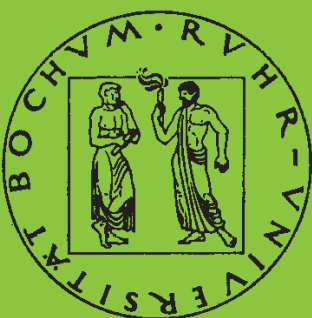


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Jörn Mosler**

**Finite Elemente mit sprungstetigen  
Abbildungen des Verschiebungsfeldes für  
numerische Analysen lokalisierter  
Versagenszustände**

Heft Nr. 130



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Statik und Dynamik

Jörn Mosler

Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des  
Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter  
Versagenszustände in Tragwerken

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 130

Herausgeber:

Institut für Mechanik

— Schriftenreihe —

Ruhr-Universität Bochum

D-44780 Bochum

---

ISBN 3-935892-05-5

---

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2003 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

## Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit liegt in der Entwicklung eines Finite-Elemente-Modells zur numerischen Simulation von lokalisierten Versagensmechanismen, wie z.B. Rissen in Betonkonstruktionen. Auf der Basis einer Approximation der Kinematik lokalisierter Deformationen mittels sprungstetiger Verschiebungsabbildungen wird ein  $C^0$ -stetiges Verschiebungsfeld mit einer  $C^0$ -unstetigen Abbildung additiv erweitert. Dies führt im Gegensatz zu den bei klassischen Kontinuumsmodellen verwendeten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu Traktions-Verschiebungs-Beziehungen. Zur Herleitung dieses konstitutiven *Interface*-Gesetzes werden zwei unterschiedliche, thermomechanisch konsistente Verfahren in Verbindung mit einem gekoppelten elasto-plastischen anisotropen Schädigungsmodell herangezogen. Die numerische Umsetzung des Modells im Rahmen der Finite-Elemente-Methode erfolgt auf der Grundlage des *Enhanced-Assumed-Strain*-Konzeptes (EAS). Im Gegensatz zum ursprünglichen EAS-Verfahren wird für die erweiterten Verzerrungen jedoch eine PETROV-GALERKIN-Diskretisierung verwendet. Dabei werden die Freiheitsgrade, welche die Diskontinuität des Verschiebungsfeldes beschreiben, bereits auf Materialpunktebene eliminiert und nicht, wie bei EAS-Modellen üblich, durch statische Kondensation. Die resultierende numerische Implementierung ist formal identisch zur algorithmischen Umsetzung von Kontinuumsmodellen mit  $C^0$ -stetigen Verschiebungsfeldern. Bestehende Programmstrukturen können somit ohne Änderung übernommen werden. Zur Gewährleistung einer effizienten und robusten numerischen Umsetzung wird die bislang verwendete Annahme zeitlich invarianter Lokalisierungs- (Riß-) Flächen aufgegeben. Die Leistungsfähigkeit des entwickelten finiten Elementes und insbesondere die Unabhängigkeit der Resultate von der räumlichen Diskretisierung werden anhand von zwei- und dreidimensionalen Analysen von Betonstrukturen, darunter 3D-Simulationen von Auszugsversuchen von Betonankern, gezeigt.

## Abstract

This thesis is concerned with the development of a finite element formulation suitable for numerical analyses of localized deformations such as cracks in brittle structures. Based on an additive decomposition of the displacement field into a  $C^0$ -smooth part and a discontinuous part, the inelastic material response is governed by traction separation laws. For the development of these interface laws, two thermodynamically consistent concepts are described and applied to the derivation of an elastoplastic anisotropic damage model. In contrast to the originally proposed numerical implementation based on the enhanced assumed strain (EAS) concept, the parameters defining the discontinuous part of the displacement field are condensed out at the material level without employing the standard static condensation technique. This approach results in linearized constitutive equations formally identical to those of continuum models. Therefore the standard return mapping algorithm is used to solve the nonlinear equations. The suitability of the proposed finite element formulation is demonstrated by means of three-dimensional ultimate load analyses of pull-out tests of a steel anchor embedded within a concrete block.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1998-2002 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. techn. Günther Meschke für die Anregung zu dieser Arbeit und deren wissenschaftliche Betreuung. Herrn Professor Dr. rer. nat. Klaus Hackl danke ich für die Übernahme des zweiten Berichtes sowie für die zügige und sehr sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes.

Desweiteren bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Statik und Dynamik, die durch ihre Hilfsbereitschaft zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. Detlef Kuhl, Herrn Dipl.-Ing. Thomas Kasper und Herrn Dipl.-Ing. Stephan Müller, die während der gemeinsamen Zeit am Institut zu sehr guten Freunden geworden sind.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie für die bereits im Vorfeld zu dieser Arbeit geleistete Unterstützung herzlich bedanken. Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin Kristina Greffrath, die mir stets ein starker Rückhalt war und auch bei den Korrekturen des Manuskriptes viel Zeit und Mühe investierte.

Bochum, im Januar 2003

Jörn Mosler

Referenten: Prof. Dr. techn. Günther Meschke  
Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Tag der Einreichung: 21.10.2002

Tag der mündlichen Prüfung: 06.12.2002

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Stand der Forschung . . . . .	4
1.3	Ziele und Umfang der Arbeit . . . . .	9
1.4	Gliederung der Arbeit . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Klassische kontinuumsmechanische Materialmodellierung</b>	<b>11</b>
2.1	Elasto-plastische Materialmodelle . . . . .	11
2.1.1	RANKINE-Kriterium . . . . .	15
2.1.2	DRUCKER-PRAGER-Modell . . . . .	15
2.1.3	Finite Deformationen . . . . .	17
2.2	Schädigungsmechanik . . . . .	21
2.3	Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik . . . . .	24
2.4	Integration der Materialgleichungen . . . . .	25
2.5	Entfestigende Materialien . . . . .	28
2.6	Regularisierungsverfahren . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Modellierung von <math>C^0</math>-unstetigen Verschiebungsfeldern</b>	<b>33</b>
3.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Kontinua mit einer inneren Fläche . . . . .	33
3.2	Kinematik von $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern . . . . .	35
3.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen an einer inneren Fläche . . . . .	38
3.4	Projektion von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen auf eine Fläche . . . . .	40
3.4.1	Elasto-plastische Materialmodelle . . . . .	40
3.4.2	Schädigungsmechanik . . . . .	45
3.4.3	Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik . . . . .	46

3.5	Energiedichtefunktionen an inneren Flächen . . . . .	47
3.5.1	Elasto-plastische Materialmodelle . . . . .	47
3.5.2	Schädigungsmechanik . . . . .	53
3.5.3	Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik . . . . .	54
3.6	Zusammenfassung . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Lokalisiertes Werkstoffversagen</b>	<b>57</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	57
4.2	Indikatoren für diffuses Versagen . . . . .	58
4.3	<i>Schwache</i> und <i>starke</i> Diskontinuitäten . . . . .	59
4.3.1	Singuläre Flächen . . . . .	60
4.3.2	Lokalisierungsbedingung für <i>schwache</i> Diskontinuitäten . . . . .	62
4.3.3	Lokalisierungsbedingung für <i>starke</i> Diskontinuitäten . . . . .	65
4.3.4	Beispiele . . . . .	65
4.4	Numerische Lösungsstrategien . . . . .	70
4.4.1	Numerische Lösungsstrategien für den ebenen Verzerrungs- bzw. Spannungszustand . . . . .	71
4.4.2	Numerische Lösungsstrategien für dreidimensionale Kontinua . . . . .	73
4.4.3	Modifikation mit <i>Line-Search</i> -Strategie . . . . .	76
4.4.4	Beispiele . . . . .	76
4.5	Zusammenfassung . . . . .	79
<b>5</b>	<b><math>C^0</math>-unstetige Verschiebungsfelder in finiten Elementen</b>	<b>81</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	81
5.1.1	<i>Extended Finite Element Method</i> (X-FEM) . . . . .	83
5.1.2	Inkompatible diskontinuierliche Verschiebungsfelder . . . . .	84
5.2	Modifizierte Kinematik für inkompatible $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder . . . . .	85
5.2.1	$C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder . . . . .	86
5.2.2	Numerische Lokalisierungsmodi . . . . .	87
5.2.3	EAS-Konzept ( <i>Enhanced-Assumed-Strain</i> ) . . . . .	89
5.3	Fließ- bzw. Belastungsflächen . . . . .	92
5.4	Bestimmung des Normalenvektors der singulären Fläche . . . . .	93

---

5.4.1	Band-Tracing-Algorithmus . . . . .	94
5.4.2	Maximale Dissipation . . . . .	94
5.4.3	Kompatibilität mit vorhandenen Verschiebungsfeld . . . . .	95
5.4.4	Zusammenfassung . . . . .	95
5.5	Modifizierte numerische Umsetzung für elasto-plastische Materialmodelle . . . . .	96
5.5.1	Einflächen-Plastizitätsmodelle . . . . .	96
5.5.2	Mehrflächen-Plastizitätsmodelle . . . . .	98
5.5.3	Mode-I Versagen . . . . .	99
5.6	Erweiterung für „rotierende“ singuläre Flächen . . . . .	99
5.7	Erweiterung für beliebige finite Elemente . . . . .	100
5.8	Ein gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell . . . . .	103
5.9	Integration der Materialgleichungen . . . . .	104
5.9.1	Implementierung für „rotierende“ singuläre Flächen . . . . .	104
5.9.2	Implementierung für singuläre Flächen mit $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . . . . .	107
5.10	Zusammenfassung . . . . .	109
<b>6</b>	<b><math>C^0</math>-unstetige Verschiebungsfelder vs. <math>C^0</math>-stetige Verschiebungsfelder</b>	<b>111</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	111
6.2	Charakteristische Länge nach OLIVER . . . . .	112
6.3	Isotrope, hyperelastische Materialmodelle . . . . .	114
6.3.1	HOOKE-Materialmodell . . . . .	115
6.3.2	NEO-HOOKE-Materialmodell . . . . .	124
6.4	Anisotrope hyperelastische Materialmodelle . . . . .	126
6.5	Zusammenfassung . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>129</b>
7.1	Verwendete finite Elemente . . . . .	129
7.2	Einachsialer Zugversuch . . . . .	131
7.2.1	Ebener Spannungszustand . . . . .	131
7.2.2	Dreidimensionaler Spannungszustand (Element V8E) . . . . .	136
7.2.3	Zusammenfassung . . . . .	139
7.3	Angekerbter Drei-Punkt-Biegebalken . . . . .	140

---

7.3.1	Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von der Netzorientierung . .	141
7.3.2	Vergleichende Analyse des <i>Fixed-Crack</i> - und des <i>Rotating-Crack</i> - Konzeptes . . . . .	147
7.4	L-förmige Scheibe . . . . .	149
7.4.1	Elemente Q4S und Q8S . . . . .	151
7.4.2	Elemente T3E, Q4E, Q8EL und Q8EQ . . . . .	154
7.4.3	Gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell . . . . .	159
7.5	Dreidimensionale Anker-Auszugs-Versuche . . . . .	160
7.5.1	Anker-Auszugs-Versuche: Test 1 . . . . .	161
7.5.2	Anker-Auszugs-Versuche: Test 2 . . . . .	172
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>177</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	177
8.2	Schlußfolgerungen . . . . .	179
8.3	Ausblick . . . . .	180
<b>A</b>	<b>Gleichungen für Tensoren zweiter Stufe</b>	<b>181</b>
<b>B</b>	<b>Ableitung eines Eigenvektors</b>	<b>184</b>
<b>C</b>	<b>Die DIRAC-Delta Verteilung</b>	<b>186</b>
<b>D</b>	<b>Materialmodell zur Simulation von Mode-I Versagen</b>	<b>189</b>
<b>E</b>	<b>Das NEO-HOOKE-Materialmodell</b>	<b>191</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Numerische Simulationen auf der Grundlage der Finite-Elemente-Methode nehmen heutzutage eine dominante Stellung in der Entwicklung von Ingenieurstrukturen ein. Hierbei stellt die Traglastanalyse ein wichtiges Instrument zur Beurteilung der Sicherheit einer Konstruktion dar. Das primäre Ziel der Traglastanalyse liegt in der Ermittlung der maximal aufnehmbaren Belastung der untersuchten Struktur. Diese maximale Belastung wird entweder durch die Stabilitätsgrenze des Systems oder durch das Entstehen und die Ausbreitung von Versagenszonen aufgrund der Überschreitung von Festigkeitsgrenzen des Materials bestimmt. Repräsentative Beispiele für Versagensmechanismen auf Werkstoffebene stellen Risse in spröden Werkstoffen bei Zugbeanspruchung, Fließgelenke in Stählen und Scherfugen in Böden dar. Die numerische Analyse solcher Versagensformen bildet den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit.

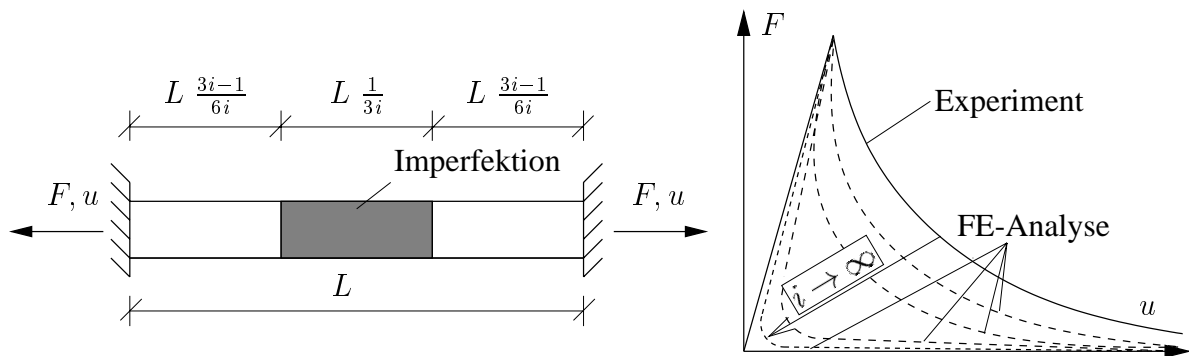
Die Analyse der mechanischen Werkstoffeigenschaften auf makroskopischer Ebene erfolgt im allgemeinen auf der Grundlage von experimentellen Untersuchungen von Probekörpern. Das Spröbruchverhalten von Beton wird häufig in einachsialen Zug- oder in Biegezug-Versuchen untersucht. Stähle werden meistens mit Hilfe einachsialer Tests analysiert. Die resultierenden Last-Verschiebungs-Diagramme solcher weggesteuerten Experimente weisen nach dem Erreichen der maximal aufnehmbaren Kraft bei weiterer Zunahme an Verformungen eine Abnahme der Belastung auf. Dabei existiert ein vielfältiges Spektrum von Ursachen für diese Abnahme der gemessenen makroskopischen Materialfestigkeit. Sind bei spröden Werkstoffen Mikrorisse und die daraus hervorgehende reduzierte Querschnittsfläche für die Verminderung der Materialfestigkeit verantwortlich (*Mode I-Versagen*), so sind duktile Materialien durch die Ausbildung von Scherversagenszonen gekennzeichnet (*Mode II-Versagen*). Neben Zug- bzw. Scherversagen existieren auch Formen gemischten Versagens (*Mixed-Mode-Versagen*). Desweiteren ist es möglich, daß ein Material unter verschiedenen Belastungszuständen unterschiedliche Versagensmechanismen aufweist. So ist Beton durch ein sprödes Materialverhalten bei Zugbeanspruchung und durch ein duktileres Materialverhalten unter vorwiegender allseitiger Druckbelastung charakterisiert.

In der Kontinuumsmechanik erfolgt die Beschreibung des Verhaltens von Werkstoffen in homogener Form, d.h. in Form von Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Wird Materialversagen mittels numerischer Modelle, die auf einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung basieren, approximiert, können daraus physikalisch unsinnige Ergebnisse resultieren. Um dies zu verdeutlichen, wird im folgenden Absatz exemplarisch ein einachsialer Zugversuch einer Betonprobe betrachtet. Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abb. 1.1 dargestellt. Die durchgezogene Linie im Last-Verschiebungs-Diagramm korrespondiert hierbei zu den experimentell ermittelten Daten.

Zunächst erfolgt die numerische Analyse des Systems unter der Annahme räumlich konstanter Materialparameter. Mit der daraus resultierenden homogenen Spannungs- und Verzerrungsantwort wird das Spannungs-Dehnungs-Diagramm durch die Gleichungen  $F = \sigma_{11} A$  und  $u = \varepsilon_{11} L$  in das Last-Verschiebungs-Diagramm überführt. Hieraus folgt, daß die Spannungs-Dehnungs-Beziehung qualitativ den gleichen funktionalen Verlauf aufweist wie das dazu korrespondierende Last-Verschiebungs-Diagramm. Somit nehmen nach Erreichen der maximalen Spannung bei weiter monoton steigenden Verzerrungen die Spannungen ab. Dieses Phänomen wird auch als Entfestigung bezeichnet. Die numerische Simulation von Entfestigungsphänomenen ist ein zentraler Forschungsgegenstand in der Materialmodellierung. Für den in Abb. 1.1 dargestellten Zugversuch werden die Finite-Elemente-Analysen mittels unterschiedlicher räumlicher Diskretisierungen durchgeführt. Gemäß Abb. 1.1 wird hierzu der Parameter  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  variiert. Unabhängig vom Geometrieparameter  $i$  folgt aus der vorgegebenen Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei homogener Spannungsverteilung die gleiche Strukturantwort.

Da die Materialparameter in realen Strukturen jedoch stochastisch verteilt sind, stellt die zuvor betrachtete homogene Verzerrungsantwort einen Sonderfall dar, welcher bei einachsialen Zugversuchen von Betonproben nicht auftritt. Somit ist es sinnvoll, in einer weiteren numerischen Analyse den drei finiten Elementen aus Abb. 1.1 eine unterschiedliche Zugfestigkeit zuzuweisen. Gemäß Abb. 1.1 wird hierzu die Zugfestigkeit des mittleren finiten Elementes geringfügig herabgesetzt, so daß eine Imperfektion entsteht. Im Gegensatz zu den numerischen Analysen auf der Basis der räumlich konstant angenommenen Materialparametern ist die berechnete Dissipation somit auf das mittlere Element beschränkt. Die beiden anderen Elemente hingegen erfahren Entlastungsvorgänge. Da  $(L/(3i))_i$  eine Nullfolge darstellt, konvergiert im Limesübergang  $i \rightarrow \infty$  das Volumen des Bereiches positiver Dissipation gegen Null ( $\lim_{i \rightarrow \infty} L/(3i) = 0$ ). Hieraus folgt für die numerisch ermittelte, zum materiellen Versagen korrespondierende, Energie  $E := \int_{u=0}^{\infty} F \, du$  der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} E = 0$  (s. Abb. 1.1). Die auf die Querschnittsfläche  $A$  der Betonprobe bezogene Bruchenergie  $\mathcal{G}_f := E/A$  konvergiert somit für  $i \rightarrow \infty$  auch gegen Null. Dies steht im Widerspruch zu der experimentell verifizierten Beobachtung, daß  $G_f > 0$  ein objektiver Materialparameter ist.

Treten bei der numerischen Analyse homogener Verschiebungsfelder also keine Probleme auf, so ist für inhomogene Verschiebungsfelder gezeigt worden, daß die mittels der Finite-Elemente-Methode ermittelten Approximationen des Last-Verschiebungs-Verlaufes nach dem Erreichen der maximalen Last stark abhängig von der verwendeten räumlichen Diskretisierung sind. In der



**Abb. 1.1:** Einachsialer Zugversuch einer Betonprobe: Last-Verschiebungs-Diagramme auf der Grundlage der Finite-Elemente-Methode für verschiedene räumliche Diskretisierungen ( $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) vs. angenommener experimentell ermittelter Verlauf.

Realität sind solche inhomogenen Verschiebungsfelder dadurch gekennzeichnet, daß die Deformationen in einem zum Verhältnis der geometrischen Abmessungen der betrachteten Struktur relativ kleinen Bereich konzentriert sind. Man bezeichnet dieses Phänomen auch als Lokalisierung. Die Dicke des Bereiches lokalisierter Verformungen variiert dabei für physikalische Prozesse von der Mikrometer-Skala bei metallischen Werkstoffen bis zu mehreren Kilometern bei geologischen Erdhaltungsvorgängen.

Die numerische Analyse lokalisierter Versagens auf Basis der klassischen Kontinuumsmechanik ist aus zwei Gründen nur eingeschränkt möglich. Klassische kontinuumsmechanische Modelle basieren auf dem Prinzip der lokalen Wirkung. Die Materialantwort in einem speziellen Punkt ist daher lediglich von den Zustandsgrößen in diesem Punkt abhängig. Somit ist eine Längensinformation bezüglich der Dicke des Bereiches lokalisierter Verformungen nicht im Modell enthalten, so daß bei feiner werdender Diskretisierung gemäß Abb. 1.1 diese Dicke gegen Null konvergiert. Auf der anderen Seite ist es möglich, Lokalisierung als diskontinuierlichen Prozeß aufzufassen. Dies führt zu un stetigen Verschiebungs- oder Verzerrungsfeldern. Da die Kontinuumsmechanik jedoch auf einer Homogenisierung der heterogenen Materialantwort basiert, ist es nicht möglich, diskrete Lokalisierungsprozesse, wie z.B. Risse, zu modellieren. Zur numerischen Analyse von Lokalisierungsphänomenen ist es daher notwendig, entweder eine Längensinformation bezüglich der Dicke des Bereiches lokalisierter Verformungen in ein bestehendes Modell einzuarbeiten oder diskontinuierliche Verschiebungsfelder bzw. Deformationsgradienten zu berücksichtigen.

Aus diesem Grund wurden erweiterte kontinuumsmechanische Modelle entwickelt, welche vom Postulat der lokalen Wirkung abweichen („nicht-lokale erweiterte Materialmodelle“). Hierdurch gelang es, das Entstehen von lokalisierten Versagensformen, wie z.B. Scherbänder, numerisch zu erfassen. Allen Modellen dieser Klasse ist gemein, daß zur numerischen Berechnung des betrachteten Lokalisierungsprozesses eine ausreichend feine Auflösung des Bereiches lokalisierter Verformungen benötigt wird. Der damit verbundene numerische Aufwand ist daher beträchtlich.



Eine andere Möglichkeit, Lokalisierungsprozesse zu erfassen, wird durch die Verwendung von  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern bzw. Deformationsgradienten eröffnet. Im Gegensatz zu den nicht-lokalen erweiterten Modellen basiert diese Approximation auf einer makroskopischen Sichtweise. Daher kann eine erheblich gröbere räumliche Diskretisierung verwendet werden. Dies ist für die numerische Simulation realitätsnaher komplexer Ingenieurkonstruktionen von großer Bedeutung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine additive Erweiterung der  $C^0$ -stetigen Verschiebungsabbildung mit einem  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeld verwendet. Zur Gewährleistung der Unabhängigkeit der numerischen Resultate von der räumlichen Diskretisierung wird die diskontinuierliche Erweiterung des Verschiebungsfeldes in ein finites Element eingebunden, so daß die Topologie der Sprungstelle der diskontinuierlichen Feldgröße nicht auf die Elementränder beschränkt ist.

## 1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die, nach Ansicht des Autors, wichtigsten Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Modellierung lokalisiertem Materialversagens gegeben.

Die erste Veröffentlichung, in der Lokalisierungsphänomene wissenschaftlich untersucht wurden, ist die Arbeit [HADAMARD 1903]. HADAMARD studierte die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in Kontinua und leitete die Bedingung für stehende Wellen, also Wellen mit einer Geschwindigkeit von Null, her. Diese Bedingung ist äquivalent zur *starken Elliptizität* (s. [HADAMARD 1903]). Für Materialmodelle, die auf dem Postulat der maximalen Dissipation basieren, charakterisiert der Zeitpunkt der starken Elliptizität den Übergang von einem homogenen zu einem lokalisierten Deformationszustand. Dieser Zusammenhang wurde jedoch erst in den Arbeiten [HILL 1958; MANDEL 1966; THOMAS 1961] verstanden. In [RUDNICKI & RICE 1975; RICE & RUDNICKI 1980] leiteten die Autoren für verschiedene konstitutive Modelle Bedingungen für die Bildung lokalisierter Deformationszustände her und bestimmten desweiteren die räumliche Orientierung der dazu korrespondierenden Bereiche. Für eine umfangreiche Zusammenfassung verschiedener Aspekte lokalisiertem Werkstoffversagens wird auf [DE BORST 2001] verwiesen.

Mitte der 80-er Jahre wurde gezeigt, daß die mit der Finite-Elemente-Methode berechneten Lösungen auf der Grundlage klassischer kontinuumsmechanischer Modelle, die auf einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung in lokaler Form basieren, abhängig von der verwendeten Diskretisierung ist. DE BORST zeigte beispielsweise in [DE BORST 1986], daß sich mit einer speziellen räumlichen Diskretisierung nahezu jede numerische Lösung künstlich erzeugen läßt. Ein umfassender Überblick zu dieser Fragestellung ist den Arbeiten [JIRÁSEK 1999; JIRÁSEK & BAŽANT 2002] zu entnehmen.

Um die Abhängigkeit der mittels klassischer kontinuumsmechanischer Theorien erhaltenen numerischen Resultate bezüglich der räumlichen Diskretisierung zu beseitigen, wurden erweiterte Modelle entwickelt. Dabei wurde in verschiedenen Ansätzen eine Längenskala berück-

sichtigt, welche zur Dicke des Bereiches lokalisierter Deformationen korrespondiert. Zu diesen Ansätzen zählen nicht-lokale Modelle [PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT 1987A; BAŽANT & PIJAUDIER-CABOT 1988], die dadurch gekennzeichnet sind, daß das Prinzip der lokalen Wirkung aufgegeben wird, die gradientenerweiterten Theorien [MÜHLHAUS & AIFANTIS 1991; DE BORST & MÜHLHAUS 1992], die aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung der nicht-lokalen Modelle hergeleitet werden können sowie die COSSERAT-Kontinua [DE BORST 1991; STEINMANN & WILLAM 1991], bei welchen die Kinematik eines betrachteten Punktes neben dem Verschiebungsfeld durch zusätzliche Rotationsvariablen beschrieben wird. Diesen Modellen ist gemein, daß Lokalisierung als ein stetiger Prozeß aufgefaßt wird. Somit resultieren die numerischen Ergebnisse dieser Theorien in einem Deformationsgradienten, welcher im Bereich der lokalisierten Verformungen stetig ist und ein stark ausgeprägtes Maximum aufweist. Um diesen Verlauf des betrachteten Gradientenfeldes mittels der Finite-Elemente-Methode numerisch zu erfassen, ist eine ausreichend feine Diskretisierung der Bereiche lokalisierter Deformationszustände nötig. Hierdurch steigt der numerische Aufwand beträchtlich an.

Die Abhängigkeit der auf der Basis klassischer kontinuumsmechanischer Materialmodelle erhaltenen numerischen Resultate bezüglich der räumlichen Diskretisierung resultiert in einer nicht objektiven Bruchenergie. Somit folgen aus zwei unterschiedlichen Diskretisierungen zwei verschiedene Bruchenergien. Da jedoch experimentell verifiziert wurde (s. z.B. [REMMEL 1994]), daß die Bruchenergie eine objektive Materialkonstante ist, steht das numerisch ermittelte Resultat im Widerspruch zum korrespondierenden physikalischen Prozeß. Daher wurden Modelle entwickelt, welche die Bruchenergie als objektiven Materialparameter berücksichtigten. Hierzu wurde in den Arbeiten [PIETRUSZCZAK & MROŹ 1981; OLIVER 1989] der Entfestigungsmodul eines klassischen, lokalen Plastizitätsmodells mit der Bruchenergie gekoppelt. Somit wird der Entfestigungsmodul zu einer Funktion in Abhängigkeit der Geometrie des betrachteten finiten Elementes. Im Gegensatz zu dieser Idee entwickelten [HILLERBORG, MODEER & PETERSSON 1976] auf der Grundlage einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung ein Modell für spröde Werkstoffe, welches ebenfalls zu einer konstanten Bruchenergie führt. Im Rahmen dieses Modells wurde eine Entfestigungsfunktion für die Normalkomponente des Traktionsvektors der Reißfläche postuliert, wobei die Entfestigungsfunktion in Abhängigkeit der Reißweite formuliert wurde.

Aus mathematischer Sicht erfordern Lokalisierungsprozesse eine sprungstetige Abbildung des Verschiebungsfeldes. Die glatte Deformationsabbildung geht somit in eine  $C^0$ -unstetige Funktion über. JOHNSON zeigte in [JOHNSON 1976], daß diskontinuierliche Verschiebungsfelder zulässige Funktionen zur Lösung der Differentialgleichung eines perfekt-plastischen Fachwerkstabes sind (s. auch [MATTHIES, STRANG & CHRISTIANSEN 1979]). Hierdurch wurde die Möglichkeit gegeben, sprungstetige Deformationsabbildungen zur Analyse von Randwertproblemen der Strukturmechanik heranzuziehen. Die Ideen von JOHNSON verwendeten [BAŽANT & BELYTSCHKO 1985] zur Analyse eines eindimensionalen Fachwerkstabes. Im Gegensatz zu [JOHNSON 1976] verwendeten BAŽANT & BELYTSCHKO ein entfestigendes Materialmodell und betrachteten die Ausbreitung einer Schockwelle. Die Autoren zeigten, daß auch für dieses

analysierte Problem eine sprungstetige Funktion die Lösung des Verschiebungsfeldes darstellt. Desweiteren belegten sie, daß die hierzu korrespondierende Dissipation zu Null verschwindet.

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wurden sprungstetige Verschiebungsfelder erstmalig in [JOHNSON & SCOTT 1981] angewendet. JOHNSON & SCOTT analysierten einen Fachwerkstab unter der Annahme eines perfekt-plastischen Materialmodells mittels  $C^0$ -unstetiger Ansatzfunktionen des Verschiebungsfeldes. Auf der Basis der grundlegenden Arbeit [JOHNSON & SCOTT 1981] wurden in [DVORKIN, CUITIÑO & GIOIA 1990; KLISINSKI, RUNESSON & STURE 1991] zweidimensionale finite Elemente mit diskontinuierlichem Verschiebungsfeld entwickelt. DVORKIN, CUITIÑO & GIOIA nutzten zur Herleitung ein erweitertes Funktional in Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes sowie des Verzerrungsfeldes. In [KLISINSKI, RUNESSON & STURE 1991] hingegen wurde die Diskontinuität des Verschiebungsfeldes mittels einer *Umverteilungs*-Matrix auf die Knotenverschiebungen des finiten Elementes verteilt. Den Modellen ist gemein, daß eine beliebige räumliche Orientierung der Diskontinuität beschrieben werden kann und daß die Parameter, die die Unstetigkeitsstellen beschreiben, auf Elementebene eliminiert werden. In [OLOFSSON, KLISINSKI & NEDAR 1994] verglichen die Autoren das Modell aus der Arbeit [KLISINSKI, RUNESSON & STURE 1991] mit einem *verschmierten* Rißmodell. KLISINSKI, RUNESSON & STURE zeigten für ein drei-knotiges ebenes Dreieckselement, daß die numerisch ermittelten Ergebnisse für beide Modelle identisch sind, falls die Sprungstelle des Verschiebungsfeldes parallel zu einer Kante des betrachteten finiten Elementes ist. Desweiteren wurden in [KLISINSKI, OLOFSSON & TANO 1995] verschiedene Traktions-Verschiebungs-Beziehungen zur Modellierung von Rissen in Betonstrukturen analysiert. KLISINSKI, OLOFSSON & TANO verifizierten anhand numerischer Beispiele, daß der Versagensmechanismus von spröden Werkstoffen mit einem *Mode-I*- bzw. *Mode-II*-Modell im allgemeinen nicht ausreichend erfaßt wird. Die besten Ergebnisse wurden mittels eines *Mixed-Mode*-Modells erzielt. Um die Leistungsfähigkeit der numerischen Umsetzung der Arbeit [KLISINSKI, OLOFSSON & TANO 1995] zu demonstrieren, wurde in [OHLSSON & OLOFSSON 1997] die Implementierung zur Analyse von zweidimensionalen Anker-Auszugs-Versuchen herangezogen.

Ein großer Fortschritt in der Modellierung von sprungstetigen Verschiebungsfeldern wurde durch die Arbeit [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] erreicht. Auf der Grundlage der Arbeit [MATTHIES, STRANG & CHRISTIANSEN 1979] analysierten SIMO, OLIVER & ARMERO klassische lokale Materialmodelle unter der Annahme diskontinuierlicher Verschiebungsfelder. Die Autoren belegten, daß der Entfestigungsmodul im Rahmen der betrachteten Problemstellung als eine singuläre Verteilung zu interpretieren ist. Desweiteren leiteten sie Bedingungen für die Entwicklung eines sprungstetigen Verschiebungsfeldes her. Neben den theoretischen Überlegungen wurde in [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] auch ein eindimensionales finites Element zur Simulation von Lokalisierungsphänomenen vorgestellt. Dieses Konzept wurde in [OLIVER & SIMO 1994] fortgesetzt bzw. in [SIMO & OLIVER 1994; OLIVER 1995A; OLIVER 1995B] für zweidimensionale Probleme erweitert. Als Grundlage der Implementierung diente das *Enhanced Assumed Strain*-Konzept (EAS), welches in [SIMO & RIFAI 1990; SI-

MO & ARMERO 1992] erstmalig vorgestellt wurde. Das zu dem diskontinuierlichen Verschiebungsfeld korrespondierende Verzerrungsfeld wurde in einem finiten Element berücksichtigt, so daß die räumliche Orientierung der Unstetigkeit unabhängig von der verwendeten Diskretisierung war. Zur Approximation der Diskontinuität, im Sinne einer Sprungfunktion, führten die Autoren im Rahmen der numerischen Umsetzung einen Regularisierungsparameter ein. Da die Unstetigkeitsstellen des Verschiebungsfeldes in der größeren Skala des makroskopischen Materialmodells berücksichtigt werden, eignet sich das Verfahren auch für die Analyse großer Strukturen. Für eine ausführliche Zusammenfassung und detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens wird auf die Arbeit [OLIVER 1996] verwiesen, welche numerische Umsetzungen für ein skalares Schädigungsmodell und für ein isotropes Plastizitätsmodell enthält. Zeitgleich zu den Veröffentlichungen von SIMO, OLIVER & ARMERO entwickelten auch [LARSSON, RUNESSON & ÅKESSON 1995; LARRSON & RUNESSON 1996] äquivalente numerische Umsetzungen. Schließlich wurde die Erweiterung für die Theorie finiter Deformationen in [LARSSON, STEINMANN & RUNESSON 1998] aufgezeigt.

In [ARMERO & GARIKIPATI 1995] wurde der Regularisierungsparameter durch Verwendung einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung beseitigt. Anders als bei den Modellen aus [SIMO & OLIVER 1994; OLIVER 1995A; OLIVER 1995B] korrespondiert das inelastische Materialverhalten nach dem Entstehen einer Versagenszone somit nicht mit einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Dieses Konzept wurde in [ARMERO & GARIKIPATI 1996] konsistent auf die geometrisch nichtlineare Theorie erweitert.

Der Übergang von Diskontinuitäten im Tensorfeld des Deformationsgradienten zu sprungstetigen Verschiebungsfeldern wurde in [OLIVER, CERVERA & MANZOLI 1997] und in [OLIVER, CERVERA & MANZOLI 1999] untersucht. Die Autoren leiteten für die Dicke des Bereiches lokalisierter Deformationen eine Evolutionsgleichung her. Für monotone Belastungsprozesse konvergiert diese Dicke gegen Null, so daß im Grenzfall Diskontinuitäten des Verschiebungsfeldes auftreten. Das Verfahren kann somit als Bindeglied zwischen den regularisierten Sprungstellen des Verschiebungsfeldes in [SIMO & OLIVER 1994] und der numerischen Umsetzung in [ARMERO & GARIKIPATI 1995] angesehen werden.

Im Rahmen des Konzeptes  $C^0$ -unstetiger Abbildungen des Verschiebungsfeldes wurde in [GARIKIPATI 1996; ARMERO 1997] ein anisotropes Schädigungsmodell zur Simulation von Rissen in spröden Werkstoffen vorgeschlagen. Desweiteren wurde in [REGUEIRO & BORJA 1999; BORJA & REGUEIRO 2001] ein nicht-assoziertes Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER zur numerischen Analyse von Böden im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder erweitert. Die Kopplung der Plastizitätstheorie mit der Schädigungsmechanik war inhaltlicher Schwerpunkt der Arbeit [MOSLER & MESCHKE 2001A]. Hier wurde das gekoppelte elasto-plastische, anisotrope Schädigungsmodell aus [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998] für sprungstetige Abbildungen der Verschiebungen modifiziert.

Eine Alternative zur Herleitung eines Materialmodells für  $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder wurde in [ARMERO 1999] aufgezeigt. ARMERO beschrieb den dissipativen Anteil der Energiedichtefunktion in Abhängigkeit der Diskontinuitäten des Verschiebungsfeldes und leitete die

Evolutionsgleichungen mittels des Postulats der maximalen Dissipation her. Auf dieser Grundlage wurde in [JIRÁSEK & ZIMMERMANN 2001] ein Schädigungsmodell zur Simulation von Rissen in Betonstrukturen vorgeschlagen.

Um das in [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] vorgestellte Verfahren zur Lösung praxisrelevanter Fragestellungen heranziehen zu können, erfolgte in [MOSLER & MESCHKE 2000; MOSLER & MESCHKE 2001C] die Erweiterung auf dreidimensionale finite Elemente. Dabei wurde keine Einschränkung hinsichtlich des Grades der Ansatzfunktionen zugrundegelegt. Ein dreidimensionales finites Element mit  $C^0$ -unstetigem Verschiebungsfeld wurde auch in [WELLS & SLUYS 2001C] entwickelt. Dieses Modell ist jedoch auf vier-knotige Tetraeder-Elemente beschränkt und basiert auf der statischen Kondensation. Auf der Basis der Arbeit [ARMERO & GARIKIPATI 1995] wurde bei der Implementierung der Modelle aus [MOSLER & MESCHKE 2000; MOSLER & MESCHKE 2001C] auf die Verwendung eines numerischen Regularisierungsparameters verzichtet. Anders als bei allen zuvor referenzierten Veröffentlichungen wurden die zusätzlichen Freiheitsgrade, welche die Diskontinuität des Verschiebungsfeldes beschreiben, nicht mittels statischer Kondensation sondern direkt auf Materialpunktebene eliminiert. Hieraus resultiert eine numerische Implementierung, die formal identisch zur algorithmischen Umsetzung von Kontinuumsmodellen mit  $C^0$ -stetigen Verschiebungsfeldern ist. Bestehende Programmstrukturen können somit ohne Änderung übernommen werden. Zeitgleich zu den Veröffentlichungen von MOSLER & MESCHKE eliminierte auch BORJA in [BORJA 2000] die Freiheitsgrade, die den diskontinuierlichen Anteil des Verschiebungsfeldes definieren, bereits auf GAUSS-Punktebene. Im Gegensatz zu den Arbeiten [MOSLER & MESCHKE 2000; MOSLER & MESCHKE 2001C] ist BORJA's Modell jedoch auf drei-knotige Scheibenelemente beschränkt.

In den neuesten Veröffentlichungen wird versucht, eine numerisch robustere Umsetzung zu entwickeln und *Locking*-Effekte im Rahmen der Finite-Elemente-Implementierung zu reduzieren. In [JIRÁSEK & ZIMMERMANN 2001] wurde das Modell  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder mit einem nicht-lokalen Schädigungsmodell zur Simulation von Rissen in spröden Werkstoffen gekoppelt. Das nicht-lokale Modell dient hierbei zur Ermittlung der Rißtopologie. Eine andere Möglichkeit, ein robustes numerisches Verfahren zu erreichen, wurde in [MOSLER & MESCHKE 2002A] aufgezeigt. Dabei wurde die bislang verwendete Annahme einer zeitlich invarianten Lokalisierungsfläche (*Fixed-Crack-Konzept*) aufgegeben und ein sogenanntes *Rotating-Crack-Konzept* verwendet. An einem einfachen Beispiel wurde belegt, daß das *Rotating-Crack-Konzept* Defekte des *Fixed-Crack-Verfahrens* beseitigt. Desweiteren wurde in [MOSLER & MESCHKE 2001B] gezeigt, daß die Approximationsgüte der numerischen Analysen gerissener Strukturen sich nicht durch höhergradige Ansatzfunktionen für den diskontinuierlichen Anteil des Verschiebungsfeldes verbessern lassen.

Aktuelle Entwicklungen im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder zur Simulation von Versagensmechanismen basieren auf dem *Partition-of-Unity-Konzept*. Dieses Konzept wurde erstmalig in [BABUŠKA & MELENK 1996; BABUŠKA & MELENK 1997] vorgestellt. Anders als in allen zuvor referenzierten Veröffentlichungen wurde in [MOËS, DOLBOW & BELYTSCHKO



1999; SUKUMAR, MOËS, MORAN & BELYTSCHKO 2000; WELLS & SLUYS 2001B] der diskontinuierliche Anteil des Verschiebungsfeldes als zusätzliche Feldgröße auf Strukturebene eingeführt. Daher ist es nicht möglich, die Parameter, die die Diskontinuität der Feldvariable beschreiben, auf Materialpunkt- bzw. Elementebene zu eliminieren.

### 1.3 Ziele und Umfang der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit liegt in der Entwicklung eines Regularisierungsverfahrens auf der Grundlage  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder zur numerischen Analyse lokalisierter Versagenszustände in Tragwerken. Hierbei ist eine numerisch robuste dreidimensionale Implementierung von zentraler Bedeutung, um ingenieurrelevante Problemstellungen analysieren zu können. Um das Ziel dieser Arbeit zu verwirklichen, sind Entwicklungen in drei verschiedenen Bereichen erforderlich.

- Zur numerischen Analyse von komplexeren Tragwerken ist es notwendig, ein Materialmodell zu entwickeln, welches geeignet ist, die wesentlichen mechanischen Charakteristika des Werkstoffverhaltens für eine betrachtete Problemstellung ausreichend genau zu approximieren. Da das Materialverhalten im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder mittels Traktions-Verschiebungs-Beziehungen beschrieben wird, stellt die Herleitung dieser Gleichungen einen wichtigen Teil der Arbeit dar. Um ein möglichst breites Anwendungsspektrum für das numerische Modell zu eröffnen, wird ein gekoppeltes elasto-plastisches, anisotropes Schädigungsmodell hergeleitet. Zur einfachen Kalibrierung wird das Materialmodell auf wenige, aussagekräftige Materialparameter reduziert. Das zu entwickelnde Werkstoffmodell für  $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder wird kritisch mit den konstitutiven Gleichungen der Kontinuumsmechanik  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder verglichen.
- Die numerische Umsetzung des Materialmodells  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder setzt voraus, daß die Topologie bzw. die räumliche Orientierung der Bereiche lokalisierten inelastischen Materialverhaltens bekannt sind. Diese berechnen sich aus einem Minimierungsproblem, für welches nur in Ausnahmefällen eine geschlossene Lösung bekannt ist. Um das Optimierungsproblem für beliebige Materialmodelle lösen zu können, wird ein numerisches Verfahren hergeleitet. Dabei ist eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus zu erzielen.
- Im dritten Teil dieser Arbeit erfolgt die effiziente Implementierung der Materialmodelle  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Die numerische Umsetzung wird allgemein gehalten, so daß sie nicht auf spezielle finite Elementtypen beschränkt ist und auch für dreidimensionale Problemstellungen herangezogen werden kann. Zur Analyse komplexerer Strukturen ist es außerdem wichtig, daß die Implementierung robust ist und daß Locking-Effekte reduziert werden. Um bestehende

Programmstrukturen effektiv nutzen zu können, erscheint es zudem sinnvoll, eine Form der numerischen Umsetzung zu erreichen, die äquivalent zu Materialmodellen  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder ist.

## 1.4 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in acht Kapitel gegliedert. Die Inhalte der Kapitel werden im folgenden kurz skizziert:

- In **Kapitel 2** werden klassische kontinuumsmechanische Materialmodelle für  $C^0$ -stetige Verschiebungsfelder beschrieben. Neben einem Plastizitätsmodell und einem Schädigungsmodell wird auch ein gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell vorgestellt.
- Im **3. Kapitel** werden die mathematischen und physikalischen Phänomene analysiert, welche zu Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld korrespondieren. Hierbei nimmt die Herleitung von Traktions-Verschiebungs-Beziehungen einen Schwerpunkt ein.
- **Kapitel 4** stellt zunächst verschiedene materielle Versagensformen dar. Zwei dieser Versagensformen, welche durch Sprungstellen im Verschiebungsfeld bzw. im Gradienten des Verschiebungsfeldes gekennzeichnet sind, werden anschließend genauer betrachtet. Für das zu den Versagensformen korrespondierende Optimierungsproblem wird ein numerischer Lösungs-Algorithmus vorgeschlagen.
- In **Kapitel 5** erfolgt die numerische Umsetzung für Materialmodelle mit diskontinuierlichem Verschiebungsfeld im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Zur Integration der Materialgleichungen wird der *Return-Mapping*-Algorithmus verwendet.
- Im **6. Kapitel** wird ein Plastizitätsmodell für  $C^0$ -stetige und für  $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder analysiert. Parallelen und Differenzen der beiden Modelle werden aufgezeigt und interpretiert.
- In **Kapitel 7** wird die Leistungsfähigkeit der neu entwickelten finiten Elemente anhand numerischer Beispiele demonstriert. Diesbezüglich erfolgen ausführliche Vergleiche zwischen verschiedenen, in Kapitel 5 vorgeschlagenen, Implementierungen. Anschließend werden zwei dreidimensionale Anker-Auszugs-Versuche mittels der neu entwickelten finiten Elemente numerisch berechnet.
- Mit **Kapitel 8** schließt diese Arbeit. Neben einer Zusammenstellung der erarbeiteten Ergebnisse wird ein Ausblick auf mögliche weiterführende Problemstellungen gegeben.

# Kapitel 2

## Klassische kontinuumsmechanische Materialmodellierung

Das folgende Kapitel beinhaltet eine Einführung in die klassischen kontinuumsmechanischen Materialgleichungen. Auf der Grundlage der Theorie irreversibler Prozesse wird zunächst die Plastizitätstheorie im Spannungsraum behandelt. Daran anschließend wird die Kontinuumschädigungstheorie dargestellt. Nach einer kurzen Motivation erfolgt die Beschreibung der Kontinuumschädigungstheorie für anisotrope Schädigungsevolution. Im Anschluß daran wird eine mögliche Kopplung zwischen beiden Modellen aufgezeigt, und es wird die numerische Umsetzung auf Basis des *Return-Mapping*-Algorithmus erläutert. Am Ende des Kapitels erfolgt ein Überblick über bestehende Probleme bei entfestigenden Materialien.

### 2.1 Elasto-plastische Materialmodelle

In diesem Abschnitt wird die im Spannungsraum formulierte Plastizitätstheorie kurz dargestellt (s. [SIMO & HUGHES 1998], [LUBLINER 1997], [CHEN & HAN 1988]). Die Darstellung erfolgt auf der Basis der geometrisch linearen Theorie. Die Erweiterung für finite Deformationen wird in Abschnitt 2.1.3 behandelt.

Die Einführung des Raumes der zulässigen Spannungen

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} := \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n \mid \phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \leq 0\} \quad (2.1)$$

ist im Rahmen der Plastizitätstheorie von zentraler Bedeutung. In Gl. (2.1) ist  $\phi$  eine Fließfunktion und  $\boldsymbol{q}$  eine interne, spannungsähnliche Variable. Innere Punkte der Menge  $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ , also  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} \setminus \partial\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ , sind durch elastisches Verhalten charakterisiert. Auf dem Rand  $\partial\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$  können neben elastischen auch plastische Zustände auftreten. Die Fließfunktion  $\phi : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in Gl. (2.1) unterliegt folgenden mathematischen Restriktionen:  $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$  muß ein konvexes Gebiet sein



und  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Das Gebiet ist konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen zugelassenen Spannungszuständen  $\sigma^{(1)}$  und  $\sigma^{(2)}$  zur Menge  $\mathbb{E}_\sigma$  gehören. Konvexität ist daher äquivalent zur Forderung

$$M := \{ \sigma^{(1)} + (1-t) \sigma^{(2)} \mid (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) \in \mathbb{E}_\sigma \times \mathbb{E}_\sigma \wedge t \in [0, 1] \} \subset \mathbb{E}_\sigma. \quad (2.2)$$

Ändert sich im Verlauf der Belastungsgeschichte ein elastischer Spannungszustand von  $\sigma^{(1)}$  zu  $\sigma^{(2)}$ , müssen auch die dazwischenliegenden Spannungszustände elastisch sein. Die zweite Forderung  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  beinhaltet die Stetigkeit der Ableitung. Im Rahmen der Mehrflächen-Plastizitätstheorie kann  $\phi \in \mathcal{C}^1$  in den Schnittpunkten der unterschiedlichen Fließflächen nicht immer erreicht werden. Hier muß für jede der endlich vielen Fließflächen  $\phi_i \in \mathcal{C}^1$  gelten. Die äquivalente Forderung bei Mehrflächen-Modellen lautet daher

$$\partial \mathbb{E}_\sigma \text{ LIPSCHITZ-stetig} \quad \text{und} \quad \partial \mathbb{E}_\sigma \in \mathcal{C}^1 \quad \text{für fast alle } \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma. \quad (2.3)$$

$\mathcal{C}^1$ -Stetigkeit muß demnach für alle Punkte, bis auf endliche viele, erfüllt sein.

Die zweite, grundlegende Annahme der infinitesimalen Plastizitätstheorie ist die additive Aufspaltung der Verzerrungen

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.4)$$

in einen elastischen Anteil  $\varepsilon^e$  und in einen plastischen Anteil  $\varepsilon^p$ . Motiviert wird diese Annahme durch beobachtbare, bleibende Verformungen in kristallinen Werkstoffen. Auf der Grundlage der Theorie hyperelastischer Materialien wird der Spannungstensor  $\sigma$  aus der partiellen Ableitung einer freien Energiefunktion  $\Psi$  nach der energetisch konjugierten Größe  $\varepsilon^e$  zu

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon^e, \alpha)}{\partial \varepsilon^e} \quad (2.5)$$

berechnet. Gl. (2.5) folgt aus der Dissipationsungleichung für die Theorie hyperelastischer Materialien unter der Annahme eines elastischen Belastungszustandes.

Der aktuelle zulässige Spannungsraum wird anhand der internen Variablen  $q$  im Rahmen der rationalen Thermomechanik (s. [COLEMAN & GURTIN 1967]) beschrieben. Analog zum Spannungstensor wird die spannungsähnliche Variable  $q$  durch die partielle Ableitung der freien Energiefunktion nach der energetisch konjugierten Variable  $\alpha$  zu

$$q := - \frac{\partial \Psi(\varepsilon^e, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (2.6)$$

bestimmt.

Aus dem Zweiten Hauptsatz der Thermomechanik folgt, daß im Zuge inelastischer Deformationen Energie dissipiert wird. Mechanische Arbeit wird demnach in andere Energieformen, wie z.B. thermische Energie, umgewandelt. Diese Prozesse sind irreversibel. Für isotherme Prozesse folgt die Dissipationsungleichung zu

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0. \quad (2.7)$$

mit der externen Spannungsleistung  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.8)$$

Gl. (2.7) wird auch häufig die CLAUSIUS-PLANCK-Form des Zweiten Hauptsatzes der Thermomechanik genannt. Gl. (2.5) und (2.6) zusammen mit Gl. (2.4) in die Dissipationsrestriktion (2.7) eingesetzt, führt zur reduzierten Form

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0. \quad (2.9)$$

Anders als Gl. (2.7), die unabhängig bezüglich der verwendeten Materialtheorien ist, gilt Gl. (2.9) nur im Rahmen der Plastizitätstheorie. In Gl. (2.9) bezieht sich das Skalarprodukt „ $\cdot$ “ auf den  $\mathbb{R}^n$ , da  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .

Im vorangegangenen Abschnitt ist der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und die spannungsähnliche Variable  $\mathbf{q}$  aus einem Potential  $\Psi$  hergeleitet worden. Zur Berechnung der Raten dieser Größen ist es nun notwendig, die Evolutionen der plastischen Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  und der internen Variablen  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  zu bestimmen. Eine Möglichkeit, diese Raten herzuleiten, liefert das Postulat der maximalen plastischen Dissipation. Dieses Postulat, welches zu assoziierten Fließregeln und zu assoziierten Ver- bzw. Entfestigungsregeln führt, wird nach [HILL 1950] auf VON MISES zurückgeführt. Anders als die Dissipationsungleichung ist das Postulat nicht für alle Werkstoffe gültig und stellt lediglich eine konstitutive Annahme dar.

Das zum Postulat der maximalen Dissipation äquivalente Optimierungsproblem kann unter Verwendung eines LAGRANGE-Multiplikators  $\lambda \geq 0$  zur Berücksichtigung der Restriktion  $\phi \leq 0$  in das Minimierungsproblem

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \lambda) = -\mathcal{D} + \lambda \phi = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda \phi \quad (2.10)$$

überführt werden. Aus den Stationaritätsbedingungen der Gl. (2.10) folgen die Evolutionsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.11)$$

und die Be- und Entlastungs-Bedingungen (KUHN-TUCKER-BEDINGUNGEN) (s. [LUENBERGER 1984])

$$\lambda \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \lambda \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (2.12)$$

**Anmerkung:** Analog zum LAGRANGE-Funktional (2.10) ist es möglich, die Gl. (2.11) auch aufgrund der Konvexität des zulässigen Spannungsraumes herzuleiten. Da ein weiterer Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^*$  und ein weiterer Tensor  $\mathbf{q}^*$  immer eine geringere Dissipation als der Zustand  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}$  aufweisen muß, gilt die Ungleichung

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0. \quad (2.13)$$

Diese Ungleichung ist unter Berücksichtigung der Fließregel (2.11)<sub>1</sub> und der Ver- bzw. Entfestigungsregel (2.11)<sub>2</sub> für konvexe Abbildungen  $\phi$  immer erfüllt.  $\square$

Es ist möglich, die Evolutionsgleichungen der assoziierten Plastizität durch die Einführung eines plastischen Potentials  $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  und eines Potentials  $h(\boldsymbol{\sigma}, q)$  zu verallgemeinern. Im Unterschied zur assoziierten Plastizität werden die Raten der plastischen Verzerrungen und der internen Variablen unter Verwendung der Potentiale  $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  und  $h(\boldsymbol{\sigma}, q)$  zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda \partial_{\mathbf{q}} h \quad \text{mit} \quad \partial_{\mathbf{a}}(\bullet) := \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{a}} \quad (2.14)$$

definiert. Die Wahl der Potentiale unterliegt auch hier der Restriktion des Zweiten Hauptsatzes der Thermomechanik. Für  $g = \phi$  und  $h = \phi$  ist der Sonderfall der assoziierten Plastizitätstheorie in der allgemeineren Klasse der nicht-assozierten Fließregeln enthalten.

Gemäß der KUHN-TUCKER-Bedingungen ist plastisches Fließen, also  $\lambda > 0$ , nur für  $\phi = 0$  möglich. Da Spannungszustände für  $\phi > 0$  nach Definition (2.1) nicht möglich sind, muß  $\boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$  während des gesamten plastischen Fließens erfüllt sein. Daraus folgt die Konsistenzbedingung

$$\dot{\phi} = 0 = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.15)$$

Setzt man Gl. (2.5) und (2.6) zusammen mit der Ratenform der plastischen Verzerrungen und der internen Variablen (2.14) in die Konsistenzbedingung ein, wird der plastische Multiplikator zu

$$\lambda = \frac{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g + \partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \mathbf{H} \cdot \partial_{\mathbf{q}} h} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^e \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Psi \\ \mathbf{H} := \partial_{\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha}} \Psi \end{array} \quad (2.16)$$

bestimmt. In Gl. (2.16) wurde der plastische Modul  $\mathbf{H} := -\partial_{\mathbf{q}}/\partial \alpha$  eingeführt.

Die Linearisierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist notwendige Voraussetzung, um die Finite-Elemente-Methode effektiv zur Lösung von Randwertproblemen heranziehen zu können. Aus der Ratenform des Spannungstensors

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.17)$$

und unter Verwendung des plastischen Multiplikators (2.16) resultiert der 4-stufige Tensor der Tangentenmoduli

$$\mathbb{C}^{\text{ep}} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \otimes \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g : \mathbb{C}}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g + \partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \mathbf{H} \cdot \partial_{\mathbf{q}} h} \quad \text{mit:} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.18)$$

Nachdem die grundlegenden Gleichungen der Elasto-Plastizität eingeführt worden sind, werden in den folgenden Abschnitten zwei verschiedene Plastizitätsmodelle vorgestellt. Beide Modelle unterliegen der Annahme isotroper Ver- bzw. Entfestigung und beschreiben die elastische Materialeigenschaft mittels eines konstanten Werkstoffensors  $\mathbb{C}$ . Unter der Annahme einer additiven Zerlegung des Potentials der freien Energie  $\Psi$  in einen elastischen Anteil  $\Psi_e$  und in einen irreversiblen Anteil  $\Psi_{\text{in}}$ , muß das Potential  $\Psi$  der Energiedichtefunktion die Form

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e}_{\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)} + \Psi_{\text{in}}(\alpha). \quad (2.19)$$

aufweisen.

### 2.1.1 RANKINE-Kriterium

Wird ein assoziiertes Plastizitätsmodell zur makroskopischen Modellierung von Rissen in spröden Materialien herangezogen, ist gemäß Gl. (2.1) der Raum der zulässigen Spannungen in Form einer mit dem Versagensmodus korrespondierenden Versagensfläche  $\phi$  zu definieren. Wie durch zahlreiche Experimente bestätigt wurde (s. z.B. [REMMEL 1994]), treten erste Risse im unbewehrten Beton nach Erreichen der maximal zulässigen Hauptspannung  $f_{tu}$  auf. Im Rahmen der numerischen Analyse spröder Werkstoffe wird  $f_{tu}$  auch als Zugfestigkeit bezeichnet. Ausgehend von der Spektralzerlegung des symmetrischen Spannungstensors (s. z.B. [BAŞAR & WEICHERT 2000])

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.20)$$

in die Eigenwerte  $\sigma_i$  und die Basistensoren  $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ , wird die maximale Hauptspannung zu

$$\sigma_A := \max_{1 \leq i \leq 3} \sigma_i \quad (2.21)$$

definiert. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingungen  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$  resultiert die Fließbedingung

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \underbrace{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma}}_{\sigma_A} - \sigma_{eq}^{ini} + q(\alpha) \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{ini} = f_{tu}. \quad (2.22)$$

In Gl. (2.22) ist  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  der zu  $\sigma_A$  korrespondierende Basistensor. Für den ungeschädigten Zustand gilt  $q(\alpha = 0) = 0$ . Treten Mikrorisse auf, entfestigt das Material und es gilt  $\dot{q} > 0$ . Der zulässige Spannungsraum verkleinert sich folglich. Hat sich ein Makroriß gebildet, kann keine Spannung mehr übertragen werden. Somit muß die Abbildung  $q$  der Restriktion  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q = f_{tu}$  genügen. Gemäß des Postulats der maximalen Dissipation folgt die Richtung der Rate der plastischen Verzerrungen für einen einfachen Eigenwert  $\sigma_A$  zu

$$\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.23)$$

### 2.1.2 DRUCKER-PRAGER-Modell

Anders als das Kriterium nach RANKINE wird das in [DRUCKER & PRAGER 1952] vorgestellte Versagenskriterium vorwiegend zur Modellierung von Beton im Druckbereich (s. z.B. [MESCHKE 1989]) und zur Simulation von Böden eingesetzt. Im Rahmen dieses Modells wird häufig auf die Verwendung des Postulat der maximalen Dissipation verzichtet.

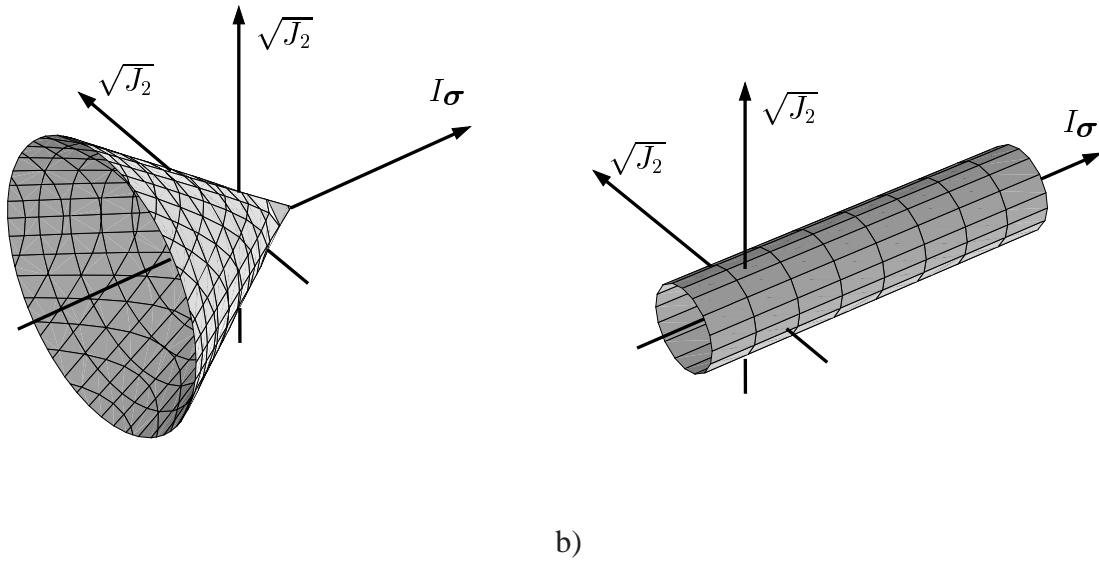
Zusätzlich zur Fließfunktion

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \sqrt{J_2} + \alpha_1 I_{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_{eq}^{ini} + q(\alpha) \quad (2.24)$$

wird für nicht-assozierte Plastizitätsmodelle das plastische Potential

$$g(\boldsymbol{\sigma}, q) = \sqrt{J_2} + \alpha_2 I_{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_{eq}^{ini} + q(\alpha) \quad (2.25)$$

eingeführt. Die Beschreibung von Ver- bzw. Entfestigung erfolgt auf der Grundlage einer assoziierten Regel ( $h = \phi$ ). In den Gl. (2.24) und (2.25) ist die zweite Invariante  $J_2$  des Spannungstensors und die erste Invariante  $I_\sigma$  des Spannungstensors verwendet worden (siehe Anhang A). Für  $\alpha_1 = \alpha_2$  geht das vorgestellte Modell in die Klasse der assoziierten Modelle über. Werden Werkstoffe betrachtet, deren Fließverhalten unabhängig vom hydrostatischen Druck  $I_\sigma$  ist, wird  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  gesetzt. Das hierzu korrespondierende assoziierte Plastizitätsmodell geht auf VON MISES zurück. Da dieses Modell nur von der zweiten Deviatorinvariante abhängt, wird es auch  $J_2$ -Plastizitätsmodell genannt. Zusammenfassend sind in Abb. 2.1 für beide Modelle die Fließfunktionen  $\phi$  dargestellt.



**Abb. 2.1:** Fließfunktionen: a) nach DRUCKER-PRAGER b) nach VON MISES.

Aus mathematischer Sicht ist das Modell ausreichend beschrieben. Zur Kalibrierung der Koeffizienten in den Gl. (2.24) und (2.25) wird die physikalische Interpretation der Materialparameter benötigt. Für zementgebundene Werkstoffe, wie z.B. Beton, können die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\sigma_{\text{eq}}^{\text{ini}}$  mit der einachsialen Druckfestigkeit  $f_c$  und der einachsialen Zugfestigkeit  $f_{\text{tu}}$  zu

$$\alpha_1 = \frac{f_c - f_{\text{tu}}}{\sqrt{3} (f_c + f_{\text{tu}})} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{ini}} = \frac{2 f_c f_{\text{tu}}}{\sqrt{3} (f_c + f_{\text{tu}})} \quad (2.26)$$

berechnet werden (s. z.B. [IORDACHE & WILLAM 1996]). Die Bestimmung des Materialparameters  $\alpha_2$ , welcher die Richtung der Rate der plastischen Verzerrungen definiert, wird hier nicht erläutert. Der Parameter  $\alpha_2$  ist stark abhängig vom verwendeten Material.

Abschließend werden die benötigten Ableitungen der Fließfunktion nach dem Spannungstensor

$$\partial_{\sigma} \phi = \frac{1}{2 \sqrt{J_2}} \text{dev} \sigma + \alpha_1 \mathbf{1} \quad (2.27)$$

sowie die Ableitungen des plastischen Potentials nach dem Spannungstensor

$$\partial_{\sigma} g = \frac{1}{2 \sqrt{J_2}} \text{dev} \sigma + \alpha_2 \mathbf{1} \quad (2.28)$$

angegeben. Mit  $\text{dev}\sigma$  wird hierbei der Deviator des Spannungstensors bezeichnet (s. Anhang A).

### 2.1.3 Finite Deformationen

Im Gegensatz zur infinitesimalen Plastizitätstheorie wird im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie von einer multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$  in einen elastischen Anteil  $\mathbf{F}^e$  und in einen plastischen Teil  $\mathbf{F}^p$  nach [LEE 1969] ausgegangen. Die implizite Einführung einer entlasteten, plastischen Zwischenkonfiguration wird hierbei, analog zur Theorie kleiner Verzerrungen und Verformungen, auf der Grundlage der Monokristall-Plastizität motiviert (s. z.B. [SIMO 1998], [MIEHE 1993]). Da diese multiplikative Zerlegung in der Regel nicht auf Strukturebene erreicht werden kann, wird sie punktweise (lokal) postuliert. Sie unterliegt somit keiner Kompatibilitätsbedingung.

Der zweite Unterschied zwischen der geometrisch linearen und geometrisch nichtlinearen Theorie resultiert aus der Einhaltung des Prinzips der Objektivität (Beobachterindifferenz; s. [TRUESDELL & NOLL 1965]). Im Rahmen der linearisierten Theorie muß dieses Prinzip nicht erfüllt sein. Ausgehend von einem ruhenden Beobachter, der zur Momentankonfiguration  $\mathbf{x}$  korrespondiert, kann aus mathematischer Sicht die Lage der aktuellen Konfiguration für einen zweiten Beobachter  $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}$  mittels einer Translation  $\mathbf{r}(t)$  und einer Rotation  $\mathbf{Q}(t) \in SO(3)$  beschrieben werden. Da für den Abstand zweier Punkte  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^* = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2 \quad (2.29)$$

beide Beobachter die gleiche Länge messen, wird für Vektoren in der Momentankonfiguration die Objektivitätsbedingung

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \quad (2.30)$$

postuliert. Die Objektivitätsbedingung für Tensoren höherer Stufe folgt aus der Verwendung von Gl. (2.30) und der Definition des dyadischen Produktes. Für Tensoren zweiter Stufe wird somit die Objektivitätsbedingung  $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T(t)$  hergeleitet.

**Anmerkung:** Nach der Definition der Objektivität ist der linearisierte Verzerrungstensor  $\epsilon$  für finite Deformationen nicht objektiv (s. [SIMO 1998]).  $\square$

Im folgenden werden im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie die Annahmen getroffen:

1. Das elastische Verhalten läßt sich mit hyperelastischen Materialmodellen approximieren.
2. Das Werkstoffverhalten ist isotrop.
3. Das Potential der Ver- bzw. Entfestigungsmechanismen  $\Psi_{\text{in}}$  ist entkoppelt vom Potential der elastischen Verzerrungen  $\Psi_e$ .

4. Die Fließfunktion ist isotrop.
5. Die Ver- bzw. Entfestigung ist isotrop.

Die Annahme 1.) impliziert die Existenz eines elastischen Potentials. Im Gegensatz zu der allgemeineren Klasse der CAUCHY-elastischen Materialien, für die die CAUCHY-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  aus einer tensorwertigen Funktion  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  in Abhängigkeit des lokalen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  in der Form  $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  berechnet werden, ist für hyperelastische bzw. GREEN-elastische Kontinua die integrierte spezifische innere Spannungsleistung nur vom Anfangs- und Endzustand des Deformationsgradienten abhängig. Die integrierte Spannungsleistung ist also für hyperelastische Materialmodelle wegunabhängig. Da die hyperelastischen Materialtheorien eine Untermenge der CAUCHY-elastischen Materialmodelle bilden, ist offensichtlich, daß jedes GREEN-elastische Material die Eigenschaft eines CAUCHY-elastischen Materials aufweist.

Unter Berücksichtigung der ersten drei Annahmen und der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten folgt das Potential der freien Energiefunktion (s. z.B. [SIMO 1992]) zu

$$\Psi(\mathbf{F}^e, \alpha) = \hat{\Psi}_e(\mathbf{F}^e) + \Psi_{\text{in}}(\alpha). \quad (2.31)$$

Die Darstellungsform (2.31) ist jedoch nicht zweckmäßig (s. [SIMO 1998]). Da  $\mathbf{F}^e$  kein objektiver Tensor ist, resultieren aus Gl. (2.31) im allgemeinen nicht objektive Spannungstensoren. Um die Restriktion der Objektivität einzuhalten, wird das elastische Potential in Abhängigkeit des elastischen rechten CAUCHY-GREEN-Tensors  $\bar{\mathbf{C}}^e$

$$\bar{\mathbf{C}}^e := \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \quad (2.32)$$

formuliert. Das Symbol  $\bar{\bullet}$  kennzeichnet dabei Größen in der plastischen Zwischenkonfiguration. Mit der Forderung  $\Psi_e(\bar{\mathbf{C}}^e) \equiv \hat{\Psi}_e(\mathbf{F}^e)$  wird das objektive Potential

$$\Psi(\bar{\mathbf{C}}^e, \alpha) = \Psi_e(\bar{\mathbf{C}}^e) + \Psi_{\text{in}}(\alpha) \quad (2.33)$$

hergeleitet. Unter der Annahme das Werkstoffverhalten sei isotrop, kann Gl. (2.33) in die äquivalente Form

$$\Psi(\mathbf{b}^e, \alpha) = \Psi_e(\mathbf{b}^e) + \Psi_{\text{in}}(\alpha) \quad (2.34)$$

überführt werden. In Gl. (2.34) ist die Notation

$$\mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad (2.35)$$

für den linken CAUCHY-GREEN-Tensor verwendet worden. Da isotrope Tensorfunktionen der Form  $f = f(\mathbf{A})$  lediglich Funktionen der Invarianten von  $\mathbf{A}$  sind (s. [CIARLET 1988]), folgt aus der Äquivalenz der drei Invarianten  $I_{\mathbf{b}^e} = I_{\bar{\mathbf{C}}^e}$ ,  $II_{\mathbf{b}^e} = II_{\bar{\mathbf{C}}^e}$  und  $III_{\mathbf{b}^e} = III_{\bar{\mathbf{C}}^e}$  die Identität der Potentialfunktionen  $\Psi_e(\bar{\mathbf{C}}^e) = \Psi_e(\mathbf{b}^e)$ .

Analog zur geometrisch linearen Theorie folgen die Spannungen aus dem Zweiten Hauptsatz der Thermomechanik  $\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0$ . Die externe Spannungsleistung  $\mathcal{P}$  erhält man in der



Momentankonfiguration mit dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  und dem KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  zu

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l}^{\text{sym}}. \quad (2.36)$$

Der unsymmetrische räumliche Tensor des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}$  beinhaltet unter der Verwendung der multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \underbrace{\dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1}}_{\mathbf{l}^e} + \underbrace{\mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1}}_{\mathbf{l}^p = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^{e-1}} \quad (2.37)$$

eine additive Zerlegung in einen elastischen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}^e$  und in einen plastischen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}^p$ . Für elastische Prozesse ( $\mathbf{l} = \mathbf{l}^e$ ,  $\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_e$  und  $\mathcal{D} = 0$ ) berechnet sich der KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  aus dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [SIMO 1992]

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l}^e - \dot{\Psi}_e = 0 \quad \text{zu} \quad \boldsymbol{\tau} = 2 \mathbf{b}^e \cdot \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{b}^e}. \quad (2.38)$$

Gl (2.38) impliziert, daß die Spannungen unmittelbar aus dem Potential berechnet werden. Eine aufwendige Zeitintegration entfällt demnach.

Eine Möglichkeit, isotropes Materialverhalten in effektiver Weise zu beschreiben, kann durch die Spektralzerlegung der symmetrischen Tensoren

$$\mathbf{b}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.39)$$

erreicht werden. Da die Tensoren  $\mathbf{b}^e$  und  $\boldsymbol{\tau}$  für isotrope Materialien gemäß Gl. (2.39) koaxial zueinander sind, ist es ausreichend, eine konstitutive Beziehung zwischen den Hauptspannungen  $\tau_i$  und den Hauptstreckungen  $\lambda_i$  zu fordern. Wird das elastische Potential  $\Psi_e$  in Abhängigkeit der HENCKY-Verzerrungen  $\varepsilon_i := \log \lambda_i$  formuliert, berechnen sich die Hauptspannungen zu

$$\tau_i = \frac{\partial \Psi_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \varepsilon_i}. \quad (2.40)$$

Im Rahmen der Plastizitätsbeschreibung finiter Deformationen sind Potentiale vom Typus (2.40) weit verbreitet (s. z.B. [SIMO 1998]). In Verbindung mit dem *Return-Mapping*-Algorithmus zur Integration der Materialgleichungen und der exponentiellen Abbildung zur Approximation der zugrundeliegenden Differentialgleichungen läßt sich eine effektive numerische Umsetzung herleiten (s. [SIMO 1992]).

Analog zur geometrisch linearen Theorie wird der Spannungsraum mittels einer Fließfunktion

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \tau_{\text{eq}}(\boldsymbol{\tau}) - \tau_{\text{eq}}^{\text{ini}} + q(\alpha) \leq 0 \quad (2.41)$$

definiert. Neben der isotropen Ver- bzw. Entfestigung impliziert Ungleichung (2.41) noch eine weitere Restriktion. Aufgrund der zu erfüllenden Objektivität, d.h.  $\tau_{\text{eq}}(\boldsymbol{\tau}) = \tau_{\text{eq}}(\mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot$



$\mathbf{Q}(t)^T$ ), ist die Klasse der Abbildungen  $\tau_{\text{eq}} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$  auf isotrope Funktionen beschränkt. Um anisotrope Funktionen herzuleiten, müssen Fließfunktionen in Abhängigkeit der zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen  $\bar{\mathbf{S}}$  bezüglich der Zwischenkonfiguration formuliert werden (s. [SIMO 1998]).

Nach der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens werden in diesem Absatz die Evolutionsgleichungen des plastischen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}^p$  und der internen Variablen  $\alpha$  hergeleitet. Hierzu wird das Postulat der maximalen Dissipation herangezogen. Für plastische Prozesse folgt die Dissipationsungleichung (2.38)<sub>1</sub> zu

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad \text{mit:} \quad \mathbf{d} = \mathbf{l}^{\text{sym}}. \quad (2.42)$$

Zur weiteren Umformung von Gl. (2.42) wird die objektive LIE-Zeitableitung des elastischen linken CAUCHY-GREEN-Tensors  $\mathbf{b}^e$  benötigt. Aufgrund nicht vorhandener Objektivität der materiellen Zeitableitung verschiedener räumlicher Größen (z.B der CAUCHY- und KIRCHHOFF-Spannungen) sind in der Literatur (s. [TRUESDELL & NOLL 1965; MARSDEN & HUGHES 1994]) verschiedene, modifizierte, objektive Zeitableitungen hergeleitet worden. Hierbei lassen sich alle objektiven Zeitableitungen auf die LIE-Ableitung zurückführen. Da man weiß, daß Tensoren in der Referenzkonfiguration per definitionem invariant bezüglich einer Beobachtertransformation sind, werden räumliche Tensoren in einem ersten Schritt in die Ausgangskonfiguration transformiert, anschließend zeitlich abgeleitet und danach wieder in die Momentankonfiguration transformiert. Somit folgt für die LIE-Zeitableitung des elastischen linken CAUCHY-GREEN-Tensors  $\mathbf{b}^e$

$$L_\nu \mathbf{b}^e := \mathbf{F} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{F}^{-T}] \right\} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (2.43)$$

Berücksichtigt man Gl. (2.43), wird die Zeitableitung des Potentials  $\Psi$  in die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = \partial_{\mathbf{b}^e} \Psi_b : \dot{\mathbf{b}}^e + \partial_\alpha \Psi_{\text{in}} \dot{\alpha} &= \partial_{\mathbf{b}^e} \Psi_b : [\mathbf{l} \cdot \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{l}^T + L_\nu \mathbf{b}^e] + \partial_\alpha \Psi_{\text{in}} \dot{\alpha} \\ &= 2 \partial_{\mathbf{b}^e} \Psi_b : \mathbf{b}^e : \left[ \mathbf{d} + \frac{1}{2} L_\nu \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1} \right] + \partial_\alpha \Psi_{\text{in}} \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.44)$$

überführt. Gl. (2.44) mit (2.38)<sub>2</sub> in die Dissipationsungleichung (2.42) eingesetzt, führt zur reduzierten Form (s. [SIMO 1992])

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \left[ -\frac{1}{2} L_\nu \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1} \right] + q \dot{\alpha} \quad \text{mit} \quad q = -\partial_\alpha \Psi_{\text{in}}. \quad (2.45)$$

Analog zur geometrisch linearen Theorie folgen aus Gl. (2.45), zusammen mit dem Postulat der maximalen Dissipation, die Evolutionsgleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} L_\nu \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1} &= \lambda \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi \\ \dot{\alpha} &= \lambda \partial_q \phi. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Werden die fünf Annahmen auf Seite 17 getroffen, können nicht alle 9 Evolutionsgleichungen der Komponenten von  $\mathbf{l}^p$  bestimmt werden. Zur Vervollständigung des Modells wird die Rate

des plastischen Spintensors  $\omega^p := \text{skew}l^p$  benötigt. Unter der Voraussetzung der beschriebenen Annahmen wird diese Rate zu  $\omega^p = \mathbf{0}$  angenommen (s. [SIMO 1998]).

**Anmerkung:** Wie in [SIMO 1992] und [SIMO & MESCHKE 1993] gezeigt wurde, führt eine exponentielle Approximation der Rate des elastischen linken CAUCHY-GREEN-Tensors unter Verwendung der Gl. (2.46)<sub>1</sub>, zusammen mit einem logarithmischen Verzerrungsmaß, zu einer additiven Aufspaltung der Gleichungen. Hierdurch kann eine zur geometrisch linearen Struktur analoge Form hergeleitet werden.  $\square$

## 2.2 Schädigungsmechanik

Anders als bei plastischen Materialbeschreibungen wird im Rahmen der Schädigungsmechanik nicht eine bleibende Deformation, sondern die Entstehung und das Aufweiten von Mikrodefekten, wie z.B. Mikrorissen, betrachtet. Auch diese Prozesse sind irreversibel. Die physikalische Motivation dieser Prozesse ist jedoch für beide Materialtheorien verschieden.

Die erste Arbeit, in der der Einfluß von Mikrodefekten im Kontinuum beschrieben wurde, geht auf [KACHANOV 1958] zurück. Im Gegensatz zur modernen skalaren Schädigungstheorie, wurde zur Erfassung von Materialschädigung die sogenannte Kontinuität  $c$  betrachtet.  $c = 1$  charakterisiert hierbei den Zustand des ungeschädigten Materials,  $c = 0$  beschreibt den Zustand des vollkommen zerstörten Materials. Nachfolgende skalare Schädigungsmodelle (s. [LEMAÎTRE 1983; LEMAÎTRE 1984]) basieren auf der Schädigungsvariablen  $d := 1 - c$ . Diese Variable läßt sich als Quotient

$$d = \frac{\Delta V}{V_0} \quad (2.47)$$

interpretieren. In Gl. (2.47) stellt  $\Delta V$  das Volumen der Mikrorisse in einem repräsentativen Volumenelement (RVE) des Volumens  $V$  dar. Konform zum Definitionsbereich der Kontinuität ist somit  $d = 0$  beim ungeschädigten und  $d = 1$  beim völlig zerstörten Material erfüllt. Unter Berücksichtigung von Gl.(2.47) und der freien Energiefunktion des ungeschädigten Materials  $\Psi_0$  folgt das Potential

$$\Psi(d, \boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - d) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.48)$$

Potentiale des Typus (2.48) werden aufgrund ihrer einfachen und robusten Implementierung häufig angewendet (s. z.B. [MAZARS 1986]). Neben diesen positiven Eigenschaften weist das skalare Schädigungsmodell jedoch auch Mängel auf. Eine große Anzahl unterschiedlicher Werkstoffe läßt sich im elastischen Bereich ausreichend anhand zweier unabhängiger Materialparameter beschreiben. Da gemäß Gl. (2.48) das elastische Materialverhalten mittels der skalarwertigen Variablen  $d$  degradiert wird, ist eine implizite Kopplung zwischen den zwei Materialparametern, die das isotrope elastische Materialverhalten approximieren, im Modell enthalten. Hierdurch können Querkontraktionseffekte im geschädigten Material nicht simuliert werden. Zur Beseitigung dieses Mangels kann das Potential  $\Psi$  additiv in einen volumetrischen

Anteil  $\Psi^{\text{vol}}$  und in einen deviatorischen Anteil  $\Psi^{\text{dev}}$

$$\Psi = \Psi^{\text{vol}} + \Psi^{\text{dev}} \quad (2.49)$$

zerlegt werden. Im Gegensatz zum Potential (2.48) ist es somit möglich, zwei skalare Schädigungsvariablen  $d^{\text{vol}}$  und  $d^{\text{dev}}$  einzuführen. Um anisotrope Effekte zu modellieren, die z.B. bei Rissen in Betonstrukturen auftreten, ist auch das isotrope Potential (2.49) weniger gut geeignet.

Um dem anisotropen Verhalten verschiedener Materialien gerecht zu werden, sind im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte tensorielle Schädigungsvariablen eingeführt worden. Da zur hinreichenden Charakterisierung klassischer kontinuumsmechanischer Materialmodelle ein 4-stufiger Tensor  $\mathbb{C}$  erforderlich ist, ist der allgemeinste Schädigungstensor  $\mathbb{D}^{(8)}$  ein Tensor 8-ter Stufe. Hiermit wird der elastische Tensor  $\mathbb{C}_0$  mittels

$$\mathbb{C} = \mathbb{D}^{(8)} :: \mathbb{C}_0 \quad (2.50)$$

linear in den Schädigungsraum transformiert. Gegen die Umsetzung dieser mathematisch gesehen konsistenten Vorgehensweise spricht, neben der komplexen Implementierung, die beinahe unmögliche Kalibrierung des Modells. In [ORTIZ 1985] ist der Nachgiebigkeitstensor ( $\mathbb{D} = \mathbb{C}^{-1}$ ) selbst als anisotropes Schädigungsmaß genutzt worden. Die Evolution des 4-stufigen Tensors leitete ORTIZ unter Verwendung des Postulates der maximalen Dissipation aus der im Spannungsraum formulierten Fließfunktion her.

