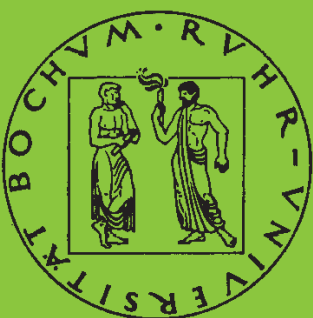


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Gregor Kotucha

**Regularisierung von Problemen der
Topologieoptimierung unter
Einbeziehung von Dichtegradienten**

Heft Nr. 136



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Institut für Mechanik

Gregor Kotucha

**Regularisierung von Problemen
der Topologieoptimierung
unter Einbeziehung von Dichtegradienten**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 136

Herausgeber:
Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-11-X

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2005 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem des optimalen Entwurfs von Bauteilen, wobei an dieser Stelle speziell der Aspekt der Topologieoptimierung linearelastischer Strukturen im Vordergrund steht.

In diesem Zusammenhang besteht die Zielsetzung der Arbeit darin, die im Zuge der Gestaltung einer optimalen Bauteiltopologie zu lösende Optimierungsaufgabe dahingehend zu regularisieren, dass Topologien, die durch starke räumliche Schwankungen der Materialdichte gekennzeichnet sind und demnach aus fertigungstechnischer Sicht nur schwer realisierbare Entwürfe zur Folge haben, als unzulässige Lösungen ausgeschlossen werden. Die angestrebte Regularisierung wird dabei durch Einführung eines Penalty-Funktional erreicht, das räumliche Schwankungen der Materialdichte anhand der globalen Verteilung des Gradienten der Dichtefunktion erfasst und somit die Möglichkeit eröffnet, oszillatorische Dichtefelder wie die bekannten „checkerboard-patterns“ gezielt zu bestrafen und auf diese Weise die Ausbildung von Materialverteilungen der genannten Art im Laufe des Optimierungsprozesses systematisch zu unterbinden. Die Einbeziehung des Dichtegradienten in die Formulierung der zu lösenden Optimierungsaufgabe erfordert zudem die Entwicklung eines Finite-Elemente-Modells, das eine stetige Approximation des Dichtefeldes innerhalb des Entwurfsraumes gestattet. Folglich wird die Dichte im Gegensatz zur klassischen FE-Modellierung des Entwurfsraumes, die auf der Annahme einer konstanten Dichteverteilung in den Elementen beruht, neben den Verschiebungen als Knotenvariable eingeführt und auf der Elementebene unter Verwendung geeigneter Formfunktionen approximiert, die die Formulierung von Dichtegradienten innerhalb der Elemente zulassen. Um die diskretisierte Problemstellung zu lösen, wird die restringierte Optimierungsaufgabe im Rahmen der Penalty-/Barrier-Methode auf eine Folge von unrestringierten Ersatzproblemen zurückgeführt und anschließend unter Verwendung eines pfadverfolgenden Abstiegsverfahrens behandelt. Abschließend wird die regularisierende Wirkung des vorgestellten Penalty-Ansatzes anhand ausgewählter Gestaltungsaufgaben untersucht, die an dieser Stelle exemplarisch den Entwurf linearelastischer Strukturen unter dem Gesichtspunkt maximaler Struktursteifigkeit umfassen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie deren wissenschaftliche Betreuung möchte ich mich an dieser Stelle in erster Linie bei Herrn Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl, dem Inhaber des Lehrstuhls für Allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, herzlich bedanken. Sein stetiges Interesse am Fortgang meiner Forschungstätigkeit sowie die zu jeder Zeit bestehende Bereitschaft, über offene Fragen zu diskutieren und Ansätze zu deren Lösung zu erörtern, haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Zudem hat er es verstanden, eine überaus angenehme Arbeitsatmosphäre an seinem Lehrstuhl zu schaffen und seinen Mitarbeitern die zur Entfaltung bzw. Realisierung eigener Ideen erforderlichen Freiräume in ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit zu gewähren.

Ferner danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns für sein wissenschaftliches Interesse an der Dissertation sowie für die bereitwillige Übernahme der Funktion des Korreferenten.

Schließlich möchte ich allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Allgemeine Mechanik meinen Dank für die gute Zusammenarbeit aussprechen. In diesem Zusammenhang gilt mein besonderer Dank Dr.-Ing. Ulrich Hoppe und Dr. techn. Martin Schmidt-Baldassari für die Vielzahl wertvoller Diskussionen, die im Laufe der Jahre einen kontinuierlichen Gedankenaustausch ermöglichten und dabei zahlreiche konstruktive Anregungen lieferten.

Bochum, im August 2005

Gregor Kotucha

Referenten: Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl
Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Tag der Einreichung: 31.05.2005
Tag der mündlichen Prüfung: 30.08.2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung der Strukturoptimierung	1
1.2	Zielsetzung der vorliegenden Arbeit	2
2	Kontinuumsmechanik linearelastischer Strukturen	5
2.1	Kontinuumsmodell und Kinematik der Deformation	5
2.2	Spannungszustand und Gleichgewicht	7
2.3	Stoffgesetz	10
2.4	Variationsproblem	12
3	Topologieoptimierung linearelastischer Strukturen	17
3.1	Problemstellung der Topologieoptimierung	17
3.2	Topologieoptimierung unter dem Gesichtspunkt maximaler Struktursteifigkeit .	20
3.3	Relaxierte Topologiemodelle	22
3.3.1	Makroskopischer Ansatz	23
3.3.2	Mikroskopischer Ansatz	27
4	Regularisierung des Topologieoptimierungsproblems	35
4.1	Regularisierung des Problems unter Einbeziehung des Dichtegradienten	35
4.2	Numerische Lösung des regularisierten Problems	38
4.2.1	Diskretisierung des Problems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode	39

4.2.2	Lösung des diskretisierten Problems unter Verwendung der Penalty- /Barrier-Methode	49
4.2.3	Sensitivitätsanalyse	67
5	Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells	77
5.1	Betrachtung ausgewählter Entwurfsprobleme	77
5.2	Zusammenfassung und Ausblick	92
A	Grundlagen der Vektor- und Tensorrechnung	95
A.1	Vektoralgebra	95
A.2	Tensoralgebra	96
A.3	Differentialoperatoren und Integralsätze	98
B	Anmerkungen zur Erfassung der Steifigkeit linearelastischer Strukturen	101

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung der Strukturoptimierung

Das Gebiet der Strukturoptimierung befasst sich mit der systematischen Entwicklung optimaler Bauteile bzw. Strukturen, die in der heutigen Zeit in immer mehr Konstruktionsprozessen Anwendung findet. Die Forderung nach optimal ausgelegten, d.h. hoch belastbaren und dennoch leichten Bauteilen, spielt nicht nur in klassischen Leichtbauanwendungen wie dem Flugzeugbau eine entscheidende Rolle. Vielmehr gewinnt der Aspekt der Gewichtsreduzierung und der damit verbundenen Kraftstoffeinsparung angesichts immer knapper werdender Ressourcen auch in der Fahrzeugkonstruktion laufend an Bedeutung.

Der Entwurf eines Bauteils stellt grundsätzlich einen iterativen Gestaltungsprozess dar, dessen Zielsetzung in der Regel darin besteht, aus einer durch konstruktive Vorgaben definierten Grundstruktur eine im Hinblick auf die an das zu entwerfende Bauteil gestellten Anforderungen optimale Konstruktion zu entwickeln. Die Grundstruktur orientiert sich dabei in erster Linie am zur Verfügung stehenden Bauraum, spiegelt jedoch auch weitergehende konstruktive Vorgaben wider, die beispielsweise die Lagerung des Bauteils bzw. seine Wechselwirkung mit anderen Bauteilen einer komplexeren Struktur betreffen. Im Laufe des Gestaltungsprozesses wird die Grundstruktur hinsichtlich der beim Bauteilentwurf vordergründig zu berücksichtigenden Bauteileigenschaften wie Bauteilgewicht, Tragfähigkeit, Steifigkeit, Stabilität oder dynamisches Verhalten bezüglich der im konkreten Anwendungsfall auftretenden Belastungen optimiert, wobei in diesem Zusammenhang zwischen einer Topologie- und einer Formoptimierung unterschieden werden kann.

Im ersteren Fall erfolgt die Gestaltung des Bauteils durch Optimierung der Strukturtopologie, die in diesem Kontext die Verteilung des Materials innerhalb des zur Verfügung stehenden Bauraumes widerspiegelt. Der gesamte Bauraum wird dabei durch Einführung einer die Materialverteilung erfassenden Indikatorfunktion parametrisiert, um anschließend im Zuge der Optimierung sogenannte materielle und immaterielle Bereiche des Bauraumes zu identifizieren, in denen unter Berücksichtigung der an das Bauteil gestellten Anforderungen Material erforderlich ist bzw. vor dem Hintergrund der angestrebten Gewichtsreduktion auf Material verzichtet werden kann.

Im Fall der Formoptimierung wird hingegen die Berandung der zu optimierenden Struktur unter Verwendung spezieller Formfunktionen parametrisiert, die eine Variation der Bauteilgestalt durch gezielte Formgebung der Bauteilkonturen gestatten. Folglich beschränkt sich die Methode der Formoptimierung ausschließlich auf die Gestaltung vorhandener Oberflächen, während vom Rand entfernte Bereiche keiner Optimierung unterliegen und demnach unverändert bleiben. Insbesondere ist im Laufe des Optimierungsprozesses die im Zusammenhang mit dem Aspekt der Materialeinsparung sinnvolle Ausbildung von Hohlräumen im Innern des Bauteils ausgeschlossen.

Ein vollständiger Bauteilentwurf erfordert in der Regel eine Kombination der genannten Optimierungsstrategien, die stets durch eine Unterteilung der zu lösenden Gestaltungsaufgabe in zwei aufeinanderfolgende Gestaltungsschritte realisiert werden kann. Im ersten Schritt wird dabei zunächst die Topologie des zu entwerfenden Bauteils optimiert, während der zweite Gestaltungsschritt eine Formoptimierung der bereits voroptimierten Bauteiltopologie beinhaltet. Die Topologieoptimierung liefert in diesem Zusammenhang somit einen ersten Vorentwurf, wohingegen der anschließenden Formoptimierung die Rolle einer Feingestaltung des voroptimierten Topologieentwurfes zukommt, bei der die Ausgestaltung von Details im Vordergrund steht.

Aus mathematischer Sicht stellt der Entwurf eines Bauteils eine restringierte Optimierungsaufgabe dar, die wahlweise als Minimierungs- bzw. Maximierungsproblem formuliert werden kann. Die mathematische Beschreibung des Problems erfordert dabei die Formulierung eines mathematischen Modells, das eine Parametrisierung der zu optimierenden Struktur ermöglicht und somit die Identifikation von Entwurfparametern gestattet, die im Rahmen der Bauteilgestaltung variiert werden sollen. Zudem ist die Variationsfreiheit der Entwurfparameter durch Einführung von Restriktionen, die als Nebenbedingungen in die zu lösende Optimierungsaufgabe einfließen können, auf im konkreten Fall zulässige bzw. sinnvolle Variationen zu begrenzen, wobei in diesem Zusammenhang sowohl Gleichungs- als auch Ungleichungsrestriktionen denkbar sind. Ferner müssen die an das Bauteil gestellten Anforderungen in Form eines die betreffenden Bauteileigenschaften beschreibenden Zielfunktional ausgedrückt werden, das es im Zuge des Gestaltungsprozesses unter Variation der eingeführten Entwurfparameter zu optimieren gilt. Da das resultierende Optimierungsproblem im allgemeinen Fall keine analytische Lösung besitzt, muss es in der Regel unter Verwendung numerischer Verfahren gelöst werden, die die gegebene Grundstruktur unter Berücksichtigung der zu erfüllenden Optimalitätskriterien mittels iterativer Algorithmen optimieren und anstelle des exakten Optimums approximative Lösungen liefern.

1.2 Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem optimalen Entwurf linearelastischer Strukturen, wobei an dieser Stelle speziell der Aspekt der Topologieoptimierung im Vordergrund stehen soll, der in diesem Kontext auf die fundamentale Frage nach der optimalen Verteilung eines linearelastischen Basismaterials in einem gegebenen Entwurfsraum Ω_0 führt.

Die Topologie der zu optimierenden Struktur wird dabei stets in Anlehnung an (Bendsøe 1989) mit Hilfe einer skalarwertigen Materialindikatorfunktion $\psi : \Omega_o \rightarrow \{0, 1\}$ erfasst, die eine Unterteilung des Entwurfsraumes in materielle sowie immaterielle Bereiche ermöglicht und somit die Verteilung des Materials innerhalb des Entwurfsraumes widerspiegelt. Durch gezielte Aktivierung bzw. Deaktivierung der Indikatorfunktion kann demnach in jedem Punkt des Entwurfsraumes Material erzeugt bzw. abgebaut werden, so dass die Funktion ψ im Hinblick auf das Problem der optimalen Bauteilgestaltung als Entwurfsvariable verwendet werden kann. Die numerische Umsetzung des Indikator-Konzeptes erfolgt in der Regel im Rahmen der Finite-Elemente-Methode, die in diesem Zusammenhang die Möglichkeit eröffnet, den Entwurfsraum in eine endliche Anzahl von Elementen zu zerlegen und jedem Element eine Indikatorvariable zuzuweisen, die eine Aktivierung bzw. Deaktivierung des Elementes gestattet. Vor diesem Hintergrund reduziert sich das Problem der Topologieoptimierung auf die Frage nach der optimalen Kombination aktiver und inaktiver Elemente innerhalb des gegebenen Entwurfsraumes, wobei die Einführung von n_e Elementen 2^{n_e} mögliche Kombinationen zur Folge hat.

In Anbetracht der Tatsache, dass eine hinreichend genaue Beschreibung der zu optimierenden Struktur ein möglichst feines Finite-Elemente-Netz voraussetzt, ist die Auswertung aller möglichen Kombinationen mit einem erheblichen numerischen Aufwand verbunden, so dass die Lösung der kombinatorischen Aufgabe den Einsatz approximativer Verfahren erfordert, die den Lösungsraum unter Verwendung stochastischer bzw. deterministischer Methoden durchsuchen. Ein weit verbreiteter Ansatz besteht dabei darin, das kombinatorische Problem durch Einführung einer sogenannten relaxierten Materialindikatorfunktion, deren Wertebereich das Intervall $[0, 1]$ umfasst, in eine kontinuierliche Optimierungsaufgabe zu überführen, die anschließend mit Hilfe von auf lokalen Entwicklungen des Zielfunktionalen basierenden Optimierungsverfahren wesentlich effizienter gelöst werden kann. Im Sinne einer physikalischen Motivation des relaxierten Indikator-Konzeptes wird die Indikatorfunktion stets als Materialdichte interpretiert und mit dem Elastizitätsmodul des Materials verknüpft, wobei die Finite-Elemente-Modellierung des Dichtefeldes unter der Annahme einer konstanten Dichteverteilung innerhalb der Elemente erfolgt.

Durch die Erweiterung des Wertebereiches der Indikatorfunktion auf das Intervall $[0, 1]$ führt die Lösung der relaxierten Problemstellung jedoch auf Materialverteilungen, die neben materiellen und immateriellen Bereichen sogenannte Grauzonen mit zwischen 0 und 1 liegenden Dichtewerten aufweisen, deren Realisierung den Einsatz inhomogener Werkstoffe mit räumlich variabler Dichte erfordert. Da sich die Herstellung solcher Werkstoffe aus fertigungstechnischer Sicht äußerst schwierig gestaltet, wird die relaxierte Optimierungsaufgabe in der Regel durch Einführung spezieller Penalty-Ansätze regularisiert, die eine Bestrafung von Zwischenwerten der Dichte bewirken und auf diese Weise die Ausbildung von Grauzonen gezielt verhindern (Bendsøe 1989, Rozvany & Zhou 1991, Allaire & Kohn 1993, Jog & Haber 1996). Die numerische Umsetzung der in diesem Zusammenhang verwendeten Regularisierungsmethoden zeigt allerdings, dass die jeweiligen Penalty-Ansätze zwar die Entstehung von Grauzonen unterbinden, gleichzeitig jedoch in den betreffenden Bereichen des Entwurfsraumes stark oszillierende Dichtefelder liefern, die in der Regel äußerst komplexe und somit unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten ebenfalls ungünstige Materialverteilungen wie die bekannten „checkerboard-patterns“ zur Folge haben (Diaz & Sigmund 1995, Jog & Haber 1996). Eine weitere Konsequenz der verschiedenen Regularisierungsansätze besteht in der fehlenden Existenz einer

eindeutigen Lösung der resultierenden Optimierungsaufgabe, so dass die zur Lösung des Problems eingesetzten numerischen Verfahren stets stark netzabhängige Materialverteilungen liefern (Sigmund & Petersson 1998, Rozvany 2001).

Vor diesem Hintergrund besteht die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit darin, das im Zuge der Gestaltung einer optimalen Bauteiltopologie zu lösende Optimierungsproblem dahingehend zu regularisieren, dass die Ausbildung oszillatorischer Dichteverteilungen im Laufe des Gestaltungsprozesses systematisch unterbunden wird. Die angestrebte Regularisierung soll dabei im Rahmen eines zusätzlichen Penalty-Ansatzes erfolgen, der die Entstehung oszillatorischer Dichtefelder durch gezielte Bestrafung von Dichtegradienten verhindert, die in diesem Kontext die räumlichen Schwankungen der Dichtefunktion widerspiegeln und somit eine Lokalisierung derjenigen Bereiche des Entwurfsraumes gestatten, in denen die Dichtefunktion starke Oszillationen aufweist. Durch die Einbeziehung des Dichtegradienten in die Formulierung der zu lösenden Optimierungsaufgabe muss im Zuge der Diskretisierung des regularisierten Problems zudem ein Finite-Elemente-Modell entwickelt werden, das eine stetige Approximation des Dichtefeldes innerhalb des Entwurfsraumes ermöglicht. Aus diesem Grund wird die Dichte im Gegensatz zur klassischen FE-Modellierung des Entwurfsraumes, die auf der Annahme einer konstanten Dichteverteilung in den Elementen beruht, nunmehr als Knotenvariable eingeführt und innerhalb der Elemente mit Hilfe von Formfunktionen approximiert, die die Formulierung von Dichtegradienten zulassen. Um die diskretisierte Problemstellung zu lösen, wird die restringierte Optimierungsaufgabe ferner im Rahmen der Penalty-/Barrier-Methode auf eine Folge von unrestringierten Ersatzproblemen zurückgeführt, die anschließend unter Verwendung eines speziellen Pfadverfolgungsalgorithmus behandelt werden kann. Den Abschluss der Arbeit bildet schließlich die Betrachtung von ausgewählten Entwurfproblemen, die auf der Basis der regularisierten Formulierung der jeweiligen Topologieoptimierungsprobleme gelöst werden, wobei an dieser Stelle insbesondere die Auswirkungen der vorgeschlagenen Regularisierung auf die Topologie der erhaltenen Entwürfe sowie das numerische Verhalten des formulierten Lösungsalgorithmus diskutiert werden.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanik linearelastischer Strukturen

2.1 Kontinuumsmodell und Kinematik der Deformation

Die Beschreibung des mechanischen Verhaltens der zu entwerfenden Bauteile erfordert in erster Linie die Formulierung eines mathematischen Modells, das die maßgeblichen Eigenschaften der zu optimierenden Bauteilstruktur erfasst. Die Modellbildung erfolgt dabei stets im Rahmen der klassischen Kontinuumstheorie (Truesdell 1985), die auf der Annahme einer kontinuierlichen räumlichen Verteilung der Materie beruht und somit die Möglichkeit bietet, die betrachtete Struktur als zusammenhängende Menge von kontinuierlich im Raum verteilten materiellen Punkten aufzufassen, deren Gesamtheit einen sogenannten materiellen Körper $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ bildet. Zur Lagebeschreibung der einzelnen Materialpunkte wird im allgemeinen Fall ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, das ausgehend von einem raumfesten Bezugspunkt mittels der nachfolgend skizzierten orthonormalen Basisvektoren e_1, e_2 und e_3 aufgespannt werden kann.

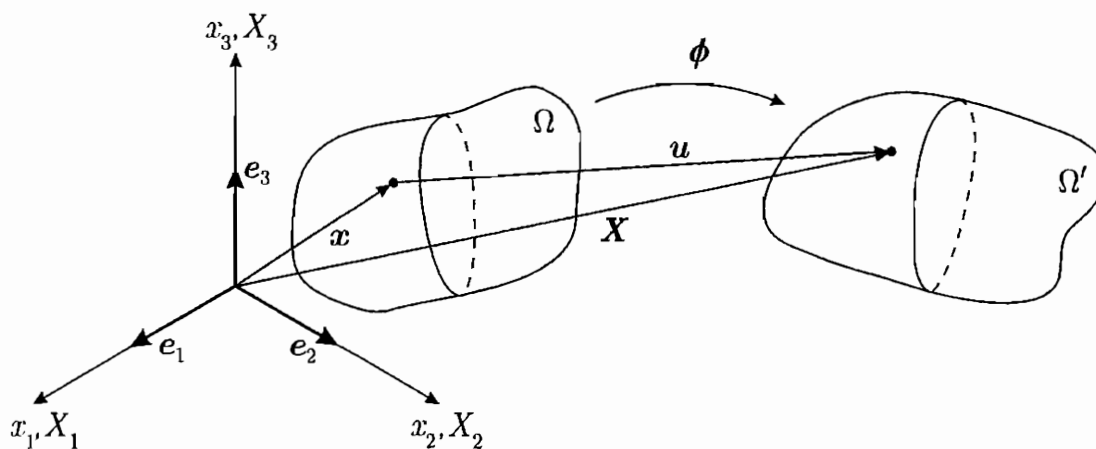


Abbildung 2.1: Kontinuumsmodell und Kinematik der Deformation

Folglich lässt sich die Lage eines Punktes durch Angabe seiner Koordinaten bzw. seines Ortsvektors charakterisieren, wobei in diesem Zusammenhang zwischen der unverformten Konfiguration Ω und der verformten Konfiguration Ω' des Körpers zu differenzieren ist. Vor diesem Hintergrund liegt es nahe, jedem Materialpunkt neben einem Ortsvektor

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathcal{R}^3, \quad (2.1)$$

der die Position des Punktes im unverformten Zustand kennzeichnet, einen weiteren Ortsvektor

$$\boldsymbol{X} = X_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{X} \in \Omega' \subset \mathcal{R}^3 \quad (2.2)$$

zuzuordnen, der eine Lagebeschreibung des Punktes in der verformten Konfiguration erlaubt. Die obige Vektordarstellung, wie auch die nachfolgend formulierten Beziehungen, basieren dabei auf der von Einstein eingeführten Summationskonvention (Betten 1987), so dass sowohl an dieser Stelle als auch im weiteren Verlauf dieses Kapitels über in einem Ausdruck mehrfach auftretende Indizes zu summieren ist.

Die Deformation des Körpers lässt sich demnach als Abbildung des Gebietes Ω bzw. der darin enthaltenen materiellen Punkte auf das Gebiet Ω' auffassen, wobei die Lageänderungen der einzelnen Materialpunkte in Form des Verschiebungsfeldes

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x} \quad (2.3)$$

ausgedrückt werden können. Führt man an dieser Stelle in Anlehnung an die Lagrangesche Betrachtungsweise (Truesdell 1985) die unverformte Konfiguration Ω als Referenzkonfiguration ein, so kann der Übergang des Körpers vom unverformten in den verformten Zustand durch eine Deformationsabbildung $\boldsymbol{\phi} : \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{X}$ beschrieben werden, die eine Darstellung des Zusammenhanges zwischen der von einem Materialpunkt im verformten Zustand eingenommenen Position \boldsymbol{X} und seiner Referenzposition \boldsymbol{x} in der Form

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \quad (2.4)$$

gestattet, woraufhin sich das Verschiebungsfeld in der nachfolgenden Weise angeben lässt :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}. \quad (2.5)$$

Beschränkt man sich ferner auf die Betrachtung kleiner Deformationen, so kann der Verformungszustand des Körpers schließlich gemäß der geometrisch linearen Theorie mit Hilfe des auf dem symmetrisierten Verschiebungsgradienten basierenden Verzerrungstensors

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \quad (2.6)$$

charakterisiert werden (Gurtin 1972), der alternativ auch in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

darstellbar ist. Zudem lassen sich die Komponenten des Verzerrungstensors stets zu einer symmetrischen Matrix der Gestalt

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

zusammenfassen (Betten 1993), wobei die Hauptdiagonalelemente ε_{11} , ε_{22} und ε_{33} als Dehnungen eines die Umgebung des betreffenden Materialpunktes repräsentierenden, hexaederförmigen Körperelementes interpretiert werden können, während die auf den Nebendiagonalen der Matrix angeordneten Verzerrungskomponenten ε_{12} , ε_{13} und ε_{23} die Scherung des betrachteten Körperelementes erfassen.

2.2 Spannungszustand und Gleichgewicht

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die mathematische Beschreibung der Deformation eines materiellen Körpers im Vordergrund stand, sollen nun die von außen auf den Körper einwirkenden Belastungen sowie die daraus resultierenden inneren Spannungen formuliert bzw. quantifiziert werden. Als mögliche Belastungen sollen an dieser Stelle im Innern des Körpers verteilte Volumenkräfte

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}) = f_{v,i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.9)$$

und an der Körperoberfläche wirkende Flächenlasten

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = f_{t,i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (2.10)$$

zugelassen werden, wobei Γ_t in diesem Kontext den durch die Flächenkräfte belasteten Teil der Oberfläche $\Gamma \equiv \partial\Omega$ kennzeichnet. Als Folge der äußeren Belastung treten im Innern des Körpers bekanntlich Spannungen auf, die in jedem Körperpunkt zu einem im allgemeinen Fall dreiachsigen Spannungszustand führen. Um den Spannungszustand in einem Materialpunkt zu erfassen, genügt es dabei, die auf ein im betreffenden Punkt herausgeschnittenes, infinitesimales Hexaederelement wirkenden Spannungen zu betrachten (Hjelmstad 1997), dessen Seitenflächen durch orthogonale, an den Achsen des verwendeten Koordinatensystems orientierte Schnitte gewonnen werden können.

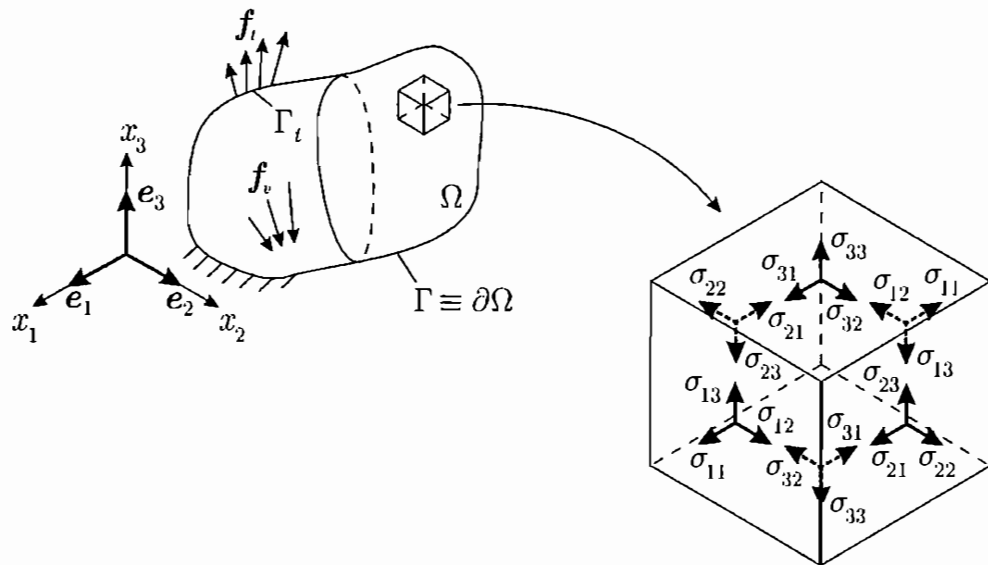


Abbildung 2.2: Spannungszustand des materiellen Körpers

Eine vollständige Beschreibung des in einem Körperpunkt vorliegenden Spannungszustandes erfordert somit die Angabe der den Seitenflächen des betreffenden Körperelementes zugeordneten Spannungen σ_{ij} , wobei der erste Index stets die Richtung des Normalenvektors derjenigen Fläche widerspiegelt, in der die entsprechende Spannung wirkt, wohingegen dem zweiten Index die Richtung der jeweiligen Spannung zu entnehmen ist. Es liegt demnach nahe, den Spannungszustand durch einen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.11)$$

auszudrücken und die Spannungskomponenten σ_{ij} in Analogie zu den Verzerrungen ε_{ij} in Form einer Matrix der Art

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

darzustellen, deren Zeilen den drei in Abbildung 2.2 skizzierten Schnittebenen zugeordnet werden können. Ferner lassen sich die in den jeweiligen Schnittflächen wirkenden Spannungskomponenten zu resultierenden Spannungsvektoren der Gestalt

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

zusammenfassen, die unter Verwendung der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 in der Form

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.14)$$

bzw.

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{e}_i \circ \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

angegeben werden können. Die Bestimmung des Spannungsvektors in einer beliebig orientierten Schnittfläche erfordert hingegen eine Gleichgewichtsbetrachtung am nachfolgend abgebildeten Tetraederelement, die gemäß (Hjelmstad 1997) die auf Cauchy zurückgehende Beziehung

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\sigma} \quad (2.16)$$

liefert, wobei \mathbf{n} in diesem Kontext dem Normalenvektor der betreffenden Schnittfläche entspricht.

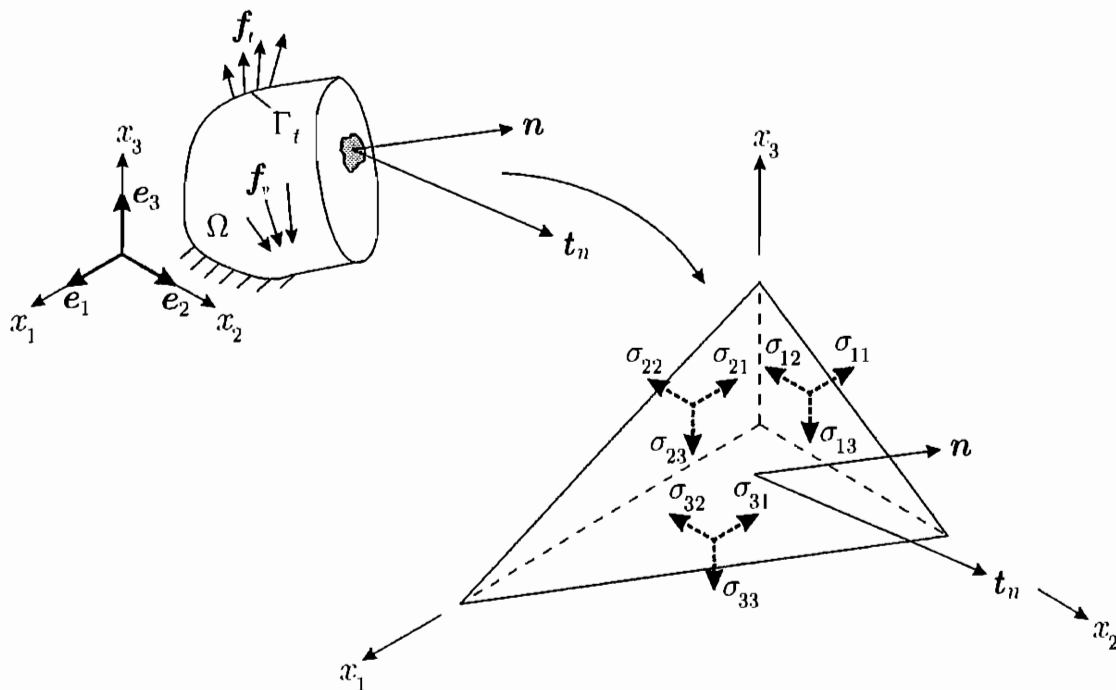


Abbildung 2.3: Spannungsvektor in einer beliebig orientierten Schnittfläche

Der Zusammenhang zwischen den von außen auf den Körper einwirkenden Belastungen und den im Innern des Körpers herrschenden Spannungen ergibt sich stets unter Berücksichtigung der aus dem Gleichgewichtsprinzip resultierenden Gleichgewichtsbedingungen, die wahlweise in integraler bzw. differentieller Form ausgedrückt werden können. Setzt man an dieser Stelle kleine Deformationen voraus, so kann die Gleichgewichtsbetrachtung nunmehr im Rahmen der geometrisch linearen Theorie erfolgen, die eine Formulierung des Gleichgewichtes in der unverformten Konfiguration des Körpers erlaubt. Die integrale Form der Gleichgewichtsbedingungen spiegelt dabei das globale Gleichgewicht des betrachteten Körpers wider, das vor dem

Hintergrund der geometrisch linearen Theorie mittels der Bilanzgleichungen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}_n d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f}_v d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

sowie

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{t}_n d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{f}_v d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}_o \in \mathcal{R}^3 \quad (2.18)$$

beschrieben werden kann. Die differentielle Formulierung des Gleichgewichtes liefert hingegen lokale Gleichgewichtsaussagen der Art

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (2.19)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.20)$$

die das Ergebnis einer Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimalen Körperelement darstellen bzw. unter Verwendung der Relation (2.16) sowie des Gaußschen Integralsatzes aus der globalen Kräfte- und Momentenbilanz hergeleitet werden können (Hjelmstad 1997). Zudem muss der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ die Bedingung

$$\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_t \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (2.21)$$

erfüllen, die der auf den Körper wirkenden Flächenbelastung \mathbf{f}_t Rechnung trägt, indem sie diese mit dem an der Körperoberfläche Γ_t herrschenden Spannungszustand in Beziehung setzt.

2.3 Stoffgesetz

Neben der Einführung eines Kontinuumsmodells und der Definition geeigneter Spannungs- bzw. Dehnungsmaße erfordert die kontinuumsmechanische Beschreibung von Festkörpern die Formulierung eines Stoffgesetzes, das die mechanischen Eigenschaften des zu modellierenden Körpers in Form einer konstitutiven Gleichung charakterisiert, die eine Beziehung zwischen den in einem Materialpunkt wirkenden Spannungen und den daraus resultierenden Dehnungen herstellt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll nun exemplarisch die Klasse der isotropen, linearelastischen Materialien betrachtet werden, deren mechanisches Verhalten durch eine lineare Spannungs-Dehnungs-Relation gekennzeichnet ist und demnach unter Verwendung einer Konstitutivgleichung der Art

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

beschrieben werden kann, die den Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ mittels eines linearen Operators in Gestalt des Materialtensors

$$\boldsymbol{C} = C_{ijkl} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \quad (2.23)$$

auf den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ abbildet (Hjelmstad 1997). Die Komponenten des Materialtensors \boldsymbol{C} lassen sich dabei unter Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungs- und Dehnungstensors sowie der vorausgesetzten Isotropie des Materials stets auf zwei unabhängige Größen zurückführen, so dass zur Charakterisierung des Materialverhaltens lediglich zwei Materialparameter benötigt werden. Einen möglichen Parametersatz bilden dabei die Lamé-Konstanten λ und μ , die eine Darstellung des Materialtensors bzw. seiner Komponenten in der Form

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad , \quad \delta_{mm} = \begin{cases} 1 & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (2.24)$$

gestatten, woraufhin die Konstitutivbeziehung (2.22) die Gestalt

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} \quad , \quad \boldsymbol{I} = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \quad (2.25)$$

annimmt. Im Hinblick auf die Beschreibung realer Bauteile bzw. Strukturen bietet sich jedoch in der Regel die Einführung des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν als Materialparameter an, die gemäß (Hjelmstad 1997) in nachfolgender Relation zu den Lamé-Konstanten stehen

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.26)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.27)$$

und somit einen alternativen Parametersatz darstellen. Vor diesem Hintergrund lässt sich die Gleichung (2.22) alternativ in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{I} + \frac{E}{(1 + \nu)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.28)$$

ausdrücken, die im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit gegenüber der auf den Lamé-Parametern basierenden Formulierung bevorzugt werden soll.

