

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Stefan Reichling

**Das inverse Problem der quantitativen
Ultraschallelastografie
unter Berücksichtigung großer
Deformationen**

Heft Nr. 145



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

**INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Stefan Reichling

**Das inverse Problem der quantitativen
Ultraschallelastografie unter Berücksichtigung
großer Deformationen**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 145

Juli 2007

Herausgeber:

Institut für Mechanik

Ruhr-Universität Bochum

D-44780 Bochum

ISBN 978-3-935892-20-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© 2007 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Für Sandra

Zusammenfassung

Die Palpation ist bis heute ein wichtiges diagnostisches Verfahren zur Detektion pathologischer Veränderungen weichen Gewebes, die mit einer lokalen Änderung der Elastizität korrelieren. Da diese Methode kein objektives Maß für den Grad einer Verhärtung liefert, ist es das Ziel der Elastografie, mit Hilfe von gemessenen Verschiebungsfeldern die Gewebesteifigkeit orts aufgelöst zu ermitteln. Während bei den gängigen Verfahren der linearen Ultraschallelastografie angenommen wird, dass sich weiches Gewebe durch ein linear-elastisches Materialverhalten beschreiben lässt, besteht das Ziel dieser Arbeit in der Entwicklung eines Rekonstruktionsalgorithmus, der nicht auf den Anwendungsbereich kleiner Verzerrungen beschränkt ist. Vor diesem Hintergrund erfolgt zunächst eine Klassifikation der in der Literatur vorhandenen Ansätze und eine sich anschließende Analyse der identifizierten Methodengruppen. Aufbauend auf diesen Betrachtungen wird ein iterativer Ansatz der nicht-linearen Ultraschallelastografie entwickelt, der als Minimierungsproblem unter Verwendung des Tikhonov-Phillips-Funktional formuliert wird und die Ermittlung der Elastizitätsverteilung in einem weichen Körper bei Annahme eines Neo-Hooke-Materialmodells ermöglicht. Die Leistungsfähigkeit des neuen Algorithmus wird anhand von Beispielen demonstriert, wobei neben numerisch generierten Verschiebungsfeldern Ultraschallmessergebnisse als Eingangsdaten verwendet werden, die an Probenkörpern aus Polyvinylalkohol-Kryogel ermittelt wurden.

Summary

Today, palpation is an important diagnostic technique to detect pathological changes of soft tissue, which are correlated with local changes of elasticity. Unfortunately, palpation can only provide a subjective measure of tissue hardening. Therefore, an investigation method called elastography has been developed, which is capable of determining the stiffness distribution of soft solids based on measured displacement fields. However, all current procedures of ultrasound elastography are limited to applications, in which only small deformations occur, since all these methods imply a linear elastic material behaviour. Thus, the goal of this work is to develop a new reconstruction algorithm, which does not underlie such restrictions. Against this background, existing methods of the linear elastography are firstly classified in order to permit a detailed analysis of the generated method groups subsequently. The results of this study are introduced in the development of a new approach of non-linear elastography. The new method is based on an adequately defined Tikhonov-Phillips function and leads to a non-linear minimisation problem, whose solution provides the elasticity distribution inside of a Neo-Hookean solid. The efficiency of the developed algorithm is demonstrated by means of several examples, for which numerically generated and measured displacement fields are used as input data. The applied measuring data were previously obtained by ultrasound measurements on samples consisting of polyvinyl alcohol cryogel.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns für die Anregung zu dieser Arbeit und deren wissenschaftliche Betreuung. Ferner bedanke ich mich bei Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl für die Übernahme des Koreferats.

Bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik möchte ich mich an dieser Stelle für die Hilfsbereitschaft und Unterstützung der letzten Jahre bedanken. Insbesondere danke ich Dr.-Ing. habil. Jörn Mosler und Dr.-Ing. Christian Grabe für die vielen hilfreichen Fachdiskussionen. Darüber hinaus möchte ich Prof. Dr.-Ing. Helmut Ermert, Inhaber des Lehrstuhls für Hochfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum, und dessen Mitarbeiter Dipl.-Ing. Walaa Khaled für die jahrelange, hervorragende Zusammenarbeit danken, die sehr zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen hat. Ferner danke ich Tobias Pfaff für die gewissenhafte Korrekturdurchsicht dieses Dokuments.

Mein ausdrücklicher Dank gilt meiner Familie und allen Freunden, die mich immer unterstützt haben und mir stets ein starker Rückhalt waren und sind.

Bochum, im Juli 2007

Stefan Reichling

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns
Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Tag der Einreichung: 17.04.2007

Tag der mündlichen Prüfung: 29.06.2007

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation: Was ist Elastografie?	1
1.2 Begriffsbildung	5
1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit	6
2 Kontinuumsmechanik hyperelastischer Materialien	9
2.1 Kinematische Grundlagen	9
2.2 Bilanzgleichungen und Spannungstensoren	16
2.3 Konstitutive Gleichungen	20
2.4 Arbeits- und Extremalprinzipien	25
2.5 Linearisierte Elastizitätstheorie	31
3 Grundlagen der Mathematik inverser Probleme	35
3.1 Einführung und Begriffsklärungen	36
3.2 Lineare Operatorengleichungen	38
3.3 Nichtlineare Operatorengleichungen	43
4 Experimentelle Datenermittlung	47
4.1 Grundlagen der Ultraschallelastografie	47
4.2 Gewebephantome aus Polyvinylalkohol	54
4.2.1 Herstellungsprozess der Phantome	56
4.2.2 Bestimmung der elastischen Materialkonstanten	59
4.3 Verschiebungsfeldmessung mit Ultraschallelastografie	69
5 Elastografie	80
5.1 Lineare Elastografie	80
5.1.1 Iterative Methoden	82
5.1.2 Direkte Verfahren	89
5.1.3 Diskussion und Vergleich der Methodengruppen	99
5.1.4 Weitere Ansätze der linearen Elastografie	109
5.2 Nichtlineare Elastografie	111
5.2.1 Überblick und Motivation	111
5.2.2 Ein iterativer Ansatz	115

6	Numerische Umsetzung und Anwendungen	120
6.1	Behandlung des direkten Problems	120
6.2	Lösung des inversen Problems	130
6.3	Numerische Simulationen	138
6.4	Ergebnisse der Elastografiemessungen	158
7	Zusammenfassung und Ausblick	169
A	Tensorrechnung	172
B	Probenkörper aus PVA-K	174
C	Probenformen	177
	Literaturverzeichnis	179

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ausschnitt aus dem Houston Chronicle vom 02. Dez. 2006	2
1.2	Schematische Darstellung einer Elastografiemessung	3
1.3	Bezeichnungen zur Differenzierung in der Ultraschallelastografie .	6
2.1	Referenz- und Momentankonfiguration	11
2.2	Infinitesimale, geometrische Größen	12
2.3	Euler-Schnittprinzip	18
3.1	Kausalzusammenhang zwischen Ursache und Wirkung	37
3.2	Zusammensetzung des Rekonstruktionsfehlers, analog zu Rieder (2003, Kap. 3)	41
4.1	Darstellung der hochfrequenten Echodaten und des A- bzw. B- Modes	49
4.2	Prinzip der HF-Ultraschallelastografie	51
4.3	Funktionsweise eines Block-Matching-Algorithmus	53
4.4	Probenformen zur Herstellung der Phantome und der Vergleichs- proben	57
4.5	Herstellungsschritte eines inhomogenen Phantoms	58
4.6	Versuchsstand zur Bestimmung des Schubmoduls von PVA-K im Druckversuch	63
4.7	zweimal gefrorene Probe im Druckversuch im undeformierten und verformten Zustand	64
4.8	Mit Neo-Hooke-Material erzeugte Messdaten	65
4.9	Druckversuch mit Vergleichsproben aus PVA-K: Neo-Hooke-Ma- terial	66
4.10	Zeitliche Entwicklung des Schubmoduls von PVA-Proben	67
4.11	Druckversuch mit Vergleichsproben aus PVA-K: Ogden-Material	69
4.12	Darstellung des Elastografiesystems	70
4.13	Elastografiemessung: (a) Versuch und (b) Idealisierung	72
4.14	Versuchsablauf bei einer Elastografiemessung	75
4.15	Vereinfachte Betrachtung der Randbedingungen	77
4.16	Axiale Verschiebungsfelder aus Elastografiemessungen	78
5.1	Mechanisches Modell eines einfachen Beispiels	81
5.2	Eindeutigkeit und lokale Schlechtgestellttheit der iterativen Ver- fahren	84

5.3	Ermittlung des Schubmoduls μ mit dem Verfahren von Skovoroda et al. (1995)	92
5.4	Beispielstrukturen zur Untersuchung der Eindeutigkeit und der Schlechtgestellttheit der direkten Verfahren	93
5.5	Berechnungsschema des Verfahrens von Sumi et al. (1995)	96
5.6	Berechnungsschema des Verfahrens von Sumi et al. (1995) bei Annahme eines eindimensionalen Spannungszustands	97
5.7	Untersuchung der lokalen Schlechtgestellttheit des Verfahrens von Sumi et al. (1995)	98
5.8	Benchmark-Test zum Vergleich eines direkten und eines iterativen Verfahrens	100
5.9	Benchmark-Test: ermittelte, relative Schubmodulverteilungen mit den exakten Daten u_1	104
5.10	Benchmark-Test: ermittelte, relative Schubmodulverteilungen mit dem Verschiebungsfeld u_1^g	104
5.11	Beispiel zur Motivation der nichtlinearen Elastografie	112
6.1	Diskretisierung einer Beispielstruktur \mathcal{B} in der Referenzkonfiguration	123
6.2	Darstellung des Uzawa-Algorithmus	129
6.3	Diskrete Messpunkte am Beispiel der B-Bild-Elastografie	132
6.4	Algorithmus zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie	139
6.5	Vorgehensweise bei der Durchführung von numerischen Simulationen	140
6.6	Einfache Beispiele zur Überprüfung der Implementierung	142
6.7	Beispielstruktur mit einem harten Einschluss: Modell und axiales Verschiebungsfeld	144
6.8	Beispielstruktur mit einem harten Einschluss: ermittelte Schubmodulverteilung	146
6.9	Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_1	147
6.10	Vergleich von skalierten Schubmodulverteilungen μ^h für verschiedene Materialverteilungen μ_0^h und μ^{*h}	148
6.11	Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_2	149
6.12	Beispielstruktur mit einem weichen Einschluss: ermittelte Schubmodulverteilung	150
6.13	Einfluss der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und des Morozovschen Diskrepanzprinzips auf die Lösung μ^h	152
6.14	Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: Modell und axiales Verschiebungsfeld	153
6.15	Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: ermittelte Schubmodulverteilung	155
6.16	Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_3	156

6.17	Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: Anwendung des modifizierten Tikhonov-Verfahrens	157
6.18	Informationen zur Diskretisierung des Bildbereichs	159
6.19	Phantom Pa: B-Bild und rekonstruierte Schubmodulverteilung μ^h	160
6.20	Phantom Ph: rekonstruierte Schubmodulverteilungen μ^h	161
6.21	Phantom Pc: ermittelte Schubmodulverteilungen μ^h	163
6.22	Phantom Pe: B-Bild und rekonstruierte Schubmodulverteilung μ^h	165
6.23	Phantom Pd: ermittelte Schubmodulverteilungen μ^h	166
6.24	Phantom PD und PH: berechnete Schubmodulverteilung μ^h . . .	167
6.25	Phantom Pf: berechnete Schubmodulverteilung μ^h	168
C.1	Zylinderform zur Herstellung der Vergleichsproben	177
C.2	Zylinderform zur Fertigung von Phantomeinschlüssen	177
C.3	Quaderformen zur Herstellung der Phantome	178

Tabellenverzeichnis

4.1	Zusammenstellung der verwendeten Phantome	68
5.1	Gewählte Parameter bei der Umsetzung des direkten und des iterativen Verfahrens	102
6.1	Vergleich der berechneten und der wahren Schubmodulverhältnisse μ_{inc}^h/μ_{mat}^h bzw. $\mu_{w,inc}^h/\mu_{w,mat}^h$	165

1 Einleitung

1.1 Motivation: Was ist Elastografie?

Die Palpation ist ein Jahrtausende altes diagnostisches Verfahren und bezeichnet die manuelle Untersuchung eines Patienten durch Abtasten der Körperoberfläche zur Beurteilung darunter liegender Körperstrukturen. Bis heute wird diese Methode in vielen Bereichen der Medizin erfolgreich angewandt, da nach Ophir et al. (2002) pathologische Veränderungen von weichem Gewebe im Allgemeinen mit der Änderung der Gewebeelastizität korrelieren. So wird die Palpation z. B. bei Untersuchungen der männlichen Prostata oder der weiblichen Brust im Rahmen der Krebsdiagnostik eingesetzt, da sich derartige Erkrankungen durch eine Versteifung befallener Zellregionen bzw. Knotenbildung äußern. Ein großer Vorteil der Palpation besteht darin, dass sie ohne technische Hilfsmittel durchgeführt werden kann und somit einfach und kostengünstig ist. So wird Frauen ab einem Alter von dreißig Jahren empfohlen, die Palpation im Sinne der Brustkrebsvorsorge regelmäßig und selbstständig durchzuführen. Ein großer Nachteil dieser Untersuchungsmethode besteht darin, dass die Ausführung und die Beurteilung der Ergebnisse stark vom Untersuchenden selbst abhängen und sie somit ein subjektives Verfahren darstellt. Darüber hinaus sind kleinere und tiefer liegende pathologische Veränderungen, unabhängig vom Grad einer Verhärtung, durch ein Abtasten der Oberfläche nicht zu erfassen.

Leider sind gängige Bildgebungsverfahren der Medizin, wie die Magnetresonanztomografie, die Computertomografie oder die Sonografie, nicht in der Lage Gewebesteifigkeit zu visualisieren. So zeigten Garra et al. (1997) durch eine klinische Untersuchung, dass Tumore der weiblichen Brust oder Prostatakarzinome in Ultraschallaufnahmen kaum oder gar nicht sichtbar waren, obwohl sie eine deutlich höhere Steifigkeit aufwiesen als das umgebende Material. Diese Untersuchungsergebnisse sind auf die physikalische Beobachtung zurückzuführen, dass Echogenität und Verhärtungen von Gewebe nicht korrelieren, vgl. Ophir et al. (2002). Somit gibt es seit Mitte der achtziger Jahre das Bestreben, aufbauend auf den bekannten Abbildungsmodalitäten der Medizin, ein *in vivo* Verfahren zu entwickeln, mit dem sich die Materialverteilung in weichem Gewebe orts aufgelöst bestimmen und hinreichend genau quantifizieren lässt.

Wie aktuell diese Bemühungen sind, wird durch den in Bild 1.1 dargestellten Ausschnitt aus einer amerikanischen Tageszeitung deutlich. Der dargestellte Artikel thematisiert eine klinische Studie der Methode *Elastography*, die von Ophir et al. (1991) erstmals vorgeschlagen wurde und wie folgt in idealisierter Form beschrieben werden kann. Zunächst erfolgt eine Ultraschallaufnahme in

Ultrasound technique could replace breast tumor biopsy

■ Study suggests the 'elastography' process is painless, quick and nearly 100% accurate

By CARLA K. JOHNSON
ASSOCIATED PRESS

CHICAGO — An experimental ultrasound technique that measures how easily breast lumps compress and bounce

DIAGNOSING CANCER

Elastography uses ultrasound and compression to detect whether breast lumps are benign or malignant.

this week.

Both traditional ultrasound and elastography use echoes from high-frequency sound waves to create pictures of what is inside the body, but elastography goes a step further.

In traditional ultrasound, a doctor or technician places a handheld device on the skin that sends high-frequency sound waves into the body. Organs and tissue reflect the sound back as echoes.

'Finding a marble in Jell-O'

Elastography also compares

As device is moved, mass will appear on elastogram as dark shape

Bild 1.1: Ausschnitt aus dem Houston Chronicle vom 02. Dez. 2006

einem Querschnitt des zu untersuchenden Objekts im unverformten Zustand, vgl. Bild 1.2. Anschließend wird die Struktur mit der Ultraschallsonde quasi-statisch komprimiert und eine zweite Messung durchgeführt. Mit Hilfe geeigneter Algorithmen wird dann aus diesen Aufnahmen das Verschiebungsfeld in Kompressionsrichtung bestimmt. Durch eine Differentiation der auf diese Weise ermittelten Verschiebungen ergeben sich die Verzerrungen in Belastungsrichtung. Eine Darstellung der in der Aufnahmeebene gewonnenen Dehnungen in Form eines Graustufendiagramms liefert das so genannte *Elastogram*.¹ Mit der vereinfachenden Annahme, dass das untersuchte Gewebe nahezu inkompressibel, isotrop und linear elastisch ist, wird das Verzerrungsfeld im Sinne der von Ophir et al. (1991) postulierten *Elastografie* als ein Maß für die Gewebeelastizität betrachtet, da in steiferen Strukturbereichen kleinere Verzerrungen auftreten als in den umgebenden Geweberegionen. Der von Ophir et al. (1991) aufgezeigte, einfache Zusammenhang zwischen dem Dehnungsfeld in Belastungsrichtung und der Elastizitätsverteilung besitzt allerdings nur bei Körpern mit einem sehr einfachen Materialaufbau Gültigkeit. Bei komplexeren Strukturen führt diese Betrachtungsweise zu Fehlinterpretationen, die in der Literatur häufig als *Bildartefakte* bezeichnet werden. So ergeben sich in einem Elastogramm oberhalb und unterhalb von harten Einschlüssen Materialbereiche, die zwar stärker komprimiert werden als andere Regionen der Materialmatrix, deshalb jedoch nicht weicher sein müssen. Neben diesen als *Shadows* bezeichneten Bildartefakten treten weitere Phänomene auf, z. B. das in Kallel & Bertrand (1996) beschriebene *Target Hardening*, durch das Geweberegionen mit zunehmendem Abstand von

¹Die Begriffe *Elastography* und *Elastogram* werden im Folgenden durch die Wörter *Elastografie* und *Elastogramm* eingedeutscht.

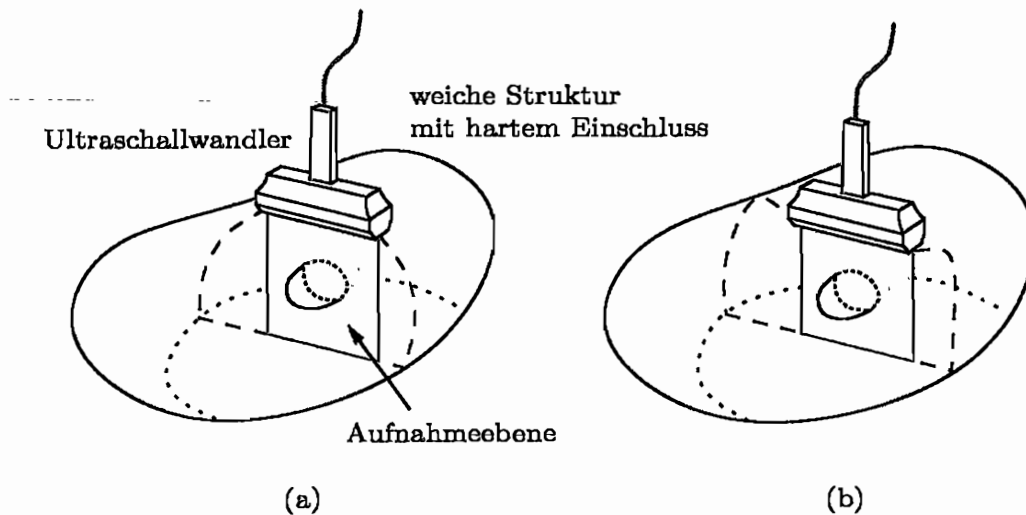


Bild 1.2: Schematische Darstellung einer Elastografiemessung: Ultraschallaufnahme eines Querschnitts eines Probenkörpers in (a) unverformtem und (b) deformiertem Zustand

der Ultraschallsonde aufgrund der Spannungsverteilung in einer Struktur weniger stark gestaucht werden und somit härter erscheinen. Mit zunehmender Komplexität der tatsächlichen Materialverteilung überlagern sich derartige Fehlereinflüsse und machen eine Auswertung des Elastogramms schwierig bzw. unmöglich.

Aus diesem Grund werden seit Mitte der neunziger Jahre Rekonstruktionsverfahren entwickelt, die nicht mehr auf der Interpretation von Dehnungsbildern beruhen, sondern mit deren Hilfe auf der Basis der gemessenen Verschiebungen die mit der Steifigkeit korrelierenden Materialparameter berechnet werden. Dieses Vorgehen entspricht einer Parameteridentifikation und erfordert, wie die Ultraschallelastografie, die Annahme eines geeigneten Materialmodells. Doch wie lässt sich die Gewebesteifigkeit geeignet quantifizieren? Zur Beantwortung dieser Frage wird noch einmal auf die Messmethode der Elastografie zurückgegriffen. Da diese als eine Ergänzung bzw. eine Verbesserung der Palpation angesehen wird, werden alle Untersuchungen in vivo durchgeführt. Dabei soll eine Elastografiemessung die Vorzüge einer Standardultraschallmessung beibehalten, so dass sie kostengünstig und ohne großen Aufwand durchführbar ist. Aus diesem Grund soll auch bei den Rekonstruktionsverfahren der „natürliche“ Messablauf der oben beschriebenen Elastografiemessung in der Form beibehalten werden, dass die von außen applizierten Verformungen durch die Linearsonde selbst hervorgerufen werden. Daher steht für eine Parameteridentifikation unter Umständen nur eine Messung zur Verfügung. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint es auch für diese Rekonstruktionsalgorithmen sinnvoll, ein möglichst einfaches konstitutives Gesetz auszuwählen, welches im Wesentlichen zwei Anforderungen genügen muss. Auf der einen Seite muss dieses Materialmodell die Materialkonstanten enthalten, die mit der Steifigkeitsänderung korrelieren, damit sie durch eine Parame-

teridentifikation bestimmt werden können. Darüber hinaus sollte das gewählte konstitutive Gesetz so beschaffen sein, dass sich das Materialverhalten unter der ggf. selbst induzierten Beanspruchung hinreichend genau beschreiben lässt. Es sollte also ein Materialgesetz verwendet werden, welches Weichgewebe nicht so genau wie möglich, sondern so genau wie nötig beschreibt. Da viele Karzinome als Verhärtungen wahrgenommen werden, was einen Verlust an Elastizität bedeutet, liegt mit der zuvor formulierten Forderung die Wahl des zweiparametrischen Hooke-Materialmodells nahe. Wird angenommen, dass Weichgewebe im Allgemeinen aufgrund des hohen Wassergehalts nahezu inkompressibel ist, vgl. Ophir et al. (2002), so kann die Querkontraktion $\nu \approx 0,5 < 0,5$ als bekannt vorausgesetzt werden, so dass im Rahmen einer Parameteridentifikation nur ein Materialparameter bestimmt werden muss. Darüber hinaus konnte Krouskop et al. (1998) in einer Messreihe anhand von Druckversuchen nachweisen, dass der zu bestimmende Elastizitätsmodul E bzw. der Schubmodul² μ mit den krankhaften Veränderungen bei Brust- bzw. Prostatakreberkrankungen korreliert. So zeigte sich, dass der Elastizitätsmodul von Prostatakarzinomen bis zu viermal größer war, als der des umgebenden Gewebes.

Unter der Annahme, Weichgewebe lasse sich durch ein (nahezu) inkompressibles, linear elastisches Materialmodell beschreiben, wurden in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen entwickelt mit dem Ziel, aus den gemessenen Verschiebungen den Elastizitätsmodul orts aufgelöst im Aufnahmebereich einer Ultraschallsonde zu bestimmen, vgl. u. a. Skovoroda et al. (1995), Kallel & Bertrand (1996) und Oberai et al. (2003). Da die Ergebnisse in Form von Konturdiagrammen über dem Aufnahmebereich dargestellt werden, werden diese Verfahren im Englischen häufig als *Elasticity Imaging* bezeichnet. Darüber hinaus existieren die Begriffe *Tissue Elasticity Reconstruction* oder, in Abgrenzung zu der von Ophir et al. (1991) vorgeschlagenen Dehnungsbildinterpretation, *Quantitative Elastography*. Da der Elastizitätsmodul durch die Rekonstruktionsverfahren explizit bestimmt wird, ist eine mitunter mühevollere Interpretation der Ergebnisse wie bei der Elastografie nicht mehr erforderlich. Der Vorteil in der Ergebnisqualität steht dem Nachteil gegenüber, dass die Bestimmung der Steifigkeitsverteilung in der Aufnahmeebene im Allgemeinen deutlich zeitaufwendiger ist als eine reine Berechnung der Dehnungen in Kompressionsrichtung.

Neben der Annahme eines elastischen Materialverhaltens stellt insbesondere die Beschränkung auf die linearisierte Theorie eine erhebliche Einschränkung dar. So konnte Krouskop et al. (1998) durch Messungen bestätigen, dass sich einige Gewebearten der weiblichen Brust und der männlichen Prostata ausgeprägt nichtlinear verhalten. Daher wird in aktuelleren Arbeiten versucht, vgl. Erkamp et al. (2004a) und Erkamp et al. (2004b) im Bereich der Elastografie oder Skovoroda et al. (1999), mit Hilfe eines Rekonstruktionsverfahrens, auch nichtlineare Effekte bei der Bestimmung der Gewebesteifigkeit zu berücksichtigen, um eine Verbesserung bisher erzielter Ergebnisse zu erreichen.

²Für den Fall vollkommener Inkompressibilität gilt für die Querkontraktionszahl $\nu = 0,5$ und für den Elastizitäts- bzw. Schubmodul gilt $E = 3\mu$.

1.2 Begriffsbildung

Schon die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Motivation dieser Arbeit verdeutlicht, dass die Begrifflichkeit insbesondere bei den Rekonstruktionsverfahren nicht einheitlich ist. Daher erscheint es angebracht, zunächst eine Begriffsbildung vorzunehmen, die für diese Arbeit Gültigkeit besitzt.

Neben der Abbildungsmodalität Ultraschall kann im Allgemeinen auch mit Hilfe anderer Bildgebungsverfahren die Steifigkeit ermittelt werden, sowohl im Sinne der von Ophir et al. (1991) eingeführten Elastografie als auch mit Hilfe eines Rekonstruktionsalgorithmus durch Auswertung der gemessenen Verschiebungen. So werden u. a. in den Arbeiten von Bishop et al. (2000), Plewes et al. (2000), Sinkus et al. (2000) und Steele et al. (2000) die Verformungen in Weichgewebe mit Hilfe der *Magnetresonanztomografie* ermittelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch ausschließlich die Sonografie zur Verschiebungsermittlung eingesetzt und auf die sich hieraus ergebenden Besonderheiten bei der Steifigkeitsermittlung eingegangen, so dass im Folgenden durch den Begriff *Elastografie* stets die *Ultraschallelastografie* bezeichnet wird. Die Wahl der Sonografie zur Ermittlung der Verschiebungen wird im Wesentlichen durch die mögliche medizinische Anwendung motiviert. So ist sie der Magnetresonanztomografie in dem hier betrachteten Kontext vorzuziehen, da eine Verschiebungsmessung auf Basis von Ultraschall wesentlich einfacher und schneller durchzuführen ist. Darüber hinaus sind die Anschaffungs- und Betriebskosten deutlich geringer.

Eine Gemeinsamkeit aller Verfahren, unabhängig von der zugrunde liegenden Abbildungsmodalität, ist die Erfordernis, eine Struktur während einer Elastografiemessung zu deformieren, um Informationen über das mechanische Verhalten des Körpers zu ermitteln. Die Deformation des Körpers kann, wie von Ophir et al. (1991) vorgeschlagen, durch eine quasi-statische Einwirkung angeregt werden, jedoch sind auch dynamische Beanspruchungen denkbar, vgl. u. a. Sinkus et al. (2000), Skovoroda (2000) und Ji & McLaughlin (2004). Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich quasi-statische Belastungsvorgänge betrachtet, da in diesem Fall auf eine Bestimmung zeitlich veränderlicher Größen verzichtet werden kann, wodurch sich der Messablauf stark vereinfacht. Darüber hinaus kann auf eine experimentelle Ermittlung eines Dämpfungskoeffizienten verzichtet werden, der ggf. bei der Berücksichtigung der Viskosität von Weichgewebe als zusätzlicher Parameter in das Materialmodell einfließt.

Nach der Formulierung dieser Voraussetzungen kann der Begriff *Elastografie* umdefiniert werden. Die Bezeichnungen von Doyley et al. (2000) aufgreifend werden im Folgenden die Rekonstruktionsverfahren, bei denen die Steifigkeitsverteilung aus den Messdaten berechnet wird, unter dem Oberbegriff *quantitative Elastografie* oder kurz *Elastografie* zusammengefasst. Hingegen werden Methoden, die wie das Verfahren von Ophir et al. (1991) auf der Interpretation von Dehnungsbildern beruhen, als *qualitative Elastografie* bezeichnet, da die Verzerrungen kein direkt interpretierbares Maß für die Materialsteifigkeit darstellen. In der *quantitativen Elastografie* muss darüber hinaus noch weiter unterschiede-

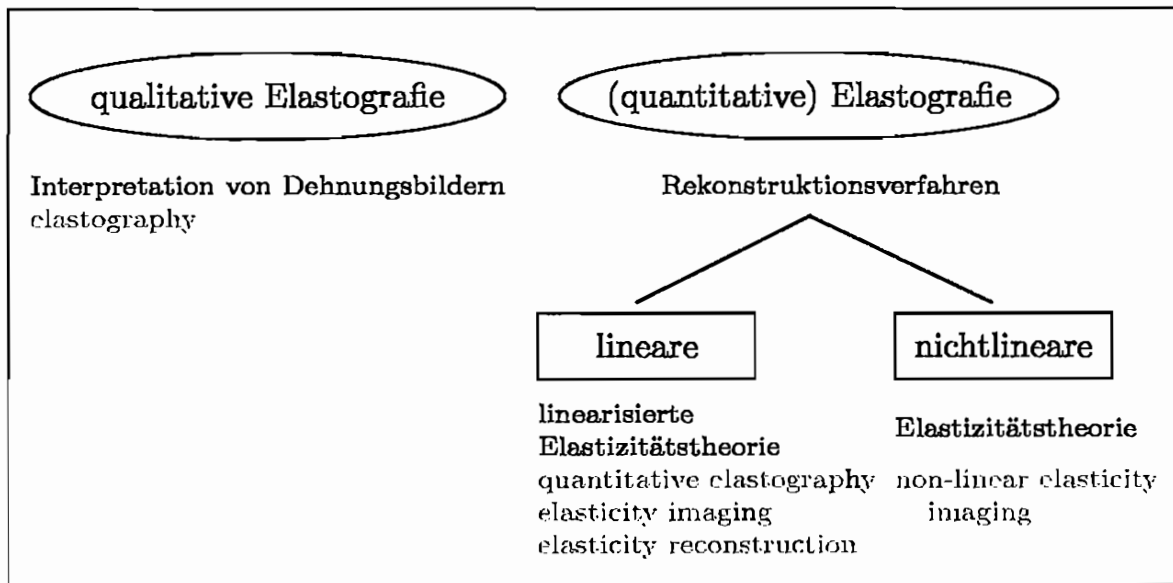


Bild 1.3: Bezeichnungen zur Differenzierung in der Ultraschallelastografie bei quasi-statischer Einwirkung, inklusive der englischen Fachbegriffe (□)

den werden. So gehört eine Methode zur *linearen (quantitativen) Elastografie*, wenn die Betrachtungen auf der Grundlage der linearisierten Elastizitätstheorie erfolgen. Wird ein beliebiges elastisches Materialmodell gewählt, so zählt der Ansatz zur *nichtlinearen (quantitativen) Elastografie*. Durch Bild 1.3 wird diese Begriffsbildung noch einmal zusammengefasst.

Neben der Bezeichnung *Elastografie* wurde im ersten Abschnitt sehr häufig der Begriff *Steifigkeit* verwendet. Diese beschreibt in der Mechanik im Allgemeinen den Zusammenhang zwischen der einwirkenden Belastung und der resultierenden Verformung eines Körpers und hängt vom Werkstoff, der Geometrie des Körpers und den mechanischen Randbedingungen ab. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff ausschließlich im Sinne von *Materialsteifigkeit* verwendet.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Ein großer Nachteil der qualitativen bzw. linearen, quantitativen Elastografie besteht in den einschneidenden Annahmen, die hinsichtlich des Materialverhaltens getroffen werden. Da Weichgewebe im Allgemeinen anisotrop und viskoelastisch ist und sich unter einer mechanischen Einwirkung ausgeprägt nichtlinear verhält, können diese Materialeigenschaften durch die linearisierte Elastizitätstheorie bei Annahme eines isotropen Materialmodells nicht wiedergegeben werden.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, einen Rekonstruktionsalgorithmus zu entwickeln, mit dem die Materialverteilung einer weichen Struktur in der Aufnahmeebene eines Ultraschallwandlers bestimmt werden kann und bei dem nicht

mehr auf die linearisierte Elastizitätstheorie zurückgegriffen wird. Vielmehr soll durch die Wahl eines nichtlinearen, hyperelastischen Materialmodells erreicht werden, dass die Parameteridentifikation auch bei größeren, äußeren Verformungen gute Ergebnisse liefert. Diese Verbesserung erlaubt mit Blick auf eine mögliche, medizinische Anwendung den Einsatz der Ultraschallelastografie als Freihandapplikation. Da aufgrund des nichtlinearen Verhaltens von Weichgewebe bei Verwendung der linearisierten Elastizitätstheorie ggf. nur sehr kleine, äußere Verformungen zulässig sind, sind die Deformationen bei einem allgemeinen, hyperelastischen Materialmodell nicht derartig strengen Restriktionen unterworfen.

Weiterhin erhalten bleiben die Annahmen, dass die untersuchten Körper rein elastisch und isotrop sind. Während die erste Annahme durch die Tatsache gerechtfertigt werden kann, dass alle Einwirkungen nur quasi-statisch aufgebracht werden und auf diese Weise der viskose Anteil des Materials irrelevant ist, führt die zweite Voraussetzung dazu, dass ausgeprägt anisotrope Materialien, wie Muskelgewebe, nicht exakt abgebildet werden können. Daher wäre bei der Anwendung der Elastografie auf Organe, die derartige Gewebearten enthalten, die Einsetzbarkeit der Methode zunächst explizit zu überprüfen. Auch wenn die Entwicklung der neuen Methode stets im Hinblick auf die medizinische Anwendung erfolgt, werden im Rahmen dieser Arbeit keine Messungen an menschlichem oder tierischem Gewebe durchgeführt.

Daher stellt sich die Frage, wie die Tauglichkeit des Rekonstruktionsverfahrens nachgewiesen werden kann. In der Literatur wird ein entsprechender Nachweis in der Regel durch einen oder mehrere der folgenden Schritten erbracht, wobei sich die einzelnen Stufen durch die jeweiligen Eingangsdaten unterscheiden. Die einfachste Möglichkeit, die Eignung einer Methode zu überprüfen, besteht darin, durch eine numerische Berechnung ein Verschiebungsfeld zu ermitteln und diese Daten anschließend als Eingangswerte für das Rekonstruktionsverfahren zu verwenden. Auf dieser Datengrundlage kann dann die Materialverteilung im Querschnitt eines Körpers bestimmt werden. Eine höhere Stufe bei der Überprüfung der Tauglichkeit eines Algorithmus wird dadurch erreicht, dass aus den berechneten Verschiebungen „Messwerte“ generiert werden, die als Eingangsdaten für das Verfahren dienen. Die „Messwerte“ werden in der Regel durch Addition der Verschiebungen und eines generierten, zufälligen Fehlers gewonnen. Da ein generierter Fehler aber selbst wieder nur ein Modell für einen Messfehler darstellt, ist die nächste Stufe bei der Überprüfung des Rekonstruktionsverfahrens erreicht, wenn Messwerte als Eingangsdaten verwendet werden, die an Probenkörpern aus Weichgewebe ähnlichem Material³ gewonnen werden. Weiterführende Schritte, die im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, sind ggf. in vitro Untersuchungen an tierischem oder menschlichem Gewebe, bei denen harte Einschlüsse durch Injektionen erzeugt werden, bzw. in vivo Untersuchungen an Tieren oder Menschen.

³Auf die Bedeutung des Begriffs *weichgewebeähnliches Material* wird in Abschnitt 4.2 detailliert eingegangen.

Das zu Beginn dieses Abschnitts formulierte Ziel, die Entwicklung eines Rekonstruktionsalgorithmus der nichtlinearen Elastografie, wird durch die folgenden Schritte erarbeitet. Im Anschluss an diese Einleitung werden im zweiten Kapitel zunächst die kontinuumsmechanischen Grundlagen zusammengestellt, die zur Formulierung eines Randwertproblems der Elastizitätstheorie erforderlich sind. Da die Materialverteilung in einer Struktur nicht direkt ermittelt werden kann, muss sie aus den gemessenen Daten, den Verschiebungen, bestimmt werden. Aus diesem Grund entspricht die Ermittlung der Elastizitätsverteilung einer indirekten Messung, wodurch diese Berechnung in den mathematischen Kontext der inversen Probleme fällt. Die zur Behandlung solcher Fragestellungen erforderlichen mathematischen Grundlagen und Lösungsansätze werden in Kapitel 3 zusammengestellt.

In Kapitel 4 wird detailliert auf die Experimente und Versuche eingegangen, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit durchgeführt worden sind. Zunächst werden die für diese Arbeit relevanten Messmethoden der Ultraschallelastografie erläutert. Anschließend wird die Herstellung der Probenkörper beschrieben und auf die mechanischen Eigenschaften des Gewebe imitierenden Probenmaterials eingegangen. Abgerundet werden die Ausführungen des Kapitels durch eine kontinuumsmechanische Beschreibung der Elastografiemessungen, die in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt worden sind.

Eine ausführliche Analyse der Verfahren der linearen Elastografie erfolgt in Kapitel 5. Nach einer Klassifikation der Methoden werden die einzelnen Ansätze anhand der in Kapitel 3 zusammengestellten Kriterien untersucht und miteinander verglichen. Aufbauend auf dieser Analyse wird ein neues Rekonstruktionsverfahren vorgestellt, welches entsprechend der Einteilung des vorangegangenen Abschnitts der nichtlinearen Elastografie zuzuordnen ist. Die Entwicklung der Methode wird durch die Beschreibung der Implementierung des Algorithmus und die Darstellung der Ergebnisse, die auf der Basis von generierten Daten und Messwerten erzielt worden sind, abgeschlossen.

In Kapitel 7 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und Vorschläge für mögliche Erweiterungen unterbreitet.

2 Kontinuumsmechanik hyperelastischer Materialien

In diesem Kapitel werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen behandelt, die die Basis für die weiteren Herleitungen bilden. Dabei beschränken sich die Ausführungen auf isotropes, hyperelastisches Materialverhalten ohne Berücksichtigung von Temperatureinflüssen. Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut.

Im ersten Abschnitt werden zunächst die kinematischen Grundlagen erläutert, wobei auf die Einführung beliebiger, krummliniger Koordinatensysteme verzichtet wird. Im Anschluss wird in Abschnitt 2.2 auf die Bilanzgleichungen eingegangen und es werden unterschiedliche Spannungsmaße eingeführt. Die auf diesem Wege hergeleitete lokale Form der Gleichgewichtsbedingungen bezogen auf die Referenzkonfiguration dient dann als Ausgangspunkt für die Ermittlung der schwachen Form der Gleichgewichtsbedingungen und der Potentialformulierung in Abschnitt 2.4. Da es sich bei diesen Ausführungen um allgemein akzeptierte Grundlagen handelt, wird in den ersten beiden Abschnitten auf eine detaillierte Referenzierung in der Regel verzichtet. Gleiches gilt für die Abschnitte 2.4 und 2.5. Ausführlichere Darstellungen zu den dort aufgeführten Themen finden sich in Ogden (1984), Altenbach & Altenbach (1994), Stein & Barthold (1996) und Truesdell & Noll (2004).

In Abschnitt 2.3 wird ausgehend von der Cauchy-Elastizität die allgemeine konstitutive Gleichung für ein hyperelastisches, isotropes Material hergeleitet. Darüber hinaus werden einige Beispiele aus der Literatur für die spezifische Formänderungsenergie elastischer Materialien angegeben.

Eine Herleitung der schwachen Form des Gleichgewichts erfolgt im Unterkapitel 2.4. Neben dem Prinzip der virtuellen Arbeit wird hier eine erweiterte Potentialformulierung angegeben, auf der die räumliche Diskretisierung im Kapitel 6 aufbaut.

Abschnitt 2.5 ist im Wesentlichen als Grundlage für die Ausführungen in Unterkapitel 4.1 zu verstehen, da im Vorgriff auf die lineare Elastografie die Gleichungen der linearisierten Elastizitätstheorie explizit zusammengestellt werden.

2.1 Kinematische Grundlagen

Zur mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene wird in der klassischen Mechanik ein Beobachter Σ eingeführt. Das entspricht formal der Definition der Abbildung

$$\Sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (2.1)$$

wobei mit \mathcal{E} die Ereignis-Welt und mit \mathbf{R}^4 der vierdimensionale, reelle Vektorraum bezeichnet wird. Die Ereignis-Welt \mathcal{E} ist ihrerseits durch den Anschauungsraum \mathcal{E}_t zu allen Zeiten t gegeben. Somit ist die Wahl eines Beobachters Σ gleichbedeutend mit der Festlegung eines Koordinatenursprungs \mathcal{O} , eines Basissystems $\{e_1, e_2, e_3\}$ des Anschauungsraums \mathcal{E}_t und einer Zeitmessung t . Dabei kann sich der Beobachter selbst im Anschauungsraum bewegen, so dass im Allgemeinen $\Sigma = \Sigma(t)$ gilt.

Nach der Idealisierung einer gegebenen Struktur zu einem Punktkontinuum kann diese als Körper \mathcal{B} bestehend aus materiellen Punkten \mathcal{M} betrachtet werden, wobei der Rand dieser Punktmenge als $\partial\mathcal{B}$ bezeichnet wird.¹

Die Abbildung

$$\chi: \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\mathcal{M}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

ordnet jedem Materialpunkt \mathcal{M} zu jeder Zeit t einen Raumpunkt $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ zu. Zu einem bestimmten, fest gewählten Zeitpunkt kann nun die stetige und bijektive Abbildung

$$\chi_t: \begin{cases} \mathcal{B} & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto \mathbf{x} = \chi_t(\mathcal{M}) := \chi(\mathcal{M}, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

definiert werden, welche die Lage des Körpers \mathcal{B} zum Zeitpunkt t beschreibt. Das Bild \mathcal{B}_t der Funktion χ_t wird auch die Konfiguration des Körpers \mathcal{B} genannt. Wird ein fester Zeitpunkt $t = t_0$ gewählt, so kann eine Referenzkonfiguration $\mathcal{B}_0 = \chi(\mathcal{B}, t_0)$ definiert werden, wobei deren Elemente im Folgenden durch

$$\mathbf{X} := \chi(\mathcal{M}, t_0) =: \chi_0(\mathcal{M}) \quad (2.4)$$

bezeichnet werden. Entspricht der Zeitpunkt t_0 dem Beginn der Beobachtung, so wird die Referenzkonfiguration auch als Ausgangskonfiguration bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird die Lage \mathcal{B}_t der materiellen Punkte $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t > t_0$ Momentankonfiguration genannt.

Unter Berücksichtigung der Definitionen (2.3) und (2.4) kann nun die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\mathbf{X}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) =: \varphi_t(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2.5)$$

definiert werden, mit $\varphi_t = \chi_t \circ \chi_0^{-1}$, welche ebenfalls bijektiv und stetig ist.

Nach der Einführung der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 stehen mehrere Betrachtungsweisen zur Verfügung, um das mechanische Verhalten einer Struktur zu beschreiben. Bei der im Folgenden verwendeten materiellen oder Lagrangeschen

¹Auf eine genauere Unterscheidung zwischen einem Verschiebungs- und einem Spannungsrund, vgl. Unterkapitel 2.4, kann in den ersten Abschnitten verzichtet werden. Im Folgenden werden die Spannungen auf allen Rändern zunächst als bekannt und gegeben vorausgesetzt.