Basierend auf der Veröffentlichung von ORTIZ ist in [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] das Modell geringfügig modifiziert worden und der algorithmischen Umsetzung besondere Aufmerksamkeit geschenkt worden. GOVINDJEE, KAY & SIMO erreichten durch eine Umformulierung des Algorithmus eine zur Plastizitätstheorie analoge Form. Hierdurch können die standardisierten Integrationsalgorithmen der Plastizitätstheorie genutzt werden. Da dieses Modell im Rahmen der gekoppelten elasto-plastischen Schädigungstheorie verwendet wird, folgt in diesem Abschnitt eine kurze Erläuterung des Schädigungsmodells. Ausgangspunkt der weiteren Herleitungen bildet das Potential

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{C}, \alpha) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Psi_{\text{in}}(\alpha). \quad (2.51)$$

Wird die aus der Identität

$$\mathbb{C} : \mathbb{D} = \mathbb{I} \quad (2.52)$$

gewonnene Beziehung zwischen den Raten des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}$  und des Werkstofftensors  $\mathbb{C}$

$$\dot{\mathbb{C}} = -\mathbb{C} : \dot{\mathbb{D}} : \mathbb{C} \quad (2.53)$$

in die Dissipationsungleichung (2.7) eingesetzt, folgt diese zu

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} + q \dot{\alpha} \geq 0. \quad (2.54)$$

Die Evolutionsgleichungen für den 4-stufigen Tensor  $\mathbb{D}$  und die interne Variable  $\alpha$  leiteten GOVINDJEE, KAY & SIMO aus dem Prinzip der maximalen Dissipation her. Nach Einführung der zulässigen Spannungszustände  $\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0$  (s. Gl. (2.1)) wird hierzu das Maximierungs- in ein Minimierungsproblem überführt und die Restriktion  $\phi \leq 0$  in Form des LAGRANGE-Funktionalis

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, q, \lambda) = -\mathcal{D} + \lambda \phi \quad (2.55)$$

berücksichtigt. Aus dem Optimierungsproblem folgen die Evolutionsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Rightarrow \dot{\alpha} = \lambda \partial_q \phi \quad (2.56)$$

und die KUHN-TUCKER-Bedingungen

$$\lambda \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad \lambda \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0. \quad (2.57)$$

Unter Berücksichtigung der postulierten und implizit genutzten Symmetrie  $\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{klij}$  wird aus Gl. (2.56)<sub>1</sub> die Evolutionsgleichung des Nachgiebigkeitstensors, bis auf eine Konstante  $c$ , zu

$$\dot{\mathbb{D}} = c \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \otimes \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \quad (2.58)$$

bestimmt. Nach Einführung einer speziellen Klasse von Fließfunktionen

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) - q_{\text{eq}}^{\text{ini}} + q(\alpha), \quad (2.59)$$

die auf einer positiven homogenen Funktion ersten Grades  $\sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma})$  basieren (es gilt also  $\sigma_{\text{eq}} = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \sigma_{\text{eq}} : \boldsymbol{\sigma}$ ), ergibt sich die Evolution des Nachgiebigkeitstensors zu

$$\dot{\mathbb{D}} = \lambda \frac{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \otimes \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.60)$$

Die in Abschnitt 2.1.1 vorgestellte Fließfunktion nach RANKINE gehört demnach zur Klasse der Fließfunktionen (2.59). Somit ist das Modell nach GOVINDJEE, KAY & SIMO zur Modellierung von Rissen in Beton anwendbar.

Ein großer Vorteil des Modells ist die zur klassischen Plastizitätstheorie analoge Form. Um das anisotrope Schädigungsmodell den Algorithmen der Plastizitätstheorie zugänglich zu machen, wird die Ratenform der Spannungen mit Gl. (2.53) und (2.56)<sub>1</sub> zu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C} : \dot{\mathbb{D}} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C} : \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \lambda}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{d}}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

umformuliert. Ein Vergleich der Gl. (2.61) und (2.17) belegt die analoge Form. In Gl. (2.61) ist  $\mathbb{C}$  nicht der elastische Tensor des ungeschädigten Materials. Mit dem Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}_0$  des ungeschädigten Kontinuums folgt für den 4-stufigen Tensor  $\mathbb{D}$  zur Zeit  $t = T$

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_0 + \int_{t=0}^T \dot{\mathbb{D}} dt. \quad (2.62)$$

Aus  $\mathbb{C} : \mathbb{D} = \mathbb{I}$  folgt somit, daß nach dem Auftreten von Schädigung der ursprüngliche Werkstofftensor  $\mathbb{C}_0$  zu  $\mathbb{C}$  übergeht. Gemäß der äquivalenten Form des Modells resultiert der tangentielle Werkstofftensor zu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{\text{ed}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C}^{\text{ed}} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \otimes \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C}}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi + H} \quad \text{und} \quad H := -\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}. \quad (2.63)$$

Effekte, die bei Rißschließung auftreten können (s. z.B. [ORTIZ 1985] und [KRAJČINOVIC 1996]), werden nicht näher betrachtet.

## 2.3 Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 ist die Plastizitätstheorie und die Schädigungstheorie betrachtet worden. Das makroskopische Materialverhalten von Werkstoffen, wie z.B. Beton, weist neben bleibenden Verformungen häufig auch die Degradation der elastischen Materialparameter auf. Hierdurch wird es erforderlich, die Modelle zu koppeln.

Nach [JIRÁSEK 1999] ist zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Konzepten zu differenzieren. Das Prinzip der effektiven Spannung stellt die erste Möglichkeit dar. Anders als bei der Plastizitätstheorie wird in einem ersten Schritt die Spannung, ausgehend von einem Schädigungsmodell, berechnet. Diese Spannung, auch als effektive Spannung bezeichnet, wird anschließend in das Fließkriterium eingesetzt. Das andere Konzept hingegen basiert auf einer Erweiterung eines Plastizitätsmodells mittels schädigungs-induzierter Verzerrungen. Diese Verzerrungen korrespondieren zu Steifigkeitsveränderungen, die durch Schädigung hervorgerufen werden. In diese Klasse fällt auch das in [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998] beschriebene Modell.

MESCHKE, LACKNER & MANG gründeten ihre Herleitung auf dem Potential der freien Energiefunktion von [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995]. Im Gegensatz zu Abschnitt 2.2 ersetzen die Autoren die Verzerrungen durch ihren elastischen Anteil

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbb{C}, \alpha) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Psi_{\text{in}}(\alpha). \quad (2.64)$$

Mit den Gl. (2.7), (2.8) und (2.53) folgt die Dissipationsungleichung zu

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} + q \dot{\alpha} \geq 0. \quad (2.65)$$

Analog zu [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] wird nach Einführung der Fließfunktion  $\phi$  das LAGRANGE-Funktional

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, q, \lambda) = -\mathcal{D} + \lambda \phi \quad (2.66)$$

betrachtet. Die Evolutionsgleichungen ergeben sich aus den Stationaritätsbedingungen der Gl. (2.66) zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \quad \text{und} \quad \dot{\alpha} = \lambda \partial_q \phi. \quad (2.67)$$

Mit den Definitionen  $\dot{\epsilon}^d := \mathbb{D} : \sigma$  und  $\dot{\epsilon}^{pd} := \lambda \partial_{\sigma} \phi$  wird Gl. (2.67) in die Form

$$\dot{\epsilon}^{pd} := \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^d = \lambda \partial_{\sigma} \phi \quad (2.68)$$

überführt. Um eine eindeutige Aufteilung der rechten Seite der Gl. (2.68) auf die Verzerrungen  $\dot{\epsilon}^p$  und  $\dot{\epsilon}^d$  zu ermöglichen, führten MESHKE, LACKNER & MANG einen skalaren Kopplungsfaktor  $\beta \in [0, 1]$  ein. Unter Berücksichtigung dieser Annahme werden die Raten  $\dot{\epsilon}^p$  und  $\dot{\epsilon}^d$  zu

$$\dot{\epsilon}^p = (1 - \beta) \lambda \partial_{\sigma} \phi \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}^d = \mathbb{D} : \sigma = \beta \lambda \partial_{\sigma} \phi \quad (2.69)$$

bestimmt. Der Vergleich von Gl. (2.69) mit (2.56)<sub>1</sub> führt zur Evolutionsgleichung des Nachgiebigkeitstensors

$$\mathbb{D} = \beta \lambda \frac{\partial_{\sigma} \phi \otimes \partial_{\sigma} \phi}{\partial_{\sigma} \phi : \sigma}. \quad (2.70)$$

Da bis auf die Evolutionsgleichung für die plastischen Verzerrungen das gekoppelte Modell mit dem von [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] übereinstimmt, ist es naheliegend, die Standard-Integrationsalgorithmen der Plastizitätstheorie zur Integration der Materialgleichungen zu nutzen. Unter Berücksichtigung der Evolutionsgleichungen (2.69) sowie Gl. (2.53) wird die Rantengleichung der Spannungen zu

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbb{C}} : \epsilon^e + \mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \mathbb{C} : \dot{\epsilon}^p \\ &= -\mathbb{C} : \mathbb{D} : \mathbb{C} : \epsilon^e + \mathbb{C} : \dot{\epsilon} - (1 - \beta) \lambda \mathbb{C} : \partial_{\sigma} \phi \\ &= -\mathbb{C} : \mathbb{D} : \sigma + \mathbb{C} : \dot{\epsilon} - (1 - \beta) \lambda \mathbb{C} : \partial_{\sigma} \phi \\ &= \mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \mathbb{C} : \partial_{\sigma} \phi \lambda \end{aligned} \quad (2.71)$$

umgeformt. Ein Vergleich von Gl. (2.71) mit Gl. (2.61) belegt deren Äquivalenz.

**Anmerkung:**  $\beta = 0.5$  ist nicht äquivalent zu der Aussage, daß 50% der inelastischen Verzerrungen zu Schädigung und 50% zu plastischen Mechanismen korrespondieren. Wie in [MESHKE, LACKNER & MANG 1998] gezeigt worden ist, resultiert aus einer exponentiellen Entfestigung für  $\beta = 0$  zwar eine exponentielle Spannungs-Dehnungs-Beziehung, bei Schädigung ( $\beta = 1$ ) hat die gewählte Entfestigung jedoch eine lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung zur Folge. Hierdurch wird der Einfluß des Parameters  $\beta$  nichtlinear in Bezug auf Schädigungs- und Plastizitätsanteile.  $\square$

## 2.4 Integration der Materialgleichungen

In diesem Abschnitt wird die numerischen Umsetzung der verschiedenen Materialmodelle erläutert. Da im weiteren Verlauf dieses Kapitels nur die Klasse der isotropen Fließfunktionen

$$\phi(\sigma, q) = \sigma_{\text{eq}}(\sigma) - q(\alpha) \quad (2.72)$$

betrachtet wird, sind die Ausführungen dieses Abschnitts auf Fließfunktionen des Typus (2.72) beschränkt. Die numerische Implementierung komplexerer Materialmodelle erfolgt analog (s. [SIMO & HUGHES 1998]).

**Anmerkung:** Damit die Fließbedingung (2.72) äquivalent zur Gl. (2.59) ist, muß lediglich das Vorzeichen der Evolutionsgleichung der internen Variable  $\alpha$  geändert werden (s. Gl. (2.73)<sub>3</sub>).

□

Für die Plastizitätsmodelle nach Abschnitt 2.1, genauso wie für die Schädigungstheorie nach Abschnitt 2.2 und die gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik nach Abschnitt 2.3, ist es notwendig, das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pd}}) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pd}} &= \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \\ \dot{q} &= \partial_{\alpha} q \dot{\alpha} \quad \text{mit:} \quad \dot{\alpha} = \lambda \\ \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) &= 0 \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = 0\end{aligned}\tag{2.73}$$

für einen inelastischen Belastungszustand zu lösen. Im Rahmen der weggesteuerten Finite-Elemente-Methode muß, ausgehend vom Zuwachs der Verzerrungen  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \Delta \boldsymbol{u}$ , die Änderung der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ , der internen Variable  $\alpha$  und der plastischen (schädigungs-induzierten) Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pd}}$  berechnet werden. Für eine ausführliche Diskussion verschiedener Integrationsalgorithmen wird auf [SIMO & HUGHES 1998], [SIMO 1998] und [HAN & REDDY 1999] verwiesen.

In dieser Arbeit wird zur numerischen Umsetzung der Materialmodelle der *Return-Mapping*-Algorithmus angewendet. Die erste Veröffentlichung, die die zugrundeliegende Idee beinhaltet, geht auf [WILKINS 1964] zurück. Neuere Veröffentlichungen (z.B. [PÉREZ-FOGUET & ARMERO 2000]) zeigen, daß der Return-Mapping-Algorithmus mit kleineren Modifikationen bzw. Erweiterungen immer noch eine der effektivsten numerischen Implementierungen ist.

Der Return-Mapping-Algorithmus fällt in die Klasse der sogenannten Prädiktor-Korrektor-Algorithmus. In einem ersten Schritt wird mittels eines Prädiktor-Schrittes überprüft, ob plastisches Fließen vorliegt. Dieser Prädiktor-Schritt wird in der Literatur häufig als *trial*-Zustand bezeichnet. Wird plastisches Fließen signalisiert, sind die Differentialgleichungen (2.73) zu lösen. Mit den Spannungen zum Zeitpunkt  $t = n + 1$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}}) \quad \text{mit} \quad (\bullet)_{n+1} := (\bullet)(t = n + 1)\tag{2.74}$$

werden die Trial-Spannungen zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} := \mathbb{C}_n : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}})\tag{2.75}$$

definiert. Ein Vergleich von Gl. (2.74) mit (2.75) liefert die Äquivalenz  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}$  für  $\lambda_{n+1} = 0$ . Im Trial-Zustand wird folglich von einem elastischen Schritt ausgegangen. Die zum Trial-Zustand korrespondierende Fließfunktion lautet somit

$$\phi_{n+1}^{\text{tr}} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, q_{n+1}^{\text{tr}}) \quad \text{mit} \quad q_{n+1}^{\text{tr}} := q(\alpha_n).\tag{2.76}$$

Wird neben der Konvexität des zulässigen Spannungsraumes berücksichtigt, daß  $\mathbb{C}$  positiv definit ist, folgen  $\phi^{\text{tr}} - \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \geq 0$  und somit auch die Be- und Entlastungsbedingungen (s. [SIMO



& HUGHES 1998])

$$\phi_{n+1}^{\text{tr}} \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{elastisch} \\ > 0 & \Rightarrow \text{inelastisch.} \end{cases} \quad (2.77)$$

Für einen Lastschritt mit  $\phi_{n+1}^{\text{tr}} > 0$  verbleibt die Lösung des Differentialgleichungssystems (2.73). Mit der Definition  $\Delta(\bullet)_{n+1} := (\bullet)(t = n + 1) - (\bullet)(t = n)$  wird die Rückwärts-EULER-Integration für die Rate der inelastischen Verzerrungen

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pd}} = \lambda_{n+1} \Delta t \partial \boldsymbol{\sigma} \phi|_{n+1} =: \Delta \lambda_{n+1} \partial \boldsymbol{\sigma} \phi_{n+1} \quad (2.78)$$

und für die interne Variable  $q$

$$\Delta q = -H_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \quad \text{mit:} \quad H_{n+1} := -\left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{n+1} \quad (2.79)$$

angewendet. Der klassische Return-Mapping-Algorithmus ist demnach ein implizites Verfahren. Durch die numerische Integration geht das Differentialgleichungssystem (2.73) in das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\varepsilon &= \mathbf{0} \\ R^\alpha &= 0 \\ \phi_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit:} \quad \begin{aligned} \mathbf{R}^\varepsilon &:= -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pd}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pd}} + \Delta \lambda_{n+1} \partial \boldsymbol{\sigma} \phi_{n+1} \\ R^\alpha &:= -\alpha_{n+1} + \alpha_n + \Delta \lambda_{n+1} \end{aligned} \quad (2.80)$$

über. Zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird das NEWTON-Verfahren zur Nullstellenbestimmung (s. z.B. [HARRIS & STOCKER 1998]) herangezogen. Dieses ist aufgrund seiner asymptotischen quadratischen Konvergenz sehr effizient. Wird  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbb{C}_n : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pd}}$  in die Linearisierung von  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pd}}$  eingesetzt (dies folgt unmittelbar aus  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \text{const}$  während der gesamten Iteration), können die linearisierten Approximationen der Residua  $\mathbf{R}^\varepsilon$  und  $R^\alpha$  zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d\mathbf{R}^\varepsilon \\ dR^\alpha \end{bmatrix}}_{d\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Xi_{n+1}^{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & H^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dq_{n+1} \end{bmatrix}}_{\Delta} + d\Delta \lambda_{n+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\sigma} \phi_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\nabla M}. \quad (2.81)$$

zusammengefaßt werden. In Gl. (2.81) ist die Definition der algorithmischen Moduli  $\Xi$

$$\Xi_{n+1}^{-1} := \mathbb{C}^{-1} + \Delta \lambda_{n+1} \partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \phi_{n+1} \quad (2.82)$$

verwendet worden. Mit der linearisierten Fließbedingung

$$d\phi_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\sigma} \phi_{n+1} \\ -1 \end{bmatrix}}_{\nabla \phi} \underbrace{\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dq_{n+1} \end{bmatrix}}_{\Delta}, \quad (2.83)$$

wird die Änderung des plastischen Multiplikators  $\lambda$  innerhalb einer Iteration zu

$$d\Delta \lambda_{n+1} = \frac{\phi_{n+1} - \nabla \phi^T \mathbf{A} \mathbf{R}}{\nabla \phi^T \mathbf{A} \nabla M}. \quad (2.84)$$



berechnet. Nach konvergierter Iteration ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) wird die Linearisierung  $d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$  zu

$$\mathbb{C}^{\text{ep}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \Xi - \frac{\{\mathbf{A} \nabla M \otimes \nabla \phi^T \mathbf{A}\}_{\{11\}}}{\nabla \phi^T \mathbf{A} \nabla M}, \quad (2.85)$$

berechnet. In Gl. (2.85) ist die Notation  $\mathbf{A}_{\{11\}}$  für die Submatrix 11 der Matrix  $\mathbf{A}$  verwendet worden. Da die Tangente nach Gl. (2.85) für finite Lastschritte nicht identisch mit der Tangente in Gl. (2.18) ist, hat sich zur Unterscheidung der beiden Tensoren, nach [SIMO & TAYLOR 1985], der Terminus „algorithmische Werkstofftangente“ für Gl. (2.85) durchgesetzt.

**Anmerkung:** Für den ersten inelastischen Lastschritt sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems (2.73) invariant bezüglich  $\beta$ . Wird das gekoppelte Modell angewendet, kann demnach ein *Abdriften* der analytischen Lösung zur Plastizitätstheorie beobachtet werden. Auch die folgenden Lastschritte weisen das gleiche Problem auf. Nur im Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  ist der Fehler beseitigt. Dieses Problem, welches in der Literatur bis zum jetzigen Zeitpunkt unerwähnt ist, ist mittels der Größe der Belastungssinkremente kontrollierbar.  $\square$

## 2.5 Entfestigende Materialien

Werden materielle Defekte betrachtet, wie z.B. sich öffnende Mikrorisse, führt die Funktion  $q(\alpha)$  zu einer Verkleinerung des elastischen Raumes. Man spricht dann auch von entfestigenden Materialien. Diese müssen das Stabilitätskriterium nach HILL (s. auch Gl. (4.5)) nicht notwendigerweise erfüllen.

Zur quantitativen Erfassung solcher Phänomene ist es wichtig, die dazu korrespondierende externe Energie zu berechnen. Die auf das Volumen bezogene Rate dieser Energie ist die externe Spannungsleistung  $\mathcal{P}$  (s. Gl. (2.8))

$$\mathcal{P} = \mathcal{D} + \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.86)$$

Folglich wird die gesamte, zum materiellen Defekt korrespondierende, Energie aus der Integration der Gl. (2.86) über das betrachtete Volumen und der Pseudo-Zeit  $t$  bestimmt. Mit der Zeit  $t = t_u$  bei vollständiger Entfestigung berechnet sich die Energie  $E$  zu

$$E = \int_{\Omega} \int_{t=0}^{t_u} \mathcal{P} \, dt \, dV. \quad (2.87)$$

Wird Gl. (2.87) für das gekoppelte elasto-plastische Modell nach Abschnitt 2.3 spezifiziert und nimmt man ferner eine räumlich konstante Verteilung der einzelnen Variablen an, folgt

$$E = V \int_{t=0}^{t_u} \left( \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} \right) dt = V \int_{t=0}^{t_u} \left[ \left( \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right) \boldsymbol{\sigma} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \lambda \right) \right] dt. \quad (2.88)$$

Da für plastische Prozesse nach Gl. (2.59)  $\sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) = q_{\text{eq}}^{\text{ini}} - q(\alpha)$  gilt und für die positiv homogene Funktion ersten Grades  $\sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \partial \boldsymbol{\sigma} \phi$  erfüllt ist, vereinfacht sich Gl. (2.88) zu

$$E = V \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\alpha=0}^{\alpha_u} (q_{\text{eq}}^{\text{ini}} - q(\alpha)) \, d\alpha. \quad (2.89)$$

Für Risse in spröden Materialien (s. [REMMEL 1994]) ist es sinnvoll, die berechnete Größe  $E$  auf die Rißfläche  $A_s$  zu beziehen. Die somit definierte Größe

$$\mathcal{G}_f := \frac{E}{A_s} = \underbrace{l_c}_{:= V/A_s} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \underbrace{\int_{\alpha=0}^{\alpha_u} (q_{\text{eq}}^{\text{ini}} - q(\alpha)) \, d\alpha}_{\text{const}} \quad (2.90)$$

stellt die Bruchenergie dar.

Wie durch Experimente (s. z.B. [REMMEL 1994]) bestätigt wurde, sind Rißzonen durch starke Lokalisierung der mikroskopischen Defekte gekennzeichnet. Werden Risse im Rahmen der Finite-Elemente-Methode auf Basis klassischer Kontinuumsmodelle numerisch simuliert, degeneriert die Breite dieser Zonen kleinstmöglich zur Breite eines finiten Elementes (s. [DE BORST 1986]). Da die Geometrie, bzw. die charakteristische Länge  $l_c$ , des Elementes implizit in der Formulierung enthalten ist (s. Gl. (2.90)), wird der physikalische Materialparameter der Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  abhängig von der verwendeten Diskretisierung. Für eine Folge von Bruchenergien bei monoton fallenden Längen  $l_c$  folgt der Grenzfall

$$\lim_{V \rightarrow 0} \mathcal{G}_f = 0. \quad (2.91)$$

Diesem physikalischen Defekt, der auch als Null-Dissipation bezeichnet wird, ist in der Vergangenheit besondere Aufmerksamkeit geschenkt worden.

## 2.6 Regularisierungsverfahren

Im vorliegenden Abschnitt werden einige Verfahren schematisch vorgestellt, welche das bei numerischen Analysen entfestigender Materialien auftretende Problem der Null-Dissipation beheben. Diese Verfahren werden im folgenden als Regularisierungsverfahren bezeichnet. In der Literatur wird der Begriff keineswegs eindeutig verwendet. Im Gegensatz zu der hier eingeführten Definition vertreten manche Autoren die Meinung, es sollten lediglich solche Methoden als Regularisierungsverfahren bezeichnet werden, die der eigentlichen mathematischen Ursache der Null-Dissipation entgegenwirken. Die mathematische Ursache ist hierbei der Übergang der Differentialgleichung vom elliptischen zum hyperbolischen Typus. Für eine ausführliche Diskussion verschiedener Regularisierungsverfahren wird auf [DE BORST 2001] verwiesen.

Die in den Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.3 vorgestellten klassischen Kontinuumsmodelle implizieren den Grundgedanken:

*„Die Werte der unabhängigen konstitutiven Variablen von materiellen Punkten in weiter Entfernung von  $\mathcal{M}$  beeinflussen die Werte der abhängigen Variablen in  $\mathcal{M}$  nicht wesentlich.“* (s. [STEIN & BARTHOLD 1995])

Solche Modelle werden auch als lokale Theorien bezeichnet. Wird diese Annahme aufgegeben, gelangt man zu den nicht-lokalen Materialmodellen. Die ersten Veröffentlichungen im Rahmen inelastischen Materialverhaltens gehen auf [PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT 1987B; BAŽANT & CHANG 1987] zurück. Im Gegensatz zur lokalen Variable  $(\bullet)$  wird bei diesen Theorien die nicht-lokale Größe  $(\bar{\bullet})$

$$(\bar{\bullet})(\mathbf{X}) = \int_{V_n} \alpha(\boldsymbol{\xi}) (\bullet)(\mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) dV \quad (2.92)$$

betrachtet. Die Wichtungsfunktion  $\alpha(\boldsymbol{\xi})$ , häufig eine GAUSS'sche Verteilung, hat zur physikalischen Interpretationsmöglichkeit der Restriktion  $\int_{V_n} \alpha(\boldsymbol{\xi}) dV = 1$  zu genügen. Durch die Wahl der Funktion  $\alpha(\boldsymbol{\xi})$  wird eine Längeninformation in die lokale Theorie eingearbeitet, welche einen direkten Einfluß auf die Ausweitung der Lokalisierungszone beinhaltet. Die Längeninformation bewirkt, daß die Kontraktion des inelastischen Bereiches bei feiner werdender Diskretisierung begrenzt wird. Demzufolge fällt das Modell in die Klasse der „*localization limiters*“.

Aus der Entwicklung der Gl.(2.92) in eine TAYLOR-Reihe kann eine Approximation der nicht-lokalen Modelle hergeleitet werden. Häufig wird bereits nach dem dritten Reihenglied abgebrochen. Die Grundidee hierfür stammt aus der Betrachtung mikromechanisch motivierter Versetzungsmodelle (s. [AIFANTIS 1984]). Unter der Voraussetzung, das elastische Materialverhalten ist isotrop, vereinfacht sich die Approximation (s. [PAMIN 1994; DE BORST & MÜHLHAUS 1992]) zu

$$(\bar{\bullet})(X) \approx (\bullet)(X) + c \nabla^2(\bullet)(X). \quad (2.93)$$

Beide skizzierten Verfahren weisen neben den theoretischen Schwierigkeiten, die sich aus der Formulierung der Randbedingungen für die erweiterten Gradienten bzw. aus der Existenz der energetisch konjugierten Variable ergeben, auch Probleme hinsichtlich der Anwendbarkeit auf. Um den inelastischen Bereich qualitativ beschreiben zu können, ist mehr als ein finites Element in Richtung der Dicke dieses Gebietes erforderlich. Da diese Dicke oftmals eine andere Größenordnung als die betrachtete Struktur aufweist (z.B. Risse in Naturzugkühltürmen), ist der damit verbundene numerische Aufwand bei realen Systemen sehr groß.

Ein einfaches, aber dennoch effektives Verfahren zur Behebung der Null-Dissipation geht auf die Arbeit [PIETRUSZCZAK & MROŹ 1981] zurück. Gemäß Gl. (2.87) und (2.90) ist die Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  zu

$$\mathcal{G}_f = l_c g_f \quad \text{mit} \quad g_f := \int_{t=0}^{t_u} \mathcal{P} dt \quad (2.94)$$

definiert. In Gl. (2.94) stellt  $g_f$  die volumenspezifische Bruchenergie dar. Da  $g_f$  nur vom Materialverhalten abhängig ist und  $l_c$  nur von der Geometrie des finiten Elementes abhängig ist, repräsentiert Gl. (2.94) eine multiplikative Zerlegung der Bruchenergie in einen Anteil der zum Materialmodell korrespondiert und in einen geometrischen Anteil. Unter der Annahme,  $\mathcal{G}_f$  ist ein konstanter Materialparameter, wird die auf das betrachtete Volumen bezogene Energie  $g_f$  zu

$$g_f = \frac{\mathcal{G}_f}{l_c} \quad (2.95)$$

berechnet. Wird desweiteren berücksichtigt, daß das Volumen des betrachteten finiten Elementes implizit in der Länge  $l_c$  enthalten ist (mit dem Vektor der diskreten Knotenkoordinaten  $\mathbf{X}^e$  gilt also  $l_c = l_c(\mathbf{X}^e)$ ), und daß  $g_f$  mittels der Entfestigungsfunktion  $q(\alpha)$  aufgrund des ersten Hauptsatzes der Integralrechnung abhängig von deren erster Ableitung  $H := -\partial q/\partial \alpha$  ist, folgt für den Entfestigungsmodul  $H$

$$H = H(\mathcal{G}_f, l_c). \quad (2.96)$$

Da  $g_f = g_f(H)$  gilt, ist die volumenspezifische Bruchenergie abhängig von der Geometrie des betrachteten finiten Elementes. Die meßbare Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  hingegen ist invariant bezüglich  $l_c$ . Für die Abbildung  $l_c(\mathbf{X}^e)$  sind in der Literatur unterschiedliche Ansätze zu finden. Häufig wird

$$l_c = \sqrt[3]{V} \quad (2.97)$$

genutzt. Es existieren jedoch auch Definitionen einer charakteristischen Länge, die die Elementform berücksichtigen (s. z.B. [OLIVER 1989]).

Das in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Regularisierungsverfahren führt ebenfalls zu einer konstanten Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$ . Die Grundidee dieses Verfahrens geht auf [HILLERBORG, MODEER & PETERSSON 1976] zurück. Hierzu wird die Bruchenergie für eindimensionale Kontinua analysiert. Mit  $du_1 = l_c d\varepsilon_{11}$  folgt die Bruchenergie zu

$$\mathcal{G}_f = \int_{u_1=0}^{u_1^0} \sigma_{11} du_1. \quad (2.98)$$

Wird anstelle einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Form  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$  eine Traktions-Verschiebungs-Beziehung der Form  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(u_1)$  postuliert, ist gemäß Gl. (2.98) die Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  unabhängig von der Größe des betrachteten finiten Elementes. Das in den Kapiteln 3 und 5 vorgestellte Finite-Elemente-Modell beinhaltet ebenfalls eine Traktions-Verschiebungs-Beziehung.



# Kapitel 3

## Modellierung von $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern

Im vorliegenden Kapitel werden die mathematischen und physikalischen Aspekte von Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld analysiert. Auf der Grundlage einer erweiterten Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen werden die benötigten Modifikationen der kinematischen Beziehungen vorgestellt. Anschließend wird die Kopplung zwischen den Verschiebungssprüngen und ihren energetisch konjugierten Größen anhand zweier unterschiedlicher Verfahren hergeleitet. Das erste dieser Verfahren stellt eine Projektion eines bestehenden Kontinuumsmodells auf eine Fläche dar. Das zweite Konzept hingegen basiert auf einer modifizierten Energiedichtefunktion.

### 3.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Kontinua mit einer inneren Fläche

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  die offene, beschränkte Menge der Punkte  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration eines betrachteten Kontinuums. Mit der disjunkten Zerlegung  $\partial_u \Omega \cup \partial_\sigma \Omega = \partial \bar{\Omega}$ ,  $\partial_u \Omega \cap \partial_\sigma \Omega = \emptyset$  des Randes  $\partial \bar{\Omega}$  der Menge  $\bar{\Omega}$  ist zwischen den DIRICHLET- und den NEUMANN-Randbedingungen zu differenzieren. Am DIRICHLET-Rand wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  vorgeschrieben (es gilt  $\mathbf{u}|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{u}^*$ ). Am NEUMANN-Rand wird für den Traktionsvektor  $\mathbf{T}$  die Bedingung  $\mathbf{T}|_{\partial_\sigma \Omega} = \mathbf{T}^*$  gefordert. Für den Spannungsvektor  $\mathbf{T}$  wird das CAUCHY-Lemma  $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$  in der Referenzkonfiguration verwendet. Hierbei ist die Notation  $\mathbf{P}$  für den ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor und  $\mathbf{N}$  für den Vektor der Normalen am Rand des Kontinuums verwendet worden. Wird desweiteren die Menge der virtuellen Verschiebungsfelder bzw. Testfunktionen  $\nu_0 := \{\boldsymbol{\eta}_0 \in H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\eta}_0|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0}\}$  eingeführt, ist es möglich, die starke Form des Gleichgewichtes und die starke Form der NEUMANN-Randbedingungen in der

Referenzkonfiguration in die sogenannte schwache Form

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \, dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \mathbf{b}\rho \, dV + \int_{\partial_{\sigma}\Omega} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (3.1)$$

zu überführen. Gl. (3.1) stellt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen dar.

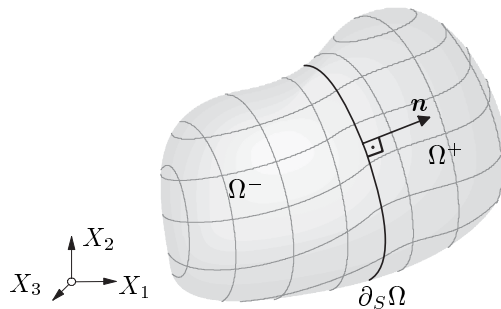
Um die Effekte von diskontinuierlichen Verschiebungsfeldern genauer zu betrachten, wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen an dieser Stelle für Kontinua mit einer inneren Fläche  $\partial_s\Omega \subset \Omega$  spezifiziert (s. [SIMO & OLIVER 1994; OLIVER 1996]). Diese innere Fläche könnte aus physikalischer Sichtweise z.B. eine Rißoberfläche in spröden Materialien oder eine Gleitfläche in Böden repräsentieren. Die Betrachtung einer Fläche  $\partial_s\Omega \subset \Omega$  im Inneren (s. Abschnitt 4.3.1) impliziert die Unterteilung des Körpers in die drei disjunkten Mengen  $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \partial_s\Omega = \Omega$ ,  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \partial_s\Omega = \emptyset$  (s. Abb. 3.1). Neben der Fläche  $\partial_s\Omega$  werden folglich die Teilkörper  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  definiert. Zur weiteren Herleitung wird quivalent zur Forderung für den Rand  $\partial\Omega$  postuliert, daß  $\partial_s\Omega$   $C^1$ -stetig bezüglich der Reparametrisierung in den Referenzkoordinaten  $\mathbf{X}$  ist. Mit der Notation  $[[\bullet]]$  für die Amplitude der Unstetigkeit der Feldgröße  $(\bullet)$  an der inneren Fläche (s. Abschnitt 4.3.1) und mit der Testfunktion  $\boldsymbol{\eta}_0 \in \nu_0$  wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu

$$\int_{\Omega} [\text{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{b}\rho] \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, dV = \int_{\partial_s\Omega} \underbrace{[[\mathbf{P}]] \cdot \mathbf{N}}_{[[\mathbf{T}]]} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Gamma + \int_{\partial_{\sigma}\Omega} [\mathbf{T}^* - \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}] \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Gamma \quad (3.2)$$

spezifiziert. Da Gl. (3.2) für beliebige Testfunktionen  $\boldsymbol{\eta}_0 \in \nu_0$  erfüllt sein muß, folgen unmittelbar die Gleichungen

$$\text{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{b}\rho = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{T}^* \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_{\sigma}\Omega \quad \text{und} \quad [[\mathbf{T}]]|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

Neben der Kinetik und der NEUMANN-Randbedingung ist also auch die Gleichung  $[[\mathbf{T}]]|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}$  zu erfüllen. Diese Gleichung fordert das Traktionsgleichgewicht an der inneren Oberfläche  $\partial_s\Omega$ .



**Abb. 3.1:** Kontinuum mit einer inneren Fläche  $\partial_s\Omega$ .

**Anmerkung I:**  $[[\mathbf{T}]]|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}$  ist nicht quivalent zu  $\mathbf{T}|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}$ . Es ist demnach möglich, daß Spannungen von  $\Omega^+$  nach  $\Omega^-$  übertragen werden. Ein diskreter Riß mit spannungsfreier Oberfläche ( $\mathbf{T}|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}$ ) ist ein Spezialfall von  $[[\mathbf{T}]]|_{\partial_s\Omega} = \mathbf{0}$ .  $\square$



**Anmerkung II:** Die Amplitude der Unstetigkeit  $[[\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)]]$  einer Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  im Punkt  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$  wird auch die Oszillation der Abbildung  $\mathbf{f}$  im Punkt  $\mathbf{X}_0$  genannt. Die Definition der Oszillation  $\omega_{\mathbf{f}}$  lautet:

$$\omega_{\mathbf{f}}(\mathbf{X}_0) := \|[ [\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)] ]\|_2 := \inf_{\delta > 0} \sup_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{B}(\mathbf{X}_0, \delta)} \|\mathbf{f}(\mathbf{X}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_2)\|_2; \quad (3.4)$$

mit der offenen  $\delta$ -Kugel  $\mathbb{B}(\mathbf{X}_0, \delta)$ :

$$\mathbb{B}(\mathbf{X}_0, \delta) := \{\mathbf{X} \in \Omega \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_2 < \delta\}, \quad \mathbf{X}_0 \in \Omega, \delta > 0. \quad (3.5)$$

□

## 3.2 Kinematik von $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern

Im Rahmen der Kontinuumsmechanik ist die Abbildung der Deformation  $\varphi : \bar{\Omega} \times t \rightarrow \mathbb{R}^3$  von zentraler Bedeutung. Sie ordnet jedem Punkt der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$  einen Punkt  $\mathbf{x}$  in der verformten Konfiguration zur Zeit  $t$  zu. Für einen speziellen Punkt  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}$  wird im folgenden die Abbildungsvorschrift  $(\mathbf{X}, t) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  betrachtet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird demzufolge die unverformte Konfiguration als Referenzkonfiguration eingeführt. Sollen Unstetigkeiten im Verschiebungsfeld betrachtet werden, muß die Abbildung  $\varphi$  zusätzlich zu einem  $C^0$ -stetigen Anteil  $\bar{\varphi}$  auch einen diskontinuierlichen Anteil aufweisen. Mit der Definition der HEAVISIDE-Funktion

$$H_s := \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega^+ \cup \partial_s \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

und der Amplitude der Unstetigkeit  $[[\varphi]]$  der Abbildung  $\varphi$  folgt die Bewegungsabbildung zu

$$\varphi = \bar{\varphi} + [[\varphi]] H_s. \quad (3.7)$$

Verwendet man die Kontinuität der Materie  $[[\mathbf{X}]] = \mathbf{0}$  und die Spezifikation der Bewegungsabbildung  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + [[\mathbf{u}]] H_s \quad (3.8)$$

additiv in einen  $C^0$ -stetigen Teil  $\bar{\mathbf{u}}$  und einen diskontinuierlichen Anteil  $[[\mathbf{u}]]$  zerlegt. Der zu Gl. (3.8) korrespondierende Deformationsgradient wird somit zu

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{1} + \text{GRAD} \bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{F}}} + [[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{N} \delta_s + \text{GRAD} [[\mathbf{u}]] H_s \quad (3.9)$$

berechnet. In Gl. (3.9) ist neben der Notation  $\delta_s$  für die DIRAC-DELTA-Verteilung an der Stelle  $\partial_s \Omega$  (s. Anhang C und [STAKGOLD 1998]) auch der Vektor  $\mathbf{N}$  als Normalenvektor der inneren Fläche eingeführt worden. Unter Berücksichtigung der NANSON-Gleichung und mit der

Einführung der Limiten

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^+(\mathbf{X}_s) &:= \lim_{\mathbf{X}^+ \rightarrow \mathbf{X}_s} \mathbf{n}(\mathbf{X}^+) & \text{mit } \mathbf{X}^+ \in \Omega^+ \\ \mathbf{n}^-(\mathbf{X}_s) &:= \lim_{\mathbf{X}^- \rightarrow \mathbf{X}_s} \mathbf{n}(\mathbf{X}^-) & \text{mit } \mathbf{X}^- \in \Omega^- \end{aligned} \quad \mathbf{X}_s \in \partial_s \Omega \quad (3.10)$$

werden die Normalenvektoren der inneren Fläche in der Momentankonfiguration zu

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^-(\mathbf{X}_s) &= \left[ \det \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^{-T} \mathbf{N} \frac{dA_s^{(0)}}{da_s^-} \right] \Big|_{\mathbf{X}_s} \\ \mathbf{n}^+(\mathbf{X}_s) &= \left[ \det (\bar{\mathbf{F}} + \text{GRAD} [\mathbf{u}]) (\bar{\mathbf{F}} + \text{GRAD} [\mathbf{u}])^{-T} \mathbf{N} \frac{dA_s^{(0)}}{da_s^+} \right] \Big|_{\mathbf{X}_s} \end{aligned} \quad (3.11)$$

berechnet. In Gl. (3.11) sind die infinitesimalen Flächenelemente  $dA_s^{(0)}$ ,  $da_s^-$  und  $da_s^+$  der unverformten inneren Fläche und der verformten inneren Fläche in  $\Omega^-$  bzw.  $\Omega^+$  eingeführt worden. Für  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$  existieren zum Punkt  $\mathbf{X}_s$  folglich zwei unterschiedliche Normalenvektoren in der Momentankonfiguration (s. [WELLS 2001]).

Daher erscheint die folgende Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  zunächst ungerechtfertigt. Wie jedoch im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausgearbeitet wird, ist es möglich, in  $\partial_s \Omega$  Traktions-Verschiebungs-Beziehungen herzuleiten (s. Anmerkung I, Seite 34). Werden diese in der Momentankonfiguration formuliert, ist es nicht eindeutig, auf welche der Normalenvektoren der Gl. (3.11) der Traktionsvektor zu beziehen ist. In [WELLS 2001] z.B. werden die Vektoren  $\mathbf{n}^+$  und  $\mathbf{n}^-$  arithmetisch gemittelt.

Eine weitere Begründung für die Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  ist durch die numerische Umsetzung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode gegeben (s. z.B. [BORJA 2000], [GARIKIPATI 1996], [ARMERO & GARIKIPATI 1996] und [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Entweder ist die Änderung der Sprungamplitude  $[\mathbf{u}]$  innerhalb eines Elementes sehr gering, so daß  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  lokal eine ausreichende Näherung darstellt, oder das betrachtete Gebiet ist zu grob diskretisiert, um die Topologie der inneren Fläche ausreichend genau beschreiben zu können.

Zusammenfassend ist die Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  im Rahmen einer Finite-Elemente-Umsetzung mit einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung an der Fläche  $\partial_s \Omega$  demnach gerechtfertigt.

Mit der Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  wird der Deformationsgradient in die Gleichung

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{F}} := \mathbf{1} + \text{GRAD} \bar{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{F}} := \mathbf{1} + \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N} \delta_s \quad (3.12)$$

überführt (s. [GARIKIPATI 1996; ARMERO & GARIKIPATI 1996]). Durch dieses Vorgehen konvertiert die additive Zerlegung nach Gl. (3.9) in eine multiplikative Aufspaltung. Ein Vergleich der Gl. (3.12) mit Abschnitt 2.1.3 liefert die formale Äquivalenz zur Plastizitätstheorie finiter Deformationen.

**Anmerkung:** Die Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  führt zu einer Inkompatibilität des Deformationsgradienten auf Strukturebene. Analog zur Plastizitätsbeschreibung finiter Deformationen kann

somit die Aufspaltung nach Gl. (3.12) nur lokal postuliert werden. Im Gegensatz zu der lokalen Zerlegung des Deformationsgradienten (3.12) wird in [WELLS 2001] nicht die Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  getroffen und Gl. (3.9) diskretisiert. Dadurch wird eine inkompatible Zerlegung des Deformationsgradienten umgangen.  $\square$

Aufgrund der analogen Form der multiplikativen Zerlegung (3.12) zur Plastizitätsbeschreibung finiter Deformationen wird der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  gemäß Abschnitts 2.1.3 additiv in zwei Tensoren zerlegt. Im Gegensatz zu Abschnitt 2.1.3 wird neben einem kontinuierlichen Anteil  $\bar{\mathbf{l}}$  der singuläre Anteil  $\tilde{\mathbf{l}}$  eingeführt. Wird in Gl. (2.37)  $\mathbf{F}^p$  durch  $\tilde{\mathbf{F}}$  ersetzt, folgt unmittelbar

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{l}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{l}} := \dot{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{l}} := \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{L}} := \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (3.13)$$

Der kontinuierliche Geschwindigkeitsgradient  $\bar{\mathbf{l}}$  ist mit dem Deformationsgradienten  $\bar{\mathbf{F}}$  und dessen Rate eindeutig bestimmt. Da  $\tilde{\mathbf{F}}$  eine singuläre Verteilung darstellt, ist die Herleitung des singulären Geschwindigkeitsgradienten  $\tilde{\mathbf{l}}$  hingegen nicht direkt möglich. Gemäß der Definition von  $\tilde{\mathbf{l}}$  wird die Existenz der Inversen des singulären Deformationsgradienten  $\tilde{\mathbf{F}}$  vorausgesetzt. Um die Inverse von  $\tilde{\mathbf{F}}$  zu bestimmen, wird die singuläre Verteilung  $\tilde{\mathbf{F}}$  mittels einer regulären Verteilung approximiert. Im Limesübergang konvergiert die reguläre Verteilung der Approximation gegen die singuläre  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Mit der Definition des materiellen Vektors des Verschiebungssprunges  $\mathbf{J} := \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot [\mathbf{u}]$  (s. [GARIKIPATI 1996]) und mit der Näherung der DIRAC-DELTA-Verteilung  $\delta_s \approx \frac{1}{k}$  mittels eines numerischen Regularisierungsparameters  $k$  erhält man die Approximation

$$\tilde{\mathbf{F}} \approx \mathbf{1} + \frac{1}{k} \mathbf{J} \otimes \mathbf{N}. \quad (3.14)$$

Gl. (3.14) ist auch in den Arbeiten [STEINMANN, LARSSON & RUNESSON 1997; LARSSON, STEINMANN & RUNESSON 1998; STEINMANN 1998; STEINMANN & BETSCH 2000] verwendet worden. Die Inverse der Approximation (3.14) wird mit Hilfe der SHERMAN-MORRISON-Formel zu

$$\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \approx \mathbf{1} - \frac{1}{k} \frac{\mathbf{J} \otimes \mathbf{N}}{1 + \frac{1}{k} \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}} \quad (3.15)$$

berechnet (s. Anhang A). Aus der Limesbetrachtung der Approximation des singulären räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\tilde{\mathbf{l}}$  folgt mit  $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$

$$\tilde{\mathbf{l}} = \mathcal{L}_\nu [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n} \delta_s. \quad (3.16)$$

In Gl. (3.16) ist die LIE-Zeitableitung des Verschiebungssprunges

$$\mathcal{L}_\nu [\mathbf{u}] = \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot [\mathbf{u}] \right) \quad (3.17)$$

eingeführt worden (s. [ARMERO & GARIKIPATI 1996]). Gl. (3.16) ist identisch mit dem singulären räumlichen Geschwindigkeitsgradienten aus [GARIKIPATI 1996; ARMERO & GARIKIPATI 1996]. Dennoch unterscheiden sich die Herleitungen. Anders als in [STEINMANN, LARSSON & RUNESSON 1997] wird nicht die Approximation (3.15) im weiteren Verlauf betrachtet,

sondern der Grenzwert (3.16). Demnach ist kein numerischer Regularisierungsparameter  $k$  erforderlich.

**Anmerkung:** Die Annahme  $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ , die den Veröffentlichungen [ARMERO & GARIKIPATI 1996; LARSSON, STEINMANN & RUNESSON 1998] zugrunde liegt, ist für die lokale inkompatible Zerlegung des Deformationsgradienten nach Gl. (3.12) nicht notwendig. Die Erweiterung auf zeitlich veränderliche Lokalisierungsflächen ( $\dot{\mathbf{N}} \neq \mathbf{0}$ ) erfolgt in Kapitel 6.  $\square$

Beschränkt man die Herleitungen auf die geometrisch lineare Kontinuumsmechanik, geht die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (3.12) in eine additive Aufspaltung des linearen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  über. Mit dem Verschiebungsfeld (3.8) und der Annahme  $\text{GRAD} [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} = \underbrace{\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}}_{=: \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underbrace{([\![\mathbf{u}]\!] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}_{=: \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \delta_s. \quad (3.18)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, die Diskontinuität des Verschiebungsfeldes bzw.  $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!]$  und  $\mathcal{L}_\nu [\mathbf{u}]$  in die Amplitude des Verschiebungssprunges  $\zeta$  und in einen Richtungsvektor  $\mathbf{m}$  aufzuspalten. Diese Zerlegung resultiert in der Gleichung

$$[\![\dot{\mathbf{u}}]\!] =: \dot{\zeta} \mathbf{m} \quad (3.19)$$

im Rahmen der geometrisch linearen Theorie und in

$$\mathcal{L}_\nu [\mathbf{u}] =: \dot{\zeta} \mathbf{m} \quad (3.20)$$

für finite Deformationen. Der singuläre räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\tilde{\mathbf{l}}$  geht daher in die Form

$$\tilde{\mathbf{l}} = \dot{\zeta} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \delta_s \quad (3.21)$$

über.

### 3.3 Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen an einer inneren Fläche

In Abschnitt 3.1 ist gezeigt worden, daß Kontinua mit einer inneren singulären Fläche der Restriktion des Traktionsgleichgewichtes  $[\![\mathbf{T}]\!] |_{\partial_s \Omega} = \mathbf{0}$  genügen müssen. Eine Gleichung, die diese Restriktion erfüllt, ist die Spannungsfreiheit  $\mathbf{T} |_{\partial_s \Omega} = \mathbf{0}$  an der Lokalisierungsfläche  $\partial_s \Omega$ . Die Forderung  $\mathbf{T} |_{\partial_s \Omega} = \mathbf{0}$  korrespondiert zu einem diskreten RiB. Da jedoch  $[\![\mathbf{T}]\!] |_{\partial_s \Omega} = \mathbf{0}$  nur Traktionsgleichgewicht beinhaltet, können verschiedene konstitutive Gesetze an  $\partial_s \Omega$  postuliert werden. Es ist daher möglich, neben einem Materialgesetz für  $\mathbf{P}$  eine zusätzliche konstitutive Gleichung an der Fläche  $\partial_s \Omega$  einzuführen.

Die Herleitung eines konstitutiven Gesetzes erfordert in einem ersten Schritt die Identifikation der energetisch konjugierten Variablen. Das Skalarprodukt  $[\![\mathbf{T}]\!] |_{\partial_s \Omega} \cdot \boldsymbol{\eta}_0$  in der schwachen Form

des Traktionsgleichgewichtes der Gl. (3.2) repräsentiert eine virtuelle Arbeit. Transformiert man diese Aussage in die komplementäre Form und verwendet ein Verschiebungsfeld nach Gl. (3.8), wird die flächenbezogene geleistete Arbeit an der inneren Fläche  $\partial_s\Omega$  zu  $\mathbf{T}|_{\partial_s\Omega} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  spezifiziert. Die im folgenden herzuleitende konstitutive Gleichung in  $\partial_s\Omega$  ist demnach von der Form

$$\mathbf{T}|_{\partial_s\Omega} =: \mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket). \quad (3.22)$$

Aus der Degeneration der Gl. (3.22) für eindimensionale Kontinua im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(\llbracket u_1 \rrbracket) \quad (3.23)$$

wird die Analogie zum fiktiven Reißmodell nach HILLERBORG in Abschnitt 2.6 deutlich.

**Anmerkung:** Die Kopplung des konstitutiven Gesetzes (3.22) mit den Punkten in  $\Omega^\pm$  erfolgt mittels der Kompatibilitätsbedingung  $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}^+$ . Diese Bedingung ist nicht in Gl. (3.2) enthalten. Nach [SIMO & OLIVER 1994] kann sie hergeleitet werden, indem man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Kontinua mit einer inneren Fläche betrachtet und den Raum der zulässigen Testfunktionen auf sprungstetige Abbildungen der Form  $\boldsymbol{\eta}_0 = \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 + \llbracket \boldsymbol{\eta}_0 \rrbracket H_s$  erweitert.  $\square$

Im Rahmen der Herleitung der Gl. (3.22) ist in der Literatur zwischen zwei verschiedenen Konzepten zu differenzieren. In den Veröffentlichungen [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993; SIMO & OLIVER 1994; OLIVER & SIMO 1994]) ist die Traktions-Verschiebungs-Beziehung auf der Grundlage eines Kontinuumsmodells  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder hergeleitet worden. Im Gegensatz dazu wird in den Publikationen [SNYMAN, BIRD & MARTIN 1991; LEE & PANDE 1999] a priori ein *Interface-Gesetz* der Form (3.22) postuliert. Diese Differenzierung ist auch in den Arbeiten [MIEHE & SCHRÖDER 1994] und [BORJA 2002] verwendet worden. Da die konstitutive Gleichung (3.22) für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung ist, werden die Vor- und Nachteile der zwei Verfahren kurz dargestellt.

Das erste Verfahren zur Herleitung von Gl. (3.22) zeichnet sich dadurch aus, daß die Traktions-Verschiebungs-Beziehung unabhängig von der konstitutiven Gleichung des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{P}$  ist. Das Konzept wurde in den Arbeiten [SNYMAN, BIRD & MARTIN 1991; LEE & PANDE 1999] angewendet. Nach Ansicht dieser Autoren spricht für das Verfahren, daß nach Auftreten von Lokalisierungsprozessen das für eine homogene Materialantwort entwickelte, kontinuumsmechanische Modell nicht weiter zur Beschreibung des Materialverhaltens verwendet werden dürfe. Auch bei BORJA ([BORJA 2002]), der seine Ausführungen auf Betrachtungen an intaktem und stark lokalisiertem Fels gründet, findet man diese Kritik. Im Gegensatz zu den früheren Veröffentlichungen basieren die Arbeiten [ARMERO 1999] und [JIRÁSEK & ZIMMERMANN 2001] auf einer Potentialfunktion in  $\partial_s\Omega$ . Auf der Grundlage dieses Potentials wird die Gleichung (3.22) mittels thermomechanisch konsistenter Vorgehensweisen bestimmt.

Das andere Konzept zur Spezifizierung der Gl. (3.22) geht auf die grundlegende Arbeit von [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] zurück. Unter Verwendung eines Plastizitätsmodells für  $C^0$ -

stetige Verschiebungsfelder (s. [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993]) bzw. Kontinuumsschädigungsmodells (s. [OLIVER 1996; ARMERO 1997]) werden die homogenen Materialantworten auf die singuläre Fläche  $\partial_s \Omega$  projiziert. Hierdurch wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung, die den zweistufigen Spannungstensor mit dem Verzerrungstensor verknüpft, in die vektorwertige Gleichung (3.22) überführt.

In dieser Arbeit sollen beide Verfahren gesondert dargestellt werden. In Abschnitt 3.4 wird beschrieben, wie die Traktions-Verschiebungs-Beziehung auf der Basis eines Materialmodells für  $C^0$ -stetige Verschiebungsfelder hergeleitet werden kann. Anders als in Abschnitt 3.4 wird in Abschnitt 3.5 die Energiedichtefunktion a priori additiv in einen regulären und in einen singulären Anteil aufgespalten. Aus dieser modifizierten Energiedichtefunktion wird Gl. (3.22) ermittelt. Beide Unterkapitel orientieren sich an dem Aufbau des Kapitels 2. Neben der Plastizitäts- und der Schädigungstheorie wird auch das gekoppelte elasto-plastische Modell mit anisotroper Schädigungsdegradation betrachtet.

### 3.4 Projektion von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen auf eine Fläche

In diesem Abschnitt wird die homogene Materialantwort eines klassischen kontinuumsmechanischen Modells auf eine innere Fläche projiziert. Nach Kenntnis des Autors lassen sich hierbei alle in der Literatur vorhandenen Ansätze auf die grundlegende Arbeit [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] zurückführen.

#### 3.4.1 Elasto-plastische Materialmodelle

Zu Beginn des Abschnitts 3.4 wird die homogene Materialantwort mittels eines Plastizitätsmodells finiter Deformationen spezifiziert (s. Abschnitt 2.1). Der erste Teil des vorliegenden Unterabschnitts ist an den Veröffentlichungen [GARIKIPATI 1996; ARMERO & GARIKIPATI 1996] orientiert.

Zur Herleitung der Gl. (3.22) wird in einem ersten Schritt die Rate des Traktionsvektors in der Referenzkonfiguration

$$\dot{T}|_{\partial_s \Omega} = \dot{P} \cdot N = [\mathcal{L}_\nu \tau + l \cdot \tau] \cdot n \quad (3.24)$$

mittels räumlicher Größen beschrieben. Neben der LIE-Ableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\tau$  ist auch die Transformation des Vektors  $N$  in die Momentankonfiguration verwendet worden. Setzt man die Beziehung zwischen der elastischen LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_\nu^e \tau$  des KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\tau$  und der LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_\nu \tau$

$$\mathcal{L}_\nu^e \tau = \mathcal{L}_\nu \tau + l^p \cdot \tau + \tau \cdot (l^p)^T, \quad (3.25)$$

zusammen mit der Definition der elastischen JAUMANN-ZAREMBA-Zeitableitung

$$\begin{aligned}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^e &:= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\omega}^e \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\omega}^e)^T = \mathbf{a} : \mathbf{d}^e \\ a^{ijkl} &= c^{ijkl} + \frac{1}{2} [\tau^{ik} \delta^{jl} + \tau^{il} \delta^{jk}] + \frac{1}{2} [\tau^{jl} \delta^{ik} + \tau^{jk} \delta^{il}],\end{aligned}\quad (3.26)$$

in Gl. (3.24) ein, folgt

$$\dot{\mathbf{T}}|_{\partial_s \Omega} = [\mathbf{c} : \mathbf{d} - \mathbf{a} : \mathbf{d}^p - 2 (\boldsymbol{\omega}^p \cdot \boldsymbol{\tau})^{\text{sym}} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{n}. \quad (3.27)$$

In Gl. (3.27) ist die Umformung

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) : \mathbf{d}^p = -2 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}^p)^{\text{sym}} \quad (3.28)$$

implizit genutzt worden. Wird die additive Aufspaltung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}$  in den symmetrischen Anteil  $\mathbf{d} := \mathbf{l}^{\text{sym}}$  und in den antisymmetrischen Anteil  $\boldsymbol{\omega} := \text{skew} \mathbf{l}$  sowie die additive Aufspaltung in elastische und plastische Anteile auf Gl. (3.13) angewendet, resultiert der reguläre räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\bar{\mathbf{l}}$  und der singuläre räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\tilde{\mathbf{l}}$  zu

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{l}} &= \bar{\mathbf{l}}^e + \bar{\mathbf{l}}^p & \text{und} & & \tilde{\mathbf{l}} &= \tilde{\mathbf{l}}^e + \tilde{\mathbf{l}}^p \\ &= \bar{\mathbf{d}}^e + \bar{\boldsymbol{\omega}}^e + \bar{\mathbf{d}}^p + \bar{\boldsymbol{\omega}}^p & & & &= \tilde{\mathbf{d}}^e + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^e + \tilde{\mathbf{d}}^p + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^p.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Mit der additiven Entkopplung singulärer und regulärer Verteilungen (3.29) wird Gl. (3.27) in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}|_{\partial_s \Omega} &= \underbrace{[\mathbf{c} : \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{a} : \bar{\mathbf{d}}^p - 2 (\bar{\boldsymbol{\omega}}^p \cdot \boldsymbol{\tau})^{\text{sym}} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{n}}_{\text{reguläre Verteilung}} \\ &+ \underbrace{[\mathbf{c} : \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{a} : \tilde{\mathbf{d}}^p - 2 (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^p \cdot \boldsymbol{\tau})^{\text{sym}} + \tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{n}}_{\text{singuläre Verteilung}}\end{aligned}\quad (3.30)$$

überführt. Die Rate des Traktionsvektors wird somit in eine singuläre und in eine reguläre Verteilung zerlegt. Da der Spannungsvektor eine reguläre Größe darstellt (s. z.B. [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993]), muß der singuläre Anteil der Gl. (3.30) zu Null verschwinden.

**Anmerkung:** Für den Sonderfall des Volumenlastvektors  $\mathbf{b}\rho = \mathbf{0}$  folgt unmittelbar mit der lokalen Gleichgewichtsaussage  $\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b}\rho = \mathbf{0}$  die strengere Bedingung, daß der Spannungstensor  $\mathbf{P}$  bzw. der Traktionsvektor  $\mathbf{T}$  konstant ist.  $\square$

Für die weiteren Herleitungen werden die folgenden Annahmen getroffen:

1. Die inelastischen Verformungen sind auf  $\partial_s \Omega$  beschränkt ( $\bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{0}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}}^p = \mathbf{0}$ ).
2. Das Kontinuumsmodell ist auch nach dem Auftreten der singulären Flächen  $\partial_s \Omega$  gültig.



3. Das Traktionsgleichgewicht  $[[\mathbf{T}]] = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{T}^\pm = \mathbf{T}_s$  ist auch nach der Verzweigung des Verschiebungsfeldes in einen kontinuierlichen und einen diskontinuierlichen Anteil erfüllt.

Annahme 1.) ist äquivalent zu  $\mathbf{d}^p = \tilde{\mathbf{d}}^p$ . Die gesamten inelastischen Verzerrungen sind demnach in der Fläche  $\partial_s\Omega$  konzentriert, wodurch die anderen Gebiete  $\Omega^+$  bzw.  $\Omega^-$  elastische Entlastungsvorgänge erfahren. Der Zustand  $\bar{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$  korrespondiert per definitionem zu einer homogenen Materialantwort und wird daher im folgenden Verlauf dieser Arbeit nicht weiter analysiert. Die Annahmen 2.) und 3.) bilden die notwendige Voraussetzung, damit die Traktions-Verschiebungs-Beziehung im lokalisierten Zustand ihre Gültigkeit beibehält.

Setzt man die Annahme 1.) zusammen mit den Evolutionsgleichungen des plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensors  $\mathbf{d}^p$  und des plastischen Spintensors  $\boldsymbol{\omega}^p$  in die Rate des Traktionsvektors (3.30) ein, folgt

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}^p &= \lambda \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^p &= \lambda \hat{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \lambda_\delta \delta_s. \quad (3.31)$$

Dabei kennzeichnet  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  die Richtung des plastischen Spintensors. Analog zur singulären Verteilung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten basiert auch der plastische Multiplikator  $\lambda$  auf der DIRAC-Delta-Verteilung. Demnach ist der dissipative Mechanismus auf  $\partial_s\Omega$  beschränkt. Da die Dicke des Bereiches  $\partial_s\Omega$  im Rahmen einer räumlichen Diskretisierung mittels der Finite-Elemente-Methode unabhängig von der Größe bzw. Geometrie des betrachteten finiten Elementes ist, sind die numerischen Ergebnisse invariant bezüglich der Diskretisierungen.

Um den plastischen Multiplikator  $\lambda$  zu bestimmen, wird die Konsistenzbedingung  $\dot{\phi} = 0$  betrachtet. Analog zu Abschnitt 2.1.3 wird die Fließfunktion  $\phi$  in KIRCHHOFF-Spannungen formuliert und ist daher, aufgrund des Prinzips der Objektivität, auf isotrope Abbildungen beschränkt. Aus dieser Einschränkung resultiert die Koaxialität der Tensoren  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi$  und somit

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : (\boldsymbol{\omega}^e \cdot \boldsymbol{\tau}) = \underbrace{(\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi \cdot \boldsymbol{\tau})}_{\text{sym.}} \cdot \boldsymbol{\omega}^e = 0 = \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^e). \quad (3.32)$$

Mit Gl. (3.32) wird die elastische JAUMANN-ZAREMBA-Zeitableitung zu

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^e &= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \dot{\boldsymbol{\tau}} - \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : (\boldsymbol{\omega}^e \cdot \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : [\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\omega}^e)^T] \\ &= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \dot{\boldsymbol{\tau}} - \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : [\boldsymbol{\omega}^e \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^e] \\ &= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \dot{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

vereinfacht. Unter Verwendung der Gl. (3.33) und der Definition der elastischen JAUMANN-ZAREMBA-Zeitableitung (3.26), zusammen mit der additiven Zerlegung des Deformationsge-

schwindigkeitstensors  $\mathbf{d}$  und der Annahme 1.)  $\bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{0}$ , wird die Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \dot{\boldsymbol{\tau}} + \partial_q \phi \dot{q} \\
&= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^e + \partial_q \phi \dot{q} \\
&= \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}^p) + \partial_q \phi \dot{q} \\
&= \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : \bar{\mathbf{d}} + \partial_q \phi \dot{q}}_{\text{reguläre Verteilung}} + \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^p)}_{\text{singuläre Verteilung}} = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

additiv in eine reguläre und in eine singuläre Verteilung zerlegt. Da  $\phi$  den Raum der zulässigen Spannungen definiert, die wiederum eine reguläre Verteilung darstellen, folgt, daß auch  $\dot{\phi}$  regulär sein muß (s. auch [OLIVER 1996]). Somit muß der singuläre Term aus Gl. (3.34) zu Null verschwinden und für den plastischen Multiplikator folgt

$$\lambda = \lambda_\delta \delta_s = \frac{1}{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi} \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : \tilde{\boldsymbol{l}}, \quad \text{da } \mathbf{a} : \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{a} : \tilde{\boldsymbol{l}}. \tag{3.35}$$

Mit der Fließbedingung (2.41) wird  $q$  der Menge der regulären Verteilungen zugewiesen, wodurch man mit der korrespondierenden Evolutionsgleichung (2.46)<sub>2</sub> zur Gleichung

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \lambda = H \lambda = H \lambda_\delta \delta_s \quad \Rightarrow \quad H^{-1} \dot{q} = \lambda_\delta \delta_s \tag{3.36}$$

gelangt ( $\partial_q \phi = 1$  s. Gl. (2.41)). Der Entfestigungsmodul  $H$  stellt also eine DIRAC-Delta-Verteilung dar. Führt man den regulären Entfestigungsmodul  $\bar{H}$  ein, ergibt sich die Rate der spannungsähnlichen Entfestigungsvariable  $q$  mit

$$H^{-1} = \bar{H}^{-1} \delta_s \quad \text{zu} \quad \dot{q} = \bar{H} \lambda_\delta. \tag{3.37}$$

Wird die zur Konsistenzbedingung äquivalente Gleichung  $\dot{q} = -\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ , zusammen mit Gl. (3.37), in die Bestimmungsgleichung des plastischen Multiplikators (3.35) eingesetzt, resultiert, unter Berücksichtigung von Gl. (3.21), die Traktions-Verschiebungs-Beziehung in differentieller Form zu

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\bar{H}} \frac{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi}{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \mathbf{a} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})} \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}. \tag{3.38}$$

Gl. (3.38) fällt demnach in die, mittels Gl. (3.22) definierte, allgemeinere Klasse der konstitutiven Beziehungen an der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$ . Für das RANKINE-Kriterium vereinfacht sich Gl. (3.38) mit der Ableitung  $\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi = \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A$  (s. Abschnitt 2.1.1) und der Identität  $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{n}_A$  (s. Abschnitt 4.3.4.1) zu

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\bar{H}} (\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A) : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}. \tag{3.39}$$

**Anmerkung:** Da die an der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  auftretenden Phänomene oftmals einer anderen Längenskala zuzuordnen sind als die eigentlich betrachtete Struktur selbst, wird das konstitutive Gesetz bei manchen Autoren auch mit einer Mikrostruktur assoziiert; so z.B. bei [GARikipati & HUGHES 1998] [ARMERO 1999] [BORJA 2002]. Hierdurch werden Parallelen

zu den Arbeiten [MIEHE, SCHOTTE & SCHRÖDER 1999; MIEHE, LAMBRECHT & SCHOTTE 2001] deutlich.  $\square$

Im folgenden Absatz wird eine Traktions-Verschiebungs-Beziehung der Form (3.38) für die geometrisch lineare Kontinuumsmechanik hergeleitet (s. [MOSLER & MESCHKE 2000]). Mit der Rate des Traktionsvektors

$$\dot{t}_s = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = [\mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} + [\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n} \delta_s - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] \cdot \mathbf{n} \quad (3.40)$$

und der Annahme einer lokalisierten plastischen Zone ( $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{0}$  bzw.  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ ), zusammen mit der Evolutionsgleichung (2.14)  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g$ , folgt

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} = \lambda_{\delta} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda_{\delta} \delta_s. \quad (3.41)$$

Demnach sind die Raten der plastischen und der singulären erweiterten Verzerrungen äquivalent. Wird Gl. (3.41) in der Konsistenzbedingung

$$\dot{\phi} = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.42)$$

berücksichtigt, berechnet sich der plastische Multiplikator aus dem zu Null verschwindenden singulären Anteil zu

$$\lambda_{\delta} = \dot{\zeta} \frac{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g}. \quad (3.43)$$

Anders als im Rahmen der Theorie finiter Deformationen ist die Fließfunktion  $\phi$  in diesem Absatz nicht auf Isotropie beschränkt. Um das Konzept der diskontinuierlichen Verschiebungsfelder auf eine möglichst große Anzahl unterschiedlicher Materialmodelle anwenden zu können, ist von der Annahme einer assoziierten Plastizität mit isotroper Entfestigung, wie z.B. in [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993; OLIVER 1996; ARMERO & GARIKIPATI 1995], abgewichen worden. Analog zur geometrisch nichtlinearen Theorie folgt aufgrund der regulären Verteilung der spannungsähnlichen Variablen  $\mathbf{q}$  (s. Gl. (2.14))

$$\dot{\mathbf{q}} = \lambda_{\delta} \bar{\mathbf{H}} \cdot \partial_{\mathbf{q}} h \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{-1} = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \delta_s \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{q}. \quad (3.44)$$

Substituiert man Gl. (3.44) in die umformulierte Konsistenzbedingung  $\partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , wird die Traktions-Verschiebungs-Beziehung zu

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\partial_{\mathbf{q}} \phi \cdot \bar{\mathbf{H}} \cdot \partial_{\mathbf{q}} h} \frac{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.45)$$

spezifiziert. Für das RANKINE-Kriterium vereinfacht sich Gl. (3.45) zu

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\bar{H}} (\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.46)$$

Anstelle einer Ratenformulierung kann Gl. (3.46) auch in die totale Beschreibung

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = (\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A) : \boldsymbol{\sigma} - q(\zeta) \quad \text{mit:} \quad \dot{q} = \partial_{\zeta} q \dot{\zeta} = -\bar{H} \dot{\zeta} \quad (3.47)$$

überführt werden. Formal identisch zur Fließbedingung des Materialmodells für homogene Deformationszustände stellt die Fließbedingung (3.47) eine Traktions-Verschiebungs-Beziehung dar. Da die modifizierte Fließbedingung somit allein von  $\zeta$  abhängig ist, kann nicht mehr von einer internen Variable im eigentlichen Sinne gesprochen werden. Im Gegensatz zu  $\alpha$  ist mit  $\zeta$  eine klare physikalische Definition gegeben.

**Anmerkung:** Gl. (3.47) wird auch in Kapitel 5 zur numerischen Umsetzung herangezogen. Hierdurch wird eine stark äquivalente Form zu den Kontinuumsmodellen  $\mathcal{C}^0$ -stetiger Verschiebungsfelder erreicht.  $\square$

### 3.4.2 Schädigungsmechanik

Analog zum Aufbau des zweiten Kapitels wird in diesem Unterabschnitt das Schädigungsmodell nach GOVINDJEE, KAY & SIMO (s. Abschnitt 2.2) betrachtet und im Rahmen  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder modifiziert. Auch die Veröffentlichungen [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993; ARMERO 1997] basieren auf dem referenzierten anisotropen Schädigungsmodell. Die dort vorgeschlagenen Herleitungen weichen jedoch deutlich von der Arbeit [MOSLER & MESCHKE 2001A] ab, die die Grundlage des vorliegenden Unterabschnittes bildet.

Analog zur Plastizitätstheorie wird der dissipative Mechanismus additiv in eine reguläre und eine singuläre Verteilung aufgespalten. Da der Nachgiebigkeitstensor selbst in [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] die interne Variable verkörpert, wird von der Zerlegung

$$\mathbb{D} = \bar{\mathbb{D}} + \tilde{\mathbb{D}} \delta_s \quad (3.48)$$

ausgegangen. Postuliert man desweiteren, gemäß Annahme 1.) in Abschnitt 3.4.1, daß der schädigungs-induzierte Bereich lokalisiert ist und daß außer den Punkten in  $\partial_s \Omega$  die restliche Struktur eine Entlastung erfährt (es gilt also  $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^e = \text{const.}$ ), wird die Evolution des Nachgiebigkeitstensors zu

$$\dot{\mathbb{D}} = \dot{\tilde{\mathbb{D}}} \delta_s \quad (3.49)$$

spezifiziert. Mit Gl. (3.49) und mit der regulären Verteilung des Traktionsvektors folgt

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} = \dot{\tilde{\mathbb{D}}} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.50)$$

Gl. (3.50) verknüpft demzufolge die singulären Verzerrungen mit dem Nachgiebigkeitstensor. Nutzt man die Existenz der Energiedichtefunktion  $\Psi$  und die daraus hervorgehende große Symmetrie  $\tilde{\mathbb{D}}_{ijkl} = \tilde{\mathbb{D}}_{klij}$ , zusammen mit der Fließfunktion (2.59), ergibt sich die Evolutionsgleichung

$$\dot{\tilde{\mathbb{D}}} = \dot{\zeta} \frac{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{mit} \quad \dot{\zeta} = \lambda_\delta. \quad (3.51)$$

Analog zur Plastizitätstheorie ist die Darstellungsform des plastischen Multiplikators  $\lambda = \lambda_\delta \delta_s$  genutzt worden. Da somit die Rate der Verschiebungssprungamplitude äquivalent zur Rate der internen Variable  $\alpha$  ist, kann die Fließbedingung (2.59) in die Gleichung

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q(\zeta). \quad (3.52)$$

überführt werden. Die modifizierte Traktions-Verschiebungs-Beziehung des RANKINE-Kriteriums (s. Gl. (3.47)) ist in der allgemeineren Menge der Gl. (3.52) enthalten.

Im Gegensatz zu dieser Arbeit wird in [ARMERO 1997] die Verknüpfung der erweiterten Verzerrungen und des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}$  nicht in der Ratenformulierung, sondern direkt mittels

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = ([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \delta_s = \tilde{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} \delta_s \quad (3.53)$$

postuliert. Hierdurch entfällt die Analogie zur Plastizitätstheorie (vgl. Gl. (3.50) mit (3.41)). Wie für das Schädigungsmodell aus Abschnitt 2.2 resultiert auch für das in diesem Abschnitt beschriebene Modell aus einer exponentiellen Entfestigung  $q(\zeta)$  eine lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung (s. Anmerkung, Seite 25). ARMERO's Schädigungsmodell unterscheidet sich hingegen für Belastungsschritte nicht von einem Plastizitätsmodell und führt zu einer exponentiellen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Für Entlastungsvorgänge verwendet ARMERO anstelle der Tangente der Entfestigungsfunktion  $q(\zeta)$  die Sekante.

Durch die hier vorgeschlagene Formulierung ist es möglich, das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell nach Abschnitt 2.3 im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder zu modifizieren. Desweiteren ist aufgrund der Ratenform der Verzerrungen eine Erweiterung auf zeitlich veränderliche singuläre Flächen ( $\dot{\mathbf{N}} \neq \mathbf{0}$ ) leicht durchführbar (s. Abschnitt 5). Für das Modell in [ARMERO 1997] hingegen sind solche Modifikationen aufgrund der totalen Formulierung nicht ohne weitere Überlegungen möglich.

### 3.4.3 Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik

In den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 sind die Plastizitätstheorie und ein anisotropes Schädigungsmodell im Rahmen  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder betrachtet worden. Die Verallgemeinerung für gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodelle wird in diesem Abschnitt ausgearbeitet. Zu diesem Zweck wird das Modell aus [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998] (s. Abschnitt 2.3) für sprungstetige Verschiebungsfelder erweitert. Die Ausführungen sind der Arbeit [MOSLER & MESCHKE 2001A] entnommen worden.

Analog zu Abschnitt 2.3 werden die inelastischen Verzerrungen additiv in einen plastischen Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  und in einen schädigungs-induzierten Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$  zerlegt. Unter der Annahme eines lokalisierten inelastischen Verhalten  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^d = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega^\pm$  resultiert die additive Zerlegung der singulären Verzerrungen zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \dot{\zeta} \delta_s = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d. \quad (3.54)$$

Nach der Einführung des skalaren Kopplungsfaktors  $\beta \in [0, 1]$  folgt mit dem Schädigungsmodell aus Abschnitt 3.4.2:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= (1 - \beta) (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^s \dot{\zeta} \delta_s \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d &= \beta (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^s \dot{\zeta} \delta_s \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\mathbb{D}} = \dot{\mathbb{D}} \delta_s. \quad (3.55)$$

Die Evolutionsgleichung des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}$  ergibt sich somit zu

$$\dot{\mathbb{D}} = \beta \dot{\zeta} \frac{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.56)$$

Die Traktions-Verschiebungs-Beziehung kann folglich auch für das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell in der totalen Formulierung (3.52) angegeben werden.

Alle in Kapitel 2 beschriebenen Kontinuumsmodelle sind somit im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder erweitert worden.

## 3.5 Energiedichtefunktionen an inneren Flächen

Nachdem in Abschnitt 3.4 die Traktions-Verschiebung-Beziehung auf der Grundlage eines Kontinuumsmodells für homogene Materialantworten hergeleitet worden ist, wird in diesem Abschnitt ein anderes Verfahren zur Ermittlung der Gleichungen erläutert. Im Gegensatz zu Unterkapitel 3.4 wird der lokalisierte, dissipative Mechanismus mittels eines singulären Anteils der Energiedichtefunktion berücksichtigt.

Die Idee, die Energiedichtefunktion unter Berücksichtigung innerer Flächen  $\partial_s \Omega$  zu modifizieren, ist z.B. den Arbeiten [ARMERO 1999] und [JIRÁSEK & ZIMMERMANN 2001] zu entnehmen. Die referenzierten Publikationen sind nicht die ersten Veröffentlichungen zu dieser Thematik, jedoch ist die dort angenommene Kinematik identisch mit jener in Abschnitt 3.2. In [JIRÁSEK & ZIMMERMANN 2001] wird ein singulärer Anteil in der Energiedichtefunktion berücksichtigt, um ein Schädigungsmodell zur Beschreibung von Rissen in Betonstrukturen herzuleiten. Die Arbeit [ARMERO 1999] hingegen ist allgemeiner formuliert. Neben der Theorie infinitesimaler Verformungen ist dort auch eine äquivalente Formulierung für finite Deformationen enthalten.

Das in dem vorliegenden Abschnitt erläuterte Konzept zur Herleitung einer Traktions-Verschiebung-Beziehung wird auch zur Betrachtung der auftretenden Dissipation und der Bruchenergie herangezogen.

### 3.5.1 Elasto-plastische Materialmodelle

In Abschnitt 3.4.1 ist gezeigt worden, daß der erweiterte Deformationsgradient  $\tilde{\mathbf{F}}$  zu plastischer Materialantwort korrespondiert. Um das elastische Verhalten des Kontinuums mittels eines hyperelastischen Materialmodells zu beschreiben, muß die freie Energiefunktion folglich in  $\bar{\mathbf{F}}$  formuliert sein. Wird desweiteren das Kriterium der Objektivität berücksichtigt und somit der elastische materielle CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{C}^e = \bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (3.57)$$

definiert, muß das elastische Potential von der Form  $\Psi_e(\bar{\mathbf{C}})$  sein.

Neben den reversiblen Prozessen ist die plastische Materialantwort zu definieren. Wie in Abschnitt 3.4.1 implizit belegt worden ist, gilt für elastische Prozesse  $\dot{\mathbf{J}} = 0$ . Unter der Annahme  $\mathbf{d}^p = \mathbf{0} \forall \mathbf{X} \in \Omega^\pm$  korrespondiert der Vektor des Verschiebungssprunges folglich zu plastischen Deformationen. Es ist daher möglich, mittels der Amplitude  $\zeta$  des Verschiebungssprunges isotrope plastische Mechanismen zu modellieren. Das im weiteren Verlauf dieses Abschnittes betrachtete isotrope Potential der irreversiblen Energie ist demnach von der Form  $\Psi_{\text{in}}(\zeta)$ .

Die Potentiale  $\Psi_e(\bar{\mathbf{C}})$  und  $\Psi_{\text{in}}(\zeta)$  führen unter der Annahme eines lokalisierten inelastischen Gebietes, sowie einer additiven Zerlegung des elastischen und des inelastischen Materialverhaltens, zum Gesamtpotential (s. auch [ARMERO 1999])

$$\Psi(\bar{\mathbf{C}}, \zeta) = \Psi_e(\bar{\mathbf{C}}) + \delta_s \Psi_{\text{in}}(\zeta). \quad (3.58)$$

Gemäß Abschnitt 2.1.3 werden die Evolutionsgleichungen aus dem Postulat der maximalen Dissipation hergeleitet. Um die Dissipation zu berechnen, wird die zeitliche Ableitung des Potentials  $\Psi$  benötigt. Die Rate  $\dot{\Psi}$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \partial_{\bar{\mathbf{C}}} \Psi_e : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \delta_s \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \\ &= \left( 2 \bar{\mathbf{F}} \cdot \partial_{\bar{\mathbf{C}}} \Psi_e \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \delta_s \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Setzt man diese Gleichung in die Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = \mathbf{P} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad (3.60)$$

zusammen mit der zeitlichen Änderung des Deformationsgradienten

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{N} \delta_s \quad (3.61)$$

ein, wird der Zweite Hauptsatz der Thermomechanik in die Form

$$\mathcal{D} = \mathbf{P} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \delta_s - \left( 2 \bar{\mathbf{F}} \cdot \partial_{\bar{\mathbf{C}}} \Psi_e \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}} - \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s \geq 0 \quad (3.62)$$

überführt. Für elastische Belastungszustände folgt aus Gl. (3.62) für den ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = 2 \bar{\mathbf{F}} \cdot \partial_{\bar{\mathbf{C}}} \Psi_e. \quad (3.63)$$

Wird Gl. (3.63) in die Dissipationsungleichung (3.62) eingesetzt, ergibt sich die reduzierte Form

$$\mathcal{D} = \mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \delta_s - \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s \geq 0. \quad (3.64)$$

Alle Summanden der Gl. (3.64) sind DIRAC-Delta-Verteilungen. Der dissipative Mechanismus ist folglich lokalisiert. Zur Berechnung der totalen Energie, welche mit der Entstehung von materiellen Defekten korrespondiert, wird die lokale Dissipation über das betrachtete Volumen integriert. Mit der Gleichung (s. auch Anhang C)

$$\int_{\Omega} f \delta_s \, dV = \int_{\partial_s \Omega} f \, d\Gamma \quad (3.65)$$



wird die gesamte Dissipation zu

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_\Omega \mathcal{D} \, dV = \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta}] \, d\Gamma \geq 0 \quad (3.66)$$

bestimmt. Anders als bei den Materialmodellen aus Kapitel 2 basiert  $\mathcal{D}_\Omega$  nicht auf einem Volumen-, sondern auf einem Flächenintegral. Um Gl. (3.66) weiter umzuformen, wird die LIE-Ableitung

$$\mathcal{L}_\nu \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \dot{\zeta} \mathbf{m} = \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) \quad (3.67)$$

in die Form

$$\dot{\zeta} \mathbf{m} = \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + \bar{\mathbf{F}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \bar{\mathbf{l}} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (3.68)$$

überführt. Mit Gl. (3.68) geht die globale Dissipation  $\mathcal{D}_\Omega$  in die Gleichung

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_\Omega \mathcal{D} \, dV = \int_{\partial_s \Omega} \left[ \mathbf{T} \cdot \left( \dot{\zeta} \mathbf{m} \right) + \mathbf{T} \cdot \left( \bar{\mathbf{l}} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) - \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \right] \, d\Gamma \geq 0 \quad (3.69)$$

über. Der mittlere, konvektive Term der Gl. (3.69) ist zu Beginn plastischer Prozesse Null. Die beiden anderen Summanden hingegen sind mit der Rate des Verschiebungssprunges  $\dot{\zeta}$  assoziiert.

