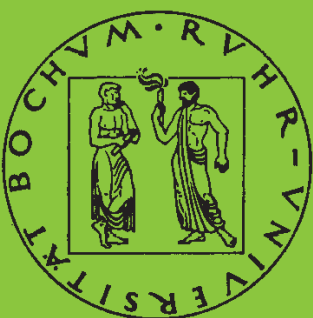


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Thorsten Quent

**Ein mikromechanisch begründetes Modell
zur Beschreibung des duktilen
Verhaltens metallischer Werkstoffe bei
endlichen Deformationen unter
Berücksichtigung von Porenschädigung**

Heft Nr. 126



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Thorsten Quent

Ein mikromechanisch begründetes Modell
zur Beschreibung des duktilen Verhaltens
metallischer Werkstoffe bei endlichen
Deformationen unter Berücksichtigung
von Porenschädigung

Herausgeber:

Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-00-4

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2001 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein mikromechanisch motiviertes phänomenologisches Modell zur Beschreibung des elastisch-plastischen Verhaltens duktil geschädigter Metalle, die orientierte Mikroporen enthalten, vorgestellt.

Als Schädigungsmaß werden die Koeffizienten einer tensoriellen FOURIER-Reihe, welche die richtungsabhängige Volumendichte der Defekte beschreibt, eingeführt. Die Annahme ellipsoider Poren führt mit Hilfe einer geometrischen Interpretation zu einem meßbaren Zusammenhang zwischen den FOURIER-Koeffizienten und der Defektkonfiguration für Porenschädigung.

Durch energetische Betrachtungen an einer Materialvolumenzelle, die einen ellipsoiden Hohlraum enthält, kann die Abhängigkeit der elastischen Konstanten vom Volumenanteil und den Halbmesserverhältnissen des Hohlraumes mikromechanisch ermittelt werden. Zur phänomenologischen Beschreibung der effektiven elastischen Nachgiebigkeit des geschädigten Materials wird eine isotrope Tensorfunktion mit den FOURIER-Koeffizienten als Argumenten angesetzt.

Die Formulierung des makroskopischen Materialmodells erfolgt in einer exakt integrierbaren EULERSchen Beschreibung in Ratenform.

Summary

In this thesis, a micro-mechanically motivated phenomenological model for the description of the elastic-plastic behavior of anisotropic damaged metals containing oriented microvoids is presented.

The coefficients of a tensor-valued FOURIER-series are used as the damage-measure and interpreted for ellipsoidal voids. This leads to a measurable correlation between the FOURIER-coefficients and the defect-configuration.

Based on energetic considerations conducted on an elementary material cell, the qualitative dependence of the elastic constants on the aspect-ratios of the voids is shown. For the phenomenological description of the effective elastic compliance of the damaged material an isotropic tensor-valued function with the FOURIER-coefficients as arguments is formulated.

The constitutive rate-type equations of the macroscopic material behaviour are formulated in an exactly integrable EULERian framework.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, die Betreuung und die Übernahme des Referats danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bruhns. Frau Prof. Dr.-Ing. Reese danke ich für ihr Interesse und die Übernahme des zweiten Referats.

Allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik, mit denen ich während meiner dortigen Tätigkeit zusammengearbeitet habe, möchte ich für die angenehme und freundliche Arbeitsatmosphäre danken. Ihre fachlichen Anregungen und die zahlreichen Diskussionen waren mir eine große Hilfe.

Hattingen, im Mai 2001

Thorsten Quent

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Otto-T. Bruhns
Prof. Dr.-Ing. Stefanie Reese

Tag der Einreichung: 31. Januar 2001
Tag der mündlichen Prüfung: 11. Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung in die Schädigungsmechanik	4
2.1	Aufbau metallischer Werkstoffe	4
2.2	Deformationsmechanismen	7
2.3	Schädigungsmodelle	11
2.3.1	Schädigungsvariablen	12
2.3.2	Konzepte der Schädigungsmodellierung	13
2.3.3	Das Effektivspannungskonzept	14
2.4	Anforderungen an das Materialmodell	17
3	Beschreibung des Schädigungszustandes	19
3.1	Vorstellung ausgewählter Schädigungsmaße	20
3.1.1	Schädigungsmaße ohne Richtungsinformation	20
3.1.2	Schädigungsmaße mit Richtungsinformationen	22
3.2	Festlegung des Schädigungsmaßes	28
3.3	Neuinterpretation des Schädigungsmaßes für ellipsoide Poren	31
3.3.1	Erweiterung auf allgemeine ellipsoide Hohlräume	32
4	Kinematik und Kinetik	34
4.1	Kinematik	34
4.1.1	Konfiguration und Bewegung	35
4.1.2	Beschreibung der Deformation	39
4.2	Verzerrungsmaße	41
4.3	Beobachterinvarianz - Prinzip der materiellen Objektivität	43
4.4	Objektive Zeitableitungen	46

4.4.1	Zusammenhang zwischen D und der Zeitableitung eines Verzer- rungstensors	48
4.5	Spannungstensoren	51
4.5.1	LIE-Ableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors	51
4.6	Konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße	52
4.7	Aufspaltung der reversiblen und irreversiblen Deformationsanteile	57
5	Thermomechanischer Rahmen	62
5.1	Bilanzgleichungen	62
5.1.1	Mechanische Bilanzgleichungen	63
5.1.2	Thermodynamische Erweiterungen der Bilanzgleichungen	65
5.2	Beschreibung des thermomechanischen Zustandes und thermodynamischer Prozesse	68
5.2.1	Weitere Energieformen	69
5.2.2	Prozessbeschreibung auf Basis der GIBBS-Energie	71
5.2.3	Das Konzept der Generalized Standard Materials	74
5.3	Thermomechanische Kopplung	74
6	Elastisches Verhalten	76
6.1	Elastisches Verhalten des ungeschädigten Materials	76
6.2	Modelle zur Beschreibung elastischen Verhaltens geschädigter Werkstoffe	77
6.3	Mikromechanische Untersuchung des Einflusses der anisotropen Schädigung	81
6.3.1	Ermittlung der Nachgiebigkeit anhand der Energieäquivalenz	85
6.3.2	Ermittlung der Nachgiebigkeit durch Mittelung von Spannungen und Verzerrungen	85
6.4	Phänomenologische Beschreibung des elastischen Verhaltens	97
6.4.1	Darstellung der effektiven Nachgiebigkeit als Tensorfunktion	98
6.4.2	Ermittlung der elastischen Kennwerte	102
7	Makroskopisches Stoffgesetz	107
7.1	Konstitutiver Rahmen	108

7.2	Elastisches Materialverhalten	110
7.3	Plastisches Materialverhalten	115
7.4	Schädigungsinduzierte Deformationen	118
7.4.1	Aufspaltung der schädigungsinduzierten Verzerrungsgeschwindigkeit	119
7.4.2	Entwicklung der isotropen Schädigung	119
7.4.3	Entwicklung der anisotropen Schädigung	122
7.5	Nachweis der thermodynamischen Konsistenz	125
7.5.1	Erfüllung der plastischen dissipativen Ungleichung	125
7.5.2	Erfüllung der schädigungsinduzierten dissipativen Ungleichung . . .	126
7.5.3	Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen	127
8	Erstellung einer Finite-Element-Formulierung	129
8.1	Die schwache Form des Kräftegleichgewichts	129
8.2	Numerische Lösungsmethode des statischen Randwertproblems	131
8.2.1	Wahl einer Bezugskonfiguration	131
8.2.2	Einbeziehung der konstitutiven Beziehungen	133
8.2.3	Inkrementelle Formulierung	135
8.3	Diskretisierung des Lösungsraums mit finiten Elementen	136
8.3.1	Grundlagen der Beschreibung in Zylinderkoordinaten	136
8.3.2	Elemente und Ansatzfunktionen	138
8.3.3	Diskretisierte Form des inkrementellen Prinzips der virtuellen Arbeit	142
8.4	Aufbereitung des Stoffgesetzes	144
8.4.1	Integration des Differentialgleichungssystems	146
8.4.2	Berechnung des materiellen Steifigkeitstensors	153
9	Anpassung der Materialparameter und Beispiele	155
9.1	Anpassung der Materialparameter	155
9.1.1	Bestimmung der elastischen Materialparameter	156
9.1.2	Bestimmung der plastischen Materialparameter	156
9.1.3	Bestimmung der Schädigungsparameter	159

9.2	Gekerbte Rohrprobe	162
10	Zusammenfassung und Ausblick	167
A	Einige Rechenregeln der Tensorrechnung	169
A.1	Anwendung des Differentialoperators auf Tensoren	169
A.2	Transformation in eine mitrotierende Konfiguration	169
B	Kinematische Größen	170
B.1	Eigenwertberechnung	170
B.2	Logarithmischer Spin	170
B.3	Transformation zwischen LIE-Ableitung und logarithmischer Rate von τ .	171
B.4	Basisfreie Darstellung der arbeitskonjugierten Spannung zur logarithmischen Verzerrung	171
C	Kinematische Größen des bilinearen Elementansatzes	174
C.1	Ableitungen der Verschiebungskomponenten	174
C.2	Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten	175
	Literaturverzeichnis	176

Verwendete Symbole

Skalare

A	Fläche
E	Elastizitätsmodul
E^{kin}	kinetische Energie
F	skalares Dissipationspotential
G	virtuelle Arbeit
J	Jacobi-Determinante
K	Kompressionsmodul
$K(\kappa)$	Anteil der GIBBS-Energie aufgrund isotroper Verfestigung
P	Leistung der eingepprägten Kräfte
Q	Wärmezufuhr
R	Radius in der Referenzkonfiguration
S_3	Oberfläche der Einheitskugel
U	innere Energie
S	Entropie
V	Volumen
W	Formänderungsleistung
X	Körperpunkt
Z_κ	thermodynamisch konjugierte Kraft der isotropen Verfestigung
Z_ω	thermodynamisch konjugierte Kraft des Porenvolumenanteils
a_i	Koeffizienten der elastischen Nachgiebigkeit
c_p	isobare Wärmekapazität
$c_{\kappa i}$	Materialparameter für die isotrope Verfestigung
c_ζ	Materialparameter für die kinematische Verfestigung
$c_{\omega i}$	Materialparameter zur Entwicklung des Porenvolumenanteils
$c_{\mathcal{D}i}$	Materialparameter zur Entwicklung der anisotropen Schädigung
f	Fließbedingung
m	Masse
$m_{\mathcal{D}i}$	Materialparameter zur Berücksichtigung anisotroper Schädigung in der Fließbedingung
m_ω	Materialparameter zur Berücksichtigung des Porenvolumenanteils in der Fließbedingung
h	spezifische freie Entropie
r	Radius in der aktuellen Konfiguration
s	spezifische Entropie
t	Zeit
v	Volumendichte

u	spezifische innere Energie
w	spezifische Formänderungsleistung
Θ	Temperatur
δ_{ij}	Kronecker-Delta
φ	Winkelkoordinate in der aktuellen Konfiguration
ϕ	spezifische freie Helmholtz-Energie
χ_σ	Eigenwerte der CAUCHY-GREEN-Tensoren
γ	LAMESche Konstante
κ	isotrope Verfestigung
λ	plastischer Multiplikator
λ_σ	Eigenwerte der Strecktensoren
μ	Gleitmodul
ν	Querkontraktionszahl
ω	Porenvolumenanteil
π_y	Anfangsfließspannung
π_{eq}	äquivalente plastische Spannung
ρ	Massendichte
ΔV	Volumenelement
Ψ	spezifische GIBBS-Energie
Υ	elastische Formänderungsenergie
$\Upsilon^{(e)}$	spezifische komplementäre Formänderungsenergie
Σ	spezifische komplementäre Formänderungsenergie
Ξ	Porenflächenanteil
\mathcal{D}	richtungsabhängige Schädigung
\mathcal{G}_0	Symmetriegruppe in der Anfangskonfiguration
\mathcal{E}^3	EUKLIDischer Punktraum
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{V}	Menge kinematisch zulässiger Verschiebungsvariationen
\mathcal{I}	elliptisches Oberflächenintegral

Vektoren

\mathbf{A}	Flächenvektor
\mathbf{X}	Positionsvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{E}_α	normierter Basisvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{G}_α	Basisvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{I}	Impulsvektor
\mathbf{Q}	Wärmestromvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{Y}	Vektor der thermodynamischen Flüsse
\mathbf{Z}	Vektor der thermodynamischen Kräfte

a	Beschleunigungsvektor
b	Vektor der flächenhaft angreifenden Kräfte
e_i	normierter Basisvektor in der aktuellen Konfiguration
f^N	Volumenkräfte in der Referenzkonfiguration
f^n	Volumenkräfte in der aktuellen Konfiguration
g_i	Basisvektor in der aktuellen Konfiguration
n	Normalenvektor
q	Wärmestromvektor in der aktuellen Konfiguration
t	Spannungsvektor in der aktuellen Konfiguration
u	Verschiebungsvektor
v	Geschwindigkeitsvektor
x	Positionsvektor in der aktuellen Konfiguration
χ	Konfiguration

Tensoren 2. Stufe

0	Nulltensor
1	Einheitstensor
B	linker CAUCHY-GREEN-Tensor
C	rechter CAUCHY-GREEN-Tensor
D	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit
E	Verzerrungstensor vom HILLSchen Typ in der Referenzkonfiguration
$E^{(2)}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
F	Deformationsgradient
H	logarithmischer Verzerrungstensor in der Referenzkonfiguration
L	Geschwindigkeitsgradient
N^{\log}	Hilfstensor zur Berechnung des logarithmischen Spintensors
${}^I P$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung
${}^{II} P$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung
Q	orthogonaler Drehtensor
R	Rotationsanteil aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten
T	LAGRANGEScher Spannungstensor
U	rechter Strecktensor
V	linker Strecktensor
W	Tensor der Streckgeschwindigkeit
Z_ζ	thermodynamisch konjugierte Kraft der kinematischen Verfestigung
Z_ζ	thermodynamisch konjugierte Kraft der anisotropen Schädigung

e	Verzerrungstensor vom HILLSchen Typ in der aktuellen Konfiguration
$e^{(-2)}$	ALMANSI-Verzerrungstensor
h	logarithmischer Verzerrungstensor in der aktuellen Konfiguration
Ω^+	allgemeiner Spintensor einer beliebigen mitrotierenden Zeitableitung
Ω^J	Spintensor der ZAREMBA-JAUMANN Zeitableitung
Ω^R	Spintensor der GREEN-NAGHDI Zeitableitung
Ω^{LR}	Differenzspintensor der logarithmischen und polaren Zeitableitung
Ω^{log}	logarithmischer Spintensor
Π	arbeitskonjugierte Spannung zu H
Ξ	Schädigungstensor beim Effektivspannungskonzept
α	Menge der internen Zustandsvariablen
ϵ	linearer Verzerrungstensor
π	arbeitskonjugierte Spannung zu h
σ	CAUCHY-Spannung
τ	KIRCHHOFF-Spannung
ξ	Schädigungsorthotropietensor
ζ	kinematische Verfestigung
\mathcal{D}	Fourierkoeffiziententensor der Schädigung

Tensoren 4. Stufe

$\underline{0}^{(4)}$	Nulltensor
\mathbf{I}	symmetrischer Einheitstensor
\mathbf{C}	Elastizitätstensor
\mathbf{C}^{ep}	elastisch-plastische Tangentensteifigkeit
\mathbf{C}^m	materieller Steifigkeitstensor
\mathbf{D}	Nachgiebigkeitstensor
$\underline{D}^{(4)}$	Nachgiebigkeitstensor des makroskopischen Stoffgesetzes
$\mathbf{G}[\tau]$	Transformationstensor von der Lie- auf Lograte
$\mathbf{H}(\mathcal{B})$	Transformationstensor zur Darstellung mitrotierender Zeitableitungen
\mathbf{L}	Transformationstensor von $\overset{\circ}{\pi}^{log}$ auf $\overset{\circ}{\tau}^{log}$
\mathbf{S}	ESHELBY-Tensor
$\underline{\Psi}^{(4)}$	Spannungstransformationstensor zur Bildung der Effektivspannung

Mathematische Operatoren

$\mathcal{L}_v[\]$	Lie-Ableitung eines Tensors
$\dot{}$	materielle Zeitableitung
\circ^*	mitrotierende Zeitableitung mit dem definierenden Spin Ω^*
\circ^J	ZAREMBA-JAUMANN Zeitableitung
\circ^R	GREEN-NAGHDI Ableitung
\circ^{log}	logarithmische Zeitableitung
\times	Vektorkreuzprodukt
\otimes	Dyadisches Produkt
\star	Transformation in eine rotierte Konfiguration, siehe Anhang A
$\langle \rangle$	Volumenmittelwert
$\text{sym}()$	Symmetrischer Anteil eines Tensors
$\text{skw}()$	Antimetrischer Anteil eines Tensors
$\text{MIN}()$	Minimalwert einer Funktion
$\text{MAX}()$	Maximalwert einer Funktion
$()_{min}$	kleinster Eigenwert eines Tensors
$()_{max}$	größter Eigenwert eines Tensors
$()_{,x}$	partielle Ableitung einer Größe nach der Größe x
$\ \ $	Betrag eines Tensors
\det	Determinante eines Tensors
$\hat{}$	Kennzeichnung einer Größe in der mit \mathbf{R}^T zurückrotierten Konfiguration

Tensoroperationen

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A^i_j B_i^j \quad \text{doppeltes Skalarprodukt}$$

1. Einleitung

Werkstoffe, die ungünstigen Umweltbedingungen oder mechanischen Belastungen ausgesetzt sind, unterliegen mikrostrukturellen Veränderungen, die zu einer Verringerung der Steifigkeit führen. Dieser Prozess wird in der Kontinuumsmechanik als Schädigung bezeichnet.

Die Berücksichtigung von Schädigung bei der ingenieurmäßigen Berechnung von Bauteilen gewinnt zunehmend an Bedeutung. Dabei werden unterschiedliche Ziele verfolgt. Wichtig ist etwa die Möglichkeit, Prognosen über die Lebensdauer von Bauteilen abzugeben. Ein weiteres Ziel ist die Vorhersage von Versagensfällen, bei denen sowohl die Ursachen und der Ort als auch die Auswirkungen der Schädigung interessieren. Eine dritte wichtige Information, die aus Schädigungsberechnungen gewonnen wird, ist die Änderung der mechanischen Materialeigenschaften, die aus der Entwicklung der Schädigung resultiert.

Zur Bereitstellung geeigneter Modelle der Schädigungsbeschreibung hat sich die Kontinuumschädigungsmechanik entwickelt, die durch die Arbeiten von L. M. KACHANOV 1958 begründet wurde.

Aufgrund der Verwendung verschiedener Werkstoffe im Ingenieurbereich und unterschiedlicher Anwendungsbedingungen existieren verschiedene Mechanismen, die mikrostrukturelle Veränderungen im Material hervorrufen. Dementsprechend ist auch bei den Modellen zur Beschreibung des Verhaltens geschädigter Werkstoffe eine Spezialisierung festzustellen. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten unter Einbezug duktiler Schädigung, welches in polykristallinen metallischen Werkstoffen unter bestimmten Belastungs- und Temperaturbedingungen vorzufinden ist. Anwendungen für ein solches Materialmodell finden sich in der Simulation formgebender Fertigungsverfahren, wie z.B. des Tiefziehens, die mit großen plastischen Formänderungen bei Raumtemperatur verbunden sind, und auch in der Simulation von Schadensfällen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zur phänomenologischen Modellierung duktiler Schädigung zu leisten. Aufbauend auf die Interpretation des verwendeten Maßes zur Beschreibung des Schädigungszustands, die eine eindeutige Zuordnung zu einer Defektkonfiguration ermöglicht, werden Untersuchungen der mikromechanischen Effekte der Schädigung durch Mikroporen angestellt. Die Berücksichtigung der hierbei gewonnen Erkenntnisse in einem phänomenologischen Modell führt zu einer Reduktion der Anzahl der zu

bestimmenden Materialparameter und gleichzeitig zu einer Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit gegenüber bisher existierenden phänomenologischen Schädigungsmodellen. Die Formulierung des Modells erfolgt in einem mathematisch exakten kinematischen Rahmen zur Beschreibung endlicher Deformationen.

Im folgenden Kapitel erfolgt aufbauend auf eine Übersicht der Deformationsmechanismen metallischer Werkstoffe eine Einordnung und Erklärung der durch das Modell zu beschreibenden Phänomene und die Angabe des Gültigkeitsbereichs. Weiterhin wird ein bewertender Überblick über die Modellierungskonzepte der Kontinuumschädigungsmechanik gegeben.

Im dritten Kapitel wird die Beschreibung des Materialzustands durch Schädigungsmaße behandelt. Das in dieser Arbeit gewählte Maß einer tensoriellen Fourierreihe zur richtungsabhängigen Darstellung von Volumendichten wird für Schädigung durch ellipsoide Poren interpretiert.

Im vierten Kapitel wird der kinematische Rahmen zur Beschreibung endlicher Deformationen in konstitutiven Formulierungen erarbeitet.

Daran schließt ein Kapitel mit der Darstellung des thermodynamischen Rahmens zur Formulierung der stoffabhängigen Gleichungen an.

Im sechsten Kapitel erfolgt eine mikromechanische Untersuchung des Einflusses ellipsoider Hohlräume auf die elastischen Eigenschaften. Die Anpassung der so gewonnenen Erkenntnisse an einen phänomenologischen Ansatz führt zu einer Beschreibung des Schädigungseinflusses auf die elastischen Materialeigenschaften ohne Einführung zusätzlicher Materialparameter.

Aufbauend auf die Ergebnisse der mikromechanischen Betrachtungen wird im anschließenden Kapitel ein thermodynamisch konsistentes, phänomenologisches Modell zur Beschreibung elastisch-plastischen Verhaltens unter Berücksichtigung duktiler Schädigung in dem zuvor erarbeiteten kinematischen Rahmen entwickelt.

In Kapitel 8 wird die Implementation einer vereinfachten Form des vorgestellten Schädigungsmodells in eine Finite-Element-Formulierung für endliche Formänderungen beschrieben. Das dazu entwickelte bilineare Element eignet sich zur Lösung rotationssymmetrischer Probleme.

Im neunten Kapitel werden die Parameter der vereinfachten Form des Stoffgesetzes an experimentelle Versuchsdaten von Zugversuchen mit Proben aus einem CK-15 Stahl angepasst und die erhaltenen Ergebnisse diskutiert. Am Berechnungsbeispiel einer gekerbten Rohrprobe wird die Möglichkeit von Schädigungsanalysen bei inhomogenen Spannungs- und Verzerrungsfeldern mit der Finite-Element-Implementierung des Schädigungsmodells in das Programmsystem FEAP gezeigt.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der ermittelten Ergebnisse und einem Ausblick auf weitere Schritte, die zu einer verbesserten Beschreibung des Materialverhal-

tens unter Berücksichtigung duktiler Schädigung mit dem entwickelten Modells führen.

2. Einführung in die Schädigungsmechanik

Zur Modellierung des Deformationsverhaltens geschädigter metallischer Werkstoffe sind Kenntnisse über ihren inneren Aufbau erforderlich. Die makroskopischen Phänomene des Materialverhaltens lassen sich aus der Werkstoffstruktur erklären.

In diesem Kapitel wird eine Einführung in den Aufbau der betrachteten polykristallinen metallischen Werkstoffe und den daraus resultierenden Deformationsmechanismen gegeben. Die in dem für die Anwendung interessierenden Temperaturbereich und Belastungsbereich entscheidenden Mechanismen werden identifiziert. Es wird festgelegt, was unter dem Begriff Schädigung verstanden werden soll. Anhand einer Übersicht über Modellierungskonzepte der Kontinuumsschädigungsmechanik wird die vorliegende Arbeit motiviert und begründet, warum die gestellten Anforderungen von den vorhandenen Modellen nicht hinreichend erfüllt werden.

2.1 Aufbau metallischer Werkstoffe

Bei der Beschreibung des Aufbaus metallischer Werkstoffe hat sich in der Kontinuumsmechanik eine Betrachtung in verschiedenen Größenskalen als sinnvoll erwiesen. Die üblicherweise bei der Materialbeschreibung eingeführten Skalen sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Als kleinstes Strukturelement wird die Anordnung der Atome auf der *Mikroskala* betrachtet. In einem Metall sind die Atome bei Temperaturen unterhalb der Schmelztemperatur Θ_S regelmäßig in einer *Kristallstruktur* angeordnet. Betrachtet man die Atome als Knotenpunkte eines Gitters im Raum, so erhält man die Elementarzelle als kleinstes Muster, durch dessen sich im Raum wiederholende Anordnung das *Raumgitter* entsteht. Die Kantenlänge einer Elementarzelle, auch *Gitterkonstante* genannt, ist ein Maß für die physikalische Größenordnung der Mikroskala. Sie beträgt nach BERNIS [Ber93] beispielsweise bei α -Eisen $2,866 \cdot 10^{-10}$ m.

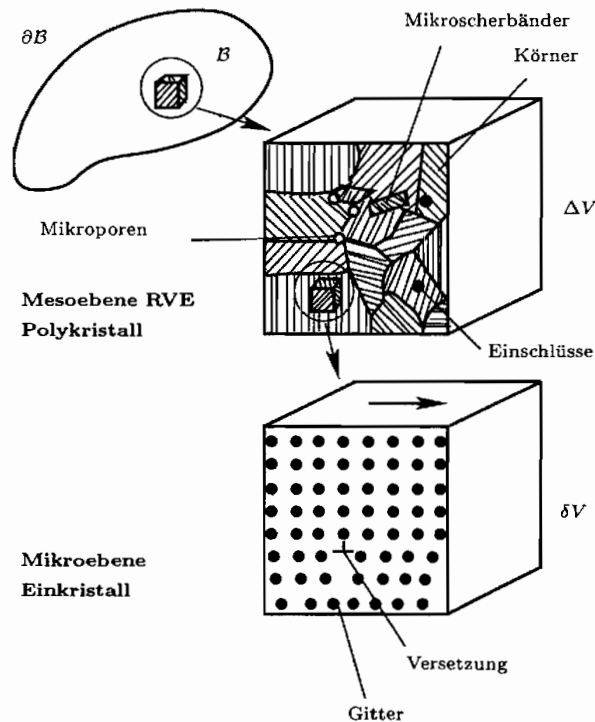


Abb. 2.1: Größenskalen bei der Materialmodellierung nach BRUHNS [Bru93]

Kristalline Werkstoffe können in verschiedenen Gitterformen angeordnet sein. Die typischen Gitterformen von Metallen sind

- Gitter mit hexagonal dichtester Kugelpackung (hdP), z.B. reines Cadmium,
- kubisch flächenzentriertes Gitter (kfz) z.B. γ -Eisen, austenitischer Stahl
- kubisch-raumzentriertes Gitter (krz), z.B. α -Eisen, ferritischer Stahl.

Viele Metalle haben die Eigenschaft der *Polymorphie*, d.h. die momentane Gitterstruktur hängt von Temperatur, Druck und deren Vorgeschichte ab.

Jedes Metall wird im Laufe des Gewinnungs- bzw. Herstellungsprozesses mindestens einmal vom amorphen Zustand ($\Theta > \Theta_S$) mit im Allgemeinen flüssiger Phase in den kristallinen festen Zustand übergehen ($\Theta < \Theta_S$). Bei dem dazu erforderlichen Abkühlungsprozess wachsen eine Vielzahl von Kristalliten ausgehend von Erstkeimen (z.B. an Fremdatomen oder lokalen Gebieten niedrigerer Temperatur). Dadurch entstehen innerhalb des Metalls *Körner* mit verschiedenen Gitterausrichtungen, die an den Korngrenzen miteinander verbunden sind und man erhält einen polykristallinen metallischen Werkstoff. Die durch spezielle Fertigungsverfahren hergestellten monokristallinen Werkstoffe werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die Betrachtung der Prozesse innerhalb der Körner

und an den Korngrenzen erfolgt auf der *Mesoebene*, deren charakteristisches Längenmaß der *Korndurchmesser* des betrachteten Metalls ist. Die Größe der Körner hängt von vielen verschiedenen Faktoren ab, wie z.B. der

- atomaren Zusammensetzung,
- Art und Dauer der Erstarrung,
- Deformationsgeschichte etc.

Der Korndurchmesser von Stählen wird nach der ASTM in Größenstufen von 1-8 eingeteilt, was einem Durchmesserbereich von $22\ \mu\text{m}$ – $249\ \mu\text{m}$ entspricht. Aluminiumwerkstoffe können jedoch wesentlich größere Korngrößen aufweisen, die z.T. im Millimeterbereich liegen. Die Anordnung der Körner bezeichnet man nach HORNBOGEN & WARLIMONT [HW91] auch als *Gefüge*.

Die Korngröße der meisten metallischen Werkstoffe ist damit noch viel zu klein zur diskreten Strukturmodellierung. Daher wird die *Makroebene* eingeführt. Der Übergang von der Meso- zur Makroebene wird mit Hilfe eines *repräsentativen Volumenelements* (RVE) vollzogen, welches die Material- und Struktureigenschaften des enthaltenen Werkstoffs z.B. in Form von internen Variablen und Materialparametern reflektiert. Die Kantenlänge solcher RVE's $(\Delta V)^{\frac{1}{3}}$ muss um Größenordnungen höher sein als der Korndurchmesser und alle anderen charakteristischen Längen l_{Ci} der damit beschriebenen Strukturelemente innerhalb des RVE. Andererseits muss es klein genug sein, damit es auf der Makroebene als Punkt betrachtet werden kann. Als Beispiel der charakteristischen Länge auf der Makroskala für dynamische Belastungsvoränge lässt sich nach BRUHNS [Bru93] die Wellenlänge einer Schockwelle l_S bei Stoßbelastung angeben.

Auf der Makroebene wird innerhalb der Kontinuumsmechanik von einem homogenen Material ausgegangen. Alle Struktureigenschaften eines Werkstoffes, deren charakteristische Längen nicht wesentlich kleiner als die Kantenlänge des RVE's sind, können demnach auf der Makroebene nicht mehr in Form von internen Variablen mit einer Kontinuumstheorie beschrieben werden. Die Wahl der verschiedenen Skalen ist willkürlich dem Problem der Materialbeschreibung innerhalb einer Kontinuumstheorie angepasst.

Das Deformationsverhalten metallischer Werkstoffe wird neben den physikalischen Prozessgrößen wie Deformationsgeschwindigkeit und Temperatur maßgeblich durch Imperfektionen oder Defekte in einem realen Werkstoff mitbestimmt. Es gehört somit zu den stark gefügeabhängigen Materialeigenschaften. Wenn jede Abweichung im Aufbau eines Werkstoffes, die diesen von einer ideellen Struktur der periodischen Gitteranordnung einer Elementarzelle unterscheidet, als Defekt bezeichnet wird, so lassen sich die Defekte innerhalb der jeweiligen Größenskala, in der sie auftreten, angeben.

Die zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Metallen wichtigsten Defekte sind in Tabelle 2.1 der jeweiligen Größenskale zugeordnet aufgeführt. Eine detaillierte Beschreibung der aufgeführten Defekte geben HORNBOKEN & WARLIMONT in [HW91] und BERNS in [Ber93] an.

Mikroskale	substituierte Fremdatome gelöste Fremdatome Leerstellen Versetzungen Stapelfehler
Mesoskale	Körner Korngrenzen Poren/Risse an Korngrenzen Poren/Risse innerhalb und durch Körner Ausscheidungen an Korngrenzen
Makroskale	Makroporen Makrorisse Makroscherbänder

Tabelle 2.1: Zuordnung der Materialdefekte zu den Größenskalen

2.2 Deformationsmechanismen

Das makroskopische Deformationsverhalten eines Werkstoffs resultiert, neben der makroskopischen Gestalt, der Belastung und der Temperatur aus den Deformationsprozessen auf der Mikro- und Mesoebene. Die Kenntnis der mikromechanischen Prozesse liefert wichtige Hinweise zur Einführung der internen Variablen und deren Entwicklungsgleichungen in phänomenologischen Materialmodellen. In mikromechanischen Modellen bietet sie außerdem die Möglichkeit, über geeignete Mittelungsverfahren einen direkten Zusammenhang zwischen Mikro- und Mesoebene bzw. Meso- und Makroebene herzustellen. Defekte in der Struktur metallischer Werkstoffe können auch als „Schwachstellen“ angesehen werden, da sie im Regelfall zu einer Abnahme der lokalen Steifigkeit führen.

Reversible Deformationen beruhen auf dem Prinzip der Gitterverzerrung. Die Deformationsmechanismen inelastischer Deformationen lassen sich den Defekten und damit den eingeführten Größenskalen der Materialbeschreibung zuordnen.

Die Deformationsmechanismen auf der Gitterebene werden nach ASHBY & FROST [AF75] in die folgenden 6 Gruppen unterteilt

- Scherversagen
- Zwillingsbildung und martensitische Umwandlung
- Fließen durch reines Versetzungsgleiten
- Fließen durch Versetzungsklettern
- Diffusionsklettern
- gekoppelte Mechanismen.

Jede Gruppe kann in ihrer Deformationsrate auf verschiedene Weisen eingeschränkt werden. Plastisches Fließen wird durch die Oktaederschubspannung, ausgedrückt in den Hauptspannungen bzw. der 2. Invarianten des Spannungsdeviators

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{9}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D},\end{aligned}\tag{2.1}$$

ausgelöst. Der Bereich, in dem ein bestimmter mikrostruktureller Deformationsmechanismus in einem Material dominierend ist, hängt von der homologen Temperatur und von der auf den Gleitmodul bezogenen im Material vorherrschenden Schubspannung ab. Zur Kennzeichnung dieser Bereiche geben FROST & ASHBY für viele im Ingenieurwesen verwendete Stähle in [FA82] Deformationsmechanismen tafeln an.

Bei Temperaturen $\Theta \lesssim 0,3 \cdot \Theta_s$, bei denen das Materialverhalten in dieser Arbeit betrachtet wird, dominiert bei den meisten Stählen das Versetzungsgleiten. Alle weiteren mikrostrukturellen inelastischen Deformationsmechanismen sind demgegenüber bei diesen Temperaturen vernachlässigbar.

Das Versetzungsgleiten basiert auf der Wechselwirkung mobiler Versetzungen mit anderen Hindernissen. Nach ASHBY & FROST [AF75] lassen sich diese in 3 Gruppen einteilen

- athermische Versetzungsbewegung
- thermische Versetzungsbewegung
- durch viskose Dämpfungsmechanismen kontrollierte Versetzungsbewegung.

Die athermische Versetzungsbewegung wird durch Hindernisse mit weitreichenden inneren Spannungsfeldern, wie z.B. Korngrenzen, Einschlüssen oder Versetzungsgruppen, bestimmt, zu deren Überwindung eine Erhöhung der in der Gleitebene wirkenden Schubspannung nötig ist. Nach HORNBOGEN & WARLIMONT [HW91] erkennt man am Fließbeginn oft Versetzungsanordnungen, die darauf hindeuten, dass Versetzungen überwiegend von Grenzflächen ausgehen und nach Durchqueren eines Kristalliten wieder an Grenzflächen aufgestaut werden. Dieses Verhalten liefert eine physikalische Erklärung zur Einführung der kinematischen und isotropen Verfestigung in phänomenologischen plastischen Materialmodellen.

Die thermisch aktivierte Versetzungsbewegung tritt auf, wenn die mobilen Versetzungen Hindernisse mit kurzreichenden Spannungsfeldern, wie z.B. Waldversetzungen, gelöste Fremdatome oder die Gitterkräfte selbst überwinden müssen. Dies kann ohne Belastungssteigerung entweder durch lokales Klettern oder Gleiten bzw. durch „Durchtrennen“ der Hindernisse erfolgen, wenn die benötigte lokale Aktivierungsenergie zur Verfügung steht. Die thermischen Versetzungsbewegungen führen auf ein makroskopisch viskoses Materialverhalten.

Die Schubverzerrungsrate der thermischen und athermischen Versetzungsbewegungen wird durch die Wartezeit der Versetzungen vor Hindernissen bestimmt.

Viskos gedämpfte Versetzungsmechanismen treten bei Schockbelastungen auf, wenn keine Hindernisse mehr die Versetzungsbewegung behindern, sondern die Schleppkräfte der Elektronen und Photonen die Verzerrungsgeschwindigkeit bestimmen.

Versetzungsgleiten kann nur in Gitterebenen mit höchster Packungsdichte, den *Gleitebenen*, auftreten. Die *Gleitrichtungen* innerhalb der Ebenen sind die Richtungen mit dem kürzesten Atomabstand. Eine Kombination aus Gleitebene und Gleitrichtung wird *Gleitsystem* genannt; für kubisch-flächenzentrierte Gitter liegen nach GELROLD [Ger84] z.B. 12 Gleitsysteme vor.

Die Beschreibung der mikrostrukturellen inelastischen Deformationsmechanismen in einem Schädigungsmodell erfolgt durch ein phänomenologisches Modell, da die beschriebene Schädigung in einer anderen Größenskala auftritt. Ausgehend von Temperaturen unterhalb von $0,3\Theta_s$ und moderaten Deformationsgeschwindigkeiten wird das inelastische Materialverhalten von thermischem Versetzungsgleiten dominiert. Dieses wird durch ein elastisch-plastisches Materialmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung beschrieben.

Die Defekte auf der Mesoebene werden nach LEMAITRE [Lem96] in der Kontinuumsschädigungsmechanik als Materialschädigung verstanden. Obwohl die Schädigungsentwicklung immer auf denselben Effekt des Lösens atomarer Bindungen zurückzuführen ist, tritt diese auf der Mesoebene abhängig vom Material, der Belastung und der Temperatur in verschiedenen Arten auf.

Es lassen sich die folgenden Schädigungsmechanismen unterscheiden

- Kriechschädigung
- duktile Schädigung
- spröde Schädigung
- low-cycle Fatigue
- high-cycle Fatigue
- Schädigung durch Umwelteinflüsse.

Analog zu den Deformationsmechanismenkarten werden von ASHBY [Ash83] Versagens- tafeln für metallische Werkstoffe angegeben, in denen die Bereiche der dominierenden Schädigungsmechanismen über der homologen Temperatur und der Schubspannung angegeben sind. In dem in dieser Arbeit vorliegenden Bereich ist die duktile Schädigung dominierend. Diese tritt gleichzeitig mit den plastischen Deformationen auf. Die duktile Schädigung geht von Defekten in der Materialstruktur aus, von denen Porenbildung initiiert wird. Nach LEMAITRE & CHABOCHE [LC90] sind dies

- Partikel zugesetzter Legierungselemente
- Einschlüsse
- Ausscheidungsteilchen nach Wärmebehandlung
- Versetzungsaufstauungen
- Korngrenzen und Tripelpunkte.

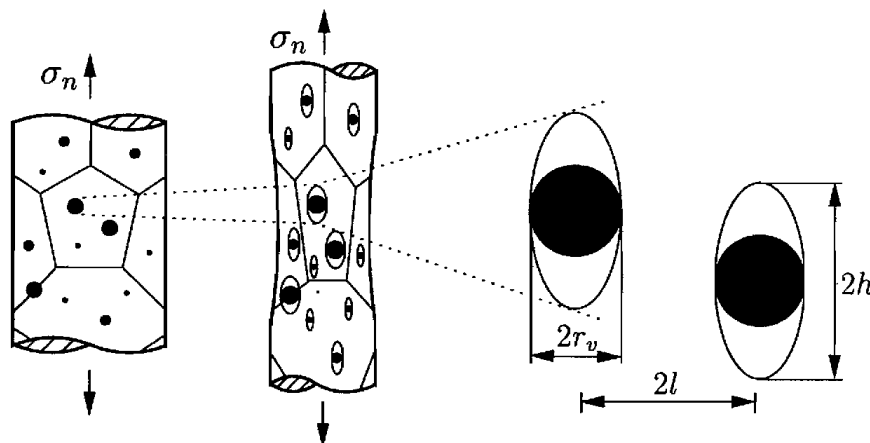


Abb. 2.2: Porenbildung und Wachstum bei duktiler Schädigung

In der Umgebung dieser Defekte erzeugen die äußeren Lasten Spannungskonzentrationen. Da die Defekte im Allgemeinen steifer sind als das Matrixmaterial, produzieren sie Instabilitäten, die zur Dekohäsion an den Grenzflächen führen. Folglich werden Mikroporen gebildet. Bei weiterer Belastung wachsen die so entstandenen Poren, wobei das größte Wachstum in Richtung der Hauptzugspannungen vorliegt. Dieser Vorgang ist in Abbildung 2.2 illustriert. Schließlich wird eine kritische Verzerrung erreicht, bei der die plastischen Deformationen lokalisieren und benachbarte Poren verschmelzen. Das Materialversagen erfolgt dann durch transgranularen Bruch. In diesem Stadium der Schädigung lässt sich der so entstehende Riss auf der makroskopischen Ebene nicht mehr mit kontinuumsmechanischen Modellen beschreiben, sondern muss mit Modellen der Bruchmechanik diskret modelliert werden.

In Abbildung 2.3 ist die Bruchfläche eines durch duktile Schädigung entstandenen transgranularen Bruches dargestellt. Die im Deformationsprozess entstandenen Mikroporen und die Korngrenzen sind deutlich erkennbar.

Der Prozess der duktilen Materialschädigung wird von einer Änderung der makroskopischen elastischen Eigenschaften des Materials begleitet.

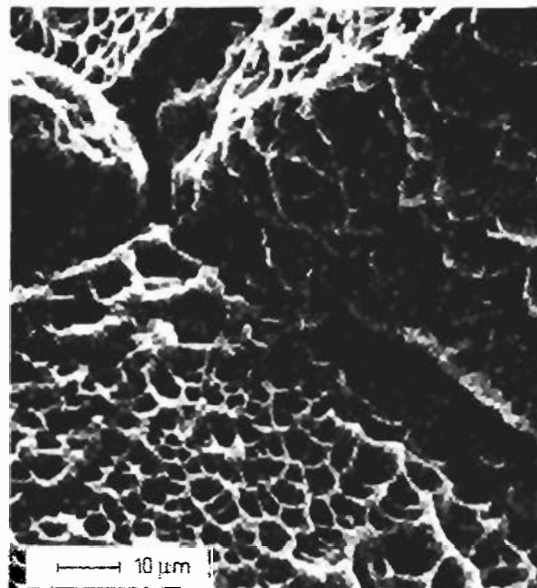


Abb. 2.3: Bruchfläche nach einem durch duktile Schädigung verursachten transgranularen Bruch (nach LEMAITRE [Lem96])

2.3 Schädigungsmodelle

Die grundlegenden Arbeiten der Kontinuumschädigungsmechanik (CDM) gehen auf KACHANOV [Kac58] zurück. Unter diesem von HULT [Hul79] geprägten Begriff werden alle

Schädigungstheorien verstanden, bei denen das inhomogene geschädigte Material makroskopisch als homogenes Kontinuum betrachtet wird. Die Schädigung wird mit internen Zustandsvariablen beschrieben und durch makroskopische Phänomene sichtbar. Damit wird deutlich, welche Bestandteile in einer Kontinuumsschädigungstheorie vorhanden sein müssen. Ausgehend von ungeschädigtem Material, welches durch eine klassische phänomenologische Formulierung beschrieben wird, werden geeignete Variablen zur Beschreibung der vorhandenen Schädigung eingeführt. Der Einfluss der Schädigung auf das Deformationsverhalten muss in der konstitutiven Formulierung berücksichtigt und die Entwicklung der Schädigungsvariablen beschrieben werden. Der Gültigkeitsbereich der Theorie ergibt sich im Allgemeinen bei Übersteigen kritischer Werte der Schädigung durch das Verlassen der Gültigkeit der Kontinuumstheorie, wenn die Defektgröße nicht mehr als klein gegenüber den charakteristischen Längen der Makroskala angesehen werden kann.

2.3.1 Schädigungsvariablen

Die Schädigungsvariablen beschreiben den Schädigungszustand des Materials qualitativ und quantitativ; sie sind skalare oder tensorielle Größen. Dabei wird zwischen *Schädigungsmaßen* und *Schädigungseffektmaßen* unterschieden.

Mit Schädigungsmaß werden solche Zustandsgrößen bezeichnet, die die Mikrodefektkonfiguration bzw. den Schädigungszustand eines Materials und dessen Änderung beschreiben, also die Anzahl, Größe, Anordnung und Orientierung der im geschädigten Körper verteilt enthaltenen diskreten Defekte. Der von DAVISON, STEVENS & KIPP in [DSK77] eingeführte Porenvolumenanteil ist ein Beispiel für ein isotropes skalares Schädigungsmaß. Häufig werden als Schädigungsmaße auch ad hoc skalare oder tensorielle Größen eingeführt, die die isotrope bzw. anisotrope Schädigung beschreiben sollen, jedoch keinen direkten Bezug zu einer Defektstruktur erkennen lassen. Eine mikromechanische Interpretation dieser Größen zur Bestimmung der Schädigungseffekte ist daher schwierig. Da die Wahl des Schädigungsmaßes als wesentlich angesehen wird, werden diese Größen in einem eigenen Kapitel behandelt.

Schädigungseffektmaße dienen zur Beschreibung der Veränderung der thermomechanischen Materialeigenschaften aufgrund der Schädigung. Sie ermöglichen die Identifikation lokaler Spannungs- (bzw. Verzerrungs-) und Temperaturerhöhung und beschreiben die Makrophänomene des Schädigungszustands in Abhängigkeit aller Schädigungsmaße, der Belastung und des Materialgrundverhaltens im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$. Als Beispiel für ein Schädigungseffektmaß kann der von KRAJČINOVIC & FONSEKA in [KF81] eingeführte effektive Steifigkeitstensor zur Beschreibung eines durch Risse geschädigten Materials genannt werden.

Bei einigen Schädigungsmodellen wird auf die Verwendung von Schädigungsmaßen ganz verzichtet und die Schädigung direkt durch die Effekte auf das Materialverhalten berücksichtigt. Z.B. beschreiben ESKANDARI & NEMES in [EN99] die Materialschädigung durch die Abnahme der Steifigkeit und definieren damit einen vierstufigen Schädigungstensor. Der Versuch, einen mikromechanischen Zusammenhang zu einer Defektkonfiguration zu finden, wenn auch nur qualitativ, wird bei diesem Vorgehen in der Regel gar nicht erst unternommen.

Eine umfangreiche, nach der tensoriellen Stufe der Schädigungsvariablen geordnete Übersicht bisher verwendeter Schädigungsvariablen geben LEE, LESIEUTRE & FANG in [LLF97] an. Eine Einteilung in Schädigungsmaße und Schädigungseffektmaße erfolgt in dieser Übersicht nicht.

2.3.2 Konzepte der Schädigungsmodellierung

Zur Entwicklung eines Kontinuumsschädigungsmodells gibt es verschiedene Konzepte. Grundsätzlich lassen sich Kontinuummodelle entweder in einem mikromechanischen Rahmen oder auf phänomenologischem Weg ableiten.

Bei den mikromechanischen Modellen wird von einer Beschreibung der Defekte und ihres Einflusses auf das Deformationsverhalten auf der Mesoebene ausgegangen. Die Änderungen der makroskopischen Materialeigenschaften können dann durch Homogenisierung der Spannungs- und Verzerrungsfelder innerhalb eines dem Problem angepassten repräsentativen Volumenelements bestimmt werden. Die Schädigungseffekte lassen sich dabei durch die Schädigungsmaße ausdrücken. Diese Art der Modellierung geht auf die Arbeiten von VOIGT [Voi28] und REUSS [Reu29] zurück, die erstmals mikromechanische Modelle zur kontinuumsmechanischen Beschreibung polykristalliner Metalle entwickelt haben. In der Schädigungsmechanik werden mikromechanische Modelle vor allem zur Beschreibung spröder Werkstoffe eingesetzt. Der Nachteil der mikromechanischen Modelle liegt in der Komplexität, die diese Modelle selbst zur Beschreibung einfacher Phänomene annehmen. Häufig ist eine Homogenisierung der mikromechanischen Felder nur durch stark vereinfachende Annahmen möglich. Außerdem lassen sich viele der verwendeten mikromechanischen Modellierungstechniken nicht ohne weiteres auf die bei plastischem Materialverhalten notwendige Beschreibung großer Deformationen übertragen.

Bei der phänomenologischen Modellierung kann weiterhin zwischen einer mikromechanisch begründeten Vorgehensweise und einer Vorgehensweise, die sich nur an den auf der Makroebene auftretenden Phänomenen orientiert, unterschieden werden.

Der Vorteil der rein phänomenologischen Modelle liegt in der Einhaltung der thermodynamischen Konsistenz. Wählt man die Vorgehensweise im Rahmen der *Generalized*

Standard Materials, so lassen sich die thermodynamischen Restriktionen a priori erfüllen, die physikalisch eindeutige Interpretierbarkeit der Schädigungseffektmaße ist jedoch problematisch und damit ist die Messbarkeit nicht sichergestellt.

Wählt man die Schädigungsmaße so, dass eine direkte physikalische Interpretierbarkeit gegeben ist und lassen sich diese auch messen, so ist mit den mikromechanisch begründeten Modellen eine präzisere Abbildung des Materialverhaltens möglich. Weiterhin bieten die Betrachtungen auf der Mesoskala physikalische Hinweise zur Formulierung der Evolutionsgleichungen für die Schädigungsmaße. Eine mögliche Methode ist die Verwendung von Materialvolumenzellen, die repräsentativ einen Defekt enthalten und aus deren periodischer Anordnung sich der Körper zusammensetzt. Vergleicht man das Verhalten der Materialvolumenzelle mit dem seines effektiven Kontinuumsmodells, so erhält man einen Zusammenhang zwischen den Schädigungsmaßen und den Schädigungseffektmaßen. Diese Methode eignet sich jedoch nur für schwache Verteilungen von Defekten, da keine Interaktionsmechanismen mit einbezogen werden können. Somit ist es mit den mikromechanisch begründeten phänomenologischen Schädigungsmodellen z.B. möglich, die mikromechanischen Erkenntnisse von GURSON [Gur77] zur Bestimmung von Fließgrenzen eines durch Poren geschädigten Materials in einer phänomenologischen Materialformulierung zu berücksichtigen und dabei gleichzeitig die thermodynamische Konsistenz sicherzustellen.

Welche Vorgehensweise bei der Modellierung geschädigten Materials als Kontinuum gewählt wird, hängt neben den Anforderungen an das Stoffgesetz selbst, wie numerische Effizienz oder Genauigkeit, auch von der Art der darzustellenden Deformations- und Schädigungsmechanismen ab. Die dazu verwendeten Schädigungsvariablen entbehren dabei oft einer physikalischen Interpretation, wie bereits KRAJČINOVIC & MASTILOVIC in [KM95] bemerken.

2.3.3 Das Effektivspannungskonzept

Das in der phänomenologischen Schädigungsmechanik am weitesten verbreitete Konzept ist das Effektivspannungskonzept, dessen Name auf LEMAITRE [Lem71] zurückgeht. Dieses Konzept wird zur phänomenologischen Beschreibung duktiler Schädigung vielfach verwendet. Im Folgenden werden die dem Konzept zu Grunde liegenden Ideen erläutert.

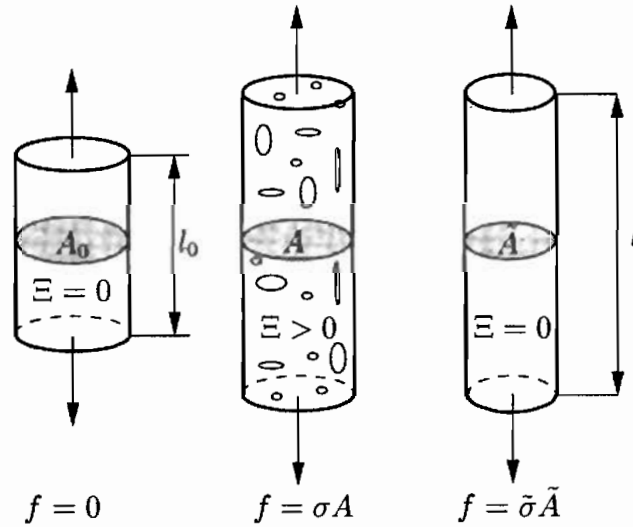


Abb. 2.4: Einführung eines fiktiven ungeschädigten Zustandes beim Effektivspannungskonzept

Das Effektivspannungskonzept basiert auf den Annahmen von KACHANOV [Kac58] und RABOTNOV [Rab59], dass der wesentliche Effekt der Schädigung in einer Abnahme der tragenden Querschnittsfläche durch Bildung von Mikroporen und Mikrorissen besteht. Für den einaxialen Zugversuch lässt sich die Effektivspannung durch Einführung eines fiktiven Zustands nach Abbildung 2.4 definieren, in dem das Material ungeschädigt ist und die aktuelle Querschnittsfläche A um die Flächenabnahme durch Schädigung auf die Fläche \tilde{A} reduziert wird. Mit dem in Kapitel 3 eingeführten Porenflächenanteil nach (3.1) ergibt sich die Effektivspannung

$$\tilde{\sigma} = \frac{f}{\tilde{A}} = \frac{1}{1 - \Xi} \sigma \quad . \quad (2.2)$$

LEMAITRE & CHABOCHE postulieren in [LC75] die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz. Die Verzerrungsantwort des ungeschädigten Materials unter Wirkung der Effektivspannung soll demnach der Verzerrungsantwort des geschädigten Materials unter Wirkung der wahren Spannung entsprechen. Somit lassen sich die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen des ungeschädigten Materials zur Beschreibung des geschädigten Materialverhaltens direkt übernehmen, indem die Spannung lediglich durch die Effektivspannung ersetzt wird. Für ein linear-elastisches Materialverhalten im einaxialen Zugversuch ergibt sich für die Verzerrung

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \tilde{\sigma} \quad (2.3)$$

und damit für den effektiven Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \frac{\sigma}{1 - \Xi} = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow E = (1 - \Xi)^0 E \quad . \quad (2.4)$$

Verallgemeinerungen des Effektivspannungskonzepts auf anisotrope Schädigungs- und Belastungszustände werden von MURAKAMI [Mur88] und BETTEN [Bet82] vorgeschlagen. Der Schädigungstensor Ξ wird durch die Transformation infinitesimaler Flächenelemente von der aktuellen in eine fiktive ungeschädigte Konfiguration definiert

$$d\tilde{A} = (\mathbf{1} - \Xi) dA \quad . \quad (2.5)$$

Den Effektivspannungstensor erhält man unter der Annahme, dass die fiktive ungeschädigte Konfiguration durch denselben Kraftvektor belastet wird wie die aktuelle geschädigte Konfiguration, zu

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{1} - \Xi)^{-1} \sigma \quad . \quad (2.6)$$

Dieser Effektivspannungstensor ist im Allgemeinen unsymmetrisch, daher wird von MURAKAMI & OHNO in [MO81] ad hoc die Verwendung des symmetrischen Anteils in den konstitutiven Beziehungen vorgeschlagen, der sich unter Verwendung eines vierstufigen Transformationstensors $\underline{\Phi}^{(4)}$ darstellen lässt

$$\tilde{\sigma}^S = \text{sym}(\tilde{\sigma}) = \underline{\Phi}^{(4)-1} : \sigma, \quad \underline{\Phi}^{(4)-1} = \frac{1}{2} ((\mathbf{1} - \Xi)^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{I} (\mathbf{1} - \Xi)^{-1}) \quad . \quad (2.7)$$

Im Falle des linear-elastischen Materialverhaltens ergibt sich damit die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung und die elastische Nachgiebigkeit unter der Annahme der Verzerrungsäquivalenz

$$\epsilon =^0 \mathbf{D} : \tilde{\sigma}^S =^0 \mathbf{D} : \underline{\Phi}^{(4)-1} : \sigma \rightarrow \mathbf{D} =^0 \mathbf{D} : \underline{\Phi}^{(4)-1} \quad . \quad (2.8)$$

Die effektive Nachgiebigkeit ist somit nicht symmetrisch bezüglich des vorderen und hinteren Indexpaares und erfüllt damit nicht die notwendigen Bedingungen des Nachgiebigkeitstensors eines hyperelastischen Materialgesetzes, dass sich aus einem Energiepotential ableiten lässt. Außerdem geht durch die ad hoc eingeführte Symmetrisierung der effektiven Spannung die physikalische Interpretierbarkeit der Schädigungsvariablen weitgehend verloren.

Eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung anisotroper Schädigung bei der konstitutiven Beschreibung im Rahmen des Effektivspannungskonzepts ergibt sich aus der auf SIDOROFF [Sid81] zurückgehenden Hypothese der Verzerrungsenergieäquivalenz. Im Falle linear-elastischen Verhaltens erhält man den effektiven Nachgiebigkeitstensor nach Einführen einer rein formalen Spannungstransformation analog zu (2.7) aus der spezifischen komplementären elastischen Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{D} : \sigma = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} :^0 \mathbf{D} : \tilde{\sigma} \\ \rightarrow \mathbf{D} &= \underline{\Phi}^{(4)-1} :^0 \mathbf{D} : \underline{\Phi}^{(4)-T} \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ein Bezug der Schädigungsvariablen zur Defektkonfiguration ist bei diesem Konzept nicht erkennbar. Der Schädigungstensor $\underline{\Phi}^{(4)}$ lässt sich lediglich aus der mathematischen Transformation erklären.

Aufgrund der schlechten bzw. fehlenden Möglichkeit einer physikalischen Interpretierbarkeit der Schädigungsvariablen in Modellen, die auf dem Effektivspannungskonzept beruhen, ist es nicht möglich, mikromechanische Begründungen zur Formulierung von Gleichungen zur Schädigungsevolution anzugeben.

2.4 Anforderungen an das Materialmodell

Im Folgenden werden die Anforderungen an ein Modell zur Beschreibung duktil geschädigter polykristalliner Metalle, die sich aus den bisherigen Betrachtungen ergeben, und die Ziele, die bei der Modellierung verfolgt werden, zusammengefasst.

Das verwendete Schädigungsmaß sollte sich direkt aus der Defektkonfiguration eines durch Poren geschädigten Materials bestimmen lassen. Diese Eigenschaft bringt zwei entscheidende Vorteile. Die Effekte der Schädigung auf das makroskopische Materialverhalten und die Entwicklung der Schädigung lassen sich aus Effekten der Mesostruktur, die durch das Schädigungsmaß quantifiziert wird, erklären. Damit ist eine Reduktion der anzupassenden Materialparameter möglich. Außerdem ist die experimentelle Bestimmung von Materialparametern, die den Einfluss der Defekte auf das Deformationsverhalten bestimmen, aufgrund der gewährleisteten „Messbarkeit“ des Schädigungsmaßes sichergestellt.

Die anisotropen Änderungen der makroskopischen elastischen Eigenschaften des Materials, die bei duktiler Schädigung beobachtet werden, und der Einfluss der Defekte auf die Fließspannung soll durch das Modell abgebildet sowie schädigungsinduzierte Deformationen erfasst werden. Im Falle ungeschädigten Materials soll das Stoffgesetz in ein klassisches phänomenologisches elastisch-plastisches Stoffgesetz übergehen. Der Gültigkeitsbereich des Modells bei Überschreiten kritischer Werte der Defektgrößen muss festgelegt und quantifizierbar sein.

Da plastisches Materialverhalten in Verbindung mit endlichen Deformationen auftritt, ist zur Formulierung der Gleichungen ein geeigneter kinematischer Rahmen zu wählen, außerdem muss das Modell thermodynamisch konsistent formuliert sein. Die Effekte, die in dem Anwendungsbereich des Stoffgesetzes entscheidend für das makroskopische Deformationsverhalten sind, müssen bei geringstem numerischen Aufwand mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben werden.

Die Erfüllung aller genannter Forderungen ist mit einem rein phänomenologischen Modell, wie zum Beispiel auf Basis des Effektivspannungskonzeptes, aufgrund der angesprochenen Schwächen dieser Modelle nicht möglich. Mikromechanische Modelle zur Beschreibung der

Phänomene sind andererseits numerisch zu aufwendig und fordern trotzdem viele Näherungsannahmen.

In der vorliegenden Arbeit wird daher ein mikromechanisch begründetes phänomenologisches Schädigungsmodell entwickelt. Dabei können einerseits die Effekte auf der Mesoebene berücksichtigt werden. Andererseits bleiben die Vorteile einer phänomenologischen Beschreibung erhalten, die zur Erfüllung der genannten Anforderungen erforderlich sind.

3. Beschreibung des Schädigungszustandes

Ein geschädigter Körper enthält diskret verteilte Defekte. Ihr Einfluss auf das Materialverhalten wird in dem vorgestellten Modell mit einbezogen. Dazu müssen die als relevant betrachteten Aspekte der inneren Struktur, die im Falle von Schädigung der Defektkonfiguration entspricht, durch geeignete Maße beschrieben werden. Damit können dann die betrachteten makroskopischen Phänomene direkt aus der Mikrostruktur erklärt werden, und die physikalische Interpretierbarkeit der Effekte von Defekten auf das Materialverhalten ist auch bei einem phänomenologischen Modell gegeben.

Wie CAUVIN & TESTA in [CT99] feststellen, ist die Wahl der Schädigungsvariablen¹ wohl der herausforderndste Schritt bei der Formulierung eines Schädigungsmodells. Sie ist abhängig von der Wahl des Modellierungskonzepts, den zu beschreibenden Phänomenen des Materials, dem mathematischen Rahmen und nicht zuletzt vom persönlichen Geschmack des Modellierers. Damit lässt sich auch die Vielzahl der vorhandenen Schädigungsmaße erklären, eine Übersicht findet man z.B. bei SCHIESSE [Sch94] Anhang 1.

Die Schädigungsmaße eines phänomenologischen Modells werden an einem Elementarvolumen ΔV^* in der spannungsfreien fiktiven Referenzkonfiguration definiert (MURAKAMI [Mur88], RABIER [Rab89]), da sie lediglich die dissipativen Effekte der Schädigung enthalten sollen und nicht von den reversiblen Deformationen abhängen. Alle Größen, die in der elastisch entlasteten Konfiguration definiert sind, werden mit einem * gekennzeichnet. Schädigungsmaße sind integrale, über ein repräsentatives Volumenelement auf der Mesoebene gemittelte Größen eines Mikrofeldes. Da dieses Volumen auf der Makroebene des Modells als homogenes Elementarvolumen eines klassischen Kontinuums angesehen wird, sind die Schädigungsmaße an ΔV^* als makroskopische Variable anzusehen. Im Rahmen der Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen sind die Schädigungsvariablen innere Variablen. Ein bestimmter Satz interner Zustandsvariablen bestimmt dann den Materialzustand eindeutig.

DIEHL gibt in [Die89] einige Forderungen an, denen die verwendeten Schädigungsmaße eines Materialmodells genügen müssen. Zum einen müssen Schädigungsmaße Informationen über Defektgröße und Dichte enthalten. Weiterhin sollten sie, wie ONAT & LECKIE in [OL88] feststellen, zur Berücksichtigung des Einflusses von Schädigungsprozessen auf

¹Wie häufig in der Schädigungsliteratur beobachtet wird, bezeichnet der Begriff Schädigungsvariable sowohl Schädigungsmaße als auch Schädigungseffektmaße. Die Aussage von CAUVIN & TESTA lässt sich aber auf Schädigungsmaße übertragen.

die Änderung der Materialsymmetrie die Defektorientierung mit beschreiben. Dabei muss die Beschreibung der Orientierung invariant gegenüber Vorzeichenwechsel des Normalenvektors \mathbf{n} und unabhängig vom gewählten Koordinatensystem erfolgen (SEIBERT [Sei91]).

Zur Wahl des Schädigungsmaßes werden zunächst einige der gebräuchlichsten in der Literatur vorkommenden Schädigungsmaße vorgestellt und einige als wesentlich erachtete Aspekte, die sich auf die Beschreibung des Materialverhaltens auswirken, erläutert. Aufbauend auf diesen Betrachtungen wird ein als geeignet angesehenes Maß zur Beschreibung von Porenschädigung ausgewählt und neu interpretiert.

3.1 Vorstellung ausgewählter Schädigungsmaße

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die vorhandenen Schädigungsmaße einzuordnen. Grundsätzlich soll zwischen Schädigungsmaßen ohne Richtungsinformationen - dieses sind skalarwertige Größen - und solchen mit Richtungsinformationen - hierbei kann es sich um tensorwertige Größen mindestens erster Stufe handeln - unterschieden werden. Häufig finden in Schädigungsmodellen auch eine Kombination aus beiden Arten von Schädigungsmaßen zur Beschreibung des Defektzustands Verwendung.

3.1.1 Schädigungsmaße ohne Richtungsinformation

Die skalarwertigen Schädigungsmaße können einerseits Maße sein, die zur Beschreibung isotroper Schädigung eingesetzt werden. Zum Anderen, kann es ausreichen, bei festgelegter Last- und Verschiebungsrichtung ein skalares Maß zur Berücksichtigung der Effekte richtungsabhängiger Schädigung zu verwenden. Änderungen der Materialsymmetrien lassen sich im Allgemeinen mit skalarwertigen Schädigungsmaßen nicht beschreiben.

Eines der ersten Schädigungsmaße stammt von KACHANOV [Kac58], der für den einaxialen Zugversuch den Schädigungszustand durch die Abnahme der tragenden Restfläche infolge räumlicher Ausdehnung von Mikrodefekten senkrecht zur Zugrichtung charakterisiert. Hierauf aufbauend gibt RABOTNOV [Rab59] die relative Fläche der Mikrodefekte für eine Schnittebene ΔA^* senkrecht zur Belastungsrichtung an

$$\Xi(\mathbf{X}) = \frac{A_v^*}{A^*} = 1 - \frac{A_m^*}{A^*} \quad (3.1)$$

Dieses Maß, das für Porenschädigung auch Porenflächenanteil genannt wird, ist keine Volumendichte und damit keine Variable der Kontinuumsmechanik. Außerdem ist der Porenflächenanteil mit Ausnahme weniger Sonderfälle immer richtungsabhängig.

