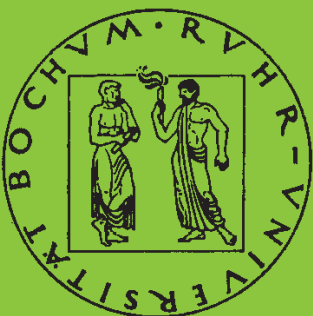


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Thomas Pandorf**

**Experimentelle und numerische  
Untersuchungen zur  
Kerbspitzenbeanspruchung bei  
schlagbelasteten Biegeproben**

Heft Nr. 116



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Thomas Pandorf

**Experimentelle und numerische  
Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung  
bei schlagbelasteten Biegeproben**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 116  
August 1998

Herausgeber:  
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum  
Schriftenreihe  
Universitätsstr. 150  
44780 Bochum

© 1998 Dr.-Ing. Thomas Pandorf  
Rolandstraße 17  
52223 Stolberg

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werkes oder auch Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

---

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Graduiertenkollegs 'Computational Structural Dynamics' während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe für Experimentelle Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. F. Kalthoff danke ich herzlich für die Themenstellung und Anregung zu dieser Arbeit. Erst durch seine wertvollen Ratschläge und stete Diskussionsbereitschaft konnte die Arbeit in der vorliegenden Form entstehen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Berns danke ich für die Freiräume, die er mir während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl Werkstofftechnik einräumte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Weichert danke ich für seine große Unterstützung und Beratung bei der Fertigstellung meiner Arbeit und die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Mein besonderer Dank gilt den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Experimentelle Mechanik, insbesondere den Herren Dipl.-Ing. W. Hiese und J. Banken für die kontinuierliche und gewissenhafte Hilfe bei der Durchführung der bruchmechanischen Experimente. Herrn M. Mrowitzki und der Belegschaft der mechanischen Werkstatt am Lehrstuhl Werkstofftechnik danke ich für die sorgfältige Herstellung der Proben. Dem Herrn Dipl.-Ing. R. Pandorf für die große Unterstützung bei der Lösung von numerischen Problemen und die große Hilfe bei der Fertigstellung der Arbeit. Den Herren Dipl.-Ing. F. Schwabe und Dipl.Math. U. Prahl vom Institut für Allgemeine Mechanik der RWTH Aachen für die große Hilfe bei der Erstellung der Bilder und der sorgfältigen Durchsicht des Manuskripts.

Weiterhin gilt mein Dank allen Institutsmitgliedern des Instituts für Allgemeine Mechanik für die Unterstützung in der Endphase meiner Arbeit.

Insbesondere gilt mein Dank meinen Eltern, ohne deren langjährige Unterstützung die Arbeit nicht entstanden wäre.

Referenten:

. Prof. Dr.-Ing. J. F. Kalthoff  
Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Tag der Einreichung: 08.04.1997

Tag der mündlichen Prüfung: 12.06.1997

---

## Zusammenfassung

Für die Zuverlässigkeit eines Prüfverfahrens zur Bestimmung werkstoffspezifischer Kennwerte ist die Genauigkeit der Auswertemethoden hinsichtlich dieser Größen von Bedeutung. Für den Fall dynamisch belasteter gekerbter bzw. angerissener Proben stellt sich bei der Ermittlung bruchmechanischer Werkstoff-Kenngrößen die Frage nach dem Einfluß der Trägheitskräfte auf die Ermittlung der Kerbspitzenbeanspruchung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die energetische Bestimmung der zeitlichen Kerbbelastung im Kerbschlagbiegeversuch unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte untersucht.

Es wird ein Verfahren vorgestellt, welches die Ermittlung der Kerbspitzenbeanspruchung schlagbelasteter Biegeproben nach der Energiemethode korrigiert. Diese Energiemethode stellt ein in der Praxis häufig verwendetes Verfahren dar. Durch diese Korrektur ist es möglich, genauer als bisher das zeitliche Verhalten der Kerbbeanspruchung zu beschreiben, da nach der üblichen Vorgehensweise der Einfluß der Trägheitskräfte auf die Kerbspitzenbeanspruchung vernachlässigt bzw. gemittelt wird. Dies hat seinen Grund darin, daß keine genaue Kenntnis über diesen Einfluß vorliegt.

Zur Analyse der Probenbelastung während des Schlagvorgangs wird ein numerisches Modell entwickelt, welches den Kerbschlagbiegeversuch simuliert. Die Gültigkeit dieses Modells wird anhand experimenteller Daten überprüft. Für den Anwendungsfall eines duktilen Aluminium-Werkstoffs werden die energetischen Anteile durch Berechnung des  $J$ - bzw.  $\Delta T_p$ -Integrals numerisch bestimmt, die zum Aufbau der Kerbbeanspruchung beitragen. Damit sind die Energiemethoden auf einen größeren Bereich als bisher anwendbar, da keine Einschränkung hinsichtlich der Berücksichtigung der Trägheitskräfte gegeben ist. Die Bestimmung des Einflusses der Trägheitskräfte auf das  $J$ -Integral geschieht durch die Ermittlung von Korrekturkurven, deren Anwendung keine aufwendigen numerischen Verfahren zur Auswertung des Kerbschlagbiegeversuchs erfordert. Deshalb sind die Ergebnisse besonders für solche Anwendungsfälle geeignet, die eine schnelle und kostengünstige Versuchsdurchführung erfordern.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>IV</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Bruchmechanische Konzepte . . . . .	3
2.1.1 Allgemeines . . . . .	3
2.1.2 Die linear-elastische Bruchmechanik . . . . .	4
2.1.3 Die Fließbruchmechanik . . . . .	7
2.1.4 Bruchdynamik . . . . .	10
2.1.4.1 Allgemeines . . . . .	10
2.1.4.2 Wellenausbreitung in Festkörpern . . . . .	12
2.1.4.3 Kerbspitzenbelastung bei dynamischer Beanspruchung . .	13
2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . . .	14
2.2.1 Kinematische Beziehungen . . . . .	14
2.2.2 Spannungsmaße . . . . .	18
2.2.3 Gleichgewicht und virtuelle Arbeit . . . . .	19
2.2.4 Konstitutive Beziehungen . . . . .	21
2.2.5 Objektivität . . . . .	24
2.3 Experimentelle Grundlagen . . . . .	25
2.3.1 Der instrumentierte Kerbschlagbiegeversuch . . . . .	25
2.3.2 Das schattenoptische Kaustikenverfahren . . . . .	28
<b>3 Stand der Forschung</b>	<b>34</b>
3.1 Experimentelle Verfahren . . . . .	34
3.1.1 Ermittlung der dynamischen Bruchzähigkeit einer Probe . . . . .	34
3.1.2 Ermittlung der Kerbspannungsintensität . . . . .	36
3.2 Numerische Modellierung . . . . .	38
3.2.1 Verschiedene Integralkriterien zur Berechnung der Kerbspannungsintensität . . . . .	38
3.2.2 Untersuchungen zur Berechnung von Kerbspannungsintensitäten . .	40

<b>4</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>43</b>
4.1	Ermittlung der mechanischen Eigenschaften der verwendeten Werkstoffe . .	43
4.2	Oberflächenbehandlung der Proben . . . . .	44
4.3	Dynamische Messungen . . . . .	45
4.3.1	Allgemeines . . . . .	45
4.3.2	Ermittlung der Hammerkraft . . . . .	45
4.3.3	Messung der Kerbspannungsintensität . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Numerische Untersuchungen</b>	<b>52</b>
5.1	Die Methode der Finiten Elemente . . . . .	52
5.1.1	Allgemeines . . . . .	52
5.1.2	Dynamisches Gleichgewicht und Prinzip der virtuellen Arbeit . . .	52
5.1.3	Modellierung des Kontakts zwischen Festkörpern . . . . .	54
5.1.4	Die Formulierung der Elemente . . . . .	55
5.1.4.1	Ebene Elemente . . . . .	55
5.1.4.2	Kontaktelemente . . . . .	57
5.1.4.3	Die Modellierung der Auflager . . . . .	58
5.1.5	Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen . . . . .	58
5.1.6	Die numerische Integration . . . . .	60
5.1.7	Die Lösung des nichtlinearen dynamischen Problems . . . . .	61
5.1.7.1	Die implizite Zeitintegration . . . . .	61
5.1.7.2	Der nichtlineare Lösungsalgorithmus nach Newton . . . .	62
5.2	Die Ermittlung der Kerbspannungsintensität . . . . .	63
5.2.1	Allgemeines . . . . .	63
5.2.2	Die numerische Formulierung von $\Delta T_p$ . . . . .	63
5.3	Die elastodynamische Vergleichslösung . . . . .	66
5.4	Preprocessing, Postprocessing und Interface-Programme . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Darstellung und Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>70</b>
6.1	Verifikation der FEM-Modellierung . . . . .	70
6.1.1	Dynamisches Verhalten der Proben . . . . .	70
6.1.2	Berechnung der Spannungsintensität . . . . .	77
6.2	Vergleich und Bewertung der Verfahren zur Berechnung der Kerbspannungsintensität . . . . .	78
6.3	Die elastodynamische Vergleichslösung . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Schlußfolgerungen und Grenzen</b>	<b>103</b>

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	III
<b>8 Zusammenfassung</b>	<b>106</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>



# Nomenklatur

## Symbole

### Tensoren und Matrices

<b>B</b>	Linker Cauchy-Green-Tensor
<b>B<sup>e</sup></b>	Dehnungs-Verschiebungs-Matrix
<b>C</b>	Green'scher Deformationstensor (rechter Cauchy-Green-Tensor)
<b>C̄</b>	Nachgiebigkeitstensor
<b>D</b>	Deformationsratentensor
<b>D̄</b>	Elastizitätstensor
<b>e</b>	Euler-Almansi'scher Dehnungstensor
<b>E</b>	Green-Lagrange'scher Dehnungstensor
<b>F</b>	Deformationsgradient
<b>I</b>	Einheitstensor 2. Stufe
<b>J</b>	Einheitstensor 4. Stufe
<b>J<sup>e</sup></b>	Jacobi-Matrix
<b>L</b>	Geschwindigkeitsgradiententensor
<b>M</b>	Massenmatrix
<b>Q</b>	orthogonaler Rotationstensor
<b>R</b>	Rotationstensor
<b>U</b>	Rechts-Streck-Tensor
<b>V</b>	Links-Streck-Tensor
<b>W</b>	Spintensor
<b>ε</b>	linearer Dehnungstensor
<b>ε*</b>	Eigendehnungstensor
<b>ε̄</b>	auf die einachsige Fließdehnung bezogener linearer Dehnungstensor
<b>Ω<sub>Q</sub></b>	Rotationstensor
<b>σ</b>	Cauchy'scher Spannungstensor
<b>σ̄</b>	auf die einachsige Fließspannung bezogener Cauchy'scher Spannungstensor
<b>σ'</b>	Spannungsdeviator
<b>Σ<sup>1</sup></b>	1. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
<b>Σ<sup>2</sup></b>	2. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
<b>τ</b>	Kirchhoff'scher Spannungstensor

## Vektoren

<b>a</b>	Beschleunigung
<b>f</b>	bezogene Oberflächenkraft
<b>f<sub>0</sub></b>	bezogene Oberflächenkraft (Referenzkonfiguration)
<b>I</b>	innerer Kraftvektor
<b>L</b>	Lagrange-Multiplikator-Kraft
<b>n</b>	Normalenvektor (aktuelle Konfiguration)
<b>N</b>	Normalenvektor (Referenzkonfiguration)
<b>N<sup>e</sup></b>	Formfunktion
<b>p</b>	Volumenkraft
<b>P</b>	äußerer Kraftvektor
<b>R</b>	Residualkraft
<b>u</b>	Verschiebung
<b>v</b>	Geschwindigkeit
<b>V<sub>H</sub></b>	Hilfsgröße zur Bestimmung des H-Integrals
<b>x</b>	Lagrange'sche (materielle) Koordinaten
<b>X</b>	Euler'sche (räumliche) Koordinaten

## Skalare

<b>a</b>	Rißlänge
<b>A</b>	Umschlossene Fläche eines Integrationspfades
<b>A<sub>K</sub></b>	Prüfquerschnitt einer Kerbschlagbiegeprobe
<b>A<sub>V</sub></b>	Kerbschlagarbeit
<b>B</b>	Ligamentbreite
<b>c</b>	schattenoptische Konstante
<b>c<sub>0</sub></b>	longitudinale Wellengeschwindigkeit
<b>c<sub>1</sub></b>	transversale Wellengeschwindigkeit
<b>c<sub>2</sub></b>	Rayleigh- Wellengeschwindigkeit
<b>C</b>	Compliance einer Probe
<b>d</b>	Probendicke
<b>ds</b>	Länge des Vektors $d\mathbf{x}$
<b>dS</b>	Länge des Vektors $d\mathbf{X}$
<b>D</b>	Kaustikdurchmesser
<b>D<sub>τ</sub></b>	dimensionsloser Parameter
<b>E</b>	Elastizitätsmodul
<b>E'</b>	zur Berechnung der Übergangszeit verwendete Form des E-Moduls (ESZ oder EDZ)
<b>F</b>	Fließfunktion
<b>G</b>	Energiefreisetzungsrage
<b>h</b>	Verfestigungskoeffizient
<b>H</b>	Lagrange-Multiplikator
<b>I</b>	Flächenträgheitsmoment
<b>J</b>	J-Integral
<b>J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>, J<sub>3</sub></b>	1., 2., und 3. Invariante des Spannungstensors

---

$J_{Ic}$	materialspezifische Kenngröße des J-Integrals (Mode I)
$J_{Id}$	materialspezifische Kenngröße des J-Integrals bei dynamischer Belastung (Mode I)
$k$	Werkstoffkonstante
$K$	Kompressionsmodul (Volumenelastizitätsmodul)
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktor (Mode I, Mode II, Mode III)
$K_{Ic}$	Bruchzähigkeit (Mode I)
$K_{Id}$	dynamische Bruchzähigkeit (Mode I)
$l$	Probenlänge
$m_h$	Masse des Pendelhammers
$Q$	plastisches Potential
$r$	Radius (Polarkoordinate)
$r_0$	Umkreisradius
$r_d$	Mindestradius für den Umkreisradius (elastische Auswertung)
$r_p$	Radius der plastischen Zone um eine Rißspitze
$R$	Rißwiderstand
$R_K$	Radius des $K_I$ -dominierten Spannungsfeldes um eine Rißspitze
$s$	Probenauflagerabstand
$s$	Verschiebung des Kraftangriffspunkts
$S$	Oberfläche eines Körpers
$S_0$	Oberfläche eines Körpers (Referenzkonfiguration)
$S_h$	Skalierungsfaktor (Ramberg-Osgood-Modell)
$t$	Zeit
$t_\tau$	Übergangszeit
$U$	gesamte Dehnungsenergie
$U_a$	potentielle Energie
$U_e$	elastische Dehnungsenergie
$U_\gamma$	Oberflächenenergie
$U_V$	volumenbezogene Verformungsarbeit
$V$	Volumen eines Körpers
$w$	Probenhöhe
$W_F$	Arbeit der äußeren Kräfte
$z_0$	Abstand Probe-Bildebene
$z_{II}$	dimensionslose Compliance einer Probe
$\alpha$	Gewichtungsoperator zur impliziten Zeitintegration
$\alpha_h$	Multiplikationsfaktor (Ramberg-Osgood-Modell)
$\beta$	Gewichtungsoperator zur impliziten Zeitintegration
$\gamma$	Gewichtungsoperator zur impliziten Zeitintegration
$\Gamma$	Integrationspfad um eine Rißspitze
$\varepsilon_V^p$	plastische Vergleichsdehnung
$\eta$	lokale Koordinate
$\kappa$	Faktor zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens im ebenen Spannungs- oder Dehnungszustand
$\lambda$	plastischer Multiplikator
$\Lambda$	Multiplikationsfaktor für die plastische Zone
$\Lambda_\tau$	geometrie- und materialabhängiger Faktor
$\mu$	Schubmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl

---

$\phi$	Winkel (Polarkoordinate)
$\phi$	Potential zur Beschreibung der Volumenänderung
$\psi$	Potential zur Beschreibung der Gestaltänderung
$\xi$	lokale Koordinate
$\rho$	Dichte
$\rho_p$	Radius der Prozeßzone
$\sigma_0$	einachsige Fernfeldspannung
$\sigma_F$	einachsige Fließspannung
$\sigma_v$	von-Mises-Vergleichsspannung
$\tau_F$	Fließgrenze bei reiner Schubbeanspruchung
$\tau_s$	Schwingungsdauer
$\omega_1$	1. Eigenfrequenz
$\Omega$	Konfiguration eines Körpers

## Abkürzungen

DMS	Dehnungsmeßstreifen
EDZ	ebener Dehnungszustand
EPBM	elastisch-plastische Bruchmechanik
ESZ	ebener Spannungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
LEBM	linear-elastische Bruchmechanik



# 1 Einleitung

Der Kerbschlagbiegeversuch ist ein weitverbreitetes Verfahren zur Ermittlung der Werkstoffzähigkeit bei mehrachsigen Spannungszustand und erhöhter Verformungsgeschwindigkeit. In der Praxis tritt diese Belastungskombination häufig auf. Als Beispiel seien Verfahren genannt, bei denen Festkörper in Kontakt kommen, z.B. Schmiedewerkzeuge, Zerkleinerungsmaschinen oder Pressen. Durch diese Art der Beanspruchung werden häufig Materialschädigungen hervorgerufen [1]. Die Kenntnis des Werkstoffwiderstandes gegen das Entstehen und die Ausbreitung von Rissen ist deshalb eine der notwendigen Voraussetzungen für die sichere und dauerhafte Auslegung der beteiligten Komponenten.

Die Vorteile des Kerbschlagbiegeversuchs liegen in seiner Anwendbarkeit auf fast alle Werkstoffgruppen, dem niedrigen meßtechnischen Aufwand zur Auswertung und der kostengünstigen Versuchsdurchführung [2]. Allerdings bietet die aus diesem Verfahren ermittelte Kerbschlagarbeit keine Informationen über die Energieanteile, die zur Einleitung der einzelnen Bruchphasen notwendig sind. Im allgemeinen werden die Phasen der Ribinitiierung, der stabilen und der instabilen Rißausbreitung unterschieden [3]. Um diese Aufteilung vornehmen zu können, wurde der instrumentierte Kerbschlagbiegeversuch entwickelt, mit dessen Hilfe der zeitliche Verlauf der auf die Probe wirkenden Kraft ermittelt werden kann [4]. Die obengenannten Vorteile gelten im wesentlichen auch für diese Art der Versuchsführung, lediglich die Ermittlung des zeitlichen Kraftverlaufs ist aufwendiger.

Vor allem in der Anfangsphase des dynamischen Belastungsvorgangs stellen die Trägheitskräfte, die bei einer genügend hohen Belastungsgeschwindigkeit induziert werden, die dominierende Kraftgröße dar. Ihr energetischer Anteil zur Ribbildung ist bisher nicht eindeutig bestimmbar [5], so daß sich die Frage stellt, inwieweit die Trägheitskräfte zur Quantifizierung der Beanspruchung einer gekerbten oder angerissenen Probe berücksichtigt werden müssen.

Im allgemeinen wird bei der Auswertung eines Schlagversuchs davon ausgegangen, daß der Bruchvorgang dann auftritt, wenn die Trägheitskräfte keine Rolle mehr spielen, das Probenverhalten also im wesentlichen durch quasi-statische Methoden beschrieben werden kann. Unter dieser Voraussetzung wird die Auswertung der Probenenergie im Hinblick auf die Kerbspannungsintensität vorgenommen. Ermittelt wird das J-Integral nach Rice [6], welches ein Maß für die Beanspruchung des Kerbs darstellt. Dazu ist die Kenntnis des energetischen Anteils notwendig, der für den Aufbau der Kerbbeanspruchung berücksichtigt werden muß. Häufig wird die Meinung vertreten, daß die Trägheitskräfte den zeitlichen Verlauf der Kerbbeanspruchung nicht beeinflussen, so daß sein Anteil zur Probenenergie entweder nicht ausgewertet [7] oder die gemessene Kurve geglättet wird [8].

Ziel dieser Arbeit ist die Quantifizierung des Einflusses der Trägheitskräfte auf die Kerbbeanspruchung. Hierbei wird besonders berücksichtigt, daß für den Fall einer elastisch-plastisch reagierenden Probe, die unter einer dynamischen Beanspruchung steht, der erwähnte J-Wert als Kenngröße der Kerbspannungsintensität nur eine Näherung darstellt.

Sein Gültigkeitsbereich und eventuelle Korrekturmöglichkeiten werden daher genau untersucht. Für experimentelle Verfahren ist es weiterhin wichtig, daß keine zeitaufwendigen numerischen Verfahren zur Auswertung im Hinblick auf die zu ermittelnden Größen angewendet werden müssen, um eine effiziente und kostengünstige Versuchsdurchführung zu gewährleisten. Deshalb wird ebenfalls untersucht, ob sich die gewonnenen Erkenntnisse auf die Auswertung nach der üblichen Energiemethode anwenden lassen.

Zur Beurteilung der Bedeutung der Trägheitskräfte während des Schlagvorgangs ist das ermittelte Kraft-Zeit-Diagramm ein wichtiges Hilfsmittel. Der Einfluß der Trägheitskräfte auf das Probenverhalten drückt sich hier in unterschiedlich großen Amplituden aus. Weiterhin kann aus dem Vergleich der Schwingungsdauer der Probe und den Oszillationen im gemessenen Kraftsignal das dynamische Verhalten der Probe beurteilt werden.

In der vorliegenden Arbeit ist vor allem der zeitliche Verlauf der Kerbspannungsintensität während des Schlagvorgangs von Interesse. Es wird nur die ungebrochene Probe betrachtet, die Rißinitiierung und die Rißausbreitung werden nicht berücksichtigt. Besonderes Augenmerk wird auf die Auswirkung von plastischen Effekten während des Schlagvorgangs gelegt, weshalb als Probenwerkstoff eine duktile Aluminium-Legierung ausgewählt wurde.

Zur Bestimmung des Verlaufs der Kerbbeanspruchung werden experimentelle und numerische Methoden angewendet. Die experimentellen Untersuchungen liefern zum einen Informationen über den Ablauf des Schlagvorgangs und dienen somit zur Überprüfung der numerischen Modelle. Andererseits wird versucht, mit ihrer Hilfe die aus der Simulation gewonnenen Erkenntnisse zu stützen. Bei den numerischen Untersuchungen geht es hauptsächlich um die Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Kerbbeanspruchung. Dafür ist eine realitätsnahe Wiedergabe der Vorgänge beim Schlagversuch eine notwendige Bedingung. Deshalb wird die Gültigkeit der Modellierung durch den Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen aufgezeigt.

Die Arbeit ist in acht Kapitel untergliedert. Nach dieser Einleitung werden die Grundlagen der Bruchmechanik, der Kontinuumsmechanik und der experimentellen Verfahren dargestellt, die zur Behandlung der vorliegenden Fragestellung notwendig sind. Anschließend wird der Stand der Forschung beschrieben, dem sich eine Schilderung der experimentellen Verfahren anschließt. Im fünften Abschnitt wird die Verwendung der Methode der finiten Elemente erläutert und die numerische Bestimmung der Kerbspannungsintensität beschrieben. Anschließend werden die Ergebnisse der Rechenstudien vorgestellt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Die Darstellung der Schlußfolgerungen und der Grenzen der verwendeten Modelle und Methoden sowie eine Zusammenfassung schließen die Arbeit ab.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Bruchmechanische Konzepte

#### 2.1.1 Allgemeines

Die Methoden der Bruchmechanik finden Anwendung, wenn das Auftreten und die Gefährlichkeit von Rissen in Bauteilen beschrieben und beurteilt werden sollen. Zu berücksichtigende Größen bei der Beschreibung sind in erster Linie die Beanspruchungsart des Risses, die Bruchzähigkeit des Materials sowie die Geschwindigkeit der Belastung. Die Beanspruchungsarten eines Risses werden im allgemeinen bezüglich der Belastungsrichtung eingeteilt. Üblicherweise werden drei Fälle unterschieden [9]:

- Mode I: Die Belastung des Risses erfolgt orthogonal zur Bruchfläche. Daraus ergibt sich eine Öffnung des Risses in Belastungsrichtung.
- Mode II: Die Belastung des Risses erfolgt in der Ebene der Bruchfläche, wobei die Rißufer gegeneinander in Richtung des Risses verschoben werden.
- Mode III: Die Belastung des Risses erfolgt ebenfalls in der Ebene der Bruchfläche, allerdings orthogonal zur Rißrichtung, so daß die Rißufer ebenfalls senkrecht zur Rißrichtung gegeneinander verschoben werden.

In der Praxis treten häufig Kombinationen dieser Belastungsarten auf. Obwohl neuere Arbeiten zeigen, daß der Mode II-Fall bei dynamischer Belastung mindestens ebenso kritisch für ein Bauteil ist wie der Mode I-Fall [10], erfolgen Materialprüfungen größtenteils durch Aufbringen einer Mode I-Belastung.

Ist die Belastungsgeschwindigkeit eines Bauteils dergestalt, daß Trägheitskräfte des Materials bei der mechanischen Beschreibung des Rißverhaltens nicht mehr vernachlässigt werden können, so spricht man von dynamischer Bruchmechanik oder Bruchdynamik [11]. Eine entsprechende Begriffsbildung für den Fall, daß Trägheitskräfte keine Rolle spielen, existiert nicht; man spricht einfach von Bruchmechanik.

Häufig können Probleme der Bruchmechanik mit den Mitteln der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) beschrieben werden. Das ist neben linear-elastischen, spröden Werkstoffen insbesondere bei Materialien mit geringer Bruchzähigkeit der Fall [3]. Geht dem Versagen eines Bauteils allerdings eine signifikante plastische Verformung voraus, so muß das Konzept der LEBM auf die elastisch-plastische Bruchmechanik (EPBM) erweitert werden [12, 13, 14]. Ist das Materialverhalten zeitabhängig, so unterscheidet man noch die visko-elastische und die visko-plastische Bruchmechanik [3].



Bei der mathematischen und numerischen Behandlung von mechanischen Problemen trifft man häufig vereinfachende Annahmen, um eine Beschreibung oder Lösung zu ermöglichen, ohne jedoch charakteristische Eigenschaften des Problems so zu verändern, daß das ermittelte Ergebnis keine brauchbaren Aussagen über gewünschte Fragestellungen mehr zuläßt. Eine solche Modellbildung ist die Reduzierung eines dreidimensionalen Zustands eines Körpers auf ein ebenes Problem. Dabei lassen sich zwei Verfahren je nach Art der Problemstellung unterscheiden:

- Die Reduzierung auf einen ebenen Dehnungszustand (EDZ) impliziert, daß der Körper keine Dickenänderung erfährt, d.h. daß die Dehnungen in Dickenrichtung vernachlässigbar sind. Diese Annahme ist bei sehr dicken Bauteilen und bei bruchmechanischen Proben im Innern der Probe nahe der Rißspitze gewährleistet, wobei eine resultierende Spannungskomponente in Dickenrichtung auftritt, die einen hohen Gradienten aufweist.
- Ein ebener Spannungszustand (ESZ) kann im Gegensatz dazu bei dünnen Bauteilen angenommen werden, die sich unter einer gegebenen Belastung auch in Dickenrichtung verformen. Die Spannungen senkrecht zur Bauteilebene sind daher vernachlässigbar klein. In der Bruchmechanik kann der Spannungszustand nahe der Bauteiloberfläche durch diese Näherung gut repräsentiert werden.

Voraussetzung für diese Einteilung ist, daß in Dickenrichtung keine äußeren Kräfte auftreten, sondern nur in der Probenebene.

In der vorliegenden Arbeit werden lediglich solche Modelle verwendet, die diese Reduzierung auf ein ebenes Problem beinhalten. Diese Vereinfachung ist aus numerischen Gründen notwendig und aus mechanischer Sicht berechtigt, worauf später noch genauer eingegangen wird.

An dieser Stelle soll eine Bemerkung zur Gültigkeit der angewendeten Methoden gemacht werden. Strenggenommen gelten die Beziehungen, die im Rahmen dieser Arbeit zur Ermittlung der Kerbspannungsintensität verwendet werden, nur für Risse, d.h. für die Anwendung auf gekerbte Bauteile oder Proben ist die theoretische Grundlage nicht gegeben. Dies gilt sowohl für das J-Integral als auch für das  $\Delta T_p$ -Integral [15], welches zur Berechnung der Kerbbelastung herangezogen wird. Dem steht gegenüber, daß das J-Integral als anerkanntes Kriterium zur Auswertung des Kerbschlagbiegeversuchs in der Praxis seit langem angewendet wird [8, 16]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird deshalb angenommen, daß diese Methoden auch auf die Berechnung gekerbter Proben angewendet werden können.

### 2.1.2 Die linear-elastische Bruchmechanik

Wie bereits erwähnt, ist die Anwendung der LEBM nur für Körper zulässig, deren globales Werkstoffverhalten dem Hooke'schen Gesetz entspricht, also linear-elastisch ist. Dieses Konzept schließt auch das Kleinbereichsfließen ein, womit das Auftreten kleiner plastischer Zonen vor der Rißspitze gemeint ist [17]. Griffith [18] ist davon ausgegangen, daß sich ein Riß nur dann ausbreitet, wenn die Gesamtenergie der Probe durch diesen Vorgang abnimmt oder zumindest konstant bleibt. In Abbildung 2.1 ist eine unendlich große

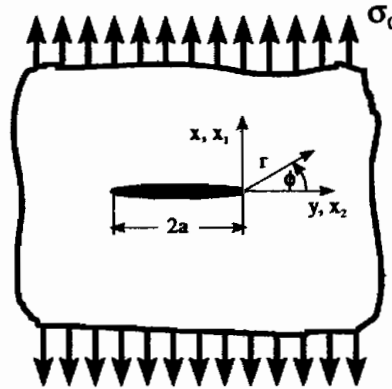


Abbildung 2.1: Rißbehaftete Scheibe der Dicke  $d$  (Griffith-Riß)

Scheibe der Dicke  $d$  mit einem Riß der Länge  $2a$  dargestellt, die durch eine konstante Spannung  $\sigma_0$  (Fernfeldspannung) belastet wird.

Der dargestellte Riß verlängert sich dann um eine inkrementelle Änderung  $\delta a$ , wenn die auf die Dicke bezogene, durch die Rißverlängerung freiwerdende potentielle Energie  $\delta U_a$  gleich der bezogenen freiwerdenden Oberflächenenergie  $\delta U_\gamma$  ist, die notwendig ist, um eine neue Rißoberfläche zu schaffen:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U_a}{\partial a} + \frac{\partial U_\gamma}{\partial a} = 0 \quad (2.1)$$

oder

$$-\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{\partial U_\gamma}{\partial a}$$

oder

$$G = R$$

wobei  $U$  die gesamte Dehnungsenergie der Probe darstellt.  $G$  wird als Energiefreisetzungsrate und  $R$  als Rißwiderstand bezeichnet. Die potentielle Energie eines elastischen Körpers ist wie folgt definiert:

$$U_a = U_e - W_F \quad (2.2)$$

wobei  $U_e$  die elastische Dehnungsenergie des Körpers und  $W_F$  die Arbeit der äußeren Kräfte darstellen.

Unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens ist es für verschiedene Rißkonfigurationen möglich, die Spannungen in einem rißbehafteten Körper analytisch zu berechnen [19]. Unter Verwendung des Rißspitzen-Koordinatensystems aus Abbildung 2.1 und der Fernfeldspannung  $\sigma_0$  kann die Spannungsverteilung an einer Rißspitze ermittelt werden, so daß für das Spannungsnahfeld ( $r \rightarrow 0$ ) für den Fall einer Mode I-Belastung gilt [20]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\phi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \dots \\ \sigma_y &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\phi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \dots \\ \sigma_{xy} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aus diesen Beziehungen läßt sich eine  $1/\sqrt{r}$ -Singularität der Spannungen erkennen, weshalb Irwin [21] den Spannungsintensitätsfaktor (K-Faktor) als Maß für die Spannungsüberhöhung an einer Rißspitze eingeführt hat. In der allgemeinen Formulierung lautet er:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_y(r, \phi = 0) \sqrt{2\pi r} \right) \quad (2.4)$$

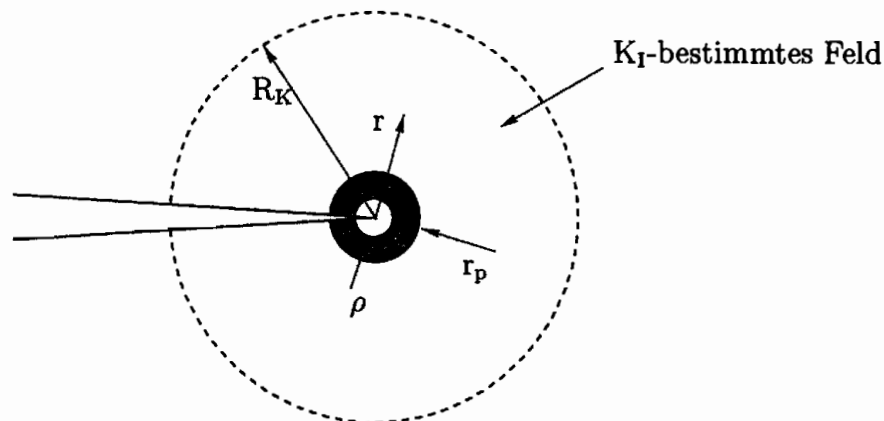
In Bauteilen endlicher Ausdehnung ist der Spannungsintensitätsfaktor abhängig von der Probengeometrie, der Rißlänge und -geometrie sowie der Art der statischen und kinematischen Randbedingungen.

Der K-Faktor steht nach [1] mit der Energiefreisetzungsrate  $G$  in folgendem Zusammenhang:

$$G_I = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_I^2 \quad (2.5)$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  den Schubmodul, und  $\kappa$  erhält für den EDZ den Wert  $(3 - \nu) / (1 + \nu)$ , für den ESZ den Wert  $3 - 4\nu$  ( $\nu$  ist die Querkontraktionszahl).

Das Rißspitzenfeld (siehe Gleichung (2.3)) ist durch den Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  eindeutig charakterisiert. Dieses  $K_I$ -bestimmte Feld dominiert in einem nach außen begrenzten Bereich um die Rißspitze, aber außerhalb dieses Bereiches können die Spannungsterme höherer Ordnung nicht mehr vernachlässigt werden. In einer kleinen Region um die Rißspitze hingegen sind die Annahmen der linearen Elastizitätstheorie, die dem Konzept der LEBM zugrunde liegen, nicht mehr gültig, da sowohl lokale plastische Verformungen auftreten als auch singuläre Verzerrungen, die der Annahme der Linearität (kleine Verzerrungen) widersprechen. Der Bereich des  $K_I$ -dominierten Spannungsfelds ist in Abbildung 2.2 dargestellt.



**Abbildung 2.2:** Darstellung des gültigen Bereiches für das K-Konzept

$r_p$  ist der Radius der plastischen Zone,  $\rho_p$  bezeichnet den Radius der Prozeßzone. Als Prozeßzone wird die Region um die Rißspitze bezeichnet, in der der Prozeß der Bindungslösung stattfindet. Dieser Bereich kann mit den Mitteln der Kontinuumsmechanik nicht beschrieben werden. Setzt man voraus, daß das  $K_I$ -bestimmte Gebiet groß ist gegenüber der Zone, die nicht durch die Nahfeldgleichungen dominiert wird, so kann man davon ausgehen, daß die Vorgänge in der Prozeß- bzw. der plastischen Zone alleine durch das umgebende  $K_I$ -Feld gesteuert werden [22]. Plastische Zonen treten neben dem Bereich um

die Rißspitze vornehmlich dort auf, wo sich aufgrund der Geometrie und der statischen und kinematischen Randbedingungen die höchsten Spannungen ergeben. Zur Entwicklung der plastischen Zone an den Kraffteinleitungsstellen der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Proben vom Charpy-Typ [23], an denen sich ein Kontaktproblem ergibt, sind keine quantifizierten Untersuchungen bekannt (bezüglich der Probengeometrie siehe Abschnitt 2.3.1). Das gleiche gilt für die Auflagerpunkte. Da diese Orte aber im allgemeinen das  $K_I$ -dominierte Feld nicht beeinflussen, gilt das Konzept der LEBM auch für solche Belastungsfälle.

Der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  kann somit als Zustandsgröße angesehen werden, die ein Maß für die Belastung im Rispitzenbereich ist, und ist demzufolge geeignet, ein Bruchkriterium zu formulieren, mit dem das Einsetzen des Riffortschritts bestimmt werden kann. Erreicht  $K_I$  eine materialspezifische kritische Größe  $K_{Ic}$ , so kommt es zum Riffortschritt (Bruch):

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.6)$$

Die Kenngröße  $K_{Ic}$  wird als Bruchzähigkeit bezeichnet, die in standardisierten Experimenten bestimmt wird (zur Bestimmung der dynamischen Bruchzähigkeit siehe Abschnitt 3.1.1).

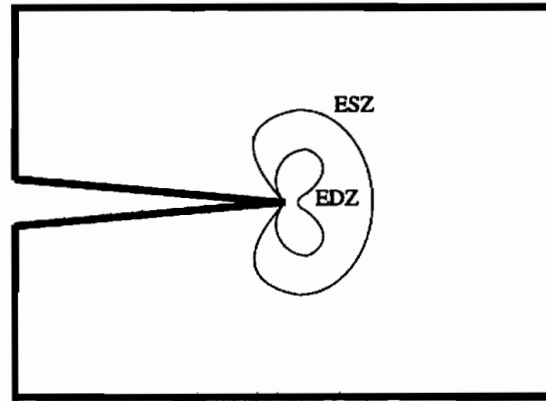
Entsprechende Kenngrößen existieren auch für den Mode II- bzw. den Mode III-Belastungsfall. Liegt eine Beanspruchung der Rißspitze vor, die sich aus den verschiedenen Belastungsmodes zusammensetzt, so wird das Einsetzen der Rißausbreitung durch ein Bruchkriterium  $f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0$  beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit kann aber davon ausgegangen werden, daß der Mode I-Fall der dominierende Belastungsfall ist.

Der Bruch tritt im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik als Sprödbruch auf. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem verformungsarmen Bruch (kleine inelastische Deformationen) oder verformungslosen Bruch (keine inelastischen Deformationen). Ist für den Riffortschritt keine Erhöhung der äußeren Last notwendig, so spricht man von instabilem, andernfalls von stabilem Rißwachstum. Bei linear-elastischen Werkstoffen breitet sich ein instabiler Riß im allgemeinen schnell aus, d.h. die Riausbreitungsgeschwindigkeit liegt in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit im betrachteten Werkstoff.

### 2.1.3 Die Fließbruchmechanik

Bildet sich vor der Rißspitze eine signifikante plastische Zone aus, so ist die Annahme einer Dominanz der Nahfeldspannungen nach Gleichung (2.3) in diesem Bereich nicht mehr zulässig. Dies hat zu ausführlichen Untersuchungen über Form und Ausdehnung der plastischen Zone für den Bereich um eine Rißspitze geführt. Für die Flle des ebenen Spannungs- und des ebenen Dehnungszustands sind die Formen in Abbildung 2.3 qualitativ dargestellt [9].

Diese unterschiedlichen Formen der plastischen Zone treten in realen Bauteilen gleichzeitig an einer Rißspitze auf. Die Ausbildung nach dem EDZ ist im Innern der Probe vorzufinden, wohingegen auf der Oberfläche ein ESZ vorliegt und die plastische Zone etwa kreisförmig ist. Der Unterschied in den Formen ist dadurch zu erklären, daß im Fall des EDZ unmittelbar vor der Rißspitze vergleichsweise hohe Spannungen in Dickenrichtung auftreten, die die deviatorischen Anteile des Spannungstensors (siehe Abschnitt 2.2.3) so stark vermindern, daß es zu deutlich geringerem plastischen Fließen kommt.



**Abbildung 2.3:** Plastische Zone vor der Risspitze für EDZ und ESZ (Mode I) unter Berücksichtigung der Fließbedingung nach von Mises

Die Abschätzung der Größe der plastischen Zone ist zuerst von Irwin [13] vorgenommen worden, der kreisrunde plastische Zonen sowie plastisches Fließverhalten nach der Schubspannungshypothese angenommen hat. In weitergehenden Untersuchungen haben Dugdale und Barenblatt [12, 14] das Konzept einer kohäsiven Zone unter der Annahme elastisch-idealplastischen Materialverhaltens zur Größenabschätzung angewandt. Die meisten Größenangaben für die Ausdehnung  $r_p$  der plastischen Zone weisen folgende Form auf:

$$r_p = \Lambda \frac{K_I^2}{\sigma_F^2} \quad (2.7)$$

wobei der Faktor  $\Lambda$  jeweils für das entsprechende Modell gewählt wird.  $\sigma_F$  bezeichnet die einachsige Fließspannung.

Eine ausgedehnte plastische Zone führt zu einer Umverteilung der Spannungen vor der Risspitze. Hutchinson, Rice und Rosengren [24, 25] haben das in Gleichung (2.3) dargestellte Spannungsnahfeld zum sogenannten HRR-Feld modifiziert, welches den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen in der plastischen Zone beschreibt:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(r, \phi) &= r^{-\frac{1}{h+1}} \sigma_{ij}(\phi) \\ \bar{\varepsilon}_{ij}(r, \phi) &= r^{-\frac{h}{h+1}} \varepsilon_{ij}(\phi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Parameter  $h$  bezeichnet hier den Verfestigungsparameter für linear verfestigendes Material.  $\bar{\sigma}_{ij}$  und  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  stellen die auf die einachsige Fließspannung  $\sigma_F$  bzw. die dazugehörige Dehnung  $\varepsilon_F$  bezogenen Komponenten des Spannungs- bzw. Dehnungstensors dar. Für linear-elastisches Verhalten ergibt sich daraus die  $1/\sqrt{r}$ -Singularität aus Gleichung (2.3). Das HRR-Feld gilt nicht für die Theorie großer Verformungen, ebenso dürfen im Material keine Entlastungen auftreten.

Ebenso wie der  $K_I$ -Faktor das Risspitzenfeld nach Gleichung (2.3) eindeutig charakterisiert, liegt das HRR-Feld bis auf einen Parameter  $J$  eindeutig fest, der als  $J$ -Integral bezeichnet wird und von Rice [6] als Möglichkeit zur Beschreibung der Rissbelastung eingeführt worden ist. Er lässt sich durch ein wegunabhängiges Linienintegral berechnen (Abbildung 2.4):

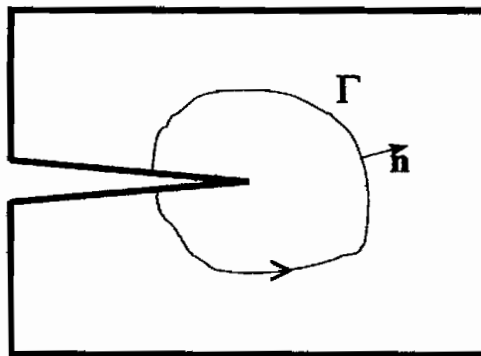
$$J = \int_{\Gamma} \left( U_V dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) \quad (2.9)$$

Diese Formulierung eignet sich besonders gut für numerische Verfahren zur Berechnung des J-Integrals.  $\Gamma$  stellt den Pfad um die Rißspitze dar, und  $\mathbf{n}$  ist der dazugehörige Normalenvektor.  $U_V$  ist die volumenbezogene Verformungsarbeit, berechnet durch:

$$U_V = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\bar{\epsilon}_{ij} \quad (2.10)$$

Sowohl für Gleichung (2.9) als auch für (2.10) gilt die Einstein'sche Summationskonvention. Die Wegunabhängigkeit des J-Integrals gilt nur unter folgenden Voraussetzungen:

- die Rißufer müssen lastfrei sein;
- $U_V$  ist nur eine Funktion der Dehnungen (nicht des Ortes);
- es liegt elastisches Materialverhalten sowie plastisches Materialverhalten vor unter der Bedingung, daß keine Entlastungsvorgänge stattfinden (Deformationstheorie der Plastizitätslehre).



**Abbildung 2.4:** Rißbehaftetes Bauteil mit Integrationspfad und Normalenvektor

Das J-Integral kann als Größe des Energieflusses in die Rißspitze aufgefaßt werden, oder, was gleichbedeutend ist, als Änderung der potentiellen Energie der Probe bei einer Rißverlängerung um den Wert  $\delta a$ . Unter Verwendung von Gleichung (2.1) kann man also formulieren:

$$J = -\frac{1}{d} \frac{\partial U_a}{\partial a} = G \quad (2.11)$$

Aus den Gleichungen (2.11) und (2.5) läßt sich für den Fall, daß linear-elastisches Materialverhalten oder Kleinbereichsfließen vorliegt, leicht ein Zusammenhang zwischen J und K herstellen, was bei der experimentellen Bestimmung des K-Faktors ausgenutzt werden kann.

Im allgemeinen kann das J-Integral für eine Vielzahl von Probenformen in der folgenden Form beschrieben werden:

$$J = \frac{bU_V}{dB} \quad (2.12)$$

Hierbei wird J durch die absorbierte Probenenergie (Verformungsarbeit) bezogen auf den verbleibenden Restquerschnitt ausgedrückt. Dabei bezeichnet B die Ligamentbreite, und

$b$  ist eine Konstante, die von der Probenform abhängt. Zur experimentellen Ermittlung von  $J$  wird die Verformungsarbeit  $U_V$  aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve bestimmt (siehe z.B. [17]). Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Dreipunktbiegeprobe (DPB-Probe) ergibt sich dann aus Gl. (2.12):

$$J = \frac{2U}{d(w-a)} \quad (2.13)$$

$w$  bezeichnet die Höhe der Probe. Diese Gleichung, dessen Gültigkeit im Rahmen dieser Arbeit überprüft werden soll, wird in Kapitel 6 zur Auswertung des Schlagversuchs verwendet werden.

Der Formulierung eines Bruchkriteriums im Rahmen der EPBM liegt die gleiche Idee zugrunde wie in der LEBM. Auch hier läßt sich, analog zur LEBM, ein Bereich festlegen, in dem das J-Integral die Beanspruchung der Rißspitze beschreibt. Entsprechend existiert eine materialspezifische Kenngröße  $J_{Ic}$ , die zur Bestimmung des Einsetzens von Rißfortschritt verwendet werden kann:

$$J_I = J_{Ic} \quad (2.14)$$

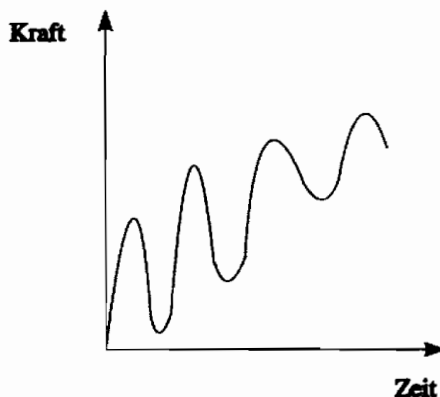
Dieses Kriterium gilt für die Initiierung des Bruchvorgangs, aber nur eingeschränkt für die Beschreibung von Rißfortschritt, da dieser mit Entlastungsvorgängen verbunden ist, die im Rahmen der Deformationstheorie nicht erfaßt werden können. Eine Rißausbreitung in elastisch-plastischen Materialien führt im Bereich unmittelbar vor der Rißspitze zu starken Nichtlinearitäten, die von dem beschriebenen HRR-Feld (GL. (2.8)) nicht mehr beschrieben werden, da es nur von einem Parameter abhängt. Von einem J-kontrollierten Rißwachstum kann daher nur gesprochen werden, wenn der Rißfortschritt so klein ist (subkritische Rißausbreitung), daß sowohl die Zone der Entlastung hinter der Rißspitze als auch der Bereich der Nichtlinearität vor der Rißspitze in das J-dominierte Spannungsfeld eingebettet sind. Weiterhin muß das plastische Materialverhalten durch eine hinreichend große Verfestigung charakterisiert sein, da ansonsten der Dominanzbereich von  $J_I$  immer kleiner wird, bis er bei ideal-plastischem Materialverhalten ganz verschwindet [22].

## 2.1.4 Bruchdynamik

### 2.1.4.1 Allgemeines

Der Bruchdynamik lassen sich im allgemeinen zwei Problemklassen zuordnen [3]: die dynamische Belastung eines stationären Risses und die Untersuchung eines laufenden Risses. Bei beiden Fragestellungen treten Phänomene auf, die für die bisher behandelten Bruchmechanik-Konzepte keine Rolle spielen: Trägheitskräfte, zeitlich veränderliches Materialverhalten und die Ausbreitung bzw. Reflexion von Spannungswellen. In der vorliegenden Arbeit wird eine Rißausbreitung nicht betrachtet, deshalb sind die folgenden Ausführungen auf den Fall des dynamisch belasteten stationären Risses beschränkt. Ebenso wird eine Änderung des Materialverhaltens aufgrund unterschiedlicher Belastungsraten nicht betrachtet, da die Berücksichtigung viskoplastischen Materialverhaltens nicht im Rahmen dieser Arbeit liegt. Auf die dadurch entstehenden Einschränkungen wird an geeigneter Stelle noch genauer eingegangen. Berücksichtigt werden sollen hingegen die

Trägheitskräfte, da sie bei stoßartigen Belastungen einen großen Einfluß auf die gemessenen Probenkräfte haben. Abbildung 2.5 zeigt einen typischen Kraft-Zeit-Verlauf für eine dynamisch belastete Probe.



**Abbildung 2.5:** Typischer Kraft-Zeit-Verlauf einer dynamisch belasteten Probe

Im Verlauf der Zeit steigt die Last an, aber die Oszillationen werden kleiner, je mehr kinetische Energie die Probe aufgenommen hat [3]. Die Trägheitseffekte spielen daher die größte Rolle zu Anfang der Belastung, wohingegen die Probe nach genügend langer Belastungszeit quasi-statisches Verhalten zeigt. Die Frequenz der Oszillationen ist jedoch zeitlich nahezu indifferent, da die gemessene Frequenz nur von der Probengeometrie und den Materialeigenschaften sowie der Art der Probenlagerung abhängt [4].

Um den Einfluß von Trägheitskräften in DPB-Proben zeitlich eingrenzen zu können, haben Nakamura et al. [26] eine Übergangszeit  $t_\tau$  (transition time) eingeführt, die dann erreicht ist, wenn die kinetische Energie und die Verformungsenergie in der Probe gleich sind. Da diese Energien meßtechnisch nicht getrennt werden können, haben sie folgende Abschätzung für  $t_\tau$  entwickelt:

$$t_\tau = D_\tau \Lambda_\tau \frac{w}{c_0} \quad (2.15)$$

Der dimensionslose Parameter  $D_\tau$  berechnet sich zu:

$$D_\tau = \frac{t \dot{u}(t)}{u(t)} \Big|_{t_\tau} \quad (2.16)$$

wobei  $u$  hier die Verschiebung des Lastangriffspunkts darstellt. Für Charpy-Proben kann  $D_\tau$  im allgemeinen zu 1 gesetzt werden, da die Verschiebung und die Geschwindigkeit des Lastangriffspunkts der Probe annähernd gleich der Verschiebung und der Geschwindigkeit des Hammers ist, die für den Zeitraum des Schlagvorgangs als linear bzw. konstant angenommen werden können.  $c_0$  ist die longitudinale Wellengeschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.1.4.2),  $w$  ist die Höhe der DPB-Probe, und  $\Lambda_\tau$  ist ein geometrie- und materialabhängiger Faktor:

$$\Lambda_\tau = \sqrt{\frac{sdEC}{w}} \quad (2.17)$$

$s$  ist der Probenauflagerabstand, und  $C$  ist die Compliance der Probe:

$$C = \frac{zu}{dE} \quad (2.18)$$



Für ESZ ist  $E' = E$ , für EDZ ist  $E' = E / (1 - \nu)^2$ .  $z_{II}$  ist die dimensionslose Compliance der Probe [3]. Eine exakte Aussage, bis zu welcher Zeit Trägheitskräfte eine Rolle spielen, wird aber auch hier nicht getroffen, da lediglich ausgesagt wird, daß die Probe bei  $t \gg t_\tau$  ein quasi-statisches Verhalten aufweist.

