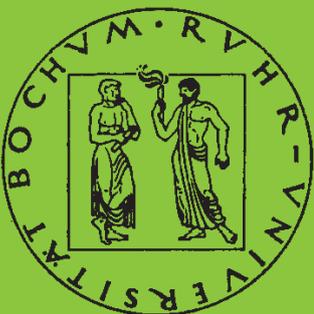


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Daniela Lürding

**Modellierung großer Deformationen
in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen**

Heft Nr. 125



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Daniela Lürding

Modellierung großer Deformationen in orthotropen,
hyperelastischen Schalenstrukturen

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1997 bis 2000 am Institut für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum und wurde durch ein Stipendium des Graduiertenkollegs *Computational Structural Dynamics* gefördert. Für die Finanzierung des Projektes danke ich der Deutschen Forschungsgesellschaft.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Y. Başar für die Anregung zu diesem Thema und der Chance mich einem breitgefächerten Spektrum unterschiedlicher Herausforderungen zu stellen, Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns für die hervorragende, sehr engagierte Betreuung sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W.B. Krätzig für das Schaffen optimaler Arbeitsbedingungen am Lehrstuhl und die vorbildliche Ausbildung. Herrn Prof. Dr. techn. G. Meschke danke ich für das stets vorhandene Interesse an meiner Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. rer. nat. A. Skirde für die vielen Diskussionen und wertvollen Anregungen sowie die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes.

Ich danke allen Kollegen und Freunden für die Hilfsbereitschaft und kollegiale Unterstützung, insbesondere Carsten Könke, Ulrike Hanskötter, Ayman Salem, Robert Schwetzke, Holger Karutz, Sam-Young Noh, Dorte Krätzig, Marion Brüggemann, Falko Schube, Frank Rösler, Wolfhard Zahlten, Thomas Kersten, Karin Preusch sowie Ulrike Hollstegge.

Ganz besonders herzlich bedanke ich mich bei meinen Eltern und meinem Bruder Wolfgang für die bedingungslose Unterstützung, die entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat und mir ein unverzichtbarer Rückhalt war.

Essen, im März 2001

Daniela Lürding

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Y. Başar
Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Tag der Einreichung: 03. Juli 2000
Tag der mündlichen Prüfung: 08. Dezember 2000

©2001 Dipl.-Ing. Daniela Lürding
Rubensstr. 6
45147 Essen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Konzept zur Simulation großer elastischer Verzerrungen bei Orthotropie erarbeitet. Hierzu wird eine Verzerrungsenergiefunktion entwickelt, welche zur Beschreibung allgemeiner Deformationszustände geeignet ist und nur wenige Materialparameter enthält. Die irreduzible Funktionalbasis der Verzerrungsenergiefunktion reflektiert die geometrische Beschaffenheit einer Deformation im repräsentativen Volumenelement. Dadurch lassen sich die für Isotropie formulierten Konzepte der Polykonvexität und der Coercivität, welche die Existenz einer Lösung des strukturmechanischen Variationsproblems gewährleisten, auf Orthotropie übertragen. Die Tensorgeneratoren berechnen sich als Gradient der Funktionalbasis und sind ebenfalls irreduzibel.

Zur Beschreibung sehr großer Dehnungen wird zunächst für ein isotropes Kontinuum eine Verzerrungsenergiefunktion vorgeschlagen, die auf einer exponentiellen Abbildung in den Hauptinvarianten beruht. Diese bildet den physikalisch motivierten Grundgedanken, daß *unendliche Spannungen durch gegen unendlich strebende Verzerrungen hervorgerufen werden*, adäquat ab und enthält das kompressible MOONEY-RIVLIN Modell als Sonderfall. Die zur Simulation sehr großer Dehnungen auf einer exponentiellen Abbildung basierende Verzerrungsenergiefunktion wird auf ein orthotropes Kontinuum übertragen. Auch mit dem Sonderfall eines linearen Ansatzes in der Integritätsbasis lassen sich große Dehnungen beschreiben und für viele ingenieurwissenschaftliche Anwendungen gute Ergebnisse erzielen. Dieser Ansatz wird auf eine kontinuumsbasierte Schalenkinematik angewendet und anschließend in das Programmsystem FEMAS 2000 implementiert. Die Leistungsstärke des Modells wird an einigen Beispielen aufgezeigt.

Summary

The following thesis deals with the formulation of a new material model for a large strain analysis of orthotropic shells. The proposed stored energy function depends only on a less number of material parameters. The irreducible functional basis reflects the geometrical properties of a deformation. This allows the transfer of concepts like polyconvexity and coerciveness which were formulated for an isotropic continuum to orthotropy. By the numerical enforcement of the material model to a continuum based shell kinematics in FEMAS 2000, the capability of the algorithms proposed is demonstrated by numerical examples involving large strains and finite rotations.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	vii
1 Einführung	1
2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	5
2.1 FRECHÉT Ableitung	5
2.2 Kinematik	6
2.3 Gleichgewichtsaussagen	15
3 Aspekte der Materialmodellierung	19
3.1 Thermodynamische Grundlagen	19
3.2 Elastizität	21
3.3 Hyperelastizität	23
4 Simulation großer Dehnungen	27
4.1 Konvexität	27
4.2 Coercivität	30
4.3 Deformationsprozeß	31
5 Hyperelastisches isotropes Material	35
5.1 Die klassische Theorie	35
5.2 Innere Zwangsbedingungen	36
5.2.1 Inkompressibilität	36
5.2.2 Nahezu inkompressibles Material	37
5.3 Polynome in allgemeinen Potenzen	37
5.3.1 Potenzreihe in den Hauptinvarianten	37
5.3.2 Polynome in allgemeinen Potenzen der Eigenwerte	38
5.4 Exponentielle Abbildung	40
6 Modellierung orthotropen Materials	43
6.1 Charakterisierung	43
6.1.1 Lineare Elastizitätstheorie	44

6.1.2	Gruppe symmetrischer Transformationen	46
6.2	Basis irreduzibler Invarianten	47
6.2.1	Verwendung von Invariantentheoremen	48
6.2.2	Methode der Strukturtenoren	48
6.3	Physikalisch motivierte Invariante	49
6.3.1	Modifizierte Simultaninvariante	50
6.3.2	Modifizierte Hauptinvariante	51
6.4	Orthotropie und große Verzerrungen	54
6.4.1	Auswirkungen einer bevorzugten Materialrichtung	54
6.4.2	Polykonvexität	54
6.5	Entwicklung eines orthotropen Materialmodells	55
6.5.1	Orthotropie	56
6.5.2	Transversale Isotropie	59
6.5.3	Isotropie	60
6.6	Zusammenstellung der vorgeschlagenen Modelle	62
6.6.1	Orthotropie	62
6.6.2	Transversale Isotropie	63
6.6.3	Isotropie	63
7	3D-Schalenformulierung	65
7.1	Approximation des Schalenkontinuums	65
7.2	Numerische Umsetzung	68
8	Beispiele	75
8.1	Zugprobe bei wechselndem Faserlastwinkel	76
8.2	Analyse allgemeiner Schalenstrukturen	79
8.3	Erzielte Ergebnisse	83
9	Zusammenfassung und Ausblick	85
	Literaturverzeichnis	87
A	Materialparameter	A-1
B	Schalenkinematik	B-1

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

Gruppenbezeichnungen

\mathbb{M}^3	Gruppe der allgemeinen linearen (3×3)-Matrizen
\mathbb{M}_+^3	alle linearen Matrizen mit positiver Determinante $\mathbb{M}_+^3 = \{\mathbf{F} \in \mathbb{M}^3; \det \mathbf{F} > 0\}$
\mathbb{O}^3	alle orthogonalen Matrizen mit $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3$
\mathbb{O}_+^3	alle eigentlich orthogonalen Matrizen $\mathbb{O}_+^3 = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \det \mathbf{Q} = +1\}$
\mathbb{S}^3	alle symmetrischen Matrizen $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, $\mathbf{C} \in \mathbb{S}^3$
$\mathbb{S}_>^3$	alle symmetrischen Matrizen mit positiver Determinante $\det \mathbf{C} > 0$, $\mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3$

Kontinuumsmechanik

Ω, Ω^φ	einfach zusammenhängendes Gebiet Ω (unverformt) bzw. Ω^φ (verformt)
$\bar{\Omega}, \bar{\Omega}^\varphi$	das Innere des Gebietes Ω bzw. Ω^φ
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektoren mit $\mathbf{X} = X^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{i}_i$ bzw. $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = x^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{i}_i$
$\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$	allgemeine krummlinige Koordinaten
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$	orthogonal kartesisches Bezugssystem
$\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$	kovariante Basisvektoren als Tangentenvektoren an Θ^i ; $i = 1, 2, 3$
$\mathbf{G}^i, \mathbf{g}^i$	kontravariante Basisvektoren; duale Basen: $\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i$ bzw. $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$
δ_j^i, e_{ijk}	KRONECKER Delta, Permutationstensor
G_{ij}, g_{ij}	kovariante Metrikkomponenten beider Konfigurationen
G^{ij}, g^{ij}	kontravariante Metrikkomponenten $G^{ij} = (G_{ij})^{-1}$, $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$
G, g	Determinante mit $G = \det G_{ij}$ bzw. $g = \det g_{ij}$
$\mathbf{I} = \mathbf{G} = \mathbf{g}$	Identität $\mathbf{I} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i$
$\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$	Deformationsgradient $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$; $\nabla \boldsymbol{\varphi} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$
	Singulärwerte $v_i = \sqrt{\lambda_i}$ mit $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$
$\text{tr} \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	Spur eines Tensors $\text{tr} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \ \mathbf{F}\ ^2$ mit der L^2 -Norm $\ \dots\ ^2$
$\text{Cof} \mathbf{F}$	Cofaktor-Matrix $\text{Cof} \mathbf{F} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}$
$J = \det \mathbf{F}$	Determinante
\mathbf{C}, \mathbf{B}	rechter bzw. linker CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$; $\mathbf{C} = \bar{C}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$, $\mathbf{B} = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$; Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$
\mathbf{U}, \mathbf{V}	rechter bzw. linker Strecktensor $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, $\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2}$
$\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}$	Rotationstensoren mit $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{O}_+^3$
\mathbf{E}	GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor $\mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{C} - \mathbf{G})$
\mathbf{e}	ALMANSI Verzerrungstensor $\mathbf{e} = 1/2 (\mathbf{g} - \mathbf{B}^{-1})$ und $\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$; $e_{ij} = E_{ij}$
$I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}$	Hauptinvarianten des rechten CAUCHY-GREEN Tensors: $I_{\mathbf{C}} = \text{tr} \mathbf{C}$, $II_{\mathbf{C}} = \text{tr} \text{Cof} \mathbf{C}$, $III_{\mathbf{C}} = \det \mathbf{C}$
$\boldsymbol{\sigma}$	wahre CAUCHY Spannungen
$\boldsymbol{\tau}$	KIRCHHOFF Spannungstensor $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$
\mathbf{P}	1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$
\mathbf{S}	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$; $S^{ij} = \tau^{ij}$

Materialmodellierung

W	Verzerrungsenergiefunktion $W = \hat{W}(\mathbf{F}) = \check{W}(\mathbf{C}) = \breve{W}(\mathbf{E})$
	Isotropie: $W = \bar{W}(\mathbf{B}) = \breve{\breve{W}}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) = \dot{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
\circ (...)	objektive Zeitableitung

(\dots)	materielle Zeitableitung
\mathbf{C}	Elastizitätstensor $\mathbf{C} = \bar{C}^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l = C^{ijkl} \mathbf{i}_{A_i} \otimes \mathbf{i}_{A_j} \otimes \mathbf{i}_{A_k} \otimes \mathbf{i}_{A_l}$
C_L^{ijkl}	Komponenten nach der linearen Theorie
C_A^{ijkl}	Richtungsabhängige Komponenten nichtlineare Theorie
$\mathbf{i}_{A_i}, \mathbf{g}_{A_i}$	Basisvektoren ausgerichtet nach den Hauptmaterialrichtungen unverformte Konfiguration: orthonormiertes Bezugssystem $\{\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}\}$ verformte Konfiguration: beliebige Längen und Winkel $\{\mathbf{g}_{A_1}, \mathbf{g}_{A_2}, \mathbf{g}_{A_3}\}$
\mathbb{G}_X	Gruppe symmetrischer Transformationen $\mathbb{G}_X \subseteq \mathbb{O}^3$
\mathbf{R}_i	Spiegelungen an der Ebene senkrecht zur bevorzugten Richtung \mathbf{i}_{A_i} ; $i = 1, 2, 3$
\mathbf{D}_i^φ	EULERSche Drehmatrizen um die Achse \mathbf{i}_{A_i} mit $0 \leq \varphi < 2\pi$; $i = 1, 2, 3$
α	Faserwinkel $\cos \alpha = \mathbf{i}_{A_1} \cdot \mathbf{G}_1 / \sqrt{G_{11}}$
μ, λ	LAME Konstanten
μ	Schubmodul: Orthotropie $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$; Transversale Isotropie $\mu_{ }, \mu_{\perp}$
E	Elastizitätsmodul: E_1, E_2, E_3 $E_{ }, E_{\perp}$
ν	Querkontraktionszahl: $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ $\nu_{ }, \nu_{\perp}$
I_i, II_{ij}	Modifizierte Hauptinvariante Orthotropie: $I_1, I_2, I_3, II_{12}, II_{23}, II_{31}$; Transversale Isotropie: $I_{ }, I_{\perp}, II_{ }, II_{\perp}$
\mathbf{M}_i	Strukturtenoren $\mathbf{M}_i = \mathbf{i}_{A_i} \otimes \mathbf{i}_{A_i}$; $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{I}$
\mathbf{M}_{C_i}	Tensorgenerator $\mathbf{M}_C = I_C \mathbf{I} - \mathbf{C}^T$; Orthotropie $\mathbf{M}_{C_1}, \mathbf{M}_{C_2}, \mathbf{M}_{C_3}$; Transversale Isotropie $\mathbf{M}_{C_{ }}, \mathbf{M}_{C_{\perp}}$
\mathbf{M}_{C_V}	Tensorgenerator $\mathbf{M}_{C_V} = III_C \mathbf{C}^{-1}$
$\Gamma(J)$	Konvexe Funktion in den Volumenänderungen $J = \sqrt{III_C}$
$\bar{\Gamma}_i(J_i)$	Konvex in den Längenänderungen $J_i = \sqrt{I_i}$, $i = 1, 2, 3$
$\bar{\Gamma}_i(J_{jk})$	Konvex in den flächenhaften Deformationen $J_{jk} = \sqrt{II_{jk}}$, $i \neq j \neq k$

Schalenkinematik

H	Schalendicke
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor, kinematische Annahme: $\mathbf{x} = \overset{0}{\mathbf{x}} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{x}}$; $\ \overset{1}{\mathbf{x}}\ \neq 1$
$(\dots), (\overset{1}{\dots})$	Größen der Schalenmittelfläche, Größen in Direktorrichtung
$\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{A}_3$	Tangentenvektoren der Schalenmittelfläche, Normaleneinheitsvektor
$\hat{\mathbf{E}}$	2D-Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{E}} = E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j$; $E_{ij} = \overset{0}{E}_{ij} + \Theta^3 \overset{1}{E}_{ij} + (\Theta^3)^2 \overset{2}{E}_{ij}$
\mathbf{Z}	Shifter $\mathbf{Z} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i$

Finite Element Formulierung

$(\dots)^K$	Knotenwerte des Finiten Elementes
ξ^1, ξ^2	Elementkoordinaten $-1 \leq \xi^1, \xi^2 \leq +1$
N_K	Bilineare Formfunktionen
$\tilde{\mathbf{E}}$	Zusätzliche (inkompatible) Verzerrungsmoden
$\mathbf{N}(\mathbf{G}), \alpha$	Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_T(\mathbf{G}_T), \mathbf{N}_M(\mathbf{G}_M)$ der Verzerrungsfreiheitsgrade α_T, α_M
$\mathbf{K}_T, \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_a$	Tangentiale Steifigkeitsmatrix, Vektor der inneren Kräfte, äußere Lasten
$\mathbf{k}_T, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_a$	entsprechende Größen auf Elementebene
$\tilde{\mathbf{k}}_T, \tilde{\mathbf{p}}_i$	Größen der Elementsteifigkeitsbeziehung infolge angereicherter Verzerrungen
$\delta \mathbf{V}_u, \delta \mathbf{u}$	Weggrößenelemente (System-), Verschiebungsfreiheitsgrade (Elementebene)

Kapitel 1

Einführung

Motivation

Anisotrope Materialien finden seit vielen Jahren, überwiegend in Form von faserverstärkten Kunststoffen, die durch eine hohe Festigkeit bei zugleich geringem Gewicht gekennzeichnet sind, Anwendung in der Technik. Ihr Vorteil liegt darin begründet, daß ihre Werkstoffeigenschaften nahezu beliebig konstruiert und sie damit optimal für die erforderliche Lastabtrags- und Funktionstüchtigkeit eines Tragwerks angepaßt werden können (Braun 1995; Schultz 1996; Schröder 1996; Gruttmann 1996; Başar & Ding 1997). Dabei sind die meisten praxisrelevanten Fälle anisotropen Materials orthotrop oder transversal isotrop.

Das Interesse und der Bedarf an einem zuverlässigen Modell zur Simulation großer Deformationen in Strukturen mit richtungsabhängigem Materialverhalten nimmt auch bei fachübergreifenden Disziplinen, beispielsweise in der Biologie und der Medizin zur Modellierung von Blutgefäßen, Muskeln oder des Trommelfells stetig zu. Bei gummiartigen Stoffen können durch die Einbeziehung des richtungsabhängigen Materialverhaltens gezielt neue Hochleistungswerkstoffe konstruiert werden, beispielsweise zur Erstellung von Dämpfern oder Verbesserung der Reifentechnik. Damit solch komplexe Strukturen mit einem breitgefächerten Anwendungsspektrum in den Ingenieurwissenschaften eingesetzt werden können, sind Konzepte und Methoden der Mathematik sehr nützlich. Eine Schlüsselrolle zur Beschreibung großer reversibler Verzerrungen spielen die Begriffe Polykonvexität und Coercivität, deren Zusammenspiel die Existenz einer Lösung für das numerisch, mittels der Methode der Finiten Elemente, umzusetzende Variationsproblem gewährleistet. Bei der Behandlung einer gegebenen Anisotropie ist das Erstellen einer geometrisch und physikalisch sinnvollen, irreduziblen Funktionalbasis aus Invarianten ein Kernproblem. Ist eine solche Funktionalbasis aber erst einmal erstellt, ist sie allgemein einsetzbar und kann beispielsweise auch zur Modellierung der Bewehrung im Stahlbetonbau verwendet werden. Ein wichtiges Anwendungsgebiet zur Simulation großer Dehnungen in anisotropen Strukturen sind biologische weiche Materialien mit dem Ziel der Verbesserung von Implantaten und der Entwicklung neuer Behandlungsstrategien in der Medizintechnik. Hier konnten bei den Blutgefäßen schon erste Erfahrungen gesammelt werden.

Biologische Strukturen weisen nicht nur eine evolutionsbedingte optimale Funktionstüchtigkeit auf, sondern auch eine zumeist hohe Flexibilität bezüglich ihres Einsatzbereiches. Wird beispielsweise eine Vene in die Strömungsbahn einer Arterie eingepflanzt, so wird die Venenwand allmählich zur Arterienwand umgebaut, d.h. die Dicke der Gefäßwand paßt sich den veränderten Druckverhältnissen an. Der mittlere Blutdruck eines jungen Erwachsenen beträgt bei einer Vene 2 kPa, in einer Arterie 10 – 13 kPa. Große reversible Verzerrungen treten infolge von Dehnung und Kontraktion der Muskelfasern in der Gefäßwand auf. Die Anordnung der Muskelfasern bewirkt die Richtungsabhängigkeit des Beanspruchungsverhaltens der Struktur.

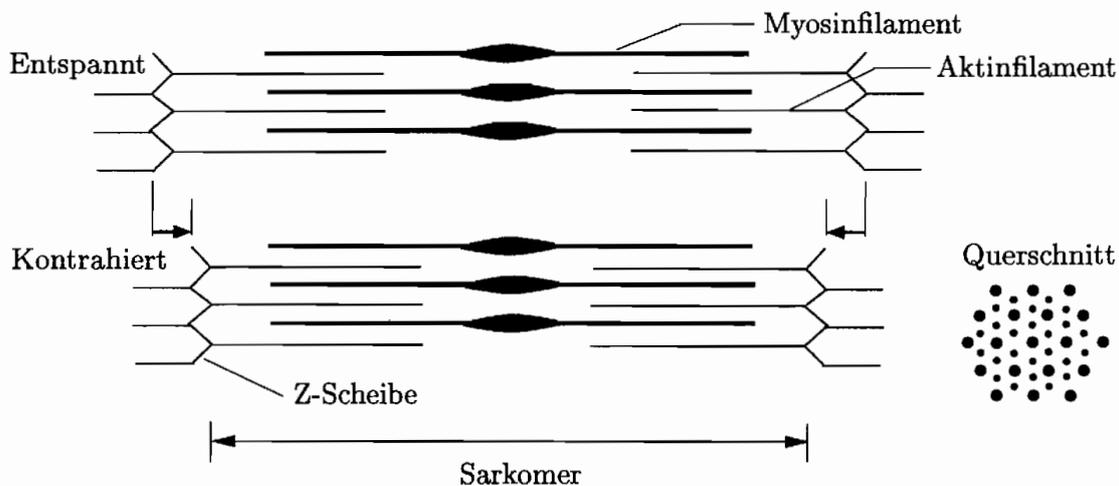


Abb. 1.1: Strukturdarstellung eines Muskels

Eine Muskelfaser¹ besteht aus Eiweißstrukturen, die sich aufgrund ihrer Proteinkomposition in dünne *Aktinfilamente* und dicke *Myosinfilamente* einteilen lassen (Abb. 1.1). Jeweils mehrere dicke und dünne Filamente sind in der Muskelfaser in gewissem Abstand hintereinandergeschaltet, so daß die Längenänderung der Muskelfaser nach der *Gleitfilament-Theorie* als Folge von Längenänderungen unzähliger hintereinandergeschalteter Sarkomere² durch das teleskopartige Ineinandergleiten der Aktin- und Myosinfäden resultiert (Buddecke 1989; Weineck 1988).

Bei gummiartigem, oder biologisch weichem Material kann aufgrund vernachlässigbar kleiner Hysterese-Effekte elastisches Materialverhalten postuliert werden. Das Vernachlässigen der Geschwindigkeitsabhängigkeit des an sich viskosen Materials erlaubt die Formulierung einer Potentialfunktion zur Simulation großer, reversibler Verzerrungen.

¹Bei den Muskelfasern wird zwischen einem längsverlaufenden und einem querverlaufenden Röhrensystem unterschieden; zwischen beiden Systemen besteht keine direkte Verbindung.

²Die Struktur- und Funktionseinheit zwischen zwei Z-Membranen wird als *Sarkomer* bezeichnet und stellt mit einer Länge von $1.5 \mu\text{m}$ die kleinste kontraktile Einheit im Muskel dar. Eine Kontraktion führt zu einer Verkürzung des Sarkomers um ca. $0.5 \mu\text{m}$; bei einer Dehnung verringert sich die Überlappung der Aktin- und Myosinfilamente und ein Sarkomer kann eine Länge von über $3.0 \mu\text{m}$ erreichen. Die Länge der Aktin- und Myosinfäden ändert sich dabei nicht. Der molekulöse Mechanismus beruht auf einer reversiblen Komplexbildung zwischen Aktin und Myosin, welche durch die Konzentration freier Kalziumionen gesteuert wird.

Schädigungs- und Deteriorationsaspekte infolge von Strukturänderungen, die aus Krankheit oder Alterungsprozessen folgen, bleiben unberücksichtigt. Es werden quasistatische Zustände vorausgesetzt.

Zielsetzung der Arbeit

Das Ziel der Arbeit besteht darin, ein Materialmodell zu entwickeln, das zur Simulation großer Deformationen in orthotropen Strukturen geeignet ist. Das Erstellen eines ingenieurwissenschaftlichen Modells fordert eine Vielzahl von Annahmen hinsichtlich des Materialverhaltens und der Kinematik. Viele der bisher vorgeschlagenen konstitutiven Beziehungen versagen bei der Simulation biologisch weichen Gewebes oder aber sie sind mathematisch so komplex, daß ihr praktischer Einsatz schwierig ist (Vorp, Rajagopal, Smolinski & Borovetz 1995). Schon die Behandlung finiter Dehnungen bei Isotropie erfordert eine sehr komplexe mathematische Umgebung. Dennoch kann bei Isotropie die Existenz einer Lösung des strukturmechanischen Variationsproblems gewährleistet werden, wenn die Verzerrungsenergiefunktion bei hyperelastischem Material polykonvex ist und der Coercivitätsungleichung genügt (Ball 1977; Ciarlet 1988), zwei Bedingungen, auf deren große Bedeutung im Laufe der Arbeit ausführlich eingegangen wird.

Bei anisotropen Strukturen ist schon bei kleinen Verzerrungen das Beanspruchungsverhalten wesentlich komplexer als bei Isotropie. Hier führt eine reine Schubbelastung zu Dehnungen, Gleitungen und Volumenänderungen; ein hydrostatischer Spannungszustand ruft ebenfalls Dehnungen und Gleitungen hervor. Das Argument der orthotropen Verzerrungsenergiefunktion ist eine irreduzible Funktionalbasis, welche die Symmetrieeigenschaften des Materials widerspiegelt. Damit das Modell vielseitig einsetzbar ist, steht die Simulation allgemeiner Deformationszustände im Vordergrund. Auf vereinfachende Annahmen wie die vielfach in diesem Zusammenhang verwendete Inkompressibilitätsbedingung wird daher verzichtet³. Die irreduzible Funktionalbasis soll in der Form motiviert werden, daß die für Isotropie entwickelten Konzepte der Polykonvexität und Coercivität, die zur Simulation großer Verzerrungen sinnvoll sind, auf Orthotropie übertragen werden können. Anschließend wird das Materialmodell auf eine kontinuumsbasierte Schalenkinematik angewendet. Daher können große Deformationen in Strukturen beliebiger Dicke simuliert werden⁴.

³Gummiartiges und biologisch weiches Material verhält sich in einigen Situationen nahezu inkompressibel. Deshalb werden in vielen Modellen die volumetrischen Deformationen vernachlässigt und das Materialverhalten vereinfachend als inkompressibel angesehen (Humphrey 1995; Holzapfel, Eberlein, Wriggers & Weizsäcker 1996; Fung 1993). In einem Experiment wiesen CHOUNG und FUNG jedoch eine nennenswerte Volumenänderung der Wand einer Aorta nach, ein Indiz für die existierende schwache Kompressibilität der Gefäßwand (Vorp, Rajagopal, Smolinski & Borovetz 1995).

⁴Eine klassische Schalentheorie vom Typ KIRCHHOFF-LOVE oder REISSNER-MINDLIN basiert auf einem ebenen Spannungszustand und postulierter Dehnungsfreiheit in Dickenrichtung. Dünne bis moderat dicke Strukturen werden bei kleinen Verzerrungen vereinfacht durch Funktionen der Mittelflächenkoordinaten bei höchstens linear veränderlichen Dehnungen und Spannungen über die Tragwerksdicke beschrieben (Başar & Krätzig 1985). Auf genauere Approximationen des 3D-Kontinuums wird in (Koiter 1960; Zerna 1967; Krätzig 1971; Naghdi 1972) eingegangen. Bei anisotropen Strukturen mit kleinen Verzerrungen lassen sich mit dem, auf einem ebenen Spannungszustand basierenden, LEKHNITSKII Formalismus

Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich neben dieser **Einführung** in acht weitere Kapitel.

Die Kontinuumsmechanischen Grundlagen werden in **Kapitel 2** bereitgestellt. Dabei steht die nichtlineare Deformationsbeschreibung dreidimensionaler Kontinua bei einer LA-GRANGE Betrachtungsweise im Vordergrund.

Ausgehend von den allgemeinen Prinzipien zur Formulierung eines makroskopischen Materialmodells liegt der Schwerpunkt in **Kapitel 3** bei der Behandlung reversiblen Materialverhaltens.

Die Simulation großer elastischer Verzerrungen ist durch den physikalischen Gedanken motiviert, daß *unendliche Spannungen aus gegen unendlich strebenden Verzerrungen hervorgerufen werden*. Diese Annahme läßt sich bei Hyperelastizität in Restriktionen bezüglich des Aufbaus der Verzerrungsenergiefunktion umsetzen. Die Erläuterung der in diesem Zusammenhang stehende Begriffe wie *Polykonvexität* und *Coercivität* ist Gegenstand des **4. Kapitels**. Darüberhinaus wird auf die *exponentielle Abbildung* eingegangen.

In **Kapitel 5** wird eine polykonvexe Verzerrungsenergiefunktion entwickelt, die auf einer exponentiellen Abbildung in den Hauptinvarianten basiert und die Coercivitätsungleichung erfüllt. Damit lassen sich finite Verzerrungen bei allgemeinen Deformationen mit wenigen Materialparametern physikalisch sinnvoll beschreiben.

Zur Beschreibung eines richtungsabhängigen Beanspruchungsverhaltens wird in **Kapitel 6** eine irreduzible Funktionalbasis vorgeschlagen, die durch das Grenzverhalten orthotropen Materials bei finiten Verzerrungen motiviert ist und die geometrische Beschaffenheit einer Deformation berücksichtigt. Sie ermöglicht die Übertragung der für die Isotropie entwickelten Konzepte der Polykonvexität und der Coercivität auf eine orthotrope Verzerrungsenergiefunktion.

Das Materialmodell wird auf die in **Kapitel 7** beschriebene, kontinuumsbasierte Schalenkinematik mit einem linearen Verschiebungsansatz angewendet und mittels der *Methode der Finiten Elemente* numerisch umgesetzt. Dabei auftretende *Locking*-Effekte werden durch diverse Stabilisierungsalgorithmen beseitigt.

Anhand einiger Beispiele wird die Leistungsfähigkeit des erstellten Materialmodells und der implementierten Algorithmen in **Kapitel 8** aufgezeigt.

In **Kapitel 9** werden die erzielten Ergebnisse zusammengefaßt und abschließend weiterführende Problemstellungen aufgezeigt.

bzw. dem, auf einem ebenen Verzerrungszustand basierenden STROH Formalismus besonders bei einer durch Singularitäten geprägte Aufgabenstellung gute Ergebnisse erzielen (Ting 1996).

Kapitel 2

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Den allgemeinen Rahmen zur Modellierung von Materialeigenschaften bildet die Kontinuumsmechanik, eine makroskopische Theorie mit der Annahme, daß die Materie im Raum kontinuierlich verteilt ist. Ein repräsentatives Volumenelement wird losgelöst von einem materiellen Körper betrachtet. Alle Aussagen über individuelle Materialeigenschaften sind Beziehungen zwischen lokalen Kraftwirkungen und lokalen Deformationen vor dem Hintergrund der Bilanzgleichungen, den universalen Naturgesetzen der Mechanik.

Die Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen erfolgt in tensorieller Absolut-schreibweise. Es gilt die EINSTEINSche Summationskonvention für gegenständig indizierte Größen. Lateinische Indizes stehen für das Wertetripel $\{1, 2, 3\}$, griechische Indizes nehmen die Werte $\{1, 2\}$ an.

Die Beschreibung der Kinematik orientiert sich weitgehend an den Arbeiten von (Ciarlet 1988; Bařar & Weichert 2000; Green & Zerna 1968; Ogden 1984; Truesdell & Noll 1992).

2.1 FRECHÉT Ableitung

Das Differentialkalkül wird im dreidimensionalen reellen EUKLIDischen Vektorraum \mathbb{R}^3 verwendet sowie im Raum der reellen skalarwertigen Funktionen und der allgemeinen Matrizen \mathbb{M}^3 .

X und Y stellen reelle normierte Vektorräume dar. Eine Abbildung $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$, definiert im offenen Gebiet Ω des Raumes X mit Werten in Y , ist im Punkt a differenzierbar, wenn die FRECHÉT Ableitung $f'(a)$ im Raum $\mathcal{L}(X; Y)$ existiert, d.h. es gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0. \quad (2.1)$$

Die Notation $o(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ stellt das Restglied der TAYLOR-Formel dar, welches mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ gegen Null strebt. Vielfach kann $f'(a) \in \mathcal{L}(X; Y)$ als GÂTEAUX Ableitung in Richtung eines beliebigen Vektors h in X berechnet

$$f'(a)h = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(a + \theta h) - f(a)}{\theta} = \left. \frac{d}{d\theta} f(a + \theta h) \right|_{\theta=0} \in Y \quad (2.2)$$

und über die partiellen Ableitungen

$$f'(a)h = \partial_i f(a) h^i \quad \text{mit} \quad \partial_i f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial \Theta^i} \in \mathcal{L}(X^i; Y) \quad (2.3)$$

für alle $h = (h^1, h^2, h^3) \in X^1 \times X^2 \times X^3 = X$ hinsichtlich der Koordinaten Θ^i zerlegt werden. Voraussetzung ist, daß sich X als solches kartesisches Produkt von reellen normierten Vektorräumen X^i schreiben läßt. Aus der FRECHÉT Differenzierbarkeit ergibt sich die GÂTEAUX Ableitung in jede Richtung h . Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht zulässig.

Mit $Y = \mathbb{R}$ berechnet sich die Ableitung einer reellwertigen Funktion $f : \Omega \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, die im HILBERT Raum X definiert ist, aus dem inneren Produkt

$$f'(a) = (\text{grad} f(a), h). \quad (2.4)$$

Hierdurch wird $\text{grad} f(a)$ definiert. Für den Raum $X = \mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ resultiert

$$f'(a) \mathbf{h} = \text{grad} f(a) \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} h_i \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

Entsprechend gilt für eine Funktion auf dem Raum $X = \mathbb{M}^3$ mit dem matriziellen inneren Produkt $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ für quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^3$

$$f'(\mathbf{A}) \mathbf{H} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A}) : \mathbf{H} = \frac{\partial f}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) H_{ij} \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbb{M}^3. \quad (2.6)$$

2.2 Kinematik

Im dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Raum \mathbb{R}^3 kann jeder Punkt X mit seinem Ortsvektor

$$\mathbf{X} = X^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{i}_i \quad (2.7)$$

mittels krummliniger, konvektiver Koordinaten Θ^j identifiziert und abhängig von einer orthonormierten Bezugsbasis geschrieben werden.

Mit Hilfe des Tensorkalküls werden finite Deformationen eines materiellen Punktes $X \in \bar{\Omega}$ der Referenzkonfiguration in seine verformte Lage $x = \varphi(X) \in \bar{\Omega}^\varphi$ beschrieben. Die Deformationen sollen hinreichend glatt, injektiv und orientierungsbewahrend im Innern des Gebietes $\bar{\Omega}$ (also Ω) sein. Infolge Selbstkontakt des festen Körpers kann die Injektivität nur auf dem Rand $\partial\bar{\Omega}$ verloren gehen. Selbstdurchdringung der deformierbaren festen Struktur im Inneren des einfach zusammenhängenden Gebietes Ω ist auszuschließen.

Die Notation sieht vor, daß große Buchstaben Größen der unverformten Referenzkonfiguration beschreiben sowie kleine Buchstaben Größen der aktuellen Momentankonfiguration¹. Entfällt die Unterscheidung zweier Konfigurationen über die Groß- und Kleinschreibung, wird für den verformten Zustand zusätzlich die Deformation φ als hochgestellter Index eingeführt.

Die differentialgeometrischen Elemente des unverformten bzw. verformten Kontinuums (Abb. 2.1) berechnen sich wie folgt:

¹Eine Ausnahme bildet der linke CAUCHY-GREEN Tensor \mathbf{B} und der linke Strecktensor \mathbf{V} , zwei räumliche Verzerrungstensoren.