DAVISON, STEVENS & KIPP führen in [DSK77] das skalare Maß des Porenvolumenanteils ein. Dieses Maß dient zur Beschreibung isotroper Schädigung bei beliebigen Lastfällen, solange sich die Materialsymmetrien in Folge des Schädigungsprozesses nicht ändern. Die Massenerhaltung am elastisch entlasteten Volumenelement und in der aktuellen Konfiguration ergibt

$$V_m^* \rho_m^* = \Delta V^* \rho^* = V_m \rho_m = \Delta V \rho \quad , \quad (3.2)$$

daraus folgt mit $\Delta V^* = V_m^* + V_v^*$

$$\omega(\mathbf{X}) = \frac{V_v^*}{\Delta V^*} = \frac{\Delta V^* - V_m^*}{\Delta V^*} = 1 - \frac{V_m^*}{\Delta V^*} = 1 - \frac{\rho(\mathbf{X})}{\rho_m(\mathbf{X})} \quad . \quad (3.3)$$

Der Porenvolumenanteil ist nicht geeignet, um Schädigung durch Mikrorisse oder Scherbänder zu beschreiben, da dort bereits bei verschwindendem Volumenanteil Materialschädigung vorliegt.

Für kugelförmige Poren zeigt RABIER [Rab89] einen Weg, für das selbstkonsistente elastische Materialgesetz nach BUDIANSKY & WU [BW62] einen Maximalwert des Porenvolumenanteils von

$$\omega_{max} = 0,5$$

anhand der Bedingung herzuleiten, dass beide der LAMESchen Konstanten positiv sein müssen. Dieses Ergebnis stimmt auch mit der Vorstellung überein, dass der Grenzfall isotroper Schädigung durch eine quaderförmige Materialvolumenzelle dargestellt werden kann, die eine kugelförmige Pore mit einem der Kantenlänge des Quaders entsprechenden Durchmesser enthält. Aus dem Vergleich beider Volumina ergibt sich für diesen Fall ein maximaler Porenvolumenanteil von

$$\omega_{max} \approx 0,524 \quad .$$

Es ist auf rein mathematischem Wege nicht möglich, einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Porenvolumen- und Porenflächenanteil herzuleiten, ohne Annahmen über die Defektkonfiguration zu treffen, selbst wenn es sich um isotrope Defektkonfigurationen handelt.

Es lassen sich jedoch für einen konstanten Porenvolumenanteil in einem isotropen Material eine obere und eine untere Grenze für den Porenflächenanteil angeben. Diese Grenzen ergeben sich nach RABIER [Rab89] bei der Betrachtung eines kugelförmigen Volumenelements einmal mit einer kugelförmigen Pore im Zentrum und andererseits mit einem Hohlraum konstanter Dicke an der äußeren Grenze des Kugelelements, die jeweils denselben Raum einnehmen, zu

$$1 - (1 - \omega(\mathbf{X}))^{2/3} \leq \Xi(\mathbf{X}) \leq \omega(\mathbf{X})^{2/3} \quad . \quad (3.4)$$

Dieses Ergebnis stimmt auch mit dem von CAUVIN & TESTA [CT99] überein, die gezeigt haben, dass auch bei isotroper Schädigung 2 Schädigungsmaße zur eindeutigen Beschreibung des Schädigungszustandes benötigt werden. Die Verwendung nur eines Maßes für isotrope Schädigung erfordert somit zusätzliche Annahmen über die Defektkonfiguration. Geht man z.B. von der Idealisierung völlig homogen verteilter kugelförmiger Poren im Volumenelement aus, so erhält man aus der Integration der Porenflächenanteile den Zusammenhang

$$\Xi(\mathbf{X}) = \omega(\mathbf{X}) \quad . \quad (3.5)$$

Wenn man zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens unter Schädigungseinfluss eine Formulierung mit dem Porenvolumenanteil wählt, dann muss folglich für das gewählte Modell ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Porenvolumenanteil ω und dem Porenflächenanteil Ξ ermittelt werden.

Für die Modellierung des Verhaltens eines durch nahezu kreisförmige Risse zufälliger Verteilung makroskopisch isotrop geschädigten Materials mit verschwindendem Porenvolumenanteil wird häufig die Rissdichte $n\bar{a}^3$ als isotropes Schädigungsmaß benutzt. \bar{a} stellt den mittleren Durchmesser eines Risses dar und n die Anzahl der Risse im Referenzvolumen.

3.1.2 Schädigungsmaße mit Richtungsinformationen

Schädigungsmaße mit Richtungsinformationen sind die Basis, zur Beschreibung anisotroper Effekte, die sich aus orientierten Defekten ergeben. Es handelt sich dabei in der Regel um tensorielle Maße, die unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem definiert werden können und einem einfachen Transformationsgesetz bei Drehung des Bezugssystems gehorchen. Bis zu Tensoren achter Stufe, die für die lineare Transformation vierstufiger Materialtensoren eingesetzt werden (CHABOCHE [Cha81], CAUVIN & TESTA [CT99]), wurden Tensoren aller geraden Stufen als Schädigungsvariablen eingeführt.

Als Schädigungsmaße haben sich die im Folgenden beschriebenen Vektoren und Tensoren 2. Stufe durchgesetzt. Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der orientierungsabhängigen Materialschädigung bieten Orientierungsdichtefunktionen.

Vektorielle Schädigungsmaße

Vektorielle Schädigungsmaße werden vorwiegend zur Beschreibung von Schädigung durch Mikrorisse in spröden Materialien eingesetzt. Dazu führen DAVISON & STEVENS [DS73] einen Rissvektor ein, der später auch von KACHANOV [Kac77], KRAJČINOVIC [Kra83], [Kra85] und KRAJČINOVIC & FONSEKA [KF81] verwendet wird.

Der Rissvektor steht senkrecht auf der Ebene, in der sich die Risse befinden. Seine Länge beschreibt den Flächenanteil, den die Risse lokal an der Gesamtfläche der Rissebene ein-

nehmen. Dieser Rissdichtentensor ist somit keine Volumendichte und eignet sich daher nicht als interne Zustandsvariable der Thermodynamik, was bereits LEHMANN [Leh84] aufgrund der mangelnden Objektivität dieser Größe herausstellt.

Ein Materialmodell, bei dem ein vektorielles Schädigungsmaß verwendet wird, kann maximal transversal isotropes Verhalten beschreiben.

Schädigungstensoren 2. Stufe

MURAKAMI & OHNO [MO81] führen einen symmetrischen Tensor 2. Stufe als interne Zustandsvariable ein. Dieser beschreibt die Reduzierung der Nettofläche von Schnittflächen im RVE durch orientierte ebene Hohlräume an den Korngrenzen. Im RVE, dessen charakteristische Länge groß gegenüber der mittleren Korngröße und der Defektgröße ist, wird der Schädigungstensor in der elastisch entlasteten Konfiguration wie folgt definiert

$$\Xi(\mathbf{X}) = \frac{3}{\Delta A_g^*} \sum_{k=1}^N \int_{\Delta V^*} [\mathbf{n}^{*(k)} \otimes \mathbf{n}^{*(k)}] dA_g^{*(k)} \quad . \quad (3.6)$$

Hierin bedeuten:

ΔA_g^* : gesamte Korngrenzenfläche im RVE

$\mathbf{n}^{*(k)}$: Flächennormale des k-ten ebenen Hohlraums

N : Anzahl der Defekte

$dA_g^{*(k)}$: Fläche des k-ten ebenen Hohlraums .

Um zusätzlich einen Beitrag infolge der endlichen Dicke ebener Hohlräume zu berücksichtigen, der zu einer Flächenreduktion in Flächen mit Flächennormalen senkrecht zur Rissnormalen auftritt, wird ein erweiterter Schädigungstensor angegeben werden

$$\Xi(\mathbf{X}) = \frac{3}{\Delta A_g^*} \sum_{k=1}^N \int_{\Delta V^*} [\mathbf{n}^{*(k)} \otimes \mathbf{n}^{*(k)} + w^{(k)} (\mathbf{1} - \mathbf{n}^{*(k)} \otimes \mathbf{n}^{*(k)})] dA_g^{*(k)} \quad . \quad (3.7)$$

Dieses Schädigungsmaß beschränkt sich auf ebene Hohlräume an Korngrenzen. Somit können weder innerkristalline Defekte noch Porenschädigung beschrieben werden. Weiterhin stellt Ω wegen der fehlenden Volumenmittelung über ΔV^* noch ein Mikrofeld dar, welches durch die Verwendung der Korngrenzenfläche A_g^* noch von der Korngröße im RVE abhängt.

Weitere Schädigungsmaße 2. Stufe lassen sich aus einer direkten Erweiterung des Porenflächenanteils auf dreidimensionale Zustände ableiten, wie bereits im Kapitel 2 in (2.6) angegeben. Der so erhaltene Schädigungstensor wird von Betten [Bet82] auch als Kontinuitätstensor eingeführt. Die Bildung einer Nettospannung im Rahmen eines anisotropen

Effektivspannungskonzepts führt dann jedoch auf einen nicht symmetrischen Spannungstensor, der nachträglich symmetrisiert werden muss. Eine physikalisch anschauliche Erklärung dieser Symmetrisierung existiert nicht.

Tensorielle Schädigungsmaße zweiter Stufe sind auf die Beschreibung orthotroper Symmetrie beschränkt.

Mikrodefektbeschreibung durch Orientierungsdichtefunktionen

Orientierungsdichtefunktionen ermöglichen es, orientierte innere Werkstoffstrukturen wie Fasern, Risse oder ellipsoide Hohlräume (Poren) als skalaren Wert in Abhängigkeit von der Orientierungsrichtung (ausgedrückt durch den Normalenvektor \mathbf{n}) darzustellen.

ONAT [Ona84] definierte erstmals ein Schädigungsmaß über eine Orientierungsdichtefunktion durch eine tensorielle Fourierreihe zur Beschreibung des elastischen Verhaltens eines geschädigten Materials. Fourierreihenentwicklungen werden außerdem häufig bei der mikromechanischen Modellierung von Faserverbundwerkstoffen oder granularen Medien angewendet.

Die Orientierungsabhängigkeit räumlicher geometrischer Muster kann in einem Histogramm graphisch über der Einheitskugel (bzw. im ebenen Fall über dem Einheitskreis) aufgetragen werden. Dazu wird die Oberfläche der Einheitskugel in n^2 Flächeninkremente $d\mathbf{A}$ gleicher Größe aufgeteilt und die Orientierungsdichte der betrachteten Größe für jedes Inkrement ermittelt. Es ergibt sich eine Treppenfunktion, die jedoch für $n \rightarrow \infty$ N Singularitäten aufweist ($N \hat{=}$ Anzahl der relevanten orientierten Strukturelemente). Um aus einem Histogramm mit endlicher Teilung $n \ll \infty$ eine stetige Orientierungsdichtefunktion zu erhalten, kann eine tensorielle Fourierreihenentwicklung vorgenommen werden. Es ergibt sich die Orientierungsdichtefunktion

$$v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = v_0(\mathbf{X}) + v_i(\mathbf{X})f_i(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + v_{ij}(\mathbf{X})f_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + v_{ijk}(\mathbf{X})f_{ijk}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + \dots \quad (3.8)$$

Die einzelnen Summanden setzen sich jeweils als Produkt aus den von der mikrostrukturellen Verteilung abhängigen Fourierkoeffizienten $v_{i_1 i_2 \dots i_n}$ und den von der Orientierung abhängigen Fourierfunktionen $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ zusammen.

Aus der Forderung, dass die Größen zur Beschreibung des Schädigungszustandes invariant bezüglich des Vorzeichens eines Normalenvektors sein müssen, ergibt sich ferner, dass nur die Glieder mit Tensoren gerader Stufe vorkommen dürfen

$$v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = v_0(\mathbf{X}) + v_{ij}(\mathbf{X})f_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + v_{ijkl}(\mathbf{X})f_{ijkl}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + \dots \quad (3.9)$$

Die Basisfunktionen und Fourierkoeffizienten sind vollständig symmetrische und spurlose Tensoren, die unabhängig vom gewählten Koordinatensystem angegeben werden können.

SEIBERT gibt die Bestimmungsgleichungen für die Basisfunktionen $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ und die Fourierkoeffizienten $v_{i_1 i_2 \dots i_n}$ an [Sei91].

Für die Fourierfunktionen und Fourierkoeffizienten erhalten wir im räumlichen Fall

$$\begin{aligned} f_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) &= n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} & (3.10) \\ f_{ijkl}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) &= n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{7} (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l \\ &\quad + \delta_{jl} n_i n_k + \delta_{kl} n_i n_l) + \frac{1}{5 \cdot 7} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ v_0(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) dA & (3.11) \\ v_{ij}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5}{2} \int_{S_3} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) f_{ij}(\mathbf{n}) dA \\ v_{ijkl}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int_{S_3} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) f_{ijkl}(\mathbf{n}) dA \\ \dots \end{aligned}$$

und im ebenen Fall

$$\begin{aligned} f_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) &= n_i n_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} & (3.12) \\ f_{ijkl}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) &= n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{6} (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l \\ &\quad + \delta_{jl} n_i n_k + \delta_{kl} n_i n_l) + \frac{1}{6 \cdot 4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ v_0(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) dS & (3.13) \\ v_{ij}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\pi} \int_{S_2} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) f_{ij}(\mathbf{n}) dS \\ v_{ijkl}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{\pi} \int_{S_2} v(\mathbf{X}, \mathbf{n}) f_{ijkl}(\mathbf{n}) dS \\ \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Fourierreihen können als innere Zustandsvariablen eingeführt werden und stellen somit ein geeignetes Schädigungsmaß dar, welches physikalisch interpretierbar und auch mikromechanisch erklärbar ist.

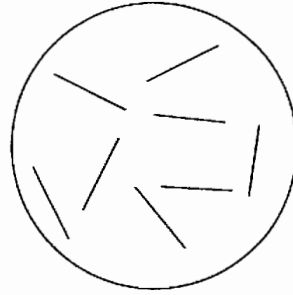


Abb. 3.1: Ausschnitt eines faserverstärkten Materials

Zur Illustration der Darstellung orientierter Materialstrukturen und der Formulierung einer Orientierungsdichtefunktion zu deren Beschreibung sei der in Abbildung 3.1 dargestellte Ausschnitt eines faserverstärkten Materials betrachtet. Der Anschaulichkeit halber wird vom ebenen Fall ausgegangen.

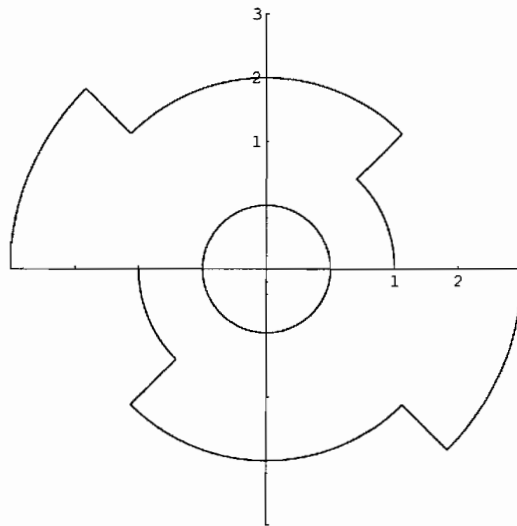


Abb. 3.2: Histogramm der Faserverteilung

Zunächst wird ein Histogramm mit beliebiger Winkelteilung n (hier $n = 8$) erzeugt. Für jedes Winkelintervall $S_k = \{\varphi; \varphi \in [2\pi k/n, 2\pi(k+1)/n]\}$ werden die Anzahl der Fasern, deren Faserrichtung im betrachteten Winkelintervall liegt, gezählt und in ein Histogramm eingetragen. Das erhaltene in Abbildung 3.2 dargestellte Histogramm ist punktsymmetrisch, d.h. $v(\mathbf{n}) = v(-\mathbf{n})$ und kann daher in eine Fourierreihe mit Tensoren gerader Stufe entwickelt werden. Mit dem Normalenvektor des Einheitskreises

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

erhält man z.B. für die Basisfunktion 2. Stufe

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} v(\mathbf{n}^{(k)}) \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \end{pmatrix} d\mathbf{n}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,64 \\ -0,64 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Werte für v in jedem Integrationsbereich konstant sind. Durch eine Fourierreihenentwicklung mit Abbruch nach dem Glied 2. Stufe erhält man die in Abbildung 3.3a über dem Einheitskreis dargestellte Orientierungsdichtefunktion mit den Fourierfunktionen nach (3.12) und Fourierkoeffizienten nach (3.13)

$$v(\mathbf{n}) = 2 - 1.27324 \cos \varphi \sin \varphi .$$

Durch Hinzunahme weiterer Glieder höherer Ordnung kann das Ergebnis systematisch verbessert werden, wie in Abbildung 3.3b verdeutlicht wird, in der die Orientierungsdichtefunktion mit Abbruch nach dem 4-stufigen Glied dargestellt ist. Im Grenzfall unendlich vieler tensorieller Glieder ist eine exakte Abbildung der angenäherten Orientierungsdichtefunktion möglich. Allerdings verbessert sich das Ergebnis bei Hinzunahme eines weiteren Terms nur im Mittel. Lokal, d.h. für diskrete Winkel kann trotzdem eine Verschlechterung des Ergebnisses bei der Hinzunahme weiterer Terme erfolgen.

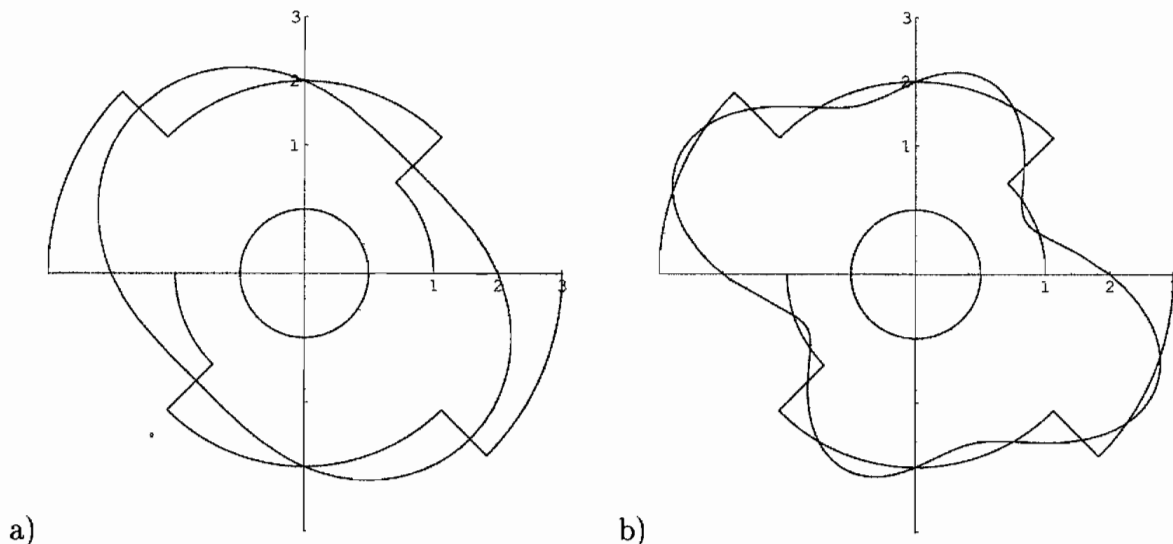


Abb. 3.3: Tensorielle Fourierreihen der Orientierungsdichte, Abbruch nach dem tensoriellen Glied 2. (a) bzw. 4. Stufe (b)

In der Praxis werden die tensoriellen Fourierreihen zur Reduzierung des numerischen Aufwands häufig nach dem tensoriellen Glied 2. oder 4. Stufe abgebrochen. Dabei ist zu beachten, dass der Informationsgehalt eines Schädigungsmaßes, welches durch eine tensorielle Fourierreihe, die nach dem Glied 2. Ordnung abgebrochen wurde, dem eines tensoriellen Schädigungsmaßes 2. Stufe entspricht. Es kann also maximal eine orthotrope Orientierungsdichteverteilung dargestellt werden, die weitere Effekte (Nebenminima/-maxima) nicht beschreiben kann.

3.2 Festlegung des Schädigungsmaßes

Im vorgestellten Materialmodell soll Schädigung durch Poren an Korngrenzen und bzw. oder durch ellipsoide Hohlräume z.B. an nichtmetallischen Einschlüssen berücksichtigt werden. Im Allgemeinen ist in diesem Fall von einer schwachen Verteilung der Poren auszugehen, bei der der Porenabstand deutlich größer ist, als ihr maximaler Durchmesser. Das Schädigungsmaß soll Richtungsinformationen der Porenausrichtung enthalten, um auch anisotrope Schädigungseffekte abbilden zu können. Außerdem soll eine eindeutige geometrische Interpretation der dargestellten Defekte im Material möglich sein, damit eine Messbarkeit der Schädigung gewährleistet ist und Rückschlüsse auf den Materialzustand nicht nur über die Messung von Schädigungseffekten wie z.B. die Änderung der elastischen Nachgiebigkeit gezogen werden können. Leider gibt es bis heute jedoch kaum Messmethoden, die es erlauben, die Defektkonfiguration von Porenschädigung zerstörungsfrei *in situ* zu identifizieren oder gar quantitativ zu bestimmen.

ONAT & LECKIE betrachten in [OL88] im Grenzfall eines infinitesimalen Oberflächenelements ∂k die Dichte des Porenvolumens an den Korngrenzen je Flächeneinheit der Einheitskugel k_3 und formulieren dafür eine Orientierungsdichtefunktion.

Eine Weiterentwicklung der Koeffizienten durch RABIER [Rab89] stellt sicher, dass alle Koeffizienten der Fourierreihe Volumendichten sind und somit zulässige interne Zustandsvariablen im Sinne der Kontinuumsmechanik darstellen. Dieses Schädigungsmaß soll auch in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Aus Praktikabilitätsgründen werden wir uns dabei auf eine Fourierreihe mit Abbruch nach dem tensoriellen Glied 2. Stufe beschränken

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} \omega + f_{ij}(\mathbf{n}) \mathcal{D}_{ij} \quad . \quad (3.14)$$

Es ergibt sich ein direkter Zusammenhang zwischen dem skalaren Fourierkoeffizienten v_0 und dem Porenvolumenanteil über die Oberfläche der Einheitskugel. Die Fourierfunktionen des tensoriellen Glieds 2. Stufe ergeben sich aus (3.10₁). Basierend auf diesem Maß und auf der Erkenntnis von JANSSON & STIGH [JS85], dass sich ellipsoide Hohlräume in 3 aufeinander senkrecht stehende Anteile zerlegen lassen, approximiert SCHIESSE [Sch94, BS96]

Hohlräume durch Ellipsoide mit 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen $\mathbf{a}_i = a_i \mathbf{n}_i$ ($i=1,2,3$) und dem Volumen V_v . Dazu werden die Volumendichten für Schädigung durch ellipsoide Poren wie folgt interpretiert: Das Volumen wird für Normalenvektoren \mathbf{n}_i mit der Fläche A_i ($A_i \perp \mathbf{n}_i$) multipliziert, die dann der Korngrenzfläche entspricht, an denen das Volumen angelagert ist. Zusätzlich wird mit einer Fläche $\bar{A} = A_1 + A_2 + A_3$ gewichtet, die der Summe der zu den Hauptachsen des Ellipsoids orthogonalen Flächen entspricht. Für die Volumina in Richtung der Hauptachsen \mathbf{n}_i des Ellipsoids erhält man demnach

$$V_1 = \frac{A_1}{\bar{A}} V_v = \frac{4\pi a_1 a_2^2 a_3^2}{3(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \quad (3.15)$$

$$V_2 = \frac{A_2}{\bar{A}} V_v = \frac{4\pi a_1^2 a_2 a_3^2}{3(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \quad (3.16)$$

$$V_3 = \frac{A_3}{\bar{A}} V_v = \frac{4\pi a_1^2 a_2^2 a_3}{3(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \quad (3.17)$$

Bezieht man die Volumina auf das Volumen der Elementarzelle ΔV^* , so erhält man nach dieser Interpretation den jeweiligen Wert des Schädigungsmaßes in Hauptachsenrichtung

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}_1) = \frac{V_1}{\Delta V^*} = \frac{a_2 a_3}{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \omega \quad (3.18)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}_2) = \frac{V_2}{\Delta V^*} = \frac{a_1 a_3}{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \omega \quad (3.19)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}_3) = \frac{V_3}{\Delta V^*} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} \omega \quad (3.20)$$

Um den Zusammenhang zwischen den Volumendichten und den Fourierkoeffizienten \mathcal{D}_{ij} zu untersuchen, wird eine Elementarzelle betrachtet, die ein Ellipsoid enthält, dessen Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Dabei ergibt sich aus (3.14) für die Volumendichten in Richtung der Hauptachsen des Ellipsoids

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2\pi} \omega + \frac{2}{3} \mathcal{D}_{11} - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{22} - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{33}$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2\pi} \omega - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{11} + \frac{2}{3} \mathcal{D}_{22} - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{33}$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{2\pi} \omega - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{11} - \frac{1}{3} \mathcal{D}_{22} + \frac{2}{3} \mathcal{D}_{33}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} \\ \mathcal{D}_{22} \\ \mathcal{D}_{33} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{e}_1) - \Psi \\ \mathcal{D}(\mathbf{e}_2) - \Psi \\ \mathcal{D}(\mathbf{e}_3) - \Psi \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

mit

$$\Psi = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) + \mathcal{D}(\mathbf{e}_2) + \mathcal{D}(\mathbf{e}_3)}{3} = \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.22)$$

Die Koeffizientenmatrix zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten ist singular. Als zusätzliche Bedingung zu ihrer Bestimmung gilt die Forderung, dass die Matrix der Fourierkoeffizienten spurlos ist

$$\text{tr}(\mathcal{D}) = 0 \quad . \quad (3.23)$$

Am Sonderfall von rotationsellipsoiden Poren mit \mathbf{e}_1 als Symmetrieachse soll geprüft werden, ob sowohl (3.21) - (3.23) als auch (3.18) - (3.20) gleichzeitig erfüllt werden können. Für \mathbf{e}_1 als Symmetrieachse gilt

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \mathcal{D}(\mathbf{e}_3) \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} \quad ,$$

damit lässt sich (3.21) wie folgt reduzieren

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} \\ \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{e}_1) - \Psi \\ \mathcal{D}(\mathbf{e}_2) - \Psi \end{pmatrix}$$

und man erhält unter Beachtung von (3.23) für die Fourierkoeffizienten im Hauptachsensystem

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{2}{3}(\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) - \mathcal{D}(\mathbf{e}_2)) \quad , \quad \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} = \frac{1}{3}(\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) - \mathcal{D}(\mathbf{e}_1)) \quad .$$

Für die Volumendichten in Richtung der Hauptachsen ergibt sich aus (3.21)

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2\pi}\omega - 2\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) \quad . \quad (3.24)$$

Bei gegebenem Porenvolumenanteil ω und Vorgabe eines Wertes einer Volumendichte ist somit auch der andere festgelegt.

Damit ist die Interpretation des Maßes in Erweiterung auf Schädigung durch ellipsoide Poren auf solche Maße eingeschränkt, die diesen Bedingungen genügen.

Die zum Berechnen der Volumendichten benötigten geometrischen Größen ergeben sich mit dem Verhältnis der Halbmesser γ zu

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma a \quad , \quad a_2 = a_3 = a \\ \rightarrow V_v &= \frac{4\pi}{3}\gamma a^3 \quad , \quad \omega = \frac{V_v}{\Delta V^*} = \frac{4\pi}{3} \frac{\gamma a^3}{\Delta V^*} \\ A_1 &= \pi a^2 \quad , \quad A_2 = A_3 = \pi \gamma a^2 \quad \bar{A} = \pi(1 + 2\gamma)a^2 \end{aligned}$$

Damit erhält man für das Schädigungsmaß in Richtung der Hauptachsen durch Einsetzen in (3.15) - (3.17)

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{1 + 2\gamma} \omega \quad (3.25)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \frac{\gamma}{1 + 2\gamma} \omega \quad . \quad (3.26)$$

Einsetzen von (3.25) in (3.24) liefert jedoch

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \frac{2\pi}{3\Delta V^*} \gamma a^3 \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{1+2\gamma} \right) = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{1+2\gamma} \right) ,$$

was nicht mit (3.16) übereinstimmt.

Die Interpretation des Schädigungsmaßes für Schädigung durch ellipsoide Poren ist daher in der angegebenen Form nach (3.18) - (3.20) nicht mit der tensoriellen Fourierreihe in Einklang zu bringen. Daher soll das Maß modifiziert werden.

3.3 Neuinterpretation des Schädigungsmaßes für ellipsoide Poren

Erneut wird zunächst wieder transversal isotrope Schädigung mit \mathbf{e}_1 als Symmetrieachse betrachtet. Folgt man dem Gedankengang von SCHIESSE [Sch94], dass Schädigung in die Richtungen mit steigender Projektionsfläche größer wird, so kann zunächst die lineare Abhängigkeit des Schädigungsmaßes $\mathcal{D}(\mathbf{n}_i)$ von A_i postuliert werden. Mit dem noch zu bestimmenden Parameter α erhält man für die Eigenwerte

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) = \alpha A_1 \frac{V_v}{\Delta V^*} = \alpha A_1 \omega , \quad \mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \alpha A_2 \frac{V_v}{\Delta V^*} = \alpha A_2 \omega . \quad (3.27)$$

Durch Einsetzen in (3.24) erhält man den noch freien Parameter

$$\alpha = \frac{3}{2\pi^2(1+2\gamma)a^2} = \frac{3}{2\pi \bar{A}} .$$

Erneutes Einsetzen von α in (3.27) liefert dann das Schädigungsmaß im Hauptachsen-System. Die Fourierkoeffizienten ergeben sich zu

$$\mathcal{D}_{11} = 2 \frac{A_1 - A_2}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{2(1-\gamma)}{1+2\gamma} \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.28)$$

$$\mathcal{D}_{22} = \frac{A_2 - A_1}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \frac{1}{2\pi} \omega , \quad (3.29)$$

die Bedingung $\text{tr}(\mathcal{D}) = 0$ ist damit erfüllt.

Eine anschauliche Interpretation dieses Schädigungsmaßes ist leicht möglich. Die Flächen A_i werden nicht mit der Gesamtfläche gewichtet, sondern auf die mittlere Fläche $\frac{\bar{A}}{3}$ bezogen. Diese Volumina werden dann noch, wie bei der Korngrenzenschädigung, auf die Fläche der Einheitskugel k_3 bezogen. Es ergibt sich

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2\pi} \frac{A_1}{(1+2\gamma)a^2} \omega = \frac{3}{2\pi} \frac{A_1}{\bar{A}} \omega \quad (3.30)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_2) = \frac{3}{2\pi} \frac{A_2}{(1+2\gamma)a^2} \omega = \frac{3}{2\pi} \frac{A_2}{\bar{A}} \omega . \quad (3.31)$$

3.3.1 Erweiterung auf allgemeine ellipsoide Hohlräume

Mit der am Sonderfall der transversalen Isotropie hergeleiteten Neuinterpretation des Schädigungsmaßes soll nun die Erweiterung auf allgemeine orthotrope Schädigung durch ellipsoide Poren erfolgen. Die Volumendichte in Richtung der Hauptachsen wird wie folgt definiert

$$\mathcal{D}(e_i) = \frac{3A_i}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega \quad . \quad (3.32)$$

Mit den Projektionsflächen und dem Porenvolumen, ausgedrückt durch die Halbachsen

$$A_1 = \pi a_2 a_3 \quad , \quad A_2 = \pi a_1 a_3 \quad , \quad A_3 = \pi a_1 a_2 \quad (3.33)$$

$$\bar{A} = \pi(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3) \quad , \quad V_v = \frac{4\pi}{3} a_1 a_2 a_3 \quad (3.34)$$

ergibt sich durch Einsetzen von (3.32) in (3.21) für die Hauptwerte der Fourierkoeffizienten

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{2A_1 - A_2 - A_3}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.35)$$

$$\mathcal{D}_{22} = \frac{-A_1 + 2A_2 - A_3}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.36)$$

$$\mathcal{D}_{33} = \frac{-A_1 - A_2 + 2A_3}{\bar{A}} \frac{1}{2\pi} \omega \quad , \quad (3.37)$$

und man erhält den zweistufigen Schädigungstensor \mathcal{D} mit den Eigenvektoren des Ellipsoids zu

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_{(ii)} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad . \quad (3.38)$$

Damit ist eine eindeutige Beziehung zwischen dem Schädigungsmaß und der Defektkonfiguration hergestellt worden. Sollte es also möglich sein, die Defektkonfiguration experimentell zu bestimmen, so können daraus direkt die Fourierkoeffizienten berechnet werden und die Bestimmung der Porenvolumendichte in beliebige Richtungen ist möglich.

Das gewählte Schädigungsmaß stellt im isotropen Fall nur die Porenvolumendichte zur Beschreibung der Defektkonfiguration bereit. Der Tensor der Fourierkoeffizienten ergibt sich in diesem Fall zum Nulltensor. Die Annahme ellipsoider Hohlräume führt hierfür somit auf kugelförmige Poren, womit die Defektkonfiguration eindeutig bestimmt ist. Diese Tatsache ist bei der Modellierung der Schädigungseffekte zu berücksichtigen.

Außerdem sei angemerkt, daß sich der Abbruch einer tensoriellen Fourierreihe als Schädigungsmaß nach dem Tensor 2. Stufe grundsätzlich nicht damit begründen läßt, daß Glieder höherer Ordnung einen geringeren Einfluß auf die Verteilungsfunktion haben als die niedrigeren. Für Verteilungsdichten mit nahezu orthotroper Symmetrie führt der Abbruch nach dem 2. Glied zu zufriedenstellenden Ergebnissen. Je weiter die Verteilungsdichtefunktion

jedoch von der Orthotropie abweicht, desto ungenauer wird diese Approximation.

Es lassen sich mit dem eingeführten Schädigungsmaß also Schädigungszustände vollständig erfassen, bei denen die Schädigung durch ellipsoide Hohlräume mit parallelen Halbachsen hervorgerufen wird, ohne dabei die Wechselwirkungen zwischen den Hohlräumen zu berücksichtigen. Materialschädigungen ellipsoider Hohlräume, bei denen die Halbachsenrichtungen variieren, können mit diesem Maß nicht ohne Informationsverlust beschrieben werden.

Für die weiteren Betrachtungen wird noch ein zusätzliches Maß eingeführt, welches im Folgenden als Schädigungsorthotropietensor bezeichnet wird. Dieser Tensor berücksichtigt nur den anisotropen Anteil der Schädigung und ergibt sich als Quotient aus den Halbmesserrängen a_i und dem geometrischen Radius des Ellipsoids, projiziert in die jeweilige Richtung der betrachteten Achse

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{r} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{mit } r = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \quad . \quad (3.39)$$

Damit bietet dieses Maß für die folgenden mikromechanischen Untersuchungen eine höhere Anschaulichkeit zur Beschreibung ellipsoider Hohlräume.

Einsetzen von (3.33) und (3.39) in (3.35) - (3.37) liefert die Fourierkoeffizienten des Schädigungsmaßes ausgedrückt durch den Schädigungsorthotropietensor im Hauptsystem

$$\mathcal{D}_{11} = \left(\frac{2\xi_{22}\xi_{33} - \xi_{11}(\xi_{22} + \xi_{33})}{\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{11}(\xi_{22} + \xi_{33})} \right) \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.40)$$

$$\mathcal{D}_{22} = \left(\frac{2\xi_{11}\xi_{33} - \xi_{22}(\xi_{11} + \xi_{33})}{\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{11}(\xi_{22} + \xi_{33})} \right) \frac{1}{2\pi} \omega \quad (3.41)$$

$$\mathcal{D}_{33} = \left(\frac{2\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{33}(\xi_{11} + \xi_{22})}{\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{11}(\xi_{22} + \xi_{33})} \right) \frac{1}{2\pi} \omega \quad . \quad (3.42)$$

4. Kinematik und Kinetik

4.1 Kinematik

In diesem Kapitel wird der kinematische Rahmen zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens bei endlichen Deformationen beschrieben.

Da das elastische Verhalten in Metallen auf dem Phänomen der Gitterverzerrung beruht und das plastische Verhalten durch Versetzungsbildung und -gleiten ohne wesentliche Beeinflussung der Gitterstruktur hervorgerufen wird, ist es üblich und sinnvoll, die Anteile der Deformationen zu separieren und durch eigene konstitutive Gesetze zu beschreiben (siehe hierzu auch REINHARDT & DUBEY [RD98]). Dies erfolgt im Allgemeinen über die Aufspaltung der Spannungsleistung in einen elastischen und einen inelastischen Anteil (LEE [Lee69]).

Der in dieser Arbeit verwendete kontinuumsmechanische Rahmen muss sowohl die exakte Integrierbarkeit der in Ratenform vorliegenden konstitutiven Beziehungen sicherstellen als auch das Prinzip der Invarianz der konstitutiven Beziehungen gegenüber einer Beobachtertransformation erfüllen.

Zur Formulierung der konstitutiven Beziehungen wird eine EULERSche Beschreibungsweise unter Verwendung der logarithmischen Verzerrung und der mitrotierenden logarithmischen Zeitableitung gewählt. Diese hat den Vorteil, dass die konstitutiven Ratengleichungen für die Verzerrungsgeschwindigkeit exakt integriert werden können. Somit tritt der von SIMO & PISTER [SP84] für verschiedene objektive Zeitableitungen nachgewiesene Effekt, dass sich eine hypo-elastische Beziehung mit konstanten Materialkonstanten nicht exakt zu einem hyperelastischen Stoffgesetz integrieren lässt, nicht auf.

Es wird von der additiven Zerlegung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten in der aktuellen EULERSchen Konfiguration und der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten Gebrauch gemacht. Ausführliche Herleitungen der erforderlichen kinematischen Größen und der zugrundeliegenden Konzepte findet man in den Arbeiten von XIAO [Xia95], [Xia97b], [Xia97a] und [Xia98], XIAO, BRUHNS & MEYERS [XBM97b], [XBM97a], [XBM98c], [XBM98b], [XBM98a], [XBM99a] und [XBM00] und REINHARDT & DUBEY [RD95] und [RD98].

Zunächst werden die benötigten Größen und Konzepte der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung endlich deformierbarer Körper zusammengestellt. Hierzu zählen Deformations- und Verzerrungsmaße, Deformationsgeschwindigkeitsmaße, Spannungstensoren, das Prin-

zip der Invarianz bei einer Beobachtertransformation und objektive Zeitableitungen. Danach werden Aspekte erläutert, die sich daraus für die Beschreibung elastisch-inelastischer Deformationen ergeben. Darauf aufbauend wird der Rahmen zur Formulierung von elastisch-inelastischen Stoffgesetzen mit dem EULERSchen logarithmischen Verzerrungsmaß und der logarithmischen Zeitableitung angegeben.

Auf eine umfassende Einführung des mathematischen Rahmens der Kontinuumsmechanik mit allen Definitionen und Begriffen wie *Kontinuum*, *Beobachter* und *Bezugssystem* wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Der interessierte Leser findet ausführliche Betrachtungen zu diesem Thema in den Arbeiten von MARSDEN & HUGHES [MH83], LEHMANN [Leh76] [Leh84], THERMANN [The84] oder OGDEN [Ogd84].

4.1.1 Konfiguration und Bewegung

Die klassische Kontinuumsmechanik beschäftigt sich mit der Beschreibung der Deformation und Bewegung materieller Körper.¹ Ein Körper B ist eine Menge von zusammenhängenden materiellen Punkten, auch als Partikel bezeichnet, welche das Gebiet \mathcal{B} im dreidimensionalen EUKLIDSchen Punktraum \mathcal{E}^3 einnehmen.

Wenn der Körper sich bewegt, ändert sich das Gebiet, welches er einnimmt, stetig. Eine Konfiguration $\chi : B \rightarrow \mathcal{E}^3$ bildet alle Punkte des Körpers eindeutig und umkehrbar auf Plätze im EUKLIDSchen Punktraum ab. Bezeichnet man einen Partikel von B mit X , dann erhält man die Platzierung des Partikels im EUKLIDSchen Raum in der Konfiguration χ

$$\mathbf{x} = \chi(X) \quad , \quad X = \chi^{-1}(\mathbf{x}) \quad . \quad (4.1)$$

Die Bewegung eines Körpers ist die stetige und zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen, d.h. eine einparametrische Folge von Konfigurationen mit t als Scharparameter

$$\mathbf{x} = \chi_t(X) = \chi(X, t) \in \mathcal{E}^3 \quad . \quad (4.2)$$

Die obige Gleichung beschreibt die Bahnkurve, die ein Partikel X überstreicht. Die Konfiguration χ_t weist somit jedem materiellen Punkt von B einen Platz mit den Koordinaten \mathbf{x} zur Zeit t im EUKLIDSchen Raum zu und wird als aktuelle Konfiguration bezeichnet, in der der Körper das Gebiet \mathcal{B}_t einnimmt.

Die Abbildung χ_0 des Körpers zu einem festgelegten Zeitpunkt² t_0 wird als Referenzkonfiguration eingeführt, in der der Körper das Gebiet \mathcal{B}_0 einnimmt. Die Platzierungen der

¹In der klassischen Kontinuumsmechanik ist die Position eines Partikels im dreidimensionalen EUKLIDSchen Punktraum durch drei Lagekoordinaten bestimmt.

²Es ist allgemein üblich, allerdings nicht notwendig, den Referenzzustand als einen realen Zustand des Körpers zu einer festgelegten Zeit zu definieren. In der vorliegenden Arbeit wird davon ausgegangen, dass

Partikel ergeben sich in der Referenzkonfiguration zu

$$\mathbf{X} = \chi_0(X) \quad , \quad X = \chi_0^{-1}(\mathbf{X}) \quad . \quad (4.3)$$

Da die Unterscheidung zwischen dem Partikel X und seiner Platzierung in der Referenzkonfiguration für die weiteren Betrachtungen nicht relevant ist, wird sie nachfolgend ignoriert

$$\mathbf{x} = \chi_t(\chi_0^{-1}(X)) \Rightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (4.4)$$

Damit wird χ nun als Abbildung von \mathcal{B}_0 auf \mathcal{B} angesehen, welche implizit von der gewählten Referenzkonfiguration abhängt. Für einen festen Zeitpunkt t wird χ_t auch Deformation des Körpers von der Referenzkonfiguration genannt.

4.1.1.1 Wahl des Bezugssystems

Zur Beschreibung der Bewegung der Körperpunkte im EUKLIDischen Raum muss ein Bezugssystem eingeführt werden. Dabei hat sich die Einführung körperfester und raumfester Bezugssysteme etabliert. In der vorliegenden Arbeit wird ein raumfestes Bezugssystem verwendet, welches während des Deformationsprozesses unverformt bleibt.

Abbildung 4.1 stellt einen Körper in einem raumfesten, krummlinigen Koordinatensystem in der Referenzkonfiguration χ_0 und in einer aktuellen Konfiguration χ_t dar. Die Platzierungen der Punkte in der Referenzkonfiguration und in der aktuellen Konfiguration werden daher jeweils durch drei unabhängige Werte der Koordinatenlinien $\{X^1, X^2, X^3\}$ und $\{x^1, x^2, x^3\}$ angegeben.

Zur Darstellung von physikalischen Tensorfeldern über dem Gebiet des Körpers werden die kovarianten Basisvektoren als Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien definiert

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_\alpha} \quad , \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \quad . \quad (4.5)$$

der Referenzzustand mit dem Anfangszustand des Körpers während eines betrachteten Deformationsprozesses zusammenfällt.

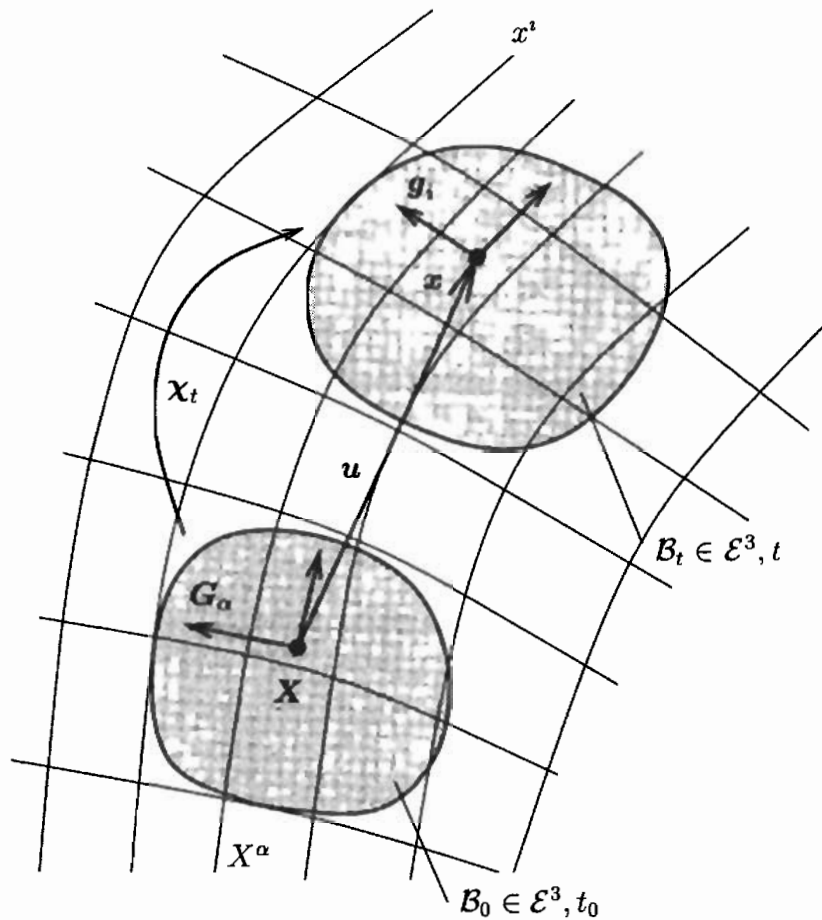


Abb. 4.1: Konfigurationen in raumfesten Koordinaten

Die dazu reziproken kontravarianten Basisvektoren ergeben sich mit den Beziehungen

$$G^\alpha G_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad , \quad g^i g_j = \delta^i_j \quad (4.6)$$

nach Einführung der ko- und kontravarianten Metriken

$$G_{\alpha\beta} = G_\alpha G_\beta \quad , \quad g_{ij} = g_i g_j \quad (4.7)$$

$$G^{\alpha\beta} = G^\alpha G^\beta \quad , \quad g^{ij} = g^i g^j \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

zu

$$G_\alpha = G_{\alpha\beta} G^\beta \quad , \quad g_i = g_{ij} g^j \quad (4.10)$$

Die Ableitung eines Tensors nach den Raumkoordinaten schließt in dem dargestellten krummlinigen Koordinatensystem die räumliche Änderung der Basisvektoren mit ein. Dieser Anteil wird in der kovarianten Ableitung berücksichtigt. Nach KLINGBEIL [Kli89]

ist die kovariante Ableitung für einen Vektor in einem krummlinigen Koordinatensystem

$$\mathbf{a}_{,j} = (a^i \mathbf{g}_i)_{,j} = a^i|_j \mathbf{g}_i \quad \text{mit } a^i|_j = a^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} a^k \quad . \quad (4.11)$$

Die Anwendung der räumlichen Differentialoperation auf beliebige skalare oder tensorielle Größen kann bezüglich der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration erfolgen. Die dazu eingeführten Operatoren sind in Anhang A.1 aufgeführt.

Die Einführung einer Unterscheidung zwischen aktueller und Referenzkonfiguration ermöglicht verschiedene Betrachtungs- und Beschreibungsweisen der Eigenschaften der Körperpunkte. Bei der materiellen oder LAGRANGESchen Betrachtungsweise werden die Eigenschaften eines festen Körperpunktes X mit der Position \mathbf{X} in der Referenzkonfiguration als Funktion der Zeit t angegeben; für eine beliebige skalare Eigenschaft ψ ergibt sich

$$\psi = \psi(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (4.12)$$

Bei der raumfesten oder EULERSchen Betrachtungsweise werden die Eigenschaften als Funktionen der aktuellen Koordinaten der Körperpunkte beschrieben

$$\psi = \psi(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (4.13)$$

Die Transformation zwischen beiden Beschreibungen ist mit (4.4) durch Tausch der Variablen möglich

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \psi(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (4.14)$$

Zum Tragen kommt der Unterschied beider Beschreibungsarten bei der Zeitableitung der lokalen Eigenschaften des Körpers. Während die lokale Ableitung die Ableitung einer Funktion ψ bei festgehaltenem Ort \mathbf{x} darstellt

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\text{const.}} \quad , \quad (4.15)$$

nennt man die Ableitung einer Funktion bei festgehaltenem \mathbf{X} die materielle oder auch substantielle Ableitung

$$\frac{D\psi}{Dt}(\mathbf{X}, t) \equiv \dot{\psi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\text{const.}} \quad . \quad (4.16)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der materiellen und der lokalen Zeitableitung herzustellen, muss die Geschwindigkeit der Körperpunkte eingeführt werden. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Partikels ergibt sich als materielle Ableitung seiner momentanen Platzierung nach der Zeit, die Beschleunigung \mathbf{a} durch zweifache Differentiation

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{D^2\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt^2} \quad . \quad (4.18)$$

Damit erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen der lokalen und der materiellen Zeitableitung am Beispiel einer skalaren Eigenschaftsfunktion

$$\dot{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \quad (4.19)$$

4.1.2 Beschreibung der Deformation

Zur lokalen Beschreibung der Deformation eines Körpers wird die Transformation von Linienelementen in einer infinitesimalen Umgebung der Körperpunkte von der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in die aktuelle Konfiguration $d\mathbf{x}$ beschrieben. Dazu wird der Deformationsgradient eingeführt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (4.20)$$

\mathbf{F} ist ein Zweifeldtensor, der einen Basisvektor in der Referenzkonfiguration und einen in der aktuellen Konfiguration hat. Da die Abbildung von der Referenz- auf die aktuelle Konfiguration eindeutig und umkehrbar ist, ist \mathbf{F} invertierbar

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x} = x^i|_{\alpha} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^{\alpha} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{X} = X^{\alpha}|_i \mathbf{G}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^i \quad . \quad (4.22)$$

Mit der Einführung von \mathbf{F} lassen sich neben Linienelementen auch Flächenelemente und Volumenelemente von der Referenz- in die aktuelle Konfiguration überführen

$$d\mathbf{A} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}_0 \quad (4.23)$$

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad . \quad (4.24)$$

Da die Volumenelemente des Körpers vereinbarungsgemäß positiv definiert werden, ergibt sich für die Jakobideterminante

$$J \equiv \det \mathbf{F} > 0 \quad . \quad (4.25)$$

Der Deformationsgradient ist somit nichtsingulär und lässt sich nach dem polaren Zerlegungssatz (ALTENBACH & ALTENBACH [AA94]) durch eine polare Zerlegung darstellen

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad . \quad (4.26)$$

\mathbf{V} und \mathbf{U} sind positiv definite, symmetrische Tensoren, die in der aktuellen bzw. in der Referenzkonfiguration definiert sind. Sie werden linker und rechter Strecktensor genannt. \mathbf{R} ist ein eigentlich orthogonaler Tensor, es gilt

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}, \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad . \quad (4.27)$$

Die Strecktensoren und die damit in Verbindung stehenden rechten und linken CAUCHY-GREEN-Tensoren lassen sich mit Hilfe des Deformationsgradienten darstellen

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = F_{\alpha}^i F_{\beta}^j g_{ij} \mathbf{G}^{\alpha} \otimes \mathbf{G}^{\beta} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = F_{\alpha}^i F_{\beta}^j G^{\alpha\beta} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (4.29)$$

Die angegebene Darstellung in Komponentenschreibweise verdeutlicht, dass der linke Strecktensor und der linke CAUCHY-GREEN-Tensor in der aktuellen Konfiguration und die rechten Tensoren in der Referenzkonfiguration definiert sind.

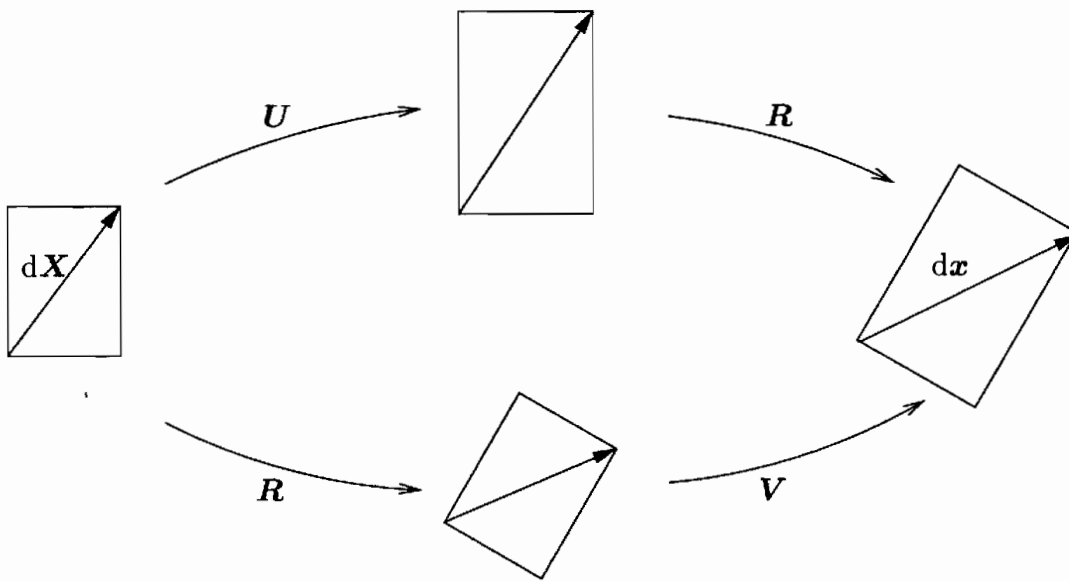


Abb. 4.2: Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

Zur Beschreibung der Änderungsgeschwindigkeit materieller Linienelemente wird der Geschwindigkeitsgradient in der EULERSchen Konfiguration eingeführt, wir erhalten durch Zeitableitung von (4.20)

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.30)$$

Dieser lässt sich additiv in seinen symmetrischen Anteil, den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit, und in einen antisymmetrischen Anteil, den Tensor der Drehgeschwindigkeit, aufspalten

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (4.32)$$

4.2 Verzerrungsmaße

Da der Deformationsgradient sich auf den Deformationsvorgang bezieht und demnach auch Anteile aus lokalen Starrkörperbewegungen enthält, ist er selbst als Verzerrungsmaß ungeeignet. Die Strecktensoren sind, wie noch gezeigt wird, frei von diesen Anteilen. Sie beschreiben lediglich die Streckungen bzw. Stauchungen der Kanten eines das Linienelement $d\mathbf{X}$ umgebenden Quaders bei der Transformation in die aktuelle Konfiguration. Diese Transformation ist in Abbildung 4.2 für den ebenen Fall anschaulich dargestellt. Damit lassen sich alle Verzerrungen als isotrope Tensorfunktionen der Strecktensoren bzw. der CAUCHY-GREEN-Tensoren darstellen. Der linke Strecktensor führt auf EULERSche Verzerrungsmaße, der rechte auf LAGRANGESche. Zur Bildung der Verzerrungsmaße werden die CAUCHY-GREEN-Tensoren auf Hauptachsenform gebracht. \mathbf{U} und \mathbf{C} bzw. \mathbf{V} und \mathbf{B} sind coaxial und mit den Eigenwerten λ_i von \mathbf{U} und \mathbf{V} und $\lambda_i^2 = \chi_i$ von \mathbf{C} und \mathbf{B} ergibt sich

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^3 \chi_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (4.33)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^3 \chi_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad . \quad (4.34)$$

\mathbf{n}_i und \mathbf{N}_i sind die Eigenvektoren des linken und rechten Strecktensors, die sich mit \mathbf{R} ineinander überführen lassen

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{R} \mathbf{N}_i \quad . \quad (4.35)$$

Folglich besteht eine rotierte Korrespondenz zwischen den EULERSchen und den LAGRANGESchen kinematischen Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{V}, & \mathbf{C} &= \mathbf{R}^T \mathbf{B} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{B} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \star \mathbf{U}, & \mathbf{B} &= \mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \star \mathbf{C} \quad . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Im Falle gleicher Eigenwerte sind die Eigenvektoren nicht eindeutig definiert, daher bietet sich für die Spektralzerlegung die Darstellung mit Eigenprojektionen an

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_{\sigma=1}^m \lambda_{\sigma}^2 \mathbf{C}_{\sigma} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \sum_{\sigma=1}^m \lambda_{\sigma}^2 \mathbf{B}_{\sigma} \quad , \quad (4.38)$$

wobei m die Anzahl verschiedener Eigenwerte angibt.

Die Eigenprojektionen eines Tensors sind zueinander orthogonale Tensoren, sie entsprechen im Falle mehrfacher Eigenwerte nicht dem dyadischen Produkt der Eigenvektoren. Zur Berechnung der Eigenprojektionen eines Tensors kann ein lineares Gleichungssystem aus der Summe der Eigenprojektionen, sowie der Spektraldarstellung des Tensors und seines Quadrates aufgestellt werden. Daraus erhält man die von SAWYER [Saw86] bzw. XIAO [Xia95] angegebene SYLVESTER-Formel, die hier am Beispiel des linken CAUCHY-GREEN-Tensors dargestellt ist

$$\mathbf{B}_\sigma = \delta_{1m} \mathbf{1} + \prod_{\sigma \neq \tau=1}^m \frac{\mathbf{B} - \chi_\tau \mathbf{1}}{\chi_\sigma - \chi_\tau} \quad . \quad (4.39)$$

Nach MEYERS [Mey99] lassen sich dafür folgende, für die weiteren Betrachtungen wichtige Rechenregeln, angeben

$$\mathbf{B}_\sigma \mathbf{B}_\tau = \begin{cases} \mathbf{B}_\sigma & , \text{ wenn } \sigma = \tau \\ \mathbf{0} & , \text{ wenn } \sigma \neq \tau \end{cases} \quad (4.40)$$

und

$$\sum_{\sigma=1}^m \mathbf{B}_\sigma = \mathbf{1} \quad . \quad (4.41)$$

Einsetzen von (4.40) und (4.41) in (4.37) ergibt

$$\mathbf{V}^k \mathbf{B}_\sigma = \mathbf{B}_\sigma \mathbf{V}^k = \lambda^k \mathbf{B}_\sigma \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad . \quad (4.42)$$

Dieses Ergebnis lässt sich für beliebige Paare koaxialer Tensoren herleiten. Die allgemeine Form EULERScher bzw. LAGRANGEScher Verzerrungsmaße lässt sich somit durch Einführung einer Skalierungsfunktion $f(\lambda)$ für die Eigenwerte der Strecktensoren oder $g(\chi)$ für die der CAUCHY-GREEN-Tensoren angeben

$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \sum_{\sigma=1}^m f(\lambda_\sigma) \mathbf{C}_\sigma \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{g}(\mathbf{C}) = \sum_{\sigma=1}^m g(\chi_\sigma) \mathbf{C}_\sigma$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{V}) = \sum_{\sigma=1}^m f(\lambda_\sigma) \mathbf{B}_\sigma \quad (4.44)$$

$$= \mathbf{g}(\mathbf{B}) = \sum_{\sigma=1}^m g(\chi_\sigma) \mathbf{B}_\sigma \quad .$$

Diese Maße werden auch nach HILL [Hil68] verallgemeinerte HILLsche Verzerrungsmaße genannt. Damit die Verzerrungen für verschwindende Dehnungen Null sind und sich das

Verzerrungsmaß für kleine Dehnungen konsistent linearisieren lässt, müssen die Skalierungsfunktionen $f(\lambda)$ bzw. $g(\chi)$ folgende Bedingungen erfüllen

$$f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(1) = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial \chi}(1) = \frac{1}{2} \quad . \quad (4.46)$$

Ein Ansatz für eine stetige, monoton steigende Skalierungsfunktion, der diese Bedingungen erfüllt und alle bekannten objektiven Verzerrungsmaße beinhaltet, lautet

$$f(\lambda) = \frac{1}{k} (\lambda^k - 1) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.47)$$

bzw.

$$g(\chi) = \frac{1}{k} \left(\chi^{\frac{k}{2}} - 1 \right) \quad . \quad (4.48)$$

Als Sonderfälle ergeben sich für $k = 2$ aus (4.43) der GREEN-LAGRANGESche und für $k = -2$ aus (4.44) der ALMANSI-EULERSche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (4.49)$$

$$\mathbf{e}^{(-2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad .$$

Die Skalierungsfunktion liefert für $k = 0$ die nach HENCKY [Hen28] benannten logarithmischen Verzerrungsmaße

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{U} = \sum_{\sigma=1}^m \ln \lambda_{\sigma} \mathbf{C}_{\sigma} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} = \sum_{\sigma=1}^m \ln \lambda_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} \quad , \quad (4.51)$$

die sich mit (4.35) durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsrotation ineinander überführen lassen

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \star \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{R}^T \mathbf{h} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{h} \quad . \quad (4.52)$$

4.3 Beobachterinvarianz - Prinzip der materiellen Objektivität

Die Beschreibung physikalischer Größen, die der Bewegung eines Körpers zugeordnet sind, hängt im Allgemeinen von der Wahl des Beobachters ab. Die konstitutiven Beziehungen sind unabhängig von der Wahl des Beobachters, sie müssen daher *beobachterinvariant*

formuliert werden. Damit ist gemeint, dass zwei verschiedene Beobachter, von denen sich einer in einem raumfesten Rahmen befindet, der andere in einem bewegten Rahmen, zu denselben Aussagen bzw. Messungen der konstitutiven Größen kommen. Größen, die diese Forderung der *Beobachterinvarianz* erfüllen, heißen objektiv.

Mathematisch lässt sich die Objektivität von Tensoren aufgrund ihres Verhaltens bei einem Wechsel des Beobachters zeigen. Die allgemeinste Abbildung einer räumlichen³ Beobachtertransformation, bei der die Abstände zwischen Punkten erhalten bleiben, lautet

$$\mathbf{x}^\#(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}^\#(t) \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}^\#(t) \quad \text{mit} \quad \{\mathbf{Q}^\#(t) \in \text{SO}(3)\} \neq \mathbf{Q}^\#(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{c}^\#(t) \neq \mathbf{c}^\#(\mathbf{X}, t) . \quad (4.53)$$

Die angegebene Transformationsgleichung beschreibt gleichzeitig die Starrkörperbewegung eines Körpers, die ein einzelner Beobachter in einem ruhenden Bezugssystem aufnimmt. Diese lässt sich in eine Starrkörperrotation, definiert durch den Rotationstensor $\mathbf{Q}^\#(t)$ und eine Starrkörperverschiebung $\mathbf{c}^\#(t)$ aufspalten. Die aktuelle Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}^\#(t)$ ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{\Omega}^\#(t) = \dot{\mathbf{Q}}^{\#T}(t) \mathbf{Q}^\#(t) = -\boldsymbol{\Omega}^{\#T} . \quad (4.54)$$

Die Invarianzforderung zum Nachweis der Objektivität tensorieller Größen soll hier anhand des Transformationsverhaltens vektorieller Größen definiert werden. Stellt man einen Vektor als Differenz zweier Ortsvektoren in einer beliebigen Konfiguration dar, so ergibt sich sein Transformationsverhalten zu

$$\mathbf{x}_1^\# - \mathbf{x}_2^\# = \mathbf{Q}^\#(t) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{Q}^\#(t) \star (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) . \quad (4.55)$$

Der \star -Operator wird zur Transformation tensorieller Größen beliebiger Stufe in ein gegenüber dem aktuellen System rotierendes Bezugssystem in Anhang A.2 eingeführt.

Versteht man nun einen Tensor zweiter Stufe als linearen Abbildungsoperator von Vektoren, so folgt für einen Tensor \mathbf{A} , der einen beliebigen Vektor \mathbf{a} in der Konfiguration zur Zeit t_1 auf einen anderen Vektor \mathbf{b} in der Konfiguration zur Zeit t_2 abbildet, die Invarianzbedingung

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{Q}^\#(t_2) \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T}(t_1) . \quad (4.56)$$

Wählt man die Beobachtertransformation so, dass die Beobachter zur Zeit t_0 zusammenfallen, d.h. $\mathbf{Q}^\#(t_0) = \mathbf{1}$ und $\mathbf{c}^\#(t_0) = \mathbf{0}$, dann ergeben sich folgende Objektivitätsbedingungen für zweistufige Tensoren, die in den verschiedenen Konfigurationen definiert sind. Die explizite Abhängigkeit des Drehtensors $\mathbf{Q}^\#$ von der Zeit wird im Folgenden nicht mehr angegeben

$$\text{EULERSche Tensoren: } \mathbf{A}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} \equiv \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{A} \quad (4.57)$$

³Der zeitliche Anteil der Beobachtertransformation wird im Folgenden nicht benötigt und daher nicht angegeben.

$$\text{LAGRANGESche Tensoren: } \mathbf{A}^\# = \mathbf{A} \quad (4.58)$$

$$\text{EULER-LAGRANGESche Tensoren: } \mathbf{A}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \quad (4.59)$$

$$\text{LAGRANGE-EULERSche Tensoren: } \mathbf{A}^\# = \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.60)$$

Die Bezeichnung EULER-LAGRANGESche Tensoren wird für Tensoren verwendet, bei denen die vordere Basis in der aktuellen und die hintere Basis in der Referenzkonfiguration definiert ist. Bei den LAGRANGE-EULERSchen Tensoren verhält es sich entsprechend umgekehrt.