2.4 Variationsproblem

Auf der Basis des vorgestellten Kontinuumsmodells lässt sich die zentrale Problemstellung der Strukturmechanik nun in der nachfolgenden Weise formulieren.

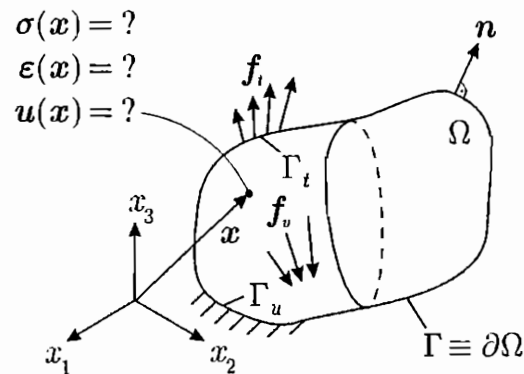


Abbildung 2.4: Problemstellung der Strukturmechanik

Die Zielsetzung der kontinuumsmechanischen Betrachtung besteht demnach in der Bestimmung der in einem durch Flächenlasten \mathbf{f}_t und Volumenkräfte \mathbf{f}_v belasteten Körper Ω hervorgerufenen Spannungen sowie der daraus resultierenden Dehnungen und Verschiebungen. Im Innern des Körpers werden die maßgeblichen physikalischen Zusammenhänge durch die Feldgleichungen (2.6), (2.19), (2.20) und (2.22) beschrieben, während an der Körperoberfläche Γ Randbedingungen der Art

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o \text{ auf } \Gamma_u \quad (2.29)$$

sowie

$$\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_t \text{ auf } \Gamma_t \quad (2.30)$$

vorgeschrieben werden können, die den auf den Teilrändern Γ_u bzw. Γ_t vorgegebenen Verschiebungen \mathbf{u}_o bzw. Belastungen \mathbf{f}_t Rechnung tragen. Die Formulierung der obigen Problemstellung im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie führt somit auf ein Randwertproblem der Form

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \end{array} \right\} \text{ in } \Omega \quad (2.31)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{u}_o & \text{auf } \Gamma_u \\ \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_t & \text{auf } \Gamma_t, \end{array}$$

dessen Lösung das gesuchte Spannungs-, Dehnungs- und Verschiebungsfeld liefert. Da das Randwertproblem im allgemeinen Fall keine analytische Lösung besitzt, muss es in der Regel auf numerischem Wege gelöst werden. Vor diesem Hintergrund liegt es nahe, die vorliegende Problemstellung auf der Grundlage des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials (Gurtin 1972) als Variationsproblem zu formulieren, das für numerische Lösungsverfahren wie die Methode der finiten Elemente zugänglicher ist. Gemäß dem genannten Prinzip nimmt das Gesamtpotential des betrachteten Körpers im Gleichgewichtszustand ein Minimum an, so dass die Randwertaufgabe (2.31) stets in ein Minimierungsproblem überführt werden kann. Das Gesamtpotential setzt sich dabei aus der Formänderungsenergie

$$\Pi_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (2.32)$$

sowie aus dem Potential der äußeren Kräfte

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_t \quad (2.33)$$

zusammen und nimmt dementsprechend folgende Gestalt an :

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) &= \Pi_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_t. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Unter Berücksichtigung der Konstitutivgleichung (2.22) sowie der Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung (2.6) kann die Formänderungsenergie ferner in der Form

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (2.35)$$

angegeben werden, die nunmehr die Möglichkeit bietet, das Gesamtpotential wie folgt als Funktion des Verschiebungsfeldes zu schreiben

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_t \quad (2.36)$$

und die zu lösende Minimierungsaufgabe in der nachfolgenden Weise zu formulieren :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{L}_u} \Pi(\mathbf{u}) \quad , \quad \mathcal{L}_u = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_o \text{ auf } \Gamma_u\}. \quad (2.37)$$

Die Forderung nach einem Minimum des Gesamtpotentials $\Pi(\mathbf{u})$ lässt sich bekanntlich unter Verwendung der Gâteaux-Ableitung

$$\begin{aligned} D\Pi(\mathbf{u})(\delta\mathbf{u}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Pi(\mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u})}{\alpha} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \Pi(\mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u})|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (2.38)$$

in der Form

$$D\Pi(\mathbf{u})(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L}_{\delta u} = \{\delta\mathbf{u} \mid \delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u\} \quad (2.39)$$

ausdrücken, wobei $\delta\mathbf{u}$ eine beliebige, mit der Randbedingung (2.29) verträgliche Variation des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} darstellt. Die Auswertung der obigen Gleichung führt in diesem Kontext auf die sogenannte schwache Form des Gleichgewichtes

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \delta\mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \delta\mathbf{u} \, d\Gamma_t = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u} \quad , \quad (2.40)$$

die anstelle des Randwertproblems (2.31) zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes herangezogen werden kann, aus dem sich anschließend mit Hilfe der Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung sowie der Konstitutivgleichung das Dehnungs- bzw. Spannungsfeld gewinnen lässt. Beschränkt man sich an dieser Stelle im Sinne einer näherungsweise Lösung des Randwertproblems (2.31) auf eine ausgewählte Klasse von Variationen $\delta\mathbf{u}_i \in \mathcal{L}_{\delta u}$, $i = 1, \dots, n$, so erfüllen die auf der Basis der variationellen Formulierung ermittelten Felder stets die Randbedingung (2.29) sowie die Gleichungen (2.6) und (2.22) exakt, wohingegen die Gleichung (2.19) und die Randbedingung (2.30) lediglich im integralen Mittel erfüllt werden.

Um eine für numerische Lösungsverfahren zugänglichere Formulierung des Variationsproblems (2.40) zu erhalten, können ferner die Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors zu einem Spannungs- bzw. Dehnungsvektor

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T \quad (2.41)$$

und

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}]^T \quad (2.42)$$

zusammengefasst werden, so dass die Konstitutivgleichung unter Verwendung einer Materialmatrix der Gestalt

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

wie folgt angegeben werden kann :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.44)$$

Nach Einführung einer Differentialoperatormatrix der Art

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

lässt sich zudem die Dehnungs–Verschiebungs–Beziehung durch die Gleichung

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_u \mathbf{u} \quad (2.46)$$

beschreiben, die in Verbindung mit der Spannungs–Dehnungs–Relation (2.44) die nachfolgende Entwicklung des Gesamtpotentials (2.36) gestattet :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_u^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D}_u \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_t. \quad (2.47)$$

Die obige Darstellung des Gesamtpotentials bietet somit die Möglichkeit, das Variationsproblem (2.40) in der Form

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_u^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{D}_u \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_t = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u} \quad (2.48)$$

zu schreiben, die nunmehr als Ausgangspunkt für die Finite–Elemente–Formulierung des Randwertproblems (2.31) dienen soll.



Kapitel 3

Topologieoptimierung linearelastischer Strukturen

3.1 Problemstellung der Topologieoptimierung

Im Zusammenhang mit dem Entwurf von Bauteilen besteht die Problemstellung der Topologieoptimierung in der Ermittlung der im Hinblick auf ausgewählte Bauteileigenschaften optimalen Materialverteilung innerhalb eines gegebenen Entwurfsraumes Ω_o . Der Entwurfsraum orientiert sich dabei stets am zur Verfügung stehenden Bauraum sowie an weitergehenden konstruktiven Vorgaben, die beispielsweise die Lagerung des Bauteils bzw. seine Wechselwirkung mit anderen Bauteilen einer komplexeren Konstruktion betreffen. Außerdem fließt die im konkreten Anwendungsfall auf das Bauteil einwirkende Belastung in den Entwurfsprozess ein, so dass sich die in diesem Kontext zu lösende Gestaltungsaufgabe wie folgt darstellt.

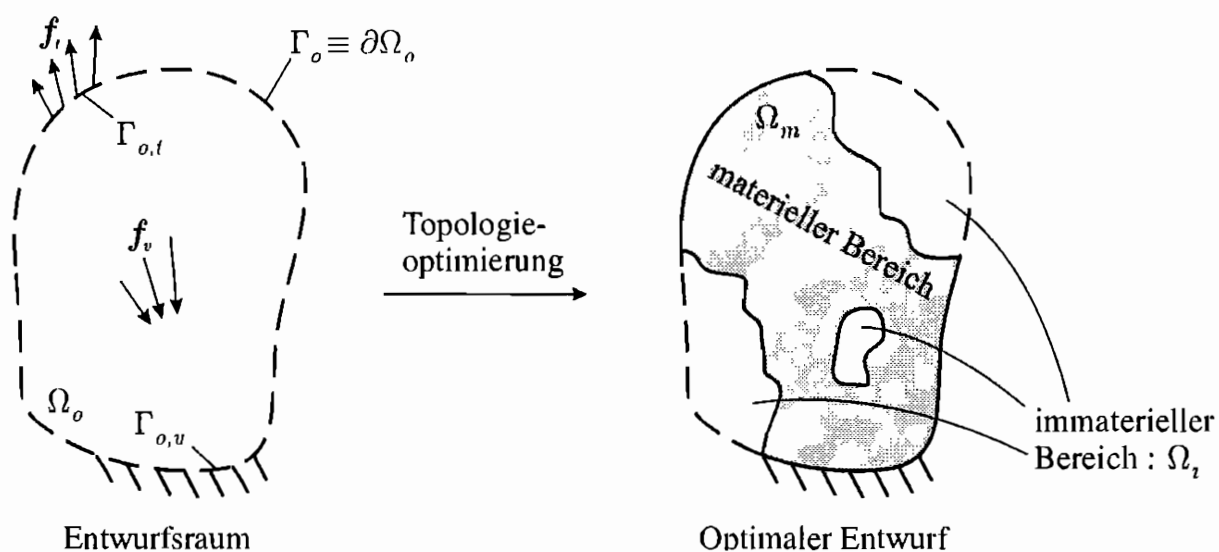


Abbildung 3.1: Problemstellung der Topologieoptimierung

Demzufolge ist das Problem der Bauteilgestaltung mit der Identifikation sogenannter materieller und immaterieller Bereiche des Entwurfsraumes Ω_o gleichbedeutend, in denen Material unter dem Gesichtspunkt der zu erfüllenden Optimalitätskriterien erforderlich ist bzw. eingespart werden kann. Im Fall linearelastischen Materials lässt sich die Bauteiltopologie durch Einführung eines Materialfeldes der Art

$$C(\mathbf{x}) = \begin{cases} C_o & , \mathbf{x} \in \Omega_m \\ 0 & , \mathbf{x} \in \Omega_i \end{cases} \quad (3.1)$$

erfassen, wobei C_o dem Materialtensor eines homogenen Basismaterials entspricht, aus dem das Bauteil gefertigt werden soll. Vor diesem Hintergrund führt das Problem der Topologieoptimierung auf die Frage nach dem optimalen Materialfeld $C_{opt}(\mathbf{x})$, das im Rahmen des Entwurfsprozesses unter Berücksichtigung der gegebenen Optimalitätskriterien aus der Menge der zulässigen Materialverteilungen

$$\mathcal{L}_C = \{C \mid C(\mathbf{x}) = C_o \vee C(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o\} \quad (3.2)$$

zu wählen ist, so dass die obige Gestaltungsaufgabe in der nachfolgenden Weise formuliert werden kann :

$$\begin{aligned} & \min_{C \in \mathcal{L}_C} \phi(C) \\ & \text{u.d.N.} \\ & g_i(C) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n_g \\ & h_j(C) \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n_h. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das Materialfeld C ist dabei bezüglich eines Zielfunktional $\phi(C)$ zu optimieren, das die beim Bauteilentwurf vordergründig zu berücksichtigenden Bauteileigenschaften, wie z.B. Bauteilgewicht, Tragfähigkeit, Steifigkeit, Stabilität, dynamisches Verhalten, etc. beschreibt. Das Zielfunktional spiegelt demnach die an das Bauteil gestellten Anforderungen wider, wobei die im Rahmen der Bauteilgestaltung verfolgten Ziele auch unterschiedlich gewichtet werden können, indem das Funktional $\phi(C)$ wie folgt als gewichtete Summe der die einzelnen Ziele charakterisierenden Funktionale $\phi_k(C)$, $k = 1, \dots, n_\phi$ eingeführt wird :

$$\phi(C) = \sum_{k=1}^{n_\phi} \zeta_k \phi_k(C) \quad , \quad \zeta_k > 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n_\phi} \zeta_k = 1. \quad (3.4)$$

Alternativ lassen sich die zu erfüllenden Anforderungen als Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe auffassen und in Form von Gleichungsrestriktionen der Art $g_i(C) = 0$ bzw.

Ungleichungsrestriktionen der Gestalt $h_j(\mathbf{C}) \leq 0$ in die Problemformulierung einbeziehen. Aus mathematischer Sicht stellt die in Abbildung 3.1 skizzierte Gestaltungsaufgabe somit ein restringiertes Optimierungsproblem dar, das bei entsprechender Definition des verwendeten Zielfunktional wahlweise als Minimierungs- bzw. Maximierungsaufgabe formuliert werden kann. So lässt sich das Minimierungsproblem (3.3) ohne Weiteres in ein Maximierungsproblem der Gestalt

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{C} \in \mathcal{L}_C} \tilde{\phi}(\mathbf{C}) \\ & \text{u.d.N.} \\ & g_i(\mathbf{C}) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n_g \\ & h_j(\mathbf{C}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n_h \end{aligned} \quad (3.5)$$

überführen, indem anstelle des Funktional $\phi(\mathbf{C})$ ein Zielfunktional der Art

$$\tilde{\phi}(\mathbf{C}) = -\phi(\mathbf{C}) \quad (3.6)$$

eingeführt wird. Um die vorliegende Optimierungsaufgabe für numerische Lösungsverfahren zugänglicher zu machen, wird die Topologie des zu optimierenden Bauteils in der Regel mit Hilfe einer diskreten Materialindikatorfunktion

$$\psi : \mathbf{x} \rightarrow \{0, 1\} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.7)$$

erfasst (Bendsøe 1989), die eine Darstellung des Materialtensors \mathbf{C} in der Form

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{C}_o \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.8)$$

gestattet. Das Indikator-Konzept eröffnet dabei die Möglichkeit, durch gezielte Aktivierung bzw. Deaktivierung der Indikatorfunktion in jedem Punkt des Entwurfsraumes Material zu erzeugen bzw. abzubauen, so dass die Funktion ψ im Hinblick auf das Problem des optimalen Bauteilentwurfs als Entwurfsvariable verwendet werden kann. Ferner ermöglicht der obige Ansatz eine Unterteilung des Entwurfsraumes in einen immateriellen Bereich

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \Omega_o \mid \psi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (3.9)$$

sowie einen die Bauteiltopologie widerspiegelnden, materiellen Bereich Ω_m , der sich nunmehr in der nachfolgenden Weise angeben lässt :

$$\Omega_m = \{\mathbf{x} \in \Omega_o \mid \psi(\mathbf{x}) = 1\} . \quad (3.10)$$

3.2 Topologieoptimierung unter dem Gesichtspunkt maximaler Struktursteifigkeit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll nun eine der klassischen Problemstellungen der Bauteilgestaltung behandelt werden, deren Zielsetzung darin besteht, Bauteilstrukturen zu entwickeln, die bei geringem Eigengewicht eine möglichst hohe Steifigkeit aufweisen. Als Zielfunktional bietet sich in diesem Fall die von den auf das Bauteil einwirkenden Kräften geleistete Arbeit bzw. die daraus resultierende Formänderungsenergie

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o \quad (3.11)$$

an, die in diesem Zusammenhang ein Maß für die Nachgiebigkeit der Bauteilstruktur darstellt. Die Auswertung des obigen Funktionals setzt dabei stets die Kenntnis des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} voraus, das bei gegebener Materialverteilung ψ durch Lösung des als Nebenbedingung der zu formulierenden Optimierungsaufgabe einzuführenden Variationsproblems

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u} \quad (3.12)$$

gewonnen werden kann. Zudem lässt sich die Masse des zu entwerfenden Bauteils durch Einführung einer Restriktion der Form

$$\int_{\Omega_o} \psi d\Omega_o \leq M_o \quad (3.13)$$

auf einen maximal zulässigen Wert $M_o \in [0, M_{lim}]$ begrenzen, wobei die Schranke M_{lim} der im Fall eines vollständig mit Material ausgefüllten Entwurfsraumes erreichbaren Masse entspricht, die sich bei gegebenem Entwurfsraum Ω_o in der nachfolgenden Weise ergibt :

$$M_{lim} = \int_{\Omega_o} \psi_{lim} d\Omega_o \quad , \quad \psi_{lim}(\mathbf{x}) \equiv 1 \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o. \quad (3.14)$$

Die betrachtete Problemstellung führt demnach auf eine Optimierungsaufgabe der Gestalt

$$\min_{\psi \in \mathcal{L}_\psi} \left\{ \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o \right\}$$

u.d.N.

(3.15)

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u}$$

$$\int_{\Omega_o} \psi d\Omega_o \leq M_o,$$

die unter Berücksichtigung der aus dem Clapeyronschen Theorem (Gurtin 1972) folgenden Beziehung (B.8)

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} \quad (3.16)$$

auch in der Form

$$\min_{\psi \in \mathcal{L}_\psi} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} \right\}$$

u.d.N.

(3.17)

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u}$$

$$\int_{\Omega_o} \psi d\Omega_o \leq M_o,$$

geschrieben werden kann (Bendsøe 1989). Die Suche nach der optimalen Materialverteilung ψ_{opt} ist dabei in Anbetracht des begrenzten Wertebereiches der Materialindikatorfunktion ψ auf den Lösungsraum

$$\mathcal{L}_\psi = \{ \psi \mid \psi(\mathbf{x}) = 0 \vee \psi(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o \} \quad (3.18)$$

einzuschränken, der dem zu lösenden Optimierungsproblem nunmehr einen diskreten Charakter verleiht.

Da die betrachtete Problemstellung im allgemeinen Fall keine analytische Lösung besitzt und demnach lediglich auf numerischem Wege gelöst werden kann, muss die Optimierungsaufgabe (3.15) bzw. (3.17) unter Verwendung eines geeigneten Diskretisierungsverfahrens in eine für numerische Algorithmen zugängliche Form überführt werden. In diesem Zusammenhang liegt es nahe, den Entwurfsraum Ω_o im Rahmen der Finite-Elemente-Methode in eine endliche Anzahl von Elementen Ω_o^e , $e = 1, \dots, n_e$ zu unterteilen und jedem Element eine Indikatorvariable $\psi_e \in \{0, 1\}$ zuzuordnen, die eine gezielte Aktivierung bzw. Deaktivierung des Elementes ermöglicht. Auf diese Weise lässt sich die als Entwurfsvariable fungierende Materialindikatorfunktion ψ auf eine diskrete Menge von Entwurfsparametern in Form der Materialindikatoren ψ_e , $e = 1, \dots, n_e$ zurückführen, so dass die zu lösende Optimierungsaufgabe schließlich in ein endlichdimensionales Optimierungsproblem übergeht. Vor diesem Hintergrund reduziert sich das Problem der optimalen Bauteilgestaltung auf die Frage nach der optimalen Kombination aktiver und inaktiver Elemente innerhalb des Entwurfsraumes, wobei die Einführung von n_e Elementen 2^{n_e} mögliche Kombinationen zur Folge hat. Da eine hinreichend genaue Beschreibung der zu optimierenden Bauteilstruktur ein möglichst feines FE-Netz voraussetzt, ist die Betrachtung aller möglichen Kombinationen stets mit einem enormen numerischen Aufwand verbunden, zumal jede Auswertung des Zielfunktional (3.11) eine komplette FE-Analyse der betreffenden Struktur nach sich zieht. Um die vorliegende Problemstellung dennoch in vertretbarer Zeit lösen zu können, kommen daher in der Regel approximative Algorithmen zum Einsatz, die den Lösungsraum mittels stochastischer bzw. deterministischer Methoden durchsuchen und demzufolge im Zuge der Lösungsfindung deutlich weniger Auswertungen des Zielfunktional erfordern. Ein weit verbreiteter Ansatz besteht dabei darin, die kombinatorische Optimierungsaufgabe durch Einführung sogenannter relaxierter Topologiemodelle, die auf stetigen Materialindikatorfunktionen beruhen, in ein kontinuierliches Problem umzuwandeln, das anschließend mit Hilfe gradientenbasierter Algorithmen wesentlich effizienter gelöst werden kann.

3.3 Relaxierte Topologiemodelle

Im folgenden Abschnitt sollen nun die gängigsten relaxierten Topologiemodelle vorgestellt werden, die im Unterschied zum bisher verwendeten Modell stetige Materialindikatorfunktionen zulassen und somit eine Rückführung der betrachteten Gestaltungsaufgabe auf eine kontinuierliche Optimierungsaufgabe gestatten. Die Modellierung des Materialfeldes erfolgt dabei stets auf der Grundlage eines homogenen Basismaterials, das unter Verwendung des Elastizitätsmoduls E_o sowie der Querkontraktionszahl ν_o beschrieben werden kann. Folglich unterscheiden sich die einzelnen Topologiemodelle lediglich in der Definition bzw. der physikalischen Interpretation der jeweiligen Indikatorfunktionen, wobei in diesem Zusammenhang eine Unterteilung in makro- und mikroskopische Ansätze vorgenommen werden soll.

3.3.1 Makroskopischer Ansatz

Die Formulierung eines stetigen Topologiemodells erfordert in erster Linie eine Modifikation des bestehenden Indikator–Konzeptes hinsichtlich des Wertebereiches der das Materialfeld erfassenden Indikatorfunktion, der im Hinblick auf die angestrebte Relaxierung des zu lösenden Optimierungsproblems in der Regel auf das Intervall $[0, 1]$ erweitert wird. Die eingangs eingeführte Indikatorfunktion ψ geht dabei in eine stetige Funktion

$$\rho : \mathbf{x} \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.19)$$

über, die im Sinne einer physikalischen Motivation des erweiterten Indikator–Konzeptes als Materialdichte interpretiert werden kann. Vor diesem Hintergrund stellt sich nunmehr die Frage nach einer physikalisch sinnvollen Implementierung der Dichtefunktion ρ in das bislang verwendete Materialmodell (2.22), wobei an dieser Stelle der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν als Materialparameter verwendet werden sollen. Eine weit verbreitete Anwendung findet in diesem Kontext der auf Bendsøe zurückgehende Vorschlag, die Steifigkeit bzw. den Elastizitätsmodul des Materials in der Form

$$E(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})E_o \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.20)$$

als lineare Funktion der Materialdichte anzusetzen (Bendsøe 1989) und die Konstitutivbeziehung (2.28) in der nachfolgenden Weise zu modifizieren :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu_o \rho E_o}{(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \frac{\rho E_o}{(1 + \nu_o)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.21)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left\{ \frac{\nu_o E_o}{(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \frac{E_o}{(1 + \nu_o)} \boldsymbol{\varepsilon} \right\}. \quad (3.22)$$

Die Beschreibung des relaxierten Materialfeldes erfordert somit die Einführung eines Materialtensors

$$\mathbf{C}(\rho) = \rho \mathbf{C}_o \quad , \quad \mathbf{C}_o = C_{oijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

mit :

$$C_{oijkl} = \lambda_o \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_o [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \quad , \quad \lambda_o = \frac{\nu_o E_o}{(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} \quad , \quad \mu_o = \frac{E_o}{2(1 + \nu_o)} \quad (3.23)$$

beziehungsweise einer Materialmatrix

$$\tilde{\mathbf{C}}(\rho) = \rho \tilde{\mathbf{C}}_o, \quad \tilde{\mathbf{C}}_o = \frac{E_o}{(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_o & \nu_o & \nu_o & 0 & 0 & 0 \\ \nu_o & 1 - \nu_o & \nu_o & 0 & 0 & 0 \\ \nu_o & \nu_o & 1 - \nu_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_o}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_o}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_o}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

wobei die Konstanten E_o und ν_o ein homogenes Basismaterial charakterisieren, aus dem das zu optimierende Bauteil gefertigt werden soll. Das relaxierte Modell eröffnet demnach die Möglichkeit, die Topologie des zu optimierenden Bauteils auf das Dichtefeld ρ zurückzuführen und auf diese Weise den Lösungsraum, in dem die optimale Topologie zu suchen ist, auf die Menge

$$\mathcal{L}_\rho = \{\rho \mid 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o\} \quad (3.25)$$

zu erweitern, so dass das Problem der optimalen Bauteilgestaltung als kontinuierliche Optimierungsaufgabe der Gestalt

$$\min_{\rho \in \mathcal{L}_\rho} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} \right\} \quad \text{u.d.N.} \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{C}(\rho) = \rho \mathbf{C}_o$$

$$\int_{\Omega_o} \rho \, d\Omega_o \leq M_o$$

formuliert werden kann. Im Zuge der Finite-Elemente-Diskretisierung des obigen Problems wird das Dichtefeld ρ stets unter der Annahme einer konstanten Dichteverteilung innerhalb der Elemente Ω_o^e approximiert und somit in eine endliche Anzahl von nunmehr stetigen Entwurfsvariablen $\rho_e \in [0, 1]$, $e = 1, \dots, n_e$ überführt. Als Folge der Erweiterung des Indikator-Konzeptes auf stetige Materialindikatorfunktionen liefert die Lösung der relaxierten Problemstellung (3.26) jedoch Materialverteilungen, die neben materiellen und immateriellen Bereichen

sogenannte Grauzonen aufweisen, in denen die Dichtefunktion zwischen 0 und 1 liegende Werte annimmt. Die Realisierung solcher Grauzonen erfordert dabei den Einsatz inhomogener Werkstoffe mit räumlich variabler Dichte, deren Herstellung sich in der Praxis jedoch äußerst schwierig gestaltet. Lediglich im Fall zweidimensionaler Strukturen lassen sich Grauzonen alternativ durch eine variable Bauteildicke realisieren, so dass auf den Einsatz inhomogener Materialien verzichtet werden kann. Im Hinblick auf den Entwurf dreidimensionaler Bauteile ist demzufolge aus fertigungstechnischer Sicht eine Regularisierung des Optimierungsproblems (3.26) notwendig, die die Ausbildung ausgedehnter Grauzonen gezielt verhindert. In diesem Kontext kann das zuvor eingeführte Modell (3.20) durch den ebenfalls von Bendsøe vorgeschlagenen Ansatz

$$E(\mathbf{x}) = \rho^p(\mathbf{x})E_o \quad , \quad p > 1 \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.27)$$

ersetzt werden, der sich in einschlägiger Literatur unter dem Begriff „solid isotropic material with penalization“ (Bendsøe 1989, Rozvany & Zhou 1991, Bendsøe & Sigmund 1999) etabliert hat. Das auch unter der Bezeichnung „artificial material“ bekannte Modell führt an dieser Stelle auf den nachfolgend skizzierten Zusammenhang zwischen Materialdichte und –steifigkeit, der im Vergleich zum linearen Ansatz (3.20) eine Absenkung der Materialsteifigkeit für im Intervall $]0, 1[$ liegende Werte der Dichtefunktion zur Folge hat.

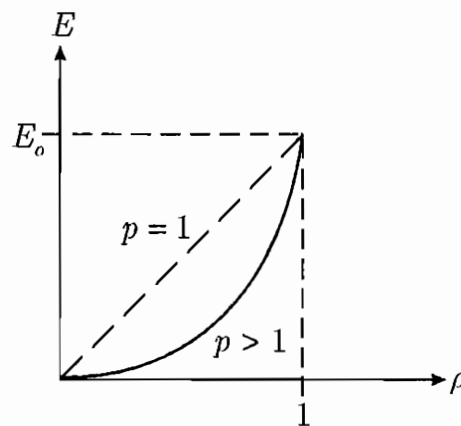


Abbildung 3.2: SIMP-Modell

Vor dem Hintergrund der beim optimalen Bauteilentwurf stets angestrebten Materialeinsparung, die in Form einer das Bauteilgewicht begrenzenden Restriktion als Nebenbedingung in das zu lösende Optimierungsproblem einfließt, bewirkt der nichtlineare Ansatz (3.27) eine durch das nunmehr ungünstige Verhältnis von Materialsteifigkeit zu Materialgewicht bedingte Benachteiligung von zwischen 0 und 1 liegenden Dichtewerten. Auf diese Weise werden Zwischenwerte der Dichtefunktion gezielt mit mangelnder Effizienz bestraft, wobei das genaue Strafmaß von der Wahl des Parameters p abhängt. Um die Entstehung von Grauzonen zu unterbinden, muss die Optimierungsaufgabe (3.26) demnach wie folgt modifiziert werden :

$$\min_{\rho \in \mathcal{L}_\rho} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} \right\}$$

$$\text{u.d.N.} \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\rho, p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{C}(\rho, p) = \rho^p \mathbf{C}_o, \quad p > 1$$

$$\int_{\Omega_o} \rho \, d\Omega_o \leq M_o.$$

Im Hinblick auf die numerische Lösung des regularisierten Problems stellt sich an dieser Stelle die Frage nach einer geeigneten Wahl des Strafparameters p , da im Prinzip für jeden beliebigen Strafwert ein entsprechendes optimales Dichtefeld $\rho_{opt,p}$ gefunden werden kann, wobei die Grauzonenanteile dieser Dichtefelder mit steigendem Wert des Parameters p erwartungsgemäß abnehmen werden. Ferner geht durch die Einführung des SIMP-Ansatzes die bislang konvexe Optimierungsaufgabe (3.26) in eine nicht-konvexe Problemstellung über, deren Lösung sich in der Regel wesentlich schwieriger gestaltet. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei darin, dass das nun nicht mehr konvexe Zielfunktional neben dem gesuchten globalen Minimum eine Reihe weiterer, lokaler Minima besitzen kann, so dass eine auf numerischem Wege ermittelte Lösung nicht unbedingt dem globalen Minimum entsprechen muss. In Anbetracht dieser Problematik werden zur Lösung der Optimierungsaufgabe (3.28) daher sogenannte pfadverfolgende Algorithmen eingesetzt, die in Anlehnung an (Bendsøe & Sigmund 1999 bzw. Rozvany 2001) das Dichtefeld ausgehend von der durch Lösung des konvexen Problems (3.26) bestimmbaren und somit global optimalen Dichteverteilung $\rho_{opt,p=1}$ sukzessiv optimieren, wobei im Laufe des Optimierungsprozesses eine inkrementelle Erhöhung des Strafparameters p erfolgt. Das obige Problem geht dabei in eine Folge von Teilproblemen über, die nun darin bestehen, das Dichtefeld bezüglich der jeweiligen Werte des Parameters p zu optimieren und auf diese Weise die entsprechenden Zwischenlösungen $\rho_{opt,p}$ zu ermitteln. Die Lösung eines Teilproblems fließt dabei stets als Ausgangsnäherung in das nachfolgende Teilproblem ein, so dass im Zuge des Optimierungsprozesses der Grauzonenanteil des Dichtefeldes schrittweise reduziert wird, bis eine sogenannte „black&white“-Topologie erreicht ist, die keine Grauzonen mehr aufweist. Neben der von Bendsøe vorgeschlagenen Regularisierung kann ferner eine Reihe alternativer Penalty-Ansätze formuliert werden, die in analoger Weise die Ausbildung von Grauzonen durch Bestrafung von Zwischenwerten der Dichtefunktion verhindern. So lässt sich das Problem (3.26) beispielsweise unter Verwendung eines Penalty-Funktionalis

$$\vartheta(\rho) = c \int_{\Omega_o} \rho(1 - \rho) \, d\Omega_o, \quad c > 0 \quad (3.29)$$

in der Form

$$\min_{\rho \in \mathcal{L}_\rho} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} + c \int_{\Omega_o} \rho(1 - \rho) \, d\Omega_o \right\}$$

u.d.N. (3.30)

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u}$$

$$\mathbf{C}(\rho) = \rho \mathbf{C}_o$$

$$\int_{\Omega_o} \rho \, d\Omega_o \leq M_o$$

regularisieren (Allaire & Kohn 1993, Jog & Haber 1996), wobei der Konstanten c in diesem Zusammenhang wiederum die Rolle eines Strafparameters zukommt, der das genaue Strafmaß festlegt.

Die numerische Umsetzung der verschiedenen Regularisierungsmethoden zeigt allerdings, dass die jeweiligen Penalty-Ansätze zwar die Entstehung von Grauzonen unterbinden, gleichzeitig jedoch in den betreffenden Bereichen des Entwurfsraumes stark oszillierende Dichtefelder liefern, die in der Regel äußerst komplexe und somit unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten ebenfalls ungünstige Materialverteilungen wie die sogenannten „checkerboard-patterns“ (Diaz & Sigmund 1995, Jog & Haber 1996) zur Folge haben. Eine weitere Konsequenz der vorgestellten Regularisierungsansätze besteht in der fehlenden Existenz einer eindeutigen Lösung der resultierenden Optimierungsaufgabe (Jog & Haber 1996), so dass die zur Lösung des Problems (3.28) bzw. (3.30) verwendeten numerischen Verfahren stets stark netzabhängige Materialverteilungen liefern (Sigmund & Petersson 1998, Rozvany 2001).

3.3.2 Mikroskopischer Ansatz

Eine Relaxierung des eingangs formulierten, diskreten Topologiemodells lässt sich alternativ zur im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Vorgehensweise durch Einführung spezieller Mikrostrukturen erreichen, die mittels stetiger, auf einer mikroskopischen Skala interpretierbarer Indikatorfunktionen beschrieben werden können. Jedem Materialpunkt $\mathbf{x} \in \Omega_o$ wird dabei im Rahmen des nachfolgend abgebildeten Multiskalenmodells eine aus linearelastischem Material bestehende Mikrozelle Y zugeordnet (Bendsøe & Kikuchi 1988), die eine Modellierung des Materialfeldes auf der Mikroebene gestattet und insbesondere die Möglichkeit eröffnet, im betreffenden Punkt des Entwurfsraumes eine beliebige Mikrostruktur zu erzeugen.