Die so bestimmte Übergangszeit läßt sich auch durch die Schwingungsdauer der Charpy-Probe ausdrücken, mit der sie durch folgende Beziehung verbunden ist [31]:

$$\tau_s = 1,68 \frac{\sqrt{swdCE'}}{c_0} = 1,68t_\tau \quad (2.19)$$

Der Untersuchung der Spannungsnahfelder von stationären Rissen unter dynamischer Mode I-Belastung ist bisher für den Fall elastisch-plastischen Materialverhaltens wenig Aufmerksamkeit gewidmet worden. Dies hängt wesentlich mit den mathematischen Schwierigkeiten zusammen, die sich bei einer solchen Betrachtung ergeben [11]. Für den Fall, daß elastisches Materialverhalten vorliegt, lassen sich die Spannungsgleichungen des Rißspitzennahfelds analog zu Abschnitt 2.1.2 herleiten. Der einzige Unterschied zur Statik besteht darin, daß der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  nun von der Zeit abhängt. Er ergibt sich aus der Lösung des dynamischen Anfangs-Randwertproblems, bei dem die Trägheitskräfte in der Regel berücksichtigt werden müssen.

#### 2.1.4.2 Wellenausbreitung in Festkörpern

In der vorliegenden Arbeit erfolgt im Rahmen der numerischen Modellierung keine explizite Berücksichtigung der Wellenausbreitung, da das vorliegende dynamische Problem der schlagbelasteten Biegeprobe durch eine Finite-Elemente-Simulation berechnet wird, der die diskretisierte Form der dynamischen Bewegungsgleichung zugrunde liegt (siehe Kapitel 5). Allerdings sind einige Phänomene, wie das später noch ausführlich beschriebene Abheilverhalten der Probe während des Belastungsvorgangs, direkt mit der Geschwindigkeit der Wellenausbreitung gekoppelt. Daher sind im folgenden die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Zusammenhänge aufgeführt, um einen Vergleich des berechneten Probenverhaltens mit dem realen Probenverhalten durchführen zu können.

Wird eine Probe dynamisch beansprucht, so laufen ausgehend von der Lasteinleitungsstelle Spannungsdruckwellen ins Probeninnere [27]. Dabei werden drei Wellenformen unterschieden:

- Longitudinalwellen, bei der die Partikel in Ausbreitungsrichtung schwingen
- Transversalwellen, wobei die Partikel orthogonal zur Ausbreitungsrichtung schwingen
- Rayleighwellen, die auch als Oberflächenwellen bezeichnet werden.

Die Ausbreitung der Spannungswellen läßt sich durch die Helmholtz'schen Wellengleichungen (siehe z.B. [28]) beschreiben, die für ebene Probleme folgende Form annehmen:

$$c_0^2 \Delta \phi = \ddot{\phi} \quad , \quad c_1^2 \Delta \psi = \ddot{\psi} \quad (2.20)$$

$\phi$  und  $\psi$  sind Potentiale, die eine reine Volumenänderung ( $\phi$ ) bzw. eine reine Gestaltänderung bei konstantem Volumen ( $\psi$ ) beschreiben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten

der Wellen sind materialabhängig. Bei der Reduktion auf ein zweidimensionales Modell muß für den Fall der Longitudinalwellen noch zwischen ebenem Dehnungs- und ebenem Spannungszustand unterschieden werden [29]:

- Longitudinalwellen:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (\text{EDZ}) \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (\text{ESZ}) \quad (2.21)$$

- Transversalwellen:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (\text{EDZ, ESZ}) \quad (2.22)$$

- Rayleighwellen:

$$c_2 \cong 0,91c_1 \quad (2.23)$$

Die Rayleigh-Wellen sind Oberflächenwellen, die sich entlang einer freien Oberfläche ausbreiten und ins Innere hinein exponentiell abklingen. Genauere Möglichkeiten zur Ermittlung der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit sind in [30] angegeben.

Treffen die Wellen auf die Reißflanke oder auf die Probenumrandungen, so werden sie reflektiert. Dabei wird aus einer Druckwelle eine Zugwelle und umgekehrt, wodurch im Probeninnern Wellenüberlagerungsphänomene entstehen, die komplexe Beanspruchungsmuster zur Folge haben.

### 2.1.4.3 Kerbspitzenbelastung bei dynamischer Beanspruchung

Aufgrund der dynamischen Belastung und der dadurch bedingten Trägheitskräfte, die in Charpy-Proben durch die Schlagbeanspruchung hervorgerufen werden, ist die Kerbspitze in der frühen Phase des Belastungsvorgangs zeitlich veränderlichen Spannungsfeldern ausgesetzt. Dies führt zu Schwankungen des dynamischen K-Faktors, so daß dessen Werte sowohl höher als auch niedriger liegen als der K-Faktor, der sich bei äquivalenter statischer Belastung einstellen würde. Da ein Teil der der Probe zugeführten Energie in kinetische Energie umgesetzt wird, reicht es zur Berechnung des Energieflusses in die Kerbspitze nicht mehr aus, die Verformungsenergie der Probe zu berücksichtigen. Auch die kinetischen Energieanteile, die in die Kerbspitze fließen, müssen erfaßt werden. Spielen Trägheitskräfte eine signifikante Rolle, so muß auch deren Einfluß auf die Kerbspannungsintensität quantifiziert werden. Dies wird in Abschnitt 3.2.1 näher ausgeführt.

Auch für den Fall dynamischer Beanspruchungen lassen sich Bruchzähigkeiten ermitteln, die allerdings im Gegensatz zu statischen Belastungsfällen keine reinen Materialparameter mehr darstellen, sondern sowohl von der Belastungsrate  $\dot{K}_I$  bzw.  $\dot{J}_I$  als auch von der Schwingungsdauer der Probe abhängen. Dies erhöht den experimentellen Aufwand zur Bestimmung von  $K_{Id}$  bzw.  $J_{Id}$  beträchtlich. Einige Verfahren zur Bestimmung dieser Größen sind in Abschnitt 3.1.1 dargestellt.

## 2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

### 2.2.1 Kinematische Beziehungen

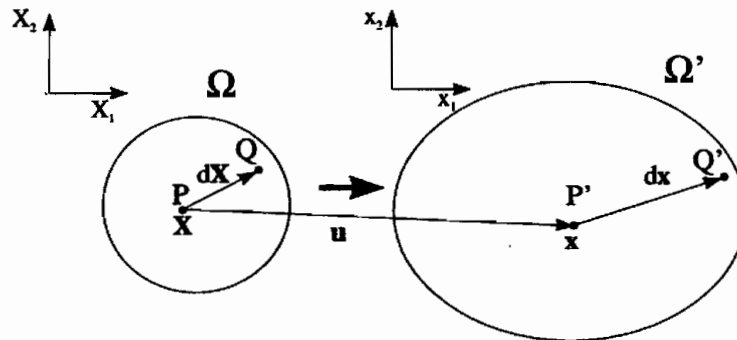
Bei der stoßartigen Belastung der Probe kommt es im Bereich des Kraftangriffspunktes, aber auch im Bereich der Kerbspitze zu großen Dehnungen, die bei einer numerischen Simulation im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie der Kontinuumsmechanik nicht korrekt wiedergegeben werden. Daher wird die bei der Simulation (siehe Kapitel 5) verwendete Theorie großer Verformungen dargestellt. Dabei werden die Matrixschreibweise und die Komponentenschreibweise benutzt. Betrachtet wird ein Körper  $\Omega$  in seinem unverformten und verformten Zustand. Dargestellt ist in Abbildung 2.6 die Verschiebung eines Punktes  $P$  von seiner ursprünglichen Position  $\mathbf{X}$  zu seiner aktuellen Position  $\mathbf{x}$ , definiert durch:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.24)$$

bzw.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.25)$$

Gleichung (2.24) wird als Lagrange'sche oder materielle und Gleichung (2.25) als Euler'sche oder räumliche Formulierung der Verformung bezeichnet [32].



**Abbildung 2.6:** Unverformte und verformte Konfiguration eines Körpers  $\Omega$

Ein Zusammenhang zwischen beiden Formulierungen wird über den Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$  hergestellt, der die Verzerrungen in der infinitesimalen Umgebung eines Punktes des Kontinuums beschreibt:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.26)$$

so daß sich ergibt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} \quad (2.27)$$

$\mathbf{I}$  stellt den Einheitstensor dar.

Wendet man das polare Dekompositionstheorem nach Cauchy (siehe auch [33]) auf den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  an, dann erhält man folgende Zerlegung:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.28)$$

Dabei ist  $\mathbf{U}$  der Rechts-Streck-Tensor,  $\mathbf{V}$  der Links-Streck-Tensor und  $\mathbf{R}$  ein orthogonaler Rotationstensor, der eine Starrkörperrotation bezüglich der Hauptachsen von  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  darstellt.  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  sind symmetrisch und positiv definit. Diese polare Zerlegung läßt sich wie folgt deuten: Eine Verformung kann als reine Starrkörperrotation um die Hauptachsen der Streckung, gefolgt von einer Streckung entlang dieser Achsen aufgefaßt werden (2. Teil der Gleichung (2.28)), oder äquivalent als Streckung entlang der Hauptachsen, gefolgt von einer Starrkörperrotation um diese Achsen (1. Teil der Gleichung (2.28)).

Bezeichnet man die Länge der infinitesimalen Vektoren  $d\mathbf{x}$  und  $d\mathbf{X}$  mit  $ds$  und  $dS$ :

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.29)$$

bzw.

$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.30)$$

so lassen sich zwei Tensoren einführen:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.31)$$

$\mathbf{C}$  wird als rechter,  $\mathbf{B}$  als linker Cauchy-Green-Tensor bezeichnet. Sie sind Maße für die quadratischen Längen von  $d\mathbf{x}$  und  $d\mathbf{X}$ .

Betrachtet man nun die Differenz von  $(ds)^2$  und  $(dS)^2$ :

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.32)$$

so können die Dehnungstensoren  $\mathbf{E}$  (Green-Lagrange'scher Dehnungstensor) und  $\mathbf{e}$  (Almansi'scher Dehnungstensor) folgendermaßen formuliert werden:

$$2\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{bzw.} \quad 2\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.33)$$

Die Dehnungstensoren geben also den Unterschied zwischen den Quadraten der Längen von  $d\mathbf{x}$  und  $d\mathbf{X}$  an.

Die Verschiebung eines Punktes  $P$  in einem Kontinuum ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \text{oder} \quad x_i = X_i + u_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

Setzt man in Gleichung (2.33) diese Formulierung ein, so erhält man die Beziehung zwischen der Verschiebung und der Dehnung:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.35)$$

und

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.36)$$

Die Dehnungstensorkomponenten in Gleichung (2.36) sind die Euler'schen Dehnungskomponenten, diejenigen in Gleichung (2.35) die Lagrange'schen Dehnungskomponenten.

Im folgenden ist nun der Zusammenhang zwischen Deformationsrate und Dehnungsrate dargestellt. Dies ist notwendig, da das verwendete konstitutive Modell von der Belastungsgeschichte abhängt und somit in Ratenform formuliert werden muß.

Die Geschwindigkeit eines Partikels sei wie folgt definiert:

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2.37)$$

Hier wird die Lagrange'sche Betrachtungsweise verwendet, bei der die Bewegung eines Teilchens verfolgt wird. Dann kann die relative Geschwindigkeit eines Punktes  $Q'$  bezüglich eines benachbarten Punktes  $P'$  (zur Lage von  $P'$  und  $Q'$  siehe Abbildung 2.6) bestimmt werden:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{bzw.} \quad d\mathbf{v} = \mathbf{L} d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.38)$$

$\mathbf{L}$  ist der Geschwindigkeitsgradiententensor, bezogen auf die aktuelle Konfiguration. Die relative Geschwindigkeit  $d\mathbf{v}$  läßt sich auch bestimmen aus:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} \quad (2.39)$$

Vergleicht man die Ausdrücke für  $d\mathbf{v}$ , so erhält man:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (2.40)$$

bzw.

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.41)$$

Der Geschwindigkeitsgradiententensor  $\mathbf{L}$  läßt sich, entsprechend dem polaren Zerlegungstheorem, in den symmetrischen Deformationsratentensor  $\mathbf{D}$  und den antimetrischen Spintensor  $\mathbf{W}$  aufspalten. Diese Zerlegung bezeichnet man auch als Euler-Cauchy-Stokes-Zerlegung (siehe z.B. [34]).

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.42)$$

wobei

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.43)$$

**Anmerkung:** Wendet man das polare Zerlegungstheorem auf  $\mathbf{L}$  an:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.44)$$

und verwendet Gleichung (2.43):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \left( \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \right) \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.45)$$

bzw.

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \left( \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \right) \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.46)$$

so erkennt man, daß  $\mathbf{W}$  nicht nur von der Rotationsrate  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ , sondern auch vom Strecktensor  $\mathbf{U}$  abhängt. Daher ist  $\mathbf{W}$  im allgemeinen zur Beschreibung der Rotation bei großen Verformungen nicht geeignet. Es ist allerdings gezeigt worden [35], daß die Euler-Cauchy-Stokes-Zerlegung korrekt ist, wenn die äußeren Lasten in kleinen Schritten aufgebracht werden und die Ausgangskonfiguration nach jedem Lastschritt 'updated' wird.

Die Aufspaltung von  $\mathbf{L}$  ist geeignet zur weiteren Beschreibung, weil sich die zeitliche Änderung von  $(ds)^2$  nur mit Hilfe von  $\mathbf{D}$  ausdrücken läßt. Unter Verwendung von Gleichung (2.29), Teil 1 gilt:

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2d\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}) \quad (2.47)$$

Daraus erhält man unter Einbeziehung der Gleichungen (2.42) und (2.43):

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} + 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.48)$$

Aufgrund der antimetrischen Eigenschaft von  $\mathbf{W}$  ergibt sich der zweite Summand aus Gleichung (2.48) zu Null. Also kann die zeitliche Änderung von  $(ds)^2$  allein durch den Deformationsratentensor  $\mathbf{D}$  ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.49)$$

Bildet man die zeitliche Ableitung von Gleichung (2.32) unter Verwendung von  $\mathbf{E}$ , so läßt sich ein Zusammenhang zwischen  $\mathbf{D}$  und der Lagrange'schen Dehnungsrate  $\dot{\mathbf{E}}$  herstellen:

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2d\mathbf{X} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.50)$$

Hier ist zu beachten, daß  $dS$  (Ausgangskonfiguration) zeitlich unveränderlich ist. Mit Gleichung (2.27) ergibt sich aus der Gleichung (2.49):

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} \quad (2.51)$$

Vergleicht man die Gleichungen (2.50) und (2.51), so erkennt man:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.52)$$

Für die Euler'schen Dehnungsraten  $\dot{\mathbf{e}}$  läßt sich eine analoge Beziehung herleiten. Leitet man Gleichung (2.33) unter Verwendung von  $\mathbf{e}$  nach der Zeit ab, so erhält man:

$$\frac{d}{dt} [(ds)^2] = 2 \frac{d}{dt} [dx \cdot e \cdot dx] \quad (2.53)$$

Führt man die zeitliche Ableitung durch unter Verwendung von Gleichung (2.38), dann folgt daraus:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(ds)^2] &= 2\mathbf{L} \cdot dx \cdot e \cdot dx + 2dx \cdot \dot{e} \cdot dx + 2dx \cdot e \cdot \mathbf{L} \cdot dx \\ &= 2dx \cdot [\mathbf{L}^T \cdot e + \dot{e} + e \cdot \mathbf{L}] \cdot dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

Der Klammerausdruck entspricht  $\mathbf{D}$ , so daß folgt:

$$\frac{de}{dt} = \mathbf{D} - (e \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot e) \quad (2.55)$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (2.52) und (2.55) wird deutlich, daß die Rate des Dehnungstensors  $\mathbf{E}$ , formuliert in Lagrange'schen Koordinaten, vollständig durch den Deformationsratentensor  $\mathbf{D}$  beschrieben werden kann, wohingegen die Rate von  $e$ , formuliert in Euler'schen Koordinaten, zusätzlich noch von dem Dehnungstensor  $e$  selbst abhängt.

## 2.2.2 Spannungsmaße

Betrachtet man einen Körper  $\Omega'$  in der aktuellen Konfiguration, und bezeichnet man mit  $\mathbf{f}$  die bezogene Oberflächenkraft, die auf der Oberfläche  $S$  des Körpers wirkt, so ist der Cauchy'sche Spannungstensor wie folgt definiert:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.56)$$

$\mathbf{n}$  bezeichnet dabei die äußere Normale auf  $S$ .  $\boldsymbol{\sigma}$  ist ein symmetrischer Tensor bezogen auf die Euler'sche Konfiguration, der häufig auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet wird. Bezieht man hingegen die Belastung durch  $\mathbf{f}$  auf die Ausgangskonfiguration, so erhält man folgende Beziehung:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\Sigma}^1 \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (2.57)$$

$\mathbf{N}$  ist nun die äußere Normale bezüglich der Oberfläche  $S_0$  der Ausgangskonfiguration.  $\boldsymbol{\Sigma}^1$  ist der 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor, auch nominaler Spannungstensor genannt. Er ist nicht symmetrisch und weder auf die Ausgangskonfiguration noch auf die aktuelle Konfiguration bezogen, was aus Gleichung (2.58) deutlich wird:

$$\boldsymbol{\Sigma}^1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.58)$$

Deshalb wird üblicherweise der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor  $\boldsymbol{\Sigma}^2$  verwendet:

$$\boldsymbol{\Sigma}^2 = \boldsymbol{\Sigma}^1 (\mathbf{F}^{-1})^T = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.59)$$

Aus der Symmetrie von  $\sigma$  folgt auch die Symmetrie von  $\Sigma^2$ , der aus der Oberflächenkraft  $\mathbf{f}_0$  folgendermaßen bestimmt wird:

$$d\mathbf{f}_0 = \Sigma^2 \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (2.60)$$

wobei  $\mathbf{f}_0$  die auf die Ausgangskonfiguration bezogene Oberflächenkraft  $\mathbf{f}$  darstellt:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_0 \quad (2.61)$$

Die Spannungstensoren sind durch folgende Beziehung verknüpft:

$$\det \mathbf{F} \cdot \sigma = \tau = \Sigma^1 \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \Sigma^2 \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.62)$$

wobei  $\tau$  den Kirchhoff'schen Spannungstensor bezeichnet. Im allgemeinen kann jedes beschriebene Spannungsmaß verwendet werden, um die Gleichgewichtsbedingungen zu formulieren. Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit dürfen jedoch nur adjungierte Spannungs- und Dehnungsmaße verwendet werden, um zu gewährleisten, daß die bezogene Arbeitsrate für jedes beliebig gewählte Spannungs- und Dehnungsmaß [36] gleich ist:

$$dW^o = \tau^o d\varepsilon^o = \text{const.} \quad (2.63)$$

wobei  $\varepsilon^o$  ein bestimmtes Dehnungsmaß und  $\tau^o$  das adjungierte Spannungsmaß bezeichnen.

### 2.2.3 Gleichgewicht und virtuelle Arbeit

Im Rahmen der Simulation des Kerbschlagbiegeversuchs wird zur Beschreibung der dem verwendeten FE-Programm zugrunde liegenden Gleichungen (siehe Kapitel 5) das Prinzip der virtuellen Arbeit benötigt. Daher ist seine Herleitung im folgenden erläutert.

Für das Kräftegleichgewicht eines beliebigen Volumens  $V$  eines Körpers  $\Omega$  gilt [32]:

$$\int_S \mathbf{f} dS + \int_V \mathbf{p} dV = 0 \quad (2.64)$$

$S$  ist die Oberfläche von  $V$ ,  $\mathbf{p}$  ist die Volumenkraft in jedem Punkt von  $V$ , und  $\mathbf{f}$  ist die bezogene Flächenlast auf jedem Punkt von  $S$ . Unter Anwendung des Gauß'schen Theorems auf das Oberflächenintegral von Gleichung (2.64) ergibt sich:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \sigma dS = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \sigma dV \quad (2.65)$$

Da Gleichung (2.65) für jedes beliebige Volumenelement  $V$  gilt, muß sie auch für jeden Punkt des Körpers  $\Omega$  gelten, so daß sich als Gleichgewichtsbedingung ergibt:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \sigma + \mathbf{p} = 0 \quad (2.66)$$



Das Momentengleichgewicht wird aufgrund der Symmetrieeigenschaften von  $\sigma$  automatisch erfüllt.

Um zur numerischen Näherungslösung dieser Gleichung zu gelangen, gewichtet man Gleichung (2.66) mit einer Testfunktion, die beliebig gewählt werden kann, aber die kinematischen Randbedingungen erfüllen muß und eine ausreichende Stetigkeit aufweist. Für den Fall der FE-Methode, die auf einem Verschiebungsansatz beruht, wird sie als virtuelles Geschwindigkeitsfeld  $\delta v$  gewählt. Integriert man anschließend über das Volumen  $V$ , so erhält man einen Ausdruck für die virtuelle Arbeit:

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} \right] \cdot \delta v dV = 0 \quad (2.67)$$

Mit der Kettenregel und dem Gauß'schen Theorem folgt daraus:

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta v dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta v dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \delta v}{\partial \mathbf{x}} \right) dV \quad (2.68)$$

und unter Verwendung von Gleichung (2.56) kann Gleichung (2.67) so geschrieben werden:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \delta v}{\partial \mathbf{x}} \right) dV = \int_S \mathbf{f} \cdot \delta v dS + \int_V \mathbf{p} \cdot \delta v dV \quad (2.69)$$

Formuliert man Gleichung (2.43) in der virtuellen Form und spaltet  $\delta L$  entsprechend Gleichung (2.42) auf, so ergibt sich:

$$\delta L = \delta D + \delta W \quad (2.70)$$

und weiter:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta L = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta D + \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta W \quad (2.71)$$

Da  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch ist, gilt:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \delta v}{\partial \mathbf{x}} \right) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta L = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta D \quad (2.72)$$

Daraus erhält man nun das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta D dV = \int_S \mathbf{f} \cdot \delta v dS + \int_V \mathbf{p} \cdot \delta v dV \quad (2.73)$$

### 2.2.4 Konstitutive Beziehungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur solche Fälle betrachtet, in denen das Material entweder linear-elastisch oder elastisch-plastisch reagiert. Eine Veränderung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen aufgrund unterschiedlicher Dehnungsraten wird vernachlässigt. Weiterhin wird isotropes (richtungsunabhängiges) Materialverhalten angenommen.

Im Rahmen der Theorie kleiner Verformungen ist es im allgemeinen üblich, die Gesamtdehnung additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufzuspalten:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.74)$$

Liegen jedoch moderate oder große Deformationen vor, so ist diese additive Aufspaltung nicht mehr zulässig, da in diesem Fall elastische und plastische Verformungen gekoppelt sind [33]. Dies hat zu verschiedenen Formulierungen für die Aufspaltung der Deformationen bzw. ihrer Raten geführt (z.B. [37]). Eine allgemein anerkannter Zugang zur Behandlung elastisch-plastischer Probleme besteht in der multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten. Sie wurde von Lee [38] vorgeschlagen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.75)$$

Diese Zerlegung beruht auf der Überlegung, daß ein unverformtes Element  $d\mathbf{X}$  zuerst in einen rein plastischen Verformungszustand, der spannungsfrei ist, und anschließend in den Endzustand  $d\mathbf{x}$  durch rein elastische Verformung überführt wird. Liegt allerdings kein homogenes plastisches Fließen vor, so kann nicht davon ausgegangen werden, daß nach der Rücknahme der elastischen Verformung der Körper spannungsfrei ist [39]. In diesem Fall werden infinitesimale Volumenelemente des Körpers betrachtet, die als voneinander unabhängig betrachtet werden, so daß nach der Entlastung aufgrund von Entspannungsvorgängen ein spannungsfreier Zustand existiert.

Bei den folgenden Darstellungen wird davon ausgegangen, daß die elastischen Verformungen sowie deren Gradienten klein sind, was im allgemeinen bei der Betrachtung von metallischen Werkstoffen gewährleistet ist.

Der Geschwindigkeitsgradiententensor (Gleichung (2.41)) kann unter Verwendung von Gleichung (2.75) geschrieben werden als:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1} \quad (2.76)$$

Damit kann ein elastischer und ein plastischer Anteil von  $\mathbf{L}$  bestimmt werden:

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \quad (2.77)$$

Für den Fall kleiner elastischer Verformungen, wie er hier angenommen wird, gilt für  $\mathbf{F}^e$ :

$$\mathbf{F}^e \approx \mathbf{I} \quad (2.78)$$

woraus sich für  $\mathbf{L}$  aus Gleichung (2.76) eine additive Aufspaltung ergibt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (2.79)$$

Ebenso kann der symmetrische Anteil  $\mathbf{D}$  von  $\mathbf{L}$  additiv zerlegt werden:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.80)$$

Die elastische Deformationsrate ist mit einer objektiven Spannungsrate über das Hooke'sche Gesetz verknüpft (zur Objektivität siehe nächster Abschnitt):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{obj} = \bar{\mathbf{D}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (2.81)$$

wobei  $\bar{\mathbf{D}}$  den Elastizitätstensor darstellt. Für den Fall isotropen Materialverhaltens ergibt sich dieser zu:

$$\bar{\mathbf{D}} = 2\mu\mathbf{J} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.82)$$

$\mathbf{J}$  ist hier der Einheitstensor 4. Stufe.

Weist das Material hingegen elastisch-plastisches Verhalten auf, so läßt sich eine Fließfunktion  $F$  definieren, für die gilt:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) < 0 \quad \text{oder} \quad F(\boldsymbol{\sigma}, h) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0: \text{elastisches Materialverhalten} \quad (2.83)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0: \text{plastisches Materialverhalten}$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendete von Mises-Fließbedingung gilt:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) = f(J_2') - k^2(h) \quad (2.84)$$

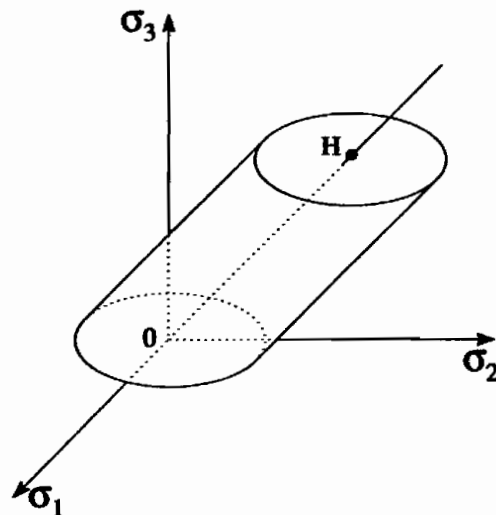
$k$  ist eine experimentell ermittelte Werkstoffkonstante,  $h$  ist der Verfestigungsparameter, der von der plastischen Verformungsgeschichte abhängt, und  $J_2'$  ist die 2. Invariante des Spannungsdeviators  $\boldsymbol{\sigma}'$ :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \text{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{ii} \quad (2.85)$$

$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  bezeichnet man als Spur von  $\boldsymbol{\sigma}$ , und durch  $1/3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  läßt sich der hydrostatische Spannungszustand beschreiben, der sich auf das Fließverhalten eines Werkstoffs in vernachlässigbarer Weise auswirkt [32]. Im Hauptspannungsraum kann die Fließbedingung als Fließfläche dargestellt werden, was in Abbildung 2.7 gezeigt ist. Hier wird auch die Unabhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand deutlich, was durch die hydrostatische Spannungslinie  $OH$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) veranschaulicht wird. Die hier verwendete Form der von Mises-Fließbedingung lautet:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} J_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_F(h) \quad (2.86)$$

$\sigma_v$  ist die sogenannte von Mises-Vergleichsspannung, und  $\tau_F$  ist die Fließgrenze bei reiner Schubbeanspruchung. Benutzt wird in dieser Arbeit ein isotropes Verfestigungsmodell, das von einer gleichförmigen Ausdehnung der Fließfläche bei zunehmender plastischer



**Abbildung 2.7:** von-Mises-Fließfläche im Hauptspannungsraum mit hydrostatischer Linie OH

Dehnung ausgeht. Dieser Zusammenhang wird durch die funktionale Abhängigkeit der Fließfunktion vom Verfestigungsparameter  $h$  ausgedrückt.

Die Richtung des plastischen Fließens wird durch die assoziierte Normalenregel beschrieben:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad -\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial h} \quad (2.87)$$

wobei  $\dot{\epsilon}_v^p$  die plastische Vergleichsdehnungsrate darstellt.  $\dot{\lambda}$  ist der plastische Multiplikator:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & : \text{ (falls Bedingung 1 aus (2.83) erfüllt ist} \\ \dot{\lambda} \geq 0 & : \text{ (falls Bedingung 2 aus (2.83) erfüllt ist} \end{cases} \quad (2.88)$$

Mit den Beziehungen (2.81), (2.83) und (2.87) können die konstitutiven Gleichungen der Elastoplastizität dann wie folgt beschrieben werden:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{obj} = \bar{\mathbf{D}}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \epsilon_v^p) : \mathbf{D} \quad , \quad \dot{\epsilon}_v^p = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \epsilon_v^p) : \mathbf{D} \quad (2.89)$$

mit

$$\bar{\mathbf{D}}^{ep} = \bar{\mathbf{D}}^e - \bar{\mathbf{D}}^p \quad (2.90)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \frac{\bar{\mathbf{D}}^e \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{D}}^e}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{D}}^e \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial h}} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{P} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{D}}^e}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{D}}^e \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial h}} \quad (2.92)$$

### 2.2.5 Objektivität

Für die verwendeten konstitutiven Gesetze muß das Prinzip der materiellen Objektivität gelten, was bedeutet, das der Spannungszustand sich nicht ändern darf, wenn der Körper, für den er definiert ist, einer Starrkörperrotation unterworfen wird. Mathematisch läßt sich diese Bedingung wie folgt formulieren (siehe z.B. [33]):

$$\begin{cases} \mathbf{v}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} & : \text{(Vektor } \mathbf{v}) \\ \mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T & : \text{(Tensor } \mathbf{A}) \end{cases} \quad (2.93)$$

Das Symbol \* bezeichnet die transformierte Konfiguration, die Größen ohne \* sind in der ursprünglichen Konfiguration definiert.  $\mathbf{Q}$  ist ein orthogonaler Rotationstensor.

**Anmerkung:** An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß in der Literatur keine einhellige Meinung darüber besteht, wie der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  bezüglich seiner Objektivität zu behandeln ist. So wird die Objektivität von  $\mathbf{F}$  aufgrund seiner Eigenschaft, als Zwei-Punkt-Tensor sowohl in Lagrange'schen als auch in Euler'schen Koordinaten definiert zu sein, bezüglich der Vektortransformation (Gleichung (2.93), Teil 1), überprüft [33], aber auch gemäß Gleichung (2.93, Teil 2) [40], da er als Tensor definiert ist.

Tensorraten, die in der Lagrange'schen Betrachtungsweise formuliert sind, sind von ihrer Definition her objektiv, da sie die Bewegung eines Materialpunktes beschreiben. Hingegen muß für Euler'sche Ratentensoren eine geeignete Zeitableitung gewählt werden, um ihre Objektivität zu gewährleisten. Da im folgenden der Cauchy'sche Spannungstensor für die Beschreibung des Prinzips der virtuellen Arbeit verwendet wird, muß eine geeignete Zeitableitung für diesen Tensor gewählt werden. Welche Zeitableitung dabei verwendet wird, hängt von der Zielsetzung ab, die mit der Formulierung des Problems verbunden ist [33]. Die Zeitableitung nach Truesdell [41] wird im allgemeinen zur Beschreibung großer elastischer Verformungen verwendet:

$$\dot{\sigma}^{Tr} = \dot{\sigma} - \mathbf{L} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{L}^T + \sigma (\text{tr} \sigma) \quad (2.94)$$

Diese Zeitableitung ist eine konvektive Zeitableitung, die aus einer Transformation in den Referenzzustand (2. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor), einer materiellen Zeitableitung dieses transformierten Tensors, und einer anschließenden Transformation in die aktuelle Konfiguration besteht. Von diesem Typ der Zeitableitungen können die rotationalen Ableitungen unterschieden werden, die bezüglich eines mitrotierenden Koordinatensystems mit dem Rotationstensor  $\Omega_{\mathbf{Q}}$  gebildet werden. Zur Beschreibung von  $\Omega_{\mathbf{Q}}$  wird der orthogonale Rotationstensor  $\mathbf{Q}$  gewählt:

$$\Omega_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \quad (2.95)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Art der Zeitableitung verwendet, da sie eine numerisch vergleichsweise einfach zu behandelnde Struktur aufweist:

$$\dot{\sigma}^{obj} = \dot{\sigma} - \Omega_{\mathbf{Q}} \cdot \sigma + \sigma \cdot \Omega_{\mathbf{Q}} \quad (2.96)$$

Damit kann die Transformation der objektiven Spannungsrate unter Verwendung von  $\mathbf{Q}$  folgendermaßen formuliert werden:

$$\dot{\sigma}^* = \mathbf{Q} \cdot \dot{\sigma}^{obj} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (2.97)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (2.98)$$

$$\mathbf{D}^{p*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^p \cdot \mathbf{Q}^T \quad (2.99)$$

Ebenso kann das konstitutive Modell im korotationalen Koordinatensystem dargestellt werden durch:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\varepsilon}_v^p) : \mathbf{D}^* \quad (2.100)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\varepsilon}_v^p) : \mathbf{D}^*$$

An dieser Stelle stellt sich die Frage, welche Rotationsrate für die Formulierung der konstitutiven Gleichungen geeignet ist. Wird der Spintensor  $\mathbf{W}$  (Gleichung (2.43)) verwendet, so führt diese Formulierung, angewendet auf Gleichung (2.96), auf die Jaumann'sche Zeitableitung, die in vielen kommerziellen FE-Programmen implementiert ist (unter anderem auch in ABAQUS, welches im Rahmen dieser Arbeit zur Simulation verwendet worden ist). Es lassen sich dann folgende Beziehungen zwischen dem Rotationstensor  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}}$  und  $\mathbf{Q}$  sowie  $\mathbf{W}$  herstellen:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{W} \quad (2.101)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{W}(t) \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$$

Wie in Gleichung (2.46) bereits dargelegt wurde, ist diese Wahl aufgrund der Abhängigkeit von  $\mathbf{W}$  vom Strecktensor  $\mathbf{U}$  allerdings im allgemeinen fragwürdig. Als weiteres Problem erweisen sich die Spannungssoszillationen unter reiner Schubbeanspruchung, die bei einer Anwendung dieser Zeitableitung auftreten. Trotzdem ist die Anwendung der Jaumann'schen Zeitableitung zur Lösung von Problemstellungen anwendbar, wenn die äußeren Lasten in kleinen Schritten aufgebracht werden [35] oder die plastischen Verformungen moderat sind [42], was im Rahmen dieser Arbeit angenommen worden ist.

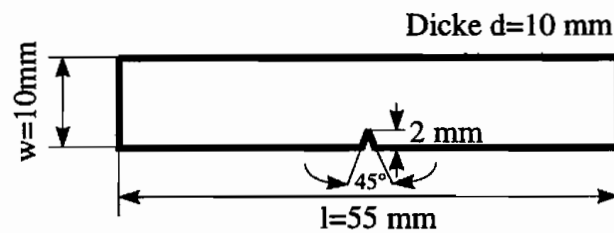
## 2.3 Experimentelle Grundlagen

### 2.3.1 Der instrumentierte Kerbschlagbiegeversuch

Beim Kerbschlagbiegeversuch wird eine Probe mit einem durch die Schwerkraft beschleunigten Schlaghammer oder einem Fallgewicht belastet, um die Kerbschlagzähigkeit des Materials zu prüfen. Man verwendet dazu eine genormte, mit einem spitzen oder runden Kerb versehene Probe, deren Enden jeweils an einem Widerlager aufliegen. Die am häufigsten verwendete Probenform, die auch im Rahmen dieser Arbeit untersucht wird, ist die gekerbte Charpy-Probe, deren Maße Abbildung 2.8 zu entnehmen sind.

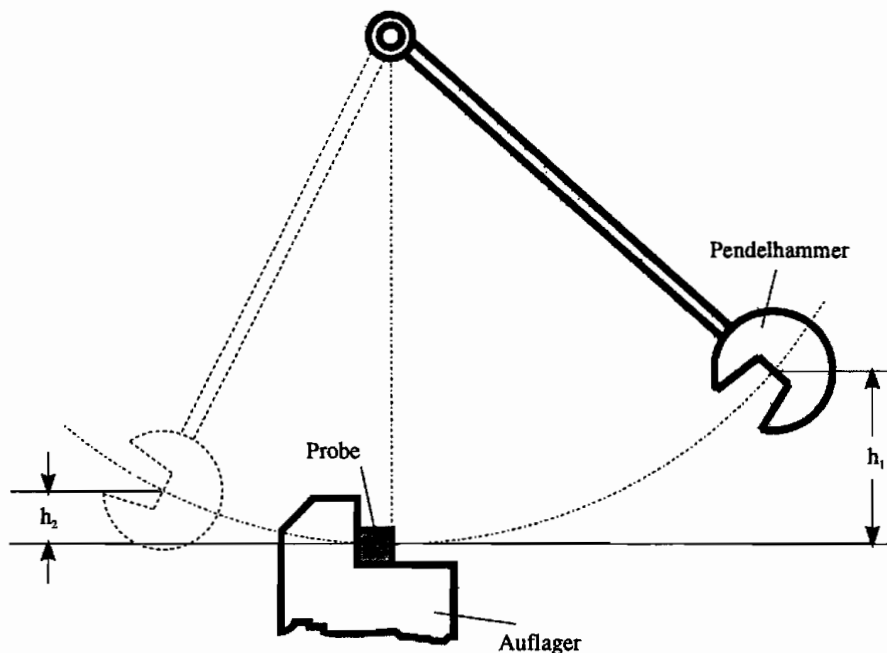
Die Energie, die notwendig ist, um den Bruch der Probe herbeizuführen, ist ein Maß für die Kerbschlagarbeit  $A_v$ . Als Kerbschlagzähigkeit wird die auf den Prüfquerschnitt  $A_K$  bezogene Kerbschlagarbeit bezeichnet.

In der einfachsten Form erfolgt die Messung der von der Probe während der Belastung absorbierten Energie durch die Messung des Höhenunterschieds des Pendels vor und nach



**Abbildung 2.8:** Standard-Charpy-Probe nach ASTM E 24.03.03

dem Versuch im Umkehrpunkt, veranschaulicht in Abbildung 2.9. Allerdings kann mit dieser Methode nur ein Wert für die gesamte Energie, die während des Bruchvorgangs von der Probe aufgenommen wird, ermittelt werden, eine Aufteilung in Energieanteile, die zur Rißinitiierung oder zum Rißfortschritt notwendig sind, ist nicht möglich.



**Abbildung 2.9:** Kerbschlagbiegeversuch mit Angabe der Höhenunterschiede

Um eine solche Ermittlung der einzelnen Energieanteile zu ermöglichen, ist der instrumentierte Kerbschlagbiegeversuch entwickelt worden. Durch Dehnungsmeßstreifen, die an der Hammerspitze angebracht sind, kann die Kraft während des Schlagvorgangs gemessen werden. Die Verschiebung der Probe am Kraftangriffspunkt kann entweder gemessen oder durch Integration des dynamischen Kräftegleichgewichts berechnet werden:

$$v(t) = v_0 - \frac{1}{m_h} \int_0^t F(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (2.102)$$

und daraus

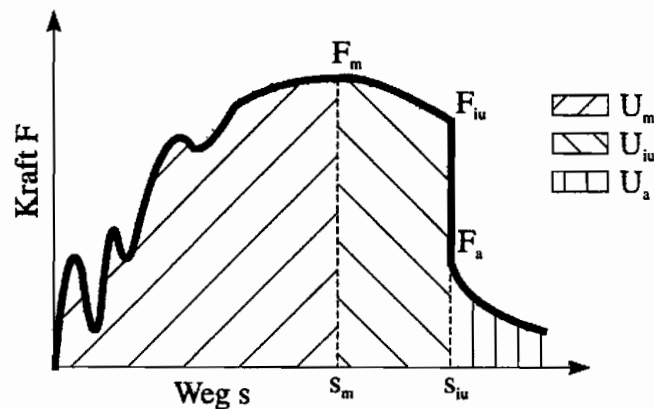
$$s(t) = \int_0^t v(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (2.103)$$

Die Energie, die die Probe während des Belastungsvorgangs aufnimmt, ist gegeben durch:

$$U(s) = \int_0^s F(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (2.104)$$

Der Fallversuch, der im Rahmen dieser Arbeit zur Messung der Probenkräfte und -energien angewendet wurde, unterscheidet sich vom instrumentierten Kerbschlagbiegeversuch lediglich darin, daß der Schlaghammer senkrecht auf die Probe fällt. Für die Instrumentierung des Hammers und die Auswertung der aufgenommenen Meßsignale gelten die gleichen Zusammenhänge.

Zur Ermittlung der bruchmechanischen Kennwerte während des Belastungsvorgangs und der energetischen Anteile, die zur Rißinitiierung und zum Rißfortschritt notwendig sind, wird üblicherweise das Kraft-Verschiebungs-Diagramm herangezogen. Ein typisches Kraft-Verschiebungs-Diagramm ist in Abbildung 2.10 dargestellt.



**Abbildung 2.10:** Typisches Kraft-Verschiebungs-Diagramm eines instrumentierten Schlagversuchs mit Angabe der Teilenergien

Im allgemeinen wird angenommen, daß der Beginn der makroskopischen, subkritischen Rißausbreitung dann stattfindet, wenn die Kraft  $F$  den maximalen Wert  $F_m$  zur Zeit  $t_m$  erreicht. Für diesen Zeitpunkt wird die dynamische Bruchzähigkeit  $K_{Id}$  bzw.  $J_{Id}$  bestimmt. Obwohl fraktographische Untersuchungen gekerbter Charpy-Proben zeigen, daß das Auftreten der Rißinitiierung bei einer Zeit  $t < t_m$  liegt [43], bedeutet die Annahme von  $t_m$  als Zeitpunkt der Rißinitiierung im Rahmen dieser Arbeit keine Einschränkung, da der Einfluß der Trägheitskräfte auf die Bestimmung des J-Integrals untersucht werden sollen, das Ende des betrachteten Zeitbereichs demnach weit unterhalb von  $t_m$  liegt (siehe auch Kapitel 4).

Mit dem Index *iu* (initiation of unstable propagation) wird der Zeitpunkt der instabilen Rißausbreitung bezeichnet. Mit dem Index *a* wird der Zeitpunkt bezeichnet, an dem der Riß wieder zum Stillstand kommt. Dieses Phänomen wird Rißarrest genannt [4].

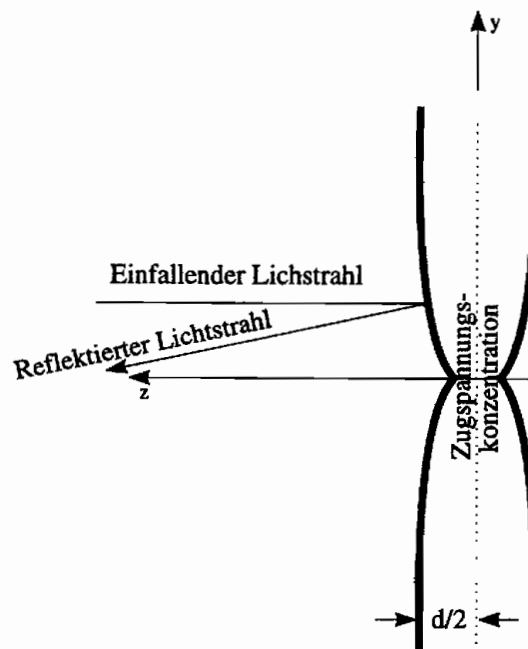
Durch die Bestimmung der von der Probe aufgenommenen Energie, die durch die Fläche unter der Kraft-Verschiebungs-Kurve repräsentiert wird, kann für jeden Zeitpunkt der Wert des J-Integrals bestimmt werden. Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß unterschiedliche Auffassungen darüber bestehen, ob und inwieweit der energetische Anteil des Trägheitspeaks bei der Bestimmung der Probenenergie berücksichtigt wird. Darauf wird im Verlauf der Untersuchungen noch näher eingegangen.



Ein weiteres Phänomen, das bei schlagbelasteten Proben beobachtet werden kann, ist das mögliche Auftreten von Kontaktverlust zwischen der Probe und den Widerlagern zu bestimmten Zeiten [4]. Der Effekt hängt wesentlich von der Probensteifigkeit und damit von der Geometrie ab, so daß bei ansonsten konstanten Bedingungen die Verringerung der Probenhöhe zu einem stärkeren Abheilverhalten führt. Dies widerspricht der in numerischen Untersuchungen häufig angenommenen festen Randbedingung an den Widerlagern (siehe auch Kapitel 3). Weiterhin ist zu beobachten, daß durch Verkürzen der Probe unter ansonsten gleichen Bedingungen ebenfalls ein stärkeres Abheilverhalten und damit ein größerer Einfluß der dynamischen Beanspruchungskomponente auf das gesamte Probenverhalten erreicht wird. Diese Effekte waren der Grund, warum in den Experimenten und den entsprechenden numerischen Simulationen im Rahmen dieser Arbeit verkürzte Proben vom Charpy-Typ [23] verwendet worden sind.

### 2.3.2 Das schattenoptische Kaustikenverfahren

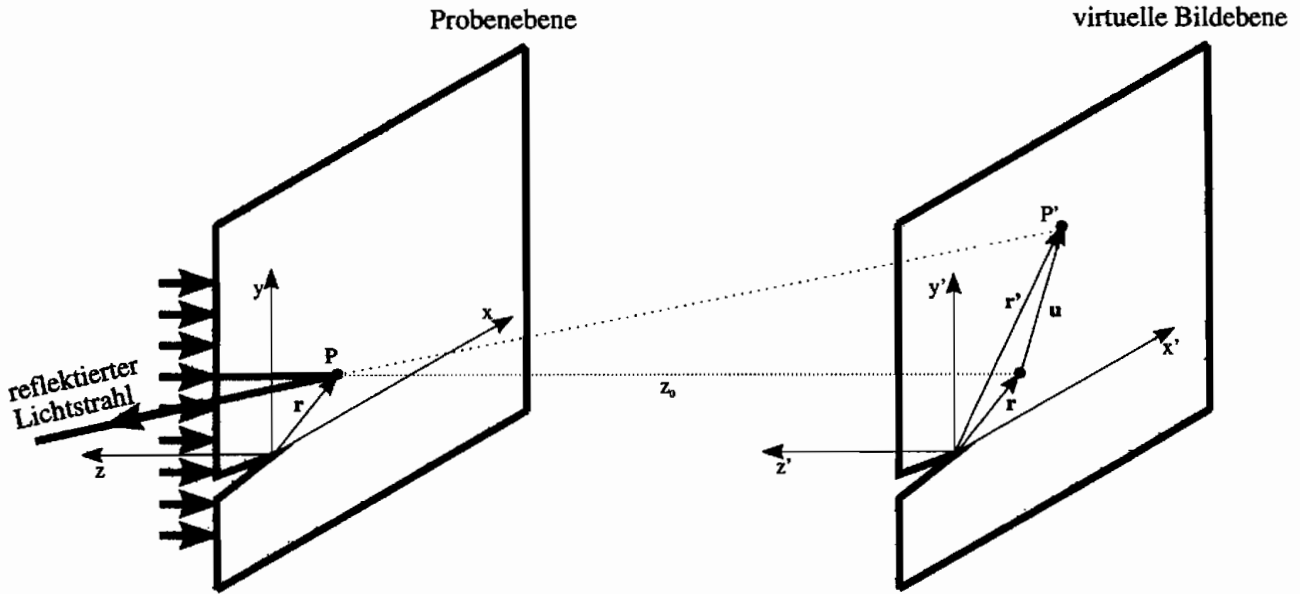
Eine experimentelle Möglichkeit, die Spannungskonzentration an einer Kerb- oder Rißspitze zu messen, ist das von Manogg [44, 45] eingeführte und verschiedenen Autoren [46, 47, 48, 49] erweiterte schattenoptische Kaustikenverfahren. Damit können Spannungskonzentrationen in Körpern sowohl in Transmissions- als auch in Reflexionsanordnung sichtbar gemacht werden. Es basiert darauf, daß bei einer äußeren Spannung sich sowohl die Dicke eines Körpers als auch sein Brechungsindex ändert. Die im folgenden dargestellten Grundlagen gelten für reflektierte Lichtstrahlen. Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens findet man in [50]. Ein auf einen eingeschnürten Bereich einer Probe einfallender Lichtstrahl wird reflektiert, wie es in Abbildung 2.11 dargestellt ist.



**Abbildung 2.11:** Reflexion eines Lichtstrahls an einer aufgrund einer Spannungskonzentration eingeschnürten Probe

Wird dieser reflektierte Lichtstrahl in einer Entfernung  $z_0$  von der Probe in der virtuellen

Bildebene aufgenommen, so ergeben sich die in Abbildung 2.12 dargestellten Zusammenhänge.



**Abbildung 2.12:** Reflexion eines Lichtstrahls in der Probenebene im Punkt P und die entsprechende Abbildung auf den Punkt P' in der virtuellen Bildebene

Die virtuelle Bildebene ergibt sich aus der Extrapolation der reflektierten Lichtstrahlen hinter die Probenebene, wie dies durch die gestrichelte Verlängerung des reflektierten Lichtstrahls in Abbildung 2.12 angedeutet wird, und hat den Abstand  $z_0$  zur Probenebene. Da  $z_0$  in negativer  $z$ -Richtung gemessen wird, ist für die nachfolgenden Gleichungen  $z_0$  als negativer Wert einzusetzen. Die Aufnahme der Kaustiken in der virtuellen Bildebene ist im Rahmen dieser Arbeit deshalb notwendig, weil die reflektierten Lichtstrahlen für den Fall, daß der Kerb oder der Riß unter einer Zugspannung steht, in der reellen Bildebene, die im Abstand  $z_0$  links von der Probenebene liegt, eine Lichtkonzentration ergeben, die bezüglich des Spannungsintensitätsfaktors nicht ausgewertet werden kann.

