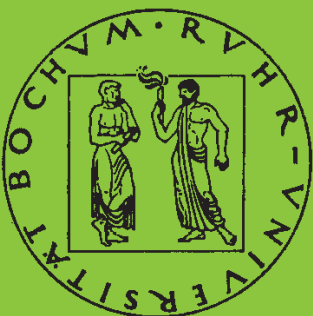


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Raoul Costamagna

**Globale Materialbeziehungen für das
geklüftete Gebirge**

Heft Nr. 134



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

**INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Raoul Costamagna

**Globale Materialbeziehungen
für das geklüftete Gebirge**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 134

Juli 2004

Herausgeber:

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-09-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© 2004 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Möglichkeit untersucht werden mit Methoden der Kontinuumsmechanik, eine einheitliche Beschreibung des Materialverhaltens von Gestein in verschiedenen räumlichen Ausdehnungen zu entwickeln.

Die üblichen Methoden, die von einem Mikromodell auf das makroskopische Verhalten schließen, reichen bislang nicht aus, die Festigkeit von Gestein hinreichend genau zu prognostizieren, obwohl sie charakteristische Eigenschaften von Gestein qualitativ wiedergeben können.

Deswegen wird anhand dokumentierter makroskopischer Festigkeitsversuche der vorherrschende mikroskopische Verformungs- oder Versagensmechanismus identifiziert. Dazu wird eine neue Methode zur Formulierung eines Versagenskriteriums entwickelt, mit dessen Hilfe sich die vorhandenen Festigkeitsdaten anhand übersichtlicher Parameter kategorisieren lassen.

Auf der Basis der Ergebnisse dieser Einteilung lässt sich das Verhalten von Gesteinen und anderen Werkstoffen qualitativ drei wesentlichen Phasen zuordnen. Dazu wird zwischen spröden, reibungsdominierten und kohäsionsdominierten Versagen unterschieden.

Die Festigkeit als eine Eigenschaft eines Kontinuums und die Reibung als eine Eigenschaft einer Oberfläche gelten bislang bei Gesteinen als zwei unterschiedliche Merkmale. Mit Hilfe des neu entwickelten Kriteriums lassen sich jedoch mit einem internen Reibungsparameter, der eine nichtlineare Funktion der Normalspannung ist, Festigkeits- und Reibwiderstandsmessungen an Gesteinen in Einklang bringen.

Summary

In this thesis, a unified material description for rock on respective scale is proposed. Standard methods in continuum mechanics use a micro to macro transition to determine macroscopic behaviour. This work studies macroscopic strength to identify the underlying microscopic deformation or failure mechanisms. Hence, a new failure criterion was developed that permits to compare different strengths in a systematic and classifying manner.

First analysis suggests that it is possible to distinguish between three different domains of failure of solids namely brittle, friction dominated and cohesion dominated failure. In addition, the two basic concepts friction as a property of a surface and strength as a property of a continuum can be connected.

“Von dem, was du erkennen und messen willst, musst du Abschied nehmen, wenigstens auf eine Zeit. Erst wenn du die Stadt verlassen hast, siehst du, wie hoch sich ihre Türme über die Häuser erheben.”

Friedrich Nietzsche (Menschliches, Allzumenschliches II 307).

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum. Sie wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 526 Rheologie der Erde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert und von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität Bochum als Dissertation angenommen.

Zu danken ist an erster Stelle Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns, der mir die Anregung, die Möglichkeit und den nötigen wissenschaftlichen Freiraum zur Anfertigung dieser Arbeit gab. Prof. Dr. rer. nat. Jörg Renner danke ich für sein reges Interesse und die freundliche Annahme der Arbeit.

Es war stets ein große Freude mit den Kollegen des Lehrstuhls aber auch denen anderer Institute innerhalb des SFB in einem konstruktiven Austausch zu stehen, zumal dies immer in einem herzlichen und kooperativen Klima geschah.

Dank auch all den anderen, die mich reifen ließen, den treuen Freunden und der Familie, der ich immer verbunden sein werde.

Bochum, im Juli 2004

Raoul Costamagna

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns
Prof. Dr. rer. nat. Jörg Renner

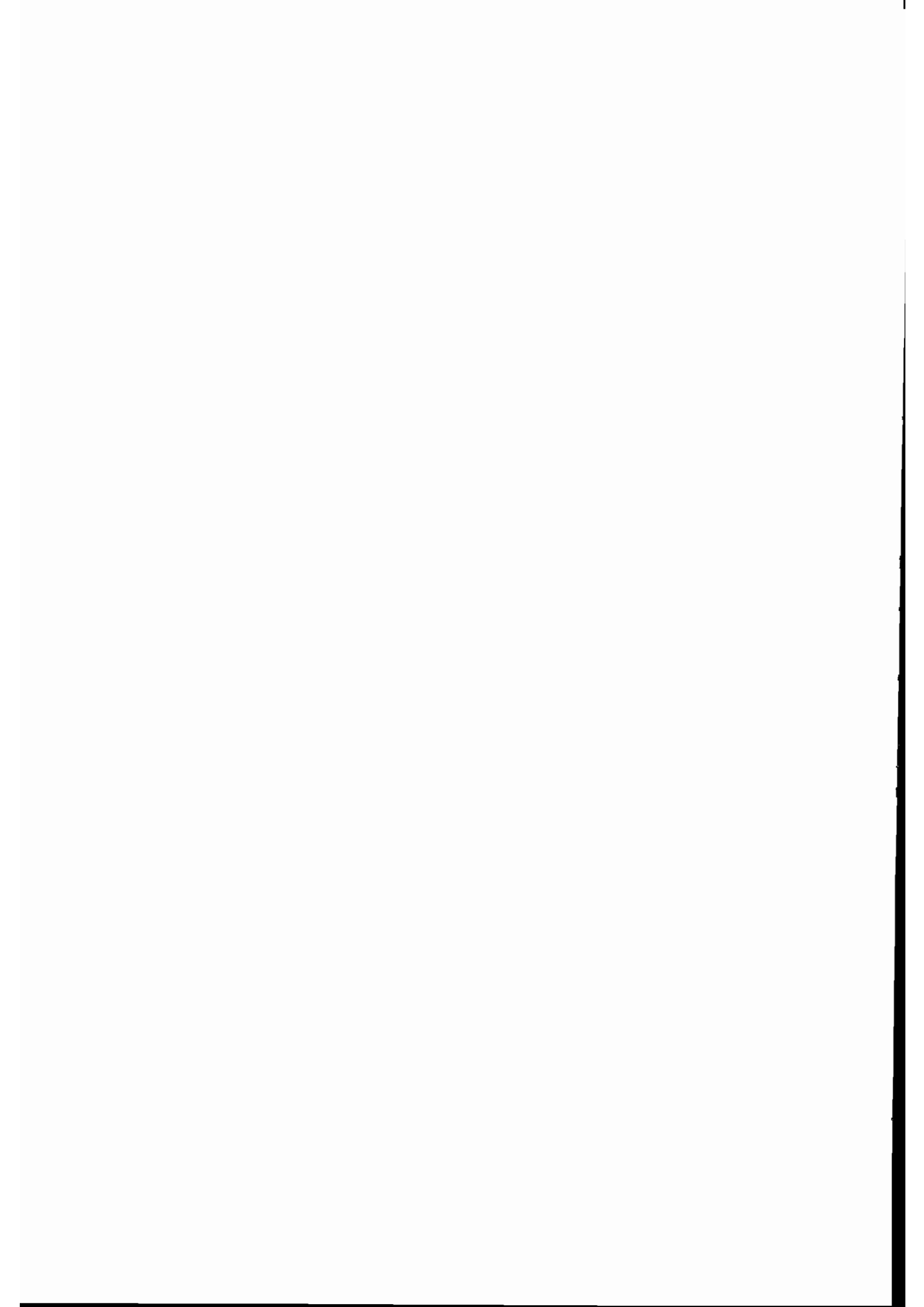
Tag der Einreichung: 18.05.2004
Tag der mündlichen Prüfung: 28.07.2004

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	7
2.1 Stoffunabhängige Gleichungen	7
2.1.1 Kräfte und Spannungen	7
2.1.2 Deformationen und Verzerrungen	8
2.1.3 Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze	9
2.2 Invarianten	10
2.2.1 Interpretationen der Spannungsinvarianten	12
2.2.2 Interpretation der Verzerrungsinvarianten	16
2.3 Konstitutive Gleichungen	18
2.3.1 Potenzialformulierung	18
2.3.2 Funktionaler Zusammenhang	21
2.3.3 Evolution interner Variablen	22
2.3.4 Grenzen konstitutiver Beziehungen	23
2.4 Lösungsschema der Kontinuumsmechanik	25
2.5 Ausgewählte analytische Lösungen	26
2.5.1 Gleiten entlang einer präexistente Fuge	27
2.5.2 Scheibe mit einem elliptischem Hohlraum	28
2.6 Konzepte der linear elastischen Bruchmechanik	31
2.6.1 Energiefreisetzungsrates	31
2.6.2 Spannungsintensitätsfaktoren	32

3	Beobachtungen und Gesteinsmodelle	35
3.1	Elastisches Verhalten	36
3.2	Nichtlineares Verhalten	37
3.3	Festigkeiten	42
3.4	Festigkeitskriterien	44
3.4.1	Geschichte	44
3.4.2	Mathematische Grundlagen	46
3.4.3	Hypothese der maximalen Schubspannung	47
3.4.4	Hypothese der maximalen Gestaltänderungsenergie	50
3.4.5	Hypothesen auf empirischer Basis	51
3.4.6	Hypothesen basierend auf mikroskopischen Effekten	53
3.5	Reibung	55
4	Modellierung eines globalen Gesteinverhaltens	59
4.1	Einleitung	59
4.2	Übergang von einer Mikro- zu einer Makroskala	60
4.2.1	Mikromodell	60
4.2.2	Makromodell	62
4.2.3	Rissinteraktion	66
4.2.4	Grenzen	67
4.3	Der Schluss von einem Makroverhalten auf einen Mikromechanismus .	68
4.3.1	Methodik	69
4.3.2	Linearer Zusammenhang	70
4.3.3	Erweiterungen	73
4.3.4	Grenzen	75
4.3.5	Eine makroskopische Interpretation	76

5	Ergebnisse	79
5.1	Einleitung	79
5.2	Westerly Granit	83
5.3	Sedimente	88
5.3.1	Klastische Sedimente	88
5.3.2	Sandstein	90
5.3.3	Karbonatgestein	97
5.4	Studien der Einflussfaktoren	102
5.4.1	Versagen im Zugspannungsbereich	102
5.4.2	Auswirkung eines erhöhten hydrostatischen Drucks	109
5.4.3	Einfluss von Temperatur und mineralogischem Aufbau	114
5.5	Werkstoffe	121
6	Diskussion und Ausblick	131
6.1	Diskussion	131
6.2	Ausblick	135
A	Haigh-Weestergard Koordinaten	137
B	Rissspitzennahfeld	138
	Literaturverzeichnis	139



Symbolverzeichnis

Skalare Größen

ρ, ρ_0	Dichte
F	Betrag einer Kraft
V, V_0	Volumen
m	Masse
A	Oberfläche
W	Arbeit, Energie
μ	Reibungskoeffizient
T	Temperatur
T_0	Raumtemperatur
l	Länge
u	Verschiebung
K_{Ic}	Bruchzähigkeit
f_t	uniaxiale Zugfestigkeit
f_c	uniaxiale Druckfestigkeit
E, ν	Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl
K, G	Kompressionsmodul, Schubmodul
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und σ_c	axiale und radialsymmetrische Spannung
σ_n	Normalspannung
τ	Schubspannung
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und ε_c	axiale und radialsymmetrische Dehnung
ε_v	relative Volumenänderung
I_1, I_2, I_3	Invarianten eines Tensors
J_2, J_3	Invarianten eines deviatorischen Tensors
ξ, ρ, θ	Haigh-Weestergard Koordinaten
σ_n	Normalspannung
τ	Schubspannung
Π	Potentialfunktion
K_I, K_{II}, K_{III}	Spannungsintensitätsfaktoren
c	Translation des Festigkeitskriteriums oder Risslänge
T_c	Einflussparameter der Temperatur
b, d, b_1, d_1	Einflussparameter der hydrostatischen Spannung
ϕ	Reibwinkel

ϕ_{MC}	Reibwinkel des Mohr-Coulomb Kriteriums
ϕ_{DP}	Reibwinkel des Drucker-Prager Kriteriums
k_L	Lade Parameter
k_M	Matsuoka Parameter
c_0	Kohäsionsparameter
γ	Quotient von $-f_c$ und f_t

Vektorielle Größen

x	Ortsvektor
b	Vektor der Volumenkraft
s, s_0	Spannungsvektor
F	Kraftvektor
n	Normalenvektor
u, u_0	Verschiebungsvektor

Tensorielle Größen

σ	Cauchy Spannungstensor
ε	linearer Verzerrungstensor
α	beliebiger symmetrischer zweistufiger Tensor
I	zweistufiger Einheitstensor
Q	Rotationstensor
Q_A	akustischer Tensor
C	vierstufiger Elastizitätstensor
C_{EP}	elastoplastische Tangente

Operatoren

$(\cdot)^T$	Transponierte des Tensors (\cdot)
$(\cdot)_H$	Hauptachsenform des Tensors (\cdot)
$(\cdot)'$	Deviator des Tensors (\cdot)
$\det(\cdot)$	Determinante des Tensors (\cdot)
$\text{tr}(\cdot)$	Spur des Tensors (\cdot)
$\{\cdot\}_{sym}$	symmetrischer Anteil des Tensors (\cdot)
$\nabla(\cdot)$	Gradientenbildung des Tensors (\cdot)
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergenzbildung des Tensors (\cdot)
:	doppelte Überschiebung
\times	Kreuzprodukt zweier Vektoren
Δ	Inkrement
$\dot{(\cdot)}$	materielle Zeitableitung der Größe (\cdot)
$ $	Betrag

1 Einleitung

Lithosphäre

Die Theorie der Plattentektonik verwandelte die bis dahin als unveränderlich und starr angesehene Erdkruste in die äußere Oberfläche eines sehr dynamischen und komplexen Umwälzungsprozesses der gesamten Erde.

Als Ursache dieses Prozesses gilt unumstritten ein Wärmetransport vom heißen Erdkern zum auskühlenden Rand in Form einer stofflichen Bewegung. Dieser Kreislauf, in dem heißes Material aufsteigt und nach einer Abkühlung herabsinkt, wird Konvektion genannt. Er ist nur möglich, wenn sich das Material wie eine Flüssigkeit verhält. Dies führte zu der rheologischen Unterscheidung des äußeren Bereichs der Erde in zwei Schichten: die obere Lithosphäre und die unter ihr liegende Asthenosphäre. Die Lithosphäre hat weniger Fähigkeiten sich zu verformen. Deswegen wird sie im Modell wie eine steife Platte abgebildet, die auf der flüssigen Asthenosphäre *schwimmt*. Da es mehrere dieser Platten gibt und sie sich gegeneinander verschieben, werden die Plattengrenzen in konvergente, transforme und divergente Ränder unterteilt. Entlang der Ränder der zwölf großen Platten der Erdoberfläche konzentrieren sich die Häufigkeit von Erdbeben und die Anzahl aktiver Vulkane.

Die Lithosphäre lässt sich selbst weiter unterteilen. Die oberste Schicht ist die Erdkruste von der sich wiederum zwei Arten unterscheiden lassen. Die ozeanische Kruste ist 5-15 Kilometer dick und besteht aus relativ dichtem ($\rho = 3,2 - 3,3 \text{ g/cm}^3$) basischem Material. Ihr Alter ist maximal 170 Millionen Jahre. Sie ist mit dem Rest der ozeanischen Platte einem ständigen Recyclingprozess unterworfen. Die kontinentale Kruste hingegen besteht aus weniger dichtem ($\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$) relativ saurem Material und ist mit einer mittleren Mächtigkeit von 38 Kilometern deutlich dicker. Sie ist stellenweise drei Milliarden Jahre alt und damit wesentlich älter als die ozeanische Platte.

Stößt eine Platte mit kontinentaler Kruste auf eine Platte mit ozeanischer Kruste, so taucht die schwerere ozeanische Lithosphäre unter der leichteren kontinentalen Lithosphäre ab. Dieser Vorgang wird als Subduktion bezeichnet. Der Rand der kontinentalen Platte wird dabei deformiert und es bilden sich Gebirge. Besonders hohe Gebirge wie das Himalaya Gebirge entstehen, wenn zwei kontinentale Platten kollidieren. Dort kann es zu einer Erhöhung der Mächtigkeit der Erdkruste auf über 70 Kilometer kommen. Dem Prinzip der Isostasie folgend, wächst hierbei der größere Teil als Wurzel in Richtung der Asthenosphäre. All diese Beobachtungen führten zu der Frage, welche Kräfte auf die Platten wirken können.

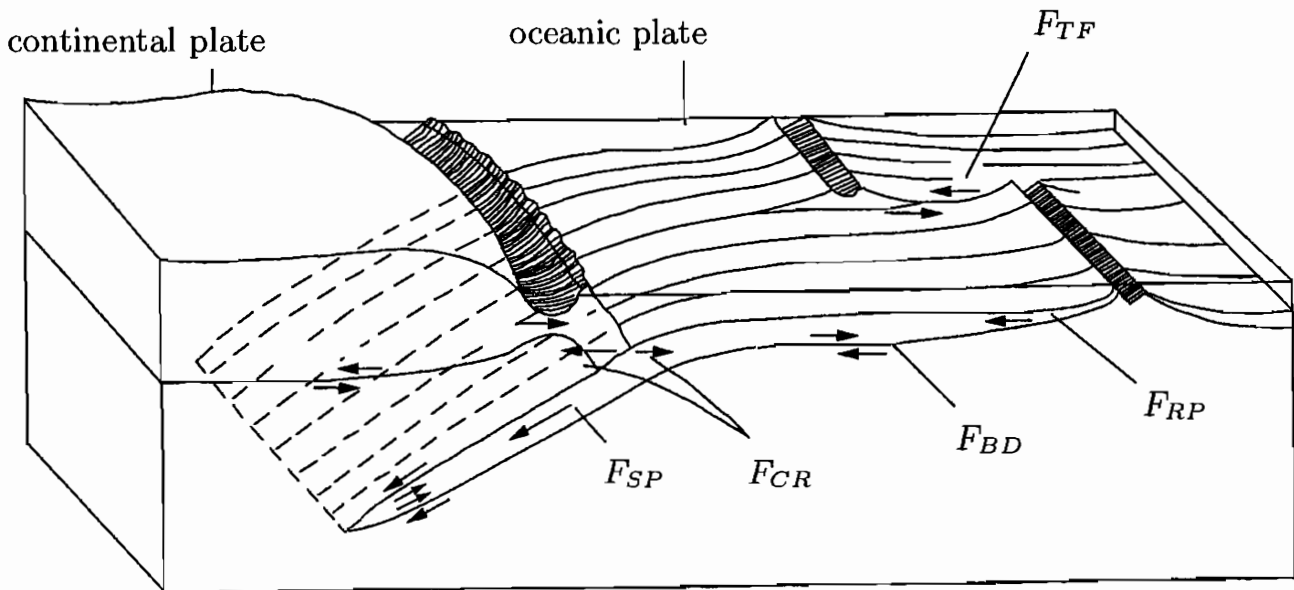


Abbildung 1.1: Darstellung lithosphärischer Kräfte nach [1].

Abbildung 1.1 zeigt schematisch die wirkenden Kräfte auf eine ozeanische Lithosphäre. An dem divergenten Plattenrand, hier ein mittelozeanischer Rücken, wirkt die Rückendruckkraft (ridge push) F_{RP} . Sie entsteht durch die verdrängende Wirkung des aufsteigenden Asthenosphärenmaterials. Der Widerstand der Transformationsverwerfung (transform fault resistance) F_{TF} wirkt entgegen der Bewegungsrichtung zweier aneinander abgleitenden Platten. Auf die Unterseite der Platte selbst wirkt möglicherweise die basale Schubkraft (basal drag) F_{BD} , die durch Reibung zwischen dem Asthenosphärenmaterial und der steiferen Platte entstehen kann. Die Richtung dieser Kraft ist unbestimmt. Wird die Lithosphäre über die Asthenosphäre hinweggezogen, so aktiviert sich eine Reibungskraft entgegen der Bewegungsrichtung. Bewegt sich hingegen das Asthenosphärenmaterial schneller als die Platte, entsteht die Reibungskraft in Richtung der Bewegung. Die Kontaktkraft zweier kollidierender Platten (colliding resistance) F_{CR} wird durch den Zusammenstoß initiiert. Die abtauchende Platte erfährt durch ihre höhere Dichte einen negativen Auftrieb, dessen Wirkung in der Zungenzugkraft (slab pull) F_{SP} berücksichtigt wird. Die nächste Frage ist, welche dieser Kräfte den Verformungsprozess kontrolliert.

Gestein

Für eine Abschätzung der wirkenden Kräfte in der Kruste ist es besonders aufschlussreich, die Plattenzonen zu betrachten, die sich im Grenzzustand der Tragfähigkeit befinden. Denn hat ein Bereich einer Platte versagt, so wurde dort die Festigkeit des Materials überschritten. Um Daten über die Festigkeit des Materials zu erhalten, wird das Lithosphärenmaterial, also das Gestein, in Proben entnommen. Anschließend wird es unter gleichwertigen, in der Lithosphäre vorherrschenden, Temperatur- und Druckbedingungen bis zum Versagen belastet. Doch schon hier zeigen sich große Schwierigkeiten. Es ist nämlich nur indirekt möglich, die Bedingungen in der Lithosphäre zu bestimmen, da Bohrungen zur Messung oder zur Probenentnahme für Tiefen mit mehr als zwölf Kilometer technisch nicht realisierbar sind. Weiterhin ist der Aufbau der kontinentalen Kruste sehr heterogen und die Gesteine selber haben eine Vielzahl von Erscheinungsformen und Eigenschaften.

Eine erste Einteilung der verschiedenen Gesteinsarten erfolgt anhand ihrer Entstehungsgeschichte. Es stellt sich heraus, dass nicht nur das ozeanische, sondern auch das kontinentale Krustengestein, einem ständigen Umwandlungsprozess unterworfen ist. Die Ursachen des zweiten Kreislaufs sind die durch Kontinentenverschiebungen ausgelösten mechanischen Umwälzungen, die durch die Krusten aufsteigenden heißen Magmen sowie die letztlich durch die Sonne verursachten Verwitterungen. Die entscheidenden Faktoren für eine Gesteinsbildung sind also Druck und Temperatur.

Drei Hauptgruppen von Gesteinen können unterschieden werden. Der Magmatit entsteht aus einer Kristallisation einer Schmelze. Neben der chemischen Zusammensetzung der Schmelze hat die Geschwindigkeit der Abkühlung einen großen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften des entstehenden Gesteins. Die Bildung eines Sediments geschieht durch Kompaktion und Zementation von Körnern, die zuvor aus Verwitterung oder anderen Prozessen entstanden sind. Der Metamorphit wird aus allen anderen Arten durch eine Rekristallisation des Gesteins im festen Zustand durch hohe Drücke und hohe Temperaturen gebildet. Durch Aufschmelzen, Umwandlung oder Verwitterung können alle Gesteinsarten ineinander überführt werden.

Wenn die räumliche Verteilung der unterschiedlichen Gesteine in der Lithosphäre bekannt ist, kann mit Hilfe von experimentell ermittelten Festigkeiten die maximale Kraft abgeschätzt werden, welche die Lithosphäre an dieser Stelle aufnehmen kann. Der Festigkeitsversuch selbst lässt bei Gesteinen auf unterschiedliche Arten des Versagens schließen. Das spröde Versagen tritt bei moderaten Drücken schlagartig ein. Das Material versucht vor dem Versagen nicht sich der Verformung anzupassen. Dagegen steht das zähe oder duktile Versagen, bei dem das Material vor dem Versagen deutlich nachgibt. Die Suche nach den Ursachen für ein Versagen führt zu einer erneuten Verkleinerung der räumlichen Ausmaße. Nun wird der Aufbau der Gesteine als Mineralkonglomerat deutlich.

Minerale

Ein Mineral ist ein homogener Festkörper in einer definierten chemischen Zusammensetzung mit einer bestimmten Struktur. Die chemische Zusammensetzung erfolgt in einer festen Relation aller mineralbildenden Atome und besteht für die gesteinsbildenden Mineralien hauptsächlich aus ionischen und kovalenten Bindungen. Die Atome/Moleküle selbst ordnen sich in einer Art und Weise an, bei der jedes Atom/Molekül seinen festen Platz hat. Diese Struktur wird Kristallgitter genannt. Mit unterschiedlichen Drücken und Temperaturen kann sich das Gitter verändern. Diese unterschiedlichen Anordnungen werden Phasen genannt. Durch die festen Muster bilden Minerale oftmals richtungsabhängige also anisotrope Eigenschaften aus.

Die Mineralien der Erdkruste bestehen hauptsächlich aus Sauerstoff und Silizium. In geringerer Häufigkeit treten die Metalle Aluminium, Eisen, Magnesium und Calcium auf. Die Mineralien der kontinentalen Kruste unterscheiden sich zu denen des Mantels durch einen höheren Silizium- und Aluminiumgehalt. Das Aluminium der Kruste wird durch Magnesium im Mantel in der Häufigkeitsverteilung abgelöst.

Für das Verhalten unter mechanischen Belastungen ist die Zusammensetzung der Kristalle und deren räumliche Anordnung in einem Gefüge von großer Bedeutung. Durch eine makroskopische Deformation werden auf der mikroskopischen Ebene viele Deformationsmechanismen aktiviert. So können sich die Kristalle relativ zueinander bewegen oder innerhalb des Kristalls kann es zu Wanderungen von Versetzungen oder zu Zwillingsbildungen kommen. Der Kristall selbst kann auch einfach elastisch seine Form ändern. Es ist zusätzlich möglich, dass sich im Gefüge oder im Kristall Risse ausbreiten. Als wichtige Parameter, die all diese Prozesse beeinflussen, stellen sich wieder der Druck, die Temperatur, aber auch der Wassergehalt des Gesteins heraus. Für eine Übersicht über die oben geschilderten Prozesse sind die beiden Bücher [2] und [3] zu empfehlen. Der Artikel [4] behandelt die Festigkeit der Lithosphäre.

Zeit

Neben der vorgestellten räumlichen Skalierung, ist für geologische Prozesse die zeitliche Skalierung von größter Bedeutung. Als einfaches illustratives Beispiel dient der Erdmantel (40-2891 km). Durch seismische Beobachtungen ist belegt, dass sich in diesem Bereich durch Erdbeben hervorgerufene Schallwellen auf zwei unterschiedliche Arten bewegen, während im äußeren Kern (2891-5150 km) nur eine Art der Schallwellenausbreitung nachgewiesen ist. Das Ausbleiben der zweiten Schallwelle ist für Fluide typisch und die Existenz derselben für elastische Festkörper. Während sich der Mantel also für Schallwellen im zeitlichen Bereich von Sekunden wie ein Festkörper verhält, ist er für konvektive Strömungen im zeitlichen Bereich von hundert Millionen Jahren ein Fluid. Dies weist auf ein stark zeitabhängiges Materialverhalten hin.

Ein ähnliches Verhalten hat Glas. Es zerbricht selbst unter kleinsten Belastungen spröde und doch verhält es sich über Jahrtausende hinweg wie eine Flüssigkeit. Natürlich ist der Vergleich nicht ganz zulässig, da Glas im Unterschied zum Gestein keine kristalline, sondern eine amorphe Struktur hat.

Diese Arbeit beschränkt sich auf den beobachtbaren zeitlichen Bereich.

Problemstellung

In der folgenden Arbeit wird versucht mit Methoden der Kontinuumsmechanik Erkenntnisse über das mechanische Verhalten von Gestein in den oben erwähnten räumlichen Ausmaßen zu finden. Es ist dazu vorgesehen, die wesentlichen Phänomene und deren Ursachen in einem Größenbereich in ihrer Wirkung auf den nächst höheren Größenbereich zu untersuchen. Die gewonnenen Ergebnisse sollen dann die Grundlagen einer globalen Modellierung bilden.

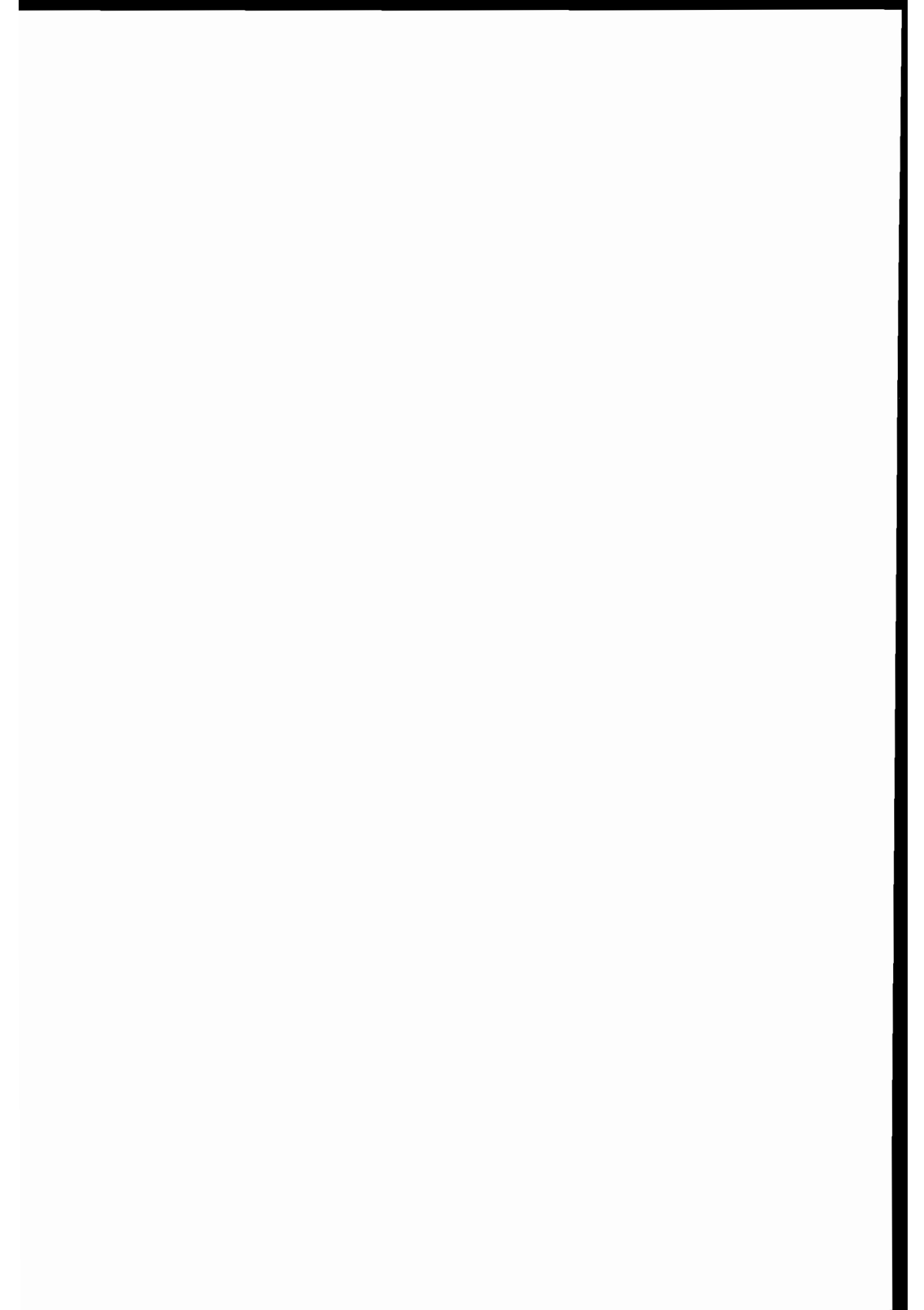
Dazu müssen folgende zentrale Fragen beantwortet werden:

Verhält sich das Gestein im Maßstab der Lithosphäre eher wie ein Kontinuum oder wie ein komplett zerklüftetes Medium?

Was ist der wesentliche Unterschied im Materialverhalten zwischen den beiden Medien?

Gliederung

Für eine Bearbeitung dieser Fragen gliedert sich die Arbeit in sechs Kapitel. Das zweite und dritte Kapitel fasst den Stand der Technik zusammen, wobei Kapitel zwei die Grundlagen der Kontinuumsmechanik skizziert, um diese dann im dritten Kapitel auf die Eigenschaften von Gestein zu spezialisieren. Kapitel vier stellt die Methoden vor, mit denen versucht wurde, das Problem zu lösen, und Kapitel fünf vergleicht die gewonnenen Ergebnisse mit Beobachtungen. Das letzte Kapitel wird zusammenfassen und gibt einen Überblick über mögliche Weiterentwicklungen.



2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik ist eine rein phänomenologische Theorie, die als mathematisches Modell ein Kontinuum verwendet. Sie sucht nach einer Beschreibung des Verhaltens realer räumlicher Körper unter gegebenen Bedingungen. Dazu unterscheidet sie zwischen der unverformten und der verformten Lage eines Körpers. Durch die Differenz der beiden Lagen können die wirkenden Verformungen beschrieben werden. Im Modell werden ihnen als Ursachen Kräfte gegenübergestellt. Dem Modell liegt dabei die Annahme zu Grunde, dass der Körper seinen materiellen Zusammenhalt bewahrt.

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die theoretischen Konzepte und Lösungsmethoden der Kontinuumsmechanik gegeben werden. Im ersten Teil werden die grundlegenden Begriffe eingeführt, die in ihrer Formulierung nicht von dem betrachteten Material abhängen. Es stellt sich oft als vorteilhaft heraus, diese Formulierung mit Hilfe von Invarianten vorzunehmen. Das verwendete System von Invarianten wird im zweiten Teil definiert, dem die Beschreibung der Materialgleichungen folgt. Im vierten Teil werden die bisher getroffenen Aussagen zu einem vollständigen mathematischen Modell synthetisiert. Auf der Suche nach den Versagenszuständen des Kontinuums erweisen sich die zwei Modelle als hilfreich, die im fünften Teil erläutert werden, zumal sich aus einem Modell die Konzepte der Bruchmechanik aus Teil sechs ableiten lassen.

Als Literatur zu diesem Thema eignen sich die Bücher [5, 6] sowie der Übersichtsartikel [7] aber auch das Vorlesungsskript [8].

2.1 Stoffunabhängige Gleichungen

Alle in diesem Kapitel verwendeten Größen sind Feldgrößen, das heißt, sie sind mit dem Ortsvektor \boldsymbol{x} veränderlich. Weiterhin wird die Theorie auf die Beschreibung kleiner Verschiebungen und kleiner Dehnungen beschränkt sein. Die beiden Bedingungen sollen im Folgenden immer kleine Verformungen genannt werden.

2.1.1 Kräfte und Spannungen

Der allgemeine Körper aus Abbildung 2.1 soll nur durch zwei verschiedene Arten von Kräften belastet werden. Eine ist die volumenhaft verteilte Kraft \boldsymbol{b} und die andere ist eine Flächenkraft \boldsymbol{s}_0 , die auf der Oberfläche des Körpers wirkt.

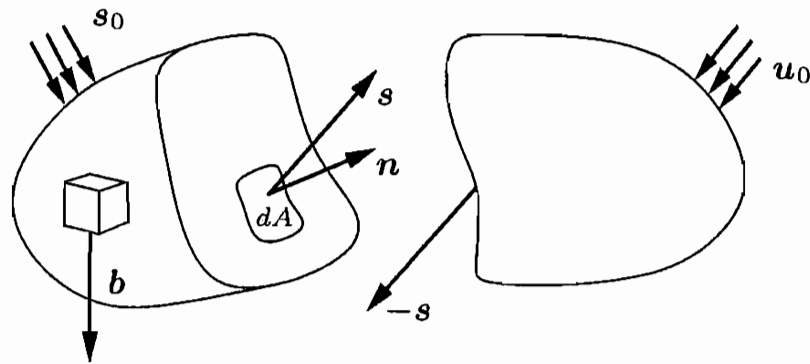


Abbildung 2.1: Spannungen und Kräfte.

Diese Lasten rufen in jedem Punkt \boldsymbol{x} des Körpers Spannungen \boldsymbol{s} hervor, welche durch gedachte Schnitte freigelegt werden können. Da der Spannungsvektor \boldsymbol{s} nach

$$\boldsymbol{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dA} \quad (2.1)$$

von der Wahl der Fläche dA abhängt, ist es sinnvoll den Spannungszustand durch eine tensorwertige Größe $\boldsymbol{\sigma}$ zu beschreiben. Der zweistufige Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ heißt Cauchy Spannungstensor und ist definiert als:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{n}. \quad (2.2)$$

Der Cauchy Spannungstensor ist symmetrisch, das heißt $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

2.1.2 Deformationen und Verzerrungen

Analog zu den Krafterandbedingungen \boldsymbol{s}_0 aus Abbildung 2.1 ist es möglich, geometrische Randbedingungen \boldsymbol{u}_0 zu wählen. Wie die Krafterandbedingungen können sie normal und tangential zur Oberfläche wirken.

Als weitere Größe wird die Verschiebung \boldsymbol{u} eingeführt. Aus dieser Verschiebung lässt sich erneut eine tensorwertige Größe ableiten, die genau wie der Spannungstensor zweistufig ist. Auch diese, Verzerrungstensor genannte, Größe ist symmetrisch und im linearisierten Fall für kleine Dehnungen gilt für sie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T). \quad (2.3)$$

Durch die Gleichung (2.3) werden die Kompatibilitätsbedingungen automatisch erfüllt. Die Einschränkung auf kleine Verschiebungen verhindert, dass sich das Maß $\boldsymbol{\varepsilon}$

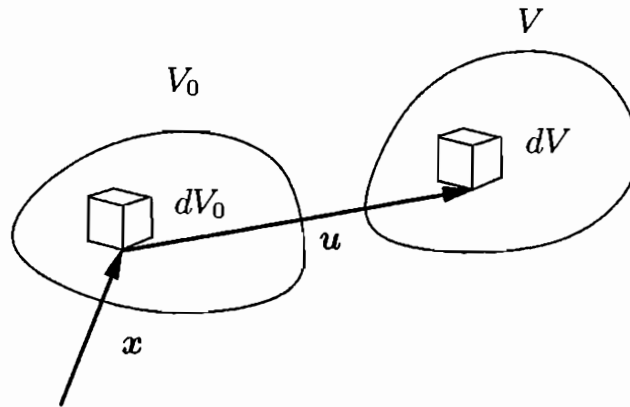


Abbildung 2.2: Deformationen und Verzerrungen.

selbst durch die Verformungen ändert. Die Änderung von ϵ zwischen der ursprünglichen Ausgangslage V_0 , auch Referenzkonfiguration, und der verformten Lage V , auch aktuelle Konfiguration, ist also derart gering, dass nicht unterschieden werden muss, in welcher Konfiguration der Verzerrungstensor definiert ist.

Das linearisierte Verzerrungsmaß ϵ kann geometrisch als Dehnungen und Gleitungen gedeutet werden. Die Komponenten der Matrix dieses Tensors, die sich auf der Diagonalen befinden, sind die Dehnungen und können als Quotient der Verschiebung und der ursprünglichen Länge in einer Richtung definiert werden. Die anderen Komponenten sind die Gleitungen, die die Winkeländerungen in den drei Ebenen beschreiben.

2.1.3 Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze

Alle folgenden Gleichungen können lokal, für jeden Punkt, wie global, das heißt über das Volumen gemittelt, formuliert werden. Da die lokalen Bedingungen sehr viel rigorosere Forderungen als gemittelte sind, werden sie oftmals auch starke Formulierungen genannt. Analog heißen globale Bedingungen dann schwache Formulierung.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur quasistatische Prozesse betrachtet. Folglich werden dynamische Größen, wie die Trägheit, in den Bilanzgleichungen vernachlässigt, deswegen ist $\ddot{x} = 0$. Ferner wird auf eine Kopplung zwischen dem mechanischen und dem thermischen Problem verzichtet, sodass die folgenden Bilanzen ausschließlich für isotherme Prozesse gelten.

Die Forderung, dass die Masse eines Körpers durch eine Deformation unverändert bleibt, lässt sich lokal wie global formulieren:

$$\rho_0 - \rho(1 + \text{tr}(\epsilon)) = 0 \quad \int_V \rho_0 - \rho(1 + \text{tr}(\epsilon)) dV = 0. \quad (2.4)$$

Hierbei ist ρ die Dichte, und die $\text{tr}()$ Funktion ist in Gleichung (2.12) definiert. Die zentralen Gleichungen in der Mechanik sind die Impulsbilanz

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} dV = 0 \quad (2.5)$$

und die Drehimpulsbilanz

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{s}_0 dA + \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV = 0. \quad (2.6)$$

A ist die zu den äußeren Kräften \mathbf{s}_0 gehörende Oberfläche. Die Energieerhaltung wird nur global formuliert und ergibt sich zu:

$$\int_A \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{s}_0 dA + \int_V \rho \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{b} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV = 0. \quad (2.7)$$

Die ersten beiden Terme in Gleichung (2.7) stehen für die Rate der von äußeren oder volumenhaft verteilten Kräften geleisteten Arbeit. Sie muss gleich der Rate der Deformationsenergie sein.

2.2 Invarianten

Die Komponenten eines Tensor zweiter Stufe, wie er zur Beschreibung der Spannungen und den Verzerrungen verwendet wird, sind immer abhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Da im Fall der Isotropie ein Material keine richtungsabhängigen Eigenschaften besitzt, liegt bei der Formulierung einer solchen Beziehung die Verwendung von Invarianten nahe. Sie sind unabhängig gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems und daher besonders geeignet zur Beschreibung materieller kontinuumsmechanischer Zusammenhänge.

Da verschiedene Invariantensysteme existieren, liegt eine gewisse Beliebigkeit in der Wahl des Invariantensystems. Im Folgenden soll das in dieser Arbeit verwendete System eingeführt werden. Mit Hilfe einer Hauptachsentransformation kann ein beliebiger symmetrischer zweistufiger Tensor $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T$ in ein Hauptachsensystem überführt werden, sodass mit $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ und $\det(\mathbf{Q}) = 1$ gilt:

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\alpha}_H \quad (2.8)$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Um diese Transformation zu erfüllen, muss

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{n} - \lambda \mathbf{n} = (\boldsymbol{\alpha} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

sein. Dabei sind \mathbf{n} die Eigenvektoren und λ die Eigenwerte von $\boldsymbol{\alpha}$. Gleichung (2.10) führt zu der charakteristischen Gleichung:

$$\det(\boldsymbol{\alpha} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\boldsymbol{\alpha}_H - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2.11)$$

mit

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}_H) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 \\ &= \alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{12}^2 - \alpha_{23}^2 - \alpha_{13}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}^2)) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}_H)^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}_H^2)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ &= \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + 2 \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} \alpha_{13}^2 - \alpha_{33} \alpha_{12}^2 \\ &= \det(\boldsymbol{\alpha}) = \det(\boldsymbol{\alpha}_H). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Gleichung (2.11) ist natürlich für alle α_1 , α_2 und α_3 erfüllt. Mit der Substitution $\lambda = \lambda' + \frac{I_1}{3}$ folgt:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\alpha} - \lambda \mathbf{I}) &= \left(\lambda' + \frac{I_1}{3} \right)^3 - I_1 \left(\lambda' + \frac{I_1}{3} \right)^2 + I_2 \left(\lambda' + \frac{I_1}{3} \right) - I_3 \\ &= \lambda'^3 + \lambda' J_2 + J_3 = \det(\boldsymbol{\alpha}' - \lambda' \mathbf{I}) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(I_2 - \frac{I_1^2}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}'^2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}'_H{}^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \left(-\frac{2}{27} I_1^3 + \frac{I_2 I_1}{3} - I_3 \right) = - \left(I_3 - \left(J_2 + \frac{I_1^2}{3} \right) \frac{I_1}{3} + \frac{2}{27} I_1^3 \right) \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}'^3) = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}'_H{}^3). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Der Tensor $\boldsymbol{\alpha}'$ heißt Deviator und ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} - \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha})}{3} \mathbf{I}. \quad (2.18)$$

Die zweite Invariante des Deviators J_2 ist gemäß Gleichung (2.16) immer negativ. Es gilt:

$$J_2 \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Bei einer Translation des Tensors α durch $\alpha - \alpha I$ verändern sich die Invarianten gemäß:

$$\begin{aligned} I_1(\alpha - \alpha I) &= I_1(\alpha) - 3\alpha \\ J_2(\alpha - \alpha I) &= J_2(\alpha) \\ J_3(\alpha - \alpha I) &= J_3(\alpha). \end{aligned}$$

Die Cardano'sche Formeln für die Existenz dreier reeller Lösungen lautet:

$$\left(\frac{J_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{J_2}{3}\right)^3 \leq 0. \quad (2.20)$$

Sie wird für alle α_1, α_2 und α_3 erfüllt, da die Annahme gemacht wurde, dass eine Transformation möglich ist. Die Bedingung für die Existenz zweier komplexer und einer reellen Lösung ist:

$$\left(\frac{J_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{J_2}{3}\right)^3 > 0. \quad (2.21)$$

Die Grenze zwischen den Gebieten wird durch

$$\left(\frac{J_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{J_2}{3}\right)^3 = 0 \quad (2.22)$$

beschrieben. Die im Weiteren verwendeten Invarianten sind die lineare Invariante I_1 , die quadratische Invariante J_2 und die kubische Invariante J_3 . Es ist möglich, alle Tensoren nach Gleichung (2.8) durch einen Tensor α_H in Diagonalenform zu repräsentieren. Da die Eigenwerte in α_H permutiert werden können, stellt er im Hauptwerterraum sechs Punkte dar.

2.2.1 Interpretationen der Spannungsinvarianten

Für eine beliebige Fläche gilt, dass ihre Orientierung durch einen Vektor \mathbf{n} beschrieben werden kann, der einen Punkt auf der Einheitskugel $|\mathbf{n}| = 1$ beschreibt. Für $\boldsymbol{\sigma}$ und \mathbf{n} aus Abbildung 2.3 gelten nun folgende Beziehungen:

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.23)$$

$$\tau^2 = |\mathbf{s}_t|^2 = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbf{n})^2. \quad (2.24)$$

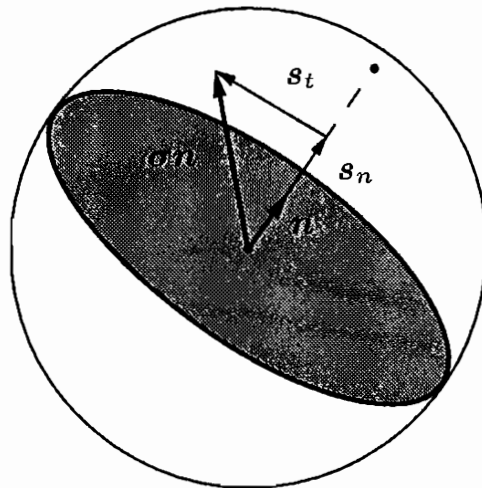


Abbildung 2.3: Fläche in einer Einheitskugel.

2.2.1.1 Mohr'sche Darstellung

Mohr hat gezeigt, dass die Gleichungen (2.23) und (2.24) zusammen mit $|\mathbf{n}| = 1$, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, interpretiert werden können (siehe dazu auch [9]). Die graue Fläche stellt alle möglichen Spannungszustände dar. Die Erstellung der Figur erfolgt, indem drei Kreise so durch jeweils zwei Hauptspannungen konstruiert werden, dass ihre Kreismittelpunkte auf der σ -Achse liegen. Der Hauptspannungszustand ist für verschwindendes τ durch die drei Punkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dargestellt. Für eine konstante Normalspannung σ_n können durch verschiedene Schnitte die durch die Intervalle $\Delta\tau$ markierten Schubspannungen erzeugt werden. Eine wichtige Folgerung ist, dass die größtmöglichen Schubspannungen, also der äußere Kreis aus Abbildung 2.4, nur von der kleinsten Hauptspannung, σ_3 , und der größten Hauptspannung, σ_1 , abhängen.

Leider ist es nur für einen Spezialfall von Abbildung 2.4 möglich zwei der drei Invarianten graphisch zu deuten. Für den Fall, dass die mittlere Hauptspannung das arithmetische Mittel der anderen Spannungen ist, haben die beiden inneren Kreise die gleichen Radien. Es ist zweckmäßig durch einen Index zu kennzeichnen, auf welchen Tensor sich die Invariante bezieht. Die Invarianten werden zu:

$$I_1\sigma(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3) = \frac{3}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.25)$$

$$J_2\sigma(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3) = -\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (2.26)$$

$$J_3\sigma(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3) = 0. \quad (2.27)$$

Wie aus Abbildung 2.5 ersichtlich, ist in diesem Fall $\sqrt{-J_2}$ der Radius und $\frac{I_1}{3}$ der Mittelpunkt des äußeren Kreises. Oft wird ein Modell verwendet, welches der Mohr'sche

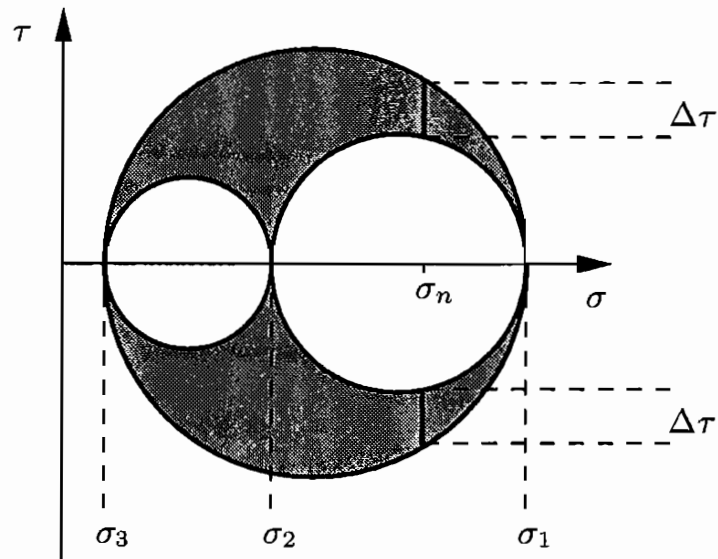


Abbildung 2.4: Spannungen in Mohr'scher Darstellung.

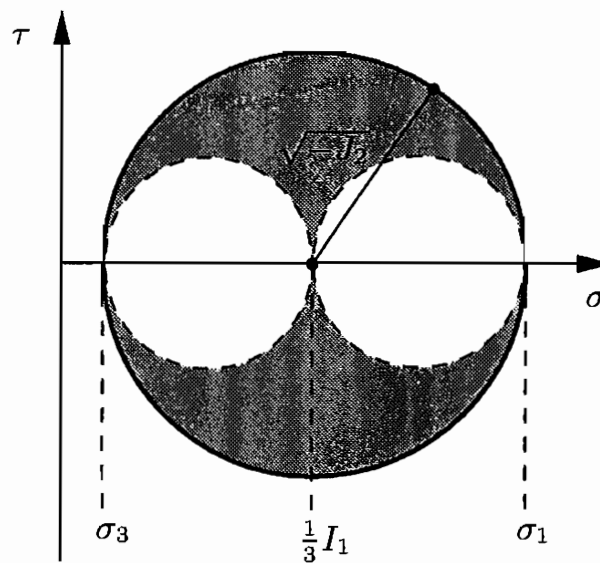


Abbildung 2.5: Invarianten in Mohr'scher Darstellung.

Spannungskreis für einen ebenen Fall sein soll. Dieser Anschauung sollte nur mit großer Vorsicht gefolgt werden. In einer ebenen Theorie muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Der erste ist der ebene Verzerrungszustand für den die Dehnung in einer Richtung unterdrückt ist. Analog gilt dies für die Spannung in einer Richtung beim ebenen Spannungszustand.

Für den ebenen Spannungszustand muss also bei der Mohr'schen Darstellungsweise einer der Kreise durch den Ursprung gehen. Für den ebenen Verzerrungszustand ist dieser dritte Spannungspunkt sogar von einem Materialgesetz abhängig. Wenn nicht

zwei der drei Spannungen gleich groß sind, ist es eigentlich gar nicht möglich einen Spannungszustand zu erzeugen, der nur durch einen Kreis dargestellt werden kann. Eine Erweiterung einer zweidimensionalen auf eine dreidimensionale Theorie sollte diesen Unterschied stets berücksichtigen.

2.2.1.2 Statistische Größe

Oft ist es nützlich in einer Kontinuumstheorie statistische Größen zu verwenden. So ist häufig gefragt, wie sich eine Vielzahl von Diskontinuitäten im Mittel in einem belasteten Kontinuum verhalten. In Abbildung 2.6 wird dies für ein Volumen skizziert. Die anschließende Überlegung gilt nur für folgende Annahmen: Das Volumen muss so groß sein, dass jede Richtung n vertreten ist. Des Weiteren dürfen die Orientierungen keine Vorzugsrichtung haben, müssen also gleich verteilt sein. Die letzte Forderung ist, dass es sich um einen reinen Druckspannungszustand handelt. Eine

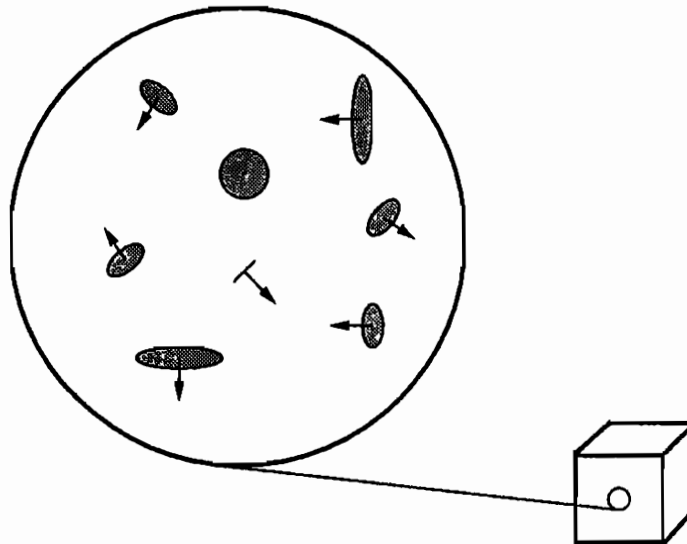


Abbildung 2.6: Orientierte Diskontinuitäten in einem Volumen.

Formulierung für Zugspannungen wäre unsinnig, da reale Diskontinuitäten physikalisch keine Zugspannungen übertragen können. Sie würden also bei Zugspannungen Spannungsumlagerungen hervorrufen.

Solange die Diskontinuitäten den Reibwiderstand nicht überwinden, verändern sie das Spannungsfeld nicht. Wenn sich Störungen untereinander nicht beeinflussen, wird von einer schwachen Verteilung gesprochen.

Die Idee ist nun, die Größen zu bestimmen, die integriert über jede Richtung auf die Flächen der Diskontinuitäten wirken. Dazu werden in Kugelkoordinaten folgende

Integrale berechnet:

$$O = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{n}^T \mathbf{n} \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = 4\pi \quad (2.28)$$

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{1}{O} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_n \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{I_1 \sigma}{3} \quad (2.29)$$

$$\langle \tau^2 \rangle = \frac{1}{O} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tau^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -\frac{2}{5} J_2 \sigma. \quad (2.30)$$

Die Größen $I_1 \sigma$ und $J_2 \sigma$ sind also nützlich, um in einer statistischen Theorie verwendet zu werden. $I_1 \sigma$ ist ein Maß für die mittlere Normalspannung und $J_2 \sigma$ ein Maß für die mittlere quadratische Schubspannung.