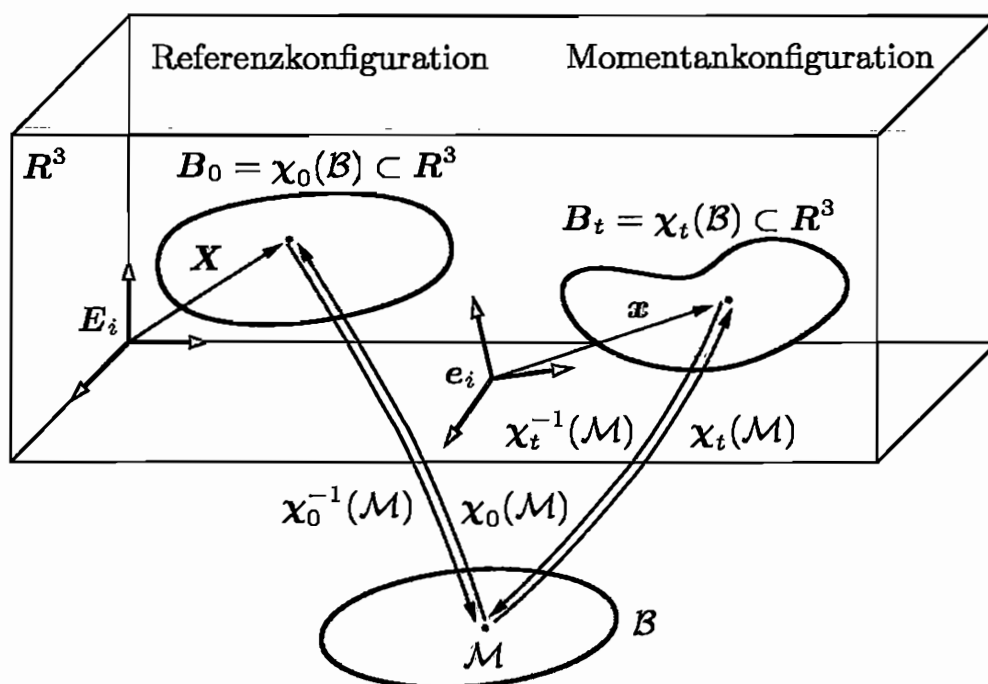


Bild 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration, in Anlehnung an Stein & Barthold (1996, Kap. 2)

Betrachtungswise wird die Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B} in Abhängigkeit der Koordinaten \mathbf{X} mit

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{E}_i, \quad (2.6)$$

beschrieben, wobei \mathbf{E}_i die Basisvektoren der Referenzkonfiguration darstellen. Durch Gleichung (2.6) wird darüber hinaus die in dieser Arbeit verwendete Einsteinsche Summenkonvention eingeführt, wonach über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Unter den gegebenen Voraussetzungen kann nun die Beschreibung der physikalischen Vorgänge nach Gleichung (2.5) durch

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = \varphi_t(\mathbf{X}) \quad (2.7)$$

erfolgen. Die hier eingeführten Basisvektoren \mathbf{e}_i der Momentankonfiguration können sich dabei im Allgemeinen aufgrund einer Bewegung des Beobachters $\Sigma = \Sigma(t)$ im Anschauungsraum von denen der Referenzkonfiguration unterscheiden, vgl. Abbildung 2.1.

Im Gegensatz dazu werden bei der räumlichen oder Eulerschen Betrachtungsweise unter Verwendung der Bijektivität von φ_t die Koordinaten \mathbf{x} der Momentankonfiguration zur Beschreibung der Bewegung verwendet. Für festes t ist $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$ und somit

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

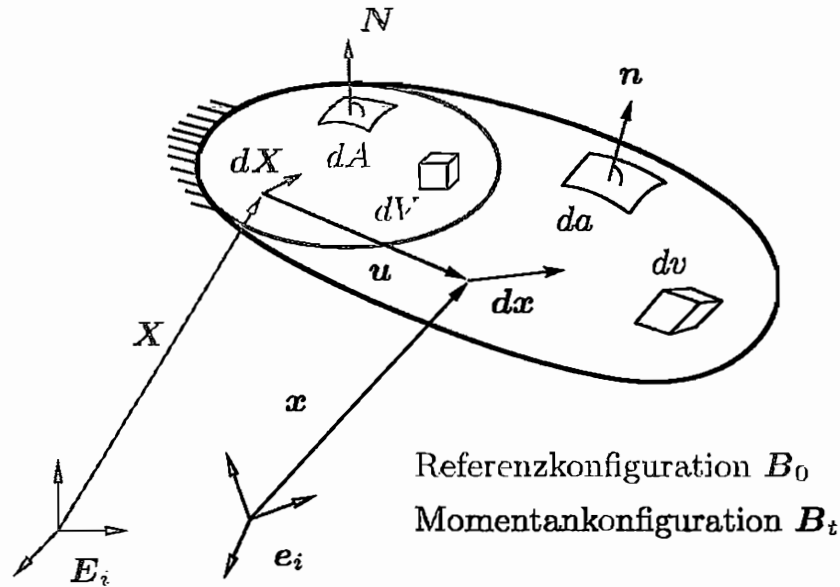


Bild 2.2: Infinitesimale, geometrische Größen

wodurch die Koordinaten \mathbf{x} zu den unabhängigen Variablen werden.

Bevor im Weiteren auf die Deformation eines Körpers \mathcal{B} eingegangen wird, soll zunächst der Begriff der Beobachtertransformation eingeführt werden. Wird zusätzlich zum Betrachter Σ ein zweiter Beobachter Σ^* mit dem Koordinatenursprung \mathcal{O}^* , einem Basissystem $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ des Anschauungsraums \mathcal{E}_{t^*} und einer Zeitmessung t^* definiert, so können sich ihre Bewegungszustände im Anschauungsraum durch eine zeitlich veränderliche Starrkörperbewegung unterscheiden. Also kann der Übergang zwischen zwei Betrachtern durch die Zusammenhänge

$$\mathbf{c}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}^* \mathcal{O}}, \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}_i^* \quad \text{und} \quad t^* = t - a \quad (2.9)$$

beschrieben werden. Für die Darstellung der Bewegung durch die Beobachter Σ und Σ^* folgt hieraus der Zusammenhang

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad \text{und} \quad t^* = t - a. \quad (2.10)$$

Zur Beschreibung des Deformationszustands des Körpers \mathcal{B} werden die Anforderungen an die Funktion φ dahingehend verschärft, dass φ bzgl. \mathbf{X} und t zweimal stetig differenzierbar ist. Mit dieser Annahme kann der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} zur Beschreibung der lokalen Deformation durch

$$\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (2.11)$$

eingeführt werden, wobei \mathbf{F} einer linearen Abbildung eines infinitesimalen Linienelements $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration auf ein infinitesimales Wegelement $d\mathbf{x}$

der Momentankonfiguration entspricht, das heißt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.12)$$

Da nach Abbildung 2.2 die Lage \mathbf{x} eines materiellen Punktes \mathcal{M} auch durch die Verschiebung \mathbf{u} bezogen auf die Referenzkonfiguration ausgedrückt werden kann, also

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.13)$$

gilt, kann der Verschiebungsgradient \mathbf{H} definiert werden und es gilt

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{1} + \mathbf{H}, \quad \text{mit } \mathbf{H} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.14)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Abbildung φ_t und mit der Definition (2.11) ist gewährleistet, dass für die Jacobische Funktionaldeterminante J von \mathbf{F}

$$J := \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.15)$$

gilt, so dass sich der räumliche Deformationsgradient zu

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.16)$$

ergibt.

Werden inkompressible Materialien betrachtet, ist es erforderlich, die Zwangsbedingung

$$J = 1 \quad (2.17)$$

zu berücksichtigen, wodurch sich eine rein isochore Deformation ergibt. Darüber hinaus kann es zweckmäßig sein, eine beliebige Deformation in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil aufzuspalten. Dies führt auf einen multiplikativen Splitt des Deformationsgradienten \mathbf{F} der Gestalt

$$\mathbf{F} = (J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}) \tilde{\mathbf{F}}, \quad (2.18)$$

mit $\tilde{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$ und $\det \tilde{\mathbf{F}} \equiv 1$.

Da \mathbf{F} ein regulärer Tensor 2. Stufe ist, lässt sich der Deformationsgradient zerlegen in

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (2.19)$$

wobei der Drehtensor \mathbf{R} eigentlich orthogonal ist, während der Rechts-Streck-Tensor \mathbf{U} und der Links-Streck-Tensor \mathbf{V} positiv definit und symmetrisch sind. Die Streck-Tensoren \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} erlauben ihrerseits nun die Definition von Verzerrungstensoren zur Beschreibung des Deformationszustands eines Körpers \mathcal{B} .

So können nach Ogden (1984, Kap. 2) die materiellen Verzerrungstensoren für beliebiges $\alpha \in \mathbf{R}$ durch

$$\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{U}) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{1}), & \alpha \neq 0 \\ \ln \mathbf{U}, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

angegeben werden, wobei für die Werte $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 2$ die Bezeichnungen Henckyscher bzw. Greenscher Verzerrungstensor üblich sind. Für den Greenschen Verzerrungstensor wird im Folgenden die gängige Notation $\mathbf{E} := \mathbf{E}^{(2)}$ verwendet. Analog gilt für die räumlichen Verzerrungstensoren mit $\beta \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{e}^{(\beta)}(\mathbf{V}) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} (\mathbf{V}^\beta - \mathbf{1}), & \beta \neq 0 \\ \ln \mathbf{V}, & \beta = 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

mit der Bezeichnung Almansischer Verzerrungstensor für den Fall $\beta = -2$.

Um bei der Formulierung der konstitutiven Materialgleichungen eine kompaktere Schreibweise zu ermöglichen, werden der materielle Rechts-Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} und der räumliche Links-Cauchy-Green-Tensor \mathbf{b} durch die Festlegungen

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T (\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^2 \quad (2.22)$$

bzw.

$$\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{V}\mathbf{R})(\mathbf{V}\mathbf{R})^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.23)$$

eingeführt. Da es sich bei den Cauchy-Green-Tensoren \mathbf{C} bzw. \mathbf{b} und den Streck-Tensoren \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} um reellwertige, symmetrische Tensoren handelt, sind sie diagonalisierbar. Die Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ von \mathbf{U} von \mathbf{V} sind identisch und werden auch als Hauptdehnungen oder Hauptstreckungen bezeichnet. Betrachtet man nun das charakteristische Polynom des Tensors \mathbf{C} , so gilt

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{1}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3, \quad (2.24)$$

wobei die als Invarianten bezeichneten Koeffizienten die Werte

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{C}^2] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

annehmen. Wird mit Hilfe der Zerlegung (2.18) durch

$$\tilde{\mathbf{C}} := \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad (2.26)$$

der isochore Rechts-Cauchy-Green-Tensor $\tilde{\mathbf{C}}$ definiert, so folgt für die Invarianten im Falle einer Volumen erhaltenden Deformation

$$\tilde{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1, \quad \tilde{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad \text{und} \quad \tilde{I}_3 \equiv 1. \quad (2.27)$$

Neben der Transformationsbeziehung (2.12) für differentielle Weegelemente $d\mathbf{X}$ wird durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} das Transformationsverhalten weiterer geometrischer Größen beschrieben. So gilt für die differentiellen Flächenelemente $d\mathbf{A}$ und $d\mathbf{a}$ der Referenz- bzw. Momentankonfiguration die als Formel von Nanson bezeichnete Beziehung

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = J\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}, \quad (2.28)$$

während sich die infinitesimalen Volumenelemente dV bzw. dv durch

$$dv = J dV \quad (2.29)$$

ineinander überführen lassen, vgl. hierzu auch Abbildung 2.2. Die in der Gleichung (2.28) verwendeten Vektoren \mathbf{N} bzw. \mathbf{n} bezeichnen dabei die Flächennormalenvektoren der Referenz- bzw. Momentankonfiguration.

Zur Beschreibung von instationären Prozessen wird nun der Begriff der materiellen Zeitableitung eingeführt, der die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe f in einem beliebigen, aber fest gewählten materiellen Punkt \mathcal{M} beschreibt. Die stetig differenzierbare skalar- bzw. vektorwertige Funktion f kann ihrerseits sowohl in materieller Darstellung $f = f(\mathbf{X}, t)$ als auch in räumlicher Form $f = \hat{f}(\mathbf{x}, t)$ gegeben sein, wobei $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ gilt. Die materielle Zeitableitung kann dann zu

$$\dot{f} = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad } \hat{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.30)$$

ermittelt werden, je nachdem, ob f in materiellen oder räumlichen Koordinaten vorliegt. Die materielle Zeitableitung einer in räumlichen Koordinaten gegebenen Funktion f setzt sich demnach additiv aus einer lokalen und einer konvektiven Zeitableitung zusammen.

Abschließend wird noch einmal auf die Definition der Referenzkonfiguration eingegangen. Im Allgemeinen ist es nicht erforderlich, die Referenz- mit der Ausgangskonfiguration gleichzusetzen, was dazu führt, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, eine Bezugskonfiguration festzulegen. Wird nun mit einer zu den Gleichungen (2.3) und (2.4) analogen Definition eine weitere Referenzkonfiguration $\chi^\#$ mit $\chi^\# \neq \chi$ eingeführt, so existiert eine Bijektion Λ mit der Eigenschaft

$$\Lambda : \begin{cases} \chi_0(\mathcal{B}) & \rightarrow & \chi_0^\#(\mathcal{B}) \\ \mathbf{X} & \mapsto & \mathbf{X}^\# = \Lambda(\mathbf{X}) := \chi_0^\# \circ \chi_0^{-1}(\mathbf{X}) \end{cases}, \quad (2.31)$$

die den Wechsel zwischen den Referenzkonfigurationen beschreibt. Eingedenk der Definition $\varphi_t^\# := \chi_t^\# \circ \chi_0^{\#-1}$ folgen sofort die Zusammenhänge

$$\varphi_t = \varphi_t^\# \circ \Lambda \quad (2.32)$$

und

$$F = F^\# \text{Grad } \Lambda. \quad (2.33)$$

Diese Überlegungen zum Wechsel der Referenzkonfiguration werden im Abschnitt 2.3 bei der Betrachtung der materiellen Symmetrie noch einmal aufgegriffen.

2.2 Bilanzgleichungen und Spannungstensoren

In diesem Abschnitt werden die für diese Arbeit relevanten Bilanz- und Erhaltungssätze zusammengestellt, die für jeden beliebigen Körper \mathcal{B} und jeden Teilkörper $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ erfüllt sein müssen. Um auf die Einführung neuer Bezeichnungen für die Referenz- und Momentankonfiguration verzichten zu können, wird durch das Symbol \mathcal{B} immer auch ein beliebiger Teilkörper der Struktur bezeichnet.

Da im Kontext dieser Arbeit von der Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der Masse ausgegangen wird, ändert sich die Masse m eines Körpers \mathcal{B} während eines Deformationsvorgangs nicht. Weiterhin wird die Existenz einer Massendichte $\rho = \rho(\mathbf{x})$ vorausgesetzt, die durch den endlichen Grenzwert

$$\rho := \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (2.34)$$

definiert wird. Hieraus ergibt sich über die Betrachtung der Masse m der Gestalt

$$m = \int_{\mathcal{B}_t} dm = \int_{\mathcal{B}_t} \rho dv \quad (2.35)$$

und mit der Transformation (2.29)

$$\rho_0 = J\rho \quad (2.36)$$

die erste lokale Form der Massenerhaltung. Diese liefert durch Anwendung der materiellen Zeitableitung (2.30) die zweite lokale Form des Massenerhaltungssatzes

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.37)$$

Die Bewegungsgröße I eines Körper \mathcal{B} , definiert durch

$$I := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv, \quad (2.38)$$

stellt – bezogen auf ein Inertialsystem² – ebenfalls eine Erhaltungsgröße dar. Wird mit $\bar{\mathbf{t}}$ die auf den Körper \mathcal{B} einwirkende Oberflächenspannung und mit $\bar{\mathbf{b}}$ die wirkende massenbezogene Beschleunigung bezeichnet, so kann der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße bzw. Impulserhaltungssatz in räumlicher Darstellung durch

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da \quad (2.39)$$

angegeben werden. Mit den Transformationsbeziehungen

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 dA \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV \quad (2.40)$$

für die Oberflächenspannungen $\bar{\mathbf{t}}$ bzw. die Beschleunigungen $\bar{\mathbf{b}}$ kann unter Verwendung des Massenerhaltungssatzes (2.37) mit

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 dA \quad (2.41)$$

die entsprechende materielle Darstellung gefunden werden. Während sich der Zusammenhang zwischen der materiellen und der räumlichen Darstellung der Beschleunigung in der Form $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b} \circ \varphi_t$ ergibt, kann die entsprechende Transformation für die Oberflächenspannung erst nach der Einführung der Spannungsmaße quantifiziert werden.

Um den Impulserhaltungssatz in lokaler Form angeben zu können, muss zunächst der Begriff des Spannungstensors eingeführt werden. Dazu werden auf Grundlage des in Abbildung 2.3 dargestellten Eulerschen Schnittprinzips durch gedachte Schnitte zunächst die inneren Kräfte des Körpers \mathcal{B} einer Betrachtung zugänglich gemacht. Nun kann der Spannungsvektor \mathbf{t} im Punkt \mathbf{x} als Grenzwert des Quotienten aus der (inneren) Kraft $\Delta \mathbf{f}$ und einem Flächenelement Δa der Schnittfläche durch

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (2.42)$$

definiert werden. Während durch das Cauchy-Postulat gesichert ist, dass der Spannungsvektor \mathbf{t} lediglich vom Zeitpunkt t und vom Normalenvektor \mathbf{n} der Fläche S im betrachteten Punkt \mathbf{x} abhängig ist, also $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ gilt, liefert das Fundamentallemma von Cauchy, dass

$$\mathbf{t}_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_1) = -\mathbf{t}_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_2) \quad (2.43)$$

²Das Bezugssystem eines Beobachters, in dem der Massenmittelpunkt eines kräftefreien Körpers in gleichförmiger Bewegung verharrt, wird Inertialsystem genannt, vgl. Stein & Barthold (1996, Kap. 5).

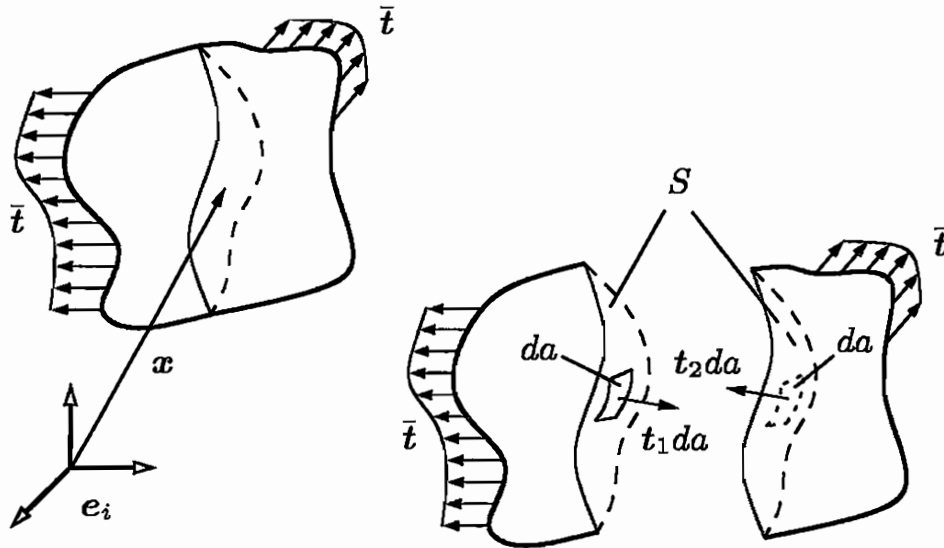


Bild 2.3: Euler-Schnittprinzip, vgl. Stein & Barthold (1996, Kap. 5)

ist, vgl. Bild 2.3. Aufgrund der Beliebigkeit der Schnittfläche S und der Stetigkeit des Spannungsvektors folgt hieraus mit den Festlegungen $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ und $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}). \quad (2.44)$$

Lemma (2.44) ermöglicht nun seinerseits die Herleitung des Cauchy-Theorems, welches besagt, dass der Spannungsvektor \mathbf{t} linear von dem Normalenvektor \mathbf{n} abhängt. Es gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad (2.45)$$

wobei $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ den Cauchyschen Spannungstensor bezeichnet.³ Aus diesem Theorem und der Transformation (2.28) lässt sich der Zusammenhang zwischen dem räumlichen und dem materiellen Spannungsvektor \mathbf{t} bzw. \mathbf{t}_0 herleiten, der auf die Gleichung

$$\int_{\partial \mathbf{B}_t} \mathbf{t} \, da = \int_{\partial \mathbf{B}_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da = \int_{\partial \mathbf{B}_0} \mathbf{P} \mathbf{N} \, dA = \int_{\partial \mathbf{B}_0} \mathbf{t}_0 \, dA \quad (2.46)$$

führt. Der hier eingeführte Zweifeldtensor \mathbf{P} wird als erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor bezeichnet und ist durch

$$\mathbf{P} = P_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j := J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.47)$$

³Im Rahmen dieser Arbeit wird durch den Index i die Richtung der Spannungskomponente und durch den Index j die Richtung der Normalen der Schnittfläche bezogen auf die Basis \mathbf{e}_i angegeben, vgl. auch Stein & Barthold (1996, Kap. 5).

definiert. Darüber hinaus erhält man durch die Festlegung

$$\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.48)$$

den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, der auf die Referenzkonfiguration bezogen ist.

Wird nun die Transformation (2.45) in den Impulssatz (2.39) eingesetzt, ergibt sich dessen lokale Form in der räumlichen Darstellung durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, vgl. Ciarlet (1988, Kap. 1), und es folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \bar{\mathbf{b}} = \rho \ddot{\mathbf{x}}, \quad (2.49)$$

in jedem Punkt \mathcal{M} des Körpers \mathcal{B} . Eine analoge Vorgehensweise mit der materiellen Darstellung der Impulsbilanz (2.41) liefert deren lokale Form

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Div} (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}. \quad (2.50)$$

Mit der Definition des Drehimpulses \mathbf{L} durch

$$\mathbf{L} := \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.51)$$

kann nun der Drehimpulserhaltungssatz für Inertialsysteme in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \\ &= \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \bar{\mathbf{b}} \, dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\mathbf{t}} \, da \end{aligned} \quad (2.52)$$

formuliert werden. Durch Anwenden der Gleichungen (2.45) und (2.49) ergibt sich hieraus mit dem Gaußschen Integralsatz für Kreuzprodukte – vgl. Stein & Barthold (1996, Kap. 5) – die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.53)$$

Aus den Definitionen (2.47) und (2.48) folgt, dass

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.54)$$

gilt.

Abschließend wird nun die mechanische Energiebilanz hergeleitet. Zu diesem Zweck wird zunächst die lokale Form der Impulsbilanz (2.49) mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ multipliziert und anschließend über den gesamten Körper \mathcal{B} integriert, was auf die Gleichung

$$\int_{\mathbf{B}_t} \{ \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) \} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dv = 0 \quad (2.55)$$

führt. Mit den Definitionen⁴

$$K := \int_{B_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \, dv \quad (2.56)$$

$$\dot{A} := \int_{B_t} \rho \bar{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \, dv + \int_{\partial B_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \, da \quad (2.57)$$

$$\dot{W} := \int_{B_t} \boldsymbol{T} : \text{grad } \dot{\boldsymbol{x}} \, dv \quad (2.58)$$

für die kinetische Energie K , die Leistung der äußeren Einwirkungen \dot{A} und die innere Spannungsleistung \dot{W} kann mit Hilfe der Gleichung

$$(\text{div } \boldsymbol{T}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = (\text{div } \boldsymbol{T}^T \dot{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{T} : \text{grad } \dot{\boldsymbol{x}} \quad (2.59)$$

und unter Verwendung des Cauchy-Theorems (2.45) sowie des Gaußschen Integralsatzes die mechanische Energiebilanz

$$\frac{DK}{Dt} = \dot{K} = \dot{A} - \dot{W} \quad (2.60)$$

abgeleitet werden.

Der Integrand $\dot{W}_s := \boldsymbol{T} : \text{grad } \dot{\boldsymbol{x}}$ der inneren Spannungsleistung \dot{W} wird auch als Elementarleistung bezeichnet. Durch eine einfache Transformation kann hiermit die Elementarleistung \dot{W}_{0s} bezogen auf die Referenzkonfiguration in der Form

$$\dot{W}_{0s} := J \boldsymbol{T} : \text{grad } \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} \quad (2.61)$$

eingeführt werden.

2.3 Konstitutive Gleichungen

Die zuvor beschriebenen kinematischen Grundlagen und die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen nicht aus, einen beobachtbaren physikalischen Vorgang unter Beteiligung fester, deformierbarer Strukturen hinreichend zu beschreiben. Neben diesen stoffunabhängigen Gleichungen bedarf es noch der konstitutiven Beziehungen, die eine idealisierte, makroskopische Materialantwort einer realen Struktur auf eine äußere Einwirkung charakterisieren. Durch die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Beschränkung auf ein rein elastisches Materialverhalten unter Vernachlässigung von Temperatureinflüssen wird durch die Materialgleichungen im Wesentlichen der Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung und der Deformation eines Körpers \mathcal{B} wiedergegeben.

⁴Durch die verwendete Bezeichnung $(\dot{\cdot})$ wird angedeutet, dass im Allgemeinen die Existenz eines Potentials (\cdot) nicht gesichert ist, so dass $(\dot{\cdot})$ die zeitliche Ableitung von (\cdot) ist. Somit stellt $(\dot{\cdot})$ lediglich eine Bezeichnung dar.

Nach Stein & Barthold (1996, Kap. 7) wird ein Körper \mathcal{B} als elastisch bezeichnet, wenn jeder materielle Punkt \mathcal{M} elastisch ist. Ein Punkt \mathcal{M} wiederum, identifiziert durch den Punkt \mathbf{X} , wird laut Ciarlet (1988, Kap. 3) elastisch genannt, wenn der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{P} zu einem beliebigen Zeitpunkt t allein eine Funktion des Deformationsgradienten \mathbf{F} in \mathbf{X} ist, somit also

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (2.62)$$

gilt. Solche Materialien werden auch als Cauchy-elastisch bezeichnet und genügen den Grundsätzen der Materialtheorie der rationalen Kontinuumsmechanik.⁵ Es sei darauf hingewiesen, dass in den folgenden Ausführungen auf die explizite Darstellung der Abhängigkeit vom Punkt \mathbf{X} verzichtet wird.

Wird darüber hinaus gefordert, dass die von der Spannung geleistete Arbeit wegunabhängig ist, erfolgt der Übergang zur Hyperelastizität oder Green-Elastizität. Somit gilt für hyperelastische Materialien laut Stein & Barthold (1996, Kap. 7) die Beziehung

$$\int_{t_0}^t \dot{W}_{0s} dt = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \mathbf{P} : d\mathbf{F} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} dW_{0s} = W_{0s}(\mathbf{F}) - W_{0s}(\mathbf{F}_0), \quad (2.63)$$

woraus sich direkt die Existenz einer Potentialfunktion W_{0s} mit der Eigenschaft

$$\dot{W}_{0s} = \frac{DW_{0s}}{Dt} = \dot{W}_{0s} = \frac{\partial W_{0s}}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (2.64)$$

ableiten lässt. Durch einen Vergleich mit der Definition (2.61) folgt unmittelbar die Beziehung

$$\left(\mathbf{P} - \frac{\partial W_{0s}}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0, \quad (2.65)$$

die für beliebiges $\dot{\mathbf{F}}$ erfüllt sein muss, was die konstitutive Gleichung

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}) = \frac{\partial W_{0s}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.66)$$

für einen hyperelastischen Körper \mathcal{B} liefert.

Diese Materialgleichung lässt sich zunächst mit Hilfe des Prinzips der materiellen Objektivität weiter spezifizieren. Durch diesen Grundsatz wird gesichert, dass die Materialeigenschaften von der Wahl des Beobachters Σ unabhängig sind. Wird entsprechend Gleichung (2.10) der Übergang zwischen den Betrachtern Σ und Σ^* realisiert, so gilt für die Deformationsgradienten der Zusammenhang

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad (2.67)$$

⁵Die Materialtheorie innerhalb der rationalen Kontinuumsmechanik liefert einen auf Prinzipien basierenden formalen, mathematischen Rahmen, der bei der Formulierung von konstitutiven Gleichungen beachtet werden soll, vgl. Ogden (1984, Kap. 4), Truesdell & Noll (2004, Kap. C) oder Stein & Barthold (1996, Kap. 7).

mit dem eigentlich orthogonalen Tensor \mathbf{Q} . Der Argumentation von Beatty (1987) folgend, lässt sich das Prinzip der materiellen Objektivität angewendet auf die spezifische Formänderungsenergie gemäß der Gleichung

$$W_{0s} = W_{0s}(\mathbf{F}^*) = W_{0s}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = W_{0s}(\mathbf{F}) \quad (2.68)$$

für beliebiges \mathbf{Q} formulieren. Aus der speziellen Wahl $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ entsprechend der polaren Zerlegung (2.19) folgt direkt

$$W_{0s} = W_{0s}(\mathbf{U}) = W_{0s}(\mathbf{C}), \quad (2.69)$$

mit $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$. Für isotropes Materialverhalten lässt sich die Darstellung der Potentialfunktion W_{0s} noch weiter konkretisieren, da Isotropie besagt, dass das Materialverhalten richtungsunabhängig ist und so die Referenzkonfiguration beliebig gewählt werden kann. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.1 wird durch die Bijektion \mathbf{A} ein Wechsel zwischen den Referenzkonfigurationen $\chi(\mathcal{B})$ und $\chi^\#(\mathcal{B})$ des Körpers \mathcal{B} beschrieben. Beschränkt man sich bei dieser Transformation auf Abbildungen, die sich durch eine reine Drehung mit der Gleichung

$$\mathbf{X}^\# = \mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} \quad (2.70)$$

beschreiben lassen, so folgt für die Deformationsgradienten die Beziehung

$$\mathbf{F}^\# = \mathbf{F}\mathbf{Q}. \quad (2.71)$$

Nach Beatty (1987) gilt für die spezifische Formänderungsenergie eines isotropen Materials der Zusammenhang

$$W_{0s} = W_{0s}(\mathbf{C}^\#) = W_{0s}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}). \quad (2.72)$$

Also ist W_{0s} eine skalarwertige, isotrope Tensorfunktion des symmetrischen Tensors \mathbf{C} und kann nach Truesdell & Noll (2004, Kap. B) in Abhängigkeit der Eigenwerte von \mathbf{C} bzw. \mathbf{U} durch

$$W_{0s} = W_{0s}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) \quad \text{bzw.} \quad W_{0s} = W_{0s}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.73)$$

angegeben werden, wobei die Argumente beliebig permutiert werden dürfen. Andere Darstellungsformen der spezifischen Formänderungsenergie erhält man mit den Invarianten I_i und \tilde{I}_i aus den Gleichungen (2.25) bzw. (2.27) und der Jacobischen Determinante durch

$$W_{0s} = W_{0s}(I_1, I_2, I_3) \quad \text{bzw.} \quad W_{0s} = W_{0s}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, J). \quad (2.74)$$

Bei der numerischen Betrachtung nahezu inkompressiblen Materialverhaltens, also $J \approx 1$, bietet es sich an, Materialgleichungen zu betrachten, bei denen sich die spezifische Formänderungsenergie additiv in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil aufspalten lässt. Wird die multiplikative Zerlegung (2.18) des Deformationsgradienten herangezogen, so lässt sich dies formal durch

$$W_{0s} = W_{0s}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, J) = \tilde{W}_{0s}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2) + U_{0s}(J) \quad (2.75)$$

beschreiben, vgl. hierzu auch Mische (1994), Simo et al. (1985), Simo & Taylor (1991), Simo & Hughes (1998, Kap. 10) und Wriggers (2001, Kap. 3). Hierbei ist jedoch zu beachten, dass diese Aufspaltung auf nahezu inkompressibles Materialverhalten beschränkt bleibt, da für andere Fälle am Beispiel eines einfachen Zugstabs gezeigt werden kann, dass sich für die Querdehnung unphysikalische Ergebnisse einstellen, vgl. Ehlers & Eipper (1998).

Neben der erwähnten Permutationseigenschaft bzgl. der Argumente in Gleichung (2.73) muss die Formänderungsenergiefunktion W_{0s} weitere Bedingungen erfüllen, die sich im Wesentlichen aus Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaften der Lösungen bei Randwertproblemen ergeben. Da im Rahmen dieser Arbeit aber nur vorhandene Ansätze aus der Literatur für die Potentialfunktion ihre Anwendung finden, wird auf eine explizite Darstellung dieser Voraussetzungen im Folgenden verzichtet. Eine detaillierte Auflistung aller Bedingungen an die Potentialfunktion W_{0s} kann z. B. Doll (1998, Kap. 4) entnommen werden. An dieser Stelle wird lediglich auf das Verhalten des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors S in der Nähe der spannungsfreien Referenzkonfiguration eingegangen, was eine Anforderung an die Formulierung der spezifischen Formänderungsenergie darstellt. Wird der Spannungstensor S bzgl. des Green-Lagrange-Verzerrungstensors E linearisiert, so ergibt sich der in Stein & Barthold (1996, Kap. 7) formulierte Zusammenhang

$$S = S(E) = \lambda(\text{tr}E)\mathbf{1} + 2\mu E + o(\|E\|) \quad (2.76)$$

in dem $\|\cdot\|$ eine geeignete Norm für den Verzerrungstensor E und $o(\cdot)$ das Landau-Symbol bezeichnen, während die Parameter λ und μ Lamé-Konstanten genannt werden.⁶ Dieser Abschätzung muss jedes isotrope, hyperelastische Material in der Nähe der spannungsfreien Referenzkonfiguration genügen.

Trotz aller einschränkender Bedingungen verbleibt für die Formulierung eines konkreten, idealisierten Materialverhaltens ein großer Gestaltungsspielraum. Im Regelfall erfolgt dabei die Bestimmung einer spezifischen Formänderungsenergie W_{0s} anhand von experimentell gemessenen Daten. Zu diesem Zweck wird zunächst ein allgemeiner Ansatz für eine bestimmte Materialgruppe gesucht, der neben den Invarianten bzw. Hauptdehnungen noch weitere deformationsunabhängige Materialparameter enthält. Die Materialkennwerte werden dann durch Kurvenanpassungen an entsprechende Versuchsergebnisse bestimmt. Im Rahmen dieser Arbeit sollen lediglich exemplarisch einige Formulierungen der spezifischen Formänderungsenergie aufgeführt werden.

Eine bedeutende Materialgruppe, die sich durch ein hyperelastisches Materialverhalten gut beschreiben lässt, sind gummiartige Materialien. Für diese gibt es z. B. den von Ogden (1972) in den Hauptdehnungen formulierten Ansatz

$$W_{0s} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}) + g(J), \quad (2.77)$$

⁶Das Landau-Symbol $o(\|E\|)$ besagt in diesem Fall, dass $\|S - \{\lambda(\text{tr}E)\mathbf{1} + 2\mu E\} / \|E\| \rightarrow 0$ für $\|E\| \rightarrow 0$ gilt.

wobei die Konstanten μ_i und α_i die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i = 2\mu \quad \text{und} \quad \mu_i \alpha_i > 0 \quad (\text{keine Summation}) \quad (2.78)$$

erfüllen müssen. Ein möglicher Ansatz für die Funktion $g = g(J)$ ist u. a. in Doll (1998, Kap.4) zu finden. Für die Wahl $n = 1$, $\alpha_1 = 2$ und $\mu_1 = \mu$ ergibt sich als Spezialfall nach Wriggers (2001, Kap. 3) das Neo-Hooke-Material mit

$$\begin{aligned} W_{0s}(I_1, J) &= \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + g(J) \quad \text{und} \\ g(J) &= \frac{\lambda}{4}(J^2 - 1) - \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \ln J. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Für die in Gleichung (2.75) angegebene, additiv aufgeteilte Formänderungsenergie kann z. B. bei Saleeb et al. (1992) der Ansatz

$$W_{0s}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, J) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\tilde{\lambda}_1^{\alpha_i} + \tilde{\lambda}_2^{\alpha_i} + \tilde{\lambda}_3^{\alpha_i} \right) + U_{0s}(J) \quad (2.80)$$

gefunden werden, wobei durch $\tilde{\lambda}_i$ die Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{C}}$ entsprechend der Gleichung (2.26) gekennzeichnet werden. Auch in diesem Fall ist eine ausführliche Zusammenstellung von Beispielen für die Funktion $U_{0s} = U_{0s}(J)$ in Doll (1998, Kap.4) zu finden. Für den Spezialfall eines Neo-Hooke-Materials, vgl. Simo & Hughes (1998, Kap. 10), ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} W_{0s}(\tilde{I}_1, J) &= \tilde{W}_{0s}(\tilde{I}_1) + U_{0s}(J) = \frac{\mu}{2}(\tilde{I}_1 - 3) + U_{0s}(J) \quad \text{und} \\ U_{0s}(J) &= \frac{K}{4}(J^2 - 1) - \frac{K}{2} \ln J, \end{aligned} \quad (2.81)$$

wobei K der Kompressionsmodul der linearisierten Elastizitätstheorie ist.

Neben Gummi lassen sich die elastischen Anteile bestimmter Gewebearten ebenfalls durch ein hyperelastisches Materialverhalten beschreiben. So wird z. B. von Veronda & Westmann (1970) die Funktion

$$W_{0s} = W_{0s}(I_1, I_2, J) = C_1 \left(e^{\beta(I_1 - 3)} - 1 \right) + C_2 (I_2 - 3) + g(J) \quad (2.82)$$

vorgeschlagen.

Bisher wurden lediglich spezifische Formänderungsenergiefunktionen angegeben, durch die sich ein kompressibles hyperelastisches Material beschreiben lässt. Daher soll im Weiteren noch der Einfluss der Inkompressibilitätsbedingung (2.17) auf die Formulierung der Potentialfunktion W_{0s} studiert werden. Nach Ogden (1984, Kap. 4) lässt sich die Zwangsbedingung in der Form

$$C = C(\mathbf{F}) = J - 1 \equiv 0 \quad (2.83)$$

formulieren. Da die Funktion C den gleichen Objektivitäts- und Isotropieeigenschaften genügen muss wie das Potential W_{0s} selbst, folgt hieraus

$$C = C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1 \equiv 0, \quad (2.84)$$

so dass für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor der pseudo-konstitutive Zusammenhang

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, p) = \frac{\partial W_{0s}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} + p \mathbf{F}^{-T} \quad (2.85)$$

gilt, wobei p die hydrostatische Spannung bezeichnet. Beispiele für inkompressible Materialien ergeben sich u. a., wenn man die Zwangsbedingung $J = 1$ in die Formänderungsenergiefunktionen (2.77) und (2.82) einsetzt, da $g(J = 1) = 0$ gilt. Im ersten Fall resultiert hieraus ein inkompressibles Ogden-Material

$$W_{0s} = W_{0s}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}), \quad (2.86)$$

im zweiten Fall liefert es für $C_2 = 0$ den in Beatty (1987) angegebenen Ansatz

$$W_{0s} = W_{0s}(I_1) = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(I_1-3)} - 1 \right) \quad \text{mit } \alpha \geq 0, \quad (2.87)$$

für den sich im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ das inkompressible Neo-Hooke-Material einstellt.

2.4 Arbeits- und Extremalprinzipien

Ein Anfangsrandwertproblem der Elastizitätstheorie ist ein gekoppeltes System von partiellen Differentialgleichungen, die sowohl bzgl. der Referenz- als auch der Momentankonfiguration angegeben werden können. Die Differentialgleichungen setzen sich dabei aus der Kinematik, der lokalen Impulsbilanz und dem Materialgesetz zusammen. Darüber hinaus sind die Verschiebungs- und die Spannungsrandbedingungen zu berücksichtigen.

Für die sich anschließenden Betrachtungen ist zunächst jedoch eine differenziertere Beschreibung des in Abschnitt 2.1 eingeführten Randes $\partial\mathcal{B}$ einer Struktur \mathcal{B} angebracht. Im Folgenden wird der Teil des Randes, auf dem die Verschiebungen vorgeschrieben sind, mit $\partial\mathcal{B}_u$ bezeichnet. Hingegen wird der Rand, auf dem Spannungsrandbedingungen vorliegen, durch $\partial\mathcal{B}_\sigma$ gekennzeichnet. Für die so eingeführten Teilmengen des Randes $\partial\mathcal{B}$ gilt

$$\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\sigma \cup \partial\mathcal{B}_u \quad \text{und} \quad \partial\mathcal{B}_\sigma \cap \partial\mathcal{B}_u = \emptyset. \quad (2.88)$$

Analoge Bezeichnungen können auch für die Referenz- und die Momentankonfiguration verwendet werden, wobei sich die Eigenschaften (2.88) aufgrund der Injektivität der Funktion χ_t auf diese Mengen übertragen. Somit gilt für die Randbedingungen eines Anfangsrandwertproblems

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_{t\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_{t\sigma} \quad (2.89)$$

in der räumlichen Darstellung und

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial B_{0u} \quad \text{und} \quad \mathbf{PN} = \bar{\mathbf{t}}_0 \text{ auf } \partial B_{0\sigma} \quad (2.90)$$

in der materiellen Darstellung. Also lässt sich ein Anfangsrandwertproblem bzgl. der Referenzkonfiguration für ein hyperelastisches Material durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Kinematik:} & \quad \mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} \\ \text{Gleichgewicht:} & \quad \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \\ \text{Materialgesetz:} & \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \\ \text{Randbedingungen:} & \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial B_{0u}, \quad \mathbf{PN} = \bar{\mathbf{t}}_0 \text{ auf } \partial B_{0\sigma} \\ \text{Anfangsbedingungen:} & \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ und } \dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \text{ zum Zeitpunkt } t_0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

beschreiben.

Um einen Lösungszugang mit Hilfe numerischer Methoden zu erhalten, ist in der Regel die Umwandlung der durch Gleichung (2.91) gegebenen starken Form der Gleichgewichtsbedingungen in eine schwache Formulierung erforderlich. Dieser Übergang wird durch das Prinzip der virtuellen Arbeit ermöglicht, das eine zu den Gleichungen (2.91) gleichwertige Formulierung darstellt, vgl. unter anderem Ogden (1984, Kap. 5) und Stein & Barthold (1996, Kap. 10).

Für den Nachweis dieser Äquivalenz wird entsprechend einer Definition von Simo & Taylor (1991) zunächst die auch als virtuelle Verschiebung bezeichnete Testfunktion η_t mit

$$\eta_t \in \{\eta_t : B_t \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid \eta_t = \mathbf{0} \text{ auf } \partial B_{tu}\} \quad (2.92)$$

eingeführt, d. h. sie genügt den homogenen geometrischen Feld- und Randbedingungen. Nun sind die Feldgleichung (2.49) und die Randbedingung (2.89) genau dann erfüllt, falls

$$\begin{aligned} (\text{div } \mathbf{T} + \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}})) \cdot \eta_t &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_t \quad \text{und} \\ (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \eta_t &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial B_{t\sigma} \end{aligned} \quad (2.93)$$

gilt, was wiederum zu der Aussage

$$\int_{B_t} (\text{div } \mathbf{T} + \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}})) \cdot \eta_t \, dv = \int_{\partial B_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \eta_t \, da \quad (2.94)$$

äquivalent ist. Das auch als schwache Formulierung des Gleichgewichts bezeichnete Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt sich hieraus bzgl. der Momentankonfiguration durch den Gaußschen Integralsatz, das Cauchy-Theorem (2.45) und eine sinnngemäße Anwendung der Beziehung (2.59) zu

$$\int_{B_t} \text{grad } \eta_t : \mathbf{T} \, dv = \int_{B_t} \eta_t \cdot \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) \, dv + \int_{\partial B_{t\sigma}} \eta_t \cdot \bar{\mathbf{t}} \, da. \quad (2.95)$$

Wird durch $\eta_0 = \eta \circ \varphi_t$ mit

$$\eta_0 \in \{\eta_0 : B_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \eta_0 = 0 \text{ auf } \partial B_{0u}\} \quad (2.96)$$

eine Testfunktion bezogen auf die Referenzkonfiguration definiert, so führen nach Stein & Barthold (1996, Kap. 10) einfache Transformationen auf die schwache Formulierung des Gleichgewichts bzgl. der Referenzkonfiguration mit

$$\int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : P \, dV = \int_{B_0} \eta_0 \cdot \rho_0 (\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) \, dV + \int_{\partial B_{0\sigma}} \eta_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA. \quad (2.97)$$

Werden lediglich quasi-statische Deformationsprozesse betrachtet, so kann durch die Definitionen

$$\begin{aligned} \delta W &:= \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : P \, dV, \\ \delta A &:= \int_{B_0} \eta_0 \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV + \int_{\partial B_{0\sigma}} \eta_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA \end{aligned} \quad (2.98)$$

das Prinzip der virtuellen Arbeit auch in der Kurzform

$$\delta W = \delta A \quad (2.99)$$

angegeben werden.