Analog zu den Plastizitätsmodellen des Abschnitts 2.1 wird die zur Amplitude des Verschiebungssprunges energetisch konjugierte Größe

$$q := -\partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \quad (3.70)$$

eingeführt (vgl. Gl. (2.45)<sub>2</sub>). Da die Struktur der bisher ausgeführten Herleitungen identisch mit der Kontinuumsmechanik  $\mathcal{C}^0$ -stetiger Verschiebungsfelder ist, wird die spannungsähnliche Variable  $q$  verwendet, um den Raum der zulässigen Spannungen zu begrenzen. Anders als bei der Theorie homogener Verformungszustände ist es im Rahmen  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder zweckmäßiger, anstelle der Spannungen den Traktionsvektor zu betrachten. Der zulässige Raum des Spannungsvektors  $\mathbf{T}$  wird somit anhand einer Fließfunktion  $\tilde{\phi}$  zu

$$\mathbb{E}_{\mathbf{T}} := \{(\mathbf{T}, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid \tilde{\phi}(\mathbf{T}, \zeta) \leq 0\} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_s \Omega \quad (3.71)$$

definiert. Auch in den Arbeiten [KLISINSKI, RUNESSON & STURE 1991], [OLOFSSON, KLISINSKI & NEDAR 1994], [KLISINSKI, OLOFSSON & TANO 1995] und [OHLSSON & OLOFSSON 1997] wird der zulässige Spannungsraum mittels einer der Gl. (3.71) äquivalenten Bedingung eingeführt, ohne daß näher auf die thermomechanische Grundgestalt der zugrundeliegenden Gleichungen eingegangen wird. Auf der Grundlage einer Fließfunktion  $\tilde{\phi}$  der Form (3.71) wird in den referenzierten Veröffentlichungen ein zweidimensionales Interface-Gesetz an der Fläche  $\partial_s \Omega$  hergeleitet. Hierzu werden die Evolutionsgleichungen unter Verwendung des Postulates der maximalen Dissipation bestimmt. Dieses Postulat wird auch in dem vorliegenden Abschnitt verwendet. Mit Gl. (3.66) wird das betrachtete Optimierungsproblem in das LAGRANGE-Funktional

$$\mathcal{L}(\mathbf{T}, q, \lambda) = -\mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - q \dot{\zeta} + \lambda \tilde{\phi} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_s \Omega \quad (3.72)$$

überführt. Aus den Stationaritätsbedingungen der Gl. (3.72) folgen die Evolutionsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \lambda \partial_{\mathbf{T}} \tilde{\phi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\zeta} = \lambda \partial_q \tilde{\phi}. \quad (3.73)$$

Analog zu den Kontinuumsmodellen  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder sind die Gl. (3.73) ausreichend anhand der Fließfunktion  $\tilde{\phi}$  beschrieben.

**Anmerkung:** Zusätzlich zur Abbildung  $\tilde{\phi}$  wird noch eine weitere Funktion benötigt, die den Normalenvektor  $\mathbf{N}$  der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  definiert. Im Gegensatz zu diesem Abschnitt wird der Vektor  $\mathbf{N}$  im Rahmen des Projektions-Konzeptes (s. Abschnitt 3.4) aus der homogenen Antwort des klassischen Kontinuumsmodells berechnet. Hierauf wird im folgenden Kapitel näher eingegangen.  $\square$

Nachdem das Materialmodell mit den Evolutionsgleichungen (3.73) vervollständigt worden ist, wird in diesem Absatz die mit dem Modell berechnete Spannungsarbeit und die Bruchenergie analysiert. Unter Berücksichtigung der globalen Dissipation (3.66) ergibt sich die über das Volumen integrierte äußere Spannungsarbeit zu

$$\mathcal{P}_\Omega = \mathcal{D}_\Omega + \int_\Omega \dot{\Psi} \, dV = \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \, d\Gamma + \int_\Omega \dot{\Psi}_e \, dV. \quad (3.74)$$

Aus der Definition  $\mathcal{P} := \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$  folgt, daß  $\mathcal{P}_\Omega$  auch ohne die Dissipation  $\mathcal{D}$ , also direkt berechnet werden kann. Wird Gl. (3.74) über die gesamte Pseudo-Zeit bis zum Versagen  $t = t_u$  integriert und wird desweiteren die Eigenschaft der Hyperelastizität verwendet, folgt für die gesamte zum Entstehen von Makrodefekt korrespondierende Energie

$$E = \int_{t=0}^{t_u} \mathcal{P}_\Omega \, dt = \int_{t=0}^{t_u} \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \, d\Gamma \, dt. \quad (3.75)$$

Unter der Voraussetzung daß der Integrand von Gl. (3.75) räumlich konstant, vereinfacht sich die Bruchenergie  $\mathcal{G}_f = E/A_s$  zu

$$\mathcal{G}_f = \int_{t=0}^{t_u} \mathbf{T} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \, dt. \quad (3.76)$$

Die Bruchenergie ist somit unabhängig vom Volumen der betrachteten Struktur. Anders als die Bruchenergie kontinuumsmechanischer Modelle  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder berechnet sich  $\mathcal{G}_f$  hier allein lokal auf der Basis einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung. Die Verwendung einer internen Länge entfällt.

In diesem Absatz werden die Vereinfachungen für die Mechanik infinitesimaler Verformungen berücksichtigt. Zu Beginn wird auch hier das Potential  $\Psi$  hergeleitet.

Unter Verwendung von Gl. (3.18) werden die elastischen Verzerrungen in die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.77)$$

überführt. Das elastische Potential ist somit von der Form  $\Psi_e(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ .

Zur Herleitung des Potentials  $\Psi_{\text{in}}$  wird im Rahmen der geometrisch linearen Theorie keine Einschränkung auf isotrope Ver- bzw. Entfestigung gefordert. Demnach muß das Potential der irreversiblen Energie vom Vektor des Verschiebungssprunges  $[[\mathbf{u}]]$  abhängig sein. Hierdurch gelangt man zum Potential der freien Energie

$$\Psi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, [[\mathbf{u}]]) = \Psi_e(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \delta_s \Psi_{\text{in}}([[ \mathbf{u} ]]), \quad (3.78)$$

sowie zu dessen zeitlicher Ableitung

$$\dot{\Psi} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Psi_e : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \delta_s \partial_{[[\mathbf{u}]}} \Psi_{\text{in}} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]. \quad (3.79)$$

Die Herleitung der konstitutiven Gleichungen sowie der Evolutionsgleichungen basiert auf dem zweiten Hauptsatz der Thermomechanik. Mit der äußeren Spannungsarbeit

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.80)$$

wird die Dissipation zu

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}) - \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Psi_e : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \delta_s \partial_{[[\mathbf{u}]}} \Psi_{\text{in}} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \geq 0 \quad (3.81)$$

spezifiziert. Analog zur Theorie großer Deformationen folgt aus Gl. (3.81) sowohl die elastische Materialantwort

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Psi_e \quad (3.82)$$

als auch die reduzierte Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta_s \partial_{[[\mathbf{u}]}} \Psi_{\text{in}} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \geq 0. \quad (3.83)$$

Mit Gl. (3.65) resultiert die über das Volumen integrierte Dissipation zu

$$\mathcal{D}_{\Omega} = \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{t} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] - \partial_{[[\mathbf{u}]}} \Psi_{\text{in}} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]] \, d\Gamma \geq 0. \quad (3.84)$$

Nach der Einführung der zum Verschiebungssprung energetisch konjugierten Variable

$$\mathbf{q} := \partial_{[[\mathbf{u}]}} \Psi_{\text{in}} \quad (3.85)$$

wird der Raum der zulässigen Traktionsvektoren mittels

$$\mathbb{E}_{\mathbf{t}} := \{(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\phi}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_s \Omega \quad (3.86)$$

definiert. Anders als  $\mathbb{E}_{\mathcal{T}}$  ist die Evolution des Raumes  $\mathbb{E}_{\mathbf{t}}$  nicht auf isotrope Ausdehnungen bzw. Verkleinerungen beschränkt. Unter Berücksichtigung des Postulates der maximalen Dissipation ergeben sich die Evolutionsgleichungen zu

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \lambda \partial_{\mathbf{t}} \tilde{\phi} \quad \text{bzw.} \quad [[\dot{\mathbf{u}}]] = -\lambda \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\phi}. \quad (3.87)$$

Folglich müssen die Gl. (3.87) die Forderung  $\partial_{\mathbf{t}}\tilde{\phi} = -\partial_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}$  erfüllen. Diese Bedingung ist a priori immer erfüllt, wenn sich die skalarwertige Funktion  $\tilde{\phi}$  anhand einer Abbildung  $\phi_{\text{eq}}$  beschreiben läßt, in der die beiden Argumentvektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{q}$  immer nur als Differenz eingehen. Demzufolge muß die Abbildung  $\tilde{\phi}$  von der Form

$$\tilde{\phi}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = \phi_{\text{eq}}(\mathbf{t} - \mathbf{q}) - t_{\text{eq}}^{\text{ini}} \quad (3.88)$$

sein. In Gl. (3.88) kontrolliert  $t_{\text{eq}}^{\text{ini}}$  die Größe des zulässigen Traktionsvektorraums vor dem Auftreten plastischer Verformungen (vgl. Gl. (2.22)). Die Analogie zur kinematischen Verfestigung bei Plastizitätsmodellen  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder wird deutlich, wenn  $\mathbf{q}$  als *Back-Stress*-Vektor interpretiert wird.

**Anmerkung I:** Nach Kenntnis des Autors ist die hergeleitete Äquivalenz bisher noch nicht gezeigt worden. Lediglich in der Arbeit [OHLSSON & OLOFSSON 1997] findet sich eine Anmerkung über kinematische Entfestigung im Rahmen der Traktions-Verschiebungs-Interaktion.  $\square$

**Anmerkung II:** Die Abbildung  $\phi_{\text{eq}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kann als eine Metrik im  $\mathbb{E}_{\mathbf{t}}$  aufgefaßt werden. Hierzu muß lediglich die Restriktion  $\phi_{\text{eq}} \geq 0$  eingehalten werden. Die Abbildung mißt einen mittels  $\phi_{\text{eq}}$  definierten Abstand zwischen den Punkten  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{t}$ . Die zulässigen Traktionsvektoren müssen folglich in der abgeschlossenen Kugel  $\bar{B}$

$$\mathbf{t} \in \bar{B}(\mathbf{q}, t_{\text{eq}}^{\text{ini}}) := \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\phi}_{\text{eq}}(\mathbf{t} - \mathbf{q}) \leq t_{\text{eq}}^{\text{ini}} \text{ mit } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, t_{\text{eq}}^{\text{ini}} \in \mathbb{R}^+\} \quad (3.89)$$

liegen.  $\square$

Analog zur Theorie finiter Deformationen wird in diesem Absatz die äußere Spannungsarbeit  $\mathcal{P}$  und die Bruchenergie analysiert. Die über das Volumen integrierte Größe  $\mathcal{P}$  wird mit Gl. (3.84) zu

$$\mathcal{P}_{\Omega} = \mathcal{D}_{\Omega} + \int_{\Omega} \dot{\Psi} \, dV = \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \, d\Gamma + \int_{\Omega} \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Psi_e : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \, d\Omega \quad (3.90)$$

spezifiziert. Die Integration der Gl. (3.90) über die gesamte Zeit bis zur vollständigen Entfestigung des Materials liefert die zum Materialversagen korrespondierende Energie

$$E = \int_{t=0}^{t_u} \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \, d\Gamma \, dt. \quad (3.91)$$

Für den Sonderfall eines räumlich konstanten Integranden vereinfacht sich die Bruchenergie  $\mathcal{G}_f = E/A_s$  zu

$$\mathcal{G}_f = \int_{\zeta=0}^{\zeta_u} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \, d\zeta. \quad (3.92)$$

Die Bruchenergie (3.92) ist unabhängig von der Geometrie des betrachteten Volumens.

### 3.5.2 Schädigungsmechanik

In diesem Abschnitt wird das Modell der anisotropen Schädigungsdegradation nach [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder erweitert. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.4.2 erfolgt die Modifikation des Modells aus Abschnitt 2.2 auf der Basis einer singulären Verteilung der Energiedichtefunktion  $\Psi$ .

Da das Schädigungsmodell aus [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995] von einer isotropen Entfestigung ausgeht, sind die dissipativen Mechanismen hinreichend mittels der skalaren Größe der Amplitude des Verschiebungssprunges beschrieben. Das Potential der freien Energie ist somit von der Form

$$\Psi(\mathbb{C}, \boldsymbol{\varepsilon}, \zeta) = \Psi_e(\mathbb{C}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \delta_s \Psi_{\text{in}}(\zeta) \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbb{D}} = \dot{\mathbb{D}} \delta_s. \quad (3.93)$$

In der DIRAC-Delta-Verteilung der Evolution des Nachgiebigkeitstensors ist die Annahme eines lokalisierten Schädigungsbereiches impliziert. Gemäß Abschnitt 2.2 wird das elastische Potential zu

$$\Psi_e(\mathbb{C}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.94)$$

spezifiziert. Unter Berücksichtigung von  $\dot{\mathbb{D}} = \dot{\mathbb{D}} \delta_s$  und Gl. (3.94) sowie der Gleichung  $\dot{\mathbb{C}} = -\mathbb{C} : \dot{\mathbb{D}} : \mathbb{C}$  resultiert die Rate des Potentials  $\dot{\Psi}$  zu

$$\dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} \delta_s + \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s. \quad (3.95)$$

Mit Gl. (3.50) vereinfacht sich der mittlere Term aus Gl. (3.95) zu

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta}. \quad (3.96)$$

Die Dissipationsungleichung hat mit Gl. (3.95) die Form

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta} \delta_s - \partial_\zeta \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s \geq 0. \quad (3.97)$$

Nach der Einführung der zur Amplitude des Verschiebungssprunges  $\zeta$  energetisch konjugierten Variable  $q = -\partial_\zeta \Psi_e$ , zusammen mit Gl. (3.65), folgt die über das Volumen integrierte Dissipation  $\mathcal{D}_\Omega$  zu

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_{\partial_s \Omega} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] + q \dot{\zeta} \right] d\Gamma \geq 0. \quad (3.98)$$

Analog zum Plastizitätsmodell des Abschnitts 3.4.1 kontrolliert die spannungsähnliche Variable  $q$  durch die Fließfunktion

$$\tilde{\phi}(\mathbf{t}, \zeta) = \tilde{\phi}_{\text{eq}}(\mathbf{t}) - t_{\text{eq}}^{\text{ini}} + q(\zeta) \quad (3.99)$$

die Expansion bzw. Kontraktion des Raumes der zulässigen Traktionsvektoren  $\mathbf{t}$ . Unter der Voraussetzung, die Abbildung  $\tilde{\phi}_{\text{eq}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die Bedingung  $\partial_{\mathbf{t}} \tilde{\phi}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{t} = \tilde{\phi}_{\text{eq}}$ , der

Integrand der Gl. (3.98) ist räumlich konstant und die Evolutionsgleichungen von  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  und  $\zeta$  basieren auf dem Postulat der maximalen Dissipation, erhält man die Bruchenergie zu

$$\mathcal{G}_f = \frac{1}{2} \int_{\zeta=0}^{\zeta_u} t_{\text{eq}}^{\text{ini}} d\zeta. \quad (3.100)$$

Wird das geometrisch lineare Plastizitätsmodell des Abschnitts 3.5.1 auf eine isotrope Entfestigung reduziert, zeigt ein Vergleich der Gl. (3.100) und (3.92), daß bei gleicher Entfestigungsfunktion  $q(\zeta)$  die Bruchenergie des Plastizitätsmodells zweimal größer als die des Schädigungsmodells ist. Dieses Ergebnis stimmt mit den zugrundeliegenden Kontinuumsmodellen  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder überein (s. Gl. (2.90) und [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998]). Für das Schädigungsmodell in [ARMERO 1997] hingegen ist die Bruchenergie identisch mit der des Plastizitätsmodells.

### 3.5.3 Gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmechanik

Den Abschluß des vorliegenden Kapitels bildet das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell in [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998]. Das Potential des Modells (s. Gl. (2.64)) geht für Kontinua mit einer singulären Fläche in die Form

$$\Psi(\mathbb{C}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \zeta) = \Psi_e(\mathbb{C}, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \delta_s \Psi_{\text{in}}(\zeta) \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbb{D}} = \dot{\mathbb{D}} \delta_s \quad (3.101)$$

über. Gl. (3.101) und (3.93) unterscheiden sich lediglich dadurch, daß das Potential dieses Abschnitts auf den elastischen Verzerrungen basiert. Die elastischen Verzerrungen bestimmen sich für das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell zu (s. Gl. (3.55))

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \beta (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \dot{\zeta} \delta_s. \quad (3.102)$$

Wird Gl. (3.102) berücksichtigt, folgt die Rate des Potentials (3.101), zusammen mit Gl. (2.64), zu

$$\dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} \delta_s + \partial_{\zeta} \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s. \quad (3.103)$$

Um die Dissipation zu berechnen, wird die aus Gl. (3.55) gewonnene Identität

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbb{D}} : \boldsymbol{\sigma} = \beta \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta} \quad (3.104)$$

in Gl. (3.103) eingesetzt. Mit der äußeren Spannungsarbeit (3.80) folgt für die Dissipationsungleichung des vorliegenden Modells

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \beta \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta} \delta_s + \frac{1}{2} \beta \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta} \delta_s - \partial_{\zeta} \Psi_{\text{in}} \dot{\zeta} \delta_s \geq 0. \quad (3.105)$$

Die über das Volumen integrierte, reduzierte Form der Dissipationsungleichung vereinfacht sich mit der Definition der Rate der singulären Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \dot{\zeta}$  und mit der zu  $\zeta$

energetisch konjugierten Größe  $q = -\partial_\zeta \Psi_{\text{in}}$  zu

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_{\partial_s \Omega} \left[ \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{t} : \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + q \dot{\zeta} \right] d\Gamma \geq 0. \quad (3.106)$$

Unter der Annahme einer Belastungsfläche von der Form (3.99) erhält man die Bruchenergie für räumlich konstante Spannungszustände zu

$$\mathcal{G}_f = \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \int_{\zeta=0}^{\zeta_u} t_{\text{eq}}^{\text{ini}} d\zeta. \quad (3.107)$$

Die Bruchenergie des im Rahmen der Theorie sprungstetiger Verschiebungsfelder neu hergeleiteten Modells ist demnach formal identisch mit der des korrespondierenden Kontinuumsmodells für  $\mathcal{C}^0$ -stetige Verschiebungsfelder (s. Gl. (2.90)).

**Anmerkung:** Die Evolutionen des Verschiebungssprunges sind nicht auf das Postulat der maximalen Dissipation beschränkt. Eine allgemeinere Darstellung wird mit der Einführung eines plastischen Potentials erreicht.  $\square$

## 3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden neben der Kinematik  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder die Evolutionsgleichungen an einer singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  hergeleitet. Hierfür wurden zwei unterschiedliche Verfahren beschrieben und erweitert. Beide Konzepte resultierten in einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung an der Lokalisierungsfläche. Die Lage und Orientierung dieser Fläche ist bis zum jetzigen Zeitpunkt als bekannt und gegeben vorausgesetzt worden. Daher wird im folgenden Abschnitt der Vektor  $N$  für beliebige Materialmodelle hergeleitet.





# Kapitel 4

## Lokalisiertes Werkstoffversagen

Im folgenden Kapitel werden unterschiedliche Versagensformen auf Materialpunktebene vorgestellt. Zwei verschiedene Versagensformen, welche eng mit dem Phänomen der materiellen Verzweigung verknüpft sind, werden detailliert betrachtet. Den Anfang bildet die klassische Lokalisierungsbedingung, die den Übergang des Anfangsrandwertproblems der Mechanik vom elliptischen zum hyperbolischen Differentialgleichungstypus kennzeichnet. Anschließend wird eine analoge Bedingung analysiert, die das erstmalige Auftreten von Sprüngen im Verschiebungsfeld charakterisiert. Zum Abschluß dieses Kapitels wird ein numerisches Verfahren zur Analyse des Lokalisierungsprozesses hergeleitet und die Effizienz des Algorithmus an verschiedenen Beispielen verifiziert.

### 4.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Einführung in die unterschiedlichen Versagensformen auf Materialpunktebene gegeben. Die zu Beginn dieses Abschnitts skizzierten Kriterien für Versagen auf Materialpunktebene sind den diffusen Versagensformen zuzuordnen. Im Gegensatz dazu wird mit Hilfe von Lokalisierungsanalysen das erstmalige Auftreten von singulären Flächen, wie z.B. Rissen, und deren Orientierung bestimmt. Wie aus Abb. 4.1a ersichtlich wird, ist das diffuse Versagen als kontinuierlicher Prozeß aufzufassen. An jeder gedachten inneren Oberfläche des Kontinuums weist sowohl das Feld der Geschwindigkeiten  $\dot{u}$  als auch das zugehörige Tensorfeld des Gradienten  $\nabla \dot{u}$  einen stetigen Verlauf auf. Bei den lokalisierten Versagensformen hingegen ist zwischen *schwachen* (Abb. 4.1b) und *starken* (Abb. 4.1c) Diskontinuitäten zu unterscheiden. Für *schwache* Diskontinuitäten ist das Geschwindigkeitsfeld selbst stetig, dessen Gradient jedoch nicht. *Starke* Diskontinuitäten hingegen weisen einen diskontinuierlichen Verlauf des Geschwindigkeitsfelds und dessen Gradienten auf. Unter Lokalisierung ist demnach die Entstehung schmaler Versagenszonen mit hoher Konzentration von Deformationen zu verstehen. Dabei variiert sowohl die Breite dieser Zone, als auch das Spektrum der Entstehungsursachen bei verschiedenen Werkstoffen und Belastungsarten stark. Typische Bei-

spiele lokalisierter Versagensformen sind Risse in spröden Materialien oder LÜDERS-Bänder in Metallen (s. [NÁDAI 1931]).

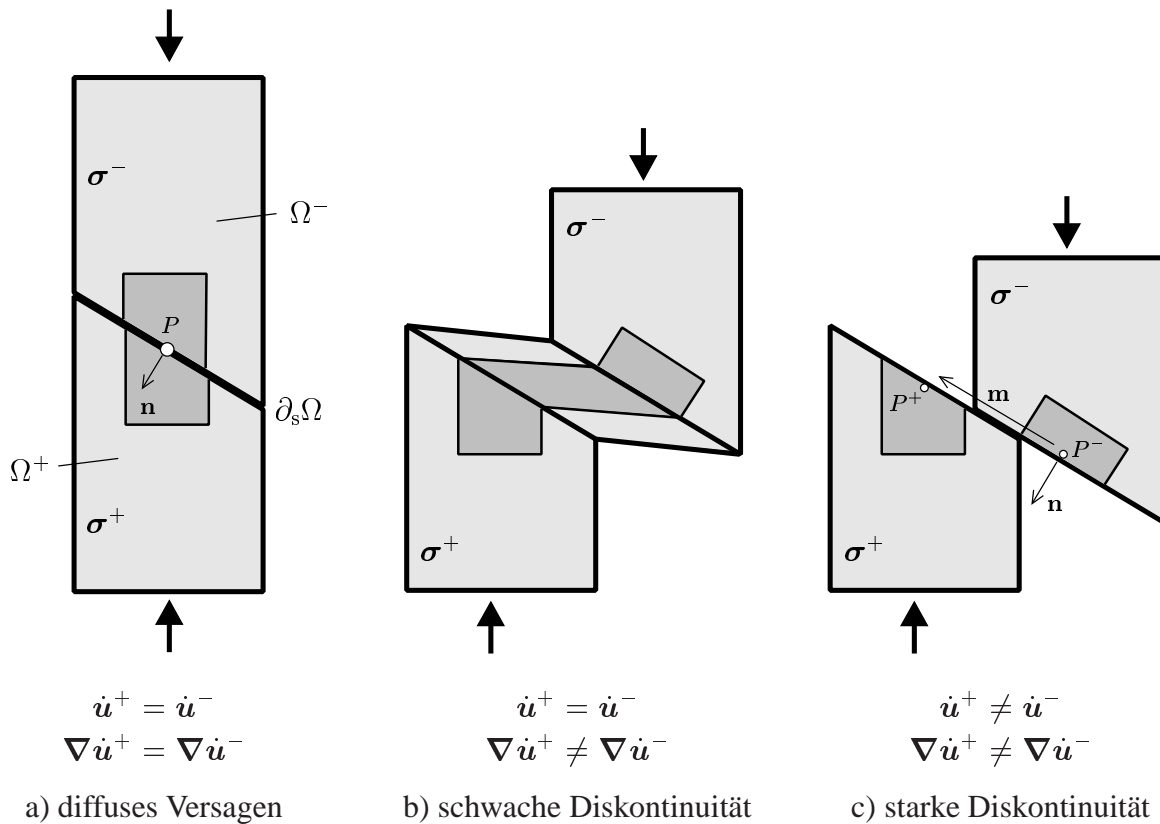


Abb. 4.1: Übersicht der verschiedenen Versagensformen.

## 4.2 Indikatoren für diffuses Versagen

Der erste Indikator für diffuses Versagen, welcher in diesem Abschnitt dargestellt wird, kennzeichnet den Zeitpunkt des Verlustes von Eindeutigkeit der Materialantwort. Der Begriff der Eindeutigkeit ist in diesem Zusammenhang als eindeutige Zuordnung von Verzerrungen und Spannungen zu verstehen. Für den eindimensionalen Spannungszustand wird dies erfüllt, wenn die Abbildung der Verzerrungen in den Spannungsraum injektiv ist. Für zwei verschiedene Verzerrungen  $\varepsilon_{11}^{(1)}$  und  $\varepsilon_{11}^{(2)}$  ist die Eindeutigkeit der Materialantwort demnach äquivalent zu

$$\varepsilon_{11}^{(1)} \neq \varepsilon_{11}^{(2)} \implies \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^{(1)}) \neq \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^{(2)}). \quad (4.1)$$

Da die Eigenschaft der Injektivität bei stetigen Abbildungen gleichbedeutend zur strikten Monotonie ist, folgt unmittelbar, daß für einen singulären Tangentenmodul

$$\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = \mathbb{C}_{1111}^{\text{ep}} = 0 \quad (4.2)$$

die Injektivität und somit die Eindeutigkeit nicht mehr erfüllt ist. Eine analoge Aussage kann auch mittels des Satzes von ROLLE formuliert werden. Verallgemeinert man diese Aussage auf Abbildungen vom  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , resultiert, daß Eindeutigkeit für

$$\det \{\mathbb{C}^{\text{ep}}\} = 0 \quad (4.3)$$

nicht gewährleistet ist. In Gl. (4.3) stellt  $\{\bullet\}$  die symbolische Abkürzung für die Matrixnotation des Tensors  $\bullet$  dar.

Werden die singulären Punkte nach Gl. (4.3) nur für den symmetrischen Teil der Matrix  $\{\mathbb{C}^{\text{ep}}\}$  berechnet, gelangt man zur Stabilitätsbedingung nach [HILL 1958]. Die in [HILL 1958] vorgeschlagene Bedingung

$$\det \{\mathbb{C}^{\text{ep}}\}^{\text{sym}} = 0 \quad (4.4)$$

ist demnach ein strengeres Kriterium als Gl. (4.3). Da in Gl. (4.4) nur der symmetrische Anteil von  $\mathbb{C}^{\text{ep}}$  betrachtet wird, läßt sich das Stabilitätskriterium nach HILL in die quadratische Form

$$d^2W = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} : \mathbb{C}^{\text{ep}} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (4.5)$$

überführen. Die Forderung von Gl. (4.4) ist demnach äquivalent zur strikt Positiv Definitheit des Arbeitsbegriffes zweiter Ordnung.

### 4.3 Schwache und starke Diskontinuitäten

In dem vorliegenden Abschnitt werden die lokalisierten Versagensformen betrachtet. Diese Versagensformen, die in *starke* und in *schwache* Diskontinuitäten unterteilt werden, sind durch Regionen hoher Deformation charakterisiert. Bei monotoner Laststeigerung führen diese Deformationen zu einem Makrodefekt. Die übrige Struktur dagegen erfährt zeitgleich häufig Entlastungsvorgänge. Der Übergang von homogenen (s. 4.1a) zu lokalisierten Zuständen (s. 4.1b) und c)) ist durch den Wechsel der zugrundeliegenden Differentialgleichung vom elliptischen zum hyperbolischen Typus gekennzeichnet. Für das Anfangsrandwertproblem der Mechanik bedeutet dies, daß die Wellengeschwindigkeit nicht reellwertig ist. Dieses Phänomen wurde schon zu Beginn des 20. Jh. von [HADAMARD 1903] beschrieben.

Erst in [RUDNICKI & RICE 1975] und [RICE & RUDNICKI 1980] wurde der Übergang von diffusem zum lokalisiertem Versagen für verschiedene konstitutive Gesetze analysiert. In diesen Arbeiten wird die Bedingung zur Formation einer singulären Fläche zweiter Ordnung, also einem diskontinuierlichen Verlauf der Rate der Verzerrungen, explizit genannt und die Analogie zur Stabilitätsbedingung nach HADAMARD erkannt. Diese Form des lokalisierten Versagens wird auch als *schwache* Diskontinuität bezeichnet. [RANIECKI & BRUHNS 1981] folgten den Arbeiten von RUDNICKI & RICE und verallgemeinerten das Konzept im Rahmen der Plastizität finiter Deformationen für nicht assoziierte Fließregeln. Für eine große Anzahl unterschiedlicher

Materialmodelle wurden im folgenden Zeitraum explizite analytische Bedingungen zur Erfassung der *schwachen* Diskontinuitäten erarbeitet. Dazu zählen z.B. die Arbeiten [OTTOSEN & RUNESSON 1991] und [RUNESSON, OTTOSEN & PERIĆ 1991]. Neben klassischen Kontinuumsmodellen wurden Lokalisierungsanalysen auch für andere Materialbeschreibungen, wie beispielsweise das COSSERAT-Kontinuum, durchgeführt (s. [STEINMANN 1992]). In [KRAJCI-NOVIC & VUJOSEVIC 1998] beschrieben die Autoren das Phänomen der Lokalisierung mittels der statistischen Physik.

Aufgrund komplexer werdender Materialbeschreibungen wurde in [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der Lokalisierungsbedingung für schwache Diskontinuitäten vorgeschlagen. Wie im folgenden jedoch belegt wird, ist dieses Konzept sowohl im zweidimensionalen, als auch im dreidimensionalen Kontinuum für numerische Berechnungen als Prototyp anzusehen. In [STEIN, STEINMANN & MIEHE 1995] wurde die Idee im Rahmen des ebenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustands konsistent erweitert.

Im Gegensatz zur Lokalisierungsbedingung schwacher Diskontinuitäten beschäftigten sich die Autoren der grundlegenden Arbeit [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] mit diskontinuierlichen Verschiebungsfeldern in kontinuumsmechanischen Modellen. SIMO, OLIVER & ARMERO leiteten die notwendige Bedingung zur Formation unstetiger Verschiebungsfelder her. Diese lokalisierte Versagensform wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit auch *starke* Diskontinuität genannt. In [ARMERO & GARIKIPATI 1996] und [STEINMANN, LARSSON & RUNESSON 1997] wurde das Konzept auf die geometrisch nichtlineare Theorie erweitert. Für poröse, mit Fluid gesättigte Kontinua gaben [LARSSON & LARSSON 2000] die zur *starken* Diskontinuitäten korrespondierenden Lokalisierungsbedingung an.

Aus dem zuvor Beschriebenen ist die Notwendigkeit einer exakten Definition für eine singuläre Fläche deutlich geworden. Daher wird im folgenden Abschnitt eine mathematische Klassifikation der unterschiedlichen inneren Flächen gegeben.

### 4.3.1 Singuläre Flächen

Im Rahmen von Analysen materieller Verzweigungen ist eine singuläre Fläche  $\partial_s \Omega$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , für die eine gegebene Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times t \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\partial_s \Omega$  nicht glatt ist. Mit  $\mathbf{f} \notin C^\infty(\mathbb{R}^3 \times t, \mathbb{R}^3)$  wird die Ordnung einer singulären Fläche bezüglich der LAGRANGE Betrachtungsweise zu

$$p := \inf \left\{ c \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathbf{X} \in \Omega, t \in [0, T], a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \right. \\ \left. \frac{\partial^c \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}^a \partial t^b} \notin C^0 \left( \mathbb{R}^3 \times t, \mathbb{R}^{3^{a+1}} \right) \wedge a + b = c \right\} \quad (4.6)$$

definiert. Gemäß der Definition (4.6) gibt die Ordnung der singulären Fläche die niedrigste unstetige Ableitung der Abbildung  $\mathbf{f}$  an. Da diese Ableitung eine neue unstetige Funktion darstellt, ist es ausreichend, singuläre Flächen nullter Ordnung zu betrachten. Die Definition einer singulären Fläche nullter Ordnung, hinsichtlich einer betrachteten Abbildung

$g \notin C^0(\mathbb{R}^3 \times t, \mathbb{R}^3)$ , wird zu

$$\partial_s \Omega := \{\mathbf{X} \in \Omega \mid \omega_g(\mathbf{X}) \neq 0\} \quad (4.7)$$

spezifiziert. In Gl. (4.7) stellt  $\omega_g(\mathbf{X})$  die Oszillation der Abbildung  $g$  im Punkt  $\mathbf{X}$  dar (s. Anmerkung II, Seite 35).

Unter der Annahme einer ebenen singulären Fläche mit Normalenvektor  $\mathbf{N}$  (s. Abb. 4.1) werden die Mengen  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  zu

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \{\mathbf{X} \in \Omega \mid (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} > 0\} \\ \Omega^- &:= \{\mathbf{X} \in \Omega \mid (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} < 0\} \end{aligned} \quad \mathbf{A} \in \partial_s \Omega \quad (4.8)$$

spezifiziert (s. auch Abschnitt 3.2). Definiert man den links- und den rechtsseitigen Limes eines Feldes  $(\bullet)$  als

$$\begin{aligned} (\bullet)^+ &:= \lim_{\mathbf{X} \in \Omega^+ \rightarrow \mathbf{A}} (\bullet) \\ (\bullet)^- &:= \lim_{\mathbf{X} \in \Omega^- \rightarrow \mathbf{A}} (\bullet), \end{aligned} \quad \text{mit } \mathbf{A} \in \partial_s \Omega \quad (4.9)$$

wird die Unstetigkeit an der singulären Fläche im Punkt  $\mathbf{A}$  mittels

$$[[\bullet]] := (\bullet)^+ - (\bullet)^- \quad (4.10)$$

analytisch beschrieben.

Für eine singuläre Fläche nullter Ordnung weist, gemäß Definition (4.6), die betrachtete Abbildung selbst einen unstetigen Verlauf in  $\partial_s \Omega$  auf. Da im Rahmen der LAGRANGE Beschreibung der Bewegung in der Kontinuumsmechanik die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \times t &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{X}, t) &\longmapsto \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.11)$$

die zentrale Zuordnung darstellt, ist für singuläre Flächen nullter Ordnung die Deformationsabbildung  $\varphi$  unstetig in  $\partial_s \Omega$ . Demnach ist die in Abschnitt 3.2 behandelte Kinematik genau dieser Klasse zuzuordnen. Die zugehörige kinematische Kompatibilitätsbedingung lautet

$$[[\mathbf{x}]] = [[\mathbf{u}]] = \zeta \mathbf{m}. \quad (4.12)$$

Gemäß Kapitel 3 bezeichnet in Gl. (4.12)  $\mathbf{m}$  die Richtung und  $\zeta$  die Amplitude der Diskontinuität des Verschiebungsfeldes in der Momentankonfiguration. Auf der Basis von Gl. (4.12) werden die Kompatibilitätsbedingungen höherer Ordnung nach [MAXWELL 1873] und [TRUESDELL & TOUPIN 1960] rekursiv hergeleitet. Für singuläre Flächen erster Ordnung, also Unstetigkeitsstellen in der ersten Ableitung, bestimmen sich diese aus Gl. (4.12) mit der Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $C$  der singulären Fläche zu

$$[[\mathbf{F}]] = \zeta \mathbf{m} \otimes \mathbf{N}, \quad [[\dot{\mathbf{x}}]] = -C \zeta \mathbf{m}. \quad (4.13)$$

Die Bedingungen (4.13) sind folglich mit dem physikalischen Phänomen der Schockwellen verknüpft. Zur Herleitung der Lokalisierungsbedingung für schwache Diskontinuitäten werden die Kompatibilitätsbedingungen für singuläre Flächen zweiter Ordnung, also die zu Beschleunigungswellen korrespondierenden Bedingungen, benötigt. Diese ergeben sich zu

$$[[\text{GRAD}\mathbf{F}]] = \zeta \mathbf{m} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad [[\dot{\mathbf{F}}]] = -C \zeta \mathbf{m} \otimes \mathbf{N} \quad \text{und} \quad [[\ddot{\mathbf{x}}]] = C^2 \zeta \mathbf{m}. \quad (4.14)$$

Mit der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (s. Abschnitt 2.1.3)

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (4.15)$$

wird der Sprung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten für singuläre Flächen zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$[[\mathbf{l}]] = [[\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}]] = [[\dot{\mathbf{F}}]] \cdot \mathbf{F}^{-1} = -C \zeta \mathbf{m} \otimes \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \quad (4.16)$$

beschrieben.

**Anmerkung:** Anders als in Kapitel 3 stimmen in diesem Abschnitt die Richtungen des Sprunges des Verschiebungsfeldes  $[[\mathbf{x}]] = \zeta \mathbf{m}$  und die Richtung der Rate  $[[\dot{\mathbf{u}}]] = -C \zeta \mathbf{m}$  überein. Da die Kompatibilitätsbedingungen zum Zeitpunkt des erstmaligen Auftretens singulärer Flächen korrespondieren, ist diese Äquivalenz offensichtlich. Für Zustände im post-kritischen Bereich ist zwar die LIE-Ableitung in Abschnitt 3.2 zu  $\mathcal{L}_\nu [[\mathbf{u}]] = \dot{\zeta} \mathbf{m}$  definiert worden, jedoch folgt hieraus keineswegs  $[[\mathbf{u}]] = \zeta \mathbf{m}$ . Aufgrund sich ändernder Richtungen der Raten gilt für den allgemeinen Fall  $[[\mathbf{u}]] = \int_{t=0}^{t=T} \dot{\zeta} \mathbf{m} dt \neq \zeta \mathbf{m}$ .  $\square$

### 4.3.2 Lokalisierungsbedingung für schwache Diskontinuitäten

Unter dem Begriff der klassischen Lokalisierung ist nach [RUDNICKI & RICE 1975] die Bildung schmaler Zonen mit großen Verzerrungen zu verstehen. Da der Grenzfall starker Deformationszustände einen unstetigen Verlauf des Deformationsgradienten darstellt, wird folglich der Zeitpunkt der Bildung einer singulären Fläche zweiter Ordnung betrachtet. Gemäß des vorangegangenen Abschnittes ist für singuläre Flächen zweiter Ordnung der Deformationsgradient stetig, dessen Rate und somit auch der räumliche Geschwindigkeitsgradient jedoch unstetig (s. Gl. (4.14)<sub>2</sub> und (4.16)). Das Ziel der Lokalisierungsanalyse ist die Bestimmung der Vektoren  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{m}$ , die die Diskontinuität beschreiben.

Die Rate des Gleichgewichtes an einer mittels  $\mathbf{N}$  beschriebenen Oberfläche wird mit Hilfe des CAUCHY-Lemmas und der *Pull-back*-Operation in der Referenzkonfiguration in die Form

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} \quad (4.17)$$

überführt. In Gl. (4.17) bezeichnet  $\mathbf{T}$  den Spannungsvektor und  $\mathbf{P}$  den ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor. Da an jeder inneren Schnittfläche Gleichgewicht erfüllt sein muß (s. Abschnitt 3.1), folgt unmittelbar

$$[[\dot{\mathbf{T}}]] = \dot{\mathbf{P}}^+ \cdot \mathbf{N} - \dot{\mathbf{P}}^- \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (4.18)$$



Gl. (4.18) stellt eine einzuhaltende Restriktion für die Rate des diskontinuierlichen Deformationsgradienten dar. Mit der Ratenform des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbb{C}^{\text{ep}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (4.19)$$

wird die Gleichgewichtsaussage zu

$$\llbracket \dot{\mathbf{T}} \rrbracket = \left[ (\mathbb{C}^{\text{ep}})^+ : \dot{\mathbf{F}}^+ \right] \cdot \mathbf{N} - \left[ (\mathbb{C}^{\text{ep}})^- : \dot{\mathbf{F}}^- \right] \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

spezifiziert. Unter der Annahme eines kontinuierlichen Verlaufes des Tangentenoperators (s. [RANIECKI & BRUHNS 1981])

$$\llbracket \mathbb{C}^{\text{ep}} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}^{\text{ep}} = (\mathbb{C}^{\text{ep}})^+ = (\mathbb{C}^{\text{ep}})^- \quad (4.21)$$

wird das Gleichgewicht mit Hilfe von Gl. (4.14)<sub>2</sub> in die Form

$$\llbracket \dot{\mathbf{T}} \rrbracket = \underbrace{(\mathbf{N} \cdot \mathbb{C}^{\text{ep}} \cdot \mathbf{N})}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{m} \quad \zeta = \mathbf{0}, \quad \text{mit} \quad Q_{ik} = N_j \mathbb{C}_{ijkl}^{\text{ep}} N_l \quad (4.22)$$

überführt. Die Annahme von Gl. (4.21) ist gerechtfertigt, da in [RICE & RUDNICKI 1980] (vgl. auch [OTTOSEN & RUNESSON 1991]), gezeigt wurde, daß eine materielle Verzweigung mit diskontinuierlichen Materialoperatoren niemals vor einer mit kontinuierlichen Materialoperatoren möglich ist. Somit resultiert die Lokalisierungsbedingung in der Referenzkonfiguration, als nicht-triviale Lösung der Gl. (4.22), zu

$$\det \mathbf{Q} = 0. \quad (4.23)$$

$\mathbf{Q}$  wird auch akustischer Tensor genannt. Diese Bezeichnung geht auf die Betrachtung von Wellenausbreitungen in [HADAMARD 1903] zurück. Mit Gl. (4.23) werden bei gegebener Materialtangente  $\mathbb{C}^{\text{ep}}$  die Richtungen  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{m}$  bestimmt. Die Grenzfälle  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{N}$ , bzw.  $\mathbf{N} \perp \mathbf{M}$  kennzeichnen Mode-I, bzw. Mode-II Versagen. Zwischen diesen Versagensformen ist eine große Anzahl gemischter Modi zu verifizieren.

Grundlage der Herleitung der Lokalisierungsbedingung in der Momentankonfiguration bildet die Gleichung

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, da = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} \, dA. \quad (4.24)$$

Gl. (4.24) stellt die Äquivalenz der Kräfte dar, welche auf die Referenz- und auf die Momentankonfiguration bezogen werden. In Gl. (4.24) ist die Notation  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$  für die nichtobjektive, unsymmetrische nominelle Spannungsrate eingeführt worden. Anders als in [RANIECKI & BRUHNS 1981] und [STEINMANN 1992] sind die Indizes von  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$  analog zu [SIMO & HUGHES 1998] verwendet worden. Mit Hilfe der NANSON-Formel und den LIE-Ableitungen  $J^{-1} \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\tau} = \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\sigma}$  der KIRCHHOFF- und der CAUCHY-Spannungen (s. [TRUESDELL & NOLL 1965], [MARSDEN

& HUGHES 1994]) wird  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$  zu

$$\begin{aligned}
J \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \, dA &= \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} \, dA \\
\iff J \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{F}^T \\
\iff J \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\tau} & J &:= \det \mathbf{F} \\
\iff \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\sigma} \\
\iff \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{l}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

bestimmt. Berücksichtigt man den Tangentenoperator  $\mathbf{c}^{\text{ep}}$  (es gilt  $\mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^{\text{ep}} : \mathbf{l}$ ) sowie die Gleichung  $J^{-1} \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\tau} = \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\sigma}$  wird der nominelle Spannungstensor in die Form

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\circ}{\mathbf{c}}^{\text{ep}} : \mathbf{l} \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\mathbf{c}}_{ijkl}^{\text{ep}} = J^{-1} \mathbf{c}_{ijkl}^{\text{ep}} + \sigma_{kj} \delta_{li} \tag{4.26}$$

überführt. Gl. (4.26) führt zur Lokalisierungsbedingung in der Momentankonfiguration

$$\llbracket \overset{\circ}{\mathbf{t}} \rrbracket = \llbracket \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}}^{\text{ep}} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{m} \, \gamma = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{q} = 0 \tag{4.27}$$

mit dem räumlichen akustischen Tensor  $\mathbf{q}$  ( $q_{ik} = n_j \overset{\circ}{\mathbf{c}}_{ijkl} n_l$ ).

Im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie folgt mit dem Sprung der Rate des Deformationsgradienten

$$\llbracket \nabla \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \llbracket \dot{\mathbf{F}} \rrbracket \tag{4.28}$$

die Lokalisierungsbedingung

$$\mathbf{n} \cdot \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket = \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^{\text{ep}} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{m} \, \dot{\zeta} = \mathbf{0}. \tag{4.29}$$

Da im weiteren Verlauf dieses Kapitels der akustische Tensor mit dem elastischen vorkonditioniert wird, ist die Determinante des elastischen akustischen Tensors zu ermitteln. Für ein isotropes Material ist die Determinante des akustischen Tensors per definitionem unabhängig von  $\mathbf{n}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist es demnach ausreichend, den Vektor  $\mathbf{n}^T = [1, 0, 0]$  zu betrachten. Hiermit folgt unmittelbar  $q_{ij} = \mathbb{C}_{1ij1}$ . Für die Determinante eines HOOKEschen Materials, welches durch den elastischen Werkstofftensor

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I}^{\text{sym}} + \Lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{4.30}$$

beschrieben wird, vereinfacht sich der elastische akustische Tensor zu

$$\det \mathbf{q}^e = (2\mu + \Lambda)^2 \mu^2. \tag{4.31}$$

In Gl. (4.31) sind  $\Lambda$  und  $\mu$  die LAMÉ-Konstanten sowie  $\mathbb{I}^{\text{sym}}$  der symmetrische vierstufige Einheitstensor.

### 4.3.3 Lokalisierungsbedingung für *starke* Diskontinuitäten

Anders als in Abschnitt 4.3.2 wird in dem vorliegenden Abschnitt die Bedingung für das erstmalige Auftreten von Sprüngen im Verschiebungsfeld hergeleitet. Die folgenden Ausführungen basieren auf der Arbeit [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993]. Eine Erweiterung auf die geometrisch nichtlineare Theorie ist [GARIKIPATI 1996] und [ARMERO & GARIKIPATI 1996] zu entnehmen. Da die Herleitungen für die geometrisch lineare und für die nichtlineare Theorie, analog zur klassischen Lokalisierungsanalyse, sich nur in den verschiedenen Spannungsmaßen unterscheiden, wird lediglich die Herleitung im Rahmen kleiner Verschiebungen und Verzerrungen dargelegt.

Gemäß Abschnitt 3.4.1 ist der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  für ein elasto-plastisches Kontinuum, welches Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld aufweist, von der Form

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbb{C} : [\nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} + ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \delta_S - \lambda \partial \sigma g] \cdot \mathbf{n}, \quad (4.32)$$

wobei eine nicht-assozierte Fließregel zugrundegelegt worden ist. Unter der Annahme, die plastischen Verzerrungen sind auf  $\partial_S \Omega$  begrenzt ( $\lambda = \lambda_\delta \delta_S$ ), geht Gl. (4.32) mit dem plastischen Multiplikator (3.43) in die Gleichung

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : \nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{n} \cdot \underbrace{\left[ \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \partial \sigma g \otimes \partial \sigma \phi : \mathbb{C}}{\partial \sigma \phi : \mathbb{C} : \partial \sigma g} \right]}_{\mathbb{C}_{\text{perf}}^{\text{ep}}} : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}) \delta_S \quad (4.33)$$

über. Da der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  eine reguläre Größe dargestellt, muß der singuläre Teil der Gl. (4.33)

$$\underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{\text{perf}}^{\text{ep}} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{q}_{\text{perf}}} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad (4.34)$$

zu Null verschwinden. Die nicht-triviale Lösung der Gl. (4.34) liefert die Lokalisierungsbedingung für starke Diskontinuitäten

$$\det \mathbf{q}_{\text{perf}} = 0. \quad (4.35)$$

Gl. (4.35) ist formal identisch zu Gl. (4.29). Im Gegensatz zu Gl. (4.29) basiert Gl. (4.35) auf der perfekt-plastischen Materialtangente. Demzufolge ist für das Entstehen einer starken Diskontinuität (4.35) ein mindestens so großes Belastungsniveau wie für das Auftreten einer schwachen Diskontinuität erforderlich. Im Rahmen des RANKINE-Kriteriums sind die Lokalisierungsbedingungen (4.29) und (4.35) äquivalent.

### 4.3.4 Beispiele

Die in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3 erläuterten Lokalisierungsanalysen werden in diesem Abschnitt anhand dreier weit verbreiteter Materialmodelle der Plastizitätstheorie veranschaulicht. Hierzu wird neben dem RANKINE-Kriterium und dem Modell nach VON MISES auch das

nicht-assoziertes Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER betrachtet (s. Abschnitte 2.1.1 und 2.1.2). Da der akustische Tensor für starke und schwache Diskontinuitäten formal identisch ist, erscheint es im weiteren Verlauf dieses Abschnitts ausreichend, nur die Lokalisierungsanalyse für schwache Diskontinuitäten im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie zu betrachten.

#### 4.3.4.1 RANKINE-Kriterium

Das RANKINE-Kriterium (vgl. Abschnitt 2.1.1) bildet den Anfang des Unterkapitels 4.3.4. Zunächst wird der Lastfall des einachsialen Zugs betrachtet. Dieser Belastungszustand ist durch den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (4.36)$$

charakterisiert. Mit der Reparametrisierung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  in Kugelkoordinaten

$$\mathbf{n}^T = [\sin \alpha \cos \theta, \sin \alpha \sin \theta, \cos \alpha] \quad (4.37)$$

wird die Determinante des akustischen Tensors als Funktion der Kugelkoordinaten  $\alpha, \theta$  dargestellt. Zur besseren Interpretation der Ergebnisse wird der akustische Tensor mit der Inversen des elastischen akustischen Tensor  $\mathbf{q}^e$  (4.31) vorkonditioniert. Die graphische Darstellung der Ergebnisse erfolgt mittels zweier Illustrationsformen. Neben der kartesischen Darstellung in Abb. 4.2b ist auch eine weitere Darstellungsform in Abb. 4.2a angewendet worden. In Abb. 4.2a wird der Funktionswert  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  mittels einer Farbe dargestellt. Je geringer der Wert der Funktion  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  ist, desto dunkler wird der Farbton. Ausgezeichnete Richtungen für lokalisiertes Versagen sind dementsprechend Regionen mit hohem schwarzen Farbanteil. Anders als in der kartesischen Darstellungsform werden die Winkel  $\alpha$  und  $\theta$  mittels ihres zugehörigen normierten Richtungsvektors  $\mathbf{n}$  angetragen. Die Position eines Punktes auf der Kugeloberfläche gibt also den Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  an; die Farbe den Funktionswert.

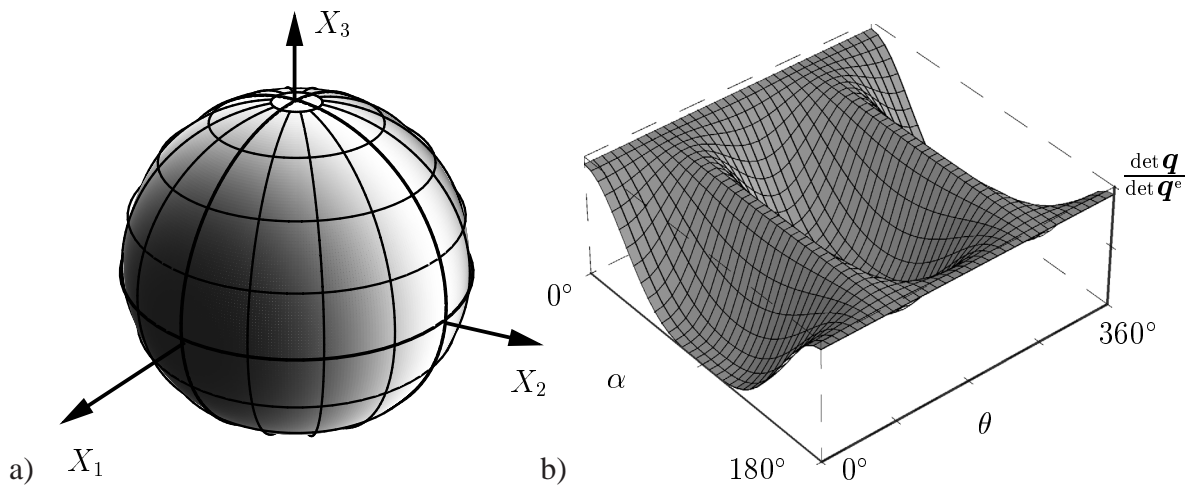
Aus Abb. 4.2a folgt, daß die Funktion  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  an den Stellen  $\mathbf{n}^T = [1; 0; 0] = \mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{n}^T = [-1; 0; 0] = -\mathbf{e}_1$  Nullstellen aufweist. Wird der Spannungstensor (4.36) mit diesen Nullstellen verglichen, fällt auf, daß die Eigenbasis  $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$  der maximalen Hauptspannung  $\sigma$  äquivalent zum dyadischen Produkt  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  ist. Diese Äquivalenz gilt für beliebige Spannungszustände. Im Rahmen des RANKINE-Kriteriums ist der Vektor  $\mathbf{n}$  demnach identisch mit der Richtung der maximalen Hauptspannung.

Werden die berechneten Nullstellen der Abbildung  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  in Gl. (4.29) eingesetzt, resultiert der Vektor  $\mathbf{m}$  zu

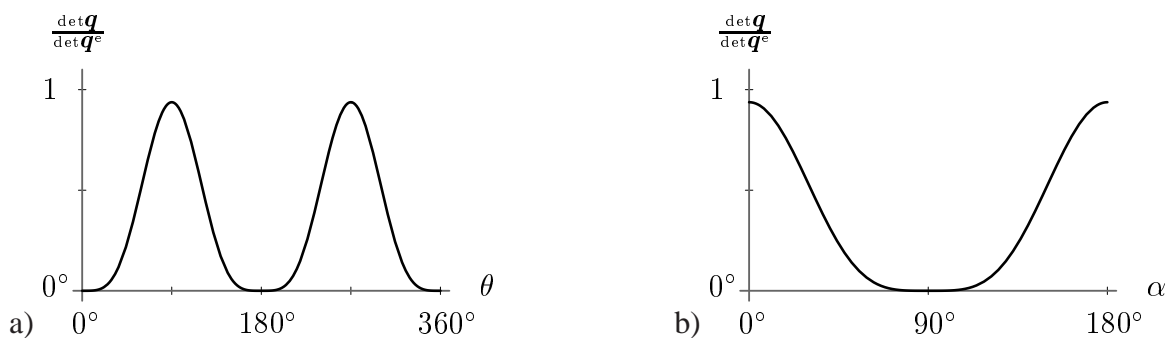
$$\mathbf{m} = \mathbf{n}. \quad (4.38)$$

Die Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  sind demnach für das RANKINE-Kriterium identisch. Da  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$ , ist das RANKINE-Kriterium durch Mode-I Versagen charakterisiert.

**Anmerkung:** Für das RANKINE-Kriterium unterscheiden sich die Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$ , die mittels der Lokalisierungsbedingung (4.29) berechnet werden, nicht von denen auf der Grundlage von Gl. (4.35). Für andere Plastizitätsmodelle ist dieser Sonderfall nicht erfüllt.  $\square$



**Abb. 4.2:** Determinante des akustischen Tensors für das RANKINE-Kriterium bei einachsigem Zug. a) Kugelkoordinatendarstellung (weiß entspricht  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 1$  und schwarz  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 0$ ) und b) Darstellung in kartesischer Koordinatendarstellung.

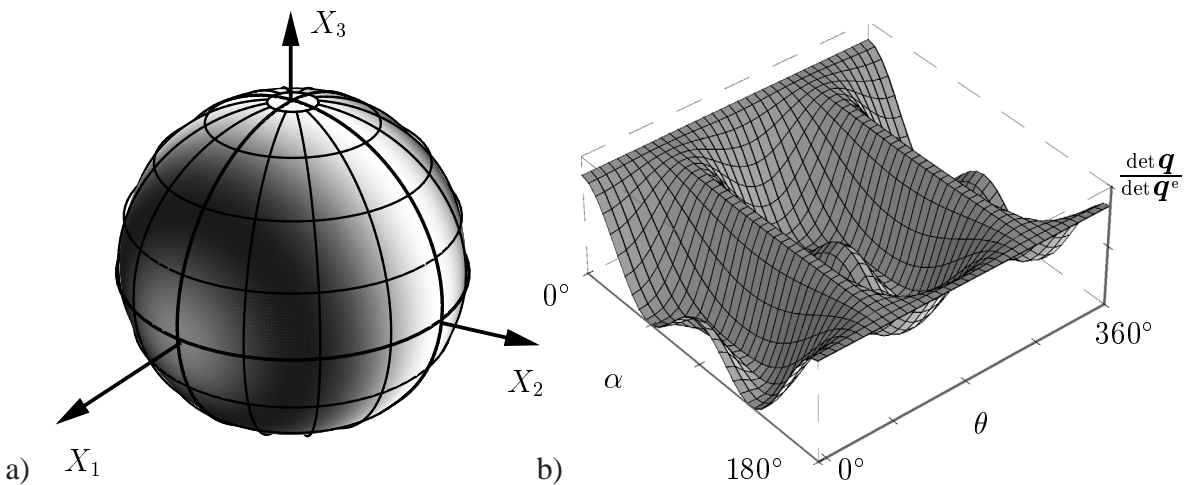


**Abb. 4.3:** Schnitt durch den Graph aus Abb. 4.2b für einen a) konstanten Raumwinkel  $\alpha = 90^\circ$  und b) einen konstanten Raumwinkel  $\theta = 0^\circ$ .

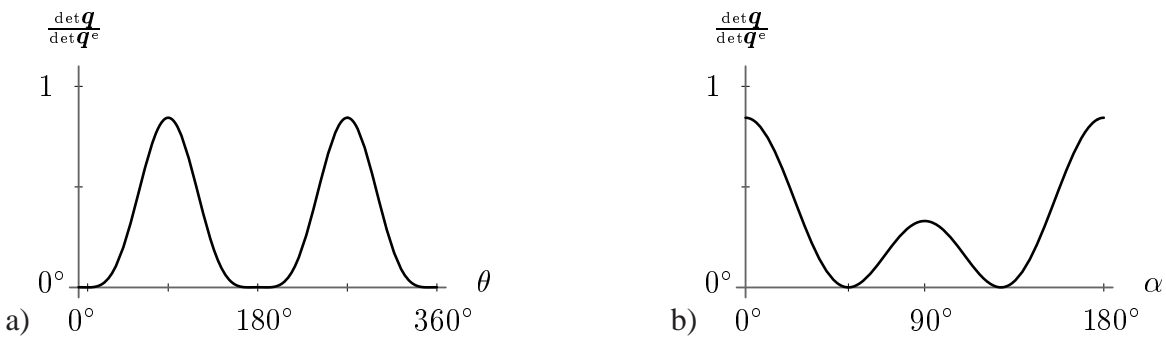
#### 4.3.4.2 VON MISES-Modell

Der zuvor analysierte Lastfall des einachsialen Zugs wird in diesem Unterabschnitt an einem duktilen Werkstoff untersucht. Hierzu wird die Fließfläche nach VON MISES herangezogen. Alle erforderlichen Gleichungen für dieses Modell sind Abschnitt 2.1.2 zu entnehmen. Die weiteren numerischen Analysen basieren auf einer Querkontraktionskonstante von  $\nu = 0.2$  und einem Verhältnis des Entfestigungsmoduls  $H$  zum Elastizitätsmodul von  $H/E = 0.0833$ . Zur Beschreibung der Zug- und Druckfestigkeit sind die Parameter  $f_{tu} = f_c = 2.0$  in Anlehnung an [IORDACHE & WILLAM 1996] gewählt worden.

Für den analysierten Lastfall resultieren um die  $X_1$  Achse rotationssymmetrische Nullstellen der Funktion  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$ . Anders als bei der RANKINE-Plastizität erhält man unendlich viele gleichwertige Möglichkeiten eines materiellen Verzweigens. Dies entspricht den in Experimenten beobachtbaren Ergebnissen. Zur besseren Veranschaulichung der Funktionen sind zwei



**Abb. 4.4:** Determinante des akustischen Tensors für das Modell nach VON MISES bei einachsialem Zug ( $\nu = 0.2$ ). a) Kugelkoordinatendarstellung (weiß entspricht  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 1$  und schwarz  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 0$ ) und b) Darstellung in kartesischer Koordinatendarstellung.



**Abb. 4.5:** Schnitt durch den Graph aus Abb. 4.2b für einen a) konstanten Raumwinkel  $\alpha = 50.77^\circ$  und b) einen konstanten Raumwinkel  $\theta = 0.0^\circ$ .

orthogonale Schnitte in einem Minimum durch Abb. 4.4b gelegt worden. Die dazugehörigen Graphen sind Abb. 4.5 zu entnehmen.

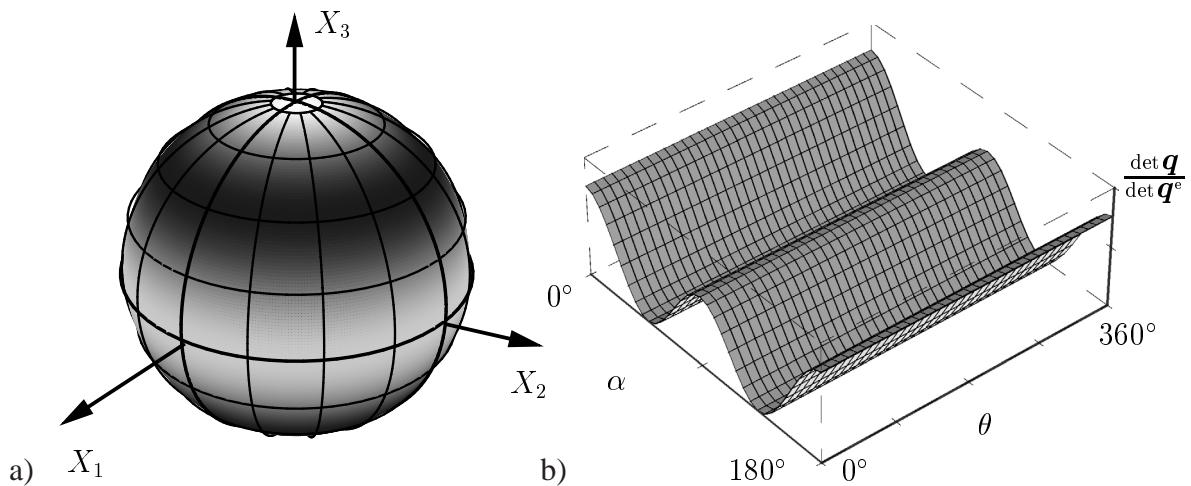
#### 4.3.4.3 DRUCKER-PRAGER-Modell

Die Plastizitätsmodelle der Abschnitte 4.3.4.1 und 4.3.4.2 basieren auf dem Postulat der maximalen Dissipation. In diesem Unterabschnitt hingegen erfolgt eine Lokalisierungsanalyse für zwei unterschiedliche Lastfälle anhand des nicht-assozierten Plastizitätsmodells nach DRUCKER-PRAGER (vgl. Abschnitt 2.1.2). Da das Modell häufig zur Beschreibung der Materialantwort unter Druckbeanspruchung eingesetzt wird, werden die Lastfälle

$$\boldsymbol{\sigma} = -\sigma \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \sigma \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (4.39)$$

analysiert. Um die Ergebnisse mit den Lösungen aus [IORDACHE & WILLAM 1996] vergleichen zu können, wird das plastische Potential vom VON MISES-Typus gewählt. Somit ist die Fließfunktion mit den Parametern  $f_c = 2.0$  und  $f_{tu} = 1.0$  ausreichend beschrieben. Analog zum Plastizitätsmodell nach VON MISES wird die Querkontraktionskonstante zu  $\nu = 0.2$  gesetzt.

Bei der Analyse des Lastfalls „Druck“ (s. Gl. (4.39)<sub>1</sub>) wurde der Quotient  $H/E$  vom Entfestigungsmodul zu Elastizitätsmodul  $H/E = 0.125$  gewählt.



**Abb. 4.6:** Determinante des akustischen Tensors für das Modell nach DRUCKER-PRAGER bei einachsialem Druck ( $\nu = 0.2$ ). a) Kugelkoordinatendarstellung (weiß entspricht  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 1$  und schwarz  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 0$ ) und b) Darstellung in kartesischer Koordinatendarstellung.

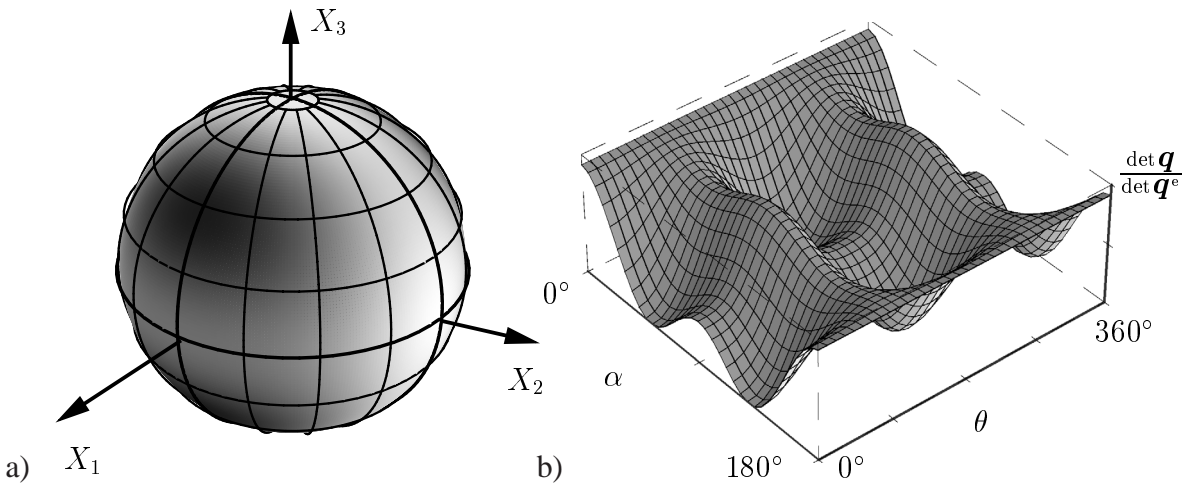
Abb. 4.6 zeigt, daß eine, um die  $X_3$  Achse rotationssymmetrische, kritische Richtung ermittelt wird. Diese Symmetrie korrespondiert zu dem, um die  $X_3$  Achse rotationssymmetrischen, Belastungszustand. Folglich sind die Nullstellen der Abbildung  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  invariant bezüglich des Winkels  $\theta$ .

Die Analyse des Lastfalls (4.39)<sub>2</sub> erfolgt für einen Quotienten  $H/E = 0.0139$ . Die anderen Materialparameter hingegen bleiben unverändert.

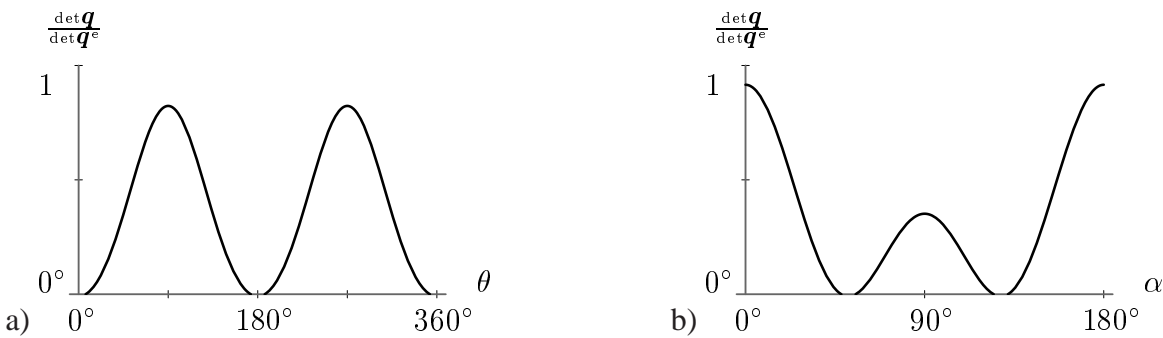
Auch für diesen Lastfall existiert mehr als eine Nullstelle der Abbildung  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$ . Im Gegensatz zum Lastfall „Druck“ reduziert sich die Anzahl möglicher Orientierungen der singulären Fläche auf zwei bzw. vier (zwei linear unabhängige Vektoren  $\mathbf{n}$ ).

Anhand dieses Beispiels wird deutlich, daß bei komplexeren Materialmodellen eine Lokalisierungsanalyse zur Interpretation des Modells notwendig ist. Daher wird im folgenden Abschnitt ein numerisches Verfahren für dreidimensionale Kontinua hergeleitet, um für beliebige Materialmodelle und Spannungszustände die kritischen Richtungen  $\mathbf{n}$  bzw.  $\mathbf{m}$  zu bestimmen.





**Abb. 4.7:** Determinante des akustischen Tensors für das nicht-assozierte Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER bei Lastfall  $(4.39)_2$  ( $\nu = 0.2$ ). a) Kugelkoordinatendarstellung (weiß entspricht  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 1$  und schwarz  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e = 0$ ) und b) Darstellung in kartesischer Koordinatendarstellung.



**Abb. 4.8:** Schnitt durch den Graph aus Abb. 4.7b für einen a) konstanten Raumwinkel  $\alpha = 128.32^\circ$  und b) einen konstanten Raumwinkel  $\theta = 0.0^\circ$ .

## 4.4 Numerische Lösungsstrategien

Für eine große Anzahl unterschiedlicher Plastizitätsmodelle sowie für Schädigungstheorien existieren geschlossene Gleichungen zur Bestimmung der Lokalisierungsbedingung für schwache Diskontinuitäten. (s. [RUNESSON, OTTOSEN & PERIĆ 1991]). Um jedoch beliebige komplexe Werkstoffmodelle mittels einer Verzweigungsanalyse zu analysieren, sind numerische Verfahren notwendig.

Im Unterabschnitt 4.3.4 ist zur Berechnung der singulären Flächen  $\partial_s \Omega$  die Gleichung  $\det \mathbf{q} = 0$  herangezogen worden. Diese Gleichung ist im Rahmen einer numerischen Analyse weniger sinnvoll. Da bei numerischen Verfahren, wie beispielsweise der Finite-Elemente-Methode, finite Lastschritte betrachtet werden, wird der Zeitpunkt, der zur Bedingung  $\det \mathbf{q} = 0$  korrespondiert, nur in Ausnahmefällen getroffen. Im allgemeinen wird daher  $\det \mathbf{q} \leq 0$  oder  $\det \mathbf{q} > 0$

erfüllt sein. Für  $\det \mathbf{q} > 0$  liegt nach Abschnitt 4.3.2 bzw. Abschnitt 4.3.3 eine homogene Materialantwort vor. Für die Analyse lokalisierter Versagensformen wird somit die Bedingung  $\det \mathbf{q} \leq 0$  benötigt. Die Ungleichung  $\det \mathbf{q} < 0$  korrespondiert zum post-kritischen Bereich. Da die Nullstelle der Funktion  $\det \mathbf{q}$  bzw.  $\det \mathbf{q} / \det \mathbf{q}^e$  auch gleichzeitig das Minimum der Abbildung darstellt, ist im post-kritischen Bereich anstelle der Nullstelle das Minimum der Funktion zu berechnen. Zur Lokalisierungsanalyse wird daher das Optimierungsproblem

$$\mathbf{n} = \arg (\min \det \mathbf{q}(\mathbf{n})), \quad (4.40)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\det \mathbf{q} \leq 0 \quad \wedge \quad \|\mathbf{n}\|_2 = 1 \quad (4.41)$$

betrachtet. Hierbei ist es nur von untergeordneter Bedeutung, ob starke bzw. schwache Diskontinuitäten betrachtet werden, da die Form der zugrundeliegenden Gleichungen identisch ist (vgl. Gl. (4.23), (4.27) und (4.35)). Nach Kenntnis des Autors gehen alle Algorithmen für numerische Lokalisierungsanalysen auf die Arbeit [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] zurück. Aufgrund einiger Nachteile des dort vorgestellten Algorithmus wird im folgenden Abschnitt zunächst ein robustes numerisches Verfahren zur Berechnung der Verzweigungsanalyse im zweidimensionalen Raum hergeleitet. Da im Rahmen einer Finite-Elemente-Simulation für jeden Integrationspunkt der akustische Tensor analysiert wird, ist die Effizienz des Verfahrens von großer Bedeutung.

#### 4.4.1 Numerische Lösungsstrategien für den ebenen Verzerrungs- bzw. Spannungszustand

Der in diesem Unterabschnitt hergeleitete Algorithmus zur Analyse von Lokalisierungsprozessen basiert auf den Arbeiten [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] und [STEIN, STEINMANN & MIEHE 1995]. Abweichungen bzw. Modifikationen bezüglich der beiden Veröffentlichungen werden an entsprechender Stelle explizit erwähnt.

Um die Nebenbedingung  $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$  exakt zu erfüllen, wird der Einheitsvektor  $\mathbf{n}^T = [\cos \alpha, \sin \alpha]$  in Polarkoordinaten beschrieben. Hierbei stellt  $\alpha$  den Winkel zwischen dem Vektor  $\mathbf{n}$  und der  $X_1$  Achse dar. Nach [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] und [STEIN, STEINMANN & MIEHE 1995] resultiert die Determinante des akustischen Tensors zu

$$\det \mathbf{q} = a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 = \sin^4 \alpha \sum_{i=0}^4 a_i \tan^{i-4} \alpha. \quad (4.42)$$

In Gl. (4.42) sind die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= \mathbb{C}_{1111}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1212}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1112}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1211}^{\text{ep}} \\
a_1 &= \mathbb{C}_{1111}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1222}^{\text{ep}} + \mathbb{C}_{1111}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2212}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1112}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2211}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1122}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1211}^{\text{ep}} \\
a_2 &= \mathbb{C}_{1111}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2222}^{\text{ep}} + \mathbb{C}_{1112}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1222}^{\text{ep}} + \mathbb{C}_{1211}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2212}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1122}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1212}^{\text{ep}} \\
&\quad - \mathbb{C}_{1122}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2211}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1212}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2211}^{\text{ep}} \\
a_3 &= \mathbb{C}_{1112}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2222}^{\text{ep}} + \mathbb{C}_{1211}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2222}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1122}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2212}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{1222}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2211}^{\text{ep}} \\
a_4 &= \mathbb{C}_{1212}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{2222}^{\text{ep}} - \mathbb{C}_{2212}^{\text{ep}} \mathbb{C}_{1222}^{\text{ep}}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

eingeführt und die Symmetrieeigenschaften  $\mathbb{C}_{ijkl}^{\text{ep}} = \mathbb{C}_{jikl}^{\text{ep}} = \mathbb{C}_{jilk}^{\text{ep}}$  der Materialtangente berücksichtigt worden.

In [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] wird die Gleichung  $\det \mathbf{q} = 0$  anschließend durch  $\cos^4 \alpha$  dividiert und von der daraus resultierenden Gleichung das Minimum bestimmt. Dieses Vorgehen weist jedoch zwei erhebliche Nachteile bzw. Fehler auf. Zum einen ist das Verfahren nur begrenzt für numerische Verzweigungsanalysen einsetzbar, da der zur  $\det \mathbf{q} = 0$  korrespondierende Belastungspunkt lediglich in Ausnahmefällen genau getroffen wird. Zum anderen ist die Division mit  $\cos^4 \alpha$  aufgrund von Definitionslücken nur eingeschränkt, unter Berücksichtigung dieser Lücken, möglich. Im Gegensatz dazu wird in [STEIN, STEINMANN & MIEHE 1995] in einem ersten Schritt das Minimum von  $\det \mathbf{q}$  ermittelt und anschließend das Vorzeichen von  $\det \mathbf{q}$  kontrolliert. Die Ableitung der Determinante des akustischen Tensors nach dem Winkel  $\alpha$  wird mit den Koeffizienten

$$A_0 = a_1 \quad A_1 = 2a_2 - 4a_0 \quad A_2 = 3a_3 - 3a_1 \quad A_3 = 4a_4 - 2a_2 \quad A_4 = -a_3 \tag{4.44}$$

in geschlossener Weise zu

$$\begin{aligned}
q' &= \frac{d(\det \mathbf{q})}{d\alpha} = A_0 n_1^4 + A_1 n_1^3 n_2 + A_2 n_1^2 n_2^2 + A_3 n_1 n_2^3 + A_4 n_2^4 \\
&= \sin^4 \alpha \sum_{i=0}^4 A_i \tan^{i-4} \alpha
\end{aligned} \tag{4.45}$$

berechnet. Mit den Gleichungen (4.45) und (4.44) aus [STEIN, STEINMANN & MIEHE 1995] folgt die zweite Ableitung mit

$$\hat{A}_0 = A_1 \quad \hat{A}_1 = 2A_2 - 4A_0 \quad \hat{A}_2 = 3A_3 - 3A_1 \quad \hat{A}_3 = 4A_4 - 2A_2 \quad \hat{A}_4 = -A_3 \tag{4.46}$$

zu

$$\begin{aligned}
q'' &= \frac{d^2(\det \mathbf{q})}{d\alpha^2} = \hat{A}_0 n_1^4 + \hat{A}_1 n_1^3 n_2 + \hat{A}_2 n_1^2 n_2^2 + \hat{A}_3 n_1 n_2^3 + \hat{A}_4 n_2^4 \\
&= \sin^4 \alpha \sum_{i=0}^4 \hat{A}_i \tan^{i-4} \alpha.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Auf der Basis von Gl. (4.45) und (4.47) wird das Minimum der Funktion  $\det \mathbf{q}$  mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens

$$q'_{(k)} + q''_{(k)} \Delta \alpha_{(k+1)} = 0 \tag{4.48}$$

bestimmt. Der Startwert der NEWTON-Iteration wird in einem ersten Schritt ermittelt, indem  $\det \mathbf{q}$  für  $\alpha \in [0, \pi]$  in  $5^\circ$  Schritten berechnet wird. Das diskrete Minimum wird anschließend als Initialwert verwendet. Zusammenfassend ist der Algorithmus in der Form eines Struktogrammes in Abb. 4.9 dargestellt.

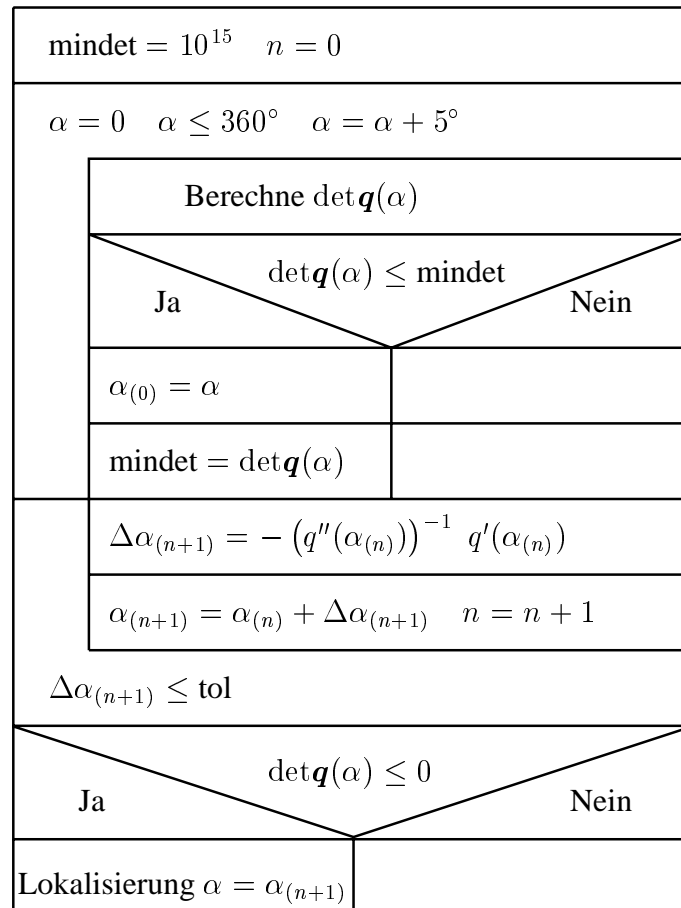


Abb. 4.9: Struktogramm zur Berechnung des Richtungsvektors  $n$ .

#### 4.4.2 Numerische Lösungsstrategien für dreidimensionale Kontinua

Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren zur Berechnung des Vektors  $n$  im dreidimensionalen Raum hergeleitet. Nach genauer Literaturrecherche beschäftigten sich lediglich [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] mit dieser Problemstellung. Das in der vorliegenden Arbeit beschriebene Verfahren unterscheidet sich jedoch von dem in [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] vorgestellten Algorithmus und stellt die Erweiterung der zweidimensionalen Implementierung des Abschnitts 4.4.1 dar. Zur Lösung des Optimierungsproblems (4.40) wird demnach auch in diesem Abschnitt das NEWTON-Verfahren verwendet.