2.2.2 Interpretation der Verzerrungsinvarianten

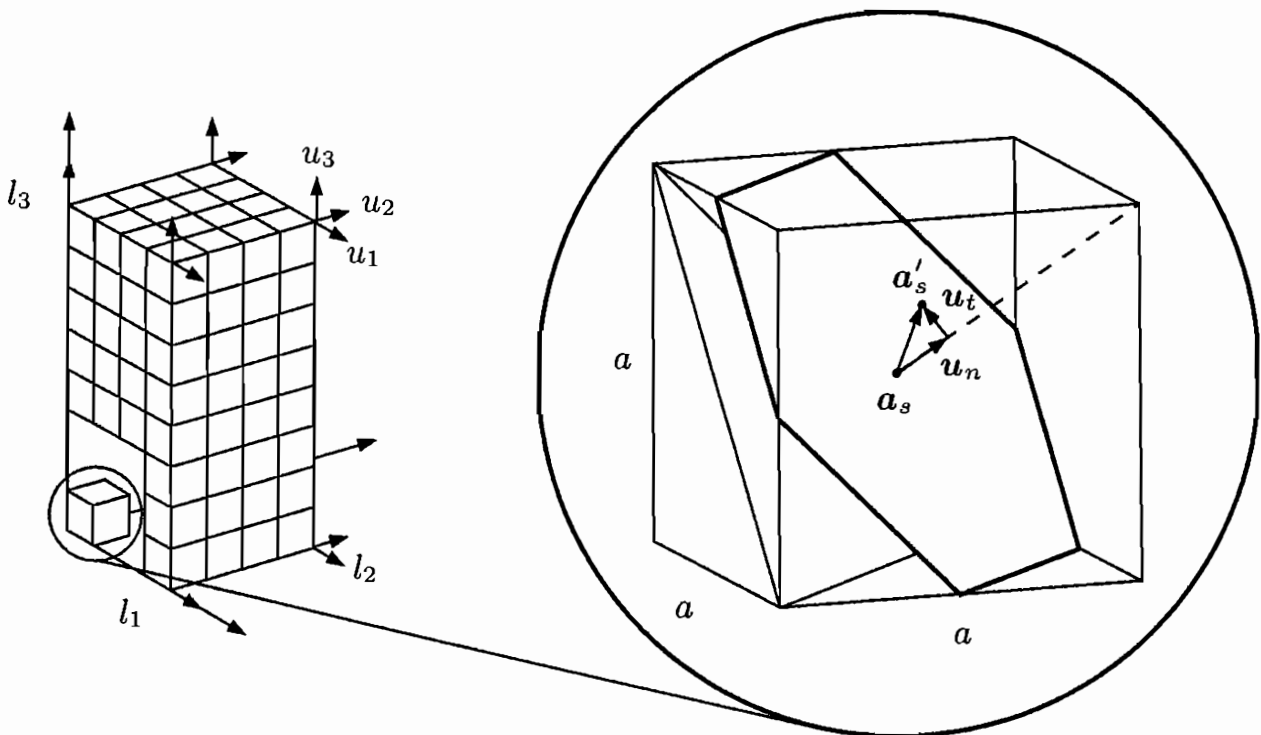


Abbildung 2.7: Verformung eines Quaders.

Der Quader mit den Längen l_1 , l_2 und l_3 aus Abbildung 2.7 wird durch die Verschiebungen u_1 , u_2 und u_3 verformt. Sein relatives Volumen ist demnach unter der

Annahme, dass $u_i = l_i \varepsilon_i$ exakt:

$$\varepsilon_v = \frac{V}{V_0} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = 1 + I_1 \varepsilon + I_2 \varepsilon + I_3 \varepsilon \quad (2.31)$$

$$= \left(1 + \frac{I_1 \varepsilon}{3}\right)^3 + \left(1 + \frac{I_1 \varepsilon}{3}\right) J_2 \varepsilon - J_3 \varepsilon. \quad (2.32)$$

Gemäß Gleichung (2.31) ist nicht nur die lineare Invariante $I_1 \varepsilon$ an einer Volumenänderung beteiligt. In Gleichung (2.4) wurde die Volumenänderung durch Vernachlässigung der quadratischen und der kubischen Terme linearisiert.

Da der Quader aus Abbildung 2.7 in eine endliche Anzahl von Würfeln der Kantenlänge a zerlegt werden kann, reicht es aus, einen dieser Würfeln exemplarisch für die $n_1 n_2 n_3$ anderen zu untersuchen, da mit $l_i = n_i a$

$$u_i = \sum_{n_i} \Delta u_{n_i i} \quad (2.33)$$

unter der Annahme homogener Dehnungsverteilung zu

$$u_i = n_i \Delta u_i \quad (2.34)$$

wird. Für die Verschiebung dieses Würfelschwerpunkts von \mathbf{a}_s zu \mathbf{a}'_s entlang der Würfeldiagonalen \mathbf{u}_n und dessen orthogonale Verschiebung \mathbf{u}_t gilt:

$$\mathbf{a}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}'_s = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{n}(\mathbf{a}'_s - \mathbf{a}_s) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_t|^2 &= ((\mathbf{a}'_s - \mathbf{a}_s) - \mathbf{n}(\mathbf{a}'_s - \mathbf{a}_s)\mathbf{n})^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\Delta u_1^2 + \Delta u_2^2 + \Delta u_3^2 - \frac{1}{3} (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit

$$|\mathbf{a}_s| = \frac{1}{2} \sqrt{3} a \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{|\mathbf{a}_s|} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta u_1}{a} + \frac{\Delta u_2}{a} + \frac{\Delta u_3}{a} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{n_1 \Delta u_1}{n_1 a} + \frac{n_2 \Delta u_2}{n_2 a} + \frac{n_3 \Delta u_3}{n_3 a} \right) = \frac{I_1 \varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\frac{|\mathbf{u}_t|^2}{|\mathbf{a}_s|^2} = -\frac{2}{3} J_2 \varepsilon. \quad (2.39)$$

Die Invarianten können im Dehnungsraum als die relative Abstandsänderung des Schwerpunkts vor und nach der Deformation in Richtung der Diagonalen eines Elementarwürfels interpretiert werden. Dabei ist zu beachten, dass das ursprüngliche Volumen $l_1 l_2 l_3$ für die Größen $I_1 \boldsymbol{\epsilon}$ und $J_2 \boldsymbol{\epsilon}$ keinerlei Bedeutung hat. Sie sind unabhängig von der ursprünglichen Form des Quaders.

2.3 Konstitutive Gleichungen

Eine konstitutive Beziehung ist eine Verbindung zwischen den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$ und den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, mit der die materiellen Eigenschaften des Körpers modelliert werden sollen. Sie darf keine der in Kapitel 2.1.3 genannten Bedingungen verletzen. Es gilt die Einschränkung, dass das Material isotrop sein soll. Seine Eigenschaften sind somit richtungsunabhängig. Weiterhin soll die Materialantwort auf Belastungen unverzüglich erfolgen, was viskose oder auch zeitabhängige Effekte von vornherein ausschließt.

Als ein Unterscheidungsmerkmal kann das Verhalten im Anschluss an die Belastung dienen. Ein elastischer Prozess ist eine vollständige Rückkehr in die Ausgangskonfiguration nach Entlastung unter Erhaltung der elastischen Materialeigenschaften. Bei einer unvollständigen Wiederherstellung der Ausgangskonfiguration muss ein Teil, der von außen geleisteten Arbeit, vom Material in eine nicht mechanisch wiederherstellbare Energie umgewandelt worden sein. Da diese Energie aus der mechanischen Bilanzgleichung verschwindet, wird von einem dissipativen Effekt gesprochen. Dissipation bezeichnet den Übergang in Wärme. Da sich im Material durch die Umwandlung von Energie neue Oberflächen oder neue Phasen bilden können, trifft der Begriff plastischer Prozess den Sachverhalt besser.

2.3.1 Potenzialformulierung

Die Hyperelastizität lässt die Spannung aus einer Ableitung einer skalarwertigen Potenzialfunktion Π nach dem linearen Verzerrungstensor entstehen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.40)$$

Da Isotropie gefordert ist, bietet sich eine Formulierung dieses Potentials mit Hilfe der Invarianten an. Gleichung (2.40) vereinfacht sich dann wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial I_1 \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial I_1 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \Pi}{\partial J_2 \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial J_2 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \Pi}{\partial J_3 \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial J_3 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.41)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial I_1 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{I} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial J_2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\boldsymbol{\varepsilon}'^T = -\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial J_3 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -(\boldsymbol{\varepsilon}'^T)^2 - \frac{2}{3} J_2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} = -(\boldsymbol{\varepsilon}')^2 - \frac{2}{3} J_2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}. \quad (2.44)$$

Die Symmetrieeigenschaften von $\boldsymbol{\varepsilon}$ dürfen hierbei erst nach der Ableitung verwendet werden. Die Tensoren nach Gleichung (2.43) und Gleichung (2.44) sind spurlos, sodass die Spur des Spannungstensors einzig von der partiellen Ableitung des Potentials nach I_1 abhängt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial I_1 \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} - \frac{\partial \Pi}{\partial J_2 \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}' - \frac{\partial \Pi}{\partial J_3 \boldsymbol{\varepsilon}} ((\boldsymbol{\varepsilon}')^2 - \frac{2}{3} J_2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}). \quad (2.45)$$

Die Potenzialformulierung ist jedoch restriktiver, da die Schwarz'sche Vertauschungsregel für partielle Ableitungen eingehalten werden muss. Das linearisierte verallgemeinerte Hook'sche Gesetz lässt sich aus Gleichung (2.45) herleiten. Es ist

$$\boldsymbol{\sigma} = K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.46)$$

für

$$\frac{\partial \Pi}{\partial I_1 \boldsymbol{\varepsilon}} = K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial J_2 \boldsymbol{\varepsilon}} = -2G \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial J_3 \boldsymbol{\varepsilon}} = 0. \quad (2.47)$$

G ist der Gleitmodul und K der Kompressionsmodul. Sie lassen sich mit dem Elastizitätsmodul E und der Poisson'schen Querkontraktion ν ermitteln:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.48)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.49)$$

Für ein elastisches Verhalten gilt

$$\oint d\Pi = 0 \quad (2.50)$$

in jedem Punkt des Verzerrungsraums für jeden geschlossenen Integralweg. Das Materialverhalten ist also unabhängig von der Wahl des Belastungspfades.

2.3.1.1 Skalares Produkt

Eine Möglichkeit eine skalare Abbildung zu definieren, bildet das skalare Produkt zwischen zwei symmetrischen Tensoren zweiter Stufe:

$$W = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.51)$$

Sind die Koordinatensysteme für die Spannungen und Verzerrungen coaxial, gilt:

$$W = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q} : \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\sigma}_H : \boldsymbol{\varepsilon}_H. \quad (2.52)$$

Eine Integration liefert entlang eines Verformungspfads

$$W_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit } \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.53)$$

oder entlang eines Spannungspfads

$$W_{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} : d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{mit } \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.54)$$

Für eine umkehrbare Abbildung mit $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})) = \boldsymbol{\sigma}$ ist eine Legendre Transformation erfüllt:

$$W = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = W_{\boldsymbol{\sigma}} + W_{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.55)$$

Für linear elastisches Material gilt folglich:

$$W_{\boldsymbol{\sigma}} = W_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.56)$$

Aus Gleichung (2.46) ergibt sich für die Spur des Spannungstensors:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 3K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.57)$$

Wird diese Gleichung auf

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.58)$$

angewendet, folgt für den Deviator des Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2G \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (2.59)$$

Mit $K' = 3K$ und $G' = 2G$ führt dies zu den einfach umkehrbaren Abbildungen:

$$\boldsymbol{\sigma} = K' \frac{I_1 \boldsymbol{\varepsilon}}{3} \mathbf{I} + G' \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.60)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{K'} \frac{I_1 \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbf{I} + \frac{1}{G'} \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.61)$$

$W_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ergibt sich mit Gleichungen (2.46), (2.42) und (2.43) zu:

$$W_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} (K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}') : d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{K'}{3} (I_1 \boldsymbol{\varepsilon})^2 - G' J_2 \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.62)$$

Die Größe $W_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ lässt sich physikalisch als elastische Formänderungsenergiedichte interpretieren.

2.3.2 Funktionaler Zusammenhang

Nach dem Cayleigh-Hamilton Theorem kann jede zweistufige isotrope Tensorfunktion dargestellt werden als:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi_1 \mathbf{I} + \varphi_2 \boldsymbol{\varepsilon} + \varphi_3 \boldsymbol{\varepsilon}^2. \quad (2.63)$$

Die Ähnlichkeit mit Gleichung (2.41) ist deutlich ersichtlich. Die Größen φ_1 , φ_2 und φ_3 sind skalarwertige Funktionen der Invarianten des Verzerrungstensors oder des Spannungstensors nach Kapitel 2.2.

Eine Tensorfunktion ist isotrop, wenn sich eine Koordinatentransformation des Arguments genauso wie die des Funktionswerts auswirkt. Folglich gilt:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}). \quad (2.64)$$

Mit $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ und $\det(\mathbf{Q}) = 1$ beschreibt \mathbf{Q} eine reine Rotation.

Für $\phi_1 = \lambda I_1 \boldsymbol{\varepsilon}$, $\phi_2 = 2G$ und $\phi_3 = 0$ errechnet sich aus Gleichung (2.63) das linearisierte verallgemeinerte Hook'sche Gesetz zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.65)$$

mit

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.66)$$

und G aus Gleichung (2.49). Natürlich ist Gleichung (2.65) identisch mit Gleichung (2.46). Die Funktion aus Gleichung (2.63) ermöglicht keine Aussage über die Invertierbarkeit der Abbildung, aber dennoch enthält diese Gleichung alle möglichen isotropen Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Eine mögliche Anisotropie des Modells kann im allgemeinsten Fall mit dem Elastizitätstensor vierter Stufe \mathbf{C} berücksichtigt werden. Dieser verbindet die jeweils neun Komponenten der Räume über maximal 81 Komponenten:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.67)$$

Bei Symmetrie der zu verbindenden zweistufigen Tensoren, reduziert sich die Anzahl der Parameter in Gleichung (2.67) auf 21. Für den Spezialfall linearer Isotropie werden es sogar nur zwei. Es gilt:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.68)$$

2.3.3 Evolution interner Variablen

Eine umfassende Darstellung dieser Methoden findet sich in [10]. Wenn plastische Prozesse beschrieben werden sollen, müssen andere Methoden verwendet werden, da die Eindeutigkeit der Abbildung zwischen den Räumen verloren geht. Deswegen werden einer Materialbeschreibung Parameter hinzugefügt, die die Belastungsgeschichte aufzeichnen. Diese als interne Variablen bezeichneten Größen können zum Beispiel das Aufweiten der elastischen Zone bei der Plastizitätstheorie oder die Degradation der elastischen Kenngrößen in der Schädigung sein.

Die Grundlage einer klassischen Plastizitätstheorie stellen die folgenden Gleichungen dar:

- das elastische Verhalten,
- eine Fließgrenze, die den elastischen Bereich vom Fließen trennt und deren Evolution durch das Fließen bestimmt wird,
- eine Fließregel, die die Richtung der plastischen Dehnungen bestimmt,
- eine Aufspaltung der gesamten Dehnung in einen elastischen und einen plastischen Anteil, bei kleinen Formänderungen zumeist additiv angenommen,
- eine Konsistenzbedingung, letztlich die Verbindung zwischen Fließregel und Fließgrenze.

Mit diesen Formeln ist es möglich, eine elastoplastische Tangente zu konstruieren. In der Regel ist dies ein Tensor vierter Stufe \mathbf{C}_{EP} . Mit ihm kann die Spannungsrate integriert werden. Von großer Bedeutung ist das Zusammenspiel von Fließregel

und Fließgrenze. Wenn die plastische Dehnung normal auf der Fließgrenze steht, ist die plastische Tangente symmetrisch, wodurch sich die Integration vereinfacht. Diese Bedingung wird im Rahmen der J_2 -Plastizität für Metalle erfüllt. Von Gestein ist bekannt, dass sein Verhalten nicht einer solchen normalen Fließregel folgt. Die Auswirkungen einer nichtassoziierten Fließregel werden in Kapitel 2.3.4 dargestellt.

Es ist experimentell belegt, dass in Folge mechanischer Belastung die elastischen Kenngrößen abnehmen können. Eine Formulierung, die die Entwicklung interner Parameter nutzt, um die Abnahme dieser elastischen Eigenschaften zu beschreiben, wird Schädigung genannt.

2.3.4 Grenzen konstitutiver Beziehungen

Es gibt Grenzen, die den Gültigkeitsbereich konstitutiver Gleichungen einschränken. Oftmals werden diese Grenzen als Versagensbedingungen interpretiert. Im Wesentlichen lassen sich zwei Fälle unterscheiden, wobei einerseits vom Verlust an materieller Stabilität und andererseits vom Verlust an Elliptizität gesprochen wird. Zu diesem Thema sei zusätzlich auf die Arbeit von Mosler verwiesen [11].

2.3.4.1 Verlust der materiellen Stabilität

Der Verlust der materiellen Stabilität beschreibt ein diffuses Verhalten der konstitutiven Gleichung, bei dem das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{u}}$ und dessen Gradientenfeld $\nabla \dot{\mathbf{u}}$ stetig bleiben. Es wird für eine stabile konstitutive Gleichung gefordert, dass die Stabilität nach Drucker gewährleistet ist [12]:

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0. \quad (2.69)$$

Ist die Tangente

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C}_{EP} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \quad (2.70)$$

gegeben, so wird durch die quadratische Form nur der symmetrische Anteil von \mathbf{C}_{EP} verwendet. Die Grenze der Stabilität nach Gleichung (2.70) ist somit äquivalent zu der Bedingung:

$$\det \{ \mathbf{C}_{EP} \}_{sym} = 0. \quad (2.71)$$

Für die linear elastische Tangente \mathbf{C} aus Gleichung (2.68) errechnet sich mit Gleichung (2.70):

$$KI_1 \epsilon^2 - 2GJ_2 \epsilon > 0. \quad (2.72)$$

2.3.4.2 Verlust an Elliptizität

Die theoretische Herleitung des Verlusts an Elliptizität nimmt einen Sprung des Gradienten des Geschwindigkeitsfelds an. Der Sprung einer Feldgröße lässt sich als Differenz des links- und rechtsseitigen Werts der Feldgröße $[[\bullet]] = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ schreiben. Mit Hilfe dieser Formulierung folgt:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] := \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = 0 \quad (2.73)$$

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] := \nabla \dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla \dot{\mathbf{u}}^- \neq 0. \quad (2.74)$$

Für die Beschreibung des Sprungs wird die Amplitude ξ , die Sprungrichtung \mathbf{m} und die Normale der Diskontinuitäten \mathbf{n} eingeführt. Es folgt:

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = \xi \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \rightarrow [[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \xi \{ \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \}_{sym}. \quad (2.75)$$

Das Gleichgewicht entlang der Diskontinuität lautet:

$$[[\dot{\mathbf{s}}]] = \mathbf{n} [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{n} [[\mathbf{C}_{EP} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \mathbf{0}. \quad (2.76)$$

Die Annahme $[[\mathbf{C}_{EP}]] = 0$ ist gerechtfertigt, da in [13] und [14] gezeigt wurde, dass eine materielle Verzweigung mit diskontinuierlichen Materialoperatoren niemals vor einer mit kontinuierlichen Materialoperatoren möglich ist. Damit folgt dass

$$\xi (\mathbf{n} \mathbf{C}_{EP} \mathbf{n}) \mathbf{m} = 0 \quad (2.77)$$

und deshalb lautet die Bedingung für den Verlust an Elliptizität

$$\det \mathbf{Q}_A = 0, \quad (2.78)$$

wobei $\mathbf{Q}_A = \mathbf{n} \mathbf{C}_{EP} \mathbf{n}$ der akustische Tensor ist. Dessen Name geht auf Hadamard zurück, der Gleichungen für die Wellenausbreitung in elastischen Medien untersuchte. Den Begriff *Welle* beschrieb er nach [15] als „isolierte Oberfläche, die sich relativ zum Material bewegt, über bestimmte Feldvariablen, die momentan diskontinuierlich sind“. Die beiden Betrachtungen sind also stark verknüpft. Für lineare Elastizität nach Gleichung (2.46) und $\mathbf{n}^T = (1; 0; 0)$ gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$Q_{Aij} = C_{1ij1} \quad (2.79)$$

und weiter

$$\det \mathbf{Q}_A = (2G + \lambda) G^2 = 0. \quad (2.80)$$

Durch

$$\frac{K_s}{\rho} \frac{G^2}{\rho^2} = v_p^2 v_s^4 = 0 \quad (2.81)$$

lassen sich also mit dem akustischen Tensor, die beiden theoretischen elastischen Schallgeschwindigkeiten v_p und v_s in elastischen Medien berechnen. So kann eine Diskontinuität als Welle aufgefasst werden, die sich mit der Geschwindigkeit Null ausbreitet. Eine weitere Bedingung

$$\det \{Q_A\}_{sym} = 0 \quad (2.82)$$

wird Verlust von starker Elliptizität genannt. Für den Fall einer symmetrischen Tangente, wie zum Beispiel bei den assoziierten Fließregeln, fallen die Bedingungen nach Gleichung (2.78) und (2.82) zusammen. Offensichtlich kann die Bedingung nach Gleichung (2.82) nicht eintreten, wenn nicht vorher Gleichung (2.71) erfüllt ist. Bei nicht assoziierten Fließregeln tritt die Bedingung nach Gleichung (2.82) vor der nach Gleichung (2.78) ein.

2.4 Lösungsschema der Kontinuumsmechanik

Ist ein Materialgesetz nach Kapitel 2.3 gefunden, dann kann in Verbindung mit den Gleichungen aus Kapitel 2.1 eine Differentialgleichung formuliert werden. Im Detail lässt sich mit dem lokalen Gleichgewicht aus Gleichung (2.5), der Kinematik nach Gleichung (2.3) und dem linearen Hook'schen Materialgesetz nach Gleichung (2.65) ein vollständiges System von Gleichungen, genannt die Lamé-Navier-Gleichungen, erstellen:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{b_i}{G} \rho = 0. \quad (2.83)$$

Nun muss ein Verschiebungsfeld \mathbf{u} gefunden werden, welches für jeden Punkt des Körpers Gleichung (2.83) erfüllt. Zusätzlich müssen die Randbedingungen eingehalten werden. Eine exakte Lösung des Randwertproblems kann nur für Sonderfälle gefunden werden, daher werden spezielle Lösungsverfahren verwendet, um allgemeine Probleme zu lösen.

Ein wirksames Prinzip auf dem viele Lösungsverfahren beruhen, ist das Prinzip der virtuellen Arbeit. Ausgehend von der globalen Energiebilanz wird ein virtuelles Verschiebungsfeld eingeführt. Diese infinitesimalen und gedachten Verschiebungen sind Hilfskonstrukte, dessen einzige Einschränkungen sind, dass sie die kinematischen

Randbedingungen des Systems erfüllen müssen. Sie würden entlang der Spannungen Arbeit leisten, welche folglich virtuelle Arbeit genannt wird. Mit

$$\delta \epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla^T \delta \mathbf{u}) \quad (2.84)$$

folgt für die Energie nach Gleichung (2.7) :

$$\delta E = - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} \rho dV + \int_A \mathbf{s}^T \delta \mathbf{u} dA \quad (2.85)$$

$$\delta E = -\delta W + \delta A_V + \delta A_A. \quad (2.86)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit stellt die Forderung dar, dass die virtuelle Arbeit entlang der beliebigen virtuellen Verschiebungen verschwinden muss. Dieses Prinzip erfüllt im Mittel die Gleichgewichtsbedingung und die Krastrandbedingungen. Wenn das Feld der virtuellen Verschiebungen die wirklichen Verschiebungen beinhaltet, so sind die Gleichgewichtsbedingung sogar exakt erfüllt.

Zur Lösung dieses Variationsprinzip wird häufig die Methode der Finiten-Elemente verwendet. Hierfür wird das gesamte Modell in eine Vielzahl von Elemente unterteilt. Den Elementen werden danach diskrete Verschiebungen zugewiesen. Das hat den Vorteil, dass die Verformungen an den Knotenpunkten der Elemente standardisiert erfasst werden können. Die materiellen Eigenschaften dieser Elemente sind in den Gaußpunkten definiert, an denen sie numerisch integriert werden können. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass jedes Element auf der gleichen Formulierung basiert, die dann an ihren Knoten wieder zu einem Gesamtmodell zusammengeführt werden können. Die Lösung des gesamten Gleichungssystems kann nun unter Verwendung diskreter Verschiebungen numerisch mit Computern geschehen.

2.5 Ausgewählte analytische Lösungen

Die Kontinuumstheorie geht davon aus, dass sich jeder Punkt eines homogenen Körpers in einem homogenen Spannungsfeld gleich verhält.

Für reale Körper lässt sich diese Annahme gut bestätigen. Allerdings bilden sich im Grenzzustand ihrer Belastung Bereiche aus, in denen sich größere Verschiebungen örtlich konzentrieren. Dieser Effekt wird Lokalisation genannt. Für die Ausbildung dieser Inhomogenitäten im Verschiebungsfeld werden in der Regel reale Materialdefekte, also Störungen in der gleichmäßigen Eigenschaftsverteilung, verantwortlich gemacht.

Mit Hilfe geeigneter Modelle können die Auswirkungen dieser Defekte oder Diskontinuitäten auf das umliegende Material studiert werden. Zwei dieser Modelle sollen hier vorgestellt werden. Sie gelten allerdings nur im ebenen Fall. Das erste geht

auf Coulomb zurück und unterstellt eine Diskontinuität, die den Körper vollständig durchtrennt und das zweite Modell ist ein elliptischer Hohlraum in einer Scheibe.

2.5.1 Gleiten entlang einer präexistenten Fuge

Dieser Analyse liegt die Annahme zu Grunde, dass ein Rechteck durch fiktive Gleit-systeme in jede Richtung α getrennt sei. Die gestrichelte Linie in Abbildung 2.8 soll

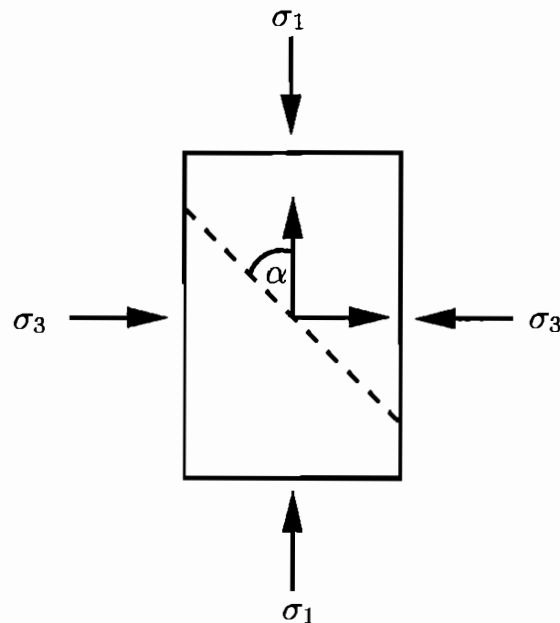


Abbildung 2.8: Ebenes Coulomb Problem.

die fiktive Fuge darstellen. Die freie Wahl des Parameters α repräsentiert die unendlich vielen Richtungen der Gleitsysteme. Als Grenzbedingung für ein Abscheren gilt nach Coulomb:

$$|\tau| - \mu\sigma_n - c' = 0. \quad (2.87)$$

Gleichung (2.87) bedeutet, dass die entlang einer Fuge wirkende Scherspannung τ einen kohäsiven Widerstand c' , sowie einen Reibungswiderstand $\mu\sigma_n$ überwinden muss, der proportional zu der Normalspannung entlang der Fuge ist. Es gilt weiterhin:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha \quad (2.88)$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \quad (2.89)$$

Um die Richtung der am günstigsten orientierten Fuge α_e zu bestimmen, wird folgende Extremwertaufgabe gelöst:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (|\tau| - \mu \sigma_n - c') = 0. \quad (2.90)$$

Es folgt für $\sigma_1 \geq \sigma_3$:

$$\cos 2\alpha_e = -\mu \sin 2\alpha_e. \quad (2.91)$$

Werden die Gleichungen (2.91), (2.88) und (2.89) in die Gleichung (2.87) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha_e + \mu \left(\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \mu \sin 2\alpha_e \right) - c' = \\ \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \cos 2\alpha_e - \underbrace{c' \sin 2\alpha_e}_{=c_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Mit $2\alpha_e = \phi + 90^\circ$ folgt schließlich:

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin(\phi) = c_0. \quad (2.93)$$

Dieses Modell, nachdem der Körper von vornherein komplett zerklüftet ist, ist eher auf Sande als auf Gesteine anwendbar, die eine fast ungestörte Matrix haben. Weiterhin ist es schwer, die Methode auf dreidimensionale Spannungszustände zu erweitern, da die Extremwertaufgabe für eine Funktion von zwei Winkeln gelöst werden müsste.

2.5.2 Scheibe mit einem elliptischem Hohlraum

In diesem Abschnitt soll die Veränderung des Spannungsfelds einer unendlich ausgedehnten elastischen Scheibe durch einen eingebrachten Hohlraum untersucht werden. Die Ausgangssituation ist in Abbildung 2.9 skizziert, wobei die geschwungene Form der Ränder den unendlich weit entfernten Rand verdeutlichen soll. Muschelischwili schlug für dieses Problem eine elegante Lösungsmethode mittels komplexer Spannungsfunktionen vor [16]. Hierfür ist es zweckmäßig die Rechnung in Polarkoordinaten durchzuführen:

$$\xi = \rho e^{i\vartheta}. \quad (2.94)$$

Mit

$$\omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right), \quad (2.95)$$

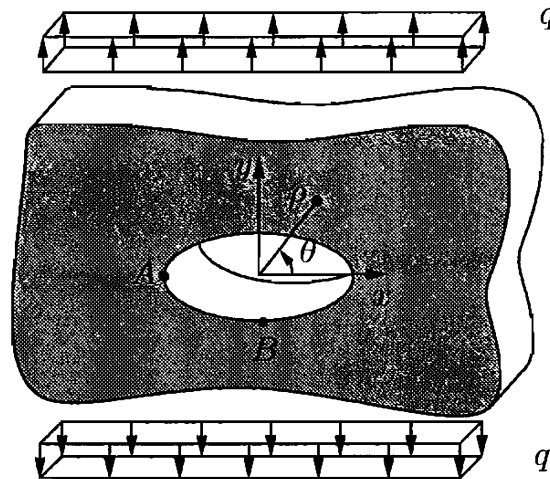


Abbildung 2.9: Scheibe mit einem elliptischem Hohlraum.

$R > 0$ und $1 \geq m > 0$ gilt für die Spannungen einer Scheibe mit elliptischem Hohlraum

$$\sigma_\rho + \sigma_\vartheta = 2 \left(\frac{\phi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \overline{\frac{\phi'(\xi)}{\omega'(\xi)}} \right) \quad (2.96)$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_\rho + 2i\tau_{r\vartheta} = \frac{2\xi}{\rho^2 \omega'(\xi)} \left(\overline{\omega(\xi)} \left(\frac{\phi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right)' + \omega'(\xi) \frac{\phi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right), \quad (2.97)$$

worin $\phi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ Funktionen sind, die von den Randbedingungen des Systems abhängen.

Diese Funktionen sind für eine Scheibe unter Zug mit Halbachsen, die parallel und senkrecht zur Last stehen:

$$\phi(\xi) = \frac{qR}{4} \left(\xi + \frac{2-m}{\xi} \right) \quad (2.98)$$

$$\psi(\xi) = -\frac{qR}{2} \left(\xi + \frac{1}{m\xi} - \frac{(1+m^2)(1-m)}{m} \frac{\xi}{\xi^2 - m} \right). \quad (2.99)$$

Weitere Funktionen für Innendruck oder Schub sind der Literatur zu entnehmen [16]. Mit den Spannungen σ_ρ , $\tau_{r\vartheta}$ und σ_ϑ können σ_{xx} , σ_{xy} und σ_{yy} bestimmt werden. Die Halbachsen der Ellipse sind $a = R(1+m)$ und $b = R(1-m)$. Daraus ist ersichtlich, das für $m \rightarrow 0$ aus der Ellipse ein Kreis und für $m = 1$ ein gerader Schlitz wird.

In Abbildung 2.10 sind die errechneten Spannungsverläufe σ_{yy} für $m = 1$ und für $m \rightarrow 0$ skizziert. Die gefundenen Ergebnisse gelten nur unter der Annahme, dass sich der Riss durch die Druckspannungen nicht schließt. Die unterschiedlichen Graustufen stehen für verschiedene Spannungsintervalle:

$-q = \sigma_{yy}$	hellgrau
$-q < \sigma_{yy} \leq -\frac{5}{3}q$	grau
$-\frac{5}{3}q < \sigma_{yy} \leq -\frac{7}{3}q$	dunkelgrau
$-\frac{7}{3}q < \sigma_{yy}$	schwarz.

Die Störung der kreisförmigen Hohlstelle (b) klingt schneller ab als die beim Schlitz (a). Weiterhin führt der Schlitz zu einer Spannungssingularität an der Stelle $x = R$ und $y = 0$, wohingegen die Kreislösung dort den Wert $\sigma_{yy} = -3q$ annimmt. Entlang

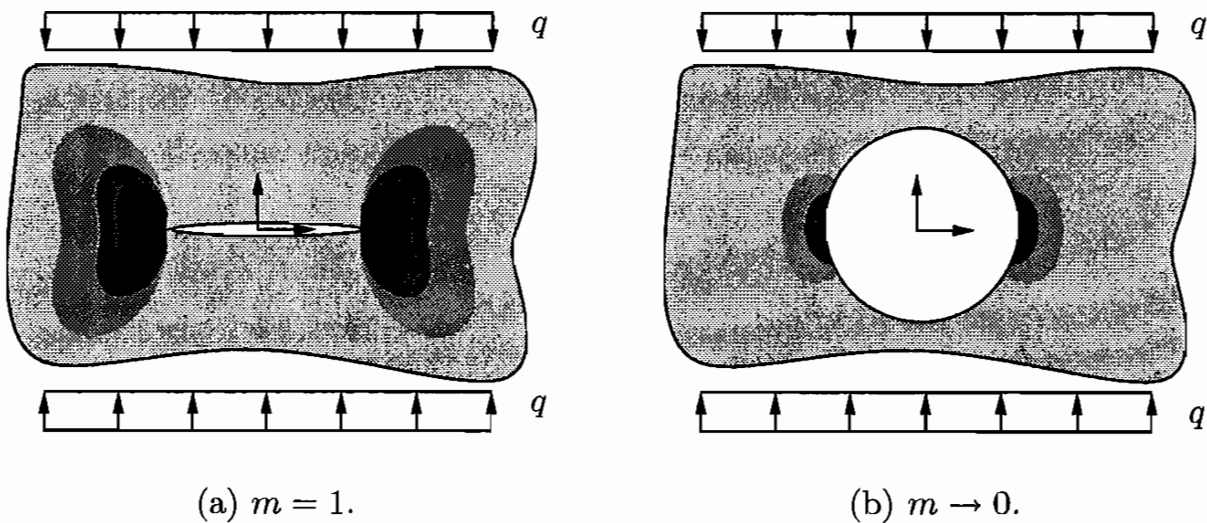


Abbildung 2.10: σ_{yy} in der Umgebung eines elliptischen Hohlraums.

des Lochrands gilt $\rho = 1$, da dort $\sigma_\rho = 0$ ist. Die Lösung für die zwei Punkte A und B aus Abbildung 2.9 lässt sich bestimmen als:

$$\sigma_{yyA} = q \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2.100)$$

$$\sigma_{xxB} = -q. \quad (2.101)$$

2.6 Konzepte der linear elastischen Bruchmechanik

Die zwei Konzepte, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, können aus historischen Gründen unterschieden werden. Während das erste auf der bahnbrechenden Arbeit von Griffith beruht [17], stellt das zweite eine Verallgemeinerung auf andere Lastzustände dar. Formal können beide, linear elastisches Material vorausgesetzt, ineinander überführt werden.

Für eine allgemeine Übersicht sind zwei Bücher zu empfehlen [18, 19].

2.6.1 Energiefreisetzungsrates

Zur Herleitung der Energiefreisetzungsrates untersuchte Griffith die Änderung der elastischen Energie durch einen elliptischen Hohlraum in einer unendlich ausgedehnten Scheibe unter Zugspannungen. Die Rechnung soll hier exemplarisch für einen Schlitz für den ebenen Spannungszustand durchgeführt werden. Die Verschiebung entlang

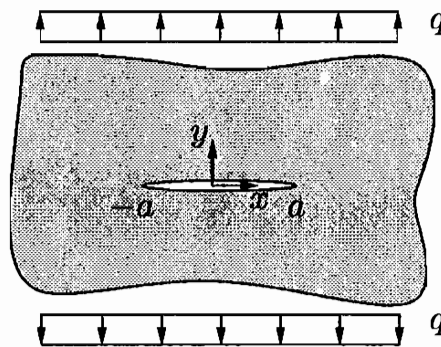


Abbildung 2.11: Scheibe mit einem Schlitz.

des Schlitzrands nach Abbildung 2.11 ist:

$$u_y = \frac{2}{E} q \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.102)$$

Für die elastische Energieänderung W durch den Schlitz gilt damit:

$$W = 2 \int_{-a}^a \frac{1}{2} q u_y dx = \frac{q^2}{E} \pi a^2. \quad (2.103)$$

Nun postuliert Griffith die Existenz einer Oberflächenenergie für einen sich ausbreitenden Riss. Sie soll den Teil der Arbeit wiedergeben, den der Riss leistet, um neue Oberflächen zu schaffen:

$$U = 4aT. \quad (2.104)$$

T ist eine Materialkenngröße und ein Maß für die spezifische Oberflächenenergie. Die verschwindende Variation der Energiedifferenz

$$\delta(W - U) = \left(2 \frac{q^2}{E} \pi a - 4T \right) \delta a = 0 \quad (2.105)$$

liefert die Bedingung für das Einsetzen des stabilen Risswachstums als:

$$q = \sqrt{\frac{2ET}{\pi a}}. \quad (2.106)$$

Darin ist q nun die Zugspannung für die ein Riss der Länge a seine Ausbreitung beginnt. Dieses Modell gilt ausschließlich unter Zug, da sich der Schlitz in einem Druckspannungsfeld schließen wird und sich ein homogenes Spannungsfeld ausbildet.

2.6.2 Spannungsintensitätsfaktoren

Den Ausgangspunkt für dieses Konzept bildet das Spannungsfeld in der Umgebung der Risspitze nach Abbildung 2.12 für kleine Radien r . Es lässt sich zeigen, dass sich

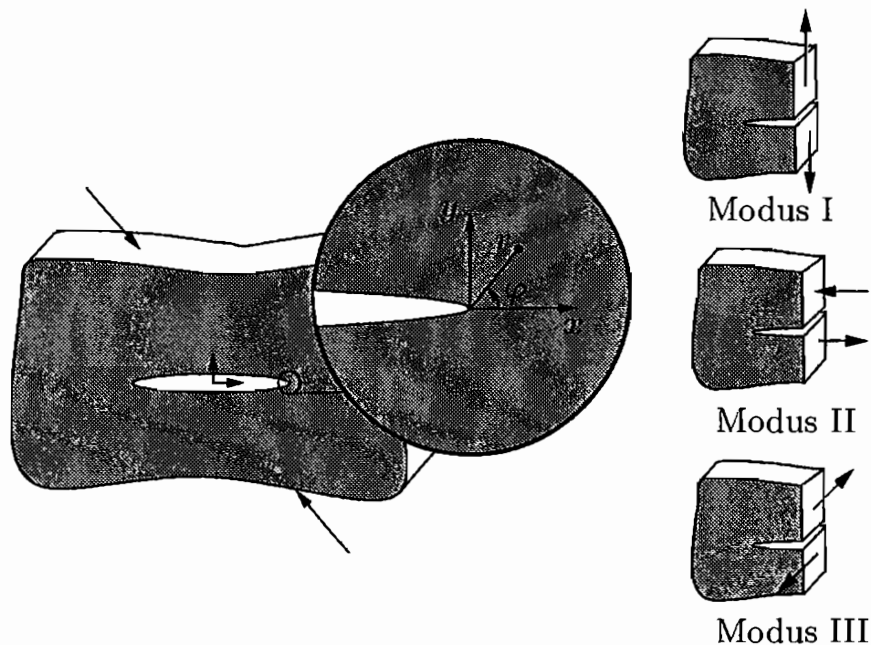


Abbildung 2.12: Risspitze und Beanspruchungsarten.

für jede Art der Belastung das Risspitzennahfeld in der Form

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (K_I f(\varphi) + K_{II} g(\varphi) + K_{III} h(\varphi)) \quad (2.107)$$

darstellen lässt. Die Komponenten der drei Funktionenmatrizen f , g und h sind reine Funktionen des Winkels φ und in Anhang B angegeben. Die in Gleichung (2.107) verwendeten Parameter K_I , K_{II} und K_{III} sind die Spannungsintensitätsfaktoren (SIF), die jeweils den drei Rissöffnungsmodi aus Abbildung 2.12 entsprechen. Sie können als Maß der *Stärke* der $1/\sqrt{r}$ -Singularität angesehen werden, und sie sind von der Risskonfiguration, der Geometrie des belasteten Körpers und linear von der äußeren Belastung abhängig.

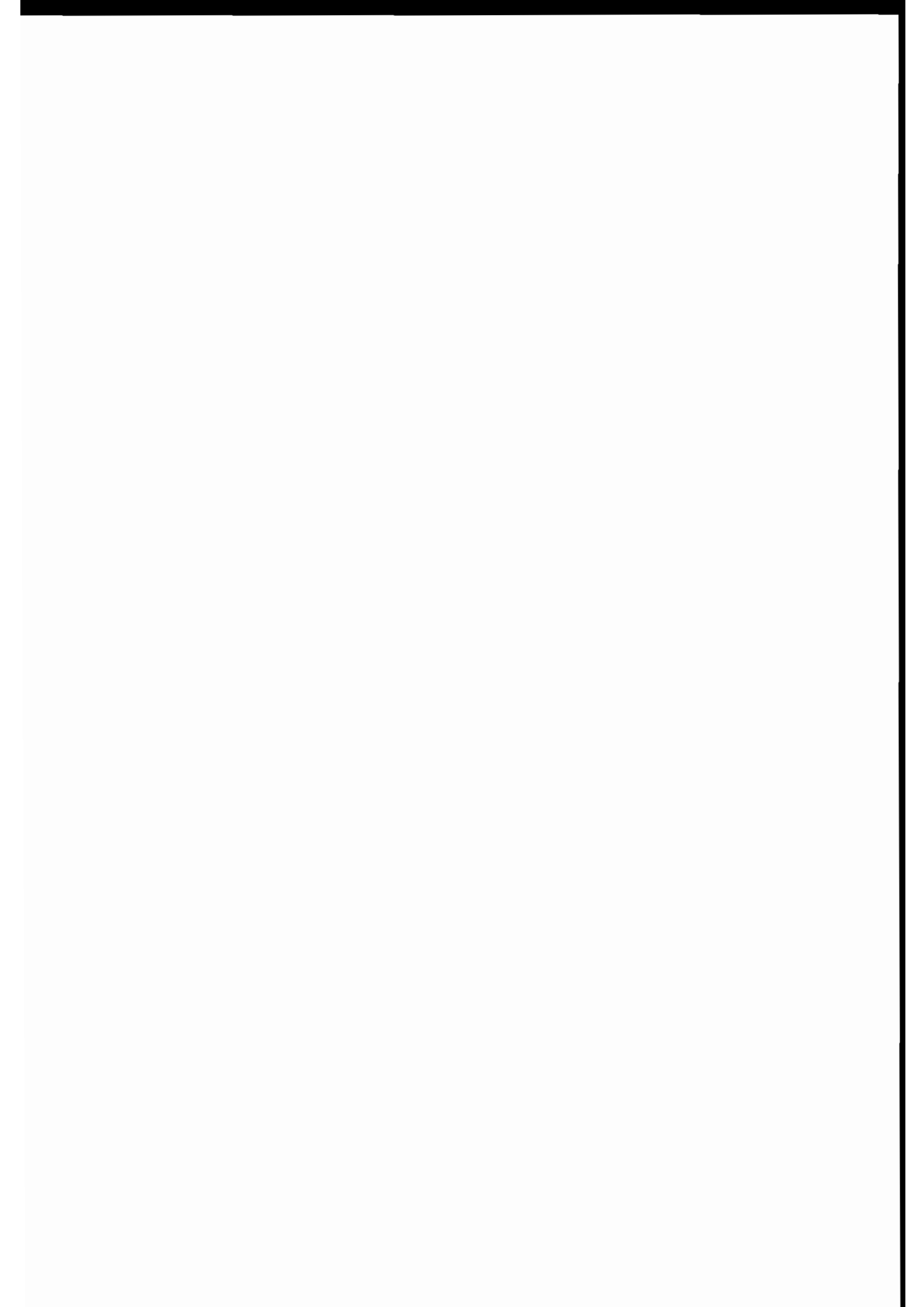
Für viele Belastungen können sie der Literatur entnommen werden und dürfen bei kombinierten Lasten superponiert werden. Für den Fall aus Abbildung 2.11 sind die SIF $K_I = q\sqrt{\pi a}$, $K_{II} = 0$ und $K_{III} = 0$. Bei einer Schubspannung τ entlang des Scheibenrands wären die SIF dort zum Beispiel $K_I = 0$, $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$ und $K_{III} = 0$.

Den Belastungsgrößen, also den Spannungsintensitätsfaktoren, werden materialabhängige Widerstandsgrößen, genannt Bruchzähigkeiten K_{Ic} , K_{IIc} und K_{IIIc} , gegenübergestellt. Dieses von Irwin vorgeschlagene Konzept bedeutet, dass sich der Riss ausbreitet, wenn zum Beispiel die Bedingung

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.108)$$

erfüllt ist. Bei kombinierten Beanspruchungen wird es zu Interaktionen kommen, die in diesem Kriterium berücksichtigt werden müssen.

Das hier vorgestellte Konzept lässt sich wie folgt beschreiben: Die exakten physikalischen Vorgänge an der Risspitze sind äußerst komplex und mit den Methoden der Kontinuumsmechanik nicht zu beschreiben. Denn gerade an der Risspitze mit verschiedenen Korngefügen und/oder Korngrenzen sind dessen Annahmen ungültig. Deswegen wird ein Bereich um die Risspitze definiert, in dem alle komplizierten Prozesse, wie Plastifizieren oder Aufreißen von Korngrenzen, stattfinden sollen. Dessen Verhalten wird nur *verschmiert* betrachtet. Deswegen ist die Bruchzähigkeit selbst eine Größe, die vom Material und von der Struktur des Materials abhängt. Der äußere Bereich ist wieder mit einer Kontinuumstheorie beschreibbar.



3 Beobachtungen und Gesteinsmodelle

Einige Gesteine gehörten wohl zu den frühesten Werkstoffen der Menschheit. In der Steinzeit diente zum Beispiel Feuerstein zur Herstellung von Klingen oder Speerspitzen. Die nötigen Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Verarbeitung dieser Werkstoffe zeugen schon sehr früh von einem intuitiven Verständnis für das Verhalten dieser Materialien. So wurde sich das spröde Verhalten des Feuersteins zu Nutze gemacht, um scharfe Kanten zu erzeugen. Ein sprödes Versagen ist eine typische Eigenschaft von Gesteinen unter geringen Drücken und bezeichnet den ohne Vorankündigung eintretenden Versagenstypus.

Die in der Geschichte auf die Steinzeit folgenden Epochen wurden auch nach Werkstoffen benannt. Aber diese sind allesamt Metalle und unterscheiden sich wesentlich von den Gesteinen durch ihre bessere Verarbeitbarkeit. Durch eine Erwärmung können sie gut in die gewünschte Form gebracht werden. Nach dem Erkalten erhält das Werkstück dann seine Festigkeit zurück. Metalle weisen dabei ein eher zähes Verhalten auf. Sie haben die Fähigkeit sich Verformungen anzupassen, ohne zu versagen. Diese Eigenart wird duktilen Verhalten genannt.

Der Übergang von sprödem zu duktilem Verhalten ist nicht nur für die Ingenieure sondern auch für die Geowissenschaftler von großer Bedeutung, da bei den im Erdinneren vorherrschenden Bedingungen auch Gesteine ein duktilen Verhalten annehmen können. Bei allen Analogien bleibt der große Unterschied zwischen den industriell hergestellten Werkstoffen und Gesteinen immer, dass sich die Eigenschaften der Werkstoffe durch gezielte Auswahl der Ausgangsprodukte oder eine Steuerung des Herstellungsverfahrens bewusst kontrollieren lassen, während Gesteine von der Natur vorgegeben sind. So ist es auch zu erklären, dass die gemessenen Eigenschaften von Gesteinen große Streuungen aufweisen.

Das folgende Kapitel wird sich mit den mechanischen Eigenschaften von Gestein beschäftigen. Es soll Beobachtungen zusammenfassen und die bisherigen Modellansätze vorstellen, die zu einer Erklärung der Beobachtungen dienen. Durch die Vielzahl an verschiedenen Gesteinen, die in ihren Eigenschaften große Unterschiede aufweisen können, ist es schwierig, allgemeingültige Aussagen zu finden. Daher wird es Beobachtungen geben, die den hier getroffenen Aussagen widersprechen. Als gute Übersicht zum Thema Felsmechanik sind zwei Bücher [20, 21] und zwei Übersichtsartikel zu empfehlen [22, 23].

3.1 Elastisches Verhalten

Um ein Materialmodell auf das reale Verhalten von Gestein anzupassen, müssen seine mechanischen Parameter mit Versuchen ermittelt werden. Ein aus mechanischer Sicht aufschlussreicher Versuch für Gestein bestimmt die zugehörige Verschiebung einer äußeren Druckkraft. Unter der Voraussetzung, dass das Dehnungsfeld in der Probe homogen ist, kann mit Hilfe der Probengeometrie die Kraft F in eine Spannung $\sigma = F/A_0$ und die Verschiebung u in eine Dehnung $\varepsilon = u/l_0$ umgerechnet werden. Um eine Querdehnungsbehinderung an der Lasteinleitungsfläche zu minimieren, muss dort die Reibung so gering wie möglich gehalten werden. Eigentlich müsste auch die Querschnittsflächenänderung durch die Verformung bei der Ermittlung der Spannung berücksichtigt werden, was oftmals vernachlässigt wird.

Als weitere Belastungsgröße kann zusätzlich ein Seitendruck σ_c auf die Probe wirken. Oft wird dieser Druck mittels einer Hydraulikzelle erzeugt, in die Öl gepumpt wird. Die Probe wird mit einer Ummantelung versehen, um das Eindringen des Öls in die Probe zu verhindern, womit hydraulisch eingeleitete Bruchvorgänge unterdrückt werden. Bei der Bestimmung der Dehnung in radialer Richtung ε_c treten folgende Schwierigkeiten auf: Wird sie mit einem applizierten Dehnungsmessstreifen ermittelt, kann das Ergebnis abhängig vom Ort der Messung sein. Die indirekte Messung der radialen Dehnung über das Ölvolumen ist durch die Kompressibilität desselben erschwert. Alternativ bieten sich eine Messung des Probendurchmessers mit Hilfe einer Kette oder eine indirekte Messung über das Porenvolumen an.

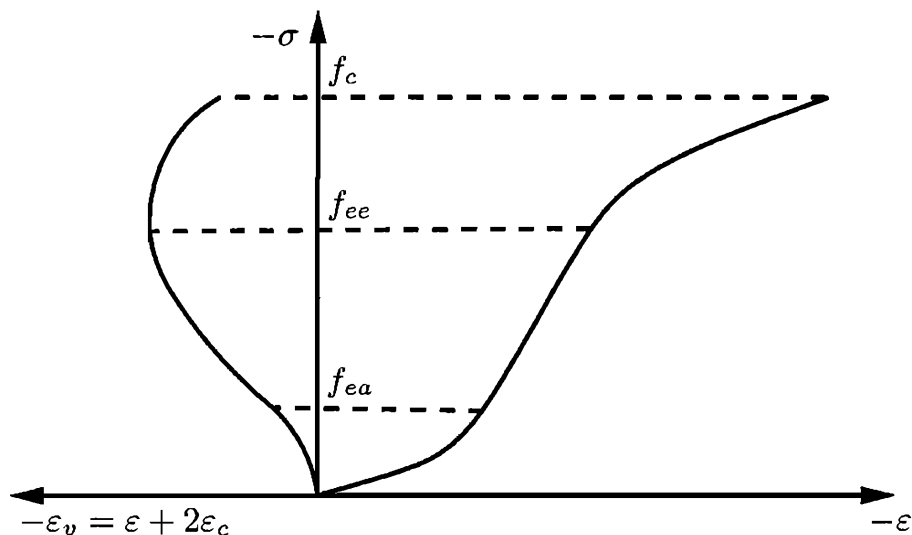


Abbildung 3.1: Spannungs-Dehnungskurve.

Unter Berücksichtigung der genannten Hinweise, kann eine in Abbildung 3.1 schematisch dargestellte Spannungs-Dehnungskurve ermittelt werden. Als Steuergröße

ist die axiale Spannung σ bei konstantem Seitendruck $\sigma_c = 0$ gewählt worden. Der erste nichtlineare Anteil bis f_{ea} beschreibt eine überproportionale Volumenabnahme ε_v nach Gleichung (2.31) unter Vernachlässigung der quadratischen und kubischen Terme. Sie wird durch das Schließen von Rissen oder die Kompression von Poren hervorgerufen. Ab der Grenze f_{ea} verhält sich das Material quasi linear elastisch bis zu einer Schwelle f_{ee} , ab der das Material trotz allseitiger Kompressionsspannung eine überproportionale Volumenzunahme erfährt. Dieses für Gesteine sehr charakteristische Verhalten wird Dilatation genannt.

Die Steigung im linearen Bereich heißt Elastizitätsmodul E und ist definiert als $\sigma = E\varepsilon$. Eine zweite Konstante ist die Querkontraktion ν , die ein Maß für die Querschnittsänderung der Probe ist, beschrieben durch $\varepsilon_c = -\frac{\nu}{E}\sigma$.

Eine Steuerung der äußeren Verschiebung ermöglicht, einen Bereich der Spannungs-Dehnungskurve zu messen, der nach Erreichen der maximalen Spannung f_c monoton fällt. Allerdings ist fraglich, ob dieser Bereich eine reine Materialeigenschaft wiedergibt [24]. Zudem zeigt sich, dass der Einfluss der Reibung an der Lasteinleitungsfläche nie komplett zu unterdrücken ist. Daher können die Probengeometrie und die Größe der Probe Auswirkungen auf das Messergebnis haben. Da die Versuche zu einer Ermittlung kontinuumsmechanischer Kenngrößen dienen, muss über die Größe der Probe zudem sichergestellt werden, dass die gemessene auch eine gemittelte Größe ist. Dies ist der Fall, wenn die Annahme eines homogen verteilten Materialverhaltens getroffen werden kann. Weiterhin kann die Belastungsrate $\dot{\sigma}$, die Probentemperatur T und der Wassergehalt in der Probe das Verhalten der Probe ändern.

Eine Modellierung des linear elastischen Verhaltens kann zum Beispiel durch Anpassung der zwei elastischen Konstanten in Gleichung (2.46) erfolgen.

3.2 Nichtlineares Verhalten

Wie in Abbildung 3.1 dargestellt, verhält sich die Spannungs-Dehnungskurve ab dem Wert f_{ee} mehr oder weniger stark ausgeprägt nichtlinear. Ein monoton steigendes Verhalten der Kurve wird Dehnungsverfestigung ein fallendes Dehnungsentfestigung genannt. Eine Ursache dieser Krümmung können auftretende inelastische Prozesse oder nichtlineare elastische Prozesse sein. In vielen Fällen ist die Dehnungsverfestigung mit einer deutlichen Zunahme von akustischer Emission verbunden, dessen Ursache im Material gebildete oder aktivierte Risse sein können. Die uniaxiale Druckfestigkeit f_c markiert den Punkt der maximal aufnehmbaren Spannung.

Nun können die Versuche mit veränderlichem Seitendruck durchgeführt werden. Kármann war der erste, der den großen Einfluss eines Seitendrucks auf die Spannungs-Dehnungskurve nachwies [25]. An Marmorproben war das in Abbildung 3.2 skizzierte Verhalten deutlich nachvollziehbar. Die eingezeichnete Volumenänderung ε_v wurde Messungen an Sandstein nachempfunden [26, 27]. Der steigende Seitendruck erhöht

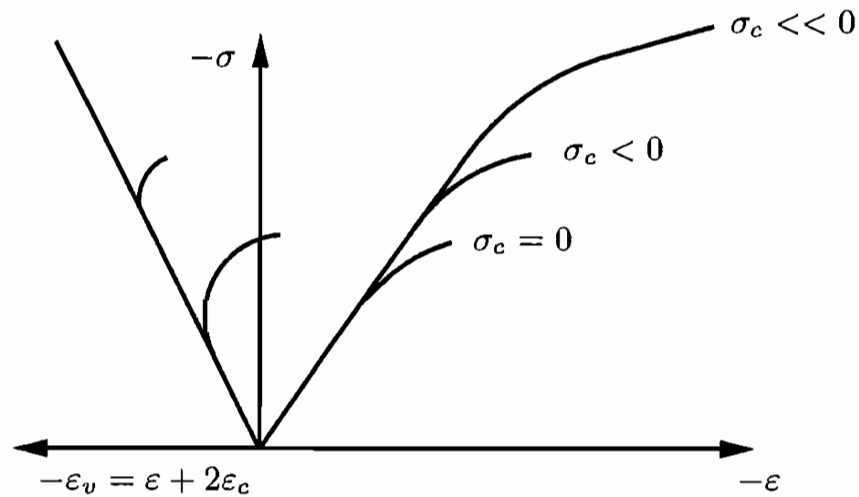


Abbildung 3.2: Einfluss eines steigenden Seitendrucks σ_c .

die Druckfestigkeit und unterdrückt die Dilatation. Für geringe Seitendrücke ist die Gesamtdehnung bis zum Erreichen der Festigkeit kleiner als für die größeren Seitendrücke. Diese fehlende Fähigkeit sich zu verformen wird sprödes Verhalten dessen Gegenteil duktiles Verhalten genannt.