Betrachtet man einen Punkt P, dessen Abstand von einem Riß oder Kerb (siehe Abbildung 2.12) durch den Betrag seines Ortsvektors  $r$  beschrieben wird, so wird der einfallende Lichtstrahl aufgrund der Einschnürung der Probe abgelenkt. Diese Einschnürung ist proportional zum Ortsgradienten des Spannungstensors. Der Bildpunkt P' von P, aufgenommen in der virtuellen Bildebene im Abstand  $z_0$  von der Probenebene, hat aufgrund des Verschiebungsvektors  $u$  den Abstand  $|r'|$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad (2.105)$$

Die Größe des Verschiebungsvektors  $u$  ist vom Abstand  $z_0$  der Bildebene von der Probenebene abhängig. Für den Fall einer Riß- oder Kerbspitze unter Mode I-Belastung ergeben sich folgende Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \phi - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z_0 c d_{eff} r^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2} \phi \\ y' &= r \sin \phi - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z_0 c d_{eff} r^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2} \phi \end{aligned} \quad -\pi < \phi < \pi \quad (2.106)$$

Dabei wurde die Spannungsverteilung aus Gleichung (2.3) in Polarkoordinatendarstellung benutzt.  $d_{\text{eff}}$  ist im vorliegenden Fall gleich der halben Probendicke, und  $c$  ist die schattenoptische Konstante, die für den Fall der Reflexion aus dem E-Modul und der Querkontraktionszahl bestimmt wird:

$$c = \frac{2\nu}{E} \quad (\text{ESZ}) \quad (2.107)$$

Die Menge aller abgelenkten Lichtstrahlen formt in der Bildebene einen Schattenfleck mit einer hellen Umrandung, deren Intensität nach außen hin schwächer wird. Diese helle Umrandung wird als Kaustikkurve bezeichnet. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Kaustikkurve ist, daß die Determinante der Jacobimatrix der Abbildungsgleichungen aus (2.106) zu Null wird:

$$\frac{\partial x'}{\partial r} \frac{\partial y'}{\partial \phi} - \frac{\partial x'}{\partial \phi} \frac{\partial y'}{\partial r} = 0 \quad (2.108)$$

Die Menge aller Punkte in der Probenebene, deren Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  Gleichung (2.108) erfüllen, bildet einen Kreis mit dem Radius  $r_0$ , der als Urkreis oder Urkurve bezeichnet wird. Alle Lichtstrahlen, die außerhalb oder innerhalb des Urkreises auf die Probe einfallen, werden auf Punkte außerhalb der Kaustikkurve abgebildet. Dies bedeutet aber auch, daß die Information, die der Kaustik entnommen werden kann, nur aus den Punkten des Urkreisradius stammt. Es ergibt sich für den Zusammenhang zwischen  $r_0$  und  $K_I$ :

$$r_0 = \left[ \frac{3}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} |z_0| c d_{\text{eff}} \right]^{\frac{2}{5}} \quad (2.109)$$

Für den hier betrachteten Fall der Reflexionskaustiken unter Zugbeanspruchung ist zu beachten, daß die Kaustik nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht werden kann, sondern Aufnahmen nur mit einer Kamera erfolgen können, die auf die virtuelle Bildebene fokussiert ist. In Abbildung 2.13 ist eine Reflexionskaustik, die sich aus einer Mode I-Zugbelastung bei einer Aufnahme in der virtuellen Bildebene ergibt, schematisch dargestellt.

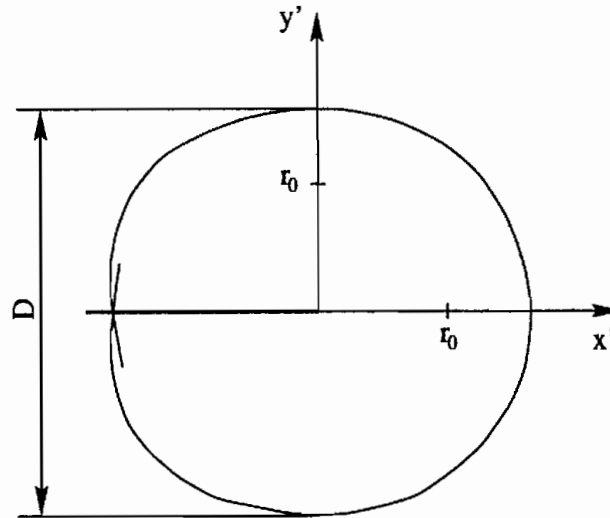
Der Durchmesser  $D$  der Kaustik steht in einem festen Verhältnis zum Urkreisradius  $r_0$ :

$$D = 3,17 r_0 \quad (2.110)$$

Mit diesen Beziehungen kann nun der Spannungsintensitätsfaktor aus dem gemessenen Durchmesser einer Kaustik bestimmt werden:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3(3,17)^{\frac{5}{2}} |z_0| c d_{\text{eff}}} D^{\frac{5}{2}} \quad (2.111)$$

Bei der Entwicklung der obigen Gleichung wird die Nahfeldlösung der Spannungsverteilung um die Riß- oder Kerbspitze berücksichtigt (siehe Gleichung (2.3)), die in großen Proben mit langen Rissen das Spannungsfeld dominiert, so daß die aus den Kaustiken ermittelten K-Faktoren auch für endliche Urkreisradien ihre Gültigkeit haben. Wenn jedoch, wie in der vorliegenden Arbeit, kleine Proben an kurzen Rissen oder Kerben betrachtet werden, so haben die Spannungsterme höherer Ordnung einen nicht vernachlässigbaren



**Abbildung 2.13:** Schematische Darstellung einer Reflexionskaustik unter Mode I-Zugbeanspruchung in der virtuellen Bildebene

Einfluß auf das Spannungsfeld in einem endlichen Abstand  $r_0$  von der Kerbspitze. In Gleichung (2.112) ist die Spannungsverteilung als Reihenentwicklung dargestellt, abgebrochen nach dem Term 3. Ordnung [50]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{4\pi r}} \left( 5 \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{3\phi}{2} \right) + a_2 \cos^2 \phi + a_3 \sqrt{r} \left( 3 \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{5\phi}{2} \right) + \dots \\ \sigma_\phi &= \frac{K_I}{\sqrt{4\pi r}} \left( 3 \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{3\phi}{2} \right) + a_2 \sin^2 \phi + a_3 \sqrt{r} \left( 3 \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{5\phi}{2} \right) + \dots \quad (2.112) \\ \tau_{r\phi} &= \frac{K_I}{\sqrt{4\pi r}} \left( \sin \frac{\phi}{2} + \sin \frac{3\phi}{2} \right) - \frac{a_2}{2} \sin 2\phi + a_3 \sqrt{r} \left( \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{5\phi}{2} \right) + \dots\end{aligned}$$

Im allgemeinen hat der Spannungsterm 2. Ordnung, der eine konstante Spannung beschreibt, von den Termen höherer Ordnung den größten Einfluß auf das Spannungsfeld [50]. Da das Kaustikenverfahren aber nur gegenüber Spannungsgradienten sensitiv ist, spielt diese Überlagerung keine Rolle für die Auswertung der Kaustik. Gerade bei kleinen Proben können aber auch die Terme ab der 3. Ordnung das Spannungsfeld im Abstand  $r_0$  der Urkurve das Bild der Kaustik und damit die Ermittlung des K-Faktors beeinflussen. Bei der Auswertung von Kaustiken für solche Anwendungsfälle ist deshalb die Gültigkeit des ermittelten K-Faktors anhand von theoretisch oder numerisch ermittelten Werten zu überprüfen.

Da bei hohen Spannungsgradienten im Bereich der Rißspitze kein ebener Spannungszustand mehr vorliegt, muß bei der experimentellen Ermittlung von Kaustiken darauf geachtet werden, daß für eine korrekte Bestimmung des K-Faktors die der Kaustik zugrunde liegende Urkurve mindestens so groß ist, daß sie in einem Bereich liegt, in dem ein ebener Spannungszustand vorherrscht [50]:

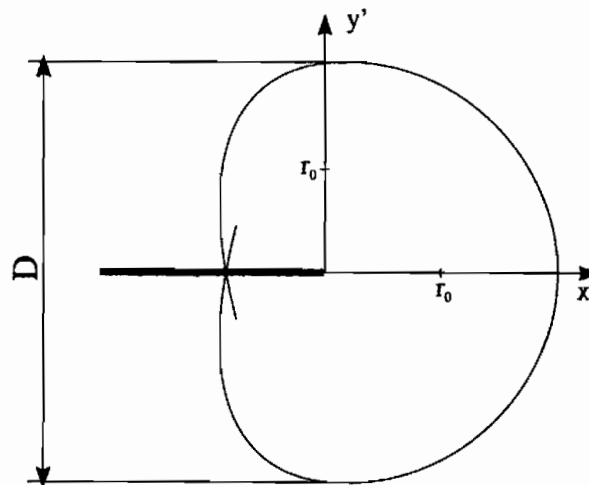
$$r_0 > r_d \quad (2.113)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kommt es zu einer Abweichung des optisch ermittelten Spannungsintensitätsfaktors vom tatsächlich bestehenden K-Faktor. Der Mindestradius  $r_d$

ist dickenabhängig, wie Untersuchungen gezeigt haben [51]. Als Richtwert für den Wert, den  $r_0$  mindestens aufweisen sollte, ist ungefähr die halbe Probendicke zu nennen. Da sich in realen Materialien an Spannungskonzentrationspunkten immer plastische Zonen ausbilden, Gleichung (2.111) aber nur für linear-elastisches Materialverhalten gilt, ist weiterhin darauf zu achten, daß die Urkurve außerhalb des Bereichs der plastischen Zone liegt:

$$r_0 > r_p \quad (2.114)$$

Für Kerben oder Risse in elastisch-plastischen Materialien ergibt sich an der Riß- bzw. Kerbspitze keine Spannungskonzentration, da die Spannungen durch die Fließgrenze limitiert sind, sondern eine Konzentration der plastischen Dehnungen. Nach [52, 53] können für diesen Fall ebenfalls Kaustiken erhalten werden. Die Herleitung erfolgt analog zu denjenigen für elastisches Materialverhalten, allerdings unter Verwendung des HRR-Spannungsfelds (Gleichung (2.8)) anstelle der in Gleichung (2.3) beschriebenen Beziehungen. Die Kaustik hat eine im Vergleich zur elastischen Kaustik leicht abgeplattete Form, was in Abbildung 2.14 schematisch dargestellt ist.



**Abbildung 2.14:** Schematische Darstellung einer elastisch-plastischen Reflexionskaustik unter Mode I-Zugbeanspruchung in der virtuellen Bildebene

Für linear verfestigendes Materialverhalten, daß nach dem Ramberg-Osgood Modell beschrieben werden kann:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F} = \frac{\sigma}{\sigma_F} + \alpha_h \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^h \quad (2.115)$$

ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem J-Integral und dem gemessenen Kaustikdurchmesser D:

$$J = S_h \frac{\alpha_h \sigma_F^2}{E} \left( \frac{E}{\alpha_h \sigma_F |z_0| d} \right)^{\frac{h+1}{h}} D^{\frac{3h+1}{h}} \quad (2.116)$$

$h$  ist der Verfestigungsparameter des Materials,  $\alpha_h$  ein Multiplikationsfaktor,  $\sigma_F$  ist die einachsige Fließspannung,  $\varepsilon_F$  die der Fließspannung entsprechende Dehnung, und  $S_h$  ist ein Skalierungsfaktor, der in [52] tabelliert ist. Bei der Anwendung von Gleichung (2.116)

ist darauf zu achten, daß die Urkurve innerhalb der plastischen Zone um die Riß- oder Kerbspitze liegt.

Für einen stehenden Riß, der unter dynamischer Beanspruchung steht, ist die Spannungsfeldverteilung die gleiche wie für einen statisch beanspruchten Riß [54, 55]. Lediglich der Spannungsintensitätsfaktor ist aufgrund der wechselnden Beanspruchung eine Funktion der Zeit, wie bereits in Abschnitt 2.1.4.3 erwähnt worden ist. Die für die Kaustiken dargestellten Zusammenhänge können aber in der gleichen Weise angewendet werden.

## 3 Stand der Forschung

### 3.1 Experimentelle Verfahren

#### 3.1.1 Ermittlung der dynamischen Bruchzähigkeit einer Probe

In diesem Abschnitt soll ein Überblick gegeben werden, welche Verfahren zur Bestimmung der dynamischen Bruchzähigkeit  $K_{Id}$  (linear-elastisches Materialverhalten) bzw.  $J_{Id}$  (elastisch-plastisches Materialverhalten) existieren, und inwieweit die Trägheitskräfte bei der Bestimmung berücksichtigt werden. Der Überblick ist nicht vollständig, sondern erwähnt nur die Verfahren, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Bedeutung aufweisen.

Wird eine Probe dynamisch belastet, so kann sich das Probenverhalten vom statischen oder quasi-statischen Beanspruchungsfall erheblich unterscheiden, was die bruchmechanischen Kenngrößen anbelangt. Mögliche Ursachen können Trägheitseffekte, die Ausbreitung und Reflexion von Spannungswellen oder die Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Belastungsgeschwindigkeit sein. Hohe Beanspruchungsraten werden unter Laborbedingungen häufig durch Fallwerke und servohydraulische Prüfmaschinen mit geschlossenen oder offenen Hydraulikkreisläufen aufgebracht.

Der Zeitpunkt der Reißinitiierung, der maßgebend für die Ermittlung von  $K_{Id}$  oder  $J_{Id}$  ist, kann durch die Bestimmung des Kraftmaximums aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve bei elastisch-plastischem Materialverhalten nur näherungsweise ermittelt werden, denn häufig tritt Reißausbreitung schon vor dem Erreichen des Lastmaximums auf [55]. Dies ist durch Schädigungsvorgänge vor der Kerbspitze, wie z.B. Porenentstehung und -wachstum, mit anschließender Mikrorißbildung zu erklären. Diese Einflüsse der Mikrostruktur des Materials auf  $J_{Id}$  sind bisher nur wenig untersucht worden [56, 57], was mit der äußerst aufwendigen experimentellen Beobachtung solcher Vorgänge zusammenhängt.

Die Schwingungen der Kraft, die durch die Trägheit der Probe entstehen, sollten zu Beginn der Reißausbreitung bereits so weit abgeklungen sein, daß eine quasi-statische Bestimmung der Kerbzähigkeit möglich ist. Möglichkeiten zur Beeinflussung der Bruchzeit liegen in der Änderung der Probenmaße oder in einer Absenkung der Schlaggeschwindigkeit. Die Schlaggeschwindigkeit muß aber hoch genug sein, damit die Kraft-Verschiebungs-Kurve der Probe unter der Annahme ermittelt werden kann, daß die Änderung der Hammergeschwindigkeit während des Schlagvorgangs vernachlässigbar ist [5].

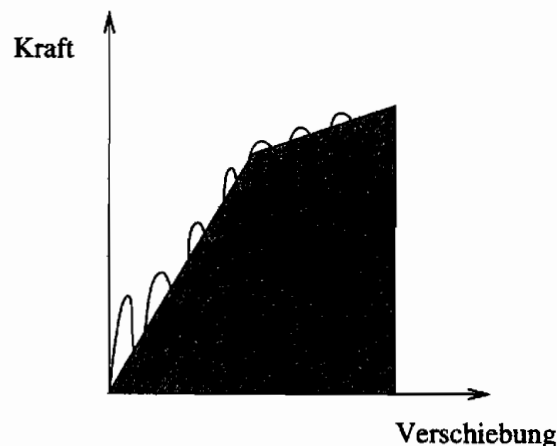
Allerdings ist die Restriktion ausreichend großer Bruchzeiten ist nicht immer zu erfüllen. Aus diesem Grund ist von Kalthoff et al. [58, 59, 60, 61, 62] die Methode der Schlag-Reaktions-Kurven entwickelt worden. Sie basiert auf der Messung des dynamischen K-Faktors als Funktion der Zeit, der quantitativ mit dem Probenverhalten korreliert werden kann, da eine Eineindeutigkeit zwischen dem  $K(t)$ -Verlauf und dem elastischen Verhalten

des Systems Hammer-Probe besteht [4]. Zur Ermittlung von  $K_{Id}$  ist dann lediglich der Zeitpunkt der Rißinitiierung festzustellen, was entweder durch einen an der Rißspitze aufgetragenen DMS, dessen Signal bei Rißausbreitung einen starken Abfall zeigt, oder bei magnetisierbaren Proben durch einen magnetischen Aufnehmer erreicht wird, der in der Nähe der Rißspitze fixiert wird, ohne die Probe zu berühren. Diese Methode ist allerdings auf den Bereich des elastischen Probenverhaltens und des Kleinbereichsfließens beschränkt, da die Eindeutigkeit bei elastisch-plastischem Verhalten der Probe nicht mehr gegeben ist [4].

Im Anwendungsbereich der Fließbruchmechanik wird die zum Zeitpunkt der Rißinitiierung in der Probe gespeicherte Energie gemessen. Dies geschieht durch die Ermittlung der Fläche der Kraft-Verformungs-Kurve, was in Abbildung 2.10 dargestellt worden ist. Die Bestimmung des  $J_{Id}$ -Wertes erfolgt dann analog zu Gleichung (2.13).

Die Problematik der Bestimmung der Fläche unter der Kraft-Verschiebungs-Kurve ist in Abschnitt 2.3.1 bereits angesprochen worden und soll hier weiter vertieft werden.

Da der Einfluß des Trägheitspeaks auf den Energiebeitrag zur Kerbbeanspruchung experimentell nicht quantifiziert werden kann [64, 65, 66], sind verschiedene Versuche unternommen worden, über den Energieanteil des Trägheitspeaks zu mitteln. Turner [7, 60] hat die Verwendung einer Ausgleichsgeraden vorgeschlagen, was in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt ist:



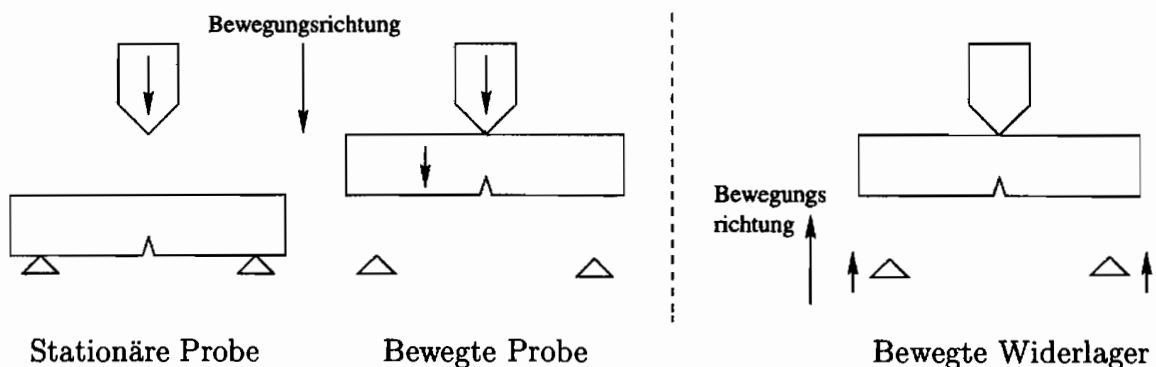
**Abbildung 3.1:** Darstellung der Vernachlässigung des Trägheitspeaks bei der Energiebestimmung nach Turner [7, 60]

Kobayashi [8] hat ein numerisches Verfahren angewandt, um die Oszillationen der Kurve zu glätten. Bei dieser Vorgehensweise werden die Meßwerte korrigiert, indem die zeitlich vor- und nachgelagerten Meßpunkte zur Glättung herangezogen werden. Beiden Methoden liegt die Vorstellung zugrunde, der Trägheitspeak stelle lediglich die Auswirkung der Trägheit der Probe auf das Kraft-Signal dar, ohne energetische Auswirkung auf die Kerbbeanspruchung. Diese Verfahren liefern schlüssige Ergebnisse über den Zeitpunkt der Rißinitiierung und werden deshalb bei einer Auswertung, die sich auf das Kraft-Verschiebungs-Diagramm bezieht, üblicherweise angewendet.

Es sind auch Versuche unternommen worden, den Einfluß der Trägheitskräfte auf die ermittelte Bruchlast (Kraft zu Beginn der Rißausbreitung) durch die Art der Lastaufbringung zu verringern. In [67] wird eine Versuchsanordnung beschrieben, bei der die



Probe mit dem Hammer mitbewegt wird und auf die feststehenden Widerlager trifft. Die dadurch erreichte Verringerung der Trägheitspeaks, die im Hammersignal beobachtet wird, hat eine um etwa 20% höhere Bruchlast der Probe zur Folge. In [68] wird dagegen die umgekehrte Versuchsanordnung beschrieben, d.h. die Widerlager bewegen sich auf das fixierte System Hammer-Probe zu. Auch hier werden geringere Oszillationen der Trägheitskräfte beobachtet. Allerdings ist der qualitative zeitliche Verlauf der gemessenen Kräfte verschieden im Vergleich zum herkömmlichen Test. Die Biegung der Probe beginnt bereits zu einem Zeitpunkt, zu dem noch kein Kraftsignal registriert werden kann. Die verschiedenen Arten der Lastaufbringung sind in Abbildung 3.2 dargestellt.



**Abbildung 3.2:** Verschiedene Belastungsarten beim Charpy-Impact-Test

Bei weiteren Verfahren zur Ermittlung der dynamischen Kerbschlagzähigkeit wird die Probe nur soweit belastet, daß stabiles, subkritisches Rißwachstum einsetzt, die Probe aber nicht komplett bricht. Gemessen wird  $J$  in Abhängigkeit von der Rißverlängerung  $\Delta a$  bei mehreren Proben. Ein Beispiel für ein solches Verfahren ist der Low-Blow-Test.

### 3.1.2 Ermittlung der Kerbspannungsintensität

Um für den Fall dynamischer Belastungen den zeitlichen Verlauf der Kerbspannungsintensität bestimmen zu können, eignen sich nach dem Stand der Kenntnis herkömmliche Verfahren, wie die Bestimmung von  $K$  oder  $J$  aus der Lastverschiebungskurve, nicht mehr, wenn der Einfluß der Trägheitskräfte in der Probe noch einen signifikanten Einfluß hat [3]. Für diesen Fall sind optische Verfahren notwendig, wie das Kaustikenverfahren oder die Photoelastizität.

Zur Untersuchung des dynamischen Belastungsfalls haben Kalthoff und Yu [69]  $J$ -Integral-Werte aus Kaustikendurchmessern ermittelt durch den Vergleich mit quasi-statisch gemessenen. Sie haben so das schwingende Verhalten der Kerbspannungsbelastung für die Zeiten vor der Rißausbreitung nachweisen können. Zur Bestimmung des  $J$ -Integrals sind die Kaustiken nach Gleichung (2.111) unter Annahme von Kleinbereichsfließen elastisch ausgewertet und mit den Gleichungen (2.5) und (2.11) das  $J$ -Integral bestimmt worden. Ähnliche Untersuchungen sind von Zehnder et al. [70] durchgeführt worden, allerdings sind die Kaustiken nach Gleichung (2.116) auch elastisch-plastisch ausgewertet worden. Lee et al. [71] haben den Einfluß des Urkreisradius einer Kaustik auf die  $J$ -Integral-Werte

in Abhängigkeit von der Größe der plastischen Zone und der Probendicke untersucht. Die gemessenen Werte sind mit denen einer entsprechenden FEM-Lösung verglichen worden. Ein signifikanter Einfluß des Verhältnisses des Urkreisradius zur Größe der plastischen Zone bzw. zur Probendicke auf das gemessene J-Integral ist dabei festgestellt worden. Allerdings haben sie nur den quasi-statischen Anwendungsfall betrachtet.

Die Anwendung photoelastischer Verfahren auf die Messung von Spannungsnahfeldern unter dynamischer Belastung sind von Taudou et al. [72] erforscht worden. Sie haben durch den Vergleich mit entsprechenden Werten aus Kaustiken-Versuchen gezeigt, daß die Betrachtung der Spannungsterme höherer Ordnung (siehe Abschnitt 2.3.2) bei der Auswertung der Isochromaten notwendig ist. Die Untersuchung hat sich zwar auf laufende Risse beschränkt, ihre Ergebnisse können aber auch für den stehenden Riß bzw. Kerb verwendet werden.

Eine dem Moiré-Verfahren ähnliche Methode haben Demler und Klenk [73] zur Bestimmung des Spannungsnahfelds eines dynamisch belasteten Risses einer elastisch-plastisch reagierenden Probe angewandt. Allerdings wird nicht erwähnt, ob und mit welcher Genauigkeit sich diese Methode zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs des Spannungsnahfeldes eignet.

Eine Kombination von experimenteller und numerischer Vorgehensweise zur Bestimmung des dynamischen Spannungsintensitätsfaktors für elastische Materialien ist von Bui et al. [74] angewendet worden. Sie verwenden das in [75, 76] beschriebene H-Integral zur Beschreibung der Spannungsintensität  $K(t)$ :

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_0^t (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{V}_H - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{V}_H] \cdot \mathbf{u}) d\tau d\Gamma \quad (3.1)$$

wobei  $\mathbf{V}_H = \mathbf{V}_H(\mathbf{x}, t, a, \tau)$  eine Hilfsgröße darstellt, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_H(\tau \geq t) = 0 \\ \dot{\mathbf{V}}_H(\tau \geq t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_H) = \rho \frac{\partial \dot{\mathbf{V}}_H}{\partial t} \quad (3.3)$$

Das so definierte H-Integral stellt ein reines Weg-Integral dar, was die numerische Auswertung gut handhabbar macht. Als ein für die Verknüpfung von Experiment und Numerik geeigneter Integrationspfad kann die Probenumrandung gewählt werden.

Ein vergleichsweise neue Methode zur Messung des Spannungsnahfelds einer Kerbspitze ist das auf dem Prinzip der Speckle-Interferometrie basierende Verfahren von Sutton et al. [77]. Die mittels einer CCD-Kamera aufgenommenen Verschiebungsmuster werden digital weiterverarbeitet. Aus dem gemessenen Spannungsnahfeld kann dann die Kerbspannungsintensität ermittelt werden. Als Grenze der Methode ist die Beschränkung auf kleine Verschiebungen zu nennen, da ansonsten eine Zuordnung der Verschiebungsmuster zum Ausgangszustand nicht mehr möglich ist.

Ein video-optisches Verfahren zur Messung des Dehnungstensors an diskreten Orten einer Probe unter quasi-statischen Bedingungen haben Cardenas-Garcia et al. [78] präsentiert.

Der gemessene Dehnungstensor ist anschließend zur Berechnung des J-Integrals verwendet worden. Obwohl diese Methode auch für plastische Verformungen anwendbar ist, bleibt sie jedoch auf kleine Verformungen beschränkt und ist aufgrund der ungenügenden Aufnahme Frequenz nicht in der Lage, Dehnungsfelder zu ermitteln, die infolge von Schlagbelastungen entstehen.

## 3.2 Numerische Modellierung

### 3.2.1 Verschiedene Integralkriterien zur Berechnung der Kerbspannungsintensität

Im folgenden sind einige Integralkriterien hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf verschiedene Werkstoffmodelle und Belastungsformen dargestellt. Ihre theoretische Grundlage bezieht sich im allgemeinen auf Rißkonfigurationen. Für den im Rahmen dieser Arbeit vorliegenden Fall einer Kerbspitzenbelastung wird eine Anwendbarkeit angenommen, wie bereits in Abschnitt 2.1.1 angesprochen worden ist.

In der Literatur findet man für verschiedene Belastungsfälle und Arten des Materialverhaltens Formulierungen von Integralkriterien, die die Berechnung von Kerbspannungsintensitäten zum Ziel haben. Im folgenden werden einige dieser Kriterien für den Mode I-Belastungsfall dargestellt und bezüglich ihrer Anwendbarkeit eingeordnet.

Eshelby [79] hat das Konzept einer Kraft auf eine elastische Singularität formuliert und sie als Flächenintegral beschrieben, das die Singularität beinhaltet. In weiteren Arbeiten [80, 81] erweiterte er diesen Ansatz, indem er einen Energie-Momenten-Tensor einführte und spezielle Formen von Singularitäten betrachtete. Unabhängig davon formulierte Rice [6] das J-Integral als wegunabhängiges Linienintegral, welches die physikalische Bedeutung einer Energiefreisetzung pro Rißverlängerung in Rißrichtung besitzt. Es gilt für nicht-linear elastisches Materialverhalten, aber auch für das Auftreten plastischer Verformungen, sofern keine Entlastungen im Material auftreten, wie in Kapitel 2 schon erwähnt worden ist. Das so definierte J-Integral eignet sich von seiner theoretischen Grundlage her nur für stehende Risse, die quasi-statisch belastet werden. Allerdings gibt es eine Vielzahl von Versuchen, das J-Integral nach Rice auch für davon abweichende Anwendungsfälle zu verwenden und den Fehler abzuschätzen. Yoda [82] untersuchte für quasi-statische Anwendungsfälle den Einfluß von Entlastungen und fand nur geringe Abweichungen zu experimentellen Ergebnissen. Zu ähnlichen Aussagen kamen Dowling und Begley [83] bei Untersuchungen der Anwendbarkeit des J-Integrals auf die Berechnung von Ermüdungsrißwachstum.

Aufbauend auf einer Arbeit von Knowles und Sternberg [84] entwickelten Rice und Budiansky [85] das L-Integral und das M-Integral, die einer Rotation bzw. einer Vergrößerung der umschlossenen Singularität Rechnung tragen. Lubarda [86] verwendete das M-Integral, um den elastischen K-Faktor für belastete Rißflanken zu berechnen. Der physikalische Hintergrund dieser Formulierungen ist die Existenz einer Prozeßzone um eine Singularität [87], die im allgemeinen vernachlässigt wird, da sie im Vergleich zur Rißlänge meist sehr klein ist.

Diese zwei-dimensionalen Formulierungen eines wegunabhängigen Integrals wurden von einigen Autoren auf den räumlichen Fall erweitert. Miyamoto und Kikuchi [88] formulier-

ten das J-Integral für dreidimensionale elastische Rißkonfigurationen:

$$J = \int_{\Gamma} (U_v n_1 - u_{i,1} \sigma_{ij} n_j) d\Gamma - \int_A (u_{i,1} \sigma_{i3})_{,3} dA \quad (3.4)$$

A ist hierbei die vom Integrationsweg umschlossene Fläche. Die Wegunabhängigkeit ist für elastisches Materialverhalten gegeben. Blackburn [89] entwickelte das J\*-Integral, das zur numerischen Modellierung allerdings nicht geeignet ist, da es als Integrationspfad einen Pfad um die Rißspitze beinhaltet, dessen Radius gegen Null geht:

$$J^* = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} d\Gamma \right) \quad (3.5)$$

Zur besseren numerischen Handhabung kann das Integral unter Anwendung des Green'schen Theorems umformuliert werden [90]:

$$\begin{aligned} J^* &= \int \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} d\Gamma_1 \right) \\ &+ \lim_{\Gamma_2 \rightarrow 0} \int_A \left[ \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,1})_{,j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} u_{i,j} - (\sigma_{i3} u_{i,1})_{,3} \right] dA \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\Gamma_1$  bezeichnet hier einen äußeren Pfad um die Rißspitze, während  $\Gamma_2$  einen Kreis um die Rißspitze beschreibt, dessen Radius gegen Null geht (siehe auch Gleichung (3.5)). Zur numerischen Auswertung wird in [90] ein kleines Rechteck um die Rißspitze zur Berechnung gewählt.

Kishimoto et al. [91] formulierten als Erweiterung des J-Integrals nach Rice das  $\hat{J}$ -Integral, welches auch für das Auftreten plastischer Verformungen, thermischer Dehnungen und Trägheitskräften seine Wegunabhängigkeit behält:

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_{i,j} n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma + \int_A [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^* + (\rho \ddot{u}_i - p_i) u_{i,1}] dA \quad (3.7)$$

$\varepsilon_{ij}^*$  sind die Eigendehnungen, die aufgrund thermischer Lasten entstehen können.  $\hat{J}$  beinhaltet ein Flächenintegral, welches über die vom Rißpfad  $\Gamma$  umschlossene Fläche berechnet wird. In [92] werden  $J^*$  und  $\hat{J}$  mit weiteren Integralformulierungen für spezielle Anwendungsfälle verglichen.

Atluri und Nishioka [93, 94] haben Integralkriterien für eine Vielzahl von Anwendungsfällen beschrieben, von denen für den Fall der elastodynamischen Rißausbreitung einige numerisch auf ihre Wegunabhängigkeit hin geprüft wurden [95, 96]. Darauf aufbauend stellen sie die Anwendbarkeit von wegunabhängigen Integralen dar, die inkrementell formuliert sind [15]. Sie gelten auch für Entlastungen, da nicht die Deformationstheorie der Plastizitätslehre zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens benutzt wird, sondern die assoziierte Fließregel (siehe Abschnitt 5.1.5). Ebenso wird das Trägheitsverhalten des Materials berücksichtigt. Das inkrementell formulierte  $\Delta T_p$ -Integral, welches

im Rahmen dieser Arbeit zur Berechnung der Kerbspannungsintensität benutzt wird, lautet:

$$\begin{aligned} \Delta T_p = & \int_{\Gamma} \left[ (\Delta W + \Delta K) n_1 - (t_i + \Delta t_i) \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} - \Delta t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] dS \\ & - \int_{V-V_{\Gamma}} \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \varepsilon_{ij,1} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij,1} \right) - \Delta \varepsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,1} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,1} \right) \right. \\ & \left. + \rho (\ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i) \Delta u_{i,1} - \rho (\dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i) \Delta \dot{u}_{i,1} + \rho \Delta \ddot{u}_i \dot{u}_{i,1} - \rho \Delta \dot{u}_i \ddot{u}_{i,1} \right] dV \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nakamura et al. [97] stellten eine allgemeine Vorgehensweise bei der Aufstellung von Integralkriterien dar, indem sie, ausgehend von einer Formulierung für den Energiefluß in die Rißspitze, ausgedrückt in Nahfeldgrößen, für das gewünschte Materialverhalten die entsprechende Formulierung wählten. Für den Fall elastisch-plastischen Materialverhaltens unter dynamischen Belastungsbedingungen erhalten sie als Maß für die Energiefreisetzungsrates:

$$J = \int_{\Gamma_0} (U_V n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma + \int_A \rho \ddot{u}_i u_{i,1} dA \quad (3.9)$$

Dabei bezeichnet  $A_0$  die Fläche, die von einem beliebigen Pfad  $\Gamma_0$  um die Rißspitze umschlossen wird, abzüglich einer Fläche  $A$ , die von einem Pfad  $\Gamma$  umschlossen wird, der ebenfalls um die Rißspitze verläuft, dessen Radius aber sehr klein ist.

### 3.2.2 Untersuchungen zur Berechnung von Kerbspannungsintensitäten

Die gebräuchlichste Methode zur numerischen Bestimmung der Kerbspannungsintensität ist die Finite-Elemente-Methode [98, 99]. Dies hat seinen Grund in der allgemein guten Anwendbarkeit der FE-Methode auf Ingenieurprobleme, da diese häufig durch eine oder ein System gekoppelter Differentialgleichungen mit vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen beschrieben werden können [98]. Aufgrund der zunehmenden Rechnerkapazitäten können die Modellierungen außerdem immer komplexeren Umfang annehmen. Im folgenden sind einige numerische Berechnungen der Rißspitzenintensität dargestellt.

Ayres [100] untersuchte eine gekerbte Charpy-Probe mit einem Ermüdungsanriß, die als EDZ-Problem modelliert wurde. Als äußere Belastung nahm er eine konstante Geschwindigkeit des Kraftangriffspunktes an, im Versuch betrug die Schlaggeschwindigkeit 1,8 m/s. Die berechnete Kraft-Zeit-Kurve stimmt von der Amplitude her mit der gemessenen ungefähr überein, die Frequenz ist jedoch zu hoch. Dieser Fehler ist wohl zum Teil dadurch zu erklären, daß die kinematischen Randbedingungen am Widerlager als fest angenommen wurden, und das Abheverhalten somit nicht wiedergegeben werden konnte. Plastische Zonen wurden im Bereich der Rißspitze und, etwas ausgedehnter, im Bereich des Kraftangriffspunktes festgestellt. Zur Berechnung des J-Integrals verwendete er die Formulierung nach Rice [6], die für diesen Anwendungsfall nicht zulässig ist. Da keine Vergleiche mit experimentellen Daten gemacht wurden, können keine Aussagen über die Qualität der berechneten J-Werte getroffen werden.

Ahmad et al. [101] untersuchten eine angerissene Charpy-Probe aus Stahl unter einer Schlaggeschwindigkeit von 6,88 m/s. Als äußere Belastung der numerischen Berechnung ist die experimentell ermittelte Kraft als Funktion der Zeit verwendet worden. Als Kenngröße der Rißspitzenbelastung wurde das  $\hat{J}$ -Integral nach Kishimoto (siehe Gleichung (3.7)) benutzt. Den beim Vergleich der elastischen und der elastisch-plastischen Lösung entdeckten Unterschied des berechneten J-Integrals schrieben sie der Rißspitzenplastizität zu, die allerdings nicht näher untersucht wurde.

Tvergaard und Needleman [102] berücksichtigten bei ihren Untersuchungen zum Einfluß der Temperatur auf das Bruchverhalten das Schädigungsverhalten sowohl durch die Entstehung und das Wachstum von Poren, was schließlich zum Duktilbruch führt, als auch durch die Bildung von Mikrorissen, was zum Spaltbruch führt. In ihrem EDZ-Modell wurde die Belastung durch Vorgabe einer konstanten Geschwindigkeit des Kraftangriffspunktes simuliert, das Abhebverhalten wurde aber nicht berücksichtigt, da auch hier Festlager als kinematische Randbedingungen gewählt wurden.

Ein weiterer Versuch zur Berücksichtigung der duktilen Schädigung durch Porenwachstum wird von Jha und Narasimhan [103] dargestellt. In ihrem EDZ-Modell wird die Schlagbelastung durch die gemessene Hammerkraft repräsentiert, die kinematischen Randbedingungen am Auflager werden ebenfalls durch die gemessene Auflagerkraft ersetzt. Dies stellt, ebenso wie die Annahme eines Festlagers, nur eine sehr grobe Näherung des tatsächlichen Probenverhaltens dar, da die Phase des Abhebens durch eine Messung der Auflagerkraft zwar ermittelt, aber nicht repräsentativ abgebildet werden kann, da für die Zeit des Abhebens die gemessene Kraft zu Null wird. In dem berechneten Verschiebungs-Zeit-Diagramm, das nur schlecht das tatsächliche Probenverhalten wiedergibt, wirkt sich diese Näherung deutlich aus.

Eine sehr gute Übereinstimmung der Schwingungsfrequenzen der experimentellen und der berechneten Kraft-Zeit-Kurve erreichte Lin [104] mittels eines EDZ-Modells einer gekerbten Charpy-Probe aus Stahl. Er untersuchte das Spannungs-Dehnungs-Verhalten sowie die Größe der Dehnungsraten an der Rißspitze. Allerdings sind keine Angaben zur Darstellung der Auflager gemacht. Auch sind keine weiteren Vergleichsdaten zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen angegeben.

Die Überlagerung einer analytischen und einer numerischen Lösung zur Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors für verschiedene Rißkonfigurationen wird von Yamamoto und Sumi [105] dargestellt. Dabei wird der singuläre Anteil der Lösung analytisch bestimmt, der verbleibende Anteil durch die FE-Rechnung. Sie beschränken sich auf elastisches Materialverhalten unter quasi-statischer Belastung und können eine Übereinstimmung mit Berechnungen anderer Autoren erzielen.

Den Einfluß verschiedener Belastungsformen auf die Größe des K-Faktors für elastisches Materialverhalten in einem Körper unendlicher Ausdehnung untersuchten Zhang und Gross [106]. Sie benutzten die Methode der Randintegralgleichungen und konnten einen signifikanten Einfluß ermitteln. Inwieweit sich diese, mathematisch aufwendige Methode auch für Bauteile endlicher Abmessung mit elastisch-plastischem Materialverhalten eignet, kann nach dem gegenwärtigen Kenntnisstand allerdings nicht gesagt werden.

Auf der Grundlage der analytischen Lösung der Charpy-Probe unter dynamischen Lasten von Nash [107] formulierten Kishimoto et al. [108] eine elastodynamische Formel zur Berechnung von  $K(t)$  und verglichen sie mit zweidimensionalen FE-Lösungen unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustands. Als äußere Belastung verwendeten sie einen

modellhaften Kraftverlauf. Die kinematische Randbedingung am Auflager wird als zeitlich unveränderlich angenommen, ebenso wie dies Nash zur Ermittlung der analytischen Lösung voraussetzte. Eine weitere Annahme ist die Gleichheit der Verschiebungen an der Krafteinleitungsstelle und an der Kerbspitze. Dieses Modell führt bei der Berechnung von Charpy-Proben unter realen Lasten zu inkorrekten Bestimmungen von  $K(t)$ . Dies wird in Abschnitt 5.3 näher behandelt. In einer Erweiterung dieses Konzepts wurden auch plastische Effekte durch Einführung einer Rißlängenkorrektur durch die plastische Zone berücksichtigt [16] und mit FE-Lösungen verglichen. Hier zeigte sich für einen modellhaften Kraftverlauf eine qualitative Übereinstimmung zwischen beiden Berechnungsmethoden.

## 4 Experimentelle Untersuchungen

### 4.1 Ermittlung der mechanischen Eigenschaften der verwendeten Werkstoffe

Als Modellwerkstoff für die durchgeführten Untersuchungen wurde Aluminium ausgewählt. Dies hatte seinen Grund im ausgeprägten plastischen Verhalten des Werkstoffs, aber auch in seiner technischen Relevanz (Verwendung im Flugzeugbau). Außerdem besitzt er eine gute mechanische Bearbeitbarkeit, und aufgrund des vergleichsweise geringen E-Moduls von 71000 MPa genügen relativ geringe Kräfte zur experimentellen Belastung, so daß die dynamischen Versuche am vorhandenen Fallwerk durchgeführt werden konnten.

Verwendet wurde die Aluminium-Knetlegierung Al-Cu4Mg1 (Werkstoffnummer 3.1355, Al 2024 nach der Internat. Legierungsliste) mit der Wärmebehandlung T351 (lösungsgeglüht, abgeschreckt, kaltverformt, kaltausgehärtet). Geliefert wurde das Material von der Firma Hoogovens Aluminium GmbH, Koblenz, die allerdings keine Angaben über das mechanische Verhalten des Werkstoffs machte. Deshalb wurden Flachzugproben nach DIN 53453 angefertigt, um die für die Untersuchungen notwendigen mechanischen Eigenschaften zu bestimmen. Zusätzlich wurde der E-Modul durch Dehnungsmößstreifen (DMS) ermittelt. Die Fließgrenze  $\sigma_F$  und die Fließkurve wurden im einachsigen Zugversuch gemessen. Die Maße der verwendeten Probe sind Abbildung 4.1 zu entnehmen.

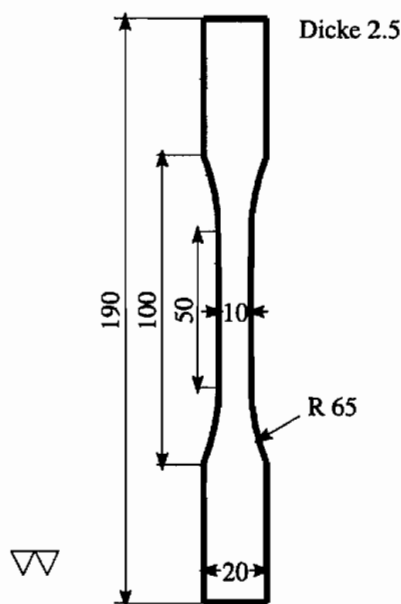


Abbildung 4.1: Flachzugprobe nach DIN 53453



Bei der Herstellung der Proben wurde darauf geachtet, daß bei allen Proben die Längsachse in der Walzrichtung lag, um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen. Da die orthotropen Eigenschaften des Materials allerdings nach Herstellerangaben nur sehr gering sind, wurde für die Simulation isotropes Materialverhalten angenommen. Insgesamt wurden die mechanischen Eigenschaften von vier Zugproben gemessen und die Ergebnisse, die nur sehr gering voneinander abwichen, gemittelt. Die verwendete Prüfmaschine war eine mechanische Prüfmaschine der Bauart Zwick 1387. Die Dehnung der Proben wurde mit Setzdehnmessern aufgenommen.

Gemessen und für die Kaustikenauswertung sowie die numerischen Simulationen verwendet wurden ein E-Modul von 71058 MPa sowie eine Fließgrenze  $\sigma_F$  von 350 MPa. Die Querkontraktionszahl  $\nu$  wurde mit 0,33 angenommen. Die Ergebnisse für die einachsige Fließkurve an 7 Stützpunkten sind Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Stützpunkt	$\sigma$ [MPa]	$\epsilon_p$
0	350	0
1	362,27	0,003
2	379,74	0,01
3	389,28	0,0172
4	398,81	0,0244
5	411,52	0,0316
6	416,29	0,0392
7	424,23	0,0464

**Tabelle 4.1:** Stützpunkte der einachsigen Fließkurve von Al 2024T351

## 4.2 Oberflächenbehandlung der Proben

Um die Spannungsintensität an der Kerbspitze der Proben durch das in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Kaustikenverfahren ermitteln zu können, muß die Probe im Bereich der Rißspitze optisch eben sein, um Streueffekte aufgrund von Unebenheiten der Oberfläche auszuschließen.

Daher wurde die der Kamera (siehe Versuchsaufbau im Abschnitt 4.3) zugewandte Seite der Probe verspiegelt. Dazu wurde auf eine gesäuberte und mit Trennmittel polierte Glasplatte Aluminium im Vakuum aufgedampft. Anschließend wurde die aufgedampfte Aluminiumschicht mit der zuvor entfetteten Oberfläche der Probe verklebt. Verwendet wurde als Klebstoff Epoxidharz DER 324 der Firma Dow Chemicals, dem als Härter DEH 24 des gleichen Herstellers im Verhältnis 1:10 zugemischt wurde. Nach dem Aushärten des Klebstoffs wurde die Glasplatte entfernt, die Aluminiumschicht haftete als Spiegelschicht auf der Probe.

## 4.3 Dynamische Messungen

### 4.3.1 Allgemeines

Die dynamischen Versuche zur Messung der Kerbspitzenintensität erfolgten an einem Fallwerk, an dem ein Fallhammer in einer entsprechend der gewünschten Schlaggeschwindigkeit bestimmten Höhe arretiert wurde. Die Hammermasse betrug 8,47 kg, und um die gewünschte Schlaggeschwindigkeit von 5 m/s zu erreichen, wurde der Hammer in einer Höhe von 1,28 m über der Probe arretiert. Aus Vorversuchen wurde dieser Wert für die Aufprallgeschwindigkeit bestimmt, um ausreichende dynamische Effekte während des Belastungsvorgangs in der Probe zu erzeugen. Die Hammerfinne ist durch einen Radius von 2mm ausgerundet, um die Proben möglichst punktförmig zu belasten.

Die Proben lagerten auf zylindrischen Bolzen, deren Abstand je nach Probengröße variierte. Verwendet wurden drei verschiedene Probenformen, deren Maße Tabelle 4.2 zu entnehmen sind. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt wurde, sind nicht die Standardmaße der Charpy-Probe, ersichtlich aus Abbildung 2.8, gewählt worden, sondern verkürzte Proben, um ein stärkeres dynamisches Verhalten zu erzeugen.

Probe	Höhe	Breite	Dicke	Kerbtiefe	Auflagerabstand
A45	10	45	10	2	40
A65	10	65	10	2	60
A90	20	90	10	4	80

**Tabelle 4.2:** Probenmaße [mm] der drei verwendeten Probenformen

### 4.3.2 Ermittlung der Hammerkraft

Die Messung der Hammerkraft erfolgte über zwei auf der Hammerfinne angebrachte Dehnungsmeßstreifen (DMS), die in einer Wheatstone'schen Halbbrücke verschaltet waren. Ihr Signal wurde durch einen Meßverstärker mit 100kHz verstärkt und mit einem digitalen Oszilloskop der Firma Nicolet gespeichert. Die Ergebnisse der Kraftmessungen für die drei verschiedenen Probenformen sind in den Abbildungen 4.2–4.4 dargestellt.