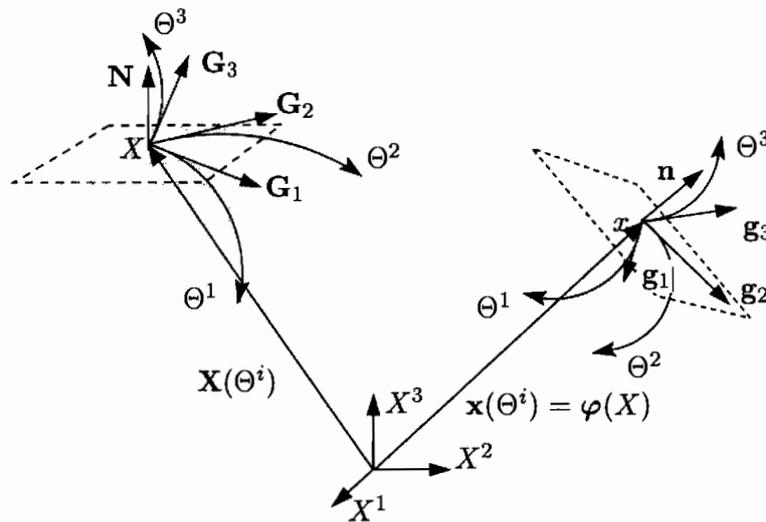


Abb. 2.1: Unverteformte und verteformte Konfiguration

Die kovarianten Basisvektoren sind die Tangentenvektoren an die konvektiven, krummlinigen Koordinatenlinien

$$\mathbf{G}_j = \frac{\partial X^i}{\partial \Theta^j} \mathbf{i}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \Theta^j} \mathbf{i}_i. \quad (2.8)$$

Ihr Skalarprodukt ergibt die kovarianten Komponenten des Metriktensors

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j. \quad (2.9)$$

Das KRONECKER Delta δ_j^i reflektiert die Orthogonalitätsbeziehungen der dualen Basen

$$\delta_j^i = G_{jk} G^{ik} = \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i. \quad (2.10)$$

Die kontravarianten Komponenten der Metrik sind

$$G^{ij} = (G_{ij})^{-1} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad \text{bzw.} \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (2.11)$$

Mit der Regel vom *Herauf-* bzw. *Herunterziehen der Indizes* folgen die kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j. \quad (2.12)$$

Die Determinante gibt das Volumen des durch die kovarianten Basisvektoren aufgespannten Parallelepipedes an

$$G = (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 \quad \text{bzw.} \quad g = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3. \quad (2.13)$$

Der Identitätstensor wird über das dyadische Produkt der gegenständig indizierten Basen eingeführt

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}^i = \mathbf{G} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{g} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i. \quad (2.14)$$

Deformationsgradient. An jedem Punkt der verteformten Konfiguration werden lokale Deformationen über drei Tangentenvektoren $\partial_j \varphi(X)$ erfaßt, die sich als partielle Ableitung nach den materiellen Koordinaten X^j berechnen. In der Terminologie der Differentialgeometrie definieren sie den Tangentenvektorraum am Punkt X der Mannigfaltigkeit

int $\varphi(\bar{\Omega})$. Als FRECHÉT Ableitung der Abbildung φ repräsentieren sie den Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ mit den neun unabhängigen Komponenten $(\nabla\varphi)_{ij} = \partial_j \varphi_i$. Aufgrund der Restriktion auszuschließender Selbstdurchdringung wird eine positive Determinante des Deformationsgradienten gefordert

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{j}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \Theta^k} \mathbf{i}_i \otimes \frac{\partial \Theta^k}{\partial X^j} \mathbf{j}_j = \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{und } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (2.15)$$

Gewöhnlich wird der verformte Zustand über den Verschiebungsvektor \mathbf{u} bzw. der Deformationsgradient über den Verschiebungsgradienten $\nabla\mathbf{u} \in \mathbb{M}^3$ ausgedrückt

$$\mathbf{x} = \varphi = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad \nabla\varphi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.16)$$

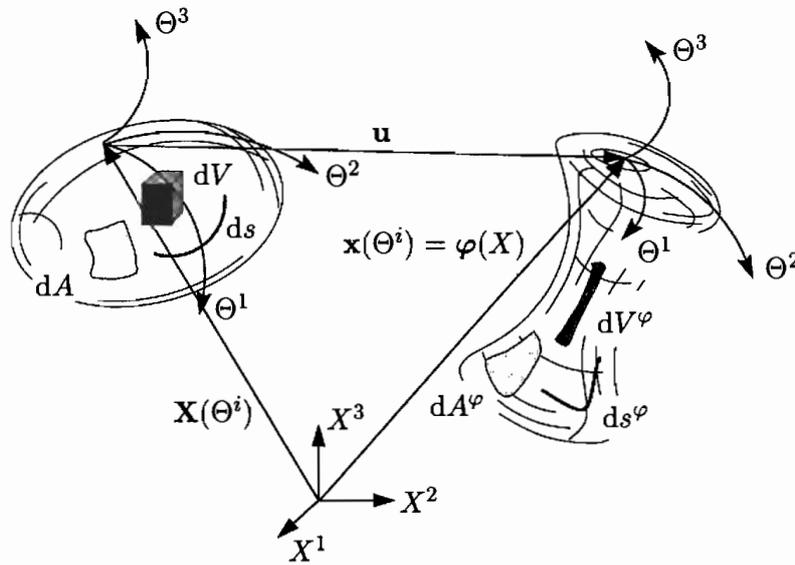


Abb. 2.2: Volumen-, Flächen- und Linienelement in der unverformten und verformten Konfiguration

Die Beschreibung finiter Deformationen kann in zwei verschiedenen Betrachtungsweisen erfolgen. Bei einer LAGRANGE Betrachtungsweise wird jedem materiellen Punkt X zur Zeit t_0 über eine tensorielle Abbildungsvorschrift ein Punkt x der Momentankonfiguration zur Zeit t zugeordnet

$$x = \varphi(X, t) \quad X \in \Omega, \quad x \in \Omega^\varphi. \quad (2.17)$$

Analog wird bei einer EULER Betrachtungsweise jedem räumlichen Punkt x , der zur Zeit t auf der aktuellen Momentankonfiguration definiert ist, über die inverse Abbildungsvorschrift sein entsprechender Punkt X auf der Referenzkonfiguration zugewiesen

$$X = \varphi^{-1}(x, t). \quad (2.18)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine LAGRANGE Betrachtungsweise verwendet.

Volumenelement

Für eine adäquate Deformationsbeschreibung ist es erforderlich, Transformationsbeziehungen zwischen der unverformten und verformten Konfiguration aufzustellen. Invariante

Größen des verformten Kontinuums werden daher in Größen des unverformten Zustandes ausgedrückt (Abb. 2.2).

So kann die Volumenberechnung für ein deformiertes Kontinuum \mathcal{B}^φ

$$\text{vol}\mathcal{B}^\varphi = \int_{\mathcal{B}^\varphi} dV^\varphi = \int_{\mathcal{B}^\varphi} \sqrt{g} \, d\Theta^i d\Theta^j d\Theta^k \quad (2.19)$$

über eine Substitution des Integrationsbereiches

$$J = \det\mathbf{F} = \frac{dV^\varphi}{dV} = \sqrt{\frac{g}{G}} \quad (2.20)$$

auf eine Berechnung in der Referenzkonfiguration transformiert werden

$$\text{vol}\mathcal{B}^\varphi = \int_{\mathcal{B}} J \, dV. \quad (2.21)$$

Linienelement

Im dreidimensionalen Kontinuum beinhaltet die Metrik (2.9) alle Informationen über die Abstände einzelner Punkte im Raum. Mit dem über das Differential des Ortsvektors $d\mathbf{X} = \mathbf{G}_i d\Theta^i$ aufgebauten differentiellen Linienelement

$$ds = \{d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X}\}^{1/2} = \sqrt{G_{ij} d\Theta^i d\Theta^j} \quad \text{in } \mathcal{X} = \mathcal{X}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \quad (2.22)$$

resultiert der Abstand s zweier Punkte einer beliebigen, über t parametrisierten Raumkurve.

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G_{ij} \dot{\Theta}^i \dot{\Theta}^j} \, dt \quad \dot{\Theta}^i dt = d\Theta^i \quad (2.23)$$

Das differentielle Linienelement ds in Gleichung (2.22) wird in der Differentialgeometrie als *1. Fundamentalform der Mannigfaltigkeit* bezeichnet.

Im deformierten Kontinuum kann das Differential des Ortsvektors $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$ über den rechten CAUCHY-GREEN Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = C_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit } C_{ij} = g_{ij} \quad \text{und } \mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3 \quad (2.24)$$

auf die Referenzkonfiguration bezogen werden, so daß sich ein differentielles Linienelement ds^φ über die Metrik der verformten Konfiguration bestimmen läßt

$$ds^\varphi = \{d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x}\}^{1/2} = \{d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X}\}^{1/2} = \sqrt{g_{ij} d\Theta^i d\Theta^j}. \quad (2.25)$$

Für den Abstand zweier Punkte entlang der deformierten Raumkurve folgt

$$s^\varphi = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \dot{\Theta}^i \dot{\Theta}^j} \, dt \quad \text{mit } \dot{\Theta}^i dt = d\Theta^i. \quad (2.26)$$

Der linke CAUCHY-GREEN Tensor lautet

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{mit } \mathbf{B} \in \mathbb{S}_>^3. \quad (2.27)$$

Starrkörperbewegungen werden über eine affine kontinuierliche Abbildung

$$\varphi(X) = \mathbf{a} + \mathbf{Q} X \quad (2.28)$$

charakterisiert mit der Translation $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und der Rotation $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$. Da Starrkörperbewegungen keinen Einfluß auf den Verzerrungszustand haben, korrespondieren zwei Deformationen φ und ψ , die sich mit

$$\varphi(X) = \mathbf{a} + \mathbf{Q} \psi(X) \quad (2.29)$$

ineinander überführen lassen, zum selben rechten CAUCHY-GREEN Tensor

$$\mathbf{C} = \nabla \varphi^T \nabla \varphi = (\mathbf{Q} \nabla \psi)^T (\mathbf{Q} \nabla \psi) = \nabla \psi^T \nabla \psi \quad \text{für alle } X \in \bar{\Omega}. \quad (2.30)$$

Polarzerlegung. Der geometrische Charakter einer Deformation wird über eine Polarzerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in einen Rotationstensor $\mathbf{R} \in \mathbb{O}_+^3$ und einen symmetrischen, positiv definiten Strecktensor $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{S}_>^3$ sichtbar

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (2.31)$$

Eine Singulärwertzerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{Q}} \left\{ \sum_{i=1}^3 v_i (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \right\} \mathbf{Q}^T \quad (2.32)$$

mit $\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$ zeigt, daß die CAUCHY-GREEN Tensoren

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q} \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \right\} \mathbf{Q}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{Q}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \right\} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (2.33)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$ des symmetrischen Tensors $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ orthogonal äquivalent sind:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{R}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T. \quad (2.34)$$

Gleiches gilt für die Strecktensoren $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ und $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$.

Die Singulärwerte des Deformationsgradienten entsprechen den Eigenwerten der Strecktensoren und berechnen sich als reelle Wurzeln in den Eigenwerten der CAUCHY-GREEN Tensoren

$$v_i = \sqrt{\lambda_i}. \quad (2.35)$$

Verzerrungstensoren. Die Differenz zwischen den Quadraten eines differentiellen Linienelementes der verformten und unverformten Konfiguration definiert den GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor mit $(ds^\varphi)^2 - (ds)^2$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (2.36)$$

Er gliedert sich in die Familie der Verzerrungstensoren

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{U}) := \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{G}) \quad \text{für } m > 0 \quad (2.37)$$

$$\mathbf{e}^m(\mathbf{V}) := \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{g}) \quad \text{für } m < 0$$

mit $m = 2$ ein. Für $m = -2$ folgt der ALMANZI Verzerrungstensor. Eine *pull-back* Operation des ALMANZI Verzerrungstensors bzw. *push-forward* Operation der GREEN-LAGRANGE Verzerrungen

$$\phi^*(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \phi_*(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.38)$$

zeigt, daß die kovarianten Komponenten beider Betrachtungsweisen identisch sind

$$E_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}). \quad (2.39)$$

Für den Grenzfall $m = 0$ resultieren die HENCKY Verzerrungen

$$\mathbf{H} := \ln \mathbf{U} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h} := \ln \mathbf{V}. \quad (2.40)$$

Flächenelement

Eine beliebige, einfach zusammenhängende Fläche $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^2$ wird über zwei krummlinige Koordinatenlinien ζ^1 und ζ^2 auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert. Der Inhalt einer geschlossenen Fläche

$$\text{area} \mathcal{F} = \int_{\mathcal{F}} dA = \int_{\mathcal{F}} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^2} \right\| d\zeta^1 d\zeta^2. \quad (2.41)$$

berechnet sich mit den Tangentenvektoren $\mathbf{A}_\alpha = \partial \mathbf{X} / \partial \zeta^\alpha$ und der Flächennormalen \mathbf{N} .

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^2} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \|\mathbf{A}_1\| \|\mathbf{A}_2\| \sin \Phi \mathbf{N} \quad (2.42)$$

$$\sin \Phi = \sqrt{1 - \cos^2 \Phi} \quad \cos \Phi = \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1\| \|\mathbf{A}_2\|}$$

Das differentielle Flächenelement dA ist wie folgt darstellbar

$$dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^2} \right\| d\zeta^1 d\zeta^2 = \|\mathbf{A}_1\| \|\mathbf{A}_2\| \sin \Phi d\zeta^1 d\zeta^2. \quad (2.43)$$

Die Krümmungseigenschaft einer Fläche wird über Normalschnitte charakterisiert. Sie folgt aus dem Grenzübergang $X^* \rightarrow X$ (Abb. 2.3)

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{d\Phi}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} \right\| = \frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} \cdot \mathbf{N} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} \quad (2.44)$$

mit der Tangente $\bar{\mathbf{t}}$ (2.22), dem Krümmungsradius R (Başar & Krätzig 1985) und mit $\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{N} = 0$ als Quotient der 1. und 2. *Fundamentalform der Mannigfaltigkeit*

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\bar{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{N}}{ds^2}; \quad (2.45)$$

die 2. *Fundamentalform* lautet $d\bar{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{N}$. Die GAUSS-Krümmung ist über den Quotienten der Hauptkrümmungsradien definiert

$$K = \frac{1}{R_{max}} \cdot \frac{1}{R_{min}} \quad (2.46)$$

und ist eine Möglichkeit, das Membranverhalten von Schalenträgwerken zu charakterisieren (Başar & Krätzig 1985).

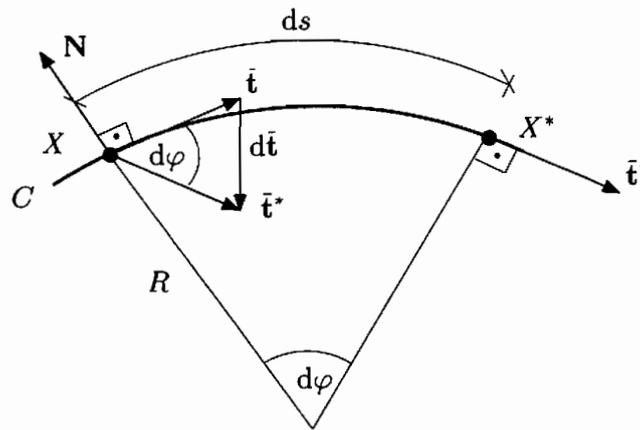
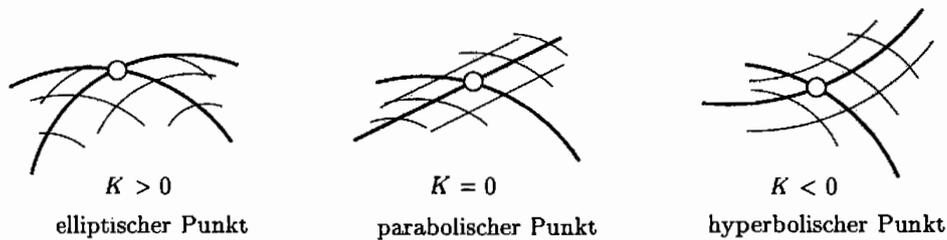
Abb. 2.3: Normalschnitt im Punkt X 

Abb. 2.4: Klassifizierung der Flächen

Eine verformte Fläche lässt sich über den Cofaktor-Tensor des Deformationsgradienten $\text{Cof} \mathbf{F} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}$ in die Referenzkonfiguration transformieren

$$\text{area} \mathcal{F}^\varphi = \int_{\mathcal{F}^\varphi} dA^\varphi = \int_{\mathcal{F}} \|\text{Cof} \mathbf{F} \mathbf{N}\| dA. \quad (2.47)$$

Die Orientierung der verformten Fläche wird durch die Normale \mathbf{n} beschrieben

$$\mathbf{n} = \frac{\text{Cof} \mathbf{F} \mathbf{N}}{\|\text{Cof} \mathbf{F} \mathbf{N}\|}. \quad (2.48)$$

Invarianten

Auf dem Raum aller Matrizen \mathcal{M}^3 existiert eine Gruppenwirkung von \mathbb{M}^3 auf \mathcal{M}^3

$$\omega : \mathbb{M}^3 \times \mathcal{M}^3 \rightarrow \mathcal{M}^3 \quad (2.49)$$

durch die Formel

$$\omega(\mathbf{C}, \mathbf{Q}) := \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{C} \in \mathcal{M}^3, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \quad (2.50)$$

Wird \mathbf{C} festgehalten und durchläuft \mathbf{Q} die Gruppe \mathbb{M}^3 , bilden alle Matrizen $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^3$ die Bahn $\mathcal{B}_{\mathbf{C}}$ der Gruppenwirkung ω durch \mathbf{C} in \mathcal{M}^3 :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{C}} := \{\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{M}^3\}. \quad (2.51)$$

Häufig wird diese Situation eingeschränkt auf die Gruppenwirkung der orthogonalen Gruppe \mathbb{O}_+^3 und die symmetrischen Matrizen $\mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3$

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \quad (2.52)$$

Die Invarianten dieser Gruppenwirkung sind beispielsweise die reellwertigen Funktionen

$$f : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.53)$$

die auf jeder Bahn der Gruppenwirkung konstant sind

$$f(\mathbf{C}) = f(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}) \quad \text{für alle } \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \quad (2.54)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit läßt sich ein symmetrischer Tensor, wie der rechte CAUCHY-GREEN Tensor \mathbf{C} , dargestellt in orthogonal kartesischen Koordinaten, über einen eigentlich orthogonalen Tensor $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$ diagonalisieren, d.h. es gilt

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit } \|\mathbf{N}_i\| = 1 \text{ und } \lambda_i = \lambda_i(\mathbf{C}). \quad (2.55)$$

Jeder zu ihm konjugierte Tensor (Euler & Steeb 1992) bzw. koaxiale Tensor (Başar & Weichert 2000) erfüllt das gleiche charakteristische Polynom

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_{\mathbf{C}} \lambda^2 - II_{\mathbf{C}} \lambda + III_{\mathbf{C}} = 0. \quad (2.56)$$

Die Hauptinvarianten sind die elementarsymmetrischen Funktionen in den Eigenwerten

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{C}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ II_{\mathbf{C}} &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\ III_{\mathbf{C}} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (2.57)$$

und berechnen sich leicht als Polynom in den Grundinvarianten $\text{tr} \mathbf{C}$, $\text{tr} \mathbf{C}^2$, $\text{tr} \mathbf{C}^3$

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{C}} &= \text{tr} \mathbf{C} = C_{.i}^i \\ II_{\mathbf{C}} &= \text{tr} \mathbf{Cof} \mathbf{C} = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2] = \frac{1}{2} (C_{.i}^i C_{.j}^j - C_{.j}^i C_{.i}^j) \\ III_{\mathbf{C}} &= \det \mathbf{C} = \frac{1}{6} [(\text{tr} \mathbf{C})^3 - 3 \text{tr} \mathbf{C} \text{tr} \mathbf{C}^2 + 2 \text{tr} \mathbf{C}^3] = e_{ijk} C_{.1}^i C_{.2}^j C_{.3}^k \end{aligned} \quad (2.58)$$

mit dem Permutationstensor e_{ijk} .

Unter Verwendung des CAYLEY-HAMILTON Theorems

$$-\mathbf{C}^3 + I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^2 - II_{\mathbf{C}} \mathbf{C} + III_{\mathbf{C}} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

läßt sich eine beliebige Potenz in einem invertierbaren Tensor über folgendes Polynom darstellen

$$\mathbf{C}^p = \alpha_{0p}(\iota_{\mathbf{C}}) \mathbf{I} + \alpha_{1p}(\iota_{\mathbf{C}}) \mathbf{C} + \alpha_{2p}(\iota_{\mathbf{C}}) \mathbf{C}^2. \quad (2.60)$$

Die Koeffizienten $\alpha_{0p}, \alpha_{1p}, \alpha_{2p}$ sind polynomial in den Hauptinvarianten $\iota_{\mathbf{C}} = \{I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}\}$ für ganzzahlige $p \geq 0$ und Polynome multipliziert mit $(III_{\mathbf{C}})^p$ für ganzzahlige $p \leq -1$ (Ciarlet 1988).

Für die Eigenwerte gilt (Ting 1985; Saywers 1986; Morman Jr. 1986):

$$\lambda_i = \frac{1}{3} \left(I_{\mathbf{C}} + 2 \sqrt{I_{\mathbf{C}}^2 - 3 II_{\mathbf{C}}} \cos \frac{1}{3}(\theta - 2\pi i) \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.61)$$

mit

$$\cos \theta = \frac{2I_{\mathbf{C}}^3 - 9I_{\mathbf{C}}II_{\mathbf{C}} + 27III_{\mathbf{C}}}{2(I_{\mathbf{C}}^2 - II_{\mathbf{C}})^{3/2}}. \quad (2.62)$$

Eigenprojektion

Bei der numerischen Umsetzung eines in Eigenwerten formulierten Materialmodells² ergeben sich in der Regel numerische Schwierigkeiten bei gleichen Eigenwerten. Diese können mit einer Eigenprojektion des Tensors umgangen werden. Die Eigenprojektion \mathbf{C}_i ist eine linear unabhängige und normierte Basis bezogen auf k unterschiedliche Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{C})$ $1 \leq i \leq k$ (Bruhns 1992; Ciarlet 1988)

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{C}_i \quad \text{für } 1 \leq k \leq 3. \quad (2.63)$$

und es gilt

$$\bullet \quad k = 3, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (2.64)$$

$$\bullet \quad k = 2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3; \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 \quad (2.65)$$

$$\bullet \quad k = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3; \quad \mathbf{C}_1 = \lambda_1 \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i. \quad (2.66)$$

Angewandt auf die Familie der Verzerrungstensoren (2.37) folgt

$$\mathbf{E}^m = \sum_{i=1}^k f(v_i) \mathbf{U}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}^m = \sum_{i=1}^k f(v_i) \mathbf{V}_i, \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (2.67)$$

$$\text{mit } f(v_i) := \begin{cases} \frac{1}{m}(v_i^m - 1) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln v_i & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

mit den Eigenprojektionen \mathbf{U}_i , \mathbf{V}_i und der Skalierungsfunktion $f(v_i)$, in Abhängigkeit der Eigenwerte v_i .

Deformationsgeschwindigkeit

Der Deformationsprozeß eines materiellen Punktes $X \in \Omega$ vollzieht sich mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (2.68)$$

Während der Deformationsgradient \mathbf{F} Änderungen eines differentiellen Linien-, Flächen- und Volumenelementes beschreibt, repräsentiert der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} die Geschwindigkeit, mit der sich diese Änderungen vollziehen

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right). \quad (2.69)$$

²Literatur: (Barthold 1993; Reese & Wriggers 1995a; Eberlein 1997; Başar, Itskov & Eckstein 1999; Başar & Weichert 2000)

Er setzt sich aus dem symmetrischen Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und dem schiefsymmetrischen Rotationsgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} zusammen.

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W}\end{aligned}\quad (2.70)$$

Zur Berechnung EULERScher Raten ist eine objektive Zeitableitung $(\overset{\circ}{\cdot})$ erforderlich, welche die Bewegung des Bezugssystems berücksichtigt

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h}\Omega^* - \Omega^*\mathbf{h} \quad (2.71)$$

und sich aus der materiellen Zeitableitung $(\dot{\cdot})$ und dem Spin $\Omega^* = \mathbf{W} + \Upsilon(\mathbf{B}, \mathbf{D})$, der wiederum den Rotationsgeschwindigkeitstensor und eine schiefsymmetrische, isotrope Tensorfunktion Υ enthält, zusammensetzt. Unter Verwendung von HENCKY Verzerrungen \mathbf{h} ist die logarithmischen Zeitableitung Lösung für (2.71).

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h}\Omega^{lg} - \Omega^{lg}\mathbf{h} = \mathbf{D} \quad (2.72)$$

Dabei läßt sich der logarithmische Spin Ω^{lg} über die Eigenprojektion (2.63) des linken CAUCHY-GREEN Tensors (Xiao, Bruhns & Meyers 1998a) beispielsweise wie folgt darstellen³

$$\Omega^{lg} = \mathbf{W} + \sum_{i \neq j}^k \left(\frac{\lambda_j + \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} + \frac{2}{\ln \lambda_j - \ln \lambda_i} \right) \mathbf{B}_i \mathbf{D} \mathbf{B}_j, \quad (2.73)$$

Auch die OLDROYD Zeitableitung der ALMANZI Verzerrungen liefert den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und ist objektiv. Bei der OLDROYD Zeitableitung oder einer Zeitableitung nach dem Konzept der LIE Ableitung (Marsden & Hughes 1994) ist der Typ von den Tensorkomponenten zu berücksichtigen. Die einfachste Zeitableitung ist die ZAREMBA-JAUMANN Ableitung $\Omega^* = \mathbf{W}$. Aufgrund von Instabilitäten in Form von Oszillationen bei großen Scherwinkeln ist sie jedoch für viele Problemstellungen nicht zulässig.

2.3 Gleichgewichtsaussagen

Im Folgenden wird der statische Fall betrachtet. Die Berechnung einer Struktur unter aufgebrachten Volumen- und Flächenlasten basiert auf den Spannungsprinzipien von EULER und CAUCHY, welche in Abhängigkeit des CAUCHY Spannungsvektors

$$\mathbf{t}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } S_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3; \|\mathbf{n}\| = 1\} \quad (2.74)$$

formuliert sind. Invariant bezüglich der Wahl des Koordinatensystems repräsentiert er eine wahre, meßbare Größe der Momentankonfiguration und bildet in Form von Oberflächenkräften, abhängig von dem nach außen zeigenden Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} , mit einer auf dem NEUMANN Rand $\Gamma_t^\varphi \cap \partial\mathcal{B}^\varphi$ wirkenden Flächenlast $\mathbf{g}^\varphi := \Gamma_t^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ einen Gleichgewichtszustand

$$\mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) = \mathbf{g}^\varphi(x). \quad (2.75)$$

³Literatur: (Lehmann, Guo & Liang 1991; Xiao, Bruhns & Meyers 1996; Xiao, Bruhns & Meyers 1998b)

Unter einer Volumenlast $\mathbf{f}^\varphi := \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ befindet sich das Teilgebiet $\mathcal{B}^\varphi \subset \bar{\Omega}^\varphi$ im Gleichgewicht, wenn das aus dem Impulssatz resultierende Kräftegleichgewicht

$$\int_{\mathcal{B}^\varphi} \mathbf{f}^\varphi(x) dV^\varphi + \int_{\partial\mathcal{B}^\varphi} \mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) dA^\varphi = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

und das aus dem Drallsatz folgende Momentengleichgewicht erfüllt sind

$$\int_{\mathcal{B}^\varphi} \mathbf{x} \times \mathbf{f}^\varphi(x) dV^\varphi + \int_{\partial\mathcal{B}^\varphi} \mathbf{x} \times \mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) dA^\varphi = \mathbf{0}. \quad (2.77)$$

Eine der wichtigsten Konsequenzen der Spannungsprinzipie sind das CAUCHY Theorem

$$\mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\sigma}(x) : \bar{\Omega}^\varphi \in \mathbb{M}^3 \quad (2.78)$$

und die Symmetrie der CAUCHY Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \boldsymbol{\sigma}(x) : \bar{\Omega}^\varphi \in \mathbb{S}^3. \quad (2.79)$$

Die Divergenzstruktur des Spannungstensors

$$\int_{\Omega^\varphi} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dV^\varphi = \int_{\partial\Omega^\varphi} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA^\varphi \quad (2.80)$$

ermöglicht eine Überführung der partiellen Differentialgleichungen, die aus den Axiomen (2.76) und (2.77) resultieren,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(x) &= \mathbf{f}^\varphi(x) & \text{für alle } x &\in \bar{\Omega}^\varphi \\ \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{n} &= \mathbf{g}^\varphi(x) & x &\in \Gamma_t^\varphi \end{aligned} \quad (2.81)$$

in eine äquivalente Variationsformulierung

$$\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi dV^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dV^\varphi + \int_{\Gamma_t^\varphi} \mathbf{g}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dA^\varphi \quad (2.82)$$

mit den auf dem DIRICHLET Rand $\Gamma_u^\varphi = \Gamma^\varphi - \Gamma_t^\varphi$ verschwindenden Variationen $\boldsymbol{\theta}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diese schwache Form des Gleichgewichts ist auch als *Prinzip der virtuellen Arbeit* bekannt.

Gleichgewicht in der Referenzkonfiguration

Über eine PIOLA Transformation

$$\mathbf{P}(X) := (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{Cof} \mathbf{F} \quad x = \boldsymbol{\varphi}(X) \quad (2.83)$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{P}(X) &= (\det \mathbf{F}) \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(x) \\ \mathbf{P}(X) \mathbf{N} dA &= \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{n} dA^\varphi \end{aligned} \quad (2.84)$$

wird das räumliche Spannungsfeld auf die Referenzkonfiguration bezogen und der 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor $\hat{\mathbf{P}}(X, \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3$ definiert. Die Divergenzstruktur

des elliptischen Differentialgleichungssystems bleibt dabei erhalten

$$\begin{aligned} -\operatorname{Div} \mathbf{P}(X) &= \mathbf{f}(X) && \text{für alle } X \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{P}(X) \mathbf{N} &= \mathbf{g}(X) && X \in \Gamma_t \\ \mathbf{P} \mathbf{F}^T &= \mathbf{F} \mathbf{P}^T, \end{aligned} \quad (2.85)$$

und die äquivalente Variationsformulierung lautet:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \boldsymbol{\theta} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dA. \quad (2.86)$$

Für die Lastvektoren gilt analog zu (2.21) und (2.47)

$$\mathbf{f}(X) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{f}^\varphi(x) \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(X) = \|\mathbf{Cof} \mathbf{F} \mathbf{N}\| \mathbf{g}^\varphi(x). \quad (2.87)$$

Der symmetrische 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor berechnet sich über

$$\mathbf{S}(X) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}(X) \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{S}}(X, \mathbf{F}) \in \mathbb{S}^3. \quad (2.88)$$

Die Formulierung des Gleichgewichts erfolgt stets in energetisch konjugierten Variablen (Bruhns 1987; Bařar & Weichert 2000; Haupt 2000).

Kapitel 3

Aspekte der Materialmodellierung

Da das Randwertproblem mit den Gleichgewichtsbedingungen allein nicht lösbar ist, werden materialspezifische Gleichungen zur Berechnung des Deformations- und Spannungszustandes benötigt. Physikalisch sind die konstitutiven Gleichungen über das unterschiedliche Verhalten eines jeden Materials auf äußere Einwirkungen motiviert. Mit dem *Prinzip der Materialobjektivität* und unter Ausnutzung gegebener Symmetrien des Materials kann die Klasse der Abbildungen zur Beschreibung des Materialverhaltens reduziert werden. Die Symmetrieeigenschaften des Materials sind in der unverformten Konfiguration definiert. Das legt bei Anisotropie eine LAGRANGE Betrachtungsweise nahe. Bei gummiartigen oder biologisch weichen Strukturen wie Arterien, Muskeln oder Haut kann aufgrund vernachlässigbar kleiner Hysterese-Effekte elastisches Materialverhalten postuliert werden.

Eine ausführliche Darstellung der thermodynamischen Grundlagen findet sich in (Truesdell & Noll 1992; Bruhns 1992; Haupt 2000; Malvern 1969). Auf Aspekte der Elastizitätstheorie wird in (Ciarlet 1988; Başar & Weichert 2000; Green & Zerna 1968; Ogden 1984; Stein & Barthold 1995) besonders eingegangen.

3.1 Thermodynamische Grundlagen

Grundlegende Prinzipien allgemeiner konstitutiver Gleichungen sind nach (Truesdell & Noll 1992)

- *Das Prinzip des Determinismus*, d.h. die Spannungen sind über die Geschichte des Zustandes eines Körpers festgelegt.
- *Das Prinzip von der lokalen Wirkung*, d.h. die Spannungen sind von Bewegungen außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung unabhängig.
- *Das Prinzip der Objektivität*
- *Das Prinzip des nachlassenden Gedächtnisses*, d.h. die momentanen Spannungen setzen sich aus einem Gleichgewichtsanteil und einem Gedächtnisanteil, welcher mit verstreichender Zeit abklingt, zusammen.

Eine mögliche Klassifizierung allgemeinen Materialverhaltens ist eine Unterteilung (Bruhns 1992) in

- *geschwindigkeitsunabhängige Phänomene*, die eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände darstellen, wie z.B. in der Elastizität bei reversiblen, energieerhaltenden und in der Plastizität bei irreversiblen, dissipativen Prozessen, und in
- *geschwindigkeitsabhängige Phänomene*, die sich als Funktional der Prozeßgeschwindigkeit durch thermodynamische Nicht-Gleichgewichtszustände bei viskosem Materialverhalten in Form von Relaxation und Kriechen charakterisieren lassen, wie z.B. bei Viskoelastizität und Viskoplastizität.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{u} = \dot{W} - \frac{1}{\rho^\varphi} \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad (3.1)$$

besagt, daß die zeitliche Änderung der spezifischen inneren Energien gleich der Summe aus inkrementeller Verzerrungsarbeit \dot{W} und der zugeführten Wärme in Form von Energieflußdichte \mathbf{q} und spezifischen Energiequellen r ist. Die innere Energie ist abhängig von thermodynamischen Zustandsvariablen wie den reversiblen Verzerrungen \mathbf{E}_r , der spezifischen Entropie s sowie den internen Variablen q_n , welche den Verfestigungszustand charakterisieren

$$u = u(\mathbf{E}_r, s, q_n). \quad (3.2)$$

Es werden isotherme Prozesse vorausgesetzt, d.h. es liegt keine thermo-mechanische Kopplung vor und das Materialverhalten kann näherungsweise als geschwindigkeitsunabhängig angesehen werden. Bei allgemeinen, aus elastischen und inelastischen Anteilen bestehenden Deformationen lassen sich Entropie und reversible Verzerrungen schwer messen. Deshalb werden sie mit Hilfe einer doppelten LEGENDRE Transformation durch die Temperatur T und den Spannungen \mathbf{S} ersetzt. Das führt zur spezifischen Enthalpie

$$\psi = \psi(\mathbf{S}, T, q_n) = u - \frac{1}{\rho} \mathbf{S} : \mathbf{E}_r - T s. \quad (3.3)$$

Reversible Formänderungen werden über die *thermische Zustandsgleichung* beschrieben

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(\mathbf{S}, T, q_n) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{S}}. \quad (3.4)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gibt in Form der CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung

$$\dot{s}_d = \frac{1}{T} \dot{W}_d - \frac{1}{\rho^\varphi T^2} q_i T_{,i} \geq 0 \quad (3.5)$$

die Prozeßrichtung thermodynamischer Vorgänge mit den dissipativen Anteilen $(\dots)_d$ an und wird häufig benutzt, um bei der Gestaltung von Materialmodellen deren Grenzen auszutesten oder auch als Integrabilitätsbedingung für Materialparameter zum Aufbau von Funktionalen.

3.2 Elastizität

In der Elastizität werden reversible, isotherme Prozesse vorausgesetzt, das sind umkehrbare Vorgänge ohne Vorgabe der Prozeßrichtung mit konstanter Prozeßtemperatur. Der CAUCHY Spannungstensor $\sigma(x)$ ist daher an jedem Punkt $x = \varphi(X) \in \bar{\Omega}^\varphi$ vollständig über den Deformationsgradienten $\nabla\varphi(X)$ des entsprechenden Punktes $X \in \bar{\Omega}$ der Referenzkonfiguration festgelegt (Ciarlet 1988). Damit ist der Spannungszustand unabhängig von der Deformationsgeschichte; die Spannungsarbeit jedoch meist wegabhängig. Die Antwortfunktion für elastisches Materialverhalten läßt sich über die Abbildungsvorschrift

$$\hat{\sigma} : (X, \mathbf{F}) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \hat{\sigma}(X, \mathbf{F}) \in \mathbb{S}^3 \quad (3.6)$$

in der Momentankonfiguration formulieren, so daß für die konstitutiven Beziehungen folgt:

$$\sigma(x) = \hat{\sigma}(X, \nabla\varphi) \quad \text{und} \quad x = \varphi(X). \quad (3.7)$$

Analog ergeben sich die Gleichungen (3.6) und (3.7) mit dem 1. oder 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor. Die Definition elastischen Materials impliziert die Eigenschaft, daß an einem beliebigen Punkt $X \in \bar{\Omega}$ der Referenzkonfiguration und für einen beliebigen Deformationsgradienten $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ eine Deformation $\varphi(X)$ mit $\nabla\varphi(X) = \mathbf{F}$ existiert. Dies schließt Materialien mit inneren Zwangsbedingungen, wie die der Inkompressibilität, *a priori* aus, da ein solches Material nur eine beschränkte Klasse an Deformationen ausführen kann (Ciarlet 1988). Die konstitutiven Gleichungen sind aufgrund der geforderten Invarianz des Spannungsfeldes gegenüber Starrkörpertranslationen und Rotationen unabhängig von der Deformation $\varphi(X)$.

Prinzip der Objektivität

Ein Axiom der Physik besagt, daß jede beobachtbare Größe unabhängig von demjenigen Bezugssystem sein muß, in dem sie berechnet wird. Über das Prinzip der Objektivität wird für den CAUCHY Spannungsvektor \mathbf{t}

$$\mathbf{t}(\mathbf{Q}\mathbf{n}) = \mathbf{Q} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \in S_1 \quad (3.8)$$

unter Verwendung des CAUCHY Theorems (2.78)

$$\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega}^\varphi \in \mathbb{M}^3$$

die Klasse an Abbildungen $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ reduziert, welche zur Beschreibung der konstitutiven Gleichungen erforderlich sind (Ciarlet 1988). Die Spannungstensoren genügen der Objektivitätsforderung, wenn gilt

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) &= \mathbf{Q} \hat{\sigma}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T, & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) &= \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}), & \mathbf{F} &\in \mathbb{M}_+^3, & \mathbf{Q} &\in \mathbb{O}_+^3 \\ \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) &= \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) & & & \mathbf{C} &\in \mathbb{S}_>^3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Materielle Symmetrie mit dem Sonderfall der Isotropie

Die Symmetrieeigenschaften eines gegebenen Materials sind in der Referenzkonfiguration definiert. Können bei einer Formulierung der Spannungsantwort im Deformationsgradienten-

ten nur Drehsymmetrien des Materials berücksichtigt werden

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{Q} \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})\mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X^* \subseteq \mathbb{O}_+^3, \quad (3.10)$$

sind es bei einer materiellen Formulierung der Spannungsantwort im rechten CAUCHY-GREEN Tensor Rotationen und Spiegelungen mit der Gruppe symmetrischer Transformationen \mathbb{G}_X

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X \subseteq \mathbb{O}^3. \quad (3.11)$$

Isotropie ist gekennzeichnet durch die Richtungsunabhängigkeit des Kontinuums, d.h. es liegt Invarianz unter allen kontinuierlichen Drehungen und Spiegelungen der orthogonalen Gruppe $\mathbb{G}_X = \mathbb{O}^3$ vor. Daraus folgt eine Formulierung der Spannungsantwort im linken CAUCHY-GREEN Tensor

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}) \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X^* = \mathbb{O}_+^3. \quad (3.12)$$

RIVLIN-ERICKSEN Repräsentationstheorem

Unter Berücksichtigung des Prinzips der Materialobjektivität (3.9₁) und der Isotropie (3.12) lassen sich die konstitutiven Beziehungen (3.7) im RIVLIN-ERICKSEN Repräsentationstheorem

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}) = \beta_0(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{I} + \beta_1(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{B} + \beta_2(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{B}^2 \quad (3.13)$$

darstellen mit den reellwertigen Funktionen $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ abhängig von den Hauptinvarianten $\iota_{\mathbf{B}} = \{I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}\}$. Aus einer solchen Darstellung folgt, daß \mathbf{B} und $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B})$ für einen beliebigen Deformationszustand coaxial sind (Başar & Weichert 2000), d.h. die Hauptrichtungen sind für Spannungen und Verzerrungen identisch. Die Anzahl der unterschiedlichen Eigenwerte in den Verzerrungen verdeutlicht die charakteristischen Merkmale der Spannungsfunktion. Folgt bei drei verschiedenen Eigenwerten eine Formulierung nach Gleichung (3.13), resultiert bei zwei unterschiedlichen bzw. drei identischen Eigenwerten

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}) = \beta_0(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{I} + \beta_1(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}) = \beta_0(\iota_{\mathbf{B}})\mathbf{I}. \quad (3.14)$$

Für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor lautet das Repräsentationstheorem

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \gamma_0(\iota_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \gamma_1(\iota_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \gamma_2(\iota_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^2 \quad (3.15)$$

mit den reellwertigen Funktionen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ abhängig von der Integritätsbasis $\iota_{\mathbf{C}} = \{I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}\}$. Die Hauptinvarianten beider CAUCHY-GREEN Tensoren sind identisch.