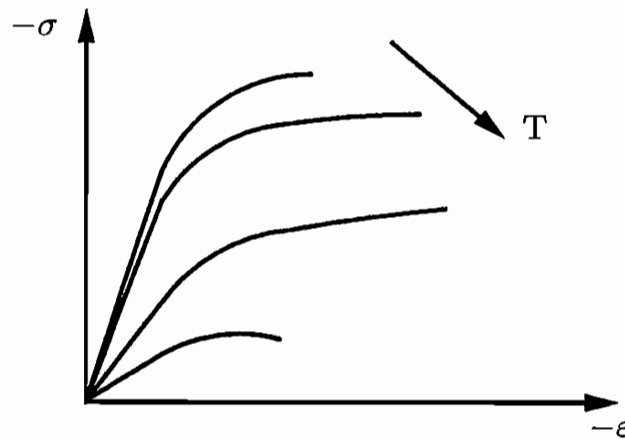


Abbildung 3.3: Einfluss der Temperatur T.

Ein weiterer wesentlicher Parameter, der diesen Übergang steuert, ist die Temperatur. So kann selbst eine moderate Erhöhung der Proben temperatur zu einer Verminderung der Festigkeit bei gleichzeitiger Zunahme an Duktilität führen. Zur Verdeutlichung gibt Abbildung 3.3 schematisch das Verhalten eines Serpentinits wieder [28]. Einen ähnlichen Einfluss hat in der Probe vorhandenes Wasser [29].

Das Übergangsphänomen kann mit einem Wechsel des dominierenden Verformungsmechanismus erklärt werden. Während beim spröden Verhalten noch die Mikrorisse die Ursachen für das nichtlineare Verhalten sind, wird dieser Mechanismus für hohe Temperaturen von leichter aktivierbaren Versetzungsvorgängen abgelöst. Diese Versetzungsvorgänge sind die Ursache von plastischen Verformungen.

Es ist aber nicht möglich den Begriff Duktilität alleine an plastische Prozesse zu binden, da es einen Übergangsbereich geben kann, in dem kooperierende Mikrorisse ein homogen verteiltes duktiler Verhalten bewirken. Dieses wird kataklastisches Fließen genannt und ist durch seine Volumenänderung vom plastischen Fließen zu unterscheiden. Während die plastischen Dehnungen volumenerhaltend sind, trifft dies nicht notwendigerweise für kataklastische Dehnungen zu. Eine genaue Begrifflichkeit wird in [30] eingeführt. Messungen an Quarzit belegen, dass die Porosität im spannungsfreien Zustand eine große Auswirkung auf die Fähigkeit hat, sich kataklastisch zu verformen [31].

Die Grundlage kataklastischen Fließens bilden Systeme konzentrierter Deformation, auch lokalisierte Deformation genannt. Dass tatsächlich Mikrorisse für das spröde Verhalten im allseitig gedrückten Zustand verantwortlich sind und auch durch ein Zusammenwirken zu einer Lokalisation führen können, wird in [32] belegt. In diesen Versuchen wird die axiale Last einer Gesteinsprobe unter einem Seitendruck von $\sigma_c = -50$ MPa nach einer konstanten Rate der akustischen Emission geregelt. Gleichzeitig wird die räumliche Verteilung der einzelnen Emissionen in der Probe registriert.

Die Ergebnisse zweier Versuche sind zusammen mit den Spannungs-Verschiebungskurven in Abbildung 3.4 wiedergegeben, in denen die Buchstaben die zeitlichen Intervalle markieren, die die räumlich aufgelösten Ereignisse im unteren Teil der Abbildung zusammenfassen. Deren Darstellung erfolgt in einer Projektion senkrecht zur Richtung der entstehenden Fuge.

Während in der Phase der Dehnungsverfestigung, die Emissionen in der Probe wahllos verteilt sind, sammeln sie sich lokalisiert entlang einer Scherfuge kurz nach Erreichen der Festigkeit. Es ist auch erkennbar, dass die Emissionen im Bereich der Lasteinleitung unterdrückt sind. Trotzdem bildet sich zumindest beim Granit die Fuge im Inneren der Probe, was darauf schließen lässt, dass sie nicht durch die Lasteinleitung selbst erzeugt wird.

Der Vergleich von Granit und Sandstein ergibt, dass im Sandstein eine unschärfer ausgebildete Fuge entsteht. Hier ist die gesamte Anzahl an akustischen Emissionen viermal höher als die des Granits und die Punkte sind von Beginn des Versuchs an heterogener verteilt. Deutlich zu erkennen sind auch die unterschiedlichen Elastizitätsmoduln und Festigkeiten.

Eine zweite wichtige Beobachtung ist, dass hier scheinbar keine Dehnungsentfestigung auftritt. Der Punkt der maximalen Spannung ist ungefähr der Punkt an dem die Lokalisation einsetzt. Der weiter stark abfallende Ast ist aus materieller Sicht nicht mehr auswertbar, da die für die Auswertung des Versuchs getroffenen Annahmen nicht mehr erfüllt sind.

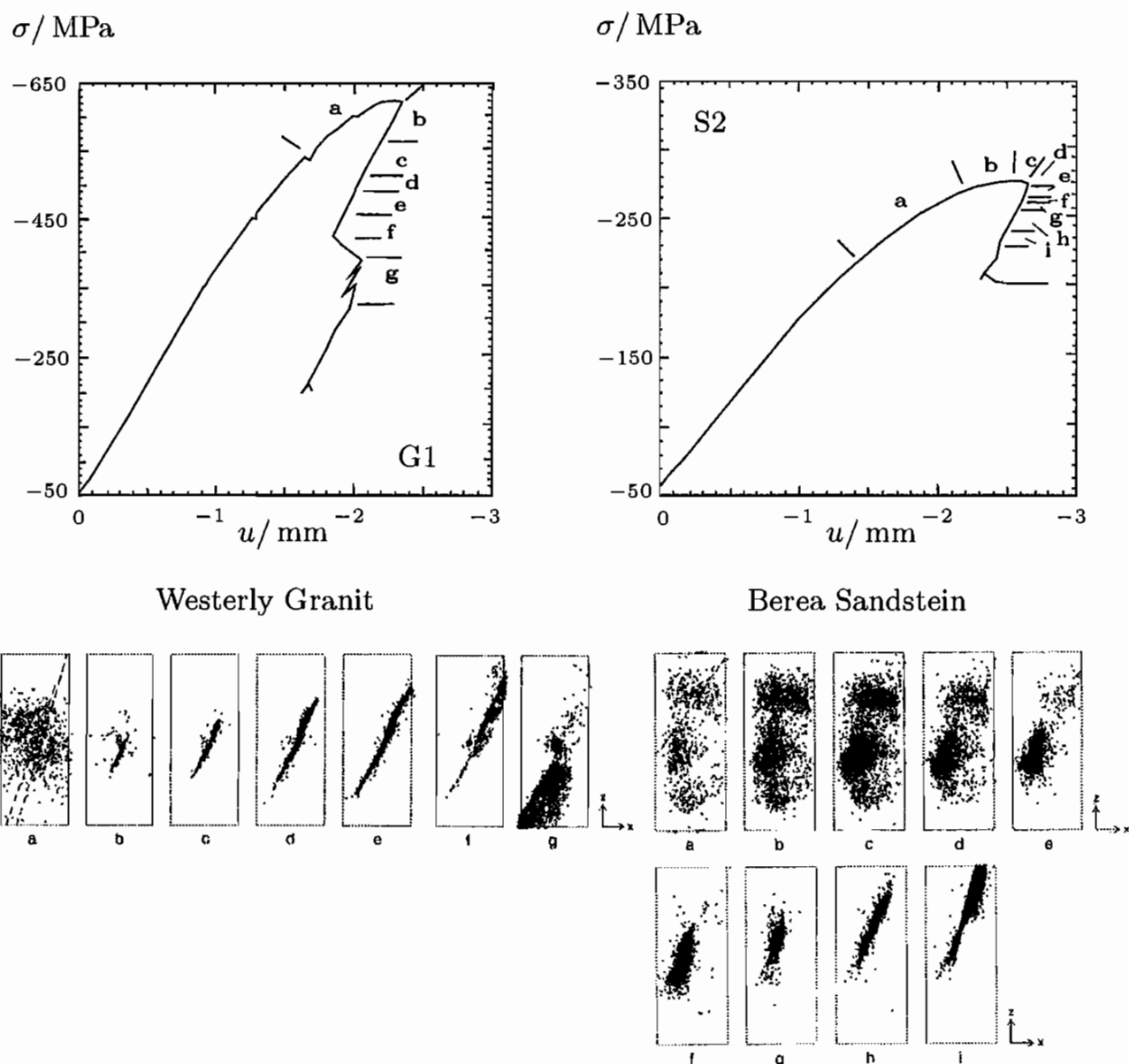


Abbildung 3.4: Spannungs-Verschiebungskurven und die räumliche Verteilung akustischer Emissionen nach [33].

Shimada belegt in seinen Artikeln [34] und [35], dass eine Erhöhung des Seitendrucks für verschiedene Silikate zu einer wesentlichen Reduktion der akustischen Emissionen führt. Dies führt mit Abbildung 3.2 zu der Vermutung, dass die Dilatation und das Auftreten von Rissen in einem engen Zusammenhang stehen.

Eine interessante Untersuchung der Volumenantwort einer Vielzahl von Gesteinen ist in [36] zu finden. Edmond und Paterson machen bezüglich dieses Themas den Vorschlag, die Volumenantwort der Proben im Hinblick auf die gesamte an der Probe geleistete Arbeit zu untersuchen.

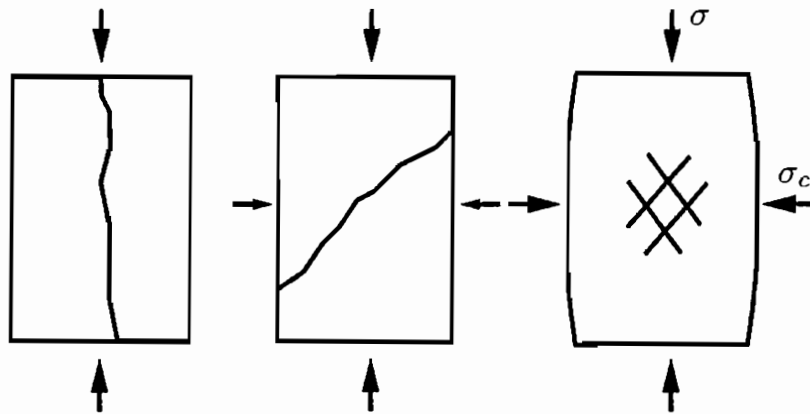


Abbildung 3.5: Versagensmuster für verschiedene Seitendrücke σ_c .

Die Lokalisation der Deformation kann nicht nur entlang einer Fuge, sondern eines Systems von Fugen erfolgen. In Abbildung 3.5 sind diese Muster für verschiedene Seitendrücke skizziert. Diese Abbildung stützt sich auf die qualitativen Beobachtungen in [26]. Aber schon bei den Messungen an Marmor von Kármán [25] waren diese Gleitsysteme sichtbar.

Für Seitendrücke $\sigma_c = 0$ ist die Versagensform neben der Fugenbildung ein vertikales Zersplittern der Probe in Richtung der maximalen Spannung σ . Bei einer Erhöhung des Seitendrucks formiert sich häufiger eine Scherfuge, die zur maximalen Spannung σ geneigt ist. Nach einer weiteren Erhöhung des Seitendrucks kann es zu einer Ausbildung eines Systems von Scherfugen kommen.

Auch andere Materialien bilden trotz ihres unterschiedlichen Aufbaus ähnliche Gleitsysteme aus. Eine interessante Zusammenstellung dieser Fugenmuster findet sich in [37]. Bei niedrig- oder unlegierten Stählen treten diese Gleitsysteme als Lüders-Bänder auf [38].

Für eine Modellierung dieses Materialverhaltens lassen sich nun folgende Vereinbarungen treffen: Da von Gestein in der Größe einer Probe vorausgesetzt wird, dass ihr Verhalten im Mittel isotrop ist, wird die Modellierung selbst isotrop sein. Dabei können im Wesentlichen alle in Kapitel 2.3 beschriebenen Methoden angewendet werden. Die Wahl der Modellierungsmethode sollte sich an den gewünschten Ergebnissen orientieren. Für eine rein phänomenologische Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens ist es oft ausreichend, eine Formulierung basierend auf einer nichtlinearen Elastizität nach Gleichung (2.63) zu verwenden. Natürlich wird eine solche Modellierung nicht in der Lage sein, plastische Prozesse abzubilden. Aber im Versuch sind diese ohne gemessene Entlastungspfade eh nicht vom gesamten Verhalten zu unterscheiden.

Nur unter der Verwendung von umfassenden Messreihen können die Modelle sinnvoll um diesen oder andere Effekte erweitert werden. Wie zum Beispiel in [39] darge-

legt, kann eine Schädigung durchaus mit einem plastischen Modell einhergehen und zusätzlich mit einer nichtlinearen Elastizitätstheorie verbunden werden. Dies sollte aber nur geschehen, wenn genügend Messdaten vorhanden sind.

Eine Beschreibung nach Gleichung (2.63) kann wesentlich vereinfacht werden, wenn die nichtlinearen Effekte in den Funktionen φ_1 und φ_2 berücksichtigt werden und φ_3 zu Null gesetzt wird. Dies wäre formal mit der zusätzlichen Bedingung

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial J_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial I_1} \quad (3.1)$$

mit einer hyperelastischen Beschreibung nach Gleichung (2.40) gleichbedeutend.

Zu der Thematik einer Dehnungsentfestigung ist noch anzumerken, dass es sich dabei wahrscheinlich nicht um eine Proben- sondern um eine Systemeigenschaft handelt. Es ist deshalb zwingend notwendig, bei einer Modellierung die Gültigkeit der Annahmen einer Kontinuumsbeschreibung in der Probe zu überprüfen.

3.3 Festigkeiten

Die Festigkeit bezeichnet den Punkt der Spannungs-Dehnungskurve, für den die Spannung maximal wird. Oftmals tritt die Bedeutung des vorhergehenden Spannungs-Dehnungsverhaltens gegenüber diesem Punkt zurück, da er das makroskopische Versagen markiert.

Viele Messungen beschäftigen sich folglich ausschließlich mit der Bestimmung dieser Punkte. Die Festigkeiten sind, wie aus den bereits erwähnten Artikeln zu ersehen ist, abhängig vom Seitendruck σ_c , der Temperatur T , dem Wassergehalt und der Probengeometrie [40]. Die Würfeldruckfestigkeit von Betonen liegt zum Beispiel immer über der Zylinderdruckfestigkeit. Allerdings ist dieser Unterschied eine System- und keine Materialeigenschaft. Ein weiterer interessanter Parameter ist die Größe der Probe [41, 42]. So nimmt die Festigkeit für immer größere selbstähnliche Körper und Lasten ab.

Die in Kapitel 2.3.4 dargestellten Grenzen konstitutiver Gesetze werden, da sie von ihrem theoretischen Konzept eine Lokalisierung von Deformationen oder den Verlust von materieller Stabilität einführen, selbst als Versagensbedingung interpretiert [43]. Eine Stärke dieses Vorgehens liegt in der Vorhersage lokalisierter Deformationen für eine positive Verfestigung im Rahmen einer nichtassozierten Fließregel. Eine Schwäche ist, dass es eine sehr genaue Beschreibung des zu Grunde liegenden Materialgesetzes benötigt.

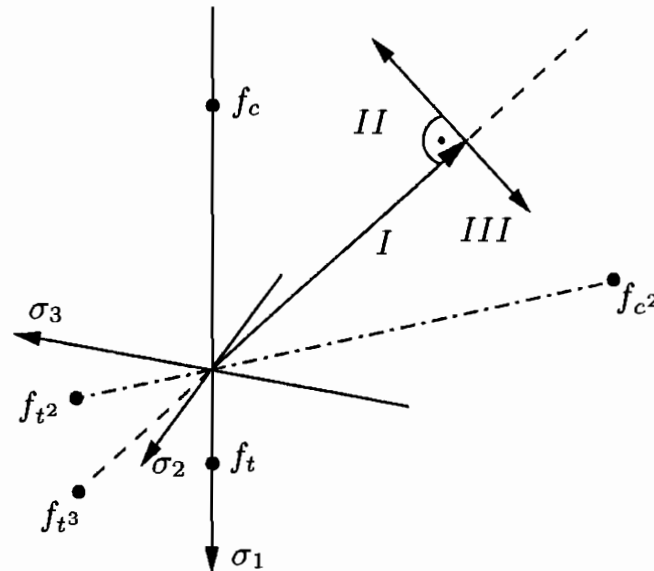


Abbildung 3.6: Festigkeiten und Spannungspfade im Hauptspannungsraum.

Um Aussagen über die Festigkeiten unter dreidimensionalen Lasten zu finden, können durch Versuche verschiedene Punkte im Hauptspannungsraum bestimmt werden, an denen Versagen eintritt. Mit Kenntnis dieser Punkte ist es dann möglich eine Grenzfläche, ein Festigkeitskriterium, zu konstruieren.

Im Hauptspannungsraum repräsentiert unter der Annahme materieller Isotropie der Messwert $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sechs Punkte im Hauptspannungsraum, welche durch Permutationen der Komponenten auf Grund der Isotropie bestimmt sind. In Abbildung 3.6 sind verschiedene Festigkeiten f und Spannungspfade dargestellt. So steht der Index t für Zugfestigkeit und c für Druckfestigkeit. Der hochgestellte Index ² steht für zweiachsige oder biaxiale Festigkeiten mit zwei gleichgroßen Hauptspannungen und ³ analog für dreiachsige oder triaxiale Festigkeiten mit drei gleichgroßen Hauptspannungen. Der wohl am einfachsten zu messende Wert ist die einachsige oder uniaxiale Druckfestigkeit f_c .

Der Spannungspfad *I* für den eine wachsende Druckspannung in allen Komponenten gleichzeitig erfolgt, also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ist, wird hydrostatische Kompression genannt. Der Pfad *II* für den die Druckspannung σ_1 erhöht wird und $\sigma_2 = \sigma_3$ bleibt, soll in dieser Arbeit triaxiale Kompression genannt werden. Pfad *III* soll analog für eine Abnahme von σ_1 als triaxiale Extension definiert werden. Die Ebene, für die I_1 konstant ist, wird als π -Ebene bezeichnet. Eine zweite Ebene, für die $\sigma_2 = \sigma_3$ ist, soll triaxiale Ebene heißen.

3.4 Festigkeitskriterien

Die gemessenen Festigkeiten sind Werte, mit denen versucht wird, von einem materiellen Versagen auf das Versagen einer Struktur zu schließen. Um ein Bauteil sicher auszulegen, muss unter anderem nachgewiesen werden, dass der Versagensspannungszustand in keinem Punkt des Körpers überschritten wird. Deswegen ist es von großem Nutzen, zum Beispiel für die Finite-Element Methode, ein Kriterium zu formulieren, mit dem es möglich ist, die materielle Versagensbedingung an jedem Punkt zu überprüfen. Dazu wird eine Fläche im Hauptspannungsraum definiert, die möglichst genau die gemessenen Festigkeiten approximiert.

3.4.1 Geschichte

Eine kompakte Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Forschung zum Thema der Festigkeit findet sich in [44].

Galileo Galilei (1564-1692) ist untrennbar mit der Beschreibung der Planetenbewegung verbunden. Ihm können ebenfalls erste theoretische Überlegungen zur Festigkeit zugeschrieben werden. Er legt überzeugend in seiner Abhandlung über geometrische Ähnlichkeit dar, dass ein Körper mit anwachsender Größe an Festigkeit verliert. Dies ist ein Verhalten, das erst viel später hinreichend erklärt werden konnte. Seine vielleicht größere Leistung liegt jedoch in seinem nicht ganz fehlerfreien Transfer von einem Zug- zu einem Biegeversagen eines Materials.

Damit nahm Galileo eine wesentliche Methode der Kontinuumsmechanik vorweg, in der mit an einfachen Versuchen gewonnenen Materialkenngrößen das Verhalten einer Struktur mathematisch beschreibbar wird. Die Trennung von Form und Materialverhalten einer Struktur, lässt auf einen sehr hohen Grad an Abstraktion in seinem Denken schließen. Viele der frühen Forscher verfügten nicht über die heutigen präzisen Versuchsdaten und waren somit auf die genaue Beobachtung ihrer Umwelt angewiesen oder zu der Entwicklung neuer Methoden gezwungen.

Der französische Ingenieur Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) konnte das nach ihm benannte Coulomb'sche Gesetz, wonach die Kraft zwischen zwei elektronischen Ladungen proportional zur Inversen des Abstandsquadrats ist, erst nach Konstruktion einer mechanischen Drehwaage entdecken, die durch Tordierung eines Fadens sehr kleine Kräfte detektieren kann. Eine zweite große Leistung gelang ihm mit der Einführung der Coulomb'schen Reibung nach Gleichung (2.93) in die Festigkeitstheorie. In seiner Analyse folgerte Coulomb, in dem Bemühen französische Befestigungsanlagen zu konstruieren, dass zum Versagen eines Sandsteins zweierlei Arten von Widerstand überwunden werden müssen. Dazu unterschied er einen Kohäsions- und einen Reibwiderstand. Den Reibwiderstand nahm er dabei proportional zur Normalkraft an. Dies ist genaugenommen keine Gesetzmäßigkeit, sondern eine häufig beobachtete Materialeigenschaft.

Ein weiteres Kriterium ist von dem schottischen Eisenbahningenieur William J. M. Rankine (1820-1872) für spröde Materialien entwickelt worden. Er verwendete dazu als Versagenskriterium eine materialspezifische maximale Zugspannung. (Ob er auch analog einen Wert für die größte Druckspannung annahm, bleibt zu klären.) Der französische Mechanikprofessor Henri-Edouard Tresca (1814-1885) koppelte für duktile Materialien den Punkt des Versagens mit dem Überschreiten einer größten Schubspannung. Eine Analyse von Otto Mohr (1835-1918) zur Jahrhundertwende ermöglichte eine Verallgemeinerung der oben genannten Kriterien auf dreidimensionale Zustände. Dessen Hauptaussage ist, wie in Kapitel 2.2.1.1 dargelegt, dass die größte mögliche Schubspannung von der mittleren Hauptspannung unabhängig ist.

Bei der Erforschung duktiler Metalle wurde die so genannte Fließspannung eingeführt, ab der das Material zwar nicht versagt, aber seine Last-Verformungskurve drastisch ändert. Dieser bei vielen Stählen ausgeprägte Punkt zeigt sich nicht bei weichen Metallen wie Kupfer oder Silber.

Durch den Mathematiker Richard von Mises (1883-1953) und den polnischen Forscher Maksymilian Tytus Huber (1872-1950) wurde unabhängig voneinander ein Fließkriterium entworfen, das als Grenze der in Formänderung oder Distorsion gespeicherten Arbeit interpretiert werden kann. Schon der englische Mechaniker James Clerk Maxwell (1831-1879) deutete dies, wenn auch recht vage, in seinen Briefen an William Thompson an. Einen anderen energetischen Ansatz machte Eugenio Beltrami (1835-1900) mit der Untersuchung des Grenzwerts der gesamten elastischen Energie. Die folgende Erweiterung von Daniel Drucker und William Prager, die einem Einfluss der hydrostatischen Spannung Rechnung trägt, erfolgte wohl eher aus mathematischen Gründen.

Die erst in den letzten 30 Jahren möglich gewordenen reproduzierbaren Messungen mit echt triaxialen und homogenen Spannungszuständen zeigten, dass die herkömmlichen Kriterien nicht ausreichten, um den Ort des Versagens genügend genau zu beschreiben. Die schwer zu ordnende Vielfalt an Daten machte die Entwicklung rein empirischer Modelle nötig. In dieser Arbeit werden zwei davon Erwähnung finden, die ursprünglich für das Material Sand entwickelt und dann auf Materialien mit endlicher Zugfestigkeit verallgemeinert wurden.

Eine vollkommen neue Richtung schlug der englische Flugzeugingenieur Alan Arnold Griffith (1893-1963) ein, der zu der Erklärung des spröden Versagens kleine Diskontinuitäten oder Risse einführte und somit dem Aspekt Rechnung trug, dass die theoretische Spannung, die zur Trennung einer Ionenbindung nötig ist, um Größenordnungen die reale Festigkeit eines Körpers übersteigt. Die Überlegung, dass diese Diskontinuitäten ein Spannungsfeld umgibt und es so zu einer Spannungserhöhung an dessen Enden kommt, führt zum Verständnis des spröden Versagens. Der Schwede Waloddi Weibull (1887-1979) nutzte dieses Modell 1939, um mit Hilfe einer statistischen Verteilung erklären zu können, warum ein geometrisch ähnlicher aber größerer Körper bei einer geringeren Spannung versagt. Die einleuchtende Erklärung ist, (die sicherlich auch Galileo zufriedengestellt hätte) dass ein Körper wegen seines längsten

Risses versagt. Je größer der Körper desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein eines noch längeren Risses.

Jedes dieser Versagenskriterien hat seine eigenen Vor- und Nachteile, die später noch diskutiert werden. Soweit soll eine Einteilung in vier Gruppen erfolgen:

- Hypothesen, die eine Grenze der maximalen Schubspannung vermuten,
- Hypothesen, die eine Grenze der maximalen Energie postulieren,
- empirische Kriterien,
- Hypothesen, die mikroskopische Diskontinuitäten berücksichtigen.

3.4.2 Mathematische Grundlagen

Werden Versagens- oder Festigkeitsflächen im Hauptspannungsraum formuliert, so gilt unter der Voraussetzung materieller Isotropie, dass eine Fläche durch die Gleichung

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (3.2)$$

unter Zuhilfenahme des Invariantensystems nach Kapitel 2.2 wie folgt dargestellt werden kann:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0. \quad (3.3)$$

Ein Parameter c kann als eine Translation des Festigkeitskriteriums entlang der hydrostatischen Achse interpretiert werden:

$$\boldsymbol{\sigma} - c\mathbf{I}. \quad (3.4)$$

Da der Parameter c bei allen folgenden Kriterien dieselbe Bedeutung hat, wird er im Weiteren nicht gesondert erwähnt.

Es gibt Theorien, die auf rein zweidimensionalen Modellen basieren. Durch die von Mohr getroffene Annahme, dass die mittlere Hauptspannung keinerlei Einfluss auf die Festigkeit hat, können diese Festigkeiten auf drei Dimensionen erweitert werden. Um dieses Vorgehen zu formalisieren wird folgendes vereinbart:

$$I'_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = I_1\left(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3\right) = \frac{3}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (3.5)$$

$$J'_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = J_2\left(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3\right) = -\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (3.6)$$

$$J'_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = J_3\left(\sigma_1, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3\right) = 0. \quad (3.7)$$

Durch Permutationen der Hauptspannungen werden folglich durch eine implizite Funktion $F(\sqrt{-J_2'}, I_1') = 0$ insgesamt sechs Flächen im Raum beschrieben. Wenn eine Beschreibung ohne Permutationen gewählt wird, können die Schnittflächen nur in einer komplizierten Gleichung in Abhängigkeit aller drei Invarianten formuliert werden. Durch $F(\sqrt{-J_2'}, I_1') < 0$ wird ein Volumen durch diese sechs Flächen komplett umschlossen.

Um die dreidimensionalen Kriterien mit der Mohr'schen Annahme von den zweidimensionalen Kriterien unterscheidbar zu machen, stellt eine implizite Funktion der Form $F(\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}) = 0$ ein ebenes Kurvenpaar dar. Der Betrag hierbei trägt dafür Sorge, dass die Kurven symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden sind.

Weiterhin soll nun vereinbart werden, dass die Bedingung $I_1 < 3c$ immer erfüllt sein muss. Dies stellt sicher, dass für die Gleichungen, in denen die Größe I_1 quadriert wird, nicht neben der Lösung im siebten Oktanten auch eine im ersten Oktanten erzeugt wird. Sie wäre physikalisch unsinnig, da sich eine Zugfestigkeit durch Erhöhung der seitlichen Zugspannungen nicht steigern lässt.

Da die Parameter der folgenden Kriterien oftmals ungeeignet für eine Anpassung des Modells an Versuchsergebnisse sind, werden falls möglich Formeln genannt, die eine Berechnung dieser Parameter aus der uniaxialen Zugfestigkeit f_t und aus der uniaxialen Druckfestigkeit f_c ermöglichen. Dazu werden das negative Verhältnis von f_c zu f_t als

$$\gamma = -\frac{f_c}{f_t} \quad (3.8)$$

und der Zusammenhang von $c(f_t, \phi)$ eingeführt. Er wird abhängig vom gewählten Modell definiert.

3.4.3 Hypothese der maximalen Schubspannung

Coulomb leitete, wie in Kapitel 2.5.1 beschrieben, ein zweidimensionales Reibkriterium her. Gleichung (2.93) ergibt mit der Mohr'schen Theorie nach Kapitel 2.2.1.1:

$$\sqrt{-J_2'} + \frac{I_1'}{3} \sin(\phi_{MC}) = 0. \quad (3.9)$$

Durch die Coulomb Annahme der präexistenten Fuge scheint eine Anwendung auf Kontinua eher unpassend und besser für granulare Medien geeignet. Dennoch bildet die Coulomb'sche Reibung mit der Mohr'schen Theorie nach Gleichung (3.9) ein erfolgreiches dreidimensionales Kriterium und wurde so wie in Abbildung 3.7 erstmalig von Shield dargestellt [45].

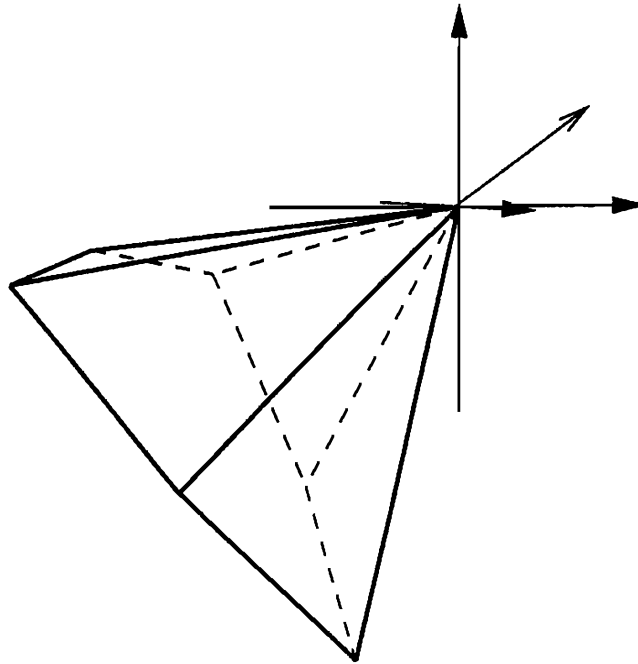


Abbildung 3.7: Mohr-Coulomb Kriterium.

Der Parameter c wird in der Abbildung nicht berücksichtigt, wodurch die Flächenkombination aus Gleichung (3.9) eine Nullstelle im Ursprung hat. Die Formeln für die Parameteranpassung sind:

$$\gamma_{MC} = \frac{1 + \sin(\phi_{MC})}{1 - \sin(\phi_{MC})} \quad (3.10)$$

$$c = f_t \frac{1 + \sin(\phi_{MC})}{2 \sin(\phi_{MC})}. \quad (3.11)$$

Ein Vorteil von Gleichung (3.9) ist, dass es für Reibwinkel $\phi_{MC} = 0^\circ$ und $\phi_{MC} = 90^\circ$ gleich zwei populäre Kriterien einschließt.

Ein Grenzfall des Kriteriums nach Gleichung (3.9) ist mit den Annahmen $\phi_{MC} \rightarrow 0^\circ$ und $c \rightarrow \frac{c_0}{\sin(\phi_{MC})}$ das Tresca Kriterium aus Abbildung 3.8. Es folgt:

$$\sqrt{-J'_2} - c_0 = 0. \quad (3.12)$$

Als zweiten Grenzfall bildet Gleichung (3.9) mit $\phi_{MC} = 90^\circ$ und $c = f_t$, das Rankine Kriterium aus Abbildung 3.9:

$$\sqrt{-J'_2} + \frac{I'_1}{3} = f_t. \quad (3.13)$$

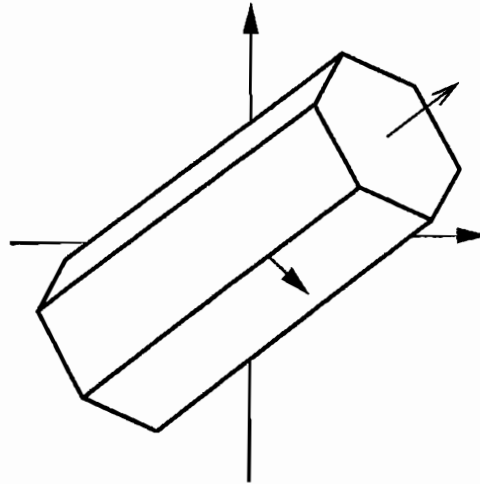


Abbildung 3.8: Tresca Kriterium.

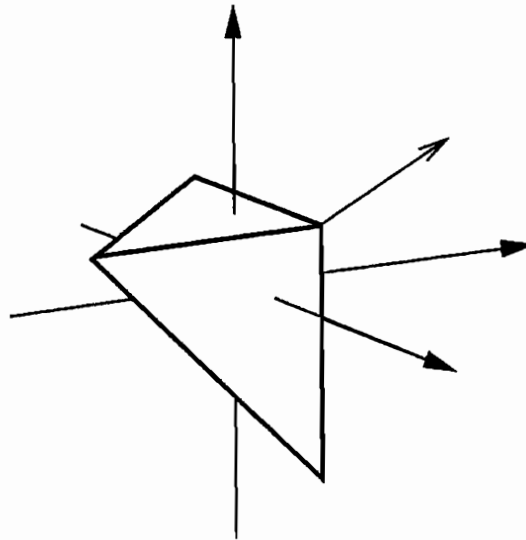


Abbildung 3.9: Rankine Kriterium.

Dieses Kriterium ist gebräuchlich für spröde Materialien, als so genannter tension cut-off im Zugbereich des Hauptspannungsraums und wird in Kombination mit anderen Kriterien verwendet. Dies ist sinnvoll, da das Rankine Kriterium eine unendlich große uniaxiale Druckfestigkeit f_c hat.

Abschließend bleibt festzustellen, dass durchaus sinnvolle Ergebnisse mit diesem einfachen Kriterium erzielt werden können. Mit der Annahme, dass sich der Reibwinkel in Abhängigkeit von der ersten Invariante verändern kann, wie zum Beispiel in Kapitel 4.3.3 skizziert, geht die Form in der π -Ebene bei einem fallenden Reibwinkel von einem gleichseitigen Dreieck (Rankine), über ein unregelmäßiges Hexagon (Mohr-Coulomb) in ein regelmäßiges Hexagon (Tresca) über.

3.4.4 Hypothese der maximalen Gestaltänderungsenergie

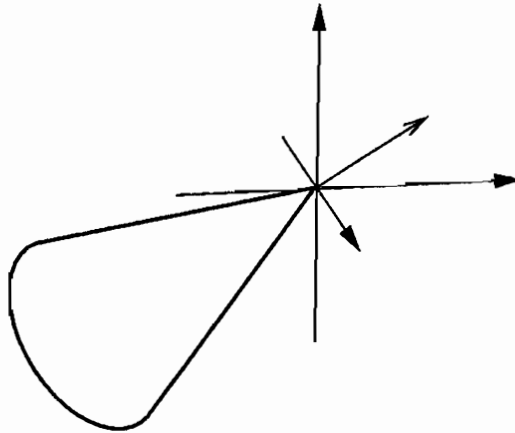


Abbildung 3.10: Drucker-Prager Kriterium.

Einen anderen Ansatz stellt das Drucker-Prager Kriterium in Gleichung (3.14) dar:

$$\sqrt{-J_2} + \frac{I_1}{3} \sin(\phi_{DP}) = 0. \quad (3.14)$$

Es beschreibt den Kegel in Abbildung 3.10. Die verwendete Invarianten J_2 kann als Maß der Gestaltänderungsenergie interpretiert werden, wobei der Wertebereich des Reibwinkels eingeschränkt ist. Bei einem Reibwinkel von sechzig Grad schneidet der Kegel die Ebene $\sigma_1 = 0$ entlang $\sigma_2 = \sigma_3$. Wäre der Winkel größer, so würde das bedeuten, dass ein Material durch Erhöhung der Seitendruckspannungen an Zugfestigkeit gewinnt. Diese Beobachtung wurde niemals gemacht. Die Kegelschnitte entlang orthogonaler Ebenen zu den Koordinatenachsen wären Hyperbeln und nicht mehr Ellipsen. Durch diese Restriktion wird der Quotient von f_c zu f_t auf drei begrenzt. Die Form in der π -Ebene bleibt für alle Reibwinkel ein Kreis. Die Formeln um die Parameter anzupassen sind:

$$\gamma_{DP} = -\frac{f_c}{f_t} = \frac{\sqrt{3} + \sin(\phi_{DP})}{\sqrt{3} - \sin(\phi_{DP})} \quad (3.15)$$

$$c = f_t \frac{\sqrt{3} + \sin(\phi_{DP})}{3 \sin(\phi_{DP})}. \quad (3.16)$$

Als Grenzfall des Kriteriums nach Gleichung (3.14) ergibt sich mit den Annahmen $\phi_{DP} \rightarrow 0^\circ$ und $c \rightarrow \frac{c_0}{\sin(\phi_{DP})}$ das von-Mises Kriterium. Es folgt:

$$\sqrt{-J_2} - c_0 = 0. \quad (3.17)$$

Die Fläche, die durch Gleichung (3.17) beschrieben wird, ist ein Zylinder der von dem Hexagon aus Gleichung (3.12) umschrieben wird.

3.4.5 Hypothesen auf empirischer Basis

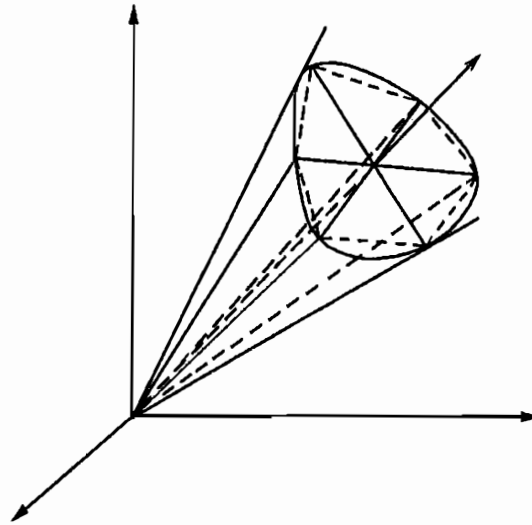


Abbildung 3.11: Matsuoka-Nakai Kriterium aus [46].

Bei empirisch motivierten Kriterien wird mehr auf eine gute Approximation der gemessenen Werte durch gewählte Funktionen als auf physikalische Interpretationen geachtet.

Als erstes wurde von Matsuoka und Nakai 1974 zur Beschreibung von Sand eine Kombination der Invarianten des Spannungstensors mit

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} = \text{konst.} = k_M \quad (3.18)$$

vorgeschlagen. Nach Aussagen der Autoren in [46] handelt es sich bei diesem Kriterium um eine Art gemitteltes Mohr-Coulomb Kriterium und tatsächlich ist das Bild von Gleichung (3.18) in der triaxialen Ebene linear und lässt sich auf das Mohr-Coulomb Kriterium anpassen (siehe Abbildung 3.11). Leider bleiben die Autoren ihre Wahl der Funktion $k_M(\phi)$ schuldig. In der π -Ebene legt sich diese Kurve mit einem abgerundeten Dreieck um das Mohr-Coulomb Hexagon. Etwas später verallgemeinern sie ihr Vorgehen für kohäsionslosen Sand mit gutem Erfolg auf Materialien mit Zugfestigkeit, in diesem Fall Beton [47]. Sie führen dazu einen Parameter a ein, welcher eine einfache Verschiebung des Hauptspannungsraums entlang der hydrostatischen Achse bewirkt und folglich mit c identisch ist.

Ein zweites besser entwickeltes Kriterium wurde alternativ von Lade für kohäsionslose Materialien 1975 entworfen. Die Gleichung

$$\frac{I_1^3}{I_3} = \text{konst.} = k_L \quad (3.19)$$

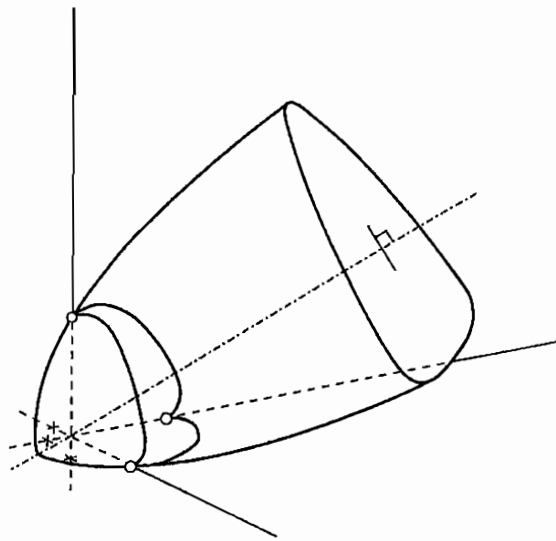


Abbildung 3.12: Lade Kriterium aus [48].

stellt eine lineare Funktion in der triaxialen Ebene und ein abgerundetes Dreieck in der π -Ebene dar und ist somit direkt mit dem ersten empirischen Kriterium vergleichbar.

Mit Monterey Sand wurde in [49] eine gute Übereinstimmung zwischen Messungen und Modell erzielt. Allerdings zeigte sich, dass selbst für Sand die Annahme einer linearen Funktion in der triaxialen Ebene eine zu grobe Näherung darstellt und so wurde das Kriterium in [50] erweitert zu:

$$\left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m = \text{konst.} = k_L. \quad (3.20)$$

Abbildung 3.12 skizziert den qualitativen Verlauf dieses Kriteriums im Hauptspannungsraum. In Gleichung (3.20) ist p_a der normale Luftdruck der auf die Probe wirkt und m der Parameter der die Krümmung in der triaxialen Ebene steuert. Sein Einfluss ist bei Sanden noch gering und nimmt Werte nahe Null an.

Eine weitere Verallgemeinerung erfuhr es 1984 durch den Translationsparameter c . Dieses inzwischen drei-parametrische Modell wurde in [51] und ausführlicher in [48] auf eine Vielzahl von Gesteinen angewendet. In [52] stellt es seine gute Anwendbarkeit erneut unter Beweis, aber diesmal für Werkstoffe.

Die Fülle von guten Ergebnissen an der Vielzahl von Materialien mit nur drei Parametern zwingt alternative Entwicklungen, sich direkt mit dieser Beschreibung zu messen. Ein Nachteil dieses Kriteriums bleibt jedoch, dass die von Lade eingeführten Parameter bis auf die Translation c schwer zu interpretieren sind.

3.4.6 Hypothesen basierend auf mikroskopischen Effekten

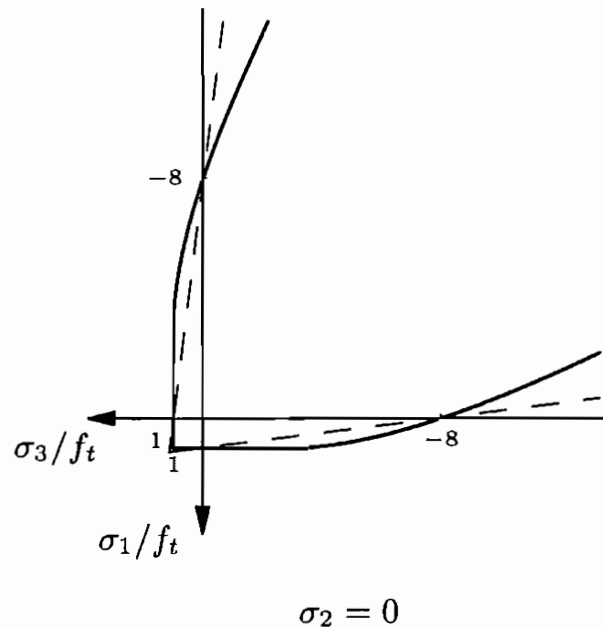


Abbildung 3.13: Festigkeit nach — Griffith und - - -Coulomb.

Dem Ansatz von Griffith nach Kapitel 2.6.1, in dem die energetische Bedingung für den Rissfortschritt formuliert ist, folgte 1924 erstmalig mit Hilfe dieses Modells der Versuch, ein theoretisches Zugfestigkeitskriterium zu berechnen [53]. Griffith führte hierzu das Konzept von gleichmäßig verteilten in allen Orientierungen vorhandenen Mikrorissen ein. Als mathematisches Abbild für einen dieser Risse dient ein elliptischer Hohlraum in einer unendlich ausgedehnten Scheibe, an dem es möglich ist, die tangentielle Spannung entlang der Hohlraumgrenze in Abhängigkeit des anliegenden homogenen Spannungsfelds zu berechnen.

Für einen allgemeinen zweidimensionalen Spannungszustand muss das Fernspannungsfeld aus Kapitel 2.5.2 um eine zweite Normalspannung senkrecht zur ersten und um eine Schubspannung erweitert werden. Nun ist es möglich durch zweimaliges Differenzieren, einmal über θ entlang des Hohlraumrands mit $\rho = 1$ und einmal über die Hauptspannungsrichtung des Fernfelds, die maximale Spannung σ_θ zu bestimmen. Die Annahmen, dass der längste von den günstig liegenden Rissen seine Ausbreitung beginnt und dieser wachsende Riss zum Versagen der Probe führt, lässt

die Bestimmung eines Festigkeitskriteriums zu und ergibt:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} - 4f_t \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 0 \quad \text{für } \sigma_1 + \sigma_3 < -2f_t \quad (3.21)$$

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = f_t \quad \text{für } \sigma_1 + \sigma_3 > -2f_t. \quad (3.22)$$

Dieses Kriterium verwendet nur einen Parameter und führt so zu einem konstanten Wert von $\gamma = 8$. In Abbildung 3.13 werden die zugehörigen Kurven dargestellt. Zusätzlich ist das ebene Coulomb Kriterium für identisches γ eingezeichnet.

Wird es als dreidimensionales Kriterium mit der Annahme von Mohr formuliert, lässt sich schreiben:

$$-J'_2 - 4f_t \frac{I'_1}{3} = 0 \quad \text{für } I'_1 < -3f_t \quad (3.23)$$

$$\sqrt{-J'_2} + \frac{I'_1}{3} = f_t \quad \text{für } I'_1 > -3f_t. \quad (3.24)$$

Für Werte von $I_1 > -3f_t$ entspricht es also dem Rankine Kriterium.

Wie bereits 1963 experimentell von Brace [54] gezeigt, gilt das Kriterium nicht für Druckspannungen, da Risse unter Druckspannung nicht unbegrenzt wachsen. Ein Einzelereignis, wie das Einsetzen des Risswachstums, führt im Druckbereich nicht zu einem globalen Versagen.

Diese Ergebnisse machten es notwendig, das zu Grunde liegende Modell des Risses genauer zu betrachten. Die gesamte analytische Lösung eines Spannungsfelds um einen reibbehafteten Risses wird in [55] errechnet und dazu genutzt einen theoretischen Übergang von spröde zu duktil zu motivieren. Die Komplexität der Beschreibung veranlasste Ashby dazu, mit einer Näherungslösung eine lineare Festigkeitskurve $F(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ zu berechnen [56]. Einen weiteren Schritt in dieser Richtung gelang Myer [57], indem ein Näherungsmodell über eine energetische Mittelung der durch unterschiedliche Laststufen aktivierten Mikrorisse auf eine globale Spannungs-Dehnungsbeziehung schließen lässt.

Da diese Modelle immer von einer schwachen Verteilung der Risse ausgehen, beeinflussen die von einem Riss verursachten Spannungsumlagerungen nicht seine Nachbarrisse. Reches stellte mit einem speziellen Ansatz eine Möglichkeit dar, auch eine solche Interaktion sinnvoll zu modellieren [58].

Die bis jetzt in diesem Abschnitt erwähnten Modelle sind strikt in zwei Dimensionen formuliert.

Ein anderer Weg, um Festigkeiten theoretisch von Mikromechanismen abzuleiten, ist in [59] dargelegt. Grundlage dieses Modells bildet die Annahme, dass die Schubspannung auf Rissen durch die Reibung begrenzt bleibt und die überschüssige elastische Energie räumlich umgelagert wird. Von der Summe dieser umgelagerten Energie wird

angenommen, dass sie eine materialabhängige konstante Grenze des Versagens bildet. Das Material versagt also nicht, sobald ein Riss seine Ausbreitung beginnt, sondern wenn die Summe der aktivierten Risse eine Grenze überschreitet. Das Ergebnis dieser Integration ist ein echt dreidimensionales Kriterium, das sehr dem Lade Kriterium ähnelt. Es ist linear in der triaxialen Ebene. Lundborg vereinigte dieses Modell mit der Weibullverteilung und berücksichtigte einen Reibungskoeffizient, der von der Normalspannung abhängt [60]. Wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit kleinen Streuungen versehen, geht die gerundete Versagensfläche zu der geraden Mohr-Coulomb Kurve über. Fjaer variierte diese Theorie, indem er die Verteilungsfunktion nicht mit der Gesamtversagenswahrscheinlichkeit, sondern mit der eines einzelnen Versagens verknüpft [61].

Zusammenfassend gilt, dass das Griffith Kriterium für Zugspannungen sinnvolle Ergebnisse liefert, aber bei steigender Druckspannung immer schlechtere Prognosen ergibt. Formal gleicht es dem Rankine Kriterium.

Das Mohr-Coulomb Kriterium mit veränderlichen Reibwinkel führt von besagtem Rankine zum Tresca Kriterium. Es behält immer seine eckige Form.

Die mit Wahrscheinlichkeiten formulierten Kriterien gehen von eckigen Formen zu runden Formen über.

3.5 Reibung

Nach Überschreiten der Festigkeit bildet sich häufig eine Scherfuge oder sogar ein System von Scherfugen aus und die Probesteile können nun entlang der neu entstandenen Oberflächen abgleiten. Dieses Abgleiten wird vollständig durch Reibprozesse kontrolliert. Amontons formulierte schon 1699 zwei Gesetze für diese Reibung. Sie besagen, dass die Reibkraft von der Fläche unabhängig und proportional zur Normalkraft ist:

$$T = \mu N. \quad (3.25)$$

Für Spannungen lässt sich Gleichung (3.25) zu

$$\tau = \mu \sigma_n \quad (3.26)$$

umformen. Alternativ kann μ über $\mu = \tan(\phi)$ in den Reibwinkel umgerechnet werden. Auch wenn die Gleichung (3.26) simpel erscheint, ist die theoretische Ermittlung des Reibungskoeffizienten μ höchst komplex.

Bei einer genauen Betrachtung lässt sich, wie in Abbildung 3.14 angedeutet, feststellen, dass die wirkliche Kontaktfläche nicht so einfach ermittelt werden kann. Die Topologie der Oberfläche ist eine entscheidende Größe. Wenn die Kraft von wenigen

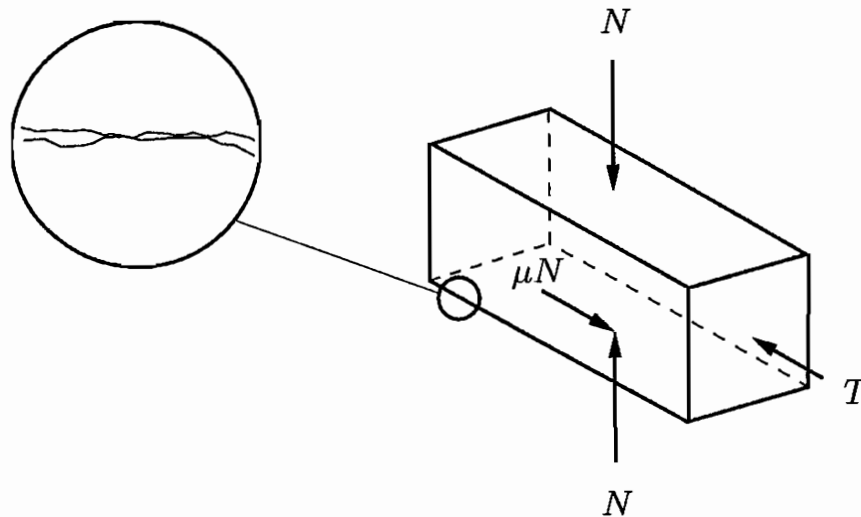


Abbildung 3.14: Reibkräfte.

Kontakten übertragen wird, sind diese in erster Näherung Hertz'sche Kontakte, die wiederum mit steigender Normalspannung die wirkliche Auflagefläche verändern. Es ist sogar möglich, dass durch die Spannungskonzentration das Material örtlich plastifiziert oder sogar versagt. Dafür lässt sich der Reibungskoeffizient relativ einfach experimentell ermitteln. Wenn für diese Ermittlung die triaxiale Zelle verwendet werden soll, muss vor Versuchsbeginn eine möglichst ebene Fuge, in das Material unter einem bestimmten Winkel eingebracht werden. Dies geschieht in der Regel durch ein Zerreißen der Probe unter Zugspannung oder mit einer Säge.

Der Spannungszustand bei Überwindung der Haftreibung kann einfach bestimmt werden. Doch der nachfolgende Gleitprozess wird mit dem Gleitreibungskoeffizienten beschrieben, der wiederum von der Normalspannung, der Gesamtverschiebung und sogar der Verschiebungsgeschwindigkeit abhängig ist. Anstatt einer gleichförmigen Bewegung können auch die so genannten Stickslip-Effekte auftreten, welches eine zeitliche Abfolge von Haftung und Gleitung ist.

Ein Charakteristikum der Gleitreibung ist, dass sie ein dissipativer Effekt ist. So ist das Abgleiten an eine Temperaturerhöhung gekoppelt. Ein Teil der mechanischen Energie wird in Wärme umgewandelt. Die Haftreibung hingegen ist eine Grenze, die die elastischen Vorgänge von den dissipativen trennt.

Die Erforschung der Reibung und der einhergehenden Verschleißerscheinungen erfolgt in der Tribophysik, die auf Werkstoffe konzentriert ist [62].

Für Gesteine hingegen untersuchte Coulomb als erster die Reibung, allerdings führte dies einer Vermischung der Begriffe Festigkeit und Reibung. Coulomb unterstellt für seine Analyse das Vorhandensein von Scherfugen in allen Richtungen, das sicherlich für ein Kontinuum so nicht zutrifft.

Dass der Reibungskoeffizient für Gesteine einen konstanten Wert annimmt, war nach Byerlee schon 1967 fraglich [63]. Er stellte zwar kaum Unterschiede zwischen gesägten und zerrissenen Granitproben fest, dafür aber schien der Reibungskoeffizient mit steigender Normalspannung merklich abzunehmen. Sein Vorschlag für μ lautet:

$$\begin{aligned}\mu &= 0,60 + \frac{50}{\sigma_n} && \text{für } \sigma_n \geq 200\text{MPa} \\ \mu &= 0,85 && \text{für } \sigma_n < 200\text{MPa.}\end{aligned}\tag{3.27}$$

Diese Formel wird Byerlees Gesetz genannt [64]. Es hat sich gezeigt, dass für kleine Normalspannungen die Reibungskoeffizienten für verschiedene Gesteine zwar sehr stark um 0,85 variieren, aber bei erhöhten Drücken sich die Messwerte immer mehr der Prognose annähern.

Die weiteren Parameter, wie Größe der Probe oder die Verformungsrate, haben kaum Einfluss auf die Haftreibung und auch die Temperatur zeigt bis 400°C keine Wirkung auf μ [65]. Durch Veränderung des Wassergehalts [63] ändert sich jedoch der Reibungskoeffizient:

$$\mu = 0,6 + \frac{10}{\sigma_n - p}.\tag{3.28}$$

Der Wassergehalt vermindert den absoluten Betrag von μ und der Porendruck p verringert die effektive Normalspannung.