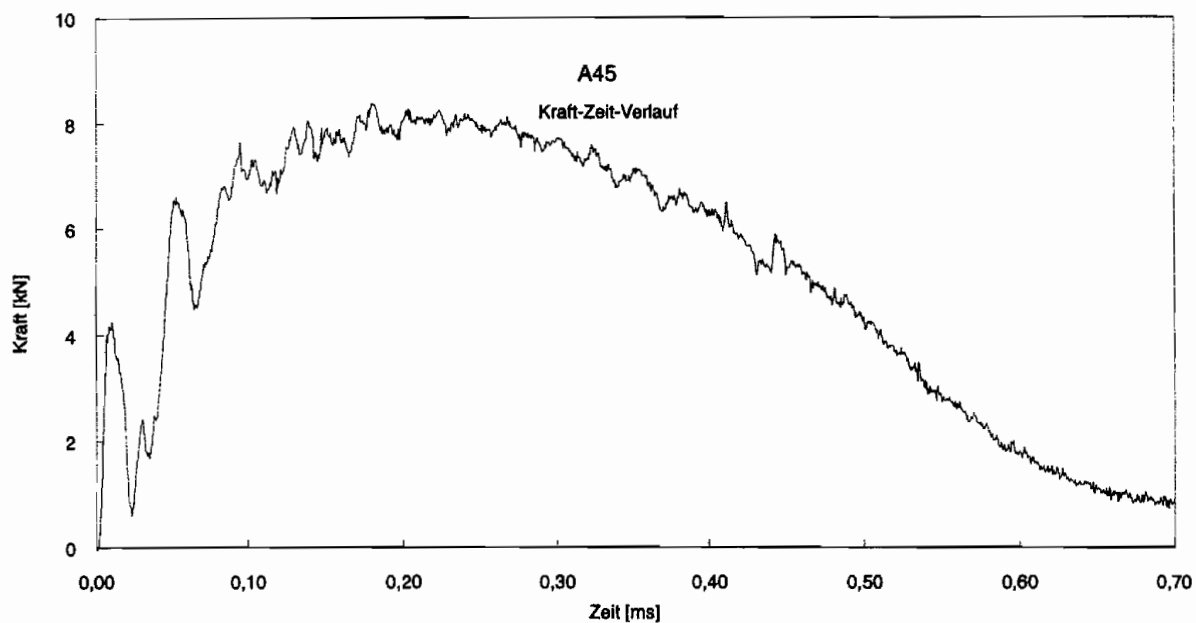


Abbildung 4.2: Kraft-Zeit-Verlauf der Probe A45

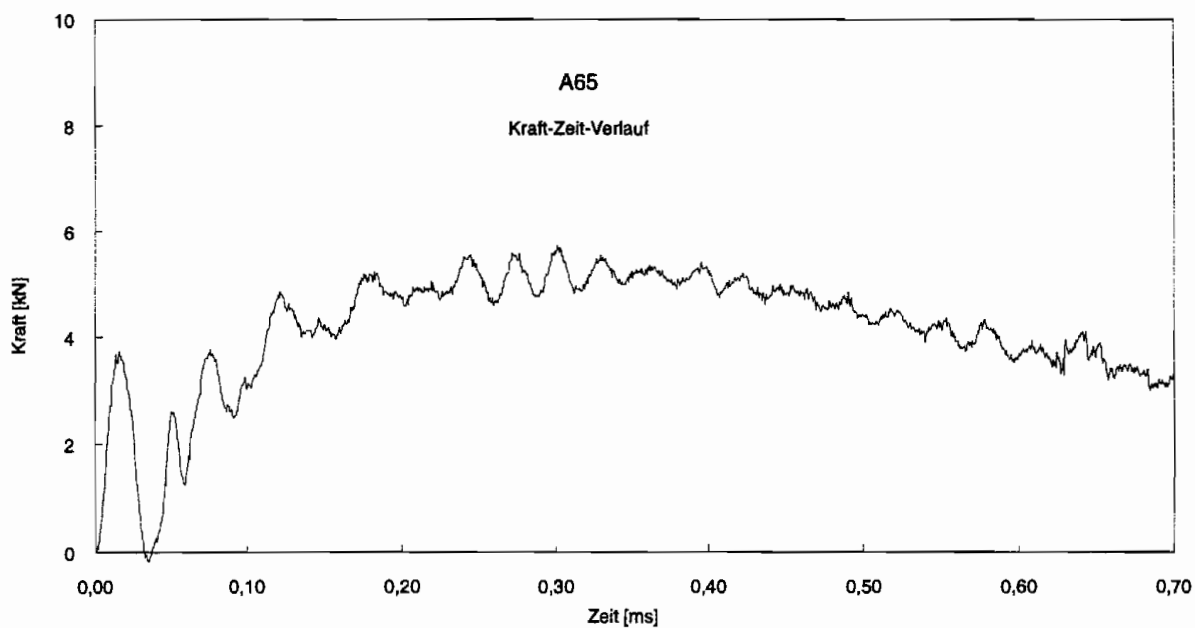
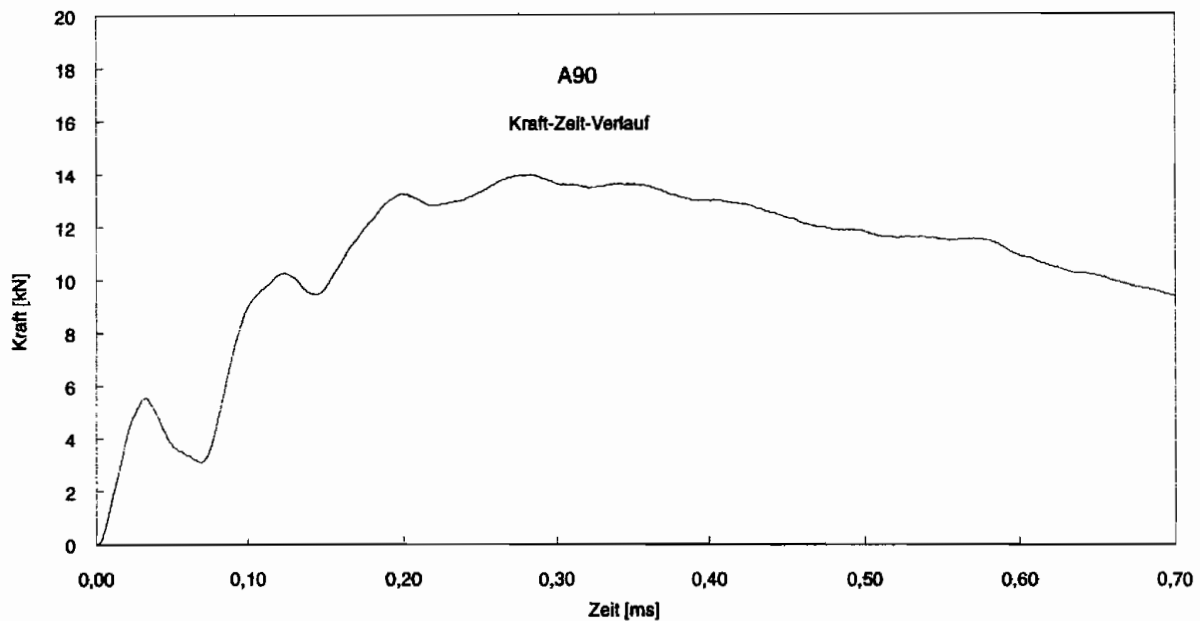


Abbildung 4.3: Kraft-Zeit-Verlauf der Probe A65



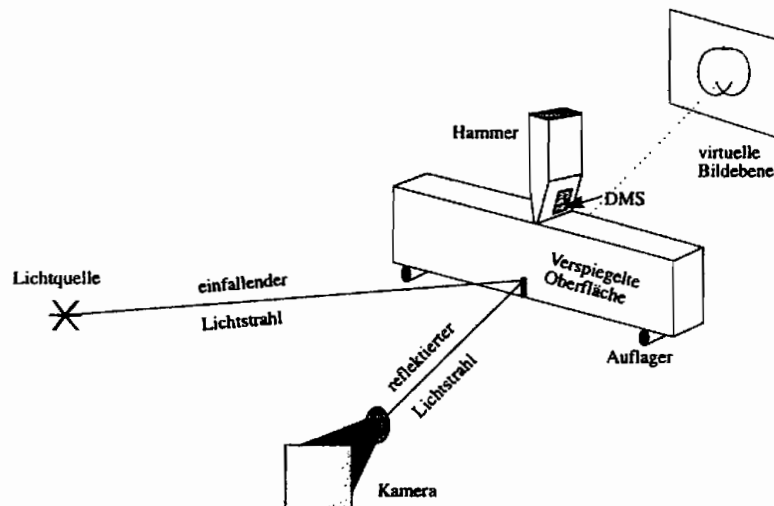
**Abbildung 4.4:** Kraft-Zeit-Verlauf der Probe A90

Deutlich zu erkennen ist bei allen drei Probenformen der Trägheitspeak in der Kraft-Zeit-Kurve, der allerdings unterschiedlich stark ausgeprägt ist. Bei der Probe A65, die aufgrund ihrer Geometrie die geringste Steifigkeit aufweist, ist sogar ein Zurückgehen der Kraft auf Null zu erkennen, was auf einen kurzzeitigen Kontaktverlust zwischen Hammer und Probe schließen läßt. Weiterhin lassen die nur schwach gedämpften Schwingungen der Proben A45 und A65 nur eine ungenaue Ermittlung des Beginns der makroskopischen Rißausbreitung aus dem Kraftverlauf zu, da die maximale Kraft nicht eindeutig zu bestimmen ist. Bei der Probe A90 hingegen sind die Schwingungen vergleichsweise schnell gedämpft, so daß in diesem Fall eine gute Auswertbarkeit hinsichtlich des Zeitpunktes der Rißinitiierung gegeben ist.

Für eine ausführliche Diskussion der Meßergebnisse bezüglich des Kraftsignals und ein Vergleich mit den numerisch ermittelten Verläufen sei auf Kapitel 6 verwiesen.

### 4.3.3 Messung der Kerbspannungsintensität

Um den zeitlichen Verlauf der Kerbspitzenbeanspruchung zu ermitteln, wurde zur Beleuchtung und zur Aufnahme der dynamischen Kaustiken eine Cranz-Schardin-Kamera der Firma Drello verwendet. Sie ermöglicht die Aufnahme von 24 Bildern pro Versuch nach dem Prinzip der optischen Bildtrennung. Die dazu notwendigen 24 Funken und ebensoviele Objektive sind in einer Matrix 6x4 angeordnet. Die Funken können mit einem minimalen zeitlichen Abstand von  $0,5 \mu\text{s}$  gezündet werden. Die zeitliche Abweichung der Einzelfunken vom eingestellten Zündzeitpunkt beträgt maximal  $\pm 20 \text{ ns}$ , was für den vorliegenden Anwendungsfall unbedeutend ist. Die Aufnahmen erfolgten im divergenten Strahlengang, um die Kaustiken optisch zu vergrößern. Getriggert wurden die Kamera mit dem DMS-Signal der Hammerkraft-Messung, so daß der Zeitpunkt der Aufnahmen der Kaustiken durch das Einstellen der Zündzeitpunkte gesteuert wird. Der schematische Versuchsaufbau ist in Abbildung 4.5 dargestellt.



**Abbildung 4.5:** Schematischer Versuchsaufbau der dynamischen Schlagversuche

Obwohl pro Probenform mehrere Versuche zur Messung der Kaustiken durchgeführt wurden, waren einige Kaustiken nicht auswertbar, d.h. die fotografierte Kaustik wies keinen erkennbaren Umriss auf, der eine Messung des Durchmessers erlaubt hätte. Dies kann mit Paralaxefehlern der Optik zusammenhängen, aber auch mit der gewählten Probengröße, da im allgemeinen die Kaustikenexperimente an hochskalierten Charpyproben durchgeführt werden [4].

Die Werte für die in Gleichung (2.115) benötigten Parameter des Ramberg-Osgood-Modells betragen für diesen Werkstoff:

$$S_h = 0,0715 \quad \alpha_h = 1,03 \quad h = 11,85 \quad (4.1)$$

Da das Ramberg-Osgood-Modell die Spannungs-Dehnungs-Kurve, die keinen linearen Verlauf aufweist, durch die Annahme eines linearen Verfestigungskoeffizienten  $h$  ersetzt, kann durch diese Beschreibung nur eine Näherung des tatsächlichen Materialverhaltens erreicht werden. Experimentelle Untersuchungen haben aber gezeigt, daß für die praktische Auswertung mit diesem Modell gute Ergebnisse erzielt werden [70].

In Tabelle 4.3 sind die Meßergebnisse der Kaustikendurchmesser und die entsprechenden Meßzeiten aufgelistet. Aufgeführt sind ebenfalls die aus den Kaustiken ermittelten K-Faktoren (Gleichung (2.111)) und J-Integrale (Gleichung (2.116)). Bei den Kaustikenaufnahmen, für die keine Auswertung erfolgen konnte, sind die entsprechenden Felder in der Tabelle mit n.a. gekennzeichnet. Zum besseren Vergleich der Meßwerte von K und J ist die Umrechnung des experimentell ermittelten K-Faktors nach Gleichung (2.5) angegeben.

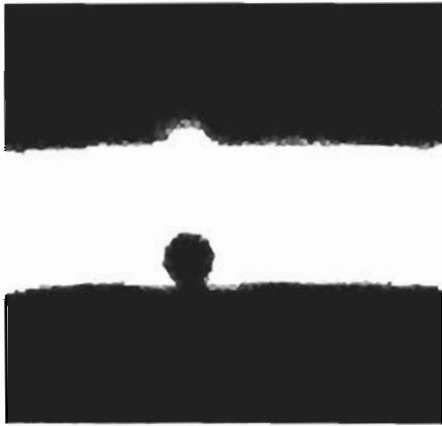
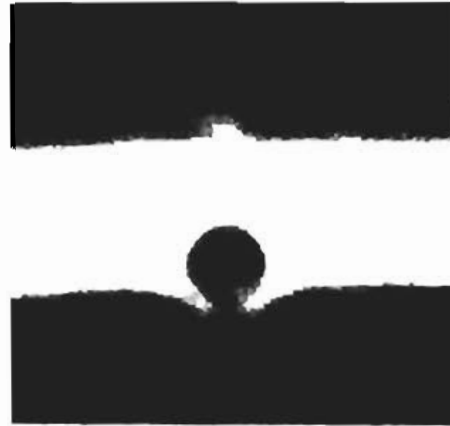
	Zeit [ $\mu$ s]	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	136	152	168
A45	D	0,71	0,93	1,14	1,16	1,10	1,29	1,41	1,70	1,68	1,60	1,65	n.a.	1,82	1,79	1,85	1,80	1,80	n.a.	n.a.	n.a.	1,99	1,77	1,84
	r0	1,98	2,58	3,17	3,23	3,06	3,59	3,93	4,74	4,68	4,45	4,60	n.a.	5,06	4,99	5,16	5,01	5,02	n.a.	n.a.	n.a.	5,55	4,94	5,14
	Kmess	1,25	2,44	4,07	4,27	3,73	5,55	6,98	11,16	10,76	9,49	10,33	n.a.	13,13	12,64	13,75	12,80	12,86	n.a.	n.a.	n.a.	16,50	12,35	13,62
	Jmess	0,07	0,17	0,32	0,34	0,29	0,48	0,63	1,15	1,10	0,94	1,04	n.a.	1,41	1,35	1,50	1,37	1,38	n.a.	n.a.	n.a.	1,89	1,31	1,48
	J aus K	0,02	0,07	0,21	0,23	0,17	0,39	0,61	1,56	1,45	1,13	1,34	n.a.	2,16	2,00	2,37	2,06	2,07	n.a.	n.a.	n.a.	3,41	1,91	2,33
A65	D	0,56	0,85	0,99	1,01	n.a.	1,27	1,35	1,30	1,27	1,34	n.a.	1,40	1,47	1,32	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	2,15	1,88	1,76	1,78
	r0	1,65	2,49	2,88	2,93	n.a.	3,71	3,93	3,79	3,70	3,92	n.a.	4,09	4,29	3,86	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	6,28	5,47	5,13	5,18
	Kmess	0,79	2,22	3,20	3,35	n.a.	6,02	6,97	6,36	6,01	6,91	n.a.	7,72	8,69	6,67	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	22,45	15,95	13,58	13,91
	Jmess	0,03	0,13	0,20	0,22	n.a.	0,46	0,55	0,49	0,45	0,54	n.a.	0,62	0,73	0,52	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	2,42	1,57	1,28	1,32
	J aus K	0,01	0,06	0,13	0,14	n.a.	0,45	0,61	0,51	0,45	0,60	n.a.	0,75	0,95	0,56	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	6,32	3,19	2,31	2,43
A90	D	0,62	1,00	1,25	1,55	1,68	1,76	1,95	2,26	2,31	2,34	2,34	2,45	2,54	2,72	2,92	3,07	3,32	3,43	3,47	3,49	3,27	n.a.	n.a.
	r0	1,08	1,74	2,18	2,70	2,93	3,06	3,40	3,94	4,03	4,08	4,08	4,23	4,42	4,73	5,08	5,35	5,79	5,98	6,04	6,08	5,70	n.a.	n.a.
	Kmess	0,28	0,91	1,59	2,72	3,34	3,74	4,84	7,00	7,44	7,67	7,65	8,61	9,38	11,09	13,25	15,08	18,34	19,90	20,42	20,78	17,69	n.a.	n.a.
	Jmess	0,02	0,08	0,16	0,33	0,42	0,49	0,68	1,08	1,16	1,21	1,21	1,40	1,56	1,93	2,42	2,85	3,65	4,05	4,19	4,28	3,49	n.a.	n.a.
	J aus K	0,00	0,01	0,03	0,09	0,14	0,18	0,29	0,62	0,69	0,74	0,73	0,93	1,10	1,54	2,20	2,85	4,22	4,97	5,23	5,42	3,92	n.a.	n.a.

Tabelle 4.3: Meßergebnisse der dynamischen Kaustikenexperimente

Aus dem Vergleich der J-Integral-Werte der elastisch bzw. der elastisch-plastisch ausgewerteten Kaustiken lassen sich annähernd gleiche Meßergebnisse erkennen. Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 erwähnt worden ist, müssen für eine gültige Auswertung allerdings unterschiedliche Kriterien bezüglich des Urkreisradius  $r_0$  erfüllt sein. Bei der Auswertung der elastischen Kaustiken muß darauf geachtet werden, daß der Urkreisradius mindestens die halbe Probendicke beträgt, was im vorliegenden Fall 5mm sind. Dieser Wert wird für alle drei Probenformen erst ab  $t \approx 80\mu\text{s}$  erreicht. Ist der Urkreisradius kleiner, wird die Kerbeanspruchung der Probe durch die Messungen unterschätzt. Allerdings wird auch für Urkreisradien  $r_0 \geq 5\text{mm}$  die mechanische Kerbspannungsintensität durch die Messungen nicht korrekt wiedergegeben, da das Spannungsfeld um die Kerbspitze aufgrund von Randeinflüssen nicht mehr  $K_I$ -dominiert ist (siehe auch Abschnitt 2.1.2).

Bei elastisch-plastisch ausgewerteten Kaustiken muß der Urkreisradius hingegen innerhalb der plastischen Zone liegen. Diese Forderung ist für Werte von  $r_0 \geq 3\text{mm}$  jedoch nicht mehr erfüllt, wie Untersuchungen der gebrochenen Probe gezeigt haben. Dies führt dazu, daß die optisch ermittelten Kerbeanspruchungen lediglich qualitativ die in Kapitel 6 dargestellten numerischen Ergebnisse bestätigen können.

Um einen Eindruck von der Güte der fotografierten Kaustiken zu geben, sind in den Abbildungen 4.6 für verschiedene Zeitpunkte die Kaustikenaufnahmen der Probe A90 dargestellt. Die Belastung aufgrund des Hammers erfolgt bezüglich der Bilder von oben nach unten. Man erkennt, daß die Kaustiken eine Form aufweisen, die gut auswertbar ist. Zur Zeit  $t = 56\mu\text{s}$  hingegen weist die Kaustik eine nach oben gezogene Form auf. Dies deutet auf Einflüsse hin, die sich zusätzlich zur Kerbspannungsintensität auf die Form der Kaustik auswirken. Effekte aufgrund der Probenumrandung oder der Spannungsgradienten, die in der Kontaktfläche zwischen Hammer und Probe induziert werden, können dazu führen, daß die Werte, die aus den Kaustiken erhalten werden, in diesem Anwendungsfall fehlinterpretiert werden.

Abbildung 4.6: A90 bei  $t=8 \mu s$ Abbildung 4.7: A90 bei  $t=16 \mu s$ Abbildung 4.8: A90 bei  $t=24 \mu s$ Abbildung 4.9: A90 bei  $t=32 \mu s$ Abbildung 4.10: A90 bei  $t=40 \mu s$ Abbildung 4.11: A90 bei  $t=56 \mu s$



# 5 Numerische Untersuchungen

## 5.1 Die Methode der Finiten Elemente

### 5.1.1 Allgemeines

Die Methode der Finiten Elemente (FEM) ist ein häufig genutztes Diskretisierungsverfahren von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen, welches zur numerischen Lösung einer Vielzahl von allgemeinen physikalischen und mechanischen Fragestellungen eingesetzt wird [98, 99]. Bei den folgenden Betrachtungen wird sich auf Festigkeitsprobleme beschränkt. Die FE-Methode basiert darauf, daß das problembeschreibende Differentialgleichungssystem in der Regel über eine Variationsformulierung in eine schwache Form gebracht wird. Daraus ergibt sich nach einer Aufteilung der Variationsformulierung in finite Elemente durch entsprechende Umwandlungen ein Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Größen liefert [98]. Das zur Durchführung der Fallversuch-Simulation verwendete FE-Programm ABAQUS ist eine kommerzielle Software, die deshalb gewählt wurde, weil sie für eine Vielzahl der bei dieser Simulation auftretenden Fragestellungen Lösungsmöglichkeiten bereithält:

- Modellierung des Kontakts zwischen Hammer und Probe
- Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens von Hammer und Probe
- Wahl geeigneter Randbedingungen zur Simulation des Abhebverhaltens.

Die Wahl der Modellierung des Schlagversuchs hängt von mehreren Komponenten ab. Obwohl, wie bereits diskutiert wurde, Welleneffekte eine Rolle spielen, insbesondere für den zeitlichen Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors, werden die Spannungswellen und ihre zeitliche Verteilung nicht im Modell berücksichtigt. Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß die zeitliche Abhängigkeit der gesuchten Größen und ihr Verlauf in der Probe durch die Lösung des dynamischen Gleichgewichts (Gleichung (5.5)) erhalten wird. Es handelt sich daher um ein Trägheitsproblem, für das die globale Lösung gefunden werden soll, und für das lokale Effekte aufgrund der Wellenausbreitung vernachlässigt werden [109].

### 5.1.2 Dynamisches Gleichgewicht und Prinzip der virtuellen Arbeit

In diesem Abschnitt werden die der numerischen Lösung zugrunde liegende Gleichgewichtsbedingung und die schwache Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit dargestellt. Schwach heißt die Formulierung deshalb, weil ihr die Annahme vorausgeht, daß

die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung für den gesamten Körper angenähert werden kann durch die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung auf einer endlichen Anzahl von Teilvolumen, was eine weniger strikte, also schwächere Forderung darstellt. Es gelten die in Abschnitt 2.2 benutzten Bezeichnungen.

Ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Arbeit (Gleichung (2.73)) und unter Verwendung der dynamischen Formulierung der Volumenkraft  $\mathbf{p}$ , die aufgespalten wird in eine vorgeschriebene Volumenkraft  $\tilde{\mathbf{p}}$  und die d'Alembert-Kraft  $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ :

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} - \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (5.1)$$

kann das Prinzip der virtuellen Arbeit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{v} dS + \int_V \tilde{\mathbf{p}} \delta \mathbf{v} dV - \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{v} dV \quad (5.2)$$

Der linke Teil von Gleichung (5.2) stellt die innere virtuelle Arbeit dar, die in der Referenzkonfiguration beschrieben werden kann durch:

$$\int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{D} dV^0 = \int_S \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (5.3)$$

Dabei stellen  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{D}$  ein adjungiertes Paar dar. Im vorliegenden Fall sind der Deformationsratentensor und der Kirchhoff'sche Spannungstensor die gewählten Größen.

Zur numerischen Berechnung wird der Anteil der d'Alembert-Kraft bezogen auf die Ausgangskonfiguration formuliert:

$$\int_{V_0} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{v} dV_0 \quad (5.4)$$

Die Dichte  $\rho$  wird als konstant für den gesamten Zeitbereich betrachtet. Diskretisiert man nun die Feldgrößen durch die Interpolationsfunktionen (siehe auch nächster Abschnitt) und formuliert sie am Ende eines Zeitschritts  $t + \Delta t$  unter Verwendung der impliziten Integration, so ergibt sich als FE-Formulierung der Gleichgewichtsbedingung:

$$\underbrace{\left( \int_{V_0} \rho \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J dV_0 \right)}_{\mathbf{M}^{IJ}} \ddot{u}_J + \underbrace{\int_{V_0} \mathbf{B}_I \cdot \boldsymbol{\sigma} dV_0}_{\mathbf{I}^I} - \underbrace{\left( \int_S \mathbf{N}_I \cdot \mathbf{f} dS + \int_V \mathbf{N}_I \cdot \tilde{\mathbf{p}} dV \right)}_{\mathbf{P}^I} = 0 \quad (5.5)$$

$\mathbf{M}$  bezeichnet die Massenmatrix,  $\mathbf{I}$  ist der Vektor der inneren Kräfte und  $\mathbf{P}$  ist der Vektor der äußeren Kräfte.  $\mathbf{B}$  ist die im nächsten Abschnitt erläuterte Dehnungs-Verschiebungsmatrix, und die großen Indizes I und J bezeichnen den I-ten bzw. J-ten Freiheitsgrad des Gesamtsystems.

### 5.1.3 Modellierung des Kontakts zwischen Festkörpern

Zur numerischen Modellierung des Kontakts zwischen Hammer und Probe wird in ABAQUS/Standard die Annahme getroffen, daß zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens die Kontaktflächen sofort die gleiche Geschwindigkeit in Richtung der Schlagbeanspruchung annehmen. Diese Annahme lokalen vollplastischen Impulsaustauschs verletzt die Bedingung der Energieerhaltung für den Zeitpunkt des Auftreffens. Die Auswirkung auf das gesamte Probenverhalten ist aber sowohl zeitlich als auch räumlich klein und kann daher vernachlässigt werden [110]. Trifft der Hammer (Index A) zum Zeitpunkt  $t_0$  auf die Probe (Index B), so gilt für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt  $t_0^+$ :

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{AI} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{BI} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{AI} = \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{BI}$$

$\mathbf{n}$  ist die Normale der Kontaktfläche in Richtung des auftretenden Kontakts. Wird der Geschwindigkeitssprung während des Auftreffens mit  $\Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-$  bezeichnet, so ergibt sich:

$$\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI}) = \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{BI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) \quad (5.7)$$

Für die Komponente der auf die Kontaktfläche  $A_I$  bezogenen Kraft in Normalenrichtung zwischen den Kontaktkörpern gilt:

$$\tilde{F}_{AI} = -\tilde{F}_{BI} \quad , \quad t \geq t_0 \quad (5.8)$$

$$\tilde{F}_{AI} = \tilde{F}_{BI} = 0 \quad , \quad t < t_0$$

Da die Geschwindigkeitssprünge während des infinitesimal kleinen Zeitintervalls  $t_0^-$  bis  $t_0^+$  auftreten, werden für diesen Zeitraum alle Kräfte außer den Normalenkräften  $\tilde{F}$  und den d'Alembert-Kräften vernachlässigt. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck der virtuellen Arbeit während dieses Zeitintervalls zu:

$$\sum_{A,B} \left[ \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] + \int_{A_I} \tilde{F}_A \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A dS + \int_{A_I} \tilde{F}_B \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B dS = 0 \quad (5.9)$$

Integriert man diese Gleichung von  $t_0^-$  bis  $t_0^+$ , so erhält man:

$$\sum_{A,B} \left[ \int_V \int_{t_0^-}^{t_0^+} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dt dV \right] + \int_{A_I} \int_{t_0^-}^{t_0^+} (\tilde{F}_A \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A + \tilde{F}_B \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B) dt dS = 0 \quad (5.10)$$

Der zweite Teil der Gleichung ergibt sich zu Null wegen  $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B$  zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $\tilde{F}_A = -\tilde{F}_B$ . Die Bedingung aus Gleichung (5.7) wird mittels eines Lagrange-Multiplikators  $H$  als Nebenbedingung eingeführt, so daß sich Gleichung (5.10) ergibt zu:

$$\sum_{A,B} \left[ \int_V \rho \Delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] + \int_{A_I} \delta [H \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI} - \dot{\mathbf{u}}_{BI}^- - \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI})] dS = 0 \quad (5.11)$$

Physikalisch repräsentiert  $H$  den zwischen den Kontaktflächen herrschenden Druck. Durch Variation des gewichteten Ausdrucks erhält man die Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{A,B} \left[ \int_V \rho \Delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] + \int_{A_I} H \mathbf{n} \cdot (\delta \dot{\mathbf{u}}_{AI} - \delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) dS + \int_{A_I} (\Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI} - \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) \cdot \mathbf{n} \delta H dS \\ = - \int_{A_I} (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- - \dot{\mathbf{u}}_{BI}^-) \cdot \mathbf{n} \delta H dS \end{aligned} \quad (5.12)$$

Diese Gleichung wird gelöst, um den Geschwindigkeitssprung für beide Kontaktflächen zu erhalten. Zwischen den in Kontakt getretenen Flächen wird eine Zwangsbedingung eingeführt [98]. Im weiteren Verlauf der modellierten Belastung wird nach der Berechnung jedes Zeitschritts geprüft, ob weitere Knoten in Kontakt treten oder ob Knoten wieder getrennt werden. Dies geschieht durch die Überprüfung der Bedingung

$$\int_{A_I} \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_A - \dot{\mathbf{u}}_B) dS = 0 \quad (5.13)$$

die zur numerischen Lösung mit dem Lagrange-Multiplikator gewichtet wird. Da dieser den Kontaktdruck repräsentiert, kann durch Überprüfung seines Wertes festgestellt werden, ob die Zwangsbedingung wieder gelöst wird (negativer Wert von  $H$ ) oder beibehalten wird (positiver Wert von  $H$ ).

## 5.1.4 Die Formulierung der Elemente

### 5.1.4.1 Ebene Elemente

In der vorliegenden Arbeit wurden zur Modellierung der Probe und des Hammers ebene Scheibenelemente verwendet, sowohl für den Fall des ebenen Spannungszustands als auch für den des ebenen Dehnungszustands. Gewählt wurden isoparametrische Viereckselemente mit 8 Knoten (Abbildung 5.1), d.h. der Ansatzgrad der Polynomansätze für die geometrische Transformation und der Approximation der entsprechenden Feldgröße (hier die Verschiebungen) ist gleich. Im vorliegenden Fall wurde ein quadratischer Polynomansatz gewählt. Die Verschiebungen in einem Element werden durch eine Linearkombination der Formfunktionen mit den jeweiligen Knotenverschiebungen ausgedrückt:

$$\mathbf{u}^e(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^e(\xi, \eta) \mathbf{u}_i^e \quad , \quad n=8 \text{ (Anzahl der Knoten)} \quad (5.14)$$

Dabei sind  $\xi$  und  $\eta$  die lokalen Koordinaten des Elements, die Werte zwischen -1 und 1 annehmen können. Die Bestimmung der Elementgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{u}}$  und -beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{u}}$  erfolgt auf entsprechende Weise.

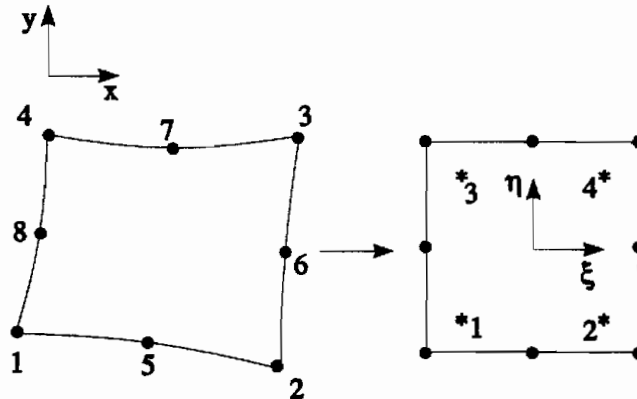
Die Formfunktionen sind stetig differenzierbare Funktionen, die für den jeweiligen Knoten  $i$  den Wert 1 und für alle anderen Knoten den Wert 0 annehmen. Sie haben für die

erwähnten Elemente die folgende Form:

$$\mathbf{N}_i^e = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) (\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad , \quad i=1,2,3,4 \quad (5.15)$$

$$\mathbf{N}_i^e = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta\eta_i) (1 - \xi^2) \quad , \quad i=5,6,7,8 \quad (5.16)$$

Die Knotennummern, die in ABAQUS verwendet werden, können Abbildung 5.1 entnommen werden.



**Abbildung 5.1:** Darstellung ebener Spannungs- bzw. Dehnungselemente mit 8 Knoten und 4 Gaußpunkten. Die Numerierung ist äquivalent zu der in ABAQUS.

Die Gaußpunkte sind Stützpunkte für die numerische Integration von Funktionen über die Elementfläche (siehe auch Abschnitt 5.1.6). Beim vorliegenden Elementtyp kann zwischen 2 und 3 Punkten pro Integrationsrichtung gewählt werden, so daß sich Gesamtwerte von 4 bzw. 9 Integrationspunkten pro Element ergeben. Aus Gründen der Datenweiterverarbeitung wurden hier 4 Gaußpunkte gewählt, worauf in Abschnitt 5.2.2 noch näher eingegangen wird. Ebenso wie die Verschiebungen können auch die Dehnungsraten im Element durch die Formfunktionen berechnet werden. Auf der Grundlage der in Kapitel 2.2 dargestellten Beziehungen wird die Deformationsrate mit den Geschwindigkeiten verknüpft:

$$\mathbf{D}^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^e \mathbf{v}_i^e \quad (5.17)$$

Größen mit einem hochgestellten e beziehen sich hier auf ein finites Element. Der tiefgestellte Index i bezeichnet eine Knotenvariable. B ist die globale Dehnungs-Verschiebungsmatrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Die Dehnungen erhält man nun durch die Zeitintegration der Deformationsraten über einen Zeitschritt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \int_{\Delta t} \mathbf{D}^e dt \quad (5.19)$$

Wie bereits erwähnt, verwendet man bei isoparametrischen Elementen dieselben Ansatzfunktionen für die Darstellung der Elementgeometrie wie für die Darstellung der approximierten Feldgröße. Somit ergibt sich folgende Formulierung für einen Ort in einem Element (globale Koordinaten):

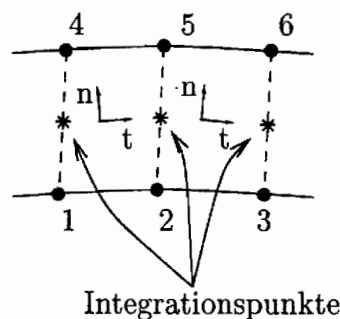
$$\mathbf{x}_{(j)}^e = \sum_{i=1}^n N_i^e x_{(j)i}^e \quad , \quad j=1,2 \quad (5.20)$$

Dabei entspricht  $x_{(1)}$  der x-Koordinate, und  $x_{(2)}$  der y-Koordinate.

Die so definierten Elemente haben in ABAQUS die Bezeichnung CPS8R (ESZ) bzw. CPE8R (EDZ).

#### 5.1.4.2 Kontaktelemente

Um den auftretenden Kontakt zwischen Hammer und Probe zu modellieren, wurden spezielle Kontaktelemente gewählt, um die möglichen Knoten, die in Kontakt treten können, zu kennzeichnen. Die Lage der Elemente ist in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.2:** Kontaktelemente mit Angabe der Integrationspunkte, der Knotennummerierung und der Lage des Normalenvektors

Der beschriebene Elementtyp wird in ABAQUS mit INTER3 bezeichnet.

ABAQUS bietet weitere Möglichkeiten, um auftretenden Kontakt während des Rechengangs zu simulieren, z.B. Gap-Elemente oder die Definition von Kontaktflächen. Beide Möglichkeiten wurden im Vorfeld der Simulationen ebenfalls getestet, zeigten aber für das vorliegende Problem nicht die gewünschte Effizienz. Bei der Verwendung von Gap-Elementen traten erhebliche Konvergenzprobleme auf, wohingegen bei der Modellierung des Kontaktvorgangs durch Kontaktflächen starke Schwankungen der berechneten Probenverschiebungen und -geschwindigkeiten im Verlauf der Rechnung auftraten. Dieser Effekt hat seine Ursache darin, daß die Kontaktknoten des Hammers für den Zeitpunkt des Auftreffens in die korrespondierende Kontaktfläche der Probe eindringen und im nächsten Zeitschritt wieder "herauskatapultiert" werden. Die Methode der Kontaktflächen ist daher

nur für die Berechnung solcher Phänomene sinnvoll, deren globales Verhalten aufgrund des Schlagvorgangs simuliert werden soll. Für die Simulation lokaler Vorgänge im Bereich des Kontakts sind die Kontaktelemente am ehesten geeignet.

#### 5.1.4.3 Die Modellierung der Auflager

Um dem in Kapitel 2 erwähnten Abhehverhalten der Probe während des Belastungsvorgangs Rechnung zu tragen, dürfen die Auflager nicht durch Verwendung eines Festlagers simuliert werden. Da die genaue Modellierung des Geschwindigkeits- und Verschiebungsverlaufs in diesem Bereich der Probe nicht im Vordergrund steht, sondern nur der Effekt des Abhebens erlaubt sein soll, werden an dieser Stelle die eben erwähnten Kontaktflächen verwendet. Dies hat vornehmlich zwei Gründe:

- der numerische Aufwand zur Berechnung des Kontakts ist durch die Verwendung von Kontaktflächen geringer;
- die Probe muß im Bereich des Auflagers nicht so fein diskretisiert werden, so daß die Gesamtzahl der Elemente nicht übermäßig ansteigt.

Der Simulation von Kontakt durch Kontaktflächen liegt das Master-Slave-Konzept zugrunde [111]. Dabei können die Knoten der Master-Surface in die Slave-Surface eindringen. Um dies zu umgehen, wurde das Auflager als Master-Surface definiert und als starrer Körper modelliert, der keine Knoten auf der Kontaktfläche besitzt. Dies geschieht in ABAQUS durch die Wahl der RIGID SURFACE - Option. In Abbildung 5.3 ist diese Modellierung schematisch dargestellt.

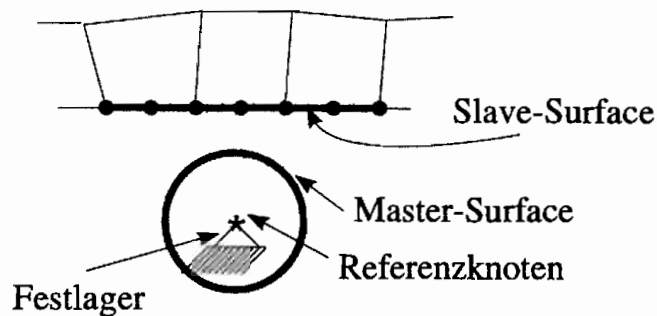


Abbildung 5.3: Modellierung des Auflagers durch Kontaktflächen

Das Auflager wird modelliert durch einen Zylinder mit der Dicke  $d$ , die gleich der Proben- dicke ist, und einem Durchmesser von 2mm, der dem Durchmesser der Auflager entspricht, die bei den Experimenten verwendet wurden. Seine Bewegung wird durch die Freiheitsgrade des zur RIGID SURFACE gehörenden Referenzknotens beschrieben. Da das Auflager sich im Verlauf der Simulation nicht bewegen soll, wird der Referenzknoten durch ein Festlager festgehalten.

#### 5.1.5 Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Der hier untersuchte Werkstoff Al 2024 T3 zeigt, wie in Kapitel 4 dargelegt wurde, ein elastisch-plastisches Werkstoffverhalten. Der Bereich der linearen Elastizität wird durch

das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz beschrieben, wie dies in Abschnitt 2.2.4 bereits angedeutet wurde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{D}}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{C}}^e : \boldsymbol{\sigma} \quad (5.21)$$

Für den Fall des im Rahmen dieser Arbeit betrachteten ebenen Spannungs- bzw. Dehnungszustands kann der elastische Nachgiebigkeitstensor  $\bar{\mathbf{C}}^e$  beschrieben werden durch:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix}, \text{ ESZ} \quad (5.22)$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix}, \text{ EDZ} \quad (5.23)$$

Zur Modellierung des plastischen Verhaltens wird die Fließregel nach von Mises verwendet. Auch dies ist in Abschnitt 2.2.4 schon beschrieben worden. An dieser Stelle soll die Formulierung der isotropen Verfestigung dargestellt werden.

Um die Ausdehnung der Fließfläche bei zunehmender Verfestigung zu beschreiben, wird die Veränderung der Fließspannung aufgrund der plastischen Dehnung durch die Änderung des Verfestigungsparameters  $h$  ausgedrückt:

$$\dot{h} = \dot{\varepsilon}_v^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (5.24)$$

Die plastischen Dehnungszinkremente können mit Hilfe des plastischen Potentials  $Q$  ausgedrückt werden:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.25)$$

Gleichung (5.25) bezeichnet man als Fließregel. Nimmt man nun an, daß  $Q$  gleich der Fließfunktion  $f$  ist, was für Metalle im allgemeinen angenommen wird [32], so erhält man die assoziierte Fließregel, die auch als Normalenregel bezeichnet wird:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.26)$$

Der plastische Multiplikator wird durch folgende Beziehung bestimmt:

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v h'} \quad , \quad h' = \frac{\dot{\sigma}_v}{\dot{\varepsilon}_v^p} \quad (5.27)$$



Durch diese Gleichungen ist das Materialverhalten im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausreichend beschrieben.

### 5.1.6 Die numerische Integration

Die analytische Bestimmung der Steifigkeitsmatrix oder des Lastvektors ist in den meisten Fällen, auf die eine numerische Simulation angewendet wird, nicht möglich, weshalb in diesem Fall numerische Integrationsalgorithmen verwendet werden. Im folgenden wird daher die Gauß-Legendre-Quadratur beschrieben, die sowohl in ABAQUS als auch bei der Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals (siehe Abschnitt 5.2) benutzt wird.

Betrachtet wird eine beliebige Funktion  $\Psi(x, y)$ , die über ein Volumen integriert werden soll:

$$\Psi(x, y) = \int_V \Psi(x, y) dV \quad (5.28)$$

Da die numerische Integration in lokalen Koordinaten ausgeführt wird (siehe Abbildung 5.1), wird die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^e$  verwendet, die die Transformation vom globalen in das lokale Koordinatensystem eines finiten Elementes beschreibt:

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{NE} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^{NE} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} y_i^e \\ \sum_{i=1}^{NE} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^{NE} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} y_i^e \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

und

$$\det \mathbf{J}^e = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.30)$$

NE bezeichnet die Anzahl der finiten Elemente des Problems. Betrachtet man die Integration über ein Element, so kann Gleichung (5.28) nun als Integration über die lokalen Koordinaten formuliert werden [98]:

$$\Psi^e = d^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\Psi}(\xi, \eta) \det \mathbf{J}^e d\xi d\eta \quad (5.31)$$

$d_e$  bezeichnet die Dicke des Elementes. Diese Integration kann unter Verwendung der Gauß'schen Stützpunkte (siehe Abbildung 5.1) als Summe formuliert werden:

$$\Psi^e = d^e \sum_{i=1}^{NGP} \sum_{j=1}^{NGP} \tilde{\Psi}(\xi_i, \eta_j) \det \mathbf{J}^e W_i W_j \quad (5.32)$$

wobei  $W_i$  und  $W_j$  Gewichtungsfaktoren darstellen [98], und  $\xi_i$  und  $\eta_j$  die lokalen Koordinaten der Stützpunkte angeben. NGP ist die Anzahl der Gauß'schen Integrationspunkte pro Element.

## 5.1.7 Die Lösung des nichtlinearen dynamischen Problems

### 5.1.7.1 Die implizite Zeitintegration

Der implizite Faktor, der zur Zeitintegration des dynamischen Problems verwendet wird, ist ein von Hilber et al. [112] zum Zweck der numerischer Dämpfung eingeführter Parameter, der für den verwendeten Fall der automatischen Zeitschrittwahl sehr geeignet ist. Wenn die Zeitschrittweite geändert wird, tritt "numerisches Rauschen" [110] auf, welches durch geringfügige numerische Dämpfung unterdrückt wird. Die Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (5.5) wird mit Hilfe der d'Alembert-Kräfte ausgedrückt, berechnet am Ende des Zeitschritts, und einem gewichteten Mittelwert der statischen Kräfte zwischen den Werten zu Beginn und zum Ende des jeweiligen Zeitschritts:

$$M^{IJ} \ddot{u}_J |_{t+\Delta t} + (1 + \alpha) (I^I |_{t+\Delta t} - P^I |_{t+\Delta t}) - \alpha (I^I |_t - P^I |_t) + L^I |_{t+\Delta t} = 0 \quad (5.33)$$

$L^I$  ist die Summe aller Lagrange-Multiplikator-Kräfte, die mit dem globalen Freiheitsgrad  $I$  verbunden sind. Die Berechnung der Geschwindigkeiten und Verschiebungen erfolgt ebenfalls durch Gewichtung mit dem Operator  $\alpha$ :

$$\dot{u} |_{t+\Delta t} = \dot{u} |_t + \Delta t ((1 - \gamma) \ddot{u} |_t + \gamma \ddot{u} |_{t+\Delta t}) \quad (5.34)$$

und

$$u |_{t+\Delta t} = u |_t + \Delta t \dot{u} |_t + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u} |_t + \beta \ddot{u} |_{t+\Delta t} \right) \quad (5.35)$$

mit

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \quad -\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0$$

Durch die Wahl von  $\alpha$  kann der Einfluß der numerischen Dämpfung kontrolliert werden. Mit  $\alpha = 0$  wird die Dämpfung unterdrückt, und man erhält die bekannte Trapezregel zur numerischen Integration. Als geeignete Wahl für  $\alpha$  ist in [111] ein Wert von -0,05 angegeben, der für die Simulation auch verwendet wurde.

Aus der so ausgeführten numerischen Zeitintegration erhält man zwar ein dynamisches Gleichgewicht für den diskretisierten Körper am Ende eines Zeitschritts, aber es ist keine Information über die Qualität der Lösung während des Zeitschritts verfügbar. Aus diesem Grund führten Hibbitt und Karlsson [112] das Konzept des "half-step residual" ein, wonach für die Mitte des Zeitschritts die Residualkraft berechnet wird. Diese ergibt sich durch die Berechnung des dynamischen Gleichgewichts nach Gleichung (5.5) zum Zeitpunkt  $t + \Delta t/2$ . Sie hat für jeden Freiheitsgrad  $I$  die folgende Form:

$$R^I |_{t+\Delta t/2} = M^{IJ} \ddot{u}_J |_{t+\Delta t/2} + (1 + \alpha) (I^I |_{t+\Delta t/2} - P^I |_{t+\Delta t/2}) - \frac{1}{2} \alpha (I^I |_t - P^I |_t + I^I |_{t^-} - P^I |_{t^-}) + L^I |_{t+\Delta t/2} \quad (5.36)$$

wobei  $t^-$  die Zeit zu Beginn des vorherigen Zeitschritts bezeichnet, wenn das normale Zeitschrittverfahren verwendet wird. Ist der aktuelle Zeitschritt hingegen der erste nach der Berechnung eines Kontakts (siehe Abschnitt 5.1.3), so ist  $t^- = t$ . Zur Überprüfung der

Genauigkeit wird der größte Wert der Residualkraft, die für alle globalen Freiheitsgrade des Systems berechnet wird, herangezogen.

Die Residualkraft  $R$  stellt somit ein Kriterium für die Qualität der berechneten Lösung hinsichtlich des Gleichgewichts von inneren und äußeren Kräften dar. Dazu wird  $R$  mit einem berechneten Durchschnittswert der Knotenkräfte verglichen [111]. Ist die Abweichung geringer als eine vorgegebene Toleranzgrenze (in diesem Fall 0,5% ), so gilt die Lösung als hinreichend genau. Ist dies nicht der Fall, so wird die Berechnung des Inkrements unter Verwendung eines kleineren Zeitschritts wiederholt.

### 5.1.7.2 Der nichtlineare Lösungsalgorithmus nach Newton

Da das vorliegende Problem nichtlinear ist, ist die Verwendung eines iterativen Lösungsverfahrens erforderlich. Die von ABAQUS für den hier vorliegenden Anwendungsfall empfohlene Methode ist der Algorithmus nach Newton [111].

Zur Lösung der Gleichgewichtsbedingungen muß ein Verschiebungszustand  $\bar{\mathbf{u}}$  gefunden werden, der folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}) |_{t+\Delta t} - \mathbf{I}(\bar{\mathbf{u}}) |_{t+\Delta t} = 0 \quad (5.37)$$

Ist nun in einer  $i$ -ten Iteration ein Verschiebungszustand  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}^i$  berechnet worden, so erhält man aus einer Taylor'schen Reihenentwicklung unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung:

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^i) + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right] |_{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^i} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{t+\Delta t}^i) \quad (5.38)$$

Setzt man Gleichung (5.38) in Gleichung (5.37) ein, so erhält man unter der Annahme, daß die äußeren Lasten nicht von den Verschiebungen abhängen:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right] |_{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^i} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{t+\Delta t}^i) = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{I}_{t+\Delta t}^i \quad (5.39)$$

Definiert man eine inkrementelle Verschiebungszunahme:

$$\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{t+\Delta t}^i \quad (5.40)$$

und berechnet die Jacobimatrix:

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t}^i = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} |_{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1}} \quad (5.41)$$

dann kann Gleichung (5.39) auch so geschrieben werden:

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t}^i \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{I}_{t+\Delta t}^i \quad (5.42)$$

Für das vorliegende Problem ist die Jacobi-Matrix gleichbedeutend mit der Tangentensteifigkeitsmatrix [98].

Da die Taylorreihenentwicklung (Gleichung (5.38)) nach dem linearen Term abgebrochen worden ist, wird  $\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1}$  als Korrekturterm zu den Verschiebungen des  $i$ -ten Inkrements addiert:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{u}_{t+\Delta t}^i + \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i+1} \quad (5.43)$$

Gleichung (5.43) stellt die Verschiebungsnäherung für das nächste Inkrement dar. Der Iterationsvorgang wird solange durchgeführt, bis Gleichung (5.37) in genügend guter Näherung erfüllt ist.

## 5.2 Die Ermittlung der Kerbspannungsintensität

### 5.2.1 Allgemeines

Das  $\Delta T_p$ -Integral nach Atluri [15], das hier zur Berechnung der Kerbspannungsintensität dient, stellt eine inkrementell formulierte Größe zur Berechnung einer Rißspitzenbelastung dar (siehe Gleichung (3.8)) und besitzt die physikalische Bedeutung einer Energiefreisetzungsrate für dynamisch belastete Risse. Es ist gültig für folgende Anwendungsfälle:

- dynamische Belastungen
- elastisch-plastisches Materialverhalten
- kleine und moderate Dehnungen

Es wurde zur Berechnung der Kerbspannungsintensität ausgewählt, weil die obengenannten Effekte, die bei der Schlagbelastung einer Biegeprobe auftreten, erfaßt werden, und weil es zur numerischen Berechnung gut geeignet ist.

Weiterhin wird das von ABAQUS zur Verfügung gestellte J-Integral nach Rice [6] bestimmt, das ein reines Linienintegral darstellt und für das vorliegende Problem keine theoretische Grundlage besitzt, wie in Kapitel 3 bereits dargelegt wurde. Es wird aber trotzdem ermittelt, um einen Vergleich zwischen beiden Berechnungsmethoden zu erhalten.

Um das erstellte Fortran77-Programm zur Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals zu verifizieren, wurden neben statischen Testrechnungen auch solche für ein elastodynamisches Problem durchgeführt. Dazu wurde aus der Literatur [4] ein Beispiel entnommen, dessen Materialdaten bekannt sind und für das die Meßergebnisse der K-Faktoren vorliegen.

Zur Überprüfung der Genauigkeit der allgemein verwendeten Balkentheorie zur Berechnung von Charpy-Proben wurde die Berechnungsformel nach Kishimoto [108] in ein Fortran77-Programm übertragen und so für elastodynamische Anwendungsfälle der  $K(t)$ -Verlauf ermittelt.

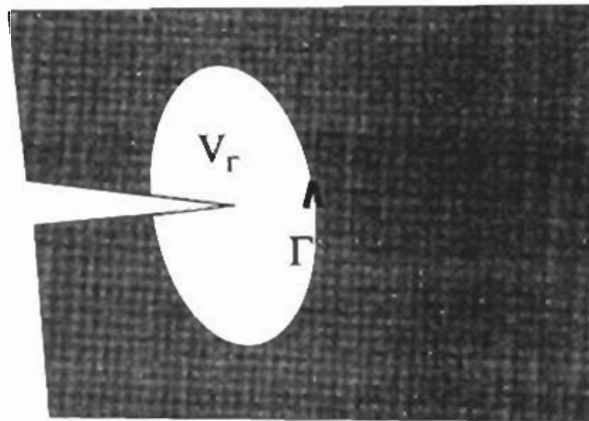
### 5.2.2 Die numerische Formulierung von $\Delta T_p$

Wie bereits erwähnt, ist das  $\Delta T_p$ -Integral zur numerischen Auswertung gut geeignet, da keine Einschränkungen bezüglich der Lage und der Geometrie der Integrationswege bestehen. Zur Berechnung wurde ein Fortran77-Programm erstellt, welches für jeden in der Simulation gerechneten Zeitschritt  $\Delta t$  den Wert des Integralausdrucks bestimmt.

Wie aus Gleichung (3.8) erkennbar ist, besteht das  $\Delta T_p$ -Integral aus einem Linienintegral und einem Flächenintegral (siehe auch Abbildung 5.4). Im folgenden wird zuerst die Berechnung des Linienintegrals beschrieben.