Unter der Voraussetzung eines hyperelastischen Materials stellt das Hamiltonsche Prinzip, vgl. Bedford (1985, Kap. 3), eine zum Prinzip der virtuellen Arbeit gleichwertige Formulierung dar. Im Unterschied zur virtuellen Arbeit, bei der keine Einschränkungen hinsichtlich des betrachteten Materials gemacht wurden, ist hier jedoch die Existenz eines Potentials W Bestandteil der Voraussetzungen.

Ein Spezialfall des Hamiltonschen Prinzips ist für quasi-statische Prozesse das Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials. Hier sichert die Hyperelastizität nicht nur die Existenz der spezifischen Formänderungsenergie W_{0s} , sondern auch über die Gleichungen (2.58) und (2.61) das Vorhandensein eines Potentials W für die innere Spannungsleistung \dot{W} . Die Formänderungsenergie W wird auch als innere potentielle Energie Π_{int} bezeichnet und es gilt

$$W = \Pi_{\text{int}} = \Pi_{\text{int}}(\varphi) = \int_{B_0} W_{0s}(\varphi) \, dV \quad (2.100)$$

in Abhängigkeit von der Deformation φ .⁷ Sind die äußeren Einwirkungen konservativ, besitzen also ebenfalls ein Potential der Form

$$\Pi_{\text{ext}} = \Pi_{\text{ext}}(\varphi) = - \int_{B_0} \varphi \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \varphi \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA, \quad (2.101)$$

⁷ Der bisher verwendete Index t bei der Bezeichnung der Deformation φ kann hier aufgrund der Betrachtung quasi-statischer Prozesse entfallen, vgl. auch Stein & Barthold (1996, Kap. 3).

so kann die gesamte potentielle Energie eines Systems durch

$$\Pi = \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{ext}} \quad (2.102)$$

definiert werden. Mit Hilfe der Definition $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\eta_0$, mit η_0 entsprechend der Gleichung (2.96), und der Gleichung (2.99) zeigen Stein & Barthold (1996, Kap. 10), dass die erste Variation $\delta\Pi$ von Π für die Deformation φ verschwindet, die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Es gilt

$$\delta\Pi := \left. \frac{\partial\Pi(\varphi^\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \delta\Pi_{\text{int}} + \delta\Pi_{\text{ext}} = 0, \quad (2.103)$$

was als Stationarität von Π bezeichnet wird. Aus der Variation erhält man also mit Gleichung (2.66) die schwache Form des Gleichgewichts mit

$$\delta\Pi = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : P \, dV - \int_{B_0} \eta_0 \cdot \rho_0 \bar{b}_0 \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \eta_0 \cdot \bar{t}_0 \, dA = 0. \quad (2.104)$$

Aufbauend auf der Definition von Π_{int} können mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Methode weitere Potentiale definiert werden, vgl. unter anderem Simo et al. (1985), Simo & Taylor (1991), Washizu (1975, Kap. 3) und Wriggers (2001, Kap. 3). In den sich ergebenden Mehrfeldfunktionalen treten dann neben der Deformation φ ggf. die Spannungstensoren und die Verzerrungsmaße als gleichberechtigte Größen auf. Die Stationaritätsforderung für ein so konstruiertes Funktional liefert somit nicht nur die schwache Form des Gleichgewichts entsprechend der Gleichung (2.104), sondern auch – in Abhängigkeit von der gewählten Formulierung – kinematische und konstitutive Beziehungen. Daher kann die auch als Hu-Washizu-Variationsprinzip bezeichnete Methode als eine Verallgemeinerung des Prinzips der stationären potentiellen Energie betrachtet werden.

Eine große Bedeutung hat das Hu-Washizu-Variationsprinzip vor allem bei der numerischen Behandlung von nahezu inkompressiblem Materialverhalten, da in diesem Fall rein verschiebungsbasierte Finite-Elemente-Formulierungen zum so genannten *Locking* neigen, vgl. Abschnitt 6.1 sowie Bathe (2002, Kap. 4), Hughes (2000, Kap. 4) und Wriggers (2001, Kap. 10).

Als ein Beispiel für ein Hu-Washizu-Potential soll in dieser Arbeit der von Simo et al. (1985) und Simo & Taylor (1991) vorgeschlagene Ansatz aufgegriffen werden. Hier wird jedoch, im Gegensatz zu den erwähnten Arbeiten, eine materielle Formulierung gewählt.

Der vorgestellte Ansatz beruht im Wesentlichen auf dem in Abschnitt 2.1 vorgeschlagenen multiplikativen Splitt des Deformationsgradienten F in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil entsprechend der Gleichung (2.18). Durch die Einführung der Dilatanz Θ , einer zur Jacobischen Determinante äquivalenten Feldvariablen, ergibt sich diese Aufteilung zu

$$\bar{F} = \Theta^{\frac{1}{3}} \tilde{F}, \quad \tilde{F} = J^{-\frac{1}{3}} F, \quad F = \text{Grad } x \quad \text{und} \quad J = \det F. \quad (2.105)$$

Während im kontinuierlichen Fall $\Theta(\mathbf{X}, t) \equiv J(\mathbf{X}, t)$ und somit $\bar{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{F}$ ist, wird diese Identität im Rahmen einer endlichdimensionalen Formulierung nicht aufrecht erhalten, so dass im Folgenden auf eine genaue Unterscheidung der Variablen geachtet werden muss.

Wird der hydrostatische Druck mit p bezeichnet, dann gilt für die gesamte potentielle Energie

$$\Pi^{\text{HW}} := \Pi^{\text{HW}}(\varphi, \Theta, p) = \Pi_{\text{int}}^{\text{HW}}(\varphi, \Theta, p) + \Pi_{\text{ext}}(\varphi), \quad (2.106)$$

mit

$$\Pi_{\text{int}}^{\text{HW}} := \Pi_{\text{int}}^{\text{HW}}(\varphi, \Theta, p) = \int_{B_0} W_{0s}(\bar{\mathbf{F}}) + p(J - \Theta) dV. \quad (2.107)$$

und Π_{ext} nach Gleichung (2.101). Wird durch

$$D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi^{\text{HW}}(\varphi + \varepsilon \eta_0, \Theta, p) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.108)$$

die Richtungsableitung bzw. die Gâteaux-Ableitung bzgl. der Deformation φ definiert, so folgt für die erste Variation von Π^{HW} , dass

$$\begin{aligned} D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0 &= \int_{B_0} (D_{\varphi} W_{0s}(\bar{\mathbf{F}}) \cdot \eta_0 + p D_{\varphi} J \cdot \eta_0) dV \\ &+ D_{\varphi} \Pi_{\text{ext}} \cdot \eta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

gilt, wobei

$$D_{\varphi} \Pi_{\text{ext}} \cdot \eta_0 = - \int_{B_0} \eta_0 \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV - \int_{\partial B_0} \eta_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 dA \quad (2.110)$$

ist. Durch ein analoges Vorgehen können die Variationen des Drucks p und der Dilatanz Θ zu

$$D_{\Theta} \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0 = \int_{B_0} (D_{\Theta} W_{0s}(\bar{\mathbf{F}}) \cdot \gamma_0 - \gamma_0 p) dV = 0, \quad (2.111)$$

$$D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0 = \int_{B_0} q_0 (J - \Theta) dV = 0, \quad (2.112)$$

bestimmt werden. Die in diesen Gleichungen neu eingeführten Größen γ_0 und q_0 sind entsprechend Variationen von Θ bzw. p . Unter Berücksichtigung, dass

$$D_{\varphi} J \cdot \eta_0 = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : D_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \eta_0 = \text{Grad } \eta_0 : J \mathbf{F}^{-T} \quad (2.113)$$

ist, und mit Hilfe der additiven Zerlegung der spezifischen Verzerrungsenergiefunktion nach (2.75) folgt für die Gleichungen (2.111) und (2.109)

$$D_{\Theta} \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0 = \int_{B_0} \gamma_0 (U'_{0s}(\Theta) - p) dV = 0 \quad (2.114)$$

und

$$\begin{aligned} D_{\varphi} \Pi_{\text{int}}^{\text{HW}} \cdot \eta_0 &= \int_{B_0} \left\{ D_{\varphi} \tilde{W}_{0s}(\tilde{F}) \cdot \eta_0 + \text{Grad } \eta_0 : (pJ F^{-T}) \right\} dV \\ &= \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \left(\frac{\partial \tilde{W}_{0s}(\tilde{F})}{\partial F} + pJ F^{-T} \right) dV \end{aligned} \quad (2.115)$$

mit $U'_{0s}(\Theta) := \partial_{\Theta} U_{0s}(\Theta)$. Werden für den isochoren und volumetrischen Anteil des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors die Bezeichnungen

$$P_{\text{iso}} := \partial_F \tilde{W}_{0s}(\tilde{F}) \quad \text{und} \quad P_{\text{vol}} := pJ F^{-T} \quad (2.116)$$

verwendet, so lässt sich Gleichung (2.115) zu

$$D_{\varphi} \Pi_{\text{int}}^{\text{HW}} \cdot \eta_0 = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : (P_{\text{iso}} + P_{\text{vol}}) dV \quad (2.117)$$

vereinfachen. Da für eine numerische Behandlung eines Randwertproblems in der Regel auch die Linearisierungen der ersten Variation von Π^{HW} von Bedeutung sind, werden diese nun angegeben. Somit folgt für die zweite Variation

$$\Delta(D_{\Theta} \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0) = D_{\Theta}^2 \Pi^{\text{HW}} \cdot \Delta\Theta = \int_{B_0} \gamma_0 (U''_{0s}(\Theta) \Delta\Theta - \Delta p) dV, \quad (2.118)$$

$$\Delta(D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0) = D_p^2 \Pi^{\text{HW}} \cdot \Delta p = \int_{B_0} q_0 \left(J F^{-T} : \Delta F - \Delta\Theta \right) dV \quad (2.119)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta(D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0) &= D_{\varphi}^2 \Pi^{\text{HW}} \cdot \Delta F = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \Delta P dV \\ &= \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \left(\frac{\partial P}{\partial F} : \Delta F + J F^{-T} \Delta p \right) dV, \end{aligned} \quad (2.120)$$

mit dem Spannungstensor $P = P_{\text{iso}} + P_{\text{vol}}$. Die hier angegebenen Gleichungen können nach der Wahl eines entsprechenden hyperelastischen Materials weiter

spezifiziert werden. Exemplarisch wird das in Abschnitt 2.3 eingeführte Neo-Hooke-Material betrachtet. So ergeben sich die Ableitungen des volumetrischen Anteils U_{0s} der spezifischen Formänderungsenergie aus Gleichung (2.81) zu

$$U'_{0s}(\Theta) = \frac{K}{2} \frac{1}{\Theta} (\Theta^2 - 1) \quad \text{und} \quad U''_{0s}(\Theta) = \frac{K}{2} \frac{1}{\Theta^2} (\Theta^2 + 1). \quad (2.121)$$

Der volumenerhaltende Anteil des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors wird ebenfalls aus Gleichung (2.81) mit Hilfe des isochoren Summanden \tilde{W}_{0s} der spezifischen Formänderungsenergie bestimmt, so dass gilt

$$\mathbf{P}_{\text{iso}} = \frac{\partial \tilde{W}_{0s}(\tilde{\mathbf{F}})}{\partial \mathbf{F}} = \mu J^{-\frac{2}{3}} \left(\mathbf{F} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{F}^{-T} \right). \quad (2.122)$$

Nun kann der Materialtensor $\mathbf{A} := \partial_{\mathbf{F}} \mathbf{P}$ aus Gleichung (2.120) unter Verwendung des Kronecker-Symbols δ_{ij} in Komponentenschreibweise zu

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ijkl} &= \frac{\partial P_{\text{iso } ij}}{\partial F_{kl}} + \frac{\partial P_{\text{vol } ij}}{\partial F_{kl}} \\ &= \mu J^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} F_{lk}^{-1} \left(\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) F_{ji}^{-1} - F_{ij} \right) + \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} F_{kl} F_{ji}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) F_{jk}^{-1} F_{li}^{-1} \right] + p J \left[F_{lk}^{-1} F_{ji}^{-1} - F_{jk}^{-1} F_{li}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.123)$$

ermittelt werden.

2.5 Linearisierte Elastizitätstheorie

Da sich im Bereich der Elastografie die meisten Ansätze auf die linearisierte Elastizitätstheorie beziehen, werden in diesem Kapitel noch einmal gesondert alle wesentlichen Gleichungen zusammengestellt. Die Voraussetzungen für eine linearisierte Betrachtung sind dann erfüllt, wenn bei der Deformation eines Körpers lediglich kleine Verschiebungen, Verzerrungen und Verdrehungen auftreten. In diesem Fall können anstelle der bisher eingeführten Spannungs- und Verzerrungsmaße deren bzgl. der spannungsfreien Referenzkonfiguration linearisierten Größen betrachtet werden.

Wird durch die Festlegung

$$\text{Lin}[\mathbf{A}]_{\mathbf{u}} := \bar{\mathbf{A}} + \Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{A}(\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.124)$$

die Linearisierung einer vektor- bzw. tensorwertigen Größe \mathbf{A} an der Stelle \mathbf{X} , der unverformten Referenzkonfiguration, in Richtung des Vektors \mathbf{u} eingeführt, so können durch diese Definition zunächst die linearisierte Verzerrung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Lin}[\mathbf{E}^{(\alpha)}]_{\mathbf{u}} = \text{Lin}[\mathbf{e}^{(\alpha)}]_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.125)$$

und die linearisierte Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Lin}[\mathbf{S}]_{\mathbf{u}} = \text{Lin}[\mathbf{P}]_{\mathbf{u}} = \text{Lin}[\mathbf{T}]_{\mathbf{u}} \quad (2.126)$$

eingeführt werden. Anhand dieser Gleichungen wird deutlich, dass auf eine Unterscheidung zwischen räumlicher und materieller Darstellung in der linearen Elastizitätstheorie verzichtet werden kann. Eine Linearisierung der Jacobischen Determinante und ein anschließendes Einsetzen in die Inkompressibilitätsbedingung (2.17) führt auf die Bedingung

$$\varepsilon_v = \text{Lin}[J]_{\mathbf{u}} - 1 = \text{div } \mathbf{u} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (2.127)$$

Diese Gleichung motiviert für kompressibles Material eine additive Zerlegung der Verzerrungen in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon_v \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (2.128)$$

wobei $\boldsymbol{\varepsilon}'$ als Deviator von $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezeichnet wird.

In einem weiteren Schritt kann das St. Venant-Kirchhoff Werkstoffgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.129)$$

mit der Formänderungsenergiefunktion

$$W_{0s} = W_{0s}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr } \mathbf{E}^2 \quad (2.130)$$

definiert werden, welches durch Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung aus der Beziehung (2.76) entsteht und so einer Linearisierung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors bzgl. des Green-Verzerrungstensors \mathbf{E} entspricht. Dieses Materialgesetz stellt eine Approximation aller isotropen, hyperelastischen Materialien in der Nähe der spannungsfreien Referenzkonfiguration dar und ist somit auf die Anwendung von Problemen beschränkt, bei denen ggf. große Verschiebungen aber nur kleine Verzerrungen auftreten.

Eine Linearisierung dieser Beziehung (2.129) respektive der Verschiebungen \mathbf{u} führt auf das Hookesche Werkstoffgesetz, das u. a. in den Formen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = K\varepsilon_v\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.131)$$

angegeben werden kann.

Hieraus ergeben sich die korrespondierenden spezifischen Formänderungsenergiefunktionen zu

$$\begin{aligned} W_{0s} = W_{0s}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{und} \\ W_{0s} = W_{0s}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \bar{W}_{0s}(\boldsymbol{\varepsilon}', \varepsilon_v) = \frac{K}{2}(\varepsilon_v)^2 + \mu(\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}'). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Ein Anfangsrandwertproblem lässt sich analog zur nichtlinearen Theorie formulieren, es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Kinematik:} & \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) \\
\text{Gleichgewicht:} & \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \\
\text{Materialgesetz:} & \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.133) \\
\text{Randbedingungen:} & \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial B_{0u}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0 \text{ auf } \partial B_{0\sigma} \\
\text{Anfangsbedingungen:} & \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ und } \dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \text{ zum Zeitpunkt } t_0
\end{aligned}$$

Zu diesem Satz von Gleichungen ist die auch als Prinzip der virtuellen Arbeit bezeichnete schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen äquivalent, vgl. Abschnitt 2.4, und für quasi-statische Prozesse gilt mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad \text{und} \\
\delta A &= \int_{B_0} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV + \int_{\partial B_{0\sigma}} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA,
\end{aligned} \quad (2.134)$$

dass für eine beliebige Testfunktion $\boldsymbol{\eta}_0$, die den Randbedingungen genügt,

$$\delta W = \delta A \quad (2.135)$$

ist.

Auch das in Abschnitt 2.4 beschriebene Hu-Washizu-Funktional lässt sich entsprechend der Gleichung (2.106) bilden. Für isotropes, linear-elastisches Materialverhalten wird die dort angegebene Drei-Feld-Formulierung auf eine reine Druck-Verschiebungs-Formulierung reduziert, vgl. Zienkiewicz & Taylor (2002, Kap. 12). Wählt man ein solches Potential in Anlehnung an Bathe (2002, Kap. 4), so folgt mit der Bezeichnung $\tilde{W}_{0s} := \tilde{W}_{0s}(\boldsymbol{\varepsilon}') = \mu(\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}')$

$$\Pi^{\text{HW}} := \Pi^{\text{HW}}(\mathbf{u}, p) = \Pi_{\text{int}}^{\text{HW}}(\mathbf{u}, p) + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}), \quad (2.136)$$

mit

$$\Pi_{\text{int}}^{\text{HW}}(\mathbf{u}, p) = \int_{B_0} \left(\tilde{W}_{0s}(\boldsymbol{\varepsilon}') - \frac{p^2}{2K} + p \boldsymbol{\varepsilon}_v \right) dV \quad (2.137)$$

und

$$\Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = - \int_{B_0} \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA. \quad (2.138)$$

Hieraus ergibt sich mit dem Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials und der Festlegung $\boldsymbol{\sigma}' := 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}'$, dass

$$D_{\boldsymbol{u}}\Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : (\boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{1}) \, dV + D_{\boldsymbol{u}}\Pi_{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = 0 \quad \text{und} \quad (2.139)$$

$$D_p\Pi^{\text{HW}} \cdot q_0 = \int_{B_0} q_0 \left(\varepsilon_v - \frac{p}{K} \right) \, dV = 0 \quad (2.140)$$

gilt, mit

$$D_{\boldsymbol{u}}\Pi_{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = - \int_{B_0} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \rho_0 \bar{\boldsymbol{b}}_0 \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, dA. \quad (2.141)$$

Für die Richtungsableitung folgt unmittelbar

$$\Delta(D_{\boldsymbol{u}}\Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0) = \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : (2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta p\mathbf{1}) \, dV \quad \text{und} \quad (2.142)$$

$$\Delta(D_p\Pi^{\text{HW}} \cdot q_0) = \int_{B_0} q_0 \left(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\Delta p}{K} \right) \, dV. \quad (2.143)$$

Für den Fall, dass ein vollkommen inkompressibles Material betrachtet wird, muss das Anfangsrandwertproblem (2.133) modifiziert werden. Zum einen muss der hydrostatische Druck p als zusätzliche Unbekannte im Differentialgleichungssystem berücksichtigt werden, vgl. Gleichung (2.85), zum anderen liefert die Bedingung der Volumenkonstanz die Inkompressibilitätsbedingung entsprechend der Gleichung (2.127) als zusätzliche Gleichung. Somit ist die Materialbeziehung in Gleichung (2.133) durch

$$\text{Materialgesetz:} \quad \boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.144)$$

$$\text{Inkompressibilitätsbedingung:} \quad \varepsilon_v = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

zu ersetzen. Die korrespondierende Differentialgleichung in den Verschiebungen und dem Druck, die häufig im Zusammenhang mit der linearen Elastografie verwendet wird, hat dann die Form

$$\text{Grad}(p) + 2 \text{Div}(\mu\boldsymbol{\varepsilon}) + \rho_0\bar{\boldsymbol{b}}_0 = \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \quad (2.145)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen aus Gleichung (2.133).

3 Grundlagen der Mathematik inverser Probleme

In diesem Abschnitt wird die grundlegende Vorgehensweise zur mathematischen Behandlung von inversen Problemen erläutert, was im Wesentlichen einer kurzen Zusammenfassung der Arbeiten von Hofmann (1999), Rieder (2003), Engl et al. (2003) und Louis (1989) entspricht. Im Gegensatz zu den genannten Arbeiten, die eine mathematisch sehr stringente Vorgehensweise wählen, sollen hier nur die wesentlichen Aspekte zusammengestellt und so die benötigten Hilfsmittel zur Behandlung des inversen Problems der Elastografie bereitgestellt werden.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Begriffe *direktes* und *inverses Problem* eingeführt und in einer abstrakten Form erläutert. Darüber hinaus werden ihre charakteristischen Eigenschaften vorgestellt und ein Zusammenhang mit der Parameteridentifikation hergestellt.

Anschließend wird in Abschnitt 3.2 die Theorie zu schlecht gestellten, linearen Operatorengleichungen zusammengefasst. Ziel dieses Unterkapitels ist, die wichtigsten Begriffe bzgl. der stabilen, näherungsweise Lösung von schlecht gestellten, linearen Problemen zusammenzufassen, zu denen vor allem die Begriffe *Regularisierungsverfahren* und *regularisierender Filter* gehören. Auf eine Definition der *Ordnungsoptimalität* einer Regularisierung und *Qualifikation* einer Filterfunktion, die einen Vergleich von unterschiedlichen Regularisierungsverfahren ermöglichen und genauere Abschätzungen bzgl. des Fehlers eines Rekonstruktionsverfahrens erlauben, kann jedoch verzichtet werden. Denn für solch eine Fehlerabschätzung müssen in der Regel Erkenntnisse über die Eigenschaften der exakten Lösungen vorliegen, die bei der Ultraschallelastografie jedoch nicht zugänglich sind.

Im letzten Abschnitt werden nichtlineare Operatorengleichungen betrachtet, auf die auch das inverse Problem der Elastografie aus Kapitel 5 führt. Leider liegt im Gegensatz zur Theorie der linearen, schlecht gestellten Probleme, die weitestgehend vollständig und abgeschlossen ist, vgl. Rieder (2003, Kap. 7), bei nichtlinearen Problemen keine geschlossene Theorie vor. Alle Ansätze, eine einheitliche Theorie für schlecht gestellte, nichtlineare Operatorengleichungen zu formulieren, führen dazu, dass sehr stark einschränkende Bedingungen an den nichtlinearen Operator gestellt werden. Diese Bedingungen sind für Operatoren aus konkreten Anwendungen, insbesondere für das inverse Problem der Elastografie aus Kapitel 5, bisher jedoch nicht nachgewiesen worden. Daher werden mittlerweile in der mathematischen Forschung häufig spezielle Lösungsansätze für einzelne Fragestellungen entwickelt, die auf das konkrete Problem zugeschnitten sind. Da solche Verfahren für das inverse Problem der Elastografie nicht vor-

liegen, wird in Abschnitt 3.3 die allgemeine Theorie erörtert und in Kapitel 5 auf diese zurückgegriffen.

3.1 Einführung und Begriffsklärungen

Bei den Begriffen des direkten und inversen Problems handelt es sich um Fragestellungen, die im Rahmen eines modellierten und somit leicht vereinfacht dargestellten realen Vorgangs als technische Problemstellung auftreten. Im Allgemeinen lässt sich das betrachtete Modell in einen Kausalzusammenhang einbetten, der in Form einer Ursache-Wirkungs-Abbildung einen Zusammenhang zwischen Ursachen und den zugehörigen Wirkungen herstellt, vgl. Bild 3.1. Diese Abbildung lässt sich nur dann vollständig nachvollziehen, wenn die Gesamtheit der Umstände, das so genannte Bedingungsgefüge, gänzlich bekannt ist. Dieses Bedingungsgefüge ist bei physikalischen Zusammenhängen häufig durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen gegeben, welche entscheidend durch die vorhandenen Parameter beeinflusst werden.

Das direkte Problem ist im Rahmen eines festen Kausalzusammenhangs eindeutig bestimmt. Es besteht darin, die Ursache-Wirkungs-Abbildung bei gegebenen Ursachen und vollständig bekanntem Bedingungsgefüge – insbesondere in Kenntnis aller Parameter – nachzuvollziehen. Dabei zeichnet es sich häufig durch die gutartigen Eigenschaften aus, dass sich aus eindeutigen Ursachen auch eindeutige Wirkungen ergeben und diese in der Regel stabil sind, d. h., dass kleine Änderungen in den Parametern der Ursache oder des Bedingungsgefüges auch nur kleine Änderungen in den Wirkungen nach sich ziehen. Das inverse Problem besteht nun darin, die Ursache-Wirkungs-Abbildung in irgendeiner Weise umzukehren, d. h. es werden Parameter in Form von speziellen Ursachen oder als Teile des Bedingungsgefüges gesucht, während die restlichen Ursachen bzw. Teile des Bedingungsgefüges als bekannt vorausgesetzt werden.

Eine solche Fragestellung ergibt sich u. a. bei den so genannten Identifikationsproblemen, vgl. z. B. Mahnken & Stein (1996) oder Anding (1997). Da ein gesuchter Parameter selbst nicht messbar ist, erfolgt seine Bestimmung durch indirekte Messungen, also durch Interpretation spezieller Wirkungen. Die inversen Probleme besitzen dabei in der Regel nicht die gutartigen Eigenschaften der direkten Aufgabe. So können verschiedene Ursachen die gleichen Wirkungen ergeben (Mehrdeutigkeit) oder es kann das Phänomen auftreten, dass zu den gemessenen und demzufolge fehlerbehafteten Wirkungen im Rahmen des mathematischen Modells keine Parameter existieren (Inexistenz). Darüber hinaus kann das Phänomen auftreten, dass die Ursache-Wirkungs-Abbildung stark glättend wirkt, so dass sehr unterschiedliche Parameter nahezu die gleichen Wirkungen hervorrufen. Diese benachbarten Wirkungen sind dann aber kaum noch zu unterscheiden, da die messbaren Größen immer messfehlerbehaftet sind (Instabilität). Tritt eines der hier beschriebenen Phänomene auf, so spricht man von einem schlecht gestellten bzw. inkorrekten Problem nach Hadamard.

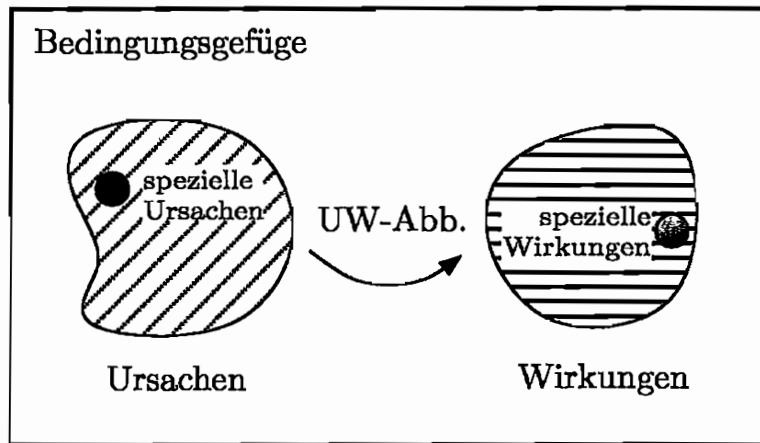


Bild 3.1: Kausalzusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, analog zu Hofmann (1999, Kap. 2)

Eine mathematische Formulierung der Korrektheitsdefinition eines Problems erhält man nach Rieder (2003, Kap. 1) durch die Betrachtung des Operators \mathcal{F} der direkten Aufgabe. Wenn mit X der Banachraum¹ der Ursachen bzw. der Parameter des Bedingungsgefüges und mit Y der Banachraum der Wirkungen bezeichnet wird, so lässt sich die Ursache-Wirkungs-Abbildung in der Form

$$\mathcal{F} : D(\mathcal{F}) \subseteq X \rightarrow Y \quad (3.1)$$

angeben. Hier bezeichnet die Teilmenge $D(\mathcal{F})$ den Definitionsbereich der mathematisch zulässigen bzw. der physikalisch sinnvollen Parameter. Dann heißt das Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), Y)$ nach Hadamard korrekt oder gut gestellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Gleichung $\mathcal{F}(x) = y$ hat für jedes $y \in Y$ eine Lösung (Existenz).
2. Die Lösung ist eindeutig bestimmt (Eindeutigkeit).
3. Die Lösung x hängt stetig von der rechten Seite y ab (Stabilität).

Ist eine der Bedingungen verletzt, so heißt das Problem *inkorrekt* oder *schlecht gestellt* nach Hadamard.

Inkorrekte Aufgaben erfordern nach Hofmann (1999, Kap. 2) eine problem-spezifische mathematische Behandlung. Während eine verletzte Existenzbedingung das Betrachten verallgemeinerter Lösungen erfordert, verlangt eine nicht erfüllte Eindeutigkeitsbedingung die Suche nach einer speziell ausgezeichneten Lösung x^* . Die Instabilität als die gravierendste Form der Inkorrektheit kann durch Betrachten einer stabilen Ersatzaufgabe (Regularisierung) überwunden werden, wobei diese das Ausgangsproblem hinreichend gut approximieren muss.

¹Ein Vektorraum X mit Norm $\|\cdot\|_X$ heißt Banachraum, wenn X bzgl. der durch die Norm induzierten Metrik vollständig ist.

3.2 Lineare Operatorengleichungen

Um die Ausführungen aus Abschnitt 3.1 weiter spezifizieren zu können, erfolgt zunächst eine Betrachtung von stetigen, linearen Operatoren \mathcal{A} , die zwischen den Hilberträumen² X und Y wirken, also ist

$$\mathcal{A} \in L(X, Y) = \{\mathcal{A} : X \rightarrow Y \mid \mathcal{A} \text{ ist linear und} \\ \|\mathcal{A}\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|\mathcal{A}x\|_Y < \infty\}, \quad (3.2)$$

wobei in diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Ausführungen $X = D(\mathcal{A})$ angenommen wird. Für das lineare Problem (\mathcal{A}, X, Y) kann durch die Einführung eines verallgemeinerten Lösungsbegriffs gezeigt werden, dass lediglich die dritte Bedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition Relevanz besitzt. So existieren bei gegebenen $y \in Y$ nach Louis (1989, Kap. 3) Lösungen für die Operatorengleichung

$$\mathcal{A}x = y \quad (3.3)$$

nur für solche Elemente y , die im Bildraum $R(\mathcal{A})$ liegen. Um einen Lösungsbegriff auch für andere Elemente in der Menge Y einzuführen, werden solche Elemente x aus der Menge X betrachtet, welche die Eigenschaft

$$\|\mathcal{A}x - y\|_Y \leq \|\mathcal{A}v - y\|_Y \quad \text{für alle } v \in X \quad (3.4)$$

erfüllen, also deren Bild $\mathcal{A}x$ den Abstand zum gegebenen Element y minimiert. Die so erzeugte Lösungsmenge $L(y)$ ist genau dann nicht leer, wenn das gegebene Element y in der Menge $R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp \subseteq Y$ liegt.³ In diesem Fall enthält $L(y)$ ein eindeutig bestimmtes Element x_{mn} mit der Eigenschaft

$$\|x_{mn}\|_X < \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in L(y) \setminus x_{mn}. \quad (3.5)$$

Dies motiviert nach Louis (1989, Kap. 3) die Definition einer verallgemeinerten Inversen \mathcal{A}^\dagger , die auch als Moore-Penrose-Inverse bezeichnet wird. Die Abbildung

$$\mathcal{A}^\dagger : D(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq Y \rightarrow X \quad (3.6)$$

mit dem Definitionsbereich $D(\mathcal{A}^\dagger) = R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$ weist jedem Element y aus $D(\mathcal{A}^\dagger)$ das eindeutig bestimmte Element x_{mn} zu, welches als Minimum-Norm-Lösung bezeichnet wird. Wird nicht wie in Gleichung (3.5) das Element mit minimaler Norm gesucht, sondern ein Element aus $L(y)$, das den Abstand zu einem Element $x^* \in X$ minimiert, so wird die Lösung x_{mn} als x^* -Minimum-Norm-Lösung bezeichnet.

² Ein Hilbertraum X ist ein Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, der bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X = \langle \cdot, \cdot \rangle_X^{1/2}$ vollständig ist.

³ Die Definition des orthogonalen Komplements $U^\perp \subset X$ einer Teilmenge $U \subset X$ ist durch $U^\perp := \{x \in X \mid \langle x, z \rangle_X = 0 \text{ für alle } z \in U\}$ gegeben.

Da die Inverse \mathcal{A}^\dagger genau dann stetig ist, wenn das Bild der Abbildung \mathcal{A} abgeschlossen ist, vgl. Rieder (2003, Kap. 2), wird durch die vorangegangenen Überlegungen die Korrektheitsdefinition nach Nashed motiviert. Demnach heißt das Problem (\mathcal{A}, X, Y) schlecht gestellt nach Nashed, wenn $R(\mathcal{A}) \neq \overline{R(\mathcal{A})}$, andernfalls heißt das Problem gut gestellt, vgl. Rieder (2003, Kap. 2). Somit sind Probleme, bei denen das Bild $R(\mathcal{A})$ endlichdimensional ist, stets korrekt nach Nashed.

Eine besondere Klasse von linearen Operatoren \mathcal{A} , die stets auf schlecht gestellte Probleme führt, ist die Klasse der kompakten Operatoren mit unendlichdimensionalem Bildraum $R(\mathcal{A})$. Ohne an dieser Stelle eine explizite Definition für die Kompaktheit eines Operators anzugeben, vgl. hierzu Rieder (2003, Kap. 2), sei erwähnt, dass für diese Operatoren eine Singulärwertzerlegung der Form

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle_X u_i \quad (3.7)$$

existiert, siehe z. B. Rieder (2003, Kap. 2). Die Skalare σ_i werden als Singulärwerte bezeichnet, die Elemente $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sind vollständige Orthonormalsysteme von $N(\mathcal{A})^\perp \subset X$ und $\overline{R(\mathcal{A})} \subset Y$ und die Tripelfolge $\{\sigma_i; v_i; u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ heißt singuläres System des Operators \mathcal{A} . Die Singulärwerte sind monoton fallend und größer Null, es gilt also $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > 0$. Für ein Element $y \in D(\mathcal{A}^\dagger)$ lässt sich dann die verallgemeinerte Inverse in der Form

$$\mathcal{A}^\dagger y = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{-1} \langle y, u_i \rangle_Y v_i \quad (3.8)$$

angeben. Durch diese Darstellung von \mathcal{A}^\dagger wird die Problematik bei der Bestimmung der Lösung x_{mn} deutlich. Liegen anstelle der exakten Daten y nur verrauschte Daten y^δ mit einem Rauschpegel

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta \quad (3.9)$$

vor, so wird der Rauschanteil in Richtung eines singulären Vektors u_i für kleine Werte σ_i um den Faktor σ_i^{-1} verstärkt. Dies sind aber bei schlecht gestellten Problemen gerade die singulären Vektoren, die stark oszillieren, so dass die Lösung $x^\delta := \mathcal{A}^\dagger y^\delta$ unbrauchbar wird, vgl. Rieder (2003, Kap. 2). Darüber hinaus ist es möglich, dass für $y^\delta \notin D(\mathcal{A}^\dagger)$ gar keine Elemente in X existieren, die den Defekt (3.4) minimieren.

Abhilfe kann durch Regularisierung bzw. Stabilisierung schlecht gestellter Probleme geschaffen werden. Als Regularisierung wird nach Rieder (2003, Kap. 3) das Paar $(\{\mathcal{R}_t\}_{t>0}, \alpha)$ bestehend aus einer Familie stetiger Operatoren $\{\mathcal{R}_t\}_{t>0}$ und einer Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ bezeichnet. Die Familie $\{\mathcal{R}_t\}_{t>0}$ hat die Eigenschaften $\mathcal{R}_t 0 = 0$ und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \left\{ \|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\|_X \mid y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\|_Y \leq \delta \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Sind alle \mathcal{R}_t linear, so spricht man von einer linearen Regularisierung. Die Abbildung α heißt Parameterwahl und es gelte

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \alpha(\delta, y^\delta) \mid y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\|_Y \leq \delta \right\} = 0. \quad (3.11)$$

Der Zahlenwert $\alpha(\delta, y^\delta)$ wird als Regularisierungsparameter bezeichnet. Hängt α nur vom Datenfehlerniveau δ ab, so wird von einer a priori Parameterwahl gesprochen, andernfalls von einer a posteriori Parameterwahl. Für den Rekonstruktionsfehler einer linearen Regularisierung, dessen Verlauf in Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter t in Bild 3.2 dargestellt wird, gilt laut Hofmann (1999, Kap. 4) die Abschätzung

$$\|\mathcal{A}^\dagger y - \mathcal{R}_t y^\delta\|_X \leq \underbrace{\|\mathcal{A}^\dagger y - \mathcal{R}_t y\|_X}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\|\mathcal{R}_t(y - y^\delta)\|_X}_{\text{Datenfehler}}. \quad (3.12)$$

Das Diagramm in Bild 3.2 verdeutlicht, dass der Approximationsfehler für t gegen Null ebenfalls gegen Null strebt. In diesem Fall wächst jedoch die Operatornorm $\|\mathcal{R}_t\|_{t>0}$ gegen unendlich, vgl. Rieder (2003, Kap. 3). Ein analoges Verhalten stellt sich für den Fall ein, dass der Regularisierungsparameter t gegen unendlich strebt. In diesem Fall nimmt durch die wachsende Stabilität des Problems der Datenfehler ab, jedoch steigt dann der Approximationsfehler über alle Grenzen an. Es ist also die Aufgabe durch eine Parameterwahl α den optimalen Regularisierungsparameter $t_{\text{opt}} \approx \alpha(\delta, y^\delta)$ zu finden, der einen Ausgleich zwischen Approximation und Stabilität des Problems darstellt.

Durch die Einführung einer Familie $\{F_t\}_{t>0}$ von stückweise stetigen Funktionen $F_t : [0, \|\mathcal{A}\|^2] \rightarrow \mathbf{R}$ lässt sich eine allgemeine Theorie linearer Regularisierungen formulieren. Eine solche Funktionenfamilie heißt nach Rieder (2003, Kap. 3) regularisierender Filter, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} F_t(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} && \text{für alle } \lambda \in]0, \|\mathcal{A}\|^2] \quad \text{und} \\ \lambda |F_t(\lambda)| &\leq C_F && \text{für alle } \lambda \in [0, \|\mathcal{A}\|^2] \quad \text{und } t > 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

erfüllt sind, wobei C_F eine positive Konstante ist. Wird durch \mathcal{A}^* der zu \mathcal{A} adjungierte Operator⁴ bezeichnet, so kann durch die Vorschrift

$$F_t(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* y := \sum_{i=1}^{\infty} F_t(\sigma_i^2) \sigma_i \langle y, u_i \rangle_Y v_i \quad (3.14)$$

der lineare Operator $F_t(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \in L(X, X)$ eingeführt werden. Dann ist die Operatorfamilie mit den Elementen

$$\mathcal{R}_t = F_t(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* \quad (3.15)$$

⁴Sind die Räume X und Y Hilberträume und $\mathcal{A} \in L(X, Y)$, dann ist der adjungierte Operator $\mathcal{A}^* \in L(Y, X)$ über die Beziehung $\langle \mathcal{A}x, y \rangle_Y = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle_X$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ in eindeutiger Weise bestimmt.

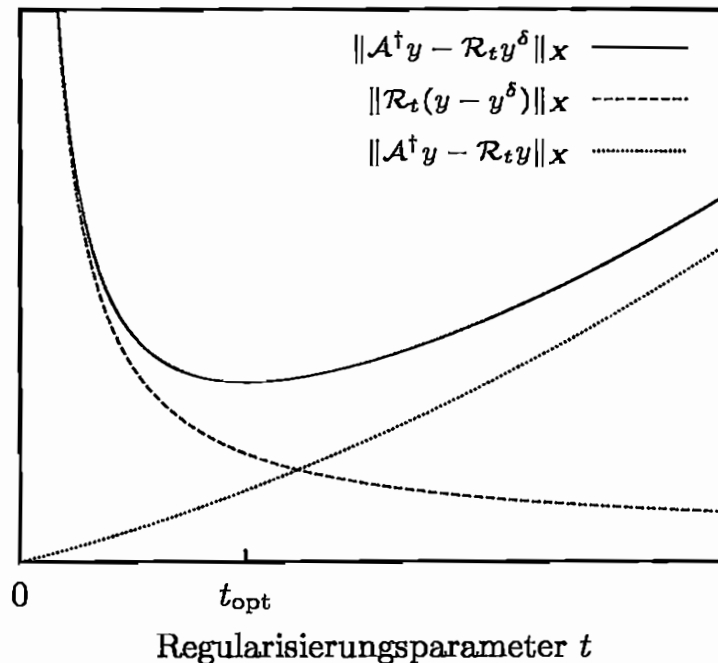


Bild 3.2: Zusammensetzung des Rekonstruktionsfehlers, analog zu Rieder (2003, Kap. 3)

zusammen mit einer geeigneten Parameterwahl α ein Regularisierungsverfahren, vgl. Rieder (2003, Kap. 3). Bildlich gesprochen filtert die Funktion F_t den Einfluss kleiner Singulärwerte.

Beispiele für auf diese Weise konstruierte Regularisierungsverfahren sind die Methode der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung, das Verfahren der asymptotischen Regularisierung oder iterative Methoden wie die Landweber-Iteration, vgl. u. a. Rieder (2003, Kap. 3) und Hofmann (1999, Kap. 4). Ein sehr bedeutendes Regularisierungsverfahren stellt die Tikhonov-Phillips-Regularisierung mit der Filterfunktion

$$F_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda + t}, \quad t > 0 \quad (3.16)$$

dar, wobei $x_t := \mathcal{R}_t y$ die eindeutig bestimmte Lösung der regularisierten Normalgleichung

$$(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + t \mathcal{I}) \mathcal{R}_t y = \mathcal{A}^* y \quad (3.17)$$

ist, in der \mathcal{I} den Einheitsoperator bezeichnet. Für den Operator \mathcal{A} ist dies gleichbedeutend mit der Minimierung des Tikhonov-Funktional, also ist

$$\mathcal{R}_t y = \operatorname{argmin}\{J_t(x) = J_t(x, y) := \|\mathcal{A}x - y\|_Y^2 + t\|x\|_X^2 \mid x \in X\}. \quad (3.18)$$

Zur Konstruktion eines Regularisierungsverfahrens fehlt lediglich noch eine auf den Filter abgestimmte Parameterwahl. Eine a priori Parameterwahl $t = \alpha(\delta)$,

bei der die Parameterwahl nur vom Rauschpegel δ abhängt, ist im Allgemeinen nur möglich, wenn detaillierte Kenntnisse bzgl. der Eigenschaften der x^* -Minimum-Norm-Lösung x_{mn} vorliegen, die in der Regel aber nicht zugänglich sind, vgl. Rieder (2003, Kap. 3) bzw. Hofmann (1999, Kap. 4).