Das Optimierungsproblem (4.40) der Verzweigungsanalyse kann mittels unterschiedlicher mathematischer Verfahren formuliert werden, um die Restriktion (4.41)<sub>2</sub> zu erfüllen. In [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] wird die Länge des Einheitsvektors mittels eines LAGRANGE-Multiplikators berücksichtigt. Demzufolge ist die Gleichung

$$f(\mathbf{n}, \lambda) = \det \mathbf{q}(\mathbf{n}) - \lambda ( \|\mathbf{n}\|_2 - 1 ) \quad (4.49)$$

zu minimieren. Verfahren, die auf *Penalty*-Faktoren basieren ( $\lambda = \text{const}$ ), werden a priori nicht weiter betrachtet, da diese vom Benutzer tiefere Kenntnisse der zu minimierenden Gleichung voraussetzen. In der vorliegenden Arbeit wird der Vektor  $\mathbf{n}$  in Kugelkoordinaten  $\alpha, \theta$  beschrieben und so die Restriktion  $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$  eingehalten. Die zu minimierende Gleichung ist demzufolge von der Form

$$\tilde{f}(\alpha, \theta) = \det \mathbf{q}(\alpha, \theta). \quad (4.50)$$

Gl. (4.50) stellt ein Optimierungsproblem in Abhängigkeit von den zwei Argumenten  $\alpha$  und  $\theta$  dar. Im Vergleich zu Gl. (4.49) verringert sich somit die Anzahl der Unbekannten von vier ( $n_1, n_2, n_3, \lambda$ ) auf zwei ( $\alpha, \theta$ ). Da das elastische Verhalten des Werkstoffs die Werte von Gleichung (4.50) deutlich beeinflusst, wird  $\tilde{f}$  mit dem elastischen akustischen Tensor vorkonditioniert zu

$$f(\alpha, \theta) = \frac{\det \mathbf{q}(\alpha, \theta)}{\det \mathbf{q}^e(\alpha, \theta)}. \quad (4.51)$$

Unter der Voraussetzung eines isotropen elastischen Materialverhaltens vereinfacht sich die Gleichung zu (s. Gl. (4.31))

$$f(\alpha, \theta) = \frac{\det \mathbf{q}(\alpha, \theta)}{\det \mathbf{q}^e}, \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{q}^e = \text{const}. \quad (4.52)$$

Der numerische Algorithmus dieses Absatzes stellt die konsistente Erweiterung zu der Implementierung des Abschnitts 4.4.1 dar. Daher wird in einem ersten Schritt das Minimum der Abbildung  $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt und anschließend überprüft, welches Vorzeichen  $\det \mathbf{q}$  am Minimum aufweist. Die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum bestimmen sich mit

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \theta \\ \sin \alpha \sin \theta \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \sin \theta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

und unter Berücksichtigung der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Analog zur Arbeit [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] ist somit die Ableitung der Funktion  $f$  bezüglich der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  zu berechnen. Nach Einführung des dreistufigen Tensors

$$\mathcal{C}_{ijk} := \mathbb{C}_{kijl}^{\text{ep}} n_l + n_l \mathbb{C}_{lijl}^{\text{ep}}, \quad (4.55)$$

wird die Ableitung  $\partial f / \partial \mathbf{n}$  zu

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = f \mathbf{q}^{-T} : \mathcal{C} \quad (4.56)$$

zusammengefaßt (s. auch Anhang A). Vergleicht man Gl. (4.56) mit der dazu korrespondierenden Gleichung in [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] bzw. [ORTIZ 1987], fällt auf, daß nur für die große Symmetrie  $\mathbb{C}_{ijkl}^{\text{ep}} = \mathbb{C}_{klij}^{\text{ep}}$  die Ableitungen äquivalent sind. Die Herleitungen in [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] sind demnach auf assoziierte Fließ- und Entfestigungsregeln beschränkt. Das nichtlineare Gleichungssystem  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  mit

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

wird mittels des NEWTON-Verfahrens

$$\underbrace{\mathbf{r}|_k + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \theta} \\ \text{sym} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}_k}_{\mathbf{R}|_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \theta \end{bmatrix}}_{\Delta}|_{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

iterativ berechnet. Die zur Berechnung von Gl. (4.58) erforderlichen zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n} \otimes \partial \mathbf{n}} : \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n} \otimes \partial \mathbf{n}} : \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \theta} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \alpha} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n} \otimes \partial \mathbf{n}} : \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha \partial \theta} \end{aligned} \quad (4.59)$$

werden additiv in die zweiten Ableitungen des Normalenvektors

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha^2} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \theta \\ -\sin \alpha \sin \theta \\ -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \theta \\ -\sin \alpha \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha \partial \theta} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \theta \\ \cos \alpha \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

sowie die zweiten Ableitungen der Funktion  $f$  bezüglich des Vektors  $\mathbf{n}$  aufgespalten. Diese ergeben sich unter Verwendung der Notationen

$$\mathbf{A} := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \otimes \mathbf{q}^{-T} : \mathcal{C} = f \mathbf{q}^{-T} : \mathcal{C} \otimes \mathbf{q}^{-T} : \mathcal{C} = \mathbf{A}^T, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{B} := f \left( \frac{\partial \mathbf{q}^{-T}}{\partial \mathbf{q}} : \mathcal{C} \right) : \mathcal{C} = \mathbf{B}^T \quad \text{mit} \quad \frac{\partial q_{ij}^{-T}}{\partial q_{kl}} = -q_{jk}^{-1} q_{li}^{-1} \quad (\text{s. Anhang A}) \quad (4.62)$$

und

$$\mathbf{C} := f \mathbf{q}^{-T} : \mathbb{C}^{\text{ep}} \quad \text{bzw.} \quad C_{ij} = f q_{kl}^{-T} C_{ijkl}^{\text{ep}}, \quad (4.63)$$

zu

$$\mathbf{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n} \otimes \partial \mathbf{n}} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T = \mathbf{F}^T. \quad (4.64)$$

Der Startwert der NEWTON-Iteration (4.58) wird mittels einer vorgelagerten, rasterförmigen Auswertung der Funktion  $f$  ermittelt.

### 4.4.3 Modifikation mit *Line-Search*-Strategie

Um die möglichen auftretenden numerischen Konvergenzprobleme des NEWTON-Verfahrens im größeren Abstand zur Lösung zu reduzieren, wird der Algorithmus des vorangegangenen Abschnittes mittels des *Line-Search*-Verfahrens modifiziert (s. [LUENBERGER 1984]). Im Gegensatz zur Gl. (4.58) wird das *Update* der Winkel unter Verwendung eines Parameters  $\beta$  zu

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix} \Big|_{k+1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix} \Big|_k + \beta \Delta \quad (4.65)$$

verallgemeinert (gedämpftes NEWTON-Verfahren). Für den Sonderfall  $\beta = 1$  ist Gl. (4.65) somit äquivalent zum ursprünglichen NEWTON-Verfahren. Im Rahmen des *Line-Search*-Algorithmus wird mit dem aus Gl. (4.58) berechneten Inkrement  $\Delta$  neben dem Standard-*Update* ( $\beta = 1.0$ ), ein *Update* mit  $\beta = 0.5$  und ein *Update* mit  $\beta = 1.5$  berechnet und die Funktion  $f$  an diesen drei Stellen ausgewertet. Mittels dieser drei Funktionswerte wird die Abbildung  $f(\alpha, \theta)$  quadratisch zu  $f(\beta)$  approximiert. Da die Funktion nur entlang des Vektors  $\Delta$  betrachtet wird (*Line-Search*), ist das Minimum für die quadratische Funktion  $f(\beta)$  explizit berechenbar. Der so ermittelte Parameter  $\beta$  stellt anschließend den Dämpfungskoeffizienten dar.

### 4.4.4 Beispiele

Nach der Herleitung des numerischen Algorithmus zur Bestimmung des Vektors  $\mathbf{n}$  wird in diesem Abschnitt die Effizienz der Implementierung aufgezeigt. Hierzu wird zu Beginn die VON MISES-Plastizität im Rahmen des ebenen Spannungszustandes betrachtet. Daran anschließend erfolgt eine äquivalente dreidimensionale Analyse. Den Abschluß dieses Abschnitts bildet die Lokalisierungsanalyse eines nicht-assozierten Materialmodells nach DRUCKER-PRAGER.

Die Ergebnisse der klassischen Lokalisierungsanalyse für das Plastizitätsmodell nach VON MISES sind für den ebenen Spannungszustand zusammenfassend in Tab. 4.1 dargestellt. Die numerischen Lösungen in Tab. 4.1 sind äquivalent zu den analytischen Lösungen in [IORDACHE & WILLAM 1996].

Da für den ebenen Spannungszustand, zusammen mit dem isotropen HOOKEschen Materialmodell, die Ergebnisse unabhängig von der Querkontraktion sind, ist eine Variation bezüglich dieses Materialparameters nicht erforderlich.



Lastfall	Hauptspannungen		$\alpha_{\text{krit}}$
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	
Einachsialer Druck	0.0	-2.0	54.74°
Schub	1.155	-1.155	45.00°
Einachsialer Zug	2.0	0.0	35.26°
Zweiachsialer Zug	2.309	1.155	0.0°

**Tab. 4.1:** Kritischer Winkel  $\alpha_{\text{krit}}$  für das Plastizitätsmodell nach VON MISES, ebener Spannungszustand, Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ( $f_c = f_{tu} = 2.0$ ,  $H = 0$ ).

Zur Demonstration der Effizienz des Algorithmus ist in Tab. 4.2 das Konvergenzverhalten beispielhaft für den Lastfall des einachsialen Drucks abgebildet. Wie aus Tab. 4.2 zu entnehmen ist,

Iteration	Supremumsnorm des Residuums
1	0.2830991836E+00
2	0.2675860549E-01
3	0.8435873162E-03
4	0.7518983751E-06
5	0.5996651844E-12

**Tab. 4.2:** Lokalisierungsanalyse: Konvergenzverhalten bei einachsigem Druck für das Plastizitätsmodell nach VON MISES, ebener Spannungszustand, Startwert  $\alpha_0 = 50^\circ$ .

konvergiert das Verfahren aufgrund der konsistenten Linearisierung asymptotisch quadratisch.

Analog zur Analyse des ebenen Spannungszustands wird der neu entwickelte Algorithmus auch für den dreidimensionalen Fall für das Plastizitätsmodell nach VON MISES untersucht. Neben der Klassifizierung in 4 verschiedene Lastfälle, die für isotrope Werkstoffe mittels der korrespondierenden Hauptspannungen hinreichend beschrieben werden, erfolgt auch eine Variation der Querkontraktion ( $\nu = 0.0$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\nu = 0.499$ ). Die Ergebnisse sind zusammenfassend in Tab. 4.3 dargestellt. Um die Orientierung der singulären Fläche anhand eines Winkels zu beschreiben, wird  $\alpha_{\text{krit}}$  als der Winkel zwischen der  $X_3$  Achse und der Ebenen der singulären Fläche eingeführt ( $\alpha_{\text{krit}} \neq \alpha$ ). Hierdurch sind die berechneten Winkel in Tab. 4.3 mit den Ergebnissen in [IORDACHE & WILLAM 1996] vergleichbar.

Wie im vorangegangenen Absatz sind die numerischen Lösungen mit den Werten der Referenzlösung identisch. Die Leistungsfähigkeit der Linearisierung des Optimierungsproblems wird erneut anhand der Konvergenzgeschwindigkeit belegt. Für den Lastfall „zweiachsialer Zug“ ist das Konvergenzverhalten Tab. 4.4 zu entnehmen.

Zum Abschluß des Abschnitts erfolgt eine Lokalisierungsanalyse für das nicht-assozierte Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER. Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Variationen bezüglich der Lastfälle und der Querkontraktion sind Tab. 4.5 zu entnehmen.

Lastfall	Hauptspannungen			$\alpha_{\text{krit}}$		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.499$
Einachsialer Druck	0.0	0.0	-2.0	54.74°	50.77°	45.02°
Schub	1.15	0.0	-1.15	45.00°	45.00°	45.00°
Einachsialer Zug	0.0	0.0	2.0	54.74°	50.77°	44.99°
Zweiachsialer Zug	0.0	1.15	2.31	45.00°	45.00°	45.00°

**Tab. 4.3:** Kritischer Winkel  $\alpha_{\text{krit}}$  für das Plastizitätsmodell nach VON MISES, dreidimensionaler Spannungszustand, Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ( $f_c = f_{\text{tu}} = 2.0$ ).

Iteration	Supremumsnorm des Residuums
1	0.9099411938E-01
2	0.3726489925E-02
3	0.2761497516E-06
4	0.2383024662E-12

**Tab. 4.4:** Lokalisierungsanalyse: Konvergenzverhalten bei zweiachsigem Zug für das Plastizitätsmodell nach VON MISES,  $\nu = 0.499$ , dreidimensionaler Spannungszustand, Startwerte  $\alpha_0 = 130^\circ$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ .

Lastfall	Hauptspannungen			$\alpha_{\text{krit}}$		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.499$
Einachsialer Druck	0.0	0.0	-2.0	48.19°	43.09°	35.29°
Schub	0.77	0.0	-0.77	39.45°	38.32°	36.62°

**Tab. 4.5:** Kritischer Winkel  $\alpha_{\text{krit}}$  für das nicht-assozierte Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER, dreidimensionaler Spannungszustand, Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ( $f_c = 2.0$ ,  $f_{\text{tu}} = 1.0$ ), plastisches Potential: VON MISES.

Auch hier weisen die numerischen Berechnungen und die analytische Lösung in [IORDACHE & WILLAM 1996] keine Abweichungen auf. Wie aus Tab. 4.6 ersichtlich wird, ergibt sich wiederum eine quadratische Konvergenzrate.

Iteration	Supremumsnorm des Residuums
1	0.2879252280E-01
2	0.4627621106E-03
3	0.1519820538E-06
4	0.1674621005E-13

**Tab. 4.6:** Lokalisierungsanalyse: Konvergenzverhalten bei Lastfall „Schub“ für das nicht-assozierte Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER,  $\nu = 0.2$ , dreidimensionaler Spannungszustand, Startwerte  $\alpha_0 = 130^\circ$ ,  $\theta_0 = 360^\circ$ .

## 4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene Indikatoren für Versagen auf Materialpunktebene beschrieben. Für die lokalisierten Versagensformen wurde anschließend ein auf dem NEWTON-Verfahren basierender Algorithmus vorgestellt, mit dessen Hilfe der Normalenvektor  $\boldsymbol{n}$  der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  für beliebige Materialmodelle berechnet werden kann. Die Kinematik diskontinuierlicher Verschiebungsfelder (Abschnitt 3.2) ist mit den Vektoren  $\boldsymbol{n}$  und  $\boldsymbol{m}$  ausreichend beschrieben. Daher wird im folgenden Kapitel eine numerische Umsetzung der in Kapitel 3 ausgearbeiteten Modelle erfolgen.



# Kapitel 5

## Berücksichtigung von inkompatiblen $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern im Rahmen der Finite-Elemente-Methode

Im vorliegenden Kapitel erfolgt die numerische Umsetzung  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Zu Beginn wird zu diesem Zweck die in Kapitel 3 beschriebene Kinematik geringfügig geändert, so daß die lokale Erweiterung der Deformationsabbildung auf den Deformationsgradienten beschränkt werden kann. Zur Implementierung wird das *Enhanced Assumed Strain*-Konzept (EAS) herangezogen. Anschließend werden verschiedene Traktions-Verschiebungs-Beziehungen an einer internen Fläche betrachtet, um die Evolution der Diskontinuität des Verschiebungssprunges zu kontrollieren. Die Implementierung erfolgt in einer analogen Form zur numerischen Umsetzung für Kontinuumsmodelle  $\mathcal{C}^0$ -stetiger Verschiebungsfelder. Die Freiheitsgrade, die die Diskontinuität beschreiben, werden auf Materialpunktebene eliminiert. Die statische Kondensation wird somit nicht benötigt. Auf diese Weise wird ermöglicht, den mittlerweile standardisierten *Return-Mapping*-Algorithmus nahezu unverändert zur Lösung der Materialgleichungen heranzuziehen. Um numerischen Versteifungseffekten, die bei Verwendung sogenannter *Fixed-Crack*-Modelle auftreten, entgegenzuwirken, wird die Restriktion einer zeitlich konstanten Topologie der singulären Fläche verworfen. Die Erweiterung auf *Rotating-Crack*-Konzepte wird ausführlich diskutiert. Die Ausführungen dieses Kapitels unterliegen keiner Restriktion bezüglich eines speziellen Elementtypus.

### 5.1 Allgemeines

Nach Kenntnis des Autors sind alle Modelle auf Basis diskontinuierlicher Verschiebungsfelder additiv auf eine glatte Abbildung und auf eine sprungstetige Funktion  $H_s$  zurückzuführen. Im Rahmen der numerischen Umsetzung ist jedoch eine große Anzahl unterschiedlicher Modelle zu finden. Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, werden in den folgenden

Absätzen häufig verwendete Implementierungen beschrieben. Neben einem deskriptiven Vorgehen werden auch die hieraus resultierenden Vor- und Nachteile erläutert.

Eine Klasse numerischer Modelle auf Basis diskontinuierlicher Verschiebungsfelder zeichnet sich dadurch aus, daß das Feld der diskontinuierlichen Verschiebungen auf globaler Ebene zusätzlich zu einer glatten Deformationsabbildung eingeführt wird. Hierdurch entsteht ein Gleichungssystem auf Strukturebene, welches neben den diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_i^e$ , die zur stetigen Verschiebungsabbildung korrespondieren, auch Freiheitsgrade  $\mathbf{d}_i^e$  aufweist, die zur Sprungstelle des Verschiebungsfeldes korrespondierenden. Diese „neuen“ Freiheitsgrade lassen sich nicht auf Elementebene mittels der statischen Kondensation eliminieren. Demnach erhöht sich die Anzahl der zu lösenden Gleichungen, was sich unmittelbar auf die benötigte Rechenzeit auswirkt.

Ein einfaches Verfahren, das Feld der diskontinuierlichen Verschiebungsfelder einzuführen, ist die Verwendung von *Interface*- oder *Joint*-Elementen. Diese Umsetzung wird in [SNYMAN, BIRD & MARTIN 1991], [LEE & PANDE 1999] und [LEPPIN 2000] gewählt. In [LEPPIN 2000] z.B. wird im zweidimensionalen Raum ein zwei-knotiges Interface-Element mit bilinearer Approximation des diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes hergeleitet. Ein Vorteil dieses Konzeptes ist die einfache Implementierung und die gute Darstellung der Unstetigkeiten im Verschiebungsfeld. Der größte Nachteil des Verfahrens liegt darin, daß die finiten Interface-Elemente nur zwischen zwei finiten Elementen am gemeinsamen Elementrand in die Diskretisierung eingefügt werden können. Um eine Finite-Elemente-Diskretisierung zu konstruieren, bei der die Elementränder mit der Topologie der Diskontinuität übereinstimmen, muß auf aufwendige H- oder R- adaptive Techniken zurückgegriffen werden.

Ein effektives Verfahren zur Beseitigung dieses Nachteils repräsentiert die *Extended Finite Element Method (X-FEM)*. Analog zu der zuvor erläuterten Implementierung werden die Diskontinuitäten des Verschiebungsfeldes als zusätzliche Feldgröße betrachtet. Die Topologie der Unstetigkeitsstellen ist jedoch nicht auf den Rand von finiten Elementen beschränkt. Im Gegensatz zu den *Interface*-Elementen ist es daher möglich, daß die singuläre Fläche ein finites Element schneidet. Alle numerischen Umsetzungen, die zur Klasse der X-FEM gehören, basieren auf dem *Partition-of-Unity*-Konzept. Erstmals veröffentlicht wurde das Konzept von BABUŠKA & MELENK (s. z.B. [BABUŠKA & MELENK 1996; BABUŠKA & MELENK 1997]). In den referenzierten Publikationen wird gezeigt, wie sich höhergradige Interpolationsfunktionen herleiten lassen, deren Träger (s. Abschnitt C) auf eine kleine Substruktur beschränkt ist. Im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder wurde die *Partition-of-Unity*-Methode erstmals in [MOËS, DOLBOW & BELYTSCHKO 1999] angewendet. In dieser Veröffentlichung wurde die lineare Bruchmechanik zur Modellierung des Rißfortschritts herangezogen. Die Erweiterungen auf dreidimensionale Kontinua sowie nichtlineare Interface-Gesetze sind den Arbeiten [SUKUMAR, MOËS, MORAN & BELYTSCHKO 2000], [DOLBOW, MOËS & BELYTSCHKO 2002] und [WELLS 2001] zu entnehmen. Zur deutlichen Abgrenzung der X-FEM zu der in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Formulierung wird im folgenden Absatz das zugrundeliegende Prinzip der X-FEM kurz beschrieben.

### 5.1.1 Extended Finite Element Method (X-FEM)

Wird die Finite-Elemente-Methode zur numerischen Berechnung von Randwertproblemen der Kontinuumsmechanik herangezogen, ist das Verschiebungsfeld zu approximieren. Mit der zum Knoten  $i$  korrespondierenden Interpolationsfunktion  $N_i$  und den zum Knoten  $i$  korrespondierenden diskreten Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{u}_i^e$  wird der Ansatz

$$\mathbf{u} \approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \mathbf{u}_i^e \quad (5.1)$$

verwendet. Hierbei sind die Funktionen  $N_i$  in der Regel aus der Menge der Polynome. Im Rahmen der X-FEM wird zusätzlich zum Verschiebungsfeld (5.1) ein weiteres Feld überlagert, welches diskontinuierliche Verschiebungsfelder abbildet. Das daraus resultierende Verschiebungsfeld ist demnach von der Form

$$\mathbf{u} \approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \mathbf{u}_i^e + \sum_{a \in A} N_a H_s \mathbf{d}_a^e. \quad (5.2)$$

Neben den diskreten Freiwerten  $\mathbf{u}_i^e$  werden die zusätzlichen Freiwerte  $\mathbf{d}_a^e$  eingeführt. Diese korrespondieren zur Diskontinuität der Verschiebungsabbildung. Gl. (5.2) impliziert, daß analog zum  $\mathcal{C}^0$ -stetigen Verschiebungsfeld auch das Feld der Amplituden des Verschiebungssprunges  $\mathcal{C}^0$ -stetig approximiert wird.

Die X-FEM gehört zur Klasse der GALERKIN-Verfahren. Daher folgen die Testfunktionen mit Gl. (5.2) zu

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \delta \mathbf{u} \approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \delta \mathbf{u}_i^e + \sum_{a \in A} N_a H_s \delta \mathbf{d}_a^e. \quad (5.3)$$

Im Gegensatz zu allen anderen numerischen Verfahren wird die Verschiebungsdiskontinuität als eigenes Feld modelliert, unabhängig von der Topologie der zu analysierenden Struktur und der räumlichen Diskretisierung.

Neben den zahlreichen Vorteilen der X-FEM sind jedoch zwei Nachteile nicht von der Hand zu weisen. Auf der einen Seite ist der numerische Aufwand schon bei nur einer Lokalisierungsfläche erheblich. Da die Topologie der singulären Fläche benötigt wird, muß diese im Rahmen der numerischen Umsetzung abgespeichert werden. Bei realen Strukturen, welche eine Vielzahl unterschiedlicher Diskontinuitäten aufweisen, erhöht sich der Aufwand dementsprechend sukzessiv mit der Entstehung neuer Risse. Bis heute liegen daher keine dreidimensionalen Analysen komplexerer Strukturen vor.

Auf der anderen Seite bereitet es Schwierigkeiten, die Topologie der Lokalisierungsfläche zu ermitteln. Da das betrachtete Material bis zum Auftreten einer singulären Fläche meist als elastisch approximiert wird, basiert die Orientierung der Diskontinuität in der Regel auf der linearen Bruchmechanik. Ist die geometrische Beschreibung der Fläche einmal angenommen worden, läßt sich diese, aufgrund des  $\mathcal{C}^0$ -stetigen Verlaufes der Amplitude des Verschiebungssprunges, nicht mehr verändern oder korrigieren. Für Makrodefekte stellt diese Restriktion kein



Hindernis dar; für Mikrodefekte dagegen schon. An Betonstrukturen z.B. ist beobachtet worden, daß die Rißrichtung des Primärrisses von der des Makrorisses deutlich abweichen kann (s. [PÖLLING 2000]). Um diesem Problem entgegenzuwirken, sind folglich bereits im zweidimensionalen Raum mehrere Risse zuzulassen. Auch hier erhöht sich der Aufwand bei dreidimensionalen Analysen dementsprechend. In neueren Veröffentlichungen wird im Bereich der Mikrodefekte ein Kontinuumsmodell  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder verwendet und erst ab einem bestimmten Indikator eine  $C^0$ -unstetige Verschiebungsabbildung zugelassen (s. z.B. [WELLS 2001]). Da das zu Beginn der Analyse verwendete Modell somit bereits eine Netzabhängigkeit aufweist, ist es fraglich, ob hierdurch die Topologie der singulären Fläche realistischer berechnet wird.

### 5.1.2 Inkompatible diskontinuierliche Verschiebungsfelder

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Implementierung  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder basiert auf einer lokalen Erweiterung des Verschiebungsfeldes. Die zusätzlichen Verschiebungsmodi, die die Diskontinuität der Verschiebungsabbildung beschreiben, sind somit auf die Elementebene beschränkt. Ein aufwendiger Eingriff auf globaler Ebene ist nicht erforderlich. Ähnlich dem *Partition-of-Unity*-Konzept wird hierzu der Träger der Funktion der unstetigen Verschiebungsfelder auf das betrachtete finite Element selbst begrenzt. Die lokale und inkompatible Modifikation des Verschiebungsfeldes führt zu einem  $C^0$ -unstetigen Verlauf der Amplituden der Diskontinuitäten der Verschiebungsabbildung an den Rändern eines finiten Elementes. Hierdurch ist es möglich, die zusätzlich eingeführten Freiheitsgrade auf Element- bzw., wie in dieser Arbeit gezeigt wird, auf Materialpunktebene aus der Formulierung zu eliminieren.

Eine der ersten Veröffentlichungen, in welcher diskontinuierliche Interpolationsfunktionen zur Analyse perfekt-plastischer Kontinua herangezogen wurden, ist [JOHNSON & SCOTT 1981]. Die in dieser Arbeit enthaltene eindimensionale Analyse eines Fachwerkstabes ist somit als Prototyp der weiteren Entwicklungen anzusehen. Kurze Zeit später wurde in [ORTIZ, LEROY & NEEDLEMAN 1987] und [BELYTSCHKO, FISH & ENGELMANN 1988] vorgeschlagen, die Verzerrungen mit zusätzlichen Modi anzureichern. Diese Modi wurden aus Betrachtungen an lokalisierten Verformungsbildern abgeleitet. Im Gegensatz dazu reicherten [DVORKIN, CUITIÑO & GIOIA 1990] und [KLISINSKI, RUNESSON & STURE 1991] erstmalig zweidimensionale finite Elemente mit Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld an. Die Amplitude der Unstetigkeiten wurde dabei mittels eines Interface-Gesetzes der Form  $t(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$  vorgeschrieben (s. Abschnitt 3.3). Obwohl diese Arbeiten grundlegende Ideen für numerische Simulationen von lokalisierten Versagenszuständen beinhalten, sind Abweichungen zu nachfolgenden Implementierungen deutlich erkennbar.

Erst durch die Arbeiten [SIMO & RIFAI 1990; SIMO & ARMERO 1992] wurde ein variations-theoretischer Rahmen geschaffen, um erweiterte Verzerrungsfelder bzw. Deformationsgradienten konsistent zu berücksichtigen. Auf der Grundlage des in diesen Arbeiten vorgeschlagenen EAS-Konzeptes (*Enhanced Assumed Strain*) leiteten SIMO, OLIVER & ARMERO in der weg-

weisenden Veröffentlichung [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] ein eindimensionales finites Element zur Analyse von starken Diskontinuitäten her. Neben der numerischen Umsetzung untersuchten die Autoren außerdem die zu diskontinuierlichen Verschiebungsfeldern korrespondierenden physikalischen Phänomene. Sie zeigten, daß Unstetigkeiten im Verschiebungsfeld im Rahmen klassischer Plastizitätsmodelle zu einer singulären Verteilung des Entfestigungsmodul führen (s. Gl. (3.44)). In [SIMO & OLIVER 1994] erfolgte die Erweiterung der Implementierung auf zweidimensionale Kontinua. Das Verzerrungsfeld, welches aus der sprungstetigen Verschiebungsabbildung resultierte, wurde in den referenzierten Arbeiten mittels eines Regularisierungsparameters in der Form einer Rampenfunktion approximiert. Eine ausführliche Zusammenfassung der theoretischen und der numerischen Aspekte dieser Verfahren ist [OLIVER 1996] zu entnehmen.

Durch Einführung eines Interface-Gesetzes gelang es in den Veröffentlichungen [ARMERO & GARIKIPATI 1995; GARIKIPATI 1996], den numerischen Regularisierungsparameter zu beseitigen. Die Erweiterung auf finite Deformationen erfolgte in [GARIKIPATI 1996; ARMERO & GARIKIPATI 1996]. Schließlich wurde in [OLIVER, CERVERA & MANZOLI 1999] eine Möglichkeit des Übergangs von schwachen zu starken Diskontinuitäten aufgezeigt. Für einen numerischen Vergleich zwischen finiten Elementen mit inkompatiblen diskontinuierlichen Verschiebungsfeldern, diskreten Rißmodellen und *Smeared-Crack*-Modellen wird auf die Arbeit [NOGHABAI 1999] verwiesen.

Zusätzlich zu den zuvor beschriebenen Modellen wurden zeitgleich andere Verfahren entwickelt, die neben den Verschiebungen und den erweiterten Verzerrungen auf noch weiteren unabhängigen Feldgrößen basierten. In [LOFTI & SHING 1994] und [LOFTI & SHING 1995] beispielsweise führten die Autoren die Felder der stetigen und der diskontinuierlichen Verschiebungen, der Spannungen und der Verzerrungen unabhängig voneinander ein. Im Gegensatz dazu wurde in [BOLZON & CORIGLIANO 2000] neben dem stetigen Verschiebungsfeld ein erweitertes Verschiebungsfeld in  $\Omega^+$  und eines in  $\Omega^-$  angenommen.

## 5.2 Modifizierte Kinematik für inkompatible $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder

In diesem Abschnitt wird die Kinematik unstetiger Verschiebungsfelder hergeleitet. Anders als in Abschnitt 3.2 erfolgt die Spezifizierung für lokale, inkompatible diskontinuierliche Verschiebungsabbildungen.

### 5.2.1 $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder

Analog zum Abschnitt 3.2 wird das stetige Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  des betrachteten finiten Elementes

$$\bar{\mathbf{u}} \approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \mathbf{u}_i^e, \quad (5.4)$$

zusätzlich mit einem Verschiebungsfeld  $\hat{\mathbf{u}}$ , in der Form

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \quad (5.5)$$

angereichert. Gemäß Gl. (5.4) basiert die Approximation der Feldgröße  $\bar{\mathbf{u}}$  auf den klassischen Interpolationsfunktionen  $N_i$ . Im Gegensatz zu Gl. (3.8) beinhaltet  $\hat{\mathbf{u}}$  neben der HEAVISIDE-Funktion  $H_s$  eine Abbildung  $\varphi \in C^1$ . Das Verschiebungsfeld

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) := \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \underbrace{(H_s(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X}))}_{=: M_s(\mathbf{X})} \quad (5.6)$$

wurde erstmalig in der Arbeit [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] verwendet. Der Verschiebungssprung des Feldes  $\mathbf{u}$  ist somit an der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  gemäß

$$\llbracket \hat{\mathbf{u}} \rrbracket |_{\partial_s \Omega} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (5.7)$$

äquivalent zu Gl. (3.8). Fordert man desweiteren, daß die Funktion  $\hat{\mathbf{u}}$  an allen Knoten  $\mathbf{X}_i^e \in \bar{\Omega}^e$  des betrachteten finiten Elementes zu Null verschwindet, es gilt also

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_i^e \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{nod}\}, \quad (5.8)$$

werden die DIRICHLET-Randbedingungen unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_i^e \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{nod}\} \quad (5.9)$$

allein mittels der Knotenfreiheitsgrade  $\mathbf{u}_i^e$  beschrieben. Ein Vergleich von Gl. (5.6) mit (5.8), zusammen mit der Definition der HEAVISIDE-Funktion, liefert somit die von Abbildung  $\varphi$  einzuhaltenden Restriktionen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}) &= 1 \quad \forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_i^e \in \bar{\Omega}^+ \\ \varphi(\mathbf{X}) &= 0 \quad \forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_i^e \in \bar{\Omega}^- \end{aligned} \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{nod}\}. \quad (5.10)$$

Ohne die Herleitung auf einen speziellen Elementtypus festzulegen, läßt sich  $\varphi$  demnach aus einer Summe von Interpolationsfunktionen zu

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_{\Omega^+}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (5.11)$$

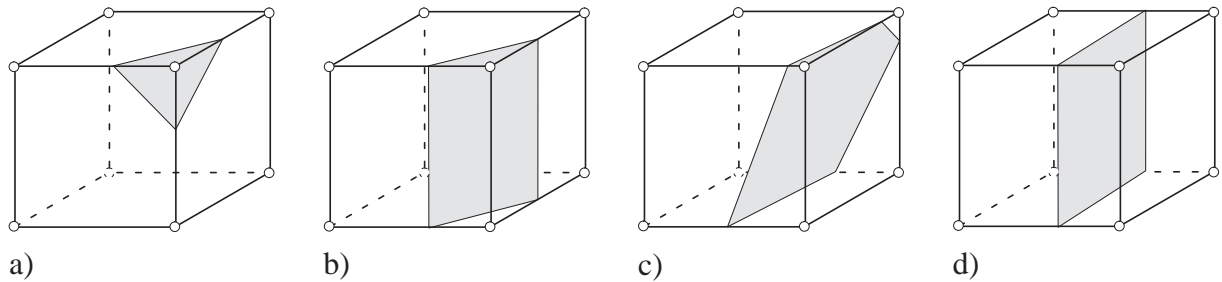
spezifizieren. In Gl. (5.11) repräsentiert  $\boldsymbol{\xi}$  den Vektor der natürlichen Koordinaten. Die Idee, eine Rampenfunktion  $\varphi$  auf der Basis der Standard-Interpolationsfunktionen  $N_i$  zu konstruieren,

wurde im Rahmen der Herleitung einer konsistenten numerischen internen Länge erstmals in [OLIVER 1989] angewendet. In [MOSLER & MESHKE 2000] wurde Gl. (5.11) zur Entwicklung eines acht-knotigen dreidimensionalen finiten Elementes herangezogen. Da im allgemeinen  $N_i$  ein Polynom ist, gilt  $\varphi \in C^\infty \subset C^1$ .

**Anmerkung:** Gl. (5.11) repräsentiert nur eine Möglichkeit zur Konstruktion der Abbildung  $\varphi$ . Da die Funktionen  $N_i$  jedoch a priori benötigt werden, um das Verschiebungsfeld  $\bar{u}$  zu approximieren, ist der numerische Aufwand bei Verwendung von Gl. (5.11) minimal.  $\square$

### 5.2.2 Numerische Lokalisierungsmodi

Das Feld der erweiterten Verschiebungen  $\hat{u}$  ist gemäß Gl. (5.6) und (5.11) abhängig von der Position und der Orientierung der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$ . Dabei wird die Rampenfunktion  $\varphi$  mittels der zu den Knoten in  $\Omega^+$  korrespondierenden Interpolationsfunktionen bestimmt. Für ein acht-knotiges Volumen-Element z.B. sind somit die verschiedenen Topologien einer singulären Fläche in Abb. 5.1 zu differenzieren. Da für die Abb. 5.1a-d verschiedene Funktionen



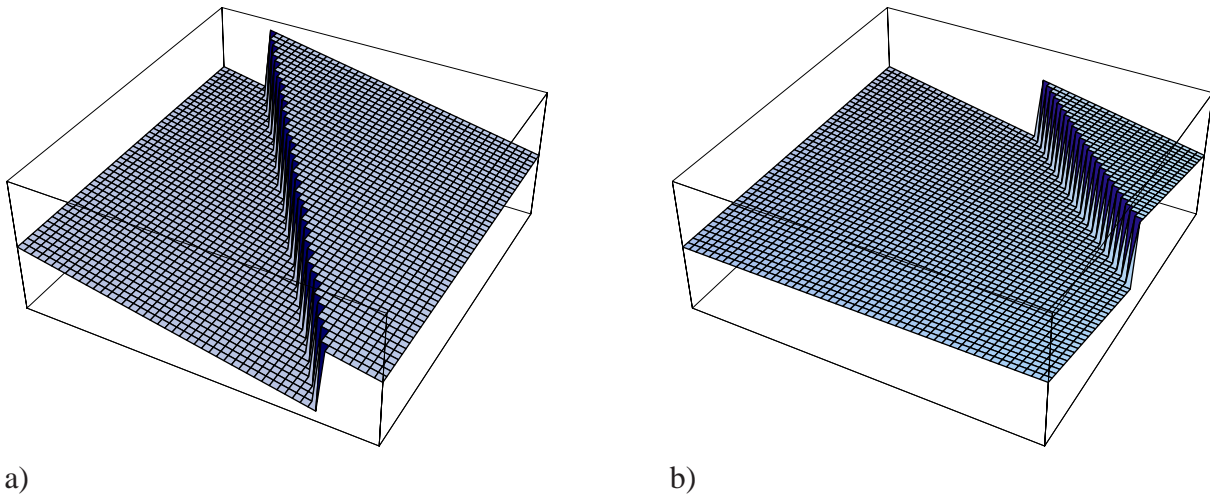
**Abb. 5.1:** Vier verschiedene numerische Lokalisierungsmodi für ein acht-knotiges Volumen-Element: a) Ein Knoten in  $\Omega^+$ , b) Zwei Knoten in  $\Omega^+$ , c) Drei Knoten in  $\Omega^+$ , d) Vier Knoten in  $\Omega^+$ .

$M_s$  resultieren, wird der Begriff des numerischen Lokalisierungsmodus eingeführt. Abb. 5.1a, die durch einen Knoten in  $\Omega^+$  charakterisiert ist, stellt somit einen speziellen numerischen Lokalisierungsmodus dar. Es wird explizit darauf hingewiesen, daß der Begriff des numerischen Lokalisierungsmodus nicht identisch ist mit dem Begriff des Lokalisierungsmodus in Kapitel 4.

Für ein CST-Element (*Constant-Strain-Triangle*) existiert lediglich ein einziger numerischer Lokalisierungsmodus. Da für die drei Interpolationsfunktionen  $N_i$  des Dreiecks-Elementes

$$N_i = 1 - \sum_{j \neq i} N_j \quad \Rightarrow \quad \text{GRAD} N_i = -\text{GRAD} \left[ \sum_{j \neq i} N_j \right] \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (5.12)$$

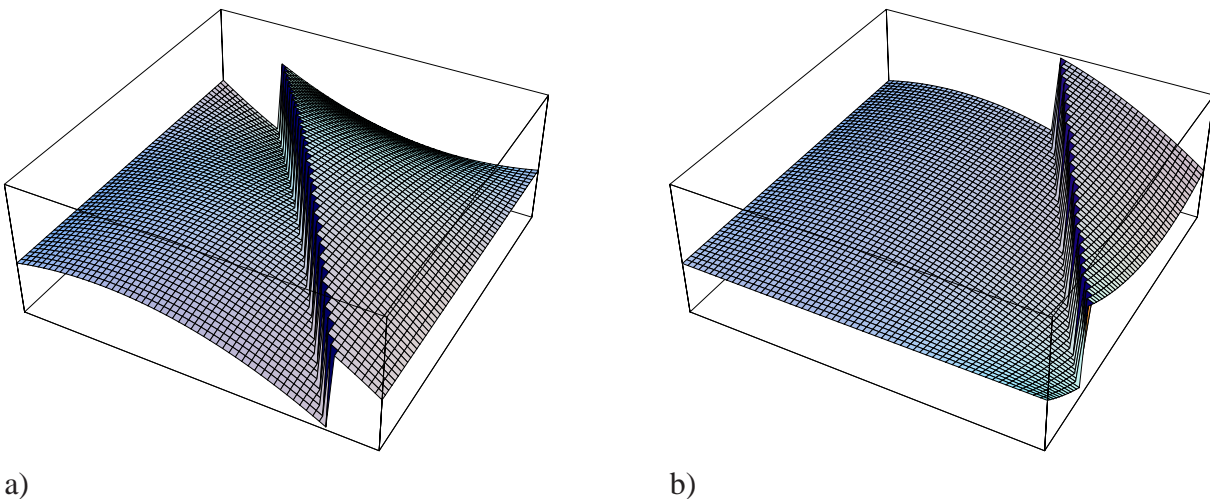
gilt, kann die Summe zweier Interpolationsfunktionen bzw. der Gradient der Abbildung  $\varphi$  immer auf nur eine Funktion  $N_i$  zurückgeführt werden. Die zwei unabhängigen numerischen Lokalisierungsmodi eines vier-knotigen ebenen Elementes mit bilinearen Interpolationsfunktionen



**Abb. 5.2:** Zwei numerische Lokalisierungsmodi für eine bilineare Funktion  $M_s$ : a) Innere Fläche  $\partial_s\Omega$  schneidet zwei gegenüberliegende Elementseiten, b) Innere Fläche  $\partial_s\Omega$  schneidet zwei aneinander angrenzende Elementseiten.

sind Abb. 5.2 zu entnehmen (s. [MOSLER & MESCHKE 2000]). Aufgrund von Gl. (5.11) ist der Grad des Polynoms  $\varphi$  identisch mit dem der Interpolationsfunktionen.

Erhöht man den Grad der Ansatzfunktionen weiter, können die biquadratischen Funktionen  $M_s$  des acht-knotigen Scheibenelementes in Abb. 5.3 hergeleitet werden (s. [MOSLER & MESCHKE 2001B]). Hier ist bei den numerischen Lokalisierungsmodi zwischen Eckknoten und Knoten auf einer Elementseite zu differenzieren. Die Anzahl unterschiedlicher Modi nimmt dementsprechend sukzessiv zu. Dies bereitet jedoch keine Schwierigkeiten, denn nutzt man die Defini-



**Abb. 5.3:** Zwei numerische Lokalisierungsmodi für eine biquadratische Funktion  $M_s$ : a) Innere Fläche  $\partial_s\Omega$  schneidet zwei gegenüberliegende Elementseiten, b) Innere Fläche  $\partial_s\Omega$  schneidet zwei aneinander angrenzende Elementseiten.

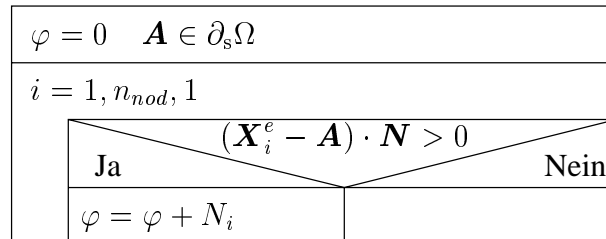
tion von  $\Omega^+$  für ebene Flächen  $\partial_s\Omega$  mit Normalenvektoren  $\mathbf{N}$  (s. Abschnitt 4.3.1)

$$\Omega^+ := \{\mathbf{X} \in \Omega \mid \mathbf{A} \in \partial_s\Omega, \quad (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} > 0\}, \quad (5.13)$$

kann mittels der Äquivalenz

$$(\mathbf{X}_i^e - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} > 0 \iff \mathbf{X}_i^e \in \bar{\Omega}^+ \quad \forall \mathbf{A} \in \partial_s\Omega \quad (5.14)$$

der Algorithmus in Abb. 5.4 hergeleitet werden. Die Implementierung dieses Algorithmus ist



**Abb. 5.4:** Struktogramm zur Berechnung der Funktion  $\varphi$ .

für beliebige finite Elemente einfach, robust und effizient.

### 5.2.3 EAS-Konzept (*Enhanced-Assumed-Strain*)

Im vorliegenden Abschnitt wird die Kinematik (5.5) im Rahmen der Finite-Elemente-Methode angewendet.

Unter Verwendung der speziellen glatten Rampenfunktion (5.11), einer isoparametrischen Beschreibung der Geometrie und der primären Variable  $\bar{\mathbf{u}}$  wird der Gradient von  $\varphi$ , bezüglich der Referenzkonfiguration, zu

$$\text{GRAD}\varphi = \sum_{i=1}^{n_{\Omega^+}} \frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.15)$$

spezifiziert. Die Ableitung  $\partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{X}$  in Gl. (5.15) stellt hierbei die Inverse der JACOBI-Matrix dar. Somit folgt für das Verschiebungsfeld (5.5), zusammen mit Gl. (5.6) und der Annahme  $\text{GRAD}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  (s. Abschnitt 3.2) der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{GRAD}\bar{\mathbf{u}} - \underbrace{[\mathbf{u}] \otimes \text{GRAD}\varphi + [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N}}_{=: \tilde{\mathbf{H}}} \delta_s. \quad (5.16)$$

Neben dem zur kompatiblen Deformationsabbildung korrespondierenden Deformationsgradienten

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \text{GRAD}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.17)$$



beinhaltet Gl. (5.16) demnach zusätzlich den Gradienten  $\tilde{\mathbf{H}}$  des erweiterten Verschiebungsfeldes. Interpretiert man  $\hat{\mathbf{u}}$  als inkompatiblen Verschiebungsmode, kann der Deformationsgradient (5.16) dem *Enhanced-Assumed-Strain*-Konzept (EAS) zugeordnet werden (s. [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993; SIMO & OLIVER 1994]). Der theoretische Hintergrund und die numerische Umsetzung dieses Verfahrens wurde erstmalig in der Arbeit [SIMO & RIFAI 1990] vorgestellt. In [SIMO & ARMERO 1992] erfolgte die Erweiterung auf die Theorie finiter Deformationen.

Das EAS-Konzept basiert auf einem erweiterten Funktional. Auf der Grundlage eines HUWASHIZU-Funktional (s. auch [SIMO, ARMERO & TAYLOR 1993] und [GLASER & ARMERO 1997]), welches in Abhängigkeit des kompatiblen Verschiebungsfeldes, eines erweiterten Gradienten des Verschiebungsfeldes und des Feldes der Spannungstensoren formuliert wurde, postulierten SIMO & RIFAI eine  $L_2$ -Orthogonalität zwischen dem erweiterten Gradienten des Verschiebungsfeldes und dem Spannungstensor. Hiermit wurden die Freiwerte des Spannungstensors aus der Formulierung eliminiert, wodurch das Drei-Feld- in ein Zwei-Feld-Funktional überging. Als unabhängige Größen verbleiben somit die kompatible Deformationsabbildung und das Feld des erweiterten Gradienten des Verschiebungsfeldes.

Bei der Konstruktion des erweiterten Gradienten sind gewisse Restriktionen zu berücksichtigen, damit das finite Element den *Patch-Test* besteht und damit das Kriterium der Stabilität gewährleistet wird. Führt man den Raum der Gradienten des kompatiblen Verschiebungsfeldes  $\mathbb{U}$  zusammen mit dem Raum der erweiterten Gradienten  $\tilde{\mathbb{H}}$  ein, muß nach SIMO & ARMERO die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{H}} \in \tilde{\mathbb{H}}, \text{ GRAD } \bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{U} \quad \tilde{\mathbb{H}} \cap \mathbb{U} = \emptyset \quad (5.18)$$

erfüllt sein. Nur wenn der Schnitt der Räume durch die leere Menge dargestellt wird, ist lineare Unabhängigkeit zwischen den Ansätzen  $\text{GRAD } \bar{\mathbf{u}}$  und  $\tilde{\mathbf{H}}$  gewährleistet. Da die Nichteinhaltung dieser Restriktion zu einem Rangabfall der resultierende Steifigkeitsmatrix führt, wird das Postulat (5.18) auch das Kriterium der Stabilität genannt.

Neben der Forderung (5.18) ist die angenommene  $L_2$ -Orthogonalität

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{P} : \hat{\mathbf{H}} \, dV = 0 \quad (5.19)$$

einzuhalten. In Gl. (5.19) stellt  $\hat{\mathbf{H}}$  die Testfunktion des erweiterten Gradienten dar. Da das Spannungsfeld zum Bestehen des *Patch-Tests* (s. [TAYLOR, SIMO, ZIENKIEWICZ & CHAN 1986]) mindestens stückweise konstante Funktionen enthalten muß, folgt aus der  $L_2$ -Orthogonalität die Bedingung

$$\int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{H}} \, dV = \mathbf{0}. \quad (5.20)$$

Setzt man für  $\hat{\mathbf{H}}$  gemäß des GALERKIN-Verfahrens

$$\hat{\mathbf{H}} = -\delta [\mathbf{u}] \otimes \text{GRAD } \varphi + \delta [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N} \quad \delta_s \in \tilde{\mathbb{H}}, \quad (5.21)$$



ist zu verifizieren, daß die Bedingung (5.20) lediglich in Ausnahmefällen erfüllt ist.

**Anmerkung:**  $\hat{\mathbf{H}}$  ist nach Gl. (5.16) linear in  $[[\mathbf{u}]]$ . Daraus folgt die Identität der Ansatzräume von  $\hat{\mathbf{H}}$  und  $\tilde{\mathbf{H}}$  ( $\hat{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{H}} \in \tilde{\mathbb{H}}$ ).  $\square$

Zur Lösung dieses Problems wurde in [SIMO & OLIVER 1994] von einer GALERKIN-Methode abgewichen. Wird die Restriktion des GALERKIN-Verfahrens aufgegeben, ist es möglich, zusätzlich zum Raum  $\tilde{\mathbb{H}}$  den Raum  $\hat{\mathbb{H}}$  der Testfunktion  $\hat{\mathbf{H}}$  einzuführen. Dieses allgemeinere Konzept wird als PETROV-GALERKIN-Verfahren bezeichnet. Im Gegensatz zur GALERKIN-Methode, für die  $\hat{\mathbb{H}} = \tilde{\mathbb{H}}$  gilt, wird beim PETROV-GALERKIN-Verfahren die Möglichkeit

$$\hat{\mathbf{H}} \in \hat{\mathbb{H}} \quad \wedge \quad \hat{\mathbf{H}} \notin \tilde{\mathbb{H}} \quad (5.22)$$

zugelassen. In [SIMO & OLIVER 1994] und [OLIVER 1996] wird die Gleichung

$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{A_s^e}{V^e} \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{N} + \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{N} \delta_s \quad (5.23)$$

für die Testfunktion des erweiterten Gradienten vorgeschlagen. In Gl. (5.23) ist das Volumen  $V^e$  des betrachteten finiten Elementes  $e$  sowie die Schnittfläche  $A_s^e$  der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  mit dem Element  $e$  eingeführt worden. Der Vektor  $\boldsymbol{\alpha}$  stellt beliebige Freiwerte zur Definition von  $\hat{\mathbf{H}}$  dar. Der Raum  $\hat{\mathbb{H}}$ , welcher durch Gl. (5.23) aufgespannt wird, besitzt kein gemeinsames Element mit  $\mathbb{U}$  und erfüllt desweiteren Gl. (5.20). Wird Gl. (5.19) für die Testfunktion (5.23) spezifiziert, folgt mit Anhang C die Bedingung

$$\frac{1}{A_s^e} \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{T}_s \, d\Gamma = \frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dV. \quad (5.24)$$

Die  $L_2$ -Orthogonalitätsbedingung (5.19) geht demnach für die Testfunktion (5.23) in die schwache Form des Gleichgewichtes des Traktionsvektors an der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  über. Der Deformationsgradient nach Gl. (5.16), zusammen mit der Testfunktion  $\hat{\mathbf{H}}$  nach Gl. (5.23), gewährleistet, daß die Stabilität des Verfahrens gesichert ist und daß der Patch-Test erfüllt wird.

**Anmerkung I:** Die zu Gl. (5.24) korrespondierende starke Form lautet  $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}^+$ . Diese Gleichung ist nicht äquivalent zum CAUCHY-Lemma  $\mathbf{T}^- = \mathbf{T}^+$  und resultiert aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen unter Berücksichtigung von sprungstetigen Verschiebungsabbildungen (s. Anmerkung, Seite 39). Im Gegensatz zum CAUCHY-Lemma ist die Bedingung  $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}^+$  nicht automatisch erfüllt und muß daher berücksichtigt werden.  $\square$

**Anmerkung II:** Zur Überprüfung der Bedingung (5.18) von verschiedenen erweiterten Gradienten wird auf die Arbeiten [ANDELFINGER 1991] und [ECKSTEIN 1999] verwiesen.  $\square$

Die Stationaritätsbedingungen des betrachteten HU-WASHIZU-Potentials sind zusammenfassend durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \text{GRAD} \bar{\eta}_0 : \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{H}}) \, dV &= \int_{\Omega^e} \bar{\eta}_0 \cdot \mathbf{b} \rho \, dV + \int_{\partial \Omega \sigma} \bar{\eta}_0 \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \\ \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{H}} : \mathbf{P} \, dV &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

definiert (s. [SIMO & ARMERO 1992] und [ARMERO & GARikipATI 1996]). In Gl. (5.25)<sub>2</sub> wird die materielle Diskontinuität des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{J}$  mittels eines Interface-Gesetzes der Form  $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s(\mathbf{J})$  (s. Abschnitt 3.3) kontrolliert. Die zu  $\mathbf{J}$  korrespondierenden Freiheitsgrade werden auf Elementebene mittels der statischen Kondensation eliminiert (s. [ARMERO & GARikipATI 1996], [SIMO & RIFAI 1990]). Analog zur numerischen Umsetzung von klassischen verschiebungsbasierten finiten Elementen folgen im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit die Approximationen der kompatiblen Felder  $\bar{\mathbf{u}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_0$  den Ansätzen (s. z.B. [WRIGGERS 2001])

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 &\approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \bar{\boldsymbol{\eta}}_{0(i)}^e &\Rightarrow \text{GRAD} \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 &\approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} (\bar{\boldsymbol{\eta}}_{0(i)}^e \otimes \text{GRAD} N_i) \\ \bar{\mathbf{u}} &\approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \bar{\mathbf{u}}_i^e &\Rightarrow \text{GRAD} \bar{\mathbf{u}} &\approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} (\bar{\mathbf{u}}_i^e \otimes \text{GRAD} N_i). \end{aligned} \quad (5.26)$$

In Gl. (5.26) sind die diskreten Variationen der Knotenverschiebungen  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{0(i)}^e$  eingeführt worden.

### 5.3 Fließ- bzw. Belastungsflächen

In diesem Abschnitt erfolgt die Beschreibung von Fließ- bzw. Belastungsflächen, welche im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet werden. Die Einschränkung der Menge der zugelassenen Funktionen dient lediglich zur Erleichterung der numerischen Umsetzung. Das im vorangegangenen Abschnitt erläuterte Verfahren unterliegt prinzipiell keiner Restriktion bezüglich des verwendeten Materialmodells. Anders als in Abschnitt 5.2.3 erfolgen die Betrachtungen für die geometrisch lineare Theorie.

Analog zum zweiten Kapitel dieser Arbeit wird von einer Fließfläche der Form

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_{\text{eq}}^{\text{ini}} + q(\alpha) \quad (5.27)$$

ausgegangen. Gemäß Gl. (5.27) wird der Entfestigungsmechanismus somit isotrop approximiert.

Zur Beschreibung von Gl. (5.27) ist die Abbildung  $\sigma_{\text{eq}} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  zu spezifizieren. Da nach Abschnitt 3.5 postuliert wird, daß die dissipativen Mechanismen auf eine singuläre Fläche beschränkt sind, muß die äquivalente Spannung  $\sigma_{\text{eq}}$  von der Orientierung der Fläche  $\partial_s \Omega$  abhängig sein. Für die Abbildung gilt demnach  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n})$ . Die Funktion

$$\sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (5.28)$$

ist somit zulässig. Die mittels Gl. (5.28) beschriebene Klasse von Fließfunktionen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachtet. Der Vektor  $\mathbf{m}$ , welcher die Richtung der Rate der Verschiebungsdiskontinuität beschreibt, unterliegt nicht der Restriktion  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$ .

**Anmerkung:** Nach Kenntnis des Autors basieren fast alle Veröffentlichungen auf der Annahme  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$ . Im Rahmen einer Modellierung von Scherflächen (s. z.B. [OLIVER, CERVERA & MANZOLI 1997]) stellt dies eine ausreichende Näherung dar. Für komplexere Materialmodelle jedoch (s. z.B. [REGUEIRO 1998]), für die  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \neq 0$  gilt, ist die Forderung zu restriktiv. Um die weiteren Herleitungen nicht unnötig einzuschränken, wird daher die Annahme  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$  verworfen.  $\square$

Nach Gl. (3.43) folgt für die Fließfunktion (5.27) unter der Annahme einer assoziierten Fließ- und Entfestigungsregel  $\lambda_\delta = \dot{\zeta}$  bzw.  $\dot{\alpha} = \dot{\zeta}$ . Wie in diesem Abschnitt belegt wird, ist im Rahmen einer numerischen Umsetzung  $\dot{\zeta} < 0$  möglich. Da hieraus  $\dot{\alpha} < 0$  folgt und dies zur Verletzung des Zweiten Hauptsatzes der Thermomechanik führt, wird die Gleichung

$$\alpha = \zeta \operatorname{sign} \dot{\zeta} \quad (5.29)$$

verwendet. Hierdurch wird sichergestellt, daß  $\dot{\alpha} > 0$ . Gl. (5.29) läßt sich anhand des eindimensionalen Zugstabes unter der Annahme einer RANKINE-Fließfläche rechtfertigen. Da für das RANKINE-Kriterium sowohl die Normale  $\mathbf{n}$  der singulären Fläche als auch die Richtung des Verschiebungssprunges identisch mit der Richtung der maximalen Hauptspannung ist (s. Abschnitt 4.3.4.1), resultieren aus dem betrachteten Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (5.30)$$

die möglichen Vektoren

$$\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{m}^{(1)} = [1; 0; 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{m}^{(2)} = [-1; 0; 0]^T = -\mathbf{n}^{(1)}. \quad (5.31)$$

Nutzt man die einzuhaltende Äquivalenz  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(1)} = \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(2)}$ , folgt für die Amplitude des Verschiebungssprunges

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket^{(1)} = \dot{\zeta}^{(1)} \mathbf{m}^{(1)} = \dot{\zeta}^{(2)} \mathbf{m}^{(2)} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\zeta}^{(1)} = -\dot{\zeta}^{(2)}. \quad (5.32)$$

Eine der beiden Lösungen  $\dot{\zeta}^{(1)}, \dot{\zeta}^{(2)}$  führt somit zu einer negativen Amplitude des Verschiebungssprunges. Mittels Gl. (5.29) hat dies keine Auswirkungen auf die Evolution des Entfestigungsverhaltens. Das erweiterte Verschiebungsfeld hingegen wird von Gl. (5.29) nicht beeinflusst.

## 5.4 Bestimmung des Normalenvektors der singulären Fläche

Die Kinematik (5.16) basiert auf dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$ . Zur Ermittlung dieses Vektors wurde in Abschnitt 4.4 ein Algorithmus hergeleitet. Gemäß der Abschnitte 4.3.4.2 und 4.3.4.3 existiert im allgemeinen jedoch mehr als eine Lösung für den Vektor  $\mathbf{n}$ . Im Rahmen des Kompressionstests in Abschnitt 4.3.4 beispielsweise wurden unendlich viele Lösungen aufgezeigt. Dennoch ist es zur Ermittlung des „richtigen“ Vektors notwendig, in einem ersten Schritt die Menge aller möglichen Lösungen zu bestimmen. Durch die Zerlegung

des Lösungsraumes  $(\alpha, \theta) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$  in  $5^\circ$  Schritte, um den Initialwert der NEWTON-Iteration zu ermitteln, ist die Menge der Lösungen a priori endlich (s. Abb.4.9).

In einem zweiten Schritt ist nun die den Vektor  $\mathbf{n}$  betreffende „richtige“ Lösung aus der vorgegebenen Menge der Möglichen zu finden. Hierzu sind in der Literatur im wesentlichen drei unterschiedliche Verfahren zu differenzieren.

### 5.4.1 Band-Tracing-Algorithmus

Das erste Konzept, welches hier beschrieben wird, geht auf die Arbeiten [OLIVER 1996], [GARIKIPATI 1996] und [ARMERO & GARIKIPATI 1996] zurück. Auf der Grundlage eines Elementes, für das der Vektor  $\mathbf{n}$  bekannt ist, wird für ein angrenzendes Element der Vektor aus der Menge der Kandidaten ausgewählt, welcher die geringste Abweichung zu dem bereits vorhandenen aufweist. Unter Verwendung der Notation  $\mathbf{n}^{e(1)}$  für den als bekannt vorausgesetzten Normalenvektor und  $\mathbf{n}^{e(2)}$  für den aus der Menge der mögliche Lösungen  $\mathbb{J}_{\mathbf{n}}$  zu bestimmenden, wird das Verfahren in die Form

$$\mathbf{n}^{e(2)} := \arg \max_{\mathbf{n}} (\mathbf{n}^{e(1)} \cdot \mathbf{n}) \quad \mathbf{n} \in \mathbb{J}_{\mathbf{n}} \quad (5.33)$$

überführt.

Gegen die Umsetzung dieses Verfahrens sprechen im wesentlichen drei Mängel. Da ein betrachtetes finites Element die Topologie der singulären Fläche in einem benachbarten Element benötigt, ist es nicht möglich, die Implementierung auf Materialpunktebene zu beschränken. Diese von nicht-lokalen Theorien bekannte Problematik führt zu aufwendigen Modifikationen der numerischen Umsetzung und ist daher zur Einbindung in kommerzielle Finite-Elemente-Programme weniger geeignet. Desweiteren ist nach Kenntnis des Autors bis zum jetzigen Zeitpunkt der Band-Tracing-Algorithmus nur zur Analyse von ebenen Fragestellungen herangezogen worden. Für dreidimensionale Kontinua ist der numerische Aufwand des Verfahrens beträchtlich. Neben diesen verfahrenstechnischen Einwänden existiert jedoch auch ein theoretisches Defizit. Die Autoren gehen implizit davon aus, daß sich die singuläre Fläche von einem bereits lokalisierten finiten Element ausgehend weiter fortpflanzt. Treten aber neue Risse in bisher ungeschädigten Bereichen auf, liegt keine Information von einem Nachbarelement vor und der Algorithmus ist nicht anwendbar.

### 5.4.2 Maximale Dissipation

Anders als das zuvor beschriebene Verfahren wird in [WELLS & SLUYS 2001A] ein Algorithmus zur Ermittlung des „richtigen“ Vektors  $\mathbf{n}$  vorgeschlagen, welcher auf die Elementebene beschränkt ist. Im Rahmen dieses Konzeptes wird aus der Menge der Kandidaten  $\mathbb{J}_{\mathbf{n}}$  der Normalenvektor  $\mathbf{n}^e$  ausgewählt, der die Dissipation im betrachteten Element maximiert. Das Verfahren basiert somit auf dem Postulat der maximalen Dissipation. Die Idee der Autoren wird in

der vorliegenden Arbeit in das Optimierungsproblem

$$\mathbf{n}^e := \arg \max_{\mathbf{n}} \mathcal{D}_{\Omega^e}(\mathbf{n}) \quad \mathbf{n} \in \mathbb{J}_{\mathbf{n}} \quad (5.34)$$

überführt. Hierbei stellt  $\mathcal{D}_{\Omega^e}$  die über das Volumen integrierte Dissipation im finiten Element  $e$  dar. Für assoziierte Fließ- und Entfestigungsregeln erscheint dieses Konzept physikalisch plausibel; eine Verallgemeinerung auf nicht-assoziierte Modelle ist jedoch nicht offensichtlich.

Ein großer Vorteil des Konzeptes ist seine lokale Form. Ohne Informationen von einem angrenzenden Element zu benötigen, basiert der Algorithmus allein auf den lokal vorliegenden Daten. Hiermit werden die Nachteile der Implementierung in Abschnitt 5.4.1 vollständig beseitigt.

### 5.4.3 Kompatibilität mit vorhandenen Verschiebungsfeld

Analog zur Arbeit WELLS & SLUYS ist auch der Algorithmus in [BORJA 2000] auf die Elementebene beschränkt. Die in [BORJA 2000] enthaltene Idee basiert auf einer induktiven Argumentation und ist daher als Prototyp anzusehen. Wird in einem Lastschritt Lokalisierung signalisiert, wählt BORJA aus der Menge der möglichen Lösungen  $\mathbb{J}_{\mathbf{n}}$  den Vektor  $\mathbf{n}^e$  aus, dessen korrespondierender Deformationsgradient die größte Übereinstimmung zur homogenen Deformation aufweist. Sein Algorithmus ist somit äquivalent zum Optimierungsproblem

$$\mathbf{n}^e := \arg \max_{\mathbf{n}} [\nabla \bar{\mathbf{u}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \quad \mathbf{n} \in \mathbb{J}_{\mathbf{n}}. \quad (5.35)$$

Da auch der Algorithmus in [BORJA 2000] auf die Elementebene beschränkt ist, treten die in Abschnitt 5.4.1 beschriebenen Probleme nicht auf.

### 5.4.4 Zusammenfassung

Wie bereits erläutert, sind die zuvor beschriebenen Verfahren als Prototypen anzusehen. Hierbei ist die lokale Struktur der Algorithmen in Abschnitt 5.4.2 und 5.4.3 der Umsetzung in Abschnitt 5.4.1 vorzuziehen. Beide Verfahren, 5.4.2 und 5.4.3, sind bis zum jetzigen Zeitpunkt jedoch nicht genauer analysiert worden. Insbesondere wurden in der Arbeit [BORJA 2000] lediglich zweidimensionale Randwertprobleme betrachtet. Im Gegensatz dazu unterliegt die Veröffentlichung [WELLS & SLUYS 2001A] nicht dieser Restriktion. Das dort analysierte Beispiel resultiert jedoch in einem zweidimensionalen Spannungszustand. Für reale komplexere dreidimensionale Strukturen sind beide Verfahren noch nicht angewendet worden.

Wird der Normalenvektor in Anlehnung an das RANKINE-Kriterium in Richtung der maximalen Hauptspannungsrichtung angenommen, ist der „richtige“ Vektor  $\mathbf{n}$  auch ohne die Verfahren der Abschnitte 5.4.1-5.4.3 zu ermitteln. Mit Ausnahme von Spannungszuständen, die zwei oder drei gleiche Eigenwerte aufweisen, ist der Vektor  $\mathbf{n}$  für das RANKINE-Kriterium bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Im Falle eines sich wiederholenden Eigenwertes, z.B. eines hydrostatischen Spannungszustandes, wird im Rahmen der numerischen Umsetzung eine

Perturbation (s. z.B. [MESCHKE 1996]) durchgeführt, wodurch wiederum drei verschiedene Eigenwerte vorliegen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden Fließfunktionen vom Typus (5.27) betrachtet. Die numerischen dreidimensionalen Berechnungen unterliegen jedoch aus den zuvor genannten Gründen der Annahme des RANKINE-Kriteriums.

## 5.5 Modifizierte numerische Umsetzung für elasto-plastische Materialmodelle

In Abschnitt 5.2.3 ist gezeigt worden, daß die ursprüngliche numerische Umsetzung des Konzeptes der inkompatiblen  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder mittels des EAS-Konzeptes erfolgte (s. z.B. [SIMO & OLIVER 1994]). Die als inkompatible Freiheitsgrade interpretierbaren Amplituden des Verschiebungssprunges wurden analog zur Arbeit [SIMO & RIFAI 1990] auf Elementebene mittels statischer Kondensation eliminiert. Im Gegensatz zu diesem Vorgehen wurde in [MOSLER & MESCHKE 2000; MOSLER & MESCHKE 2001C] eine numerische Umsetzung vorgeschlagen, bei der die zusätzlichen Freiheitsgrade bereits auf Materialpunktebene eliminiert wurden. Diese Erweiterung wird im folgenden Abschnitt erläutert. Hierzu werden zunächst lediglich isoparametrische finite Elemente mit einer räumlich konstanten JACOBI-Transformation betrachtet. Die folgenden Ausführungen sind daher auf drei-knotige, ebene und vier-knotige, räumliche finite Elemente beschränkt. Diese Restriktion wird in Abschnitt 5.7 verworfen und die Generalisierung für beliebige Element-Typen hergeleitet.

### 5.5.1 Einflächen-Plastizitätsmodelle

Zu Beginn dieses Abschnittes wird die in [MOSLER & MESCHKE 2000] vorgeschlagene Formulierung anhand der Einflächen-Plastizitätstheorie erläutert. Für die Elementmenge mit räumlich konstanter JACOBI-Transformation folgen die Approximationen des Gradienten des konformen Verschiebungsfeldes und die des Gradienten der Rampenfunktion (5.11) zu

$$\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} = \text{const} \quad \text{und} \quad \nabla \varphi = \text{const}. \quad (5.36)$$

Somit wird der reguläre Anteil des linearen Verzerrungstensors

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - ([\mathbf{u}] \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}}}_{\text{regulär}} + \underbrace{([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}_{\text{singulär}} \delta_s, \quad (5.37)$$

welcher unmittelbar aus dem Deformationsgradienten (5.16) folgt, konstant approximiert. Spezifiziert man die schwache Form des Traktionsgleichgewichts (5.24) für die betrachtete Elementmenge, ist diese aufgrund konstant approximierter regulärer Verzerrungen bzw. Spannungen äquivalent zur lokalen Form

$$\mathbf{t}_s = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.38)$$



Werden die weiteren Betrachtungen auf Fließflächen nach Gl. (5.27) und (5.28) beschränkt, wird Gl. (5.38) für inelastische Belastungszustände in die Form

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{ini}} - q(\alpha) = \mathbf{t}_s \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (5.39)$$

überführt. Demnach ist die  $L_2$ -Orthogonalitätsbedingung (5.19) äquivalent zur Fließbedingung  $\phi = 0$ .

Um die Amplitude  $\zeta$  der Sprungstelle des Verschiebungsfelds  $[[\mathbf{u}]]$  zu berechnen, wird die Konsistenzbedingung  $\dot{\phi} = 0$  betrachtet. Mit der Kinematik (5.37) und der Annahme einer singulären Verteilung der plastischen Verzerrungen resultiert die äquivalente Spannung

$$\sigma_{\text{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : \underbrace{[\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \nabla \varphi]^{\text{sym}}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^\pm}. \quad (5.40)$$

Berücksichtigt man Gl. (5.40) in der Konsistenzbedingung, wird die Rate von  $\zeta$  unter Verwendung von Gl. (3.87) zu

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = 0 &= \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_q \phi \partial_{\alpha} q \dot{\alpha} \\ &= (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : \left[ \nabla^{\text{sym}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} - (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \dot{\zeta} \right] + \partial_{\alpha} q |\dot{\zeta}| \\ \Rightarrow \dot{\zeta} &= \frac{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : \nabla^{\text{sym}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi) - \partial_{\alpha} q \text{sign} \dot{\zeta}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

bestimmt.  $\dot{\zeta}$  kann daher als plastischer Multiplikator interpretiert werden. Im Gegensatz zu  $\lambda$  stellt  $\dot{\zeta}$  jedoch keine äquivalente Verzerrung, sondern eine Längenänderung dar.

Analog zur Plastizitätstheorie nach Abschnitt 2.1 wird in diesem Absatz die Linearisierung des Spannungstensors berechnet. Dazu wird die Rate des Spannungstensors mit der Kinematik (5.37) zu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \nabla^{\text{sym}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \dot{\zeta}, \quad \text{mit} \quad ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{m}^{\text{sym}} \delta_s = \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (5.42)$$

spezifiziert. Da auf globaler Systemebene  $\bar{\mathbf{u}}$  die einzige approximierten Feldgröße darstellt, ist die Linearisierung  $d\boldsymbol{\sigma}/d\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}$  zu berechnen. Diese folgt aus den Gl. (5.42) und (5.41) zu

$$\mathbb{C}^{\text{ep}} := \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi) \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi) - \partial_{\alpha} q \text{sign} \dot{\zeta}}. \quad (5.43)$$

Vergleicht man die Ratenform des Spannungstensors (5.42) bzw. die Materialtangente (5.43) mit den korrespondierenden Größen in Abschnitt 2.1, ist ihre formale Deckungsgleichheit zu verifizieren. Somit nehmen die regulären erweiterten Verzerrungen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} := \mathbf{G} \dot{\zeta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} := (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \quad (5.44)$$

formal die Stellung der plastischen Verzerrungen ein. Dies erscheint zunächst widersprüchlich, da die dissipativen Mechanismen auf  $\partial_s \Omega$  beschränkt sind und das Materialverhalten in  $\Omega^\pm$  per



definitionem elastisch ist. Mittels der Amplitude des Verschiebungssprunges  $\zeta$  werden jedoch die Verzerrungen  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  mit der Kinematik der singulären Fläche  $\partial_s\Omega$  gekoppelt. Hierdurch werden die Verzerrungen in  $\Omega^\pm$  direkt vom singulären Verzerrungsfeld in  $\partial_s\Omega$  beeinflusst.

Wird die Tangente 5.43 mit der des Abschnitts 2.1 verglichen, fällt auf, daß der Materialtensor (5.43) nur in Ausnahmefällen die große Symmetrie aufweist. Lediglich für linear abhängige Vektoren  $\boldsymbol{n}$  und  $\nabla\varphi$  gilt  $\mathbb{C}_{ijkl}^{\text{ep}} = \mathbb{C}_{klij}^{\text{ep}}$ . Dieser Sonderfall wurde erstmals in [OLOFSSON, KLISINSKI & NEDAR 1994] betrachtet. Er tritt auf, wenn die Lokalisierungsfläche parallel zu einer Elementseite ist.

**Anmerkung I:** Für den Fall, daß  $\boldsymbol{n}$  und  $\nabla\varphi$  nicht linear unabhängig sind, geht das allgemeinere PETROV-GALERKIN-Verfahren in Abschnitt 5.2.3 in das GALERKIN-Verfahren über.  $\square$

**Anmerkung II:** Damit die Materialtangente (5.43) definiert ist, muß die Bedingung

$$(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{m} \otimes \nabla\varphi) - \partial_\alpha q \operatorname{sign}\dot{\zeta} \neq 0 \quad (5.45)$$

erfüllt sein. Die Bedingung korrespondiert zu einem *Snap-Back* im  $\boldsymbol{\sigma} - \nabla^{\text{sym}}\bar{\boldsymbol{u}}$ -Diagramm. In [JIRÁSEK 2000] wurde eine äquivalente Gleichung für ein spezielles Plastizitätsmodell und ein spezielles Schädigungsmodell hergeleitet. Im Gegensatz zu [JIRÁSEK 2000] ist die Bedingung (5.45) in der hier vorgeschlagenen Implementierung direkt enthalten und muß nicht aufwendig hergeleitet werden. Desweiteren ist mittels der in diesem Abschnitt beschriebenen Implementierung eine analog Gleichung für beliebige Materialmodelle leicht zu bestimmen.  $\square$

## 5.5.2 Mehrflächen-Plastizitätsmodelle

In diesem Abschnitt erfolgt die Erweiterung für die Mehrflächen-Plastizitätstheorie (s. [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Hierzu ist es zweckmäßig, ein kartesisches Koordinatensystem auf der Fläche  $\partial_s\Omega$  zu definieren. Neben dem Normalenvektor  $\boldsymbol{n}$  werden die Vektoren  $\boldsymbol{m}^{(1)}$  und  $\boldsymbol{m}^{(2)}$  gemäß

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}^{(i)} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(2)} = 0 \quad (5.46)$$

eingeführt. Damit wird die Unstetigkeit  $[[\boldsymbol{u}]]$  in die Form

$$[[\boldsymbol{u}]] = \zeta^{(n)} \boldsymbol{n} + \zeta^{(m)(1)} \boldsymbol{m}^{(1)} + \zeta^{(m)(2)} \boldsymbol{m}^{(2)} \quad (5.47)$$

überführt. Diese Zerlegung der Sprunggröße  $[[\boldsymbol{u}]]$  führt zu einer additiven Aufspaltung der regulären erweiterten Verzerrungen

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)(1)} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)(2)}. \quad (5.48)$$

In Gl. (5.48) korrespondiert der Verzerrungstensor

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)} = (\boldsymbol{n} \otimes \nabla\varphi)^{\text{sym}} \zeta^{(n)} \quad (5.49)$$

zur Normalkomponente  $\zeta^{(n)}$  des Verschiebungssprunges und die Tensoren

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)(i)} = (\boldsymbol{m}^{(i)} \otimes \boldsymbol{\nabla} \varphi)^{\text{sym}} \zeta^{(m)(i)} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.50)$$

zu den tangentialen Komponenten  $\zeta^{(m)(1)}$  und  $\zeta^{(m)(2)}$ .

Nach der Modifikation der Kinematik im Rahmen der Mehrflächen-Plastizität wird die zum Verschiebungssprung energetisch konjugierte Größe des Traktionsvektors  $\boldsymbol{t}_s$  betrachtet. Da der Verschiebungssprung (5.47) mittels drei unabhängiger Komponenten beschrieben wird, ist es möglich, für jede Komponente des Vektors  $\boldsymbol{t}_s = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$  eine unabhängige Fließfläche

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^{(n)}) &= (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q^{(n)}(\alpha^{(n)}), & \dot{\alpha}^{(n)} &= |\dot{\zeta}^{(n)}|, \\ \phi^{(m)(1)}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^{(m)(1)}) &= (\boldsymbol{m}^{(1)} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q^{(m)(1)}(\alpha^{(m)(1)}), & \dot{\alpha}^{(m)(1)} &= |\dot{\zeta}^{(m)(1)}|, \\ \phi^{(m)(2)}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^{(m)(2)}) &= (\boldsymbol{m}^{(2)} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q^{(m)(2)}(\alpha^{(m)(2)}), & \dot{\alpha}^{(m)(2)} &= |\dot{\zeta}^{(m)(2)}| \end{aligned} \quad (5.51)$$

einzuführen (vgl. Abschnitt 5.3). Interaktionen zwischen den Fließflächen (5.51) können erfaßt werden, indem die Entfestigungsvariablen  $\alpha^{(m)(1)}$ ,  $\alpha^{(m)(2)}$  und  $\alpha^{(n)}$  nicht unabhängig voneinander sind.

### 5.5.3 Mode-I Versagen

Im Rahmen der Simulation spröder Werkstoffe wird häufig die RANKINE-Belastungsfläche

$$\phi^{(n)}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^{(n)}) = (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q^{(n)}(\alpha^{(n)}) \quad \dot{\alpha}^{(n)} = |\dot{\zeta}^{(n)}| \quad (5.52)$$

verwendet. Gemäß Abschnitt 2.1.1 stellt  $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$  die Eigenbasis der maximalen Hauptzugspannung dar. Gl. (5.52) verknüpft die Normalenkomponente des Traktionsvektors mit der Komponente des Verschiebungssprunges  $\zeta^{(n)}$ . Unter der Annahme dominanter Mode-I Belastungszustände wird für die tangentialen Komponenten vereinfachend von den Bedingungen

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{m}^{(1)} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} &= 0 \\ (\boldsymbol{m}^{(2)} \otimes \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

ausgegangen (s. [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Dies entspricht einem Schub-Reduktionsfaktor von Null (s. [MESCHKE 1989]). Anders als Gl. (5.52) werden die Gl. (5.53) nach der Aktivierung eines Risses immer postuliert; das heißt, sie sind als Nebenbedingungen und nicht im Sinne von Belastungsbedingungen zu verstehen.

## 5.6 Erweiterung für „rotierende“ singuläre Flächen

Im Abschnitt 5.5 ist von einer zeitlich konstanten Topologie der Lokalisierungsfläche ausgegangen worden. Diese Annahme basiert auf der Betrachtung von Makrodefekten. Makrorisse in spröden Werkstoffen sind durch kräftefreie Rißoberflächen gekennzeichnet (mit Ausnahme

von Rißschließung und Reibungskräften). Somit ist eine Traktions-Verschiebungs-Beziehung der Form (5.52) Mikrodefekten zuzuordnen. Von diesen Defekten ist bekannt, daß sich im Verlauf der Belastungsgeschichte ihre Topologie ändern kann (s. z.B. [PÖLLING 2000]). Im Rahmen der klassischen kontinuumsmechanischen Modelle läßt sich dieser Effekt berücksichtigen, indem die Fließ- bzw. Belastungsflächen im Hauptspannungsraum formuliert werden (s. z.B. [MESCHKE 1996]). Im Unterschied zu *Fixed-Crack* Formulierungen ist es somit möglich, daß die Belastungsflächen im Hauptspannungsraum mit dem Spannungstensor rotieren.

Im folgenden Absatz wird die Belastungsfläche

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q(\alpha) \quad \dot{\alpha} = |\dot{\zeta}| \quad (5.54)$$

betrachtet (s. [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Anders als in Abschnitt 5.5 wird nicht  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$  postuliert. Dieser allgemeinere Zustand ist durch  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})$  und  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma})$  gekennzeichnet. Mit der Zerlegung der Rate des Verschiebungssprunges

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\zeta} \mathbf{m} \quad (5.55)$$

resultiert die infinitesimale Änderung des regulären erweiterten Verzerrungstensors zu

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \dot{\zeta} = \mathbf{G} \dot{\zeta}. \quad (5.56)$$

Analog zu den plastischen Verzerrungen nach Abschnitt 2.1 wird die Rate der erweiterten Verzerrungen in einen zwei-stufigen Richtungstensor  $\mathbf{G}$  und in eine Amplitude  $\dot{\zeta}$  zerlegt. Zur Bestimmung des Tensors  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ist die zeitliche Integration

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t = T) = \int_{t=0}^T \mathbf{G} \dot{\zeta} dt \quad (5.57)$$

durchzuführen. Nur für den Sonderfall zeitlich konstanter Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t = T) = \mathbf{G} \zeta(t = T). \quad (5.58)$$

## 5.7 Erweiterung für beliebige finite Elemente

In diesem Abschnitt wird die Annahme einer konstanten Approximation des Verzerrungsfeldes verworfen. Durch die Aufgabe dieser Restriktion ist es möglich, das Konzept der eingebetteten Diskontinuitäten des Verschiebungsfeldes auf beliebige finite Elemente zu erweitern. Der Abschnitt folgt den Arbeiten [MOSLER & MESCHKE 2001B; MOSLER & MESCHKE 2002A]. Gemäß Abschnitt 5.6 ist an jedem Punkt der Lokalisierungsfläche  $\partial_s \Omega$  für inelastische Belastungszustände die Gl. (5.54)

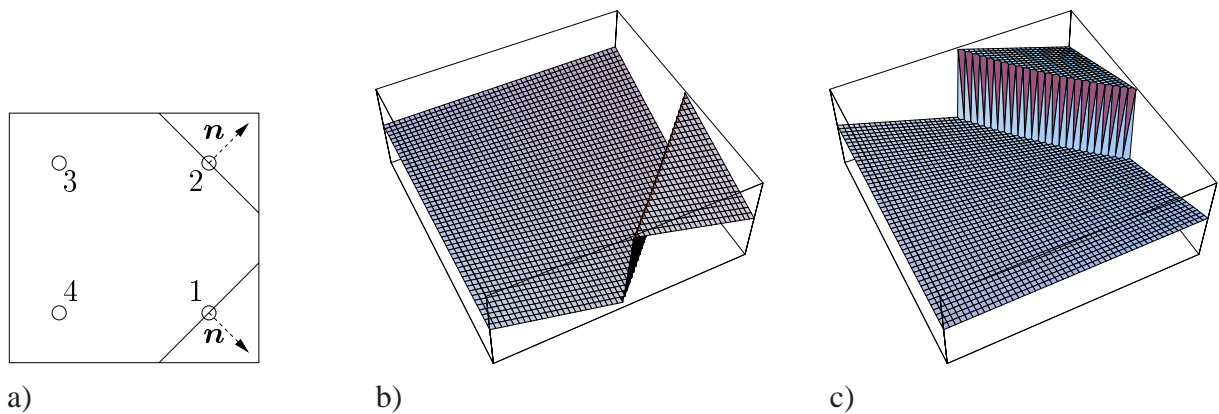
$$\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) = q(\alpha) \quad \text{mit} \quad \dot{\alpha} = |\dot{\zeta}| \quad (5.59)$$

einzuhalten. Die Rate des Spannungstensors

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \left( \nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{G} \dot{\zeta} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \quad (5.60)$$

aus Gl. (5.59)<sub>1</sub> folgt aus dem Verzerrungstensor (5.37). Gl. (5.60) gilt sowohl für die Annahme einer „rotierenden“ Fläche  $\partial_s \Omega$  als auch für eine zeitlich konstant angenommene Topologie der Lokalisierungsfläche.

In den Veröffentlichungen [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993; SIMO & OLIVER 1994; SLUYS & BERENDS 1998; ARMERO 1999] wird jedem lokalisierten finiten Element eine singuläre Fläche  $\partial_s \Omega$  zugeordnet. Die Vorgehensweise ist demnach auf die Elementebene ausgerichtet. In dieser Arbeit hingegen wird für jeden Integrationspunkt eine unabhängige Lokalisierungsfläche angenommen. Desweiteren wird gefordert, daß die Fläche  $\partial_s \Omega$  den korrespondierenden GAUSS-Punkt schneidet. Für ein vier-knotiges, ebenes Scheibenelement mit zwei aktivierten Lokalisierungsflächen in den Integrationspunkten 1 und 2 ist das Konzept in Abb. 5.5 dargestellt.



**Abb. 5.5:** Ebenes vier-knotiges Scheibenelement mit zwei aktiven Lokalisierungsflächen: a) Finites Element und Normalenvektoren der inneren Fläche  $\partial_s \Omega$  in den GAUSS-Punkten 1 und 2, b) Funktion  $M_s$  für den GAUSS-Punkt 1, c) Funktion  $M_s$  für den GAUSS-Punkt 2.