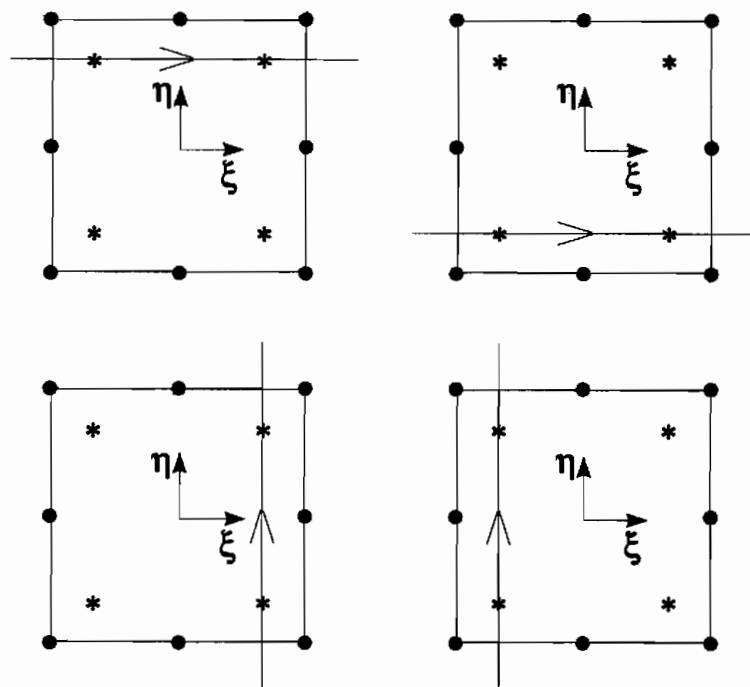
Integriert wird über einen geschlossenen Integrationspfad, der die Kerbspitze enthält, d.h. die Anteile aller Elemente, die der Integrationspfad durchläuft, werden durch numerische Integration bestimmt und aufaddiert.

Die der Berechnung des Linienintegrals zugrunde liegende Integrationsmethode wurde aus [113] entnommen, die nur die Verwendung von vier Gaußpunkten pro Element erlaubt.



**Abbildung 5.4:** Integrationspfad  $\Gamma$ , Gesamtvolumen  $V$  und Pfadvolumen  $V_\Gamma$  eines Körpers

Um eine automatische Vernetzung durch entsprechende Software (siehe Abschnitt 5.4) anwenden zu können, berücksichtigt der Algorithmus den Verlauf des Integrationspfades relativ zum lokalen Koordinatensystem eines Elementes. In Abbildung 5.5 sind die möglichen Integrationspfade bezüglich des lokalen Koordinatensystems dargestellt, die in positiver und negativer Richtung durchlaufen werden können.



**Abbildung 5.5:** Mögliche Integrationspfade bezüglich des lokalen Koordinatensystems

Gestattet ist aber auch die Verwendung von 'Eckelementen', d.h. von Elementen, in denen der Integrationspfad seine Richtung ändert. Für diesen Fall, der in Abbildung 5.6 dargestellt ist, werden in beiden Richtungen die Integrationspfade komplett ausgewertet, gewichtet [113] und addiert. Dadurch wird ein numerischer Fehler verursacht, so daß die Anzahl der Eckelemente, die in einem Pfad enthalten sind, nicht zu groß sein sollte.

Der Anteil eines Elementes zum Linienintegral für einen Integrationsweg  $\xi = \text{const.}$  lautet wie folgt:

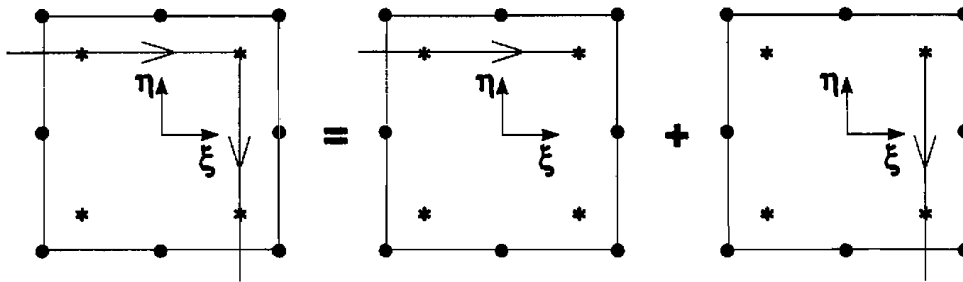


Abbildung 5.6: Berechnung von Eckelementen in einem Integrationspfad

$$\int_{-1}^1 \left[ \left( \sigma_{ij} + \frac{\Delta \sigma_{ij}}{2} \right) \Delta \varepsilon_{ij} + \rho \left( \dot{u}_i + \frac{\Delta \dot{u}_i}{2} \right) \Delta \dot{u}_i n_i - (t_i + \Delta t_i) \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_1} - \Delta t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\eta \quad (5.44)$$

Dabei werden folgende Beziehungen verwendet:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{und} \quad \Delta t_i = \Delta \sigma_{ij} n_j \quad (5.45)$$

Für die Berechnung des Normalenvektors werden zwei Hilfsvektoren **a** und **b** verwendet (siehe Abbildung 5.7):

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}$$

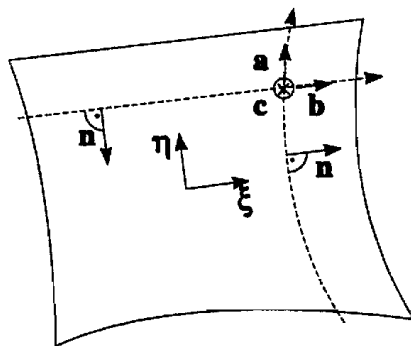


Abbildung 5.7: Definition des Normalenvektors **n**

Der Vektor **c** wird durch das Vektorprodukt von **a** und **b** bestimmt:

$$\mathbf{c}^T = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Bestimmt man nun die Vektoren  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^T &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a})^T = (d_x \ d_y \ 0) \\ \mathbf{e}^T &= (\mathbf{c} \times \mathbf{b})^T = (e_x \ e_y \ 0)\end{aligned}\quad (5.48)$$

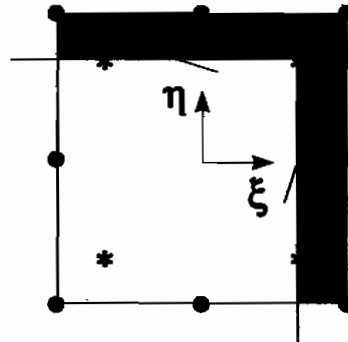
so läßt sich der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  berechnen zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^T &= \frac{1}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}} (d_x \ d_y) \quad , \quad \xi = \text{const.} \\ \mathbf{n}^T &= \frac{1}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} (e_x \ e_y) \quad , \quad \eta = \text{const.}\end{aligned}\quad (5.49)$$

Der Anteil von  $\Delta T_p$ , der aus dem Volumenintegral bestimmt wird, wird für den Bereich  $V - V_\Gamma$  berechnet, d.h. das Volumen, das der Integrationspfad  $\Gamma$  einschließt, wird nicht zur Berechnung herangezogen. Für ein Element bestimmt sich das Volumenintegral aus Gleichung (3.8) zu:

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \varepsilon_{ij,1} + \frac{\Delta \varepsilon_{ij,1}}{2} \right) - \Delta \varepsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,1} + \frac{\Delta \sigma_{ij,1}}{2} \right) \right] d\xi d\eta \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\rho ((\ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i) \Delta u_{i,1} - (\dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i) \Delta \dot{u}_{i,1} + \Delta \ddot{u}_i u_{i,1} - \Delta \dot{u}_i \dot{u}_{i,1})] d\xi d\eta\end{aligned}\quad (5.50)$$

Falls Elemente berechnet werden, die auch zur Ermittlung des Linienintegrals benötigt werden, wird der Anteil dieser Elemente gewichtet, d.h. es wird nur der Anteil verwendet, der außerhalb des Integrationspfades liegt. In Abbildung 5.8 ist dieser Anteil durch die grau unterlegte Fläche exemplarisch gekennzeichnet.



**Abbildung 5.8:** Anteil des Volumenintegrals für Elemente, durch die der Integrationspfad verläuft

### 5.3 Die elastodynamische Vergleichslösung

Kishimoto et al. [108] präsentierten für den elastodynamischen Belastungsfall einer angerissenen Drei-Punkt-Biegeprobe eine zeitabhängige Lösung  $K(t)$ , die sie später für den Fall plastischer Verformungen erweiterten [114]. Ausgehend von der Differentialgleichung 2. Ordnung für einen angerissenen Balken nach Euler-Bernoulli entwickelten sie folgende

Gleichung unter der Annahme, daß  $K(t)$  proportional zur Verschiebung des Kraftangriffspunkts ist:

$$K(t) = K_S \frac{\omega_1}{F(t)} \int_0^t F(\tau) \sin(\omega_1(t - \tau)) d\tau \quad (5.51)$$

Dabei stellt  $K_S$  den quasistatischen Spannungsintensitätsfaktor dar:

$$K = \frac{F(t) s}{bw^{1,5}} \Psi \quad (5.52)$$

mit

$$\Psi = \frac{3\sqrt{\alpha}(1,99 - \alpha(1 - \alpha)(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2))}{2(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{1,5}} \quad (5.53)$$

und

$$\alpha = \frac{a}{w} \quad (5.54)$$

Die 1. Eigenfrequenz der Probe berechnet sich zu:

$$\omega_1 = \left(\frac{\eta_1}{s}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (A=wd) \quad (5.55)$$

wobei  $\eta_1$  die 1. Nullstelle der folgenden Gleichung ist:

$$\tan \frac{\eta_1}{2} = \frac{2s}{D'I\left(\frac{\eta_1}{2}\right)} + \tanh \frac{\eta_1}{2} \quad (5.56)$$

mit

$$D' = \frac{2(1 - \nu^2)w}{I} V(\alpha) \quad \left(I = \frac{dw^3}{12}\right) \quad (5.57)$$

und  $V(\alpha)$  einen Geometriefaktor darstellt, der für das Verhältnis  $s/w=4$  gilt:

$$V(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2 (5,455 - 20,61\alpha + 55,92\alpha^2 - 101,9\alpha^3 + 103,5\alpha^4 - 42,8\alpha^5) \quad (5.58)$$

Diese Berechnungsmethode von  $K(t)$  soll mit den Ergebnissen der elastischen Charpy-Probe aus Araldit B verglichen werden.

Zur Berechnung des  $K(t)$  wurden die Bereiche zwischen den Meßpunkten der Kraft durch hermitesche Splinefunktionen [115] dargestellt, um eine möglichst genaue Zeitintegration zu erreichen. Die Nullstelle  $\eta_1$  wurde durch die 'Regula falsi' [115] ermittelt. Die sich für die Charpy-Probe C400 ergebenden Werte können der Tabelle 5.1 entnommen werden.

Die korrekte Programmierung des in Fortran77 erstellten Programmcodes wurde anhand des in [108] dargestellten Beispiels verifiziert. Das Ergebnis der Berechnung sowie die Diskussion ist in Kapitel 6 dargestellt.



$\alpha$	A	I	V	D	$\eta_1$	$\Psi$	$\omega_1$
0,3	0,001	0,420	8,33E-07	89869,187	2,901	1,521	2429,160

**Tabelle 5.1:** Werte zur Berechnung von  $K(t)$  für die Charpy-Probe C400

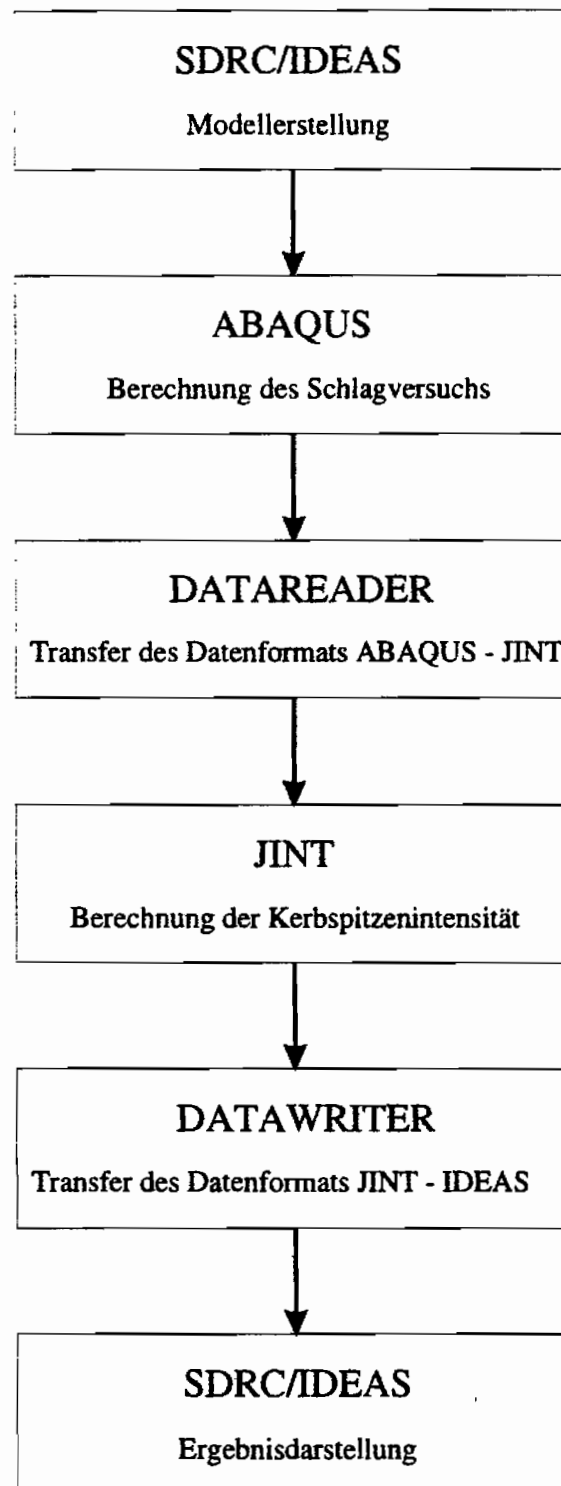
## 5.4 Preprocessing, Postprocessing und Interface-Programme

Die Erstellung der Probengeometrie, der Netztopologie sowie die Eingabe der zur Berechnung notwendigen Materialdaten, der Anfangs- und Randbedingungen sowie der Daten zur Steuerung der Zeitinkremente erfolgte mit Hilfe des kommerziellen Pre- und Postprocessing Programms SDRC/IDEAS [116], welches die Möglichkeit bietet, die erstellten Daten im ABAQUS-Eingabeformat [111] als Datei zu speichern. In diesem Softwarepaket besteht die Option, die erstellten FE-Netze anhand verschiedener Kriterien auf ihre Güte bezüglich der numerischen Genauigkeit zu überprüfen, was eine wichtige Voraussetzung darstellt, um eine möglichst gute Modellierung des Probenverhaltens zu erreichen [98]. Die so erstellten Eingabedateien wurden dem ABAQUS-Paket zur Verfügung gestellt.

Die Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals nach jedem Zeitinkrement erfordert einen Datenaustausch zwischen ABAQUS und dem Berechnungsprogramm JINT. Dazu werden die zur Berechnung erforderlichen Daten von ABAQUS in ein \*.fil-File geschrieben, welches optional im ASCII- als auch im Binär-Format dem Nutzer zur Verfügung gestellt wird. Die Struktur dieser Datei ist ausführlich dokumentiert [117]. Das selbst erstellte Fortran77-Programm DATALOADER liest die Daten aus dieser Datei ein und stellt sie dem Programm JINT in geeigneter Form zur Verfügung.

Das Post-Processing erfolgte entweder über ASCII-Dateien, die die berechneten Daten in Tabellenform enthalten, oder über IDEAS, das in diesem Fall als Möglichkeit zur graphischen Darstellung berechneter Größen, wie Verschiebungs- und Spannungsverteilung in der Probe, genutzt wurde. Um die Daten für IDEAS in geeigneter Form zur Verfügung zu stellen, wurde das Fortran77-Programm DATAWRITER erstellt, welches die Daten im sogenannten universal-file Format, das von IDEAS eingelesen werden kann, in einer Datei speichert.

Die Vorgehensweise bei der Simulation des Schlagversuchs wird in Abbildung 5.9 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.9:** Schematische Darstellung der verwendeten Programme und des Datenaustauschs während der dynamischen Berechnungen

# 6 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

## 6.1 Verifikation der FEM-Modellierung

### 6.1.1 Dynamisches Verhalten der Proben

Bevor die Ergebnisse der FE-Simulationen diskutiert werden, soll eine Überprüfung der Güte der gewählten Modellierung des Probenverhaltens stattfinden. Diese zeigt sich vor allem in der richtigen Wiedergabe des globalen Bauteilverhaltens. Die Geschwindigkeiten und Verschiebungen im Bereich der Kontaktfläche zwischen Hammer und Probe, die sich aus den Messungen ergeben, sollen von der Simulation gut wiedergegeben werden. Das dynamische Verhalten der Proben, das sich in der Schwingungsdauer, den berechneten Kräften und dem Abheilverhalten widerspiegelt, sollte ebenfalls mit den experimentellen Ergebnissen in Einklang stehen. Daraus kann zwar noch keine Aussage über die Gültigkeit der Modellierung lokaler Effekte abgeleitet werden, aber die realitätsnahe Wiedergabe der genannten Größen ist die Grundlage der weitergehenden Berechnungen.

In den Abbildungen 6.1–6.3 ist das im Rahmen dieser Arbeit verwendete FE-Modell der Charpy-Probe dargestellt. Für die angerissene Charpy-Probe C400 ist im wesentlichen das gleiche FE-Netz verwendet worden wie für die gekerbte Probe. Lediglich im Bereich der Rißspitze wurde die Probe aufgrund der veränderten Geometrie neu vernetzt. Aus Symmetriegründen wird nur die halbe Probe sowie eine Hälfte des Hammers modelliert. Dies ist durch die Darstellung der Gleitlager an der Symmetrielinie angedeutet.

Die äußere Belastung erfolgt durch die Vorgabe der Anfangsgeschwindigkeit des Hammers, mit der die Probe in den Experimenten belastet worden ist (5 m/s). Die Masse des Hammers wird in der numerischen Simulation entsprechend der halben Hammermasse der experimentellen Untersuchungen gewählt. Zur Modellierung des Auflager ist ein Zylinder gewählt worden, der ein Absenken der Probe verhindert, aber ein Abheben ermöglicht, so daß das experimentell beobachtete Abheilverhalten nachgebildet werden kann.

Dargestellt sind das FE-Netz, die verwendeten Integralwege sowie die Verbindung des Hammers und der Probe durch Kontaktelemente.

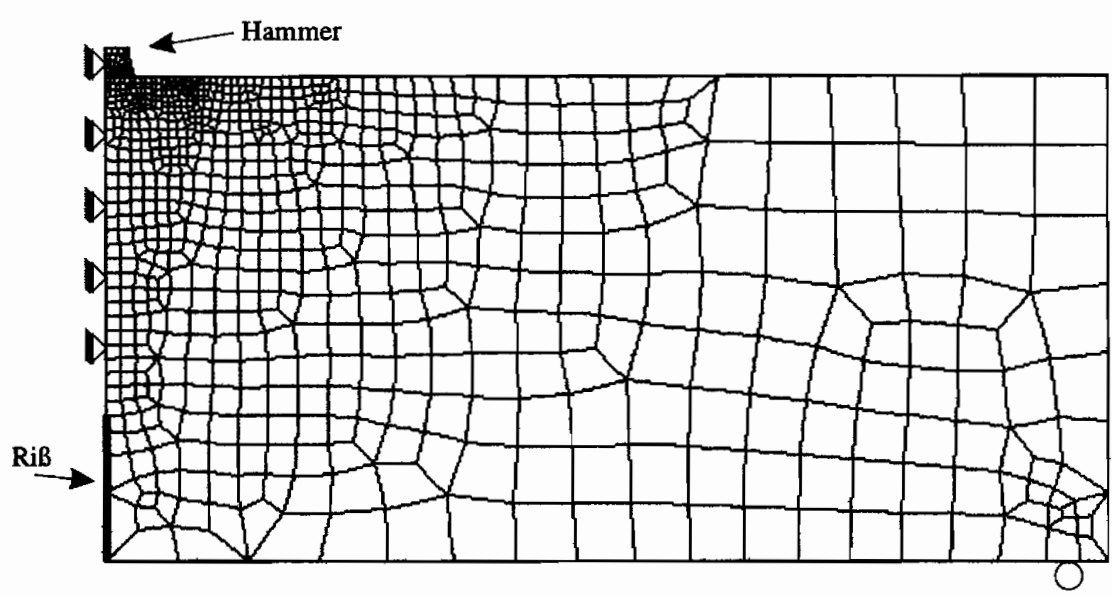


Abbildung 6.1: Verwendetes FE-Netz

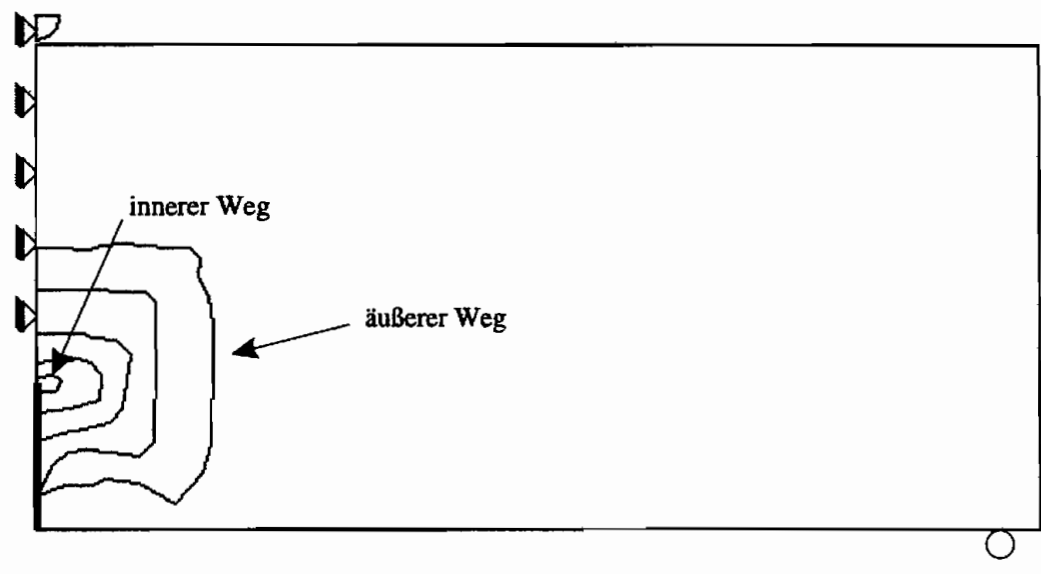
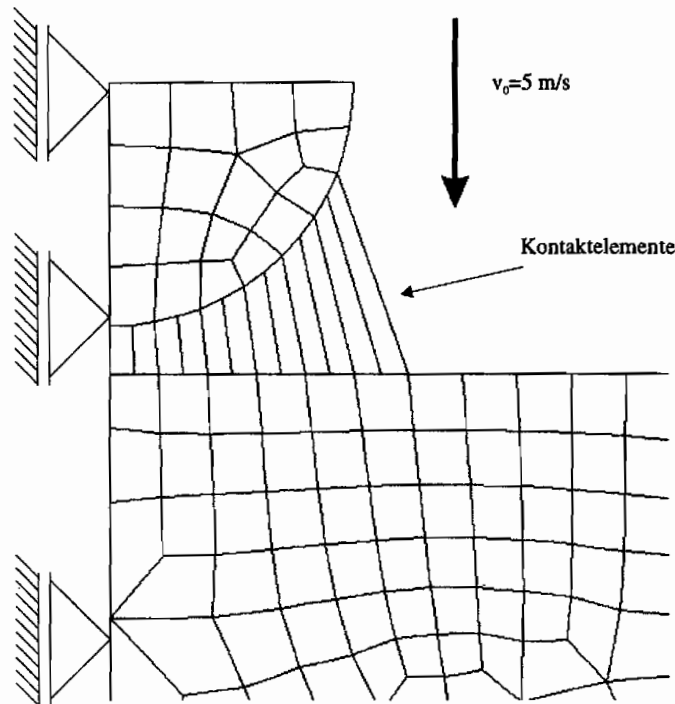


Abbildung 6.2: Verwendete Integralwege



**Abbildung 6.3:** Modellierung der Kontaktfläche Hammer-Probe durch Kontaktelemente

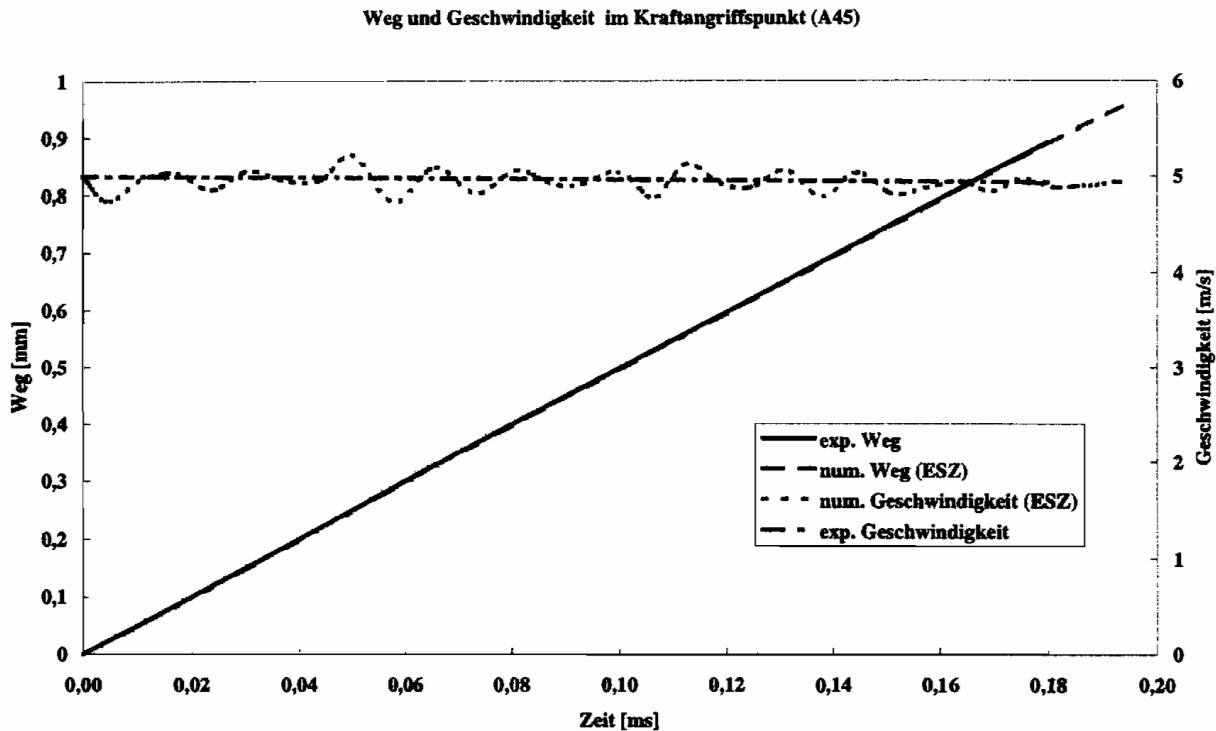
In Abbildung 6.4 sind exemplarisch für die Probe A45 (ESZ) die numerisch ermittelten Wege und Geschwindigkeiten im Vergleich zu den experimentell ermittelten Daten aufgetragen. Es ist erkennbar, daß eine gute Übereinstimmung erzielt wird. Obwohl nur die Verschiebung eines einzelnen Knotens dargestellt ist, schwanken die berechneten Werte nicht, sondern sind zeitlich in ihrem Verhalten den Experimenten gut vergleichbar. Dies gilt unabhängig von der betrachteten Probengeometrie und der Wahl der Modellierung.

Die berechneten Geschwindigkeiten können die Hammergeschwindigkeit ebenfalls gut nachbilden. Die Werte oszillieren zwar, aber die Amplitude ist gering. In numerischer Hinsicht ist dies erklärbar, da die Geschwindigkeiten die Zeitableitung der Verschiebungen darstellen, die im FE-Programm über ein endliches Zeitintervall ermittelt wird. Dieses Zeitintervall ist im Rahmen der impliziten Zeitintegration aber veränderlich (siehe Abschnitt 5.1.7.1). Deshalb sind für so ermittelte Werte numerisch bedingte Schwankungen zu erwarten.

Die sich aus den anderen Probenformen ergebenden Diagramme für die Verschiebungen und Geschwindigkeiten weisen qualitativ den gleichen Verlauf auf und sind nicht aufgeführt.

Vergleicht man die berechneten Kräfte mit den experimentell gemessenen, so sind einige Einschränkungen zu nennen. Die Kräfte werden während des Schlagversuchs durch DMS ermittelt, die in der Nähe der Hammerfinne angebracht sind. Im numerischen Modell hingegen wird die Kraft bestimmt, die in der Kontaktfläche wirkt. Zu ihrer Ermittlung werden die zur jeweiligen Zeit an der Kraftübertragung beteiligten Kontaktelemente herangezogen.

In Abschnitt 5.1.4.2 wurde dargestellt, daß jedes Kontaktelement mit den entsprechenden Knoten der finiten Elemente verknüpft ist, die in Kontakt treten sollen. Daher ist



**Abbildung 6.4:** Vergleich von experimentell und numerisch ermittelten Verschiebungen und Geschwindigkeiten am Kraftangriffspunkt für die Probe A45

es nicht möglich, eine große Anzahl von Kontaktelementen zur Modellierung des Hammerschlags auf die Probe zu verwenden, da durch ihre Verbindung mit dem FE-Netz der Probe die Anzahl der finiten Elemente stark ansteigen würde. Eine Erhöhung der Anzahl der finiten Elemente war aber aus Speicherplatzgründen nicht möglich. Die Modellierung des Kontakts erfolgt also durch eine im Vergleich zur Dynamik des Vorgangs grobe Diskretisierung. Deshalb ist nicht zu erwarten, daß der numerisch ermittelte Kraft-Verlauf den experimentell gemessenen quantitativ gut wiedergibt. Trotzdem wird der zeitliche Kraftverlauf für die jeweilige Probenform hinreichend gut simuliert, wie aus den Abbildungen 6.5–6.7 zu erkennen ist.

Dargestellt ist der Vergleich zwischen der experimentell und numerisch ermittelten Probenkraft für alle Probenformen. Prinzipiell kann festgestellt werden, daß die berechneten Werte für den ebenen Spannungszustand zu niedrig und für den ebenen Dehnungszustand zu hoch liegen. Diese Tendenz ist auch in anderen Untersuchungen festgestellt worden [100]. Die Schwingungsfrequenzen der berechneten Kräfte stimmen hingegen im wesentlichen mit denen der experimentell ermittelten Kräfte überein. Dies ist ein Indiz dafür, daß das globale Probenverhalten durch die Modellierung in der richtigen Weise erfaßt worden ist.

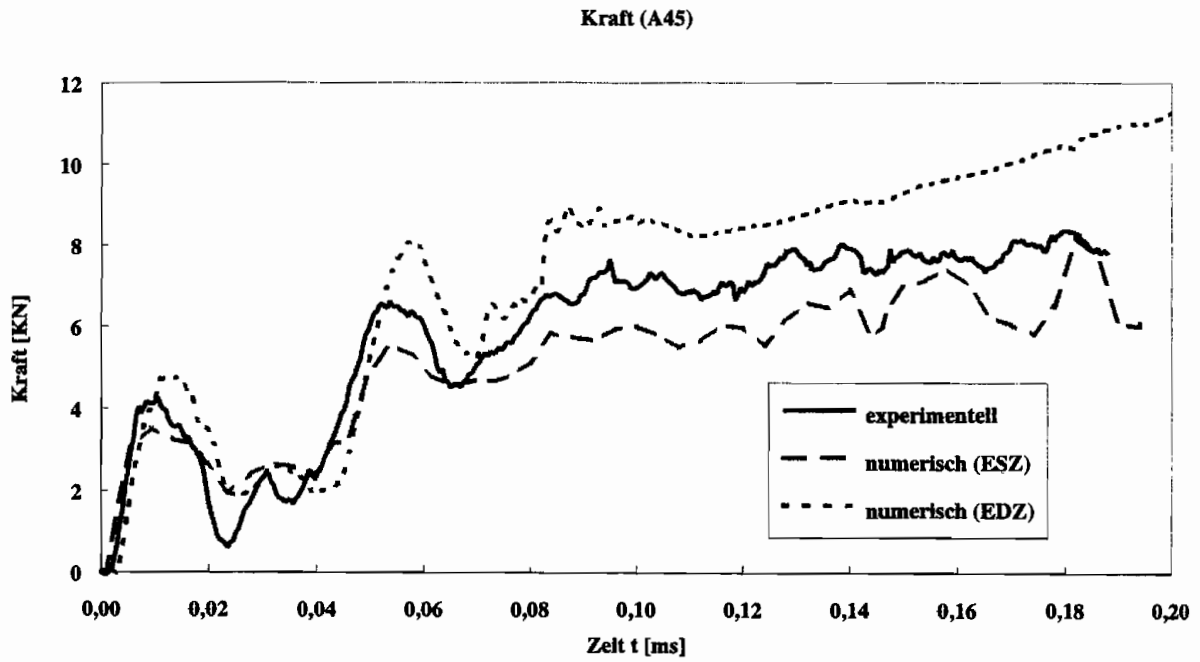


Abbildung 6.5: Darstellung der gemessenen und berechneten Hammerkräfte (A45)

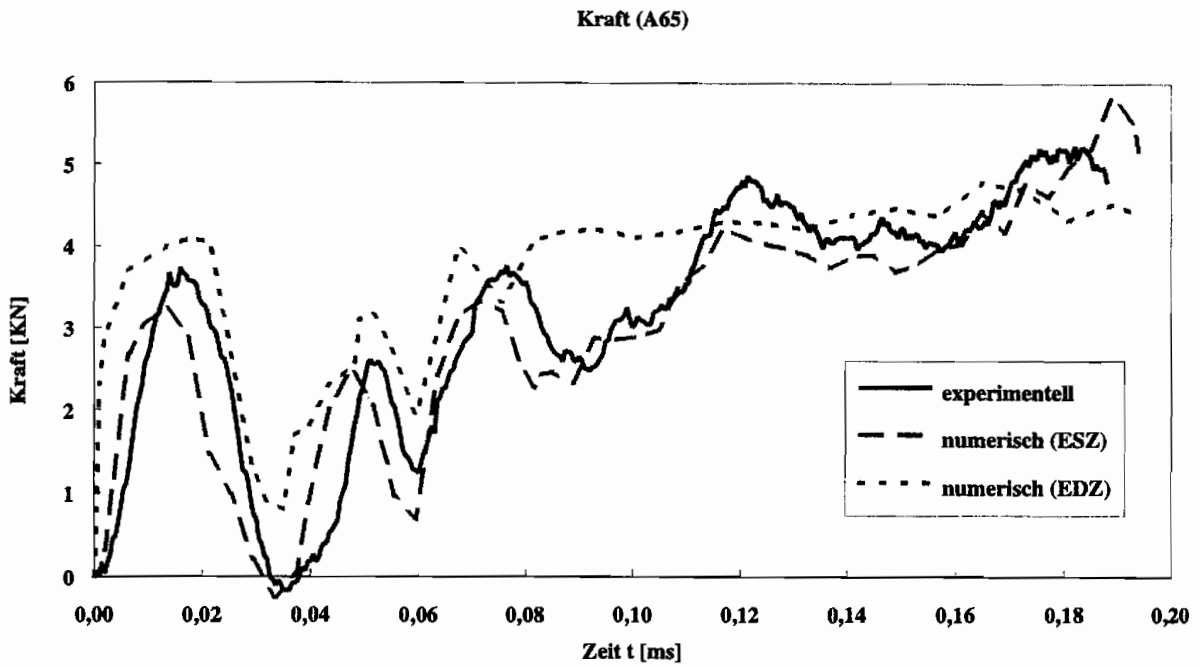
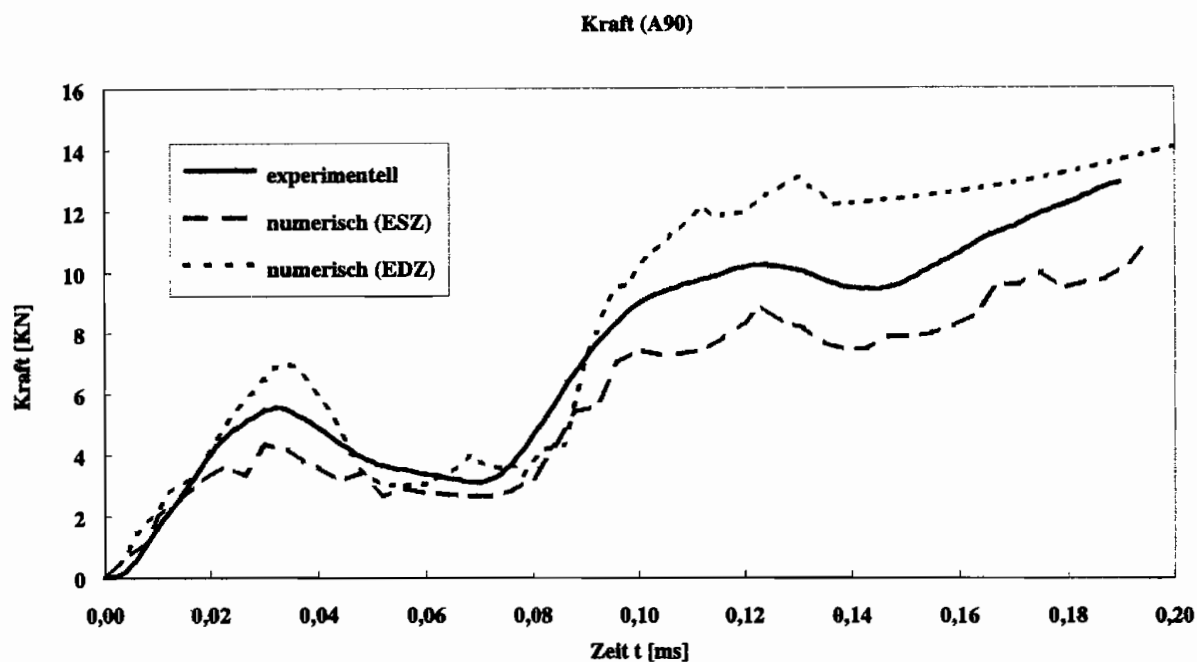


Abbildung 6.6: Darstellung der gemessenen und berechneten Hammerkräfte (A65)



**Abbildung 6.7:** Darstellung der gemessenen und berechneten Hammerkräfte (A90)

Aus der Annahme des ebenen Spannungszustands ergibt sich für alle drei Probenformen zu frühen Zeiten des Belastungsvorgangs eine qualitativ bessere Wiedergabe der Versuchskräfte, die Extrema der Kräfte werden genauer simuliert. Bei größeren Zeiten ist die Übereinstimmung im allgemeinen nicht so gut, weder für den Fall des ebenen Spannungszustands noch den des ebenen Dehnungszustands. Die Verläufe der Kraft-Zeit-Kurven lassen den Schluß zu, daß das dynamische Verhalten der Proben gerade in der frühen Phase des Belastungsvorgangs gut modelliert werden kann. Daher sollte das Abheilverhalten der Proben, das experimentell in den frühen Phasen der Schlagbelastung beobachtet wird, auch numerisch nachgebildet sein. In den Abbildungen 6.8–6.10 sind für alle drei Probenformen die Wege des FE-Knotens, der unmittelbar über dem Auflager liegt, zusammen mit den Hammerkräften über der Schwingungsdauer der Proben aufgetragen. Aufgetragen als Vertikallinie ist der Zeitpunkt, an dem die Transversalwelle, die von der Kontaktfläche ausgeht, das Auflager erreicht. Dieser Zeitpunkt wurde im Rahmen von experimentellen Untersuchungen als Zeitpunkt bestimmt, an dem erstes Abheben häufig beobachtet wird. Es ist zwar keine exakte Übereinstimmung des numerisch ermittelten Zeitpunktes mit dem Zeitpunkt zu erkennen, an dem die Welle auf das Auflager trifft, aber das Abheilverhalten tritt dann auf, wenn die Hammerkraft ihr Maximum erreicht. Dieser Effekt wird auch experimentell beobachtet. Die Phase des Abhebens beginnt im Trägheitspeak und erreicht ihr Maximum genau dann, wenn die Hammerkraft minimal ist. Dieses Verhalten wird in der numerischen Simulation recht gut nachgebildet. Die Abnahme der Hammerkraft ist demnach mit der beginnenden Durchbiegung der Probe korreliert, die sich im Lösen der Probe von den Widerlagern ausdrückt, d.h. sie tritt dann ein, wenn der Zeitpunkt der halben Schwingungsdauer der gelagerten Probe erreicht wird. Im Umkehrpunkt, d.h. wenn die Zeit gerade der Schwingungsdauer der Probe entspricht, zeigt sie umgekehrtes Verhalten. Die Bewegungsrichtung ist tendenziell der des Schlaghammers entgegengerichtet, was sich in einem Anstieg der Kraft ausdrückt. Dies ist in den Abbildungen 6.8–6.10



veranschaulicht.

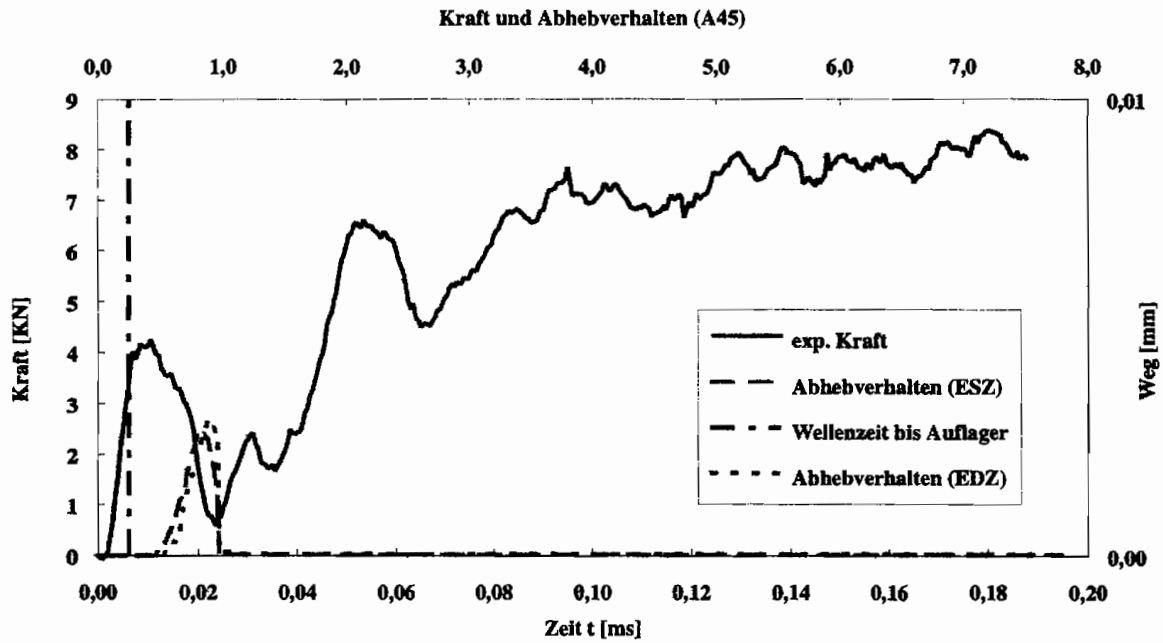


Abbildung 6.8: Abhebverhalten der Probe A45

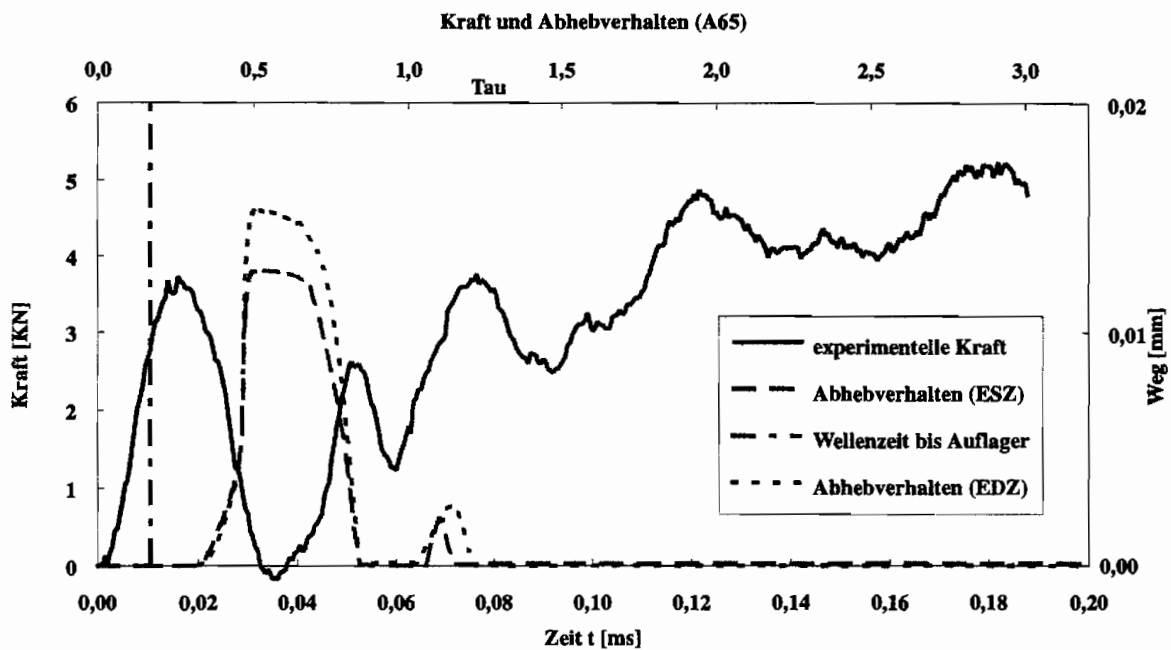


Abbildung 6.9: Abhebverhalten der Probe A65

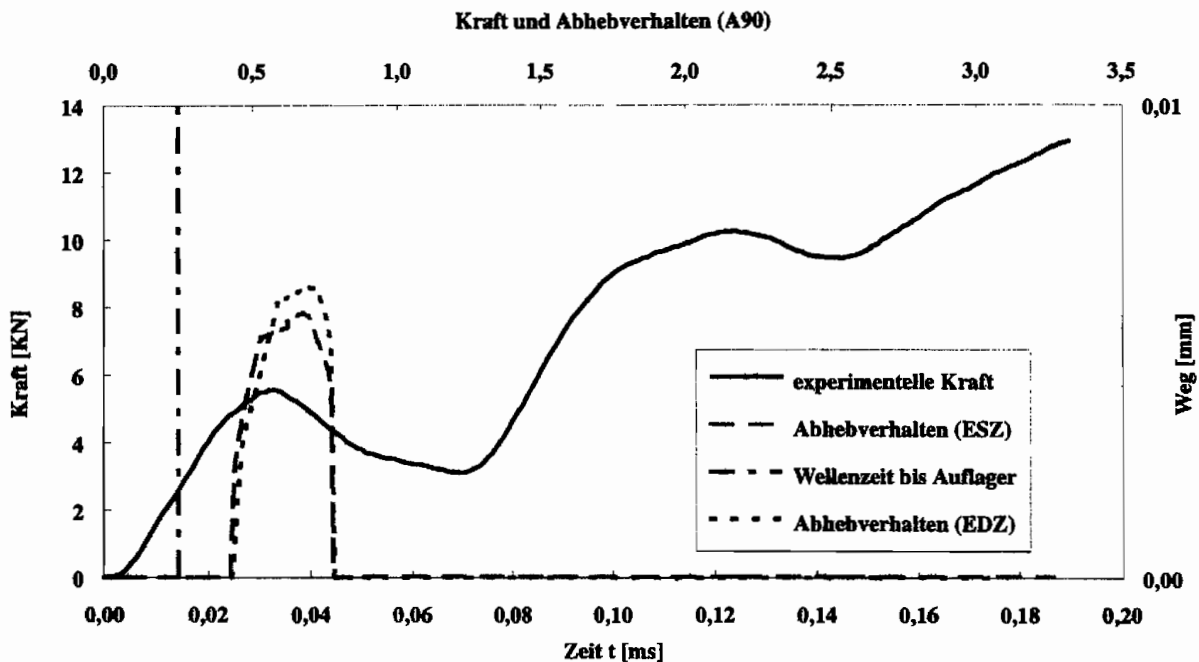


Abbildung 6.10: Abhebverhalten der Probe A90

Anhand der dargestellten Daten läßt sich der Schluß ziehen, daß der Schlagversuch in genügend guter Weise simuliert wird, um die berechneten inneren Größen zur Ermittlung der Kerbspannungsintensität heranzuziehen. Die globalen Meßwerte, die im Rahmen des Kerbschlagbiegeversuchs ermittelt werden, können gut nachgebildet werden.

### 6.1.2 Berechnung der Spannungsintensität

Bevor die Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals für die elastisch-plastischen Proben erfolgte, wurde die programmtechnische Umsetzung anhand einer hochskalierten Charpy-Probe aus ARALDIT B überprüft. Dieses Beispiel ist der Literatur entnommen [4] und bietet gesicherte experimentelle Daten bezüglich des  $K(t)$ -Verlaufs. Das Material verhält sich linear-elastisch, seine Materialkennwerte sind in Tabelle 6.1 angegeben.

E-Modul	Querkontraktion	Dichte	Länge	Höhe	Breite	Aufl.-abstand
3380	0,33	1,320	412	100	10	400

Tabelle 6.1: Materialwerte und geometrische Abmessungen der Probe C400

Zur Simulation wurde im wesentlichen das FE-Netz der gekerbten Proben verwendet, lediglich der Bereich des Risses wurde aufgrund der zur gekerbten Probe unterschiedlichen Geometrie neu modelliert und vernetzt. Überprüft wurde die Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals am erwähnten  $K(t)$ -Verlauf. Der Vergleich dieser Berechnung mit den experimentell ermittelten Daten ist in Abbildung 6.11 dargestellt.