Für die Anwendung in den Geowissenschaften wurde bald deutlich, dass in Verwerfungen, die Anwesenheit von Abriebsüberresten als Gesteinsmehl die Reibung in der Fuge wesentlich beeinflussen kann. Die Annahme, dass sich diese dünne Schicht als reibbehaftetes Material plastisch verformen wird, aber die Orientierung seiner Gleitsysteme zur vorherrschenden Scherung inkompatibel ist, führt zu einer scheinbaren Reduktion des Reibungskoeffizienten. Während der wirkliche Reibungskoeffizient des Materials nach wie vor $\mu_w = \tan(\phi)$ ist, wird er scheinbar zu $\mu_s = \sin(\phi)$ [66, 67].

[The page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. No specific content can be transcribed.]

4 Modellierung eines globalen Gesteinverhaltens

4.1 Einleitung

Wegen der Komplexität der Aufgabe ist es eingangs nötig, auf die Theorie der Modellierung einzugehen. Um materielle Eigenschaften zu modellieren, gibt es im Wesentlichen zwei Methoden.

Bei einer analytischen Modellierung wird ein reales System abstrahiert und in eine mathematische Form überführt. Dort wird es untersucht und anschließend muss die Güte des Modells anhand empirischer Daten des realen Systems abgeschätzt werden. Diese Methode beginnt mit einer Analyse. Sie soll die grundlegenden Ursachen des Systemverhaltens differenzieren. Eine anschließende Synthese fügt diese zu einem Modell zusammen. In der Kontinuumsmechanik wird dieses Vorgehen am Beispiel räumlich verteilter Mikroeffekte, die sich durch eine Mittelung zu einem homogenen Makromodell *verschmieren* lassen, sehr anschaulich.

Alternativ zu diesem analytischen Vorgehen kann eine Modellierung in einer rein phänomenologischen Weise geschehen. Hierbei ordnet sich eine Identifikation der Ursachen einer möglichst umfassenden vollständigen Beschreibung der Wirkungen unter.

Beide Vorgehensweisen haben ihr Für und Wider. Bei einem analytischen Vorgehen ist das Hauptproblem die Synthese, da ein zu umfassendes Mikromodell schnell zu einem unlösbaren Makromodell führen kann. Die erforderlichen Vereinfachungen und getroffenen Annahmen am Mikromodell erschweren dann die genaue Identifikation der Ursachen für das beobachtete reale Verhalten.

Auf der anderen Seite erfordert ein rein phänomenologisches Vorgehen die penible Ermittlung der Materialkennwerte für eine Vielzahl von Gesteinen und eine Zusammenstellung über deren genaue räumliche Verteilung in einer Struktur. Darüber gibt es aber im Maßstab der Lithosphäre keinen Aufschluss, so dass dieses Vorgehen hinfällig wird.

Dennoch ist das phänomenologische Vorgehen für Ingenieure von großem Nutzen, da die Verwendung kontrollierter Werkstoffe und das Wissen über deren genaue geometrische Anordnung eine derartige Methode nützlich machen.

Die Gliederung in diesem Kapitel soll diese Zweiteilung reflektieren. Im ersten Teil soll der Übergang von der Mikro- zur Makroskala vollzogen werden. Dies geschieht für den nichtlinearen Bereich nach Kapitel 3.2 anhand von Mikrorissen. Allerdings ist das Vorgehen nur gültig bis zu dem Punkt, ab dem eine Interaktion zwischen den Rissen beschrieben werden muss. Von diesem Punkt an soll der Schluss von der Makro- auf die Mikroskala weitere Erkenntnisse liefern. Dazu wird versucht mittels

einer allgemein gehaltenen Formulierung mit so wenigen Parametern wie möglich eine Vielzahl von Beobachtungen zu beschreiben, um so auf den vorherrschenden Versagensmechanismus zu schließen. Es ist offensichtlich, dass dieser Teil die meiste Skepsis hervorrufen wird. Jedoch muss sich bei der Entwicklung einer globalen Aussage von dem Wunsch getrennt werden, jedes noch so kleine Detail mit höchster Genauigkeit zu beschreiben. Während die mindestens ebenso erstaunliche Tatsache, dass sich ein heterogenes Konglomerat aus anisotropen Mineralien im Mittel durch nur zwei Konstanten elastisch beschreiben lässt, weithin akzeptiert wird, gilt ein globales Versagenskriterium als unwahrscheinlich. Diese Kontroverse wird scheinbar schon etwas länger ausgetragen und so erhält das folgende Zitat von Otto Mohr aus [68] eine bemerkenswerte Aktualität.

„Im Verkehr mit einsichtigen Fachgenossen bin ich nicht selten der Meinung begegnet, es sei ein eitel Bemühen, der Festigkeitslehre eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Homogene Körper - so hielt man mir entgegen - kommen in der Natur nicht vor, homogene Spannungszustände ebensowenig. Ein Elementargesetz aus der Erfahrung abzuleiten, ist daher unmöglich. Die vorhandenen Unregelmäßigkeiten sind von der Art, dass sie jede Gesetzmäßigkeit fast vollständig verdecken, und den halb verwischten Spuren solcher Gesetze weiter nachzugehen, das hat kaum ein erhebliches Interesse. Es bleibt nichts anderes übrig, als in jedem wichtigen Falle besondere Versuche anzustellen und sich um die physikalische Deutung der Ergebnisse nicht zu kümmern. Ich habe jedesmal zugeben müssen, dass sich gegen diese Ansichten nicht viel einwenden lässt. Und dennoch wiederholt sich seit mehr als hundert Jahren der Versuch, in die verwirrende Fülle der Erfahrungen Ordnung zu bringen. Wenn es gelingen sollte, Regeln zu finden, denen sich viele Erfahrungen unterordnen,[...], so würde damit vielleicht kein Elementargesetz, wohl aber ein Hilfsmittel gewonnen sein, um neue Ergebnisse der Erfahrung auf ihre Wahrscheinlichkeit zu prüfen.“

4.2 Übergang von einer Mikro- zu einer Makroskala

4.2.1 Mikromodell

Es wurde zunächst das Ausbreitungsverhalten von Rissen auf der Grundlage des ebenen Extensionsmikrorissmodells nach Nemat-Nasser [55] in Abbildung 4.1 untersucht. Dieses Modell ist in der Lage, die Rissausbreitung in einem Druckspannungsregime zu beschreiben. Analysiert wird hierbei ein bestehender reibbehafteter Riss in einer ungestörten, unendlich ausgedehnten Scheibe aus elastischem Material. Als Lasten werden Druckspannungen aufgebracht.

Dieser Riss wird unter Modus II Belastung zunächst abknicken und danach durch ein Abgleiten der Flanken, unter Modus I Belastung, in Richtung der maximalen Druckspannung weitergetrieben. Die Spannungsintensität an der Risspitze lässt sich dann durch die folgende Beziehung beschreiben

$$K_I = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{l\pi}(\sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)\cos(2(\theta - \gamma)))}_{K_{IF}} + \underbrace{\frac{F \sin \theta}{\sqrt{l\pi}}}_{K_{IR}}, \quad (4.1)$$

mit den Abkürzungen

$$F = 2c\tau,$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin(2\gamma) + \frac{1}{2}\mu(\sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)\cos(2\gamma)) - \tau_c.$$

Um die räumliche Entwicklung eines solchen Risses annähernd zu berechnen, wird die

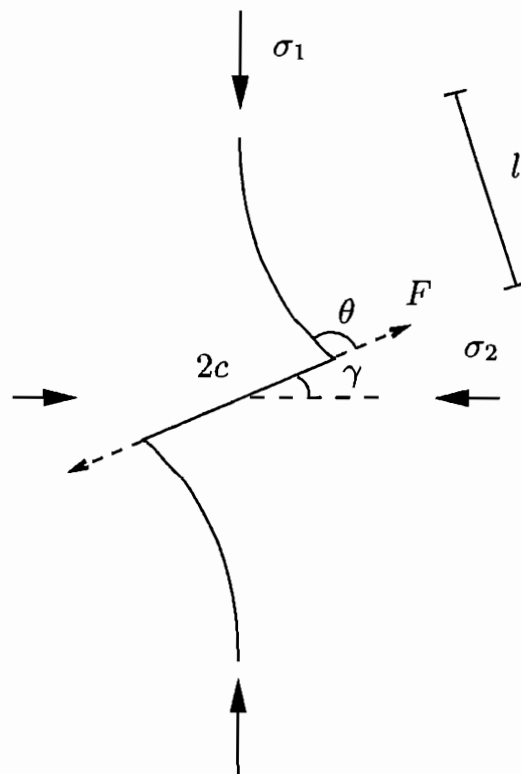


Abbildung 4.1: Extensionsmikroriss.

Richtung der maximalen Spannungsintensität an der Risspitze aus Gleichung (4.1) bestimmt. Danach errechnet sich die Verlängerung eines gedachten geraden Ersatzrisses in dieser Richtung durch Vergleich von Gleichung (4.1) mit der Bruchzähigkeit.

Mit der neuen Länge wird eine neue Richtung bestimmt und dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die Verlängerung eine Schranke unterschreitet. Der Term der Spannungsintensität lässt sich grob in den bremsenden Term des Fernfelds K_{IF} und den treibenden Term der Reibkraft K_{IR} aufteilen. Das Modell benötigt einen Keim der Entstehung und gibt den angenäherten bevorzugten Ort der Rissausbreitung wieder. Einen Aufschluss über ein theoretisches makroskopisches Materialverhalten erlaubt es jedoch nicht.

Abbildung 4.2 gibt das charakteristische Verhalten einer solchen Risssimulation unter einer vertikalen Last von $\sigma_1 = -100 \text{ MPa}$ und einem Winkel von $\theta = 45^\circ$ wieder. Der Übersicht wegen wird nur die obere Hälfte dargestellt, die untere Hälfte ist symmetrisch zum Ursprung. Während sich der Riss für verschwindende oder geringe Seitendrücker in Abbildung 4.2 (a) und (b) deutlich in Richtung der maximalen Druckspannung ausweitet, wird er für größere Seitendrücker in (c) und (d) an einer Ausbreitung gehindert. Eine erhöhte Reibung verstärkt den bremsenden Effekt in (b) und (d). Es erscheint also möglich, mit Hilfe dieses Modells einen vertikalen Spaltbruch zu erklären, da für geringe Seitendrücker die Verlängerung des Risses nicht gegen Null konvergiert. Die Vorhersagen decken sich außerdem gut mit Beobachtungen, die an einer Scheibe aus organischem Glas mit künstlichen Rissen gemacht wurden [55].

4.2.2 Makromodell

Um weitere Aussagen über das Verhalten eines Gesteins zu erlangen, dessen wesentliche Struktur durch Mikrorisse bestimmt wird, wurde hier das Vorgehen von Kemeny [57] angewandt. Diese Methode verwendet ein vereinfachtes Mikromodell. Gleichung (4.1) wird so zu:

$$K_I = \underbrace{\frac{F \cos \gamma}{\sqrt{l\pi}}}_{K_{Ir}} + \underbrace{\sqrt{l\pi}\sigma_2}_{K_{If}}. \quad (4.2)$$

Das Modell besteht weiterhin aus einem treibenden Term K_{Ir} und einem bremsenden Term K_{If} . Im Unterschied zu Gleichung (4.1) wird hier die Änderung des Winkels θ vernachlässigt, so dass der Riss nun geradlinig in Richtung der maximalen Druckspannung wächst. Diese Annahme ist für eine Abbildung von Rissen sinnvoll, deren Länge l deutlich größer als die Ausgangslänge c ist. In Anlehnung an eine energetische Betrachtung für einen einzelnen Riss nach Rice [69] wird nun angenommen, dass

$$W_l - W_f = 2U_e \quad (4.3)$$

gilt. Dabei ist W_l die Arbeit der äußeren Lasten auf Grund der zusätzlichen Verschiebungen, W_f die Arbeit durch Reibung entlang der Rissfläche und U_e die zusätzliche

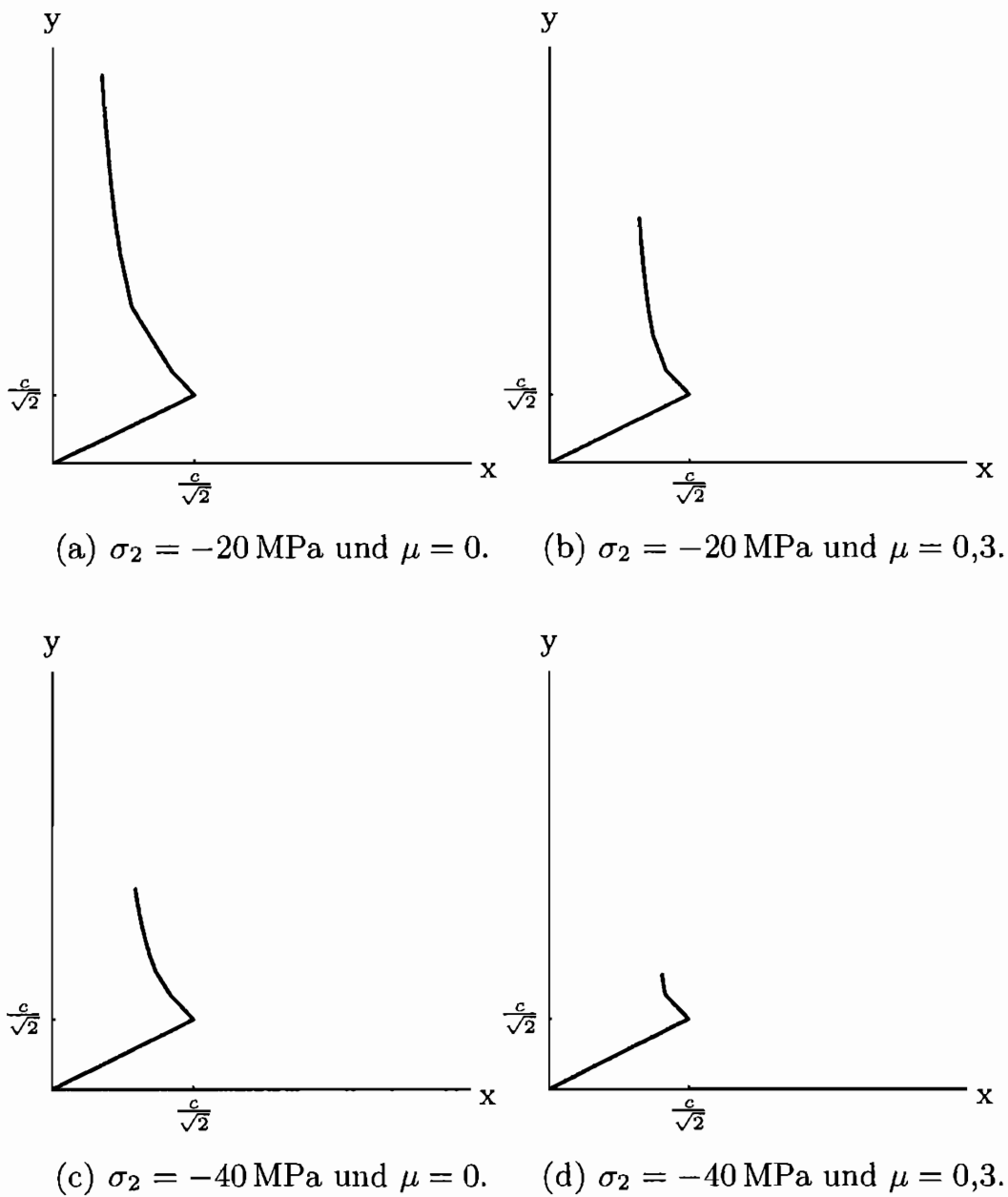


Abbildung 4.2: Räumliche Entwicklung simulierter Bruchverläufe.

Verformungsenergie. Diese Bilanzgleichung folgt aus dem Satz von Clapeyron. Die rechte Seite von Gleichung (4.3) kann mit Gleichung (4.2) durch Auswerten des Integrals

$$U_e = \int_{l_0}^l G dl = \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{l_0}^l K_I^2 dl \quad (4.4)$$

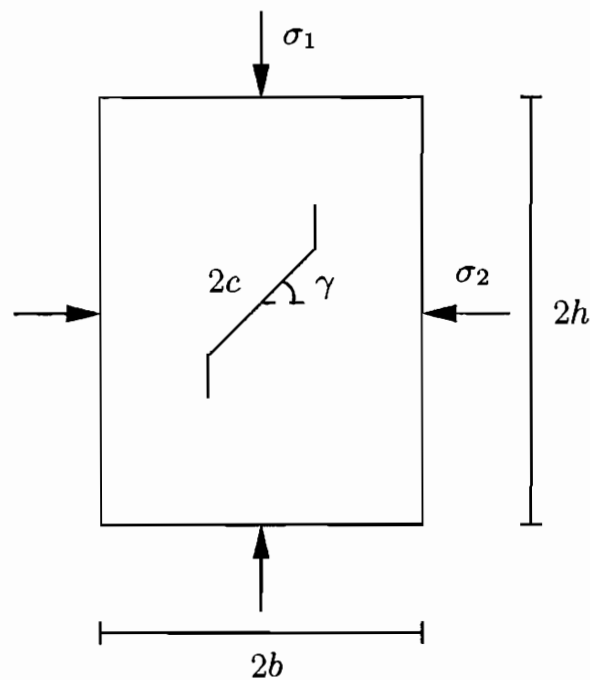


Abbildung 4.3: Mikroriss in einer Scheibe.

bestimmt werden. Die linke Seite von Gleichung (4.3) wird mit Hilfe des Ansatzes

$$W_l = 2b\sigma_1\Delta h + 2h\sigma_2\Delta b \quad (4.5)$$

$$W_f = \tau_f 2c\delta \quad (4.6)$$

errechnet, in dem die unbekanntenen Verschiebungen Δb , Δh und der unbekanntene Gleitweg δ benutzt werden (siehe auch Abbildung 4.3). Für linear elastische Probleme müssen diese Unbekannten lineare Funktionen der Spannungen σ_1 , σ_2 und τ_f sein. Es gilt nach [57]

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{2h} = A\sigma_1 + B\sigma_2 - C\tau_f \quad (4.7)$$

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{2b} = B\sigma_1 + D\sigma_2 - F\tau_f \quad (4.8)$$

$$\delta = (C\sigma_1 + F\sigma_2 - J\tau_f) \frac{2h2b}{2c} \quad (4.9)$$

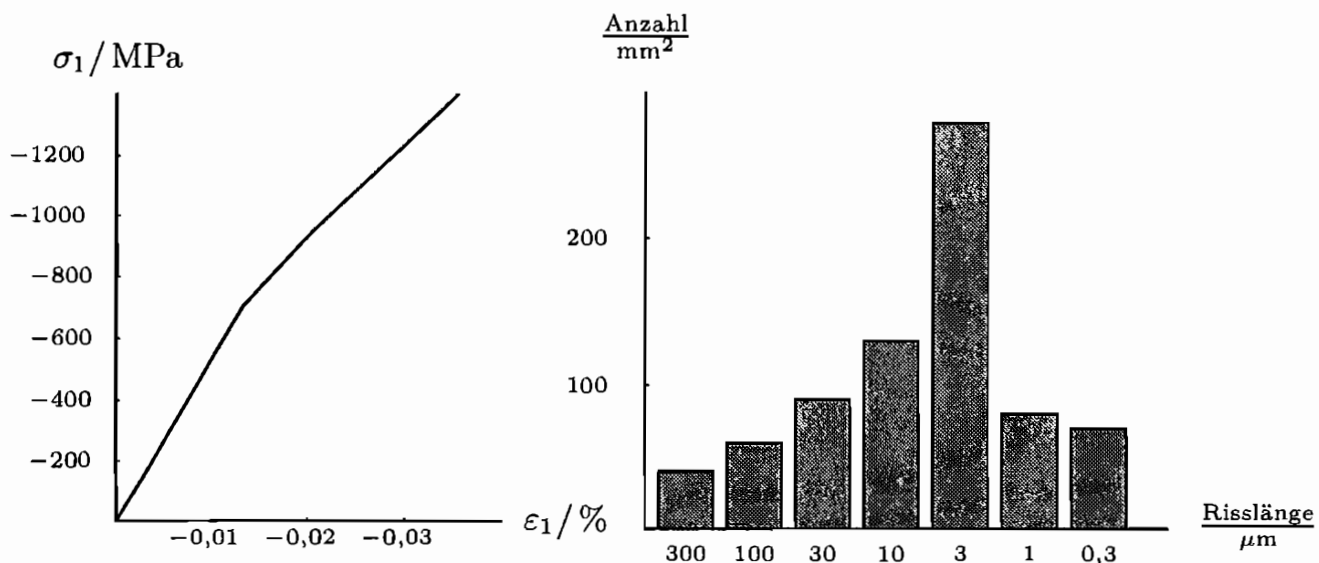
mit

$$\tau_f = \frac{1}{2}\mu \left(\sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(2\gamma) \right). \quad (4.10)$$

Mit Hilfe der Ansätze in den Gleichungen (4.7), (4.8) und (4.9), eingesetzt in Gleichung (4.5) und (4.6) lässt sich die linke Seite von Gleichung (4.3) durch die Unbekannten A, B, C, F und J ausdrücken. Um diese Unbekannten zu bestimmen wird Gleichung (4.3) nun ausgewertet und A, B, C, F und J durch Koeffizientenvergleich bestimmt. A, B und C in Gleichung (4.7) liefern dabei die zusätzlich zur elastischen Dehnung auftretende Dehnung $\Delta\varepsilon_1$, die durch einen einzelnen Riss hervorgerufen wird:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{4c^2}{2bh} \left(-\frac{1}{2\pi} \tau \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \sin(2\gamma) \sin^2(\gamma) - \frac{\sigma_2}{2c} (l - l_0) \sin(2\gamma) \sin(\gamma) \right). \quad (4.11)$$

Dieses Modell ist nun in der Lage, das Verhalten eines Gesteins mit einer schwachen Verteilung an Mikrorissen zu beschreiben. Als Eingangswerte benötigt es die Risslängenverteilung, deren Orientierung und die Länge der Risse, bei der ihr Wachstum aufhört. In der folgenden Untersuchung wird eine Verteilung von Mikrorissen unter derselben Richtung von $\gamma = 45^\circ$ angenommen, danach die Spannung so lange erhöht, bis die längsten Risse zu wachsen beginnen und damit eine zusätzliche Dehnung bewirken. Die Spannung wird nun weiter erhöht, bis die nächst kleineren Risse ihre Rissausbreitung beginnen.



Spannungs-Dehnungsbeziehung. Verteilung der Risslängen nach [58].

Abbildung 4.4: Simuliertes Materialverhalten.

Es zeigt sich, dass ein solches Modell sehr gut in der Lage ist, eine Dehnungsverfestigung zu beschreiben. In Abbildung 4.4 ist ein derartiges Verhalten dargestellt. Grundlage der angenommenen Verteilung ist eine Messung von Hadley an

Granit nach [58]. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung wurde errechnet für eine Grannitscheibe mit einer Rissverlängerung von $l = 10l_0$, einer Bruchzähigkeit von $K_{IC} = 1.8 \text{ MPa}/\sqrt{\text{m}}$ und einem Seitendruck von $\sigma_2 = -50 \text{ MPa}$. Die Untersuchung hat nun ergeben, dass nur die längsten Risse wesentlichen Einfluss auf das Materialverhalten haben. Die gemessene Verteilung erlaubt aber nur einen ungenauen Aufschluss über die Risslängen im interessanten Größenbereich von $1000 - 100 \mu\text{m}$. Es kommt zu dem deutlich sichtbaren Knick in der Spannungs-Dehnungsbeziehung bei Rissinitiierung der längsten Risse von $3 \mu\text{m}$. Eine Schwierigkeit dieses Modells besteht darin, dass es als Eingangsgrößen die Risslängen und deren Orientierung vor und nach einem Versuch benötigt. Weiterhin ist diese Art von Modell nicht in der Lage, eine Entfestigung zu beschreiben.

4.2.3 Rissinteraktion

Mit Hilfe akustischer Emissionsmessungen wurde von Lockner [32] eine Erhöhung der örtlichen Konzentration von Mikrorissen entlang einer sich entwickelnden Fuge gemessen. Dies wurde zum Anlass genommen, das Spannungsfeld eines einzelnen Risses etwas eingehender zu untersuchen. Dabei wurden die in Abbildung 4.5 dar-

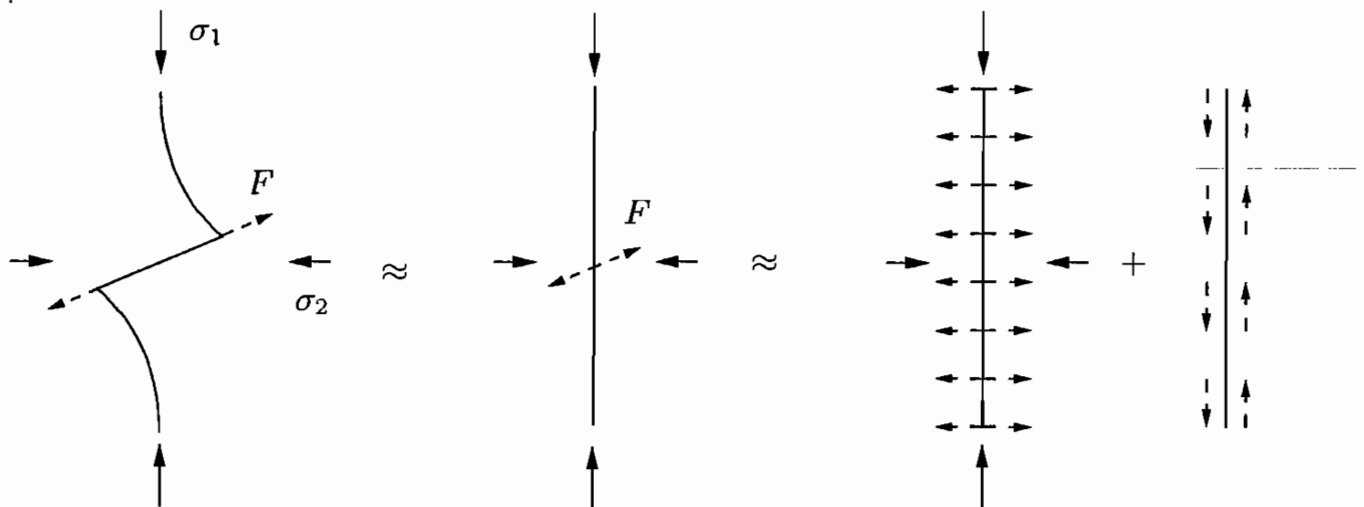


Abbildung 4.5: Vereinfachungen.

gestellten Vereinfachungen eingeführt, die das Spannungsfeld sich nicht ändern, und so eine analytische Beschreibung mit Hilfe komplexer Spannungsfunktionen nach Muschelischwili [16] möglich wird. Die Einzelheiten können Kapitel 2.5.2 entnommen werden. In Abbildung 4.6 ist das Spannungsfeld σ_{xx} um einen senkrechten Einzelriss in einer unendlichen Scheibe dargestellt. Das Spannungsfeld σ_{yy} in senkrechter Richtung verändert sich durch den Riss nicht merklich. Die helleren Flächen zeigen eine Abnahme der Spannung σ_{xx} in horizontaler Richtung, die dunkleren eine Erhöhung

ausgehend von den Risspitzen. Wird dieser Fall mit Reibung betrachtet, so wird eine bevorzugte Richtung identifizierbar (siehe Abbildung 4.6 (b)). Diese Erhöhung der Spannung könnte als Ursache für eine neue Rissinitiierung angenommen werden und so die Ausbildung einer örtlichen Konzentration an Rissen erklären, zumal ein neu wachsender Riss die Spannungserhöhung diagonal *weiterverschieben* würde. Die Richtung dieser Konzentration verliefte steiler als 45° . Zusätzlich wäre durch die Erhöhung des Seitendrucks die Längenausdehnung der neuen Risse vermindert.

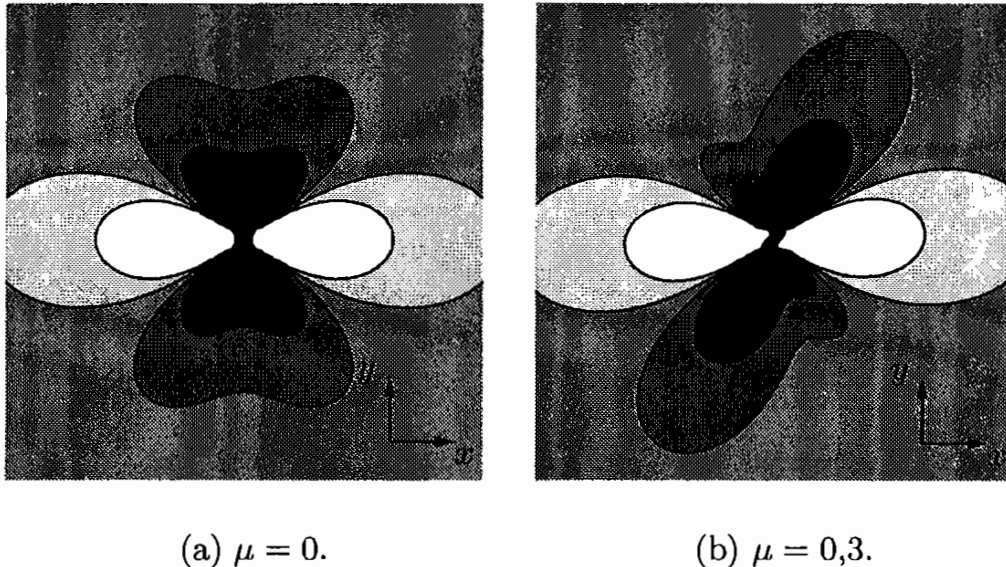


Abbildung 4.6: Spannungsfeld σ_{xx} eines senkrechten Einzelrisses.

4.2.4 Grenzen

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Mikromodell einige Vorzüge hat. Es ist möglich, den vertikalen Spaltbruch damit zu erfassen. Außerdem wird der wichtige Parameter Reibung in diesem Modell berücksichtigt. Weiterhin könnte über den Betrag der Abgleitung δ nach Gleichung (4.9) sogar eine Dilatanzgröße berechnet werden. So kann das Modell sehr gut qualitative Merkmale der Gesteine wiedergeben.

Allerdings bleibt dieses Modell immer eben. Es kann nur mit zusätzlichen Annahmen auf ein dreidimensionales Verhalten erweitert werden, so dass an der Güte der Prognosen gezweifelt werden kann. Ein weiterer Nachteil ist, dass noch nie ein Extensionsmikroriss, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, in einem Gestein beobachtet wurde. Das reale Verhalten, das die Dilatanz entstehen lässt, könnte wohl mehr der in Abbildung 4.7 skizzierten Situation ähneln. Durch Rotation der Körner kommt es zu einer Vergrößerung des Porenvolumens.

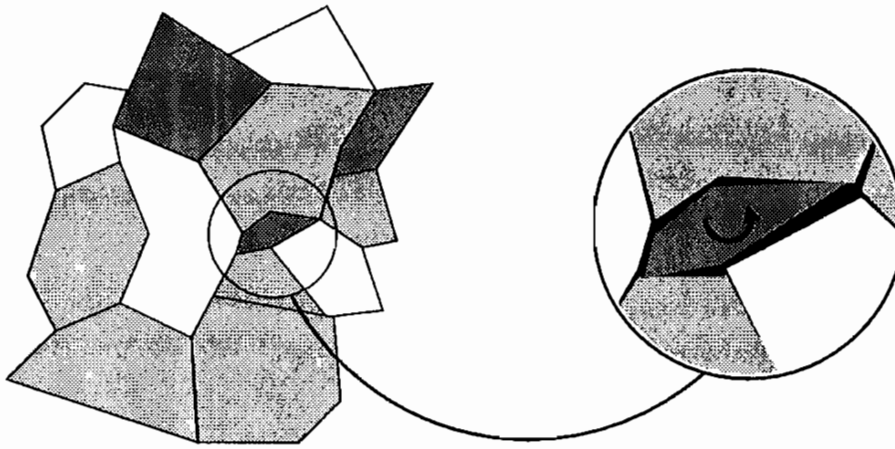


Abbildung 4.7: Verhalten eines Polykristalls.

4.3 Der Schluss von einem Makroverhalten auf einen Mikro- mechanismus

Ein großer Nachteil des Mikro-Makro-Vorgehens aus Kapitel 4.2 ist neben der Beschränkung auf ebene Modelle, die Unfähigkeit eine Interaktion der Mikrorisse analytisch zu berücksichtigen.

Alternativ soll in diesem Teil das makroskopische Verhalten auf seine mikroskopischen Ursachen untersucht werden.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung bietet sich die Festigkeit an, zumal sie sich leicht experimentell ermitteln lässt. Aber ist es überhaupt möglich von experimentellen Festigkeitsdaten auf die wesentlichen Versagensmechanismen zu schließen? Für eine Untersuchung dieses Zusammenhangs sind die Festigkeitskriterien von entscheidender Bedeutung. Die gängigen empirischen Kriterien erweisen sich, durch ihre kaum interpretierbaren Parameter als wenig hilfreich die Vielzahl an Ergebnissen qualitativ zu ordnen. Deswegen wird im Folgenden ein neues Festigkeitskriterium entwickelt, das auf einer analytischen Methode basiert.

Wie in Kapitel 3.4 wird der Translationsparameter c nicht gesondert erwähnt, da auch hier nur den Abstand des Nullpunkts des Festigkeitskriteriums vom Ursprung festlegt. Eine weitgehende wichtige Einschränkung ist, dass die folgende Herleitung nur für materielle Isotropie gilt.

4.3.1 Methodik

Viele, vornehmlich theoretische, Versuche den Versagenspunkt zu bestimmen, verwenden eine konstitutive Gleichung. Die Notwendigkeit diese konstitutive Gleichung zu formulieren, soll in der folgenden Methode umgangen werden. Es wird dazu ein Ansatz gewählt, der im Hauptspannungsraum definiert ist.

Ein Festigkeitskriterium lässt sich immer als Fläche im Hauptspannungsraum darstellen. Die drei Spannungsinvarianten markieren die Punkte in diesem Raum. Deshalb muss für die Beschreibung einer Fläche eine Abhängigkeit der Invarianten eingeführt werden. Dies geschieht häufig unter Verwendung einer Abhängigkeit zwischen J_2 und I_1 . Eine derartige Abhängigkeit bildet nun den Ausgangspunkt für eine Untersuchung der Cardano Bedingung aus Gleichung (2.22). Sie trennt den Bereich, in dem drei reelle Lösungen existieren, von dem Bereich, in dem eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen existieren. Unter Berücksichtigung, dass J_3 aus Gleichung (2.17) wiederum eine Funktion von J_2 ist, ergibt sich:

$$\left(I_3 - \left(J_2(I_1) + \frac{I_1^2}{3} \right) \frac{I_1}{3} + \frac{2}{27} I_1^3 \right)^2 + \frac{4}{27} J_2^3(I_1) = 0. \quad (4.12)$$

Gleichung (4.12) umschreibt einen Raum, der die Flächendarstellung von $J_2(I_1)$ einhüllt. Die äußere Grenze nach Gleichung (4.12) soll nun mit der Einschränkung, dass $I_1 < 3c$ ist, selbst als Festigkeitskriterium interpretiert werden.

Auch wenn Gleichung (4.12) komplex erscheint, ist es möglich ihre prinzipielle Wirkungsweise anhand eines Beispiels zu erläutern. Für ein konstantes I_1 folgt, dass $J_2(I_1)$ und damit auch I_2 konstant sind. Zur Verdeutlichung werden die konstanten Werte fett hinterlegt. Durch eine Auswertung von Gleichung (2.22) ist es nun möglich, den Wertebereich für $I_3 \in [I_{3u}, I_{3o}]$ zu bestimmen, für den folgende Gleichung reellwertige Lösungen hat:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0. \quad (4.13)$$

I_3 ist durch die Gleichung (4.13) so bestimmt, dass die resultierenden Eigenwerte λ auf einem Kreis liegen. Mit Hilfe der beiden Grenzen I_{3u} und I_{3o} kann für ein konstantes I_1 ein Bereich von I_2 gefunden werden, für den die folgenden Gleichungen reellwertige Lösungen haben:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_{3o} &= 0 \\ \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_{3u} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Und genau diese zwei Grenzen werden durch Gleichung (4.12) beschrieben und zwar für alle I_1 . Es ist offensichtlich, dass $J_2(I_1)$ immer in dieser Lösung enthalten sein

muss. Ein Vorgehen dieser Art bedeutet letztlich, dass die starke Kopplung von J_2 zu I_1 von einer indirekten Kopplung über die dritte Invariante abgelöst wird. Im Anschluss werden verschiedene Funktionen für $J_2(I_1)$ untersucht.

4.3.2 Linearer Zusammenhang

Der wohl einfachste Zusammenhang zwischen den Invarianten J_2 und I_1 ist mit der folgenden Gleichung linear entlang der hydrostatischen Achse:

$$J_2 = - \left(\sin(\phi) \frac{I_1}{3} \right)^2. \quad (4.15)$$

Er wurde für die Untersuchung gewählt, da er seiner Struktur nach dem Mohr-Coulomb Kriterium nach Gleichung (3.9) ähnelt und mit dem Drucker-Prager Kriterium nach Gleichung (3.14) identisch ist. Zusätzlich kann er als eine Kombination der mittleren Normalspannung und der mittleren Schubspannung aus Kapitel 2.2.1.2 mit dem Reibungskoeffizienten aus Kapitel 3.5 interpretiert werden. Daraus lässt sich in diesem Fall eine Lösung bestimmen, die sich aus Gleichung (4.12) umgeformt zu

$$I_3 = \left(J_2(I_1) + \left(\frac{I_1}{3} \right)^2 \right) \frac{I_1}{3} \pm \sqrt{-\frac{4J_2^3(I_1)}{27}} \quad (4.16)$$

ergibt. Also folgt mit Gleichung (4.15):

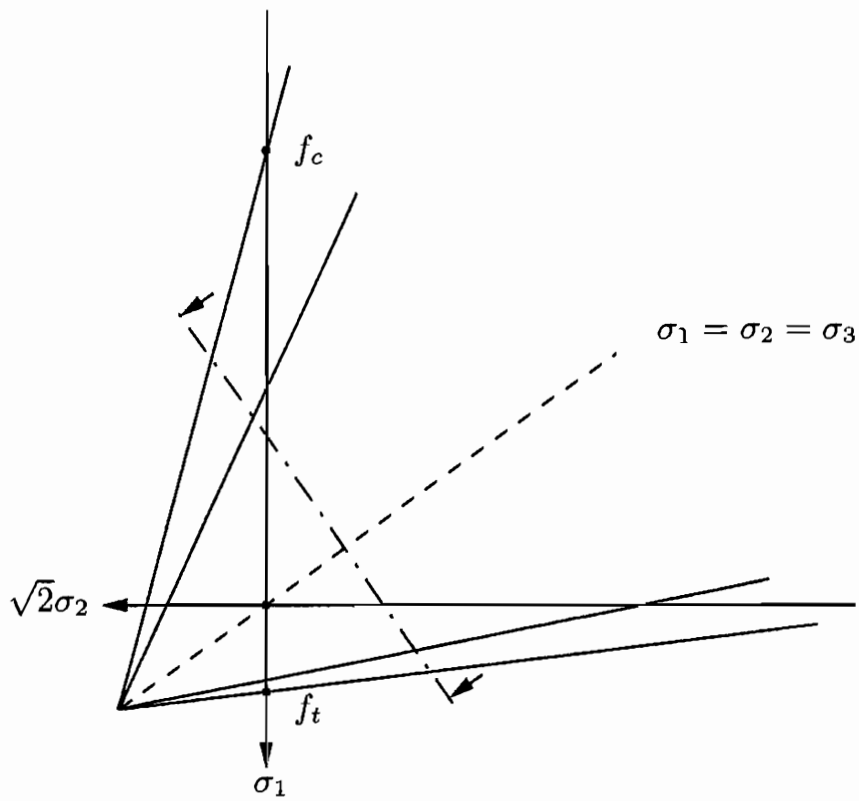
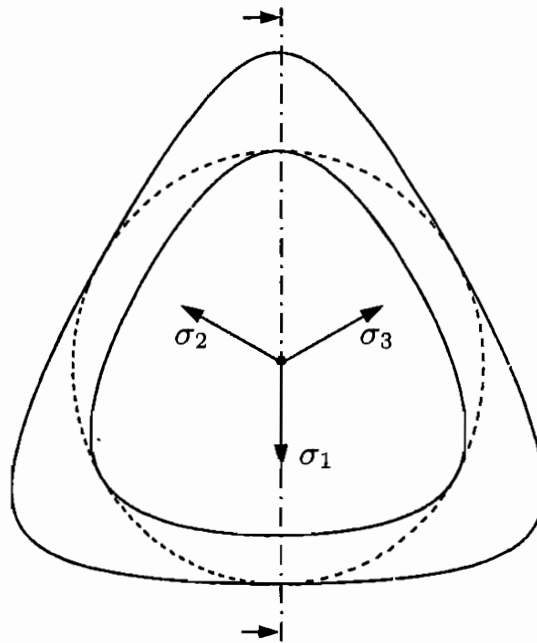
$$\begin{aligned} I_3 &= - \left(\frac{I_1}{3} \right) \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^2 + \left(\frac{I_1}{3} \right)^3 \pm \sqrt{\frac{4}{27}} \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^3 \\ &= \left(\frac{I_1}{3} \right)^3 \left(\cos^2(\phi) \pm \sqrt{\frac{4}{27}} \sin^3(\phi) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die äußere Fläche nach Gleichung (4.17) ist identisch mit dem Lade Kriterium erster Art nach Gleichung (3.19) mit:

$$k_L = \frac{27}{\cos^2(\phi) - \sqrt{\frac{4}{27}} \sin^3(\phi)}. \quad (4.18)$$

Auch das Matsuoka-Nakai Kriterium nach Gleichung (3.18) lässt sich aus dem hier definierten Festigkeitskriterium berechnen. Aus der Gleichung (4.15) folgt mit Gleichung (2.16):

$$I_1^2 = \frac{9I_2}{3 - \sin^2(\phi)}. \quad (4.19)$$

Abbildung 4.8: Seitenschnitt für $\sigma_2 = \sigma_3$.Abbildung 4.9: Schnitt in der π -Ebene.

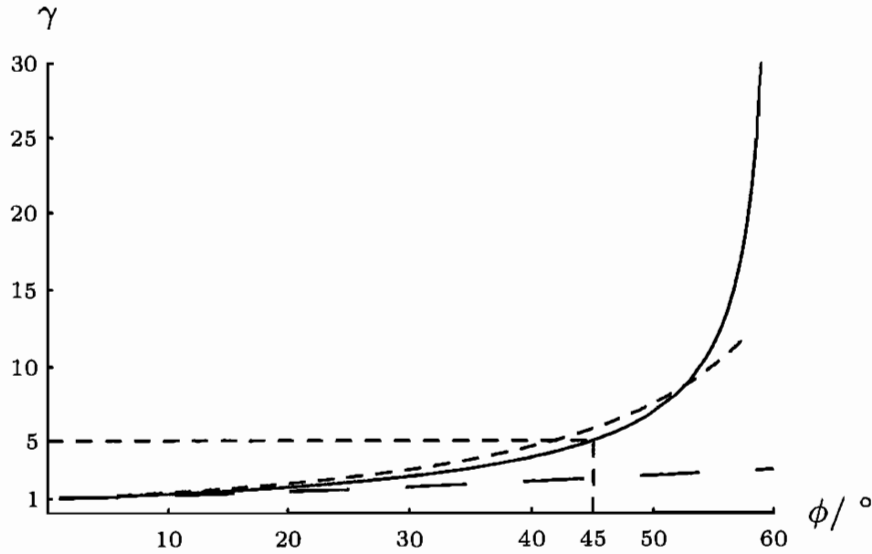


Abbildung 4.10: — γ nach Gleichung (4.17), --- γ_{MC} nach Gleichung (3.10) und - - γ_{DP} nach Gleichung (3.15).

Mit Gleichung (4.19) ermittelt sich Gleichung (4.17) zu:

$$k_M = \frac{I_1 I_2}{I_3} = \frac{27(3 - \sin^2(\phi))}{9} \left(\cos^2(\phi) - \sqrt{\frac{4}{27}} \sin^3(\phi) \right)^{-1}. \quad (4.20)$$

Die Beziehung zwischen dem Lade Kriterium und dem Matsuoka-Nakai Kriterium ergibt sich zu:

$$k_M = k_L \frac{3 - \sin^2(\phi)}{9}. \quad (4.21)$$

Also lassen sich die beiden Kriterien ineinander überführen.

Mit Gleichung (4.17) werden zwei Flächen beschrieben. Zur Veranschaulichung werden die Kurven in Abbildung 4.8 und Abbildung 4.9 für verschiedene Schnitte illustriert. Als Werte für die Darstellung wurden $\phi = 45^\circ$ und nach Gleichung (3.16) $c = f_t(\sqrt{6} + 1)/3$ gewählt. Die jeweilige Schnitte sind durch die strichpunktierete Linie markiert. Zusätzlich wurde gestrichelt das Drucker-Prager Kriterium nach Gleichung (3.14) mit den gleichen Parametern und $J_2 = 0$ eingezeichnet. Wie in Abbildung 4.8 deutlich wird, ist der Verlauf in hydrostatischer Richtung linear. Das Minuszeichen in Gleichung (4.17) stellt die äußere umschreibende Lösung dar, folglich definiert das Pluszeichen die innere Lösung.

Es zeigt sich, dass die Form in der π -Ebene vom Winkel ϕ abhängt. In Abbildung 4.10 ist das Verhältnis γ für veränderliche Winkel ϕ nach Gleichung (4.17) dargestellt. Ebenfalls sind γ_{MC} des Mohr-Coulomb Kriteriums und mit γ_{DP} des Drucker-Prager

Kriteriums eingezeichnet. Alle Kriterien streben für verschwindendes ϕ gegen eins. Das Mohr-Coulomb Kriterium hat nach Gleichung (3.10) einen Pol bei $\phi = 90^\circ$, während für das vorgeschlagene Kriterium schon bei $\phi = 60^\circ$ ein Pol entsteht. Für diesen Wert wird die äußere Einhüllende in der π -Ebene ein gleichseitiges Dreieck.

Das neu entwickelte Festigkeitskriterium schließt auch zwei populäre Grenzfälle mit ein. Für $\phi \rightarrow 0^\circ$ und

$$c \rightarrow \frac{c_0}{\sin(\phi)} \quad (4.22)$$

vereinfacht sich Gleichung (4.15) zu $J_2 = -c_0^2$ und Gleichung (4.17) zu:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left(\frac{I_1}{3}\right)^3 \\ \Rightarrow I_3 &= \left(\sigma_1 - \frac{c_0}{\sin(\phi)}\right) \left(\sigma_2 - \frac{c_0}{\sin(\phi)}\right) \left(\sigma_3 - \frac{c_0}{\sin(\phi)}\right) \\ &= \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \frac{3c_0}{\sin(\phi)}}{3}\right)^3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da c gegen Unendlich strebt, können die Spannungen in Gleichung (4.23) gegenüber c vernachlässigt werden, so dass Gleichung (4.23) immer erfüllt wird. Deshalb gilt nur noch $J_2 = -c_0^2$, also das von-Mises Kriterium nach Gleichung (3.17).

Für den zweiten Grenzfall mit $\phi = 60^\circ$ und $c = f_t$ vereinfacht sich Gleichung (4.17) zu:

$$I_3 = (\sigma_1 - f_t)(\sigma_2 - f_t)(\sigma_3 - f_t) = 0. \quad (4.24)$$

Dies ist eine alternative Darstellung des Rankine Kriteriums nach Gleichung (3.13), da zusätzlich die Forderung $I_1 < 3c$ erfüllt sein muss. Hier zeigt sich, das J_2 im Gegensatz zum von-Mises Kriterium jeden Wert in Abhängigkeit von I_1 annehmen kann.

4.3.3 Erweiterungen

Es hat sich gezeigt, dass das bisherige Vorgehen nützliche Ergebnisse liefert. Demnach ist es sinnvoll, die Theorie so zu erweitern, dass die bisherigen Ergebnisse weiterhin als Spezialfall bestehen bleiben. Eine Erweiterung indes ist unabdingbar, da von Gesteinen bekannt ist, dass der Verlauf ihrer Festigkeitswerte im axialsymmetrischen Spannungszustand nicht wie in Abbildung 4.8 linear, sondern eher gekrümmt ist [63].

Deswegen wird folgende Erweiterung der Gleichung (4.15) vorgeschlagen:

$$J_2 = - \left(f(I_1) \sin(\phi) \frac{I_1}{3} \right)^2. \quad (4.25)$$

An die Funktion $f(I_1)$ werden folgende Anforderungen gestellt: Wenn das Rankine Kriterium nach Gleichung (4.24) weiterhin mit $\phi = 60^\circ$ eine Grenze des erweiterten Kriteriums sein soll, muss $f(I_1) \leq 1$ gelten. Der Grenzwert $\lim_{I_1 \rightarrow \infty} f(I_1)$ existiert und ist immer größer oder gleich Null. Die Funktion muss stetig und differenzierbar sein.

Eine Funktion, die all dies erfüllt, ist:

$$f(I_1) = \frac{1-b}{1 + \left(\frac{I_1}{d}\right)^2} + b \quad \text{mit} \quad 0 \geq b \geq 1. \quad (4.26)$$

Ihre wesentlichen Merkmale sind, dass sie für $b = 1$ die komplette lineare Theorie enthält und dass sie immer für $I_1 = 0$ Eins wird. Ihr Grenzwert für große I_1 ist definiert und gleich b . Die Gleichung (4.26) ist in Abbildung 4.11 illustriert. Ihre Wendestelle liegt bei $I_1 = d/\sqrt{3}$.

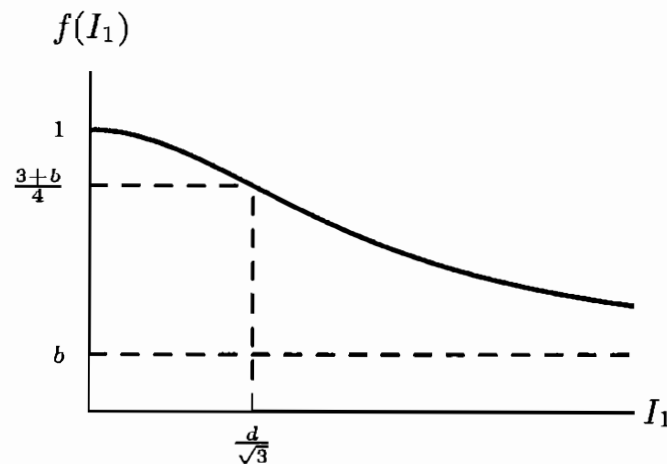


Abbildung 4.11: Die Funktion $f(I_1)$ nach Gleichung (4.26) .

Ein weiterer großer Vorteil ist, dass mehrere Funktionen dieser Art multiplikativ *in Reihe geschaltet* werden können, zum Beispiel zu $f_1(I_1)f_2(I_1)\sin(\phi)$. Die Funktion $f(I_1)$ lässt sich zusätzlich gut mit dem Mohr-Coulomb Kriterium nach Gleichung (3.9) verwenden. Sie kann jedoch nicht dessen Grundproblem, die nicht differenzierbaren Ecken beseitigen. In den triaxialen Ebenen sind die Ergebnisse gleichwertig zum vorgeschlagenen Kriterium.

4.3.4 Grenzen

Wie schon erwähnt, geht die Form der äußeren Grenzen der Gleichung (4.16) in der π -Ebene von einem Kreis für $\phi = 0^\circ$ zu einem gleichschenkligen Dreieck für $\phi = 60^\circ$ über. Für Winkel größer 60° ist die Form nicht mehr konvex. Also bildet $\phi = 60^\circ$ die obere Grenze der Gültigkeit dieser Beschreibung. Größere Winkel führen zu dem physikalisch nicht sinnvollen Ergebnis, dass die Zugfestigkeit durch steigenden Seitendruck zunimmt. Die Einschränkung auf Werte $I_1 < 3c$ bewirkt, dass keine zweite durch den Ursprung gespiegelte Lösung entsteht. Diese mathematisch zwar vorhandene Lösung ist ebenfalls physikalisch nicht sinnvoll. Die gespiegelte Lösung würde die Erhöhung der Zugfestigkeit durch steigende Zugspannungen entlang der Seiten vorhersagen.

Dennoch kann es am Nullpunkt im Spannungsraum zu Problemen kommen, die im Folgenden erläutert werden. $J_2(I_1)$ ist stets eine quadratische Funktion der Hauptspannungen. Wird diese in die Cardano'sche Formel in Gleichung (4.12) eingesetzt, ergibt sich eine Funktion dritter Ordnung. Das sich dadurch ergebende Problem wird für ein einfaches Beispiel demonstriert.

Die Bedingung $J_2 = 0$ wird für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ erfüllt. Mit $J_2 = 0$ folgt für Gleichung (4.12):

$$I_3 - \frac{1}{27}I_1^3 = 0. \quad (4.27)$$

Eine Auswertung dieser Formel führt zum Beispiel für $\sigma_2 = \sigma_3$ zu zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 \\ \sigma_1 &= -8\sigma_2. \end{aligned}$$

Die zweite Lösung erfüllt nicht $J_2 = 0$, dafür aber Gleichung (4.27). Die Probleme der Eindeutigkeit sind also um den Nullpunkt zu erwarten. Die physikalisch nicht sinnvollen Lösungen werden nicht im siebten Oktanten auftreten, so dass sie einfach erkannt werden können. Es ist folglich dafür Sorge zu tragen, dass der Nullpunkt von $J_2(I_1)$ mit dem Nullpunkt des Spannungsraums zusammenfällt. Dies ist erfüllt, wenn der Parameter c als Translation des gesamten Spannungsraums, also auch aller Invarianten, benutzt wird.

Die einzige Formulierung, die dann noch zu Schwierigkeiten um den Nullpunkt führt, ist $J_2 = \text{konst.}$ Dieses kann formal verhindert werden, indem der Parameter $c = \frac{c_0}{\sin(\phi)}$ gewählt wird. Er verursacht, dass die Schnittebene I_1 unendlich weit vom Nullpunkt entfernt ist und Gleichung (4.23) erfüllt ist.

4.3.5 Eine makroskopische Interpretation

Wie in Kapitel 5 gezeigt wird, erzielt die vorgestellte Methode sehr gute Ergebnisse. Der nun folgende Abschnitt soll klären, ob das vorgestellte Festigkeitskriterium physikalisch sinnvoll interpretierbar ist. Eine Begründung, die auf einer geschlossenen Theorie basiert, wurde nicht gefunden. Dennoch erscheint der aufgeführte Erklärungsansatz plausibel.

Die Konstanten G' und K' ermöglichen eine Verbindung zwischen dem Hauptspannungsraum und dem Hauptverzerrungsraum, da die isotrope lineare Elastizität mit koaxialen Basen nach Gleichung (2.58) durch drei skalare Gleichungen dargestellt werden kann. Aus Gleichung (2.57) folgt:

$$I_1\sigma = K' I_1\varepsilon. \quad (4.28)$$

Aus Gleichung (2.59) wird mit Gleichung (2.16)

$$J_2\sigma = G'^2 J_2\varepsilon. \quad (4.29)$$

Weiter ergibt sich mit Gleichung (2.17):

$$J_3\sigma = G'^3 J_3\varepsilon. \quad (4.30)$$

Das Ergebnis ist mit Hilfe der mit den Haigh-Weestergard Koordinaten aus Anhang A geometrisch interpretierbar. Die Konstante G' muss in Gleichung (4.29) und Gleichung (4.30) gleich sein, damit die Lode Winkel θ_σ und θ_ε identisch sind. Folglich lassen sich die Gleichungen (4.28) bis (4.30) vereinfacht schreiben:

$$\xi_\sigma = K' \xi_\varepsilon \quad (4.31)$$

$$\rho_\sigma = G' \rho_\varepsilon \quad (4.32)$$

$$\theta_\sigma = \theta_\varepsilon. \quad (4.33)$$

Für das Skalarprodukt nach Gleichung (2.51) folgt:

$$W = \xi_\sigma \xi_\varepsilon + \rho_\sigma \rho_\varepsilon. \quad (4.34)$$

Gleichung (4.34) gilt auch, wenn G' und K' Funktionen von I_1 , J_2 oder J_3 sind also für nichtlineare Elastizität in Form von Gleichung (2.63) mit $\varphi_3 = 0$. Für lineare Elastizität folgt aus Gleichung (4.34):

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2} K' \xi_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} G' \rho_\varepsilon^2. \quad (4.35)$$

Es ist ersichtlich, dass für konstantes $I_{1\epsilon}$ bei gleicher Energie auch $J_{2\epsilon}$ konstant sein muss. Also liegen die Punkte mit gleicher Energie im Hauptdehnungsraum in der π -Ebene auf einem Kreis. Nach Gleichung (2.32) unterscheiden sich diese Punkte durch unterschiedliche Werte von $J_{3\epsilon}$ nur in ihrem Volumen. Folglich kann ein linear elastisches Material bei gleicher Energie sein relatives Volumen um $\Delta I_{3\epsilon} = I_{3\epsilon o} - I_{3\epsilon u}$ ändern.