**Anmerkung:** Analog zur numerischen Umsetzung für  $C^0$ -stetige Verschiebungsfelder werden die plastischen Mechanismen in jedem Integrationspunkt getrennt betrachtet (s. z.B. [SIMO & HUGHES 1998]). □

Wird durch einen singulären akustischen Tensor materielle Verzweigung in einem GAUSS-Punkt signalisiert, ist aus der Ratenform der Fließfunktion (5.59), zusammen mit Gl. (5.60), die Amplitude  $\zeta$  zu berechnen. In dem betrachteten Punkt sind die Größen  $q(\alpha)$ ,  $\nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  eindeutig definiert. Im Unterschied hierzu ist  $\mathbf{G}$  aufgrund der Abhängigkeit von  $\nabla \varphi = \nabla \varphi(\mathbf{X})$  für jeden Integrationspunkt eine nicht konstante Abbildung. Somit läßt sich die Rate von  $\zeta$  nur für finite Elemente mit konstantem Vektor  $\nabla \varphi$  aus den Gl. (5.59) und (5.60) bestimmen. Für

beliebige finite Elemente ist es nicht möglich, auf diese Weise  $\dot{\zeta}$  zu ermitteln. Daher wird zur Berechnung der Rate von  $\zeta$  die schwache Form des Traktions-Gleichgewichtes (vgl. Gl. (5.24))

$$\frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \frac{1}{A_s^e} \int_{\partial_s \Omega} q(\alpha) \, d\Gamma \quad (5.61)$$

herangezogen. Diese Gleichung ist für jeden GAUSS-Punkt mit aktiver Lokalisierungsfläche unabhängig von den anderen Integrationspunkten einzuhalten.

**Anmerkung:** Für den betrachteten Integrationspunkt sind die Größen  $q(\alpha)$ ,  $\nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  unabhängig von  $\mathbf{X}$ .  $\square$

Durch die Anwendung der Rückwärts-EULER-Integration (s. Abschnitt 2.4)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n - \mathbf{G}_{n+1} \Delta \zeta_{n+1}) \quad (5.62)$$

wird die linke Seite der Gl. (5.61) in die Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \, d\Omega \\ &= (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) : \left[ \frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} \mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n - \mathbf{G}_{n+1} \Delta \zeta_{n+1}) \, d\Omega \right] \\ &= (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) : \underbrace{\mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n - \underbrace{\frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_{n+1} \, d\Omega}_{\bar{\mathbf{G}}_{n+1}} \Delta \zeta_{n+1})}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (5.63)$$

überführt. In der Umformung der Gl. (5.63) ist die Anmerkung auf Seite 102 implizit angewendet worden.

Der gemittelte Tensor  $\bar{\mathbf{G}}_{n+1}$  wird unter der Verwendung des Vektors  $\nabla \bar{\varphi}$  zu

$$\nabla \bar{\varphi} := \frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} \nabla \varphi(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (5.64)$$

und der Richtung des Verschiebungssprunges  $\mathbf{m}_{n+1}$  zu

$$\bar{\mathbf{G}}_{n+1} := (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \quad (5.65)$$

bestimmt. Für die Wahl

$$\mathbf{G} \equiv \bar{\mathbf{G}} \quad (5.66)$$

ist gemäß Gl. (5.63) die schwache Form des Traktions-Gleichgewichtes (5.61) äquivalent zur starken Form (5.59) im betrachteten GAUSS-Punkt. Im Rahmen der numerischen Implementierung wird daher das Traktionsgleichgewicht (5.59) anhand der Fließbedingung

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q(\alpha) \leq 0 \quad \text{mit} \quad \dot{\alpha} = |\dot{\zeta}| \quad (5.67)$$

mit den Raten der Spannungen

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \left( \nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \right) \quad \text{mit} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = \mathbf{G} \dot{\zeta} = (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \dot{\zeta} \quad (5.68)$$

berücksichtigt.

**Anmerkung:** Durch Gl. (5.64) wird eine numerische interne Länge in die Formulierung eingebracht. Da der Gradient  $\nabla \varphi(\mathbf{X})$  mittels der JACOBI-Transformation in die Form  $\nabla \varphi(\boldsymbol{\xi}) = \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\xi} \cdot \partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{X}$  übergeht, ist die Geometrie des betrachteten finiten Elementes in  $\nabla \bar{\varphi}$  und somit in  $\mathbf{G}$  enthalten.  $\square$

## 5.8 Ein gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell

Im folgenden Abschnitt wird die Implementierung des gekoppelten elasto-plastischen Schädigungsmodells nach Abschnitt 2.3 bzw. 3.4.3 und 3.5.3 für „rotierende“ singuläre Flächen mit der Kinematik (5.5) dargestellt. Die numerische Umsetzung erfolgt analog zur Arbeit [MOSLER & MESCHKE 2001A].

In den Abschnitten 3.4.3 und 3.5.3 ist das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell nach Abschnitt 2.3 im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsabbildungen erweitert worden. Die singulären Verzerrungen sind dabei in den Abschnitten 3.4.3 und 3.5.3 additiv in zwei Anteile zerlegt worden. Ein Verzerrungstensor korrespondierte zu plastischen Verformungen, der andere zu schädigungs-induzierten Mechanismen. Mittels der Kinematik (5.5) überträgt sich diese additive Aufspaltung auf die regulären erweiterten Verzerrungen  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = \underbrace{(1 - \beta) \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}}_{\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{p}}} + \underbrace{\beta \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}}_{\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{d}}} . \quad (5.69)$$

Die Raten  $\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{p}}$  und  $\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{d}}$  folgen mit Gl. (5.68)<sub>2</sub> zu

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{p}} = (1 - \beta) \mathbf{G} \dot{\zeta} \quad \text{und} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{d}} = \beta \mathbf{G} \dot{\zeta} . \quad (5.70)$$

Analog zur Gl. (5.68)<sub>1</sub> wird die Rate des Spannungstensors zu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \left( \nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{p}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{d}} \right) \quad (5.71)$$

bestimmt. Aus der äquivalenten Spannungsrate

$$\dot{\sigma} = \mathbb{C} : \left( \nabla^{\text{sym}} \dot{\mathbf{u}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{p}} \right) + \dot{\mathbb{C}} : \left( \nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} \right) \quad (5.72)$$

resultiert mit  $\dot{\mathbb{C}} = -\mathbb{C} : \mathbb{D} : \mathbb{C}$  (s. Gl. (2.53)) die Identität (vgl. Abschnitt 2.3)

$$\mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\text{d}} . \quad (5.73)$$

Das Skalarprodukt der Gl. (5.73) mit dem Spannungstensor  $\sigma$  liefert mit den algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{D} : \sigma &= \sigma : \dot{\hat{\epsilon}}^d &= \beta \dot{\zeta} \sigma : \mathbf{G} \\ &= \beta \dot{\zeta} \sigma : \mathbf{G} \frac{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma} &= \beta \dot{\zeta} \sigma : \frac{\mathbf{G} \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma} : \sigma\end{aligned}\quad (5.74)$$

die Evolutionsgleichung des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}$

$$\mathbb{D} = \beta \dot{\zeta} \frac{\mathbf{G} \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} : \sigma} \quad \text{mit} \quad (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} = \partial_{\sigma} \phi. \quad (5.75)$$

Durch zeitliche Integration des Nachgiebigkeitstensors folgt der Werkstofftensor  $\mathbb{C}$  zu

$$\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_0 + \int_{t=0}^T \dot{\mathbb{D}} dt. \quad (5.76)$$

Gemäß den Gl. (5.75) und (5.76) weist  $\mathbb{C}$  somit nicht die große Symmetrie  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$  auf. Dies korrespondiert zur unsymmetrischen Werkstofftangente des Plastizitätsmodells nach Abschnitt 5.5.1.

**Anmerkung:** Die Erweiterung mit  $((\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma) / ((\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma)$  in Gl. (5.74) ist nicht beliebig. Sie wird durch eine Analogie zur Plastizitätstheorie nach Abschnitt 5.5.1 begründet. Im Rahmen des Plastizitätsmodells basieren die Richtungen der Raten der regulären Verzerrungen  $\dot{\zeta} (\mathbf{m} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}}$  und der singulären Verzerrungen  $\dot{\zeta} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \delta_s$  (vgl. Gl. (5.37)) auf dem dyadischen Produkt zweier ein-stufiger Tensoren. Der ein-stufige Tensor  $\mathbf{m}$  stimmt somit für die Richtungen der regulären und der singulären erweiterten Verzerrungen überein. Für die Erweiterung der Gl. (5.74) mit  $((\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma) / ((\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \sigma)$  stimmen auch die Raten des regulären Nachgiebigkeitstensor (5.75), bis auf den zwei-stufigen Tensor  $\mathbf{G}$ , mit dem singulären nach Gl. (3.56) überein.  $\square$

## 5.9 Integration der Materialgleichungen

In diesem Abschnitt wird die Integration der Materialgleichungen erläutert. Die vorgeschlagene numerische Umsetzung [MOSLER & MESCHKE 2001B] ist von gleicher Struktur wie der Integrationsalgorithmus aus Abschnitt 2.4. Zur Implementierung müssen daher die Gleichungen aus Abschnitt 2.4 nur geringfügig geändert werden.

### 5.9.1 Implementierung für „rotierende“ singuläre Flächen

Ziel dieses Unterabschnittes ist es, die Lösungen der Differentialgleichungen des Materialmodells nach Abschnitt 5.8 mit Hilfe des Return-Mapping-Algorithmus zu bestimmen. Das Materialmodell nach Abschnitt 5.8 beinhaltet als Sonderfälle ein isotropes Plastizitätsmodell und ein anisotropes Schädigungsmodell.



Im Rahmen des betrachteten Materialmodells muß zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  die Fließbedingung (5.67) eingehalten werden. Liegt ein plastischer bzw. schädigender Belastungszustand vor, ist die Gleichung

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) = (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - q_{n+1} = 0 \quad (5.77)$$

zu erfüllen. Für das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell des Abschnitts 5.8 bestimmen sich die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  bzw. die interne Variable  $q$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1} : (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{p}}) \quad \text{und} \quad q_{n+1} = q(\alpha_{n+1}). \quad (5.78)$$

Analog zum Abschnitt 2.3 werden die *Trial*-Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} = \mathbb{C}_n : (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{\text{p}}) \quad (5.79)$$

definiert. Mit den Gl. (5.71) und (5.70) und durch die Anwendung einer Rückwärts-EULER-Integration erfolgt die Verknüpfung

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} - \mathbb{C}_n : \mathbf{G}_{n+1} \Delta \zeta_{n+1} \quad (5.80)$$

zwischen den Trial-Spannungen und den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ . Mit den Trial-Spannungen (5.79) wird die diskrete Belastungsbedingung zu

$$\phi_{n+1}^{\text{tr}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, q_{n+1}^{\text{tr}}) > 0 \quad \text{mit} \quad q_{n+1}^{\text{tr}} = q(\alpha_n) \quad (5.81)$$

bestimmt.

Wird durch  $\phi_{n+1}^{\text{tr}} > 0$  ein plastischer bzw. schädigender Belastungszustand signalisiert, ist Gl. (5.77) unter den Nebenbedingungen  $\mathbf{R}^{\mathcal{E}} = \mathbf{0}$  und  $R^\alpha = 0$ , mit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{E}} &= -\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \mathbf{G}_{n+1} \Delta \zeta_{n+1} \\ R^\alpha &= -\alpha_{n+1} + \alpha_n + |\Delta \zeta_{n+1}| \end{aligned} \quad (5.82)$$

zu erfüllen. Wie in Abschnitt 2.4 folgen die Gl. (5.82) aus der Anwendung der Rückwärts-EULER-Integration auf die Differentialgleichungen (5.70) und (5.67)<sub>2</sub>. Zur Bestimmung der Nullstellen der Gl. (5.77) und (5.82) wird das NEWTON-Verfahren herangezogen. Hierzu werden die linearen Approximationen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{E}} + d\mathbf{R}^{\mathcal{E}} &= \mathbf{0}, \\ R^\alpha + dR^\alpha &= 0, \\ \phi_{n+1} + d\phi_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.83)$$

benötigt. Unter Berücksichtigung, daß innerhalb der Iteration  $d\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  gilt, ergeben sich die konsistenten Linearisierungen zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d\mathbf{R}^{\mathcal{E}} \\ dR^\alpha \end{bmatrix}}_{d\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & H^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dq_{n+1} \end{bmatrix}}_{\Delta} + d\Delta \zeta_{n+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{n+1} \\ \text{sign}[d\Delta \zeta_{n+1}] \end{bmatrix}}_{\nabla M} \quad (5.84)$$

mit

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbb{C}_n : d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \quad \text{und} \quad dq_{n+1} = -H_{n+1} d\alpha_{n+1}. \quad (5.85)$$

In Gl. (5.84) sind die generalisierten Moduli  $\mathbf{A}$  eingeführt worden. Diese basieren auf den algorithmischen Moduli

$$\boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{-1} = \mathbb{C}_n^{-1} + \mathbb{G}_{n+1}^{\text{sym}}. \quad (5.86)$$

Zusätzlich zum Werkstofftensor  $\mathbb{C}$  ist  $\boldsymbol{\Xi}$  vom vier-stufigen Tensor

$$\mathbb{G}_{n+1}^{\text{sym}} = \Delta\zeta_{n+1} \left( \nabla\bar{\varphi} \otimes \frac{\partial \mathbf{m}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right)^{\text{sym}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{G}_{ijkl}^T = \mathbb{G}_{jikl} \quad (5.87)$$

abhängig. Gemäß Gl. (5.87) resultiert  $\mathbb{G}$  aus der Linearisierung der Richtungen der erweiterten Verzerrungen nach dem Spannungstensor. Für das RANKINE-Kriterium ist die Ableitung  $\partial \mathbf{m} / \partial \boldsymbol{\sigma}$  dem Anhang C zu entnehmen.

**Anmerkung:** In Gl. (5.87) ist  $\partial \nabla \bar{\varphi} / \partial \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  implizit verwendet worden.  $\bar{\varphi}$  ist aufgrund der Gl. (5.64) und Gl. (5.11) nur abhängig vom korrespondierenden numerischen Lokalisierungsmodus (s. Abschnitt 5.2.2). Ändert sich der Modus innerhalb der Iteration nicht, ist somit  $\partial \nabla \bar{\varphi} / \partial \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ . Da der Übergang zwischen zwei verschiedenen numerischen Lokalisierungsmodi nicht stetig ist, kann für diese Punkte keine Linearisierung angegeben werden (vgl. Kapitel 6). Die Gleichung  $\partial \nabla \bar{\varphi} / \partial \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  ist demnach gerechtfertigt.  $\square$

Um das Gleichungssystem (5.83) iterativ zu lösen, wird Gl. (5.84) in die linearisierte Fließbedingung

$$\phi_{n+1} + d\phi_{n+1} = 0 \quad \text{mit} \quad d\phi_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} \\ -1 \end{bmatrix}}_{\nabla\phi} \underbrace{\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dq_{n+1} \end{bmatrix}}_{\Delta} \quad (5.88)$$

eingesetzt und die Änderung von  $\zeta$  aus Gl. (5.88)<sub>1</sub> berechnet. In Matrixnotation ergibt sich das Inkrement von  $\zeta$  zu

$$d\Delta\zeta_{n+1} = \frac{\phi_{n+1} - \nabla\phi^T \mathbf{A} \mathbf{R}}{\nabla\phi^T \mathbf{A} \nabla M}. \quad (5.89)$$

Die Iteration wird beendet, wenn

$$\max(\|\mathbf{R}\|_{\infty}, |\phi|) < tol. \quad (5.90)$$

Im Rahmen der numerischen Analysen in Kapitel 7 wird  $tol = 10^{-10}$  gewählt.

Ist die Lösung konvergiert ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ), wird die Linearisierung der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  bezüglich des symmetrischen Gradienten der kompatiblen Verschiebungen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{ep}} &= \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\nabla^{\text{sym}}\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Xi} - \frac{\{\mathbf{A} \nabla M \otimes \nabla\phi^T \mathbf{A}\}_{[11]}}{\nabla\phi^T \mathbf{A} \nabla M} \\ &= \boldsymbol{\Xi} - \frac{\boldsymbol{\Xi} : \mathbf{G} \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\Xi}}{(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{G} - H \text{ sign}[\Delta\zeta]} \end{aligned} \quad (5.91)$$

bestimmt. Analog zu Kapitel 2 unterscheiden sich somit die algorithmische Tangente (5.91) und die Materialtangente (5.43). Die anisotrope Degradation des elastischen Werkstoffensors resultiert aus der Änderung des Nachgiebigkeitstensors

$$\Delta \mathbb{D} = \beta \Delta \zeta_{n+1} \frac{\mathbf{G}_{n+1} \otimes (\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1})^{\text{sym}}}{(\mathbf{m}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (5.92)$$

zu

$$\mathbb{D}_{n+1} = \mathbb{D}_0 + \sum_{i=0}^n \Delta \mathbb{D}_{i+1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}_{n+1} = \mathbb{D}_{n+1}^{-1}. \quad (5.93)$$

In Gl. (5.93) kann die Inverse des Nachgiebigkeitstensors direkt oder mit Hilfe der SHERWIN-MORRISON-WOODBURY-Gleichung ermittelt werden.

**Anmerkung I:** Ein Vergleich des Algorithmus dieses Abschnitts mit dem klassischen Return-Mapping Algorithmus aus Abschnitt 2.4 liefert die formale Äquivalenz beider Implementierungen. Damit können vorhandene Programmstrukturen übernommen werden, um die nichtlinearen Gleichungen (5.83) zu lösen.  $\square$

**Anmerkung II:** Da sich innerhalb der Iterationen die singuläre Fläche  $\partial_s \Omega$  drehen kann, ist es möglich, daß nach erfolgter Konvergenz ein anderer numerischer Lokalisierungsmodus vorliegt als im Trial-Zustand (vgl. Anmerkung, Seite 106). Somit ändert sich auch der Vektor  $\nabla \bar{\varphi}$ . Liegt dieser Fall vor, wird die Iteration mit dem zuletzt berechneten Vektor  $\nabla \bar{\varphi}$  wiederholt. Falls auch hier im konvergierten Zustand  $\nabla \bar{\varphi}$  vom Initialvektor abweicht, wird die Iteration auf der Grundlage einer zeitlich konstant angenommenen Fläche  $\partial_s \Omega$  fortgesetzt. Erst nach erfolgter Konvergenz auf Strukturebene wird im nächsten Belastungssinkrement die Analyse wieder für eine „rotierende“ Lokalisierungsfläche fortgesetzt.  $\square$

## 5.9.2 Implementierung für singuläre Flächen mit $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$

In diesem Abschnitt wird ein Integrationsalgorithmus für das Mehrflächen-Plastizitätsmodell nach Abschnitt 5.5.2 vorgestellt. Die weiteren Ausführungen basieren auf der Annahme  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  [MOSLER & MESCHKE 2002A]. Demnach wird die Topologie der singulären Fläche als zeitlich konstant postuliert.

Unter der Voraussetzung  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  resultiert die Rückwärts-EULER-Integration der regulären erweiterten Verzerrungen  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  nach Gl. (5.48) zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \quad (5.94)$$

mit

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \Delta \zeta_{n+1}^{(n)} + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{m}^{(i)} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \Delta \zeta_{n+1}^{(m)(i)}. \quad (5.95)$$

Mit den Gl. (5.94) und (5.95) folgt der Spannungstensor zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \underbrace{\mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)}_{\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}} - \mathbb{C} : \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (5.96)$$

Auf der Grundlage der Trial-Spannungen werden die Trial-Fließfunktionen  $\phi^{(n)}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \alpha^{(n)})$ ,  $\phi^{(m)(1)}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \alpha^{(m)(1)})$  und  $\phi^{(m)(2)}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \alpha^{(m)(2)})$  berechnet und somit die Menge der aktiven Fließflächen  $\mathbb{J}_{\text{act}}$  ermittelt (s. [SIMO & HUGHES 1998]).

Im vorliegenden Absatz wird angenommen, daß alle drei Fließflächen aktiviert werden. Der Integrationsalgorithmus für eine oder zwei aktive Fließflächen wird nicht näher betrachtet; folgt jedoch analog zu dem beschriebenen Algorithmus. Im Rahmen des betrachteten Materialmodells berechnen sich die Residuen der regulären erweiterten Verzerrungen analog zum Abschnitt 5.9.1. Die Linearisierung von  $\mathbf{R}^\varepsilon$  folgt somit zu

$$d\mathbf{R}^\varepsilon = -d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + d\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \mathbb{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + d\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (5.97)$$

Anders als das Modell aus Abschnitt 5.9.1 basiert die betrachtete Mehrflächen-Plastizitätstheorie nach Abschnitt 5.5.2 auf der Annahme einer zeitlich konstanten Topologie der singulären Fläche. Diese Annahme impliziert, daß das Koordinatensystem mit den Achsen  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}^{(1)}$  und  $\mathbf{m}^{(2)}$  ebenfalls zeitlich konstant ist. Dadurch ergibt sich die Linearisierung

$$d\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} d\Delta\zeta_{n+1}^{(n)} + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{m}^{(i)} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} d\Delta\zeta_{n+1}^{(m)(i)}. \quad (5.98)$$

Da somit die Richtungen der Tensoren  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)(1)}$  und  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)(2)}$  zeitlich konstant sind, ist der algorithmische Modul identisch mit dem elastischen Werkstofftensor und es gilt  $\Xi = \mathbb{C}$ . Wird das Residuum der internen Variablen  $\alpha^{(n)}$ ,  $\alpha^{(m)(1)}$  und  $\alpha^{(m)(2)}$  gemäß

$$\mathbf{R}^\alpha = \begin{bmatrix} -\alpha_{n+1}^{(n)} & +\alpha_n^{(n)} & +|\Delta\zeta_{n+1}^{(n)}| \\ -\alpha_{n+1}^{(m)(1)} & +\alpha_n^{(m)(1)} & +|\Delta\zeta_{n+1}^{(m)(1)}| \\ -\alpha_{n+1}^{(m)(2)} & +\alpha_n^{(m)(2)} & +|\Delta\zeta_{n+1}^{(m)(2)}| \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

eingeführt, ist im Fall dreier aktiver Fließflächen die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\varepsilon &= \mathbf{0} & \phi_{n+1}^{(n)} &= 0 \\ \mathbf{R}^\alpha &= \mathbf{0} & \phi_{n+1}^{(m)(1)} &= 0 \\ & & \phi_{n+1}^{(m)(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.100)$$

zu bestimmen. Analog zu Abschnitt 5.9.1 erfolgt die Berechnung der Lösungen iterativ mit dem NEWTON-Verfahren. Hierzu werden die Linearisierungen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\varepsilon + d\mathbf{R}^\varepsilon &= \mathbf{0} & \phi_{n+1}^{(n)} + d\phi_{n+1}^{(n)} &= 0 \\ \mathbf{R}^\alpha + d\mathbf{R}^\alpha &= \mathbf{0} & \phi_{n+1}^{(m)(1)} + d\phi_{n+1}^{(m)(1)} &= 0 \\ & & \phi_{n+1}^{(m)(2)} + d\phi_{n+1}^{(m)(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.101)$$

betrachtet. Da das Gleichungssystem (5.101) formal identisch mit dem Return-Mapping-Algorithmus für Mehrflächen-Plastizitätsmodelle im Rahmen  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder ist, wird die Implementierung aus [SIMO & HUGHES 1998] übernommen.

Für das Plastizitätsmodell nach Abschnitt 5.5.3 sind Details der numerischen Umsetzung in Anhang D enthalten. Im Gegensatz zu Abschnitt 5.5.3 ist die Implementierung auf den ebenen Spannungszustand beschränkt.

## 5.10 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die numerische Umsetzung von  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern im Rahmen der Finite-Elemente-Methode erläutert. Das erweiterte Verschiebungsfeld war dabei auf die Elementebene bzw. die Materialpunktebene beschränkt. Demnach wurde keine Kontinuität des Feldes an den Elementgrenzen erfüllt.

Auf der Grundlage der Veröffentlichung [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] wurde das Konzept der inkompatiblen  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder in dem vorliegenden Kapitel für beliebige finite Elemente erweitert. Neben zweidimensionalen Elementen erfolgte die erstmalige Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua. Hierzu wurde ein acht-knotiges Volumenelement als Prototyp gewählt.

Im Gegensatz zu den bisherigen Veröffentlichungen (s. [OLIVER 1996]) basierte die numerische Umsetzung nicht auf dem Verfahren der statischen Kondensation. Um die Analogie zu den klassischen kontinuumsmechanischen Modellen hervorzuheben, wurden die Amplituden der Verschiebungssprünge auf Materialpunktebene aus der Formulierung herauskondensiert. Durch diese neue Vorgehensweise ist es ermöglicht worden, den Return-Mapping-Algorithmus zur Lösung des zugrundeliegenden Differentialgleichungssystems heranzuziehen.

Desweiteren wurde eine Erweiterung für „rotierende“ singuläre Flächen erläutert und implementiert. Wie in Abschnitt 7.3.2 gezeigt wird, lassen sich hierdurch Locking-Effekte reduzieren.

Um dem anisotropen Verhalten spröder Werkstoffe gerecht zu werden, wurde das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell aus der Arbeit [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998] auf die Kinematik der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder übertragen. Neben einem isotropen Plastizitätsmodell beinhaltet das Modell das anisotrope Schädigungsmodell aus [GOVINDJEE, KAY & SIMO 1995].



## Kapitel 6

# Vergleich des Konzeptes der eingebetteten $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder mit Kontinuumsmodellen auf der Basis des Bruchenergiekonzeptes

In diesem Kapitel wird das Konzept der eingebetteten  $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder mit klassischen Kontinuumsmodellen  $\mathcal{C}^0$ -stetiger Verschiebungsabbildungen verglichen. Hierzu wird das RANKINE-Kriterium zur Modellierung von spröden Werkstoffen betrachtet. Auf der Grundlage des Bruchenergiekonzeptes wird zunächst ein Regularisierungsverfahren für das klassische Materialmodell beschrieben. Dieses Verfahren basiert auf einer charakteristischen Länge nach OLIVER. Daran anschließend erfolgt der Vergleich der beiden Modelle für die Plastizitätstheorie. Das elastische Verhalten des Werkstoffes wird dabei mittels verschiedener isotroper hyperelastischer Materialmodelle approximiert. Die Erweiterung auf anisotropes elastisches Werkstoffverhalten wird skizziert.

### 6.1 Allgemeines

In den meisten Veröffentlichungen, die auf dem Konzept der eingebetteten  $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder basieren, wird die Leistungsfähigkeit des dort vorgeschlagenen Algorithmus anhand eines Vergleiches mit einem klassischen Kontinuumsmodell aufgezeigt. Für das klassische Kontinuumsmodell wird jedoch häufig kein Regularisierungsverfahren verwendet (s. z.B. [ARMERO & GARIKIPATI 1995] und [REGUEIRO & BORJA 1999]). Da bereits in Abschnitt 2.5 gezeigt wurde, daß ohne Berücksichtigung eines Regularisierungsverfahrens sich nahezu jede denkbare numerische Lösung durch die Konstruktion einer speziellen räumlichen Diskretisierung künstlich erzeugen läßt, sind die ermittelten numerischen Lösungen somit wenig aussagekräftig.



Um einen Vergleich der beiden Finite-Elemente-Modelle zu gewährleisten, wird das klassische Kontinuumsmodell mit dem Bruchenergiekonzept erweitert (s. Abschnitt 2.6). Hierzu wird eine numerische charakteristische Länge  $l_c$  herangezogen. Die in diesem Kapitel verwendete Länge  $l_c$  geht auf die Arbeit [OLIVER 1989] zurück. Die Überlegenheit der von OLIVER vorgeschlagenen Implementierung gegenüber anderen charakteristischen Längen wurde in [LACKNER 1999] numerisch aufgezeigt. Somit wird ein kritischer Vergleich der beiden Finite-Elemente-Modelle ermöglicht (s. [MOSLER & MESCHKE 2002B]).

## 6.2 Charakteristische Länge nach OLIVER

In diesem Abschnitt wird die charakteristische Länge  $l_c$  nach [OLIVER 1989] vorgestellt. Analog zum regulären Anteil der erweiterten Verzerrungen  $\hat{\epsilon}$  des Finite-Elemente-Modells aus Kapitel 5 basiert auch OLIVER's Vorschlag für  $l_c$  auf den Interpolationsfunktionen des betrachteten finiten Elementes. Aufgrund der JACOBI-Transformation ist somit  $l_c$  abhängig von der Form des finiten Elementes.

Das Modell von OLIVER kann als Wegbereiter des Konzeptes der eingebetteten  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder angesehen werden. Im Gegensatz zu den Veröffentlichungen [SIMO, OLIVER & ARMERO 1993] und [MOSLER & MESCHKE 2002A] wird in [OLIVER 1989] das diskontinuierliche Verschiebungsfeld mit einer Rampenfunktion  $\varphi$  zu

$$[[\mathbf{u}]] H_s \approx [[\mathbf{u}]] \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n_{\Omega^+}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (6.1)$$

approximiert. Die Rampenfunktion  $\varphi$  ist identisch mit jener in Abschnitt 5.2.1. In Gl. (6.1) sind  $N_i$  die Interpolationsfunktionen des betrachteten finiten Elementes. Da somit  $\text{supp}\varphi = \Omega^e$  ist (s. Anhang C), wird der Effekt der Verschiebungsdiskontinuität  $[[\mathbf{u}]]$  kontinuierlich auf das gesamte finite Element verteilt. Diese Technik wird auch als „verschmierte“ Reißmodellierung bezeichnet. Das zu Gl. (6.1) korrespondierende Verschiebungsfeld ist somit von der Form

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^- + [[\mathbf{u}]] \varphi. \quad (6.2)$$

Aus Gl. (6.1) und (6.2) folgt daher  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in C^0(\mathbb{R}^3 \times t, \mathbb{R}^3)$ .

Zur Berechnung der numerischen charakteristischen Länge betrachtet OLIVER die Energie  $E$  in einem finiten Element  $e$ , die zur vollständigen Entfestigung des Materials erforderlich ist. Gemäß Abschnitt 2.5 ist die Energie  $E$  abhängig von der Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$ . Dies führt zur Gleichung

$$E^e = \mathcal{G}_f A_s^e = \mathcal{G}_f \frac{V^e}{l_c} = \int_{\Omega^e} \mathcal{G}_f \frac{1}{l_c} dV. \quad (6.3)$$

Wird die Energie  $E$  direkt mittels des Traktionsvektors und der energetisch konjugierten Größe bestimmt, läßt sich unter der Verwendung des GAUSSSchen Integralsatzes die zu Gl. (6.3) äqui-

valente Form

$$E^e = \int_{\Omega^e} \mathcal{G}_f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} \, dV \quad (6.4)$$

herleiten. Ein Vergleich der Integrale (6.3) und (6.4) liefert somit

$$l_c = \frac{V^e}{\int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{n_{\Omega^+}} \left( \left[ \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \mathbf{n} \right) \, dV}. \quad (6.5)$$

Ist  $\partial \varphi / \partial \mathbf{X} = \text{const}$ , vereinfacht sich Gl. (6.5) zu

$$l_c = (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})^{-1}. \quad (6.6)$$

Die Bedingung  $\partial \varphi / \partial \mathbf{X} = \text{const}$  ist für drei-knotige ebene Elemente und für vier-knotige Tetraeder-Elemente erfüllt.

**Anmerkung:** Die Mittelung  $\nabla \bar{\varphi} = \frac{1}{V^e} \int_{\Omega^e} \nabla \varphi \, dV$  in Gl. (5.64) ist von analoger Form wie Gl. (6.5). Denn wird die lokale Form der Gl. (6.5)

$$\tilde{l}_c(\boldsymbol{\xi}) := \left( \sum_{i=1}^{n_{\Omega^+}} \left[ \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \mathbf{n} \right)^{-1} \quad (6.7)$$

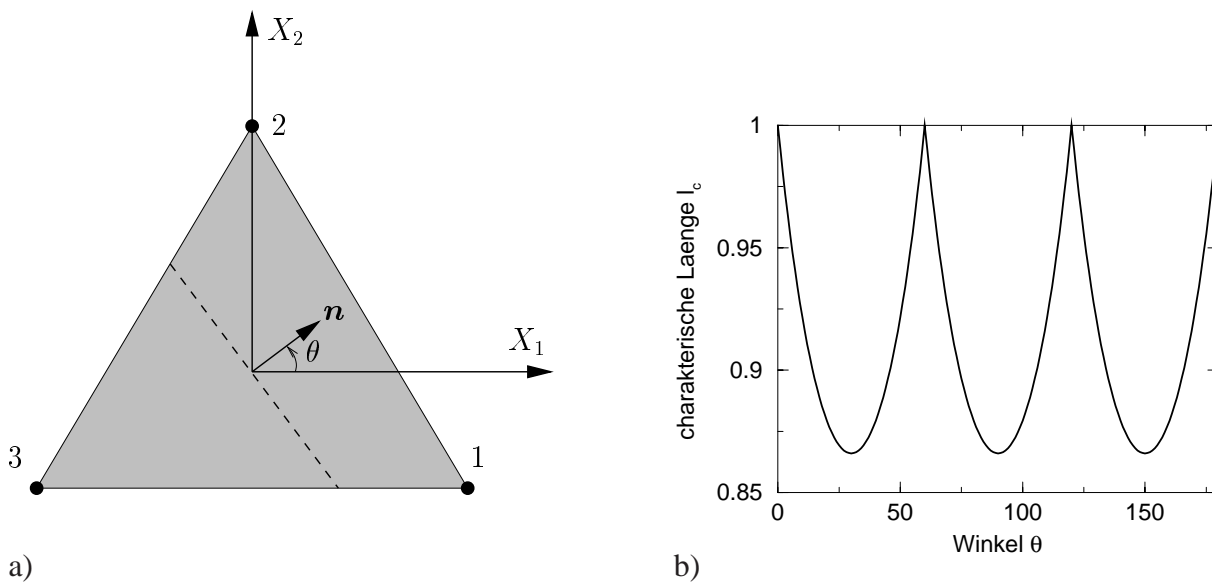
betrachtet, kann auch Gl. (6.5) in die Form  $l_c = V^e / \int_{\Omega^e} \tilde{l}_c^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \, dV$  überführt werden. Die Parallelen des Modells der eingebetteten  $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder zu dem Modell von OLIVER sind deutlich zu erkennen.  $\square$

Für das in Abb. 6.1a dargestellte drei-knotige ebene Dreiecks-Element wird in den folgenden Absätzen die charakteristische Länge  $l_c$  nach OLIVER berechnet. Da gemäß Gl. (6.6)  $l_c$  abhängig von der Topologie des Risses ist, muß die Lage des Risses spezifiziert werden. Hierzu wird angenommen, daß die Lokalisierungsfläche den Schwerpunkt des finiten Elementes schneidet. Desweiteren wird analog zu [OLIVER 1989] eine gerader Riß postuliert. Somit ist die Topologie des Risses anhand eines Normalenvektors  $\mathbf{n}$  eindeutig bestimmt.

Für das finite Element aus Abb. 6.1a wird Gl. (6.6) zu

$$l_c = \begin{cases} \forall \theta \in (0^\circ, 60^\circ) & l_c = \frac{1}{\cos \theta + 0.57735 \sin \theta} \\ \forall \theta \in (60^\circ, 120^\circ) & l_c = \frac{1}{1.1547 \sin \theta} \\ \forall \theta \in (120^\circ, 180^\circ) & l_c = \frac{1}{\cos \theta - 0.57735 \sin \theta} \end{cases} \quad (6.8)$$

berechnet. Die graphische Darstellung der Gl. (6.8) ist Abb. 6.1b zu entnehmen. Offensichtlich gilt für die stetige Erweiterung der Gl. (6.8)  $l_c \in \mathcal{C}^0([0; 2\pi], \mathbb{R}^+)$ . Wie leicht gezeigt werden kann, ist die Abbildung  $l_c$  jedoch im allgemeinen nicht stetig.



**Abb. 6.1:** Drei-knotiges gleichseitiges finites Element mit einer Seitenlänge von 1.0 cm: a) Geometrie des drei-knotigen finiten Elementes und Definition eines kartesischen Koordinatensystems, b) Charakteristische Länge  $l_c$  [cm] nach OLIVER (Rißfläche schneidet den Schwerpunkt; Rißnormalenvektor  $\mathbf{n}^T = [\cos \theta; \sin \theta]$ ;  $\theta$  [°]).

### 6.3 Isotrope hyperelastische Materialmodelle

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 5 vorgeschlagene Finite-Elemente-Modell mit einem klassischen Plastizitätsmodell  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder verglichen. Als Regularisierungsverfahren für das klassische Kontinuumsmodell wird die charakteristische Länge nach [OLIVER 1989] verwendet. Da die Herleitungen von OLIVER auf Betrachtungen von Rißflächen basieren, erfolgt der Vergleich im Rahmen des RANKINE-Kriteriums (s. Abschnitt 2.1.1).

Die weiteren Ausführungen sind auf das drei-knotige Scheibenelement bzw. das vier-knotige Tetraeder-Element beschränkt. Da diese Elemente eine konstante Approximation der Verzerrungen aufweisen, kann die Analyse des Elementverhaltens auf die Materialpunktebene beschränkt werden.

**Anmerkung:** Die Ausführungen in der Arbeit [OLIVER 1989] beschränken sich auf drei-knotige bzw. vier-knotige Scheibenelemente. Ohne eine weitere Begründung anzugeben, nahm OLIVER für jeden GAUSS-Punkt des vier-knotigen bilinearen Elementes an, daß die Rißfläche den Mittelpunkt des Elementes ( $\xi = 0$ ) kreuzt. Diese Annahme weicht von der in Abschnitt 5.7 ab. In Abschnitt 5.7 ist aufgrund einer effizienten Implementierung postuliert worden, daß die Rißoberfläche den korrespondierenden Integrationspunkt schneiden muß. Werden die weiteren Ausführungen auf drei-knotige Scheibenelemente bzw. vier-knotige Tetraeder-Elemente beschränkt, tritt diese Differenz nicht auf. Aufgrund der konstanten Approximation der Verzerrungen ist für diese Elementtypen die Position des Integrationspunktes beliebig.  $\square$

Unter der Annahme, das Verzerrungsfeld und somit auch der Spannungstensor ist räumlich konstant, muß die Fließfunktion

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q(\alpha) \leq 0 \quad (6.9)$$

lediglich in einem Punkt des finiten Elementes überprüft werden. Diese Vereinfachung trifft sowohl auf das Finite-Elemente-Modell nach Kapitel 5, als auch auf das klassische Plastizitätsmodell nach Abschnitt 2.1 zu. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in Gl. (6.9) folgt für hyperelastische Werkstoffmodelle zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e). \quad (6.10)$$

Gl. (6.9) und (6.10) sind somit für beide betrachtete Modelle identisch. Mit der Forderung  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \forall \mathbf{X} \in \Omega / \partial_s \Omega$  für das Modell mit diskontinuierlichen Verschiebungsansätzen berechnen sich für dieses Modell die elastischen Verzerrungen zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \dot{\zeta} \quad \text{und} \quad \dot{\alpha} = \dot{\zeta}. \quad (6.11)$$

Gemäß Abschnitt 2.1 folgen die elastischen Verzerrungen für das klassische Plastizitätsmodell zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \lambda \quad \text{und} \quad \dot{\alpha} = \lambda. \quad (6.12)$$

Um die weiteren Ausführungen nicht unnötig zu erschweren, wird eine lineare Entfestigung verwendet. Der Nachrißbereich des Modells der unstetigen Verschiebungsfelder folgt somit den Gleichungen

$$q(\zeta) = f_{tu} - H_\zeta \zeta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_f = \int_{\zeta=0}^{f_{tu}/H_\zeta} q(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \frac{f_{tu}^2}{H_\zeta} \quad \Rightarrow \quad H_\zeta = \frac{1}{2} \frac{f_{tu}^2}{\mathcal{G}_f}. \quad (6.13)$$

Unter der Verwendung der charakteristischen Länge nach Gl. (6.6) resultiert die Entfestigungsevolution des klassischen Plastizitätsmodells zu

$$q(\alpha) = f_{tu} - H \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_f = l_c \int_{\alpha=0}^{f_{tu}/H} q(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \frac{f_{tu}^2}{H} l_c \quad \Rightarrow \quad H = H_\zeta l_c. \quad (6.14)$$

Anders als in Gl. (6.13) ist der Entfestigungsmodul  $H$  somit abhängig von der Orientierung des Risses. Für das zweidimensionale Dreiecks-Element gilt

$$H(\theta) = H_\zeta l_c(\theta). \quad (6.15)$$

### 6.3.1 HOOKE-Materialmodell

Gemäß des vorangegangenen Abschnitts ist das elastische Materialmodell anhand eines Potentials  $\Psi_e$  zu spezifizieren. Das erste in diesem Kapitel verwendete Modell ist das HOOKEsche

Elastizitätsmodell. Die im folgenden betrachtete quadratische Energiedichtefunktion  $\Psi_e$  ist somit von der Form

$$\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (6.16)$$

In Gl. (6.16) stellt  $E$  den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionskonstante dar. Mit Gl. (6.10) und dem symmetrischen 4-stufigen Einheitstensor  $\mathbb{I}^{\text{sym}}$  folgt der konstante 4-stufige elastische Werkstofftensor zu

$$\mathbb{C} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^e \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Psi_e = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{I}^{\text{sym}} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (6.17)$$

Da die weiteren Herleitungen mittels eines zweidimensionalen Beispiels graphisch illustriert werden, muß auch das Potential  $\Psi_e$  für den ebenen Spannungszustand angegeben werden. Auf der Grundlage von Gl. (6.16) wird  $\Psi_e$  für den ebenen Spannungszustand zu

$$\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \frac{E \nu}{1-\nu^2} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (6.18)$$

spezifiziert. Die zweimalige partielle Ableitung von Gl. (6.18) nach dem elastischen Verzerungstensor liefert den korrespondierenden elastischen Werkstofftensor

$$\mathbb{C} = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{I}^{\text{sym}} + \frac{E \nu}{1-\nu^2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (6.19)$$

Die elasto-plastischen Materialmodelle sind mit den Gleichungen aus den Abschnitten 6.3 und 6.3.1 hinreichend beschrieben. Der erste Vergleich des klassischen Plastizitätsmodells mit dem Modell der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder erfolgt unter der Annahme des *Fixed-Crack*-Konzeptes. Dieses Konzept basiert auf der Forderung, daß die Topologie der Rißfläche zeitlich konstant ist ( $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ ).

### 6.3.1.1 *Fixed-Crack-Konzept* ( $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ )

In diesem Unterabschnitt erfolgt der Vergleich der beiden zuvor beschriebenen Modelle auf der Basis des *Fixed-Crack-Konzeptes*. Der Vektor  $\mathbf{n}$ , der die räumliche Orientierung der Rißoberfläche beschreibt, wird im folgenden daher als konstant postuliert ( $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ ). Die Herleitungen des vorliegenden Abschnitts sind der Arbeit [MOSLER & MESHKE 2002B] entnommen worden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zunächst im zweidimensionalen Raum der Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} := \sigma_A \mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}^T(\theta) = [\cos \theta, \sin \theta] \quad (6.20)$$

betrachtet. Da das RANKINE-Kriterium nur abhängig von der maximalen Hauptspannung ist, kann die kleinere Hauptspannung  $\sigma_2 \leq \sigma_A$  beliebig gewählt werden. Um die Herleitungen in

der Form von Diagrammen graphisch zu illustrieren, wird die Geometrie des finiten Elementes nach Abb. 6.1a gewählt. Der Gradient der Rampenfunktion  $\varphi$  ergibt sich somit zu

$$\nabla\varphi(\theta) = \begin{cases} \forall \theta \in (0^\circ, 60^\circ) & \nabla\varphi^T = [1.0, 0.57735] \\ \forall \theta \in (60^\circ, 120^\circ) & \nabla\varphi^T = [0, 1.1547] \\ \forall \theta \in (120^\circ, 180^\circ) & \nabla\varphi^T = [1.0, -0.57735]. \end{cases} \quad (6.21)$$

Zur numerischen Umsetzung der beiden Verfahren wird der Return-Mapping-Algorithmus angewendet (s. Abschnitt 2.4 und 5.9). Der Spannungstensor (6.20) stellt somit die Trial-Spannung

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} = \sigma_A^{\text{tr}} \mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta) \quad (6.22)$$

des Prädiktor-Schrittes dar. Im folgenden wird  $\sigma_A^{\text{tr}} > f_{\text{tu}}$  gewählt, so daß

$$\phi^{\text{tr}} = \sigma_A^{\text{tr}} - f_{\text{tu}} > 0. \quad (6.23)$$

Der Korrektor-Schritt führt mit den Gl. (6.11) und (6.19) zum Spannungstensor für das Modell der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - \mathbb{C} : \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{n}(\theta) \otimes \nabla\varphi(\theta))^{\text{sym}} \Delta\zeta \quad (6.24)$$

sowie mit Gl. (6.12) zum Spannungstensor des klassischen Plastizitätsmodells

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} = (\mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta)) \Delta\lambda. \quad (6.25)$$

Unter der Annahme der linearen Entfestigung (s. Gl. (6.13) und (6.14)) folgt aus der Fließbedingung (6.9) sowohl das Inkrement der Amplitude des Verschiebungssprunges

$$\Delta\zeta(\theta) = \frac{\phi^{\text{tr}}}{(\mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta)) : \mathbb{C} : (\mathbf{n}(\theta) \otimes \nabla\varphi(\theta)) - H_\zeta} \quad (6.26)$$

als auch der plastische Multiplikator

$$\Delta\lambda(\theta) = \frac{\phi^{\text{tr}}}{(\mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta)) : \mathbb{C} : (\mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta)) - H_\zeta l_c(\theta)}. \quad (6.27)$$

Mit den Gl. (6.26) und (6.11) resultieren die erweiterten Verzerrungen und der Spannungskorrektor zu

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta) = (\mathbf{n}(\theta) \otimes \nabla\varphi(\theta))^{\text{sym}} \Delta\zeta(\theta) \quad \text{und} \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}(\theta) = -\mathbb{C} : \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta). \quad (6.28)$$

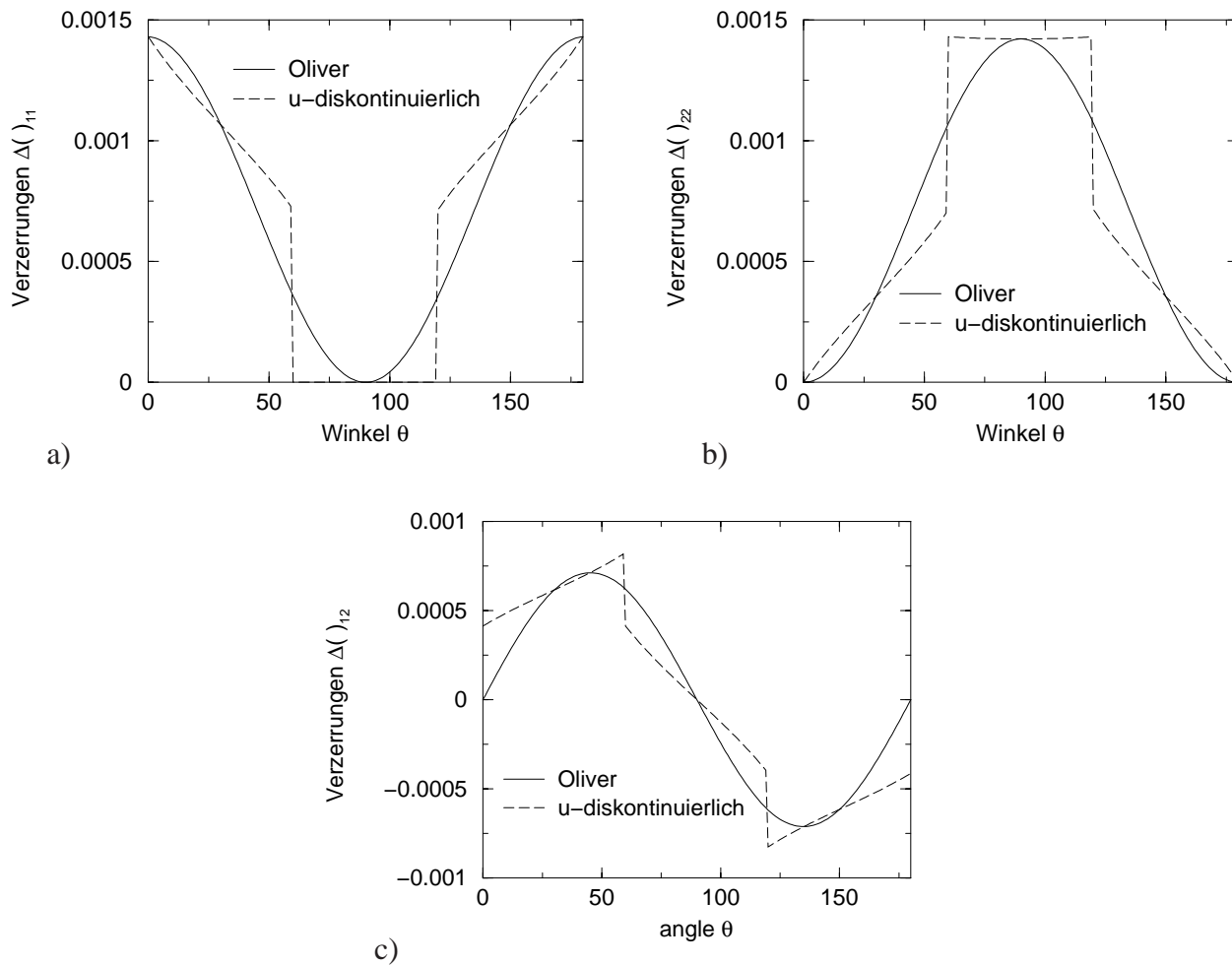
Analog wird mit den Gl. (6.27) und (6.12) das Inkrement der plastischen Verzerrungen und der Spannungskorrektor des klassischen Kontinuumsmodells zu

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}(\theta) = (\mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta)) \Delta\lambda(\theta) \quad \text{und} \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}(\theta) = -\mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}(\theta) \quad (6.29)$$

berechnet.

$E$ [KN/cm <sup>2</sup> ]	$\nu$	$G_f$ [KNcm/cm <sup>2</sup> ]	$f_{tu}$ [KN/cm <sup>2</sup> ]
1000	0.3	0.01	1.0

Tab. 6.1: Materialparameter und Trial-Spannung.

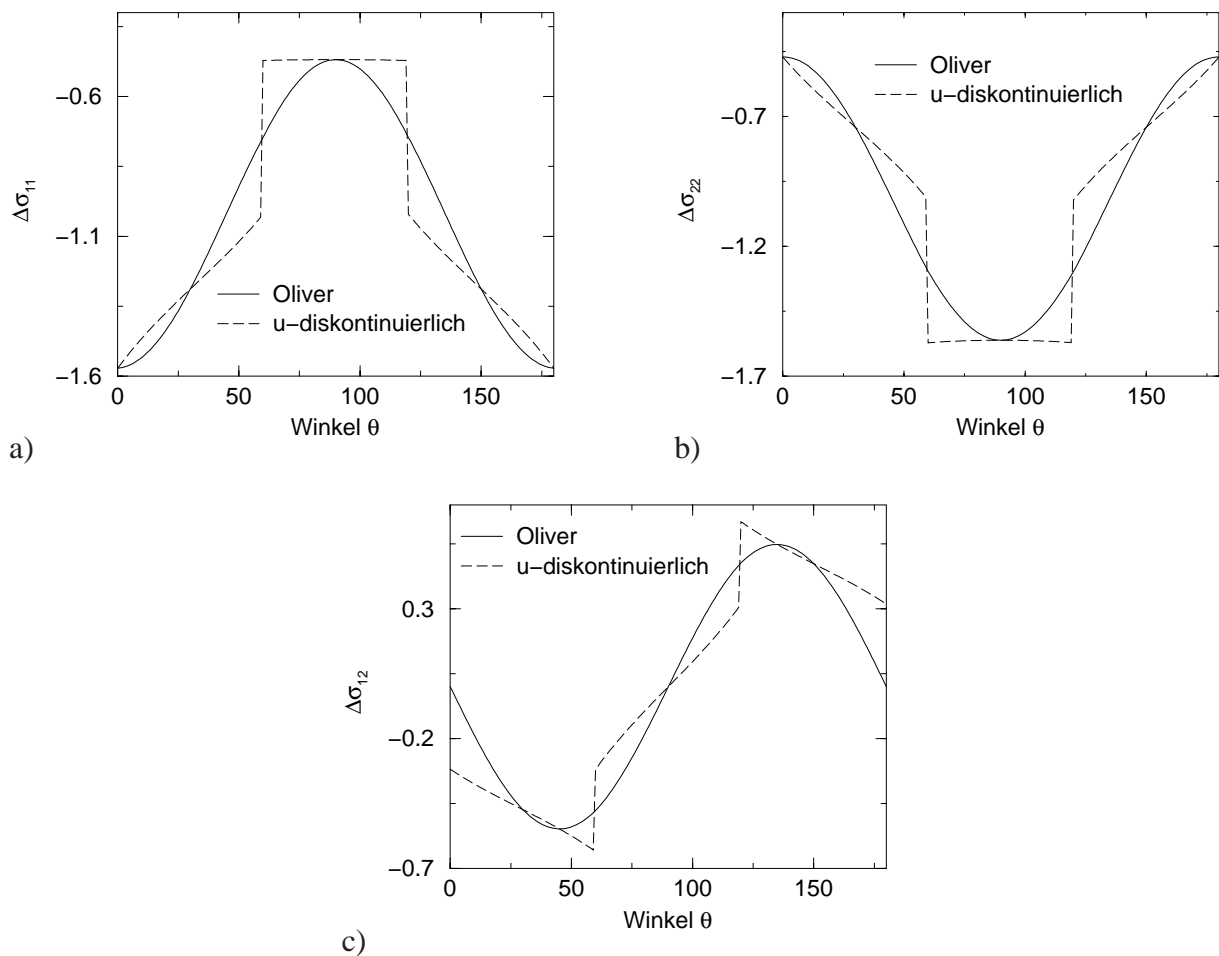


**Abb. 6.2:** Vergleich des Kontinuumsmodells auf der Basis der charakteristischen Länge nach OLIVER vs. Konzept der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder: Vergleich des Inkrementes der plastischen Verzerrungen  $\Delta \epsilon^p$  vs. Inkrement der erweiterten Verzerrungen  $\Delta \hat{\epsilon}$ , ( $\theta$  [°]): a)  $\Delta \hat{\epsilon}_{11}$  vs.  $\Delta \epsilon_{11}^p$  b)  $\Delta \hat{\epsilon}_{22}$  vs.  $\Delta \epsilon_{22}^p$  c)  $\Delta \hat{\epsilon}_{12}$  vs.  $\Delta \epsilon_{12}^p$ .

Um die Gl. (6.26)-(6.29) graphisch darstellen zu können, wird exemplarisch das finite Element aus Abb. 6.1a mit den Materialparametern aus Tabelle 6.1 betrachtet. Mit der Trial-Spannung  $\sigma_A^{tr} = 1.5$  KN/cm<sup>2</sup> folgt die Trial-Fließfunktion zu  $\phi^{tr} = 0.5$  KN/cm<sup>2</sup>.

In Abb. 6.2 sind die Verzerrungstensoren  $\hat{\epsilon}$  und  $\epsilon^p$  in der Form eines Diagramms verglichen worden. Hierbei ist die Trial-Spannung (6.22) bezüglich des Winkels  $\theta$  variiert worden. Die Inkremente  $\Delta \hat{\epsilon}$  und  $\Delta \epsilon^p$  sind somit abhängig von  $\theta$ . Im Gegensatz zum klassischen Kontinuumsmodell weisen die zum Modell mit diskontinuierlichem Verschiebungsansatz korrespondie-

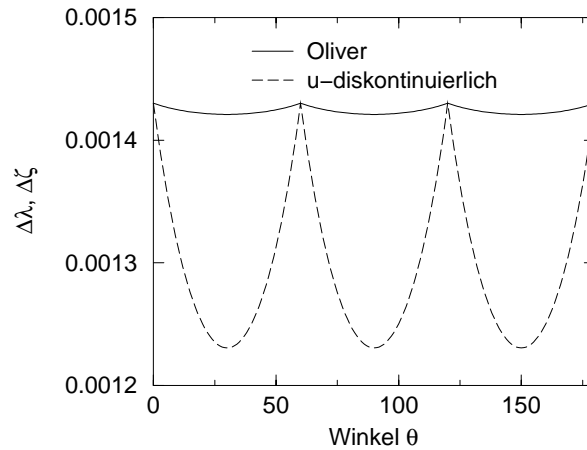




**Abb. 6.3:** Vergleich des Kontinuumsmodells auf der Basis der charakteristischen Länge nach OLIVER vs. Konzept der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder: Vergleich des Inkrementes der Spannungen  $\Delta\sigma$  [KN/cm<sup>2</sup>], ( $\theta$  [°]): a)  $\Delta\sigma_{11}$  b)  $\Delta\sigma_{22}$  c)  $\Delta\sigma_{12}$ .

renden Graphen Sprungstellen auf. Diese Sprungstellen treten bei  $\theta = 60^\circ$  und  $\theta = 120^\circ$  auf. Ein Vergleich mit Abb. 6.1a belegt, daß für  $\theta = 60^\circ$  und  $\theta = 120^\circ$  die RiBoberfläche einen Elementknoten schneidet. Somit ändert sich an diesen Punkten gemäß Gl. (6.21)  $\nabla\varphi$  sprunghaft. Für  $\theta = 30^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$  und  $\theta = 150^\circ$  sind die Richtungen der Vektoren  $\nabla\varphi$  und  $\mathbf{n}$  identisch. Im Rahmen dieses Sonderfalls sind die Ergebnisse der beiden Modelle äquivalent (vgl. Anmerkung I, Seite 98).

In Abb. 6.3 sind die Korrektorspannungen (6.28)<sub>2</sub> und (6.29)<sub>2</sub> graphisch zusammengefaßt worden. Die Parallelen zu den Abb. 6.2 sind offensichtlich. Aufgrund des isotropen Materialgesetzes sind  $\Delta\sigma$  und  $\Delta\hat{\varepsilon}$  bzw.  $\Delta\sigma$  und  $\Delta\varepsilon^p$  koaxial zueinander. Folglich unterscheiden sich die Diagramme nur quantitativ bzw. im Vorzeichen. Somit weist auch der funktionale Verlauf der Korrektorspannungen für das Modell mit diskontinuierlichen Verschiebungsfeldern in den Punkten  $\theta = 60^\circ$  und  $\theta = 120^\circ$  eine Sprungstelle auf.



**Abb. 6.4:** Vergleich des Kontinuumsmodells auf der Basis der charakteristischen Länge nach OLIVER vs. Konzept der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder: Inkrement des plastischen Multiplikators  $\Delta\lambda$  [-] vs. Inkrement der Amplitude des Verschiebungssprunges  $\Delta\zeta$  [cm], ( $\theta$  [ $^\circ$ ]).

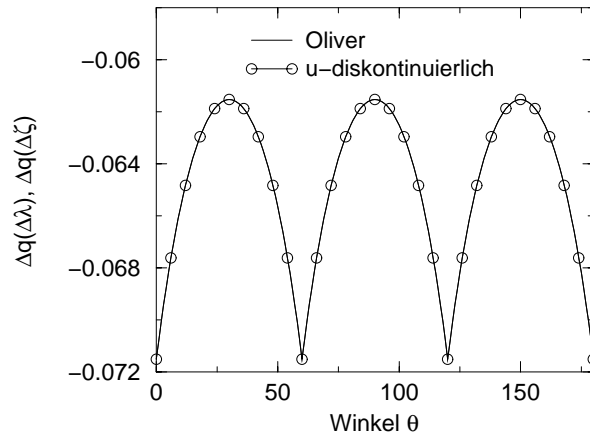
Zur einfachen Analyse der beiden Modelle sind die Diagramme (6.2) und (6.3) jedoch weniger gut geeignet. Da sowohl die Verzerrungen als auch die Spannungen mittels eines zwei-stufigen Tensors beschrieben werden, ist die Interpretation der Ergebnisse nicht leicht durchzuführen. Dieser Nachteil wird beseitigt, indem die Amplitude des Verschiebungssprunges  $\Delta\zeta$  mit dem plastischen Multiplikator  $\Delta\lambda$  verglichen wird. Das zum Vergleich korrespondierende Diagramm ist Abb. 6.4 zu entnehmen. Die qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse ist zu erkennen. Die Amplituden der Größen  $\Delta\zeta$  und  $\Delta\lambda$  unterscheiden sich jedoch deutlich. Da  $\Delta\lambda$  als eine Änderung einer Vergleichsverzerrung angesehen werden kann,  $\Delta\zeta$  aber den Zuwachs einer Verschiebung darstellt, ist der Vergleich aus physikalischer Sichtweise weniger sinnvoll.

Eine skalare Größe, die in beiden Modellen die gleiche physikalische Interpretation aufweist, ist die spannungsähnliche Variable  $q$ . Demnach wird im folgenden Absatz die Änderung dieser Größe

$$\Delta q(\Delta\zeta) = -H_\zeta \Delta\zeta(\theta) \quad \text{und} \quad \Delta q(\Delta\lambda) = -H_\zeta l_c(\theta) \Delta\lambda(\theta) \quad (6.30)$$

für beide Modelle miteinander verglichen. Die graphische Darstellung der Gl.(6.30) ist in Abb. 6.5 zusammengefaßt. Aus Abb. 6.5 ist zu erkennen, daß die Gl.(6.30) äquivalent sind. Die Variable  $q$ , die die aktuelle Zugfestigkeit des betrachteten Werkstoff darstellt, ist somit für beide Modelle identisch. Da dieses Ergebnis jedoch nur für das finite Element aus Abb. 6.1 in Verbindung mit den Materialparametern aus Tab. 6.1 gezeigt worden ist, muß die Gültigkeit dieser Aussage für beliebige finite Elemente und beliebige Materialparameter überprüft werden. Demnach ist die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \Delta q(\Delta\zeta) &\stackrel{!}{=} \Delta q(\Delta\lambda) \\ \iff -H_\zeta \Delta\zeta &\stackrel{!}{=} -H_\zeta l_c \Delta\lambda \end{aligned} \quad (6.31)$$



**Abb. 6.5:** Vergleich des Kontinuumsmodells auf der Basis der charakteristischen Länge nach OLIVER vs. Konzept der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder:  $\Delta q(\zeta) = H_\zeta \Delta \zeta$  vs.  $\Delta q(\Delta \lambda) = l_c H_\zeta \Delta \lambda$  [KN/cm<sup>2</sup>], ( $\theta$  [°]).

zu zeigen. Anders als bei den Gleichungen zuvor wird im folgenden Absatz nicht die Einschränkung auf zweidimensionale finite Elemente vorgenommen. Die weiteren Herleitungen sind folglich auch für Tetraeder-Elemente gültig. Unter Berücksichtigung der Gl. (6.26) und (6.27) für den dreidimensionalen Spannungszustand vereinfacht sich die zu zeigende Äquivalenz (6.31) zu

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi) \stackrel{!}{=} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) l_c^{-1}. \quad (6.32)$$

Setzt man den Werkstofftensor (6.17) in Gl. (6.32) ein, wird die linke Seite von Gl. (6.32) in die Form

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi) &= \left[ \frac{E}{1+\nu} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{1} \right] : (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi \\ &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = \mathbb{C}_{1111} l_c^{-1} \\ &= (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) l_c^{-1} \end{aligned} \quad (6.33)$$

überführt. Neben tensoriellen Umformungen ist im letzten Schritt der Herleitung von Gl. (6.33) die Isotropiebedingung

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \text{const} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \|\mathbf{n}\|_2 = 1 \quad (6.34)$$

implizit genutzt worden. Die Äquivalenz (6.31) ist mit Gl. (6.33) bewiesen. Somit ist analog die Gleichung

$$\Delta \zeta = l_c \Delta \lambda \quad (6.35)$$

erfüllt. Die charakteristische Länge „verschmiert“ demnach die Diskontinuität des Verschiebungsfeldes  $\zeta$  in der Form einer Vergleichsverzerrung  $\Delta \lambda$  kontinuierlich auf das gesamte finite Element.

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, daß das Modell der eingebetteten diskontinuierlichen Verschiebungsfelder zum gleichen Entfestigungsverhalten wie das klassische Plastizitätsmodell  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder führt ( $q(\alpha) = q(\zeta)$ ).

### 6.3.1.2 Rotating-Crack-Konzept

Im Anschluß an die Analyse der zwei Materialmodelle im Rahmen des Fixed-Crack-Konzeptes werden in diesem Abschnitt die Erweiterungen bezüglich des *Rotating-Crack*-Modells diskutiert. Im folgenden wird demnach die Restriktion  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  aufgegeben.

Für den Vergleich der verschiedenen Reißmodelle wird das finite Element aus Abb. 6.1 mit den Materialparametern aus Tabelle 6.1 betrachtet. Im Gegensatz zum Abschnitt 6.3.1.1 erfolgt die Belastung weggesteuert in der Form

$$\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} = u_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (6.36)$$

Der einachsiale Verzerrungszustand (6.36) wird zunächst für das klassische Plastizitätsmodell analysiert. Für den betrachteten Lastfall vereinfacht sich die äquivalente Spannung  $\sigma_{\text{eq}} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma}$  zu

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} = \kappa \left( u_1 - \sum_{i=1}^n \Delta \lambda_i \right) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^T = [1; 0], \quad (6.37)$$

wobei sich der Index  $(\bullet)_i$  auf die einzelnen Belastungsschritte bezieht. Wird Gl. (6.37)<sub>1</sub> in die Fließfunktion (6.9) eingesetzt, resultiert die verzerrungsähnliche Variable  $\alpha$  zu

$$\alpha = \frac{\kappa u_1 - f_{\text{tu}}}{\kappa - H_\zeta} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \Delta \lambda_i. \quad (6.38)$$

Neben der linearen Entfestigung (6.14) ist in Gl. (6.38) implizit berücksichtigt worden, daß aus  $\mathbf{n}^T = [1; 0]$  für das finite Element aus Abb. 6.1  $l_c = 1.0$  und somit  $H = H_\zeta$  folgt. Exemplarisch ist Gl. (6.38) für zwei Verschiebungen  $u_1$  ausgewertet worden. Die Ergebnisse lauten:

$$\begin{aligned} u_1 = 0.002 &\Rightarrow \alpha = 0.00114196 \Rightarrow q(\alpha) = f_{\text{tu}} - H \alpha = 0.9429, \\ u_1 = 0.004 &\Rightarrow \alpha = 0.00323730 \Rightarrow q(\alpha) = f_{\text{tu}} - H \alpha = 0.8381. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Da nach Gl. (6.35) für das finite Element aus Abb. 6.1 mit dem Belastungszustand (6.36)  $\Delta \zeta = \Delta \lambda$  gilt ( $l_c = 1.0$ ), kann  $\alpha$  auch als Reißweite interpretiert werden. Im Rahmen des klassischen Plastizitätsmodell ist aufgrund von  $\mathbf{n}^T = [1; 0]$  und  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  kein Unterschied zwischen dem Fixed-Crack- und dem Rotating-Crack-Konzept vorhanden.

Nach der Analyse des klassischen Kontinuumsmodells wird in diesem Absatz das Finite-Elemente-Modell mit  $C^0$ -unstetigem Verschiebungsfeld für den Lastfall (6.36) genauer betrachtet. Für dieses Modell ist der symmetrische Verschiebungsfeldgradient (6.36) aus numerischen Gründen besonders ungünstig. Da für den betrachteten Belastungszustand  $\mathbf{n}^{\text{tr}} = [1; 0]$  bzw.

$\theta^{\text{tr}} = 0^\circ$  gilt, weist der hierzu korrespondierende Gradient der Rampenfunktion  $\varphi$  gemäß Gl. (6.21) eine Sprungstelle auf. Folglich ist damit zu rechnen, daß im Rahmen der numerischen Analyse zwei verschiedene Gradienten  $\nabla\varphi$  berechnet werden.

In Abschnitt 6.3.1.1 ist für das Fixed-Crack-Konzept gezeigt worden, daß das RANKINE-Kriterium in Verbindung mit dem isotropen HOOKEschen Materialmodell für das klassische Plastizitätsmodell und für das Finite-Elemente-Modell mit eingebetteten Diskontinuitäten des Verschiebungsfeldes zur gleichen Entfestigung führt ( $q(\alpha) = q(\zeta)$ ). Da sich das Fixed-Crack- und das Rotating-Crack-Konzept im ersten inelastischen Belastungsschritt nicht unterscheiden, resultiert folglich aus dem vorgeschriebenen Verzerrungsfeld (6.36) (vgl. Gl. (6.39)) mit

$$u_1 = 0.002 \Rightarrow \zeta = 0.00114196 \Rightarrow q(\zeta) = f_{\text{tu}} - H \zeta = 0.9429. \quad (6.40)$$

Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob  $\nabla\varphi^T = [1.0; 0.57735]$  für  $\theta^{\text{tr}} = 0^\circ \in [0^\circ; 60^\circ]$ , oder  $\nabla\varphi^T = [1.0; -0.57735]$  für  $\theta^{\text{tr}} = 0^\circ \in [-60^\circ; 0^\circ]$  angenommen wird. Der Spannungstensor folgt mit Gl. (6.40) zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : [\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - (\mathbf{n} \otimes \nabla\varphi) \zeta] = \begin{bmatrix} 0.9429 & -0.2536 \\ -0.2536 & 0.2829 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Anders als die skalarwertige Amplitude des Verschiebungsfeldes  $\zeta$  ist der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  nach Gl. (6.41) abhängig vom verwendeten Gradienten  $\nabla\varphi$ . Gl. (6.41) basiert auf  $\nabla\varphi^T = [1; 0.57735]$ . Für  $\nabla\varphi^T = [1; -0.57735]$  ändert sich das Vorzeichen der Schubkomponente. Dieser Unterschied hat einen direkten Einfluß auf das nächste Lastinkrement. Wird  $u_1$  von 0.002 um  $\Delta u_1 = 0.002$  auf 0.004 erhöht, ergibt sich der Vektor  $\mathbf{n}$  zu

$$\mathbf{n}^T = [0.9936; -0.1131] \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} 0.9429 & -0.2536 \\ -0.2536 & 0.2829 \end{bmatrix} + \mathbb{C} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) 0.002 \quad (6.42)$$

bzw.

$$\mathbf{n}^T = [0.9936; 0.1131] \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} 0.9429 & 0.2536 \\ 0.2536 & 0.2829 \end{bmatrix} + \mathbb{C} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) 0.002. \quad (6.43)$$

Da für die Gl. (6.42) und (6.43) somit  $\mathbf{n}^T \neq [1; 0]$  gilt, kann die aus der Fließfunktion und den Trial-Spannungen berechnete Änderung der Amplitude des Sprunges des Verschiebungsfeldes nicht identisch sein mit dem plastischen Multiplikator des klassischen Kontinuumsmodells. Werden die Trial-Spannungen (6.42) und (6.43) zusammen mit Gl. (6.24) in die Fließfunktion (6.9) eingesetzt, folgt die Änderung von  $\zeta$  zu

$$u_1 = 0.004 \Rightarrow \Delta\zeta = 0.001948 \Rightarrow \zeta = 0.00114196 + 0.001948 = 0.003090. \quad (6.44)$$

Ein Vergleich der Gl. (6.44) mit (6.39) belegt unter Berücksichtigung von  $l_c = 1.0$  die unterschiedlichen Entfestigungsevolutionen der zwei Modelle. Somit ist für Rotating-Crack-Konzepte die in Abschnitt 6.3.1.1 bewiesene Äquivalenz nicht erfüllt.

**Anmerkung I:** Der betrachtete Belastungszustand ist einer der ungünstigsten konstruierbaren Lastfälle für das finite Element mit  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern und der Geometrie aus Abb. 6.1. Der künstlich erzeugte Lastfall führt dazu, daß der Gradient  $\nabla\varphi$  in jedem Inkrement seine Richtung ändert. Im Rahmen der numerischen Umsetzung wird dieses Problem beseitigt, indem für solche Spannungszustände das Fixed-Crack-Konzept angewendet wird (s. Anmerkung, Seite 106). Ein numerischer Vergleich des Fixed-Crack- mit dem Rotating-Crack-Konzept wird in Abschnitt 7.3.2 gegeben.

**Anmerkung II:** Wird ein klassisches Plastizitätsmodell mittels der charakteristischen Länge  $l_c$  nach [OLIVER 1989] modifiziert, ist zu berücksichtigen, daß die Linearisierung von  $l_c$  bezüglich  $\sigma$  zu berechnen ist. Da  $l_c$  aufgrund der Orientierung der Rißfläche abhängig vom betrachteten Spannungszustand ist, gilt im allgemeinen  $\partial l_c / \partial \sigma \neq 0$ . Nach Kenntnis des Autors wird in allen Veröffentlichungen jedoch implizit  $\partial l_c / \partial \sigma = 0$  genutzt.  $\square$

### 6.3.2 NEO-HOOKE-Materialmodell

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Äquivalenzaussage (6.31) für beliebige isotrope hyperelastische Materialmodelle nicht erfüllt ist. Dazu wird exemplarisch das NEO-HOOKE-Materialmodell nach [CIARLET 1988] betrachtet. Das Modell ist in Anhang E zusammenfassend dargestellt.

Den Ausgangspunkt der weiteren Herleitungen bildet das elastische Potential

$$\Psi_e(\mathbf{C}) = \Psi_e(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) \quad (6.45)$$

in Abhängigkeit der drei Hauptinvarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors  $\mathbf{C}$ . Um das Potential (6.45) im Rahmen der geometrisch linearen Theorie anwenden zu können, wird zunächst der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor in Abhängigkeit vom GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = 2 \mathbf{E} + \mathbf{1}. \quad (6.46)$$

umgeschrieben. Da für die lineare Theorie  $\varepsilon \approx \mathbf{E}$  eine ausreichende Näherung darstellt, wird der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor zu

$$\mathbf{C} \approx 2 \varepsilon + \mathbf{1} \quad (6.47)$$

approximiert. Unter der Annahme, das Materialverhalten ist elasto-plastisch, folgt das Potential  $\Psi_e$  zu

$$\Psi_e(\mathbf{C}^e) \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}^e \approx 2 \varepsilon^e + \mathbf{1}. \quad (6.48)$$

Mit Gl. (6.48) und dem Zweiten Hauptsatz der Thermomechanik resultiert der Spannungstensor somit zu (vgl. Abschnitt 2.1)

$$\sigma = \partial_{\varepsilon^e} \Psi_e = 2 \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e. \quad (6.49)$$

Die weiteren Betrachtungen erfolgen für das Fixed-Crack-Konzept. Wird der erste inelastische Lastschritt betrachtet, bestimmen sich die Spannungen im Rahmen des Modells der unstetigen Verschiebungsfelder mit den Gl. (6.49) und (6.48) zu

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}^e = 2 (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \Delta \zeta. \quad (6.50)$$

Analog folgt der Spannungstensor des klassischen Plastizitätsmodells aus den Gleichungen

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}^e = 2 (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \Delta \lambda. \quad (6.51)$$

Unter der Annahme der linearen Entfestigung (6.13) folgt das Inkrement der Amplitude des Verschiebungssprunges  $\Delta \zeta$  mit der Fließfunktion (6.9) aus dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} = f_{\text{tu}} - H_\zeta \Delta \zeta \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}, \Delta \zeta, \mathbf{n}, \nabla \varphi). \quad (6.52)$$

Gemäß den Gl. (6.52) geht die Richtung des Gradienten der Rampenfunktion  $\varphi$  in die nichtlineare Tensorfunktion des Spannungstensors ein. Die zu Gl. (6.52) äquivalente Form für  $\mathcal{C}^0$ -stetige Verschiebungsfelder resultiert zu

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} = f_{\text{tu}} - \underbrace{\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}}_{l_c} H_\zeta \Delta \lambda \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}, \Delta \lambda, \mathbf{n}). \quad (6.53)$$

Im Gegensatz zu Gl. (6.52) wird  $\nabla \varphi$  in Gl. (6.53) lediglich linear mittels der charakteristischen Länge  $l_c$  berücksichtigt. Um die in Abschnitt 6.3.1.1 bewiesene Äquivalenz der Entfestigungsevolutionen für das in diesem Abschnitt vorgestellte Modell zu widerlegen, werden die Vektoren

$$\mathbf{n}^T = [1; 0; 0], \quad [\nabla \varphi^{(1)}]^T = [1; 0; 0] \quad \text{und} \quad [\nabla \varphi^{(2)}]^T = [1; 0.2; 0.2] \quad (6.54)$$

betrachtet. Da somit

$$\nabla \varphi^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi^{(2)} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (6.55)$$

gilt, sind die mit dem klassischen Plastizitätsmodell berechneten Lösungen für die unterschiedlichen Gradienten  $\nabla \varphi^{(1)}$  und  $\nabla \varphi^{(2)}$  identisch (es gilt  $\Delta \lambda^{(1)} = \Delta \lambda^{(2)}$ ). Wird das Modell der  $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder betrachtet, ergibt sich aufgrund der Äquivalenz  $\mathbf{n} = \nabla \varphi^{(1)}$  die Amplitude des Verschiebungssprunges zu  $\Delta \zeta^{(1)} = \Delta \lambda^{(1)}$ . Da durch direktes Einsetzen in die Gl. (6.52) gezeigt werden kann, daß

$$2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e(\mathbf{C}^e) \neq f_{\text{tu}} - H_\zeta \Delta \zeta^{(1)} \quad (6.56)$$

mit  $\mathbf{C}^e = 2 [\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi^{(2)})^{\text{sym}} \Delta \zeta^{(1)}] + \mathbf{1}$ ,

sind die Ergebnisse abhängig vom Gradienten  $\nabla \varphi$ . Unter der Annahme des NEO-HOOKE-Materialgesetzes ist somit die Evolution der Entfestigungsfunktion  $q$  für die beiden betrachteten Modelle nicht identisch. Demnach ist die Äquivalenz für allgemeine isotrope elastische Materialgesetze ebenfalls nicht erfüllt. Das HOOKEsche Materialmodell aus Abschnitt 6.3.1.1 ist somit als Sonderfall anzusehen.

Für das Rotating-Crack-Konzept wird eine analoge Betrachtung nicht durchgeführt. Da das Fixed-Crack-Konzept einen Sonderfall des Rotating-Crack-Konzept darstellt, kann die zu beweisende Gleichung für den allgemeineren Fall nicht erfüllt sein.



## 6.4 Anisotrope hyperelastische Materialmodelle

In diesem Abschnitt wird das Finite-Elemente-Modell mit  $C^0$ -unstetigem Verschiebungsfeld mit einem klassischen Plastizitätsmodell verglichen, wobei das elastische Materialverhalten mittels eines anisotropen hyperelastischen Materialmodells approximiert wird.

In Abschnitt 6.3.2 ist gezeigt worden, daß das NEO-HOOKE-Materialmodell im Rahmen des Fixed-Crack- und somit auch im Rahmen des Rotating-Crack-Konzeptes für die beiden betrachteten Modelle zu unterschiedlichen Evolutionen der spannungsähnlichen Variablen  $q$  führt ( $q(\alpha) \neq q(\zeta)$ ). Daher muß auch die allgemeinere Menge der anisotropen hyperelastischen Materialmodelle für das Finite-Elemente-Modell mit  $C^0$ -unstetigem Verschiebungsfeld im Vergleich mit dem Plastizitätsmodell mit stetiger Verschiebungsabbildung zu einer unterschiedlichen Entfestigungsevolution führen.

Zur Analyse der beiden Modelle für anisotrope hyperelastische Materialgesetze werden in diesem Absatz die Fließfunktionen (6.52) und (6.53) genauer betrachtet. Die Amplitude der Diskontinuität des Verschiebungsfelds berechnet sich aus der nichtlinearen Gl. (6.52). Diese Gleichung ergibt sich zu

$$2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e(\mathbf{C}^e) = f_{tu} - H_\zeta \Delta \zeta \quad (6.57)$$

mit  $\mathbf{C}^e = 2 [\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - (\mathbf{n} \otimes \nabla \varphi)^{\text{sym}} \Delta \zeta] + \mathbf{1}$ .

Analog folgt der plastische Multiplikator des Plastizitätsmodells mit stetiger Verschiebungsabbildung nach Gl. (6.53) aus der Gleichung

$$2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi_e(\mathbf{C}^e) = f_{tu} - \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi H_\zeta \Delta \lambda \quad (6.58)$$

mit  $\mathbf{C}^e = 2 [\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \Delta \lambda] + \mathbf{1}$ .

Gemäß Gl. (6.58) wird mittels der charakteristischen Länge  $l_c = (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)^{-1}$  der Entfestigungsmodul  $H_\zeta$  bezüglich der Geometrie des betrachteten finiten Elementes modifiziert. OLIVER verändert somit lediglich die isotrope Entfestigungsevolution. Das Verfahren ist demnach zur Modellierung von anisotropem Materialverhalten weniger gut geeignet. Im Gegensatz dazu wird der Gradient  $\nabla \varphi$  in Gl. (6.57) im elastischen Potential berücksichtigt. Daher beeinflusst  $\nabla \varphi$  die anisotrope Materialantwort für das Finite-Elemente-Modell aus Kapitel 5. Somit werden im Rahmen des Modells der  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfelder die anisotropen Effekte erfaßt.

## 6.5 Zusammenfassung

In dem vorliegenden Kapitel erfolgte ein Vergleich des Finite-Elemente-Modells aus Kapitel 5 mit einem Plastizitätsmodell  $C^0$ -stetiger Verschiebungsfelder. Es wurde gezeigt, daß neben der analogen Form der Algorithmen der beiden Modelle, das RANKINE-Kriterium, zusammen mit

dem HOOKEschen Elastizitätsmodell, im Rahmen des Fixed-Crack-Konzeptes für die zwei analysierten Implementierungen zu der gleichen Evolution der spannungsähnlichen Entfestigungsvariable führt. Diese Äquivalenz war auf das Fixed-Crack-Konzept beschränkt und wurde nicht für die Rotating-Crack-Formulierung verifiziert. Desweiteren wies das NEO-HOOKE Materialmodell diese Identität nicht auf. Demnach stellt das HOOKEsche Elastizitätsmodell lediglich einen Sonderfall dar. Aus der Erweiterung des elastischen Potentials auf anisotrope Tensorfunktionen wurde belegt, daß das Finite-Elemente-Modell aus Kapitel 5, im Gegensatz zur Implementierung nach [OLIVER 1989], zur Approximation von anisotropem Werkstoffverhalten geeignet ist.

Wie in Abschnitt 7.3.1 anhand einer numerischen Analyse aufgezeigt wird, folgt aus der äquivalenten Evolution der spannungsähnlichen Entfestigungsvariable für das Fixed-Crack-Konzept mit HOOKEschem Elastizitätsmodell und RANKINE-Kriterium, daß die Abhängigkeit der numerischen Lösungen vom Netzbias, mittels des neu vorgestellten finiten Elementes, nicht eliminiert wird.



# Kapitel 7

## Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit der in Kapitel 5 hergeleiteten finiten Elemente anhand unterschiedlicher Beispiele belegt.

Zu diesem Zweck wird zunächst die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen numerischen Implementierung am einfachen Standard-Problem des Zugstabes demonstriert. Nach einer Studie zur Abhängigkeit der approximierten Lösungen von der Orientierung der Diskretisierung folgt ein numerischer Vergleich des *Fixed-Crack*- und des *Rotating-Crack*-Konzeptes. Anschließend werden ausgewählte zwei- und dreidimensionale Beispiele analysiert. Neben der Plastizitätstheorie im Rahmen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder wird auch die neu entwickelte gekoppelte elasto-plastische Schädigungstheorie anhand praxisnaher Anker-Auszugs-Versuche auf ihre Effizienz und Leistungsfähigkeit untersucht.