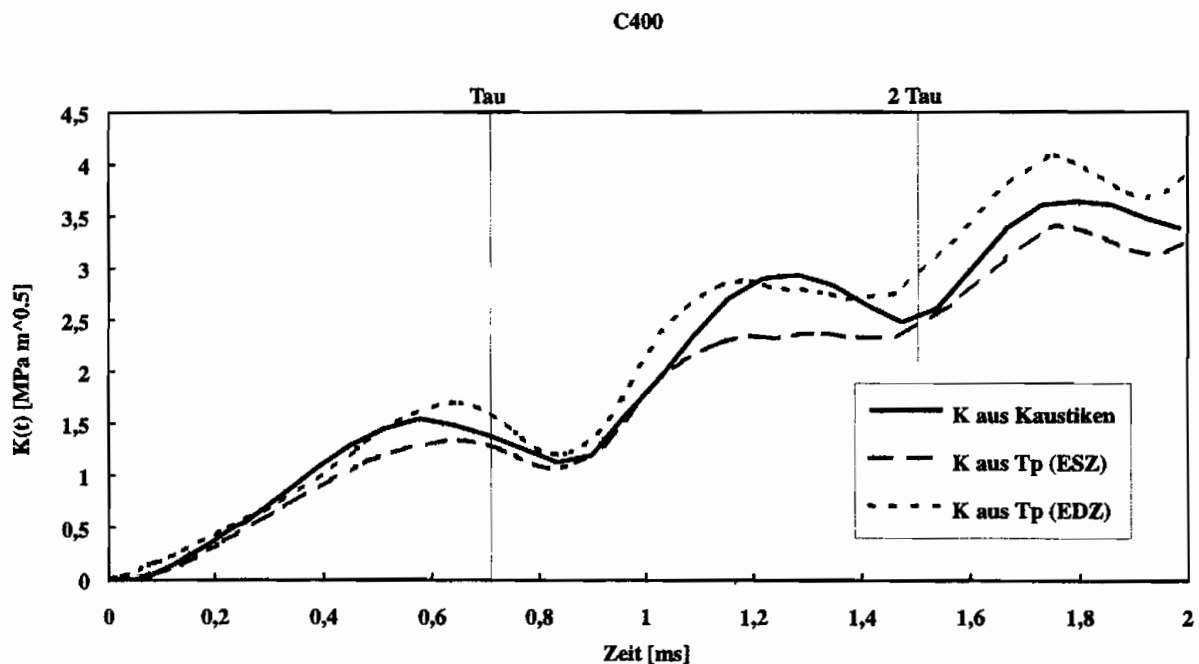


Abbildung 6.11: Verlauf von  $K(t)$  der Probe C400

Es ist ersichtlich, daß der experimentell ermittelte  $K(t)$ -Verlauf durch die Berechnung der Energiefreisetzungsrates und die anschließende Umrechnung in den entsprechenden  $K$ -Faktor nach Gleichung (2.5) sowohl qualitativ als auch quantitativ gut nachgebildet werden kann. Die Abweichungen der Werte, die sich aus der Modellierung des ebenen Spannungs- bzw. ebenen Dehnungszustands ergeben, sind geringfügig, so daß auch unter diesem Gesichtspunkt von einer guten Wiedergabe der Kerbspannungsintensität gesprochen werden kann.

Für den hier betrachteten Anwendungsfall ist das  $\Delta T_p$ -Integral von seiner theoretischen Grundlage her geeignet, da ein rißbehaftetes Problem vorliegt. Untersuchungen zur Wegunabhängigkeit ergaben einen nahezu identischen Wert für die verwendeten Pfade. Diese Untersuchung wird auch im folgenden Abschnitt für die Anwendung des  $\Delta T_p$ -Integral auf die Berechnung der Kerbspannungsintensität der Charpy-Probe angewendet werden.

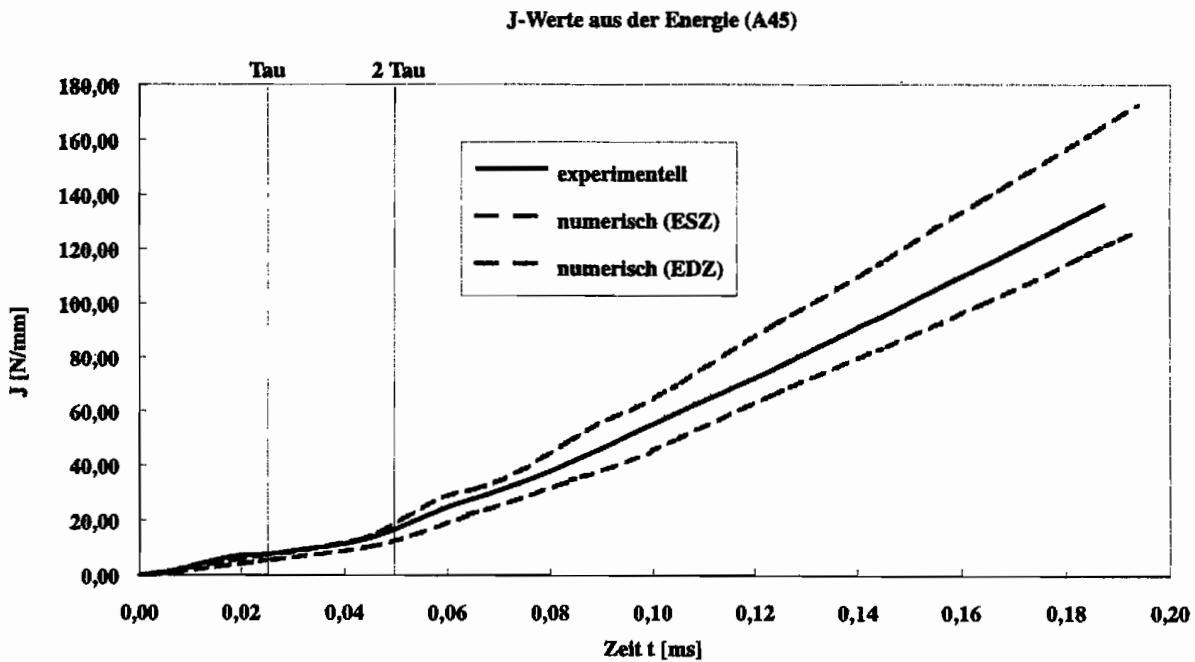
## 6.2 Vergleich und Bewertung der Verfahren zur Berechnung der Kerbspannungsintensität

Für die Auswertung eines Kerbschlagbiegeversuchs unter Laborbedingungen sind aufwendige numerische Simulationen nicht geeignet, da sie sehr zeitintensiv sind und den Zugriff auf leistungsfähige Hard- und Software voraussetzen, der nicht immer gegeben ist. Daher werden in diesem Abschnitt die Werte der Kerbspannungsintensitäten, die sich aus den Ergebnissen der Simulationsrechnungen ergeben, mit denjenigen verglichen, die auf herkömmliche Weise aus der Interpretation der Meßergebnisse gewonnen werden. Anhand dieser Vergleiche wird ein Vorschlag zur Korrektur des praktischen Auswerteverfahrens präsentiert, der eine genauere Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Kerbbeanspruchung einer Charpy-Probe zum Ziel hat.

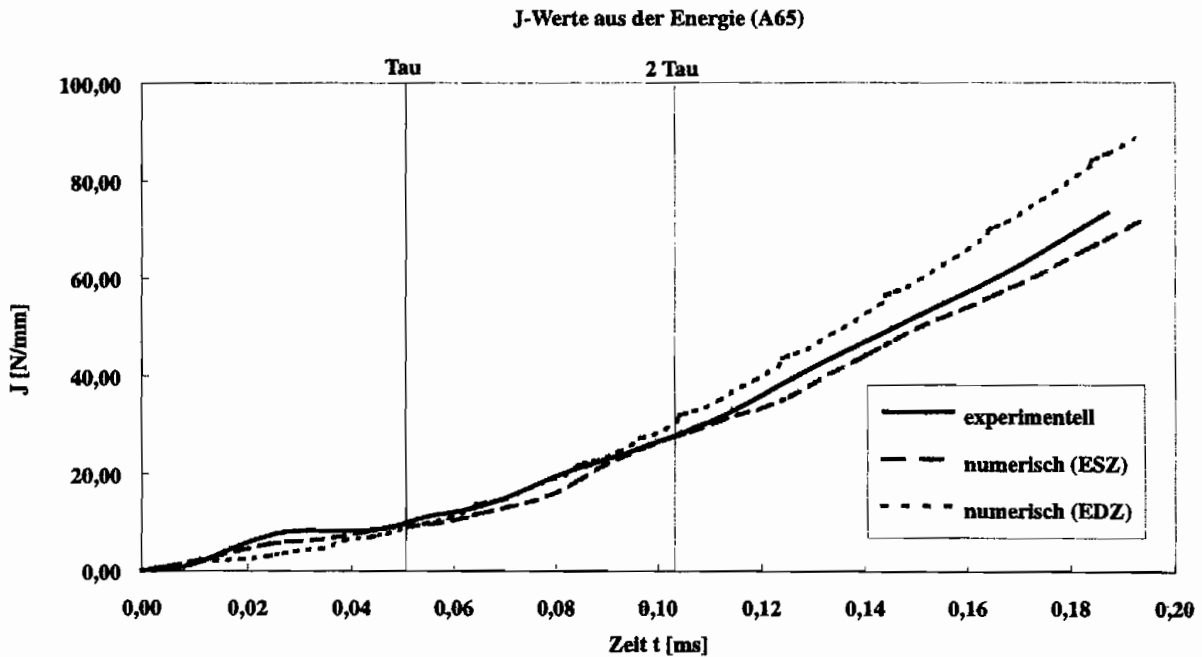
## 6.2 Vergleich und Bewertung der Verfahren zur Berechnung der Kerbspannungsintensität 79

In den Abbildungen 6.12-6.14 sind die J-Integralwerte dargestellt, die sich unter Verwendung der Probenenergie nach Gleichung (2.13) ergeben. Verglichen werden die Ergebnisse der experimentellen Auswertung und der numerischen Simulation für alle drei Probenformen.

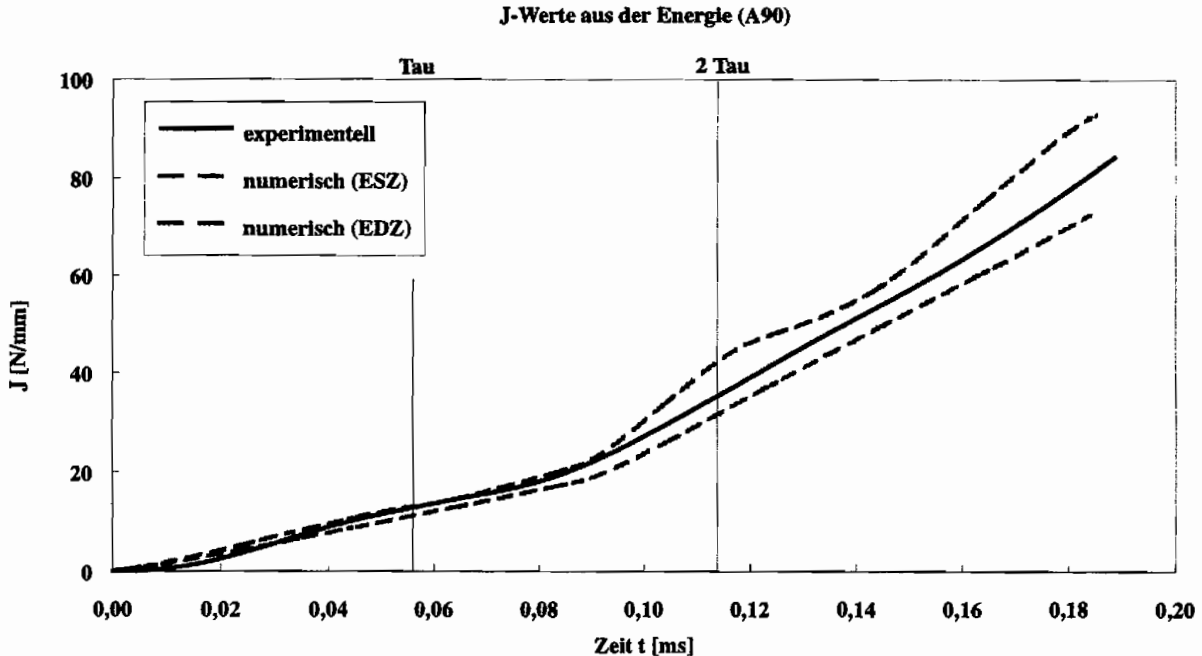
Es ist deutlich zu sehen, daß die Ergebnisse für die untersuchten Probengeometrien in dem Zeitbereich, der kleiner als Tau (Schwingungsdauer) ist, nahezu identisch sind. Ebenfalls ist nur ein geringer Unterschied zwischen den Simulationen aufgrund der unterschiedlichen Modellierungen (ESZ, EDZ) vorhanden. Bei größeren Zeiten hingegen divergieren die berechneten Werte, d.h. die Probenenergie für den Fall des EDZ ist höher als die für den ESZ.



**Abbildung 6.12:** Vergleich der experimentellen und numerischen Werte des J-Integrals, berechnet aus der Probenenergie (Probe A45)



**Abbildung 6.13:** Vergleich der experimentellen und numerischen Werte des J-Integrals, berechnet aus der Probenenergie (Probe A65)



**Abbildung 6.14:** Vergleich der experimentellen und numerischen Werte des J-Integrals, berechnet aus der Probenenergie (Probe A90)

Für alle Probenformen stimmen die Werte bis zur Zeit  $t \approx 1,5\tau$  gut überein, lediglich die Probe A65 weist schon im Anfangsbereich ein oszillierendes Verhalten der numerisch ermittelten Probenenergie auf.

Dieses Probenverhalten weist darauf hin, daß zu Beginn des Belastungsvorgangs die

Trägheitskräfte den Bewegungsablauf der Probe dominieren. Je größer die Steifigkeit der Probe ist, desto geringeres oszillierendes Verhalten weisen die mechanischen Größen auf. Dies wird auch deutlich am Abhebverhalten der Probe A65, die als einzige der drei Probenformen zweimal vom Auflager abhebt.

Wie schon in Kapitel 2 angesprochen wurde, ist es notwendig, den Zeitpunkt der Reißinitiation  $t_m$  einer Probe möglichst in den Bereich zu verschieben, in dem die Trägheitskräfte keine signifikante Rolle mehr spielen, um die Kraft-Verschiebungs-Kurve unbeeinflusst von Oszillationen aufgrund der Trägheit auf den Zeitpunkt der Reißinitiation hin untersuchen zu können. Die Übergangszeit  $t_r$  (siehe Gleichung (2.15)) soll dazu dienen, den Bereich signifikanten Einflusses der Trägheitskräfte einzugrenzen. Sie ist definiert als der Zeitpunkt, in dem die kinetische Energie der Probe gleich ihrer Dehnungsenergie ist. In den Abbildungen 6.15–6.17 ist für die numerisch ermittelten Energien dieses Kriterium für die drei Probenformen dargestellt.

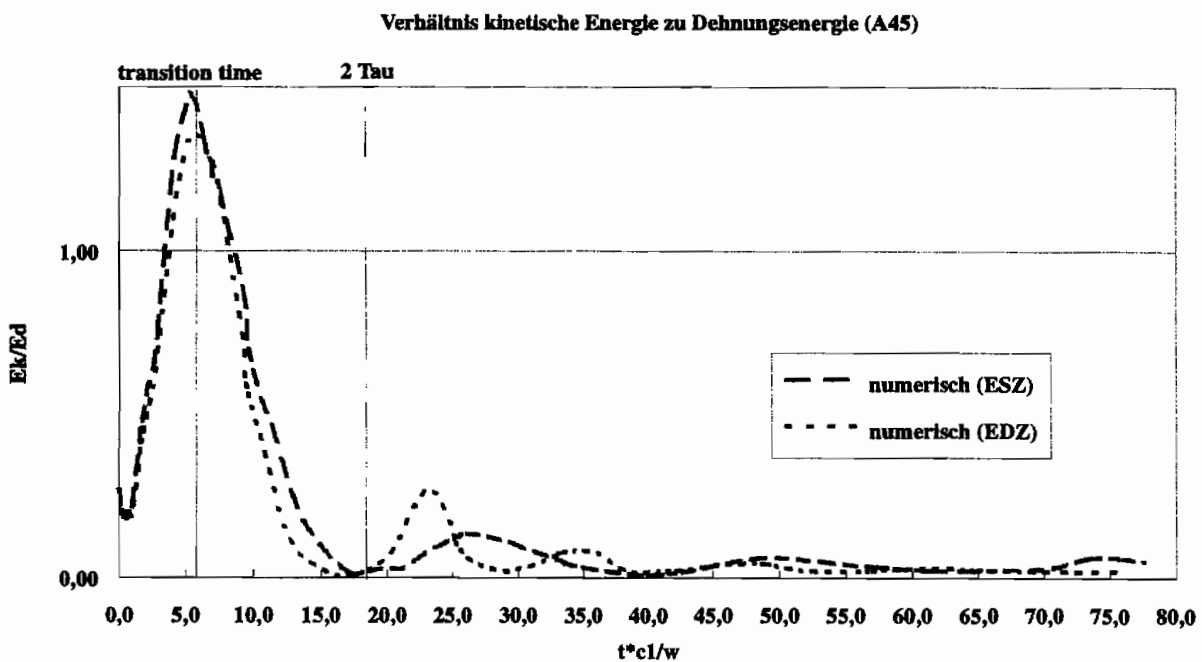


Abbildung 6.15: Verhältnis der kinetischen Energie zur Dehnungsenergie der Probe A45

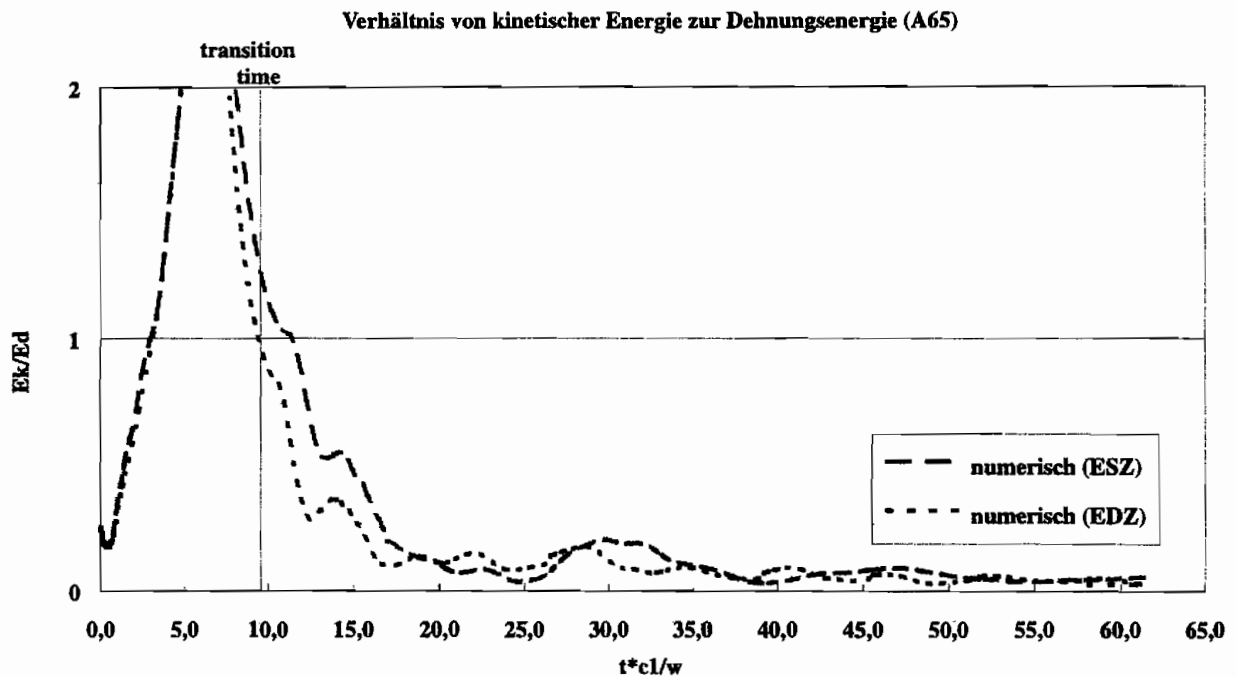


Abbildung 6.16: Verhältnis der kinetischen Energie zur Dehnungsenergie der Probe A65

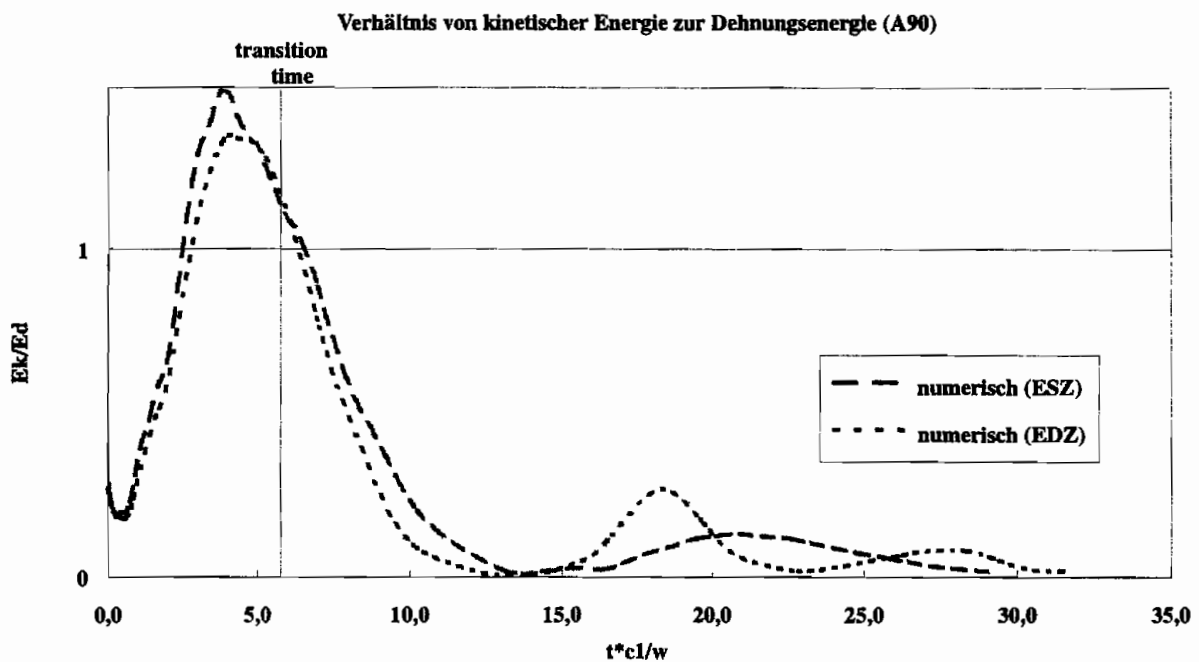


Abbildung 6.17: Verhältnis der kinetischen Energie zur Dehnungsenergie der Probe A90

Die geringe Abweichung der berechneten Übergangszeit von derjenigen, die sich aus den numerischen Rechnungen ergibt, ist ein weiteres Indiz für die realistische Modellierung des Schlagversuchs. Man erkennt aus den Darstellungen, daß die Probe A90 trotz der Tatsache, daß sie die größte Steifigkeit aufweist, selbst zu Zeiten  $> 2\tau$  noch einen signifikanten Anteil an kinetischer Energie im Vergleich zur Dehnungsenergie der Probe aufweist. Bei allen drei Probenformen ist erst dann der Anteil der kinetischen Energie sehr gering, wenn der Zeitpunkt der Reißinitiierung, der etwas später als  $3\tau$  liegt, beinahe erreicht ist. Dies

verdeutlicht anschaulich die Forderung nach Bruchzeiten  $> 3\tau$  des ASTM-Normvorschlages zur Auswertung entsprechender Versuche [23].

Es ergibt sich nun die Fragestellung, ob und inwieweit die Auswertung eines Schlagversuchs hinsichtlich des J-Integrals für Bruchzeiten, die deutlich früher als  $3\tau$  auftreten, gültig ist. Die Forderung nach genügend hohen Bruchzeiten ist einschränkend und für manche Anwendungsfälle nicht praktikabel. Es stellt sich außerdem die Frage, welchen Einfluß der Trägheitspeak auf die Bestimmung des J-Integrals hat, dessen Energieanteil sich aus der planimetrierten Fläche der Kraft-Verschiebungs-Kurve ergibt.

Experimentell ist es sehr schwierig, den Einfluß des Trägheitspeaks zu bestimmen, da die mögliche Beobachtungsphase nur sehr kurz ist und außer optischen Verfahren kaum Möglichkeiten bestehen, diese frühen Phasen des Belastungsvorgangs und seine Auswirkungen auf das Probenverhalten quantitativ zu bewerten. Zur Untersuchung solcher Phänomene eignen sich gekoppelte Vorgehensweisen am besten [74], d.h. wenn numerische Verfahren und experimentelle Beobachtungen gemeinsam angewendet werden, bieten sich gute Möglichkeiten, solche Kurzzeit-Phänomene zu untersuchen.

In den Abbildungen 6.18–6.20 sind die berechneten Energiefreisetzungsraten aus den experimentellen Ergebnissen mit den Werten, die sich aus dem  $\Delta T_p$ -Integral nach Atluri ergeben, für die Zeit bis zur Reißinitiierung aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß für Zeiten nahe  $t_m$  die Unterschiede zwischen den experimentellen und den numerischen Werten vergleichsweise gering sind, wenn man berücksichtigt, daß für diese Zeiten keine quantitative Übereinstimmung zu erwarten ist, was sich aus den vorher diskutierten Ergebnissen ergibt. Dies gilt besonders für die Werte, die sich aus dem ebenen Dehnungszustand ergeben. Bei Zeiten  $t < 1,5\tau$  weichen die Werte allerdings stark voneinander ab, was zunächst überrascht, da gerade bei diesen frühen Zeiten das globale Probenverhalten durch die Simulation gut wiedergegeben werden konnte.

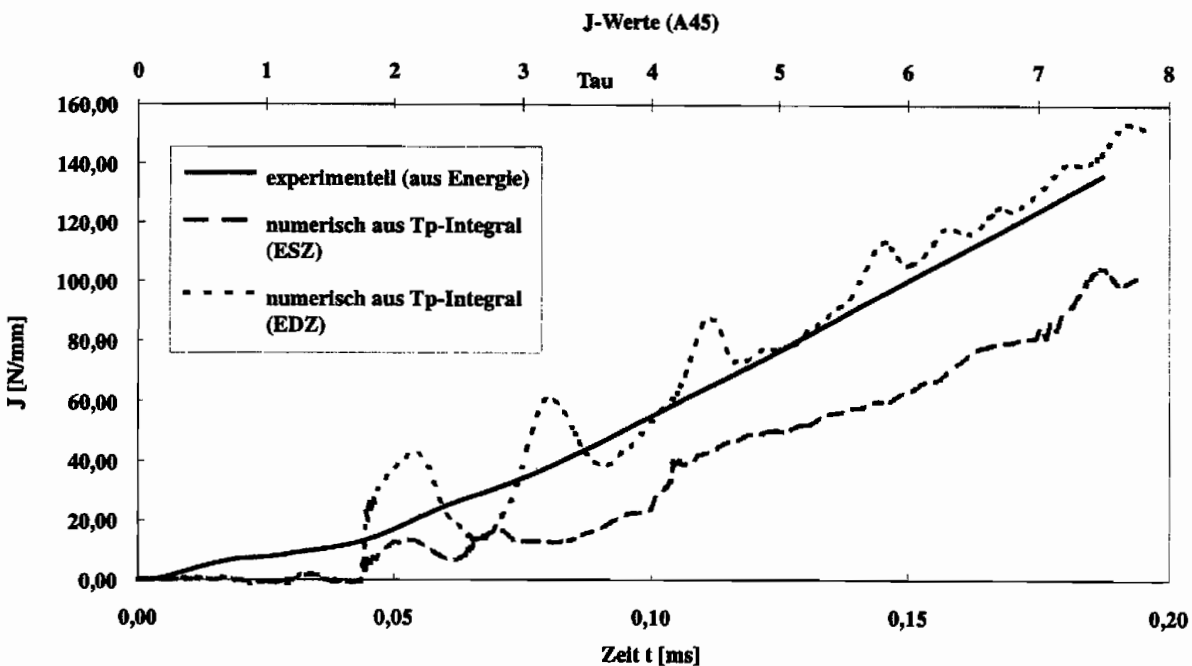


Abbildung 6.18: J aus 2U (exp.) und  $\Delta T_p$  der Probe A45



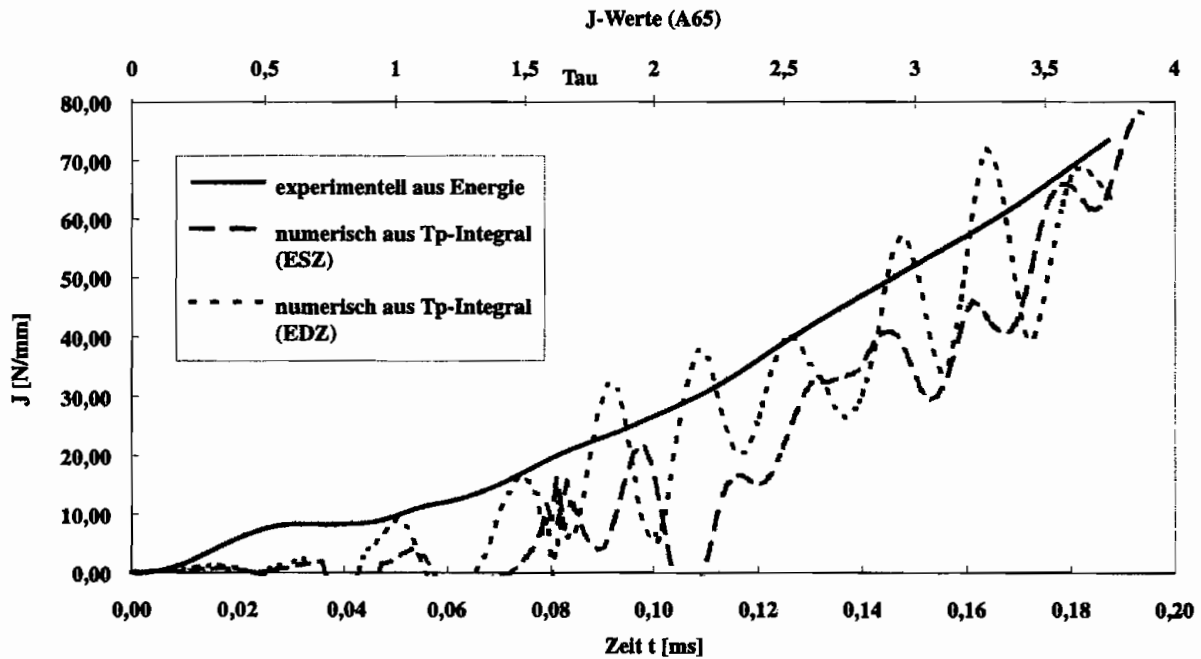


Abbildung 6.19: J aus 2U (exp.) und  $\Delta T_p$  der Probe A65

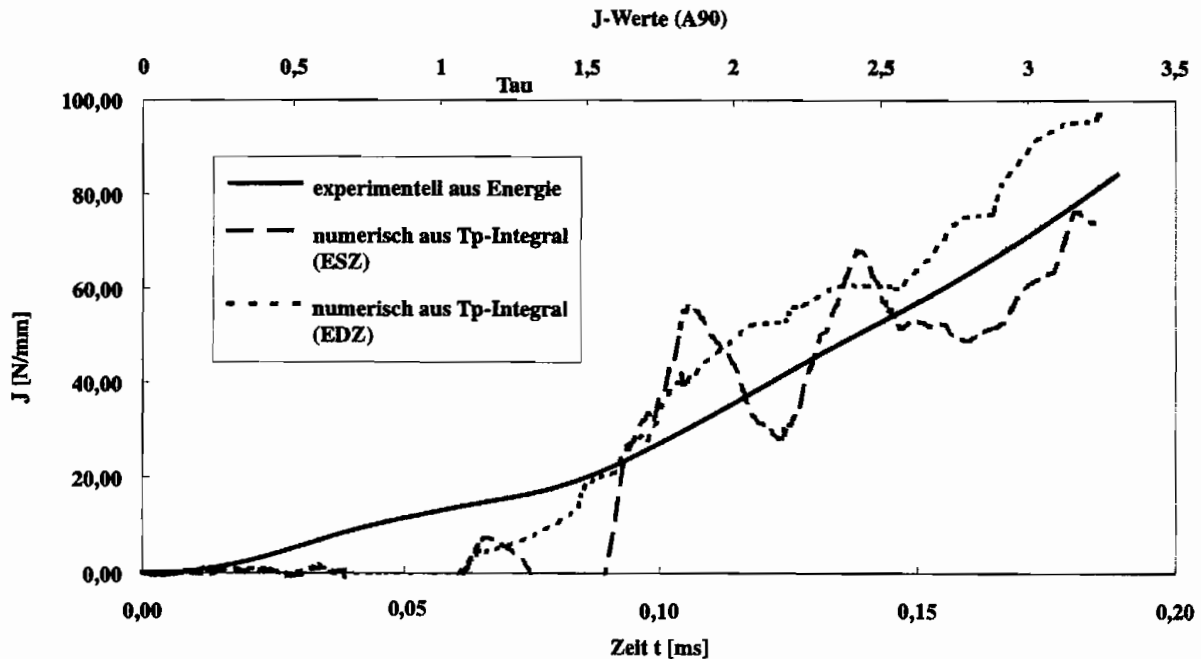


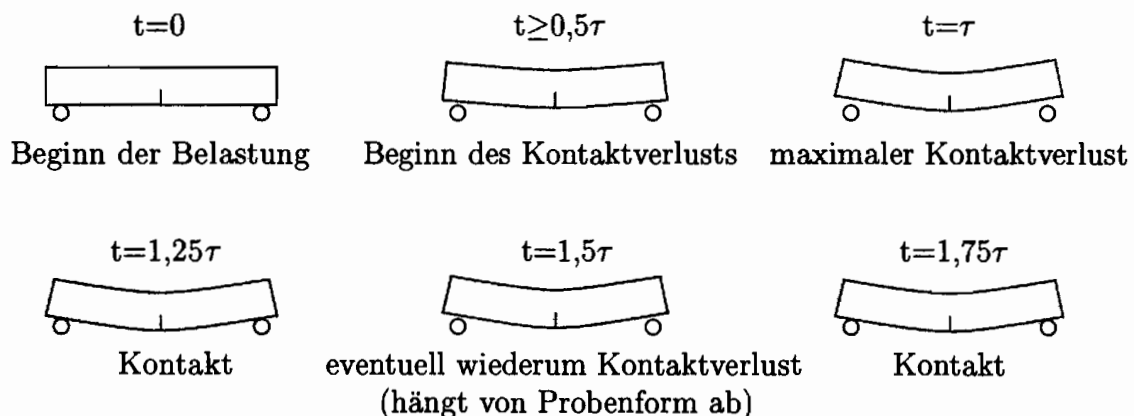
Abbildung 6.20: J aus 2U (exp.) und  $\Delta T_p$  der Probe A90

Alle drei Probenformen weisen, abgesehen von der Größe der Oszillationen, qualitativ das gleiche Verhalten auf: Sie bleiben über eine gewisse Zeit nach der Schlagbelastung ohne nennenswerten Anstieg, erst dann ist ein deutlicher Zuwachs zu erkennen, und die Werte nähern sich, zumindest für den Fall des ebenen Dehnungszustands, denen der experimentell ermittelten an. Die Stärke der Oszillationen hängt offensichtlich mit der Steifigkeit der Probe zusammen, wobei die Amplitude bei der Probenform A65 sehr groß ist. Aber auch hier ist die Tendenz, sich der experimentellen Kurve anzunähern, klar zu erkennen.

Die Annahme ebenen Spannungszustands unterschätzt bei allen drei Probenformen die experimentell ermittelten J-Werte bei großen Zeiten zum Teil erheblich. Dies ist mit den Ergebnissen aus den Kraftberechnungen vereinbar, aus denen ersichtlich ist, daß die berechneten Kräfte für den Fall des ebenen Dehnungszustands größer sind als für den des ebenen Spannungszustands, d.h. für den Fall des ebenen Dehnungszustands wird mehr Energie in die Probe eingebracht, was zu einer höheren Kerbspannungsintensität führt.

Auffallend ist jedoch der plötzliche starke Anstieg des numerisch bestimmten J-Wertes, und zwar unabhängig von der Probenform und der Modellwahl. Bis zu diesem Zeitpunkt sind die Werte nahezu Null, von geringen Schwankungen abgesehen, was bedeutet, daß bis dahin die Kerbspannungsintensität nur einen sehr geringen Wert hat. Auf den ersten Blick stützt dieses Verhalten die These, daß der Trägheitspeak nicht zur Auswertung der Kerbspitzenbelastung herangezogen werden soll. Dem ist aber entgegen zu halten, daß der plötzliche Anstieg erst zu einer Zeit  $t \approx 1,75\tau$  auftritt, der Trägheitspeak hingegen bei  $t \approx \tau$  schon abgeklungen ist.

Zur Erklärung kann der Effekt des Kontaktverlusts ebenfalls nur bedingt herhalten. Zur Veranschaulichung des Probenverhaltens ist der Verlauf der Durchbiegung zu Beginn des Schlagvorgangs in Abbildung 6.21 dargestellt.



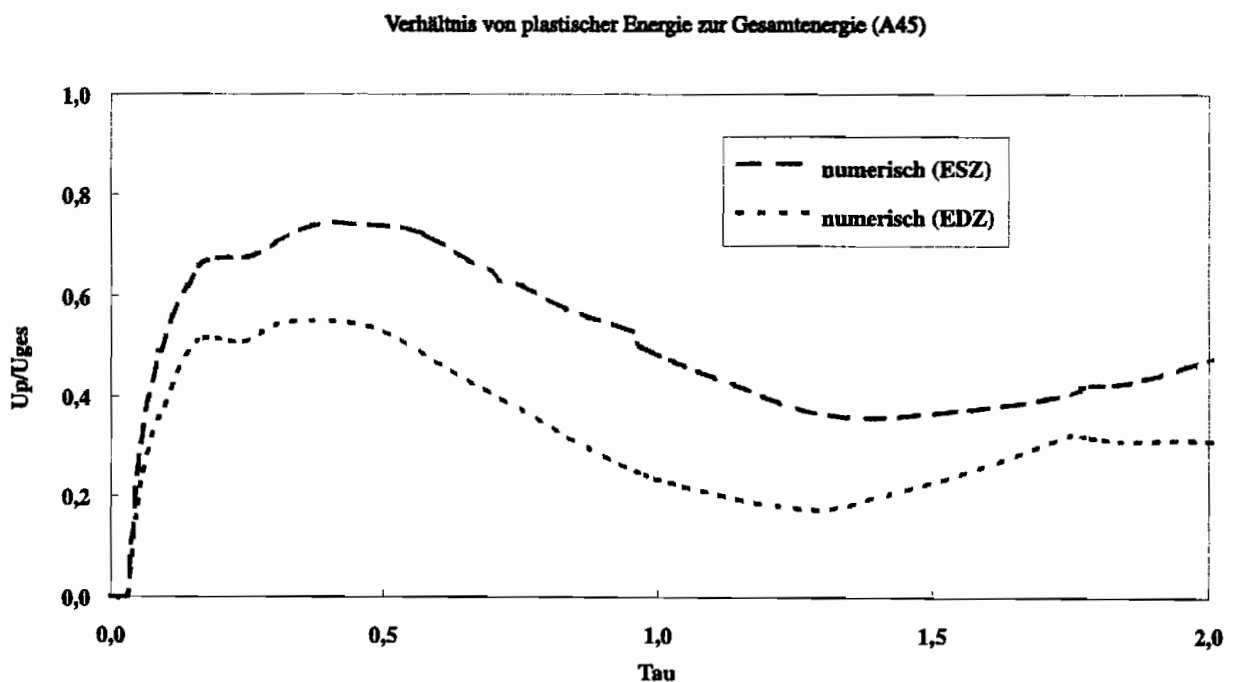
**Abbildung 6.21:** Anschauliche Darstellung der Phasen der Probenbelastung [4]

Nach dem Zeitpunkt der Lasteinleitung beginnt nach einer Zeit, die ungefähr der halben Schwingungsdauer der Probe entspricht, die Phase des Abhebens. Das entspricht ungefähr dem Zeitraum, den die von der Lasteinleitungsstelle ausgehenden Druckwellen benötigen, um das Auflager zu erreichen. Das Abheben der Probe erreicht zu einer Zeit  $t \approx \tau$  den Maximalwert. Danach kommt die Probe wieder in Kontakt mit dem Auflager, tendiert bei  $t \approx 1,5\tau$  jedoch wieder zum Abheben. Ob dieses Abheben stattfindet oder lediglich ein Abfall des Hammersignals gemessen wird, hängt von der Steifigkeit der Probe ab. Für Zeiten  $t > 1,75\tau$  tritt nur bei sehr nachgiebigen Proben ein weiterer Kontaktverlust auf.

Durch dieses Verhalten der Probe kann zwar erklärt werden, warum bei  $t \approx 1,75\tau$  die Kerbspannungsintensität ansteigt, aber nicht, warum vor diesem Zeitpunkt die Kerbspitze nahezu unbelastet ist. Die Ergebnisse des  $\Delta T_p$ -Integrals bezüglich der elastischen Probe C400 zeigen, daß der steile Anstieg nicht zu beobachten ist. Die Rißspitzenintensität nimmt im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen kontinuierlich zu, von den durch die Oszillationen der Hammerkraft induzierten Schwankungen abgesehen.

Die Vermutung liegt also nahe, daß die Energie, die in der elastischen Probe zum Aufbau der Kerbspannungsintensität zu frühen Zeiten zur Verfügung steht, bei den untersuchten

Aluminium-Proben, deren Materialverhalten elastisch-plastisch ist, dissipiert wird, so daß es zu keinem Aufbau der Kerbspitzenbelastung kommt. Diese Energiedissipation tritt im dem Bereich der Probe auf, der in der frühen Phase der Schlagbelastung den größten Beanspruchungen ausgesetzt ist. Es muß also überprüft werden, welche Größe die plastischen Verformungen im Bereich der Lasteinleitungsstelle aufweisen. Um diese Größe einordnen zu können, soll zuerst die plastische Probenenergie, bezogen auf die Gesamtenergie der Probe, dargestellt werden. In den Abbildungen 6.22–6.24 ist dieses Verhältnis für die drei untersuchten Probenformen dargestellt.



**Abbildung 6.22:** Verhältnis der plastischen Energie zur Dehnungsenergie (A45)

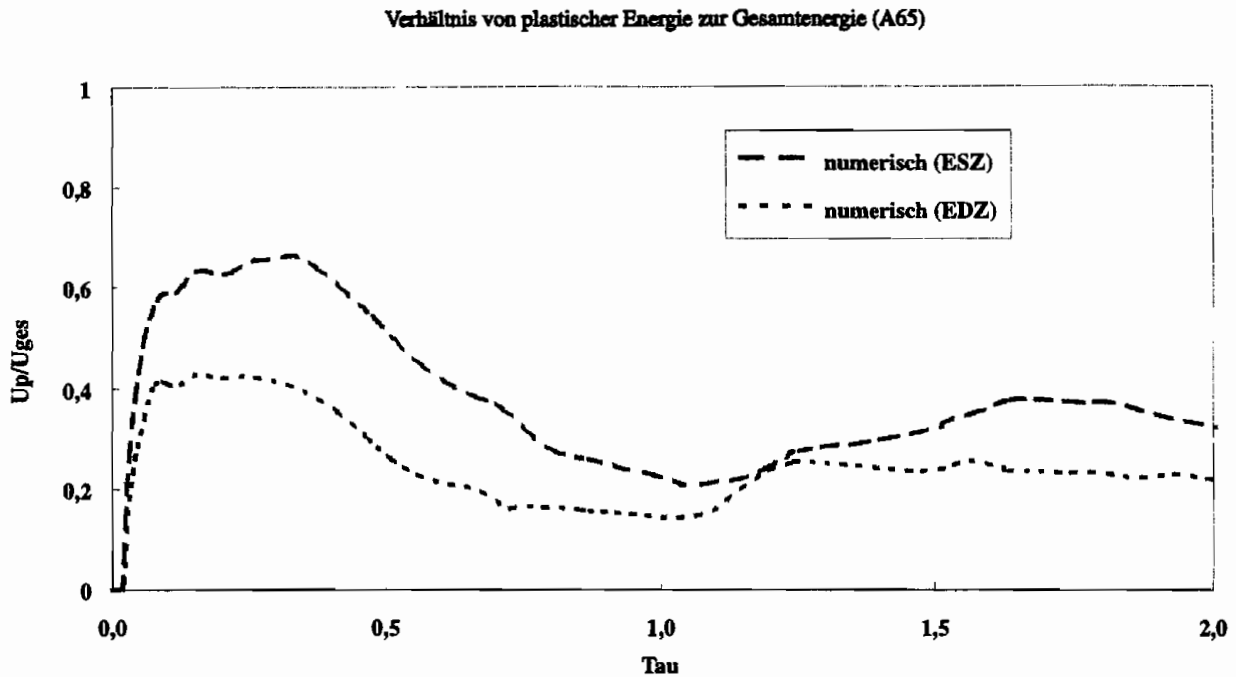


Abbildung 6.23: Verhältnis der plastischen Energie zur Dehnungsenergie (A65)

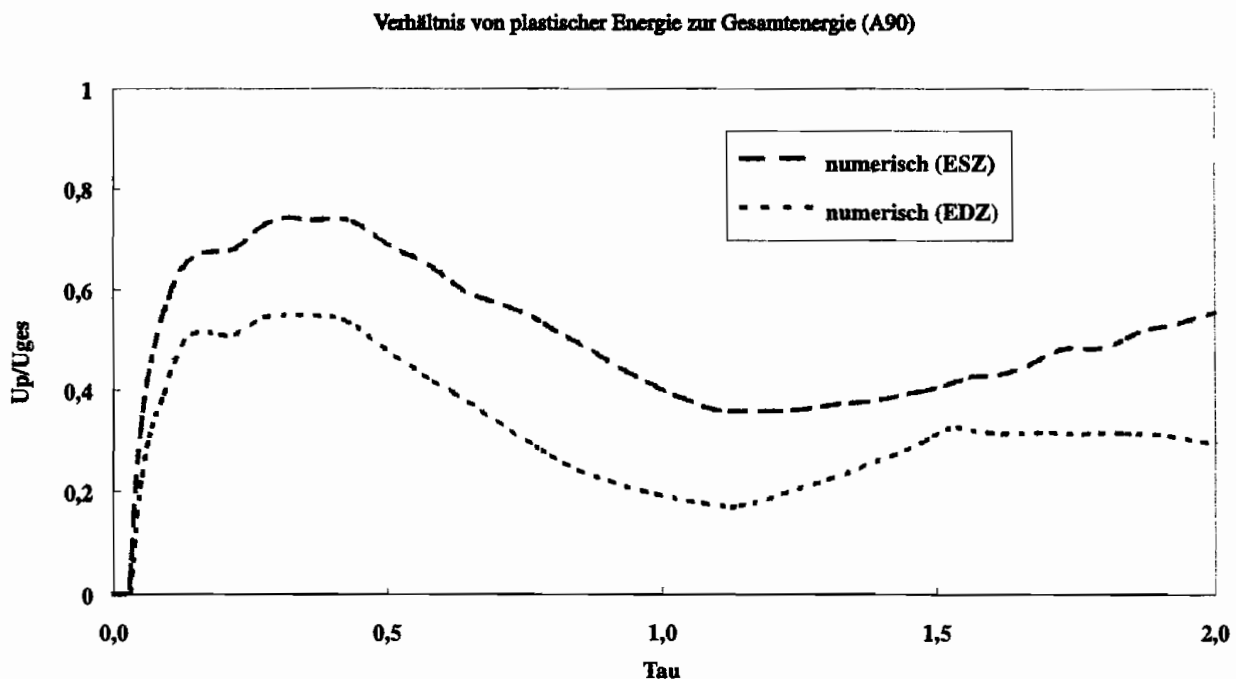


Abbildung 6.24: Verhältnis der plastischen Energie zur Dehnungsenergie (A90)

Es ist gut zu erkennen, daß das Verhältnis der plastischen Energie zur Gesamtenergie unabhängig von der Probenform einen ähnlichen Verlauf aufweist. Unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands ist der ermittelte Anteil der plastischen Energie größer, als es für die Annahme des ebenen Dehnungszustands der Fall ist, da hier ein höherer hydrostatischer Spannungszustand besteht, der das plastische Fließen behindert. Der Maximalwert der bezogenen plastischen Energie wird zu der Zeit  $t \approx 0,5\tau$  angenommen,

was dem Zeitpunkt des Maximalwerts des Trägheitspeaks entspricht. Bei allen drei Probenformen ähnlich ist auch der Zeitpunkt des minimalen Anteils der plastischen Energie zur Zeit  $t \approx \tau$ , was ungefähr dem Zeitpunkt des maximalen Kontaktverlustes entspricht. Somit wird vermutet, daß der Verlauf der bezogenen plastischen Dehnung mit dem zeitlichen Verlauf des Trägheitspeaks korreliert werden kann, da auch die Kraft-Zeit-Kurve bei  $t \approx \tau$  ein Minimum aufweist.

Aufgrund dieser Überlegungen wird gefolgert, daß die plastische Energie, die während des Auftretens des Trägheitspeaks in der Probe dissipiert wird, eine Auswirkung auf den späten Anstieg des  $\Delta T_p$ -Integrals hat. Es wird vermutet, daß aufgrund der Trägheitskräfte in elastisch-plastischen Materialien ein gewisser Anteil der Schlagenergie im Bereich der Krafteinleitungsstelle dissipiert wird, der zum Aufbau der Kerbspannungsintensität demzufolge nicht zur Verfügung steht. Um diese Vermutung zu überprüfen, wird das Verhältnis der im Bereich der Krafteinleitungsstelle dissipierten Energie zur gesamten plastischen Energie der Probe berechnet. Dazu wurde die plastische Energie der finiten Elemente aufsummiert, die im Bereich des Aufschlagpunkts des Hammers liegen. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.25 dargestellt.

Verhältnis von plastischer Energie im Bereich der Kontaktfläche zur gesamten plastischen Energie  
(A45)

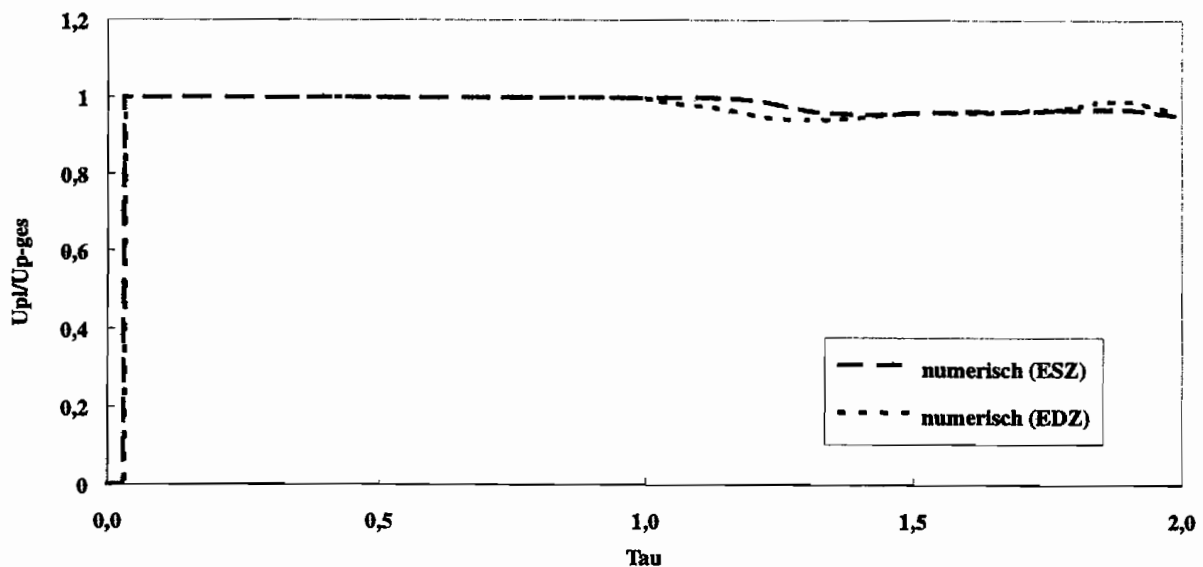


Abbildung 6.25: Verhältnis von lokaler zu globaler plastischer Dehnung für die Probe A45

Man erkennt, daß nahezu der gesamte Anteil der plastischen Energie, der in der Probe dissipiert wird, in der Krafteinleitungsstelle vorliegt. Die Annahme scheint daher gerechtfertigt, daß ein noch zu bestimmender Anteil der Energie, die durch den Hammeraufprall in die Probe eingebracht wird, im Zeitbereich  $0 < t < \tau$  im Bereich des Kraftangriffspunkts dissipiert wird und somit nicht zum Aufbau der Kerbspannungsintensität beiträgt.