Wenn in einem Material mikroskopische Reibmechanismen vorhanden sind, begrenzen diese lokal die Speicherung von Energie. Wiebols nahm von der räumlich umgelagerten Energie an, dass sie zum Versagen der gesamten Struktur eine Schwelle überschreitet [59]. Die vorgestellte Methode geht davon aus, dass diese Umlagerung mit der Größe $\Delta I_{3\sigma}$ verbunden ist. Da aber gerade nach Überschreiten der elastischen Grenze die Eindeutigkeit der Abbildung zwischen Spannungen und Dehnungen durch einsetzende plastische Prozesse verloren geht, ist es nicht einfach möglich $\Delta I_{3\sigma}$ mit $\Delta I_{3\epsilon}$ zu koppeln.

Es bleibt daher eine Spekulation, aber es ist generell ratsam eine Verbindung zwischen Volumen und Energie zu untersuchen. Zum Beispiel können dilatante Prozesse eine interessante Wirkung auf die an einer Probe geleistete Arbeit haben. Da die Aufweitung der Probe dem Seitendruck entgegen wirkt, kann der Körper so überschüssige Energie abführen. Die sehr kleinen elastischen Volumenänderungen würden von einem derartigen Effekt verdeckt.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses, transfers, and adjustments. The document provides a detailed explanation of how to categorize these transactions and how to use a double-entry system to ensure that the debits equal the credits.

Next, the document covers the process of reconciling bank statements. It explains that regular reconciliation is essential to identify any discrepancies between the company's records and the bank's records. This process involves comparing the company's cash account with the bank statement, identifying any outstanding checks or deposits in transit, and adjusting the company's records accordingly. The document provides a step-by-step guide to performing a bank reconciliation, including the use of a reconciliation form.

The third section of the document discusses the preparation of financial statements. It explains that the financial statements are a summary of the company's financial performance over a specific period. The four main financial statements are the balance sheet, the income statement, the cash flow statement, and the statement of equity. The document provides a detailed explanation of how to prepare each of these statements, including the formulas used to calculate the various components. It also discusses the importance of providing a clear and concise explanation of the company's financial performance to the management and the board of directors.

Finally, the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses, transfers, and adjustments. The document provides a detailed explanation of how to categorize these transactions and how to use a double-entry system to ensure that the debits equal the credits.

5 Ergebnisse

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das neu entwickelte Festigkeitskriterium mit einer Vielzahl von experimentellen Ergebnissen verschiedenster Materialien verglichen. Es wird gezeigt, wie sich die angepassten Parametern zwischen den Stoffen unterscheiden. Weiterhin wird demonstriert, wie das Festigkeitskriterium mit einfachen Erweiterungen besondere Phänomene berücksichtigen kann. Insgesamt werden dazu drei verschiedene Kurven verwendet:

Die Kurven der Eingehüllten

Wenn Messwerte für das Einsetzen der Dilatanz dargestellt sind, wird zusätzlich zur Festigkeitskurve die Eingehüllte mit den selben Festigkeitsparametern eingezeichnet. Die Kurve der Eingehüllten ist immer grob gestrichelt dargestellt. Als Gleichung der Eingehüllten wird nach Kapitel 4.3.3 gewählt:

$$J_2(I_1) = - \left(\frac{1-b}{1+\frac{I_1^2}{d^2}} + b \right)^2 \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^2. \quad (5.1)$$

Die Kurven des Festigkeitskriteriums

Das Festigkeitskriterium ermittelt sich mit Hilfe der Eingehüllten aus Gleichung (5.1). Sie wird eingesetzt in:

$$\left(I_3 - \left(J_2(I_1) + \frac{I_1^2}{3} \right) \frac{I_1}{3} + \frac{2}{27} I_1^3 \right) - \sqrt{-\frac{4}{27} J_2^3(I_1)} = 0. \quad (5.2)$$

Das Ergebnis von Gleichung (5.2) wird als Festigkeitskriterium interpretiert. Die Kurven des Festigkeitskriteriums sind fett durchgezogen oder fein gestrichelt dargestellt. Ist ein alternatives Festigkeitskriterium angegeben, wird dessen Kurve fein gestrichelt gezeichnet.

Die Parameter des Festigkeitskriteriums lassen sich in der triaxialen Hauptspannungsebene deuten. Sie beeinflussen die Festigkeitskurve wie schematisch in Abbildung 5.1 skizziert. Der Translationsparameter c verschiebt den Nullpunkt des Kriteriums. Der Reibwinkel ϕ beeinflusst die Steigung am Nullpunkt des Kriteriums. So ist zum Beispiel die Tangente der Festigkeitskurve im Nullpunkt vertikal, wenn $\phi = 60^\circ$ ist. Gilt zusätzlich, dass $b = 1$ ist, dann ist das Kriterium identisch mit einem Rankine Kriterium. Der Parameter b steuert demnach den Wert der Steigungsabnahme

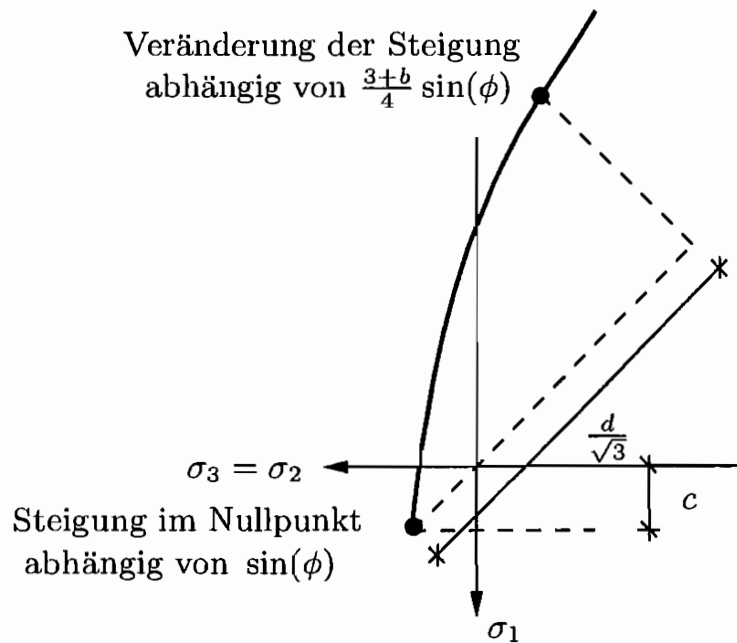


Abbildung 5.1: Schematische Bedeutung der vier Parameter des Festigkeitskriteriums in der triaxialen Ebene.

und d bestimmt den zugehörigen hydrostatischen Druck. Die Parameter ϕ , b und d sollen im Weiteren als interne Reibparameter bezeichnet werden.

Die Kurven der internen Reibparameter

Eine zweite verwendete Art der Darstellung ist die Gegenüberstellung der internen Reibparameter und der Reibfestigkeiten. Die Reibfestigkeiten sind dabei die gemessenen maximalen Schubspannungen entlang einer Fuge, die die Probe vollständig durchtrennt. Unter den Annahmen, dass $\sigma_n = \frac{I_1}{3}$ und $\tau = \sqrt{-J_2}$ ist, wird die Gleichung (5.1) der Eingehüllten zu:

$$\tau(\sigma_n) = \left(\frac{1-b}{1 + \frac{9\sigma_n^2}{d^2}} + b \right) \sin(\phi) \sigma_n = \mu(\sigma_n) \sigma_n. \quad (5.3)$$

Die getroffenen Annahmen gründen sich auf Überlegungen, die in Kapitel 2.2.1.2 gemacht wurden und auf das Vorgehen von Rudnicki und Rice in [43]. Sie führen in ihrem Artikel die beiden Invarianten I_1 und J_2 als allgemeine Normal- und Schubspannung ein. In den Reibfestigkeitsdarstellungen wird zusätzlich immer die Funktion von Byerlee nach Gleichung (3.27) fein gestrichelt eingezeichnet. Die Kurven der internen Reibparameter werden mit den zuvor bestimmten Parametern des Festigkeitskriteriums ermittelt.

Die Anpassung der Parameter

Alle Anpassungen der Festigkeitskurven wurden durch manuelle Steuerung der Para-

meter erzielt. Bei umfangreichen Datensätzen erfolgte die Anpassung ausschließlich in der triaxialen Ebene. Um sie zu kennzeichnen, wird sie immer hellgrau hinterlegt. In den anderen Ebenen sind die Festigkeitskurven mit den in der triaxialen Ebene ermittelten Parametern zusammen mit echten triaxialen Daten dargestellt. Diese Darstellungen erlauben es direkt die Güte der Vorhersagen des Festigkeitskriteriums für echte triaxiale Spannungszustände abzuschätzen.

Die anderen Anpassungen erfolgten im Unterschied dazu unter Beachtung aller Spannungsdarstellungen.

Alle durchgezogenen Festigkeitskriteriumskurven im Hauptspannungsraum verwenden maximal **vier** Parameter. Zur Anpassung der Messungen unter erhöhter Temperatur wird ein Parameter mehr benötigt. Die Anzahl der Parameter verringert sich, wenn $b = 1$ ist. Für diesen Fall ist das Kriterium nur noch von zwei Parametern abhängig.

Bei der Auswertung wurde versucht den Parameter b möglichst wenig zu variieren. Es hat sich herausgestellt, dass $b = 0,6$ ein Wert ist, mit dem die meisten Gesteine gut angepasst werden können.

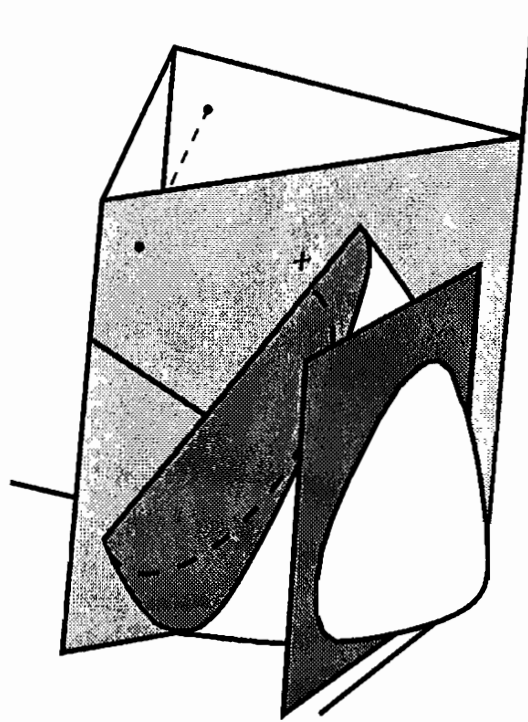


Abbildung 5.2: Schnitte im Hauptspannungsraum.

Die Darstellung

Da eine räumliche Darstellung der Daten wenig übersichtlich ist, wird der Vergleich im Hauptspannungsraum anhand dreier Schnitte erfolgen. In Abbildung 5.2 sind diese illustriert. Die hellgrau hinterlegte triaxiale Ebene wird zur Darstellung immer

in die Ebene $\sigma_3 = 0$ projiziert, wie exemplarisch an dem rund dargestellten Messpunkt des Versagens verdeutlicht. Zusätzlich werden in die Festigkeitsdarstellungen die Messpunkte eingezeichnet, an denen die Volumenänderung der Probe den linearen Bereich verlässt, oder anders ausgedrückt Dilatanz einsetzt. Sie werden immer in Kreuzform dargestellt.

Die mittelgraue Ebene ist die π -Ebene, für die I_1 konstant ist. In ihr ist grob gestrichelt die Eingehüllte $J_2(I_1)$ eingezeichnet. In der dunkelgrauen Ebene liegt ein konstantes Spannungsniveau einer der drei Hauptspannungen vor. Sind Intervalle eingezeichnet, so handelt es sich bei dem eingezeichneten Bereich um den Mittelwert mit der einfachen Standardabweichung. Der Stichprobenumfang ist im Text angegeben. Die angegebene Porosität ist definiert als das Verhältnis des Porenvolumens zum Gesamtvolumen. Alle Spannungsangaben erfolgen in MPa.

Mit Rücksicht auf eine übersichtliche Darstellung wurde davon abgesehen, den Spannungsursprung zu beschriften. Der Schnittpunkt der Koordinatenachsen ist immer der Spannungsnullpunkt.

5.2 Westerly Granit

Der Westerly Granit ist einer der am umfangreichsten untersuchten Magmatite. Als Gestein mit mittlerer bis feiner Körnung weist er eine geringe Porosität, das heißt kleiner als 0,01, fast vollkommene Isotropie und eine hohe Festigkeit auf. Er wird häufig exemplarisch für die Gesteine der kontinentalen Kruste untersucht.

Die Abbildung 5.3 gibt die gemessenen Festigkeiten für den Granit in verschiedenen Ebenen im Hauptspannungsraum wieder. Die hellgrau hinterlegte Ebene ist die triaxiale Ebene. In ihr sind die Messergebnisse eingetragen, für die die Parameter angepasst wurden. Es ergaben sich die in der Bildunterschrift aufgeführten Parameter. Die Anpassung erfolgte mit Hilfe der Gleichungen (5.1) und (5.2). Alle weiteren Kurven sind mit den selben Parametern ermittelt. Die Prognosen geben die gemessenen Werte der unterschiedlichen Spannungsniveaus gut wieder. Für die Ebene $\sigma_3 = -60$ MPa sind zusätzlich Werte für das Einsetzen der Dilatanz eingezeichnet. Deswegen ist in dieser Ebene die Eingehüllte nach Gleichung (5.1) mit den Parametern der Bildunterschrift grob gestrichelt dargestellt.

In Abbildung 5.4 wird das Ergebnis einer triaxialen Festigkeitsmessung für hohe Seitendrucke wiedergegeben. In Abbildung 5.5 sind Reibfestigkeiten für verschiedene Normalspannungen eingetragen. Sie sind die maximalen Schubspannungen, die für eine präexistente Fuge ermittelt werden. In diesem Fall war die Fugenoberfläche poliert. Die fein gestrichelte Kurve gibt die Funktion von Byerlee nach Gleichung (3.27) wieder. Mit den in der Einleitung erwähnten Annahmen lässt sich für die zuvor angepassten Parameter mit Gleichung (5.3) die durchgezogene Kurve der internen Reibparameter ermitteln.

Die Ergebnisse einer triaxialen Kompressions- sowie Extensionsmessung sind in Abbildung 5.6 eingetragen. Für die triaxiale Kompression zeigt sich die gewohnte Übereinstimmung, aber in triaxialer Extension liegen die Werte unter der Kurve des Festigkeitskriteriums. Die Gründe hierfür sind bislang unbekannt.

In Abbildung 5.7 werden die Festigkeiten in einem Zugspannungsregime untersucht. Dieser Bereich geringer hydrostatischer Drücke wird hauptsächlich durch schlagartig eintretende Versagensprozesse bestimmt. Das Festigkeitskriterium kann hier keine guten Ergebnisse liefern, da sein Parametersatz für höhere hydrostatische Drücke gefunden wurde. Es ist damit auf einen Bereich angepasst, in dem die mikromechanischen Versagensprozesse durch Reibung kontrolliert werden.

Eine weitere Messung ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Zusätzlich zu den Festigkeiten ist hier das Einsetzen einer nicht proportionalen Volumenänderung für eine schnelle und für eine langsame Belastung vermerkt. Die gestrichelte Linie gibt die Eingehüllte aus Gleichung (5.1) wieder.

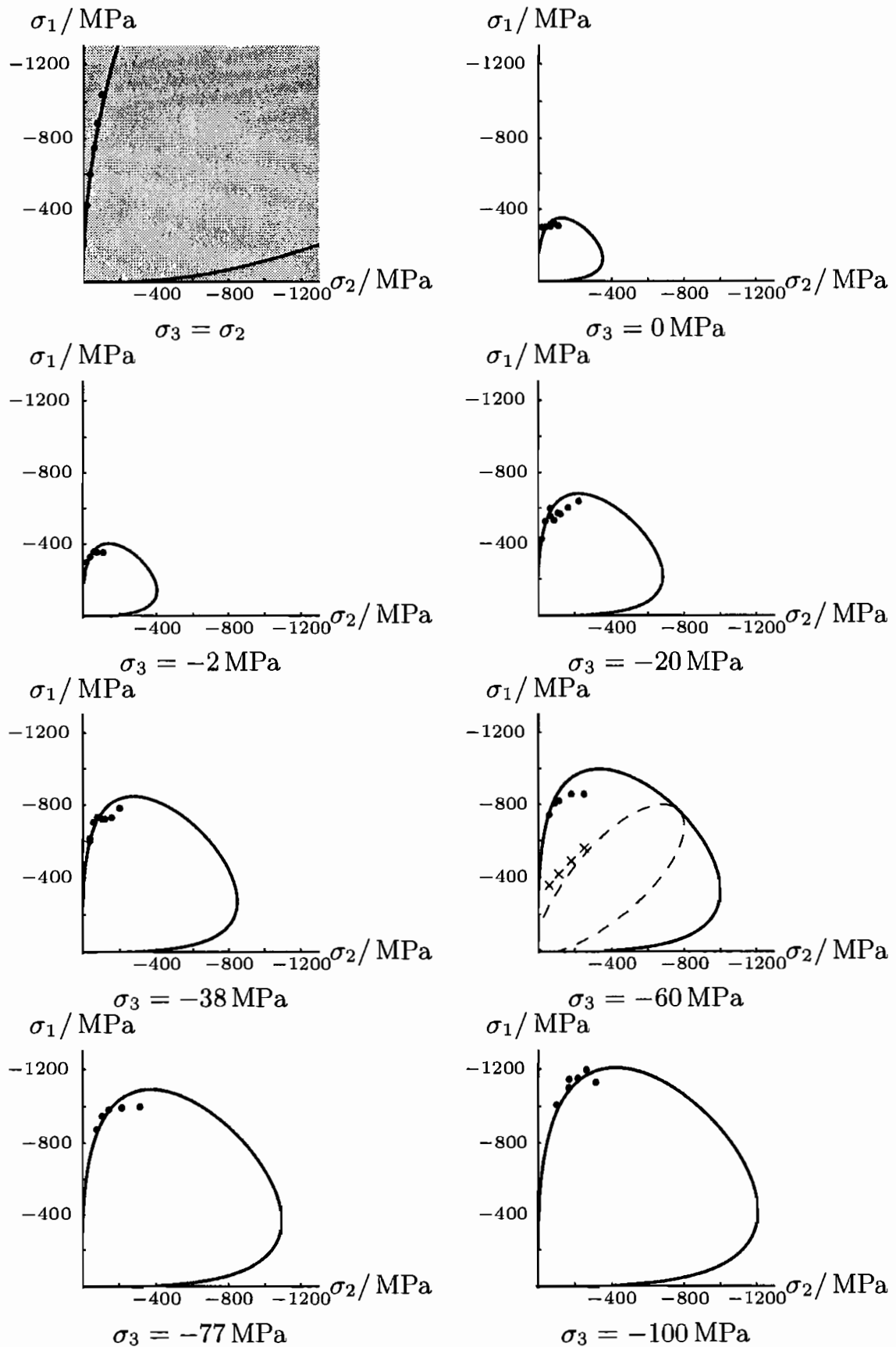


Abbildung 5.3: Festigkeiten von Westerly Granit aus [70] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa und $d = 850\sqrt{10}$ MPa.

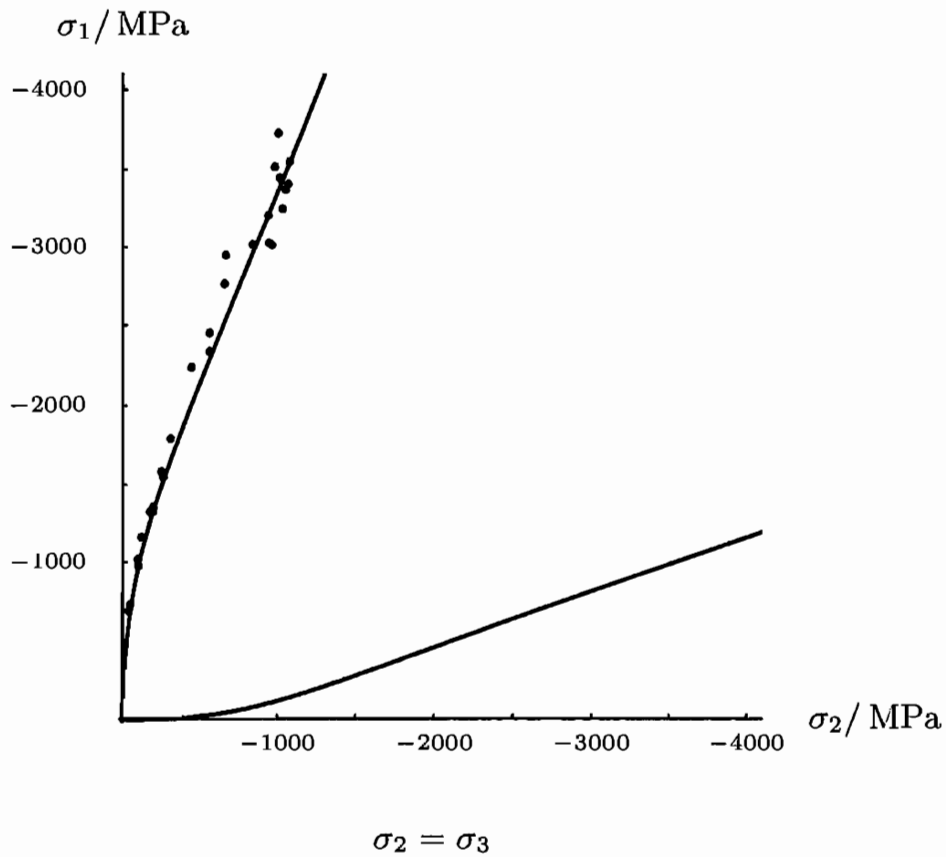


Abbildung 5.4: Festigkeiten von Westerly Granit aus [63] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa und $d = 850\sqrt{10}$ MPa.

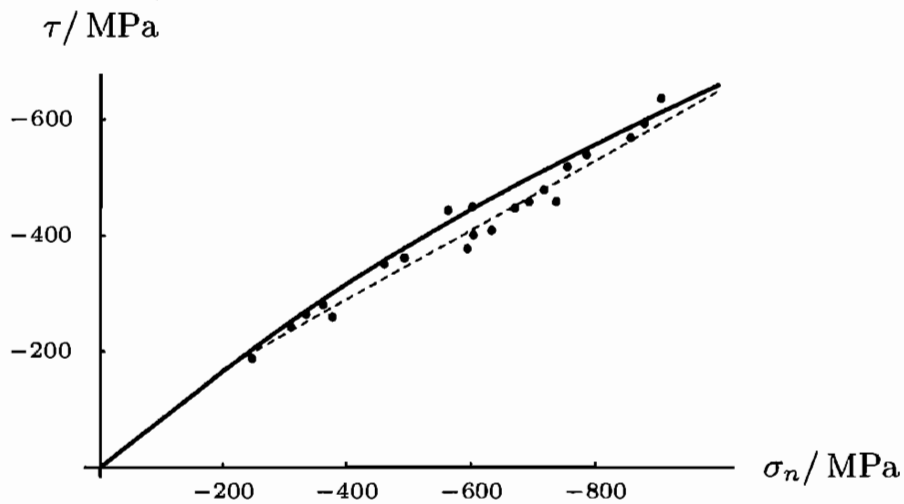


Abbildung 5.5: Reibfestigkeiten von Westerly Granit aus [63] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$ und $d = 850\sqrt{10}$ MPa nach Gleichung (5.3).

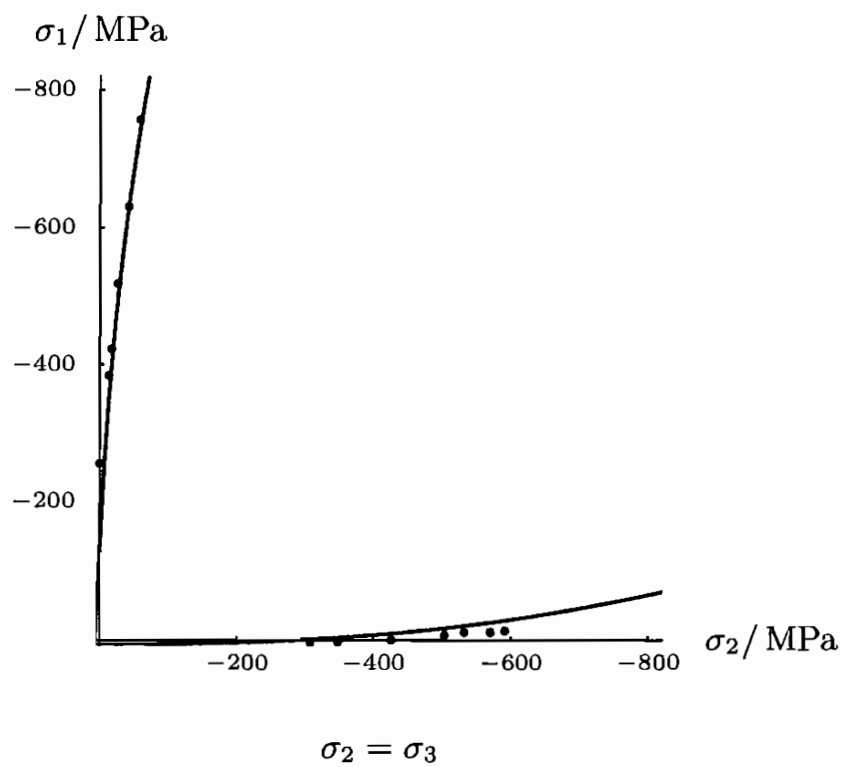


Abbildung 5.6: Festigkeiten von Westerly Granit aus [71] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa und $d = 850\sqrt{10}$ MPa.

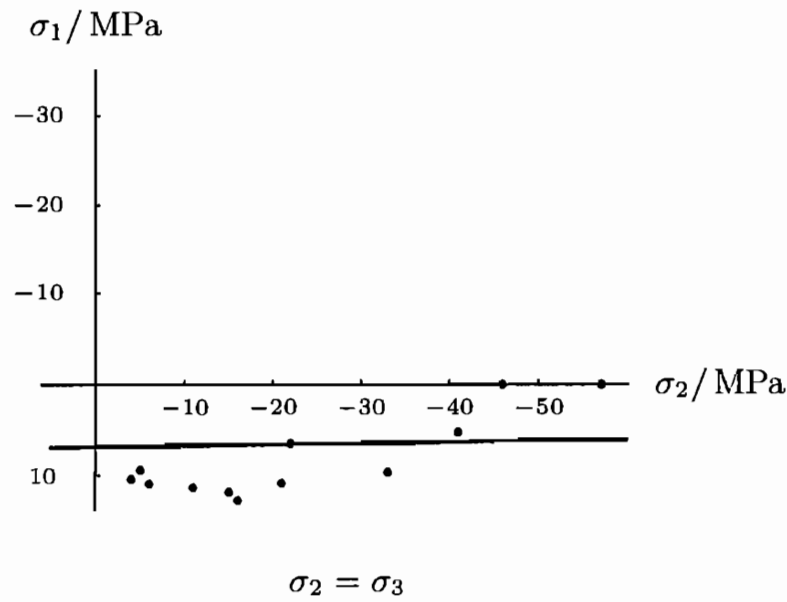


Abbildung 5.7: Festigkeiten von Westerly Granit aus [72] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 850\sqrt{10} \text{ MPa}$.

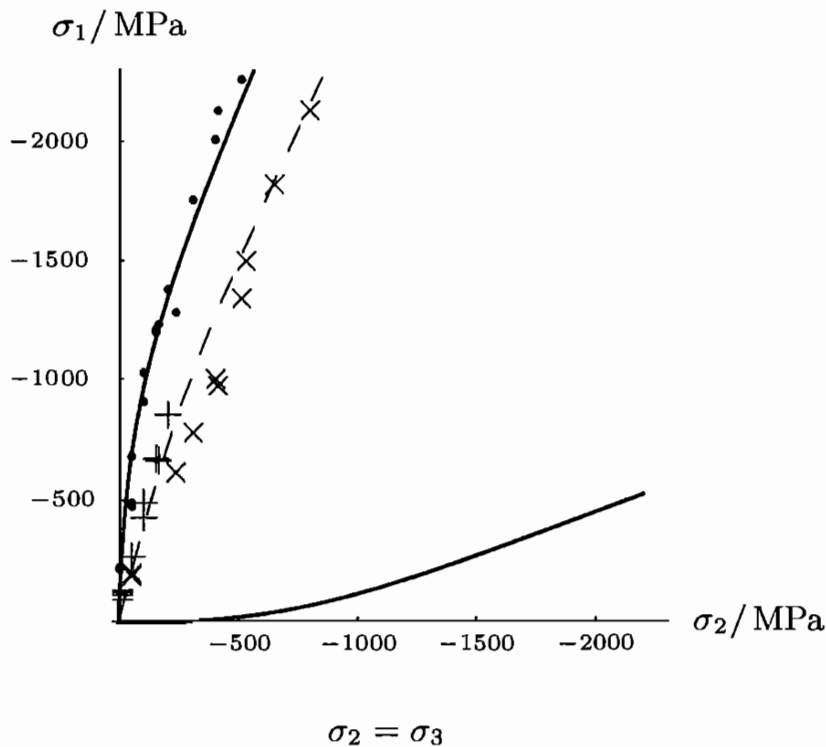


Abbildung 5.8: Festigkeiten von Westerly Granit und einsetzende Dilatanz für eine schnelle Belastung + und eine langsame Belastung x aus [73] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 850\sqrt{10} \text{ MPa}$.

5.3 Sedimente

5.3.1 Klastische Sedimente

Wie bereits in Kapitel 4.3.2 theoretisch gezeigt, lässt sich aus der Gleichung

$$J_2 = - \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^2 \quad (5.4)$$

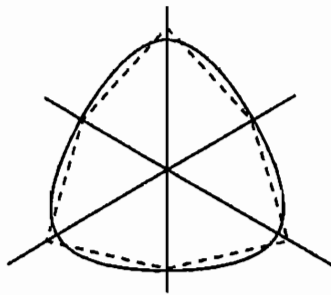
mit Gleichung (5.2) das Matsuoka-Nakai und Lade Kriterium errechnen. Für $b = 1$ folgt Gleichung (5.4) aus Gleichung (5.1).

Um zu demonstrieren wie ähnlich der Reibwinkel ϕ aus Gleichung (5.4) dem Reibwinkel des Mohr-Coulomb Kriteriums ϕ_{MC} aus Gleichung (3.9) ist, werden in Abbildung 5.9 die Darstellungen von Lade auf der rechten mit den theoretischen Vorhersagen auf der linken Seite verglichen. Es war nicht zu bestimmen, in welcher π -Ebene die Werte von Lade gemessen wurden. Zum Vergleich ist das Mohr-Coulomb Kriterium für die angegebenen Winkel auf beiden Seiten eingezeichnet. Die Abbildungen links und rechts sind auf dieselbe Größe skaliert worden. Die auf der linken Seite verwendeten Winkel nach Gleichung (5.4) sind identisch mit denen, die für das Mohr-Coulomb Kriterium verwendet wurden. Deswegen war keine Anpassung nötig. Ein qualitativer Vergleich zwischen dem Lade Kriterium und dem hergeleiteten Festigkeitskriterium ergibt eine sehr gute Übereinstimmung.

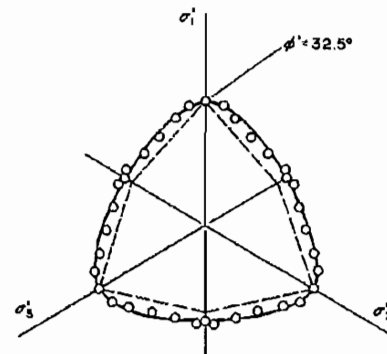
I_1 in MPa	ϕ_{MC} in °	Lade Parameter k_L	$\phi(k_L)$ nach Gl. (4.18) in °
0,23	30,6	42,4	33,2
0,37	28,4	39,8	31,1
0,48	27,4	38,6	30,1

Tabelle 5.1: Versuchsauswertung für einen Ton aus [74]. Alternativ nach Gleichung (3.9).

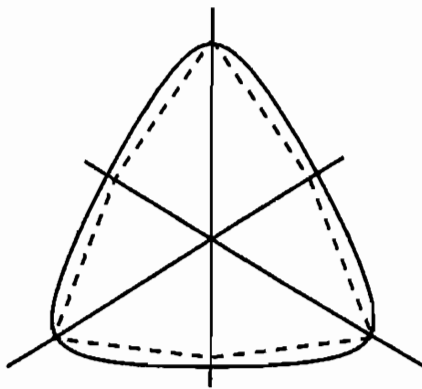
In Tabelle 5.1 ist die Versuchsauswertung für einen Ton aus [74] wiedergegeben. Die Versuche waren echte Triaxialversuche, die für verschiedene hydrostatische Drücke I_1 nach der ersten Spalte durchgeführt wurden. Die nächsten beiden Spalten sind die Ergebnisse einer im Artikel durchgeführten Anpassung. Die erste Spalte gibt den Mohr-Coulomb Reibwinkel nach Gleichung (3.9) und die zweite den Lade Parameter nach Gleichung (3.19) wieder. Aus k_L errechnet sich nach Gleichung (4.18) der Winkel ϕ in Spalte vier, der direkt mit dem Coulomb-Reibwinkel verglichen werden kann. Auch wenn der Wert der Winkel unterschiedlich ist, so sind die Abweichungen jedoch sehr gering. Daraus lässt sich schließen, dass der Mohr-Coulomb Reibwinkel gleich



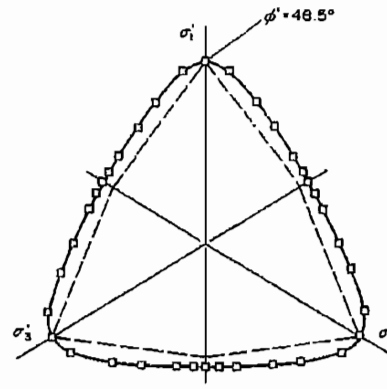
$$\phi = \phi_{MC} = 32,5^\circ.$$



Darstellung aus [52] für einen Kaolinitton.



$$\phi = \phi_{MC} = 48,5^\circ.$$



Darstellung aus [52] für Monterey Sand.

Abbildung 5.9: Schnitt in der π -Ebene für klastische Sedimente.

dem Winkel des hergeleiteten Festigkeitskriteriums angenommen werden kann. Dies sollte jedoch nur für $\phi \leq 50^\circ$ gelten. Die Ergebnisse in Tabelle 5.1 weisen zusätzlich auf eine leichte Abnahme des Reibwinkels mit steigender hydrostatischer Spannung hin.

5.3.2 Sandstein

Sand kann durch Kompaktion und Zementation in ein Sandstein verwandelt werden. Je nach Größe und Form des zu Grunde liegenden Sands und der Höhe des gesteinsbildenden Drucks weisen Sandsteine eine hohe Verschiedenartigkeit an Gefüge und Porosität auf.

Die Anpassung erfolgte mit Hilfe von Gleichung (5.1). Die angepassten Parameter sind in den Bildunterschriften angegeben. In Abbildung 5.10 sind die Werte von [75] für Shirahama Sandstein eingezeichnet. Auch hier bestätigt sich, dass mit den in der triaxialen Ebene bestimmten Parametern die echten triaxialen Messwerte gut vorhergesagt werden. Schon jetzt wird deutlich, dass der wesentliche Unterschied im Parametervergleich zwischen Granit und Sandstein die Größe von d ist. Da ϕ und d bei Sandstein kleiner sind als bei Granit, weist der Granit bei gleicher hydrostatischer Spannung immer eine höhere Festigkeit auf.

Leider war die Porosität dieses und der zwei folgenden Sandsteine nicht angegeben, aber die mittlere Korngröße bei Shirahama Sandstein könnte auf eine höhere Porosität als die des fein bis mittel gekörnten Horonai Sandstein in Abbildung 5.11 hinweisen. Der festeste Sandstein dieser Reihe ist der Izumi Sandstein in Abbildung 5.12. Die Anpassung gelingt allein durch Variation der Parameter ϕ und d .

Die Porosität des in Abbildung 5.13 dargestellten Sandsteins ist mit 0,03 sehr gering. Bei den von Null verschiedenen Spannungen für σ_3 liegen die Messpunkte näherungsweise auf horizontalen Linien. Dies würde für eine Beschreibung mehr ein Mohr-Coulomb Kriterium erfordern, aber dennoch liegt die Festigkeitskurve fast immer innerhalb der Standardabweichung. Die eingezeichneten Balken entsprechen der einfachen Standardabweichung, wobei im Durchschnitt sechs Messungen pro Punkt durchgeführt wurden. Ein Vergleich zu Granit ergibt für diesen Sandstein ebenfalls einen geringeren Wert für d . Der Reibwinkel ϕ ist bei beiden Gesteinen ungefähr gleich groß. Bei einem höheren hydrostatischen Druck ist die Festigkeit des Sandsteins geringer als die des Granits. Eine Ursache dafür kann in der höheren Porosität des Sandsteins liegen.

Ein biaxialer Versuch ist in Abbildung 5.14 abgebildet. Um den Einfluss der Parameter zu studieren, ist zusätzlich das Ergebnis eines alternativen Parametersatzes gestrichelt eingezeichnet. Sie soll verdeutlichen, dass die Kenntnis des Verhältnisses von Zug- zu Druckfestigkeit wichtig für die Auswertung ist. So ist die Zugfestigkeit für die gestrichelte Linie bei größerem Reibwinkel geringer. Um die gleiche einachsige Druckfestigkeit zu errechnen, muss d somit abnehmen. Die Porosität ist mit 0,27 sehr hoch und die Standardabweichungen beziehen sich auf vier Proben.

Ein weiterer Versuch ist in Abbildung 5.15 wiedergegeben, in dem die Messungen im Hauptspannungsraum mit Hilfe der Haigh-Weestergard Koordinaten nach Anhang A geregelt wurden. Erst wurde der Spannungslastpfad entlang einer hydrostatischen Last bis zu verschiedenen Werten von I_1 gewählt. Anschließend wurde mit

konstantem I_1 entlang der Winkel $\theta = 0^\circ, 7^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ und 60° bis zum Versagen bei ρ belastet. Die Messwerte werden in den π -Ebenen der unterschiedlichen hydrostatischen Drücke mit der Festigkeitskurve verglichen. Es zeigt sich, dass für geringe hydrostatische Drücke die Festigkeiten des Sandsteins nahezu auf einem gleichseitigen Dreieck liegen, also einer Form, die sich in der π -Ebene mit einem Rankine Kriterium ergeben würde. Deshalb ist der Reibwinkel ϕ nahe bei 60° .

Die Untersuchung der Sandsteine wird durch die Betrachtung des Berea Sandsteins mit einer Porosität 0,20 in Abbildung 5.16 abgeschlossen. Der ermittelte Parametersatz ist identisch mit dem des Shirahama Sandsteins. In Abbildung 5.17 werden die gemessenen Werte der Reibfestigkeit entlang einer unter 35° Neigung gesägten Fläche für verschiedene Normalspannungen gezeigt. Sie werden dem theoretischen Reibwiderstand aus Gleichung (5.3) gegenübergestellt. Wieder zeigt sich, dass die Reibparameter des Festigkeitskriteriums in der Lage sind die Reibfestigkeiten richtig wiederzugeben. Aber im Unterschied zum Granit ist die Funktion von Byerlee nach Gleichung (3.27) diesmal nicht in der Lage die Reibfestigkeiten richtig zu beschreiben.

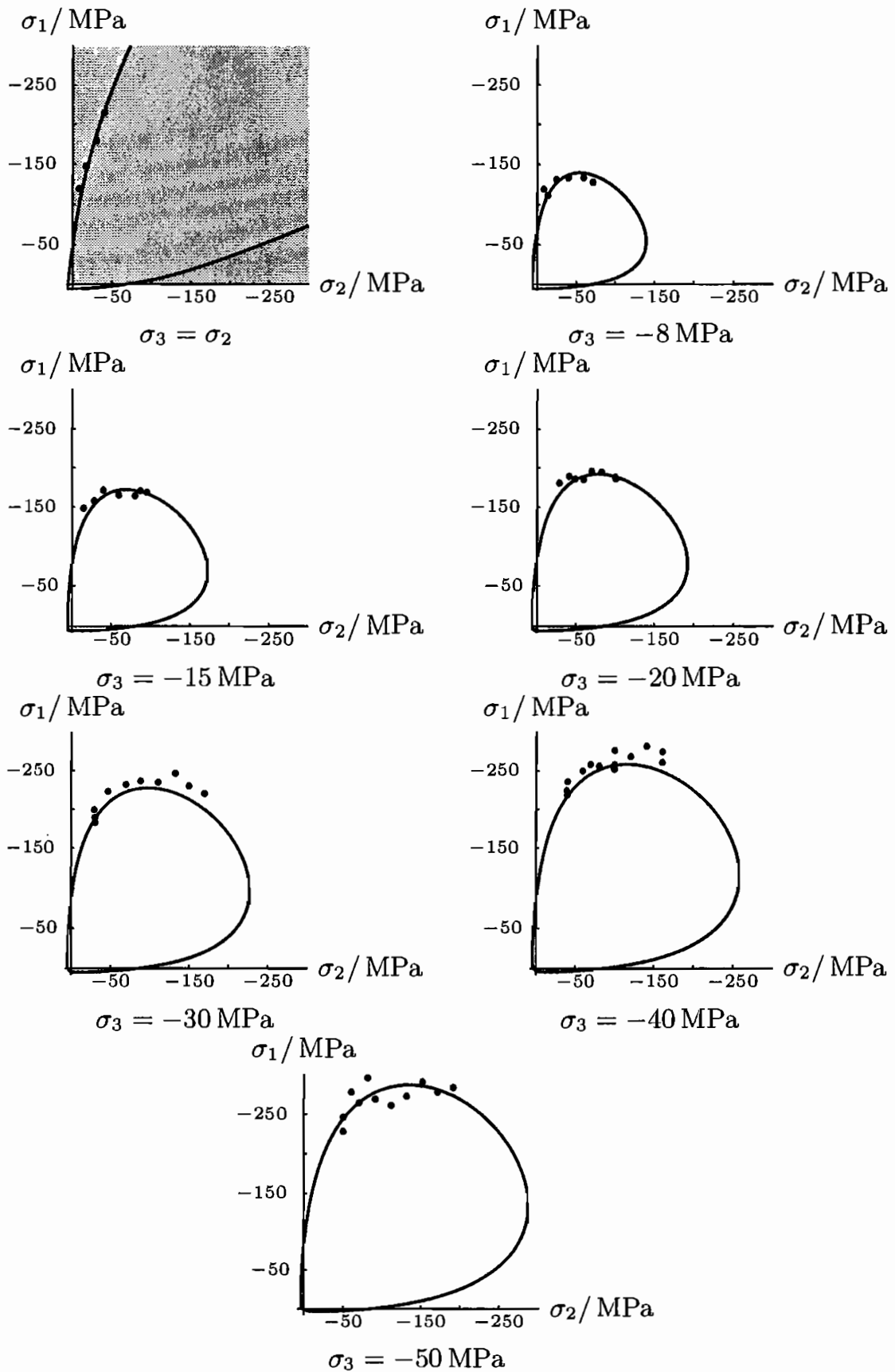


Abbildung 5.10: Festigkeiten von Shirahama Sandstein aus [75] mit $\phi = 52^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 140\sqrt{10} \text{ MPa}$.

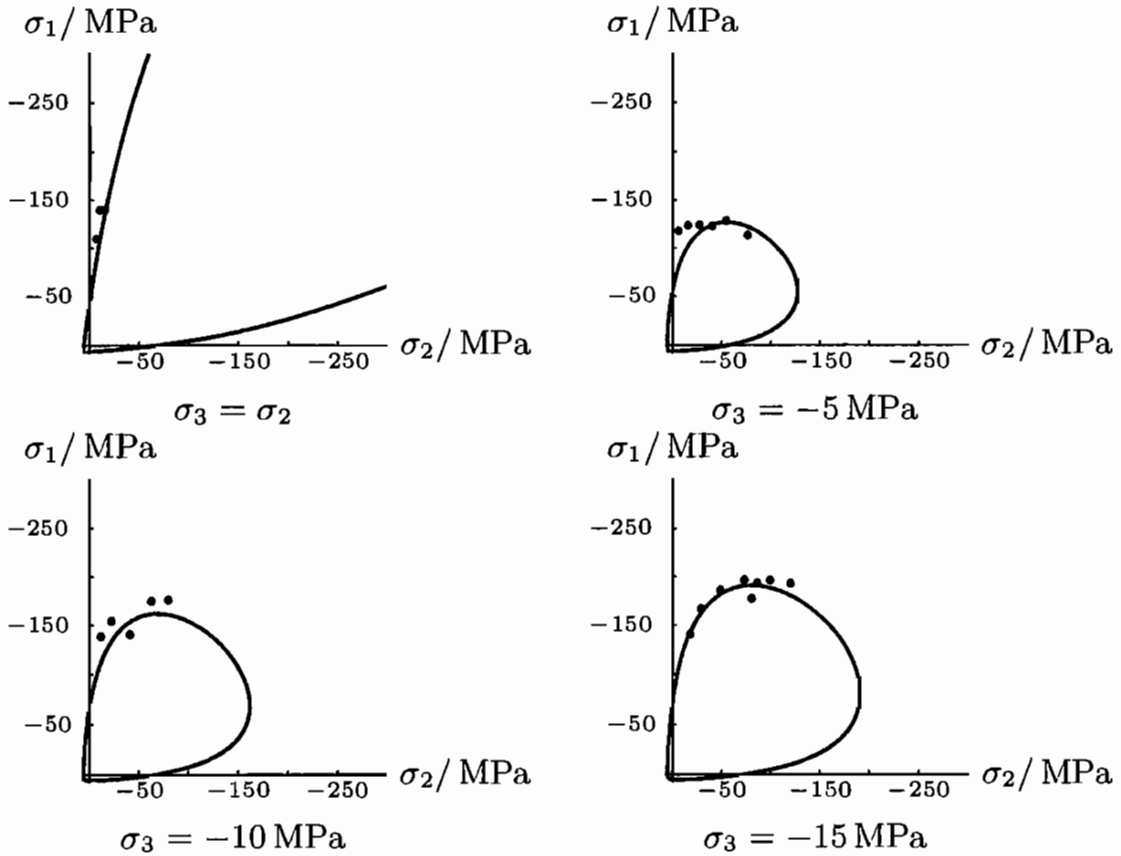


Abbildung 5.11: Festigkeiten von Horonai Sandstein HOSS-I aus [75] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 210\sqrt{10} \text{ MPa}$.

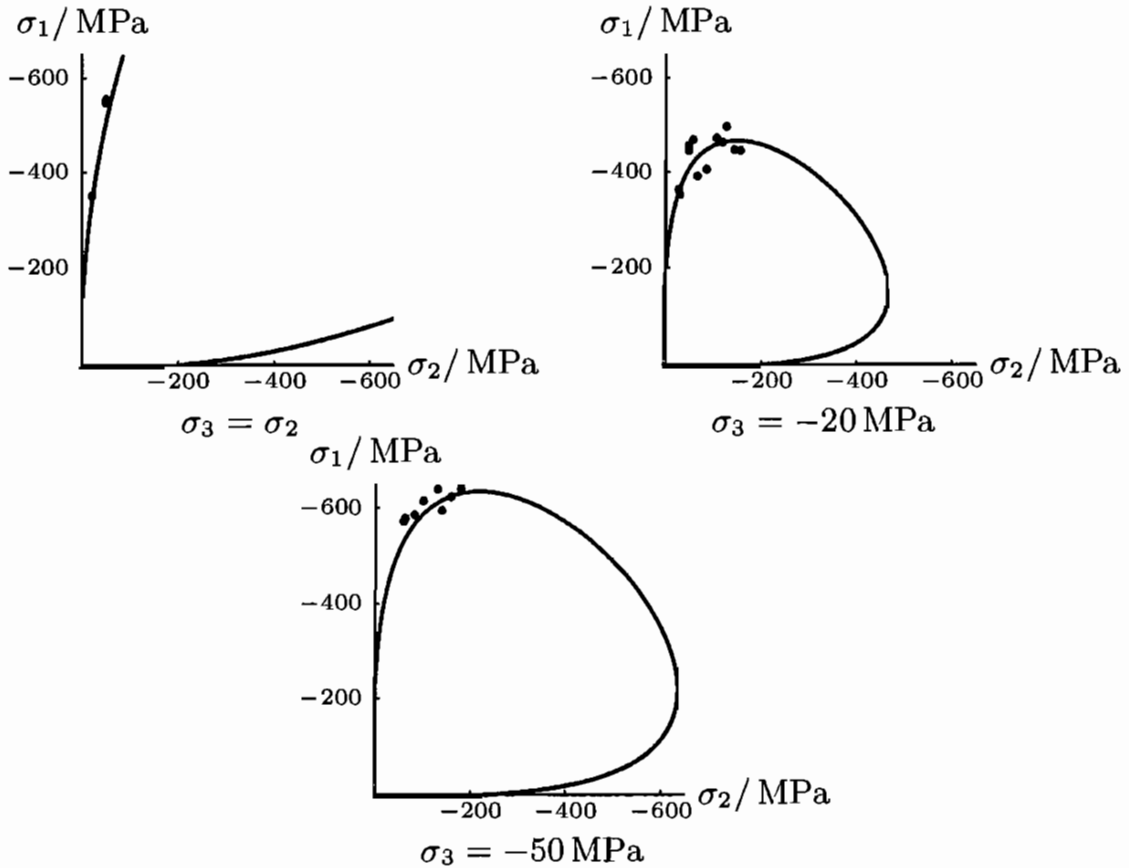


Abbildung 5.12: Festigkeiten von Izumi Sandstein aus [75] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 450\sqrt{10} \text{ MPa}$.

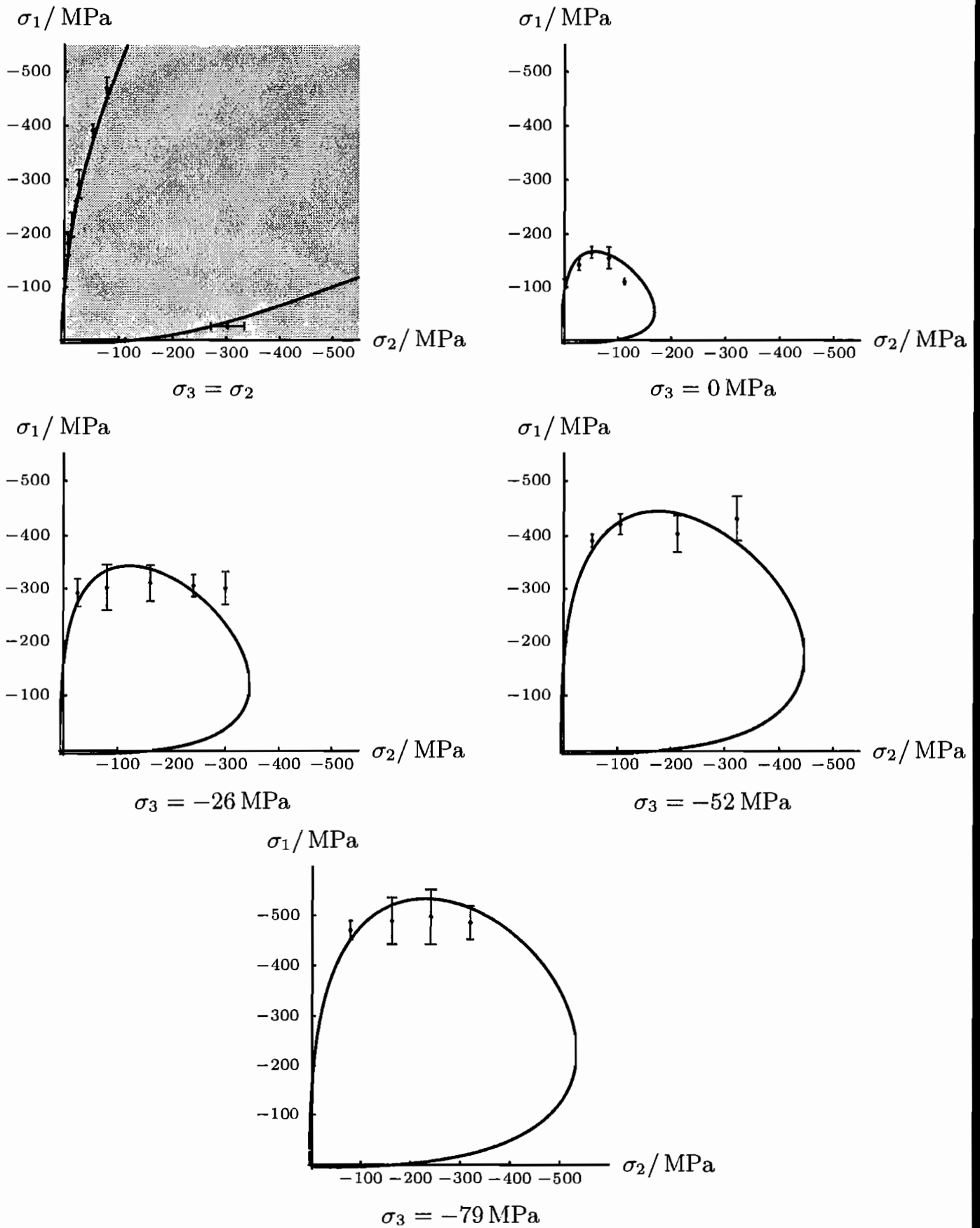


Abbildung 5.13: Festigkeiten von Sandstein aus [76] mit $\phi = 57^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa und $d = 250\sqrt{10}$ MPa.

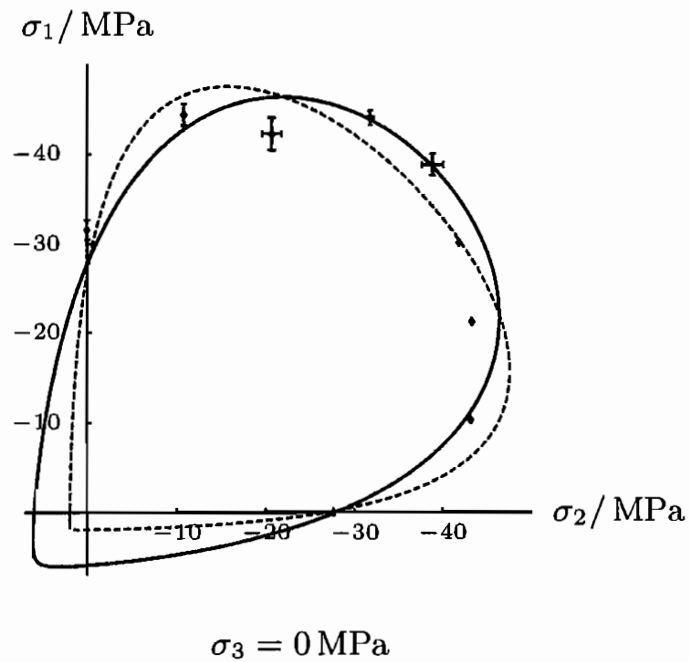
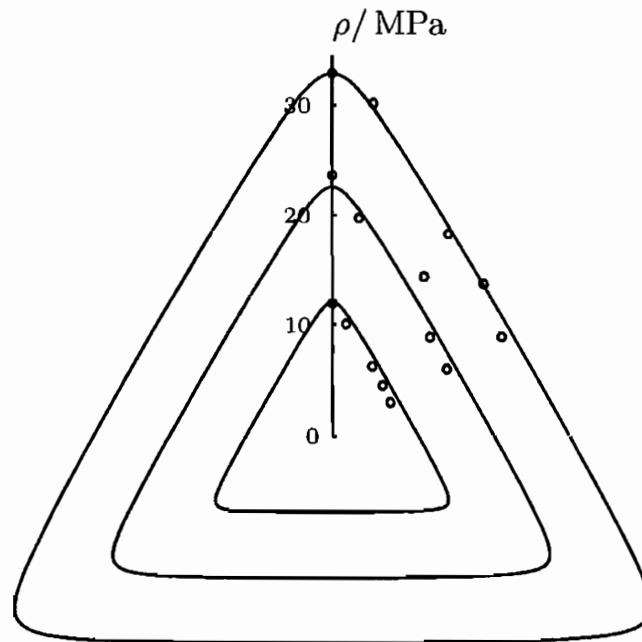


Abbildung 5.14: Festigkeiten von Darney Sandstein aus [77] mit $\phi = 44^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 140\sqrt{10} \text{ MPa}$.
Alternativ: $\phi = 57^\circ$, $b = 0,6$, $c = 2 \text{ MPa}$ und $d = 70\sqrt{10} \text{ MPa}$.



in π -Ebenen $I_1 = 15, 30$ und 45 MPa

Abbildung 5.15: Festigkeiten von Mu-San Sandstein aus [78] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 2 \text{ MPa}$ und $d = 140\sqrt{10} \text{ MPa}$.