Zur Überprüfung der Objektivität der Deformationsmaße kann von der Transformation des Deformationsgradienten ausgegangen werden. Alle weiteren Maße lassen sich daraus ableiten und man erhält das Transformationsverhalten der bisher angegebenen Deformationsmaße

$$\mathbf{J}^\# = \mathbf{J} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{F}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{F} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{F}^{\#-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.63)$$

$$d\mathbf{A}^\# = \mathbf{Q}^\# d\mathbf{A} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{U}^\# = \mathbf{U} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{C}^\# = \mathbf{C} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{V}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{V} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{B}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{B} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{R}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{R} \quad (4.69)$$

$$\mathbf{E}^{(k)*} = \mathbf{E}^{(k)} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{e}^{(k)*} = \mathbf{Q}^\# \mathbf{e}^{(k)} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{L}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{L} \mathbf{Q}^{\#T} + \dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{D}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{W}^\# = \mathbf{Q}^\# \mathbf{W} \mathbf{Q}^{\#T} + \dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T} \quad (4.74)$$

Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} ist also nicht objektiv und daher nicht zur Formulierung von konstitutiven Gleichungen geeignet. Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} erfüllt jedoch die Forderung der Beobachterinvarianz und bietet sich damit zur Formulierung von konstitutiven Beziehungen in Ratenform in einer EULERSchen Beschreibung an.

4.4 Objektive Zeitableitungen

Die Forderung der Beobachterinvarianz konstitutiver Größen gilt in einer Ratenformulierung auch für die verwendeten Zeitableitungen. Die materielle Zeitableitung eines beliebigen zweistufigen Tensors \mathbf{A} in der aktuellen Konfiguration ergibt sich nach (4.19) zu

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{A} \quad . \quad (4.75)$$

Im Falle einer überlagerten Starrkörperbewegung nach (4.53) erhält man

$$\dot{\mathbf{A}}^\# = \mathbf{Q}^\# \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Q}^{\#T} + (\dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T}) \mathbf{A}^\# - \mathbf{A}^\# (\dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T}) \quad , \quad (4.76)$$

was eindeutig nicht objektiv ist. Somit ist die materielle Zeitableitung nicht direkt zur Formulierung konstitutiver Ratenbeziehungen geeignet. Daher werden modifizierte Zeitableitungen eingeführt, die so konstruiert sind, dass die Objektivitätsforderung erfüllt ist.

Ein Konzept, welches auf objektive Zeitableitungen führen kann, ist die Bildung der Zeitableitung eines objektiven EULERSchen Tensors in einem mit $\boldsymbol{\Omega}^+$ mitrotierenden Bezugssystem nach (4.53) und (4.54). Durch Rücktransformation in das aktuelle Bezugssystem erhält man folgende Definition einer mitrotierenden Zeitableitung

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{A}}^+ &= \mathbf{Q}^{+T} \overline{(\mathbf{Q}^+ \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Q}^{+T})} \mathbf{Q}^+ \\ &= \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}^+ - \boldsymbol{\Omega}^+ \mathbf{A} \quad . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Die Erfüllung der Objektivität einer mitrotierenden Zeitableitung hängt von dem definierenden Spintensor $\boldsymbol{\Omega}^+$ ab. Der Spin einer mitrotierenden materiellen Zeitableitung sollte der Deformation und Bewegung des Körpers in geeigneter Weise zugeordnet sein. Überlagerte konstante Starrkörperrotationen und auch dilatante Deformationen haben keinen Einfluss auf den Spintensor und er ist stetig differenzierbar für $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Außerdem sollte die mitrotierende Zeitableitung eines EULERSchen Tensors linear von der Zeit abhängen. Aus diesen Forderungen leiten XIAO, BRUHNS & MEYERS in [XBM98c] und [XBM98b] eine allgemeine Form für die Spintensoren objektiver mitrotierender Zeitableitungen ab

$$\boldsymbol{\Omega}^+ = \mathbf{W} + \sum_{\sigma, \tau=1}^m h \left(\frac{\chi_\sigma}{I}, \frac{\chi_\tau}{I} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad \text{mit: } I = \operatorname{tr} \mathbf{B} \quad . \quad (4.78)$$

Die Spinfunktion h muss so gewählt sein, dass $\boldsymbol{\Omega}^+$ antimetrisch ist. Eine Untergruppe von Spinfunktionen, die die Spintensoren aller gemeinhin bekannten materiellen mitrotierenden Zeitableitungen enthält, lautet

$$\tilde{h}(z^{-1}) = -\tilde{h}(z) \quad (\forall z > 0) \quad . \quad (4.79)$$

Daraus ergibt sich für die Spintensoren

$$\Omega^+ = \mathbf{W} + \sum_{\sigma,\tau=1}^m \tilde{h} \left(\frac{\chi_\sigma}{\chi_\tau} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad . \quad (4.80)$$

Als Sonderfall aus (4.80) erhält man die ZAREMBA-JAUMANN Ableitung [Jau11] mit $\tilde{h}^J(z) = 0$ zu

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}^J = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A} \quad \text{mit: } \Omega^J = \mathbf{W} \quad , \quad (4.81)$$

die GREEN-NAGHDI Rate [GN65] oder polare Rate mit $\tilde{h}^R(z) = \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}}$ zu

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}^R = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \Omega^R - \Omega^R \mathbf{A} \quad \text{mit: } \Omega^R = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad . \quad (4.82)$$

Insbesondere gilt für die polare Rate

$$\overline{(\mathbf{R}^T \star \mathbf{A})} = \mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{A}}^R \quad . \quad (4.83)$$

Die Anwendung der Kettenregel bei mitrotierenden Zeitableitungen ist nicht direkt möglich. Lediglich bei der polaren Rate lässt sich die Kettenregel sowohl in der EULERSchen als auch in der LAGRANGESchen Konfiguration direkt anwenden, wie sich leicht zeigen lässt. Daher ist es sinnvoll, eine beliebige andere mitrotierende Zeitableitung durch die polare Rate auszudrücken

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}^+ = \overset{\circ}{\mathbf{A}}^R + \mathbf{A} (\Omega^+ - \Omega^R) - (\Omega^+ - \Omega^R) \mathbf{A} \quad (4.84)$$

Wie bereits erwähnt, sind nicht alle mitrotierenden Zeitableitungen objektiver Tensoren auch objektiv. Der Nachweis der Objektivität einer mitrotierenden Zeitableitung mit einem Spin nach (4.80) sei am Beispiel der ZAREMBA-JAUMANN Ableitung dargestellt. Zunächst wird dazu die Ableitung im ruhenden Bezugssystem gebildet und anschließend in ein $\Omega^\#$ -System transformiert

$$\overline{\overset{\circ}{\mathbf{A}}^J}^\# = \mathbf{Q}^\# \overset{\circ}{\mathbf{A}}^J \mathbf{Q}^{\#T} = \mathbf{Q}^\# \left(\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A} \right) \mathbf{Q}^{\#T} \quad . \quad (4.85)$$

Transformiert man andererseits erst den Tensor \mathbf{A} in das $\Omega^\#$ -System und bildet dort die ZAREMBA-JAUMANN Ableitung, so erhält man mit (4.74)

$$\begin{aligned} \overline{\overset{\circ}{\mathbf{A}}^J}^\# &= \mathbf{Q}^\# \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Q}^{\#T} + \dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} + \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \dot{\mathbf{Q}}^{\#T} + \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{Q}^{\#T} \\ &\quad + \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} \dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T} - \mathbf{Q}^\# \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} - \dot{\mathbf{Q}}^\# \mathbf{Q}^{\#T} \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} \\ &= \mathbf{Q}^\# \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Q}^{\#T} + \mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{Q}^{\#T} - \mathbf{Q}^\# \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T} \\ &= \mathbf{Q}^\# \overset{\circ}{\mathbf{A}}^J \mathbf{Q}^{\#T} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.4.1 Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und der Zeitableitung eines Verzerrungstensors

Die Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ist ein natürliches Maß zur Messung der Längenänderung von Linienelementen und der Winkeländerung sich schneidender Linienelemente. Aus diesem Grund bietet sich \mathbf{D} auch zur Formulierung konstitutiver Ratenbeziehungen an.

Um die konsistente Integrierbarkeit einer konstitutiven Ratenbeziehung sicherzustellen, ist es sinnvoll, eine Beziehung zwischen \mathbf{D} und der objektiven Ableitung eines Verzerrungstensors herzustellen.

Eine Möglichkeit ergibt sich ausgehend vom GREEN-Verzerrungstensor nach (4.49), dessen materielle Zeitableitung durch Verschieben mit dem Deformationsgradienten in die aktuelle Konfiguration folgende Beziehung liefert

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \overline{\left(\mathbf{E}^{(2)} \right)} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (4.87)$$

Da es in einer EULERSchen Beschreibung nicht sinnvoll ist, ein LAGRANGESches Verzerrungsmaß zu verwenden, ist es wünschenswert, die Verzerrungsgeschwindigkeit als objektive Rate eines EULERSchen Verzerrungsmaßes darzustellen. Es müssen also ein Verzerrungstensor \mathbf{e}_0 und ein Spintensor $\boldsymbol{\Omega}^0$ gesucht werden, so dass die objektive Zeitableitung dieses Verzerrungstensors, die durch den Spin $\boldsymbol{\Omega}^0$ definiert ist, den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit ergibt

$$\overline{(\mathbf{e}_0)}^0 = \dot{\mathbf{e}}_0 + \mathbf{e}_0 \boldsymbol{\Omega}^0 - \boldsymbol{\Omega}^0 \mathbf{e}_0 \stackrel{!}{=} \mathbf{D} \rightarrow (\mathbf{e}_0 \boldsymbol{\Omega}^0 - \boldsymbol{\Omega}^0 \mathbf{e}_0) = \mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}_0 \quad . \quad (4.88)$$

Lange Zeit war eine solche Beziehung unbekannt. GURTIN & SPEAR [GS83] und HOGER [Hog86] haben für Sonderfälle gezeigt, dass bestimmte mitrotierende objektive Zeitableitungen des logarithmischen Verzerrungstensors nach (4.51) für Spezialfälle von \mathbf{V} identisch zu \mathbf{D} sind. Die Aussage von HILL in [Hil78], dass die Hautdiagonalelemente des auf Hauptachsen transformierten Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit gleich den Zeitableitungen der korrespondierenden Eigenwerte von \mathbf{h} sind, veranlasste REINHARDT & DUBEY [RD95] zu der Aussage, dass \mathbf{h} die einzige Verzerrung ist, mit der (4.88) erfüllt werden könne. XIAO, BRUHNS & MEYERS weisen diese Behauptung in [XBM97a] nach und geben eine allgemeine basisfreie Form für den Spintensor an, der die zugehörige objektive mitrotierende Zeitableitung definiert. Der Beweis wird im Folgenden kurz skizziert.

Multipliziert man (4.88) links und rechts skalar mit einer beliebigen Eigenprojektion von \mathbf{V} , so gelangt man unter Beachtung von (4.44) und (4.40) zu

$$\mathbf{B}_\sigma (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}_0) \mathbf{B}_\sigma = \mathbf{0} \quad . \quad (4.89)$$

Mit diesem Ergebnis und einem Vorschlag von XIAO, BRUHNS & MEYERS [XBM97a] für den Spintensor

$$\Omega^0 = \Omega^{log} = \sum_{\sigma=1}^m \mathbf{B}_\sigma \mathbf{W} \mathbf{B}_\sigma + \sum_{(\sigma \neq \tau)=1}^m (f_0(\lambda_\sigma) - f_0(\lambda_\tau))^{-1} \mathbf{B}_\sigma (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}_0) \mathbf{B}_\tau \quad , \quad (4.90)$$

führt dieses unter Beachtung von (4.41) auf

$$\mathbf{e}_0 \Omega^{log} - \Omega^{log} \mathbf{e}_0 = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \mathbf{B}_\sigma (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}_0) \mathbf{B}_\tau = \mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}_0 \quad . \quad (4.91)$$

Ω^{log} erfüllt also (4.88). f_0 ist die Skalierungsfunktion des gesuchten Verzerrungstensors nach (4.44)₁. Die materielle Zeitableitung EULERScher Verzerrungsmaße vom HILL-Typ kann nach XIAO [Xia95] bzw. CARLSON & HOGER [CH86] durch die materielle Ableitung des linken CAUCHY-GREEN-Tensors dargestellt werden

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \frac{f_0(\lambda_\sigma) - f_0(\lambda_\tau)}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau} \mathbf{B}_\sigma \dot{\mathbf{V}} \mathbf{B}_\tau \quad . \quad (4.92)$$

Für $\sigma = \tau$ ergibt sich daraus im Grenzübergang

$$\mathbf{B}_\sigma \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{B}_\sigma = \frac{\partial f_0}{\partial \lambda}(\lambda_\sigma) \mathbf{B}_\sigma \dot{\mathbf{V}} \mathbf{B}_\sigma \quad . \quad (4.93)$$

Außerdem lässt sich die materielle Zeitableitung des linken CAUCHY-GREEN-Tensors unter Beachtung von (4.42) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \mathbf{V} = \mathbf{D} \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \mathbf{D} + \mathbf{W} \mathbf{V}^2 - \mathbf{V}^2 \mathbf{W} \\ \rightarrow \mathbf{B}_\sigma \dot{\mathbf{V}} \mathbf{B}_\sigma &= \lambda_\sigma \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\sigma \quad . \end{aligned} \quad (4.94)$$

Setzt man (4.93), (4.94) und (4.91) in (4.88) ein, so erhält man

$$\left(\lambda_\sigma \frac{\partial f_0}{\partial \lambda}(\lambda_\sigma) - 1 \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\sigma = \mathbf{0} \quad . \quad (4.95)$$

Diese Gleichung ist für beliebige \mathbf{D} nur erfüllt, wenn

$$\frac{\partial f_0}{\partial \lambda}(\lambda_\sigma) = \frac{1}{\lambda_\sigma}$$

gilt, was mit der Bedingung (4.46) auf

$$f_0(\lambda_\sigma) = \ln \lambda_\sigma$$

führt. Die logarithmische Verzerrung \mathbf{h} ist somit das einzige EULERSche Verzerrungsmaß, für das eine mitrotierende objektive Zeitableitung - die sogenannte logarithmische Zeitableitung- auf den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit führt

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{h}}^{log} \quad . \quad (4.96)$$

Der zugehörige Spin definiert sich nach (4.90) zu

$$\mathbf{\Omega}^{log} = \mathbf{W} + \sum_{(\sigma \neq \tau)=1}^m \left[\left(\frac{1 + (\chi_\sigma/\chi_\tau)}{1 - (\chi_\sigma/\chi_\tau)} \right) + \frac{2}{\ln(\chi_\sigma/\chi_\tau)} \right] \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad , \quad (4.97)$$

die zugehörige Spinfunktion lautet

$$h^{log} = \frac{1+z}{1-z} + \frac{2}{\ln z} \quad . \quad (4.98)$$

Eine basisfreie Form für den logarithmischen Spin geben XIAO, BRUHNS & MEYERS in [XBM99b] an. Sie läßt sich auch in folgender Form darstellen

$$\mathbf{\Omega}^{log} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{log} \quad . \quad (4.99)$$

Die Gleichung zur Berechnung des antimetrischen Tensors \mathbf{N}^{log} ist in Anhang B.2 angegeben.

Der zeitabhängige Rotationstensor \mathbf{R}^{log} , der den logarithmischen Spin definiert, ergibt sich aus (4.54) zu

$$\dot{\mathbf{R}}^{log} = -\mathbf{R}^{log} \mathbf{\Omega}^{log} \quad , \quad \mathbf{R}^{log}(t_0) = \mathbf{1} \quad . \quad (4.100)$$

Aufgrund der bereits erwähnten Eigenschaft, dass die Kettenregel für beliebige mitrotierende Zeitableitungen nicht erfüllt ist, erweist es sich als sinnvoll, einen zusätzlichen Spintensor einzuführen, der sich als Differenz zwischen dem logarithmischen Spin und dem polaren Spin mit (4.97) und (4.82) ergibt

$$\mathbf{\Omega}^{LR} = \mathbf{\Omega}^{log} - \mathbf{\Omega}^R = \sum_{\sigma \neq \tau=1}^m \frac{2\sqrt{\chi_\sigma/\chi_\tau}}{1 - (\chi_\sigma/\chi_\tau)} + \frac{2}{\ln(\chi_\sigma/\chi_\tau)} \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad . \quad (4.101)$$

Damit lassen sich die polare und die logarithmische Rate beliebiger EULERScher Tensoren ineinander überführen

$$\dot{\mathbf{A}}^R = \dot{\mathbf{A}}^{log} - \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^{LR} + \mathbf{\Omega}^{LR} \mathbf{A} \quad (4.102)$$

$$\dot{\mathbf{A}}^{log} = \dot{\mathbf{A}}^R + \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^{LR} - \mathbf{\Omega}^{LR} \mathbf{A} \quad . \quad (4.103)$$

4.5 Spannungstensoren

Schneidet man aus einem belasteten Körper in der aktuellen Konfiguration einen infinitesimal kleinen Teilkörper heraus, so wirkt an jeder Schnittfläche eine gleichgewichtserhaltende Schnittkraft $d\mathbf{f}$, die sich auch durch den Spannungsvektor \mathbf{t} darstellen lässt

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}dA \quad . \quad (4.104)$$

CAUCHYs Spannungstheorem sagt aus, dass für einen kontinuierlich mit Masse gefüllten Körper in \mathbf{x} der Spannungsvektor linear von der Flächennormale \mathbf{n} der betrachteten Schnittnormale abhängt. Damit kann der CAUCHY-Spannungstensor eingeführt werden

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad . \quad (4.105)$$

Der CAUCHY-Spannungstensor ist somit in der aktuellen Konfiguration definiert. Aus der Objektivität von $d\mathbf{f}$ und $d\mathbf{A}$ folgt direkt die Objektivität von $\boldsymbol{\sigma}$. Zur Integration über das Volumen des Körpers in der Referenzkonfiguration wird der gewichtete CAUCHY-Spannungstensor bzw. KIRCHHOFF-Spannungstensor eingeführt

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (4.106)$$

Bezieht man sich in (4.104) auf das Flächenelement in der Referenzkonfiguration, so gelangt man zum 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$${}^I\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (4.107)$$

Ersetzt man weiterhin die Schnittkraft durch eine fiktive, in der Referenzkonfiguration wirkende Kraft, so gelangt man zum objektiven 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor, der komplett in der Referenzkonfiguration definiert ist

$${}^{II}\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} {}^I\mathbf{P} \quad . \quad (4.108)$$

Weitere Definitionen von Spannungstensoren ergeben sich z.B. aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten durch Bildung der verschiedenen Konfigurationen.

4.5.1 Lie-Ableitung des Kirchhoff-Spannungstensors

Für die Formulierung der schwachen Form der Impulsbilanz in der aktuellen Konfiguration wird die LIE-Zeitableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors benötigt. Diese erhält man durch Zurückziehen in die Referenzkonfiguration. Dort wird die materielle Zeitableitung gebildet. Verschieben dieser LAGRANGESchen Größe in die aktuelle Konfiguration liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v[\boldsymbol{\tau}] &= \mathbf{F} \overline{(\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T})} \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T \quad . \end{aligned} \quad (4.109)$$

In dieser Gleichung kann die materielle Zeitableitung durch die logarithmische Rate nach (4.99) und (4.77) ersetzt werden

$$\mathcal{L}_v[\boldsymbol{\tau}] = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{log} - \boldsymbol{\tau} (\mathbf{N}^{log} + \mathbf{D}) + (\mathbf{N}^{log} - \mathbf{D}) \boldsymbol{\tau} \quad . \quad (4.110)$$

BONGMBA & BRUHNS geben in [BB01] einen vierstufigen Tensor $\mathbf{G}[\boldsymbol{\tau}]$ an, mit dem sich (4.110) in folgender Form darstellen lässt

$$\mathcal{L}_v[\boldsymbol{\tau}] = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{log} + \mathbf{G}[\boldsymbol{\tau}] : \mathbf{D} \quad . \quad (4.111)$$

Eine explizite basisfreie Form für $\mathbf{G}[\boldsymbol{\tau}]$ ist in Anhang B.3 angegeben.

4.6 Konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße

Unabhängig vom Materialverhalten können Spannungs- und Verzerrungsmaße mit Hilfe der spezifischen Formänderungsleistung in Beziehung gesetzt werden

$$\dot{w} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad . \quad (4.112)$$

Nach HILL [Hil68] werden ein LAGRANGEScher Verzerrungstensor \mathbf{E} und Spannungstensor \mathbf{T} arbeitskonjugiert genannt, wenn das innere Produkt von \mathbf{T} und der materiellen Zeitableitung von \mathbf{E} die Formänderungsleistung bilden

$$\dot{w} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad . \quad (4.113)$$

Die Formänderungsleistung ist eine objektive Größe. Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Objektivität von $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{D} . Eine allgemeine Formulierung, wie man aus (4.113) zu einem beliebigen LAGRANGESchen Verzerrungstensor die arbeitskonjugierte Spannung bestimmt, ist bisher nicht bekannt.

MACVEAN leitet in [Mac68] verschiedene arbeitskonjugierte Paare häufig verwendeter Spannungs- und Verzerrungsmaße ab. HOOGER präsentiert in [Hog87] erstmals eine Vorschrift zur Bestimmung der zum zurückrotierten logarithmischen Verzerrungstensor \mathbf{H} konjugierten Spannung. Diesen Ansatz erweitert XIAO in [Xia95] und gibt einen allgemeinen basisfreien Ausdruck für die zu beliebigen LAGRANGESchen Verzerrungsmaßen des verallgemeinerten HILL-Typs nach (4.43) und (4.47) konjugierten Spannungen an. Unabhängig davon präsentieren FARAHANI & NAGHDABADI in [FN00] eine Vorschrift zur Ermittlung der zu beliebigen LAGRANGESchen Verzerrungsmaßen nach (4.43) und (4.47) mit nicht verschwindendem Exponenten arbeitskonjugierten Spannung in einer nicht basisfreien Form.

Im Rahmen einer konstitutiven Theorie, bei der die Materialbeziehungen in der aktuellen

Konfiguration formuliert werden, ist es sinnvoll, eine Beziehung zwischen den Zeitableitungen des Verzerrungstensors und der verwendeten Spannung so zu wählen, dass diese arbeitskonjugiert im Sinne von HILL sind. Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann durch ein Spannungsmaß und die Variation eines dazu konjugierten Verzerrungsmaßes aufgestellt werden.

Um zu einer Erweiterung der Arbeitskonjugationsbeziehung (4.113) zu gelangen, ist es zweckmäßig, die mitrotierende Zeitableitung eines beliebigen Tensors \mathbf{A} in der mit \mathbf{R} zurückrotierten LAGRANGESchen Konfiguration zu betrachten. Die korrespondierende LAGRANGESche Größe des Tensors \mathbf{A} erhält man durch Zurückrotieren mit dem Rotations-tensor \mathbf{R} aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \star \hat{\mathbf{A}}. \quad (4.114)$$

Die mitrotierende Zeitableitung von \mathbf{A} in der zurückrotierten Konfiguration ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\hat{\mathbf{A}}}^+ &= \mathbf{R}^T \overset{\circ}{\mathbf{A}}^+ \mathbf{R} \\ &= \dot{\hat{\mathbf{A}}} + \hat{\mathbf{A}} (\hat{\Omega}^+ - \hat{\Omega}^R) - (\hat{\Omega}^+ - \hat{\Omega}^R) \hat{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Im Sonderfall der polaren Rate $\Omega^+ = \Omega^R$ führt diese Beziehung gerade auf die materielle Zeitableitung des zu \mathbf{A} korrespondierenden Tensors $\hat{\mathbf{A}}$

$$\overset{\circ}{\hat{\mathbf{A}}}^R = \dot{\hat{\mathbf{A}}} = \mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{A}}^R, \quad \overset{\circ}{\mathbf{A}}^R = \mathbf{R} \star \dot{\hat{\mathbf{A}}}. \quad (4.116)$$

Im Folgenden wird eine vereinheitlichte Beziehung zwischen EULERSchen und LAGRANGESchen Verzerrungs- und Spannungstensoren hergeleitet.

(\mathbf{e}, \mathbf{t}) sei ein Paar eines beliebigen objektiven symmetrischen Verzerrungstensors⁴ nach (4.44) und eines EULERSchen Spannungstensors.

Für einen Beobachter in einem gegenüber dem ruhenden System mit Ω^+ rotierenden System wird hieraus das Paar $(\mathbf{Q}^+ \mathbf{e} \mathbf{Q}^{+T}, \mathbf{Q}^+ \mathbf{t} \mathbf{Q}^{+T})$. Dieses Paar wird nach LEHMANN & LIANG [LL93] Ω^+ -arbeitskonjugiert genannt, wenn das folgende innere Produkt der materiellen Rate der Verzerrung und der Spannung in der mit \mathbf{Q}^+ rotierten Konfiguration die spezifische Formänderungsleistung formt, wie es durch HILL in der ruhenden Bezugskonfiguration gefordert wird

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (\mathbf{Q}^+ \dot{\mathbf{t}} \mathbf{Q}^{+T}) : \overline{(\mathbf{Q}^+ \mathbf{e} \mathbf{Q}^{+T})} \\ &= \mathbf{t} : \overset{\circ}{\mathbf{e}}^+ \end{aligned} \quad (4.117)$$

⁴Die folgenden Betrachtungen beschränken sich hier auf HILLSche Verzerrungsmaße, eine Erweiterung auf allgemeinere Verzerrungsmaße ist möglich.

Jede objektive mitrotierende Zeitableitung mit einem Spintensor nach (4.80) lässt sich in die folgende Form bringen

$$\dot{\mathbf{e}}^+ = \mathbf{H}(\mathbf{B}) : \mathbf{D} = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \rho(\chi_\sigma, \chi_\tau) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau, \quad (4.118)$$

mit

$$\rho(x, y) = \left((x + y) + (x - y) h^+ \left(\frac{x}{\text{tr}(\mathbf{B})}, \frac{y}{\text{tr}(\mathbf{B})} \right) \right) \frac{g(x) - g(y)}{x - y} . \quad (4.119)$$

Setzt man dieses Ergebnis in (4.112) ein, so gelangt man unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des vierstufigen, nichtsingulären Transformationstensors $\mathbf{H}(\mathbf{B})$

$$\mathbb{H}_{ijkl} = \mathbb{H}_{ijlk} = \mathbb{H}_{jikl} = \mathbb{H}_{klij} \quad (4.120)$$

zu folgendem Ausdruck

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{t} : \mathbf{H}(\mathbf{B}) : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad (4.121)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{B}) : \mathbf{t} . \quad (4.122)$$

Invertierung dieser Gleichung liefert die zu einem EULERSchen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\Omega}^+$ -konjugierte Spannung

$$\mathbf{t} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{B}) : \boldsymbol{\tau} = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \rho^{-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau) \mathbf{B}_\sigma \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\tau . \quad (4.123)$$

Eine ausführliche Herleitung dieser Beziehungen geben XIAO, BRUHNS & MEYERS in [XBM98a] an. Die Arbeitskonjugationsbeziehung der zu (\mathbf{e}, \mathbf{t}) korrespondierenden LAGRANGESchen Größen $(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{t}}) = (\mathbf{E}, \mathbf{T})$ erhält man mit (4.114), (4.115) und (4.117) zu

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^+ . \quad (4.124)$$

(\mathbf{E}, \mathbf{T}) wird als arbeitskonjugiertes Paar in der LAGRANGESchen Konfiguration bezeichnet. Damit wurde eine einheitliche Arbeitskonjugationsbeziehung EULERScher und LAGRANGEScher Verzerrungs- und Spannungstensoren geschaffen. Das heisst, dass sich ein arbeitskonjugiertes Paar in der LAGRANGESchen Konfiguration durch die rotierte Korrespondenz in ein EULERSches Paar überführen lässt. Die Arbeitskonjugationsbeziehung nach HILL (4.113) ergibt sich als Sonderfall von (4.117) und (4.124) indem die polare Rate verwendet wird

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{t} : \dot{\mathbf{e}}^R . \quad (4.125)$$

(\mathbf{E}, \mathbf{T}) bzw. (\mathbf{e}, \mathbf{t}) sind in diesem Fall $\boldsymbol{\Omega}^R$ -arbeitskonjugierte Paare in der LAGRANGESchen bzw. der EULERSchen Konfiguration und lassen sich über ihre rotierte Korrespondenz ineinander überführen.

Die arbeitskonjugierte Spannung zum logarithmischen Verzerrungstensor \mathbf{h} im Sinne der Arbeitskonjugationsbeziehung von HILL (4.113) ergibt sich damit aus (4.123) und (4.119) durch Einsetzen der Spinfunktion für die logarithmische Rate nach (4.98) und der Skalierungsfunktion der logarithmischen Verzerrung $g(x) = \frac{1}{2} \ln x$ zu

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \sqrt{\chi_{\sigma}^{-1} \chi_{\tau}^{-1}} \frac{\chi_{\sigma} - \chi_{\tau}}{\ln \chi_{\sigma} - \ln \chi_{\tau}} \mathbf{B}_{\sigma} \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_{\tau} \quad . \quad (4.126)$$

Die Invertierung dieser Beziehung liefert

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{\sigma, \tau=1}^m \sqrt{\chi_{\sigma} \chi_{\tau}} \frac{\ln \chi_{\sigma} - \ln \chi_{\tau}}{\chi_{\sigma} - \chi_{\tau}} \mathbf{B}_{\sigma} \boldsymbol{\pi} \mathbf{B}_{\tau} \quad . \quad (4.127)$$

Die arbeitskonjugierte Spannung $\boldsymbol{\Pi}$ zu \mathbf{H} erhält man aus (4.126) durch die rotierte Korrespondenz der Paare $(\mathbf{h}, \boldsymbol{\pi})$ und $(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Pi})$ zu

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{R} \star \boldsymbol{\Pi} \quad . \quad (4.128)$$

Eine basisfreie Formulierung für $\boldsymbol{\pi}$ bzw. $\boldsymbol{\Pi}$ erhält man durch Einsetzen der SYLVESTER-Formel in (4.126). Diese lässt sich in folgender Form darstellen

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{i,j=0}^{m-1} \rho_{ij} \mathbf{B}^i \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}^j \quad (4.129)$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \sum_{i,j=0}^{m-1} \rho_{ij} \mathbf{C}^i \hat{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{C}^j \quad . \quad (4.130)$$

Die Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten ρ_{ij} sind im Anhang B.4 angegeben.

Spannung	Verzerrung	\dot{w}
${}^I \mathbf{P}^T$	\mathbf{F}	${}^I \mathbf{P}^T : \dot{\mathbf{F}}$
${}^{II} \mathbf{P}$	$\mathbf{E}^{(2)}$	${}^{II} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{E}}^{(2)}$
$\mathbf{E}^{(-2)}$	$\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}$	$\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{E}}^{(-2)}$

Tabelle 4.1: Konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße

Weitere aus der Literatur bekannte konjugierte Spannungs-Verzerrungspaare sind in Tabelle 4.1 angegeben.

Ein Sonderfall ergibt sich bei isotropem elastischem Materialverhalten. Für konstitutive Beziehungen mit der logarithmischen Verzerrung \mathbf{h} und der dazu konjugierten Spannung $\boldsymbol{\pi}$ führt die Isotropie auf die Koaxialität beider Tensoren

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\sigma=1}^m \pi_{\sigma}(\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \ln \lambda_3) \mathbf{B}_{\sigma} \quad . \quad (4.131)$$

Setzt man diese Beziehung in (4.127) ein, so ergibt sich unter Beachtung des Grenzwerts

$$\lim_{\chi_{\sigma} \rightarrow \chi_{\tau}} \sqrt{\chi_{\sigma} \chi_{\tau}} \frac{\ln \chi_{\sigma} - \ln \chi_{\tau}}{\chi_{\sigma} - \chi_{\tau}} = 1 \quad (4.132)$$

und der Beziehungen (4.40) für die Spannung

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{\sigma=1}^m \pi_{\sigma}(\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \ln \lambda_3) \mathbf{B}_{\sigma} = \boldsymbol{\pi} \quad . \quad (4.133)$$

Im Falle isotropen Materialverhaltens, bei dem sich das konstitutive Gesetz in der Form (4.131) angeben lässt, stimmen also die KIRCHHOFF-Spannung und $\boldsymbol{\pi}$ überein. Für isotrope elastisch-plastische Ratenbeziehungen ist diese Bedingung nur im Falle radialer Belastungsprozesse ausgehend vom Referenzzustand erfüllbar. Daher erfüllen elastisch-plastische Formulierungen, die mit der KIRCHHOFF-Spannung formuliert werden, wie z.B. von BRUHNS, XIAO & MEYERS in [BXM99] vorgeschlagen, die Arbeitskonjugationsbeziehung nach HILL nicht im allgemeinen Sinne. Aufgrund der Isotropie dieses Modells hat die vorgenannte Eigenschaft dieser Formulierungen jedoch keinen Einfluss auf die Gültigkeit der konstitutiven Beziehungen.

4.7 Aufspaltung der reversiblen und irreversiblen Deformationsanteile

Aufgrund der verschiedenen Mechanismen elastischer und inelastischer Deformationen lassen sich für beide Anteile separate konstitutive Beziehungen angeben.

Im Rahmen von Theorien für kleine Formänderungen ist hierzu die direkte additive Aufspaltung des linearisierten Verzerrungstensors ϵ in einen elastischen und einen inelastischen Anteil möglich, woraus die additive Aufspaltung der Verzerrungsraten folgt. Wie LEE in [Lee69] nachweist, ist eine solche Aufspaltung der Verzerrungen für finite Deformationen ausgehend von einer additiven Aufspaltung der Verschiebungen nicht mehr exakt möglich.

Zur Trennung zwischen den elastischen und inelastischen Anteilen an der Gesamtdeformation finden sich in der Literatur im Wesentlichen zwei verschiedene Ansätze. GREEN & NAGHDI [GN71] spalten den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(2)}$ basierend auf der Einführung eines plastischen Verzerrungstensors additiv auf, woraus die additive Aufspaltung der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{E}}^{(2)}$ direkt folgt.

Eine andere Möglichkeit, die bereits von KRÖNER in [Krö60] für infinitesimale Verzerrungen vorgeschlagen wurde, geht auf LEE & LIU [LL68] bzw. LEE [Lee69], [Lee81] zurück. Ausgehend von einem realen thermomechanischen Prozess, bei dem der Körper von der Referenzkonfiguration χ_0 mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} in die aktuelle Konfiguration χ_t überführt wird, lässt sich durch elastische Entlastung bei festgehaltenen internen Variablen eine fiktive Zwischenkonfiguration $\chi^\#$ definieren, in der der Körper spannungsfrei ist. In dieser Konfiguration liegen somit lediglich inelastische Deformationen vor. Unter der Voraussetzung, dass die Abbildung von der Referenzkonfiguration in die fiktive Referenzkonfiguration stetig und differenzierbar ist, lässt sich hierfür ein inelastischer Deformationsgradient $\mathbf{F}_{(i)}$ einführen. Die Transformation von $\chi^\#$ nach χ_t ist rein elastisch und erfolgt mit $\mathbf{F}_{(r)}$. Damit wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten postuliert

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(r)} \mathbf{F}_{(i)} \quad . \quad (4.134)$$

Diese Aufspaltung führt durch Anwendung der Kettenregel auf die additive Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten und nachfolgend auf die additive Aufspaltung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_{(r)} \mathbf{F}_{(r)}^{-1} + \mathbf{F}_{(r)} \dot{\mathbf{F}}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{F}_{(r)}^{-1} = \mathbf{L}_{(r)} + \mathbf{L}_{(ri)} \quad (4.135)$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_{(r)} = \dot{\mathbf{F}}_{(r)} \mathbf{F}_{(r)}^{-1}, \quad \mathbf{D}_{(r)} = \text{sym} \left(\mathbf{L}_{(r)} \right), \quad \mathbf{W}_{(r)} = \text{skw} \left(\mathbf{L}_{(r)} \right) \quad (4.136)$$

$$\mathbf{L}_{(ri)} = \mathbf{F}_{(r)} \dot{\mathbf{F}}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{F}_{(r)}^{-1}, \quad \mathbf{D}_{(ri)} = \text{sym} \left(\mathbf{L}_{(ri)} \right), \quad \mathbf{W}_{(ri)} = \text{skw} \left(\mathbf{L}_{(ri)} \right). \quad (4.137)$$

Der nicht-reversible Anteil des Geschwindigkeitsgradienten ist somit nicht nur von den irreversiblen Deformationen, sondern auch von den reversiblen abhängig.

Aus der additiven Aufspaltung der Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit lässt sich somit die Formänderungsleistung additiv in einen vollständig reversiblen und einen nicht-reversiblen Anteil aufspalten

$$\dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)}. \quad (4.138)$$

Diese Aufspaltung entspricht nach LEHMANN [Leh89] auch experimentellen Beobachtungen. Analog zur Darstellung der Formänderungsleistung mit dem Paar $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D})$ lassen sich auch andere Zeitableitungen von Verzerrungen durch die Aufspaltung der Formänderungsleistung additiv aufspalten, damit gelangt man zu folgenden im weiteren noch benötigten Darstellungsformen

$$\dot{w}_{(r)} = \boldsymbol{\tau}_{(r)} : \mathbf{D}_{(r)} = {}^I \mathbf{P}^T : \dot{\mathbf{F}}_{(r)} \mathbf{F}_{(i)} = \boldsymbol{\pi}_{(r)} : \dot{\mathbf{h}}_{(r)}^R = \boldsymbol{\Pi}_{(r)} : \dot{\mathbf{H}}_{(r)} \quad (4.139)$$

$$\dot{w}_{(i)} = \boldsymbol{\tau}_{(i)} : \mathbf{D}_{(i)} = {}^I \mathbf{P}^T : \mathbf{F}_{(r)} \dot{\mathbf{F}}_{(i)} = \boldsymbol{\pi}_{(i)} : \dot{\mathbf{h}}_{(i)}^R = \boldsymbol{\Pi}_{(i)} : \dot{\mathbf{H}}_{(i)}. \quad (4.140)$$

Es bleibt anzumerken, dass die Einführung einer Aufspaltung elastischer und inelastischer Deformationsanteile ein konstitutiver Ansatz ist, der sich nicht rein kinematisch begründen lässt.

Ein Problem bei der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten, auf welches LEE [Lee69] bereits bei der Einführung des Konzepts hinweist, ist die Inkompabilität der Zwischenkonfiguration. Diese entsteht, da die Zwischenkonfiguration nur bis auf überlagerte Starrkörperrotationen eindeutig bestimmt ist

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(r)} \mathbf{F}_{(i)} = \left(\mathbf{F}_{(r)}^\# \mathbf{Q}^T \right) \left(\mathbf{Q} \mathbf{F}_{(i)}^\# \right). \quad (4.141)$$

Um zu einer eindeutigen Aufspaltung zu kommen, wird der reversible Anteil von LEE und anderen als reiner Streckanteil eingeführt. Nach der Polarzerlegung der einzelnen Anteile des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_{(r)} = \mathbf{V}_{(r)} \mathbf{R}_{(r)} = \mathbf{R}_{(r)} \mathbf{U}_{(r)}, \quad \mathbf{F}_{(i)} = \mathbf{V}_{(i)} \mathbf{R}_{(i)} = \mathbf{R}_{(i)} \mathbf{U}_{(i)} \quad (4.142)$$

führt dies auf

$$\mathbf{F}_{(r)} = \mathbf{V}_{(r)}, \quad \mathbf{F}_{(i)} = \mathbf{R}_{(i)} \mathbf{V}_{(i)} \mathbf{R}_{(i)}. \quad (4.143)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird von dieser *ad hoc* Annahme nicht Gebrauch gemacht.

XIAO, BRUHNS & MEYERS weisen in [XBM00] nach, dass für einen Deformationsprozess in einem Zeitintervall $[0, a]$, bei dem zu jedem Zeitpunkt t sowohl der linke Strecktensor $\mathbf{V}^\#$ als auch $\mathbf{D}^\#$ bekannt sind, sich der Deformationsgradient $\mathbf{F}^\#$ daraus zu jeder Zeit eindeutig bestimmen lässt, wenn die folgende Konsistenzbedingung erfüllt ist

$$\sum_{\sigma=1}^m \mathbf{B}_\sigma^\# \mathbf{D}^\# \mathbf{B}_\sigma^\# = \sum_{\sigma=1}^m \lambda_\sigma^\# \mathbf{B}_\sigma^\# \dot{\mathbf{V}}^\# \mathbf{B}_\sigma^\# \quad . \quad (4.144)$$

Der Deformationsgradient kann dann aus der Polarzerlegung bestimmt werden

$$\mathbf{F}^\# = \mathbf{V}^\# \mathbf{R}^\# \quad . \quad (4.145)$$

Der Rotationstensor wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}^\# = \boldsymbol{\Omega}^\# \mathbf{R}^\# , \quad \mathbf{R}_0^\# = \mathbf{V}_0^{\#-1} \mathbf{F}_0^\# \quad (4.146)$$

und den Spintensor

$$\boldsymbol{\Omega}^\# = \sum_{\sigma \neq \tau=1}^m \left(\frac{2\lambda_\sigma^\# \lambda_\tau^\#}{\lambda_\sigma^{\#2} - \lambda_\tau^{\#2}} \mathbf{B}_\sigma^\# \mathbf{D}^\# \mathbf{B}_\tau^\# - (\lambda_\sigma^\# - \lambda_\tau^\#)^{-1} \mathbf{B}_\sigma^\# \dot{\mathbf{V}}^\# \mathbf{B}_\tau^\# \right) \quad (4.147)$$

bestimmt.

Zur Berechnung der kinematischen Größen, die den reversiblen und irreversiblen Deformationen zugeordnet sind, wird die Anfangskonfiguration, die gleichzeitig als Referenzkonfiguration eingeführt wird, so gewählt, dass die drei Konfigurationen $\boldsymbol{\chi}_0$, $\boldsymbol{\chi}^\#$ und $\boldsymbol{\chi}_t$ zusammenfallen⁵

$$\mathbf{F}(t_0 = 0) = \mathbf{F}_{(r)}(t_0 = 0) = \mathbf{F}_{(i)}(t_0 = 0) = \mathbf{1} \quad . \quad (4.148)$$

Dann lässt sich für ein hyperelastisches Materialgesetz für das reversible Verhalten die Eindeutigkeit der Berechnung aller Deformationsanteile, die sich aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten ergeben, zeigen. Für den reversiblen Anteil der Deformationen, wird von einem allgemeinen hyperelastischen Ansatz ausgegangen

$$\mathbf{h}_{(r)} = \ln \mathbf{V}_{(r)} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\pi}} \quad . \quad (4.149)$$

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit kann nach (4.96) angegeben werden

$$\mathbf{D}_{(r)} = \frac{1}{2} \overline{\left(\ln \mathbf{B}_{(r)} \right)^{\circ} \log} \quad . \quad (4.150)$$

⁵Allgemein kann die Anfangszwischenkonfiguration auch so gewählt werden, dass sie gegenüber der Referenzkonfiguration eine Starrkörperrotation beinhaltet.

Die Konsistenzbedingung (4.144) ist in diesem Fall erfüllt, wie sich durch Einsetzen von (4.149) und (4.96) in (4.93) und (4.94) und anschließende Summation über die verschiedenen Eigenprojektionen zeigt

$$\sum_{\sigma=1}^m \mathbf{B}_{(\sigma)} \overline{\left(\ln \mathbf{V}_{(\sigma)} \right)} \mathbf{B}_{(\sigma)} = \sum_{\sigma=1}^m \lambda_{(\sigma)} \mathbf{B}_{(\sigma)} \dot{\mathbf{V}}_{(\sigma)} \mathbf{B}_{(\sigma)} = \sum_{\sigma=1}^m \mathbf{B}_{(\sigma)} \mathbf{D}_{(\sigma)} \mathbf{B}_{(\sigma)} \quad . \quad (4.151)$$

Folglich kann der reversible Deformationsgradient $\mathbf{F}_{(\sigma)}$ ausgehend von den Anfangsbedingungen im Zeitintervall $[0; a]$ zu jeder Zeit eindeutig bestimmt werden. Aus (4.149) erhält man

$$\mathbf{V}_{(\sigma)} = \exp \frac{\partial \Sigma}{\partial \pi} \quad (4.152)$$

und daraus die reversible Rotation durch Integration der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}_{(\sigma)} = \mathbf{\Omega}_{(\sigma)} \mathbf{R}_{(\sigma)}, \quad \mathbf{R}_{(\sigma)} = \mathbf{V}_{(\sigma)}^{-1} \mathbf{F}_{(\sigma)} \quad , \quad (4.153)$$

wobei für den reversiblen Spin die in [XBM00] angegebene Form verwendet werden kann

$$\mathbf{\Omega}_{(\sigma)} = \mathbf{\Omega}^{log} - \sum_{\sigma \neq \tau=1}^m \left(\frac{2 \lambda_{(\sigma)} - \lambda_{(\tau)}}{\lambda_{(\tau)}^2 - \lambda_{(\sigma)}^2} + \frac{1}{\ln \lambda_{(\sigma)} - \ln \lambda_{(\tau)}} \right) \mathbf{B}_{(\sigma)} \mathbf{D}_{(\sigma)} \mathbf{B}_{(\tau)} \quad . \quad (4.154)$$

Damit kann der reversible Anteil des Deformationsgradienten berechnet werden

$$\mathbf{F}_{(\sigma)} = \mathbf{V}_{(\sigma)} \mathbf{R}_{(\sigma)} \quad . \quad (4.155)$$

Seinen irreversiblen erhält man aus (4.134) zu

$$\mathbf{F}_{(\sigma)} = \mathbf{F}_{(\sigma)}^{-1} \mathbf{F}_{(\sigma)} \quad . \quad (4.156)$$

Zur Bestimmung des irreversiblen Anteils des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit wird zunächst mit Hilfe der materiellen Zeitableitung des reversiblen Anteils des linken Strecktensors

$$\dot{\mathbf{V}}_{(\sigma)} = \mathbf{\Omega}^{log} \mathbf{V}_{(\sigma)} - \mathbf{V}_{(\sigma)} \mathbf{\Omega}^{log} + \sum_{\sigma, \tau=1}^m \frac{\lambda_{(\sigma)} - \lambda_{(\tau)}}{\ln \lambda_{(\sigma)} - \ln \lambda_{(\tau)}} \mathbf{B}_{(\sigma)} \mathbf{D}_{(\sigma)} \mathbf{B}_{(\tau)} \quad (4.157)$$

der reversible Anteil des Tensors der Drehgeschwindigkeit bestimmt

$$\mathbf{W}_{(\sigma)} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{V}}_{(\sigma)} \mathbf{V}_{(\sigma)}^{-1} + \mathbf{V}_{(\sigma)} \mathbf{\Omega} \mathbf{V}_{(\sigma)}^{-1} - (\dot{\mathbf{V}}_{(\sigma)} \mathbf{V}_{(\sigma)}^{-1} + \mathbf{V}_{(\sigma)} \mathbf{\Omega} \mathbf{V}_{(\sigma)}^{-1})^T \right) \quad . \quad (4.158)$$

Damit kann der irreversible Anteil des Geschwindigkeitsgradienten ermittelt werden, der um die reversiblen Deformationsanteile bereinigt wird

$$\mathbf{L}_{(i)} = \mathbf{F}_{(r)}^{-1} \mathbf{L}_{(ri)} \mathbf{F}_{(r)} = \mathbf{F}_{(r)}^{-1} \left(\mathbf{L}_{(r)} - (\mathbf{D}_{(r)} + \mathbf{W}_{(r)}) \right) \mathbf{F}_{(r)} . \quad (4.159)$$

Aufspalten in symmetrischen und antimetrischen Anteil liefert anschließend den irreversiblen Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeits- und des Drehgeschwindigkeitstensors

$$\mathbf{D}_{(i)} = \text{sym} \left(\mathbf{L}_{(i)} \right) , \quad \mathbf{W}_{(i)} = \text{skw} \left(\mathbf{L}_{(i)} \right) . \quad (4.160)$$

Für die Beobachtertransformation nach (4.53) lässt sich nachweisen, dass die vorgeschlagene Theorie die Bezugsindifferenzforderung vollständig erfüllt. Die von NAGHDI [Nag90] angegebenen Transformationsbeziehungen bei einer um $\bar{\mathbf{Q}}$ gegenüber der Anfangsreferenzkonfiguration rotierten Anfangszwischenkonfiguration in ein um $\mathbf{Q}^\#$ rotiertes Bezugssystem

$$\mathbf{F}_{(i)}^\# = (\mathbf{F}_{(r)}^\#)^{-1} \mathbf{F}_{(i)}^\# = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{(i)} \quad (4.161)$$

werden eingehalten.

5. Thermomechanischer Rahmen

Thermomechanische Prozesse sind Prozesse, bei denen das Temperaturfeld, die Materialstruktur und das Spannungs- und Verzerrungsfeld gegenseitig in komplizierter Weise voneinander abhängen. Sie sind häufig von dissipativen Effekten begleitet.

Nach Lehmann [Leh83] basiert die Beschreibung thermomechanischer Prozesse auf der

- Beschreibung des Anfangszustands, bei der alle thermomechanischen Zustandsgrößen für jedes Körperelement bekannt sind, und der
- Angabe der Geschichte aller unabhängigen Prozessvariablen, wie die vorgegebenen thermomechanischen Randbedingungen und die vorgegebenen volumenhaft auftretenden Kräfte und Energiequellen.

Ziel einer solchen Beschreibung ist die Angabe der Werte der abhängigen Prozessvariablen. Das sind nicht vorgegebene thermodynamische Randgrößen, Spannungen, Verschiebungen und eventuell nicht vorgegebene Kräfte und Energiequellen im Inneren und interne Zustandsvariablen. Der Zusammenhang zwischen den unabhängigen und den abhängigen Größen wird durch materialunabhängige Bilanzgleichungen, Kompatibilitätsbedingungen und Konstitutivgleichungen hergestellt.

In diesem Kapitel werden zunächst die mechanischen materialunabhängigen Bilanzgleichungen angegeben, die danach zur Beschreibung dissipativer Prozesse auf thermodynamische Bilanzen erweitert werden. Darauf aufbauend wird auf die Beschreibung thermomechanischer Prozesse mit internen Zustandsvariablen eingegangen, die den 2. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Dazu wird eine Spannungsraumformulierung der konstitutiven Gleichungen auf Basis der GIBBS-Energie gewählt.

5.1 Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen beschreiben allgemeingültige Prinzipie bzw. universelle Naturgesetze. Sie lassen sich in integraler Form als globale Aussagen für den Gesamtkörper angeben und gelten somit unabhängig von der Kontinuumstheorie. Diese Form nennt man *schwache Formulierung*. Im Rahmen einer Kontinuumstheorie, in der alle Zustandsgrößen stetige Funktionen des Ortes sind, muss als hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Bilanzgleichungen für den gesamten Körper die lokale Bilanzgleichung erfüllt sein; dies nennt man

die *starke Formulierung*. Die Bilanzgleichungen können sowohl in der aktuellen als auch in der Referenzkonfiguration des betrachteten Körpers formuliert werden.

5.1.1 Mechanische Bilanzgleichungen

5.1.1.1 Massenbilanz

Die Masse eines Körpers B kann als Integral der Dichte über das Volumen integriert werden

$$m := \int_{B_0} \rho_0 dV_0 = \int_{B_t} \rho dV \quad . \quad (5.1)$$

Mit der Transformation von Volumenelementen (4.24) und (4.25) kann damit das Verhältnis der Dichten in der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration wie folgt angegeben werden

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J \quad . \quad (5.2)$$

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Masse eines Körpers muss die zeitliche Ableitung der Masse verschwinden. In der aktuellen Konfiguration erhält man mit (4.24)

$$\dot{m} = \frac{Dm}{Dt} = \int_{B_t} (\dot{\rho} dV + \rho(d\dot{V})) = \int_{B_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr}(\mathbf{D})) dV \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.3)$$

Setzt man Stetigkeit des Integranden voraus, so muss diese Forderung auch lokal erfüllt sein, es folgt die Massenbilanz in der starken Form

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr}(\mathbf{D}) = 0, \quad \dot{\rho}_0 = 0 \quad . \quad (5.4)$$

5.1.1.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz stellt einen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Bewegungsgröße und den am Körper wirkenden Kräften dar. Der Impulsvektor ist definiert durch

$$\mathbf{I} = \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{v} dV_0 = \int_{B_t} \rho \mathbf{v} dV \quad . \quad (5.5)$$

Die zeitliche Änderung des Impulses ist der auf den Körper wirkenden Kraft proportional und erfolgt in der Richtung der resultierenden Kraft. Diese Aussage wird zum Impulssatz zusammengefasst. In der aktuellen Konfiguration lautet dieser

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{B_t} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial B_t} \mathbf{f} dA \quad . \quad (5.6)$$

Hierbei stellt \mathbf{b} die volumenhaft und \mathbf{f} die flächenhaft angreifenden Kräfte dar. Einsetzen von (4.104), (4.105) und Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV \quad (5.7)$$

führt zu

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (5.8)$$

Nutzt man weiterhin den Massenerhaltungssatz (5.4), so ergibt sich die starke Form der Impulsbilanz, die auch aus dem lokalen Kräftegleichgewicht am Volumenelement abgeleitet werden kann

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (5.9)$$

In der Referenzkonfiguration lautet die Impulsbilanz in der schwachen Form

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} + \operatorname{Div} {}^I \mathbf{P} \, dV_0 \quad (5.10)$$

in der lokalen Form ergibt sich wiederum

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \rho_0 \mathbf{b} + \operatorname{Div} {}^I \mathbf{P} \quad (5.11)$$

5.1.1.3 Drehimpulsbilanz

Analog zur Impulsbilanz stehen die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtdrehimpulses eines Körpers und das Gesamtmoment aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte im Gleichgewicht.¹ Diese stellt sich in der aktuellen Konfiguration wie folgt dar

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) \, dA \quad (5.12)$$

Einsetzen der Massenbilanz (5.4) und der Impulsbilanz (5.9) führt auf die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (5.13)$$

Die materielle Form ergibt sich daraus durch Einsetzen von (4.107)₁ mit dem ersten bzw. (4.108)₂ mit dem zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$${}^I \mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} {}^I \mathbf{P}^T, \quad {}^{II} \mathbf{P} = {}^{II} \mathbf{P}^T \quad (5.14)$$

¹Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik haben die Körperpartikel keine Drehfreiheitsgrade und es werden dementsprechend keine volumenhaft und flächenhaft angreifenden Momente eingeführt.

5.1.1.4 Mechanische Energiebilanz

Die mechanische Energiebilanz bilanziert die Leistung der eingprägten Kräfte mit der Formänderungsleistung und der Änderung der kinetischen Energie des Körpers. Sie lässt sich direkt aus der Impulsbilanz (5.6) ableiten. Mit den Größen

$$\text{kinetische Energie: } E^{kin} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV \quad (5.15)$$

$$\text{Leistung der eingprägten Kräfte: } P = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dA \quad (5.16)$$

$$\text{und Formänderungs-Leistung: } W = \int_{\mathcal{B}_t} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) dV \quad (5.17)$$

lässt sich der Energiesatz der Mechanik wie folgt darstellen

$$\frac{DE^{kin}}{Dt} = P - W \quad . \quad (5.18)$$

5.1.2 Thermodynamische Erweiterungen der Bilanzgleichungen

Zur Berücksichtigung dissipativer Effekte muss die mechanische Energiebilanz um Anteile zur Beschreibung der inneren Energie, die den thermischen Zustand des Körpers mit einbezieht, erweitert werden. Hierzu werden die

$$\begin{aligned} \text{innere Energie: } U &:= \int_{\mathcal{B}_t} \rho u dV \\ \text{und Wärmezufuhr: } Q &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho r dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} h dA \end{aligned} \quad (5.19)$$

eingeführt. Die Wärmezufuhr besteht aus inneren Wärmequellen, die man durch Integration der Massendichte skalarer Wärmequellen r über die Masse des Körpers erhält und aus den einfließenden Wärmeströmen.

5.1.2.1 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik bilanziert die Änderung des energetischen Zustands eines Körpers, bestehend aus innerer und kinetischer Energie, mit der Leistung, die diesem Körper zugeführt wird. Diese besteht aus der Leistung der eingprägten Kräfte und der zugeführten Wärme. In der 1. Fassung lautet der 1. Hauptsatz

$$\frac{D}{Dt} (E^{kin} + U) = P + Q \quad . \quad (5.20)$$

Die einfließenden Energieströme h können auch durch den Wärmestromvektor \mathbf{q} dargestellt werden

$$h := -\mathbf{q} \mathbf{n} \quad . \quad (5.21)$$

Durch Einsetzen der mechanischen Energiebilanz (5.18) und von (5.15), (5.16), (5.19) und mit (5.21) ergibt sich der 1. Hauptsatz in der 2. Fassung nach Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes (5.7) zu

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r) \, dV \quad , \quad (5.22)$$

bzw. in der lokalen Formulierung

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad (5.23)$$

Zur Darstellung der Energiebilanz in der Referenzkonfiguration wird der Wärmestrom auf das Oberflächenelement in der Referenzkonfiguration bezogen

$$(\mathbf{q} \mathbf{n}) dA = (\mathbf{Q} \mathbf{N}) dA_0 \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} \quad (5.24)$$

und man erhält

$$\rho_0 \dot{u} = {}^I \mathbf{P}^T : \dot{\mathbf{F}} - \operatorname{Div} \mathbf{Q} + \rho_0 r \quad . \quad (5.25)$$

5.1.2.2 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 1. Hauptsatz macht keine Angaben über die Richtung von Energietransformationen in einem Körper, sondern stellt nur eine Bilanzgleichung der gesamten Energien dar. Als ein Maß, wieviel Energie durch irreversible Prozesse in nicht mehr nutzbare Energie transformiert wird, dient die Entropie. Die Entropie ist eine extensive Zustandsgröße, es gilt

$$S := \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dV \quad . \quad (5.26)$$

Die Änderung der Entropie setzt sich aus äußerer (externer) und innerer (interner) Entropieänderung zusammen:

$$DS = D S_{(e)} + D S_{(i)} \quad (5.27)$$

Die Änderung der äußeren Entropie resultiert aus inneren Wärmequellen und dem Wärmefluss. Die Änderung der inneren Entropie wird durch die spezifische Entropieproduktion

γ dargestellt. Damit ergibt sich für die Raten der äußeren und inneren Entropiezufuhr

$$\begin{aligned}\frac{DS_{(e)}}{Dt} &= \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\rho r}{\Theta} dV + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \frac{h}{\Theta} dA \\ \frac{DS_{(i)}}{Dt} &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho\gamma dV \quad .\end{aligned}\quad (5.28)$$

Die globale Form der Entropiebilanz kann zusammengefasst werden zu

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho s dV = \int_{\mathcal{B}_t} \left(\frac{\rho r}{\Theta} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) + \rho\gamma \right) dV \quad .\quad (5.29)$$

In der starken Form lautet die Entropiebilanz unter Berücksichtigung der Massenbilanz

$$T\dot{s} = \underbrace{r - \frac{\Theta}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right)}_{\Theta \dot{s}_{(e)}} + \underbrace{\Theta\gamma}_{\Theta \dot{s}_{(i)}} \quad (5.30)$$

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik postuliert, dass die Änderung der inneren Entropie stets größer oder gleich Null ist. Damit ist gewährleistet, dass die Zunahme der Entropie im Körper größer oder gleich der zugeführten Wärmeleistung ist. Diese Forderung lautet global

$$DS_{(i)} \geq 0 \rightarrow \gamma \geq 0 \quad .\quad (5.31)$$

Eingesetzt in die Entropiebilanz erhält man die GIBBS-DUHEM-Ungleichung in der globalen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho s dV - \int_{\mathcal{B}_t} \left(\frac{\rho r}{\Theta} - \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) dV \geq 0 \quad (5.32)$$

bzw in der lokalen Form

$$\rho\dot{s} - \frac{\rho r}{\Theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \geq 0 \quad .\quad (5.33)$$

In der Referenzkonfiguration lautet die GIBBS-DUHEM-Ungleichung in der globalen Form

$$\rho_0 \int_{\mathcal{B}_0} \dot{s} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\rho_0 r}{\Theta} + \operatorname{Div} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) dV_0 \geq 0 \quad (5.34)$$

und in der lokalen Form

$$\rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r}{\Theta} + \operatorname{Div} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \geq 0 \quad .\quad (5.35)$$

Einsetzen des 1. Hauptsatzes liefert die lokale CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung in der aktuellen

$$\rho\Theta\dot{s} - \rho\dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \operatorname{grad} \Theta \geq 0 \quad (5.36)$$

bzw. in der Referenzkonfiguration

$$\rho_0\Theta\dot{s} - \rho_0\dot{u} + {}^I\mathbf{P}^T : \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \operatorname{Grad} \Theta \geq 0 \quad . \quad (5.37)$$

Mit weiteren eingeführten Energieformen lassen sich zahlreiche andere Formulierungen des 2. Hauptsatzes angeben, die sich jedoch alle auf die o.a. Formen zurückführen lassen.

5.2 Beschreibung des thermomechanischen Zustandes und thermodynamischer Prozesse

Die makroskopisch beobachtbaren inelastischen Deformationen und Schädigungsprozesse werden durch viele verschiedene Mechanismen, die auf der Mikroebene stattfinden, bestimmt. Eine Übersicht einiger relevanter Mechanismen zur Beschreibung duktil geschädigten Verhaltens in metallischen Werkstoffen gibt ASHBY [Ash83] an.

Zur phänomenologischen Modellierung der inelastischen Deformation gibt es verschiedene Konzepte. Hierzu zählen die Einführung viskoser Spannungen, die Funktionaldarstellung mit Geschichtsintegralen und die Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen nach COLEMAN & NOLL [CN63], bei der die Geschichtsabhängigkeit des Materialzustands formal mathematisch parametrisiert wird.

Die Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen liefert nach KRAJČINOVIC & FONSEKA [KF81] einen passenden Rahmen für die Entwicklung einer Kontinuumschädigungstheorie und wird in der vorliegenden Arbeit verwendet. Sie basiert nach LEHMANN [Leh89], [Leh91] im wesentlichen auf zwei grundlegenden Annahmen. Einerseits wird angenommen, dass der betrachtete Körper als klassisches Kontinuum angesehen werden kann, auch wenn er durch Mikrodefekte geschädigt ist. Die Mikrodefektmuster werden demnach durch verschiedene interne Zustandsvariablen berücksichtigt. Weiterhin wird angenommen, dass der thermodynamische Zustand eines jeden Materialelements, der sich aus der gesamten Vorgeschichte aller unabhängiger Prozessvariablen ergibt, eindeutig durch die aktuellen Werte des Satzes unabhängiger Prozessvariablen und interner Zustandsvariablen definiert ist und sich die abhängigen Zustandsvariablen hieraus bestimmen lassen. Da in einer phänomenologischen Modellierung des Materialverhaltens nur bestimmte, problemabhängige Aspekte interessieren, reicht es aus, sich auf eine Anzahl interner Zustandsvariablen, die zur Beschreibung der gewünschten Phänomene ausreichen, zu beschränken. Die Menge der internen Zustandsvariablen besteht aus skalaren und tensoriellen Größen zur Beschreibung

isotroper und anisotroper Phänomene

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i, \boldsymbol{\alpha}_j\} \quad . \quad (5.38)$$

Eine konstitutive Beschreibung beinhaltet daher neben den stoffunabhängigen Gleichungen Konstitutivgleichungen, die die Änderungsrate der internen Zustandsvariablen in Abhängigkeit der unabhängigen Zustandsvariablen ausdrücken.

5.2.1 Weitere Energieformen

Neben der inneren Energie und der Entropie können weitere Energieformen, zur Zustandsbeschreibung von Körpern eingeführt werden. Die Wahl der Energieform, von der eine konstitutive Formulierung ausgeht, hängt von der Wahl der unabhängigen Zustandsvariablen ab.

Laut LEHMANN [Leh91] ist der inelastische Anteil der Verzerrungen keine interne Zustandsvariable, sondern lediglich der reversible Anteil der Verzerrungen. Damit kann die spezifische innere Energie als Funktion des reversiblen Anteils der Verzerrungen, der spezifischen Entropie und der internen Zustandsvariablen angegeben werden

$$u = u(\underset{(r)}{\boldsymbol{h}}, s, \boldsymbol{\alpha}) \quad . \quad (5.39)$$

Da diese Größen alle in der aktuellen Konfiguration agieren, ist die innere Energie als Funktion der Zustandsvariablen in der aktuellen Konfiguration angegeben.