Alle verwendeten finiten Elemente sind im Programmsystem *MSC. MARC* mittels der Benutzerschnittstelle *uselem* (s. [MARC 2000], Band D) implementiert worden. Im Unterprogramm *uselem* sind die tangential Elementsteifigkeitsmatrix und der Vektor der inneren Kräfte vom Anwender zu definieren. Da bei der numerischen Umsetzung keine Informationen des angrenzenden Nachbarelementes benötigt werden (lokale Theorie), muß nicht auf Systemebene in das Finite-Elemente-Programm eingegriffen werden.

### 7.1 Verwendete finite Elemente

Die im Rahmen dieser Arbeit implementierten finiten Elemente werden im vorliegenden Abschnitt zusammenfassend dargestellt. Neben den neu entwickelten Elementen werden auch klassische Plastizitäts- und *Fixed-Crack*-Modelle mit  $C^0$ -stetigem Verschiebungsfeld verwendet, um die Ergebnisse der erweiterten Modelle sinnvoll interpretieren zu können.

Alle Elemente, die im weiteren Verlauf des vorliegenden Kapitels zur Berechnung der numerischen Beispiele verwendet werden, sind zusammenfassend in Tab. 7.1 dargestellt. Neben der

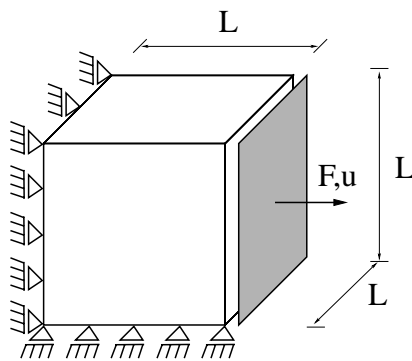
Elementname	Knotenanz.	räuml. Dim.	$\bar{u}$	$\hat{u}$
T3S	3	2	linear	–
Q4S	4	2	linear	–
Q8S	8	2	quadr.	–
V8S	8	3	linear	–
T3E	3	2	linear	linear
Q4E	4	2	linear	linear
Q8EL	8	2	quadr.	linear
Q8EQ	8	2	quadr.	quadr.
V8E	8	3	linear	linear

**Tab. 7.1:** Übersicht der verwendeten finiten Elemente.

Beschreibung der Elemente ist in Tab. 7.1 auch ein Namenskürzel für das entsprechende Element eingeführt worden.

Die erste Menge der finiten Elemente aus Tab. 7.1 ist durch eine  $C^0$ -stetige Approximation des Verschiebungsfeldes gekennzeichnet. In dieser Menge sind somit die Finite-Elemente-Typen T3S, Q4S, Q8S und V8S enthalten. Die zweidimensionalen Elemente dieser Klasse sind im Rahmen der Plastizitätstheorie gemäß Abschnitt 2.1 und des ebenen Spannungszustandes programmiert worden. Sie unterscheiden sich lediglich durch die geometrische Form (Dreieck oder Rechteck) und die Anzahl der Elementknoten. Zur Regularisierung der numerischen Lösungen bezüglich der verwendeten räumlichen Diskretisierung ist das Konzept der konstanten Bruchenergie (s. Abschnitt 2.6 und 6.2) angewendet worden. Das dreidimensionale finite Element V8S basiert auf dem vom Programmsystem *MSC. MARC* bereitgestellten Rißelement und wurde somit nicht neu programmiert. Analog zu den zweidimensionalen Elementen wurde zur Regularisierung der numerischen Lösungen das Konzept der konstanten Bruchenergie in die bestehende Implementierung eingearbeitet.

Die zweite Menge der finiten Elemente gemäß Tab. 7.1 ist dadurch charakterisiert, daß zusätzlich zur glatten Deformationsabbildung  $\bar{u}$  ein diskontinuierliches Verschiebungsfeld  $\hat{u}$  berücksichtigt wird. Die Elemente T3E, Q4E, Q8EL, Q8EQ und V8E folgen der Implementierung aus Kapitel 5. Analog zur Elementmenge des vorherigen Absatzes sind auch die zweidimensionalen finite Elemente T3E, Q4E, Q8EL und Q8EQ im Rahmen des ebenen Spannungszustandes implementiert worden. Neben der Elementform und der Anzahl der Knoten ist für die in diesem Abschnitt beschriebene Elementmenge die Ordnung der erweiterten Verschiebungsapproximation  $\hat{u}$  zu differenzieren. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, stellt das Element Q8EQ das einzige Element mit biquadratischem Ansatz für die erweiterten Verschiebungen dar. Das Element Q8EL hingegen basiert auch auf einer biquadratischen Approximation des kompatiblen Verschiebungsfeldes. Die sprungstetige Verschiebungsabbildung  $\hat{u}$  wird jedoch lediglich bilinear modelliert.



$L$	$=$	1.0	[m]
$E$	$=$	$4.36 \cdot 10^4$	[MN/m <sup>2</sup> ]
$\nu$	$=$	0.2	
$f_{tu}$	$=$	4.0	[MN/m <sup>2</sup> ]
$\mathcal{G}_f$	$=$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	[MN m/m <sup>2</sup> ]

**Abb. 7.1:** Einachsialer Zugversuch: Systemskizze und Materialdaten.

Die Unterteilung der finiten Elemente T3E, Q4E, Q8EL, Q8EQ und V8E hinsichtlich des *Fixed-Crack*- und des *Rotating-Crack*-Konzeptes erfolgt im entsprechenden Abschnitt.

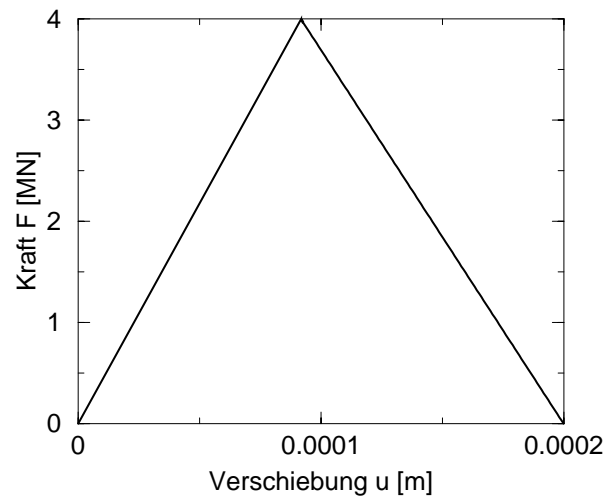
## 7.2 Einachsialer Zugversuch

Zu Beginn dieses Kapitels wird die Anwendbarkeit des vorgestellten Finite-Elemente-Modells aus Abschnitt 5 belegt. Hierzu wird der einachsiale Zugversuch (s. Abb. 7.1) gewählt.

Unter der Annahme einer linearen Entfestigung nach dem Erreichen der maximalen Zugfestigkeit  $f_{tu}$  (RANKINE-Belastungsfläche) wird die zum Makroriß ( $q(\zeta) = 0$ ) korrespondierende maximale Verschiebung aus der in Abb. 7.1 gegebenen Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  zu  $\zeta_{\max} = \frac{2\mathcal{G}_f}{f_{tu}} = 0.0002\text{m}$  ermittelt (s. Gl. (6.13)). Hieraus folgt das Last-Verschiebungs-Diagramm in Abb. 7.2. Da das RANKINE-Kriterium zur Beschreibung des spröden Werkstoffes verwendet wird, resultiert gemäß Abschnitt 4.3.4.1 eine Rißfläche senkrecht zur maximalen Hauptspannungsrichtung. Im vorliegenden Beispiel verläuft die Rißfläche somit senkrecht zur Lastrichtung  $F$ . Bei allen betrachteten Diskretisierungen ist eine Imperfektion in der Form einer reduzierten Zugfestigkeit um 0.25% in einem, am unteren Rand angrenzenden, finiten Element angesetzt worden. Hieraus folgt eine inhomogene Spannungsverteilung.

### 7.2.1 Ebener Spannungszustand

Die Struktur aus Abb. 7.1 wird zunächst mittels der Hypothese des ebenen Spannungszustands zweidimensional approximiert. Zur Überprüfung der hergeleiteten Implementierung aus Kapitel 5 werden exemplarisch die Elemente T3E und Q4E verwendet. Aufgrund des zur analysierten Struktur korrespondierenden Spannungsfeldes ist der Unterschied zwischen dem *Fixed-Crack*- und dem *Rotating-Crack*-Konzept für dieses Beispiel zu vernachlässigen. Die numerischen Berechnungen aus Abschnitt 7.2 basieren auf dem *Rotating-Crack*-Konzept.



**Abb. 7.2:** Einachsialer Zugversuch: Analytisch ermitteltes Last-Verschiebungs-Diagramm am Lastangriffspunkt.

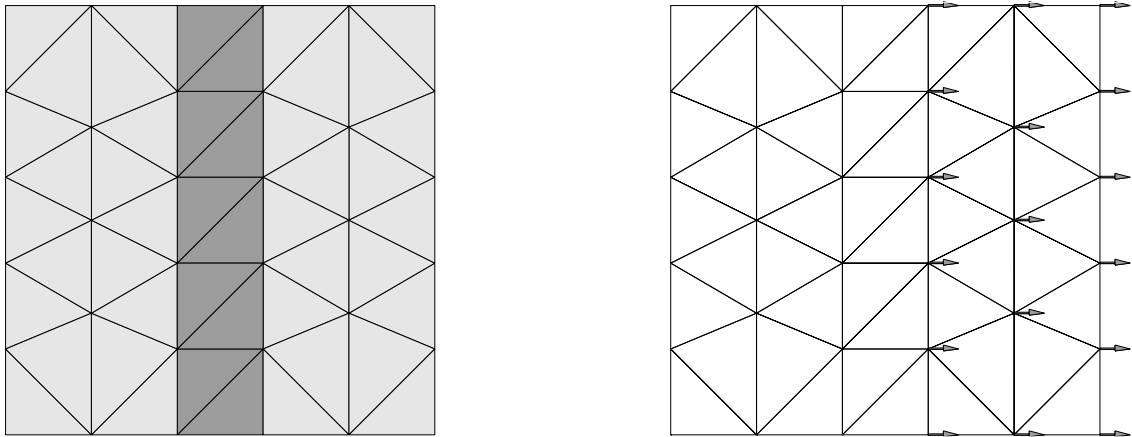
### 7.2.1.1 Element T3E

In diesem Unterabschnitt erfolgt die numerische Analyse des Beispiels aus Abb. 7.1 auf der Basis des Elementes T3E. Wie bereits in Abschnitt 5.2.2 dargelegt worden ist, existiert für das ebene drei-knotige Element nur ein einziger numerischer Lokalisierungsmodus. Da somit numerische Effekte, die auf verschiedene mögliche numerische Lokalisierungsmodi zurückzuführen sind, a priori nicht existieren, müssen diese im Rahmen der Netzgenerierung nicht berücksichtigt werden.

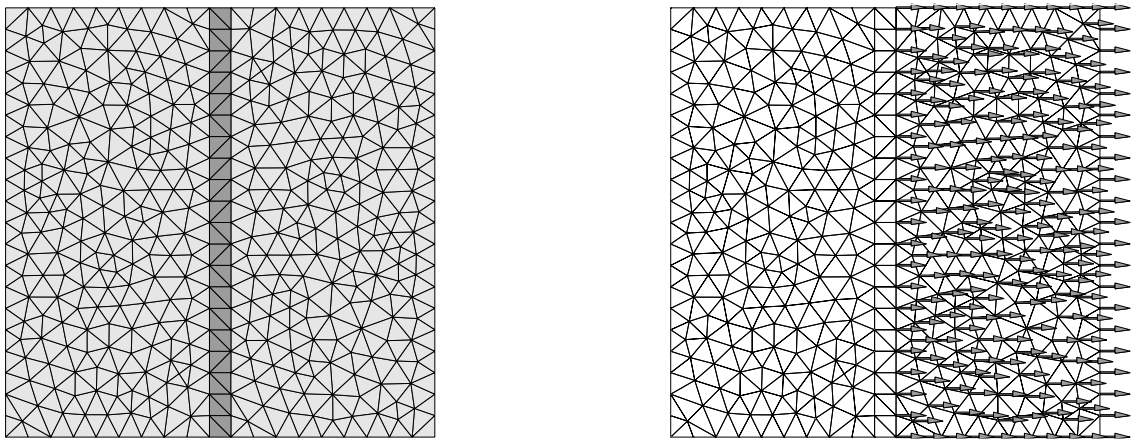
Zur Analyse des Dreiecks-Elementes sind fünf verschiedene Diskretisierungen betrachtet worden (Abb. 7.3-7.7). Ausgehend von Netz 1, welches am Verlauf des Risses orientiert ist, wird mit Hilfe von Netz 2 die Unabhängigkeit der numerischen Lösung von der Größe der finiten Elemente gezeigt. Die Netze 3-5 hingegen dienen dazu, die Invarianz der Ergebnisse bezüglich unstrukturierter Diskretisierungen zu belegen.

Die zu den Diskretisierungen Netz 1-5 korrespondierenden Last-Verschiebungs-Diagramme weichen von der analytischen Lösung (s. Abb. 7.2) nur im Promillebereich ab. Daher wird auf eine Abbildung der Diagramme verzichtet. Auch das Verschiebungsfeld ist, bis auf die Position der Unstetigkeit, für alle Netze nahezu identisch. Diese Differenz resultiert jedoch unmittelbar aus einer unterschiedlichen Position der Imperfektion für die verschiedenen Diskretisierungen. Die einzige Abweichung von der Lokalisierungsanalyse in Abschnitt 4.3.4.1 scheint der nicht gerade verlaufende Riß zu sein. Berücksichtigt man jedoch, daß die Rißtopologie nicht  $C^0$ -stetig an den Elementränder verlaufen muß, ist es möglich, daß in allen Elementen, in denen Lokalisierung auftritt, die Rinormale parallel zu der angreifenden Kraft  $F$  verläuft. Dies ist anhand der Knotenverschiebungen in Abb. 7.3-7.7 zu verifizieren.





**Abb. 7.3:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 1.



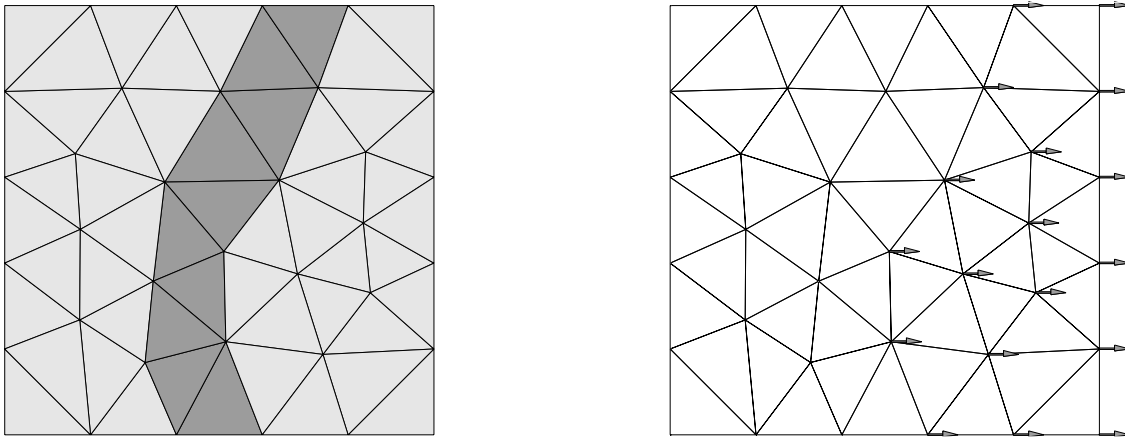
**Abb. 7.4:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 2.

Zusammenfassend wurde die Invarianz der numerischen Lösungen bezüglich der räumlichen Diskretisierung für das finite Element T3E im Rahmen des analysierten Beispiels aus Abb. 7.1 belegt.

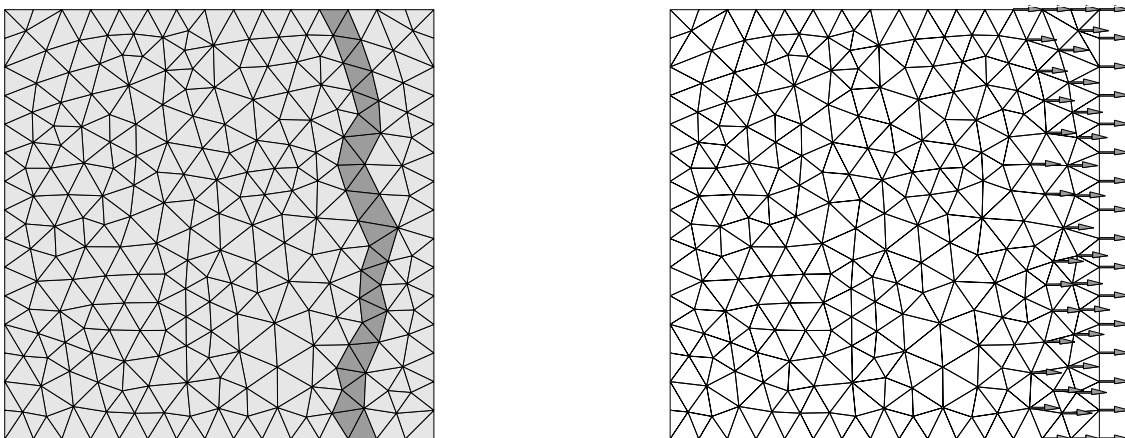
### 7.2.1.2 Element Q4E

In diesem Unterabschnitt wird das finite Element Q4E anhand des Beispiels aus Abb. 7.1 analysiert.

Analog zu den Dreiecks-Elementen wird das Beispiel für fünf verschiedene Diskretisierungen berechnet (s. Abb. 7.8-7.12). Auch für das Element Q4E wird zunächst mittels der Netze 1



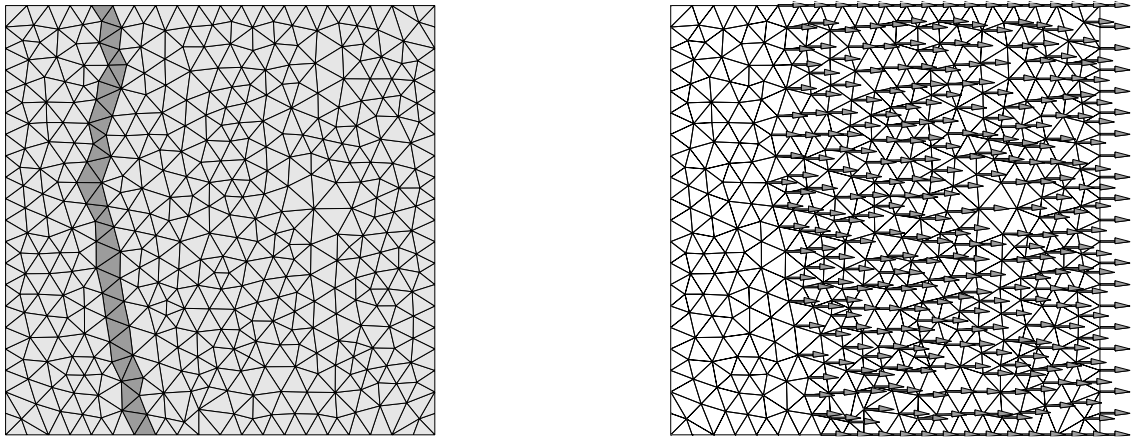
**Abb. 7.5:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 3.



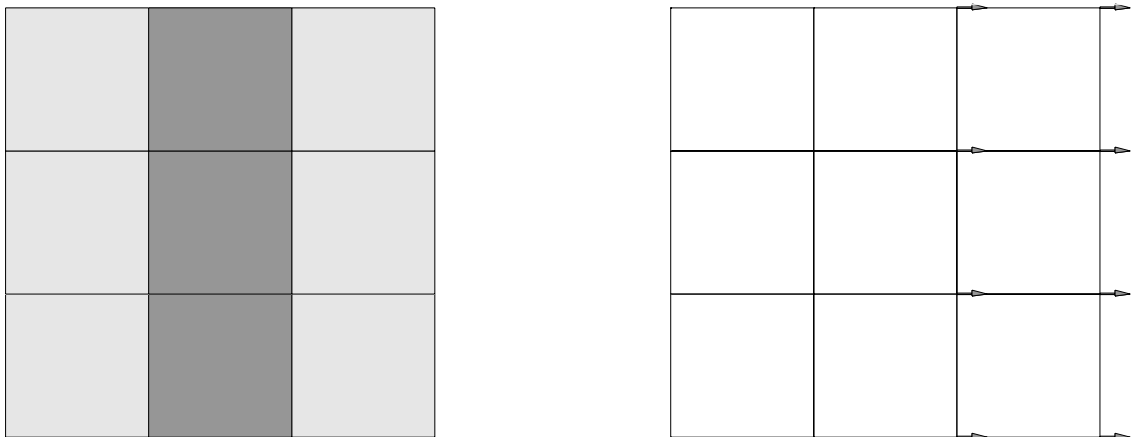
**Abb. 7.6:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 4.

und 2 die Unabhängigkeit der numerischen Lösungen bezüglich der Größe der finiten Elemente gezeigt. Anders als bei dem Element T3E sind für das Element Q4E zwei verschiedene numerische Lokalisierungsmodi möglich (s. Abschnitt 5.2.2). Um die unterschiedlichen Modi getrennt zu analysieren, wird Netz 3 so konstruiert, daß der Riß in einem betrachteten lokalisierten Element immer zwei Knoten von den übrigen zwei isoliert. Netz 4 hingegen dient zur Untersuchung des anderen numerischen Lokalisierungsmodus. Hier wird in jedem Element ein (drei) Knoten durch den Riß von den übrigen getrennt. Diskretisierung Netz 5 dient zur Überprüfung der Kompatibilität der beiden unterschiedlichen numerischen Versagensmodi.

Analog zu den Ergebnissen für das Element T3E folgen auch aus den Diskretisierungen Netz 1-5 für das Element Q4E identische Last-Verschiebungs-Diagramme. Daher wird auf die Ab-



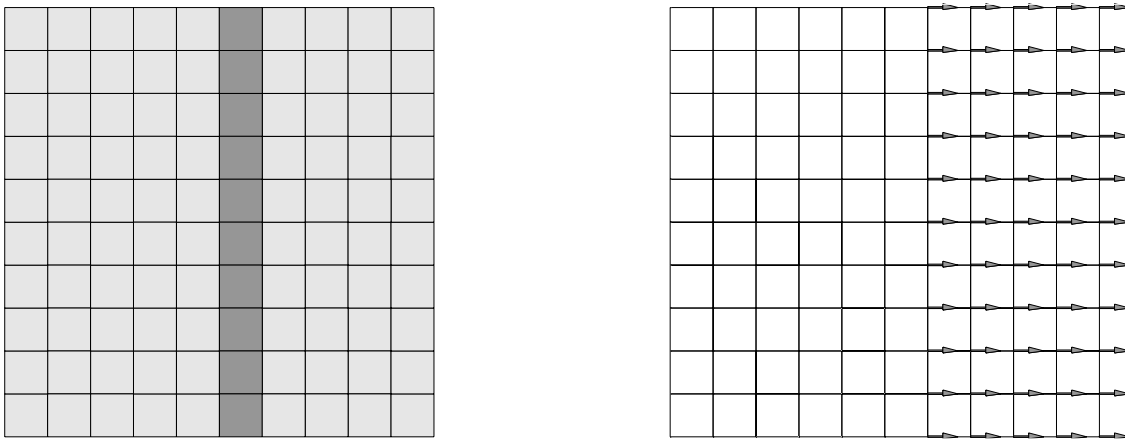
**Abb. 7.7:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 5.



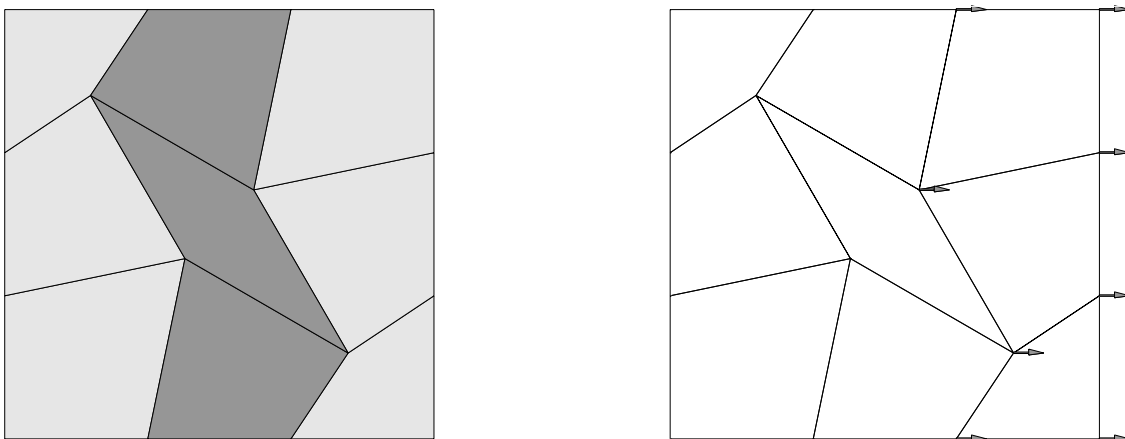
**Abb. 7.8:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 1.

bildung der Diagramme verzichtet. Neben der Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Größe der verwendeten Elemente ist dadurch sowohl die Invarianz bezüglich verzerrter Netze als auch die Invarianz bezüglich der verschiedenen numerischen Versagensmodi belegt worden. Jede der fünf Diskretisierungen Netz 1-5 resultiert im vollständig entfestigten Zustand in einem diskontinuierlichen Verschiebungsfeld, dessen Richtungsvektor parallel zur eingeleiteten Kraft ist.

Zusammenfassend wurde somit gezeigt, daß das Element Q4E zur numerischen Simulation von lokalisiertem Versagen geeignet ist.



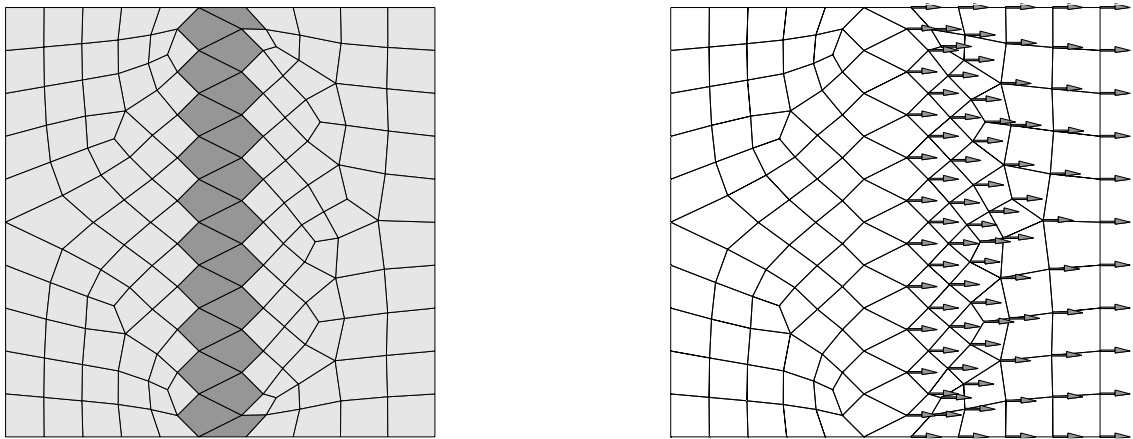
**Abb. 7.9:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 2.



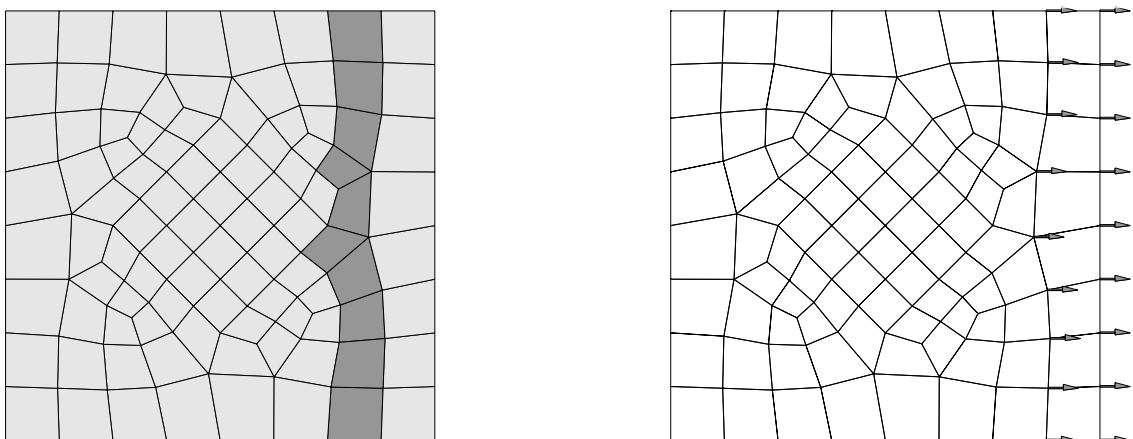
**Abb. 7.10:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 3.

## 7.2.2 Dreidimensionaler Spannungszustand (Element V8E)

Im Anschluß an die Abschnitte 7.2.1.1 und 7.2.1.2 wird an dieser Stelle die Analyse des Beispiels aus Abb. 7.1 im Rahmen des dreidimensionalen Spannungszustandes durchgeführt. Die Berechnungen dienen zur Untersuchung des finiten Elementes V8E. Dabei wird in einem ersten Schritt die Invarianz der numerischen Ergebnisse bezüglich der Größe der verwendeten finiten Elemente belegt. Im zweiten Schritt erfolgt die Analyse der unterschiedlichen numerischen Lokalisierungsmodi. Hierbei ist für das Element zwischen vier verschiedenen Modi zu differenzieren (s. Abb. 5.1).

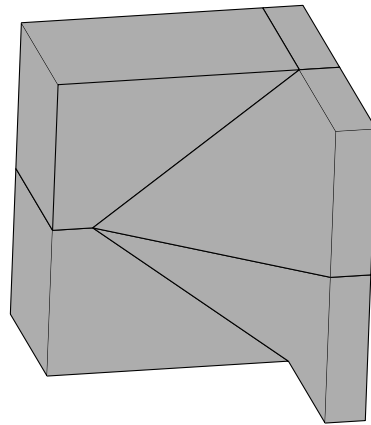


**Abb. 7.11:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 4.

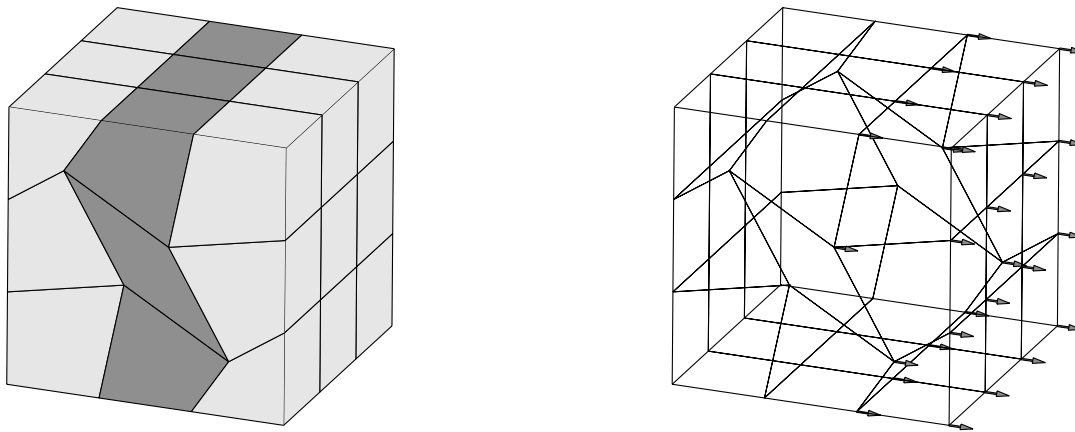


**Abb. 7.12:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 5.

Bei der Untersuchung der verschiedenen möglichen numerischen Lokalisierungsmodi sind nicht alle Modi zu überprüfen. Da gemäß Abschnitt 5.2.2 der Lokalisierungsmodus nach Abb. 5.1d bei würfelförmigen finiten Elementen des Typus V8E identisch mit dem Lokalisierungsmodus nach Abb. 5.2b für das Element Q4E ist, werden im folgenden lediglich verzerrte Netze betrachtet. Netz 1 aus Abb. 7.14 ist dadurch charakterisiert, daß die Reißfläche das betrachtete finite Element in der Mitte schneidet und somit vier Knoten des Elementes von den übrigen vier trennt. Netz 2 aus Abb. 7.15, welches durch mehrmaliges Kopieren einer zweidimensionalen Diskretisierung erzeugt worden ist, führt dazu, daß die Lokalisierungsfläche zwei (sechs) von den übrigen sechs (zwei) Knoten eines lokalisierten finiten Elementes isoliert. Im Gegensatz zu Netz 1 und 2 weist Netz 3 aus Abb. 7.16 numerische Lokalisierungsmodi auf, wel-



**Abb. 7.13:** Detail von Netz 3 (s. Abb. 7.16).

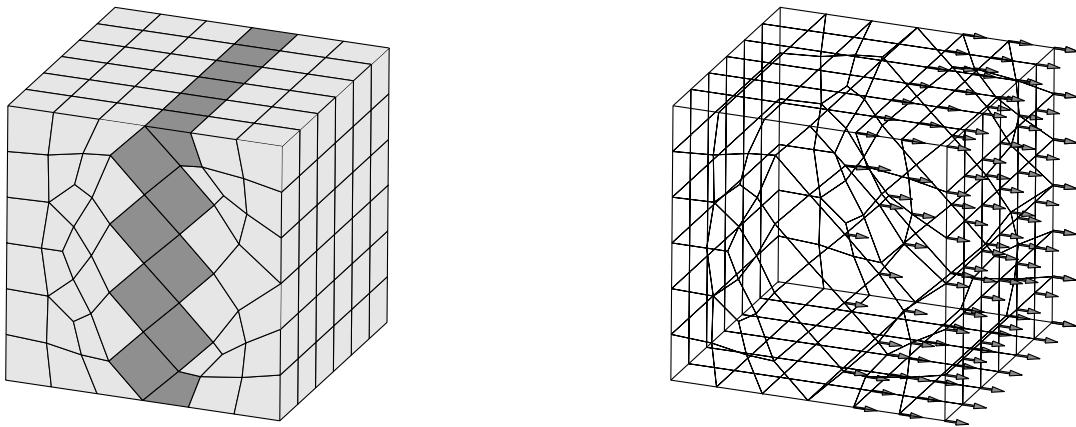


**Abb. 7.14:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 1.

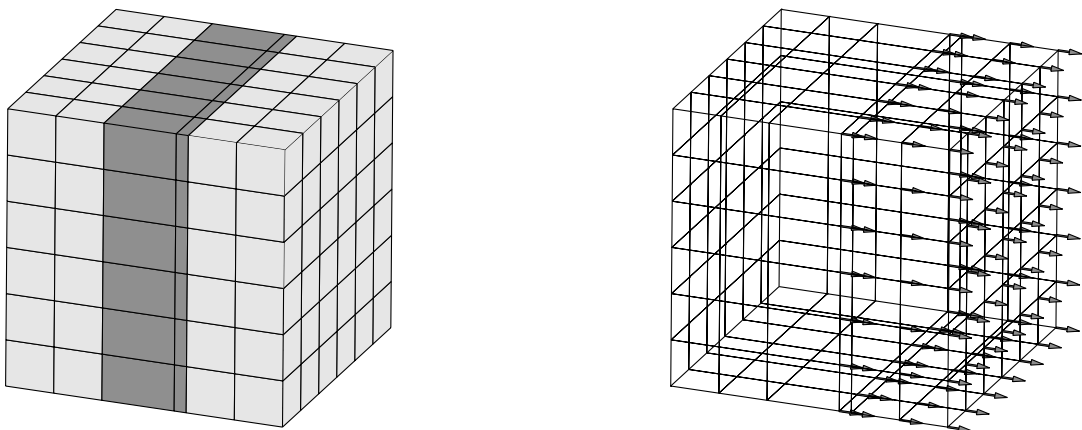
che nur im dreidimensionalen Kontinuum bei acht-knotigen Quader-Elementen auftreten. Zur Konstruktion der Diskretisierung Netz 3 werden mehrere Keile, die aus jeweils 4 Elementen zusammengesetzt sind (s. Abb. 7.13), verwendet. Wird eines der zum Keil gehörenden Elemente mittels einer Imperfektion geschwächt, trennt der Riß bei diesen Elementen einen (sieben) Knoten von den übrigen. Bei den an den Keil angrenzenden Elementen hingegen werden drei (fünf) Knoten von den restlichen isoliert. Anhand dieser Diskretisierung wird demnach die Kompatibilität der noch zu überprüfenden numerischen Versagensmodi (s. Abb. 5.1a und 5.1c) verifiziert.

Die Diskretisierungen Netz 1-3 resultieren in Last-Verschiebungs-Diagrammen, welche nur minimal von der analytischen Lösung aus Abb. 7.2 abweichen. Auch die zu den Diskretisierungen korrespondierenden Verschiebungsfelder sind gemäß Abb. 7.14-7.16 identisch mit den Ergebnissen des ebenen Spannungszustands aus den Abb. 7.8-7.12.





**Abb. 7.15:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 2.

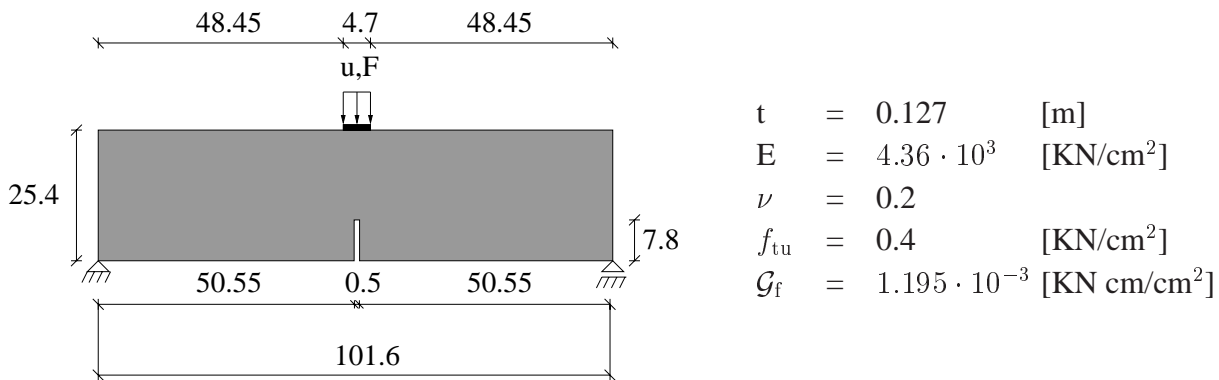


**Abb. 7.16:** Einachsialer Zugversuch: Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  und Darstellung der Knotenverschiebungen mittels der Richtungsvektoren zum Zeitpunkt der vollständigen Entfestigung: Netz 3.

### 7.2.3 Zusammenfassung

Im vorliegenden Abschnitt wurde anhand der Elemente T3E, Q4E und V8E gezeigt, daß die Finite-Elemente-Implementierung aus Kapitels 5 invariant bezüglich der Größe der verwendeten finiten Elemente ist. Desweiteren wurde belegt, daß die verschiedenen möglichen numerischen Lokalisierungsmodi gemäß Abschnitt 5.2.2 die numerische Lösung nur unwesentlich beeinflussen. Unabhängig davon, ob lediglich ein spezieller Mode vorliegt oder verschiedene Modi in den finiten Elementen durch den Belastungszustand hervorgerufen werden, ändert sich das berechnete Verschiebungsfeld nicht.





**Abb. 7.17:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Längenangaben (in [cm]) und Materialparameter.

### 7.3 Angekerbter Drei-Punkt-Biegebalken

Im Anschluß an das Beispiel des Zugstabes erfolgt die Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens. Die geometrischen Abmessungen und die Materialdaten der betrachteten Struktur sind Abb. 7.17 zu entnehmen. Das numerische Beispiel aus Abb. 7.17 stellt einen Standard-Benchmark in der Modellierung von Rissen bei Zugbeanspruchung dar (s. [MESCHKE, LACKNER & MANG 1998] und [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Im Gegensatz zum Zugstab aus Abschnitt 7.2 ist bei dieser Struktur zur Auslösung von lokalisiertem Versagen keine Imperfektion in der Form einer reduzierten Zugfestigkeit notwendig. Da durch die Belastung im Balken vorwiegend Biegemomente erzeugt werden, steigt die Spannungskomponente  $\sigma_{11}$  in der Symmetrieachse bis zum Erreichen der Zugfestigkeit  $f_{tu}$  an. Aufgrund der Kerbe im Symmetriebereich des Trägers wird dieser Effekt beschleunigt. Wird die Belastung in der Form der vorgeschriebenen Verschiebung  $u$  weiter erhöht, schreitet der Riß vertikal in die Richtung der Lasteinleitung fort.

Zur Modellierung des inelastischen Materialverhaltens des Einfeld-Trägers wird das RANKINE-Kriterium auf Basis der Plastizitätstheorie verwendet. Die Entfestigungsevolution der spannungsähnlichen Variablen  $q(\alpha)$  erfolgt exponentiell.

Im Rahmen numerischer Analysen des angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens werden zwei unterschiedliche Studien durchgeführt. In Abschnitt 7.3.1 wird die Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von der Netzorientierung untersucht. Anschließend wird in Abschnitt 7.3.2 das *Fixed-Crack*- mit dem *Rotating-Crack*-Konzept verglichen.

Die Finite-Elemente-Analysen der Abschnitte 7.3.1 und 7.3.2 erfolgen verschiebungskontrolliert mit einer Schrittweite von  $\Delta u = 1.27290 \cdot 10^{-5}$  cm. Als Konvergenzbedingung der numerischen Berechnungen dient ein relativer Fehler der Residua. Mit dem Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{r}^{(i)}$  und dem Vektor der äußeren Kräfte  $\mathbf{r}^{(e)}$  wird im vorliegenden Kapitel die Konvergenzbedingung

$$tol > \frac{\|\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}^{(e)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{r}^{(i)}\|_{\infty}} \quad (7.1)$$

verwendet. Dabei wird in den Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2 die Fehlertoleranzgrenze zu  $tol = 10^{-8}$  angesetzt.

### 7.3.1 Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von der Netzorientierung

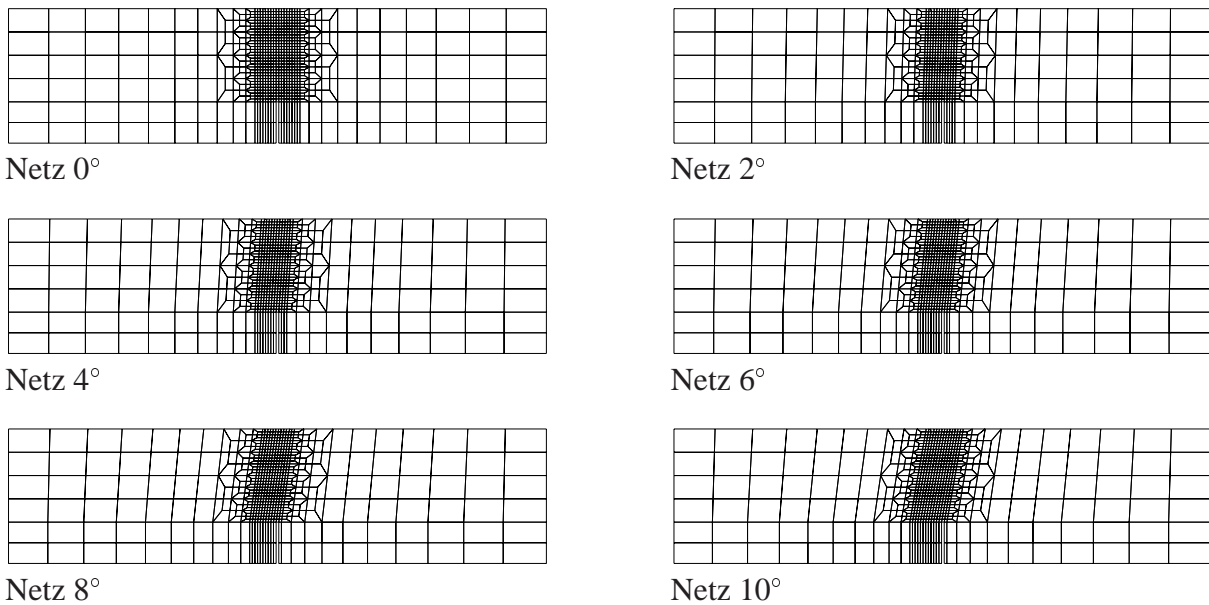
In Abschnitt 7.2 wurde die Invarianz der numerischen Lösungen bezüglich der gewählten Diskretisierung belegt. Aufgrund der dort auftretenden, nahezu homogenen, Spannungsverteilung ist es möglich, daß die Topologie des Bereiches inelastischer Verformungen bei einem diskontinuierlichen Verlauf der erweiterten Verschiebungsfelder an den Elementgrenzen von der analytischen Lösung abweicht (s. Abb. 7.5). In jedem lokalisierten finiten Element der Diskretisierung aus Abb. 7.5 ist die Reißnormale parallel zur angreifenden Kraft  $F$ . Interpretiert man die lokalisierten Elemente als einen Makroriß, so weicht die hierzu korrespondierende Topologie jedoch von der analytisch berechneten Geraden ab. Die in den finiten Elementen berechnete Lokalisierungsfläche ist somit identisch mit der analytischen Lösung. Die Topologie der inelastischen Bereiche weicht jedoch auf Strukturebenen in der Regel von der analytischen Lösung ab. Die Begründung hierfür stellt die inkompatible Erweiterung des Verschiebungsfeldes dar. Stetigkeit der erweiterten Verschiebungsfelder an den Elementgrenzen ist im allgemeinen nicht erfüllt.

Im Gegensatz zu Abschnitt 7.2 weist die Struktur aus Abb. 7.17 keinen homogenen Spannungszustand auf. Dabei tritt der Bereich der maximalen Zugspannung zunächst an der Kerbe auf. Nach einer Reißinitiierung pflanzt sich dieser Bereich entlang der Symmetrieachse in Richtung der Lasteinleitung weiter fort. Somit lokalisiert auch das in Kapitel 5 entwickelte finite Element mit inkompatibler Erweiterung des Verschiebungsfeldes nur in diesem Bereich der Struktur.

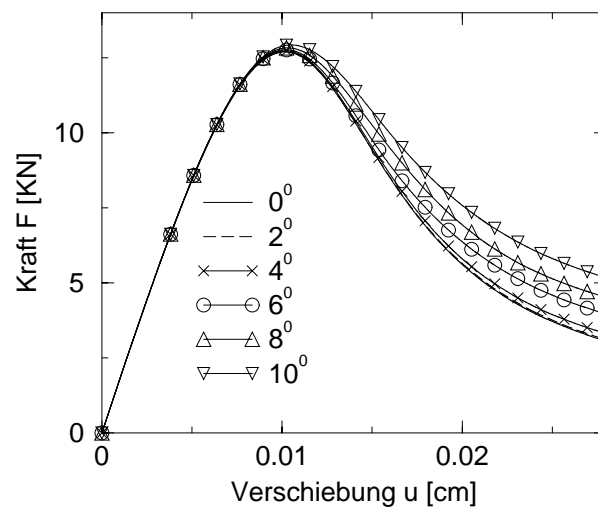
Um die Abhängigkeit der Lösungen von der Netzorientierung zu verifizieren, wird die Struktur auf der Grundlage der verschiedenen, in Abb. 7.18 dargestellten, Diskretisierungen berechnet. Wie aus Abb. 7.18 ersichtlich ist, unterscheiden sich die Netze durch eine vorgegebenen Netzorientierung. Dabei ist das erste Netz an dem Verlauf des Risses gemäß der analytischen Lösung orientiert. Die übrigen Diskretisierungen hingegen weisen eine Netzorientierung auf, die von der Vertikalen abweicht. Hierbei wird die Netzorientierung von  $0^\circ$  in  $2^\circ$ -Schritten bis  $10^\circ$  modifiziert.

#### 7.3.1.1 Element Q4S

Die verschiebungskontrollierte Analyse wird zunächst auf der Grundlage des bilinearen Elementes Q4S durchgeführt. Zur Regularisierung der numerischen Lösungen wird der Materialparameter  $\alpha_u$  der exponentiellen Entfestigungsevolution  $q(\alpha) = f_{tu} \exp \frac{-\alpha}{\alpha_u}$  gemäß der Abschnitte 2.6 und 6.2 mittels der numerischen charakteristischen Länge  $l_c$  und der Bruchenergie  $\mathcal{G}_f$  berechnet.



**Abb. 7.18:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Verwendete Diskretisierungen.



**Abb. 7.19:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Last-Verschiebungs-Diagramme auf der Grundlage des Elementes Q4S.

Zusammenfassend sind die Ergebnisse in Abb. 7.19 anhand eines Last-Verschiebungs-Diagramms dargestellt. Bis zum Erreichen der maximalen Kraft  $F$  sind die Unterschiede der Last-Verschiebungs-Diagramme auf der Basis der Diskretisierungen Netz  $0^\circ$ - $10^\circ$  minimal. Im Gegensatz dazu variiert die berechnete Strukturantwort bezüglich der verschiedenen Diskretisierungen im nach-kritischen Bereich deutlich. Proportional zur Abweichung der Netzorientierung vom analytischen Rißverlauf tritt ein wachsender Versteifungseffekt ein.

Um die Ursache der Abhängigkeit der Last-Verformungs-Diagramme von der Netzorientierung zu identifizieren, wird die Verteilung der internen Entfestigungsvariable  $\alpha$  im Bereich des Risses untersucht. Die Verteilung der zu Mikro- und Makrorissen korrespondierenden Größe  $\alpha$  ist Abb. 7.20 zu entnehmen. In Abb. 7.20 wird eine Abweichung der Topologie des Bereiches der inelastischen Verformungen von der analytischen Lösung deutlich. Neben dem Referenznetz  $0^\circ$  weisen auch die Netze  $2^\circ$  und  $4^\circ$  einen geraden Rißverlauf auf. Dieser unterscheidet sich jedoch aufgrund der vorhandenen Netzorientierung von der Referenzlösung des Netzes  $0^\circ$ . Erst für die Diskretisierungen Netz  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  und  $10^\circ$  ist eine Abweichung der Rißtopologie von der Netzorientierung zu erkennen. Die Differenzen der Last-Verschiebungs-Diagramme sind demnach auf die unterschiedlichen Rißtopologien zurückzuführen.

### 7.3.1.2 Element Q4E

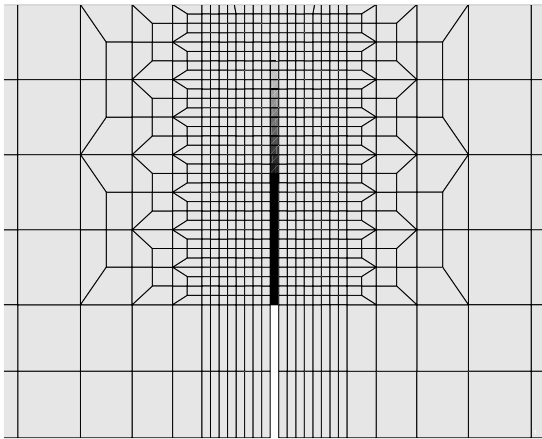
Im Anschluß an die Analyse des Elementes Q4S erfolgt in diesem Abschnitt eine numerische Studie des Elementes Q4E. Die Implementierung des Elementes Q4E ist Abschnitt 5.9.1 zu entnehmen. Gemäß Abschnitt 5.9.1 wird somit das *Rotating-Crack*-Konzept verwendet. Der Materialparameter  $\beta$  wird zu  $\beta = 0.0$  angesetzt. Demnach basieren, analog zum Abschnitt 7.3.1.1, die folgenden numerischen Analysen auf der Plastizitätstheorie.

Die Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen sind in Form eines Last-Verschiebungs-Diagramms in Abb. 7.21 dargestellt. Analog zu Abschnitt 7.3.1.1 sind die zu den unterschiedlichen Diskretisierungen korrespondierenden Diagramme bis zur maximalen Last  $F$  nahezu identisch. Im post-kritischen Bereich ist die gleiche Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzorientierung wie bei den Berechnungen auf der Basis des Elementes Q4S zu erkennen. Um die quantitativen Unterschiede der numerischen Ergebnisse auf der Basis der Elemente Q4S und Q4E zu untersuchen, werden die Last-Verschiebungs-Diagramme der Diskretisierung Netz  $8^\circ$  für beide Elemente in Abb. 7.22 zusammen dargestellt. Gemäß Abb. 7.22 sind die Unterschiede zwischen den beiden Elementtypen sehr gering. Somit weist auch das Element Q4E eine Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von der Netzorientierung auf.

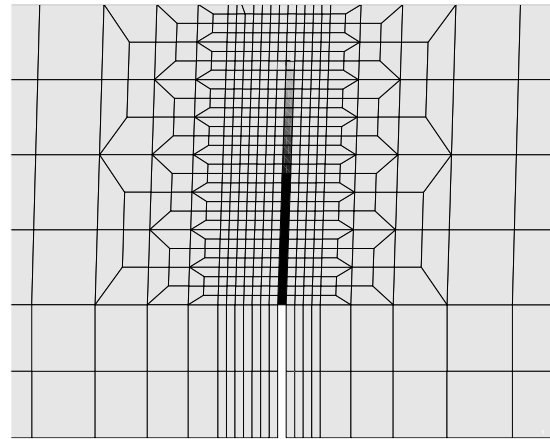
Die Verteilung der Amplitude der Verschiebungsdiskontinuität im gerissenen Bereich des Balkens bestätigt diese Aussage (s. Abb. 7.23). Analog zu den Last-Verschiebungs-Diagrammen sind auch die Unterschiede zwischen Abb. 7.23 und Abb. 7.20 nur minimal.

### 7.3.1.3 Zusammenfassung

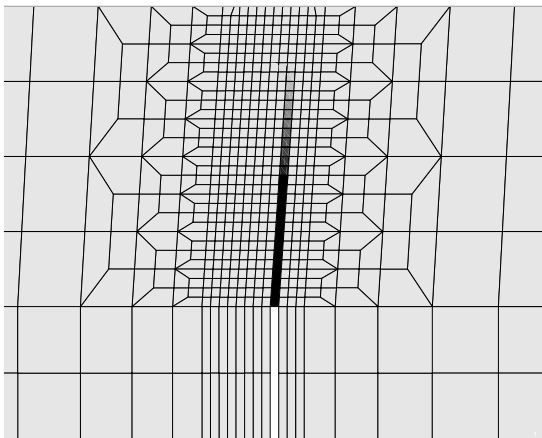
In Abschnitt 7.3.1 wurde das Element Q4E bezüglich der Abhängigkeit der numerischen Lösungen von einer Netzorientierung analysiert. Dabei folgte aus dem Vergleich der Abschnitte 7.3.1.1 und 7.3.1.2, daß die mittels des Elementes Q4E berechneten Lösungen nur minimal von den Lösungen abwichen, die auf der Grundlage des Elementes Q4S berechnet worden sind. Somit sind die Finite-Elemente-Berechnungen mit dem Element Q4E hinsichtlich einer Netzorientierung nicht invariant.



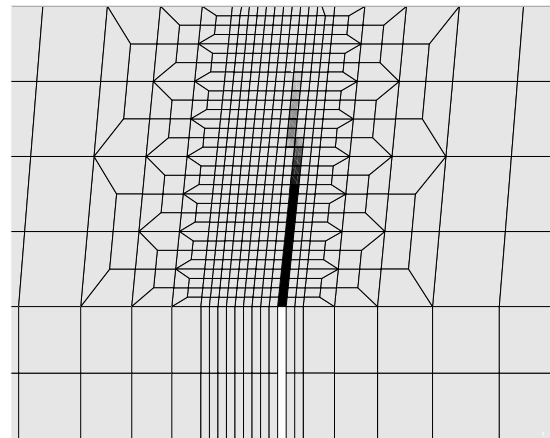
Netz 0°



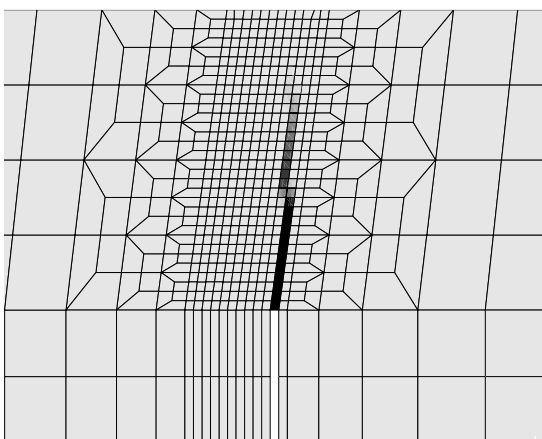
Netz 2°



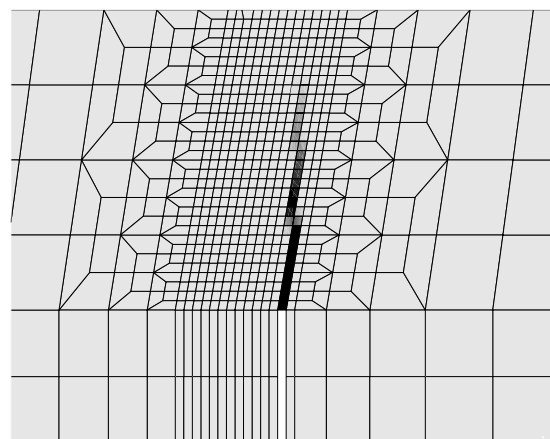
Netz 4°



Netz 6°

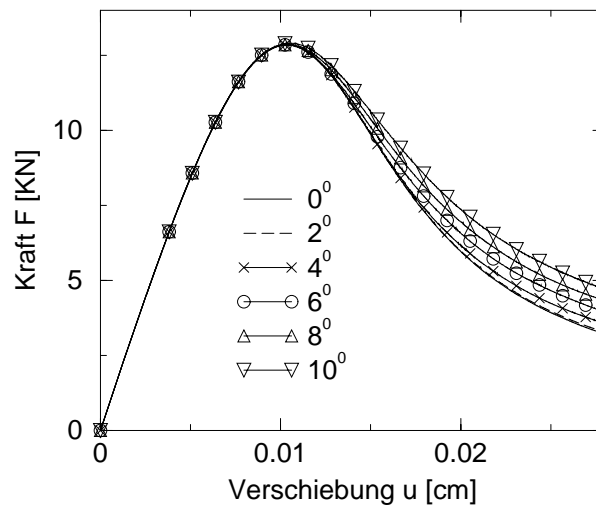


Netz 8°

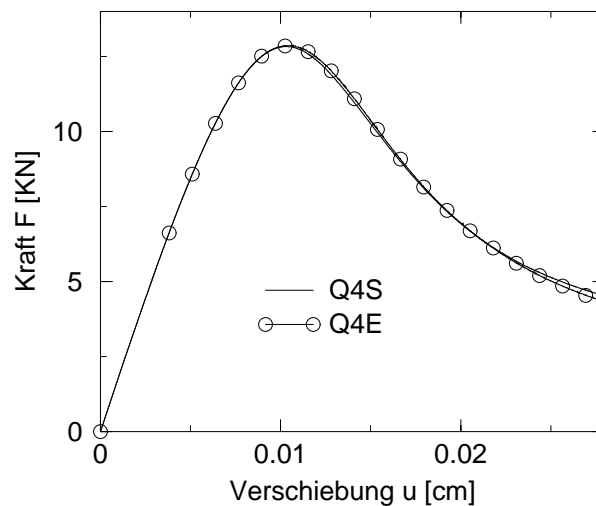


Netz 10°

**Abb. 7.20:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  auf der Basis des Elementes Q4S (Symmetrieachse, vergrößert).

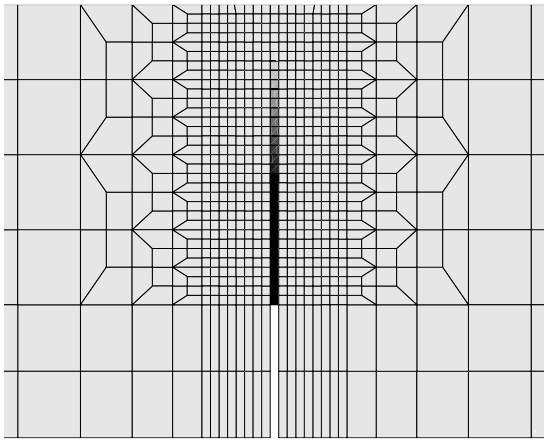


**Abb. 7.21:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Last-Verschiebungs-Diagramme auf der Grundlage des Elementes Q4E.

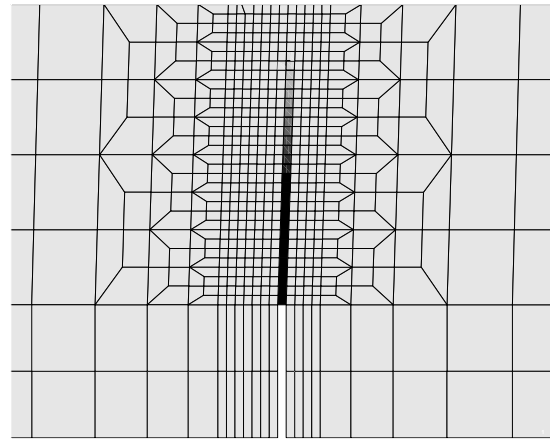


**Abb. 7.22:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Vergleich der Last-Verschiebungs-Diagramme der Elemente Q4S und Q4E für Netz  $8^\circ$ .

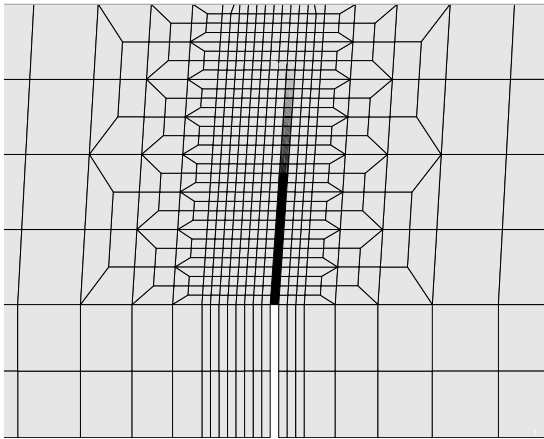
Die Begründung für diese Aussage wurde bereits in Abschnitt 6.3.1.1 gegeben. In Abschnitt 6.3.1.1 wurde gezeigt, daß die Entfestigungsevolution der spannungsähnlichen Variablen  $q(\alpha)$  für ein *Fixed-Crack*-Plastizitätsmodell mit  $C^0$ -stetigem Verschiebungsfeld, zusammen mit der charakteristischen Länge nach OLIVER, und für das finite Element aus Kapitel 5 identisch ist. Da die Variable  $q(\alpha)$  die Entfestigung und somit den post-kritischen Bereich der Last-Verschiebungs-Diagramme kontrolliert, folgt, daß die Last-Verschiebungs-Diagramme auf der Basis der Elemente Q4S und Q4E nur minimal voneinander abweichen.



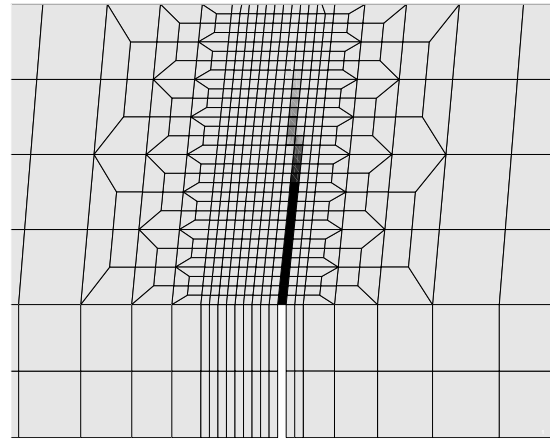
Netz 0°



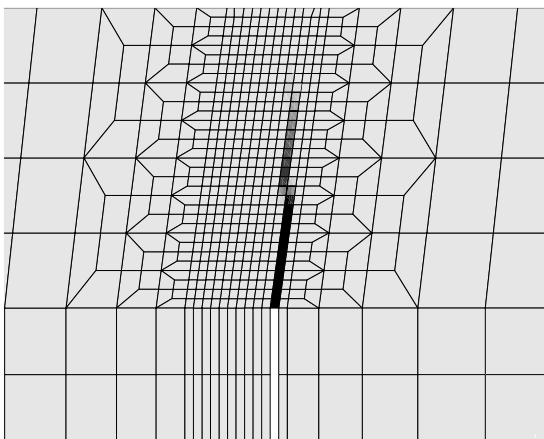
Netz 2°



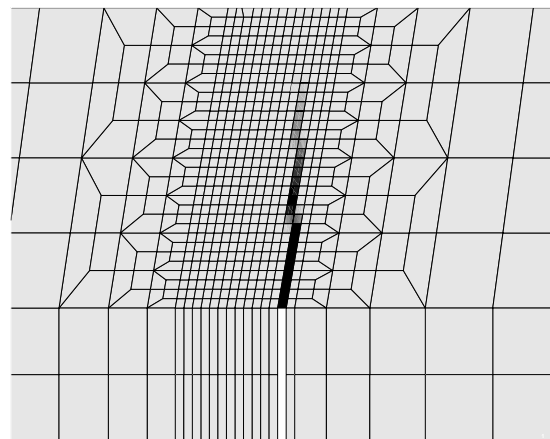
Netz 4°



Netz 6°



Netz 8°



Netz 10°

**Abb. 7.23:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  auf der Basis des Elementes Q4E (Symmetrieachse, vergrößert).



**Anmerkung:** Im Gegensatz zu Abschnitt 6.3.1.1 basieren die numerischen Analysen der Abschnitte 7.3.1.1 und 7.3.1.2 auf der Grundlage des *Rotating-Crack*-Konzeptes. Da die Reißflächen im post-kritischen Bereich für die Struktur aus Abb. 7.17 lediglich minimal „rotieren“, ist jedoch näherungsweise  $\dot{n} = 0$  erfüllt.  $\square$

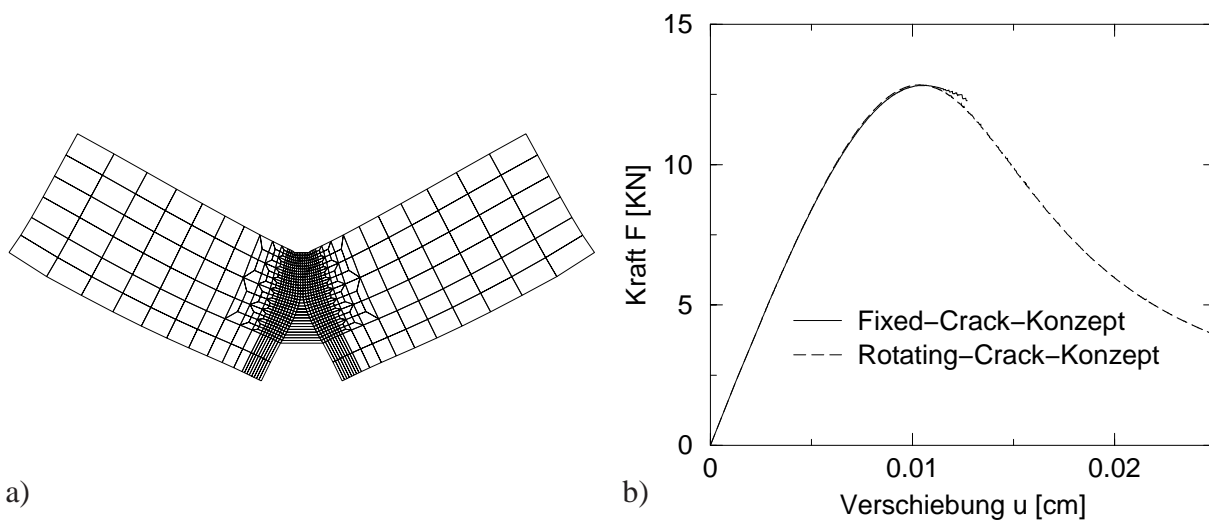
### 7.3.2 Vergleichende Analyse des *Fixed-Crack*- und des *Rotating-Crack*-Konzeptes

In diesem Abschnitt wird das *Fixed-Crack*-Konzept gemäß Abschnitt 5.9.1 mit dem *Rotating-Crack*-Konzept aus Abschnitt 5.9.2 bzw. Anhang D verglichen. Hierzu wird erneut der angekerbte Drei-Punkt-Biegebalken aus Abb. 7.17 betrachtet. Zur Implementierung des *Fixed-Crack*-Konzeptes und des *Rotating-Crack*-Konzeptes wird das Element Q4E herangezogen. Die Finite-Elemente-Analysen des vorliegenden Abschnitts basieren auf der Diskretisierung Netz 0° (s. Abb. 7.20). Diese Diskretisierung besteht aus 840 vier-knotigen Scheibenelementen des Typus Q4E. Analog zu Abschnitt 7.3.1 erfolgt die Approximation des inelastischen Materialverhaltens auf Basis des RANKINE-Kriteriums und der exponentiellen Entfestigung

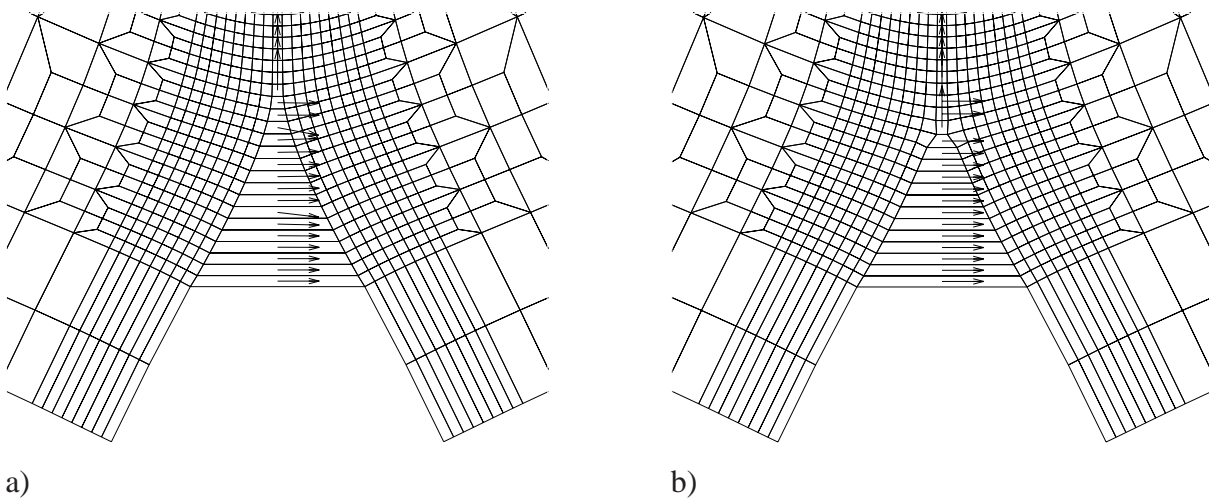
$$q(\alpha) = f_{tu} \exp \left[ -\alpha \frac{f_{tu}}{\mathcal{G}_f} \right]. \quad (7.2)$$

Die verformte Struktur im post-kritischen Bereich ist für das *Rotating-Crack*-Konzept Abb. 7.24a zu entnehmen. Die zu den zwei verschiedenen Konzepten korrespondierenden Last-Verschiebungs-Diagramme sind in Abb. 7.24b zusammengefaßt. Gemäß Abb. 7.24b ist der Unterschied zwischen den zwei Formulierungen bis zum Erreichen der maximalen Last  $F$  zu vernachlässigen. Im Gegensatz dazu weisen die Last-Verschiebungs-Diagramme der beiden Modelle Differenzen im post-kritischen Bereich auf. Anders als bei dem *Rotating-Crack*-Konzept treten bei dem *Fixed-Crack*-Konzept in diesem Bereich Konvergenzprobleme auf. Hierdurch ist es nicht möglich, die numerische Simulation bei einer Verschiebung von  $u = 0.0127$  cm fortzusetzen.

Um das Konvergenzproblem des *Fixed-Crack*-Modells zu analysieren, wird der Bereich der Reißspitze genauer betrachtet. In Abb. 7.25 ist dieser Bereich vergrößert dargestellt. Abb. 7.25a zeigt die Richtungen der maximalen Hauptspannungen für das *Rotating-Crack*-Modell. In Abb. 7.25b ist diese vektorielle Größe für das *Fixed-Crack*-Modell abgebildet. Aus den Abb. 7.25 ist zu entnehmen, daß die Traktionsvektoren der positiven Hauptspannungen an der Reißspitze mit der Symmetrieachse der Struktur übereinstimmen. Gemäß des RANKINE-Kriteriums verläuft somit die Reißoberfläche an der Reißspitze horizontal. Da bis zu einer Verschiebung von  $u = 0.0127$  cm ein vertikaler Reiß berechnet wird, ist die neu berechnete Reißfläche nicht kompatibel mit dem zuvor ermittelten Versagensmechanismus. Diese „falsche“ Reißtopologie kann im Rahmen des *Fixed-Crack*-Konzeptes im weiteren Verlauf der numerischen Analyse nicht korrigiert werden. Hierdurch entsteht ein Versteifungseffekt, der zu Konvergenzproblemen führt. Im Gegensatz dazu dreht sich bei Verwendung des *Rotating-Crack*-

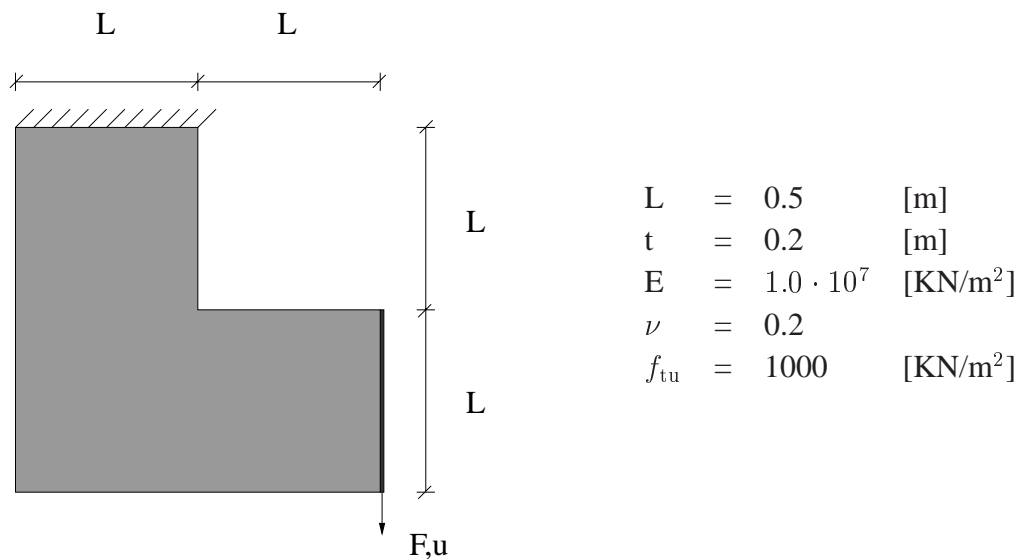


**Abb. 7.24:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: a) Verformte Konfiguration für  $u = 0.0127$  cm auf der Grundlage des *Rotating-Crack*-Konzeptes (2000-fach überhöhte Darstellung der Verschiebungen), b) Last-Verschiebungs-Diagramme des *Fixed-Crack*-Konzeptes und des *Rotating-Crack*-Konzeptes.



**Abb. 7.25:** Numerische Analyse eines angekerbten Drei-Punkt-Biegebalkens aus Beton: Verformte Struktur für  $u = 0.0127$  cm (2000-fach überhöhte Darstellung der Verschiebungen); vergrößert im Bereich der Kerbe; Pfeile symbolisieren die Richtung der maximalen Hauptspannungen: a) *Rotating-Crack*-Konzept, b) *Fixed-Crack*-Konzept.

Konzeptes der anfänglich horizontale Riß im post-kritischen Bereich in die Richtung der maximalen Hauptspannung, bis wieder eine vertikale Orientierung erreicht ist. Hierdurch wird der Versteifungseffekt des *Fixed-Crack*-Konzeptes vermieden.



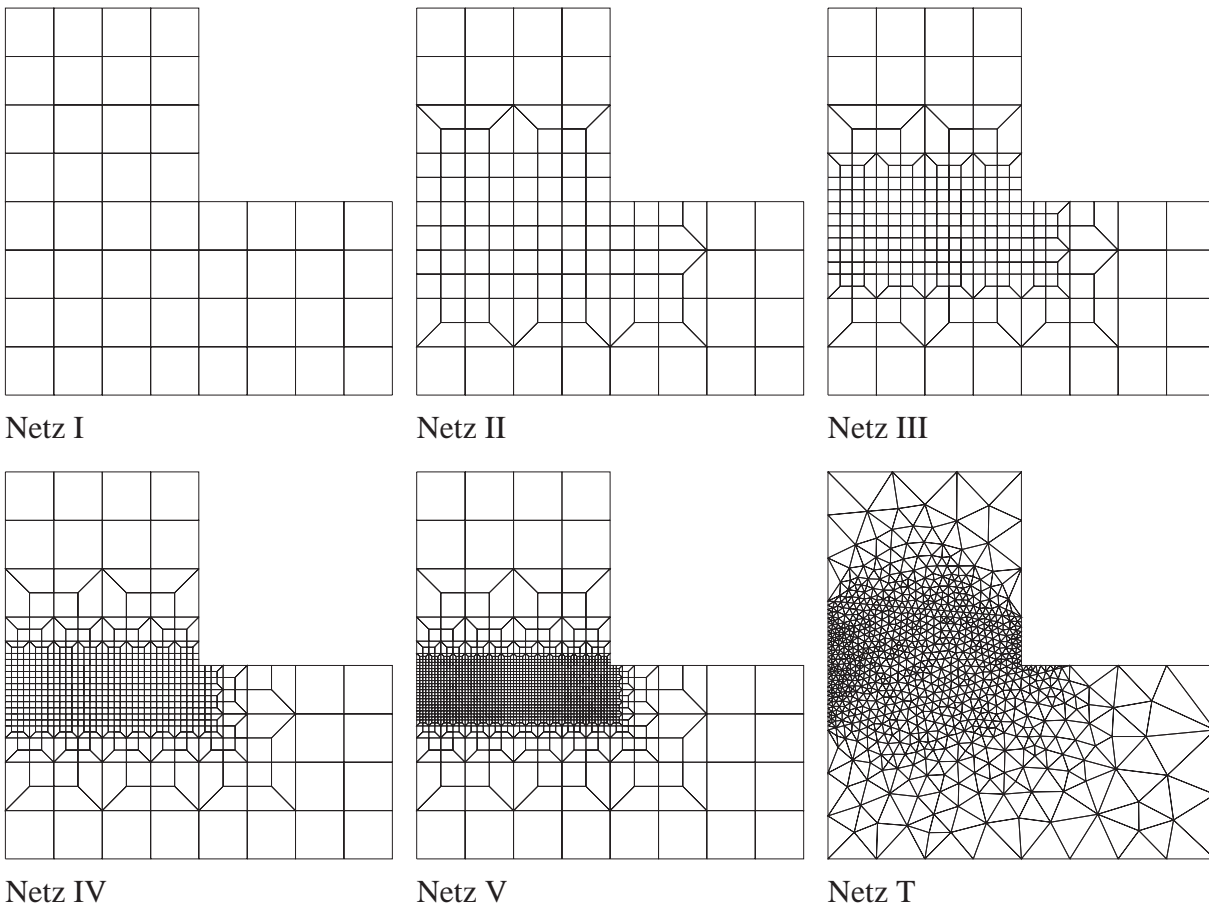
**Abb. 7.26:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Systemskizze und elastische Materialparameter.

Im vorliegenden Abschnitt wurde gezeigt, daß Versteifungseffekte, die aus dem *Fixed-Crack*-Konzept hervorgehen, mittels des *Rotating-Crack*-Konzeptes vermieden werden. Diese Versteifungseffekte resultierten aus der unterschiedlichen Rißtopologie der Mikrorisse, die sich nicht zu Makrorissen öffneten und denen der Primärrisse.

**Anmerkung:** Alternativ kann der Versteifungseffekt auch beseitigt werden, indem ein zweiter Riß im GAUSS-Punkt zugelassen wird. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird jedoch lediglich das *Rotating-Crack*-Konzept betrachtet. Gemäß [ROTS & BLAAUWENDRAAD 1989] sind numerische Implementierungen auf der Basis des *Rotating-Crack*-Konzeptes robuster als jene auf der Grundlage des *Fixed-Crack*-Konzeptes und weisen zudem geringere Locking-Effekte auf. □

## 7.4 L-förmige Scheibe

Die Strukturen aus den Abschnitten 7.2 und 7.3 weisen beide einen geraden Verlauf des Risses auf. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Daher wird in diesem Unterkapitel ein Standard-Benchmark berechnet, der zu einem gekrümmten Rißverlauf führt. Hierzu wird eine L-förmige Scheibe betrachtet (s. [LACKNER 1999; HUEMER 1998; MENRATH 1999] und [MOSLER & MESCHKE 2001B; MOSLER & MESCHKE 2001A]). Die Topologie der Struktur und die elastischen Materialparameter sind Abb. 7.26 zu entnehmen. Die Belastung, die in der Form einer vertikalen Verschiebung am rechten Rand der Struktur aufgebracht wird, führt zu einer Rißinitiierung in der singulären Ecke der Scheibe. Neben der gleichmäßigen vorgeschriebenen vertikalen Verschiebung ist an diesem Rand keine weitere Randbedingung der primären Variablen vorgeschrieben.

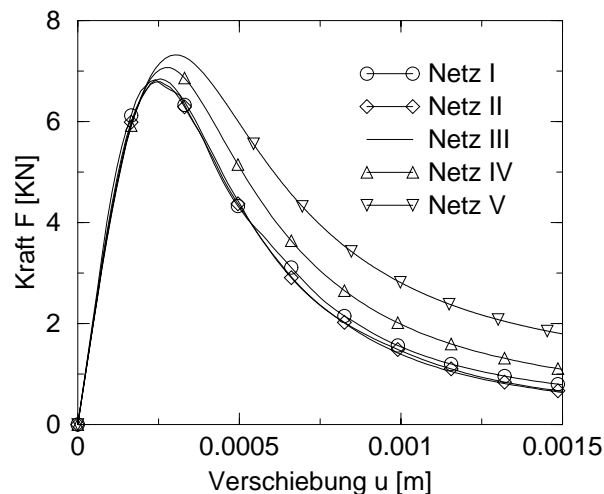


**Abb. 7.27:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verwendete Diskretisierungen.

Nach einer Reißinitiation an der einspringenden Ecke wächst der Riß leicht geneigt nach unten an. Wird die Belastung in der Form der vorgeschriebenen Verschiebung  $u$  weiter erhöht, ändert sich die Richtung des weiteren Rißverlaufes solange, bis ein horizontaler Verlauf vorliegt. Dieser Riß wächst bis zur gegenüberliegenden Seite der einspringenden Ecke weiter an. Für eine ausführlichere Darstellung des Versagensmechanismus wird auf [WINKLER 2001] verwiesen. Neben numerischen Analysen sind dort auch die dazu korrespondierenden Versuchsergebnisse an bewehrten und unbewehrten Betonproben enthalten.

Analog zu den Abschnitten 7.2 und 7.3 wird die Struktur mit unterschiedlichen Diskretisierungen berechnet. Neben den Diskretisierungen Netz I-V, die aus Rechtecks-Elementen zusammengesetzt sind, wird auch eine Dreiecks-Diskretisierung, welche mit dem DELAUNY-Algorithmus erzeugt worden ist, betrachtet. Zusammenfassend sind die Diskretisierungen in Abb. 7.27 dargestellt.