Eine Alternative bietet das Diskrepanzprinzip von Morozov, ein a posteriori Verfahren, bei dem die Funktion α zusätzlich von den verrauschten Daten y^δ abhängt. Die Methode wird durch die Idee motiviert, dass die Genauigkeit des Rekonstruktionsprozesses in der Nähe des Datenfehlers δ liegt. Demnach ist der Regularisierungsparameter $\alpha(\delta, y^\delta)$ so zu wählen, dass

$$\|\mathcal{A}x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta - y^\delta\|_Y \approx \delta \quad (3.19)$$

gilt. Zur Realisierung des Diskrepanzprinzips, vgl. Rieder (2003, Kap. 3), wird eine streng monoton fallende Nullfolge $\{t_k\}_{k \in \mathcal{N}}$ gewählt, deren Folgenglieder hinreichend langsam abklingen. Für einen festen Wert $\tau > 1$ ist dann k^* so zu bestimmen, dass

$$\|\mathcal{A}x_{t_{k^*}}^\delta - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|\mathcal{A}x_{t_i}^\delta - y^\delta\|_Y, \quad i = 1, \dots, k^* - 1 \quad (3.20)$$

ist, so dass $\alpha(\delta, y^\delta) := t_{k^*}$ gilt.⁵

Da sowohl bei einer a priori als auch bei einer a posteriori Parameterwahl die Kenntnis des Datenfehlers δ vorausgesetzt werden, sind diese Auswahlkriterien ungeeignet, wenn der Fehler in den Daten y^δ nicht abgeschätzt werden kann. Für diesen Fall gibt es so genannte heuristische Parameterwahlkriterien, die ohne Informationen über den Datenfehler angewendet werden können.⁶ Zu diesen Methoden zählen u. a. das L-Kurven-Verfahren oder das verallgemeinerte Cross-Validation-Kriterium, vgl. Hofmann (1999, Kap. 4), Rieder (2003, Kap. 3) und Engl et al. (2003, Kap. 4) und die dort angegebene, weiterführende Literatur. Die „einfachste“ Möglichkeit, einen geeigneten Regularisierungsparameter t zu ermitteln, ist nach Louis (1989, Kap. 3) eine „trial and error“ Strategie, bei der lediglich mehrere Parameter ausprobiert werden und dann der beste gewählt wird. Allerdings sind in diesem Fall keine Aussagen über die Güte der Lösung möglich.

Nach der Wahl eines geeigneten Regularisierungsverfahrens stellt sich abschließend die Frage, wie gut die rekonstruierte Lösung x_t^δ , die mit den gestörten Daten y^δ ermittelt wurde, die exakte Lösung x_{mn} approximiert, d. h., wie sich der Fehler $\|x_{mn} - x_t^\delta\|_X$ in Abhängigkeit vom Datenfehler δ verhält. Zu diesem Zweck führt Rieder (2003, Kap. 3) den Begriff des (*besten*) *schlimmsten Fehlers* ein, der in Abhängigkeit vom gewählten Regularisierungsverfahren auftreten

⁵Rieder (2003, Kap. 3) weist darauf hin, dass das Tikhonov-Phillips-Verfahren zusammen mit dem Diskrepanzprinzip zu suboptimalen Konvergenzordnungen im Sinne von Gleichung (3.11) führen kann.

⁶Es sei angemerkt, dass ohne Kenntnis des Datenfehlers keine konvergenten Regularisierungen konstruiert werden können, was in der Literatur als Bakushinsky-Veto bezeichnet wird, vgl. Hofmann (1999, Kap. 4). Obwohl sie also im eigentlichen Sinne der Definition kein Regularisierungsverfahren für die verallgemeinerte Inverse \mathcal{A}^\dagger darstellen, liefern diese Methoden laut Rieder (2003, Kap. 3) in der Anwendung erstaunlich gute Ergebnisse.

kann. Dieser schlimmste Fehler hängt jedoch seinerseits wieder von Informationen über die exakte Lösung x_{mn} ab, die im Allgemeinen nicht vorliegen, so dass im Rahmen dieser Arbeit auf eine Einführung dieser Begrifflichkeit verzichtet wird.

3.3 Nichtlineare Operatorengleichungen

Die klassische Hadamardsche Korrektheitsdefinition ist von globaler Natur, da sie sich auf den gesamten Definitionsbereich eines Operators bezieht, vgl. Hofmann (1999, Kap. 2). Da die linearen Operatoren \mathcal{A} ebenfalls von globaler Natur sind, mit gleichartigen Eigenschaften für den gesamten Definitionsbereich, hat diese Korrektheitsdefinition für eben diese Klasse von Operatoren eine besondere Bedeutung.

Wird hingegen ein allgemeines, nichtlineares Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), Y)$ betrachtet, so erscheint diese Definition wenig sinnvoll, da sich bei nichtlinearen Fragestellungen häufig verschiedene Lösungszweige ergeben. Daher wird bei nichtlinearen Operatorengleichungen der Form

$$\mathcal{F}(x) = y \quad (3.21)$$

mit dem stetigen Operator $\mathcal{F} : D(\mathcal{F}) \subseteq X \rightarrow Y$ eine lokale Betrachtung herangezogen. Ist das Element x_0 die Lösung des Problems $y_0 = \mathcal{F}(x_0)$, so wird lediglich die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich $D(\mathcal{F})$ und der Kugel

$$K_r(x_0) := \{x \in X \mid \|x - x_0\|_X < r\} \quad (3.22)$$

betrachtet. Die nichtlineare Operatorengleichung (3.21) heißt dann lokal schlecht gestellt in $x_0 \in D(\mathcal{F})$, falls zu jedem Radius $r > 0$ eine Folge $\{x_k^r\}_{k \in \mathbb{N}}$ in der Menge $D(\mathcal{F}) \cap K_r(x_0)$ existiert, die nicht gegen x_0 konvergiert, deren Bildelemente aber gegen $y_0 = \mathcal{F}(x_0)$ konvergieren, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_0 - \mathcal{F}(x_k^r)\|_Y = 0, \text{ aber } x_k^r \not\rightarrow x_0 \text{ für } k \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

gilt. Andernfalls ist das Problem lokal gut gestellt in x_0 . Nach Rieder (2003, Kap. 7) ist durch diese Definition gewährleistet, dass das Problem (3.21) genau dann schlecht gestellt ist, wenn zum einen die Lösung x_0 nicht stetig von den Daten y abhängt und zum anderen, wenn die Lösung nicht isoliert ist, d. h., wenn für jeden Radius $r > 0$ ein x^r in $K_r(x_0) \cap D(\mathcal{F})$ existiert, so dass $\mathcal{F}(x^r) = y_0$ ist.

Zur Lösung der nichtlinearen Operatorengleichung (3.21) wird analog zum linearen Fall das Konzept der x^* -Minimum-Norm-Lösung aufgegriffen, vgl. Gleichungen (3.4) und (3.5). Es wird also nach einer Lösung x_{mn} gesucht, welche die Bedingungen

$$\mathcal{F}(x_{mn}) = y \quad \text{und} \quad \|x_{mn} - x^*\| = \min\{\|x - x^*\| \mid \mathcal{F}(x) = y\} \quad (3.24)$$

erfüllt, jedoch muss im Gegensatz zum linearen Fall eine solche Lösung weder existieren noch eindeutig bestimmt sein, vgl. Engl et al. (2003, Kap. 10).⁷ Das Element x^* kann dazu genutzt werden, a priori Informationen über die Lösung in die Bestimmung von x_{mn} einfließen zu lassen.

Liegen anstelle der exakten Daten y nur verrauschte Daten y^δ vor, so müssen wie bei den linearen Operatoren zur stabilen Lösung des Problems (3.21) Regularisierungsverfahren eingesetzt werden. Eine mögliche Regularisierungsmethode stellt die nichtlineare Tikhonov-Phillips-Regularisierung dar, welche auf den Minimierungseigenschaften (3.18) des linearen Falls aufbaut. Ist der Operator \mathcal{F} schwach folgenabgeschlossen⁸, dann existiert mindestens ein Element $x_t^\delta \in D(\mathcal{F})$, das stabil von den verrauschten Daten y^δ abhängt und die Eigenschaft

$$J_t(x_t^\delta) = \min \{ J_t(x) \mid x \in D(\mathcal{F}) \} \quad (3.25)$$

besitzt, wobei

$$J_t(x) = J_t(x, y^\delta) := \|\mathcal{F}(x) - y^\delta\|_Y^2 + t \|x - x^*\|_X^2, \quad t > 0 \quad (3.26)$$

gilt. Wird laut Engl et al. (2003, Kap. 10) der Parameter $\alpha = \alpha(\delta)$ im Rahmen einer a priori Parameterwahl so bestimmt, dass

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

gilt, dann ist die Bezeichnung Regularisierungsverfahren für die betrachtete Methode gerechtfertigt. Erfüllt der Operator \mathcal{F} die in Scherzer et al. (1993) und Scherzer (1993) formulierten Voraussetzungen, so kann auch für das nichtlineare Tikhonov-Phillips-Verfahren das Morozovsche Diskrepanzprinzip zur Parameterwahl herangezogen werden. Gemäß Scherzer et al. (1993) unterscheidet sich das Diskrepanzprinzip von linearen und nichtlinearen Operatorengleichungen im Wesentlichen dadurch, dass die Existenz eines Regularisierungsparameters t im Allgemeinen nicht gesichert ist, der die Bedingung $\|\mathcal{F}(x_t^\delta) - y^\delta\|_Y = \tau \delta$ erfüllt. Darüber hinaus erweist sich bei dieser a posteriori Parameterwahl nach Engl et al. (2003, Kap. 10) als problematisch, dass hierdurch zwei nichtlineare Probleme simultan gelöst werden müssen. Es wird daher vorgeschlagen, das Optimierungsproblem

$$\|x - x^*\|_X \rightarrow \min, \quad x \in \{x \in D(\mathcal{F}) \mid \|\mathcal{F}(x) - y^\delta\|_Y \leq \delta\} \quad (3.28)$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren in das modifizierte Tikhonov-Verfahren

$$(\|\mathcal{F}(x) - y^\delta\|_Y - \delta)^2 + t \|x - x^*\|_X^2 \rightarrow \min, \quad x \in D(\mathcal{F}) \quad (3.29)$$

⁷Den Ausführungen von Engl et al. (2003, Kap. 10) und Rieder (2003, Kap. 7) folgend wird im Weiteren jedoch die Existenz mindestens einer Lösung vorausgesetzt, d. h. es existiert ein $x_{mn} \in D(\mathcal{F})$ mit $\mathcal{F}(x_{mn}) = y$.

⁸Zur Definition des Begriffs *schwach folgenabgeschlossen* wird auf Rieder (2003, Kap. 7) verwiesen.

zu überführen. Auch dieses Problem hat eine stabile Lösung x_t^δ für alle $t > 0$, die für die a priori Parameterwahl $t = \alpha(\delta) = O(\delta^2)$ für $\delta \rightarrow 0$ das modifizierte Tikhonov-Verfahren zu einem konvergenten Regularisierungsverfahren werden lässt.⁹

Eine Alternative zur Tikhonov-Phillips-Regularisierung stellen iterative Methoden vom Newton-Typ dar, vgl. Rieder (2003, Kap.7). Bei diesen Verfahren wird die Gleichung (3.21) mit gestörten Daten y^δ durch die Iteration

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + \Delta x_n^\delta, \quad n \in N_0, \quad (3.30)$$

mit Startwert $x_0 = x_0^\delta \in D(\mathcal{F})$ gelöst. Ist der Operator \mathcal{F} im Element x_n^δ Fréchet-differenzierbar¹⁰ mit der Fréchet-Ableitung

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{F}'(x_n^\delta), \quad \mathcal{A}_n \in L(X, Y), \quad (3.31)$$

so ergibt sich der Iterationsschritt Δx_n^δ als Lösung der Operatorengleichung

$$\mathcal{A}_n \Delta x_n^\delta = y^\delta - \mathcal{F}(x_n^\delta) =: \Delta y_n^\delta, \quad (3.32)$$

wobei damit gerechnet werden muss, dass sich eine ggf. vorhandene Schlechtgestelltheit der Operatorengleichung (3.21) auf die linearisierte Form (3.32) überträgt, vgl. Rieder (2003, Kap. 7). Ein geeignetes Abbruchkriterium für eine Iteration vom Newton-Typ kann durch das Diskrepanzprinzip realisiert werden. Danach wird die Iterierte x_n^δ als Lösung der Operatorengleichung (3.21) akzeptiert, welche die Bedingung

$$\|\mathcal{F}(x_{n^*}^\delta) - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|\mathcal{F}(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y, \quad n = 0, 1, \dots, n^* - 1 \quad (3.33)$$

mit fest gewähltem $\tau > 1$ erfüllt.

Eine Möglichkeit, einen iterativen Algorithmus zu definieren, stellt das nichtlineare Landweber-Verfahren dar, vgl. Rieder (2003), welches durch die Gleichung

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + \mathcal{A}_n^* \Delta y_n^\delta, \quad n \in N_0, x_0 \in D(\mathcal{F}) \quad (3.34)$$

gegeben ist, wobei die Operatoren \mathcal{A}_n durch $\|\mathcal{A}_n\| \leq 1$ für alle $n \in N_0$ skaliert sind. Einen großen Nachteil dieses Verfahrens stellt jedoch die sehr langsame Konvergenz und der damit einhergehende enorme numerische Aufwand des Verfahrens dar. Unter welchen Bedingungen an den Operator \mathcal{F} die nichtlineare Landweber-Iteration zusammen mit dem Abbruchkriterium (3.33) ein konvergentes Regularisierungsverfahren bildet, kann Rieder (2003, Kap. 7) und der dort angegebenen weiterführenden Literatur entnommen werden.

⁹Das Symbol $O(\cdot)$ ist ebenfalls ein Landau-Symbol. Es besagt hier, dass eine Konstante C existiert, so dass in einer Umgebung von $\delta = 0$ $|\alpha(\delta)| \leq C\delta^2$ gilt.

¹⁰Die Definition der Fréchet-Ableitung kann u. a. Rieder (2003, Kap. 7) und Hofmann (1999, Kap. 3) entnommen werden. Ist ein Operator \mathcal{F} in einem Element $x \in X$ Fréchet-differenzierbar, so existiert in diesem Punkt die Gâteaux-Ableitung für jede beliebige Richtung $h \in X$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht.

Eine Alternative zeigt die Regularisierung vom Gauß-Newton-Typ auf, die durch die Gleichung

$$x_{n+1}^\delta = x_0 + F_{t_n}(\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n) \mathcal{A}_n^* \left(\Delta y_n^\delta - \mathcal{A}_n(x_0 - x_n^\delta) \right), \quad n \in N_0 \quad (3.35)$$

definiert wird. Die Filterfunktionen F_{t_n} können entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.2 unterschiedlich ausgeprägt sein. Mit dem Filter (3.16) der Tikhonov-Phillips-Regularisierung ergibt sich der Iterationsschritt Δx_n^δ als Lösung der Gleichung

$$\left(\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n + t_n \mathcal{I} \right) \Delta x_n^\delta = \mathcal{A}_n^* \Delta y_n^\delta + t_n (x_0 - x_n^\delta). \quad (3.36)$$

Die Gauß-Newton-Iteration wird durch das angepasste Diskrepanzprinzip bei der Iterierten $x_{n^*}^\delta$ gestoppt, für die die Bedingung

$$\begin{aligned} \max \left\{ \|\mathcal{F}(x_{n^*-1}^\delta) - y^\delta\|_Y, \|\Delta y_{n^*-1}^\delta - \mathcal{A}_{n^*-1} \Delta x_{n^*-1}^\delta\|_Y \right\} &\leq \tau \delta \\ &< \max \left\{ \|\mathcal{F}(x_k^\delta) - y^\delta\|_Y, \|\Delta y_k^\delta - \mathcal{A}_k \Delta x_k^\delta\|_Y \right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit $k = 0, 1, \dots, n^* - 2$ erfüllt ist. Wird der zweite Summand auf der rechten Seite in Gleichung (3.36) vernachlässigt, so ergibt sich mit dem Abbruchkriterium (3.33) das Levenberg-Marquardt Verfahren, welches zu den inexakten Newton-Verfahren zählt, vgl. Rieder (2003, Kap. 7).

4 Experimentelle Datenermittlung

Im Rahmen dieser Arbeit muss zwischen zwei in ihrer Bedeutung und Ausführung völlig verschiedenen Experimenten unterschieden werden. Im Vordergrund der Betrachtungen stehen dabei die Messungen auf der Basis der Ultraschall-elastografie an Probenkörpern aus gewebeähnlichem Material, die als Phantome bezeichnet werden. Während im Unterkapitel 4.1 die Grundprinzipien des Ultraschalls im Allgemeinen und der Messmethode der Elastografie im Besonderen vorgestellt werden, erfolgt in Abschnitt 4.3 eine Beschreibung und kontinuumsmechanische Betrachtung der Elastografieversuche, die in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurden. Bei der Darstellung der Grundlagen wird auf die Beschreibung technischer Details, die das Fachgebiet der Hochfrequenztechnik betreffen, bewusst nicht eingegangen und stattdessen auf die Arbeiten von Kuttruff (1988), Christensen (1988) und insbesondere Khaled (2007) verwiesen. So werden u. a. Ausführungen bzgl. der Genauigkeit der Ultraschallmessungen und der angewandten Elastografiesysteme ausgespart.

Das Kapitel 4.2 wird dazu genutzt, auf das verwendete Probenmaterial auf der Basis von Polyvinylalkohol (PVA) einzugehen. Nach einer kurzen Einleitung wird in Unterkapitel 4.2.1 der Herstellungsprozess der Probenkörper für die Ultraschallmessung erläutert. Insbesondere wird in Abschnitt 4.2.2 der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte einaxiale Druckversuch betrachtet, mit dem das Materialverhalten eines homogenen Probenkörpers aus Polyvinylalkohol-Kryogel (PVA-K)¹ unter einer quasi-statischen Belastung analysiert wird. Hierbei wird bewusst auf das Wort *Materialmodell* verzichtet, da diese Vergleichsmessungen nicht darauf ausgerichtet sind, eine Materialbeschreibung für PVA-K zu finden, durch die jede beliebige Belastung beschrieben werden kann, sondern lediglich dazu dienen soll, die Ergebnisse aus den Elastografiemessungen absichern zu können.

4.1 Grundlagen der Ultraschallelastografie

Dieser Abschnitt wird dazu genutzt, die grundlegenden Prinzipien der Ultraschallelastografie vorzustellen. Laut Kuttruff (1988, Kap. 0) werden als Ultraschall Wellen bezeichnet, deren Frequenz oberhalb der Hörschwelle von 20 kHz liegen.

¹κρυος(kryos)=Frost, Eis. PVA-K wird in der englischsprachigen Literatur als *polyvinyl alcohol cryogel* bezeichnet und dort entsprechend durch *PVA-C* abgekürzt.

Bevor eine Beschreibung des Ultraschallmessprinzips erfolgen kann, ist es zur Vereinfachung der folgenden Darstellung sinnvoll, zunächst die fachspezifischen Richtungsbezeichnungen einzuführen, die auch eine Verbindung zu den in Kapitel 2 verwendeten Koordinatenbezeichnungen herstellen. In der Ultraschallmesstechnik wird die Richtung der Strahlachse als axiale Richtung bezeichnet, die im Folgenden durch die Koordinate X_1 bzw. x_1 gekennzeichnet wird. Die Richtungen senkrecht dazu werden als transversal bezeichnet. Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Linearsonden als Ultraschallköpfe eingesetzt werden, die die Aufnahme zweidimensionaler Ultraschallbilder ermöglichen, kann bei den Richtungsbezeichnungen noch weiter differenziert werden. So wird die senkrechte Richtung, die in der Aufnahmeebene liegt, laterale Richtung genannt und in dieser Arbeit durch die Koordinate X_2 bzw. x_2 gekennzeichnet. Die Richtung orthogonal zur Abbildungsebene heißt elevational und entspricht hier X_3 bzw. x_3 .

Die meisten der heutzutage in der medizinischen Diagnostik eingesetzten Ultraschallgeräte arbeiten auf Basis des Impuls-Echo-Prinzips. Bei dieser Reflektionsultraschallmessung werden nach Kuttruff (1988, Kap. IX) die Schallwellen von den in einer Ultraschallsonde angeordneten Kristallen durch den piezoelektrischen Effekt erzeugt und anschließend wieder detektiert. Dem piezoelektrischen Effekt liegt die Eigenschaft bestimmter Materialien zugrunde, dass in den Körpern bei einer gerichteten Verformung eine messbare elektrische Spannung erzeugt wird und umgekehrt, vgl. Kuttruff (1988, Kap. III). Die in der Ultraschallmedizintechnik eingesetzten Kristalle dienen während einer Messung somit als Sender und Empfänger. Der Ablauf des Impuls-Echo-Verfahrens kann vereinfacht für ein einzelnes Piezoelement wie folgt beschrieben werden. Zunächst gelangt über eine Sende-/Empfangsweiche ein kurzer Spannungspuls zur Piezokeramik, an der eine elektromechanische Energieumwandlung erfolgt. Die so erzeugte Schallwelle breitet sich in dem angrenzenden Medium aus und wird an einer akustischen Grenzschicht zum einen Teil reflektiert, während ein Teil der Welle transmittiert und sich mit verminderter Schallleistung in tiefer liegende Materialsichten ausbreitet. Die vom Schallwandler empfangenen, reflektierten Anteile der Schallwelle werden in ein elektrisches Signal gewandelt, verstärkt und digitalisiert.

Die Visualisierung des detektierten, hochfrequenten Echosignals kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen, wobei verschiedene Darstellungsformen in der Medizintechnik möglich sind, vgl. Kuttruff (1988, Kap. IX). Dabei besitzen im Rahmen dieser Arbeit lediglich A- bzw. B-Scan Relevanz. Der A-Scan, auch A-Mode genannt, entspricht der Darstellung der Einhüllenden der Schallintensität² I des Echosignals über die Laufzeit t , vgl. Bild 4.1. Unter der Verwendung der Beziehung

$$X_1 = \frac{c \cdot t}{2} \quad (4.1)$$

²Zur Definition der Schallintensität wird auf Christensen (1988, Kap. 3) verwiesen.

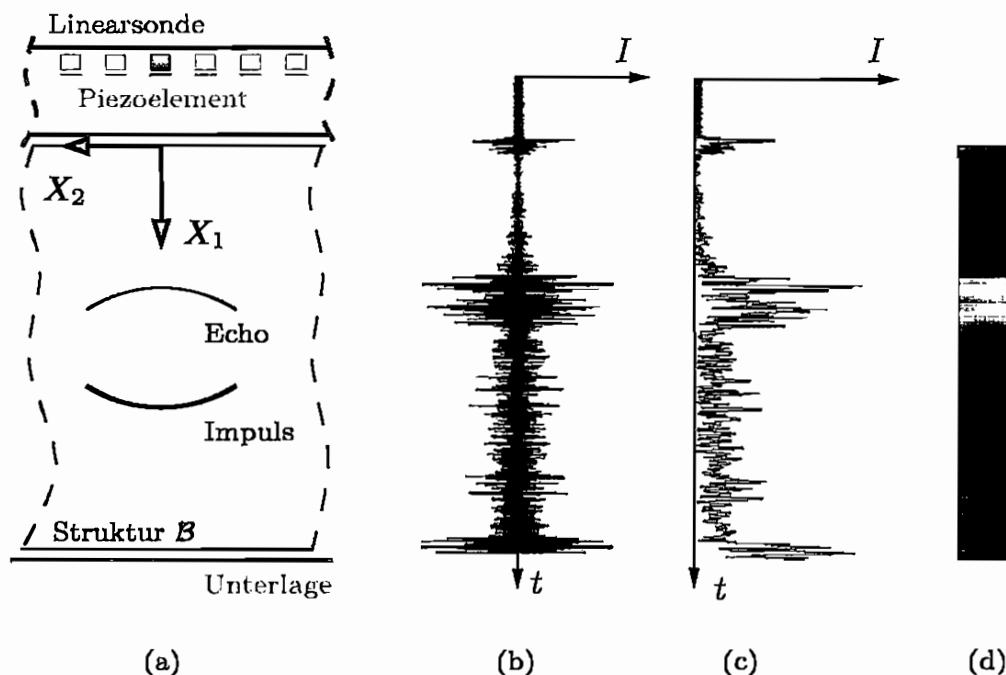


Bild 4.1: Ultraschallmessungen: (a) Skizze einer Ultraschallmessung, (b) das von einem Piezoelement detektierte, hochfrequente Echosignal, (c) die A-Linie als Einhüllende des Echosignals und (d) die aus der A-Linie gewonnene Spalte eines B-Modus

kann bei bekannter Schallgeschwindigkeit c eine äquivalente Darstellung hinsichtlich der Eindringtiefe X_1 erfolgen. Durch Demodulation kann eine A-Linie in einen Helligkeitsmodus überführt werden, den B-Scan, der die Amplituden in Form von Graustufen darstellt, vgl. Bild 4.1.

Ein wichtiger und in der Medizintechnik häufig eingesetzter Ultraschallwandler ist die Linearsonde, auch Linear Array genannt. Dieser Ultraschallkopf besteht aus vielen gleichartigen Piezoelementen, die in gleichen Abständen nebeneinander angeordnet sind, vgl. Kuttruff (1988, Kap. X) und Bild 4.1. Die Wandler-elemente, die sich in einem mit Wasser gefüllten Gehäuse befinden, dessen Unterseite mit einem schalldurchlässigen Fenster versehen ist, können über einen elektrischen Schalter entweder einzeln oder gruppenweise ein- und ausgeschaltet werden.

Ein bedeutendes Charakteristikum der Linearsonde ist das stark differierende Auflösungsvermögen in axialer und lateraler Richtung, vgl. Christensen (1988, Kap. 5). Unter dem Auflösungsvermögen wird dabei ein Maß für die Fähigkeit einer Messeinrichtung verstanden, nah beieinander liegende Objekte getrennt wahrnehmen zu können. Die laterale Auflösung bei einer Linearsonde wird im Wesentlichen durch Anzahl und Geometrie der nebeneinander angeordneten, zusammengeschalteten piezoelektrischen Kristalle bestimmt und ist demzufolge vom Design der Sonde abhängig. Die Auflösung in axialer Richtung wächst mit

steigender Frequenz und beträgt bis zum Zehnfachen der lateralen Auflösung. Im Allgemeinen wird daher angestrebt, mit möglichst hohen Frequenzen zu arbeiten. Da jedoch mit steigender Frequenz die maximale Eindringtiefe $X_{1,\max}$ abnimmt, wird der zulässige Frequenzbereich durch die Höhe des angestrebten Darstellungsbereichs nach oben beschränkt.

Wie in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, handelt es sich bei der Elastografie um ein Messverfahren mit der Zielsetzung, die Steifigkeit in einer inhomogenen Struktur \mathcal{B} orts aufgelöst zu visualisieren. Wird davon ausgegangen, dass das betrachtete inhomogene Medium isotrop, hyperelastisch und (nahezu) inkompressibel ist, so wird die Steifigkeit des Materials im Wesentlichen durch die Materialparameter beschrieben, die in der spezifischen Formänderungsenergie aus Gleichung (2.73) bzw. den anderen Darstellungsformen aus Abschnitt 2.3 auftreten. Werden zunächst nur Deformationen eines Körpers betrachtet, bei denen die auftretenden Verschiebungen, Verdrehungen und Verzerrungen klein sind, so kann die linearisierte Elastizitätstheorie aus Abschnitt 2.5 angewendet werden. Dann fällt die Problemstellung entsprechend der Begriffsbildung aus Abschnitt 1.2 in den Bereich der linearen Elastografie. In diesem Fall entspricht die Visualisierung der Steifigkeit des Materials der orts aufgelösten Darstellung des Elastizitätsmoduls E bzw. des Schubmoduls μ . Damit eine solche Darstellungsform möglich ist, muss durch das Messverfahren die Materialparameterfunktion in Abhängigkeit von den Materialpunkten bestimmt werden. Es ist also im Fall der linearen Elastografie die Funktion

$$\mu = \mu(\mathbf{X}) \quad \text{für alle } \mathbf{X} \in B_0 \quad (4.2)$$

zu bestimmen, die im Folgenden als Schubmodulverteilung oder allgemeiner als Materialverteilung bezeichnet wird. Treten auch größere Deformationen auf, so dass eine Beschreibung mittels der linearisierten Theorie nicht mehr zulässig ist, so sind zur Beschreibung der Deformation eines Körpers \mathcal{B} bei Vorgabe einer spezifischen Formänderungsenergie z. B. vom Typ (2.77) ggf. mehrere, voneinander linear unabhängige Materialverteilungen μ_i und unter Umständen α_i zu bestimmen.

Da laut Ophir et al. (2002) im Allgemeinen die Steifigkeit nicht mit der Echogenität eines Materialpunkts korreliert, ist mit einer direkten Darstellung der Materialverteilung durch einen der gängigen Ultraschallabbildungsverfahren nicht zu rechnen. Demzufolge können die hochfrequenten Echodaten bzw. die anderen Darstellungsarten lediglich herangezogen werden, um die Materialparameter im Sinne einer Parameteridentifikation indirekt zu bestimmen. In der Terminologie des Kapitels 3 entsprechen die gesuchten Materialparameterverteilungen somit den unbekanntem Ursachen. Die beobachtbare Wirkung ist bei einer Elastografiemessung das Verschiebungsfeld \mathbf{u}^g , das sich aus dem Vergleich zweier Ultraschallmessergebnisse ergibt, die in zwei unterschiedlichen Verformungszuständen einer Struktur \mathcal{B} aufgenommen wurden.

Abhängig von den gewählten Messdaten werden zur Bestimmung des gemessenen Verschiebungsfelds \mathbf{u}^g unterschiedliche Verfahren eingesetzt, vgl. Ophir et al.

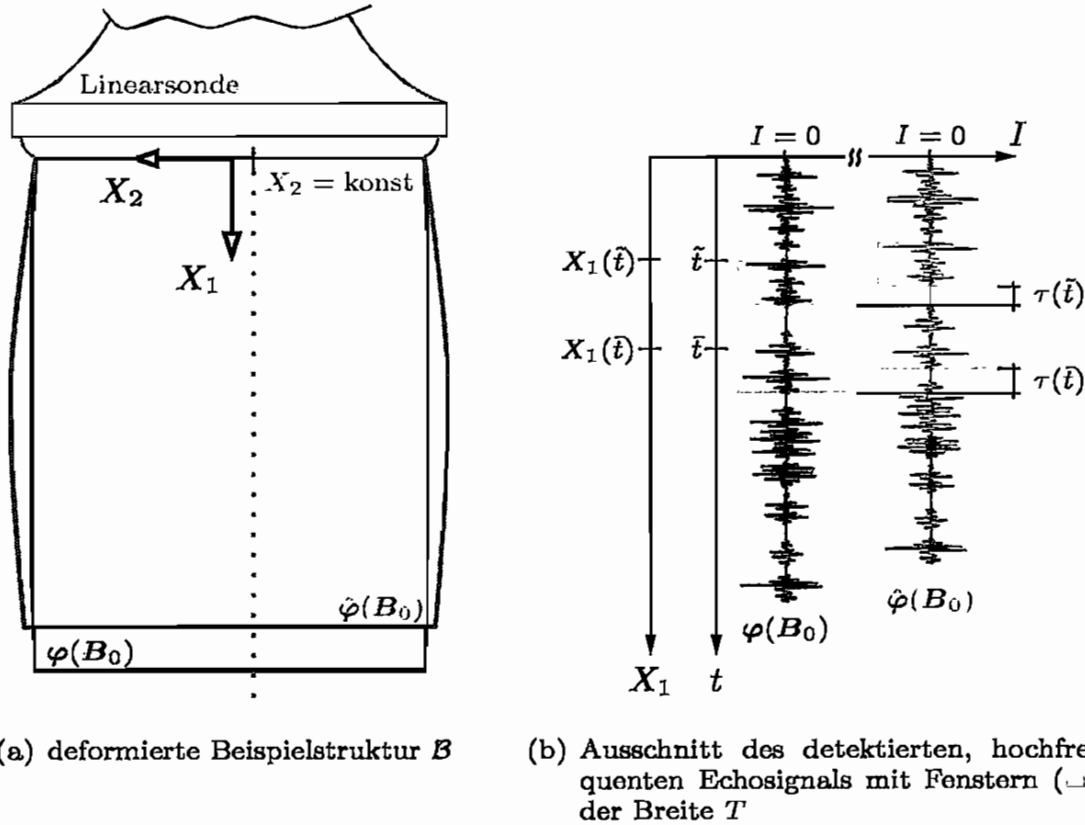


Bild 4.2: Prinzip der HF-Ultraschallelastografie

(1991), Skovoroda et al. (1994) oder Pesavento et al. (2000), um nur einige wenige Ansätze zu nennen. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich die Verfahren kurz beschrieben, die im Folgenden ihre Anwendung finden. Eine ausführlichere Darstellung kann Khaled (2007) entnommen werden.

Begonnen wird mit der Elastografie basierend auf hochfrequenten Echodaten, vgl. Bild 4.2, die im folgenden HF-Ultraschallelastografie genannt wird. Bildteil 4.2(a) stellt dabei einen Schnitt durch eine beliebige Struktur \mathcal{B} für zwei unterschiedliche Deformationszustände dar, wobei die unterschiedlichen Verformungszustände durch $\varphi(\mathbf{B}_0)$ und $\hat{\varphi}(\mathbf{B}_0)$ gekennzeichnet werden. Weiterhin gelte, dass die zu den Deformationen φ und $\hat{\varphi}$ korrespondierenden Verschiebungen klein seien und sich somit die Verformungen durch die linearisierte Elastizitätstheorie hinreichend genau beschreiben lassen. Die im Bildteil 4.2(b) dargestellten Diagramme geben die hochfrequenten Echosignale einer Bildlinie für $X_2 = \text{konst}$ wieder, die in den unterschiedlichen Deformationszuständen φ und $\hat{\varphi}$ detektiert werden. Neben der Zeitachse t wird in diesem Bild zusätzlich die axiale Richtung X_1 angegeben, deren Skalierung sich durch die Umrechnung entsprechend Gleichung (4.1) ergibt. In den dargestellten Diagrammen tritt zwischen den Signalen eine zeitabhängige Laufzeitverschiebung $\tau = \tau(t)$ auf. Wird die Kenntnis der Schallgeschwindigkeit c eines Materials vorausgesetzt, so kann bei der Annahme einer quasi-kontinuierlichen Auflösung und bei bekannter Laufzeitver-

schiebung τ die axiale Verschiebung $u_1^g = u_1^g(t) = u_1^g(X_1, X_2 = \text{konst})$ bestimmt werden durch

$$u_1^g(X_1, X_2 = \text{konst}) = \frac{1}{2} c \tau (X_1(t), X_2 = \text{konst}). \quad (4.3)$$

Um axial aufgelöst rechnen zu können, werden die Ultraschallechosignale gefenstert, was einer Segmentierung der Echosignale in T -breite Zeitabschnitte entspricht, vgl. auch die Darstellung in Bild 4.2(b). Je kleiner die Fensterbreite, um so höher ist die Auflösung bzgl. der Zeitpunkte t , für die eine Verschiebungsschätzung erfolgt. Gleichzeitig jedoch wächst der numerische Aufwand und die Rauschanteile des axialen Verschiebungsfelds u_1^g nehmen zu, so dass die Fensterdimensionierung diesem Dualismus Rechnung tragen muss.

Neben dem axialen Verschiebungsfeld u_1^g , das durch die HF-Elastografie bestimmt wird, treten im Allgemeinen noch Verschiebungen in lateraler und elevationaler Richtung auf, die durch die angegebene Messanordnung nicht erfasst werden können. Darüber hinaus führen Verschiebungen der Materialpunkte in transversaler Richtung dazu, dass einige Signalteile aus dem Zustand $\varphi(B_0)$ im Verformungszustand $\hat{\varphi}(B_0)$ nicht mehr wiedergefunden werden, vgl. Pesavento (1999, Kap. 4). Dies führt zu so genannten Dekorrelationen bei der Berechnung der Axialkomponente u_1^g , d. h., die Ergebnisqualität der Berechnung des axialen Verschiebungsfelds nimmt ab, vgl. Khaled (2007). Daher wird bei der HF-Elastografie angestrebt, eine Struktur \mathcal{B} nur solchen Einwirkungen auszusetzen, bei denen die auftretenden Verschiebungen und Verzerrungen klein sind. Eine untere Grenze für die Einwirkung wird dabei zum einen durch den Versuchsaufbau zum anderen durch die Fensterbreite T gegeben.

Ein anderes Verfahren zur Schätzung des Verschiebungsfelds u^g , bei dem die Einschränkung, dass nur kleine Deformationen auftreten dürfen, fallen gelassen werden kann, bietet die B-Mode- oder B-Bild-Elastografie. Wie der Name impliziert, werden dabei die Verschiebungen durch Auswerten von B-Mode-Daten gewonnen, wobei sich das Messprinzip, der Vergleich zweier Aufnahmen aus unterschiedlichen Deformationszuständen, nicht ändert. Die Ermittlung des Verschiebungsfelds erfolgt mittels so genannter Block-Vergleichs-Algorithmen, auch Block-Matching-Algorithmen genannt, deren Funktionsweise an dieser Stelle kurz erläutert wird.

Zur Realisierung eines solchen Verfahrens werden zwei Ultraschall-B-Bilder B und \hat{B} betrachtet, die sich aus $M_1 \times M_2$ Bildpunkten zusammensetzen und zu den Verformungszuständen $\varphi(B_0)$ und $\hat{\varphi}(B_0)$ korrespondieren. Um nun das Verschiebungsfeld zu bestimmen, durch das Bild B in die Aufnahme \hat{B} übergeht, werden in B zunächst Blöcke der Größe $n_1 \times n_2$ definiert, die z. B. über die Rasterkoordinaten (i, j) eines Eckpunkts oder des Mittelpunkts identifiziert werden können, siehe Bild 4.3. Darüber hinaus wird in Bild \hat{B} ein hinreichend großer Suchbereich mit den Abmessungen $N_1 \times N_2$ für jeden Block b individuell festgelegt, in dem b nach der Deformation vermutet wird. Wurde das Segment b im Suchfenster der Aufnahme \hat{B} gefunden, so kann für den betrachteten Block ein

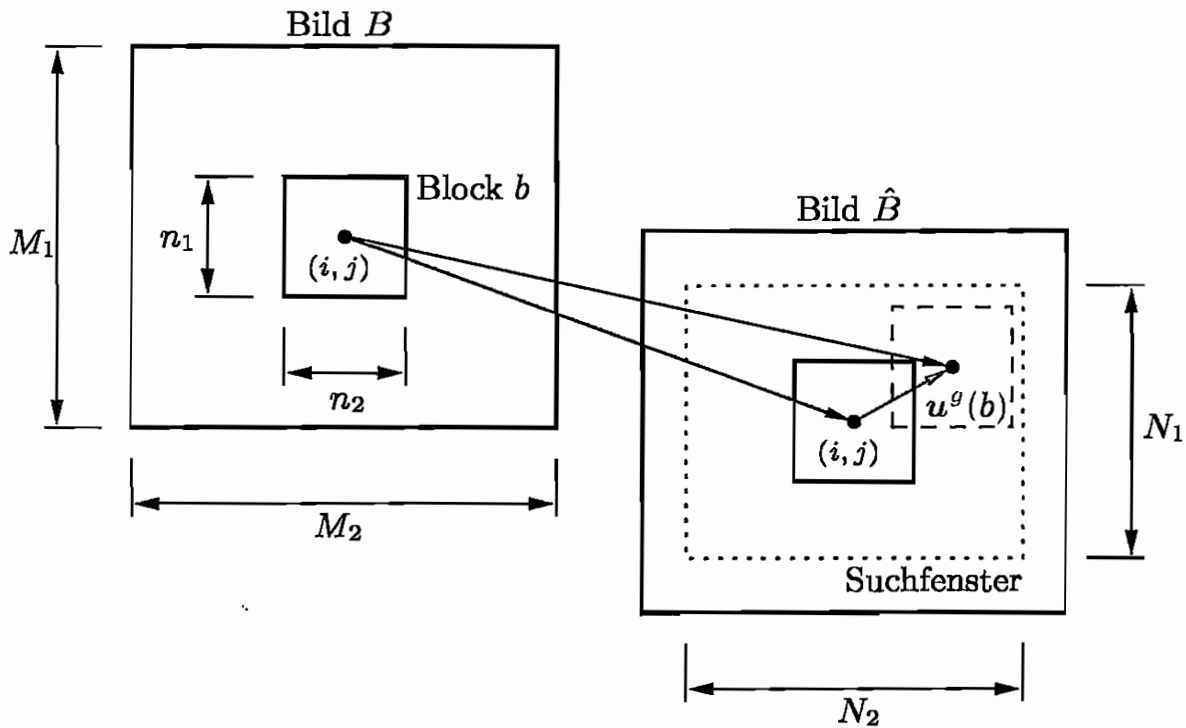


Bild 4.3: Funktionsweise eines Block-Matching-Algorithmus

Verschiebungsvektor $u^g = u^g(b) = u^g(i, j)$ definiert werden. Ist der Suchprozess für alle Segmente b aus Bild B abgeschlossen, so kann unter Berücksichtigung der Auflösung in axialer und lateraler Richtung ein diskretisiertes Verschiebungsfeld u^g angegeben werden.

Nach welcher Strategie im Suchfenster nach einem Block b gefahndet wird und durch welches Abbruchkriterium das Ereignis „Block gefunden“ realisiert wird, hängt maßgeblich vom gewählten Verfahren ab, und soll an dieser Stelle nicht weiter thematisiert werden. Eine ausführliche Zusammenstellung und Analyse gängiger Block-Vergleichs-Algorithmen wie der Fixed-Size-Block-Matching-Methode (FSBM) oder dem Variable-Size-Block-Matching-Verfahren (VSBM) kann Khaled (2007) entnommen werden. Gemeinsam ist allen Methoden, dass die Auflösung, mit der das Verschiebungsfeld bestimmt wird, wächst, wenn die Blockgröße kleiner wird. Da im Fall der Verfeinerung der Rechenaufwand stark ansteigt und auch die Rauscheffekte im Verschiebungsfeld zunehmen, muss die Blockgröße in der Art und Weise angepasst werden, dass sie den Anforderungen nach möglichst kurzer Berechnungsdauer und hinreichender Genauigkeit gerecht wird.

Die bisherigen Ausführungen lassen vermuten, dass die B-Mode-Elastografie das Potential besitzt, alle Verschiebungskomponenten in der Aufnahmeebene ermitteln zu können. Ultraschallaufnahmen haben jedoch die bereits erwähnte Eigenschaft, dass das Auflösungsvermögen in axialer Richtung wesentlich größer ist als in lateraler. Dies führt dazu, dass die Lateralverschiebung wesentlich un-

genauer berechnet wird als die Axialkomponente, vgl. Lubinski et al. (1996). Da die Fehlerschranken von vielen Faktoren wie dem vorhandenen Signal-Rausch-Verhältnis des Aufnahmesystems oder der zugrunde gelegten Fehlerverteilung abhängen, kann im Allgemeinen der Unterschied in beiden Komponenten nur abgeschätzt werden. In der Regel ist die Verschiebungsmessung in lateraler Richtung um eine Zehnerpotenz ungenauer, vgl. Oberai et al. (2004). Daher wird im Rahmen dieser Arbeit auch bei der B-Mode-Elastografie auf eine Ermittlung der Lateralkomponente verzichtet und lediglich das axiale Verschiebungsfeld u_1^g bestimmt.

4.2 Gewebephantome aus Polyvinylalkohol

Unter Phantomen werden in der medizinischen Anwendung Probenkörper verstanden, die in Versuchen und Experimenten Testobjekte aus menschlichem oder tierischem Gewebe ersetzen. Das Phantommaterial sollte dabei im günstigsten Fall natürlich so beschaffen sein, dass es die Eigenschaften von ausgewählten Gewebearten gut imitiert. Der Begriff Eigenschaften deckt dabei alle physikalischen Merkmale ab, die bei einem Versuch an Gewebe von Bedeutung wären. Bezogen auf die Ultraschallelastografie bei Verwendung einer quasi-statische Beanspruchung sind hier in erster Linie mechanische Eigenschaften, wie Kompressibilität oder Steifigkeit, als auch akustische Charakteristika von Interesse. Die akustischen Merkmale sind nach Hiltawsky (2004, Kap. 6), dass die Ultraschallwellen im gewünschten Frequenzbereich im Medium ausbreitungsfähig sind und dass das Medium kleine und ausreichend viele Variationen in der Schallgeschwindigkeit bzw. Dichte aufweist, damit genügend Streuzentren vorhanden sind. Hierdurch entsteht das für Ultraschallbilder typische Specklemuster.