Klassische Elastizitätstheorie

Unter Verwendung des RIVLIN-ERICKSEN Repräsentationstheorems (3.15) existiert eine Antwortfunktion $\tilde{\mathbf{S}} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \check{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\mathbf{E}), \quad (3.16)$$

die für kleine Werte in $\|\mathbf{E}\|$, d.h. für moderate Dehnungen (Ciarlet 1988), gültig ist.

Die Materialparameter werden nun für kleine Verzerrungen nahe der spannungsfreien Ausgangskonfiguration bestimmt.

Die Deformation $\varphi^\varepsilon : X \in \bar{\Omega}$ sei linear abhängig vom infinitesimalen Parameter ε , sein Deformationsgradient diesbezüglich konstant und das Vektorfeld $\xi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von ε unabhängig

$$\varphi^\varepsilon = \mathbf{X} + \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{X} + \varepsilon \xi + o(\varepsilon) \Rightarrow \nabla \varphi^\varepsilon = \mathbf{I} + \varepsilon \nabla \xi + o(\varepsilon). \quad (3.17)$$

Dann berechnen sich die wahren Spannungen nahe der spannungsfreien Ausgangskonfiguration mit $\mathbf{G} := \nabla \xi$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \varepsilon \{ \lambda (\text{tr} \mathbf{G}) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{G}^T + \mathbf{G}) \} + o(\varepsilon). \quad (3.18)$$

Bedingungen für den Wertebereich der Materialparameter werden mittels *idealer* Experimente und physikalischer Intuition ausgehend von Körpern einfacher geometrischer Form wie einem Quader unter Schubbeanspruchung, einem Kreiszyylinder unter einaxialem Zug sowie einer Kugel unter Innendruck bestimmt. Das prinzipielle Vorgehen soll anhand des letztgenannten Beispiels erläutert werden.

Das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^\varepsilon = -\varepsilon \mathbf{X} + o(\varepsilon)$ korrespondiert zum Deformationszustand $\mathbf{G} = -\mathbf{I}$ mit der Spannungsfunktion nach (3.18)

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = -\varepsilon (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I} + o(\varepsilon) \quad (3.19)$$

und den erwarteten CAUCHY Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = -\pi \varepsilon \mathbf{I} + o(\varepsilon) \quad \text{mit } \varepsilon, \pi > 0. \quad (3.20)$$

Es resultiert die Ungleichung $3\lambda + 2\mu > 0$ für den Kompressionsmodul $\kappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$, der die relative Änderung des Druckes $\pi^\varepsilon = \pi \varepsilon$ bezogen auf den Kugelradius beschreibt.

3.3 Hyperelastizität

Mit dem Postulat der Existenz einer Verzerrungsenergiefunktion $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich der 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor über den Gradienten der Verzerrungsenergiefunktion

$$\hat{\mathbf{P}}(X, \mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(X, \mathbf{F}) \quad \text{für alle } X \in \bar{\Omega}, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (3.21)$$

Daher sind Be- und Entlastungspfad identisch, d.h. auf einem geschlossenen Deformationspfad wird keine Energie dissipiert und die innere Energie berechnet sich über $W = \mathbf{P}:\mathbf{F}$. Zur Gewährleistung positiver Verzerrungsenergie wird die Elliptizität des Elastizitätstensors gefordert

$$\hat{\mathbf{C}}(X, \mathbf{F}) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(X, \mathbf{F}) = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(X, \mathbf{F}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l, \quad (3.22)$$

d.h. es gilt für inkrementelle Energiezuwächse

$$dW = \hat{C}^{ijkl} F_{kl} dF_{ij} > 0 \quad \text{und} \quad \hat{C}^{ijkl} = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(X, \mathbf{F}). \quad (3.23)$$

Aus dem Funktional der totalen Energie

$$I(\boldsymbol{\psi}) = \{W_\Omega(\boldsymbol{\psi}) + [F(\boldsymbol{\psi}) + G(\boldsymbol{\psi})]\} \quad (3.24)$$

resultiert für die in der Tragstruktur gespeicherte innere Energie

$$W_\Omega(\boldsymbol{\psi}) = \int_{\mathcal{B}} \hat{W}(\nabla \boldsymbol{\psi}) \, dV \quad (3.25)$$

bei konservativer Volumenlast

$$F : \{\boldsymbol{\psi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \rightarrow F(\boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega} \hat{F}(\boldsymbol{\psi}) \, dV \quad (3.26)$$

mit der GÂTEAUX Ableitung

$$F'(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dV \quad (3.27)$$

und konservativer Flächenlast

$$G : \{\boldsymbol{\psi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \rightarrow G(\boldsymbol{\psi}) = \int_{\Gamma_t} \hat{G}(\boldsymbol{\psi}, \nabla \boldsymbol{\psi}) \, dA \quad (3.28)$$

mit

$$G'(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dA \quad (3.29)$$

das Prinzip der virtuellen Arbeit (2.86) aus der Extremalbedingung

$$I'(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \nabla \boldsymbol{\theta} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta} \, dA . \quad (3.30)$$

Unter allen kinematisch zulässigen Verformungen $\boldsymbol{\vartheta}$ stellt sich das Gleichgewicht für diejenige Verformung $\boldsymbol{\varphi}$ ein, welche das elastische Gesamtpotential $I'(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\theta} = 0$ minimiert

$$I(\boldsymbol{\varphi}) = \inf_{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\vartheta}} I(\boldsymbol{\psi}) \quad \text{mit } \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\vartheta} := \{\boldsymbol{\psi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3; \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}^\circ \text{ auf } \Gamma_u\} \quad (3.31)$$

für alle auf dem DIRICHLET Rand Γ_u verschwindenden Variationen $\boldsymbol{\theta}$. Das Variationsprinzip wird auch *Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials* genannt. Analog ist auch eine Formulierung des Variationsprinzips in anderen energetisch konjugierten Variablen möglich.

Prinzip der Objektivität

Analog zur CAUCHY Elastizität genügt eine Verzerrungsenergiefunktion $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dem Prinzip der Materialobjektivität mit

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) &= \hat{W}(\mathbf{F}) && \text{für alle } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3 \text{ und } \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3 \\ &= \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C}) && \text{mit } \tilde{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{R} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Über eine Berechnung des 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors (3.21) in Termen des Gradienten $\partial \tilde{W} / \partial \mathbf{C}$ resultiert der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor (Ciarlet 1988)

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \quad (3.33)$$

für alle $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ und dem GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor $\mathbf{E} \in \mathbb{S}_{>}^3$. Das Prinzip der Materialobjektivität und die Bedingung orientierungsbewahrender Deformationen $\det \mathbf{F} > 0$ führen dazu, daß die Konvexität der Verzerrungsenergiefunktion im Deformationsgradienten auszuschließen ist (Kap. 4.1).

Isotropie

Bei Isotropie läßt sich die Potentialfunktion mit der Eigenschaft

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{F} \mathbf{Q}) \quad \text{für alle } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3 \text{ und } \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3 \quad (3.34)$$

als symmetrische Funktion in den Eigenwerten des rechten CAUCHY-GREEN Tensors darstellen.

$$\tilde{W}(\mathbf{C}) = \tilde{W}(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T) = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \check{W}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) \quad (3.35)$$

Der KIRCHHOFF Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T = 2 \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) \mathbf{F}^T = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{B}}(\mathbf{B}) \mathbf{B} \quad (3.36)$$

mit $J = \det \mathbf{F}$ wird auch gewichteter CAUCHY Spannungstensor genannt. Die kontravarianten Komponenten

$$S^{ij} = \tau^{ij} \quad (3.37)$$

des 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensors und des KIRCHHOFF Spannungstensors sind identisch.

Kapitel 4

Simulation großer Dehnungen

Für die Modellierung hyperelastischen Materialverhaltens im Bereich großer Verzerrungen wird von dem, das Grenzverhalten vieler weicher Materialien charakterisierenden, Grundgedanken ausgegangen, daß *unendliche Spannungen durch gegen unendlich strebende Verzerrungen hervorgerufen werden* (Hencky 1928; Antman 1970; Ciarlet 1988). Eine solche Eigenschaft läßt sich nur schwer in Termen der Spannungsfunktion zur Repräsentation des Materialverhaltens darstellen (Antman 1983a; Antman 1983b) und korrespondiert bei Hyperelastizität zu der Forderung, daß die Verzerrungsenergiefunktion für diese Grenzfälle gegen unendlich strebt. Zur Gewährleistung der Existenz einer Lösung des strukturmechanischen Variationsproblems wird gefordert, daß die Verzerrungsenergiefunktion *polykonvex* ist und der *Coercivitätsungleichung* genügt (Antman 1970; Ball 1977; Ciarlet 1988). Die Anwendung von LIE Transformationsgruppen auf strukturmechanische Problemstellungen ermöglicht beispielsweise eine adäquate Beschreibung des Deformationsweges bei einer materiellen Betrachtungsweise.

4.1 Konvexität

In einem Vektorraum V ist ein Gebiet U konvex, wenn es zu jeden beliebigen zwei Punkten u_i und u_j auch ihre Verbindungsstrecke $[u_i, u_j]$ enthält. Zu jedem beliebigen Gebiet U existiert eine konvexe Hülle $\text{co}U$, welche als kleinst mögliche konvexe Menge durch alle denkbaren konvexen Kombinationen innerhalb diesen Gebietes geformt wird

$$\text{co}U = \sum_{p=1}^n \theta_p u_p \quad \text{mit} \quad \sum_{p=1}^n \theta_p = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \theta_p \leq 1, \quad u_p \in U. \quad (4.1)$$



Abb. 4.1: Konvexes Gebiet (a) und nicht konvexes Gebiet (b) mit konvexer Hülle

Die Konvexitätsbedingungen einer Funktion $J : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$, die auf dem konvexen Gebiet U des normierten Vektorraumraumes V definiert sind, lauten:

- Die Sekante zwischen zwei Punkten $u_i, u_j \in U$ ist größer als ihr Funktionswert (Abb. 4.2a)

$$J(\theta u_i + (1 - \theta)u_j) \leq \theta J(u_i) + (1 - \theta)J(u_j) \quad \theta \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

- Die Funktionswerte in jedem Punkt u_i des Gebietes U liegen oberhalb ihrer Tangentialebene (Abb. 4.2b)

$$J(u_j) \geq J(u_i) + J'(u_i)(u_j - u_i). \quad (4.3)$$

- Für die 2. Ableitung einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion J gilt

$$J''(u_i)(u_j - u_i, u_j - u_i) \geq 0. \quad (4.4)$$

Auf einem nichtkonvexen Gebiet U des Vektorraumes V ist die Konvexität einer Funktion J^* über ihre Konvexitätseigenschaft (4.2) auf der konvexen Hülle $\text{co}U$ gegeben (Abb. 4.3)

$$J^*(u_i) = J(u_i) \quad \text{mit } J : \text{co}U \rightarrow \mathbb{R}, \quad J^* : U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

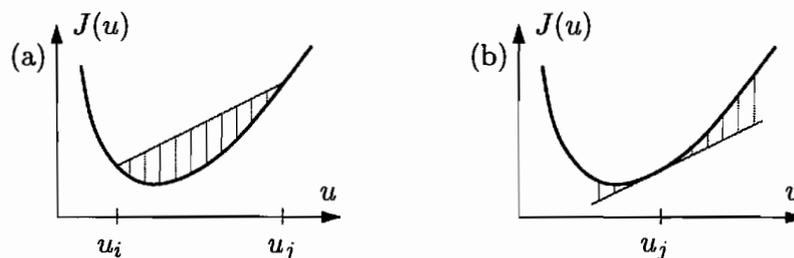


Abb. 4.2: Parallelen zwischen Konvexität (a) und einer Ableitung (b)

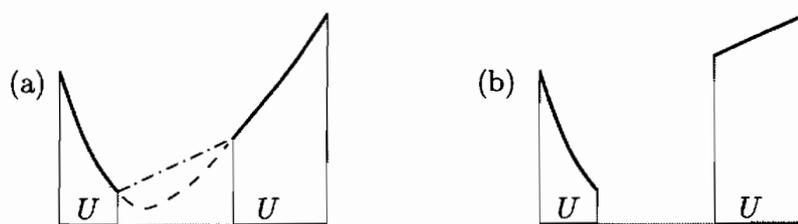


Abb. 4.3: Konvexe Funktion (a) und nichtkonvexe Funktion (b) auf einem nichtkonvexen Gebiet

Polykonvexität der Verzerrungsenergiefunktion. Obwohl die Konvexität der Verzerrungsenergiefunktion im Deformationsgradienten

$$\hat{W} : \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \hat{W}(\mathbf{F}) \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

beispielsweise in Form von $\mathbf{F} \rightarrow \text{tr} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \|\mathbf{F}\|^2$ das assoziierte strukturmechanische Minimierungsproblem direkt lösen würde, steht sie zu einigen grundlegenden Prinzipien der Physik im Widerspruch (Ciarlet 1988). Die explizite Abhängigkeit im Deformationsgradienten ist einerseits inkompatibel zur geforderten Simulierbarkeit extremer Stauchung (Antman 1970)

$$\lim_{\det \mathbf{F} \rightarrow 0^+} \hat{W}(\mathbf{F}) \neq +\infty \quad (4.7)$$

und führt andererseits unter Berücksichtigung des Prinzips der Materialobjektivität zu den folgenden Ungleichungen in den Eigenwerten der CAUCHY Spannungen

$$\tau_1 + \tau_2 \geq 0, \quad \tau_2 + \tau_3 \geq 0, \quad \tau_3 + \tau_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \tau_i = \lambda_i(\boldsymbol{\sigma}) \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Diese Ungleichungen werden schon bei einer Kugel unter Innendruck nicht erfüllt (Coleman & Noll 1959; Truesdell & Noll 1992). Mit einer solchen Forderung wird daher die Simulierbarkeit einer Spannungsantwort auf eine allgemeine Verformung stark eingeschränkt.

Der Deformationsgradient ist wegen der Restriktion orientierungsbewahrender Verformungen auf einem nichtkonvexen Gebiet definiert. Deshalb ist die Konvexität der Verzerrungsenergiefunktion über ihre Konvexitätseigenschaft auf der konvexen Hülle gegeben. In der Elastizität sind zwei konvexe Hüllen von besonderem Interesse:

$$\text{co} \mathbb{M}_+^3 = \mathbb{M}^3 \quad \text{und} \quad \mathbb{M}_+^3 = \{\mathbf{F} \in \mathbb{M}^3; \det \mathbf{F} > 0\} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{co}\{(\mathbf{F}, \mathbf{Cof} \mathbf{F}, \det \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}; \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3\} \\ = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Weil die Konvexität der Verzerrungsenergiefunktion im Deformationsgradienten auszuschließen ist, führte BALL (1977) eine schwächere, physikalisch sinnvolle Forderung ein, nämlich die der *Polykonvexität*.

Die Bedingung für Polykonvexität lautet (Ciarlet 1988):

Eine Verzerrungsenergiefunktion $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist polykonvex, wenn eine konvexe Funktion

$$\mathbf{W} : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad (4.11)$$

existiert, so daß gilt

$$\hat{W}(\mathbf{F}) := \mathbf{W}(\mathbf{F}, \mathbf{Cof} \mathbf{F}, \det \mathbf{F}) \quad \text{für alle } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (4.12)$$

Dem Konzept der Polykonvexität entsprechend baut sich eine Verzerrungsenergiefunktion aus konvexen Funktionen dreier unabhängiger Variablen auf

$$\hat{W}(\mathbf{F}) := \mathbf{W}(\mathbf{F}, \mathbf{H}, J) \quad \mathbf{F}, \mathbf{H}, J \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, \infty[, \quad (4.13)$$

denn weder der Cofaktor-Tensor $\mathbf{Cof} \mathbf{F}$ noch die Determinante $\det \mathbf{F}$ ist eine konvexe Funktion in $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$.

Eine einfache polykonvexe Verzerrungsenergiefunktion ist nach (Ciarlet 1988) das kompressible MOONEY-RIVLIN Modell in Form von

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = a \|\mathbf{F}\|^2 + b \|\mathbf{CofF}\|^2 + \Gamma(\det\mathbf{F}) + e \quad a, b > 0, e \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

mit einer konvexen Funktion $\Gamma(\det\mathbf{F})$. Der Term e ist so zu wählen, daß die Referenzkonfiguration frei von Verzerrungsenergie ist.

4.2 Coercivität

Die Formulierung eines hyperelastischen Materialmodells für endliche Verzerrungen setzt die Simulierbarkeit des folgenden intuitiv motivierten Grenzverhaltens voraus:

Die Verzerrungsenergiefunktion soll für gegen unendlich strebende Dehnungen und Stauchungen ebenfalls gegen unendlich gehen.

Das bedeutet für die Argumente der Verzerrungsenergiefunktion (Ciarlet 1988)

- bei einer Formulierung in Eigenwerten, daß die Verzerrungsenergie gegen unendlich strebt, wenn

– bei extrem großer Stauchung einer der Eigenwerte gegen Null geht

$$\lambda_i(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

– bei extrem großer Dehnung einer der Eigenwerte gegen Unendlich geht

$$\lambda_i(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad (4.16)$$

- bei einer Formulierung in \mathbf{F} , \mathbf{CofF} , $\det\mathbf{F}$ dem Konzept der Polykonvexität entsprechend, daß die Verzerrungsenergie gegen unendlich strebt, wenn

– ein differentielles Volumenelement unter allseitigem Druck zu einem Punkt degeneriert, d.h. es gilt

$$\det\mathbf{F} \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty, \quad (4.17)$$

– ein differentielles Linienelement große Dehnungen erfährt oder der Flächeninhalt eines differentiellen Flächenelementes unter biaxialer Zugbeanspruchung sehr groß wird oder sich ein differentielles Volumenelement entsprechend aufbläht

$$\{\|\mathbf{F}\| + \|\mathbf{CofF}\| + \det\mathbf{F}\} \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Eine strengere Bedingung zur Simulation endlicher Dehnung des Materials ist die Coercivitätsungleichung

$$\hat{W}(\mathbf{F}) \geq \alpha\{\|\mathbf{F}\|^p + \|\mathbf{CofF}\|^q + (\det\mathbf{F})^r\} + \beta \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad (4.19)$$

mit

$$p \geq 2, \quad q \geq \frac{p}{p-1}, \quad r > 1. \quad (4.20)$$

Die Coercivitätsungleichung ist ein Maß für den Widerstand des Materials und gewährleistet neben positiver Verzerrungsenergie eine Mindeststeigung der Verzerrungsenergiefunktion in der L^p -Norm von \mathbf{F} , \mathbf{CofF} und $\det\mathbf{F}$ (Ciarlet 1988). Eine solche Forderung ist sinnvoll, da beispielsweise für eine Membran unter Innendruck keine Lösung existiert, wenn die Verzerrungsenergiefunktion nicht hinreichend schnell in der Norm des Deformationsgradienten wächst (Antman 1970).

Gelöst wird das strukturmechanische Variationsproblem (2.86) in den passenden HILBERT Räumen (Braess 1992). Sind die deformationsabhängigen Tensorfelder im BANACH Raum¹ $L^p = W^{p,m}$ hinreichend oft im Sinne einer Distribution differenzierbar, dann ist die POINCARÉ Ungleichung (Ciarlet 1988; Braess 1992) erfüllt und es existiert unter Berücksichtigung von Polykonvexität und Coercivität eine klassische Lösung² des strukturmechanischen Variationsproblems (3.24) mit den gesuchten Deformationen $\varphi \in \mathfrak{V}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} := \{ \psi : W^{1,p}(\Omega), \mathbf{Cof}\nabla\psi \in L^q(\Omega), \det\nabla\psi \in L^r(\Omega), \\ \psi = \varphi_0 \text{ auf } \Gamma_0, \det\nabla\psi > 0 \text{ in } \Omega \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

so daß $I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathfrak{V}} I(\psi)$ erfüllt ist.

4.3 Deformationsprozeß

Gewöhnlich tauchen in der Physik LIE Gruppen als Transformation zur Lösung von Differentialgleichungen auf (Euler & Steeb 1992). Eine LIE Transformationsgruppe \mathbb{G} operiert auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \Omega$, wenn eine differenzierbare Abbildung existiert

$$\zeta : \mathbb{G} \times \Omega \rightarrow \Omega \quad (4.22)$$

mit $\zeta(g_1 g_2, \mathbf{y}) = \zeta(g_1, \zeta(g_2, \mathbf{y}))$ und $\zeta(e, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, der Identität e , den Gruppenelementen $g_1, g_2, e \in \mathbb{G}$ und $\mathbf{y} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Entspricht die LIE Gruppe einer klassischen Gruppe³, folgt

$$\mathbf{y}' = \zeta(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (4.23)$$

Kontinuierliche Transformationen können bei festem $\mathbf{y} \in \Omega$ beispielsweise über eine einparametrische Funktionenschar $\zeta_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beschrieben werden

$$\mathbf{y}' = \zeta_{\mathbf{y}}(\varepsilon) = \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{y}. \quad (4.24)$$

¹Der BANACH Raum beinhaltet die L^p -Norm und es liegt m -fache Differenzierbarkeit im Sinne einer Distribution vor.

²Die Lösung des Randwertproblems wird durch Funktionen gestützt, welche die Differentialgleichungen 2. Ordnung unter Berücksichtigung der gegebenen DIRICHLET und NEUMANN Randbedingungen erfüllen. Sie stellen eine klassische Lösung dar.

³Eine klassische LIE Gruppe ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Matrizen \mathbb{M}^3 wie die Gruppe der orthogonalen Matrizen \mathbb{O}^3 oder die der speziellen orthogonalen Matrizen \mathbb{O}_+^3 , die eine differenzierbare, glatte Fläche in dem Raum $\mathcal{M}^3 = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ darstellt. Die Multiplikation und die Inversenbildung sind differenzierbare Abbildungen.

Hierzu ist die Einparameter-LIE-Transformationsgruppe auf Standardform zu reparametrisieren (Euler & Steeb 1992), d.h. die Zusammensetzungsvorschrift ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \mathbf{A}(\varepsilon_2) \mathbf{A}(\varepsilon_1) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Für die Identität $\varepsilon = 0$ gilt $\mathbf{A}(0) = \mathbf{I}$ und für die Inverse $\mathbf{A}^{-1}(\varepsilon) = \mathbf{A}(-\varepsilon)$. Über eine TAYLOR Reihe resultieren die Funktionswerte nahe des Entwicklungspunktes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\varepsilon) &= \mathbf{A}(0) + \varepsilon \left. \frac{d\mathbf{A}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2\mathbf{A}}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^3) \\ &= \mathbf{A}(0) + \delta\mathbf{A} + \frac{1}{2!} \delta^2\mathbf{A} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit der Ableitung in $\varepsilon = 0$ und dem infinitesimalen Generator $\overset{+}{\mathbf{A}}$

$$\delta\mathbf{A} = \varepsilon \overset{+}{\mathbf{A}} = \varepsilon \left. \frac{d\mathbf{A}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (4.27)$$

Für höhere Variationen gilt

$$\delta^k \mathbf{A} = \delta(\delta^{k-1} \mathbf{A}). \quad (4.28)$$

Die Reparametrisierung einer LIE Gruppe ist die exponentielle Abbildung⁴

$$\mathbf{A} = \exp(\varepsilon \overset{+}{\mathbf{A}}) = \exp(\delta\mathbf{A}). \quad (4.29)$$

Starrkörperrotationen. Nimmt man eine Kurve $\mathbf{R}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-a, a)$ von orthogonalen Matrizen mit $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$, so folgt aus der Gleichung $\mathbf{R}^T(\varepsilon) \mathbf{R}(\varepsilon) = \mathbf{I}$, daß $\mathbf{R}'(0)$, als der Tangentenvektor an $\mathbf{R}(\varepsilon)$, schiefsymmetrisch ist, d.h. die Tangentialebene an die Fläche $\mathcal{O}_+^3 \subset \mathcal{M}^3$ besteht aus den schiefsymmetrischen Matrizen. Die Tangentialebene der schiefsymmetrischen Matrizen ist die LIE Algebra zu \mathcal{O}_+^3 . Eine Reparametrisierung der Einparameter-LIE-Transformationsgruppe ist die exponentielle Abbildung

$$\mathbf{R} = \exp(\varepsilon \hat{\boldsymbol{\nu}}) \quad (4.30)$$

mit

$$\mathcal{o}_+^3 := \{\hat{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \mid \hat{\boldsymbol{\nu}} + \hat{\boldsymbol{\nu}}^T = \mathbf{0}\} \quad (4.31)$$

und

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \right|_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{d\mathbf{R}^T}{d\varepsilon} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{d\varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \hat{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{R}(0) + \mathbf{R}^T(0) \hat{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁴Nach dem 1. *Fundamentaltheorem* von LIE ist die Reparametrisierung der LIE Gruppe äquivalent zum Lösen einer Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{y}'}{d\varepsilon} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}') \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{y}, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$$

im Tangentenvektorraum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Eine Lösung ist die exponentielle Abbildung

$$\mathbf{y}' = \exp(\varepsilon Z) \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad Z = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \cdot \nabla$$

mit dem NABLA Operator ∇ . Die Lösungen der Differentialgleichung müssen nicht für alle ε definiert sein. Es ist ausreichend, wenn sie lokal in einer kleinen Umgebung existieren. Der infinitesimale Generator Z ist das LIE-symmetrische Vektorfeld einer Einparameter-LIE-Transformationsgruppe (Euler & Steeb 1992). Bei Mehrparameter-LIE-Transformationsgruppen bestehen häufig funktionale Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Parametern. Die Reparametrisierung einer solchen LIE-Transformationsgruppe ist dann äquivalent zur Lösung eines Differentialgleichungssystems.

Analog lassen sich finite Rotationen über folgende geschlossene Formel ermitteln

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (4.33)$$

Bei einer geometrisch nichtlinearen Strukturanalyse berechnet sich der Rotationstensor im $(k+1)$ -ten Iterationsschritt mit

$$\mathbf{R}^{k+1} = \exp(\varepsilon \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{k+1}) \mathbf{R}^k. \quad (4.34)$$

EULER Verzerrungen. Bei inelastischem Materialverhalten bildet nur der reversible Anteil in den Verzerrungen eine Zustandsvariable. Mit einem hypoelastischen Materialmodell können elastische Verzerrungsraten abhängig von einer Fließbedingung in den CAUCHY Spannungen berechnet werden. Die objektive logarithmische Zeitableitung $(\dots)^{\text{lg}}$ liefert für die in der Eigenprojektion (2.63) dargestellten HENCKY Verzerrungen den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor⁵

$$\ln \mathbf{V} = \ln \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{D} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = (\ln \mathbf{V})^{\text{lg}}. \quad (4.35)$$

Der Deformationsweg wird durch Addition logarithmischer Verzerrungsraten auf einen bekannten Verzerrungszustand $\ln \bar{\mathbf{V}}$ exakt beschrieben und der Grenzfall unendlicher Stauung physikalisch sinnvoll abgebildet.

LAGRANGE Verzerrungen. Wird der rechte CAUCHY-GREEN Tensor in seiner Spektraldarstellung (2.55) dargestellt $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$, kann der Deformationsprozeß exakt über eine exponentielle Abbildung in den Eigenwerten beschrieben werden

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^3 \exp(\delta \lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3] \quad (4.36)$$

$$\text{und} \quad \delta \lambda_i = \varepsilon_i \left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} \quad i = 1, 2, 3.$$

Bei hyperelastischem Materialverhalten berechnen sich die Verzerrungen in Abhängigkeit des Verschiebungsvektors \mathbf{u}

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}). \quad (4.37)$$

⁵Die wahren HENCKY Verzerrungen sind energetisch konjugiert zu den wahren CAUCHY Spannungen (Xiao, Bruhns & Meyers 1996).

Kapitel 5

Hyperelastisches isotropes Material

Auf der Grundlage bereits existierender Modelle zur Simulation großer elastischer Dehnungen in isotropem Material, die im allgemeinen durch viele Materialparameter gekennzeichnet sind (Rivlin 1960; Ogden 1972a), wird ein neues, auf einer exponentiellen Abbildung in den Hauptinvarianten basierendes Materialmodell entwickelt, das sehr große Verzerrungen bei allgemeinen Deformationen mit sehr wenigen Materialparametern abbildet.

5.1 Die klassische Theorie

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, daß die klassische Theorie, die auf einfache Verformungen sowie Oberflächenlasten beschränkt ist, nahe der als spannungs- und verzerrungsfrei angenommenen Referenzkonfiguration linear elastisches Materialverhalten als einen Aspekt realen Materialverhaltens in ideeller Form repräsentiert (Truesdell & Noll 1992)

$$\tilde{W}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}\mathbf{E}^2 + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad \lambda, \mu > 0. \quad (5.1)$$

Die LAMÉ Konstanten λ und μ werden über Grunddeformationszustände (Kap. 3.2) ermittelt und auf allgemeine strukturmechanische Problemstellungen mit großen elastischen Dehnungen übertragen. Die Rückführung eines Materialmodells auf die klassische Theorie ermöglicht eine Formulierung der Materialparameter in Abhängigkeit der LAMÉ Konstanten. Diese sind auch bei großen Deformationen konstant.

Das St. Venant Kirchhoff Modell resultiert aus der Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung¹. Die Verzerrungsenergiefunktion ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{\lambda}{2} (\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}\mathbf{E}^2 \\ &= \mu(I_C - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{8} (I_C - 3)^2 - \frac{\mu}{2} (II_C - 3) \\ &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{4} \text{tr}\mathbf{C} + \frac{\lambda + 2\mu}{8} \text{tr}\mathbf{C}^2 + \frac{\lambda}{4} \text{tr}\mathbf{Cof}\mathbf{C} + \frac{6\mu + 9\lambda}{8}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹Literatur: (St. Venant 1844; Kirchhoff 1852; Ciarlet 1988; Bařar & Weichert 2000)

Das Materialverhalten ist durch eine lineare Spannungs-Dehnungsbeziehung $\mathbf{S} = \mathbf{C}:\mathbf{E}$ charakterisiert. Das Modell ist aufgrund des negativen Vorzeichens von $\text{tr}\mathbf{C}$ sowie fehlender Abhängigkeit von den Volumenänderungen weder polykonvex², noch erfüllt es die Coercivitätsungleichung. Es ist daher zur Simulation großer elastischer Formänderungen ungeeignet.

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} = \left(\frac{1}{2}\lambda(I_{\mathbf{C}} - 3) - \mu\right)\mathbf{I} + \mu\mathbf{C} \\ &= \left\{ \left(\frac{\lambda}{2} G^{rs} g_{rs} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2}\right) G^{ij} + \mu G^{ik} g_{kl} G^{lj} \right\} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j\end{aligned}\quad (5.3)$$

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\lambda}{2} G^{ij} G^{kl} + \mu G^{ik} G^{jl}\right) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (5.4)$$

5.2 Innere Zwangsbedingungen

Kinematische Restriktionen wie die Inkompressibilität oder die richtungsgebundene Inextensibilität³ schränken die Verformbarkeit einer Struktur *a priori* ein. Bei Hyperelastizität wird eine solche innere Zwangsbedingung über eine skalare Funktion $\hat{\gamma}(\mathbf{F})$ im Deformationsgradienten $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ formuliert (Truesdell & Noll 1992). Sie genügt dem Prinzip der Materialobjektivität mit

$$\hat{\gamma}(\mathbf{F}) = \tilde{\gamma}(\mathbf{C}) = 0. \quad (5.5)$$

5.2.1 Inkompressibilität

Wird exakte Inkompressibilität des Materials postuliert, dann ist das Volumen eines betrachteten Körpers unter einer gegebenen Beanspruchung konstant, d.h. es gilt

$$\det\mathbf{F} = \det\mathbf{C} = 1. \quad (5.6)$$

Die Verzerrungsenergiefunktion ist um die korrespondierende Zwangsfunktion $\tilde{\gamma}(\mathbf{C}) = \det\mathbf{C} - 1$ und die Spannungsfunktion um den hydrostatischen Druck $p\mathbf{I}$ zu erweitern.

Die Annahme eines Verschiebungsfeldes schließt inkompressibles Material bei der Berechnung einer Spannungsantwort für einige Deformationszustände aus (Ciarlet 1988). Dennoch wurden die ersten Materialmodelle für gummiartige Materialien unter der Annahme exakter Inkompressibilität entwickelt, auch wenn diese thermodynamisch nicht konsistent ist (Ogden 1972b).

Bei einer Formulierung in den Eigenwerten des rechten CAUCHY-GREEN Tensors kann die Inkompressibilitätsbedingung in die Kinematik eingeflochten werden

$$\det\mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (5.7)$$

²Ein genauer Nachweis über die fehlende Polykonvexität des ST. VENANT KIRCHHOFF Modells ist in (Ciarlet 1988) aufgeführt.

³Die Bedingung der Inextensibilität kann ggf. bei hochfesten faserverstärkten Laminaten sinnvoll sein (Spencer 1984).

5.2.2 Nahezu inkompressibles Material

Basierend auf dem multiplikativen Split des Deformationsgradienten $\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}$ zur separaten Beschreibung von isochoren $\det \mathbf{F} \in]0, +\infty[$ und deviatorischen Verzerrungen $\bar{\mathbf{F}} \in \mathbf{SM}_+^3$, $\mathbf{Cof} \bar{\mathbf{F}} \in \mathbf{SM}_+^3$ mit

$$\mathbf{F} \in \mathbf{SM}_+^3 = \{\mathbf{F} \in \mathbf{M}^3; \det \mathbf{F} = +1\} \quad (5.8)$$

enthalten die ersten beiden Hauptinvarianten nur noch Verzerrungsanteile bezüglich der Gestaltänderung des Materials

$$\bar{I}_C = J^{-2/3} I_C, \quad \bar{II}_C = J^{-2/3} II_C, \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (5.9)$$

Eine hierauf basierende Verzerrungsenergiefunktion setzt sich additiv aus einem volumetrischen und einem deviatorischen Teil zusammen⁴

$$W = \check{W}(\bar{I}_C, \bar{II}_C) + \hat{U}(J); \quad (5.10)$$

die Spannungen entsprechend aus einem Kugeltensor und einem Deviator. Häufig sind solche Modelle⁵ abhängig vom Kompressionsmodul $\kappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ und dem Schubmodul μ formuliert.

Kann auch nahezu inkompressibles Materialverhalten auf diese Weise effizient simuliert werden, treten bei moderat kompressiblem Material und großen volumetrischen Dehnungen, wie sie in porösen Medien vorkommen (Ehlers 1989), schon bei einem einfachen Zugversuch unphysikalische Ergebnisse auf (Ehlers & Eipper 1997).

5.3 Polynome in allgemeinen Potenzen

Materialmodelle, die auf einem polynomialen Ansatz in den Hauptinvarianten oder den Eigenwerten (Rivlin 1960; Ogden 1972a; Ciarlet 1988) basieren, enthalten sehr viele Materialparameter. Eine qualitativ bessere Strukturantwort kann mit Polynomen hohen Grades im allgemeinen nicht garantiert werden (Hartmann 2000).

5.3.1 Potenzreihe in den Hauptinvarianten

Im RIVLIN Modell⁶ wird vorausgesetzt, daß die unendlich oft differenzierbare Verzerrungsenergiefunktion eine konvergierende TAYLOR Reihe besitzt

$$\check{W}(I_C, II_C, III_C) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} c_{pqr} (I_C - 3)^p (II_C - 3)^q (III_C - 1)^r \quad (5.11)$$

mit den ganzzahligen Exponenten $p, q, r = 0, 1, 2, \dots$ und den deformationsunabhängigen Koeffizienten c_{pqr} . Mit dem Analogon zum Satz der klassischen Funktionentheorie, kann solch eine analytische Funktion in eine Potenzreihe um den Ursprung entwickelt

⁴Literatur: (Flory 1961; Penn 1970; Ogden 1986; Peng & Landel 1975; Fong & Penn 1975)

⁵Literatur: (Barthold 1993; van den Bogert & de Borst 1994; Miehe 1994; Reese & Wriggers 1995b; Başar & Weichert 2000)

⁶Literatur: (Rivlin & Saunders 1951; Rivlin & Saunders 1952; Rivlin 1960)

werden (Martensen 1968). Zur Gewährleistung verschwindender Verzerrungsenergie und Spannungsfreiheit in der Referenzkonfiguration gilt

$$c_{000} = 0 \quad \text{und} \quad c_{100} + 2c_{010} + c_{001} = 0. \quad (5.12)$$

Die Zahl auftretender Materialparameter wird gewöhnlich über Annahmen reduziert wie

$$W = \sum_{p=0}^{\infty} c_{p00} (I_{\mathbf{C}} - 3)^p + \sum_{q=0}^{\infty} c_{0q0} (\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3)^q + \sum_{r=0}^{\infty} c_{00r} (\mathbb{III}_{\mathbf{C}} - 1)^r. \quad (5.13)$$

Bei der Wahl eines Ansatzes ist mindestens ein nichtlinearer Term in einer Hauptinvarianten erforderlich, um die Rückführbarkeit auf die klassische Theorie zu gewährleisten. Das schließt den Fall $p = q = r = 1$ aus. Meistens werden nichtlineare Terme in den Volumenänderungen berücksichtigt oder es wird eine separate Funktion in den Volumenänderungen addiert.

Bei exakt erfüllter Inkompressibilitätsbedingung folgt das MOONEY-RIVLIN Modell

$$W = c_{100}(I_{\mathbf{C}} - 3) + c_{010}(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3), \quad (5.14)$$

mit dem Sonderfall des NEO-HOOKE Modells für $c_{010} = 0$

$$W = c_{100}(I_{\mathbf{C}} - 3). \quad (5.15)$$

Der Ansatz (Haupt & Sedlan 1999; Hartmann 2000)⁷

$$W = c_{100}(I_{\mathbf{C}} - 3) + c_{010}(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3) + c_{110}(I_{\mathbf{C}} - 3)(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3) + c_{020}(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3)^2 + c_{300}(I_{\mathbf{C}} - 3)^3 \quad (5.16)$$

liefert bei einer Zug-Torsions-Beanspruchung gute Ergebnisse. Die auftretenden Materialparameter können über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate identifiziert werden.

5.3.2 Polynome in allgemeinen Potenzen der Eigenwerte

Nach der Valanis-Landel Hypothese wird bei exakt erfüllter Inkompressibilität postuliert, daß sich die Verzerrungsenergiefunktion bei Isotropie aus symmetrischen Funktionen in jeweils einem Singulärwert des Deformationsgradienten aufbaut (Valanis & Landel 1967)

$$\dot{W}(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1) + \omega(v_2) + \omega(v_3). \quad (5.17)$$

Versuche zeigen eine gute Übereinstimmung bei Gummi im Bereich $0.2 \leq v_i \leq 3.5$ für verschiedene Funktionen $\omega(v_i)$ mit $i = 1, 2, 3$.