Mit Hilfe der Legendre-Transformation lässt sich der energetische Zustand eines Körpers durch weitere Energieformen darstellen. Zusätzlich zur inneren Energie werden die freie HELMHOLTZ-Energie ϕ , die GIBBS-Energie Ψ und die freie Entropie h eingeführt. Dabei werden die unabhängigen Zustandsvariablen $\underset{(r)}{\boldsymbol{h}}$ und s durch die Spannung $\boldsymbol{\pi}$ und die Temperatur Θ ersetzt. Die verschiedenen Energieformen sind in Tabelle 5.1 mit den Transformationsbeziehungen für die Argumente in der aktuellen und in der mit \boldsymbol{R} zurückrotierten LAGRANGE'schen Konfiguration angegeben. Hierbei lassen sich die Temperatur, die Entropie, die reversiblen Verzerrungen und die Spannung durch die partiellen Ableitungen der verschiedenen Energieformen darstellen, die z.B. OBERSTE-BRANDENBURG in [OB99] und RANIECKI in [Ran84] angibt.

Für die hier verwendeten Argumente erhält man

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \quad (5.40)$$

$$\Theta := \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{\Pi} := \rho_0 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \mathbf{H}_{(r)}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{H}_{(r)}} \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\pi} := \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{h}_{(r)}} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}_{(r)}} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{H}_{(r)} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{\Pi}} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{\Pi}} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{h}_{(r)} = -\rho_0 \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\pi}} = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} \quad (5.45)$$

Bezeichnung	Transformation mit LAGRANGE'schen Argumenten	Transformation mit EULER'schen Argumenten
freie Energie $u = \hat{u}(\mathbf{H}_{(r)}, s, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = u(\mathbf{h}_{(r)}, s, \boldsymbol{\alpha})$		
HELMHOLTZ-Energie $\phi = \hat{\phi}(\mathbf{H}_{(r)}, \Theta, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \phi(\mathbf{h}_{(r)}, \Theta, \boldsymbol{\alpha})$	$\phi = u - \frac{\partial u}{\partial s} s$ $= u - \Theta s$	$\phi = u - \frac{\partial u}{\partial s} s$ $= u - \Theta s$
GIBBS-Energie $\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{\Pi}, \Theta, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \Psi(\boldsymbol{\pi}, \Theta, \boldsymbol{\alpha})$	$\Psi = \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{H}_{(r)}} : \mathbf{H}_{(r)}$ $= \phi - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{\Pi} : \mathbf{H}_{(r)}$	$\Psi = \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{h}_{(r)}} : \mathbf{h}_{(r)}$ $= \phi - \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\pi} : \mathbf{h}_{(r)}$
freie Entropie $h = \hat{h}(\mathbf{\Pi}, s, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = h(\boldsymbol{\pi}, s, \boldsymbol{\alpha})$	$h = \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \Theta$ $= \Psi + \Theta s$	$h = \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \Theta$ $= \Psi + \Theta s$

Tabelle 5.1: Verschiedene Ausdrücke für die spezifische innere Energie eines Körpers

Die Gleichungen (5.40) und (5.44) bzw. (5.45) werden auch kalorische und thermische Zustandsgleichung in der zurückrotierten bzw. aktuellen Konfiguration genannt.

Zur Darstellung des 2. Hauptsatzes mit der HELMHOLTZ-Energie wird die materielle Zeita-

bleitung von ϕ gebildet und in (5.36) bzw. (5.37) eingesetzt

$$\rho(\dot{\phi} + \dot{\Theta}s) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \operatorname{grad} \Theta \geq 0 \quad (5.46)$$

$$-\rho_0 \left(\dot{\phi} + \dot{\Theta}s \right) + \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \operatorname{Grad} \Theta \geq 0 \quad . \quad (5.47)$$

Zur Darstellung unter Verwendung der GIBBS-Energie muss diese in der zurückrotierten Konfiguration materiell abgeleitet werden

$$\dot{\Psi} = \dot{\phi} - \frac{1}{\rho_0} \left(\dot{\boldsymbol{\Pi}} : \underset{(r)}{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\Pi} : \underset{(r)}{\dot{\mathbf{H}}} \right) \quad (5.48)$$

und man erhält ausgehend von der additiven Aufspaltung der Rate des zurückrotierten HENCKY'schen Verzerrungstensors

$$\dot{\mathbf{H}} = \underset{(r)}{\dot{\mathbf{H}}} + \underset{(ri)}{\dot{\mathbf{H}}} \quad (5.49)$$

für die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung

$$-\rho_0 \left(\dot{\Psi} + \dot{\Theta}s - \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \underset{(ri)}{\dot{\mathbf{H}}} \right) - \dot{\boldsymbol{\Pi}} : \underset{(r)}{\mathbf{H}} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \operatorname{Grad} \Theta \geq 0 \quad . \quad (5.50)$$

Damit alle hier vorkommenden tensoriellen Größen in der mit \mathbf{R} zurückrotierten LAGRANGE'schen Konfiguration definiert sind, wird der letzte Summand mit

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{q} \quad \text{und} \quad \widehat{\operatorname{grad} \Theta} = \mathbf{R}^T \star (\operatorname{grad} \Theta) \quad (5.51)$$

unter Ausnutzung von (5.24) ersetzt

$$-\rho_0 \left(\dot{\Psi} + \dot{\Theta}s - \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \underset{(ri)}{\dot{\mathbf{H}}} \right) - \dot{\boldsymbol{\Pi}} : \underset{(r)}{\mathbf{H}} - \frac{J}{\Theta} \hat{\mathbf{q}} \widehat{\operatorname{grad} \Theta} \geq 0 \quad . \quad (5.52)$$

5.2.2 Prozessbeschreibung auf Basis der Gibbs-Energie

Wenn die Spannungen $\boldsymbol{\Pi}$ und die Temperatur Θ als unabhängige Zustandsvariablen in der konstitutiven Beschreibung eingeführt werden, kann die GIBBS-Funktion als thermodynamisches Potential angesetzt werden. Man spricht in diesem Fall auch von Spannungsraumformulierungen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen elastisch-plastische Deformationen mit Schädigung beschrieben werden. Unter Beachtung des thermischen Materialzustandes kann die Menge der Zustandsvariablen in Untermengen zur Beschreibung der einzelnen Phänomene - Schädigung, Plastizität und thermischer Zustand - unterteilt werden. Zur Beschreibung

des thermomechanischen Verhaltens elastisch-plastischer Materialien mit Schädigung wird folgende Menge von Zustandsvariablen in der zurückrotierten Konfiguration eingeführt

$$\hat{\alpha} = \left\{ \hat{\alpha}_{(p)}, \hat{\alpha}_{(d)}, \hat{\alpha}_{(th)} \right\} . \quad (5.53)$$

Die einzelnen Untermengen können tensorielle interne Zustandsvariablen beliebiger Stufe enthalten. Als abhängige Zustandsgrößen ergeben sich in diesem Fall der reversible Anteil der Dehnungen $\mathbf{H}_{(i)}$, die Entropie s und der Wärmestromvektor $\hat{\mathbf{q}}$, die durch konstitutive Gleichungen bestimmt werden. Dabei muss der 2. Hauptsatz in Form der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung erfüllt sein. Um diese Forderung sicherzustellen, wird die materielle Zeitableitung von Ψ nach Anwendung der Kettenregel in der zurückrotierten Konfiguration gebildet

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{\Pi}} : \dot{\mathbf{\Pi}} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}} : \dot{\hat{\alpha}} \quad (5.54)$$

und in (5.52) eingesetzt

$$\begin{aligned} \left(-\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{\Pi}} - \mathbf{H}_{(r)} \right) : \dot{\mathbf{\Pi}} - \left(\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Theta} + s \right) \dot{\Theta} + \\ \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}_{(ri)} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}} : \dot{\hat{\alpha}} - \frac{J}{\Theta} \hat{\mathbf{q}} \widehat{\text{grad}} \Theta \geq 0 . \end{aligned} \quad (5.55)$$

Einsetzen von (5.40) und (5.45) liefert die dissipative Ungleichung

$$\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}_{(ri)} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}} : \dot{\hat{\alpha}} - \frac{J}{\Theta} \hat{\mathbf{q}} \widehat{\text{grad}} \Theta \geq 0 . \quad (5.56)$$

Die Forderung, dass sowohl für das thermische Problem, als auch für das mechanische Problem der 2. Hauptsatz unabhängig voneinander erfüllt sein muss, führt unter Einbezug von (5.53) zur weiteren Entkopplung der dissipativen Ungleichung. Es wird damit gefordert, dass die thermische und die mechanische dissipative Ungleichung erfüllt werden

$$-\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}_{(th)}} : \dot{\hat{\alpha}}_{(th)} - \frac{J}{\Theta} \hat{\mathbf{q}} \widehat{\text{grad}} \Theta \geq 0 \quad (5.57)$$

$$\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}_{(ri)} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}_{(p)}} : \dot{\hat{\alpha}}_{(p)} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\alpha}_{(d)}} : \dot{\hat{\alpha}}_{(d)} \geq 0 . \quad (5.58)$$

Durch Vorrotieren mit \mathbf{R} ergeben sich die dissipativen Ungleichungen in der aktuellen Konfiguration

$$-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(th)}} : \dot{\alpha}_{(th)}^R - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \text{ grad } \Theta \geq 0 \quad (5.59)$$

$$\pi : \dot{\mathbf{h}}_{(ri)}^R - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(p)}} : \dot{\alpha}_{(p)}^R - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(d)}} : \dot{\alpha}_{(d)}^R \geq 0 \quad (5.60)$$

Die polare Rate lässt sich mit (4.102) durch die in den Konstitutivgesetzen verwendete logarithmische Rate ersetzen und unter Ausnutzung von (4.96) ergibt sich

$$-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(th)}} : \left(\dot{\alpha}_{(th)}^{\log} - \alpha_{(th)} \Omega^{LR} + \Omega^{LR} \alpha_{(th)} \right) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \text{ grad } \Theta \geq 0 \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \pi : \left(\mathbf{D}_{(ri)} - \mathbf{h}_{(i)} \Omega^{LR} + \Omega^{LR} \mathbf{h}_{(i)} \right) - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(p)}} : \left(\dot{\alpha}_{(p)}^{\log} - \alpha_{(p)} \Omega^{LR} + \Omega^{LR} \alpha_{(p)} \right) & \quad (5.62) \\ - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(d)}} : \left(\dot{\alpha}_{(d)}^{\log} - \alpha_{(d)} \Omega^{LR} + \Omega^{LR} \alpha_{(d)} \right) & \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Die in (5.61) und (5.62) auftretenden Koppelterme, die Ω^{LR} enthalten, erschweren die Formulierung thermodynamisch konsistenter Konstitutivgleichungen unter Verwendung der logarithmischen Zeitableitung erheblich. BONGMBA greift in [Bon01] eine Aussage von HILL [Hil78] auf, wonach sich für moderate Deformationen die materielle Zeitableitung von \mathbf{H} durch die zurückrotierte Streckgeschwindigkeit approximieren lässt

$$\dot{\mathbf{H}} \approx \mathbf{R} \star \mathbf{D} \quad (5.63)$$

Setzt man diese Näherung in die Formänderungsleistung ein,

$$\dot{w} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{H}} \approx \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi} : \mathbf{R}^T \star \mathbf{D} = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{D} \quad (5.64)$$

so lässt sich die KIRCHHOFF-Spannung durch $\boldsymbol{\pi}$ annähern

$$\boldsymbol{\pi} \approx \boldsymbol{\tau} \quad (5.65)$$

Daher ist für diesen Fall die logarithmische Rate ungefähr gleich der polaren Rate. Die Terme mit Ω^{LR} können demnach vernachlässigt werden und (5.61) und (5.62) sollen als erfüllt gelten, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind

$$-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(th)}} : \dot{\alpha}_{(th)}^{\log} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \text{ grad } \Theta \geq 0 \quad (5.66)$$

$$\pi : \mathbf{D}_{(ri)} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(p)}} : \dot{\alpha}_{(p)}^{\log} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{(d)}} : \dot{\alpha}_{(d)}^{\log} \geq 0 \quad (5.67)$$

5.2.3 Das Konzept der Generalized Standard Materials

Eine Möglichkeit zur Erfüllung der mechanischen dissipativen Ungleichung (5.67) bietet das Konzept der Generalized Standard Materials. Dazu werden die einzelnen Summanden in (5.67) als Produkt des Vektors thermodynamischer Flüsse \mathbf{Y} und des Vektors der dazu konjugierten Kräfte \mathbf{Z} zusammengefasst und es ergibt sich folgende vereinfachte Form (siehe KRAJČINOVIC [Kra83])

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y} &= \left\{ \mathbf{D}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}_{(p)}^{log}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}_{(d)}^{log} \right\} \\ \mathbf{Z} &= \left\{ \Pi, -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{(p)}}, -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{(d)}} \right\} \end{aligned} \right\} \mathbf{Y} : \mathbf{Z} \geq 0 \quad . \quad (5.68)$$

Allgemein ist jeder thermodynamische Fluss \mathbf{Y}_i eine Funktion der Geschichtsfunktionale aller thermodynamischen Kräfte. Wird jedoch angenommen, dass jeder thermodynamische Fluss \mathbf{Y}_i nur vom Funktional der zu ihm konjugierten thermodynamischen Kraft \mathbf{X}_i abhängt, lässt sich nach HAYAKAWA, MURAKAMI & LIU [HML98] die Existenz eines skalarwertigen Dissipationspotentials nachweisen, in dem die internen Zustandsvariablen als Parameter auftreten

$$F = F(\mathbf{Z}_i; \boldsymbol{\alpha}_{(p)}, \boldsymbol{\alpha}_{(d)}) \quad . \quad (5.69)$$

Die zugehörigen Flüsse lassen sich als äußere Normalenvektoren an die Potentialfläche im Raum der thermodynamischen Kraft ableiten

$$\mathbf{Y}_i = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Z}_i} \quad . \quad (5.70)$$

Die Wahl des Dissipationspotentials als homogene, konvexe Funktion der thermodynamischen Kräfte und der konjugierten Flüsse nach (5.70) stellt folglich eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der mechanischen dissipativen Ungleichung dar (siehe MAUGIN [Mau92]).

5.3 Thermomechanische Kopplung

Ausgehend vom 1. Hauptsatz in der Form (5.23) erhält man mit der Definition der GIBBS-Energie und der thermischen und kalorischen Zustandsgleichung die Rate der Entropie

$$\rho_0 \Theta \dot{s} = \rho_0 r - J \operatorname{div} \mathbf{q} + \Pi : \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{(ri)} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\boldsymbol{\alpha}}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \quad . \quad (5.71)$$

Ableiten der kalorischen Zustandgleichung nach der Zeit liefert mit der isobaren Wärmekapazität

$$c_p = -\Theta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2} \right) \quad (5.72)$$

die Differentialgleichung für die Temperaturentwicklung

$$\begin{aligned} c_p \dot{\Theta} = & r - \frac{1}{\rho_0} J \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \underset{(ri)}{\dot{\mathbf{H}}} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\boldsymbol{\alpha}}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \\ & + \Theta \left\{ \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \Theta \partial \boldsymbol{\Pi}} : \dot{\boldsymbol{\Pi}} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \Theta \partial \hat{\boldsymbol{\alpha}}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \right\} . \end{aligned} \quad (5.73)$$

Die Koppelterme in der geschweiften Klammer sind i.d.R. vernachlässigbar. Zur Berechnung dieser Gleichung ist ein konstitutiver Ansatz für Ψ aufzustellen, der die Dissipationsungleichungen (5.57) und (5.58) erfüllt.

Die thermische Dissipationsungleichung kann durch das FOURIER'sche Wärmeleitgesetz oder die MAXWELL-CATTANEO-Gleichung erfüllt werden.

6. Elastisches Verhalten

Das Auftreten verteilter Defekte im Material führt bei gleicher Dehnung zu erhöhten Spannungen in der Materialmatrix und somit zu einer Abnahme der elastischen Steifigkeit. Diese Phänomene treten durch die Abnahme der tragenden Restfläche und aufgrund von Spannungserhöhungen durch die Krümmung der Porenoberfläche auf. Der Einfluss von Porenschädigung auf das elastische Materialverhalten soll in dem zu entwickelnden Stoffgesetz berücksichtigt werden, da die bei gleicher Verzerrung erhöhten Spannungen im Material sowohl das inelastische als auch das Versagensverhalten des Werkstoffes beeinflussen.

Zu diesem Zweck wird zunächst eine Übersicht über vorhandene Modelle und Modellierungskonzepte zur Beschreibung des elastischen Verhaltens von Materialien mit Mikrostrukturen, insbesondere Schädigung gegeben.

Die Diskussion dieser Modelle führt zu der Entscheidung, zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens im Rahmen des elastisch-plastischen Stoffgesetzes ein eigenes Modell zu verwenden.

Die Verläufe der effektiven elastischen Konstanten bei anisotroper Porenschädigung werden durch mikromechanische Betrachtungen an einer Materialvolumenzelle ermittelt. Darauf aufbauend wird ein phänomenologisches Modell für die effektiven elastischen Nachgiebigkeiten vorgeschlagen. Dieses Modell wird mit Hilfe zuvor ermittelter Kennwerte an die mikromechanisch hergeleiteten Ergebnisse angepasst.

Bei allen Betrachtungen zum elastischen Verhalten des geschädigten Materials wird aufgrund der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen von isotropem, linear-elastischem Verhalten der Materialmatrix ausgegangen. Weiterhin wird angenommen, dass der logarithmische Dehnungstensor durch den linearen Verzerrungstensor approximiert werden kann $\mathbf{h} \approx \boldsymbol{\epsilon}$.

6.1 Elastisches Verhalten des ungeschädigten Materials

Das ungeschädigte Material verhalte sich linear-elastisch. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen lassen sich wie folgt angeben

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^0\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = {}^0\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (6.2)$$

Dabei lässt sich der elastische Nachgiebigkeitstensor ${}^0\mathbf{D}$ durch Inversion in den Elastizitätstensor ${}^0\mathbf{C}$ überführen und umgekehrt. Bei Isotropie lässt sich das elastische Verhalten mit 2 unabhängigen Materialparametern, den LAMESchen Konstanten γ und μ beschreiben

$$\boldsymbol{\sigma} = \gamma(\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{1})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\gamma}{2\mu(3\gamma + 2\mu)}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1})\mathbf{1} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (6.4)$$

Gleichsetzen von (6.1) und (6.3) bzw. (6.2) und (6.4) liefert den isotropen Elastizitätstensor bzw. den Nachgiebigkeitstensor. XIAO ET AL. geben diesen in [XBM99b] in der folgenden basisfreien Notation an

$$\mathbf{C} = \gamma\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I} \quad , \quad (6.5)$$

wobei der 4-stufige symmetrische Einheitstensor \mathbf{I} folgende Komponenten bezüglich einer orthonormierten Basis hat

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad . \quad (6.6)$$

Neben den hier verwendeten LAMESchen Konstanten sind im Ingenieurwesen der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν sowie der Kompressionsmodul K gebräuchlich, zu denen der folgende Zusammenhang besteht

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \gamma = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad . \quad (6.7)$$

6.2 Modelle zur Beschreibung elastischen Verhaltens geschädigter Werkstoffe

Bis heute beschäftigen sich viele Arbeiten mit der Beschreibung des effektiven elastischen Verhaltens von Materialien mit Mikrostrukturen. Hierzu zählen Modelle für Faserverbundwerkstoffe, wie z.B. von SPENCER [Spe84] oder auch für biologische Strukturen, wie von COWIN [Cow85] oder WENG [Wen97]. Die Beschreibung elastisch geschädigter Materialien umfasst neben den im Ingenieurwesen eingesetzten Werkstoffen auch Geomaterialien zur Abschätzung des Trag- und Setzverhaltens und zur Versagensprognose von Bauwerken und Verkehrsstrassen.

Die Mikrostruktur des Materials wird dabei durch skalare oder tensorielle Variablen berücksichtigt. Diese Wahl hängt von der Geometrie und Anordnung der Mikrostruktur und der Richtungsabhängigkeit des zu beschreibenden Materials ab.

Insbesondere zur Versagensprognose bei spröden Werkstoffen hat sich die mikromechanische Modellierung der effektiven elastischen Eigenschaften bewährt. Hierbei wird ein repräsentatives Volumenelement (RVE) mit einer Menge statistisch verteilter Defekte betrachtet. Der Einfluss der Defekte auf das Spannungs- und Verzerrungsfeld wird untersucht und mit Hilfe einer Homogenisierungsvorschrift werden diese dann über das RVE gemittelt. Dadurch gelangt man zu den effektiven Eigenschaften des auf der Makroebene als homogen angenommenen Materials. Einen Überblick über die gebräuchlichen Mittelungstechniken für heterogene Festkörper findet man in [DB96] und [NNH93].

Als erstes und einfachstes mikromechanisches Modell zur Ermittlung effektiver Eigenschaften kann die Methode von VOIGT [Voi28] angesehen werden. Es wird die mittlere Spannung im RVE basierend auf der Annahme konstanter Verzerrungen für das elastische Materialverhalten durch eine reine Volumenmittelung des Spannungsfeldes berechnet und daraus die elastischen Konstanten bestimmt. Dieser Ansatz liefert im Fall isotroper Porenschädigung eine obere Schranke für den effektiven Elastizitätstensor.

Der Ansatz von REUSS in [Reu29], der von einer konstanten Spannungsverteilung ausgeht, liefert bei Schädigung als untere Schranke für den linearen Elastizitätstensor den Nulltensor. Dieser Ansatz ist somit nur für Materialien mit Konstituierenden nicht-verschwindender Steifigkeit geeignet.

Die Untersuchungen von ESHELBY in [Esh57] bilden die Grundlage zahlreicher weiterer Modelle zur Beschreibung der effektiven elastischen Eigenschaften. Hierbei werden die geometrischen Effekte der Inhomogenitäten mit erfasst.

HERSHEY UND DAHLGREN betrachten in [HD54] erstmals eine kugelförmige Inhomogenität, die in einer Matrix mit den zu bestimmenden effektiven elastischen Konstanten eingebettet ist und leiten daraus die isotropen Steifigkeiten eines polykristallinen Materials ab. BUDIANSKY & O'CONNELL kombinieren in [BO76] diesen Ansatz mit der Methode von ESHELBY und bestimmen die elastischen Eigenschaften eines Materials, welches zufällig verteilte Risse enthält, für den isotropen Fall. Dazu wird die Abnahme der Verzerrungsenergie aufgrund eines einzelnen Risses in einer homogenen Matrix, die die bis dahin noch unbekanntenen effektiven Eigenschaften des rissgeschädigten Materials besitzt, berechnet. Es ergeben sich der effektive Elastizitätsmodul und die Querkontraktion in Abhängigkeit von der Rissdichte $n\bar{a}^3$. Diese Vorgehensweise wird als selbstkonsistente Methode bezeichnet, bei der die Wechselwirkungseffekte der Inhomogenitäten mit berücksichtigt werden. Diese Methode wird neben der Modellierung geschädigten Materials auch zur Modellierung des Verhaltens polykristalliner Werkstoffe eingesetzt, wie z.B. von KRÖNER [Krö58], [Krö61], BUDIANSKY & WU [BW62], HUTCHINSON [Hut70] und HILL [Hil65].

HORI & NEMAT NASSÉR bauen später in [HNN83] auf das Modell von BUDIANSKY & O'CONNELL auf und entwickeln ein anisotropes elastisches Schädigungsmodell für

Rissschädigung in spröden Werkstoffen.

Eine weitere häufig angewendete mikromechanische Methode zur Ermittlung der effektiven Konstanten als Alternative zur selbstkonsistenten Methode bietet das Differenzenverfahren. Dabei wird ausgehend vom ungeschädigten Material die Änderung der effektiven elastischen Moduli durch Addition eines zusätzlichen Defekts in ein RVE, dessen homogene Matrix bereits die zuvor betrachteten Defekte enthält, bestimmt. Diese Prozedur wird bis zum Erreichen der tatsächlichen Defektdichte wiederholt. HASHIN stellt in [Has88] ein auf dieser Methode basierendes Modell zur Beschreibung eines makroskopisch isotropen, durch Risse geschädigten Materials vor.

MORI & TANAKA betrachten in [MT73] einen Körper mit einer Matrix, die bereits eine große Menge von Inhomogenitäten enthält, und bestimmen die elastischen Felder für eine weitere Inhomogenität unter der Annahme, dass die Verzerrungen in dieser Inhomogenität mit den Verzerrungen in den restlichen Inhomogenitäten identisch ist. Daraus leiten sie die elastischen Eigenschaften des heterogenen Körpers her.

Neben diesen Methoden wurden weitere Homogenisierungsmethoden zur Ermittlung der effektiven mechanischen Eigenschaften geschädigter Materialien angewendet. NEMAT NASER, YU & HORI stellen in [NNYH93] ein Modell für durch periodisch verteilte Risse geschädigtes Material vor, welches auf einer Fourierreihenentwicklung basiert. KACHANOV, SHAFIRO & TSUKROV geben in Ihren Arbeiten [KTS94], [TK00] und [SK99] Erweiterungen auf allgemeinere Defektkonfigurationen mit und ohne Einbezug von Wechselwirkungen an und stellen Betrachtungen zur Reduktion der Schädigungsvariablen an. LEE, LESIEUTRE & FANG führen in [LLF97] ein Schädigungsmodell auf Basis der Verzerrungsenergieäquivalenz ein, bei dem eine Materialvolumenzelle, die einen Riss enthält, betrachtet wird. Es werden die effektiven elastischen Moduli in Abhängigkeit von der Rissdichte, Exzentrizität und Ausrichtung der Risse ermittelt.

Zusätzlich zu den sehr komplexen mikromechanischen Modellen gibt es aber auch Bestrebungen, einfachere Modelle für die elastischen Eigenschaften geschädigten Materials zu entwickeln. LURBADA & KRAJČINOVIC stellen in [LK94] ein Modell vor, welches auf der additiven Aufspaltung der elastischen Nachgiebigkeit basiert. Der Schädigungsanteil der Nachgiebigkeit aufgrund von Rissen wird hierbei anhand der Rissfreisetzungsenergie bestimmt. Wechselwirkungseffekte werden bei diesem Modell nicht berücksichtigt, jedoch können mehrere Risssysteme mit unterschiedlichen Normalenrichtungen einbezogen werden.

Wie der Überblick zeigt, existieren einige Modelle zur Beschreibung des effektiven elastischen Materialverhaltens geschädigter Werkstoffe. Diese unterscheiden sich neben dem Modellierungskonzept oft auch bezüglich der zu beschreibenden Phänomene, des gesamten

Materialverhaltens und der Art der Schädigung. Ein Großteil der vorgestellten Modelle dient zur Beschreibung des spröden Materialverhaltens bei Risschädigung. Dabei wird in vielen anisotropen Modellen die Rissdichte und der Rissnormalenvektor als Schädigungsmaß verwendet. Eine Messung dieser Schädigungsmaße in der Praxis erweist sich jedoch als schwierig. Außerdem lassen sich Vektoren nach LEHMANN [Leh84] nicht als interne Zustandsvariablen verwenden und werden somit für die vorliegende Stoffgesetzformulierung als nicht geeignet angesehen.

Wie RICE in [Ric75] feststellt, sind Mittelungsprozeduren innerhalb einer FEM-Rechnung für jedes Element in jedem Zeitinkrement sehr komplex, selbst dann, wenn sie schon starke Vereinfachungen beinhalten. Daher beschränkt sich die Anwendbarkeit vieler der vorgestellten Modelle auf Spezialfälle bezüglich der Defektgeometrie und -anordnung oder auf die Berechnung sehr einfacher Strukturen. Die in der jüngsten Vergangenheit aufgetretenen Modelle mit numerischer Homogenisierung, z.B. von VAN VROONHOVEN & DE BORST [VB99] sind daher auch nur zur Berechnung von Lokalisation sinnvoll einsetzbar. Weiterhin ist bei allen vorgestellten Modellen zur Beschreibung der anisotropen Eigenschaften eines heterogenen Materials eine numerisch aufwendige Hauptachsentransformation erforderlich.

Im Rahmen des vorgestellten elastisch-plastischen Stoffgesetzes ist die genaue Kenntnis der lokalen elastischen Spannungs- und Verzerrungsfelder nicht erforderlich. Eine gute Approximation der gemittelten Werte innerhalb eines RVE kann also als ausreichend angesehen werden. Der numerische Aufwand, der mit den mikromechanischen Modellen verbunden ist, kann somit vermieden werden. Dies ist wohl auch ein Grund, warum sich in diesem Bereich mikromechanische Modelle weniger stark durchgesetzt haben.

Da bei duktilem Materialverhalten die Porenform nicht nur auf Risse beschränkt sein muss, erscheint es sinnvoll, einen großen Bereich von Porengeometrien möglichst adäquat zu beschreiben und sich nicht von vornherein auf die Beschreibung von Risschädigung zu beschränken.

Als Grundlage für eine phänomenologische Modellierung der anisotropen Nachgiebigkeit des geschädigten Materials soll in einer mikromechanischen Betrachtung die Abhängigkeit der effektiven elastischen Konstanten von der Porengeometrie untersucht werden und daraufhin ein geeignetes Modell vorgestellt und validiert werden. Zu diesem Zweck ist auch der im vorhergehenden Kapitel hergeleitete Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten und dem Schädigungsorthotropietensor wichtig.

6.3 Mikromechanische Untersuchung des Einflusses der anisotropen Schädigung

Um zu einer neuen Möglichkeit zur Berücksichtigung des Einflusses von Porenschädigung zu finden, mit der eine möglichst präzise Abbildung des elastischen Verhaltens im gesamten Bereich der Porenhalbmesserverhältnisse möglich ist, werden die elastischen Konstanten über die Halbmesserverhältnisse der Poren untersucht. Der Schädigungszustand des Materials wird hier durch den Porenvolumenanteil ω und den Schädigungsorthotropietensor ξ beschrieben. Alle Betrachtungen erfolgen im Hauptachsensystem des Schädigungsorthotropietensors. Da mit dem zweistufigen Schädigungstensor lediglich orthotrope Symmetrie dargestellt werden kann, lässt sich diese Orthotropie direkt auf das elastische Verhalten übertragen.

Stellt man den symmetrischen Spannungstensor und Verzerrungstensor als Spaltenvektoren dar

$$[\sigma_i]^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}] \quad (6.8)$$

$$[\epsilon_i]^T = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}] \quad , \quad (6.9)$$

so ergibt sich der orthotrope Nachgiebigkeitstensor in Matrixschreibweise im Hauptachsensystem der Orthotropierichtungen unter Verwendung der Elastizitätsmoduli E_i , der Schubmoduli μ_{ij} und der Querkontraktionszahlen ν_{ij} nach ALTENBACH & ALTENBACH [AA94] zu

$$[\mathbb{D}_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{23}} \end{bmatrix} . \quad (6.10)$$

Durch die Symmetrie des Nachgiebigkeitstensors bezüglich des vorderen und des hinteren Indexpaares können folgende Gleichungen zur Reduktion der Parameter benutzt werden

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12} \quad , \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23} \quad , \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31} \quad , \quad (6.11)$$

somit verbleiben 9 unabhängige Konstanten zur Beschreibung orthotropen elastischen Verhaltens.

Die Modellierung des elastischen Verhaltens basiert auf der Vorstellung, dass sich ein repräsentatives Volumenelement, welches als makroskopisch homogen angesehen wird, aus einer periodischen Anordnung gleicher Materialvolumenzellen zusammensetzt, die jeweils einen Defekt enthalten, der durch die Schädigungsmaße eindeutig charakterisiert ist, wie in Abbildung 6.1 dargestellt.

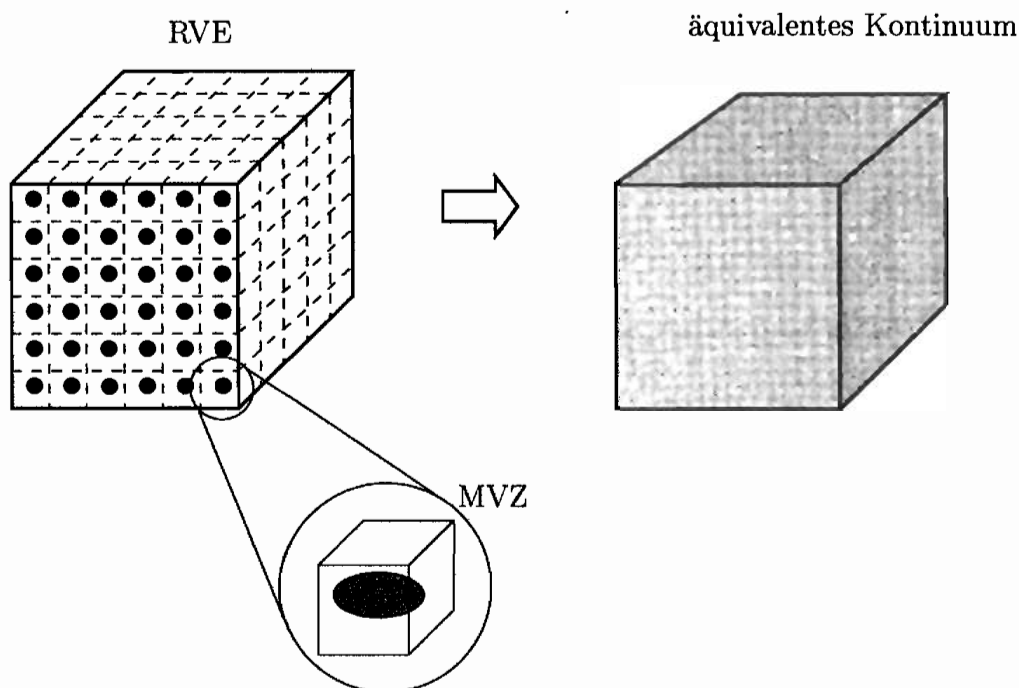


Abbildung 6.1: Repräsentatives Volumenelement mit periodisch angeordneten Materialvolumenzellen

Die Ermittlung der effektiven Eigenschaften einer einzelnen auf der Mikroebene heterogenen Materialvolumenzelle führt somit unter der Annahme schwacher Verteilungen (keine Wechselwirkungen zwischen den Defekten) auf ein äquivalentes Kontinuum. Ähnliche Betrachtungen wurden auch von LEE [Lee99] für Risse angestellt. Es ist bei dieser Methode zu beachten, dass materiale Isotropie innerhalb des RVE durch einen einzelnen Defekt beschrieben wird und somit immer der Schädigung durch kugelförmige Poren entspricht. Zur Beschreibung isotroper Schädigung durch zufällig verteilte Risse wären zusätzliche Schädigungsmaße und weitere Homogenisierungen erforderlich, die beispielsweise mit einem VOIGT- oder REUSS-Ansatz erfolgen können.

Als Basis zur Ermittlung der elastischen Konstanten der Materialvolumenzelle wird die in

der Arbeit von ESHELBY vorgeschlagene Methode des äquivalenten Einschlusses gewählt. Darin wird das elastische Feld eines Einschlusses, der dieselben elastischen Eigenschaften hat wie das Matrixmaterial, jedoch im spannungsfreien Zustand die Eigenverzerrung ϵ^* aufweist, in einer homogenen isotropen linear-elastischen Matrix untersucht. Dieser lässt sich dann durch die Inhomogenität, die andere elastische Eigenschaften als die Matrix besitzt, ersetzen.

Für eine ellipsoide Inhomogenität ist die Dehnung im Einschluss homogen und lässt sich aus der Form des Einschlusses, seinen elastischen Konstanten und der aufgebrachten Spannung bzw. Verzerrung in unendlicher Entfernung bestimmen. Es werden sowohl die Kräftegleichgewichtsbedingungen als auch die Kompatibilitätsbedingungen an der Grenze zwischen Einschluss und Matrix erfüllt.

Die effektiven elastischen Konstanten der Materialvolumenzelle, die eine Inhomogenität enthält, lassen sich dann auf zwei verschiedenen Wegen ermitteln. Zum ersten nach der von ESHELBY [Esh57] selbst vorgeschlagenen Methode anhand der Verzerrungsenergieäquivalenz zwischen der Materialvolumenzelle und dem äquivalenten Kontinuum. Zusätzlich kann die effektive elastische Nachgiebigkeit durch die Mittelung von Spannungen und Verzerrungen bestimmt werden.

RUSSEL [Rus73] bzw. RUSSEL & ACRIVOS [RA72] haben diese Methode bereits für partikelverstärkte Materialien in ähnlicher Form angewendet.

Für das Verhalten der Materialvolumenzelle wird ein unendlich ausgedehnter Körper mit dem Volumen ΔV betrachtet, der eine ellipsoide Inhomogenität mit dem Volumen V_i enthält. Aufgrund der Annahme kleiner Verzerrungen wird zwischen dem Volumen der Materialvolumenzelle in der fiktiven Zwischenkonfiguration ΔV^* und in der belasteten Konfiguration ΔV nicht unterschieden. Der Volumenanteil der Inhomogenität ergibt sich damit zu

$$\omega = \frac{V_i}{\Delta V} \quad . \quad (6.12)$$

Die mittlere Spannung und Verzerrung im Körper erhält man durch Volumenmittelung

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sigma dV = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma dV + \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma dV = (1 - \omega) \langle \sigma \rangle_m + \omega \langle \sigma \rangle_i \quad (6.13)$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \epsilon dV = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \epsilon dV + \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \epsilon dV = (1 - \omega) \langle \epsilon \rangle_m + \omega \langle \epsilon \rangle_i \quad .(6.14)$$

Die rechten unteren Indizes m und i bezeichnen Größen in der Materialmatrix bzw. in der Inhomogenität.

Gibt man nun auf den Rändern des Körpers eine konstanten Spannung $\sigma^\infty = \langle \sigma \rangle$ vor, so lassen sich die makroskopischen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen des homogeni-

sierten Kontinuums, in dem die gemittelten Felder vorliegen, mit den zu bestimmenden Materialtensoren formulieren

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad . \quad (6.15)$$

Die Verzerrungsantwort des Körpers ohne Inhomogenität unter derselben Spannung ergibt sich mit der Nachgiebigkeit des Matrixmaterials

$$\boldsymbol{\epsilon}^\infty = {}^0 \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad . \quad (6.16)$$

Die Verzerrung in der Inhomogenität $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_i$ setzt sich aus der Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^\infty$ und der erzwungenen Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^c$ zusammen

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_i = \boldsymbol{\epsilon}^\infty + \boldsymbol{\epsilon}^c \quad . \quad (6.17)$$

Die Spannung in dem zur Inhomogenität äquivalenten Einschluss erhält man aus der um die Eigenverzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^*$ reduzierten mittleren Verzerrung im Einschluss und aus der Steifigkeit der Matrix. Der Einschluss lässt sich durch die Inhomogenität ersetzen, in der derselbe Spannungs- und Verzerrungszustand herrscht. Die Inhomogenität ist jedoch im verzerrungsfreien Zustand spannungsfrei, es ergibt sich

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = {}^i \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}^\infty + \boldsymbol{\epsilon}^c) = {}^0 \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}^\infty + \boldsymbol{\epsilon}^c - \boldsymbol{\epsilon}^*) \quad . \quad (6.18)$$

Handelt es sich bei dem Einschluss um ein Ellipsoid, so ist die erzwungene Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^c$, die sich nach dem Einsetzen in die Materialmatrix einstellt, homogen und hängt bei gegebener Eigenverzerrung von der Form des Einschlusses und der Querkontraktion der Materialmatrix ab. Mit Hilfe des ESHELBY-Tensors lässt sich $\boldsymbol{\epsilon}^c$ durch die Eigenverzerrung ausdrücken

$$\boldsymbol{\epsilon}^c = \mathbf{S} : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad . \quad (6.19)$$

Der ESHELBY-Tensor weist keine Symmetrie bezüglich des vorderen und hinteren Indexpaares auf, sondern hat aufgrund der Symmetrie des Verzerrungstensors nur die folgenden Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{S}_{ijkl} = \mathbf{S}_{ijlk} = \mathbf{S}_{jikl} \quad . \quad (6.20)$$

Die Komponenten des ESHELBY-Tensors, die verschiedene Schubverzerrungen verknüpfen, wie z.B. \mathbf{S}_{1223} , und die, die Zug-/Druckverzerrungen mit Schubverzerrungen verknüpfen, wie z.B. \mathbf{S}_{1123} , verschwinden. Setzt man (6.19) in (6.18) ein, so erhält man einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Verzerrungen

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = [({}^i \mathbf{C} - {}^0 \mathbf{C}) : \mathbf{S} + {}^0 \mathbf{C}]^{-1} : [{}^0 \mathbf{C} - {}^i \mathbf{C}] : \boldsymbol{\epsilon}^\infty \quad . \quad (6.21)$$

Bis zu diesem Schritt unterscheiden sich die Vorgehensweisen beider angesprochenen Homogenisierungsmethoden nicht. Das weitere Vorgehen zur Ermittlung der effektiven Eigenschaften des Körpers ist jedoch für beide Methoden verschieden.

6.3.1 Ermittlung der Nachgiebigkeit anhand der Energieäquivalenz

Die elastische Verzerrungsenergie des Körpers ergibt sich als Summe aus der Energie des ungeschädigten Körpers und der Interaktionsenergie der Inhomogenität

$$\Upsilon_{(e)} = {}^0\Upsilon_{(e)} - {}^{int}\Upsilon_{(e)} . \quad (6.22)$$

Die Interaktionsenergie der Inhomogenität erhält man nach ESHELBY [Esh57], (4.10) zu

$${}^{int}\Upsilon_{(e)} = -\frac{1}{2} V_v \boldsymbol{\sigma}^\infty : \boldsymbol{\epsilon}^* = -\frac{1}{2} \omega \Delta V \boldsymbol{\sigma}^\infty : \boldsymbol{\epsilon}^* . \quad (6.23)$$

Damit ergibt sich mit (6.12), (6.15) und (6.1) die spezifische elastische Verzerrungsenergie

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\infty : \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}^\infty = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\infty : {}^0\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}^\infty + \frac{1}{2} \omega \boldsymbol{\sigma}^\infty : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (6.24)$$

und schließlich mit (6.21)

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\infty : \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}^\infty = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\infty : {}^0\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}^\infty + \frac{1}{2} \omega \boldsymbol{\sigma}^\infty : [({}^i\mathbf{C} - {}^0\mathbf{C}) : \mathbf{S} + {}^0\mathbf{C}]^{-1} : [{}^0\mathbf{C} - {}^i\mathbf{C}] : \boldsymbol{\sigma}^\infty . \quad (6.25)$$

Da diese Gleichung für beliebige aufgebrauchte Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ erfüllt sein muss, erhält man für die effektive Nachgiebigkeit

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{I} + \omega [({}^i\mathbf{C} - {}^0\mathbf{C}) : \mathbf{S} + {}^0\mathbf{C}]^{-1} : [{}^0\mathbf{C} - {}^i\mathbf{C}] \right\} : {}^0\mathbf{D} \quad (6.26)$$

Diese Nachgiebigkeit gilt für beliebige ellipsoide isotrope linear-elastische Inhomogenitäten in einer isotropen linear-elastischen Matrix. Zur Spezialisierung auf Porenschädigung verschwindet die Steifigkeit der Inhomogenität ${}^i\mathbf{C} = \mathbf{0}^{(4)}$, man erhält

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{I} + \omega (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \right\} : {}^0\mathbf{D} \quad (6.27)$$

6.3.2 Ermittlung der Nachgiebigkeit durch Mittelung von Spannungen und Verzerrungen

Einsetzen von (6.21) in die mittlere Dehnung ergibt

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = (1 - \omega) \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_m + \omega \mathbf{A}^i : \boldsymbol{\epsilon}^\infty , \quad (6.28)$$

mit

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{I} + \mathbf{S} : [({}^i\mathbf{C} - {}^0\mathbf{C}) : \mathbf{S} + {}^0\mathbf{C}]^{-1} : [{}^0\mathbf{C} - {}^i\mathbf{C}] . \quad (6.29)$$

Die mittlere Dehnung in der Matrix erhält man durch die Volumenmittelung der Spannungen (6.13) und aus dem elastischen Stoffgesetz für die Matrix

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_m &= {}^0\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m \\ &= \frac{1}{1-\omega} {}^0\mathbf{D} : (\boldsymbol{\sigma}^\infty - \omega \langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle)\end{aligned}\quad (6.30)$$

Einsetzen in (6.14) liefert mit (6.18) das elastische Gesetz für das homogene effektive Kontinuum

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \{ [\mathbf{I} + \omega(\mathbf{I} - {}^0\mathbf{D} : {}^i\mathbf{C}) : \mathbf{A}^i] : {}^0\mathbf{D} \} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (6.31)$$

und damit für die effektive Nachgiebigkeit

$$\mathbf{D} = [\mathbf{I} + \omega(\mathbf{I} - {}^0\mathbf{D} : {}^i\mathbf{C}) : \mathbf{A}^i] : {}^0\mathbf{D} \quad (6.32)$$

Im Falle von Porenschädigung erhält man wiederum

$$\mathbf{D} = \{ \mathbf{I} + \omega [\mathbf{I} + \mathbf{S} : (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}] \} : {}^0\mathbf{D} \quad (6.33)$$

Dieses lässt sich mit

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) : (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \quad (6.34)$$

auf die Form (6.27) bringen.

Beide Vorgehensweisen führen also im Falle von Porenschädigung auf dasselbe Ergebnis. Es sei angemerkt, dass sich die hier hergeleitete Nachgiebigkeit auf die über die Materialvolumenzelle und damit über das RVE gemittelten Spannungen und Verzerrungen bezieht und nicht, wie in vielen Schädigungsmodellen, die effektiven Spannungen in der Matrix mit den Verzerrungen verknüpft. Der direkte Einbezug weiterer Poren mit anderen Halbmesserverhältnissen und/oder Ausrichtungen ist bei diesem Modell nicht ohne weiteres möglich, da von Isotropie in der Matrix ausgegangen wird. Für den Fall, dass ein Porensystem¹ $\{\omega^{(1)}, \mathbf{S}^{(1)}\}$ nahezu isotrop ist, kann dieselbe Prozedur näherungsweise für weitere Porensysteme $\{\omega^{(i)}, \mathbf{S}^{(i)}\}$ durchgeführt werden, wobei das Matrixmaterial jeweils die Eigenschaften des durch die vorher einbezogenen Porensysteme geschädigten Materials aufweist. Für die effektive Nachgiebigkeit eines durch n Porensysteme geschädigten Materials erhält man

$${}^n\mathbf{D} = \left\{ \prod_{i=1}^n [\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(i)})^{-1}] \right\} : {}^0\mathbf{D} \quad (6.35)$$

Wie bereits erwähnt, ist die Berechnung der effektiven Nachgiebigkeiten nach (6.26) bzw. (6.35) sehr komplex und aufwendig und mit Hauptachsentransformationen verbunden. Bei sprödem Materialverhalten ist dieser Aufwand noch gerechtfertigt, bei elastisch-plastischen Berechnungen jedoch selbst mit modernen Rechnersystemen zum Einsatz für

¹Mit Porensystemen ist die Menge aller Poren mit gleichen Halbmesserverhältnissen und Ausrichtungen innerhalb des RVE gemeint.

reale Strukturen nicht zu bewältigen. Ein weiteres Problem stellt die Tatsache dar, dass der ESHELBY-Tensor elliptische Integrale in allgemeiner Form enthält, für die keine analytischen Lösungen vorliegen. Die numerische Bestimmung des ESHELBY-Tensors erfordert weiteren Aufwand und ist mit Näherungen verbunden.

Für rotationssymmetrische Ellipsoide sind diese Integrale jedoch gelöst. Daher soll die Abhängigkeit der effektiven elastischen Konstanten eines Körpers, der einen Rotationsellipsoid mit \mathbf{e}_1 als Symmetrieachse enthält, vom Verhältnis seiner Halbmesser $a = a_1$ und $b = a_2 = a_3$ untersucht werden. Bei dieser Untersuchung können Kenngrößen ermittelt werden, die zur Anpassung des phänomenologischen Ansatzes verwendet werden.

Da für Poren die Spannungen $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i$ im Einschluss bei beliebigen Verzerrungen und Steifigkeiten der Matrix verschwinden, kann aus (6.18) und (6.21) das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenverzerrungen angegeben werden

$$\boldsymbol{\epsilon}^\infty = [\mathbf{I} - \mathbf{S}] : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad . \quad (6.36)$$

In Matrixschreibweise erhält man für den ESHELBY-Tensor im Hauptachsensystem die folgende Form

$$[\mathbf{S}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1111} & \mathbf{S}_{1122} & \mathbf{S}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_{2211} & \mathbf{S}_{2222} & \mathbf{S}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_{3311} & \mathbf{S}_{3322} & \mathbf{S}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathbf{S}_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbf{S}_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbf{S}_{1212} \end{bmatrix} \quad . \quad (6.37)$$

Für Transversalisotropie bezüglich \mathbf{e}_i folgen weitere Symmetrien.

Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenverzerrungen kann somit in Matrix-Vektor-Schreibweise angegeben werden, welches z.B. mit der CRAMER'schen Regel gelöst werden kann

$$([\delta_{ij}] - [\mathbf{S}_{ij}]) [\boldsymbol{\epsilon}_j^*] = [\boldsymbol{\epsilon}_i^\infty] \quad , \quad \text{mit } [\delta_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad . \quad (6.38)$$

Für die Schubkomponenten ergeben sich daraus die expliziten Lösungen

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^* = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^\infty}{1 - 2\mathbf{S}_{ijij}} = \frac{1}{1 - 2\mathbf{S}_{ijij}} \frac{\sigma_{ij}^\infty}{2^0\mu} \quad \text{für } i \neq j \quad . \quad (6.39)$$

Die Komponenten des ESHELBY-Tensors lassen sich für den betrachteten transversalisotropen Fall in die folgende Form bringen [Mur93]

$$\mathbf{S}_{1111} = \frac{3a^2}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_{11} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_1 \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{2222} = \mathbb{S}_{3333} &= \frac{3b^2}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_{22} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_2 \\
\mathbb{S}_{1122} = \mathbb{S}_{1133} &= \frac{b^2}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_{12} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_1 \\
\mathbb{S}_{2211} = \mathbb{S}_{3311} &= \frac{a^2}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_{12} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_2 \\
\mathbb{S}_{1212} = \mathbb{S}_{1313} &= \frac{a^2 + b^2}{16\pi(1-\nu)} \mathcal{I}_{12} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)} (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \quad .
\end{aligned}$$

Die \mathcal{I}_i bzw \mathcal{I}_{ij} stellen hierbei die elliptischen Oberflächenintegrale dar, deren Lösungen sich für die folgenden Spezialfälle wie folgt ergeben:

Kugeln: $a = b$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 &= \frac{4\pi}{3} \\
\mathcal{I}_{11} = \mathcal{I}_{22} = \mathcal{I}_{12} &= \frac{4\pi}{5a^2}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Flache Rotationsellipsoide: $a < b$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= 4\pi - 2\mathcal{I}_2 \\
\mathcal{I}_2 &= \frac{2\pi ab^2}{(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos^{-1} \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
\mathcal{I}_{11} &= \frac{4\pi}{3a^2} - \frac{2\mathcal{I}_{12}}{3} \\
\mathcal{I}_{22} = \mathcal{I}_{23} &= \frac{\pi}{b^2} - \frac{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1}{4(a^2 - b^2)} \\
\mathcal{I}_{12} &= \frac{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1}{a^2 - b^2}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Lange Rotationsellipsoide: $a > b$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= 4\pi - 2\mathcal{I}_2 \\
\mathcal{I}_2 &= \frac{2\pi ab^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{a}{b} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \cosh^{-1} \frac{a}{b} \right\} \\
\mathcal{I}_{11} &= \frac{4\pi}{3a^2} - \frac{2\mathcal{I}_{12}}{3} \\
\mathcal{I}_{22} = \mathcal{I}_{23} &= \frac{\pi}{b^2} - \frac{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1}{4(a^2 - b^2)} \\
\mathcal{I}_{12} &= \frac{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1}{a^2 - b^2}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Weitere Lösungen, z.B. für penny-shaped voids entnehme man der Literatur.

Um die Halbmesser, die in den Integrallösungen des ESHELBY-Tensors vorkommen, zu entdimensionieren, werden diese nach (3.39) durch die Komponenten des Schädigungsorthotropietensors in Hauptachsenrichtungen und den Radius einer Kugel mit gleichem Volumen ersetzt. Für den Fall der Transversalisotropie ergeben sich folgende Beziehungen

$$\xi_{11}\xi_{22}^2 = 1 \Leftrightarrow \xi_{22} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{11}}} \quad (6.44)$$

$$a = r\xi_{11}; \quad b = r\xi_{22} = \frac{r}{\sqrt{\xi_{11}}} \quad . \quad (6.45)$$

Die relativen effektiven elastischen Konstanten lassen sich damit lediglich durch die Querkontraktionszahl des ungeschädigten Materials, den Porenvolumenanteil und den ersten Eigenwert ξ_{11} des Schädigungsorthotropietensors ausdrücken. Die folgende Betrachtung der qualitativen Verläufe der effektiven Gleit- und Elastizitätsmoduli über den Halbmesser-Verhältnissen dient unter anderem der Ermittlung von Kenngrößen, die eine Anpassung des phänomenologischen Modells an die mikromechanisch hergeleiteten Ergebnisse ermöglichen.

6.3.2.1 Verlauf der effektiven Gleitmoduli

Zur Ermittlung des Verlaufes der effektiven Gleitmoduli wird eine Schubspannung senkrecht zur Symmetrieachse aufgebracht

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty = \sigma_{12}^\infty \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_{12}^\infty \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad . \quad (6.46)$$

Damit erhält man als einzige von Null verschiedene Komponenten der Eigenverzerrung nach (6.39)

$$\epsilon_{12}^* = \epsilon_{21}^* = \frac{1}{1 - 2\mathbb{S}_{1212}} \frac{\sigma_{12}^\infty}{2^0\mu} \quad . \quad (6.47)$$

Einsetzen in (6.24) liefert das Verhältnis zwischen dem effektiven Gleitmodul μ_{12} und dem Gleitmodul des ungeschädigten Materials

$$\frac{\mu_{12}}{^0\mu} = \frac{2\mathbb{S}_{1212} - 1}{2\mathbb{S}_{1212} - (1 + \omega)} \quad . \quad (6.48)$$

Den Verlauf dieser Funktion über einen Bereich von $\frac{a}{b} < 1$ bis $\frac{a}{b} > 1$ erhält man nach Einsetzen der Komponente des ESHELBY-Tensors bereichsweise für flache Rotationsellipsoide, Kugeln und lange Rotationsellipsoide. Damit ergibt sich für den effektiven Gleitmodul als

Funktion des Schädigungsmaßes:

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{-2\xi_{11}^3 \left(\frac{\xi_{11}^3-1}{\xi_{11}}\right)^{\frac{3}{2}} + (2-0\nu + \xi_{11}^3(1+0\nu))(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}(1-\xi_{11}^3)^{\frac{1}{2}} - \text{Arccos}(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}))}{2 \left(\frac{\xi_{11}^3-1}{\xi_{11}}\right)^{\frac{3}{2}} (-\xi_{11}^3 + (\xi_{11}^3-1)(0\nu-1)\omega) + (2-0\nu + \xi_{11}^3(1+0\nu))(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}(1-\xi_{11}^3)^{\frac{1}{2}} - \text{Arccos}(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}))} & , \text{ für } \xi_{11} < 1 \\ \frac{5^0\nu-7}{5^0\nu-7+15\omega(0\nu-1)} & , \text{ für } \xi_{11} = 1 \\ \frac{-2\xi_{11}^3 \left(\frac{\xi_{11}^3-1}{\xi_{11}}\right)^{\frac{3}{2}} + (2-0\nu + \xi_{11}^3)(1+0\nu)(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}(\xi_{11}^3-1)^{\frac{1}{2}} - \text{Arccosh}(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}))}{2 \left(\frac{\xi_{11}^3-1}{\xi_{11}}\right)^{\frac{3}{2}} (-\xi_{11}^3 + (\xi_{11}^3-1)(0\nu-1)\omega) + (2-0\nu + \xi_{11}^3(1+0\nu))(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}(\xi_{11}^3-1)^{\frac{1}{2}} - \text{Arccosh}(\xi_{11}^{\frac{3}{2}}))} & , \text{ für } 1 < \xi_{11} \end{cases} \quad (6.49)$$

Lässt man komplexe Lösungen innerhalb der Berechnung der effektiven Gleitmoduli zu, so erweitert sich der Lösungsbereich für lange Rotationsellipsoide auf den von flachen und umgekehrt. Die Lösungen beider Gleichungen sind identisch und über den gesamten Bereich reellwertig. Daher kann für lange und flache Rotationsellipsoide dieselbe Gleichung zur Bestimmung der effektiven elastischen Gleitmoduli verwendet werden. Es ist für $\xi_{11} \neq 1.0$ also keine Fallunterscheidung erforderlich. Für $\xi_{11} \rightarrow 1.0$ weisen die Gleichungen eine Singularität auf, daher darf die Berechnung nach den Gleichungen für flache und lange Rotationsellipsoide nur für $\xi_{11} \neq 1.0$ erfolgen.

In Abbildung 6.2 ist der Verlauf des effektiven Gleitmoduls in Abhängigkeit des Halbmesserverhältnisses (ausgedrückt durch ξ_{11}) für einen konstanten Porenvolumenanteil $\omega = 5\%$ und einer Querkontraktionszahl $0\nu = 0,3$ dargestellt. Alle nachfolgenden Plots der Verläufe der elastischen Konstanten wurden exemplarisch für denselben Porenvolumenanteil und dieselbe Querkontraktionszahl ermittelt.

Auffällig ist, dass der Verlauf von μ_{12} ein Maximum aufweist. Dieses liegt nicht an der Stelle $\xi_{11} = 1.0$. Es gibt offensichtlich ein optimales Halbmesserverhältnis, bei dem der Gleitmodul bei einem gegebenem Porenvolumenanteil maximal wird. Die Lage dieses Maximums hängt nicht vom Porenvolumenanteil ab, sondern nur von der Querkontraktionszahl des ungeschädigten Materials.

Oberhalb des Maximums konvergiert der Wert für den effektiven Gleitmodul für $\xi_{11} \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert, der kleiner ist, als der Wert bei Kugeln. Insgesamt lässt sich jedoch feststellen, dass die Variation des effektiven Gleitmoduls μ_{12} für $\xi_{11} > 1$ deutlich geringer ist, als im restlichen Wertebereich.

Dass der effektive Gleitmodul μ_{12} für $\xi_{11} \rightarrow 0$ gegen Null strebt, liegt an der Modellierung des Problems, da dadurch $\xi_{22} = \xi_{33}$ gegen unendlich große Werte streben, was einem

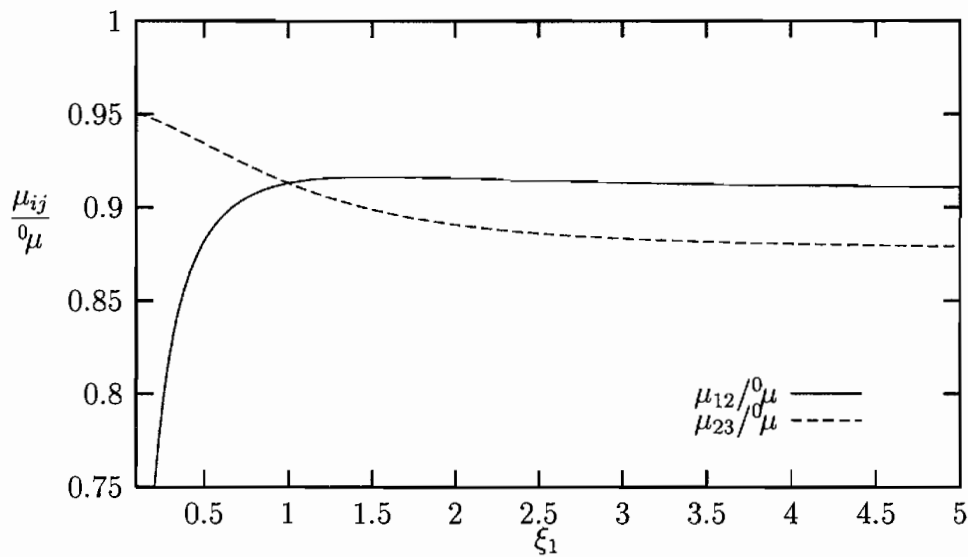


Abbildung 6.2: Gleitmoduli nach ESHELBY-Lösung für Transversalisotropie

„durchtrennen“ des Körpers entspräche. Um also Risse zu modellieren, sollte der effektive Gleitmodul μ_{12} gegen einen positiven Wert konvergieren, der sich z.B. aus Rissmodellen ermitteln ließe und im Folgenden mit ${}^0\mu$ bezeichnet wird.

In Abbildung 6.3 ist der Einfluss des Halbmesserverhältnisses senkrecht zur Schubspannungsrichtung illustriert. Hierzu ist μ_{12} einerseits für den Fall, dass die x_1 -Achse Rotationsachse ist, aufgetragen, andererseits dafür, dass die x_3 -Achse Rotationsachse ist. Für $\xi_{11} \rightarrow \infty$ erhält man somit im ersten Fall einen unendlich langen Zylinder in x_1 -Richtung und im 2. Fall einen Riss mit der Rissnormalen in x_3 -Richtung. Die geometrischen Deutungen für $\xi_{11} \rightarrow 0$ und $\xi_{11} \rightarrow \infty$ sind in der Abbildung illustriert.

Der Wert von μ_{23} strebt für $\xi \rightarrow 0$ gegen $\frac{{}^0\mu}{1 + \omega}$ und soll im Folgenden mit ${}^{c\perp}\mu$ bezeichnet werden.

6.3.2.2 Verlauf der effektiven Elastizitätsmoduli

Das Vorgehen zur Ermittlung der effektiven Elastizitätsmoduli verläuft analog zu dem bei den Gleitmoduli. Es sei beispielhaft für E_1 dargestellt.

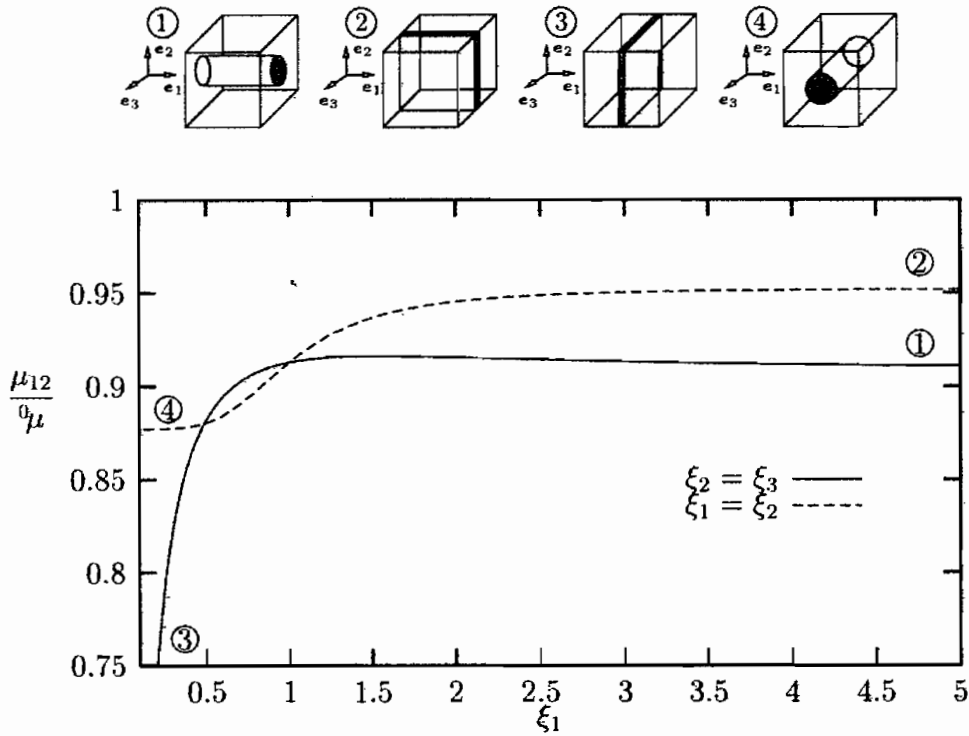


Abbildung 6.3: Einfluss der Halbmesserverhältnisse auf den Gleitmodul, $\omega = 5\%$

Dazu wird zunächst eine Normalspannung in Richtung von e_1 aufgebracht

$$\sigma^\infty = \sigma_{11}^\infty e_1 e_1 \quad . \quad (6.50)$$

Für die Verzerrungsenergien erhält man

$$\Upsilon_{(e)} = \frac{(\sigma_{11}^\infty)^2}{2E_1} \Delta V, \quad {}^0\Upsilon_{(e)} = \frac{(\sigma_{11}^\infty)^2}{2{}^0E} \Delta V, \quad \text{int} \Upsilon_{(e)} = -\frac{(\sigma_{11}^\infty)^2}{2{}^0E} \cdot \left(\frac{\epsilon_{11} {}^0E}{\sigma_{11}^\infty} \right) \omega \Delta V \quad . \quad (6.51)$$

Einsetzen in (6.22) liefert E_1 in Abhängigkeit von Porenform und Porenvolumenanteil

$$\frac{E_i}{{}^0E} = \left[1 + \omega \frac{(1 - S_{2222})^2 - S_{2233}^2 - 2{}^0\nu S_{1122}(1 - S_{2222} + S_{2233})}{1 - S_{1111}[3(1 - S_{2222})^2 - S_{2233}^2] - 2(1 - S_{2222})S_{1122}S_{2211}} \right]^{-1} \quad . \quad (6.52)$$

Exemplarisch sei hier die Gleichung für kugelförmige Poren nach Einsetzen der Komponenten des ESHELBY-Tensors angegeben

$$\frac{E_i}{{}^0E} = \frac{2(5\nu - 7)}{2(5\nu - 7) + 3(\nu - 1)(5\nu + 9)\omega} \quad . \quad (6.53)$$

In Abbildung 6.4 ist der Verlauf der effektiven Elastizitätsmoduli in Abhängigkeit der

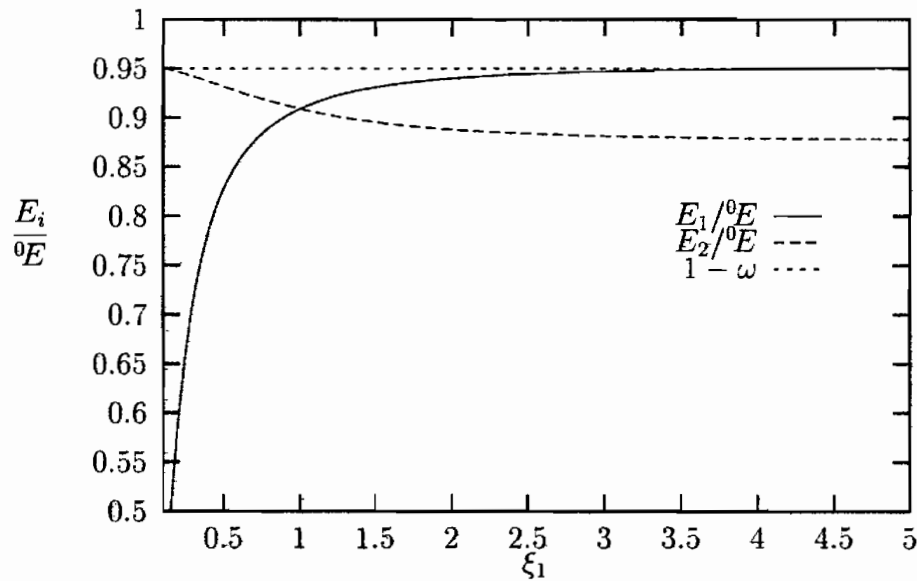


Abbildung 6.4: Elastizitätsmoduli nach ESHELBY-Lösung für Transversalisotropie

Halbmesser rotationsellipsoider Poren für $\omega = 5\%$ dargestellt. Die durchgezogene Linie kennzeichnet den Elastizitätsmodul in Richtung der Rotationsachse der Pore. Für sehr flache Poren ($\xi_{11} \rightarrow 0$) strebt dieser aus demselben Grund, wie bei den Gleitmoduli, gegen Null. Es kann also auch hier davon ausgegangen werden, dass der Elastizitätsmodul für $\xi_{11} \rightarrow 0$ gegen den endlichen Wert cE konvergiert. Für lange Poren, die im Grenzübergang zu langen Zylindern werden, konvergiert das Ergebnis gegen den Elastizitätsmodul nach dem Effektivspannungskonzept, was mit dem Ergebnis von JANSOON & STIGH [JS85] übereinstimmt. Dieser Grenzwert wird mit zE bezeichnet.

