Beziehung
 (I)
$$h_p(\mathbf{C}) = \mathbf{P} h_0(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T$$

 für alle \mathbf{C} aus den Definitionsbereichen gilt.

Diese Gleichung heißt (*elastische*) *Isomorphie-Bedingung*, während wir \mathbf{P} *plastische Transformation* nennen wollen (s. [12]). Letztere ist die zentrale plastische (innere) Variable in unserer Theorie. Wir können nämlich als Konsequenz aus Annahme 2 einen beliebigen elastischen Bereich, also beispielsweise auch den anfänglichen, auswählen, und mittels (I) alle anderen auf diesen zurücktransformieren. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß die Zeitabhängigkeit von h_p während der Fließzustände auf die Zeitabhängigkeit von \mathbf{P} übergeht, was natürlich viel praktischer ist. Für \mathbf{P} , das während elastischer Prozeßabschnitte konstant und während plastischer veränderlich ist, wird eine Entwicklungsfunktion p benötigt, für die

$$\mathbf{P}^* \mathbf{P}^I = p(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^*)$$

angesetzt wird. p kann geschwindigkeitsabhängig oder -unabhängig sein. Mit den Materialgleichungen h_0 und p ist unser Modell vollständig determiniert.

Als Beispiel wählen wir die **Kristallplastizität**. Dort ist die Fließgrenze dadurch gekennzeichnet, daß die Schmid-Spannung eines Gleitsystems $\{\mathbf{d}_\alpha, \mathbf{n}^\alpha\}$ darstellbar als

$$\tau_s^\alpha = |sp(\mathbf{S}\mathbf{C} \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha)|$$

einen kritischen Wert τ_k^α erreicht. Für die plastische Transformation setzt man die Scherung in den aktive Gleitsystemen mit

$$\mathbf{P}^* \mathbf{P}^I = \sum_{\alpha} -\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha$$

an, worin $\dot{\gamma}^\alpha$ die Scherrate des α -ten Gleitsystems ist, die durch ein einachsiges Gesetz mit dem Prozeß der Schmid-Spannung in demselben Gleitsystem verknüpft ist. Für weitere Details s. [3, 4, 7].

Die multiplikative Zerlegung

Wir wollen im weiteren dieses Rahmen-Modell für plastische Materialien mit (isomorphen) elastischen Bereichen benutzen, um den Übergang zu einigen klassischen Ansätzen zu finden und diese einzuordnen. Am weitesten verbreitet ist zweifellos das Konzept der *entspannten Zwischenplatzierung* im Zusammenhang mit einer *multiplikativen Zerlegung*, für das meistens LEE [8] zitiert wird, obwohl es bereits früher zu finden ist. Grundidee ist dabei, den defor-

mierten Körper in eine Plazierung zu bringen, in der er lastfrei ist. Da dies i. allg. nicht global gelingt, fordert man dies wenigstens für den betrachteten Punkt und seine infinitesimale Umgebung. Es ist sofort klar, daß diese Charakterisierung nicht eindeutig ist, da jede überlagerte Starrkörperbewegung wieder in eine lastfreie Plazierung führt.

Wählt man die Bezugsplazierung so, daß das elastische Referenzgesetz in ihr spannungsfrei ist, also $h_0(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ ist, dann gilt für den momentanen elastischen Bereich auch $h_p(\mathbf{P}^T \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{0}$. Ist \mathbf{Q} eine beliebige Rotation, so definiert $\mathbf{F}_p := \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}$ eine solche entspannte Zwischenplazierung, und mit $\mathbf{F}_e := \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}$ folgt die multiplikative Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$. Berechnet man für den momentanen elastischen Bereich die Cauchyschen Spannungen, so erhält man

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} h_p(\mathbf{C}) \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P} h_0(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T \mathbf{F}^T = \mathbf{F}_e \mathbf{Q} h_0(\mathbf{Q}^T \mathbf{C}_e \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_e$$

mit $\mathbf{C}_e := \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$. Für die spezielle Wahl $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$ wird hieraus $\mathbf{T} = \mathbf{F}_e h_0(\mathbf{C}_e) \mathbf{F}_e$, was der Gl. 18 von LEE entspricht. Da jedoch \mathbf{P} i. allg. nicht-symmetrisch ist, sind weder \mathbf{F}_p noch \mathbf{F}_e symmetrisch. Lediglich für elastisch-isotrope Materialien ist h_0 eine isotrope Tensorfunktion und \mathbf{Q} kann so gewählt werden, daß \mathbf{F}_p immer symmetrisch ist. Man sieht aber, daß man bei anisotropen Materialien grundsätzlich nicht mit einer symmetrischen inneren Variablen auskommt. Üblicherweise wird dann der Geschwindigkeitsgradient zerlegt gemäß

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_p$$

mit $\mathbf{L}_e := \mathbf{F}_e^* \mathbf{F}_e^{-1}$. Dies führt mit den gemachten Identifikationen auf

$$\mathbf{L}_p := \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p^* \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p^* \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F} \mathbf{P}^* \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}^{-1},$$

was ebenfalls unsymmetrisch sein sollte und den sog. *plastic spin* als antimetrischen Anteil enthält.

Wählt man wieder $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$ und berechnet den 2. Piola-Kirchhoff-Tensor bezüglich der Zwischenplazierung, so erhält man, plastische Inkompressibilität vorausgesetzt,

$$\mathbf{T}^{2PK}_Z = \det(\mathbf{F}_e) \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_e^{-T} = \rho_0 / \rho h_0(\mathbf{C}_e),$$

was dem Vorschlag einer isoklinen Zwischenplazierung von MANDEL [9, 10] entspricht. Man sieht, daß bei dieser speziellen Wahl dieses Spannungsmaß nicht mehr explizit von einer plastischen Variablen abhängt. MANDEL setzt dann eine Entwicklungsgleichung für $\mathbf{F}_p^* \mathbf{F}_p^{-1}$ an, was auch bei anisotropen Materialien völlig ausreichend ist.

Die additive Zerlegung

Wir definieren

$$\mathbb{E}^p := \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{I})$$

und

\mathbb{E}^e über die additive Zerlegung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E}^G = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$$

nach GREEN/NAGHDI [5, 6]. Berechnet man damit den 2. Piola-Kirchhoff-Tensor bezüglich der Bezugsplatzierung

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{2PK} &= \rho_0 / \rho \, h_p(\mathbf{C}) = \rho_0 / \rho \, \mathbf{P} \, h_0(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \, \mathbf{P}^T \\ &= \rho_0 / \rho \, \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{Q} \, h_0[\mathbf{Q}^T \mathbf{F}_p^{-T} (2\mathbf{E}^e + 2\mathbf{E}^p + \mathbf{I}) \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{Q}] \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_p^{-T} \\ &=: g(\mathbf{E}^e, \mathbf{F}^p), \end{aligned}$$

so erkennt man wiederum, daß eine symmetrische plastische Variable wie \mathbf{E}^p nicht ausreichend zur Beschreibung von anisotroper Plastizität ist.

LITERATUR

- [1] Bertram, A.: *Description of finite inelastic deformations*. In: Proceedings of MECAMAT'92 "International Seminar on Multiaxial Plasticity", 1.-4. Sept. 1992 in Cachan, Frankreich. Hrg.: A. Benallal, R. Billardon, D. Marquis, 821 - 835 (1992)
- [2] Bertram, A.: *Beschreibung finiter inelastischer Deformationen mittels materieller Isomorphismen*. ZAMM 74,4, T314 - T316 (1994)
- [3] Bertram, A., Kraska, M.: *Beschreibung finiter plastischer Deformationen von Einkristallen mittels materieller Isomorphismen*. ZAMM 75 (1995) S179-S180
- [4] Bertram, A., Kraska, M.: *Determination of finite plastic deformations in single crystals*. Archives of Mechanics 47, 2, 203-222 (1995)
- [5] Green, A. E., Naghdi, P. M.: *A general theory of an elastic-plastic continuum*. Arch. Rat. Mech. Anal. 18,4, 251-281 (1965)
- [6] Green, A. E., Naghdi, P. M.: *Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain*. Int. J. Engng Sci. 9, 1219-1229 (1971)
- [7] Krawietz, A.: *Materialtheorie*. Springer-Verlag, Berlin (1986)
- [8] Lee, E.: *Elastic-plastic deformations at finite strains*. J. Appl. Mech. 36, 1-6 (1969)
- [9] Mandel, J.: *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM course 97, Springer, Wien (1972)
- [10] Mandel, J.: *Equations constitutive et directeur dans les milieux plastiques et viscoplastique*. Int. J. Sol. Struct. 9, 725-740 (1973)
- [11] Silhavy, M., Kratochvíl, J.: *A theory of inelastic behavior of materials*. Part I. *Ideal Inelastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal. 65, 97-129 (1977), Part II. *Inelastic Materials*. Arch. Rat. Mech. Anal. 65, 131-152 (1977)
- [12] Wang, C.-C., Bloom, F.: *Material uniformity and inhomogeneity in anelastic bodies*. Arch. Rat. Mech. Anal. 53, 246-276 (1974)

Adresse: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, bertram@mb.uni-magdeburg.de

Thermodynamically Consistent Formulation of Finite Deformation Anisotropic Plasticity Laws

O. Häusler¹, Ch. Tsakmakis^{1,2}

¹ Forschungszentrum Karlsruhe
Institut für Materialforschung II
D-76021 Karlsruhe, Germany

² Technische Universität Darmstadt
Institut für Mechanik
D-64289 Darmstadt, Germany

1 Introduction

The aim of this paper is to elaborate on a recent constitutive theory for anisotropic plastic flow based on phenomenological thermodynamics. The theory, which is an outgrowth of recent work on thermoplasticity (e.g. Tsakmakis [3], and references quoted therein), is detailed in Tsakmakis [4] and in Häusler and Tsakmakis [2] and is summarized here in Section 2. It is phenomenological in nature and thermodynamically motivated. Evolution equations governing the model response are introduced as sufficient conditions in order for the Clausius Duhem inequality to be satisfied in every admissible process. A specific feature is that the yield function and the flow rule are expressed in terms of the so-called Mandel stress tensor. Also, two spin tensors are introduced, describing the rotation of reference frames related to the elasticity law and the kinematic hardening rule, respectively.

Throughout this paper, $\mathbf{1}$ represents the identity second order tensor, \mathbf{A}^T denotes the transpose of \mathbf{A} and $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ is the inner product of the second order tensors \mathbf{A} and \mathbf{B} . Finally, $\mathbf{A}^{T-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$, and $\dot{f}(t)$ denotes the material time derivative of the time function $f(t)$.

2 Anisotropic Plastic Flow – A Phenomenological Approach

The starting point of the second constitutive model, which takes into account elasticity, is the multiplicative decomposition of the deformation gradient tensor $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$. For independent rigid body rotations \mathbf{Q} and $\bar{\mathbf{Q}}$, superposed to the actual and intermediate configuration, respectively, we have

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}_e\bar{\mathbf{Q}}^T \quad , \quad \mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p^* = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{F}_p \quad . \quad (1)$$

In formulating the theory we will make use of the strain tensors

$$\hat{\Gamma}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{1}) \quad , \quad \hat{\Gamma}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p^{-1}) \quad , \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_e + \hat{\Gamma}_p \quad , \quad (2)$$

which are referred to the plastic intermediate configuration.

We choose the free energy function ψ in the form $\psi = \psi_e + \psi_p$, with the plastic part ψ_p assumed to vary with plastic deformations only. Confining attention to isothermal deformations with a uniform temperature distribution, the Clausius-Duhem inequality reduces to

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \varrho_R \dot{\psi} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\Gamma} - \varrho_R \dot{\psi}_e - \varrho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \quad , \quad (3)$$

where \mathbf{S} is the weighted Cauchy stress tensor, ρ_R is the mass density in the reference configuration and $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}_e^{T-1}$ is the second Piola-Kirchhoff stress tensor with respect to the plastic intermediate configuration. The tensor \mathbf{D} is the symmetric part of $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, satisfying the relation

$$\mathbf{F}_e^T \mathbf{D} \mathbf{F}_e = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} = \dot{\hat{\Gamma}} + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \hat{\mathbf{L}}_p \quad , \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\hat{\mathbf{F}}}_p \mathbf{F}_p^{-1} = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p \quad , \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p = \dot{\hat{\Gamma}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_p + \hat{\Gamma}_p \hat{\mathbf{L}}_p \quad . \quad (6)$$

2.1 Elasticity law

Here, we account for a given initial anisotropy by assuming that ψ_e depends on \mathbf{F}_e and Φ , i.e. $\psi_e = \tilde{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \Phi)$, for increasing plastic deformations. The second order tensor Φ represents a rotation ($\Phi^T = \Phi^{-1}$) operating between the reference and the current configuration. It is defined such as to rotate the reference frame of the elasticity law, as well as to satisfy the transformation rule $\Phi \rightarrow \Phi^* = \mathbf{Q} \Phi$. Taking into account full invariance requirements according to Casey and Naghdi [1], it is readily shown that ψ_e must be of the form

$$\psi_e = \tilde{\psi}_e(\tilde{\Gamma}_e) \quad , \quad \tilde{\Gamma}_e = \Phi^T \hat{\Gamma}_e \Phi \quad . \quad (7)$$

Using this fact, it can be deduced from (3) that

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \right) \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_e - \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \hat{\mathbf{W}}_p + \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \rho_R \dot{\psi}_p - \rho_R \left(2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \right) \cdot \dot{\Phi} \Phi^T \geq 0 \quad , \quad (8)$$

where $\hat{\mathbf{P}}_S$ and $\hat{\mathbf{P}}_A$ are the symmetric and antisymmetric part of the Mandel stress tensor $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{T}}$, respectively. By means of standard arguments, we conclude from (8) that

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \quad , \quad (9)$$

$$\mathcal{D}_{int} := \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \rho_R \dot{\psi}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T) \geq 0 \quad . \quad (10)$$

Eq. 9 represents the elasticity law governing the material response.

2.2 Kinematic hardening law – flow rule

For simplicity, the material response is assumed to exhibit kinematic hardening only. Then, following steps analogous to those in Section 2.1, ψ_p is postulated to depend upon two second order tensors $\hat{\mathbf{Y}}$ and Δ in the form $\psi_p = \tilde{\psi}_p(\Delta^T \hat{\mathbf{Y}} \Delta) = \tilde{\psi}_p(\tilde{\mathbf{Y}})$, where $\tilde{\mathbf{Y}}$ is a strain tensor with respect to the plastic intermediate configuration, representing shape changes due to kinematic hardening, while Δ is assumed to be a rotation tensor operating between reference and plastic intermediate configuration. This, indeed, describes the material rotation or the anisotropic material response due to kinematic hardening. Similar to (9), we formally introduce an internal stress tensor $\hat{\mathbf{Z}}$ through the potential relation

$$\hat{\mathbf{Z}} = \rho_R \Delta \frac{\partial \tilde{\psi}_p}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \Delta^T \quad . \quad (11)$$

Furthermore, according to the definition of $\hat{\mathbf{P}}$, a back stress tensor $\hat{\xi}$ of Mandel type may be introduced by

$$\hat{\xi} = (1 + 2\hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{Z}} \quad . \quad (12)$$

We assume that $\frac{\partial \tilde{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}}$ depends linearly upon $\hat{\mathbf{Y}}$, i.e.

$$q_R \frac{\partial \tilde{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} = \mathcal{C} [\hat{\mathbf{Y}}] \quad (13)$$

where $\mathcal{C} = const$ is a fourth order tensor with inverse \mathcal{M} , such that $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathcal{M} \left[q_R \frac{\partial \tilde{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \right]$. On introducing these relations into (10) and rearranging, we obtain

$$\begin{aligned} q_R \mathcal{D}_{int} = & (\hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\xi}_S) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T) - \hat{\xi}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T) \\ & + \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left(\Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \mathcal{M} \left[\Delta^T \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} \Delta \right] \right) \geq 0 \quad , \quad (14) \end{aligned}$$

where $\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} := \dot{\hat{\mathbf{Z}}} - \hat{\mathbf{L}}_p \hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{L}}_p$. Clearly, the inequalities

- i) $(\hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\xi}_S) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \geq 0$,
- ii) $\hat{\mathbf{P}}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T) - \hat{\xi}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T) \geq 0$,
- iii) $\Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left(\Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \mathcal{M} \left[\Delta^T \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} \Delta \right] \right) \geq 0$,

are sufficient conditions for the validity of (14). [Analogous conditions for the isotropic case have been derived by Tsakmakis ([3])]. Condition i) may be satisfied if a normality rule $\hat{\mathbf{D}}_p \sim \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S}$ is assumed to apply, with $\hat{f} = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\xi}_S, \dots)$ being a convex yield function. Also, condition ii) may be satisfied if $(\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T)$ and $(\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T)$ are assumed to be positive proportional to $\hat{\mathbf{P}}_A$ and $-\hat{\xi}_A$. Finally, condition iii) is fulfilled if $\Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \mathcal{M}[\Delta^T \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} \Delta]$ is positive proportional to the tensor $\mathcal{M}[\Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta]$, provided that \mathcal{M} is a positive definite fourth order tensor. On choosing the proportionality factor to be $b\dot{s}$, with b representing a material parameter and $\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{D}}_p \cdot \hat{\mathbf{D}}_p$, we obtain

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \hat{\mathcal{C}}[\hat{\mathbf{D}}_p] - b\dot{s} \hat{\mathbf{Z}} \quad , \quad (15)$$

$$\hat{\mathcal{C}}[\hat{\mathbf{D}}_p] := \Delta \left(\mathcal{C}[\Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta] \right) \Delta^T \quad . \quad (16)$$

2.3 Simple shear

In order to check the capability of the model outlined above, we consider simple shear with vanishing elastic strains, as well as orthotropic anisotropy in both the yield function \hat{f} and the function $\tilde{\psi}_p$. Also, rate dependent constitutive properties (viscoplasticity) are assumed

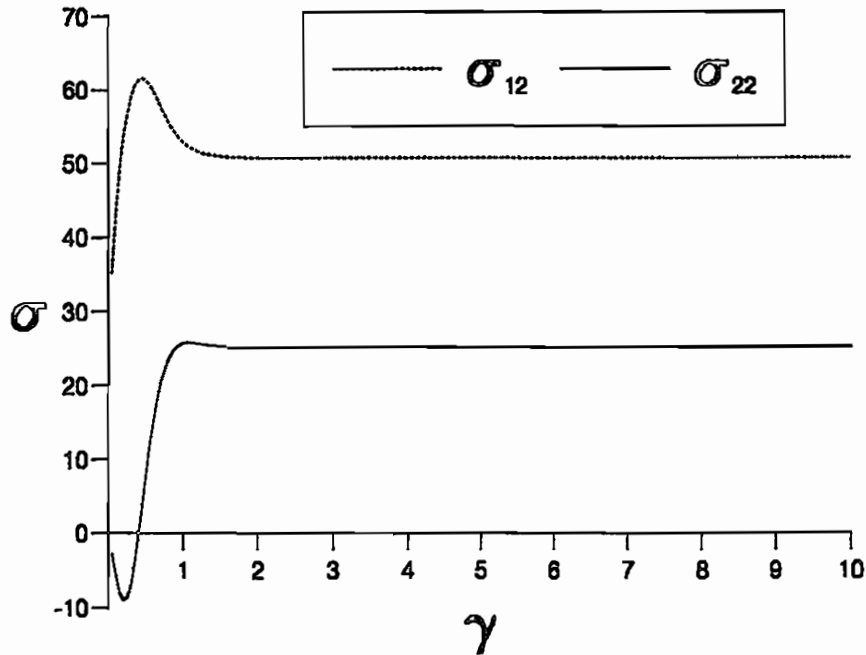


Figure 1: Shear stress and normal stress versus shear strain

by choosing for \dot{s} a constitutive law of the overstress type. Figure 1 shows predicted responses for the shear stress σ_{12} and the normal stress σ_{22} with respect to the shear strain γ . It is concluded, that the model predicts physically plausible responses.

References

- [1] J. Casey and P.M. Naghdi. A remark on the use of the decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ in plasticity. *J. Appl. Mech.*, 47:672-675, 1980.
- [2] O. Häusler and Ch. Tsakmakis. Viscoplasticity laws exhibiting orthotropic anisotropy. *submitted*, 1997.
- [3] Ch. Tsakmakis. Kinematic hardening rules in finite plasticity. part i: a constitutive approach. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:215-231, 1996. 5.
- [4] Ch. Tsakmakis. A constitutive theory for anisotropic plastic flow. *submitted*, 1997.

Multiplikative Thermo-Viskoplastizität – eine Analogie zur Elastoplastizität

Stefanie Reese

Institut für Mechanik (AG IV), Technische Universität Darmstadt,
Hochschulstr. 1, D-64289 Darmstadt

1. Einleitung

Ratenabhängige Effekte werden bei plastischem Materialverhalten häufig nur in bestimmten Temperaturbereichen beobachtet. Bei Metallen und Legierungen zum Beispiel ist dafür die Erwärmung der Probe auf ungefähr ein Drittel der Schmelztemperatur erforderlich. Bei Polymeren liegt dieser Temperaturbereich unterhalb der sogenannten Glasübergangstemperatur, die sich jedoch je nach der speziellen chemischen Zusammensetzung des Polymers unter- oder oberhalb der Raumtemperatur befinden kann.

Viskoplastizitätsmodelle wurden in der Vergangenheit in der Regel für Metalle entwickelt. Eine ausführlicher Literaturüberblick ist in dem Übersichtsartikel von *Krempf* (1987) enthalten. Dabei lassen sich zwei wesentliche Vorgehensweisen erkennen. Während bei der einen Gruppe von Modellen die Fließrichtung von der Gesamtspannung bestimmt wird (Modelle des "Perzyna-Typs"), geht bei dem "unified approach" nur die sogenannte Überspannung in die Evolutionsgleichung für die inelastische Verzerrung ein. Das vorliegende Modell ist der zweiten Gruppe zuzuordnen und basiert rheologisch auf der Parallelschaltung eines Prandtl-Reuss-Elementes mit einem Maxwell-Element. Daraus ergibt sich der Bingham-Körper als Sonderfall, wenn der Dämpfer und das Reibelement sich nicht unabhängig voneinander bewegen dürfen. Modelle ohne elastischen Bereich lassen sich konstruieren, indem die Fließgrenze zu Null und die Steifigkeit der entsprechenden Feder auf einen sehr großen Wert gesetzt wird.

Das vorgestellte Konzept hat den Vorteil, daß es thermodynamisch konsistent ist, thermomechanische Kopplungen auf einfache Weise berücksichtigt werden können und schließlich die Implementation in ein Finite-Element-Programm übersichtlich und effizient bleibt. Das numerische Beispiel in dem vorliegenden Beitrag beschäftigt sich mit dem thermoviskoplastischen Materialverhalten von Metallen. Das Modell ist aber auch für die Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens von Polymeren geeignet, was schon von *Lion* (1997) gezeigt wurde. Wird die Fließgrenze sehr hoch gesetzt, erhält man ein Modell zur Beschreibung der finiten Viskoelastizität von Polymeren (siehe *Reese & Govindjee* (1996)). Um den Anwendungsbereich möglichst flexibel zu halten, werden sowohl große elastische als auch große inelastische Deformationen zugelassen. Des weiteren ist die volle

thermomechanische Kopplung zwischen mechanischen und thermischen Feldgrößen enthalten. Die Implementation eines ähnlichen Modells in einen Finite-Element-Code wurde schon von *Keck & Miehe* (1997) diskutiert, allerdings nur für isotherme Probleme. Eine alternative thermodynamische Formulierung findet sich in der Arbeit von *Lion* (1997), in der auch die Anpassung an Experimente ausführlich besprochen ist. In dem vorliegenden Beitrag wird insbesondere die Anwendung des Modells in Verbindung mit der Finite-Element-Methode beschrieben.

2. Konstitutive Gleichungen

Ausgehend von dem oben beschriebenen rheologischen Modell läßt sich bei kleinen Deformationen die Gesamtverzerrung additiv in einen jeweils elastischen (ε_{ep} bzw. ε_{ev}) und einen inelastischen Anteil (ε_{ip} bzw. ε_{iv}) aufspalten. Die Verzerrungsenergie wird dann im eindimensionalen Fall durch die Beziehung $\Psi = \frac{1}{2} E_{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_{ip})^2 + \frac{1}{2} E_m (\varepsilon - \varepsilon_{iv})^2 = \Psi_{pr} + \Psi_m$ dargestellt. Dabei beschreibt Ψ_{pr} die Federenergie des Prandtl-Reuss-Elementes, wohingegen Ψ_m der Verzerrungsenergie in der Maxwell-Feder entspricht. Wenn große Deformationen und Temperaturänderungen berücksichtigt werden, nimmt die Verzerrungsenergie die Form $\Psi = \hat{\Psi}_{pr}(\mathbf{F}_{ip}^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_{ip}^{-1}, \Theta) + \hat{\Psi}_m(\mathbf{F}_{iv}^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_{iv}^{-1}, \Theta)$ an, wobei die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ep} \cdot \mathbf{F}_{ip} = \mathbf{F}_{ev} \cdot \mathbf{F}_{iv}$ in elastische (\mathbf{F}_{ep} , \mathbf{F}_{ev}) und inelastische Anteile (\mathbf{F}_{ip} , \mathbf{F}_{iv}) angenommen wird. Bei isotropem Materialverhalten reduziert sich die Darstellung auf $\Psi = \hat{\Psi}_{pr}(\mathbf{b}_{ep}, \Theta) + \hat{\Psi}_m(\mathbf{b}_{ev}, \Theta)$. Die "elastischen" linken Cauchy-Green Tensoren \mathbf{b}_{ep} und \mathbf{b}_{ev} sind mit $\mathbf{b}_{ep} = \mathbf{F}_{ep} \cdot \mathbf{F}_{ep}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_{ip}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T$ und $\mathbf{b}_{ev} = \mathbf{F}_{ev} \cdot \mathbf{F}_{ev}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_{iv}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T$ gegeben. Einsetzen der Verzerrungsenergiefunktion in die Clausius-Duhem-Form der Entropiebilanz liefert konstitutive Gleichungen $\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}$, $\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}$ für den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor und die Entropie η . \mathbf{C} bezeichnet den rechten Cauchy-Green-Tensor und Θ die absolute Temperatur. Eine hinreichende Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung wird durch die Annahme des Fourierschen Gesetzes für den räumlichen Wärmefluß $\mathbf{q} = -k \text{ grad } \Theta$ (k Wärmeleitfähigkeit) und die Evolutionsgleichungen ($\mathcal{L}_v \mathbf{b}_{e\bullet} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{C}}_{i\bullet}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T$)

$$-\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}_{ep}) \cdot \mathbf{b}_{ep}^{-1} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi_{pla}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{pr}}, \quad -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}_{ev}) \cdot \mathbf{b}_{ev}^{-1} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi_{vis}}{\partial \boldsymbol{\tau}_m} \quad (1)$$

gewährleistet. Hier wurde der Kirchhoff-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ in einen Prandtl-Reuss-Anteil $\boldsymbol{\tau}_{pr} = 2 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Psi_{pr}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T$ und einen Maxwell-Anteil $\boldsymbol{\tau}_m = 2 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T$ aufgespalten. Das plastische Potential Φ_{pla} ist durch die Fließfunktion gegeben, das sogenannte viskoelastische Potential Φ_{vis} wird entsprechend der Arbeit von *Reese & Govindjee* (1996) gewählt. Die Struktur der Evolutionsgleichung (1 b) ist analog zu der einer assoziierten Fließregel in der Plastizität. Dies erweist sich bei der Implementation des Modells in einen FE-Code als extrem vorteilhaft.

3. Algorithmische Aspekte

Bei der numerischen Behandlung des oben beschriebenen konstitutiven Modells müssen zwei wesentliche Aspekte beachtet werden. Der erste Punkt betrifft die Bestimmung der inneren Variablen mit Hilfe der Evolutionsgleichungen (1). Aufgrund der Tatsache, daß die Struktur der beiden Gleichungen gleich ist, kann die Zeitintegration in derselben Weise durchgeführt werden. Im Rahmen der Elastoplastizität wurden zu diesem Zweck bereits effiziente Algorithmen entwickelt, die nun nahezu unverändert übernommen werden können. Dabei wird die Temperatur, genauso wie die sogenannte "Trial"-Verzerrung, als globale Variable behandelt und auf lokaler Ebene konstant gehalten. Die lokale Zeitintegration unterscheidet sich deshalb nicht wesentlich von der im isothermen Fall.

Des weiteren müssen die Impuls- und die Energiebilanz in schwacher Form gelöst werden. Die schwache Form der Impulsbilanz lautet

$$\int_{B_0^h} \frac{1}{2} \tau^h : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^{-1})^h dV^h - \int_{\partial B_{0P}^h} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u}^h dA^h = 0.$$

Der Index h zeigt an, daß es sich hier um die diskrete Form der Bilanzgleichung handelt. Der thermomechanische Kopplungseffekt ist in der Temperaturabhängigkeit des Kirchhoff-Spannungstensors $\tau = \hat{\tau}(\mathbf{b}_{ep}, \mathbf{b}_{ev}, \Theta)$ versteckt. Im einzelnen resultiert der Einfluß der Temperatur auf die Deformation aus der thermischen Wärmeausdehnung, der Temperaturabhängigkeit der mechanischen Materialparameter und schließlich aus der Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

Die diskrete Form der Energiebilanz ist gegeben durch

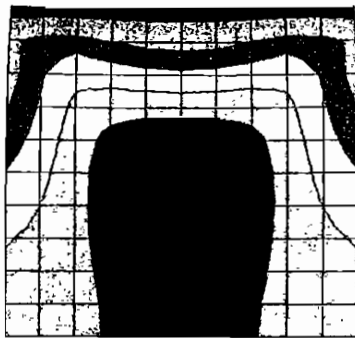
$$\int_{B_0^h} J^h \mathbf{q}^h \cdot \text{grad } \delta \Theta^h dV^h + \int_{B_0^h} (-w_{\text{int}}^h + w_{\text{ext}}^h - c^h \dot{\Theta}^h) \delta \Theta^h dV - \int_{\partial B_{0Q}^h} \bar{Q} \delta \Theta dA^h = 0,$$

wobei die Größen w_{int} und w_{ext} mit $w_{\text{int}} = (\tau_m - \Theta \frac{\partial \tau_m}{\partial \Theta}) : \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_{ev} \cdot \mathbf{b}_{ev}^{-1} + (\tau_{pr} - \Theta \frac{\partial \tau_{pr}}{\partial \Theta}) : \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_{ep} \cdot \mathbf{b}_{ep}^{-1}$ und $w_{\text{ext}} = \Theta (\frac{\partial \tau_{pr}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \tau_m}{\partial \Theta}) : \mathbf{d}$ definiert sind. Der Tensor \mathbf{d} stellt den Deformationsgeschwindigkeitstensor dar. Die zwei Terme w_{int} und w_{ext} beschreiben die Dissipation von mechanischer Energie in Wärme. Die Größe des zweiten Terms wird dabei wesentlich durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmt, wohingegen der erste Term insbesondere durch die Evolution der inneren Variablen beeinflusst wird. Die Deformationsabhängigkeit von w_{int} und w_{ext} sowie des Wärmeflusses und der Wärmekapazität c beschreiben den Einfluß der Deformation auf die Temperatur.

Die schwachen Formen werden mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst, was die konsistente Linearisierung der zwei Gleichungen erfordert. Der Tangentenoperator ist nur aufgrund der thermomechanischen Kopplung nicht symmetrisch, da die inelastischen Materialgesetze jeweils auf einem Potential basieren.

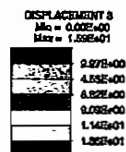
4. Beispiel

Als Beispiel wird die Zusammendrückung eines Stahlblockes untersucht. Die Randbedingungen werden so gewählt, daß sich der obere Rand nicht horizontal verschieben kann. Der Temperaturzustand kann sich frei entwickeln mit der Einschränkung, daß die Temperatur am oberen Rand konstant bleibt. Ein eventueller Wärmeaustausch mit der Umgebung wurde nicht berücksichtigt. Für beide Elastizitätsgesetze (Prandtl-Reuss-Anteil und Maxwell-Anteil) wurde ein kompressibles Neo-Hooke-Modell gewählt. In der Abbildung ist die Temperaturverteilung für die gleiche Belastung aber verschiedene Belastungsgeschwindigkeiten dargestellt. Je größer die Belastungsgeschwindigkeit, desto geringer steigt die Temperatur an und desto steifer verhält sich das System. Dies kann damit erklärt werden, daß für eine sehr langsame Belastung die Spannung im Maxwell-Element vernachlässigbar ist und die Belastung allein von dem Prandtl-Reuss-Anteil aufgenommen werden muß. Bei schneller Belastung "trägt" der Maxwell-Anteil mit, so daß die Deformation geringer ist.



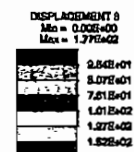
$$\Delta\Theta_{\max} = 15.9 \text{ K}$$

$$\dot{F} = 30 \text{ kN/s}$$



$$\Delta\Theta_{\max} = 177 \text{ K}$$

$$\dot{F} = 0.3 \text{ kN/s}$$



Literatur

Keck, J., Miehe, C. (1997). *An eulerian overstress-type viscoplastic constitutive model in spectral form. Formulation and numerical implementation*, in: Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, D. R. J. Owen, E. Onate, E. Hinton (Eds.), Barcelona, Spanien, 1997.

Krempf, E. (1987). *Models of Viscoplasticity. Some Comments on Equilibrium (Back) Stress and Drag Stress*, Acta Mechanica **69**, 25-42.

Lion, A. (1997). *On the Large Deformation Behaviour of Reinforced Rubber at Different Temperatures*, Mitteilung 3/1997, Institut für Mechanik, Universität Kassel, Deutschland; wird veröffentlicht in Journal of the Mechanics and Physics of Solids.

Reese, S., Govindjee, S. (1996). *A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects*, Report No. 96/08, Structural Engineering, Mechanics and Materials, University of California at Berkeley; wird veröffentlicht in International Journal of Solids and Structures.

Plastifizierung von Metallen durch Elastomere

HARTMUT PAWELSKI

Institut für Mechanik, Universität Hannover,
Appelstraße 11, 30167 Hannover

Experimentelle Grundlagenuntersuchungen zum Reibkontakt zwischen Elastomeren und Metallen bei großen Formänderungen

Bei einigen Sonderverfahren der Metallumformtechnik werden auch Elastomermaterialien als Wirkmedium eingesetzt. Beispiele sind Tiefziehen oder Biegen mit Elastomermatrize oder Innenhochdruckumformen mit Elastomer im Innenraum, [1] und [2]. In der Regel ist dabei das scherweiche, aber wenig komprimierbare Elastomer vollständig von Metall umschlossen, so daß sich ein derart hoher hydrostatischer Druck im Elastomer ausbildet, daß es zur Plastifizierung des Werkstücks kommt.

Der Reibkontakt zwischen Elastomeren und Metallen unter diesen extremen Bedingungen hat mit dem bekannten Reibverhalten bei kleinen Drücken wenig gemeinsam, insbesondere über die Wechselwirkung mit Oberflächenrauheit und Schmierung. Im Folgenden werden zwei Experimente zur Reibungsmessung vorgestellt, die zwei charakteristische Umformfälle abdecken, und so gewählt wurden, daß die Bestimmung der Reibungszahlen noch über direkte analytische Beziehungen möglich ist. Die Versuche wurden in Zusammenarbeit mit dem Max-Planck-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf durchgeführt.

Der Streifenziehversuch mit Elastomerkissen

Beim Streifenziehversuch zur Reibungsmessung nach [3] wird das zu verformende Metall durch einen sich in Zugrichtung verengenden ebenen Ziehspalt gezogen, wobei Zug- und Querkräfte gemessen werden. Allein anhand statischer Überlegungen läßt sich dann ohne Kenntnis eines Stoffgesetzes die mittlere Reibungszahl μ zwischen dem Metall und den Ziehbacken berechnen.

Durch Ausrüstung der Ziehbacken mit Elastomereinlagen ist es gelungen, **Abbildung 1**, dieses Prinzip auch auf den Elastomer-Metall-Kontakt anzuwenden. Im Gegensatz zu Versuchen mit Vollbacken tritt bei den Backen mit Einlage das Problem auf, daß zwei verschiedene Reibpaarungen vorliegen, nämlich Stahlbacke-Streifen (mit Reibungszahl μ_{St}) und Elastomer-Streifen (mit μ_E). Außerdem entsteht durch Verformung des Elastomerkissens eine nicht-ebene Wirkfläche. Mit Hilfe von Streifentheorie zur Berechnung der Druckverteilung auf die Backen in Kombination mit FEM zur Bestimmung der Elastomerverformung konnte gezeigt werden, daß sich die Gesamtreibungszahl

$$\mu = \frac{F_Z / (2 F_Q) - \tan \alpha}{1 + F_Z / (2 F_Q) \tan \alpha} \quad (1)$$

in sehr guter Näherung einfach als gewichtetes Mittel der Einzelreibungszahlen ergibt:

$$(A_E + A_{St}) \mu = A_E \mu_E + A_{St} \mu_{St} . \quad (2)$$

Während die Fläche der Elastomereinlage A_E bekannt ist, läßt sich die Fläche des Kontaktes mit der Stahloberfläche A_{St} nach dem Ziehen anhand des gut sichtbaren Abdrucks auf der Backe ausmessen.

Geht man von quaderförmigen Proben aus, muß zunächst eine Ziehangel angewalzt werden, so daß der Streifen durch die Backen gesteckt werden kann. Danach wird ein Teil mit einem Stahlstück anstelle der Elastomereinlage gezogen. Nach Gleichung (1) wird so μ_{St} bestimmt. Danach wird mit Elastomereinlagen weitergezogen und mit dem nun gemessenen mittleren μ durch Einsetzen in Gleichung (2) μ_E extrapoliert.

Es wurden bisher Versuche mit Aluminium 99,5 und VLGQ-Weichgummi (Schubmodul nur(!) $G=1,3 \text{ N/mm}^2$) sowie Polyurethan mit Härten von 82 und 90 Shore A ausgeführt. Die Höhe der Aluminiumstäbe wurde dabei von 15 mm auf etwa 11 mm reduziert. Beispiele einiger gemessener Reibungszahlen für Kissen aus Gummi zeigt **Abbildung 2**.

Einen stationären Ziehzustand mit niedrigen Reibungszahlen erreicht man nur dann, wenn eine genügende Schmierschicht aufrechterhalten werden kann. Dies gelingt besonders gut bei mittleren Rauhtiefen der Streifenoberfläche ($R_Z=15$ bis $20 \mu\text{m}$), nicht zu niedriger Viskosität des zur Schmierung verwendeten Walzöls ($\eta > 0,5 \text{ Pa s}$) und Kalk als Schmierstoffträger. Bei Polyurethan wurde dann ein extrapoliertes $\mu_E=0,07$ bis $0,08$ erreicht. Bei größeren Rauhtiefen steigt μ_E langsam ($0,08$ bis $0,09$ bei $R_Z=40 \mu\text{m}$) bei kleineren Rauhtiefen steil an ($\mu_E > 0,2$ bei $R_Z=4 \mu\text{m}$). Außerdem sind Art und Orientierung der Rauheiten von Bedeutung.

Charakteristisch für den Streifenziehversuch ist die überall vorhandene Relativbewegung von Metall gegenüber dem Elastomer, verbunden mit einer schnell fortschreitenden Abnutzung der Elastomeroberfläche, erkennbar am während des Ziehens ansteigenden μ . Bei dem im folgenden behandelten Versuch tritt hingegen teilweises Haften auf.

Der Flachstauchversuch mit Elastomerkissen

Beim Flachstauchversuch wird eine quaderförmige Metallprobe zwischen zwei rechteckigen Stempeln gestaucht. Sind die Reibverhältnisse oben und unten verschieden, so verkrümmt sich die Probe zunehmend während des Stauchens (tribologische Asymmetrie). Anhand des Verkrümmungswinkels α kann man auf den Unterschied der Reibungszahlen oben und unten schließen, jedoch nicht auf deren absoluten Werte („Reibungswaage“). Diese können jedoch über die Stauchkrafteerhöhung abgeschätzt werden.

Auch hier ist es möglich, einen oder beide Stempel mit Elastomerkissen auszurüsten, **Abbildung 3**. Mit Hilfe einer umfangreichen oberen Schrankenrechnung, der ein in x_1 - und x_2 -Richtung jeweils quadratischer und in x_3 -Richtung linearer Geschwindigkeitsansatz zugrundeliegt, konnte durch Entwicklung nach den Reibfaktordifferenzen $\Delta m = m_u - m_o$ und $\Delta m_E = (m_{E,u} - m_u) - (m_{E,o} - m_o)$ ein letztlich vergleichsweise einfacher analytischer Zusammenhang für die Rotationsgeschwindigkeit der starr angenommenen Seitenteile hergeleitet werden, der sogar noch zum Winkel als Funktion des Stauchfaktors h/h_0 integrierbar war:

$$\alpha = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{\beta}{2} + \mathcal{O}(\beta^2) \right] \left[\Delta m + \frac{k_1^2}{\ell_1^2} \frac{k_3}{\ell_3} \Delta m_E + \mathcal{O}(\Delta m_{(E)}^2) \right] \ln \frac{h_0}{h} . \quad (3)$$

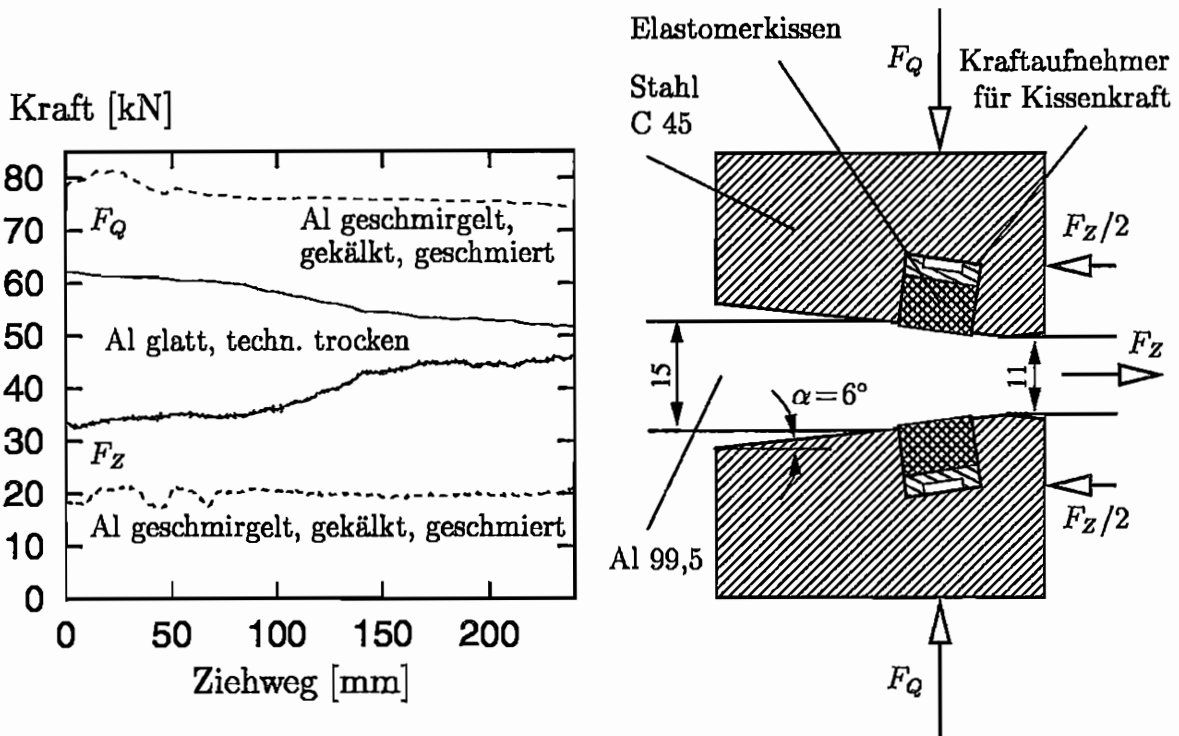


Abbildung 1: Streifenziehversuch mit Elastomerkissen. Kräfte beim Ziehen von Aluminium 99,5, Ziehbacken mit Weichgummieinlagen.

Neben den aus der Abbildung hervorgehenden Bezeichnungen treten hierbei noch das Verhältnis aus Kissentiefe zur Tiefe des gesamten Kontakts k_3/l_3 sowie der Breitenanteil β in x_3 -Richtung auf. Ein $\beta = 1/2$ entspräche dabei gleicher Verteilung des Flusses auf x_1 - und x_3 -Richtung bei Reibungsfreiheit.

Für $\Delta m = 0$ (gleiche Reibfaktoren zwischen Stempelmetall und Werkstück) ist so durch Messung des Winkels α , der Breitung β und der Endhöhe h die Berechnung des Elastomerreibfaktorenunterschieds Δm_E möglich. Zwei- und dreidimensionale FE-Simulationen bestätigten näherungsweise den Zusammenhang für kleine m zwischen 0 und 0,2.

Insbesondere kann man der Gleichung entnehmen, daß der Breitenanteil des Elastomerkissens k_1/l_1 quadratisch eingeht. Also ist es sinnvoll, die Seitenstege des Stempels so schmal wie möglich auszuführen, ohne daß sie während des Versuchs abbrechen.

Erste erfolgreiche Versuche mit Aluminium 99,5 und Polyurethan (Shore 90 A) wurden durchgeführt. Im Vergleich zum Streifenziehen werden größere Abnahmen bei geringerer Schädigung der Elastomereinlage erreicht.

Literatur

- [1] Geiger, M.; et al.: Blech Rohre Profile **42** (1995) Nr.1 S.31
- [2] Thiruvarudchelvan, S.: J. of Mat. Proc. Tech. **39** (1993) S. 55-82
- [3] Pawelski, O.: Stahl und Eisen **84** (1964) Nr.20 S.1233-43

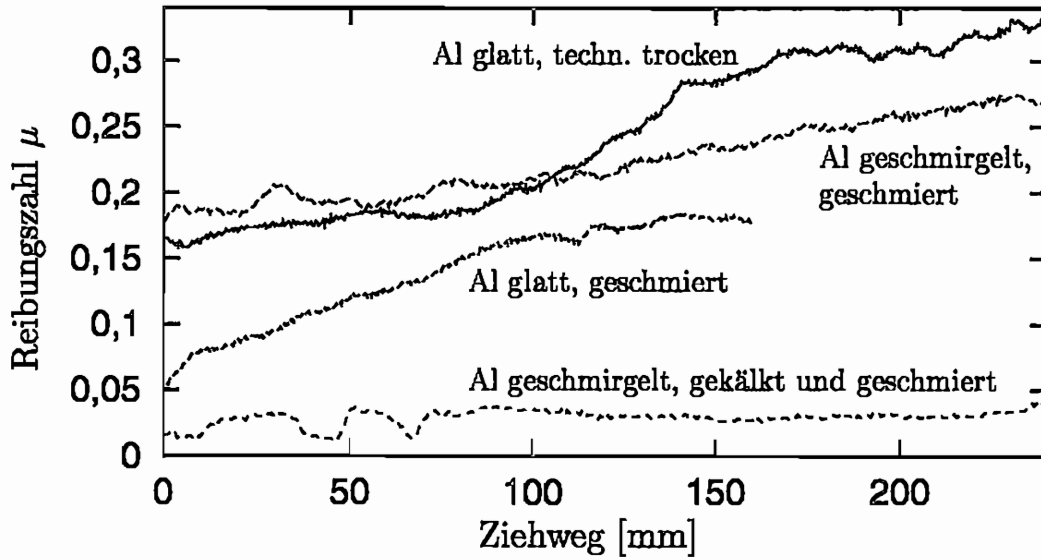


Abbildung 2: Streifenziehen von Aluminium 99,5, Ziehbacken mit Weichgummieinlagen. Reibungszahlen bei Variation der Oberflächen- und Schmierverhältnisse.

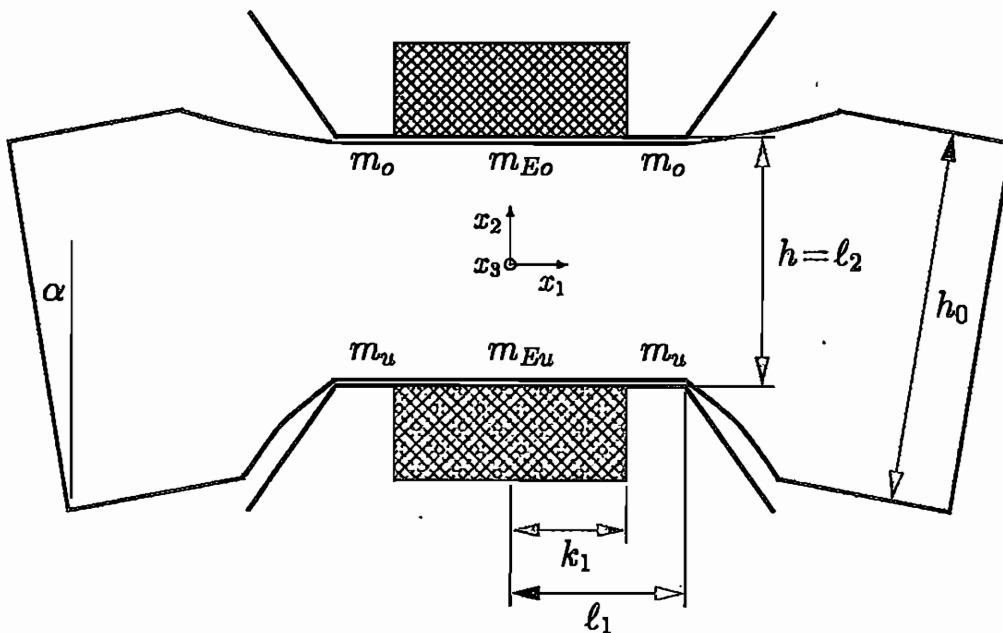


Abbildung 3: Tribologisch asymmetrischer Flachstauchversuch mit Elastomerkissen.

Die Bedeutung der Kompatibilitätsbedingung für mikropolare, elastisch-plastische Reibungsmaterialien

W. Ehlers, S. Diebels & W. Volk

Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, D-70550 Stuttgart

1 Motivation

Eine kontinuumsmechanische Beschreibung von mehrphasigen Reibungsmaterialien kann mit Hilfe der Theorie Poröser Medien (TPM) erfolgen (siehe z. B. Ehlers [2]). Im Rahmen der klassischen Mischungstheorie (Standardformulierung) ist der materielle Punkt nach dem Homogenisierungsprozeß der Träger der physikalischen Eigenschaften (Dichte, Impuls, ...) und besitzt drei translatorische Freiheitsgrade. Es ist bekannt, daß bei Lokalisierungsphänomenen, wie z. B. Scherbandbildung, die physikalische Breite der Lokalisierungszone mit Hilfe der Standardformulierung nicht erfaßbar ist, da die Breite der Bänder durch mikroskopische Kontaktkräfte hervorgerufen wird, die mit Reibungseffekten zwischen den einzelnen Körnern verbunden sind und die in der Standardformulierung nicht berücksichtigt werden. Im Rahmen einer mikropolaren Beschreibung werden die Effekte, die auf der endlichen Größe der einzelnen Partikel beruhen, ebenfalls einem Homogenisierungsprozeß unterzogen. Als Ergebnis erhält man ein makroskopisches Kontinuum, das zusätzlich unabhängige rotatorische Freiheitsgrade besitzt, die nicht aus dem Verschiebungsfeld bestimmbar sind. Im folgenden wird die Kinematik mikropolarer Reibungsmaterialien vorgestellt und eine Kompatibilitätsbedingung zwischen den mikropolaren Deformationsmaßen hergeleitet. Es wird gezeigt, daß diese Kompatibilitätsbedingung einen entscheidenden Einfluß auf eine elastisch-plastische Formulierung besitzt.

2 Kinematik

Die aktuelle Platzierung \mathbf{x} eines materiellen Punktes kann durch seine Lage \mathbf{X} zu einer Referenzzeit t_0 und eine zugehörige Bewegungsfunktion χ eindeutig dargestellt werden. Die zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade können durch ein begleitendes starres Dreibein (Direktoren) beschrieben werden. Die Direktoren ξ_i , $i = 1, 2, 3$, der aktuellen Konfiguration können durch ihre Lage Ξ_i in einer Cosserat-Konfiguration in Zusammenhang mit einer eigentlich orthogonalen Abbildung $\bar{\mathbf{R}}$ (Cosserat-Rotationstensor) bestimmt werden:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \xi_i = \bar{\mathbf{R}} \Xi_i. \quad (1)$$

Versieht man den betrachteten Körper mit konvektiven Parameterlinien θ^i , so sind die natürlichen kovarianten Basisvektoren \mathbf{a}_i der aktuellen Konfiguration bzw. \mathbf{h}_i der Referenzkonfiguration als Tangentenvektoren an die Parameterlinien definiert. Entsprechend kann man eine duale oder kontravariante Basis \mathbf{a}^i bzw. \mathbf{h}^i definieren:

$$\mathbf{h}_i := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{a}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{h}^i := \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{a}^i := \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} bildet ein Linienelement der Referenzkonfiguration in das entsprechende Linienelement der aktuellen Konfiguration ab (kovarianter Vorwärtstransport) und erhält unter Verwendung der natürlichen Basis folgende Form

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{h}^i. \quad (3)$$

Hierin bedeutet „Grad“ die Gradientenbildung bezüglich der Referenzkonfiguration, \mathbf{u} ist der Verschiebungsvektor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird gefordert, daß die Direktoren ξ_i und die Basisvektoren \mathbf{a}_i der aktuellen Konfiguration übereinstimmen (*Diebels & Ehlers [1]*). Diese Annahme hat zur Folge, daß die Direktoren der *Cosserat*-Konfiguration $\bar{\xi}_i = \bar{\mathbf{h}}_i$ zeitabhängig sind. Der *Cosserat*-Rotationstensor beschreibt somit den kovarianten Vorwärtstransport von der *Cosserat*-Konfiguration zur aktuellen Konfiguration:

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^i =: \bar{\mathbf{R}}^i_j \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{h}^j. \quad (4)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3) und (4) kann man den nicht-symmetrischen *Cosserat*-Deformationsstensor $\bar{\mathbf{U}}$ definieren, der den kovarianten Vorwärtstransport von der Referenz- auf die *Cosserat*-Konfiguration beschreibt:

$$\bar{\mathbf{U}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{h}^i = \delta^i_j \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{h}^j. \quad (5)$$

Ein korrespondierendes Verzerrungsmaß, das im undeforinierten Zustand verschwindet, lautet:

$$\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{I} - \bar{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^i_j \mathbf{h}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j, \quad \bar{\mathbf{A}}^i_j = \bar{\mathbf{R}}^T{}^i_j - \delta^i_j. \quad (6)$$

Als weiteres Deformationsmaß bietet sich die Einführung des Krümmungstensors an, der im vorliegenden Fall auf der aktuellen Konfiguration definiert wird:

$$\overset{3}{\mathbf{K}} := [\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T] \overset{3}{\mathbf{K}} = K^i_{jk} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^k. \quad (7)$$

Das Symbol „grad“ bedeutet die Gradientenbildung bezüglich der aktuellen Konfiguration. Der Krümmungstensor ist schiefsymmetrisch bezüglich der ersten beiden Basisvektoren und kann somit eindeutig mit dem Permutationstensor $\overset{3}{\mathbf{E}}$ auf den zweistufigen (axialen) Tensor \mathbf{K} abgebildet werden:

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} [\overset{3}{\mathbf{E}} \overset{3}{\mathbf{K}}] \overset{3}{\mathbf{K}}, \quad \overset{3}{\mathbf{K}} = -[\overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{K}] \overset{3}{\mathbf{K}}. \quad (8)$$

Bei der elastisch-plastischen Formulierung für große Deformationen wird im folgenden von der Annahme ausgegangen, daß sowohl \mathbf{F} als auch $\bar{\mathbf{R}}$ multiplikativ in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden können (*Steinmann [4]*):

$$\mathbf{F} =: \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p, \quad \bar{\mathbf{R}} =: \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p. \quad (9)$$

\mathbf{F} und $\bar{\mathbf{R}}$ beschreiben jeweils den Transport eines Linienelements von der Referenzkonfiguration bzw. der *Cosserat*-Konfiguration zur aktuellen Konfiguration. Es erscheint daher sinnvoll, beide Maße in der gleichen Art zu zerlegen. Als Folge kann man die Existenz einer Zwischenkonfigurationen und einer *Cosserat*-Zwischenkonfiguration motivieren (siehe Abb. 1).

Die Zwischenkonfiguration ist definitionsgemäß spannungsfrei bezüglich des symmetrischen Anteils des Spannungstensors und inkompatibel in der Form, daß in der Regel kein plastisches Verschiebungsfeld existiert. Die *Cosserat*-Zwischenkonfiguration ist momentenspannungsfrei und spannungsfrei bezüglich des antimetrischen Anteils des Spannungstensors infolge der lokalen Drallbilanz (siehe z. B. *Diebels & Ehlers* [1]).

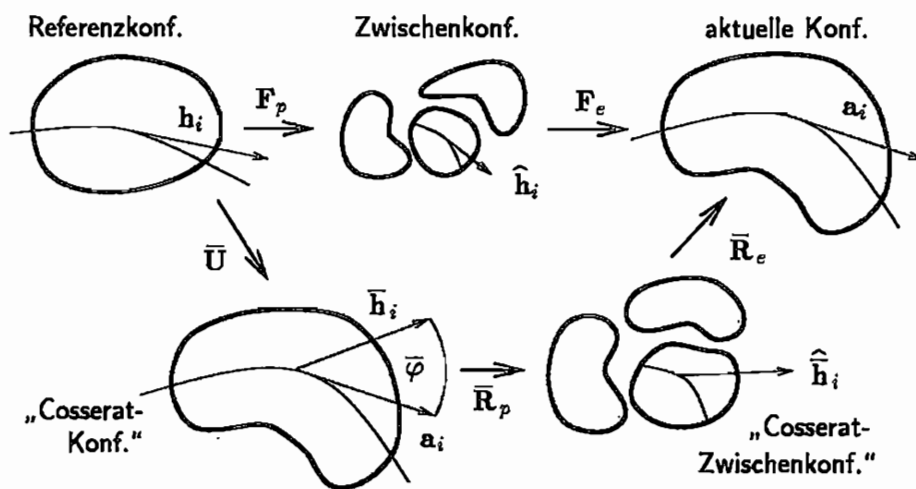


Abbildung 1: Konfigurationen der elastisch-plastischen Formulierung

Als Folge der multiplikativen Zerlegung von \mathbf{F} und $\bar{\mathbf{R}}$ erhält man in Analogie zur additiven Zerlegung des *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensors der Standardformulierung eine additive Zerlegung der Verzerrungs- und Krümmungsmaße:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_e + \bar{\mathbf{A}}_p, \quad \overset{3}{\mathbf{K}} = \overset{3}{\mathbf{K}}_e + \overset{3}{\mathbf{K}}_p, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_p. \quad (10)$$

3 Die mikropolare Kompatibilitätsbedingung

Im folgenden wird durch kinematische Überlegungen eine Kompatibilitätsbedingung zwischen dem Verzerrungs- und Krümmungsmaß hergeleitet, die dann für eine elastisch-plastische Formulierung verwendet wird.