Das Ogden Modell basiert bei der Simulation endlicher Dehnungen auf einer Potenzreihe in den Singulärwerten des Deformationsgradienten (Ogden 1972a)

$$W = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} a_{pqr} \{ [v_1^p (v_2^q + v_3^q) + v_2^p (v_3^q + v_1^q) + v_3^p (v_1^q + v_2^q)] (v_1 v_2 v_3)^r - 6 \}. \quad (5.18)$$

⁷Alternative Ansätze sind in (James, Green & Simpson 1975; Isihara, Hashitsume & Tatibana 1951; Tschoegl 1971; Lion 1997; Treloar 1975) aufgeführt.

Die Bedingung der verschwindenden Verzerrungsenergie $\hat{W}(1, 1, 1) = 0$ und die der Spannungsfreiheit $\partial\hat{W}/\partial v_i(1, 1, 1) = 0$ mit $i = 1, 2, 3$ werden in der Referenzkonfiguration erfüllt. Die vorgeschlagene Verzerrungsenergiefunktion ist in den Singulärwerten des Deformationsgradienten v_i symmetrisch, d.h. die Verzerrungsenergiefunktion geht bei jeder beliebigen Permutation von v_1, v_2, v_3 in sich selbst über.

Als Sonderfall ist in (5.18) die bekannte Form des OGDEN Modells⁸ enthalten:

$$W = \sum_{p=0}^M \frac{\mu_p}{\alpha_p} (v_1^{\alpha_p} + v_2^{\alpha_p} + v_3^{\alpha_p} - 3) \quad \text{mit } v_1 v_2 v_3 = 1 \quad (5.19)$$

mit der Inkompressibilitätsbedingung und

$$\sum_{p=0}^M \mu_p \alpha_p = 2 \mu \quad (5.20)$$

als Nebenbedingung, den reellwertigen Parametern α_p, μ_p und dem Schubmodul μ . Die Beschränkung auf ganzzahlige Exponenten α_p ist aufgrund fehlender Produkte in den Eigenwerten nicht erforderlich (Ogden 1984).

Mit der VALANIS-LANDEL Hypothese folgt

$$W = \omega(v_1) + \omega(v_2) + \omega(v_3) \quad \text{mit } \omega(v_i) = \sum_{p=0}^M \frac{\mu_p}{\alpha_p} (v_i^{\alpha_p} - 1) \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Für $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ sind die Sonderfälle des MOONEY-RIVLIN Modells

$$W = c_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + c_2 (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} - 3) \quad (5.22)$$

und des NEO-HOOKE Modells

$$W = c_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad (5.23)$$

enthalten. Auf die Identifikation der Materialparameter wird in (Benjeddou, Jankovich & Hadhri 1993) eingegangen.

Das Modell nach Ciarlet ist eine Klasse polykonvexer Verzerrungsenergiefunktionen zur Modellierung des in (Kap. 4.2) beschriebenen Grenzverhaltens hyperelastischen Materials. Geprägt ist das Modell durch die geometrische Beschaffenheit einer Deformation $\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$. Korrespondiert die Längenänderung eines differentiellen Linienelementes zu $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ und $\mathbf{F} = \nabla \varphi$, kann eine flächenhafte Deformation mit $\mathbf{Cof} \mathbf{F}$ assoziiert werden. Die Determinante im Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ beschreibt die Volumenänderungen eines repräsentativen Volumenelementes.

Die vorgeschlagene Klasse an Verzerrungsenergiefunktionen läßt sich in den Singulärwerten des Deformationsgradienten formulieren

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{F}) &= \sum_{i=1}^M a_i (v_1^{\gamma_i} + v_2^{\gamma_i} + v_3^{\gamma_i}) \\ &+ \sum_{j=1}^N b_j ((v_1 v_2)^{\delta_j} + (v_2 v_3)^{\delta_j} + (v_3 v_1)^{\delta_j}) + \Gamma(v_1 v_2 v_3) \end{aligned} \quad (5.24)$$

⁸Literatur: (Ogden 1972b; Ogden 1972a; Ogden 1984; Treloar 1975)

und enthält die positiven, reellwertigen Materialparameter $a_i, \gamma_i, b_j, \delta_j > 0$ sowie eine konvexe Funktion $\Gamma :]0, +\infty[$ in den Volumenänderungen $J = \det \mathbf{F}$ zur Simulation endlicher Stauchung (Ciarlet & Geymonat 1982)

$$\Gamma(J) = cJ^2 - c^* \ln J \quad c, c^* > 0. \quad (5.25)$$

Die isotropen Verzerrungsenergiefunktionen sind in den Singulärwerten des Deformationsgradienten symmetrisch. Der polynomiale Ansatz läßt sich mit

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{C})^{\gamma/2} &= v_1^\gamma + v_2^\gamma + v_3^\gamma \\ \operatorname{tr}(\mathbf{CofC})^{\delta/2} &= (v_2 v_3)^\delta + (v_3 v_1)^\delta + (v_1 v_2)^\delta \end{aligned} \quad (5.26)$$

sowie $\det \mathbf{F} = v_1 v_2 v_3$ in folgende Darstellung überführen

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^M a_i \operatorname{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1}^N b_j \operatorname{tr}(\mathbf{CofF}^T \mathbf{F})^{\delta_j/2} + \Gamma(\det \mathbf{F}). \quad (5.27)$$

Polynome im rechten CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C}^{\gamma/2} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{\gamma/2} = \mathbf{U}^\gamma$ erinnern an die Familie der Verzerrungstensoren (2.37). Dabei können ganzzahlige Potenzen $\gamma \geq 3$ mit (2.60) über ein Polynom in $\{\mathbf{I}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^2\}$ ausgedrückt werden. Die Coercivitätsungleichung

$$\hat{W}(\mathbf{F}) \geq \alpha \{ \|\mathbf{F}\|^p + \|\mathbf{CofF}\|^q \} + \Gamma(\det \mathbf{F}) + \beta \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

ist mit $p = \max_i \gamma_i, q = \max_j \delta_j$ erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{C})^{\gamma/2} &\geq c_\gamma (\operatorname{tr} \mathbf{C})^{\gamma/2} = c_\gamma \|\mathbf{F}\|^\gamma \\ \operatorname{tr}(\mathbf{CofC})^{\delta/2} &\geq c_\delta (\operatorname{tr} \mathbf{CofC})^{\delta/2} = c_\delta \|\mathbf{CofF}\|^\delta. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Für diesen Typ von Verzerrungsenergiefunktionen ist die Existenz einer Lösung des strukturellen Variationsproblems gewährleistet.

5.4 Exponentielle Abbildung

Es wird eine polykonvexe Verzerrungsenergiefunktion entwickelt. Dabei werden endliche Stauchungen wie bisher über den Logarithmus in den Volumenänderungen abgebildet. Zur Simulation endlicher Dehnungen wird eine exponentielle Abbildung in den Hauptinvarianten vorgeschlagen. Das ermöglicht die Simulation endlicher Dehnungen mit nur wenigen Materialparametern.

Die geometrische Beschaffenheit einer Deformation $\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ spiegelt sich, dem Gedanken von CIARLET (1988) folgend, in den Argumenten einer polykonvexen Verzerrungsenergiefunktion $\mathbf{F}, \mathbf{CofF}, \det \mathbf{F}$ wider mit $\mathbf{F} = \nabla \varphi$. Berechnet werden die Längenänderungen differentieller Linienelemente über $\|\mathbf{F}\|^2$, Deformationen infolge Schub, Dehnung oder Stauchung eines im repräsentativen Volumenelement beliebig orientierten differentiellen Flächenelementes über $\|\mathbf{CofF}\|^2$; die Volumenänderungen folgen mit $(\det \mathbf{F})^2$. Das sind genau die Hauptinvarianten des rechten CAUCHY-GREEN Tensors, die in $\mathbf{F}, \mathbf{CofF}, \det \mathbf{F}$ konvexe Funktionen darstellen

$$I_C = \|\mathbf{F}\|^2, \quad II_C = \|\mathbf{CofF}\|^2, \quad III_C = (\det \mathbf{F})^2. \quad (5.30)$$

Es wird postuliert, daß sich eine Verzerrungsenergiefunktion additiv aus zwei Teilen zusammensetzt:

$$\check{W}(I_C, II_C, III_C) = \check{W}_D(I_C, II_C, III_C) + \check{W}_S(III_C). \quad (5.31)$$

Endliche Stauchungen werden über

$$\check{W}_S(III_C) = -\frac{1}{2} c^* \ln III_C \quad (5.32)$$

simuliert, weil der Logarithmus den Grenzfall *verschwindenden Volumens* aufgrund seiner Unstetigkeit an der Stelle Null physikalisch sinnvoll abbildet. Zur Beschreibung endlicher Dehnungen wird ein neues Konzept entwickelt, das über die Funktion W_D berücksichtigt wird.

Aus der intuitiven Idee, daß *gegen unendlich strebende Dehnungen zu gegen unendlich strebenden Spannungen* und bei hyperelastischem Materialverhalten darüberhinaus *zu gegen unendlich strebender Verzerrungsenergie führen*, folgt, daß die Verzerrungsenergie proportional zu ihrem Gradienten, den Spannungen, wächst. Dieses Phänomen wird durch eine Differentialgleichung folgenden Typs beschrieben

$$y' = \frac{1}{a} y \quad \text{mit} \quad y = y(x). \quad (5.33)$$

In der Physik werden solche Differentialgleichungen vielfach durch die Reparametrisierung einer LIE Transformationsgruppe gelöst (Kap. 4.3). Eine Lösung der Differentialgleichung ist dann die exponentielle Abbildung

$$y = e^{ax}. \quad (5.34)$$

Angewandt auf denjenigen Teil der Verzerrungsenergiefunktion, welcher große Dehnungen beschreibt, resultiert die Differentialgleichung

$$W_D = \mathbf{S}_D : \mathbf{E} = 2 \frac{\partial \check{W}_D}{\partial \bar{C}_{ij}}(\mathbf{C}) E_{ij} \quad (5.35)$$

mit den Komponenten des GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensors $E_{ij} = 1/2 (\bar{C}_{ij} - G_{ij})$ und den Komponenten des rechten CAUCHY-GREEN Tensors $\bar{C}_{ij} = g_{ij}$. Der Gradient ist der dehnungsbeschreibende Teil \mathbf{S}_D des 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensors \mathbf{S} . Damit eine Lösung des strukturmechanischen Variationsproblems gewährleistet ist, wird gefordert, daß die Verzerrungsenergiefunktion polykonvex ist (Kap. 4.1) und auf ihrer konvexen Hülle

$$\begin{aligned} \text{co}\{(\mathbf{F}, \mathbf{CofF}, \det \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}; \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3\} \\ = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[. \end{aligned}$$

definiert ist. Die Gruppe der allgemeinen linearen Matrizen \mathbb{M}^3 ist eine klassische LIE Gruppe und somit zur Transformation einer solchen Differentialgleichung geeignet. Es wird angenommen, daß sich die Verzerrungsenergiefunktion, analog zum Aufbau der Coercivitätsungleichung und der von CIARLET (1988) vorgeschlagenen Klasse an Verzerrungsenergiefunktionen, additiv aus konvexen Funktionen in $\mathbf{F}, \mathbf{CofF}, \det \mathbf{F}$ aufbaut

$$W_D = 2 \frac{\partial \check{W}_{D1}}{\partial C_{ij}}(\mathbf{C}) E_{ij} + 2 \frac{\partial \check{W}_{D2}}{\partial C_{ij}}(\mathbf{CofC}) E_{ij} + 2 \frac{\partial \check{W}_{D3}}{\partial C_{ij}}(\det \mathbf{C}) E_{ij} \quad (5.36)$$

mit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Für eine eindeutige Spannungsantwort ist die Abhängigkeit der Verzerrungsenergiefunktion von einer irreduziblen Funktionalbasis erforderlich. Die Hauptinvarianten (5.30) bilden eine solche Basis und korrespondieren darüberhinaus zu physikalischen Größen wie beispielsweise der Längenänderung eines differentiellen Linienelementes $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{\text{tr} \mathbf{F}^T \mathbf{F}} = \sqrt{I_{\mathbf{C}}}$. Es ist deshalb sinnvoll zu fordern, daß sich die Verzerrungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Funktionalbasis schreiben läßt

$$W_D(I_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}) = W_{D1}(I_{\mathbf{C}}) + W_{D2}(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}) + W_{D3}(\mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}). \quad (5.37)$$

Die Spannungsantwort berechnet sich nach der Kettenregel

$$\frac{1}{2} \mathbf{S}_D = \frac{\partial \check{W}_{D1}}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \check{W}_{D2}}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}} \frac{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \check{W}_{D3}}{\partial \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}} \frac{\partial \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.38)$$

mit

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = I_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}^T, \quad \frac{\partial \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}. \quad (5.39)$$

Für das Verhalten der Verzerrungsenergiefunktion und seines Gradienten im Bereich sehr großer Deformationen ist der Aufbau der Verzerrungsenergiefunktion in seiner Integritätsbasis entscheidend. Analog zu (5.34) ist die exponentielle Abbildung in den Hauptinvarianten ein physikalisch sinnvoller Ansatz zur Beschreibung sehr großer Dehnungen

$$\check{W}_D(I_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}) = e^{a(I_{\mathbf{C}}-3)} + e^{b(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-3)} + e^{c(\mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-1)} + k \quad (5.40)$$

mit den positiven Materialparametern $a, b, c > 0$. Die Bedingung verschwindender Verzerrungsenergie in der spannungslosen Referenzkonfiguration wird mit $k = -3$ erfüllt. Die Exponentialfunktion ist injektiv, konvex und wächst stärker als jede beliebige Potenz in ihrem Argument. Die Coercivitätsungleichung ist somit erfüllt und es kann die Existenz einer Lösung auf eine allgemeine Deformation gewährleistet werden. Dargestellt als Reihe mit der spannungslosen Ausgangskonfiguration als Entwicklungspunkt

$$W_{D1} = e^{a(I_{\mathbf{C}}-3)} = 1 + a(I_{\mathbf{C}} - 3) + \frac{1}{2!} a^2 (I_{\mathbf{C}} - 3)^2 + \dots \quad (5.41)$$

bildet der Abbruch nach dem linearen Glied

$$W_{D1} = 1 + a(I_{\mathbf{C}} - 3), \quad (5.42)$$

zusammen mit einem linearen Ansatz in den anderen Hauptinvarianten, die Basis für den dehnungsbeschreibenden Teil einer Verzerrungsenergiefunktion vom Typ eines kompressiblen MOONEY-RIVLIN Modells (4.14), das als Sonderfall enthalten ist.

$$\check{W}_D(I_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}) = a(I_{\mathbf{C}} - 3) + b(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3) + c(\mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 1) \quad (5.43)$$

Er beschreibt kleine Transformationen der Integritätsbasis in der Tangentialebene. Diese einfache, der Coercivitätsungleichung genügende, polykonvexe Verzerrungsenergiefunktion ist dennoch zur Simulation großer Dehnungen geeignet (Ciarlet 1988).

Die vorgeschlagene Verzerrungsenergiefunktion lautet für ein isotropes Material:

$$W = e^{a(I_{\mathbf{C}}-3)} + e^{b(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-3)} + e^{c(\mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-1)} - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3. \quad (5.44)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor folgt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}(I_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}) &= 2a e^{a(I_{\mathbf{C}}-3)} \mathbf{I} + 2b e^{b(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-3)} (I_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}) \\ &+ (2c \mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}} e^{c(\mathbb{I}\mathbb{I}_{\mathbf{C}}-1)} - c^*) \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Kapitel 6

Modellierung orthotropen Materials

Es wird eine Verzerrungsenergiefunktion zur Simulation allgemeiner Deformationszustände in kompressiblem, orthotropen Material entwickelt. Die vorgeschlagene irreduzible, algebraische Funktionalbasis resultiert aus der Zerlegung eines orthotropen repräsentativen Volumenelementes hinsichtlich der bevorzugten Materialrichtungen. Seine Tensorgeneratoren berechnen sich als Gradient der Funktionalbasis; sie sind vollständig und irreduzibel. Mit einer solchen irreduziblen Repräsentation lassen sich die für Isotropie entwickelten Konzepte der Polykonvexität und der Coercivität auf eine orthotrope Verzerrungsenergiefunktion übertragen. Die Simulation endlicher Dehnungen erfolgt über eine exponentielle Abbildung unter Berücksichtigung der geometrischen Beschaffenheit einer Deformation. Sehr große elastische Dehnungen, wie sie z.B. in biologisch weichen Strukturen auftreten, können mit diesem Modell adäquat simuliert werden.

6.1 Charakterisierung

Makroskopisch anisotrope Strukturen sind in den meisten praxisrelevanten Fällen orthotrop oder transversal isotrop. Die Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt in einem rechtshändigen, orthogonal kartesischen Bezugssystem $\{\mathbf{i}_{A1}, \mathbf{i}_{A2}, \mathbf{i}_{A3}\}$, dessen Koordinatenachsen nach den Hauptmaterialrichtungen orientiert sind. Die Strukturgeometrie wird über die Tangentenvektoren \mathbf{G}_i , mit den physikalischen Größen $\mathbf{G}_{\langle i \rangle} = \mathbf{G}_i / \sqrt{G_{ii}}$, erfaßt. In den meisten Fällen ist daher ein Wechsel des Bezugssystems auf Materialpunktebene erforderlich. Der Winkel α gibt, angelehnt an den Basisvektor $\mathbf{G}_{\langle 1 \rangle}$, die Faserrichtung an.

$$\mathbf{i}_{A1} = \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \vartheta} \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle} + \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \mathbf{G}_{\langle 2 \rangle} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{i}_{A2} = -\frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\sin \vartheta} \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle} + \frac{\cos \alpha}{\sin \vartheta} \mathbf{G}_{\langle 2 \rangle}$$

$$\cos \alpha = \mathbf{i}_{A1} \cdot \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle}, \quad \cos \vartheta = \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle} \cdot \mathbf{G}_{\langle 2 \rangle} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{i}_{A3} = \mathbf{i}_{A1} \times \mathbf{i}_{A2} \quad \|\mathbf{i}_{A1}\| = \|\mathbf{i}_{A2}\| = \|\mathbf{i}_{A3}\| = 1. \quad (6.3)$$

In einem solchen Bezugssystem $\{\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}\}$ bestimmen die Symmetrieeigenschaften des Materials den Aufbau des Elastizitätstensors. Seine Koeffizienten C^{ijkl} enthalten eine minimale Anzahl an nicht-Null Elementen, die unabhängig von der Metrik sind (Green & Adkins 1960; Schultz 1996)

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{i}_{A_i} \otimes \mathbf{i}_{A_j} \otimes \mathbf{i}_{A_k} \otimes \mathbf{i}_{A_l}. \quad (6.4)$$

Aufgrund symmetrischer Verzerrungen und Spannungen sowie positiver Verzerrungsenergie gilt

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{klij} = C^{ijlk}. \quad (6.5)$$

Ebenso ist die Charakterisierung der Anisotropie über die Eigenwerte möglich oder in den Invarianten des Elastizitätstensors (Xiao 1996a).

6.1.1 Lineare Elastizitätstheorie

Bei linearem Verschiebungsfeld und linearem Spannungszustand werden die Materialparameter an einfachen Systemen ermittelt und auf mehraxiale Beanspruchungen sowie auf strukturmechanische Problemstellungen mit großen elastischen Dehnungen übertragen (Jones 1975; Altenbach, Altenbach & Rikards 1996). Bedingungen für den Wertebereich der Ingenieurkonstanten (Anhang A) werden über die Nachgiebigkeitsbeziehung

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{S} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = (C_L^{-1})_{ijkl} S^{kl} \quad (6.6)$$

formuliert. Für die aus dem Zugversuch resultierenden Abhängigkeiten zwischen den Elastizitätsmoduln und den Querkontraktionszahlen folgt mit der Symmetrie der Nachgiebigkeit

$$\nu_{ij} = \nu_{ji} \frac{E_i}{E_j}. \quad (6.7)$$

Dabei beziehen sich die Elastizitätsmoduln E_i auf die Hauptmaterialrichtungen \mathbf{i}_{A_i} , die Querkontraktionszahlen ν_{ij} auf die Symmetrieebenen. Orthotropie ist gekennzeichnet durch insgesamt neun unabhängige Ingenieurkonstanten: drei Elastizitätsmoduln E_1, E_2, E_3 , drei Schubmoduln $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$ sowie drei Querkontraktionszahlen $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$. Für den Sonderfall der transversalen Isotropie geben fünf Ingenieurkonstanten die Eigenschaften des Materials parallel und senkrecht zur bevorzugten Materialrichtung an; im isotropen Fall sind es nur noch zwei.

Orthotropie

$$\begin{aligned}
C_L^{1111} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3}; & C_L^{2222} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3}; & C_L^{3333} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} \\
C_L^{1122} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta E_1 E_3}; & C_L^{1133} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta E_1 E_2}; & C_L^{2233} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2} \\
C_L^{1212} &= 2\mu_{12}; & C_L^{1313} &= 2\mu_{13}; & C_L^{2323} &= 2\mu_{23} \\
\Delta &= \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{31}\nu_{12}\nu_{23})
\end{aligned}$$

Transversale Isotropie

bevorzugte Richtung $X_{\mathbf{A}}^1$ -Richtung: $E_{\parallel} = E_1$; $\nu_{\parallel} = \nu_{13} = \nu_{12}$; $\mu_{\parallel} = \mu_{13} = \mu_{12}$;
 $n\nu_{\parallel} = \nu_{31} = \nu_{21}$; $n = E_{\perp}/E_{\parallel}$

Isotropie-Ebene $X_{\mathbf{A}}^2 X_{\mathbf{A}}^3$ -Ebene: $E_{\perp} = E_2 = E_3$; $\nu_{\perp} = \nu_{23} = \nu_{32}$;
 $\mu_{\perp} = \mu_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$

$$\begin{aligned}
C_L^{1111} &= \frac{1 - \nu_{\perp}^2}{\Delta E_{\perp}}; & C_L^{2222} &= C_L^{3333} = \frac{1 - n\nu_{\parallel}^2}{\Delta E_{\parallel}} \\
C_L^{1122} &= \frac{\nu_{\parallel}(1 + \nu_{\perp})}{\Delta E_{\parallel}} = C_L^{1133}; & C_L^{2233} &= \frac{\nu_{\perp} + n\nu_{\parallel}^2}{\Delta E_{\parallel}} \\
C_L^{1212} &= 2\mu_{\parallel} = C_L^{1313}; & C_L^{2323} &= C_L^{2222} - C_L^{2233} = 2\mu_{\perp} \\
\Delta &= \frac{1}{E_{\parallel} E_{\perp}} (1 - 2n\nu_{\parallel}^2 - \nu_{\perp}^2 - 2n\nu_{\parallel}^2\nu_{\perp})
\end{aligned}$$

Isotropie

$$E = E_1 = E_2 = E_3, \quad \nu = \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}, \quad \mu = \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\begin{aligned}
C_L^{1111} &= C_L^{2222} = C_L^{3333} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \lambda + 2\mu \\
C_L^{1122} &= C_L^{1133} = C_L^{2233} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \lambda \\
C_L^{1212} &= C_L^{1313} = C_L^{2323} = C_L^{2222} - C_L^{2233} = 2\mu
\end{aligned}$$

$$C_L^{ijkl} = \begin{bmatrix} C_L^{1111} & C_L^{1122} & C_L^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_L^{2222} & C_L^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_L^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_L^{1212} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_L^{1313} & 0 \\ & & & & & C_L^{2323} \end{bmatrix}$$

Tab. 6.1: Koeffizienten des Elastizitätstensors für Orthotropie, transversale Isotropie, Isotropie

6.1.2 Gruppe symmetrischer Transformationen

Das Erstellen eines Systems irreduzibler Invarianten erfolgt bei makroskopischer Anisotropie über die materialspezifische Gruppe symmetrischer Transformationen. Sie ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe \mathbb{O}^3 und enthält alle Drehungen und Spiegelungen, mit der sich die Basisvektoren des Materialkoordinatensystems $\{\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}\}$ in einer äquivalenten Position angeben lassen, die von der Referenzkonfiguration nicht unterscheidbar ist.

$$\mathbf{i}_{A_i}^* = \mathbf{Q} \mathbf{i}_{A_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X \subseteq \mathbb{O}^3 \quad (6.8)$$

Für anisotrope Strukturen lassen sich die Gruppen symmetrischer Transformationen¹ \mathbb{G}_X ausgehend von der Mitte des letzten Jahrhunderts für die Zweiunddreißig kristallinen Klassen entwickelten Gruppen auf Makroebene übertragen. Dabei sind nur diejenigen Gruppen interessant, welche die zentrale Inversion $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$ als symmetrische Transformation enthalten, da sich eine Struktur in diametraler Richtung gleichermaßen ausdehnt.

Orthotropie ist gekennzeichnet durch drei paarweise orthogonale Hauptmaterialrichtungen \mathbf{i}_{A_i} ($i = 1, 2, 3$). Die Gruppe symmetrischer Transformationen enthält u.a. die Spiegelungen $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ an den Symmetrieebenen, die durch die Flächennormalen $\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}$ bestimmt sind,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

und die Drehungen $\mathbf{D}_1^\varphi, \mathbf{D}_2^\varphi, \mathbf{D}_3^\varphi$ um die bevorzugten Materialrichtungen $\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}$ mit einem Winkel von 180° .

$$\mathbf{D}_1^\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2^\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3^\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Transversale Isotropie ist ein Sonderfall der Orthotropie, charakterisiert durch eine einzige Hauptmaterialrichtung. Die Rotationssymmetrie um diese bevorzugte Richtung charakterisiert die Isotropieebene senkrecht dazu. Die Gruppe symmetrischer Transformationen enthält neben den Transformationen (6.9) und (6.10) alle kontinuierlichen Drehungen um die bevorzugte Richtung.

Mit der X_A^1 -Achse als bevorzugter Materialrichtung folgt

$$\mathbf{D}_1^\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (6.11)$$

Isotropie ist charakterisiert durch die Richtungsunabhängigkeit des Materials. Die Gruppe symmetrischer Transformationen ist gleich der orthogonalen Gruppe.

¹Literatur: (Green & Adkins 1960; Xiao, Bruhns & Meyers 1999)

6.2 Basis irreduzibler Invarianten

Das zentrale Problem der Invariantentheorie ist, für ein gegebenes System an Variablen und eine gegebene Gruppe von Transformationen eine Basis bestehend aus irreduziblen Invarianten festzulegen². Hiervon soll sich keine Invariante als Funktion anderer Invarianten ausdrücken lassen. Doch ist auch die Integritätsbasis minimal, eindeutig ist sie nicht, denn ausgehend von einer gegebenen irreduziblen Integritätsbasis lassen sich stets andere Invarianten erzeugen. Die Irreduzibilität der Integritätsbasis ist zur Modellierung einer eindeutigen Spannungsantwort mit wenigen Materialparametern erforderlich.

Resultate der klassischen Invariantentheorie. Polynomiale Invariante werden ausgehend von der linearen Gruppe hergeleitet (Weyl 1939; Gurevich 1964). Eine Kernaussage ist das HILBERT Theorem. Es besagt in "plakativer Form"

*Für eine begrenzte Basis an Vektoren und Tensoren
existiert eine begrenzte Integritätsbasis.*

Das rechtfertigt die Suche nach einer solchen Basis (Weyl 1939; Spencer 1971).

Die klassische Invariantentheorie ist geometrisch motiviert. Die algebraischen Hauptinvarianten

$$I_{\mathbf{C}} = \|\mathbf{F}\|^2, \quad II_{\mathbf{C}} = \|\mathbf{CofF}\|^2, \quad III_{\mathbf{C}} = (\det \mathbf{F})^2 \quad (6.12)$$

und die rationalen Grundinvarianten

$$\text{tr} \mathbf{C} = g_{ij} G^{ij} \quad \text{tr} \mathbf{C}^2 = g_{ij} G^{jk} g_{kl} G^{li}, \quad \text{tr} \mathbf{C}^3 = g_{ij} G^{jk} g_{kl} G^{lm} g_{mn} G^{ni} \quad (6.13)$$

erfüllen mit $G^{ij} = (G_{ij})^{-1}$ die algebraische Gleichung

$$-\text{tr} \mathbf{C}^3 + I_{\mathbf{C}} \text{tr} \mathbf{C}^2 - II_{\mathbf{C}} \text{tr} \mathbf{C} + 3 III_{\mathbf{C}} = 0.$$

Polynomiale Invariante sind die Summe homogener polynomialer Invarianten in Form von

$$\text{tr} \mathbf{C} = C^i_i, \quad \text{tr} \mathbf{C}^2 = C^i_j C^j_i, \quad \text{tr} \mathbf{C}^3 = C^i_j C^j_k C^k_i. \quad (6.14)$$

Die Studie algebraischer Invarianten reduziert sich somit auf homogene polynomiale Invariante.

Ein Algorithmus zum Erstellen einer polynomialen Integritätsbasis matrizieller Polynome für Tensoren 2. Stufe basiert auf einer Verallgemeinerung des CAYLEY-HAMILTON Theorems (Rivlin 1955; Spencer 1971) beispielsweise mit dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor \mathbf{C} und den Strukturtenoren \mathbf{M} und \mathbf{N}

$$\begin{aligned} & \mathbf{MNC} + \mathbf{MCN} + \mathbf{NMC} + \mathbf{NCM} + \mathbf{CMN} + \mathbf{CNM} \\ & - \mathbf{M}(\text{tr} \mathbf{NC} - \text{tr} \mathbf{N} \text{tr} \mathbf{C}) - \mathbf{N}(\text{tr} \mathbf{CM} - \text{tr} \mathbf{C} \text{tr} \mathbf{M}) - \mathbf{C}(\text{tr} \mathbf{MN} - \text{tr} \mathbf{M} \text{tr} \mathbf{N}) \\ & - (\mathbf{NC} + \mathbf{CN}) \text{tr} \mathbf{M} - (\mathbf{CM} + \mathbf{MC}) \text{tr} \mathbf{N} - (\mathbf{MN} + \mathbf{NM}) \text{tr} \mathbf{C} \\ & - \mathbf{I}(\text{tr} \mathbf{M} \text{tr} \mathbf{N} \text{tr} \mathbf{C} - \text{tr} \mathbf{M} \text{tr} \mathbf{NC} - \text{tr} \mathbf{N} \text{tr} \mathbf{CM}) \\ & - \text{tr} \mathbf{C} \text{tr} \mathbf{MN} + \text{tr} \mathbf{MNC} + \text{tr} \mathbf{CNM}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

²Desweiteren können unter beliebigen Gruppen von Transformationen Syzygien festgelegt werden. Das sind polynomiale Relationen zwischen den Invarianten, die es jedoch nicht gestatten, eine beliebige Invariante als Polynom der übrigen auszudrücken.

Ziel des Verfahrens ist die Elimination von Termen höherer polynomialer Ordnung. Schon die Spur eines Tensorproduktes siebter Ordnung kann als ein Polynom in Matrixprodukten, deren Ordnung kleiner als sieben ist, dargestellt werden und ist daher reduzibel.

6.2.1 Verwendung von Invariantentheoremen

Ein anderes Konzept zur Herleitung einer polynomialen Integritätsbasis beruht auf Invariantentheoremen (Green & Adkins 1960; Spencer 1971). Die Basis polynomialer Invarianten folgt unter der diskreten Gruppenwirkung orthogonaler Transformationen aus der Gruppe symmetrischer Transformationen $\mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X \subseteq \mathbb{O}^3$. Diese wirken auf die Komponenten des GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensors.

Orthotropie. Unter der Gruppenwirkung symmetrischer Transformationen $\mathbb{G}_X = \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{D}_1^\pi, \mathbf{D}_2^\pi, \mathbf{D}_3^\pi\}$ resultiert folgende irreduzible Integritätsbasis als Argument einer Verzerrungsenergiefunktion

$$\begin{aligned} W &= W(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}^2, E_{23}^2, E_{13}^2, E_{12}E_{23}E_{31}) \\ &= W(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}^2, E_{23}^2, E_{13}^2, \mathbb{III}_C). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Transversale Isotropie. Ist die X_A^1 -Achse die bevorzugte Materialrichtung, dann folgt mit $\mathbb{G}_X = \{\mathbf{D}_1^\varphi, \mathbf{D}_2^\pi, \mathbf{D}_3^\pi, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\}$

$$W = W(I_C, \mathbb{II}_C, \mathbb{III}_C, E_{11}, E_{1\alpha}E_{\alpha 1}) \quad \alpha = 2, 3. \quad (6.17)$$

6.2.2 Methode der Strukturtenoren

Bekannte Repräsentationen isotroper Funktionen lassen sich über die Methode der Strukturtenoren (Boehler 1979; Spencer 1984) auf makroskopische Anisotropie übertragen³. Ein solcher Strukturtensor

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}_A \otimes \mathbf{i}_A, \quad \|\mathbf{i}_A\| = 1 \quad (6.18)$$

entsteht durch das dyadische Produkt eines in Faserrichtung zeigenden normierten Einheitsvektors \mathbf{i}_A . Ist die Verzerrungsenergiefunktion in dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor und einem Strukturtensor formuliert, ist sie in den Verzerrungen invariant unter den orthogonalen Transformationen der Gruppe \mathbb{G}_X

$$\tilde{W}(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = \tilde{W}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{M}) \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{G}_X \subseteq \mathbb{O}^3, \quad (6.19)$$

sowie in den Verzerrungen und dem Strukturtensor invariant unter den Transformationen der gesamten orthogonalen Gruppe \mathbb{O}^3

$$\tilde{W}(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = \tilde{W}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3. \quad (6.20)$$

³Weitere Literatur: (Smith, Smith & Rivlin 1962; Xiao 1995; Xiao 1996b; Xiao 1996c; Xiao 1997)

Orthotropie. Die Simultaninvarianten eines orthotropen Kontinuums lassen sich mit den Strukturtenoren

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}_{A_1} \otimes \mathbf{i}_{A_1} \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{i}_{A_2} \otimes \mathbf{i}_{A_2} \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{i}_{A_3} \otimes \mathbf{i}_{A_3}, \quad (6.21)$$

welche die Nebenbedingung $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{I}$ erfüllen, wie folgt formulieren: Korrespondieren die ersten drei Simultaninvarianten zu den Längenänderungen der bevorzugten Materialrichtungen

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{i}_{A_1} \mathbf{C} \mathbf{i}_{A_1} = C_{11} \\ \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{i}_{A_2} \mathbf{C} \mathbf{i}_{A_2} = C_{22} \\ \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{M}_3 &= \mathbf{i}_{A_3} \mathbf{C} \mathbf{i}_{A_3} = C_{33}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

so haben die übrigen Simultaninvarianten keine physikalische Bedeutung

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{M}_1 &= \mathbf{i}_{A_1} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{A_1} = C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 \\ \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{M}_2 &= \mathbf{i}_{A_2} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{A_2} = C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 \\ \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{M}_3 &= \mathbf{i}_{A_3} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{A_3} = C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2; \end{aligned} \quad (6.23)$$

ebenso wenig wie die Grundinvariante $\text{tr} \mathbf{C}^3$. Die Basis polynomialer Invarianten entspricht bei Orthotropie einer irreduziblen Funktionalbasis.

Alternativ kann eine Integritätsbasis auch ausgehend von einem isotropen Grundkontinuum formuliert werden (Spencer 1984).

Transversale Isotropie. Die Basis irreduzibler Invarianten besteht aus den Grundinvarianten $\{\text{tr} \mathbf{C}, \text{tr} \mathbf{C}^2, \text{tr} \mathbf{C}^3\}$, zur Modellierung des isotropen Grundkontinuums, und den Simultaninvarianten

$$\text{tr} \mathbf{C} \mathbf{M} = \mathbf{i}_A \mathbf{C} \mathbf{i}_A, \quad \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{M} = \mathbf{i}_A \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_A. \quad (6.24)$$

6.3 Physikalisch motivierte Invariante

Zur Formulierung eines einfachen Materialmodells soll nun eine geometrisch anschauliche Basis irreduzibler Invarianten konstruiert werden, damit die Materialparameter physikalisch sinnvoll in das Materialmodell einfließen können. Zur Simulation endlicher Verzerrungen im orthotropen Kontinuum werden darüberhinaus weitere Grenzzustände als Restriktionen an das Materialmodell formuliert, welche in die Konstruktion der Invarianten mit einfließen.

In einem isotropen Kontinuum wird zur Gewährleistung der Existenz einer Lösung eines mit großen Dehnungen behafteten strukturmechanischen Variationsproblems gefordert, daß die Verzerrungsenergiefunktion polykonvex ist und der Coercivitätsungleichung genügt. Liegt eine bevorzugte Richtung im Material vor, soll die Verzerrungsenergiefunktion so formuliert werden, daß diese Konzepte auf die anisotrope Struktur übertragen werden können. Eine bevorzugte Richtung im Material ist vergleichbar mit einem differentiellen Linienelement und kann seine Länge und seine Orientierung im repräsentativen

Volumenelement ändern. Es wird gefordert, daß die Verzerrungsenergie bei gegen unendlich strebender Dehnung bzw. Stauchung ebenfalls gegen unendlich strebt. Extrem große Stauchungen bedeuten in diesem Zusammenhang die Degeneration einer Faser zu einem Punkt.

Es wird das Bezugssystem $\{\mathbf{i}_{A_1}, \mathbf{i}_{A_2}, \mathbf{i}_{A_3}\}$ verwendet⁴.

6.3.1 Modifizierte Simultaninvariante

Ist die X_A^1 -Achse die bevorzugte Materialrichtung, dann soll die Verzerrungsenergie gegen unendlich streben, wenn

- sich die Faserrichtung *unendlich* dehnt

$$C_{11} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad W(\mathbf{C}, C_{11}) \rightarrow +\infty, \quad (6.25)$$

- die Faser zu einem Punkt degeneriert

$$C_{11} \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad W(\mathbf{C}, C_{11}) \rightarrow +\infty. \quad (6.26)$$

Physikalisch sinnvoll werden die Stauchungen auch hier über logarithmische Verzerrungen abgebildet

$$-\frac{1}{2} a_1^* \ln g_{A_{11}} \rightarrow +\infty \quad \text{mit} \quad g_{A_{11}} = C_{11}. \quad (6.27)$$

In einer Verzerrungsenergiefunktion sind die Terme in den Längenänderungen der bevorzugten Richtung so zu wählen, daß sie zu denjenigen Termen kompatibel sind, welche die Längenänderung eines beliebig im repräsentativen Volumenelement orientierten Linienelementes beschreiben.