Um den Einfluss der Halbmesserverhältnisse senkrecht zum betrachteten Elastizitätsmodul zu verdeutlichen, ist in Abbildung 6.5 der Verlauf von E_1 für den Fall, dass die x_1 -Achse Rotationsachse ist und dass die x_3 -Achse Rotationsachse ist, über ξ_{11} aufgetragen. Für $\xi_{11} > 1$ stimmen beide Verläufe sehr gut überein, der Einfluss des Halbmesserverhältnisses senkrecht zum betrachteten Elastizitätsmodul ist also gering; für $\xi_{11} \rightarrow 0$ wird die Abweichung der beiden Kurven jedoch groß. Im Grenzübergang von $\xi_{11} \rightarrow 0$ erhält man mit e_1 als Rotationsachse einen Riss senkrecht zu e_1 und mit e_3 als Rotationsachse eine zylindrische Pore, deren Elastizitätsmodul in x_1 -Richtung deutlich steifer ist, als der des Risses.

Weiterhin wird in dieser Abbildung deutlich, dass der effektive Elastizitätsmodul E_i bei konstantem Halbmesserverhältnis senkrecht dazu eine streng monoton steigende Funktion von ξ_i ist, unabhängig von der Größe des Halbmesserverhältnisses senkrecht dazu.

Der Wendepunkt der Kurve mit e_3 als Symmetrieachse ergibt sich dadurch, dass im Ge-

gensatz zur anderen Kurve das Halbmesserverhältnis senkrecht zum betrachteten Elastizitätsmodul nicht konstant ist, sondern mit ξ_{11} variiert, da es sich um transversalisotrope Poren handelt.

Quantitativ lässt sich feststellen, dass die effektiven Elastizitätsmoduli der Elementarzelle im gesamten Bereich kleiner sind als die, die mit einem Effektivspannungsmodell $((1 - \omega)^0 E)$ ermittelt werden.

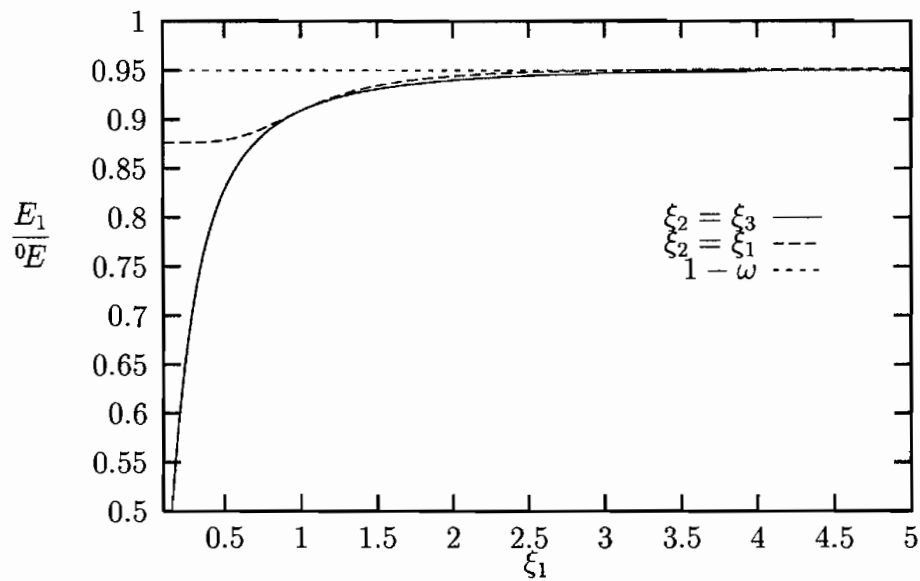


Abbildung 6.5: Einfluss des Halbmesserverhältnisses senkrecht zur Zugrichtung auf den Elastizitätsmodul, $\omega = 5\%$

6.3.2.3 Verlauf der Querkontraktionszahl

Im allgemeinen orthotropen Fall gibt es keine eindeutige Beziehung zwischen Elastizitätsmodul, Gleitmodul und Querkontraktionszahl mehr, wie z.B. im isotropen oder im transversal-isotropen Fall.

Daher kann die ESHELBY-Lösung nur den Verlauf einer Querkontraktionszahl für den transversal-isotropen Fall liefern. Da die vorherigen Lösungen für die Gleit- und Elastizitätsmoduli für Rotationsellipsoide berechnet wurden, lässt sich folgende Beziehung für eine Querkontraktionszahl angeben

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\mu_{23}} - 1 \quad (6.54)$$

deren Verlauf in Abbildung 6.6 dargestellt ist.

Es zeigt sich, dass die Querkontraktionszahlen eine geringe Abhängigkeit von der Poren-

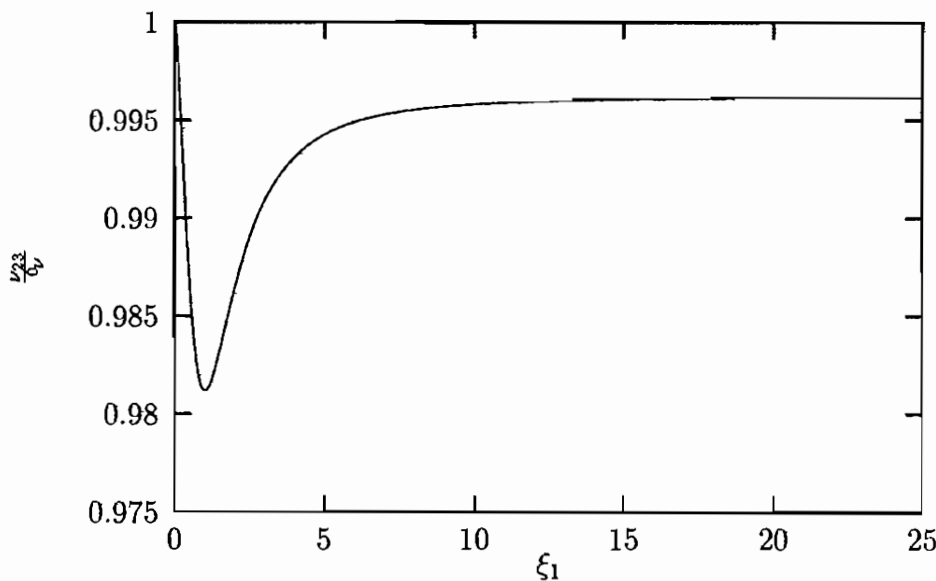


Abbildung 6.6: Verlauf der Querkontraktionszahl ν_{23} nach Eshelby-Lösung für Transversalisotropie

form und auch vom Porenvolumenanteil aufweisen. Die maximale Abweichung, die sich bei diesen Berechnungen ergab, liegt unter 1,8%. Der Verlauf für $\xi_{11} \ll 1$ muss aufgrund der bereits genannten Eigenschaften der Modellierung in Frage gestellt werden. Es kann aber die bereits von ZHAO & YU [ZY00] herausgestellte und von MURAKAMI, HAYAKAWA & LIU [MHL98] auch experimentell ermittelte Eigenschaft, dass die Querkontraktion des geschädigten Materials immer kleiner ist als die des ungeschädigten, bestätigt werden.

Dieses Ergebnis ist auch anschaulich, da der Kompressionsmodul mit der Zunahme des Porenvolumenanteils in jedem Falle abnimmt.

6.4 Phänomenologische Beschreibung des elastischen Verhaltens

Aufbauend auf die Betrachtungen der Verläufe der elastischen Konstanten der Materialvolumenzelle sollen die Schädigungseffekte in das vorgestellte Materialmodell mit einbezogen werden.

Das Modell soll die elastischen Eigenschaften möglichst gut approximieren und eine Skalierbarkeit an die ermittelten Grenzwerte ${}^cE, {}^c\mu, {}^zE$ sowie ${}^c\mu$ und die effektiven isotropen Moduli E und μ ermöglichen. Die Effekte der Materialschädigung auf das elastische Verhalten sollen durch die Formulierung einer effektiven Nachgiebigkeit im Rahmen einer linear-elastischen Formulierung berücksichtigt werden. Außerdem soll die Formulierung so gewählt werden, dass zur Berechnung der effektiven Nachgiebigkeiten keine Hauptachsen-transformation des Schädigungstensors erforderlich ist. Die Nachgiebigkeit hängt von den elastischen Eigenschaften des ungeschädigten Materials und vom Schädigungszustand des Materials ab. Der Schädigungszustand des Materials wird im Stoffgesetz durch die Schädigungsmaße ω und $\tilde{\mathbf{D}}$ beschrieben. Die Verwendung des Schädigungsorthotropietensors bei der mikromechanischen Betrachtung dient lediglich der Anschaulichkeit. Um die Effekte isotroper und anistropischer Schädigung zu separieren, wird nicht \mathbf{D} direkt als Argument des Nachgiebigkeitstensors verwendet, sondern ein gewichteter Schädigungstensor

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{D}}{\omega} \quad . \quad (6.55)$$

$\tilde{\mathbf{D}}$ beschreibt, wie aus (3.40) - (3.42) ersichtlich ist, lediglich die Anisotropierichtungen und Halbmesserverhältnisse der Schädigung. Es wird der folgende Funktionsansatz für die elastische Nachgiebigkeit angesetzt

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} \left({}^0\mathbf{D}, \omega, \tilde{\mathbf{D}} \right) \quad (6.56)$$

Weiterhin muss beachtet werden, dass der elastische Nachgiebigkeitstensor den allgemeinen Prinzipien der klassischen Kontinuumsmechanik ausgesetzt ist (siehe z.B. MALVERN [Mal69]). Daraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- Der Nachgiebigkeitstensor muss aufgrund der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor und der Annahme, dass er sich aus einem Potential ableiten lässt, folgende Symmetrien aufweisen

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{klij} = \mathbb{D}_{jikl} \quad . \quad (6.57)$$

- Das Prinzip der materiellen Bezugsindifferenz muss eingehalten werden. Dies lässt sich durch die Formulierung des Nachgiebigkeitstensors als isotrope Tensorfunktion

seiner Argumente sicherstellen

$$Q \star \mathbf{D} \left({}^0\mathbf{D}, \omega, \tilde{\mathbf{D}} \right) = \mathbf{D} \left(Q \star {}^0\mathbf{D}, \omega, Q \star \tilde{\mathbf{D}} \right) \quad \forall Q \in \text{SO}(3) \quad . \quad (6.58)$$

- Die elastische Komplementärenergie muss für alle denkbaren Spannungszustände σ stets positiv sein. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Nachgiebigkeitstensor positiv definit ist ²

$$\Sigma = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{D} : \sigma \geq 0 \quad . \quad (6.59)$$

6.4.1 Darstellung der effektiven Nachgiebigkeit als Tensorfunktion

Ausgehend von isotropem linear-elastischem Materialverhalten kann das komplementäre elastische Potential als skalarwertige isotrope Tensorfunktion folgender skalar- und tensorwertiger Argumente dargestellt werden

- tensorwertige Argumente:
 - symmetrischer Spannungstensor σ
 - symmetrischer Schädigungstensor $\tilde{\mathbf{D}}$
- skalarwertige Argumente:
 - Elastizitätsmodul des ungeschädigten Materials 0E
 - Querkontraktion des ungeschädigten Materials ${}^0\nu$
 - Porenvolumenanteil ω .

Zur Darstellung dieser skalarwertigen isotropen Tensorfunktion ist es zweckmäßig den Satz von Grundinvarianten, die laut Betten [Bet93] auch Integritätsbasis genannt werden, anzugeben

$$\text{tr}\sigma, \text{tr}\sigma^2, \text{tr}\sigma^3, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^3, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}\sigma, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}\sigma^2, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2\sigma, \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2\sigma^2, {}^0E, {}^0\nu, \omega \quad . \quad (6.60)$$

Jede andere Invariante von σ und $\tilde{\mathbf{D}}$ lässt sich als ganzrationale Funktion dieser Integritätsbasis darstellen. Aufgrund der Deviatoreigenschaft von $\tilde{\mathbf{D}}$ ist $\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}})$ identisch Null.

²Es ist schwer, die Eigenschaft der positiven Definitheit bei einer allgemeinen Formulierung eines Tensors 4. Stufe nachzuweisen. Wählt man jedoch Ansätze, die die hinreichenden Bedingungen zur Erfüllung der pos. Def. erfüllen, so führt dieses zu einer sehr starken Einschränkung bei der Wahl der Koeffizienten, z.B. verbleiben bei SWOBODA & YANG [SY99] lediglich 3 freie Parameter zur Beschreibung des elastischen Verhaltens, die sich später auf einen Parameter, der die Schädigungsanteile enthält, reduzieren.

Da der Schädigungstensor $\tilde{\mathbf{D}}$ definitionsgemäß nur die anisotropen Anteile der Schädigung beschreibt, wird angenommen, dass die Invariante $\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2$ keinen Einfluss auf \tilde{W} hat. Weiterhin sollen als Näherung nur Terme, die maximal quadratisch in $\tilde{\mathbf{D}}$ sind berücksichtigt werden. Damit erhält man als allgemeine Tensorfunktion, die quadratisch in $\boldsymbol{\sigma}$ ist und die obigen Annahmen erfüllt

$$\begin{aligned} \Sigma = & \hat{a}_1(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \hat{a}_2\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^2 + \hat{a}_3\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}\text{tr}\boldsymbol{\sigma} + \hat{a}_4\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}^2 + \\ & \hat{a}_5(\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma})^2 + \hat{a}_6\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2\boldsymbol{\sigma}\text{tr}\boldsymbol{\sigma} + \hat{a}_7\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^2\boldsymbol{\sigma}^2 \quad . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Stellt man die komplementäre elastische Energie andererseits durch die effektive elastische Nachgiebigkeit dar, so erhält man durch Koeffizientenvergleich von (6.59) und (6.61) unter Beachtung aller Symmetrien von \mathbf{D} , $\boldsymbol{\sigma}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors bezüglich einer orthonormierten Basis

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \hat{a}_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{\hat{a}_2}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \quad (6.62)$$

$$\frac{\hat{a}_3}{2}(\delta_{ij}\tilde{\mathbf{D}}_{kl} + \delta_{kl}\tilde{\mathbf{D}}_{ij}) + \frac{\hat{a}_4}{4}(\delta_{ik}\tilde{\mathbf{D}}_{jl} + \delta_{il}\tilde{\mathbf{D}}_{jk} + \delta_{jk}\tilde{\mathbf{D}}_{il} + \delta_{jl}\tilde{\mathbf{D}}_{ik})$$

$$+ \hat{a}_5\tilde{\mathbf{D}}_{ij}\tilde{\mathbf{D}}_{kl} + \frac{\hat{a}_6}{2}(\delta_{ij}(\tilde{\mathbf{D}})_{kl}^2 + \delta_{kl}(\tilde{\mathbf{D}})_{ij}^2)$$

$$+ \frac{\hat{a}_7}{4}(\delta_{ik}(\tilde{\mathbf{D}})_{jl}^2 + \delta_{il}(\tilde{\mathbf{D}})_{jk}^2 + \delta_{jk}(\tilde{\mathbf{D}})_{il}^2 + \delta_{jl}(\tilde{\mathbf{D}})_{ik}^2)$$

$$= a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + a_3(\delta_{ij}\tilde{\mathbf{D}}_{kl} + \delta_{kl}\tilde{\mathbf{D}}_{ij}) + a_4(\delta_{ik}\tilde{\mathbf{D}}_{jl} + \delta_{il}\tilde{\mathbf{D}}_{jk} + \delta_{jk}\tilde{\mathbf{D}}_{il} + \delta_{jl}\tilde{\mathbf{D}}_{ik}) \quad (6.63)$$

$$+ a_5\tilde{\mathbf{D}}_{ij}\tilde{\mathbf{D}}_{kl} + a_6(\delta_{ij}(\tilde{\mathbf{D}})_{kl}^2 + \delta_{kl}(\tilde{\mathbf{D}})_{ij}^2) \quad (6.64)$$

$$+ a_7(\delta_{ik}(\tilde{\mathbf{D}})_{jl}^2 + \delta_{il}(\tilde{\mathbf{D}})_{jk}^2 + \delta_{jk}(\tilde{\mathbf{D}})_{il}^2 + \delta_{jl}(\tilde{\mathbf{D}})_{ik}^2) \quad , \quad (6.65)$$

in basisfreier Notation ergibt sich

$$\mathbf{D} = a_1\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2a_2\mathbf{I} + a_3(\mathbf{1} \otimes \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{1}) + 2a_4(\mathbf{I} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{I}) + \quad (6.66)$$

$$a_5\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{D}} + a_6(\mathbf{1} \otimes \tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}}^2 \otimes \mathbf{1}) + 2a_7(\mathbf{I} \tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}}^2 \mathbf{I})$$

Der Ansatz enthält 7 Koeffizienten. Diese können im Rahmen der Theorie isotroper Tensorfunktionen Funktionen der Integritätsbasis sein. Aufgrund des Ansatzes linearer Elastizität haben die spannungsabhängigen Invarianten keinen Einfluss, da die Spannung bereits in jedem Term in (6.61) quadratisch vorkommt. Auch $\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}})$ und $\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2)$ haben, wie bereits erwähnt, keinen Einfluss und $\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^3)$ soll vernachlässigt werden. Damit reduziert sich die Abhängigkeit der Koeffizienten auf die skalarwertigen Argumente der isotropen Tensorfunktion

$$a_i = a_i({}^0E, {}^0\nu, \omega) \quad . \quad (6.67)$$

Eine weitere Möglichkeit der Ableitung der effektiven Nachgiebigkeit als isotrope Tensorfunktion besteht in der Darstellung der Dehnung als tensorwertige isotrope Tensorfunktion der Spannungen und des Schädigungstensors

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}({}^0E, {}^0\nu, \omega, \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{D}({}^0E, {}^0\nu, \omega, \tilde{\mathbf{D}}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (6.68)$$

Unter Einhaltung der angegebenen Annahmen führt dies auf dasselbe Ergebnis. COWIN zeigt in [Cow85], dass für den Fall, dass die Tensorfunktion nach den linearen Gliedern in $\tilde{\mathbf{D}}$ abgebrochen wird, keine allgemeine Orthotropie mehr beschrieben werden kann. Diesem Gedankengang folgend, lassen sich im linearen Fall aus (6.62) die folgenden Beziehungen zwischen den Nachgiebigkeiten herleiten

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{1111} + \mathbb{D}_{2222} &= 2 \mathbb{D}_{1122} + 4 \mathbb{D}_{1212} \\ \mathbb{D}_{1111} + \mathbb{D}_{3333} &= 2 \mathbb{D}_{1133} + 4 \mathbb{D}_{1313} \\ \mathbb{D}_{2222} + \mathbb{D}_{3333} &= 2 \mathbb{D}_{2233} + 4 \mathbb{D}_{2323} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Man erhält also nur 6 anstatt 9 voneinander unabhängige Komponenten des Nachgiebigkeitstensors, die zur Beschreibung von Orthotropie nötig sind. Aus diesem Grunde sollen zur Modellierung der elastischen Nachgiebigkeit auch weiterhin die quadratischen Terme in $\tilde{\mathbf{D}}$ berücksichtigt werden.

6.4.1.1 Anpassung der Koeffizienten

Zur Anpassung der Koeffizienten an die Verläufe der elastischen Konstanten wird der Nachgiebigkeitstensor im Hauptachsensystem für rotationssymmetrische Poren mit \mathbf{e}_1 als Symmetrieachse betrachtet, der gewichtete Schädigungstensor ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{D}}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathcal{D}}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

Es werden die folgenden Komponenten des Nachgiebigkeitstensors zur Anpassung gewählt

$$\mathbb{D}_{1111}(\tilde{\mathcal{D}}_{11}) = a_1 + 2a_2 + (2a_3 + 4a_4)\tilde{\mathcal{D}}_{11} + (a_5 + 2a_6 + 4a_7)(\tilde{\mathcal{D}}_{11})^2 \quad (6.71)$$

$$\mathbb{D}_{1212}(\tilde{\mathcal{D}}_{11}, \tilde{\mathcal{D}}_{22}) = a_2 + a_4(\tilde{\mathcal{D}}_{11} + \tilde{\mathcal{D}}_{22}) + a_7 \left((\tilde{\mathcal{D}}_{11})^2 + (\tilde{\mathcal{D}}_{22})^2 \right) \quad (6.72)$$

Die Koeffizienten werden an die Werte für Risschädigung, Schädigung durch zylindrische Poren in Richtung der Symmetrieachse und isotrope Schädigung angepasst.

Dazu müssen die Grenzwerte des Schädigungstensors nach (3.40) - (3.42) für Risse und

zylindrische Poren gebildet und in (6.71) und (6.72) eingesetzt werden. Die so erhaltenen Komponenten des Nachgiebigkeitstensors werden mit der zugehörigen Kenngröße gleichgesetzt. Hierbei zeigt sich auch ein großer Vorteil der Fourierkoeffizienten gegenüber dem Schädigungsorthotropietensor. Die Hauptwerte des Schädigungsorthotropietensors werden von dem Intervall $[0, \infty]$ auf das endliche Intervall $[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$ abgebildet. Es ergeben sich die folgenden Werte zur Anpassung.

1. Risschädigung

$${}^c\tilde{\mathcal{D}}_{11} = \lim_{\xi_{11} \rightarrow 0, \xi_{22} = \xi_{33} \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}_{11} = \frac{1}{\pi}$$

$${}^c\tilde{\mathcal{D}}_{22} = \lim_{\xi_{11} \rightarrow 0, \xi_{22} = \xi_{33} \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}_{22} = \frac{-1}{2\pi}$$

$$\mathbb{D}_{1111}({}^c\tilde{\mathcal{D}}_{11}) = \frac{1}{{}^cE} \quad (6.73)$$

$$\mathbb{D}_{1212}({}^c\tilde{\mathcal{D}}_{11}, {}^c\tilde{\mathcal{D}}_{22}) = \frac{1}{4{}^c\mu} \quad (6.74)$$

2. Schädigung durch zylindrische Poren

$${}^z\tilde{\mathcal{D}}_{11} = \lim_{\xi_{11} \rightarrow 0, \xi_{22} = \xi_{33} \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}_{11} = \frac{-1}{2\pi}$$

$${}^z\tilde{\mathcal{D}}_{22} = \lim_{\xi_{11} \rightarrow 0, \xi_{22} = \xi_{33} \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}_{22} = \frac{1}{4\pi}$$

$$\mathbb{D}_{1111}({}^z\tilde{\mathcal{D}}_{11}) = \frac{1}{{}^zE} \quad (6.75)$$

$$\mathbb{D}_{1212}({}^z\tilde{\mathcal{D}}_{11}, {}^z\tilde{\mathcal{D}}_{22}) = \frac{1}{4{}^z\mu} \quad (6.76)$$

3. Isotrope Schädigung

$$\mathbb{D}_{1111}(0) = \frac{1}{E} \quad (6.77)$$

$$\mathbb{D}_{1212}(0, 0) = \frac{1}{4\mu} \quad (6.78)$$

Auswerten der Gleichungen (6.73) - (6.78) liefert die Koeffizienten in Abhängigkeit von den ermittelten Kennwerten

$$a_1 = \frac{1}{E} - \frac{1}{2\mu} = \frac{-\nu}{E} \quad (6.79)$$

$$a_2 = \frac{1+\nu}{2E} \quad (6.80)$$

$$a_3 = \frac{\pi}{12} \left(\frac{2}{cE} - \frac{8}{zE} + \frac{6}{E} - \frac{2}{c\mu} + \frac{5}{c^\perp\mu} - \frac{3}{\mu} \right) \quad (6.81)$$

$$a_4 = \frac{\pi}{24} \left(\frac{2}{c\mu} - \frac{5}{c^\perp\mu} + \frac{3}{\mu} \right) \quad (6.82)$$

$$a_7 = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2}{c\mu} + \frac{1}{c^\perp\mu} - \frac{3}{\mu} \right) \quad (6.83)$$

$$a_5 + 2a_6 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{2}{cE} + \frac{4}{zE} - \frac{6}{E} - \frac{2}{c\mu} - \frac{1}{c^\perp\mu} + \frac{3}{\mu} \right) \quad (6.84)$$

Die Koeffizienten a_5 und a_6 lassen sich noch nicht eindeutig ermitteln, da dafür eine Gleichung fehlt. Es wird die folgende Nachgiebigkeit betrachtet

$$\mathbb{D}_{1122} = a_1 + a_3(\bar{\mathcal{D}}_{11} + \bar{\mathcal{D}}_{22}) + a_5\bar{\mathcal{D}}_{11}\bar{\mathcal{D}}_{22} + a_6 \left((\bar{\mathcal{D}}^2)_{11} + (\bar{\mathcal{D}}^2)_{22} \right) \quad (6.85)$$

Die obige Gleichung führt zu der Vermutung, dass a_5 und a_6 von derselben Größenordnung sind. Daher wird $a_5 = a_6$ angesetzt, und man erhält

$$a_6 = \frac{\pi^2}{9} \left(\frac{2}{cE} + \frac{4}{zE} - \frac{6}{E} - \frac{2}{c\mu} - \frac{1}{c^\perp\mu} + \frac{3}{\mu} \right) \quad (6.86)$$

Es zeigt sich nach Einsetzen von Werten für die Grenzwerte der Moduli, dass diese Annahme vernünftig ist, da die Querkontraktion des geschädigten Materials nicht sehr stark von der des ungeschädigten abweicht. Weiterhin kann für Risse ein Absinken der Querkontraktion bei Belastung in Richtung der Rissnormalen und bei langen Zylindern ein Ansteigen der Querkontraktion bei Belastung in Richtung der Symmetrieachse gegenüber dem isotropen Fall beobachtet werden.

Es bleibt anzumerken, dass für einen verschwindenden Porenvolumenanteil in jedem Fall die Nachgiebigkeit des ungeschädigten Materials erhalten wird. Die Modellierung von Risschädigung ist demnach nur für Risse nicht verschwindenden Volumens möglich.

6.4.2 Ermittlung der elastischen Kennwerte

Die Ermittlung der Koeffizienten ist über die Gleichungen (6.79) - (6.84) und (6.86) mit Hilfe der elastischen Kennwerte des Materials möglich.

Die Bestimmung dieser Kennwerte $E, \mu, cE, c\mu, zE$ und ${}^\perp c\mu$ kann auf verschiedenen Wegen

erfolgen. Zum einen können diese Werte experimentell bestimmt werden, was die beste Möglichkeit der quantitativen Anpassung der effektiven Nachgiebigkeit bieten würde, allerdings ist die Bestimmung des Schädigungszustandes des Materials heute noch nicht möglich und die Herstellung von Proben mit einem definierten Schädigungszustand kann auch als schwierig angesehen werden. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Ermittlung der Kennwerte aus mikromechanischen Modellen. Neben dem vorgestellten Modell, das keine Wechselwirkungseffekte der Defekte einbezieht, können auch andere Modelle, mit denen die Nachgiebigkeit eines durch periodisch angeordnete rotationsellipsoide Poren geschädigten Materials beschrieben werden kann, verwendet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Kennwerte mit dem vorgestellten Modell nach ESHELBY bestimmt und danach die sich daraus ergebenden Verläufe des phänomenologischen Modells mit den mikromechanisch bestimmten Verläufen verglichen.

6.4.2.1 Einfluss der isotropen Schädigung

Die Kennwerte der isotropen Schädigung ergeben sich aus (6.48) und (6.52) mit den Werten des ESHELBY-Tensors für kugelförmige Poren

$$\frac{E}{{}^0E} = \frac{2(5^0\nu - 7)}{2(5^0\nu - 7) + 3\omega(5^0\nu - 1)(5^0\nu + 9)} \quad (6.87)$$

$$\frac{\mu}{{}^0\mu} = \frac{5^0\nu - 7}{5^0\nu - 7 + 15\omega(5^0\nu - 1)} \quad (6.88)$$

6.4.2.2 Einfluss der anisotropen Schädigung

Für Schädigung durch zylinderförmige Poren ergeben sich die bereits erwähnten Grenzwerte

$$\frac{{}^zE}{{}^0E} = (1 - \omega) \quad (6.89)$$

$$\frac{{}^{\perp c}\mu}{{}^0\mu} = \frac{1}{1 + \omega} \quad (6.90)$$

Bei Risschädigung versagt das ESHELBY-Modell aus den genannten Gründen. Daher sollen die Risse ersatzweise durch penny-shaped Poren mit dem endlichen Verhältnis λ von

Radius zu Dicke betrachtet werden. Mit den jeweiligen Werten des ESHELBY-Tensors (siehe z.B. Mura [Mur93]) erhält man aus (6.48) und (6.52) die Elastizitäts- bzw Gleitmoduli

$$\frac{\lambda E}{{}^0E} = \left\{ 1 + \omega \frac{({}^0\nu-1)[\pi^2\lambda^2(32{}^0\nu^3+4{}^0\nu^2+23{}^0\nu-21)-8\pi\lambda(8{}^0\nu^3-9{}^0\nu^2+21{}^0\nu-13)-128({}^0\nu-1)^2]}{\pi\lambda(2{}^0\nu-1)\pi^2\lambda^2(8{}^0\nu^2+{}^0\nu-7)+[32({}^0\nu-1)-2\pi\lambda(8{}^0\nu^2+8{}^0\nu-15)]} \right\}^{-1} \quad (6.91)$$

$$\frac{\lambda\mu}{{}^0\mu} = \frac{\pi\lambda({}^0\nu-2)}{\pi\lambda({}^0\nu-2)+4\omega({}^0\nu-1)} \quad (6.92)$$

Die Werte für Risschädigung lassen sich dann aus den für einen endlichen Wert von λ ermittelten Werten und denen für isotrope Schädigung linear extrapolieren

$$\frac{{}^cE}{{}^0E} = \frac{\lambda E - \lambda E}{{}^0E(1-\lambda)} \quad (6.93)$$

$$\frac{{}^c\mu}{{}^0\mu} = \frac{\lambda\mu - \lambda\mu}{{}^0\mu(1-\lambda)} \quad (6.94)$$

Die Güte der erhaltenen Lösungen der phänomenologischen Modellierung hängt stark von der Wahl des Parameters λ ab. Daher kann dieser beispielsweise über eine Minimierung der Fehlerquadratsumme des phänomenologischen Modells bezüglich der mikromechanisch ermittelten Verläufe bestimmt werden.

6.4.2.3 Vergleich der mikromechanisch ermittelten Verläufe und der effektiven Nachgiebigkeit

Zum Vergleich der Nachgiebigkeit nach dem Approximationsansatz mit den ESHELBY-Verläufen werden die Koeffizienten für einen Porenvolumenanteil von $\omega = 0,05$ und eine Querkontraktionszahl von ${}^0\nu = 0,3$ berechnet. Die Kennwerte für Risschädigung ergeben sich aus einer Anpassung von λ sowohl für den Gleit- als auch für den Elastizitätsmodul. Damit ergibt sich nach (6.87) - (6.90) und (6.93) - (6.94) für die elastischen Kennwerte

$$\frac{E}{{}^0E} = 0,9089 \quad \frac{\mu}{{}^0\mu} = 0,9129$$

$$\frac{{}^zE}{{}^0E} = 0,95 \quad \frac{{}^{\perp c}\mu}{{}^0\mu} = 0,952$$

$$\frac{\lambda E(\lambda = 0,3)}{{}^0E} = 0,7494 \Rightarrow \frac{{}^cE}{{}^0E} = 0,6869$$

$$\frac{\lambda\mu(\lambda = 0,15)}{{}^0\mu} = 0,8512 \Rightarrow \frac{{}^c\mu}{{}^0\mu} = 0,8176$$

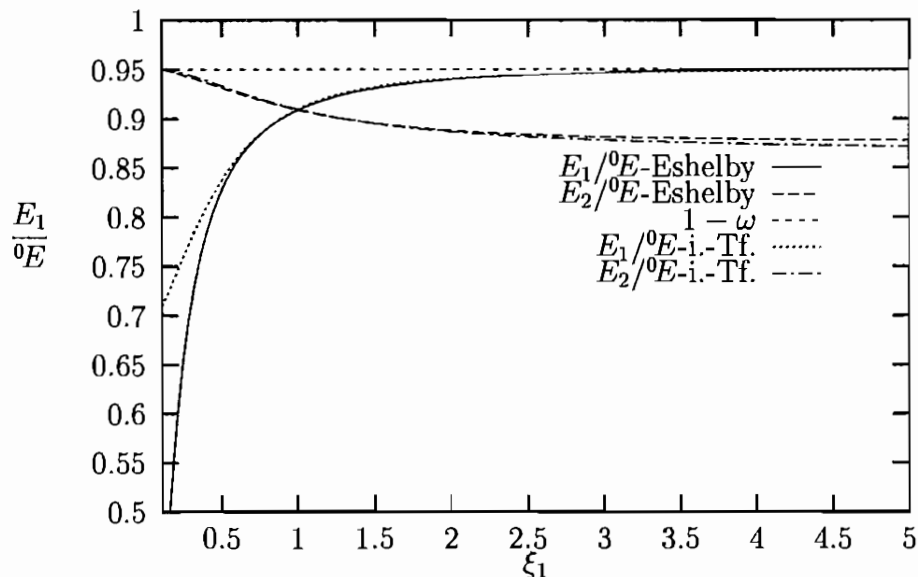


Abbildung 6.7: Vergleich der effektiven Elastizitätsmoduli

In Abbildung 6.7 sind die Verläufe der effektiven Elastizitätsmoduli über der Komponente ξ_{11} des Schädigungsorthotropietensors für transversal-isotrope Poren mit e_1 als Symmetrieachse aufgetragen. Es zeigt sich sowohl für den Elastizitätsmodul E_1 in Richtung der Symmetrieachse als auch für den senkrecht dazu gerichteten Elastizitätsmodul E_2 eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Lösungen des mikromechanischen und des phänomenologischen Modells über den sehr großen dargestellten Halbmesserbereich.

In Abbildung 6.8 sind die effektiven Gleitmoduli aufgetragen. Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung.

Die Abweichung für $\xi_{11} \rightarrow 0$ ist wieder mit der ESHELBY-Modellierung erklärbar.

Diese Ergebnisse zeigen, dass die angegebene phänomenologische Modellierung der Nachgiebigkeit als isotrope Tensorfunktion sehr gut geeignet ist, die anisotropen Eigenschaften des geschädigten Materials über einen großen Bereich von Porengeometrien zu beschreiben. Der große numerische Aufwand einer Homogenisierung kann somit vermieden werden.

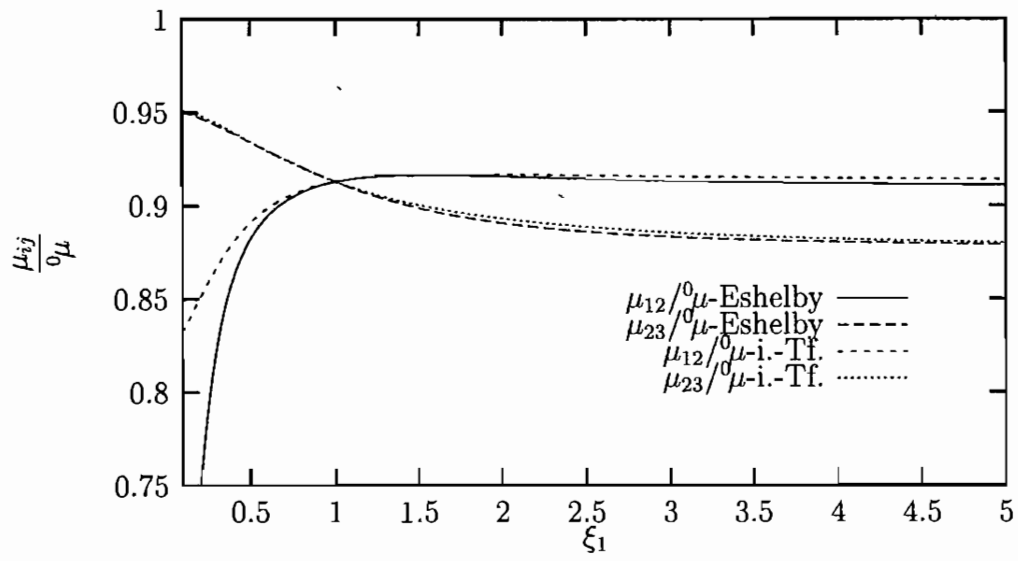


Abbildung 6.8: Vergleich der effektiven Gleitmoduli

7. Makroskopisches Stoffgesetz

Es wird ein phänomenologisches Stoffgesetz entwickelt, welches zur mechanischen Beschreibung des duktilen Deformationsverhaltens polykristalliner Metalle mit Poren an Korngrenzen geeignet ist. Neben den elastischen und plastischen Deformationen werden dabei auch die schädigungsinduzierten Deformationen und die Änderung der Materialsymmetrien aufgrund von Schädigungsprozessen berücksichtigt.

Das Materialmodell wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf die Beschreibung von Prozessen mit kleinen Verzerrungsgeschwindigkeiten beschränkt. Es wird von thermischen Randbedingungen ausgegangen, die eine hinreichend schnelle Abfuhr der gesamten durch Dissipation in Wärme umgewandelten Energie gewährleisten, so dass sich nahezu isotherme Bedingungen einstellen. Folglich wird die thermomechanische Kopplung außer Acht gelassen und nur die mechanischen konstitutiven Gleichungen werden formuliert. Die explizite Abhängigkeit der konstitutiven Größen von der Temperatur wird somit im Folgenden implizit vorausgesetzt und es werden keine thermischen internen Zustandsvariablen eingeführt. Als weitere Folge der kleinen Deformationsgeschwindigkeiten brauchen keine viskosen Effekte des inelastischen Verhaltens berücksichtigt zu werden. Das Materialverhalten wird geschwindigkeitsunabhängig formuliert.

In diesem Kapitel wird der konstitutive Rahmen zur Formulierung der materialabhängigen Gleichungen angegeben. Darauf aufbauend werden die Entwicklungsgleichungen für die Deformationsanteile und die internen Zustandsvariablen erarbeitet. Die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik wird geprüft und abschließend eine Vorschrift zur konsistenten Integration der in Ratenform vorliegenden konstitutiven Gleichungen angegeben.

7.1 Konstitutiver Rahmen

Es wird gefordert, dass die konstitutiven Gleichungen den folgenden Axiomen gehorchen (siehe ALTENBACH & ALTENBACH [AA94]):

- Kausalität
- Äquipräsenz
- lokale Wirkung
- Gedächtnis.
- Determinismus
- materielle Objektivität
- physikalische Konsistenz

Das Prinzip der Kausalität ist durch die Wahl der abhängigen und unabhängigen Zustandsvariablen festgelegt. Das Determinismusprinzip wird durch die Verwendung des thermodynamischen Rahmens mit internen Zustandsvariablen befriedigt. Das Äquipräsenzprinzip verlangt, dass der Satz der internen Variablen, der in eine Materialgleichung eingeht, auch in allen übrigen enthalten sein muss. Die Annahme der Gültigkeit des Prinzips der lokalen Wirkung schließt das Vorkommen von Gradienten der internen Zustandsvariablen als Parameter in den konstitutiven Gleichungen aus. Die materielle Objektivität wird durch die Verwendung objektiver tensorieller Größen bei der Materialbeschreibung und objektiver Zeitableitungen gewahrt. Insbesondere stellt die Verwendung der logarithmischen Zeitableitung bei der Formulierung tensorieller Ratengleichungen die exakte Integrierbarkeit der kinematischen Größen sicher. Die physikalische Konsistenz fordert die Einhaltung der Bilanzgleichungen und der Hauptsätze der Thermodynamik.

Zur Beschreibung des Verfestigungszustands des Materials wird eine skalare interne Zustandsvariable für die isotrope Verfestigung und eine tensorielle Zustandsvariable zweiter Stufe zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung eingeführt

$$\hat{\alpha}_{(p)} = \{\kappa, \hat{\zeta}\}, \quad \alpha_{(p)} = \{\kappa, \zeta\} \quad . \quad (7.1)$$

Hier und im Folgenden werden die zu einer EULERSchen Größe korrespondierenden Größen, die in der mit \mathbf{R}^T zurückrotierten Konfiguration definiert sind, durch ein $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet, soweit sie nicht anderweitig bereits eingeführt wurden. Der Schädigungszustand des Materials wird durch die in (3.14) definierte Fourierreihe zur Beschreibung der Volumendichten ellipsoider Hohlräume mit Abbruch nach dem tensoriellen Glied zweiter Stufe dargestellt. Damit wird als skalares Maß der Porenvolumenanteil und als tensorielles Maß der Tensor der gewichteten Fourierkoeffizienten nach (6.55) eingeführt

$$\hat{\alpha}_{(d)} = \{\omega, \hat{\mathcal{D}}\}, \quad \alpha_{(d)} = \{\omega, \tilde{\mathcal{D}}\} \quad . \quad (7.2)$$

Nach LEHMANN [Leh89] besteht das zu formulierende Konstitutivgesetz auf Basis der

GIBBS-Energie aus folgenden Bestandteilen

1. Zustandsfunktion für die GIBBS-Energie

$$\Psi = \hat{\Psi}(\Pi, \kappa, \hat{\zeta}, \omega, \hat{\mathcal{D}}) = \Psi(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.3)$$

2. Entwicklungsgesetz für die inelastische Deformationsgeschwindigkeit

$$\underset{(ir)}{D} = \underset{(ir)}{D}(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.4)$$

3. Entwicklungsgesetze für die internen Zustandsvariablen

$$\dot{\kappa} = \dot{\kappa}(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.5)$$

$$\overset{\circ}{\zeta}^{log} = \overset{\circ}{\zeta}^{log}(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.6)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.7)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{D}}}^{log} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{D}}}^{log}(\pi, \kappa, \zeta, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) \quad (7.8)$$

Wie bereits erwähnt, ist der Einfluss des plastischen Materialzustands auf die elastischen Eigenschaften gering. Damit wird die additive Aufspaltung der GIBBS-Energie in einen elastischen und einen plastischen Anteil postuliert

$$\Psi = \underset{(e)}{\Psi}(\pi, \omega, \tilde{\mathcal{D}}) + \underset{(p)}{\Psi}(\kappa, \zeta) \quad (7.9)$$

Da der plastische Anteil der GIBBS-Energie klein gegenüber dem elastischen Anteil ist, werden die Effekte der Schädigung auf $\underset{(p)}{\Psi}$ vernachlässigt. Auf die Einführung eines zusätzlichen Anteils der GIBBS-Energie zur Berücksichtigung der Schädigungsentwicklung, wie es von CHOW & WANG [CW87], [CW88] und HAYAKAWA, MURAKAMI & LIU [HML98] vorgeschlagen wird, wird im vorliegenden Modell verzichtet, da für duktile Materialien davon ausgegangen werden kann, dass die Schädigungsevolution an die plastischen Deformationen gekoppelt ist. Somit wird bei duktiler Schädigung der Einfluß des Schädigungszustandes auf die GIBBS-Energie im elastischen Anteil berücksichtigt. Der inelastische Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit wird in einen plastischen und einen schädigungsinduzierten Anteil aufgespalten. Dies erfolgt durch eine multiplikative Zerlegung des inelastischen Deformationsgradienten in einen plastischen und einen schädigungsinduzierten Anteil

$$\underset{(i)}{F} = \underset{(p)}{F} \underset{(d)}{F} \quad \Rightarrow \quad \underset{(ri)}{D} = \underset{(p)}{D} + \underset{(d)}{D} \quad (7.10)$$

$$\text{mit } \underset{(p)}{D} = \text{sym} \left(\underset{(r)}{F} \underset{(p)}{\dot{F}} \underset{(p)}{F}^{-1} \underset{(r)}{F}^{-1} \right), \quad \underset{(d)}{D} = \text{sym} \left(\underset{(r)}{F} \underset{(p)}{F} \underset{(d)}{\dot{F}} \underset{(d)}{F}^{-1} \underset{(p)}{F}^{-1} \underset{(r)}{F}^{-1} \right) \quad (7.11)$$

Der plastische Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit ist aufgrund der Inkompressibilität der Matrix deviatorisch. Der schädigungsinduzierte Anteil enthält bedingt durch die Entwicklung des Porenvolumens auch einen Volumenanteil, der stets positiv ist. Heilung wird somit ausgeschlossen.

Setzt man die Aufspaltung der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit nach (7.10)₂ und die internen Zustandsvariablen für das plastische und das schädigungsinduzierte Materialverhalten nach (7.1) und (7.2) in die mechanische dissipative Ungleichung (5.67) ein, so erhält man unter Beachtung von (7.9)

$$\pi : \underset{(p)}{\mathbf{D}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} : \overset{\circ}{\zeta}^{log} + \pi : \underset{(d)}{\mathbf{D}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \dot{\omega} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{D}}} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^{log} \geq 0 \quad . \quad (7.12)$$

Diese Ungleichung muss auch für rein plastisches Materialverhalten ohne Schädigungsevolution erfüllt sein. Dies kann durch die restriktivere Forderung der Erfüllung sowohl einer plastischen als auch einer schädigungsinduzierten Ungleichung erzwungen werden

$$\pi : \underset{(p)}{\mathbf{D}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} : \overset{\circ}{\zeta}^{log} \geq 0 \quad (7.13)$$

$$\pi : \underset{(d)}{\mathbf{D}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \dot{\omega} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{D}}} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^{log} \geq 0 \quad . \quad (7.14)$$

Die Erweiterung dieses konstitutiven Rahmens zur Berücksichtigung der thermischen Kopplung erfordert das Auftreten der Temperatur und - je nach Wärmeleitgesetz - des Temperaturgradienten in den konstitutiven Gleichungen. Weiterhin müssen Evolutionsgleichungen für die thermischen internen Zustandsvariablen und die Entropie sowie eine Gleichung für den Wärmestrom \mathbf{q} eingeführt werden. Hierbei ist die Erfüllung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik zu beachten.

7.2 Elastisches Materialverhalten

Es wird davon ausgegangen, dass der reversible Anteil an den Gesamtverzerrungen klein ist. Daher wird ein hyperelastisches Gesetz angesetzt. In diesem Fall lässt sich der elastische Anteil der GIBBS-Energie $\hat{\Psi}_{(e)}$ durch das komplementäre Potential formulieren. Bezeichnet man die Symmetriegruppe des Materials in der Referenzkonfiguration mit \mathcal{G}_0 , so lässt sich das Potential nach HILL [Hil78] als quadratische Funktion der zurückrotierten Spannung $\mathbf{\Pi}$ und des zurückrotierten Nachgiebigkeitstensors $\hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)}$ darstellen

$$\hat{\Psi}_{(e)}(\hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)}, \mathbf{\Pi}) = -\frac{1}{2\rho_0} \mathbf{\Pi} : \hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)} : \mathbf{\Pi} \quad . \quad (7.15)$$

Dabei beschreibt der Nachgiebigkeitstensor in der Referenzkonfiguration das orthotrope elastische Verhalten des geschädigten Materials

$$\hat{\underline{D}}^{(4)} = \hat{\underline{D}}^{(4)}({}^0\mathbf{D}, \omega, \hat{\mathcal{D}}) \quad . \quad (7.16)$$

Die reversible logarithmische Verzerrung in der Referenzkonfiguration ergibt sich aus (7.15) mit der thermischen Zustandsgleichung (5.44) zu

$$\mathbf{H}_{(r)} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Pi} = \hat{\underline{D}}^{(4)} : \Pi \quad . \quad (7.17)$$

$\mathbf{H}_{(r)}$ ist invariant bezüglich Starrkörperrotationen aus der Materialsymmetriegruppe in der Referenzkonfiguration. Für einen beliebigen Rotationstensor der Symmetriegruppe $\mathbf{Q}_0 \in \mathcal{G}_0$ gilt

$$\mathbf{H}_{(r)}(\mathbf{Q}_0 \star \Pi) = \mathbf{Q}_0 \star \mathbf{H}_{(r)}(\Pi) \quad . \quad (7.18)$$

Für transversale Isotropie mit \mathbf{a}_0 als materielle Symmetrieachse erhält man z.B. die zulässigen Rotationstensoren zu

$$\mathcal{G}_0 = \{ \mathbf{Q}_0 = \cos \varphi \mathbf{1} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 - \sin \varphi \mathbf{1} \times \mathbf{a}_0 \mid \mathbf{Q}_0 \in \mathcal{G}_0 \}, \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi] \quad .$$

Durch Vorrotieren der Spannung in die aktuelle Konfiguration ergibt sich das komplementäre Potential in der aktuellen Konfiguration und damit die Nachgiebigkeit

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{\mathbf{D}}^{(4)}, \boldsymbol{\pi}) &= \hat{\Psi}(\hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)}, \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi}) = -\frac{1}{2\rho_0} (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{R}) : \hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)} : (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{R}) \quad (7.19) \\ &= -\frac{1}{2\rho_0} \boldsymbol{\pi} : \underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi} \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt für die reversible logarithmische Verzerrung in der aktuellen Konfiguration durch Einsetzen in (5.45)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{(r)} &= -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi} \quad \text{mit } \underline{\mathbf{D}}^{(4)} = \mathbf{R} \star \hat{\underline{\mathbf{D}}}^{(4)} \quad (7.20) \\ D_{ijkl} &= R_{im} R_{jn} R_{ko} R_{lp} \hat{D}_{mnop} \quad . \end{aligned}$$

XIAO, BRUHNS & MEYERS zeigen in [XBM00], dass das hyperelastische Potential in der aktuellen Konfiguration nach (7.19) invariant in der aktuellen Symmetriegruppe ist, welche sich aus \mathcal{G}_0 durch eine Vorwärtsrotation ergibt

$$\mathbf{R} \star \mathcal{G}_0 = \{ \mathbf{R} \star \mathbf{Q}_0 \mid \mathbf{Q}_0 \in \mathcal{G}_0 \} \quad . \quad (7.21)$$

(7.20) ist somit die äquivalente Beschreibung in der aktuellen Konfiguration zu (7.17).

Da von der für metallische Werkstoffe üblichen Annahme Gebrauch gemacht wird, dass die elastischen Verzerrungsanteile klein sind, wird für das komplementäre Potential in der aktuellen Konfiguration die komplementäre elastische Verzerrungsenergie nach (6.59) und folglich für die Nachgiebigkeit (6.66) verwendet. Unter der vorausgesetzten Isotropie der Nachgiebigkeit des ungeschädigten Materials muss zwischen der ungeschädigten Nachgiebigkeit in der aktuellen und der Referenzkonfiguration nicht unterschieden werden. Da sich die Nachgiebigkeit nach (6.66) auf die CAUCHY-Spannung bezieht, das hyperelastische Potential nach (7.20)₂ jedoch in den rotierten gewichteten Spannungen $\boldsymbol{\pi}$ formuliert ist, ist eine Wichtung des Nachgiebigkeitstensors erforderlich. Unter der Annahme, dass die elastischen Volumenänderungen gegenüber denen aufgrund der Schädigungsevolution vernachlässigbar sind, lässt sich nach LEHMANN [Leh89] die folgende Näherungs-Beziehung zwischen der CAUCHY- und der KIRCHHOFF-Spannung angeben

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \approx \frac{1}{1-\omega} \boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (7.22)$$

Diese Beziehung lässt sich physikalisch so interpretieren, dass die KIRCHHOFF-Spannung diejenige Spannung ist, die in einem fiktiven ungeschädigten Material, also dem die Poren umgebenden Matrixmaterial, wirkt. Damit entspricht die KIRCHHOFF-Spannung auch der Effektivspannung bei isotroper Schädigung nach dem Effektivspannungskonzept von RABOTNOV [Rab69] (siehe auch LEMAITRE [Lem96]). Die Hypothese der elastischen Verzerrungsenergieäquivalenz nach SIDOROFF [Sid81] (siehe auch CHAN ET AL. [CLFT00]) sagt aus, dass die Effektivspannung in einem ungeschädigten Material dieselbe komplementäre Verzerrungsenergie erzeugt wie die CAUCHY-Spannung im geschädigten Material. Aufbauend auf diese Hypothese und unter Beachtung, dass es sich bei (6.59) um eine lokale Betrachtung an einer Elementarvolumenzelle handelt, die die globalen Rotationen bei finiten Deformationen nicht erfasst, kann in der komplementären elastischen Verzerrungsenergie die CAUCHY-Spannung durch die KIRCHHOFF-Spannung ersetzt werden

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad \rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{2} (1-\omega) \boldsymbol{\pi} : \mathbf{D} : (1-\omega) \boldsymbol{\pi} \quad . \quad (7.23)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die GIBBS-Energie nach (7.19) ein, ergibt sich mit (7.22) und (7.15)₂

$$\underset{(e)}{\Psi} = \frac{-\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\rho} = - \frac{(1-\omega)}{2\rho_0} \boldsymbol{\pi} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\pi} = - \frac{1}{2\rho_0} \boldsymbol{\pi} : \underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi} \quad . \quad (7.24)$$

Um die Nachgiebigkeit nach (6.66) in (7.20) bzw. (5.44) zu verwenden, muss diese daher wie folgt gewichtet werden

$$\underline{\mathbf{D}}^{(4)} \left(\omega, \hat{\tilde{\mathbf{D}}} \right) = (1-\omega) \mathbf{D}^{(0)} \underline{\mathbf{D}}^{(4)}, \omega, \hat{\tilde{\mathbf{D}}} \quad (7.25)$$

$$\underline{\mathbf{D}}^{(4)} \left(\omega, \tilde{\mathbf{D}} \right) = (1-\omega) \mathbf{D}^{(0)} \underline{\mathbf{D}}^{(4)}, \omega, \tilde{\mathbf{D}} \quad . \quad (7.26)$$

Mit der Darstellung der effektiven elastischen Nachgiebigkeit als isotrope Tensorfunktion nach (6.66) erhält man damit für den elastischen Anteil der GIBBS-Energie

$$\begin{aligned} \Psi_{(e)} = & \frac{-(1-\omega)}{2\rho_0} \left(a_1(\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2a_2\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2) + 2a_3\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi})\text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \right) \\ & + 4a_4\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}^2) + a_5(\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}))^2 + 2a_6\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi})\text{tr}(\boldsymbol{\pi}) + 4a_7\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}^2) \end{aligned} \quad (7.27)$$

und daraus mit (7.20) den reversiblen logarithmischen Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{(r)} = & (1-\omega) \left\{ a_1\text{tr}(\boldsymbol{\pi})\mathbf{I} + 2a_2\boldsymbol{\pi} + a_3 \left(\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi})\mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi})\tilde{\mathcal{D}} \right) \right. \\ & + 2a_4 \left(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi} \right) + a_5\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi})\tilde{\mathcal{D}} + a_6 \left(\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi})\mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi})\tilde{\mathcal{D}}^2 \right) \\ & \left. + 2a_7 \left(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}}^2 + \tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (7.28)$$

Aus diesem hyperelastischen Ansatz kann eine hypoelastische Ratenformulierung für die Verzerrungsgeschwindigkeit formuliert werden, die die exakte Integrierbarkeit gewährleistet. Dazu wird von der materiellen Zeitableitung des zurückrotierten logarithmischen Verzerrungstensors nach (7.17) ausgegangen

$$\dot{\mathbf{H}}_{(r)} = \rho_0 \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Pi} (\hat{\mathbf{D}}, \omega, \hat{\mathcal{D}}, \Pi) \right] \quad (7.29)$$

Da die materiellen Symmetrieachsen in dieser Konfiguration keinen Starrkörperrotationen aufgrund der Gesamtdeformation unterliegen, lässt sich dieses Maß eindeutig und konsistent zum referentiellen logarithmischen Dehnungstensor integrieren. Vorrotieren dieser Beziehung in die aktuelle Konfiguration liefert mit Anwendung der Kettenregel auf die Argumente

$$\dot{\mathbf{h}}_{(r)}^R = \overline{(\partial \Psi / \partial \boldsymbol{\pi})}^R = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \boldsymbol{\pi}} : \dot{\boldsymbol{\pi}}^R + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \tilde{\mathcal{D}}} : \dot{\tilde{\mathcal{D}}}^R + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \omega} \dot{\omega} . \quad (7.30)$$

Mit (4.102) kann die polare Rate durch die logarithmische Rate ersetzt werden und man erhält mit (7.20) und (4.96)

$$\mathbf{D}_{(r)} = \frac{-1}{\rho_0} \left(\overline{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right)}^R + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right) \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right) \right) \quad (7.31)$$

$$= \underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \dot{\boldsymbol{\pi}}^R + \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{D}}^{(4)}}{\partial \tilde{\mathcal{D}}} : \dot{\tilde{\mathcal{D}}}^R + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}^{(4)}}{\partial \omega} \dot{\omega} \right) : \boldsymbol{\pi} + (\underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \quad (7.32)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{LR} (\underline{\mathbf{D}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi}) \\ = \dot{\mathbf{h}}_{(r)}^R + \mathbf{h}_{(r)} \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} \mathbf{h}_{(r)} . \quad (7.33)$$

Die polare Rate des logarithmischen Verzerrungsmaßes ergibt sich zu

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}}_{(r)}^R = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega}_{(r)} \dot{\omega} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \tilde{\mathbf{D}}}_{(r)} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\pi}}_{(r)} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \quad (7.34)$$

mit den partiellen Ableitungen nach (7.28)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\pi}}_{(r)} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R &= (1 - \omega) \left\{ a_1 \text{tr}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \mathbf{I} + 2a_2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + a_3 \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \mathbf{I} + \text{tr}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \tilde{\mathbf{D}} \right) \right. \\ &\quad + 2a_4 \left(\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \right) + a_5 \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \tilde{\mathbf{D}} \\ &\quad \left. + a_6 \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \mathbf{I} + \text{tr}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R) \tilde{\mathbf{D}}^2 \right) + 2a_7 \left(\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}}^2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega}_{(r)} \dot{\omega} &= \left\{ (1 - \omega) \left(\frac{\partial a_1}{\partial \omega} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + 2 \frac{\partial a_2}{\partial \omega} \boldsymbol{\pi} + \right. \right. \\ &\quad \frac{\partial a_3}{\partial \omega} \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}} \right) + 2 \frac{\partial a_4}{\partial \omega} \left(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi} \right) \\ &\quad + \frac{\partial a_5}{\partial \omega} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}} + \frac{\partial a_6}{\partial \omega} \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2 \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}}^2 \right) \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial a_7}{\partial \omega} \left(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}}^2 \boldsymbol{\pi} \right) \right) \\ &\quad - \left(a_1 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + 2a_2 \boldsymbol{\pi} + a_3 \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}} \right) \right. \\ &\quad + 2a_4 \left(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi} \right) + a_5 \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}} + a_6 \left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2 \boldsymbol{\pi}) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \tilde{\mathbf{D}}^2 \right) \\ &\quad \left. + 2a_7 \left(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}}^2 \boldsymbol{\pi} \right) \right) \right\} \dot{\omega} \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \tilde{\mathbf{D}}}_{(r)} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R &= (1 - \omega) \left\{ a_3 \left(\text{tr}(\boldsymbol{\pi} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \right) + 2a_4 \left(\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \right) \right. \\ &\quad + a_5 \left(\text{tr}(\boldsymbol{\pi} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R) \tilde{\mathbf{D}} + \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi}) \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \right) \\ &\quad + a_6 \left(2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R) \mathbf{I} + \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) (\tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R + \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \tilde{\mathbf{D}}) \right) \\ &\quad \left. + 2a_7 \left(\boldsymbol{\pi} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \tilde{\mathbf{D}} + \boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R + \tilde{\mathbf{D}} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \boldsymbol{\pi} + \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Oftmals werden die Anteile der elastischen Verzerrungsgeschwindigkeit aufgrund der Schädigungsentwicklung $\dot{\omega}$ und $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{D}}}^R$ gegenüber dem spannungsinduzierten Anteil vernachlässigt.

Dies führt auf die folgende Approximation

$$\mathbf{D}_{(r)} \approx \frac{\partial \mathbf{h}_{(r)}}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \mathbf{h}_{(r)} \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} \mathbf{h}_{(r)} \quad . \quad (7.38)$$

7.3 Plastisches Materialverhalten

Das plastische Materialverhalten wird nach dem Verfahren der *generalized standard media* entwickelt. Dabei wird nach der von LEMAITRE in [Lem96] vorgeschlagenen Methode vorgegangen. Für den plastischen Anteil der GIBBS-Energie wird ein in der kinematischen Verfestigung quadratischer Ansatz gemacht, der sich direkt in die aktuelle Konfiguration vorrotieren lässt

$$\hat{\Psi}_{(p)} = \frac{1}{2\rho_0} \left(2K(\kappa) + c_\zeta \hat{\boldsymbol{\zeta}} : \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right) = \frac{1}{2\rho_0} (2K(\kappa) + c_\zeta \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta}) = \frac{\Psi}{(p)} \quad . \quad (7.39)$$

Für die lineare isotrope Verfestigung wird ein Ansatz mit linearen Termen und Abklingtermen gewählt

$$K(\kappa) = c_{\kappa 1} \left(\kappa - \frac{1}{c_{\kappa 2}} \exp(c_{\kappa 2} \kappa) \right) + \frac{c_{\kappa 3}}{2} \kappa^2 \quad . \quad (7.40)$$

c_ζ sowie $c_{\kappa 1}$, $c_{\kappa 2}$ und $c_{\kappa 3}$ sind Materialparameter. Die thermodynamisch konjugierten Kräfte der plastischen Zustandsvariablen - Z_κ ist konjugiert zu κ und \mathbf{Z}_ζ ist konjugiert zu $\boldsymbol{\zeta}$ - werden als partielle Ableitungen der GIBBS-Energie nach den Zustandsvariablen in der aktuellen Konfiguration identifiziert

$$Z_\kappa(\kappa) = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} = \frac{\partial K}{\partial \kappa} = c_{\kappa 1} (1 - \exp(c_{\kappa 2} \kappa)) + c_{\kappa 3} \kappa \quad (7.41)$$

$$\mathbf{Z}_\zeta(\boldsymbol{\zeta}) = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = c_\zeta \boldsymbol{\zeta} \quad . \quad (7.42)$$

Die Fließbedingung wird in der Form nach LEMAITRE [Lem96] bzw. HAYAKAWA, MURAKAMI & LIU [HML98] gewählt

$$f = \pi_{eq} - m(\omega)(\pi_y + Z_\kappa(\kappa)) \leq 0 \quad (7.43)$$

mit der äquivalenten plastischen Spannung

$$\pi_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_\zeta) : \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}}) : (\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_\zeta)} \quad . \quad (7.44)$$

Das Dissipationspotential wird so gewählt, dass es mit der Fließbedingung zusammenfällt. Man erhält eine *assoziierte Fließregel*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(p)} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}^D} \\ &= \frac{3\lambda}{2\pi_{eq}} \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}}) : (\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_\zeta) \quad . \end{aligned} \quad (7.45)$$

Plastische Deformationen treten nur auf, wenn sowohl die Fließbedingung als auch die Belastungsbedingung erfüllt sind. Diese Bedingungen werden in der Gleichung für den plastischen Multiplikator berücksichtigt

$$\lambda = \begin{cases} \lambda, & \text{wenn } f = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \dot{\boldsymbol{\pi}}^{log} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.46)$$

Außerdem gilt für den plastischen Multiplikator

$$\lambda \geq 0 \quad (7.47)$$

Die Evolutionsgesetze der internen Zustandsvariablen erhält man durch Ableiten des Dissipationspotentials nach den konjugierten thermodynamischen Kräften

$$\dot{\kappa} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial Z_{\kappa}} = \lambda m(\omega) \quad (7.48)$$

$$\dot{\zeta}^{log} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial Z_{\zeta}} = \frac{3\lambda}{2\pi_{eq}} \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : (\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_{\zeta}) \quad (7.49)$$

Der plastische Multiplikator kann aus der Konsistenzbedingung bestimmt werden

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \dot{\boldsymbol{\pi}}^R + \frac{\partial f}{\partial Z_{\zeta}} : \dot{\mathbf{Z}}_{\zeta}^R + \frac{\partial f}{\partial Z_{\kappa}} \dot{Z}_{\kappa} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{D}}} : \dot{\tilde{\mathbf{D}}}^R = 0 \quad (7.50)$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Terme, die die Raten der Schädigungsvariablen enthalten, hängen auch vom plastischen Multiplikator ab, der in seiner endgültigen Form in Abschnitt 7.5.3 angegeben wird.