Der Gradient des inversen Deformationsgradienten ist wegen der *Schwarzschen* Vertauschungsregel symmetrisch bezüglich des 2. und 3. Basisvektors:

$$\text{grad } \mathbf{F}^{-1} = -\text{grad grad } \mathbf{u} = (\text{grad } \mathbf{F}^{-1})^{\text{TS}}. \quad (11)$$

Einsetzen der Gleichungen (5) - (7) in Gleichung (11) liefert nach einigen Umformungen eine Form der gesuchten Kompatibilitätsbedingung:

$$\boxed{({}^3 \mathbf{E} \mathbf{K})^{\mathfrak{g}} - ({}^3 \mathbf{E} \mathbf{K})^{\mathfrak{g}T} = \mathbf{A} - (\mathbf{A})^T} \quad (12)$$

Der Tensor \mathbf{A} entsteht durch den Vorwärtstransport der ersten beiden Basisvektoren von „grad $\bar{\mathbf{A}}$ “ auf die aktuelle Konfiguration und kann somit ebenfalls additiv in einen elastischen und plastischen Anteil zerlegt werden.

$$\mathbf{A} := \{ \mathbf{F} [(\text{grad } \bar{\mathbf{A}})^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\mathfrak{g}} \} = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_p \quad (13)$$

(12) ist eine tensorielle Gleichung 3. Stufe, bei der jedoch der symmetrische Anteil bezüglich der letzten beiden Basisvektoren verschwindet. Somit sind von den ursprünglich 27 skalaren Gleichungen nur neun voneinander unabhängig. Aus diesem Grund kann man (12) nach \mathbf{K} auflösen (vgl. *Ehlers & Volk* [3]):

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E} [\mathbf{A} + (\mathbf{A})^T - (\mathbf{A})^{\mathfrak{g}T}] \}^2 \quad (14)$$

Einsetzen von (10) in (14) und separieren nach elastischen und plastischen Anteilen liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E} [\mathbf{A}_e + (\mathbf{A}_e)^T - (\mathbf{A}_e)^{\mathfrak{g}T}] \}^2, \\ \mathbf{K}_p &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E} [\mathbf{A}_p + (\mathbf{A}_p)^T - (\mathbf{A}_p)^{\mathfrak{g}T}] \}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Aus Gleichung (15) erkennt man, daß bei einer konstitutiv vorgegebenen Evolutionsgleichung für $\bar{\mathbf{A}}_p$ die Evolutionsgleichung für \mathbf{K}_p direkt aus Gleichung (15) bestimmbar ist. Eine formale Linearisierung von (12) - (15) liefert entsprechende Ergebnisse für den geometrisch linearen Bereich (siehe *Ehlers & Volk* [3]).

Literatur

- [1] Diebels, S., Ehlers, W.: On basic equations of multiphase micropolar materials. *Technische Mechanik* **16** (1996), 77-88.
- [2] Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. *Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47*, Universität-GH-Essen 1989.
- [3] Ehlers, W., Volk, W.: On shear band localization phenomena induced by elasto-plastic consolidation of fluid-saturated soils, in D. J. R. Owen, E. Oñate and E. Hinton (eds.): *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, pp. 1657-1664. CIMNE, Barcelona 1997.
- [4] Steinmann, P.: A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* **31** (1994), 1063-1084.

Numerische Simulation elastisch-plastischer Deformationen kristalliner Festkörper

Michael Brünig

Lehrstuhl für Baumechanik - Statik, Universität Dortmund,
August-Schmidt-Str. 8, D-44221 Dortmund, Germany
Email: bruenig@busch.bauwesen.uni-dortmund.de

1 Einleitung

Die numerische Analyse des finiten elastisch-plastischen Deformationsverhaltens kristalliner Festkörper basiert häufig auf der Betrachtung einfacher mikromechanischer Schermechanismen in vorgegebenen Kristallebenen, die dann zu isochoren inelastischen Dehnungen führen. Bei in Brünig [1] vorgestellten numerischen Simulationen werden nach dem Schmid-Gesetz die jeweiligen Fließbedingungen mit zu den kristallographischen Versetzungen konjugierten mikromechanischen Scherspannungen formuliert, woraus vereinfachte mechanische Modelle resultieren. Diese sind jedoch nicht immer geeignet, experimentelle Beobachtungen und Ergebnisse numerisch abzubilden. Zum Beispiel berichten Spitzig et al. [2] von eindimensionalen Zug- und Druckversuchen, bei denen plastische Volumenzunahmen zu beobachten waren. Auch wurden hierbei in den Druckversuchen betragsmäßig größere Fließspannungen als in den Zugversuchen gemessen. Darüberhinaus führten Barendrecht und Sharpe [3] zweidimensionale Belastungsversuche mit Zink-Kristallen durch, wobei die kritische Scherspannung beim erstmaligen plastischen Fließen um bis zu 30% kleinere Werte gegenüber dem einfachen Zugversuch aufwies. Diese experimentellen Resultate sollen mit Hilfe numerischer Simulationen wiedergegeben werden. Daher ist es erforderlich, aufwendigere kinematische Hypothesen und verallgemeinerte Fließbedingungen zu formulieren sowie diese in das kontinuumsmechanische Modell und das in [1] vorgestellte Rechenprogramm zu implementieren.

2 Kontinuumsmechanische Modellierung

Die kinematischen Grundgleichungen zur Beschreibung des beobachteten elastisch-plastischen Verhaltens kristalliner Festkörper basieren auf der Annahme, daß die makromechanischen inelastischen Dehnungen allein durch kristallographische Deformationen hervorgerufen werden. Nach Nemat-Nasser [4] und Iwakuma und Nemat-Nasser [5] wird die Rate des plastischen Anteils des auf die Zwischenkonfiguration bezogenen Greenschen

Verzerrungstensors

$$\overset{\nabla}{\mathbb{E}}^{pl} = \sum_{\alpha} (\mathbf{N}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha}) \quad (1)$$

direkt aus der kristallographischen Scherrate $\dot{\gamma}^{\alpha}$ gewonnen. In Gl. (1) symbolisiert

$$\mathbf{N}^{\alpha} = \text{symm} \left\{ \overset{*}{\mathbb{C}}(\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha}) + a_1 \overset{*}{\mathbb{C}} \overset{*}{\mathbb{G}}^{-1} (\mathbf{n}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha}) + a_2 \overset{*}{\mathbb{C}} \overset{*}{\mathbb{G}} (\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}^{\alpha}) + a_3 \overset{*}{\mathbb{C}} \right\} . \quad (2)$$

assoziierte kristallographische Einheitsverzerrungen bzgl. des unverformten Kristallgitters, während $\overset{*}{\mathbb{C}}$ den elastischen Cauchy-Green-Tensor und die orthonormalen Basen \mathbf{n}^{α} und \mathbf{m}^{α} die Normale der Scherebene bzw. die Scherrichtung des Systems α kennzeichnen. In Gl. (2) beschreibt der erste Summand isochore plastische Deformationen, während mit den zusätzlichen Termen die inelastische Volumenzunahme berechnet wird. Die kinematischen Parameter a_1 , a_2 und a_3 werden aus Experimenten gewonnen.

Das makromechanische elastische Materialverhalten wird unter der Voraussetzung der Existenz einer elastischen Potentialfunktion Φ^{el} durch das hyperelastische Stoffgesetz

$$\overset{*}{\mathbb{S}} = \overset{*}{\rho} \frac{\partial \Phi^{el}}{\partial \overset{*}{\mathbb{E}}^{el}} , \quad \mathbb{C} = \overset{*}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi^{el}}{\partial \overset{*}{\mathbb{E}}^{el} \otimes \partial \overset{*}{\mathbb{E}}^{el}} \quad (3)$$

erfaßt, wobei $\overset{*}{\mathbb{S}}$ und $\overset{*}{\mathbb{E}}^{el}$ den makromechanischen Spannungs- und elastischen Verzerrungstensor, $\overset{*}{\rho}$ die Dichte sowie \mathbb{C} den Tensor der elastischen Moduln jeweils bezogen auf die Zwischenkonfiguration darstellen. Das plastische Fließen in jedem Schersystem wird bei mehraxialen Spannungszuständen mit Hilfe der von Brünig [6] vorgeschlagenen mikromechanischen Vergleichsspannung

$$\tau^{\alpha} = \sigma_{nm}^{\alpha} + b_1 \sigma_{nn}^{\alpha} + b_2 \overset{*}{J} 3p , \quad (4)$$

beschrieben, die ebenfalls in der Form

$$\tau^{\alpha} = \overset{*}{\mathbb{S}} \cdot \mathbf{M}^{\alpha} , \quad \mathbf{M}^{\alpha} = \text{symm} \left\{ \overset{*}{\mathbb{C}}(\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha}) + b_1 \overset{*}{\mathbb{C}} \overset{*}{\mathbb{G}}^{-1} (\mathbf{n}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha}) + b_2 \overset{*}{\mathbb{C}} \right\} \quad (5)$$

angegeben werden kann. In Gl. (4) bezeichnen σ_{nm}^{α} und σ_{nn}^{α} die mikromechanische Scher- bzw. Normalspannung im jeweiligen Schersystem α , und p stellt die hydrostatische Spannung dar. Der Materialparameter b_1 erfaßt den durch die mikromechanische Normalspannung hervorgerufenen Widerstand des kristallinen Materials gegen das plastische Scheren und kann somit als mikromechanischer Reibkoeffizient angesehen werden. Darüberhinaus kann der Einfluß des hydrostatischen Spannungszustands auf kristallographische Versetzungsmechanismen mit Hilfe des Stoffparameters b_2 berücksichtigt werden. In dem

Schersystem α tritt nun plastisches Fließen auf, sobald die mikromechanische Vergleichsspannung die momentane Fließbedingung

$$\tau^\alpha = \tau_P^\alpha \text{ mit } \dot{\tau}_P^\alpha = \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta) \quad (6)$$

erfüllt, wobei die Matrix $h^{\alpha\beta}$ die jeweiligen Verfestigungsmoduln enthält. Es wird nun aus (4) ersichtlich, daß das Fließgesetz (1) nicht zur aktuellen Fließbedingung (6) assoziiert ist, da die kinematischen Parameter a_i und die konstitutiven Parameter b_i normalerweise nicht identisch sind.

Das elastisch-plastische Werkstoffverhalten des kristallinen Körpers wird nun durch Kombination des elastischen und plastischen Stoffgesetzes (Gl. (3) und (4)) erfaßt. Dabei erfolgt die Integration der Ratengleichungen nach der Methode des plastischen Prediktors, die sich durch hohe Genauigkeit sowie numerische Effizienz und Stabilität auszeichnet. Die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen werden in ein nichtlineares Finite-Element-Programm implementiert, dessen Lösung auf einem Newton-Raphson-Algorithmus basiert. Aufgrund der konsistenten Linearisierungen der nichtlinearen Gleichungen werden nur wenige Iterationen zur hinreichend genauen Berechnung des Gleichgewichtszustands benötigt, so daß die Rechenzeiten für die aufwendigen elastisch-plastischen Auswertungen in den jeweiligen Gaußpunkten relativ kurz gehalten werden können.

3 Numerische Simulationen

Basierend auf dem vorgestellten kontinuumsmechanischen Modell wurden zahlreiche numerische Simulationen durchgeführt, die in Brünig [6] sowie Brünig und Obrecht [7] ausführlich dokumentiert sind. Die wesentlichen Aspekte sollen hier zusammengefaßt werden.

Die numerischen Simulationen der zwei axialen Zugversuche mit Zinkkristallen nach [3] zeigen, daß mit einer modifizierten mikromechanischen Fließbedingung (Gl. (4)) das globale Last-Dehnungsverhalten gut wiedergegeben werden kann. Eine auf dem Schmid-Gesetz basierende Rechnung hingegen führt zu einer drastischen, über 30%-igen Überschätzung der von der Probe aufnehmbaren Spannungen. Auch bei der Simulation der in [2] vorgestellten ein axialen Zug- und Druckversuche beschreibt die modifizierte Fließbedingung (4) das unterschiedliche Plastizierungsverhalten im Zug- und Druckbereich. Die Annahme eines assoziierten Fließgesetzes führt hierbei zu einer deutlichen plastischen Volumenzunahme, die jedoch viel größer als die gemessenen ausfiel. Daher müssen die

kinematischen Parameter in Gl. (2) unabhängig von der Fließbedingung ermittelt werden, was dann auf ein nichtassoziertes Fließgesetz führt. Numerische Studien haben darüberhinaus gezeigt, daß die erweiterten kinematischen und konstitutiven Modelle (Gl. (2) und (4)) einen starken Einfluß auf das Lokalisierungsverhalten aufweisen. So führen anwachsende konstitutive Parameter b_i auf einen drastischen Abfall der globalen Spannung, bei der die Lokalisierung initiiert wird. Zum Beispiel wird für den relativ kleinen Parameter $b_2 = 0,10$ ein Abfall der kritischen Spannung von über 20% verglichen mit einer Berechnung nach dem Schmid-Gesetz ermittelt. Daneben resultieren aus steigenden kinematischen Parametern a_i deutlich kleinere Dehnungen der Probe beim Einsetzen der Lokalisierung.

Literatur

- 1 Brünig, M.: Macroscopic theory and nonlinear finite element analysis of micromechanics of single crystals at finite strains. *Comput. Mech.* **18**, 113-123 (1996).
- 2 Spitzig, W.A., Sober, R.J., Richmond, O.: Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite. *Acta metall.* **23**, 885-893 (1975).
- 3 Barendrecht, J.A., Sharpe, W.N.: The effect of biaxial loading on the critical resolved shear stress of zinc single crystals. *J. Mech. Phys. Solids* **21**, 113-123 (1973).
- 4 Nemat-Nasser, S.: On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials. *J. Appl. Mech.* **50**, 1114-1126 (1983).
- 5 Iwakuma, T., Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals. *Proc. R. Soc. London A* **394**, 87-119 (1984).
- 6 Brünig, M.: Numerical modelling of finite elastic-plastic deformations of crystalline solids including Non-Schmid effects. In: D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton (eds.), *Computational Plasticity 5 - Fundamentals and Applications*, 907-912, (CIMNE, Barcelona 1997).
- 7 M. Brünig, H. Obrecht: Finite elastic-plastic deformation behavior of crystalline solids based on a non-associated macroscopic flow rule. *Int. J. Plasticity*. (zur Veröffentlichung eingereicht).

Simulation kristallplastischer Fließvorgänge unter Berücksichtigung von großen Deformationen

H. Wittich, J. Thesing, A. Ziegenbein

Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre
TU Braunschweig

Zusammenfassung

Metallische Werkstoffe sind im allgemeinen polykristallin aufgebaut. Die Kristalle verhalten sich sowohl elastisch als auch plastisch anisotrop. Von einem gemeinsamen Bezugssystem aus betrachtet besitzen die Körner abhängig von der jeweiligen kristallographischen Orientierung verschiedene Eigenschaften. Durch den Zwang zur kompatiblen Verformung kommt es bei Belastungen des Materials zu inhomogenen Dehnungsverteilungen, die stark lokalisiert auftreten können und als Vorstufe von Schädigung technische Bedeutung besitzen. Da es nach theoretischen Erkenntnissen bei den Dehnungslokalisierungen zu Gitterrotationen kommt, deren Einfluß nicht zu vernachlässigen ist, wurde das nichtlineare geometrische Verhalten durch die Theorie der großen Deformationen in dem dargestellten 3D-FEM-Modell berücksichtigt. Im Rahmen einer DFG-Forschergruppe wurden Experimente an speziellen kfz-Polykristallproben sowie deren Simulationen durchgeführt. Die ersten Ergebnisse werden dargestellt.

1 Vorstellung der Modellgleichungen

Zur Beschreibung der Spannungsänderungen bei kristallplastischen Vorgängen wird nach ARAVAS und AIFANTIS [1] das hypoelastische Stoffgesetz in Verknüpfung mit der Jaumannschen mitrotierenden Zeitableitung verwendet:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{E} \mathbf{D}^{el} + \mathbf{W}^{rot} \sigma - \sigma \mathbf{W}^{rot} - \frac{(\det(\mathbf{F}))'}{\det(\mathbf{F})} \sigma \approx \mathbf{E} \mathbf{D}^{el} + \mathbf{W}^{rot} \sigma - \sigma \mathbf{W}^{rot}. \quad (1)$$

Unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verzerrungen ist die Determinante von \mathbf{F} gleichbleibend ungefähr Eins und ihre zeitliche Änderung deshalb Null. Die elastischen Eigenschaften des jeweiligen Kristalls werden mittels des Tensors $\hat{\mathbf{E}}$ in lokalen Koordinaten beschrieben. Der Tensor wird aufgrund der symmetrischen und orthotropen Eigenschaften von kfz-Kristallen durch die drei elastischen Konstanten c_{11} , c_{12} und c_{44} bestimmt. Da die Transformation zwischen globalen und lokalen Koordinaten durch den Tensor $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\Upsilon_i, \mathbf{W}^{rot})$ beschrieben wird, kann der globale Elastizitätstensor \mathbf{E} durch die Vorschrift

$$\mathbf{E}_{ijkl} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} \hat{\mathbf{E}}_{mnop} \quad (2)$$

bestimmt werden. Der Transformationstensor \mathbf{a} ist zum einen von drei Eulerwinkeln, welche in Υ_i zusammengefaßt sind und die Verdrehung zwischen globalen und lokalen Koordinaten beschreiben, zum anderen von der Starrkörperrotation \mathbf{W}^{rot} abhängig, die die Gitterdrehung wiedergibt. Wird der Deformationsgradient über den Produktansatz

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}^{el} \mathbf{F}^{vp} \quad (3)$$

zerlegt, läßt sich der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} wie folgt durch drei Summanden beschreiben:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \underbrace{\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T}_{rotat.} + \underbrace{\mathbf{R} \dot{\mathbf{U}}^{el} (\mathbf{U}^{el})^{-1} \mathbf{R}^T}_{elast./rotat.} + \underbrace{\mathbf{R} \mathbf{U}^{el} \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{U}^{el})^{-1} \mathbf{R}^T}_{elast./rotat./visko.} \quad (4)$$

Diese drei Summanden werden aufgrund der verschiedenen Deformationsmechanismen im weiteren durch die Indizes $()^{rot.}$, $()^{el}$ und $()^{vp}$ gekennzeichnet. Nach einer Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten

L in seinen symmetrischen Anteil D und seinen antimetrischen Anteil W ist es möglich, die gesuchten Beiträge D^{el} und W^{rot} durch folgende Gleichungen zu bestimmen:

$$D^{el} = D - D^{vp}, \quad (5)$$

$$W^{rot} = W - W^{vp} - \underbrace{W^{el}}_{\approx 0}, \quad (6)$$

wobei der Anteil W^{el} unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verzerrungen zu vernachlässigen ist. Die viskoplastischen Anteile lassen sich nach HARDER [2] durch die tensoriellen Beziehungen

$$D^{vp} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{12} \left(m^{(s)} \otimes n^{(s)} + n^{(s)} \otimes m^{(s)} \right) \dot{\gamma}^{(s)} \quad \text{und} \quad (7)$$

$$W^{vp} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{12} \left(m^{(s)} \otimes n^{(s)} - n^{(s)} \otimes m^{(s)} \right) \dot{\gamma}^{(s)} \quad (8)$$

bestimmen. Der Gleitebenennormalenvektor $n^{(s)}$ und der Gleitrichtungsvektor $m^{(s)}$ des jeweiligen Gleitsystems (s) werden über Entwicklungsgleichungen bestimmt, mit Hilfe des Tensorprodukts verknüpft und anschließend mit der entsprechenden Abgleitrate $\dot{\gamma}^{(s)}$ multipliziert. Die Summation über die zwölf Gleitsysteme entspricht der Superposition der Einfachgleitungen. Die kinetische Gleichung

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \dot{\gamma}_0 \left(\tau_{eff}^{(s)} \right)^2 \exp \left\{ k \frac{\left| \tau_{eff}^{(s)} \right|}{\tau_0^{(s)}} \right\} \text{sign}(\tau_{eff}^{(s)}), \quad (9)$$

die aus der Orowan-Beziehung abgeleitet wurde und keine explizite Fließgrenze besitzt, beschreibt die Abgleitrate in Abhängigkeit der effektiven ($\tau_{eff}^{(s)}$) und der kritischen Schubspannung $\tau_0^{(s)}$ jedes Gleitsystems. Die Werkstoffparameter $\dot{\gamma}_0$ und k besitzen eine physikalische Bedeutung und können deshalb in ihrer Größenordnung abgeschätzt werden. Dies führt bei ihrer Anpassung zu einer Verkleinerung des Wertebereichs und des numerischen Aufwandes. Zur Beschreibung der effektiven Schubspannungen wird die Differenz äußerer und innerer Spannungen auf das jeweilige Gleitsystem projiziert:

$$\tau_{eff}^{(s)} = \det(F) \left((\sigma - \sigma_{kin}) n^{(s)} \right) m^{(s)} \approx \left((\sigma - \sigma_{kin}) n^{(s)} \right) m^{(s)}. \quad (10)$$

Unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verzerrungen ist die Determinante von F ungefähr Eins. Die weitreichenden, inneren Spannungen σ_{kin} beschreiben den Wechselwirkungsmechanismus von Versetzungen durch deren Aufstau oder Bildung energetisch günstiger Versetzungsstrukturen. Der Tensor

$$\sigma_{kin} = \sum_{s=1}^{12} \Omega^{(s)} \left(m^{(s)} \otimes n^{(s)} + n^{(s)} \otimes m^{(s)} \right) \quad (11)$$

entsteht durch Superposition der Rückspannungstensoren der einzelnen Gleitsysteme, wobei sich die Rückspannung $\Omega^{(s)}$ über eine Entwicklungsgleichung bestimmt, die wiederum in Abhängigkeit von der Abgleitrate und der Rückspannung selbst formuliert wird. Die Rückspannungen haben einen anisotropen Charakter, da sie Abgleitprozesse je nach Abgleitrichtung behindern oder begünstigen können. Die Bezugsgröße der kinetischen Gleichung, die kritische Schubspannung $\tau_0^{(s)}$, ist vergleichbar mit einer Fließgrenze und wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\tau_0^{(s)} = Gb \sqrt{\sum_{r=1}^{12} A_{sr} \rho^{(r)}}. \quad (12)$$

Der Schubmodul G , der Betrag des Burgersvektors b und die Wechselwirkungsmatrix A_{sr} sind Werkstoffparameter, die Versetzungsdichte $\rho^{(r)}$ wird mittels einer Entwicklungsgleichung für jedes Gleitsystem bestimmt. Es ergibt sich somit ein aus 33 gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen bestehendes System:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}(\sigma, \Omega, \rho, \mathbb{I}), & \dot{\Omega} &= \dot{\Omega}(\sigma, \Omega, \rho, \mathbb{I}), \\ \dot{\rho} &= \dot{\rho}(\sigma, \Omega, \rho, \mathbb{I}), & \dot{\mathbb{I}} &= \dot{\mathbb{I}}(\sigma, \Omega, \rho, \mathbb{I}). \end{aligned} \quad (13)$$

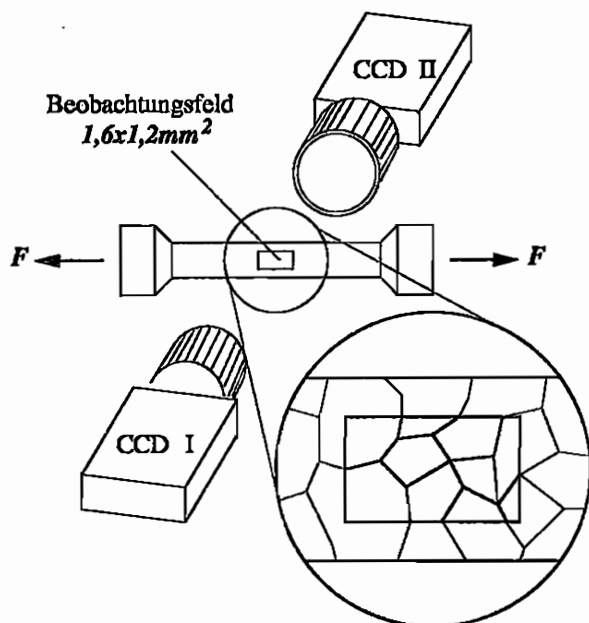


Abbildung 1: Versuchsaufbau

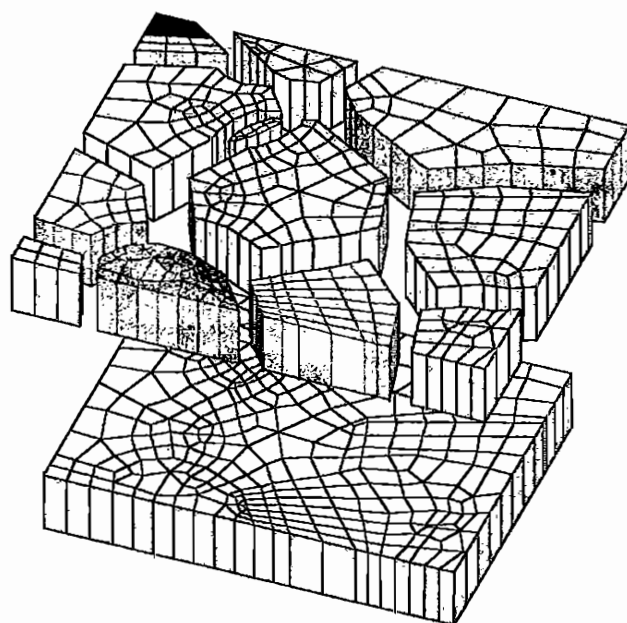


Abbildung 2: FE-Modell mit Zwillingen

2 Versuchsaufbau und FE-Modell

Die flache Zugprobe aus Cu15at%Al, die in der Abbildung 1 dargestellt ist, hat eine Dicke von ca. $200\mu\text{m}$. Der durchschnittliche Korndurchmesser beträgt $600\mu\text{m}$. Bei dem Beobachtungsfeld mit einer Größe von $1,6 \times 1,2\text{mm}^2$ handelt es sich sowohl auf der Vorder- als auch auf der Rückseite um den identischen Bereich. Die Korn- und Zwillingsgrenzen dieser Bereiche dienen als Vorlage für das in Abbildung 2 dargestellte FE-Modell. Die Probe wurde mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von $1,15\mu\text{m/s}$ bei Raumtemperatur verformt und die daraus resultierende Kraft gemessen. Auf der einen Seite der Probe wurde mittels einer optischen Ganzfeldmeßmethode (s. BERGMANN [3]) die Dehnungsverteilung ermittelt. Auf der gegenüberliegenden Probenseite wurde die Entstehung und Entwicklung von Gleitlinien beobachtet und deren Struktur nach der Verformung mit Hilfe eines Kraftmikroskops eingehend untersucht. Die Orientierung der Körner bzw. der Zwillingsbereiche wurden über EBSD (Electronic Backscattering Pattern) bestimmt. Die einzelnen Fragmente in der Abbildung 2 stellen die Körner des simulierten Probenbereichs dar und bestehen aus 3D-FE-Elementen. Die aufgefundenen Zwillinge wurden entsprechend ihrer Oberflächenstruktur ebenso wie Korngrenzflächen parallel zur Dickenrichtung modelliert. Durch Eliminieren der doppelten Knoten werden die einzelnen Körner fest mit ihrem Gegenüber gekoppelt. Das so entstandene, geschlossene FE-Netz wird an seinen Randknoten mit den aus der Messung stammenden Verschiebungen beaufschlagt. Die unterschiedlichen Eigenschaften der Körner ergeben sich aus den verschiedenen Kristallorientierungen und das Werkstoffmodell ist für die gesamte Probe einheitlich.

3 Ergebnisse

Die in Abbildung 3 dargestellten Längsdehnungen ϵ_{11} zeigen ein deutliches Band mit lokal stark erhöhten Verformungen, das von der oberen linken zur untern rechten Ecke verläuft. Die übrigen Bereiche sind demgegenüber nur gering verformt. In der FE-Analyse (Abbildung 4) wurde qualitativ das gleiche Verhalten berechnet. Quantitativ stimmen die Dehnungen nach beiden Ermittlungsmethoden sehr gut überein, im Scherband herrschen beiderseits 10 – 15% Längsdehnungen. Betrachtet man die globale Spannungs-Dehnungskurve, welche in Abbildung 5 dargestellt ist, sieht man, daß sowohl im Experiment



Abbildung 3: Dehnungslängsmessung

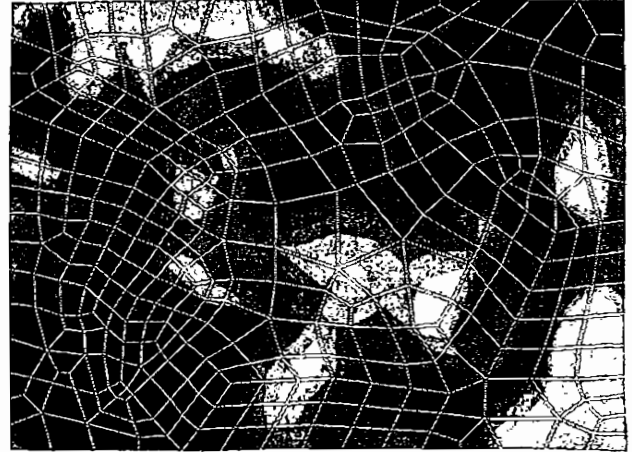


Abbildung 4: Ergebnis FEM-Analyse

als auch in der Analyse der Vorder- und Rückseite das Fließen bei gleich großen Spannungen beginnt, allerdings verfestigt das simulierte Metall stärker als die reale Probe.

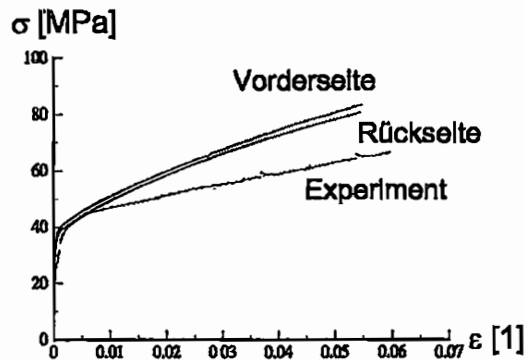


Abbildung 5: Spannungs-Dehnungsverlauf

4 Ausblick

Für die Zukunft ist eine dreidimensionale Modellierung der Körner bzw. der Zwillings Ebenen geplant. Die notwendig gewordenen Erweiterungen des Pre-Prozessors werden bereits erarbeitet. Des Weiteren sind differenzierte Anpassungen der Modellparameter an Einkristall-Versuche und eine Erweiterung des Werkstoffmodells auf inhomogene Gleitung (s. PLESSING [4]) notwendig, um das physikalisch nichtlineare Verhalten der Legierung besser beschreiben zu können.

Literatur

- [1] Aravas, N. und E.C. Aifantis. *On the Geometrie of Slip and Spin in Finite Plastic Deformation*. Int. J. Plasticity 7, 141-160, 1991.
- [2] Harder, J. *Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 28, ISBN 3-920395-27-1, 1997.
- [3] Bergmann, D.; et al. *3D deformation measurement in small areas based on grating method and photogrammetry*. SPIE Proceedings Vol. 2787, pp. 53-61, 1996.
- [4] Plessing, J. *Nahordnung und inhomogene Gleitung in konzentrierten Kupferlegierungen*. Aachen: Shaker, ISBN 3-8265-0974-9, 1995.

MIKRO-MAKRO-UNTERSUCHUNGEN AN POLYKRISTALLEN

F. DUDERSTADT

Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik
im Forschungsverbund Berlin e.V., Mohrenstraße 39
D-10117 Berlin

1. Einführung

In realen Bauteilen sind die Materialeigenschaften im allgemeinen nicht homogen verteilt. Bei einer Bauteilbeanspruchung entstehen dadurch inhomogene Verzerrungs- und Spannungsfelder. Diese Felder sind experimentell und rechnerisch nur sehr aufwendig zu bestimmen. Ziel einer Mikro-Makro-Untersuchung soll es deshalb sein, ein Ersatzmodell mit homogener Materialverteilung derart anzugeben, daß makroskopisch gleiches Materialverhalten vorliegt. Wird das makroskopische Materialmodell aus einer Mittelung über hinreichend viele Mikrostrukturelemente gewonnen, so daß sich makroskopisch tatsächlich das gleiche Materialverhalten ergibt, spricht man von der Homogenisierung eines repräsentativen Volumenelements (RVE).

2. Makroskopische Größen

Die Berechnung makroskopischer Größen erweist sich als besonders bequem, wenn die materiellen Punkte eines Körpers \mathcal{B} in der Bezugsplatzierung κ_R ein Parallelepipid bilden und die Abweichungen der Momentanplatzierung κ von einem Parallelepipid, die durch die Ortsvektordifferenzen $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{X}$ beschrieben werden, der folgenden Bedingung genügen:

$$\int_{\kappa_R(\mathcal{B})} \text{Grad } \mathbf{w} \, dV = 0. \quad (1)$$

Dabei werden mit \mathbf{x} , \mathbf{X} und $\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{X}$ nacheinander die Ortsvektoren eines materiellen Punktes in der Momentanplatzierung, in der Bezugsplatzierung und in der Platzierung, die durch die homogene Deformation mit $\tilde{\mathbf{F}}$ aus der Bezugsplatzierung hervorgeht, bezeichnet. Die Berechnungsvorschrift für den makroskopischen Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{V_0} \int_{\kappa_R(\mathcal{B})} \mathbf{F} \, dV$ ergibt sich

unmittelbar mit dem Gaußschen Satz für einfach zusammenhängende Gebiete aus (1), denn dann gilt

$$\int_{\partial\kappa_R(\mathcal{B})} \mathbf{w} \otimes \mathbf{n}_R \, dA = 0. \quad (2)$$

Gleichung (2) ist erfüllt, wenn die Fluktuationen \mathbf{w} der Randpunkte, die in der Bezugsplatzierung entgegengesetzte Flächennormalen haben, gleich sind. Ein derartiger Körper läßt sich an

seinen Rändern, immer mit solchen Körpern periodisch fortsetzen, die durch Translation ineinander überführbar sind. Wenn die Cauchyschen Randspannungsvektoren \mathbf{t} die Bedingung

$$\int_{\partial \kappa, (\mathcal{D})} \dot{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{t} dA = \mathbf{0} \quad (3)$$

erfüllen, ergibt sich unter Beachtung von $\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}$ und $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ aus der Leistungsäquivalenz zwischen RVE und homogenen Ersatzmodell die Vorschrift zur Berechnung der makroskopischen Cauchy-Spannung $\tilde{\mathbf{T}}$:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{V} \int_{\kappa, (\mathcal{D})} \mathbf{T} dV. \quad (4)$$

Gleichung (4) ist für beliebige periodische Berandungen unter Beachtung von (2) erfüllt, wenn die materiellen Punkte, die auf gegenüberliegenden Rändern in jeder Platzierung gleiche Fluktuationsgeschwindigkeiten haben, betragsgleiche und entgegengesetzt gerichtete Spannungsvektoren \mathbf{t} besitzen. Darin enthalten sind die Sonderfälle konstanter und verschwindender Randfluktuationen. Außerdem gilt (4) auch für spannungsfreie Ränder, d.h. für $\mathbf{t} = \mathbf{0}$.

3. Materialmodell auf Mikroebene

Die Mikrostrukturelemente sollen aus Materialien mit zueinander isomorphen elastischen Bereichen bestehen. Ein solches Material läßt sich vollständig durch die Angabe eines elastischen Referenzgesetzes und einer Entwicklungsgleichung für den materiellen Isomorphismus angeben. Zur Beschreibung von kubisch flächenzentrierten Kristalliten wird ein in \mathbf{C} lineares Gesetz, welches die kubische Symmetrie des Materials berücksichtigt, verwendet

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}_t(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) = \mathbf{P} \mathbf{K}_R (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{C}_0) \mathbf{P}^T. \quad (5)$$

Die invariante Spannung $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^T$ ist durch Zurückziehen der Cauchy-Spannung \mathbf{T} auf die Bezugsplatzierung definiert (ausführliche Darlegung des Konzepts in [1]). \mathbf{K}_t beschreibt die zeitabhängige Steifigkeitstetrade im momentanen elastischen Bereich \mathcal{E}_t , die über die inelastische Transformation \mathbf{P} materiell isomorph mit der konstanten Steifigkeitstetrade \mathbf{K}_R im Referenzbereich \mathcal{E}_R verknüpft ist. \mathbf{C} und \mathbf{C}_0 sind die rechten Cauchy-Green-Tensoren in der momentanen und der entlasteten Konfiguration, wobei die entlastete Konfiguration invariant unter Wechsel des elastischen Bereichs ist. Die Entwicklungsgleichung für \mathbf{P} ergibt aus der Gleitsystemtheorie für kubisch-flächenzentrierte Kristallite. Bei Beschränkung auf die vier Oktaeder-Gleitebenen erfolgt die Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens durch 12 Gleitsysteme α . Es gilt:

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \begin{cases} \mathbf{0} & \forall |\tau_\alpha| < \tau_{k\alpha}, \\ \sum_{\alpha=1}^{12} -\dot{\mu}_\alpha \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha & \forall |\tau_\alpha| \geq \tau_{k\alpha}. \end{cases} \quad (6)$$

Für die orthonormierten Eulerschen Gleitsystemvektoren \mathbf{d}_α^E und $\mathbf{n}^{E\alpha}$ berechnen sich die Schmid'schen Schubspannungen τ_α mit $\tau_\alpha = sp(\mathbf{T}\mathbf{d}_\alpha^E \otimes \mathbf{n}^{E\alpha})$. Bei der entsprechenden Lagrange'schen Formulierung, $\tau_\alpha = \gamma_\alpha sp(\mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha)$ mit den zugehörigen Gleitrichtungen $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{P}\mathbf{d}_{\alpha R}$ und Gleitebenennormalen $\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{P}^T \mathbf{n}_{\alpha R}$, kann bei kleinen elastischen Deformationen der aus dem Platzierungswechsel resultierende Normierungsfaktor $\gamma_\alpha=1$ gesetzt werden. Mit Festlegung eines Referenzgitters lassen sich die Gleitsysteme sämtlicher Anfangsorientierungen mit einem orthogonalen Anfangswert für \mathbf{P} aus den Referenzgleitsystemen $\mathbf{d}_{\alpha R} \otimes \mathbf{n}^{\alpha R}$ erzeugen. Die Scherrate $\dot{\mu}_\alpha$ wurde mit dem Bingham-Ansatz $\dot{\mu}_\alpha = \eta^{-1} sign(\tau_\alpha) |\tau_\alpha - \tau_{k\alpha}|$ modelliert (siehe [2]). Das Vorhandensein der Viskosität η ermöglicht das numerische Lösen der tensorwertigen gewöhnlichen Differentialgleichung (6) mit einem expliziten Verfahren. Die Realisierung isotroper Verfestigung erfolgt durch eine Entwicklungsgleichung für die kritische Schubspannung $\tau_{k\alpha}$ nach [3]. Außerdem wird noch eine Entwicklungsgleichung für die akkumulierte Summe der Gleitungen $\bar{\mu}$ benötigt

$$\dot{\tau}_{k\alpha} = \sum_{\beta=1}^{12} \left[h_s + (h_0 - h_s) sech^2 \left(\frac{h_0 - h_s}{\tau_{k\beta} - \tau_{k0}} \bar{\mu} \right) \right] q_{\alpha\beta} |\dot{\mu}_\beta| \quad \text{mit } q_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \forall \alpha = \beta, \\ 1,4 & \forall \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{\bar{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^{12} |\dot{\mu}_\alpha|. \quad (8)$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck beschreibt die Verfestigungsrate, deren Verlauf durch die vier Materialkonstanten h_0 , h_s , τ_{k0} und $\tau_{k\alpha}$ festgelegt wird.

4. Numerische Lösung

Die Finite-Element-Diskretisierung des Ortes mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zur numerischen Approximation der schwachen Lösung von $div(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$ führt auf die Forderung nach Kräftegleichgewicht in jedem Knoten:

$$\sum_{\mathcal{Q}} \mathbf{k}_{N\mathcal{Q}} = \bar{\mathbf{k}}_N \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{N\mathcal{Q}} = \mathbf{V}_{R\mathcal{Q}} \mathbf{T}_{\mathcal{Q}}^{1PK} \mathbf{b}_{N\mathcal{Q}} = \mathbf{V}_{\mathcal{Q}} \mathbf{F}_{\mathcal{Q}} \mathbf{S}_{\mathcal{Q}} \mathbf{b}_{N\mathcal{Q}}. \quad (9)$$

Beiträge zur Knotenkraft \mathbf{k}_N liefern alle durch die Gauß-Legendreschen Quadraturformeln festgelegten Integrationsstützstellen \mathcal{Q} in den am Knoten N angrenzenden Elementen.

Die Steuerung der Deformation erfolgt durch Vorgabe von $\tilde{\mathbf{F}}$ zur Festlegung der Knotenverschiebungen, deren Fluktuationen \mathbf{w}_N verschwinden sollen. Bei Vorgabe eines konstanten globalen Geschwindigkeitsgradienten $\tilde{\mathbf{L}}$, z.B. mit $sp(\tilde{\mathbf{L}})=0$ für isochore Prozesse, berechnet sich die Verschiebung \mathbf{u}_N zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ bei total Lagrangescher Formulierung durch

$$\mathbf{u}_{N,t+\Delta t} = (\tilde{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{x}_N = (\tilde{\mathbf{F}}_t \exp(\Delta t \tilde{\mathbf{L}}) - \mathbf{I}) \mathbf{x}_N, \quad \text{wenn } \mathbf{w}_N \equiv \mathbf{0}. \quad (10)$$

Der Tensor $\exp(\Delta t \tilde{L})$ läßt sich gemäß [4] numerisch exakt durch Reihenentwicklung angeben. Aus (9), (6), (7) und (8) entsteht unter Beachtung von $\mathbf{u}_N = (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I})\mathbf{X}_N + \mathbf{w}_N$ und Einführung der beiden Supervektoren $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{\max(N)})$ und $\underline{\mathbf{A}}_{\text{a}} = (\mathbf{P}_{\text{a}}, \tau_{k1\text{a}}, \dots, \tau_{k12\text{a}}, \tilde{\mu}_{\text{a}})$ eine Anfangswertaufgabe für das folgende gewöhnliche nichtlineare Algebro-Differentialgleichungssystem:

$$\sum_{\text{a}} \mathbf{k}_N(\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{A}}_{\text{a}}) = \bar{\mathbf{k}}_N \quad (11a)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{a}} + \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{A}}_{\text{a}}) = \mathbf{0}. \quad (11b)$$

Mit wenig Speicherplatzaufwand lassen sich für (11b) explizite numerische Einzschrittlösungen ermitteln, die nach jedem Zeitschritt in (11a) eingesetzt werden. Die Euler-Vorwärts-Lösung von \mathbf{P} in (11b) ist im allgemeinen nicht unimodular. Zu ihrer Sicherstellung geht in (11a) nur ihr Distorsionsanteil ein, wobei die Konsistenzordnung wegen der Spurfreiheit der rechten Seite von (6) erhalten bleibt.

Die Lösungen $\underline{\mathbf{w}}$ des resultierenden nichtlinearen algebraischen Systems (11a) werden mit dem Newton-Raphson-Verfahren iterativ gewonnen. Verwendet man in jedem Newton-Schritt einen direkten Gleichungslöser, hängen Speicherplatz und Rechengeschwindigkeit unmittelbar von der Ausnutzung vorhandener Bandstrukturen ab. Wird der gesamte Rand homogen deformiert, erhält man bei der Knotennumerierung eines aus Würfeln zusammengesetzten Quaders, in der Reihenfolge Zeilen-Spalten-Ebenen, eine konstante Bandbreite. Bei periodisch fortgesetzten Strukturen, liegt bei einer solchen Reihenfolge keine Bandstruktur mehr vor. Eine Bandstruktur mit blockweise quadratisch abfallender Bandbreite läßt sich jedoch durch schalenweise Numerierung des Quaders von außen nach innen erzeugen, indem das Quadernetz als eine Folge ineinandergestellter Hohlquader betrachtet wird.

homogener Rand		periodischer Rand
Zellen, Spalten, Ebenen		schalenweise von Außen nach Innen
95	542	min: 80 max: 361

Beispiel: Bandbreite der unbekanntenen Fluktuationen einer 7x7x7 Knoten-Würfel-Struktur

Ein Beispiel für eine Texturrechnung nach dem hier beschriebenen Verfahren und ausführliche Literaturhinweise werden in [1] angegeben.

Literatur

- [1] Bertram, A., Böhlke., T, Kraska, M.: *Texture development of aluminum polycrystals under finite plastic deformation*. Submitted to proceedings of the IUTAM Symposium: Micro-and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity, Bochum (1997)
- [2] Kraska, M.; Bertram, A.: *Simulation of polycrystals using an FEM-based representative volume element*. TECHNISCHE MECHANIK 16, 1, (1996), S. 51-62
- [3] Harren, S. V.; Asaro, R. J.: *Nonuniform deformations in polycrystals and aspects of the validity of the Taylor model*. J. Mech. Phys. Solids 37, 2, (1989), S. 191-232
- [4] Zurrühl, R., Falk, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*. Bd.2. Springer, Berlin, Heidelberg (1950 - 1996)

Randbedingungen und Anfangsorientierungen für Polykristallsimulationen mit Finiten Elementen

Martin Kraska, TU Berlin

17. November 1997

1 Einleitung

Das globale Verhalten mikroskopisch inhomogener Materialien (z.B. Polykristalle) kann durch Mittelung über sogenannte repräsentative Volumenelemente (RVE) berechnet werden. Die dafür erforderliche Bestimmung des mikroskopischen Spannungs- und Verzerrungsfeldes erfolgt z.B. mit Finiten Elementen an einem Modell des heterogenen Aggregats.

Ein solches Modell sollte in der Lage sein, makroskopisch isotropes Verhalten darzustellen. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, in welchem Maße dies in Abhängigkeit vom betriebenen Aufwand gelingt. Dabei beschränken sich die Untersuchungen auf die makroskopische elastische Steifigkeit bei kleinen elastischen Verzerrungen.

Analog zum Vorgehen in [5] wird das Verschiebungsfeld in einen homogenen, durch den makroskopischen Deformationsgradient $\tilde{\mathbf{F}}$ bestimmten Anteil und einen inhomogenen Fluktuationsanteil \mathbf{w} aufgeteilt:

$$\mathbf{u}(P) = (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X}(P) + \mathbf{w}(P). \quad (1)$$

\mathbf{X} ist der Ort des Punktes P in der Bezugslage. Ist die globale Impulsbilanz für das Aggregat erfüllt und verschwinden die Fluktuationen auf dem Rand ($\mathbf{w}(\partial\mathcal{B}) = \mathbf{0}$) oder sind sie periodisch ($\mathbf{w}(\partial\mathcal{B}_-) = \mathbf{w}(\partial\mathcal{B}_+)$), so ist die makroskopische Cauchy-Spannung $\tilde{\mathbf{T}}$ gleich dem Mittelwert der lokalen Cauchy-Spannung über das Volumen in der Momentanplatzierung κ :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{V} \int_{\kappa(\mathbb{B})} \mathbf{T}(P) dV. \quad (2)$$

2 Randbedingungen

Für die Aufbringung der makroskopischen Deformation im FE-Programm bietet sich eine Formulierung mit Fluktuationen \mathbf{w}_k als Freiheitsgraden an [4]. Die Knotenverschiebungen sind analog zu (1) $\mathbf{u}_k = (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X}_k + A_{k\ell} \mathbf{w}_\ell$. Die Matrix $(A_{k\ell})$ ordnet die Systemfreiheitsgrade den Knotenfluktuationen zu und verbindet die Knotenresiduen $\mathbf{F}_k = A_{k\ell} \mathbf{f}_\ell$ mit den Systemresiduen \mathbf{f}_ℓ . Die resultierende Systemsteifigkeit ist mit derjenigen der klassischen Verschiebungsformulierung auf einfache Weise verknüpft:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{w}_j} = A_{ik}^T \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{u}_\ell} A_{\ell j}. \quad (3)$$

Prinzipiell sind die folgenden Typen von Fluktuationsrandbedingungen geeignet:

- **Verschwindende Fluktuationen im ganzen Aggregat.** Das führt auf eine homogene Deformation und entspricht der Taylor-Theorie in der Plastizität und dem Voigtschen Mittelwertkonzept in der Elastizität. Mit diesen Randbedingungen erhält man eine obere Schranke für die Aggregatsteifigkeit. Das Rechenmodell enthält keinerlei innere Freiheitsgrade und ist daher sehr schnell auszuwerten. Formal wird allen Knoten der nichtexistente Freiheitsgrad 0 mit $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ zugewiesen.
- **Verschwindende Randfluktuationen,** realisiert durch Zuordnung von \mathbf{w}_0 zu allen Randknoten. Die Randverschiebungen sind damit durch die globale Deformation festgelegt. Nur im Inneren des Aggregats werden inhomogene Deformationen zugelassen.
- **Periodische Randfluktuationen.** Den bei periodischer Strukturfortsetzung einander entsprechenden Knoten wird jeweils die gleiche Fluktuation \mathbf{w}_ℓ zugewiesen. Dadurch geht die Bandstruktur verloren (Abb. 1), was jedoch bei der Verwendung iterativer Löser keine Rolle spielt. Der Rand kann sich unter Wahrung der Periodizität der Aggregatgeometrie frei verformen. Zur Unterdrückung von Starrkörpertranslationen ist eine beliebige Fluktuation $\mathbf{w}_\ell = \mathbf{0}$ zu setzen.

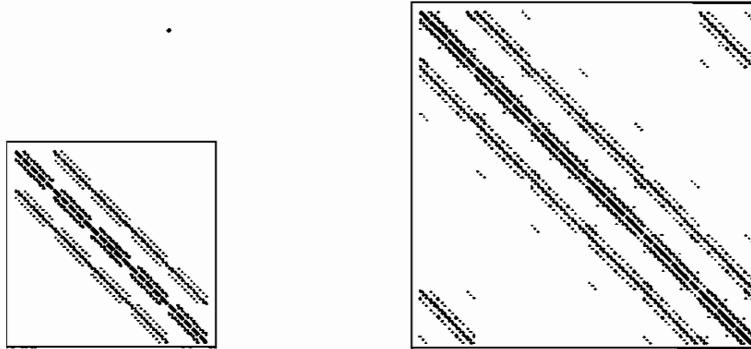


Abbildung 1: Besetzung der reduzierten Systemmatrix für ein RVE mit $7 \times 7 \times 7$ Knoten bei Standardnumerierung (Zeilen, Spalten, Ebenen). Links: verschwindende Randfluktuationen, 125×3 Freiheitsgrade. Rechts: periodische Randfluktuationen, 215×3 Freiheitsgrade.

3 Anfangsorientierungen

Ziel ist die Erzeugung von Orientierungen mit möglichst guter Gleichverteilung im Orientierungsraum $SO(3)$, um ein makroskopisch isotropes Aggregat simulieren zu können. Zur Darstellung von Rotationen werden die sogenannten EULER-Parameter verwendet:

$$(q_k) = (n_1 \sin \varphi/2, n_2 \sin \varphi/2, n_3 \sin \varphi/2, \cos \varphi/2). \quad (4)$$

Darin sind φ der Drehwinkel gegenüber einer Bezugslage und n_i die kartesische Komponenten der zugehörigen Drehachse $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$.

Der Winkelabstand zwischen zwei Orientierungen q_k^1 und q_k^2 :

$$\cos \varphi_{12}/2 = \sum_{i=1}^4 q_i^1 q_i^2 \quad (5)$$

induziert eine *konstante* Metrik im Vierdimensionalen. Daher können die q_k als Komponenten EUKLIDISCHER Einheitsvektoren gedeutet werden: $\mathbf{q} = q_k \mathbf{e}_k \in \mathcal{E}_4$ mit $|\mathbf{q}| = 1$. Daraus läßt sich das folgende Verfahren zur Erzeugung gleichverteilter Orientierungen aus gleichverteilten Zufallszahlen ableiten:

1. Erzeuge Quadrupel aus gleichverteilten Zufallszahlen $q_k \in [-1, 1]$
2. Normiere alle Quadrupel mit $\sqrt{q_i q_i} \leq 1$ auf Betrag 1 und verwirf die restlichen. Das ergibt gleichverteilte Vektoren \mathbf{q} und damit (wegen der konstanten Metrik) gleichverteilte Orientierungen.

4 Elastische Aggregateigenschaften

Die globale Steifigkeit \mathbb{C} wird durch den Vorwärts-Differenzenquotienten approximiert und auf Spektralform transformiert [6]:

$$\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{C} \cdot \tilde{\mathbb{E}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i. \quad (6)$$

Darin sind $\tilde{\mathbb{T}}$ die globale Cauchy-Spannung, $\tilde{\mathbb{E}}$ der linearisierte Verzerrungstensor, λ_i die Eigenwerte (Hauptsteifigkeiten) und \mathbf{N}_i die Eigentensoren der Steifigkeit. Der Kompressionsmodul $K = \lambda_6/3$ ist beim Einkristall und beim Aggregat unabhängig vom Mittelungsverfahren immer gleich [3]. Daher genügt es, Mittelwert $\bar{\lambda}_D$ und Standardabweichung σ_D der zu deviatorischen Eigentensoren gehörenden Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_5$ zu untersuchen:

$$\bar{\lambda}_D := \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \lambda_i \quad \sigma_D^2 := \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\lambda_i - \bar{\lambda}_D)^2. \quad (7)$$

Die relative Lage von $\bar{\lambda}_D$ bezüglich der oberen Grenze $2G_V$ nach Voigt und der unteren Grenze $2G_R$ nach Reuss ist geeignet als normiertes Maß für die Modellsteifigkeit. Die Grenzen können als Mittelwerte über die deviatorischen Hauptsteifigkeiten des Einkristalls gewonnen werden: $2G_V = 1/5 \sum_{i=1}^5 \lambda_{iEK}$, $2G_R = 5[\sum_{i=1}^5 \lambda_{iEK}^{-1}]^{-1}$. Als Anisotropiemaß wird die auf den Wert für den Einkristall bezogene Standardabweichung der deviatorischen Eigenwerte benutzt:

$$S := \frac{\bar{\lambda}_D - 2G_R}{2G_V - 2G_R} \in [0, 1], \quad A := \sigma_D / \sigma_{EK} \in [0, 1]. \quad (8)$$

5 Ergebnisse und Diskussion

Der Einfluß der Diskretisierungseinheit und der Randbedingungen auf die relative Steifigkeit S wurde an einem Aggregat aus 64 würfelförmigen Körnern untersucht. Diese wurden mit je 5, 40 oder 320 Tetraeder-Elementen mit konstanten Verzerrungen diskretisiert. Bei steigender Zahl von Elementen pro Korn kann das sich einstellende inhomogene Verschiebungsfeld immer besser approximiert werden, so daß die globale Steifigkeit sinkt. Von Konvergenz kann jedoch auch bei 320 Elementen pro Korn noch nicht gesprochen werden. Der versteifende Einfluß der homogenen Fluktuationsrandbedingungen ist selbst bei der größten der hier gerechneten Strukturen (20480 Elemente)

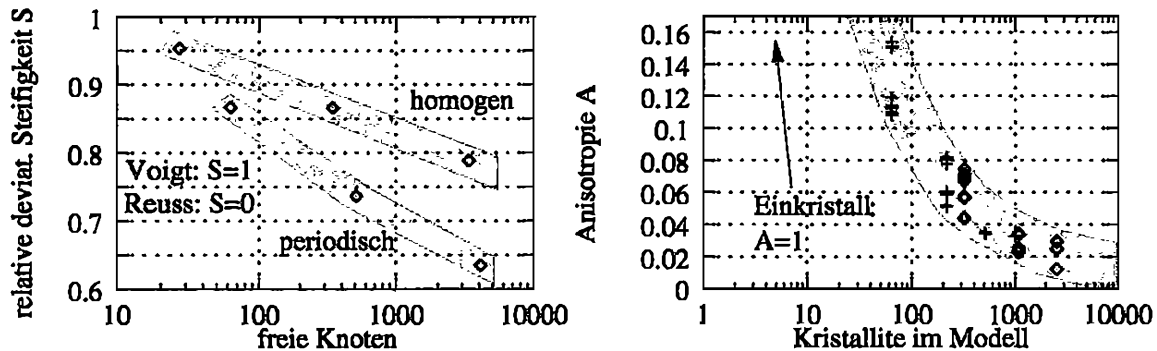


Abbildung 2: Links: Relative deviatorische Steifigkeit als Funktion der Modellfreiheitsgrade. Rechts: Anisotropie A als Funktion der Orientierungsanzahl.

signifikant (Abb. 2 links). Daher werden z.B. in [2, 1] periodische Randbedingungen verwendet.

Es zeigt sich, daß die Isotropie des Aggregats im wesentlichen von der Zahl der Anfangsorientierungen bestimmt wird. Verschiedene Zufallsorientierungen streuen innerhalb eines gewissen Bandes, was einen Ansatzpunkt zur Optimierung solcher Verteilungen sein könnte. Die Feinheit der Diskretisierung und die aufgebrachten Randbedingungen beeinflussen die A -Werte nur im Prozent-Bereich. Daher kann die elastische Anisotropie eines Aggregats bereits mit dem Voigt-Modell gut abgeschätzt werden. Orientierungszahlen über 1000 senken die Anisotropie nur noch unwesentlich (Abb. 2 rechts).

Ein gutes RVE-Polykristall-Modells sollte ca. 1000 möglichst fein diskretisierte Körner bei periodischen Randbedingungen enthalten. Dies ist als Mindestanforderung für inelastische Simulationen zu betrachten.

Literatur

- [1] A. Bertram, T. Böhlke, and M. Kraska. Numerical simulation of texture development of polycrystals undergoing large plastic deformations. In D. R. J. Owen, E. Oñate, and E. Hinton, editors, *Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1997.
- [2] A. Bertram, T. Böhlke, and M. Kraska. Texture development of aluminum polycrystals under finite plastic deformation. In *IUTAM Symposium on Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity*, Bochum (submitted), 1997.
- [3] R. Hill. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc. (London) A65*, pages 349–354, 1952.
- [4] M. Kraska and A. Bertram. Simulation of polycrystals using an FEM-based representative volume element. *Technische Mechanik*, 16(1):51–62, 1996.
- [5] A. Krawietz. *Materialtheorie*. Springer, 1986.
- [6] M. M. Mehrabadi and S. C. Cowin. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Q. Jl. Mech. appl. Math.*, 43:15–41, 1990.

Generierung und Beurteilung von diskreten isotropen Orientierungsverteilungen

N. WELLERDICK-WOJTASIK

Institut für Mechanik, Universität Hannover
Appelstraße 11, 30167 Hannover

1. Einleitung

Gegenwärtig ist in der Kontinuumsmechanik der Trend zu erkennen, die inneren Materialstrukturen zu berücksichtigen. Bezogen auf metallische Werkstoffe bedeutet dies eine Modellierung des kristallinen Aufbaus des Materials. Stoffgesetze werden auf der Basis eines repräsentativen Volumenelementes (RVE), das eine Vielzahl von einzelnen Kristalliten enthält, formuliert. Die Orientierung der Kristallite wird durch eine Funktion (Orientierungsverteilungsfunktion, vgl. [2]) oder durch N_n einzelne Orientierungen vorgegeben. Im Hinblick auf geringe Rechenzeiten sollte N_n so klein wie möglich sein.

Während in der Praxis eine Texturmessung erforderlich sein wird, um eine der Realität entsprechende Orientierungsverteilung vorgeben zu können, wird im Rahmen theoretischer Arbeiten, wo mehr die Aspekte der Modellbildung im Vordergrund stehen, meistens eine Verteilung mit globalem isotropen Materialeigenschaften als Anfangsverteilung postuliert. Damit wird es erforderlich eine Verteilung zu generieren, die diese Anforderungen erfüllt.

2. Beurteilungskriterien

Grundsätzlich sind alle Methoden geeignet, die eine Abweichung vom isotropen Materialverhalten aufzeigen. In Bezug auf die mechanischen Eigenschaften bietet es sich an zwischen elastischen und plastischen Eigenschaften zu unterscheiden, wobei jeweils das Problem vorliegt, für das RVE die makroskopischen oder globalen Materialeigenschaften mit einem geeigneten Mittelungsverfahren zu berechnen.