Transversale Isotropie. Ist die X_A^1 -Achse die bevorzugte Materialrichtung, berechnen sich die modifizierten Simultaninvarianten ähnlich wie die Hauptinvarianten:

$$I_A = \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{M} = \mathbf{i}_{A_1} \mathbf{C} \mathbf{i}_{A_1} = C_{11} \quad (6.28)$$

$$II_A = \text{tr} \mathbf{C} \text{of} \mathbf{C} \mathbf{M} = \frac{1}{2} [(\mathbf{i}_{A_1} \mathbf{C} \mathbf{i}_{A_1})^2 - \mathbf{i}_{A_1} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{A_1}] = -\frac{1}{2} (C_{12}^2 + C_{13}^2).$$

Die Invariante II_A berücksichtigt die Richtungsänderungen der bevorzugten Richtung infolge von Schubdeformationen (Lürding 1999; Lürding, Başar & Hanskötter 1999). Die Integritätsbasis $I_C, II_C, III_C, I_A, II_A$ ist daher physikalisch sinnvoll, minimal und polynomial.

⁴In einem orthogonal kartesischen Koordinatensystem fallen das ko- und kontravariante Basissystem zusammen. Es wird daher nur das kovariante Bezugssystem verwendet.

Orthotropie. Weil jede Koordinatenebene eine unterschiedliche Schubsteifigkeit hat, ist die Verknüpfung der Materialparameter mit entsprechenden Verzerrungskomponenten bei diesem Ansatz schwierig.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\mathbf{A}1} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \mathbf{C} \mathbf{i}_{\mathbf{A}1})^2 - \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{\mathbf{A}1}] = -\frac{1}{2}(C_{12}^2 + C_{13}^2) \\ \mathbb{I}_{\mathbf{A}2} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \mathbf{C} \mathbf{i}_{\mathbf{A}2})^2 - \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{\mathbf{A}2}] = -\frac{1}{2}(C_{12}^2 + C_{23}^2) \\ \mathbb{I}_{\mathbf{A}3} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \mathbf{C} \mathbf{i}_{\mathbf{A}3})^2 - \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \mathbf{C}^2 \mathbf{i}_{\mathbf{A}3}] = -\frac{1}{2}(C_{13}^2 + C_{23}^2) \end{aligned} \quad (6.29)$$

6.3.2 Modifizierte Hauptinvariante

Ein neues Konzept zum Aufbau einer irreduziblen Funktionalbasis besteht darin, ausgehend von einem, hinsichtlich der Hauptmaterialrichtungen in differentielle Linien- und Flächenelemente zerlegten, orthotropen repräsentativen Volumenelement, eine geometrisch anschauliche Basis irreduzibler Invarianten zu formulieren, damit Längenänderungen der bevorzugten Materialrichtungen und flächenhafte Deformationen der Symmetrieebenen auf einfachem Wege beschrieben werden können.

Längenänderungen der bevorzugten Materialrichtungen berechnen sich über

$$I_1 = C_{11} = g_{\mathbf{A}11}, \quad I_2 = C_{22} = g_{\mathbf{A}22}, \quad I_3 = C_{33} = g_{\mathbf{A}33} \quad (6.30)$$

mit der Metrik der verformten Konfiguration $g_{\mathbf{A}ij}$ und es gilt

$$I_{\mathbf{C}} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (6.31)$$

Flächenhafte Deformationen umfassen sowohl die Schubdeformationen sowie Dehnungen und Stauchungen eines differentiellen Flächenelementes.

Liegt ein solches differentielles Flächenelement in der $X_{\mathbf{A}}^1 - X_{\mathbf{A}}^2$ -Ebene vor, dann berechnen sich die Winkeländerungen der Basisvektoren $\mathbf{i}_{\mathbf{A}1}$ und $\mathbf{i}_{\mathbf{A}2}$ über

$$\mathbf{g}_{\mathbf{A}\langle 1 \rangle} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{A}\langle 2 \rangle} = \frac{g_{\mathbf{A}12}}{\sqrt{g_{\mathbf{A}11}} \sqrt{g_{\mathbf{A}22}}} = \cos \vartheta^* \quad \text{mit} \quad 0 \leq \cos \vartheta^* \leq 1. \quad (6.32)$$

Es werden im Folgenden zur Definition von Invarianten zwei Grenzfälle orthotropen Materials betrachtet. Es wird gefordert, daß die Verzerrungsenergie gegen unendlich strebt, wenn

- infolge großer Schubbeanspruchung zwei Koordinatenachsen zu einer Achse verschmelzen

$$g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}22} - g_{\mathbf{A}12}^2 \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad -\ln \frac{g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}22} - g_{\mathbf{A}12}^2}{g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}22}} \rightarrow \infty, \quad (6.33)$$

- eine Fläche unter biaxialer Druckbeanspruchung zu einem Stab degeneriert

$$g_{\mathbf{A}11} \rightarrow 0^+ \quad \text{und} \quad g_{\mathbf{A}22} \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad -\ln g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}22} \rightarrow \infty. \quad (6.34)$$

Beide Grenzfälle lassen sich physikalisch sinnvoll über logarithmische Verzerrungen abbilden. Die Invarianten werden wie folgt definiert

$$\mathbb{I}_{12} = g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}22} - g_{\mathbf{A}12}^2, \quad \mathbb{I}_{23} = g_{\mathbf{A}22} g_{\mathbf{A}33} - g_{\mathbf{A}23}^2, \quad \mathbb{I}_{13} = g_{\mathbf{A}11} g_{\mathbf{A}33} - g_{\mathbf{A}13}^2 \quad (6.35)$$

und es gilt

$$\mathbb{I}_{\mathbf{C}} = \mathbb{I}_{12} + \mathbb{I}_{23} + \mathbb{I}_{31}. \quad (6.36)$$

Orthotropie ist charakterisiert durch sieben irreduzible Invariante als Argumente der Verzerrungsenergiefunktion:

$$W = W(I_1, I_2, I_3, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{23}, \mathbb{I}_{31}, \mathbb{I}_{\mathbf{C}}) \quad (6.37)$$

mit $C_{ij} = g_{\mathbf{A}ij}$ folgt:

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{11}, & \mathbb{I}_{12} &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}, \\ I_2 &= C_{22}, & \mathbb{I}_{23} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}, \\ I_3 &= C_{33}, & \mathbb{I}_{31} &= C_{33}C_{11} - C_{31}C_{13}, & \mathbb{I}_{\mathbf{C}} &= \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Als Gradient der Verzerrungsenergiefunktion berechnet sich der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{S} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{M}_1 + \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{M}_2 + \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{M}_3 \\ &+ \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}_{23}} \mathbf{M}_{\mathbf{C}1} + \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}_{31}} \mathbf{M}_{\mathbf{C}2} + \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}_{12}} \mathbf{M}_{\mathbf{C}3} + \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}} \mathbf{M}_{\mathbf{C}V} \end{aligned} \quad (6.39)$$

mit den Tensorgeneratoren

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \\ \mathbf{M}_2 &= \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \\ \mathbf{M}_3 &= \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{C}1} &= \frac{\partial \mathbb{I}_{23}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= C_{33} \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} + C_{22} \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} - C_{32} \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} - C_{23} \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{C}2} &= \frac{\partial \mathbb{I}_{31}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= C_{33} \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} + C_{11} \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} - C_{31} \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} - C_{13} \mathbf{i}_{\mathbf{A}3} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{C}3} &= \frac{\partial \mathbb{I}_{12}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= C_{22} \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} + C_{11} \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} - C_{21} \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} - C_{12} \mathbf{i}_{\mathbf{A}2} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}1} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{C}V} &= \frac{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (6.41)$$

und es gilt $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{I}$ sowie $\mathbf{M}_{\mathbf{C}1} + \mathbf{M}_{\mathbf{C}2} + \mathbf{M}_{\mathbf{C}3} = \mathbf{M}_{\mathbf{C}} = I_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}^T$. Die Basis irreduzibler Tensorgeneratoren $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_{\mathbf{C}1}, \mathbf{M}_{\mathbf{C}2}, \mathbf{M}_{\mathbf{C}3}, \mathbf{M}_{\mathbf{C}V}$ ist vollständig und

berechnet sich als Gradient der algebraischen Funktionalbasis. Die Repräsentation ist minimal und irreduzibel.

Alternativen zur Darstellung von Tensorgeneratoren für Orthotropie sind in (Boehler 1987; Xiao 1995; Xiao 1996b) aufgeführt.

Transversale Isotropie. Diese Integritätsbasis (6.38) läßt sich in eine irreduzible Funktionalbasis für transversale Isotropie überführen

$$W = W(I_{\parallel}, I_{\perp}, II_{\parallel}, II_{\perp}, III_C), \quad (6.43)$$

wobei $(\dots)_{\parallel}$ und $(\dots)_{\perp}$ die Verzerrungsterme parallel und senkrecht zur bevorzugten Richtung kennzeichnen. Mit der X_A^1 -Achse als bevorzugte Materialrichtung resultiert:

$$\begin{aligned} I_{\parallel} &= I_1 = C_{11} \\ I_{\perp} &= I_2 + I_3 = C_{22} + C_{33} \\ II_{\parallel} &= II_{12} + II_{31} = C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} - C_{12}C_{21} - C_{13}C_{31} \\ II_{\perp} &= II_{23} = C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\ III_C &= \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Die Spannungen folgen

$$\frac{1}{2} \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial I_{\parallel}} \mathbf{M}_{\parallel} + \frac{\partial W}{\partial I_{\perp}} \mathbf{M}_{\perp} + \frac{\partial W}{\partial II_{\parallel}} \mathbf{M}_{C\parallel} + \frac{\partial W}{\partial II_{\perp}} \mathbf{M}_{C\perp} + \frac{\partial W}{\partial III_C} \mathbf{M}_{CV} \quad (6.45)$$

mit den Tensorgeneratoren

$$\mathbf{M}_{\parallel} = \mathbf{M}_1 = \frac{\partial I_{\parallel}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{i}_{A1} \otimes \mathbf{i}_{A1} \quad (6.46)$$

$$\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \frac{\partial I_{\perp}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{i}_{A2} \otimes \mathbf{i}_{A2} + \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C\parallel} &= \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 = \frac{\partial II_{\parallel}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= (C_{22} + C_{33}) \mathbf{i}_{A1} \otimes \mathbf{i}_{A1} + C_{11} (\mathbf{i}_{A2} \otimes \mathbf{i}_{A2} - \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A3}) \\ &\quad - C_{21} \mathbf{i}_{A1} \otimes \mathbf{i}_{A3} - C_{12} \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A1} \\ &\quad - C_{32} \mathbf{i}_{A2} \otimes \mathbf{i}_{A3} - C_{23} \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A2} \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C\perp} &= \mathbf{G}_1 = \frac{\partial II_{\perp}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= C_{33} \mathbf{i}_{A2} \otimes \mathbf{i}_{A2} + C_{11} \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A3} - C_{31} \mathbf{i}_{A1} \otimes \mathbf{i}_{A3} - C_{13} \mathbf{i}_{A3} \otimes \mathbf{i}_{A1} \end{aligned} \quad (6.48)$$

sowie $\mathbf{M}_{CV} = III_C \mathbf{C}^{-1}$ und es gilt: $\mathbf{M}_{\parallel} + \mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{I}$; $\mathbf{M}_{C\parallel} + \mathbf{M}_{C\perp} = \mathbf{M}_C$; $\mathbf{M}_{CV} = III_C \mathbf{C}^{-1}$.

Isotropie. Bei gegebener Richtungsunabhängigkeit resultiert als irreduzible Funktionalbasis

$$I_C = I_1 + I_2 + I_3, \quad II_C = II_{12} + II_{23} + II_{31}, \quad (6.49)$$

den Gleichungen (6.31, 6.36) entsprechend sowie III_C . Der Spannungstensor folgt

$$\frac{1}{2} \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial I_C} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial II_C} (I_C \mathbf{I} - \mathbf{C}^T) + \frac{\partial W}{\partial III_C} \mathbf{G}_V \quad (6.50)$$

mit den Tensorgeneratoren (5.39)

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = I_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{C}V} = \frac{\partial \mathbb{III}_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{III}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}.$$

6.4 Orthotropie und große Verzerrungen

6.4.1 Auswirkungen einer bevorzugten Materialrichtung

Bei transversal isotropem Material wird häufig ein Materialmodell ausgehend von einem isotropen Grundkontinuum formuliert. Die Steifigkeitseigenschaften der bevorzugten Materialrichtung werden mittels modifizierter Simultaninvarianten berücksichtigt. Als erster Schritt zur Simulation großer Dehnungen sowie großer Stauchungen in der bevorzugten Materialrichtung wird ein kompressibles NEO-HOOKE Modell erweitert

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2} \mu_{\perp} (I_{\mathbf{C}} - 3) + \Gamma(J) + \frac{1}{4} \alpha (I_{\mathbf{C}} - 3)(I_{\mathbf{A}} - 1) - (\mu_{\parallel} - \mu_{\perp}) \mathbb{I}_{\mathbf{A}} + \bar{\Gamma}(J_{\parallel}). \quad (6.51)$$

Zur Simulation von großen Dehnungen sowie Stauchungen sowohl in der bevorzugten Materialrichtung als auch in den Volumenänderungen werden gleich aufgebaute konvexe Funktionen in den Volumenänderungen $J = \sqrt{\mathbb{III}_{\mathbf{C}}}$ und den Längenänderungen der bevorzugten Materialrichtung $J_{\parallel} = \sqrt{I_{\mathbf{A}}}$ verwendet

$$\begin{aligned} \Gamma(J) &= \frac{1}{2} \lambda_{\perp} (J - 1)^2 - \mu_{\perp} \ln J \\ \bar{\Gamma}(J_{\parallel}) &= \frac{1}{2} \lambda_{\parallel} (J_{\parallel} - 1)^2 - \mu_{\parallel} \ln J_{\parallel}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

für $0 < J, J_{\parallel} < 2$. Kopplungen zwischen den Verzerrungstermen der bevorzugten Richtung und denen der Volumenänderungen sind mit $(I_{\mathbf{C}} - 3)(I_{\mathbf{A}} - 1)$ und $\ln J^{\mu_{\perp}} J_{\parallel}^{\mu_{\parallel}}$ gegeben. Orientierungsänderungen der bevorzugten Richtung werden über die zweite modifizierte Simultaninvariante $\mathbb{I}_{\mathbf{A}}$ erfaßt. Die Materialparameter lassen sich durch die Rückführung des Modells auf die klassische Theorie für kleine Verzerrungen nahe der Referenzkonfiguration in Abhängigkeit der Ingenieurkonstanten formulieren (Anhang A).

6.4.2 Polykonvexität

Der Begriff Polykonvexität (Kap. 4.1) bezieht sich auf den Aufbau der Verzerrungsenergiefunktion in den Argumenten \mathbf{F} , \mathbf{CofF} , $\det \mathbf{F}$. Sie berücksichtigt die geometrische Beschaffenheit einer Deformation und ist unabhängig von den Materialeigenschaften.

Im Folgenden wird ein differentielles Linienelement betrachtet. Bezogen auf ein orthogonal kartesisches Bezugssystem $\{\mathbf{i}_{\mathbf{A}1}, \mathbf{i}_{\mathbf{A}2}, \mathbf{i}_{\mathbf{A}3}\}$ berechnet sich die Länge eines differentiellen Linienelementes abhängig von den Komponenten der verformten Metrik $g_{\mathbf{A}11}, g_{\mathbf{A}22}, g_{\mathbf{A}33}$ dem Satz von PHYTAGORAS entsprechend

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{g_{\mathbf{A}11} + g_{\mathbf{A}22} + g_{\mathbf{A}33}} = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} \quad (6.53)$$

mit

$$J_1 = \sqrt{I_1} = \|g_{\mathbf{A}11}\|, \quad J_2 = \sqrt{I_2} = \|g_{\mathbf{A}22}\|, \quad J_3 = \sqrt{I_3} = \|g_{\mathbf{A}33}\|. \quad (6.54)$$

Bei Orthotropie werden den Hauptmaterialrichtungen $\{\mathbf{i}_{A1}, \mathbf{i}_{A2}, \mathbf{i}_{A3}\}$ lediglich unterschiedliche Steifigkeiten zugewiesen, d.h. zur Berechnung der Verzerrungsenergie werden die Komponenten der Metrik den Steifigkeiten der Hauptmaterialrichtungen entsprechend gewichtet. Für Orthotropie wird der Begriff *Polykonvexität* nun folgendermaßen erweitert:

Eine orthotrope Verzerrungsenergiefunktion gilt als polykonvex, wenn

- sich ihre irreduzible Funktionalbasis $I_1, I_2, I_3, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{23}, \mathbb{I}_{31}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}}$ auf eine irreduzible Repräsentation für den Sonderfall der Isotropie zurückführen läßt, d.h. es gilt

$$W = W(I_1, I_2, I_3, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{23}, \mathbb{I}_{31}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}}) = \check{W}(I_{\mathbf{C}}, \mathbb{II}_{\mathbf{C}}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}}). \quad (6.55)$$

mit

$$I_{\mathbf{C}} = I_1 + I_2 + I_3 = \|\mathbf{F}\|^2 \quad (6.56)$$

$$\mathbb{II}_{\mathbf{C}} = \mathbb{I}_{12} + \mathbb{I}_{23} + \mathbb{I}_{31} = \|\mathbf{CofF}\|^2 \quad (6.57)$$

- sie sich aus konvexen Funktionen in J_1, J_2, J_3 sowie in J_{12}, J_{23}, J_{31} und in J aufbaut mit

$$\begin{aligned} J_1 &= \sqrt{I_1} & J_2 &= \sqrt{I_2} & J_3 &= \sqrt{I_3} \\ J_{12} &= \sqrt{\mathbb{I}_{12}} & J_{23} &= \sqrt{\mathbb{I}_{23}} & J_{31} &= \sqrt{\mathbb{I}_{31}} & J &= \mathbb{III}_{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

6.5 Entwicklung eines orthotropen Materialmodells

Die zur Simulation sehr großer Dehnungen für isotropes Material formulierte Verzerrungsenergiefunktion (5.44) wird im Folgenden auf ein orthotropes Material übertragen. Auch hier wird gefordert, daß sich das Material der physikalisch motivierten Grundidee entsprechend verhält und *die Verzerrungsenergie gegen unendlich strebt, wenn die Verzerrungen gegen unendlich gehen*. Das führt zu folgendem Ansatz:

$$\begin{aligned} W &= W_S + W_D \\ \text{und} \quad W_D &= e^{a_1(I_1-1)+a_2(I_2-1)+a_3(I_3-1)} \\ &\quad + e^{b_1(\mathbb{I}_{23}-1)+b_2(\mathbb{I}_{31}-1)+b_3(\mathbb{I}_{12}-1)} + e^{c(\mathbb{III}_{\mathbf{C}}-1)} - 3, \end{aligned} \quad (6.59)$$

der die Bedingungen aus (Kap. 6.4.2) erfüllt. Der Sonderfall transversaler Isotropie ist mit (6.43) enthalten

$$W_D = e^{a_{\parallel}(I_{\parallel}-1)+a_{\perp}(I_{\perp}-2)} + e^{b_{\parallel}(\mathbb{II}_{\parallel}-2)+b_{\perp}(\mathbb{II}_{\perp}-1)} + e^{c(\mathbb{III}_{\mathbf{C}}-1)} - 3. \quad (6.60)$$

Für Isotropie folgt (5.40).

Für viele strukturmechanische Anwendungen mit großen Dehnungen liefert ein linearer Ansatz bereits gute Ergebnisse

$$\begin{aligned} W_{DL} &= a_1(I_1 - 1) + a_2(I_2 - 1) + a_3(I_3 - 1) \\ &\quad + b_1(\mathbb{I}_{23} - 1) + b_2(\mathbb{I}_{31} - 1) + b_3(\mathbb{I}_{12} - 1) + c(\mathbb{III}_{\mathbf{C}} - 1). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Für Isotropie folgt das kompressible MOONEY-RIVLIN Modell.

Die geforderte Rückführbarkeit des Materialmodells auf die klassische Theorie für kleine Verzerrungen nahe der spannungslosen und verzerrungsfreien Ausgangskonfiguration liefert Bedingungen für die Materialparameter und ihren Definitionsbereich sowie für den Aufbau der Verzerrungsenergiefunktion hinsichtlich der die endlichen Stauchungen beschreibenden Funktion W_S . Das Vorgehen⁵ orientiert sich an (Ciarlet 1988).

6.5.1 Orthotropie

Der Ansatz

$$W = a_1(I_1 - 1) + a_2(I_2 - 1) + a_3(I_3 - 1) + b_1(\mathbb{I}_{23} - 1) + b_2(\mathbb{I}_{31} - 1) + b_3(\mathbb{I}_{12} - 1) + c(\mathbb{I}\mathbb{C} - 1) + W_S \quad (6.62)$$

korrespondiert mit $W_S = W_S(I_1, I_2, I_3, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{23}, \mathbb{I}_{31}, \mathbb{I}\mathbb{C})$ und der Konvexitätsforderung (Kap. 6.4.2) zu der Gleichung

$$W = \bar{\Gamma}_1(J_1) + \bar{\Gamma}_2(J_2) + \bar{\Gamma}_3(J_3) + \bar{\bar{\Gamma}}_1(J_{23}) + \bar{\bar{\Gamma}}_2(J_{31}) + \bar{\bar{\Gamma}}_3(J_{12}) + \Gamma(J) + e. \quad (6.63)$$

Wahl konvexer Funktionen. Zur Simulation von Längenänderungen, flächenhaften Deformationen und Volumenänderungen werden analog aufgebaute konvexe Funktionen gewählt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der von (Ciarlet & Geymonat 1982) vorgeschlagene Ansatz in den Volumenänderungen

$$\Gamma(J) = cJ^2 - c^* \ln J \quad c, c^* > 0 \quad (6.64)$$

auf die Längenänderungen der Hauptmaterialrichtungen

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1(J_1) &= a_1 J_1^2 - a_1^* \ln J_1 & a_1, a_1^* > 0 \\ \bar{\Gamma}_2(J_2) &= a_2 J_2^2 - a_2^* \ln J_2 & a_2, a_2^* > 0 \\ \bar{\Gamma}_3(J_3) &= a_3 J_3^2 - a_3^* \ln J_3 & a_3, a_3^* > 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

und die flächenhaften Deformationen der Symmetrieebenen übertragen

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Gamma}}_1(J_{23}) &= b_1 J_{23}^2 - b_1^* \ln J_{23} & b_1, b_1^* > 0 \\ \bar{\bar{\Gamma}}_2(J_{31}) &= b_2 J_{31}^2 - b_2^* \ln J_{31} & b_2, b_2^* > 0 \\ \bar{\bar{\Gamma}}_3(J_{12}) &= b_3 J_{12}^2 - b_3^* \ln J_{12} & b_3, b_3^* > 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die sich ergebende Verzerrungsenergiefunktion lautet:

$$\begin{aligned} W &= a_1(I_1 - 1) + a_2(I_2 - 1) + a_3(I_3 - 1) \\ &+ b_1(\mathbb{I}_{23} - 1) + b_2(\mathbb{I}_{31} - 1) + b_3(\mathbb{I}_{12} - 1) + c(\mathbb{I}\mathbb{C} - 1) \\ &- \frac{1}{2} a_1^* \ln I_1 - \frac{1}{2} a_2^* \ln I_2 - \frac{1}{2} a_3^* \ln I_3 \\ &- \frac{1}{2} b_1^* \ln \mathbb{I}_{23} - \frac{1}{2} b_2^* \ln \mathbb{I}_{31} - \frac{1}{2} b_3^* \ln \mathbb{I}_{12} - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{I}\mathbb{C}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

⁵Die Rückführbarkeit eines Materialmodells auf die klassische Theorie kann auch über eine Linearisierung der Spannungsfunktion gezeigt werden (Drozdov 1996). Hier kann die Konvexitätseigenschaft der Verzerrungsenergiefunktion jedoch nicht mehr zur Reduktion von Materialparametern genutzt werden. Wird die Konvexität der Verzerrungsenergiefunktion in den Variablen \mathbf{F} , \mathbf{CofF} , $\det\mathbf{F}$ gefordert, berechnet sich der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor als Gradient nach dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$.

Ihre vierzehn Materialparameter werden auch bei großen Deformationen als konstante Größen angesehen.

Für kleine Verzerrungen ergeben sich die folgenden Terme im wesentlichen aus einer TAYLOR-Entwicklung, die nach dem quadratischen Term abgebrochen wird. Somit folgt für

- die Längenänderungen J_1, J_2, J_3 der Hauptmaterialrichtungen

$$I_1 = 1 + 2 E_{11} \quad I_2 = 1 + 2 E_{22} \quad I_3 = 1 + 2 E_{33} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sqrt{I_1} = 1 + E_{11} - \frac{1}{2} (E_{11})^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ J_2 &= \sqrt{I_2} = 1 + E_{22} - \frac{1}{2} (E_{22})^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ J_3 &= \sqrt{I_3} = 1 + E_{33} - \frac{1}{2} (E_{33})^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3), \end{aligned} \quad (6.69)$$

- die flächenhaften Deformationen J_{12}, J_{23}, J_{31} der Symmetrieebenen

$$\begin{aligned} II_{12} &= 1 + 2 (E_{11} + E_{22}) + 4 (E_{11}E_{22} - E_{12}^2) + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ II_{23} &= 1 + 2 (E_{22} + E_{33}) + 4 (E_{22}E_{33} - E_{23}^2) + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ II_{31} &= 1 + 2 (E_{11} + E_{33}) + 4 (E_{11}E_{33} - E_{13}^2) + O(\|\mathbf{E}\|^3) \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= 1 + E_{11} + E_{22} + E_{11}E_{22} - 2 E_{12}^2 - \frac{1}{2} E_{11}^2 - \frac{1}{2} E_{22}^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ J_{23} &= 1 + E_{22} + E_{33} + E_{22}E_{33} - 2 E_{23}^2 - \frac{1}{2} E_{22}^2 - \frac{1}{2} E_{33}^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3) \\ J_{31} &= 1 + E_{11} + E_{33} + E_{11}E_{33} - 2 E_{13}^2 - \frac{1}{2} E_{11}^2 - \frac{1}{2} E_{33}^2 + O(\|\mathbf{E}\|^3) \end{aligned} \quad (6.71)$$

mit $J_{12} = \sqrt{II_{12}}, J_{23} = \sqrt{II_{23}}, J_{31} = \sqrt{II_{31}}$ und

- die Volumenänderungen $J = \sqrt{III_C}$ des repräsentativen Volumenelementes

$$\begin{aligned} III_C &= 1 + 2 (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 4 (E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{31}^2) \\ &\quad - 4 (E_{11}E_{22} + E_{22}E_{33} + E_{11}E_{33}) + O(\|\mathbf{E}\|^3), \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} J &= 1 + E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{11}E_{22} + E_{22}E_{33} + E_{11}E_{33} \\ &\quad - 2 (E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{31}^2) - \frac{1}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + O(\|\mathbf{E}\|^3). \end{aligned} \quad (6.73)$$

Angewendet auf die Verzerrungsenergiefunktion (6.63) folgt

$$\begin{aligned}
W = & \bar{\Gamma}_1(1) + \bar{\Gamma}'_1(1)\{E_{11} - \frac{1}{2}E_{11}^2\} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}''_1(1)(E_{11})^2 \\
& + \bar{\Gamma}_2(1) + \bar{\Gamma}'_2(1)\{E_{22} - \frac{1}{2}E_{22}^2\} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}''_2(1)(E_{22})^2 \\
& + \bar{\Gamma}_3(1) + \bar{\Gamma}'_3(1)\{E_{33} - \frac{1}{2}E_{33}^2\} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}''_3(1)(E_{33})^2 \\
& + \bar{\bar{\Gamma}}_3(1) + \bar{\bar{\Gamma}}'_3(1)\{E_{11} + E_{22} + E_{11}E_{22} - 2E_{12}^2 - \frac{1}{2}E_{11}^2 - \frac{1}{2}E_{22}^2\} \\
& \quad + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Gamma}}''_3(1)\{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2E_{11}E_{22}\} \\
& + \bar{\bar{\Gamma}}_1(1) + \bar{\bar{\Gamma}}'_1(1)\{E_{22} + E_{33} + E_{22}E_{33} - 2E_{23}^2 - \frac{1}{2}E_{22}^2 - \frac{1}{2}E_{33}^2\} \\
& \quad + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Gamma}}''_1(1)\{E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{22}E_{33}\} \\
& + \bar{\bar{\Gamma}}_2(1) + \bar{\bar{\Gamma}}'_2(1)\{E_{11} + E_{33} + E_{11}E_{33} - 2E_{13}^2 - \frac{1}{2}E_{11}^2 - \frac{1}{2}E_{33}^2\} \\
& \quad + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Gamma}}''_2(1)\{E_{11}^2 + E_{33}^2 + 2E_{11}E_{33}\} \\
& + \Gamma(1) + \Gamma'(1)\{E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33} \\
& \quad - 2(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2) - \frac{1}{2}(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2)\} \\
& \quad + \frac{1}{2}\Gamma''(1)\{E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33})\} \\
& + e \quad + O(\|\mathbf{E}\|^3).
\end{aligned} \tag{6.74}$$

Aus einem Komponentenvergleich mit der klassischen Theorie

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}C_L^{1111} E_{11}^2 \quad + \frac{1}{2}C_L^{2222} E_{22}^2 \quad + \frac{1}{2}C_L^{3333} E_{33}^2 \\
& + C_L^{1212} E_{12}^2 \quad + C_L^{2323} E_{23}^2 \quad + C_L^{1313} E_{13}^2 \\
& + C_L^{1122} E_{11} E_{22} + C_L^{2233} E_{22} E_{33} + C_L^{1133} E_{11} E_{33}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

ergibt sich nach einigen Vereinfachungen folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\Gamma}}'_1(1) &= -\frac{1}{2}C_L^{2323} - \Gamma'(1) \\
\bar{\bar{\Gamma}}'_2(1) &= -\frac{1}{2}C_L^{1313} - \Gamma'(1) \\
\bar{\bar{\Gamma}}'_3(1) &= -\frac{1}{2}C_L^{1212} - \Gamma'(1)
\end{aligned} \tag{6.76}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\Gamma}}''_1(1) &= C_L^{2233} + \frac{1}{2}C_L^{2323} - \Gamma''(1) \\
\bar{\bar{\Gamma}}''_2(1) &= C_L^{1133} + \frac{1}{2}C_L^{1313} - \Gamma''(1) \\
\bar{\bar{\Gamma}}''_3(1) &= C_L^{1122} + \frac{1}{2}C_L^{1212} - \Gamma''(1)
\end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}'_1(1) &= \frac{1}{2}(C_L^{1212} + C_L^{1313}) + \Gamma'(1) \\
\bar{\Gamma}'_2(1) &= \frac{1}{2}(C_L^{1212} + C_L^{2323}) + \Gamma'(1) \\
\bar{\Gamma}'_3(1) &= \frac{1}{2}(C_L^{1313} + C_L^{2323}) + \Gamma'(1)
\end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}''_1(1) &= C_L^{1111} - C_L^{1122} - C_L^{1133} - \frac{1}{2}(C_L^{1212} + C_L^{1313}) + \Gamma''(1) \\
\bar{\Gamma}''_2(1) &= C_L^{2222} - C_L^{1122} - C_L^{2233} - \frac{1}{2}(C_L^{1212} + C_L^{2323}) + \Gamma''(1) \\
\bar{\Gamma}''_3(1) &= C_L^{3333} - C_L^{1133} - C_L^{2233} - \frac{1}{2}(C_L^{1313} + C_L^{2323}) + \Gamma''(1)
\end{aligned} \tag{6.79}$$

in den partiellen Ableitungen der konvexen Funktionen (6.64, 6.65, 6.66), ausgewertet in der Referenzkonfiguration

$$\Gamma'(1) = 2c - c^* \quad \Gamma''(1) = 2c + c^* \tag{6.80}$$

$$\bar{\Gamma}'_i(1) = 2a_i - a_i^* \quad \bar{\Gamma}''_i(1) = 2a_i + a_i^* \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.81)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}'_i(1) = 2b_i - b_i^* \quad \bar{\bar{\Gamma}}''_i(1) = 2b_i + b_i^* \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.82)$$

Die Materialparameter berechnen sich als Funktion der neun Ingenieurkonstanten $E_1, E_2, E_3, \mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ nach (Tab. 6.1) und der freien Parameter c, c^*

$$a_1 = 0.25 (C_L^{1111} - C_L^{1122} - C_L^{1133}) + c \quad (6.83)$$

$$a_1^* = 0.50 (C_L^{1111} - C_L^{1122} - C_L^{1133} - C_L^{1212} - C_L^{1313}) + c^* \quad (6.84)$$

$$a_2 = 0.25 (C_L^{2222} - C_L^{1122} - C_L^{2233}) + c \quad (6.85)$$

$$a_2^* = 0.50 (C_L^{2222} - C_L^{1122} - C_L^{2233} - C_L^{1212} - C_L^{2323}) + c^* \quad (6.86)$$

$$a_3 = 0.25 (C_L^{3333} - C_L^{1133} - C_L^{2233}) + c \quad (6.87)$$

$$a_3^* = 0.50 (C_L^{3333} - C_L^{1133} - C_L^{2233} - C_L^{1313} - C_L^{2323}) + c^* \quad (6.88)$$

$$b_1 = 0.25 C_L^{2233} - c \quad (6.89)$$

$$b_1^* = 0.50 (C_L^{2233} + C_L^{2323}) - c^* \quad (6.90)$$

$$b_2 = 0.25 C_L^{1133} - c \quad (6.91)$$

$$b_2^* = 0.50 (C_L^{1133} + C_L^{1313}) - c^* \quad (6.92)$$

$$b_3 = 0.25 C_L^{1122} - c \quad (6.93)$$

$$b_3^* = 0.50 (C_L^{1122} + C_L^{1212}) - c^*. \quad (6.94)$$

6.5.2 Transversale Isotropie

Mit der $X_{\mathbf{A}}^1$ -Achse als bevorzugter Richtung wird der Ansatz (6.63) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $C_L^{2323} = C_L^{2222} - C_L^{2233}$ mit $a_{\parallel} = a_1, a_{\perp} = a_2 + a_3, b_{\parallel} = b_1 = b_3, b_{\perp} = b_2$ auf den Sonderfall der transversalen Isotropie reduziert.

$$\begin{aligned} W = & \bar{\Gamma}_{\parallel}(J_1) + \bar{\bar{\Gamma}}_{\parallel}(J_{12}) + \bar{\bar{\Gamma}}_{\parallel}(J_{31}) \\ & + \bar{\Gamma}_{\perp}(J_2) + \bar{\Gamma}_{\perp}(J_3) + \bar{\bar{\Gamma}}_{\perp}(J_{23}) + \Gamma(J) + e. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Für kleine Verzerrungen nahe der spannungsfreien Ausgangskonfiguration führt das Gleichungssystem (6.83 - 6.94) auf

$$a_{\perp}^* = -b_{\parallel}^* = -\frac{1}{2} (C_L^{1122} + C_L^{1212}) + c^*. \quad (6.96)$$

Werden positive Materialparameter $a_{\perp}^* > 0$ und $b_{\parallel}^* > 0$ vorausgesetzt, ergibt sich

$$a_{\perp}^* = -b_{\parallel}^* = 0 \quad \text{bzw.} \quad c^* = \frac{1}{2} (C_L^{1122} + C_L^{1212}). \quad (6.97)$$

Die in der Referenzkonfiguration ausgewerteten Funktionen $\Gamma'(J), \Gamma''(J)$ nach Gleichung (6.80) sind mit $c^* = \frac{1}{2} (\Gamma''(1) - \Gamma'(1))$ äquivalent zu der Geradengleichung

$$\Gamma''(1) = C_L^{1122} + C_L^{1212} + \Gamma'(1) \quad (6.98)$$

für die Variablen $\Gamma''(1)$ und $\Gamma'(1)$. Das führt zur Reduktion eines unabhängigen Materialparameters.

Es resultiert eine Verzerrungsenergiefunktion der Form

$$W = a_{\parallel} (I_{\parallel} - 1) + a_{\perp} (I_{\perp} - 2) + b_{\parallel} (\mathbb{I}_{\parallel} - 1) + b_{\perp} (\mathbb{I}_{\perp} - 2) + c (\mathbb{I}_{\mathbb{C}} - 1) - \frac{1}{2} a_{\parallel}^* \ln I_{\parallel} - \frac{1}{2} b_{\perp}^* \ln \mathbb{I}_{\perp} - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{I}_{\mathbb{C}}; \quad (6.99)$$

sie ist abhängig von der irreduziblen Funktionalbasis (6.44)

$$I_{\parallel} = I_1, \quad I_{\perp} = I_2 + I_3, \quad \mathbb{I}_{\parallel} = \mathbb{I}_{12} + \mathbb{I}_{31}, \quad \mathbb{I}_{\perp} = \mathbb{I}_{23}, \quad \mathbb{I}_{\mathbb{C}}.$$

Mit einem solchen Ansatz werden die Richtungsänderungen der bevorzugten Richtung erfaßt, sowie der Übergang von transversaler Isotropie zu allgemeiner Anisotropie.

Die Materialparameter lassen sich abhängig von den Ingenieurkonstanten $E_{\parallel}, E_{\perp}, \mu_{\parallel}, \mu_{\perp}, \nu_{\parallel}$ nach (Tab. 6.1) und dem freien Parameter $\Gamma'(1)$ festlegen:

$$c = \frac{1}{4} (\Gamma'(1) + \Gamma''(1)) = \frac{1}{4} (C_L^{1122} + C_L^{1212}) + \frac{1}{2} \Gamma'(1) \quad (6.100)$$

$$c^* = \frac{1}{2} (C_L^{1122} - C_L^{1212})$$

$$a_{\parallel} = \frac{1}{4} (C_L^{1111} - C_L^{1122} + C_L^{1212}) + \frac{1}{2} \Gamma'(1)$$

$$a_{\parallel}^* = \frac{1}{2} (C_L^{1111} - C_L^{1122} - C_L^{1212}) = \text{konst.} \quad (6.101)$$

$$a_{\perp} = \frac{1}{4} (C_L^{1212} + C_L^{2323}) + \frac{1}{2} \Gamma'(1)$$

$$b_{\perp} = \frac{1}{4} (C_L^{2233} - C_L^{1122} - C_L^{1212}) - \frac{1}{2} \Gamma'(1)$$

$$b_{\perp}^* = \frac{1}{2} (C_L^{2222} - C_L^{1122} - C_L^{1212}) = \text{konst.} \quad (6.102)$$

$$b_{\parallel} = -\frac{1}{4} C_L^{1212} - \frac{1}{2} \Gamma'(1).$$

Die Restriktion positiver Materialparameter definiert den Wertebereich des freien Materialparameters $\Gamma'(1)$:

$$a_{\parallel}^* > 0: \quad C_L^{1111} - C_L^{1122} - C_L^{1212} > 0$$

$$b_{\perp}^* > 0: \quad C_L^{2222} - C_L^{1122} - C_L^{1212} > 0 \quad (6.103)$$

$$c^* > 0: \quad C_L^{1122} - C_L^{1212} > 0$$

$$a_{\parallel} > 0: \quad \Gamma'(1) > -0.5 (C_L^{1111} + C_L^{1212} - C_L^{1122})$$

$$a_{\perp} > 0: \quad \Gamma'(1) > -0.5 (C_L^{1212} + C_L^{2323}) \quad (6.104)$$

$$c > 0: \quad \Gamma'(1) > -0.5 (C_L^{1122} + C_L^{1212})$$

$$b_{\parallel} > 0: \quad \Gamma'(1) < -0.5 C_L^{1212} \quad (6.105)$$

$$b_{\perp} > 0: \quad \Gamma'(1) < -0.5 (C_L^{1122} + C_L^{1212} - C_L^{2233})$$

Einfacher bestimmen sich jedoch die Materialparameter abhängig von den Ingenieurkonstanten (Anhang A).