Die Materialfunktion $\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}})$ muss positiv definit sein, damit die Norm von $\bar{\boldsymbol{\pi}}^D$ positiv ist. Sie muss außerdem so gewählt werden, dass der Ausdruck $(\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_{\zeta}) : \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : (\boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_{\zeta})$ die Invarianzbedingung bezüglich der Symmetriegruppe $\mathbf{R} \star \mathcal{G}_0$ erfüllt

$$\pi_{eq}(\mathbf{Q} \star \boldsymbol{\pi}^D, \mathbf{Q} \star \mathbf{Z}_{\zeta}, \mathbf{Q} \star \tilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{Q} \star \pi_{eq}(\boldsymbol{\pi}^D, \mathbf{Z}_{\zeta}, \tilde{\mathbf{D}}) \quad (7.51)$$

Im Rückgriff auf die Betrachtungen zur Ermittlung der effektiven elastischen Nachgiebigkeitsmatrix kann damit unter Beachtung, dass nur quadratische Terme in $\boldsymbol{\pi}$ vorkommen, eine isotrope Tensorfunktion als allgemeiner Ansatz für die äquivalente Spannung angegeben werden

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi_{eq}^2 &= \tilde{m}_{D1} (\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\pi}}^D))^2 + \tilde{m}_{D2} \text{tr}((\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^2) + \tilde{m}_{D3} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \\ &+ \tilde{m}_{D4} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} (\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^2) + \tilde{m}_{D5} (\text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D))^2 + \tilde{m}_{D6} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2 \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \\ &+ \tilde{m}_{D7} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}^2 (\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^2) \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\text{mit } \bar{\boldsymbol{\pi}}^D = \boldsymbol{\pi}^D - \mathbf{Z}_{\zeta} \quad (7.53)$$

Unter Beachtung von $\text{tr}(\bar{\pi}^D) = 0$ wird daraus

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi_{eq}^2 &= \tilde{m}_{\mathcal{D}2} \text{tr}((\bar{\pi}^D)^2) + \tilde{m}_{\mathcal{D}4} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}} (\bar{\pi}^D)^2) + \tilde{m}_{\mathcal{D}5} (\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}} \bar{\pi}^D))^2 \\ &\quad + \tilde{m}_{\mathcal{D}7} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2 (\bar{\pi}^D)^2) \quad . \end{aligned} \quad (7.54)$$

Damit lässt sich der Anisotropietensor allgemein wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} M_{ijkl}(\tilde{\mathcal{D}}) &= m_{\mathcal{D}1} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\quad + m_{\mathcal{D}2} (\delta_{ik} \tilde{\mathcal{D}}_{jl} + \delta_{il} \tilde{\mathcal{D}}_{jk} + \delta_{jk} \tilde{\mathcal{D}}_{il} + \delta_{jl} \tilde{\mathcal{D}}_{ik}) + m_{\mathcal{D}3} (\tilde{\mathcal{D}}_{ij} \tilde{\mathcal{D}}_{kl}) \\ &\quad + m_{\mathcal{D}4} (\delta_{ik} (\tilde{\mathcal{D}}_{jl}^2 + \delta_{il} (\tilde{\mathcal{D}}_{jk}^2 + \delta_{jk} (\tilde{\mathcal{D}}_{il}^2 + \delta_{jl} (\tilde{\mathcal{D}}_{ik}^2))) \end{aligned} \quad (7.55)$$

bzw. in basisfreier Form

$$\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}}) = 2m_{\mathcal{D}1} \mathbf{I} + 2m_{\mathcal{D}2} (\mathbf{I} \tilde{\mathcal{D}} + \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{I}) + m_{\mathcal{D}3} \tilde{\mathcal{D}} \otimes \tilde{\mathcal{D}} + 2m_{\mathcal{D}4} (\mathbf{1} \tilde{\mathcal{D}}^2 + \tilde{\mathcal{D}}^2 \mathbf{I}) \quad (7.56)$$

Im Falle, dass $m_{\mathcal{D}3} = m_{\mathcal{D}4} = 0$ gilt, geht $\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}})$ in das von HAYAKAWA, MURAKAMI & LIU in [HML98] vorgeschlagene Maß über. Da für ungeschädigtes Material die VON MISES Fließbedingung gilt, folgt

$$m_{\mathcal{D}1} = 0,5 \quad . \quad (7.57)$$

Die Koeffizienten $m_{\mathcal{D}2}$ bis $m_{\mathcal{D}4}$ können außerdem von den Invarianten von $\tilde{\mathcal{D}}$ und $\bar{\pi}^D$ abhängen. Hier wird jedoch davon ausgegangen, dass es sich um materialabhängige Größen handelt. Für die Ableitung der Fließfunktion nach dem Schädigungstensor erhält man damit

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathcal{D}}} = \frac{3}{4\pi_{eq}} \left(4m_{\mathcal{D}2} \bar{\pi}^D + 2m_{\mathcal{D}3} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}} \bar{\pi}^D) \bar{\pi}^D + 4m_{\mathcal{D}4} (\tilde{\mathcal{D}} (\bar{\pi}^D)^2 + (\bar{\pi}^D)^2 \tilde{\mathcal{D}}) \right) \quad . \quad (7.58)$$

Die Funktion $m(\omega)$ berücksichtigt den Einfluss des Porenvolumenanteils auf die Änderung der Fließgrenze. Unter der Voraussetzung, dass der Term $\pi_y + Z_\kappa$ die aktuelle Fließgrenze des ungeschädigten Materials bei plastischen Deformationsprozessen kennzeichnet, wird der folgende in ω quadratische Ansatz gemacht

$$m(\omega) = 1 + \tilde{m}_{\omega 1} \omega + \tilde{m}_{\omega 2} \omega^2 \quad . \quad (7.59)$$

Trifft man die Annahme, dass für einen kritischen Wert des Porenvolumenanteils ω_c die Fließgrenze des Materials Null wird, so erhält man

$$m(\omega) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{\omega_c} + m_\omega \omega_c \right) \omega + m_\omega \omega^2 & , \text{ wenn } 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad . \quad (7.60)$$

Die für die Konsistenzbedingung benötigte Ableitung der Fließfunktion nach dem Porenvolumenanteil erhält man somit zu

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = -(\pi_y + Z_\kappa) \left(m_\omega (2\omega - \omega_c) - \frac{1}{\omega_c} \right) . \quad (7.61)$$

Weiterhin kann aus der Bedingung, dass die Fließgrenze des geschädigten Materials kleiner sein muss als die des ungeschädigten Materials, eine Nebenbedingung für die Materialkoeffizienten abgeleitet werden

$$0 \leq m(\omega) \leq 1 \quad \forall \omega \in [0, \omega_c] . \quad (7.62)$$

Die Forderung, dass $m(\omega)$ eine in ω monoton fallende Funktion sein muss, liefert

$$\frac{-1}{\omega_c^2} \leq m_\omega \leq \frac{1}{\omega_c^2} . \quad (7.63)$$

7.4 Schädigungsinduzierte Deformationen

Die thermodynamisch konjugierten Kräfte zu den Schädigungsmaßen ω und $\tilde{\mathcal{D}}$ erhält man als Ableitungen der GIBBS-Energie nach den Schädigungsmaßen. Einsetzen von (7.9) und (7.27) liefert die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} Z_\omega = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} &= \frac{1}{2} \left(a_1 (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2a_2 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2) + 2a_3 \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \right. \\ &\quad + 4a_4 \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}^2) + a_5 (\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}))^2 + 2a_6 \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \\ &\quad \left. + 4a_7 \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}^2) \right) - \frac{1-\omega}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial \omega} (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2 \frac{\partial a_2}{\partial \omega} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2) \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial a_3}{\partial \omega} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) + 4 \frac{\partial a_4}{\partial \omega} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}^2) + \frac{\partial a_5}{\partial \omega} (\text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}))^2 \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial a_6}{\partial \omega} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) + 4 \frac{\partial a_7}{\partial \omega} \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}^2) \right) \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{\mathcal{D}}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathcal{D}}} &= \frac{-(1-\omega)}{2} \left((a_3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) + a_5 \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}))\boldsymbol{\pi} + 2a_4\boldsymbol{\pi}^2 \right. \\ &\quad \left. + a_6 \text{tr}(\boldsymbol{\pi})(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}}) + 2a_7(\tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}^2 + \boldsymbol{\pi}^2\tilde{\mathcal{D}}) \right) . \end{aligned} \quad (7.65)$$

Zur Formulierung der Evolutionsgleichungen der Schädigungsmaße bieten sich verschiedene Konzepte an.

Dabei wird immer mindestens eine der folgenden Größen als entscheidend für die Evolution der Schädigungsmaße angesehen

- die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten,
- der Spannungszustand oder
- die thermodynamisch konjugierten Kräfte der Schädigungsmaße.

Welcher dieser Ansätze angewendet wird, hängt oftmals davon ab, ob ein sprödes oder ein duktils Material beschrieben wird. Häufig werden die Ansätze auch in Abhängigkeit einer Kombination dieser Größen formuliert.

7.4.1 Aufspaltung der schädigungsinduzierten Verzerrungsgeschwindigkeit

Ausgehend von der Vorstellung, dass die Rate des Porenvolumenanteils lediglich den isotropen Anteil der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate beeinflusst, und die Rate des Schädigungstensors $\tilde{\mathbf{D}}$ ihren anisotropen Anteil, wird die Verzerrungsrate in der folgenden Weise in einen isotropen und einen anisotropen (deviatorischen) Anteil aufgespalten

$$\mathbf{D}_{(d)} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}_{(d)}) \mathbf{I} + \mathbf{D}_{(d)}^D = \mathbf{D}_{(d)}^i + \mathbf{D}_{(d)}^D . \quad (7.66)$$

7.4.2 Entwicklung der isotropen Schädigung

Die Evolution von Poren in einem Material kann additiv in Bildung, Wachstum und Verschmelzung von Mikroporen aufgespalten werden. Da nur schwache Porenverteilungen betrachtet werden, wird der Prozess der Porenverschmelzung nicht berücksichtigt

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_{(n)} + \dot{\omega}_{(g)} . \quad (7.67)$$

Folgende Nebenbedingungen werden vorausgesetzt

$$\dot{\omega}_{(g)}(\omega = 0) = 0 \quad (7.68)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{(n)}}{\partial \omega} \leq 0 \quad (7.69)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{(g)}}{\partial \omega} \geq 0 . \quad (7.70)$$

Die erste Bedingung bedeutet, dass für jungfräuliches Material davon ausgegangen wird, dass keine Poren vorliegen. Die zweite Bedingung reflektiert die Annahme, dass der Bildungsterm mit zunehmendem Porenvolumenanteil abnimmt und ein Sättigungsverhalten aufweist. Die dritte Bedingung resultiert aus der Vorstellung, dass der Wachstumsterm mit zunehmendem Porenvolumenanteil an Bedeutung gewinnen muss. Da es sich bei dem vorliegenden Stoffgesetz um ein Gesetz für duktilen Material handelt, erscheint es sinnvoll, die Evolution des Porenvolumenanteils in Abhängigkeit der plastischen Dehnungen zu formulieren. Die Verwendung der plastischen Deformationsrate beruht dabei auf der Annahme, dass die lokalen Spannungskonzentrationen bei Beginn des plastischen Fließens ausreichen, um Porenbildung und -wachstum auch bei kleinen Gesamtdeformationen zu initiieren (GOODS & BROWN [GB79] zitiert nach SCHIESSE [Sch94]). Außerdem sichert die Verwendung der plastischen Verzerrungsrate gleichzeitig, dass bei Entlastung kein Schädigungsfortschritt auftritt. Die Größe der Änderung des Porenvolumenanteils soll weiterhin abhängig von der Größe der zum Porenvolumenanteil konjugierten Kraft Z_ω sein. Damit wird der Zusammenhang zwischen dem hydrostatischen Anteil der Spannungen und der Rate des Porenvolumenanteils berücksichtigt. Ein Separationsansatz der Variablen liefert

$$\dot{\omega} = \left\langle f_1(\omega) f_2(Z_\omega) f_3(\underset{(p)}{\mathbf{D}}) \right\rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} \quad (7.71)$$

Ein Ansatz für den vom Porenvolumen abhängigen Anteil, der die Bedingungen (7.68) - (7.70) berücksichtigt, lautet

$$f_1(\omega) = c_{\omega 1} \exp(-c_{\omega 2} \omega) + c_{\omega 3} \omega + c_{\omega 4} \omega^2 \quad \text{mit } c_{\omega i} \geq 0 \quad (i = 1 \dots 4) \quad (7.72)$$

Der erste Summand in diesem Ansatz stellt den Bildungsterm dar. Die Konstante $c_{\omega 1}$ bestimmt die Anfangssteigung der Porenbildung, $c_{\omega 2}$ ist die Abklingkonstante. Der zweite und dritte Summand bilden das Porenwachstum ab, das mit zunehmendem Porenvolumenanteil an Bedeutung gewinnt. Die Abhängigkeit von der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit wird durch die äquivalente plastische Verzerrungsrate ausgedrückt, die im Falle ungeschädigten Materials mit der Rate der isotropen Verfestigungsvariable κ zusammenfällt

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \sqrt{\frac{2}{3} \underset{(p)}{\mathbf{D}} : \underset{(p)}{\mathbf{D}}} \\ &= \frac{\lambda}{\pi_{eq}} \sqrt{\frac{3}{2} [\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}}) : \underline{\boldsymbol{\pi}}^D] : [\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathcal{D}}) : \underline{\boldsymbol{\pi}}^D]} \quad (7.73) \end{aligned}$$

Aus Vereinfachungsgründen wird ein linearer Ansatz gewählt

$$f_2(\underset{(p)}{\mathbf{D}}) = \dot{p} \quad (7.74)$$

Auch die Abhängigkeit von der thermodynamischen Kraft wird als linear angenommen. Da die GIBBS-Energie bei einer Vergrößerung des Porenvolumenanteils sinkt, wird folgender Ansatz gewählt

$$f_3(Z_\omega) = -Z_\omega \quad . \quad (7.75)$$

Die MCCAULEY-Klammern in (7.71) stellen eine weitere Belastungsbedingung für die Schädigung dar. Dem Gedankengang von SCHIESSE in [Sch94] folgend muss diese erfüllt sein, wenn zumindest in einer der Hauptspannungsrichtungen Zug vorliegt. Diese Vorstellung wird hier nicht vertreten, da selbst bei sehr hohen Triaxialitätsverhältnissen mit zwei sehr großen Druckspannungen und einer sehr kleinen Zugspannung der Porenvolumenanteil wachsen würde. Der von FELDMÜLLER in [Fel91] verwendete Ansatz, der voraussetzt, dass hydrostatischer Zug vorherrschen muss, damit die Evolution des Porenvolumenanteils stattfindet, erscheint zu restriktiv. Dieser Ansatz lässt keine Schädigungsevolution für reine Schubspannungszustände zu. Daher wird die Belastungsbedingung auf den Punkt $\text{tr}(\boldsymbol{\pi}) = 0$ erweitert. Die Verwendung einer zusätzlichen Belastungsbedingung zur thermodynamisch konjugierten Kraft lässt sich mit der Erfüllung der thermodynamischen Konsistenz begründen. Würde diese Bedingung nicht eingeführt, wäre z.B. bei hydrostatischen Druckspannungszuständen eine Evolution des Porenvolumenanteils möglich, was als physikalisch unsinnig anzusehen ist

$$\langle f \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} = \begin{cases} f, & \text{wenn } \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (7.76)$$

Heilung wird für die Evolution des Porenvolumenanteils ausgeschlossen

$$\dot{\omega} \geq 0 \quad . \quad (7.77)$$

Einsetzen von (7.72), (7.74) und (7.75) in (7.71) liefert damit die Evolutionsgleichung für den Porenvolumenanteil

$$\dot{\omega} = \left\langle -Z_\omega \dot{p}(c_{\omega 1} \exp(-c_{\omega 2} \omega) + c_{\omega 3} \omega + c_{\omega 4} \omega^2) \right\rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} \quad , \quad (7.78)$$

Die Erfüllung von (7.77) lässt sich für beliebige anisotrope Schädigungsconfigurationen und beliebige Spannungszustände mit hydrostatischem Zug nicht allgemein nachweisen. Für isotrope Schädigung kann die Bedingung durch die restriktivere Bedingung

$$(1 - \omega) \frac{\partial a_i}{\partial \omega} - a_i \geq 0 \quad , \quad i = \langle 1, 2 \rangle \quad (7.79)$$

ersetzt werden. Damit wird davon ausgegangen, dass bei moderatem anisotropen Schädigungszustand die Bedingung (7.77) weiterhin erfüllt ist. Die Erfüllung der Gleichungen (7.79) lässt sich mit den gewählten Ansätzen für die Koeffizienten der elastischen Nachgiebigkeit bis zu einem Porenvolumenanteil von $\omega \approx 0,22$ numerisch zeigen.

Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen der Rate des Porenvolumenanteils und dem isotropen Anteil der schädigungsinduzierten Verzerrungsgeschwindigkeit wird das Verhältnis des Volumens des unbelasteten, ungeschädigten Materials V_0 zu dem des elastisch entlasteten geschädigten Materials V^* betrachtet

$$\det \mathbf{F}_{(d)} = \frac{dV^*}{dV_0} \quad (7.80)$$

Für die Spur der schädigungsinduzierten Verzerrungen erhält man damit

$$\text{tr}(\mathbf{h}_{(d)}) = \ln \frac{\rho_0}{\rho^*} \quad (7.81)$$

Mit der Beziehung

$$\rho^* = (1 - \omega)\rho_0 \quad (7.82)$$

ergibt sich für die Spur der schädigungsinduzierten Deformationsgeschwindigkeit

$$\text{tr}(\mathbf{D}_{(d)}) = \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega} + \text{tr}(\mathbf{h}_{(d)} \boldsymbol{\Omega}^{LR}) - \text{tr}(\boldsymbol{\Omega}^{LR} \mathbf{h}_{(d)}) = \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega} \quad (7.83)$$

Somit erhält man für den isotropen Anteil der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate (siehe z.B. auch MITTELBACH in [Mit95])

$$\mathbf{D}_{(d)}^i = \frac{\dot{\omega}}{3(1 - \omega)} \mathbf{I} \quad (7.84)$$

7.4.3 Entwicklung der anisotropen Schädigung

Zur Evolution der anisotropen Schädigung müssen Gleichungen für die Rate der gewichteten Fourierkoeffizienten \mathcal{D} und für den Deviator des schädigungsinduzierten Anteils der Verzerrungsgeschwindigkeit formuliert werden. Dabei werden in der Literatur verschiedene Ansätze verfolgt. Häufig werden aufgrund mangelnder mikromechanischer Kenntnisse der Zusammenhänge die Evolutionsgleichungen für beide Größen unabhängig voneinander angegeben.

7.4.3.1 Ansatz für Entwicklung der gewichteten Fourierkoeffizienten

Die Entwicklung der gewichteten Fourierkoeffizienten erfolgt unter Beachtung der folgenden Bedingungen.

1. Die Volumendichte in beliebige Richtungen \mathbf{n} darf nicht negativ werden

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}) \geq 0 \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} + \mathcal{D} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) \geq 0 \rightarrow \text{MIN}(\mathcal{D} : \mathbf{f}(\mathbf{n})) = \frac{-\omega}{2\pi} \quad (7.85)$$

2. Die Integration des anisotropen Anteils der Volumendichte $\mathcal{D}(\mathbf{n})$ über der Einheitskugel und folglich auch deren Rate muss verschwinden

$$\int_{S_3} \overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) dA = 0 \quad (7.86)$$

Die Erfüllung von (7.85) kann ausgehend von isotroper Anfangsschädigung durch den Ausschluss von Heilung in irgendeiner Richtung, wie es auch SCHIESSE in [Sch94] fordert, sichergestellt werden

$$\dot{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) \geq 0 \rightarrow \frac{\dot{\omega}}{2\pi} + \overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) \geq 0 \rightarrow \text{MIN}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log} : \mathbf{f}(\mathbf{n})) = \frac{-\dot{\omega}}{2\pi} \quad (7.87)$$

Diese restriktivere Bedingung führt jedoch dazu, dass Risschädigung lediglich ausgehend von ungeschädigtem Material oder anisotrop vorgeschädigtem Material beschrieben werden kann, da ansonsten Heilung in den Richtungen senkrecht zur Rissnormalen stattfinden müsste. Trotzdem wird aufgrund der besseren mathematischen Handhabbarkeit die Gleichung (7.87) als hinreichende Bedingung zur Erfüllung von (7.85) verwendet. Nach Einsetzen der gewichteten Fourierkoeffizienten lautet diese Bedingung

$$\frac{\dot{\omega}}{2\pi} + \dot{\omega} \tilde{\mathcal{D}} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) + \omega \overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) \geq 0 \quad (7.88)$$

Die Verwendung der logarithmischen Zeitableitung an Stelle der polaren Rate ist an dieser Stelle zulässig, da die Erfüllung der Ungleichung für alle Richtungen \mathbf{n} gefordert wird. Die zusätzliche Rotation hat daher keinen Einfluss auf die Erfüllung der Ungleichung, lediglich die Richtungen der Eigenvektoren ändern sich. Unter Beachtung der Deviatoreigenschaft von $\tilde{\mathcal{D}}$ kann das doppelte Skalarprodukt der gewichteten Fourierkoeffizienten mit den Fourierfunktionen durch den kleinsten Eigenwert der gewichteten Fourierkoeffizienten ersetzt werden

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log} : \mathbf{f}(\mathbf{n}) \geq \frac{-\dot{\omega}}{2\pi\omega} \left(1 + 2\pi (\tilde{\mathcal{D}}_i)_{\min} \right) \quad (7.89)$$

Die Größe $(\tilde{\mathcal{D}}_i)_{\min}$ bezeichnet den kleinsten Eigenwert der gewichteten Fourierkoeffizienten. Damit ist auch die auf BODNER & CHAN [BC86] zurückgehende Forderung, dass die Entwicklung der Schädigung in eine Richtung \mathbf{n} nicht von der bereits in diese Richtung vorhandenen Schädigung, abhängt, sondern nur von einer skalaren Norm des Schädigungstensors, erfüllt. Der Term auf der rechten Seite der Ungleichung ist unter Beachtung von (7.85) immer negativ, da nur Wachstum des Porenvolumenanteils zugelassen wird. Da diese Bedingung für beliebige Richtungen erfüllt sein muss, kann auch das doppelte Skalarprodukt der Rate der gewichteten Fourierkoeffizienten durch den kleinsten Eigenwert ersetzt werden, der aufgrund der Deviatoreigenschaft von $\overset{\circ}{\mathcal{D}}^{log}$ immer negativ ist. Diese

Bedingung ist zwar restriktiver als die Bedingung verschwindender Heilung, sichert aber deren Erfüllung hinreichend auf einfache Weise

$$(\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{D}}}_j^{log})_{\min} \geq \frac{-\dot{\omega}}{2\pi\omega} \left(1 + 2\pi (\tilde{\mathcal{D}}_i)_{\min} \right) . \quad (7.90)$$

Man erkennt, dass nach (7.90) für ein ungeschädigtes Material mit $\omega = 0$ und $\tilde{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ beliebig kleine Raten der gewichteten Fourierkoeffizienten zulässig sind. Damit wäre eine Verletzung von (7.85) möglich. Dieses wird bei der Formulierung der Evolutionsgleichung durch die Verwendung des kritischen Porenvolumenanteils ω_c als Schranke berücksichtigt.

Ausgehend von der Annahme, dass die thermodynamisch konjugierte Kraft der anisotropen Schädigung ausschlaggebend für deren Evolution ist, kann damit eine Evolutionsgleichung angegeben werden, die alle oben genannten Bedingungen erfüllt

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{D}}}^{log} = \frac{-c_{\mathcal{D}1}\dot{\omega}}{2\pi\omega_c (Z_i^D)_{\max}} \left(1 + 2\pi (\tilde{\mathcal{D}}_j)_{\min} \right) \mathbf{Z}_{\mathcal{D}}^D . \quad (7.91)$$

$(Z_i^D)_{\max}$ bezeichnet den größten Eigenwert von $\mathbf{Z}_{\mathcal{D}}^D$. Die skalare Funktion $c_{\mathcal{D}1}$ wird als Materialkonstante gewählt; Ihr Wert muss im Intervall $[0, 1]$ liegen.

7.4.3.2 Ansatz für die anisotrope schädigungsinduzierte Verzerrungsgeschwindigkeit

Die thermodynamisch treibende Kraft zu den schädigungsinduzierten Verzerrungen ist die Spannung $\boldsymbol{\pi}$. Zwischen den anisotropen schädigungsinduzierten Deformationsgeschwindigkeiten und der Rate der gewichteten Fourierkoeffizienten ist auf der Makroebene kein eindeutiger Zusammenhang bekannt. Weitere mikromechanische Betrachtungen und anschließende Homogenisierung könnten hier Aufschluss geben.

Da davon ausgegangen werden kann, dass neben $\boldsymbol{\pi}$ auch die momentane Defektkonfiguration einen Einfluss auf die anisotrope schädigungsinduzierte Verzerrungsgeschwindigkeit hat, wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine isotrope Tensorfunktion gewählt

$$\begin{aligned} \underset{(d)}{\mathbf{D}}^D &= \tilde{c}_{\mathcal{D}0}\mathbf{I} + \tilde{c}_{\mathcal{D}1}\boldsymbol{\pi} + \tilde{c}_{\mathcal{D}2}\boldsymbol{\pi}^2 + \tilde{c}_{\mathcal{D}3}\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{c}_{\mathcal{D}4}\tilde{\mathcal{D}}^2 + \tilde{c}_{\mathcal{D}5}(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}) + \\ &+ \tilde{c}_{\mathcal{D}6}(\boldsymbol{\pi}^2\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{\mathcal{D}}\boldsymbol{\pi}^2) + \tilde{c}_{\mathcal{D}7}(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}}^2 + \tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}) + \tilde{c}_{\mathcal{D}8}(\boldsymbol{\pi}^2\tilde{\mathcal{D}}^2 + \tilde{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\pi}^2) . \end{aligned} \quad (7.92)$$

Die in diesem Ansatz vorkommenden Koeffizienten $\tilde{c}_{\mathcal{D}i}$ berücksichtigen neben den Grundinvarianten der Argumenttensoren die äquivalente plastische Verzerrungsrate \dot{p} und den Porenvolumenanteil ω

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\mathcal{D}i} &= \tilde{c}_{\mathcal{D}i}(\dot{p}, \omega, \text{tr}(\boldsymbol{\pi}), \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2)\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2), \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}), \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^2), \text{tr}(\tilde{\mathcal{D}}^3), \\ &\text{tr}(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}}), \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2\tilde{\mathcal{D}}), \text{tr}(\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathcal{D}}^2), \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2\tilde{\mathcal{D}}^2)) . \end{aligned} \quad (7.93)$$

Geht man davon aus, dass sich mit den verwendeten Argumenten die anisotrope schädigungsinduzierte Verzerrungsgeschwindigkeit vollständig beschreiben lässt, so kann diese nach dem Prinzip von CALEY-HAMILTON auch nach einer mikromechanischen Betrachtung immer in die angegebene Form (7.92) überführt werden.

Aus Praktikabilitätsgründen und aufgrund der Annahme, dass der zu beschreibende Anisotropiegrad der Schädigung moderat ist, wird der Ansatz (7.92) auf die in $\tilde{\mathbf{D}}$ linearen Glieder beschränkt. Der Einfluss der äquivalenten Verzerrungsrate und des Porenvolumenanteils wird als linear angenommen. Damit erhält man unter Ausnutzung der Deviatoreigenschaft der anisotropen schädigungsinduzierten Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\underset{(d)}{\mathbf{D}}^D = c_{D2} \dot{\rho} \omega \boldsymbol{\pi}^D + c_{D3} \dot{\rho} \omega \left(3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \tilde{\mathbf{D}}) - \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}}) \right) (\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi})^D. \quad (7.94)$$

c_{D2} und c_{D3} werden als Materialparameter unabhängig von den Grundinvarianten der isotropen Tensorfunktion gewählt. Die Wahl des skalaren Klammerterms im zweiten Summanden ist zur Sicherung der Erfüllung der dissipativen Ungleichung erforderlich.

7.5 Nachweis der thermodynamischen Konsistenz

Der Nachweis der thermodynamischen Konsistenz beschränkt sich auf die Erfüllung der mechanischen dissipativen Ungleichung nach (5.67).

7.5.1 Erfüllung der plastischen dissipativen Ungleichung

Zum Nachweis der thermodynamischen Konsistenz für den plastischen Anteil werden (7.45), (7.41), (7.42), (7.48) und (7.49) in (7.13) eingesetzt. Man erhält

$$\pi_{eq} - Z_{\kappa} m(\omega) \geq 0 \quad . \quad (7.95)$$

Die Einhaltung der Fließbedingung während plastischer Deformationsprozesse liefert

$$Z_{\kappa} m(\omega) = \pi_{eq} - m(\omega) \pi_y \quad (7.96)$$

und nach Einsetzen

$$m(\omega) \pi_y \geq 0 \quad . \quad (7.97)$$

Da für die Anfangsfließspannung des ungeschädigten Materials

$$\pi_y \geq 0 \quad (7.98)$$

gilt, folgert man zur Erfüllung des plastischen Anteils der dissipativen Ungleichung

$$m(\omega) \geq 0 \quad . \quad (7.99)$$

7.5.2 Erfüllung der schädigungsinduzierten dissipativen Ungleichung

Zur Erfüllung der schädigungsinduzierten dissipativen Ungleichung wird die Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit nach (7.66) in (7.14) eingesetzt. Man erhält

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}_{(d)}^i - Z_\omega \dot{\omega} + \boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}_{(d)}^D - \mathbf{Z}_D : \overset{\circ}{\mathbf{D}}^{log} \geq 0 \quad . \quad (7.100)$$

Diese Ungleichung lässt sich wiederum in eine Ungleichung für den isotropen und eine für den anisotropen Anteil aufteilen

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}_{(d)}^i - Z_\omega \dot{\omega} \geq 0 \quad (7.101)$$

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}_{(d)}^D - \mathbf{Z}_D : \overset{\circ}{\mathbf{D}}^{log} \geq 0 \quad . \quad (7.102)$$

Einsetzen von (7.84) und (7.77) liefert für den isotropen Anteil der Schädigung

$$\frac{\dot{\omega}}{3(1-\omega)} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) + Z_\omega^2 \dot{p}(c_{\omega 1} \exp(-c_{\omega 2} \omega) + c_{\omega 3} \omega + c_{\omega 4} \omega^2) \geq 0 \quad . \quad (7.103)$$

Isotropes Wachstum des Porenvolumenanteils tritt nur bei hydrostatischen Spannungszuständen auf. Da außerdem alle Konstanten $c_{\omega i}$ positiv sind, ist die Erfüllung der thermodynamischen Konsistenz des isotropen Anteils des schädigungsinduzierten Materialverhaltens im Rahmen der angegebenen Stoffgleichungen gewährleistet.

Zur Überprüfung der dissipativen Ungleichung (7.102) werden die Ratengleichung für die Fourierkoeffizienten (7.91) und der deviatorische Anteil der schädigungsinduzierten Deformationsrate (7.94) eingesetzt

$$\begin{aligned} \dot{p}\omega \left(c_{D2} \boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^D + c_{D3} (3\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \tilde{\mathbf{D}}) - \text{tr}(\boldsymbol{\pi})\text{tr}(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}})) (\boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}})^D \right. \\ \left. + \boldsymbol{\pi} : (\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi})^D \right) + \frac{c_{D1} \dot{\omega}}{2\pi\omega_c (Z_i^D)_{\max}} \left(1 + 2\pi(\tilde{\mathbf{D}}_j)_{\min} \right) \mathbf{Z}_D : \mathbf{Z}_D^D \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.104)$$

Der zweite Summand ist unter Beachtung von (7.85) und (7.77) für $c_{D1} \geq 0$ immer größer oder gleich Null. Zur Auswertung des ersten Summanden wird die Beziehung

$$(\boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}})^D + (\boldsymbol{\pi} : (\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\pi})^D) = 2 \left(\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \tilde{\mathbf{D}}) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\pi})\text{tr}(\boldsymbol{\pi} \tilde{\mathbf{D}}) \right) \quad (7.105)$$

eingesetzt. Damit wird auch der erste Summand in (7.104) nicht negativ, wenn die Materialparameter c_{D2} und c_{D3} nicht negativ gewählt werden.

Die thermodynamische Konsistenz des schädigungsinduzierten Anteils des Materialverhaltens des vorgestellten Stoffgesetzes ist damit für alle Prozesse sichergestellt.

7.5.3 Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen

Der plastische Multiplikator kann durch Einsetzen der konstitutiven Beziehungen (7.42), (7.41), (7.48), (7.49), (7.61), (7.58), (7.78) und (7.91) in die Konsistenzbedingung (7.50) unter Beachtung der Bedingungen für das Auftreten plastischer Verzerrungen (7.46) bestimmt werden

$$\lambda = \begin{cases} \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}, & \text{wenn } f = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{log} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.106)$$

mit

$$Z_\lambda = \frac{3}{2\pi_{eq}} \left\{ (\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) : \left((\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^R + c_\zeta (\zeta \boldsymbol{\Omega}^{LR} + \boldsymbol{\Omega}^{LR} \zeta) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[4m_{D2} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D + 2m_{D3} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \bar{\boldsymbol{\pi}}^D + 8m_{D4} \tilde{\mathbf{D}} (\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^2 \right] : (\boldsymbol{\Omega}^{LR} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\Omega}^{LR}) \right\} \quad (7.107)$$

$$N_\lambda = \frac{9c_\zeta}{4\pi_{eq}^2} (\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) : (\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) + m^2(\omega) \frac{\partial^2 K}{\partial \kappa^2} - \\ \left\langle \frac{f_1(\omega) Z_\omega}{\pi_{eq}} \sqrt{\left(\frac{3}{2} \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\boldsymbol{\pi}}^D \right) : (\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\boldsymbol{\pi}}^D)} \right. \\ \left. \left\{ \left(\pi_y + \frac{\partial K}{\partial \kappa} \right) (m_\omega (2\omega - \omega_c) - \frac{1}{\omega_c}) + \frac{3c_{D1} (1 + 2(\tilde{\mathbf{D}}_j)_{\min})}{8\pi_{eq} \pi \omega_c (Z_i^D)_{\max}} \right. \right. \\ \left. \left. \left[4m_{D2} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D + 2m_{D3} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\pi}}^D) \bar{\boldsymbol{\pi}}^D + 8m_{D4} \tilde{\mathbf{D}} (\bar{\boldsymbol{\pi}}^D)^2 \right] : \mathbf{Z}_D^D \right\}^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} \right. .$$

Die direkte Integration der in der aktuellen Konfiguration formulierten tensoriellen Raten-gleichungen ist aufgrund der Verwendung der logarithmischen Zeitableitung nicht möglich. Zieht man die logarithmische Zeitableitung eines beliebigen EULERSchen Tensors \mathbf{A} in die mit \mathbf{R}^{log} rotierte Konfiguration zurück, so erhält man nach (4.77) die materielle Zeitableitung des zurückrotierten Tensors $\mathbf{R}^{log} \star \mathbf{A}$ selbst in dieser Konfiguration

$$\mathbf{R}^{log} \star \overset{\circ}{\mathbf{A}}^{log} = \overline{(\mathbf{R}^{log} \star \mathbf{A})} \quad (7.108)$$

Führt man also die Zeitintegration von $\mathbf{R}^{log} \star \overset{\circ}{\mathbf{A}}^{log}$ in dieser Konfiguration durch und rotiert das so erhaltene Ergebnis wieder in die aktuelle Konfiguration vor, so erhält man die aufintegrierte Größe \mathbf{A} in der aktuellen Konfiguration ausgehend von der in Ratenform vorliegenden Entwicklungsgleichung

$$\mathbf{A} = (\mathbf{R}^{log})^T \star \int_0^t (\mathbf{R}^{log} \star \overset{\circ}{\mathbf{A}}^{log}) d\tau \quad (7.109)$$

Für die Integration erhält man ausgehend von (7.48), (7.49), (7.7) und (7.8) für die internen Variablen

$$\kappa = \int_0^t \lambda m(\omega) d\tau \quad (7.110)$$

$$\zeta = (\mathbf{R}^{log})^T \star \int_0^t \frac{3\lambda}{2\pi_{eq}} \mathbf{R}^{log} \star \left(\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(\tilde{\mathbf{D}}) : \bar{\pi}^D \right) d\tau \quad (7.111)$$

$$\omega = \int_0^t \langle -Z_\omega \dot{p} m(\omega) \rangle^{\text{tr}(\pi)} d\tau \quad (7.112)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{R}^{log})^T \star \int_0^t \frac{-c_{D1} \dot{\omega} \left(1 + 2\pi(\tilde{\mathbf{D}}_j)_{\min} \right)}{2\pi\omega_c (Z_i^D)_{\max}} \mathbf{R}^{log} \star \mathbf{Z}_D^D d\tau \quad (7.113)$$

Die logarithmische Verzerrungsrate ergibt sich aus dem reversiblen Anteil $\mathbf{h}_{(r)}$, der sich direkt aus dem hyperelastischen Stoffgesetz (7.20) bestimmen lässt, und dem irreversiblen Anteil $\mathbf{h}_{(i)}$, der sich durch Integration der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeitsanteile nach (7.45), (7.84) und (7.92) ergibt,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & \frac{-1}{2\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \pi} + (\mathbf{R}^{log})^T \star \int_0^t \mathbf{R}^{log} \star \left\{ \lambda \bar{\pi}^D \right. \\ & \left. + \dot{p}\omega \left(c_{D2} \pi^D + c_{D3} (\text{tr}(\pi^2 \tilde{\mathbf{D}}) - \text{tr}(\pi \tilde{\mathbf{D}}) \text{tr}(\pi)) (\pi \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}} \pi)^D \right) \right\} d\tau \quad (7.114) \end{aligned}$$

8. Erstellung einer Finite-Element-Formulierung

Zur Berechnung belasteter Strukturen mit dem nichtlinearen Stoffgesetz wird dieses in einer Elementformulierung in das finite Element Programm FEAP von R.L. TAYLOR implementiert. Hierzu wird eine Elementroutine mit bilinearen Ansatzfunktionen in Zylinderkoordinaten entwickelt, die rotationssymmetrische Probleme unter Berücksichtigung der geometrischen und der physikalischen Nichtlinearität des Stoffgesetzes in dem kinematischen Rahmen für endliche Deformationen beschreibt.

In diesem Kapitel wird das Prinzip der virtuellen Arbeit als Grundlage für die Formulierung der Methode der finiten Elemente unter Berücksichtigung der gewählten mitrotierenden logarithmischen Spannungsableitung hergeleitet und zeitlich diskretisiert. Der Rahmen zur exakten Berechnung der für die Stoffgesetzintegration benötigten kinematischen Größen wird für die gewählte Beschreibung in Zylinderkoordinaten angegeben und das Prinzip der virtuellen Arbeit geometrisch diskretisiert. Die Schritte zur kinematisch exakten Integration des Stoffgesetzes und die Berechnung der Tangentensteifigkeiten zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen werden beschrieben.

8.1 Die schwache Form des Kräftegleichgewichts

Zur Implementierung des Stoffgesetzes in eine finite Element-Formulierung für endliche Formänderungen wird die schwache Form des Kräftegleichgewichts entwickelt. Dazu kann von der Impulsgleichung in der materiellen Beschreibung (5.10) ausgegangen werden. Diese wird skalar mit einer virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{U}$ multipliziert und über das Referenzvolumen des betrachteten Körpers integriert

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div } {}^I\mathbf{P} \delta\mathbf{U} \, dV_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \delta\mathbf{U} \, dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \delta\mathbf{U} \, dV_0 = 0 \quad . \quad (8.1)$$

$\delta\mathbf{U}$ muss auf den Rändern des Körpers $\partial_V \mathcal{B}_0$, auf denen Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben sind, verschwinden. Es muss somit aus der Menge \mathcal{V}_0 der kinematisch verträglichen Verschiebungsvariationen in der Referenzkonfiguration gewählt werden

$$\mathcal{V}_0 = \{ \delta\mathbf{U} : \mathcal{B}^0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ für } \mathbf{X} \in \partial_V \mathcal{B}_0 \} \quad . \quad (8.2)$$

Nach Anwendung der Kettenregel, des Divergenztheorems (A.2) und des Theorems von CAUCHY (4.105) erhält man damit die virtuelle Arbeit des Körpers, die sich in dynamische und statische Anteile aufspalten lässt

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{a} \delta \mathbf{U} dV_0 + G(\mathbf{I}\mathbf{P}, \delta \mathbf{U}) = 0 \quad (8.3)$$

$$G(\mathbf{I}\mathbf{P}, \delta \mathbf{U}) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{I}\mathbf{P} : \text{Grad} \delta \mathbf{U} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \delta \mathbf{U} dV_0 - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t} \delta \mathbf{U} dA_0 \quad . \quad (8.4)$$

Diese schwache Form der Gleichgewichtsbedingung kann durch Einsetzen der EULERSchen Größen oder in analoger Vorgehensweise ausgehend von der räumlichen Impulsbilanz (5.9) in der aktuellen Konfiguration angegeben werden. Mit den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ in der aktuellen Konfiguration, die Elemente der Menge der kinematisch zulässigen Verschiebungsvariationen in der aktuellen Konfiguration sein müssen

$$\mathcal{V}_\chi = \{ \delta \mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ für } \mathbf{x} \in \partial_u \mathcal{B} \} \quad , \quad (8.5)$$

erhält man für den statischen Anteil der schwachen Form des Gleichgewichts

$$G(\boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \frac{dV}{J} - \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA \quad . \quad (8.6)$$

Dabei stellt der erste Term die virtuelle Formänderungsarbeit δW dar. Die anderen beiden Terme entsprechen der virtuellen Arbeit aller äußeren flächenhaft und volumenhaft verteilt angreifenden Kräfte δA_A und δA_V . Berücksichtigt man weiterhin die Symmetrie des KIRCHHOFF-Spannungstensors und die Vertauschbarkeit von Gradientenbildung und Variation, so gelangt man zu

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau} : \frac{1}{2} \delta (\text{grad} \mathbf{u} + (\text{grad} \mathbf{u})^T) \frac{dV}{J} - \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA \quad (8.7) \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{e}^{(-2)} \frac{dV}{J} - \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA \\ &= \tilde{G}(\boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{e}^{(-2)}) \quad , \end{aligned}$$

$\delta \mathbf{e}^{(-2)}$ ist die Variation des ALMANSI-Verzerrungstensors. Diese Form des Prinzips der virtuellen Arbeit entspricht dem für kleine Formänderungen mit dem Unterschied, dass sich alle Größen auf die aktuell betrachtete Konfiguration beziehen und über das aktuelle Volumen des Körpers \mathcal{B} integriert wird.

8.2 Numerische Lösungsmethode des statischen Randwertproblems

Beschränkt man sich auf statische Prozesse, so lässt sich die Variationsformulierung des mechanischen Randwertproblems wie folgt angeben:

Bestimme die Spannung $\boldsymbol{\tau}$ und die Konfiguration $\boldsymbol{\chi}$ so, dass

$$G(\boldsymbol{\tau}, \delta \boldsymbol{u}) = 0 \quad (8.8)$$

für beliebige Verschiebungsvariationen $\delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\chi}}$ erfüllt ist.

Zur Lösung dieses nichtlinearen Randwertproblems wird eine inkrementelle Formulierung gewählt. Hierbei wird die Zeit der Lastaufbringung in viele kleine Zeitintervalle Δt aufgeteilt. Dabei wird davon ausgegangen, dass jeweils die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t bekannt ist; die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird gesucht. Im Rahmen eines modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird zu Beginn eines Lastschrittes die Steifigkeitsmatrix berechnet und anschließend eine Gleichgewichtsiteration durchgeführt. Die Steifigkeitsmatrix wird bei diesem Verfahren während der Iteration nicht verändert. Als Abbruchkriterium für die Gleichgewichtsiteration im Zeitschritt wird ein Fehlermaß definiert, welches das Kräftegleichgewicht zwischen dem Vektor der inneren Lasten und dem der äußeren Lasten vergleicht. Die Genauigkeit der Steifigkeitsmatrix bestimmt daher im Wesentlichen die Konvergenzgeschwindigkeit.

8.2.1 Wahl einer Bezugskonfiguration

Zur Auswertung des Prinzips der virtuellen Arbeit muss eine Transformation auf eine bekannte Gleichgewichtskonfiguration erfolgen. Hierbei ist prinzipiell jede bekannte Gleichgewichtskonfiguration zulässig. In der Praxis haben sich zwei Darstellungsweisen durchgesetzt. Bei der TOTAL-LAGRANGE-Formulierung werden alle Größen auf die unverformte Ausgangskonfiguration bezogen. Wählt man die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes als Bezugskonfiguration, so spricht man von einer UPDATE-LAGRANGE-Formulierung. Die Verfahren liefern identische Ergebnisse, wenn die geeigneten Materialtensoren verwendet werden. Der einzige Unterschied liegt in der Wahl der Bezugskonfiguration. Allgemein lässt sich jedoch sagen, dass die inkrementellen linearen Verzerrungen der TOTAL-LAGRANGE-Formulierung zu einer komplexeren Form der Verzerrungsverschiebungsmatrix führen und daher die UPDATE-LAGRANGE-Formulierung numerisch effizienter ist [Bat90]. Letztere soll deswegen verwendet werden.

Aus der bekannten Konfiguration zur Zeit t soll die neue Konfiguration zur Zeit $t + \Delta t$

berechnet werden. Die gesuchten Knotenpunktverschiebungen \mathbf{u} im betrachteten Zeitintervall Δt ergeben sich nach BATHE [Bat90] zu

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{x} &= \mathbf{X} + {}^t\mathbf{u}, & {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} &= \mathbf{X} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ \rightarrow \mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (8.9)$$

Hier und im Folgenden zeigt ein linker oberer Index die Zeit an, in der eine Größe auftritt, ein linker unterer Index die Zeit, in der diese Größe gemessen wird. Größen, die in derselben Konfiguration auftreten, in der sie auch gemessen werden wie zum Beispiel der CAUCHY-Spannungstensor werden nur durch einen linken oberen Index gekennzeichnet. Die virtuelle Formänderungsarbeit lautet damit

$$\delta W = \int_{\mathcal{B}_{t+\Delta t}} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} \delta (\text{grad } {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad } {}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) dV \quad (8.10)$$

Die CAUCHY-Spannung lässt sich nun durch die auf die Konfiguration zur Zeit t bezogene 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung nach (4.108) ausdrücken

$${}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{P} = {}^{t+\Delta t} J ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^{-1} \boldsymbol{\sigma} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^{-T} \quad (8.11)$$

und aus der Definition des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors bezogen auf die Konfiguration zur Zeit t

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} ({}_t\text{Grad } \mathbf{u} + ({}_t\text{Grad } \mathbf{u})^T) \quad (8.12)$$

folgt für dessen Variation

$$\delta_t^{t+\Delta t}\mathbf{E}^{(2)} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^T {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{e}^{(-2)} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}) \quad . \quad (8.13)$$

Durch Einsetzen von (4.24), (8.10), (8.11) und (8.13) in (8.8) gelangt man schließlich zu

$$\begin{aligned} \hat{G} \left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}, \delta_t^{t+\Delta t}\mathbf{E}^{(2)} \right) &= \int_{\mathcal{B}_t} {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{P} : \delta_t^{t+\Delta t}\mathbf{E}^{(2)} dV - \int_{\mathcal{B}_t} {}^t\rho_t {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} \delta\mathbf{u} dV \\ &- \int_{\partial\mathcal{B}_0} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{t} \delta\mathbf{u} dA_0 \quad . \end{aligned} \quad (8.14)$$

Üblicherweise wird hierbei die Variation des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufgespalten

$$\begin{aligned} \delta_t^{t+\Delta t}\mathbf{E}^{(2)} &= \delta_t\mathbf{E}^{(2)} = \delta_t\mathbf{E}_l^{(2)} + \delta_t\mathbf{E}_{nl}^{(2)} \\ \text{mit } \delta_t\mathbf{E}_l^{(2)} &= \frac{1}{2} \delta (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) \\ \delta_t\mathbf{E}_{nl}^{(2)} &= \frac{1}{2} \delta ((\text{Grad } \mathbf{u})^T \text{Grad } \mathbf{u}) \quad . \end{aligned} \quad (8.15)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor lässt sich im Gegensatz zu Spannungsmaßen, die in der aktuellen Konfiguration definiert sind, in den bekannten Anteil zur Zeit t und den Zuwachs im Zeitschritt Δt zerlegen, da er sich auf die bekannte Konfiguration zur Zeit t bezieht

$${}^{t+\Delta t}{}^I\mathbf{P} = {}^t{}^I\mathbf{P} + \Delta_t{}^I\mathbf{P} \quad . \quad (8.16)$$

Damit erhält man das Prinzip der virtuellen Arbeit in inkrementeller Form

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_t} \Delta_t{}^I\mathbf{P} : \delta_t \mathbf{E}_t^{(2)} dV + \int_{\mathcal{B}_t} {}^t{}^I\mathbf{P} : \delta_t \mathbf{E}_t^{(2)} dV + \\ \int_{\mathcal{B}_t} \Delta_t{}^I\mathbf{P} : \delta_t \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV + \int_{\mathcal{B}_t} {}^t{}^I\mathbf{P} : \delta_t \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV = \delta A_A + \delta A_V \quad . \end{aligned} \quad (8.17)$$

8.2.2 Einbeziehung der konstitutiven Beziehungen

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (8.17) ist noch unabhängig vom verwendeten Materialmodell. Die konstitutiven Gleichungen werden dazu benötigt, einen Zusammenhang zwischen dem Inkrement des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors und den Verschiebungsinkrementen herzustellen. Dazu wird der Spannungszuwachs mit einem expliziten EULER-Ansatz approximiert

$$\Delta_t{}^I\mathbf{P} \approx {}^t{}^I\mathbf{P} \Delta t \quad . \quad (8.18)$$

Da das vorgestellte Schädigungsmodell in der aktuellen Konfiguration vorliegt, wird die materielle Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors durch ein Verschieben in die aktuelle Konfiguration für beliebige Zeiten $\tau \in [t, t + \Delta t]$ in die LIE-Ableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors überführt bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v[\tau] &= {}^\tau\mathbf{F} {}^\tau{}^I\dot{\mathbf{P}} ({}^\tau\mathbf{F})^T \quad \text{bzw.} \\ {}^\tau{}^I\dot{\mathbf{P}} &= ({}^\tau\mathbf{F})^{-1} \mathcal{L}_v[\tau] ({}^\tau\mathbf{F})^{-T} \quad . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Wie in (4.110) bereits gezeigt, lässt sich die LIE-Ableitung durch die im Materialgesetz verwendete logarithmische Rate ersetzen

$$\mathcal{L}_v[\tau] = {}^\tau \overset{\circ}{\tau}{}^{log} + \mathbf{G}[\tau] : {}^\tau \mathbf{D} \quad . \quad (8.20)$$

Da das Stoffgesetz in der zur HENCKY-Dehnung konjugierten Spannung formuliert ist, muss die logarithmische Rate der KIRCHHOFF-Spannung durch die von $\boldsymbol{\pi}$ ersetzt werden. Unter der Annahme, dass sich für das vorgestellte Stoffgesetz die folgende Beziehung herleiten lässt

$${}^\tau \overset{\circ}{\tau}{}^{log} = {}^\tau \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}{}^{log} + \mathbf{L} : \mathbf{D} \quad , \quad (8.21)$$

gelangt man zu

$$\mathcal{L}_v[\tau \boldsymbol{\tau}] = \tau \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{log} + (\mathbf{L} + \mathbf{G}[\tau \boldsymbol{\tau}]) : \tau \mathbf{D} \quad . \quad (8.22)$$

Wählt man für die Zeit $\tau = t$, dann erhält man mit

$${}^t \mathbf{F} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad {}^t \boldsymbol{\tau} = {}^t II \mathbf{P} \quad (8.23)$$

folgendes Ergebnis für die materielle Ableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$${}^t II \dot{\mathbf{P}} = {}^t \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{log} + (\mathbf{L} + \mathbf{G}[{}^t \boldsymbol{\tau}]) : {}^t \mathbf{D} \quad . \quad (8.24)$$

Linearisiert man weiterhin das Stoffgesetz im Zeitschritt durch Einführung eines elastisch-plastischen Steifigkeitstensors

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{log} = \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} \quad , \quad (8.25)$$

so kann die Rate des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors als lineare Transformation der Streckgeschwindigkeiten mit dem materiellen Steifigkeitstensor dargestellt werden

$$\begin{aligned} {}^t II \dot{\mathbf{P}} &= \{\mathbf{C}^{ep} + \mathbf{L} + \mathbf{G}[{}^t \boldsymbol{\tau}]\} : {}^t \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}^m : {}^t \mathbf{D} \quad . \end{aligned} \quad (8.26)$$

Unter der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit im Zeitschritt erhält man für den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten

$${}^t \mathbf{D} = \frac{1}{2\Delta t} (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} \quad (8.27)$$

und damit schließlich für das Inkrement des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\Delta {}^t II \mathbf{P} \approx \mathbf{C}^m : {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} \quad . \quad (8.28)$$

Setzt man dieses Ergebnis in das Prinzip der virtuellen Arbeit ein, so erhält man die linearisierte Form

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{C}^m : {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} : \delta {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} dV + \int_{\mathcal{B}_t} {}^t II \mathbf{P} : \delta {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} dV + \\ &\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{C}^m : {}^t \mathbf{E}_i^{(2)} : \delta {}^t \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV + \int_{\mathcal{B}_t} {}^t II \mathbf{P} : \delta {}^t \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV = \delta A_A + \delta A_V \quad . \end{aligned} \quad (8.29)$$

Es sei bemerkt, dass die Näherungen, die zum Erhalt des materiellen Steifigkeitstensors \mathbf{C}^m durchgeführt wurden, nicht die Genauigkeit der Spannungsberechnung zum Erhalt des Vektors der inneren Kräfte beeinflusst, da dieser direkt aus dem Stoffgesetz ermittelt werden kann. Die Erfüllung des Kräftegleichgewichts innerhalb des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird also nicht beeinflusst, sondern lediglich das Konvergenzverhalten.

8.2.3 Inkrementelle Formulierung

Zur Durchführung der NEWTON-RAPHSON-Iteration werden die Verschiebungen durch die Folge ${}^{(i)}\mathbf{u}$ inkrementell approximiert

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx {}^{(i)}\mathbf{u} = {}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta^{(i)}\mathbf{u} \\ \text{mit: } i &= 1, 2, 3, \dots \quad \text{und } {}^{(0)}\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8.30)$$

Das aktuelle Ergebnis ${}^{(i)}\mathbf{u}$ ergibt sich aus der Summe des vorherigen Ergebnisses und dem aktuellen Verschiebungskrement. Alle weiteren kinematischen Größen werden daraus abgeleitet. Die Variation der Verschiebung im aktuellen Zeitschritt enthält demnach nur die Variation des Inkrements

$$\delta^{(i)}\mathbf{u} = \delta\Delta^{(i)}\mathbf{u} \quad (8.31)$$

Einsetzen in die Variation des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors liefert den linearen und den nichtlinearen Anteil

$$\begin{aligned} \delta\Delta_t \mathbf{E}_l^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\delta \text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u} + \delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u})^T + \right. \\ &\quad \left. \delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u})^T (\text{Grad } {}^{(i-1)}\mathbf{u}) + \right. \\ &\quad \left. (\text{Grad } {}^{(i-1)}\mathbf{u})^T \delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u}) \right] \\ \delta\Delta_t \mathbf{E}_{nl}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u})^T (\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u}) + \right. \\ &\quad \left. \delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \delta(\text{Grad } \Delta^{(i)}\mathbf{u}) \right] \end{aligned} \quad (8.32)$$

außerdem werden die Spannungen analog zu den Verschiebungen zerlegt

$${}^{t+\Delta t} \Pi \mathbf{P} \approx {}^{(i-1)} \Pi \mathbf{P} + \Delta^{(i)} \Pi \mathbf{P} \quad (8.33)$$

Damit ergibt sich die inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{C}^m : \Delta_t \mathbf{E}_l^{(2)} : \delta\Delta_t^{(i)} \mathbf{E}_l^{(2)} dV + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{C}^m : \Delta_t \mathbf{E}_l^{(2)} : \delta\Delta_t^{(i)} \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV + \\ \int_{\mathcal{B}_t} {}^{(i-1)} \Pi \mathbf{P} : \delta\Delta_t^{(i)} \mathbf{E}_{nl}^{(2)} dV = \delta A_A + \delta A_V - \int_{\mathcal{B}_t} {}^{(i-1)} \Pi \mathbf{P} : \delta\Delta_t^{(i)} \mathbf{E}_l^{(2)} dV \end{aligned} \quad (8.34)$$

Der 2. Term wird bei der Implementation vernachlässigt, da dieser gegenüber den anderen Termen klein ist. Weiterhin kann für den linearen Anteil der Variation des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors in weiterer Näherung der multiplikative Anteil vernachlässigt werden.

8.3 Diskretisierung des Lösungsraums mit finiten Elementen

Ausgehend von der inkrementellen Form des Prinzips der virtuellen Arbeit wird der Körper zur Berechnung in einzelne diskrete Teilbereiche, die sogenannten finiten Elemente, aufgeteilt. Die Integrale über das gesamte Gebiet werden näherungsweise durch die Summen der Integrale der einzelnen Teilvolumina ersetzt.

Die Implementation des Stoffgesetzes erfolgt zur Lösung rotationssymmetrischer Probleme. Dazu wird zweckmäßig eine Beschreibung in Zylinderkoordinaten gewählt. Die Elementgeometrie und das Verschiebungsfeld werden durch die Werte an den Knoten mit Hilfe von Formfunktionen interpoliert.

8.3.1 Grundlagen der Beschreibung in Zylinderkoordinaten

Der in Abbildung 8.1 dargestellte Ortsvektor \mathbf{X} lässt sich einerseits im kartesischen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ durch seine Koordinaten (x_1, x_2, x_3) andererseits durch die kontravarianten Koordinaten (r, φ, z) in der kovarianten Basis $\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\varphi, \mathbf{g}_z$ eines Zylinderkoordinatensystems darstellen. Mit dem Zusammenhang zwischen den Koordinatenwerten

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z \quad (8.35)$$

lässt sich der Ortsvektor des Körperpunktes angeben

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3. \quad (8.36)$$

Nach (4.5) und (4.6) ergeben sich damit die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren des Zylinderkoordinatensystems zu

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, & \mathbf{g}^r &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_\varphi &= -r \sin \varphi \mathbf{e}_1 + r \cos \varphi \mathbf{e}_2, & \mathbf{g}^\varphi &= -\frac{1}{r} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r} \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_z &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{g}^z &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Daraus lassen sich nach (4.7) und (4.8) die kovariante und kontravariante Metrik bestimmen

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.38)$$

Die für die kovariante Ableitung benötigten CHRISTOFFEL-Symbole erhält man nach KLINGBEIL [Kli89] durch

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{kl,j} + g_{lj,k} - g_{jk,l}) \quad (8.39)$$

Die einzigen von Null verschiedenen Komponenten sind

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (8.40)$$

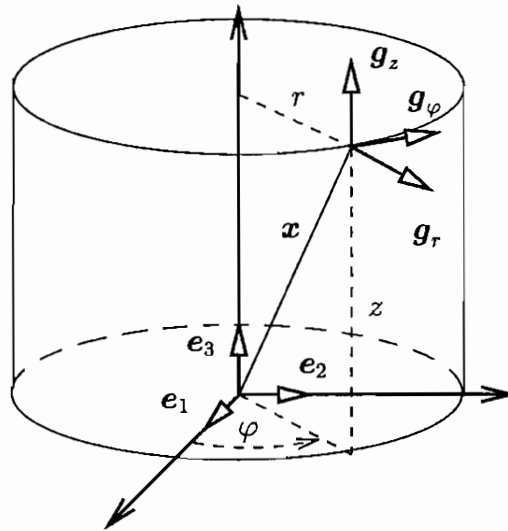


Abb. 8.1: Darstellung eines Körperpunktes im Zylinderkoordinatensystem (nach WICHTMANN [Wic96])

8.3.1.1 Physikalische Komponenten tensorieller Größen

Bei den kovarianten bzw. kontravarianten Basissystemen des Zylinderkoordinatensystems handelt es sich nicht um orthonormierte Basissysteme, sondern lediglich um orthogonale Basissysteme. Um einen Vergleich tensorieller Größen zu ermöglichen, ist es sinnvoll, diese auf normierte Basen zu beziehen. Aufgrund der Orthogonalität der Basen des Zylinderkoordinatensystems sind die normierten ko- und kontravarianten Basisvektoren identisch, daher werden diese immer rechts unten indiziert. Sie ergeben sich zu

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{g}_r = \mathbf{g}^r, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r} \mathbf{g}_\varphi = r \mathbf{g}^\varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{g}_z = \mathbf{g}^z. \quad (8.41)$$

Die auf normierte Basen bezogenen Tensorkomponenten werden physikalische Komponenten genannt und im Folgenden durch ein übergestelltes $\tilde{\sim}$ gekennzeichnet. Für die Darstellung eines Tensors zweiter Stufe ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \\ &= A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \tilde{A}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Daraus erhält man mit (8.41) die physikalischen Komponenten zu

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{ij} &= A^i_j \sqrt{\mathbf{g}_{(i)} \mathbf{g}_{(i)}} \sqrt{\mathbf{g}_{(j)} \mathbf{g}_{(j)}} = A_i^j \sqrt{\mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(i)}} \sqrt{\mathbf{g}_{(j)} \mathbf{g}_{(j)}} \\ &= A^{ij} \sqrt{\mathbf{g}_{(i)} \mathbf{g}_{(i)}} \sqrt{\mathbf{g}_{(j)} \mathbf{g}_{(j)}} = A_{ij} \sqrt{\mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(i)}} \sqrt{\mathbf{g}_{(j)} \mathbf{g}_{(j)}}.\end{aligned}\quad (8.43)$$

Über eingeklammerte Indizes wird nicht summiert. Analoge Beziehungen lassen sich für Tensoren beliebiger Stufe herleiten.

8.3.2 Elemente und Ansatzfunktionen

Jedem Punkt in der Referenzkonfiguration kann ein Positionsvektor zugewiesen werden. Dazu werden die kontravarianten Koordinatenwerte (R, Φ, Z) und die kovarianten Basisvektoren des Zylinderkoordinatensystems verwendet

$$\mathbf{X} = R\mathbf{G}_R + Z\mathbf{G}_Z = R\mathbf{E}_R + Z\mathbf{E}_Z \quad . \quad (8.44)$$

Die Koordinaten und Verschiebungen eines beliebigen Punktes im Element werden mit Hilfe der Formfunktionen durch die Werte an den Elementknoten interpoliert, wie in Abbildung 8.2 dargestellt. Im Rahmen des verwendeten 4-Knoten Elements mit bilinearen Ansatzfunktionen werden die physikalischen Knotenkoordinaten so auf ein natürliches Koordinatensystem (η^R, η^Z) abgebildet

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^4 h_j \mathbf{X}_j = \sum_{j=1}^4 h_j (R_j \mathbf{G}_R + Z_j \mathbf{G}_Z) = \sum_{j=1}^4 h_j (R_j \mathbf{E}_R + Z_j \mathbf{E}_Z) \quad . \quad (8.45)$$

Der Wertebereich für η^R und η^Z liegt im Intervall $[-1, 1]$.