Die elastischen Materialeigenschaften werden durch den linearen Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ε formuliert: $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ bzw. $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$, der sowohl für den einzelnen Kristalliten als auch für das RVE gültig sein soll. Die Einkristallkonstanten der vierstufigen Tensoren C und S können aus Tabellen der Literatur entnommen werden. Die entsprechenden Werte für das RVE werden entsprechend der von Hill vorgeschlagenen Methode als Mittelwert der Reuss- und Voigt-Näherung berechnet:

$$\text{Voigt: } \bar{C}_{ijkl}^V = \frac{1}{N_n} \sum C_{ijkl} \quad \text{Reuss: } \bar{S}_{ijkl}^R = \frac{1}{N_n} \sum S_{ijkl} \quad \text{Hill: } \bar{S}_{ijkl}^H = \frac{1}{2} (\bar{S}_{ijkl}^R + \bar{S}_{ijkl}^V)$$

Mit den \bar{C}_{ijkl}^H bzw. den \bar{S}_{ijkl}^H kann der Elastizitätsmodul E für jede beliebige Belastungsrichtung des RVEs berechnet werden. Als Beurteilungswert für die elastische Anisotropie wird die Kennzahl

$$A_E = \frac{\bar{E}_{max} - \bar{E}_{min}}{\bar{E}_{\langle 111 \rangle} - \bar{E}_{\langle 100 \rangle}} \quad \begin{array}{l} A_E = 0 \Rightarrow \text{elastische Isotropie,} \\ A_E = 1 \Rightarrow \text{Anisotropie des Einkristalls} \end{array}$$

eingeführt. Der Bezug auf die Extremwerte des Einkristalls stellt sicher, daß dieser Wert nur von der OV und nicht von den Kristallkonstanten abhängt. Die Visualisierung der Anisotropie kann durch eine Darstellung als Elastizitätsmodulkörper erfolgen, wobei zur Berechnung bevorzugt Einkristallkonstante verwendet werden sollten, die eine eventuell vorhandene Anisotropie hervorheben, z.B. Kupfer.

Die plastische Anisotropie wird durch die Anwendung der Taylor-Theorie, die detailliert in [5] oder [7] beschrieben ist, beurteilt. Diese Theorie eignet sich besonders, da eine Plastifizierung in mindestens fünf Gleitsystemen postuliert wird. Methoden, die die Anisotropie auf Basis der ersten potentiellen Gleitsysteme beurteilen sind nicht geeignet. Mit dem Taylor-Modell wird ein Zugversuch für beliebige Richtungen e berechnet und die Differenz der dazu senkrecht auftretenden Spannungen zum Maximalwert ins Verhältnis gesetzt. Damit wird die Beurteilungsgröße

$$A_P(e) = \frac{|\sigma_{YY}(e) - \sigma_{ZZ}(e)|_{max}}{|\sigma_{XX}(e)|_{max}} \quad \begin{array}{l} A_P = 0 \Rightarrow \text{plastische Isotropie,} \\ A_P = 1 \Rightarrow \text{pl. Anisotropie des Einkristalls} \end{array}$$

gebildet.

3. Methoden zur Generierung

Die nachfolgend aufgeführten Methoden erheben nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Selbstverständlich existieren weitere Methoden, die nicht genannt werden. Ebenso sind Variationen oder Kombinationen der Methoden denkbar. Zur Beschreibung der Orientierung eines Kristalliten werden die drei Eulerwinkel $\varphi_1, \phi, \varphi_2$ benutzt.

3.1 Random-Verteilungen

Eine vielfach benutzte Methode besteht darin, die in den meisten gängigen Compilern verfügbaren Zufallszahlengeneratoren zu benutzen. Mit jeweils drei Zufallszahlen wird ein Satz Eulerwinkel aus den Bereichen

$$\varphi_1 \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi] \quad \text{und} \quad \varphi_2 \in [0, 2\pi]$$

erzeugt. Bei dieser Methode muß zunächst sichergestellt sein, daß die erzeugten Zahlen wirklich gleichverteilte Zufallszahlen sind. Sofern dies erfüllt ist, muß die nichtlineare Wahrscheinlichkeit des zweiten Eulerwinkels berücksichtigt werden. Dies gelingt durch eine Transformation des zweiten Eulerwinkels ϕ gemäß $\xi = \cos \phi$. Der durch $\varphi_1, \xi = \cos \phi, \varphi_2$ aufgespannte Orientierungsraum ist bei einer isotropen Verteilung bzw. bei einer grauen Textur gleichmäßig mit Punkten belegt, [2]. Verteilungen, die nach dieser Methode generiert werden zeichnen sich i.a. dadurch aus, daß ausreichende Isotropie nur bei sehr großen N_k erreicht wird.

3.2 Eulerraumdiskretisierung

Im Prinzip ist bereits die o.g. Methode eine Eulerraumdiskretisierung. Speziell sind jedoch die Methoden gemeint, die zusätzlich die Symmetrien der Kristallite und der Probe berücksichtigen und nur den relevanten Eulerraum diskretisieren. Wegen der kubischen

Kristallsymmetrie, die sich aus den zwei, drei und vierfachen Symmetriedrehachsen des Kristalliten ergibt, reicht bereits $1/24$ des ursprünglichen Eulerraumes aus. Berücksichtigt man ferner eine Probensymmetrie, verbleibt der von *Pospiech* [6] angegebene Bereich

$$\varphi_1 \in [0, \pi/2], \quad \phi \in \left[0, \arccos \left(\frac{\cos \varphi_2}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_2}} \right) \right] \quad \text{und} \quad \varphi_2 \in [0, \pi/2].$$

Dieser Bereich wird von *Harren* [4] und *Müller* [5] diskretisiert, wobei in [5] die nicht-lineare Bereichsgrenze ignoriert wird. *Harren* erzeugt mit dieser Methode eine OV mit 385 Orientierungen, während *Müller* wesentlich gröber diskretisiert und nur 32 bzw. 128 Orientierungen erhält. Obwohl diese Methode gezielt die Symmetrie der Kristallite berücksichtigt, liefert sie nicht die erwarteten Ergebnisse.

3.3 Fixierung globaler Achsen

Diese Methode geht auf *Asaro* und *Needleman* [1] zurück und beruht auf der Grundidee das Standarddreieck der stereografischen Projektion regelmäßig mit Durchstoßpunkten globaler Y-Achsen zu belegen. 65 Punkte werden vorgegeben, wobei die verbleibende Drehfreiheit mit einem Zufallszahlengenerator fixiert wird. Weitere 120 Basen werden durch Drehung um jeweils ± 120 Grad erzeugt. Mit einer [100]-Orientierung sind das insgesamt 196 Orientierungen. *Harren* [3] greift dieses Verfahren auf, erweitert es jedoch auf alle globalen Achsen. Mit einer gröberen Diskretisierung erhält er Verteilungen mit $N_k = 300$ und $N_k = 489$ Kristalliten. In [3] werden die gemittelten elastischen Konstanten angegeben, so daß die Anisotropie mit dem Kennwert A_E beurteilt werden kann. Angesichts der benutzten Anzahl von Orientierungen sind diese Verteilungen als schlecht zu beurteilen.

3.4 Kugelteilungsstrategie

Diese wurde von *Müller* vorgeschlagen und ist ausführlich in [5] beschrieben. Grundidee ist, daß die lokalen Gittervektoren aller Kristallite bei einer isotropen Verteilung einen gleichmäßigen Igel bilden sollten. Um dieses Ziel zu erreichen, wird die Halbkugel der Projektionskugel in gleichgroße Flächen eingeteilt, deren Schwerpunkte etwa gleich große Abstände aufweisen. In diesen Punkten werden nach einem bestimmten Schema die lokalen Basen befestigt.

3.5 Kreisteilungsstrategie

Diese Strategie ist eine vereinfachte Version der Kugelteilungsstrategie und wird ausführlich in [7] beschrieben. Die Grundidee und die Methode der Basenbefestigung der Kugelteilungsstrategie bleiben erhalten. Die Punkte auf der Kugel werden durch ein vereinfachtes Verfahren gewonnen. Dabei wird die Projektionsebene in etwa gleich große Flächen geteilt und die Punkte auf der Kugel durch eine flächentreue Projektion der Flächenschwerpunkte ermittelt.

3.6 Optimierung der elastischen Eigenschaften

Bei dieser Methode wird ausgehend von einer [100]-Orientierung eine zweite so gewählt, daß A_E minimal wird. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis die gewünschte Anzahl von Orientierungen oder eine gewisse Güte der Verteilung erreicht ist. Für die Vorgabe

der $(n + 1)$ ten Orientierung wurden zwei Verfahren gewählt. Bei der Variante a) wird ein Kristallit inkrementweise um jeweils 3 Grad gedreht. Bei einem entsprechenden Drehintervall und einer Vertauschung der globalen Achsen führt das auf 2700 Orientierungen, die überprüft werden. Bei Variante b) werden 5000 Random-Orientierungen probiert.

4. Vergleichende Bewertung und Ausblick

In Bild 1 sind die Kennwerte A_E und A_P für die vorgestellten Strategien in Abhängigkeit der Anzahl der Orientierungen aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß die Optimierungsstrategie erwartungsgemäß die Verteilungen mit den besten Werten für A_E liefert. Hierbei zeigt sich, daß die Variante b) besser ist. Ebenfalls annehmbar sind die Verteilungen der Kugel- und der Kreisteilungsstrategie. Alle anderen Verteilungen sind ungünstiger. Bei den plastischen Eigenschaften wird deutlich, daß von den Optimierungsstrategien die Methode b) deutlich bessere Werte liefert, was allerdings an der Anzahl der angebotenen Orientierungen liegen könnte. Die Kreis und die Kugelteilungsstrategie liefern hier die besten Werte. Eine merkliche Verbesserung ist hier höchstens durch eine Optimierungsstrategie hinsichtlich der plastischen Eigenschaften zu erwarten.

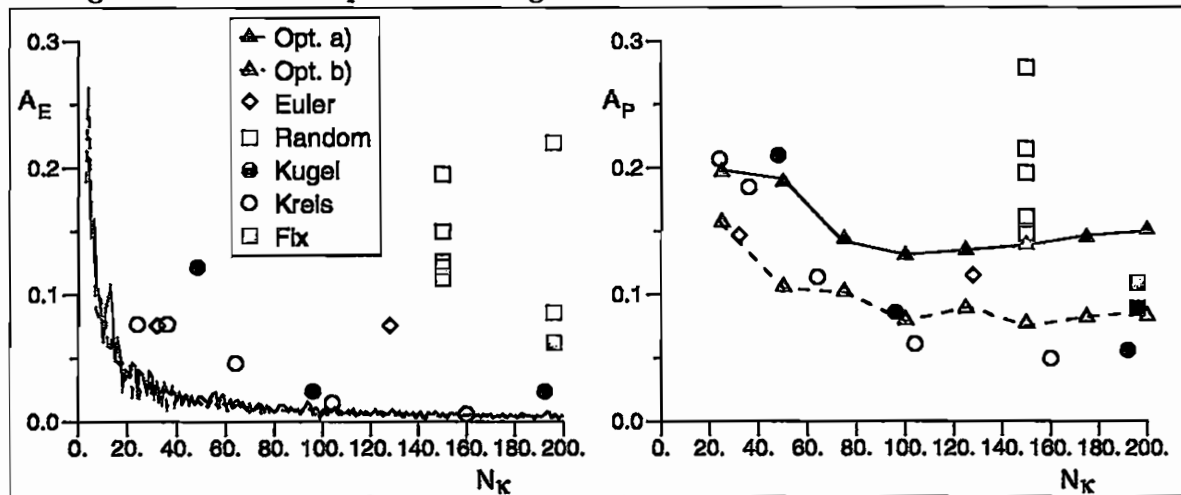


Bild 1: Anisotropiewerte A_E und A_P als Funktion von N_K

Literatur

- [1] Asaro, R.J.; Needleman, A., *Acta metall.* **33** (1985), S. 923-953
- [2] Bunge, H. J.: *Texture Analysis in Materials Science*. Göttingen: Cuvillier 1993
- [3] Harren, S.V.; Lowe, T.C.; Asaro, R.J.; Needleman, A., *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **328** (1989), S. 443-500
- [4] Harren, S.V., *J. Mech. Phys. Solids* **39** (1991), S. 361-383
- [5] Müller, M., VDI Fortschrittsberichte Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 137, Düsseldorf: VDI-Verlag 1993
- [6] Pospiech, J., *Kristall und Technik* **7** (1972), S. 1057-1072
- [7] Wellerdick-Wojtasik, N., VDI Fortschrittsberichte Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 215, Düsseldorf: VDI-Verlag 1997

Simulation des Verformungsverhaltens polykristallinen Eises

H.-J. Becker,

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum

Der vorliegende Aufsatz setzt sich das Ziel, zu einem vertieften Verständnis des Tragverhaltens polykristallinen Eises beizutragen. Ausgangspunkt ist das Verformungsverhalten eines Bestandteils am Polykristall, eines einzelnen monokristallinen Eiskorns. Die aus diesem Verhalten gewonnenen Rückschlüsse finden ihre Bestätigung an einem Modell-Polykristall, der aus 64 Eiskörnern zusammengesetzt ist. Die Einsatzmöglichkeiten dieses Modell-Polykristalls für die Anpassung an Versuche mit polykristallinem Eis werden diskutiert.

1. Monokristall

Die hexagonale Mikrostruktur des monokristallinen Eises wird durch die sogenannten basalen Ebenen senkrecht zu der charakteristischen Richtung \vec{n} gebildet (BISCHOFF-BEIERMANN UND BRUHNS [1]). Ähnlich einem Stapel Spielkarten können diese Ebenen bzw. Karten sehr leicht aufeinander abgleiten, wohingegen der Monokristall einer Last senkrecht zu den basalen Ebenen einen viel größeren Verformungswiderstand entgegengesetzt (vgl. das „Spielkarten-Modell“ in Abb. 1 und

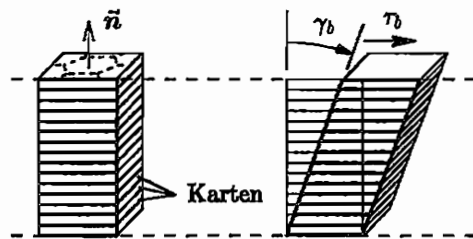


Abb. 1: Spielkarten-Modell

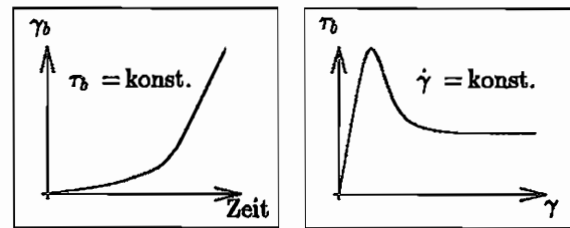


Abb. 2: Kriechversuch und Versuch mit $\dot{\gamma} = \text{konst.}$

MICHEL [2]). Versuche mit konstanter Spannung τ_b zeichnen sich durch die Zunahme der Abgleitgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_b$ aus (s. Abb. 2). Bei Versuchen mit konstanter Gleitrate $\dot{\gamma}$ spielt deren elastischer Anteil $\dot{\gamma}_e$ im Zusammenhang mit dem Maximum eine Rolle (die Aufspaltung $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_p$ liegt dem Stoffgesetz für den Monokristall zugrunde, s.u.). Diese Experimente sind durch einen mehr oder weniger stark ausgeprägten Spannungsabfall gekennzeichnet. Beide Kurvenverläufe lassen sich mikromechanisch mit der zunehmenden Entfestigung des Kristalls infolge des Anstiegs der Versetzungsdichte erklären.

Für das Stoffgesetz zur Beschreibung monokristallinen Eises wird der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten nach Gl. (1) in einen elastischen und den inelastischen Anteil aufgespalten. Bei der objektiven Zeitableitung im hypoelastischen Stoffgesetz (2) handelt es sich um die verallgemeinerte Jaumannsche Zeitableitung mit ω als Tensor der Rotationsgeschwindigkeit der basalen Ebenen. Für die inelastische Verformung wird das Werkstoffgesetz (3)-(6) von BISCHOFF-BEIERMANN [3] mit der Versetzungsdichte λ als interne Variable angesetzt. Dabei projiziert der Einheitstensor 4. Stufe I^b den beliebigen Spannungszustand σ in den zweidimensionalen Unterraum der basalen Gleitung. Dort läßt sich die maximale basale Schubspannung τ_b über die Gleichung von Orowan mit der basalen Abgleitrate $\dot{\gamma}_b$ in Beziehung setzen (vgl. Gl. (4)). Das Stoffgesetz schreibt sich mit den Materialparametern b , k_{vb} , G , d und μ_1 folgendermaßen:

$$d = d_e + d_b \quad (1)$$

mit

$$d_e = C^{-1} \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = \dot{\sigma} - \omega \sigma + \sigma \omega \quad (2)$$

und

$$d_b = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \tau_b, \quad (3)$$

$$\dot{\gamma}_b = b \lambda v(\tau_b), \quad v(\tau_b) = k_{vb} \tau_b, \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{1}{\pi G b} \int_0^{\tau_b} \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} d\bar{\tau} - \lambda \right) \frac{2}{d} v(\tau_b), \quad \mu(\bar{\tau}) = \mu_1 \bar{\tau}, \quad (5)$$

$$\tau_b = I^b \sigma \text{ bzw. } \tau_b = \bar{n} \otimes \sigma \bar{n} + \bar{n} \sigma \otimes \bar{n} - 2 \bar{n} \otimes \bar{n} (\bar{n} \sigma \bar{n}) \text{ und } \tau_b = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_b \cdot \tau_b}. \quad (6)$$

Da die inelastische Verformung mit der basalen Ableitung als Hauptverformungsmechanismus nur einen Freiheitsgrad besitzt, fällt der Probenaufhängung im einaxialen Zug/Druck-Versuch an monokristallinen Eisproben eine besondere Bedeutung zu. Dies läßt sich durch die Modifizierung des erwähnten Spielkarten-Modells veranschaulichen: Nachdem der Kartenstapel zu einer Raute verschoben worden ist, wird eine rechteckige Versuchsprobe herausgeschnitten (vgl. Abb. 3).

Um einen einaxialen Druckversuch in Richtung der Probenlängsachse zu simulieren, werden die Karten wieder zurück nach links verschoben (für Zug nach rechts). Dabei lassen sich die abgeschnittenen Karten und die gestrichelten Linien als Führung verwenden. Die zuvor rechteckige Probe verformt sich zu einer Raute. In der Zeichnung in Abb. 4b sind die Längsachsen der verformten Proben miteinander zur Deckung gebracht. Im Versuch würde das eine rotierbare, d.h. eine die Neigung der oberen und unteren Stirnseite der Probe nicht behindernde Probenaufhängung voraussetzen. Gegenüber der vertikalen Lastrichtung haben sich die basalen Ebenen viel stärker gedreht, als für den Fall der rotationsfesten Probenaufhängung (s. Abb. 4c und vgl. Abb. 4a mit d). Wird die Stirnseitenneigung unterdrückt, antwortet die Probe mit seitlichem Ausweichen. Ist innerhalb des Polykristalls das Nachbarkorn gerade so orientiert, daß es in die entgegengesetzte Richtung auszuweichen versucht, werden sich die Körner gegenseitig stark verspannen. Ein mehraxialer Eigenspannungszustand wird sich aufbauen.

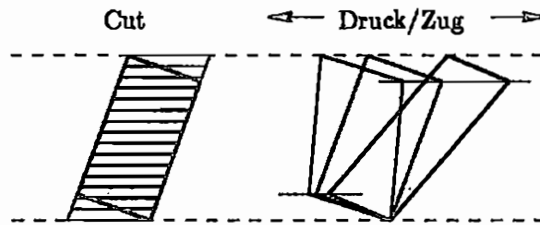


Abb. 3: Modifiziertes Spielkarten-Modell

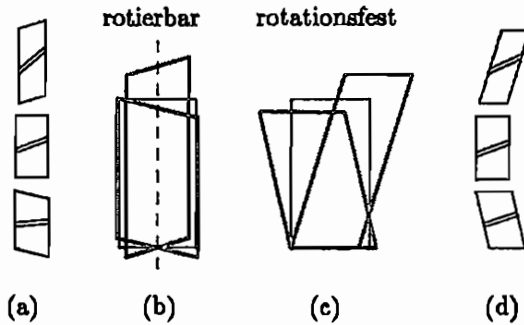


Abb. 4: Einfluß der Probenaufhängung

2. Polykristall

Aus 64 Rechteckkörnern wird der Modell-Polykristall in Abb. 5 zusammengesetzt. Jedes Korn wird durch das vorgestellte monokristalline Stoffgesetz beschrieben. Die einzelnen Kristalle unterscheiden sich nur in der Orientierung ihrer basalen Ebenen, die per Zufallsgenerator vorgegeben wird. Mit Hilfe einer Finite-Elemente-Berechnung wird ein weggesteuerter Druckversuch mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{\epsilon} = -1.4 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ simuliert. Bis zu $\epsilon = -\Delta u/2b = -1\%$ wird der Polykristall gestaucht.

Die vorgegebene Verformung konzentriert sich vor allem auf ein schrägliegendes Band, das sich von der linken oberen Ecke bis zum rechten Rand des Polykristalls erstreckt. Dort haben $\Delta\lambda$, die Veränderung der anfänglichen Versetzungsdichte $\lambda_0 = 10^4 \text{ mm}^{-2}$, und damit die basale Abgleitung stark zugenommen (vgl. Abb. 6). Die Rotation $\Delta\vartheta$ der basalen Ebenen zeigt, daß sich im Polykristall eine Textur ausbildet (positives $\Delta\vartheta$ entspricht einer Drehung im Uhrzeigersinn). Z.B. läßt die Vergrößerung eines Kornes in der Mitte des Polykristalls erkennen, daß sich seine Gestaltänderung nicht durch seitliches Ausweichen sondern durch die offenbar weniger stark behinderte Neigung seiner Stirnseiten vollzieht. Wie in einer rotierbaren Probenaufhängung (vgl. Abb. 4) kann so das Korn seine basalen Ebenen tendenziell senkrechter zur Drucklastichtung orientieren, maximal um $\Delta\vartheta = 4^\circ$. Ein weiteres basales Abgleiten wird erschwert. Der Verformungswiderstand steigt.

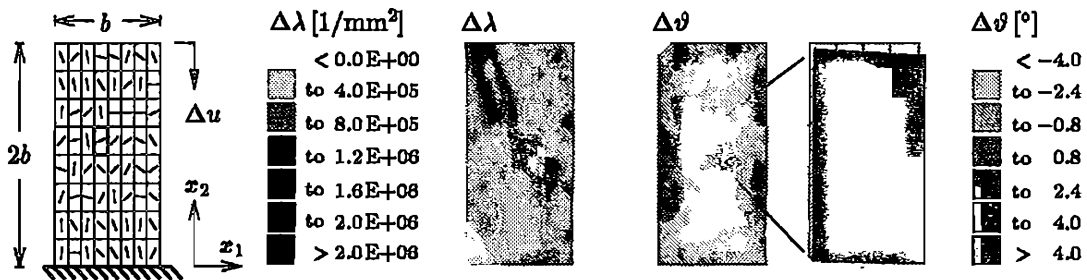


Abb. 5: Polykristall

Abb. 6: Veränderung $\Delta\lambda$ der Versetzungsdichte und Rotation $\Delta\vartheta$

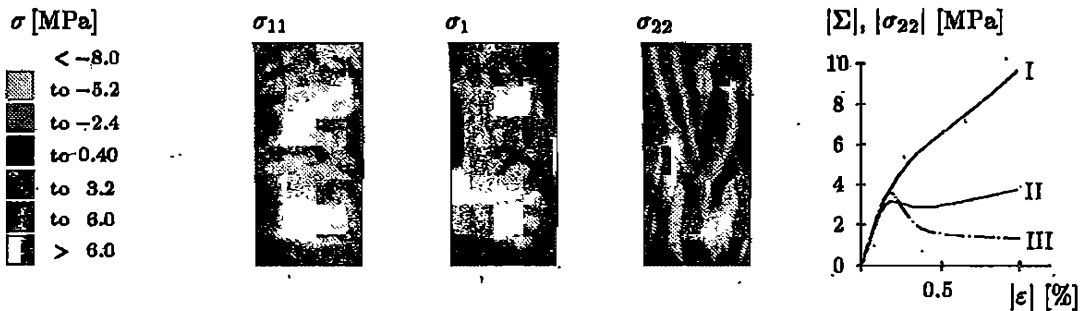


Abb. 7: Eigenstressungen σ_{11} , σ_{22} und 1. Hauptspannung σ_1

Abb. 8: Vergleich

Durch eine schlagartige Entlastung wird der aus der Verspannung der einzelnen Kristalle resultierende mehraxiale Eigenstresszustand offengelegt (vgl. σ_{11} und σ_{22} in Abb. 7): Die Werte der Eigenstressungen variieren zwischen -8 bis 6 MPa bei einer makroskopischen Spannung von ca. -4 MPa. Eine starke Spannungsumlagerung von den dunklen zu den weiß unterlegten Strängen hat stattgefunden (vgl. σ_{22}). Die Zugeigenstressungen in den dunklen Bändern von σ_{11} sind verantwortlich für die in Druckversuchen beobachteten Spaltrisse, die sich parallel zur Drucklastichtung bilden können. Durch Superposition dieser dunklen Bänder mit den ebenfalls dunklen Strängen von σ_{22} entsteht die charakteristische Zellstruktur in der Abbildung der 1. Hauptspannung σ_1 . Die schlechter orientierten Bereiche stehen unter Druck und erzeugen in den sie umgebenden Zellwänden Zugspannungen.

Abb. 8 vergleicht die Entwicklung der σ_{22} -Spannung (I) in der Mitte des herausgezoomten Kornes mit der makroskopischen Spannung Σ (III) dieses Kornes im einaxialen Druckversuch (rotationsfeste Probenaufhängung) und mit Σ (II) des Polykristalls. Im Gegensatz zu dem monokristallinen Experiment kommt es bei der makroskopischen Spannung des Polykristalls nicht mehr zu solch einem starken Spannungsabfall nach dem Maximum. Im Anschluß daran ist wieder ein Anstieg, eine Art Verfestigung zu beobachten.

3. Diskussion

Soll der vorgestellte Modell-Polykristall für die Anpassung an Versuche mit polykristallinem Eis verwendet werden, sind die Form der Körner, ihre Anzahl und die notwendige Feinheit der Diskretisierung zu bestimmen. Abb. 9 vergleicht andere Kornformen und -anordnungen mit dem bisher betrachteten Rechteck-Gitter, RG genannt, anhand des Verlaufs der makroskopischen Spannung (für 64 Körner). Die Unterschiede sind als verhältnismäßig gering zu bewerten, da die Kurven in einer Bandbreite liegen, innerhalb derer die Ergebnisse von Versuchen an polykristallinem Eis streuen.

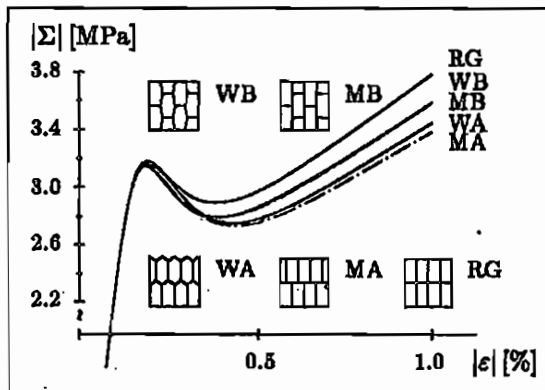


Abb. 9: Vergleich der Kornformen

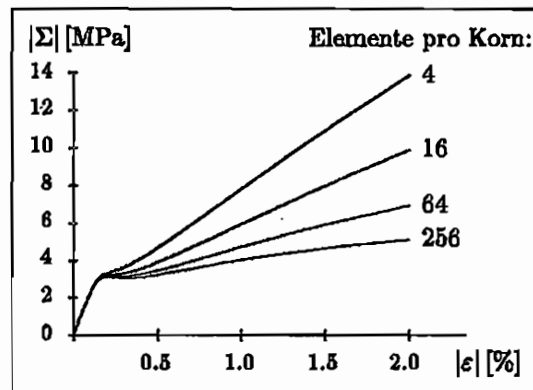


Abb. 10: Einfluß der Netzverfeinerung

An einem „etwas kleineren“ Polykristall aus 20 Körnern im simulierten Druckversuch soll der Aufwand in der FE-Diskretisierung in Abb. 10 demonstriert werden. Die Kurven nähern sich mit zunehmender Netzverfeinerung immer stärker aneinander an. Eine Grenzkurve ist frühestens für eine weitere, wenn nicht erst nach zwei weiteren Verfeinerungsstufen zu erwarten, d.h. bei insgesamt ca. 20000 bzw. 80000 finiten Elementen (isoparametrische Vier-Knoten-Scheibenelemente).

Aufwandssteigernd wirkt sich zudem aus, daß für die Anpassung an plananisotropes polykristallines Eis eine große Anzahl von Körnern erforderlich ist. Erste Untersuchungen zeigen, daß z.B. 64 Körner bei weitem noch nicht ausreichen, um für unterschiedliche per Zufallsgenerator ermittelte Kornorientierungen Kurvenverläufe zu erhalten, die über das Spannungsmaximum hinaus miteinander übereinstimmen. Deshalb scheint zur Zeit bei vertretbarem Aufwand nur die Anpassung an Versuche mit Eis-Polykristallen möglich zu sein, die aus wenigen Körnern aufgebaut sind. Dabei dürfte es besonders vielversprechend sein, sich auf die Modellierung der mikromechanischen Effekte wie z.B. der Bildung von Kleinwinkelkorngrenzen und der Entwicklung von Mikroschädigung zu konzentrieren.

4. Literatur

1. BISCHOFF-BEIERMANN, B., BRUHNS, O.T.: A physically motivated set of invariants and tensor generators in the case of transverse isotropy; Int. J. Engng Sci. 32, No. 10 (1994), 1531-1552.
2. MICHEL, B.: Ice mechanics; Les Presses de l'Université Laval, Québec 1978.
3. BISCHOFF-BEIERMANN, B.: Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter der Berücksichtigung der Monokristallanisotropie; Mitt. Inst. Mech. Nr. 82, Ruhr-Universität Bochum 1992.

Zur Berechnung plastischer Formänderungen bei Schalenverschneidungen

R. Eberlein, Institut für Mechanik IV, TU Darmstadt

1 Motivation

Die Berechnung großer plastischer Formänderungen bei Schalentragwerken ist in den vergangenen Jahren ein wesentlicher Forschungsschwerpunkt in der Festkörpermechanik gewesen. Es sind entsprechend vielfältige Finite-Elemente-Konzepte (FE-Konzepte) für Schalen in der Literatur vorgestellt worden. Eine aktuelle Übersicht über den Stand der Forschung ist in EBERLEIN [1997] zu finden. Dabei unterscheiden sich die vorgeschlagenen Schalenmodelle weniger in der konstitutiven Beschreibung großer plastischer Verzerrungen, als vielmehr in der Verwendung unterschiedlicher Parametrisierungskonzepte.

Unter Schalenverschneidungen versteht man im allgemeinen Flächentragwerke, die nicht in jedem Punkt durch eine eindeutige Flächennormale charakterisiert sind. Man denke hierbei z.B. an Walzprofile aus dem Stahlbau. Das Ziel dieses Beitrages ist es nun, ein zur Beschreibung von Schalenverschneidungen geeignetes Parametrisierungskonzept vorzustellen, das dann die Berechnung großer plastischer Formänderungen in nicht glatten Schalenstrukturen erlaubt. In der Tat ist nach Wissen des Autors eine solche Elementformulierung in der Literatur bislang nicht vorgestellt worden.

2 Kinematik — Parametrisierung

Zur vollständigen kinematischen Beschreibung einer Schale gehört die Berechnung der Verzerrungsmaße im Schalenraum \mathcal{S} . Der Schalenraum ist dabei wie folgt definiert:

$$\mathcal{S} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), t) \}. \quad (1)$$

Damit ist die Position eines materiellen Punktes $X \in \mathcal{S}$ durch die Abbildungsfunktion $\varphi(\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), t)$ eindeutig beschrieben. Der materielle Punkt X sei dabei parametrisierbar durch die konvektiven Koordinaten (ξ^1, ξ^2, ξ^3) . Grundlage jeder Schalenkinematik ist also die Form der Abbildung $\varphi(\mathbf{X}, t)$.

Die hier gewählte kinematische Grundannahme orientiert sich an klassischen Schalentheorien, d.h. entlang des Schalendirektors \mathbf{d} wird linear in Dickenrichtung der Schale interpoliert (vgl. NAGHDI [1972]):

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = \phi(\xi^1, \xi^2, t) + \xi^3 \mathbf{d}(\xi^1, \xi^2, t) \quad ; \quad \xi^3 = \xi^3. \quad (2)$$

Dabei bezeichnet ϕ den in der Momentankonfiguration auf die Schalenmittelfläche \mathcal{M} ($\xi^3 = 0$) bezogenen Ortsvektor. Mit (2) kann man dann die tangential an den Parameterlinien

$\xi^i =$ konstant liegenden, kovarianten Basisvektoren g_i in \mathcal{S} berechnen:

$$g_\alpha = \phi_{,\alpha} + \xi d_{,\alpha} = a_\alpha + \xi d_{,\alpha} \quad ; \quad g_3 = d. \quad (3)$$

Der Deformationsgradient F kann unter Berücksichtigung von (3) schließlich angegeben werden in der Form

$$F = a_\alpha \otimes G^\alpha + d \otimes G^3 + \xi (d_{,\alpha} \otimes G^\alpha), \quad (4)$$

wobei durch Großbuchstaben der auf die Ausgangskonfiguration bezogene Ortsvektor X sowie die kontravarianten Basisvektoren G^i bezeichnet werden. Damit ist die kinematische Beschreibung einer Schale vollständig angegeben. Alle weiteren Verzerrungsgrößen können mit (4) bestimmt werden.

Um nun den Deformationsgradienten F nach (4) explizit berechnen zu können, müssen der Ortsvektor ϕ und der Schalendirektor d aus (2) in geeigneter Form parametrisiert werden. Die Parametrisierung eines materiellen Punktes $X \in \mathcal{M}$ geschieht klassischerweise durch die drei Komponenten des Verschiebungsvektors $u = \phi - \Phi$. Für den Direktor d sind dagegen mehrere Möglichkeiten denkbar. Es sollen hier zwei Varianten näher betrachtet werden:

Variante I: Klassisches 6-Parameter-Konzept

In Analogie zum Ortsvektor ϕ wird ein Verschiebungsvektor w eingeführt. Über $d = N + w$ wird somit der Normaleneinheitsvektor N bezüglich der Ausgangskonfiguration mit dem Direktor d verbunden. Gegenüber N erfährt d während der Deformation eine Drehung und eine Längenänderung. Es gilt also $\|d\| \neq 1$, so daß damit Dickenverzerrungen in einer Schale berücksichtigt werden. Das 6-Parameter-Konzept eignet sich somit auch zur Beschreibung dicker Schalen. Ferner ist zu erwähnen, daß durch w eine Rotation um die Längsachse des Direktors (Drillfreiheitsgrad) unberücksichtigt bleibt. Durch die drei Komponenten von u und w ist schließlich das 6-Parameter-Konzept definiert.

Variante II: 5/6-Parameter-Konzept

Dieses Konzept, welches die Berechnung von Schalenverschnidungen ermöglicht, geht von einem inextensiblen Direktorfeld aus, d.h. die Deformation von d ist durch eine reine Rotation darstellbar: $d = R.N$. Es gilt dann $\|d\| = 1$. Somit werden keine Dickenverzerrungen in der Schale berücksichtigt und das 5/6-Parameter-Konzept bleibt auf dünne Schalen beschränkt. Gesucht wird nun eine geeignete Parametrisierung des Rotationstensors R . Für ein inextensibles Direktorfeld gilt aber:

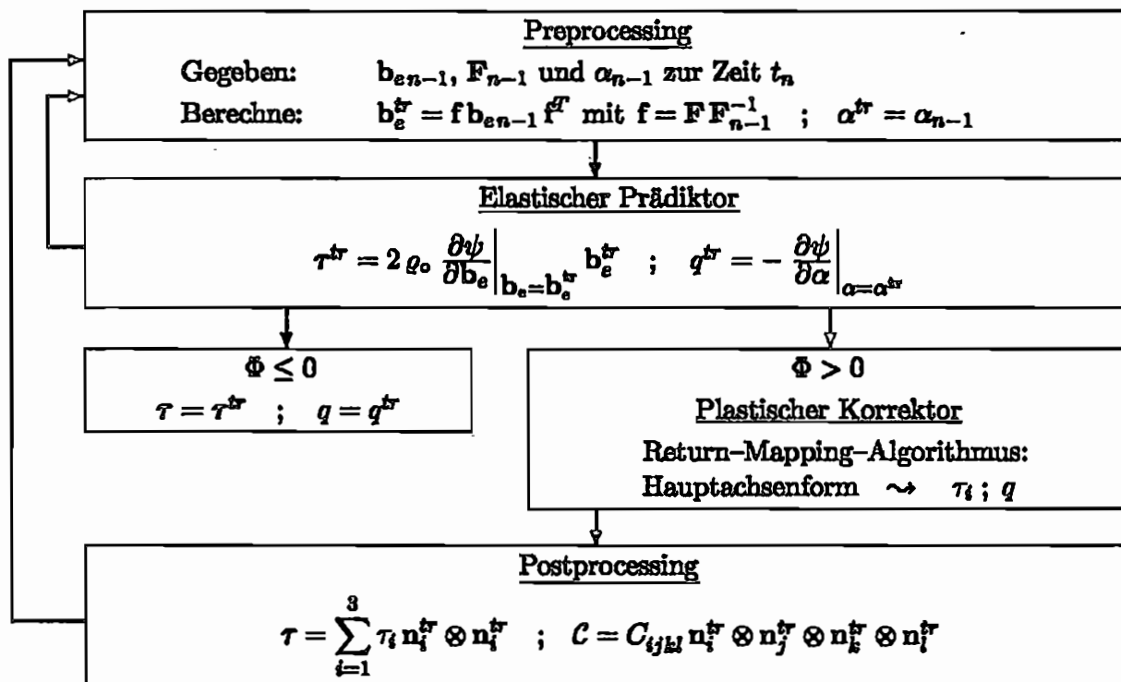
$$\dot{d} \cdot d = 0 \quad \iff \quad \dot{d} = \theta \times d. \quad (5)$$

Dabei bezeichnet der Drehgeschwindigkeitsvektor θ die Direktorwinkelgeschwindigkeit. Mit Hilfe der aus der Starrkörperdynamik bekannten Rodrigues-Formel kann man R in Abhängigkeit von θ parametrisieren (siehe z.B. GRUTTMANN [1996]). Die Parametrisierung von d erfolgt also durch die drei Vektorkomponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors θ und liefert damit zusammen mit u ein 6-Parameter-Konzept.

Darin ist auch die Drillrotation um die Direktorlängsachse enthalten. Man kann nun aber zeigen, daß im Bereich glatter Schalen (eindeutige Flächennormale) eine Drillsteifigkeit nicht existiert (siehe z.B. EBERLEIN [1997]). In diesen Fällen muß dann der Drillfreiheitsgrad eliminiert werden, da ansonsten das entstehende Gleichungssystem singulär werden würde. Diese Elimination erhält man durch Darstellung der Vektorkomponenten von θ bezüglich einer lokalen kartesischen Basis in jedem Elementknoten. Der Drillfreiheitsgrad um die Hochachse (senkrecht aus \mathcal{M} herauszeigend) wird dann durch Setzen von Randbedingungen entsprechend eliminiert. Die 6-Parameter-Theorie im Bereich von Verschneidungen reduziert sich somit für glatte Schalenflächen zu einer 5-Parameter-Theorie.

3 Finite Plastizität

Bei der konstitutiven Beschreibung wird generell von großen plastischen Verzerrungen ausgegangen. Dabei wird als wesentliche Annahme die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten F in einen elastischen und einen plastischen Anteil vorausgesetzt. An dieser Stelle sei nur der Algorithmus zur Spannungsberechnung angegeben.



Bei der Spannungsberechnung wird von der für Metallplastizität gut geeigneten von Mises-Fließbedingung mit linearer isotroper Verfestigung ausgegangen

$$\Phi_{\text{Mises}} = \|\text{dev } \tau\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\tau_Y - q) \quad ; \quad q = -K \alpha. \quad (6)$$

Den elastischen linken Cauchy-Green-Tensor \mathbf{b}_e kann man auch über den inversen plastischen rechten Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C}_p^{-1} bestimmen:

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T = \mathbf{F} \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{F}^T. \quad (7)$$

Während bei der klassischen 6-Parameter-Theorie von einem dreidimensionalen Verzerrungszustand ausgegangen wird, muß beim 5/6-Parameter-Konzept auf Grund der nicht vorhandenen Dickenverzerrungen ein ebener Spannungszustand ($\tau_{33} = 0$) zugrundegelegt werden.

An dieser Stelle müßten nun die FE-Formulierungen diskutiert werden. Es werden 4-Knoten-Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen verwendet. Durch geeignete Zusatzmaßnahmen (ANS-, EAS-Methode) wird lockingfreies Deformationsverhalten gewährleistet. Für weitere Details sei hier auf GRUTTMANN [1996] und EBERLEIN [1997] verwiesen.

4 Zusammenfassung

Durch ein geeignetes Berechnungsbeispiel (Biegedrillknicken eines U-Profiles) konnte die Gültigkeit des 5/6-Parameter-Modells gezeigt werden (vgl. dazu BETSCH [1996] und EBERLEIN [1997]). Auf die Unbrauchbarkeit der 6-Parameter-Formulierung wurde explizit hingewiesen. Beim betrachteten U-Profil bedeutet dies konkret ein völlig andersgeartetes Deformationsverhalten im Vergleich zum 5/6-Parameter-Konzept. Schließlich konnte der Einfluß plastischer Verzerrungen beim diskutierten U-Profil herausgearbeitet werden. Hier ist insbesondere die im Vergleich zum rein elastischen Fall geringere Verdrehung des freien Endes sowie das weniger stark ausgeprägte Beulen im Obergurt in der Nähe der Einspannung zu nennen. Gegenstand weiterer Untersuchungen wird folgerichtig die genaue Quantifizierung plastischer Verzerrungen bei Schalenverschnidungen sein.

Literatur

- BETSCH, P. (1996). Statische und dynamische Berechnungen von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten Finiten Elementen. Dissertation. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover. Bericht Nr. F 96/4.
- EBERLEIN, R. (1997). Finite-Elemente-Konzepte für Schalen mit großen elastischen und plastischen Verzerrungen. Dissertation. Institut für Mechanik IV der Technischen Hochschule Darmstadt.
- GRUTTMANN, F. (1996). Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen. Habilitation. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover. Bericht Nr. F 96/1.
- NAGHDI, P. M. (1972). *The Theory of Shells*. Vol. VIa/2 von *Handbuch der Physik, Mechanics of Solids II*. Springer. Berlin.

Berechnung von Blechumformprozessen auf der Grundlage der Abbildung von Flächen

E. Kullig, J. Brummund, R. John, G. Landgraf, V. Ulbricht
 TU Dresden, Institut für Festkörpermechanik

Es wird eine Näherungsmethode zur Berechnung von Blechumformprozessen vorgestellt, die einen schnellen Überblick über die im Blechteil auftretenden Spannungen und Verzerrungen liefert. Ausgangspunkt bildet ein Einschrittverfahren [1], welches für starr-plastisches Materialverhalten auf mehrere Umformstufen erweitert wurde. Die prinzipielle Vorgehensweise wird für die Membrantheorie an einem zweistufigen Umformprozeß erläutert [2], eine Erweiterung auf die Biegetheorie ist prinzipiell möglich.

1. Modellierung des Umformprozesses

Die grundlegende Vorgehensweise besteht darin, den Umformprozeß als Abbildung von Flächen zu modellieren. Dazu wird die Schalenmittelfläche zu verschiedenen Zeitpunkten des Umformvorganges unabhängig voneinander vorgegeben und durch eigene GAUSS'sche Koordinaten beschrieben (Bild 1).

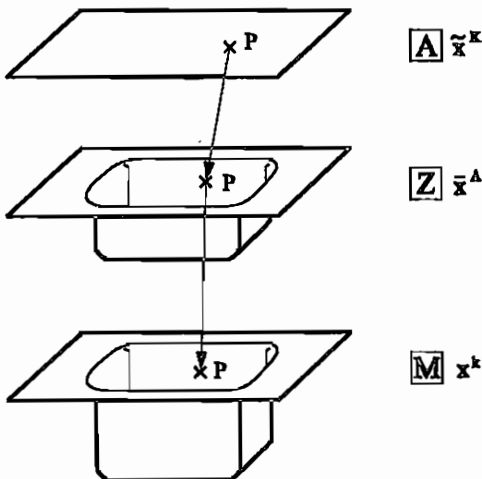


Bild 1. Schalenmittelflächen für einen zweistufigen Umformprozess, GAUSS'sche Koordinaten

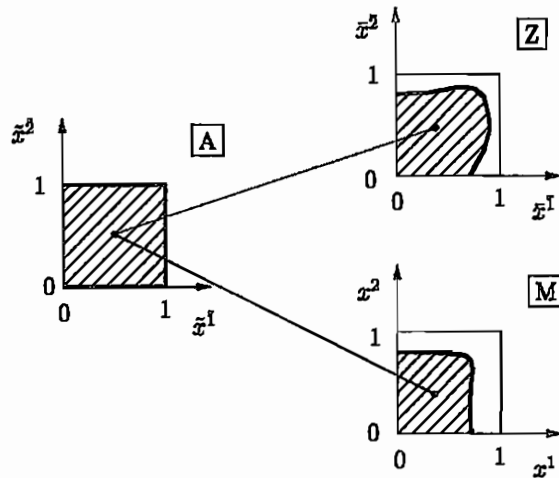


Bild 2. Verformungsabbildung im Parameterraum für einen zweistufigen Umformprozess

- A** - Ausgangszustand
- Z** - Zwischenzustand
- M** - Momentanzustand

Zur Kennzeichnung der Position des materiellen Teilchens, das eindeutig durch die Koordinaten des Ausgangszustandes \tilde{x}^K identifiziert werden kann, werden die eineindeutigen

Funktionen

$$\bar{x}^\Lambda = \bar{x}^\Lambda(\bar{x}^K) = \sum p_{r_s}^\Lambda N_r(\bar{x}^1) N_s(\bar{x}^2) \quad , \quad x^k = x^k(\bar{x}^K) \quad - \quad \text{analog} \quad (1)$$

eingeführt (Bild 2). Die Parameter $p_{r_s}^\Lambda$ sind innerhalb des Modells die gesuchten Größen. Als Formfunktionen N_j werden 2d-Basis-Splines verwendet.

2. Kinematische Beziehungen

Das Blechbauteil wird im Rahmen einer Schalentheorie unter Verwendung der Normalenhypothese beschrieben. Ausgehend von der Darstellung der Schalenmittelfläche \vec{r}_0 als Funktion der GAUSS'schen Koordinaten $\bar{x}^K, \bar{x}^\Lambda, x^k$ ergeben sich die Tangentenvektoren und Metriktensoren der Flächen zu

$$\overset{\Lambda}{\vec{a}}_K = \overset{\Lambda}{\vec{r}}_{0,K} \quad \overset{Z}{\vec{a}}_\Lambda = \overset{Z}{\vec{r}}_{0,\Lambda} \quad \overset{M}{\vec{a}}_k = \overset{M}{\vec{r}}_{0,k} \quad (2)$$

$$\overset{\Lambda}{a}_{KL} = \overset{\Lambda}{\vec{a}}_K \cdot \overset{\Lambda}{\vec{a}}_L \quad \overset{Z}{a}_{\Lambda\Omega} = \overset{Z}{\vec{a}}_\Lambda \cdot \overset{Z}{\vec{a}}_\Omega \quad \overset{M}{a}_{kl} = \overset{M}{\vec{a}}_k \cdot \overset{M}{\vec{a}}_l \quad . \quad (3)$$

Aus der Kombination zwischen Geometriebeschreibung der Schalenmittelfläche und dem Verformungsansatz (1) können die logarithmischen Dehnungen bzw. Dehnungsinkremente berechnet werden [3]. Zunächst ergeben sich die Streckungsinkremente $\Delta\lambda_\alpha = d\overset{M}{s}_\alpha/d\overset{Z}{s}_\alpha$ und die Gesamtstreckungen $\lambda_{\hat{\alpha}} = d\overset{M}{s}_{\hat{\alpha}}/d\overset{\Lambda}{s}_{\hat{\alpha}}$ innerhalb der Tangentialebene ($\alpha, \hat{\alpha} = 1, 2$) aus den Hauptachsentransformationen

$$(\overset{M}{a}_{KL} - \Delta\lambda_\alpha^2 \overset{Z}{a}_{KL}) c_\alpha^L = 0 \quad \text{mit:} \quad \overset{M}{a}_{KL} = c_K^k c_L^l \overset{M}{a}_{kl} \quad \overset{Z}{a}_{KL} = c_K^\Lambda c_L^\Omega \overset{Z}{a}_{\Lambda\Omega} \quad (4)$$

$$(\overset{M}{a}_{KL} - \lambda_{\hat{\alpha}}^2 \overset{\Lambda}{a}_{KL}) c_{\hat{\alpha}}^L = 0 \quad c_K^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^K} \quad c_K^\Lambda = \frac{\partial \bar{x}^\Lambda}{\partial \bar{x}^K} \quad (5)$$

Die logarithmischen Dehnungen berechnen sich dann aus

$$\Delta\varphi_\alpha = \ln \Delta\lambda_\alpha \quad \varphi_{\hat{\alpha}} = \ln \lambda_{\hat{\alpha}} \quad (6)$$

Da die Blechdickenrichtung entkoppelt ist, folgen die logarithmischen Dehnungsinkremente bzw. -gesamtdehnungen aus $\Delta\varphi_3 = \ln \overset{M}{h}/\overset{Z}{h}$, $\varphi_3 = \ln \overset{M}{h}/\overset{\Lambda}{h}$.

3. Stoffgesetze

Da innerhalb des Simulationsmodells der Prozeß beim Übergang zwischen zwei Zuständen eliminiert ist, muß das Stoffgesetz einen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerungen vermitteln, d.h. das plastische Materialverhalten wird mit der Deformationstheorie beschrieben [4]. Dabei wird von einem Potential der Form

$$\tau_\alpha = \rho_0 \frac{\partial \Delta W_f^*}{\partial \Delta\varphi_\alpha} \quad \text{mit:} \quad \rho_0 \Delta W_f^* = \int_0^{\Delta\varphi_\alpha} \tau_\nu d(\Delta\varphi_\alpha) \quad (7)$$

mit ΔW_f^* als Formänderungsenergie pro Masseneinheit ausgegangen. Für den ebenen Spannungszustand ergeben sich unter Annahme einer normalen Anisotropie für die Berechnung der KIRCHHOFF'schen Spannungen die Beziehungen

$$\tau_I = \frac{(1+R)^2}{1+2R} E_p (\Delta\varphi_I + \frac{R}{1+R} \Delta\varphi_{II}), \quad \tau_{II} = \frac{(1+R)^2}{1+2R} E_p (\Delta\varphi_{II} + \frac{R}{1+R} \Delta\varphi_I). \quad (8)$$

E_p ist der plastische Sekantenmodul und R das Verhältnis zwischen Quer- und Dicken-
dehnung im Blech.

4. Lösungsverfahren

Bei Vernachlässigung äußerer Belastungen folgt mit (7) aus $\delta(\Delta W_f) = 0$ die Erfüllung der Gleichgewichtsgleichungen und statischen Randbedingungen der Membrantheorie.

Die Parameter der Verformungsabbildung (1) werden aus der Minimierung der Formänderungsenergie gemäß

$$\Delta W_f = \iint \rho_0 \Delta W_f^* h \sqrt{a} d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 = \Delta W_f(p_{rs}^1, p_{rs}^2) \implies \min \quad (9)$$

berechnet. Hierfür wurde ein konjugiertes Gradientenverfahren mit einer effizienten Liniensuche entwickelt. Die Berechnung der Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Parametern p_{rs}^1, p_{rs}^2 erfolgt mit dem automatischen Differenzieren [5].

5. Beispiel

Als Beispiel wird das Tiefziehen einer Rechteckwanne betrachtet, wobei aus Symmetriegründen nur eine Viertelwanne berechnet werden braucht (Bild 3).

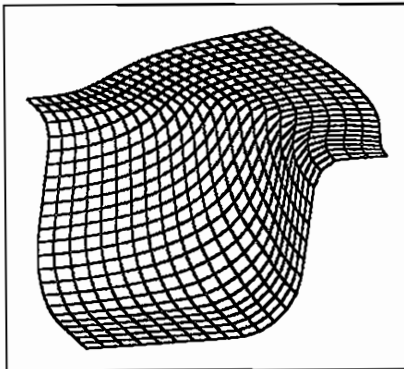


Bild 3. Umgeformtes Blech bei größter Ziehtiefe (konvektive Koordinaten des Ausgangszustandes)

Geometrie und Material:

Wanne:	600 x 500 mm
Ziehtiefe:	100 mm
Ziehringradius:	14 mm
Stempelradius:	10 mm
Ausgangsblechdicke:	0.8 mm
Material	St14p

Die Simulation wurde in 5 Umformschritten mit jeweils einer Zunahme der Ziehtiefe von 20 mm durchgeführt. Die Geometriebeschreibung erfolgte für jede vorgegebene Schalenmittelfläche mit einem Makroelement. Für die GAUSS-Integration zur Berechnung der Formänderungsenergie wurden 576 Integrationsstützstellen verwendet. Bei der Minimierung wurden im Verformungsansatz (1) ungefähr 680 Freiwerte verwendet.

In Bild 4 sind die Verzerrungen entlang einer Schnittlinie unter 45° zur Stempflecke dargestellt.

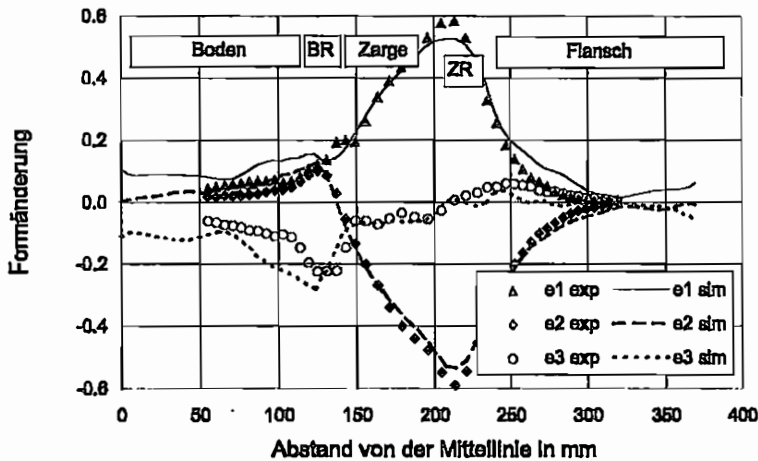


Bild 4. Vergleich zwischen Simulation und Experiment [6]

Literatur

- [1] LANDGRAF, G.; MODLER, K.-H.; ZIEGENHORN, M.: Forming of shells. VDI-Berichte Nr. 894 (1991), 293-305.
- [2] KULLIG, E.; TITTEL, S.; BRUMMUND, J.; MODLER, K.-H.; LANDGRAF, G.; ULBRICHT, V.: Erweiterung der Deformationstheorie auf große Verformungen für die Berechnung der Umformung von Schalen, Zwischenbericht zum DFG-Vorhaben Mo 537/3-1, TU Dresden IFKM, 1996.
- [3] KULLIG, E.; BRUMMUND, J.; LANDGRAF, G.: Simulation von Umformprozessen auf der Basis der Deformationstheorie, Kurzvortrag GAMM-Jahrestagung in Prag 1996, (eingereicht zur Veröffentlichung in der ZAMM).
- [4] KULLIG, E.; ULBRICHT, V.: Deformationstheorie und große plastische Verformungen. in Tagungsband Workshop Numerische Methoden der Plastomechanik, IfM Universität Hannover, (1995), 139-151.
- [5] JOHN, R.; ULBRICHT, V.; LANDGRAF, G.: Optimierung der technologischen Gestaltung von Umformprozessen, Arbeitsbericht zum Teilprojekt der DFG-Forschergruppe IOKOMO an der TU Dresden, 1997.
- [6] VOELKNER, W.; HENNIG, R.; ULBRICHT, V.; BRUMMUND, J.; KULLIG, E.: Vergleichende Untersuchungen zur numerischen Simulation des Tiefziehens nichtrotationssymmetrischer Teile, Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben EFB/AiF:9640B, TU Dresden 1996.

Nichtlineare Schalentheorie mit plastischer Anisotropie

R. John, T. Pyttel und V. Ulbricht¹

Technische Universität Dresden, Institut für Festkörpermechanik

Die hier vorgestellte Schalentheorie basiert auf der konvektiven Beschreibung. Übersichtliche Gleichungen, einfache kinematische Zusammenhänge und gut interpretierbare kinetische Größen kennzeichnen diese körperfeste Darstellung. Ausgehend von den Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums wird durch materielle Zeitableitung und Elimination der für eine zweidimensionale Kontinuumsmechanik unzulässigen Größen eine Geschwindigkeitsformulierung des Feldproblems der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Schale abgeleitet. Ein Deformationsgesetz, formuliert als tensorlineare Beziehung zwischen TRUESDELLScher Spannungsgeschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit vervollständigt den Gleichungssatz. Die Beschreibung von anisotropen Materialverhalten basiert auf einer dem Kontinuum zugeordneten Substruktur [1].

1 Schalentheorie

Als unabhängige Variablen werden die fest mit dem materiellen Teilchen verbundenen, zeitlich konstanten Parameter θ^λ sowie die Zeit t verwendet. Konsequenter Weise sind die Form der Koordinatenlinien, das Basisvektorsystem und die Metrik von der Zeit abhängig. Die Position eines materiellen Teilchens des Schalenraumes beschreibt bei Verwendung der Normalenhypothese der Ortsvektor

$$\vec{r}(\theta^\lambda, t) = \vec{r}(\theta^\alpha, t) + \theta^3 h(\theta^\alpha, t) \vec{n}(\theta^\alpha, t) \quad \alpha = 1, 2, \quad \lambda = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Durch materielle Zeitableitung des Ortsvektors (1) folgt die Verschiebungsgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{v} + \theta^3 h(\vec{\omega} + \frac{\dot{h}}{h} \vec{n}) \quad (2)$$

Die Bestimmung der Koordinaten der Verschiebungsgeschwindigkeit der Schalenreferenzfläche \vec{v} sowie der Koordinaten des die Verdrehung des Normalenvektors \vec{n} kennzeichnenden Vektors $\vec{\omega}$ erfolgt auf der Grundlage des Variationsprinzips [2]

$$\delta \Pi_i + \delta \Pi_a + \delta \Pi_n = 0 \quad \text{mit} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \vec{n}^{\alpha\beta} \delta d_{\beta\alpha} + \vec{m}^{\alpha\beta} \delta q_{\beta\alpha} \right\} dA \\ &+ \int_{\mathcal{M}} \left\{ q^\alpha \left(\omega^\beta \delta d_{\beta\alpha} + d_{\beta\alpha} \delta \omega^\beta \right) + n^{\alpha\gamma} \tilde{v}_{||\gamma} \delta \tilde{v}_{||\alpha} + m^{\gamma\delta} b_{\delta\gamma} h \omega^\alpha \delta \omega_\alpha + m^{\alpha\gamma} b_\alpha^\beta h \tilde{v}_{||\gamma} \delta \omega_\beta \right\} dA, \end{aligned}$$

¹Kontakt: Technische Universität Dresden, Institut für Festkörpermechanik, 01062 Dresden, Mail: john-, pyttel-, ulbricht@mflcrs1.mw.tu-dresden.de

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} \vec{P})^\circ \delta \vec{v} \right\} dA + \int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{ah} \vec{S})^\circ \delta \vec{\omega} \right\} dA \\ &+ \int_{\mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} (\sqrt{c} \vec{N})^\circ \delta \vec{v} \right\} ds + \int_{\mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} (\sqrt{ch} \vec{M})^\circ \delta \vec{\omega} \right\} ds, \\ \delta \Pi_n &= \delta \int_{\mathcal{M}} \lambda^\alpha (b_\alpha^\beta \tilde{v}_\beta + \tilde{v}_{,\alpha} + \omega_\alpha) dA, \quad d_{\gamma\delta} = \vec{a}_\gamma \cdot \vec{v}_\delta, \quad d_{\gamma\delta} = h \vec{a}_\gamma \cdot \vec{\omega}_\delta. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ die Schnittgrößen der Schale, $\overset{\nabla}{n}^{\alpha\beta}$ und $\overset{\nabla}{m}^{\alpha\beta}$ die objektiven Schnittgrößengeschwindigkeiten, $d_{\gamma\delta}$ und $d_{\gamma\delta}$ die Deformationsgeschwindigkeiten der Schalenbezugsfläche, $b_{\alpha\beta}$ die Koordinaten des Krümmungstensors, \vec{P} und \vec{S} die Belastungsvektoren pro Flächeneinheit der Schalenbezugsfläche und \vec{N} und \vec{M} die Belastungsvektoren pro Längeneinheit des Randes. Durch $\delta \Pi_n$ wird die aus der Normalenhypothese resultierende Zwangsbedingung im Variationsprinzip berücksichtigt.