6.5.3 Isotropie

Die Richtungsunabhängigkeit des Materials spiegelt sich im Ansatz (6.63) wie folgt wider:

$$W = \bar{\Gamma}(J_1) + \bar{\Gamma}(J_2) + \bar{\Gamma}(J_3) + \bar{\bar{\Gamma}}(J_{23}) + \bar{\bar{\Gamma}}(J_{31}) + \bar{\bar{\Gamma}}(J_{12}) + \Gamma(J) + e, \quad (6.106)$$

und die Geradengleichung (6.98), dargestellt in (Abb. 6.1), lautet

$$\Gamma''(1) = (\lambda + 2\mu) + \Gamma'(1). \quad (6.107)$$

Es resultiert eine Verzerrungsenergiefunktion vom Typ des kompressiblen MOONEY-RIVLIN Modells (4.14)

$$W = a(I_C - 3) + b(II_C - 3) + c(III_C - 1) - \frac{1}{2} c^* \ln III_C \quad (6.108)$$

mit $I_1 + I_2 + I_3 = I_C$, $II_{12} + II_{23} + II_{31} = II_C$ und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &= \mu + \frac{1}{2}\Gamma'(1) & b &= -\frac{1}{2}(\mu + \Gamma'(1)) \\ c &= \frac{1}{4}(\Gamma''(1) + \Gamma'(1)) & c^* &= \frac{1}{2}(\Gamma''(1) - \Gamma'(1)). \end{aligned} \quad (6.109)$$

Mit der Beschränkung auf positive Materialparameter läßt sich der Definitionsbereich von $\Gamma'(1)$ festlegen:

$$b = -\frac{1}{4}(2\mu + 2\Gamma'(1)) > 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(1) < -\mu \quad (6.110)$$

$$a = -\frac{1}{2}(4b + \Gamma'(1)) > 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(1) > -2\mu.$$

Die Forderung positiver Materialparameter c , $c^* > 0$ ist äquivalent zu der Bedingung

$$\Gamma''(1) > \|\Gamma'(1)\| \quad (6.111)$$

und schränkt den Definitionsbereich zusätzlich ein. Die maßgebenden Grenzen des Definitions- und Wertebereiches sind für ein Wertepaar $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$:

$$S =](-\frac{1}{2}\lambda - \mu, \frac{1}{2}\lambda + \mu), (-\mu, \lambda + \mu)[. \quad (6.112)$$

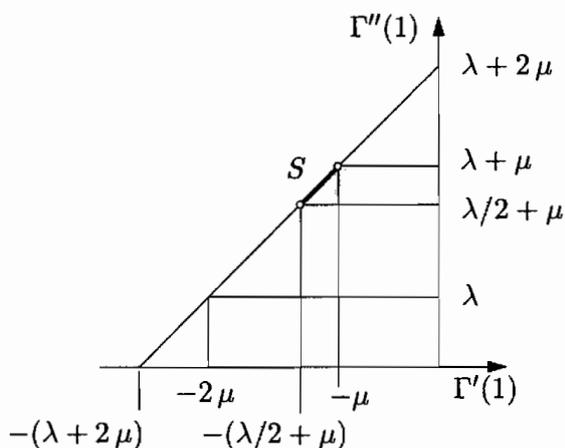


Abb. 6.1: Materialkoeffizienten für eine konvexe Funktion $\Gamma(J)$

Die auszuschließenden Grenzfälle des Definitionsbereiches (6.112) sind weder polykonvex noch genügen sie der Coercivitätsungleichung.

Das Wertepaar $(\Gamma'(1), \Gamma''(1)) = (-\mu, \lambda + \mu)$ liefert die Bedingung $b = 0$ und charakterisiert das kompressible NEO-HOOKE Modell

$$W = \frac{1}{2}\mu(I_C - 3) + \frac{1}{4}\lambda(III_C - 1) - \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu) \ln III_C. \quad (6.113)$$

Für das Wertepaar $(\Gamma'(1), \Gamma''(1)) = (-\frac{1}{2}\lambda - \mu, \frac{1}{2}\lambda + \mu)$ verschwindet mit $c = 0$ der lineare Anteil in der dritten Hauptinvarianten III_C

$$W = (\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\lambda)(I_C - 3) + \frac{1}{4}\lambda(II_C - 3) - \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu) \ln III_C. \quad (6.114)$$

6.6 Zusammenstellung der vorgeschlagenen Modelle

6.6.1 Orthotropie

Für die folgende Verzerrungsenergiefunktion (6.67) resultieren die Materialparameter einschließlich einer Beschränkung ihres Definitionsbereiches nach (6.83 - 6.94)

$$\begin{aligned} W = & a_1(I_1 - 1) + a_2(I_2 - 1) + a_3(I_3 - 1) \\ & + b_1(\mathbb{I}_{23} - 1) + b_2(\mathbb{I}_{31} - 1) + b_3(\mathbb{I}_{12} - 1) + c(\mathbb{III}_{\mathbf{C}} - 1) \\ & - \frac{1}{2} a_1^* \ln I_1 - \frac{1}{2} a_2^* \ln I_2 - \frac{1}{2} a_3^* \ln I_3 \\ & - \frac{1}{2} b_1^* \ln \mathbb{I}_{23} - \frac{1}{2} b_2^* \ln \mathbb{I}_{31} - \frac{1}{2} b_3^* \ln \mathbb{I}_{12} - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{III}_{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor folgt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = & (2a_1 - \frac{a_1^*}{I_1}) \mathbf{M}_1 + (2a_2 - \frac{a_2^*}{I_2}) \mathbf{M}_2 + (2a_3 - \frac{a_3^*}{I_3}) \mathbf{M}_3 \\ & + (2b_1 - \frac{b_1^*}{\mathbb{I}_{23}}) \mathbf{M}_{\mathbf{C}1} + (2b_2 - \frac{b_2^*}{\mathbb{I}_{31}}) \mathbf{M}_{\mathbf{C}2} + (2b_3 - \frac{b_3^*}{\mathbb{I}_{12}}) \mathbf{M}_{\mathbf{C}3} \\ & + (2c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} - c^*) \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (6.115)$$

und den Tensorgeneratoren nach (6.40, 6.41) und \mathbf{C}^{-1} . Der Elastizitätstensor folgt mit

$$\mathbf{C} = \left(C_{\mathbf{A}}^{ijkl} + c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} (g_{\mathbf{A}}^{ij} g_{\mathbf{A}}^{kl} + g_{\mathbf{A}}^{ik} g_{\mathbf{A}}^{jl}) - 2c^* g_{\mathbf{A}}^{ik} g_{\mathbf{A}}^{jl} \right) \mathbf{i}_{\mathbf{A}i} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}j} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}k} \otimes \mathbf{i}_{\mathbf{A}l} \quad (6.116)$$

Seine richtungsabhängigen Koeffizienten $C_{\mathbf{A}}^{ijkl}$ sind in (Tab. 6.2, 6.3) aufgeführt. Sie beziehen sich wie in (Tab. 6.1) auf die obere Hälfte der symmetrischen Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{A}}^{1111} &= 2a_1^* \frac{1}{C_{11}^2} + 2b_3^* \frac{C_{22}^2}{\mathbb{I}_{12}^2} + 2b_2^* \frac{C_{33}^2}{\mathbb{I}_{31}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{2222} &= 2a_2^* \frac{1}{C_{22}^2} + 2b_1^* \frac{C_{33}^2}{\mathbb{I}_{23}^2} + 2b_3^* \frac{C_{11}^2}{\mathbb{I}_{12}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{3333} &= 2a_3^* \frac{1}{C_{33}^2} + 2b_1^* \frac{C_{22}^2}{\mathbb{I}_{23}^2} + 2b_2^* \frac{C_{11}^2}{\mathbb{I}_{31}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{1122} &= 4b_3 - 2b_3^* \frac{1}{\mathbb{I}_{12}} + 2b_3^* \frac{C_{11} C_{22}}{\mathbb{I}_{12}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{1212} &= -8b_3 + 4b_3^* \frac{1}{\mathbb{I}_{12}} + 8b_3^* \frac{C_{12}^2}{\mathbb{I}_{12}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{1133} &= 4b_2 - 2b_2^* \frac{1}{\mathbb{I}_{31}} + 2b_2^* \frac{C_{33} C_{11}}{\mathbb{I}_{31}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{1313} &= -8b_2 + 4b_2^* \frac{1}{\mathbb{I}_{31}} + 8b_2^* \frac{C_{13}^2}{\mathbb{I}_{31}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{2233} &= 4b_1 - 2b_1^* \frac{1}{\mathbb{I}_{23}} + 2b_1^* \frac{C_{22} C_{33}}{\mathbb{I}_{23}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{2323} &= -8b_1 + 4b_1^* \frac{1}{\mathbb{I}_{23}} + 8b_1^* \frac{C_{23}^2}{\mathbb{I}_{23}^2} \end{aligned}$$

Tab. 6.2: Richtungsabhängige Koeffizienten des Elastizitätstensors

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{A}}^{1112} &= -4b_3^* \frac{C_{22} C_{12}}{\mathbb{I}_{12}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{1113} &= -4b_2^* \frac{C_{33} C_{13}}{\mathbb{I}_{31}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{2223} &= -4b_1^* \frac{C_{33} C_{23}}{\mathbb{I}_{23}^2}; \\ C_{\mathbf{A}}^{2212} &= -4b_3^* \frac{C_{11} C_{12}}{\mathbb{I}_{12}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{3313} &= -4b_2^* \frac{C_{11} C_{31}}{\mathbb{I}_{13}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{3323} &= -4b_1^* \frac{C_{22} C_{23}}{\mathbb{I}_{23}^2} \end{aligned}$$

Tab. 6.3: Zu einer Änderung der Anisotropie führende Koeffizienten

6.6.2 Transversale Isotropie

Liegt nur eine bevorzugte Richtung im Material vor (6.99), resultiert analog

$$\begin{aligned}
 W &= a_{\parallel} (I_{\parallel} - 1) + a_{\perp} (I_{\perp} - 2) + b_{\parallel} (\mathbb{I}_{\parallel} - 2) + b_{\perp} (\mathbb{I}_{\perp} - 1) + c (\mathbb{III}_{\mathbf{C}} - 1) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_{\parallel}^* \ln I_{\parallel} \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2} b_{\perp}^* \ln \mathbb{I}_{\perp} \quad - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{III}_{\mathbf{C}} \\
 \mathbf{S} &= (2a_{\parallel} - a_{\parallel}^* \frac{1}{I_{\parallel}}) \mathbf{M}_{\parallel} + 2a_{\perp} \mathbf{M}_{\perp} + 2b_{\parallel} \mathbf{M}_{\mathbf{C}\parallel} + (2b_{\perp} - b_{\perp}^* \frac{1}{\mathbb{I}_{\perp}}) \mathbf{M}_{\mathbf{C}\perp} \\
 &\quad + (2c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} - c^*) \mathbf{C}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{6.117}$$

Die richtungsabhängigen Komponenten des Elastizitätstensors (6.116) sind in (Tab. 6.4, 6.5) aufgeführt.

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{A}}^{1111} &= 2a_{\parallel}^* \frac{1}{C_{11}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{2222} &= 2b_{\perp}^* \frac{C_{33}^2}{\mathbb{I}_{23}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{3333} &= 2b_{\perp}^* \frac{C_{22}^2}{\mathbb{I}_{23}^2} \\
 C_{\mathbf{A}}^{1122} &= C_{\mathbf{A}}^{1133} = 4b_{\parallel}; & C_{\mathbf{A}}^{1212} &= C_{\mathbf{A}}^{1313} = -8b_{\parallel} \\
 C_{\mathbf{A}}^{2233} &= 4b_{\perp} - 2b_{\perp}^* \frac{1}{\mathbb{I}_{23}} + 2b_{\perp}^* \frac{C_{22}C_{33}}{\mathbb{I}_{23}^2}; & C_{\mathbf{A}}^{2323} &= -8b_{\perp} + 4b_{\perp}^* \frac{1}{\mathbb{I}_{23}} + 8b_{\perp}^* \frac{C_{23}^2}{\mathbb{I}_{23}^2}
 \end{aligned}$$

Tab. 6.4: Richtungsabhängige Koeffizienten des Elastizitätstensors

$$C_{\mathbf{A}}^{2223} = -4b_{\perp}^* \frac{C_{33}C_{23}}{\mathbb{I}_{23}^2}; \quad C_{\mathbf{A}}^{3323} = -4b_{\perp}^* \frac{C_{22}C_{23}}{\mathbb{I}_{23}^2}$$

Tab. 6.5: Zu einer Änderung der Anisotropie führende Koeffizienten

6.6.3 Isotropie

Aus dem kompressiblen MOONEY-RIVLIN Modell folgt

$$\begin{aligned}
 W &= a(I_{\mathbf{C}} - 3) + b(\mathbb{I}_{\mathbf{C}} - 3) + c(\mathbb{III}_{\mathbf{C}} - 1) - \frac{1}{2} c^* \ln \mathbb{III}_{\mathbf{C}} \\
 \mathbf{S} &= 2a \mathbf{I} + 2b \mathbf{M}_{\mathbf{C}} + (2c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} - c^*) \mathbf{C}^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.118}$$

$$\mathbf{C} = 4b (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}}) + 4c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}}) + 2c^* \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}} \tag{6.119}$$

mit folgender Komponentendarstellung hinsichtlich des Bezugssystems $\{\mathbf{i}_{\mathbf{A}1}, \mathbf{i}_{\mathbf{A}2}, \mathbf{i}_{\mathbf{A}3}\}$

$$C^{ijkl} = 4b (G_{\mathbf{A}}^{ij} G_{\mathbf{A}}^{kl} - G_{\mathbf{A}}^{ik} G_{\mathbf{A}}^{jl}) + 4c \mathbb{III}_{\mathbf{C}} (g_{\mathbf{A}}^{ij} g_{\mathbf{A}}^{kl} - g_{\mathbf{A}}^{ik} g_{\mathbf{A}}^{jl}) + 2c^* g_{\mathbf{A}}^{ik} g_{\mathbf{A}}^{jl}. \tag{6.120}$$

Für die Metrik der unverformten Konfiguration gilt: $G_{\mathbf{A}}^{ij} = G_{\mathbf{A}ij} = \mathbf{i}_{\mathbf{A}i} \cdot \mathbf{i}_{\mathbf{A}j} = \delta_{ij}$. Der Tensor 4. Stufe⁶ $\mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}}$ berechnet sich als Gradient des inversen rechten CAUCHY-GREEN Tensors \mathbf{C}^{-1} .

⁶Mit $\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (g^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j)}{\partial (g_{kl} \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l)}$ und $0 = \frac{\partial \delta_m^i}{\partial g_{kl}} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} g_{jm} + g^{ij} \delta_l^k \delta_m^i$ folgt $\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} = -g^{ik} g^{jl}$.

Kapitel 7

3D-Schalenformulierung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein kontinuumsbasiertes Schalenmodell verwendet, das die unmodifizierte Implementierung von dreidimensionalen Materialmodellen ermöglicht für Strukturanalysen, die große Verzerrungen und finite Rotationen berücksichtigen. Die Kinematik basiert auf einem linearen Verschiebungsansatz und enthält einen zusätzlichen Verzerrungsfreiheitsgrad zur Modellierung fehlender linearer transversaler Dehnungen. Die numerische Umsetzung erfolgt mit einem isoparametrischen, vierknotigen finiten Element ohne Rotationsvariablen. Auf Elementebene läßt sich der eingeführte Verzerrungsfreiheitsgrad herauskondensieren. Infolge der bilinearen Formfunktionen treten künstliche Versteifigungseffekte auf, welche mittels *Assumed-Strain* und *Enhanced-Assumed-Strain* Konzepten beseitigt werden.

7.1 Approximation des Schalenkontinuums

Jeder beliebige Punkt X des unverformten Schalenraumes, der von einer einparametrischen Schar äquidistanter Flächen durchzogen ist, wird ausgehend von der die Tragwerksdicke H halbierenden Mittelfläche \mathcal{F} mit einem linearen Ansatz in Dickenrichtung beschrieben (Abb. 7.1)

$$\mathbf{X} = \overset{0}{\mathbf{X}} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{X}} \quad \text{mit} \quad -\frac{1}{2}H \leq \Theta^3 \leq \frac{1}{2}H. \quad (7.1)$$

Der Ortsvektor der Schalenmittelfläche $\overset{0}{\mathbf{X}}$ und die Flächennormale $\mathbf{D} = \overset{1}{\mathbf{X}}$ sind nur von den flächenhaften Koordinaten $\{\Theta^1, \Theta^2\}$ abhängig.

Die kovarianten Basisvektoren des Schalenkontinuums

$$\mathbf{G}_\alpha = \overset{0}{\mathbf{X}}_{,\alpha} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{X}}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_3 = \overset{1}{\mathbf{X}} = \mathbf{D} \quad (7.2)$$

berechnen sich über die Basis der Schalenmittelfläche

$$\mathbf{A}_\alpha = \overset{0}{\mathbf{X}}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}^3 = \frac{1}{\sqrt{A}} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \quad (7.3)$$

mit der Determinanten des Metriktensors $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j$

$$A = (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3 = A_{11}A_{22} - (A_{12})^2. \quad (7.4)$$

Für die kovarianten Komponenten der Metrik $A_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$ gilt nur in der unverformten Konfiguration $A_{\alpha 3} = 0$ sowie $A_{33} = 1$. Die übrigen differentialgeometrischen Elemente lassen sich analog zu (2.8 - 2.14) bestimmen. Über das Membrantragverhalten der Struktur gibt vielfach schon die GAUSS Krümmung (2.46) erste Anhaltspunkte (Abb. 2.4)

$$K = \frac{B_{11}B_{22} - (B_{12})^2}{A_{11}A_{22} - (A_{12})^2} \quad B_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}_3 = -\mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta. \quad (7.5)$$

Die verformte Konfiguration wird durch ein lineares Verschiebungsfeld approximiert

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \overset{0}{\mathbf{u}} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{u}} = (\overset{0}{\mathbf{x}} - \overset{0}{\mathbf{X}}) + \Theta^3 (\overset{1}{\mathbf{x}} - \overset{1}{\mathbf{X}}) \quad (7.6)$$

mit dem Ortsvektor der verformten Konfiguration $\mathbf{x} = \overset{0}{\mathbf{x}} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{x}}$, dem Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche $\overset{0}{\mathbf{u}}$ und dem Differenzvektor $\overset{1}{\mathbf{u}}$.

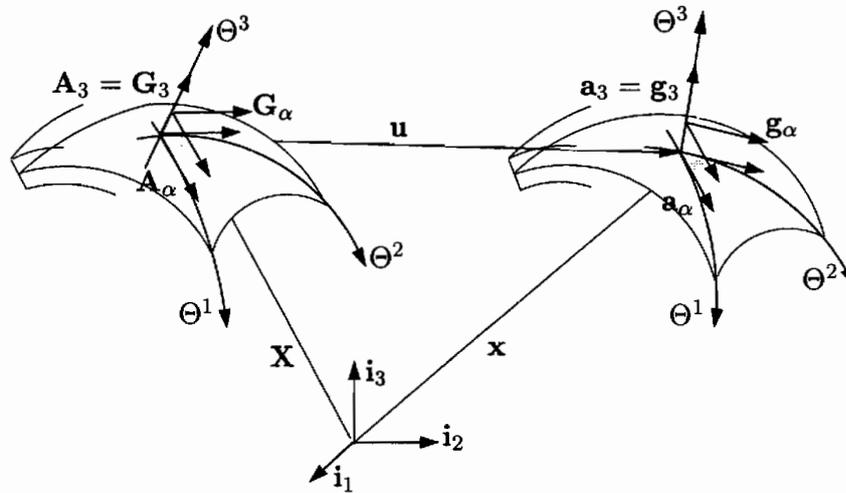


Abb. 7.1: Unverformte und verformte Schale

Mehrschichtenkinematik. Durch eine Unterteilung der Schalendicke H in N Schichten lassen sich unterschiedliche Materialeigenschaften über die Schalenhöhe simulieren. Ausgehend von der Schalenmittelfläche der ersten Schicht kann jeder Punkt des unverformten Schalenraumes mit dem geradlinig über den Strukturquerschnitt verlaufenden Ortsvektor beschrieben werden

$$\mathbf{X}_L = \overset{0}{\mathbf{X}}_1 + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{X}} \quad \text{mit} \quad -\frac{1}{2}H_1 \leq \Theta^3 \leq H - \frac{1}{2}H_1. \quad (7.7)$$

Im verformten Zustand wird jede einzelne Schicht L ($L = 1, \dots, N$) durch die oben beschriebene Einschichtenkinematik approximiert. Dabei wird die C^0 -Kontinuität des Ortsvektors \mathbf{x}_L bzw. des Verschiebungsfeldes gefordert:

$$\mathbf{x}_L(\Theta_L^3 = -\frac{1}{2}H_L) = \mathbf{x}_{L-1}(\Theta_{L-1}^3 = +\frac{1}{2}H_{L-1}) \quad -\frac{1}{2}H_L \leq \Theta_L^3 \leq \frac{1}{2}H_L. \quad (7.8)$$

Hieraus entsteht eine Beziehung zur Berechnung des Ortsvektors der Mittelfläche der Schicht L

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_L &= \overset{0}{\mathbf{x}}_{L-1} + \frac{1}{2} \left[H_{L-1} \overset{1}{\mathbf{x}}_{L-1} + H_L \overset{1}{\mathbf{x}}_L \right] \\ &= \overset{0}{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{L-1} \left[H_K \overset{1}{\mathbf{x}}_K + H_{K+1} \overset{1}{\mathbf{x}}_{K+1} \right].\end{aligned}\quad (7.9)$$

Das Modell enthält die drei Verschiebungsfreiheitsgrade des Ortsvektors der ersten Schicht $\Delta \overset{0}{\mathbf{x}}_1$ sowie drei Direktorfreiheitsgrade $\Delta \overset{1}{\mathbf{x}}_L$ als unabhängige Variablen (Başar & Ding 1995). Auf die Transformation der Referenzfläche in die Schalenmitte wird in (Schultz 1996; Lürding 1997; Eckstein 1999) detailliert eingegangen.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich der Einfachheit halber auf ein Einschichtenmodell und lassen sich analog auf ein Mehrschichtenmodell übertragen.

2D-Verzerrungsvariablen. Der Metriktensor und die Verzerrungen können mit dem *Shifter* \mathbf{Z} auf die Basis der Schalenmittelfläche transformiert

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{Z}^{-1} = E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j \quad \text{mit} \quad \mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \overset{0}{\mathbf{X}}} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i \quad (7.10)$$

und als Polynom in der Dickenkoordinate Θ^3 geschrieben werden. Bei dem postulierten linearen Verschiebungsansatz über die Schalenhöhe (7.6)

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \overset{0}{E}_{\alpha\beta} + \Theta^3 \overset{1}{E}_{\alpha\beta} + (\Theta^3)^2 \overset{2}{E}_{\alpha\beta} & \overset{0}{E}_{\alpha 3} + \Theta^3 \overset{1}{E}_{\alpha 3} \\ \text{sym.} & \overset{0}{E}_{33} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

resultieren mit

$$\overset{k}{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\overset{k}{g}_{ij} - \overset{k}{G}_{ij}) \quad \text{und} \quad k = 0, 1, 2 \quad (7.12)$$

quadratische tangentielle Verzerrungen, lineare transversale Schubverzerrungen sowie konstante transversale Dehnungen. Mit einer solchen polynomialen Darstellung ist bei konstanter Schalendicke eine Vorabintegration über die Schalenhöhe möglich. Die Verzerrungskomponenten sind in Anhang **B** aufgeführt.

Lineare transversale Dehnungen. Ein sechsexparametriger Verschiebungsansatz approximiert das Verformungsverhalten bei vorhandener Querkontraktion zu steif. Der Fehler liegt bei dem als *POISSON-Locking* bekannten Phänomen in der Größenordnung von ν^2 und wird bei feiner werdender Unterteilung der Schalendicke in mehrere Schichten schnell kleiner. Verursacht wird der Versteifungseffekt durch fehlende lineare transversale Dehnungen in der Kinematik. Beseitigt wird dieses Phänomen durch Einführung eines zusätzlichen Verzerrungsfreiheitsgrades über das *Enhanced-Assumed-Strain Konzept* im Zuge der numerischen Umsetzung¹.

¹Alternativ kann der Verschiebungsansatz um einen quadratischen Term erhöht werden

$$\mathbf{x} = \overset{0}{\mathbf{x}} + \Theta^3 (1 + \lambda \Theta^3) \overset{1}{\mathbf{x}} \quad (7\text{-Parameter})$$

$$\mathbf{x} = \overset{0}{\mathbf{x}} + \Theta^3 \overset{1}{\mathbf{x}} + (\Theta^3)^2 \overset{2}{\mathbf{x}} \quad (9\text{-Parameter}).$$

7.2 Numerische Umsetzung

Das Strukturverhalten wird über eine gebietsweise Approximation der Schalenebene mit der *Methode der Finiten Elemente* analysiert. Dem *isoparametrischen Elementkonzept* entsprechend werden die Geometrie und das Verschiebungsfeld durch LAGRANGE Polynome gleicher Ordnung approximiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= N_K \overset{0}{\mathbf{X}}^K + \Theta^3 N_K \overset{1}{\mathbf{X}}^K & \mathbf{x} &= N_K \overset{0}{\mathbf{x}}^K + \Theta^3 N_K \overset{1}{\mathbf{x}}^K \\ & & \mathbf{u} &= N_K \overset{0}{\mathbf{u}}^K + \Theta^3 N_K \overset{1}{\mathbf{u}}^K \end{aligned} \quad (7.13)$$

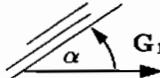
Der Index K kennzeichnet die Knotenwerte und fungiert darüberhinaus als Summationsindex über alle vier Knoten des finiten Elementes. Die kinematischen Variablen werden in Abhängigkeit der Elementkoordinaten ξ^1, ξ^2 über das finite Element

$$\square := (\xi^1, \xi^2) \in [-1, +1] \times [-1, +1] \quad (7.14)$$

mit bilinearen Formfunktionen interpoliert:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Die Erfassung der Faserrichtung α erfolgt analog zu (Schultz 1996)



$$\mathbf{G}_1 = N_{K,1} \overset{0}{\mathbf{X}}^K + \Theta^3 N_{K,1} \overset{1}{\mathbf{X}}^K \quad \text{mit} \quad N_{K,1} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi^1}. \quad (7.16)$$

Stabilisierungsalgorithmen

Bei finiten Weggrößenelementen mit bilinearen Formfunktionen treten künstliche Versteifungseffekte auf, die im allgemeinen aus einem fehlenden Gleichgewicht der funktionalen Verläufe in den Verzerrungen und ihrer energetisch konjugierten Spannungen resultieren. Diese sogenannten *Locking* Phänomene zeigen sich hauptsächlich bei quasi dehnungslosen Verbiegungen und nahezu inkompressiblem Materialverhalten. Sie werden durch eine große Schlankheit sowie eine verzerrte Geometrie des finiten Elementes verstärkt. Zur Effizienzsteigerung werden, abhängig von der Art des auftretenden Phänomens, Stabilisierungsalgorithmen implementiert².

Das Enhanced-Assumed-Strain Konzept

Die Anreicherung des Verzerrungsfeldes mit fehlenden, meist höherwertigen Verzerrungsmoden ist eine Möglichkeit zur Beseitigung von *Locking* Effekten (Simo & Rifai 1990;

Literatur mit Rotationsvariablen: (Verhooven 1993; Bařar & Ding 1994; Bařar & Ding 1995; Bařar & Ding 1997); Literatur mit extensiblen Direktorfeld: (Sansour 1995; Lürding 1997)

²Alternativen zu den hier verwendeten *Assumed-Strain* und *Enhanced-Assumed-Strain* Verfahren sind *Assumed-Stress* Ansätze oder die selektive Integration (Pian & Sumihara 1984; Andelfinger 1991; Eckstein 1999).

Simo & Armero 1992). Über das 3-Feld-Funktional von HU-WASHIZU

$$I_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{S}}) = \int_{\Omega} \tilde{W}(\mathbf{E}) dV - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} dV + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dA \quad (7.17)$$

können zusätzliche Verzerrungsfreiheitsgrade $\tilde{\mathbf{E}}$ in die Variationsformulierung einfließen. Somit setzt sich das Verzerrungsfeld aus den kinematisch kompatiblen GREEN-LAGRANGE Verzerrungen $\mathbf{E}^u = \mathbf{E}^u(\mathbf{u})$ und den angereicherten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ zusammen³

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}. \quad (7.18)$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\square} \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} d\square = 0 \quad (7.19)$$

läßt sich $I_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{S}})$ in ein 2-Feld-Funktional $\tilde{I}_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E})$ überführen, so daß die Struktur eines finiten Weggrößenelementes erhalten bleibt.

Bei der Diskretisierung sind Ansatzfunktionen $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi^1, \xi^2)$ für die Interpolation der unabhängigen Verzerrungsfreiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ zu wählen

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha}. \quad (7.20)$$

Es wird gefordert, daß

- diese Interpolationsfunktionen $\mathbf{N}(\xi^1, \xi^2)$ unabhängig von den bilinearen Formfunktionen (7.15) sind, damit ein Rangabfall der Steifigkeitsmatrix ausgeschlossen werden kann (Simo & Rifai 1990).
- das Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{S}}$ mindestens stückweise konstante Funktionen enthält, damit konstante Spannungszustände simuliert werden können. Im Zusammenhang mit der Orthogonalitätsbedingung (7.19) folgt dann

$$\int_{\square} \tilde{\mathbf{E}} d\square = 0. \quad (7.21)$$

Das schränkt die Wahl der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi^1, \xi^2)$ zusätzlich ein.

Zur Vermeidung der unter Druckbeanspruchung auftretenden Instabilitäten in Form von *Hourglass Moden* werden in (Reese 1994; Armero 1998; Bischoff & Ramm 1998) Regularisierungsstrategien aufgezeigt.

Poisson-Locking. Für die im sechseparametrischen Verschiebungsansatz fehlenden, linearen transversalen Dehnungen $\frac{1}{E_{33}}$ wird folgender Ansatz gewählt (Büchter & Ramm 1992; Betsch 1996; Eckstein 1999):

$$\tilde{\mathbf{E}}_T = \Theta^3 \frac{1}{\sqrt{G}} \mathbf{G}_T \boldsymbol{\alpha}_T = \mathbf{N}_T \boldsymbol{\alpha}_T \quad (7.22)$$

³Alternativ kann auch der Deformationsgradient mit inkompatiblen Verzerrungsanteilen angereichert werden (Reese 1994; Betsch 1996). Ein Überblick über die historische Entwicklung, unterschiedliche Ansätze sowie Literaturverweise sind in (Eckstein 1999; Bischoff 1999; Kuhl & Ramm 2000) aufgeführt.

mit den Interpolationsfunktionen \mathbf{G}_T und den Verzerrungsfreiheitsgraden α_T

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_T &= [1 \quad \xi^1 \quad \xi^2 \quad \xi^1\xi^2] \\ \alpha_T^T &= [\alpha_{T1} \quad \alpha_{T2} \quad \alpha_{T3} \quad \alpha_{T4}] .\end{aligned}\quad (7.23)$$

Der Ansatz erfüllt die Orthogonalitätsbedingung, ermöglicht die Simulation konstanter Spannungszustände und dient der Beseitigung des *POISSON-Lockings*.

Membran-Locking. Die Verbesserung eines unzureichenden Membranverhaltens bei quasi dehnungslosen Verbiegungen läßt sich durch Anreicherung der Membranverzerrungen $\overset{0}{E}_{\alpha\beta}$ mit zusätzlichen inkompatiblen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}_M$ erzielen (Betsch 1996; Eckstein 1999; Başar, Itskov & Eckstein 2000):

$$\tilde{\mathbf{E}}_M = \frac{1}{\sqrt{G}} \mathbf{T} \mathbf{G}_M \alpha_M = \mathbf{N}_M \alpha_M \quad (7.24)$$

$$\mathbf{G}_M = \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & 0 & \xi^1\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & \xi^1\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^1 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi^1\xi^2 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

$$\alpha_M^T = [\alpha_{M1} \quad \alpha_{M2} \quad \alpha_{M3} \quad \alpha_{M4} \quad \alpha_{M5} \quad \alpha_{M6} \quad \alpha_{M7}]$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (a_1^1)^2 & (a_1^2)^2 & a_1^1 a_2^2 \\ (a_1^2)^2 & (a_2^2)^2 & a_2^1 a_2^2 \\ 2a_1^1 a_2^1 & 2a_1^2 a_2^2 & a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1 \end{bmatrix} \quad a_\alpha^\beta = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_0^\beta . \quad (7.26)$$

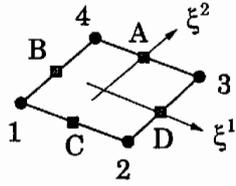
Der Index $(\dots)_0$ kennzeichnet auf den Elementmittelpunkt ($\xi^1 = \xi^2 = 0$) bezogene Größen; die Transformation auf die Elementmitte erfolgt mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} . Durch Auswertung der inkompatiblen Verzerrungskomponenten im Elementmittelpunkt können konstante Spannungszustände auch bei verzerrter Elementgeometrie beschrieben werden.

Volumen-Locking. Im inkompressiblen Grenzfall können häufig keine deviatorischen Moden dargestellt werden, ohne von parasitären volumetrischen Moden begleitet zu werden. Die Anreicherung der Membranverzerrungen und der transversalen Dehnungen mit inkompatiblen Verzerrungen (7.23, 7.25) führt automatisch zur Beseitigung dieses Effektes.

Das Assumed-Strain Konzept

Ein anderes Verfahren zur Beseitigung numerischer Schwächen ist das *Assumed-Strain* Konzept. Hier werden die betreffenden Verzerrungskomponenten in denjenigen Punkten eines finiten Elementes ausgewertet, die frei von parasitären Einflüssen sind. Ausgehend von diesen *Kollokationspunkten* werden die Verzerrungskomponenten dann mit geeigneten Ansatzfunktionen über das Elementinnere interpoliert.

Querschub-Locking. Zur Beseitigung dieses Phänomens ist es ausreichend, die konstanten transversalen Schubverzerrungen in den Mittelpunkten der Elementkanten zu berechnen.



$$\begin{aligned} E_{13}^0 &= \frac{1}{2} (1 + \xi^2) E_{13A}^0 + \frac{1}{2} (1 - \xi^2) E_{13C}^0 \\ E_{23}^0 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^1) E_{23B}^0 + \frac{1}{2} (1 + \xi^1) E_{23D}^0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Der häufig verwendete Algorithmus geht auf (MacNeal 1968; Dvorkin & Bathe 1984) zurück und ist variationstheoretisch von (Simo & Hughes 1986) begründet worden.

Krümmungs-Locking. Dickenänderungen der Struktur können mit einem extensiblen Direktorfeld $\overset{1}{\mathbf{x}}$ berücksichtigt werden. Dieses unterliegt keiner Nebenbedingung, d.h. seine ursprüngliche Länge $\|\overset{1}{\mathbf{X}}\| = 1$ variiert infolge einer Deformation $\|\overset{1}{\mathbf{x}}\| \neq 1$, so daß finite Rotationen ohne Rotationsvariablen beschrieben werden können. Eine direkte Implementierung des extensiblen Direktorfeldes $\overset{1}{\mathbf{x}}$ führt bei einer geometrisch linearen Strukturanalyse gekrümmter Strukturen zum sogenannten *Krümmungs-Locking*. Bei einer geometrisch nichtlinearen Untersuchung tritt dieser Effekt bereits bei ebenen Strukturen unter Biegebeanspruchung auf. Werden die transversalen Dehnungen E_{33} im Sinne eines *Assumed-Strain* Konzeptes in den Knotenpunkten als Kollokationspunkte ausgewertet und mit den bilinearen Formfunktionen (7.15) über das Elementinnere interpoliert (Betsch & Stein 1995; Bischoff & Ramm 1997), so verschwindet der Effekt⁴.

$$E_{33h} = N_K E_{33}^K \quad \text{mit} \quad E_{33}^K = \frac{1}{2} (1 - \overset{1}{\mathbf{x}} \cdot \overset{1}{\mathbf{x}}) \quad (7.28)$$

Strukturanalyse

Die nichtlineare Tragwerksanalyse erfolgt mittels inkrementell-iterativer Algorithmen, wie dem NEWTON-RAPHSON Verfahren, auf numerischem Wege. Dazu wird das *Prinzip der*

⁴Eine numerisch teure Alternative ist ein multiplikativer Split des extensiblen Direktorfeldes in einen inextensiblen Schalendirektor \mathbf{d} und einen skalaren Dickenfaktor λ

$$\overset{1}{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{d}\| = 1, \quad \lambda > 0.$$

Das koppelt die Beschreibung finiter Rotationen an Rotationsvariablen wie die EULER Winkel (Ramm 1976)

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \delta \mathbf{d}^{k+1} + \Delta \delta \mathbf{d}^{k+1}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(\psi_\alpha) = d^i(\psi_\alpha) \mathbf{i}_i, \quad \delta d^i = d^i(\delta \psi_\alpha), \quad \Delta \delta d^i = \Delta d^i(\delta \psi_\alpha)$$

oder den Rotationstensor (Pietraszkiewicz & Badur 1983; Simo & Fox 1989)

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{R}^{k+1} \mathbf{d}^k; \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\vartheta); \quad \delta \mathbf{d} = \vartheta \times \mathbf{d}; \quad \Delta \delta \mathbf{d} = \vartheta \times \vartheta \times \mathbf{d}.$$

Die Rotationsachse wird bei glatten Schalen senkrecht zum Schalendirektor determiniert und finite Rotationen werden mit zwei Rotationsparametern beschrieben (Argyris 1982; Başar 1987). Bei biegesteif zusammengesetzten Strukturen liegt die Rotationsachse in der Verschneidungslinie. Hier sind drei Rotationsparameter erforderlich. Aufgrund fehlender Drillsteifigkeit der Schale wirkt der Drehung des Schalendirektors um die eigene Achse häufig die Biegesteifigkeit der angrenzenden Struktur entgegen (Menzel 1996). Eine Formulierung des Rotationstensors mit dem Rotationsvektor von RODRIGUEZ $\vartheta = \vartheta \mathbf{e}$ und $\|\mathbf{e}\| = 1$ liefert eine singularitätenfreie Darstellung bei beliebig großen Drehungen (Büchter 1992; Menzel 1996). Alternative Beschreibungen finiter Rotationen mit Elementarrotationen wie den EULER oder den CARDAN Winkeln werden in diesem Zusammenhang meistens nicht verwendet.

virtuellen Arbeit (3.30) mit den konservativen, richtungstreuen Flächen- und Volumenlasten (3.28, 3.26)

$$\bar{I}'(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (7.29)$$

linearisiert

$$\Delta \bar{I}'(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} \{ \mathbf{S} : \Delta \mathbf{E} + \Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} \} \, dV \quad (7.30)$$

und nach der Diskretisierung durch die Methode der Finiten Elemente in eine tangentielle Steifigkeitsbeziehung überführt

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{V}_u = \mathbf{P}_a - \mathbf{P}_i. \quad (7.31)$$

Diese ermöglicht das sukzessive Auffinden von Gleichgewichtszuständen abhängig von den Weggrößeninkrementen $\delta \mathbf{V}_u$. Der äußere Lastvektor $\mathbf{P}_a = f \mathbf{P}_0$ wird dabei ausgehend von einer Referenzlast \mathbf{P}_0 über den Lastfaktor f schrittweise erhöht.