Wie in den Arbeiten [LACKNER 1999], [WINKLER 2001] dargelegt wurde, ist die Systemantwort stark abhängig von der berechneten Rißtopologie. Je stärker die numerisch berechnete Rißtopologie vom gekrümmten Verlauf abweicht und zu einem horizontalen geraden Verlauf übergeht, desto geringer ist die maximal aufnehmbare vertikale Last  $F$ . Demnach ist anhand der



**Abb. 7.28:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Last-Verschiebungs-Diagramme am Lastangriffspunkt für das Element Q4S.

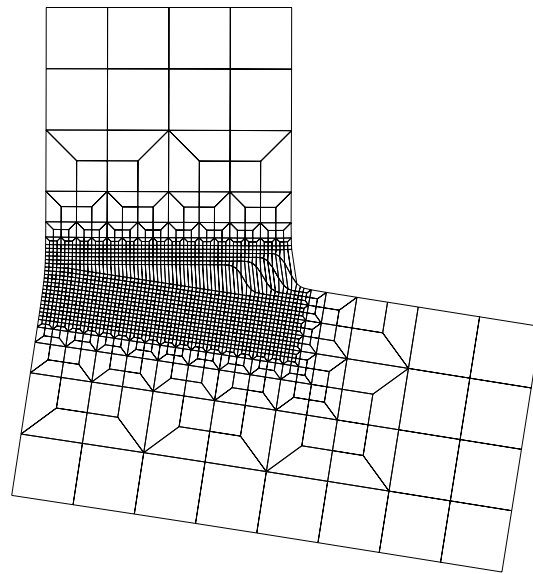
Last-Verschiebungs-Diagramme die Konvergenz der numerisch ermittelten Rißtopologie zur analytischen Lösung zu verifizieren.

#### 7.4.1 Elemente Q4S und Q8S

Zu Beginn von Abschnitt 7.4 erfolgt die Analyse der Struktur aus Abb. 7.26 mittels der Elemente Q4S und Q8S. Im Gegensatz zu Abschnitt 7.3 wird somit die numerische Berechnung sowohl mit bilinearer als auch mit biquadratischer Approximation des Verschiebungsfeldes durchgeführt. Zur Approximation des inelastischen Materialverhaltens wird unverändert das RANKINE-Kriterium, in Verbindung mit der exponentiellen Entfestigung  $q(\alpha) = f_{tu} \exp \frac{-\alpha}{\alpha_u}$ , verwendet. Gemäß dem Bruchenergiekonzept wird  $\alpha_u$  auf der Grundlage der Bruchenergie  $\mathcal{G}_f = 0.1 \text{ KN m/m}^2$  und der charakteristischen Länge nach Abschnitt 6.2 ermittelt. Die verschiebungsgesteuerte Belastung erfolgt inkrementell in Schritten von  $\Delta u = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Als Iterationsabbruchbedingung dient Gl. (7.1) mit  $tol = 10^{-8}$ .

Das Strukturantwortverhalten auf der Basis des Elementes Q4S für die Diskretisierungen I bis V ist Abb. 7.28 zu entnehmen. Wie aus Abb. 7.28 ersichtlich ist, weisen die numerischen Lösungen für die Modelle I bis III nur geringfügige Abweichungen auf. Die Ergebnisse der Diskretisierungen IV und V, die auf einer größeren Anzahl von finiten Elementen basieren, weichen jedoch deutlicher von den anderen numerischen Lösungen ab. Wie im weiteren Verlauf dieses Abschnitts gezeigt wird, ist dies auf die nur unzureichend approximierte Rißtopologie der Diskretisierungen I-III zurückzuführen.

Das zu Diskretisierung V korrespondierende verformte Finite-Elemente-Netz ist in Abb. 7.29 dargestellt. Anhand Abb. 7.29 ist der Verlauf des Risses für  $u = 0.0015$  deutlich zu erkennen. Das zu Mikro- und Makrorissen äquivalente Verschiebungsfeld erstreckt sich von der einsprin-

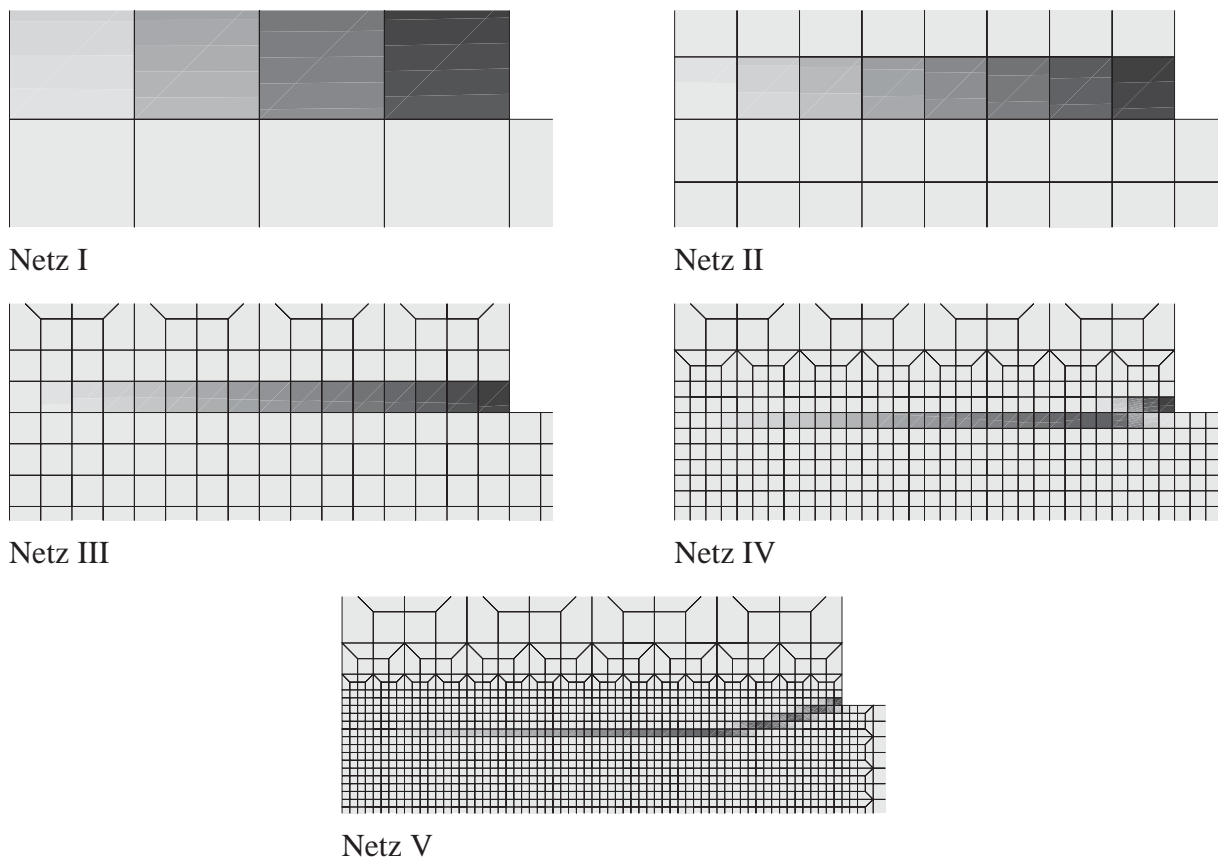


**Abb. 7.29:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verformte Diskretisierung Netz V bei vollständiger Belastung (überhöht dargestellt).

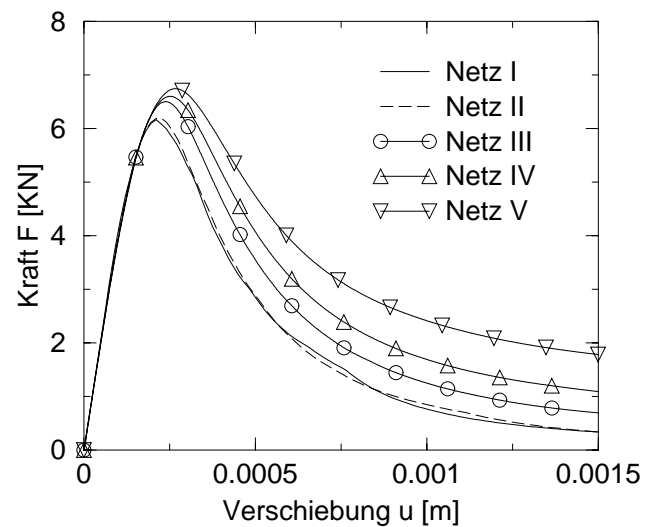
genden Ecke bis kurz vor die gegenüberliegende Seite. Desweiteren wird aus Abb. 7.29 ersichtlich, daß sich der restliche Anteil der Struktur im Entlastungszustand befindet. Die berechnete Rißtopologie ist äquivalent zu der experimentell ermittelten Topologie (s. [WINKLER 2001]).

Da für die Struktur aus Abb. 7.27 eine starke Interaktion zwischen der Rißtopologie und dem korrespondierenden Last-Verschiebungs-Diagramm vorliegt (s. [WINKLER 2001]), wird im Folgenden die Entwicklung des Bereiches inelastischer Verformungen analysiert. Die Verteilung der internen Variablen  $\alpha$  ist für die Diskretisierungen I-V in Abb. 7.30 dargestellt. Analog zu den Last-Verschiebungs-Diagrammen nach Abb. 7.29 sind die Unterschiede in den Verteilungen von  $\alpha$  für die Diskretisierungen I-III lediglich minimal. Jede der Diskretisierungen führt zu einem horizontalen, geraden Rißverlauf. Im Gegensatz dazu korrespondiert zu den FE-Netzen IV und V ein gekrümmter Riß. Dabei nimmt die Krümmung bei steigender Anzahl von finiten Elementen zu. Die Unterschiede im globalen Strukturantwortverhalten sind demnach primär auf die Unterschiede in der approximierten Rißtopologie zurückzuführen.

In diesem Absatz erfolgen die gleichen Berechnungen mittels des Elementes Q8S. Im Gegensatz zum bilinearen Element Q4S basiert das finite Element Q8S auf einer biquadratischen Approximation des Verschiebungsfeldes. Analog zum Element Q4S wird zur Interpretation der numerischen Berechnungen, neben der Last-Verschiebungs-Diagramme in Abb. 7.31, auch die Verteilung der internen Variable  $\alpha$  herangezogen (s. Abb. 7.32). Vergleicht man die beiden Abbildungen, fällt auch hier auf, daß das globale Strukturantwortverhalten maßgeblich von der Approximation des Rißverlaufes beeinflusst wird. Beide Diskretisierungen, die einen geraden Rißverlauf aufweisen (Netz I und II), unterscheiden sich lediglich minimal im Last-Verschiebungs-Diagramm. Aus feiner werdender Diskretisierung resultiert ein stärker gekrümmter Rißverlauf, welcher wiederum eine höhere maximale aufnehmbare Last zur Folge hat. Analog zu den nu-

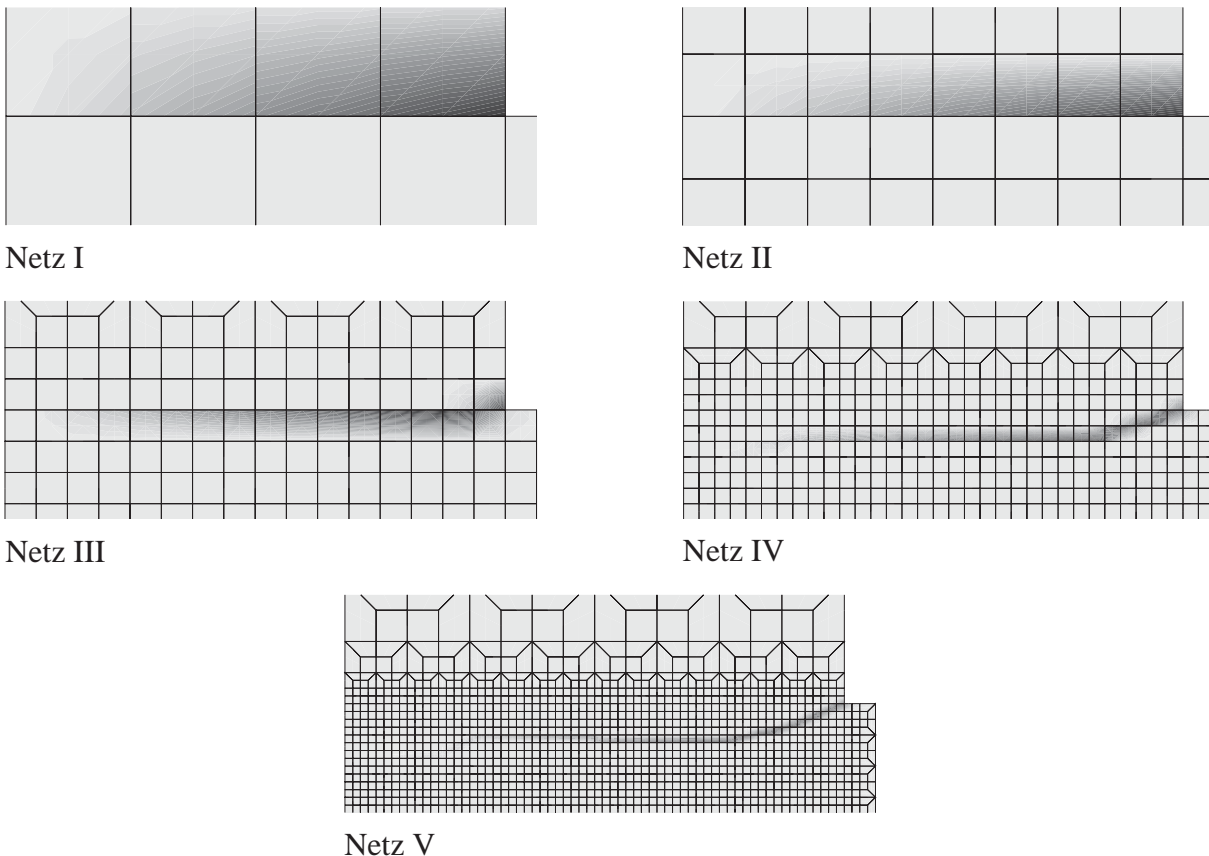


**Abb. 7.30:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q4S (Eckbereich vergrößert).



**Abb. 7.31:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Last-Verschiebungs-Diagramme am Lastangriffspunkt für das Element Q8S.





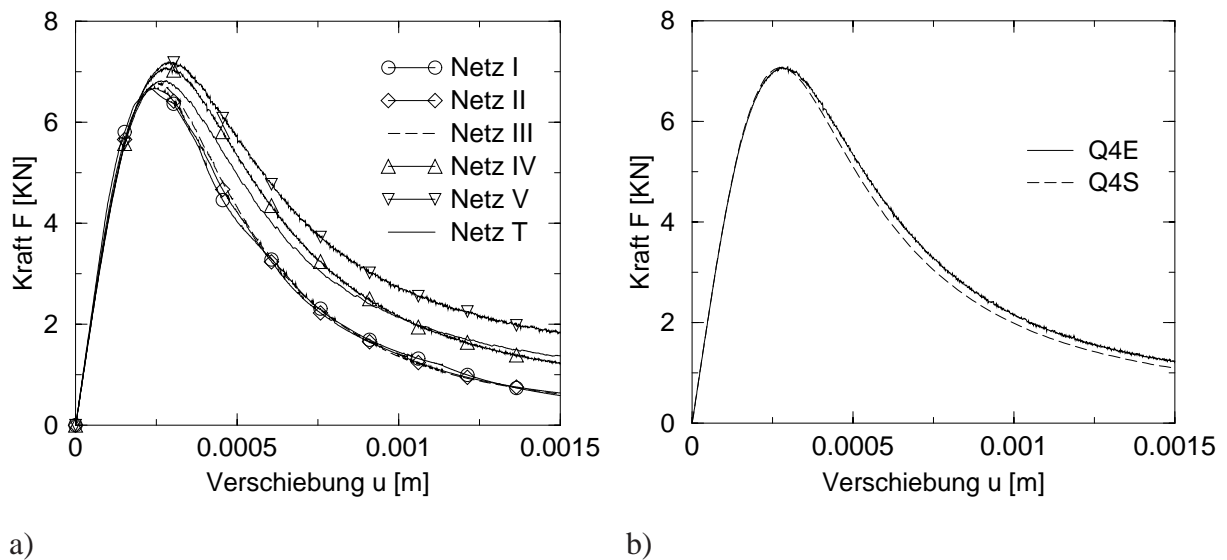
**Abb. 7.32:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q8S (Eckbereich vergrößert).

merisch berechneten Lösungen auf der Basis des Elementes Q4S ist auch für das Element Q8S die Variation der Maxima der Last-Verschiebungs-Diagramme primär auf die Rißtopologie zurückzuführen. Dabei ist der quantitative Unterschied der Diagramme selbst zwischen den Diskretisierungen Netz IV und Netz V im post-kritischen Bereich gemäß Abb. 7.31 beträchtlich.

## 7.4.2 Elemente T3E, Q4E, Q8EL und Q8EQ

Nach der numerischen Analyse der L-förmigen Scheibe auf der Grundlage der Elemente Q4S und Q8S werden im vorliegenden Abschnitt die gleichen Diskretisierungen mittels der Elemente T3E, Q4E, Q8EL und Q8EQ berechnet. Dabei werden zu Beginn des Abschnitts die bilinearen Elemente T3E und Q4E verwendet. Anschließend wird die Scheibe mittels der bi-quadratischen Elemente Q8EL und Q8EQ analysiert.

Zusammenfassend sind die Ergebnisse der bilinearen Elemente T3E und Q4E in Abb. 7.33 dargestellt. Neben den verschiedenen Diskretisierungen ist für Netz IV auch ein Vergleich mit dem Element Q4S zu entnehmen.

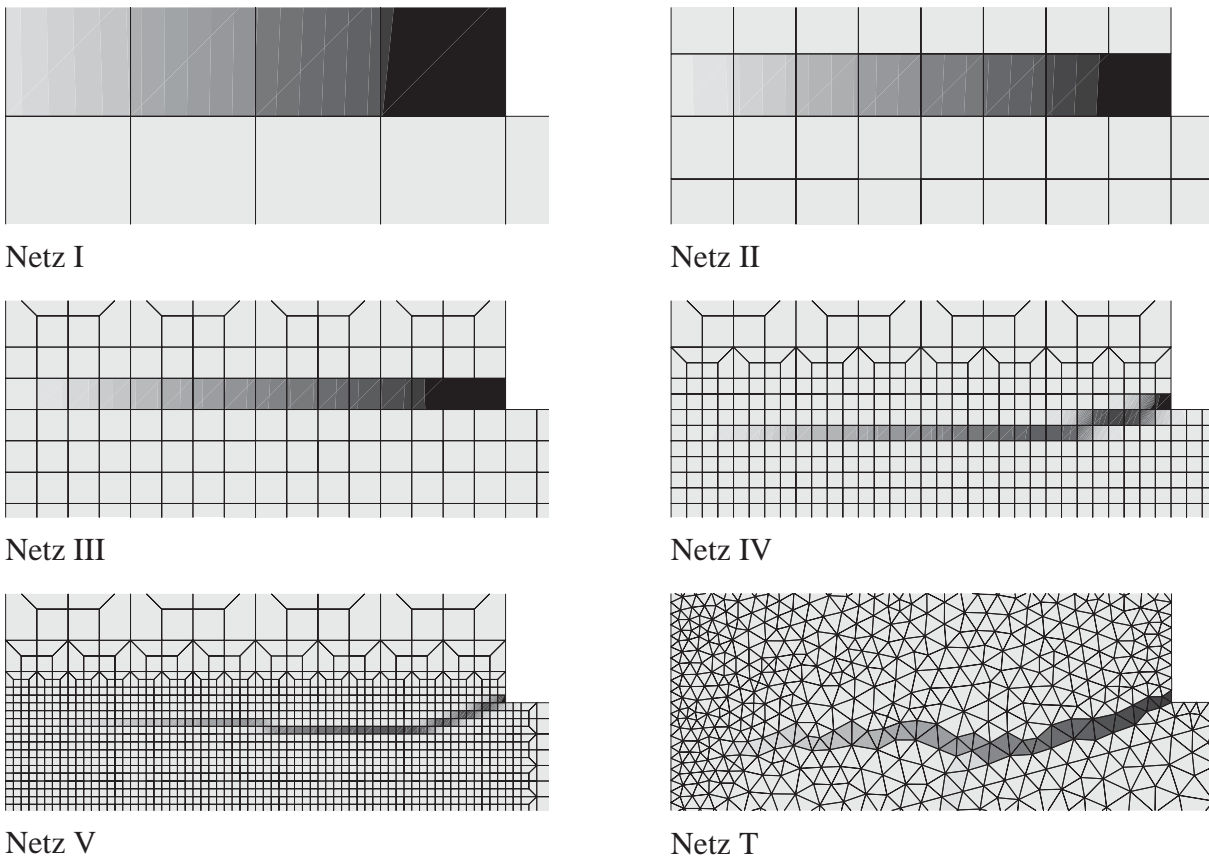


**Abb. 7.33:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Last-Verschiebungs-Diagramme am Lastangriffspunkt: a) Elemente Q4E (Netz I-V) und T3E (Netz T), b) Vergleich Netz IV, Element Q4E und Q4S.

Vergleicht man Abb. 7.33a mit Abb. 7.28, fällt auf, daß sich die Diagramme nur geringfügig unterscheiden. Dies wird durch Abb. 7.33b bestätigt. Wie aus Abb. 7.33b ersichtlich ist, sind die Unterschiede zwischen den Elementen Q4S und Q4E für Netz IV lediglich minimal.

Gemäß Abschnitt 7.4.1 wird das Last-Verschiebungs-Diagramm maßgeblich von der Topologie des Risses beeinflußt. Daher wird die Verteilung der internen Variable  $\alpha$  analysiert. In Abb. 7.34 ist für die Elemente T3E und Q4E der Bereich der inelastischen Deformationen für die verschiedenen Diskretisierungen dargestellt. Der Vergleich von Abb. 7.34 mit Abb. 7.30 führt zur gleichen Aussage wie die Analyse der Last-Verschiebungs-Diagramme. Analog zu den numerisch ermittelten Ergebnissen auf der Basis des Elementes Q4S verlaufen auch für das Element Q4E die Risse der Diskretisierungen Netz I bis Netz III horizontal. Erst das Modell Netz IV weist einen gekrümmten Rißverlauf auf. Die aufgebrachte Netzorientierung wird folglich, äquivalent zum Element Q4S, erst ab der Diskretisierung IV überwunden. Neben den Parallelen der numerischen Ergebnisse für die Elemente Q4S und Q4E werden bei den Diskretisierungen IV und V auch kleinere Unterschiede deutlich. Vergleicht man die Ergebnisse der beiden vierknotigen Elemente für die Diskretisierung Netz IV, fällt auf, daß der Rißverlauf für das Element Q4E stärker gekrümmt ist. Gleiches ist ebenfalls für Netz V zu beobachten. Der Unterschied ergibt sich für Netz V als Differenz des Winkels  $\alpha \approx 17^\circ$ , basierend auf dem Element Q4S, und  $\alpha \approx 22^\circ$ , basierend auf Element Q4E, zu  $\Delta\alpha \approx 5^\circ$ . Desweiteren weist lediglich die Rißtologie der Diskretisierung Netz V für das Element Q4E noch eine weitere Richtungsänderung auf.

Faßt man die Analysen der Last-Verschiebungs-Diagramme und der inelastischen Bereiche zusammen, wird deutlich, daß die Abweichungen der Ergebnisse auf der Basis des Elementes

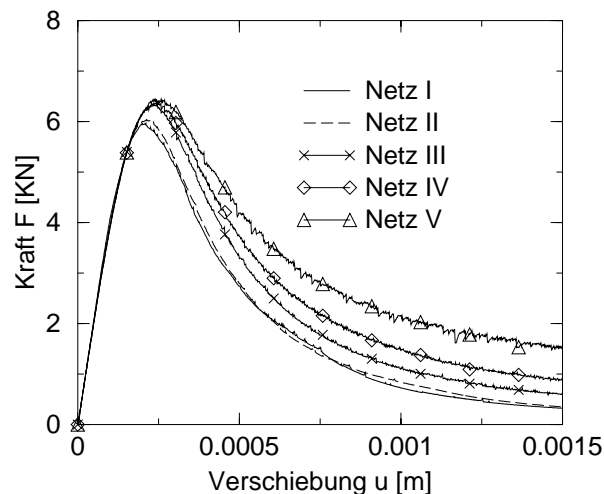


**Abb. 7.34:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q4E (Netz I-V), bzw. T3E (Netz T) (Eckbereich vergrößert).

Q4E im Vergleich zum Element Q4S minimal sind. Sowohl für das Element Q4S als auch für das Q4E wurde die vorgegebene Netzorientierung erst ab der Diskretisierung IV überwunden, so daß ein gekrümmter Rißverlauf entsteht. Da die berechnete Strukturantwort maßgeblich von der Topologie des Rißverlaufes beeinflusst wird, resultierten aus diesem gleichartigen Einfluß für beide Elementtypen nahezu identische Last-Verschiebungs-Diagramme. Analog zu Abschnitt 7.3.1 ist somit auch für die Analyse der L-förmigen Scheibe mittels des Elementes Q4E eine Abhängigkeit der numerisch ermittelten Ergebnisse bezüglich der Netzorientierung zu erkennen.

Im Anschluß an die Analyse der L-förmigen Scheibe mittels der bilinearen Elemente T3E und Q4E erfolgt die Berechnung auf der Grundlage der Elemente Q8EL und Q8EQ. Auf der Basis des biquadratischen Elementes Q8S wird der diskontinuierliche Anteil des Verschiebungsfeldes bilinear (Q8EL) bzw. biquadratisch (Q8EQ) interpoliert.

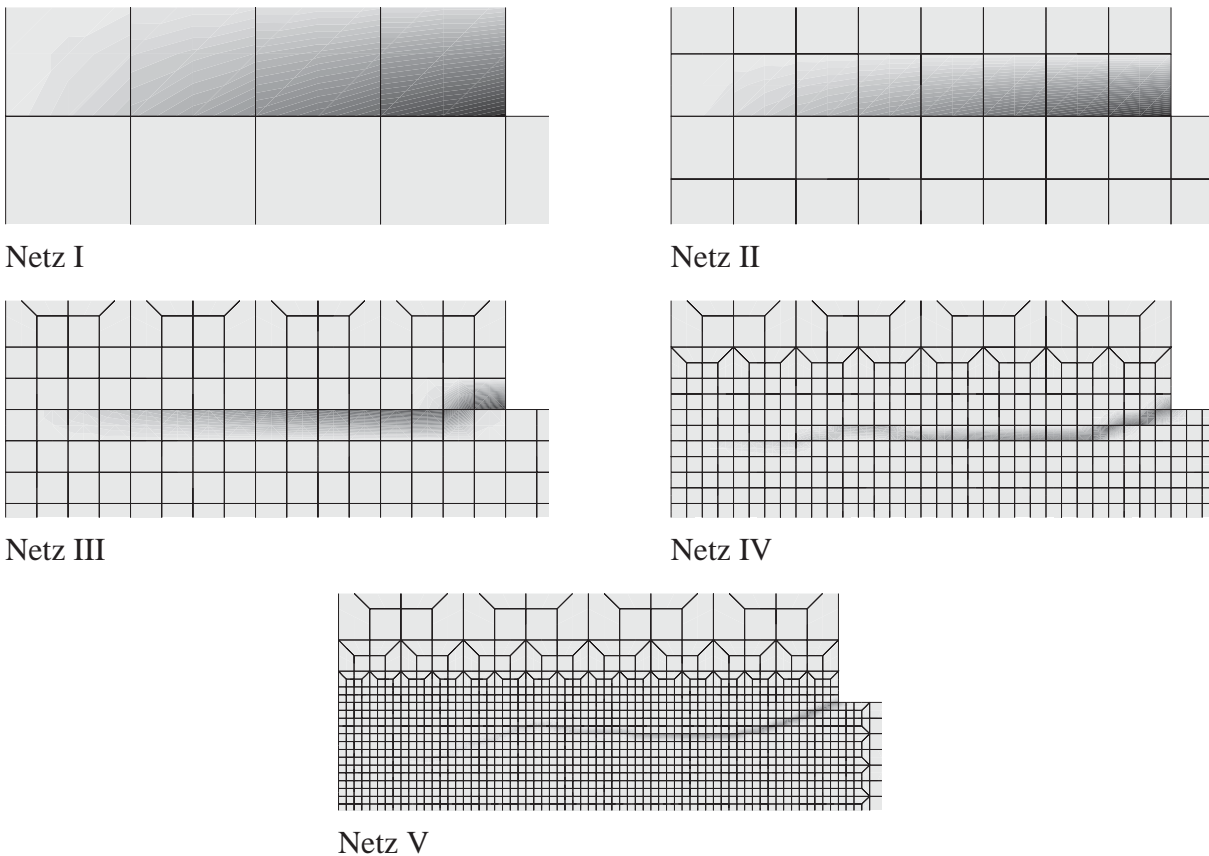
Das berechnete Strukturantwortverhalten für das Elementes Q8EL ist Abb. 7.35 zu entnehmen. Analog zum Vergleich der Elemente Q4S und Q4E weisen auch die Ergebnisse der Elemente Q8S und Q8EL nahezu identische Last-Verschiebungs-Diagramme auf (vgl. Abb. 7.35 mit Abb. 7.31).



**Abb. 7.35:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Last-Verschiebungs-Diagramme am Lastangriffspunkt für das Element Q8EL.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse für die finiten Elemente Q8S und Q8EL ist auch anhand der Verteilung der internen Variable  $\alpha$  gemäß Abb. 7.36 deutlich zu erkennen. Jede der fünf verschiedenen Diskretisierungen führt zu einem Rißverlauf, welcher für die Elemente Q8S und Q8EL nur unwesentlich abweicht. Dabei weisen die Diskretisierungen Netz I und II einen geraden Rißverlauf auf. Wird die Anzahl der finiten Elemente erhöht, ist ab Netz III bereits eine gekrümmte Rißtopologie zu erkennen. Diese Krümmung beträgt für das Netz V im Bereich der einspringenden Ecke ungefähr  $20^\circ$  (s. Abb. 7.36).

Um den Einfluß des Polynomgrads der Funktion  $M_s$  besser abzuschätzen, erfolgt die gleiche Analyse sowohl mit biquadratischem Ansatz der regulären Verschiebungen als auch mit biquadratischem Ansatz für das erweiterte Verschiebungsfeld  $\hat{u}$ . Die folgenden numerischen Analysen basieren somit auf dem Element Q8EQ. Die hierzu korrespondierenden Last-Verschiebungs-Diagramme sind in Abb. 7.37a zusammengestellt. Um einen Vergleich für die drei Elemente Q8S, Q8EL, Q8EQ zu ermöglichen, sind in Abb. 7.37b die Last-Verformungskurven für Netz IV dargestellt. Gemäß Abb. 7.37b ist der Unterschied zwischen den Elementen Q8EL und Q8EQ nicht sehr groß. Untersucht man Abb. 7.37b jedoch genauer, fällt auf, daß die Sprungstellen im Graph des Elementes Q8EQ gegenüber Element Q8EL zunehmen. Diese Aussage wird durch den Vergleich der Diagramme 7.35 und 7.37a bestätigt. Die Begründung für diese Zunahme an Oszillationen ist in der steigenden Anzahl verschiedener numerischer Lokalisierungsmodi des Elementes Q8EL zu finden. Sind gemäß Abschnitt 5.2.2 für das Element Q8EL lediglich zwei verschiedene numerische Lokalisierungsmodi möglich, so erhöht sich die Anzahl der Lokalisierungsmodi für das Element Q8EQ. Da die Implementierung der Elemente Q8EL und Q8EQ nach Abschnitt 5.9.1 auf dem *Rotating-Crack*-Konzept basiert, kann im Rahmen des Return-Mapping-Algorithmus eine Oszillation zwischen zwei verschiedenen Lokalisierungsmodi auftreten (s. Anmerkung, Seite 107). Die Anzahl der möglichen Oszillationen

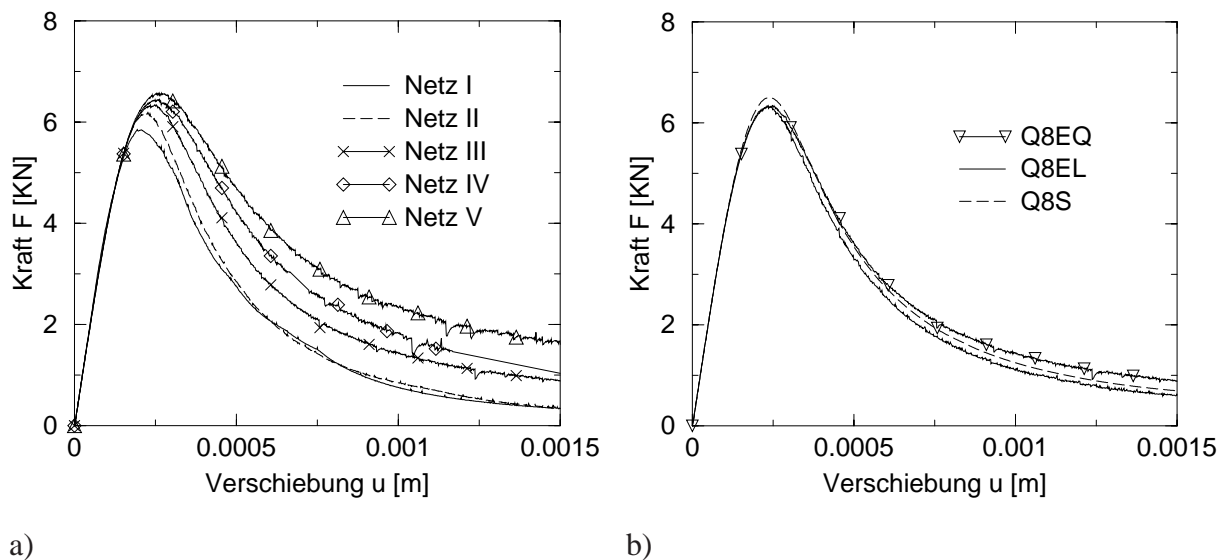


**Abb. 7.36:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q8EL (Eckbereich vergrößert).

hängt dabei von der Anzahl der möglichen numerischen Lokalisierungsmodi ab. Somit weisen die Last-Verschiebungs-Diagramme des Elementes Q8EQ mehr Sprungstellen auf als jene des Elementes Q8EL.

Die Rißtopologie der Diskretisierungen Netz I bis V sind für das Element Q8EQ aus Abb. 7.38 ersichtlich. Vergleicht man Abb. 7.38 mit Abb. 7.36 und 7.32, sind keine wesentlichen Unterschiede zu erkennen. Erst ab Netz III wird ein gekrümmter Rißverlauf berechnet, welcher mit feiner werdender Diskretisierung für Netz V in einem Winkel von  $20^\circ$  in der einspringenden Ecke beginnt und nach einem horizontalen Verlauf leicht gekrümmt nach unten weiter verläuft.

Aus dem Vergleich der Ergebnisse auf der Basis der Elemente Q8EL und Q8EQ wird deutlich, daß der Grad der erweiterten Verschiebungen  $\hat{u}$  aufgrund auftretender Oszillationen möglichst gering zu wählen ist. Eine Erhöhung des Ansatzgrades des kompatiblen Verschiebungsfeldes  $\bar{u}$  hingegen verbessert die Auflösung der elastischen Materialantwort.



**Abb. 7.37:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Last-Verschiebungs-Diagramme am Lastangriffspunkt: a) für das Element Q8EQ, b) Vergleich für Netz IV: Element Q8S, Q8EL und Q8EQ.

### 7.4.3 Gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell

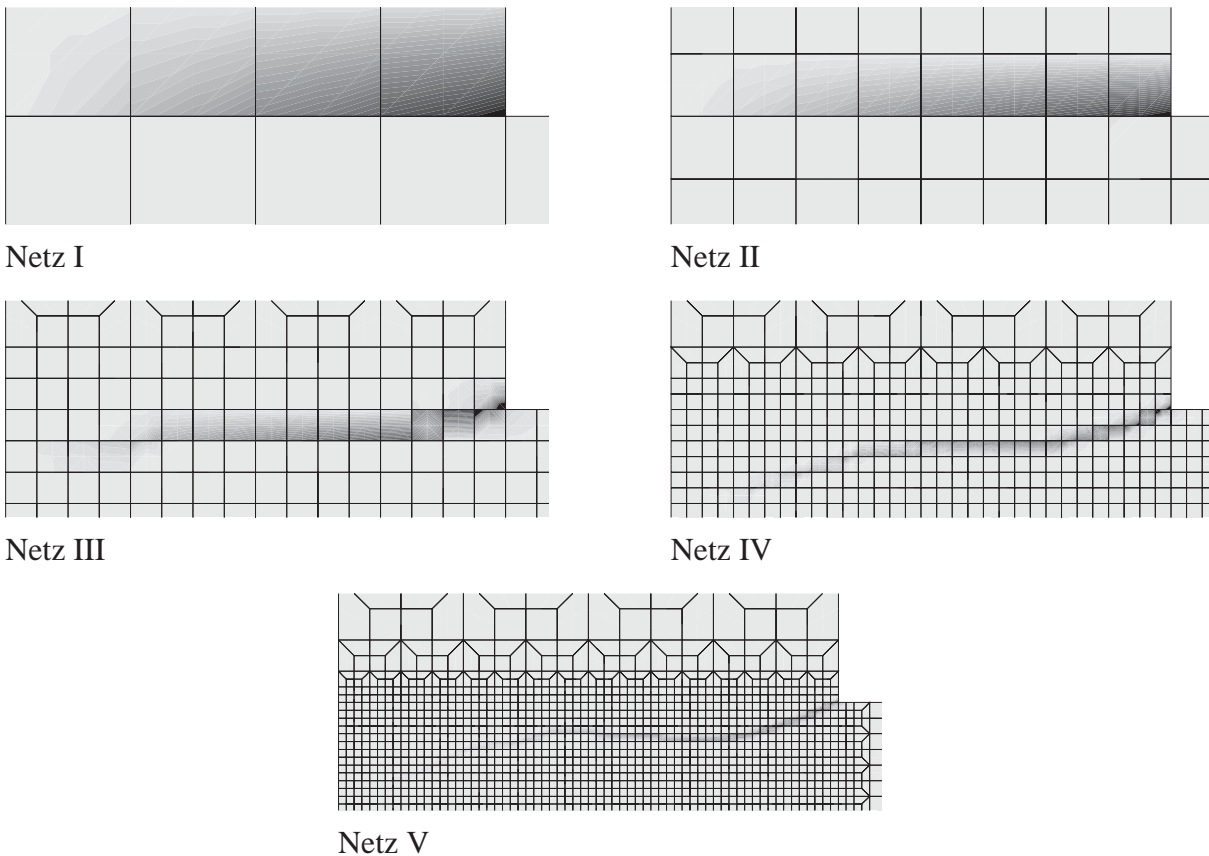
Auf der Basis des Elementes Q4E und der Diskretisierung Netz IV wird in diesem Abschnitt das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell nach Abschnitt 5.8 zur Analyse der L-förmigen Scheibe herangezogen. Demnach wird der Materialparameter  $\beta$  nach Abschnitt 5.9.1 von Null verschieden gewählt. Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels wird die Entfestigungsevolution mittels der Gleichung

$$q(\alpha) = f_{tu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_u}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \alpha_u = 1.8 \cdot 10^{-4} \quad (7.3)$$

vorgeschrieben und der Kopplungsparameter zu  $\beta = 0.3$  angenommen. Die anderen Materialparameter hingegen folgen unverändert aus Abb. 7.26.

Um neben dem Rißverlauf auch die anisotrope Degradation der elastischen Materialparameter zu erkennen, werden die Verschiebungen zyklisch aufgebracht. Nach 4-maliger Be- und Entlastung wird die verschiebungskontrollierte Berechnung bis zu einer maximalen Verschiebung von  $u = 0.00138$  fortgesetzt.

Die Ergebnisse der Analyse sind in Abb. 7.39 zusammengefaßt dargestellt. Wie aus dem Vergleich der Abb. 7.39a mit Abb. 7.34 zu erkennen ist, hat das erweiterte Materialmodell nur einen sehr geringen Einfluß auf die Verteilung der internen Variable  $\alpha$ . Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Struktur bei Laststeigerung im Bereich der inelastischen Verformungen keine Entlastungsvorgänge erfährt. Hierdurch sind die plastischen und die schädigungs-induzierten Entfestigungsmechanismen nicht voneinander zu unterscheiden. Dieser Sonderfall tritt bei kom-



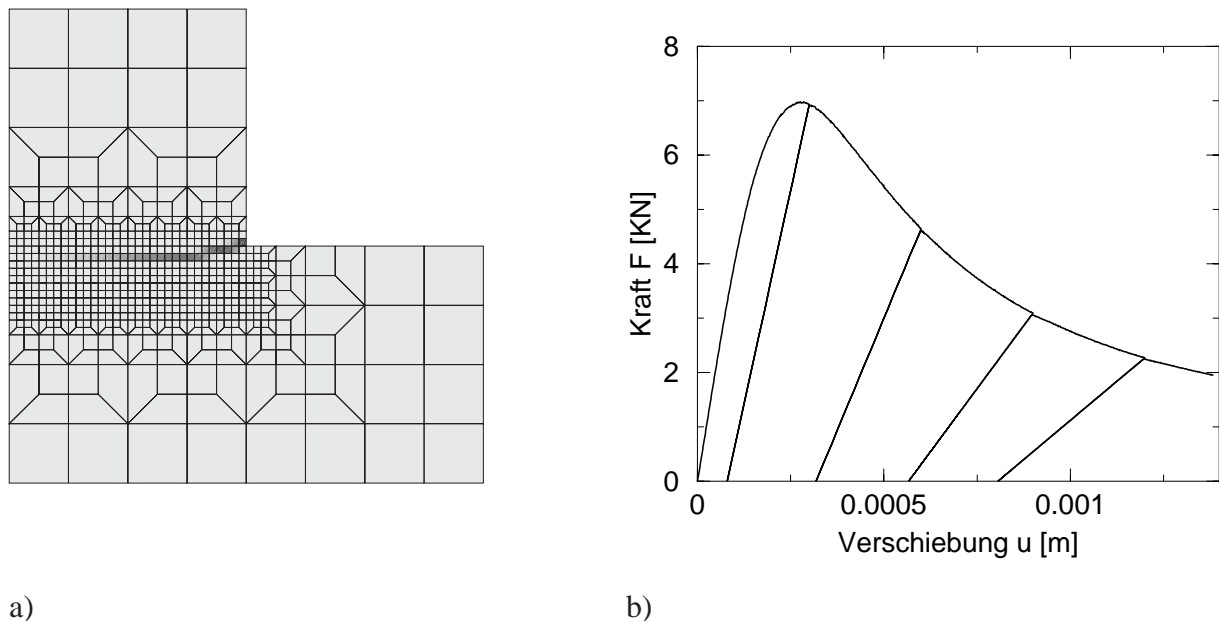
**Abb. 7.38:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q8EQ (Eckbereich vergrößert).

plexeren Strukturen nicht auf. Dort sind aufgrund von Lastumlagerungsmechanismen die Rißtopologien bzw. die Last-Verschiebungs-Diagramme, trotz globaler Belastung, für Schädigungs- und Plastizitätsmodelle unterschiedlich. Zur Verdeutlichung des Einflusses der Schädigung auf die Materialantwort wird auf Abb. 7.39b verwiesen. Mit fortschreitender Belastung nimmt die elastische Steifigkeit der Struktur ab.

## 7.5 Dreidimensionale Anker-Auszugs-Versuche

Nach den zweidimensionalen Studien zur Abhängigkeit der finiten Elemente aus Kapitel 5 von der räumlichen Diskretisierung wird in diesem Abschnitt die dreidimensionale Implementierung des erweiterten Elements V8E an praxisnahen Anker-Auszugs-Versuchen überprüft. Dabei wird im ersten Beispiel (s. Abschnitt 7.5.1) der Anker parallel zur Stabachse belastet. Anschließend erfolgt in der zweiten Berechnung (s. Abschnitt 7.5.2) die Beanspruchung auf Schub. Die berechneten Strukturen sind beide der Arbeit [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] entnommen worden.





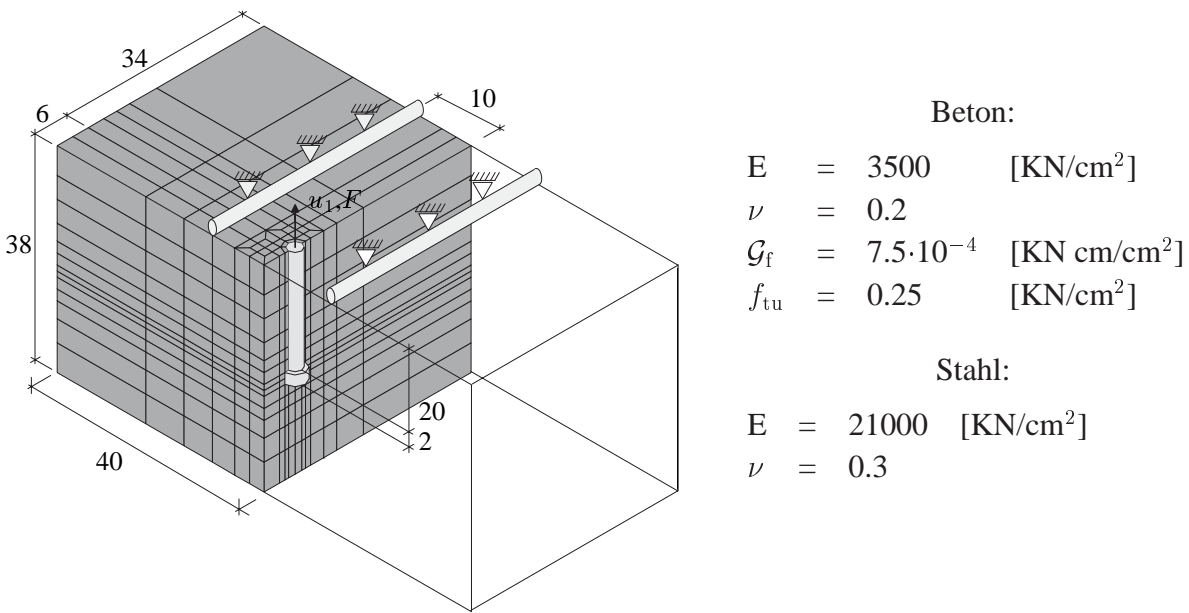
**Abb. 7.39:** Finite-Elemente-Analyse einer L-förmigen Scheibe: a) Verteilung der internen Variable  $\alpha$ , Diskretisierung mit Element Q4E, b) Last-Verschiebungs-Diagramm.

An dieser Stelle ist es notwendig zu erwähnen, daß die in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] durchgeführten numerischen Analysen gezeigt haben, daß die Ergebnisse wesentlich vom inelastischen Materialverhalten im Druckbereich beeinflußt werden. Da das Element V8E gemäß des RANKINE-Kriteriums im Druckbereich nicht zu inelastischen Verformungen führt, sind die in diesem Abschnitt berechneten Lösungen nur begrenzt mit den Ergebnissen aus der Arbeit [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] vergleichbar.

Beide Anker-Auszugs-Versuche werden im folgenden mittels zwei verschiedener Diskretisierungen berechnet. Hierdurch ist es möglich, Aussagen bezüglich der Approximationsgüte in Abhängigkeit der Diskretisierung zu erarbeiten. Detaillierte Konvergenzuntersuchungen werden nicht durchgeführt. Da in den vorangegangenen Abschnitten belegt worden ist, daß die numerischen Analysen der finiten Elemente mit diskontinuierlicher Verschiebungsapproximation nur minimal von denen auf der Basis von Plastizitätsmodellen mit  $C^0$ -stetigem Verschiebungsfeld abweichen, führt eine Konvergenzuntersuchung für das Element V8E zu keinen neuen Ergebnissen.

### 7.5.1 Anker-Auszugs-Versuche: Test 1

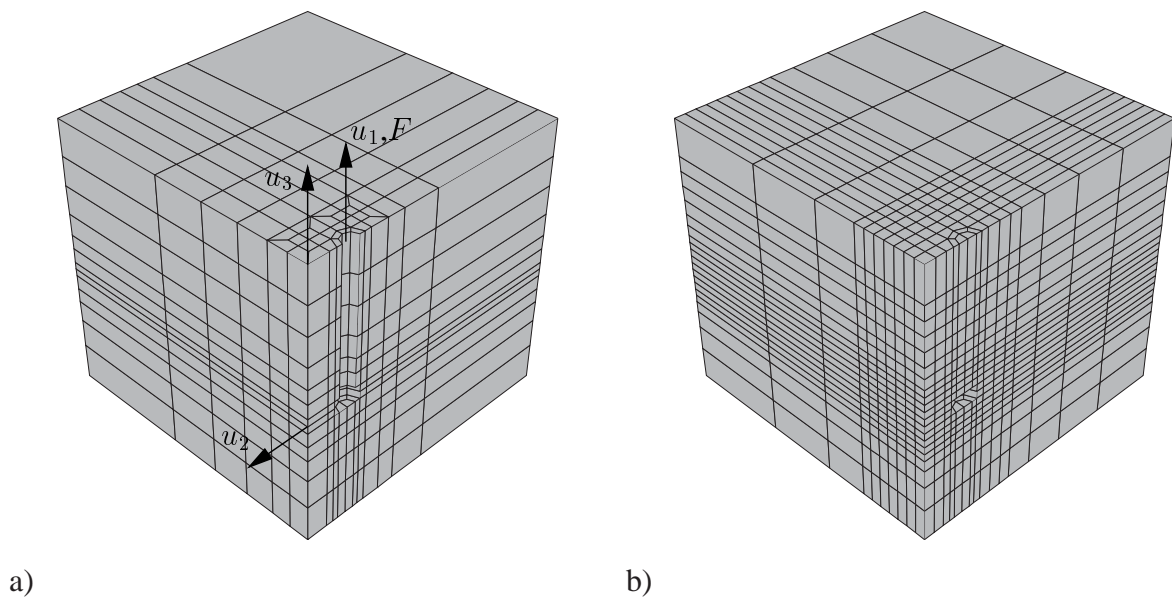
Der erste Anker-Auszugs-Versuch ist in Abb. 7.40 dargestellt. Aufgrund von Symmetriebedingungen wurde nur eine Hälfte der Struktur diskretisiert. Neben den geometrischen Abmessungen und der Definition der DIRICHLET-Randbedingungen sind sowohl die Materialparameter des Betons als auch die des Stahllankers zu entnehmen.



**Abb. 7.40:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuchs: Test 1: Systemskizze (Längenangaben in [cm]) und Materialparameter.

Das inelastische Materialverhalten des Betonwürfels wird analog zu den numerischen Analysen der Abschnitte 7.2, 7.3 und 7.4 mittels des RANKINE-Kriteriums beschrieben. Hierzu wird das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell nach Abschnitt 5.8 bzw. 5.9.1 verwendet. Desweiteren wird der Stahlanker mittels des HOOKESchen Materialgesetzes approximiert. Folglich werden inelastische Verformungen des Ankers unterbunden und die Spannungen nicht begrenzt. Zwischen dem randnahen Anker mit einem Kopfdurchmesser von 4 cm und einem Stabdurchmesser von 2 cm und der Betonstruktur ist für den Verbund eine vereinfachende Annahme getroffen worden. Um Inkonsistenzen bezüglich der vorhandenen Kontaktalgorithmen im Programmsystem *MSC. MARC* zu umgehen, sind die Knoten in der Kontaktfläche doppelt definiert worden und die Translationen in horizontaler Richtung gekoppelt worden. Hierdurch können Normalspannungen und horizontale Schubspannungen zwischen Anker und der Betonstruktur übertragen werden, Schubspannungen in vertikaler Richtung jedoch nicht. Da bestehende Kontaktalgorithmen somit nicht genutzt werden, sind Konvergenzprobleme eindeutig dem Materialverhalten zuzuordnen.

In den in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] dokumentierten Versuchen wird die aufnehmbare Last  $F$  durch eine lokale Schädigung in Höhe des Kopfbolzens begrenzt. Nach dem Erreichen der maximalen Belastung ist die materielle Schädigung so stark angewachsen, daß ein Abplatzen der Betondeckung zur randnahen Seite beobachtet wird. Die in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] mittels des *Microplane*-Modells [BAŽANT & GAMBAROVA 1984; BAŽANT & OH 1985] durchgeführten Finite-Elemente-Berechnungen approximierten den experimentell ermittelten Versagensprozeß qualitativ und quantitativ gut. Hierbei ist zu erwähnen, daß eine starke Abhängigkeit der numerischen Analysen von der Variation der Ma-



**Abb. 7.41:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Verwendete Diskretisierungen und Definition von drei ausgewählten Punkten  $u_1, u_2, u_3$ : a) Diskretisierung **grob**, bestehend aus 820 trilinearen Elementen, b) Diskretisierung **fein**, bestehend aus 2802 trilinearen Elementen.

terialparameter dokumentiert wurde.

Zur numerischen Analyse des vorliegenden Anker-Auszugs-Versuches werden zwei unterschiedliche Diskretisierungen verwendet. Dabei wird die Systemsymmetrie berücksichtigt und lediglich eine Hälfte der Struktur diskretisiert. Neben einer Diskretisierung, bestehend aus 820 trilinearen Elementen, die im folgenden Diskretisierung **grob** genannt wird, ist ebenfalls eine Diskretisierung mittels 2802 trilinearen Elementen verwendet worden. Diese wird mit Diskretisierung **fein** abgekürzt. Beide Modelle sind in Abb. 7.41 dargestellt. Unverändert zu den anderen Abschnitten des vorliegenden Kapitels wird die Konvergenz der numerischen Berechnung mit dem auf der Supremumsnorm basierenden Kriterium nach Gl. (7.1) kontrolliert. Hierbei wird jedoch abweichend von den zweidimensionalen Berechnungen die Toleranz auf  $tol = 1.0 \cdot 10^{-6}$  reduziert. Wie in einer zuvor durchgeführten Analyse bestätigt worden ist, sind die hieraus resultierenden Abweichungen minimal. Die benötigte Rechenzeit reduziert sich jedoch deutlich. Innerhalb eines Inkrementes der verschiebungskontrollierten Berechnung wird die Verschiebungsamplitude  $u_1$  um  $\Delta u_1 = 2.156 \cdot 10^{-4}$  cm erhöht.

Um das Materialmodell aus Abschnitt 5.8 bzw. 5.9.1 hinreichend zu definieren, ist die Entfestigungsfunktion  $q(\alpha)$  zu spezifizieren. Analog zum Abschnitt 7.4.3 wird hierzu die hyperbolische Funktion

$$q^{\text{hyp}}(\alpha) = f_{tu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_u}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_f^{\text{hyp}} = \int_{\alpha=0}^{\infty} q^{\text{hyp}}(\alpha) d\alpha = f_{tu} \alpha_u \quad (7.4)$$

verwendet. Im Gegensatz hierzu wird die Entfestigung des *Fixed-Crack-Elementes* V8S linear

postuliert. Demnach folgt die Funktion  $q(\alpha)$  der Vorschrift

$$q^{\text{lin}}(\alpha) = f_{\text{tu}} - H \alpha \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_f^{\text{lin}} = \int_{\alpha=0}^{f_{\text{tu}}/H} q^{\text{lin}}(\alpha) \, d\alpha \, l_c = \frac{1}{2} \frac{f_{\text{tu}}^2}{H} l_c. \quad (7.5)$$

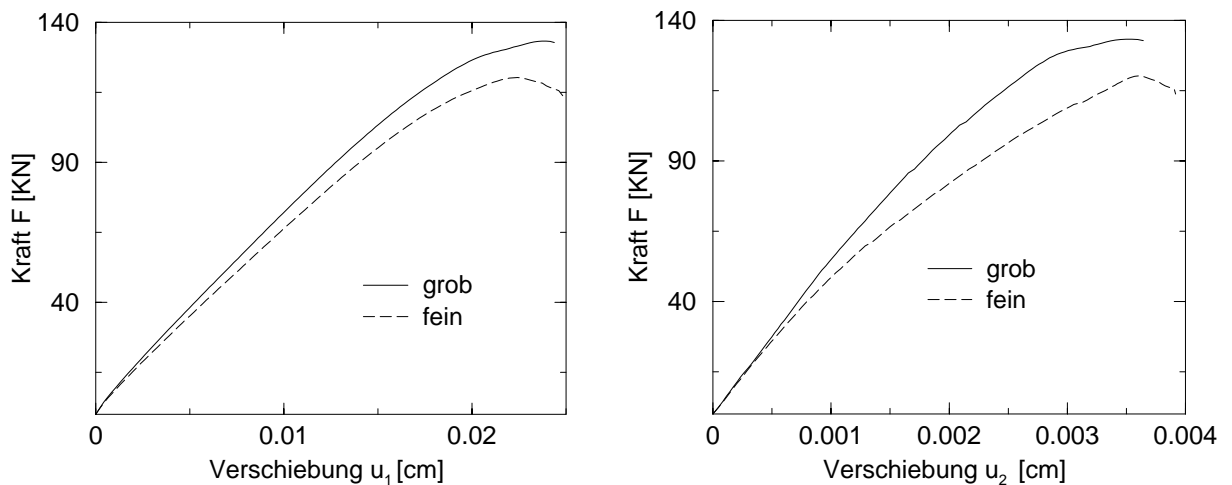
Die Anwendung zweier unterschiedlicher Entfestigungsevolutionen ist leicht zu motivieren. Bei einer zuvor durchgeführten numerischen Analyse der beiden Diskretisierungen mittels des Elementes **V8S** unter Verwendung der hyperbolischen Entfestigung, sind schon in den ersten Inkrementen gravierende numerische Konvergenzprobleme verifiziert worden. Wie gezeigt werden kann, ist der maximale Entfestigungsmodul bei gleicher Bruchenergie für die hyperbolische Entfestigung 4-mal größer als bei einem linearen Verlauf  $q(\alpha)$ . Da die zuvor angesprochenen Konvergenzprobleme auf die Größe des Entfestigungsmoduls zurückführen waren, werden diese bei linearer Entfestigung vermindert. Für das neu entwickelte finite Element **V8E** wird jedoch die numerisch ungünstigere hyperbolische Entfestigung (7.4) verwendet.

**Anmerkung:** Die Last-Verschiebungs-Diagramme der folgenden Unterabschnitte beziehen sich gemäß der Diskretisierung auf eine Symmetriehälfte der Struktur. Die im Experiment ermittelte Belastung ist daher durch zwei zu teilen.  $\square$

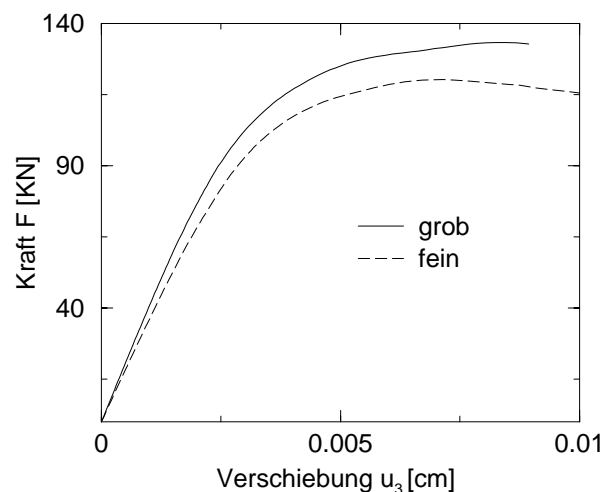
### 7.5.1.1 Element **V8S**

Analog zu den zweidimensionalen Berechnung wird die Struktur zuerst mittels eines finiten Elementes auf der Basis eines  $C^0$ -stetigen Verschiebungsfeldes analysiert. Dazu wird das in *MSC. MARC* implementierte *Fixed-Crack-Modell V8S* herangezogen. Die Last-Verschiebungs-Diagramme der zwei in Abb. 7.41 dargestellten Diskretisierungen sind für die drei Verschiebungen  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  den Abb. 7.42 und 7.43 zu entnehmen. Gemäß Abb. 7.43 enden die Last-Verschiebungs-Diagramme unmittelbar nach dem Erreichen der maximal aufnehmbaren Belastung. Sowohl für die Diskretisierung **grob** als auch für **fein** war es aufgrund von Konvergenzproblemen auch für kleinere Lastschritte nicht möglich, die Analyse weiter fortzusetzen. Somit wird der post-kritische Bereich nicht erfaßt. Die maximale Kraft  $F$  liegt bei 133.28 KN für die Diskretisierung **grob** und bei 120.27 KN für das Netz **fein**. Demnach weisen die Maxima eine Differenz von ungefähr 10% auf. Im Vergleich dazu beträgt die numerisch ermittelte maximale Last  $F$  aus [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] ca. 100 KN für eine Betondruckfestigkeit von 4 KN/cm<sup>2</sup>. Dieser Unterschied ist plausibel, da für das Element **V8S** keine Fließfläche im Druckbereich vorgegeben ist und somit eine unendlich große Druckfestigkeit unterstellt wird.

Um den Rißmechanismus zu verstehen, welcher zum Strukturversagen führt, sind in Abb. 7.44 und 7.45 die Verteilungen der internen Variable  $\alpha$  dargestellt. Für beide Diskretisierungen ist der letzte noch konvergierte Schritt abgebildet worden. Anhand eines Vergleiches der beiden Abbildungen fallen die unterschiedlichen verwendeten Skalen auf. Da eine konstante Bruchenergie



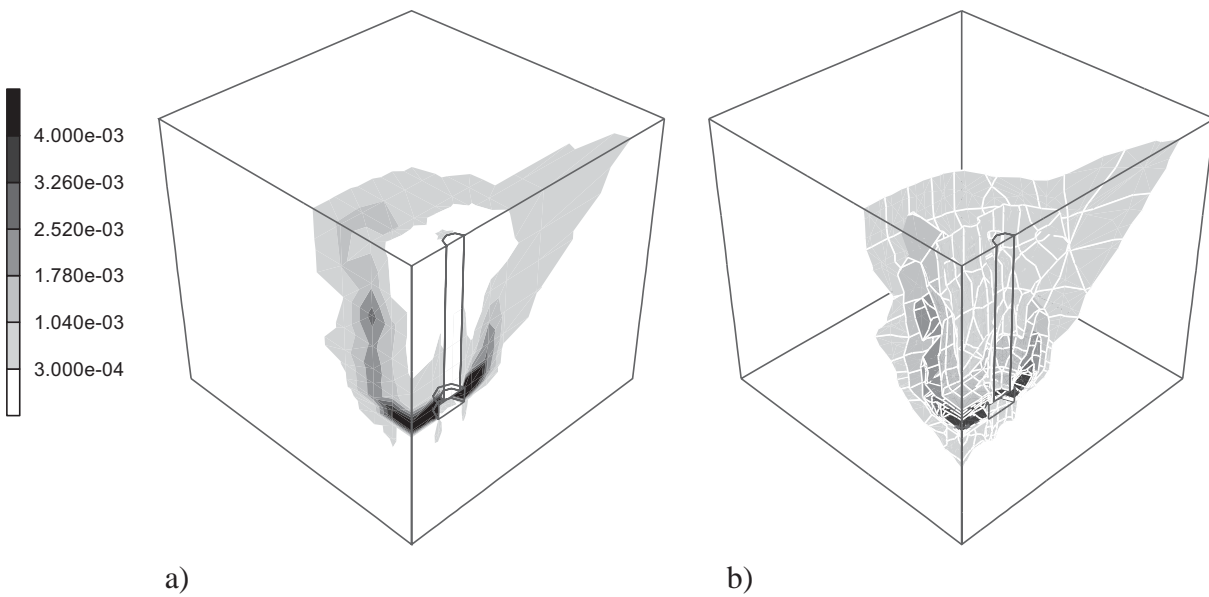
**Abb. 7.42:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Last-Verschiebungs-Diagramme für Element V8S: a) Punkt  $u_1$ , b) Punkt  $u_2$  (s. Abb. 7.41).



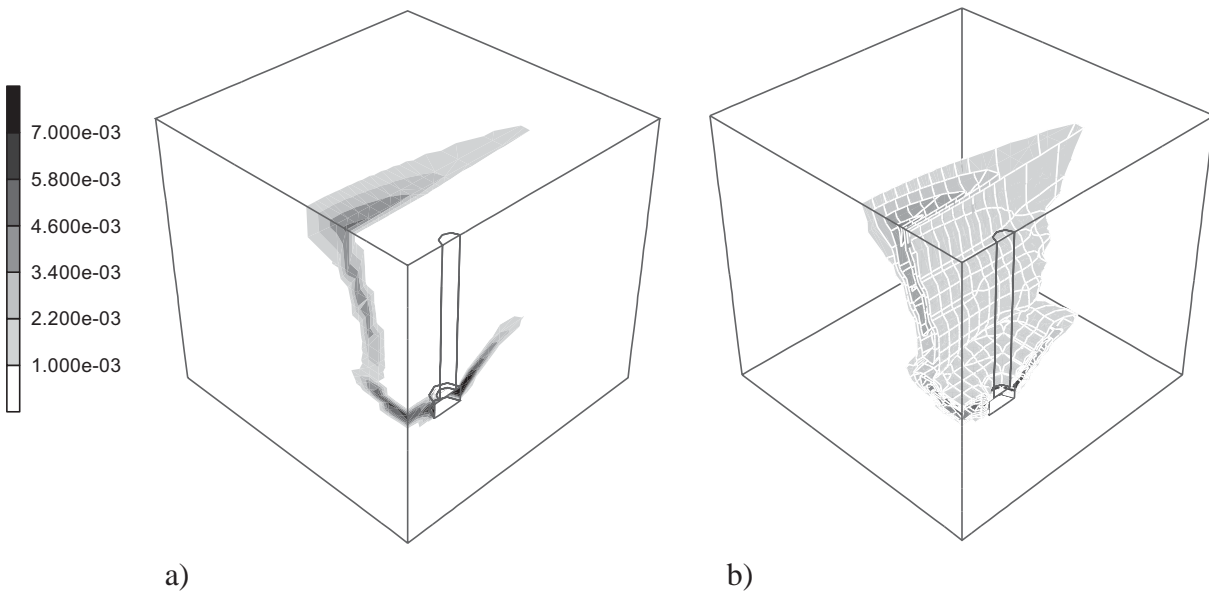
**Abb. 7.43:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Last-Verschiebungs-Diagramme für Element V8S: Punkt  $u_3$  (s. Abb. 7.41).

$\mathcal{G}_f$  bei unterschiedlichen Elementgrößen zu verschiedenen Entfestigungsmoduli  $H$  führt, ergeben sich folglich auch für die Variable  $\alpha$  quantitative Differenzen. Eine einheitliche Skalar für beide Diskretisierungen ist demnach unzuweckmäßig.

Für beide numerischen Analysen ist eine Rißinitiierung am Kopf des Ankers zu beobachten, die sich horizontal ins Innere des Würfels bzw. sich bis an die randnahe Oberfläche weiter fortpflanzt. Im weiteren Verlauf der Belastung ändert sich die Rißrichtung am Rand stark in die vertikale Richtung, so daß kurz vor dem Erreichen der maximalen Kraft  $F$  die Rißtopologie den Kopf des Ankers mit dem vertikalen Auflager verbindet. Neben dem breiteren Bereich inelastischer Verformungen für die Diskretisierung **grob**, welche auf die größeren Elementabmessun-

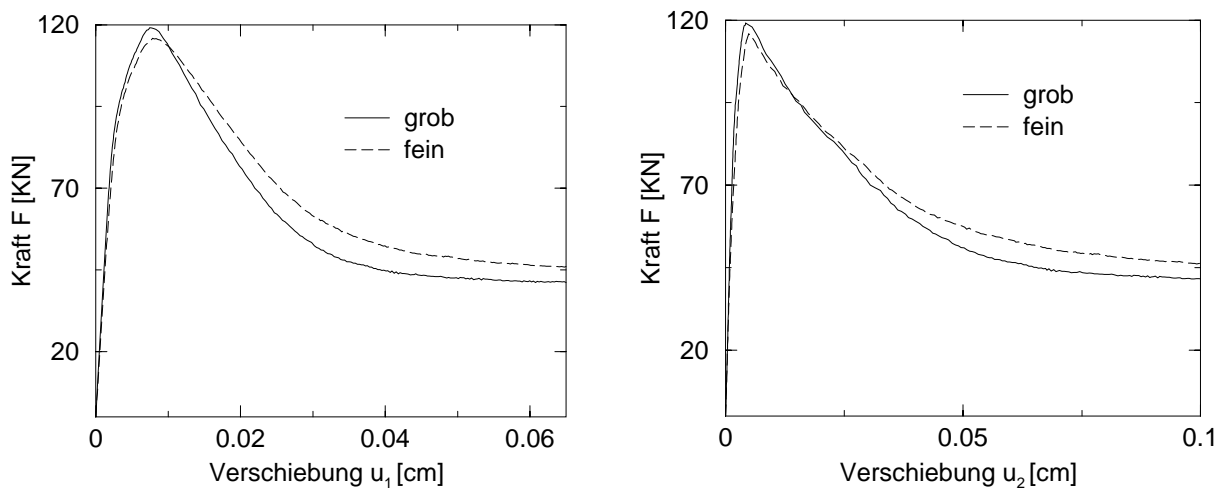


**Abb. 7.44:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8S, Diskretisierung **grob**: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.436 \cdot 10^{-2} \text{cm}$ : a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.



**Abb. 7.45:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8S, Diskretisierung **fein**: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.46 \cdot 10^{-2} \text{cm}$ : a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.

gen zurückzuführen ist, sind für die zwei unterschiedlichen Diskretisierungen keine weiteren Differenzen zu erkennen. Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus [HOFMAN, ELIGHAUSEN & OŽBOLT 2001] tritt kein lokaler Versagensmechanismus auf. Weitere Aussagen sind aufgrund der schon früh aufgetretenen Konvergenzprobleme nicht möglich.



**Abb. 7.46:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell: Last-Verschiebungs-Diagramme: a) Punkt  $u_1$ , b) Punkt  $u_2$  (s. Abb. 7.41).

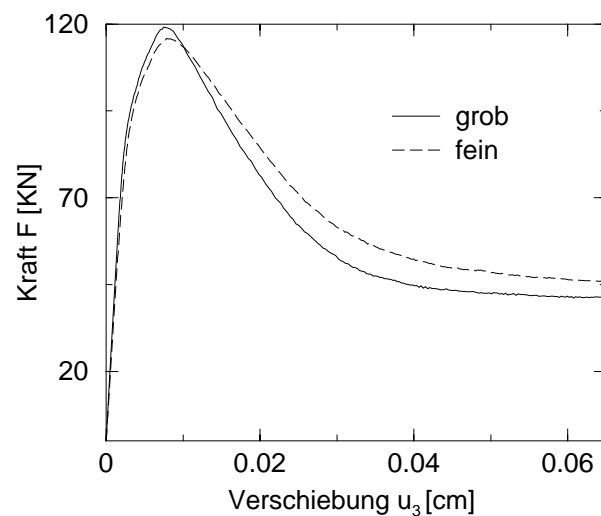
### 7.5.1.2 Element V8E, elasto-plastische Analyse

Nach der Berechnung des Anker-Auszugs-Versuches auf der Basis des Elementes V8S, werden in diesem Abschnitt die Diskretisierungen aus Abb. 7.41 mit dem Element V8E berechnet. Hierbei wird zunächst die Struktur mittels des elasto-plastischen Modells nach Abschnitt 5.9.1 für  $\beta = 0.0$  und in einem zweiten Schritt mit Hilfe des gekoppelten elasto-plastischen Schädigungsmodells mit  $\beta = 0.2$  berechnet.

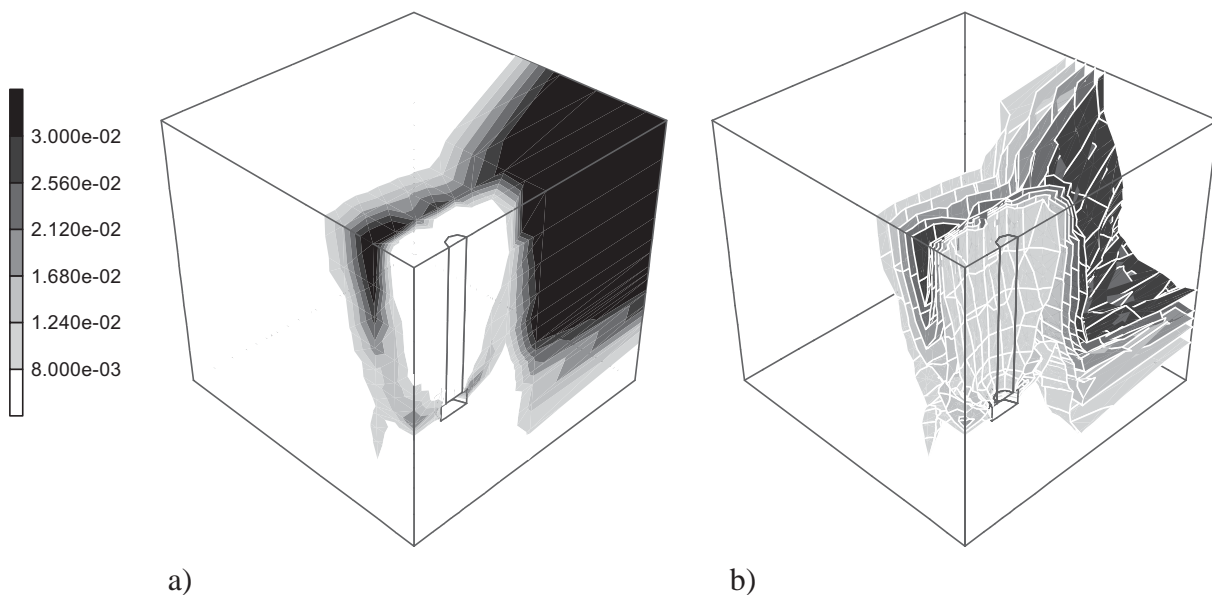
Zusammenfassend ist die Systemantwort für das Plastizitätsmodell ( $\beta = 0$ ) in den Abb. 7.46 und 7.47 illustriert. Im Gegensatz zu den Analysen auf der Basis des Elementes V8S ist trotz hyperbolischer Entfestigung die Strukturantwort deutlich bis in den post-kritischen Bereich hinein berechnet worden. Die Implementierung des Elementes V8E erweist sich demnach als robuster als die des Elementes V8S. Neben diesem Unterschied ist besonders die geringe Streuung der Ergebnisse für beide Diskretisierungen hervorzuheben. Die Differenz der Maxima der aufnehmbaren Kraft beispielsweise beträgt  $119.1\text{KN} - 115.8\text{KN} = 3.3\text{KN}$  bzw. ca. 2.8%. Beide Maxima liegen somit deutlich unter den Werten, die auf der Basis des Elementes V8S ermittelt worden sind. Die große Abweichung zwischen den Elementen V8E und V8S ist auf die unterschiedlichen zugrundeliegenden Rißkonzepte zurückzuführen. Anders als das Element V8E basiert die Implementierung des Elementes V8S auf dem *Fixed-Crack*-Konzept. Da *Fixed-Crack*-Modelle im allgemeinen zu „steiferem“ Strukturverhalten als *Rotating-Crack*-Konzepte neigen, lassen sich die Differenzen bezüglich der Maxima erklären (s. [ROTS & BLAAUWEN-DRAAD 1989]).

Die zur Verschiebung  $u_1 = 2.795 \cdot 10^{-2}\text{cm}$  korrespondierenden Verteilungen der internen Variable  $\alpha$  sind in den Abb. 7.48 und 7.49 zusammengefaßt. Gemäß Abb. 7.47 charakterisiert  $u_1 = 2.795 \cdot 10^{-2}\text{cm}$  einen Belastungszustand im post-kritischen Bereich. Vergleicht man



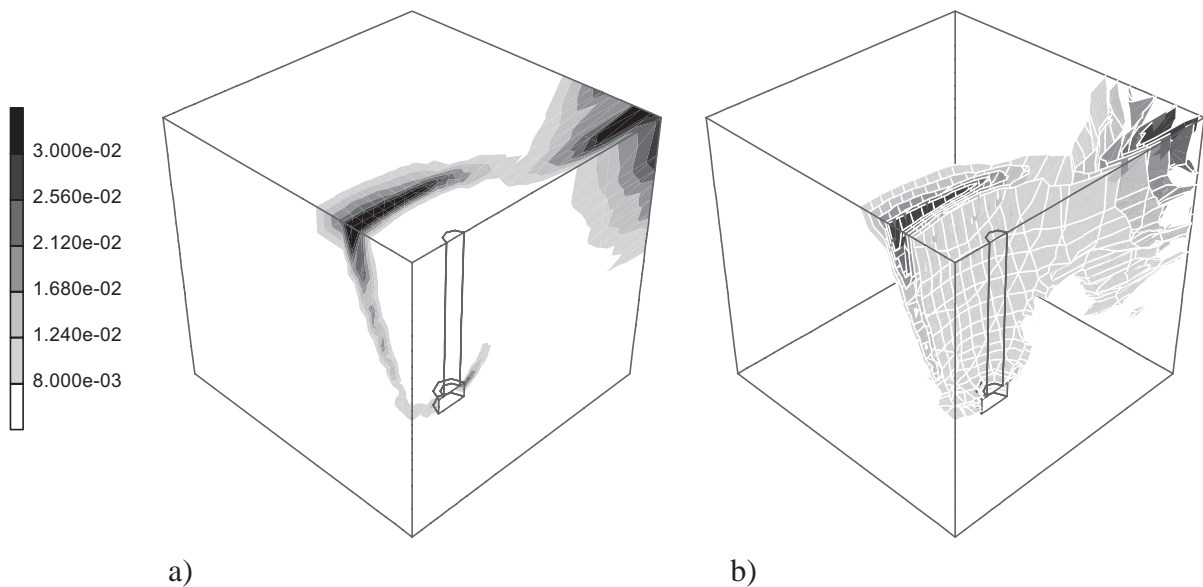


**Abb. 7.47:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell: Last-Verschiebungs-Diagramm für Punkt  $u_3$  (s. Abb. 7.41).



**Abb. 7.48:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell, Diskretisierung *grob*: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.795 \cdot 10^{-2}$  cm: a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächendarstellung.

Abb. 7.48 mit 7.49 wird deutlich, daß die Unterschiede für die beiden Diskretisierungen nicht sehr groß sind. Neben einem lokalisierteren Bereich inelastischer Verformungen bei der Diskretisierung *fein*, welche auch hier auf die kleineren Elementabmessungen zurückzuführen ist, ist nur im hinteren Bereich der Struktur eine Differenz zu erkennen. Die größere Aufweitung



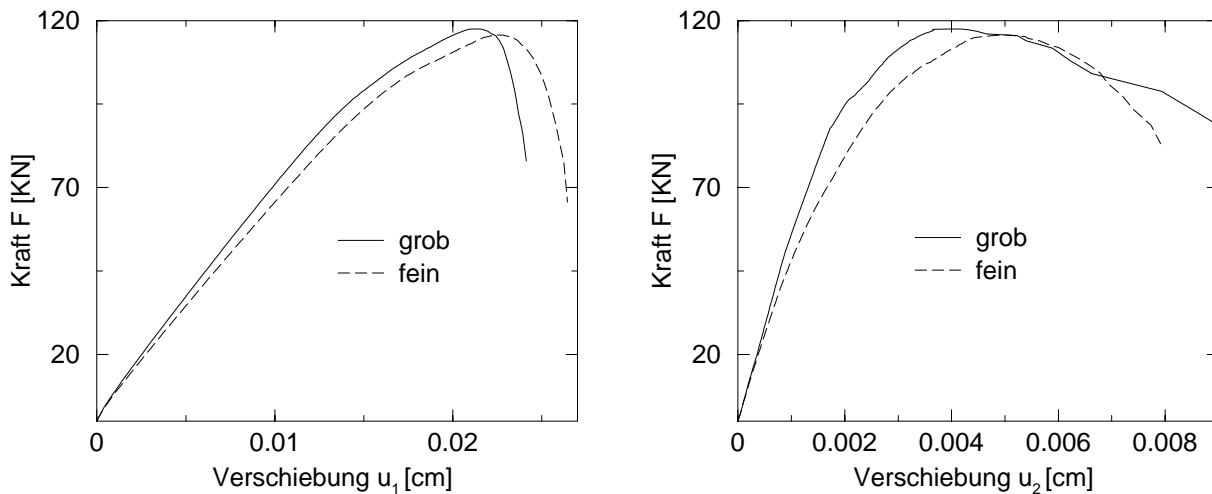
**Abb. 7.49:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell, Diskretisierung fein: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.795 \cdot 10^{-2}$  cm: a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächendarstellung.

des plastischen Bereiches an dieser Stelle ist jedoch direkt mittels der sehr großen Elemente des Netzes **grob** in diesem Gebiet zu erklären. Trotz der unterschiedlichen betrachteten Belastungszustände der Abb. 7.44 und 7.48, bzw. Abb. 7.45 und 7.49, wird deutlich, daß sich die Rißtopologie des Elementes V8S stärker an dem zugrundeliegenden Finite-Elemente-Netz orientiert. Im Gegensatz dazu verläuft der Riß für das Element V8E ohne Knick vom Kopf des Ankers diagonal zum vertikalen Auflager.

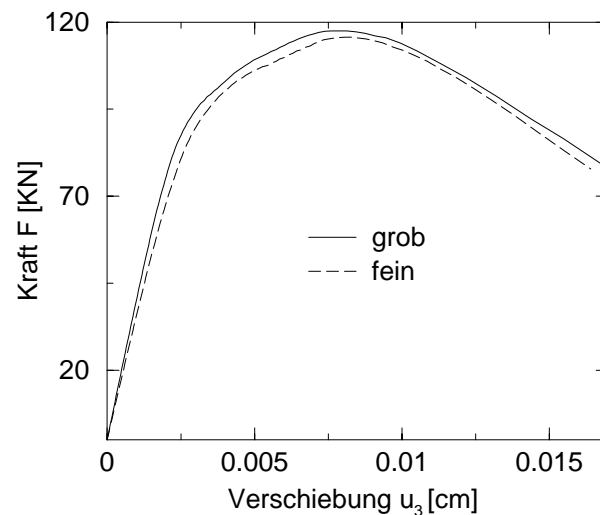
### 7.5.1.3 Element V8E, gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell

Um den Einfluß des verwendeten Materialmodells zu untersuchen, erfolgt im vorliegenden Abschnitt die Analyse des Anker-Auszugs-Versuches auf der Basis des Elementes V8E mit einem Kopplungsparameter von  $\beta = 0.2$ . Neben inelastischen Verformungen wird demzufolge auch eine anisotrope Schädigungs-Degradation betrachtet.

Die Ergebnisse der Analysen sind in der Form von Last-Verschiebungs-Diagrammen den Abb. 7.50 und 7.51 zu entnehmen. Im Gegensatz zur Berechnung mittels des Plastizitätsmodells ( $\beta = 0$ ) ist es lediglich möglich gewesen, den nach-kritischen Bereich bis zu einer Verschiebung von ca.  $u_1 = 0.025$  cm zu verfolgen. Durch auftretende Konvergenzprobleme konnte die Analyse nicht weiter fortgesetzt werden. Da die Last-Verschiebungs-Diagramme dennoch deutlich bis über das Maximum hinaus berechnet worden sind, ist darauf verzichtet worden, die Inkrementierung zu ändern bzw. andere Iterationsalgorithmen zu verwenden.