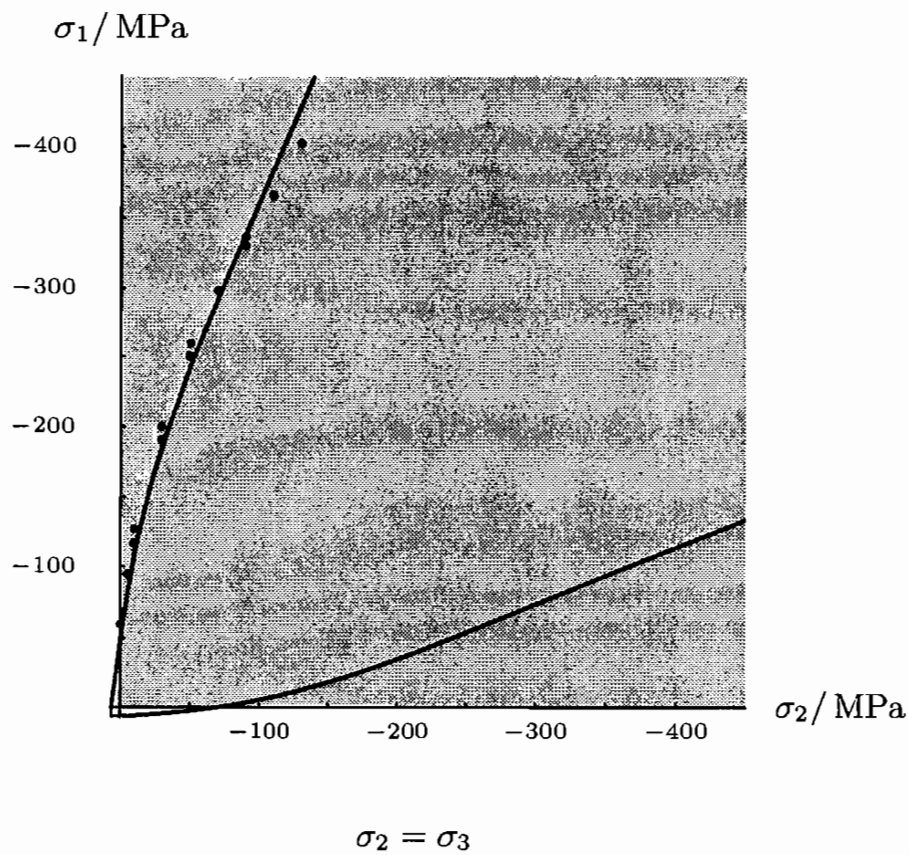


Abbildung 5.16: Festigkeiten von Berea Sandstein aus [79] mit $\phi = 52^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$ und $d = 140\sqrt{10} \text{ MPa}$.

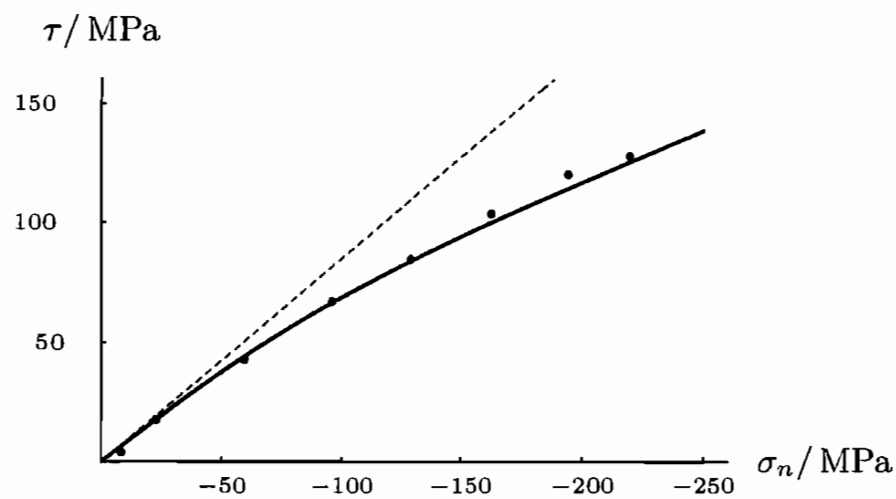


Abbildung 5.17: Reibfestigkeiten von Berea Sandstein aus [79] mit $\phi = 52^\circ$, $b = 0,6$ und $d = 140\sqrt{10} \text{ MPa}$ in Gleichung (5.3).

5.3.3 Karbonatgestein

Neben den hauptsächlich aus Silikaten bestehenden Sanden oder Sandsteinen, gibt es die Klasse der Karbonatsedimente. Sie werden biogen genannt, da sie größtenteils aus Schalen maritimer Organismen entstehen. Im Unterschied zum ursprünglichen Kalkstein, dessen Ergebnisse in Kapitel 5.4.2 aufgeführt sind, besteht Dolomit aus diagenetisch konsolidierten Karbonatsedimenten.

In Abbildung 5.18 sind die Festigkeiten für einen Dunham Dolomit zusammengefasst. Die in der hellgrauen Ebene ermittelten Parameter der Bildunterschrift sind geeignet die echten triaxialen Festigkeiten gut wiederzugeben. Zusätzlich werden die Werte für das Einsetzen des Fließens \times dargestellt. Deswegen werden grob gestrichelt die Kurven der Eingehüllten nach Gleichung (5.1) mit den selben Parametern eingezeichnet. Es zeigt sich keine Übereinstimmung.

Leider erwähnt Mogi in diesem Artikel [80] nicht, welches Kriterium er für die Auswahl dieser Punkte gewählt hat. Er behauptet lediglich, dass sich durch Anwendung anderer Kriterien die Schlussfolgerung nicht ändert, dass die Fließspannung eine reine Funktion von τ_{oct} und I_1 sei (τ_{oct} ist ein Vielfaches von $\sqrt{-J_2}$). Da die Fließspannungen sehr nahe bei den Versagenswerten liegen, erscheint es nötig, sein Vorgehen genauer zu untersuchen. Exemplarisch ist in Abbildung 5.20 eine Spannungs-Dehnungskurve abgebildet. Die Dehnungen in axialer Richtung können offenbar durchaus große Werte annehmen. Die Differenzspannung, die Mogi als Einsetzen des Fließens ermittelt hat, ist mit einem Sechseck markiert. In Abbildung 5.18 ist dieser Spannungswert für $\sigma_3 = -125$ MPa auch als Sechseck dargestellt. Eine Methode, die als Fließspannung das Ende des linearen Spannungs-Dehnungsbereichs verwendet, würde den als Dreieck markierten Punkt verwenden. Diese Spannung ist wesentlich geringer. Mangels Kenntnis aller Spannungs-Dehnungskurven ist es nicht möglich, alle Werte zu überprüfen. Alternativ werden in Abbildung 5.19 die Fließspannungen mit der Eingehüllten nach Gleichung (5.1) exemplarisch für ein anderes c verglichen. Dieses Vorgehen soll verdeutlichen, dass die Fließspannung ausschließlich durch eine Funktion $J_2(I_1)$ definiert ist.

In Abbildung 5.21 sind triaxiale Messungen an Dunham Dolomit für geringere Seitendrücke angegeben. Mit den nun alternativ dargestellten Parametern ist diese Anpassung nicht sonderlich exakt. Zusätzlich ist die prognostizierte uniaxiale Zugfestigkeit mit etwa 65 MPa ungewöhnlich hoch. Zwar ist es möglich durch eine einfache Veränderung der Parameter eine gute Anpassung zu bestimmen, aber da es in beiden Fällen Dunham Dolomit ist, erscheint das nicht sinnvoll. Deshalb entsteht die Notwendigkeit einer Erweiterung des Kriteriums für geringe hydrostatische Drücke.

Der Vergleich zwischen dem Dolomit und Kalkstein ergibt kein einheitliches Bild. Die Messungen von Fredrich [81] und Mogi [71] in Abbildung 5.29 legen den Schluss nahe, dass der Kalkstein keine hohen Festigkeiten erreicht. Sie widersprechen den Messungen von Handin [82] in Abbildung 5.30. Zum Vergleich ist in Abbildung 5.30 fein gestrichelt die theoretische Versagenskurve des Dolomits aus Abbildung 5.18

ingezeichnet. Hier erreichen Dolomit und Kalkstein vergleichbare und ziemlich hohe Festigkeiten. Leider waren teilweise die Porositäten nicht verfügbar, mit denen vielleicht eine Interpretation der Ergebnisse möglich wäre.

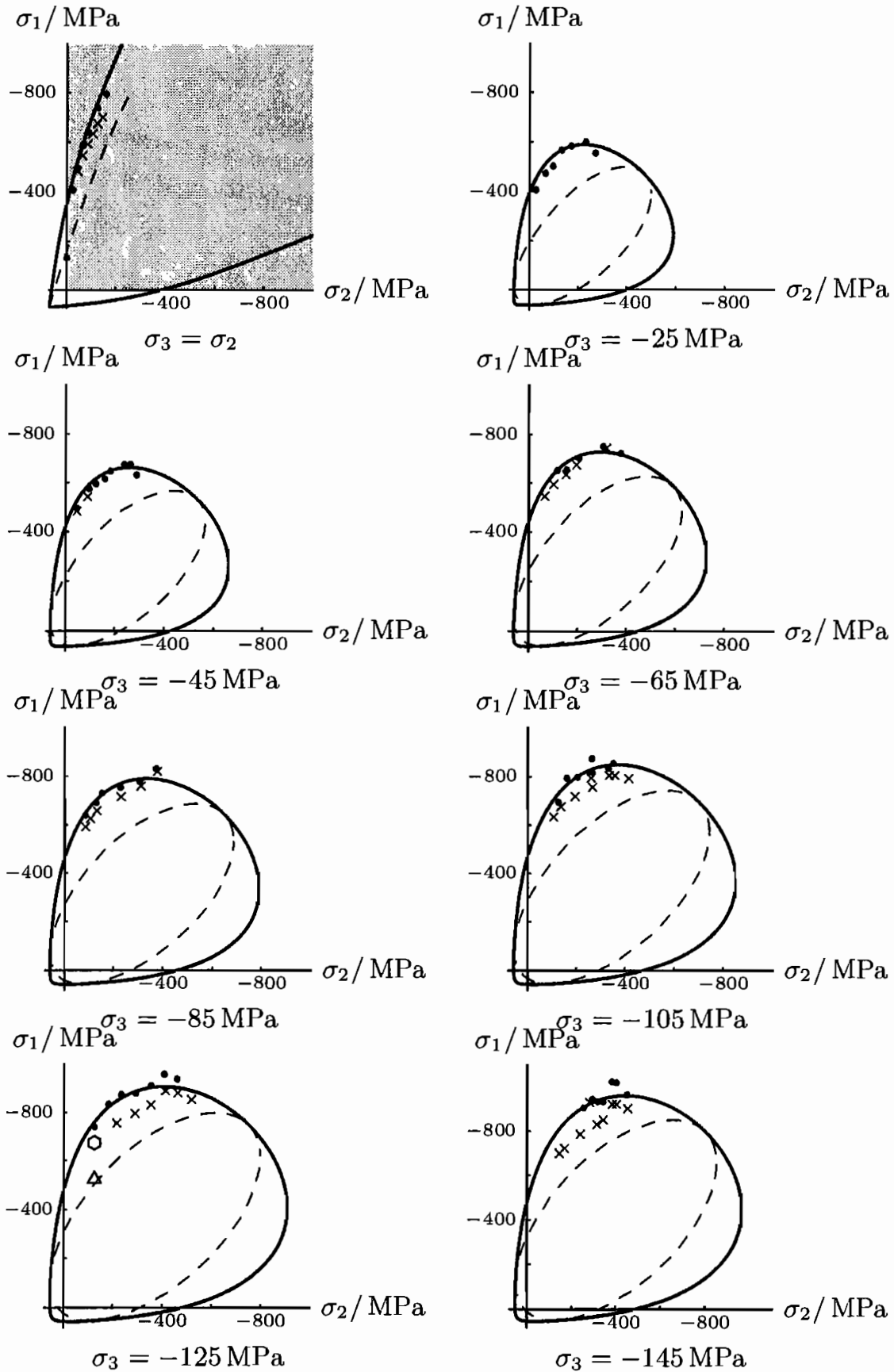


Abbildung 5.18: Festigkeiten von Dunham Dolomit [80] mit $\phi = 50^\circ$,
 $b = 0,6$, $c = 70 \text{ MPa}$ und $d = 500\sqrt{10} \text{ MPa}$.

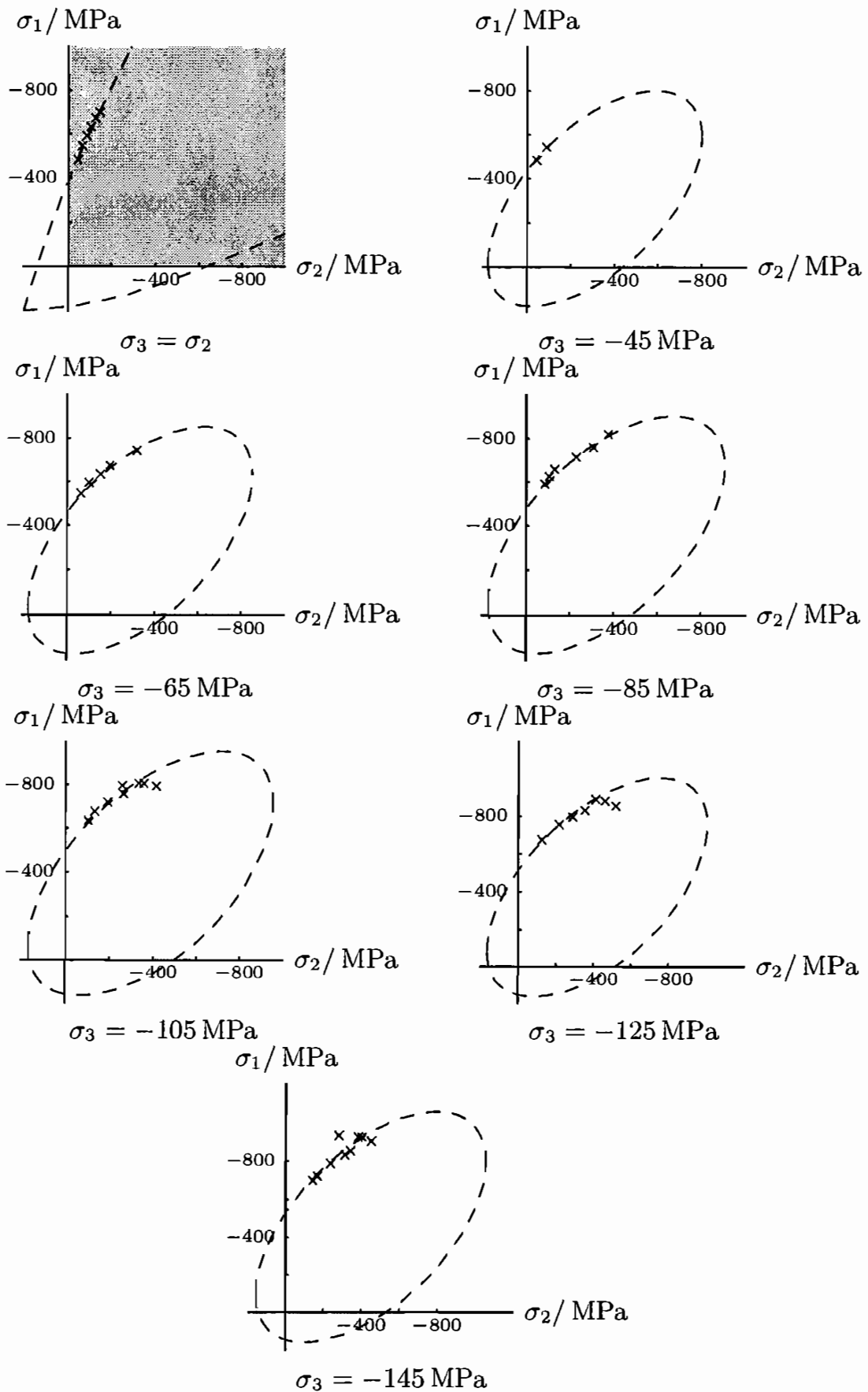


Abbildung 5.19: Fließspannungen von Dunham Dolomit aus [80] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 200 \text{ MPa}$ und $d = 500\sqrt{10} \text{ MPa}$ in Gleichung (5.1).

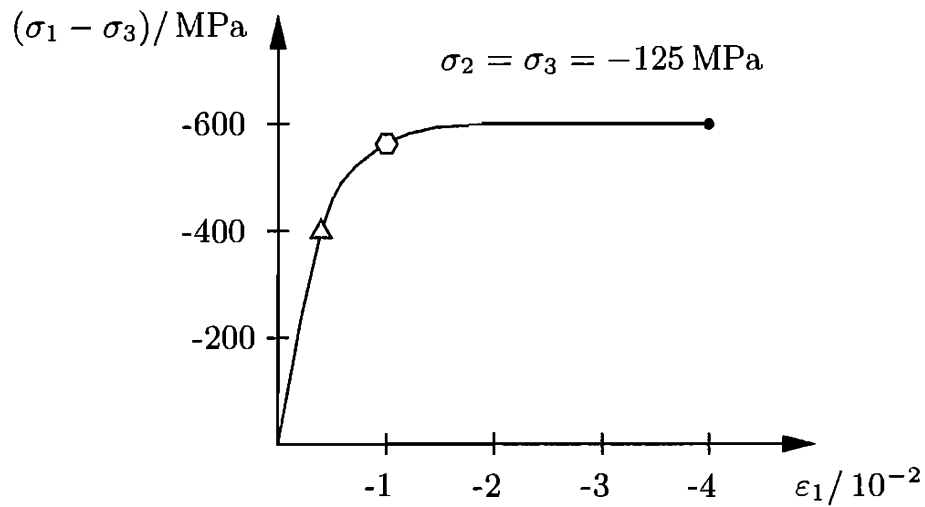


Abbildung 5.20: Spannungs-Dehnungskurve von Dunham Dolomit aus [80].

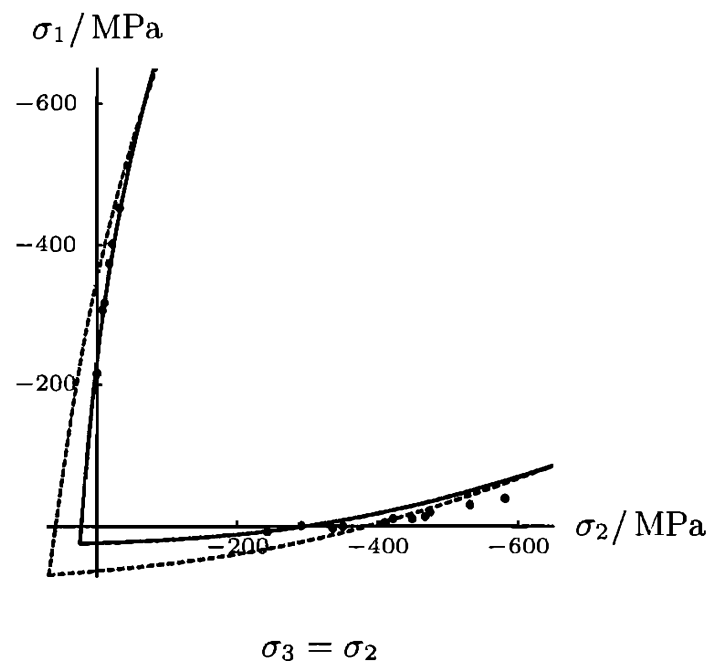


Abbildung 5.21: Festigkeiten von Dunham Dolomit aus [71] mit $\phi = 55^\circ$, $b = 0,6$, $c = 25$ MPa und $d = 500\sqrt{10}$ MPa. Alternativ: $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 70$ MPa und $d = 500\sqrt{10}$ MPa.

5.4 Studien der Einflussfaktoren

5.4.1 Versagen im Zugspannungsbereich

Nun soll der Parameter c und seine Auswirkung auf die theoretische Zugfestigkeit untersucht werden. In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt (siehe zum Beispiel Abbildung 5.3 und 5.10), dass das entwickelte Festigkeitskriterium die Messpunkte im Bereich des allseitigen Drucks gut approximieren kann. Allerdings wird bislang die Zugfestigkeit überschätzt (siehe Abbildung 5.21). Dieses Problem kann behoben werden, indem der Eingehüllten nach Gleichung (5.1) ein neuer gewählter Faktor $f_1(I_1)$ hinzugefügt wird:

$$J_2 = - \left(\frac{1 - b_1}{1 + \frac{I_1^2}{d_1^2}} + b_1 \right)^2 \left(\frac{1 - b}{1 + \frac{I_1^2}{d^2}} + b \right)^2 \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^2. \quad (5.5)$$

Dieses Vorgehen stellt sicher, dass sich die neuen Parameter d_1 und b_1 genau wie d und b interpretiert lassen.

Im Zugspannungsbereich werden seltener Festigkeiten von Gesteinen gemessen. Das liegt an der schweren Durchführbarkeit und an einem geringeren Interesse an den Ergebnissen, da Gesteine hauptsächlich durch Druckspannungen belastet werden. So sollen die Auswertungen eher die einfache Erweiterbarkeit der Theorie unter Beweis stellen, als Prognosen der Zugfestigkeit zu bestimmen.

Allgemein kann bei gleicher prognostizierter uniaxialer Druckfestigkeit der Parameter c reduziert werden, wenn gleichzeitig der Reibwinkel ϕ erhöht wird. Damit für den rein gedrückten Bereich J_2 jedoch gleich groß bleibt, muss die Überhöhung des Reibwinkels in der Gleichung (5.5) vom neuen Vorfaktor abgebaut werden. Durch diesen Faktor erhöht sich die Anzahl der Parameter für die alternativen Prognosen auf sechs. Alle in diesem Kapitel aufgeführten Gesteine gehören, bis auf den Trachyt, zur Gruppe der Metamorphite.

Der Amphibolit, dessen Festigkeiten in Abbildung 5.22 dargestellt sind, ist im Verlauf der Kontinentaltiefbohrung aus einer Tiefe von ungefähr 6300 m entnommen worden. Seine Porosität beträgt 0,007. Die Ermittlung der Parameter erfolgte wie gewohnt in der hellgrau hinterlegten Darstellung. Die alternative Prognose ist fein gestrichelt dargestellt und scheint besonders in der Ebene $\sigma_3 = 0$ besser die Messwerte anzunähern. Für $\sigma_3 = -100$ MPa und $\sigma_3 = -150$ MPa sind zusätzlich die Werte für das Einsetzen der Dilatanz markiert. Deswegen wurde für diese Spannungsniveaus die Eingehüllte nach Gleichungen (5.5) für den alternativen Parametersatz grob gestrichelt eingezeichnet. Im Vergleich zu den Parametern des Westerly Granits fällt für den ersten Parametersatz auf, dass d gleich groß, der Reibwinkel ϕ jedoch geringer ist.

Die Festigkeiten des Marmors in Abbildung 5.23 werden mit zwei Anpassungen dargestellt. Auch hierbei wird alternativ die fünfprozentige Abnahme der initialen Reibungsparameter durch $b_1 = 0,95$ berücksichtigt. Der erste Parametersatz lässt den Schluss zu, dass im Vergleich zu allen anderen Gesteinen der Reibwinkel ϕ sehr niedrig ist.

In Abbildung 5.24 werden die Ergebnisse von Triaxialversuchen an Carrara Marmor wiedergegeben. Allerdings wurden sie für größere Seitendrucke als bei der Messung am Yamaguchi Marmor durchgeführt. Es zeigt sich deutlich, dass mit den Parametern des Yamaguchi Marmors das Ergebnis der Prognose, hier durchgezogen gezeichnet, die Festigkeiten für hohe Seitendrucke überschätzt. Jedoch kann einzig durch eine Veränderung von b die fein gestrichelte Kurve errechnet werden. Auch die Werte für das Einsetzen der Dilatanz sind mit der grob gestrichelten Eingehüllten des alternativen Parametersatzes gut beschrieben. Die schwarzen Punkte sind einer Diplomarbeit entnommen, die in Kooperation mit dem Institut für Geologie, Mineralogie und Gesteinsphysik erstellt wurde [85].

In Abbildung 5.25 wird als Alternative eine zwanzigprozentige Abnahme der initialen Reibungsparameter durch $b_1 = 0,80$ nach Gleichung (5.5) angenommen. Der Vergleich mit den Messwerten des Schiefers in der triaxialen Schnittebene zeigt, dass die theoretische Zugfestigkeit deutlich vermindert wird. In den anderen Schnitten ist der Unterschied zur ersten Prognose sehr gering.

Der Trachyt in Abbildung 5.26 ist ein hoch poröses Magmatit, dessen Parameter jedoch gut in die Reihe der weicheren metamorphen Gesteine passt. Die alternative Kurve gibt die uniaxiale Druckfestigkeit wesentlich besser wieder, ohne die Prognose in den anderen Ebenen zu verschlechtern.

Abschließend lässt sich demnach feststellen, dass der neue Vorfaktor den Bereich von $\phi = 60^\circ$ bis zum Winkel des ursprünglichen Parametersatzes verwenden kann, um die prognostizierte uniaxiale Zugfestigkeit zu vermindern. Deshalb ist es ohne große Mühen möglich, das Festigkeitskriterium im Zugspannungsbereich zu einem Rankine Kriterium zu wandeln.

Da aber kaum Messwerte vorliegen, bleibt dieser Bereich ungenau bestimmt. Für Metamorphite liegt der Parameter d zwischen dem des festen Granits und dem des Sandsteins. Die Reibwinkel ϕ sind kleiner als bei den anderen Gesteinsarten.

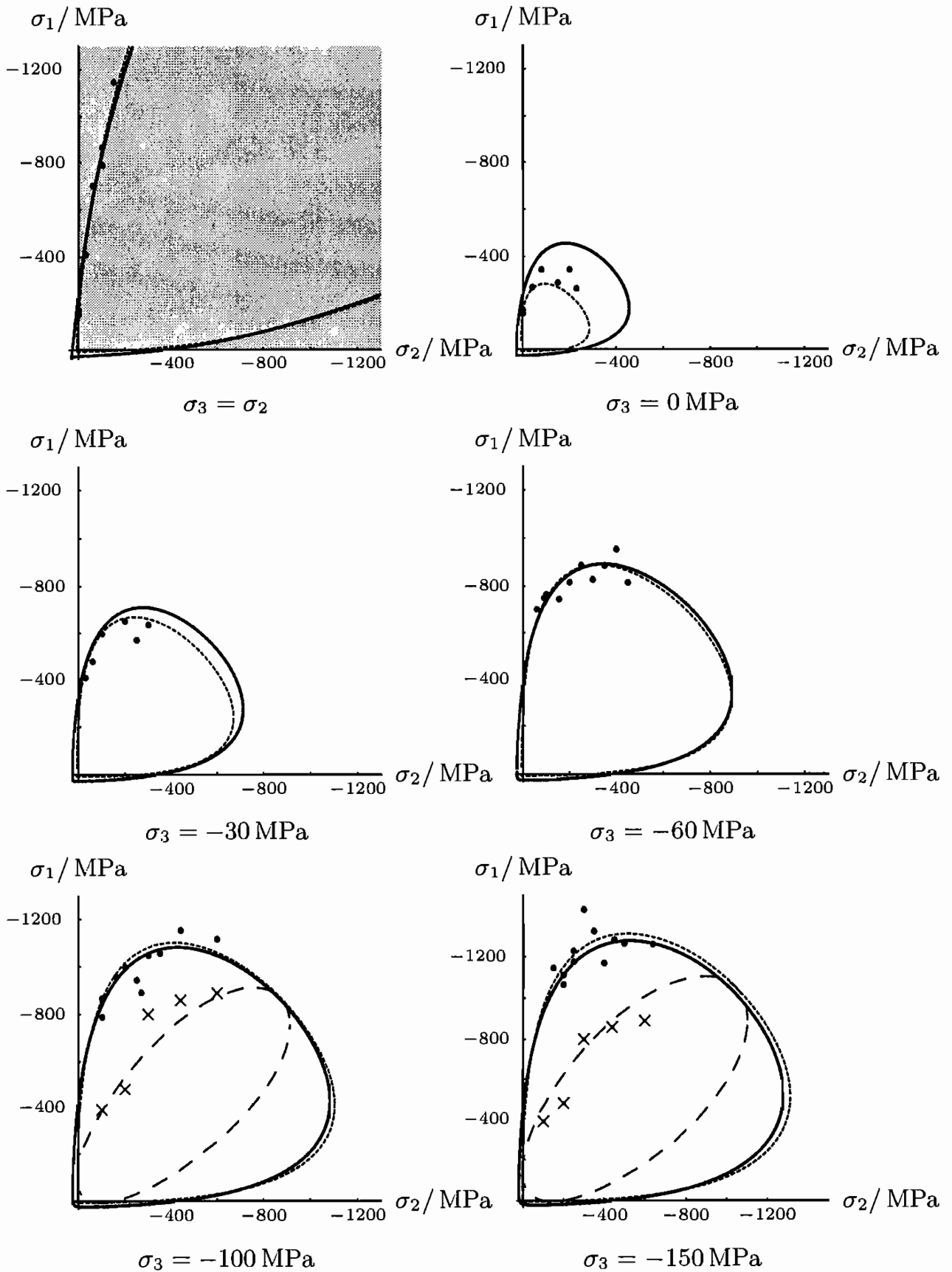


Abbildung 5.22: Festigkeiten von Amphibolit aus [83] mit $\phi = 53^\circ$, $b = 0,6$, $c = 30 \text{ MPa}$ und $d = 850\sqrt{10} \text{ MPa}$. Alternativ nach Gleichung (5.5): $\phi = 60^\circ$, $b_1 = 0,95$, $b = 0,6$, $c = 7 \text{ MPa}$, $d_1 = 70\sqrt{20} \text{ MPa}$ und $d = 850\sqrt{10} \text{ MPa}$.

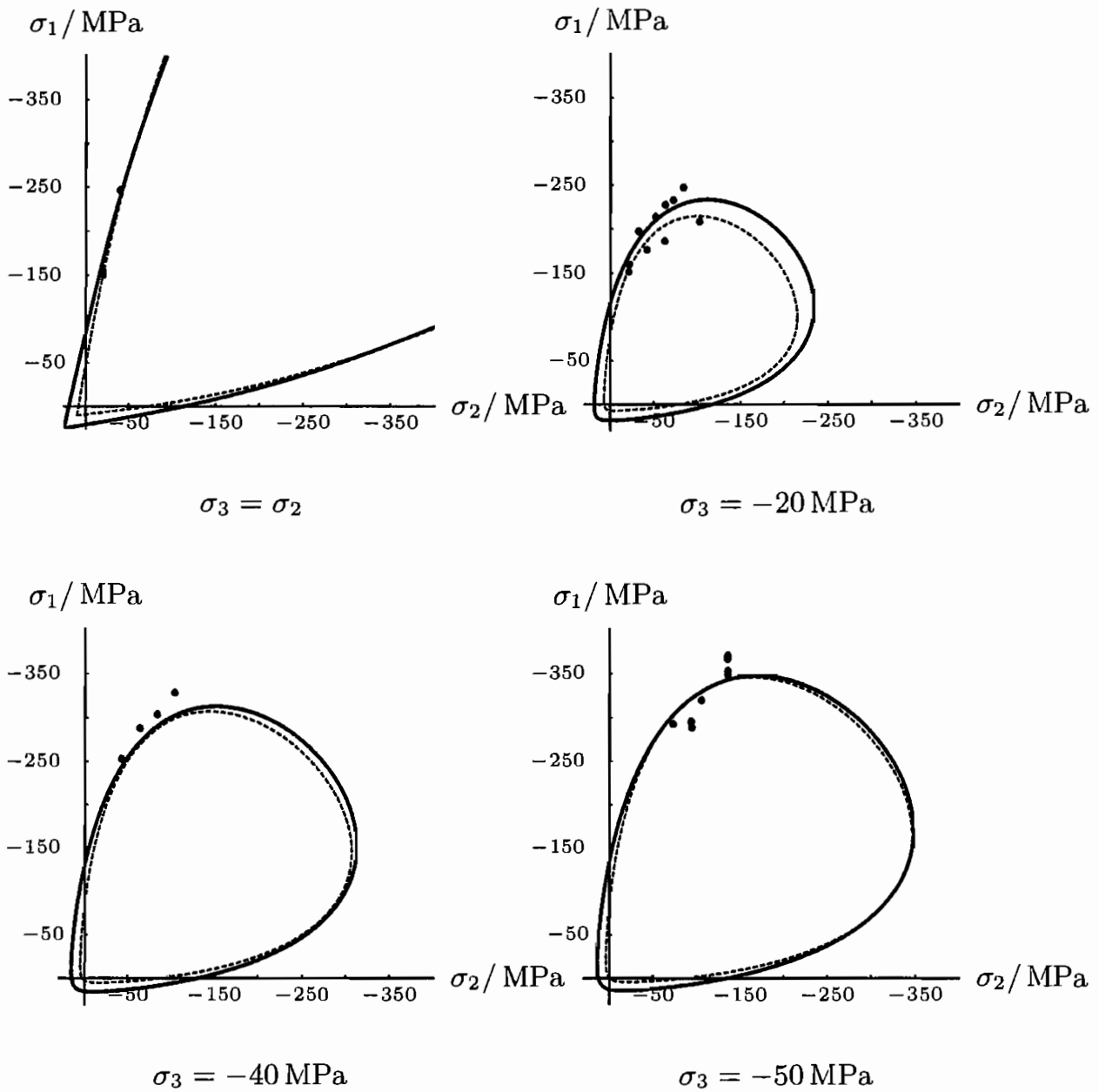


Abbildung 5.23: Festigkeiten von Yamaguchi Marmor aus [75] mit $\phi = 42^\circ$, $b = 0,6$, $c = 25 \text{ MPa}$ und $d = 350\sqrt{10} \text{ MPa}$. Alternativ nach Gleichung (5.5): $\phi = 47^\circ$, $b_1 = 0,95$, $b = 0,6$, $c = 10 \text{ MPa}$, $d_1 = 70\sqrt{20} \text{ MPa}$ und $d = 350\sqrt{10} \text{ MPa}$.

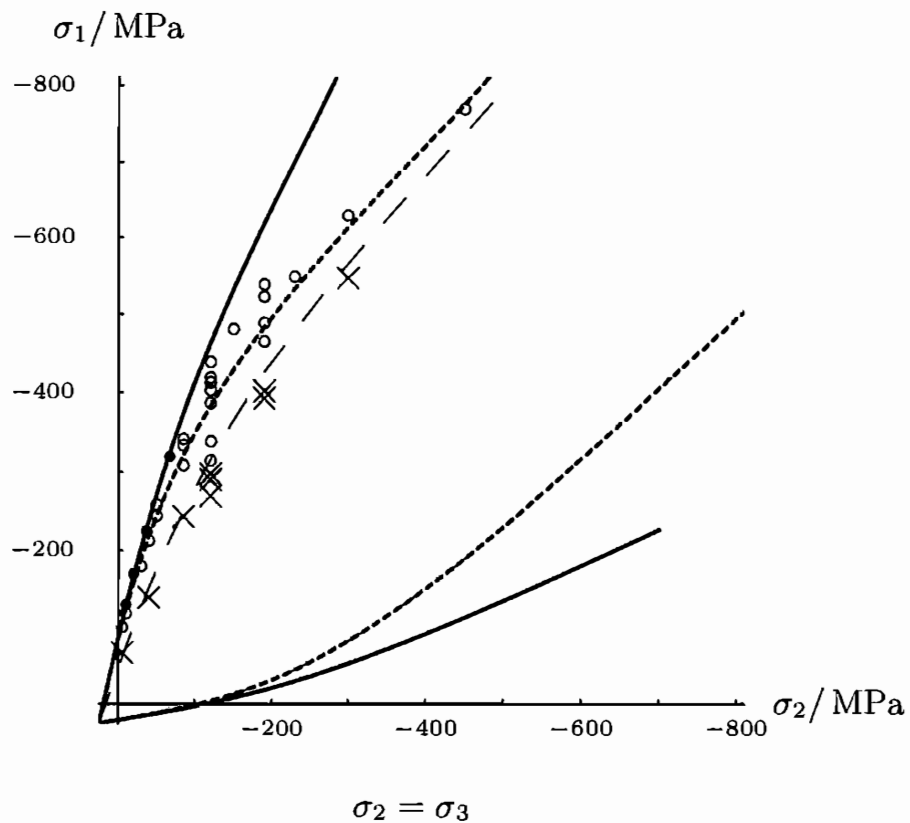


Abbildung 5.24: Festigkeiten von Carrara Marmor $\circ \times$ aus [84] und eigene Messungen \bullet aus [85] mit $\phi = 42^\circ$, $b = 0,6$, $c = 25$ MPa und $d = 350\sqrt{10}$ MPa. Alternativ: $\phi = 42^\circ$, $b = 0,2$, $c = 25$ MPa und $d = 350\sqrt{10}$ MPa.

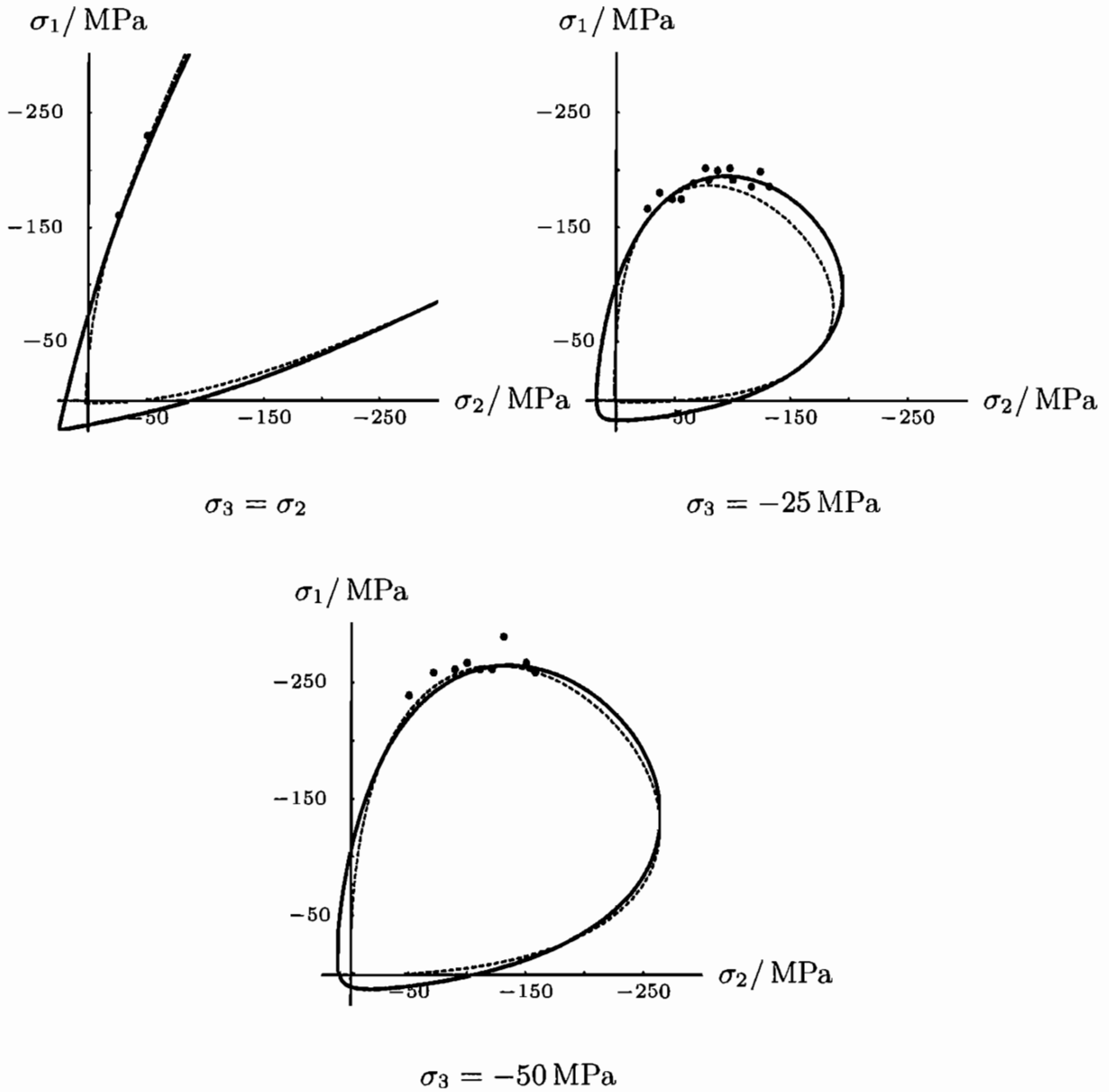


Abbildung 5.25: Festigkeiten von Yuubari Tonschiefer aus [75] mit $\phi = 40^\circ$, $b = 0,6$, $c = 25 \text{ MPa}$ und $d = 200\sqrt{10} \text{ MPa}$. Alternativ nach Gleichung (5.5): $\phi = 58^\circ$, $b_1 = 0,8$, $b = 0,6$, $c = 2 \text{ MPa}$, $d_1 = 60\sqrt{10} \text{ MPa}$ und $d = 200\sqrt{10} \text{ MPa}$.

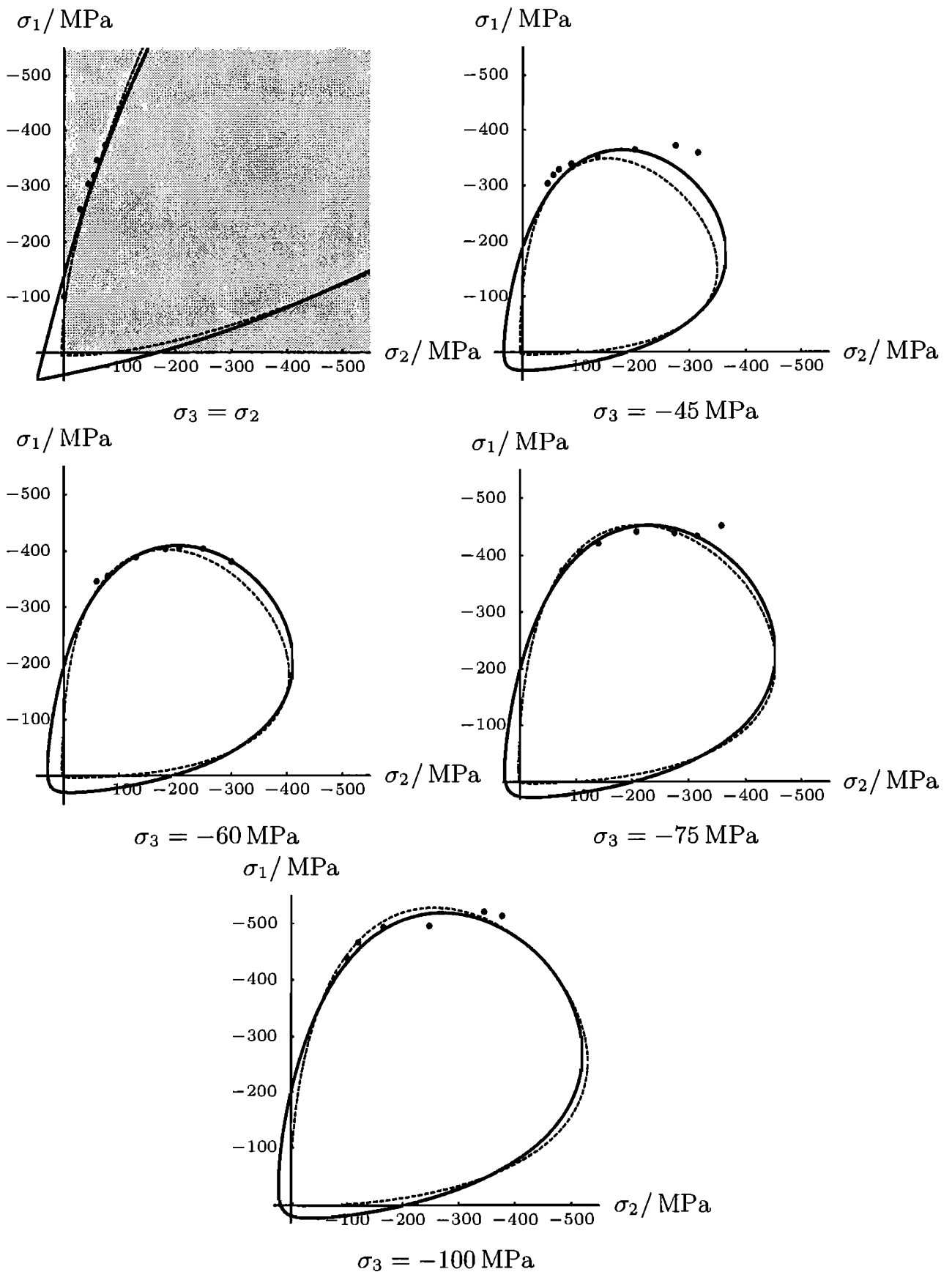


Abbildung 5.26: Festigkeiten von Mizuho Trachyt aus [80] mit $\phi = 39^\circ$, $b = 0,6$, $c = 50\sqrt{10}$ MPa und $d = 420\sqrt{10}$ MPa. Alternativ nach Gleichung (5.5): $\phi = 58^\circ$, $b_1 = 0,8$, $b = 0,6$, $c = 5$ MPa, $d_1 = 100\sqrt{10}$ MPa und $d = 420\sqrt{10}$ MPa.

5.4.2 Auswirkung eines erhöhten hydrostatischen Drucks

Gestein kann durch höhere hydrostatische Drücke sein Verformungsverhalten ändern. Da für sehr feste Gesteine die zu einer Änderung nötigen hohen Drücke experimentell unerreichbar sind, werden exemplarisch sehr weiche Gesteine untersucht. Das durch die Problematik der Endlagerung des Atommülls bekannteste Gestein dieser Gruppe ist Steinsalz. Da es zur Bildung von Salzdomen neigt, muss es ein ausgeprägt duktileres Verhalten aufweisen. Salzdomen entstehen, wenn eine Schicht Steinsalz durch einen Auftrieb verursacht, ähnlich zu einer Flüssigkeit, im umgebenden Material aufsteigt.

Um den Übergang des Materialverhaltens in dem Versagenskriterium abzubilden, wird der Einfluss der Reibparameter in Gleichung (5.1) für hohe hydrostatische Drücke durch den gewählten Wert $b = 0,05$ stark abgemindert. In Abbildung 5.27 ist ersichtlich, dass das Kriterium nun sehr gut den stark gekrümmten Verlauf für geringe Seitendrücke wiedergibt. Aber auch der prinzipielle Verlauf, wenn der Einfluss der hydrostatischen Spannung auf die Festigkeit nachlässt, wird gut angenähert. Es bleibt jedoch ein geringer Anstieg der Festigkeitskurve erhalten.

Als zweites Beispiel dient Kalkstein. Das in einem biaxialen Versuch untersuchte Material in Abbildung 5.28 ist ein Indiana Kalkstein. Dieser Datensatz reicht bis in den Zugbereich der Spannungen und zeigt so, dass die Prognose auch im Zugbereich zufriedenstellend ist. Seine Parameter lassen eher einen Vergleich mit dem Steinsalz als mit dem folgenden Kalkstein zu.

Die triaxiale Untersuchung des Solnhofener Kalkstein in Abbildung 5.29 weist auf ein viel festeres Verhalten hin. Schon die uniaxiale Druckfestigkeit ist mit etwa -300 MPa zehnmal größer als die des Indiana Kalksteins. Die triaxiale Kompression ist sehr gut wiedergegeben und die durch Kreise gekennzeichneten Versuchsdaten von Fredrich [81] scheinen den Trend noch zu bestätigen. Im Gegensatz dazu ist die triaxiale Extension nicht zufriedenstellend angenähert. Die Messungen stammen aus der gleichen Reihe wie die in Abbildung 5.6 und 5.21 dargestellten. Während für alle drei Materialien die Kompressionsrichtung sehr gut beschrieben wird, liegen die Prognosen in Extensionsrichtung immer über den Messwerten. Dieses Verhalten lässt zwei mögliche Erklärungen zu: entweder das neu entwickelte Kriterium ist nicht ausreichend oder Mogi ist in seiner Messung ein systematischer Fehler unterlaufen [71].

Abbildung 5.30 gibt für einen Solnhofener Kalkstein ein komplett anderes Bild wieder. Die Festigkeitskurve mit den oben ermittelten Parametern hat augenscheinlich keinen Bezug zu den Messwerten von Handin. Dessen Werte lassen keinen Übergang des Verformungsmechanismus vermuten. Eine mögliche Erklärung für diese Diskrepanz wäre ein Unterschied in der Porosität oder der Korngröße.

Ob es einen Übergang der Versagensmechanismen für sehr große hydrostatische Drücke auch bei festeren Silikaten gibt, ist nicht zu messen. Abbildung 5.31 zeigt einen Trend auf, in dem für sehr hohe Seitendrücke eine Prognose mit $b = 0,6$ in die Alternative mit $b = 0,5$ für verschiedene Silikate übergeht. Der Gabbro hat mit der

durchgezogen dargestellten 60-prozentigen Restreibung bis auf den Reibwinkel übereinstimmende Parameter mit dem Granit. Die gestrichelt dargestellte 50-prozentige Restreibung scheint den Trend jedoch besser zu erfüllen. Der olivin-dominierte Dunit wird, wie der metamorphe Eklogit, mit der 50-prozentigen Restreibung besser beschrieben.

An dieser Stelle sei als Ergebnis vermerkt, dass das Festigkeitskriterium für hohe Drücke einen Übergang zu einem von-Mises Kriterium abbilden kann, wie aus Abbildung 5.27 deutlich wird.

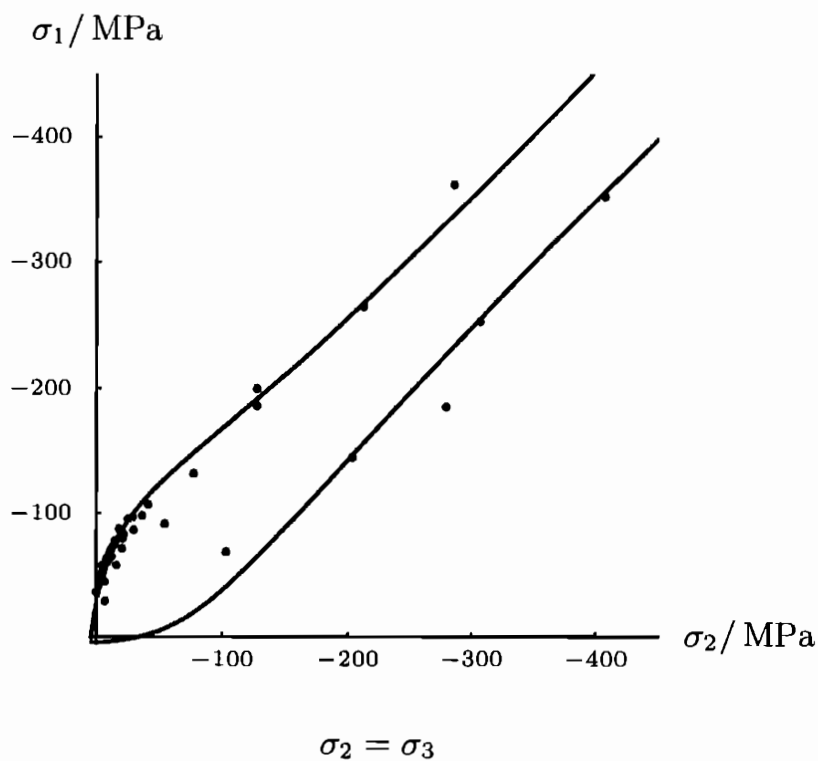


Abbildung 5.27: Festigkeiten von Steinsalz aus [86] und [87] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,05$, $c = 5$ MPa und $d = 60\sqrt{20}$ MPa.

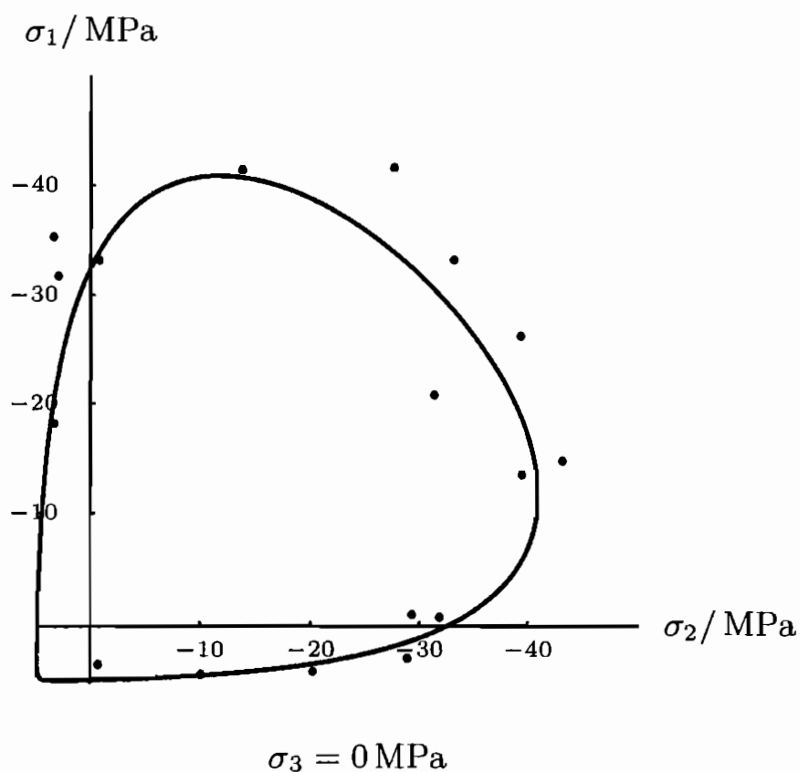


Abbildung 5.28: Festigkeiten von Indiana Kalkstein aus [88] mit $\phi = 55^\circ$, $b = 0,05$, $c = 5$ MPa und $d = 40\sqrt{20}$ MPa.

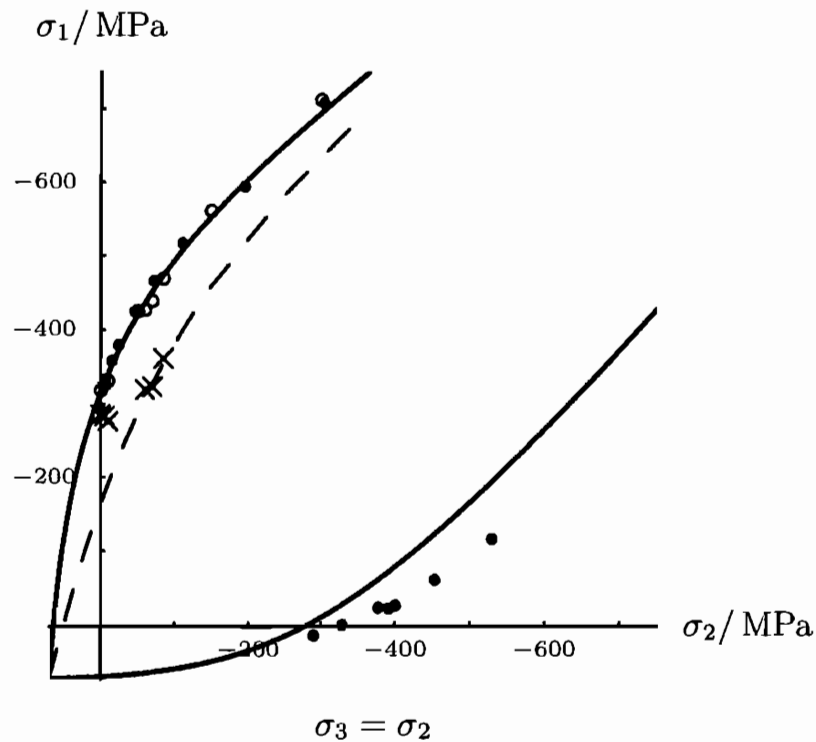


Abbildung 5.29: Festigkeiten von Solnhofener Kalkstein aus \bullet [71] und aus \times, \circ [81] mit $\phi = 55^\circ$, $b = 0,05$, $c = 70$ MPa und $d = 300\sqrt{20}$ MPa.