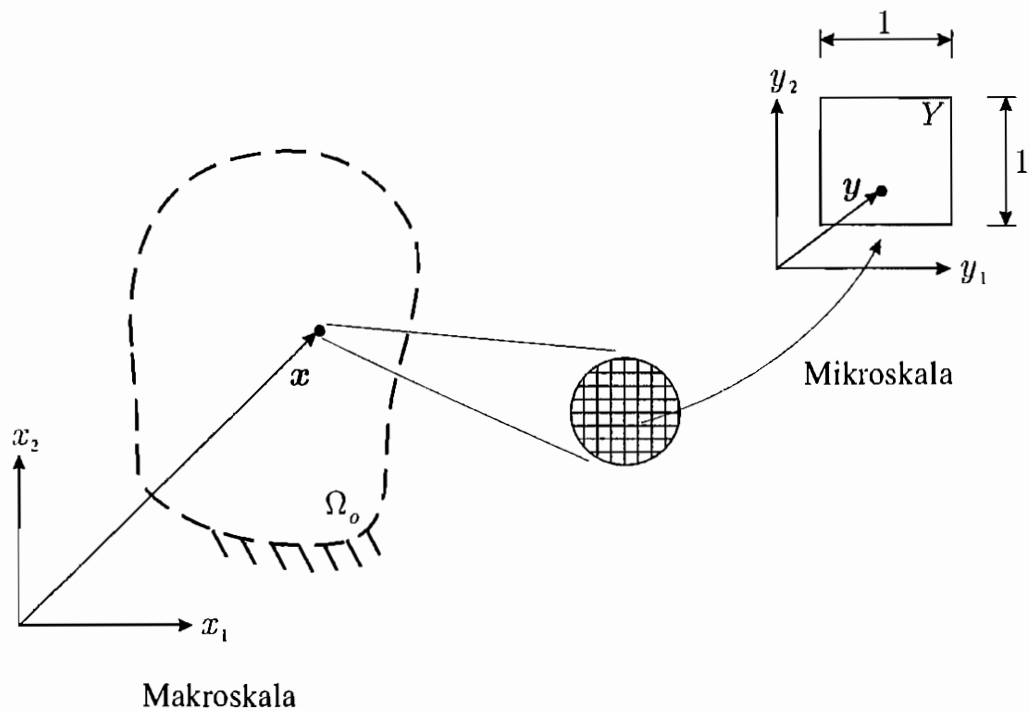


Abbildung 3.3: Multiskalenmodell des Entwurfsraumes

Innerhalb der Mikrozellen werden in der Regel variable Materialparameter in Form eines Elastizitätsmoduls $E^Y(\mathbf{y})$ und einer Querkontraktionszahl $\nu^Y(\mathbf{y})$ eingeführt, die demzufolge mikroskopische Schwankungen der Materialeigenschaften zulassen, so dass jeder Zelle Y ein Materialtensor $C^Y(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in Y$ zugeordnet werden kann, der das Materialverhalten der jeweiligen Zelle auf der Mikroebene charakterisiert. Die Beschreibung des globalen Materialfeldes erfordert hingegen die Formulierung eines sowohl auf der Makro- als auch auf der Mikroskala definierten Tensors $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \Omega_o$, $\mathbf{y} \in Y$, aus dem unter Anwendung der Methode der Homogenisierung (Francu 1982) ein effektiver Materialtensor $C_{eff}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_o$ gewonnen werden kann, der das durch die mikroskopische Verteilung der Materialparameter E und ν bedingte, makroskopische Verhalten des Materials widerspiegelt.

Die zur Relaxierung von Topologieoptimierungsproblemen eingesetzten Mikrostrukturen basieren vornehmlich auf den in Abbildung 3.4 dargestellten Einheitszellen (Bendsøe 1989, Bendsøe et al. 1993) bzw. den daraus resultierenden Materialfeldern, die eine Unterteilung des Zellenraumes Y in einen materiellen Bereich Y_m sowie einen immateriellen Bereich Y_i ermöglichen. Die Modellierung des materiellen Bereiches erfolgt stets unter Verwendung eines homogenen Basismaterials, dessen Eigenschaften durch die Materialkonstanten E_o und ν_o gekennzeichnet sind, so dass der Materialtensor C^Y in der Form

$$C^Y(\mathbf{y}) = \begin{cases} C_o(E_o, \nu_o) & , \mathbf{y} \in Y_m \\ 0 & , \mathbf{y} \in Y_i \end{cases} \quad (3.31)$$

angegeben werden kann.

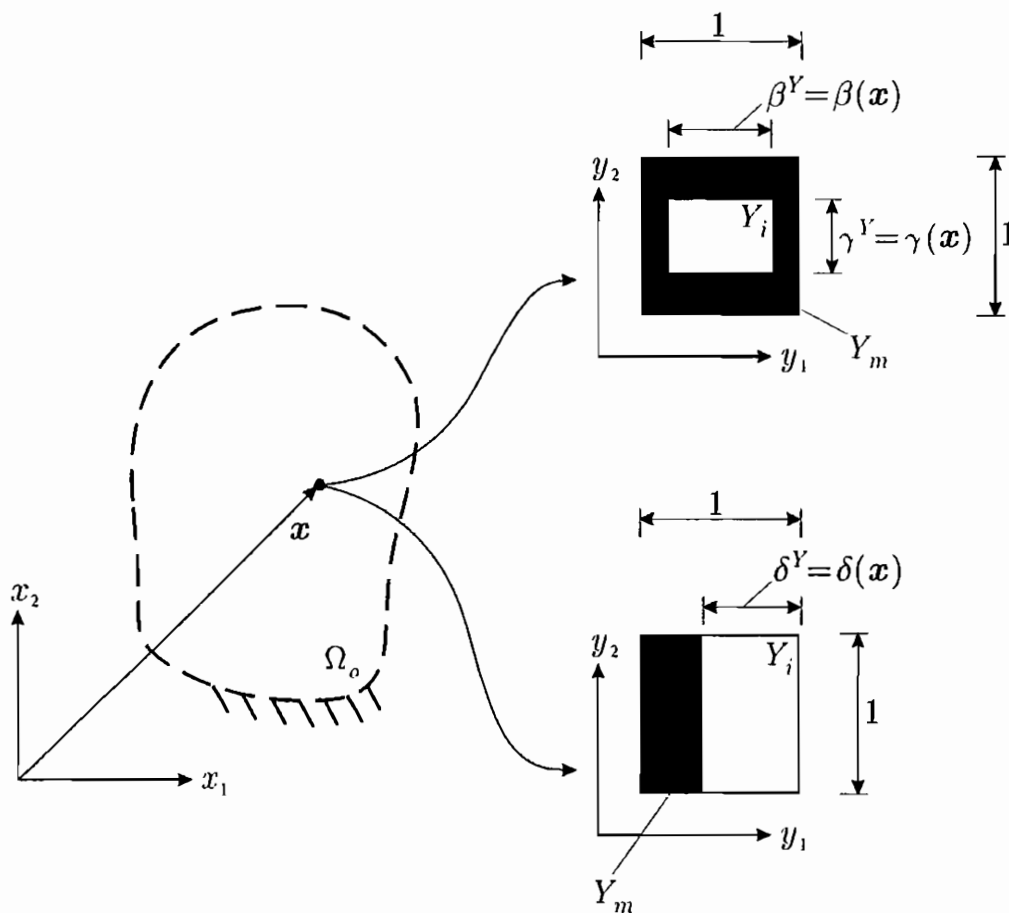


Abbildung 3.4: Mikrostrukturbasierte Topologiemodelle

Die Topologie der obigen Einheitszellen lässt sich dabei mit Hilfe der Geometrieparameter β^Y und γ^Y bzw. δ^Y erfassen, die eine Quantifizierung der Bereiche Y_m und Y_i erlauben und somit die Funktion von Materialindikatoren übernehmen. Da das vorliegende Mehrskalennmodell jedem makroskopischen Materialpunkt eine Mikrozeile zuordnet, treten beim Übergang von der Mikro- zur Makroskala an die Stelle der mikroskopischen Indikatorvariablen $\beta^Y \in [0, 1]$, $\gamma^Y \in [0, 1]$ und $\delta^Y \in [0, 1]$ makroskopische Indikatorfunktionen der Art

$$\beta : \mathbf{x} \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.32)$$

$$\gamma : \mathbf{x} \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.33)$$

sowie

$$\delta : \mathbf{x} \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o, \quad (3.34)$$

die in diesem Zusammenhang die Möglichkeit bieten, jedem Materialpunkt $\mathbf{x} \in \Omega_o$ die für die Topologie der ihm zugeordneten Mikrozeile maßgeblichen Geometrieparameter in Form der Funktionswerte $\beta(\mathbf{x})$ und $\gamma(\mathbf{x})$ bzw. $\delta(\mathbf{x})$ zuzuweisen.

Um zu einer rein makroskopischen Beschreibung des Materials zu gelangen, wird das Materialfeld stets homogenisiert, indem die mikroskopische Materialverteilung $C^Y(\mathbf{y})$ durch ein makroskopisch äquivalentes, homogenes Materialfeld $C_h(\beta^Y, \gamma^Y)$ bzw. $C_h(\delta^Y)$ ersetzt wird, so dass schließlich jedem makroskopischen Punkt des Entwurfsraumes ein effektiver Materialtensor

$$C_{eff}(\mathbf{x}) = C_h(\beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x})) \quad (3.35)$$

bzw.

$$C_{eff}(\mathbf{x}) = C_h(\delta(\mathbf{x})) \quad (3.36)$$

zugeordnet werden kann. Da die verwendeten Mikrostrukturzellen im allgemeinen Fall ein anisotropes Materialverhalten auf der Makroskala zur Folge haben, werden die effektiven Eigenschaften des resultierenden Materialfeldes nicht nur durch die Topologie der Zellen bestimmt, sondern auch durch ihre Ausrichtung im Entwurfsraum beeinflusst. Aus diesem Grund wird die Orientierung der Mikrozellen häufig in der nachfolgend skizzierten Weise als zusätzliche Entwurfsgröße eingeführt und neben den Entwurfsvariablen $\beta(\mathbf{x})$ und $\gamma(\mathbf{x})$ bzw. $\delta(\mathbf{x})$ optimiert (Pedersen 1989, Bendsøe et al. 1993).

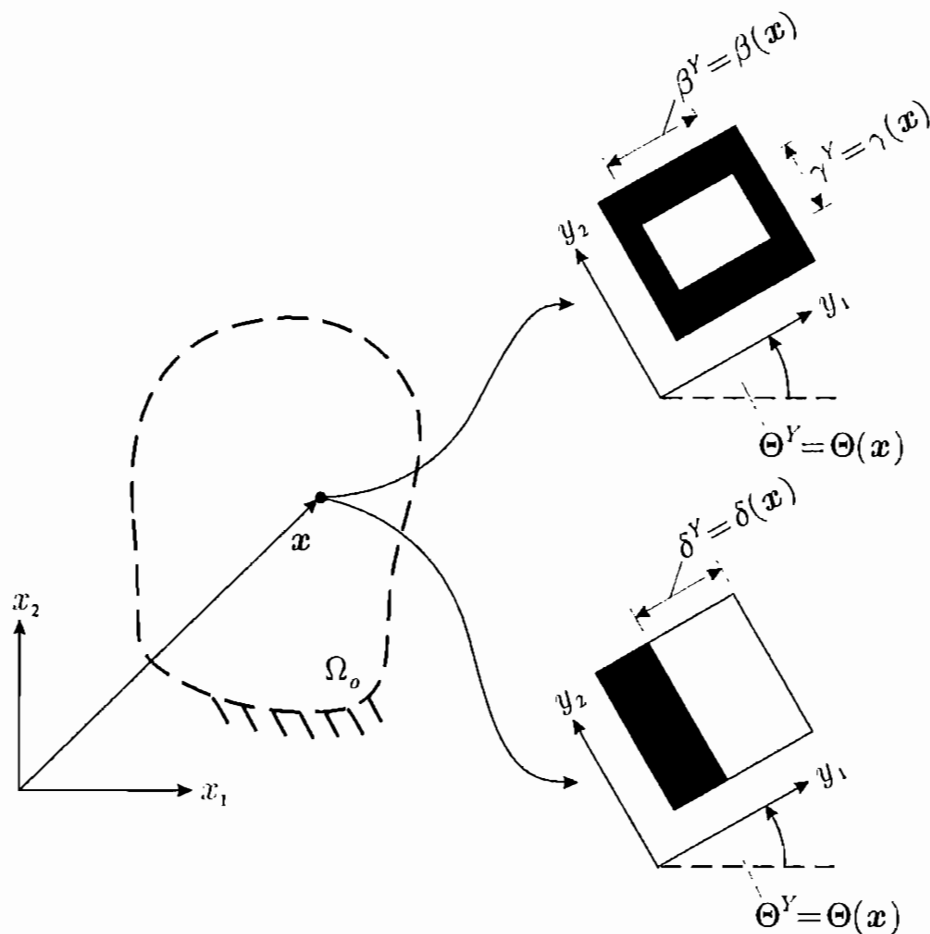


Abbildung 3.4: Mikrostrukturbasierte Topologiemodelle mit variabler Zellorientierung

Die Erfassung der Zellorientierung erfolgt in der Regel mittels eines Winkels $\Theta^y \in [0, 2\pi]$, der die Ausrichtung der Achsen y_i der betreffenden Zelle bezüglich der globalen Koordinatenachsen x_i widerspiegelt, so dass an dieser Stelle eine weitere Entwurfsvariable in Form der Indikatorfunktion

$$\Theta : \mathbf{x} \rightarrow [0, 2\pi] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (3.37)$$

ins Spiel kommt. Der effektive Materialtensor $\mathbf{C}_{eff}(\mathbf{x})$ ergibt sich dabei durch Homogenisierung der jeweiligen Mikrozellen und anschließende Transformation der homogenisierten Tensoren $\mathbf{C}_h(\beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}))$ bzw. $\mathbf{C}_h(\delta(\mathbf{x}))$ auf die Achsen des globalen Koordinatensystems, die unter Verwendung eines geeigneten Rotationstensors $\mathbf{R}(\Theta(\mathbf{x}))$ wie folgt formuliert werden kann (Suzuki & Kikuchi 1991, Bendsøe et al. 1993) :

$$\mathbf{C}_{eff}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\Theta(\mathbf{x}))\mathbf{C}_h(\beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}))\mathbf{R}(\Theta(\mathbf{x}))^T \quad (3.38)$$

bzw.

$$\mathbf{C}_{eff}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\Theta(\mathbf{x}))\mathbf{C}_h(\delta(\mathbf{x}))\mathbf{R}(\Theta(\mathbf{x}))^T . \quad (3.39)$$

Im Zuge der Homogenisierung des Materialfeldes kann ferner jedem Materialpunkt $\mathbf{x} \in \Omega_o$ eine effektive Dichte

$$\rho_{eff}(\mathbf{x}) = 2 - \beta(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}) - (1 - \beta(\mathbf{x}))(1 - \gamma(\mathbf{x})) \quad (3.40)$$

bzw.

$$\rho_{eff}(\mathbf{x}) = 1 - \delta(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

zugeordnet werden (Bendsøe 1995), die eine Quantifizierung der Masse des im Entwurfsraum verteilten Materials in Form eines Funktionals der Art

$$m(\beta, \gamma) = \int_{\Omega_o} \rho_{eff}(\beta, \gamma) d\Omega_o \quad (3.42)$$

bzw.

$$m(\delta) = \int_{\Omega_o} \rho_{eff}(\delta) d\Omega_o \quad (3.43)$$

gestattet. Zudem lässt sich auf der Basis der obigen Dichtefunktionen eine Unterteilung des Entwurfsraumes in die Bereiche

$$\Omega_m = \{ \mathbf{x} \in \Omega_o \mid \rho_{eff}(\mathbf{x}) = 1 \} , \quad (3.44)$$

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \Omega_o \mid \rho_{eff}(\mathbf{x}) = 0\} \quad (3.45)$$

und

$$\Omega_p = \{\mathbf{x} \in \Omega_o \mid 0 < \rho_{eff}(\mathbf{x}) < 1\} \quad (3.46)$$

vornehmen, wobei Ω_m und Ω_i rein materiellen bzw. rein immateriellen und somit mikroskopisch homogenen Materialzonen entsprechen, während Ω_p einen mikroskopisch inhomogenen Bereich darstellt, der je nach verwendetem Mikrostrukturmodell durch periodisch verteilte Hohlräume bzw. laminatartige Strukturen auf der Mikroskala gekennzeichnet ist.

Wird das Materialfeld mit Hilfe der durch die Parameter β^Y und γ^Y charakterisierten Mikrozellen modelliert, so nimmt das im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachtete Entwurfsproblem nun die nachfolgende Gestalt an

$$\min_{\substack{\beta \in \mathcal{L}_\beta \\ \gamma \in \mathcal{L}_\gamma \\ \Theta \in \mathcal{L}_\Theta}} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} \right\} \quad (3.47)$$

u.d.N.

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}_{eff}(\beta, \gamma, \Theta) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta u}$$

$$\mathbf{C}_{eff}(\beta, \gamma, \Theta) = \mathbf{R}(\Theta) \mathbf{C}_h(\beta, \gamma) \mathbf{R}(\Theta)^T$$

$$\int_{\Omega_o} \rho_{eff}(\beta, \gamma) \, d\Omega_o \leq M_o \quad , \quad \rho_{eff}(\beta, \gamma) = 2 - \beta - \gamma - (1 - \beta)(1 - \gamma) \quad ,$$

wobei der Raum der zulässigen Lösungen unter Beachtung der Wertebereiche der Indikatorfunktionen $\beta(\mathbf{x})$, $\gamma(\mathbf{x})$ und $\Theta(\mathbf{x})$ auf die Mengen

$$\mathcal{L}_\beta = \{\beta \mid 0 \leq \beta(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o\} \quad (3.48)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = \{\gamma \mid 0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o\} \quad (3.49)$$

und

$$\mathcal{L}_\Theta = \{\Theta \mid 0 \leq \Theta(\mathbf{x}) \leq 2\pi \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_o\} \quad (3.50)$$

einzuschränken ist. Im Fall des auf laminatartigen Mikrostrukturen basierenden Topologiemodells lässt sich die zu lösende Optimierungsaufgabe in analoger Weise formulieren, indem anstelle der Parameter β^Y und γ^Y die Größe δ^Y bzw. die Funktion $\delta(\mathbf{x})$ als Entwurfsvariable eingeführt und der Lösungsraum entsprechend modifiziert wird.

Die numerische Umsetzung der mikroskopisch motivierten Topologiemodelle erfordert nunmehr die Einführung eines mehrskaligen Finite-Elemente-Modells, das eine Diskretisierung

des Entwurfsraumes auf der Makro– sowie Mikroskala ermöglicht. Auf der Makroebene wird der Entwurfsraum dabei stets in makroskopisch homogene Elemente Ω_o^e , $e = 1, \dots, n_e$ zerlegt, die eine Überführung des Materialfeldes $C_{eff}(\mathbf{x})$ in eine diskrete Anzahl räumlich konstanter Materialtensoren $C_{eff,e}$, $e = 1, \dots, n_e$ gestattet. Vor diesem Hintergrund genügt es an dieser Stelle, jedem makroskopischen Element Ω_o^e lediglich eine exemplarische Mikrozeile Y^e zuzuordnen, so dass die Indikatorfunktionen $\beta(\mathbf{x})$, $\gamma(\mathbf{x})$, $\delta(\mathbf{x})$ und $\Theta(\mathbf{x})$ in eine endliche Anzahl von Entwurfsvariablen $\beta_e \in [0, 1]$, $\gamma_e \in [0, 1]$, $\delta_e \in [0, 1]$ und $\Theta_e \in [0, 2\pi]$, $e = 1, \dots, n_e$ übergehen. Folglich lässt sich das Materialverhalten innerhalb der Elemente mit Hilfe von Materialtensoren der Gestalt

$$C_{eff,e} \equiv \mathbf{R}(\Theta_e)C_h(\beta_e, \gamma_e)\mathbf{R}(\Theta_e)^T \quad (3.51)$$

bzw.

$$C_{eff,e} \equiv \mathbf{R}(\Theta_e)C_h(\delta_e)\mathbf{R}(\Theta_e)^T \quad (3.52)$$

beschreiben, die durch Homogenisierung der dem jeweiligen Element zugeordneten Mikrozeile gewonnen werden können. Da das in diesem Zusammenhang zu lösende Homogenisierungsproblem im allgemeinen Fall keine analytische Lösung besitzt, werden die Mikrozeilen in der Regel ebenfalls mit Hilfe der Finite–Elemente–Methode diskretisiert und anschließend in Anlehnung an (Bendsøe & Kikuchi 1988, Bendsøe et al. 1993 bzw. Allaire 1997) auf numerischem Wege homogenisiert, was jedoch mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist.

Eine analytische Lösung des Homogenisierungsproblems kann lediglich im Fall der laminarartigen Mikrozeilen angegeben werden (Bendsøe 1989), so dass diesem Typ der Mikrostruktur eine besondere Bedeutung zukommt, da er ohne numerischen Mehraufwand in das makroskopische Finite–Elemente–Modell implementierbar ist. Neben dem vorgestellten, auf Laminaten erster Ordnung basierenden Ansatz finden sich in der Literatur daher weitere, auf Laminatstrukturen höherer Ordnung beruhende Topologiemodelle (Francfort & Murat 1986, Bendsøe et al. 1993, Jog et al. 1994), die durch konsequente Erweiterung des bestehenden Multiskalenkonzeptes auf mehrere Mikroskalen gewonnen werden können und demzufolge ebenfalls auf analytischem Wege lösbar sind.

Der einzige Nachteil der unter Verwendung von Laminaten konstruierbaren Mikrostrukturmodelle besteht darin, dass die resultierenden Mikrozeilen aufgrund der speziellen Topologie des immateriellen Zellenraumes Y_i über keinerlei Schubsteifigkeit verfügen und dementsprechend im Zuge der Finite–Elemente–Formulierung des zu lösenden Optimierungsproblems singuläre Steifigkeitsmatrizen liefern. Diese Problematik lässt sich jedoch ohne Weiteres umgehen, indem innerhalb des immateriellen Bereiches der verwendeten Einheitszellen ein Elastizitätsmodul $E_i \ll E_o$ eingeführt wird (Bendsøe 1995), der dem resultierenden Materialfeld

$$C^Y(\mathbf{y}) = \begin{cases} C_o(E_o, \nu_o) & , \mathbf{y} \in Y_m \\ C_i(E_i, \nu_o) & , \mathbf{y} \in Y_i \end{cases} \quad (3.53)$$

eine minimale Schubsteifigkeit verleiht, woraufhin Singularitäten der genannten Art ausgeschlossen werden.



Kapitel 4

Regularisierung des Topologieoptimierungsproblems

Die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten, mikroskopisch motivierten Topologiemodelle ermöglichen zwar eine Relaxierung des Optimierungsproblems (3.15) bzw. (3.17) im Hinblick auf den Definitionsbereich der Entwurfparameter, haben jedoch eine Erweiterung des Raumes der zulässigen Lösungen auf Materialverteilungen mit unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten nicht realisierbaren Mikrostrukturen zur Folge, so dass aus fertigungstechnischer Sicht die auf dem SIMP-Modell basierende, makroskopische Problemformulierung vorzuziehen ist. Allerdings muss das Problem (3.28) dahingehend reguliert werden, dass die durch die Bestrafung von Grauzonen bedingte Ausbildung oszillatorischer Dichtefelder, die ebenfalls nicht realisierbare Lösungen darstellen, ausgeschlossen wird und die erhaltenen Lösungen keine Netzabhängigkeit aufweisen.

4.1 Regularisierung des Problems unter Einbeziehung des Dichtegradienten

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll das Topologieoptimierungsproblem durch einen zusätzlichen Penalty-Ansatz reguliert werden, der eine gezielte Bestrafung oszillatorischer Dichtefelder unter Einbeziehung des Dichtegradienten

$$\nabla\rho = \left[\frac{\partial\rho}{\partial x_1}, \frac{\partial\rho}{\partial x_2}, \frac{\partial\rho}{\partial x_3} \right]^T \quad (4.1)$$

bewirkt. Zur Erfassung der räumlichen Schwankungen der Dichtefunktion ρ wird dabei ein Funktional der Gestalt

$$\lambda(\rho) = \int_{\Omega_o} (\nabla \rho)^T (\nabla \rho) d\Omega_o \quad (4.2)$$

eingeführt, das die globale Verteilung des Dichtegradienten $\nabla \rho$ im Entwurfsraum Ω_o widerspiegelt und vor dem Hintergrund des verwendeten Topologiemodells ein Maß für die den materiellen Bereich des Entwurfsraumes begrenzende Oberfläche darstellt. Da oszillatorische Dichtefelder stets eine große Oberfläche aufweisen, lässt sich das obige Funktional zur Bestrafung solcher Materialverteilungen heranziehen, indem es in Form des in der Abbildung 4.1 skizzierten Penalty-Funktional

$$\chi(\rho) = e^{-\gamma \lambda(\rho)}, \quad \gamma > 0 \quad (4.3)$$

wie folgt in das bestehende SIMP-Modell (3.27) implementiert wird :

$$E(\mathbf{x}) = \rho^p(\mathbf{x}) E_o e^{-\gamma \lambda(\rho)}, \quad p > 1, \quad \gamma > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_o. \quad (4.4)$$

Die Konstante γ stellt in diesem Zusammenhang einen zusätzlichen Strafparameter dar, der eine gezielte Skalierung des Penalty-Funktional χ ermöglicht und somit zur Festlegung eines geeigneten Strafniveaus verwendet werden kann.

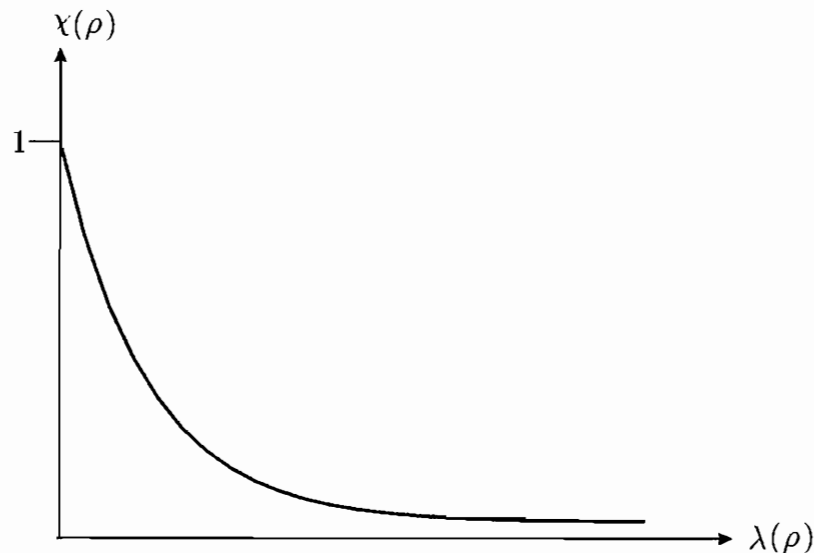


Abbildung 4.1: Penalty-Funktional

Neben der durch den klassischen SIMP-Ansatz bedingten Benachteiligung von Grauzonen bewirkt das in (Kotucha & Hackl 2003 bzw. Kotucha & Hackl 2004b) unter der Bezeichnung „extended SIMP-approach“ beziehungsweise „X-SIMP-approach“ eingeführte Modell (4.4)

die nachfolgend skizzierte, mit zunehmender Oberfläche λ einhergehende Absenkung des E-Moduls, die sich in gleichem Maße auf alle Materialpunkte des Entwurfsraumes erstreckt und einer Verminderung der globalen Steifigkeit der Struktur gleichkommt.

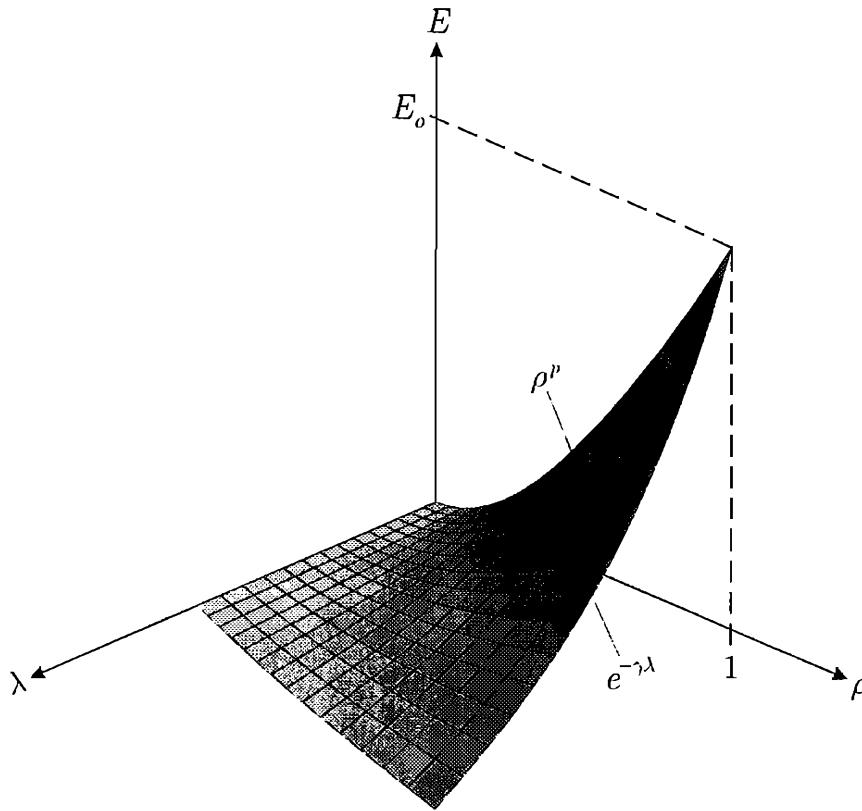


Abbildung 4.2: Erweitertes SIMP-Modell (X-SIMP-approach)

Auf diese Weise wird die Ausbildung oszillatorischer Dichteverteilungen, die stets eine Zunahme der Oberfläche λ nach sich zieht, mit einem Steifigkeitsverlust der gesamten Struktur bestraft, so dass Materialverteilungen der genannten Art als ineffiziente Lösungen ausgeschlossen werden. Das erweiterte Modell führt dabei auf eine Konstitutivbeziehung der Art

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho^p \left\{ \frac{\nu_o E_o}{(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \frac{E_o}{(1 + \nu_o)} \boldsymbol{\varepsilon} \right\} e^{-\gamma\lambda(\rho)}, \quad (4.5)$$

aus der nunmehr ein Materialtensor der Form

$$\mathbf{C}(\rho, p, \gamma) = \rho^p \mathbf{C}_o e^{-\gamma\lambda(\rho)} \quad (4.6)$$

beziehungsweise die Materialmatrix

$$\tilde{\mathbf{C}}(\rho, p, \gamma) = \rho^p \tilde{\mathbf{C}}_o e^{-\gamma\lambda(\rho)} \quad (4.7)$$

resultiert. Folglich lässt sich an dieser Stelle ein Gesamtpotential der Gestalt

$$\Pi(\mathbf{u}, \rho, p, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\rho, p, \gamma) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} \quad (4.8)$$

bzw.

$$\Pi(\mathbf{u}, \rho, p, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_u^T \bar{\mathbf{C}}(\rho, p, \gamma) \mathbf{D}_u \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} \quad (4.9)$$

eingeführen, so dass das zu lösende Topologieoptimierungsproblem in der nachfolgenden Weise formuliert werden kann :

$$\min_{\rho \in \mathcal{L}_\rho} \left\{ \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o + \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} \right\}$$

u.d.N.

(4.10)

$$\int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\rho, p, \gamma) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \delta \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\delta \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{C}(\rho, p, \gamma) = \rho^p \mathbf{C}_o e^{-\gamma \lambda(\rho)} \quad , \quad \lambda(\rho) = \int_{\Omega_o} (\nabla \rho)^T (\nabla \rho) d\Omega_o \quad , \quad p > 1 \quad , \quad \gamma > 0$$

$$\int_{\Omega_o} \rho d\Omega_o \leq M_o.$$

4.2 Numerische Lösung des regularisierten Problems

Die Lösung des Optimierungsproblems (4.10) erfordert in erster Linie eine geeignete Diskretisierung des Dichte- und Verschiebungsfeldes im Rahmen der Finite-Elemente-Methode sowie die Formulierung eines numerischen Verfahrens, das zur Lösung des diskretisierten Problems herangezogen werden kann. In diesem Zusammenhang wird die vorliegende restringierte Optimierungsaufgabe unter Verwendung der Penalty-/Barrier-Methode (Großmann & Terno 1997) auf eine Folge von unrestringierten Ersatzproblemen zurückgeführt, die anschließend in Anlehnung an (Kotucha & Hackl 2004a bzw. Kotucha & Hackl 2004b) mittels eines pfadverfolgenden Abstiegsverfahrens gelöst wird.

4.2.1 Diskretisierung des Problems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode

Das im Zuge der Diskretisierung des Problems (4.10) einzuführende Finite-Elemente-Modell soll nun exemplarisch unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes formuliert werden, wobei das zweidimensionale Modell ohne Weiteres zu einer 3D-Formulierung ausgebaut werden kann, die die Berücksichtigung beliebiger dreiachsiger Spannungszustände gestattet. Bei Benutzung eines Koordinatensystems mit den Raumrichtungen x, y und z fließen im Fall des ebenen Spannungszustandes lediglich die Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ sowie die Dehnungen $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ in das Gesamtpotential Π ein, so dass der Spannungs- bzw. Dehnungszustand durch die Vektoren

$$\tilde{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T \quad (4.11)$$

bzw.

$$\tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (4.12)$$

beschrieben werden kann. Vor diesem Hintergrund geht die Materialmatrix \tilde{C}_o in eine 3×3 -Matrix über, die unter Einbeziehung des aus der Bedingung $\sigma_{zz} = 0$ resultierenden Zusammenhanges

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_o}{1 - \nu_o} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (4.13)$$

nunmehr die Gestalt

$$\tilde{C}_o = \frac{E_o}{(1 - \nu_o^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_o & 0 \\ \nu_o & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_o}{2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

annimmt. Ferner lassen sich an dieser Stelle die für die Dehnungen $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ und ε_{xy} maßgeblichen Verschiebungen u_x und u_y zu einem Verschiebungsvektor der Form

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T \quad (4.15)$$

zusammenfassen, wobei die eingangs eingeführte Differentialoperatormatrix (2.45) wie folgt zu modifizieren ist :

$$D_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Um das Problem (4.10) zu diskretisieren, wird der Entwurfsraum Ω_o nun in der nachfolgenden Weise in eine endliche Anzahl von Elementen Ω_o^e , $e = 1, \dots, n_e$ unterteilt, die eine Überführung der Feldfunktionen ρ, u_x und u_y in eine diskrete Menge von Knotenvariablen $\hat{\rho}_k, \hat{u}_{kx}$ und \hat{u}_{ky} , $k = 1, \dots, n_k$ gestatten.