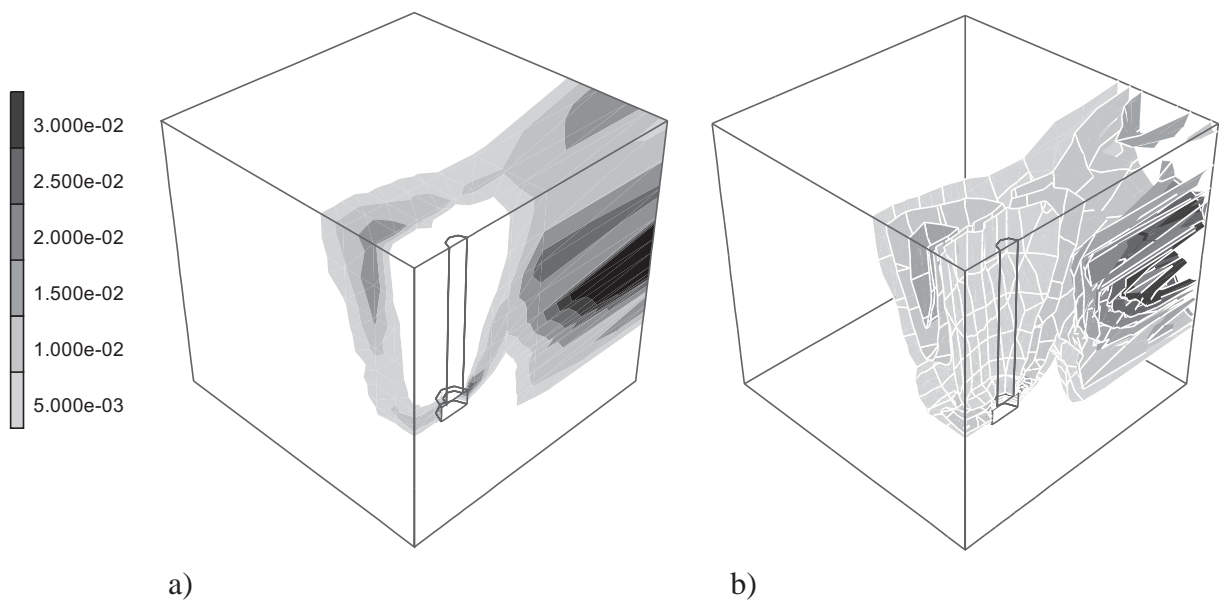
**Abb. 7.50:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell mit  $\beta = 0.2$ : Last-Verschiebungs-Diagramme: a) Punkt  $u_1$ , b) Punkt  $u_2$  (s. Abb. 7.41).



**Abb. 7.51:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell mit  $\beta = 0.2$ : Last-Verschiebungs-Diagramm für Punkt  $u_3$  (s. Abb. 7.41).

**Anmerkung:** Die Konvergenzprobleme sind auf die Strukturebene beschränkt. Im Integrationsalgorithmus aus Abschnitt 5.9.1 traten derartige Probleme nicht auf.  $\square$

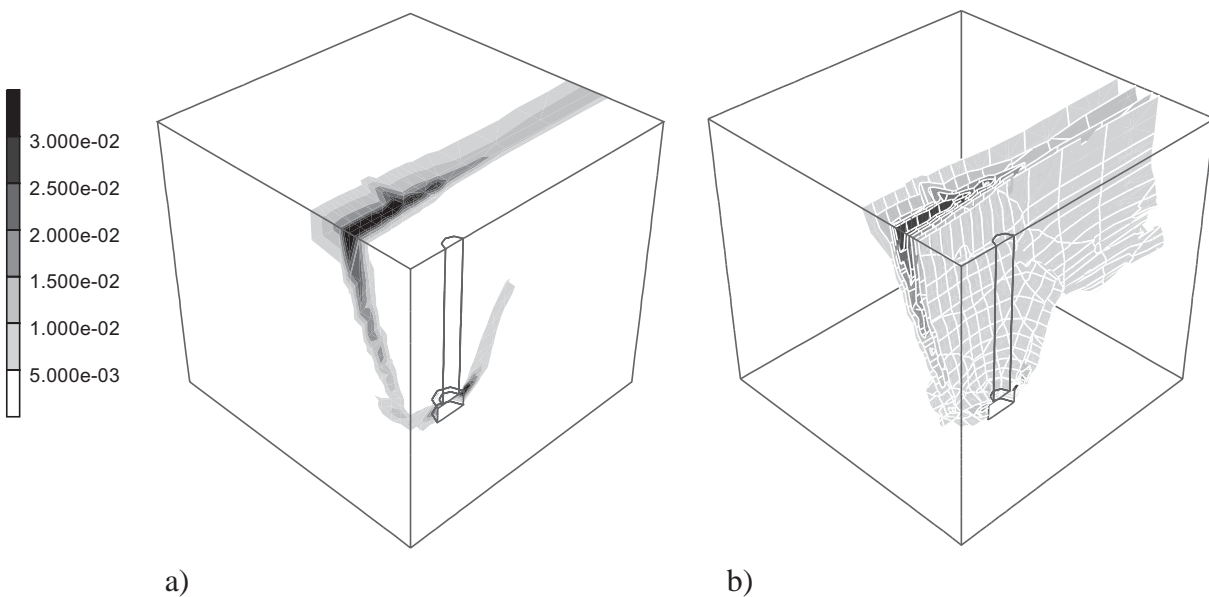
Ähnlich wie bei den Berechnungen in Abschnitt 7.5.1.2 ergeben sich für die Diskretisierungen *grob* und *fein* nur relativ geringe Unterschiede. Ein Vergleich der Diagramme 7.50 mit 7.46 bzw. 7.51 mit 7.47 belegt, daß die Strukturantwort des elasto-plastischen Modells ( $\beta = 0$ ) von der des gekoppelten elasto-plastischen Schädigungsmodell ( $\beta = 0.2$ ), trotz gleicher Bruchener-



**Abb. 7.52:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell mit  $\beta = 0.2$ , Diskretisierung *grob*: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.37 \cdot 10^{-2}$  cm: a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.

gie, abweicht. Da das unterschiedliche Verhalten von Plastizitäts- und Schädigungsmodellen nur bei Entlastungen zu identifizieren ist, müssen demzufolge, aufgrund von Lastumlagerungsmechanismen, trotz globaler Belastung lokal Entlastungsvorgänge auftreten.

Die anhand der Last-Verschiebungs-Diagramme verifizierten Unterschiede manifestieren sich auch in den Verteilungen der internen Variable  $\alpha$ . Sowohl für die Diskretisierung *grob* als auch für *fein* sind die Ergebnisse in den Abb. 7.52 und 7.53 dargestellt. Beide Abbildungen sind dem letzten noch konvergierten Schritt entnommen worden. Die Verteilungen der internen Variable  $\alpha$  unterscheiden sich gemäß den Abb. 7.52 und 7.48 nur relativ gering. Im Gegensatz dazu weisen die numerischen Analysen auf Basis der Diskretisierung *fein* für die beiden betrachteten Materialmodelle deutlichere Abweichungen voneinander auf. Der Unterschied ist dabei auf den hinteren Teil der Struktur beschränkt. Das gekoppelte elasto-plastische Schädigungsmodell weist einen Rißverlauf auf, welcher an der Oberseite des Betonwürfels mit der Geometrie des vertikalen Auflagers übereinstimmt. Anders als beim gekoppelten Modell weicht die Rißtopologie gemäß dem Plastizitätsmodell ( $\beta = 0$ ) hiervon ab. Wie aus Abb. 7.49 ersichtlich ist, wird für das Plastizitätsmodell ein Rißverlauf berechnet, welcher im Gegensatz zu Abb. 7.53 im hinteren Bereich der Struktur mit der Symmetrieachse zusammenfällt. Desweiteren wird deutlich, daß die Bereiche inelastischer Verformungen in Abb. 7.49 deutlich weiter streuen als jene in Abb. 7.53.



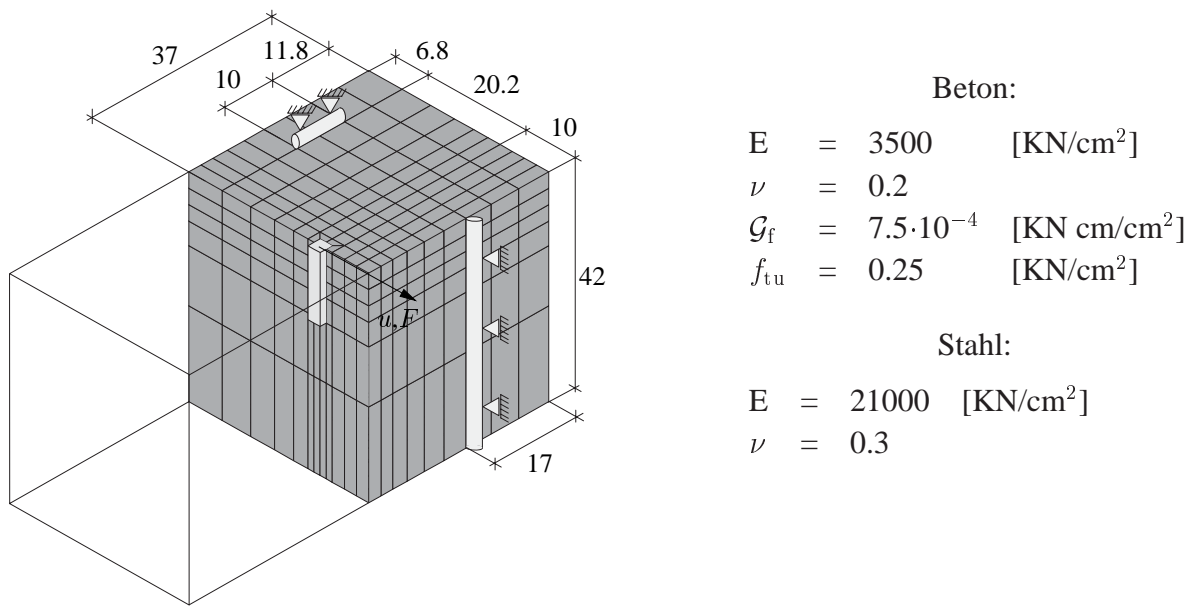
**Abb. 7.53:** Numerische Analyse eines Anker-Auszugs-Versuches: Test 1: Element V8E, gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell mit  $\beta = 0.2$ , Diskretisierung fein: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u_1 = 2.58 \cdot 10^{-2}$  cm: a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.

## 7.5.2 Anker-Auszugs-Versuche: Test 2

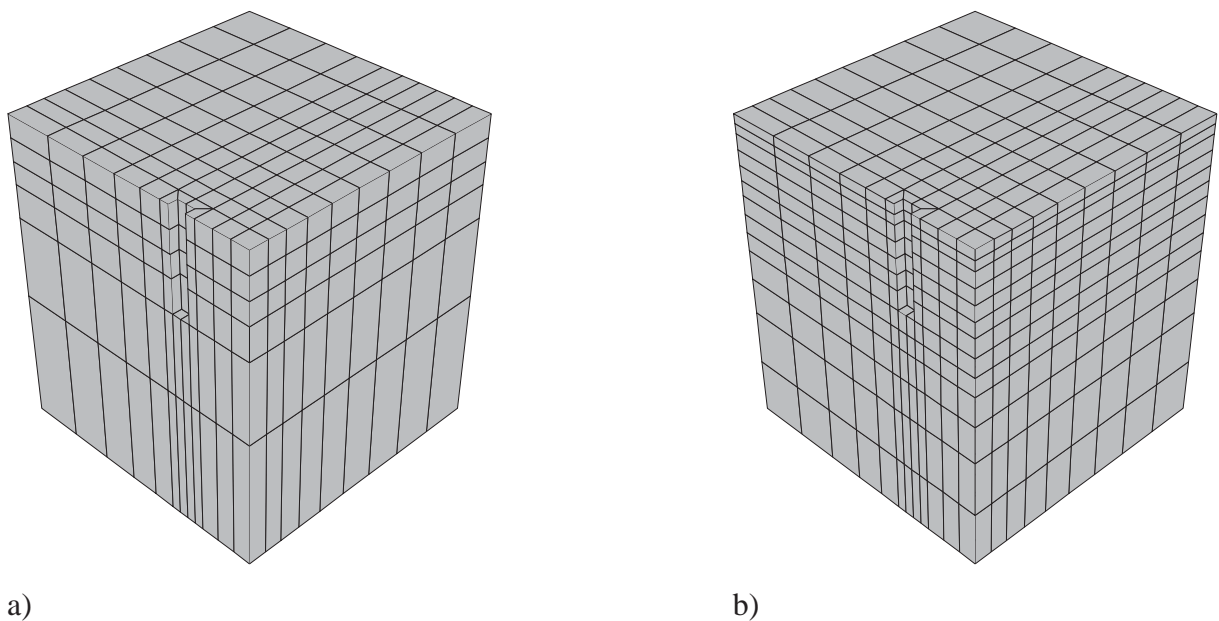
Im zweiten dreidimensionalen Beispiel wird der Anker senkrecht zur Stabachse belastet. Die Topologie der Struktur und die Definition der DIRICHLET-Randbedingungen sind in Abb. 7.54 illustriert (s. auch [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Die Materialparameter des Stahlankers und des Betons bleiben gegenüber Abschnitt 7.5.1 unverändert. Wie auch in Abschnitt 7.5.1 entsprechen die Daten jenen in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001].

Analog zu Abschnitt 7.5.1 ist die Verwendung von Kontaktelementen mittels direkter Berücksichtigung einer Kopplung der Verschiebungsfreiheitsgrade zwischen Beton und Anker approximiert worden. Die doppelt definierten Knoten des Ankers der Länge 13.5 cm mit einer quadratischen Grundfläche von  $2.5 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm}$  werden für zwei Seiten nur normal zu den Ankerflächen gekoppelt. Die tangentialen Komponenten des Traktionsvektor verschwinden folglich an den Kontaktfläche. Für die der Belastung abgewendeten Seite ist keine Kopplung angesetzt worden. Hierdurch ist es möglich, daß zwischen Anker und Beton eine Fuge entsteht.

Zur numerischen Berechnung des Anker-Auszugs-Versuches werden die in Abb. 7.55 dargestellten Diskretisierungen verwendet. Dabei wird die Rechenzeit durch Verwendung eines symmetrischen Ersatzsystemes reduziert. Die Differenzierung hinsichtlich der beiden Finite-Elemente-Netze erfolgt mit der Notation **grob** für die Diskretisierung mit 564 Elementen und **fein** für die Diskretisierung mit 1222 Elementen. Die Verschiebungen werden in Inkrementen der Größe  $\Delta u = 0.20513 \cdot 10^{-3}$  cm aufgebracht und das Konvergenzkriterium nach Gl. (7.1) mit  $tol = 10^{-6}$  herangezogen.

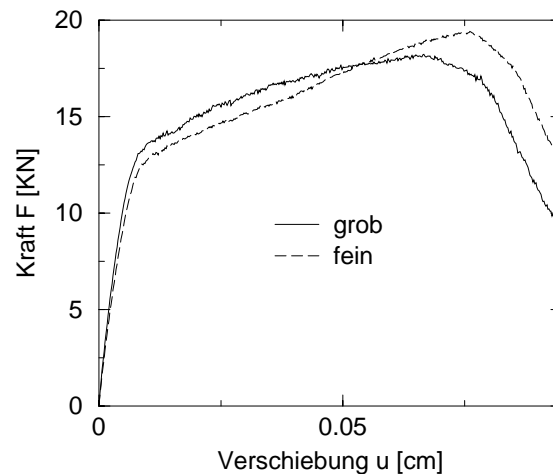


**Abb. 7.54:** Finite-Elemente-Analyse des Anker-Auszugsversuches: Test 2: Systemskizze (Längenangaben in [cm]) und Materialparameter.



**Abb. 7.55:** Finite-Elemente-Analyse des Anker-Auszugsversuches: Test 2: Verwendete Diskretisierungen: a) Diskretisierung **grob**, bestehend aus 564 trilinearen Elementen, b) Diskretisierung **fein**, bestehend aus 1222 trilinearen Elementen.

Im Gegensatz zu Abschnitt 7.5.1 werden die Berechnungen im vorliegenden Abschnitt nur für das Element V8E unter der Annahme der Plastizitätstheorie ( $\beta = 0$ ) durchgeführt. Da in einer ersten Analyse mittels des *Fixed-Crack*-Elementes V8S schon zu Beginn Konvergenzprobleme auftraten, wird darauf verzichtet die Ergebnisse darzustellen.



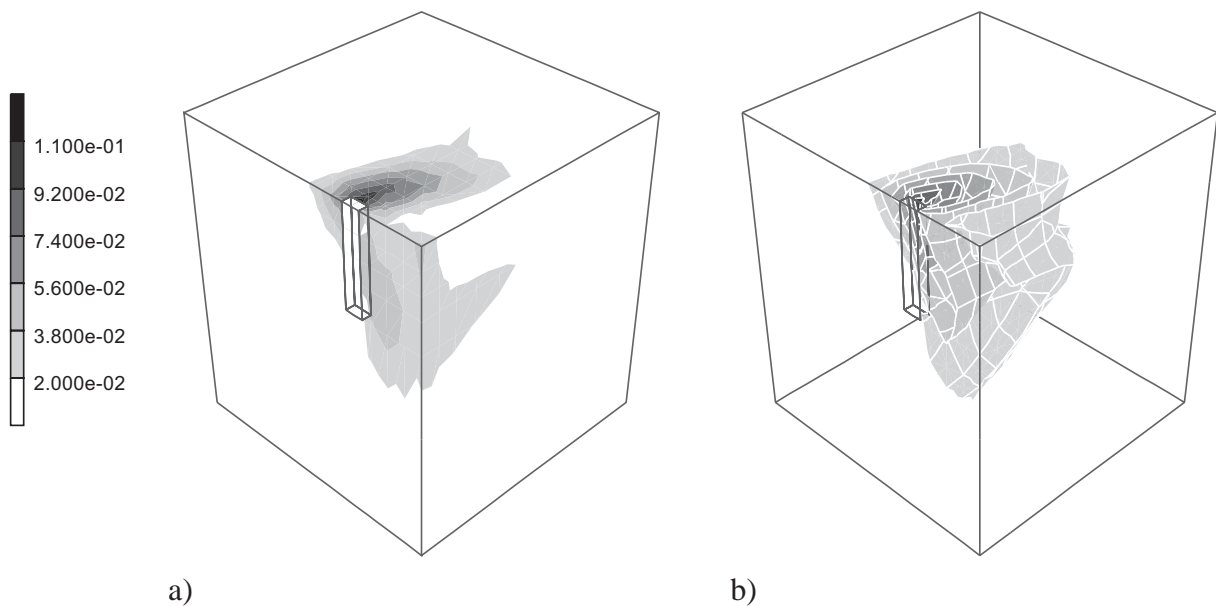
**Abb. 7.56:** Finite-Elemente-Analyse des Anker-Auszugsversuches: Test 2: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell: Last-Verschiebungs-Diagramme für die verwendeten Diskretisierungen.

**Anmerkung:** Analog zum Abschnitt 7.5.1 beziehen sich die Last-Verschiebungs-Diagramme des vorliegenden Unterabschnitts gemäß der Diskretisierung auf eine Symmetriehälfte der Struktur. Die im Experiment ermittelte Belastung ist daher durch zwei zu teilen.  $\square$

Die zu den zwei Diskretisierungen korrespondierenden Last-Verschiebungs-Diagramme sind Abb. 7.56 zu entnehmen. Nachdem die Belastung  $F$  bis auf ungefähr 12,5 kN angestiegen ist, sind die plastischen Verformungen so stark angewachsen, daß das Strukturverhalten deutlich weicher wird. Bei einer zunehmenden Laststeigerung tritt ab 18,2 kN für die Diskretisierung **grob** ein globaler Entfestigungseffekt auf. Im Gegensatz dazu beträgt die maximal aufnehmbare Belastung auf der Grundlage der Diskretisierung **fein** 19,4 kN. Somit ergibt sich die Differenz der beiden Modelle zu 7%. Analog zu Abschnitt 7.5.1 sind lediglich relativ kleine Abweichungen zwischen den Last-Verschiebungs-Diagrammen der Diskretisierung **grob** und **fein** festzustellen.

In der Arbeit [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] variiert das Maximum des Last-Verschiebungs-Diagramm von 13,9 kN bis zu 16,4 kN. Die Differenz folgt aus unterschiedlichen Betondruckfestigkeiten. Dabei basiert der Wert 13,9 kN auf einer Betondruckfestigkeit von  $1,5 \text{ kN/cm}^2$  und der Wert 16,4 kN auf einer Betondruckfestigkeit von  $3,5 \text{ kN/cm}^2$ . Anders als die Struktur aus Abschnitt 7.5.1 hat die Betondruckfestigkeit somit einen deutlich geringeren Einfluß auf das Strukturantwortverhalten. Der maßgebliche Versagensmechanismus des Anker-Auszugs-Versuches korrespondiert demnach zu Zugrissen. Da das Element V8E eine Druckfestigkeit von  $\infty$  impliziert, ist der Wert 19,4 kN (Netz **fein**) in Relation zu setzen mit 16,4 kN für eine Betondruckfestigkeit von  $3,5 \text{ kN/cm}^2$ . Die in dieser Arbeit berechneten Last-Verschiebungs-Diagramme weisen somit eine befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001] auf.



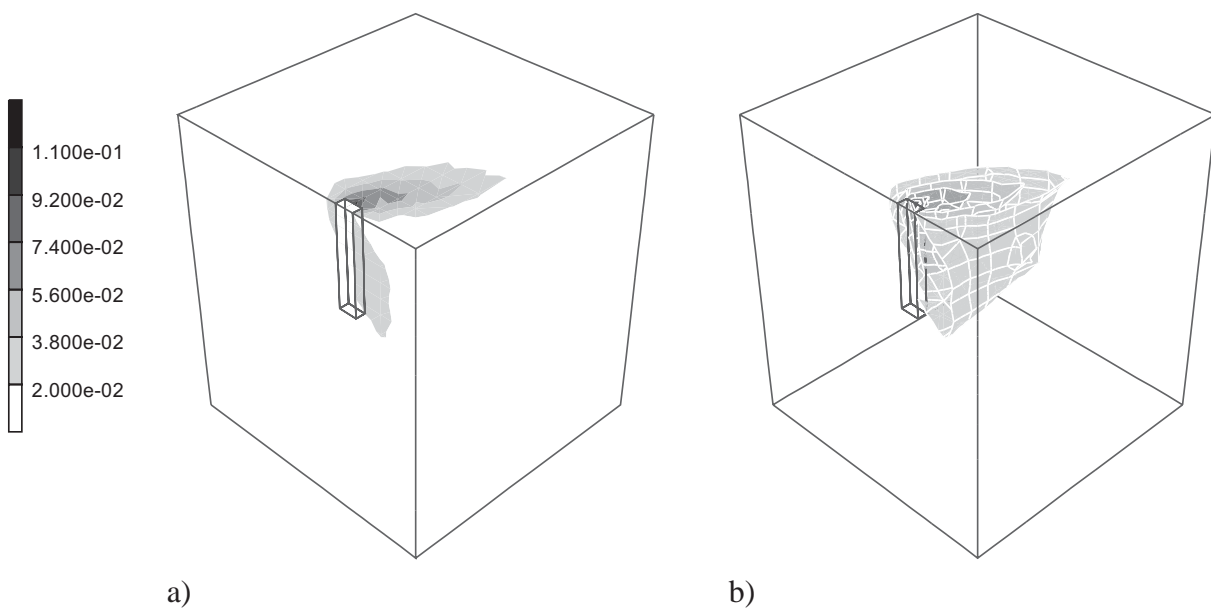


**Abb. 7.57:** Finite-Elemente-Analyse des Anker-Auszugsversuches: Test 2: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell, Diskretisierung *grob*: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u = 0.943598\text{cm}$ : a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.

Die zur Verschiebung  $u = 0.943598\text{ cm}$  korrespondierenden Verteilungen der inneren Variable  $\alpha$  sind den Abb. 7.57 und 7.58 zu entnehmen. Für beide Diskretisierungen ist ein Abreißen eines Betonkegels als Strukturversagensmechanismus zu identifizieren.

Die Rißinitiierung beginnt dabei an singulären Ecke des Ankers, an der Oberseite des Betonwürfels. Bei weiterer Laststeigerung breitet sich der Riß in einem Winkel von ungefähr  $75^\circ$  zur Richtung der eingeleiteten Kraft bis an die Vorderseite der Struktur aus. Hierdurch entsteht ein geschlossener Rißverlauf, der dazu führt, daß ein Betonkegel abreißt und dadurch die aufnehmbare Last begrenzt. Der Versagenstypus ist qualitativ identisch mit den Ergebnissen in [HOFMAN, ELIGEHAUSEN & OŽBOLT 2001].

Durch die Analysen der Anker-Auszugs-Versuche wurde die Anwendbarkeit und die Effizienz des vorgestellten finiten Elementes V8E im Rahmen von Rißsimulationen belegt. Besonders hervorzuheben ist hierbei die Robustheit der Implementierung. Selbst gegenüber linearer Entfestigung, wie sie für das Element V8S verwendet wurde, erweist sich die Anwendung des neuen Elementes V8E für Strukturanalysen, wie anhand der numerischen Berechnung von Anker-Auszugs-Versuchen gezeigt wurde, als robuster.



**Abb. 7.58:** Finite-Elemente-Analyse des Anker-Auszugsversuches: Test 2: Element V8E, elasto-plastisches Materialmodell, Diskretisierung fein: Verteilung der internen Variable  $\alpha$  für  $u = 0.943598\text{cm}$ : a) an der Oberfläche des Betonwürfels, b) Iso-Flächen-Darstellung.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Finite-Elemente-Modell zur Simulation von lokalisiertem Versagen in Tragwerken vorgestellt. Auf der Grundlage einer Approximation der Kinematik lokalisierter Versagenszustände mittels eines  $C^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldes erfolgte die numerische Umsetzung anhand des *Enhanced-Assumed-Strain* (EAS) Konzeptes.

Im Anschluß an ein einleitendes Kapitel, indem die Motivation für diese Arbeit dargelegt wurde, wurden in Kapitel 2 zunächst Grundlagen der Plastizitätstheorie, der Schädigungsmechanik und eines gekoppelten elasto-plastischen Schädigungsmodells für  $C^0$ -stetige Verschiebungsfelder beschrieben. Anschließend erfolgte in Kapitel 3 eine Analyse der mathematischen und physikalischen Implikationen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder. Unter der Annahme einer Lokalisierung dissipativer Mechanismen in einer singulären Fläche wurde das inelastische Materialverhalten mittels einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung approximiert. Zur Herleitung dieser Beziehung wurden zwei unterschiedliche Verfahren vorgestellt und für ein Plastizitätsmodell, ein Schädigungsmodell und ein gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell spezifiziert.

Die Berechnung der Orientierung der singulären Fläche war Gegenstand des Kapitels 4. Nach einer kurzen Einführung unterschiedlicher Formen materiellen Versagens wurden die Lokalisierungsbedingungen für das Entstehen von Diskontinuitäten im Verzerrungsfeld und Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld erläutert und die hierzu korrespondierenden Minimierungsprobleme angegeben. Zur Lösung dieser Optimierungsprobleme für beliebige Materialmodelle wurde ein numerischer Algorithmus entwickelt. Dieser basiert auf einer konsistenten Linearisierung im Rahmen des NEWTON-Verfahrens. Der Algorithmus wurde anhand unterschiedlicher zwei- und dreidimensionaler Materialmodelle überprüft.

Die theoretischen Betrachtungen des Kapitels 3, zusammen mit dem Algorithmus aus Kapitel 4, wurden in Kapitel 5 zur Entwicklung eines Finite-Elemente-Modells für lokalisierte Versagenszustände genutzt. Auf der Grundlage des EAS-Konzeptes wurde hierzu das PETROV-GALERKIN-Verfahren herangezogen. Die Umsetzung erfolgte für ein Plastizitätsmodell, ein

Schädigungsmodell und ein gekoppeltes elasto-plastisches Schädigungsmodell. Die Erweiterung auf „rotierende“ singuläre Flächen im Sinne des *Rotating-Crack*-Konzeptes wurde diskutiert und implementiert.

Da die Form des in Kapitel 5 entwickelten Algorithmus äquivalent zur numerischen Umsetzung klassischer Kontinuumsmodelle aus Kapitel 2 ist, erfolgte in Kapitel 6 ein Vergleich eines Plastizitätsmodells unter der Annahme  $C^0$ -stetiger und  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder auf der Grundlage des RANKINE-Kriteriums. Analogien und Unterschiede der beiden Modelle wurden untersucht.

Den Abschluß dieser Arbeit bildeten die numerischen Beispiele des Kapitels 7. Neben einfacheren numerischen Problemstellungen, die zur Überprüfung der Leistungsfähigkeit des entwickelten Finite-Elemente-Modells dienten, wurde ein dreidimensionaler Anker-Auszugs-Versuch analysiert und mit Experimenten verglichen.

Die wesentlichen und neuartigen Gesichtspunkte der vorliegenden Arbeit können in folgender Form zusammengefaßt werden:

### **Theoretischer Teil**

- Vergleich von zwei verschiedenen Verfahren zur Herleitung einer Traktions-Verschiebungs-Beziehung (Projektionsalgorithmus, modifizierte Energiedichtefunktion)
- Entwicklung eines gekoppelten elasto-plastischen Schädigungsmodells im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder
- Entwicklung eines Mehrflächen-Plastizitätsmodells im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder
- Vergleich von Plastizitätsmodellen basierend auf  $C^0$ -unstetigen und  $C^0$ -stetigen Verschiebungsfeldern

### **Numerischer Teil**

- Entwicklung eines Algorithmus zur Berechnung der Orientierung singulärer Flächen für dreidimensionale Materialmodelle
- Numerische Umsetzung eines Finite-Elemente-Modells auf Basis sprungstetiger Verschiebungsabbildungen ohne Verwendung der bisher üblichen statischen Kondensation. Dies hat den Vorteil, daß der neu implementierte Algorithmus auf die Materialpunktebene beschränkt ist.
- Entwicklung eines Integrationsalgorithmus für die im Rahmen der Finite-Elemente-Formulierung diskontinuierlicher Verschiebungsansätze eingesetzten Materialgesetze in äquivalenter Form zu klassischen Kontinuumsmodellen

- Erweiterung des Konzeptes eingebetteter  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder auf beliebige finite Elemente (z.B. acht-knotiges Volumenelement, acht-knotiges ebenes Element mit biquadratischer Verschiebungsapproximation)
- Vergleich unterschiedlicher polynominaler Ansatzgrade für den diskontinuierlichen Anteil des Verschiebungsfeldes
- Erweiterung für „rotierende“ singuläre Lokalisierungsflächen
- Vergleich des *Fixed-Crack* und *Rotating-Crack*-Konzeptes im Rahmen  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder
- Komplexe dreidimensionale numerische Analysen mit einem Finite-Elemente-Modell basierend auf dem Konzept eingebetteter  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder

## 8.2 **Schlußfolgerungen**

Die in dieser Arbeit entwickelten Finite-Elemente-Modelle ermöglichen die Simulation verschiedener anisotroper, lokalisierter Versagensprozesse. Im Gegensatz zu den meisten existierenden Veröffentlichungen basiert die numerische Umsetzung nicht auf der statischen Kondensation. Die Implementierung kann somit auf die Materialpunktebene beschränkt werden. Hierdurch wird es ermöglicht, den *Return-Mapping*-Algorithmus, wie er für klassische Kontinuumsmodelle seit den 90-er Jahren verwendet wird, zur Integration der Materialgesetze nahezu unverändert anzuwenden. Es wurde gezeigt, daß mittels einer Erweiterung auf „rotierende“ Lokalisierungsflächen *Locking*-Effekte, wie sie bei der numerischen Analyse gerissener Strukturen bei Verwendung des sogenannten *Fixed-Crack*-Konzeptes auftreten, reduziert werden können. Eine Erhöhung der Ansatzgrade des erweiterten Verschiebungsfeldes führt hingegen nicht zu einer Verbesserung der Approximationsgüte. Um dem anisotropen Verhalten gerissener Betonstrukturen gerecht zu werden, wurde ein anisotropes elasto-plastisches Schädigungsmodell für  $C^0$ -unstetige Verschiebungsfelder modifiziert. Die ausgearbeiteten Ergebnisse wurden in ein dreidimensionales finites Element integriert. Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit der vorgeschlagenen numerischen Umsetzung wurden neben zweidimensionalen Problemstellungen auch komplexere dreidimensionale Anker-Auszugs-Versuche analysiert. Hierdurch konnte gezeigt werden, daß sich die numerische Implementierung gegenüber klassischer *Fixed-Crack*-Modelle im Rahmen einer verschmierten Rißmodellierung als robuster erweist.

Neben diesen positiven Eigenschaften wurde für das Modell  $C^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder jedoch auch eine Schwäche aufgezeigt. Aus der äquivalenten Evolution der spannungsähnlichen Entfestigungsvariablen für *Fixed-Crack*-Modelle mit  $C^0$ -stetigem Verschiebungsfeld und *Fixed-Crack*-Modellen mit  $C^0$ -unstetigem Verschiebungsfeld folgte, daß das in dieser Arbeit neu entwickelte finite Element die Abhängigkeit der numerisch ermittelten Lösungen von einer Netz-Ausrichtung nicht beseitigen kann.

Durch die Entwicklung eines Algorithmus zur Bestimmung der räumlichen Orientierung der Lokalisierungsfläche wurde die Anwendung des Konzeptes eingebetteter  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder auf beliebige Materialmodelle ermöglicht. Anhand mehrerer numerischer Beispiele ist die asymptotisch quadratische Konvergenz des Algorithmus belegt worden.

### 8.3 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden bereits verschiedene Problemstellungen bezüglich  $\mathcal{C}^0$ -unstetiger Verschiebungsfelder zur Simulation von lokalisierten Versagensvorgängen analysiert und beantwortet. Jedoch sind aus der Sicht des Verfassers insbesondere zwei Erweiterungen sinnvoll:

- Obwohl das Modell nicht auf die geometrisch lineare Theorie beschränkt ist, erfolgte die Implementierung für infinitesimale Verformungen. Da lokalisierte Verformungszustände häufig mit großen Verformungen und Verzerrungen einhergehen, ist die Erweiterung auf finite Deformationen sinnvoll.
- Die andere offene Fragestellung betrifft die Modellierung von *Mixed-Mode*-Versagenszuständen. Gemäß Abschnitt 5.4 ist die Orientierung der singulären Fläche nur für das RANKINE-Kriterium eindeutig bestimmt. Werden hiervon abweichende Materialmodelle verwendet, ist die Orientierung der singulären Fläche aus einer Mannigfaltigkeit von möglichen Orientierungen zu bestimmen. Für komplexere Materialmodelle und Belastungszustände sind die in Abschnitt 5.4 vorgeschlagenen Ansätze zu überprüfen und gegebenenfalls zu modifizieren.

# Anhang A

## Gleichungen für Tensoren zweiter Stufe

### Symmetrisch-antisymmetrische Zerlegung eines Tensors

Jeder Tensor kann eindeutig in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden. Die Definition der Symmetrie bezieht sich hierbei auf die Komponenten des Tensors. Skalare und Vektoren sind demnach symmetrisch. Für Tensoren von höherer Stufe als 2 erfolgt die Definition Symmetrie durch die Definition der Transponierten. Somit wird die Zerlegung des Tensors  $\mathbf{A}$  in einen symmetrischen Anteil  $\mathbf{A}^{\text{sym}}$  und in einen antisymmetrischen Anteil  $\text{skew}\mathbf{A}$  zu

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{sym}} + \text{skew}\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{A}^{\text{sym}} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \\ \text{skew}\mathbf{A} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

spezifiziert. Für zwei-stufige Tensoren gilt

$$\text{skew}\mathbf{A} : \mathbf{A}^{\text{sym}} = 0. \quad (\text{A.2})$$

### Volumetrisch-deviatorische Zerlegung eines Tensors

In der Literatur ist im wesentlichen zwischen zwei verschiedenen Zerlegungen zu differenzieren: Die multiplikative des Deformationsgradienten und eine additive Zerlegung. An dieser Stelle soll lediglich die additive Aufspaltung

$$\mathbf{A} = \text{dev}\mathbf{A} + \text{vol}\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \text{vol}\mathbf{A} &= \frac{1}{3} \text{tr}\mathbf{A} \mathbf{1} \\ \text{dev}\mathbf{A} &= \mathbf{A} - \text{vol}\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit dem Deviator  $\text{dev}\mathbf{A}$  und dem Kugeltensor  $\text{vol}\mathbf{A}$  betrachtet werden. Äquivalent zur Definition des Deviators ist die Bedingung  $\text{tr}[\text{dev}\mathbf{A}] = 0$ . Die Identitätsabbildung des Raumes der zweistufigen Tensoren kann somit in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{A} = \mathbb{I} : \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbb{I} = \mathbb{I}^{\text{vol}} + \mathbb{I}^{\text{dev}}; \quad (\text{A.4})$$



mit den Definitionen der 4-stufigen Projektionstensoren

$$\frac{\partial \text{vol} \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} =: \mathbb{I}^{\text{vol}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \text{dev} \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} =: \mathbb{I}^{\text{dev}}. \quad (\text{A.5})$$

### Spektralzerlegung und Invarianten eines Tensors zweiter Stufe

Jeder symmetrische Tensor zweiter Stufe kann in die Darstellung

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{A.6})$$

überführt werden (s. z.B. [BAŞAR & WEICHERT 2000]). Ist eine Abbildung lediglich von den Eigenwerten  $\sigma_i$  abhängig, so erfüllt sie a priori die Restriktionen der Isotropie. Häufig werden anstelle der Eigenwerte die drei unabhängigen Hauptinvarianten

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}} &:= \text{tr} \mathbf{A} & \frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{1} \\ II_{\mathbf{A}} &:= \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{A} - \mathbf{A} : \mathbf{A}) & \Rightarrow \frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} &= I_{\mathbf{A}} \mathbf{1} - \mathbf{A}^T \\ III_{\mathbf{A}} &:= \det \mathbf{A} & \frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} &= III_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

genutzt. Eine oft verwendete Invariante stellt die zweite Deviatorinvariante

$$J_2 := II_{\text{dev} \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \text{dev} \mathbf{A} : \text{dev} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J_2}{\partial \text{dev} \mathbf{A}} = \text{dev} \mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{A}} = \text{dev} \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

dar. Gl. (A.8)<sub>1</sub> repräsentiert somit eine isotrope Tensorfunktion, die für alle Kugeltensoren zu Null verschwindet.

### SHERMAN-MORRISON Formel

Für zwei-stufige Tensoren, die sich als Rang-1 Modifikation eines nicht singulären zweistufigen Tensors  $\mathbf{A}$  darstellen lassen (es gilt also  $\det \mathbf{A} \neq 0$ ), kann die Inverse in geschlossener Weise zu

$$[\mathbf{A} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}} \quad (\text{A.9})$$

angegeben werden. Für  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$  vereinfacht sich die Gleichung zu

$$[\mathbf{1} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]^{-1} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}. \quad (\text{A.10})$$

### Ableitung $\partial \mathbf{A}^{-T} / \partial \mathbf{A}$

Die Ableitung der transponierten Inversen eines Tensors zweiter Stufe nach dem Tensor selbst wird mittels der Gleichung

$$\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1} \quad (\text{A.11})$$

zu

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^{-T} A_{jk}^T = \delta_{ik} &\Rightarrow \frac{\partial A_{ij}^{-T}}{\partial A_{lm}} dA_{lm} A_{jk}^T + A_{ij}^{-T} \frac{\partial A_{jk}^T}{\partial A_{lm}} dA_{lm} = 0 & (\text{A.12}) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial A_{ij}^{-T}}{\partial A_{lm}} A_{jk}^T = -A_{ji}^{-1} \frac{\partial A_{kj}}{\partial A_{lm}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial A_{ij}^{-T}}{\partial A_{lm}} A_{jk}^T A_{ko}^{-T} = -A_{ji}^{-1} \delta_{kl} \delta_{jm} A_{ko}^{-T} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial A_{io}^{-T}}{\partial A_{lm}} = -A_{mi}^{-1} A_{ol}^{-1}
 \end{aligned}$$

berechnet.

## Anhang B

# Ableitung eines Eigenvektors nach dem korrespondierenden Tensor zweiter Stufe

In diesem Anhang wird die Ableitung eines Eigenvektors  $\mathbf{n}$  nach dem korrespondierenden Tensor zweiter Stufe  $\boldsymbol{\sigma}$  hergeleitet (s. [MOSLER & MESCHKE 2002A]). Nach Kenntnis des Autors existieren in der Literatur nur geschlossene Lösungen für die Ableitung der Eigenwertbasis nach dem korrespondierenden Tensor (s. z.B. [SIMO & TAYLOR 1991]). Da jedoch keine Bijektion zwischen der gesuchten und der in [SIMO & TAYLOR 1991] enthaltenen Lösung existiert, ist die Ableitung  $\partial \mathbf{n} / \partial \boldsymbol{\sigma}$  herzuleiten.

Die Grundlage der weiteren Ausführungen bildet das Eigenwertproblem

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}. \quad (\text{B.1})$$

Mit der Linearisierung der Gl. (B.1)

$$\mathbb{I} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{B.2})$$

und der Restriktion

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

ist die gesuchte Ableitung bestimmt. Für die Ableitung des Vektors  $\mathbf{n}$  nach der Komponente  $ij$  des Tensors  $\boldsymbol{\sigma}$  folgt die gesuchte Ableitung aus dem linearen Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}^T & 0 \\ \boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1} & -\mathbf{n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \sigma_{ij}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Falls  $\boldsymbol{\sigma}$  drei verschiedene Eigenwerte aufweist, ist  $\mathbf{A}$  stets regulär. Im Falle von zwei oder drei gleichen Eigenwerten wird eine numerische Perturbation durchgeführt.

**Anmerkung:** Die Invertierung der Matrix  $A$  muß für einen speziellen Vektor  $n$  nur einmal erfolgen, da die Ableitungen bezüglich unterschiedlicher Komponenten von  $\sigma$  lediglich mittels des Koeffizientenvektors auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gesteuert werden. Der numerische Aufwand ist also gering. □

# Anhang C

## Die DIRAC-Delta Verteilung

Die Berechnung des Deformationsgradienten von  $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldern der Form

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket H_s \quad (\text{C.1})$$

erfordert die Bestimmung des Gradienten von  $\mathbf{u}$  bezüglich der Koordinaten der Referenzkonfiguration. Wie im Kapitel 3 postuliert, wird auch hier  $\text{GRAD} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0}$  angenommen. Die allgemeinere Form  $\text{GRAD} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \neq \mathbf{0}$  bereitet keine weiteren Schwierigkeiten. Im folgenden wird versucht, lediglich die zur Herleitung des Gradienten benötigten mathematischen Charakteristika der DIRAC-Delta Verteilung zusammenzustellen. Für detailliertere Ausführungen wird auf [STAKGOLD 1967A; STAKGOLD 1967B; STAKGOLD 1998] verwiesen.

### Definition des Trägers einer vektorwertigen Abbildung $f$ (supp)

Mit der Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{X} &\longmapsto f(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

gilt die Definition

$$\text{supp}[f] := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{X}) \neq \mathbf{0}\}. \quad (\text{C.3})$$

### Definition eines Funktionals

Es sei  $\mathbb{O}$  der Raum der Abbildungen  $f$  mit  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ . Dann ist der Raum der Testfunktionen  $\mathbb{K}$  durch die folgenden Restriktionen charakterisiert:

$$\varphi \in \mathbb{K} \iff \begin{aligned} &\varphi \in \mathbb{O} \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad \text{und} \\ &\exists \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in \{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_2 \geq 0\} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Für die betrachteten Räume erfolgt die Definition eines Funktionals zu

$$\begin{aligned} f : \mathbb{O} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \varphi) &\longmapsto \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

### Definition einer Verteilung

Ist ein Funktional linear, gilt

$$\langle \mathbf{X}, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{X}, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{X}, \varphi_2 \rangle \quad \begin{array}{l} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{K}. \end{array} \quad (\text{C.6})$$

Ist ein Funktional linear und stetig, wird es auch Verteilung genannt. Die Eigenschaft der Stetigkeit wird hierbei mittels einer Null-Folge von Testfunktionen definiert (s. [STAKGOLD 1967B]). Für eine beliebige, lokal integrierbare Abbildung  $\mathbf{u} \in \mathbb{O}$  wird nach [STAKGOLD 1967B] die Verteilung

$$\langle \mathbf{u}, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \varphi \, dV \quad (\text{C.7})$$

definiert.

### Reguläre und singuläre Verteilungen

Kann eine Verteilung mittels der lokal integrierbaren Funktion  $\mathbf{u}$  in die Form

$$\langle \mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u} \cdot \varphi \, dX_1 \, dX_2 \, dX_3 \quad (\text{C.8})$$

überführt werden, so wird sie auch als reguläre Verteilung bezeichnet. Alle anderen Verteilungen sind dementsprechend singulär.

### Definition der HEAVISIDE-Funktion

Mit Gl. (C.7) kann die Definition der HEAVISIDE-Funktion zu

$$\langle H_s, \varphi \rangle = \int_{\Omega} H_s \varphi(\mathbf{X}) \, dV := \int_{\Omega^+} \varphi(\mathbf{X}) \, dV \quad (\text{C.9})$$

erfolgen. Sie stellt demnach eine reguläre Verteilung dar.

### Definition der DIRAC-Delta-Funktion

Für die DIRAC-Delta-Verteilung gelangt man somit zur Darstellungsform

$$\langle \delta_s, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \delta_s \varphi(\mathbf{X}) \, dV := \int_{\partial_s \Omega} \varphi(\mathbf{X}) \, d\Gamma. \quad (\text{C.10})$$

Anders als die HEAVISIDE-Funktion ist sie somit singulär.

### Deformationsgradient eines $\mathcal{C}^0$ -unstetigen Verschiebungsfeldes

Zur Berechnung des Deformationsgradienten wird analog zu [GARIKIPATI 1996] von der Verteilung

$$\int_{\Omega} \text{GRAD} \mathbf{u} \cdot \varphi \, dV = \int_{\Omega} \text{GRAD} \bar{\mathbf{u}} \cdot \varphi \, dV + \int_{\Omega} [\mathbf{u}] (\text{GRAD} H_s \cdot \varphi) \, dV, \quad (\text{C.11})$$

basierend auf dem Verschiebungsfeld (C.1), ausgegangen. Unter Berücksichtigung der Produktregel

$$\text{DIV}(H_s \varphi) = \text{GRAD}H_s \cdot \varphi + H_s \text{DIV}\varphi \quad (\text{C.12})$$

wird der zweite Term der Gl. (C.11) in die Form

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}] (\text{GRAD}H_s \cdot \varphi) \, dV = \int_{\Omega} [\mathbf{u}] \text{DIV}(H_s \varphi) \, dV - \int_{\Omega} [\mathbf{u}] H_s \text{DIV}\varphi \, dV \quad (\text{C.13})$$

überführt. Mit der disjunkten Zerlegung des Gebietes  $\Omega$  (s. auch Abb. 3.1) wird der erste Term der rechten Seite der Gl. (C.13) additiv in die Summanden

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}] \text{DIV}(H_s \varphi) \, dV = \int_{\Omega^+} [\mathbf{u}] \text{DIV}(H_s \varphi) \, dV + \int_{\Omega^-} [\mathbf{u}] \text{DIV}(H_s \varphi) \, dV \quad (\text{C.14})$$

aufgespalten. Da gemäß der Definition des Raumes der Testfunktionen (C.4) die Menge  $\text{supp}[\varphi]$  offen ist, demzufolge also keinen Rand aufweist, vereinfacht sich die Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes auf Gl. (C.14) zu

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}] \text{DIV}(H_s \varphi) \, dV = \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{u}] (\varphi \cdot \mathbf{N}^-) H_s \, d\Gamma + \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{u}] (\varphi \cdot \mathbf{N}^+) H_s \, d\Gamma = 0. \quad (\text{C.15})$$

Hierbei sind die Normalenvektoren  $\mathbf{N} = -\mathbf{N}^- = \mathbf{N}^+$  an der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  eingeführt worden. Unter Berücksichtigung der Definition der HEAVISIDE-Funktion (C.9) und nochmaliger Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes wird Gl. (C.13) in die vereinfachte Form

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\mathbf{u}] (\text{GRAD}H_s \cdot \varphi) \, dV &= - \int_{\Omega} [\mathbf{u}] H_s \text{DIV}\varphi \, dV \\ &= - \int_{\Omega^+} [\mathbf{u}] \text{DIV}\varphi \, dV \\ &= - \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{u}] \varphi \cdot \mathbf{N}^- \, d\Gamma \\ &= \int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{u}] \varphi \cdot \mathbf{N}^+ \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

überführt. Wird des weiteren die Definition der DIRAC-Delta Verteilung (C.10) genutzt, geht das Flächenintegral (C.16) in das Volumenintegral

$$\int_{\partial_s \Omega} [\mathbf{u}] \varphi \cdot \mathbf{N} \, d\Gamma = \int_{\Omega} [\mathbf{u}] \varphi \cdot \mathbf{N} \, \delta_s \, dV = \int_{\Omega} ([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N}) \cdot \varphi \, \delta_s \, dV \quad (\text{C.17})$$

über. Um den Gradienten der Gl. (C.1) zu berechnen, wird Gl. (C.17) zusammen mit (C.16) in die Verteilung (C.11) eingesetzt. Da Gl. (C.11) für beliebige Testfunktionen aus  $\mathbb{K}$  erfüllt sein muß, folgt unmittelbar die starke Form

$$\text{GRAD}\mathbf{u} = \text{GRAD}\bar{\mathbf{u}} + ([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N}) \, \delta_s. \quad (\text{C.18})$$



# Anhang D

## Materialmodell zur Simulation von Mode-I Versagen

In diesem Anhang wird die numerische Umsetzung des Materialmodells nach Abschnitt 5.5.3 im Rahmen des ebenen Spannungszustands erläutert. Die weiteren Ausführungen folgen der Arbeit [MOSLER & MESCHKE 2002A].

Gemäß des Abschnitts 5.5.3 wird der reguläre erweiterte Verzerrungstensor  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  für zweidimensionale Problemstellungen zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \zeta^{(n)} + (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi})^{\text{sym}} \zeta^{(m)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (\text{D.1})$$

spezifiziert. Analog zu Abschnitt 5.5.3 werden die zu  $\zeta^{(n)}$  und  $\zeta^{(m)}$  korrespondierenden Komponenten des Traktionsvektors  $\mathbf{t}_s$  mittels der Gleichungen

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} - q(\alpha) \quad \text{mit} \quad \dot{\alpha} = |\dot{\zeta}^{(n)}| \quad (\text{D.2})$$

und

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (\text{D.3})$$

kontrolliert. Mit der Kinematik (D.1) und der Rückwärts-EULER-Integration folgt der Spannungstensor zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \underbrace{\mathbb{C} : (\nabla^{\text{sym}} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)}_{\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}} - \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \Delta \zeta_{n+1}^{(n)} - \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \Delta \zeta_{n+1}^{(m)}. \quad (\text{D.4})$$

In Gl. (D.4) ist die Annahme einer zeitlich konstanten Topologie der singulären Fläche  $\partial_s \Omega$  verwendet worden. Führt man die Koeffizienten

$$\begin{aligned} g_{11} &= (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi}), & g_{21} &= (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi}), \\ g_{12} &= (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi}), & g_{22} &= (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ein und berücksichtigt desweiteren Gl. (D.4), geht Gl. (D.3) in die Form

$$\Delta \zeta_{n+1}^{(m)} = \frac{1}{g_{22}} \left[ (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - g_{21} \Delta \zeta_{n+1}^{(n)} \right] \quad (\text{D.6})$$

über. Die tangentielle Komponente der Diskontinuität des Verschiebungsfeldes wird hierdurch eine Funktion der Trial-Spannungen und der Normalkomponente von  $[[\mathbf{u}]]$ .

Wird durch  $\phi^{\text{tr}} = \phi(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \alpha_n) > 0$  Belastung signalisiert, sind die Inkremente  $\Delta\zeta_{n+1}^{(n)}$  und  $\Delta\zeta_{n+1}^{(m)}$  zu berechnen. Für die betrachteten Gleichungen (D.2) und (D.3) wird hierzu Gl. (D.6) in Gl. (D.1) eingesetzt, so daß die Spannungen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  eine Funktion des Trial-Spannungstensors und  $\Delta\zeta_{n+1}^{(n)}$  sind. Somit geht die Gleichung  $\phi_{n+1}$  in die Form

$$\left[ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{g_{12}}{g_{22}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right] : \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - \left[ g_{11} - \frac{g_{12} g_{21}}{g_{22}} \right] \Delta\zeta_{n+1}^{(n)} = q(\alpha_n + |\Delta\zeta_{n+1}^{(n)}|) \quad (\text{D.7})$$

über. Die Lösung  $\Delta\zeta_{n+1}^{(n)}$  der nichtlinearen skalaren Gl. (D.7) wird mit dem NEWTON-Verfahren bestimmt. Die Linearisierung des Spannungstensors nach dem kompatiblen Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  ergibt sich mit den Gl. (D.7), (D.6) und (D.4) zu

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\nabla^s \bar{\mathbf{u}}} = \mathbb{C} & - \frac{\mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \otimes \left[ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{g_{12}}{g_{22}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right] : \mathbb{C}}{\left[ g_{11} - \frac{g_{12} g_{21}}{g_{22}} \right] - D \text{sign} \Delta\zeta_{n+1}^{(n)}} \\ & - \frac{\mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{C}}{g_{22}} \\ & + \frac{\mathbb{C} : (\mathbf{m} \otimes \nabla \bar{\varphi}) \otimes \left[ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{g_{12}}{g_{22}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right] : \mathbb{C}}{\left[ g_{11} - \frac{g_{12} g_{21}}{g_{22}} \right] - D \text{sign} \Delta\zeta_{n+1}^{(n)}} \frac{g_{21}}{g_{22}}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

# Anhang E

## Das NEO-HOOKE-Materialmodell

In diesem Anhang wird das NEO-HOOKE-Materialmodell vorgestellt. Das hier erläuterte Modell ist der Arbeit [CIARLET 1988] entnommen worden.

Zur Berücksichtigung der Isotropiebedingungen wird das Potential des hyperelastischen Werkstoffmodells gemäß

$$\Psi_e(\mathbf{C}) = \Psi_e(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) \quad (\text{E.1})$$

in den drei Hauptinvarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors  $\mathbf{C}$  formuliert (s. Anhang A). Im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie folgt der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor  $\mathbf{S}$  aus der Dissipationsungleichung zu (s. Abschnitt 2.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{C}} &= 2 \left[ \frac{\partial \Psi_e}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \right] \\ &= 2 \left[ \frac{\partial \Psi_e}{\partial I_{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial II_{\mathbf{C}}} I_{\mathbf{C}} \right] \mathbf{1} - 2 \frac{\partial \Psi_e}{\partial II_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} + 2 \frac{\partial \Psi_e}{\partial III_{\mathbf{C}}} III_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Das NEO-HOOKE-Materialmodell nach [CIARLET 1988] ist durch das Potential

$$\Psi_e(\mathbf{C}) = \frac{\Lambda}{4} (J^2 - 1) - \log J \left( \frac{\Lambda}{2} + \mu \right) + \frac{1}{2} \mu (I_{\mathbf{C}} - 3) \quad \text{mit} \quad J = \sqrt{III_{\mathbf{C}}} \quad (\text{E.3})$$

definiert. Mit der Linearisierung des Werkstoffmodells in der Nähe der Referenzkonfiguration lassen sich die Werkstoffparameter  $\Lambda$  und  $\mu$  in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionskonstanten  $\nu$  zu

$$\Lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{E.4})$$

berechnen. Für das elastische Potential (E.3) spezifizieren sich die Spannungen (E.2) zu

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\Lambda}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} + \mu (1 - \mathbf{C}^{-1}). \quad (\text{E.5})$$

Um das Verhalten des Materialmodells besser zu verstehen, wird in diesem Absatz ein einachsialer Zugversuch betrachtet. Für eine einfache Interpretation der Ergebnisse ist es hierbei zweckmäßig, die Verzerrungsmaße in Abhängigkeit der Hauptstreckungen  $\lambda_i$  zu formulieren. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  und der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor  $\mathbf{C}$  vereinfachen sich somit für den betrachteten Versuch zu

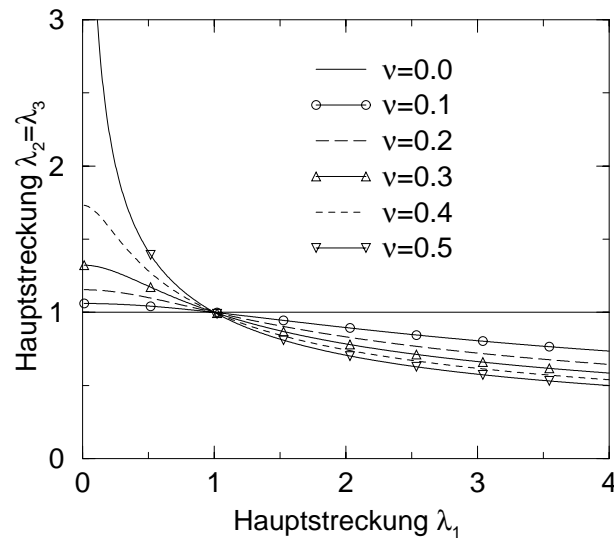
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = \lambda_3. \quad (\text{E.6})$$

Unter Berücksichtigung der Isotropie des Werkstoffmodells verschwinden die Schubkomponenten des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  für den analysierten Lastfall. Aufgrund der einachsialen Belastung müssen sich desweiteren die transversalen Spannungskomponenten zu Null ergeben. Mit dieser Restriktion wird eine Gleichung zwischen der achsialen Hauptstreckung  $\lambda_1$  und den transversalen Hauptstreckung  $\lambda_2 = \lambda_3$  hergeleitet. Die Gleichung folgt der Abbildung

$$S_{22}(\lambda_1, \lambda_2) = S_{33}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

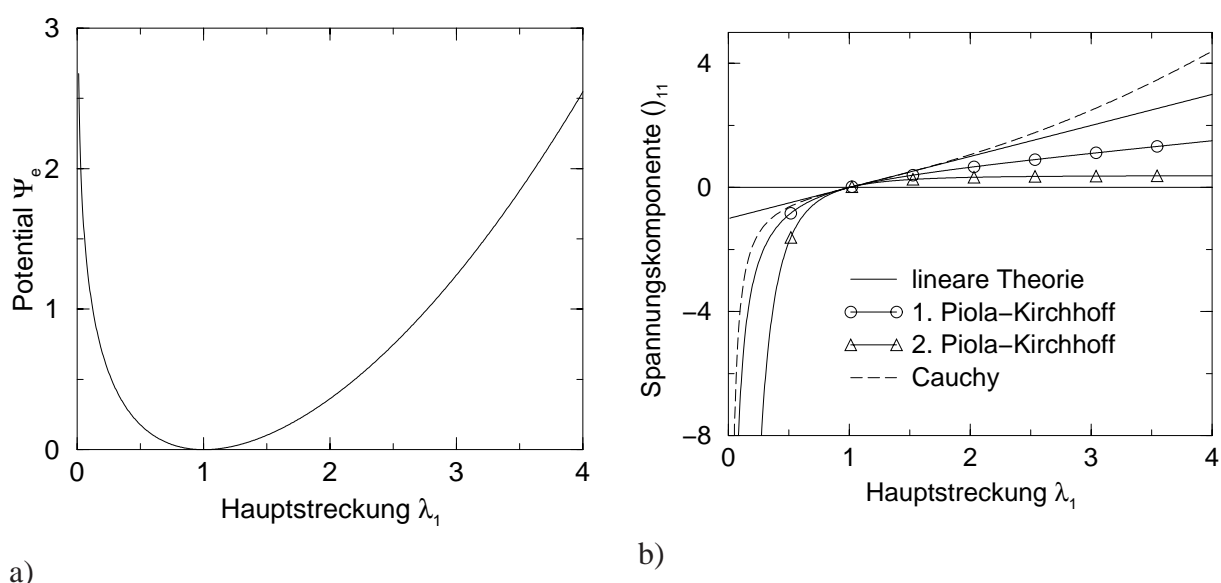
$$\Rightarrow \lambda_2(\lambda_1) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{2\lambda_1^2 \nu} + \frac{\sqrt{(1-2\nu)^2 - 4\lambda_1^2(\nu-1)\nu}}{2\lambda_1^2 \nu}}. \quad (\text{E.7})$$

Gl. (E.7) ist graphisch in Abb. E.1 illustriert. Wird Gl. (E.7) direkt in das Potential (E.3)



**Abb. E.1:** Einachsialer Zugversuch für das Potential nach Gl. (E.3),  $E=1.0$ : Hauptstreckungen in Längsrichtung  $\lambda_1$  vs. Hauptstreckungen in transversaler Richtung  $\lambda_2 = \lambda_3$ .

eingesetzt, ist es möglich das Potential und die  $(\bullet)_{11}$  Komponente des Spannungstensors in Abhängigkeit der Hauptstreckung  $\lambda_1$  zu formulieren. Zusammenfassend sind diese Herleitungen in Abb. E.2 dargestellt. Hierbei ist der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  und



**Abb. E.2:** Einachsialer Zugversuch für das Potential nach Gl. (E.3),  $E=1.0$ ,  $\nu = 0.3$ : a) Hauptstreckungen in Längsrichtung  $\lambda_1$  vs. Potential  $\Psi_e$  (E.3) b) Hauptstreckungen in Längsrichtung  $\lambda_1$  vs. Komponente des Spannungstensors  $(\sigma)_{11}$ .

der CAUCHY-Spannungstensor  $\sigma$  mittels der Transformation

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \sigma = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{E.8})$$

berechnet worden. Die Gleichung  $\Psi_e(\lambda_1)$  stellt somit eine konvexe Funktion dar, für die  $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \Psi_e(\lambda_1) = \infty$  und  $\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \Psi_e(\lambda_1) = \infty$  gilt.



# Literaturverzeichnis

- AIFANTIS, E.C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *J. Eng. Mat. Tech.* 106, 326–330.
- ANDELFINGER, U. (1991). *Untersuchung zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 13, Universität Stuttgart.
- ARMERO, F. (1997). Localized anisotropic damage of brittle materials. In D.R.J. Owen, E. Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity*, Volume 1, 635–640.
- ARMERO, F. (1999). Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4, 101–131.
- ARMERO, F. UND K. GARIKIPATI (1995). Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids. In D.R.J. Owen, E Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Proc., 4th Int. Conf. Computational Plasticity*, Volume 1, 547–561.
- ARMERO, F. UND K. GARIKIPATI (1996). An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal for Solids and Structures* 33, 2863–2885.
- BABUŠKA, I. UND J.M. MELENK (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, 289–314.
- BABUŠKA, I. UND J.M. MELENK (1997). The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 727–758.
- BAŞAR, Y UND D. WEICHERT (2000). *Nonlinear continuum mechanics of solids*. Springer.
- BAŽANT, Z.P. UND T.B. BELYTSCHKO (1985). Wave propagation in a strain-softening bar: Exact solution. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 111, 381–389.
- BAŽANT, Z.P. UND T.B. CHANG (1987). Nonlocal finite element analysis of strain-softening solids. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 113(11), 89–105.
- BAŽANT, Z.P. UND P.G. GAMBAROVA (1984). Crack shear in concrete: Crack band microplane model. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 110, 2015–2036.



- BAŽANT, Z.P. UND B.H. OH (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 111, 559–582.
- BAŽANT, Z.P. UND G. PIAUDIER-CABOT (1988). Nonlocal damage, localization, instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics* 55, 287–293.
- BELYTSCHKO, T., J. FISH UND B.E. ENGELMANN (1988). A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 70, 59–89.
- BOLZON, G. UND A. CORIGLIANO (2000). Finite elements with embedded displacement discontinuity: a generalized variable formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49, 1227–1266.
- BORJA, R.I. (2000). A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard galerkin approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 1529–1549.
- BORJA, R.I. (2002). Finite element simulation of strain localization with large deformation: capturing strong discontinuity using a Petrov-Galerkin multiscale formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. in press.
- BORJA, R.I. UND A.R. REGUEIRO (2001). Strain localization in frictional materials exhibiting displacement jumps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 2555–2580.
- CHEN, W.F. UND D.J. HAN (1988). *Plasticity for structural engineers*. Springer, New-York, Berlin, Heidelberg.
- CIARLET, P. (1988). *Mathematical elasticity. Volume I: Three-dimensional elasticity*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- COLEMAN, B.D. UND M.E. GURTIN (1967). Thermodynamics with internal state variables. *J. Chem. Phys* 47, 597–613.
- DE BORST, R. (1986). *Non-linear analysis of frictional materials*. Dissertation, Technical University Delft.
- DE BORST, R. (1991). Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations* 8, 317–332.
- DE BORST, R. (2001). Some recent issues in computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52, 63–95.
- DE BORST, R. UND H.B. MÜHLHAUS (1992). Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35, 521–539.
- DOLBOW, J., N. MOËS UND T. BELYTSCHKO (2002). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. submitted.

- DRUCKER, D.C. UND W. PRAGER (1952). Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quarterly Appl. Math.* 10, 157–175.
- DVORKIN, E.N., A. M. CUITIÑO UND G. GIOIA (1990). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30, 541–564.
- ECKSTEIN, A. (1999). *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 99-3, Ruhr-Universität-Bochum.
- GARIKIPATI, K. (1996). *On strong discontinuities in inelastic solids and their numerical simulation*. Dissertation, Stanford University.
- GARIKIPATI, K. UND T.J.R. HUGHES (1998). A study of strain localization in a multiple scale framework - the one-dimensional problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 159(3-4), 193–222.
- GLASER, S. UND F. ARMERO (1997). On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations* 14, 759–791.
- GOVINDJEE, S., G.J. KAY UND J.C. SIMO (1995). Anisotropic modeling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38, 3611–3634.
- HADAMARD, J. (1903). *Leçons sur la Propagation des Ondes*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris.
- HAN, H. UND B.D. REDDY (1999). *Plasticity: Mathematical theory and numerical analysis*. Springer, New York.
- HARRIS, J.W. UND H. STOCKER (1998). *Handbook of mathematics and computational science*. Springer.
- HILL, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6, 236–249.
- HILLERBORG, A., M. MODEER UND P.E. PETERSSON (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 6, 773–782.
- HOFMAN, J., R. ELIGEHAUSEN UND J. OŽBOLT (2001). Behaviour and design of fastenings with headed anchors at the edge under tension and shear load. In R. De Borst, J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, und J.G.M. Van Mier (Eds.), *FRACTure Mechanics of CONcrete Structures IV*, Volume 2, 941–947.
- HUEMER, T. (1998). *Automatische Vernetzung und adaptive nichtlineare statische Berechnung von Flächentragwerken mittels vierknotiger finiter Elemente*. Dissertation, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien.

- IORDACHE, M.M. UND K. WILLAM (1996). Localized failure modes in cohesive-frictional materials. Technischer Bericht, Structural Engineering and Structural Mechanics research series, Department of civil, environmental & architectural engineering, University of Colorado at Boulder.
- JIRÁSEK, M. (1999). Numerical modeling of deformation and failure of materials. *Lecture notes*.
- JIRÁSEK, M. (2000). Conditions of uniqueness for finite elements with embedded cracks. In Oñate, Buggeda E., G., und B. Suárez (Eds.), *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- JIRÁSEK, M. UND Z.P. BAŽANT (2002). *Inelastic analysis of structures*. Wiley.
- JIRÁSEK, M. UND T. ZIMMERMANN (2001). Embedded crack model: Part I: Basic formulation, Part II: Combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50, 1269–1305.
- JOHNSON, C. (1976). Existence theorems for plasticity problems. *J. Math. Pures et Appliquées* 55, 431–444.
- JOHNSON, C. UND R. SCOTT (1981). A finite element method for problems in perfect plasticity using discontinuous trial functions. In W. Wunderlich, E. Stein, und K.J. Bathe (Eds.), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, 307–324.
- KACHANOV, L.M. (1958). On the time to failure under creep conditions. In *Isw. AN SSSR Otd Techn. Nauk*, Volume 2, 26–31.
- KLISINSKI, M., T. OLOFSSON UND R. TANO (1995). Mixed mode cracking of concrete modelled by inner softening band. In D.R.J. Owen, E. Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Proc., 4th Int. Conf. Computational Plasticity*, Volume 2, 1595–1606.
- KLISINSKI, M., K. RUNESSON UND S.. STURE (1991). Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 117(3), 575–587.
- KRAJČINOVIC, D. (1996). *Damage mechanics*. North Holland.
- KRAJČINOVIC, D. UND M. VUJOSEVIC (1998). Strain localization-short to long correlation length transition. *International Journal for Solids and Structures* 35, 4147–4166.
- LACKNER, R. (1999). *Adaptive finite element analysis of reinforced concrete plates and shells*. Dissertation, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien.
- LARRSON, R. UND K. RUNESSON (1996). Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 122, 402–411.
- LARSSON, J. UND R. LARSSON (2000). Localization analysis of a fluid-saturated elastoplastic porous medium using regularized discontinuities. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 5, 565–582.

- LARSSON, L., K. RUNESSON UND M. ÅKESSON (1995). Embedded localization band based on regularized strong discontinuity. In D.R.J. Owen, E Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Proc., 4th Int. Conf. Computational Plasticity*, Volume 1, 599–610.
- LARSSON, R., P. STEINMANN UND K. RUNESSON (1998). Finite element embedded localization band for finite strain plasticity based on a regularized strong discontinuity. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4, 171–194.
- LEE, E.H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics* 36, 1–6.
- LEE, L.S. UND G.N. PANDE (1999). A new joint element for the analysis of media having discrete discontinuities. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4, 487–504.
- LEMAÎTRE, J. (1983). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Eng. Mat. & Techn.* 107, 83–89.
- LEMAÎTRE, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering & Design* 80, 233–245.
- LEPPIN, C. (2000). *Ein diskontinuierliches Finite-Element-Modell für Lokalisierungsversagen in metallischen und granularen Materialien*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechnik, Universität Hannover.
- LOFTI, H.R. UND P.B. SHING (1994). Analysis of concrete fracture with an embedded crack approach. In H. Mang, N. Bićanić, und R. de Borst (Eds.), *Computational Modelling of concrete structures*, 343–352. Pineridge press.
- LOFTI, H.R. UND P.B. SHING (1995, 4). Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38(8), 1307–1325.
- LUBLINER, J. (1997). *Plasticity theory*. Maxwell Macmillan International Edition.
- LUENBERGER, D.G. (1984). *Linear and nonlinear programming* (second ed.). Addison-Wesley Publishing Company.
- MANDEL, J. (1966). Conditions de stabilité et postulat de Drucker. In *Proceedings of the IUTAM Symposium on Rheology*, 58–68. Springer: Berlin.
- MARC (2000). *Benutzerhandbücher für das finite Elemente Programm MARC*. MARC Analysis Research Corporation.
- MARSDEN, J.E. UND T.J.R. HUGHES (1994). *Mathematical foundation of elasticity*. Dover, New York.
- MATTHIES, H., G. STRANG UND E. CHRISTIANSEN (1979). The saddle point of a differential program. In Glowinski, Robin, und Zienkiewicz (Eds.), *Energy methods in finite element analysis*, 309–318. J. Wiley and sons: London.
- MAXWELL, J.C. (1873). *Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon, Oxford.

- MAZARS, J. (1986). A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *International Journal of Fracture* 25, 729–737.
- MENRATH, H. (1999). *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 29, Universität Stuttgart.
- MESCHKE, G. (1989). *Synthese aus konstitutiven Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, elasto-plastischer Werkstoffmodelle und Finite-Elemente-Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*. Dissertation, TU Wien.
- MESCHKE, G. (1996). Consideration of aging of shotcrete in the context of a 3-D viscoplastic material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, 3123–3143.
- MESCHKE, G., R. LACKNER UND H.A. MANG (1998). An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42, 703–727.
- MIEHE, C. (1993). *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementierung*. Habilitation, Forschungs- und Seminarbericht aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Nr. F 93/1.
- MIEHE, C., M. LAMBRECHT UND J. SCHOTTE (2001). Computational plasticity of materials with micro-structures at finite strains based on an incremental variational formulation. In 2. *European Congress on Computational Mechanics*.
- MIEHE, C., J. SCHOTTE UND J. SCHRÖDER (1999). Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science* 16, 372–382.
- MIEHE, C. UND J. SCHRÖDER (1994). Post-critical discontinuous analysis of small-strain softening elastoplastic solids. *Archive of Applied Mechanics* 64, 267–285.
- MOËS, N., J. DOLBOW UND T. BELYTSCHKO (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46, 131–150.
- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2000). 3D FE analysis of cracks by means of the strong discontinuity approach. In E. Oñate, G. Bugeda, und B. Suárez (Eds.), *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2001a). An elastoplastic-damage model for quasi-brittle materials in the framework of the strong discontinuity approach. In R. De Borst, J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, und J.G.M. Van Mier (Eds.), *FRACTure Mechanics of CONcrete Structures IV*, Volume 2, 817–822.
- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2001b). Analysis of mode I failure in brittle materials using the strong discontinuity approach with higher order elements. In 2. *European Congress on Computational Mechanics*.



- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2001c). FE-modeling of displacement discontinuities in inelastic continua. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 81(Suppl. 4), 875–876. Vortrag GAMM 2000.
- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2002a). 3D modeling of strong discontinuities in elastoplastic solids: Fixed and rotating localization formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. accepted.
- MOSLER, J. UND G. MESCHKE (2002b). A comparison of embedded discontinuity approaches with fracture energy based smeared crack models. In *Fifth World Congress on Computational Mechanics*.
- MÜHLHAUS, H.B. UND E.C. AIFANTIS (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal for Solids and Structures* 28, 845–857.
- NÁDAI, A. (1931). *Plasticity*. Mc Graw-Hill, New York - London.
- NOGHABAI, K. (1999). Discrete versus smeared versus element-embedded crack models on ring problem. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 125(3), 307–315.
- OHLSSON, U. UND T. OLOFSSON (1997). Mixed-mode fracture and anchor bolts in concrete: Analysis with inner softening bands. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 123, 1027–1033.
- OLIVER, J. (1989). A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, 461–474.
- OLIVER, J. (1995a). Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. In D.R.J. Owen, E Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Proc., 4th Int. Conf. Computational Plasticity*, Volume 1, 455–479.
- OLIVER, J. (1995b, 12). Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics* 17(1-2), 49–61.
- OLIVER, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations part 1: Fundamentals. part 2: Numerical simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, 3575–3623.
- OLIVER, J., M. CERVERA UND O. MANZOLI (1997). On the use of  $j_2$  plasticity models for the simulation of 2d strong discontinuities. In D.R.J. Owen, E. Oñate, und E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity*, Volume 1, 38–55.
- OLIVER, J., M. CERVERA UND O. MANZOLI (1999, 3). Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity* 15, 319–351.
- OLIVER, J. UND J. SIMO (1994). Modelling strong discontinuities in solid mechanics by means of strain softening constitutive equations. In H. Mang, N. Bićanić, und R. de Borst (Eds.), *Computational Modelling of concrete structures*, 363–372. Pineridge press.

- OLOFSSON, T., M. KLISINSKI UND P. NEDAR (1994). Inner softening bands: A new approach to localization in finite elements. In H. Mang, N. Bićanić, und R. de Borst (Eds.), *Computational Modelling of Concrete Struct.*, 373–382. Pineridge press.
- ORTIZ, M. (1985). A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mech. of Materials* 4, 67–93.
- ORTIZ, M. (1987). An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mechanics of Materials* 6, 159–174.
- ORTIZ, M., Y. LEROY UND A. NEEDLEMAN (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 61, 189–214.
- OTTOSEN, N.S. UND K. RUNESSON (1991). Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal for Solids and Structures* 27(4), 401–421.
- PAMIN, J. (1994). *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. Dissertation, TU Delft.
- PÉREZ-FOGUET UND F. ARMERO (2000). On the formulation of closet-point projection algorithms for elastoplasticity. Part I: The variational structure. Part II: Globally convergent schemes. Technischer Bericht, UCB/SEMM Nr. 2000/01, 2000/02, Berkely.
- PIETRUSZCZAK, S. UND Z. MROŹ (1981). Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, 327–334.
- PIJAUDIER-CABOT, G. UND Z.P. BAŽANT (1987a). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 113, 1512–1533.
- PIJAUDIER-CABOT, G. UND Z.P. BAŽANT (1987b). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 113, 1512–1533.
- PÖLLING, R. (2000). *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Ruhr-Universität-Bochum.
- RANIECKI, B. UND O.T. BRUHNS (1981). Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 29(2), 153–172.
- REGUEIRO, A.R. UND R.I. BORJA (1999). A finite element method of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach. *Finite Elements in Analysis and Design* 33, 283–315.
- REGUEIRO, R.A. (1998). *Finite element analysis of strain localization in geomaterials taking a strong discontinuity approach*. Dissertation, Stanford University.
- REMMEL, G. (1994). Zum Zug- und Schubtragverhalten von bauteilen aus hochfesten Beton. Technischer Bericht Heft 444, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- RICE, J.R. UND J.W. RUDNICKI (1980). A note on some features of the theory of localization of deformation. *International Journal for Solids and Structures* 16, 597–605.

- ROTS, J.G. UND J. BLAAUWENDRAAD (1989). Crack models for concrete: Discrete or smeared ? Fixed, multi-directional or rotating ? *Heron* 34(1).
- RUDNICKI, J.W. UND J.R. RICE (1975). Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23, 371–394.
- RUNESSON, K., N.S. OTTOSEN UND D. PERIĆ (1991). Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity* 7, 99–121.
- SIMO, J.C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computational Mechanics* 99, 61–112.
- SIMO, J.C. (1998). Numerical analysis of classical plasticity. In P.G. Ciarlet und J.J. Lions (Eds.), *Handbook for numerical analysis*, Volume IV. Elsevier, Amsterdam.
- SIMO, J.C. UND F. ARMERO (1992). Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33, 1413–1449.
- SIMO, J., F. ARMERO UND R.L. TAYLOR (1993). Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110, 359–386.
- SIMO, J. UND T.J.R. HUGHES (1998). *Computational inelasticity*. Springer, New York.
- SIMO, J.C. UND G. MESCHKE (1993). A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. application to geomaterials. *Computational Mechanics* 11, 253–278.
- SIMO, J. UND J. OLIVER (1994). A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. In Z.P. Bažant, Z. Bittnar, M. Jirásek, und J. Mazars (Eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, 25–39. E. &F.N. Spon, London.
- SIMO, J., J. OLIVER UND F. ARMERO (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12, 277–296.
- SIMO, J.C. UND S. RIFAI (1990). A class mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, 1595–1638.
- SIMO, J.C. UND R.L. TAYLOR (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 48, 101–118.
- SIMO, J.C. UND R.L. TAYLOR (1991). Quasi-incompressible finite element elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 85, 273–310.
- SLUYS, L.J. UND A.H. BERENDS (1998). Discontinuous failure analysis for mode-I and mode-II localization problems. *International Journal for Solids and Structures* 35, 4257–4274.



- SNYMAN, M. F., W. W. BIRD UND J. B. MARTIN (1991). A simple formulation of a dilatant joint element governed by Coulomb friction. *Engineering Computations* 8, 215–229.
- STAKGOLD, I. (1967a). *Boundary value problems of mathematical physics*, Volume I. Macmillan Series in Advanced Mathematics and theoretical physics.
- STAKGOLD, I. (1967b). *Boundary value problems of mathematical physics*, Volume II. Macmillan Series in Advanced Mathematics and theoretical physics.
- STAKGOLD, I. (1998). *Green's functions and boundary value problems*. Wiley.
- STEIN, E. UND F.-J. BARTHOLD (1995). Elastizitätstheorie. *Skriptum, Universität Hannover*.
- STEIN, E., P. STEINMANN UND C. MIEHE (1995). Instability phenomena in plasticity: Modelling and computation. *Computational Mechanics* 17, 74–87.
- STEINMANN, P. (1992). *Lokalisierungsprobleme in der Plastomechanik*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- STEINMANN, P. (1998). A model adaptive strategy to capture strong discontinuities at large inelastic strains. In S.R. Indelsohn, E. Oñate, und E.N. Dvorkin (Eds.), *Computational Mechanics, New Trends and Applications. Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires.
- STEINMANN, P. UND P. BETSCH (2000). A localization capturing FE-interface based on regularized strong discontinuities at large inelastic strains. *International Journal for Solids and Structures* 37, 4061–4082.
- STEINMANN, P., R. LARSSON UND K. RUNESSON (1997). On the localization properties of multiplicative hyperelasto-plastic continua with strong discontinuities. *International Journal for Solids and Structures* 34, 969–990.
- STEINMANN, P. UND K.J. WILLAM (1991). Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity. In V. Mannl, J. Najar, und O. Brüller (Eds.), *Advances in continuum mechanics*, 296–313. Springer, Berlin-Heidelberg.
- SUKUMAR, N., N. MOËS, B. MORAN UND T. BELYTSCHKO (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48, 1549–1570.
- TAYLOR, R.L., J.C. SIMO, O.C. ZIENKIEWICZ UND A.C.H. CHAN (1986). The patch test-A condition for assessing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22, 39–62.
- THOMAS, Y. (1961). *Plastic Flow and Fracture of Solids*. Academic Press: New York.
- TRUESDELL, C. UND W. NOLL (1965). The nonlinear field theories. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik*, Volume 3. Springer-Verlag, Berlin.
- TRUESDELL, C. UND R. TOUPIN (1960). The classical field theories. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik*, Volume 3. Springer-Verlag, Berlin.

- WELLS, G.N. (2001). *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*. Dissertation, TU Delft.
- WELLS, G.N. UND L.J. SLUYS (2001a). Analysis of slip planes in three-dimensional solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 3591–3606.
- WELLS, G.N. UND L.J. SLUYS (2001b). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50, 2667–2682.
- WELLS, G.N. UND L.J. SLUYS (2001c). Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *International Journal for Solids and Structures* 38, 897–913.
- WILKINS, M.L. (1964). Calculation of elasto-plastic flow. In B. Adler und et. al. (Eds.), *Methods of computational physics*, Volume 3. Academic Press, New York.
- WINKLER, B. (2001). *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. Dissertation, Institut für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre, Universität Innsbruck.
- WRIGGERS, P. (2001). *Nichtlineare Finite-Element-Methode*. Springer.



## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten  
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter  
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen  
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung  
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei  
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse  
(Juli 1978)
- Nr. 15     Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung  
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen  
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33      Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34      Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35      Bernd Kaempf:  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36      Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37      Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38      Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39      Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40      Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41      Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42      Diemar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43      Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44      Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr.45      Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46      J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47      Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)

- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare  
Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung  
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am  
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit  
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli  
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und  
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes  
(Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory  
(Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)



- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)

- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:  
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)

- Nr. 100 Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie (Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen (Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode (Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur (Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:  
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze (Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen (Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:  
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:  
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)

- Nr. 116 Thomas Pandorf:  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:  
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:  
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:  
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese  
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke  
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller  
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel  
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel  
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse (August 2000)
- Nr. 125 Daniela Lürding  
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)
- Nr. 126 Thorsten Quent  
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung (Mai 2001)
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba  
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung (Mai 2001)
- Nr. 128 Henning Schütte  
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen (August 2001)
- Nr. 129 Henner Vogelsang  
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen (Dezember 2001)
- Nr. 130 Jörn Mosler  
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände (Dezember 2002)



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 130**

**978-3-935892-5-6**