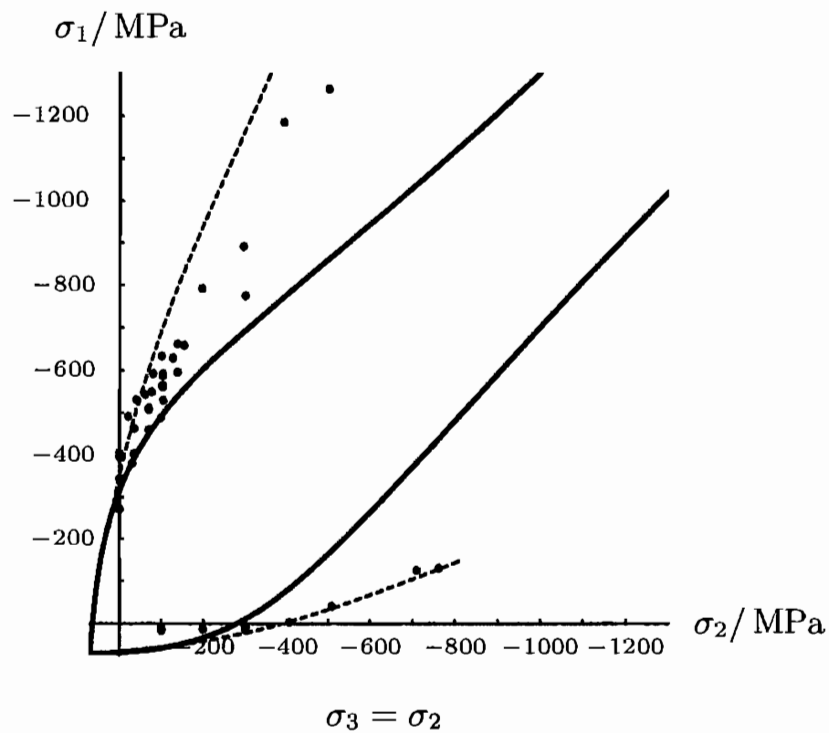
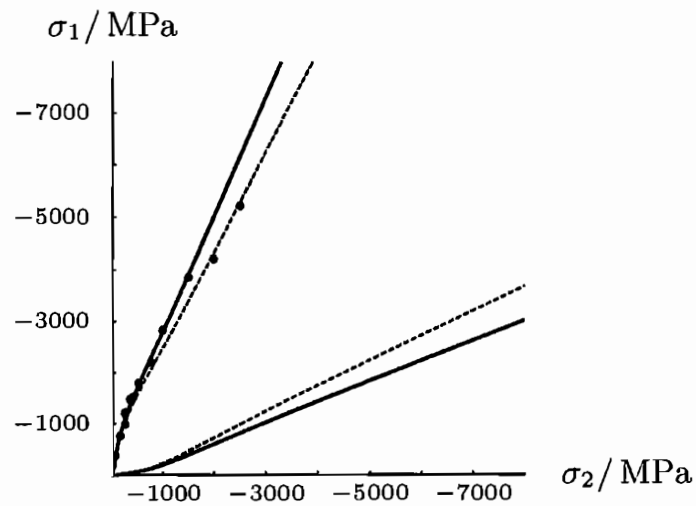
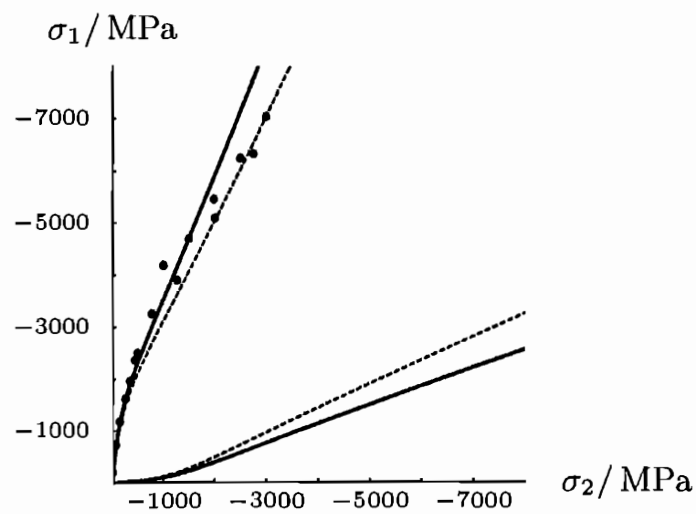


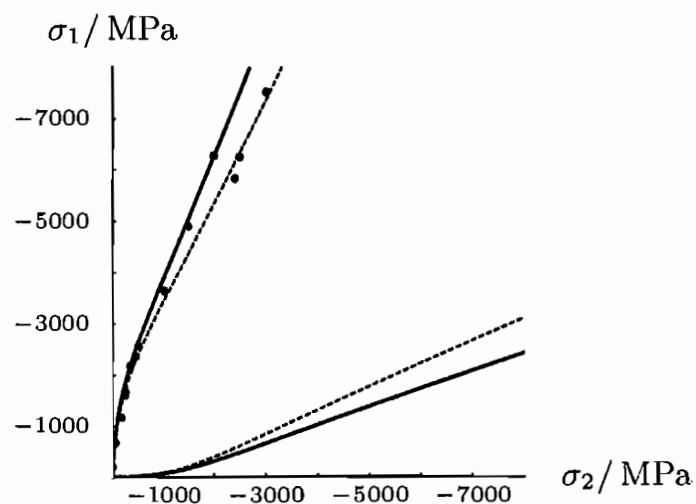
Abbildung 5.30: Festigkeiten von Solnhofener Kalkstein aus [82] mit $\phi = 55^\circ$, $b = 0,05$, $c = 70$ MPa und $d = 300\sqrt{20}$ MPa. Alternativ: $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 70$ MPa und $d = 500\sqrt{10}$ MPa.



Murotomisaki Gabbro mit $\phi = 48^\circ$ und $d = 850\sqrt{10}$ MPa.



Horoman Dunit mit $\phi = 55^\circ$ und $d = 1200\sqrt{10}$ MPa.



Akaishi Eklogit mit $\phi = 57^\circ$ und $d = 1400\sqrt{10}$ MPa.

Abbildung 5.31: Festigkeiten von unterschiedlichen Silikate für $\sigma_2 = \sigma_3$ aus [35] mit $b = 0,6$ und $c = 7$ MPa. Alternativ: $b = 0,5$ und $c = 7$ MPa.

5.4.3 Einfluss von Temperatur und mineralogischem Aufbau

Die bisherigen Untersuchungen haben sich auf den Einfluss von Spannungen auf die Festigkeit beschränkt. Es gibt allerdings noch andere Faktoren, die einen Übergang von sprödem zu duktilem Versagen beeinflussen können. Leider sind sie oftmals schwer zu quantifizieren. Beispielsweise reduziert ein steigender Wassergehalt des Gesteins zum einen die Reibung nach Gleichung (3.28) und zum anderen begünstigt er das Einsetzen von Versetzungsmechanismen [29]. Eine quantitative Messung dieses Einflussparameters ist schwierig. Die Temperatur hingegen ist einfacher zu messen. Um den Einfluss der Temperatur auf das Versagenskriterium zu berücksichtigen, wird wie in der Gleichung (5.5)

$$J_2 = - \left(\frac{1}{1 + \frac{(T-T_0)^4}{T_c^4}} \right)^2 \left(\frac{1-b}{1 + \frac{I_1^2}{d^2}} + b \right)^2 \left(\frac{I_1}{3} \sin(\phi) \right)^2 \quad (5.6)$$

ein Faktor $f_1(T)$ hinzugefügt, der hier eine Funktion der Temperatur ist. Er wurde in analoger Form zum Einfluss des Drucks für $b = 0$ nach Abbildung 4.11 gewählt, jedoch in vierter Ordnung. Dies führt zu einem engeren Krümmungsübergangintervall in der Temperatur. Für Raumtemperatur sollen die vorhergegangenen Ergebnisse erhalten bleiben, also muss $T_0 = 293,15$ K sein. Der Parameter T_c steuert dabei den Temperaturbereich, in dem die Reibparameter vermindert werden.

Zur Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Reibparameter folgt aus Gleichung (5.3) mit dem Temperaturfaktor die Gleichung:

$$\tau(\sigma_n, T) = \left(\frac{1}{1 + \frac{(T-T_0)^4}{T_c^4}} \right) \left(\frac{1-b}{1 + \frac{9\sigma_n^2}{d^2}} + b \right) \sin(\phi) \sigma_n = \mu(\sigma_n, T) \sigma_n. \quad (5.7)$$

In Abbildung 5.32 wird das Festigkeitskriterium basierend auf Gleichung (5.6) mit Festigkeiten von Westerly Granit für verschiedene radialsymmetrische Seitendrucke σ_c und Temperaturen T verglichen. Der Temperaturverlauf der Festigkeitskurven wird allein durch den Faktor $f_1(T)$ bestimmt. Die in Kapitel 5.2 für Raumtemperatur ermittelten Materialparameter wirken auf diese Kurven lediglich wie ein konstanter Vorfaktor. Auffällig ist das die Messwerte von Yund [89] für $\sigma_c = -500$ MPa unter denen liegen, die in den anderen beiden Literaturstellen für $\sigma_c = -400$ MPa ermittelt wurden. Dies könnte ein Indiz dafür sein, warum die Kurven für $\sigma_c = -1000$ MPa und -1500 MPa weit über den Yund Messwerten liegen.

Es ist allerdings dadurch nicht eindeutig belegt, dass die Temperatur den Reibungskoeffizienten beeinflusst. Zum Beispiel lässt sich aus Abbildung 5.33 kein eindeutiger Einfluss ablesen. Im gemessenen Bereich vermindert sich der Reibungskoeffizient nur mit steigender Normalspannung σ_c . Würde sich die Temperatur auf die Reibung auswirken, so müssten sich die Daten mehr entlang der Kurven der entsprechenden

Seitendrücke anordnen. Der mittlere Reibungskoeffizient liegt zwischen 0,8 und 0,75. Als Vermutung lässt sich formulieren, dass eine Erhöhung der Temperatur eher neue Verformungsmechanismen aktiviert, als das der Reibungskoeffizient verändert wird.

In Abbildung 5.34 wurden für die Anpassung des San Marcos Gabbro dieselben Materialparameter verwendet wie für den Murotomisaki Gabbro in Abbildung 5.31. Erneut ergibt sich für die Reibungskoeffizienten in Abbildung 5.35 kein einheitliches Bild. Die Werte orientieren sich allerdings mehr zu den Kurven hin, als es bei Granit der Fall war. Eindeutig lässt sich jedoch feststellen, dass der mittlere Reibungskoeffizient zwischen 0,7 und 0,6 liegt. Er ist damit deutlich kleiner als der des Granits. Diese Tatsache findet sich auch in den Parametern wieder. Der Reibwinkel ϕ des Gabbros liegt mit 48° bei sonst identischen Parametern unter dem des Granits mit 58° . Auch wenn der Unterschied zwischen den Sinuswerten dieser Winkel nicht groß erscheint, hat er jedoch einen großen Einfluss auf die theoretische Festigkeit. Zum Beispiel ist für $\sigma_c = -400$ MPa die theoretische Festigkeit des Granits -1899 MPa, wohingegen sie beim Gabbro lediglich -1519 MPa ist. Zusätzlich ist der Parameter T_c von Gabbro kleiner als der von Granit. Damit vermindert sich die Festigkeit für niedrigere Temperaturen.

Mit den aus Abbildung 5.36 ermittelten Parametern für verschiedene Serpentine bei Raumtemperatur kann mit Gleichung (5.6) in Abbildung 5.37 der Parameter T_c ermittelt werden. Für die Festigkeiten bei einem Seitendruck -100 MPa ist mit diesem Parameter eine gute Anpassung möglich. Für die höheren Seitendrücke von -350 MPa und -500 MPa fallen die Messwerte ab 800 K stärker als die Theorie vorhersagt. Dennoch lässt sich festhalten, dass der Reibwinkel ϕ und der Temperaturparameter T_c deutlich kleiner als bei den vorangegangenen Gesteinen ist.

Ein weiterer sehr wichtiger Faktor ist das Mischungsverhältnis der gesteinsbildenden Minerale innerhalb eines Gesteins. So ist in Abbildung 5.38 die Festigkeit eines Dunit, der etwa neun Prozent Lizardit enthält, fast mit der des reinen Lizardits vergleichbar. Wie fest ein reiner Dunit ist, kann in Abbildung 5.31 ersehen werden. Der Reibwinkel des mechanisch lizardit-dominierten Dunit ist wesentlich kleiner als der des Dunit. In Abbildung 5.39 sind die Reibfestigkeiten eines in großen Teilen aus Lizardit bestehenden vernetztem Serpentinits gezeigt. Sie werden mit den internen Reibparametern nach Gleichung (5.3) für die oben ermittelten Parameter verglichen. Erneut liegt die Funktion von Byerlee nach Gleichung (3.27) deutlich über den Messwerten, während die internen Reibparameter näher bei den Messwerten liegen. Auf der nächsten Seite belegen Abbildung 5.40 und Abbildung 5.41 noch einmal, dass mit den Parametern, die an Festigkeitsversuchen gewonnen wurden, die Reibfestigkeiten gut vorherzusagen sind.

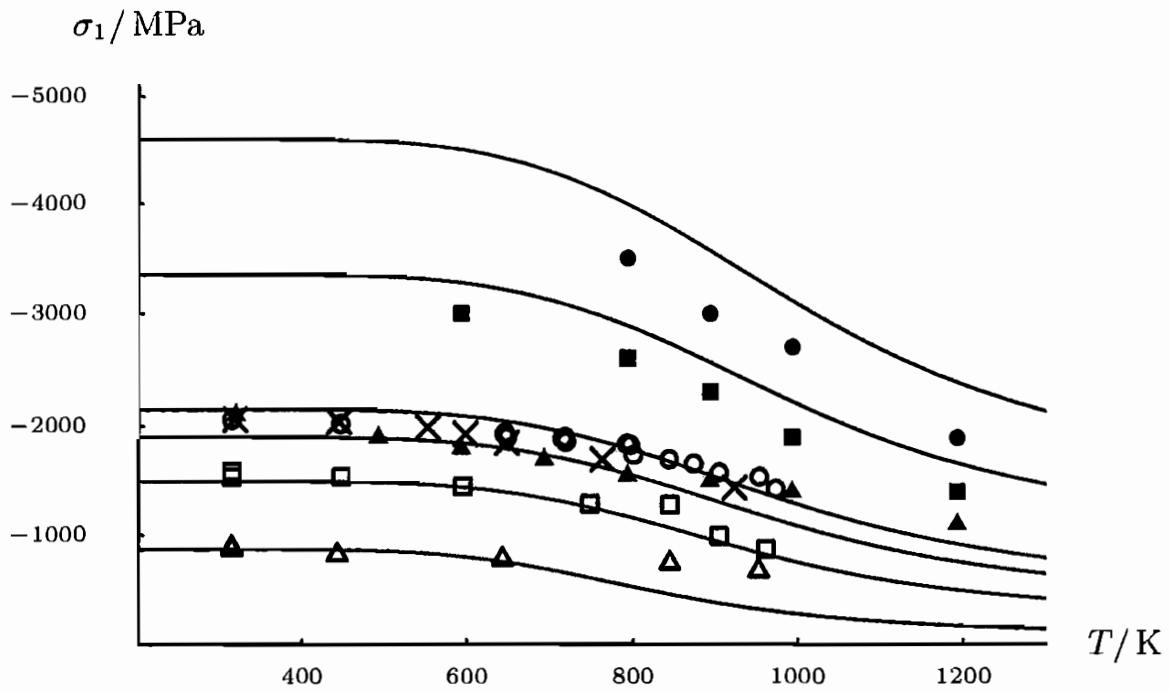


Abbildung 5.32: Festigkeiten von Westerly Granit für $\sigma_c = -400$ MPa \times aus [65], $\sigma_c = -80$ MPa Δ , -250 MPa Λ und -400 MPa \circ aus [90] und $\sigma_c = -500$ MPa N , -1000 MPa Ξ und -1500 MPa \bullet aus [89] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa, $d = 850\sqrt{10}$ MPa und $T_c = 850$ K für $\sigma_c = -80$ MPa, -250 MPa, -400 MPa, -500 MPa, -1000 MPa und -1500 MPa.

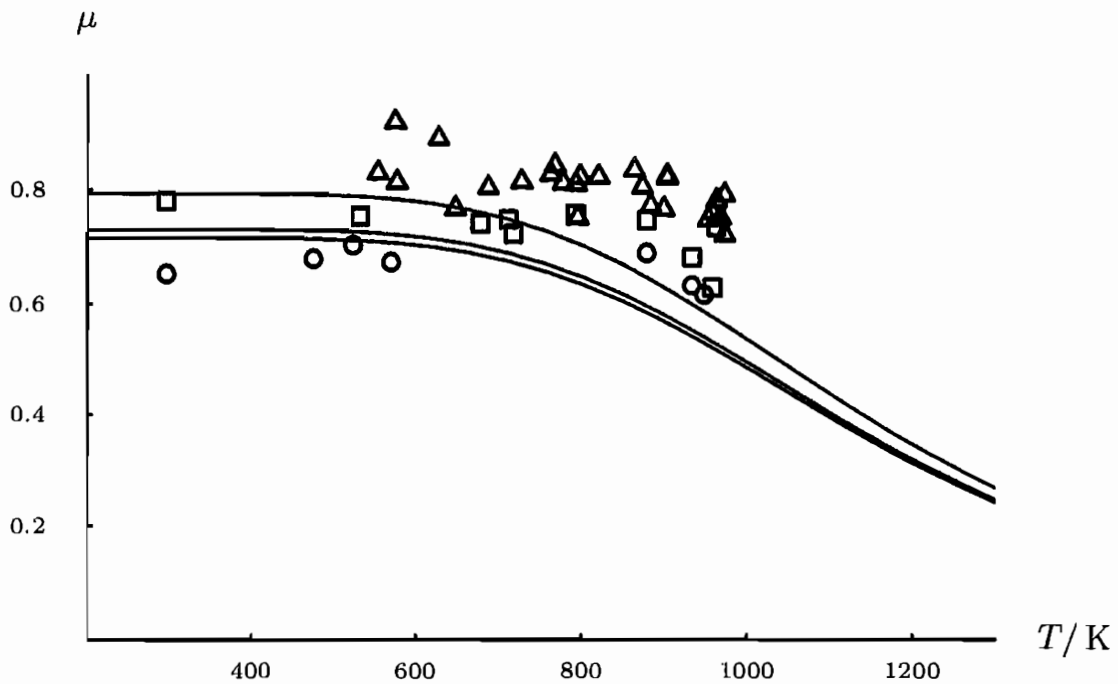


Abbildung 5.33: Reibungskoeffizienten für Westerly Granit für $\sigma_c = -250$ MPa Δ , -400 MPa Λ und -500 MPa \circ aus [65] mit $\phi = 58^\circ$, $b = 0,6$, $d = 850\sqrt{10}$ MPa und $T_c = 850$ K für $\sigma_c = -250$ MPa, -400 MPa und -500 MPa nach Gleichung (5.7).

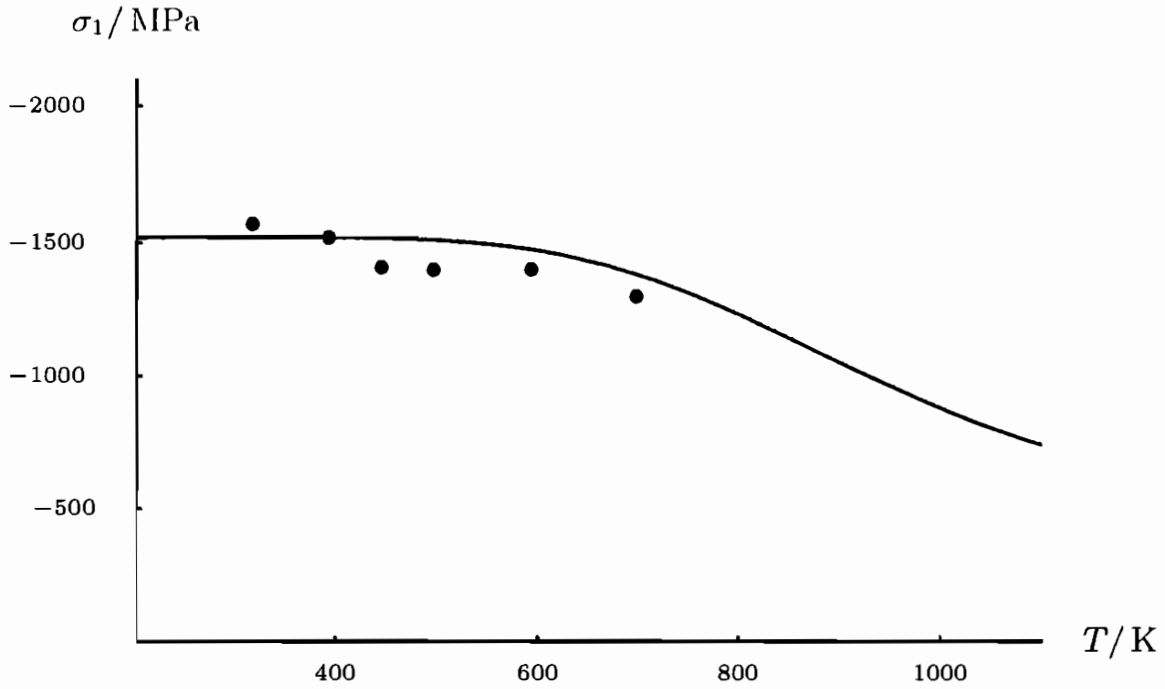


Abbildung 5.34: Festigkeiten von San Marcos Gabbro für $\sigma_c = -400$ MPa aus [65] mit $\phi = 48^\circ$, $b = 0,6$, $c = 7$ MPa, $d = 850\sqrt{10}$ MPa und $T_c = 800$ K für $\sigma_c = 400$ MPa.

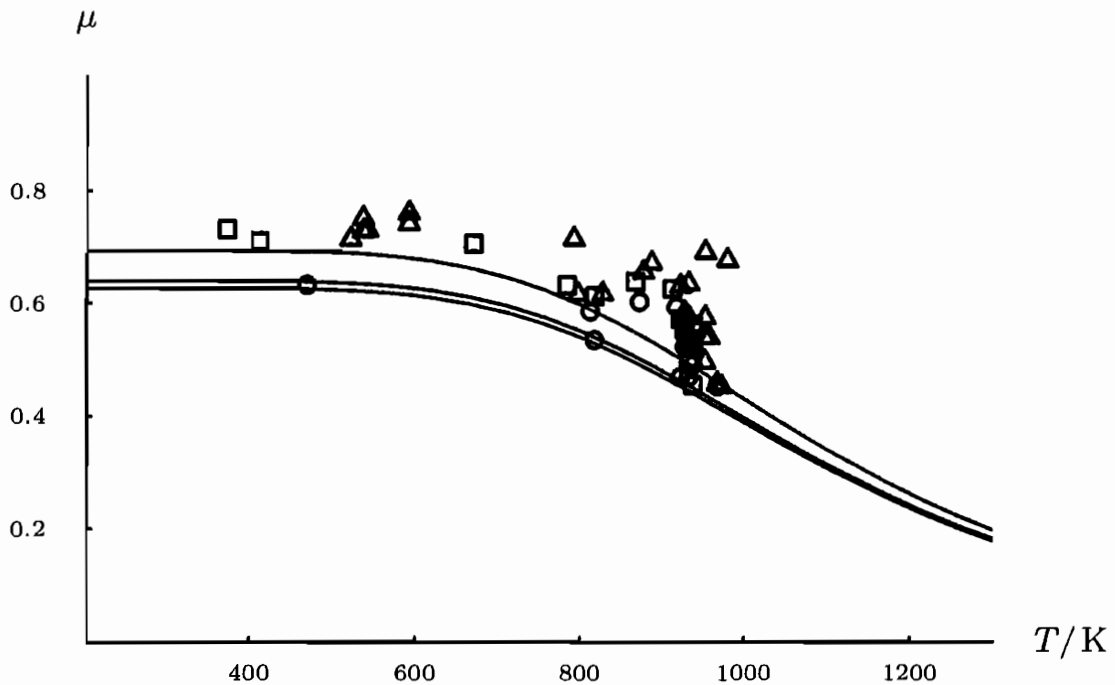


Abbildung 5.35: Reibungskoeffizienten von San Marcos Gabbro für $\sigma_c = -250$ MPa Δ , -400 MPa Λ und -500 MPa \circ aus [65] mit $\phi = 48^\circ$, $b = 0,6$, $d = 850\sqrt{10}$ MPa und $T_c = 800$ K für $\sigma_c = -250$ MPa, -400 MPa und -500 MPa nach Gleichung (5.7).

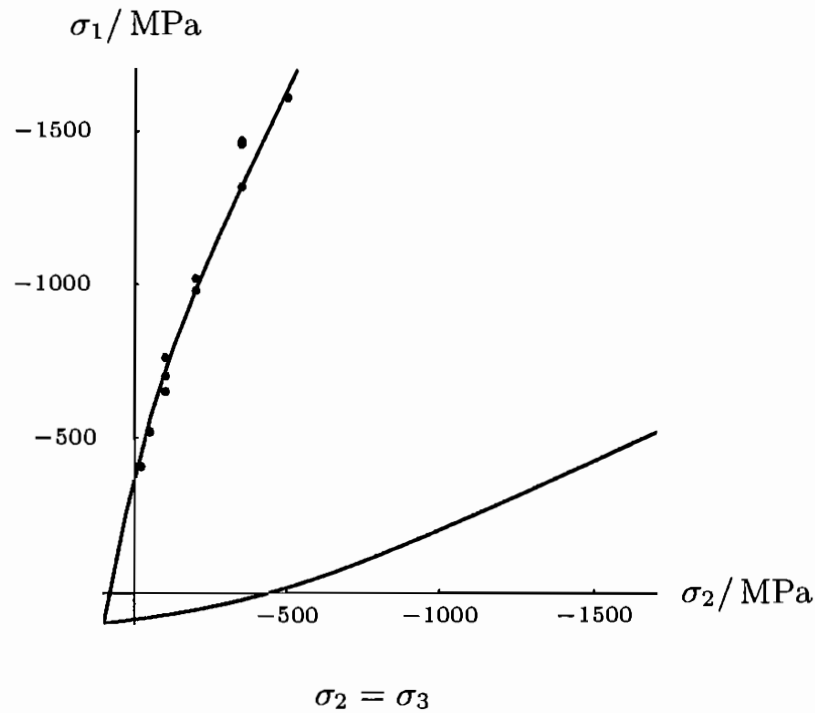


Abbildung 5.36: Festigkeiten verschiedener Serpentine bei Raumtemperatur aus [28] mit $\phi = 45^\circ$, $b = 0,6$, $c = 100 \text{ MPa}$ und $d = 700\sqrt{10} \text{ MPa}$.

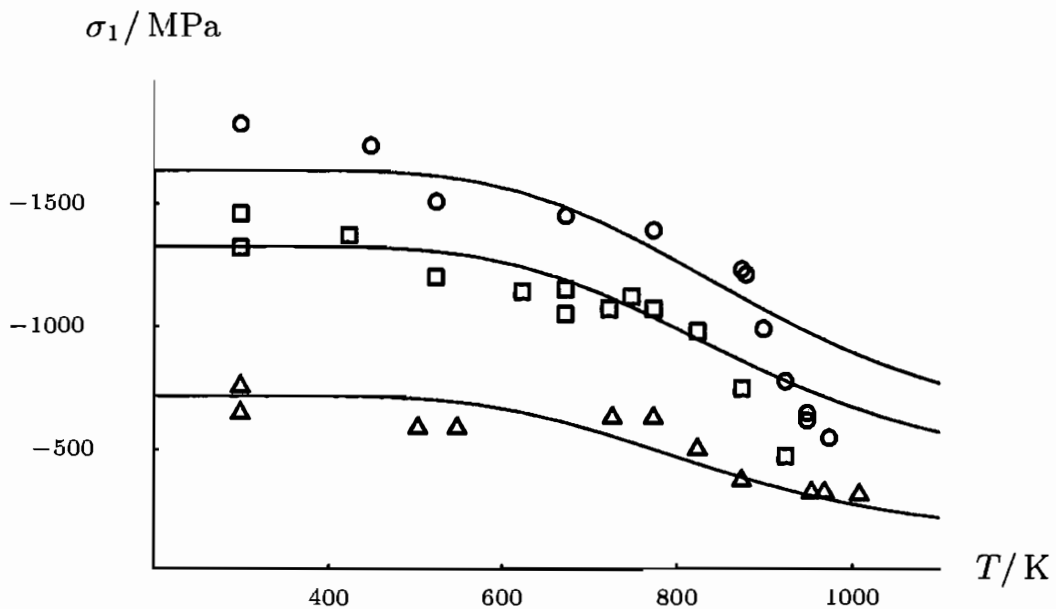


Abbildung 5.37: Festigkeiten verschiedener Serpentine für $\sigma_c = -100 \text{ MPa}$ Δ , -350 MPa \square und -500 MPa \circ aus [28] mit $\phi = 45^\circ$, $b = 0,6$, $c = 100 \text{ MPa}$, $d = 700\sqrt{10} \text{ MPa}$ und $T_c = 700 \text{ K}$ für $\sigma_c = -100 \text{ MPa}$, -350 MPa und -500 MPa nach Gleichung (5.7).

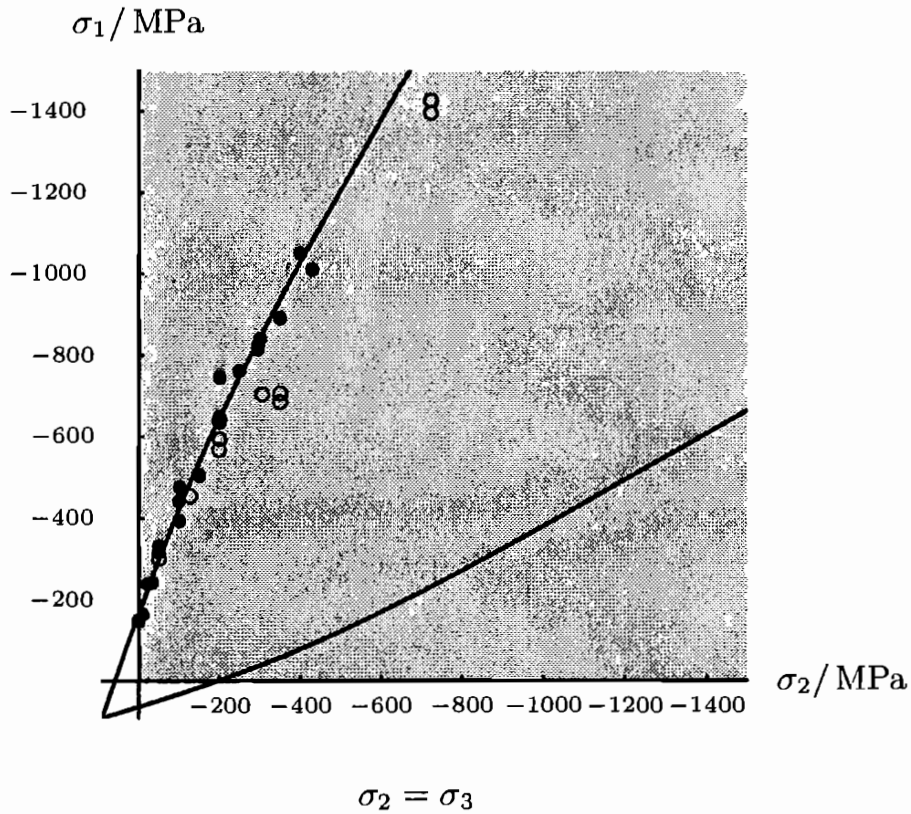


Abbildung 5.38: Festigkeiten von Lizardit (AII60 5) \circ aus [91] und Balsam Gap Dunit \bullet aus [92] mit $\phi = 32^\circ$, $b = 0,6$, $c = 90$ MPa und $d = 700\sqrt{10}$ MPa.

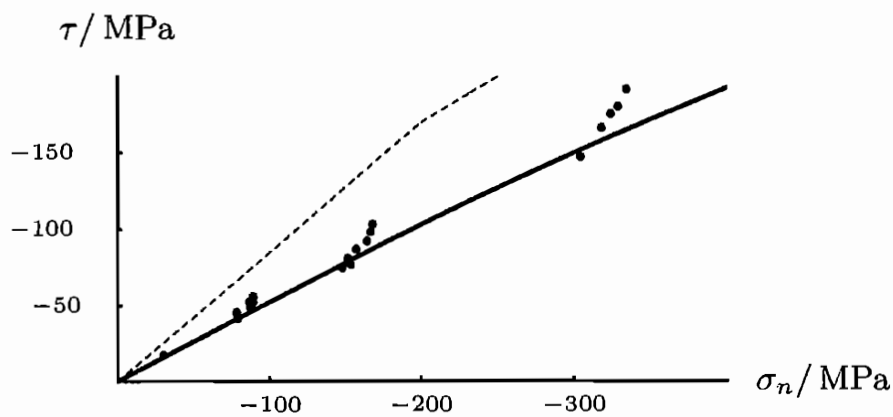


Abbildung 5.39: Reibfestigkeiten von vernetztem Serpentin aus [93] mit $\phi = 32^\circ$, $b = 0,6$ und $d = 700\sqrt{10}$ MPa nach Gleichung (5.3).

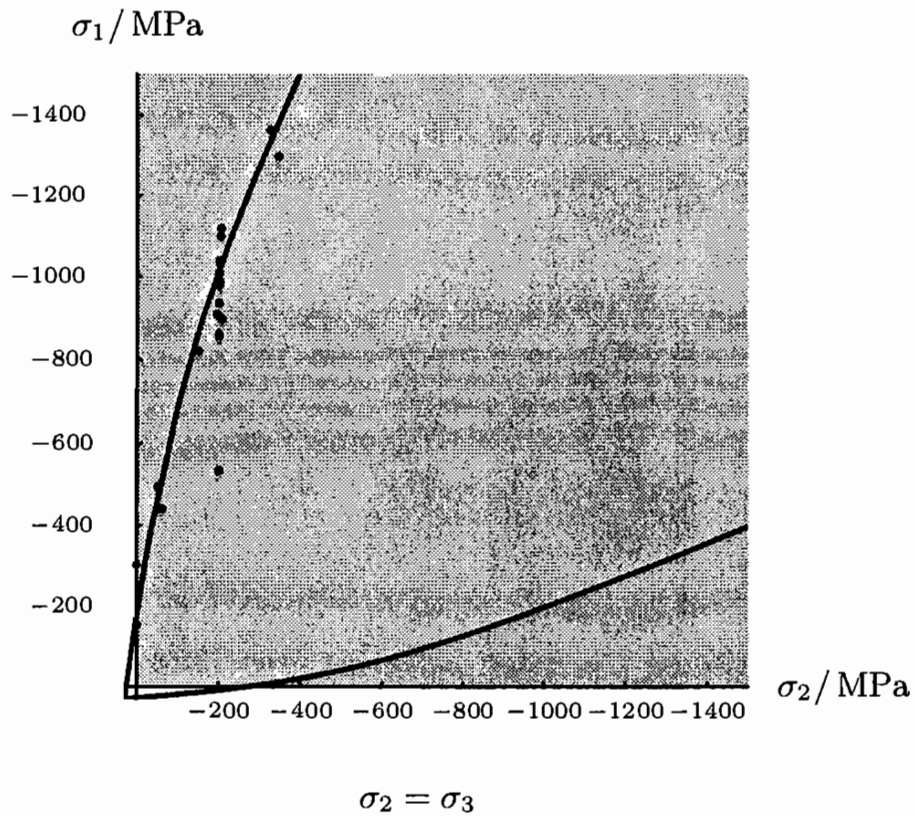


Abbildung 5.40: Festigkeiten von Antigorit aus [91] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 30$ MPa und $d = 700\sqrt{10}$ MPa.

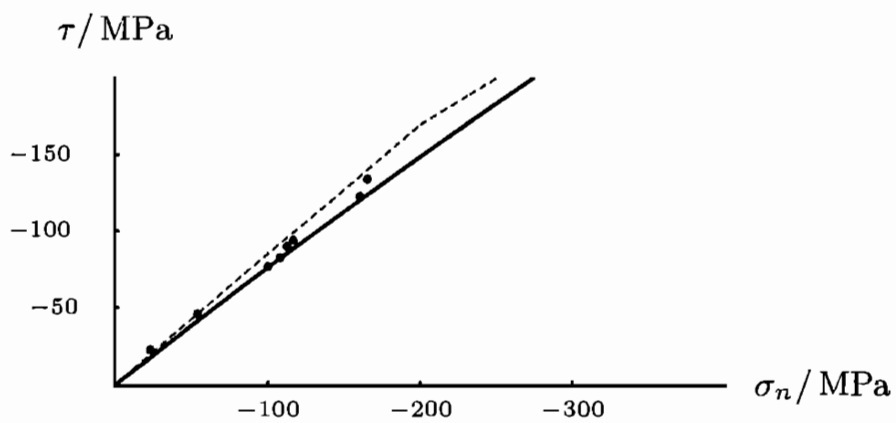


Abbildung 5.41: Reibfestigkeiten von Antigorit aus [93] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$ und $d = 700\sqrt{10}$ MPa nach Gleichung (5.3).

5.5 Werkstoffe

Der letzte Abschnitt soll künstlich hergestellte Materialien behandeln. Wenngleich diese Werkstoffe durch ihren unterschiedlichen Aufbau nicht direkt mit den Gesteinen verglichen werden können, so lässt sich dennoch überprüfen, ob die theoretischen Überlegungen gerechtfertigt sind. Werkstoffe zeichnen sich durch ihre genau untersuchte Zusammensetzung und die vielfach gemessenen Eigenschaften aus, die mit hoher Genauigkeit reproduzierbar sind.

Für die folgenden Untersuchungen soll nach wie vor Gleichung (5.1) als Grundlage dienen.

Diese Zusammenstellung beginnt mit duktilen und endet mit spröden Werkstoffen. So ist das erste untersuchte Material in Abbildung 5.42 ein Stahl. Die eingezeichneten Messwerte sind in diesem Fall Fließspannungen. Wie in Kapitel 4.3.2 gezeigt wurde, fallen für ein konstantes J_2 die Eingehüllte und das theoretische Festigkeitskriterium zusammen. Für eine konstante Hauptspannung wird dabei die Eingehüllte eine Ellipse. Die im Stahl zwischen der Fließspannung und der Festigkeit aktivierten physikalischen Mechanismen sind volumenerhaltend und können deshalb mit dem vorgestellten Versagenskriterium nicht abgebildet werden.

Als nächstes wird in Abbildung 5.43 ein Graphit untersucht. Der Kohlenstoff hat ein gut ermittelbares γ von ungefähr drei. Der Verlauf des Festigkeitskriteriums gibt die Messwerte gut wieder, auch für die gespiegelten Werte, die mit Kreisen markiert sind. Leider wurden für den Druckbereich keine weiteren Messungen gefunden, so dass keine weiteren Schlüsse gezogen werden können.

Eine Kombination der ersten beiden Materialien ist Gusseisen aus Abbildung 5.44. Gusseisen entsteht, wenn die Schmelze von Eisen und Kohlenstoff ein bestimmtes Mischungsverhältnis überschreitet. Dann kann sich je nach Abkühlgeschwindigkeit im Werkstoff zusätzlich das feste Fe-C Zementit ausbilden oder reines Graphit ausfallen. Beides verursacht eine Versprödung des Materials.

Zusätzlich sind in dieser Darstellung Messwerte eines geimpften Gusseisens eingetragen. Eine Impfung erfolgt durch Zugabe eines bestimmten Stoffs, der bei der Erstarrung der Schmelze dafür sorgt, dass sich weniger Zementit bildet und der Graphit eher in kugelig als in lamellarer Form ausfällt. Diese Methode kann bei fast gleicher chemischer Zusammensetzung die Zugfestigkeit wesentlich beeinflussen, da der Zementitgehalt niedriger ist und die Form der Graphiteinschlüsse Spannungs-konzentrationen abbaut. Unter Vernachlässigung der elastischen Eigenschaften des eingeschlossenen Graphits können die Veränderungen im Spannungsfeld durch lamellare oder kugelige Einschlüsse mit Abbildung 2.10 verdeutlicht werden. Wie in Abbildung 5.44 ersichtlich ist, verdoppelt das Impfen des Gusseisens fast die uniaxiale Zugfestigkeit. Die theoretische Versagenskurve wurde zur Anpassung nur im Parameter c verändert.

Ein anderes im Bauwesen verwendetes Material ist Beton. Die beiden wesentlichen Bestandteile von Betonen sind der Zuschlag und der Zement. Zuschläge sind granuläre Stoffe wie Sand oder Kies. Der Zement umschließt im flüssigen Zustand den Zuschlag und bildet nach der Aushärtung eine Matrix, die dem Beton Zugfestigkeit gibt. In Abbildung 5.45 sind Messwerte für Beton wiedergegeben. Wie in der triaxialen Ebene ersichtlich, hat Beton, wie die klastischen Sedimente, einen eher linearen Verlauf und macht so einen direkten Vergleich mit dem gestrichelt dargestellten Mohr-Coulomb Kriterium möglich. Die verwendeten Parameter in der Bildunterschrift sind für beide Kriterien gleich. Während die Anpassungen in der triaxialen Ebene noch gleichwertig erscheinen, liegen die Mohr-Coulomb Vorhersagen in allen anderen Schnitten zu niedrig.

Durch eine Verringerung des Verhältnisses von Wasser zu Zement bei der Betonherstellung ist es möglich, die Druckfestigkeit eines Betons mit dem gleichen Zuschlag zu erhöhen. Der Beton in Abbildung 5.46 ist mit einem geringeren Wassergehalt hergestellt worden. Der theoretische Verlauf passt sich dieser Veränderung mit einer einfachen Erhöhung von c an.

Einen ähnlichen Vergleich ermöglicht Abbildung 5.47 mit biaxialen Versuchen. Die Zugfestigkeit steigt bei einem sinkenden Verhältnis von Wasser zu Zement. Die Anpassung gelingt bis auf den Bereich um die uniaxiale Druckfestigkeit recht gut. Zum Vergleich wurde gestrichelt das Mohr-Coulomb Kriterium eingezeichnet. Dessen Parameter wurden so optimiert, dass sie Zug- und Druckfestigkeit erfüllen.

Ein Versuch für verschiedene π -Ebenen, ist in Abbildung 5.48 wiedergegeben. Der Stichprobenumfang lag bei sechs Versuchen pro Messpunkt. Die Streuung in triaxialer Extension ist offenbar wesentlich geringer als in triaxialer Kompression.

Das Verhalten eines festeren Betons zeigt Abbildung 5.49. Die theoretische Kurve hat mit $d = 300\sqrt{10}$ MPa einen mittleren Einfluss auf die Festigkeit und macht ihn sogar fast mit einem Sandstein vergleichbar.

Eine aktuellere Messung mit einem konstanten Spannungsverhältnis σ_3 zu σ_1 ist in Abbildung 5.50 dargestellt. Hier zeigen die Messpunkte einen mangelnden Zusammenhang, der eine Anpassung erschwert.

Die gesinterte Keramik in Abbildung 5.51 erreicht mit Abstand die größte uniaxiale Druckfestigkeit, obwohl die uniaxiale Zugfestigkeit mit $c = 200$ MPa auch sehr hoch ist. Der Verlauf der Kurve weist durch seinen Reibwinkel nahe 60° auf eine sehr spröde Charakteristik hin.

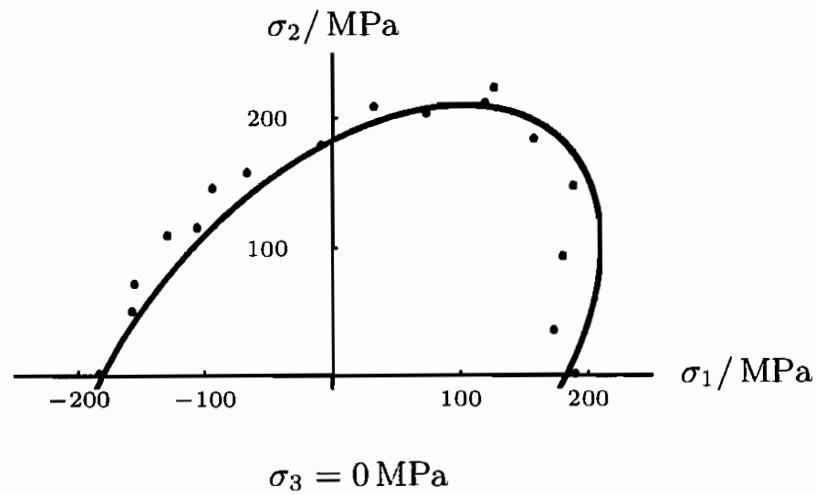


Abbildung 5.42: Fließspannungen von X6 CrNi 18 11 Stahl aus [94]
mit $\phi \rightarrow 0^\circ$, $b = 1$ und $c \rightarrow \frac{103}{\sin(\phi)} \text{ MPa}$.

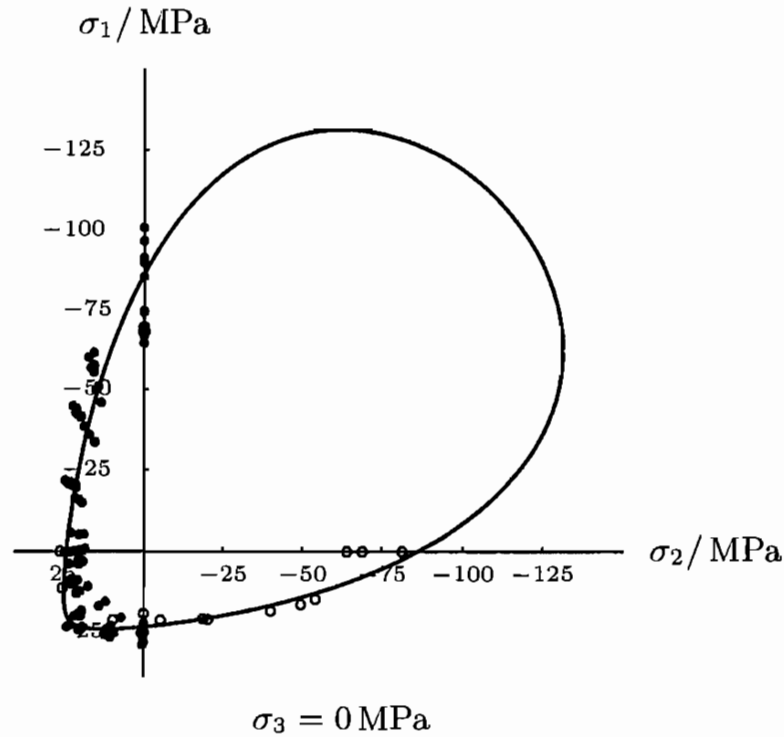


Abbildung 5.43: Festigkeiten von Graphit aus \bullet [95] und \circ [96] mit $\phi = 39^\circ$, $b = 0,6$, $c = 30 \text{ MPa}$ und $d = 400\sqrt{10} \text{ MPa}$.

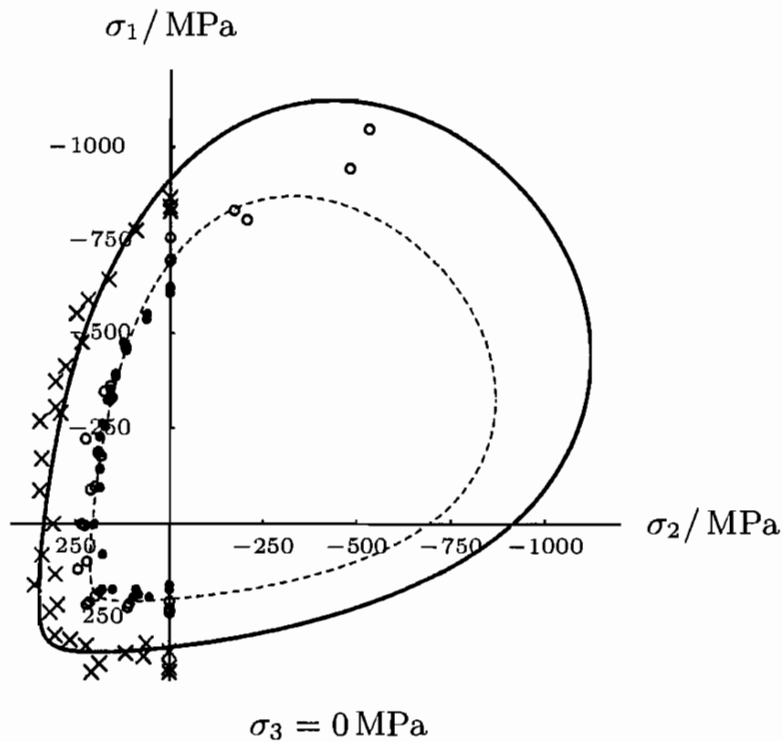


Abbildung 5.44: Festigkeiten von grauem Gusseisen aus \circ [97], \bullet [98] und geimpftem Gusseisen aus \times [99] mit $\phi = 45^\circ$, $b = 0,6$, $c = 400 \text{ MPa}$ und $d = 700\sqrt{10} \text{ MPa}$. Alternativ: $\phi = 45^\circ$, $b = 0,6$, $c = 240 \text{ MPa}$ und $d = 700\sqrt{10} \text{ MPa}$.

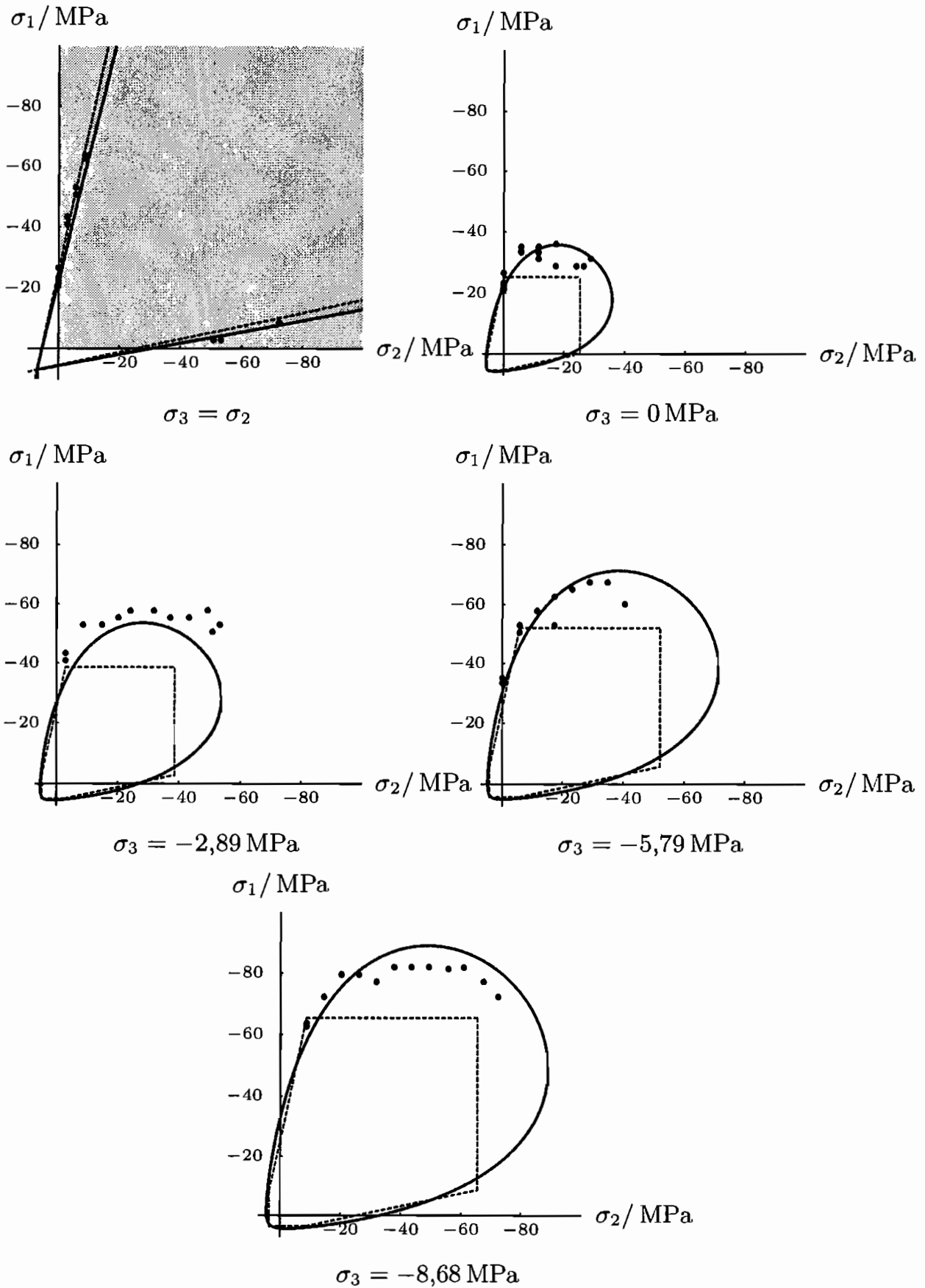


Abbildung 5.45: Festigkeiten von Beton (Mix A) aus [100] mit $\phi = 40^\circ$, $b = 1$ und $c = 7$ MPa. Alternativ nach Gleichung (3.9): $\phi_{MC} = 40^\circ$ und $c_{MC} = 7$ MPa.

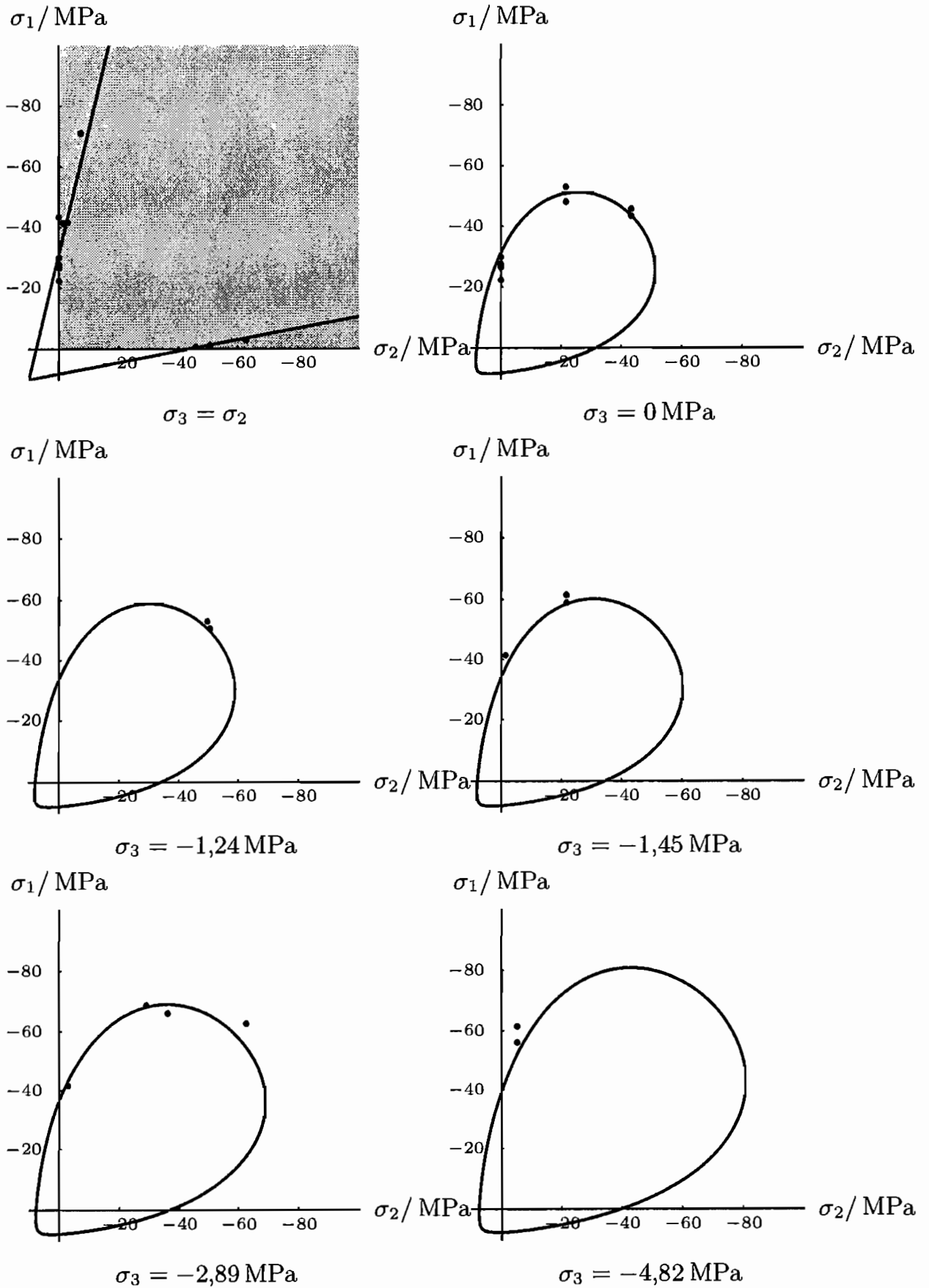


Abbildung 5.46: Festigkeiten von Beton (Mix B) aus [100] mit $\phi = 40^\circ$, $b = 1$ und $c = 10 \text{ MPa}$.