Aufgrund der numerischen Ergebnisse wird nunmehr festgestellt, daß während des Auftretens des Trägheitspeaks im Bereich der Lasteinleitungsstelle plastische Dehnungen entstehen, die sich auf die zu berechnende Energiefreisetzungsrates auswirken. Dieser Einfluß soll nun quantifiziert werden.

Nach der Berechnungsgleichung für das J-Integral (Gleichung (2.13)) wird die aus der Kraft- Verformungs-Kurve ermittelte Energie zur Auswertung des J-Integrals herangezogen. Wird der Trägheitspeak mit ausgewertet, so ergibt sich wegen der bisher dargestellten Überlegungen ein Wert, der korrigiert werden muß. In den Abbildungen 6.26–6.27 ist für die Probe A45 das berechnete J-Integral aus der experimentell ermittelten Energie sowie das um den Anteil der plastischen Energie korrigierte J-Integral dargestellt. Zum Vergleich werden auch die Werte des  $\Delta T_p$ -Integrals aufgeführt.

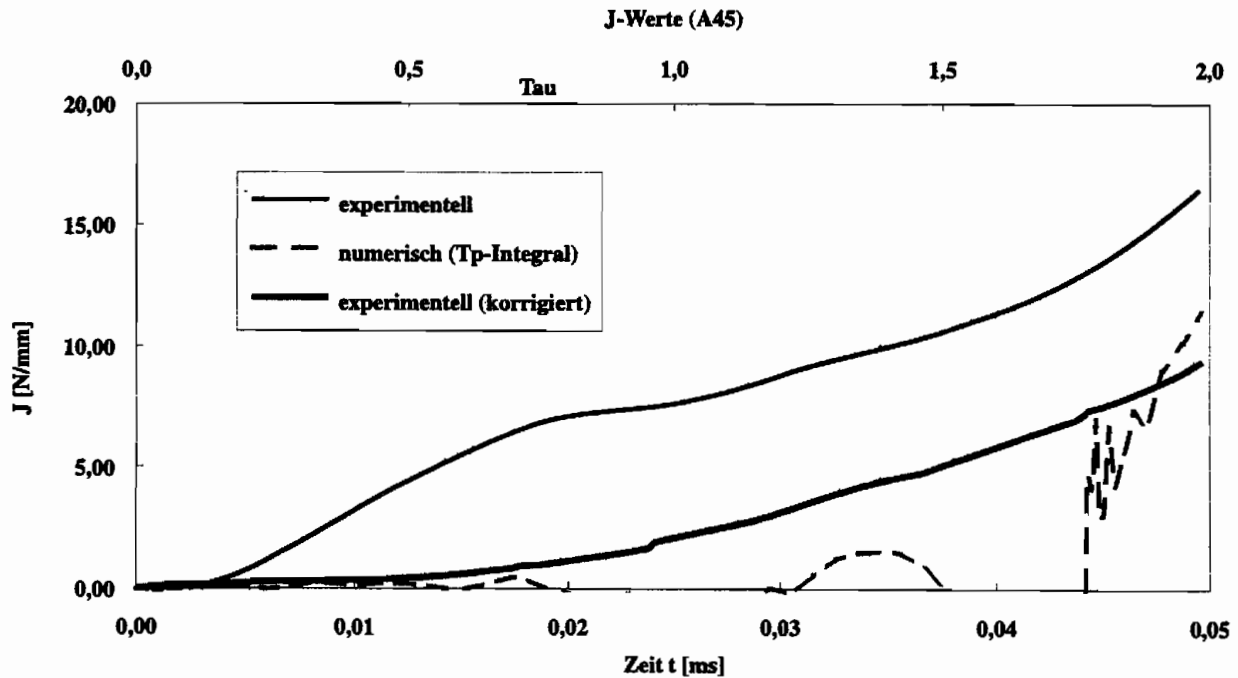
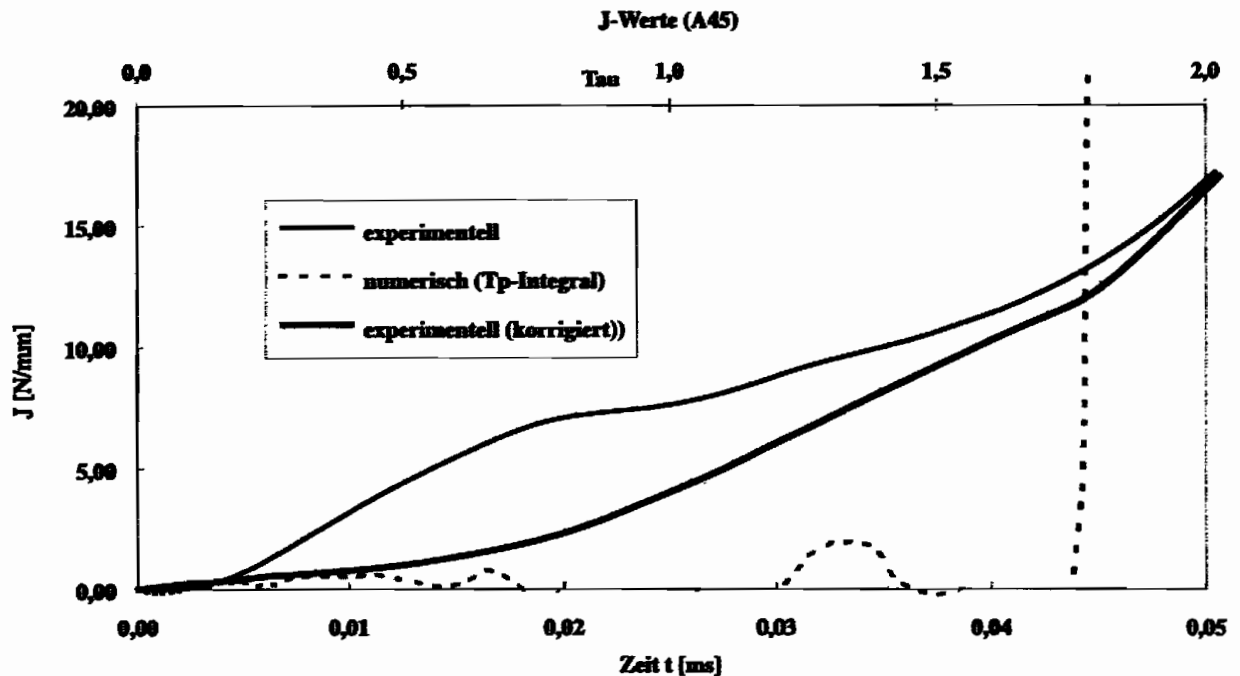


Abbildung 6.26: Korrigierte 2U-Auswerteformel im Vergleich mit dem experimentell ermittelten J-Integral und dem  $\Delta T_p$ -Integral (ESZ)



**Abbildung 6.27:** Korrigierte 2U-Auswerteformel im Vergleich mit dem experimentell ermittelten J-Integral und dem  $\Delta T_p$ -Integral (EDZ)

Es ist zu erkennen, daß der Unterschied zwischen dem auf herkömmliche Weise berechneten J-Integral und dem um die dissipierte Energie korrigierten J-Integral zu einer Zeit  $t \approx \tau$  den größten Wert annimmt. Dies ist für alle drei Probenformen zu beobachten.

Wie bereits in Abschnitt 3.1.1 dargelegt wurde, wird die Probenenergie aus der planimetrierten Fläche der Kraft-Verschiebungs-Kurve bestimmt. Es besteht aber Unklarheit darüber, inwieweit die Energie, die sich aus der Fläche unter dem Trägheitspeak ergibt, berücksichtigt werden muß. Anhand der hier dargestellten Ergebnisse soll nun eine Möglichkeit angegeben werden, den Anteil dieser Energie festzulegen. Dazu ist in den Abbildungen 6.28–6.30 das Verhältnis des korrigierten zum unkorrigierten J-Integral als Funktion der Schwingungsdauer dargestellt.

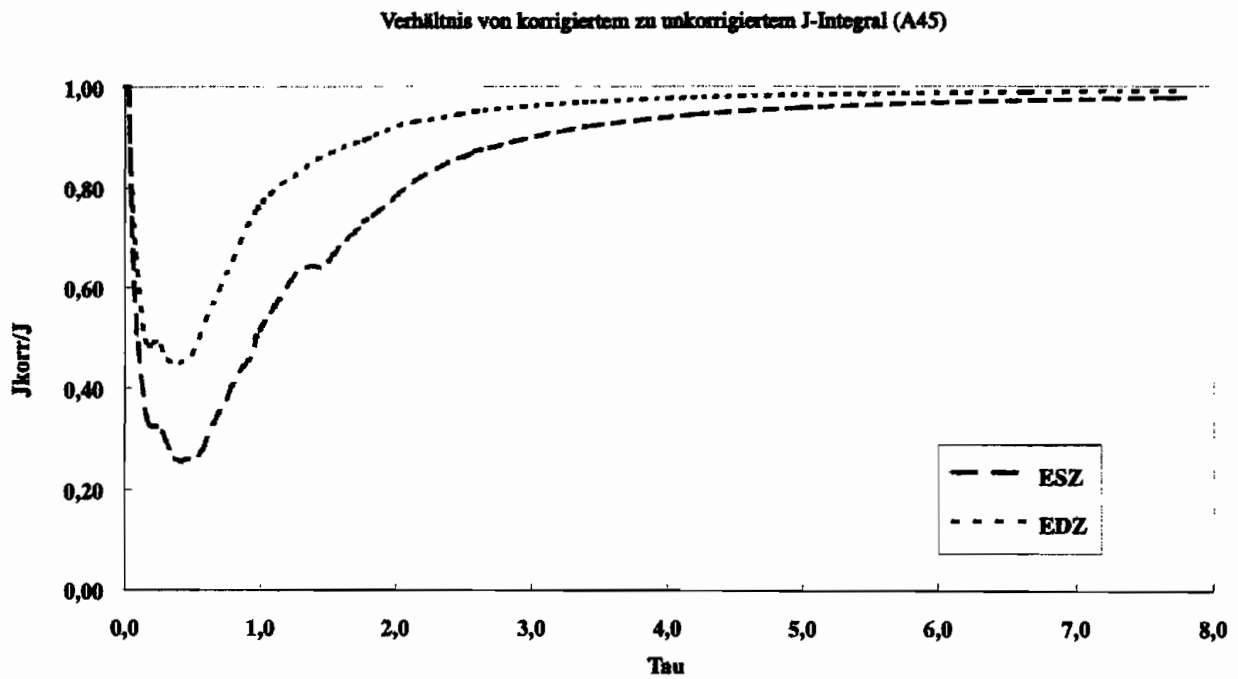


Abbildung 6.28: Verhältnis von  $J_{\text{korr}}/J$  der Probe A45

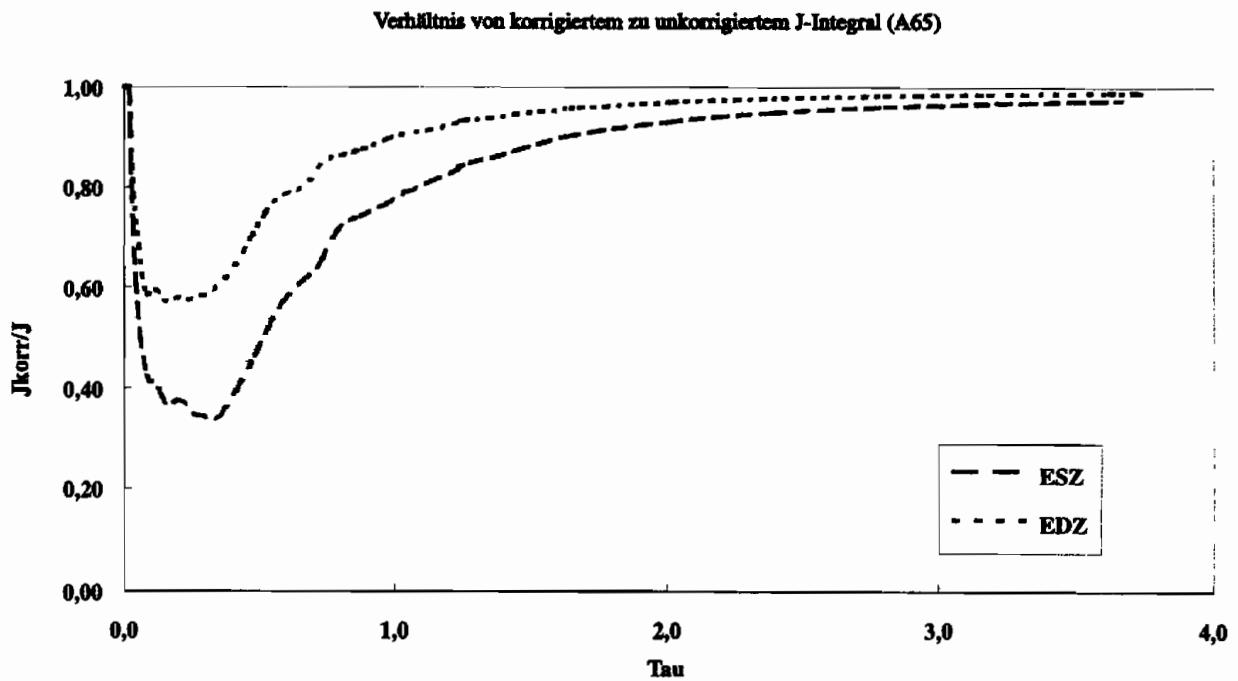


Abbildung 6.29: Verhältnis von  $J_{\text{korr}}/J$  der Probe A65



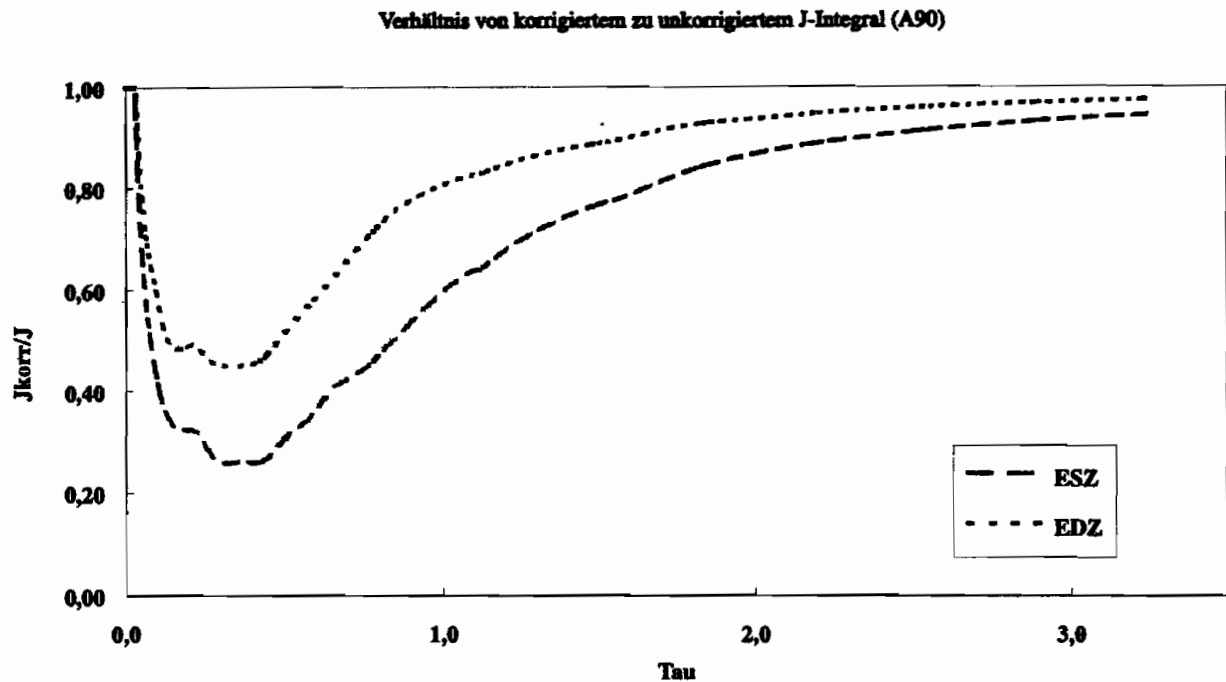


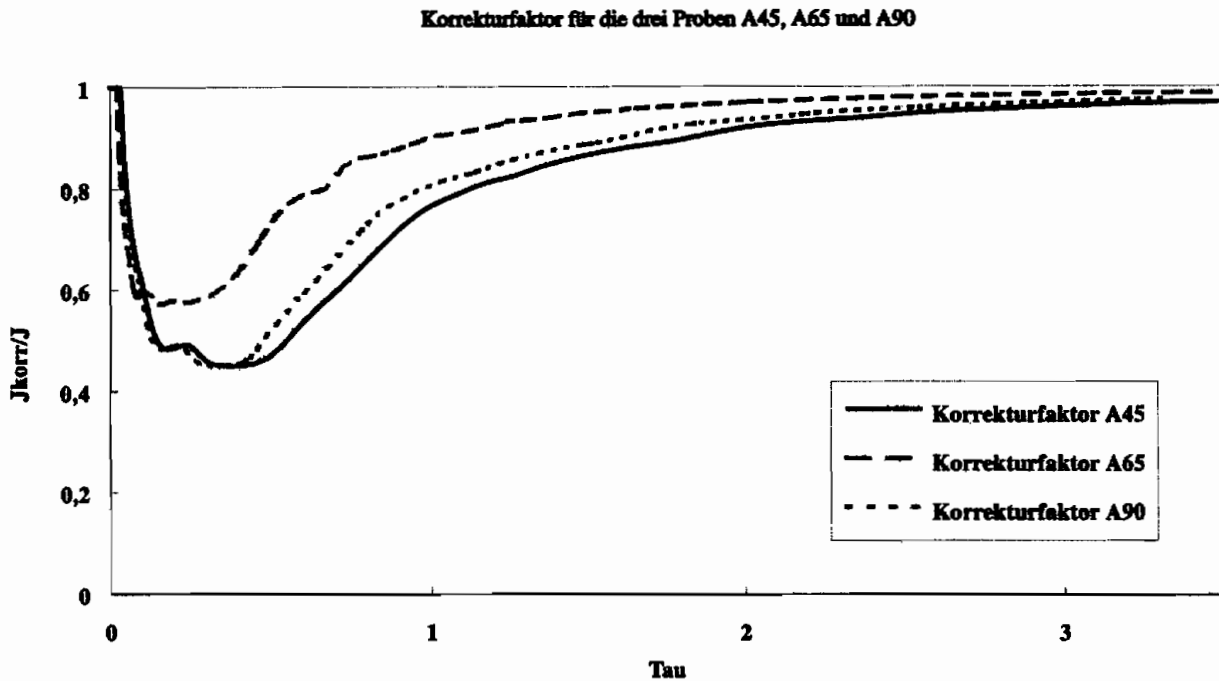
Abbildung 6.30: Verhältnis von  $J_{\text{korr}}/J$  der Probe A90

Für die Anfangszeit der Belastung besteht kein Unterschied zwischen den J-Integral-Werten, da noch keine plastische Energie dissipiert wurde. Hingegen ist die Differenz, die sich durch die Korrektur ergibt, für Zeiten bis  $t \approx 1,5\tau$  signifikant, wenn man den Fall des ebenen Dehnungszustands betrachtet. Für die Annahme ebenen Spannungszustands sind deutliche Auswirkungen sogar bis zu einer Zeit von  $t \approx 2\tau$  festzustellen. Die Annahme eines ebenen Spannungszustands überschätzt die Auswirkungen allerdings, da die berechneten plastischen Zonen im Vergleich zu denen, die sich in realen Bauteilen ergeben, zu groß sind. Die Annahme eines ebenen Dehnungszustands ist konservativ, d.h. die Größe der plastischen Zone ist geringer, als es in der Probe der Fall ist.

Vergleicht man die Ergebnisse für die verschiedenen Probengeometrien untereinander, so stellt man fest, daß der zeitbezogene Verlauf der Kurven ähnlich ist. Das Minimum wird jeweils zur Zeit  $t \approx 0,5\tau$  angenommen, was ungefähr dem Zeitpunkt entspricht, zu dem der Trägheitspeak den Maximalwert annimmt. Für Zeiten  $t > 0,5\tau$  nimmt die Auswirkung der Korrektur quantitativ ab, bis sie schließlich klein im Vergleich zum Absolutwert ist. Im Zeitbereich  $t > 2\tau$  können im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine quantitativen Angaben mehr gemacht werden, da die Feldgrößen, die im Rahmen der numerischen Simulation ermittelt werden, im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zu ungenau sind, um gültige Aussagen zu treffen.

Die Ergebnisse der Proben A45 und A90 sind auch quantitativ vergleichbar. Beide Kurven weisen für gleiche Zeiten  $\tau$  ähnliche Verhältnisse der korrigierten zu den unkorrigierten J-Integralwerten auf. Die Werte der Probe A65 hingegen liegen höher, d.h. die Auswirkung der Korrektur ist geringer als bei den anderen Proben. Die Ergebnisse lassen sich aber eventuell korrelieren, wenn man das Verhältnis des Auflagerabstands zur Höhe der Probe berücksichtigt. Die Kurven weisen dann auch quantitativ ungefähr den gleichen Verlauf auf. Dies wäre aber spekulativ, gesicherte Erkenntnisse über diesen Zusammenhang liegen nicht vor und werden daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

In Abbildung 6.31 ist der Verlauf der Korrekturfaktoren für den Fall des ebenen Dehnungszustands dargestellt. Man erkennt, daß die Werte für die Proben A45 und A90 gut übereinstimmen, die Werte für die Probe A65 hingegen deutlich höher liegen.



**Abbildung 6.31:** Korrekturfaktoren für das J-Integral für die Proben A45, A65, und A90

Als Ergebnis der dargestellten Untersuchungen soll nun die Formel für das korrigierte J-Integral angegeben werden. Sie soll in die Lage versetzen, daß gesamte Kraft-Verschiebungs-Diagramm unter Berücksichtigung des Trägheitspeaks hinsichtlich der Energie auszuwerten, so daß keine Annahmen über Ausgleichsgeraden oder Kurvenglättungen getroffen werden müssen. Sie gilt quantitativ für den hier verwendeten Werkstoff Al 2024 T351 und die entsprechende Probenform:

$$J_{korr} = \frac{2(U - U_{korr}(\tau))}{d(w - a)} \quad (6.1)$$

$U_{korr}(\tau)$  kann aus der Abbildung 6.31 für die verschiedenen Probengeometrien zu den entsprechenden Zeiten entnommen werden.

Es stellt sich die Frage, warum das  $\Delta T_p$ -Integral nach Atluri zwar das korrigierte J-Integral im Bereich bis  $t \approx 0,5\tau$  gut beschreibt, aber für die Zeit bis  $t \approx 1,75\tau$  weiterhin im Bereich von Null bleibt. Diese Abweichung soll an dieser Stelle nicht überbewertet werden, da die Fehler, die sich aufgrund der numerischen Modellierung in den quantitativen Ergebnissen für  $\Delta T_p$  ausdrücken, sicherlich eine Rolle spielen. Trotzdem soll versucht werden, für diese Frage zumindest eine qualitative Erklärung zu finden. Betrachtet man die Versuchsergebnisse und die numerischen Vergleichsrechnungen der elastischen Probe C400, so stellt man fest, daß ab einer Zeit von  $t \approx 0,5\tau$  die K-Werte zurückgehen. Dieser Rückgang setzt sich fort bis zur Zeit von  $t \approx 1,3\tau$ . Danach steigt der K-Faktor wieder an. Dieses oszillierende Verhalten ist charakteristisch für eine schlagbelastete Probe, d.h. die kinetischen Einflüsse in der Probe haben zur Folge, daß die Kerbspannungsintensitäten sowohl positive als auch

negative Gradienten aufweisen können. Diese Einflüsse sind auch bei elastisch-plastischen Proben vorhanden, wie der Vergleich der berechneten Übergangszeit mit dem Ergebnis der Formel von Nishioka zeigte. Die Phase der Entlastung tritt also ebenfalls auf, was dazu führt, daß der berechnete Wert des  $\Delta T_p$ -Integrals für diesen Zeitbereich nur sehr gering ist, bevor man eine Zunahme aufgrund der Probenbeanspruchung beobachten kann. Eine Abnahme des J-Integral-Wertes, welcher mit Hilfe der Gleichung (2.13) berechnet wird, ist hingegen nicht möglich, da die Bestimmung auf einer quasi-statischen Auswertung beruht. Somit ist zumindest qualitativ eine Erklärung der zeitlichen Verzögerung zwischen der Zunahme des korrigierten  $2U$ -Integrals und der des  $\Delta T_p$ -Integrals möglich.

Bevor nun ein Vergleich der Ergebnisse mit den J-Integral-Werten folgt, die aus den Kautikenaufnahmen der dynamischen Versuche erhalten werden, soll auf die Gültigkeit der Verwendung des  $\Delta T_p$ -Integrals eingegangen werden. Als Indikator für eine hinreichend gute Modellierung soll die Wegunabhängigkeit verwendet werden. Wenn diese Wegunabhängigkeit gegeben ist, so wird davon ausgegangen, daß das  $\Delta T_p$ -Integral hinreichend gut die Kerbspannungsintensität beschreibt. Das  $\Delta T_p$ -Integral ist als wegunabhängiges Integralkriterium eingeführt worden; zeigt es bei seiner Anwendung auf ein Problem, das eine Singularität beinhaltet, wegunabhängiges Verhalten, so kann davon ausgegangen werden, daß die Beschreibung der Beanspruchungsintensität ausreichend wiedergegeben wird.

In Abbildung 6.32 ist die Wegunabhängigkeit exemplarisch für die Probe A45 für zwei Integralwege aufgeführt. Zur Lage des inneren bzw. äußeren Pfades wird auf Abbildung 6.2 verwiesen.

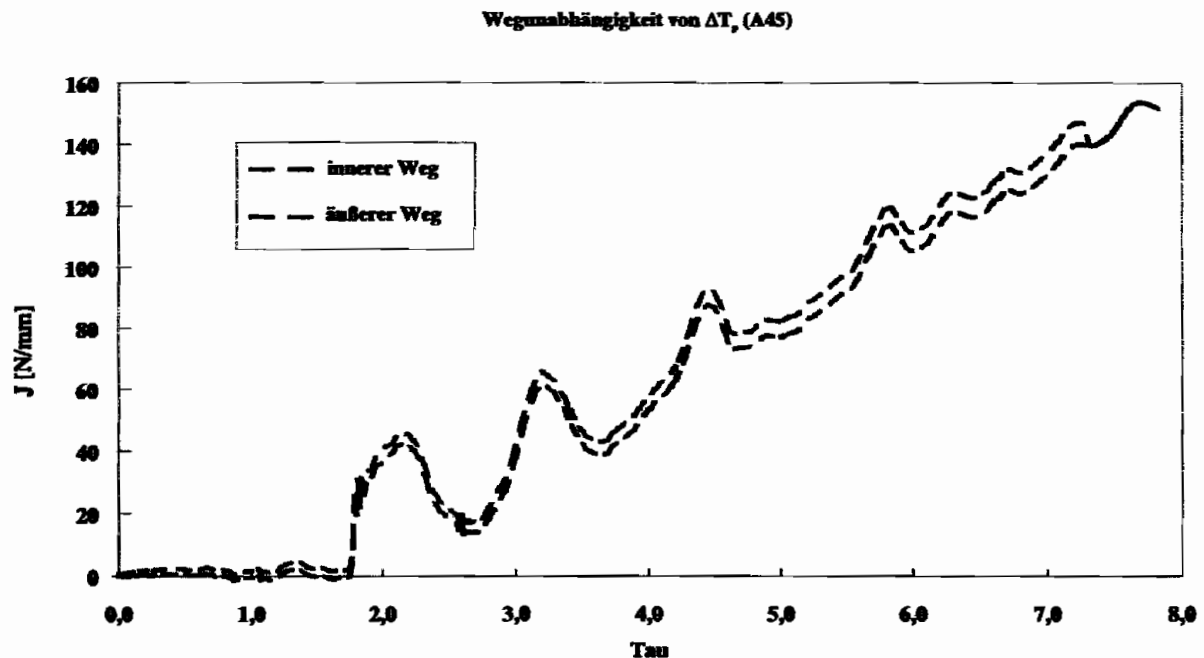


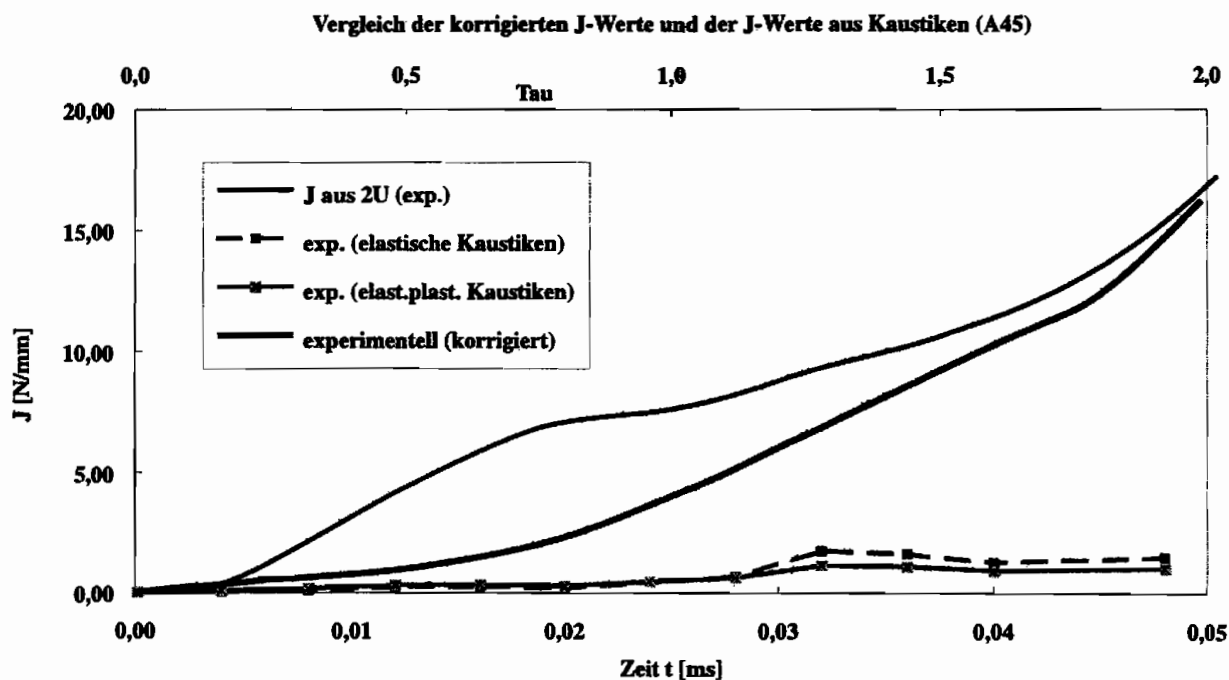
Abbildung 6.32: Wegunabhängigkeit des  $\Delta T_p$ -Integrals für die Probe A45 (EDZ)

Man erkennt, daß die Wegunabhängigkeit gegeben ist. Daher wird davon ausgegangen, daß das  $\Delta T_p$ -Integral die Kerbspannungsintensität gut wiedergeben kann. Einschränkend muß allerdings gesagt werden, daß keine Wege gewählt worden sind, die weit von der Kerbspitze entfernt liegen. Deshalb kann keine Aussage darüber gemacht werden kann, inwieweit die Wegunabhängigkeit für solche Integralwege gegeben ist.

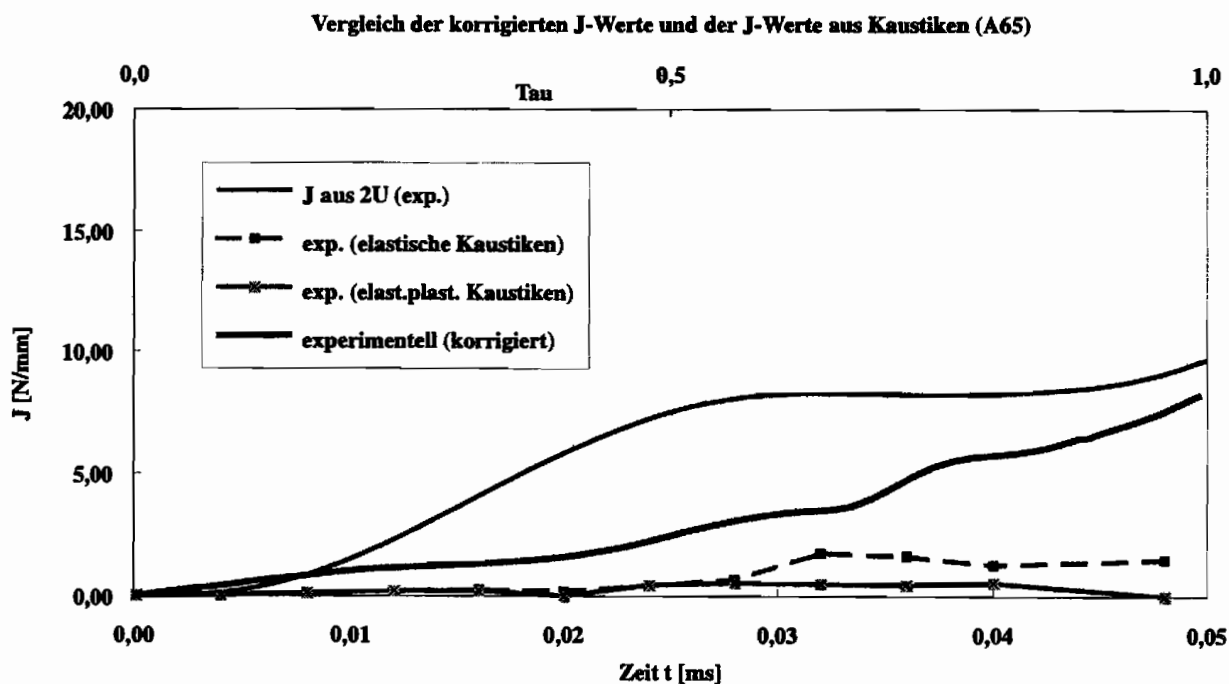
An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß das  $\Delta T_p$ -Integral nicht zur Quantifizierung der Gleichung (6.1) benötigt wird. Sein zunächst unerklärlicher Verlauf zu den Zeiten, in denen der Trägheitspeak dominierte, führte zu den energetischen Überlegungen, die als Ergebnis der vorliegenden Arbeit dargestellt werden. Es stellt sich für die Gültigkeit der hier vorgestellten Untersuchungen nicht die Frage, ob das  $\Delta T_p$ -Integral geeignet zur Beschreibung der dynamischen Belastung einer gekerbten Probe ist. Allerdings ist es von Bedeutung für numerische Untersuchungen von dynamisch belasteten Proben, daß seine Wegunabhängigkeit auch für solche bruchmechanischen Probleme, deren Singularität nicht durch einen Riß beschrieben wird, gezeigt werden kann.

Die Ergebnisse der korrigierten Bestimmungsformel werden im folgenden mit den experimentellen Werten verglichen, die aus den Kaustikenaufnahmen resultieren.

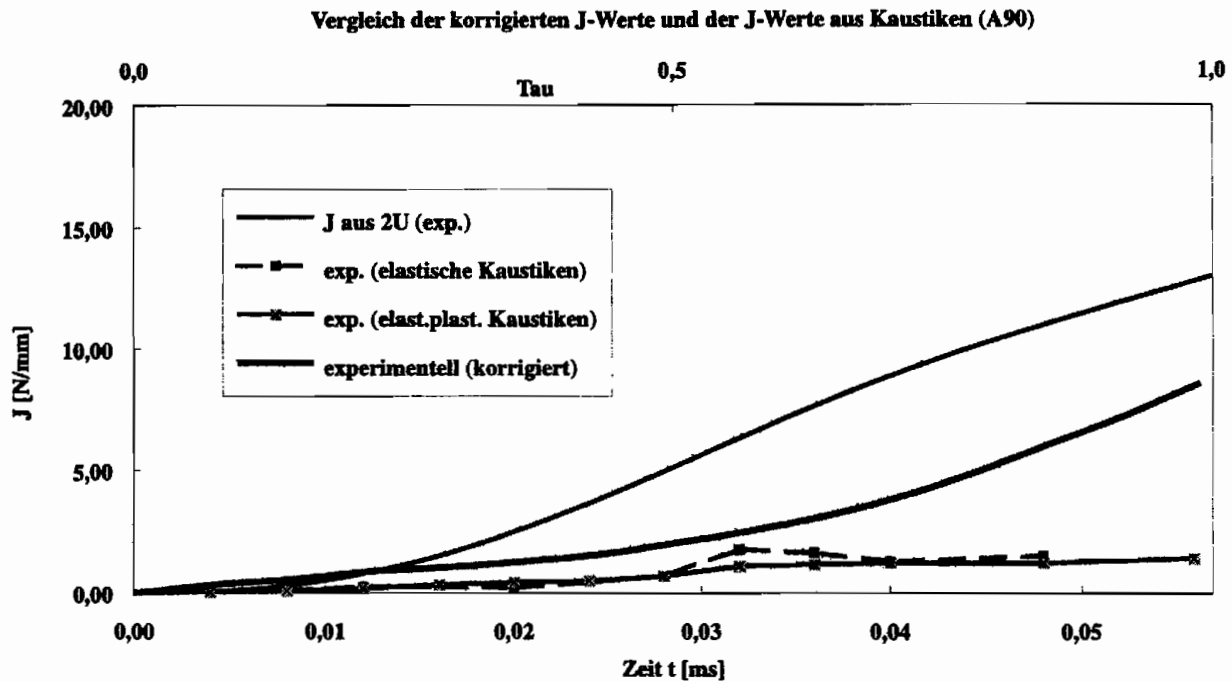
In den Abbildungen 6.33–6.35 ist der Vergleich der J-Integral-Werte aus den Kaustikmessungen mit den J-Integral-Werten dargestellt, die aus der korrigierten Probenenergie erhalten werden. Da die vorausgesagte Kerbspannungsintensität für Zeiten  $t < \tau$  nur sehr klein ist, sollte dieses Verhalten durch die Kaustikmessungen wiedergegeben werden. Allerdings müssen Einschränkungen bezüglich der Aussagekraft der gemessenen Kaustiken gemacht werden, wenn sie auf kleine Proben angewendet wird. Wie in Abschnitt 2.3.2 dargelegt wurde, besteht für die Urkreisradien der Kaustiken eine Mindestanforderung an ihre Größe, nämlich die halbe Probendicke. Wird diese nicht eingehalten, werden die Kerbspannungsintensitäten durch die Meßwerte unterschätzt. Da die Probendicke 10mm beträgt, sollte der Urkreisradius also ungefähr 5mm aufweisen, um gültige Meßwerte zu erhalten. Bei dieser Größe des Urkreisradius sind aber Randeinflüsse der Proben auf die Kaustikenform nicht auszuschließen, was dazu führen kann, daß die Kerbspannungsintensität nicht korrekt wiedergegeben wird.



**Abbildung 6.33:** Vergleich der J-Integral-Werte, ermittelt aus Kaustiken und der korrigierten Probenenergie der Probe A45



**Abbildung 6.34:** Vergleich der J-Integral-Werte, ermittelt aus Kaustiken und der korrigierten Probenenergie der Probe A65



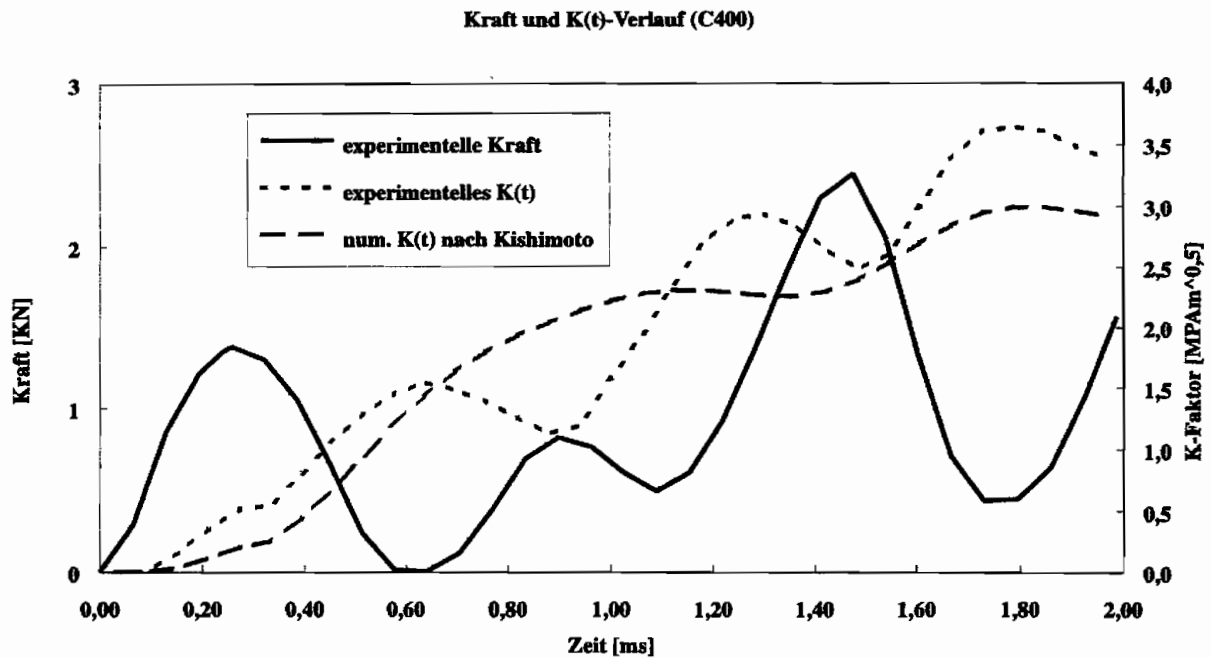
**Abbildung 6.35:** Vergleich der J-Integral-Werte, ermittelt aus Kaustiken und der korrigierten Probenenergie der Probe A90

Unter Berücksichtigung der obengenannten Einschränkungen läßt sich feststellen, daß die aus den Kaustiken ermittelten J-Integral-Werte die Ergebnisse des J-Integrals, berechnet aus der korrigierten Probenenergie, bestätigen. Es wird nochmals darauf hingewiesen, daß aufgrund der Einschränkungen, denen die Auswertung der Kaustiken im vorliegenden Fall unterworfen ist, diese Aussage nur von qualitativer Natur sein kann.

### 6.3 Die elastodynamische Vergleichslösung

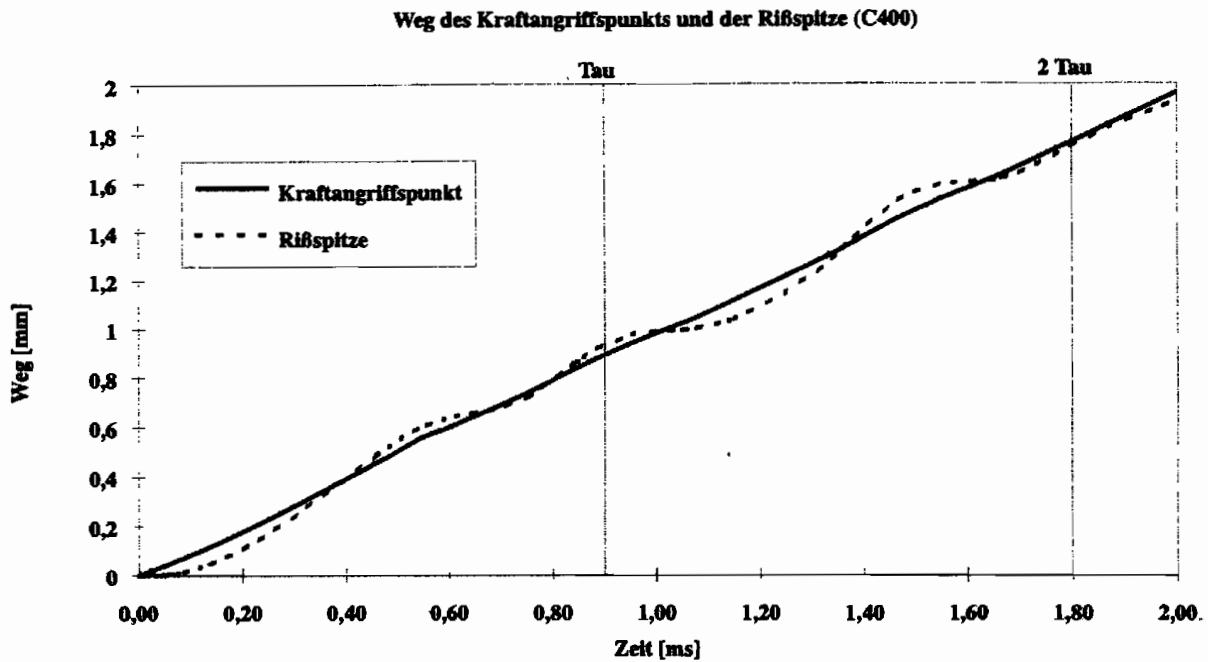
Die Berechnungsformel zur Bestimmung des  $K(t)$ -Verlaufs einer dynamisch belasteten, angerissenen Dreipunktbiegeprobe ist in Abschnitt 5.3 bereits dargestellt worden. Hier sollen nun die Ergebnisse präsentiert und diskutiert werden, die sich aus einer entsprechenden Untersuchung ergeben haben.

Berechnet wurde die im vorigen Abschnitt bereits beschriebene Charpy-Probe C400 aus Araldit B, welches linear-elastisches Materialverhalten aufweist. Dargestellt ist in Abbildung 6.36 der  $K(t)$ -Verlauf, der sich aus der Berechnung unter Verwendung von Gleichung (5.51) ergeben hat.



**Abbildung 6.36:** Experimentell ermittelte Kraft und K-Faktor im Vergleich zur K(t)-Lösung nach Kishimoto

Wie aus dem Vergleich mit den Meßwerten des K(t)-Verlaufs erkennbar ist, wird der erste Bereich bis ca. 0,6 ms gut wiedergegeben. Das Absinken der Spannungsintensität wird allerdings nicht beschrieben, so daß die Gegenläufigkeit von P(t) und K(t) mit dieser Simulation nicht erreicht wird. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, daß das Abhebverhalten, das die Probe aufweist, durch das Modell, welches der Berechnungsformel zugrunde liegt, nicht berücksichtigt wird. Weiterhin ist die der Herleitung der Gleichung zugrunde liegende Annahme, die Verschiebung der Rißspitze sei gleich der Verschiebung des Kraftangriffspunktes, nicht gerechtfertigt. Die ist in Abbildung 6.37 verdeutlicht.



**Abbildung 6.37:** Numerisch ermittelte Verschiebung des Kraftangriffspunktes und der Rißspitze der Probe C400

Die dargestellten Ergebnisse entstammen der FE-Modellierung, die im vorigen Abschnitt bereits erwähnt wurde. Es ist deutlich erkennbar, daß die Verschiebung des Kraftangriffspunktes und der Rißspitze nicht gleich verlaufen. Während der Kraftangriffspunkt im wesentlichen die Verschiebung des Hammers aufweist, zeigt die Verschiebung der Rißspitze eine schwingende Form. Die Frequenz dieser Schwingung entspricht ungefähr  $2/3\tau$ . Die Beziehung ist demnach für solche Berechnungen, die das in einem Schlagversuch gemessene  $P(t)$  als Ausgangsdatum wählen, nicht geeignet, da die Annahme, der Kraftangriffspunkt und die Rißspitze verschieben sich in gleicher Weise, offensichtlich nicht erfüllt ist.

Aus Gleichung (5.51) ist erkennbar, daß der quasi-statisch bestimmte K-Faktor als Vorfaktor multiplikativ mit dem Zeitintegral verknüpft ist. Bei der Herleitung von Gleichung (5.51) wird folgende Beziehung verwendet:

$$K(t) = \tilde{k}u_y(t) \quad (6.2)$$

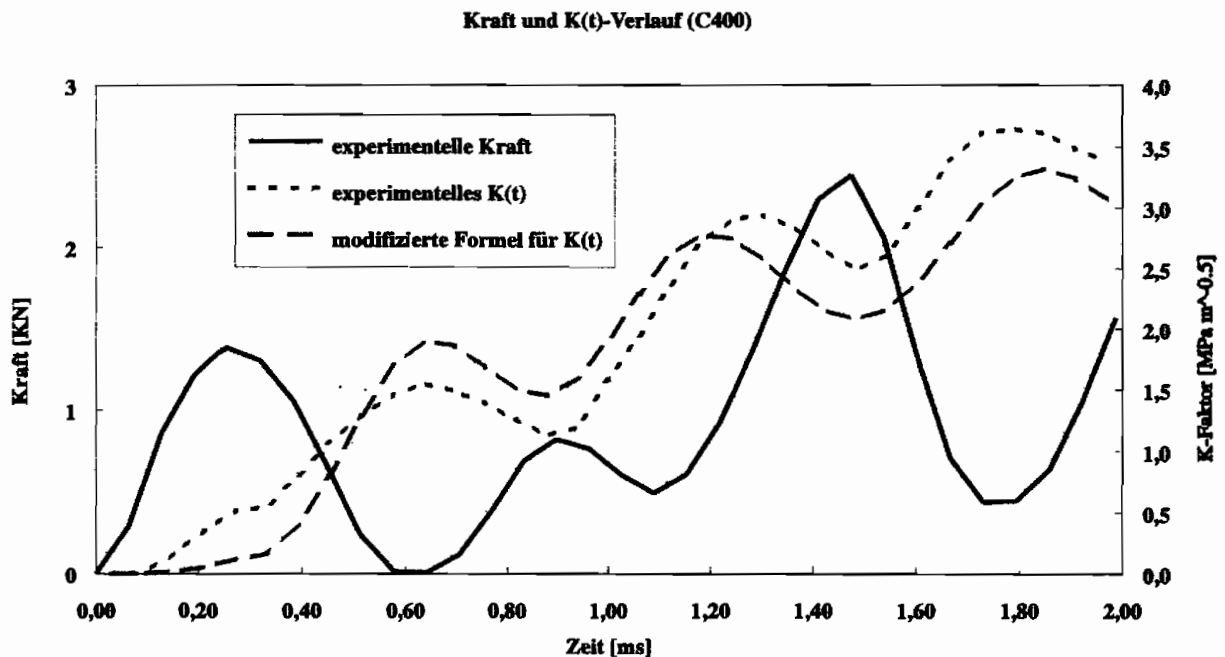
wobei  $\tilde{k}$  einen Proportionalitätsfaktor darstellt.  $u_y(t)$  ist die zeitabhängige Verschiebung in Krafrichtung im Kraftangriffspunkt. Diese Formulierung läßt es zu, die Formulierung der Verschiebung  $u_y(t)$  so zu verändern, daß einer Beschreibung der Verschiebung der Rißspitze gemäß obigem Ergebnis Rechnung getragen wird:

$$u_y^{RiB}(t) = u_y(t) \left[ 1 - \sin\left(\frac{2\pi t}{\frac{2}{3}\tau}\right) \right] \frac{t_\tau}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (6.3)$$

Die Exponentialfunktion stellt ein Dämpfungsglied dar, welches entsprechend den im vorigen Abschnitt gewonnenen Erkenntnissen gewählt wurde. Dort wurde festgestellt, daß zu der Zeit  $t \approx \tau$  der Trägheitspeak vollständig zurückgegangen ist, so daß sich für die folgenden Zeiten das dynamische Verhalten der Probe immer mehr dem quasi-statischen



Zustand annähert. Deshalb wird als Dämpfungsfaktor die Zeit auf die Schwingungsdauer  $\tau$  der gelagerten, angerissenen Charpy-Probe bezogen. Das schwingende Verhalten der Verschiebung an der Rißspitze wird als Sinusschwingung mit der oben bestimmten Schwingungsdauer  $\frac{2}{3}\tau$  angenommen. Der Vorfaktor  $\frac{t_r}{\tau} = \frac{1}{1,68}$  (siehe Abschnitt 2.1.4.3) dient der quantitativen Anpassung. Berechnet man den Verlauf von  $K(t)$  mit Hilfe dieser modifizierten Formel, so erhält man das Ergebnis, das in Abbildung 6.38 dargestellt ist:



**Abbildung 6.38:** Vergleich des experimentellen  $K(t)$ -Verlaufs mit dem modifizierten  $K(t)$

Der Verlauf des experimentell bestimmten  $K$ -Faktors wird durch die modifizierte Bestimmungsgleichung für  $K(t)$  gut wiedergegeben. Dieses Ergebnis zeigt, daß zumindest für den elastodynamischen Fall die Oszillationen im  $K(t)$ -Verlauf mit den Oszillationen, denen die Verschiebung der Rißspitze unterworfen ist, korreliert sind.