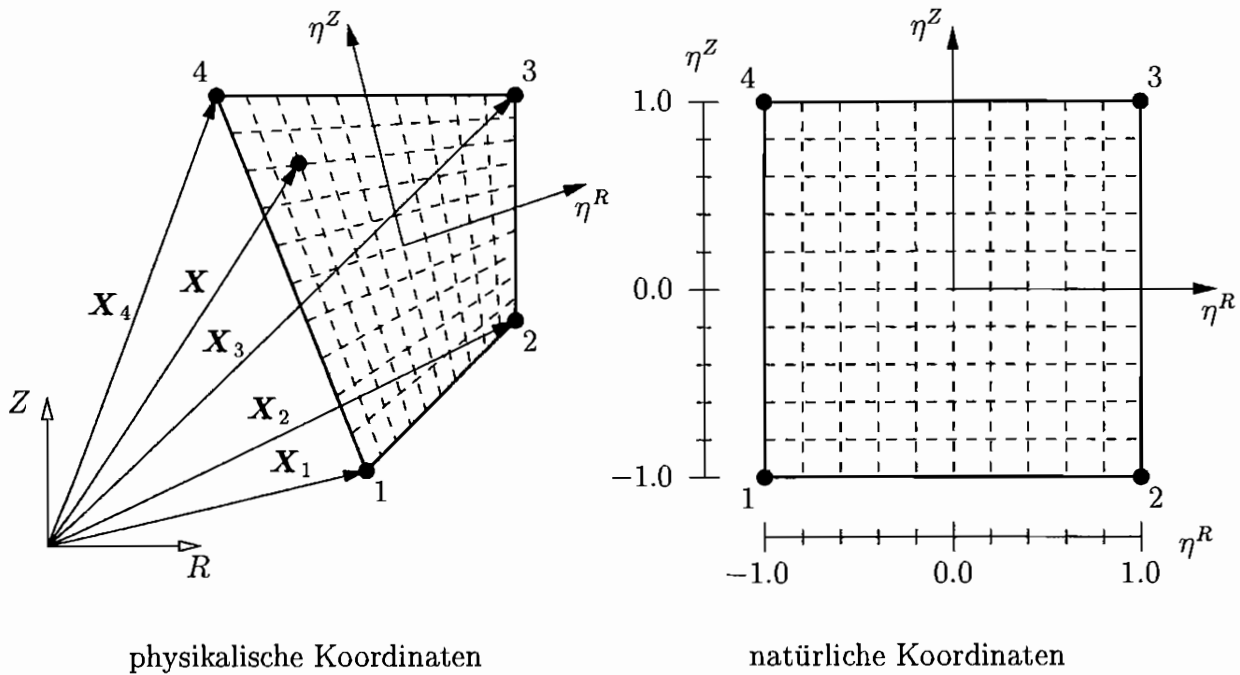


Abb. 8.2: Bilineares Element mit physikalischen und natürlichen Koordinaten nach MÜLLER [Mül99]

Die bilinearen Ansatzfunktionen lassen sich allgemein nach SCHIESE [Sch98] angeben

$$h_j = \frac{1}{4} (1 + \eta^R \eta^{Rj}) (1 + \eta^Z \eta^{Zj}) \quad . \quad (8.46)$$

Für jeden Punkt innerhalb des Elements können die referentiellen Koordinatenwerte und deren Basisvektoren mit Hilfe der natürlichen Koordinaten und der Knotenkoordinaten berechnet werden. Aufgrund der Rotationssymmetrie wird der Schnitt des Elementes in der Referenzkonfiguration immer für den Winkel $\Phi = 0$ durchgeführt, was die Berechnung der Basen deutlich vereinfacht

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j=1}^4 h_j R_j, & \mathbf{E}_R &= (1, 0, 0)^T \\ Z &= \sum_{j=1}^4 h_j Z_j, & \mathbf{E}_Z &= (0, 1, 0)^T \\ \Phi &= 0, & \mathbf{E}_\Phi &= (0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad . \quad (8.47)$$

Die Beschreibung des Verschiebungsfeldes erfolgt nicht, wie oft üblich, durch einen isoparametrischen Ansatz für den Verschiebungsvektor, sondern es wird ein Ansatz für die Änderung der Koordinatenwerte in Abhängigkeit von den Knotenwerten gewählt. Damit muss zur Erzeugung eines reinen Torsionsszustands in tangentialer Richtung nur die u^Φ -Komponente vorgegeben werden. Die im Folgenden angegebenen Interpolationsansätze beschreiben somit nicht die Vektorkomponenten des Verschiebungsvektors bezogen auf

eine Basis in der Referenz- oder der aktuellen Konfiguration, sondern die Änderung der Koordinatenwerte, wie in Abbildung 8.3 in der e_1, e_2 -Ebene verdeutlicht wird

$$u^R = \sum_{j=1}^4 h_j u_j^R, \quad Ru^\Phi = \sum_{j=1}^4 h_j R_j u_j^\Phi, \quad u^Z = \sum_{j=1}^4 h_j u_j^Z. \quad (8.48)$$

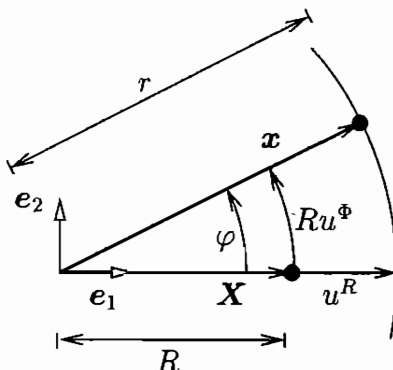


Abb. 8.3: Elementverschiebungen

Die Koordinatenwerte der aktuellen Konfiguration werden als Vektor in der aktuellen Basis dargestellt

$$\mathbf{x} = r\mathbf{g}_r + z\mathbf{g}_z = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z. \quad (8.49)$$

Sie lassen sich aus den Koordinaten der Referenzkonfiguration und den Verschiebungen bestimmen

$$\begin{aligned} r &= R + u^R, & \mathbf{g}_r &= \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ z &= Z + u^Z, & \mathbf{g}_z &= \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 \\ \varphi &= \Phi + u^\Phi, & \mathbf{g}_\varphi &= r\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 r + r \cos \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Der Verschiebungsvektor kann damit als Differenz der Ortsvektoren bezüglich der Basen in der Referenz- und der aktuellen Konfiguration angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [R(\cos u^\Phi - 1) + u^R] \mathbf{E}_R + R \sin u^\Phi \mathbf{E}_\Phi + u^z \mathbf{E}_Z \\ &= [R(1 - \cos u^\Phi) + u^R] \mathbf{e}_r + R \sin u^\Phi \mathbf{e}_\varphi + u^z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (8.51)$$

8.3.2.1 Berechnung des Deformationsgradienten

Die physikalischen Komponenten des Deformationsgradienten bezogen auf die normierten Basisvektoren des Zylinderkoordinatensystems erhält man aus (4.21) und (8.43) zu

$$\mathbf{F} = r_{,R} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + r (\mathbf{e}_r)_{,R} \otimes \mathbf{E}_R + z_{,R} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R + \frac{r}{R} (\mathbf{e}_r)_{,\Phi} \otimes \mathbf{E}_\Phi + \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} & r_{,Z} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z + r (\mathbf{e}_r)_{,Z} \otimes \mathbf{E}_Z + z_{,Z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z \\ &= \tilde{F}_R^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}^R + \tilde{F}_\Phi^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}^\Phi + \tilde{F}_Z^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}^Z \\ & \tilde{F}_R^\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{E}^R + \tilde{F}_\Phi^\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{E}^\Phi + \tilde{F}_Z^\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{E}^Z \\ & \tilde{F}_R^z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}^R + \tilde{F}_\Phi^z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}^\Phi + \tilde{F}_Z^z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}^Z . \end{aligned} \quad (8.53)$$

Die darin vorkommenden Ableitungen der normierten Basisvektoren in der aktuellen Konfiguration ergeben sich mit (8.50) zu

$$(\mathbf{e}_r)_{,R} = \varphi_{,R} \mathbf{e}_\varphi , \quad (\mathbf{e}_r)_{,\Phi} = \mathbf{e}_\varphi , \quad (\mathbf{e}_r)_{,Z} = \varphi_{,Z} \mathbf{e}_\varphi \quad (8.54)$$

und die Ableitungen der aktuellen Koordinaten nach den Referenzkoordinaten zu

$$\begin{aligned} r_{,R} &= 1 + u_{,R}^R , & r_{,\Phi} &= 0 , & r_{,Z} &= u_{,Z}^R \\ \varphi_{,R} &= u_{,R}^\Phi , & \varphi_{,\Phi} &= 1 , & \varphi_{,Z} &= u_{,Z}^\Phi \\ z_{,R} &= u_{,R}^Z , & z_{,\Phi} &= 0 , & z_{,Z} &= 1 + u_{,Z}^Z . \end{aligned} \quad (8.55)$$

Damit lassen sich die physikalischen Komponenten des Deformationsgradienten angeben

$$\begin{aligned} \tilde{F}_R^r &= 1 + u_{,R}^R ; & \tilde{F}_\Phi^r &= 0 ; & \tilde{F}_Z^r &= u_{,Z}^R \\ \tilde{F}_R^\varphi &= r u_{,R}^\Phi ; & \tilde{F}_\Phi^\varphi &= \frac{r}{R} ; & \tilde{F}_Z^\varphi &= r u_{,Z}^\Phi \\ \tilde{F}_R^z &= u_{,R}^Z ; & \tilde{F}_\Phi^z &= 0 ; & \tilde{F}_Z^z &= 1 + u_{,Z}^Z , \end{aligned} \quad (8.56)$$

die mit Hilfe der aktuellen und der Referenzmetriken in die kontra-kovarianten Komponenten umgerechnet werden können

$$\begin{aligned} F_R^r &= \tilde{F}_R^r ; & F_\Phi^r &= r \tilde{F}_\Phi^r ; & F_Z^r &= \tilde{F}_Z^r \\ F_R^\varphi &= \frac{\tilde{F}_R^\varphi}{r} ; & F_\Phi^\varphi &= \frac{R}{r} \tilde{F}_\Phi^\varphi ; & F_Z^\varphi &= \frac{\tilde{F}_Z^\varphi}{r} \\ F_R^z &= \tilde{F}_R^z ; & F_\Phi^z &= r \tilde{F}_\Phi^z ; & F_Z^z &= \tilde{F}_Z^z . \end{aligned} \quad (8.57)$$

Die Berechnung der Verschiebungsableitungen im Rahmen des gewählten Verschiebungsansatzes ist in Anhang C.1 angegeben.

8.3.2.2 Berechnung des Geschwindigkeitsgradiententensors

Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich nach (4.17) in Zylinderkoordinaten in der aktuellen Basis zu

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{z} \mathbf{e}_z . \quad (8.58)$$

Anwendung der Kettenregel auf \dot{e}_r liefert mit der partiellen Ableitung nach (8.54)₂ unter der Annahme einer konstanten Änderung der radialen, tangentialen und axialen Verschiebungskomponenten u^R , u^Φ und u^z im Zeitschritt

$$\mathbf{v} = \tilde{v}_r \mathbf{e}_r + \tilde{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \tilde{v}_z \mathbf{e}_z = v^r \mathbf{g}_r + r v^\varphi \mathbf{g}_\varphi + v^z \mathbf{g}_z \quad . \quad (8.59)$$

mit

$$\tilde{v}^r = R(1 - \cos \frac{u^\Phi}{\Delta t}) \quad , \quad \tilde{v}^\varphi = R \sin \frac{u^\Phi}{\Delta t} \quad , \quad \tilde{v}^z = \frac{u^z}{\Delta t} \quad . \quad (8.60)$$

Der Geschwindigkeitsgradiententensor wird nach (4.30) aus dem Geschwindigkeitsvektor bestimmt. Für seine physikalischen Komponenten ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{L}_r^r &= v_{,r}^r & , & \quad \tilde{L}_\varphi^r = -v^\varphi & , & \quad \tilde{L}_z^r = v_{,z}^r \\ \tilde{L}_r^\varphi &= r v_{,r}^\varphi + v^\varphi & , & \quad \tilde{L}_\varphi^\varphi = \frac{v^r}{r} & , & \quad \tilde{L}_z^\varphi = r v_{,z}^\varphi \\ \tilde{L}_r^z &= v_{,r}^z & , & \quad \tilde{L}_\varphi^z = 0 & , & \quad \tilde{L}_z^z = v_{,z}^z \end{aligned} \quad . \quad (8.61)$$

Die Berechnung der Ableitungen der Geschwindigkeiten nach den aktuellen Koordinatenwerten ist in Anhang C.2 angegeben. Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten \mathbf{D} und der Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} ergeben sich als symmetrischer und antisymmetrischer Anteil von \mathbf{L} . Die physikalischen Komponenten lassen sich direkt aus (8.61) bestimmen.

8.3.3 Diskretisierte Form des inkrementellen Prinzips der virtuellen Arbeit

Um zum Prinzip der virtuellen Arbeit auf Elementebene zu gelangen, wird von der tensoriellen Form zu einer Matrixschreibweise übergegangen. Außerdem wird angenommen, dass die Zeitschritte hinreichend klein sind, so dass der Ansatz für den inkrementellen Verschiebungsvektor analog zu (8.36) für das Prinzip der virtuellen Arbeit durch die Vektoren der inkrementellen Knotenverschiebungen dargestellt werden kann

$$\Delta^{(i)} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^4 h_j \Delta^{(i)} \mathbf{u}_j \quad . \quad (8.62)$$

Die inkrementellen Knotenpunktverschiebungen lassen sich nach (8.51)₂ aus den Inkrementen von u^R , u^Φ und u^z berechnen. Dieselbe Annahme wird für die Variation der Verschiebungen getroffen. Es handelt sich somit um einen isoparametrischen Ansatz, bei dem die Verschiebungen und die Ortsvektoren mit denselben Ansatzfunktionen approximiert werden.

Durch Einsetzen der Ansätze für die inkrementellen Verschiebungen und die Verschiebungsvariation in das Prinzip der virtuellen Arbeit (8.34) und Übergang zur Matrizen-

schreibweise läßt sich dieses unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung auf Elementebene übertragen

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_i^e} \delta[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]^T [{}^{(i)} \mathbf{B}_l]^T [{}^{(i)} \mathbf{C}^*] [{}^{(i)} \mathbf{B}_l] [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e] dV \\
 & + \int_{B_i^e} \delta[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]^T [{}^{(i)} \mathbf{B}_{nl}]^T [{}_t^{(i-1)II} \mathbf{P}^*] [{}^{(i)} \mathbf{B}_{nl}] [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e] dV \\
 & = \int_{\partial B_i^e} \delta[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]^T [{}^{(i)} \mathbf{H}]^T [{}_0^{t+\Delta t} \mathbf{t}] dA - \int_{B_i^e} \delta[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]^T [{}^{(i)} \mathbf{B}_l]^T [{}_t^{(i-1)II} \mathbf{P}] dV .
 \end{aligned} \tag{8.63}$$

Der Vektor der inkrementellen Elementknotenverschiebungen $[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]$ und seine Variation $\delta[\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e]$ sind konstant innerhalb des Elements und lassen sich außerhalb der Integralgrenzen schreiben. Da das Prinzip der virtuellen Arbeit für beliebige virtuelle Verschiebungen gilt, erhält man das zu lösende linearisierte Gleichungssystem zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen auf Elementebene

$$[[\mathbf{k}_l] + [\mathbf{k}_{nl}]] [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^e] = [\mathbf{r}_t] - [{}^{(i-1)} \mathbf{f}] \tag{8.64}$$

mit

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{k}_l] &= \int_{B_i^e} [{}^{(i)} \mathbf{B}_l]^T [{}^{(i)} \mathbf{C}^*] [{}^{(i)} \mathbf{B}_l] dV && \text{inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix} \\
 &&& \text{bei linearer Verzerrung} \\
 [\mathbf{k}_{nl}] &= \int_{B_i^e} [{}^{(i)} \mathbf{B}_{nl}]^T [{}_t^{(i-1)II} \mathbf{P}^*] [{}^{(i)} \mathbf{B}_{nl}] dV && \text{inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix} \\
 &&& \text{bei nichtlinearer Verzerrung} \\
 [\mathbf{r}_t] &= \int_{\partial B_i^e} [{}^{(i)} \mathbf{H}]^T [{}_0^{t+\Delta t} \mathbf{t}] dA && \text{äußerer Elementlastvektor} \\
 [{}^{(i-1)} \mathbf{f}] &= \int_{B_i^e} [{}^{(i)} \mathbf{B}_l]^T [{}_t^{(i-1)II} \mathbf{P}] dV && \text{Lastvektor der Elementspannungen.}
 \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Interpolationsmatrix $[\mathbf{H}]$, der linearen und nichtlinearen Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen $[\mathbf{B}_l]$ und $[\mathbf{B}_{nl}]$, der Spannungs-Verzerrungs-Matrix $[\mathbf{C}^*]$ und der Spannungs-Metrik-Matrix $[{}^{II} \mathbf{P}^*]$ wird analog zu den Ausführungen von ROTT [Rot91], FORNEFELD [For90] und MITTELBACH [Mit95] vorgegangen. Dabei wird der materielle Steifigkeitstensor nach (8.26) verwendet.

Die Integrale über die Elementvolumina werden im Rahmen der FEM-Implementierung numerisch mit dem Verfahren der GAUSS-Quadratur gelöst. Aus den so auf Elementebene ermittelten Matrizen und Vektoren wird das Gesamtgleichungssystem der Elementanordnung des Körpers aufgestellt und gelöst. Die hierzu erforderlichen Routinen werden von dem verwendeten finite Element Programm FEAP von TAYLOR [Tay99a], [Tay99b]

übernommen. Weitere Erläuterungen des dem Programmsystem zugrundeliegenden Konzepts der Methode der finiten Elemente findet man bei ZIENKIEWIC & TAYLOR [ZT89a], [ZT89b].

8.4 Aufbereitung des Stoffgesetzes

Zur Implementierung wird eine vereinfachte Form des Stoffgesetzes gewählt. Es werden folgende Einschränkungen gegenüber dem in Kapitel 7 vorgestellten Stoffgesetz gemacht:

1. Der Einfluss der Änderung der Steifigkeit auf die reversible Verzerrungsgeschwindigkeit wird vernachlässigt.
2. Es wird nur isotrope Verfestigung zur Beschreibung des plastischen Verhaltens einbezogen.
3. Die Materialschädigung wird durch den Porenvolumenanteil beschrieben, anisotrope Schädigungsanteile werden nicht berücksichtigt.

Das Differentialgleichungssystem für das spezialisierte isotrope Stoffgesetz ist in Abbildung 8.4 angegeben.

Die Implementierung des Stoffgesetzes in eine Elementroutine umfasst zwei wesentliche Teile:

1. Stoffgesetzintegration zur Ermittlung des Lastvektors der Elementspannungen
2. Berechnung der materiellen Elementsteifigkeiten.

Diese werden im Folgenden für das Stoffgesetz in der vereinfachten Form näher erläutert.

reversibler Verzerrungstensor:	$\underset{(r)}{\mathbf{h}} = (1 - \omega)\mathbf{D} : \boldsymbol{\pi}$
reversible Verzerrungsgeschwindigkeit:	$\underset{(r)}{\mathbf{D}} = (1 - \omega)\mathbf{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \underset{(r)}{\mathbf{h}} \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} \underset{(r)}{\mathbf{h}}$
elastische Nachgiebigkeit:	$\mathbf{D} = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{2\mu} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{I}$
mit	$E = \frac{2(5^0\nu - 7) + 3\omega(0\nu - 1)(5^0\nu + 9)}{2(5^0\nu - 7)^0 E}$
	$\mu = \frac{(5^0\nu - 7)^0 \mu}{5^0\nu - 7 + 15\omega(0\nu - 1)}$
Fließbedingung:	$f = \pi_{eq} - m(\omega)(\pi_y + Z_\kappa) \leq 0$
äquivalente plastische Spannung:	$\pi_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\pi}^D : \boldsymbol{\pi}^D}$
Erhöhung der Fließspannung:	$Z_\kappa = c_{\kappa 1} (1 - \exp(c_{\kappa 2} \kappa)) + c_{\kappa 3} \kappa$
Schädigungseinfluss auf die Fließspannung:	$m(\omega) = 1 - \left(\frac{1}{\omega_c} + m_\omega \omega_c \right) \omega + m_\omega \omega^2,$ wenn $\omega \leq \omega_c$; sonst: 0
Fließregel:	$\underset{(p)}{\mathbf{D}} = \frac{3\lambda}{2\pi_{eq}} \boldsymbol{\pi}^D$
plastischer Multiplikator:	$\lambda = \begin{cases} \frac{Z_\lambda}{N_\lambda} & , \text{ wenn } f = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{log} > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
mit	$Z_\lambda = \frac{3\boldsymbol{\pi}^D : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R}{2\pi_{eq}}$
	$N_\lambda = m^2(\omega) \frac{\partial Z_\kappa}{\partial \kappa}$
	$-\left\langle \frac{\partial m(\omega)}{\partial \omega} (\pi_y + Z_\kappa) Z_\omega f_1(\omega) \right\rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})}$
Rate der isotropen Verfestigung:	$\dot{\kappa} = \lambda m(\omega)$
Rate des Porenvolumenanteils:	$\dot{\omega} = \langle -\lambda Z_\omega f_1(\omega) \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})}$
mit	$f_1(\omega) = c_{\omega 1} \exp(-c_{\omega 2} \omega) + c_{\omega 3} \omega + c_{\omega 4} \omega^2$
Konj. Kraft zum Porenvolumenanteil:	$Z_\omega = \frac{1}{2} (a_1 (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2a_2 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2))$ $-\frac{1-\omega}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial \omega} (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2 \frac{\partial a_2}{\partial \omega} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2) \right)$
schädigungsind. Verzerrungsgeschw.:	$\underset{(d)}{\mathbf{D}} = \frac{\dot{\omega}}{3(1-\omega)} \mathbf{1}$
Verzerrungsgeschwindigkeit:	$\underset{(r)}{\mathbf{D}} = \underset{(r)}{\mathbf{D}} + \underset{(p)}{\mathbf{D}} + \underset{(d)}{\mathbf{D}}$
Materialparameter:	${}^0 E, {}^0 \mu, \pi_y, c_{\kappa 1}, c_{\kappa 2}, c_{\kappa 3}, m_\omega, \omega_c,$ $c_{\omega 1}, c_{\omega 2}, c_{\omega 3}, c_{\omega 4}$

Abb. 8.4: Zusammenfassung der vereinfachten Form des Stoffgesetzes

8.4.1 Integration des Differentialgleichungssystems

Zur Berechnung des Lastvektors der Elementspannungen $^{(i-1)}\mathbf{f}$ muss das Stoffgesetz im Zeitschritt in jedem GAUSS-Punkt integriert werden.

Nach SIMO [Sim92] lässt sich der aktuelle Deformationsgradient durch Einführung eines relativen Deformationsgradienten multiplikativ zerlegen

$${}_{0}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}_t^{t+\Delta t}\mathbf{F} {}_0^t\mathbf{F} \quad . \quad (8.65)$$

Das zeitkontinuierliche Problem der Stoffgesetzintegration lässt sich damit in zwei einfachere Teilprobleme zerlegen, wie auch von AURICCHIO & TAYLOR in [AT99] beschrieben wird. Das erste Teilproblem besteht in der Berechnung der kinematischen Größen und eines elastischen Vergleichszustands bei eingefrorenen internen Variablen. Hierbei werden die tensoriellen Größen bereits in die aktuelle Konfiguration überführt. Als zweites Teilproblem wird in der durch \mathbf{F} fest vorgegebenen aktuellen Konfiguration das elastisch-plastische Differentialgleichungssystem in inkrementeller Form iterativ gelöst. Diese Aufspaltung wird auch als *Operator-Split* bezeichnet. Weitere Einzelheiten dieses Konzepts geben SIMO & HUGHES in [SH97] an. Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur numerischen Integration des Differentialgleichungssystems mit Hilfe der Operator-Split-Methode und eines *Return-Mapping*-Verfahrens zur Fließflächeniteration beschrieben.

Im Rahmen einer Verschiebungsformulierung ist für die Stoffgesetzintegration der Verschiebungsvektor \mathbf{u} nach (8.9) gegeben und der Zustand zum Zeitpunkt t wird als bekannt vorausgesetzt. Demnach wird von folgenden Startgrößen ausgegangen

$$\{\mathbf{u}, {}^t\mathbf{X}, {}_0^t\mathbf{F}, {}_0^t\mathbf{F}_{(r)}, {}^t\kappa, {}^t\omega\} \quad . \quad (8.66)$$

Gesucht werden die kinematischen Größen und die abhängigen Zustandsgrößen zur Zeit $t + \Delta t$, die sich daraus durch Integration des Stoffgesetzes ergeben

$$\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{x}, {}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\kappa, {}^{t+\Delta t}\omega\} \quad . \quad (8.67)$$

Nach dem Konfigurationsupdate nach (8.9) wird der relative Deformationsgradient nach (8.57) berechnet. Der elastische Versuchszustand wird basierend auf der Annahme, dass die aktuellen Verzerrungsinkremente vollständig reversibel sind, bestimmt. Als erste Abschätzung für den reversiblen Deformationsgradienten erhält man

$${}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}^{trial} = {}_t^{t+\Delta t}\mathbf{F} {}_0^t\mathbf{F}_{(r)} \quad (8.68)$$

und daraus den reversiblen logarithmischen Verzerrungstensor

$$\mathbf{h}_{(r)}^{trial} = \frac{1}{2} \ln_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}^{trial} ({}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}^{trial})^T \quad . \quad (8.69)$$

Das isotrope hyperelastische Stoffgesetz liefert die elastische Prädiktorspannung $\boldsymbol{\pi}^{trialD}$. Mit der Prädiktorspannung und den bekannten Werten der internen Zustandsvariablen $\{{}^t\boldsymbol{\kappa}, {}^t\boldsymbol{\omega}\}$ wird die Erfüllung der Fließbedingung geprüft

$$f^{trial} = \pi_{eq}^{trial} - m({}^t\boldsymbol{\omega}) (\pi_y + Z_{\boldsymbol{\kappa}}({}^t\boldsymbol{\kappa})) \leq 0 \quad . \quad (8.70)$$

Wenn die Fließbedingung erfüllt ist, liegt im aktuellen Zeitschritt rein elastisches Materialverhalten vor. In diesem Fall werden die aktuellen Werte direkt übernommen

$$\{ {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}, {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{(r)}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\kappa}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\omega} \} = \{ {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}, {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{(r)}^{trial}, \boldsymbol{\pi}^{trial}, {}^t \boldsymbol{\kappa}, {}^t \boldsymbol{\omega} \} \quad . \quad (8.71)$$

Die Nichterfüllung der Fließbedingung mit den Prädiktorwerten schließt die Erfüllung der Belastungsbedingung als Voraussetzung für plastisches Materialverhalten ein. Ausgehend von den Prädiktorwerten wird eine Fließflächeniteration durchgeführt. Diese liefert als Ergebnis die aktuellen Werte der Spannung ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\pi}$ und der internen Zustandsvariablen $\{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\kappa}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\omega}\}$. Daraus lässt sich der aktuelle reversible Deformationsgradient, wie in Kapitel 4.7 beschrieben, eindeutig bestimmen.

Zur Bestimmung des reversiblen Anteils des Deformationsgradienten wird der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit ${}^t \mathbf{D}$ als symmetrischer Anteil von ${}^t \mathbf{L}$ nach (8.61) berechnet. Der aktuelle reversible logarithmische Verzerrungstensor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{h}_{(r)}$ wird durch das hyperelastische Gesetz aus dem aktuellen Spannungstensor bestimmt. Daraus wird der reversible linke Strecktensor mit (4.152) berechnet

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_{(r)} = \exp {}^{t+\Delta t} \mathbf{h}_{(r)} \quad . \quad (8.72)$$

Der reversible Rotationstensor ${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{(r)}$ wird durch Integration der Differentialgleichung (4.153) mit dem Anfangswert ${}_0 \mathbf{R}_{(r)} = \mathbf{1}$ berechnet. Hierzu müssen vorab weitere kinematische Größen bestimmt werden.

Der reversible Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit wird durch eine Linearisierung seiner materiellen Zeitableitung in der mit ${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{log}$ zurückrotierten Konfiguration bestimmt

$${}^t \mathbf{D}_{(r)} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{h}_{(r)} - {}_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{logT} {}^t \mathbf{h}_{(r)} \right) \quad . \quad (8.73)$$

Die reversible Verzerrung zur Zeit t kann direkt aus dem bekannten Deformationsgradient ${}^t \mathbf{F}$ bestimmt werden. Die relative logarithmische Rotation ergibt sich aus der multiplikativen Zerlegung des logarithmischen Rotationstensors

$${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{logT} = {}_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{logT} {}_0^t \mathbf{R}^{logT} \quad . \quad (8.74)$$

Zur Berechnung des relativen logarithmischen Rotationstensors wird von der Integration der bestimmenden Differentialgleichung unter Beachtung des Anfangswerts ausgegangen

$$\left(\dot{\mathbf{R}}^{log}\right)^T = \mathbf{\Omega}^{log} \left(\mathbf{R}^{log}\right)^T, \quad {}_0\mathbf{R}^{log} = \mathbf{1} \quad . \quad (8.75)$$

Mit einem von SIMO & HUGHES in [SH97] vorgeschlagenen Ansatz zur Lösung von Differentialgleichungen dieses Typs erhält man im Rahmen eines expliziten EULER-Ansatzes die Bestimmungsgleichung für den logarithmischen Rotationstensor

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{log T} = \exp[\Delta t {}^t\mathbf{\Omega}^{log T}] {}^t\mathbf{R}^{log T} \quad (8.76)$$

$$\Rightarrow {}^t{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{log T} = \exp[\Delta t {}^t\mathbf{\Omega}^{log T}] \quad . \quad (8.77)$$

Der logarithmische Rotationstensor zur Zeit t muss somit nicht bekannt sein. Die Exponentialform lässt sich nach GOLDSTEIN [Gol81] nach Einführung des dualen Vektors zu $\mathbf{\Omega}^{log}$

$$\boldsymbol{\omega}^{log T} = \{\Omega_{32}^{log}, \Omega_{13}^{log}, \Omega_{21}^{log}\} \quad . \quad (8.78)$$

in geschlossener Form darstellen

$$\exp \mathbf{\Omega}^{log} = \mathbf{1} + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}^{log}\|)}{\|\boldsymbol{\omega}^{log}\|} \mathbf{\Omega}^{log} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}^{log}\|/2)}{\|\boldsymbol{\omega}^{log}\|/2} \right]^2 (\mathbf{\Omega}^{log})^2 \quad . \quad (8.79)$$

Den logarithmischen Spintensor erhält man aus (4.99). (8.79) lässt sich auf verschiedene Arten parametrisieren; es wird die von SIMO & HUGHES vorgeschlagene Methode, die in [SH97] in Box 8.3 zusammengefasst dargestellt ist, verwendet.

Der reversible Spintensor ${}^t\mathbf{\Omega}_{(r)}$ ergibt sich nach (4.154) bzw. nach Einsetzen der SYLVESTER-Formel durch die entsprechende basisfreie Form. Damit lässt sich die Differentialgleichung für den reversiblen Rotationstensor ausgehend von dem bekannten Wert zur Zeit t , der sich aus der Polarzerlegung von ${}^t\mathbf{F}_{(r)}$ ergibt, analog zum logarithmischen Spintensor integrieren. Der reversible Anteil des Deformationsgradienten kann somit durch Einsetzen in seine linke Zerlegung (4.155) eindeutig berechnet werden. Die anschließende eindeutige Berechnung des inelastischen Deformationsgradienten ist leicht möglich, jedoch nicht erforderlich. Am Ende der Integration werden die folgenden aktuellen Größen zur weiteren Verwendung gespeichert

$$\left\{ {}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}_0^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\kappa}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\omega} \right\} \quad . \quad (8.80)$$

Die algorithmische Umsetzung der zur Stoffgesetzintegration beschriebenen Schritte ist in Abbildung 8.5 angegeben.

1. Gegeben: $\{ {}^t\mathbf{X}, {}^t_0\mathbf{F}, {}^t_0\mathbf{F}_{(r)}, {}^t\kappa, {}^t\omega \}$
2. Update der aktuellen Konfiguration mit vorgegebener Verschiebung \mathbf{u}
 aktueller Positionsvektor: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{X} + \mathbf{u}$
 relativer und akt. Deformationsgradient: ${}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t \text{Grad } {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}, {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} {}^t_0\mathbf{F}$
3. Elastischen Prädiktorzustand berechnen
 elastischer Deformationsgradient: ${}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{trial} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} {}^t_0\mathbf{F}_{(r)}$
 reversible Verzerrung: ${}^t_0\mathbf{h}^{trial} = \frac{1}{2} \ln \left(\begin{matrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{trial} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{trial T} \\ {}^t_0 & {}^t_0 \end{matrix} \right)$
 Prädiktorspannung: $\boldsymbol{\pi}^{trialD} = (1 - {}^t\omega)^{-1} \mathbb{D}^{-1} : \mathbf{h}^{trial}_{(r)}$
 äquivalente Spannung: $\pi_{eq}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\pi}^{trialD} : \boldsymbol{\pi}^{trialD}}$
4. Überprüfen der Fließbedingung mit den Prädiktorwerten
 IF $(f^{trial} = \pi_{eq}^{trial} - m({}^t\omega)(\pi_y + Z_\kappa({}^t\kappa)) \leq 0)$ THEN
 $\{ {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\kappa, {}^{t+\Delta t}\omega \} = \{ {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{trial}_{(r)}, \boldsymbol{\pi}^{trialD}, {}^t\kappa, {}^t\omega \}$
 EXIT
5. Fließflächeniteration mit Return-Mapping-Algorithmus nach Abbildung 8.6, liefert
 $\{ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\kappa, {}^{t+\Delta t}\omega \}$
6. reversiblen Anteil des Deformationsgradienten berechnen
 aktuelle reversible Verzerrung: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_{(r)} = (1 - {}^{t+\Delta t}\omega) \mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}$
 reversibler linker Strecktensor: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{(r)} = \exp {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_{(r)}$
 Geschwindigkeitsgradient: $\mathbf{L} = {}^{t+\Delta t} \text{grad } \mathbf{L}$
 logarithmischer Spintensor: ${}^t\boldsymbol{\Omega}^{log} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{log}[\mathbf{D}, {}^t\mathbf{B}]$
 Integration der relativen log. Rotation: ${}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{log T} = \exp(\Delta t {}^t\boldsymbol{\Omega}^{log T})$
 reversible Verzerrungsgeschwindigkeit: $\mathbf{D}_{(r)} = \frac{1}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_{(r)} - {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{log T} {}^t\mathbf{h}_{(r)})$
 reversibler Spintensor: $\boldsymbol{\Omega}_{(r)} = {}^t\boldsymbol{\Omega}^{log} + \dots$ nach (4.154)
 reversibler Rotationstensor: ${}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{(r)} = \exp \left(\begin{matrix} \Delta t {}^t\boldsymbol{\Omega}_{(r)} \\ {}^t_0 \end{matrix} \right) {}^t\mathbf{R}_{(r)}$
 reversibler Deformationsgradient: ${}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)} = {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{(r)} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_{(r)}$
7. Aktuelle Werte bereitstellen
 $\{ {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}^t_0{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{(r)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\kappa, {}^{t+\Delta t}\omega \}$

Abb. 8.5: Algorithmische Umsetzung der Stoffgesetzintegration im Zeitschritt

Für die Fließflächeniteration wird das Gleichungssystem im Zeitschritt linearisiert. Ausgehend von den Prädiktorwerten der Spannung $\boldsymbol{\pi}^{trial}$ und der reversiblen Verzerrung $\mathbf{h}_{(r)}^{trial}$ lässt sich für den in der Fließbedingung verwendeten Spannungsdeviator am Ende der Fließflächeniteration mit Hilfe des hyperelastischen Stoffgesetzes ein inkrementeller Ausdruck herleiten

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D = \left(1 + \frac{\Delta\bar{\mu}}{{}^t\bar{\mu}}\right)\boldsymbol{\pi}^{trialD} + 2({}^t\bar{\mu} + \Delta\bar{\mu})\left(\Delta\mathbf{h}_{(r)} - \frac{1}{3}\text{tr}(\Delta\mathbf{h}_{(r)})\mathbf{1}\right) \quad (8.81)$$

mit dem gewichteten Gleitmodul

$$\bar{\mu} = (1 - {}^t\omega)\mu \quad .$$

Der Deviator des Inkrements der schädigungsinduzierten Verzerrungen $\mathbf{h}_{(d)}$ verschwindet. Das Inkrement des Deviators der reversiblen Verzerrung $\mathbf{h}_{(r)}$ lässt sich somit durch das Inkrement der plastischen Dehnungen ersetzen

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D = \left(1 + \frac{\Delta\bar{\mu}}{{}^t\bar{\mu}}\right)\boldsymbol{\pi}^{trialD} - 2({}^t\bar{\mu} + \Delta\bar{\mu})\frac{3\lambda}{2^{t+\Delta t}\pi_{eq}} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D \quad . \quad (8.82)$$

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D$ ist also ein skalares Vielfaches von $\boldsymbol{\pi}^{trialD}$, somit gilt

$$\frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D}{{}^{t+\Delta t}\pi_{eq}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^{trialD}}{\pi_{eq}^{trial}} \quad (8.83)$$

und man erhält daraus für die äquivalente Spannung am Ende der Iteration

$${}^{t+\Delta t}\pi_{eq} = \pi_{eq}^{trial} \left[\left(1 + \frac{\Delta\bar{\mu}}{{}^t\bar{\mu}}\right) - \frac{3\lambda}{\pi_{eq}^{trial}} ({}^t\bar{\mu} + \Delta\bar{\mu}) \right] \quad . \quad (8.84)$$

Im Rahmen der Linearisierung des Stoffgesetzes im Zeitschritt werden zusätzliche Näherungsannahmen zur Fließgrenzeniteration getroffen

$$\bar{\mu}({}^{t+\Delta t}\omega) \approx \bar{\mu}({}^t\omega) \rightarrow \Delta\bar{\mu} = 0 \quad (8.85)$$

$$Z_\omega({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\omega) \approx Z_\omega({}^t\boldsymbol{\pi}, {}^t\omega) = {}^tZ_\omega \quad (8.86)$$

$$f_1({}^{t+\Delta t}\omega) \approx f_1({}^t\omega) = {}^t f_1 \quad . \quad (8.87)$$

Einsetzen der aktuellen äquivalenten Spannung (8.84) in die Fließbedingung liefert mit diesen Annahmen die Nullstellengleichung zur Bestimmung des plastischen Multiplikators

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}f &= \pi_{eq}^{trial} - 3\lambda\bar{\mu} \\ &- m({}^t\omega - \langle \lambda {}^tZ_\omega {}^t f_1 \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})}) \left[\pi_y + Z_\kappa \left({}^t\kappa + \lambda m({}^t\omega - \langle \lambda {}^tZ_\omega {}^t f_1 \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})}) \right) \right] = 0 . \end{aligned} \quad (8.88)$$

Zur numerischen Lösung bietet sich das NEWTON-Verfahren an, welches die folgende Iterationsvorschrift zur numerischen Lösung der Gleichung liefert

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{t+\Delta t}f^{(k)}(\lambda^{(k)})}{\partial^{t+\Delta t}f^{(k)}(\lambda^{(k)})/\partial\lambda} . \quad (8.89)$$

Zur Durchführung der Iteration werden die Evolutionsgleichungen im k -ten Iterationsschritt durch einen Taylorreihenabbruch um den aktuellen Punkt linearisiert und dadurch approximiert. Als Startwert für die Iteration wird $\lambda^{(0)} = 0$ angenommen. Als Abbruchkriterium wird die momentane Erfüllung der Fließbedingung überprüft und mit einem Fehlermaß verglichen

$$|{}^{t+\Delta t}f(\lambda^{(k)})| < \delta . \quad (8.90)$$

Zur Berechnung der Spannung am Ende der Fließflächeniteration muss zum aktuellen Spannungsdeviator der volumetrische Anteil der Prädiktorspannung, reduziert um den Spannungsabfall durch die schädigungsinduzierten Verzerrungsinckremente addiert werden

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}^D + (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^{trialD})\mathbf{1} - \frac{\Delta\omega}{3(1-t\omega)^2} {}^t\mathbf{D}^{-1} : \mathbf{1}) . \quad (8.91)$$

Die algorithmische Umsetzung des verwendeten Return-Mapping-Algorithmus zur Fließflächeniteration ist in Abbildung 8.6 zusammenfassend dargestellt.

1. Startwerte der Iteration: $\{f^{(0)}, (\boldsymbol{\pi}^D)^{(0)}, \mathbf{h}_{(p)}^{(0)}, \kappa^{(0)}, \omega^{(0)}\} = \{f^{trial}, \boldsymbol{\pi}^{trialD}, \mathbf{0}, {}^t\kappa, {}^t\omega\}$

2. Ableitung der Fließfunktion berechnen^a

$$\left. \frac{\partial f^{(k)}(\lambda^{(k)})}{\partial \Delta \lambda} \right|_{\Delta \lambda = 0} = -3 {}^t\bar{\mu} + \frac{\partial m(\omega^{(k)})}{\partial \omega} \langle {}^tZ_{\omega}^t f_1 \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} (\pi_y + Z_{\kappa}(\kappa^{(k)})) - m^2(\omega^{(k)}) \frac{\partial Z_{\kappa}(\kappa^{(k)})}{\partial \kappa}$$

3. Inkrement des plastischen Multiplikators berechnen

$$\Delta \lambda = - \frac{f^{(k)}(\lambda^{(k)})}{(\partial f^{(k)}(\lambda^{(k)}) / \partial \Delta \lambda)}$$

4. Aufdatieren der plastischen Variablen

plastischer Multiplikator: $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta \lambda$

isotrope Verfestigung: $\kappa^{(k+1)} = \kappa^{(k)} + \Delta \lambda m(\omega^{(k)})$

Porenvolumenanteil $\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \Delta \lambda \langle {}^tZ_{\omega}^t f_1 \rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})}$

5. Inkrement des Spannungsdeviators berechnen

$$(\boldsymbol{\pi}^D)^{(k+1)} = \langle \boldsymbol{\pi}^D \rangle^{(k)} (1 - 3 {}^t\bar{\mu} \Delta \lambda); \quad \pi_{eq}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\pi}^D)^{(k)} : (\boldsymbol{\pi}^D)^{(k)}}$$

6. Überprüfen der Fließbedingung mit den neuen Werten

IF $(f^{(k+1)} = f(\pi_{eq}^{(k+1)}, \kappa^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}) \leq \delta)$ THEN

aktuelle Spannung: $\boldsymbol{\pi}^{(k+1)} = (\boldsymbol{\pi}^D)^{(k+1)} + (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^{trialD}) \mathbf{1} - \frac{\omega^{(k+1)} - \omega^{(0)}}{3(1-t)\omega^2} {}^t\mathbf{D}^{-1} : \mathbf{1})$

Übergabewerte: $\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\pi}, {}^{t+\Delta t}\kappa, {}^{t+\Delta t}\omega\} = \{\boldsymbol{\pi}^{(k+1)}, \kappa^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}\}$

EXIT

ELSE $k \leftarrow k + 1$; GOTO 2)

^aWährend der Iteration werden alle Ableitungen im aktuellen Punkt auf der Fließfläche $\Delta \lambda = 0$ ausgeführt

Abb. 8.6: Return-Mapping-Algorithmus zur Fließflächeniteration

8.4.2 Berechnung des materiellen Steifigkeitstensors

Zur Berechnung der inkrementellen Elementsteifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung $[\mathbf{k}_l]$ muss der in (8.26) definierte materielle Steifigkeitstensor \mathbf{C}^m zu Beginn jeder NEWTON-RAPHSON-Iteration im Zeitschritt bestimmt werden. Der darin vorkommende elastisch-plastische Steifigkeitstensor \mathbf{C}^{ep} nach (8.25) wird durch Invertierung des Stoffgesetzes bestimmt. Mit den in Abbildung 8.4 zusammengefassten Gleichungen ergibt sich für die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (1 - \omega)\mathbf{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \underset{(r)}{\mathbf{h}} \Omega^{LR} - \Omega^{LR} \underset{(r)}{\mathbf{h}} \\ &+ \tilde{\lambda} \left(\frac{3}{2\pi_{eq}} \boldsymbol{\pi}^D - \left\langle \frac{Z_\omega f_1(\omega)}{3(1 - \omega)} \right\rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} \right) \boldsymbol{\pi}^D : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \end{aligned} \quad (8.92)$$

mit

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\pi}^D : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R} .$$

Da sich für den Spin Ω^{LR} nach (4.101) durch Anwendung der SYLVESTER-Formel (4.39) eine basisfreie Form

$$\Omega^{LR} = \sum_{i,j=0}^{m-1} \bar{\Omega}(ij) \mathbf{B}^i \mathbf{D} \mathbf{B}^j \quad (8.93)$$

ableiten lässt, gibt es zu jedem symmetrischen Tensor zweiter Stufe \mathbf{A} einen Transformationstensor vierter Stufe $\mathbf{M}[\mathbf{B}, \mathbf{A}]$, so dass die folgende Beziehung gilt

$$\mathbf{A} \Omega^{LR} - \Omega^{LR} \mathbf{A} = \mathbf{M}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] : \mathbf{D} . \quad (8.94)$$

Damit lässt sich die Verzerrungsgeschwindigkeit nach Einführung der plastischen und schädigungsinduzierten Nachgiebigkeiten

$$\underset{(p)}{\mathbf{D}} = \frac{3\tilde{\lambda}}{2\pi_{eq}} \boldsymbol{\pi}^D \otimes \boldsymbol{\pi}^D \quad (8.95)$$

$$\underset{(d)}{\mathbf{D}} = -\tilde{\lambda} \left\langle \frac{Z_\omega f_1(\omega)}{3(1 - \omega)} \right\rangle^{\text{tr}(\boldsymbol{\pi})} \boldsymbol{\pi}^D \otimes \mathbf{1} \quad (8.96)$$

umstellen

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}[\mathbf{B}, \underset{(r)}{\mathbf{h}}] \right) : \mathbf{D} &= \left((1 - \omega)\mathbf{D} + \underset{(p)}{\mathbf{D}} + \underset{(d)}{\mathbf{D}} \right) : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \\ &= \underset{(ep)}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R \end{aligned} \quad (8.97)$$

und nach der polaren Zeitableitung von $\boldsymbol{\pi}$ auflösen

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R = \left[\underset{(ep)}{\mathbf{D}}^{-1} : \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}[\mathbf{B}, \underset{(r)}{\mathbf{h}}] \right) \right] : \mathbf{D} . \quad (8.98)$$

Der gesuchte elastisch-plastische Steifigkeitstensor setzt die logarithmische Rate von π mit der Verzerrungsgeschwindigkeit in Beziehung. Mit (4.103) und (8.94) kommt man zu dem Ergebnis

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{D}_{(ep)}^{-1} : \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}[\mathbf{B}, \mathbf{h}_{(r)}] \right) + \mathbf{M}[\mathbf{B}, \pi] \quad . \quad (8.99)$$

Aufgrund der Isotropie des elastischen Nachgiebigkeitstensors kann nach einer Hauptachsentransformation des Spannungsdeviators die elastisch-plastische Nachgiebigkeit im Hauptachsensystem von π^D berechnet werden. In diesem System stellt der elastisch-plastische Nachgiebigkeitstensor die Nachgiebigkeit eines orthotropen Materials im Hauptachsensystem der Materialsymmetrie dar und hat folglich eine Blockmatixstruktur. Daher wird die Nachgiebigkeit in diesem System invertiert. Eine anschließende Rücktransformation liefert den elastisch-plastischen Steifigkeitstensor.

Aufgrund der angenommenen moderaten Verzerrungen werden die Anteile, die durch die Differenz zwischen polarer und logarithmischer Rate auftreten, vernachlässigt und Koaxialität des Spannungstensor π und des Verzerrungstensors \mathbf{h} vorausgesetzt. Mit diesen Näherungen erhält man den in der Implementation verwendeten materiellen Steifigkeitstensor nach (8.26) zu

$$\mathbf{C}^m \approx (\mathbf{D}_{(ep)})^{-1} + \mathbf{G}[^t\boldsymbol{\tau}] \quad . \quad (8.100)$$

9. Anpassung der Materialparameter und Beispiele

Um mit dem vorgestellten Stoffgesetz Bauteilberechnungen zur Vorhersage des mechanischen Verhaltens und des Schädigungszustandes durchzuführen, müssen die Materialparameter für den betrachteten Werkstoff bekannt sein. Diese lassen sich durch Anpassung an experimentelle Daten mit Hilfe von Optimierungsverfahren bestimmen. Bei mangelnden experimentellen Ergebnissen kann ein Teil der Parameter auch aufgrund mikromechanischer Betrachtungen bestimmt werden. Diese Methode wurde bei der Modellierung der Abhängigkeit der elastischen Parameter vom Schädigungszustand des Materials angewendet.

In diesem Kapitel wird die Anpassung der in Abbildung 8.4 zusammengefassten Materialparameter der vereinfachten isotropen Form des Stoffgesetzes an experimentelle Daten beschrieben. Mit den so ermittelten Parametern wird eine Simulationsrechnung einer gekerbten Rohrprobe bei verschiedenen Belastungen mit dem entwickelten und implementierten rotationssymmetrischen Element durchgeführt.

9.1 Anpassung der Materialparameter

Zur Anpassung der Materialparameter an einen metallischen Werkstoff werden die experimentellen Untersuchungen von FELDMÜLLER [Fel91] an Proben aus Ck-15-Stahl, die zu Versuchsbeginn nahezu porenfrei waren, herangezogen. Die Anpassung des Stoffgesetzes in der vereinfachten Form erfolgt an eine Spannungs-Dehnungskurve eines homogenen einaxialen Zugversuches mit einer Dehnrates $\dot{h}_{zz} = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ bei Raumtemperatur $\Theta = 25^\circ\text{C}$. Bei dieser Verzerrungsgeschwindigkeit kann von annähernd isothermen Versuchsbedingungen ausgegangen werden.

Zur Anpassung werden die Materialparameter in 3 Gruppen aufgeteilt

1. elastische Materialparameter: ${}^0E, {}^0\mu$
2. plastische Materialparameter: $\pi_y, c_{\kappa 1}, c_{\kappa 2}, c_{\kappa 3}$
3. Schädigungsparameter: $m_\omega, \omega_c, c_{\omega 1}, c_{\omega 2}, c_{\omega 3}, c_{\omega 4}$.

9.1.1 Bestimmung der elastischen Materialparameter

Da als Messdaten nur eine Spannungs-Verzerrungskurve vorliegt, bei der die zz -Komponenten der CAUCHY-Spannung und der logarithmischen Verzerrung als Wertepaare gegeben sind, können nicht beide elastischen Konstanten unabhängig aus den Versuchsdaten bestimmt werden. Für die elastischen Materialparameter werden daher ersatzweise die temperaturabhängigen Ansätze von RICHTER [Ric74] für St37.8 übernommen

$${}^0E(\Theta) = \left(216700 - \frac{73,34}{^\circ\text{C}} \Theta \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad {}^0\mu(\Theta) = \left(84000 - \frac{30,69}{^\circ\text{C}} \Theta \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad . \quad (9.1)$$

Für die elastischen Materialparameter bei Raumtemperatur $\Theta = 25^\circ\text{C}$ ergibt sich

$${}^0E = 214.866 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad {}^0\mu = 82232 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow {}^0\nu \approx 0,29 \quad . \quad (9.2)$$

Der Wert des Elastizitätsmoduls stimmt sehr gut mit der Steigung der Spannungs-Verzerrungskurve im elastischen Bereich überein.

Die weitere Vorgehensweise zur Anpassung der Materialparameter gliedert sich in zwei Teilschritte. Zunächst werden die plastischen Materialparameter ausgehend von ungeschädigtem Material an die gemessene Spannungs-Verzerrungskurve angepasst. Mit diesen Werten erfolgt dann die Anpassung der Schädigungsparameter an die bei verschiedenen Dehnungen gemessenen Porenvolumenanteile. Eine kombinierte Anpassung von plastischen Materialparametern und Schädigungsparametern an die gemessenen Spannungs-Verzerrungsverläufe ist nicht sinnvoll, da keine eindeutigen Anpassungsergebnisse aller Parameter erhalten werden kann.

9.1.2 Bestimmung der plastischen Materialparameter

Zur Anpassung der plastischen Materialparameter wird die vereinfachte Form des Stoffgesetzes ohne Berücksichtigung von Schädigung auf den einaxialen Zugversuch spezialisiert. Ausgehend von kleinen elastischen Verzerrungen kann in diesem Fall der KIRCHHOFF-Spannungstensor durch die CAUCHY-Spannung angenähert werden, die aufgrund der Koaxialität von Spannungs- und Verzerrungstensor zur arbeitskonjugierten Spannung zum logarithmischen Verzerrungstensor wird

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad . \quad (9.3)$$

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit wird in diesem Fall zur materiellen Zeitableitung des logarithmischen Verzerrungstensors in der aktuellen Konfiguration

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{h}} \quad . \quad (9.4)$$

Es sind nur die Hauptdiagonalelemente von \mathbf{D} besetzt. Durch Einsetzen der speziellen Form des Spannungstensors für den Zugversuch in die Fließregel erhält man mit der Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung κ den Zusammenhang

$$\int_0^t \dot{\kappa} d\tau = \int_0^t \dot{h}_{zz}^{(p)} d\tau \rightarrow h_{zz}^{(p)} = \kappa \quad . \quad (9.5)$$

Die isotrope Verfestigung kann somit durch die additive Aufspaltung der Verzerrungen in einen reversiblen und einen nicht reversiblen Anteil und Einsetzen des elastischen Stoffgesetzes durch die Gesamtverzerrung und die Spannung ausgedrückt werden

$$\kappa = h_{zz} - \frac{\sigma_{zz}}{0E} \quad (9.6)$$

Somit ergibt sich für die Spannung der vereinfachten Form des Stoffgesetzes im Zugversuch die folgende Form, bei der zwischen einem elastischen und einem plastischen Bereich unterschieden wird

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \frac{h_{zz}}{0E} & , \text{ wenn } h_{zz} \leq \frac{\pi_y}{0E} \\ \pi_y + c_{\kappa 1} \left(1 - \exp \left(c_{\kappa 2} \left(h_{zz} - \frac{\sigma_{zz}}{0E} \right) \right) \right) + c_{\kappa 3} \left(h_{zz} - \frac{\sigma_{zz}}{0E} \right) & , \text{ sonst } \end{cases} \quad (9.7)$$

Da für den plastischen Verlauf die Gleichung für die Zugspannung in impliziter Form vorliegt, werden die benötigten Werte zur Anpassung numerisch bestimmt.

Zusätzlich zur Anpassung aller plastischen Materialparameter an den gemessenen Spannungs-Verzerrungs-Verlauf wird der Ansatz in Form eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes mit linearer isotroper Verfestigung an die Messdaten angepasst. Dazu wird in (9.7) $c_{\kappa 1} = 0$ gesetzt, in diesem Fall erhält man eine explizite Gleichung für die Zugspannung

$$\sigma_{zz}^{lin} = \begin{cases} \frac{h_{zz}}{0E} & , \text{ wenn } h_{zz} \leq \frac{\pi_y}{0E} \\ \frac{0E}{c_{\kappa 3} + 0E} (\pi_y + c_{\kappa 3} h_{zz}) & , \text{ sonst } \end{cases} \quad (9.8)$$

Die durchgezogene Linie in Abbildung 9.1 stellt die gemessene Spannungs-Verzerrungskurve dar. Zur Bestimmung der Verzerrungen wurden die Längenänderungen im homogenen Messbereich der Probe gemessen. Die sich daraus ergebenden Verzerrungen sind also über die Messlänge gemittelte und keine lokalen Werte. Es wird deutlich, dass bereits bei einer Verzerrung $h_{zz} = 0,2$ die Probeneinschnürung einsetzt, diese führt bereits bei ca. 24% axialer Dehnung zum Versagen der Probe. Deswegen werden zur Anpassung lediglich Messwerte aus dem Intervall $h_{zz} \in [0; 0,2]$ verwendet.

Es wird die Summe der Fehlerquadrate des Ansatzes und des Messwertes für alle Messpunkte mit Hilfe eines Evolutionsverfahrens minimiert. Die Optimierung wird dabei mit

dem Programm „evoC“ von TRINT & UTECHT [TU94] durchgeführt. Es ergeben sich die in Tabelle 9.1 angegebenen Materialparameter für die verschiedenen Ansätze.

bilinearer Ansatz		nichtlinearer Ansatz	
0E	209996 N/mm ²	π_y	261,03 N/mm ²
π_y	362,24 N/mm ²	$c_{\kappa 1}$	269,35 N/mm ²
$c_{\kappa 3}$	1207,4 N/mm ²	$c_{\kappa 2}$	-15,812
		$c_{\kappa 3}$	304,8 N/mm ²
Qualität	$2,0952 \times 10^5$	Qualität	$1,0183 \times 10^5$

Tabelle 9.1: Ergebnisse der Anpassung der Materialparameter der Spannungs-Dehnungs-Ansätze

Die Summe der Fehlerquadrate, die mit dem angewendeten Evolutionsverfahren erreicht wird, auch Qualität der Optimierung genannt, ist für den nichtlinearen Ansatz niedriger als für den bilinearen, was auch in den Verläufen in Abbildung 9.1 gut wiedergegeben wird. Durch den Einsatz anderer Optimierungsverfahren kann eine weitere Verbesserung der Qualität erzielt werden. Zur Strategie der numerischen Anpassung von Materialparametern inelastischer Stoffgesetze an gegebene Messverläufe gibt ANDING in [And97] weitere Einzelheiten an.

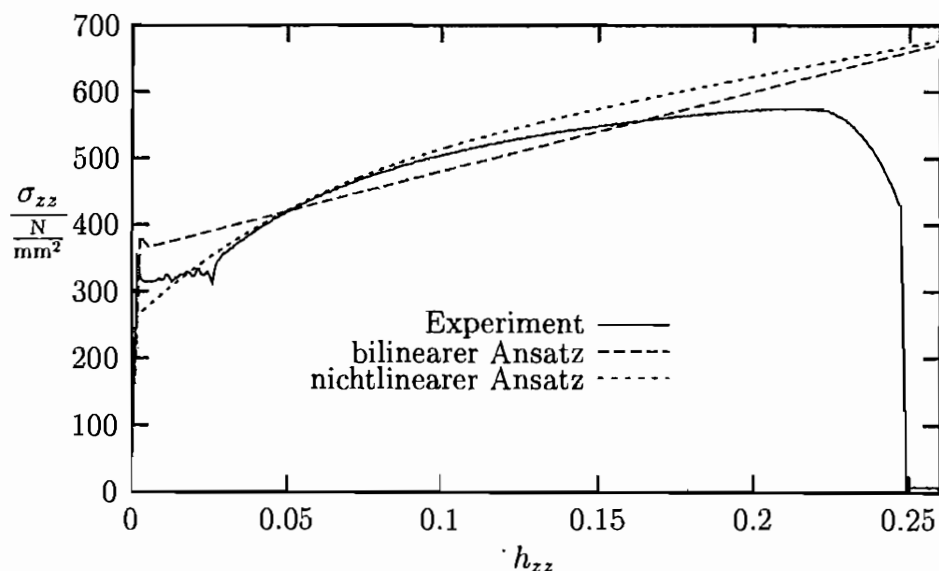


Abb. 9.1: Anpassung der Spannungs-Dehnungskurve

Für den nichtlinearen Ansatz kann bis zu einer Dehnung von ca. 10 % eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Messverlauf beobachtet werden. Oberhalb dieses Wertes nehmen die Abweichungen stark zu, obwohl der Einfluss der Brucheinschnürung erst bei ca. 20 % Dehnung einsetzt. Dieser Effekt der schlechteren Anpassung für größere Dehnungen lässt sich unter anderem mit dem relativ großen Dehnungsbereich, in dem Lüdersbänder auftreten, erklären. Eine zusätzliche Wichtung der Messbereiche bei der Anpassung könnte daher trotz einer Verschlechterung der Summe der Fehlerquadrate verbesserte Ergebnisse liefern. Im Folgenden werden die in Tabelle 9.1 verwendeten Materialparameter mit dem Ansatz nach (9.8) verwendet.

9.1.3 Bestimmung der Schädigungsparameter

Die Schädigungsparameter werden an die experimentellen Ergebnisse von FELDMÜLLER [Fel91] angepasst. Zur Ermittlung des Porenvolumenanteils wurden Bilder von Querschnittsschliffen der bei den Versuchen eingesetzten Proben erstellt. Die Negative dieser Schliffbilder wurden mit Hilfe eines digitalen Bildauswertungssystems ausgewertet und so der Porenflächenanteil im Querschnitt bestimmt. Unter der Annahme kugelförmiger Poren wurde dieser mit dem Porenvolumenanteil gleichgesetzt.

Die lokalen axialen Dehnungen des Querschnitts wurden jeweils aufgrund der Radiusänderung unter der Annahme von Volumenkonstanz bestimmt. Die Annahme der Volumenkonstanz führt zu einer Vernachlässigung der dilatanten Anteile sowohl der elastischen als auch der schädigungsinduzierten Verzerrungen. Die so ermittelten Wertepaare von Versuchsproben aus Versuchen, die bei einer Temperatur von $\Theta = 25^\circ\text{C}$ und mit einer Dehnungsrate von $\dot{h}_{zz} = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ durchgeführt wurden, sind in Abbildung 9.2 als Zentralsymbole dargestellt.

Zur Anpassung der Schädigungsparameter des Stoffgesetzes wurden finite-Elemente-Simulationen einer homogenen Probe im einaxialen Zugversuch mit axialen Dehnungen bis zu $h_{zz} = 100\%$ durchgeführt. Die so erhaltenen Verläufe des Porenvolumenanteils wurden zur Minimierung der Fehlerquadratsumme mit den experimentell bestimmten Werten des Porenvolumenanteils in den Messpunkten für die Anpassung der Schädigungsparameter verwendet.

Bei einer vorhergehenden Parameterstudie zeigte sich, dass eine Anpassung aller Schädigungsparameter an die Messverläufe nicht zu eindeutigen Parameterkombinationen führt. Insbesondere die Bestimmung von ω_c und m_w ist mit dieser Methode nicht sinnvoll, da diese Größen in der Entwicklungsgleichung des Porenvolumenanteils nicht explizit auftauchen. Zur Bestimmung dieser Parameter wäre eine Anpassung an Fließspannungsverläufe

über dem Porenvolumenanteil am besten geeignet. Diese lagen nicht vor. Auch die lokalen Spannungs-Dehnungskurven sind zur Anpassung dieser Parameter unbrauchbar, da die experimentell ermittelten lokalen Dehnungen mit steigenden Werten aufgrund der angeführten Annahmen zu ihrer Ermittlung zunehmend von den real vorliegenden Dehnungen in der Probe abweichen. Aus diesem Grund wurde der kritische Porenvolumenanteil ausgehend von den Betrachtungen von RABIER [Rab89] während der Anpassung mit dem konstanten Wert $\omega_c = 0,5$ belegt. Der Parameter m_ω wurde aufgrund mangelnder Erkenntnisse zu seiner Bestimmung zu Null gesetzt. Diese Wahl führt zu einer linearen Abhängigkeit der Fließspannung vom Porenvolumenanteil.

Die Anpassung der restlichen Schädigungsparameter wurde mit den in Tabelle 9.1 für die allgemeine nichtlineare Verfestigungsfunktion angegebenen plastischen Materialparametern durchgeführt. Die so erhaltenen Werte der Schädigungsparameter für den Ck-15-Stahl sind in Tabelle 9.2 angegeben.

ω_c	m_ω	$c_{\omega 1}$	$c_{\omega 2}$	$c_{\omega 3}$	$c_{\omega 4}$
0,5	0,0	0,035	50,0	2,2	450,0

Tabelle 9.2: Ergebnisse der Anpassung der Schädigungsparameter

In Abbildung 9.2 ist der Verlauf des Porenvolumenanteils über der axialen Dehnung, der sich aus den finite-Elemente Simulationen mit den angepassten Schädigungsparametern ergibt, dargestellt. Es zeigt sich eine qualitativ gute Übereinstimmung mit den stark streuenden experimentell ermittelten Werten. Weiterhin wird deutlich, dass ausgehend von der Bildungsphase bei geringer Dehnung das Wachstum bereits vorhandener Poren an Bedeutung gewinnt. Ab einem Porenvolumenanteil von ca. 3% dominiert das Wachstum bereits die Entwicklung des Porenvolumenanteils deutlich. Aufgrund der hohen Steigung ist mit einem Versagen des Materials bereits kurz außerhalb des dargestellten Dehnungsbereichs zu rechnen.

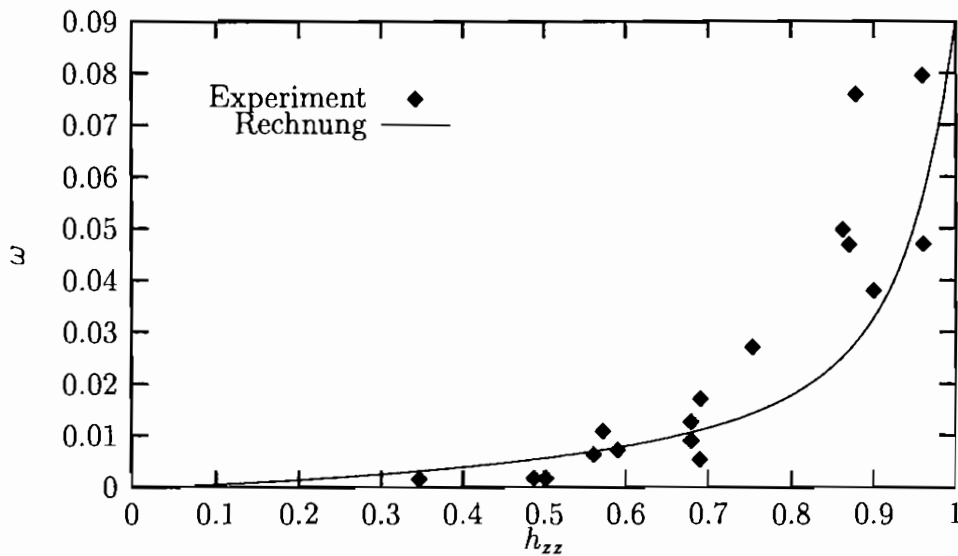


Abb. 9.2: Anpassung des Porenvolumenanteils

In Abbildung 9.3 ist die aus der Simulation erhaltene Zugspannung über der axialen Dehnung aufgetragen. Ein Vergleich mit den von FELDMÜLLER [Fel91] ermittelten lokalen Spannungs-Dehnungs-Verläufen erscheint nicht sinnvoll, da die experimentell ermittelten Wertepaare neben den Messfehlern zu viele Näherungsannahmen enthalten, so dass die Ergebnisse gerade im Bereich hoher Dehnungen zu ungenau werden. Als Vergleich sind daher die globalen Messwerte des Versuches bis vor Beginn der Probeeinschnürung angegeben.