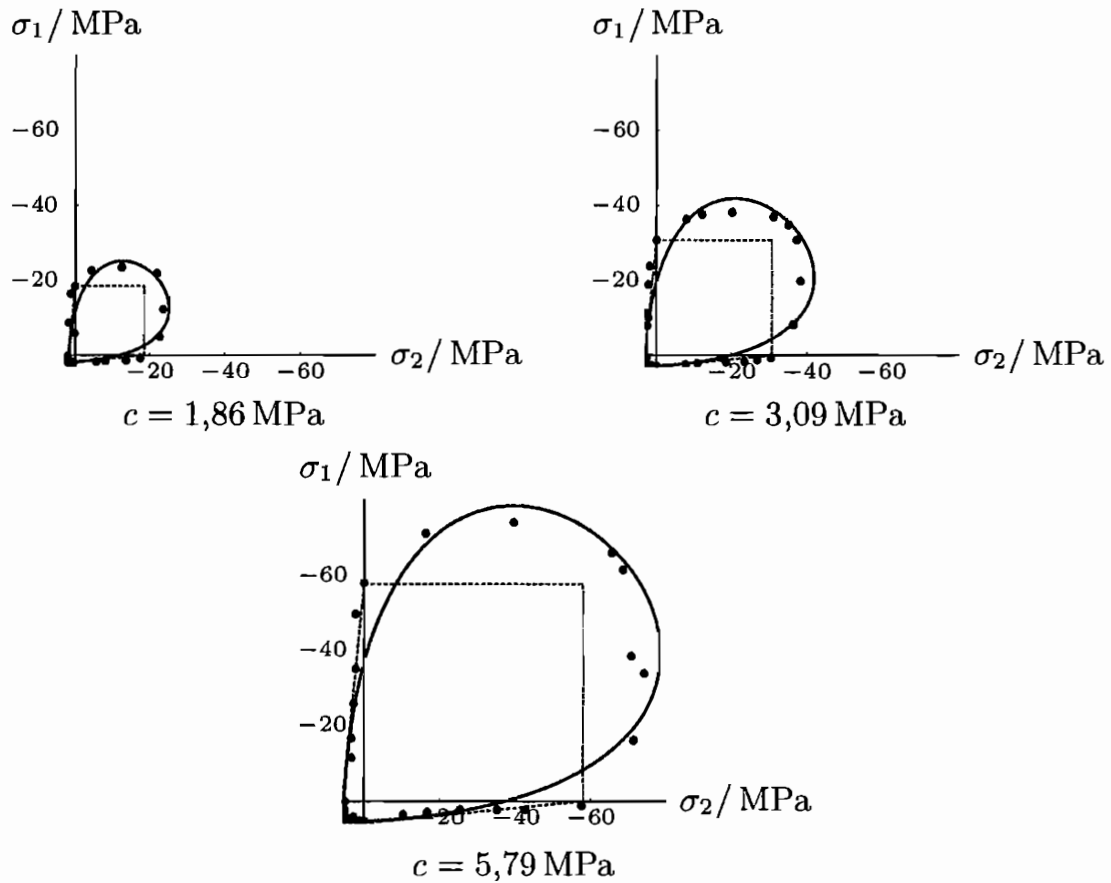


Abbildung 5.47: Festigkeiten von Beton aus [101] für $\sigma_3 = 0$ MPa mit $\phi = 50^\circ$ und $b = 1$. Alternativ nach Gleichung (3.9): $\phi_{MC} = 55^\circ$ und $c_{MC} = 10/9 c$ MPa

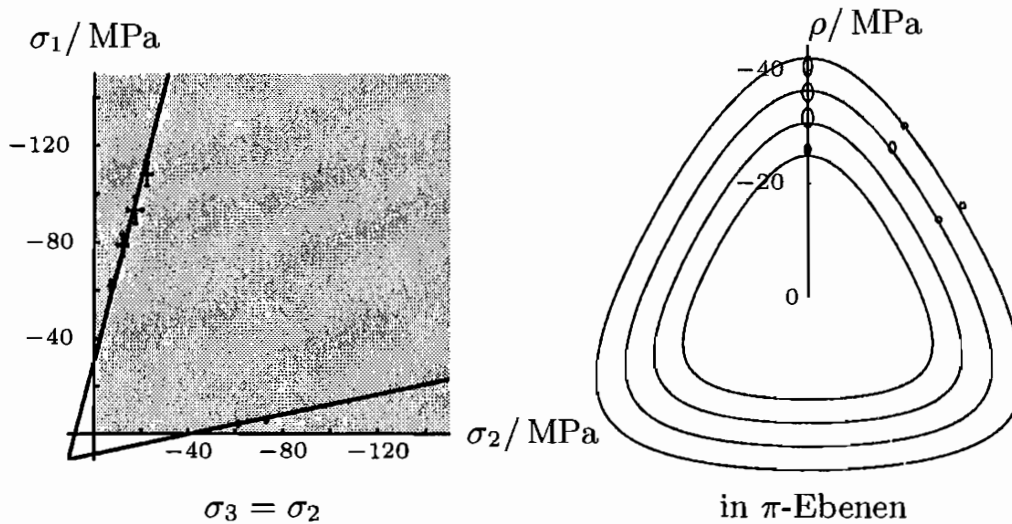


Abbildung 5.48: Festigkeiten von Beton aus [102] mit $\phi = 38^\circ$, $b = 1$ und $c = 11$ MPa.

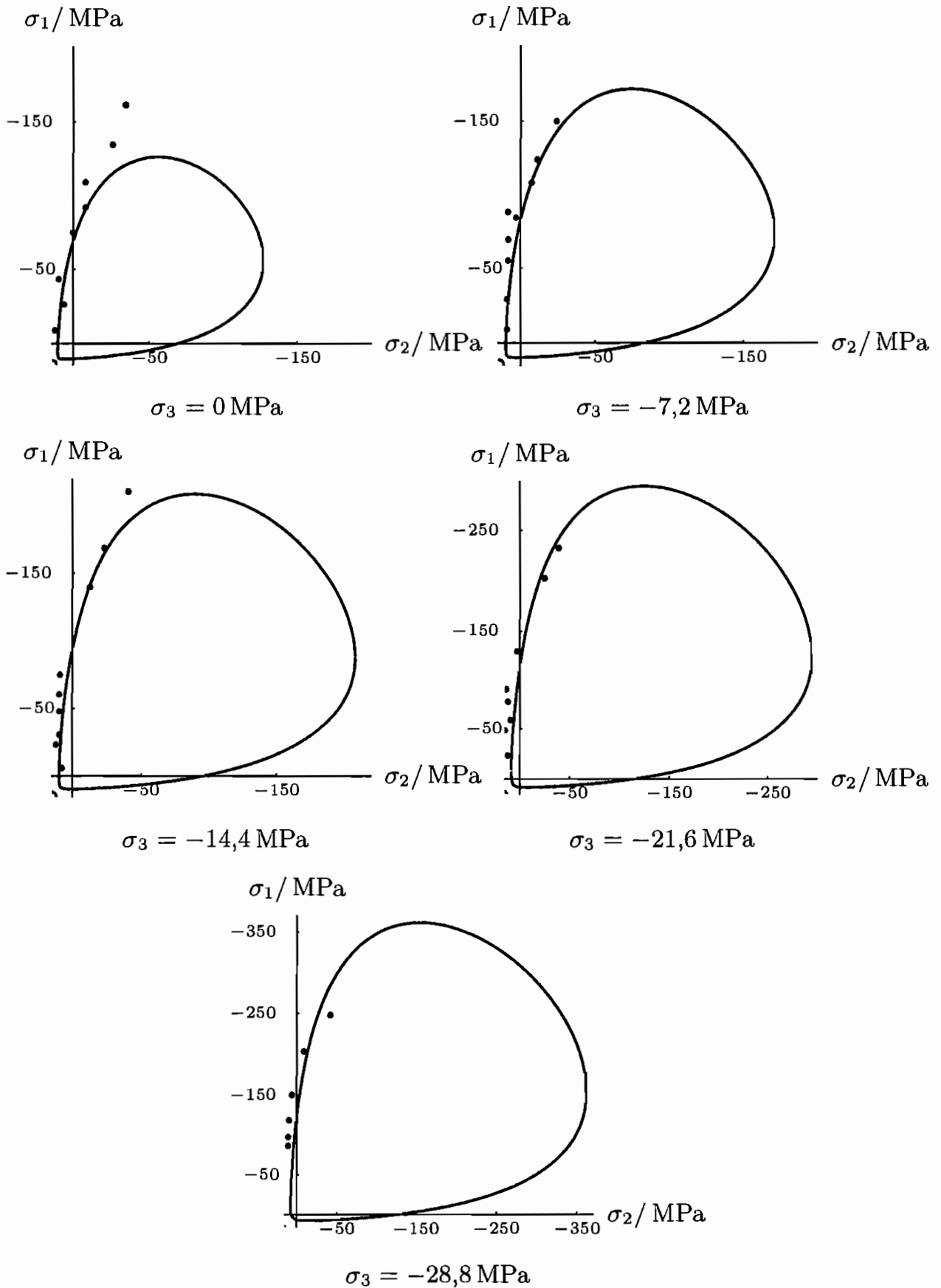


Abbildung 5.49: Festigkeiten von Beton L.M.S. aus [103] mit $\phi = 50^\circ$, $b = 0,6$, $c = 11 \text{ MPa}$ und $d = 300\sqrt{10} \text{ MPa}$.

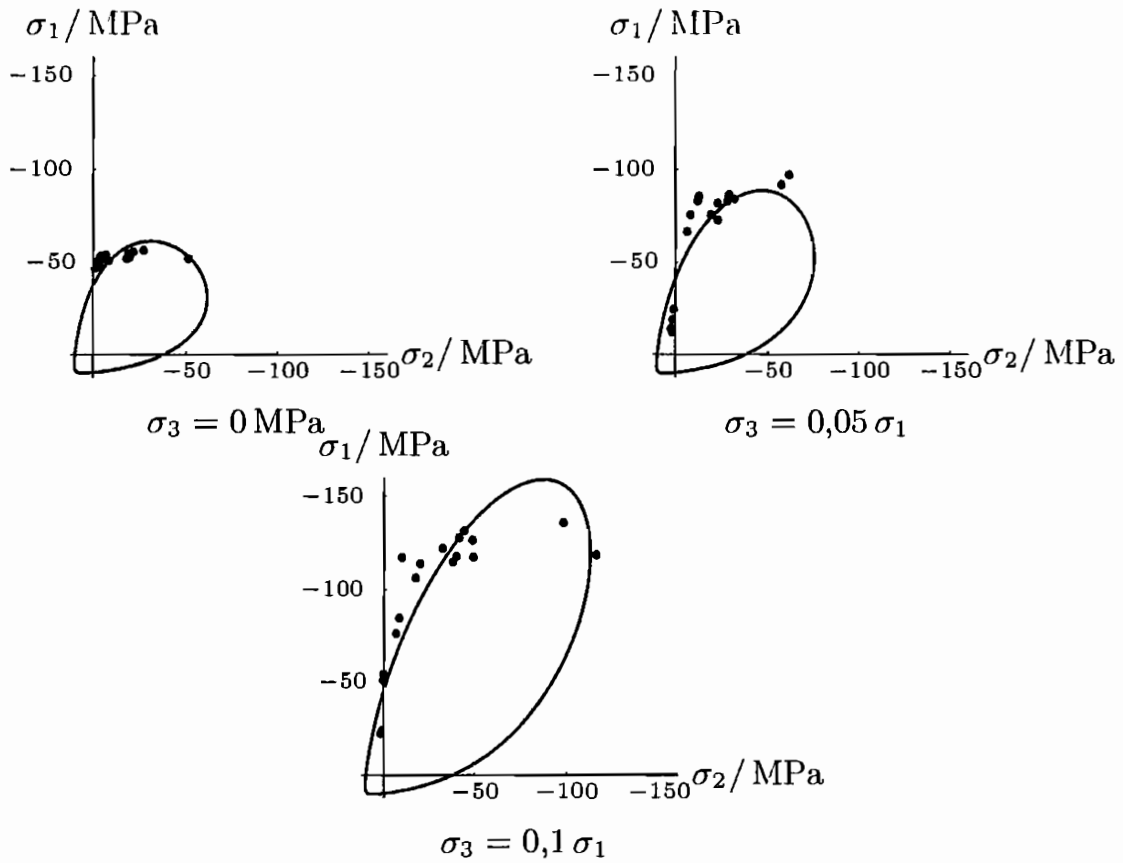


Abbildung 5.50: Festigkeiten von Beton aus [104] mit $\phi = 40^\circ$, $b = 1$ und $c = 12$ MPa.

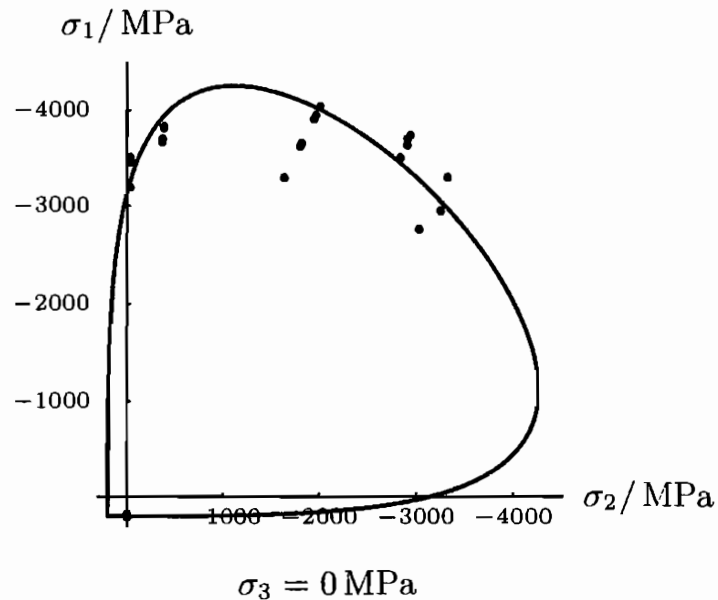
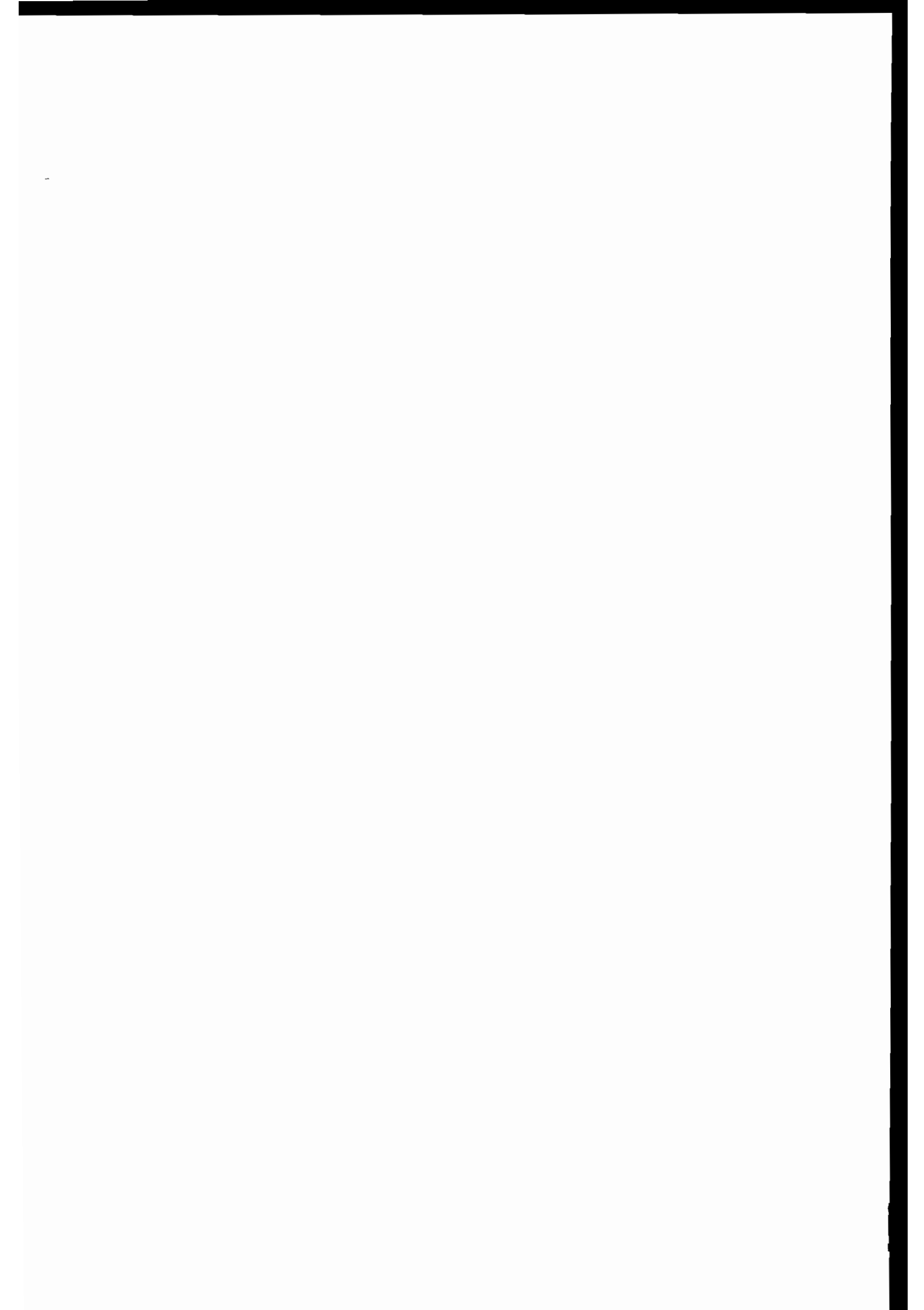


Abbildung 5.51: Festigkeiten von gesinterter Keramik aus [105] mit $\phi = 59,8^\circ$, $b = 0,6$, $c = 200$ MPa und $d = 4200\sqrt{10}$ MPa.



6 Diskussion und Ausblick

6.1 Diskussion

Festigkeitskriterium

Um eine Einteilung verschiedenster Materialien durch deren mechanische Kenngrößen zu erhalten, wurde ein neues Festigkeitskriterium entwickelt. Mit nur vier Parametern liefert es gute Anpassungsergebnisse für ein reichhaltiges Spektrum unterschiedlichster Stoffe und bietet so die Möglichkeit mit einem Vergleich der Parameter untereinander, Rückschlüsse auf die essentiellen Verformungsmechanismen in den Materialien selbst zu ziehen.

Das Kriterium ist als dreidimensionale Beschreibung entwickelt worden und basiert auf einer eingehüllten Funktion, die das Einsetzen der Dilatanz repräsentiert. Die Eingehüllte ist eine Funktion der hydrostatischen Spannung. Daraus ergibt sich, dass auch das Festigkeitskriterium nur von der hydrostatischen Spannung abhängig ist. Bei den Untersuchungen wurden zur Beschreibung der Eingehüllten der Reibwinkelparameter ϕ und der Translationsparameter c verwendet. Sie sind vergleichbar mit den Parametern, die in den klassischen Formulierungen verwendet werden. Um Übergangsphänomene der Festigkeitskurve abzubilden, wurden zusätzlich in der Eingehüllten der Wendepunkt der Steigungsänderung d und der zugehörige Betrag b der Steigungsänderung eingeführt.

Eine erste Analyse der Gesteine hat ergeben, dass sich für ein konstantes b die Parameter d und ϕ dazu eignen, die Gesteine grob zu kategorisieren. Der Parameter d wächst angefangen bei den Sedimenten, zu den Metamorphiten und weiter zu den Magmatiten stark an. Damit folgt er qualitativ den hydrostatischen Drücken unter denen das Gestein entstand. Der Reibwinkel ϕ hingegen kann durchaus vergleichbar groß zwischen den Sedimenten und den Magmatiten sein, wohingegen er für die Metamorphite etwas niedriger ausfällt. Für Gabbro, Amphibolit und Granit nimmt er bei sonst fast identischen Parametern zu. Der Parameter c beeinflusst die theoretische Zugfestigkeit. Da es nur wenige Messergebnisse in diesem Teil des Hauptspannungsraums gibt, ist c somit nur ungenau bestimmbar.

Die Ergebnisse lassen vermuten, dass eine Beziehung zwischen den Parametern und den für ein Material charakteristischen Größen besteht. Dabei ist d der Parameter, der scheinbar von der Porosität beeinflusst ist. Der Reibwinkel ϕ ist in großen Teilen von der Mineralzusammensetzung bestimmt. So wird zum Beispiel auf Seite 119 der Reibwinkel eines Dunits durch einen geringen Anteil Lizardit drastisch reduziert. Wie schwer es ist allgemeingültige Aussagen für solche Beziehungen zu finden, macht

das Beispiel des sehr porösen Magmatits Trachyt auf Seite 108 deutlich. Die Porosität hat hier zusätzlich einen Einfluss auf den Reibwinkel.

Mit Hilfe dieses Festigkeitskriteriums kann untersucht werden, bei welchem hydrostatischen Druck Übergangsphänomene eingeleitet werden und wie ausgeprägt diese sind. Wichtiger ist jedoch die Tatsache, dass die komplexe räumliche Verteilung der Festigkeiten im Hauptspannungsraum durch eine Funktion beschrieben werden kann, die nur von der hydrostatischen Spannung abhängig ist.

Vergleich zu bestehenden Kriterien

Das neu entwickelte Kriterium beinhaltet einige aus der Literatur bekannte Festigkeitskriterien als Sonderfälle einer globalen Formulierung. Es kann im Grenzwert der Parameter ein Rankine, Lade und von-Mises Kriterium abbilden.

Zusätzlich hat es die Möglichkeit diese Sonderfälle über eine Funktion der hydrostatischen Spannung zu einem gesamten Festigkeitskriterium zusammenzufügen.

Das Festigkeitskriterium ist zudem so entwickelt worden, dass es einfach vergleichbar zum Mohr-Coulomb Kriterium ist. Das Mohr-Coulomb Kriterium hat einen linearen Verlauf in der triaxialen Hauptspannungsebene. Die Festigkeiten von Beton auf Seite 125 weisen dieses Verhalten auf und sind daher ideal, um das neu entwickelte mit dem Mohr-Coulomb Kriterium zu vergleichen. An diesem Beispiel ist ersichtlich, dass für identische Parameter beide Prognosen in der grau hinterlegten triaxialen Ebene gleichwertig sind. Allerdings liegen die Mohr-Coulomb Vorhersagen für unterschiedliche Spannungsniveaus unter den Messwerten, während das neue Kriterium eine sehr gute Vorhersagen erzielt.

Reibung

Der Reibwiderstand selbst ist eine Eigenschaft, die für eine Oberfläche definiert ist. Er hängt im Unterschied zur Kohäsion von der Normalspannung ab, die auf der Oberfläche wirkt. Das er in einem konstanten Verhältnis zur Normalspannung steht, ist kein Gesetz, sondern eine makroskopische Materialeigenschaft, die vielfach beobachtet wird.

Ein sehr interessanter Aspekt ist, dass sich mit dem neu entwickelten Kriterium die Oberflächeneigenschaft Reibung als Kontinuumseigenschaft der Festigkeit beschreiben lässt. Für vier Gesteine gelingt es die gemessenen Reibwiderstände mit Hilfe der Reibparameter ϕ , b und d abzubilden, die zuvor durch eine Anpassung an Festigkeiten bestimmt wurden. Mit den Annahmen, dass $\sigma_n = \frac{I_1}{3}$ und $\tau = \sqrt{-J_2}$ ist, sind diese Ergebnisse auf den Seiten 85, 96, 119 und 120 dargestellt. Weitere Bestätigungen bleiben wegen fehlender Messreihen zur Bestimmung der Reibwiderstände aus.

Zusätzlich korreliert in verschiedenen Beispielen das Einsetzen der Dilatanz mit der Überschreitung der Eingehüllten, welche ebenfalls die internen Reibparameter verwendet.

Die eingeführten Reibparameter sind demnach als physikalisch reale Reibungskoeffizienten interpretierbar. Die Untersuchungen an allen Gesteinen zeigen, dass der Rei-

bungskoeffizient keineswegs konstant ist. Er nimmt mit steigender Normalspannung ab.

Drei unterschiedliche Versagensarten

Der wesentliche Vorteil des in dieser Arbeit vorgestellten Festigkeitskriteriums ist, dass es die Fähigkeit hat drei unterschiedliche Mechanismen des Versagens in einer einheitlichen Beschreibung zusammenzufassen. Obwohl die Ursachen unterschiedlich sind, ist eine einheitliche Beschreibung sinnvoll, da nie ein Mechanismus separat auftritt. Vielmehr sind immer alle aktiv und unterscheiden sich nur in der Häufigkeit ihres Auftretens, dass in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck definiert werden kann. Abbildung 6.1 gibt schematisch die Bereiche an, die unterschiedlichen Ursachen zugeordnet werden können.

- **Bereich I: Sprödes Versagen oder Rankine Kriterium**
Für positive oder geringe hydrostatische Drücke wachsen Risse vornehmlich unter Zugbeanspruchung. Sie können sich ungehemmt ausbreiten und führen so zu einem schlagartigen spröden Versagen. Ein Mikromodell zur Abbildung dieser Risse kann zum Beispiel das von Griffith sein.
- **Bereich II: Reibungsdominiertes Versagen oder Lade Kriterium**
Für wachsende hydrostatische Drücke jedoch werden die Zugrisse unterdrückt und allmählich von gehemmt ausbreitenden Rissen abgelöst. Sie können durch ein Abgleiten entlang bestehender Oberflächen oder durch rotierende Körner verursacht werden. In den zunehmenden Kontakten ist der wachsende Einfluss der Reibung erklärt. Die durch diese Ursachen hervorgerufene makroskopische Verformung vor dem Versagen heißt kataklastisches Fließen. Ein Mikromodell, das all diese Eigenschaften vereint, ist der Extensionsriss.
- **Bereich III: Kohäsionsdominiertes Versagen oder von-Mises Kriterium**
Für einen hohen hydrostatischen Druck werden nun die Reibeffekte selbst unterdrückt und sind nicht ausreichend, um die überschüssige Energie abzuführen. Das Material wird gezwungen neue Verformungsmechanismen zu aktivieren. Es treten zum Beispiel vermehrt Versetzungswanderungen oder Zwillingsbildungen auf. Auf der makroskopischen Ebene bildet sich plastisches Fließen, das hauptsächlich volumenkonstant ist. Der Einfluss der hydrostatischen Spannung wird abgebaut und ermöglicht in diesem Bereich eine Beschreibung nach dem von-Mises Kriterium für Metalle.

Bedeutung für eine Modellierung der Lithosphäre

Mit diesen Ergebnissen lassen sich für eine Modellierung der Lithosphäre einige Konsequenzen ziehen. Die durchgeführten Untersuchungen bestätigen die Byerlee-Beobachtung, wonach sich der Reibungskoeffizient für unterschiedliche Gesteine unter hohen Drücken kaum unterscheidet. Weiterhin zeigt sich, dass der Reibungskoeffizient tatsächlich mit steigender Normalspannung abnimmt.

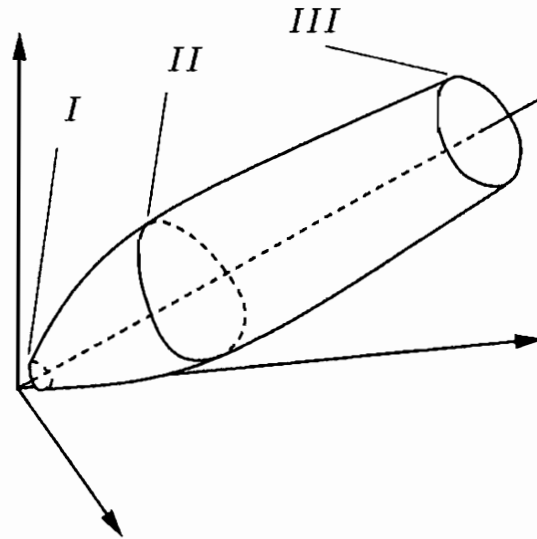


Abbildung 6.1: Bereiche der dominanten Versagenssysteme im Hauptspannungsraum.

Das bedeutet jedoch nicht, dass die Festigkeit aller Gesteine unter hohen hydrostatischen Drücken vergleichbar ist. Die Untersuchungen des hier vorgestellten Festigkeitskriteriums zeigen, dass kleine Änderungen des theoretischen Reibungskoeffizienten, der durch den Sinus des Reibwinkels definiert ist, durchaus große Änderungen der vorhergesagten Festigkeit bewirken. Wenn sich die Kruste durch ein Kontinuum abbilden lässt, dann kann die globale Festigkeit derselben je nach Zusammensetzung erheblich variieren. Somit könnte ein wesentlicher Unterschied im mechanischen Verhalten der ozeanischen und der kontinentalen Kruste aufgedeckt werden.

Durch die Möglichkeit, die Parameter des Festigkeitskriteriums physikalisch zu interpretieren, können die Einflüsse von Wassergehalt und Temperatur in der Kruste einfach abgeschätzt werden. Die vertikale Spannung eines Punkts in der Kruste ist durch die mittlere Dichte der über ihm liegenden Gesteinssäule bestimmt. Die durch die vertikale Spannung hervorgerufene radiale Spannung hängt von der Art des Materials ab. Sicher ist, dass das Verhältnis von radialer und vertikaler Spannung zwischen Null für ein ideal elastisches Material bei keiner Dehnungsbehinderung und Eins für ein reines Fluid liegt. Mit all diesen Annahmen ist es nun möglich eine Abschätzung der Restfestigkeit einer ungestörten Gesteinssäule in Abhängigkeit von der Tiefe zu ermitteln. Damit kann auf die Kräfte geschlossen werden, die nötig wären, um eine derartige Säule versagen zu lassen.

Das Kriterium bildet Sand genauso wie Gestein ab, wenn die fehlende Zugfestigkeit des Sands mit $c = 0$ berücksichtigt wird. Daraus lässt sich schließen, dass der Grad der Zerklüftung bei einem durch Reibung dominierten Material keinen großen Einfluss auf den Versagenspunkt hat. Für eine Modellierung der Lithosphäre bedeutet dies, dass es nicht notwendig ist die Topologie der Klüfte und Störungen detailliert abzubilden.

Dies wird den Aufwand einer Modellierung erheblich minimieren, sodass ein viel größerer Bereich der Lithosphäre computergestützt untersucht werden kann. Allerdings sollten alle Analogieschlüsse genau überprüft werden, da die Porosität von Sand sehr groß ist.

6.2 Ausblick

Theorie

Es gibt Hinweise, dass ein Versagen dann eintritt, wenn ein Material keine zusätzliche Energie speichern oder überschüssige Energie nicht mehr abführen kann. Ein elastischer Festkörper hat zwei unterschiedliche Mechanismen Energie zu transportieren oder zu speichern. Der eine ist mit dem Kompressionsmodul, der andere mit dem Gestaltänderungsmodul verbunden. Die theoretischen Konzepte unterscheiden weiter ein diffuses Versagen bei einer unermöglichten Speicherung und ein lokalisiertes Versagen bei einem unermöglichten Transport der Energie. Das in dieser Arbeit unterstellte Reibverhalten postuliert eine Grenze der Gestaltänderungsenergie, die im Unterschied zur Gestaltänderungsenergie der Metallplastizität vom hydrostatischen Druck abhängig ist. Dies ist genau der Teil der Energie, den auch die Fluide nicht speichern können. Aber selbst die sehr duktilen Metalle versagen bei niedrigen Temperaturen spröde und werden bei hohen Temperaturen flüssig. Gibt es einen energetischen Zusammenhang zwischen dem hydrostatischen Druck und der Temperatur? Für die Untersuchung der Lithosphäre wird es von großer Wichtigkeit sein, die dominanten Energietransportmechanismen mit den räumlichen wie zeitlichen Dimensionen zu verbinden.

Experimente

Das vorgestellte Festigkeitskriterium muss weiter experimentell verifiziert werden. Dazu sollten in Zukunft Festigkeitsversuche immer von Reibfestigkeitsversuchen begleitet werden. Weiterhin sollte die Identifikation der Übergänge im mechanischen Verhalten nicht nur anhand der üblichen Verdächtigen wie dem hydrostatischen Druck und der Temperatur erfolgen, sondern auch in Abhängigkeit von Strukturgrößen wie mineralogische Zusammensetzung, Porosität, Gefügecharakteristik und Wassergehalt durchgeführt werden.

Die experimentellen Daten decken den Bereich der triaxialen Extension nur ungenügend ab. Deswegen sollten zur Untersuchung dieses Bereichs weitere Versuche durchgeführt werden. Sie sollten im Spannungsraum entlang einer triaxialen Kompression und einer triaxialen Extension in der selben π -Ebene geregelt werden. Dadurch können zusätzlich zu den Festigkeiten die Volumenänderungen aufgezeichnet und direkt zwischen den Spannungspfaden verglichen werden.

Diese Versuche sollten jedoch nicht auf Gesteine beschränkt bleiben. So fehlen ebenfalls für Metalle Daten von Fließspannungen für beliebige dreidimensionale Spannungszustände.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial data. This includes not only sales and purchases but also expenses and income. The document provides a detailed list of items that should be tracked, such as inventory levels, supplier payments, and customer orders. It also outlines the procedures for reconciling accounts and resolving any discrepancies that may arise.

The second part of the document focuses on the role of the accounting department in providing accurate and timely financial information to management. It highlights the need for clear communication and collaboration between the accounting team and other departments. The document describes the various reports and statements that are prepared, such as the balance sheet, income statement, and cash flow statement. It also discusses the importance of analyzing these reports to identify trends and make informed decisions.

The third part of the document addresses the challenges of managing a large volume of transactions and the need for efficient systems and processes. It discusses the use of accounting software and the importance of regular backups and security measures. The document also provides tips for streamlining the accounting process and reducing the risk of errors. Finally, it concludes with a summary of the key points and a call to action for all employees to work together to ensure the success of the organization.

A Haigh-Weestergard Koordinaten

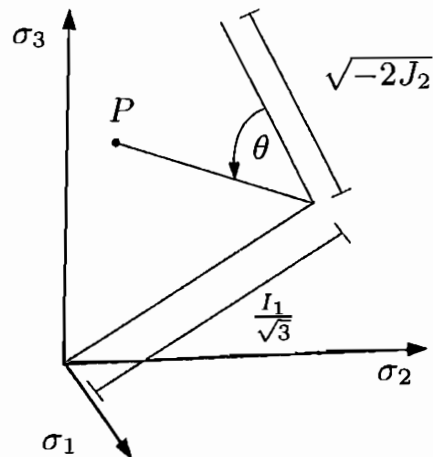


Abbildung A.1: Spannungsinvarianten im Hauptspannungsraum.

Die geometrische Interpretation der Spannungsinvarianten im Hauptspannungsraum kann in Abbildung A.1 ersehen werden. Die Lage des Punktes P ist bestimmt durch Zylinderkoordinaten, wobei die Längsachse des Zylinderkoordinatensystems mit der hydrostatischen Achse des Hauptspannungsraums zusammenfällt. Der Abstand der π -Ebene des Punktes P bezüglich des Ursprungs ist also

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{A.1})$$

Der Abstand des Punktes P bezüglich des Schnittpunktes der hydrostatischen Achse mit der π -Ebene ist

$$\rho = \sqrt{-2J_2} \quad (\text{A.2})$$

und seine Richtung in der π -Ebene bezüglich der triaxialen Kompressionsrichtung ist der Lode Winkel θ . Er ist:

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{-J_3}{(\sqrt{-J_2})^3}. \quad (\text{A.3})$$

B Risspitzennahfeld

$$\mathbf{f}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) (1 - \sin(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{3\varphi}{2})) & \cos(\frac{\varphi}{2}) (\sin(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{3\varphi}{2})) & 0 \\ \cos(\frac{\varphi}{2}) (\sin(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{3\varphi}{2})) & \cos(\frac{\varphi}{2}) (1 + \sin(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{3\varphi}{2})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\varphi}{2}) (2 + \cos(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{3\varphi}{2})) & \cos(\frac{\varphi}{2}) (1 - \sin(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{3\varphi}{2})) & 0 \\ \cos(\frac{\varphi}{2}) (1 - \sin(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{3\varphi}{2})) & \sin(\frac{\varphi}{2}) (\cos(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{3\varphi}{2})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\frac{\varphi}{2}) \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\varphi}{2}) \\ -\sin(\frac{\varphi}{2}) & \cos(\frac{\varphi}{2}) & 0 \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

- [1] FORSYTH, D. und S. UYEDA: *On the Relative Importance of the Driving Forces of Plate Motion*. The geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 43:163–200, 1975.
- [2] BERCKHEMER, H.: *Grundlagen der Geophysik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1990.
- [3] PRESS, F. und R. SIEVER: *Allgemeine Geologie*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1995.
- [4] KOHLSTEDT, D. L., B. EVANS und S. J. MACKWELL: *Strength of the lithosphere: Constraints imposed by laboratory experiments*. Journal of Geophysical Research, 100:17.587–17.602, 1995.
- [5] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 1993.
- [6] BRUHNS, O. T.: *Advanced Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, 2003.
- [7] WILLAM, K. J.: *Constitutive Models for Engineering Materials*. In: *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Band 3, Seiten 603–633. 2002.
- [8] STEIN, E. und F.-J. BARTHOLD: *Elastizitätstheorie*. Skriptum, Universität Hannover, 1995.
- [9] ROÛ, M. und A. EICHINGER: *Die Bruchgefahr fester Körper*. Technischer Bericht Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe - Zürich, 1949.
- [10] MAUGIN, G. A.: *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- [11] MOSLER, JÖRN: *Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände in Tragwerken*. Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr.130, 2002.
- [12] DRUCKER, D. C.: *A Definition of Stable Inelastic Material*. Journal of Applied Mechanics, 72:101–106, 1959.
- [13] RICE, J. R. und J. W. RUDNICKI: *A Note on some Features of the Theory of Localization of Deformation*. International Journal of Solids and Structures, 16:597–605, 1980.

- [14] OTTOSEN, N. S. und K. RUNESSON: *Properties of Discontinuous Bifurcation Solutions in Elasto-plasticity*. International Journal of Solids and Structures, 27:401–421, 1991.
- [15] HILL, R.: *Acceleration Waves in Solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 10:1–16, 1962.
- [16] MUSSCHELISCHWILI, N. I.: *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. Carl Hanser Verlag München, 1971.
- [17] GRIFFITH, A. A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 221A:163–198, 1920.
- [18] GROSS, D.: *Bruchmechanik*. Springer-Verlag, 1996.
- [19] ROSSMANITH, H.-P.: *Grundlagen der Bruchmechanik*. Springer-Verlag, 1982.
- [20] JAEGER, J. C. und N. G. W. COOK: *Fundamentals of Rock Mechanics*. Chapman and Hall, 2 Auflage, 1976.
- [21] SCHOLZ, C.: *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, 1990.
- [22] HEGEMIER, G. A. und H. E. READ: *On Deformation and Failure of Brittle Solids: Some Outstanding Issues*. Mechanics of Materials, 4:215–259, 1985.
- [23] LOCKNER, D. A.: *Rock Failure*. Rock Physics and Phase Relations. A Handbook of Physical Constants AGU Reference Shelf 3, 3:127–147, 1995.
- [24] READ, H. E. und G. A. HEGEMIER: *Strain Softening Of Rock, Soil And Concrete - A Review Article*. Mechanics of Materials, 3:271–294, 1984.
- [25] KÁRMÁN, T. VON: *Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 55:1749–1757, 1911.
- [26] BESUELLE, P., J. DESURES und S. RAYNAUD: *Experimental characterisation of the localisation phenomenon inside a Vosges sandstone in a triaxial cell*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 37:1223–1237, 2000.
- [27] GOWD, T. N. und F. RUMMEL: *Effect of Confinig Pressure on the Fracture Behaviour of Porous Rock*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 12:225–229, 1980.
- [28] RALEIGH, C. B. und M. S. PATERSON: *Experimental Deformation of Serpentine and Its Tectonic Implications*. Journal of Geophysical Research, 70:3965–3985, 1965.

- [29] TULLIS, J. und R. A. YUND: *Hydrolytic weakening of experimentally deformed Westerly granite and Hale albite rock*. Journal of Structural Geology, 2:439–451, 1980.
- [30] RUTTER, E. H.: *On the nomenclature of mode of failure transitions in rocks*. Tectonophysics, 122:381–387, 1986.
- [31] HIRTH, G. und J. TULLIS: *The Effects of Pressure and Porosity on the Micro-mechanics of the Brittle-Ductile Transition in Quartzite*. Journal of Geophysical Research, 94:17825–17838, 1989.
- [32] LOCKNER, D. A., J. D. BYERLEE, V. KUKSENKO, A. PONOMAREV und A. SIDORIN: *Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite*. Nature, 350:39–42, 1991.
- [33] LOCKNER, D. A., J. D. BYERLEE, V. KUKSENKO, A. PONOMAREV und A. SIDORIN: *Observations of Quasistatic Fault Growth from Acoustic Emissions*. In: *Fault Mechanics and Transport Properties of Rock*, Kapitel 1, Seiten 3–31. 1992.
- [34] SHIMADA, M. und A. CHO: *Two types of brittle fracture of silicate rocks under confining pressure and their implications in earth's crust*. Tectonophysics, 175:221–235, 1990.
- [35] SHIMADA, M., A. CHO und H. YUKUTAKE: *Fracture strength of dry silicate rocks at high confining pressures and activity of acoustic emission*. Tectonophysics, 96:159–172, 1983.
- [36] EDMOND, J. M. und M. S. PATERSON: *Volume changes during the deformation of rocks at high pressures*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 9:161–182, 1972.
- [37] NÁDAI, A.: *Theory of Flow and Fracture of Solids*. McGraw - Hill Book Company, Inc., 1950.
- [38] CORONA, E., J. A. SHAW und M. A. IADICOLA: *Buckling of steel bars with Lüders bands*. International Journal of Solids and Structures, 39:3313–3336, 2002.
- [39] SULEM, J., I. VARDOULAKIS, E. PAPAMICHOS, A. OULAHNA und J. TRONVOLL: *Elasto-plastic modelling of Red Wildmoor sandstone*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 4:215–245, 1999.
- [40] HAIED, A., D. KONDO und J. P. HENRY: *Strain localization in Fontainebleau sandstone*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 5:239–253, 2000.
- [41] BAŽANT, Z. P.: *Size effect on structural strength: a review*. Archive of Applied Mechanics, 69:703–725, 1999.

- [42] BAŽANT, Z. P.: *Size effect*. International Journal of Solids and Structures, 37:69–80, 2000.
- [43] RUDNICKI, J. W. und J. R. RICE: *Conditions for the Localization of Deformation In Pressure-Sensitive Dilatant Materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23:371–394, 1975.
- [44] TIMOSHENKO, S. P.: *History of strength of materials*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
- [45] SHIELD, R. T.: *On Coulomb's Law of failure in soils*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 4:10–16, 1955.
- [46] MATSUOKA, H. und T. NAKAI: *Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai Failure Criteria*. Soils and Foundations, 25:123–128, 1985.
- [47] MATSUOKA, H., T. HOSHIKAWA und K. UENO: *A general failure criterion and stress-strain relation for granular materials to metals*. Soils and Foundations, 30(2):119–127, 1990.
- [48] LADE, P. V.: *Rock Strength Criteria: The Theories and the Evidence*. In: *Comprehensive Rock Engineering*, Band 1: Fundamentals, Kapitel 11, Seiten 255–284. 1993.
- [49] LADE, P. V. und J. DUNCAN: *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*. Journal of the geotechnical engineering division, 101(GT10):1037–1053, 1975.
- [50] LADE, P. V.: *Elasto-Plastic Stress-Strain Theory For Cohesionless Soil With Curved Yield Surfaces*. International Journal of Solids and Structures, 13:1019–1035, 1977.
- [51] KIM, M. K. und P. V. LADE: *Modelling Rock Strength in Three Dimensions*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics abstracts, 21:21–33, 1984.
- [52] LADE, P. V.: *Modelling the strengths of engineering materials in three dimensions*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 2:339–356, 1997.
- [53] GRIFFITH, A. A.: *Theory of rupture*. In: *First International Congress Applied Mechanics*, Seiten 55–63, 1924.
- [54] BRACE, W. F. und E. G. BOMBOLAKIS: *A Note on Brittle Crack Growth in Compression*. Journal of Geophysical Research, 68:3709–3713, 1963.

- [55] HORII, H. und S. NEMAT-NASSER: *Brittle Failure In Compression: Splitting, Faulting And Brittle-Ductile Transition*. Philosophical Transaction of Royal Society London, 319:337–374, 1986.
- [56] ASHBY, M. F. und C. G. SAMMIS: *The Damage Mechanics of Brittle Solids in Compression*. Pure and Applied Geophysics, 133:489–521, 1990.
- [57] MYER, L. R. und J. M. KEMENY: *Extensile cracking in porous rock under differential compressive stress*. Applied Mechanics Reviews, 45(8):263–279, 1992.
- [58] RECHES, Z. und D. A. LOCKNER: *Nucleation and growth of faults in brittle rocks*. Journal of Geophysical Research, 99:18159–18173, 1994.
- [59] WIEBOLS, G. A. und N. G. W. COOK: *An energy criterion for the strength of rock in polyaxial compression*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 5:529–549, 1968.
- [60] LUNDBORG, N.: *A statistical theory of the polyaxial compressive strength of materials*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 9:617–624, 1972.
- [61] FJAER, E. und H. RUISTUEN: *Impact of the intermediate principal stress on the strength of heterogenous rock*. Journal of Geophysical Research, 107:3.1–3.10, 2002.
- [62] WUTTKE, W.: *Tribophysik: Reibung und Verschleiß von Metallen*. Carl Hanser Verlag, 1987.
- [63] BYERLEE, J. D.: *Frictional Characteristics of Granite under High Confining Pressure*. Journal of Geophysical Research, 72:3639–3648, 1967.
- [64] BYERLEE, J.: *Friction of Rocks*. Pure and Applied Geophysics, 116:615–626, 1978.
- [65] STESKY, R. M., W. F. BRACE, D. K. RILEY und P. Y. F. ROBIN: *Friction in faulted rock at high temperature and pressure*. Tectonophysics, 23:177–203, 1974.
- [66] BYERLEE, J. D. und J. C. SAVAGE: *Coulomb Plasticity Within The Fault Zone*. Geophysical Research Letters, 19:2341–2344, 1992.
- [67] BYERLEE, J.: *The change in orientation of subsidiary shears near faults containing pore fluid under high pressure*. Tectonophysics, 211:295–303, 1992.
- [68] MOHR, O.: *Zur Festigkeitslehre*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 21(25):740–744, 1901.

- [69] RICE, J. R.: *Comments on 'On the stability of shear cracks and the calculation of compressive strength' by J. K. Dienes.* Journal of Geophysical Research, 89(4):2505–2507, 1984.
- [70] HAIMSON, B. und C. CHANG: *A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite.* International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 37:285–296, 2000.
- [71] MOGI, K.: *Effect of the Intermediate Principal Stress on Rock Failure.* Journal of Geophysical Research, 72:5117–5131, 1967.
- [72] SCHOCK, R. N. und H. LOUIS: *Strain Behavior of a Granite and Graywacke Sandstone in Tension.* Journal of Geophysical Research, 87:7817–7823, 1982.
- [73] BRACE, W. F., B. W. PAULDING und C. SCHOLZ: *Dilatancy in the Fracture of Crystalline Rocks.* Journal of Geophysical Research, 71:3939–3953, 1966.
- [74] LADE, P. V. und H. M. MUSANTE: *Three-Dimensional Behavior of Remolded Clay.* Journal of the Geotechnical Engineering Division, 104(GT2):193–209, 1978.
- [75] TAKAHASHI, M. und H. KOIDE: *Effect of the intermediate principal stress on strength and deformation behavior of sedimentary rocks at the depth shallower than 2000m.* In: MAURY und FOURMAINTRAUX (Herausgeber): *Rock at Great Depth*, Seiten 19–27, 1989.
- [76] AKAI, K. und H. MORI: *Ein Versuch über Bruchmechanismus von Sandstein unter mehrachsigen Spannungszustand.* In: *Proceedings of 2nd International Congress of Rock Mechanics*, Band 3, Seiten 3–31, 1970.
- [77] MASO, J.-C. und J. LERAU: *Mechanical Behavior of Darney Sandstone in Biaxial Compression.* International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 17:109–115, 1980.
- [78] LEE, D. H., C. H. JUANG und H. M. LIN: *Technical Note: Yield Surface of Mu-San Sandstone by Hollow Cylinder Tests.* Rock Mechanics and Rock Engineering, 35:205–216, 2002.
- [79] SCOTT, T. E. und K. C. NIELSEN: *The Effects of Porosity on the Brittle-Ductile Transition in Sandstones.* Journal of Geophysical Research, 96:405–414, 1991.
- [80] MOGI, K.: *Fracture and Flow of Rocks under High Triaxial Compression.* Journal of Geophysical Research, 76:1255–1269, 1971.

- [81] FREDRICH, J. T., B. EVANS und T.-F. WONG: *Effect of Grain Size on Brittle and Semibrittle Strength: Implications for Micromechanical Modelling of Failure in Compression*. Journal of Geophysical Research, 95:10907–10920, 1990.
- [82] HANDIN, J., H. C. HEARD und J. N. MAGUIRK: *Effects of the Intermediate Principal Stress on the Failure of Limestone, Dolomite, and Glass at different Temperatures and Strain Rates*. Journal of Geophysical Research, 72:611–640, 1967.
- [83] CHANG, C. und B. HAIMSON: *True triaxial strength and deformability of the German Continental Deep Drilling Program (KTB) deep hole amphibolite*. Journal of Geophysical Research, 105:18999–19013, 2000.
- [84] FREDRICH, J. T., B. EVANS und T.-W. WONG: *Micromechanics of Brittle to Plastic Transition in Carrara Marble*. Journal of Geophysical Research, 94:4129–4145, 1989.
- [85] RÖCHTER, LARS: *Ein Beitrag zu einer vergleichenden Untersuchung von Gestein in triaxialer Kompression und in triaxialer Extension*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Technische Mechanik, 2004.
- [86] HUNSCHKE, U.: *Fracture experiments on cubic rock salt samples*. In: HARDY, H. R. und M. LANGER (Herausgeber): *The Mechanical Behaviour of Salt*, Seiten 169–179, 1984.
- [87] HANDIN, H.: *An Application of High Pressure in Geophysics: Experimental Rock Deformation*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 75:315–324, 1953.
- [88] AMADAI, B., V. JANOO, M. ROBINSON und R. KUBERAN: *Strength of Indiana Limestone in true biaxial loading conditions*. In: DOWDING, C. H. und M. M. SINGH (Herausgeber): *Rock mechanics in productivity and protection*, Seiten 338–348, 1984.
- [89] TULLIS, J. und R. A. YUND: *Experimental deformation of dry Westerly granite*. Journal of Geophysical Research, 82:5705–5718, 1977.
- [90] WONG, T.-F.: *Effects of temperature and pressure on failure and post-failure behavior of Westerly granite*. Mechanics of Materials, 1:3–17, 1982.
- [91] ESCARTIN, J., G. HIRTH und B. EVANS: *Nondilatant brittle deformation of serpentinites: Implications for Mohr-Coulomb theory and strength of faults*. Journal of Geophysical Research, 102:2897–2913, 1997.
- [92] ESCARTIN, J., G. HIRTH und B. EVANS: *Strength of slightly serpentinitized peridotites: Implications for the tectonics of oceanic lithosphere*. Geological Society of America, 11:1023–1026, 2001.

- [93] DENG, C. A. und J. M. LOGAN: *Implications of the Mechanical and Frictional Behavior of Serpentine to Seisogenic Faulting*. Journal of Geophysical Research, 86:10771–10782, 1981.
- [94] FOSSÅ, B.: *Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1996.
- [95] ELY, R. E.: *Strength of Magnesium Silicate and Graphite Under Biaxial Stresses*. Ceramic Bulletin, 47(5):489–492, 1968.
- [96] ELY, R. E.: *Strength of Graphite Tube Specimens Under Combined Stresses*. Journal of The American Ceramic Society, 48(10):505–508, 1965.
- [97] COFFIN, L. F. und N. Y. SCHENECTADY: *The Flow and Fracture of a Brittle Material*. Journal of Applied Mechanics, 72:233–248, 1950.
- [98] GRASSI, R. C. und I. CORNET: *Fracture of Gray-Cast-Iron Tubes Under Biaxial Stresses*. Journal of Applied Mechanics, 71:178–182, 1949.
- [99] CORNET, I. und R. C. GRASSI: *Fracture of Inoculated Iron Under Biaxial Stresses*. Journal of Applied Mechanics, 22:172–174, 1955.
- [100] MILLS, L. L. und R. M. ZIMMERMANN: *Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions*. American Concrete Institute Journal, 67:802–807, 1970.
- [101] KUPFER, H. und H. K. HILSDORF: *Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses*. American Concrete Institute Journal, 66:656–666, 1969.
- [102] SCHICKERT, G. und H. WINKLER: *Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung*. Technischer Bericht-Heft 277, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1977.
- [103] MAGNAS, J. P. und A. AUDIBERT: *Critères de résistance du béton sous sollicitations multiaxiales*. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Pulics, 287:21–44, 1971.
- [104] MIER, J. G. M. VAN, H. W. REINHARDT und B. W. VAN DER VLUGT: *Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton*. Der Bauingenieur, 62:353–361, 1987.
- [105] ADAMS, M. und G. SINES: *Determination of Biaxial Compressive Strength of a Sintered Alumina Ceramic*. Journal of The American Ceramic Society, 59:300–304, 1976.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen (Juli 1977)

- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli 1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)

- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)

- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung (Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli 1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli 1988)

- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
(Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen
metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch
Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelement-
methode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen
Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formände-
rungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember
1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezem-
ber 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and
field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdefor-
mationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
(Januar 1990)

- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)

- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
(Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
(Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)

- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie (Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen (Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode (Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur (Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze (Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen (Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)

- Nr. 113 Thomas Nerzak:
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese:
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke:
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller:
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel:
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel:
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse (August 2000)

- Nr. 125 Daniela Lürding:
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)
- Nr. 126 Thorsten Quent:
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung (Mai 2001)
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba:
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung (Mai 2001)
- Nr. 128 Henning Schütte:
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen (August 2001)
- Nr. 129 Henner Vogelsang:
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen (Dezember 2001)
- Nr. 130 Jörn Mosler:
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände (Dezember 2002)
- Nr. 131 Karin Preusch:
Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode (Mai 2003)
- Nr. 132 Christoph Müller:
Thermodynamic modeling of polycrystalline shape memory alloys at finite strains (August 2003)
- Nr. 133 Martin Heiderich:
Ein Beitrag zur zerstörungsfreien Schädigungsanalyse (Juni 2004)
- Nr. 134 Raoul Costamagna:
Globale Materialbeziehungen für das geklüftete Gebirge (Juli 2004)



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 134**

978-3-935892-9-4