2 Deformationsgesetz

Für die Bereitstellung eines elastisch-plastischen Deformationsgesetzes in der Form

$$\overset{\nabla}{n}^{\alpha\beta} = A_0^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma\delta} + A_1^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma\delta} \quad \overset{\nabla}{m}^{\alpha\beta} = A_1^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma\delta} + A_2^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma\delta} \quad (4)$$

wird von der tensorlinearen Beziehung zwischen TRUEDELLEScher Spannungsgeschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit $\overset{\nabla}{\sigma} = \mathcal{C} : \mathbf{d}$ und einem Satz zugeordneter Evolutionsgleichungen der inneren Variablen des dreidimensionalen Kontinuums [3] ausgegangen. Die Aufteilung der kinematischen Größen in einen elastischen und einen plastischen Anteil basiert auf der entsprechenden multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Für die Beschreibung materieller Anisotropie wird dem Kontinuum eine Substruktur zugeordnet. Diese Substruktur kann als ein zusätzliches Koordinatensystem verstanden werden. Die Geschwindigkeiten mit denen sich die inneren Variablen des Deformationsgesetzes ändern beziehen sich auf dieses Koordinatensystem. Eine zeitliche Änderung der Substruktur wird auf der Grundlage der plastischen Winkelgeschwindigkeit definiert. Dieses Vorgehen erlaubt bei kinematischer Verfestigung und der Verformungsvorgabe des ebenen einfachen Schubs eine Unterdrückung des bekannten Oszillierens der Spannungskordinaten.

Die konstitutiven Beziehungen des dreidimensionalen Kontinuums werden ausgehend von den Annahmen $\overset{\nabla}{\sigma}^{33} = 0$, $d_{\alpha 3} = 0$ und $d_{33} = \dot{h}h$ für den Fall des ebenen Spannungszustandes modifiziert. Alle konstitutiven Ansätze sollen das Prinzip der Objektivität erfüllen und folgen daher dem Konzept der isotropen Tensorfunktionen. Die spezifische elastische Ergänzungsenergie für die Beschreibung von elastisch isotropem Materialverhalten kann mit der in \mathbb{T} quadratischen Beziehung $U^*(\mathbb{T}) = d_0 \mathbf{I} : \mathbb{T}^2 + d_1 (\mathbf{I} : \mathbb{T})^2$ angegeben werden. Die Ausführung der partiellen Differentiation dieser Energie nach dem Spannungstensor \mathbb{T} und die Einarbeitung der Annahmen bezüglich der 3-Richtung ermöglicht die Bestimmung der

Koordinaten des elastischen Anteils des Verzerrungstensors in der betrachteten Ebene

$$E_{\alpha\beta}^{e\text{ESZ}} = \rho_z [d_0 (\gamma_{\delta\alpha}\gamma_{\beta\gamma} + \gamma_{\delta\beta}\gamma_{\alpha\gamma}) + 2d_1\gamma_{\beta\alpha}\gamma_{\gamma\delta}] T_{\alpha}^{\delta\gamma} \quad (5)$$

und senkrecht dazu $E_{33}^e = \rho_z 2d_1 \gamma_{33} \gamma_{\gamma\delta} T_{\alpha}^{\delta\gamma}$. Die Beschreibung von plastischem, kinematisch und isotrop verfestigendem Material gelingt mit dem Spannungsdeviator \underline{S} sowie den Strukturtenoren $\underline{\alpha}$ und $\underline{\varepsilon}_v^p$ mittels der Fließbedingung

$$\frac{3}{2} \left[\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} (\underline{S}^{\alpha\beta} - \underline{\alpha}^{\alpha\beta}) (\underline{S}^{\delta\gamma} - \underline{\alpha}^{\delta\gamma}) + \gamma_{33}\gamma_{33} (\underline{S}^{33} - \underline{\alpha}^{33})^2 \right] - \sigma_F^2(\underline{\varepsilon}_v^p) = 0 \quad (6)$$

Ausgehend von der assoziierten Fließregel läßt sich die plastische Deformationsgeschwindigkeit durch partielle Differentiation der Fließbedingung in der Form

$$D_{\alpha\beta}^p = \lambda 3 \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} (\underline{S}^{\delta\gamma} - \underline{\alpha}^{\delta\gamma}) \quad D_{33}^p = \lambda 3 \gamma_{33} \gamma_{33} (\underline{S}^{33} - \underline{\alpha}^{33}) \quad (7)$$

bestimmen. Für die plastische Winkelgeschwindigkeit \underline{W}^p wird unter Beachtung der Regel der Äquipräsens der einfachste lineare Ansatz

$$W_{\alpha\beta}^p = \lambda c_1 (\gamma_{\alpha\delta} \underline{\alpha}^{\delta\gamma} N_{\alpha}^n \gamma_{\beta\gamma} - N_{\alpha\gamma}^n \underline{\alpha}^{\gamma\delta} \gamma_{\delta\beta}) \quad W_{33}^p = 0 \quad (8)$$

gewählt. Die Verfestigungsgesetze liefern die Entwicklungsgleichungen der Strukturtenoren $\underline{\alpha}$ und $\underline{\varepsilon}_v^p$. Der lineare Ansatz $\underline{\alpha} = \lambda (\bar{b}_1 \mathbf{I} + \bar{b}_2 \underline{\alpha} + \bar{b}_3 \underline{T})$ kann durch eine entsprechende Wahl der Koeffizientenfunktionen \bar{b}_i an die Verfestigungsgesetze nach FREDERICK-ARMSTRONG bzw. PRAGER

$$\dot{\underline{\alpha}}^{\alpha\beta} = \lambda (b_3 \gamma^{\alpha\delta} N_{\delta\gamma}^n \gamma^{\beta\gamma}) - L^{p\alpha} \underline{\alpha}^{\delta\beta} - L^{p\beta} \underline{\alpha}^{\delta\alpha} \quad \dot{\underline{\alpha}}^{33} = \lambda (b_3 \gamma^{33} N_{33}^n \gamma^{33}) - L^{p3} \underline{\alpha}^{33} - L^{p3} \underline{\alpha}^{33} \quad (9)$$

angepaßt werden. Die Beziehung $\dot{\underline{\varepsilon}}_v^p = \lambda 2 \sigma_v(\underline{S}, \underline{\alpha})$ basiert auf der plastischen Deformationsleistung.

Den Zugang zu der Beschreibung plastisch orthotropen Materialverhaltens liefern die Strukturtenoren zweiter Stufe \underline{A}_1 und \underline{A}_2 . Die in [3] symbolisch angegebenen Ansätze für die Fließbedingung und die plastische Winkelgeschwindigkeit lassen sich nach Einarbeitung der Annahme des ebenen Spannungszustandes in der Form

$$\begin{aligned} f_z &= a_4 [A_{1\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T^{\delta\gamma} - (A_{1\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T^{\delta\gamma} + A_{2\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T^{\delta\gamma})/2] \\ &- a_5 (A_{1\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T^{\delta\gamma})/2 - a_6 (A_{2\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T^{\delta\gamma})/2 \\ &+ a_7 (A_{1\gamma\beta} T^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\delta} T^{\delta\gamma} - A_{1\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T^{\delta\gamma}) \\ &+ a_8 (A_{2\gamma\beta} T^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\delta} T^{\delta\gamma} - A_{2\alpha\beta} T^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T^{\delta\gamma}) - \sigma_F^2(\underline{\varepsilon}_v^p) \\ W_{\alpha\beta}^p &= \lambda c_2 (A_{2\alpha\gamma} T^{\gamma\delta} A_{1\delta\beta} - A_{1\alpha\gamma} T^{\gamma\delta} A_{2\delta\beta}) \quad W_{33}^p = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

angeben. Die Koordinaten der Strukturtenoren werden mit den die Substruktur kennzeichnenden Basisvektoren $\vec{e}_k = \beta^\mu_k \vec{\gamma}_\mu$ zu

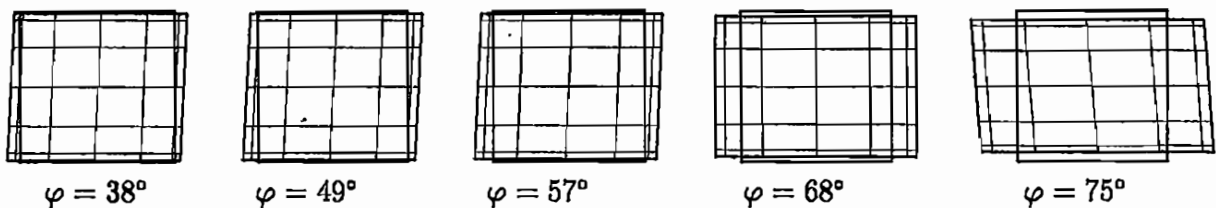
$$\underline{A}_i = A_i^{\mu\nu} \vec{\gamma}_\mu \vec{\gamma}_\nu = \vec{e}_{(k)} \vec{e}_{(k)} = \beta^\mu_{(k)} \beta^\nu_{(k)} \vec{\gamma}_\mu \vec{\gamma}_\nu \quad (11)$$

bestimmt. Bei plastischer Orthotropie kennzeichnet die Substruktur die Orthotropieachsen, woraus die Möglichkeit, eine zeitliche Änderung dieser Orthotropieachsen zu beschreiben, resultiert.

Für die Einbeziehung der konstitutiven Beziehungen in die Variationsgleichung (3) werden zunächst die objektiven Schnittgrößengeschwindigkeiten $\dot{n}^{\alpha\beta}$ und $\dot{m}^{\alpha\beta}$ durch die Koordinaten der TRUESDELLSchen Spannungsgeschwindigkeit dargestellt. Die Einarbeitung des für den ebenen Spannungszustand modifizierten Deformationsgesetzes liefert die gesuchten Zusammenhänge zwischen den Schnittgrößengeschwindigkeiten und den Deformationsgeschwindigkeiten der Schale (4). Die darin enthaltenen Größen $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$ werden als Schalensteifigkeiten bezeichnet.

3 Numerische Umsetzung und Beispiel

Kernstück des nichtlinearen Anfangs- Randwertproblems ist ein lineares Randwertproblem für die Verschiebungsgeschwindigkeiten. Die Diskretisierung dieses Randwertproblems, welches in Form der Variationsaufgabe (3) gegeben ist, erfolgt mittels der Methode der finiten Makroelemente. Durch materielle Zeitableitung der entsprechenden Definitionsgleichungen können für alle interessierenden Zustandsgrößen Zuwachsgleichungen angegeben werden. Diese Gleichungen lassen sich mit den Evolutionsgleichungen des Deformationsgesetzes in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung einordnen, das mit dem Verfahren von RUNGE-KUTTA II über die Zeit integriert wird. Das folgende Beispiel demonstriert die Möglichkeiten des implementierten Deformationsgesetzes anhand einer orthotropen Scheibe, die an beiden Enden durch gleichmäßigen Zug belastet ist. Die Scheibe reagiert zunächst mit dem dargestellten nach rechts Neigen. Durch die Beeinflussung der mit dem Winkel φ beschriebenen Lage der Orthotropieachsen während der Deformation kommt dieses nach rechts Neigen ab $\varphi = 45^\circ$ zum Stillstand und es setzt ein nach links Neigen ein.



Literatur

- [1] Y.F. Dafalias. Issues on the Constitutive Formulation at Large Elastoplastic Deformations. Part I: Kinematics, Part II: Kinetics. *Acta Mechanica*. **69** (1987), 119–138, **73** (1988), 121–146.
- [2] V. Ulbricht. Grundlagen der nichtlinearen Schalentheorie in konvektiver Metrik. in *Numerische Methoden der Plastomechanik*, Besdor, D., (1992), 401–411
- [3] R. John. Ein Deformationsgesetz für große elastisch-plastische Verformungen zur Modellierung anisotropen Materialverhaltens. *Dissertation*. TU Dresden. 1996.

Eine verbesserte Schalentheorie und ihre Anwendung auf Probleme der Kriechmechanik

Andrei Sichov
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

In der vorliegenden Arbeit wird die Langzeitfestigkeit von Flächentragwerken bei auftretenden Kriechprozessen analysiert. Dafür wird eine Schalentheorie unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität und der Schubverzerrungen [5] auf Probleme der Kriechmechanik angewendet. An ausgewählten Beispielen werden die Möglichkeiten der verwendeten Schalentheorie diskutiert und die erhaltenen Ergebnisse mit Lösungen nach der KIRCHHOFF-LOVE-Theorie verglichen.

1 Grundgleichungen

Betrachtet wird eine Rotationsschale mit einer axialsymmetrischen Belastung in den orthogonalen krummlinigen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ζ . Die Koordinatenachsen ξ_1, ξ_2 fallen mit der Hauptkrümmungslinien zusammen und die Koordinatenachse ζ ist zur Mittelfläche senkrecht. Die Geometrie des Schalenraumes wird durch die Laméschen Koeffizienten A_1, A_2 und die Hauptkrümmungen k_1, k_2 definiert. Der Verschiebungsvektor des Schalenraums v^* wird durch den Verschiebungsvektor der Mittelfläche v und den Differenzvektor w dargestellt [2]:

$$v^* = v + \zeta w.$$

Während der Verformung wird der Schalenquerschnitt gedreht und um den Schubwinkel geneigt. Die Verwölbungen des Schalenquerschnittes und die Dickenverzerrungen werden nicht berücksichtigt. Die Komponenten des GREENSchen Verzerrungstensors γ_{ij} sind durch zweidimensionale Verzerrungsmaße $\alpha_{\alpha\beta}, \beta_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha$ definiert [2]:

$$\gamma_{11} = \alpha_{11} + \zeta \beta_{11} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \gamma_{13} = \frac{1}{2} \gamma_1,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \partial_1 v_1 + k_1 v_3 + \frac{\varphi_1^2}{2}, & \alpha_{22} &= \psi v_1 + k_2 v_3, & \gamma_1 &= w_1 - \varphi_1, \\ \beta_{11} &= \partial_1 w_1 + k_1 \alpha_{11}, & \beta_{22} &= \psi w_1 + k_2 \alpha_{22}, & \varphi_1 &= -\partial_1 v_3 + k_1 v_1, \end{aligned}$$

wobei $\partial_1(\dots) = A_1^{-1} \partial(\dots) / \partial \xi_1$ und $\psi = A_2^{-1} \partial_1 A_2$ sind. Es wird vorausgesetzt, da die Schubverzerrungen γ_α in Schalendickenrichtung konstant sind. In der klassischen KIRCHHOFF-LOVE-Theorie werden diese vernachlässigt. Der unterstrichene Term entspricht der geometrischen Nichtlinearität. Die hier betrachtete Variante der geometrisch nichtlinearen Schalentheorie kann bei Durchbiegungen in der Größenordnung der Schalendicke und bei kleinen Schalenverzerrungen angewendet werden.

Die Schalengleichgewichtsbedingungen lauten [5]:

$$\begin{aligned} \partial_1 n_{11} + \psi(n_{11} - n_{22}) + k_1 q_1 + p_1 &= 0, \\ \partial_1 q_1 + \psi q_1 - k_1 n_{11} - k_2 n_{22} + p_3 &= 0, \\ \partial_1 m_{11} + \psi(m_{11} - m_{22}) - q_1 - \underline{n_{11}} \varphi_1 + c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen enthalten die Schalenschnittgrößen: $n_{\alpha\beta}$ - Kräfte in der Ebene, q_α - Querkräfte, $m_{\alpha\beta}$ - Momente, p_i - äußere Lasten, c_α - äußere Lastmomente. In den Gleichgewichtsbedingungen ist der Term infolge der geometrischen Nichtlinearität unterstrichen.

Unter Annahme infinitesimaler Verzerrungen können die Gesamtverzerrungen γ_{ij} in einen elastischen γ_{ij}^{el} und einen Kriechanteil γ_{ij}^{kr} additiv zerlegt werden:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{el} + \gamma_{ij}^{kr}.$$

Damit folgen die konstitutiven Gleichungen für Schalen in der Form:

$$n_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \{ \alpha_{11} + \nu \alpha_{22} \} - n_{11}^{kr} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad q_1 = \kappa Gh \gamma_1 - q_1^{kr},$$

$$m_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{ \beta_{11} + \nu \beta_{22} \} - m_{11}^{kr} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

mit E als Elastizitätsmodul, ν - Querkontraktionszahl, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - Gleitmodul, h - Schalendicke. Die Gleichungsanteile $n_{\alpha\beta}^{kr}$, q_α^{kr} , $m_{\alpha\beta}^{kr}$ entsprechen den Integralen der Kriechverzerrungen γ_{ij}^{kr} über die Schalendicke

$$n_{11}^{kr} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{11}^{kr} + \nu \gamma_{22}^{kr}) d\zeta \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad q_1^{kr} = \kappa G \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{13}^{kr} d\zeta,$$

$$m_{11}^{kr} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{11}^{kr} + \nu \gamma_{22}^{kr}) \zeta d\zeta \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Die Gleichungen für die Schubkomponenten enthalten einen Schubkorrekturfaktor κ , der 5/6 gesetzt wurde.

Zur Beschreibung des Kriechens und der Schädigung wird das Modell nach KACHANOV-RABOTNOV [4] mit einem phänomenologischen Schädigungsparameter betrachtet. Die Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen werden für die Geschwindigkeiten der Kriechverzerrungen $\dot{\gamma}_{ij}^{kr}$ und der Schädigungsvariable \dot{d} wie folgt formuliert:

$$\dot{\gamma}_{ij}^{kr} = \frac{3}{2} \frac{A(\sigma_M^{eq})^n}{(1-d^r)^m} \frac{s_{ij}}{\sigma_M^{eq}}, \quad \dot{d} = \frac{B(\sigma_M^{eq})^k}{(1-d^r)^l},$$

wobei $\sigma_M^{eq} = \sqrt{3/2 s \cdot s}$ die VON MISES Vergleichsspannung und s Spannungsdeviator sind. A, B, n, m, r, k, l sind werkstoffspezifische Kennwerte, die experimentell identifiziert werden müssen.

Das beschriebene Grundgleichungssystem entspricht einer Anfangs-Randwertaufgabe. Die Lösung der Anfangsaufgabe wird mit der Einbettungsmethode vierter Ordnung nach MERSON erzielt. Diese Methode ermöglicht eine Auswertung des lokalen Fehlers. Dadurch wird eine automatisierte Schrittweitenwahl realisiert. Die Randwertaufgabe wird durch ein beratungsmatrizenverfahren mit diskreter Lösungsorthogonalisierung nach GODUNOV gelöst. Die Orthogonalisierung des Lösungsvektors erhöht die numerische Stabilität der Lösung. Die Berechnungsmethoden sind in [1] beschrieben.

2 Numerische Beispiele

Numerische Untersuchungen der Langzeitfestigkeit von Flächentragwerke wurden für zwei Beispiele durchgeführt. Die Kennwerte des Kriechmodells wurden für eine Aluminiumlegierung bestimmt [3]: $A = 0.335 \cdot 10^{-7} \text{ MPa}^{-n}/\text{h}$, $B = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ MPa}^{-m}/\text{h}$, $n = m = k = l = 3$, $r = 1.4$, $E = 65 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.

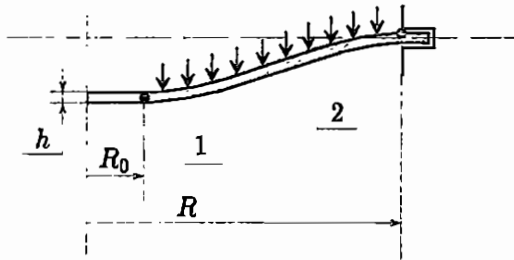


Abb. 1: Kreisringplatte

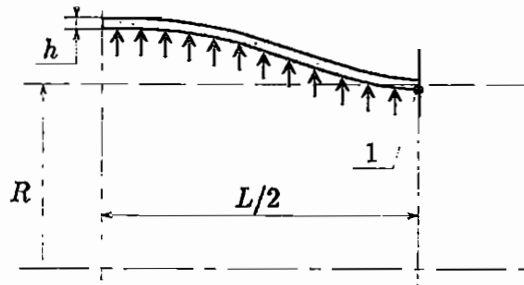


Abb. 2: Zylinderschale

Als erstes Beispiel wird eine dünne, eingespannte Kreisringplatte unter Querbelastung (Abb. 1) betrachtet. Die Einspannung erlaubt Verschiebungen in der Plattenebene. Folgende geometrische Größen und Belastung wurden angenommen: $h = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $R = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $R_0 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $p_3 = -0.3 \text{ MPa}$.

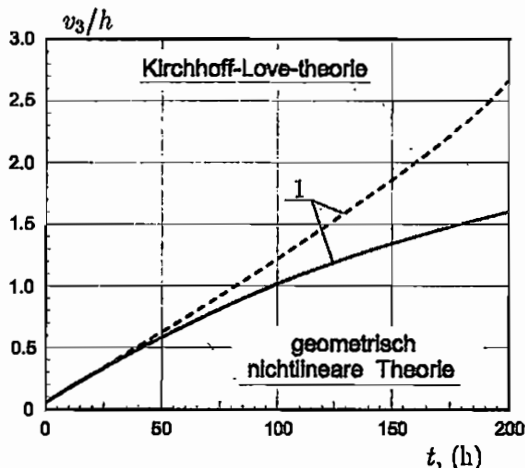


Abb. 3: Zeitlicher Verlauf der maximalen Durchbiegung

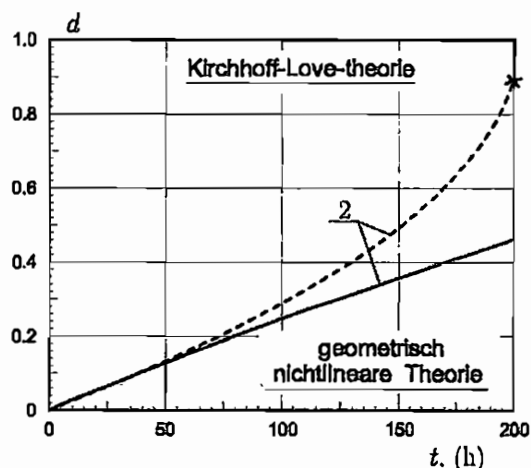


Abb. 4: Zeitlicher Verlauf der Schädigung

Auf den Abb. 3 und Abb. 4 sind die zeitlichen Verläufe der maximalen Plattendurchbiegung für den Punkt 1 (am Innenrand) und des Schädigungsparameters im Punkt 2 (maximale Beanspruchung) dargestellt. Die Lösung des geometrisch nichtlinearen Problems liefert eine Verzögerung des Verschiebungswachstums und der Schädigungsakkumulation im Vergleich zur Lösung der klassischen Theorie, welche durch den Einfluss der Membrankräfte erklärt werden kann. Die Membrankräfte wirken der Plattenbiegung entgegen und werden im Rahmen der klassischen Theorie nicht berücksichtigt.

Als zweites Beispiel wird eine Zylinderschale mittlerer Dicke (Abb. 2) betrachtet. Die Schale ist an den Rändern eingespannt und durch Innendruck belastet. Folgende geometrische Größen und Belastung wurden angenommen: $h = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $R = 1 \text{ m}$, $L = 2 \text{ m}$, $p_3 = 32 \text{ MPa}$.

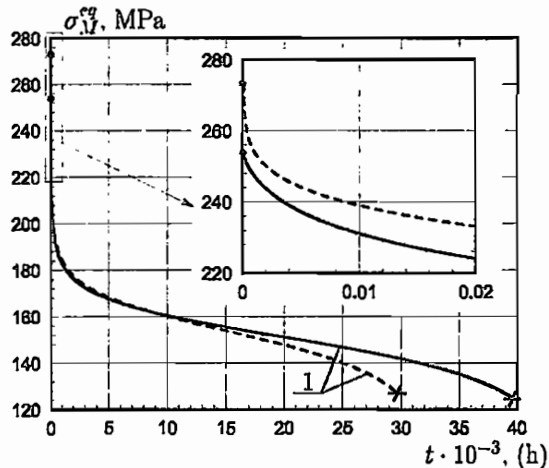


Abb. 5: Zeitlicher Verlauf der Vergleichsspannung nach VON MISES

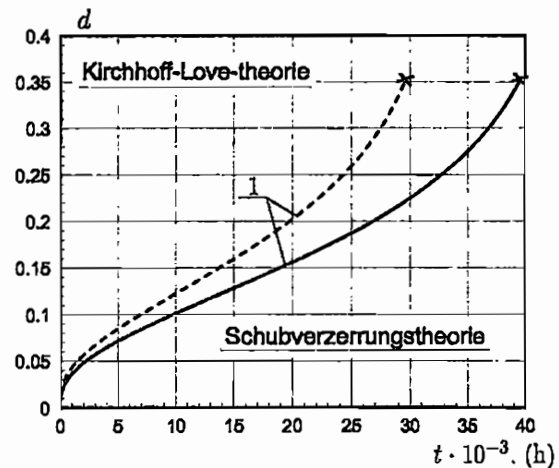


Abb. 6: Zeitlicher Verlauf der Schädigung

Auf den Abb. 5 und Abb. 6 sind die zeitlichen Verläufe der Vergleichsspannung nach VON MISES und des Schädigungsparameters im maximal beanspruchten Punkt dargestellt. Die Lösung der klassischen Schalentheorie liefert eine Unterschätzung der Schalenlebensdauer im Vergleich zur Lösung nach der Schubverzerrungstheorie. Dieser Effekt kann durch Unterschiede im Niveau der maximalen Spannungen aufgrund der geringeren Schalensteifigkeit bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen erklärt werden.

Danksagung

Das Forschungsarbeit wurde durch das Land Sachsen-Anhalt (Landesgraduiertenförderung) finanziell unterstützt, wofür an dieser Stelle gedankt werden soll.

Literatur

- [1] ALTENBACH, H.; MORACHKOVSKY, O.; NAUMENKO, K.; SYCHOV, A.: Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions. *Archive of applied mechanics* 67 (1997) 339-352
- [2] BASAR, Y.: Finite-rotation theories for composite laminates. *Acta Mechanica* 98 (1993) 159-176
- [3] KONKIN, V.N., MORACHKOVSKY, O.K.: Long-term strength of light alloys with anisotropic properties. *Probl. Prochn.* 6 (1987) 38-42 (in Russian)
- [4] RABOTNOV, Y.N.: *Creep problems in structural members.* North-Holland 1969
- [5] REDDY, J.N.; CHANDRASHEKHARA, K.: Geometrically non-linear transient analysis of laminated, doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mechanics* 20 (1985) 2, 79-90

Anpassung eines Schädigungsmodells an Wöhlerkurven im elastischen Bereich

Lothar Schreiber, Institut für Mechanik, Universität Gh Kassel

Für ein Schädigungsmodell, das hauptsächlich von Spannungen, genauer gesagt, von Normalspannungen angetrieben wird (andere Einflüsse wie Temperatur und Vorgeschichte greifen nur indirekt über Parameter ein) und sonst in keiner Weise an ein bestimmtes Materialmodelle gekoppelt ist, stellen die Informationen, die zu den unterschiedlichsten Materialien in Wöhlerkurven gesammelt sind, einen nicht zu ignorierenden Fundus dar. Dabei ist es allerdings nicht das Ziel, die zwei Geraden in der einfach logarithmischen Darstellung solcher Kurven nachzuahmen, die das übliche Modell der Werkstofftechnik sind und wiederum auf dort vertretenen Modellvorstellungen beruhen. Die Anpassung zielt eher auf die Originalmeßdaten, die hinter den Wöhlerkurven stehen.

Das hier betrachtete Schädigungsmodell arbeitet mit einer Schädigungsvariablen, die als Vektor die Normale aller in einem repräsentativen Volumenelement gemittelten Mikrorißflächen repräsentiert. Der Betrag dieses Vektors d nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, um den vollständig ungeschädigten Zustand und den Zustand, der keinerlei Tragfähigkeit hat, zu beschreiben, folgt also in diesem den Gedanken von Kachanov und Lemaitre. Eine weitere Analogie ist, daß zwischen zwei Spannungszuständen unterschieden wird: den effektiven Spannungen \hat{T} , für die das werkstoffentsprechende Stoffgesetz gilt, und den Spannungen T , die in die Impulsbilanz eingehen, bzw. im Experiment makroskopisch zu beobachten sind. Der Unterschied zwischen beiden, T_{Δ} , ist schädigungsabhängig.

$$T = \hat{T} - T_{\Delta} \quad (1)$$

Um der oft beobachteten Tatsache Rechnung zu tragen, daß manche Werkstoffe dauerwechselfest sind, also unterhalb eines bestimmten Spannungsniveaus beliebig viele Lastwechsel ertragen, wird eine Schadensschwelle ähnlich einer Fließfläche im Spannungsraum eingeführt, z.B.

$$S = I_2(\hat{T}) - k_0 > 0 \quad (2)$$

Schädigung tritt nur auf, wenn mit \hat{T} die Schadensschwelle $S = 0$ überschritten wird, und wird dann von dem Teil von \hat{T} angetrieben, der über sie hinausragt.

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \frac{1}{E} \langle\langle \bar{w} \lambda_{\max} z_{\max} \rangle\rangle \\ \langle\langle x \rangle\rangle &= \begin{cases} x; & S > 0 \\ 0 & \end{cases} \\ \bar{w} &= \begin{cases} p_w; & \lambda_{\max} > 0 \\ 0 & \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Darin ist p_w ein Materialparameter, λ_{\max} das $(1 - \sqrt{k_0/I_2(\hat{T})})$ -fache vom größten Eigenwert von \hat{T} und z_{\max} der zugehörige Eigenvektor, auf 1 normiert.

Der zweite Teil des Schadensmodells betrifft die schädigungsabhängige Differenz zwischen der wahren und der effektiven Spannung.

$$\begin{aligned} T_{\Delta} &= d \frac{1}{2} (\hat{T} Z + Z \hat{T}) \\ Z &= n \otimes n \\ n &= \frac{d}{d} \end{aligned} \quad (4)$$

Ein Biegebalken konstanten Querschnitts $A = bh$, der an einem Ende fest eingespannt ist und am anderen Ende die Verdrehung $\phi = \phi_{\max} f(t)$ aufgeprägt bekommt, erfährt entlang seiner Ausdehnung eine konstante Krümmung

$$\kappa = \kappa_{\max} f(t) \quad (5)$$

und, unter Voraussetzung einer Bernoulli-Kinematik, die Dehnung

$$\epsilon = \kappa_{\max} z f(t) \quad (6)$$

Die einzige Spannung, die entsteht,

$$\hat{\sigma} = E \kappa_{\max} z f(t) \quad (7)$$

ist gleichzeitig Hauptspannung λ_{\max} und gehört zum Eigenvektor $n = (1, 0, 0)$, der damit die Orientierung von d festlegt.

$$\begin{aligned} d &= (\dot{d}, 0, 0) \\ \dot{d} &= \frac{p_w}{E} (\hat{\sigma}(z, t) - \sqrt{k_0}); \quad \text{wenn } \hat{\sigma} > \sqrt{k_0} \end{aligned}$$

Für eine gegebene Funktion $f(t)$ läßt sich mit (7) der Zuwachs der Schädigung Δd während einer Periode T an jeder Stelle z ausrechnen, sofern z außerhalb der Grenzen $\pm z_0$ liegt, innerhalb deren die Schadensschwelle $S = 0$ (vgl. 2) nie überschritten wird.

$$z_0 = \frac{\sqrt{k_0}}{E \kappa_{\max}} \quad (8)$$

Angegeben sind die Fälle einer Sägezahn- bzw. Sinussteuerung, $f(t) \in [-1, 1]$, für einen dauerwechselfesten Werkstoff ($\sqrt{k_0} > 0$) und einen nicht dauerwechselfesten.

	Sägezahn	Exzenter (Sinus)	
$\Delta d(z) =$	$\frac{p_w T}{4} \kappa_{\max} z $	$\frac{p_w T}{\pi} \kappa_{\max} z $	$\sqrt{k_0} = 0$
	$\frac{p_w T}{4} \frac{\sqrt{k_0}}{E} (1 - \frac{1}{\zeta})(\zeta - 1)$	$\frac{p_w T}{\pi} \frac{\sqrt{k_0}}{E} (\zeta \cos \arcsin \frac{1}{\zeta} + \arcsin \frac{1}{\zeta} - \frac{\pi}{2})$	$\sqrt{k_0} > 0$

$\zeta = \frac{|z|}{z_0}$ (vgl. 8)

Der Verlauf ist in den zwei nicht dauerwechselfesten Fällen offensichtlich linear in z , in den beiden anderen geht er für wachsende z schnell in einen annähernd linearen Verlauf über. Das ist, um es vorwegzunehmen, nicht konsistent mit Beobachtungen von Werkstoffkundlern, die die Risse an Biegewechselfestigkeitsproben auch kurz vor dem Bruch nur bis in geringe Tiefe verfolgen können.

Da der Zuwachs der Schädigung pro Zyklus nur vom Ort, aber nicht von der Zykluszahl oder anderem abhängt und die geometrischen Randbedingungen in ihrem gesteckten Rahmen bleiben ($\phi_{\max}, \kappa_{\max}$ konstant), ist die maximale Lastwechselzahl n_{\max} dann erreicht, wenn in der meist beanspruchten Faser ($z = \frac{h}{2}$) die Schädigung auf 1 angewachsen ist. Das ist der Fall für

	Sägezahn	Exzenter (Sinus)	
$n_{\max} =$	$\frac{4E}{p_w T \sigma}$	$\frac{4E}{p_w T \sigma} \frac{v}{v - 2 + \frac{1}{v}}$	$\sqrt{k_0} = 0$
	$\frac{\pi E}{p_w T \sigma}$	$\frac{\pi E}{p_w T \sigma} \frac{v}{v \cos \arcsin \frac{1}{v} + \arcsin \frac{1}{v} - \frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{k_0} > 0$

(9)

$v = \frac{\sigma}{\sqrt{k_0}}$

Das sind abklingende Kurven für σ , die, linear über einer logarithmischen Skala für die Lastwechselzahl n_{\max} aufgetragen, bei immer gleicher Anfangssteigung mit dem einzigen Parameter $p_w T$ nur zu höheren oder niedrigeren Lastspielzahlen hin verschoben werden können (s.u. im Bild die dünnegezeichneten Linien).

Das bisher vorgestellte Modell hat zu wenig Freiheiten, um alle Phänomene, die Werkstoffkundler bei Biegewechselfestigkeitsversuchen beobachten zufriedenstellend zu beschreiben, unter anderem auch nicht den im Versuch kaum feststellbaren Abfall des wirksamen maximalen Biegemomentes in der Probe bei zunehmender Lastwechselzahl n . Das vorgestellte Modell ergibt einen linearen Zusammenhang.

$$\begin{aligned}
 M(n) &= \int_A \sigma_{\max}(z, n) z \, dA \\
 &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} (1 - d(z, n)) E \kappa_{\max} z^2 \, dz \\
 &= \underbrace{2E \kappa_{\max} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \, dz}_{M_0} - 2E \kappa_{\max} \int_0^{\frac{h}{2}} n \Delta d(z) z^2 \, dz \\
 \frac{M(n)}{M_0} &= 1 - 24 \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} \Delta d(z) z^2 \, dz}{h^3} n
 \end{aligned}$$

Wenn bei $n = n_{\max}$ in der Außenfaser $d = 1$ gilt, ist der Verlauf von $d(z) = n_{\max} \Delta d(x) = \frac{2z}{h}$ und der Endwert $M(n_{\max})/M_0$ ist mit $\frac{1}{4}$ viel zu klein.

Die einfachste Änderung am Modell ist, die Materialkonstante p_w durch eine Funktion der Spannung zu ersetzen. Hier wiederum die einfachste Möglichkeit, die nur einen weiteren Parameter einführt, ist ein Potenzansatz ähnlich einem Kriechgesetz.

Bisher (vgl. 3): $\dot{d} = \langle\langle \bar{w} \frac{\lambda_{\max}}{E} z_{\max} \rangle\rangle$

Änderung: $\dot{d} = \langle\langle \bar{w} \left(\frac{\lambda_{\max}}{E}\right)^\alpha z_{\max} \rangle\rangle$

Einaxialer Fall: $\dot{d} = p_w \left(\frac{\hat{\sigma} - \sqrt{k_0}}{E}\right)^\alpha$; $\hat{\sigma} > \sqrt{k_0}$

Der Zuwachs pro Lastzyklus ist danach (Sägezahn):

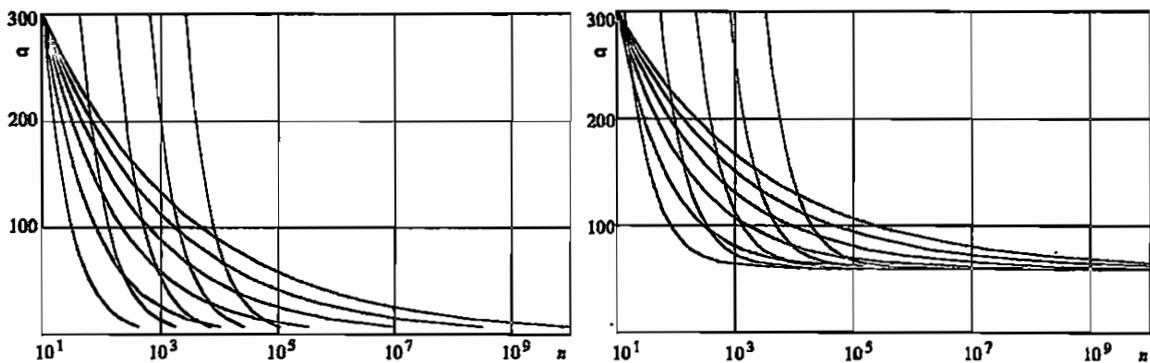
$$\Delta d(z) = \frac{1}{2} \frac{p_w T}{\alpha + 1} \begin{cases} (\kappa_{\max} z)^\alpha & ; \sqrt{k_0} = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{k_0}}{E}\right)^\alpha \frac{(\zeta - 1)^{\alpha+1}}{\zeta}, \quad \kappa_{\max} z_0 = \frac{\sqrt{k_0}}{E}, \quad \zeta = \frac{|z|}{z_0} & ; \sqrt{k_0} > 0 \end{cases}$$

und die maximale Lastwechselzahl ergibt sich (vgl. 9) als Kehrwert davon und mit $z = \frac{h}{2}$:

$$n_{\max} = \frac{2(\alpha + 1)}{p_w T \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\alpha+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{k_0}}{\sigma}\right)^{\alpha+1}} \quad (10)$$

Darin gilt der letzte Bruch nur, wenn $\sigma > \sqrt{k_0} > 0$ ist. Die beiden Parameter $p_w T$ und α , die die letzte Gleichung (10) im Vergleich zu (9) enthält, eröffnen wesentlich größere Möglichkeiten, wenn es daran geht, Meßdaten aus Wechselfestigkeitsversuchen anzupassen, vorausgesetzt, die Versuche wurden an Proben konstanten Querschnitts unter sägezahnförmiger Lastführung gemacht.

Das resultierende Biegemoment nimmt immer noch linear mit der Anzahl der Lastwechsel ab, der auf den Anfangswert bezogenen Endwert ist $M(n_{\max})/M_0 = \frac{\alpha}{\alpha+3}$ bzw. $M(n_{\max})/M_0 = \frac{v\alpha+3}{v(\alpha+3)}$ bei dauerwechselfesten Materialien ($v = \sigma/\sqrt{k_0}$).



Zur Beschreibung des duktilen Rißfortschritts in einem Kreiszyylinderrohr

H. BAASER, D. GROSS, *Institut für Mechanik, Technische Universität Darmstadt*

1 Einleitung

In industriellen Anwendungen kommt es durch verschiedenartige Beanspruchungen häufig zu Versagen wesentlicher Abschnitte einer Struktur. Bei diesen Strukturen handelt es sich oft um Stahlbleche oder dünnwandige Tragwerke, die als *Schalen* modelliert werden können. Das Tiefziehen von Blechen stellt dabei eine der möglichen Belastungsarten dar. Eine andere Art der (Über-) Belastung von Material ist in Abb. 1 dargestellt. Ein Rohr ist aufgrund einer Überlastung durch Innendruck in axialer Richtung aufgerissen.

In diesem Beitrag soll die Modellierung eines solchen Versagensvorgangs mit Hilfe der Methode der finiten Elemente vorgestellt werden. Dazu werden finite Schalenelemente verwendet. Als Konstitutivgesetz wird ein Kontinuumsschädigungsmodell verwendet, um das Materialversagen beschreiben zu können. Als Beispiel wird ein Rohr unter Innendruck modelliert, in dem ein Riß in axialer Richtung voranschreitet. Für ideal-plastisches Materialverhalten kann mit diesem Modell auch eine Rißverzweigung simuliert werden.

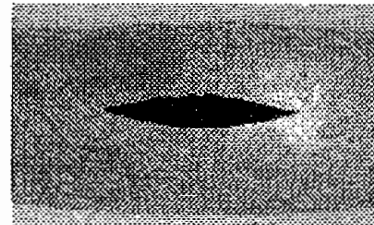


Abbildung 1: Rohrleitungsbau

2 Schalen- und Schädigungsmodell

Zur Modellierung des Druckrohres als Schalenstruktur werden finite Elemente verwendet, die in [3] vorgestellt sind, und deren Leistungsfähigkeit dort dargestellt ist. Es handelt sich dabei um 4-Knoten-Elemente, die auf dem isoparametrischen Konzept beruhen. Als Freiheitsgrade an den Elementknoten werden jeweils die Verschiebungen in drei Raumrichtungen und zusätzlich jeweils zwei Verdrehwinkel verwendet, die die Verdrehung der Schalennormalen beschreiben. Eine Beschreibung von Biegewirkungen innerhalb der Schale wird dadurch ermöglicht.

Als Schädigungsmodell kommt in diesem Beitrag das Modell nach GURSON zur Anwendung, das in [5] vorgeschlagen und in [7] modifiziert worden ist. Dieses Modell basiert auf der auch in Experimenten zu beobachteten Tatsache, daß ein duktiler Versagensprozeß durch die Bildung, das Wachstum und schließlich die Vereinigung von Mikroporen stattfindet. Der Volumenanteil f dieser Poren wird als Schädigungsvariable benutzt. Dabei wird eine zur v. MISES-Fließfunktion

$$\Phi = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right) + (q_1 f^*)^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

um zwei Terme erweiterte Fließfunktion (1) verwendet, wobei $\sigma_e = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ die einaxiale Vergleichsspannung, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ den Spannungsdeviator und f^* den effektiven Porenvolumenanteil bezeichnen. q_1 ist ein Materialparameter und σ_M die aktuelle Fließspannung des Matrixmaterials. Die Konstitutivgleichungen dieses Materialgesetzes bestimmen sich weiterhin aus einer additiven Zerlegung des Dehnungsinkrements, wobei der elastische Anteil aus dem HOOKEschen Gesetz und der plastische Anteil aus der assoziierten Fließregel zu erhalten ist. Als Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable f wird ebenfalls eine additive Zerlegung in einen Wachstums- und einen Neubildungsanteil verwendet, die sich wie folgt zusammensetzen:

$$\dot{f}_{\text{Wachstum}} = (1 - f) \cdot \dot{\varepsilon}_{kk} \quad \text{und} \quad \dot{f}_{\text{Neubildung}} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^{pl} - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \cdot \dot{\varepsilon}_M^{pl}. \quad (2)$$

Dabei beschreibt ε_M^{pl} die plastische Vergleichsdehnung des Matrixmaterials, die sich aus der Forderung der Gleichheit der plastischen Arbeitsinkremente auf mikroskopischer und makroskopischer Ebene bestimmt. f_N , ε_N und s_N sind wiederum Materialparameter.

3 Integration der Konstitutivgleichungen

Ausgehend vom in [3] verwendeten Verzerrungsmaß für die vorgestellte Schalenformulierung, dem GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$, erhält man durch die Integration der Konstitutivgleichungen (1)–(2) den dazu konjugierten 2. PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensor. Die Integration der Konstitutivgleichungen erfolgt hier nach einem Vorschlag in [1] mit einem impliziten EULER-Schema, das sich für eine solche Problemstellung als besonders günstig erwiesen hat. Dabei wird der Spannungstensor mit Hilfe seines Druck- und Deviatoranteils in $p = -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ und $q = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ zerlegt, und alle (inneren) Variablen in Abhängigkeit dieser Größen bzw. deren Inkremente formuliert. So erhält man auf Elementebene an jedem Integrationspunkt ein nichtlineares Gleichungssystem für die Unbekannten Δp , Δq , Δf und $\Delta \varepsilon_M^{pl}$, das dort mit einem NEWTON-Verfahren gelöst wird. Die *konsistente* Linearisierung dieses Algorithmus' führt zur Elementsteifigkeitsmatrix, womit für das globale, nichtlineare Gleichungssystem quadratische Konvergenz erzielt wird.

4 Nichtlokales Modell: Regularisierung

Bei der Beschreibung von entfestigendem Materialverhalten mit der FE-Methode kommt es zu einer Abhängigkeit der Resultate von der gewählten Elementierung. Dieses als *Netzabhängigkeit* bekannte Phänomen ist in letzter Zeit von verschiedenen Autoren (siehe u.a. [2], aber auch [6] und [4]) behandelt worden. Allen Modellen gemeinsam ist die Einführung einer zusätzlichen *charakteristischen* Länge, die das Problem *regularisiert* und in einem gewissen Rahmen zu netzunabhängigen Lösungen führt. Um dieses Problem hier zu behandeln, ist eine Methode gewählt, die auf einer Mittelung der Schädigungsvariable über das zu betrachtende Gebiet Ω basiert und bereits bei [2] verwendet wird. Diese Mittelung wird hier als

Nachlaufrechnung jedem ausiterierten Lastschritt angeschlossen. Dabei wird das Inkrement Δf_{loc} für die Schädigungsvariable an jedem Integrationspunkt \mathbf{x} nach der Vorschrift

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\int \Delta f_{loc}(\mathbf{s}) \cdot \varphi(\mathbf{s} - \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{s})}{\int \varphi(\mathbf{s} - \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{s})} \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{x}) = \exp \left[- \left(\frac{\mathbf{x}}{l_c} \right)^2 \right] \quad (3)$$

und der *charakteristischen* Länge l_c modifiziert und dem Algorithmus für den nächsten Lastschritt zur Verfügung gestellt. Obwohl es sich dabei im Sinne der Iteration um einen expliziten Vorgang handelt, hat er sich in diesem Zusammenhang dennoch als numerisch stabil und ausreichend erwiesen, weil die Iteration jedes Zeitschrittes selbst, wie oben beschrieben, weiterhin implizit erfolgt.

5 Beispiel: Rohr unter Innendruck

Als Beispiel soll hier der axiale Rißfortschritt in einem unendlich langen Kreiszyylinderrohr mit der Wandstärke $t = 1$ mm und dem Durchmesser $d = 100$ mm betrachtet werden, das durch Innendruck belastet wird. Modelliert wird hier –wie unten in den Ergebnissen zu sehen– ein Rohrausschnitt der Breite $l = 15$ mm und einem Winkel von $2\alpha = 2 \cdot 10^\circ$ bei einer Anfangsrißlänge von $a_0 = 5$ mm. Als Materialparametersatz werden Größen verwendet, die einen Baustahl StE 460 beschreiben und schon in [6] und [4] erfolgreich benutzt worden sind. In Abb. 2 ist der oben beschriebene Rohrausschnitt zu sehen. Dargestellt sind hier die v. MISES–Vergleichsspannung und die Schädigung bei einem Rißfortschritt von $\Delta a = 4.5$ mm. Deutlich wird sowohl die Spannungsverteilung als auch die streifenförmige Erhöhung der

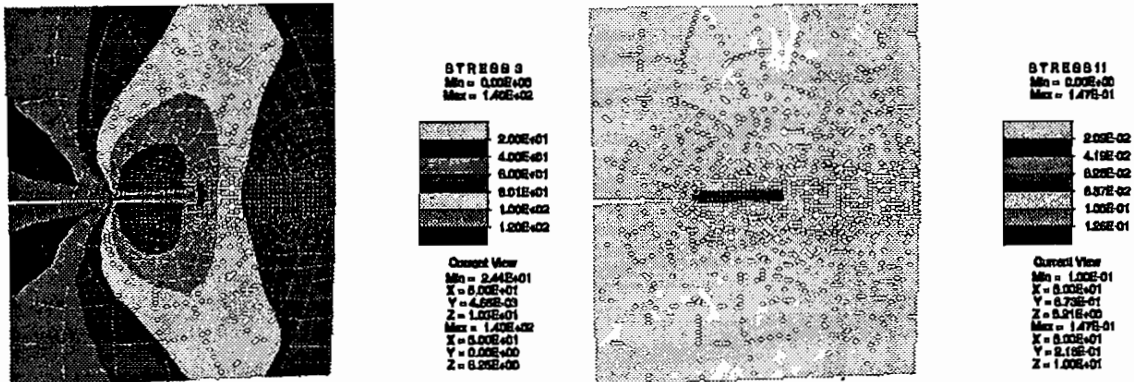


Abbildung 2: Vergleichsspannung und Schädigung

Schädigungswerte in direkter Nähe des Rißpfades. Ändert man den Verfestigungsexponenten für das Matrixmaterial von $N = 7$ zu $N = 20$, was einem annähernd ideal-plastischen Verhalten nahe kommt, läßt sich mit dieser Modellierung eine Rißverzweigung abbilden, wie sie auch in der Realität an Versuchen mit ähnlichen Materialeigenschaften zu beobachten ist. Diese *Bifurkation* ist in Abb. 3 dargestellt.

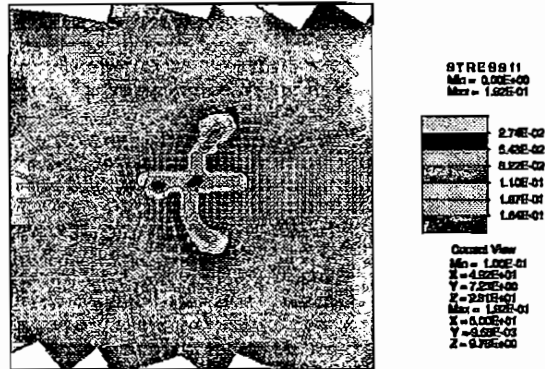


Abbildung 3: Rißverzweigung bei ideal-plastischem Matrixmaterial

6 Zusammenfassung

Mit Hilfe finiter Schalenelemente auf Basis einer 5-Parameter-Theorie und einem Schädigungsmodell ist hier die Modellierung eines Versagensprozesses in dünnwandigen Strukturen gezeigt worden, wie sie in der Anwendung bei Umformvorgngen oder im Druckleitungs-bau vorkommen. Um eine Netzunabhängigkeit der Resultate zu erzielen, ist eine nichtlokale Regularisierung für die Schädigungsvariable verwendet worden. Das Modell ist sowohl zur Simulation des geraden Riffortschritts als auch für Riverzweigungen bei ideal-plastischem Material angewendet worden. Die vorgestellten Algorithmen laufen numerisch stabil und sind effektiv einsetzbar.

Literatur

- [1] N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 24:1395-1416, 1987.
- [2] Z.P. Bazant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localisation instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55:287-293, 1988.
- [3] R. Eberlein. *Finite-Elemente-Konzepte für Schalen mit großen elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Institut für Mechanik, 1997.
- [4] M. Feucht, D. Gross and P. Wriggers. A new element formulation for nonlocal damage models. In *Computational Plasticity*, 1997.
- [5] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99:2-15, 1977.
- [6] J. Hohe, H. Baaser and D. Gross. Analysis of ductile crack growth by means of a cohesive damage model. *International Journal of Fracture*, 81:99-112, 1996.
- [7] V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27:83-151, 1989.

Analyse der Spannungsumlagerung in dünnwandigen Bauteilen infolge von Kriech- und Schädigungsvorgängen

K. Naumenko

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Fachbereich Werkstoffwissenschaften,
06099 Halle (Saale)

1 Einleitung

Für dünnwandige Bauteile, die bei erhöhten Temperaturen eingesetzt werden, sind Kriechverzerrungen sowie Schädigungsevolution dominante Faktoren, die ihre Betriebsdauer beeinflussen. Einerseits findet infolge der Verzerrungszunahme eine wesentliche Spannungsumlagerung statt, insbesondere wenn mäßige Verformungen in einem Bauteils zugelassen sind. Dadurch können Biegespannungen, die im elastischen Ausgangszustand dominieren, im Verlauf des Kriechprozesses deutlich abnehmen. Andererseits kann die Werkstoffschädigung, deren Evolution im wesentlichen vom Spannungsniveau sowie von der Art des Spannungszustandes abhängig ist, zu einem vorzeitigen Versagen führen. Modelle zu Lebensdauerabschätzungen in dünnwandigen Bauteilen werden beispielsweise in [1] und [2] behandelt. Das Ziel der nachfolgenden numerischen Analyse ist, die Besonderheiten der Spannungsumlagerung sowie der Schädigungsentwicklung in Flächentragwerken zu illustrieren. Basierend auf einem mechanismen orientierten Werkstoffmodell sowie einer Schalentheorie unter Einbeziehung finiter Durchbiegungen wird ein exemplarischer Kriechprozeß in einer Rechteckplatte beispielhaft simuliert.

2 Konstitutives Modell

Zur Beschreibung des Kriechverhaltens einer Aluminiumlegierung wurden in [3] die nachfolgenden Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen vorgeschlagen, wobei die dominanten Mechanismen der Kriechdeformation und der Schädigungsentwicklung durch drei innere Zustandsvariablen charakterisiert werden

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}^{\sigma} &= \frac{3}{2} \frac{A}{(1-\omega)^n} \frac{s}{\sigma^{vM}} \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right], \\
 \dot{H} &= \frac{h_c}{\sigma^{vM}} \frac{A}{(1-\omega)^n} \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right] \left(1 - \frac{H}{H_*} \right), \\
 \dot{\Phi} &= \frac{K_c}{3} (1-\Phi)^4, \\
 \dot{\omega} &= \frac{DA}{(1-\omega)^n} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma^{vM}} \right)^\mu N \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right], \\
 n &= \frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \coth \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right], \\
 N &= 1 \quad \text{für } \sigma_1 > 0, \quad N = 0 \quad \text{für } \sigma_1 \leq 0, \\
 0 &\leq \omega < 0.3, \quad 0 \leq \Phi < 1, \quad 0 \leq H \leq H_*.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei ist $\dot{\epsilon}^{cr}$ der Tensor der Kriechverzerrungsgeschwindigkeit, s der Spannungsdeviator, σ^{vM} die Vergleichsspannung nach von Mises, σ_1 die größte Hauptspannung, H die innere Verfestigungsvariable, Φ die innere Variable, die die Alterung der durch Partikel verstärkten Mikrostruktur kennzeichnet, und ω ist die Schädigungsvariable, die Hohlraumbildung und -wachstum charakterisiert. A, B, H_c, H_*, K_c, D sind Werkstoffkennwerte. Die physikalische Motivation des Werkstoffmodells (1) sowie eine Methode der Parameteridentifikation wurden in [3], [4] ausführlich diskutiert. Die Kennwertermittlung für beide Modelle wurde in [3], basierend auf vorhandenen einachsigen experimentellen Kriechkurven einer Aluminiumlegierung, für den Spannungsbereich von 227 bis 262 MPa und für ein Zeitintervall von 0 bis 1000 h vorgenommen. Mit den Werkstoffkennwerten $A = 2.960 \cdot 10^{-11} \text{ h}^{-1}$, $B = 7.167 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}^{-1}$, $h_c = 1.370 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $H^* = 0.2032$, $K_c = 19.310 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $D = 6.630$ liefert das Modell (1) eine gute Übereinstimmung mit einachsigen Kriechkurven, vgl. [3].

3 Anfangs–Randwertproblem

Die eingeführten Konstitutivgleichungen sind Grundlage für die Analyse dünnwandiger Flächentragwerke. Zu diesem Zweck wird eine Schalentheorie auf der Basis der Kirchhoff-Love-Hypothesen sowie unter Annahme kleiner Verzerrungen verwendet. Geometrisch–nichtlineare Anteile in den Schalengleichungen sind durch Einbeziehung finiter Durchbiegungen berücksichtigt. Die Grundgleichungen der Schalentheorie unter Einbeziehung der Kriechverzerrungen sowie ein darauf basierendes Anfangs–Randwertproblem sind in [1] und [2] formuliert. Die Lösung von Kriechproblemen erfolgte für zwei Sonderfälle der Schalentheorie (flache Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß sowie rotationssymmetrische Schalen). Spezielle Lösungsansätze sowie Ergebnisse numerischer Tests wurden in [1] und [5] diskutiert.