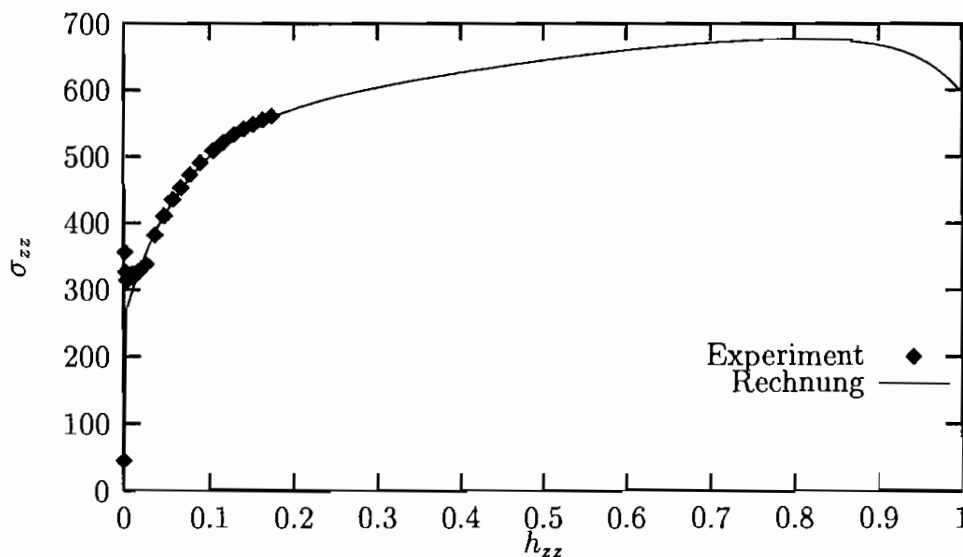


Abb. 9.3: Spannungs-Dehnungskurve mit Schädigungseinfluss

Wie die Anpassung der Parameter des Stoffgesetzes in der vereinfachten Form zeigt, können Materialparameter gefunden werden, die eine qualitativ und quantitativ gute Beschreibung sowohl des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens als auch der Schädigungsentwicklung in dem gesamten betrachteten Bereich der axialen Dehnungen ermöglichen. Auf Basis der vorliegenden experimentellen Daten ist jedoch die eindeutige Bestimmung aller Materialparameter nicht möglich. Insbesondere zur Anpassung der Materialparameter des anisotropen Stoffgesetzes wären weitere experimentelle Daten von Versuchen mit mehraxialen Belastungszuständen erforderlich. Es besteht noch großer Forschungsbedarf zur Identifikation des Schädigungszustandes und seiner Entwicklung sowie der dazugehörigen Spannungs- und Verzerrungsfelder, um mit dem entwickelten Modell das Verhalten geschädigter Materialien besser zu beschreiben.

9.2 Gekerbte Rohrprobe

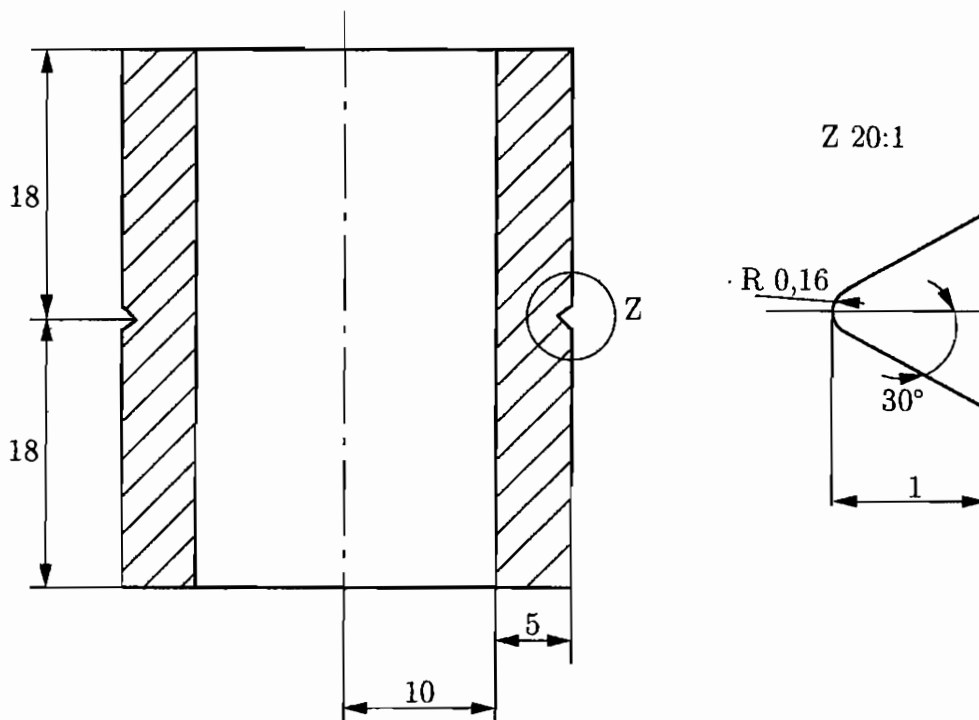


Abb. 9.4: Gekerbte Rohrprobe in Anlehnung an DIN 50119

Als inhomogenes Berechnungsbeispiel wird die in Abbildung 9.4 dargestellte gekerbte Rohrprobe unter einaxialer Zugbelastung und unter kombinierter Zug-/Torsionsbelastung simuliert. Die Kerbe ist in Anlehnung an den Vorschlag für gekerbte Proben in der Berechnungsnorm für Standversuche DIN 50119 gewählt. Die in der Abbildung angegebenen

Längenmaße haben die Einheit mm.

Die Diskretisierung der Probengeometrie unter Berücksichtigung aller Symmetrien ausgehend von homogenen Werkstoffeigenschaften mit den in Kapitel 9.1 ermittelten Materialparametern ist in Abbildung 9.5 dargestellt. Zur finite-Elemente-Simulation der einaxialen Zugversuche mit dem in Kapitel 8 beschriebenen Element werden Verschiebungsrandbedingungen in axialer Richtung an den in Abbildung 9.5 gekennzeichneten Knoten vorgegeben. Die Lastaufbringung wird während der Berechnung in diskrete Zeitintervalle unterteilt und erfolgt inkrementell.

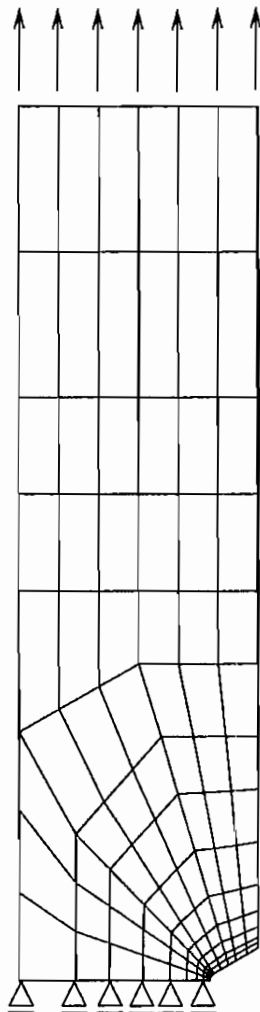


Abb. 9.5: Finite Elemente Diskretisierung mit Randbedingungen

Die Ergebnisse der Simulation sind in den Abbildungen 9.6- 9.8 zu verschiedenen Zeiten der Lastaufbringung dargestellt. Die angegebenen Verschiebungen entsprechen globalen axialen Dehnungen von $\epsilon_{zz} = 0,55\%$ bis $\epsilon_{zz} = 1,64\%$. Auf der linken Seite der Abbildungen sind die Verläufe der Zugspannung in der Probe aufgetragen. Erwartungsgemäß

tritt bei allen gezeigten Zuständen die maximale Spannung im Kerbgrund auf. Hier tritt ein Plastifizieren des Materials bereits deutlich früher auf, als im homogenen Bereich der Probe. Bei einer Verschiebung von $u^{Rand} = 0,1\text{mm}$ - die Probe hat bei dieser Verzerrung bereits im homogenen Bereich die Fließgrenze überschritten - ist die Spannung im Kerbgrund ca. doppelt so hoch wie die Spannung im homogenen Bereich. Weiter außen auf dem Rand der Kerbe liegt ein Druckspannungszustand vor. Dieses Ergebnis stimmt mit den Beobachtungen anderer Untersuchungen überein. Der Einflussbereich der Kerbe, in dem Störungen der homogenen Spannungsverteilung auftreten, ist klein. Es stellt sich bereits bei einem Abstand von ca. 5,0 mm zur Kerbe in axialer Richtung ein nahezu homogener Spannungszustand im gesamten Querschnitt ein. In den linken Abbildungen sind außerdem die Deformationsfiguren der Probe eingetragen, dabei wurden die Verschiebungen zur besseren Darstellung um den Faktor 2 überhöht dargestellt. Es ist eine Aufweitung der Kerbe zu erkennen, die axialen Dehnungen sind in diesem Bereich größer als in der restlichen Probe. Auch eine zunehmende Probeneinschnürung ist bei zunehmender axialer Dehnung sichtbar. Die jeweils rechtsstehenden Abbildungen stellen den Verlauf des Porenvolumenanteils im Nahbereich der Kerbe dar. Hier findet eine noch deutlich stärkere Lokalisierung, als bei den Spannungen statt. Bei einem Abstand von ca. 1,0 mm vom Kerbgrund ist der Wert des Porenvolumenanteils bereits auf den Wert abgesunken, der in der restlichen Probe vorliegt. Beim Erreichen der Fließgrenze des Materials im homogenen Probenbereich beträgt der Porenvolumenanteil in unmittelbarer Nähe der Kerbe schon ca. 3,5% und steigt bei einer axialen Dehnung von 1,65% auf 14,3% an. Bei einer globalen axialen Dehnung von ca. 2% kann vom lokalen Versagen der Probe an der Kerbe ausgegangen werden, da der kritische Porenvolumenanteil erreicht wird.

In Abbildung 9.9 ist links die Verteilung der äquivalenten plastischen Spannung einer Probe unter kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung dargestellt. Die Spannungsverteilung in der Probe resultiert aus einer globalen Schubverzerrung von $h_{\tau z} = 1,2\%$ und einer axialen Dehnung von $h_{zz} = 0,5\%$. Die Fließgrenze wurde während der Simulation bereits bei einer Schubverzerrung von ca. $h_{\tau z} = 0,08\%$ erreicht. Es zeigt sich, dass sich im kombinierten Versuch bei vergleichbaren äquivalenten plastischen Spannungen ein deutlich geringerer Porenvolumenanteil entwickelt als im Zugversuch. Die Verteilung des Porenvolumenanteils ist auf der rechten Seite der Abbildung 9.9 dargestellt. Es tritt ein ähnlicher Lokalisierungseffekt auf, wie im Zugversuch.

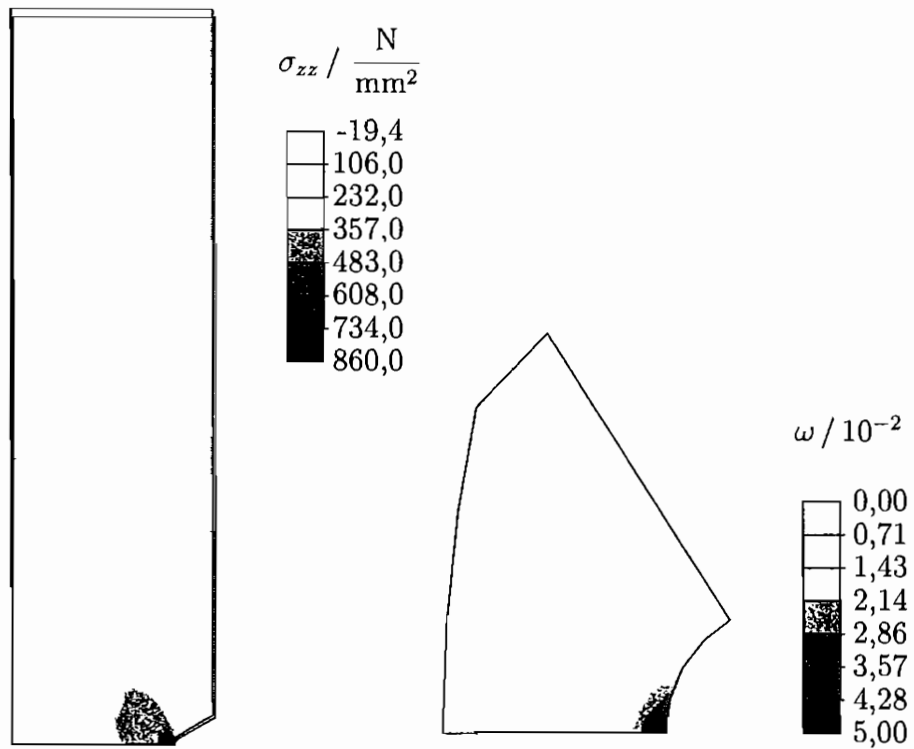


Abb. 9.6: Verteilung von Zugspannung und Porenvolumenanteil bei $u^{Rand} = 1,0 \text{ mm}$

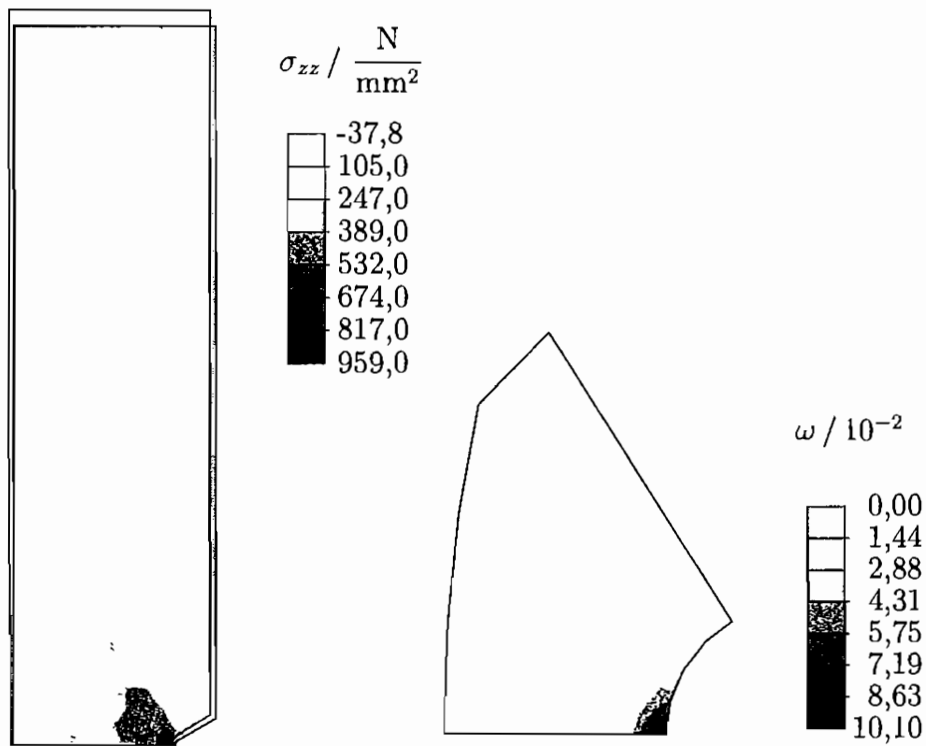


Abb. 9.7: Verteilung von Zugspannung und Porenvolumenanteil bei $u^{Rand} = 2,0 \text{ mm}$

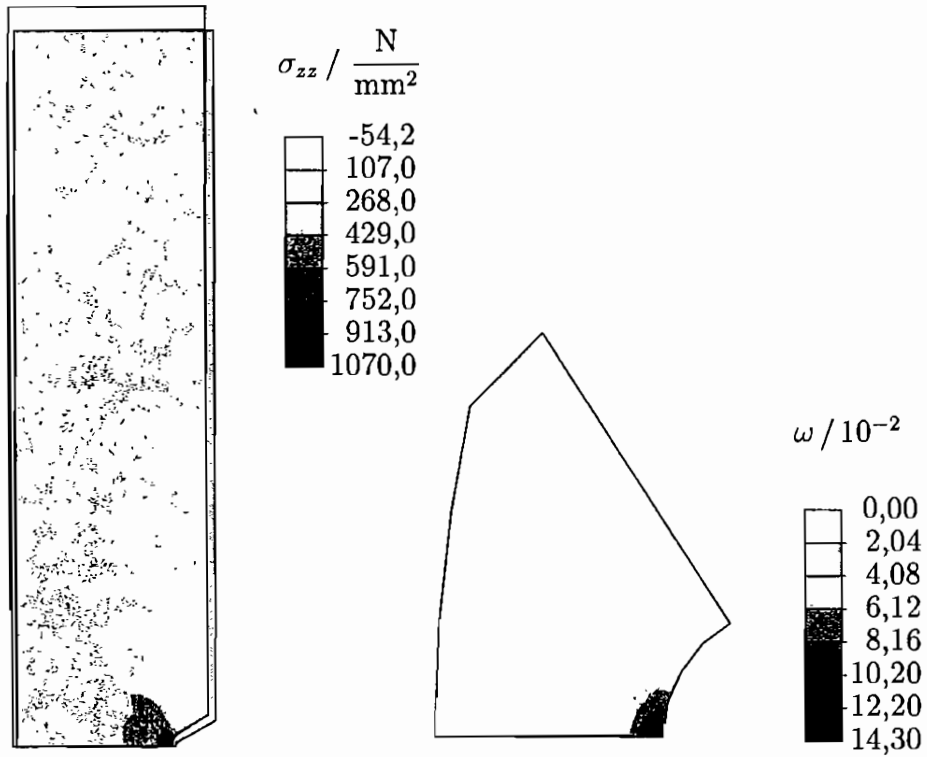


Abb. 9.8: Verteilung von Zugspannung und Porenvolumenanteil bei $u^{Rand} = 3,0 \text{ mm}$

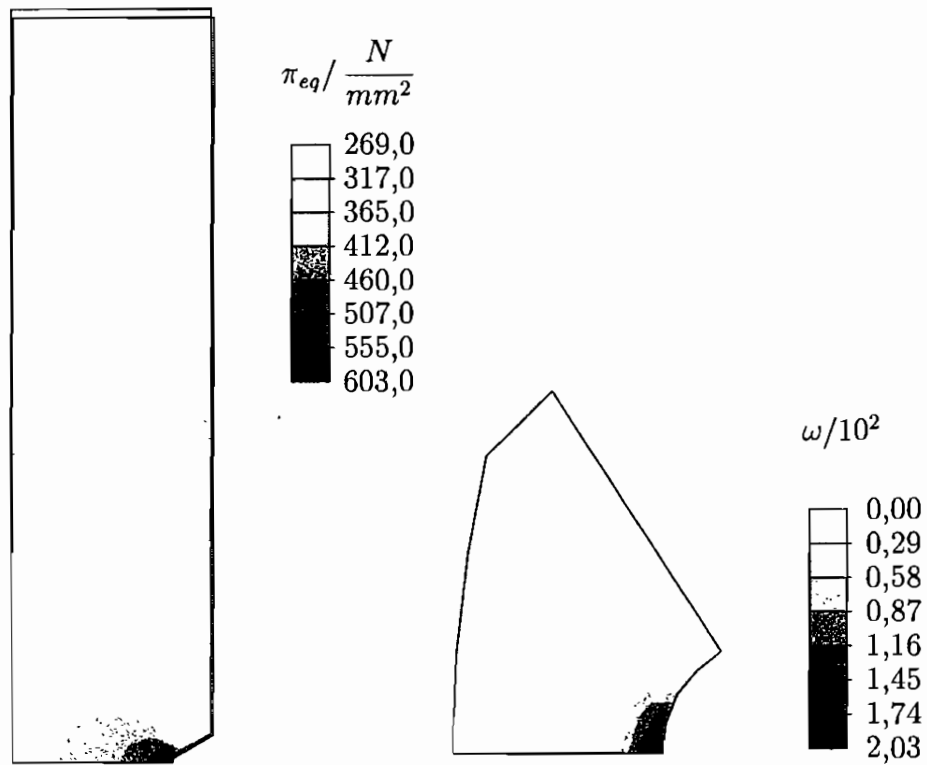


Abb. 9.9: Verteilung bei kombinierter Zug- und Torsionsbelastung

10. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein mikromechanisch motiviertes phänomenologisches Modell zur Beschreibung des elastisch-plastischen Verhaltens anisotrop geschädigter Metalle bei endlichen Deformationen vorgestellt.

Als Maß zur Beschreibung duktiler Schädigung durch orientierte Mikroporen werden die Koeffizienten einer tensoriellen FOURIER-Reihe, die die richtungsabhängige Volumendichte der Defekte beschreibt, verwendet. Die Annahme einer periodischen Verteilung ellipsoider Poren in einem repräsentativen Volumenelement und eine geometrische Interpretation der Volumendichten führt zu einem messbaren Zusammenhang zwischen den FOURIER-Koeffizienten und der Defektkonfiguration.

Durch energetische Betrachtungen an einer Materialvolumenzelle, die einen ellipsoiden Hohlraum enthält, kann die Abhängigkeit der elastischen Konstanten vom Volumenanteil und den Halbmesserverhältnissen des Hohlraumes mikromechanisch ermittelt werden. Zur phänomenologischen Beschreibung der effektiven elastischen Nachgiebigkeit des geschädigten Materials wird eine isotrope Tensorfunktion mit den FOURIER-Koeffizienten als Argumenten angesetzt. Die Skalierung der Koeffizienten der Tensorfunktion erfolgt basierend auf den Ergebnissen der mikromechanischen Betrachtung. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung beider Ergebnisse im gesamten Halbmesserbereich.

Aufbauend auf den Untersuchungen der elastischen Eigenschaften wird ein makroskopisches Materialmodell für das elastisch-plastische Verhalten anisotrop geschädigter Metalle in einem kinematischen Rahmen zur Beschreibung endlicher Deformationen formuliert. Das Modell berücksichtigt schädigungsinduzierte Deformationen und den Einfluss der anisotropen Schädigung auf das elastische Materialverhalten und die Fließgrenze. Die thermodynamische Konsistenz des Modells wird geprüft und die exakte Integrierbarkeit der in Ratenform vorliegenden konstitutiven Beziehungen gezeigt.

Eine axial-symmetrische Finite-Element-Formulierung wird entwickelt, in der eine vereinfachte Version des vorgestellten Modells implementiert wird. Die Materialparameter werden an die Ergebnisse eines Zugversuches einer Probe aus Ck-15 Stahl angepasst. Die Simulation einer gekerbten Rohrprobe unter Zugbelastung zeigt die Eignung des vorgestellten Modells in der aktuellen Implementierung zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung und der Schädigungseffekte auf das mechanische Materialverhalten.

Auf der Basis des vorgestellten Modells und seiner Implementation lassen sich weitere Schritte formulieren, die zu einem besseren Verständnis der mikromechanischen Ursachen

des makroskopischen Verhaltens führen und eine Verbesserung der Beschreibung des Materialverhaltens ermöglichen.

Eine wichtige Aufgabe stellt die Durchführung geeigneter mehraxialer Experimente dar, die nach Möglichkeit eine „direkte Messung“ der Schädigung zur Anpassung aller Parameter des Modells beinhaltet. Dazu ist neben der Entwicklung eines geeigneten Versuchsprogramms, welches die unabhängige Bestimmung der Parameter gewährleistet, die Weiterentwicklung vorhandener und die Erforschung neuer Messmethoden zur Identifizierung des Schädigungszustandes erforderlich.

Da die Implementierung des Stoffgesetzes in einer vereinfachten Form vorliegt, ist eine Erweiterung um die kinematische Verfestigung und die anisotropen Schädigungsanteile naheliegend. Dieses Vorhaben beinhaltet die Ermittlung der materiellen Steifigkeit und die numerische Aufbereitung der Integration der Ratengleichungen des Stoffgesetzes in der allgemeinen Form. Eine Verbesserung der numerischen Effizienz kann durch die Verwendung der konsistenten Tangentensteifigkeit und verbesserter Integrationsverfahren erzielt werden.

Zusätzliche mikromechanische Betrachtungen des Einflusses der Schädigung auf die Fließgrenze und zur Schädigungsentwicklung liefern Erkenntnisse zur Verbesserung des vorhandenen Modells und führen zu einer weiteren Reduzierung der im Modell enthaltenen Materialparameter. Außerdem können Erkenntnisse zur Formulierung eines Versagenskriteriums, welches das Verlassen des Gültigkeitsbereiches des Materialmodells unter Berücksichtigung des Belastungszustands und des anisotropen Schädigungszustands angibt, gewonnen werden. In der vorliegenden Form dient der kritische Porenvolumenanteil als Versagenskriterium.

Der Ausblick zeigt, daß die vorliegende Arbeit zu einer Verbesserung der phänomenologischen Beschreibung des Verhaltens geschädigter Werkstoffe beiträgt. In vielen Teilbereichen besteht allerdings weiterhin ein Bedarf an zusätzlichen Einsichten und Erkenntnissen.

A. Einige Rechenregeln der Tensorrechnung

A.1 Anwendung des Differentialoperators auf Tensoren

Die Anwendung des Nabla-Operators auf tensorielle Größen führt auf die verschiedenen Operatoren

$$\begin{aligned} \text{grad}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes (\cdot))^T, & \text{Grad}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes (\cdot))^T \\ \text{div}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{x}} (\cdot))^T, & \text{Div}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{X}} (\cdot))^T \\ \text{rot}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{x}} \times (\cdot))^T, & \text{Rot}(\cdot) &= (\nabla_{\mathbf{X}} \times (\cdot))^T. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Divergenztheorem:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div} \mathbf{A} \, dV_0 = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{A}^T \mathbf{N} \, dA_0 \quad (\text{A.2})$$

A.2 Transformation in eine mitrotierende Konfiguration

Zur Transformation tensorieller Größen in eine gegenüber dem Bezugssystem um $\mathbf{Q}^\#$ rotierte Konfiguration wird der \star -Operator eingeführt. Die Transformationsbeziehungen ergeben sich ausgehend von den Komponenten bezüglich einer kartesischen Basis für

$$\begin{aligned} \text{Vektoren:} \quad \mathbf{a}^\# &= \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{a} \rightarrow a_i^\# = Q_{ij}^\# a_j \\ \text{Tensoren 2. Stufe:} \quad \mathbf{A}^\# &= \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{A} \rightarrow A_{ij}^\# = Q_{ik}^\# Q_{jl} A_{kl} \\ \text{Tensoren 4. Stufe:} \quad \mathbf{A}^\# &= \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{A} \rightarrow A_{ijkl}^\# = Q_{im}^\# Q_{jn}^\# Q_{ko}^\# Q_{lp} A_{mnop}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Außerdem gilt für das doppelte Skalarprodukt zweier symmetrischer Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} in der rotierten Konfiguration

$$(\mathbf{Q}^\# \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\#T}) : (\mathbf{Q}^\# \mathbf{B} \mathbf{Q}^{\#T}) = \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{A} : \mathbf{Q}^\# \star \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B} \quad (\text{A.4})$$

B. Kinematische Größen

B.1 Eigenwertberechnung

Zur Eigenwertberechnung der symmetrischen Strecktensoren bzw. der CAUCHY-GREEN-Tensoren kann ausgehend vom charakteristischen Polynom

$$P(\chi) = \chi^3 - I_1\chi^2 + I_2\chi - I_3 = 0 \quad (\text{B.1})$$

nach der folgenden Berechnungsvorschrift vorgegangen werden

$$\begin{cases} \chi_i = \frac{1}{3} \left(I + 2\sqrt{I^2 - 3II} \cos \frac{1}{3}(\varphi - 2\pi i) \right) \\ \varphi = \arccos \left(\frac{2I^3 - 9I \cdot II + 27III}{2(I^2 - 3II)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Die hierbei benötigten Invarianten lauten

$$\begin{cases} I = \text{tr}(\mathbf{B}) \\ II = \frac{1}{2}((\text{tr}(\mathbf{B}))^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)) \\ III = \det \mathbf{B} = \frac{1}{6}(\text{tr}(\mathbf{B}))^3 - \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{B}))(\text{tr}(\mathbf{B}^2)) + \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{B}^3). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

B.2 Logarithmischer Spin

Durch Einsetzen der Sylvesterformel in (4.97) erhält man einen basisfreien Ausdruck für den logarithmischen Spin-Tensor

$$\Omega^{log} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{log} = \mathbf{W} + \sum_{(\sigma \neq \tau)=1}^m \left(\frac{1 + \left(\frac{\chi_\sigma}{\chi_\tau} \right)}{1 - \left(\frac{\chi_\sigma}{\chi_\tau} \right)} + \frac{2}{\ln \left(\frac{\chi_\sigma}{\chi_\tau} \right)} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad (\text{B.4})$$

mit:

$$\mathbf{N}^{log} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \\ \nu[\mathbf{B}\mathbf{D}], & \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \\ \nu_1[\mathbf{B}\mathbf{D}] + \nu_2[\mathbf{B}^2\mathbf{D}] + \nu_3[\mathbf{B}^2\mathbf{D}\mathbf{B}], & \chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_1 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

und

$$\nu = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\frac{1 + \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)}{1 - \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)} + \frac{2}{\ln\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_k = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^3 (-\chi_i)^{3-k} \left(\frac{1 + \epsilon_i}{1 - \epsilon_i} + \frac{2}{\ln \epsilon_i} \right), \quad k = 1, 2, 3 \\ \Delta = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1) \\ \epsilon_1 = \frac{\chi_2}{\chi_3}, \quad \epsilon_2 = \frac{\chi_3}{\chi_1}, \quad \epsilon_3 = \frac{\chi_1}{\chi_2} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

$$[B^r DB^s] = B^r DB^s - B^s DB^r \quad (\text{B.8})$$

B.3 Transformation zwischen Lie-Ableitung und logarithmischer Rate von τ

Die Transformationsbeziehung zwischen der LIE-Ableitung und der logarithmischen Rate des KIRCHHOFF-Spannungstensors wird in der Ableitung des Prinzips der virtuellen Arbeit benötigt. Ausgehend von (4.110)

$$\mathcal{L}_v[\tau] = \overset{\circ}{\tau}^{log} + \mathbf{G}[\tau] : \mathbf{D} \quad (\text{B.9})$$

ergibt sich die Vorschrift zur Berechnung des vierstufigen Transformationstensors

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{B}_{irkl} \tau_{rj} - \mathbb{B}_{rjkl} \tau_{ri} - \delta_{ik} \tau_{jl} - \delta_{jl} \tau_{ik} \quad (\text{B.10})$$

mit

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \begin{cases} 0 & , \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \\ \frac{\nu(B_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl})}{\chi_1 - \chi_2} \left(\frac{1 + \epsilon_3}{1 - \epsilon_3} + \frac{2}{\ln(\epsilon_3)} \right) & , \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \\ \nu_3(B_{ik}^2 B_{jl} - B_{ik} B_{jl}^2) + \nu_2(B_{ik}^2 \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}^2) + \\ \nu_1(B_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}) & , \chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 . \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

B.4 Basisfreie Darstellung der arbeitskonjugierten Spannung zur logarithmischen Verzerrung

Die basisfreie Form der zur logarithmischen Verzerrung arbeitskonjugierten Spannung ergibt sich ausgehend von (4.126)

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\sigma, \tau=1}^m f(\chi_\sigma, \chi_\tau) \mathbf{B}_\sigma \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\tau \quad (\text{B.12})$$

mit

$$f(x, y) = \sqrt{\chi_\sigma^{-1} \chi_\tau^{-1}} \frac{\chi_\sigma - \chi_\tau}{\ln \chi_\sigma - \ln \chi_\tau} \quad (\text{B.13})$$

durch Einsetzen der SYLVESTER-Formel

$$\pi = \sum_{i,j=0}^{m-1} \rho_{ij} \mathbf{B}^i \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}^j \quad (\text{B.14})$$

Zur Berechnung der Skalierungsfunktion ρ_{ij} erfolgt eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der Eigenwerte des linken CAUCHY-GREEN-Tensors

1.Fall: $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$
 $\rho_{00} = 1$

2.Fall: $\chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3$
 $m=2$ $\rho_{00} = 2\chi_1\chi_2^\nu$
 $\rho_{01} = \rho_{10} = \chi_2 + \chi_1$
 $\rho_{11} = 2\nu$, mit $\nu = \frac{f(\chi_1, \chi_2)}{(\chi_1 - \chi_2)^2}$

3.Fall: $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3$

$$\rho_{00} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &2f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \chi_1 \chi_2 \chi_3^2 + \\ &2f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \chi_1 \chi_2^2 \chi_3 + \\ &2f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \chi_1^2 \chi_2 \chi_3 + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2 \chi_2^2 \chi_3^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 \chi_1^2 \chi_3^2 + (\chi_2 - \chi_1)^2 \chi_1^2 \chi_2^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_{01} = \rho_{10} = \frac{-1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3) [\chi_3 \chi_2 (\chi_1 + \chi_3) + \chi_1 \chi_3 (\chi_3 + \chi_2)] + \\ &f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1) [\chi_3 \chi_2 (\chi_2 + \chi_1) + \chi_2 \chi_1 (\chi_3 + \chi_2)] + \\ &f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_2 - \chi_1) [\chi_1 \chi_3 (\chi_2 + \chi_1) + \chi_2 \chi_1 (\chi_1 + \chi_3)] + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2 (\chi_3 + \chi_2) \chi_3 \chi_2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 (\chi_1 + \chi_3) \chi_1 \chi_3 + (\chi_2 - \chi_1)^2 \\ &(\chi_2 + \chi_1) \chi_2 \chi_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_{02} = \rho_{20} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_3 \chi_2 + \chi_1 \chi_3) + \\ &f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot (\chi_3 \chi_2 + \chi_2 \chi_1) + \\ &f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot (\chi_1 \chi_3 + \chi_2 \chi_1) + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2 \chi_3 \chi_2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 \chi_1 \chi_3 + (\chi_2 - \chi_1)^2 \chi_2 \chi_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &2f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3)(\chi_3 + \chi_2)(\chi_1 + \chi_3) + \\ &2f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1)(\chi_3 + \chi_2)(\chi_2 + \chi_1) + \\ &2f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_2 - \chi_1)(\chi_1 + \chi_3)(\chi_2 + \chi_1) + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2(\chi_3 + \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2(\chi_1 + \chi_3)^2 + (\chi_2 - \chi_1)^2(\chi_2 + \chi_1)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_{21} = \rho_{12} = \frac{-1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3) + \\ &f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot (\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3) + \\ &f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_1 - \chi_3) \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot (2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2(\chi_3 + \chi_2) + (\chi_1 - \chi_3)^2(\chi_1 + \chi_3) + (\chi_2 - \chi_1)^2(\chi_2 + \chi_1) \end{aligned} \right\}$$

$$\rho_{22} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \begin{aligned} &f(\chi_1, \chi_2) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_1 - \chi_3) + \\ &f(\chi_1, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_2) \cdot (\chi_2 - \chi_1) + \\ &f(\chi_2, \chi_3) \cdot (\chi_3 - \chi_1) \cdot (\chi_3 - \chi_1) + \\ &(\chi_3 - \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 + (\chi_2 - \chi_1)^2 \end{aligned} \right\} .$$

C. Kinematische Größen des bilinearen Elementansatzes

C.1 Ableitungen der Verschiebungskomponenten

Bei der Berechnung der Verschiebungsableitungen zur Bestimmung der Komponenten des Deformationsgradienten nach (8.57) ist zu beachten, dass es sich hier nicht um die Ableitung der kontravarianten Komponenten des Verschiebungsvektors, sondern der Koordinateninkremente handelt. Anwenden der Kettenregel ergibt die Komponenten

$$\begin{aligned} u_{,R}^R &= u_{,\eta^R}^R \cdot \eta_{,R}^R + u_{,\eta^Z}^R \cdot \eta_{,R}^Z, & u_{,Z}^R &= u_{,\eta^R}^R \cdot \eta_{,Z}^R + u_{,\eta^Z}^R \cdot \eta_{,Z}^Z \\ u_{,R}^Z &= u_{,\eta^R}^Z \cdot \eta_{,R}^R + u_{,\eta^Z}^Z \cdot \eta_{,R}^Z, & u_{,Z}^Z &= u_{,\eta^R}^Z \cdot \eta_{,Z}^R + u_{,\eta^Z}^Z \cdot \eta_{,Z}^Z \\ u_{,R}^\Phi &= u_{,\eta^R}^\Phi \cdot \eta_{,R}^R + u_{,\eta^Z}^\Phi \cdot \eta_{,R}^Z, & u_{,Z}^\Phi &= u_{,\eta^R}^\Phi \cdot \eta_{,Z}^R + u_{,\eta^Z}^\Phi \cdot \eta_{,Z}^Z, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

mit den Ableitungen der Verschiebungen nach den natürlichen Elementkoordinaten

$$\begin{aligned} u_{,\eta^R}^R &= \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} u_j^R, & u_{,\eta^Z}^R &= \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} u_j^R \\ u_{,\eta^R}^Z &= \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} u_j^Z, & u_{,\eta^Z}^Z &= \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} u_j^Z \\ u_{,\eta^R}^\Phi &= \frac{R \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} R_j u_j^\Phi \right) - \left(\sum_{j=1}^4 h_j R^j u_j^\Phi \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} R_j \right)}{R^2} \\ u_{,\eta^Z}^\Phi &= \frac{R \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} R_j u_j^\Phi \right) - \left(\sum_{j=1}^4 h_j R^j u_j^\Phi \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} R_j \right)}{R^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Die partiellen Ableitungen der natürlichen Koordinaten nach den Referenzkoordinaten erhält man durch Inversion der Jakobimatrix zu

$$\begin{aligned} \eta_{,R}^R &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} Z_j, & \eta_{,Z}^R &= -\frac{1}{J} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^Z} R_j \\ \eta_{,R}^Z &= -\frac{1}{J} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} Z_j, & \eta_{,Z}^Z &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} R_j \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

mit der Jacobideterminante

$$J = R_{,\eta^R} Z_{,\eta^z} - R_{,\eta^z} Z_{,\eta^R} = \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} R_j \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} Z_j \right) - \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} Z_j \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} R_j \right) . \quad (\text{C.4})$$

C.2 Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten

Zur numerischen Bestimmung von der Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten nach (8.61) können analog zur Vorgehensweise bei der Berechnung der Verschiebungsableitungen die Ableitungen der Geschwindigkeiten nach den natürlichen aktuellen Koordinaten gebildet werden

$$\begin{aligned} v_{,\eta^R}^r &= v_{,\eta^R}^r \cdot \eta_{,\eta^R}^R + v_{,\eta^z}^r \cdot \eta_{,\eta^R}^z, & v_{,\eta^z}^r &= v_{,\eta^R}^r \cdot \eta_{,\eta^z}^R + v_{,\eta^z}^r \cdot \eta_{,\eta^z}^z \\ v_{,\eta^R}^z &= v_{,\eta^R}^z \cdot \eta_{,\eta^R}^R + v_{,\eta^z}^z \cdot \eta_{,\eta^R}^z, & v_{,\eta^z}^z &= v_{,\eta^R}^z \cdot \eta_{,\eta^z}^R + v_{,\eta^z}^z \cdot \eta_{,\eta^z}^z \\ v_{,\eta^R}^\varphi &= v_{,\eta^R}^\varphi \cdot \eta_{,\eta^R}^R + v_{,\eta^z}^\varphi \cdot \eta_{,\eta^R}^z, & v_{,\eta^z}^\varphi &= v_{,\eta^R}^\varphi \cdot \eta_{,\eta^z}^R + v_{,\eta^z}^\varphi \cdot \eta_{,\eta^z}^z . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Die Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach den natürlichen Koordinaten ergeben sich analog zu (C.3)

$$\begin{aligned} \eta_{,\eta^R}^R &= \frac{1}{j} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} z_j, & \eta_{,\eta^z}^R &= -\frac{1}{j} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} r_j \\ \eta_{,\eta^R}^z &= -\frac{1}{j} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} z_j, & \eta_{,\eta^z}^z &= \frac{1}{j} \sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} r_j \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

mit der Jacobideterminante in der aktuellen Konfiguration

$$j = r_{,\eta^R} z_{,\eta^z} - r_{,\eta^z} z_{,\eta^R} = \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} r_j \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} z_j \right) - \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^R} z_j \right) \left(\sum_{j=1}^4 h_{j,\eta^z} r_j \right) . \quad (\text{C.7})$$

Die Ableitung der Geschwindigkeit nach den natürlichen Koordinaten erhält man durch Anwendung der Kettenregel auf (8.60) zu

$$\begin{aligned} v_{,\eta^R}^r &= R \sin \frac{u^\Phi}{\Delta t} u_{,\eta^R}^\Phi + \frac{1}{\Delta t} u_{,\eta^R}^R, & v_{,\eta^z}^r &= R \sin \frac{u^\Phi}{\Delta t} u_{,\eta^z}^\Phi + \frac{1}{\Delta t} u_{,\eta^z}^R \\ v_{,\eta^R}^\varphi &= \cos \frac{u^\Phi}{\Delta t} u_{,\eta^R}^\Phi, & v_{,\eta^z}^\varphi &= \cos \frac{u^\Phi}{\Delta t} u_{,\eta^z}^\Phi \\ v_{,\eta^R}^z &= \frac{1}{\Delta t} u_{,\eta^R}^z, & v_{,\eta^z}^z &= \frac{1}{\Delta t} u_{,\eta^z}^z . \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Literaturverzeichnis

- [AA94] J. Altenbach und H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, 1994.
- [AF75] M. F. Ashby und H. J. Frost. The kinetics of inelastic deformations above 0°K. In A. S. Argon, Herausgeber, *Constitutive equations in plasticity*, Seiten 117–147. The MIT Press, 1975.
- [And97] D. Anding. *Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **109**. Ruhr-Universität Bochum, 1997.
- [Ash83] M. F. Ashby. Mechanisms of deformation and fracture. In J. W. Hutchinson und Th. Y. Wu, Herausgeber, *Advances in applied Mechanics*. Academic Press, London, 1983.
- [AT99] F. Auricchio und R. L. Taylor. A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes. *International Journal of Plasticity*, 15:1359–1378, 1999.
- [Bat90] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York- London- Paris- Tokyo- Hongkong, 1990.
- [BB01] C. N. Bongmba und O. T. Bruhns. On the numerical implementation of a finite strain anisotropic damage model based upon the logarithmic rate. *European Journal of Finite Elements*, to appear:1–16, 2001.
- [BC86] S. R. Bodner und K. S. Chan. Modeling of continuum damage for application in elastic-viscoplastic constitutive equations. *Engineering Fracture Mechanics*, 25:705–712, 1986.
- [Ber93] H. Berns. *Stahlkunde für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1993.
- [Bet82] J. Betten. Net-stress analysis in creep mechanics. *Ingenieur Archiv*, 52:405–419, 1982.
- [Bet93] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 1993.
- [BO76] B. Budiansky und R. J. O’Connell. Elastic moduli of cracked solids. *Int. J. Solids Structures*, 12:81 – 97, 1976.

- [Bon01] N. C. Bongmba. *Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **119**. Ruhr-Universität Bochum, 2001.
- [Bru93] O. T. Bruhns. Neue Materialgleichungen der Plastomechanik. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 73:T6–T19, 1993.
- [BS96] O. T. Bruhns und P. Schießle. A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15(3):367–396, 1996.
- [BW62] B. Budiansky und T. T. Wu. Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. In *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, Seiten 1175–, 1962. zitiert nach: Hutchison, 1970.
- [BXM99] O.T. Bruhns, H. Xiao, und A. Meyers. Self-consistent eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate. *International Journal of Plasticity*, 15:479–520, 1999.
- [CH86] D. E. Carlson und A. Hoger. The derivative of a tensor-valued function of a tensor. *Q. Appl. Math*, 44:409–423, 1986.
- [Cha81] J.L. Chaboche. Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64:233–247, 1981.
- [CLFT00] L. C. Chan, T. C. Lee, J. P. Fan, und C. Y. Tang. Formulation of a strain based orthotropic elasto-plastic damage theory. *International Journal of Damage Mechanics*, 9, 2000.
- [CN63] B. D. Coleman und W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 13:167–178, 1963.
- [Cow85] S. C. Cowin. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. *Mechanics of Materials*, 4:137–147, 1985.
- [CT99] A. Cauvin und R. B. Testa. Damage mechanics: basic variables in continuum theories. *Int. J. Solids Structures*, 36, 1999.
- [CW87] C. L. Chow und J. Wang. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engng. Fract. Mech.*, 27:547–558, 1987.
- [CW88] C. L. Chow und J. Wang. A finite element analysis of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Int. J. of Fracture*, 238:83–102, 1988.

- [DB96] G. J. Dvorak und Y. A. el din Bahei. Inelastic composite materials: Transformation analysis and experiments. In *CISM-Course: Continuum Micromechanics*, 1996.
- [Die89] H. Diehl. *Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **66**. Ruhr-Universität Bochum, 1989.
- [DS73] L. Davison und A.L. Stevens. Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. *Journal of applied physics*, 44:667–674, 1973.
- [DSK77] L. Davison, A. L. Stevens, und M. E. Kipp. Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:11–28, 1977.
- [EN99] H. Eskandari und J. A. Nemes. An isotropic damage model based on a tensorial representation of damage. *International Journal of Damage Mechanics*, 8:254–272, 1999.
- [Esh57] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the royal society of London/series A*, 241:376–396, März 1957. File: Damage.
- [FA82] H. J. Frost und M. F. Ashby. *Deformation mechanism maps - The plasticity and creep of metals and ceramics*, S.117. Pergamon Press, 1982.
- [Fel91] A. Feldmüller. *Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **75**. Ruhr-Universität Bochum, 1991.
- [FN00] K. Farahani und R. Naghdabadi. Conjugate stresses of the seth-hill strain tensors. *Int. J. Solids Structures*, 37:5247–5255, 2000.
- [For90] Werner Fornefeld. *Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **73**. Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [GB79] G. H. Goods und L. M. Brown. The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta metallurgica*, 27:1–15, 1979.
- [Ger84] V. Gerold. Physical theory of plasticity in crystalline solids. In T. Lehmann, Herausgeber, *The constitutive law in thermoplasticity*, Seiten 105–155. Springer-Verlag, 84.

- [GN65] A. E. Green und P. M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archives for rational mechanics and analysis*, 18:251–281, 1965.
- [GN71] A. Green und P.M. Naghdi. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. *International Journal of engineering science*, 9:1219–1229, 1971.
- [Gol81] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.
- [GS83] M. E. Gurtin und K. Spear. On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor. *Int. J. Solids Structures*, 19:437–444, 1983.
- [Gur77] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology*, 99:2–15, 1977.
- [Has88] Z. Hashin. The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 45, 1988.
- [HD54] A. V. Hershey und Dahlgren. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *Journal of Applied Mechanics*, September 1954.
- [Hen28] H. Hencky. Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Z. techn. Phys.*, 9:214–224, 1928.
- [Hil52] R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceedings of the physical society*, 65:349+, 1952.
- [Hil65] R. Hill. A selfconsistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 1965.
- [Hil68] R. Hill. On constitutive inequalities for simple materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 16:229–242, 1968.
- [Hil78] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in applied mechanics*, 18:1–75, 1978.
- [HML98] K. Hayakawa, S. Murakami, und S. Liu. An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials. *Eur. J. Mech.*, 17:13–32, 1998.
- [HNN83] H. Horii und S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 31, 1983.
- [Hog86] A. Hoger. The material time derivative of logarithmic strain. *Int. J. Solids Structures*, 22:1019–1032, 1986.

- [Hog87] A. Hoger. The stress conjugate to logarithmic strain. *Int. J. Solids Structures*, 23:1645–1656, 1987.
- [Hul79] J. Hult. *Mechanisms of Deformation and Fracture*, Seiten 233–347. CISM, 1979.
- [Hut70] J. W. Hutchison. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. *Proceedings of the royal society of London/series A*, 319:147–272, 1970.
- [HW91] E. Hornbogen und H. Warlimont. *Metallkunde*. Springer-Verlag, 1991.
- [Jau11] G Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze. In *Sitzungsbericht der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien*, Seiten 71–95, 1911.
- [JS85] S. Jansson und U. Stigh. Influence of cavity shape on damage parameter. *Journal of Applied Mechanics*, 52:609–614, 1985.
- [Kac58] L. M. Kachanow. O vremeni rasruschenija w usslowijach polsutschesti (in russisch). *Otd. Techn. Nauk. Moskwa*, 8:26–31, 1958.
- [Kac77] L. M. Kachanov. Creep and fracture at complex loading. *Problem Prochnosti*, 6:3–5, 1977. Cf. [Kra83].
- [KF81] D. Krajcinovic und G.U. Fonseka. The continous damage theory of brittle materials. *Journal of Applied Mechanics*, 48, 1981.
- [Kli89] E. Klingbeil. *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, 1989.
- [KM95] D. Krajcinovic und S. Matilovic. Some fundamental issues of damage mechanics. *Mechanics of Materials*, 21, 1995.
- [Krö58] E. Kröner. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, 151:504–518, 1958.
- [Krö60] E. Kröner. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 4:273–334, 1960.
- [Krö61] E. Kröner. Zur plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metall.*, 9:155–161, 1961.
- [Kra83] D. Krajcinovic. Constitutive equations of damaging materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 1983.

- [Kra85] D. Krajcinovic. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts' and definitions. *Journal of Applied Mechanics*, 52:829–834, 1985.
- [KTS94] M. Kachanov, I. Tsukrov, und B. Shafiro. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Micromechanics of random Media*, 47(1), 1994.
- [LC75] J. Lemaitre und J. L. Chaboche. A non-linear model of creep-fatigue damage circulation and interaction. In Hult, Herausgeber, *Mechanics of Visco-Elastic media and Bodies*, Seiten 291–301. Springer-Verlag, 1975.
- [LC90] J. Lemaitre und J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Lee69] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 17:859–872, 1969.
- [Lee81] E.H. Lee. Some comments on elastic-plastic analysis. *Int. J. Solids Structures*, 17:859–872, 1981.
- [Lee99] Usik Lee. Effective elastic compliances and engineering constants for damaged isotropic solids. *International Journal of Damage Mechanics*, 8, April 1999.
- [Leh76] Th. Lehmann. *Große elasto-plastische Formänderungen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 1. Ruhr-Universität Bochum, 1976.
- [Leh83] Th. Lehmann. Einige aspekte der thermoplastizität. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 73:T3–T13, 1983.
- [Leh84] Th. Lehmann. General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations. In Th. Lehmann, Herausgeber, *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, Band The Constitutive Law in Thermoplasticity von *CISM Courses and Lectures*, chapter 8, Seiten 379–463. Springer-Verlag, 1984.
- [Leh89] Th. Lehmann. Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica*, 79:1–24, 1989.
- [Leh91] Th. Lehmann. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International Journal of Plasticity*, 7:79–98, 1991.
- [Lem71] J. Lemaitre. Evaluation of dissipation and damage in metals. In *Proc. I.C.M. Kyoto, Japan*, Band I, 1971.

- [Lem96] J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2nd edition, 1996.
- [LK94] V. A. Lubarda und D. Krajcinovic. Tensorial representation of the effective elastic properties of damaged material. *International Journal of Damage Mechanics*, 3, Januar 1994.
- [LL68] E.H. Lee und D.T. Liu. Finite strain elastic-plastic theory. In *Proceedings IUTAM Symposium on Irreversible Aspects of Continuum mechanics*, Wien, 1968.
- [LL93] Th. Lehmann und H. Liang. The stress conjugate to logarithmic strain. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 73:357–363, 1993.
- [LLF97] U. Lee, G. A. Lesieutre, und L. Fang. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microracks. *Int. J. Solids Structures*, 34(33-34):4377–4397, 1997.
- [Mac68] D. B. Macvean. Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 19, 1968.
- [Mal69] L. E. Malvern. *Introduction of the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, N.J., 1969.
- [Mau92] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Mey99] A. Meyers. On the consistency of some eulerian strain rates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 79:171–177, 1999.
- [MH83] J. E. Marsden und T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [MHL98] S. Murakami, K. Hayakawa, und Y. Liu. Damage evolution and damage surface of elastic-plastic damage materials under multiaxial loading. *International Journal of Damage Mechanics*, 7:103–128, 1998.
- [Mit95] M. Mittelbach. *Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 100. Ruhr-Universität Bochum, 1995.
- [Mül99] Ch. Müller. Herleitung und Implementierung eines rotationssymmetrischen Elements für physikalisch nichtlineare Berechnungen mit der Methode der finiten Elemente. Diplom-Arbeit, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1999.

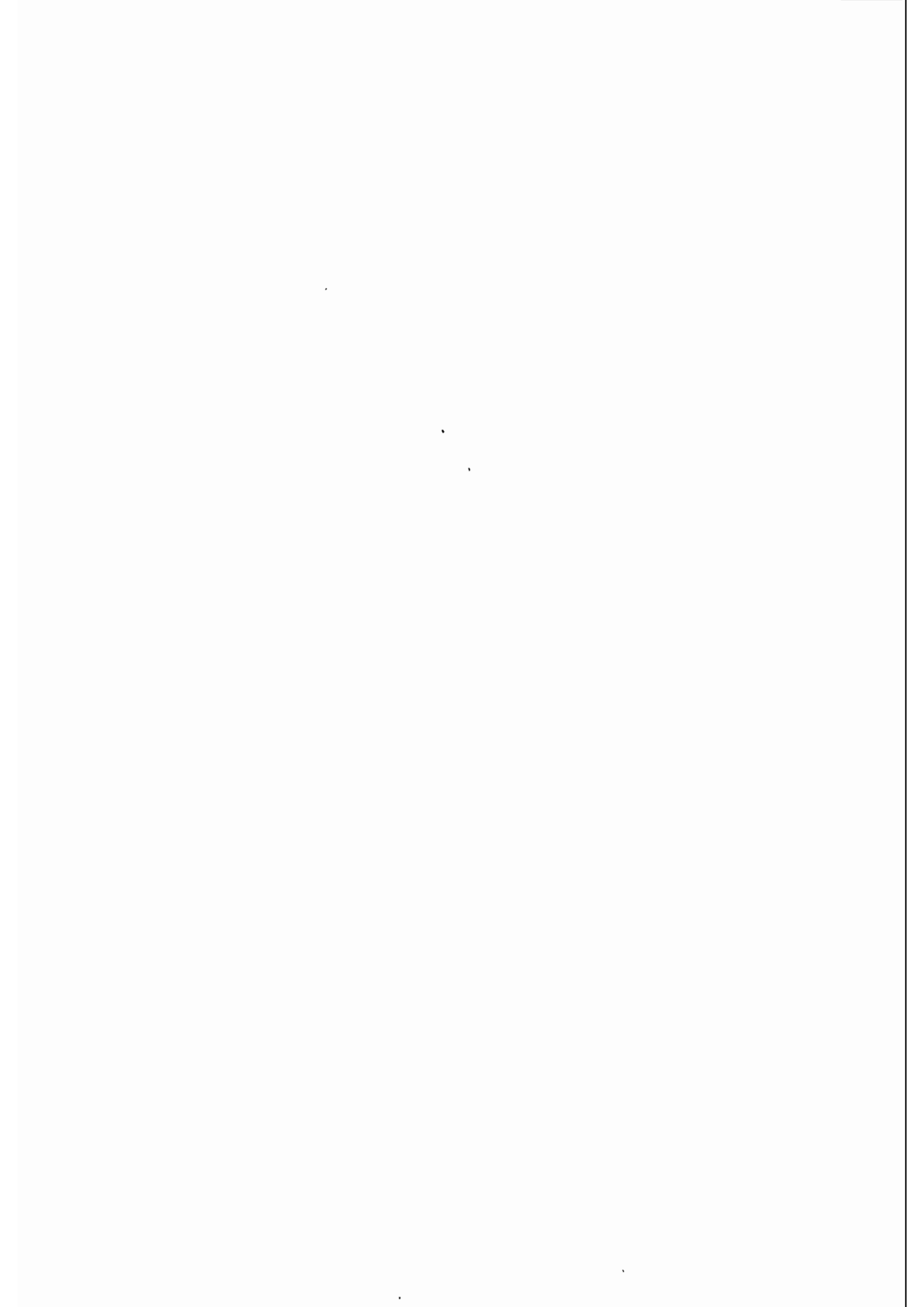
- [MO81] S. Murakami und N. Ohno. A continuum theory of creep and creep damage. In A. R. S. Ponter und D. R. Hayhurst, Herausgeber, *Creep in structures*, Seiten 422–444. IUTAM-Symposium '80, 1981.
- [MT73] T. Mori und K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metal*, 21:571–574, 1973.
- [Mur88] S. Murakami. Mechanical modelling of material damage. *Journal of Applied Mechanics*, 55:280–286, Juni 1988.
- [Mur93] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Kluwer academic publishers, 1993.
- [Nag90] P. M. Naghdi. A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of applied mathematics and physics*, 41:315–394, 1990.
- [NNH93] S. Nemat-Nasser und M. Hori. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. North Holland. Elsevier, 1993.
- [NNYH93] S. Nemat-Nasser, N. Yu, und M. Horii. Solids with periodically distributed cracks. *Int. J. Solids Structures*, 30(15), Dezember 1993.
- [OB99] C. Oberste-Brandenburg. *Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 117. Ruhr-Universität Bochum, 1999.
- [Ogd84] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications, 1984.
- [OL88] E. T. Onat und F. A. Leckie. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure. *Journal of Applied Mechanics*, 1988.
- [Ona84] E. T. Onat. Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids. *International Journal of engineering science*, 22(8-10):1013–1021, 1984.
- [RA72] W. B. Russel und A. Acrivos. On the effective moduli of composite materials: slender rigid inclusions at dilute concentrations. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 23:434–464, 1972. File: Damage.
- [Rab59] Ju.N. Rabotnov. O mechanisme dliteljnogo pasruschenija (in russisch). *Wo-prossy protschnosti materialow i kronstruktzii*, Seiten 5–7, 1959.
- [Rab69] Ju.N. Rabotnov. Creep problems in structural members. In *Applied Mathematics and Mechanics*, Band 7, Seite 373 ff. North-Holland Publ. Comp., 1969.

- [Rab89] P. J. Rabier. Some remarks on damage theory. *International Journal of engineering science*, 27(1):29–54, 89.
- [Ran84] B. Raniecki. Thermodynamic aspects of cyclic and monotone plasticity. In Th. Lehmann, Herausgeber, *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, Nummer 281 in CISM Courses and Lectures, Seiten 323–351. Springer-Verlag, 1984.
- [RD95] W.D. Reinhardt und R. N. Dubey. Eulerian strain-rate as a rate of logarithmic strain. *Acta Mechanica*, 22(2):165–170, 1995.
- [RD98] W.D. Reinhardt und R.N. Dubey. An eulerian-based approach to elastic-plastic decomposition. *Acta Mechanica*, 131:111–119, 1998.
- [Reu29] A. Reuß. Calculation of flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of single crystals. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 9:49+, 1929. Cf. [Hil52].
- [Ric74] F. Richter. *Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen*, Band 650. Mannesmann Forschungsberichte, 1974.
- [Ric75] J. R. Rice. *Constitutive equations in plasticity*, chapter Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms. The Mit Press, 1975.
- [Rot91] Ulfert Rott. *Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **76**. Ruhr-Universität Bochum, 1991.
- [Rus73] W. B. Russel. On the effective moduli of composite materials: effect of fiber length and geometry at dilute concentrations. *Journal of applied mathematics and physics*, 24:581–600, 1973.
- [Saw86] K. Sawyer. Comments on the paper determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient. *Quarterly of Applied Mathematics*, 44(309-311), 1986.
- [Sch94] P. Schieße. *Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **89**. Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [Sch98] Peer Schieße. Implementierung eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes unter Berücksichtigung anisotroper Schädigung. Interner bericht, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1998.

- [Sei91] D. Seibert. Histogramme, Orientierungsdichtefunktionen und ihre Darstellung durch eine tensorielle Form der Fourier-Reihe. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 71:91–97, 1991.
- [SH97] J. C. Simo und T. J. R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, 1997.
- [Sid81] F. Sidoroff. Description of anisotropic damage application to elasticity. In *Proceedings of IUTAM Colloquium on physical nonlinearities in structural analysis*, Berlin, 1981. Springer-Verlag.
- [Sim92] J. C. Simo. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return-mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering A/Solids*, 99:61–112, 1992.
- [SK99] B. Shafiro und M. Kachanov. Solids with non-spherical cavities: simplified representations of cavity compliance tensors and the overall anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 47, Mai 1999.
- [SP84] J.C. Simo und K. S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 46:201–215, 1984.
- [Spe84] A. J. M. Spencer. *Constitutive theory for strongly anisotropic solids*, Seiten 1–31. Springer-Verlag, Wien - New York, 1984.
- [SY99] G. Swoboda und Q. Yang. An energy-based damage model of geomaterials-i. formulation and numerical results. *Int. J. Solids Structures*, 36:1719–1734, 1999.
- [Tay99a] R.L. Taylor. *FEAP, A Finite Element Analysis Program, Description and Users-Manual*, 1999.
- [Tay99b] R.L. Taylor. *FEAP, A Finite Element Analysis Program, Version 6.4 Theory Manual*, 1999.
- [The84] K. Thermann. Foundations of large deformations. In Th. Lehmann, Herausgeber, *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, Nummer 281 in CISM Courses and Lectures, Seiten 323–351. Springer-Verlag, 1984.
- [TK00] I. Tsurkov und M. Kachanov. Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution. *Int. J. Solids Structures*, 37, August 2000.

- [TU94] K. Trint und U. Utecht. *evoC user manual*. Technische Universität Berlin, Lehrstuhl für Bionik und Evolutionstechnik, 1994.
- [VB99] J. C. W. van Vroonhoven und R. de Borst. Combination of fracture and damage mechanics for numerical failure analysis. *Int. J. Solids Structures*, 36, Oktober 1999.
- [Voi28] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Leipzig, 1928. cf. [Hil52].
- [Wen97] Stephan Weng. *Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **110**. Ruhr-Universität Bochum, 1997.
- [Wic96] A. Wichtmann. *Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **104**. Ruhr-Universität Bochum, 1996.
- [XBM97a] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. Meyers. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica*, 124:89–105, 1997.
- [XBM97b] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. T. M. Meyers. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *Journal of Elasticity*, 47:51–68, 1997.
- [XBM98a] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. T. M. Meyers. Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between eulerian and lagrangean strain and stress measures. *Arch. Mech.*, 50:1015–1045, 1998.
- [XBM98b] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. T. M. Meyers. On objective corotational rates and their defining spin tensors. *Int. J. Solids Structures*, 35:4001–4014, 1998.
- [XBM98c] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. T. M. Meyers. Strain rates and material spins. *Journal of Elasticity*, 52:1–41, 1998.
- [XBM99a] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. Meyers. Existence and uniqueness of the integrable-exactly hypoelastic equation and its significance to finite inelasticity. *Acta Mechanica*, 138:31–50, 1999.
- [XBM99b] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. Meyers. Self-consistent eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate. *International Journal of Plasticity*, 15:479–520, 1999.
- [XBM00] H. Xiao, O. T. Bruhns, und A. Meyers. A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient. *International Journal of Plasticity*, 16:143–177, 2000.

-
- [Xia95] H. Xiao. Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary hill's strain. *Int. J. Solids Structures*, 32:3327–3340, 1995.
- [Xia97a] H. Xiao. On constitutive equations of cauchy elastic solids: all kinds of crystals and quasicrystals. *Journal of Elasticity*, 48:241–283, 1997.
- [Xia97b] H. Xiao. On isotropic invariants of the elasticity tensor. *Journal of Elasticity*, 46:115–149, 1997.
- [Xia98] H. Xiao. Direct relation between the lagrangean logarithmic strain and the lagrangean stretching and the lagrangean kirchhoff stress. *Mechanics Research Communications*, 25:59–67, 1998.
- [ZT89a] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Band 1. McGraw-Hill Book Company, 4. edition, 1989.
- [ZT89b] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Band 2. McGraw-Hill Book Company, 4. edition, 1989.
- [ZY00] A. Zhao und J. Yu. The overall elastic moduli of orthotropic composite and description of orthotropic damage of materials. *Int. J. Solids Structures*, 37:6755–6771, 2000.



Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli
1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Paweł Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli
1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember
1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)

- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Franja/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)

- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finte elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finte Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)

- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
(Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
(Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
(Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
(Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allge-
meinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
(Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
(Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit
Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines
monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen
Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle
hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei
schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)

- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse (August 2000)
- Nr. 125 Daniela Lürding
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)
- Nr. 126 Thorsten Quent
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung (Mai 2001)
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung (Mai 2001)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 126**

978-3-935892-0-1