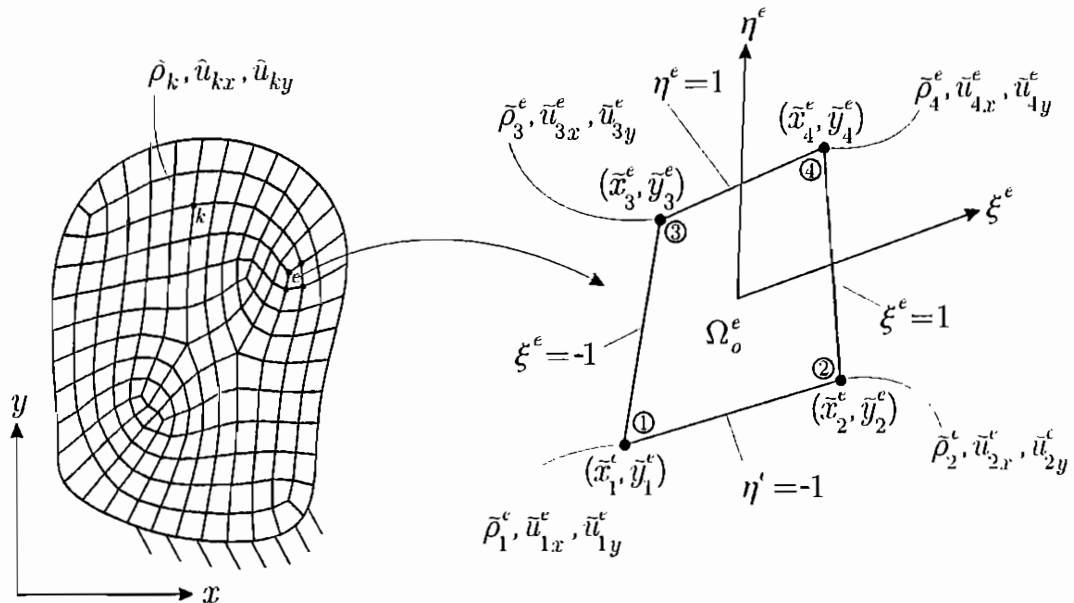


Abbildung 4.3: Finite-Elemente-Modell

Im Gegensatz zur klassischen FE-Modellierung des Entwurfsraumes, die auf der Annahme einer konstanten Dichteverteilung in den Elementen beruht, wird die Dichte ρ nunmehr neben den Verschiebungen u_x und u_y als Knotenvariable eingeführt und mit Hilfe geeigneter Formfunktionen modelliert, die eine stetige Approximation des Dichtefeldes ermöglichen und die Formulierung von Dichtegradienten zulassen.

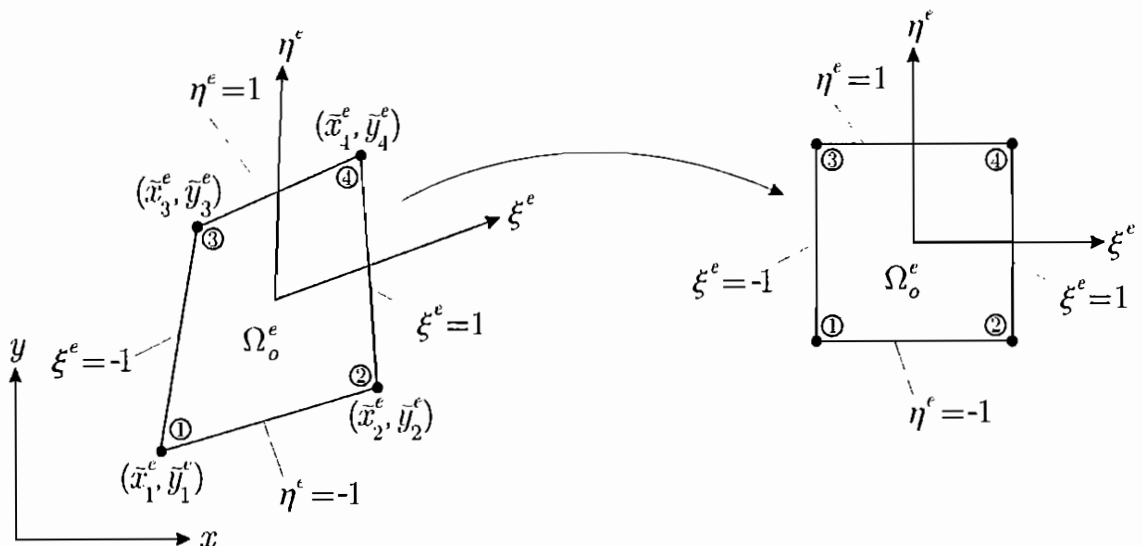
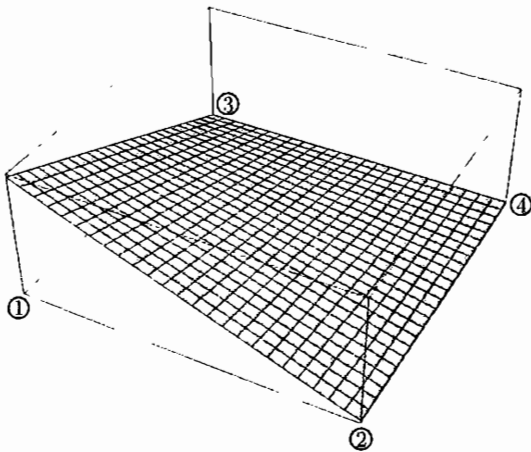
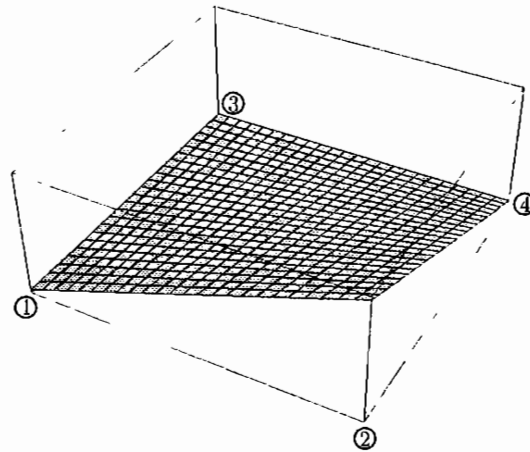


Abbildung 4.4: Abbildung eines schiefwinkligen Elementes auf ein rechtwinkliges Einheitselement

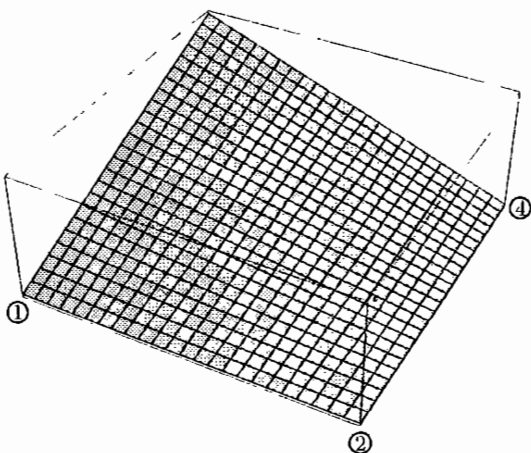
Die schiefwinkligen Elemente werden dabei in Anlehnung an (Zienkiewicz & Taylor 2000) auf rechtwinklige Einheitselemente der in Abbildung 4.4 skizzierten Gestalt zurückgeführt, in denen das Dichte- und Verschiebungsfeld mittels der nachfolgend dargestellten, bilinearen Formfunktionen approximiert werden kann.



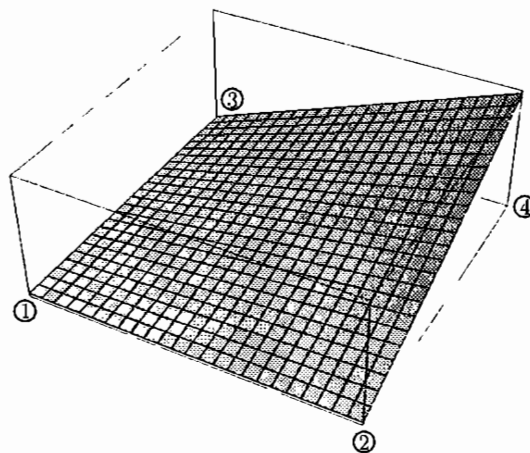
$$h_1^e(\xi^e, \eta^e) = \frac{1}{4}(1 - \xi^e)(1 - \eta^e)$$



$$h_2^e(\xi^e, \eta^e) = \frac{1}{4}(1 + \xi^e)(1 - \eta^e)$$



$$h_3^e(\xi^e, \eta^e) = \frac{1}{4}(1 - \xi^e)(1 + \eta^e)$$



$$h_4^e(\xi^e, \eta^e) = \frac{1}{4}(1 + \xi^e)(1 + \eta^e)$$

Abbildung 4.5: Bilineare Formfunktionen

Die Feldfunktionen ρ , u_x und u_y lassen sich demnach auf der Elementebene unter Verwendung der Knotenwerte $\tilde{\rho}_i^e$, \tilde{u}_{ix}^e und \tilde{u}_{iy}^e wie folgt entwickeln

$$\rho(\xi^e, \eta^e) = \sum_{i=1}^4 h_i^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}_i^e \quad (4.17)$$

$$u_x(\xi^e, \eta^e) = \sum_{i=1}^4 h_i^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{u}_{ix}^e \quad (4.18)$$

$$u_y(\xi^e, \eta^e) = \sum_{i=1}^4 h_i^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{u}_{iy}^e, \quad (4.19)$$

wobei die Ansatzfunktionen $h_i^e(\xi^e, \eta^e)$ zu Ansatzvektoren der Art

$$\mathbf{h}^e(\xi^e, \eta^e) = \begin{bmatrix} h_1^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_2^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_3^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_4^e(\xi^e, \eta^e) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

beziehungsweise zu Ansatzmatrizen der Gestalt

$$\mathbf{H}^e(\xi^e, \eta^e) = \begin{bmatrix} h_1^e(\xi^e, \eta^e) & 0 \\ 0 & h_1^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_2^e(\xi^e, \eta^e) & 0 \\ 0 & h_2^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_3^e(\xi^e, \eta^e) & 0 \\ 0 & h_3^e(\xi^e, \eta^e) \\ h_4^e(\xi^e, \eta^e) & 0 \\ 0 & h_4^e(\xi^e, \eta^e) \end{bmatrix}^T \quad (4.21)$$

zusammengefasst werden können. In analoger Weise lassen sich die den einzelnen Elementen zugeordneten Knotenwerte des Dichte- und Verschiebungsfeldes zu lokalen Dichte- bzw. Verschiebungsvektoren

$$\tilde{\rho}^e = [\tilde{\rho}_1^e, \tilde{\rho}_2^e, \tilde{\rho}_3^e, \tilde{\rho}_4^e]^T \quad (4.22)$$

und

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = [\tilde{u}_{1x}^e, \tilde{u}_{1y}^e, \tilde{u}_{2x}^e, \tilde{u}_{2y}^e, \tilde{u}_{3x}^e, \tilde{u}_{3y}^e, \tilde{u}_{4x}^e, \tilde{u}_{4y}^e]^T \quad (4.23)$$

zusammenfassen, so dass die Entwicklungen (4.17), (4.18) sowie (4.19) alternativ in der Form

$$\rho(\xi^e, \eta^e) = \mathbf{h}^{eT}(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}^e \quad (4.24)$$

$$\mathbf{u}(\xi^e, \eta^e) = \mathbf{H}^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{\mathbf{u}}^e \quad (4.25)$$

angegeben werden können. Aus den Ansätzen (4.24) und (4.25) ergibt sich ferner der Dichtegradient

$$\begin{aligned}\nabla \rho(\xi^e, \eta^e) &= \underbrace{\nabla \mathbf{h}^{eT}(\xi^e, \eta^e)}_{= \mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e)} \tilde{\rho}^e\end{aligned}\quad (4.26)$$

sowie das Dehnungsfeld

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi^e, \eta^e) &= \mathbf{D}_u \mathbf{u}(\xi^e, \eta^e) \\ &= \underbrace{\mathbf{D}_u \mathbf{H}^e(\xi^e, \eta^e)}_{= \mathbf{B}^e(\xi^e, \eta^e)} \tilde{\mathbf{u}}^e,\end{aligned}\quad (4.27)$$

wobei die Matrizen $\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e)$ bzw. $\mathbf{B}^e(\xi^e, \eta^e)$ die nachfolgende Gestalt annehmen :

$$\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^e}{\partial x} & \frac{\partial h_2^e}{\partial x} & \frac{\partial h_3^e}{\partial x} & \frac{\partial h_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1^e}{\partial y} & \frac{\partial h_2^e}{\partial y} & \frac{\partial h_3^e}{\partial y} & \frac{\partial h_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}\quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}^e(\xi^e, \eta^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1^e}{\partial x} & \frac{\partial h_1^e}{\partial y} & \frac{\partial h_2^e}{\partial x} & \frac{\partial h_2^e}{\partial y} & \frac{\partial h_3^e}{\partial x} & \frac{\partial h_3^e}{\partial y} & \frac{\partial h_4^e}{\partial x} & \frac{\partial h_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}.\quad (4.29)$$

Vor diesem Hintergrund geht das im Zuge der Regularisierung des Topologieoptimierungsproblems als Maß für die räumlichen Schwankungen der Dichtefunktion eingeführte Funktional λ in die Summe

$$\lambda(\rho) = \sum_{e=1}^{n_c} \int_{\Omega_s^e} (\nabla \rho(\xi^e, \eta^e))^T \nabla \rho(\xi^e, \eta^e) d\Omega_s^e\quad (4.30)$$

über, die nunmehr unter Berücksichtigung der Beziehung (4.26) folgendermaßen approximiert werden kann :

$$\begin{aligned}
\lambda(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_0^e} (\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}^e)^T \mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}^e d\Omega_0^e \\
&= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_0^e} \tilde{\rho}^{eT} (\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e))^T \mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}^e d\Omega_0^e \\
&= \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} \underbrace{\int_{\Omega_0^e} (\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e))^T \mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e) d\Omega_0^e}_{= D_\rho^e} \tilde{\rho}^e \\
&= \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} D_\rho^e \tilde{\rho}^e.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Die zur Berechnung der Matrizen $\mathbf{N}^e(\xi^e, \eta^e)$ und $\mathbf{B}^e(\xi^e, \eta^e)$ benötigten Ableitungen der Formfunktionen $h_i^e(\xi^e, \eta^e)$ nach den Koordinaten x und y ergeben sich dabei in Anlehnung an (Zienkiewicz & Taylor 2000) aus den Abbildungsvorschriften

$$x(\xi^e, \eta^e) = \mathbf{h}^{eT}(\xi^e, \eta^e) \tilde{\mathbf{x}}^e, \quad \tilde{\mathbf{x}}^e = [\tilde{x}_1^e, \tilde{x}_2^e, \tilde{x}_3^e, \tilde{x}_4^e]^T \tag{4.32}$$

$$y(\xi^e, \eta^e) = \mathbf{h}^{eT}(\xi^e, \eta^e) \tilde{\mathbf{y}}^e, \quad \tilde{\mathbf{y}}^e = [\tilde{y}_1^e, \tilde{y}_2^e, \tilde{y}_3^e, \tilde{y}_4^e]^T, \tag{4.33}$$

die eine Transformation der lokalen Koordinaten ξ^e und η^e auf die globalen Koordinaten x und y bewirken. Aufgrund der funktionalen Abhängigkeit $x = x(\xi^e, \eta^e)$ sowie $y = y(\xi^e, \eta^e)$ lassen sich die zu bestimmenden Ableitungen durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi^e} & \frac{\partial y}{\partial \xi^e} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta^e} & \frac{\partial y}{\partial \eta^e} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{J}^e(\xi^e, \eta^e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^e}{\partial \xi^e} \\ \frac{\partial h_i^e}{\partial \eta^e} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

gewinnen, aus dem ein Zusammenhang der Art

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{e-1}(\xi^e, \eta^e) \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^e}{\partial \xi^e} \\ \frac{\partial h_i^e}{\partial \eta^e} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

resultiert. Die Transformationsgleichungen (4.32) und (4.33) ermöglichen an dieser Stelle eine

Entwicklung der Jacobi–Matrizen $\mathbf{J}^e(\xi^e, \eta^e)$ in der Form

$$\mathbf{J}^e(\xi^e, \eta^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}^{eT}}{\partial \xi^e} \tilde{\mathbf{x}}^e & \frac{\partial \mathbf{h}^{eT}}{\partial \xi^e} \tilde{\mathbf{y}}^e \\ \frac{\partial \mathbf{h}^{eT}}{\partial \eta^e} \tilde{\mathbf{x}}^e & \frac{\partial \mathbf{h}^{eT}}{\partial \eta^e} \tilde{\mathbf{y}}^e \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

wobei die Differentiation der Ansatzvektoren $\mathbf{h}^e(\xi^e, \eta^e)$ bezüglich der Koordinaten ξ^e bzw. η^e Vektoren der Gestalt

$$\frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \xi^e} = \left[\frac{\partial h_1^e}{\partial \xi^e}, \frac{\partial h_2^e}{\partial \xi^e}, \frac{\partial h_3^e}{\partial \xi^e}, \frac{\partial h_4^e}{\partial \xi^e} \right]^T \quad (4.37)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \eta^e} = \left[\frac{\partial h_1^e}{\partial \eta^e}, \frac{\partial h_2^e}{\partial \eta^e}, \frac{\partial h_3^e}{\partial \eta^e}, \frac{\partial h_4^e}{\partial \eta^e} \right]^T \quad (4.38)$$

liefert, deren Komponenten in der nachfolgenden Weise angegeben werden können :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1^e}{\partial \xi^e} &= -\frac{1}{4}(1 - \eta^e) & , & \quad \frac{\partial h_1^e}{\partial \eta^e} = -\frac{1}{4}(1 - \xi^e) \\ \frac{\partial h_2^e}{\partial \xi^e} &= \frac{1}{4}(1 - \eta^e) & , & \quad \frac{\partial h_2^e}{\partial \eta^e} = -\frac{1}{4}(1 + \xi^e) \\ \frac{\partial h_3^e}{\partial \xi^e} &= -\frac{1}{4}(1 + \eta^e) & , & \quad \frac{\partial h_3^e}{\partial \eta^e} = \frac{1}{4}(1 - \xi^e) \\ \frac{\partial h_4^e}{\partial \xi^e} &= \frac{1}{4}(1 + \eta^e) & , & \quad \frac{\partial h_4^e}{\partial \eta^e} = \frac{1}{4}(1 + \xi^e). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Das eingeführte Finite–Elemente–Modell eröffnet nunmehr die Möglichkeit, die in das Gesamtpotential (4.9) einfließende Formänderungsenergie

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}, \rho, p, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_u^T \rho^p \tilde{\mathbf{C}}_o e^{-\gamma \lambda(\rho)} \mathbf{D}_u \mathbf{u} d\Omega_o \quad , \quad \lambda(\rho) = \int_{\Omega_o} (\nabla \rho)^T (\nabla \rho) d\Omega_o \quad (4.40)$$

in elementspezifische Anteile zu zerlegen und diese in der Form

$$\Pi_{int}^e(\tilde{\mathbf{u}}^e, \tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o^e} \tilde{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^p \tilde{\mathbf{C}}_o \exp \left(-\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} \mathbf{D}_\rho^e \tilde{\rho}^e \right) \mathbf{B}^e \tilde{\mathbf{u}}^e d\Omega_o^e \quad (4.41)$$

bzw.

$$\Pi_{int}^e(\tilde{\mathbf{u}}^e, \tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^{eT} \exp \left(-\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} \mathbf{D}_\rho^e \tilde{\rho}^e \right) \int_{\Omega_o^e} \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^p \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e \tilde{\mathbf{u}}^e \quad (4.42)$$

zu approximieren. In diesem Zusammenhang kann jedem Element eine Steifigkeitsmatrix der Art

$$\mathbf{K}^e(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) = \underbrace{\exp \left(-\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} \mathbf{D}_\rho^e \tilde{\rho}^e \right)}_{= \chi(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, \gamma)} \underbrace{\int_{\Omega_o^e} \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^p \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e}_{= \mathbf{K}_o^e(\tilde{\rho}^e, p)} \quad (4.43)$$

zugeordnet werden, so dass die jeweiligen Formänderungsenergien wie folgt ausgedrückt werden können :

$$\Pi_{int}^e(\tilde{\mathbf{u}}^e, \tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{K}^e(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) \tilde{\mathbf{u}}^e. \quad (4.44)$$

Werden zur Beschreibung des Dichte- und Verschiebungsfeldes anstelle der lokalen Knotenvariablen $\tilde{\rho}_i^e$, \tilde{u}_{ix}^e und \tilde{u}_{iy}^e die globalen Variablen $\hat{\rho}_k$, \hat{u}_{kx} und \hat{u}_{ky} herangezogen, so lässt sich die Formänderungsenergie der gesamten Struktur

$$\Pi_{int}(\tilde{\mathbf{u}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}^{n_e}, \tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{K}^e(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma) \tilde{\mathbf{u}}^e \quad (4.45)$$

nach Einführung eines globalen Dichte- sowie Verschiebungsvektors

$$\hat{\rho} = [\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n_k}]^T \quad (4.46)$$

und

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_{1x}, \hat{u}_{1y}, \dots, \hat{u}_{n_kx}, \hat{u}_{n_ky}]^T \quad (4.47)$$

alternativ in der Form

$$\Pi_{int}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) \hat{\mathbf{u}} \quad (4.48)$$

darstellen, wobei die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} unter Verwendung des Assemblierungsoperators \mathbf{A} (Hughes 1987) aus den zuvor formulierten Elementsteifigkeitsmatrizen aufgebaut werden kann und demnach folgende Gestalt aufweist :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} (\mathbf{K}^e(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p, \gamma)) \\ &= \chi(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, \gamma) \underbrace{\mathbf{A}_{e=1}^{n_e} (\mathbf{K}_o^e(\tilde{\rho}^e, p))}_{= \mathbf{K}_o(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}, p)}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ferner ermöglicht das vorliegende Modell eine Überführung des Potentials der äußeren Kräfte

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_t^T \mathbf{u} \, d\Gamma_{o,t} \quad (4.50)$$

in die Summe

$$\begin{aligned} \Pi_{ext}(\tilde{\mathbf{u}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}^{n_e}) &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(- \int_{\Omega_o^e} \mathbf{f}_v^T (\mathbf{H}^e \tilde{\mathbf{u}}^e) \, d\Omega_o^e - \int_{\Gamma_{o,t}^e} \mathbf{f}_t^T (\mathbf{H}^e \tilde{\mathbf{u}}^e) \, d\Gamma_{o,t}^e \right) \\ &= - \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{\left(\int_{\Omega_o^e} (\mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_v)^T \, d\Omega_o^e + \int_{\Gamma_{o,t}^e} (\mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_t)^T \, d\Gamma_{o,t}^e \right)}_{= \tilde{\mathbf{p}}^{eT}} \tilde{\mathbf{u}}^e \\ &= - \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{p}}^{eT} \tilde{\mathbf{u}}^e, \end{aligned} \quad (4.51)$$

die beim Übergang von der lokalen zu einer globalen Formulierung einen Ausdruck der Art

$$\Pi_{ext}(\hat{\mathbf{u}}) = -\hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} (\tilde{\mathbf{p}}^e) \quad (4.52)$$

liefert. Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (4.48) und (4.52) kann das Gesamtpotential (4.9) schließlich in der nachfolgenden Weise approximiert werden :

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.53)$$

Folglich lässt sich die Gâteaux–Ableitung

$$D\Pi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma)(\delta\hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{d\alpha} \Pi(\hat{\mathbf{u}} + \alpha\delta\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma)|_{\alpha=0} \quad (4.54)$$

nunmehr in der Form

$$D\Pi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma)(\delta\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) \delta\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{p}}^T \delta\hat{\mathbf{u}} \quad (4.55)$$

angeben, so dass die Forderung nach einem Minimum des Gesamtpotentials $\Pi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}, p, \gamma)$ auf die Gleichung

$$\mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

bzw.

$$\mathbf{K}(\hat{\rho}, p, \gamma) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}} \quad (4.57)$$

führt, die im Rahmen des vorliegenden FE–Modells zur Bestimmung des Verschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$ herangezogen werden kann. Im Zuge der Diskretisierung des Optimierungsproblems (4.10) muss zudem eine diskrete Formulierung des Massenfunktionals

$$m(\rho) = \int_{\Omega_o} \rho \, d\Omega_o \quad (4.58)$$

entwickelt werden, die eine Rückführung der Masse der zu optimierenden Struktur auf die Knotenwerte des Dichtefeldes gestattet. Vor diesem Hintergrund liegt es nahe, die Masse der gesamten Struktur in elementspezifische Anteile zu zerlegen und das obige Funktional in die Summe

$$m(\rho) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_o^e} \rho(\xi^e, \eta^e) \, d\Omega_o^e \quad (4.59)$$

zu überführen, die an dieser Stelle unter Einbeziehung des Ansatzes (4.24) in der Form

$$\begin{aligned} m(\tilde{\rho}^1, \dots, \tilde{\rho}^{n_e}) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_o^e} \mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \, d\Omega_o^e \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{\int_{\Omega_o^e} \mathbf{h}^{eT} \, d\Omega_o^e}_{=\tilde{\mathbf{q}}^{eT}} \tilde{\rho}^e \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{q}}^{eT} \tilde{\rho}^e \end{aligned} \quad (4.60)$$

approximiert werden kann. Die Vektoren $\tilde{\mathbf{q}}^e$, $e = 1, \dots, n_e$ lassen sich dabei unter Verwendung des Assemblierungsoperators \mathbf{A} zu einem globalen Vektor

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_e \\ \tilde{\mathbf{q}}^e \end{matrix} \quad (4.61)$$

zusammenfassen, so dass das Massenfunktional (4.58) schließlich die Gestalt

$$m(\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.62)$$

annimmt. Das eingeführte Modell bietet demnach die Möglichkeit, die Optimierungsaufgabe (4.10) wie folgt zu formulieren

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{L}_{\hat{\boldsymbol{\rho}}}} \{ \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \hat{\mathbf{u}} \} \\ \text{u.d.N.} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\rho}}, p, \gamma) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad p > 1, \quad \gamma > 0$$

$$m(\hat{\boldsymbol{\rho}}) \leq M_o,$$

wobei der Lösungsraum $\mathcal{L}_{\hat{\boldsymbol{\rho}}}$, in dem der optimale Dichtevektor $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{opt}$ zu suchen ist, in der nachfolgenden Weise angegeben werden kann :

$$\mathcal{L}_{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \{ \hat{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{R}^{n_k} \mid 0 \leq \hat{\rho}_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n_k \}. \quad (4.64)$$

4.2.2 Lösung des diskretisierten Problems unter Verwendung der Penalty-/Barrier-Methode

Die im vorangegangenen Abschnitt formulierte Optimierungsaufgabe (4.63) stellt ein restringiertes Optimierungsproblem dar, das im Rahmen der Penalty-/Barrier-Methode (Großmann & Terno 1997) in eine Folge von unrestringierten Ersatzproblemen überführt werden kann. In diesem Zusammenhang lässt sich zunächst das in die Zielfunktion einfließende Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{u}}$ in der Form

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\rho}}, p, \gamma) \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.65)$$

ausdrücken, so dass die Gleichgewichtsbedingung (4.57) a priori erfüllt wird. Um die Erfüllung der übrigen Nebenbedingungen des Problems (4.63) zu gewährleisten, wird die Zielfunktion ferner um spezielle Indikator-Funktionen erweitert, die derart zu definieren sind, dass sie Verletzungen der zu berücksichtigenden Restriktionen gezielt bestrafen. So lässt sich die Einhaltung der Masserestriktion

$$m(\hat{\rho}) \leq M_o \quad (4.66)$$

mit Hilfe einer Indikator-Funktion der Gestalt

$$\bar{\mu}(\hat{\rho}) = \begin{cases} 0, & m(\hat{\rho}) \leq M_o \\ +\infty, & m(\hat{\rho}) > M_o \end{cases} \quad (4.67)$$

erzwingen, während die Einschränkung des Dichtevektors $\hat{\rho}$ auf den Lösungsraum $\mathcal{L}_{\hat{\rho}}$ durch Einführung einer Funktion der Art

$$\bar{\nu}(\hat{\rho}) = \sum_{k=1}^{n_k} \bar{\nu}_k(\hat{\rho}_k), \quad \bar{\nu}_k(\hat{\rho}_k) = \begin{cases} 0, & \hat{\rho}_k \in [0, 1] \\ +\infty, & \hat{\rho}_k \notin [0, 1] \end{cases} \quad (4.68)$$

erreicht werden kann. Durch Addition der obigen Funktionen zur vorliegenden Zielfunktion werden demnach Dichteverteilungen, die die einzuhaltenden Restriktionen verletzen, mit entsprechenden Strafen belegt und somit als mögliche Lösungen des Optimierungsproblems (4.63) ausgeschlossen. Aus numerischer Sicht erweisen sich die Funktionen (4.67) und (4.68) aufgrund ihrer Unstetigkeit jedoch als unbrauchbar, so dass sie im Hinblick auf ihre Einsetzbarkeit in Verbindung mit numerischen Lösungsverfahren durch stetig differenzierbare Penalty- bzw. Barrier-Funktionen zu approximieren sind. Im Fall der Funktion $\bar{\mu}$ bietet sich dabei die in der Abbildung 4.6 skizzierte Approximation

$$\mu(\hat{\rho}) = \begin{cases} 0, & m(\hat{\rho}) \leq M_o \\ \alpha_o (m(\hat{\rho}) - M_o)^2, & m(\hat{\rho}) > M_o \end{cases} \quad (4.69)$$

an, die unter Verwendung des Parameters $\alpha_o > 0$ in geeigneter Weise skaliert werden kann.

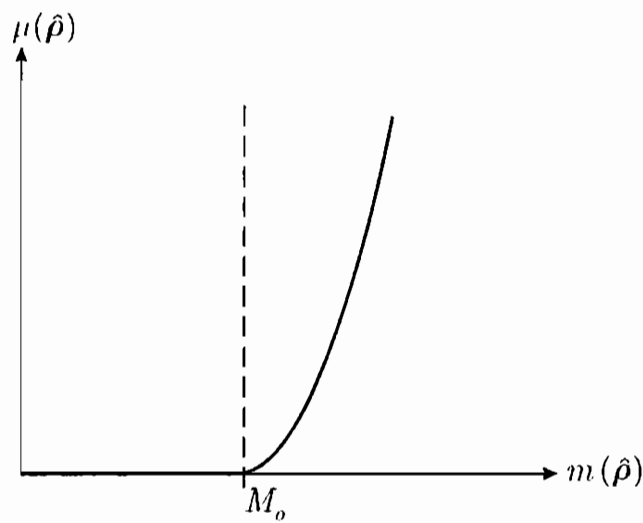


Abbildung 4.6: Penalty-Funktion

Die Funktion $\bar{\nu}$ lässt sich hingegen gemäß Abbildung 4.7 in der Form

$$\nu(\hat{\rho}) = \sum_{k=1}^{n_k} \nu_k(\hat{\rho}_k) \quad , \quad \nu_k(\hat{\rho}_k) = \begin{cases} \beta_o \left[\frac{1}{\hat{\rho}'(1-\hat{\rho}')} + \frac{2\hat{\rho}'-1}{[\hat{\rho}'(1-\hat{\rho}')]^2} (\hat{\rho}_k - \hat{\rho}') \right] & , \hat{\rho}_k < \hat{\rho}' \\ \beta_o \frac{1}{\hat{\rho}_k(1-\hat{\rho}_k)} & , \hat{\rho}' \leq \hat{\rho}_k \leq \hat{\rho}'' \\ \beta_o \left[\frac{1}{\hat{\rho}''(1-\hat{\rho}'')} + \frac{2\hat{\rho}''-1}{[\hat{\rho}''(1-\hat{\rho}'')]^2} (\hat{\rho}_k - \hat{\rho}'') \right] & , \hat{\rho}_k > \hat{\rho}'' \end{cases} \quad (4.70)$$

annähern, wobei die Funktionen $\nu_k(\hat{\rho}_k)$ vor dem Hintergrund der zu erfüllenden Stetigkeitsanforderungen außerhalb des Intervalls $[\hat{\rho}', \hat{\rho}'']$ mittels linearer Approximationen fortgesetzt werden sollen.

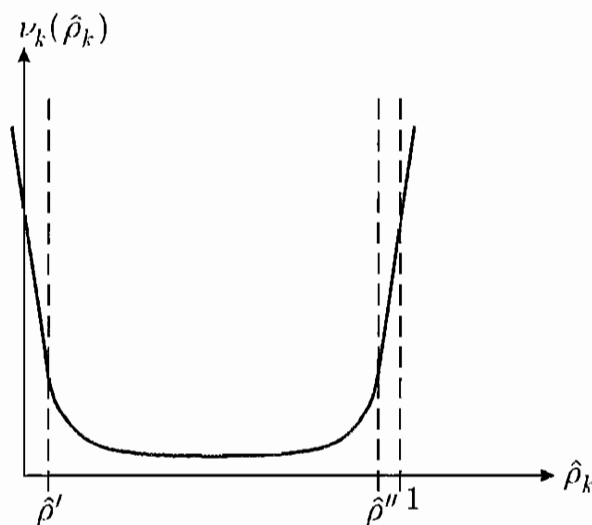


Abbildung 4.7: Barrier-Funktionen

Definiert man nun an dieser Stelle eine erweiterte Zielfunktion der Art

$$\Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q) = \hat{\rho}^T \mathbf{K}^{-1}(\hat{\rho}, p, \gamma) \hat{\rho} + \frac{1}{q} \mu(\hat{\rho}) + q\nu(\hat{\rho}) \quad , \quad 0 < q \leq 1, \quad (4.71)$$

so bewirkt die eingeführte Penalty- bzw. Barrier-Funktion eine gezielte Bestrafung von Dichteverteilungen, die die betreffenden Restriktionen verletzen. Eine exakte Erfüllung der Restriktionen ist dabei lediglich im Grenzfall des verschwindenden Strafparameters q möglich, so dass die zu lösende Optimierungsaufgabe (4.63) alternativ wie folgt formuliert werden kann :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \min_{\hat{\rho} \in \mathcal{R}^{n_k}} \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q). \quad (4.72)$$

Aus numerischer Sicht lässt sich die obige Problemstellung als Folge von Teilproblemen behandeln, da für jede Kombination der Strafparameter p , γ und q eine Lösung gefunden werden kann. Jedoch sind die Probleme infolge des X-SIMP-Ansatzes nicht mehr konvex, so dass sich die Ermittlung globaler Minima schwierig gestaltet. Als Ausgangspunkt der gesamten Folge bietet sich daher das konvexe Problem

$$\min_{\hat{\rho} \in \mathcal{R}^{n_k}} \Psi(\hat{\rho}, p^o = 1, \gamma^o = 0, q^o = 1) \quad (4.73)$$

an, dessen Lösung

$$\hat{\rho}^o = \arg \min_{\hat{\rho} \in \mathcal{R}^{n_k}} \Psi(\hat{\rho}, p^o = 1, \gamma^o = 0, q^o = 1) \quad (4.74)$$

als erste Näherung des gesuchten Dichtefeldes $\hat{\rho}_{opt}$ herangezogen werden kann. Nach der Lösung des konvexen Problems wird die X-SIMP-basierte Regularisierung durch eine entsprechende Modifikation der Parameter p und γ aktiviert und das Dichtefeld $\hat{\rho}^o$ anschließend bezüglich der modifizierten Parameterwerte optimiert. Die Parameter lassen sich dabei schrittweise modifizieren, so dass das Dichtefeld im Rahmen des Optimierungsprozesses in inkrementellen Schritten der Art

$$\hat{\rho}^{i+1} = \hat{\rho}^i + \Delta \hat{\rho}^i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n^i \quad (4.75)$$

aktualisiert werden kann, indem der Dichtevektor $\hat{\rho}^i$ bezüglich der jeweils aktuellen Parameterwerte p^{i+1} , γ^{i+1} und q^{i+1} optimiert und die innerhalb eines Inkrementes i erhaltene Dichteverteilung $\hat{\rho}^{i+1}$ als Ausgangsnäherung für das nachfolgende Inkrement verwendet wird. Um den zu erwartenden, hohen Grauzonenanteil des Dichtefeldes $\hat{\rho}^o$ abzubauen, muss der

für die Bestrafung von Zwischenwerten der Dichte maßgebliche Parameter p sukzessiv erhöht werden, was in diesem Zusammenhang durch Einführung einer Folge der Gestalt

$$p^{i+1} = p^i + \delta, \quad \delta > 0 \quad (4.76)$$

realisiert werden kann, die eine Entwicklung des Parameters in der nachfolgenden Weise ermöglicht.