Die Gesamtsteifigkeitsbeziehung (7.31) enthält neben den äußeren Lasten noch die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T sowie den Vektor der inneren Kraftgrößen \mathbf{P}_i und folgt aus dem Einmischen der entsprechenden Größen \mathbf{k}_T , \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_a , die auf Elementebene berechnet werden. Dabei resultiert die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_T aus

$$\int_{\square} \int_{-H/2}^{H/2} \{ \Delta S^{ij} \delta E_{ij} + S^{ij} \Delta \delta E_{ij} \} \sqrt{\frac{G}{A}} \, d\Theta^3 \, d\square \quad (7.32)$$

mit $\Delta S^{ij} = C^{ijkl} \Delta E_{kl}$; der Elementvektor der inneren Kräfte \mathbf{p}_i aus

$$\int_{\square} \int_{-H/2}^{H/2} S^{ij} \Delta E_{ij} \sqrt{\frac{G}{A}} \, d\Theta^3 \, d\square. \quad (7.33)$$

Die Elementweggrößeninkremente $\delta \mathbf{u}$ sind die sechs Verschiebungsfreiheitsgrade $\delta \hat{x}^1, \delta \hat{x}^2, \delta \hat{x}^3$ und $\delta \hat{x}^1, \delta \hat{x}^2, \delta \hat{x}^3$. Auf die Behandlung von Elementlasten \mathbf{p}_a wird in (Eckstein 1999) detailliert eingegangen.

Infolge des *Enhanced-Assumed-Strain* Konzeptes enthält das Verzerrungsfeld die aus dem Verschiebungsfeld resultierenden, kompatiblen Verzerrungen $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u})$ und die zusätzlichen, inkompatiblen Verzerrungsmoden $\tilde{\mathbf{E}}$. Das führt zu zwei weiteren Elementsteifigkeitsmatrizen. Davon folgt eine aus den inkompatiblen Moden allein $\tilde{\mathbf{k}}_e$ und die andere aus einer Kombination von kompatiblen und inkompatiblen Verzerrungstermen $\tilde{\mathbf{k}}_d$.

Die tangentielle Elementsteifigkeitsbeziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_T & \tilde{\mathbf{k}}_d^T \\ \tilde{\mathbf{k}}_d & \tilde{\mathbf{k}}_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{p}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_e \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

ermöglicht die Kondensation der Verzerrungsfreiheitsgrade auf Elementebene

$$\boldsymbol{\alpha} = -\tilde{\mathbf{k}}_e^{-1} (\tilde{\mathbf{k}}_d \delta \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{p}}_e). \quad (7.35)$$

Sie sind in der Gesamtsteifigkeitsmatrix, die sich mit

$$(\mathbf{k}_T - \tilde{\mathbf{k}}_T - \lambda \Delta \mathbf{p}_a) \delta \mathbf{u} = \lambda \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_i + \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (7.36)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_T = \tilde{\mathbf{k}}_d^T \tilde{\mathbf{k}}_e^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_d \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{p}}_i = \tilde{\mathbf{k}}_d^T \tilde{\mathbf{k}}_e^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_e, \quad (7.37)$$

aufbaut, nicht mehr enthalten. Eine ausführliche Herleitung findet sich in (Bischoff 1999; Eckstein 1999)⁵.

Bei einer Mehrschichtenkinematik wird die Gesamtsteifigkeitsbeziehung für jede Schicht separat ausgewertet. Die für viele Anwendungen erforderliche Transformation der Verschiebungsfreiheitsgrade auf die Schalenmittelfläche wird in (Schultz 1996; Lürding 1997; Eckstein 1999) beschrieben.

⁵Weitere wichtige Literaturstellen sind (Büchter & Ramm 1992; Betsch & Stein 1995; Betsch, Gruttmann & Stein 1996; Wriggers & Reese 1996; Bischoff & Ramm 1997; Bařar, Itskov & Eckstein 2000)

Kapitel 8

Beispiele

Zur Demonstration der Leistungsstärke des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Materialmodells wird das oben vorgestellte finite Schalenelement in das, am *Institut für Statik und Dynamik* der *Ruhr-Universität Bochum* vorhandene, Finite Element Programm FE-MAS 2000 (Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996) implementiert.

Den Beispielen liegen folgende Materialparameter (Tab. 8.1, 8.2) zugrunde:

$$\begin{array}{lll} E_1 = 17.00 & \mu_{12} = 3.5 & \nu_{12} = 0.35 \\ E_2 = 16.00 & \mu_{23} = 1.7 & \nu_{23} = 0.45 \\ E_3 = 8.00 & \mu_{31} = 2.5 & \nu_{13} = 0.45 \end{array}$$

Tab. 8.1: Ingenieurkonstanten für Orthotropie

$$\begin{array}{lll} E_{\parallel} = 16.00 & \mu_{\parallel} = 1.70 & \nu_{\parallel} = 0.35 \\ E_{\perp} = 8.00 & \mu_{\perp} = 2.76 & \nu_{\perp} = 0.45 \end{array}$$

Tab. 8.2: Ingenieurkonstanten für transversale Isotropie

Sie orientieren sich an den Steifigkeitsdaten der Wand einer Arterie mit $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ (Weizsäcker, Lambert & Pascale 1983). Zu den übrigen Steifigkeitsdaten wurden keine Angaben gemacht; sie wurden sinnvoll geschätzt. Bei transversaler Isotropie sind die Steifigkeitseigenschaft der bevorzugten Richtung hinsichtlich derjenigen orthotropen Materials ausgerichtet. Die vorgestellten Beispiele sollen die Leistungsstärke des erstellten Materialmodells hervorheben. Sie zeigen, daß neben einfachen Grundverformungen mit dem erstellten Materialmodell auch komplexe Deformationszustände simuliert werden können. Der geometrisch nichtlinearen Strukturanalyse geht dabei stets eine lineare Konvergenzstudie zur Ermittlung eines hinreichend genauen Diskretisierungsnetzes voraus, die nicht explizit dargestellt werden soll. Aufgrund fehlender Vergleichsmöglichkeiten der mit dem neu entwickelten Modell erzielten Ergebnisse mit entsprechenden Versuchsdaten, kann die Leistungsfähigkeit des Modells zur Zeit nur qualitativ durch eine Gegenüberstellung mit

der linearen Theorie aufgezeigt werden. Die Leistungsstärke der implementierten Schalenkinematik wurde bereits in (Lürding 1997; Eckstein 1999) demonstriert.

Zur Strukturanalyse kommen folgende Modelle zum Einsatz:

- **Modell 1a** ist das neu entwickelte physikalisch nichtlineare, orthotrope Materialmodell (6.67) mit den zusätzlichen Materialparametern $c = 1.0$ und $c^* = 6.3$.
- **Modell 1b** beschreibt linear elastisches Materialverhalten bei Orthotropie.
- **Modell 2a** ist das physikalisch nichtlineare, transversal isotrope Materialmodell (6.99); ein Sonderfall von Modell 1a. Der zusätzliche Parameter wird mit $\Gamma'(1) = -2.0$ festgelegt; so daß die Restriktion positiver Materialparameter erfüllt ist.
- **Modell 2b** kennzeichnet die lineare Theorie bei transversaler Isotropie.

8.1 Zugprobe bei wechselndem Faserlastwinkel

Die in (Abb. 8.1) dargestellte transversal isotrope Kragplatte unter Zugbeanspruchung wird für die Faserlastwinkel $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ bei einem Diskretisierungsnetz von 10×10 Elementen untersucht. Verwendet werden das transversal isotrope, physikalisch nichtlineare Modell 2a sowie das entsprechende lineare Modell 2b mit den Steifigkeitsdaten aus (Tab. 8.2). Eine Einspannung als Randbedingung bedeutet die Unterdrückung von Verschiebungen und Verdrehungen in einem Punkt, Dickenänderungen werden zugelassen.

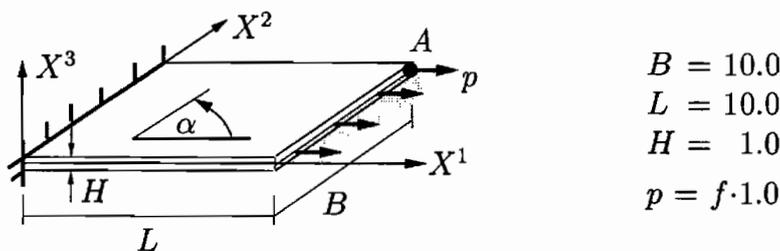
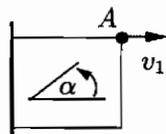


Abb. 8.1: Geometrie der transversal isotropen Kragplatte

Eine lineare Tragwerksanalyse liefert für die Modelle 2a,b abhängig vom Faserlastwinkel folgende Längenänderungen v_1 in Belastungsrichtung im Punkt A mit $p = 1.0$:

	$\alpha = 0^\circ :$	$v_1 = 1.25$
	$\alpha = 30^\circ :$	$v_1 = 2.02$
	$\alpha = 90^\circ :$	$v_1 = 2.49$

Bei einer Beanspruchung in Faserrichtung ($\alpha = 0^\circ$) reagiert das Tragwerk deutlich steifer als bei einer Beanspruchung quer dazu ($\alpha = 90^\circ$).

Das Last-Verschiebungs-Diagramm (Abb. 8.2) zeigt, daß Strukturantwort der Modelle 2a,b im Bereich kleiner Verzerrungen gleich ist. Bei großen Deformationen bildet die

physikalisch lineare Theorie **2b** das Tragverhalten der Struktur deutlich zu steif ab. Der Versteifungseffekt wird anhand der Dickenänderung des Querschnittes besonders deutlich (Abb. 8.3). Für das Modell **2a** seien beispielhaft folgende Werte angegeben:

$\alpha = 0^\circ :$	$f = 6.5$	$v_1 = 12.47$	$h = 0.71$
$\alpha = 30^\circ :$	$f = 3.7$	$v_1 = 13.51$	$h = 0.80$
$\alpha = 90^\circ :$	$f = 2.2$	$v_1 = 8.96$	$h = 0.71$

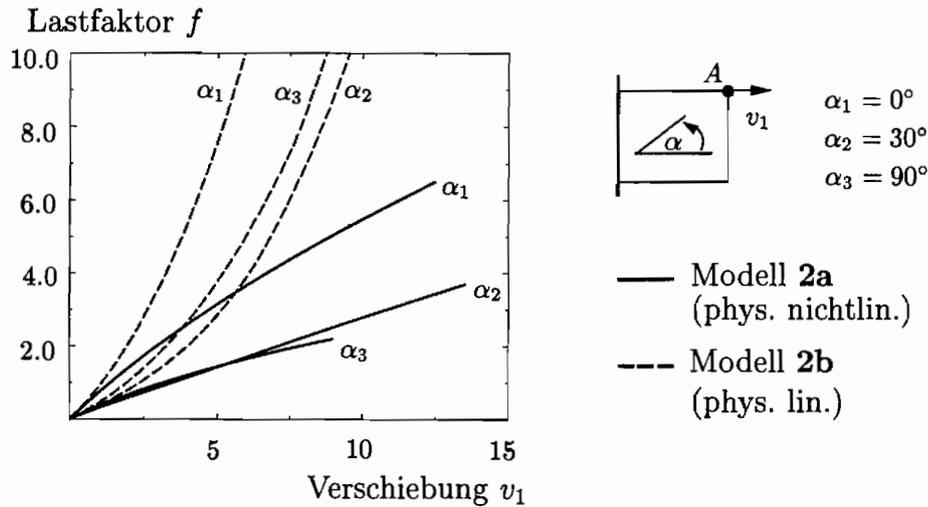


Abb. 8.2: Verschiebung v_1 im Punkt A bei unterschiedlichem Faserlastwinkel

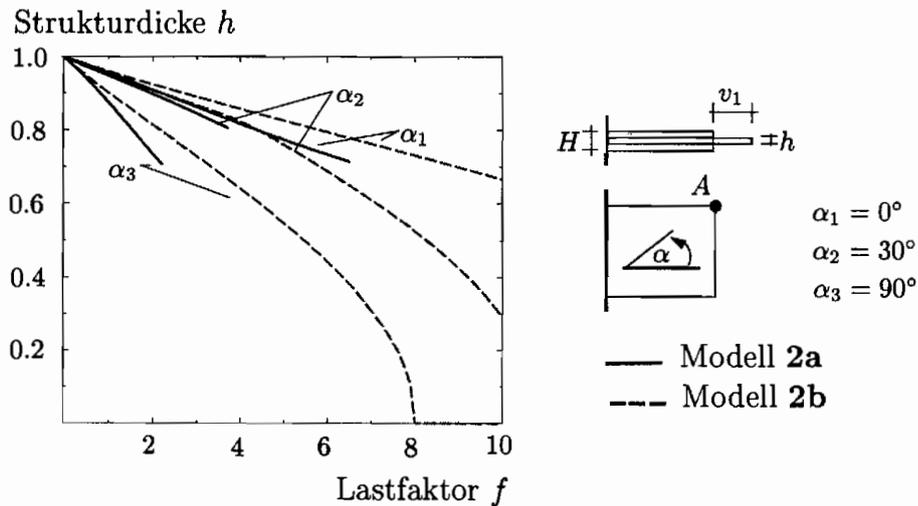


Abb. 8.3: Dickenänderung im Punkt A bei unterschiedlichem Faserlastwinkel

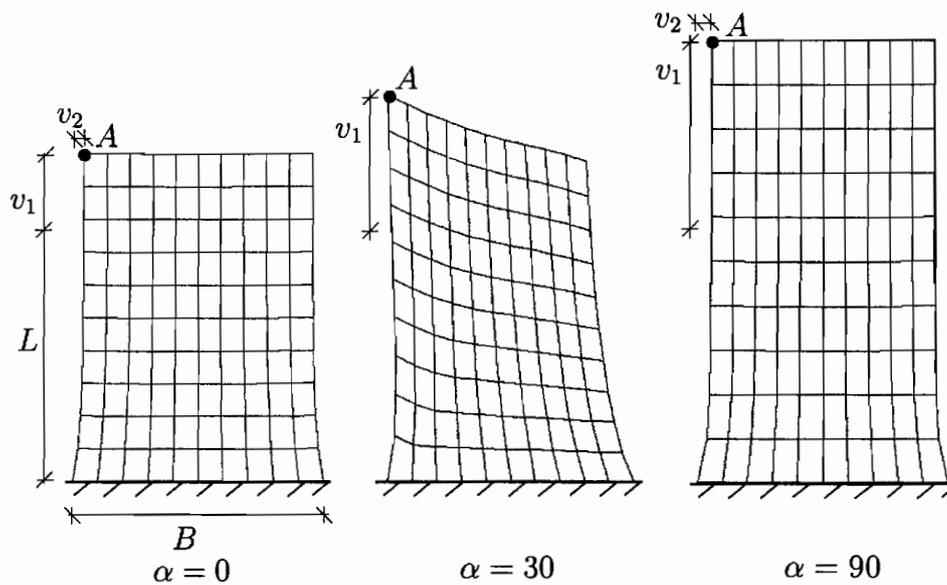


Abb. 8.4: Verschiebungen im Punkt A , Modell 2a, Lastfaktor $f = 2.0$

$f = 1.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	1.3501	0.2268	0.0450	1.7595
Modell 2b	1.0680	0.2039	0.0403	1.8044
$f = 2.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	2.9146	0.4559	0.0915	3.0894
Modell 2b	1.9060	0.3769	0.0764	3.3522

Tab. 8.3: Verschiebungen und Spannungen in A , Faserlastwinkel $\alpha = 0^\circ$

$f = 1.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	2.6712	-0.2916	0.0464	1.6494
Modell 2b	1.8956	-0.1811	0.0438	1.7390
$f = 2.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	5.6592	0.0134	0.0899	2.7450
Modell 2b	3.3030	0.1564	0.0818	3.1447

Tab. 8.4: Verschiebungen und Spannungen in A , Faserlastwinkel $\alpha = 30^\circ$

Die aus den Modellen 2a,b resultierenden Verschiebungen und Spannungen sind für unterschiedliche Faserlastwinkel in (Tab. 8.3 - 8.5) dargestellt. Die Dickenänderung ist $\Delta H = H - h$ und die Verschiebung des Punktes A in Lastrichtung v_1 sowie infolge der Querkontraktion v_2 . Die über den Querschnitt konstanten Spannungen wurden in Ele-

$f = 1.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	3.1189	0.2472	0.1259	1.5219
Modell 2b	1.9055	0.1888	0.0992	1.6776
$f = 2.0$	v_1	v_2	ΔH	S^{11}
Modell 2a	7.7983	0.5381	0.2664	2.2424
Modell 2b	3.2298	0.3441	0.1869	3.0171

Tab. 8.5: Verschiebungen und Spannungen in A , Faserlastwinkel $\alpha = 90^\circ$

mentmitte berechnet. Ein Vergleich der Modelle **2a,b** zeigt, daß bei dem physikalisch nichtlinearen Modell **2a** eine größere Verschiebung v_1 in Belastungsrichtung zu kleineren Spannungen S^{11} führt als das Modell **2b**. Die verformte Struktur ist für einen Lastfaktor von $f = 2.0$ abhängig vom Faserlastwinkel in (Abb. 8.4) dargestellt.

8.2 Analyse allgemeiner Schalenstrukturen

Im Folgenden wird das Tragverhalten von Schalenstrukturen beliebiger Dicke untersucht, das durch große Dehnungen und finite Rotationen bzw. durch einen Zustand dehnungsloser Verbiegung gekennzeichnet ist. Die Tragwerksanalyse erfolgt mit den physikalisch nichtlinearen bzw. linearen Modellen **1a,b** für Orthotropie und **2a,b** für transversale Isotropie. Mit den Materialdaten aus (Tab. 8.1, 8.2) weisen die bevorzugten Richtungen im Material annähernd gleiche Steifigkeitseigenschaften auf. Die Fasern sind dem primären Tragverhalten der Struktur entsprechend ausgerichtet.

Hyperboloid unter konzentrierten Linienlasten

Die geometrisch nichtlineare Strukturanalyse des Hyperboloiden unter konzentrierten Linienlasten erfolgt mit einem gleichmäßigen Diskretisierungsnetz von 12×12 Elementen. Aus Symmetriegründen erfolgt die Berechnung an einem Achtel der Gesamtstruktur. Die in Θ^2 -Richtung weisende Belastung führt zunächst zu einer Streckung des Hyperboloiden. Die durch kleine Verzerrungen begleiteten finiten Rotationen kennzeichnen den Anfangsbereich des Last-Verschiebungs-Diagramms (Abb. 8.7). Trennen sich die Last-Verschiebungs-Kurven des physikalisch nichtlinearen und des physikalisch linearen Modells, folgen große Dehnungen. Bei Orthotropie sind die Verschiebungen kleiner, weil die vorhandenen Fasern in Umfangsrichtung den Querschnitt stabilisieren. Auch bei diesem Beispiel approximiert die Modelle **1b, 2b** (lineare Theorie) das Strukturverhalten deutlich zu steif. Die Spannungen S^{22} in Meridianrichtung werden nahe des Punktes A im Elementmittelpunkt der Referenzfläche berechnet.

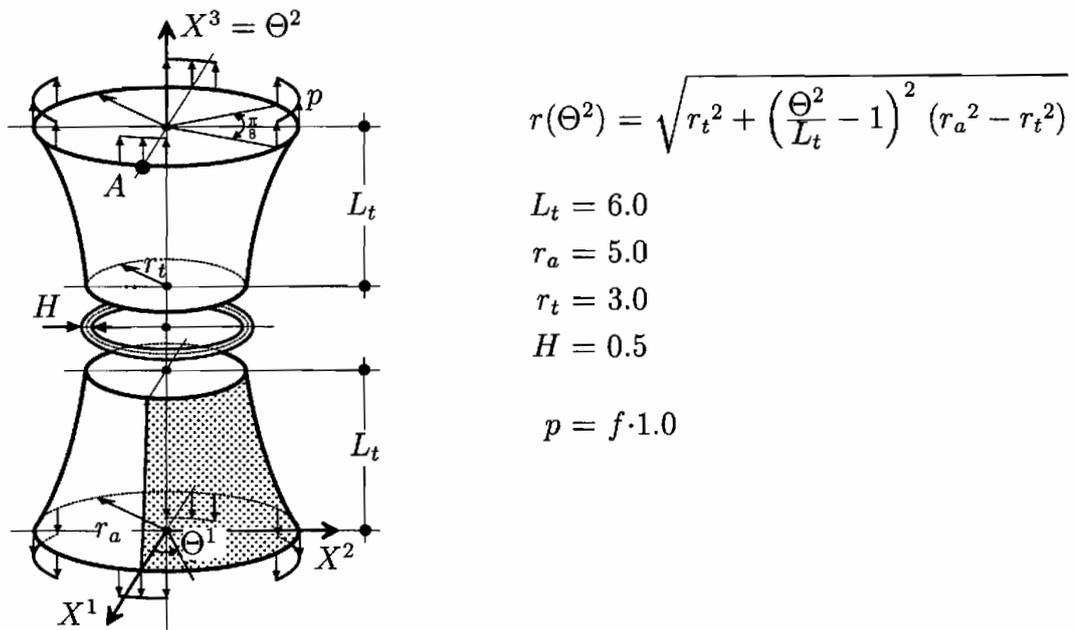


Abb. 8.5: Geometrie des Hyperboloiden unter konzentrierten Linienlasten

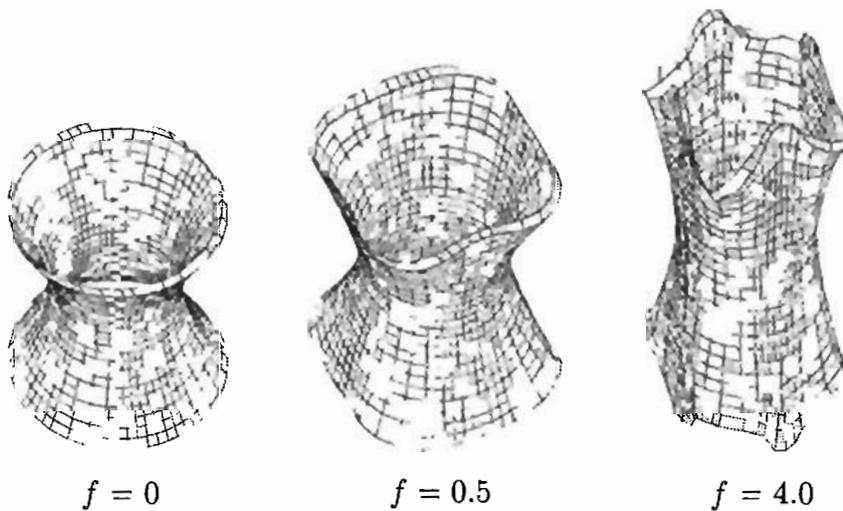


Abb. 8.6: Verformte Konfigurationen, Modell 2a

$f = 1.0$	v_3	ΔH	S^{22}	$f = 1.0$	v_3	ΔH	S^{22}
Modell 1a	0.9122	0.0373	1.7115	Modell 1b	0.8399	0.0355	1.733
Modell 2a	1.4945	0.0296	1.4528	Modell 2b	1.2182	0.0081	1.5780

$f = 2.0$	v_3	ΔH	S^{22}	$f = 2.0$	v_3	ΔH	S^{22}
Modell 1a	1.5351	0.0252	2.9765	Modell 1b	1.2496	0.0350	3.2142
Modell 2a	2.7848	0.1740	2.1612	Modell 2b	1.8581	0.1142	2.8160

$f = 3.0$	v_3	ΔH	S^{22}	$f = 3.0$	v_3	ΔH	S^{22}
Modell 1a	2.2109	0.0865	3.8519	Modell 1b	1.5835	0.0986	4.5380
Modell 2a	4.1764	0.2330	2.3516	Modell 2b	2.3666	0.2157	3.8925

Tab. 8.6: Verschiebungen v und Spannungen S^{22} in Meridianrichtung im Punkt A

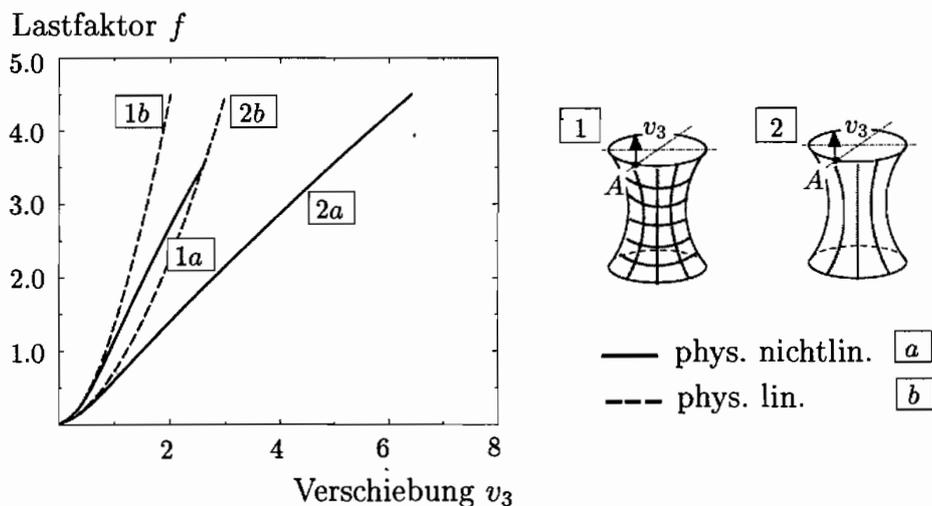
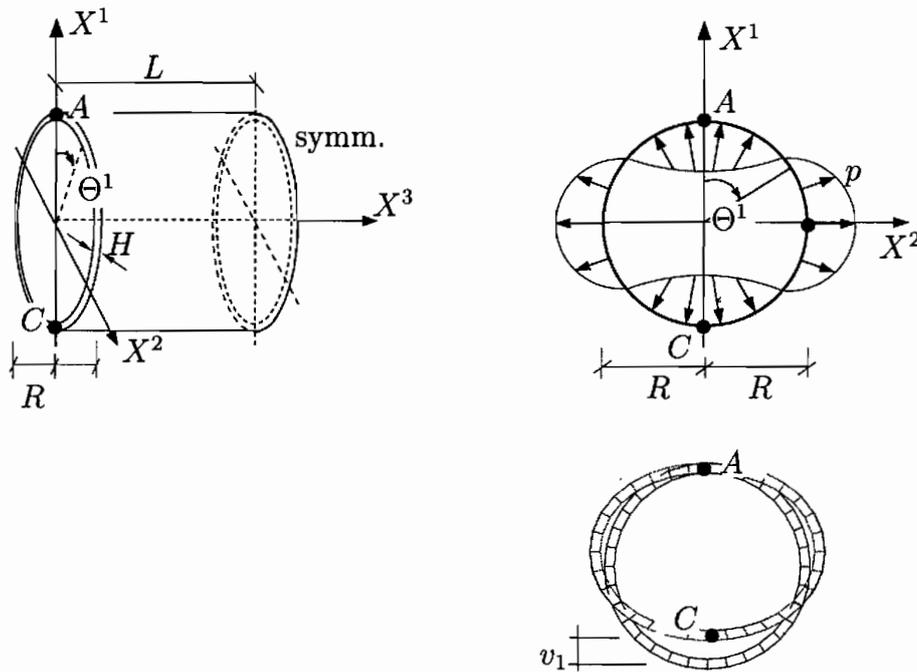


Abb. 8.7: Verschiebung v_1 im Punkt A bei Orthotropie (1) und transversaler Isotropie (2)

Zylinder unter harmonischer Last

Der in (Abb. 8.8) dargestellt Kreiszyylinder wird durch eine senkrecht zur Mantelfläche wirkende harmonische Flächenlast beansprucht. Die Tragwerksanalyse erfolgt mit einem Diskretisierungsnetz von 16 Elementen in Meridian- sowie 64 Elementen in Umfangsrichtung. In Punkt A sind nur Verschiebungen in X^3 -Richtung und die Dickenänderung ΔH der Struktur zugelassen. Aufgrund der Belastung und der Randbedingungen folgt bei der durch eine verschwindende GAUSS-Krümmung charakterisierten Schale ein Zustand dehnungsloser Verbiegung. Zur Untersuchung des Membranverhaltens wird der Lastfaktor a so angepaßt, daß die Verschiebungen v_1 bei unterschiedlichen Schlankheitsverhältnissen R/H von gleicher Größenordnung sind.

Für die orthotropen Materialmodelle **1a,b** sowie für die transversal isotropen Modelle



R/H	10	100	1000
H	10	0.1	0.01
a	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

$L = 200.0$
 $R = 100.0$
 $p = f \cdot a \cos 2\theta^1$

Randbedingung Punkt A:
 $\Delta x^0_1 = \Delta x^0_2 = \Delta x^1_2 = \Delta x^1_3 = 0$

Abb. 8.8: Geometrie des Kreiszylinders unter harmonischer Last

2a,b resultieren bei einer nichtlinearen Strukturanalyse mit $f = 1.0$ folgende Verschiebungen v_1 bei zunehmender Schlankheit:

R/H	10	100	1000
Orthotropie	14.9427	13.8787	13.8135
Transversale Isotropie	16.9427	15.4930	15.5632

Tab. 8.7: Verschiebungen v_1 in C

Der Lastabtrag erfolgt über die Krümmung der Struktur in Umfangsrichtung. Dabei ist die Verschiebung bei Orthotropie aufgrund der zusätzlichen in Umfangsrichtung verlaufenden Fasern kleiner. Das Verschiebungsfeld verdeutlicht, daß bei einem Schlankheitsgrad von $R/H = 100$ bzw. $R/H = 1000$ ein 2D-Biegezustand vorliegt. Auch bei einem höheren Lastfaktor sind die Verzerrungen klein und die Modelle 1a,b liefern eine äquivalente Strukturantwort (Abb. 8.9).

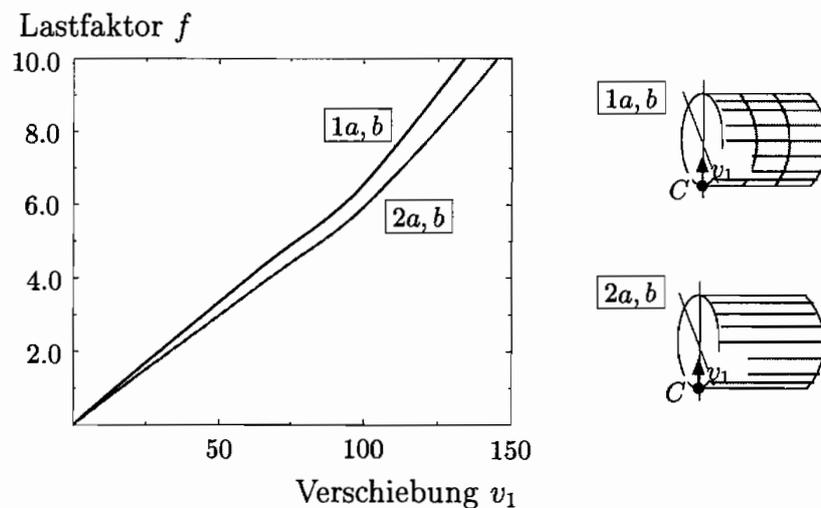


Abb. 8.9: Verschiebung v_1 im Punkt C bei Orthotropie (1) und transversaler Isotropie (2)

8.3 Erzielte Ergebnisse

Für kleine Verzerrungen nahe der spannungsfreien Ausgangskonfiguration bildet das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte physikalisch nichtlineare Materialmodell **1a** für Orthotropie bzw. **2a** für transversale Isotropie das linear elastische Materialverhalten korrekt ab. Für große Verzerrungen ist der physikalisch nichtlineare Aspekt des reversiblen Materialverhaltens anhand der Last-Verschiebungsdiagramme, den Strukturplots und der Gegenüberstellung mit der linearen Theorie deutlich erkennbar. Grunddeformationszustände, wie eine Zugbeanspruchung in Faserrichtung, und auch sehr komplexe Deformationszustände, wie die Kombination von finiten Rotationen und großen Dehnungen, lassen sich mit diesem Modell physikalisch sinnvoll abbilden. Darüberhinaus resultiert bei dem vorgeschlagenen Materialmodell im Bereich großer Verzerrungen auf eine gegebene Last eine größere Verschiebung und eine kleinere Spannungsantwort als bei der linearen Theorie. Das ist ein weiteres Indiz für das physikalisch nichtlineare Materialverhalten des Modells **2a** sowie der zu steifen Approximation des Strukturverhaltens von Modell **2b**.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Die Anforderungen an ein hyperelastisches Materialmodell zur Beschreibung großer Deformationen sind von dem Material selbst und seinem Anwendungsgebiet abhängig. Einige strukturmechanische Problemstellungen mit sehr großen Dehnungen, wie sie beispielsweise infolge der Ausschüttung des Blutes von den Herzkammern in die Herzschlagader vorkommen, werden von klassischen Modellen, wie dem NEO-HOOKE oder MOONEY-RIVLIN Modell, ungeachtet der Richtungsabhängigkeit des Materials, nicht adäquat abgebildet. Die Wahl polynomialer Modelle höherer Ordnung (Rivlin & Saunders 1951; Ogden 1972b) führt jedoch nicht zwangsweise zu besseren Ergebnissen und sind mit dem Nachteil der Betrachtung einer großen Anzahl von Materialparametern behaftet. Spezielle Algorithmen erleichtern die Identifizierung von polynomialen Ansätzen und der entsprechenden Materialparameter. Solche Modelle sind häufig auf solche Deformationszustände beschränkt, an denen die Parameter identifiziert wurden und liefern schon bei kleinen Abweichungen der Parameter oder Rundungsfehlern unter Umständen keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse mehr (Hartmann 2000). Durch Einbeziehung der geometrischen Beschaffenheit einer Deformation läßt sich eine Klasse polykonvexer Verzerrungsenergiefunktionen formulieren (Ciarlet 1988). Wird auch die Coercivitätsungleichung (Ball 1977) erfüllt, so ist die Existenz einer Lösung des strukturmechanischen Variationsproblems bei großen Deformationen im isotropen Fall gewährleistet. Zur Beschreibung sehr großer Dehnungen wird im Rahmen dieser Arbeit eine exponentielle Abbildung in den Hauptinvarianten vorgeschlagen. Sie reflektiert den physikalisch motivierten Grundgedanken, daß *unendliche Spannungen aus gegen unendlich strebenden Verzerrungen folgen*; sie ist polykonvex und erfüllt die Coercivitätsungleichung. Ihr Hauptvorteil besteht darin, daß die Verzerrungsenergiefunktion mit nur wenigen Materialparametern behaftet ist. Als Sonderfall ist das kompressible MOONEY-RIVLIN Modell enthalten.

Ein zentrales Problem bei der Behandlung anisotroper Strukturen ist die Bestimmung einer irreduziblen Funktionalbasis als Argument der Verzerrungsenergiefunktion, welche unter den orthogonalen Transformationen einer gegebenen Gruppe symmetrischer Transformationen invariant ist. Durch die Zerlegung des orthotropen, repräsentativen Volu-

menelementes hinsichtlich der Hauptmaterialrichtungen und seiner Symmetrieebenen lassen sich modifizierte Hauptinvariante formulieren, welche die geometrische Beschaffenheit einer Deformation einbeziehen, wie die Längenänderungen der drei Hauptmaterialrichtungen und die flächenhaften Deformationen der drei Symmetrieebenen. Darüberhinaus unterstützen die modifizierten Hauptinvarianten die Simulation von Grenzzuständen orthotropen Materials, wie z.B. eine gegen unendlich strebende Dehnung in Faserrichtung, ihre Degeneration zu einem Punkt oder das Verschmelzen zweier bevorzugter Materialrichtungen infolge Schub. Für den Sonderfall transversaler Isotropie formulieren sich die modifizierten Hauptinvarianten hinsichtlich der bevorzugten Materialrichtung und der Isotropieebene. Bei Isotropie ergeben sich die ersten beiden Hauptinvarianten. Unabhängig von den materiellen Symmetrieeigenschaften des repräsentativen Volumenelementes werden volumetrische Deformationen über die dritte Hauptinvariante beschrieben. Mit einer solchen irreduziblen Funktionalbasis lassen sich die für ein isotropes Kontinuum formulierten Konzepte der Polykonvexität und der Coercivität auf eine orthotrope Verzerrungsenergiefunktion übertragen. Darüberhinaus resultieren die Tensorgeneratoren als Gradient der Invarianten dieser Funktionalbasis.

Für die meisten strukturmechanischen Anwendungen mit großen Dehnungen liefert ein linearer Ansatz in den Invarianten gute Ergebnisse. Durch die Rückführung dieser Verzerrungsenergiefunktion auf die klassische Theorie für kleine Verzerrungen nahe der spannungsfreien Ausgangskonfiguration können die Materialparameter in Abhängigkeit der Ingenieurkonstanten formuliert werden. Bei transversaler Isotropie und bei allgemeiner Isotropie läßt sich darüberhinaus mit der Restriktion positiver Materialparameter und die Ausnutzung der Konvexitätseigenschaft von der Verzerrungsenergiefunktion ein Materialparameter eliminieren. Dieser Ansatz wird auf eine kontinuumsbasierte Schalenkinematik mit linearem Verschiebungsansatz angewendet, in ein vierknotiges finites Schalenelement mit extensiblen Direktorfeld überführt und in das Finite-Element-Programmsystem FEMAS 2000 implementiert. Auftretende Versteifungseffekte in Form von Locking werden mit speziellen Stabilisierungsalgorithmen beseitigt.