Neben dem Vorteil, dass Phantommaterialien leichter verfügbar sind als tierisches oder menschliches Gewebe, besteht bei der Herstellung der Proben die Möglichkeit, definierte Geometrien zu erzeugen. Befindet sich ein Abbildungsverfahren, wie die quantitative Ultraschallelastografie, in einem frühen Entwicklungsstadium, so kann die Methode zunächst an Strukturen getestet werden, die nicht die Komplexität von echtem Gewebe aufweisen. Darüber hinaus wird die erzeugte Geometrie in der Regel als „wahr“ angesehen und kann dazu verwendet werden, die Ergebnisse der Methode zu überprüfen. Unter der Geometrie werden hier weniger die äußeren Abmessungen der Phantome verstanden, sondern vielmehr die Form von Einschlüssen, die sich im Innern des Phantoms befinden und weicher oder härter sind als das umgebende Material. Neben der Herstellung von Probenkörpern mit geometrisch definierten Einschlüssen ist es natürlich außerdem sinnvoll, bei der Fertigung der Phantome die Steifigkeit des Materials zu kontrollieren, so dass auch diesbezüglich das Ergebnis der Elastografiemessung überprüft werden kann.

Soll durch ein Phantom das Verhalten von Weichgewebe wiedergegeben werden, so werden in der Regel Hydrogele eingesetzt. Unter einem Hydrogel wird dabei ein Polymer verstanden, welches mehr als 20% Wasser enthält. In der

Literatur werden zur Herstellung von weichgewebeähnlichen Phantomen unterschiedliche Materialien genannt, die jeweils ihre Vor- und Nachteile besitzen.

Ein weit verbreitetes Phantommaterial wird auf der Basis der Biopolymere Gelatine und Agar-Agar³ erzeugt, vgl. u. a. Skovoroda et al. (1994), Pesavento (1999), Doyley et al. (2000) und Oberai et al. (2004). Wird nach Babel (1996) eine warme, wässrige Gelatinelösung mit einem Gelatinegehalt von mehr als 0,5 % langsam auf unter 35–40 °C abgekühlt, nimmt zunächst die Viskosität der Lösung drastisch zu. Wird die Temperatur der Lösung weiter abgesenkt, geliert das Sol durch physikalische Vernetzung u. a. auf der Basis von Wasserstoffbrückenbindungen. Beeinflusst wird die Steifigkeit des Gels im Wesentlichen vom molekularen Aufbau der Ausgangsgelatine, der Temperaturführung beim Erstarren, dem pH-Wert und von möglichen Zusatzstoffen. Ein großer Nachteil dieses Phantommaterials ist nach Hiltawsky (2004, Kap. 6) die geringe Haltbarkeit und die damit einhergehende kurze Verwendbarkeit. Darüber hinaus sind die erreichbaren Festigkeiten bei Gelatine- bzw. Agar-Agar-Phantomen sehr begrenzt, was sich u. a. bei Blutgefäßmodellen nachteilig auswirkt, vgl. Surry et al. (2004).

Ein anderes Phantommaterial, welches über einen deutlich längeren Zeitraum Materialstabilität besitzt und das abhängig vom Herstellungsprozess deutlich höhere Festigkeiten aufweist, ist Polyvinylalkohol-Kryogel (PVA-K), vgl. Chu & Rutt (1997) und Surry et al. (2004). Dieses Material besteht dabei aus den zwei ungiftigen Inhaltsstoffen Wasser und Polyvinylalkohol (PVA). PVA selbst entsteht aus Polyvinylazetat durch Hydrolyse, einem Prozess, der stets unvollendet bleibt und somit zu einer Mischung aus PVA und Polyvinyl Azetat führt, wobei der Hydrolysegrad des PVA dem Reinheitsgrad des Endprodukts entspricht, vgl. Surry et al. (2004). Eine wässrige Suspension aus PVA mit hohem Hydrolysegrad kann durch wiederholte Gefrier-Tau-Zyklen zu einem querverbundenen bzw. physikalisch vernetzten Gel versteift werden. Während der Vernetzungsvorgang des Polymers in der Literatur unumstritten ist, ist die Begründung dafür auf molekularer Ebene laut Peppas & Stauffer (1991) ungeklärt. Nach Chu & Rutt (1997) entstehen während des Gefrierprozesses kristalline Kerne, die während des Auftauvorgangs zu Kristallen anwachsen, was zur Querverstrebung des Polymers führt. Hingegen bilden sich laut Watase & Nishinari (1989) kristalline Gebiete durch Wasserstoffbrückenbindungen und Van-der-Waals-Bindung zwischen den Polymerketten aus. Nach Kawanishi et al. (1987) kann das Gelierungsphänomen auf eine flüssig/flüssig-Phasentrennung in polymerreiche und polymerarme Regionen durch spinodale Entmischung zurückgeführt werden. Unabhängig von der molekularen Begründung nehmen die kristallinen Bereiche in PVA-K durch Wiederholen der Gefrier-Auftau-Zyklen immer weiter zu, was zu einer Versteifung des Hydrogels führt. Neben der Zyklenzahl wird nach Surry et al. (2004) die Kristallisation maßgeblich durch die Frierdauer, die Auftaudauer und die PVA-Konzentration der wässrigen Suspension beeinflusst, wobei Chu & Rutt (1997)

³ Agar-Agar ist ein Geliermittel aus Meeresalgen.

der Länge des Gefrierprozesses eine untergeordnete Bedeutung beimessen. Vielmehr weisen die Autoren darauf hin, dass die Auftaugeschwindigkeit die Kristallisation maßgeblich beeinträchtigt. Je langsamer dieser Prozess durchgeführt wird, um so mehr Querverbindungen bildet das PVA-K aus. Ein Nachteil der PVA-K Phantome gegenüber den Gelatine- bzw. Agar-Agar-Phantomen ist der vergleichsweise zeitaufwändige Herstellungsprozess.

Im Rahmen dieser Arbeit werden aufgrund ihrer längeren Haltbarkeit und ihrer universelleren Einsetzbarkeit ausschließlich Phantome aus PVA-K benutzt. Da die Materialparameter der Phantome maßgeblich durch den Herstellungsprozess beeinflusst werden, wird dieser im Abschnitt 4.2.1 beschrieben. Dabei werden vor allem die Aspekte aufgegriffen, die die Elastografie- und die Vergleichsmessungen betreffen. Alle im Abschnitt 4.2.1 erarbeiteten Erkenntnisse beziehen sich dabei nicht nur auf die Phantome, sondern auch auf die homogenen Zylinderproben, die in den Vergleichsmessungen eingesetzt werden.

Die Vergleichsmessung selbst, ein einaxialer Druckversuch, wird in Unterabschnitt 4.2.2 genauer analysiert. Hierbei wird weniger auf die Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Versuchsdurchführung eingegangen, vgl. hierzu Arnold (2006, Kap. 3 bis 5), sondern vielmehr eine Auswertung der Versuchsergebnisse vorgenommen.

4.2.1 Herstellungsprozess der Phantome

Ziel der Phantomherstellung im Sinne dieser Arbeit ist es, Quader mit zylindrischen Einschlüssen aus PVA-K zu produzieren. Wie in den einführenden Erläuterungen zu gewebeimitierenden Phantomem aus PVA deutlich wurde, hängen deren Materialeigenschaften dabei von vielen Parametern des Fertigungsprozesses ab.

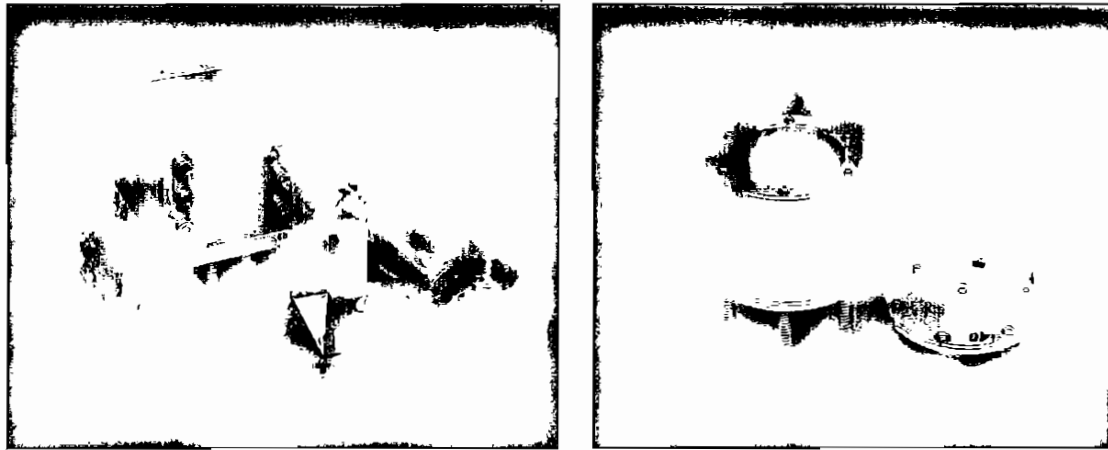
Bei der Phantomherstellung wird angestrebt, realistische akustische und mechanische Eigenschaften zu erzeugen, wobei die Steifigkeit des Materials lediglich durch die Gefrier-Auftau-Zyklenzahl variiert werden soll, während andere Faktoren unterdrückt werden, vgl. hierzu auch Unterabschnitt 4.2.2.

Bei der Herstellung der Phantome wird zunächst 50 g PVA-Granulat⁴ in ein Becherglas gegeben. Damit sich die PVA-Granulatkügelchen später besser in Wasser lösen, werden zunächst 12,5 ml Ethanol⁵ hinzugegeben. Durch Einsatz eines Magnetrührers mit Rührfisch werden die beiden Ingredienzien zwei Minuten lang vermengt. Anschließend werden der Mischung unter fortwährendem Rühren 500 ml Tafelwasser, erneut 2,5 g Ethanol und 5 g Kieselgel⁶ beigefügt, wobei durch das Kieselgel Ultraschallstreuungszentren generiert werden, vgl. Hiltawsky (2004, Kap. 6). Nach Ablauf von weiteren zehn Minuten wird die Heizplatte auf 150 °C eingeschaltet und die Suspension bis zum Erreichen von 70 °C erhitzt.

⁴Fa. MERCK, PVA 145000, Hydrolysegrad $\geq 98\%$

⁵Fa. MERCK, Ethanol absolut zur Synthese, Reinheit (GC) 99,5 %

⁶Fa. MERCK, TLC Kieselgel 60H, mittlere Korngröße 60 μm



(a) Phantom- und Einschlussform, in der Mitte die Halterung zum Einbauen der Zylindereinschlüsse

(b) gedrungener Zylinder zur Herstellung der Vergleichsproben

Bild 4.4: Probenformen zur Herstellung der Phantome und der Vergleichsproben

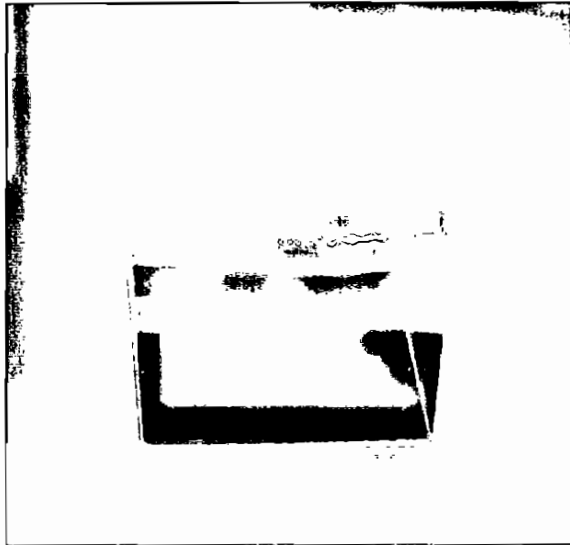
Ist das Temperaturniveau erreicht, wird die Suspension noch weitere 30 Minuten erwärmt. Dabei bleibt die Temperatur des zähflüssigen Gemischs in einem Temperaturbereich zwischen 70°C und 90°C . Nach Verstreichen der 30 Minuten wird die Suspension in einem Wasserbad auf ungefähr 45°C abgekühlt und dabei durch gelegentliches Umrühren gewährleistet, dass sich keine Haut auf der Oberfläche der Flüssigkeit bildet. Anschließend wird die Suspension in eine der in Bild 4.4 dargestellten Aluminiumformen⁷ gefüllt, wobei darauf geachtet werden muss, dass keine Luftbläschen in der Suspension verbleiben. Durch Bildteil 4.4(a) werden die Behältnisse zur Herstellung der Phantome dargestellt. Abbildung 4.4(b) zeigt eine Form zur Herstellung der Vergleichsproben.

Nach dem Verfüllen der Suspension werden die Behälter verschlossen und daraufhin im Eisfach eines Standardkühlgeräts⁸ bei einer Temperatur von ungefähr -17°C für 19 Stunden gelagert. Anschließend werden die Proben dem Eisfach entnommen und vier Stunden bei Raumtemperatur aufgetaut. Durch Wiederholen dieses Gefrier-Auftau-Zyklus kann dann die Steifigkeit der einzelnen Proben verändert werden.

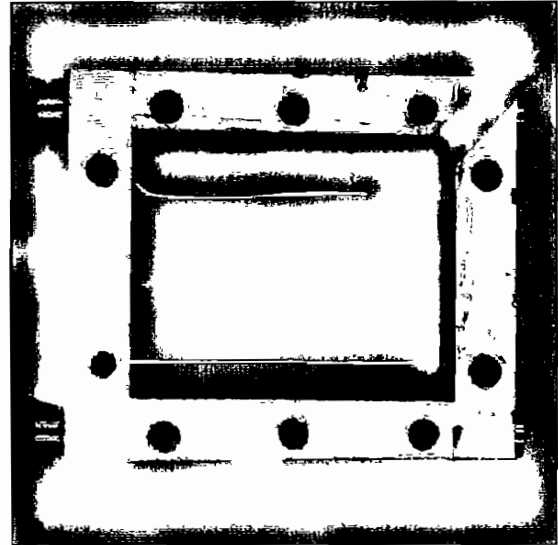
Um ein inhomogenes Phantom mit einem festen, zylindrischen Einschluss zu erzeugen, wird zunächst eine PVA-K Probe mit einer Zylinderform erzeugt und anschließend einer definierten Anzahl z_1 von Gefrier-Tau-Zyklen ausgesetzt. Dann wird der Einschluss aus der Probenform entfernt und, wie in Bild 4.5 dargestellt, zunächst in ein Metallgestell und anschließend in die Quaderform eingebaut. Dieser Vorgang wird mit einem erneuten Herstellungsprozess der-

⁷Technische Zeichnungen der Probenformen können dem Anhang C entnommen werden.

⁸Bosch KTL 75420, Gefrierleistung 2 kg/24h



(a) zweimal gefrorener Einschluss im Aluminiumgestell



(b) Phantom mit einem Einschluss während des Verfüllvorgangs

Bild 4.5: Herstellungsschritte eines inhomogenen Phantoms

art abgestimmt, dass nach dem Einbau des Einschlusses eine frisch hergestellte Suspension bereit steht. Diese kann nun vorsichtig in den Quader gegossen werden. Ist der Verfüllvorgang beendet, wird die Probe erneut einer Zyklenzahl z_2 ausgesetzt, so dass sich das Verhältnis der Zyklenzahlen von Einschluss und umgebender Matrix zu $(z_1+z_2)/z_2$ ergibt. Weiche Einschlüsse werden erzeugt, in dem zunächst ein quaderförmiges Phantom durch Z_1 Zyklen hergestellt wird, wobei durch eine Metallstange ein Platzhalter in der Probe eingebaut wird. Nach dem letzten Auftauvorgang kann die Stange entfernt und durch eine frisch gefertigte Suspension ersetzt werden. Z_2 -maliges Einfrieren und Auftauen führt hier zu einem Verhältnis von $Z_2/(Z_1+Z_2)$. Durch diesen Herstellungsprozess der Phantome wird gewährleistet, dass zwischen den Einschlüssen und dem umgebenden Material vollständiger Verbund herrscht. Sind alle Zyklen durchlaufen, wird das Phantom aus seiner Form entfernt und in einem mit Tafelwasser gefüllten Kunststoffbehälter in dem zuvor erwähnten Kühlgerät bei einer Temperatur von ungefähr 7°C dauerhaft aufbewahrt und nur zu Messzwecken entnommen. Die Lagerung in Wasser ist erforderlich, um eine Dehydratation des PVA-K zu verhindern.

Der Fertigungsprozess ermöglicht es, die in der Einführung dieses Kapitels erwähnten Parameter, die die Probensteifigkeit beeinflussen, genauer zu analysieren. Da stets die gleiche Herstellungsmethode verwendet wird und somit die PVA-Konzentration für alle Phantome konstant ist, wird sie nicht weiter als Einflussgröße berücksichtigt. Gleiches gilt für die Gefrier- und Auftaudauer. Nicht reguliert werden können die Raten der Temperaturänderung, da die Raumtemperatur nicht exakt geregelt wird. Dabei hat jedoch nach Chu & Rutt (1997) gerade die Auftaugeschwindigkeit einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Steifigkeit

der Probe. Dieser Aspekt wird in Unterabschnitt 4.2.2 erneut aufgegriffen.

Darüber hinaus entsteht eine neue Einflussgröße in Form des Innendrucks p_i aufgrund der Tatsache, dass die Behälter während aller Gefrier- und Auftauvorgänge geschlossen bleiben. Diese Vorgehensweise wird gewählt, damit die Proben nach der Entnahme aus den Aluminiumformen möglichst ebene Oberflächen aufweisen. Eine alternative Methode, die Proben in einem offenen Gefäß herzustellen und anschließend zu schneiden führt nicht zu den gewünschten Ergebnissen. Da die massiven Proben verhältnismäßig weich sind, geben sie bei einem Schneide- bzw. Sägevorgang immer ein wenig nach, so dass auf den Seitenflächen eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Riffelung entsteht. Darüber hinaus sind die Schnittfläche und die angrenzenden Oberflächen nicht mehr orthogonal zueinander. Aufgrund der Herstellung der Phantome in geschlossenen Behältern wird auch die in Bild 4.4 dargestellte, gefederte Lagerung des Bodens und des Deckels gewählt, da die Formen ansonsten aufgrund der Dichteanomalie des Wassers platzen können.

Nach der Erläuterung des Fertigungsprozesses, der u. a. bei der Interpretation der Ergebnisse der Elastografiemessungen in Abschnitt 6.4 noch einmal aufgegriffen wird, wird nun noch auf zusätzliche Besonderheiten eingegangen, die sich durch die Verwendung von PVA-K als Probenmaterial ergeben und die Durchführung der Experimente beeinflussen. Wesentlich ist zum einen die Beobachtung, dass die Abmessungen über den Lagerungszeitraum nicht konstant bleiben. Nachdem der Herstellungsprozess durchlaufen wurde, kriechen die Proben während der Lagerung im Wasserbad. Durch diesen Effekt weitet sich die PVA-Kristallstruktur und Wasser diffundiert in die entstehenden Hohlräume, die Probe schwillt an. Somit kann bei Versuchen nicht angenommen werden, dass die Probenabmessungen und die Innenmaße der Behälter gleich sind. Ferner sind mit Wasser benetzte PVA-K Probenkörper sehr „glitschig“, was sich bei den Annahmen hinsichtlich der Randbedingungen in den Versuchen niederschlägt. Weiterhin ist festzuhalten, dass die Kristallisation des PVA-K während der Lagerung weiter voranschreitet. Dieses Phänomen wird Kristallisation durch Alterung bezeichnet und u. a. von Surry et al. (2004) und Stauffer & Peppas (1992) beschrieben.

4.2.2 Bestimmung der elastischen Materialkonstanten

Das Ziel einer Elastografiemessung ist es, die Materialverteilung in einer weichen, gewebeartigen Struktur zu ermitteln, vgl. Abschnitt 4.1. Wie die Ausführungen in Abschnitt 3.2 zur Analyse inverser Probleme linearer Operatorengleichungen verdeutlichen, kann eine Fehlerabschätzung nur erfolgen, wenn hinreichend viele Erkenntnisse über Eigenschaften der exakten Materialverteilung vorliegen. Diese Informationen sind bei Elastografiemessungen im Allgemeinen jedoch nicht zugänglich.

Um daher die Ergebnisse der Elastografieversuche auf der Basis von Ultraschallmessungen abschätzen zu können, müssen – immer ein Materialmodell als

bekannt vorausgesetzt – die Materialparameter des PVA-K aus Vergleichsmessungen bekannt sein. Unter einem Materialmodell wird hier ein konstitutives Gesetz verstanden, mit dem sich das Materialverhalten von PVA-K bei einer quasi-statischen Beanspruchung beschreiben lässt. Somit werden im Folgenden unter dem Begriff *Parameter* auch nur die zu einem solchen konstitutiven Gesetz gehörenden Materialkennwerte verstanden.

Auf der Suche nach einem geeigneten konstitutiven Gesetz werden eingedenk der Herstellung von PVA-K die Ausführungen aus Abschnitt 2.3 aufgegriffen. Da die Polymerketten in der Suspension in ungeordneter Form vorliegen, wird angenommen, dass auch deren Vernetzung zufällig und daher richtungsunabhängig erfolgt. Somit bietet sich aufgrund der Isotropie und des gummiartigen Charakters die Wahl eines Ogden-Materials an. Da in der Ultraschallelastografie im Rahmen dieser Arbeit lediglich mit Verzerrungen in der Größenordnung von ungefähr 10 % zu rechnen ist, genügt es, wenn das konstitutive Gesetz diesen Dehnungsbereich näherungsweise gut beschreibt. Im Folgenden wird daher das Neo-Hooke-Material betrachtet, welches nach Ogden (1984, Kap. 7) für die Beschreibung von gummiartigen Materialien gut geeignet ist, solange die Deformationen klein sind, wobei der Begriff *klein* nicht weiter quantifiziert wird.

Es gilt nun die Frage zu beantworten, wie eine Vergleichsmessung durchgeführt werden muss, um hinreichend gute Erkenntnisse über die Parameter des Materials zu erhalten. Eine Möglichkeit besteht darin, aus einem Phantom Teilkörper zu entnehmen und an diesen entnommenen Proben die Materialeigenschaften zu bestimmen. Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, lassen sich durch Schneiden von PVA-K jedoch nur sehr schwer definierte Geometrien erzeugen, die in einem geeigneten Versuch eingesetzt werden können. Ist ein extrahierter Teilkörper sehr klein und der Phantomteil, aus dem er entnommen wurde, nur wenigen Gefrier-Auftau-Zyklen ausgesetzt worden, so besteht darüber hinaus die Gefahr, dass das entnommene Segment über- oder unterdurchschnittlich stark kristallisiert ist. Auch wenn im Allgemeinen angenommen wird, dass ein entsprechender Körper homogen ist, so sind derartige Fehlstellen nicht gänzlich auszuschließen. Darüber hinaus würde ein solches Vorgehen unter Umständen die Probe dauerhaft zerstören, so dass der Vorteil der längeren Haltbarkeit im Vergleich zu Gelatine- bzw. Agar-Agar-Phantomen verloren geht.

Eine andere Möglichkeit, die in der Arbeit von Arnold (2006) untersucht wurde, besteht darin, einen Herstellungsablauf zu entwickeln, so dass die Materialkonstanten in Abhängigkeit vom Fertigungsprozess prognostiziert werden können. Ein wichtiger Aspekt ist dabei, einen Versuchsaufbau zu finden, so dass die Versuchsdurchführung für eine einzelne Probe leicht zu realisieren ist, um eine möglichst große Anzahl von Proben testen zu können. Denn aufgrund der Ausführungen zur Entstehung der Festkörper durch physikalische Vernetzung in Abschnitt 4.2 und der Beschreibung des Herstellungsverfahrens in Unterabschnitt 4.2.1 muss davon ausgegangen werden, dass die Materialparameter einer großen Streuung unterliegen. Vor allem das Ziel der einfachen Durchführbarkeit führt dazu, die Materialparameterbestimmung durch einen Druckversuch zu rea-

lisieren. Darüber hinaus weist diese Versuchsdurchführung eine gewisse Analogie zur Elastografiemessung auf, da hier das betrachtete Objekt im Allgemeinen gestaucht wird, vgl. hierzu Abschnitt 4.3, auch wenn selbstverständlich bei beliebigen Materialverteilungen in einem PVA-K Phantom beliebige Deformations- und Spannungszustände auftreten können. Gegen einen Zugversuch sprechen in erster Linie die Befestigungsprobleme der Halterungen. So erscheint eine Klebeverbindung zwischen Einspannvorrichtung und Probe wegen der glatten Oberflächen schwer zu realisieren. Auch eine Klemmvorrichtung scheidet angesichts des sehr weichen Materials aus. Ähnliche Probleme für die Krafteinleitung sind bei Torsionsversuchen zu erwarten.

In der Arbeit von Arnold (2006) wurde der in Abschnitt 4.2.1 beschriebene Herstellungsprozess übernommen, wobei eine Veränderung der Materialparameter nur durch Änderung der Anzahl der Gefrier-Auftau-Zyklen erreicht werden sollte. Da für die Proben eine andere Geometrie gewählt wurde als für die zylindrischen Einschlüsse bzw. die Phantome selbst, werden zwei unterschiedlich große Zylinderproben untersucht, um Rückschlüsse auf eventuell vorhandene Geometrieabhängigkeiten durchführen zu können. Um ein Knicken der Proben auszuschließen, wurden die Zylinder gedrungen ausgebildet, wobei der große Zylinder eine Höhe von $h_g=54$ mm und einen Durchmesser von $d_g=70$ mm hatte, während für die kleine Form $h_k=34$ mm und $d_k=50$ mm galt. Weiterhin wurde durch eine Gefrierzeit von 19 h und eine Auftauzeit von 4 h bzw. eine Gefrier- und Auftauzeit von 16 h und 8 h die Gefrier-Auftau-Periode variiert, was auf die Betrachtung zweier unterschiedlicher Fertigungsprozesse hinausläuft. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Materialkenngrößen vom Gefrier-Auftau-Prozess wurden die Proben zwei bis fünf Zyklen ausgesetzt.

Als Ergebnis der Arbeit zeigte sich, dass sich gleiche Steifigkeiten bei unterschiedlichen Probengrößen nur bei einem 19/4-Zyklus einstellten, somit also zunächst einmal von den gewählten Geometrien weitestgehend unabhängig waren. Darüber hinaus war der Einfluss einer Kristallisation durch Alterung bei der 19/4-Herstellungsvariante klein, vgl. hierzu die einführenden Hinweise in Abschnitt 4.2. Jedoch wurde auch deutlich, dass der Einfluss der Raumtemperatur und der daraus resultierenden Auftaugeschwindigkeit große Bedeutung hat, so dass ohne eine Regelung dieser Einflussgrößen die Materialeigenschaften nicht aus dem Herstellungsprozess abgeleitet werden können. Darüber hinaus ließen die Versuche erkennen, dass sich das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von PVA-K durch ein Neo-Hooke-Materialmodell in einem Dehnungsbereich von null bis ungefähr -12% gut wiedergeben lässt.

Welche Schlüsse lassen sich hieraus für den Einsatz des einaxialen Druckversuchs als Vergleichsmessungen für die Ultraschallelastografie ziehen? Da ohne Regelung der Raumtemperatur und der Auftaurate nicht mit einem Herstellungsprozess gerechnet werden kann, aufgrund dessen die Materialparameter abgeleitet werden können, werden sowohl bei der Herstellung von Einschlusszylindern als auch beim Gießen eines quaderförmigen Phantoms Vergleichsprobenkörper in Form von gedrungenen Zylindern aus der gleichen Suspension hergestellt. Anschlie-

ßend werden alle Behältnisse immer den gleichen Bedingungen ausgesetzt, sowohl während der Gefrier-Auftau-Zyklen als auch während der Lagerung. Aus der Geometrieunabhängigkeit der Materialkennwerte wird nun geschlossen, dass das Material der Vergleichskörper die gleichen Eigenschaften besitzt wie das in den Phantomen eingebaute PVA-K. Darüber hinaus ist keine zeitnahe Durchführung der Elastografie- und der Vergleichsmessung erforderlich, da die Kristallisation durch Alterung vernachlässigbar ist.

Bei diesem Vorgehen wird die Annahme getroffen, dass sich die an zwei Zylinderformen nachgewiesene Geometrieunabhängigkeit auf andere Geometrien extrapolieren lässt. Ferner wird vorausgesetzt, dass sich die Materialparameter eines Einschlusses beim Verfüllen der quaderförmigen Phantome nicht ändern. Da jedoch die aus dem Druckversuch gewonnenen Materialkenngrößen nur für eine grobe Abschätzung der Elastografiemessungen herangezogen werden, wird im Weiteren davon ausgegangen, dass die Bedingungen erfüllt sind.

Im Folgenden wird daher kurz auf die Ausgestaltung und Auswertung der Vergleichsmessung in Form eines einaxialen Druckversuchs eingegangen, der in Bild 4.6 dargestellt ist. Da der Versuchsaufbau im Wesentlichen aus Arnold (2006, Kap. 3) übernommen wird, wird er im Rahmen dieser Arbeit nur kurz wiedergegeben. Die in Bild 4.6 abgebildeten vier Metallstifte bilden zusammen mit einer Metallplatte am Boden und einem U-förmigen Blech am Kopf respektive der sehr kleinen Lasten einen biegesteifen Rahmen. Die obere Plexiglasplatte kann mittels eines Schrittmotors⁹ über eine Kugelumlaufspindel geführt auf- und abwärts verfahren werden. Die Ansteuerung des Motors erfolgt über eine Schrittmotorsteuerung¹⁰ im Halbschrittbetrieb. Die zurückgelegte Strecke wird durch zwei induktive Wegaufnehmer¹¹ bestimmt, während die Kraftmessung durch den zwischen den Plexiglasplatten angebrachten s-förmigen Kraftsensor¹² erfolgt. Die Verarbeitung der Ausgangssignale der Sensoren leistet ein digitaler Messverstärker¹³. Aufgrund des in Abschnitt 4.2.1 erwähnten Quellvorgangs während der Lagerung ist die Probengeometrie vor jedem Versuch erneut zu bestimmen. Da die Vergleichskörper im Allgemeinen sehr weich sind, erfolgt die Ermittlung der Ausgangsprobenlänge und des -durchmessers nicht mit einem Messschieber, sondern optisch mittels einer CCD-Kamera¹⁴.

Der Druckversuch wird weggeregelt durchgeführt, wobei die Verfahrensgeschwindigkeit des Druckstempels zu 1 mm/min gewählt wurde. Als Probenkörper werden die zuvor beschriebenen kleinen Zylinder mit einer Anfangshöhe von $h_k=34 \text{ mm}$ und einem Ausgangsdurchmesser $d_k=50 \text{ mm}$ gewählt. In allen Versuchen wird angenommen, dass die betrachtete Probe homogen und isotrop ist und sich unter den Belastungen stets ein einaxialer, homogener Spannungszustand einstellt.

⁹Fa. Vexta, PK245M-01B

¹⁰Fa. isel automation, Schrittmotorsteuerung C10C

¹¹Fa. HBM Mess- und Systemtechnik GmbH, Wegaufnehmer W5K, Nennweg $\pm 5 \text{ mm}$, Nennwert $\pm 80 \text{ mV/v}$, Kennwerttoleranz $< \pm 1 \%$

¹²Fa. ME-Messsysteme, Kraftsensor KD40S, Nennkraft $\pm 50 \text{ N}$

¹³Fa. HBM Mess- und Systemtechnik GmbH, Messverstärker Spider8

¹⁴Fa. Sony, Modell AVC-D5CE

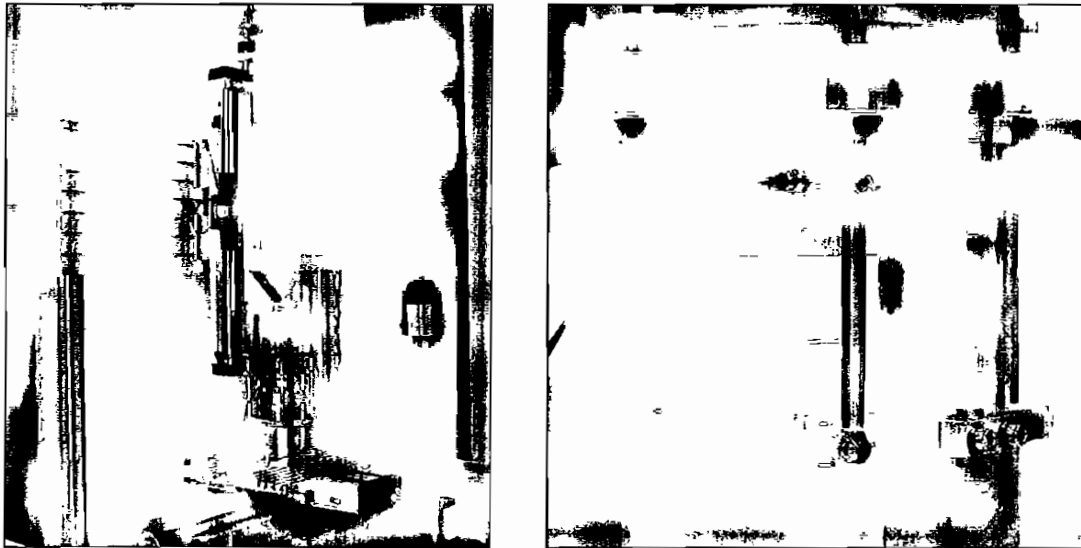


Bild 4.6: Versuchsstand zur Bestimmung des Schubmoduls von PVA-K im Druckversuch

Diese Annahme ist gerechtfertigt, da durch das sehr „glitschige“ Material nahezu keine Haftung auf der Unter- und der Oberseite auftritt und so die Verschiebung der Punkte in radialer Richtung über die Höhe der Probe gleichmäßig verläuft. Ein Ausbauchen des Probenkörpers ist demzufolge nicht zu beobachten, vgl. hierzu Bild 4.7.

Im Gegensatz zum Versuchsaufbau wird die Auswertung der Messergebnisse im Vergleich zur Arbeit Arnold (2006) modifiziert. Aufgrund des hohen Wassergehalts der Proben von ungefähr 90 % wird nun angenommen, dass das PVA-K nahezu inkompressibel ist. Somit kann im Druckversuch in guter Näherung Inkompressibilität des Materials vorausgesetzt werden, wodurch auf die Bestimmung der Querdehnung der Probe mittels CCD-Kamera verzichtet werden kann, die sich in Arnold (2006, Kap. 8) im Vergleich mit der Erfassung der Längsdehnung als sehr ungenau erwies.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.84), (2.85) und (2.86) folgt für ein Neo-Hooke-Material mit $n = 1$, $\alpha_1 = 2$ und $\mu_1 = \mu$, dass die Spannung

$$P_{11} = \frac{F}{A_0} = \mu (\lambda_1 - \lambda_1^{-2}) \quad \text{und} \quad \lambda_1 = \frac{l}{l_0} \quad (4.4)$$

ist, wobei die Koordinatenrichtung X_1 parallel zur Stabachse verläuft. Sind die Ausgangsfläche A_0 und Anfangslänge l_0 bekannt, so können die in jedem Messpunkt bestimmte Kraft F und aktuelle Länge l zur Ermittlung des Schubmoduls μ im Sinne der Fehlerquadratmethode¹⁵ herangezogen werden. Hierbei be-

¹⁵Bei der Bestimmung des Schubmoduls μ handelt es sich um eine Parameteridentifikation, die sich problemlos in die Theorie der inversen Probleme aus Kapitel 3 einfügen lässt. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch nicht weiter auf diesen Aspekt eingegangen und stattdessen auf Rieder (2003, Kap. 6) verwiesen, der diese Thematik bei der Einführung der Projektionsverfahren aufgreift.



Bild 4.7: zweimal gefrorene Probe im Druckversuch im undefor-
mierten und verformten Zustand

reitet jedoch gerade die Bestimmung der Ausgangslänge l_0 Schwierigkeiten, da sich die Proben durch den Quellvorgang von PVA-K an Ober- und Unterseite leicht aufwölben. Auf der Unterseite bereitet diese Wölbung kein Problem, da sie durch das Probeneigengewicht überdrückt wird und somit unberücksichtigt bleiben kann. Auf der Oberseite hat diese Ungleichmäßigkeit der Oberfläche vor allem bei steiferen Proben zur Folge, dass selbst bei verhältnismäßig hohen Lasten von bis zu 3 N der Querschnitt noch nicht komplett überdrückt ist. Dies lässt sich zum einen visuell bei der Versuchsdurchführung als auch im Spannungs-Dehnungs-Diagramm beobachten, da hier eine gemessene Kurve im Anfangsbereich unverhältnismäßig langsam ansteigt, wobei dieses Verhalten sich mit einer wachsenden Anzahl von Gefrier-Auftau-Zyklen immer stärker ausprägt. Da ein Schneiden der Probe nicht in Betracht kommt, wird die folgende, alternative Zwei-Schritt-Methode gewählt. Dabei wird zunächst die spannungsfreie Referenzkonfiguration B_0 bestimmt und anschließend der Schubmoduls μ ermittelt. Zu Beginn wird daher ein Messpunkt (l^*, F^*) gewählt, für den gewährleistet ist, dass der Querschnitt über die gesamte Probenlänge vollständig überdrückt wird und sich ein näherungsweise homogener Spannungszustand ausbildet. Wird dieser Deformationszustand temporär als Referenzkonfiguration betrachtet, so kann im Sinne der Gleichung (4.4) eine Parameteridentifikation zur Bestimmung des Schubmoduls μ^* durchgeführt werden und es gilt

$$P_{11} - P_{11}^* = \frac{F - F^*}{A^*} = \mu^* \left(\lambda_1^* - \lambda_1^{*-2} \right) \quad \text{und} \quad \lambda_1^* = \frac{l}{l^*}, \quad (4.5)$$

wobei A^* die zum Punkt (l^*, F^*) korrespondierende Fläche ist. Ist der Schub-

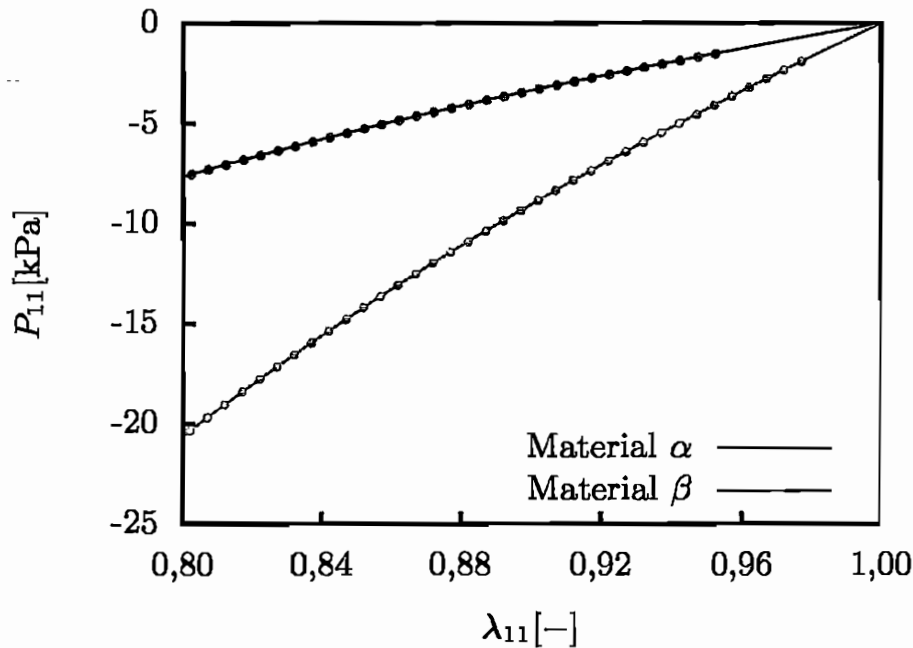


Bild 4.8: Mit Neo-Hooke-Material erzeugte Messdaten $\mu_\alpha = 10 \text{ kPa}$ (\bullet), $\mu_\beta = 27 \text{ kPa}$ (\circ) und die Kurven aus den identifizierten Parametern $\mu_\alpha = 10,03 \text{ kPa}$ (---), $\mu_\beta = 27,01 \text{ kPa}$ (---)

modul μ^* berechnet worden, so können über die Beziehung

$$-P_{11}^* = \mu^* (\lambda_{1,0}^* - \lambda_{1,0}^{*-2}) \quad \text{und} \quad \lambda_{1,0}^* = \frac{l_0}{l^*}, \quad (4.6)$$

die korrespondierenden, ggf. fiktiven Größen Probenlänge l_0 und Probenfläche A_0 bestimmt werden, so dass die durch diesen Verformungszustand gekennzeichnete, spannungsfreie Lage der Referenzkonfiguration B_0 entspricht. Der zweite Schritt sieht dann, wie erwähnt, eine Parameteridentifikation im Sinne der Gleichung (4.4) mit Hilfe der Fehlerquadratmethode vor.

Die Leistungsfähigkeit dieser Vorgehensweise wird anhand der in Bild 4.8 dargestellten, generierten Messdaten demonstriert. In diesem Beispiel wurden zwei Messdatensätze untersucht, wie sie auch bei der Versuchsdurchführung der Vergleichsmessung anfallen. Die Geometrie der fiktiven Proben entspricht dabei der Vergleichsprobe des Druckversuchs. Bei beiden Datensätzen wird angenommen, dass erst die Messpunkte ab einer Grenzdruckkraft von -3 N berücksichtigt werden können. Die mit dem oben angegebenen Zwei-Schritt-Verfahren ermittelten Steifigkeiten weichen von den tatsächlichen Werten um nicht mehr als $0,3\%$ ab, so dass sich die sehr gute Übereinstimmung in Bild 4.8 ergibt. Wird die Grenzdruckkraft auf die jeweils halbe, maximal auftretende Einwirkung gesetzt, was Werten von $-7,63 \text{ N}$ und $-20,99 \text{ N}$ entspricht, so beträgt die Abweichung in den Materialparameter höchstens $1,6\%$ und liefert auch in diesem Fall gute Werte, so

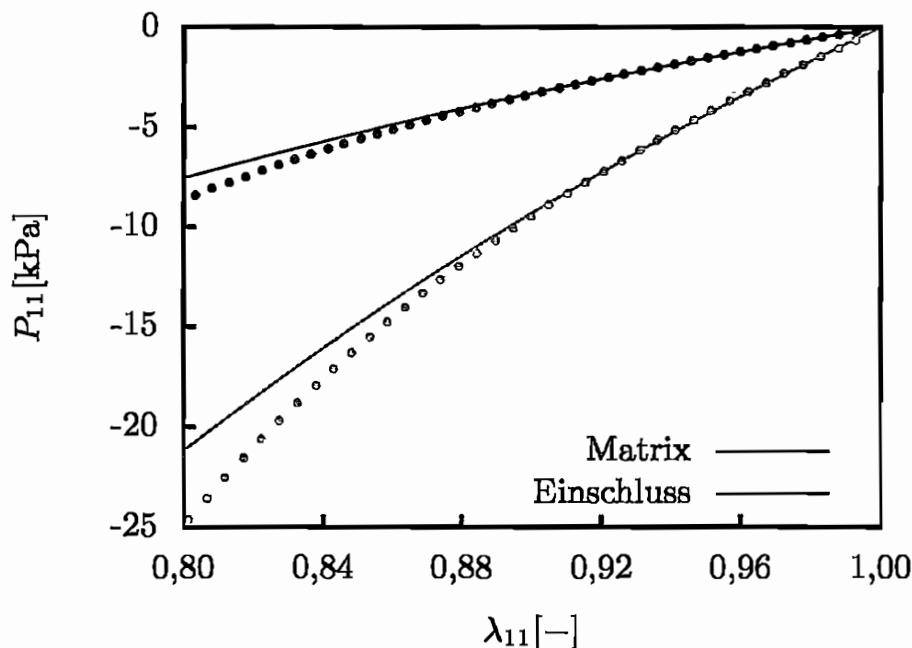


Bild 4.9: Messdaten der Druckversuche mit den Vergleichsproben des Phantoms Pd vom 01. Dez. 2006 (\bullet , \circ) und Kurven aus den identifizierten Materialparametern $\mu_{\text{mat}} = 9,9 \text{ kPa}$ und $\mu_{\text{inc}} = 27,8 \text{ kPa}$ bei Verwendung eines Neo-Hooke-Materials (— , —)

dass mit diesem Verfahren der Schubmodul der Vergleichsproben der Phantome bestimmt wird.