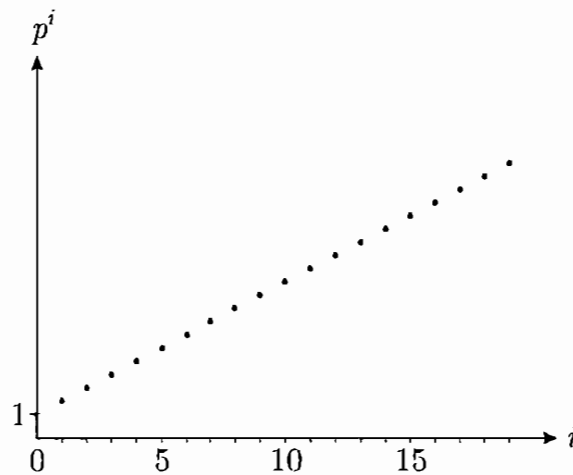


Abbildung 4.8: Inkrementeller Fortschritt des Strafparameters p

Die schrittweise Steigerung des Exponenten p führt zu einer allmählichen Umwandlung vorhandener Grauzonen in aus rein materiellen bzw. immateriellen Bereichen bestehende, jedoch stark oszillierende Dichteverteilungen, so dass im Zuge des inkrementellen Fortschritts ein Zuwachs der Oberfläche λ zu erwarten ist. Im Sinne der angestrebten Regularisierung muss demnach mit zunehmendem Exponenten p die Bestrafung der Oberfläche λ aktiviert bzw. der maßgebliche Strafparameter γ in geeigneter Weise entwickelt werden. Dabei sollte der Parameter γ mit der Bestrafung der Grauzonen einhergehend aktiviert werden, um bereits im Anfangsstadium des Optimierungsprozesses die Ausbildung von oszillatorischen Dichtefeldern zu unterbinden und somit einen geeigneten Lösungspfad zu finden. Im Gegensatz zum Exponenten p sollte die Bestrafung der Oberfläche jedoch wieder deaktiviert werden, nachdem ein solcher Pfad gefunden wurde, um den vollständigen Abbau verbleibender Grauzonen zu ermöglichen. Vor diesem Hintergrund lässt sich der Parameter γ in Form einer Folge der Art

$$\gamma^i = \begin{cases} 0 & , i = 0 \\ \gamma^* \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(p^i - p^*) \right) & , i > 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

entwickeln, die den nachfolgend abgebildeten Zusammenhang zwischen den Strafwerten γ^i und p^i liefert.

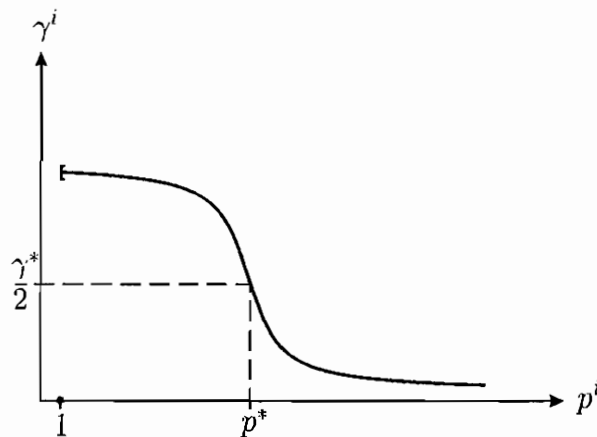


Abbildung 4.9: Inkrementeller Fortschritt des Strafparameters γ

Zur Festlegung des Strafmaßes γ^* wird an dieser Stelle die Oberfläche λ^o der Näherungslösung $\hat{\rho}^o$ herangezogen, wobei in diesem Kontext ein Steifigkeitsverlustfaktor

$$\kappa = e^{-\gamma^* \lambda} \quad (4.78)$$

eingeführt werden kann, der den durch die Oberfläche λ bedingten Steifigkeitsabfall der zu optimierenden Struktur charakterisiert. Fordert man nun, dass die Oberfläche λ^o einen bestimmten Steifigkeitsverlust κ^o zur Folge haben soll, so liefert die Auswertung der obigen Gleichung die Beziehung

$$\gamma^* = \frac{1}{\lambda^o} \ln \left(\frac{1}{\kappa^o} \right), \quad 0 < \kappa^o < 1, \quad (4.79)$$

die zur Ermittlung des erforderlichen Strafmaßes γ^* verwendet werden kann.

Neben der Modifikation der Parameter p und γ wird schließlich eine geeignete Entwicklung des Strafparameters q benötigt, der für die Einhaltung der zu erfüllenden Restriktionen zuständig ist. Da die betreffenden Restriktionen lediglich im Grenzfall des verschwindenden Parameters q exakt erfüllt werden, wird dieser während des Optimierungsprozesses in inkrementellen Schritten der Form

$$q^{i+1} = \varepsilon q^i, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (4.80)$$

variiert und somit in der nachfolgenden Weise reduziert.

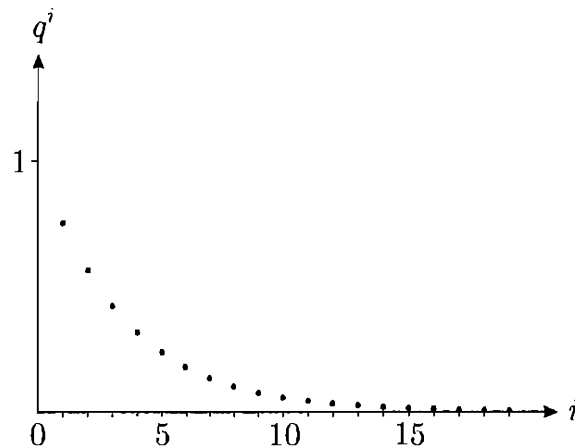


Abbildung 4.10: Inkrementeller Fortschritt des Strafparameters q

Im Hinblick auf die Formulierung eines für den Abbruch der inkrementellen Optimierungsfolge benötigten Optimalitätskriteriums kann ferner ein Grauzonenindikator

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{\Omega_o} \int_{\Omega_o} 4\rho(1 - \rho) d\Omega_o \quad (4.81)$$

bzw.

$$\zeta(\hat{\rho}) = \frac{\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_o^e} 4\mathbf{h}^{eT} \bar{\rho}^e (1 - \mathbf{h}^{eT} \bar{\rho}^e) d\Omega_o^e}{\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_o^e} d\Omega_o^e} \quad (4.82)$$

definiert werden, der den Grauzonenanteil des Dichtefeldes erfasst und somit die Verfolgung der Grauzonenentwicklung im Laufe des Optimierungsprozesses ermöglicht. Auf der Basis des eingeführten Indikators lässt sich die Abbruchbedingung nunmehr in der Form

$$\zeta(\hat{\rho}^i) \leq \zeta_o \quad , \quad 0 < \zeta_o < 1 \quad (4.83)$$

formulieren, wobei ζ_o eine geeignet zu wählende Schranke darstellt.

Infolge des Zusammenhanges $\gamma = \gamma(p)$ bzw. $\gamma^i = \gamma^i(p^i)$ lässt sich der inkrementelle Fortschritt des Dichtefeldes nunmehr im Parameterraum p, q wie folgt veranschaulichen, wobei $\hat{\rho}_k^i$ eine beliebige Komponente $k \in \{1, \dots, n_k\}$ des Dichtevektors $\hat{\rho}^i$ darstellt.

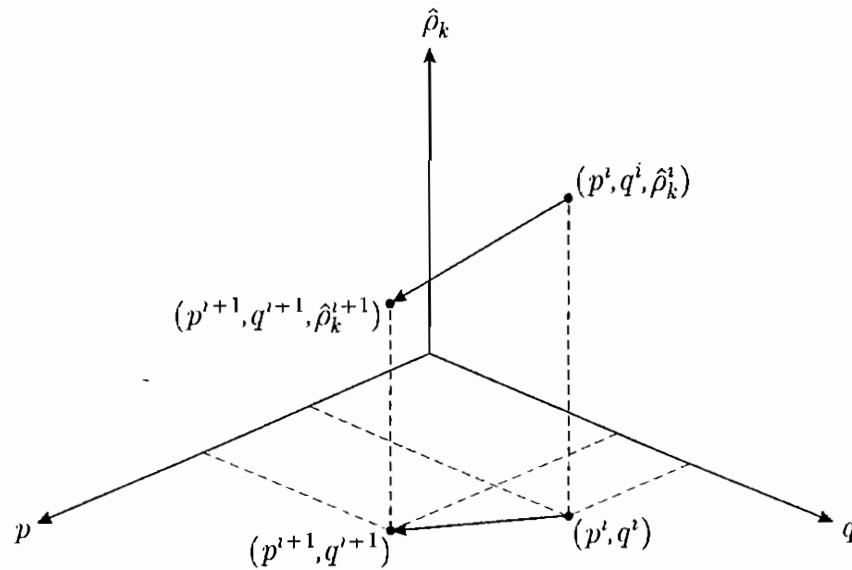


Abbildung 4.11: Inkrementeller Fortschritt des Dichtevektors $\hat{\rho}$

Die inkrementellen Korrekturen des Dichtefeldes $\Delta\hat{\rho}^i$ ergeben sich durch Optimierung des Dichtevektors $\hat{\rho}^i$ bezüglich der Parameterwerte p^{i+1} , γ^{i+1} und q^{i+1} , die im Rahmen eines auf lokalen Entwicklungen der Zielfunktion basierenden Abstiegsverfahrens erfolgen soll. Das Dichtefeld wird dabei unter Berücksichtigung der zu erfüllenden Optimalitätskriterien in iterativen Schritten der Art

$$\hat{\rho}_{j+1}^i = \hat{\rho}_j^i + \underbrace{\alpha_j^i \mathbf{d}_j^i}_{= \delta\hat{\rho}_j^i}, \quad \alpha_j^i > 0, \quad \|\mathbf{d}_j^i\| = 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n^j \quad (4.84)$$

modifiziert, die eine sukzessive Optimierung des als Ausgangspunkt der Iterationsfolge fungierenden Dichtevektors

$$\hat{\rho}_{j=0}^i = \hat{\rho}^i \quad (4.85)$$

bewirken, wobei sich die iterativen Korrekturen $\delta\hat{\rho}_j^i$ stets aus einem Richtungsvektor \mathbf{d}_j^i sowie einer Schrittweite α_j^i zusammensetzen. Nach n^j Iterationen liefert die Iterationsfolge schließlich das bezüglich der Parameterwerte p^{i+1} , γ^{i+1} und q^{i+1} optimale Dichtefeld $\hat{\rho}_{j=n^j}^i$, so dass die inkrementelle Korrektur $\Delta\hat{\rho}^i$ in der Form

$$\Delta\hat{\rho}^i = \hat{\rho}_{j=n^j}^i - \hat{\rho}_{j=0}^i \quad (4.86)$$

angegeben werden kann. Der im Rahmen eines Iterationsschrittes zu bestimmende Richtungsvektor \mathbf{d}_j^i muss dabei die Abstiegsbedingung

$$\Psi(\hat{\rho}_j^i + \varepsilon \mathbf{d}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) < \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \quad \forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[\quad (4.87)$$

erfüllen, die unter Verwendung der Richtungsableitung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}_j^i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\hat{\rho}_j^i + \varepsilon \mathbf{d}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) - \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})}{\varepsilon} \quad (4.88)$$

alternativ in der Form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}_j^i} < 0 \quad (4.89)$$

ausgedrückt werden kann. Führt man an dieser Stelle den Gradienten

$$\nabla_{\rho} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_{n_k}} \right]^T \quad (4.90)$$

ein und berücksichtigt den Zusammenhang

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}_j^i} = \nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T \mathbf{d}_j^i, \quad (4.91)$$

so ist die Ungleichung (4.89) mit der Forderung

$$\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T \mathbf{d}_j^i < 0 \quad (4.92)$$

gleichbedeutend, die nunmehr zur Bestimmung des Richtungsvektors \mathbf{d}_j^i herangezogen werden soll. Um die Erfüllung der Abstiegsbedingung zu gewährleisten, ist der Richtungsvektor demnach aus der Menge

$$T_{\mathbf{d}_j^i} = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{R}^{n_k} \mid \nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T \mathbf{d} < 0, \quad \|\mathbf{d}\| = 1 \right\} \quad (4.93)$$

zu wählen, die infolge der Beziehung

$$\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T \mathbf{d}_j^i = \|\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\| \|\mathbf{d}_j^i\| \cos \varphi_j^i \quad (4.94)$$

alle Vektoren umfasst, die mit dem Gradienten $\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})$ einen Winkel $\varphi_j^i > \frac{\pi}{2}$ einschließen. Die naheliegendste Möglichkeit, die Bedingung (4.87) zu erfüllen, besteht folglich darin, den Richtungsvektor in der Form

$$d_j^i = \arg \min_{d \in \mathcal{L}_d} \left\{ \nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T d \right\}, \quad \mathcal{L}_d = \{d \in \mathcal{R}^{n_k} \mid \|d\| = 1\} \quad (4.95)$$

bzw.

$$d_j^i = - \frac{\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})}{\|\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|} \quad (4.96)$$

anzusetzen und die Funktion Ψ somit im Sinne der Methode des steilsten Abstiegs (Geiger & Kanzow 1999) zu minimieren. Die Verwendung der Richtung des steilsten Abstiegs hat jedoch insbesondere bei schlecht konditionierter Hesse-Matrix der Zielfunktion

$$\nabla_{\rho}^2\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\hat{\rho}_1\partial\hat{\rho}_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\hat{\rho}_{n_k}\partial\hat{\rho}_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\hat{\rho}_1\partial\hat{\rho}_{n_k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\hat{\rho}_{n_k}\partial\hat{\rho}_{n_k}} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

eine langsame Konvergenz des Abstiegsverfahrens zur Folge, so dass bei der Wahl des Richtungsvektors alternative Abstiegsrichtungen berücksichtigt werden sollten, die im Hinblick auf das Konvergenzverhalten der resultierenden Iterationsfolge effizienter sind. Eine Konvergenzverbesserung kann auf der Basis des Newton-Verfahrens erreicht werden, indem zur Bestimmung des Richtungsvektors anstelle der Bedingung (4.92) das Optimalitätskriterium

$$\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) = 0 \quad (4.98)$$

verwendet und der Gradient $\nabla_{\rho}\Psi$ in eine Taylor-Reihe der Art

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) &\approx \nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \\ &+ \nabla_{\rho}^2\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \underbrace{(\hat{\rho}_{j+1}^i - \hat{\rho}_j^i)}_{= \delta\hat{\rho}_j^i} \end{aligned} \quad (4.99)$$

entwickelt wird. Unter Berücksichtigung der obigen Linearisierung führt die Optimalitätsbedingung (4.98) auf ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \delta \hat{\rho}_j^i + \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) = 0, \quad (4.100)$$

dessen Lösung einen Vektor der Form

$$\delta \hat{\rho}_j^i = -\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^{-1} \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \quad (4.101)$$

liefert. Der auf diese Weise erhaltene Vektor $\delta \hat{\rho}_j^i$ kann dabei entweder in Anlehnung an das lokale Newton-Verfahren direkt zur Modifikation des Dichtevektors $\hat{\rho}_j^i$ herangezogen werden oder im Sinne des globalisierten Newton-Verfahrens nach einer Normierung lediglich als Richtungsvektor d_j^i fungieren, der im Rahmen einer nachfolgenden Schrittweitenbestimmung gesondert skaliert wird.

Im Unterschied zum Gradientenverfahren erfordert die Konstruktion des Korrektur- bzw. Richtungsvektors nunmehr neben der Berechnung des Gradienten $\nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})$ die Ermittlung der Hesse-Matrix $\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})$ sowie die Lösung des linearen Gleichungssystems (4.100), so dass an dieser Stelle ein wesentlich höherer Rechenaufwand zu erwarten ist. Demzufolge eignet sich das Newton-Verfahren vornehmlich zur Lösung von Optimierungsproblemen kleinerer Dimension, während bei großdimensionalen Problemen in der Regel weniger aufwendige Varianten des Newton-Verfahrens zum Einsatz kommen, die auf Näherungslösungen der Newton-Gleichung (4.100) beruhen.

Eine weit verbreitete Variante stellt das sogenannte inexakte Newton-Verfahren (Dembo et al. 1982, Dembo & Steihaug 1983, Eisenstat & Walker 1996) dar, das eine approximative Lösung der Newton-Gleichung mittels iterativer Verfahren vorsieht, wobei die erzeugte Iterationsfolge stets vorzeitig abzubrechen ist, sobald der relative Fehler

$$r_j^i = \frac{\|\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \delta \hat{\rho}_j^i + \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|}{\|\nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|} \quad (4.102)$$

eine vorgegebene Toleranz $\eta_o > 0$ unterschreitet. Als Lösungsverfahren bietet sich in diesem Kontext vorzugsweise die Methode der konjugierten Gradienten (Geiger & Kanzow 1999) an, die anstelle des linearen Gleichungssystems das äquivalente quadratische Optimierungsproblem

$$\delta \hat{\rho}_j^i = \arg \min_{\delta \hat{\rho} \in \mathbb{R}^{n_k}} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} (\delta \hat{\rho})^T \nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \delta \hat{\rho} + \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})^T \delta \hat{\rho} \right\}}_{= \Phi_j^i (\delta \hat{\rho})} \quad (4.103)$$

löst. Der gesuchte Vektor $\delta \hat{\rho}_j^i$ wird dabei ausgehend von einer Startnäherung $\delta \hat{\rho}_{j,k=0}^i$ im Rahmen einer Iterationsfolge der Art

$$\delta \hat{\rho}_{j,k+1}^i = \delta \hat{\rho}_{j,k}^i + \lambda_{j,k}^i \mathbf{t}_{j,k}^i, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n^k \quad (4.104)$$

erzeugt, die auf bezüglich der Matrix $\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})$ konjugierten Suchrichtungen $\mathbf{t}_{j,k}^i$ sowie dazugehörigen Schrittweiten $\lambda_{j,k}^i$ basiert. Die Suchrichtungen lassen sich an dieser Stelle unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung

$$(\mathbf{t}_{j,r}^i)^T \nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \mathbf{t}_{j,s}^i = 0, \quad r \neq s, \quad r, s = 0, \dots, n_k - 1 \quad (4.105)$$

mit Hilfe des Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens in der nachfolgenden Weise konstruieren

$$\mathbf{t}_{j,k}^i = \begin{cases} -\mathbf{g}_{j,k}^i & , k = 0 \\ -\mathbf{g}_{j,k}^i + \beta_{j,k-1}^i \mathbf{t}_{j,k-1}^i & , k > 0 \end{cases} \quad (4.106)$$

mit :

$$\mathbf{g}_{j,k}^i = \nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \delta \hat{\rho}_{j,k}^i + \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \quad (4.107)$$

$$\beta_{j,k}^i = \frac{\|\mathbf{g}_{j,k+1}^i\|^2}{\|\mathbf{g}_{j,k}^i\|^2},$$

während das Problem der Schrittweitemittlung auf eindimensionale Optimierungsaufgaben der Gestalt

$$\lambda_{j,k}^i = \arg \min_{\lambda \in \mathcal{L}_{\lambda}} \Phi_j^i (\delta \hat{\rho}_{j,k}^i + \lambda \mathbf{t}_{j,k}^i), \quad \mathcal{L}_{\lambda} = \{\lambda \in \mathcal{R} \mid \lambda > 0\} \quad (4.108)$$

zurückgeführt wird, deren Lösungen vor dem Hintergrund der quadratischen Zielfunktion Φ_j^i in der expliziten Form

$$\lambda_{j,k}^i = \frac{\|\nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \delta \hat{\rho}_{j,k}^i + \nabla_{\rho} \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|^2}{(\mathbf{t}_{j,k}^i)^T \nabla_{\rho}^2 \Psi (\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \mathbf{t}_{j,k}^i} \quad (4.109)$$

angegeben werden können.

Eine weitere Möglichkeit, den beim Newton–Verfahren anfallenden Rechenaufwand zu reduzieren, besteht hingegen darin, die Hesse–Matrix $\nabla_{\rho}^2 \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})$ im Sinne des Quasi–Newton–Verfahrens (Geiger & Kanzow 1999) durch eine einfacher zu berechnende Approximation \mathbf{H}_j^i zu ersetzen und somit die numerisch aufwendige Ermittlung der zweiten partiellen Ableitungen der Zielfunktion Ψ zu umgehen. Die Matrizen \mathbf{H}_j^i , $j = 0, 1, 2, \dots, n^j$ werden dabei ausgehend von einer Startmatrix $\mathbf{H}_{j=0}^i$ von Iteration zu Iteration in der Form

$$\mathbf{H}_{j+1}^i = \mathbf{H}_j^i + \delta \mathbf{H}_j^i \quad (4.110)$$

aufdatiert, so dass die Lösungen der Gleichungssysteme

$$\mathbf{H}_j^i \delta \hat{\rho}_j^i + \nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) = \mathbf{0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n^j \quad (4.111)$$

ebenfalls schrittweise aufdatiert werden können. Die Bestimmung der Korrekturen $\delta \mathbf{H}_j^i$ erfolgt in diesem Zusammenhang unter Verwendung der Quasi–Newton–Bedingung

$$\mathbf{H}_{j+1}^i \underbrace{(\hat{\rho}_{j+1}^i - \hat{\rho}_j^i)}_{=\mathbf{s}_j^i} = \underbrace{\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) - \nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})}_{=\mathbf{q}_j^i}, \quad (4.112)$$

die die Herleitung von Aufdatierungsvorschriften in Form der Powell–symmetric–Broyden–Formel (Powell 1970)

$$\delta \mathbf{H}_{j,PSB}^i = \frac{(\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i) \mathbf{s}_j^{i,T} + \mathbf{s}_j^i (\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i)^T}{\mathbf{s}_j^{i,T} \mathbf{s}_j^i} - \frac{(\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i)^T \mathbf{s}_j^i}{(\mathbf{s}_j^{i,T} \mathbf{s}_j^i)^2} \mathbf{s}_j^i \mathbf{s}_j^{i,T}, \quad (4.113)$$

der Davidon–Fletcher–Powell–Formel (Davidon 1959, Fletcher & Powell 1963)

$$\delta \mathbf{H}_{j,DFP}^i = \frac{(\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i) \mathbf{q}_j^{i,T} + \mathbf{q}_j^i (\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i)^T}{\mathbf{q}_j^{i,T} \mathbf{s}_j^i} - \frac{(\mathbf{q}_j^i - \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i)^T \mathbf{s}_j^i}{(\mathbf{q}_j^{i,T} \mathbf{s}_j^i)^2} \mathbf{q}_j^i \mathbf{q}_j^{i,T} \quad (4.114)$$

bzw. der Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno–Formel (Broyden 1970, Fletcher 1970, Goldfarb 1970, Shanno 1970)

$$\delta \mathbf{H}_{j,BFGS}^i = \frac{\mathbf{q}_j^i \mathbf{q}_j^{i,T}}{\mathbf{s}_j^{i,T} \mathbf{q}_j^i} - \frac{\mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i \mathbf{s}_j^{i,T} \mathbf{H}_j^i}{\mathbf{s}_j^{i,T} \mathbf{H}_j^i \mathbf{s}_j^i} \quad (4.115)$$

gestattet. Neben der PSB-, DFP- sowie BFGS-Formel lässt sich auf der Basis der Quasi-Newton-Bedingung eine Reihe alternativer Aufdatierungsvorschriften herleiten (Geiger & Kanzow 1999), die in vergleichbarer Weise eine sukzessive Entwicklung der approximativen Hesse-Matrix ermöglichen; bei der Anwendung des Quasi-Newton-Verfahrens kommt jedoch vornehmlich die BFGS-Formel zum Einsatz, die aufgrund ihrer numerischen Eigenschaften erfahrungsgemäß den übrigen Formeln überlegen ist.

Die vorgestellten Varianten des Newton-Verfahrens bewirken zwar eine Reduktion des Rechenaufwandes gegenüber dem exakten Newton-Verfahren, im Vergleich zur Methode des steilsten Abstiegs ziehen sie allerdings infolge der in jedem Iterationsschritt erforderlichen Matrix-Vektor-Multiplikationen einen deutlich höheren Rechenaufwand nach sich, der sich insbesondere bei großdimensionalen Problemen nachteilig auf die Rechenzeit auswirkt. Vor diesem Hintergrund stellt die Methode der konjugierten Gradienten eine Alternative zu den Newton-Verfahren dar, da sie gegenüber dem Gradientenverfahren ebenfalls eine Konvergenzverbesserung zur Folge hat, dabei jedoch keine wesentliche Erhöhung des Rechenaufwandes mit sich bringt. Erweitert man das bereits zur Lösung der quadratischen Optimierungsaufgabe (4.103) verwendete CG-Verfahren auf beliebige nichtlineare Optimierungsprobleme, so liefert das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren im vorliegenden Fall Richtungsvektoren der Art

$$\mathbf{d}_j^i = \begin{cases} -\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) & , j = 0 \\ -\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) + \beta_{j-1}^i \mathbf{d}_{j-1}^i & , j > 0, \end{cases} \quad (4.116)$$

wobei die Gewichtungsfaktoren β_j^i in Anlehnung an (Fletcher & Reeves 1964) bzw. (Polak & Ribière 1969) in der nachfolgenden Weise entwickelt werden können :

$$\beta_{j,FR}^i = \frac{\|\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|^2}{\|\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|^2} \quad (4.117)$$

bzw.

$$\beta_{j,PR}^i = \frac{[\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) - \nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})]^T \nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_{j+1}^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})}{\|\nabla_{\rho}\Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\|^2} \quad (4.118)$$

Im Unterschied zur Methode des steilsten Abstiegs fließt nunmehr neben dem Gradienten $\nabla_{\rho}\Psi$ auch der im vorangegangenen Iterationsschritt verwendete Richtungsvektor \mathbf{d}_{j-1}^i in die Suchrichtung \mathbf{d}_j^i ein, so dass an dieser Stelle neben der Bestimmung des Gradienten eine zusätzliche Vektoraddition erforderlich ist, die jedoch einen eher unbedeutenden Mehraufwand darstellt. Der entscheidende Vorteil des Verfahrens liegt demnach darin, dass die Konstruktion der Richtungsvektoren im Gegensatz zu den Newton-Verfahren weder Informationen über die zweiten partiellen Ableitungen der Zielfunktion Ψ benötigt, noch die Lösung linearer Gleichungssysteme bzw. die damit verbundene Berechnung von Matrix-Vektor-Produkten erfordert.

Neben einem Richtungsvektor muss ferner in jedem Iterationsschritt eine geeignete Schrittweite $\alpha_j^i > 0$ bestimmt werden, die der Bedingung

$$\Psi(\hat{\rho}_j^i + \alpha_j^i \mathbf{d}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \leq \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \quad (4.119)$$

genügt und im Rahmen des entsprechenden Iterationsschrittes zur Skalierung des Richtungsvektors \mathbf{d}_j^i genutzt werden kann. Da die verwendete Abstiegsrichtung \mathbf{d}_j^i die Bedingung (4.87) erfüllt, ist die Gültigkeit der Ungleichung (4.119) für hinreichend kleine Schrittweiten stets gegeben. Um die Anzahl der für die Konvergenz des Abstiegsverfahrens erforderlichen Iterationen zu verringern bieten sich jedoch größere Schrittweiten an, die in der Regel höhere Abstiegsraten gewährleisten, so dass die Wahl der Schrittweite unter dem Gesichtspunkt eines möglichst hohen Abstiegs erfolgen sollte. Vor diesem Hintergrund lässt sich das Problem der Schrittweitenbestimmung unter Verwendung der Funktion

$$L_j^i(\alpha) = \Psi(\hat{\rho}_j^i + \alpha \mathbf{d}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) \quad (4.120)$$

in der nachfolgend skizzierten Weise als eindimensionale Optimierungsaufgabe der Art

$$\alpha_j^i = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{L}_\alpha} L_j^i(\alpha) \quad , \quad \mathcal{L}_\alpha = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha > 0\} \quad (4.121)$$

formulieren, so dass zur Bestimmung der Schrittweite α_j^i das Optimalitätskriterium

$$\frac{dL_j^i}{d\alpha} = 0 \quad (4.122)$$

herangezogen werden kann.

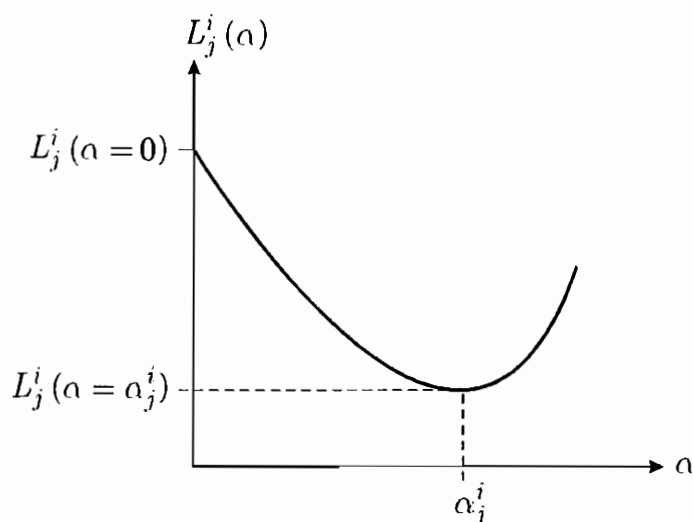


Abbildung 4.12: Bestimmung der Schrittweite

In Anbetracht der Tatsache, dass die Lösung des obigen Minimierungsproblems (4.121) im allgemeinen Fall den Einsatz numerischer Verfahren erfordert, liegt es nahe, das Optimalitätskriterium (4.122) im Sinne einer Reduktion des mit der Schrittweitermittlung verbundenen Rechenaufwandes durch schwächere, jedoch einfacher zu erfüllende Bedingungen zu ersetzen und das Problem an dieser Stelle lediglich näherungsweise zu lösen. Die Ersatzbedingungen lassen dabei neben der Schrittweite α_j^i , die die Funktion $L_j^i(\alpha)$ minimiert, auch in der Umgebung des exakten Minimums liegende Schrittweiten als Lösungen des Schrittweitenproblems zu, indem sie einen zulässigen Bereich

$$T_{\alpha_j^i} = \left\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha_j^i - \varepsilon_{\alpha_j^i}^- \leq \alpha \leq \alpha_j^i + \varepsilon_{\alpha_j^i}^+ \right\} \quad (4.123)$$

definieren, aus dem die gesuchte Schrittweite zu wählen ist. So kann das Optimalitätskriterium (4.122) beispielsweise im Rahmen der sogenannten Armijo–Goldstein–Schrittweitenstrategie (Geiger & Kanzow 1999) durch eine Bedingung der Art

$$L_j^i(\alpha) \leq \tilde{L}_j^i(\alpha) \quad , \quad \tilde{L}_j^i(\alpha) = L_j^i(0) + \sigma \alpha \left. \frac{dL_j^i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad , \quad 0 < \sigma < 1 \quad (4.124)$$

ersetzt werden, die den im Hinblick auf die Schrittweitenwahl zulässigen Bereich in der skizzierten Weise auf das Intervall begrenzt, in dem die Funktion $L_j^i(\alpha)$ unterhalb der Armijo–Goldstein–Geraden $\tilde{L}_j^i(\alpha)$ liegt.

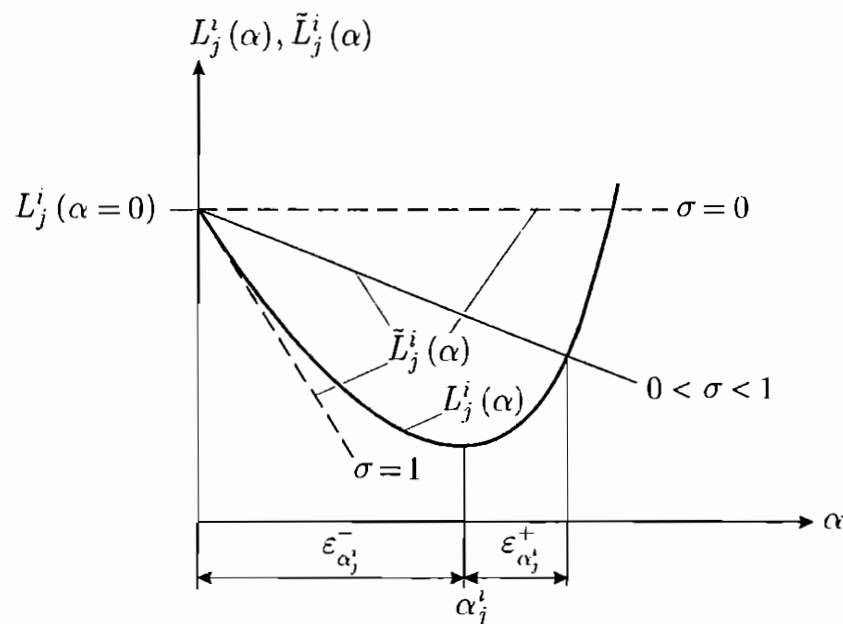


Abbildung 4.13: Armijo–Goldstein–Schrittweitenstrategie

Die Erfüllung der obigen Bedingung liefert somit in der Regel nicht das exakte Minimum der Funktion $L_j^i(\alpha)$, jedoch lässt sich durch eine geeignete Wahl des Parameters σ stets ein hinreichender Abstieg gewährleisten. Zudem kann das Armijo–Goldstein–Kriterium (4.124) durch Einführung zusätzlicher, das gesuchte Minimum genauer eingrenzender Bedingungen erweitert und auf diese Weise zu effizienteren Schrittweitenstrategien ausgebaut werden, die folglich höhere Abstiegsraten ermöglichen. Eine sinnvolle Erweiterung stellt dabei die Wolfe–Powell–Strategie (Geiger & Kanzow 1999) dar, die die Steigung der Funktion $L_j^i(\alpha)$ in Form einer zusätzlichen Bedingung der Art

$$\frac{dL_j^i}{d\alpha} \geq \tau \frac{dL_j^i}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \quad \sigma \leq \tau < 1 \quad (4.125)$$

bei der Wahl der Schrittweite berücksichtigt und wie folgt veranschaulicht werden kann.