4 Numerisches Beispiel

Betrachtet wird eine Quadratplatte unter Querbelastrung, die auf einer Fläche $\delta \times \delta$ in der Plattenmitte verteilt ist, Bild 1. Als Randbedingungen wird das Verschwinden der Durchbiegungen und Neigungen an allen Rändern angenommen. Dabei soll jedoch die Verschieblichkeit in der Ebene gewährleistet sein. Für die vorgegebenen geometrischen Größen $h = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$, $\delta = 0.6l$ mit l als Plattenlänge und h als Plattendicke sowie die Belastungsgröße $q = 0.65 \text{ MPa}$ ist die maximale Vergleichsspannung im Ausgangszustand gleich der oberen Grenze des Spannungsbereiches, für den die einachsigen Kriechversuche durchgeführt wurden. Die maximale Durchbiegung ist schon nach der elastischen Verformung vergleichbar mit der Plattendicke, Bild 1. Somit wurde eine deutliche Durchbiegungszunahme im Verlauf des Kriechprozesses simuliert. Die Berechnungen wurden bis zum Erreichen einer kritischen Größe der Schädigungsvariable ω durchgeführt. Die Zunahme der Membrankräfte bei finiten Durchbiegungen sowie die Relaxation der Biegemomente infolge des Kriechprozesses führen zum Spannungsausgleich im Mittelpunkt der Platte, Bild 2. Die Spannungsverteilung über die Plattendicke, die im elastischen Ausgangszustand ein Biegemoment und eine kleine Membrankraft liefert, wird am Ende des Kriechprozesses konstant. Für

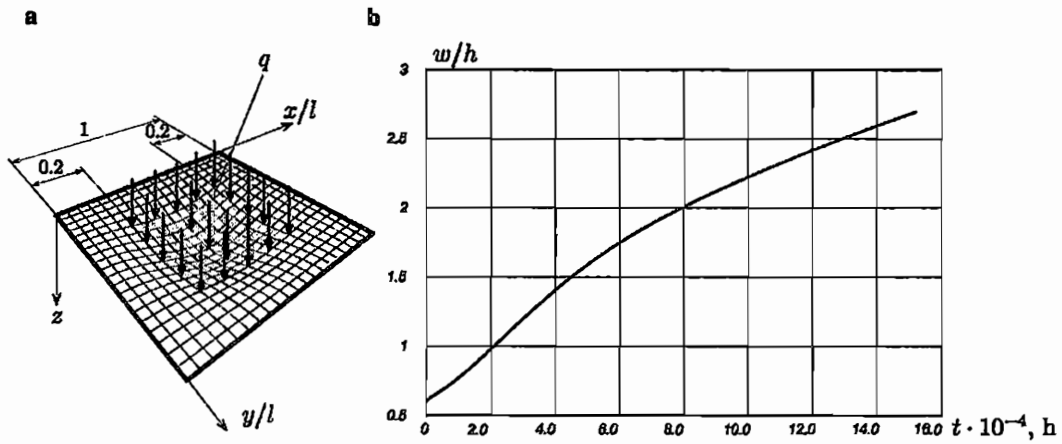


Bild 1: a Teilbelastete Quadratplatte im kartesischen Koordinatensystem; b Zeitverlauf der maximalen Durchbiegung

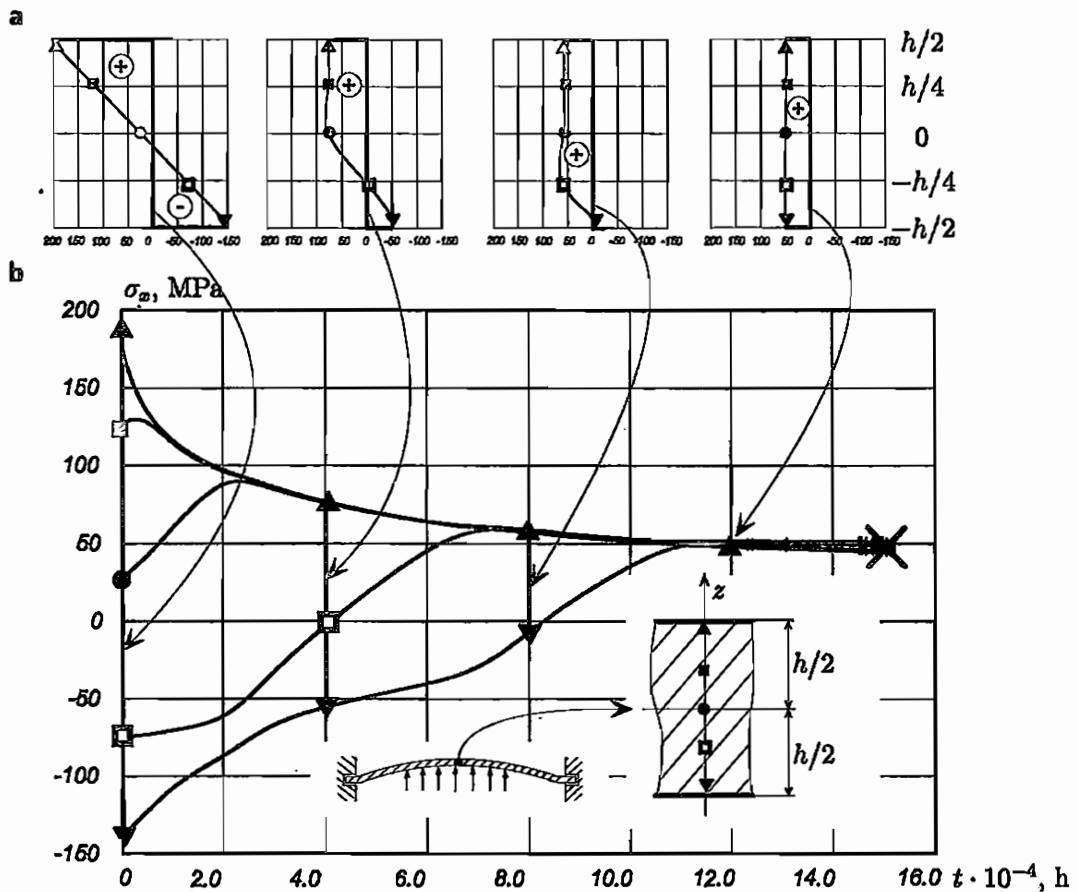


Bild 2: a Spannungsverteilungen über die Dicke im Mittelpunkt der Platte; b Zeitverläufe der Spannungen in verschiedenen Diskretisierungspunkten des Plattenquerschnitts

die Spannungen an der Außenseite $z = -h/2$ ist dabei ein Vorzeichenwechsel zu erkennen, Bild 2. Die Schädigungsevolution ist im Modell (1) nur im Falle einer positiven Hauptspannung möglich. Daher ist die Verteilung der Schädigungsvariable an beiden Plattenaußenseiten unsymmetrisch, Bild 3. Die Schädigungsbereiche dominieren an der Plattenseite $z = h/2$, Bild 3, in deren Mittelpunkt ein kritischer Zustand entsteht. Im Mittelpunkt der Plattenfläche $z = -h/2$ beginnt eine Schädigungsentwicklung erst ab einem Zeitpunkt, wenn die Spannungen größer als Null werden.

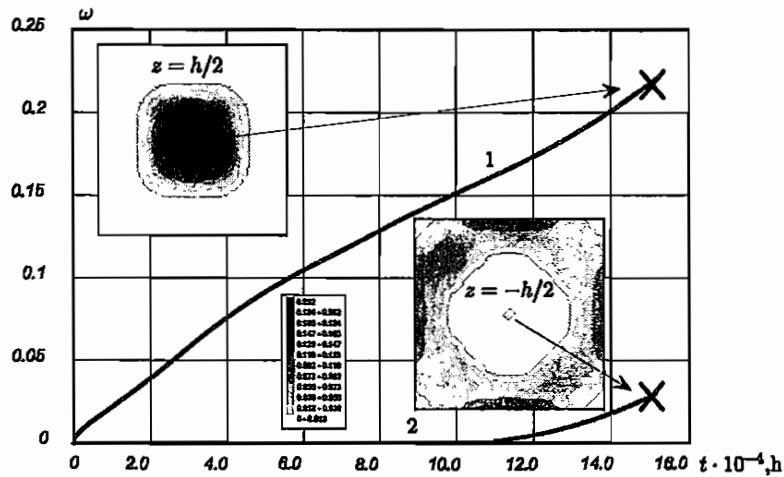


Bild 3: Zeitverläufe der Schädigungsvariablen in zwei Punkten der Platte und Schädigungsverteilung an den Plattenaußenseiten (1: $x = y = 0.5l$, $z = h/2$; 2: $x = y = 0.5l$, $z = -h/2$)

Literatur

- [1] Altenbach, H., Morachkovsky, O., Naumenko, K., Sychov, A.: Geometrically-nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions. Arch. Appl. Mech. 67 (1997) 339-352
- [2] Altenbach, J., Altenbach, H., Naumenko, K.: Lebensdauerabschätzung dünnwandiger Flächentragwerke auf der Grundlage phänomenologischer Materialmodelle für Kriechen und Schädigung. Technische Mechanik 17 (1997) 4, 353-364
- [3] Kowalewski, Z.L., Hayhurst, D.R., Dyson, B.F.: Mechanism-based creep constitutive equations for an aluminium alloy. J. of Strain Analysis 29 (1994) 4, 309-316
- [4] Perrin, I.J., Hayhurst, D.R.: Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675°C. J. of Strain Analysis 31 (1996) 4, 299-314
- [5] Altenbach, H., Naumenko, K.: Creep bending of thin-walled shells and plates by consideration of finite deflections. Comp. Mech. 19 (1997) 6, 490-495

Homogenisierung in der Schädigungsmechanik mit Makroelementen

Karsten Türke, Universität Karlsruhe (T.H.), Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre, D-76128 Karlsruhe

1 Grundlagen

Unter dem Begriff der Kontinuums-Schadensmechanik wollen wir im folgenden die Homogenisierung mikromechanischer Defekte - das seien Inhomogenitäten wie Risse, Poren, Hohlräume, Einschlüsse - sowie die makroskopische Beschreibung dieser Defekte durch eine oder mehrere innere Variable, den Schädigungsoperator D , verstehen. Durch diese Vorgehensweise umgeht man die explizite Darstellung und Evolution der Defekte, wie dies z.B. mit bruchmechanischen Ansätzen möglich ist. Diesem eleganten Zugang steht jedoch das Problem gegenüber, den Schädigungsoperator physikalisch *sinnvoll* zu definieren.

Eine rein thermodynamische Betrachtungsweise des Problems ist unzureichend, da die explizite Darstellung der beiden benötigten Potentiale φ (erweitertes thermoelastisches Potential) und Ψ (Dissipationspotential) für ein konkretes Material meist nicht bekannt ist, vgl. Lemaitre und Chaboche [1].

Auf der makroskopischen Ebene kann die Schädigung als Reduktion der materialspezifischen Steifigkeit interpretiert werden. Die Schwierigkeit dieser Betrachtungsweise liegt darin, daß die makroskopische Bestimmung des geschädigten Materialoperators \tilde{C} nur in Spezialfällen möglich ist. Bei duktilen, d.h. makroskopisch plastifizierenden, Materialien können Zug-Entlastungsdiagramme ausgewertet werden. Eine vollständige experimentelle Erfassung anisotroper Effekte ist jedoch auf diesem Weg nicht realisierbar. Bei spröden Materialien wie Beton, Keramiken oder Kohlenstoff-Werkstoffen ist ein makroskopischer Steifigkeitsverlust durch Schädigungen generell kaum detektierbar.

Zur notwendigen Modellierung mikromechanischer Effekte betrachten wir ein repräsentatives Volumenelement (RVE) auf dem sog. Mesoniveau, d.h. das Material wird als Kontinuum aufgefaßt, das durch Inhomogenitäten in Form von Mikrorissen, Hohlräumen usw. gestört ist. Auf diesem Mesoniveau ist eine experimentelle Bestimmung der Schädigungs*geometrie* durch optische Verfahren auch In situ möglich. Die eigentliche Schwierigkeit besteht darin, aus diesen Beobachtungen Rückschlüsse auf den makroskopischen Verlust an Steifigkeit zu ziehen. Hierzu bietet sich zum eine analytische Auswertung über das Taylor-Modell oder die Selbstkonsistente Methode (vgl. Krajcinovic und Sumarac [2]) an. Zum anderen kann eine numerische Auswertung mit der Finiten Element Methode (FEM) oder der Randelementmethode (BEM) vorgenommen werden. Beide Vorgehensweisen beinhalten entweder starke Vereinfachungen bzgl. der Anordnung und Wechselwirkung der Schädigungen oder bedingen einen extrem hohen Rechenaufwand.

2 Homogenisierung mit Makroelement-Technik

Das im folgenden dargestellte Konzept basiert auf einer Finiten Element Methode. Hierbei wird ausgenutzt, daß die Variationsformulierung der FEM eine „natürliche“ Homogenisierung in Form einer Einzelsteifigkeitsmatrix über das finite Element darstellt. Wenn es gelingt, den lokalen Effekt (Spannungskonzentration) einer Inhomogenität mit *einem* Steifigkeitsoperator zu beschreiben, kann die Homogenisierung effektiv über ein „kleines“ FE-System durchgeführt werden.

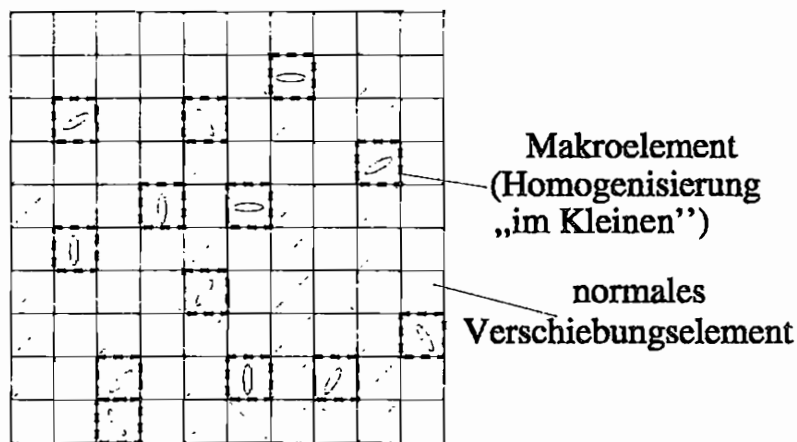


Abbildung 1: RVE in diskreter Darstellung

Die in Abbildung 1 im Nahfeld der Mikroschädigungen platzierten sog. Makroelemente müssen spezielle Eigenschaften haben, um den Steifigkeitsverlust adäquat an die umliegenden Dreieckselemente (mit konventionellen polynomialen Verschiebungsansätzen) weiterzugeben.

Zur Konstruktion der Makroelement-Steifigkeit wird die von Schnack und Türke [3] entwickelte Gebietszerlegung mit FEM und BEM verwendet. Mit dieser nichtkonformen Kopplungsmethode und durch Kondensation der inneren BE-Freiheitsgrade gelingt es, für beliebige Kerb- oder Rißgeometrien eine präzise Elementsteifigkeit in Abhängigkeit von den äußeren FE-Freiheitsgraden zu generieren. Mit der Arbeit von Hofmann [4] gelang ein Durchbruch in Hinblick auf die Effektivität der Methode. Es ist nun möglich, für eine charakteristische Kerb- oder Rißform die entsprechende Makroelement-Steifigkeit nur einmal zu berechnen und in einer Makroelement-Bibliothek abzuspeichern. Für eine Strukturanalyse können die Daten aus der Bibliothek eingelesen und an der gewünschten Position durch beliebige Translation und Rotation positioniert werden. In Abbildung 2 wird die Einsparung an Rechenzeit bei eingelesener Makroelement-Steifigkeit (MAKBIB.) gegenüber der ursprünglichen Version mit direkter Berechnung (SUPNEU.) deutlich.

		FE-Netzgenerierung + Gesamtsteifigkeits- matrix			Fein- gitter- probl.	Gleichungslösung auf Grobgitter (Cholesky)		
[s]		NETZKOP3	COUPBAND	STEIFCO	SUPERBE99	STLVOR	STVERUV	STLNACH
SUPNEU.	<i>user</i>	0,08	0,16	0,14	390,47	0,10	0,13	0,03
	<i>sys</i>	0,03	0,06	0,07	0,69	0,11	0,08	0,09
	CP-Zeit	0,11	0,22	0,21	391,16	0,21	0,21	0,12
MAKBIB.	<i>user</i>	0,07	0,15	0,17	0,53	0,13	0,16	0,04
	<i>sys</i>	0,04	0,05	0,03	0,13	0,04	0,03	0,05
	CP-Zeit	0,11	0,20	0,20	0,66	0,17	0,19	0,09

[s]		SPANNE2	SPANNSUP	NETZINN	BEMINLIN
SUPNEU.	<i>user</i>	0,17	0,85	5,51	229,87
	<i>sys</i>	0,04	0,11	0,05	0,07
	CP-Zeit	0,21	0,96	5,56	229,94
MAKBIB.	<i>user</i>	0,16	3,74	5,25	227,78
	<i>sys</i>	0,05	0,15	0,08	0,07
	CP-Zeit	0,21	3,89	5,33	227,85

Spannungsauswertung auf Feingitter Innenpunkt-
 auswertung im Makro-
 element

CP-Zeit-Ersparnis

Abbildung 2: Auswertung der Rechenzeiten

Da die rechenzeitintensive Innenpunktauswertung im Makroelement für die Homogenisierung nicht erforderlich ist, ist eine Strukturanalyse auch mit einer Vielzahl von lokalen Inhomogenitäten sehr effektiv zu realisieren. Voraussetzung ist das Vorhandensein einer umfangreichen Makroelement-Bibliothek (mehrere hundert Elemente), um für jede charakteristische Kerb- oder Rißform die benötigte lokale Steifigkeit einlesen zu können.

Auf dieser Basis ist ein numerischer Homogenisierungsschritt realisierbar. Für den allgemeinen Fall der Anisotropie eines 3D-Kontinuums sind unter der Annahme der Existenz eines elastischen Potentials 21 Stoffkonstanten zu bestimmen. Diesen 21 elastischen Konstanten lassen sich 36 geometrisch zugängliche technische Konstanten zuordnen. Eine systematische numerische Bestimmung des allgemeinen anisotropen Stoffgesetzoperators für das geschädigte RVE läuft nun folgendermaßen ab:

1. Simuliere das Verformungsverhalten des geschädigten RVE's (ermittelt aus optischen Experimenten) unter alleiniger Spannung $\sigma_x = 1$ mittels der beschriebenen Makroelement-Technik.

2. Bestimme die gemittelten Komponenten des Verzerrungstensors des RVE's aus den Werten der $k = 1, \dots, m$ finiten Elemente bzw. Makroelemente V_k gemäß:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^m \int_{V_k} \varepsilon_{ij} dV$$

3. Aus den Komponenten $\bar{\varepsilon}_{ij}$ bei der Belastung $\sigma_x = 1$ lassen sich die technischen Konstanten $E_{xx}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \eta_{x,yz}, \eta_{x,xy}, \eta_{x,zx}$ (vgl. Lekhnitskii [5]) ermitteln.
4. Wiederhole die Schritte 1-3 für die weiteren einachsigen Grundbelastungen $\sigma_y = 1, \sigma_z = 1, \tau_{yz} = 1, \tau_{xz} = 1, \tau_{xy} = 1$ und ermittle so alle technischen Konstanten. Redundante Werte können als Indikator für die Genauigkeit der Simulation herangezogen werden.

Das vorgestellte Konzept wird für systematische Untersuchungen zur Bestimmung des Schädigungsoperators D auf der Basis von optischen Auswertungen auf dem Mesoniveau für spröde Werkstoffe verwendet. Anschließend wird die Simulation der Schädigungskinetik $\dot{D} = \dot{D}(\sigma, \dot{\sigma}, D, \dots)$ mit besonderem Augenmerk auf die Abhängigkeit der Schädigung von der Belastungsgeschichte bei nichtproportionaler Belastung angegangen. Es ist zu ermitteln, ob die Berücksichtigung weiterer Gedächtnisterme in den Entwicklungsgleichungen notwendig ist.

Literatur

- [1] Lemaitre J. and Chaboche J.L. (1990), Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press.
- [2] Krajcinovic D. and Sumarac D. (1987), Micromechanics of the Damage Processes. in: Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications, eds.: Krajcinovic D. and Lemaitre J., Springer-Verlag, Wien, New York, 135-194.
- [3] Schnack E. and Türke K. (1997), Domain Decomposition with FEM and BEM. Journal for Numerical Methods in Engineering **40**, 2593-2610.
- [4] Hofmann G. (1997), Modifikation eines FEM-BEM-Kopplungsprogrammes für zweidimensionale Elastizitätsprobleme zur Erstellung einer Makroelement-Bibliothek. Diplomarbeit am Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre, Universität Karlsruhe.
- [5] Lekhnitskii S.G. (1963), Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day Verlag, San Francisco.

Numerische Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder

Thomas Nerzak, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Technische Mechanik, D-44780 Bochum

1 Einleitung

Als eine typische Erscheinungsform einer lokalisierten plastischen Deformation beobachtet man Scherbänder in unterschiedlichen Materialien, wie z.B. Metallen, Polymeren, Epoxidharzen und Geomaterialien. Neben Rissen und Poren sind Scherbänder ein wichtiger Mechanismus, der zur Schwächung oder Fragmentierung einer belasteten Struktur führen kann. Die sogenannten adiabatischen Scherbänder entstehen aufgrund lokaler Erwärmung und durch Spannungskonzentrationen, z.B. an Fehlstellen des Materials. Bei hohen Prozeßgeschwindigkeiten liegen quasi-adiabate Zustände vor, da die entstehende Wärme nicht schnell genug abtransportiert werden kann, so daß es in Folge zur thermischen Entfestigung, zur Lokalisierung der plastischen Deformation und zur Ausbreitung eines Scherbandes kommt. Abhängig von den Materialeigenschaften und der Belastung beobachtet man nachfolgend häufig eine Materialtrennung durch Poren- und Ribbildung entlang des Scherbandes (Bild 1).

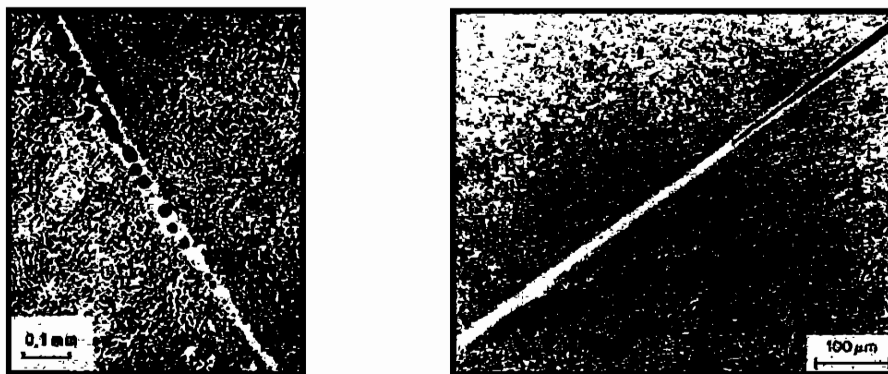


Bild 1: Scherband mit Poren- bzw. Ribbildung, aus BA1 und DODD (1992)

2 Materialmodellierung

Das hier verwendete Materialmodell basiert auf einem Kontinuums-Schädigungs-Modell, das von BRUHNS (1989), DIEHL (1989) und FORNEFELD (1990) entwickelt wurde. Die Beschreibung des Materialverhaltens wird hierbei in zwei Phasen unterteilt. Die erste Phase umfaßt den Belastungsprozeß bis zum Zeitpunkt der Entstehung eines Makrodefektes. Von einem Makrodefekt sprechen wir in diesem Zusammenhang, wenn eine charakteristische Größe dieses Defektes so groß wird, daß dieser nicht mehr innerhalb eines sinnvoll gewählten repräsentativen Volumenelementes homogenisiert werden kann. Das Materialverhalten kann in dieser ersten Phase durch eine Kontinuumstheorie mit Berücksichtigung von Schädigungseinflüssen modelliert werden. Das Materialverhalten nach der Entstehung eines Makrodefektes wird durch eine sogenannte Fragmentierungstheorie modelliert, die die Ausbreitung von Makrodefekten mit Methoden der Bruchmechanik beschreibt.

Das Kontinuums-Schädigungs-Modell ist ein für große Deformationen formuliertes, viskoplastisches Stoffgesetz mit internen Variablen zur Beschreibung der Mikrostrukturänderungen. Es können nichtisotherme Prozesse modelliert werden. Das Stoffgesetz ist mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verträglich und für große Deformationen formuliert. Das Modell umfaßt einen Dehnratenbereich von quasistatischen bis hin zu sehr hohen Belastungsgeschwindigkeiten ($10^{-5} \frac{1}{s} \leq |\dot{\epsilon}| \leq 10^5 \frac{1}{s}$).

Einflüsse der Mikroschädigung werden durch eine tensorwertige Variable für Mikro-Scherbänder beschrieben. Dieser Scherband-Schädigungs-Tensor wird als gerichteter Volumenanteil der Mikro-Scherbänder am Gesamtvolumen des repräsentativen Volumenelementes interpretiert. Zur Erläuterung zeigt Bild 2 das repräsentative Volumenelement (ΔV) mit einem einzelnen Mikro-Scherband, stellvertretend für eine Anzahl statistisch verteilter Mikro-Scherbänder in ΔV .

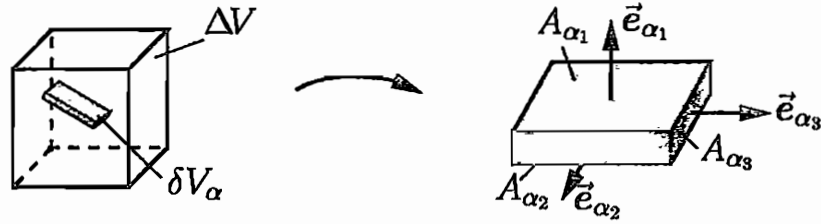


Bild 2: Repräsentatives Volumenelement mit einzelem Mikro-Scherband

Das Gesamtvolumen eines als quaderförmig angenommenen Mikro-Scherbandes wird entsprechend der Anteile der Begrenzungsflächen $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}$ mit der Vorschrift (1b) auf die Teilvolumina δV_{α_i} aufgeteilt. Den Teilvolumina werden dann mit Gleichung (1a) die Dyaden aus den Hauptachsen \vec{e}_{α_i} des Quaders zugeordnet. Anschließend wird über alle Mikro-Scherbänder des repräsentativen Volumenelementes summiert. Der Scherband-Schädigungs-Tensor \underline{Z}^0 enthält damit die Summe der gerichteten Volumenanteile aller Mikro-Scherbänder des repräsentativen Volumenelementes.

$$\underline{Z}^0 = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\delta V_{\alpha_i}}{\Delta V} \vec{e}_{\alpha_i} \otimes \vec{e}_{\alpha_i} \right\} \quad \text{mit} \quad \delta V_{\alpha_i} = \frac{A_{\alpha_i}}{A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3}} \delta V_{\alpha} \quad (1)$$

Mit der vorgestellten Interpretation des Mikro-Scherband-Schädigungsmaßes wird über die Definition eines maximal zulässigen Mikro-Scherband-Volumenanteils ein Versagenskriterium abgeleitet. Dieses Versagenskriterium soll hier verstanden werden als Grenze des Gültigkeitsbereiches der Beschreibung durch das Kontinuums-Schädigungs-Modell. Die Forderung für die Gültigkeit des Kontinuums-Schädigungs-Modells lautet: $z_{\max} < z_{\text{krit}}$. Das Kriterium ist mit Hilfe des größten Eigenwertes z_{\max} des Scherband-Schädigungs-Tensors formuliert. Der Grenzwert z_{krit} entspricht dem maximal zulässigen Mikro-Scherband-Volumenanteil im repräsentativen Volumenelement. Bei Überschreitung des Grenzwertes nehmen wir an, daß die Mikro-Scherbänder in der Ebene, die durch die zu z_{\max} korrespondierende Hauptrichtung festgelegt ist, zu einem Makro-Scherband zusammenwachsen. Dem entstehenden Makro-Scherband wird dann mit dem z_{\max} zugeordneten Eigenvektor eine Orientierung zugewiesen.

Die konstitutiven Beziehungen zur Modellierung des Makro-Scherbandverhaltens werden aus Kompatibilitätsgründen aus dem Kontinuums-Schädigungs-Modell abgeleitet und an das experimentell zu beobachtende Verhalten eines Makro-Scherbandes qualitativ angepaßt. Vereinfachend werden hierbei Schädigungseinflüsse, Verfestigungseffekte durch Versetzungsbewegungen und Auswirkungen anderer Strukturänderungen vernachlässigt. Neben der Definition des Scherbandmaterials erfordert die Beschreibung der Ausbreitung des Makro-Scherbandes noch einen Ansatz für die Ausbreitungsgeschwindigkeit \vec{c} , um das instabile Verhalten eines Makro-Scherbandes beschreiben zu können. Die Ausbreitungsrichtung \vec{e}_c in der Makro-Scherband-Ebene wird durch den aktuellen Spannungszustand festgelegt.

$$\vec{c} = c \vec{e}_c \quad \text{mit} \quad \vec{e}_c = \frac{\vec{\tau}_{SB}}{\|\vec{\tau}_{SB}\|} \quad (2)$$

In Gleichung (2) kennzeichnet $\vec{\tau}_{SB}$ den resultierenden Schubspannungsvektor in der Makro-Scherband-Ebene. Als Ansatz für den Betrag der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Makro-Scherbandes wird

$$c = \frac{\chi_{c1} h}{1 + \chi_{c2} h}, \quad \text{falls} \quad h = G_1 - 2\gamma > 0, \quad (3)$$

gewählt. Dieser Ansatz ist thermodynamisch konsistent und mit $\chi_{c2} > 0$ bezüglich h beschränkt. χ_{c1} , χ_{c2} und 2γ sind materialspezifische Größen. G_1 wird als abkürzende Schreibweise für ein Volumenintegral um die Scherbandspitze verwendet, das Informationen über den Spannungs- und Schädigungszustand, die Versetzungsdichte und die Temperatur sowie einen Beitrag aus den Oberflächenkräften enthält.

3 Simulation

Zur Charakterisierung des Materialverhaltens zeigt Bild 3 den Verlauf der Axialspannung und der Temperatur bei Berücksichtigung des Versagenskriteriums für den homogenen Zugversuch. Bei diesen Simulationen wird zunächst das Kontinuums-Schädigungs-Modell verwendet. Bei Erreichen des kritischen Wertes des Mikro-Scherband-Volumenanteils erfolgt ein Wechsel auf das Materialmodell für Makro-Scherbänder. Die strichpunktierten Linien deuten das Verhalten des Kontinuums-Schädigungs-Modells ohne Berücksichtigung des Versagenskriteriums an. Spannungs- und Verzerrungsgrößen werden jeweils normiert auf die Fließspannung und die zugehörige Fließdehnung des Kontinuums-Schädigungs-Modells bei quasistatischen Prozessen ($\sigma_f = 300 \text{ MPa}$, $\varepsilon_f = 1.42857 \cdot 10^{-3}$).

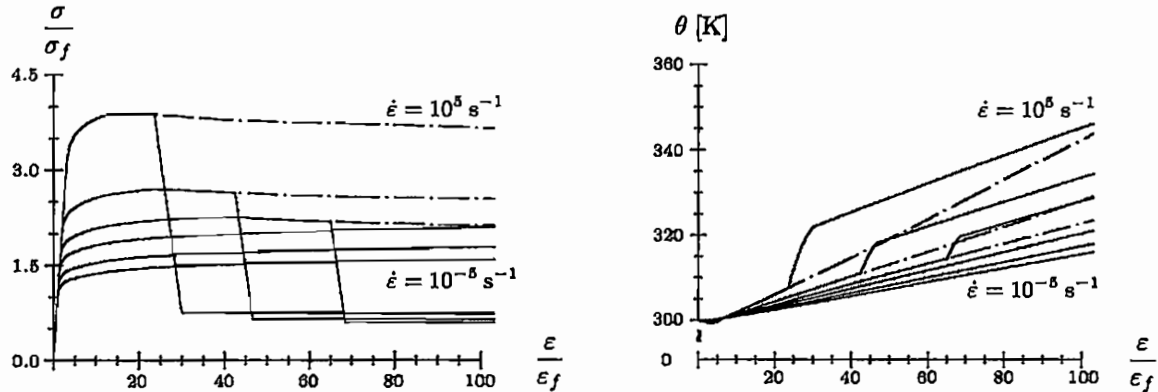


Bild 3: Axialspannung und Temperatur für $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}, 10^0, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 \frac{1}{\text{s}}$

Als Beispiel für die Simulation des Strukturverhaltens bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen unter Berücksichtigung der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder sollen nachfolgend die Ergebnisse der FE-Simulation eines Durchschlagversuches präsentiert werden. Bild 4 zeigt anhand eines axialsymmetrischen FE-Modells schematisch den Aufbau eines solchen Versuches. Ein zylinderförmiger Körper stößt hierbei senkrecht auf eine am Rand eingespannte Kreisplatte. Es wird eine adiabate Prozessführung vorausgesetzt. Der auftreffende Zylinder wird durch ein viskoplastisches Materialmodell ohne Berücksichtigung von Schädigungsentwicklung modelliert. Das Zylindermodell zeigt ein verfestigendes Materialverhalten mit geringer Geschwindigkeitsabhängigkeit. Die quasistatische Fließspannung beträgt 1340 MPa. In der nachfolgend gezeigten Simulation soll das Deformations- und Schädigungsverhalten der Kreisplatte anhand des Versuches mit der Aufprallgeschwindigkeit $v = 200 \text{ m/s}$ untersucht werden. Hierzu werden die Verläufe der von Mises-Vergleichsspannung und der Temperatur für verschiedene Zeitpunkte in dem dunkel unterlegten Teil der Kreisplatte ($r = 0 - 20 \text{ mm}$) dargestellt.

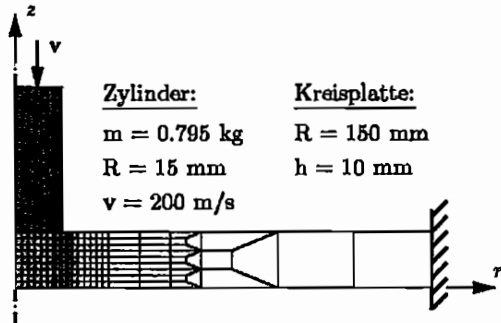


Bild 4: FE-Modell eines Durchschlagversuches

In Bild 5 ist zum Zeitpunkt $t = 1 \mu\text{s}$ im Spannungsplot die durch die Platte hindurchlaufende Druckwelle zu erkennen. Das Spannungsniveau erreicht im Zentrum der Druckwelle Werte von über 1000 MPa. Im Randbereich des Zylinders ist bereits eine Makro-Scherbandzone entstanden, vor deren Spitze sich ein Spannungsmaximum von ca. 1600 MPa ausbildet. Nachfolgend breitet sich dieses Makro-Scherband annähernd in vertikaler Richtung aus. Nach $5 \mu\text{s}$ hat sich das Scherband zu gut einem Drittel über die Plattenhöhe ausgebreitet. Vor der Scherbandspitze erreicht die Vergleichsspannung einen Maximalwert von ungefähr 2000 MPa. Zum Zeitpunkt $t = 20 \mu\text{s}$ ist das Scherband durch die gesamte Plattenbreite hindurchgelaufen. Die Deformation lokalisiert in der schmalen Zone des Scherbandes, die übrigen Bereiche zeigen nur geringe Deformationen. Die Temperatur erreicht Werte von 1200 K in der Mitte der Scherbandzone. Die Entwicklung der Schädigung bleibt fast ausschließlich auf den schmalen Bereich des Makro-Scherbandes beschränkt. Deutlich zu erkennen ist das Abgleiten des von dem Zylinder getroffenen Bereiches der Platte. Hiermit wird das Ausstanzen eines zylinderförmigen Teils der Kreisplatte angedeutet. Für weitere Berechnungen wäre es sinnvoll, das vorliegende Modell mit einem Bruchkriterium zu koppeln, um die vollständige Perforation der Kreisplatte simulieren zu können.

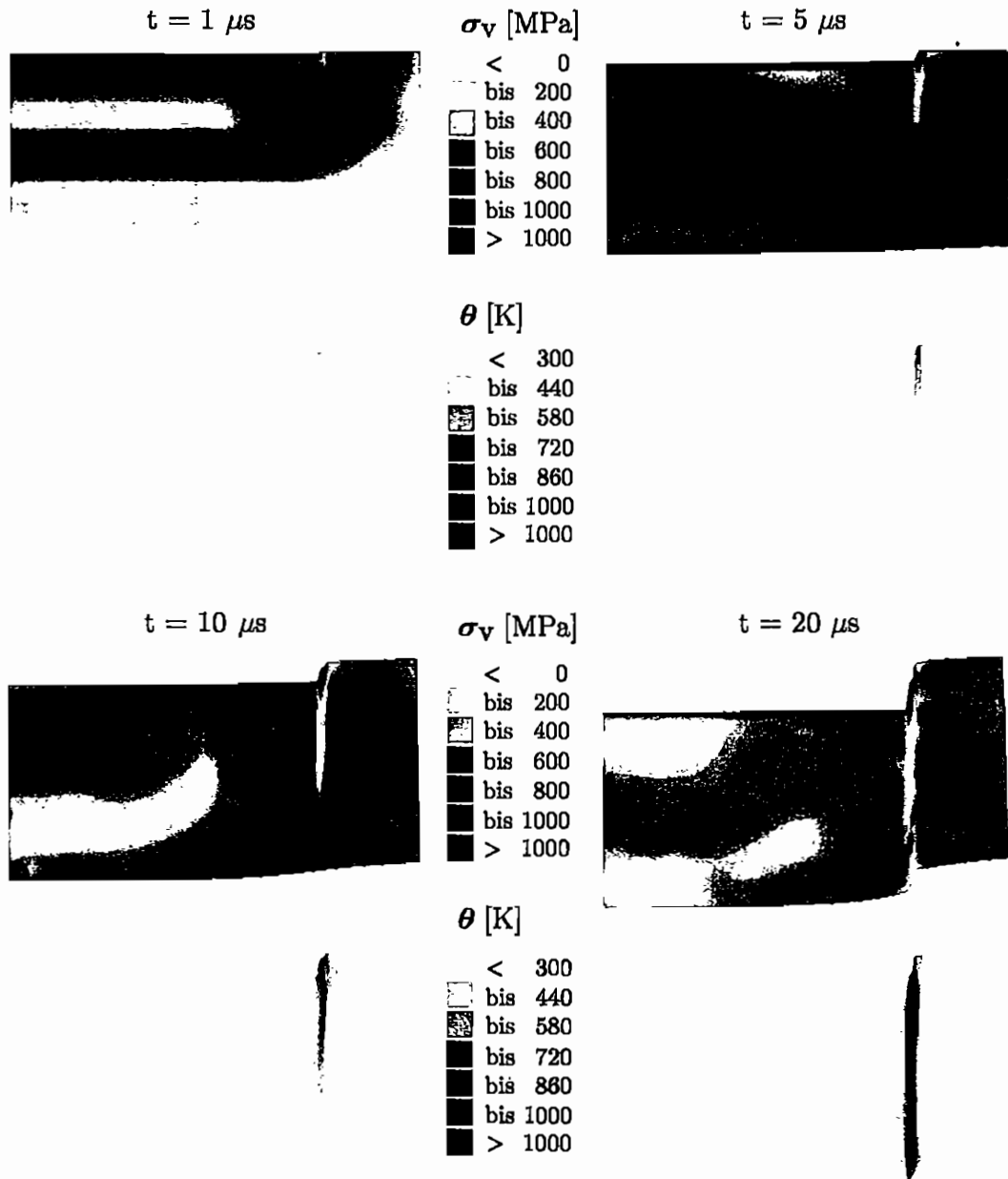


Bild 5: Vergleichsspannung und Temperatur für den Durchschlagversuch mit $v = 200 \text{ m/s}$

Literatur

1. Bai, Y.; Dodd, B.: Adiabatic Shear Localization – Occurrence, Theories and Applications, Pergamon Press, (1992)
2. Bruhns, O.T.; Diehl, H.: An internal variable theory of inelastic behaviour at high rates of strain, Arch. Mech., 41(4), (1989), 427–460.
3. Diehl, H.: Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 66, (1989)
4. Fornefeld, W.: Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 73, (1990)

On the Localization Analysis of Frictional Materials

Matthias Lambrecht & Christian Miehe

Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I
Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Germany

1. Motivation

Localized failure in the form of shear band formation can often be observed in frictional materials such as soils or other types of mean-stress dependent solids. The main characteristic of frictional materials consists of the dependence of the yield-shear stress τ on the normal stress σ which is expressed by the well-known Mohr-Coulomb failure criterion: $\tau \leq \tan\Phi \sigma + c$ where Φ denotes the *angle of internal friction* and c the *cohesion*. A further typical property of many frictional materials is their dilatancy, i.e. the change in volume being associated with shear distortion. The *dilatancy angle* Ψ represents the uplift-angle in a shear band. The *goal of this paper is to derive closed analytical formulas for the critical inclination angle θ_{crit} of a shear band* for a simple compression test in dependence of the angle of internal friction Φ and the angle of dilatancy Ψ for plane stress and plane strain conditions, respectively.

2. A Modified Drucker-Prager-Type Model

In what follows, we apply a spectral representation of isotropic non-associated elastoplasticity at small strains. The formulation provides a compact interface to concrete model problems in terms of constitutive functions for the *free energy*, the *yield criterion* and the *plastic potential* formulated in terms of *principal strains* and *principal stresses*. The constitutive equations for non-associated plasticity are summarized in Table 1.

The basis for the following localization analysis is a non-associated elastoplastic hardening model of the Drucker-Prager-type proposed by LAMBRECHT & MIEHE [1998]. In what follows we specify the yield criterion function $\hat{\phi}$ and the plastic potential function $\hat{\chi}$.

2.1. The Yield Criterion Function

The yield criterion function $\hat{\phi}$ assumes the form

$$\hat{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i + \hat{\alpha}_\phi^2(B)} - \hat{\beta}_\phi(s; B) \quad (1)$$

Table 1. Isotropic Non-Associative Plasticity in Spectral Form.

	<i>elastic strains</i>	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \text{sym}[\nabla \mathbf{u}] - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$
1.	<i>free energy</i>	$\psi = \hat{\psi}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; A)$
2.	<i>stresses</i>	$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ with $\sigma_i = \hat{\psi}_{,i}$
3.	<i>micro stress</i>	$B = \hat{\psi}_{,A}$
4.	<i>flow criterion</i>	$\phi = \hat{\phi}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; B)$
5.	<i>plastic potential</i>	$\chi = \hat{\chi}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; B)$
6.	<i>flow rule</i>	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^3 \lambda \hat{\chi}_{,i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$
7.	<i>evolution</i>	$\dot{A} = \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\hat{\chi}_{,1}^2 + \hat{\chi}_{,2}^2 + \hat{\chi}_{,3}^2}$
8.	<i>loading conditions</i>	$\lambda \geq 0, \phi \leq 0, \lambda \phi = 0$

in terms of the mean stress s , the deviatoric principal stress $\tilde{\sigma}_i$ and the isotropic hardening variable B . In this equation summation over repeated latin indices of the principal stress space is assumed. The key-modification consists of the second term under the square root which provides a *smoothing-out of the peak* of the Drucker-Prager cone. The function $\hat{\beta}_\phi$ in (1) is a mean-stress-dependent material function of the particular form

$$\hat{\beta}_\phi(s; B) = \hat{M}_\phi(s_{max} - s) \quad (2)$$

where the material parameter $s_{max} \in \mathbb{R}_+$ is the maximum possible mean stress for $\hat{\alpha}_\phi = 0$. The slope \hat{M}_ϕ is a function of the internal hardening variable B , i.e. $\hat{M}_\phi = M_{\phi 0} + B$, where $M_{\phi 0}$ represents the initial slope. The internal hardening variable B is a saturation-type function

$$\hat{B}(A) = (M_{\phi \infty} - M_{\phi 0})[1 - \exp(-A/\eta)] \quad (3)$$

2.2. The Plastic Potential Function

In order to define the flow direction of the non-associated model under consideration we introduce the plastic potential function

$$\hat{\chi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_i + \alpha_\chi^2} - \hat{\beta}_\chi(s) \quad (4)$$

The function $\hat{\beta}_\chi$ in (4) is a mean-stress-dependent material function of the form

$$\hat{\beta}_\chi(s) = M_\chi(s_{max} - s) \quad (5)$$

in analogy to (2). Here M_χ denotes the *constant slope* of the cone which characterizes the plastic potential hypersurface.

3. Localization Analysis

The term *localization* is commonly used to refer to situations where strain concentrations occur within a critical zone as a consequence of a bifurcation of a local constitutive behaviour of the material. The necessary condition for the loss of general material stability in an elastoplastic continuum is the loss of positive definiteness of the second order work as pointed out by DRUCKER [1950] and HILL [1958, 1962]. A general limit-type material bifurcation will occur when the *elastoplastic tangent tensor* \mathbf{C}^{ep} in the rate constitutive equation which relates the stress-rate to the rate of total strain obtains a zero eigenvalue, i.e. $\det[\mathbf{C}^{ep}] = 0$. In addition to that, a specific condition for localized material bifurcation has been formulated by THOMAS [1961], HILL [1962] and RICE [1976]. In the context of displacement-compatible singular surfaces they pointed out that the onset of localization occurs when the *localization tensor* $\mathbf{Q} := \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ which depends on the *orientation vector* $\bar{\mathbf{n}}$ of the singular surface \mathcal{S} and the elastoplastic tangent tensor \mathbf{C}^{ep} obtains a zero eigenvalue, i.e. $\det[\mathbf{Q}] = 0$.

3.1. Elastoplastic Tangent Tensor for Plane Problems

We introduce the following convention. Latin indices take the values 1, 2 and 3, while greek indices include only the in-plane components and take the values 1 and 2, respectively. In the three-dimensional space the elastoplastic tangent tensor is given by $\mathbf{C}_{ijkl}^{ep} = \mathbf{C}_{ijkl}^e - 1/D \mathbf{C}_{ijmn}^e n_{\chi mn} n_{\phi op} \mathbf{C}_{opkl}^e$ with the abbreviation $D = n_{\phi mn} \mathbf{C}_{mnop}^e n_{\chi op} + H$. Here $n_{\phi ij}$ and $n_{\chi ij}$ represent the components of the *normal stress tensors* which are obtained by deriving the yield-criterion function $\hat{\phi}$ and the plastic potential function $\hat{\chi}$ by the principal stresses, i.e. $\mathbf{n}_\phi = \sum_{i=1}^3 \hat{\phi}_{,i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ and $\mathbf{n}_\chi = \sum_{i=1}^3 \hat{\chi}_{,i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$. Furthermore $H = \hat{\phi}_{,B} \hat{\psi}_{,AA} \hat{\chi}_{,B}$ denotes the *hardening modulus* which is positive, zero or negative for strain-hardening, ideal, and strain-softening plasticity, respectively. The *elastic tangent tensor* assumes the form $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^e = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (\kappa - 2/3\mu)\delta_{ij}\delta_{kl}$ with the compression modulus κ and the shear modulus μ .

Following RUNESSON & OTTOSEN & PERIĆ [1991] we consider the plane stress condition $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$ and the plane strain condition $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0$. In case of plane stress the elastic tangent tensor is obtained by proper part-inversion of the three-dimensional version and assumes the form $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{e\ ps} = \mu(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + 2\mu(3\kappa - 2\mu)/(3\kappa + 4\mu)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$. As a consequence, only the in-plane components of the normal stresses $n_{\phi\ \alpha\beta}$ and $n_{\chi\ \alpha\beta}$ occur in the components of the elastoplastic tangent tensor for plane stress, i.e. $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ep\ ps} = \mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{e\ ps} - 1/D^{ps} \mathbf{C}_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{e\ ps} n_{\chi\kappa\lambda} n_{\phi\mu\nu} \mathbf{C}_{\mu\nu\gamma\delta}^{e\ ps}$ with $D^{ps} = n_{\phi\kappa\lambda} \mathbf{C}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{e\ ps} n_{\phi\mu\nu} + H$. In contrast, in the case of plane strain the components of the elastoplastic tangent modulus $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ep\ pn}$ are established essentially by deleting the appropriate components in the three-dimensional version of \mathbf{C}_{ijkl}^{ep} corresponding to the vanishing strain rate components. As a consequence, the in-plane

and the out-of-plane components $n_{\phi ij}$ and $n_{\chi ij}$ occur in the components of the elasto-plastic tangent modulus of plane strain, i.e. $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ep\,pm} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^e - 1/D^{pm} C_{\alpha\beta mn}^e n_{\chi mn} n_{\phi op} C_{op\gamma\delta}^e$ with $D^{pm} = n_{\phi ij} C_{ijkl}^e n_{\phi kl} + H$.

3.2. Critical Hardening Modulus

The localization condition assumes for two-dimensional plane problems the form

$$\det[Q_{\alpha\beta}] = \det[N_{\alpha\beta} - 1/(s + H) c_{\alpha} p_{\beta}] = 0 \quad (6)$$

where we have introduced the abbreviations for (i) the plane stress condition $N_{\alpha\beta} = \bar{n}_{\gamma} C_{\gamma\alpha\beta\delta}^{ps} \bar{n}_{\delta}$, $s = n_{\phi\kappa\lambda} C_{\kappa\lambda\mu\nu}^{ps} n_{\chi\mu\nu}$, $c_{\alpha} = \bar{n}_{\kappa} C_{\kappa\alpha\mu\nu}^{ps} n_{\chi\mu\nu}$, $p_{\beta} = n_{\phi\kappa\lambda} C_{\kappa\lambda\beta\mu}^{ps} \bar{n}_{\mu}$, and for (ii) the plane strain condition $N_{\alpha\beta} = \bar{n}_{\gamma} C_{\gamma\alpha\beta\delta}^e \bar{n}_{\delta}$, $s = n_{\phi mn} C_{mnop}^e n_{\chi op}$, $c_{\alpha} = \bar{n}_{\kappa} C_{\kappa\alpha op}^e n_{\chi op}$, $p_{\beta} = n_{\phi mn} C_{mn\beta\mu}^{ps} \bar{n}_{\mu}$. The orientation vector \bar{n}_{α} of the singular surface S can be expressed by the inclination angle θ , i.e. $\bar{n}_1 = -\sin\theta$ and $\bar{n}_2 = \cos\theta$. Equation (6) can be solved to the hardening modulus H and we obtain

$$H = -s + c_{\alpha} N_{\alpha\beta}^{-1} p_{\beta} \quad (7)$$

Equation (7) implies for each inclination angle θ a certain hardening modulus H for which the localization condition $\det[Q_{\alpha\beta}] = 0$ is satisfied. The *critical hardening modulus* coincides with the maximum value of all these hardening moduli, i.e. $H_{crit} = \max \hat{H}(\theta)$. Generally, we have to distinguish two cases. First, if the existing hardening modulus H is lower or equal as the critical hardening modulus ($H \leq H_{crit}$), localization occurs along a singular surface with the inclination angle θ_{crit} . Second, if the existing hardening modulus H exceeds the critical hardening modulus ($H > H_{crit}$), localization does not occur.

For pure principal stress modes equation (7) can be recast in the form $\hat{H}(\theta) = K(A \cos^4\theta + B \cos^2\theta + C)$ with $K > 0$ and $\theta \in [0, \pi/2]$. Here, the constant K depends on the elastic moduli κ and μ , the constants A , B and C on the elastic moduli and the components of the normal stresses. All constants are explicitly determined for plane stress and plane strain problems. A straight-forward algebraic manipulation shows that the critical hardening modulus assumes a maximum value for $\theta = \arccos \sqrt{-B/2A}$ and we finally obtain for the critical hardening modulus and the *critical inclination angle* θ_{crit} the results $H_{crit} = K(C - B^2/4A)$ and $\tan^2\theta_{crit} = -1 - 2A/B$, respectively.

Applying these formulas to the modified Drucker-Prager model, we obtain closed form representations of the critical hardening modulus and the critical inclination angle. The read for plane stress

$$\begin{aligned} H_{crit} &= \frac{\mu}{18}(1 + \nu)(\hat{M}_{\phi} - M_{\chi})^2 \\ \tan^2\theta_{crit} &= -\frac{3\sqrt{6} \tilde{\sigma}_{11}/(\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\sigma}_{kl})^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_{\phi} + M_{\chi}}{3\sqrt{6} \tilde{\sigma}_{22}/(\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\sigma}_{kl})^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_{\phi} + M_{\chi}} \end{aligned} \quad (8)$$

and for plane strain

$$\begin{aligned}
 H_{crit} &= \frac{\mu}{18} \frac{1+\nu}{1-\nu} [2(\hat{M}_\phi - M_\chi)^2 - (1-\nu)(3\sqrt{6} \tilde{\sigma}_{33}/(\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\sigma}_{kl})^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_\phi + M_\chi)^2] \\
 \tan^2 \theta_{crit} &= - \frac{3\sqrt{6} (\tilde{\sigma}_{11} + \nu\tilde{\sigma}_{33})/(\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\sigma}_{kl})^{\frac{1}{2}} + (1+\nu)(\hat{M}_\phi + M_\chi)}{3\sqrt{6} (\tilde{\sigma}_{22} + \nu\tilde{\sigma}_{33})/(\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\sigma}_{kl})^{\frac{1}{2}} + (1+\nu)(\hat{M}_\phi + M_\chi)}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

These formulas are in analogy to those presented by RUNESSON & OTTOSEN & PERIĆ [1991].

4. Application for the Simple Compression Test

In this section we determine the critical hardening modulus H_{crit} and the critical inclination angle θ_{crit} for the simple compression test under plane stress and plane strain conditions on the basis of the modified Drucker–Prager plasticity model. Considering ideal plasticity, the initial and the final slope of the yield–criterion are identical, i.e. $M_{\phi 0} = M_{\phi \infty}$ which yields $H = 0$. The slopes $M_{\phi 0}$ and M_χ are matched to the compression point of the Mohr–Coulomb criterion, i.e. $M_{\phi 0} = 6\sin\Phi/(3 - \sin\Phi)$ and $M_\chi = 6\sin\Psi/(3 - \sin\Psi)$ where Φ denotes the angle of internal friction and Ψ the dilatancy angle.

4.1. Plane Stress Conditions

For simple compression under plane stress conditions, the deviatoric stress tensor assumes the form $\tilde{\sigma} = \frac{1}{3}q e_1 \otimes e_1 - \frac{2}{3}q e_2 \otimes e_2 + \frac{1}{3}q e_3 \otimes e_3$ where q denotes a positive stress constant. Inserting this deviatoric tensor in equation (8), we obtain the terms

$$H_{crit} = 2\mu(1+\nu)(\sin\Phi/(3 - \sin\Phi) - \sin\Psi/(3 - \sin\Psi))^2 \tag{10}$$

for the critical hardening modulus and

$$\boxed{\tan^2 \theta_{crit} = \frac{1 + [2\sin\Phi/(3 - \sin\Phi) + 2\sin\Psi/(3 - \sin\Psi)]}{2 - [2\sin\Phi/(3 - \sin\Phi) + 2\sin\Psi/(3 - \sin\Psi)]}} \tag{11}$$

for the critical inclination angle. Obviously, the critical hardening modulus takes only values greater than the existing hardening modulus, i.e. $H_{crit} \geq H = 0$. Therefore, for a simple-compressed material under plane stress conditions, the onset of localization coincides with the onset of plastification.

4.2. Plane Strain Conditions

For plane strain conditions, the stress component σ_{33} is a priori unknown. As a consequence, the deviatoric stress tensor takes the form $\tilde{\sigma} = (\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}\sigma_{33}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (-\frac{2}{3}q - \frac{1}{3}\sigma_{33}) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\frac{1}{3}q + \frac{2}{3}\sigma_{33}) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ where q again denotes a positive stress constant. We first assume that the localization occurs at the onset of plastification. This assumption implies $\sigma_{33} = -\nu q$ at the onset. Inserting then the deviatoric stress tensor into equation (9), we obtain the critical hardening modulus

$$H_{crit} = \frac{\mu}{18}(1 + \nu)[\gamma^2(M_{\phi 0} - M_{\chi})^2 - (\delta + M_{\phi 0} + M_{\chi})^2] \quad (12)$$

with the abbreviations $\gamma = [2/(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}$ and $\delta = (3-6\nu)/(\nu^2-\nu+1)^{\frac{1}{2}}$. It can then be shown that this critical hardening modulus gets negative values for $M_{\chi} > [(\gamma-1)M_{\phi 0} - \delta]/(\gamma+1)$. When considering ideal plasticity, the critical hardening modulus is then higher than the existing hardening modulus. Therefore, localization cannot occur for this assumption. However, it is still possible that localization occurs if the plastic deformation proceeds. Then, the value of the stress component σ_{33} depends on the shape of the applied yield-hypersurface. Indeed, a decisive stress ratio $\xi_{crit} = \sigma_{33}/\sigma_{11}$ for the onset of localization, where the critical hardening modulus becomes equal to zero, can be determined. This critical ratio takes the form

$$\xi_{crit} = \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \left[\frac{3 \Xi_{crit}^2}{36 - \Xi_{crit}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{with} \quad \begin{cases} k = -1 & \text{if } M_{\chi} \leq (\gamma-1)/(\gamma+1)M_{\phi 0} \\ k = +1 & \text{if } M_{\chi} > (\gamma-1)/(\gamma+1)M_{\phi 0} \end{cases} \quad (13)$$

and $\Xi_{crit} = (\gamma-1)M_{\phi 0} - (\gamma+1)M_{\chi}$. This ratio is bounded by the maximum possible stress ratio ξ_{max} which depends on the shape of the yield surface. If $M_{\phi 0} > 1.5$, the critical stress ratio for the onset of localization ξ_{crit} can be higher than the maximum stress ratio $\xi_{max} = [(-9-2M_{\phi 0}^2) + 3\sqrt{12M_{\phi 0}^2 - 27}]/[2(-9+M_{\phi 0}^2)]$. In this case, no localization occurs. For $\xi_{crit} \leq \xi_{max}$, the formulas for the critical inclination angle θ_{crit} can be summarized as follows

$$\tan^2 \theta_{crit} = -\frac{C_1 + (1 + \nu)(M_{\phi 0} + M_{\chi})}{C_2 + (1 + \nu)(M_{\phi 0} + M_{\chi})}$$

$$\text{with} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{-6\nu^2 + 6\nu + 3}{\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}}, & C_2 = \frac{-6\nu^2 + 6\nu - 6}{\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} & \text{if } M_{\chi} \leq \bar{M} \\ C_1 = \Xi_{crit} \left[\nu + \frac{1 + \xi_{crit}}{1 - 2\xi_{crit}} \right], & C_2 = \Xi_{crit} \left[\nu - \frac{2 - \xi_{crit}}{1 - 2\xi_{crit}} \right] & \text{if } M_{\chi} > \bar{M} \end{cases}$$

with $\bar{M} = [(\gamma-1)M_{\phi 0} - \delta]/(\gamma+1)$.

5. Numerical Example

We now compare the derived analytical solutions with a numerical calculation for a simple compressed test specimen under plane strain conditions. Here, we apply an accompanying numerical localization analysis as proposed by MIEHE & SCHRÖDER [1994]. The specimen with width/height = 102.5/303.1 mm is discretized by 555 Q1-E5-type finite elements. The cohesion c is 52 KN/m² and Poisson's ratio $\nu = 0.3$. We perform calculations for two different combinations of the friction and the dilatancy angle. Firstly, $\Phi = \Psi = 26^\circ$ is assumed which represents associated plasticity. Secondly, $\Phi = 26^\circ$ and $\Psi = 0$ characterizes non-associated plasticity.

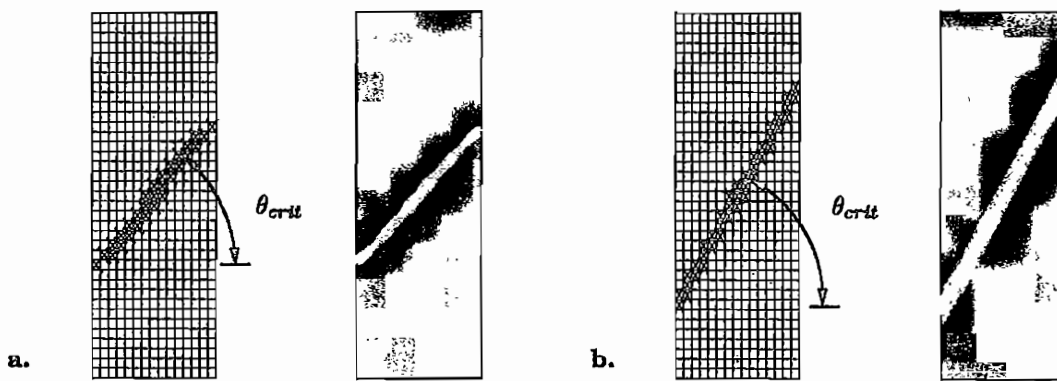


Figure 1: Shear band formation with localized elements and distribution of the equivalent plastic strains. a.) Non-associated case ($\Phi = 26^\circ$, $\Psi = 0$) and b.) Associated case ($\Phi = 26^\circ$, $\Psi = 26^\circ$).

Figure 1 depicts the localized elements and the equivalent plastic strains for the two cases mentioned above. The numerically computed inclinations of the shear bands coincide with the critical direction of the localized elements.

The monogram depicted in Figure 2 visualizes the dependence of the inclination angle θ_{crit} on the friction angle Φ and the dilatancy angle Ψ for the simple compression test under plane strain. Comparing the inclination angle θ_{crit} of the localized elements to those of the presented analytical solutions depicted in Figure 2, we observe an exact coincidence. In fact, we obtain as critical inclination angle for the associated case $\theta_{crit} = 64.6^\circ$ and for the non-associated case $\theta_{crit} = 51.7^\circ$.

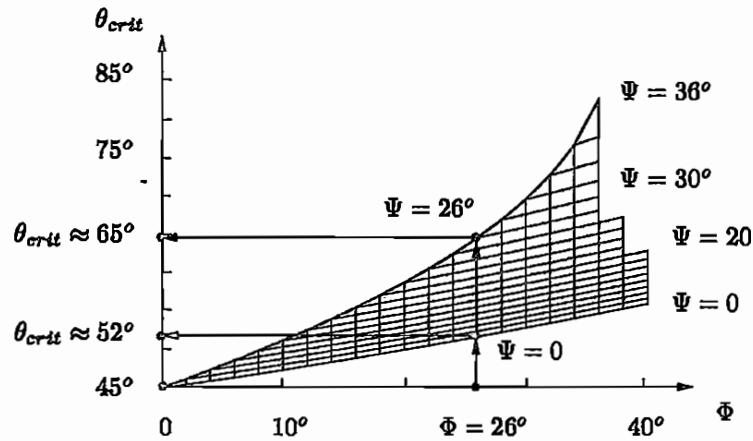


Figure 2: Inclination Angle of the Shearband for the Simple Compression Test under Plain Strain. The figure visualizes the dependence of the inclination angle of the shearband θ_{crit} on the friction angle Φ for different dilatancy angles Ψ .