Im vorigen Abschnitt wurde versucht, den gegenüber dem korrigierten  $J$ -Integral verspäteten Anstieg des  $\Delta T_p$ -Integrals mit dem dynamischen Verhalten der Probe zu verbinden. Diese These soll nun mit Hilfe der modifizierten  $K(t)$ -Formel erhrtert werden. Wenn auch nicht erwartet werden kann, daß die  $K(t)$ -Werte quantitativ mit den ermittelten  $J$ -Integral-Werten übereinstimmen, so sollte zumindest das im allgemeinen beobachtete gegenläufige Verhalten der Kraft und des  $K$ -Faktors, das auch aus der Abbildung 6.38 deutlich hervorgeht, wiedergegeben werden können. In den Abbildungen 6.39–6.41 sind die Ergebnisse für die drei Probengeometrien, die im vorigen Abschnitt untersucht worden sind, dargestellt.

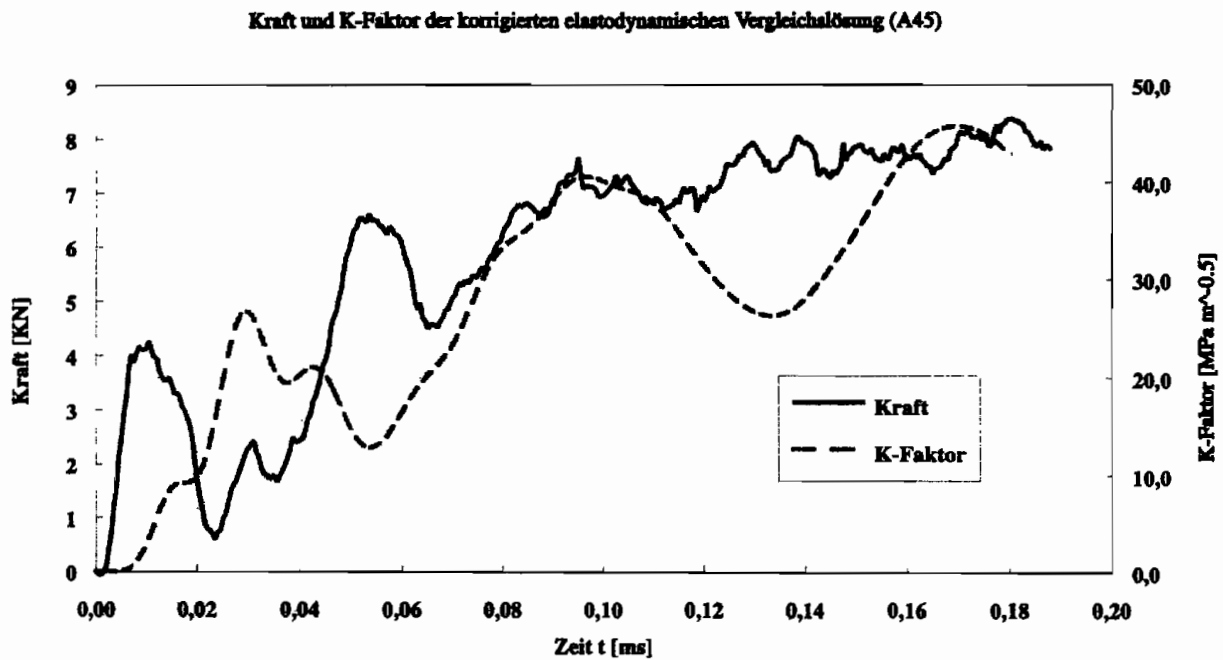


Abbildung 6.39: Hammerkraft und korrigierter K(t)-Verlauf der Probe A45

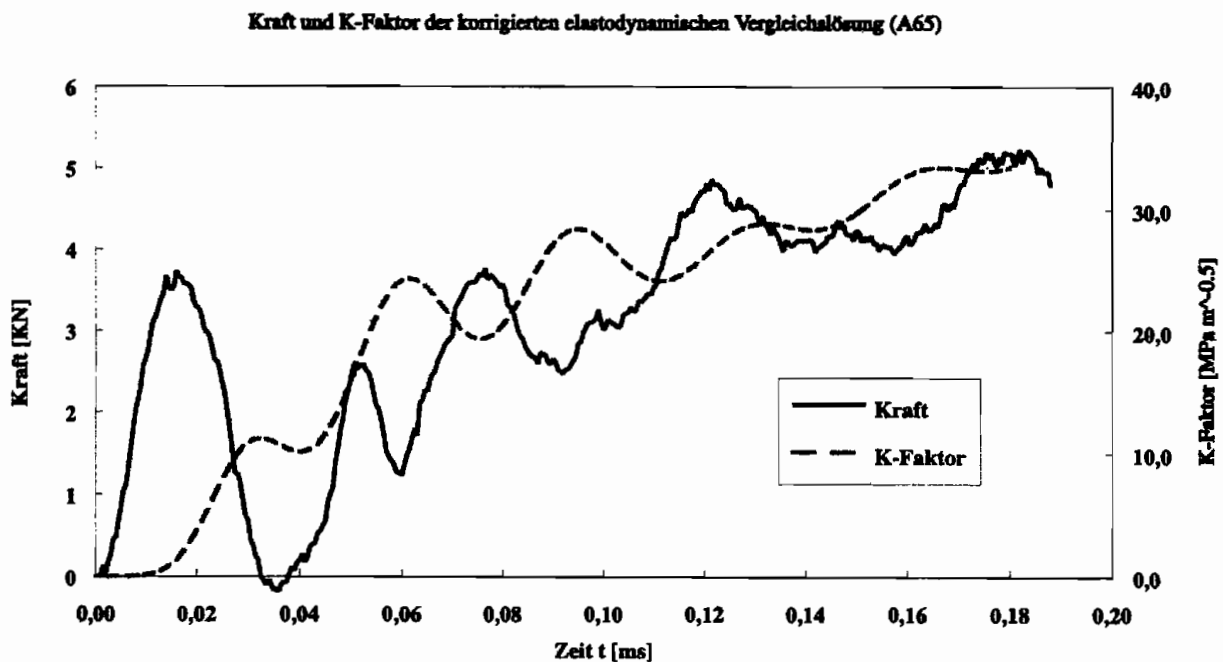
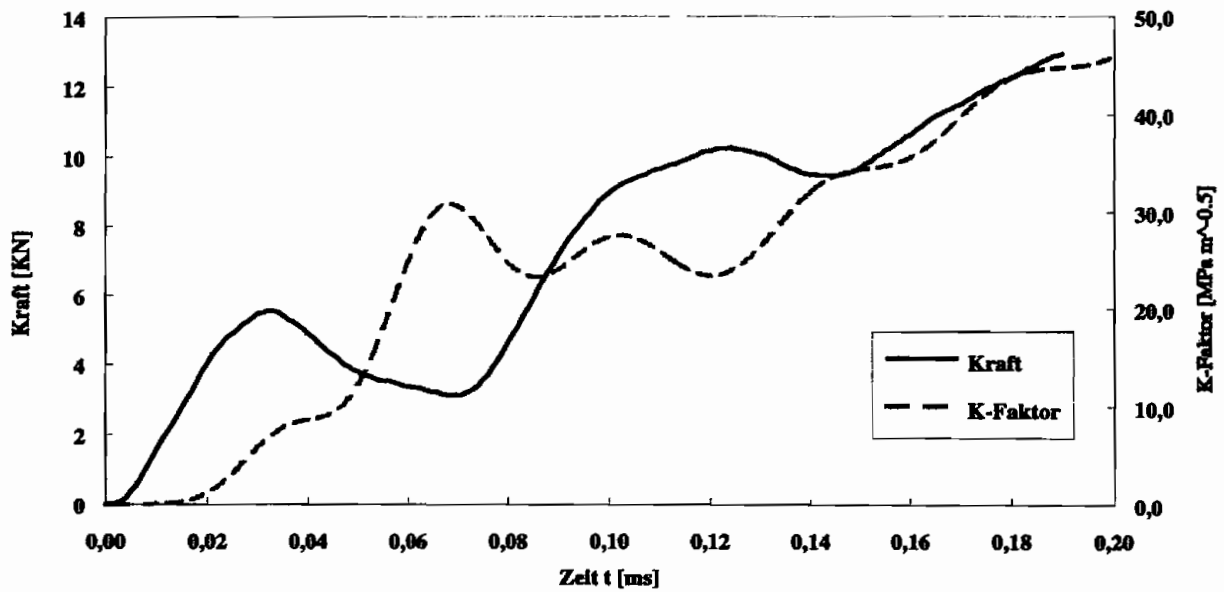


Abbildung 6.40: Hammerkraft und korrigierter K(t)-Verlauf der Probe A65

Kraft und K-Faktor der korrigierten elastodynamischen Vergleichslösung (A90)

Abbildung 6.41: Hammerkraft und korrigierter  $K(t)$ -Verlauf der Probe A90

Für alle drei Probenformen wird die experimentell zu beobachtende Gegenläufigkeit der Hammerkraft und des  $K(t)$ -Verlaufs sehr gut wiedergegeben. Die Gleichung ist auf elastisch- plastisches Materialverhalten zwar nicht anwendbar, aber diese Einschränkung bezieht sich nur auf die quantitativen Werte des K-Faktors, nicht auf die qualitative Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Proben.

## 7 Schlußfolgerungen und Grenzen

In der vorliegenden Arbeit wurde auf der Basis des Vergleichs von Ergebnissen aus experimentellen Untersuchungen und numerischen Simulationen eine Korrektur der üblichen Vorgehensweise bei der Bestimmung der Kerbspannungsintensität aus dem instrumentierten Kerbschlagbiegeversuch vorgeschlagen. Die Korrektur begründet sich durch energetische Überlegungen, die durch die numerische Simulation der Schlagbelastung einer Charpy-Probe quantifiziert wurden. Vornehmlich wirkt sich der Einfluß der modifizierten Berechnung der Kerbbeanspruchung in den frühen Phasen der Belastung aus, wenn die Trägheitskräfte in der Probe einen großen Einfluß aufweisen. Es wurde festgestellt, daß für Zeiten, zu denen die Trägheitskräfte nur noch einen sehr geringen Einfluß auf das Probenverhalten erkennen lassen, die korrigierte Berechnung der Kerbspannungsintensität von der Größenordnung her die gleichen Ergebnisse liefert wie die herkömmliche Berechnungsweise. Für Zeiten, die im Bereich des Auftretens des Trägheitspeaks liegen, ist der Einfluß der Korrektur hingegen erheblich.

Die Bedeutung der modifizierten Formel zur Auswertung experimenteller Daten hinsichtlich der Bestimmung von Kerbspannungsintensitäten liegt darin, daß keine Vereinfachungen oder Annahmen bezüglich der Berücksichtigung des energetischen Anteils, den der Trägheitspeak zur Kerbbeanspruchung liefert, notwendig sind. Die Energie aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve kann vollständig zur Bestimmung des J-Integrals verwendet werden, vermindert um den Anteil, der sich aus der Korrekturfunktion  $U_{\text{KORR}}(\tau)$  ergibt. Dieses Ergebnis ist besonders dann von Interesse für praktische Auswertungen, wenn die Bruchzeiten von Proben in dem zeitlichen Bereich  $t < 2\tau$  liegen, in dem die Trägheitskräfte in der Probe eine signifikante Auswirkung auf die Entwicklung der Kerbbeanspruchung haben.

Ein Vergleich der vorliegenden Ergebnisse bezüglich der verschiedenen Probengeometrien läßt vermuten, daß eine Korrelation zwischen den Korrekturfunktionen und den geometrischen Abmessungen der Proben gefunden werden kann. Der qualitativ gleiche Verlauf, den die Korrekturfunktionen aufweisen, ist ein deutlicher Hinweis darauf. Im Rahmen dieser Arbeit konnten solche Untersuchungen allerdings nicht erfolgen, da die Anzahl der analysierten Probengeometrien für eine solche Korrelation nicht ausreicht.

Die Korrekturfunktionen wurden anhand der Ergebnisse aus dem FE-Modell des ebenen Dehnungszustands quantifiziert. Diese Annahme ist, wie bereits erwähnt wurde, konservativ, d.h. die in der Realität zu erwartende Größe der dissipierten Energie wird unterschätzt. Der tatsächliche Verlauf wird im Bereich zwischen den Werten angenommen, die sich aus der Modellierung ebenen Spannungs- bzw. ebenen Dehnungszustands ergeben. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, ist deshalb eine 3D-Simulation notwendig. Der numerische Aufwand einer solchen Modellierung ist allerdings beträchtlich, ebenso wie die dazu erforderliche Rechen- und Speicherleistung, da die Anzahl der Ergebnisdaten erheblich ansteigt. Eine Vorgehensweise, wie sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit präsentiert

wurde, ist für dreidimensionale Analysen nicht mehr sinnvoll. Der Aufwand, die von einem FE-Programm berechneten Daten nach jedem Zeitinkrement in ein eigenes Programm zur Berechnung der Spannungsintensitäten zu übertragen, ist nach dem heutigen Stand der Rechnerkapazitäten nicht gerechtfertigt. Ein Vorschlag zur Lösung ist die Implementierung eines zur Bestimmung der Kerbbeanspruchung schlagbelasteter Proben geeigneten Berechnungsmodells in ein kommerzielles FE-Programm, was den technischen Rechenaufwand erheblich senken würde. Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete wegunabhängige  $\Delta T_p$ -Integral ist für rißbehaftete Proben definiert. Die theoretische Grundlage für seine Anwendung auf gekerbte Bauteile oder Proben ist nicht gegeben. Die Ergebnisse, die sowohl bezüglich der Wegunabhängigkeit als auch der quantitativen Übereinstimmung mit experimentellen Daten erzielt wurden, lassen allerdings darauf schließen, daß die Ungenauigkeiten, die durch die Anwendung des  $\Delta T_p$ -Integrals auf das vorliegende Problem auftreten, klein genug sind, um seine Verwendung zur Berechnung der Kerbspannungsintensität zu rechtfertigen.

Die Modellierung und Bestimmung der Dehnungskonzentrationen, die sich für elastisch-plastisches Materialverhalten im Bereich der Kerbspitze ergeben, war nicht Gegenstand der Untersuchung. Deshalb wurden keine singulären Elemente [106] verwendet, sondern der Bereich um den Kerb wurde mit isoparametrischen Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion vernetzt, die für das gesamte Modell verwendet wurden. Da der Bereich um die Rißspitze nicht zur Berechnung des  $\Delta T_p$ -Integrals benötigt wurde, ist diese Vorgehensweise gerechtfertigt.

Erwähnt werden soll in diesem Zusammenhang die Problematik der Kontaktmodellierung zwischen Hammer und Probe. Im Verlauf der Diskussion der Ergebnisse ist bereits angesprochen worden, daß die hier verwendeten Kontaktelemente zwar eine gute Wiedergabe der gemessenen Hammerkräfte ermöglichen. Diese Aussage gilt allerdings nur für die Anfangszeiten der Belastung. Ein Grund dafür liegt sicherlich in der diskreten Modellierung des Knotenkontakts, mit der das Auftreffen des Hammers auf die Probe simuliert wird. Geeigneter wäre ein Algorithmus, der stetige Kontaktflächen bereitstellt, ohne die in Kapitel 5 angesprochenen Nachteile des Ineinanderdringens der Kontaktflächen aufzuweisen.

Im Rahmen dieser Arbeit war der Aluminium-Werkstoff Al 2024 T351 Gegenstand der Untersuchung. Das verwendete Materialmodell wurde als elastisch-plastisch mit isotroper Verfestigung angenommen. Die Annahme isotroper Verfestigung ist im allgemeinen bei Metallen nur unter monotoner Beanspruchung zu rechtfertigen [32]. Zur Beschreibung des Materialverhaltens unter Be- und Entlastungsvorgängen ist ein Verfestigungsmodell, daß die kinematische Verfestigung einschließt, sicherlich besser geeignet. Inwieweit das für den hier untersuchten Werkstoff gilt, ist allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet worden.

Weiterhin wurde angenommen, daß das Materialverhalten des Werkstoffs nicht von der Deformationsrate abhängt. Diese Annahme ist für Aluminium weitgehend gültig. Werden allerdings Materialien untersucht, die eine solche Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit aufweisen, so ist die Implementierung eines viskoplastischen Materialmodells vonnöten. Einschränkend ist zu sagen, daß die Bestimmung der zur Anwendung eines solchen Modells notwendigen Materialparameter sehr aufwendig ist.

Ein weiterer Einfluß auf den Verlauf der Korrekturfunktion ist sicherlich durch die Anfangsgeschwindigkeit des Fallhammers gegeben. Es läßt sich vermuten, daß mit zunehmender Geschwindigkeit der beobachtete Effekt größer wird, unter der Voraussetzung,

---

daß die Fließgrenze bei einer Erhöhung der Deformationsrate nicht ebenfalls so stark ansteigt, daß die dissipativen Vorgänge in der Probe gleich bleiben oder geringer werden. Hier sind weitere Studien notwendig, um den Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit auf die Korrekturfunktion unter Verwendung verschiedener Werkstoffe zu prüfen.

Die experimentellen Ergebnisse, die das Kaustikenverfahren liefert, sind für den hier vorliegenden Anwendungsfall vorsichtig zu interpretieren. Einerseits bestätigen sie den untersuchten Effekt, daß die Kerbbeanspruchung erst nach dem Ende des Trägheitspeaks signifikant ansteigt. Andererseits sind die möglichen Auswirkungen der Einflüsse höherer Ordnung auf die Spannungen, bedingt durch Randeffekte und optische Verzerrungen bei den verwendeten kleinen Proben nicht quantifizierbar und können dazu führen, daß die Ergebnisse der Kaustiken hier fehlinterpretiert werden. Eine Möglichkeit zur Überprüfung ist die Untersuchung hochskalierter Charpy-Proben, die frei von den erwähnten störenden Einflüssen sind, so daß die experimentellen Untersuchungen auf einer gesicherten Grundlage stehen.

Die gewählte Korrektur der elastodynamischen Bestimmungsformel nach Kishimoto zeigt selbst für elastisch-plastisches Materialverhalten qualitativ einen im Einklang mit anderen Untersuchungen [4] stehenden Verlauf der Spannungsintensität an einer kerb- oder rißbehafteten Probe. Quantitativ weist sie eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen bei linear-elastischem Materialverhalten auf, wobei allerdings nur eine Probenform berücksichtigt wurde. Einschränkend ist zu sagen, daß die der Bestimmungsgleichung zugrunde liegende theoretische Lösung eine falsche Annahme bezüglich des dynamischen Verhaltens einer schlagbelasteten Biegeprobe trifft. Das Abhebverhalten, daß die Proben bei einer solchen Beanspruchung aufweisen, muß berücksichtigt werden, um eine gültige Grundlage zur Entwicklung einer Lösung dieses Problems zu erhalten.

## 8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hatte zum Ziel, den Einfluß der Trägheitskräfte auf die Bestimmung der Kerbspannungsintensität schlagbelasteter, duktiler Biegeproben zu untersuchen und zu quantifizieren. Bei der Ermittlung der Kerbbeanspruchung nach der üblichen energetischen Bestimmungsmethode werden deren Auswirkungen entweder vernachlässigt oder gemittelt. Dadurch entstehen Ungenauigkeiten bei der Berechnung des zeitlichen Verlaufs der Kerbspannungsintensität, was Auswirkungen auf die so ermittelten Werkstoffkennwerte haben kann.

Der zeitliche Verlauf der Kerbbebelastung wurde durch die Verbindung von experimentellen Befunden und numerischen Simulationen beschrieben. Als Modellwerkstoff wurde die Aluminium-Knetlegierung AL 2024 mit der Wärmebehandlung T351 ausgewählt. Sie besitzt eine niedrige Streckgrenze und weist ein ausgeprägtes plastisches Verhalten auf. Verwendet für die Untersuchungen wurden verkürzte Charpy-Proben, die mit einem V-Kerb versehen wurden.

Der instrumentierte Kerbschlagbiegeversuch ist ein zur Untersuchung gekerbter Proben geeignetes Prüfverfahren, um den Einfluß einzelner Energieanteile, die zum Bruch der Probe beitragen, zeitlich einzugrenzen und Aussagen über das dynamische Verhalten der Proben zu treffen. Für unterschiedliche Probenabmessungen wurde der zeitliche Verlauf der Hammerkraft unter Verwendung der DMS-Technik ermittelt und daraus die in der Probe gespeicherte Energie errechnet. Das dynamische Verhalten der Proben zeigte eine deutliche Abhängigkeit der Ausprägung des Trägheitspeaks von der Probengeometrie.

Das schattenoptische Kaustikenverfahren ist ein optisches Meßverfahren zur Bestimmung von Spannungsgradienten in Proben und Bauteilen. Mit Hilfe dieses Verfahrens wurde der zeitliche Verlauf der Kerbspannungsintensität bestimmt. Dazu wurden die Proben im Bereich des Kerbs verspiegelt und mit Hilfe einer Cranz-Schardin Hochgeschwindigkeitskamera die Kerbbebelastung während des Schlagvorgangs bestimmt.

Zur numerischen Simulation des Schlagversuchs wurde das kommerzielle FE-Programm ABAQUS verwendet. Es verfügt über geeignete Möglichkeiten zur Modellierung des Kontakts zwischen dem Hammer und der Probe sowie zu einer solchen Modellierung des Auflagers, daß ein Abheben der Probe möglich ist. Das Materialverhalten der Probe wurde isotrop elastisch-plastisch simuliert, wobei ein deformationsratenunabhängiges Werkstoffmodell verwendet wurde. Das Materialverhalten des Hammers wurde linear-elastisch angenommen. Sowohl von der Probe als auch vom Hammer wurde ein ebenes FE-Modell erstellt.

Die Simulation des Schlagvorgangs wurde für drei verschiedene Probenformen unter der Annahme eines ebenen Spannungs- und ebenen Dehnungszustands durchgeführt. Die Ergebnisse der Simulation hinsichtlich des Kraftverlaufs im Kontaktbereich Hammer-Probe, des Abheilverhaltens der Probe und der Probenenergie stimmten mit den experimentellen Ergebnissen gut überein, insbesondere in der Anfangsphase der Belastung. Das

$\Delta T_p$ -Integral nach Atluri [15] stellt ein Maß für die Energiefreisetzungsrates in dynamisch belasteten, angerissenen Proben dar. Es wurde für jeden Zeitschritt mit Hilfe des selbst erstellten Programms JINT berechnet und vom qualitativen und quantitativen Verlauf her mit den J-Integral-Werten verglichen, die aus der experimentell bestimmten und numerisch berechneten Probenenergie ermittelt wurden. Es zeigte sich, daß zu den Zeiten des Belastungsvorgangs, bei denen die Trägheitskräfte in der Probe dominieren, die berechneten Werte des  $\Delta T_p$ -Integrals nur auf eine sehr geringe Kerbbeanspruchung hindeuten. In dieser Phase weisen die nach der Energiemethode bestimmten Kerbbeanspruchungen bereits einen deutlichen Anstieg auf. Dieses Verhalten tritt unabhängig von der Probengeometrie auf. Eine starke Zunahme der aus dem  $\Delta T_p$ -Integral berechneten Kerbspannungsintensitäten ergeben die Simulationen erst für Zeiten, zu denen das Abheilverhalten der Proben beendet ist.

Zur Erklärung dieses Verhaltens dienten die im Rahmen der Simulation berechneten plastischen Zonen. Es zeigt sich, daß zu Beginn des Schlagvorgangs im Bereich der Kontaktfläche des Hammers und der Probe ein Bereich großer plastischer Zonen entsteht. Der Anteil der plastischen Energie an der gesamten Probenenergie ist dabei abhängig von der Probengeometrie. Der Zeitpunkt, an dem das Maximum dieses Verhältnisses erreicht wird, ist hingegen unabhängig von den Probenabmessungen und stimmt mit der Zeit überein, zu der der Trägheitspeak seinen Maximalwert aufweist. Einen Minimalwert erreicht die auf die Gesamtenergie der Probe bezogene plastische Energie am Ende des ersten Trägheitspeaks, wenn die Proben vom Auflager stark abgehoben sind.

Aufgrund dieser Ergebnisse wurde angenommen, daß die in der Probe im Bereich der Kontaktfläche während des Trägheitspeaks dissipierte Energie am Kerb nicht zum Aufbau einer Kerbspannungsintensität zur Verfügung steht. Um diese These zu überprüfen, wurde die Schlagbelastung einer hochskalierten, angerissenen Charpy-Probe aus Araldit B simuliert, dessen Materialverhalten linear-elastisch ist. Der Rechengang entsprach dem der elastisch-plastischen Proben. Aus den berechneten Werten des  $\Delta T_p$ -Integrals konnte der gemessene Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors gut wiedergegeben werden.

Da somit der Nachweis geführt wurde, daß mit dem  $\Delta T_p$ -Integral, angewendet im Rahmen der ebenen Modellierung der Probengeometrie, der zeitliche Verlauf der Spannungsintensität nachgebildet werden kann, wurde zur Berechnung der Kerbspannungsintensität aus der Probenenergie diese um den Anteil der im Bereich der Kontaktfläche dissipierten Energie korrigiert und mit dem Verlauf der durch das  $\Delta T_p$ -Integral ausgedrückten Beanspruchung der Kerbspitze verglichen. Es zeigt sich, daß für die Zeiten, in denen der Trägheitspeak die das Probenverhalten dominierende Kraftgröße dargestellt, der Verlauf beider Größen gut übereinstimmt, was für alle untersuchten Probengeometrien gilt. Abweichungen sind jedoch für den Zeitbereich zwischen dem Abklingen des Trägheitspeaks und dem Zeitpunkt des deutlichen Anstiegs der aus dem  $\Delta T_p$ -Integral bestimmten Kerbspannungsintensität festzustellen. Hier liegt der Erklärungsansatz darin, daß das dynamische Verhalten der Probe und dessen Auswirkungen auf die Kerbbeanspruchung von der quasi-statischen energetischen Auswertemethode nicht erfaßt wird, was aber nicht quantifiziert werden konnte.

Der korrigierte Beanspruchungsverlauf der Kerbspitze wurde mit den Spannungsintensitäten aus den Kaustikenmessungen verglichen. Die Resultate dieser Messungen widersprechen den dargestellten Ergebnissen nicht. Allerdings muß erwähnt werden, daß für die verwendeten Probengeometrien der Einfluß von nicht quantifizierbaren Störgrößen auf die Form der Kaustiken dazu führen kann, daß die so ermittelten Kerbspannungsintensitäten



deutlich unterschätzt werden.

Im Rahmen der Untersuchungen der linear-elastisch reagierenden Charpy-Probe aus Araldit B wurde die Gültigkeit der Gleichung nach Kishimoto [108] zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Spannungsintensität in angerissenen Biegeproben unter dynamischen Lasten überprüft. Dazu wurde ein Programm entwickelt, welches aus den gemessenen Hammerkräften eines Schlagversuches den Spannungsintensitätsfaktor nach der angegebenen Formel bestimmt. Es konnte nachgewiesen werden, daß für den überprüften Anwendungsfall der zeitliche Verlauf der Rißspitzenbeanspruchung, insbesondere die Abnahme zu bestimmten Zeiten, nicht wiedergegeben wird. Auf der Basis der Ergebnisse der durchgeführten Simulation wurde eine empirische Modifikation der Auswerteformel eingeführt, die den Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors gut beschreibt.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ermöglichen ein besseres Verständnis der Vorgänge, die die zeitliche Entwicklung der Kerbspitzenbeanspruchung dynamisch beanspruchter Charpy-Proben beeinflussen. Weitere Untersuchungen, die die Gültigkeit für andere Werkstoffe überprüfen, müssen folgen, um die hier gefundenen Zusammenhänge zwischen den Trägheitskräften und ihren Auswirkungen auf die Bestimmung von Werkstoffkennwerten zu verallgemeinern und für die praktische Auswertung nutzbar zu machen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Rossmannith, H.P.: "Grundlagen der Ingenieur-Bruchmechanik." in: Grundlagen der Bruchmechanik, Hrsg.: Rossmannith, H.P., Springer-Verlag, Wien New York, 1982, pp. 11-42
- [2] Ireland, D.R.: "Procedures and problems associated with reliable control of the instrumented impact test." ASTM STP 563, 1974, pp. 3-29
- [3] Anderson, T.L.: "Fracture mechanics: Fundamentals and applications." CRC Press, Boca Raton, 1991
- [4] Kalthoff, J.F.: "Experimental fracture dynamics." CISM Courses and Lectures No. 310, Crack Dynamics in Metallic Materials, J.R. Klepaczko Editor, Int. Centre for Mechanical Sciences, Italy, Springer-Verlag, Wien-New York, 1990, pp. 75-253
- [5] Kobayashi, T.; Yamamoto, I.; Niinomi, M.: "Evaluation of dynamic fracture toughness parameters by instrumented charpy impact test." Eng. Frac. Mech., Vol. 24, 1986, pp. 773-782.
- [6] Rice, J.R.: "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks." J. Appl. Mech., Vol. 35, 1968, pp. 379-386
- [7] Turner, C.E.: "Dynamic fracture toughness measurements by instrumented impact testing." Adv. Sem. on Frac. Mech., ISPRA, Italien, 1975
- [8] Kobayashi, T.: "Analysis of impact properties of A533 steel for nuclear reactor pressure vessel by instrumented charpy test." Eng. Frac. Mec., Vol. 19, 1984, pp. 49-65
- [9] Hellan, K.: "Introduction to fracture mechanics." McGraw-Hill Verlag, New York, 1985
- [10] Podleschny, R.: "Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse." Mitteil. Inst. Mechanik, Bochum, April 1995
- [11] Freund, L.B.: "Dynamic fracture mechanics." Cambridge University Press, New York, 1990
- [12] Dugdale, D.S.: "Yielding of steel sheets containing slits." J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, 1960, pp. 100-104
- [13] Irwin, G.R.: "Plastic zone near a crack and fracture toughness." Sagamore Res. Conf. Proc., Vol. 4, 1961

- [14] Barenblatt, G.I.: "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture." *Adv. in Appl. Mech.*, Vol. 7, Academic Press, 1962, pp. 55-129
- [15] Atluri, S.N.; Nishioka, T.: "Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 20, No. 2, 1984, pp. 209-244
- [16] Kishimoto, K.; Aoki, S.; Sakata, M.: "Dynamic fracture mechanics parameter estimation for three-point bend specimen in large scale yielding." *Eng. Frac. Mech.*, 1982
- [17] Schwalbe, K.H.: "Bruchmechanik metallischer Werkstoffe." Carl Hanser Verlag, München, 1980
- [18] Griffith, A.A.: "The phenomena of rupture and flow in solids." *Phil. Trans.*, Series A, Vol. 221, 1920, pp. 163-198
- [19] Westergaard, H.M.: "Bearing pressures and cracks." *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol. 61, 1939, A49-A53
- [20] Sneddon, I.N.: "The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid." *Proc. Phys. Soc. London*, Vol. 187, London, 1946, pp. 229-260
- [21] Irwin, G.R.: "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate." *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, 1957, pp. 361-364
- [22] Gross, D.: "Bruchmechanik." 2. Neubearb. und erw. Aufl., Springer Berlin Heidelberg New York, 1996
- [23] ASTM E 24.03.03: "Proposed standard method of tests for instrumented impact testing of precracked carpy specimens of metallic materials." Draft 2d, ASTM, Philadelphia, USA, 1981
- [24] Hutchinson, J.W.: "Plastic stress and strain fields at a crack tip." *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, 1968, pp. 337-347
- [25] Rice, J.; Rosengren, G.F.: "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material." *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, 1968, pp. 1-12
- [26] Nakamura, T.; Shih, C.F.; Freund, L.B.: "Analysis of a dynamically loaded three-point-bend ductile fracture specimen." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 25, 1986, pp. 323-339
- [27] Johnson, W.: "Impact strength of materials." Edward Arnold Ltd., 1972
- [28] Whitham, G. B.: "Linear and nonlinear waves." J. Wiley and Sons Inc., New York 1974
- [29] Kolsky, H.: "Stress waves in solids." Clarendon Press, Oxford, 1953
- [30] Böhme, W.: "Experimentelle Untersuchungen dynamischer Effekte beim Kerbschlagbiegeversuch." Diss., FB Mechanik, TH Darmstadt, 1985
- [31] Ireland, D.R.: "Critical review of instrumented impact testing." *Proc. Int. Conf. Dyn. Frac. Toughness*, London, 1976

- [32] Malvern, L.E.: "Introduction to the mechanics of a continuous medium." Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1969
- [33] Khan, A. S.; Huang, S.: "Continuum theory of plasticity." J. Wiley and Sons, Inc., New York 1995
- [34] Truesdell, C.: "A first course in rational continuum mechanics." Vol. I, Academic Press, New York 1977
- [35] Cheng, Y. M.; Tsui, Y.: "Limitations to the large strain theory." Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 33, 1992, pp. 101-114
- [36] Hill, R.: "Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain." Proc. Roy. Soc. London, A314-A457
- [37] Green, A. E.; Naghdi, P.M.: "A general theory of an elastic plastic continuum." Arch. Rat. Mech. Appl. Math., Vol. 21, 1968, pp. 251-281
- [38] Lee, E. H.; Liu, D. T.: "Finite strain elastic-plastic theory particularly for plane-wave analysis." J. Appl. Phys., Vol. 38, 1967, pp. 19-27
- [39] Lee, E. H.; Lin, D. T.: "Some comments on elastic-plastic analysis." Int. J. Sol. Struc., Vol. 17, pp.859ff
- [40] Betten, J.: "Elastizitäts- und Plastizitätslehre." 2., überarb. und erw. Aufl., Vieweg 1996
- [41] Truesdell, C.: "The simplest rate theory of pure elasticity." Comm. Pure Appl. Math., Vol. 8, pp. 123ff
- [42] Schieck, B.; Stumpf, H.: "The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity." Int. J. Solids Structures, Vol. 32, No. 24, 1995, pp. 3643-3667
- [43] Kobayashi, T.: "On the information about fracture characteristics obtained from instrumented charpy impact test of A533 steel for reactor pressure vessel." Eng. Frac. Mech., Vol. 19, 1984, pp. 67ff.
- [44] Manogg, P.: "Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreivorgangs von Platten." Dissertation, Freiburg, 1964
- [45] Manogg, P.: "Schattenoptische Messung der spezifischen Bruchenergie während des Bruchvorgangs bei Plexiglas." Proc. Int. Conf. Phys. Non-cryst. Solids, Delft, 1964, pp. 481-490
- [46] Theocaris, P.S.; Joakimides, N.: "Some properties of generalized epicycloids applied to fracture mechanics." J. Appl. Mech., Vol. 22, 1971, pp. 876-890
- [47] Theocaris, P.S.: "Stress concentrations at concentrated loads." Exp. Mech., Vol. 13, 1973, pp. 511-528
- [48] Beinert, J.; Kalthoff, J.F.: "Experimental determination of dynamic stress intensity factors by shadow patterns." Mech. Frac., Vol. 7, Exp. Frac. Mech. (G.C: Sih, Ed.), Nijhoff, Hingham, MA, 1981, pp. 280-330

- [49] Kalthoff, J.F.: "Stress intensity factor determination by caustics." Proc. Int. Conf. Exp. Stress Anal., org. by JSME and SESA, Honolulu, 1982, pp. 1119-1126
- [50] Kalthoff, J.F.: "Shadow optical method of caustics." in: Handbook on experimental mechanics, ed. A. Kobayashi, 1993, pp. 407-476
- [51] Soltész, U.; Beinert, J.: "Bestimmung des Spannungszustands in der Umgebung einer Rißspitze mit einem schattenoptischen Verfahren." wiss. Bericht W 6/81, Fraunhofer- Institut für Werkstoffmechanik, Freiburg, 1981
- [52] Rosakis, A.J.; Ma, C.C.; Freund, L.B.: "Analysis of the optical shadow spot method for a tensile crack in a power-law hardening material." J. Appl. Mech., Vol. 50, 1983, pp. 777-782
- [53] Rosakis, A.J.; Freund, L.B.: "Optical measurement of the plastic strain concentration at a tip in a ductile steel plate." J. Eng. Mat. Tech., Vol. 104, 1982, pp. 115-125
- [54] Sih, G.C.: "Handbook of stress intensity factors." Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1973
- [55] Berger, C.; Keller, H.P.; Munz, D.: "Determination of fracture toughness with linear-elastic and elastic-plastic methods." Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668, 1979, pp. 378-405
- [56] Wang, T.: "Micromechanics-based improved J-integral criterion for ductile fracture." Int. J. Frac., Vol. 58, 1992, R11-R14
- [57] Wang, T.: "New local and modified global criteria for ductile fracture." Int. J. Frac., Vol. 48, 1991, R51-R55
- [58] Kalthoff, J.F.; Winkler, S.; Boehme, W.; Klemm, W.: "Determination of the dynamic fracture toughness  $K_{I_d}$  in impact tests by means of response curves." Proc. 5th Int. Conf. on Fracture, Cannes, 1981, in: Advances in fracture research, Pergamon Press, Oxford New York, 1980, 363-373
- [59] Kalthoff, J.F.: "The concept of impact response curves." in: Metals handbook - Vol. 8: Mechanical testing, Amer. Soc. Metals, Metals Park, Ohio, 1985, pp. 272ff.
- [60] Sumpter, J.D.; Turner, C.E.: "A method for laboratory determination of  $J_c$ ." 9. Nat. Frac. Mech. Symp., Pittsburgh, USA, 1975
- [61] Nakamura, T.; Shih, C.F.; Freund, L.B.: "3-D transient analysis of a dynamically loaded three-point-bend ductile fracture specimen." ASTM STP 995, Vol. I, ASTM, Philadelphia, 1989, pp. 217-241
- [62] Kalthoff, J.F.; Winkler, S.; Boehme, W.: "A novel procedure for measuring the impact fracture toughness  $K_{I_d}$  with precracked Charpy specimens." Proc. Int. Conf. on Mech. Phys. Beh. of Mat. under Dyn. Loading, Paris, 1985, Jour. de Physique, Tome 46, Coll. C5, supplement au n 8, 1985, pp. 179-186

- [63] Rice, J.R.; Paris, P.C.; Merkle, J.G.: "Some further results of J-integral analysis and estimates." in: Progress in flaw growth and fracture toughness testing. ASTM STP 536. 1973. pp. 231ff.
- [64] Yongning, L.; Jinghau, Z.; Huijiu, Z.: "The inertia effect in Charpy impact tests." Eng. Frac. Mech., Vol. 39, No. 6. 1991. pp. 955-964
- [65] Liu, Y.: "The inertia effect in Charpy impact tests." Eng. Frac. Mech., Vol. 39, No. 6, 1991. pp. 955ff
- [66] Marur, P.R.: "The inertia effect in Charpy impact tests." Eng. Frac. Mech., Vol. 52, No. 6, 1995. pp. 1165ff.
- [67] Meyer, L.W.; Seifert, K.: "Entwicklung einer neuen Prüftechnik für die dynamische Bruchzähigkeitsmessung." 9. Sitzung des AK Bruchvorgänge, 12.10.1977. Berlin. Deutscher Verband für Materialprüfung e.V.. pp. 123-130
- [68] Rintamaa, R.: "Single specimen fracture toughness determination procedure using instrumented impact test." Doctoral thesis. Tech. Res. Centre of Finland (VTT). Espoo, 1993
- [69] Yu, J.; Kalthoff, J.F.: "Elastic-plastic fracture of precracked Charpy specimens under impact loading." Proc. of IUTAM Symp. on Impact Dyn., Peking Univ. Press, 1994. pp. 347-358
- [70] Zehnder, A.T.; Rosakis, A.J.; Krishnaswamy, S.: "Dynamic measurement of the J-integral in ductile materials: Comparison of experimental and numerical techniques." Int. J. Frac., Vol. 29, 1990, pp. 209-230
- [71] Lee, O.S.; Hong, S.K.; Kim, Y.S.: "Revisit to the determination of stress-intensity factors and J-integrals using the caustics method." Exp. Mech., Juni 1993. pp. 133-138
- [72] Taudou, C.; Potti, S.V.; Ravi-Chandar, K.: "On the dominance of the singular dynamic crack tip stress field under high rate loading." Int. J. Frac., Vol. 56, 1992, pp. 41-59
- [73] Demler, T.; Klenk, A.: "Basic research on the near-field of dynamically loaded crack tips." MPA Stuttgart, 1988
- [74] Bui, H.D.; Maigre, H.; Rittel, D.: "A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor." Int. Jour. Solids Structures, Vol. 29, No. 23, 1992, pp. 2881-2895
- [75] Bui, H.D.; Maigre, H.: "Facteur d'intensité dynamique des contraintes tiré des grandeurs mécaniques globales." C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. 306, Série II, 1988, pp. 1213-1216
- [76] Maigre, H.: "Contribution théorique à l'identification des grandeurs caractéristiques en mécanique de la rupture dynamique." Diss., Ecole Polytechnique Paris. 1990

- [77] Sutton, M.A.; Turner, J.L.; Chao, H.A.; Bruck, H.A.; Chae, T.L.: "Experimental investigations of three-dimensional effects near a crack tip using computer vision." *Int. J. Frac.*, Vol. 53, 1992, pp. 208-228
- [78] Cardenas-Garcia, J.F.; Read, D.T.; Moulder, J.C.: "Experimental study of path independence of the J-integral in an aluminum tensile panel." *Exp. Mech.*, Sept. 1987, pp. 328-332
- [79] Eshelby, J.D.: "The force on an elastic singularity." *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, 1951, pp. 87ff.
- [80] Eshelby, J.D.: "Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics." *Inel. Beh. Sol.*, ed.: Kanninen et al., McGraw-Hill, New York, 1970
- [81] Eshelby, J.D.: "The elastic energy-momentum tensor." *J. Elast.*, Vol. 5, 1975, pp. 321-335
- [82] Yoda, M.: "The J-Integral fracture criterion under opening and tearing modes and unloading effects." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 13, 1980, pp. 647-656
- [83] Dowling, N.E.; Begley, J.A.: "Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-Integral." *ASTM STP 590*, 1976, pp. 82-103
- [84] Knowles, J.K.; Sternberg, E.: "On a class of conservation laws in linearized and finite elasto-statics." *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 44, 1972, pp. 187-211
- [85] Budiansky, B.; Rice, J.R.: "Conservation laws and energy release rates." *J. Appl. Mech.*, Vol. 40, 1973, pp. 201-203
- [86] Lubarda, V.A.: "A simple representation of the J-Integral and some estimates of elastic stress intensity factors." *J. Appl. Mech.*, Vol. 60, 1993, pp. 29-32
- [87] Broberg, K.B.: "The foundations of fracture mechanics." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 16, 1982, pp. 497-515
- [88] Miyamoto, H.; Kikuchi, M.: "Three-dimensional J-Integral." *Theo. Appl. Mech.*, Vol. 28, 1980, pp. 195-204
- [89] Blackburn, W.S.: "Path independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic plastic material." *Int. J. Frac. Mech.*, Vol. 8, 1972, pp. 343-346
- [90] Blackburn, W.S.; Jackson, A.D.; Hellen, T.K.: "An integral associated with the state of a crack tip in a non-elastic material." *Int. J. Frac.*, Vol. 13, No. 2, 1977, pp. 183-199
- [91] Kishimoto, K.; Aoki, S.; Sakata, M.: "On the path independent integral- $\hat{J}$ ." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 13, 1980, pp. 841-850
- [92] Batte, A.D.; Blackburn, W.S.; Elsander, A.; Hellen, T.K.; Jackson, A.D.: "A comparison of the  $J^*$  integral with other methods of post yield fracture mechanics." *Int. J. Frac.*, Vol. 21, 1983, pp. 49-66

- [93] Atluri, S.N.: "Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 16, No. 3, 1982, pp. 341-364
- [94] Nishioka, T.; Atluri, S.N.: "Path-independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 18, No. 1, 1983, pp. 1-22
- [95] Nishioka, T.; Atluri, S.N.: "A numerical study of the use of path independent integrals in elasto-dynamic crack propagation." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 18, No. 1, 1983, pp. 23-33
- [96] Nishioka, T.; Atluri, S.N.: "On the computation of mixed-mode K-factors for a dynamically propagating crack, using path-independent integrals ." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 20, No. 2, 1984, pp. 193-208
- [97] Nakamura, T.; Shih, C.F.; Freund, L.B.: "Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture." *Int. J. Frac.*, Vol. 27, 1985, pp. 229-243
- [98] Bathe, K.J.: "Finite-Elemente-Methoden." Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [99] Zienkiewicz, O.C.: "Methode der finiten Elemente." Carl Hanser Verlag, München, 1975
- [100] Ayres, D.J.: "Dynamic plastic analysis of ductile fracture - the Charpy specimen." *Int. J. Frac.*, Vol. 12, No. 4, 1976, pp. 567-578
- [101] Ahmad, J.; Jung, J.; Barnes, C.R.; Kanninen, M.F.: "Elastic-plastic finite element analysis of dynamic fracture." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 17, No. 3, 1983, pp. 235-246
- [102] Tvergaard, V.; Needleman, A.: "An analysis of the temperature and rate dependence of Charpy V-notch energies for a high nitrogen steel." *Int. J. Frac.*, Vol. 37, 1988, pp. 197-215
- [103] Jha, M.; Narasimhan, R.: "A finite element analysis of dynamic fracture initiation by ductile failure mechanisms in a 4340 steel." *Arbeitspapier*, 1991
- [104] Lin, J.; Tu, M.: "Stress-strain and strain rate responses of precracked charpy specimens under dynamic loading." *Int. J. Frac.*, Vol. 55, No. 3, 1992, R49-R53
- [105] Yamamoto, Y.; Sumi, Y.: "Stress intensity factors for three-dimensional cracks." *Int. J. Frac.*, Vol. 14, No. 1, 1978, pp. 17-38
- [106] Zhang, C.; Gross, D.: "Pulse shape effects on the dynamic stress intensity factor." *Int. J. Frac.* Vol. 58, 1992, pp. 55-75
- [107] Nash, G.: "An analysis of the forces and bending moments generated during the notched beam impact test." *Int. J. Frac. Mech.*, Vol. 5, No. 4, 1969, pp. 269-286
- [108] Kishimoto, K.; Aoki, S.; Sakata, M.: "Simple formula for dynamic stress intensity factor of pre-cracked Charpy specimen." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 13, 1980, pp. 501-508
- [109] Belytschko, T.: "Survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis." *Nucl. Eng. Design*, Vol. 37, 1976, pp. 23-34



- 
- [110] ABAQUS Theory manual, Version 5.4. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1995
- [111] ABAQUS User's manual, Vol. I, Version 5.4, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1995
- [112] Hilber, H.M.; Hughes, T.J.; Taylor, R.L.: "Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics." *Earthquake Eng. Struc. Dyn.*, Vol. 6, 1978, pp. 99-117
- [113] Owen, D.R.J.; Hinton, E.: "Finite elements in plasticity: theory and practice." Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K., 1980
- [114] Kishimoto, K; Aoki, S.; Sakata, M.: "Dynamic stress intensity factors using J-Integral and finite element method." *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 13, 1980, pp. 387-394
- [115] Stoer, J.: "Numerische Mathematik, Band 1." 5., verbesserte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989
- [116] Ideas: "Finite Element Modeling User's Guide." Handbuch, SDRC, 1994
- [117] ABAQUS User's manual, Vol. II, Version 5.4, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1995

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15     Hans-Albert Luert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34**     **Helmut Stumpf:**  
**Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells**
- Nr. 35**     **Bernd Kaempf:**  
**Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente**
- Nr. 36**     **Alfred Kraft:**  
**Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten**
- Nr. 37**     **Petrisor Mazilu:**  
**Variationsprinzipie der Thermoplastizität**  
**II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse**
- Nr. 38**     **Klaus-Detlef Mickley:**  
**Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen**
- Nr. 39**     **Lutz-Peter Nolte:**  
**Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen**
- Nr. 40**     **Ulrich Blix:**  
**Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode**
- Nr. 41**     **Peter Becker:**  
**Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden**
- Nr. 42**     **Dietmar Bouchard:**  
**Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme**
- Nr. 43**     **Uwe Zdebel:**  
**Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz**
- Nr. 44**     **Jan Kubik:**  
**Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent**
- Nr.45**     **Horst J. Klepp:**  
**Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme**
- Nr. 46**     **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**  
**Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems**
- Nr. 47**     **Franz Karl Labisch:**  
**Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren**
- Nr. 48**     **J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:**  
**Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY**
- Nr. 49**     **Karl-Heinz Bürger:**  
**Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung**

- Nr. 50      Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51      Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52      W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53      Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54      Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56      Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57      Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58      Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59      Peihua Liu:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60      Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61      Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62      Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64      Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65      Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66      Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67      Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68      Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmehchanischer Systeme

- Nr. 69      Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70      Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71      Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72      J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73      Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74      J. Sączuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75      Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76      Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77      Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79      J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80      J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81      R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82      B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83      J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84      U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85      T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material

- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung  
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua  
unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von  
Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem  
Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der  
Reckalterung

- Nr. 105 **Bjarne Fosså:**  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 **Khanh Chau Le:**  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 **Holger Behrens:**  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 **Johannes Moosheimer:**  
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 **Dirk Klaus Anding:**  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 **Stephan Weng:**  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 **Michael Straßberger:**  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112 **Hans-Jörg Becker:**  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 **Thomas Nerzak:**  
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 **O. T. Bruhns:**  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1997
- Nr. 115 **Jan Steinhausen:**  
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 116 **Thomas Pandorf**  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben







**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 116**