Ausblick

Insbesondere die Simulation biologisch weicher orthotroper und transversal isotroper Strukturen ist ein sehr aktuelles Forschungsgebiet. Es bildet ein weitgefächertes Diskussionsforum für Biologen und Mediziner, sowie für Ingenieure und Mathematiker. Weil die Ingenieurkonstanten solcher Materialien bisher nur unvollständig in der Literatur vorhanden sind, können bisher nur qualitative Aussagen über die Leistungsstärke des erstellten Modells gemacht werden. Seine Kalibrierung auf ein reales Material bleibt daher zukünftigen Forschungsaktivitäten vorbehalten. Das Einbeziehen probabilistischer Aspekte der Meßdaten ist in diesem Zusammenhang sicherlich sinnvoll. Durch die Berücksichtigung volumetrischer Deformationen und des Grenzzustandes unendlicher Stauchung ist auch die Modellierung poröser Medien denkbar oder die Verallgemeinerung des Modells ausgehend von der Orthotropie auf eine beliebige Anisotropie. Die Anwendung des Modells auf eine höherwertige Kinematik in Form von p-Elementen bietet insbesondere bei der Simulation von Spannungskonzentrationen ein weitgefächertes Anwendungsspektrum.

Literaturverzeichnis

- ALTENBACH, H., J. ALTENBACH UND R. RIKARDS (1996). *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart.
- ANDELFINGER, U. (1991). *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*. Bericht Nr. 13. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.
- ANTMAN, S.S. (1970). Existence of solutions of the equilibrium equations for nonlinearly elastic rings and arches. *Indiana University Mathematics Journal* 20, 281–302.
- ANTMAN, S.S. (1983a). The influence of elasticity on analysis: Modern developments. *Bull. Amer. Mach. Soc.* 9, 267–291.
- ANTMAN, S.S. (1983b). Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges, and cylinders. *Arch. Rational Mech. Anal.* 83, 1–52.
- ARGYRIS, J. (1982). An Excursion into Large Rotations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 32, 85–155.
- ARMERO, F. (1998). Some results on the formulation of enhanced strain finite element for finite deformation elastoplastic problems. In *Euromech Colloquium 371*, TH Karlsruhe.
- BAŞAR, Y. (1987). A Consistent Theory of Geometrically Non-Linear shells with an Independent Rotation Vector. *Int. J. Solids Structures* 23(10), 1401–1415.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1994). The consideration of transverse normal strains in the finite-rotation shell analysis. *Eng. Syst. Des. Anal.* 8(b), 325–335.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1995). Interlaminar stress analysis of composites: Layerwise shell finite elements including transverse strains. *Composites Engineering* 5(5), 485–499.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1997). Shear Deformation Models for Large-Strain Shell Analysis. *Int. J. Solids Structures* 34(14), 1687–1708.
- BAŞAR, Y., M. ITSKOV UND A. ECKSTEIN (1999). Composite Laminates: Nonlinear Interlaminar Stress Analysis by Multi-Layer Shell Elements. *submitted to Comp. Meth. Mech. Engrg.*
- BAŞAR, Y., M. ITSKOV UND A. ECKSTEIN (2000). Composite laminates: nonlinear interlaminar stress analysis by multi-layer shell elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 185, 367–397.

- BAŞAR, Y. UND W.B. KRÄTZIG (1985). *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg.
- BAŞAR, Y. UND D. WEICHERT (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, New York.
- BALL, J.M. (1977). Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 63, 337–403.
- BARTHOLD, F.-J. (1993). *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Bericht-Nr. F 92/2. Universität Hannover.
- BEEM, H., C. KÖNKE, U. MONTAG UND W. ZAHLTEN (1996). *FEMAS-2000 Users Manual. Release 3.0*. Institute for Statics and Dynamics, Ruhr-University Bochum.
- BENJEDDOU, A., E. JANKOVICH UND T. HADHRI (1993). Determination of the Parameters of Ogden's Law Using Biaxial Data and Levenberg-Marquardt-Fletcher Algorithm. *Journal of Elastomers and Plastics* 25, 224–248.
- BETSCH, P. (1996). *Statische und dynamische Berechnung von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten finiten Elementen*. Dissertation, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Bericht-Nr. 96/4. Universität Hannover.
- BETSCH, P., F. GRUTTMANN UND E. STEIN (1996). A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 130, 57–79.
- BETSCH, P. UND E. STEIN (1995). An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element. *Comm. Num. Meth. Eng.* 11, 899–909.
- BISCHOFF, M. (1999). *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Institut für Baustatik, Bericht Nr. 30. Universität Stuttgart.
- BISCHOFF, M. UND E. RAMM (1997). Shear Deformable Shell Elements for Large Strains and Deformations. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 40, 4427–4449.
- BISCHOFF, M. UND E. RAMM (1998). EAS formulation: Relation to mixed elements and remarks on stabilization methods. In *Euromech Colloquium 371*, TH Karlsruhe.
- BOEHLER, J.P. (1987). *Applications of tensor functions in solid mechanics*. Volume 292 of CISM courses and lectures. Springer-Verlag.
- BOEHLER, J.-P. (1979). A Simple Derivation of Representations for Non-Polynomial Constitutive Equations in Some Cases of Anisotropy. *ZAMM* 59, 157–167.
- BRAESS, D. (1992). *Finite Elemente*. Springer-Verlag, New York.
- BRAUN, M. (1995). *Nichtlineare Analyse von geschichteten elastischen Flächentragwerken*. Institut für Baustatik, Bericht Nr.19. Universität Stuttgart.
- BRUHNS, O.T. (1987). Einige Bemerkungen zur Beschreibung inelastischer Prozesse im Bereich hoher Deformationsgeschwindigkeiten. *ZAMM* 67, 181–183.

- BRUHNS, O.T. (1992). *Kontinuumsmechanik: Einführung in die Beschreibung inelastischen Materialverhaltens*. Arbeitsheft zur Vorlesung. Lehrstuhl für technische Mechanik, Ruhr-Universität Bochum.
- BÜCHTER, N. (1992). *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Bericht Nr. 14. Institut für Baustatik d. Universität Stuttgart.
- BÜCHTER, N. UND E. RAMM (1992). 3D-Extension of Nonlinear Shell Equations based on the Enhanced Assumed Strain Concept. In *C. Hirsch*, 39–59.
- BUDDECKE, E. (1989). *Grundriss der Biochemie*. de Gruyter, Berlin, New York.
- CHUONG, C.J. UND Y.C. FUNG (1984). Compressibility and constitutive equation of arterial wall in radial compression. *J. Biomechanics* 17, 35–40.
- CIARLET, P.G. (1988). *Mathematical elasticity, Vol. I: Three-dimensional elasticity*. North-Holland Amsterdam.
- CIARLET, P.G. UND G. GEYMONAT (1982). Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. II* 295, 423–426.
- COLEMAN, B.D. UND W. NOLL (1959). On the thermostatics of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal.* 13, 97–128.
- DROZDOV, A.D. (1996). *Finite Elasticity and Viscoelasticity - A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids*. World Scientific Publ., Singapore.
- DVORKIN, E.N. UND K.-J. BATHE (1984). A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1, 77–88.
- EBERLEIN, R. (1997). *Finite-Elemente-Konzepte für Schalen mit großen elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation. Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- ECKSTEIN, A. (1999). *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Dissertation, TWM Nr. 99-3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- EHLERS, W. (1989). *Poröse Medien - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen, Nr.47.
- EHLERS, W. UND G. EIPPER (1997). The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws. *Acta Mechanica* 130, 17–27.
- EULER, N. UND W.-H. STEEB (1992). *Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.
- FLORY, P.J. (1961). Thermodynamic Relations for High Elastic Materials. *Transactions of the Faraday Society* 57, 829–838.
- FONG, J.T. UND R.W. PENN (1975). Construction of a Strain-Energy Function for a Isotropic Elastic Material. *Trans. Soc. Rheol.* 19, 99–113.
- FUNG, Y.C. (1993). *Biomechanics - Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag, New York.

- GREEN, A.E. UND J.E. ADKINS (1960). *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. Oxford University Press.
- GREEN, A.E. UND W. ZERNA (1968). *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press.
- GRUTTMANN, F. (1996). *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Bericht-Nr. F 96/1. Universität Hannover.
- GUREVICH, G.B. (1964). *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Noordhoff.
- HARTMANN, S. (2000). Numerical Studies on the Identification of the Material Parameters of Rivlin's Hyperelasticity using Tension-Torsion Tests. *submitted to Acta Mechanica*.
- HAUPT, P. (2000). *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer-Verlag, New York.
- HAUPT, P. UND K. SEDLAN (1999). Viscoplasticity of Elastomeric Materials. Experimentals Facts and Constitutive Modelling. *submitted to Archive of Mechanics*.
- HENCKY, H. (1928). Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Z. f. techn. Physik* 6, 215–220.
- HOLZAPFEL, G.A., R. EBERLEIN, P. WRIGGERS UND H. WEIZSÄCKER (1996). Large strain analysis of soft biological membranes: Formulation and finite element analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 132, 45–61.
- HUMPHREY, J.D. (1995). Mechanics of the Arterial Wall: Review and Directions. *Bio-medical Engineering* 23(1/2), 1–162.
- ISHIHARA, A., N. HASHITSUME UND M. TATIBANA (1951). Statistical Theory of Rubber-Like Elasticity IV. (Two-dimensional stretching). *The Journal of Chemical Physics* 19, 1508–1512.
- JAMES, A.G., A. GREEN UND G.M. SIMPSON (1975). Strain Energy Functions of Rubber. I. Characterization of Gum Vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science* 19, 2033–2058.
- JONES, R.M. (1975). *Mechanics of Composite Materials*. McGraw Hill Book Company, New York.
- KIRCHHOFF, G. (1852). Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien* 9, 762–773.
- KOITER, W.T. (1960). A consistent first approximation in the general theory of thin shells. In *IUTAM-Symposium on the Theory of Thin Shells*, Delft, North-Holland, Amsterdam, 12–33. Computational Mechanics.
- KRÄTZIG, W.B. (1971). *Thermodynamics of Deformations and Shell Theory*. TWM Nr.71-3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- KUHL, D. UND E. RAMM (2000). Time Integration in the Context of Energy Control and Locking Free Finite Elements. *Preprint submitted to Arch. Comp. Meth. Engrg.*

- LEHMANN, T., Z.-H. GUO UND H. LIANG (1991). The conjugacy between Cauchy stress and logarithm of the left stretch tensor. *Eur. J. Mech., A/Solids* 10(4), 395–404.
- LION, A. (1997). On the Large Deformation Behaviour of Reinforced Rubber at Different Temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45, 1805–1834.
- LÜRDING, D. (1997). *Entwicklung eines finiten Mehrschichtigen Schalenelementes ohne Rotationsvariable unter Berücksichtigung von Dickenänderungen, großen Verzerrungen und finiten Rotationen*. Diplomarbeit. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- LÜRDING, D. (1999). Simulation transversal isotropen Materialverhaltens bei allgemeinen Schalenkonstruktionen mit großen Dehnungen. In Günther Schmid (Ed.), *Computational Structural Dynamics, Graduiertenkolleg an der Ruhr-Universität Bochum 1991-1999*, 76–83. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 244.
- LÜRDING, D., Y. BAŞAR UND U. HANSKÖTTER (1999). Application of Transversely Isotropic Materials to Multi-Layer Shell Elements undergoing Finite Rotations and Large Strains. *EUROMECH Colloquium 394 Theory and Numerics of Anisotropic Materials at Finite Strains*, submitted to *Int. J. Sol. Struct.*.
- MACNEAL, R.H (1968). A simple quadrilateral shell element. *Comp. & Struct.* 8, 175–183.
- MALVERN, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuum medium*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- MARSDEN, J.E. UND T.J.R. HUGHES (1994). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, INC., New York.
- MARTENSEN, E. (1968). *Potentialtheorie*. BG. Teubner, Stuttgart.
- MENZEL, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. TWM Nr. 96-4. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- MIEHE, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 37, 1981–2004.
- MORMAN JR., K.N. (1986). The Generalized Strain Measure With Application to Non-homogenous Deformations in Rubber-Like Solids. *J. Appl. Mechanics* 53, 726–728.
- NAGHDI, P.M. (1972). *The theory of shells and plates*. Handbuch der Physik, Band VIa/2: Festkörpermechanik II. Springer-Verlag, Berlin.
- OGDEN, R.W. (1972a). Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc. London A* 326, 565–584.
- OGDEN, R.W. (1972b). Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc. London A* 328, 567–583.
- OGDEN, R.W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*. Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Limited.

- OGDEN, R.W. (1986). Recent Advances in the Phenomenological Theory of Rubber Elasticity. *Rubber Chemistry and Technology* 59(3), 361–383.
- PENG, S.T.J. UND R.F. LANDEL (1975). Stored-Energy Function and Compressibility of Compressible Rubberlike Materials under Large Strain. *Journal of Applied Physics* 46, 2599–2604.
- PENN, R.W. (1970). Volume changes accompanying the extension of rubber. *Trans. Soc. Rheol.* 14, 509–517.
- PIAN, T.H.H. UND K. SUMIHARA (1984). Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 20, 1685–1695.
- PIETRASZKIEWICZ, W. UND J. BADUR (1983). Finite Rotations in the Description of Continuum Deformation. *Int. J. Eng. Science.* 9, 1097–1115.
- RAMM, E. (1976). *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitation. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.
- REESE, S. (1994). *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper*. Dissertation. Fachbereich Mechanik der Technischen Hochschule Darmstadt.
- REESE, S. UND P. WRIGGERS (1995a). A Finite Element Method for Stability Problems in Finite Elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 38, 1171–1200.
- REESE, S. UND P. WRIGGERS (1995b). Material Instabilities of an Incompressible Elastic Cube under Triaxial Tension. *Int. J. Solids Structures* 34(26), 3433–3454.
- RIVLIN, R.S. (1955). Further Remarks on the Stress-Deformation Relating for Isotropic Materials. *J. Rat. Mech. Anal.* 4, 681–689.
- RIVLIN, R.S. (1960). Some topics in finite elasticity. *Structural Mechanics. Oxford etc: Pergamon*, 169–198.
- RIVLIN, R.S. UND D.W. SAUNDERS (1951). Large elastic deformations of isotropic materials, VII. Experiments on the deformation of rubber. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 243, 251–288.
- RIVLIN, R.S. UND D.W. SAUNDERS (1952). The free energy of deformation for vulcanised rubber. *Phil. Faraday Soc.* 48, 200–206.
- SANSOUR, C. (1995). A Theory and finite formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of a rotation tensor. *Adv. Appl. Mech.* 1, 194–216.
- SAYWERS, K. (1986). Comments on the paper determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient. *Quart. Appl. Math.* 44, 309–311.
- SCHRÖDER, J. (1996). *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Bericht-Nr. F 96/3. Universität Hannover.
- SCHULTZ, R. (1996). *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*. TWM Nr. 96-3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- SIMO, J.C. UND F. ARMERO (1992). Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 33, 1413–1449.
- SIMO, J.C. UND D.D. FOX (1989). On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 72, 267–304.
- SIMO, J.C. UND T.J.R. HUGHES (1986). On the variational foundations of assumed strain methods. *J. Appl. Mech.* 53, 51–54.
- SIMO, J.C. UND M.S. RIFAI (1990). A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 29, 1595–1638.
- SMITH, G.F., M.M. SMITH UND R.S. RIVLIN (1962). Integrity Bases for a Symmetric Tensor and a Vector - The Crystal Classes. *Arch. Rational Mech. Anal.* 12, 93–133.
- SPENCER, A.J.M. (1971). *Theory and invariants*. In Eringen: Continuum Physics, Volume 1. Academic Press, New York.
- SPENCER, A.J.M. (1984). *Constitutive theory for strongly anisotropic solids*. Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- ST. VENANT, A.-J.-C.B. (1844). Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité, ne peuvent cependant pas être considérés comme très petits. *Bull. Soc. Philomath.* 5, 26–28.
- STEIN, E. UND F.-J. BARTHOLD (1995). *Elastizitätstheorie*. Unterlagen zur Vorlesung. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- TING, T.C.T. (1985). Determination of $C^{1/2}$, $C^{-1/2}$ and more general isotropic tensor functions of C . *Journal of Elasticity* 15, 319–323.
- TING, T.C.T. (1996). *Anisotropic Elasticity, Theory and Applications*. Oxford University Press, New York, Oxford.
- TRELOAR, L.R.G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*. 3rd edition, Oxford University Press.
- TRUESDELL, C. UND W. NOLL (1992). *The non-linear field theories of mechanics* (2. Auflage). Springer-Verlag, New York.
- TSCHOEGL, N.W. (1971). Constitutive Equations for Elastomers. *Journal of Polymer Sciences Part A-1* 9, 1959–1970.
- VALANIS, K.C. UND R.F. LANDEL (1967). The Strain-Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios. *J. Appl. Phys.* 38(7), 2997–3002.
- VAN DEN BOGERT, P.A.J. UND R. DE BORST (1994). On the behaviour of rubberlike materials in compression and shear. *Archieve of Applied Mechanics* 64, 136–146.
- VERHOEVEN, H. (1993). *Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung*. Dissertation. Technische Universität Berlin, Verlag Shaker, Aachen.

- VORP, D.A., K.R. RAJAGOPAL, P.J. SMOLINSKI UND H.S. BOROVETZ (1995). Identification of Elastic Properties of Homogeneous, Orthotropic Vascular Segments in Distension. *J. Biomechanics* 28(5), 501–512.
- WEINECK, J. (1988). *Sportbiologie*. Fachbuch-Verlagsgesellschaft mbH, Erlangen.
- WEIZSÄCKER, H.W., H. LAMBERT UND K. PASCALE (1983). Analysis of the Passive Mechanical Properties of Rat Carotid Arteries. *J. Biomech.* 16(9), 703–715.
- WEYL, H. (1939). *The Classical Groups*. Princeton University Press.
- WRIGGERS, P. UND S. REESE (1996). A note on enhanced strain methods for large deformations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 135, 201–209.
- XIAO, H. (1995). General Irreducible Representations for Constitutive Equations of Elastic Crystals and Transversely Isotropic Elastic Solids. *Journal of Elasticity* 39, 47–73.
- XIAO, H. (1996a). On Isotropic Invariants of the Elasticity Tensor. *Journal of Elasticity* 46, 115–149.
- XIAO, H. (1996b). On minimal representations for constitutive equations of anisotropic elastic materials. *Journal of Elasticity* 45, 13–32.
- XIAO, H. (1996c). Two General Representation Theorems for Arbitrary-Order-Tensor-Valued Isotropic and Anisotropic Tensor Functions of Vectors and Second Order Tensors. *ZAMM* 76, 155–165.
- XIAO, H. (1997). On Constitutive Equations of CAUCHY Elastic Solids: All Kinds of Crystals and Quasicrystals. *Journal of Elasticity* 48, 241–283.
- XIAO, H., O.T. BRUHNS UND A.T.M. MEYERS (1996). Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica* 124, 89–105.
- XIAO, H., O.T. BRUHNS UND A.T.M. MEYERS (1998a). On Objektive Corotational Rates and their Defining Spin Tensors. *Int. J. Solids Structures* 35(30), 4001–4014.
- XIAO, H., O.T. BRUHNS UND A.T.M. MEYERS (1998b). Strain Rates and Material Spins. *Journal of Elasticity* 52, 1–41.
- XIAO, H., O.T. BRUHNS UND A.T.M. MEYERS (1999). On anisotropic invariants of N symmetric second-order tensors: crystal classes as subgroups of the cylindrical group $D_{\infty h}$. *Proc. Roy. Soc. London A* 455, 1993–2020.
- ZERNA, W. (1967). *Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen*. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 19.

Anhang A

Materialparameter

Auswirkungen einer bevorzugten Materialrichtung. Die Materialparameter der Verzerrungsenergiefunktion (6.51) berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_{\perp} &= \frac{1}{\Delta} (\nu_{\perp} + n\nu_{\parallel}^2) E_{\perp} \\ \lambda_{\parallel} &= \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta} \{ (1 - \nu_{\perp}^2) E_{\parallel} - 2\mu_{\perp} - 4\mu_{\parallel} - 2(1 + \nu_{\perp})\nu_{\parallel} E_{\perp} + (\nu_{\perp} + n\nu_{\parallel}^2) E_{\perp} \} \\ \alpha &= \frac{1}{\Delta} \{ (1 + \nu_{\perp})\nu_{\parallel} E_{\perp} - (\nu_{\perp} + n\nu_{\parallel}^2) E_{\perp} \}\end{aligned}$$

Entwicklung eines orthotropen Materialmodells. Unabhängige Materialparameter parallel $(\dots)_{\parallel}$ und senkrecht $(\dots)_{\perp}$ zur Faserrichtung ($X_{\mathbf{A}}^1$ -Richtung) bei transversaler Isotropie (6.99):

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1 - \nu_{\perp}^2}{4 \Delta E_{\perp}} - \frac{\nu_{\parallel}(1 + \nu_{\perp})}{4 \Delta E_{\parallel}} + \frac{1}{2} \mu_{\parallel} + \frac{1}{2} \Gamma'(1) \\ a_1^* &= \frac{1 - \nu_{\perp}^2}{2 \Delta E_{\perp}} - \frac{\nu_{\parallel}(1 + \nu_{\perp})}{2 \Delta E_{\parallel}} - \mu_{\parallel} \\ b_1 &= \frac{\nu_{\perp} + n(\nu_{\parallel})^2}{4 \Delta E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\parallel}(1 + \nu_{\perp})}{4 \Delta E_{\parallel}} - \frac{1}{2} \mu_{\parallel} - \frac{1}{2} \Gamma'(1) \\ b_1^* &= \frac{1 - n\nu_{\parallel}}{4 \Delta E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\parallel}(1 + \nu_{\perp})}{4 \Delta E_{\parallel}} - \frac{1}{2} \mu_{\parallel} \\ a_2 &= \frac{1}{2} 0(\mu_{\parallel} + \mu_{\perp}) + \frac{1}{2} \Gamma'(1) \\ b_2 &= -\frac{1}{4} \mu_{\parallel} - \frac{1}{2} \Gamma'(1) \\ \Delta &= \frac{1}{E_{\parallel} E_{\perp}} (1 - 2n(\nu_{\parallel})^2 - (\nu_{\perp})^2 - 2n(\nu_{\parallel})^2 \nu_{\perp})\end{aligned}$$

$$\Gamma''(1) = \frac{(1 + \nu_{\perp}) \nu_{\parallel} E_{\perp}}{1 - 2n(\nu_{\parallel})^2 - (\nu_{\perp})^2 - 2n(\nu_{\parallel})^2 \nu_{\perp}} + 2\mu_{\parallel} + \Gamma'(1) .$$

Orthotropie

$$\begin{aligned}
(C_L^{-1})_{1111} &= \frac{1}{E_1} & (C_L^{-1})_{1122} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & (C_L^{-1})_{2323} &= \frac{1}{\mu_{23}} \\
(C_L^{-1})_{2222} &= \frac{1}{E_2} & (C_L^{-1})_{1133} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} & (C_L^{-1})_{1313} &= \frac{1}{\mu_{13}} \\
(C_L^{-1})_{3333} &= \frac{1}{E_3} & (C_L^{-1})_{2233} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} & (C_L^{-1})_{1212} &= \frac{1}{\mu_{12}}
\end{aligned}$$

$$E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0, \quad \mu_{23} > 0, \mu_{31} > 0, \mu_{12} > 0$$

$$\nu_{12}^2 < \frac{E_1}{E_2}, \quad \nu_{23}^2 < \frac{E_2}{E_3}, \quad \nu_{13}^2 < \frac{E_1}{E_3}, \quad \nu_{ij} = \nu_{ji} \frac{E_i}{E_j}$$

$$2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} < 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} < 1$$

Transversale Isotropie

bevorzugte Richtung X_A^1 -Richtung

$$\begin{aligned}
(C_L^{-1})_{1111} &= \frac{1}{E_{\parallel}} & (C_L^{-1})_{2222} &= (C_L^{-1})_{3333} = \frac{1}{E_{\perp}} \\
(C_L^{-1})_{1122} &= (C_L^{-1})_{1133} = -\frac{\nu_{\parallel}}{E_{\parallel}} & (C_L^{-1})_{2233} &= -\frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} \\
(C_L^{-1})_{2323} &= \frac{2(1+\nu_{\perp})}{E_{\perp}} & (C_L^{-1})_{1313} &= (C_L^{-1})_{1212} = \frac{1}{\mu_{\parallel}}
\end{aligned}$$

$$E_1 = E_{\parallel} > 0, E_2 = E_3 = E_{\perp} > 0, \quad \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{\parallel} > 0, \mu_{23} = \mu_{\perp} > 0$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{\parallel}, \quad \nu_{23} = \nu_{\perp}$$

$$-1 < \nu_{\perp}^2 < 1, \quad n\nu_{\parallel}^2 < 1, \quad 1 - 2n\nu_{\parallel}^2 > \nu_{\perp}, \quad n = E_{\perp}/E_{\parallel}$$

Isotropie

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = \mu, \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu$$

$$(C_L^{-1})_{1111} = (C_L^{-1})_{2222} = (C_L^{-1})_{3333} = \frac{1}{E}$$

$$(C_L^{-1})_{1122} = (C_L^{-1})_{1133} = (C_L^{-1})_{2233} = -\frac{\nu}{E}$$

$$(C_L^{-1})_{2323} = (C_L^{-1})_{1313} = (C_L^{-1})_{1212} = \frac{1}{\mu}$$

$$\lambda > 0, \quad -1 < \nu < 0.5, \quad E > 0, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix}
(C_L^{-1})_{1111} & (C_L^{-1})_{1122} & (C_L^{-1})_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
& (C_L^{-1})_{2222} & (C_L^{-1})_{2233} & 0 & 0 & 0 \\
& & (C_L^{-1})_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
& & & (C_L^{-1})_{1212} & 0 & 0 \\
& & & & (C_L^{-1})_{1313} & 0 \\
& & & & & (C_L^{-1})_{2323}
\end{bmatrix}$$

Tab. A.1: Nachgiebigkeit für Orthotropie, transversale Isotropie, Isotropie

Anhang B

Schalenkinematik

Komponenten des GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensors

$${}^0E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[{}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta} \right] \quad (\text{B.1})$$

$${}^1E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[{}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot {}^1\mathbf{x}_{,\alpha} + {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot {}^1\mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{X}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta} \right] \quad (\text{B.2})$$

$${}^0E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{B.3})$$

$${}^0E_{33} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1 \right] \quad (\text{B.4})$$

1. Variation

$$\delta {}^0E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[{}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} + {}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\delta {}^1E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[{}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \delta {}^1\mathbf{x}_{,\alpha} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot {}^1\mathbf{x}_{,\alpha} + {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta {}^1\mathbf{x}_{,\beta} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot {}^1\mathbf{x}_{,\beta} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\delta {}^0E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[{}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{x} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\delta {}^0E_{33} = \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (\text{B.8})$$

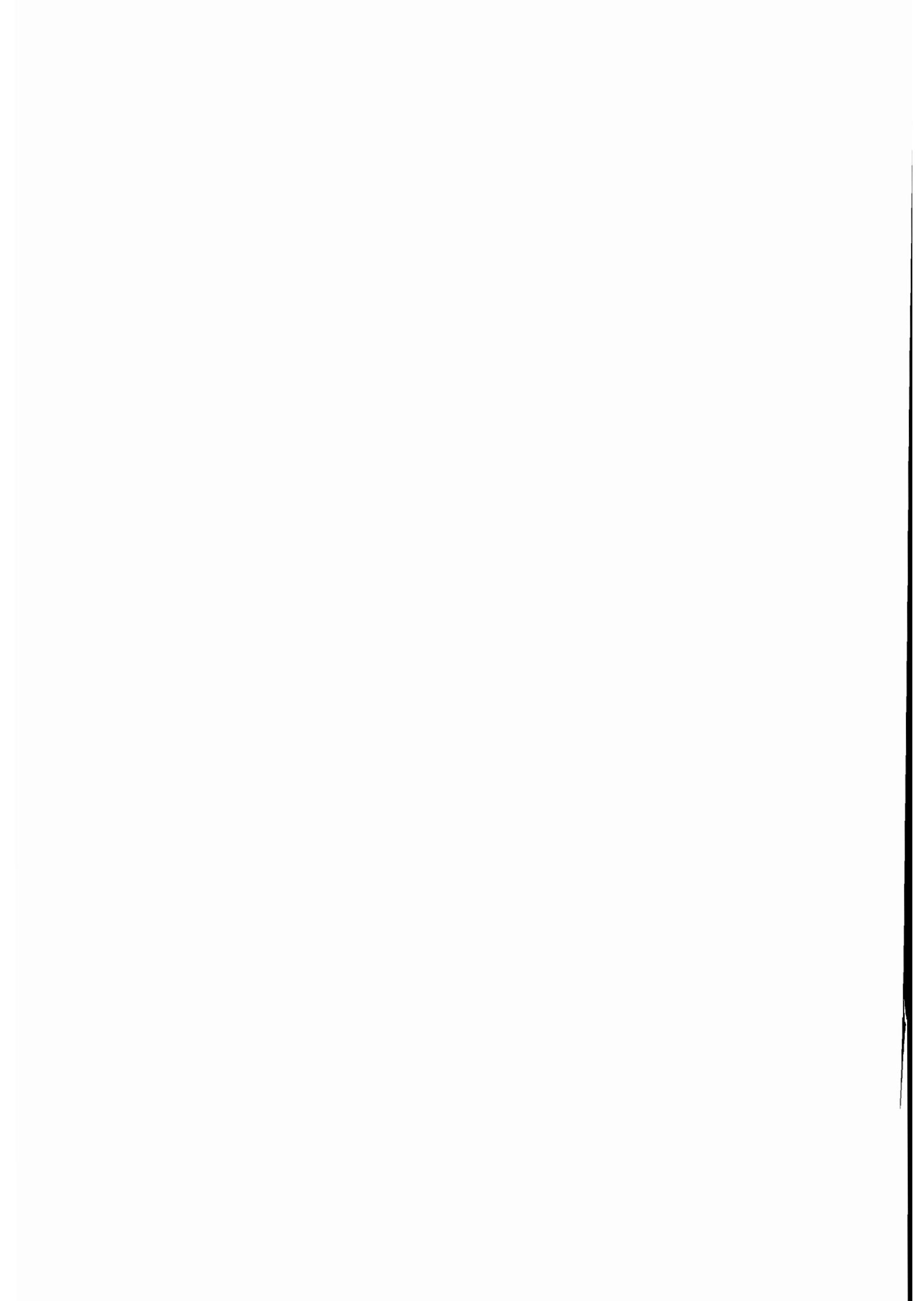
2. Variation

$$\Delta \delta {}^0E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\Delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} + \Delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta \delta {}^1E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\Delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \delta {}^1\mathbf{x}_{,\alpha} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \Delta {}^1\mathbf{x}_{,\alpha} + \Delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta {}^1\mathbf{x}_{,\beta} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta {}^1\mathbf{x}_{,\beta} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$\Delta \delta {}^0E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[\Delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{x} + \delta {}^0\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta \mathbf{x} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta \delta {}^0E_{33} = \Delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (\text{B.12})$$



Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli
1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebil:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)

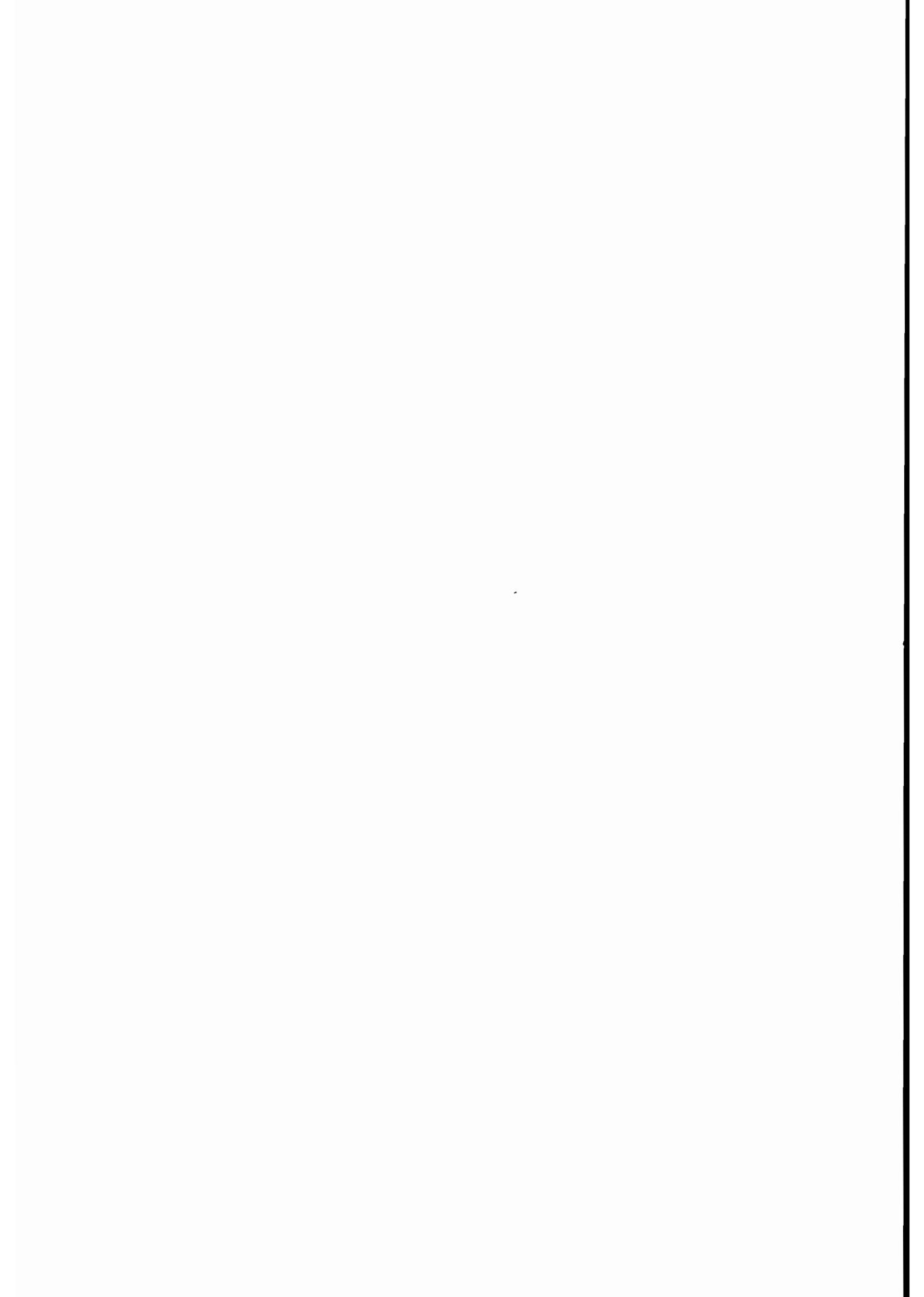
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli
1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember
1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)

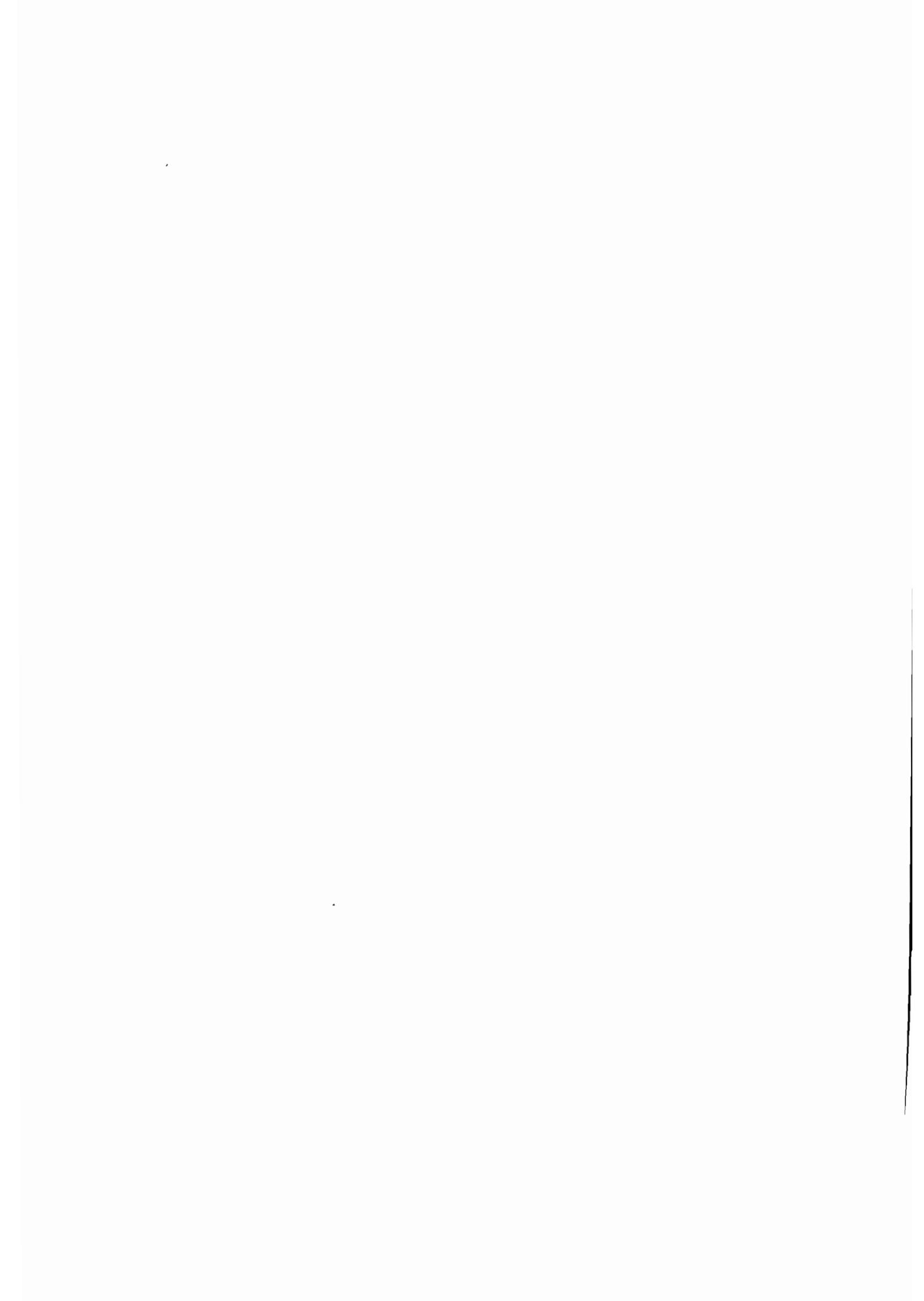
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)

- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Reißspitzenfeldes bei stationärem Reißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)

- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
(Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
(Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
(Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
(Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allge-
meinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
(Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
(Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit
Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines
monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen
Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle
hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei
schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)

- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbbeanspruchter Risse (August 2000)
- Nr. 125 Daniela Lürding
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 125**