References

- D.C. DRUCKER [1950], "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity", *Quarterly of Applied Mathematics*, 7, pp. 411–418.
- R. HILL [1958], "A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-plastic Solids", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6, pp. 236–249.
- R. HILL [1962], "Acceleration Waves in Solids", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, pp. 1–16.
- M. LAMBRECHT & C. MIEHE [1998], "Two Non-Associated Isotropic Elastoplastic Hardening Models for Frictional Materials", *Acta Mechanica*, in press.
- C. MIEHE & J. SCHRÖDER [1994], "Post-critical Discontinuous Localization Analysis of Small-strain Softening Elastoplastic Solids", *Archive of Applied Mechanics*, 64, pp. 267–285.
- J.R. RICE [1976], "The Localization of Plastic Deformation", in *Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 207–220.
- K. RUNESSON & N.S. OTTOSEN & D. PERIĆ [1991], "Discontinuous Bifurcations of Elasto-plastic Solutions at Plane Stress and Plane Strain", *International Journal of Plasticity*, pp. 99–121.
- T.Y. THOMAS [1961], "Plastic Flow and Fracture in Solids", Academic Press, London.

Einfluß von Modellskalierung und Versuchsplanung auf die Identifizierbarkeit von Werkstoffparametern

C. Zorn*, F. Thielecke**

*Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre, TU Braunschweig

**Institut für Flugmechanik, DLR Braunschweig

Zusammenfassung

Bei der Identifizierung von Werkstoffparametern wird das Modellverhalten durch Variation der enthaltenen Parameter im Sinne einer Zielfunktion möglichst „gut“ mit experimentellen Daten in Einklang gebracht. Man stellt häufig fest, daß trotz einer hinreichend umfangreichen Versuchsdatenbasis einige Parameter schlecht bestimmt bzw. mit anderen korreliert sind. Man spricht vom Identifizierbarkeitsproblem. Ein Modell für Hochtemperaturkriechen von Reinstaluminium wird im Stichprobenraum untersucht. Der Einfluß von Modellskalierung und Versuchsplanung auf die Identifizierbarkeit der Werkstoffparameter wird dabei deutlich.

1 Viskoplastisches Werkstoffmodell

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ie} &= C \cdot \left(\frac{\overbrace{\sigma - \sigma_i}^{\sigma_{eff}}}{E} \right)^n \\ \dot{\sigma}_i &= H \cdot \dot{\epsilon}_{ie} - R \cdot \left(\frac{\sigma_i}{E} \right)^m\end{aligned}\quad (1)$$

Es wird das Modell (1) für Hochtemperaturkriechen in Ratenformulierung untersucht. Die kinetische Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der effektiven Spannung σ_{eff} und der inelastischen Dehnrate $\dot{\epsilon}_{ie}$. Die effektive Spannung σ_{eff} ist die Differenz aus der äußeren Spannung σ und einer inneren Rückspannung σ_i , die den Verfestigungszustand des Materials beschreibt. Für die Entwicklung der inneren Rückspannung sind ver- und entfestigende Vorgänge berücksichtigt. Das Modell enthält fünf Werkstoffparameter C , n , H , R und m sowie den Elastizitätsmodul E . Im Bereich des stationären Kriechens ändern sich die innere Rückspannung σ_i und die inelastische Dehnrate $\dot{\epsilon}_{ie}$ nicht. Zur Beschreibung reicht die kinetische Gleichung aus. Sie stellt für diesen Bereich ein Funktionenmodell dar, wobei $\dot{\epsilon}_{ie}$ als Beobachtungsgröße und σ_{eff} als Eingangsgröße aufgefaßt werden. Für eine Betrachtung im Stichprobenraum ist die logarithmische Formulierung (2) der kinetischen Gleichung vorteilhaft.

$$\ln \dot{\epsilon}_{ie} = \ln C + n \cdot \ln \frac{\sigma_{eff}}{E}\quad (2)$$

2 Numerisch erzeugte Versuchsdaten

Für eine Identifizierbarkeitsstudie ist es sinnvoll, keine realen Versuchsdaten zur Identifizierung heranzuziehen. Es werden vielmehr Kriechkurven mit einem als „wahr“ angenommenen, plausiblen Parametersatz θ^* simuliert. Der Simulation wird ein normalverteiltes Meßrauschen mit Standardabweichung $\beta = 0,01$ überlagert. Es folgt die Re-Identifizierung der Modellparameter. Die gefundene Parameterschätzung $\hat{\theta}$ ist so einem direkten Vergleich mit den „wahren“ Modellparametern θ^* zugänglich. Man kann bei dieser Vorgehensweise von einem kompatiblen Modell und bekannter Meßfehlerverteilung ausgehen.

3 Parameteridentifizierung mit statistischer Analyse

Die numerische Bestimmung der Modellparameter führt auf die Minimierung einer Fehlerquadrat-Zielfunktion als Maß für die Abweichung der Simulation von den Meßwerten (vgl. THELECKE [1]). Unter den Voraussetzungen, daß ein kompatibles, lineares Modell und ein unabhängiges normalverteiltes Meßrauschen vorliegt, ist die Parameterschätzung $\hat{\underline{\theta}}$ ebenfalls normalverteilt. Die Voraussetzung eines linearen Modells ist für inelastisches Werkstoffverhalten nicht erfüllt. Man erhält jedoch eine Näherung für die Verteilung der Parameterschätzung, wenn man am Lösungspunkt linearisiert. Der Mittelwert dieser Verteilung ergibt sich zu $\underline{\theta}^*$. Mit β^2 als Varianz des Meßrauschens berechnet sich die Kovarianzmatrix $\underline{V}_{\hat{\underline{\theta}}}$ zu:

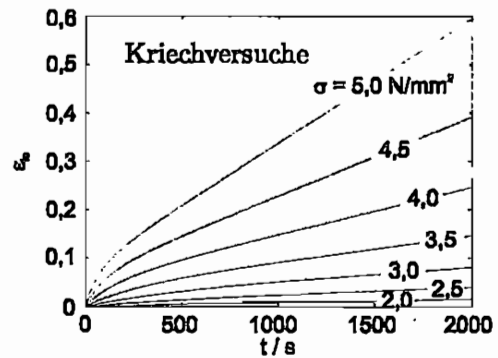
$$\underline{V}_{\hat{\underline{\theta}}} = (\underline{X}^T \cdot \underline{X})^{-1} \cdot \beta^2 \quad \text{mit} \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial \theta_p} \end{pmatrix} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_p). \quad (3)$$

Damit ergeben sich die Standardabweichung δ_i und der Korrelationskoeffizient ρ_{ij} zu:

$$\delta_i = \sqrt{V_{ii}} \quad \rho_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{ii} \cdot V_{jj}}}. \quad (4)$$

Durch die Kenntnis der Schätzverteilung ist es möglich, eine Vertrauensregion um die Parameterschätzung anzugeben, innerhalb derer der normalerweise unbekannt „wahre“ Parametersatz liegt. Diese Region hat unter den getroffenen Voraussetzungen die Form eines Ellipsoids.

Anwendungsbeispiel. Mathematisch gesehen ist ein nichtlineares Werkstoffmodell fast immer identifizierbar. In der Praxis zeigt sich jedoch, daß bestimmte Parameter sehr schlecht bestimmt sind und daß es hochkorrelierte Parameterpaarungen gibt. Die Vertrauensregion ist dann für die unsicheren Parameter sehr groß. Bei nahezu linearer Korrelation sind die beteiligten Parameter nicht getrennt voneinander identifizierbar. Es kann prinzipiell nur eine Linearkombination geschätzt werden. Die Parameter aus Tabelle 1 beschreiben im Zusammenhang mit Gleichung (1) das Kriechverhalten von Reinstaluminium bei 650 K. Neben dem „wahren“ Parameterwert ist eine beispielhafte Schätzung angegeben. Für jeden Parameter ist die Breite eines 95%-Vertrauensintervalls (VI) angegeben. Die Breite ist auf den Schätzwert des Parameters bezogen. Die Parameter C und R sind in diesem Beispiel sehr schlecht identifizierbar. Dies äußert sich auch in einer ungenauen Schätzung.



	„wahrer“ Wert	Schätzung	95%-VI
E	5,72E+04	-	-
C	2,36E+19	2,44E+19	42,03%
n	5,48E+00	5,48E+00	1,61%
H	1,07E+01	1,08E+01	2,74%
R	7,16E+09	7,53E+09	58,49%
m	2,68E+00	2,68E+00	1,83%

Tabelle 1: Parameter (unskaliert)

ρ_{ij}	C	n	H	R	m
C	1,00				
n	1,00	1,00			
H	0,75	0,72	1,00		
R	-0,72	-0,74	-0,39	1,00	
m	-0,72	-0,73	-0,39	1,00	1,00

Tabelle 2: Korrelationen (unskaliert)

Tabelle 2 gibt die Korrelationen wieder. Die Parameter C, n sowie R, m sind jeweils (nahezu) linear korreliert. Man kann insgesamt von einem schlecht gestellten Problem sprechen. Ein ähnliches Bild zeigt sich für die Parameter C und n auch beim stationären Modell (2).

4 Geometrische Deutung im Stichprobenraum

Die Problematik läßt sich anschaulich im Stichprobenraum (DRAPER & SMITH [2]) deuten. Es wird allgemein das nichtlineare Funktionenmodell $y = f(\theta_1, \theta_2, t)$ mit den zwei Parametern θ_1 und θ_2 betrachtet. Der Vektor $z = \underline{y} + \underline{\varepsilon}$ gibt die Realisierung eines Experimentes mit drei Meßzeitpunkten t_1 bis t_3 wieder. Er ist die Summe des Vektors \underline{y} (Modellwerte an den drei Zeitpunkten) und einem Fehlervektor $\underline{\varepsilon}$, der aus dem Meßrauschen resultiert. Für drei Meßzeitpunkte kann z in einen dreidimensionalen Stichprobenraum eingetragen werden (Abb. 1).

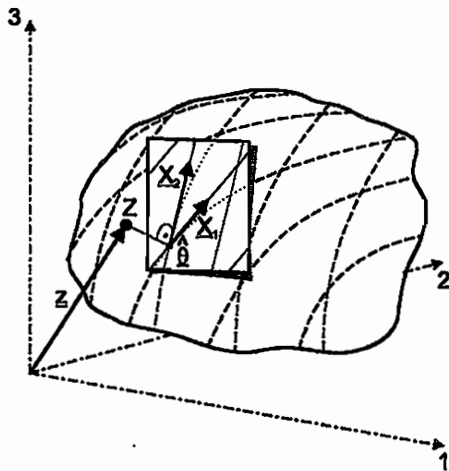


Abbildung 1: Stichprobenraum

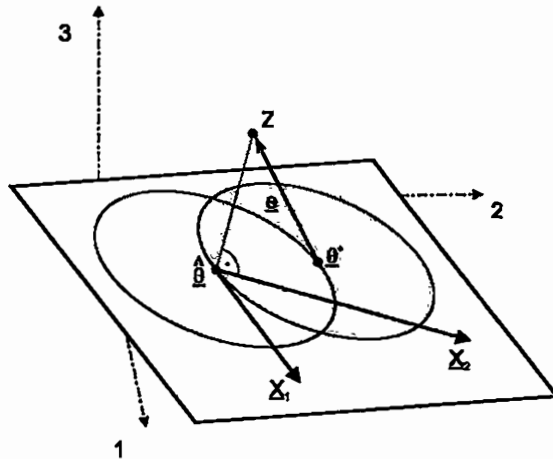


Abbildung 2: linearisierter Lösungsraum

Der Punkt Z kann als eine Stichprobe aufgefaßt werden. Das Modell y beschreibt mit zwei Parametern einen zweidimensionalen, gekrümmten Unterraum des Stichprobenraumes, den sogenannten Lösungsraum. Aufgrund der Nichtlinearität ist das Parametergitter im Lösungsraum im allgemeinen gekrümmt. Die Fehlerquadratsumme stellt das Quadrat des Abstandes eines Parameterpunktes im Lösungsraum und dem Punkt Z dar. Die Parameterschätzung $\hat{\theta}$ mit der geringsten Fehlerquadratsumme ist also durch das Lot vom Punkt Z in den Lösungsraum gegeben. Ein im Punkt der Parameterschätzung $\hat{\theta}$ linearisiertes Modell wird durch die Tangentialebene an den Lösungsraum repräsentiert. Die Sensitivitätsvektoren \underline{X}_1 und \underline{X}_2 (vgl. Gleichung (3)) legen im linearisierten Lösungsraum ein geradlinig, schiefwinkliges Parametergitter fest. Da der Meßfehler $\underline{\varepsilon}$ unabhängig normalverteilt ist, liegen Punkte $\hat{\theta}$ gleichen Wahrscheinlichkeitsniveaus auf Kreisen mit dem Mittelpunkt $\hat{\theta}$ (Abb. 2). Der „wahre“ Parametersatz θ^* ist normalerweise unbekannt. Da aber der Abstand zwischen θ^* und $\hat{\theta}$ einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsniveau entspricht, liegen im Umkehrschluß die Punkte θ^* gleicher Wahrscheinlichkeit auf Kreisen mit dem Mittelpunkt $\hat{\theta}$. Es ergeben sich kreisförmige Vertrauensregionen im Lösungsraum. Die Abbildung einer kreisförmigen Vertrauensregion im Lösungsraum in den orthonormierten Parameterraum ergibt im allgemeinen eine ellipsenförmige Vertrauensregion. Lineare Korrelation zwischen θ_1 und θ_2 ist durch parallele Vektoren \underline{X}_1 und \underline{X}_2 gekennzeichnet. Eine unkorrelierte Parameterschätzung erhält man, wenn orthogonale Sensitivitätsvektoren vorliegen.

5 Einfluß von Modellskalierung und Versuchsplanung

Für die Untersuchung des stationären Kriechmodells (2) lassen sich die Sensitivitätsvektoren analytisch bestimmen. Während die Ableitung nach C einen vom Versuchsplan unabhängigen Vektor in Richtung der Raumdiagonalen ergibt, ist der Sensitivitätsvektor bezüglich n von der Wahl der Eingangsgrößen

abhängig. Um eine geringe Korrelation der Parameterschätzung zu erhalten, wird ein Vektor \underline{X}_2 gesucht, der möglichst orthogonal zu \underline{X}_1 ist.

$$\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial C} \left\{ \sigma_{eff}^{(1)} \right\} \\ \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial C} \left\{ \sigma_{eff}^{(2)} \right\} \\ \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial C} \left\{ \sigma_{eff}^{(3)} \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial n} \left\{ \sigma_{eff}^{(1)} \right\} \\ \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial n} \left\{ \sigma_{eff}^{(2)} \right\} \\ \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}_{ie}}{\partial n} \left\{ \sigma_{eff}^{(3)} \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{\sigma_{eff}^{(1)}}{E} \\ \ln \frac{\sigma_{eff}^{(2)}}{E} \\ \ln \frac{\sigma_{eff}^{(3)}}{E} \end{pmatrix}$$

Versuchsbereich: $1 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{eff} \leq 4 \frac{N}{mm^2} \implies -11 \leq \ln \frac{\sigma_{eff}}{E} \leq -9,5$

Innerhalb des Versuchsbereiches weicht jedoch der Vektor \underline{X}_2 auch bei optimiertem Versuchsplan nur wenig von der Raundiagonalen ab (ca. 3°). Hierin ist die Ursache für die hohe Korrelation zwischen C und n zu sehen. Wählt man im Werkstoffmodell statt des E-Moduls eine Bezugsspannung σ_0 , die in der selben Größenordnung wie die zu skalierende effektive Spannung liegt, so ist im selben Versuchsbereich ein Versuchsplan (5) zu finden, der einen zur Raundiagonalen senkrechten Vektor \underline{X}_2 und somit eine unkorrelierte Parameterschätzung garantiert.

$$\sigma_{eff}^{(1)} = \sigma_0; \quad \sigma_{eff}^{(2)} = \sigma_{eff}^{max}; \quad \sigma_{eff}^{(3)} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{eff}^{max}} \quad (5)$$

Eine Verallgemeinerung auf das vollständige Modell (1) für Hochtemperaturkriechen soll in der Form vorgenommen werden, daß Argumente vorhandener Formfunktionen auf die Größenordnung Eins skaliert werden. Der E-Modul wird in der Modellgleichung durch eine Bezugsspannung σ_0 ersetzt, die in der Größenordnung der effektiven Spannung und der inneren Rückspannung liegt. Die Modellgleichung stellt sich dann in der Form (6) mit transformierten Parametern \tilde{C} und \tilde{R} dar.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ie} &= \tilde{C} \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_0} \right)^n \quad \text{mit} \quad \tilde{C} = \frac{C}{E^n} \cdot \sigma_0^n \\ \dot{\sigma}_i &= H \cdot \dot{\epsilon}_{ie} - \tilde{R} \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m \quad \text{mit} \quad \tilde{R} = \frac{R}{E^m} \cdot \sigma_0^m \end{aligned} \quad (6)$$

Tabelle 3 gibt die skalierten Parameter und die Vertrauensintervalle wieder. Man erkennt die deutliche

	„wahrer“ Wert	Schätzung	95%-VI
σ_0	2,00E+00	-	-
\tilde{C}	9,36E-06	9,35E-06	1,89%
n	5,48E+00	5,48E+00	0,72%
H	1,07E+01	1,08E+01	2,74%
\tilde{R}	8,16E-03	8,18E-03	2,16%
m	2,68E+00	2,68E+00	1,83%

Tabelle 3: Parameter (skaliert)

ρ_{ij}	\tilde{C}	n	H	\tilde{R}	m
\tilde{C}	1,00				
n	-0,45	1,00			
H	0,25	0,72	1,00		
\tilde{R}	0,54	-0,80	-0,41	1,00	
m	0,65	-0,73	-0,39	0,85	1,00

Tabelle 4: Korrelationen (skaliert)

Qualitätsverbesserung der Parameterschätzungen \tilde{C} und \tilde{R} . Zudem liegen die Werte nun in einer intuitiv zugänglichen Größenordnung. Die problematischen Parameterpaarungen C, n bzw. R, m weisen für das skalierte Modell eine wesentlich geringere Korrelation auf (vgl. Tabelle 4). Weitere Analysen zum Einfluß der Versuchsplanung und Modellskalierung finden sich in [1].

Literatur

- [1] Thielecke, F. *Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung* -. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, vor. 1998.
- [2] Draper, N.; Smith, H. *Applied Regression Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1981.

U. BENEDIX

Identifikation von Materialparametern mit semianalytischer Sensitivitätsanalyse

Es wird eine Methode vorgestellt, die Materialparameter aus dem Vergleich experimentell und numerisch ermittelter lokaler und integraler Kraftgrößen zu bestimmen. Zur Minimierung der mit den Vergleichsgrößen definierten Zielfunktion wird ein deterministisches Optimierungsverfahren mit semianalytischer Sensitivitätsanalyse verwendet. Aus Versuchen an geraden Biegeproben sind Aussagen über den Fließbeginn sowie die Fließkurven bei einachsiger Beanspruchung bekannt. Die in Experimenten an gekerbten Biegeproben bestimmten Verzerrungen längs des Ligaments stellen die Belastung für die punktweise Integration des Deformationsgesetzes dar. Die Materialparameter wurden für ein Deformationsgesetz mit isotroper und kinematischer Verfestigung unter Berücksichtigung der kinematischen Anfangsanisotropie identifiziert.

1. Berechnungsverfahren

Eine neuartige Methode zur Identifikation von Materialparametern ist die Anpassung numerischer an experimentell ermittelte inhomogene Verschiebungsfelder, s. z.B. [1, 2, 3]. Parallel dazu können die Materialparameter aber auch aus dem Vergleich experimentell und numerisch ermittelter Spannungen bestimmt werden. Für eine gekerbte Biegeprobe stehen lastschrittweise die gemessenen Verzerrungen in Punkten des Ligaments zur Verfügung [2]. Damit lassen sich durch Integration des Deformationsgesetzes für kleine Verzerrungen

$$\begin{aligned} C_d^{-1} \cdot \dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{\kappa} - \dot{\lambda} q(\sigma, \kappa) &= 0 \\ F(\sigma, \kappa) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

die Spannungen σ und inneren Variablen κ für alle Vergleichsorte und Lastschritte in Abhängigkeit der verwendeten Materialparameter berechnen. Die Zeitdiskretisierung von (1) mit dem impliziten Euler-Verfahren führt auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_d^{-1} \cdot (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \dot{\lambda}_{n+1} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} \Delta t - \Delta \varepsilon_{n+1} &= 0 \\ \kappa_{n+1} - \kappa_n - \dot{\lambda}_{n+1} q_{n+1} \Delta t &= 0 \\ F(\sigma_{n+1}, \kappa_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

welches mit dem Newton-Verfahren gelöst wird [4]. Durch numerische Integration der Spannungen über den Querschnitt lassen sich die integralen Kraftgrößen Biegemoment und Normalkraft bestimmen. Als experimentelle Vergleichswerte stehen die aus den Fließkurven entnommenen Spannungen an der unteren und oberen Kerbe sowie das Biegemoment und die Normalkraft zur Verfügung.

Zur Identifizierung der Materialparameter \mathbf{p} durch Minimierung der Zielfunktion mit Hilfe von Gradientenverfahren werden die Ableitungen $\partial \sigma / \partial \mathbf{p}$ benötigt, welche durch eine implizit-analytische Sensitivitätsanalyse ähnlich wie in [1, 5] gewonnen werden. Ausgehend vom Gleichungssystem (2) in ausiterierter Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_{n+1}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_n(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

wobei

$$\mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \dot{\lambda})^T \quad (4)$$

den Zustandsvektor der Unbekannten darstellt, erhält man durch implizite Differentiation

$$\frac{\partial \mathbf{z}_{n+1}}{\partial \mathbf{p}} = \underbrace{(\nabla_{\mathbf{z}_{n+1}} \mathbf{G})^{-1}}_{\text{Inverse des iter. Jacobians}} \left(\underbrace{-\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{p}}}_{\text{Material-abhängig}} - \underbrace{(\nabla_{\mathbf{z}_n} \mathbf{G})}_{\text{bekannt}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{z}_n}{\partial \mathbf{p}}}_{\text{vorheriger Lastschritt}} \right) \quad (5)$$

Zur Berechnung der Ableitungen ist damit für jeden Parameter lediglich ein lineares Gleichungssystem zu lösen, wobei die Systemmatrix bereits in zerlegter Form vorliegt. Die Ableitungen werden dabei mit derselben Genauigkeit berechnet wie die Funktionswerte. Die verwendete, in den Integrationsalgorithmus eingebettete Sensitivitätsanalyse ist damit wesentlich effektiver und genauer als eine numerische Sensitivitätsanalyse.

Als Optimierungsmethode hat sich das Levenberg-Marquardt-Verfahren als besonders geeignet erwiesen.

2. Approximation der Zug- und Druckfließkurven

Untersucht wurde ein Stahlblech aus X6CrNiTi 18-10, wobei eine Anfangs-Anisotropie infolge des Walzprozesses auftrat. An geraden Biegeproben wurden die einachsigen Fließspannungen sowie die Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeiten gemessen. Die daraus berechnete Anfangs-Fließort-Kurve ist in den Druckbereich verschoben (Bild 1), [2].

Meßwerte für die einachsigen Fließkurven stehen für Zug aus dem Zugversuch sowie für Zug und Druck aus dem Biegeversuch zur Verfügung [2]. Die Druckfließspannungen sind im gesamten Bereich der Fließkurven betragsmäßig größer als die Zugfließspannungen. Eine konstante Differenz zwischen Zug- und Druckfließkurven läßt sich bei kinematischer

Verfestigung nach Prager durch die Wahl entsprechender Anfangswerte für die Rückspannungen beschreiben.

Bei den Optimierungsrechnungen zeigte sich eine gewisse gegenseitige Abhängigkeit der Parameter des verwendeten Potenzansatzes für die isotrope Verfestigung. Abhilfe brachte die Verwendung eines *arctan*-Ansatzes, da dieser das Anfangsverhalten der Fließkurven sowie deren asymptotisches Verhalten besser beschreibt (Bild 2).

Da für einen monotonen Belastungsprozeß keine eindeutige Trennung der isotropen und kinematischen Verfestigung möglich ist, ergeben sich mehrere "optimale" Lösungen.

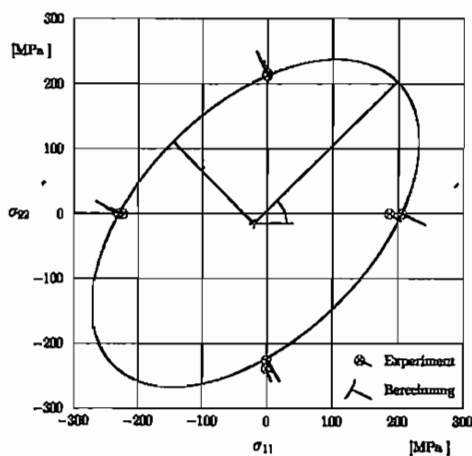


Bild 1: Anfangs-Fließort-Kurve bei 0,01 % Offset-Dehnung.

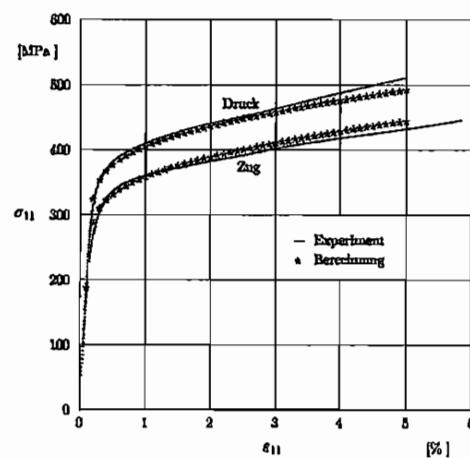


Bild 2: Vergleich gemessener und berechneter Fließkurven.

3. Auswertung der Messungen an gekerbten Biegeproben

Die Verwendung gekerbter Biegeproben erlaubt die Einbeziehung inhomogener Spannungs-Verzerrungs-Zustände in die Materialparameteridentifikation. Ein Wechsel der Belastungsrichtung erlaubt die eindeutige Trennung der isotropen und kinematischen Verfestigungsanteile.

Für die gekerbten Biegeproben wurden die Verschiebungsfelder mit Hilfe des Moiré-Verfahrens bestimmt [2]. Die Auswertung der Moirébilder längs der Isotheten liefert Orte gleicher Verschiebungskomponenten. Um Meßwerte der Verschiebungen bzw. der Verzerrungen an vorgegebenen Vergleichsorten zu erhalten, wurde eine ebene Approximation mit Hilfe von FE-Ansätzen durchgeführt [5]. Die damit ermittelten Verzerrungen längs des Ligaments stellen die Belastung bei der punkt- und lastschrittweisen Integration des Deformationsgesetzes (1) dar. Einen Vergleich der gemessenen und der mit dem optimalen Parametersatz berechneten bezogenen Spannungen infolge Längskraft und Biegemoment zeigt Bild 3.

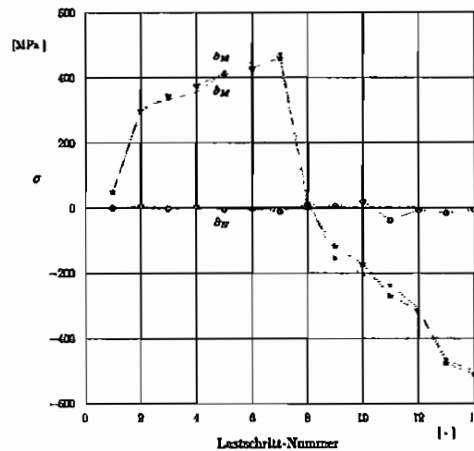


Bild 3: Bezogene Spannungen infolge Längskraft und Biegemoment.

4. Schlußfolgerungen

Die Identifikation von Materialparametern ist mit der hier vorgestellten Methode prinzipiell möglich. Von Vorteil sind die kurzen Rechenzeiten sowie ein tieferer Einblick in die Wirkung von Parameteränderungen und verschiedenartiger theoretischer Ansätze. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Meßwerte der einachsigen Fließkurven und der inhomogenen Spannungs-Verzerrungs-Zustände macht die Verwendung einer multikriteriellen Zielfunktion erforderlich.

5. Literatur

- 1 MAHNKEN, R., STEIN, E.: Identification of Parameters for visco-plastic Models via Finite-Element Methods and Gradient Methods. IBNM-Bericht 93/5 Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1993.
- 2 KREISSIG, R., NAUMANN, J., BENEDIX, U., BORMANN, P., GREWOLLS, G., KRETZSCHMAR, S.: Parameter identification of inelastic deformation laws by the analysis of inhomogeneous states of strain. TU Braunschweig, Abschlußbericht SFB 319, 1996.
- 3 GELIN, J.-C., GHOUATI, O.: An inverse method for material parameter estimation in the inelastic range. Computational Mechanics, 16:143-150, 1995.
- 4 MICHAEL, D., MEYER, A.: Some remarks on the simulation of elasto-plastic problems on parallel computers. TU Chemnitz-Zwickau, Preprint SPC 95-13, 1995.
- 5 BOHNSACK, E.: Zur Identifikation von Verfestigungsparametern elastisch-plastischer Stoffgesetze an inhomogen verformten Proben. TU Chemnitz-Zwickau, Institut für Mechanik, Bericht 1/97, 1997.

Adresse: U. BENEDIX, Technische Universität Chemnitz, Institut für Mechanik, Straße der Nationen 62, D-09107 Chemnitz

Zum Eindringversuch mit kugelförmigem Indenter

K. Brämer

1. Einleitung

Zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Werkstoffen kommen neben konventionellen auch andere Verfahren zum Einsatz, bei denen gezielt große Verzerrungen im Material erzeugt werden. Eines dieser Verfahren ist der Eindringversuch, bei dem ein Prüfkörper in die Probe gedrückt und diese in der Regel plastisch verformt wird. Ein Vorteil des Eindringversuches sind die auftretenden großen hydrostatischen Drücke, die die Verformbarkeit des Materials verbessern. Dadurch lassen sich wesentlich größere Verzerrungen als die Gleichmaßdehnung des Zugversuches erreichen. Die großen Verzerrungen liegen jedoch nur lokal vor, so daß wegen der großen Gradienten die Auswertung nicht so einfach ist wie bei homogenen Feldern. Um aus der Kraft-Verschiebungskurve des Eindringversuches auf die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Materials schließen zu können, bedarf es einer detaillierten Modellierung des Eindringvorganges unter Berücksichtigung von geometrischer und physikalischer Nichtlinearität. Für die dazu notwendige numerische Simulation des Eindringversuches bietet sich die Finite-Elemente-Methode an.

2. Vorteile kugelförmiger Indenter

In Anbetracht der großen Gradienten von Spannungen und Verzerrungen in der Nähe des Kontaktbereiches ist eine große Anzahl Finiter Elemente nötig, damit eine sinnvolle Modellierung erreicht wird. Die Beschränkung auf rotationssymmetrische Probleme führt zu einer sinnvollen Begrenzung des numerischen Aufwandes.

Kugelförmige Prüfkörper haben außerdem den Vorteil, daß im Verlauf des Eindringens (unterschiedliche Eindringtiefen in Relation zum Indenterradius) unterschiedliche Abschnitte der Spannung-Dehnungs-Kurve dominant werden, wodurch sich mehr Informationen während eines Versuches gewinnen lassen als bei selbstähnlichen Anordnungen wie z.B. dem Vickers-Indenter. Wegen des Fehlens einer Spitze gibt es keine dazugehörige Singularität, und es

werden spezielle Geometriefehler wie z.B. Spitzenverrundungsfehler oder Dachkantenbildung vermieden.

3. Einflüsse auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve

Die Kraft-Verschiebungs-Kurve hat integralen Charakter, so daß sich die Frage nach der Eindeutigkeit der inversen Aufgabenstellung ergibt. Daher sind zusätzliche Informationen (z.B. Verschiebungsfelder) von Interesse. Andererseits müssen neben der Spannungs-Dehnungs-Kurve auch die Einflüsse anderer Größen untersucht werden. In der vorliegenden Arbeit sollen in erster Linie Aussagen zum Reibungseinfluß gemacht werden.

4. Numerische Untersuchungen

Die numerische Simulation hat den großen Vorteil, daß nicht nur eine Kraft-Verschiebungs-Kurve, sondern auch eine Feldlösung vorliegt, und Parametervariationen einfach möglich sind. Fehler können unter anderem dadurch entstehen, daß eine endliche Probe mit idealisierten Randbedingungen modelliert wird, Kontaktelemente die realen Kontaktverhältnisse nur bedingt wiedergeben, oder die Nachgiebigkeit des Indenters und seiner Halterung nicht korrekt erfaßt wird.

Zur numerischen Simulation kam das FE-System ANSYS 5.3 zum Einsatz. Da besonders das Verhalten der zu prüfenden Materialien bei großen Verzerrungen interessierte, mußten große Eindringtiefen bis ca. 15 Prozent des Radius der Indenterkugel simuliert werden. Um den Reibungseinfluß in Relation zum Einfluß des Anstieges der Spannungs-Dehnungs-Kurve abschätzen zu können, wurden verschiedene Varianten berechnet, bei denen sich die σ - ϵ -Kurve erst oberhalb einer Dehnung von zehn Prozent lediglich im angenommenen folgenden Anstieg (Tangentenmodul) unterschied. Es wurden verschiedene Coulombsche Reibfaktoren μ zwischen 0 und 0.2 verwendet, wobei die Resultate bezüglich der Kraft-Verschiebungs-Kurve für $\mu > 0.05$ kaum voneinander abweichen (Abbildung 1). Die Ergebnisse machen deutlich, daß bei großen Eindringtiefen die Reibung einen ähnlich starken Einfluß auf die Kraft-Verschiebungs-Kurven hat wie der Tangentenmodul. Die Reibung beeinflusst die Verschiebungsfelder an der Oberfläche erheblich, und zwar bereits für geringe Eindringtiefen, bei

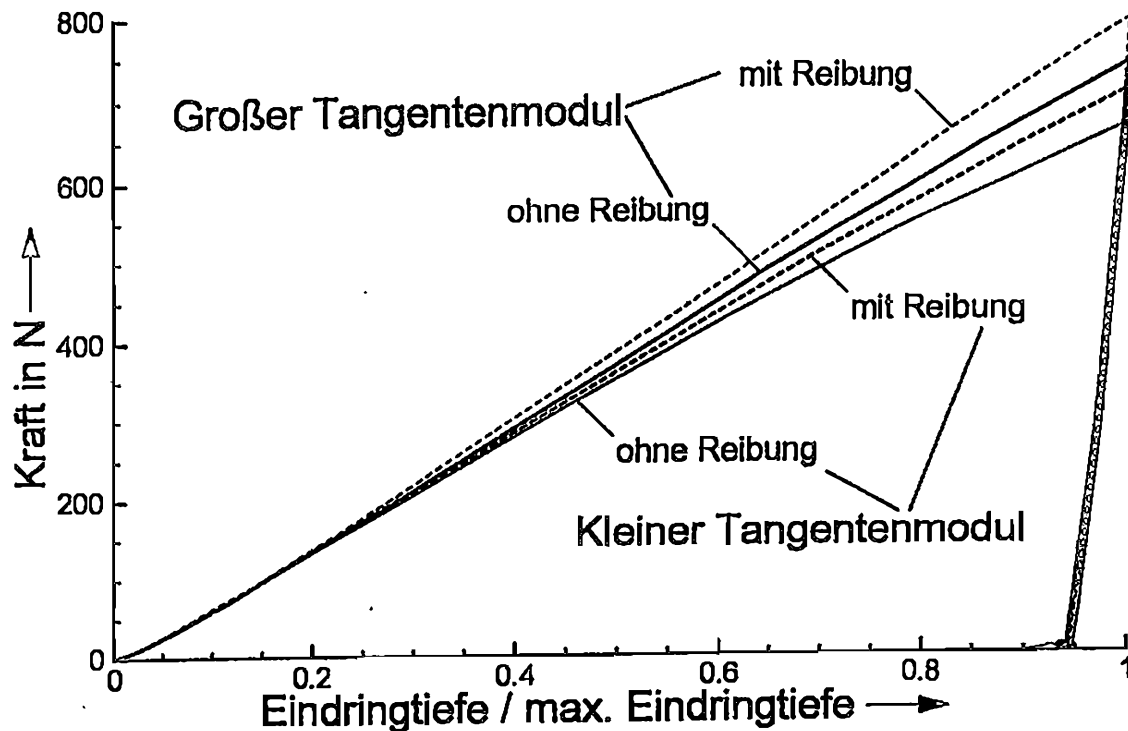


Abbildung 1: Einflüsse von Tangentenmodul und Reibung auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve

denen die Reibungsverhältnisse noch unerheblich für die Kraft-Verschiebungs-Kurve sind. Durch die in Abbildung 2 dargestellten Verschiebungsverläufe nach erfolgter Be- und Entlastung wird deutlich, daß durch das Vorhandensein von Reibung zwischen Indenter und Probe die radialen Verschiebungen stark verringert werden. Da jedoch auch der Tangentenmodul erhebliche Auswirkungen auf die Aufwölbung am Rand des Eindruckes hat, muß der Einfluß der Reibung von dem der σ - ϵ -Kurve separiert werden. Dabei zeigt sich, daß im reibungsfreien Fall bzw. bei kleinerer Reibung die Aufwölbung stärker in der Nähe des Indenters konzentriert ist als im Falle größerer Reibung, bei der die Wulst ausgedehnter und flacher ist (Abbildung 2).

Untersuchungen mit dem Verfahren der Grauwertanalyse, das ein Verschiebungsbild an der Oberfläche liefert, erwiesen sich jedoch bislang wegen eingeschränkter Genauigkeit als nicht aussagekräftig genug, um den Einfluß des Reibwertes zu analysieren.

Bei der numerischen Simulation unter Annahme eines vorgegebenen Reibfaktors wird bei wiederholter Be- und Entlastung der Effekt beobachtet, daß der unter Reibung bei

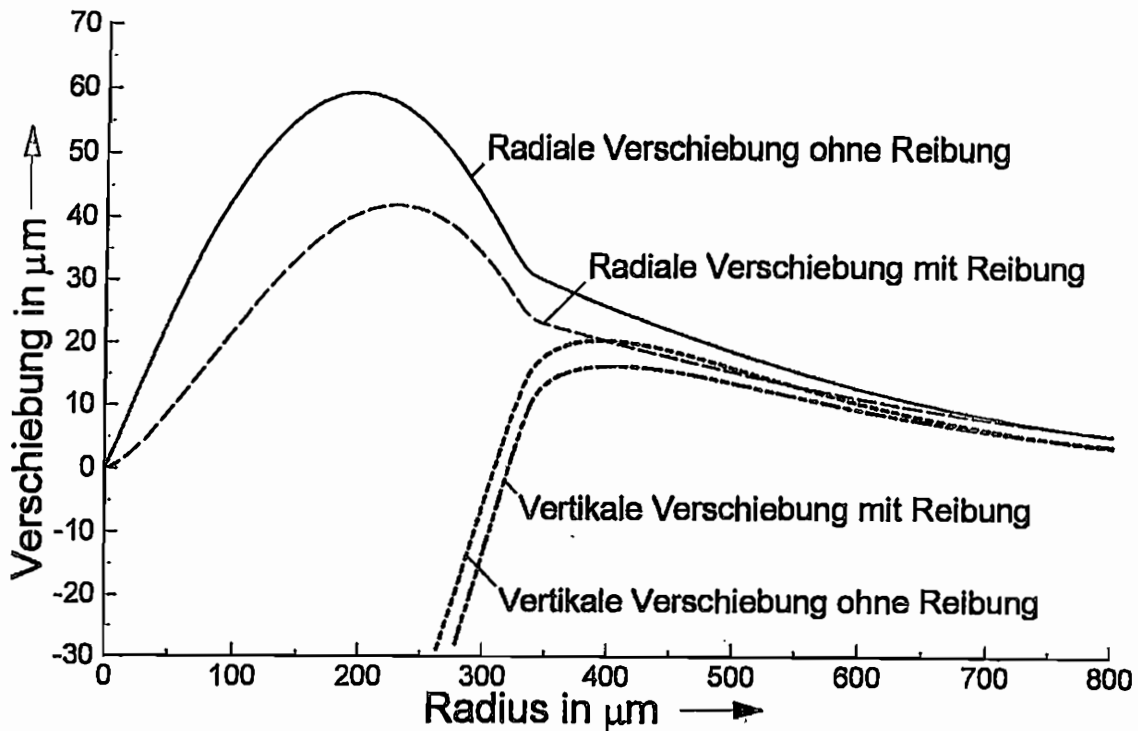


Abbildung 2: Verschiebungsverläufe an der Probenoberfläche nach Entlastung

vorgegebener Eindringtiefe festgestellte Wert der Kraft in den folgenden Zyklen nicht mehr erreicht wird. Die bei der Wiederbelastung ermittelte Kraft entspricht ziemlich genau derjenigen unter Annahme eines reibungsfreien Kontaktes.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Um aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines Eindringversuches auf die Spannungs-Dehnungs-Kurve auch für große Verzerrungen schließen zu können, ist es notwendig, den Reibungseinfluß zu separieren, wofür Lösungsvorschläge unterbreitet wurden. Für die Zukunft ist vorgesehen, stärker experimentelle Untersuchungen einzubeziehen und die Güte der Korrelation zwischen σ - ε -Kurve und F - s -Kurve zu untersuchen.

Korrespondenzadresse: Dipl.-Ing. K. Brämer, TU Chemnitz, Institut für Mechanik,
Professur Festkörpermechanik, 09107 Chemnitz, e-mail klaus.braemer@mb1.tu-chemnitz.de

Experimentelle Ermittlung des Verhältnisses von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit in Festkörpern

DIRK HELM und PETER HAUPT
 Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel

1 Einleitung

In Metallen kann Energie in der Struktur durch Gitterdefekte gespeichert werden. Bei Temperaturen unterhalb der halben Schmelztemperatur und ausreichend großer mechanischer Beanspruchung ist die Wanderung, die Produktion und das Auslösen von Versetzungen der dominante Energiespeicherungs- und Energiefreisetzungseffekt. Dies liegt daran, daß Versetzungen stets mit lokalen Veränderungen der Atomabstände verbunden sind, wodurch die gespeicherte potentielle Energie verändert wird. In anderen Temperaturbereichen, in speziellen Legierungen (z.B. in Formgedächtnislegierungen) oder in ganz anderen Materialien (z.B. in Kunststoffen) sind sehr unterschiedliche Deformationsmechanismen dominant, die aber ebenfalls Energiespeicherungen in der Struktur ermöglichen.

Die experimentelle Bestimmung der in der Struktur gespeicherten Energie besitzt eine recht lange Tradition. Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in BEVER *et al.* [1973]. Zum damaligen Zeitpunkt stand fest, daß der in der Struktur gespeicherte Energieanteil von der Deformationsgeschichte abhängt und lediglich bis zu 15% der investierten inelastischen Arbeit beträgt. Im Gegensatz dazu werden in neueren Arbeiten, z.B. von CHRYSOCHOOS *et al.* [1989] und OLIFERUK *et al.* [1985], etwas andere Ergebnisse präsentiert: Bis zu 70% der investierten inelastischen Arbeit wird in der Struktur gespeichert und nicht in Wärme umgewandelt. Des weiteren zeigt das Verhältnis von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit bei geringen inelastischen Deformationen ein Maximum. Nach dem Maximum wird das Verhältnis monoton kleiner.

2 Herleitung und Umsetzung des Meßverfahrens

Die Grundlage des Verfahrens zur Messung der Wärmeproduktion ist die Energiebilanz in Form der *Wärmeleitungsgleichung*

$$c_s \dot{\vartheta} - \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta = \underbrace{\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_1}_{w_1} - \underbrace{\frac{\alpha \theta_0}{\rho} \operatorname{Sp} \dot{\mathbf{T}}}_{w_0} - \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{E}_1} \cdot \dot{\mathbf{E}}_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)}_{w_s}. \quad (1)$$

Zu ihrer Herleitung wird die *Freie Energie* $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_i, q_1, \dots, q_N)$, lineare Thermoelastizität, die Annahme kleiner Temperaturänderungen $\theta(\mathbf{X}, t) = \theta_0 + \vartheta(\mathbf{X}, t)$ sowie die additive Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen inelastischen Anteil $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_i$ vorausgesetzt. c_s ist die spezifische Wärmekapazität bei konstanter Spannung, ϑ die Temperaturänderung, λ die Wärmeleitfähigkeit, ρ die Dichte, \mathbf{T} der Spannungstensor, θ_0 die zeitlich und räumlich konstante Bezugstemperatur und α der Wärmeausdehnungskoeffizient. Die q_k sind *Innere Variable* vom Dehnungstyp. Die rechte Seite der Wärmeleitungs-

gleichung, bestehend aus der *inelastischen Spannungsleistung* w_i dem *thermoelastischen Kopplungsterm* w_e und der *Spannungsleistung* w_s , die zu den *gespeicherten Energien* führt, wird als *Wärmeproduktion* $u = \rho(w_i - w_e - w_s)$ bezeichnet und verdeutlicht die experimentellen Beobachtungen: Nicht die gesamte investierte inelastische Spannungsleistung wird in Wärme umgewandelt, sondern nur der um den thermoelastischen Kopplungsterm und die gespeicherte Spannungsleistung verminderte Anteil.

Die direkte Bestimmung der Wärmeproduktion aus gemessenen Temperaturdaten ist unter Verwendung der Wärmeleitungsgleichung (1) möglich, wenn die vorkommenden Zeit- und Ortsdifferentiationen des Temperaturfeldes numerisch berechnet werden. Dabei treten allerdings einige Probleme auf: Zum einen erfordert die Bestimmung der Ortsableitungen mehrere Temperaturmesspunkte und zum anderen kann die numerische Differentiation von Meßdaten mit großen Fehlern behaftet sein. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein anderer Weg beschritten: Die partielle Differentialgleichung (1) wird für die Bedingungen in einer Zug-Druck-Torsionsprüfmaschine gelöst. Die Materialproben können Zylinder oder dünnwandige Rohre (Probenhöhe h) sein. Unter Vernachlässigung der Einspanneinflüsse ist die Annahme eines homogenen Spannungs- und Verzerrungsfeldes gerechtfertigt. Das umgebende Medium Luft oder Isolationsmaterial ist ein sehr schlechter Wärmeleiter, so daß der konvektive Wärmefluß über die Mantelfläche vernachlässigt werden kann. Hierdurch ergibt sich die eindimensionale Form der Wärmeleitungsgleichung (2). In der verwendeten Prüfmaschine können die Einspannungen

$$\vartheta_{,t}(z, t) - \frac{\lambda}{\rho c_s} \vartheta_{,zz}(z, t) = \frac{1}{\rho c_s} u(t) \quad (2)$$

$$\vartheta_m(t) = \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau = A u(t) \quad (3)$$

$$K(t, \tau) = \frac{4}{\rho \pi c_s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} e^{-\frac{\lambda}{\rho c_s} \left(\frac{(2j-1)\pi}{h}\right)^2 (t-\tau)} \quad (4)$$

gekühlt werden, wodurch die Temperatur an den Einspannstellen auch während des Experimentes konstant bleibt. Die Lösung des Wärmeleitungsproblems führt auf eine VOLTERRASche Integralgleichung 1. Art für die Temperatur in Probenmitte ϑ_m (3). Dabei wird deutlich, daß die Temperatur von der Geschichte der Wärmeproduktion abhängt. Die gesuchte Wärmeproduktion folgt dann bei bekannten Temperaturdaten in der Probenmitte durch die Umkehrung der Abbildung (3): $u(t) = A^{-1} \vartheta_m(t)$. Allerdings ist die Inverse von A unstetig. Daher bewirken kleinste Störungen in den Temperaturmeßdaten sehr große Abweichungen in der Wärmeproduktion $u(t)$. Abhilfe verschaffen *Regularisierungsverfahren* (z.B. LOUIS [1989]), bei denen der Operator A so verändert wird, daß er eine stetige Inverse R_{f_p} besitzt. Hierzu muß die verallgemeinerte Inverse A^\dagger (Gl. (5)), mit den Eigenwerten λ_n und den Eigenvektoren

$$u = \underbrace{(A^* A)^{-1} A^*}_{A^\dagger} \vartheta_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \langle \vartheta_m, f_n \rangle e_n, \quad (5)$$

e_n des Operators $A^* A$ sowie den transformierten und skalierten Eigenvektoren $f_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} A e_n$, gebildet werden. A^* ist darin der zu A adjungierte Operator. Die Eigenwerte des hier betrachteten Operators $A^* A$ haben die Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, so daß die verallgemeinerte Inverse A^\dagger immer noch unstetig ist. Regularisierungsverfahren beheben die Unstetigkeit der verallgemeinerten Inversen durch die Einführung eines Filters:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} F(f_p, \sqrt{\lambda_n}) \langle \vartheta_m, f_n \rangle e_n = R_{f_p} \vartheta_m \quad (6)$$

Dabei wichtet die Filterfunktion in Abhängigkeit vom Filterparameter f_p die Wurzel der Eigenwerte $\sqrt{\lambda_n}$, wodurch der Regularisierungsoperator R_{f_p} stetig wird. Die Durchführung des Verfahrens zur Rekonstruktion der Wärmeproduktion $u(t)$ erfolgt numerisch, und zwar durch Approximation des Integraloperators (3) mit einer Trapezregel. Im Gegensatz zu (3) enthält das hierdurch entstehende Gleichungssystem $\vartheta_m = \mathbf{A} \mathbf{u}$ einen stetigen Operator \mathbf{A} . Das schlecht gestellte Rekonstruktionsproblem wird infolge der Diskretisierung allerdings nicht verbessert, sondern nur verlagert: Die Unstetigkeit des Operators A geht über in die schlechte Kondition der Matrix \mathbf{A} . Der Regularisierungsoperator kann analog zu dem kontinuierlichen Operator R_{f_p} gebildet werden. Selbstverständlich besitzt der Operator $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ nicht mehr unendlich, sondern lediglich endlich viele Eigenwerte.

Die Spannungsleistung w_s , die für die Energiespeicherungen in der Struktur aufgebracht werden muß, folgt aus der Wärmeproduktion u , wenn die inelastische Spannungsleistung w_i und der thermoelastische Kopplungsterm w_e aus einem mechanischen Experiment bestimmt werden kann:

$$w_s = -\frac{1}{\rho}u(t) + w_i - w_e = -\frac{1}{\rho}u(t) + \sigma \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} \right) + \tau \left(\dot{\gamma} - \frac{\dot{\tau}}{\mu} \right) - \frac{\alpha \theta_0}{\rho} \dot{\sigma} \quad (7)$$

Dabei wurde angenommen, daß sich das elastische Materialverhalten mit einer linearen und isotropen Elastizitätsbeziehung beschreiben läßt und sich die inelastischen Deformationen unter Volumenerhaltung entwickeln. In (7) ist ε die Axialdehnung, σ die Normalspannung, E der Elastizitätsmodul, γ die Scherdehnung, τ die Schubspannung und μ der Schubmodul. Die Integration der inelastischen Spannungsleistung w_i und der gespeicherten Spannungsleistung w_s über der Zeit ergibt die inelastische Arbeit sowie die gespeicherte Energie.

3 Anwendung des Meßverfahrens

Die Anwendbarkeit der Methode zur Ermittlung der gespeicherten Energie wird anhand eines monotonen dehnungsgesteuerten Zugversuches mit einer Dehnungsgeschwindigkeit von $0.4\%s^{-1}$ an einer Aluminiumlegierung AlMgSi1 demonstriert. Um Fertigungseinflüsse auszuschließen wurde die Probe vor dem Experiment bei $410^\circ C$ über 2 Stunden weichgeglüht. Abbildung 1 zeigt die gemessenen Spannungsdaten über der Zeit. Deutlich ist ab einer Spannung von ca. 60 MPa inelastisches Verhalten erkennbar. Der zugehörige Temperaturverlauf ist in Abbildung 2 dargestellt. Zu Beginn tritt der thermoelastische Kühleffekt infolge der wirkenden Zugspannungen auf. Nach einem relativ flachen Minimum steigt der Temperaturverlauf aufgrund des dissipativen Charakters der inelastischen Deformation stark an. Die durchgezogene Linie stellt den geglätteten Temperaturverlauf dar. Dieser wird zur Rekonstruktion der Wärmeproduktion verwendet, weil die Meßdaten des Thermoelementes mit zu großen Störungen behaftet sind. Ziel ist es natürlich in der Zukunft, mit besseren Temperaturmeßverfahren, den gemessenen Temperaturverlauf direkt zur Rekonstruktion der Wärmeproduktion zu verwenden.

Die rekonstruierte Wärmeproduktion ist in Abbildung 3 dargestellt. Für die Filterfunktion wurde ein Tiefpaßfilter gewählt, der sehr kleine Eigenwerte λ_n einfach abschneidet. Diese Vorgehensweise ist allgemein unter dem Begriff *abgeschnittene Singulärwertzerlegung* bekannt. Bei der angewendeten Regularisierung blieb lediglich der kleinste Eigenwert unberücksichtigt. Ohne Regularisierung würden in dem Verlauf der Wärmeproduktion starke

Oszillationen auftreten. Physikalisch zeigt der Verlauf der Wärmeproduktion zu Beginn den thermoelastischen Kühleffekt und danach einen starken Anstieg infolge der inelastischen Deformationen.

Aus der rekonstruierten Wärmeproduktion sowie den Spannungs- und Verzerrungsmeßdaten kann die gespeicherte Energie und die inelastische Arbeit ermittelt werden. Das Verhältnis von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit ist in Abbildung 4 über der inelastischen Arbeit aufgetragen. Deutlich ist die Deformationsabhängigkeit der gespeicherten Energie sowie ein Maximum bei geringen inelastischen Deformationen erkennbar. Hier wird ca. 75% der investierten inelastischen Arbeit in der Struktur gespeichert und lediglich 25% in Wärme umgewandelt. Mit zunehmender Deformation wird das Verhältnis nach dem Maximum monoton kleiner.

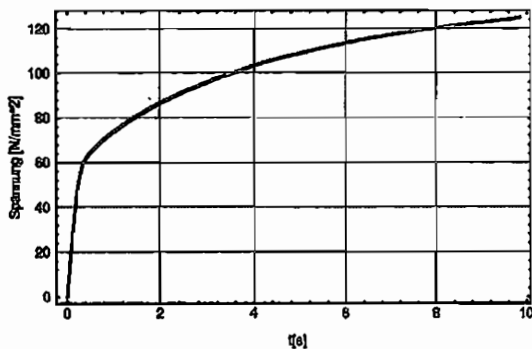


Abbildung 1: Spannungsmeßdaten

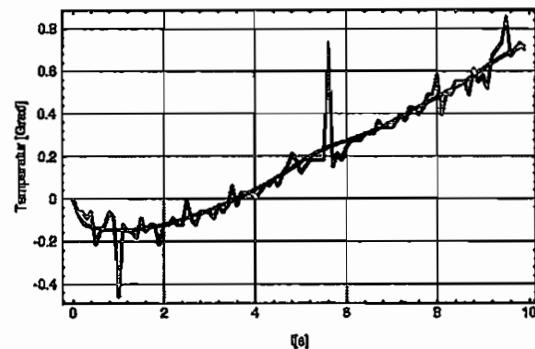


Abbildung 2: Temperaturmeßdaten

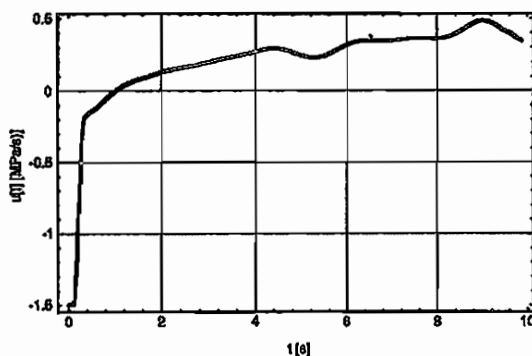


Abbildung 3: Wärmeproduktion

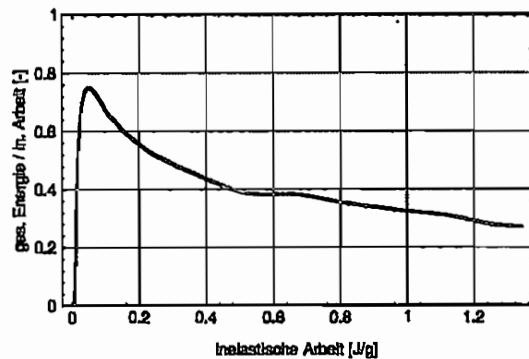


Abbildung 4: Verhältnis von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit e_s/a_i

Literatur

- BEVER, M.; HOLT, D.; TITCHENER, A. : *The Stored Energy of Cold Work*, In: Chalmers, B.; Christian, J.; Massalski, T. (Hrsg.), Vol. 17 von *Progress in Materials Science*, Pergamon, Oxford et al. [1973].
- CHRYSOCHOOS, A.; BELMAHJOUR, F. : *Thermographic Analysis of Thermomechanical Couplings*, *Archives of Mechanics* **44**[1992]55–68.
- LOUIS, A. : *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner-Studienbücher [1989].
- OLIFERUK, W.; GADAJ, S.; GRABSKI, W. : *Energy Storage during Tensile Deformation of Armco Iron and Austenitic Steel*, *Mater. Sci. Eng.* **70**[1985]131–141.

Formulierung und Integration von Materialgleichungen der Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität bei großen Deformationen

W. Jansohn¹, Ch. Tsakmakis^{2,3}

¹ Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau, Universität Karlsruhe (TH)

² Institut für Mechanik, Technische Universität Darmstadt

³ Institut für Materialforschung II, Forschungszentrum Karlsruhe

1 Einleitung

Die hier vorgestellte konstitutive Theorie basiert auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen thermoelastischen und einen inelastischen Anteil $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_{et} \mathbf{F}_p$. Ferner wird das Konzept der dualen Variablen [2] zugrundegelegt. Der Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration ist dann durch $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_{et} + \hat{\mathbf{T}}_p$, mit $\hat{\mathbf{T}}_{et} = 1/2(\hat{\mathbf{F}}_{et}^T \hat{\mathbf{F}}_{et} - 1)$, $\hat{\mathbf{T}}_p = 1/2(1 - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p^{-1})$ und seine Geschwindigkeit durch $\hat{\mathbf{T}}^\Delta = \hat{\mathbf{T}}_{et}^\Delta + \hat{\mathbf{T}}_p^\Delta$, mit $(\cdot)^\Delta = (\cdot)^* + \mathbf{L}_p^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$ gegeben. Verzerrungstensoren in der Momentankonfiguration ist die Oldroyd-Ableitung $(\cdot)^\Delta = (\cdot)^* + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}$ mit $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ zugeordnet.

$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\mathbf{T}$ bezeichne den gewichteten Cauchy Spannungstensor, $\hat{\mathbf{T}}$ den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration und $\hat{\mathbf{P}} = (1 + 2\hat{\mathbf{T}}_{et})\hat{\mathbf{T}}$ den Mandelschen Spannungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration. Die Spannungsgeschwindigkeiten in der Zwischenkonfiguration bzw. der Momentankonfiguration sind durch die Oldroyd-Ableitungen $(\cdot)^\nabla = (\cdot)^* - \mathbf{L}_p(\cdot) - (\cdot)\mathbf{L}_p^T$ gegeben.

Ferner bezeichnet im folgenden $(\cdot)'$ die partielle Ableitung der Größe (\cdot) nach der Temperatur.

2 Materialgleichungen

Zur Formulierung thermomechanisch konsistenter Materialmodelle wird die Clausius-Duhem-Ungleichung betrachtet. Bei Fourierscher Wärmeleitung genügt es dann die Ungleichung $\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \rho_0(\dot{\psi} + \eta_* \theta) \geq 0$ zu betrachten [4], wobei ρ_0 die Dichte in der Ausgangskonfiguration und η_* die spezifische Entropie kennzeichnet. Wird eine freie Energiefunktion $\psi(t) = \psi_{et}(\hat{\mathbf{T}}_{et}, \theta) + \psi_p(r, \hat{\mathbf{Y}}, \theta)$ zugrundegelegt, dann folgt für rein thermoelastische Prozesse mit Standardargumenten von Coleman, Noll und Gurtin $\hat{\mathbf{T}} = \rho_0 \partial \psi_{et} / \partial \hat{\mathbf{T}}_{et}$, $\eta_* = -\partial \psi_{et} / \partial \theta$. Unter der Annahme, daß diese Potentialbeziehungen auch bei inelastischen Deformationen gelten, reduziert sich die Clausius-Duhem-Ungleichung auf die Dissipationsungleichung. Für den inelastischen Teil der freien Energie betrachten wir den Ansatz $\psi_p = (1/2\rho_0)(c\hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} + \gamma r^2 + 2hr)$, der die thermodynamisch konjugierten Spannungen $\hat{\mathbf{Z}} = \rho_0 \partial \psi_p / \partial \hat{\mathbf{Y}}$, $k = \rho_0 \partial \psi_p / \partial r$ bestimmt.