Die Parameteridentifikation bei den Vergleichsproben wird auf den zu Beginn dieses Abschnitts angegebenen Dehnungsbereich von 0 % bis -10% beschränkt, wobei Bild 4.9 anhand der zu Phantoms Pd gehörenden Zylinderproben exemplarisch verdeutlicht, dass vor allem weichere Proben auch einen durchaus größeren Dehnungsbereich von bis zu -15% sehr gut beschreiben.

Bild 4.10 kann die Entwicklung des Schubmoduls der Vergleichsproben des Phantoms Pd über den Zeitraum von annähernd sieben Wochen entnommen werden. So beträgt z. B. die maximale Abweichung einer Messung von den jeweiligen zeitlichen Mittelwert $\bar{\mu}_{\text{Pd},e1}$ und $\bar{\mu}_{\text{Pd},m}$ 3 % bzw. 1 %. Die größte Abweichung vom Mittelwert der Schubmodulverhältnisse $\bar{\mu}_{\text{Pd},e1}/\bar{\mu}_{\text{Pd},m}$ liegt bei 5,9 %. Obwohl eine wirklich abschließende Interpretation dieser Schwankungen erst nach einem Vergleich mit den Messergebnissen der Elastografiemessungen erfolgen kann, sei hier im Vorgriff auf Abschnitt 6.4 darauf hingewiesen, dass eine Betrachtung der zeitlichen Mittelwerte als Referenzwert trotz der Abweichungen von bis zu 6 % völlig hinreichend ist. Dies hat zur Folge, dass die Elastografiemessungen der Phantome und die Druckversuche an den Vergleichskörpern nicht zwingend zeitnah zueinander ausgeführt werden müssen.

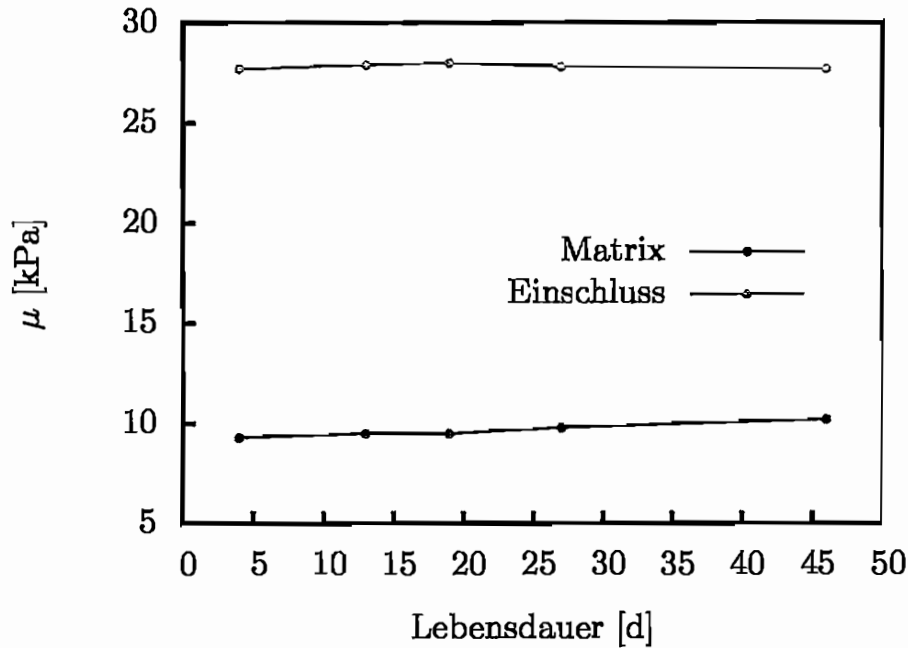


Bild 4.10: Zeitliche Entwicklung des Schubmoduls der Vergleichsproben von Phantom Pd, Tag Null entspricht dem 4. Nov. 2006

Bisher wurde die Argumentation allein auf das Phantom Pd gestützt, jedoch kann diese Probe als durchaus repräsentativ betrachtet werden. Eine vollständige Zusammenstellung aller Probenkörper, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, ist Anhang B zu entnehmen. Da die zeitliche Änderung der Schubmodulwerte für alle Phantome vergleichbar zu dem Verhalten bei Probe Pd ist, werden auch hier nur die jeweiligen zeitlichen Mittelwerte in Tabelle 4.1 aufgeführt. Diese Werte bilden die Grundlage für einen Vergleich mit den Ergebnissen aus den Elastografiemessungen. Die Bezeichnungen der Phantome in dieser Arbeit werden dabei so gewählt, dass Proben, die zeitgleich hergestellt wurden, die gleichen Buchstaben im Namen führen. Ein kleiner Buchstabe zeigt an, dass das Phantom nur einen Einschluss enthält, eine Probe mit zwei Großbuchstaben im Bezeichner weist auf zwei Einschlüsse hin.

Da in Abschnitt 6.4 lediglich der mittlere Schubmodul betrachtet wird, wird dieser Durchschnittswert zur Vereinfachung der Darstellung als Schubmodul der Vergleichsprobe bezeichnet. Da weiterhin davon ausgegangen wird, dass die Vergleichsproben die Steifigkeit der Einschlüsse bzw. des umgebenden Materials repräsentieren, wird der jeweilige Durchschnittswert auch als Schubmodul des Einschlusses bzw. der Materialmatrix bezeichnet.

Um die Überlegungen zum konstitutiven Gesetz von PVA-K abzuschließen, soll nun noch die Frage diskutiert werden, ob ein Materialmodell existiert, welches das reale Materialverhalten bei einer quasi-statischen Beanspruchung auch außerhalb der zuvor erwähnten 10 % bis 15 % Dehnung gut beschreibt. Hier zeigt

Bezeichner	$\mu_{i,e1}$ [kPa]	$\mu_{i,e2}$ [kPa]	$\mu_{i,m}$ [kPa]	$\mu_{i,ej}/\mu_{i,m}$
Pc	28,5	–	9,0	3,2/1
Pd	27,8	–	9,7	2,9/1
PD	27,8	27,8	9,7	2,9/1
Pe	19,3	–	10,8	1,8/1
Pf	9,5	–	19,7	1/2,1
Ph	24,2	–	8,8	2,7/1
PH	24,2	24,2	8,8	2,7/1

Tabelle 4.1: Zusammenstellung der verwendeten Phantome: $\mu_{i,ej}$ bezeichnet den Schubmodul des Vergleichsprobenkörpers von Einschluss j aus Phantom i , $\mu_{i,m}$ ist der Schubmodul der Zylinderprobe korrespondierend zur umgebenden Matrix.

sich, dass ein ebenfalls einparametriges Modell basierend auf dem allgemeinen Ogden-Material sehr gute Ergebnisse liefert. So ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (2.86) für $n = 1$, $\alpha_1 = -2$ und $\mu_1 = -\mu$ die spezifische Formänderungsenergie

$$W_{0s} = W_{0s}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}), \quad (4.7)$$

die die Bedingungen aus Gleichung (2.78) erfüllt. Wird basierend auf dieser Formänderungsenergiefunktion eine Parameteranpassung mit der Zwei-Schritt-Methode durchgeführt, ergeben sich die in Bild 4.11 dargestellten Ergebnisse. Das Diagramm verdeutlicht anhand des Phantoms Pd, dass die mit Hilfe des Ogden-Materials (4.7) berechneten Parameter das Materialverhalten im Dehnungsbereich von null bis -20% sehr gut wiedergeben. Trotz der ausgezeichneten Übereinstimmung von Daten und Modell wird im Weiteren zur Ermittlung der Schubmodulverteilung nur noch auf das Neo-Hooke-Material zurückgegriffen, da es für einen Dehnungsbereich von bis zu -15% ebenfalls sehr gute Resultate liefert. Darüber hinaus besitzt das Neo-Hooke-Material den Vorteil, dass die Anwendbarkeit des Modells im betrachteten Dehnungsbereich für gummiartige Werkstoffe verifiziert wurde, vgl. Ogden (1984, Kap. 7), so dass im Gegensatz zu dem Modell nach Gleichung (4.7) eine Extrapolation, der aus dem Druckversuch erhaltenen Ergebnisse auf komplexere Belastungszustand möglich ist. Es wird aber darauf hingewiesen, dass die im Folgenden gemachten Ausführungen hinsichtlich des Neo-Hooke-Materials problemlos auf das einparametriges Ogden-Material aus Gleichung (4.7) übertragbar sind.

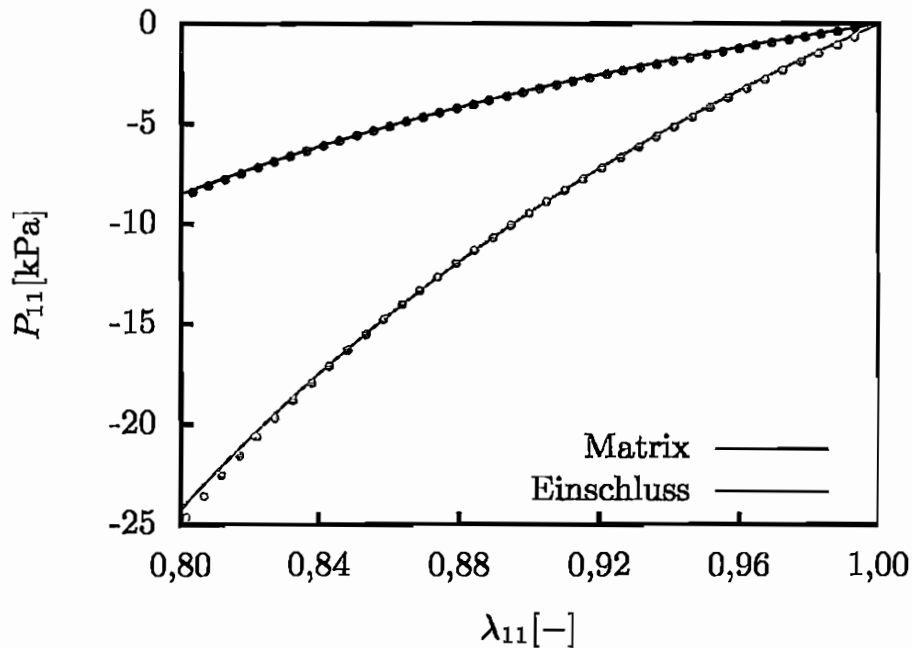


Bild 4.11: Messdaten entsprechend Bild 4.9, Kurven aus den ermittelten Materialparametern $\mu_{\text{mat}} = 8,9 \text{ kPa}$ und $\mu_{\text{inc}} = 25,4 \text{ kPa}$ bei Verwendung des Ogden-Materials (4.7)

4.3 Verschiebungsfeldmessung mit Ultraschallelastografie

Nach der einführenden Beschreibung des Prinzips der Ultraschallelastografie im ersten Teilkapitel werden in diesem Abschnitt die Elastografiemessungen näher beschrieben, die in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurden. Hierbei steht vor allem eine kontinuumsmechanische Betrachtung der Experimente im Vordergrund, was die Erkenntnisse aus Unterabschnitt 4.2.2 voraussetzt. Da in diesem Abschnitt eine Beschreibung der Komponenten des Elastografiesystems nur insoweit erfolgt, wie sie für die kontinuumsmechanische Analyse Relevanz besitzen, wird an dieser Stelle noch einmal die Arbeit Khaled (2007) erwähnt, die eine ausführliche Darstellung des Systems und der Messdatenerfassung enthält.

Für die Elastografiemessungen steht ein mit einer Linearsonde¹⁶ ausgestattetes Ultraschallgerät¹⁷ für medizinische Anwendungszwecke zur Verfügung, vgl. Bild 4.12(a), welches nicht nur Zugang zu den analogen, hochfrequenten Echodaten gewährt, sondern auch die internen Triggersignale bereitstellt. Die Datenaufnahme erfolgt mit einem Standard-PC über eine integrierte 12-Bit Analog/Digi-

¹⁶Fa. Siemens, hochfrequenter Ultraschallwandler Typ VF 13-5, 192 Wandlerelemente mit einer Breite von 0,2 mm und einem Abstand von 0,21 mm. Die Breite des B-Bilds beträgt 32 mm.

¹⁷Fa. Siemens, Siemens Sonoline Omnia

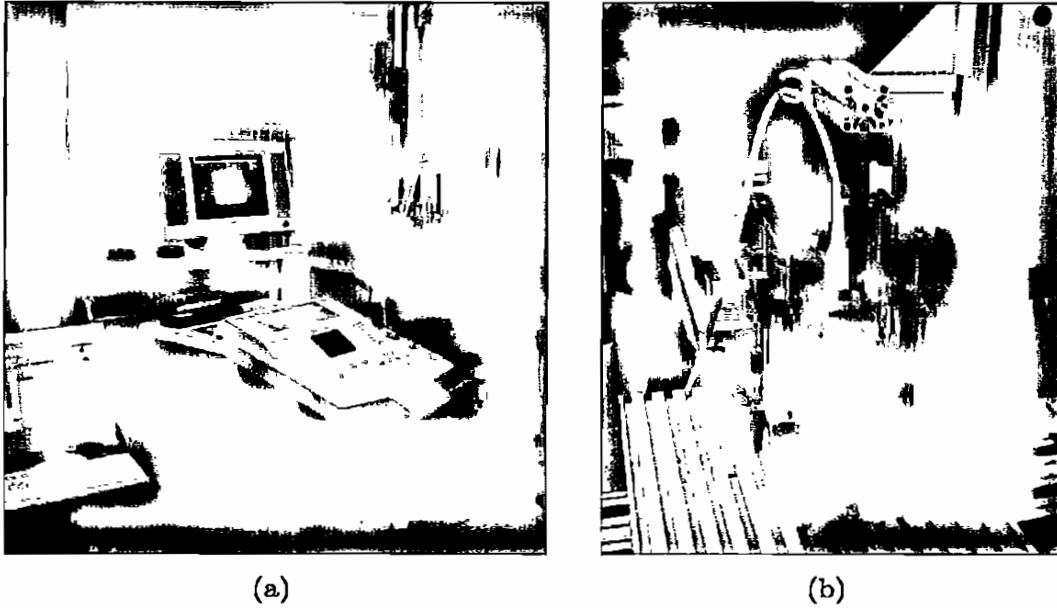


Bild 4.12: Darstellung des Elastografiesystems während der Versuchsdurchführung: (a) einzelne Komponenten des Elastografiesystems, (b) Phantom während der Versuchsdurchführung

tal-Wandlerkarte¹⁸ und einer speziellen Triggerschaltung, vgl. Hiltawsky (2004, Kap. 5). Diese Schaltung wird so eingestellt, dass für jeden B-Mode eine fest vorgegebene Anzahl von A-Linien aufgenommen und in der richtigen Reihenfolge angeordnet wird. Die Kompression der Phantome zur Erzeugung unterschiedlicher Deformationszustände $\varphi(B_0)$ und $\hat{\varphi}(B_0)$ wird mit dem in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Versuchsstand ausgeführt, wobei sich die Linearsonde in die Kompressionseinheit integrieren lässt, vgl. Bild 4.12(b). Die Ansteuerung des Schrittmotors erfolgt während einer Elastografiemessung durch den Standard-PC, der auch die HF-Daten erfasst. Die Regelung erfolgt über die Anzahl der Schritte des Schrittmotors, wobei die Verfahrgeschwindigkeit der Kompressionseinheit wie im Druckversuch bei ungefähr 1 mm/min liegt.

Das hier skizzierte Elastografiesystem kann unter Berücksichtigung der vorangegangenen Abschnitte dazu verwendet werden, die maßgebenden Rahmenbedingungen für die Versuche vorzugeben. So ermöglicht die eingesetzte Linearsonde lediglich die Aufnahme einer Schnittfläche einer Struktur \mathcal{B} . Soll jedoch ein beliebiger Körper untersucht werden, so kann im allgemeinen Fall eine dreidimensionale Materialverteilung auftreten. Da sich diese Verteilung in einer Struktur aber nur dann ermitteln lässt, wenn die axiale Komponente des Verschiebungsfeldes für alle Materialpunkte \mathcal{M} und die zur Verformung korrespondierenden Verschiebungs- und Krafterandbedingungen bekannt sind, entsteht hier zunächst ein Widerspruch zur Datenaufnahme in einer Ebene. Erfolgt eine Beschränkung

¹⁸Fa. Gage, Typ Gage 1250 mit 50 MHz Abtastrate

auf quaderförmige Phantome, so lässt sich die angesprochene Gegensätzlichkeit experimentell auf unterschiedliche Art und Weise auflösen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Grundfläche der Kompressionsplatte, in die der Ultraschallwandler integriert ist, so groß zu dimensionieren, dass ein Phantom \mathcal{B} für jede beliebige Position des Schallwandlers auf der Oberseite der Probe vollständig überdrückt ist. Wird ein geeignetes Tracking-System verwendet, kann durch Verschieben des Schallwandlers in lateraler und elevationaler Richtung das quaderförmige Phantom schnittflächenweise gescannt werden, um so – da die Randbedingungen für jede Datenaufnahme gleich bleiben – ein dreidimensionales, axiales Verschiebungsfeld mit korrespondierenden Randbedingungen zu erhalten. Der so generierte Datensatz bietet dann die Möglichkeit, auch beliebige dreidimensionale Materialverteilungen zu ermitteln.

Eine andere Vorgehensweise besteht darin, die Struktur \mathcal{B} und die mechanischen Randbedingungen so zu wählen, dass sich der gegebene Probenkörper näherungsweise durch ein ebenes Problem beschreiben lässt. In diesem Fall kann durch einen einzigen Scanvorgang das Verformungsverhalten des gesamten Körpers beschrieben werden. Darüber hinaus wird der numerische Aufwand zur Bestimmung der Materialparameter erheblich minimiert, da sich alle Berechnungen auf ein ebenes Problem reduzieren lassen. Ein Nachteil dieser Methode ist natürlich, dass sich durch dieses Vorgehen keine beliebigen, dreidimensionalen Steifigkeitsverteilungen bestimmen lassen. Dennoch ist diese Herangehensweise in der Literatur üblich, vgl. u. a. Skovoroda et al. (1995), Doyley et al. (2000), Oberai et al. (2004), stellt doch die erfolgreiche Realisierung solcher Messungen eine unabdingbare Voraussetzung zur Entwicklung eines dreidimensionalen Elastografiesystems dar.

Auch im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Phantome betrachtet, die bei der Wahl geeigneter Randbedingungen eine Reduktion auf ein ebenes Problem erlauben, vgl. auch die Phantomherstellung aus Abschnitt 4.2.1. Dennoch sollte bei der Entwicklung eines mathematischen Verfahrens zur Bestimmung der Schubmodulverteilung darauf geachtet werden, dass die gewählte Methodik stets auf den allgemeinen, dreidimensionalen Fall erweiterbar ist. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 5.1.3 bei der Diskussion von in der Literatur vorhandenen Ansätze noch einmal aufgegriffen.

Um bei der Versuchsdurchführung näherungsweise ein zweidimensionales Problem zu generieren, wird die Kompressionseinheit zur Umsetzung einer Elastografiemessung mit PVA-K Phantomen entsprechend der Abbildung 4.12(b) ausgebildet. Eine entsprechende Idealisierung dieser Versuchsdurchführung ist Bild 4.13 zu entnehmen, die die Messsituation noch einmal in Form einer Gegenüberstellung verdeutlicht. Dabei gibt die schraffierte Fläche in Bild 4.13(b) die Aufnahmeebene an, in der die HF-Daten erfasst werden. Es wird angenommen, dass diese Scanebene, für die im Folgenden $X_3 = 0$ gilt, bei der Versuchsdurchführung näherungsweise mit der Mittelebene des Phantoms zusammenfällt. Obwohl der Aufnahmebereich der Linearsonde aus verfahrenstechnischen Gründen kleiner ist als die Schnittfläche des Phantoms, wird für die nächs-

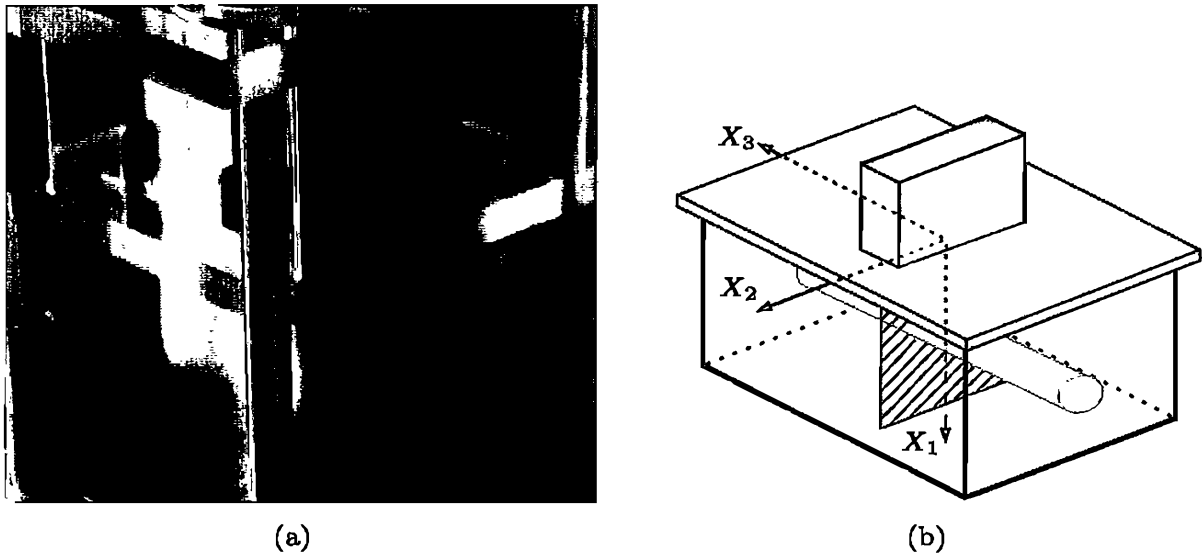


Bild 4.13: Elastografiemessung: (a) Versuch und (b) Idealisierung

ten Überlegungen zunächst vorausgesetzt, dass beide Größen identisch sind. Mit dieser Annahme kann nun die Mittelfläche des Phantoms als ebenes Problem betrachtet werden, wobei dieser Schritt seinerseits aus mehreren Gründen eine Näherung darstellt. So ergibt sich aufgrund der gewählten Abmessungen der Phantome mit einer Höhe $h \approx 43,5 \text{ mm}$, einer Breite $b \approx 40,0 \text{ mm}$ und einer Länge $l \approx 50,0 \text{ mm}$ weder ein ebener Spannungs- noch ein ebener Verzerrungszustand. Diese Gegebenheit wird darüber hinaus durch die Beobachtungen verstärkt, dass sich bei der Probenherstellung ein Durchhang der Einschlüsse einstellt, vgl. Bild 4.5(a). Diese unvermeidbare geometrische Imperfektion wird durch eine ggf. leicht ungleichmäßige Kristallisation des PVA-K noch verstärkt. Im Weiteren wird jedoch angenommen, dass sich der Verformungszustand für die Mittelebene näherungsweise durch einen ebenen Verzerrungszustand beschreiben lässt.

Nachdem die Vorbetrachtungen zu den Versuchen abgeschlossen sind, kann nun auf die eigentliche Versuchsdurchführung eingegangen werden. Bei der Umsetzung einer Elastografiemessung wird zunächst das mit Wasser benetzte Phantom im Versuchsstand grob positioniert. Anschließend wird die Kompressionsplatte mit der integrierten Linearsonde langsam verfahren, bis sie die Probe berührt. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass zwischen Schallwandler und Phantom über die gesamte Länge Kontakt herrscht und sich keine Luft zwischen Sonde und Probe befindet. Aufgrund eines ggf. ungleichmäßigen Quellvorgangs der Phantome während der Lagerung kann es daher erforderlich sein, dass die Probe in der Ausgangsstellung schon leicht komprimiert wird. Ist die Kompressionsplatte vertikal positioniert, kann die Probe ggf. von Hand in horizontaler Richtung abschließend ausgerichtet werden, so dass Scanebene und Mittelebene des Phantoms näherungsweise zusammenfallen und die Linearsonde nicht in

lateralen Richtung über die Probe hinausreicht. Nach Abschluss dieses Vorbereitungsprozesses wird die Kompressionseinheit in bis zu 40 Schritten vertikal in Kompressionsrichtung verfahren, was einem Fahrweg von ungefähr 4 mm entspricht, wobei in der Ausgangslage und nach jedem Schritt eine Ultraschallaufnahme erfolgt. Nach Erreichen der Endposition ist die Messung abgeschlossen und die Probe kann entlastet und aus dem Versuchsstand entfernt werden.

Entsprechend der Beschreibungen aus Abschnitt 4.1 kann im Sinne einer idealisierten Betrachtung, in jedem Schritt die Position eines jeden Materialpunkts \mathcal{M} in der Aufnahmeebene \mathcal{B} bestimmt werden. Um für die noch folgenden Erläuterungen die jeweiligen Aufnahmen besser unterscheiden zu können, wird die Ausgangsposition bzw. die erste Messung als spannungsfreie Referenzkonfiguration B_0^g betrachtet und die gemessenen Koordinaten mit $\mathbf{X}^g = \mathbf{x}^{g,0}$ bezeichnet. Hierbei wird angenommen, dass sowohl die Verschiebungen aus der Vorkompression als auch aus Eigengewicht vernachlässigbar klein sind. Analog werden die bei der i -ten Messung bestimmten Daten durch die Bezeichnungen $B_{t_i}^g = \varphi^{g,i}(B_0^g)$ für die Konfiguration und $\mathbf{x}^{g,i} = \mathbf{x}^{g,i}(\mathbf{X}^g)$ für die Koordinaten erfasst. Aus diesen Messdaten lässt sich das axiale Verschiebungsfeld u_1^g bestimmen, wobei für eine solche Berechnung nur zwei der 41 Aufnahmen benötigt werden. Da die Bestimmung des Feldes u_1^g auch bei dieser idealisierten Betrachtung vom gewählten Messverfahren abhängt, wird im Weiteren zwischen der HF- und der B-Bild-Ultraschallelastografie unterschieden.

Wird das erstgenannte Messverfahren betrachtet, so können zur Verschiebungsermittlung nur jeweils zwei vertikale HF-Linien miteinander verglichen werden, die für unterschiedliche, axiale Schallwandlerpositionen an einer Stelle $X_2 = \text{konst}$ aufgenommen worden sind, vgl. Abschnitt 4.1. Dieser Sachverhalt impliziert die Annahme, dass sich ein Materialpunkt für eine störungsarme Messung nur in axialer Richtung verschiebt. Dieses Verformungsverhalten wird jedoch lediglich bei kleinen Deformationen hinreichend gut approximiert, vgl. hierzu auch die Ausführungen in Abschnitt 4.1. Somit werden im Allgemeinen nur Nachbaraufnahmen zur Verschiebungsberechnungen herangezogen und es gilt für die gemessene Axialverschiebung zunächst

$$u_1^g(\mathbf{X}^g) = u_1^{g,0}(\mathbf{X}^g) = x_1^{g,1}(\mathbf{X}^g) - X_1^g. \quad (4.8)$$

Da sich das PVA-K in der Nähe der unbelasteten Ausgangskonfiguration im Druckversuch für einen Dehnungsbereich von bis zu 5 % in guter Näherung linear verhält, vgl. Bild 4.9, kann die Berechnungsvorschrift (4.8) auf die Form

$$u_1^g(\mathbf{x}^{g,i}) = u_1^{g,i}(\mathbf{x}^{g,i}) = x_1^{g,i+1}(\mathbf{x}^{g,i}) - x_1^{g,i} \quad (4.9)$$

verallgemeinert werden, wobei $i \geq 0$ möglichst klein zu wählen ist. In diesem Fall fungiert die Konfiguration $B_{t_i}^g$ als „unbelastete“ Ausgangskonfiguration. Die Berechnung des Verschiebungsfelds u_1^g auf Grundlage der Gleichung (4.9) ist immer dann erforderlich, wenn eine der beiden ersten Aufnahmen durch äußere Störeinflüsse für eine Verschiebungsberechnung nicht geeignet ist.

Wird auf die Erläuterungen der B-Bild-Ultraschallelastografie aus Unterkapitel 4.1 zurückgegriffen, dann sind die Block-Vergleichs-Algorithmen bei der Verschiebungsermittlung nicht mehr an den Aufbau der Wandlerzeile in der Linearsonde gebunden. Somit kann das Verschiebungsfeld aus einer Aufnahme j bestimmt werden, für die $j \geq 1$ gilt, so dass sich die Axialverschiebung zu

$$u_1^g(\mathbf{X}^g) = x_1^{g,j}(\mathbf{X}^g) - X_1^g. \quad (4.10)$$

berechnet.

Diese durch die Gleichungen (4.8) und (4.10) eingeführte, vereinfachende Betrachtung der Elastografiemessung führt auf den in Bild 4.14 veranschaulichten Versuchsablauf, welcher eine detailliertere, kontinuumsmechanische Analyse zulässt. Der Versuch beginnt zum Zeitpunkt t_0 in der unverformten Ausgangskonfiguration. Wie in Bild 4.14 dargestellt, werden zur Beschreibung des Versuchs zwei Beobachter eingeführt, ein fest gewählter Betrachter Σ und ein zeitlich veränderlicher Beobachter $\Sigma^* = \Sigma^*(t^*)$, wobei $t = t^*$ und $\Sigma = \Sigma^*(t_0)$ gelte. Aufgrund der Wahl der Ausgangs- als Referenzkonfiguration wird die mit dem Ultraschallgerät gemessene Position der Punkte durch $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ gekennzeichnet.¹⁹ Durch die Kompression mit dem Ultraschallwandler während des Versuchsablaufs wird auf der Oberseite der Struktur \mathcal{B} bis zur i -ten Aufnahme eine Randverschiebung $\bar{\mathbf{u}}(t_i) = \bar{u}(t_i)\mathbf{e}_1$ induziert, die aufgrund der geringen Geschwindigkeit von ungefähr 1 mm/min als quasi-statisch angesehen wird. Somit gilt in den weiteren Überlegungen, dass die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung der materiellen Punkte $\dot{\mathbf{x}} \approx \ddot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{0}$ ist. Darüber hinaus wird die volumenhafte Einwirkung aufgrund von Eigengewicht vernachlässigt, so dass für die wirkende massenbezogene Beschleunigung $\bar{\mathbf{b}} \approx \mathbf{0}$ folgt. Da die Struktur \mathcal{B} näherungsweise der Mittelebene entspricht, sind aus Symmetriegründen die Verschiebungen in Elevationsrichtung ungefähr Null, was sich günstig auf die Qualität der Messungen auswirkt.

Eine Bewegung des Schallkopfes ist gleichbedeutend mit der Verschiebung des Betrachters Σ^* , der fest mit dem Schallwandler verbunden ist. Da die Ermittlung der Koordinaten der materiellen Punkte in Abhängigkeit vom Betrachter Σ^* erfolgt, wird durch die Ultraschallaufnahme $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*)$ zu einem Zeitpunkt t_i bestimmt. Da der Schallwandler eine rein translatorische, unbeschleunigte Bewegung ausführt, handelt es sich bei der entsprechenden Koordinatentransformation um eine Galilei-Transformation und bei der i -ten Aufnahme gilt mit den Gleichungen (2.9) und (2.10)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{u}}(t_i), \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{c}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{v} = \text{konst} \approx \mathbf{0}, \quad (4.11)$$

wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Schallwandlers ist. Somit folgt für die Koordinaten der materiellen Punkte bzgl. des Betrachters Σ , dass $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \bar{\mathbf{u}}(t_i)$ ist.

¹⁹Die in Bild 4.14 gewählte Bezeichnung \mathbf{e}_i ist gerechtfertigt, da für beide Betrachter Σ und Σ^* stets $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) gilt. Somit muss respektive der Basisvektoren nicht zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration unterschieden werden.

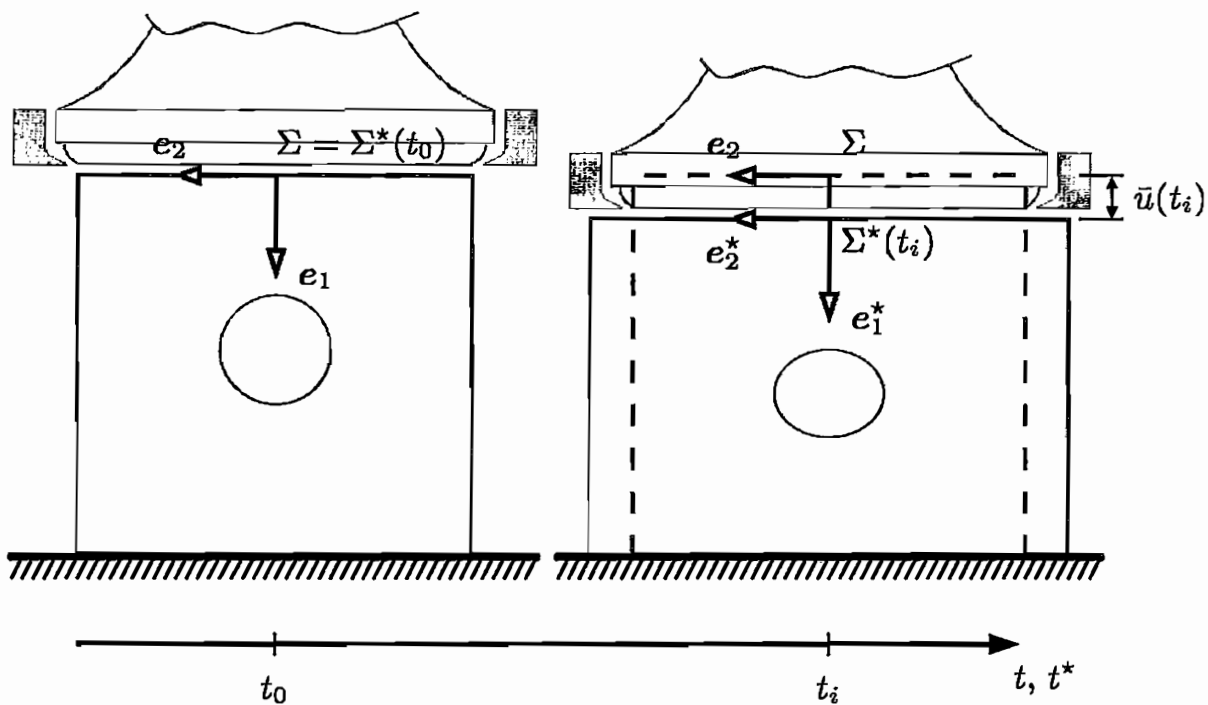


Bild 4.14: Versuchsablauf bei einer Elastografiemessung, oberhalb der Probe sind die Linearsonde (\square) und die Kompressionsplatte (\blacksquare) dargestellt

Daher kann unter den gegebenen Annahmen die Beschreibung der Deformation sowohl in Abhängigkeit vom Betrachter Σ als auch vom Beobachter Σ^* erfolgen. Die zweite Variante ist jedoch vorzuziehen, da in diesem Fall die experimentelle Bestimmung von $\bar{u}(t_i)$ entfällt.

Wie schon durch das Bild 4.14 veranschaulicht wird, wird durch die gewählte Versuchsanordnung natürlich nicht verhindert, dass sich die Punkte in lateraler Richtung verschieben. Aufgrund dieser Verschiebung in e_2 -Richtung ist es bei großen, induzierten Verschiebungen \bar{u} , wie sie bei der B-Bild-Elastografie auftreten, nicht möglich, die Position der Punkte im Randbereich in der deformierten Lage zu bestimmen. Dieser Effekt wird noch einmal dadurch verstärkt, dass der Ultraschallwandler nicht über die Probe hinausreichen darf, weil ansonsten durch Reflektionseigenschaften der Luft Rauscheffekte in den Elastografiemessungen auftreten. Da aber die Axialverschiebung für alle Punkte \mathcal{M} eines Körpers \mathcal{B} bei der Ermittlung der Materialverteilung bekannt sein muss, wird bei den Messungen nur ein Teilbereich \mathcal{P} der Struktur betrachtet, vgl. Bild 4.15. Der dargestellte Idealisierungsprozess verdeutlicht den Übergang von der im Versuch tatsächlich vorhandenen Struktur zum mechanischen Modell, welches bei der numerischen Bestimmung der Materialparameterverteilung später eingesetzt wird. Die hier getroffenen Vereinfachungen beziehen sich in erster Linie auf die Randbedingun-

gen. Dabei fällt auf, dass neben dem Verlust des Bildbereichs an den Seiten, auch auf der Ober- und Unterseite Informationen verloren gehen. So muss auf Messdaten in einem Streifen der Breite $a_o \approx 1 \text{ mm}$ an der Phantomoberseite verzichtet werden, da im Nahfeld der Linearsonde starke Schallschwankungen entstehen, vgl. Christensen (1988, Kap. 5), die die Ergebnisqualität der Verschiebungsmessungen unverhältnismäßig stark herabsetzen.²⁰ Um bei Messungen Störeinflüsse an der Phantomunterseite zu vermeiden, die an der Grenzschicht zwischen Phantom und Unterlage entstehen, ist hier ebenfalls ein Randbereich $a_u = a_u(u(t_i))$ zu berücksichtigen, der vom betrachteten Schritt i abhängig und daher für jede Messung individuell zu bestimmen ist. An den Seiten bleibt ein Bereich mit einer Breite von $a_s = a_\delta + \bar{a}_s$ ausgespart. In diesem Zusammenhang entspricht a_δ der halben Differenz aus Probenbreite und Schallwandlerbreite sowie $\bar{a}_s = \bar{a}_s(u(t_i))$ einer verformungsabhängigen und deshalb ebenfalls für jede Elastografiemessung zu bestimmenden Größe, die der laterale Verschiebung der materiellen Punkte am Rand geschuldet ist. Da bei der HF-Elastografie die Verformungen sehr klein sind, wird für dieses Messverfahren angenommen, dass stets $\bar{a}_s(u(t_i)) = 0$ gilt. Die bisher beschriebenen Randbreiten a_i sind allein aufgrund physikalischer Gegebenheiten zu berücksichtigen, die sich auf das mechanische Verhalten bzw. auf die akustischen Eigenschaften zurückführen lassen. Bei der B-Bild-Elastografie und den zugrunde liegenden Block-Vergleichs-Algorithmen entsteht ein zusätzlicher Randbereich der Breite a_{bi} , der sich aus der halben Breite bzw. Höhe des Blocks und des Suchfensters zusammensetzt, vgl. Abschnitt 4.1 und insbesondere Bild 4.3. So gilt für die Ober- und Unterseite $a_{bo} = a_{bu} = \frac{1}{2}(N_1 + n_1)$ und für den Seitenbereich $a_{bs} = \frac{1}{2}(N_2 + n_2)$. Da zusätzlich die Phantome lagerungsbedingt einem Quellvorgang ausgesetzt sind, wird bei der Angabe der Messergebnisse in Abschnitt 6.4 nicht die Gesamtbreite der Randbereiche angegeben, sondern die Größe des betrachteten Bildbereichs, wodurch sich die Darstellungen vereinfachen. Hat ein Bild die Höhe h und die Breite b , lassen sich hieraus die Abmessungen der Ränder näherungsweise bestimmen.

Da die eingesetzte Linearsonde einen Bildbereich mit einer Breite von 32 mm erzeugt, vgl. die Spezifikationen in Fußnote 16 auf Seite 69, entspricht $a_\delta \approx 4 \text{ mm}$ und somit $a_s \approx 4 \text{ mm} + \bar{a}_s$. Ferner wird bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten in der Regel eine Bildhöhe von $h \approx 40 \text{ mm}$ gewählt, so dass $a_u(u(t_i)) \leq 2,5 \text{ mm}$ gilt.²¹ Die Angabe dieser Näherungswerte für die Randbreiten, die auf den Innenabmessungen der Probenbehälter beruhen, ermöglichen ihrerseits nun eine Einschätzung der Approximation, die sich durch den Idealisierungsprozess für die Randbedingungen der Teilstruktur \mathcal{P} ergibt, vgl. Bild 4.15.

²⁰In der Praxis werden hier bei der Signalverarbeitung von dem empfangenen Echosignal die ersten 650 Bildpunkte abgeschnitten. Da die Wandlerelemente der Linearsonde in einer Flüssigkeit gelagert sind, ist es nicht möglich anzugeben, wie viele der 650 Linien Bestandteil dieser Flüssigkeit bzw. des Phantoms sind, weshalb a_o nicht genau quantifizierbar ist. Jedoch erlaubt diese Vorgehensweise später die Vergleichbarkeit zwischen den B-Bildern und den berechneten Schubmodulverteilungen.

²¹Die Bildhöhe lässt sich sowohl bei der Datenerfassung am Ultraschallgerät einstellen als auch bei der Berechnung des Verschiebungsfelds festlegen.

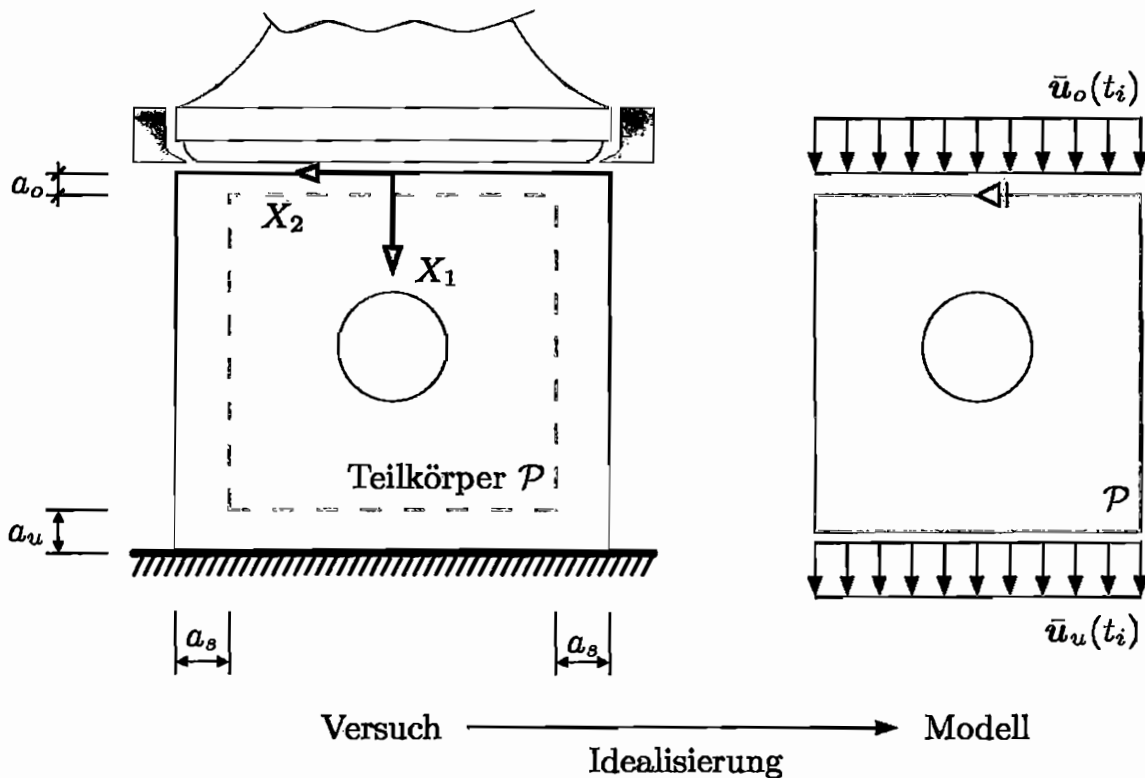


Bild 4.15: Vereinfachte Betrachtung der Randbedingungen bei der experimentellen Verschiebungsermittlung, im linken Bildteil sind oberhalb der Probe Linearsonde (\square) und Kompressionsplatte (\square) dargestellt

Da die mit Wasser benetzten Phantome auf der Ober- und Unterseite während einer Verschiebungsfeldmessung nicht haften, wird angenommen, dass sowohl die Struktur \mathcal{B} und hieraus resultierend auch der Teilkörper \mathcal{P} in lateraler Richtung verschieblich gelagert sind, vgl. Abbildung 4.15. Die auf der Höhe des Verschiebungsrands $\partial\mathcal{P}_u$ gemessenen Verschiebungen $u_1^g = u_1^g(X_1 = a_o, X_2)$ werden gemittelt und als Randbeanspruchung $\bar{u}_o(t_i)$ auf die Teilstruktur \mathcal{P} aufgebracht. Die Bestimmung der Randverschiebung $\bar{u}_u(t_i)$ erfolgt in analoger Weise. Für die Seitenränder des Ausschnitts \mathcal{P} wird ebenfalls angenommen, dass sich die Randbedingungen vom Spannungsrand $\partial\mathcal{B}_\sigma$ näherungsweise übertragen lassen, so dass für die Oberflächenspannung $\bar{t} = 0$ auf den Seitenrändern $\partial\mathcal{P}_\sigma$ gelte, vgl. Bild 4.15.