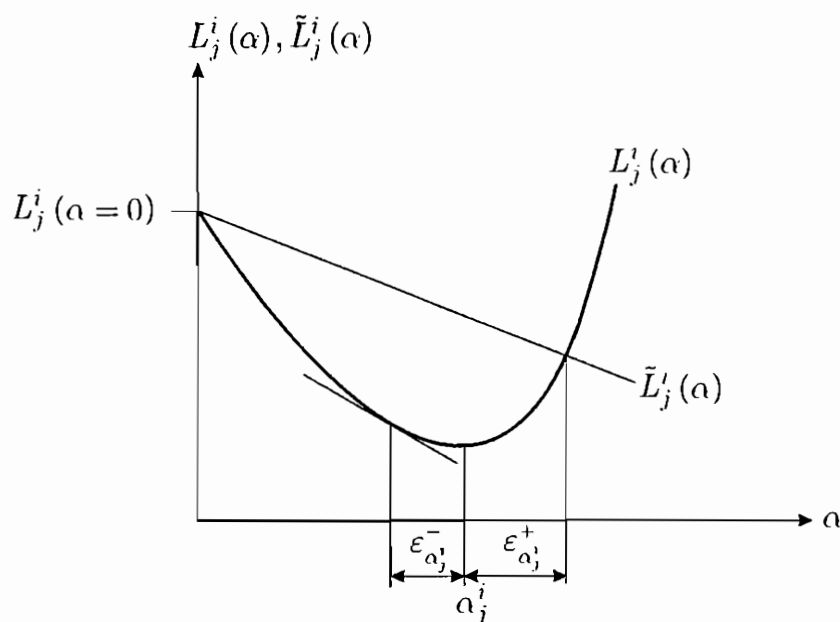


Abbildung 4.14: Wolfe–Powell–Schrittweitenstrategie

Eine weitergehende Verschärfung des Armijo–Goldstein–Kriteriums lässt sich ferner im Rahmen der sogenannten strengen Wolfe–Powell–Strategie (Geiger & Kanzow 1999) erreichen, die anstelle der Bedingung (4.125) die Ungleichung

$$\left| \frac{dL_j^i}{d\alpha} \right| \leq -\tau \frac{dL_j^i}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \quad \sigma \leq \tau < 1 \quad (4.126)$$

enthält, so dass sich der für die Schrittweitenwahl maßgebliche Bereich wie folgt gestaltet.

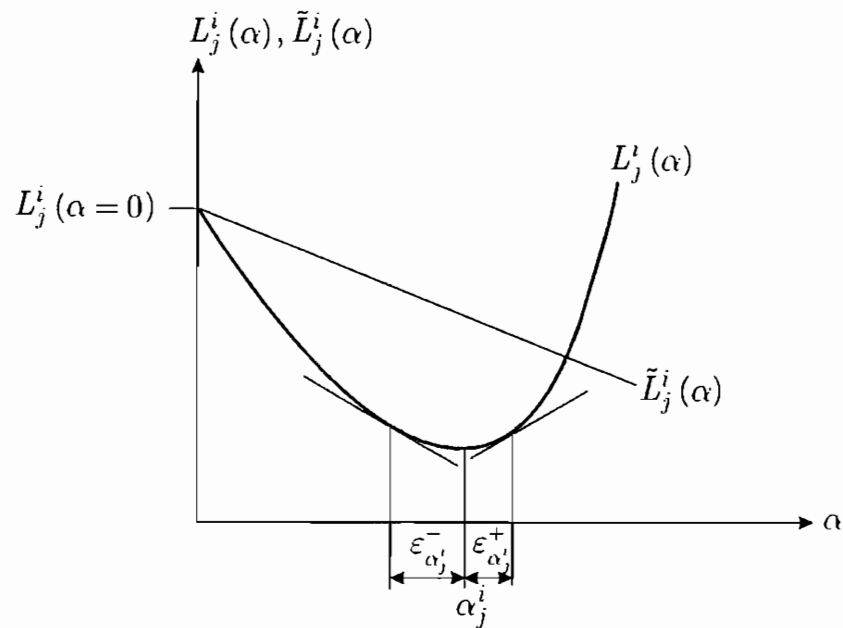


Abbildung 4.15: Strenge Wolfe-Powell-Schrittweitenstrategie

Die Realisierung der vorgestellten Schrittweitenstrategien erfolgt dabei stets in Form einer Intervallschachtelung, wobei zunächst ein den zulässigen Bereich $T_{\alpha_j^i}$ als Untermenge enthaltendes Intervall bestimmt wird, das anschließend unter Beachtung der zu erfüllenden Bedingungen (4.124) sowie (4.125) bzw. (4.126) sukzessiv verkleinert wird, bis eine der beiden Intervallgrenzen im zulässigen Bereich liegt und folglich als Schrittweite gewählt werden kann. Im Hinblick auf die algorithmische Umsetzung der Intervallschachtelung sei an dieser Stelle auf (Geiger & Kanzow 1999) verwiesen.

Zur Beendigung der im Rahmen des Abstiegsverfahrens erzeugten Iterationsfolge wird schließlich eine Abbruchbedingung benötigt, die an dieser Stelle auf der Grundlage des Optimalitätskriteriums

$$\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1}) = 0 \quad (4.127)$$

formuliert bzw. unter Verwendung der Norm des Gradienten

$$\|\nabla_{\rho} \Psi\| = \sqrt{(\nabla_{\rho} \Psi)^T (\nabla_{\rho} \Psi)} \quad (4.128)$$

in der Form

$$\|\nabla_{\rho} \Psi(\hat{\rho}_j^i, p^{i+1}, \gamma^{i+1}, q^{i+1})\| \leq \varsigma_0, \quad \varsigma_0 > 0 \quad (4.129)$$

ausgedrückt werden kann, wobei ς_0 in diesem Kontext einer in geeigneter Weise zu wählenden Schranke entspricht.

4.2.3 Sensitivitätsanalyse

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt ein numerisches Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems (4.72) vorgestellt wurde, soll nun im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse der für die Konstruktion von Abstiegsrichtungen der Zielfunktion Ψ benötigte Gradient

$$\nabla_{\rho} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_{n_k}} \right]^T \quad (4.130)$$

entwickelt werden. Die einzelnen Komponenten des Gradienten ergeben sich dabei durch Differentiation der Zielfunktion bezüglich der entsprechenden Knotenwerte des Dichtefeldes und können somit nach Einführung von Richtungsvektoren

$$\mathbf{r}^k = [r_1^k, \dots, r_{n_k}^k]^T, \quad r_l^k = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n_k \quad (4.131)$$

in der nachfolgenden Weise formuliert werden

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\hat{\rho} + \varepsilon \mathbf{r}^k, p, \gamma, q) - \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q)}{\varepsilon}, \quad k = 1, \dots, n_k. \quad (4.132)$$

Die einfachste Möglichkeit, die obigen Ableitungen zu bestimmen, besteht demnach darin, die zu berechnenden Differentialquotienten durch auf Taylorentwicklungen der Zielfunktion basierende Differenzenquotienten zu ersetzen und diese auf numerischem Wege zu ermitteln. In diesem Zusammenhang kann die Zielfunktion in den durch die Vektoren \mathbf{r}^k definierten Richtungen durch Taylor-Reihen der Art

$$\Psi(\hat{\rho} + h \mathbf{r}^k, p, \gamma, q) = \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q) + \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} h + O(h^2) \quad (4.133)$$

angenähert werden, die eine Entwicklung der Differentialquotienten (4.132) in der Form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\Psi(\hat{\rho} + h \mathbf{r}^k, p, \gamma, q) - \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q)}{h} + O(h) \quad (4.134)$$

gestatten. Bricht man die Taylor-Reihen bereits nach dem linearen Glied ab, so lassen sich die Differentialquotienten wie folgt approximieren

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} \approx \frac{\Psi(\hat{\rho} + h r^k, p, \gamma, q) - \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q)}{h}, \quad (4.135)$$

wobei sich der durch die Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung bedingte Approximationsfehler proportional zur verwendeten Schrittweite h verhält. Eine höhere Genauigkeit kann hingegen auf der Basis der Taylorentwicklungen

$$\Psi(\hat{\rho} + h r^k, p, \gamma, q) = \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q) + \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{\rho}_k^2} h^2 + O(h^3) \quad (4.136)$$

bzw.

$$\Psi(\hat{\rho} - h r^k, p, \gamma, q) = \Psi(\hat{\rho}, p, \gamma, q) - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{\rho}_k^2} h^2 + O(h^3) \quad (4.137)$$

erzielt werden, die eine Darstellung der Differentialquotienten (4.132) in der Form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\Psi(\hat{\rho} + h r^k, p, \gamma, q) - \Psi(\hat{\rho} - h r^k, p, \gamma, q)}{2h} + O(h^2) \quad (4.138)$$

sowie deren Approximation mittels der Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} \approx \frac{\Psi(\hat{\rho} + h r^k, p, \gamma, q) - \Psi(\hat{\rho} - h r^k, p, \gamma, q)}{2h} \quad (4.139)$$

ermöglichen und im Vergleich zu den auf dem linearen Taylor-Ansatz beruhenden Näherungen (4.135) eine Reduktion des zu erwartenden Approximationsfehlers auf die Größenordnung $O(h^2)$ zur Folge haben.

Unter Verwendung der eingeführten Differenzenquotienten lassen sich die Ableitungen (4.132) nunmehr auf numerischem Wege ermitteln, indem die entsprechenden Knotenwerte des Dichtefeldes durch Addition bzw. Subtraktion von Störungen der Größe h variiert und die durch die Variation des Dichtefeldes bedingten Änderungen des Zielfunktionswertes erfasst werden. Die Bestimmung des Gradienten $\nabla_{\rho} \Psi$ auf der Basis von Differenzenquotienten setzt somit eine sukzessive Störung der Komponenten des Dichtevektors $\hat{\rho}$ voraus, die je nachdem, ob die Näherungsformeln (4.135) oder (4.139) zur Anwendung kommen, $n_k + 1$ bzw. $2n_k$ Auswertungen der Zielfunktion Ψ nach sich zieht. In Anbetracht der Tatsache, dass jede Auswertung der Zielfunktion eine komplette Finite-Elemente-Analyse der zu optimierenden Struktur erfordert, ist die obige Vorgehensweise mit einem enormen Rechenaufwand verbunden, so dass sich der Einsatz des numerischen Gradienten im Fall feiner FE-Netze, die durch hohe Knotenzahlen n_k gekennzeichnet sind, als ineffizient erweist.

Da die zu differenzierende Zielfunktion in expliziter Form vorliegt, lässt sich der Gradient alternativ auch analytisch bestimmen, indem die zu berechnenden Ableitungen in der nachfolgenden Weise entwickelt werden

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} + \frac{1}{q} \frac{\partial \mu}{\partial \hat{\rho}_k} + q \frac{\partial \nu}{\partial \hat{\rho}_k}. \quad (4.140)$$

Die Differentiation des die Struktursteifigkeit beschreibenden Anteils $\hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}}$ führt dabei auf einen Ausdruck der Art

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}} \} \\ &= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} \right)^T \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{\rho}_k}, \end{aligned} \quad (4.141)$$

dessen Spezifikation eine Sensitivitätsanalyse der Vektoren $\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{\mathbf{u}}$ erfordert. Die Sensitivität des Verschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$ folgt in diesem Kontext aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} \} = \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} \quad (4.142)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k}, \quad (4.143)$$

die an dieser Stelle den Zusammenhang

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.144)$$

liefert und somit die nachfolgende Entwicklung des Steifigkeitsanteils (4.141) gestattet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} &= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} \right)^T \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}} \\ &= (\hat{\mathbf{u}}^T + \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1}) \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Da die Vektoren $\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{\mathbf{u}}$ über die Gleichung (4.57) bzw. (4.65) miteinander gekoppelt sind,

lässt sich eine der beiden Größen stets eliminieren, so dass der obige Ausdruck alternativ in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} = 2 \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \quad (4.146)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} = 2 \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.147)$$

geschrieben werden kann. Aus numerischer Sicht ist jedoch die letztere der beiden Formulierungen vorzuziehen, da die Berechnung der Matrix \mathbf{K}^{-1} , die zur Auswertung der Form (4.146) benötigt wird, im Vergleich zur Ermittlung des Verschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$ bzw. der damit verbundenen Lösung des linearen Gleichungssystems (4.57) erfahrungsgemäß wesentlich mehr Rechenzeit in Anspruch nimmt.

Unter Berücksichtigung der im Rahmen des X-SIMP-Ansatzes eingeführten Zerlegung (4.49) bzw. des daraus resultierenden Zusammenhanges

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial \chi}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{K}_o + \chi \frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} \quad (4.148)$$

nimmt die Sensitivität (4.147) schließlich die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} = 2 \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \frac{\partial \chi}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_o \hat{\mathbf{u}} - \chi \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.149)$$

an, die sich angesichts der Gleichgewichtsbedingung

$$\chi \mathbf{K}_o \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}} \quad (4.150)$$

wie folgt vereinfachen lässt :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} = 2 \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}} - \chi \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.151)$$

Vor dem Hintergrund der nunmehr notwendigen Sensitivitätsanalyse der Größen χ und \mathbf{K}_o liefert die Differentiation des Faktors χ die Beziehung

$$\frac{\partial \chi}{\partial \hat{\rho}_k} = -\gamma \chi \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{\rho}_k}, \quad (4.152)$$

während die Sensitivität der Oberfläche λ folgendermaßen entwickelt werden kann :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{\rho}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} D_\rho^e \tilde{\rho}^e \\
 &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \left\{ \tilde{\rho}^{eT} D_\rho^e \tilde{\rho}^e \right\} \\
 &= 2 \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\rho}^{eT} D_\rho^e \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k}.
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

Die Sensitivität der Matrix \mathbf{K}_o lässt sich hingegen unter Verwendung des bereits im vorangehenden Kapitel eingesetzten Assemblierungsoperators \mathbf{A} in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{A}^{n_r}(\mathbf{K}_o^e) \tag{4.154}$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{A}^{n_c} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_o^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \tag{4.155}$$

angeben, wobei die Elementmatrizen \mathbf{K}_o^e in der nachfolgenden Weise differenzierbar sind :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{K}_o^e}{\partial \hat{\rho}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \int_{\Omega_o^e} \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^p \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e \\
 &= \int_{\Omega_o^e} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \left\{ \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^p \right\} \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e \\
 &= \int_{\Omega_o^e} p \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^{p-1} \mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e.
 \end{aligned} \tag{4.156}$$

Eine analoge Vorgehensweise bietet sich ferner bei der Sensitivitätsanalyse des Lastvektors $\hat{\mathbf{p}}$ an, dessen Ableitungen ebenfalls in der Operatorschreibweise

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{A}_{e=1}^{n_e}(\tilde{\mathbf{p}}^e) \quad (4.157)$$

bzw.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \quad (4.158)$$

ausgedrückt und somit auf die Sensitivitäten der lokalen Lastvektoren

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}^e}{\partial \hat{\rho}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \left\{ \int_{\Omega_o^e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_v d\Omega_o^e + \int_{\Gamma_{o,t}^e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_t d\Gamma_{o,t}^e \right\} \\ &= \int_{\Omega_o^e} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \left\{ \mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_v \right\} d\Omega_o^e + \int_{\Gamma_{o,t}^e} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \left\{ \mathbf{H}^{eT} \mathbf{f}_t \right\} d\Gamma_{o,t}^e \\ &= \int_{\Omega_o^e} \mathbf{H}^{eT} \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial \hat{\rho}_k} d\Omega_o^e + \int_{\Gamma_{o,t}^e} \mathbf{H}^{eT} \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \hat{\rho}_k} d\Gamma_{o,t}^e \end{aligned} \quad (4.159)$$

zurückgeführt werden können. Da die an der Oberfläche $\Gamma_{o,t}$ wirkenden Flächenlasten \mathbf{f}_t in der Regel nicht mit der Dichteverteilung im Innern des Entwurfsraumes Ω_o zusammenhängen, verschwinden die entsprechenden Sensitivitätsanteile an dieser Stelle. Die Volumenkräfte \mathbf{f}_v können hingegen durchaus an die Dichteverteilung gebunden sein, wobei der genaue Zusammenhang von der Art der jeweiligen Belastung abhängt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen nun exemplarisch Belastungen in Form von durch die Erdbeschleunigung \mathbf{g} bedingten Gewichtskräften betrachtet werden, die Kraftfelder der Gestalt

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (4.160)$$

zur Folge haben. In diesem Fall lässt sich das Kraftfeld \mathbf{f}_v auf der Elementebene durch Funktionen der Art

$$\mathbf{f}_v^e(\xi^e, \eta^e) = \left(\mathbf{h}^{eT}(\xi^e, \eta^e) \tilde{\rho}^e \right) \mathbf{g} \quad , \quad e = 1, \dots, n_e \quad (4.161)$$

approximieren, so dass die Sensitivitäten (4.159) infolge der Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{f}_v^e}{\partial \hat{\rho}_k} = \left(\mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \mathbf{g} \quad (4.162)$$

in der Form

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} = \int_{\Omega_o^\epsilon} \mathbf{H}^{\epsilon T} \left(\mathbf{h}^{\epsilon T} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \mathbf{g} d\Omega_o^\epsilon \quad (4.163)$$

angegeben werden können. Die Auswertung der Ausdrücke (4.153), (4.156) sowie (4.163) erfordert schließlich eine Sensitivitätsanalyse der Vektoren $\tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon$, die nunmehr die Einführung von Knotenvektoren

$$\tilde{\mathbf{k}}^\epsilon = [\tilde{k}_1^\epsilon, \tilde{k}_2^\epsilon, \tilde{k}_3^\epsilon, \tilde{k}_4^\epsilon]^T, \quad \epsilon = 1, \dots, n_e \quad (4.164)$$

nahelegt, deren Komponenten die globalen Knotennummern der jeweiligen Elemente erfassen. Die Vektoren $\tilde{\mathbf{k}}^\epsilon$ setzen demnach die Komponenten der lokalen Dichtevektoren $\tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon$ mit denen des globalen Dichtevektors $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ in Beziehung und ermöglichen in diesem Kontext die Definition von Sensitivitätsvektoren der Gestalt :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} = \left[\frac{\partial \tilde{\rho}_1^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k}, \frac{\partial \tilde{\rho}_2^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k}, \frac{\partial \tilde{\rho}_3^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k}, \frac{\partial \tilde{\rho}_4^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} \right]^T, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_i^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} = \begin{cases} 1, & \tilde{k}_i^\epsilon = k \\ 0, & \tilde{k}_i^\epsilon \neq k. \end{cases} \quad (4.165)$$

Folglich wirkt sich die Variation eines Knotenwertes $\hat{\rho}_k$ lediglich auf die Dichtevektoren derjenigen Elemente aus, die den betreffenden Knoten beinhalten, wohingegen die Dichtevektoren der übrigen Elemente unverändert bleiben. Vor diesem Hintergrund können die Ableitungen (4.153), (4.156) und (4.163) nach Einführung von Mengen der Art

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ e \in \{1, \dots, n_e\} \mid \tilde{k}_1^\epsilon = k \vee \tilde{k}_2^\epsilon = k \vee \tilde{k}_3^\epsilon = k \vee \tilde{k}_4^\epsilon = k \right\}, \quad k = 1, \dots, n_k \quad (4.166)$$

aufgrund der Bedingung

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{0}, \quad \epsilon \notin \mathcal{Q}_k, \quad \epsilon = 1, \dots, n_e, \quad k = 1, \dots, n_k \quad (4.167)$$

in der nachfolgenden Weise reduziert werden

$$\frac{\partial \chi}{\partial \hat{\rho}_k} = -2\gamma_\chi \sum_{e \in \mathcal{Q}_k} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\epsilon T} \mathbf{D}_\rho^\epsilon \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} \quad (4.168)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_o}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_o^\epsilon} p \left(\mathbf{h}^{\epsilon T} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon \right)^{p-1} \mathbf{h}^{\epsilon T} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\epsilon}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{B}^{\epsilon T} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^\epsilon d\Omega_o^\epsilon \right) \quad (4.169)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\rho}_k} = \mathbf{A}_{e \in \mathcal{Q}_k} \left(\int_{\Omega_o^e} \mathbf{H}^{eT} \left(\mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \mathbf{g} d\Omega_o^e \right), \quad (4.170)$$

so dass die Sensitivität des Steifigkeitsanteils $\hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}}$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} &= 2 \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}_{e \in \mathcal{Q}_k} \left(\int_{\Omega_o^e} \mathbf{H}^{eT} \left(\mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \mathbf{g} d\Omega_o^e \right) + 2\gamma_l \left(\sum_{e \in \mathcal{Q}_k} \tilde{\rho}^{eT} \mathbf{D}_\rho^e \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}} \\ &\quad - \chi \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}_{e \in \mathcal{Q}_k} \left(\int_{\Omega_o^e} p \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^{p-1} \mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e \right) \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.171)$$

annimmt. Da sowohl die Sensitivitätsmatrix (4.169) als auch der Sensitivitätsvektor (4.170) infolge der Bedingung (4.167) äußerst schwach besetzt sein werden, lässt sich der mit der Auswertung des obigen Ausdrucks verbundene Rechenaufwand an dieser Stelle erheblich reduzieren, indem die Sensitivität (4.171) in die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \{ \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \} &= 2 \sum_{e \in \mathcal{Q}_k} \left(\hat{\mathbf{u}}^{eT} \int_{\Omega_o^e} \mathbf{H}^{eT} \left(\mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \mathbf{g} d\Omega_o^e \right) + 2\gamma_l \left(\sum_{e \in \mathcal{Q}_k} \tilde{\rho}^{eT} \mathbf{D}_\rho^e \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \right) \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}} \\ &\quad - \chi \sum_{e \in \mathcal{Q}_k} \left(\hat{\mathbf{u}}^{eT} \int_{\Omega_o^e} p \left(\mathbf{h}^{eT} \tilde{\rho}^e \right)^{p-1} \mathbf{h}^{eT} \frac{\partial \tilde{\rho}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \mathbf{B}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_o \mathbf{B}^e d\Omega_o^e \hat{\mathbf{u}}^e \right) \end{aligned} \quad (4.172)$$

überführt wird. Auf diese Weise kann eine vollständige Aufstellung der größtenteils unbesetzten Matrix (4.169) bzw. des Vektors (4.170) vermieden werden, was vor dem Hintergrund der in diesem Zusammenhang zu berechnenden Skalarprodukte sowie Matrix-Vektor-Multiplikationen eine beträchtliche Rechenzeiterparnis zur Folge hat.

Bevor die Ableitungen (4.140) nun ausgewertet werden können, muss schließlich noch die in die Zielfunktion Ψ einfließende Penalty- sowie Barrier-Funktion einer Sensitivitätsanalyse unterzogen werden. Dabei liefert die Differentiation der Penalty-Funktion (4.69) bezüglich der Knotenwerte $\hat{\rho}_k$ Ableitungen der Art

$$\frac{\partial \mu}{\partial \hat{\rho}_k} = \begin{cases} 0 & , m \leq M_o \\ 2\alpha_o (m - M_o) \frac{\partial m}{\partial \hat{\rho}_k} & , m > M_o, \end{cases} \quad (4.173)$$

die unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial \hat{\rho}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{q}}^{eT} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^e \\
 &= \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{q}}^{eT} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^e}{\partial \hat{\rho}_k} \\
 &= \sum_{e \in Q_k} \tilde{\mathbf{q}}^{eT} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^e}{\partial \hat{\rho}_k}
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

wie folgt bestimmt werden können :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \hat{\rho}_k} = \begin{cases} 0 & , m \leq M_o \\ 2\alpha_o (m - M_o) \sum_{e \in Q_k} \tilde{\mathbf{q}}^{eT} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}^e}{\partial \hat{\rho}_k} & , m > M_o . \end{cases} \tag{4.175}$$

Die Sensitivität der Barrier-Funktion (4.70) kann hingegen in der nachfolgenden Weise entwickelt werden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \nu}{\partial \hat{\rho}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_k} \sum_{l=1}^{n_k} \nu_l \\
 &= \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\partial \nu_l}{\partial \hat{\rho}_k} ,
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

wobei sich die obige Summe infolge der Bedingung

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial \hat{\rho}_j} = 0 \quad , \quad i \neq j \quad , \quad i, j = 1, \dots, n_k \tag{4.177}$$

auf den Ausdruck

$$\frac{\partial \nu}{\partial \hat{\rho}_k} = \frac{\partial \nu_k}{\partial \hat{\rho}_k} = \begin{cases} \beta_o \frac{2\hat{\rho}' - 1}{[\hat{\rho}'(1 - \hat{\rho}')]^2} & , \hat{\rho}_k < \hat{\rho}' \\ \beta_o \frac{2\hat{\rho}_k - 1}{[\hat{\rho}_k(1 - \hat{\rho}_k)]^2} & , \hat{\rho}' \leq \hat{\rho}_k \leq \hat{\rho}'' \\ \beta_o \frac{2\hat{\rho}'' - 1}{[\hat{\rho}''(1 - \hat{\rho}'')]^2} & , \hat{\rho}_k > \hat{\rho}'' \end{cases} \tag{4.178}$$

reduziert. Unter Verwendung der Sensitivitäten (4.172), (4.175) und (4.178) lassen sich die im Rahmen der Gradientenermittlung zu bestimmenden Ableitungen (4.132) nunmehr auf analytischem Wege berechnen. Außerdem eröffnet die analytische Formulierung die Möglichkeit, die Sensitivitätsanalyse auf die Elementebene zu verlagern, so dass anstelle des gesamten Finite-Elemente-Netzes jeweils nur diejenigen Elemente untersucht werden können, deren Dichteverteilung durch den betrachteten Knotenwert $\hat{\rho}_k$ beeinflusst wird. Folglich reduziert sich die Sensitivitätsanalyse auf die Untersuchung von maximal vier Elementen pro Knoten, so dass die Einführung des analytischen Gradienten eine enorme Rechenzeiterparnis gegenüber der numerischen Gradientenberechnung auf der Basis der Taylorentwicklungen (4.135) bzw. (4.139) mit sich bringt, die $n_k + 1$ bzw. $2n_k$ komplette Finite-Elemente-Analysen der zu optimierenden Struktur nach sich zieht.

Kapitel 5

Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells

Im Rahmen des vorliegenden Kapitels soll die regularisierende Wirkung des X-SIMP-Modells anhand ausgewählter Entwurfsprobleme demonstriert werden, wobei insbesondere die Auswirkungen des eingeführten Regularisierungsansatzes auf die Topologie der erhaltenen Entwürfe sowie das numerische Verhalten des vorgeschlagenen Lösungsalgorithmus untersucht werden sollen.

5.1 Betrachtung ausgewählter Entwurfsprobleme

Die betrachteten Gestaltungsaufgaben werden dabei zunächst in ein entsprechendes Finite-Elemente-Modell überführt, indem innerhalb des jeweiligen Entwurfsraumes ein aus n_e Elementen bzw. n_k Knoten bestehendes FE-Netz generiert wird, das eine Rückführung der Dichtefunktion ρ auf einen Dichtevektor

$$\hat{\rho} = [\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n_k}]^T \quad (5.1)$$

gestattet, der die als Entwurfsvariablen fungierenden Knotenwerte $\hat{\rho}_k$ des Dichtefeldes erfasst. Auf diese Weise lässt sich die im Zuge der Gestaltung des zu entwerfenden Bauteils zu lösende Optimierungsaufgabe stets auf ein Problem der Form (4.72) zurückführen, das anschließend mittels des im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Lösungsalgorithmus behandelt werden kann. Der Dichtevektor $\hat{\rho}$ wird dabei ausgehend von einem Startvektor

$$\hat{\rho}^{init} = [\hat{\rho}_1^{init}, \dots, \hat{\rho}_{n_k}^{init}]^T, \quad \hat{\rho}_k^{init} = 0,5 \quad (5.2)$$

zunächst bezüglich der Strafparameterwerte $p^o = 1, \gamma^o = 0$ und $q^o = 1$ optimiert, die im Laufe des Optimierungsprozesses unter Verwendung der Parameter $\varepsilon = 0,8, \delta = 1, \kappa^o = 0,95$

und $p^* = 5$ schrittweise variiert werden. Sowohl die Lösung des konvexen Problems (4.73) als auch die Bestimmung der inkrementellen Korrekturen des Dichtevektors $\hat{\rho}^o$, die der Anpassung des Dichtefeldes an die modifizierten Strafparameterwerte dienen, erfolgt an dieser Stelle mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten nach (Polak & Ribière 1969), die in Anlehnung an (Geiger & Kanzow 1999) in Verbindung mit der strengen Wolfe-Powell-Schrittweitenstrategie und den dazugehörigen Parametern $\sigma = 10^{-4}$ sowie $\tau = 0,1$ implementiert wird.

Als erstes Beispiel soll nun das nachfolgend skizzierte Gestaltungsproblem betrachtet werden, das den Entwurf einer Struktur vorsieht, die die im Punkt 3 eingeleitete Kraft P in die Lager 1 und 2 umleitet und dabei eine möglichst hohe Steifigkeit aufweist. Das Eigengewicht der Struktur soll in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden.

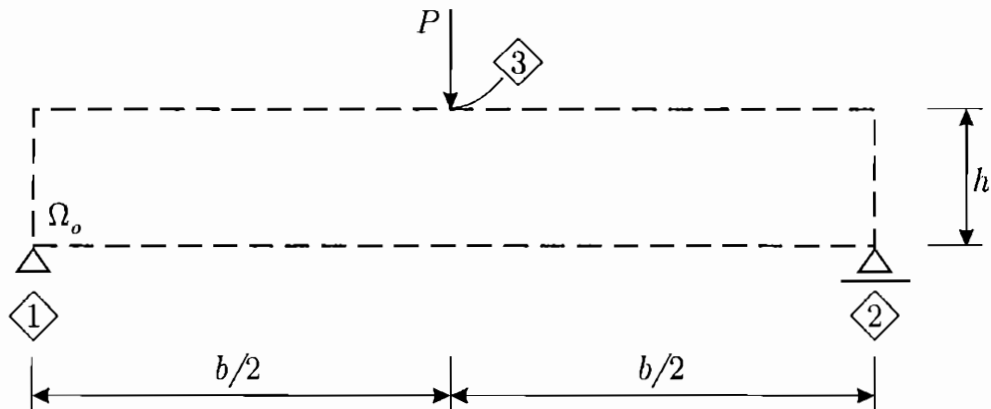


Abbildung 5.1: Beispiel eines Entwurfsproblems

Der zur Verfügung stehende Bauraum Ω_o sei in der abgebildeten Weise durch die Abmessungen b und h begrenzt, die im Verhältnis von $b/h = 6$ zueinander stehen. Ferner soll die Struktur aus Stahl mit dem Elastizitätsmodul $E_o = 210.000 \text{ N/mm}^2$ sowie der Querkontraktionszahl $\nu_o = 0,3$ gefertigt werden, wobei die Masse der gesamten Struktur den Wert $M_o = 0,5 M_{lim}$ nicht übersteigen soll.

Die strukturmechanische Analyse der zu entwerfenden Struktur erfolgt an dieser Stelle auf der Basis des nachfolgenden Finite-Elemente-Modells, das durch Einführung eines aus 192×32 quadratischen Elementen bestehenden FE-Netztes generiert wird.

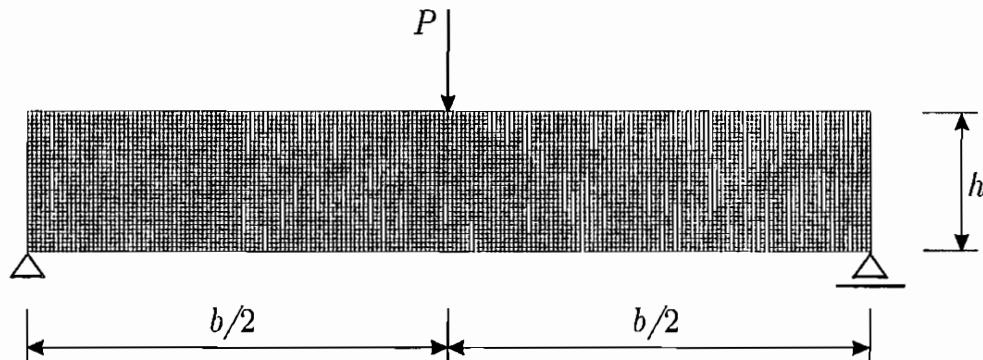


Abbildung 5.2: Finite-Elemente-Modell

Die im vorliegenden Fall zu lösende Optimierungsaufgabe weist demnach 6.369 Entwurfsvariablen auf, während die Finite-Elemente-Analyse der betrachteten Struktur auf ein Gleichungssystem mit 12.738 Unbekannten führt. Der Optimierungsprozess, den der Dichtevektor $\hat{\rho}^{mit}$ im Zuge der numerischen Lösung des Optimierungsproblems durchläuft, lässt sich anhand der Abbildung 5.3 verfolgen, aus der der inkrementelle Fortschritt des Dichtefeldes bis zum optimalen Entwurf hervorgeht.