Mit Hilfe der Variablen der kinematischen Verfestigung vom Mandelschen Typ $\hat{\xi} = (1 + 2\hat{\mathbf{Y}})\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}} + (2/c)\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}$ (zu dieser Definition siehe [6]) wird eine v.-Mises Fließfunktion $F = F(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\xi}, k) = \sqrt{3/2}\|(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D\| - k$ formuliert und die plastische Dehnungsgeschwindigkeit durch $\hat{\mathbf{T}}_p^\Delta = \dot{s}\sqrt{2/3}(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D / \|(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D\|$ vorgegeben. \dot{s} wird bei Plastizität durch die Konsistenzbedingung, bei Viskoplastizität durch die Evolutionsgleichung $\dot{s} = \langle F \rangle^m / \eta$ bestimmt.

Die Dissipationsungleichung $A + B \geq 0$, $A = (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{T}}_p - k\dot{r}$, $B = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \left(\hat{\mathbf{T}}_p - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{Z}} + \frac{c'}{c} \hat{\mathbf{Z}} \right)$ ist dann für alle Prozesse erfüllt, wenn die Terme A und B nie negativ sind.

Unter Einbeziehung der Normalenregel kann gezeigt werden, daß der Term A nie negativ ist, wenn die Ungleichung $\dot{s} \geq \dot{r}$ erfüllt ist. Für r wird die Evolutionsgleichung $\dot{r} = \phi(1 - (\beta/\gamma)(k - h))\dot{s} - (\pi/\gamma)(k - h)^\omega$, $\phi \leq 1$, (für Plastizität $\pi = 0$) vorgegeben.

Der Term B ist nie negativ, wenn $\hat{\Gamma}_p - (1/c)\dot{\hat{\mathbf{Z}}} + (c'/c^2)\dot{\hat{\mathbf{Z}}}\dot{\theta} = \chi\hat{\mathbf{Z}}$, $\chi \geq 0$ gilt. Wird der Proportionalitätsfaktor durch $\chi := (b/c)\dot{s} + (p/c)\|\hat{\mathbf{Z}}\|^{w-1}$ (für Plastizität $p = 0$) vorgegeben, resultiert die Evolutionsgleichung $\dot{\hat{\mathbf{Z}}} = c\hat{\Gamma}_p - b\dot{s}\hat{\mathbf{Z}} + (c'/c)\dot{\theta}\|\hat{\mathbf{Z}}\|^{w-1}\hat{\mathbf{Z}}$.

In der Wärmeleitungsgleichung $c_e\dot{\theta} = w_{et} + \Sigma + w_d$ kann die thermoelastische Kopplung $w_{et} = -\theta(\partial^2\psi/\partial\theta^2)$, die Wärmezufuhr Σ und die dissipierte Spannungsleistung $w_d = w_p - \dot{e}_{st} = (1/\rho_0)\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\Gamma}_p - \dot{\mathbf{Y}} \cdot (\partial(\psi - \theta\partial\psi/\partial\theta)/\partial\mathbf{Y}) - \dot{r}(\partial(\psi - \theta\partial\psi/\partial\theta)/\partial r)$ unterschieden werden. Die zeitliche Entwicklung der Temperatur ist somit durch die freie Energie bestimmt.

3 Vereinfachtes Materialmodell

Im folgenden werden die thermoelastischen Verzerrungen als klein angenommen, d.h. $\|\hat{\Gamma}_{et}\| \ll 1$. Dann folgt $\hat{\mathbf{P}} = (1 + 2\hat{\Gamma}_{et})\hat{\mathbf{T}} \approx \hat{\mathbf{T}}$. Die freie Energiefunktion wird derart gewählt, daß in der Momentankonfiguration ein Hookesches Gesetz $\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{A}_e]$ und ein lineares Wärmeausdehnungsgesetz $\mathbf{A}_t = \alpha(\theta - \theta_0)\mathbf{1}$ resultiert.

Zur numerischen Umsetzung in eine Materialroutine zum FEM-Programm ABAQUS müssen Elastizitäts- und Wärmeausdehnungsgesetz durch $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{C}[\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}_t - \hat{\mathbf{A}}_p]$, $\hat{\mathbf{A}}_t = (\alpha'(\theta - \theta_0) + \alpha)\dot{\theta}\mathbf{1} = \alpha_*\mathbf{1}$ approximiert werden.

Zusätzlich wird in der Definition der kinematischen Verfestigung der nichtlineare Term in $\hat{\mathbf{Z}}$ vernachlässigt $\hat{\xi} = (1 + 2\hat{\mathbf{Y}})\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}} + (2/c)\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}} \approx \hat{\mathbf{Z}}$. Das Materialmodell ist weiterhin thermodynamisch konsistent, falls der Wertebereich des Materialparameters b auf Werte größer $\sqrt{6}$ beschränkt bleibt [5].

4 Materialroutine

Zur Integration der Materialgleichung wird in ABAQUS der Hughes-Winget-Algorithmus angewandt [3]. Mit Hilfe des durch das Anfangswertproblem (AWP) $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{1}$ definierten orthogonalen Tensors \mathbf{Q} wird die bar-Transformation eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe definiert $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{X}\mathbf{Q}$. Differenzieren dieser Beziehung zeigt, daß die bar-Transformation die Jaumann-Ableitung in eine materielle Zeitableitung überführt.

Eine äquivalente Darstellung eines mit Oldroyd-Ableitung formulierten AWP $\dot{\bar{\mathbf{X}}} = \mathcal{M}[\bar{\mathbf{D}}]$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t)$ ist somit durch das bar-Transformierte AWP $\dot{\bar{\mathbf{X}}} = \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathcal{M}}[\bar{\mathbf{D}}]$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t)$ zusammen mit dem AWP für \mathbf{Q} gegeben.

Die Integration des AWP verläuft in zwei Schritten. Mit der Mittelpunktsregel wird das den Transformationstensor \mathbf{Q} bestimmende AWP gelöst und so \mathbf{Q}_1 am Inkrementende bestimmt. Eine Transformation des bar-transformierten AWP mit \mathbf{Q}_1 führt auf ein AWP formuliert mit Variablen bzgl. der Momentankonfiguration $\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathcal{M}}[\hat{\mathbf{D}}]$, $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{Q}_1\mathbf{X}_0\mathbf{Q}_1^T$. Die numerische Integration dieses AWP liefert schließlich die gesuchte Größe zur Zeit $t + \Delta t$ $\mathbf{X}_1 = \hat{\mathbf{X}}_1 = \hat{\mathbf{X}}(\Delta\varepsilon, \mathbf{Q}_1)$, $\Delta\varepsilon = \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{D}} d\tau$.

Wendet man die bar-Transformation auf die Materialgleichungen des vereinfachten Materialmodells an und transformiert die bar-transformierten konstitutiven Gleichungen und die Anfangswerte mit \mathbf{Q}_1 in die Momentankonfiguration, dann resultiert das in Tabelle 1 angegebene AWP. Hier kann ein thermoelastischer, ein inelastischer und (bei Viskoplastizität) ein die statische Erholung kennzeichnender Anteil unterschieden werden.

Tabelle 1: Konstitutive Gleichungen nach Anwendung des Hughes–Winget Verfahrens.

$\dot{\mathbf{S}} =$	$\mathbf{D}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{D} + \mathbf{c} [\mathbf{D} - \alpha^* \dot{\theta} \mathbf{1}]$	$-2\mu\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{A}\mathbf{N}\dot{s}$	
$\dot{\mathbf{Z}} =$	$\mathbf{D}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{D} + \frac{c'}{c} \dot{\theta} \mathbf{Z}$	$+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}c\mathbf{N} - b\mathbf{Z}\right)\dot{s}$	$-p\ \mathbf{Z}\ ^{w-1}\mathbf{Z}$
$\dot{k} - \dot{h} =$	$(k - h)(\gamma'/\gamma)\dot{\theta}$	$+\phi(\gamma - \beta(k - h))\dot{s}$	$-\pi(k - h)^w$
		$F = 0$	bei Plastizität
$\dot{s} =$		$\left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m$	bei Viskopl.
	thermoelastischer Anteil	inelastischer Anteil	statische Erholung

Zur Lösung dieses AWP wird ein Operator-Split-Verfahren angewandt.

Der erste, thermoelastische Anteil wird mit der Mittelpunktsregel integriert. Die Zustandsvariablen am Ende des thermoelastischen Schritts können in Abhängigkeit des Verzerrungsinkrements, des Temperaturinkrements $\Delta\theta = \dot{\theta}\Delta t$ und des Transformationstensors berechnet werden ${}^I\mathbf{S}_1 = {}^I\mathbf{S}_1(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)$, ${}^I\mathbf{Z}_1 = {}^I\mathbf{Z}_1(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)$, ${}^I k_1 = {}^I k_1(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)$, ${}^I s_1 = {}^I s_1(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)$.

Das Ergebnis des thermoelastischen Teilproblems ist der Anfangswert des zweiten, inelastischen Teilproblems. Befindet sich die Spannung innerhalb des thermoelastischen Bereichs, bleiben die Zustandsvariablen unverändert $F \leq 0$: ${}^{II}\mathbf{S}_1 = {}^I\mathbf{S}_1$, ${}^{II}\mathbf{Z}_1 = {}^I\mathbf{Z}_1$, ${}^{II}k_1 = {}^I k_1$, ${}^{II}s_1 = {}^I s_1$; für $F > 0$ werden die Differentialgleichungen des inelastischen Teilproblems mit dem Implizit-Euler-Verfahren integriert. Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem kann analog zu [1] auf eine nichtlineare Gleichung ${}^{II}\Phi = {}^{II}\Phi(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \zeta_1) = 0$ für $\zeta = \Delta t\sqrt{3/2}\dot{s}|_{t+\Delta t}$ reduziert werden. Diese Gleichung wird iterativ gelöst und anschließend aus dem verbleibenden linearen Gleichungssystem die Zustandsvariablen am Ende des inelastischen Teilproblems bestimmt.

Die Lösungen des inelastischen Teilproblems sind die Anfangswerte des dritten, die statische Erholung kennzeichnende Teilproblems ${}^{III}\mathbf{S}_0 = {}^{II}\mathbf{S}_1$, ${}^{III}\mathbf{Z}_0 = {}^{II}\mathbf{Z}_1$, ${}^{III}k_0 = {}^{II}k_1$, ${}^{III}s_0 = {}^{II}s_1$. Das nach impliziter Integration resultierende nichtlineare Gleichungssystem kann auf zwei unabhängige nichtlineare Gleichungen reduziert werden ${}^{III}\Gamma = {}^{III}\Gamma(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, {}^{III}k_1) = 0$, ${}^{III}\Phi = {}^{III}\Phi(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \|{}^{III}\mathbf{Z}_1\|) = 0$. Diese Gleichungen werden iterativ gelöst. Die Zustandsvariablen am Ende des dritten Teilschritts und somit die gesuchte Lösung des zugrundegelegten AWP können anschließend direkt bestimmt werden $\mathbf{S}_1 = {}^{III}\mathbf{S}_1$, $\mathbf{Z}_1 = {}^{III}\mathbf{Z}_1$, $k_1 = {}^{III}k_1$, $s_1 = {}^{III}s_1$.

Dieser Algorithmus wurde als UMAT-Subroutine in das FEM-Programm ABAQUS implementiert. Die konsistente Linearisierung des hier vorgestellten Integrationsverfahrens sichert die quadratische Konvergenz bei der numerischen Integration der Feldgleichungen [4]. Ferner sei auf die in [4] durchgeführte Verifikation der Materialroutine hingewiesen.

5 Simulation eines Zugversuchs mit perfekter zylindrischer Probe

Als Abschluß sei die Simulation eines Einschnüfervorgangs einer zylindrischen Zugprobe gezeigt. An der Außenkante des Zugstabs wurde ein gleichmäßiger Wärmeübergangskoeffizient vorgegeben. Ferner wurde das viskoplastische Materialmodell zugrundegelegt und mit steigender Temperatur ein linearer Abfall der Verfestigungsparameter vorgegeben.

Im Verlauf der Deformation bedingt die Dissipation den in Abbildung 1 gezeigten Temperaturanstieg in der Probe. Die dissipierte Wärme kann über den Rand hin abfließen, im Innern stellt sich eine leicht erhöhte Temperatur ein. Dadurch und aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Verfestigungsparameter verfestigt das Material zur Probenmitte hin geringer und die inelastische Deformation ist größer. Bei einer Dehnung von 24% wird der Beginn der Einschnürung durch erste deutliche Temperaturunterschiede angezeigt. Als Folge der Lokalisierung treten dann in der Probe deutliche Temperaturunterschiede auf.

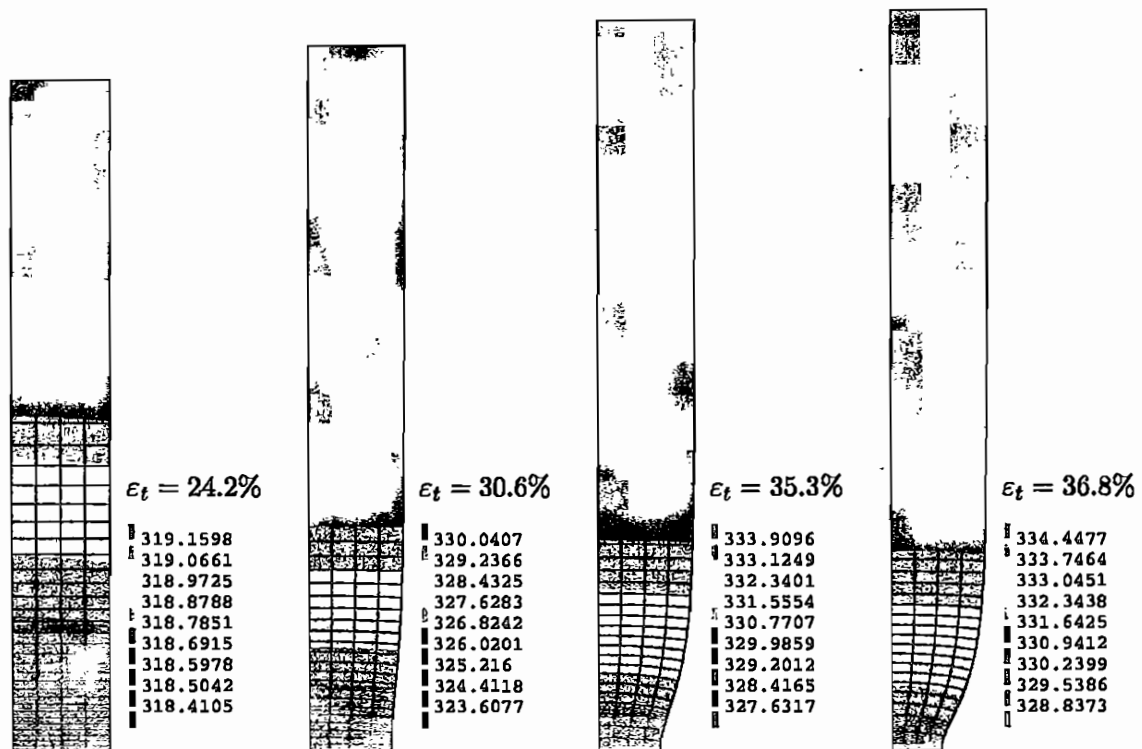


Abb. 1: Temperaturverteilungen im zylindrischen Zugstab; (ϵ_t : globale technische Dehnung).

Literatur

- [1] S. Hartmann, G. Lührs, and P. Haupt. An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40:991–1013, 1997.
- [2] P. Haupt and C. Tsakmakis. Stress tensors associated with deformation tensors via duality. *Arch. Mech.*, 48:347–384, 1996.
- [3] T. Hughes and J. Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations in large-deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15:1862–1867, 1980.
- [4] W. Jansohn. Formulierung und integration von stoffgesetzen zur beschreibung großer deformationen in der thermoplastizität und -viskoplastizität. FZKA-Bericht 6002, Forschungszentrum Karlsruhe, 1997.
- [5] M. Kamlah. *Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik*. Dissertation, report 3/1994, Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.
- [6] C. Tsakmakis. Kinematic hardening rules in finite plasticity, part 1: A constitutive approach. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:215–231, 1996.

A thermodynamic formulation of elastoplasticity with kinematic hardening at large deformation

BOB SVENDSEN

Federal Institute for Materials Research and Testing, D-12200 Berlin, Germany

1. Introduction

In this short paper, we outline a recent thermodynamic formulation of elastoplasticity with kinematic hardening at large deformation (SVENDSEN, 1997a,b). Alternative such thermodynamic formulations at large deformation can be found in, *e.g.*, DOGUI & SIDOROFF (1985), HAUPT (1995), and TSAKMAKIS (1996). As shown recently (ARNDT *et al.*, 1997; SVENDSEN *et al.*, 1997), this thermodynamic-hyperelastic approach encompasses a wide variety of classical hardening models (*i.e.*, linear, Armstrong-Frederick, *etc.*) and is straightforward to implement numerically, requiring in particular no rate equations for the stress or back-stress.

2. Formulation

Assuming isothermal conditions for simplicity, the deformation gradient F represents the basic "external" or "observable" independent constitutive variable in this work. In the non-polar, internal-variable-based approach to hyperelastic elastoplasticity taken here, the dependent constitutive variables then depend on F as well as a set (P, ξ) of deformation-like internal variables, where P represents¹ the plastic transformation, and ξ a "vector" of additional such variables accounting for the effect of such inelastic processes as isotropic and kinematic hardening. On this basis, the basic constitutive relations satisfying material-frame indifference and the dissipation rate inequality include the forms

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(C, P, \xi), \\ S &= 2\psi_{,C},\end{aligned}\tag{2.1}$$

for the referential free energy density ψ , and second Piola-Kirchhoff stress S , as well as those

$$\begin{aligned}\dot{P} &= L_P(C, P, \xi, \dot{C})P, \\ \dot{\xi} &= \dot{\xi}(C, P, \xi, \dot{C}),\end{aligned}\tag{2.2}$$

for the evolution of the internal variables, $C := F^T F$ representing the right Cauchy-Green deformation tensor as usual. As usual, the constitutive functions in (2.2) represent rate-independent material behaviour when they are positive homogenous functions of \dot{C} of

¹Here, we are using MANDEL's (1972, 1974) notation for this quantity. Its relation to the usual plastic deformation "gradient" F_p is briefly discussed below.

degree 1. Note that the system (2.1)-(2.2) is “closed” in the sense that, given concrete, physically reasonable forms for (2.1)₁ and (2.2), we could solve the latter relations in a given deformation process (F, \dot{F}) for (P, ξ) , and so obtain S via (2.1)₂. Since such forms are in general not available to us, however, further constitutive assumptions are necessary.

On the basis of rheological models for kinematic hardening and other considerations (e.g., DOGUI & SIDOROFF, 1985; MAUGIN, 1992; HAUPT, 1995), we split ψ into elastic ψ_e and plastic ψ_p parts, i.e.,

$$\psi(C, P, \xi) = \psi_e(C, P) + \psi_p(P, \xi) \quad (2.3)$$

As is the case in crystal plasticity, we next assume in the more general phenomenological context being considered here that P does not affect the form of the elastic constitutive relation (2.1)₂. As discussed in detail by SVENDSEN (1997a,b), this will in fact be the case when the elastic part ψ_e of ψ in (2.3) takes the special form²

$$\psi_e(C, P) = \varphi_e(P^{-T}CP^{-1}) \quad (2.4)$$

yielding the form $S = 2\psi_{,C} = 2P^{-1}\varphi_{e,P^{-T}CP^{-1}}P^{-T}$ for the elastic constitutive relation. The restriction (2.4) then yields the simplified form $S_e = 2\varphi_{,C_e}$ of $S = 2\psi_{,C}$, with $C_e := P^{-T}CP^{-1}$, $S_e := PSP^T$ and $\varphi_e = \varphi_e(C_e)$. Further, since $P^{-T}CP^{-1} = (FP^{-1})^T(FP^{-1})$, (2.4) also implies that the particular combination $E := FP^{-1}$ of F and P in the form $C_e = E^TE$ is directly associated with the elastic response of the material. Since the constitutive forms $S_e = 2\varphi_{,C_e}$ and $\varphi_e = \varphi_e(C_e)$ coincide with those commonly assumed in the usual formulation of hyperelastoplasticity as based on the elastoplastic decomposition $F = F_eF_p$ of F , we see that, at least from the material behaviour, the assumption that P preserves the form of $2\psi_{,C}$ lies behind the decomposition $F = F_eF_p$. In this case, then, we may associate P with F_p , and E with F_e . On the other hand, in lieu of such an assumption, there is no reason from a constitutive point of view to relate P and F to each other via a relation of the form $E = FP^{-1}$ at all.

Besides the reduced form (2.4) for ψ_e , the assumption that P does not affect the form of (2.1)₂, together with the form (2.3) for ψ , results in that

$$-\psi_{,P} = 2C_e\varphi_{e,C_e}P^{-T} - \psi_{p,P} = [M - X]P^{-T} \quad (2.5)$$

for the quantity $-\psi_{,P}$ thermodynamically conjugate to \dot{P} in the plastic dissipation rate density

$$\delta_p = \delta_p(C, P, \xi, \dot{C}) = -\psi_{,P} \cdot \dot{P} - \psi_{,\xi} \cdot \dot{\xi} \quad (2.6)$$

where

$$M := 2C_e\varphi_{e,C_e} \quad (2.7)$$

²This condition on the form of the dependence of ψ_e on P represents a particular kind of *material isomorphism* (e.g., NOLL, 1967, 1972), in particular, P then represents an *elastic material isomorphism*; see also BERTRAM (1993).

represents the MANDEL (1972, 1974) stress tensor, and

$$\mathbf{X} := \psi_{p,P} \mathbf{P}^T \quad (2.8)$$

the center of the elastic range of the material, *i.e.*, the so-called *back stress*. Indeed, substituting (2.5) into (2.6) yields the form

$$\delta_p = [\mathbf{M} - \mathbf{X}] \cdot \mathbf{L}_p - \psi_{p,\xi} \cdot \dot{\xi} \quad (2.9)$$

for the plastic dissipation rate density, implying that $\mathbf{M} - \mathbf{X}$ is conjugate to \mathbf{L}_p .

The results (2.7) and (2.8) imply that neither \mathbf{M} nor \mathbf{X} are in general symmetric (*i.e.*, with respect to the Euclidean metric); since φ_{p,C_p} is symmetric, however, \mathbf{M} is not an arbitrary linear transformation, but rather satisfies the auxiliary condition $\mathbf{M} = \mathbf{C}_p \mathbf{M}^T \mathbf{C}_p^{-1}$ implying that only six of its nine components are independent, *i.e.*, that it is 6-dimensional (*e.g.*, LUBLINER, 1986). In the case of elastic isotropy, however, ψ is isotropic with respect to the intermediate configuration, in which case φ_{p,C_p} and \mathbf{C}_p commute, and (2.7) implies that \mathbf{M} is then symmetric. A second consequence of the isotropy of ψ with respect to the intermediate configuration is the reduction of ψ_p to the form

$$\psi_p(\mathbf{P}, \xi) = \varphi_p(\mathbf{C}_p, \xi) \quad (2.10)$$

(SVENDSEN, 1997b), where $\mathbf{C}_p := \mathbf{P}^T \mathbf{P}$ is the plastic right Cauchy-Green deformation tensor. This last reduction leads in turn to the *symmetric* form

$$\mathbf{X} = 2 \mathbf{P} \varphi_{p,C_p} \mathbf{P}^T \quad (2.11)$$

for \mathbf{X} from (2.8). As such, the isotropy of ψ with respect to the intermediate configuration leads to the symmetry of both \mathbf{M} and \mathbf{X} in the current formulation.

Finally, as an example of φ_p , consider its form

$$\varphi_p(\mathbf{C}_p, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} c \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{Y} - \frac{1}{4} \ln(\det(\mathbf{C}_p)) \quad (2.12)$$

in the case of the Armstrong-Frederick kinematic hardening model at large deformation (SVENDSEN, 1997a). Here, c represents the Armstrong-Frederick parameter controlling linear kinematic hardening, and \mathbf{Y} represents a deformation-like internal variable whose evolution determines the saturation of \mathbf{X} , given by

$$\dot{\mathbf{Y}} = b \left[\frac{1}{2} \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{Y} \right] |\mathbf{D}_p| \quad , \quad (2.13)$$

with b the corresponding Armstrong-Frederick saturation parameter, and \mathbf{D}_p the symmetric part of \mathbf{L}_p as usual. Together, (2.11) and (2.12) yield the form

$$\mathbf{X} = 2 \mathbf{P} \varphi_{p,C_p} \mathbf{P}^T = c \left[\mathbf{P} \mathbf{Y} \mathbf{P}^T - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right] \quad (2.14)$$

for \mathbf{X} . As shown by (2.12), the above form of the Armstrong-Frederick model at large deformation in combination with isotropic elasticity arises from a form for ψ that is isotropic with respect to both the intermediate and reference configurations.

3. References

1. S. ARNDT, D. KLINGBEIL & B. SVENDSEN, On the simulation of warm pre-stressing and ductile crack extension by constitutive modelling, in *Structural Mechanics in Reactor Technology*, V. 4, pp. 689–696, 1997.
2. ARMSTRONG, P. J. & C. O. FREDERICK, A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, General Electricity Generating Board Report No. RD-B-N-731. o. O., 1966.
3. BERTRAM, A., Description of finite inelastic deformations, in: *MECAMAT '92, "Multiaxial Plasticity"*, Benallal, A., R. Billardon & D. Marquis, ed., pp. 821–835, 1993.
4. DOGUI, A. & F. SIDOROFF, Kinematic hardening in large elastoplastic strain, *Eng. Frac. Mech.* 21, 685–695, 1985.
5. HAUPT, P., On the thermodynamic representation of viscoplastic material behaviour, *Proceedings of the AMSE Materials Division MD 69-1*, pp. 503–519, 1995.
6. LUBLINER, J., Normality rules in large-deformation plasticity, *Mech. Mat.* 5, 29–34, 1986.
7. MANDEL, J., *Plasticité Classique et Viscoplasticité*, CISM Course, Springer-Verlag, 1972.
8. MANDEL, J., Thermodynamics and Plasticity, in *Foundations of Continuum Thermodynamics*, J. J. Delgado Domingos, M. N. R. Nina, and J. H. Whitelaw, MacMillan, 1974.
9. MAUGIN, G., Thermodynamics of plastic deformation, Cambridge University Press, 1992.
10. NOLL, W., Material uniform inhomogeneous material bodies, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 27, 1–32, 1967.
11. NOLL, W., A new mathematical theory of simple materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 48, 1–50, 1972.
12. SVENDSEN, B., A thermodynamic formulation of finite-deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism, *International Journal of Plasticity*, in press, 1997a.
13. SVENDSEN, B., On material symmetry, isomorphism and uniformity in finite-deformation hyperelastoplasticity, submitted to *International Journal of Engineering Science*, 1997b.
14. SVENDSEN, B., ARNDT, S., KLINGBEIL, D. AND SIEVERT, R., Hyperelastic models for elastoplasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening at large deformation, submitted to *Int. J. Solids Structures*, 1997.
15. TSAKMAKIS, CH., Kinematic hardening rules at large deformations, Part I.: a constitutive approach, *Cont. Mech. Thermodyn.* 8, 215–231, 1996.

Computational Micro–Macro–Transitions in Thermoplastic Analysis of Polycrystalline Materials

Christian Miehe, Jörg Schröder & Jan Schotte

Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I
Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Germany

1. Introduction

We discuss aspects of the formulation and numerical implementation of homogenization methods for the simulation of macroscopic thermomechanical material response of heterogeneous materials. Homogenization approaches based on average theorems as outlined e.g. by Hill [1972], Suquet [1986], Bruhns [1993], Nemat–Nasser and Hori [1993] are recast into a straightforward computational procedure for micro–macro–transitions at large strains. The proposed concept is suitable for the numerical analysis of macroscopic phenomena of materials with complex microstructures, such as texture developments in metallic polycrystals or overall properties of granular and composite materials.

In this paper we focus on the simulation of metal thermoplasticity at finite strains. The underlying goal is a comparative study of different approaches to micro–macro–transitions in the context of the simulation of texture developments. Here, the basic concept is to endow the macroscopic continuum *locally* with a representative microstructure which represents a polycrystalline aggregate, i.e. a representative assembly of single crystal grains. The deformation of this microstructure is determined by the local deformation at a typical material point of the macro–continuum. The macroscopic extensive variables like the stresses and the dissipation are then defined as volume averages of their microscopic counterparts defined on the representative microstructure. In the computational procedure proposed here, we evaluate these averages in a straightforward manner. The numerical implementation bases within the general setting on a finite element discretization of the macro–continuum which is *locally coupled at each Gauss point* with a finite element discretization of the attached microstructure.

In order to set up this framework, we consider in Section 2 first the *macroscopic initial boundary value problem* of large strain thermoplasticity and point out aspects of its finite element implementation on the basis of an operator splitting algorithm. We investigate then in the Section 3 possible formulations of the locally attached *microscopic initial boundary value problem* which is governed by the micro–macro–transition mentioned above. Here, we propose a unified representation which includes the Taylor–type transition as well as general approaches with homogeneous and periodic boundary conditions of the microstructure.

2. Macroscopic Initial Boundary Value Problem

Let $\hat{\mathbf{x}} : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ denote the *nonlinear deformation map* of the macro-continuum $\bar{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^3$ at time $t \in \mathbb{R}_+$ and $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\nabla} \hat{\mathbf{x}} := \partial \hat{\mathbf{x}} / \partial \bar{\mathbf{X}}$ the associated *tangent map* with Jacobian $\bar{J} = \det[\bar{\mathbf{F}}] > 0$. $\hat{\mathbf{x}}$ maps points $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ onto points $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{X}}, t) \in \bar{\mathcal{S}}$ of the current configuration $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^3$. With regard to a set up of the macroscopic initial boundary value problem we consider first the field equations of coupled thermoplasticity, which can be written as a first-order evolution system

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{v}} \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}} &= \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\nabla} / \bar{\rho} \\ \dot{\bar{\vartheta}} &= -\bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\nabla} / \bar{c} + \bar{\mathcal{D}} / \bar{c} \end{aligned} \right\} \text{ in } \bar{\mathcal{B}}. \quad (1)$$

These equations cover essentially the definition of the velocity field and the field equations of the balance of momentum and energy. In order to obtain a compact formulation, we have neglected in (1)₂ the body force term and in (1)₃ the source term and terms associated with the latent thermoelastic heating whose influence is usually small in metal plasticity. The initial density $\bar{\rho}$ of a representative polycrystal as well as simple macroscopic constitutive assumptions for the heat capacity $\bar{c} \geq 0$ and heat flux $\bar{\mathbf{Q}}$ of the form

$$\bar{c} = \hat{c}(\bar{\vartheta}) \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{Q}} = -\hat{k}(\bar{\vartheta})(\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}})^{-1} \cdot \bar{\nabla} \bar{\vartheta} \quad (2)$$

with isotropic conductivity $\hat{k} > 0$ are assumed to be *a priori known* within the present study. In contrast, the macroscopic first Piola-Kirchhoff stresses $\bar{\mathbf{P}}$ and the mechanical dissipation $\bar{\mathcal{D}}$ are assumed to be defined by the *volume averages*

$$\bar{\mathbf{P}} := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} \, dV \quad \text{and} \quad \bar{\mathcal{D}} := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{D} \, dV. \quad (3)$$

of associated variables \mathbf{P} and \mathcal{D} defined at $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ of a representative micro-structure \mathcal{B} attached to the point $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ of the macro-continuum $\bar{\mathcal{B}}$. $V := \text{vol}(\mathcal{B})$ denotes the volume of the micro-structure. This *representative microstructure* consists of an assembly of single crystal grains. The deformation of the micro-structure is driven by the macroscopic deformation gradient $\bar{\mathbf{F}}$ and the temperature $\bar{\vartheta}$ as described in detail in Section 3. Observe that (3) shifts the constitutive assumption for the macroscopic quantities from the macro-scale to the micro-scale, where \mathbf{P} and \mathcal{D} are determined by the constitutive model of single-crystal thermo-plasticity discussed in Section 4.

We regard the right hand side of (1) as a function of the *primary variables* $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\vartheta}\}$, the deformation field, the velocity field and the temperature field. Consider a time interval $\Delta t := t_{n+1} - t_n \in \mathbb{R}_+$ where the solution at time t_n is assumed to be known. Then the initial boundary value problem of coupled thermo-plasticity is completed by the initial conditions $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\vartheta}\}_{(t=t_n)} = \{\bar{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n, \bar{\vartheta}_n\}$ for the primary variables. The essential boundary

conditions for the deformation and the temperature field are $\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}$ on $\bar{\Gamma}_x$ and $\bar{\vartheta} = \tilde{\vartheta}$ on $\bar{\Gamma}_\vartheta$. Finally, one has to take into account boundary conditions for the tractions $\bar{\mathbf{t}}$ and the heat exchange \bar{q} , i.e. $\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{t}}$ on $\bar{\Gamma}_t$ and $\bar{q} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{N}} = \tilde{q}$ on $\bar{\Gamma}_q$ with the decomposition of the surface $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_x \cup \bar{\Gamma}_t = \bar{\Gamma}_\vartheta \cup \bar{\Gamma}_q$ and $\bar{\Gamma}_x \cap \bar{\Gamma}_t = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_\vartheta \cap \bar{\Gamma}_q = \emptyset$.

A solution algorithm for the coupled thermomechanical equations can be based on an operator split of the first-order evolution system (1), see e.g. Simó and Miehe [1992] and references therein. This yields for the *quasi-static case* by applying a backward Euler scheme to (1)₃ the following global solution procedure for the coupled problem. We first solve within an *isothermal predictor* the balance of momentum

$$\bar{G}_M := \int_{\bar{B}} \bar{\nabla} \delta \bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{P}} \, dV - \bar{G}_{M_{ext}} = 0 \quad (4)$$

for the mechanical variables $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}\}$ at time t_{n+1} at frozen temperature $\{\bar{\vartheta}_n\}$, where we have introduced the field $\delta \bar{\mathbf{x}}$ of virtual deformations with $\delta \bar{\mathbf{x}} = 0$ on $\bar{\Gamma}_x$. We then solve within a *heat conduction corrector* the balance of energy

$$\bar{G}_T := \int_{\bar{B}} \left\{ \delta \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{c}}{\Delta t} (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_n) - \bar{\mathcal{D}} \right] - \bar{\nabla} \delta \bar{\vartheta} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \right\} dV - \bar{G}_{T_{ext}} = 0 \quad (5)$$

for the current temperature $\{\bar{\vartheta}\}$ at frozen deformation $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}\}$, where $\delta \bar{\vartheta}$ denotes a field of virtual temperatures with $\delta \bar{\vartheta} = 0$ on $\bar{\Gamma}_\vartheta$.

The spatial description of the weak forms (4) and (5) is performed in terms of *mixed finite elements* which avoid pathological locking effects associated with the incompressible plastic flow. For the plane problems under consideration, we use here the so-called Q1P0 mean-dilatation 4-node quadrilateral element for the discretization of (4), see e.g. Miehe [1994] and references therein for a comparative review of this element type. In the case of an application of Newton-type algorithms for the solution of the nonlinear problem (4) we compute the local *macroscopic consistent tangent moduli* numerically based on the procedures outlined in Miehe [1996c]. When considering the *adiabatic case* we obtain the temperature evolution from the local equation

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_n + \bar{\mathcal{D}} \Delta t / \bar{c}(\bar{\vartheta}) \quad (6)$$

without solving the boundary value problem (5).

3. Microscopic Initial Boundary Value Problem

Let $\hat{\mathbf{x}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ denote the *nonlinear deformation map* of the representative microstructure at time $t \in \mathbb{R}_+$ and $\mathbf{F} = \nabla \hat{\mathbf{x}} := \partial \hat{\mathbf{x}} / \partial \mathbf{X}$ the associated *tangent map* with Jacobian $J = \det[\mathbf{F}] > 0$. $\hat{\mathbf{x}}$ maps points $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ of the micro-continuum $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ onto points $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{S}$ of its current configuration $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$.

Computational Micro-Macro-Transitions in Thermoelastic Analysis

The macroscopic and microscopic gradients $\bar{\mathbf{F}}$ and \mathbf{F} and associated work-conjugate stress measures $\bar{\mathbf{P}}$ and \mathbf{P} , usually denoted as first Piola-Kirchhoff stresses, are related via the *volume averages*

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F} dV \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} dV, \quad (7)$$

where V is the volume of the micro-structure \mathcal{B} . Assuming a *static equilibrium state* of the micro-continuum governed by the field equation

$$\mathbf{P} \cdot \nabla = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (8)$$

a reformulation of (7) using Gauss-type theorems yields $\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{N} dA$ and $\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \otimes \mathbf{X} dA$. Thus, the volume averages $\bar{\mathbf{F}}$ and $\bar{\mathbf{P}}$ can be exclusively expressed in terms of the *deformation* \mathbf{x} and the *traction* $\mathbf{t} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$ at points $\mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}$ on the boundary $\partial\mathcal{B}$ of the micro-structure with outward normal \mathbf{N} .

The deformation and the temperature of the micro-structure is assumed to be linked to the local values of the macro-continuum at $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ via the ansatz

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} + \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \quad \text{and} \quad \vartheta = \bar{\vartheta} \quad \text{in } \mathcal{B}. \quad (9)$$

The deformation consists of a *homogeneous part* $\bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X}$ and a *non-homogeneous superimposed field* $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$. As a consequence, we have the relationship

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} \quad \text{with} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \nabla \hat{\mathbf{w}} \quad (10)$$

between the microscopic and macroscopic deformation gradients. Insertion of (10) into (7)₁ yields the constraint

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{F}} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}^-} \mathbf{w}^- \otimes \mathbf{N}^- dA + \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}^+} \mathbf{w}^+ \otimes \mathbf{N}^+ dA = \mathbf{0} \quad (11)$$

for the superimposed deformation field \mathbf{w} . Here, we have decomposed the boundary $\partial\mathcal{B}$ of the micro-structure into two parts $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}^- \cup \partial\mathcal{B}^+$ with outward normals $\mathbf{N}^+ = -\mathbf{N}^-$ at two *associated points* $\mathbf{X}^- \in \partial\mathcal{B}^-$ and $\mathbf{X}^+ \in \partial\mathcal{B}^+$. The constraint (11) is satisfied by the alternative conditions

$$(i) \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B} \quad ; \quad (ii) \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\mathcal{B} \quad ; \quad (iii) \quad \mathbf{w}^+ = \mathbf{w}^- \quad \text{on } \partial\mathcal{B}. \quad (12)$$

The first trivial condition enforces a homogeneous deformation of the entire domain of the microstructure and is usually denoted as the *Taylor assumption*. The second condition demands *homogeneous* deformations on the boundary of the microstructure, the third ansatz states the *periodicity* of the superimposed deformation field \mathbf{w} on $\partial\mathcal{B}$. These three conditions satisfy the so-called *averaging theorem*, see e.g. Hill [1972], which demands that

the average of the work (or stress power) decomposes into the product of work-averages, i.e.

$$C := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \mathbf{F} dV - \bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{F}} = 0. \quad (13)$$

Using Gauss-theorem based relationships $\frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \mathbf{F} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t} dA$ and $\bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}} (\bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{t} dA$ the above statement can be reformulated by using (9), yielding the expression

$$C = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} dA = \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}^-} \mathbf{w}^- \cdot \mathbf{t}^- dA + \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{B}^+} \mathbf{w}^+ \cdot \mathbf{t}^+ dA = 0. \quad (14)$$

This condition is trivially satisfied by the homogeneous conditions (12)₁ and (12)₂. Assuming the non-trivial periodic condition (12)₃, (14) is satisfied for

$$\mathbf{t}^+ = -\mathbf{t}^- \quad \text{on } \partial\mathcal{B} \quad \text{and therefore} \quad \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^- \quad \text{on } \partial\mathcal{B}, \quad (15)$$

i.e. for *periodic stress states*. Assuming a local constitutive equation for the stresses

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}, \bar{\vartheta}, \text{state}_{\mathbf{X}}) \quad (16)$$

depending on the local superimposed gradient $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla \hat{\mathbf{w}}$ and a set $\{\text{state}_{\mathbf{X}}\}$ of internal history variables at $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ which develop during the deformation-driven process, we conclude $\mathbf{w}^+ = \mathbf{w}^- \Rightarrow \tilde{\mathbf{F}}^+ = \tilde{\mathbf{F}}^- \Rightarrow \text{state}_{\mathbf{X}}^+ = \text{state}_{\mathbf{X}}^- \Rightarrow \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^-$ which satisfies (15).

Observe that for a *given* macroscopic deformation map $\bar{\mathbf{F}}$ the microscopic boundary value problem is governed by the equilibrium condition (8), the constitutive equation (16) for the microscopic stresses and the boundary conditions (12) for the inhomogeneous part \mathbf{w} of the deformation up to a constant value which does not affect the stress state. Using a standard *cube-shaped microstructure* we therefore choose $\mathbf{w} = 0$ at all corner points of the cube.

Assuming a field of test functions or virtual displacements $\delta \mathbf{w}$ with $\delta \mathbf{w} = 0$ on $\partial\mathcal{B}$, a standard Galerkin procedure yields the weak form of (8)

$$G := \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \mathbf{w} : \mathbf{P} dV = 0 \quad (17)$$

which can be solved for the inhomogeneous deformation field \mathbf{w} . The spatial description of the weak form (17) is performed in terms of Q1P0 mean-dilatation 4-node quadrilateral elements which have already been mentioned above. Having solved the boundary problem, the homogenized stresses and dissipation is computed by evaluation of (3).

Note that the *Taylor assumption* (12)₁ implies $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ in \mathcal{B} . The stresses at a typical point $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ are then obtained from (16) by a pure function evaluation *without* solving the boundary value problem based on (17). Assuming a polycrystalline micro-structure with N grains of equal volume and approximatively constant stress state in each grain, (3) degenerates to the arithmetic average of the grains

$$\bar{\mathbf{P}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \quad \text{and} \quad \bar{\mathcal{D}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i. \quad (18)$$

4. Numerical Example. Punch Indentation Problem

The example is based on a computational model for large-strain thermo-viscoplasticity of fcc-unit crystals proposed by Miehe [1996a,b]. For the simulations we choose the isotropic thermoelastic material parameters $\kappa = 49.98 \text{ kN/mm}^2$, $\mu = 21.10 \text{ kN/mm}^2$ and $\delta = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. The hardening is characterized by an evolution equation for the slip resistances g^α with an assumed scalar-valued hardening function $\hat{h}(A, \vartheta) = [h_0 + \eta(\tau_\infty - \tau_0)\exp(-\eta A)](1 - \omega(\vartheta - \vartheta_0))$. For the calculations we choose the parameter $q = 1.4$, the initial flow stress $\tau_0 = g^\alpha(t = 0) = 0.06 \text{ kN/mm}^2$, the saturation flow stress $\tau_\infty = 1.08 \text{ kN/mm}^2$, the saturation parameter $\eta = 11.125$ and the linear hardening parameter $h = 0.001 \text{ kN/mm}^2$. The thermal softening is assumed to take the value $\omega = 0.001 \text{ K}^{-1}$ relative to the reference temperature $\vartheta_0 = 293 \text{ K}$.

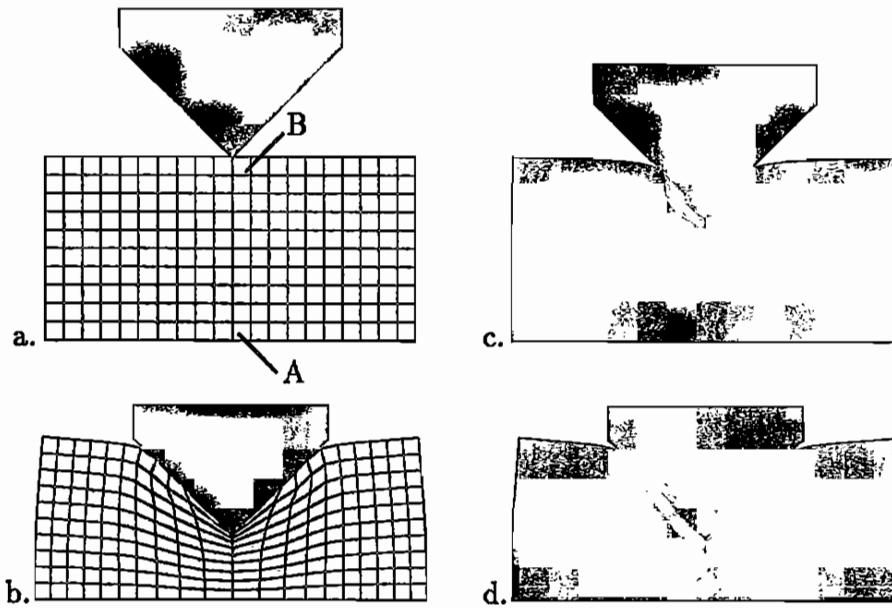


Figure 1: a. Initial mesh of the indentation problem. b. Deformed mesh at the final state $t = 0.6s$. c. Equivalent plastic strains in a range of 0.0 – 4.158 at $t = 0.3s$. d. Equivalent plastic strains in a range of 0.0 – 7.129 at $t = 0.6s$.

We consider an adiabatic macroscopic indentation problem under plane strain conditions with associated texture development. The geometry of the specimen is governed by the relation width/height = 10/5 mm as depicted in Figure 1a. The boundary value

problem is solved with the *Taylor-type micro-macro-transition* $(12)_1$ on the basis of the macroscopic definitions (18) for the stresses and the dissipation. Exploiting the symmetry of the problem, only a half of the system is discretized with 100 Q1P0 mixed finite elements.

A rigid tool is pressed into the specimen within 60 equal time steps up to the final state depicted in Figure 1b, characterized by the time $t = 0.6 s$, where we apply the contact algorithms outlined in Wriggers and Miehe [1994]. Figure 1c,d depicts the equivalent plastic strains A at the time $t = 0.3 s$ and $t = 0.6 s$, respectively. We consider textures in the points A and B in Figure 1a which have been developed within the described indentation process. Figure 7 reports the $\{111\}$ initial orientation distribution and the final textures in the points A and B.

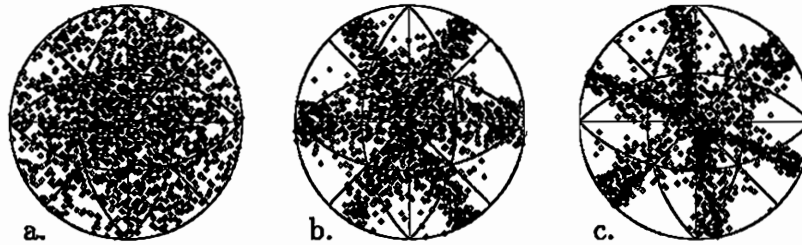


Figure 2: $\{111\}$ -Polfigures: a. Initial orientation distribution. b. Texture development in point A. c. Texture development in point B.

5. Conclusion

We have proposed a theoretical and computational concept for the implementation of different possible micro-macro-transitions at finite strains under non-isothermal conditions. The concept bases on a coupled discretization of both the macro-continuum and a pointwise attached micro-structure and exploits in a straightforward manner volume averaging theorems. This approach has been applied to the simulation of the texture development in polycrystals under nonisothermal conditions, where a robust fully implicit stress update algorithm for single crystal thermoplasticity on the micro-structure has been applied.

Acknowledgement. Support for this research was provided by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) under grant SFB404/A8.

References

- O.T. BRUHNS [1993] Neue Materialgleichungen der Plastomechanik. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **73**, pp. T6–T19.
- R. HILL [1972] On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. *Proceedings of the Royal Society London, Series A* **326**, pp. 131–147.
- C. Miehe [1994] Aspects of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **37**, pp. 1981–2004.
- C. MIEHE [1996a] Multisurface Thermoplasticity for Single Crystals at Large Strains in Terms of Eulerian Vector Updates. *International Journal of Solids and Structures* **33**, pp. 3103–3130.
- C. Miehe [1996b] Exponential Map Algorithm for Stress Updates in Anisotropic Elastoplasticity at Large Strains for Single Crystals. *International Journal Numerical Methods in Engineering* **39**, pp. 3367–3390.
- C. Miehe [1996c] Numerical Computation of Algorithmic (Consistent) Tangent Moduli in Large-Strain Computational Inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **134**, pp. 223–240.
- C. MIEHE AND J. SCHRÖDER [1997] Computational Micro-Macro-Transitions of Elastic and Inelastic Materials at Large Strains. Submitted to *International Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- S. NEMAT-NASSER AND M. HORI [1993] *Micromechanics. Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Cambridge University Press.
- P. PERZYNA [1988] Temperature and Rate Dependent Theory of Plasticity of Crystalline Solids, *Revue Phys. Appl.*, **23**, pp. 445–459.
- J.C. SIMÓ AND C. MIEHE [1992] Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, pp. 41–104.
- P.M. SUQUET [1986] *Homogenization Techniques of Composite Materials*, Eds.: Sanchez-Palenzia, E., and Zaoui, A., Lecture Notes in Physics 272, Springer-Verlag, pp. 193–278.
- P. WRIGGERS AND C. MIEHE [1994] Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis – A Finite Element Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **113**, pp. 301–319.

Large-Strain Thermoplastic Analysis of Shell-Like Structures

Christian Miehe & Stefan Schley

Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I
Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Germany

1. Introduction

The paper presents aspects of non-isothermal elastoplastic analysis of shells at large strains. The two main topics are the construction of a new 8-node brick-type finite shell element for coupled thermomechanical analysis and the set up of a constitutive framework of large-strain thermo-elasto-plasticity in shells based on the notion of a plastic metric.

On the side of structural modelling, we focus on a continuum based shell parametrization based on *pure displacement degrees* at the top and bottom surface of a shell-like continuum, see e.g. Schoop [1986], Parisch [1995], Miehe [1997b] and the references therein. The spatial discretization of this type of shell parametrization can be performed in a straightforward manner on the basis of a nonlinear 8-node brick-type finite shell element proposed by Miehe [1997b] and denoted there as the SQ1E5A8 element. The element bases on a trilinear interpolation (SQ1) of the displacement field and is equipped with five (E5) gradient-type enhanced strain modes as well as shell-typical assumed strain modifications on the basis of 8 (A8) assembling points. The element has a well-defined strain-driven interface to a three-dimensional thermoplastic constitutive model.

On the side of the constitutive modelling, we extend the isothermal framework of finite strain plasticity in shells proposed by Miehe [1997b] to the non-isothermal application under consideration. The constitutive equations are exclusively formulated in a *geometric setting relative to the parameter manifold* associated with the shell-typical curvilinear coordinate space. The framework is based on the introduction of an a priori six-dimensional *plastic metric*, which is assumed to describe locally the history-dependent inelastic material response in the sense of an internal variable formulation, and uses elastic domains in the space of the *plastic force* conjugate to the plastic metric. A key ingredient of the framework presented here is the representation of the constitutive response functions in terms of principal strains and principal stresses associated with *dual co- and contra-variant eigenvalue triads defined on the parameter manifold* of the shell. The associated dual vector triads are left and right eigenvectors of a mixed-variant elastic strain tensor and form a natural basis of the tangent and cotangent spaces of the parameter manifold. As proposed by Miehe [1997a, b] the eigenvectors are *normalized with respect to the plastic metric* which results in an extremely simple representation of the partial thermoelastic response in spectral form.

2. Parametrization of the Shell Continuum

We consider a shell as a standard continuum where one dimension – the one in the thickness direction – is typically of lower order than the other dimensions. As a consequence, standard local parametrizations of the shell manifolds introduce independent parametrizations of a *reference surface* and a *shell fiber*. This parametrization is typically carried out in terms of curvilinear coordinates. Therefore, we consider a domain $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ which we call the *parameter manifold* of the shell. This domain has the particular cartesian structure $\mathcal{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{H}$ where $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ is the *parameter space of the reference surface* and $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ the *parameter space of the shell fiber*. Elements $\theta \in \mathcal{A}$ are called the *local curvilinear coordinates* of the shell. The geometric relationships are visualized in Figure 1.

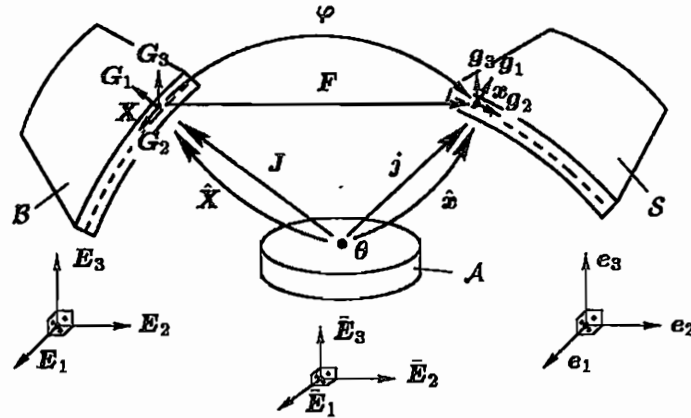


Figure 1. Geometry of a Shell. We denote B , S and A as the *Lagrangian*, *Eulerian* and *parameter manifold* of the shell, where B is associated with an initial configuration and S with a current configuration of a local patch of the shell. \hat{X} , $\hat{\varphi}$ and φ are *nonlinear point maps* which relate *points* $X \in B$, $\varphi \in S$ and $\theta \in A$. The associated *linear tangent maps* J , j and F relate *vectors* defined on B , S and A , respectively. $\{E_i\}_{i=1,2,3}$, $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ and $\{\bar{E}_i\}_{i=1,2,3}$ are *standard cartesian covariant bases* associated with B , S and A . $\{G_i\}_{i=1,2,3}$ and $\{g_i\}_{i=1,2,3}$ are *curvilinear covariant bases* at $X \in B$ and $\varphi \in S$, respectively.

The local parametrization of the reference configuration $B \subset \mathbb{R}^3$ of the shell is determined by the map $\hat{X} : A \rightarrow B$. This map is assumed to have the particular form

$$\hat{X} = \hat{M}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \hat{D}(\theta^1, \theta^2) \quad (1)$$

where \hat{M} and \hat{D} are the parametrizations of the Lagrangian reference surface and the Lagrangian director field, respectively. Now let $J : T_\theta A \rightarrow T_X B$ with components $J^A_i := \partial \hat{X}^A / \partial \theta^i$ denote the tangent map of \hat{X} and $J^{-T} : T_\theta^* A \rightarrow T_X^* B$ the dual normal map. We denote

$$\bar{G} := J^T G J = \hat{X}_{,i} \cdot \hat{X}_{,j} \quad (2)$$

at $\theta \in \mathcal{A}$ as the *covariant reference metric* in the representation with respect to the parameter manifold. Using geometric terminologies, we view $\bar{\mathbf{G}}$ as the *pull back* of the standard cartesian metric $\mathbf{G} = \delta_{AB}$ of the Lagrangian manifold to the parameter manifold.

The local parametrization of the current configuration $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ of the shell at a given time $t \in \mathbb{R}_+$ is obtained in a completely analogous way and determined by the map $\hat{\mathbf{x}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$. Again, this map is assumed to have the particular form

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{m}}(\theta^1, \theta^2; t) + \theta^3 \hat{\mathbf{d}}(\theta^1, \theta^2; t) \quad (3)$$

where $\hat{\mathbf{m}}$ and $\hat{\mathbf{d}}$ are the parametrizations of the Eulerian reference surface and the Eulerian director field, respectively. Now let $\mathbf{j} : T_\theta \mathcal{A} \rightarrow T_x \mathcal{S}$ with components $j^a_i := \partial \hat{x}^a / \partial \theta^i$ denote the tangent map of $\hat{\mathbf{x}}$ and $\mathbf{j}^{-T} : T_\theta^* \mathcal{A} \rightarrow T_x^* \mathcal{S}$ the dual normal map. We denote

$$\bar{\mathbf{C}} := \mathbf{j}^T \mathbf{g} \mathbf{j} = \hat{\mathbf{x}}_{,i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{,j} \quad (4)$$

at $\theta \in \mathcal{A}$ as the *covariant current metric* in the representation with respect to the parameter manifold. $\bar{\mathbf{C}}$ is the *pull back* of the standard cartesian metric $\mathbf{g} = \delta_{ab}$ from the Eulerian manifold to the parameter manifold.

In order to get a strain-like interface with independent non-constant terms of (4) to three-dimensional constitutive models for the stress response in the shell continuum, we need a parametrizations of the *shell deformation* with *at least six local parameters*. We use here a parametrization which introduces two displacement fields $\hat{\mathbf{u}}$ and $\hat{\mathbf{v}}$ for the description of a pair of associated material points at the top and bottom surface of the shell continuum, see also Schoop [1986] and Parisch [1995]. The formulation results in the *linear* relationships

$$\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{M}} + (\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})/2 \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{D}} + (\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}) \quad (5)$$

between the Lagrangian and Eulerian reference surfaces and director fields in (1) and (3), respectively, when $H = |\mathbf{D}|$ is the initial thickness of the shell. Note that (5) induces a *generalized shell displacement vector* $(\theta^1, \theta^2; t) \mapsto \underline{\mathbf{s}} := [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}]^T \in \mathbb{R}^6$.

The current absolute temperature field is parametrized on the parameter manifold \mathcal{A} of the shell by the map $\hat{\vartheta} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$. This map is assumed to have the particular form

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_m(\theta^1, \theta^2; t) + \theta^3 \hat{\vartheta}_d(\theta^1, \theta^2; t) \quad (6)$$

in analogy to (1) and (3), where $\hat{\vartheta}_m$ and $\hat{\vartheta}_d$ are denoted as the membrane temperature and the bending temperature gradient, respectively.

3. Brick-type Finite Shell Element SQ1E5A8

The spatial discretization of the weak forms of the balance of momentum and energy is performed by a coupled thermomechanical finite shell element. We here use a brick-type

shell element proposed by Miehe [1997b], which meets in a natural format the geometric constraints of the shell geometry given in (1), (3), (5), (6) above. The element bases on the classical 3D brick with trilinear interpolation functions where the θ^3 -parameter is assumed to be associated with the thickness direction of the shell. The element, visualized in Figure 2, is equipped with 5 enhanced strain modes and 8 assembling points for assumed strain interpolations.

Within the basic underlying displacement approach we first discretize the geometry

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^n N^I \mathbf{X}_I \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \sum_{I=1}^n N^I \mathbf{x}_I \quad (7)$$

with the trilinear interpolation functions $N^I(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \overset{0}{N}{}^I(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \overset{1}{N}{}^I(\theta^1, \theta^2)$. Observe that these interpolation functions are partitioned in view to a *numerical pre-integration* in the thickness direction. This yields Lagrangian and Eulerian Jacobian

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I \otimes \nabla N^I \quad \text{and} \quad \mathbf{j} = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes \nabla N^I \quad (8)$$

of the displacement model and therefore the current metric and reference metric $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{j}^T \mathbf{g} \mathbf{j}$ and $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{J}^T \mathbf{G} \mathbf{J}$.

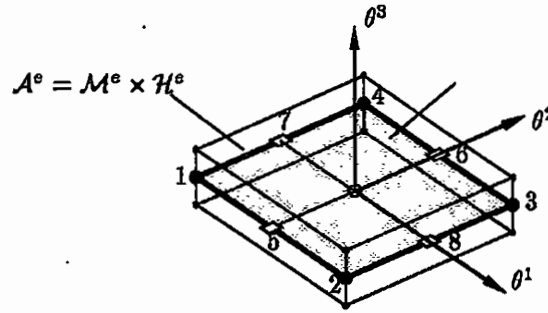


Figure 2. 8-Node Brick-Type Shell Element SQ1E5A8 in the parameter space. $A = 1, \dots, 4$ with $(-1, -1, 0)$, $(+1, -1, 0)$, $(+1, +1, 0)$ and $(-1, +1, 0)$ denote assumed strain points associated with the thickness strain. $A = 5, \dots, 8$ with $(0, -1, 0)$, $(0, +1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ and $(+1, 0, 0)$ denote assumed strain points for the transverse shear strain interpolation. The element has *five* internal degrees which govern enhanced strain modes and *eight* collocation points for assumed strain modes.