Eingedenk der getroffenen Annahmen wird im Folgenden nicht mehr explizit zwischen dem Teilkörper \mathcal{P} und der Struktur \mathcal{B} unterschieden, so dass für beide der Bezeichner \mathcal{B} verwendet wird. Unter der Struktur \mathcal{B} wird dann bei numerischen Simulationen oder bei der Auswertung von Messergebnissen immer der (Teil-)körper verstanden, für den das (axiale) Verschiebungsfeld bekannt ist. Ein solches gemessenes, axiales Verschiebungsfeld ist exemplarisch in Bild 4.16 dar-

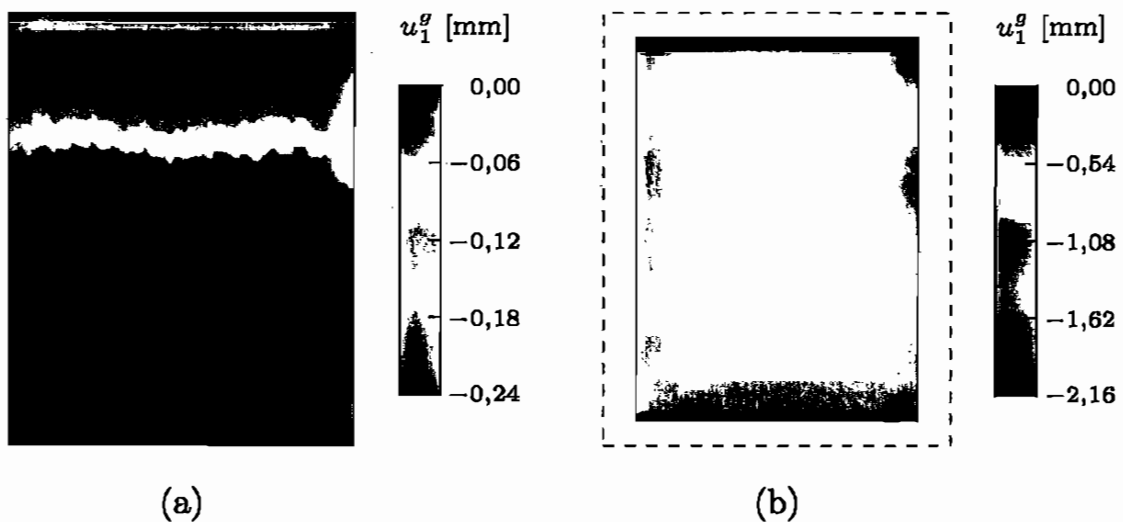


Bild 4.16: Axiale Verschiebungsfelder aus Elastografiemessungen im Maßstab 1:1 in Abhängigkeit vom zeitlich veränderlichen Betrachter Σ^* : (a) Phantom PD mit HF-Elastografie und (b) Phantom Pd mit B-Bild-Elastografie

gestellt. Für die Bestimmung der in der Einheit [mm] angegebenen Komponente u_1^g ist dabei die Schallgeschwindigkeit unentbehrlich, die im Rahmen dieser Arbeit bei allen Experimenten zu $c = 1498,8 \text{ m/s}$ angesetzt wird. Hierbei handelt es sich um einen in Versuchsreihen an PVA-K Zylinderproben bestimmten Mittelwert mit einer Standardabweichung von $\sigma_c = 13,6 \text{ m/s}$, vgl. Khaled (2007). Da die in den Versuchen eingesetzten Probenkörper entsprechend dem in Unterabschnitt 4.2.1 beschriebenen Herstellungsprozess gefertigt wurden, ist die Übertragbarkeit auf die Elastografiemessungen gewährleistet.

Aufbauend auf dem für die Berechnungen verwendeten Modell aus Bild 4.15, das im bisherigen Verlauf des Abschnitts motiviert wurde, lassen sich nun weitere Schlussfolgerungen für die Ermittlung der Materialverteilung ziehen. Wie zu Beginn dieses Kapitels in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, entspricht die Schubmodulverteilung $\mu = \mu(\mathbf{X})$, mit $\mathbf{X} \in B_0$, in der Terminologie des Kapitels 3 der gesuchten Ursache, die aus dem gemessenen Verschiebungsfeld \mathbf{u}^g bzw. dessen axialer Komponente u_1^g bestimmt wird. Ohne an dieser Stelle auf einen konkreten Lösungsansatz für diese Berechnung eingehen zu wollen, lässt sich zeigen, dass das Ergebnis einer solchen Analyse auf Grundlage des Modells aus Bild 4.15 keinen Absolutwert für den Schubmodul in einem beliebigen Materialpunkt \mathcal{M} liefern kann. Um diesen Sachverhalt zu erläutern, wird die in der Literatur im Rahmen der Elastografie häufig verwendete Annahme getroffen, dass die Querkontraktionszahl ν in jedem Punkt \mathcal{M} gleich und mit $\nu \approx 0,5$ gegeben ist. Für diesen Fall hängen die Verteilungen der Laméschen Konstante λ bzw. des Kom-

pressionsmodul K über die Beziehung

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} \mu = f_\lambda \mu \quad \text{und} \quad K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \mu = f_K \mu, \quad (4.12)$$

von der Schubmodulverteilung μ ab, mit $f_\lambda, f_K > 0$. Betrachtet man zunächst nur die linearisierte Elastizitätstheorie, so ergibt sich das Verschiebungsfeld \mathbf{u} bei gegebener, beliebiger Materialverteilung μ als Lösung der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (2.135), so dass eingedenk aller bisher in diesem Abschnitt getroffenen Annahmen

$$\delta W = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \sigma \, dV = 0 \quad (4.13)$$

gilt, wobei die linearisierte Spannung $\sigma = \sigma(\mathbf{u})$ von \mathbf{u} abhängt. Wird nun eine Verteilung $\hat{\mu} = c\mu$ mit $c > 0$ betrachtet, so ergibt sich bei der Lösung des Anfangsrandwertproblems ebenfalls das Verschiebungsfeld \mathbf{u} , denn unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.131) und (4.12) folgt

$$\delta W = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : (c\sigma) \, dV = c \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \sigma \, dV = 0. \quad (4.14)$$

Somit ergeben die Verteilungen μ und $\hat{\mu}$ die gleiche Wirkung \mathbf{u} und sind daher bei der Lösung des inversen Problems nicht voneinander zu unterscheiden. Da zwischen der exakten Lösung und den Vielfachen dieser Materialverteilung nicht differenziert werden kann, wird im Rahmen dieser Arbeit beim inversen Problem der Elastografie nach einer relativen Schubmodulverteilung μ gesucht. Ist in einem Materialpunkt \mathcal{M}_1 der Absolutwert für den Schubmodul $\mu_{abs} = \mu_{abs}(\mathcal{M}_1)$ bekannt, so kann die exakte Materialverteilung hieraus ermittelt werden.

Wird ein beliebiges, hyperelastisches Material betrachtet, so hängt eine derartige Analyse wesentlich von der spezifischen Formänderungsenergie W_{0s} ab, die das Materialverhalten charakterisiert. Aufgrund der Ausführungen in Abschnitt 4.2.2 wird an dieser Stelle ausschließlich das Neo-Hooke-Materialmodell nach Gleichung (2.79) bzw. (2.81) betrachtet, jedoch sind die Ausführungen auch ohne Einschränkungen auf das einparametrische Ogden-Material erweiterbar, das ebenfalls in Abschnitt 4.2.2 beschrieben wurde. Werden die Annahmen aus dem zuvor beschriebenen linearen Fall übernommen, sind die dort getroffenen Aussagen problemlos auf das Neo-Hooke-Material übertragbar, da für die beiden Schubmodulverteilungen μ und $\hat{\mu} = c\mu$, zusammen mit der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (2.135) und Gleichung (4.12)

$$\delta W = \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : (cP) \, dV = c \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : P \, dV = 0 \quad (4.15)$$

folgt. Somit kann auch im Falle eines Neo-Hooke-Materials lediglich eine relative Schubmodulverteilung bestimmt werden.

5 Elastografie

In diesem Kapitel werden die im bisherigen Verlauf der Arbeit bereitgestellten Grundlagen angewendet, wobei die Darstellung unterteilt in die lineare und die nichtlineare Elastografie erfolgt.

Im Abschnitt 5.1 werden die in der Literatur vorhandenen Verfahren zur linearen Elastografie diskutiert. Da im Schrifttum eine Vielzahl von Methoden vorgeschlagen wird, erfolgt zu Beginn eine Einteilung der Algorithmen in zwei Methodenklassen, die dann in den Unterabschnitten 5.1.1 und 5.1.2 eine allgemeine Betrachtung im Sinne des Kapitels 3 erlaubt. Ein Vergleich der direkten und iterativen Verfahren anhand je eines Repräsentanten durch einen Benchmark-Test und eine abschließende Diskussion erfolgt in Unterabschnitt 5.1.3. Die weiteren Ansätze, die sich der angesprochenen Einteilung entziehen, werden in Abschnitt 5.1.4 kurz erläutert und runden die Ausführungen zur linearen Elastografie ab.

Aufbauend auf dieser Analyse wird in Abschnitt 5.2 ein Verfahren vorgestellt, welches nicht auf der linearisierten Elastizitätstheorie beruht. Dieses Verfahren stellt eine Erweiterung vorhandener Ansätze dar und kann im Sinne der Begriffsbildung aus Abschnitt 1.2 als nichtlineare Elastografie bezeichnet werden.

In Kapitel 4 wurde ausführlich die Bestimmung des Verschiebungsfelds \mathbf{u}^g in einer weichen Struktur \mathcal{B} erläutert und darauf hingewiesen, dass mit den im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Messverfahren nur die axiale Komponente u_1^g mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden kann. Um jedoch eine systematische Herleitung der Methoden zu ermöglichen, wird bei den Ausführungen in diesem Kapitel jeweils zunächst der Fall betrachtet, dass alle Komponenten des gegebenen Verschiebungsfelds \mathbf{u} vorliegen, um daraufhin die beschriebene Messsituation als Spezialfall zu analysieren. Diese Vorgehensweise erscheint auch deshalb sinnvoll, da manche Methoden, wie die direkten Verfahren in Unterabschnitt 5.1.2, die Kenntnis der Lateralverschiebungen explizit voraussetzen.

5.1 Lineare Elastografie

Die lineare Elastografie bezeichnet die Ermittlung des Schubmoduls μ für einen jeden Punkt \mathcal{M} in einer weichen, (nahezu) inkompressiblen, inhomogenen Struktur \mathcal{B} , vgl. Bild 5.1. Hierbei wird angenommen, dass das Materialverhalten isotrop und linear elastisch ist. Durch diese Prämisse ist Inkompressibilität gleichbedeutend damit, dass für die Querkontraktionszahl $\nu = 0,5$ gilt, bzw. dass bei fast inkompressiblem Material $\nu \approx 0,5$ ist. In beiden Fällen wird die Querkon-

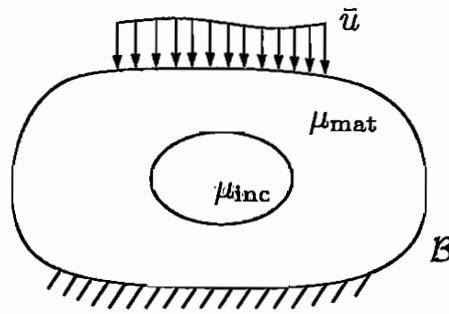


Bild 5.1: Mechanisches Modell eines einfachen Beispiels

traktionszahl ν jedoch als bekannt und über die gesamte Struktur konstant vorausgesetzt.

Aufbauend auf diesen Annahmen, wurden in der Literatur sehr viele Ansätze zur Bestimmung des Schubmoduls μ vorgeschlagen. Diese lassen sich in der linearen Elastografie im Wesentlichen in zwei Gruppen einteilen, die häufig durch die Bezeichnungen *direkte* und *iterative Methoden* unterschieden werden. Diese beiden Methodenklassen werden in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 an Beispielen diskutiert und anhand je eines Repräsentanten in Abschnitt 5.1.3 miteinander verglichen. Wird ein Modell entsprechend Bild 5.1 betrachtet und liegen keine quantitativen Informationen über den Schubmodul μ in einem oder mehreren Punkten der Struktur \mathcal{B} vor, so ist den hier vorgestellten Ansätzen gemeinsam, dass lediglich eine relative Schubmodulverteilung ermittelt werden kann, vgl. hierzu auch Abschnitt 4.3. Daher wird folgend auch nicht explizit zwischen den Begriffen *Schubmodulverteilung* und *relative Schubmodulverteilung* unterschieden. Auf die Frage, unter welchen Bedingungen ggf. Absolutwerte für die Schubmodulverteilung bestimmt werden können, wird kurz in Abschnitt 5.1.3 eingegangen.

Wie bereits in Abschnitt 4.3 erwähnt, werden in der Literatur zur linearen Elastografie häufig ebene, mechanische Problemstellungen betrachtet, vgl. u. a. Skovoroda et al. (1995), Sumi et al. (1995) sowie Oberai et al. (2003). Dies ist eng mit der Tatsache verbunden, dass bei der Ultraschallelastografie die Datenaufnahme in der Regel in einer Ebene erfolgt, vgl. Abschnitt 4.3. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt auch nur ebene Spannungs- bzw. Verzerungszustände betrachtet, wobei die Wahl der Problemstellung vom analysierten Verfahren abhängt. Bei der Diskussion der Methoden in Unterabschnitt 5.1.3 wird dann eine mögliche Erweiterbarkeit auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall geprüft.

Um im Folgenden eine einheitliche Darstellung der Ansätze aus der Literatur zu ermöglichen, wird die in Kapitel 4.1 eingeführte Koordinatenbezeichnung übernommen. So werden die Koordinaten in der Aufnahmeebene mit X_1 und X_2 bezeichnet, wobei X_1 der axialen und X_2 der lateralen Richtung entspricht, während für die Elevationsrichtung ohne Einschränkung der Allgemeinheit $X_3 = 0$ gilt.

5.1.1 Iterative Methoden

In diesem Unterabschnitt wird die prinzipielle Vorgehensweise zur Bestimmung der Schubmodulverteilung mit Hilfe der iterativen Methoden vorgestellt, die forschungshistorisch etwas jünger sind als die direkten Verfahren. Die iterativen Ansätze haben den Vorteil, dass sie sich sehr gut in das theoretische Konzept der direkten und inversen Probleme einfügen, welches in Kapitel 3 ausführlich beschrieben wurde. Hierauf aufbauend lassen sich dann auch die direkten Verfahren in diesen Kontext einbinden.

Iterative Ansätze wurden u. a. von Kallel & Bertrand (1996), Doyley et al. (2000), Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004) vorgeschlagen. Hier entspricht die Ermittlung der Materialverteilung in einer Struktur \mathcal{B} der Interpretation einer indirekten Messung, da die nicht direkt bestimmbare Schubmodulverteilung μ aus dem gemessenen Verschiebungsfeld bzw. der axialen Komponente des Verschiebungsfelds abgeleitet wird. Die Umkehrabbildung, die einem Verschiebungsfeld \mathbf{u} direkt eine Materialverteilung μ zuweist, gilt in diesen Arbeiten als nicht angebar. Vielmehr wird durch mehrmaliges Lösen des direkten Problems und einen damit einhergehenden iterativen Prozess die vorhandene Materialverteilung approximiert.

Daher ist in diesem Fall für die Behandlung eines inversen Problems die korrespondierende direkte Aufgabe von großer Bedeutung. Für diese gilt:

Bestimme für gegebene Randbedingungen und eine gegebene relative Schubmodulverteilung $\mu = \mu(\mathbf{X})$, $\forall \mathbf{X} \in B_0$ das Verschiebungsfeld \mathbf{u} , so dass die Gleichgewichtsbedingungen in Gleichung (2.133) oder die korrespondierende schwache Form (2.135) erfüllt sind.

Mit dieser Aussage lässt sich der Operator der direkten Aufgabe durch

$$\mathcal{F} : \begin{cases} M \supset D(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \bar{U} \\ \mu & \longmapsto & \mathbf{u} \end{cases}, \quad (5.1)$$

angeben, mit M der Menge der Schubmodulverteilungen und \bar{U} der Menge der Verschiebungsfelder, die den kinematischen Randbedingungen genügen. Dies lässt sich zunächst durch die Definitionen

$$M := L^2(B_0) = \left\{ \mu : B_0 \rightarrow \mathbf{R} \mid \int_{B_0} \mu^2 dV < \infty \right\} \quad \text{und} \quad (5.2)$$

$$\bar{U} := \left\{ \mathbf{u} : B_0 \rightarrow \mathbf{R}^2 \mid u_i \in H^1(B_0) \text{ und } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial B_u \right\} \quad (5.3)$$

genauer spezifizieren, wobei $H^1(B_0)$ den Sobolev-Raum

$$H^1(B_0) := \left\{ u_i : B_0 \rightarrow \mathbf{R}^2 \mid u_i, \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \in L^2(B_0) \right\} \quad (5.4)$$

bezeichnet. Der Definitionsbereich $D(\mathcal{F})$ enthält die physikalisch zulässigen Elemente aus der Menge M . So ist ein negativer Schubmodul mit Sicherheit ausgeschlossen. Da nur ein Schubmodulverhältnis zwischen den einzelnen Punkten der

Struktur \mathcal{B} angegeben werden kann, kann die Menge noch weiter eingeschränkt werden. So lässt sich jede beliebige Materialverteilung durch einen Repräsentanten $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathbf{X})$ auf dem Bereich \mathcal{B} darstellen, mit $\bar{\mu}(\mathbf{X}) \geq a \in \mathbf{R}$, so dass sich die Definitionsmenge zu

$$D(\mathcal{F}) := \{\mu \in L^2(\mathbf{B}_0) \mid \mu(\mathbf{X}) \geq 1 \text{ für alle } \mathbf{X} \in \mathbf{B}_0\} \quad (5.5)$$

ergibt.¹

Die Anwendung des Operators \mathcal{F} selbst entspricht bei gegebener Materialverteilung μ der Bestimmung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} , was gleichbedeutend mit der Lösung des durch Gleichung (2.133) gegebenen quasi-statischen Randwertproblems ist. Zur numerischen Behandlung dieser Problemstellung stehen mehrere, unterschiedliche Diskretisierungsverfahren zur Verfügung wie die Randelementmethode, die Finite-Differenzen-Methode oder die Finite-Elemente-Methode, wobei im Zusammenhang mit den iterativen Methoden ausschließlich das letztgenannte Verfahren behandelt wird. Da die betrachteten Strukturen nahezu inkompressibel sind, müssen bei der numerischen Umsetzung des Problems spezielle Ansätze herangezogen werden, so z. B. die in Abschnitt 2.5 beschriebene Verschiebungs-Druck-Formulierung auf der Basis des Hu-Washizu-Variationsprinzips.

Bevor das Problem abschließend formuliert werden kann, muss die Zielmenge \bar{U} noch einmal genauer betrachtet werden. Da die gegebenen Daten, das Verschiebungsfeld \mathbf{u}^g , durch Messungen gewonnen werden, sind sie messfehlerbehaftet. Im Weiteren wird angenommen, dass diese Messfehler entsprechend Gleichung (3.9) durch die Bedingung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^g\| \leq \delta \quad (5.6)$$

beschränkt sind, mit $\mathbf{u} = \mathcal{F}(\mu)$ als der exakten Lösung. Dieses gemessene Verschiebungsfeld \mathbf{u}^g muss nicht mehr in der Menge \bar{U} liegen, da im Allgemeinen weder die Randbedingungen noch die Differenzierbarkeit erfüllt sind, also $\mathbf{u}^g \notin \bar{U}$ gilt. Um auch diese Elemente erfassen zu können, wird statt dessen als Bildbereich die Menge U mit

$$U := \{\mathbf{u} : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{R}^2 \mid u_i \in L^2(\mathbf{B}_0)\} \quad (5.7)$$

betrachtet.

Liegt bei einer Messung nur die axiale Verschiebungskomponente u_1^g mit hinreichender Genauigkeit vor, wird der Operator

$$\mathcal{F} : \begin{cases} M \supset D(\mathcal{F}) & \longrightarrow & U_1 \\ \mu & \longmapsto & u_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

¹Der Wert $a = 1$ wurde willkürlich gewählt und ist von der Dimension einer mechanischen Spannung. Auf die Verwendung von Einheiten wird im Folgenden jedoch der Einfachheit halber verzichtet, was in diesem Zusammenhang zulässig ist, da nur ein Schubmodulverhältnis bestimmt werden kann.

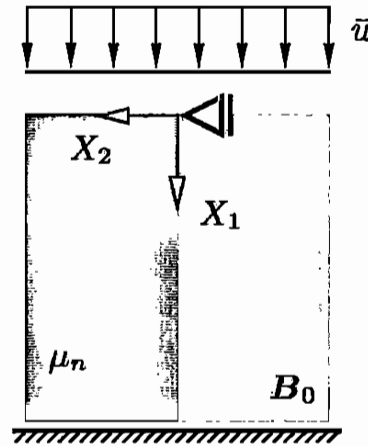


Bild 5.2: Untersuchung der Eindeutigkeit und der lokalen Schlechtgestellttheit der iterativen Verfahren: quadratische Struktur mit den Seitenlängen h aus geschichtetem Material

betrachtet, mit einer zur Gleichung (5.7) gleichwertigen Definition für die Menge U_1 und $D(\mathcal{F}) = D(\mathcal{F})$. Wird durch die Festlegung

$$\mathcal{P} : \begin{cases} U & \longrightarrow U_1 \\ \mathbf{u} & \longmapsto \mathcal{P}(\mathbf{u}) = u_1 \end{cases} \quad (5.9)$$

die Projektion \mathcal{P} auf die axiale Richtung eingeführt, so kann der Operator \mathcal{F} auch über die Gleichung

$$\mathcal{F} := \mathcal{P} \circ \mathcal{F} \quad (5.10)$$

definiert werden. Somit lässt sich das Problem der linearen Elastografie kompakt in der Form $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ bzw. durch $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U_1)$ angeben. Von den dabei eingeführten Operatoren \mathcal{F} und \mathcal{F} wird im Weiteren angenommen, dass sie die in Kapitel 3.3 formulierten Voraussetzung der Fréchet-Differenzierbarkeit respektive der Schubmodulverteilung μ erfüllen. Falls bei den folgenden Ausführungen dieses Abschnitts nicht explizit darauf hingewiesen wird, werden zur Vereinfachung der Darstellung durch das Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ stets beide Formulierungen erfasst.

Zunächst wird eine Klassifikation der Aufgabe $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ vorgenommen. Mit Hilfe des in Bild 5.1 dargestellten Beispiels wird deutlich, dass der Operator offensichtlich nichtlinear ist, da auf einem Rand mit inhomogenen Verschiebungsrandbedingungen für zwei beliebige Materialverteilungen μ_1 und μ_2 stets

$$\mathcal{F}(\mu_1) + \mathcal{F}(\mu_2) \neq \mathcal{F}(\mu_1 + \mu_2) \quad (5.11)$$

gilt.

Im nächsten Schritt wird untersucht, ob das Problem entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.3 lokal gut oder schlecht gestellt ist. Zu diesem Zweck wird ein Spezialfall eines Beispiels von Barbone & Gokhale (2004) aufgegriffen, welches in Bild 5.2 dargestellt ist. Hierbei wird durch die Betrachtung eines ebenen Spannungszustands ein in X_2 -Richtung geschichtetes Material analysiert, wobei der Schubmodul μ in beiden Teilkörpern jeweils konstant ist. Der Körper wird durch die Randverschiebung $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u} \mathbf{E}_1$ beansprucht. Hierauf aufbauend lässt sich nun für $n \in \mathbf{N}_0$ eine Folge von Materialverteilungen

$$\mu_0 = \mu_0(\mathbf{X}) = \bar{\mu} \quad \text{für alle } \mathbf{X} \in \mathbf{B}_0 \quad (5.12)$$

und für $n \geq 1$

$$\mu_n = \mu_n(\mathbf{X}) = \begin{cases} \bar{\mu} & \text{für } \mathbf{X} \in \mathbf{B}_0, X_2 \geq 0 \\ \bar{\mu} + \check{\mu} \left(1 + \frac{1}{n}\right) & \text{für } \mathbf{X} \in \mathbf{B}_0, X_2 < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

konstruieren, mit $\bar{\mu} \geq 1$ und $\check{\mu} > 0$, so dass $\mu_i \neq \mu_j$ für $i \neq j$. Werden nun z. B. die Materialverteilungen μ_0 und μ_1 betrachtet, so folgt für die Problemstellung $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$

$$\mathcal{F}(\mu_0) = \mathcal{F}(\mu_1) = \mathbf{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} 1 - \frac{X_1}{h} \\ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{X_2}{h} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

mit $\mu_0 \neq \mu_1$. Hierdurch wird deutlich, dass das Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ auf dem Definitionsbereich $D(\mathcal{F})$ die Eindeutigkeitsbedingung nach Hadamard verletzt, vgl. Abschnitt 3.1. Darüber hinaus ist das Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ in der Lösung μ_0 lokal schlecht gestellt. Denn wird die Definition einer Kugel $K_r(\mu_0)$ nach Gleichung (3.22) berücksichtigt, dann lässt sich für jeden beliebigen Radius $r > 0$ und einen hinreichend kleinen Wert für $\check{\mu}$ durch die Gleichung (5.13) eine Folge von Schubmodulverteilungen konstruieren, so dass

$$\|\mathcal{F}(\mu_0) - \mathcal{F}(\mu_n)\|_U = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}, \quad (5.15)$$

aber

$$\|\mu_0 - \mu_n\|_M = \frac{h\check{\mu}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{h\check{\mu}}{\sqrt{2}} \quad (5.16)$$

gilt, vgl. Gleichung (3.23). Die lokale Schlechtgestellttheit lässt sich auch für jedes andere, in irgendeiner Form in X_2 -Richtung geschichtete Material auf analoge Art und Weise aufzeigen.

Für eine beliebige Schubmodulverteilung μ ist dieser Nachweis so nicht möglich. Hier kann lediglich eine Folge μ_n konstruiert werden, welche die Eigenschaft ausnutzt, dass, wenn $\mu = \mu(\mathbf{X})$ eine Lösung des Problems $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ ist, immer auch $\hat{\mu} = c\mu$ mit $c > 0$ eine Lösung für das Problem darstellt. Eingedenk der

Tatsache, dass im Allgemeinen nur das Schubmodulverhältnis bestimmt werden kann, muss zwischen den Lösungen μ und $\hat{\mu}$ aber generell nicht unterschieden werden. Wird beim Einsatz eines iterativen Verfahrens darauf geachtet, dass solche Lösungen $\mu \in D(\mathcal{F})$ bevorzugt werden, die eine möglichst kleine Norm aufweisen, so kann aus allen möglichen Lösungen

$$L := \left\{ \hat{\mu} \in D(\mathcal{F}) \mid \hat{\mu} = c\mu \text{ und } \mathcal{F}(\mu) = \mathbf{u}, \frac{1}{c} \leq \min_{\mathbf{X} \in B_0} \mu(\mathbf{X}) \right\} \quad (5.17)$$

ein eindeutig bestimmtes Element ausgewählt werden, da die Menge L abgeschlossen und konvex ist. Von daher ist diese Form der Schlechtgestelltheit von einer anderen Qualität als bei dem zuvor betrachteten, geschichteten Material. Hier hat die Vorgehensweise, eine Lösung mit möglichst kleiner Norm zu bevorzugen, einen stark regularisierenden Charakter, da dies stets auf die Verteilung

$$\mu = \bar{\mu} \quad \text{für alle } \mathbf{X} \in B_0 \quad (5.18)$$

führen würde, während die tatsächlich vorhandene Materialverteilung eine gänzlich andere sein kann.

Zur Lösung der Operatorengleichung wird in der Regel die Gâteaux-Ableitung \mathcal{F}' des Operators \mathcal{F} benötigt, die die Veränderung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} bei hinreichend kleinen Änderungen des relativen Schubmoduls μ beschreibt. Es gilt

$$\Delta^\mu \mathcal{F} := \mathcal{F}'(\mu) \cdot \Delta\mu = D_\mu \mathcal{F}(\mu) \cdot \Delta\mu = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(\mu + \varepsilon \Delta\mu) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (5.19)$$

Da ein nahezu inkompressibles Material betrachtet wird, wird zur Bestimmung dieser Ableitung die Potentialformulierung (2.136) herangezogen. Dann gilt unter den in diesem Abschnitt gültigen Annahmen für einen Gleichgewichtszustand nach Gleichung (2.139)

$$D_{\mathbf{u}} \Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : (\boldsymbol{\sigma}' + p \mathbf{1}) \, dV = 0, \quad (5.20)$$

für beliebiges $\boldsymbol{\eta}_0$ entsprechend Gleichung (2.96). Aus der Richtungsableitung der Größe $D_{\mathbf{u}} \Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0$ respektive des Schubmoduls folgt

$$D_\mu (D_{\mathbf{u}} \Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0) \cdot \Delta\mu = \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : ((2\varepsilon') \Delta\mu + 2\mu \Delta^\mu \varepsilon' + \Delta^\mu p \mathbf{1}) \, dV = 0. \quad (5.21)$$

Die unbekannte Richtungsableitung $\Delta^\mu p$ des Drucks p lässt sich aus einer leicht modifizierten Gleichung (2.143) bestimmen. Es ist zu beachten, dass der Kompressionsmodul K in dieser Formulierung über Beziehung (4.12) vom Schubmo-

dul μ abhängt, da die Querkontraktionszahl mit $\nu \approx 0,5$ als bekannt vorausgesetzt wird und es gilt

$$D_\mu(D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0) \cdot \Delta\mu = \int_{B_0} q_0 (f_K \varepsilon_\nu \Delta\mu + K \Delta^\mu \varepsilon_\nu - \Delta^\mu p) dV = 0 \quad (5.22)$$

für beliebiges q_0 . Somit kann die Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der Linearisierung $\mathcal{F}'(\mu) \cdot \Delta\mu$ durch Gleichung (5.21) in der Form

$$\int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : (2\mu \Delta^\mu \varepsilon' + \Delta^\mu p \mathbf{1}) dV = - \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : (2\varepsilon' \Delta\mu) dV \quad (5.23)$$

angegeben werden. In dieser Gleichung ist darauf zu achten, dass in der Richtungsableitung des Drucks $\Delta^\mu p$ auch noch ein Anteil enthalten ist, der von $\Delta\mu$ abhängt. Eine weitere Vereinfachung ist jedoch erst nach erfolgter Diskretisierung möglich.

Die Bestimmungsgleichung der Gâteaux-Ableitung des Operators \mathcal{F} ist in dem hier formulierten Rahmen, bei dem unendlichdimensionale Funktionenräume betrachtet werden, nicht angebar. Wird das Problem diskretisiert und somit eine endlichdimensionale Betrachtung angestellt, kann die Ableitung \mathcal{F}' jedoch bestimmt werden, indem zunächst die Richtungsableitung des Operators \mathcal{F} berechnet wird, um mit deren Hilfe auf die Ableitung von \mathcal{F} zu schließen, so dass im Folgenden \mathcal{F}' ebenfalls als bestimmbar Größe vorausgesetzt wird, vgl. Kallel & Bertrand (1996). Der Übergang zwischen den endlichdimensionalen Formen der Operatoren \mathcal{F} und \mathcal{F}' , die in Form von Matrizen gegeben sind, erfolgt dabei im Wesentlichen durch Streichen entsprechender Zeilen und Spalten.

Die bisher sehr allgemein gehaltenen Ausführungen müssen, um die in der Literatur vorhandenen Ansätze beschreiben zu können, weiter konkretisiert werden. Da in den zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten Arbeiten die numerische Realisierung im Vordergrund steht, wird dort im Wesentlichen die endlichdimensionale Form des Problems $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U_1)$ behandelt, die im Folgenden zur einfacheren Unterscheidung als $(\mathcal{F}^h, D^h(\mathcal{F}^h), U_1^h)$ bezeichnet wird. Weil in diesem Abschnitt jedoch lediglich eine Einordnung der Verfahren in die Theorie der Mathematik der inversen Probleme im Sinne von Kapitel 3 erfolgen soll, wird an dieser Stelle mit einer Beschreibung auf Basis der unendlichdimensionalen Funktionenräume fortgefahren. Auf eine Erläuterung der numerischen Umsetzung zur Gewinnung der Ableitung $\mathcal{F}'(\mu)$ wird daher ebenso verzichtet, wie auf die genaue Ausgestaltung der endlichdimensionalen Teilräume M^h und U^h der Funktionenräume M bzw. U .

Um das inverse Problem der Elastografie zu lösen, verwenden sowohl Kallel & Bertrand (1996) als auch Doyley et al. (2000) Varianten eines inexakten Newtonverfahrens, vgl. Abschnitt 3.3, wobei Kallel & Bertrand davon ausgehen, dass die Aufgabe $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U_1)$ gut gestellt ist. Zur iterativen Bestimmung der Materialverteilung μ wird in den Ansätzen lediglich die axiale Komponente der

Verschiebungen verwendet, so dass im k -ten Iterationsschritt zunächst die Richtungsableitung $\mathcal{A}_k = \mathcal{F}'(\mu_k)$ bestimmt werden muss. Mit dieser Ableitung wird dann eine Bestimmungsgleichung der Form

$$(\mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k + t_k \mathcal{I}) \Delta \mu_k = \mathcal{A}_k^* (u_1^g - u_{1k}) \quad (5.24)$$

gelöst, woraus sich die Aufdatierung $\Delta \mu_k$ der Materialparameter vom k -ten zum $(k+1)$ -Iterationsschritt ergibt. In Gleichung (5.24) wird mit u_{1k} die Verschiebung bezeichnet, die sich durch Lösen der Operatorengleichung \mathcal{F} im k -ten Iterationsschritt ergibt, also $u_{1k} = \mathcal{F}(\mu_k)$. Zur Parameterwahl für den Regularisierungsparameter t_k werden in den Arbeiten unterschiedliche Ansätze vorgeschlagen. Kallel & Bertrand (1996) verwenden das verallgemeinerte Cross-Validation-Kriterium, vgl. Abschnitt 3.2, auf dessen Grundlage der Parameter t_0 bestimmt wird. Da aufgrund des hohen numerischen Aufwands auf die eigentlich erforderliche Bestimmung von t_k in jedem Iterationsschritt verzichtet wird, wird t_0 zunächst leicht erhöht und dann für alle Iterationen konstant gehalten, also gilt $t_k = t_0$. Doyley et al. (2000) bevorzugen die durch das Marquart-Verfahren gegebene Parameterwahl, vgl. hierzu die in der Arbeit zitierte Originalliteratur Marquardt (1963) und Abschnitt 3.3.

Auch die Abbruchkriterien für den Iterationsprozess über den Index k unterscheiden sich. Wird die Darstellung der Ergebnisse herangezogen, so wählen Kallel & Bertrand (1996) die feste Anzahl von 15 Iterationen als Stoppbedingung. Sieht man von der Stabilisierung im Iterationsschritt ab, so entspricht diese Strategie dem Vorgehen, welches von Hofmann (1999, Kap. 4) als ungesteuerte Regularisierung bezeichnet wird. Die ungesteuerte Regularisierung, die bei Kallel & Bertrand (1996) im Sinne einer unvollständigen Minimierung angewandt wird, ist jedoch nach Einschätzung von Hofmann theoretisch kaum beherrschbar. Auch in der Arbeit von Doyley et al. (2000) wird das Stoppkriterium angewendet, nach einer zuvor festgelegten Anzahl von Iterationen, hier 20 Schritten, das Verfahren abzubrechen. Darüber hinaus wird der Algorithmus beendet, falls die Änderung in der Schubmodulverteilung μ zwischen zwei Iterationsschritten k und $k+1$ unterhalb eines Grenzwerts ε_1 liegt bzw. wenn der Abstand des berechneten und gemessenen Axialverschiebungsfelds kleiner als eine Schranke ε_2 ist.

Ein auf der Tikhonov-Phillips-Regularisierung beruhendes Verfahren wurde von Oberai et al. (2003) vorgestellt und im Artikel Oberai et al. (2004) weiter hinsichtlich der numerischen Effizienz vergleichend untersucht. Im Rahmen dieser Methode wird das Tikhonov-Phillips-Funktional

$$f(\mu) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}(\mathcal{F}(\mu) - u^g)\|_{U_1}^2 + \frac{t}{2} \|\mu\|_M^2 \quad (5.25)$$

entsprechend Gleichung (3.26) minimiert, wobei mit t der Regularisierungsparameter bezeichnet wird. Durch die Projektion \mathcal{P} auf die axiale Richtung entsprechend Gleichung (5.9) wird berücksichtigt, dass die nur sehr ungenau bestimm- baren Verschiebungen in lateraler Richtung im Optimierungsprozess unberücksichtigt bleiben.

Zur Definition eines Minimierungsalgorithmus auf der Basis eines Quasi-Newton Verfahrens ist die Kenntnis der Gâteaux-Ableitung erforderlich. Diese lässt sich analog zu Gleichung (5.19) durch

$$\Delta^\mu f = f'(\mu) \cdot \Delta\mu = D_\mu f(\mu) \cdot \Delta\mu = \left. \frac{d}{d\varepsilon} f(\mu + \varepsilon \Delta\mu) \right|_{\varepsilon=0} \quad (5.26)$$

berechnen. Für den k -ten Iterationsschritt lautet die Richtungsableitung

$$f'(\mu_k) \cdot \Delta\mu_k = \langle \mathcal{P}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}^g), \mathcal{P}(\mathcal{F}'(\mu_k) \cdot \Delta\mu_k) \rangle_{U_1} + t \langle \mu_k, \Delta\mu_k \rangle_M, \quad (5.27)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass $\|\cdot\|_{U_1}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{U_1}$ und $\|\cdot\|_M^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$ gilt, vgl. Fußnote 2 auf Seite 38. Die Bestimmung der Gâteaux-Ableitung kann auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen, die von Oberai et al. (2003) als *direkte Gradientenberechnung* und *Gradientenberechnung mit Hilfe der adjungierten Gleichungen* bezeichnet werden und von denen die zweite Variante numerisch effizienter ist.

Als Parameterwahlkriterium wird in Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004) das in Abschnitt 3.2 eingeführte Morozovsche Diskrepanzprinzip vorgeschlagen und angewendet. Da lediglich die axiale Komponente des Verschiebungsfelds berücksichtigt wird, ist der größte Parameter $t > 0$ zu ermitteln, der die Bedingung

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^g)\|_{U_1} \leq \tau \delta \quad (5.28)$$

erfüllt, mit $\tau > 1$, $\delta = \bar{\delta} \|\mathcal{P}(\mathbf{u}^g)\|_{U_1}$ und $1/\bar{\delta}$ als dem Signal-Rausch-Verhältnis, vgl. Oberai et al. (2004).

Abgebrochen wird der Minimierungsalgorithmus durch die Bedingung, dass die Änderung im Funktional f bezogen auf unterschiedliche Iterationsschritte kleiner einer Schranke $\varepsilon > 0$ ist. Konkret bedeutet dies im k -ten Iterationsschritt, dass der Minimierungsprozess gestoppt wird, falls

$$0 < f(\mu_k) - f(\mu_{k-5}) < \varepsilon f(\mu_{k-5}) \quad (5.29)$$

gilt.

5.1.2 Direkte Verfahren

Nach der Beschreibung der iterativen Verfahren und deren Einbettung in den theoretische Rahmen der Mathematik der inversen Probleme, können nun auch die direkten Verfahren analysiert werden. Bei den direkten Methoden handelt es sich im Allgemeinen um Ansätze, die unter Verwendung der Impulsbilanz nach einer Umkehrabbildung \mathcal{F}^{-1} suchen. Dieser Operator ist ebenfalls in Form einer partiellen Differentialgleichung gegeben – hier aber für den Schubmodul μ – und weist einem Verschiebungsfeld \mathbf{u} direkt eine Materialverteilung zu. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich angemerkt, dass dadurch die Schlechtgestellttheit des

Problems der Schubmodulermittlung nicht umgangen werden kann. In den Differentialgleichungen für μ werden nun die gemessenen Verschiebungen als Koeffizienten in Form von Verzerrungen und deren partiellen Ableitungen verwendet. Die Rekonstruktion der Ableitung aus verrauschten Daten stellt jedoch ihrerseits ein inverses und schlecht gestelltes Problem dar, vgl. Kirsch (1996, Kap. 2) und Rieder (2003, Kap. 1). Die hieraus resultierende Instabilität überträgt sich auf das Problem $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$.

Exemplarisch für direkte Verfahren werden die in den Beiträgen Sumi et al. (1995) und Skovoroda et al. (1995) vorgestellten Methoden kurz dargestellt und analysiert. Auf eine ausführliche Darstellung des Algorithmus von Raghavan & Yagle (1994), der ebenfalls zu den direkten Verfahren gezählt werden kann, wird an dieser Stelle verzichtet, da er viele Gemeinsamkeiten mit dem Ansatz von Skovoroda et al. (1995) aufweist, so dass lediglich im Abschnitt 5.1.3 diese Methode noch einmal kurz aufgegriffen wird. Der wesentliche Unterschied zwischen den Ansätzen von Sumi et al. (1995) und Skovoroda et al. (1995) besteht darin, dass im ersten Fall ein ebener Spannungszustand angenommen wird, im anderen Fall ein ebener Verzerrungszustand, woraus sich fundamental unterschiedliche Lösungsdifferentialgleichungen ergeben. Aus diesem Grund ist eine weitere Differenzierung an dieser Stelle sinnvoll.

Zunächst wird die Methode von Skovoroda et al. (1995) betrachtet. Bei diesem Verfahren wird angenommen, dass das Material vollständig inkompressibel ist, was die Verwendung des pseudo-konstitutiven Gesetzes (2.144) rechtfertigt. Weiter wird davon ausgegangen, dass alle Belastungen quasi-statisch aufgebracht werden und die volumenhaft angreifenden Einwirkungen vernachlässigt werden können, was den Annahmen in Abschnitt 4.3 entspricht. Daher vereinfacht sich Gleichung (2.145) zu

$$\text{Grad}(p) + 2 \text{Div}(\mu \epsilon) = 0. \quad (5.30)$$

Durch die Annahme eines ebenen Verzerrungszustands folgt $\epsilon_{33} = 0$ und hieraus ergibt sich mit Gleichung (2.127)

$$\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}. \quad (5.31)$$

Mit dieser Gleichung und aus der X_3 -Komponente der Rotation des Vektorfeldes (5.30) lässt sich die Bestimmungsdifferentialgleichung

$$\frac{\partial^2(\epsilon_{12}\mu)}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2(\epsilon_{12}\mu)}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2(\epsilon_{11}\mu)}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \quad (5.32)$$

für den Schubmodul herleiten. Durch Anwenden der partiellen Ableitungen folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} \frac{\partial^2 \mu}{\partial X_1^2} - 2\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \mu}{\partial X_1 \partial X_2} - \epsilon_{12} \frac{\partial^2 \mu}{\partial X_2^2} + 2(\epsilon_{12,1} - \epsilon_{11,2}) \frac{\partial \mu}{\partial X_1} \\ - 2(\epsilon_{11,1} + \epsilon_{12,2}) \frac{\partial \mu}{\partial X_2} + (\epsilon_{12,11} - 2\epsilon_{11,21} - \epsilon_{12,22}) \mu = 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

wodurch sich die Diskriminante zu

$$d = -\varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{11}^2 < 0 \quad \text{für alle } \varepsilon \neq 0 \quad (5.34)$$

bestimmen lässt. Hiermit kann die Differentialgleichung (5.32) als lineare, partielle, hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung klassifiziert werden, vgl. Meister (1996, Kap. 2). Die in Gleichung (5.33) verwendeten Koeffizienten $\varepsilon_{ij,k}$ bzw. $\varepsilon_{ij,kl}$ bezeichnen die partiellen Ableitungen bzgl. X_k bzw. X_k und X_l mit Werten $k, l = 1, 2$ und werden als bekannte Größen vorausgesetzt.