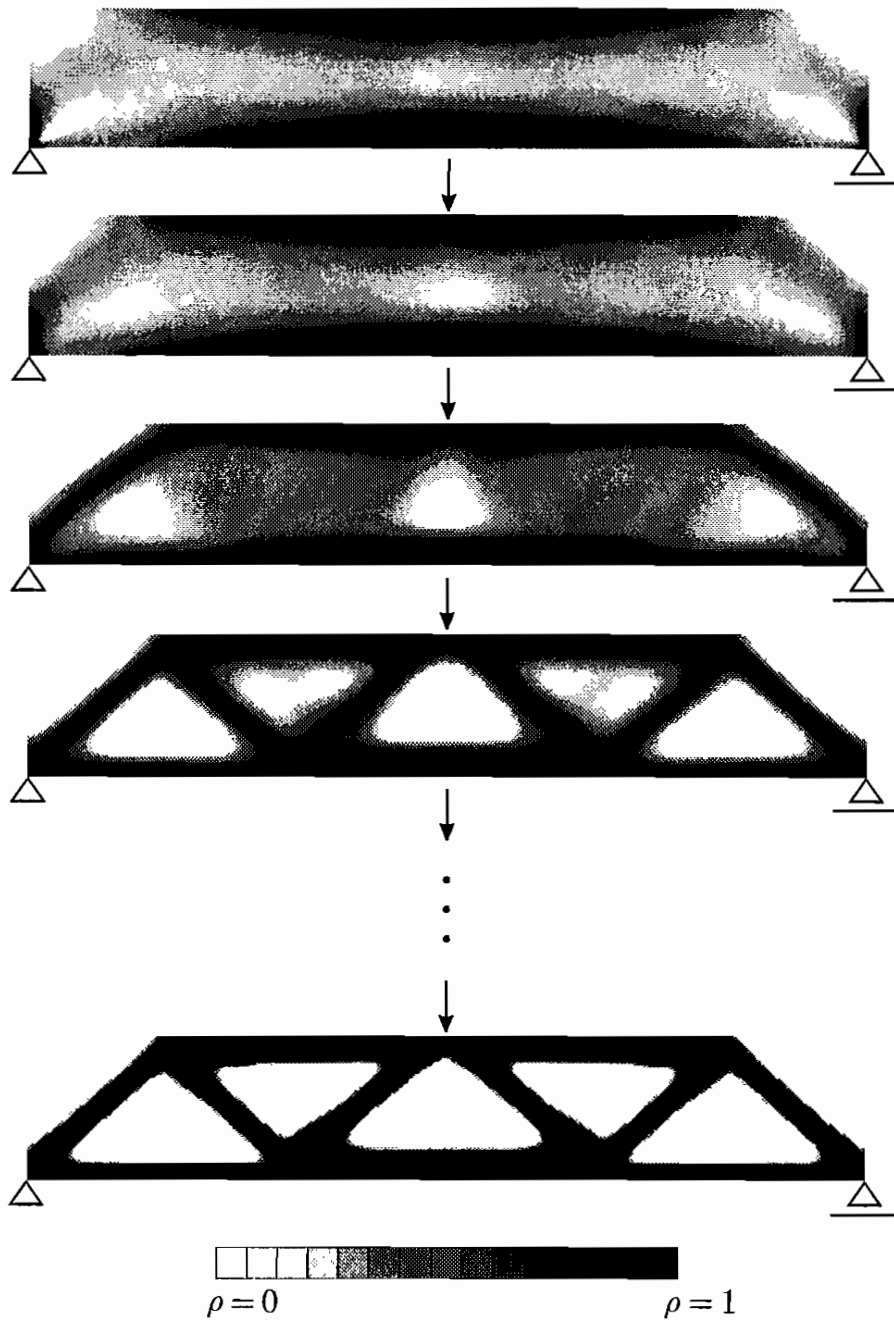


Abbildung 5.3: Numerische Lösung des Entwurfsproblems auf der Basis des X-SIMP-Modells

Das erste Bild stellt dabei die durch Lösung des konvexen Problems (4.73) erhaltene Topologie $\hat{\rho}^0$ dar, die erwartungsgemäß neben materiellen und immateriellen Bereichen ausgedehnte Grauzonen aufweist, wohingegen die nachfolgenden Abbildungen den durch die Aktivierung des X-SIMP-Ansatzes bedingten, inkrementellen Übergang der grauen Topologie in einen grauzonenfreien Entwurf zeigen. Der mit dem Abbau von Grauzonen einhergehende Anstieg der Oberfläche λ kann ferner anhand der Abbildungen 5.4 und 5.5 nachvollzogen werden, die den inkrementellen Fortschritt der Parameter λ bzw. ζ widerspiegeln und zudem die Konvergenz der im Laufe des Optimierungsprozesses erzeugten Iterationsfolge belegen.

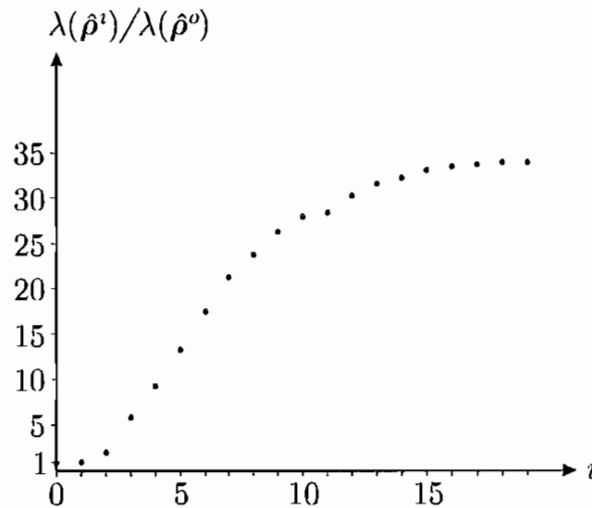


Abbildung 5.4: Inkrementeller Fortschritt der Oberfläche λ

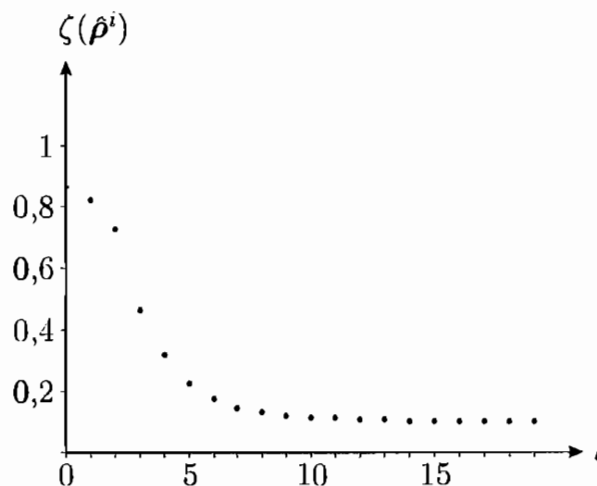


Abbildung 5.5: Inkrementeller Fortschritt des Grauzonenanteils ζ

Löst man das betrachtete Entwurfsproblem zum Vergleich unter Verwendung des klassischen SIMP-Ansatzes, so durchläuft das Dichtefeld den in der Abbildung 5.6 dargestellten Optimierungsprozess, der eine wesentlich komplexere Topologie als optimalen Entwurf liefert.

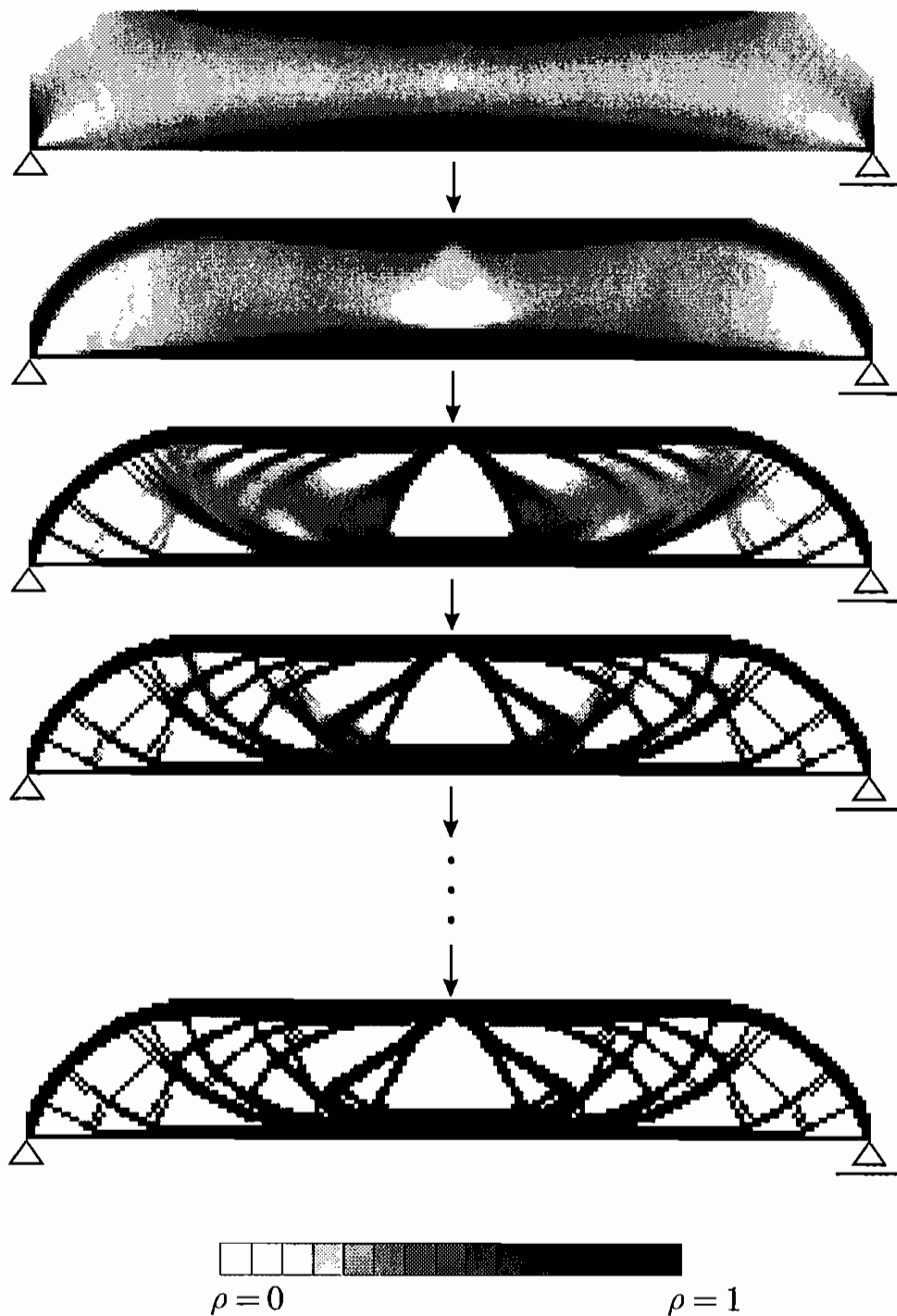


Abbildung 5.6: Numerische Lösung des Entwurfsproblems unter Verwendung des klassischen SIMP-Modells

Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse zeigt, dass die auf dem SIMP-Ansatz beruhende Topologie eine Vielzahl kleinster Aussparungen beinhaltet, die eine komplexe und somit schwer zu fertigende Struktur zur Folge haben, wohingegen der X-SIMP-basierte Entwurf ausschließlich ausgedehnte Hohlräume aufweist, die eine deutlich geringere Oberfläche λ ergeben und aus fertigungstechnischer Sicht wesentlich einfacher zu realisieren sind. Durch die Bestrafung der Oberfläche λ bewirkt der X-SIMP-Ansatz ferner eine Abrundung der vorhandenen Hohl-

raumkonturen, die zur Reduktion der durch die Hohlräume bedingten Kerbwirkung sowie der daraus resultierenden Spannungskonzentrationen in den betreffenden Bereichen beiträgt.

Da die Einführung des Penalty-Funktional χ eine zusätzliche Restriktion hinsichtlich der Menge der zulässigen Dichteverteilungen mit sich bringt, ist bei Verwendung des X-SIMP-Ansatzes anstelle des klassischen SIMP-Modells stets eine Absenkung der maximal erreichbaren Struktursteifigkeit zu erwarten. Vergleicht man vor diesem Hintergrund die Steifigkeiten der in den Abbildungen 5.3 und 5.6 dargestellten Entwürfe anhand der die Strukturnachgiebigkeit beschreibenden Funktion

$$\phi_{opt} = \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\rho}}_{opt}, p = 1, \gamma = 0) \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.3)$$

so stellt man fest, dass die jeweils erreichten Nachgiebigkeiten

$$\phi_{opt,x-simp} = \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\rho}}_{opt,x-simp}, p = 1, \gamma = 0) \hat{\mathbf{p}} \quad (5.4)$$

bzw.

$$\phi_{opt,simp} = \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\rho}}_{opt,simp}, p = 1, \gamma = 0) \hat{\mathbf{p}} \quad (5.5)$$

in einem Verhältnis von $\phi_{opt,x-simp}/\phi_{opt,simp} = 1,015$ stehen. Folglich liegt der durch die regularisierende Restriktion bedingte Abfall der Struktursteifigkeit in einer Größenordnung von ca. 1,5%, so dass der Steifigkeitsverlust in Anbetracht der gleichzeitig erzielten erheblichen Reduktion der Komplexität des resultierenden Entwurfs als nicht signifikant betrachtet werden kann. Aus mathematischer Sicht erweist sich an dieser Stelle zudem ein Vergleich der Nachgiebigkeiten $\phi_{opt,simp}$ und $\phi_{opt,x-simp}$ mit der Nachgiebigkeit $\phi_{opt,g}$ des durch das Dichtefeld

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_{opt,g} = \lim_{q \rightarrow 0} \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{R}^{n_k}} \Psi(\hat{\boldsymbol{\rho}}, p = 1, \gamma = 0, q) \quad (5.6)$$

charakterisierten Entwurfs als interessant, der die sich unter Vernachlässigung von fertigungstechnischen Aspekten jeglicher Art stets ergebende graue Topologie darstellt. Eine Gegenüberstellung der genannten Nachgiebigkeiten liefert dabei ein Verhältnis von $\phi_{opt,simp}/\phi_{opt,g} = 1,091$ bzw. $\phi_{opt,x-simp}/\phi_{opt,g} = 1,107$, was einem Steifigkeitsverlust der jeweiligen Entwürfe gegenüber der grauen Topologie von ca. 8,4% bzw. 9,7% entspricht.

Außerdem bewirkt der X-SIMP-Ansatz eine Regularisierung des Topologieoptimierungsproblems hinsichtlich der Problematik netzabhängiger Entwürfe, die nunmehr durch die Bestrafung der Oberfläche λ beseitigt wird. In diesem Zusammenhang zeigt die Abbildung 5.7 Lösungen des betrachteten Entwurfsproblems, die auf der Basis verschiedener FE-Netze ermittelt wurden, um den Einfluss einer zunehmenden Netzverfeinerung auf den resultierenden Entwurf zu untersuchen.

Wie der Abbildung zu entnehmen ist, weisen die erhaltenen Entwürfe unabhängig vom verwendeten FE-Netz stets die gleiche Topologie auf, was die regularisierende Wirkung des Penalty-Funktional χ im Hinblick auf das Problem der Netzabhängigkeit der numerischen Ergebnisse bestätigt.

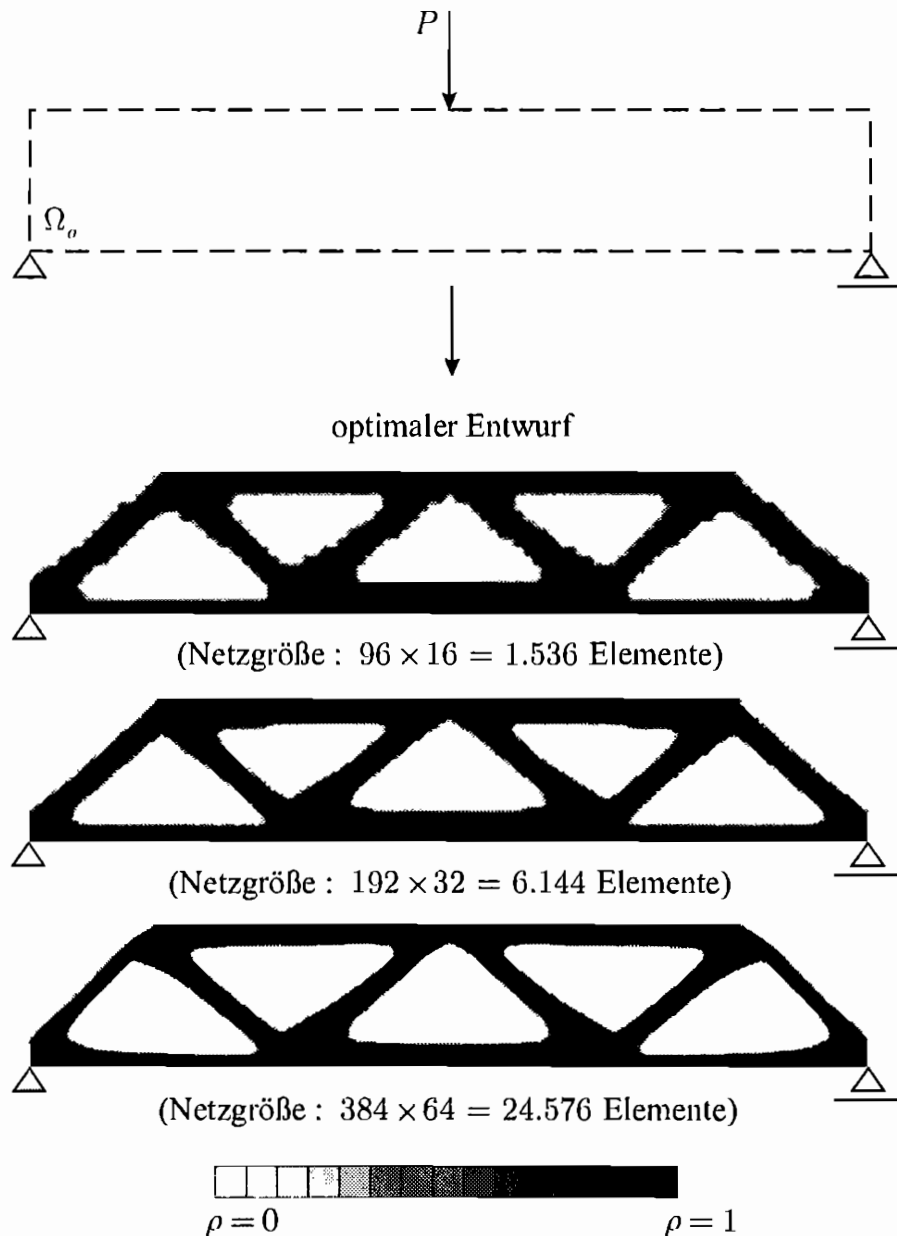
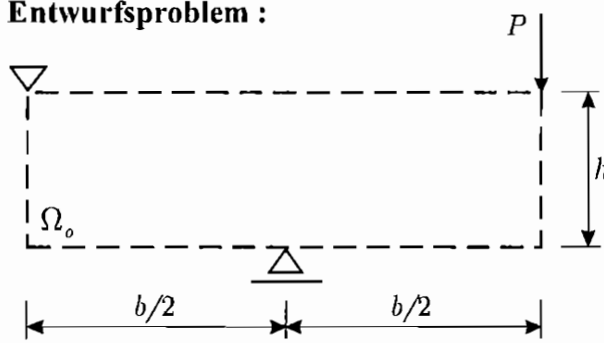
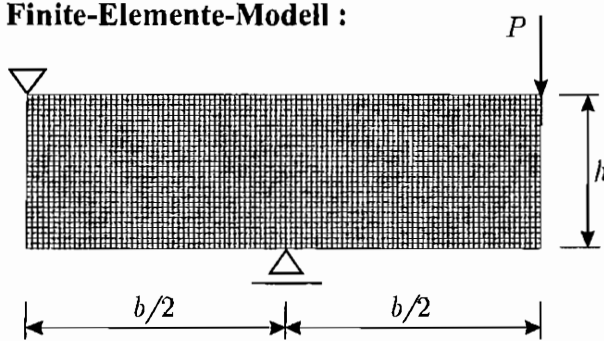


Abbildung 5.7: Stabilität der auf der Basis des X-SIMP-Modells ermittelten Lösung

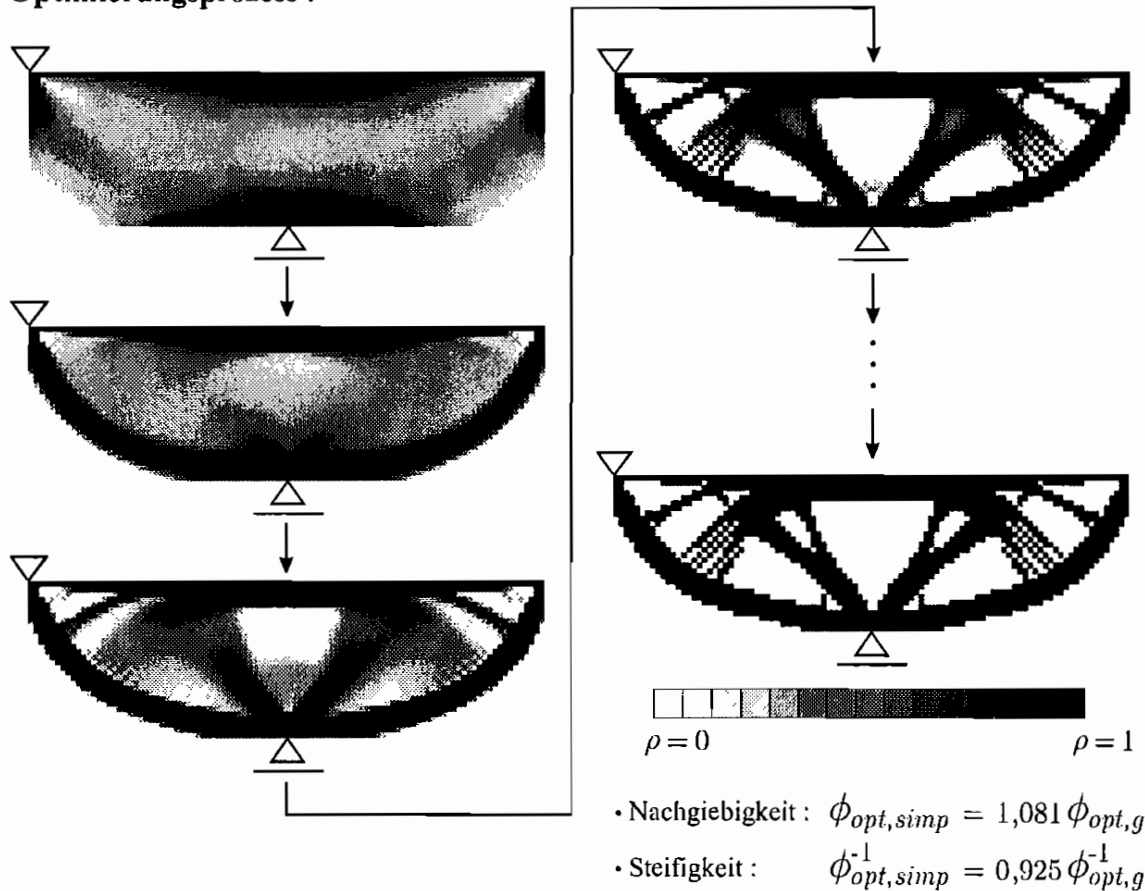
Die am Beispiel der diskutierten Gestaltungsaufgabe festgestellten Auswirkungen der vorgeschlagenen Regularisierung auf die Topologie des optimalen Entwurfs lassen sich zudem anhand der nachfolgenden Abbildungen nachvollziehen, die die unter Verwendung der regularisierten Formulierung (4.10) erhaltenen Lösungen weiterer Entwurfsprobleme zeigen.

Entwurfsproblem :**Konstruktive Vorgaben :**

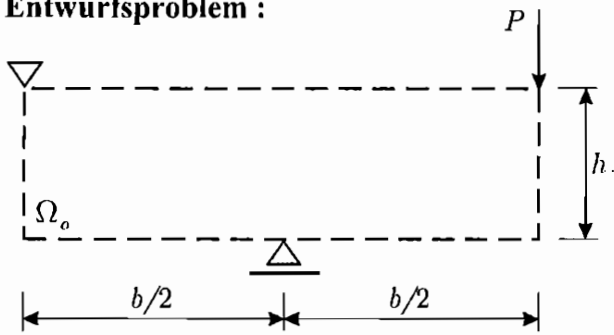
- Bauraum : $h/b = 0,3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,5 M_{tot}$

Finite-Elemente-Modell :**Modellparameter :**

- Anzahl der Elemente : $100 \times 30 = 3.000$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 3.000

Optimierungsprozess :**Abbildung 5.8:** Topologieoptimierung auf der Basis des klassischen SIMP-Modells

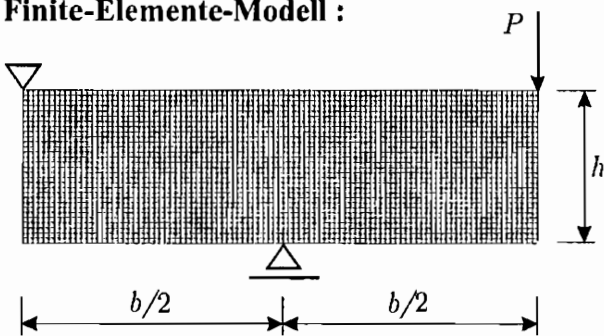
Entwurfsproblem :



Konstruktive Vorgaben :

- Bauraum : $h/b = 0,3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,5 M_{nm}$

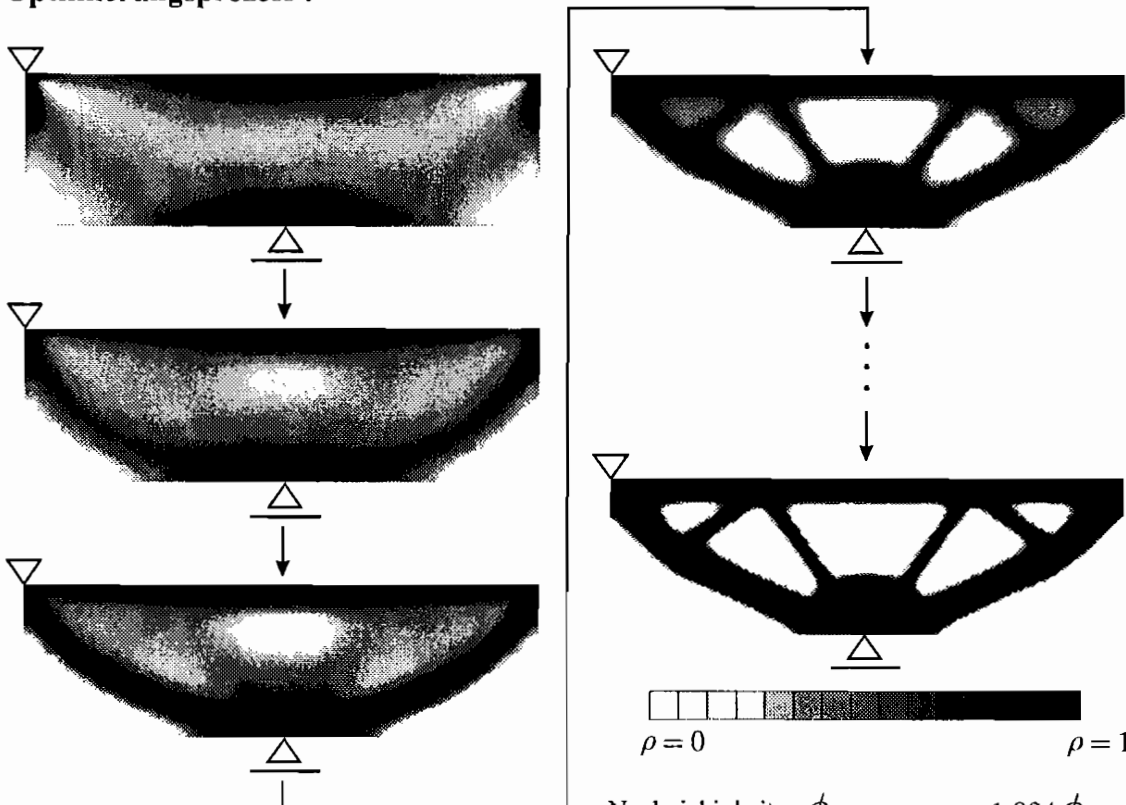
Finite-Elemente-Modell :



Modellparameter :

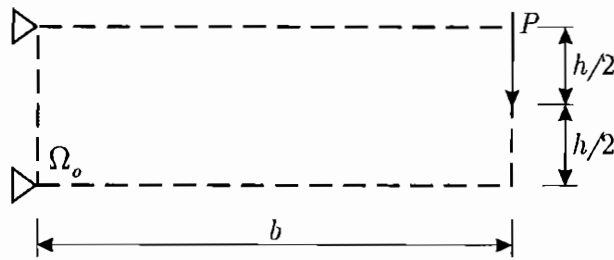
- Anzahl der Elemente : $100 \times 30 = 3.000$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 3.131

Optimierungsprozess :

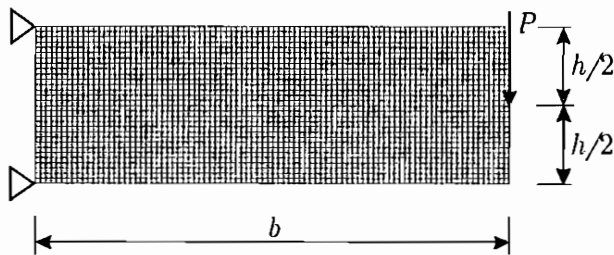


- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,x-simp} = 1,094 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,x-simp}^{-1} = 0,914 \phi_{opt,g}^{-1}$

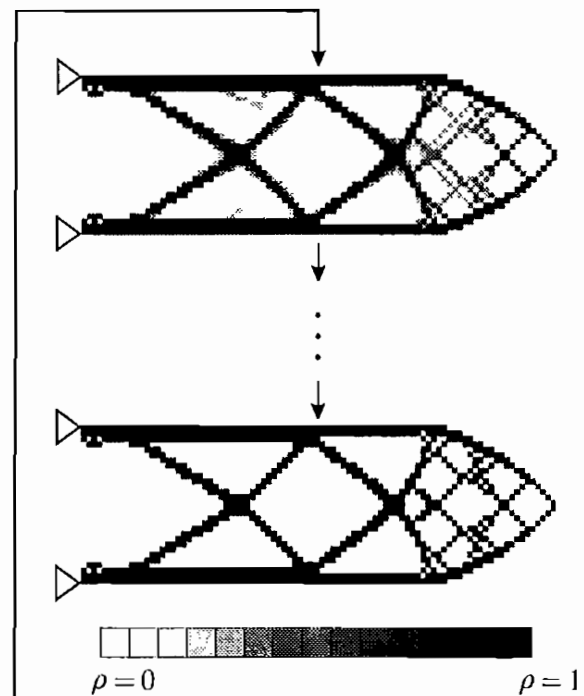
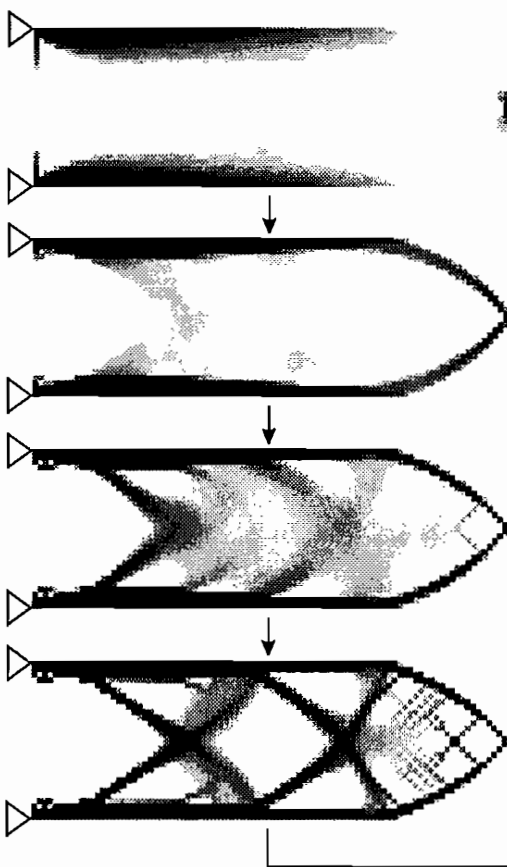
Abbildung 5.9: Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells

Entwurfsproblem :**Konstruktive Vorgaben :**

- Bauraum : $b/h = 3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,3 M_{lim}$

Finite-Elemente-Modell :**Modellparameter :**

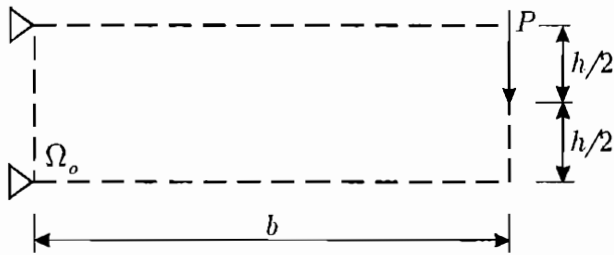
- Anzahl der Elemente : $90 \times 30 = 2.700$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 2.700

Optimierungsprozess :

- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,simp} = 1,104 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,simp}^{-1} = 0,906 \phi_{opt,g}^{-1}$

Abbildung 5.10: Topologieoptimierung auf der Basis des klassischen SIMP-Modells

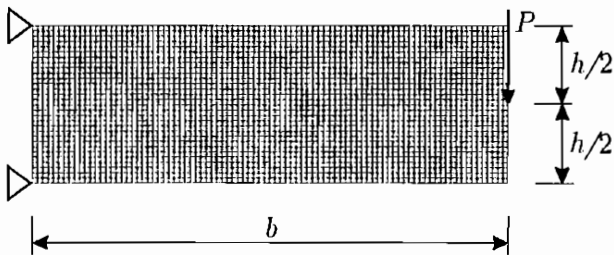
Entwurfsproblem :



Konstruktive Vorgaben :

- Bauraum : $b/h = 3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl . $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,3 M_{n,m}$

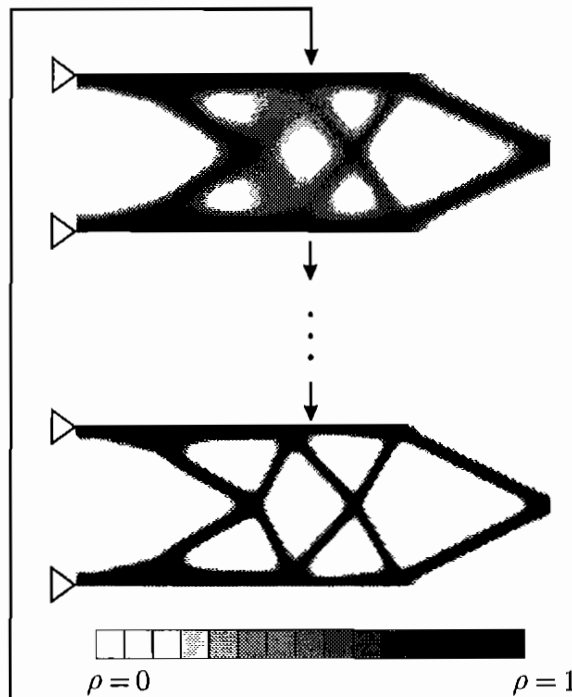
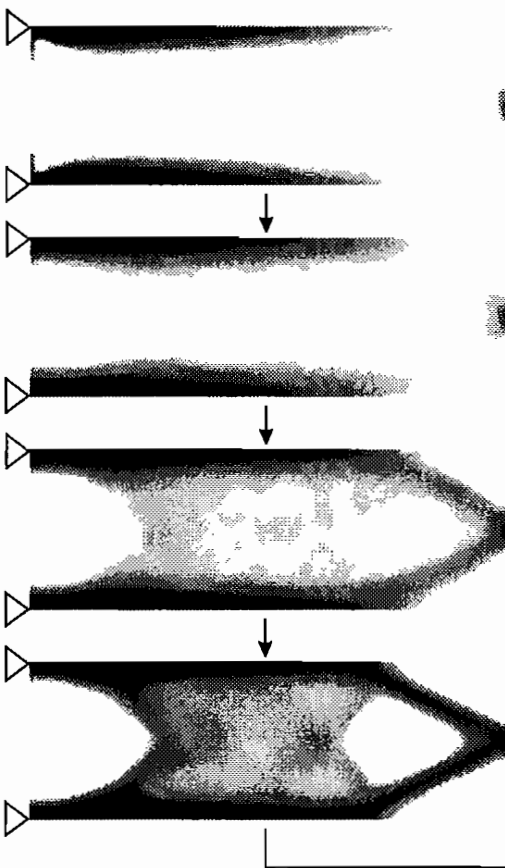
Finite-Elemente-Modell :