We then introduce an enhanced strain modifications of the membrane and thickness strains based on the methodology conceptually described in Simó, Armero & Taylor [1992]. With respect to the curvilinear coordinates of the shell continuum we consider an *enhanced Eulerian parameter map* with associated enhanced current metric

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j}_C + \mathbf{j}_E \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{j}}^T \mathbf{g} \tilde{\mathbf{j}} \quad (9)$$

The non-conforming part is governed by the ansatz $\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_0 \mathbf{J}_E$ with $\mathbf{J}_E := \sum_{e=1}^m \mathbf{a}_e \otimes \nabla \tilde{M}^e$ based on the modified gradients $\nabla \tilde{M}^e := \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \nabla M^e(\mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{J})$ of Wilson modes $M^e(\theta^1, \theta^2, \theta^3) =$

$\frac{1}{2}[(\theta^e)^2 - 1]$ and the a priori chosen internal degrees

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

which can be eliminated by a typical static condensation procedure.

As a third step, we introduce assumed strain interpolations of the transverse shear and thickness strains as suggested by Dvorkin & Bathe [1984] and Betsch & Stein [1996]. The application to the brick-type element yields modification of reference metric and the current metric

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = \tilde{\mathbf{C}} + [\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}^{ass} - \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}] \quad \text{and} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{G}}} = \bar{\mathbf{G}} + [\overset{\circ}{\bar{\mathbf{G}}}^{ass} - \overset{\circ}{\bar{\mathbf{G}}}] \quad (11)$$

of the form

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{33}^{ass} &:= \sum_{A=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \theta^1 \theta_A^1) (1 + \theta^2 \theta_A^2) \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{33}^A \\ \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{13}^{ass} &:= \sum_{A=5}^6 \frac{1}{2} (1 + \theta^2 \theta_A^2) \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{13}^A \\ \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{23}^{ass} &:= \sum_{A=7}^8 \frac{1}{2} (1 + \theta^1 \theta_A^1) \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{C}}}_{23}^A \end{aligned} \right\} . \quad (12)$$

The modified metric tensors (11) provide the strain-driven interface to the constitutive model of thermoplasticity discussed in section 5 below. The modified Eulerian and Lagrangian tangent maps can be recovered based on the polar decompositions

$$\tilde{\tilde{\mathbf{j}}} = [\tilde{\mathbf{j}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1/2}] \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{+1/2} \quad \text{and} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{J}}} = [\mathbf{J} \bar{\mathbf{G}}^{-1/2}] \tilde{\tilde{\mathbf{G}}}^{+1/2} \quad (13)$$

similar to a proposal of Dvorkin, Pantuso & Repetto [1995].

The discretization of the current temperature on the shell continuum is assumed to have the form

$$\vartheta = \sum_{I=1}^n N^I \vartheta_I \quad (14)$$

in terms of the trilinear interpolation functions defined above. Following a proposal of Glaser [1996] we assume elementwise constant bending-type temperature to avoid overshooting phenomena by redefining $\overset{1}{N}^I(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{8} \theta_I^3 = \text{const.}$ This postulates a decoupled membrane-thickness heat conduction response of the shell continuum.

4. A Model of Finite Thermoplasticity in Shells

In the subsequent development we describe the history dependence of the inelastic material response by means of additional local variables. The evolution of these additional variables is then governed by constitutive evolution equations. Following the treatments of Miehe [1997a, b], we denote by $\bar{\mathbf{G}}^p$ with the *initial condition*

$$\bar{\mathbf{G}}^p(\boldsymbol{\theta}; t_0) = \bar{\mathbf{G}} := \mathbf{J}^T \mathbf{G} \mathbf{J} \quad (15)$$

the covariant *plastic metric on the parameter manifold* \mathcal{A} . \bar{G}^p is assumed to be a symmetric, positive definite tensor field for the phenomenological description of the local plastic deformation. Its evolution is determined by a plastic flow rule. Observe that the initial condition in (15) simply states that at the initial time t_0 of the process the plastic metric is assumed to be identical to the reference metric \bar{G} in the representation relative to the parameter manifold \mathcal{A} . Note furthermore that the plastic metric can be motivated by a multiplicative decomposition of the local deformation gradient $F = F^e F^p$ into plastic and elastic parts in the way $\bar{G}^p = J^T C^p J$ with $C^p := F^{pT} F^p$.

We now introduce the thermodynamic variables work-conjugate to the current metric \bar{C} defined in (4) and the plastic metric \bar{G}^p introduced above. Let τ denote the contravariant Eulerian Kirchhoff *stress tensor* work-conjugate to the current metric g in (4). Then the field $\bar{S} := j^{-1} \tau j^{-T}$ is the symmetric Piola *convected stress tensor* on the parameter manifold conjugate to the convected current metric \bar{C} in (4). Furthermore, let the symmetric field \bar{S}^p be the thermodynamic stress-like variable conjugate to the plastic metric \bar{G}^p introduced above and in what follows denoted as the *plastic force*. Then the Eulerian field τ^p , defined by $\tau^p := j \bar{S}^p j^T$ is the *convected plastic force* work-conjugate to the convected Eulerian plastic metric c^p .

Based on the variables introduced above, a canonical set of constitutive equations for large-strain elastoplasticity relative to the parameter manifold has been derived by Miehe [1997b] on the basis of standard thermodynamical arguments. The structure is summarized in Table 1. Observe that the free energy function $\hat{\psi}$ in Table 1 is formulated in terms of the current metric \bar{C} and the plastic metric \bar{G}^p in a completely general context. We restrict this general framework by considering a particular definition of a mixed-variant (covariant-contravariant) elastic strain measure

$$\bar{E} := \bar{C} \bar{G}^{p-1} \quad (16)$$

which were introduced by Miehe [1996] and denoted there as metric transformation tensor. This tensor constitutes an a priori relationship between the current metric and the plastic metric which is assumed to enter the isotropic free energy function, i.e. we consider the particular form $\psi = \hat{\psi}(\bar{E}, A, \vartheta)$. A straightforward exploitation of the constitutive function for the plastic forces in Table 1 then yields the relation $\bar{S}^p := \partial_{\bar{G}^p} \hat{\psi} = \bar{G}^{p-1} \bar{C} \bar{S}$ to the stress \bar{S} . Recall furthermore that the yield criterion function $\hat{\phi}$ has been formulated in terms of the plastic force \bar{S}^p and the plastic metric \bar{G}^p . We restrict the possible settings to a particular dependence of the mixed-variant *driving stress tensor* $\bar{\Sigma} := \bar{G}^p \bar{S}^p$ and consider the form $\phi = \hat{\phi}(\bar{\Sigma}, B, \vartheta)$. Taking into account the relationship of the plastic force to the stress, we observe that the driving stress is identical to the mixed-variant Mandel-type stress $\bar{C} \bar{S}$.

Based on the definitions introduced above, we now specify the set of constitutive elastoplastic equations for isotropic response formulated in terms of elastic principal stretches and principal stresses. We therefore consider the eigenvalue problems

$$\bar{N}^i \bar{E} = \lambda_i^2 \bar{N}^i \quad \text{and} \quad \bar{E} \bar{N}_i = \lambda_i^2 \bar{N}_i \quad (17)$$

TABLE 1. Thermoplasticity on Parameter Space in Spectral Form

free energy	$\psi = \hat{\psi}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, A, \vartheta)$
stresses	$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_{,i} / \lambda_i^2 \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$
internal force	$B = -\partial_A \hat{\psi}$
yield function	$\phi = \hat{\phi}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, B, \vartheta)$
flow rule	$\partial_t \bar{\mathbf{G}}^p = \lambda \sum_{i=1}^3 2\hat{\chi}_{,i} \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$
evolution	$\partial_t A = \lambda \partial_B \hat{\phi}$
dissipation	$\mathcal{D} = \lambda [\sum_{i=1}^3 (\tau_i \hat{\phi}_{,i}) - B \hat{\phi}_{,B}]$
loading	$\lambda \geq 0; \hat{\phi} \leq 0; \lambda \hat{\phi} = 0$

associated with the mixed-variant elastic strain tensor introduced in (16). Here $\{\lambda_i\}_{i=1\dots 3}$ are the *elastic principal stretches*. $\{\bar{\mathbf{N}}^i\}_{i=1\dots 3} \in T_\theta \mathcal{A}$ and $\{\bar{\mathbf{N}}_i\}_{i=1\dots 3} \in T_\theta^* \mathcal{A}$ are the dual sets of right and left eigenvectors relative to the parameter manifold \mathcal{A} . Note that the dual eigenvectors are related via $\bar{\mathbf{N}}^i \cdot \bar{\mathbf{N}}_j = \delta^i_j$ where δ^i_j denotes the Kronecker symbol. We assume in addition a *normalization of the eigenvectors with respect to the plastic metric*, which plays the role of a *reference metric for the elastic response*, i.e.

$$\bar{\mathbf{N}}^i \cdot \bar{\mathbf{G}}^p \bar{\mathbf{N}}^i = 1 \quad (18)$$

This induces the relationship $\bar{\mathbf{N}}_i = \bar{\mathbf{G}}^p \bar{\mathbf{N}}^i$. The normalization (18) with respect to the plastic metric generates the alternative normalization $\bar{\mathbf{N}}^i \cdot \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{N}}^i = \lambda_i^2$ with respect to the current metric. This induces the relationship $\lambda_i^2 \bar{\mathbf{N}}_i = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{N}}^i$. The eigenvalue problems (17) yield the spectral representation $\bar{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \bar{\mathbf{N}}_i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$ of the current metric and $\bar{\mathbf{G}}^p = \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{N}}_i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$ of the plastic metric, respectively, in terms of the *covariant* eigenvector triads. We now assume a particular dependence of the isotropic free energy

$$\psi = \hat{\psi}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, A, \vartheta) \quad (19)$$

on the *logarithmic elastic principal strains* $\varepsilon_i := \frac{1}{2} \ln[\lambda_i^2]$ and the generic scalar internal variable A . This results in the spectral representation $\bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \tau_i / \lambda_i^2 \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$ of the stresses and $\bar{\mathbf{S}}^p = \sum_{i=1}^3 \tau_i \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$ of the plastic force relative to the parameter manifold in terms of the *contravariant* eigenvector triads and the *principal stresses* $\tau_i := \hat{\psi}_{,i}$. Assuming furthermore the dependence

$$\phi = \hat{\phi}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, B, \vartheta) \quad (20)$$

of the isotropic yield function on the principal stresses τ_i and the conjugate internal variable B , we obtain by exploitation the evolution equation in Table 1 the representation $\partial_t \bar{\mathbf{G}}^p = \lambda \sum_{i=1}^3 2\hat{\phi}_{,i} \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$ of the flow rule in spectral form.

A fully implicit exponential-shifted integration of the flow rule in Table 1 within a typical time interval $[t_n, t_{n+1}]$ results a stress update algorithm relative to the parameter manifold of the shell, which can methodically be organized in a geometric pre- and post-processing and an algorithmic box in the eigenvalue space as outlined in Table 2. The

algorithmic box in the eigenvalue space typically consists of a general return mapping scheme which covers a wide range of possible applications. Details of the stress update algorithm are given in Miehe [1997a, b].

TABLE 2. Tensorial Stress Update Algorithm on Parameter Manifold

1. *Preprocessing.* The current metric $\bar{\mathbf{C}}$ and the *trial* plastic metric $\bar{\mathbf{G}}^{p-1*} := \bar{\mathbf{G}}_n^{p-1}$ at time t_{n+1} are given. Solve general eigenvalue problem

$$\bar{\mathbf{N}}^{i*}(\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{G}}^{p-1*}) = \lambda_i^{2*}\bar{\mathbf{N}}^{i*} \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \bar{\mathbf{G}}^{p*}\bar{\mathbf{N}}^{i*} = 1$$

and compute trial logarithmic elastic strains $\varepsilon_i^* := \ln[\lambda_i^*]$.

2. *Constitutive Box.* Compute elastic strains ε_i , principal stresses τ_i and algorithmic moduli \mathbb{E}_{ij}^{ep} in the eigenvalue space by means of a general return mapping scheme.
3. *Postprocessing.* Compute current elastic principal stretches $\lambda_i = \exp[\varepsilon_i]$, update eigenvectors $\bar{\mathbf{N}}^i = (\lambda_i/\lambda_i^*)\bar{\mathbf{N}}^{i*}$, compute plastic metric

$$\bar{\mathbf{G}}^{p-1} = \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{N}}^i \otimes \bar{\mathbf{N}}^i$$

and get stresses and algorithmic tangent moduli

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \sum_{i=1}^3 \tau_i/\lambda_i^{2*} \bar{\mathbf{N}}^{i*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{i*} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \sum_i \sum_j [\mathbb{E}_{ij}^{ep} - 2\tau_i\delta_{ij}]/\lambda_i^{2*}\lambda_j^{2*} \bar{\mathbf{N}}^{i*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{i*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{j*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{j*} \\ &+ \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\tau_i/\lambda_i^{2*} - \tau_j/\lambda_j^{2*}}{\lambda_i^{2*} - \lambda_j^{2*}} \bar{\mathbf{N}}^{i*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{j*} \otimes (\bar{\mathbf{N}}^{i*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{j*} + \bar{\mathbf{N}}^{j*} \otimes \bar{\mathbf{N}}^{i*}) \end{aligned}$$

5. Example

The numerical example outlined in the Figures 3 and 4 is concerned with a typical thermoplastic deformation process at large strains, the thermoplastic necking of a thin-walled tube.

Figure 3a depicts the initial geometry of the half of the tube where a quarter has been discretized by 40 x 25 brick-type shell elements as described in section 4 above. The shell intersection is performed by a particular interface element. The tube is clamped at both ends and then stretched in axial direction within a deformation-controlled process. We consider adiabatic thermal boundary conditions. A thermoplastic material model based on the von Mises plasticity model has been applied as outlined in Miehe [1996]. Figure 4 shows deformed configurations of the tube where a necking develops in the middle of the specimen. The distributions of the equivalent plastic strain and the temperature on the surface of the shell are displayed.

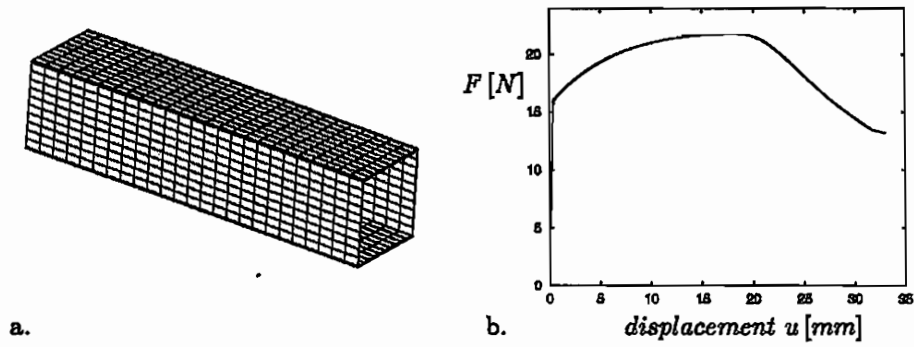


Figure 3. a.) Discretization with 40×25 shell elements. b.) Load-deflection curve. ($F_{max} = 21.76 \text{ N}$ at $u = 17.9 \text{ mm}$)

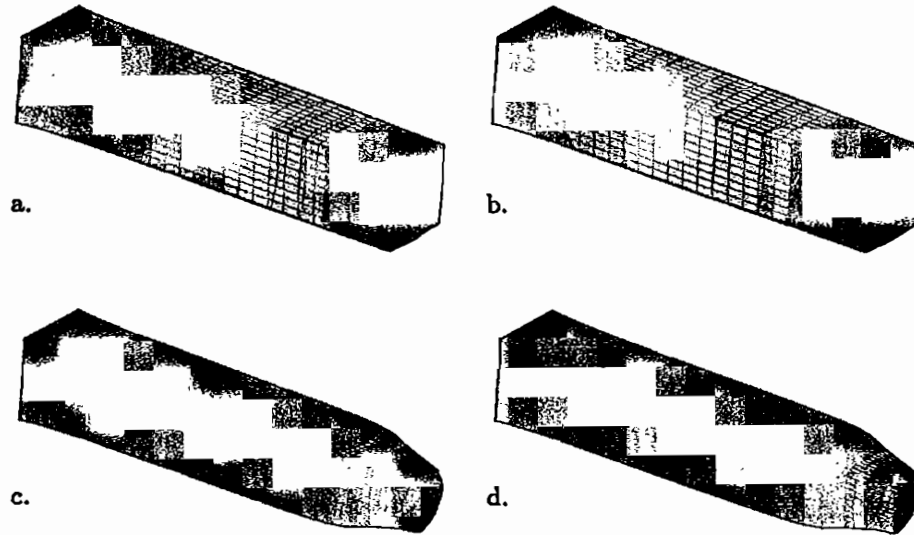


Figure 4. a.) Equivalent plastic strains at displacement $u = 20 \text{ mm}$. ($e^P = 0.032 - 0.178$) b.) Temperature distribution at displacement $u = 20 \text{ mm}$. ($\theta = 0.0^\circ - 2.804^\circ$) c.) Equivalent plastic strains at displacement $u = 33 \text{ mm}$. ($e^P = 0.032 - 1.163$) d.) Temperature distribution at displacement $u = 33 \text{ mm}$. ($\theta = 0.0^\circ - 28.52^\circ$)

Acknowledgement

Support for this research was provided by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) under grant Mi 295/4.

References

- P. BETSCH AND E. STEIN [1996] An Assumed Strain Approach Avoiding Artificial Thickness Straining for a Nonlinear 4-Node Shell Element, *Communications in Applied Numerical Methods* **11**, 899-909.
- E.N. DVORKIN AND K.J. BATHE [1984] A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis, *Engineering Computations* **1**, 77-88.
- E.N. DVORKIN, D. PANTUSO AND E.A. REPETTO [1995] A Formulation of the MITC4 Shell Element for Finite Strain Elasto-Plastic Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **125**, 17-40.
- S. GLASER [1996] Gekoppelte Thermomechanische Berechnung dünnwandiger Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente, Habilitationsschrift, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- C. MIEHE [1995] A Theory of Large-Strain Isotropic Thermoplasticity Based on Metric Transformation Tensors, *Archive of Applied Mechanics* **66**, 413-427.
- C. MIEHE [1997a] A Formulation of Finite Elastoplasticity Based on Dual Co- and Contra-Variant Eigenvector Triads Normalized with Respect to a Plastic Metric, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
- C. MIEHE [1997b] A Theoretical and Computational Model for Isotropic Elastoplastic Stress Analysis in Shells at Large Strains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
- H. PARISCH [1995] A Continuum-Based Shell Theory for Non-Linear Applications, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **38**, 1855-1883.
- H. SCHOOP [1986] Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen, *Ingenieur Archiv* **56**, 427- 437.
- J.C. SIMÓ, F. ARMERO AND R.L. TAYLOR [1993] Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Elements for 3D Finite Deformation Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **110**, 359-386.

Adaptive Bone Remodeling

Stephan Weng, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Universitätsstr. 150, 44780 Bochum

1 Einleitung

Als lebende Materialien verändern biologischen Strukturen durch Wachstum gezielt ihre Gestalt und ihre Materialeigenschaften. Unter Berücksichtigung der funktionalen Anpassung wird die Änderung der Gestalt und der anisotropen Materialeigenschaften von Knochen in Form einer Evolutionsgleichung formuliert, um damit ein Mittel zur Vorhersage des Knochenverhaltens, z. B. bei Implantation von Prothesen, zu schaffen. Der Ansatz wurde in das kommerzielle Finite Element Programm MARC implementiert. Damit kann die Dichteveränderung, in Form der Veränderung der elastischen Eigenschaften, die Umorientierung der inneren Struktur, in Form der Ausrichtung der Spongiosabälkchen bzw. die Umorientierung der Knochenlamellen entlang der Hauptbeanspruchungsrichtung und der Flächenumbau in Form der Veränderung der Knochengeometrie dargestellt werden.

2 Beschreibung des Materialmodells

Ansatz der Beschreibung des Knochens im allgemeinen und des proximalen Femurs im speziellen bildet ein hypoelastisches Stoffgesetz der Form

$$d\sigma = C(\rho, \sigma) d\varepsilon. \quad (1)$$

Der, das Stoffgesetz charakterisierende, Steifigkeitstensor C ist abhängig von den inneren Zuständen. Er besteht aus einem skalaren Wert, der proportional zur Dichte ist und die Einlagerungen des Kalziumapatits in die Kollagenfasern beschreibt und einem anisotropen Anteil, der die Ausprägung der inneren Struktur berücksichtigt. Zieht man in Betracht, daß das Material eine wie auch immer geartete Ausrichtung besitzt und bei der Beschreibung der Evolution des Knochens Material sowohl aufgebaut als auch, bis zum verschwinden, abgebaut werden kann, so macht eine Funktion in Form eines Produktansatz Sinn.

$$C(\rho, \sigma) = f(\rho) \cdot C_\sigma(\sigma) \quad (2)$$

Liegt kein Material vor, so ist die Funktion in Abhängigkeit der Dichte $f(\rho)$ und damit der Steifigkeitstensor C gleich Null. Andernfalls unterliegt das Material einer zunächst beliebigen Ausrichtung, die sich aus den Hauptspannungsrichtungen ergeben soll. Die Evolutionsgleichung des Steifigkeitstensors \dot{C} läßt sich dann wie folgt angeben.

$$\dot{C}(\rho, \sigma) = \dot{f}(\rho) \cdot C_\sigma(\sigma) + f(\rho) \cdot \dot{C}_\sigma(\sigma) \quad (3)$$

Der Steifigkeitstensor $C(\rho, \sigma)$ soll zu Beginn der Entwicklung isotrope Materialeigenschaften aufweisen. Somit gilt als Anfangsbedingung:

$$C_{t=0}(\rho, \sigma) = C_{\sigma_{t=0}} = C_{iso} \quad (4)$$

Die zeitliche Änderung der Funktion $f(\rho)$ ist abhängig vom Spannungstensor $\sigma(x, y, z, t)$, dem Dehnungstensor $\varepsilon(x, y, z, t)$ und der Dichte $\rho(x, y, z, t)$ selbst. Zur Bestimmung der

Funktion $f(\rho)$ wird das Knochenumbauesignal e nach BEAUPRÉ et al. (Beaupré u.a., 1990) genutzt:

$$e = \Psi_t - \Psi_t^* = \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^N n_i [\sqrt{E\sigma \cdot \epsilon}]_i^m\right)^{1/m} - \Psi_t^* \quad (5)$$

Das Signal bestimmt sich aus der Differenz des Referenzgewebestimulus Ψ_t^* und dem täglich, durch die jeweiligen Belastungen hervorgerufenen, Gewebestimulus Ψ_t . Ψ_t^* repräsentiert die Intensität der mechanischen Beanspruchung des Knochens zur Erhaltung der zuletzt vorliegenden Struktur. Ψ_t errechnet sich aus der Summe der Belastungsfälle N der Dehnungsenergiedichte, multipliziert mit der Zyklenzahl der jeweiligen Belastung n_i . Gewichtet wird dieser Ausdruck über einen Exponent m , der die Veränderung des Einflusses der Spannungsamplitude zur Zyklenzahl beschreibt.

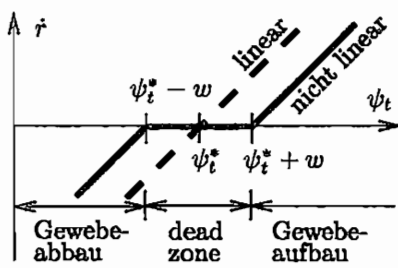


Bild 3. Umbaugeschwindigkeit n. 1.

Ψ_t bestimmt die Rate des Gewebeumbaus \dot{r} gemäß Bild 3. Das Potential für eine Dichteänderung steht in Relation zu der zur Verfügung stehenden Knochenoberfläche. Durch die Begrenzung der verfügbaren Oberfläche verlaufen Dichteänderungen bei niedriger oder hoher Porosität nur sehr langsam. Dieser Zusammenhang wird über die von MARTIN (Martin, 1984) eingeführte Oberflächendichte S_v berücksichtigt.

Für die Änderung des Proportionalitätsfaktors in Form der Funktion $f(\rho)$ gilt dann:

$$\frac{df(\rho)}{dt} = \dot{r} S_v \quad (6)$$

Unter der Annahme, daß der resorbierte und der neu angelagerte Knochen voll mineralisiert ist und damit eine Dichte von $\hat{\rho}$ besitzt ergibt sich die Dichteänderung zu:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{df(\rho)}{dt} \hat{\rho} \quad (7)$$

Zur Entwicklung der Ausprägung bzw. Ausrichtung der inneren Struktur wird der hierzu verwendete tensorielle Anteil \dot{C}_σ abhängig vom aktuellen Spannungszustand σ und dessen Hauptspannungsrichtungen definiert. Hierzu ist das folgende Eigenwertproblem zu lösen:

$$\sigma \cdot n_i = \sigma_i n_i, \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Zur Festlegung eindeutiger Eigenrichtungen erfolgt die Formulierung in den Eigenprojektionen P_α , (Xiao, 1997). Allgemein gilt:

$$P_\alpha P_\beta = \begin{cases} P_\alpha, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha = I \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1 & : P_i = n_i \otimes n_i \\ \sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 & : P_1 = n_1 \otimes n_1 \\ & P_2 = I - P_1 \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 & : P_1 = I \end{aligned}$$

m ist gleich der Anzahl der verschiedenen Eigenwerte. Die Änderung des für die Beschrei-

bung der Materialsymmetrie zuständigen Tensors ergibt sich damit zu:

$$\dot{C}_\sigma = \sum_{i=1}^m \xi_i (P_i \otimes P_i). \quad (10)$$

Im Fall des hydrostatischen Spannungszustands p erfolgt keine Neuausrichtung der Spongiosabälkchen. Ähnlich der Argumentation bei der Einführung der „dead zone“ wird auch hier ein Grenzbereich um die hydrostatische Spannung, beschrieben durch eine Grenzspannung σ_g , angenommen. Innerhalb dieses Bereiches findet keine Veränderung der Ausrichtung der inneren Struktur statt. Sollte die jeweilige Hauptspannung den Grenzwert $p + \sigma_g$ überschreiten, so soll in diese Richtung eine Versteifung erfolgen. Ein Abbau der Steifigkeit erfolgt, wenn die Hauptspannung die Grenze $p - \sigma_g$ unterschreitet. Die Rate des Knochenauf- bzw. -abbaus kann durch die Parameter δ_1 und δ_2 festgelegt werden. Durch die Wahl von unterschiedlichen Parametern kann gleichzeitig berücksichtigt werden, daß Knochenabbau progressiver als Knochenaufbau verläuft (Parfitt, 1984). Das Verhalten wird sowohl für Zug- als auch für Druckspannungen gleich angesetzt. Der Zusammenhang ist in Bild 4 und Gleichung (11) dargestellt.

$$\xi_i = \begin{cases} \delta_1 |\sigma_i - p| \operatorname{sign}(\sigma_i - p) & \text{für } |\sigma_i| > |p + \sigma_g| \\ 0 & \text{für } |p - \sigma_g| \leq |\sigma_i| \leq |p + \sigma_g| \\ \delta_2 |\sigma_i - p| \operatorname{sign}(\sigma_i - p) & \text{für } |p - \sigma_g| < |\sigma_i| \end{cases} \quad (11)$$

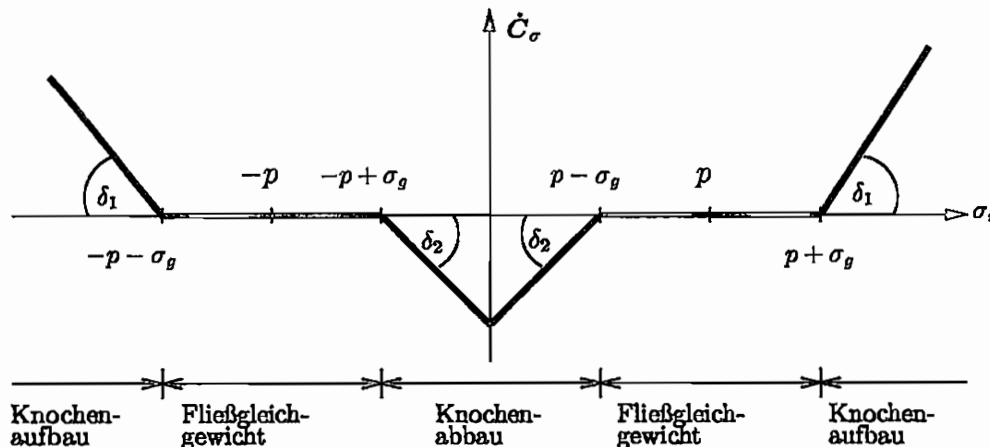


Bild 4. Qualitative Darstellung der Änderung der inneren Struktur.

Mit diesem Ansatz reagiert das Material auf eine gerichtete Überlastung mit einer Versteifung in Richtung der Überlast und mit einem Abbau von Steifigkeit in Richtung einer zu geringen Last. Dieses Verhalten korrespondiert mit den Feststellungen von FYHRIE und CARTER (Fyhrie u.a., 1986). Ausgehend vom isotropen Anfangszustand kann der Steifigkeitstensor sich zu einem mehr generellem orthotropem Material entwickeln. Orthotrope Adaption wird auch weiterhin vorhergesagt, solange der Spannungszustand aufrechterhalten bleibt. Somit wird die Adaption durch die Veränderung der Belastungen beeinflusst. Dies hat eine Neuorientierung der Hauptspannungen zur Folge.

3 Ergebnisse

Exemplarisch werden die Ergebnisse, die Berechnung der physiologischen Dichteverteilung, am zweidimensionalen proximalen Femusmodell vorgestellt. Detailliertere Darstel-

lung zu simulierten Umbauprozessen sind der Literatur zu entnehmen (Weng u.a. 1997; Weng, 1997).

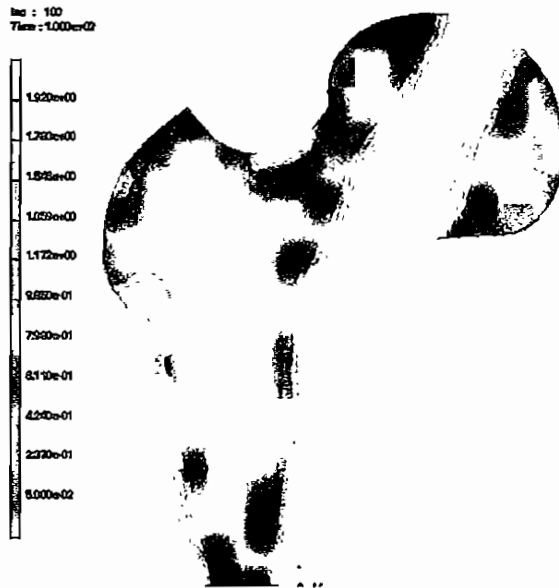


Bild 3. Dichteverteilung des 2-D Modells.

Die mit Hilfe der anisotropen Evolutionsgleichung berechnete Dichteverteilung (Bild 3) liefert im Vergleich zu einem Röntgenbild eine sehr gute Übereinstimmung. Die klassischen Strukturmerkmale des proximalen Femurs konnten nachgebildet werden. Der Verlauf hoher Dichte vom Kopf, durch den Hals in die Diaphyse sowie der Bereich hoher Dichte, der vom lateralen Rand unterhalb des Trochanter major über den lateralen Rand des Schenkelhalses bis ins Zentrum des Gelenkkopfes verläuft, und das Wardsche Dreieck im Bereich geringer Knochendichte im Schenkelhals sind gut erkennbar. Die Wandstärke der Diaphyse und der Markkanal sind entsprechend der Anatomie des Femurs realistisch ausgeprägt. Desweiteren liegen keine Diskontinuitäten vor.

Im Gegensatz zu dem in der Literatur als „Schachbrettmuster“ bekannten Dichteverteilungen werden mit der anisotropen Evolutionsgleichung kontinuierliche Dichteverteilungen ermittelt. Mit dem Ansatz werden keine negativen Steifigkeiten erzeugt; es liegen nur physiologisch sinnvolle Steifigkeiten vor. Über den zeitlichen Verlauf der Entwicklung ist die Dichteverteilung stabil und konvergent.

Literatur

1. Beaupré, G. S.; Orr, T. E.; Carter, D. R.: An Approach for Time-Dependent Bone Modeling and Remodeling - Application: A Preliminary Remodeling Simulation . J. Orthopaedic Research, 8:662-670, 1990.
2. Fyhrie, D. P.; Carter, D. R.: A unifying Principle Relating Stress to Trabecular Bone Morphology. J. Orthopaedic Research, 4:304-317, 1986.
3. Martin, R. B.: Porosity and Specific Surface of Bone. CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering, 10(3):179 - 222, 1984.
4. Parfitt, A. M.: The Cellular Basis of Bone Remodeling: The Quantum Concept Reexamined in Light of Recent Advances in the Cell Biology of Bone. Calcified Tissue Int., 36:37-45, 1984.
5. Weng, S.: Ein anisotropes Knochenumbaumodell und dessen Anwendung. Technische Mechanik, (zur Veröffentlichung eingereicht), 1997.
6. Weng, S.; Lengning, M. F.: Parametervariation für ein Materialmodell zur Beschreibung der Knochenstruktur am Beispiel des Femurs. ZAMM, (zur Veröffentlichung eingereicht), 1997.
7. Xiao, H.: On Isotropic Invariants of the Elasticity Tensor. J. Elasticity, 46(2), 1997.

Ein Bogenlängenverfahren für Stabilitätsprobleme bei ratenabhängiger Werkstoffbeschreibung

Burkhard Pollak, 19. September 1997

Technische Universität Darmstadt
Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik

1 Einleitung

Der Wunsch nach ressourcen- und kostenschonenden Produktentwicklungen und Produkten fordert die ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen zu steter Weiterentwicklung von Simulations- und Berechnungsverfahren. Sie bilden – zusammen mit experimentellen Untersuchungen – die Grundlage weiterer Optimierungen der Bauteile und Komponenten. Klassische Berechnungsmodelle können diese Anforderungen oft nicht erfüllen, somit sind neue Modelle und Methoden notwendig. Die zunehmende Gewichtseinsparung und der Übergang zu leichteren Werkstoffen führt zu einer zusätzlichen Versagensart. Es kommt zum Knicken, Beulen oder Durchschlagen von Teilstrukturen der Bauteile. Die Beschreibung dieser Stabilitätseigenschaften muß in den den Berechnungsmethoden zugrundegelegten Modellen ergänzt werden. Im folgenden wird ein Algorithmus skizziert, der die Analyse stabilitätsgefährdeter Strukturen mit ratenabhängigem Werkstoffverhalten auch im Nachbeulbereich (post-buckling) ermöglicht.

2 Environment

Für die Entwicklung der Algorithmen steht das FEM-Programm FEAP zur Verfügung, das im Quellcode (FORTRAN 77) vorliegt und definierte Schnittstellen zur Ergänzung aufweist. Bei den Stabilitätsuntersuchungen kommt eine von MÜLLER [3] vorgestellte Balkenformulierung zum Einsatz. Die kinematischen Annahmen gehen von kleinen Verzerrungen und großen Rotationen eines Balkens in der Ebene aus. Das eingesetzte, vereinheitlichte Werkstoffmodell geht auf BODNER und PARTOM [1] zurück und verwendet 5 Parameter. Die Verfestigung wird als isotrop angenommen. Ausgehend von der additiven Zerlegung der Verzerrungsraten in einen elastischen und plastischen Anteil $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^P$ wird die Fließregel $\dot{\epsilon}^P = \text{dev}\dot{\epsilon}^P = \lambda \text{dev}\sigma$ formuliert. Entsprechend gilt für die zweiten Invarianten $D_2^P = \lambda^2 J_2$. Für die des plastischen Verzerrungstensors wird eine Entwicklungsgleichung angegeben und mit Z eine innere Größe des Werkstoffmodells mit entsprechender Entwicklungsgleichung eingeführt

$$D_2^P = D_0^2 \exp \left[- \left(A^2 / J_2 \right)^n \right] \quad \text{mit} \quad A^2 = \frac{1}{3} Z^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/n} \quad (1)$$

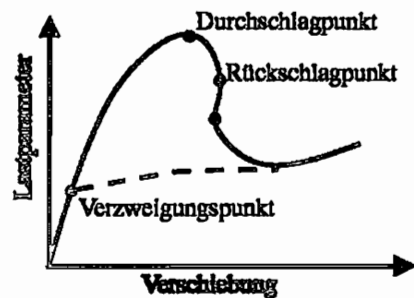
$$Z = Z_1 + (Z_0 - Z_1) \exp(-mW_P/Z_0). \quad (2)$$

3 Stabilitätsdefinitionen und -kriterien

Grundlage der Finite Elemente Formulierung ist das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Lasten

$$G(u, \lambda) = R(u) - \lambda F = 0, \quad (3)$$

wobei die Linearisierung der inneren Kräfte R die tangentielle Steifigkeitsmatrix K^T ergibt. Stabilitätspunkte sind dadurch gekennzeichnet, daß diese Steifigkeitsmatrix einen Rangabfall aufweist, d. h. deren Determinante verschwindet $\det K^T = 0$. Dies resultiert aus dem Eigenwertproblem $(K^T - w_i I) \phi_i = 0$. Dabei sind w_i die i -ten Eigenwerte und ϕ_i die zugehörigen Eigenvektoren. Zur Charakterisierung der Stabilitätspunkte werden entweder diese Eigenvektoren oder der *current stiffness parameter*



$$Sp = \frac{\Delta_1 u^T F}{\Delta_n u^T F}, \quad (4)$$

der Quotient aus dem inneren Produkt zwischen dem Verschiebungszuwachs des ersten Iterationsschritts und dem Kraftvektor und desselben Produkts für den aktuellen Schritt n . Es ergeben sich zur Klassifizierung die Kriterien

- Durchschlagpunkt $\phi_i^T F \neq 0$ oder $Sp = 0$,
- Verzweigungspunkt $\phi_i^T F = 0$ oder $Sp \neq 0$.

4 Bogenlängenverfahren

Mit Bogenlängenverfahren werden die Iterationsrichtungen bei der Lösung der Gleichungssysteme (3) beeinflusst. Die einfachsten Fälle sind die Last- oder Verschiebungssteuerung, die als Sonderfall der Bogenlängenverfahren gelten. Die Idee ist, zur Gleichgewichtsbedingung eine Nebenbedingung $f(u, \lambda)$ aufzustellen. Damit lassen sich Last und Verschiebung während des Iterationsprozesses modifizieren, was die Möglichkeit mit sich bringt, Durchschlags- und Rückschlagpunkte zu überwinden. Üblicherweise verwendet man eine konstante Bogenlänge, die sich aus den Verschiebungszuwächsen bestimmt $ds = u^T u$ [2]. Mit Hilfe einer Eigenwertanalyse in der Nähe der Stabilitätspunkte wird auf eine ausiterierte Lösung

eines vorherigen Zeitschritts eine Störung aufgebracht

$$u^S = \bar{u} + \sum_{\text{relevante Eigenwerte}} \tau_i \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}, \quad (5)$$

um die Simulation auf sekundären Pfaden fortzusetzen.

Ein solches Bogenlängenverfahren ist nun um die Möglichkeiten erweitert,

- eine Korrelation zwischen Bogenlänge und Zeitschritt vorzugeben und
- eine Steuerung (besser Regelung) der Schrittweiten in Abhängigkeit der Iterationszahlen bei der Auswertung der Werkstoffgleichungen und der Lösung des globalen Gleichungssystems zu berücksichtigen.

erweitert. Kern des erweiterten Algorithmus sind die Beziehungen

$$\Delta t = \left(\frac{u - \dot{u}_0 t_{n-1}}{\Delta u} \right)^p \frac{\Delta u}{\dot{u}_0} \quad (6)$$

zur Bestimmung des Zeitinkrements und

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \frac{ds^0}{ds^i} \quad (7)$$

für die Berechnung des Lastfaktors. Dabei beschreibt die Bogenlänge ds^0 die zu regelnde Bogenlänge des ersten Schrittes. Im klassischen Bogenlängenverfahren bleibt diese konstant, mit der Schrittweitensteuerung wird sie mit einem klaren Wert multipliziert $ds^0 = ds^0 f$ (Ist-, Solliterationszahl). Mit ds^i ist die Bogenlänge bezeichnet, die mit den aktuellsten Verschiebungsincrementen bestimmt wird. Der Exponent p wird zur Gewichtung von inkrementell $\Delta u / \Delta t$ und absolut bestimmter Geschwindigkeit u/t verwendet. Er nimmt sinnvollerweise Werte zwischen 0,7 und 0,9 an. \dot{u}_0 ist eine an der Lasteinleitungsstelle vorzugebende Verschiebungsgeschwindigkeit.

5 Numerisches Beispiel

In (Abb. 1) ist ein System aus drei Balken gezeigt, die so angeordnet sind, daß ein Balken als Knickstab betrachtet werden kann, die beiden anderen einen Stabzweischlag, also ein Durchschlagproblem bilden. Es wird die Last-Verschiebungskurve gezeigt und zwei charakteristische Verformungszustände sind skizziert. Insbesondere in der Ausschnittsvergrößerung sind die Unterschiede in den Verläufe durch eine Variation der Belastungsgeschwindigkeit zu erkennen. Die Verläufe zeigen sowohl Durchschlag- als auch Rückschlagverhalten.

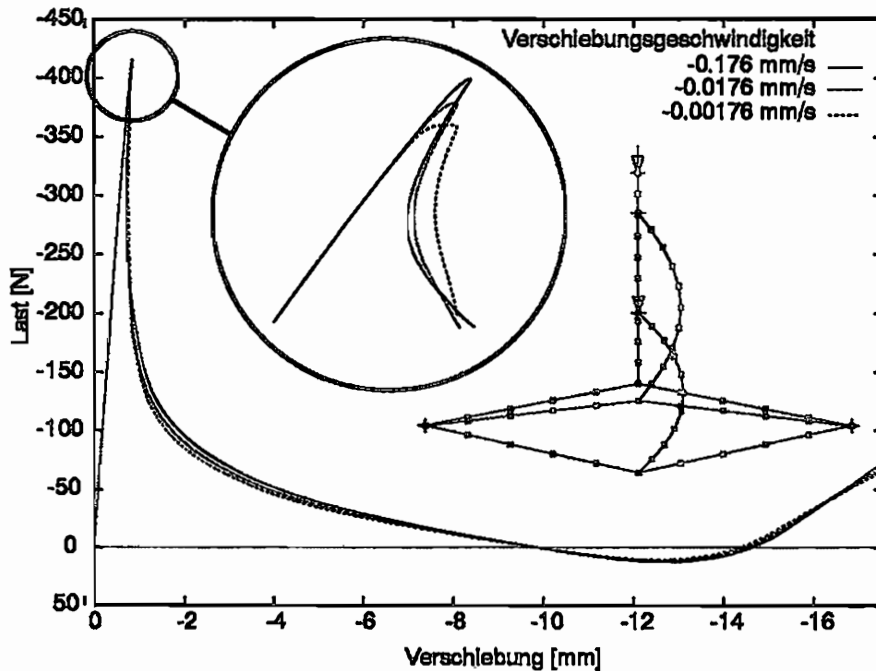


Abbildung 1: Drei-Balken-System

6 Ausblick

Bisher ist in der Regel interaktives Eingreifen notwendig, um die Stabilitätsanalysen auf dem relevanten Lösungspfad durchführen zu können. Dies erfordert vom Anwender einige Erfahrung. Daher wird angestrebt, die Pfadwechselalgorithmen dahingehend zu erweitern, daß die Auswahl der relevanten Eigenwerte (vgl. (5)) zumindest unterstützt und der Wichtungsparmeter hinsichtlich der Grenzen „sicheres Erreichen des relevanten Lösungspfads“ und „Konvergenz des iterativen Lösungsalgorithmus“ überprüft und gegebenenfalls modifiziert wird.

Literatur

- [1] S. R. Bodner and Y. Partom. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strainhardening materials. *Journal of Applied Mechanics*, 42, 1975.
- [2] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handels snap-through. *Computers and Structures*, 13:55–62, 1980.
- [3] U. Mueller. *Untersuchung des Stabilitätsverhaltens ebener, viskoplastischer Balken mit der Methode der Finiten Elemente*. PhD thesis, Fachbereich Maschinenbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Deutschland, 1994.

Zeitintegration viskoplastischer Zweiphasenmodelle

S. Diebels, P. Ellsiepen & W. Ehlers

Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, D-70550 Stuttgart

1 Modellgleichungen

Reibungsmaterialien, wie z. B. Granulate oder Schäume, lassen sich mit der Theorie Poröser Medien (TPM) beschreiben. Dabei wird die Mehrphasigkeit dieser Materialien berücksichtigt, indem sowohl der Festkörperanteil als auch das Porenfluid modelliert werden. Die TPM ist als makroskopische Theorie zu verstehen, die mit der Vorstellung superponierter Kontinua arbeitet (Ehlers [2]).

Das hier verwendete Modell besteht aus einem elastisch-viskoplastischen Festkörperskelett, dessen Poren mit einem kompressiblen Fluid gesättigt sind. Die Bewegung des Skeletts wird – wie in der Festkörpermechanik üblich – durch die Verschiebung \mathbf{u}_S beschrieben, während für das Fluid eine modifizierte Eulersche Beschreibung verwendet wird, die auf der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F (Differenzgeschwindigkeit zwischen Fluid und Festkörper) beruht. Im weiteren wird angenommen, daß sich der Festkörper mikroskopisch inkompressibel verhält, $\rho^{SR} = \text{konst.}$ Änderungen der Partialdichte $\rho^S = n^S \rho^{SR}$ sind dann nur noch durch Änderungen des Volumenanteils n^S möglich. Die Massenbilanz des Festkörpers reduziert sich somit zu einer Volumenbilanz

$$n^S = n_{0S}^S \det \mathbf{F}_S^{-1} \quad (1)$$

mit der Anfangsporosität n_{0S}^S und dem Deformationsgradienten \mathbf{F}_S . Der Volumenanteil der Fluidphase folgt aus der Sättigungsbedingung

$$n^F = 1 - n^S. \quad (2)$$

Die Massenbilanz des Fluids kann mit der realen Dichte ρ^{FR} formuliert werden. Mit der materiellen Zeitableitung $(\dots)'_S$ bezüglich der Festkörperbewegung lautet sie:

$$n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} \text{div}(\mathbf{u}_S)'_S + \text{div}(n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) = 0. \quad (3)$$

Die quasi-statische Impulsbilanz für das Fluid lautet

$$\mathbf{0} = \text{div} \mathbf{T}^F + \rho^F \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^F, \quad (4)$$

wobei \mathbf{T}^F der Fluid-Spannungstensor und \mathbf{b} die Volumenkräfte sind; $\hat{\mathbf{p}}^F$ beschreibt den Impulsaustausch oder die Wechselwirkungskraft zwischen den beiden Phasen. Aus der Summe der Impulsbilanzen für Fluid und Festkörper ergibt sich:

$$\mathbf{0} = \text{div}(\mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S) + (\rho^F + \rho^S) \mathbf{b}. \quad (5)$$

Die Struktur der konstitutiven Gleichungen, insbesondere die Aufspaltung in Druckterme und deformationsabhängige Extraanteile, ergibt sich aus der Thermodynamik (Ehlers [2]). Bei Vernachlässigung der Reibungsspannungen im als gasförmig angenommenen Fluid ist der Spannungszustand hydrostatisch:

$$\mathbf{T}^F = -n^F p^{FR} \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad p^{FR} \sim \rho^{FR}. \quad (6)$$

Die Interaktionskraft zwischen den beiden Konstituierenden läßt sich mit der realen Fluidwichte γ^{FR} und der Darcy-Permabilität k^F folgendermaßen angeben

$$\hat{\mathbf{p}}^F = p^{FR} \text{grad } n^F - \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (7)$$

Im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie kann für die effektiven Festkörperspannungen ein Hookesches Gesetz angenommen werden:

$$\mathbf{T}^S = -n^S p^{FR} \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S, \quad \mathbf{T}_E^S = 2\mu^S \mathbf{E}_{Se} + \lambda^S (\mathbf{E}_{Se} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}. \quad (8)$$

Dabei sind μ^S und λ^S die Laméschen Konstanten des Festkörpers, die in makroskopischen Versuchen gewonnen werden, und \mathbf{E}_{Se} ist der elastische Anteil des linearen Verzerrungstensors \mathbf{E}_S , der additiv in elastische und plastische Anteile aufgespalten wird:

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_{Se} + \mathbf{E}_{Sp}. \quad (9)$$

Für die plastischen Anteile wird eine nicht-assozierte Fließregel formuliert:

$$(\mathbf{E}_{Sp})'_S = \Lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{T}_E^S} \quad \text{mit} \quad \Lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{F(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D)}{\sigma_0} \right\rangle^r. \quad (10)$$

Dabei wurden das von Ehlers [3] vorgeschlagene Einflächenfließkriterium

$$\begin{aligned} F(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D) &= \sqrt{\Phi(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D)} + \beta \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{I}^2 - \kappa \quad \begin{cases} < 0 & \text{elastisch} \\ \geq 0 & \text{viskoplastisch} \end{cases} \\ \Phi(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D) &= \mathbb{I}_D (1 + \gamma \vartheta(\mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D))^m + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{I}^2 + \delta^2 \mathbf{I}^4 \\ \vartheta(\mathbb{I}_D, \mathbb{I}\mathbb{I}_D) &= \mathbb{I}\mathbb{I}_D / \mathbb{I}_D^{3/2} \end{aligned} \quad (11)$$

und das plastische Potential nach Diebels *et al.* [1]

$$\begin{aligned} G(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D) &= \sqrt{\Gamma(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D)} + \beta \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{I}^2 + g(\mathbf{I}) \\ \Gamma(\mathbf{I}, \mathbb{I}_D) &= \mathbb{I}_D + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{I}^2 + \delta^2 \mathbf{I}^4. \end{aligned} \quad (12)$$

verwendet. Es werden die erste Invariante des Extraspannungstensors \mathbf{I} sowie die zweite und dritte Invariante des Spannungsdeviators \mathbb{I}_D und $\mathbb{I}\mathbb{I}_D$ benötigt. Die Materialparameter $\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \kappa, m, \eta, \sigma_0$ und r sind aus Experimenten (Triaxialversuche) zu bestimmen.

2 Numerische Lösung

In einem ersten Schritt werden die Bilanzen in eine schwache Form überführt. Die Ortsdiskretisierung geschieht dann im Rahmen eines *Galerkin*-Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente. Es verbleibt ein semidiskretes Anfangswertproblem in der Zeit:

$$\begin{bmatrix} F_1(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{q}) \\ F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{u}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{u}' + \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) - \mathbf{f} \\ \mathbf{A} \mathbf{q}' + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Mit der verallgemeinerten Massenmatrix \mathbf{M} , dem Steifigkeitsvektor \mathbf{k} und dem Kraftvektor \mathbf{f} steht F_1 für die Bilanzgleichungen, die an den Knoten des FE-Netzes behandelt werden, F_2 repräsentiert die Evolutionsgleichungen der plastischen Variablen und wird an den *Gauß*-Punkten behandelt. Die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{q} beinhalten zum einen die Knotenvariablen, zum anderen die plastischen Geschichtsvariablen an den *Gauß*-Punkten.

c_1	a_{11}		
\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	a_{s1}	\cdots	a_{ss}
	\hat{b}_1	\cdots	\hat{b}_s
	\tilde{b}_1	\cdots	\tilde{b}_s

Das System (13) stellt ein differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE) dar, zu dessen Lösung sich diagonal-implizite *Runge-Kutta*-Verfahren (DIRK) mit geeigneten Stabilitätseigenschaften anbieten (Hairer et al. [4]), deren Koeffizienten in einem sog. *Butcher*-Schema angeordnet werden. Der entscheidende Schritt auf jeder Stufe i des s -stufigen Verfahrens ist die Lösung eines nicht-linearen Gleichungssystems:

Abb. 1: *Butcher*-Schema für ein s -stufiges DIRK

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_i^1(\mathbf{z}_i^1, \mathbf{z}_i^2) \\ \mathbf{r}_i^2(\mathbf{z}_i^1, \mathbf{z}_i^2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{h_n a_{ii}} \mathbf{M}(\mathbf{z}_i^1 - \mathbf{s}_i^1) + \mathbf{k}(\mathbf{u}_n + \mathbf{z}_i^1, \mathbf{q}_n + \mathbf{z}_i^2) - \mathbf{f} \\ \frac{1}{h_n a_{ii}} \mathbf{A}(\mathbf{z}_i^2 - \mathbf{s}_i^2) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_n + \mathbf{z}_i^2, \mathbf{u}_n + \mathbf{z}_i^1) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Ausgehend von bekannten Näherungen \mathbf{u}_n und \mathbf{q}_n zum Zeitpunkt t_n sind $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}_n + \mathbf{z}_i^1$ und $\mathbf{Q}_i = \mathbf{q}_n + \mathbf{z}_i^2$ Näherungen auf der Stufe i . Für die Zeitableitungen erhält man Näherungen $\mathbf{U}_i' = (\mathbf{z}_i^1 - \mathbf{s}_i^1)/(h_n a_{ii})$ und $\mathbf{Q}_i' = (\mathbf{z}_i^2 - \mathbf{s}_i^2)/(h_n a_{ii})$ mit $\mathbf{s}_i^1 = h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{U}_j'$ und $\mathbf{s}_i^2 = h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{Q}_j'$. Die entgültige Lösung zum neuen Zeitpunkt t_{n+1} ergibt sich schließlich zu $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{U}_i'$ und $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{Q}_i'$. Verwendet man statt der Gewichte b_i die Gewichte \hat{b}_i , so ergibt sich ein eingebettetes Verfahren niedrigerer Ordnung. Durch Vergleich der beiden Lösungen unterschiedlicher Ordnung erhält man eine Schätzung für den Hauptteil des lokalen Diskretisierungsfehlers, die zu einer Schrittweitensteuerung herangezogen wird.

Das resultierende nicht-lineare Gleichungssystem (14) wird mit einem verallgemeinerten *Block-Gauß-Seidel-Newton*-Verfahren gelöst. Dazu werden zunächst im Rahmen eines lokalen *Newton*-Verfahrens die Gleichungen der Plastizität $\mathbf{r}_i^2(\mathbf{z}_i^2; \mathbf{z}_i^1) = \mathbf{0}$ gelöst. Dies entspricht einer elementweisen Auswertung der Materialgleichungen. Im nächsten Schritt werden die FEM-Knoten-Gleichungen gelöst, wobei die Abhängigkeit von den plastischen Evolutionsgleichungen bei der Linearisierung berücksichtigt wird (algorithmisch konsistente Linearisierung). Für das implizite *Euler*-Verfahren ergibt sich aus dieser Verfahrensvorschrift das bekannte (elastische) Prädiktor- (plastische) Korrektor-Verfahren,

In einem Biaxial-Versuch wird durch gezielte Schwächung der Materialparameter am unteren Rand links der Mitte eine Scherbandbildung angeregt. Bei Berechnung mit einem *Runge-Kutta-Verfahren* 3.(2.)-Ordnung spricht die Schrittweitensteuerung zuverlässig an und verkleinert die Schrittweite sowohl in den Bereichen von Laständerungen als auch bei einsetzender Plastizität. Dadurch wird das Scherband automatisch in der richtigen Lage berechnet. Verwendet man hingegen ein implizites *Euler-Verfahren* zur Zeitintegration, dessen Schrittweite über die Anzahl der *Newton-Schritte* je Zeitschritt gesteuert wird (Anpassung an die Nichtlinearitäten), werden beliebige andere Scherbandlagen ausgerechnet (vgl. Abb. 2 links). Nur bei Vorgabe einer genügend kleinen, konstanten Schrittweite gelangt auch das implizite *Euler-Verfahren* zur Lösung, die das *Runge-Kutta-Verfahren* sofort liefert (Abb. 2 rechts).

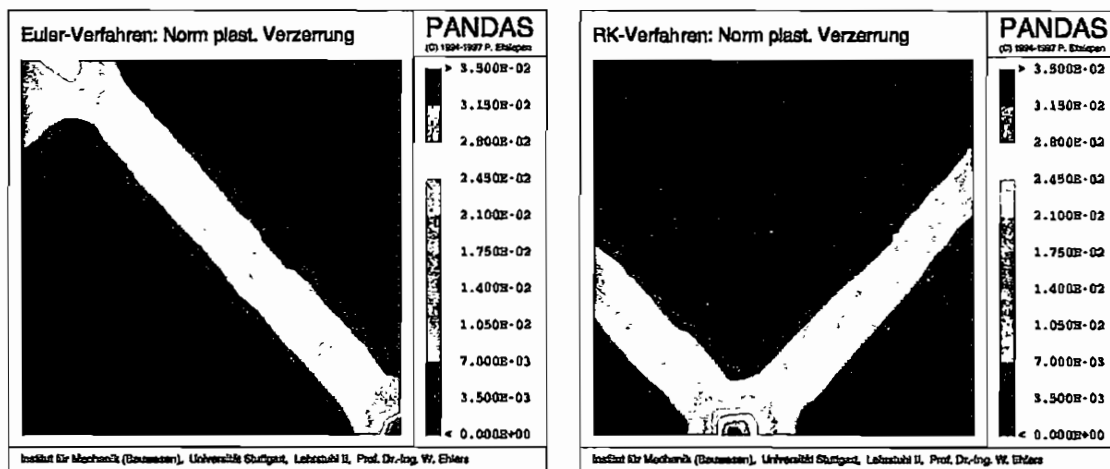


Abb. 2: Plastische Vergleichsdehnung. Links: Implizit *Euler*, rechts: *DIRK* 3(2).

Literatur

- [1] S. Diebels, P. Ellsiepen, and W. Ehlers. *A two-phase model for viscoplastic geomaterials*. Proceedings of the Int. Symp. Dynamics of Continua, zur Veröffentlichung angenommen, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. 96-II-6, Universität Stuttgart, 1996.
- [2] W. Ehlers. Constitutive equations for granular materials in geomechanical context. In K. Hutter (ed.), *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures No. 337, pp. 313–402. Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [3] W. Ehlers. A single-surface yield function for geomaterials. *Arch. Appl. Mech.* **65** (1995), 246–259.
- [4] E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche. *The Numerical Solution of Differential-Algebraic-Systems by Runge-Kutta-Methods*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1989.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Ranlecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Krut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Blehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen GÜldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Elgenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten Ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems In the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 **Helmut Stumpf:**
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 **Bernd Kaempf:**
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 **Alfred Kraft:**
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 **Petrisor Mazilu:**
**Variationsprinzipie der Thermoplastizität
 II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse**
- Nr. 38 **Klaus-Detlef Mickley:**
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realsierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 **Lutz-Peter Nolte:**
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 **Ulrich Blix:**
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 **Peter Becker:**
Zur Berechnung von Schalefeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 **Dietmar Bouchard:**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 **Uwe Zdebil:**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 **Jan Kubik:**
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 **Horst J. Klepp:**
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 **Franz Karl Labisch:**
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 **J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 **Karl-Heinz Bürger:**
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und Ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Welchert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua Liu:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Welchert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Gels:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer struktureller Systeme

- Nr. 69 **Berthold Schleck:**
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 **Frank Szepan:**
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 **Christian Scholz:**
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 **J. Badur/H. Stumpf:**
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 **Werner Fornefeld:**
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 **J. Sączuk/H. Stumpf:**
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 **Andreas Feldmüller:**
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 **Ulfert Rott:**
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 **Thomas Heinrich Pingel:**
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 **O. T. Bruhns:**
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 **J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:**
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 **J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:**
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 **R. H. Franja/H. Waller:**
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 **B. Bischoff-Belermann:**
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 **J. Pohé:**
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 **U. Kilillus:**
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 **T. Guo:**
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material

- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schießle:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua
unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von
Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem
Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung

- Nr. 105 **Bjarne Fosså:**
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 **Khanh Chau Le:**
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 **Holger Behrens:**
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 **Johannes Moosheimer:**
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 **Dirk Klaus Anding:**
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 **Stephan Weng:**
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 **Michael Straßberger:**
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112 **Hans-Jörg Becker:**
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 **Thomas Nerzak:**
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 **O. T. Bruhns:**
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1997







**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 114**