Modellparameter :

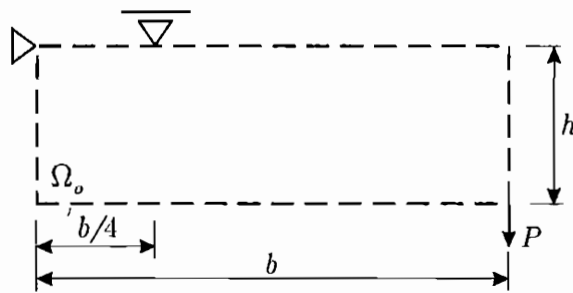
- Anzahl der Elemente : $90 \times 30 = 2.700$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 2.821

Optimierungsprozess :

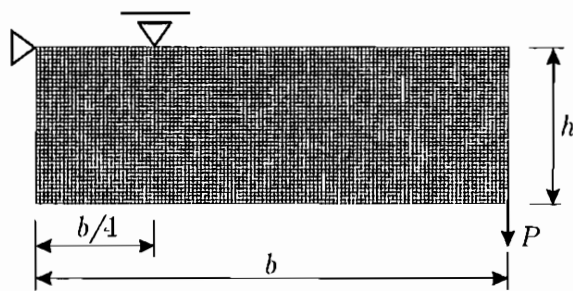


- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,x-simp} = 1,137 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,x-simp}^{-1} = 0,879 \phi_{opt,g}^{-1}$

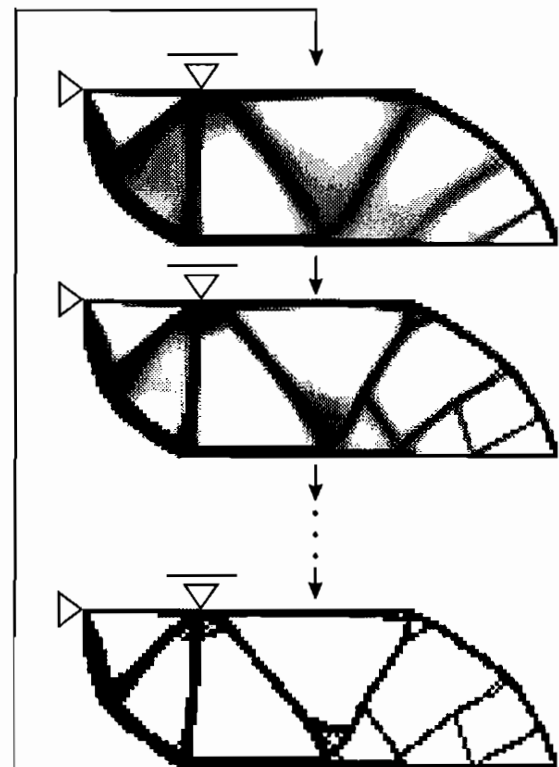
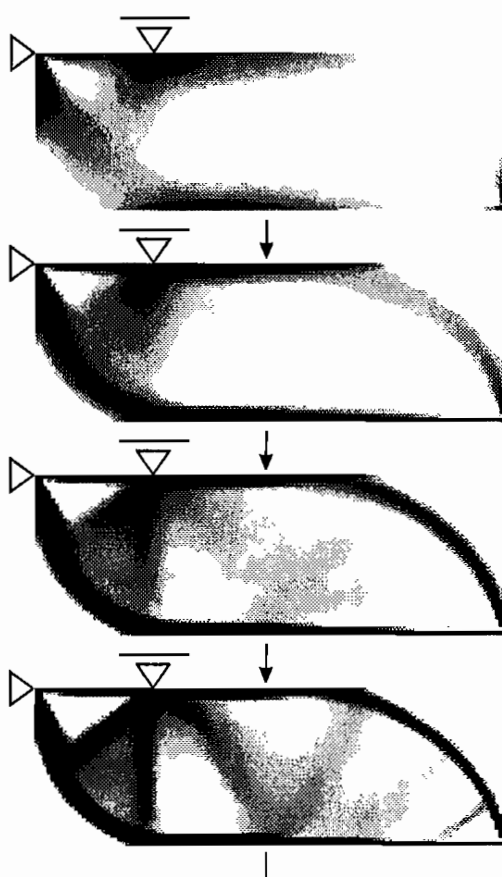
Abbildung 5.11: Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells

Entwurfsproblem :**Konstruktive Vorgaben :**

- Bauraum : $b/h = 3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,25 M_{lim}$

Finite-Elemente-Modell :**Modellparameter :**

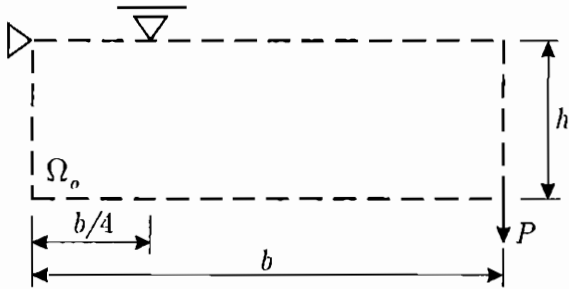
- Anzahl der Elemente : $120 \times 40 = 4.800$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 4.800

Optimierungsprozess :

- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,simp} = 1.212 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,simp}^{-1} = 0.825 \phi_{opt,g}^{-1}$

Abbildung 5.12: Topologieoptimierung auf der Basis des klassischen SIMP-Modells

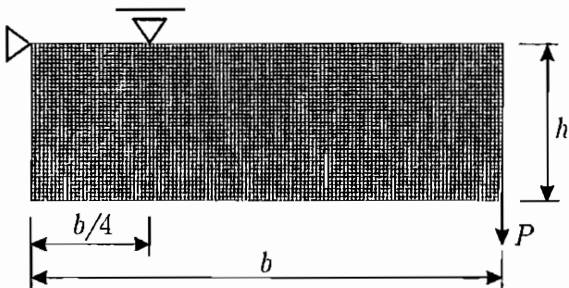
Entwurfsproblem :



Konstruktive Vorgaben :

- Bauraum : $b/h = 3$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0.3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,25 M_{b,m}$

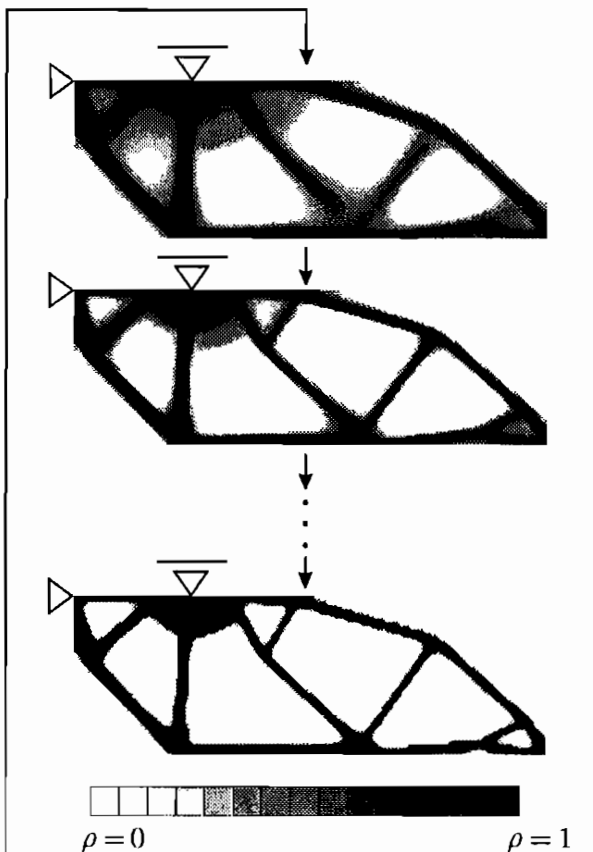
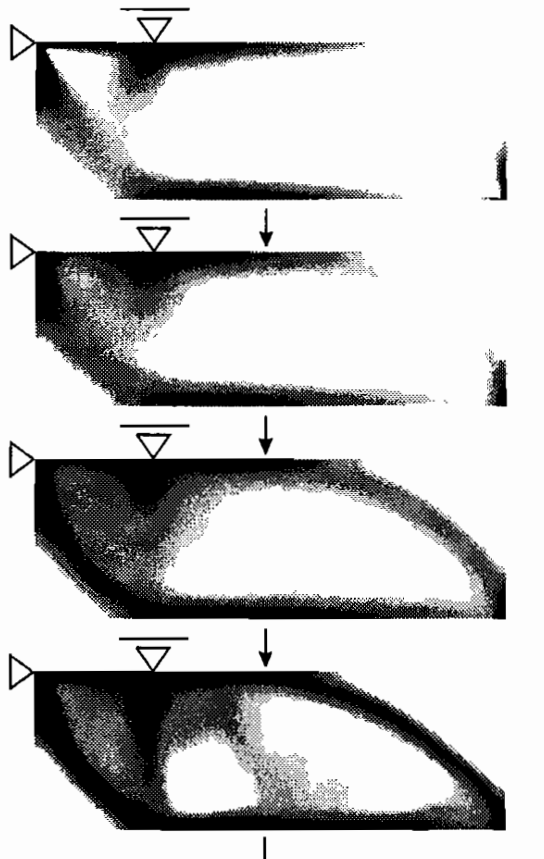
Finite-Elemente-Modell :



Modellparameter :

- Anzahl der Elemente : $120 \times 40 = 4.800$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 4.961

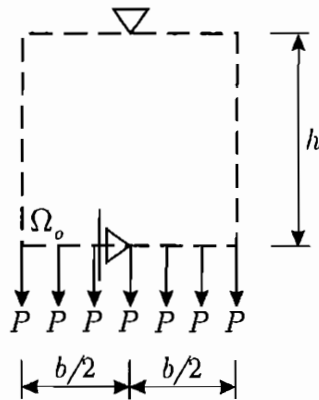
Optimierungsprozess :



- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,x-simp} = 1,262 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,x-simp}^{-1} = 0,792 \phi_{opt,g}^{-1}$

Abbildung 5.13: Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells

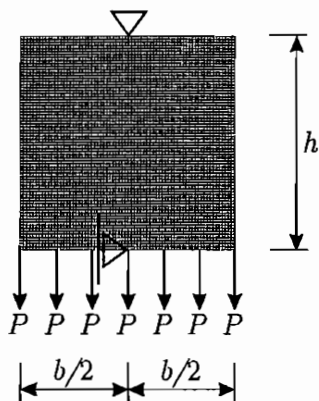
Entwurfsproblem :



Konstruktive Vorgaben :

- Bauraum : $b/h = 1$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,25 M_{tm}$

Finite-Elemente-Modell :



Modellparameter :

- Anzahl der Elemente : $70 \times 70 = 4.900$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 4.900

Optimierungsprozess :

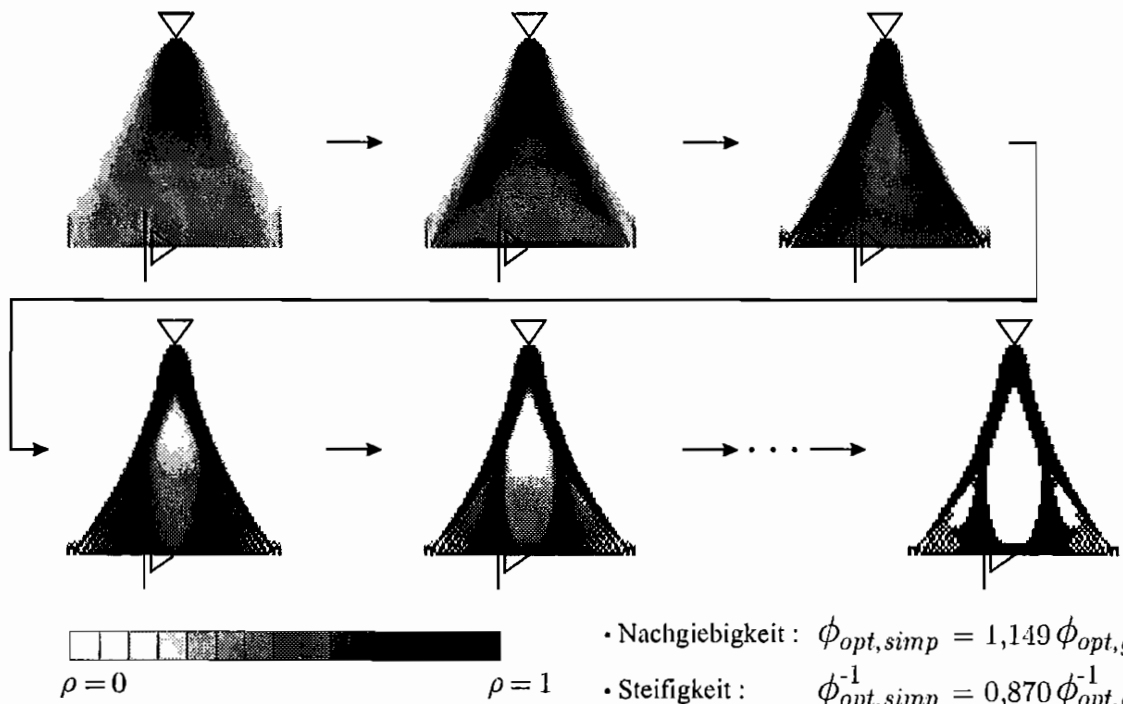
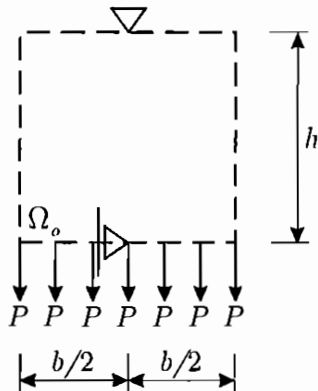


Abbildung 5.14: Topologieoptimierung auf der Basis des klassischen SIMP-Modells

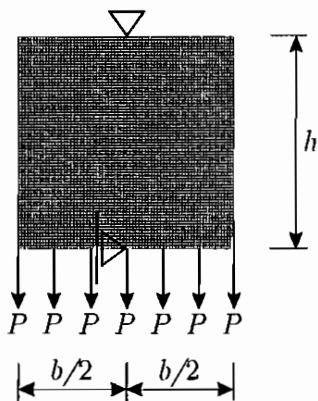
Entwurfsproblem :



Konstruktive Vorgaben :

- Bauraum : $b/h = 1$
- Material :
 - E-Modul : $E_o = 210.000 N/mm^2$
 - Querkontraktionszahl : $\nu_o = 0,3$
- Maximal zulässige Masse : $M_o = 0,25 M_m$

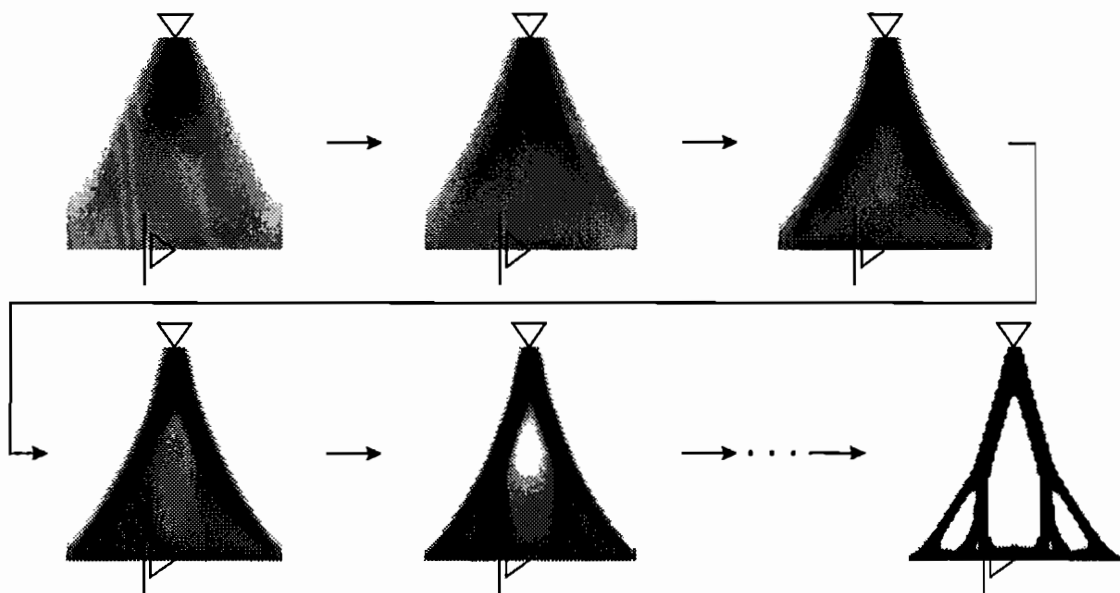
Finite-Elemente-Modell :



Modellparameter :

- Anzahl der Elemente : $70 \times 70 = 4.900$
- Anzahl der Entwurfsvariablen : 5.041

Optimierungsprozess :



- Nachgiebigkeit : $\phi_{opt,x-simp} = 1,178 \phi_{opt,g}$
- Steifigkeit : $\phi_{opt,x-simp}^{-1} = 0,849 \phi_{opt,g}^{-1}$

Abbildung 5.15: Topologieoptimierung auf der Basis des X-SIMP-Modells

5.2 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit dem Problem des optimalen Entwurfs von Bauteilen, wobei an dieser Stelle speziell der Aspekt der Topologieoptimierung linearelastischer Strukturen im Vordergrund stand. Vor diesem Hintergrund bestand die Zielsetzung der Arbeit darin, das im Zuge der Gestaltung einer optimalen Bauteiltopologie zu lösende Optimierungsproblem dahingehend zu regularisieren, dass Topologien, die durch starke räumliche Schwankungen der Materialdichte gekennzeichnet sind und demnach aus fertigungstechnischer Sicht nur schwer realisierbare Entwürfe wie die bekannten „checkerboard-patterns“ zur Folge haben, als unzulässige Lösungen ausgeschlossen werden.

Die angestrebte Regularisierung wurde durch Einführung eines zusätzlichen Penalty-Funktions realisiert, das räumliche Schwankungen der Materialdichte anhand der globalen Verteilung des Gradienten der Dichtefunktion erfasst und somit die Möglichkeit eröffnet, oszillatorische Dichtefelder wie die genannten „checkerboard-patterns“ gezielt zu bestrafen. Das eingeführte Straffunktional ist dabei in das auf Bendsøe zurückgehende und im Zusammenhang mit der Formulierung von Topologieoptimierungsproblemen weit verbreitete SIMP-Modell implementiert worden, das neben der durch den klassischen SIMP-Ansatz bedingten Benachteiligung von unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten ungünstigen Grauzonen nunmehr auch oszillatorische Dichteverteilungen mit einem Verlust der globalen Steifigkeit der zu optimierenden Struktur bestraft, so dass die Ausbildung von Materialverteilungen der genannten Art im Laufe des Gestaltungsprozesses systematisch unterbunden wird.

Durch die Einbeziehung des Dichtegradienten in die Formulierung der zu lösenden Optimierungsaufgabe musste im Zuge der Diskretisierung des regularisierten Problems zudem ein Finite-Elemente-Modell entwickelt werden, das eine stetige Approximation des Dichtefeldes innerhalb des Entwurfsraumes gestattet. Aus diesem Grund wurde die Dichte im Gegensatz zur klassischen FE-Modellierung des Entwurfsraumes, die auf der Annahme einer konstanten Dichteverteilung in den Elementen beruht, neben den Verschiebungen als Knotenvariable eingeführt und auf der Elementebene unter Verwendung geeigneter Formfunktionen approximiert, die die Formulierung von Dichtegradienten innerhalb der Elemente zulassen. Die FE-Formulierung erfolgte an dieser Stelle exemplarisch unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes, wobei der Entwurfsraum mit Hilfe von 4-knotigen Scheibenelementen modelliert wurde, die eine Approximation des Dichte- und Verschiebungsfeldes mittels bilinearer Formfunktionen ermöglichen.

Um die diskretisierte Problemstellung zu lösen, wurde die restringierte Optimierungsaufgabe im Rahmen der Penalty-/Barrier-Methode auf eine Folge von unrestringierten Ersatzproblemen zurückgeführt und anschließend unter Verwendung eines iterativen Abstiegsalgorithmus behandelt.

Die regularisierende Wirkung des vorgestellten Penalty-Ansatzes wurde schließlich anhand ausgewählter Entwurfsprobleme untersucht, die zum einen die Auswirkungen des eingeführten Straffunctionals auf den im Zuge der Gestaltung einer optimalen Topologie durchlaufenen Entwurfsprozess demonstrieren und zum anderen das numerische Verhalten des in diesem Zusammenhang formulierten Lösungsalgorithmus veranschaulichen. Die betrachteten Probleme umfassten dabei den Entwurf linearelastischer Strukturen, deren Gestaltung exemplarisch un-

ter dem Gesichtspunkt maximaler Struktursteifigkeit erfolgte. Vor diesem Hintergrund liegt es im Hinblick auf eine mögliche Fortführung der vorliegenden Arbeit nahe, die Anwendung des vorgeschlagenen Regularisierungskonzeptes auf Gestaltungsaufgaben mit anderweitigen Zielsetzungen auszuweiten, die beispielsweise die Tragfähigkeit, die Stabilität oder das dynamische Verhalten der zu entwerfenden Bauteilstruktur betreffen, da in diesen Fällen prinzipiell vergleichbare Resultate zu erwarten sind. Eine ebenfalls sinnvolle Erweiterung besteht zudem darin, das in diesem Kontext entwickelte, zweidimensionale Finite-Elemente-Modell zu einer 3D-Formulierung auszubauen, die die Berücksichtigung dreiachsiger Spannungszustände ermöglicht und somit die Modellierung beliebiger dreidimensionaler Bauteilstrukturen gestattet.



Anhang A

Grundlagen der Vektor- und Tensorrechnung

Der vorliegende Anhang beinhaltet eine Zusammenstellung von ausgewählten Grundlagen der Vektor- sowie Tensorrechnung gemäß (Betten 1987 bzw. Hjelmstad 1997), wobei sich die nachfolgende Formelsammlung lediglich auf die zum Verständnis der Arbeit erforderlichen Zusammenhänge beschränkt und somit keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt.

A.1 Vektoralgebra

Darstellung eines Vektors im dreidimensionalen Euklidischen Raum

- Orthonormale Basis

$$\{e_1, e_2, e_3\}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

- Basisdarstellung eines Vektors

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \quad (\text{A.2})$$

bzw.

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.3})$$

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \circ \mathbf{v} &= \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_i \mathbf{e}_i \circ v_j \mathbf{e}_j \\
 &= u_i v_j \underbrace{\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j}_{= \delta_{ij}} \\
 &= u_i v_j \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\
 &= u_i v_i
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= u_i \mathbf{e}_i \times v_j \mathbf{e}_j \\
 &= u_i v_j \underbrace{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j}_{= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k} \\
 &= u_i v_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{für gerade Permutationen der Indizes } i, j, k \\ -1, & \text{für ungerade Permutationen der Indizes } i, j, k \\ 0, & \text{für doppelt vorkommende Indizes} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2 Tensoralgebra

Basisdarstellung eines Tensors 2. Stufe im dreidimensionalen Euklidischen Raum

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \tag{A.6}$$

bzw.

$$\mathbf{T} = T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot i, j = 1, 2, 3 \tag{A.7}$$

Skalarprodukt eines Vektors mit einem Tensor 2. Stufe

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \circ \mathbf{T} &= u_i \mathbf{e}_i \circ T_{jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \\
&= u_i T_{jk} \mathbf{e}_i \circ (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \\
&= u_i T_{jk} \delta_{ij} \mathbf{e}_k \\
&= u_i T_{ik} \mathbf{e}_k
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \circ \mathbf{u} &= T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \circ u_k \mathbf{e}_k \\
&= T_{ij} u_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \circ \mathbf{e}_k \\
&= T_{ij} u_k \delta_{jk} \mathbf{e}_i \\
&= T_{ij} u_j \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} \circ \mathbf{T} &= S_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \circ T_{kl} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= S_{ij} T_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \circ (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= S_{ij} T_{kl} \delta_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= S_{ij} T_{jl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Doppeltes Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} : \mathbf{T} &= S_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : T_{kl} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= S_{ij} T_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= S_{ij} T_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&= S_{ij} T_{ij}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3 Differentialoperatoren und Integralsätze

Nabla-Operator

$$\nabla(\dots) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial(\dots)}{\partial x_i} \quad (\text{A.12})$$

bzw.

$$\nabla(\dots) = \mathbf{e}_i \frac{\partial(\dots)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.13})$$

Gradient einer skalarwertigen Funktion

$$\text{grad } f = \nabla f = \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]^T \quad (\text{A.14})$$

Gradient einer vektorwertigen Funktion

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} = \nabla \otimes \mathbf{u} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes u_j \mathbf{e}_j \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Divergenz einer vektorwertigen Funktion

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} = \nabla \circ \mathbf{u} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ u_j \mathbf{e}_j \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta_{ij} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Divergenz einer tensorwertigen Funktion

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{T} &= \nabla \circ \mathbf{T} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ T_{jk} (e_j \otimes e_k) \\ &= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} e_i \circ (e_j \otimes e_k) \\ &= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \delta_{ij} e_k \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} e_k\end{aligned}\tag{A.17}$$

Gaußscher Integralsatz für vektor- bzw. tensorwertige Funktionen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \circ \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega\tag{A.18}$$

bzw.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \circ \mathbf{T} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\Omega\tag{A.19}$$



Anhang B

Anmerkungen zur Erfassung der Steifigkeit linearelastischer Strukturen

Da die Formänderungsenergie einer linearelastischen Bauteilstruktur unmittelbar mit der von den auf das Bauteil einwirkenden Kräften geleisteten Arbeit zusammenhängt, liegt es im Hinblick auf das im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachtete Gestaltungsproblem (3.15) nahe, anstelle der Formänderungsenergie die Arbeit der äußeren Kräfte zur Erfassung der Steifigkeit der zu entwerfenden Struktur heranzuziehen. Um zu einem entsprechenden Arbeitsausdruck zu gelangen, bietet es sich dabei an, das Energiefunktional (3.11) unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.6), (2.22) sowie (3.8) zunächst in die Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) d\Omega_o \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

zu überführen. Drückt man die obige Relation nun in der Indexnotation aus, so ergibt sich an dieser Stelle ein Zusammenhang der Art

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega_o, \quad (\text{B.2})$$

der aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ in der nachfolgenden Weise vereinfacht werden kann :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Omega_o. \quad (\text{B.3})$$

Der auf diese Art und Weise gewonnene Ausdruck lässt sich schließlich durch partielle Integration wie folgt entwickeln

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_o} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j d\Omega_o \right\} \quad (\text{B.4})$$

und anschließend mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Form

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma_o} n_i \sigma_{ij} u_j d\Gamma_o - \int_{\Omega_o} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j d\Omega_o \right\} \quad (\text{B.5})$$

schreiben, aus der unter Einbeziehung der Zusammenhänge (2.16), (2.19) und (2.21) die als Clapeyronsches Theorem (Gurtin 1972) bekannte Relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma_{o,t}} f_i u_j d\Gamma_{o,t} + \int_{\Gamma_{o,u}} t_n u_{o,j} d\Gamma_{o,u} - \int_{\Omega_o} -f_{v,j} u_j d\Omega_o \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} + \int_{\Gamma_{o,u}} \mathbf{t}_n^T \mathbf{u}_o d\Gamma_{o,u} + \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

resultiert, die die Formänderungsenergie eines linearelastischen Körpers mit der von den auf den Körper einwirkenden Kräften verrichteten Arbeit verknüpft. Beschränkt man sich zudem auf homogene Verschiebungsrandbedingungen der Gestalt

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_{o,u}, \quad (\text{B.7})$$

so reduziert sich die Formänderungsenergie des Bauteils schlussendlich auf den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \psi \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_o = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma_{o,t}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{u} d\Gamma_{o,t} + \int_{\Omega_o} \mathbf{f}_v^T \mathbf{u} d\Omega_o \right\}, \quad (\text{B.8})$$

der nun in Anlehnung an (Bendsøe 1989) anstelle des Funktionals (3.11) zur Quantifizierung der Steifigkeit der betreffenden Bauteilstruktur herangezogen werden kann.

Literaturverzeichnis

- Allaire, G. 1997 : The homogenization method for topology and shape optimization. In: Rozvany, G.I.N. (ed.) Topology optimization in structural mechanics (Proc. CISM Course, held in Udine, 1996), 101–133
- Allaire, G., Francfort, G.A. 1993 : A numerical algorithm for topology and shape optimization. In: Bendsøe, M.P., Mota Soares, C.A. (eds.) Topology design of structures, 239–248, Dordrecht: Kluwer
- Allaire, G., Kohn, R. 1993 : Topology optimization and optimal shape design using homogenization. In: Bendsøe, M.P., Mota Soares, C.A. (eds.) Topology design of structures (Proc. NATO ARW, Sesimbra, Portugal 1992), 207–218, Dordrecht: Kluwer
- Bendsøe, M.P. 1989 : Optimal shape design as a material distribution problem. Struct. Optim. 1, 193–202
- Bendsøe, M.P. 1995 : Optimization of structural topology, shape and material. Berlin, Heidelberg, New York: Springer
- Bendsøe, M.P., Diaz, A., Kikuchi, N. 1993 : Topology and generalized layout optimization of elastic structures. In: Bendsøe, M.P., Mota Soares, C.A. (eds.) Topology design of structures (Proc. NATO ARW, Sesimbra, Portugal 1992), 159–206, Dordrecht: Kluwer
- Bendsøe, M.P., Kikuchi, N. 1988 : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 71, 197–224
- Bendsøe, M.P., Sigmund, O. 1999 : Material interpolation schemes in topology optimization. Arch. Appl. Mech. 69, 635–654
- Betten, J. 1987 : Tensorrechnung für Ingenieure. Stuttgart: Teubner
- Betten, J. 1993 : Kontinuumsmechanik – Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer

- Broyden, C.G. 1970 : The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. *J. Inst. Maths. Applics.* 6, 76–90
- Davidon, W.C., 1959 : Variable metric methods for minimization. A.E.C. Research and Development Report, ANL-5990
- Dembo, R., Eisenstat, S., Steihaug, T. 1982 : Inexact Newton Methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 19, 400–408
- Dembo, R., Steihaug, T. 1983 : Truncated Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization. *Math. Program.* 26, 190–212
- Diaz, A.R., Sigmund, O. 1995 : Checkerboard patterns in layout optimization. *Struct. Optim.* 10, 40–45
- Eisenstat, S.C., Walker, H.F. 1996 : Choosing the forcing terms in an inexact Newton method. *SIAM J. Sci. Comput.* 17, 16–32
- Fletcher, R. 1970 : A new approach to variable metric algorithms. *Comp. J.* 13, 317–322
- Fletcher, R., Powell, M.J.D. 1963 : A rapidly convergent descent method for minimization. *Comp. J.* 6, 163–168
- Fletcher, R., Reeves, C. M. 1964 : Function minimization by conjugate gradients. *Comp. J.* 7, 149–154
- Francfort, G.A., Murat, F. 1986 : Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 94, 307–334
- Francu, J. 1982 : Homogenization of linear elasticity equations. *Apl. Mat.* 27, 96–117
- Geiger, C., Kanzow, C. 1999 : Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben. Berlin: Springer
- Goldfarb, D. 1970 : A family of variable metric updates derived by variational means. *Math. Comp.* 24, 23–26
- Großmann C., Terno, J. 1997 : Numerik der Optimierung. Stuttgart: Teubner
- Gurtin, M.E. 1972 : The Linear Theory of Elasticity. In: Flügge, S. (ed.) *Encyclopedia of Physics* VIa/2, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1–295
- Hjelmstad, K.D. 1997 : Fundamentals of structural mechanics. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall

- Hughes, T.J.R. 1987 : The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice–Hall
- Jog, C.S., Haber, R.B. 1996 : Stability of finite element models for distributed–parameter optimization and topology design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 130, 203–226
- Jog, C.S., Haber R.B., Bendsøe, M.P. 1994 : Topology design with optimized, self–adaptive materials. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 37, 1323–1350
- Kotucha, G., Hackl, K. 2003 : Density gradient enhanced topology optimization of continuum structures. *Proc. Appl. Math. Mech.* 3, 292–293
- Kotucha, G., Hackl, K. 2004a : Numerical aspects of X–SIMP–based topology optimization. *Proc. Appl. Math. Mech.* 4, 336–337
- Kotucha, G., Hackl, K. 2004b : Density gradient based regularization of topology optimization problems. In: Lewinski, T., Sigmund, O., Sokolowski, J., Zochowski, A. (eds.) *Optimal shape design and modeling (Proc. WISDOM, Warsaw, Poland 2004)*, 31–44, Warszawa: Exit
- Pedersen, P. 1989 : On optimal orientation of orthotropic materials. *Struct. Optim.* 1, 101–106
- Petersson, J., Sigmund, O. 1998 : Slope constrained topology optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 41, 1417–1434
- Polak, E., Ribière, G. 1969 : Note sur la convergence de methodes de directions conjugués. *Rev. Fr. Inf. Rech. Oper.* 16, 35–43
- Powell, M.J.D. 1970 : A new algorithm for unconstrained optimization. In: Rosen, J.B., Mangasarian, O.L., Ritter, K. (eds.) *Nonlinear Programming*, Academic Press, New York, 31–65.
- Sigmund, O. 1994 : Design of material structures using topology optimization. Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark
- Rozvany, G.I.N. 2001 : Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer–aided topology optimization in structural mechanics. *Struct. Multidisc. Optim.* 21, 90–108
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M. 1991 : The COC algorithm, Part I: Cross–section optimization or sizing. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 89, 281–308
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M., Birker, T. 1992 : Generalized shape optimization without homogenization. *Struct. Optim.* 4, 250–254
- Shanno, D.F. 1970 : Conditioning of quasi–Newton methods for function minimization. *Math. Comp.* 24, 647–656

- Sigmund, O., Petersson, J. 1998 : Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Struct. Optim.* 16, 68–75
- Suzuki, K., Kikuchi, N. 1991 : A homogenization method for shape and topology optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 93, 291–318
- Truesdell, C. 1985 : *The Elements of Continuum Mechanics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. 2000 : *The Finite Element Method, Volume 1: The Basics*. Oxford, Auckland, Boston : Butterworth/Heinemann

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli 1978)

- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary-Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)

- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)

- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowski/L.–P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In–Plane Deformations of Flexible Rods – Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.–P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl–Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung (Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK–Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement–Prozeduren im 2–D Frequenzraum und im 3–D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non–linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß–Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli 1988)

- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)

- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff–Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Reißspitzenfeldes bei stationärem Reißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite–Element–Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)

- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finte elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung – Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finte Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie (Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen (Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode (Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså:
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Chau Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur (Dezember 1996)

Nr. 136 Gregor Kotucha:

Regularisierung von Problemen der Topologieoptimierung unter Einbeziehung von Dichtegradienten (August 2005)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 136**

978-3-935892-11-7