Die eindeutige Lösbarkeit von Gleichung (5.32) hinsichtlich des Schubmoduls ist nur dann gewährleistet, wenn geeignete Randbedingungen für μ verfügbar sind. Durch die Gleichung

$$\varepsilon_{12} dX_2 = \left(-\varepsilon_{11} \pm \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2} \right) dX_1 \quad (5.35)$$

werden die so genannten charakteristischen Kurven $X_2(X_1)$ von Gleichung (5.32) definiert, vgl. Bronstein et al. (1997, Kap. 9), die parallel zu den Hauptachsen des Verzerrungstensors ε verlaufen, was in Barbone & Gokhale (2004) nachgewiesen wurde. Da Differentialgleichung (5.32) vom hyperbolischen Typ ist, sind die Scharen der charakteristischen Kurven reell. Ist nun der Verlauf der Schubmodulverteilung auf zwei sich schneidenden Charakteristiken gegeben, so kann der Schubmodul eindeutig in dem durch die Charakteristiken begrenzten Gebiet \mathcal{P} bestimmt werden, vgl. Skovoroda et al. (1999) und Bild 5.3(a). Das hier beschriebene Randwertproblem wird in der Literatur auch als Goursat Randwertproblem bezeichnet.²

Um den gesuchten Schubmodul μ in der Struktur \mathcal{B} zu ermitteln, schlagen Skovoroda et al. (1995) einen zweiteiligen Algorithmus vor. Zunächst wird zwischen zwei Arten von Einschlüssen unterschieden. Auf der einen Seite werden Einschlüsse betrachtet, bei denen sich der Schubmodul μ im Bezug zur Umgebung unstetig ändert, auf der anderen Seite werden Einschlüsse untersucht, bei denen sich μ stetig ändert. Aufgabe des ersten Schritts im Algorithmus ist es, die Materialkanten auf der Basis der Verzerrungsfelder zu ermitteln, die sich bei einer unstetigen Änderung des Schubmoduls ergeben. Nach dieser Kantenermittlung ist es möglich, eine geschlossene Kurve L zu definieren, auf der der Schubmodul $\mu = \mu(\mathbf{X}) = \mu_0$ konstant ist, vgl. Bild 5.3(b). Nun kann in einem zweiten Schritt der Schubmodul in dem durch die Kurve L eingeschlossenen Gebiet \mathcal{P} durch Lösen der Differentialgleichung (5.32) bestimmt werden. Da sich jedoch in dem Gebiet \mathcal{P} noch Einschlüsse befinden können, die eine unstetige Änderung des Schubmoduls aufweisen, ist die Voraussetzung nicht gesichert, dass

²Skovoroda et al. setzten in ihrer Arbeit von 1999 voraus, dass der Schubmodul auf zwei sich schneidenden Charakteristiken bekannt ist. Da in der Arbeit aber ein leicht modifizierter Ansatz verwendet wird und darüber hinaus neben linear elastischem Materialverhalten auch ein St. Venant-Kirchhoff Materialmodell betrachtet wird, erfolgt eine Analyse dieses Beitrags erst in Abschnitten 5.1.3 und 5.2.

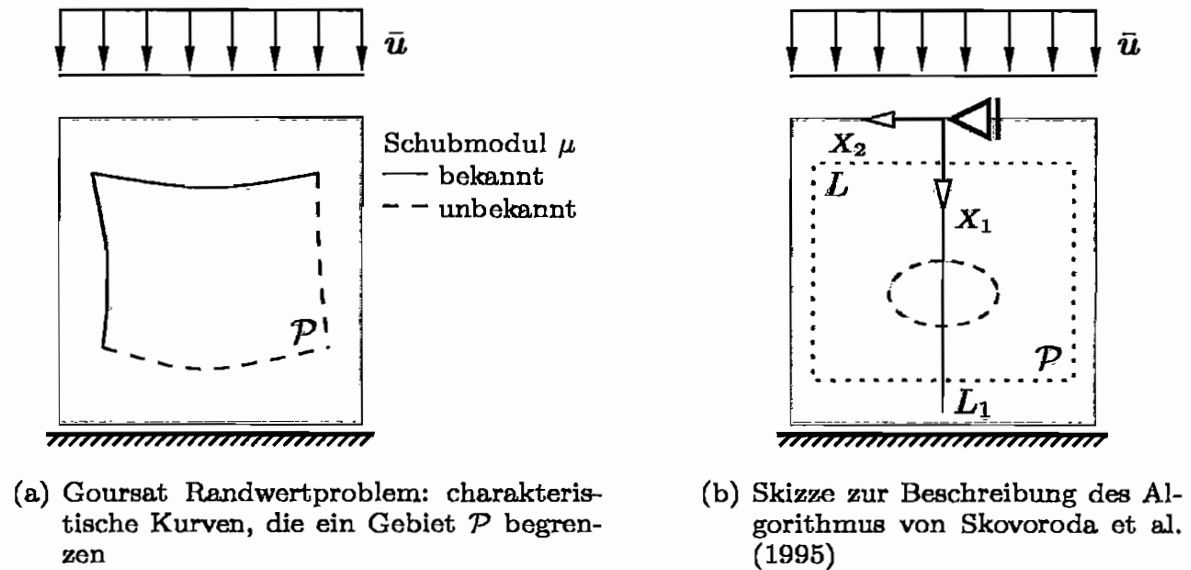


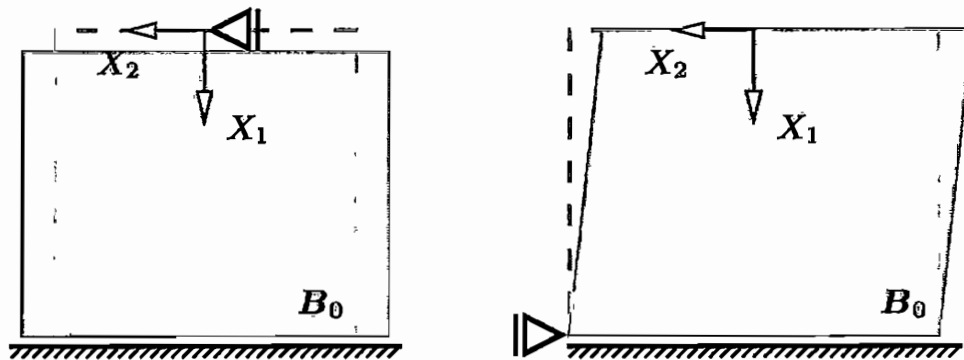
Bild 5.3: Ermittlung des Schubmoduls μ mit dem Verfahren von Skovoroda et al. (1995)

die Schubmodulverteilung μ ebenso wie das Verzerrungsfeld ϵ zweimal differenzierbar ist. Dieses Problem wird dadurch umgangen, dass die gemessene, axiale Verschiebungskomponente u_1^g mit einem Tiefpassfilter gefiltert wird, der die Daten und somit auch die Rekonstruktion des Materialparameters μ entsprechend glättet. Hierdurch wird die tatsächlich vorhandene Schubmodulverteilung durch die berechnete unterschätzt.

Damit die Differentialgleichung (5.32) gelöst werden kann, muss lediglich noch die laterale Verschiebungskomponente u_2^g bestimmt werden. Da diese Verschiebungskomponente im Rahmen einer Elastografiemessung nur sehr ungenau ermittelt werden kann, wird die Inkompressibilitätsbedingung (5.31) herangezogen, die sich auch in der Form

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad (5.36)$$

formulieren lässt. Ist nun die laterale Komponente entlang einer vertikalen Linie L_1 bekannt, so kann das laterale Verschiebungsfeld aus dem axialen bestimmt werden, vgl. Bild 5.3. Da die von Skovoroda et al. (1995) untersuchten Strukturen alle in den Belastungen und der Materialverteilung Symmetrie aufweisen, wird angenommen, dass die Verschiebungen in lateraler Richtung in den Punkten mit $X_2 = 0$ Null sind. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass durch die Annahme einer symmetrischen Materialverteilung a priori Informationen in die Berechnung einfließen, die im Allgemeinen nicht zugänglich sind.



(a) Quadratische Struktur mit Seitenlänge h (b) Struktur mit Höhe h und Breite b

Bild 5.4: Beispielstrukturen zur Untersuchung der Eindeutigkeit und der Schlechtgestelltheit der direkten Verfahren

Eine Analyse des hier vorgestellten Verfahrens hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösung μ wurden von Barbone & Bamber (2002) bzw. Barbone & Gokhale (2004) durchgeführt. Unter anderem werden dort die Fälle betrachtet, dass keine Informationen bzgl. des Schubmoduls auf dem Rand vorliegen und dass der Schubmodul auf der Umrandung konstant ist, was der Annahme von Skovoroda et al. (1995) entspricht.

Welche Auswirkungen sich ergeben, wenn keine oder nicht hinreichend viele Informationen über den Schubmodul auf dem Rand bekannt sind, kann mittels des in Bild 5.4(a) dargestellten Beispiels verdeutlicht werden. Wird das aus dem dort dargestellten Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (-\varepsilon X_1 + \bar{u}, \varepsilon X_2)^T, \quad \text{mit } \varepsilon = \bar{u}/h \quad (5.37)$$

resultierende, konstante Verzerrungsfeld ε in die Bestimmungsgleichung (5.32) für den Schubmodul eingesetzt, so vereinfacht sich diese zu

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial X_1 \partial X_2} = 0, \quad (5.38)$$

welche als allgemeine Lösung die Funktion

$$\mu(\mathbf{X}) = f(X_1) + g(X_2) \quad (5.39)$$

besitzt. Hierdurch wird deutlich, dass neben der homogenen Materialverteilung unendlich viele Lösungen existieren, das Problem mithin also nicht eindeutig bestimmt ist.

Liegen hingegen Randbedingungen wie bei dem Verfahren von Skovoroda et al. (1995) vor, so wird von Barbone & Gokhale (2004) gezeigt, dass dies auf ein

zwar unter Umständen eindeutig lösbares, aber immer noch schlecht gestelltes Problem führt. Zu diesem Zweck wird das in Bild 5.4(b) präsentierte Beispiel betrachtet, bei der ein Körper einer Schubbeanspruchung ausgesetzt ist. Werden Randbedingungen entsprechend der Arbeit von Skovoroda et al. (1995) angenommen, führt dies auf

$$\mu(0, X_2) = \mu(h, X_2) = \mu(X_1, -b/2) = \mu(X_1, b/2) = \mu_0. \quad (5.40)$$

Für ein Verschiebungsfeld der Form

$$\mathbf{u} = (0, \varepsilon(X_1 - h))^T \quad (5.41)$$

vereinfacht sich die Differentialgleichung (5.32) zu

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial X_1^2} = 0. \quad (5.42)$$

Diese wird durch eine Funktion der Form

$$\mu(\mathbf{X}) = \mu_0 + \hat{\mu}(\mathbf{X}) \quad (5.43)$$

gelöst, falls die Schubmodulverteilung $\hat{\mu}$ die zur Gleichung (5.40) gehörenden homogenen Randbedingungen erfüllt. Nun lässt sich aber durch

$$\hat{\mu}(\mathbf{X}) = \sin(n\pi X_1) \cos(m\pi X_2) \quad (5.44)$$

eine Schubmodulverteilung konstruieren, welche die Differentialgleichung (5.42) erfüllt, wenn für n und m

$$n^2 - m^2 = 0 \quad (5.45)$$

gilt. Die zur Gleichung (5.40) korrespondierenden homogenen Randbedingungen sind darüber hinaus erfüllt, falls für die Produkte

$$n \cdot h, m \cdot b \in \mathbf{Z} \quad (5.46)$$

gilt. Sind nun h und b rationale Zahlen, dann existiert ein ganzzahliger Wert a , so dass $a \cdot h$ und $a \cdot b$ ganze Zahlen sind. Dann sind für die Wahl $n = m = a$ die Bedingungen (5.45) und (5.46) eingehalten und das Problem ist nicht eindeutig. Ist nur eine der Abmessungen h bzw. b irrational, so kann Bedingung (5.46) nicht erfüllt werden. Jedoch kann in einem solchen Fall der irrationale Wert beliebig genau durch eine rationale Zahl approximiert werden, so dass das Problem zumindest lokal instabil wird, mithin lokal schlecht gestellt ist für die Verteilung $\mu = \mu(\mathbf{X}) = \mu_0$.

Im Gegensatz zu Skovoroda et al. (1995) wird bei dem Verfahren von Sumi et al. (1995) angenommen, dass es sich bei dem betrachteten, ebenen Problem um einen ebenen Spannungszustand handelt. Der betrachtete Körper wird auch in diesem Fall als vollständig inkompressibel angesehen und es wird angenommen, dass alle volumenhaft wirkenden Lasten vernachlässigt werden können.

Aufgrund der quasi-statischen Beanspruchungen vereinfacht sich auch hier die Differentialgleichung (2.145) zu Gleichung (5.30).

In dem Beitrag von Sumi et al. (1995) wird nun von einer lediglich in der Betrachtungsebene inhomogenen Schubmodulverteilung $\mu = \mu(\mathbf{X})$ ausgegangen, d. h. es existiert keine Änderung der Schubmodulverteilung in X_3 -Richtung. Dann folgt unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

dass

$$\sigma_{31,2} = \sigma_{32,3} = \sigma_{11,3} = \sigma_{12,3} = \sigma_{13,3} = \sigma_{22,3} = \sigma_{23,3} = \sigma_{33,3} = 0 \quad (5.48)$$

gilt, wobei durch die Bezeichnungen $\sigma_{ij,k}$ die partiellen Ableitungen der Komponenten des Spannungstensors bzgl. X_k mit $k = 1, 2, 3$ angegeben werden. Aus der Spur des Spannungstensors nach Gleichung (2.144) folgt für den hydrostatischen Druck $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$. Mit der Inkompressibilitätsbedingung (2.127) und unter der erneuten Verwendung des pseudo-konstitutiven Gesetzes (2.144) folgt hieraus, dass

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} = -2\mu \varepsilon_{33} = 2\mu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (5.49)$$

ist und sich somit die Spannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} eindeutig in Abhängigkeit von den Verzerrungen durch

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu (2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= 2\mu (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

darstellen lassen. Durch Einsetzen dieser Gleichungen in die Impulsbilanz (5.30) lassen sich die Bestimmungsgleichungen für die relative Schubmodulverteilung zu

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial X_1} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial X_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{22,1} + \varepsilon_{12,2} \\ \varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{11,2} + 2\varepsilon_{22,2} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

angeben. Hierbei handelt es sich um ein lineares System aus partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. In diesem Gleichungssystem werden die Verzerrungen bzw. die partiellen Ableitungen der Verzerrungen als bekannte Größen vorausgesetzt. Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems mit \mathbf{A} , so ergeben sich die partiellen Ableitungen der relativen Schubmodulverteilung μ durch Lösen des linearen Gleichungssystems, wobei lediglich die Punkte \mathbf{X} ausgenommen werden müssen, für die

$$\det \mathbf{A} = (2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12}^2 = 0 \quad (5.52)$$

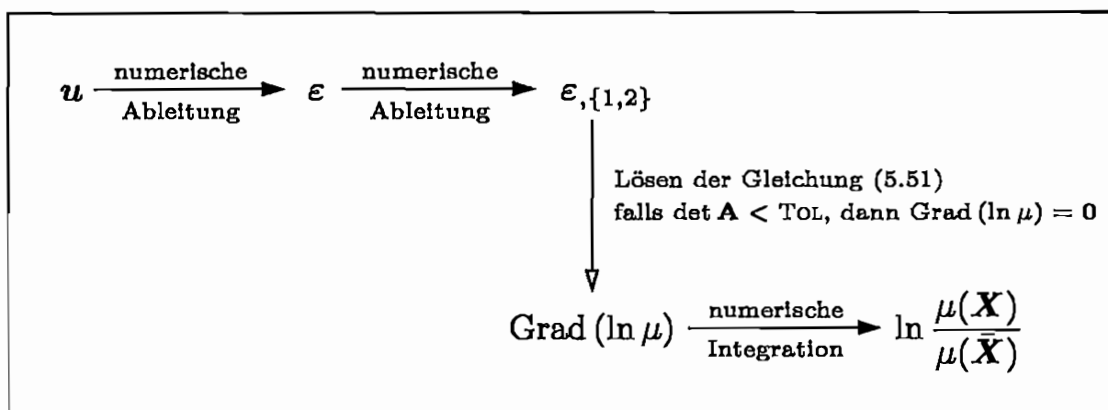


Bild 5.5: Berechnungsschema des Verfahrens von Sumi et al. (1995)

gilt. Aus dem Gradienten der relativen Schubmodulverteilung

$$\text{Grad}(\ln \mu) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial X_1}, \frac{\partial \mu}{\partial X_2} \right) \quad (5.53)$$

lässt sich nun der Schubmodul $\mu(\mathbf{X})$ bezogen auf den Schubmodul $\mu(\bar{\mathbf{X}})$ eines Referenzpunkts $\bar{\mathbf{X}}$ durch ein Linienintegral entlang einer beliebigen Linie L ermitteln, da durch die Existenz der Potentialfunktion $\ln \mu$ die Wegunabhängigkeit des Integrals gesichert ist. Es gilt also

$$\ln \frac{\mu(\mathbf{X})}{\mu(\bar{\mathbf{X}})} = \int_L \text{Grad}(\ln \mu) \cdot ds. \quad (5.54)$$

Eine kurze Zusammenfassung des hier vorgestellten Berechnungsablaufes wird durch Bild 5.5 wiedergegeben. Das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X})$ wird zunächst durch eine Messung bestimmt, so dass anschließend durch zweimaliges numerisches Ableiten die Verzerrungen und die partiellen Ableitungen der Verzerrungen ermittelt werden können. Nach Lösung der Bestimmungsgleichung (5.51) kann durch numerische Integration der relative Schubmodul $\mu(\mathbf{X})/\mu(\bar{\mathbf{X}})$ für jeden Punkt \mathbf{X} ermittelt werden.

Wie Gleichung (5.51) verdeutlicht, besteht auch hier das Problem, dass die laterale Verschiebung u_2 bekannt sein muss, um alle Koeffizienten der Matrix \mathbf{A} zu bestimmen. Hier jedoch ist die Komponente $\varepsilon_{33} \neq 0$, so dass eine Quantifizierung von u_2 mit der Gleichung (5.36) wie beim Verfahren von Skovoroda et al. (1995) nicht möglich ist. Daher schlägt Sumi et al. (1995) vor, die Schubmodulermittlung auf ein eindimensionales Problem zurückzuführen, was eine weitere drastische Vereinfachung der tatsächlich vorhandenen Verhältnisse darstellt. Für einen Fachwerkstab, bei dem die X_1 -Achse parallel zur Stabachse verläuft, reduziert sich die Bestimmungsgleichung (5.51) auf den Zusammenhang

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial X_1} = -\frac{\varepsilon_{11,1}}{\varepsilon_{11}} \quad (5.55)$$

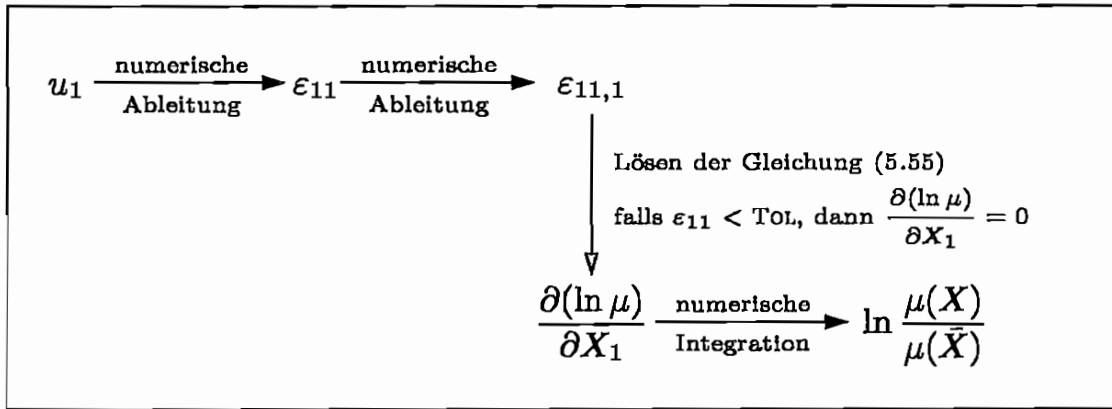


Bild 5.6: Berechnungsschema des Verfahrens von Sumi et al. (1995) bei Annahme eines eindimensionalen Spannungszustands

und das Linienintegral (5.54) auf

$$\ln \frac{\mu(X_1)}{\mu(\bar{X})} = \int_{\bar{X}}^{X_1} \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial X_1} dX_1, \quad (5.56)$$

mit fest gewähltem Punkt X_1 . Ist also der Schubmodul μ in einem Punkt \bar{X} bekannt, so kann das Schubmodulverhältnis in jedem Punkt bezüglich dieses Werts $\mu = \mu(\bar{X})$ angegeben werden.

Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals (5.54) ist die Lösung des Problems eindeutig bestimmt, jedoch hängt der Schubmodul für die Materialverteilung $\mu = \mu(\mathbf{X}) = \hat{\mu}$ nicht stetig von den Daten ab, was entsprechend der Ausführungen von Hofmann (1999, Kap. 2) gleichbedeutend mit der lokalen Instabilität und somit der lokalen Inkorrektheit des betrachteten Problems für diese Verteilung ist. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, wird zunächst das eindimensionale Verfahren betrachtet, vgl. Abbildung 5.7(a). Das sich ergebende Verschiebungsfeld kann hier mit

$$u(X_1) = \bar{u} - \frac{\bar{u}}{l} X_1 \quad (5.57)$$

angegeben werden. Sei nun

$$u_n(X_1) = \bar{u} - \frac{\bar{u}}{l} \left(X_1 - \frac{c}{2n} \cos \left(\frac{n}{c} X_1 \right) \right), \quad n \in \mathbf{N} \quad (5.58)$$

das ursprüngliche Verschiebungsfeld u mit einem Rauschen überlagert, wobei u_n nicht notwendiger Weise die Randbedingungen erfüllen muss, vgl. hierzu Abschnitt 5.1.1. Die Größe c sei eine Länge, habe dieselbe Einheit wie l und den Zahlenwert 1. Dann gilt für den Abstand dieser beiden Funktionen gemessen in der L_2 -Norm, dass

$$\|u(X_1) - u_n(X_1)\|_{L_2} = \frac{1}{4} \frac{\bar{u} c}{l} \sqrt{\frac{2ln + c \sin \left(2 \frac{l}{c} n \right)}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.59)$$

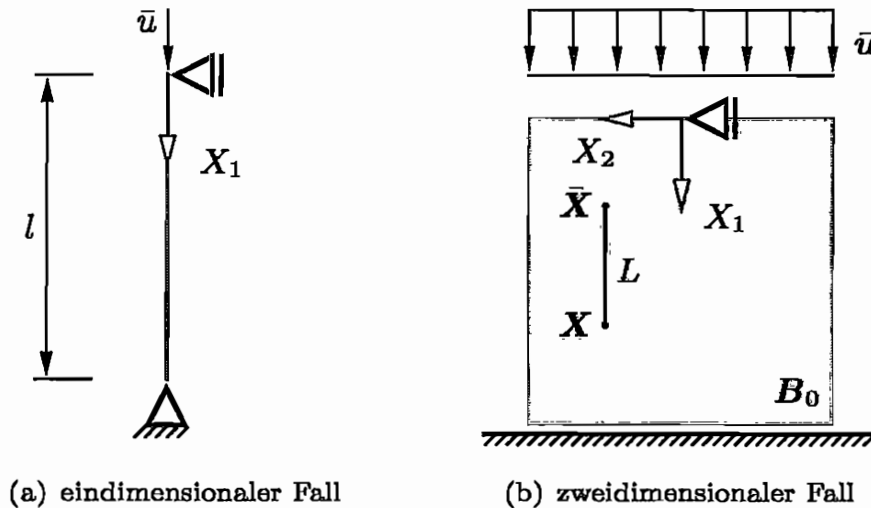


Bild 5.7: Untersuchung der lokalen Schlechtgestellttheit des Verfahrens von Sumi et al. (1995)

konvergiert. Mit Hilfe der Gleichungen (5.55) und (5.56) folgt für die resultierenden Schubmodulverteilungen $\mu = \mu(X_1)$ bzw. $\mu_n = \mu_n(X_1)$, dass

$$\mu(X_1) = \hat{\mu} \frac{\varepsilon_{xx}(X_1=0)}{\varepsilon_{xx}(X_1)} = \hat{\mu} \quad (5.60)$$

und

$$\mu_n(X_1) = \frac{\varepsilon_{n\,xx}(X_1=0)}{\varepsilon_{n\,xx}(X_1)} = \frac{2\hat{\mu}}{2 + \sin\left(n\frac{x}{c}\right)} \quad (5.61)$$

sind, mit $\hat{\mu} = \mu(X_1=0)$. Wird der Abstand der beiden Materialverteilungen, der ebenfalls bzgl. der L_2 -Norm bestimmt wird, quadriert, dann folgt für hinreichend große Werte für n

$$\|\mu(X_1) - \mu_n(X_1)\|_{L_2}^2 = \hat{\mu}^2 \left\{ \frac{-18c + 27ln - 20\sqrt{3}\pi c}{27n} + \frac{1}{27n} \frac{36 \cos\left(\frac{ln}{c}\right) c}{2 + \sin\left(\frac{ln}{c}\right)} - \frac{24\sqrt{3}c}{27n} \arctan\left(\frac{1 + 2 \tan\left(\frac{ln}{2c}\right)}{\sqrt{3}}\right) \right\}. \quad (5.62)$$

Aufgrund der Beschränktheit der verwendeten, trigonometrischen Funktionen folgt beim Grenzübergang

$$\|\mu(X_1) - \mu_n(X_1)\|_{L_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}\sqrt{l} \quad (5.63)$$

und damit die lokale Instabilität für die Schubmodulverteilung $\mu = \mu(X_1) = \hat{\mu}$.

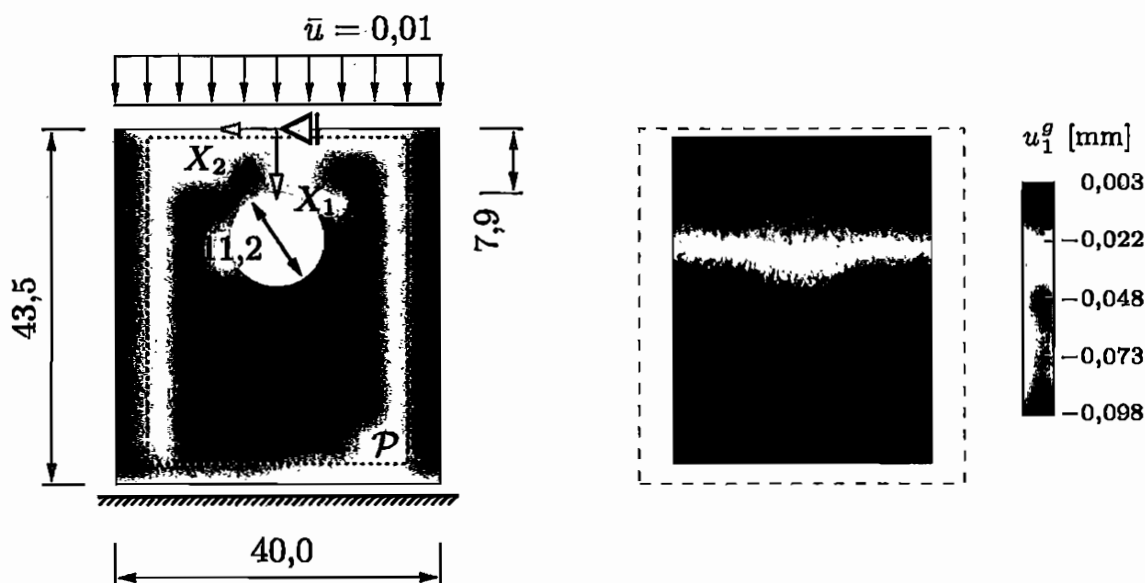
Das hier angegebene Beispiel kann auch ohne Weiteres auf den zweidimensionalen Fall des Verfahrens von Sumi et al. (1995) übertragen werden, vgl. Bild 5.7(b). In dem dort angegebenen Beispiel liegt ebenfalls eine Struktur mit homogener Materialverteilung vor, die durch eine Randverschiebung $\bar{u} = \bar{u} E_1$ beansprucht wird. Wird entlang eines Pfades L integriert, der parallel zur X_1 -Achse verläuft, so degeneriert die Bestimmungsgleichung (5.51) und das korrespondierende Linienintegral (5.54) zu Gleichung (5.56). Somit kann auch das zuvor genannte Beispiel problemlos auf den zweidimensionalen Fall übertragen werden, wodurch die lokale Schlechtgestelltheit für die Verteilung $\mu = \mu(\mathbf{X}) = \hat{\mu}$ nachgewiesen ist.

Aus Referenzgründen wird abschließend auf die Arbeit von Sumi & Nakayama (1998) verwiesen, die als Weiterentwicklung des hier vorgestellten zweidimensionalen Verfahrens zu verstehen ist und dabei im Kern ein direktes Verfahren bleibt. Bei dieser Methode wird die Integration nach Gleichung (5.54) durch einen numerisch robusteren Algorithmus ersetzt, der sich der Finite-Differenzen-Methode bedient und so auf ein überbestimmtes Gleichungssystem für den Logarithmus des Schubmoduls führt. Das so generierte endlichdimensionale, lineare Problem kann dann mit den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Regularisierungstechniken näherungsweise stabil gelöst werden. Da jedoch im Folgenden nur noch der eindimensionale Ansatz betrachtet wird, kann hier auf eine detailliertere Beschreibung des Verfahrens verzichtet werden, zumal sich durch den Algorithmus die zentralen Aussagen des folgenden Abschnitts nicht ändern.

5.1.3 Diskussion und Vergleich der Methodengruppen

In diesem Abschnitt werden die zuvor vorgestellten Verfahrensgruppen diskutiert und anhand von je einem Repräsentanten durch einen Benchmark-Test miteinander verglichen. Dieser Vergleich und eine darauf aufbauende Diskussion dienen dazu, die Grundlage für die sinnvolle Weiterentwicklung von der linearen zur nichtlinearen Elastografie zu schaffen.

Durch den angesprochenen Vergleichstest wird der in Abschnitt 4.3 beschriebene Versuchsaufbau numerisch simuliert. Für diese Computersimulation wird angenommen, dass sich – wie bei den in Unterabschnitt 4.2.1 beschriebenen Phantomen – die Materialverteilung in elevationaler Richtung nicht ändert, so dass sich die Struktur \mathcal{B} durch den in Bild 5.8(a) dargestellten Querschnitt beschreiben lässt. Die für die Probe verwendeten Abmessungen sind identisch mit den Innenabmessungen der Probenbehälter der Phantome, vgl. Anhang C. Weiter wird angenommen, dass das Material mit einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,495$ nahezu inkompressibel und linear elastisch ist, wobei die Schubmodulwerte des Einschlusses μ_{inc} und der umgebenden Materialmatrix μ_{mat} der Abbildung 5.8(a) entnommen werden können. Die Diskretisierung der Struktur erfolgt mit acht-knotigen, quaderförmigen Elementen auf Basis der in Abschnitt 2.5 beschriebenen Verschiebungs-Druck-Formulierung, wobei der Druckfreiheitsgrad p über das Element konstant ist.



(a) Querschnitt der Beispielstruktur des Benchmark-Tests, Maßangaben in mm: $\mu_{\text{mat}} = 10 \text{ kPa}$ und $\mu_{\text{inc}} = 27 \text{ kPa}$ (b) generierte, axiale Komponente des Verschiebungsfelds u^g

Bild 5.8: Benchmark-Test zum Vergleich eines direkten und eines iterativen Verfahrens

Zur Erzeugung der Daten u_1^g wird zunächst das dreidimensionale Randwertproblem gelöst. Diese Berechnung liefert als Ergebnis das Verschiebungsfeld im mittleren Querschnitt, für den $X_3 = 0$ gelte. Von der Axialkomponente dieses Verschiebungsfelds wiederum wird im Folgenden lediglich der Anteil als bekannt angenommen, der im Bereich \mathcal{P} liegt, vgl. Bild 5.8(a). Die Teilstruktur hat eine Höhe von 40 mm und eine Breite von 32 mm und liegt 1 mm unterhalb der Oberfläche. Die so generierte Messsituation liefert die Axialverschiebungen

$$u_1 = u_1(X_1, X_2) = \hat{u}_1(X_1, X_2, X_3 = 0), \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathcal{P}, \quad (5.64)$$

die im weiteren Verlauf als „exakte“ Daten bezeichnet werden. Um fehlerbehaftete Daten u_1^g zu erhalten, wie sie sich auch bei einer Messung ergeben, wird zum Verschiebungsfeld u_1 ein weißes Rauschen Δu_1^δ addiert, so dass

$$\|u_1^g - u_1\|_{U_1} \leq \bar{\delta} \|u_1\|_{U_1} = \delta \quad \text{und} \quad \bar{\delta} = 0,02 \quad (5.65)$$

gilt, vgl. auch Bild 5.8(b). Die so gewonnenen Axialverschiebungsfelder u_1 und u_1^g liegen im Rahmen eines diskretisierten Problems in Form einer Matrix mit $n_1 \times n_2 = 90 \times 162$ Einträgen vor und dienen als Eingangsdaten für den Vergleichstest.

Als direkte Methode wird der Algorithmus von Sumi et al. (1995) eingesetzt, da er als einziges direktes Verfahren eine Möglichkeit bietet, die Schubmodulverteilung $\mu = \mu(\mathbf{X})$ ohne Kenntnis des lateralen Verschiebungsfelds zu ermitteln. Jedoch wird diese Vorgehensweise nur durch die sehr stark vereinfachende Annahme möglich, dass sich das zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales Problem reduzieren lässt. Hierdurch wird die Methode sehr effizient, da lediglich numerische Ableitungen und eine numerische Integration ausgeführt werden müssen. Der hier implementierte, eindimensionale Ansatz kann zwar ohne Einschränkungen auf jede beliebige, dreidimensionale Problemstellung angewendet werden, jedoch ist ohne diese Vereinfachung eine Erweiterung der Methode von Sumi et al. (1995) auf einen allgemeinen Fall nicht möglich, da in der Herleitung explizit ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird. In diesem Punkt muss auch der von Skovoroda et al. (1995) vorgeschlagene Ansatz kritisch beurteilt werden. Da diese Methode für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall hergeleitet wird, ist sie prinzipiell auch auf eine beliebige Problemstellung anwendbar, allerdings nur, wenn auch die laterale und die elevationale Verschiebung mit hinreichender Genauigkeit bekannt sind, was nicht einer typischen Messsituation entspricht, die nur die Axialverschiebung u_1^g liefert. Somit bleibt der Ansatz auf einen ebenen Verzerrungszustand beschränkt, bei dem das Lateralverschiebungsfeld u_2^g aus der Axialkomponente mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung nach Gleichung (5.36) geschätzt wird. Die gleiche Situation ergibt sich bei Raghavan & Yagle (1994), die ebenfalls einen ebenen Verzerrungszustand betrachten, im Gegensatz zu Skovoroda et al. (1995) aber den Druck p nicht aus dem Differentialgleichungssystem eliminieren, so dass er als unbekannte Größe in ein System aus partiellen Differentialgleichungen eingeht. Auch wenn sich durch diesen Ansatz das Differentialgleichungssystem leicht ändert, bleiben die zuvor beschriebenen Nachteile erhalten.

Als Repräsentant aus der Klasse der iterativen Algorithmen wird das Verfahren von Oberai et al. (2003) umgesetzt. Legt man den Berechnungsaufwand in einem Iterationsschritt zugrunde, so ist diese Methode unabhängig von der Ausführung der Berechnung der Richtungsableitung $\Delta^{\mu f}$ in jedem Iterationsschritt k numerisch effizienter als die Ansätze von Kallel & Bertrand (1996) und Doyley et al. (2000), vgl. Oberai et al. (2004). Darüber hinaus besitzt die Tikhonov-Phillips-Regularisierung eine globale Konvergenzeigenschaft und ist demzufolge weniger sensitiv gegenüber der gewählten Anfangsschubmodulverteilung, vgl. Engl et al. (2003, Kap. 11). Weiterhin ist dieses iterative Verfahren, wie auch die Methoden von Kallel & Bertrand (1996) und Doyley et al. (2000), ohne Einschränkungen auf den dreidimensionalen Fall erweiterbar, da vollkommen unabhängig von der betrachteten Struktur \mathcal{B} nur das axiale Verschiebungsfeld u_1^g zur Ermittlung der Schubmodulverteilung herangezogen wird.

Die numerische Realisierung der Verfahren von Sumi et al. (1995) und Oberai et al. (2003) erfolgt im Wesentlichen anhand der Literaturquellen. Da jedoch jeweils leichte Modifikationen vorgenommen werden, werden im Folgenden die Bezeichnungen *direkter* und *iterativer* Ansatz bevorzugt. Das direkte Verfahren

	Direktes Verfahren		Iteratives Verfahren	
Daten	Parameter	Wert	Parameter	Wert
\mathbf{u}	N	3	$\alpha [t]$	10^{-10}
	[TOL]	0,73357	$[\varepsilon]$	0,03
\mathbf{u}^g	N	7	$\alpha [t]$	10^{-7}
	[TOL]	0,73357	$[\varepsilon]$	0,02

Tabelle 5.1: Gewählte Parameter bei der Umsetzung des direkten und des iterativen Verfahrens, Details können Sumi et al. (1995) bzw. Oberai et al. (2003) entnommen werden. Für die Bezeichnung TOL bzw. ε siehe Bild 5.6 bzw. Gleichung (5.29)

wird dahingehend modifiziert, dass für alle Differentiationen zur Bestimmung der Verzerrung ε_{11} und deren Ableitung $\varepsilon_{11,1}$ der zweidimensionale, differenzierende Filter eingesetzt wird. Diese Vorgehensweise wirkt sich stabilisierend auf die zu berechnenden Größen aus, da hierdurch eine breitere Datengrundlage zur numerischen Bestimmung der Ableitung in einem Punkt \mathbf{X} geschaffen wird, was den Einfluss vereinzelt auftretender, großer Messfehler dämpft. Abgesehen von dieser Modifikation wird der Algorithmus entsprechend den Ausführungen von Sumi et al. (1995) umgesetzt, vgl. hierzu auch Bild 5.6. Die zur Ermittlung der Schubmodulverteilung μ eingesetzten Parameter werden in Tabelle 5.1 aufgelistet, wobei die Bezeichnungen denen aus der Literaturquelle entsprechen.³ Das iterative Verfahren wird bei der hier vorgestellten numerischen Umsetzung ohne die von Oberai et al. (2003) vorgeschlagene, stetige Schubmodulverteilung⁴ μ ausgeführt. Stattdessen wird jedem finiten Element ein Schubmodulwert zugewiesen, so dass sich zwischen den Elementen ggf. eine diskontinuierliche Verteilung einstellen kann. Dieser Aspekt wird bei der weiterführenden Diskussion noch einmal aufgegriffen, um Vor- und Nachteile einer stetigen bzw. unstetigen Materialverteilung abzuwägen. Darüber hinaus entspricht der implementierte, iterative Ansatz den Ausführungen in Oberai et al. (2003), so dass die Parameter aus Tabelle 5.1 das Verfahren hinreichend charakterisieren. Als Anfangswert wird jedem Elementschubmodul μ der Wert 1 zugewiesen.

Die Ergebnisse der Berechnungen mit dem direkten und dem iterativen Verfahren sind den Abbildungen 5.9 und 5.10 zu entnehmen. Es wird deutlich, dass

³Die in Klammern angegebenen Werte $[\cdot]$ in Tabelle 5.1 geben die in dieser Arbeit verwendeten, entsprechenden Bezeichnungen an.

⁴In Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004) wird das direkte Problem der Elastografie, die Ermittlung des Verschiebungsfeldes bei gegebener Materialverteilung, mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst. Die in einer solchen Analyse benötigte Schubmodulverteilung μ wird in diesen Arbeiten im Sinne eines isoparametrischen Konzepts durch bilineare Ansatzfunktionen und Schubmodulknotenwerte realisiert. Dieses Vorgehen erzwingt die Stetigkeit.

mit beiden Methoden unabhängig von den Eingangsdaten der Einschluss detektiert werden kann, was durch die weißen Kreise in den Bildern 5.9 bzw. 5.10 veranschaulicht wird, welche die exakte Lage des Einschlusses kennzeichnen. Ferner ist offensichtlich, dass das Gebiet, für den der Schubmodul ermittelt wird, beim direkten Verfahren kleiner ist als der Bereich \mathcal{P} , für den die Verschiebungsfelder vorliegen. Dieses Merkmal ist der numerischen Ableitung geschuldet, die stets auf innere Punkte \mathbf{X} angewendet wird, um die Qualität der Lösung nicht herabzusetzen. Der auf diese Weise erzeugte Rand wird maßgeblich durch den Parameter N bestimmt, der als Regularisierungsparameter für die numerische Ableitung interpretiert werden kann. Weiterhin ist nur bei der iterativen Methode mit einer quantitativen Rekonstruktion des Schubmodulverhältnisses zu rechnen, da hier die tatsächliche Relation von $\mu_{\text{inc}}/\mu_{\text{mat}} = 2,7/1$ bei exakten Eingangsdaten durch $2,3/1$ und bei verrauschten Werten durch $2,0/1$ wiedergegeben wird. Ferner verdeutlicht ein Vergleich, dass die Qualität der Rekonstruktion und insbesondere das berechnete Schubmodulverhältnis stark vom Regularisierungsparameter t abhängen. Je ausgeprägter der Datenfehler δ , um so größer ist der Regularisierungsparameter t zu wählen und desto kleiner fällt das rekonstruierte Schubmodulverhältnis aus. Deutlich schlechter wird der Quotient der Materialparameter durch das direkte Verfahren wiedergegeben, da sich hier unabhängig von der Güte der Eingangswerte nur ein Verhältnis von $1,4/1$ bzw. $1,5/1$ einstellt. Daher ist bei dieser Methode im Allgemeinen nicht mit einer quantitativen Rekonstruktion zu rechnen, sondern lediglich mit einer qualitativen, vgl. hierzu die Begriffsbildung in Abschnitt 1.2.

Ein exakter Vergleich der Berechnungsdauer der beiden Algorithmen ist an dieser Stelle weder möglich noch sinnvoll, da die Rechenzeit des iterativen Verfahrens maßgeblich von der Anzahl der Iterationen abhängt, die ihrerseits durch eine Vielzahl von Faktoren beeinflusst werden, wie z. B. dem Abstand des Startwerts von der Lösung oder dem Regularisierungsparameter t . Darüber hinaus wurde bei keiner der hier durchgeführten Implementierungen eine Optimierung hinsichtlich der Berechnungsdauer vorgenommen. Im Sinne der Angabe einer unscharfen Größenordnung kann aber festgehalten werden, dass die Rechenzeit bei dem hier verwendeten Datensatz von $n_1 \times n_2 = 90 \times 162$ Verschiebungswerten für das direkte Verfahren wenige Sekunden beträgt, während für den iterativen Ansatz eine Berechnungsdauer von bis zu 45 min veranschlagt wird.⁵

Alle hier auf der Grundlage von generierten Daten gezogenen Schlussfolgerungen lassen sich dabei ohne Ausnahme auch auf Messdaten einer Elastografiemessung übertragen, was in Reichling et al. (2005) und Khaled et al. (2006) anhand von quaderförmigen Phantomen mit einem Einschluss nachgewiesen wurde, deren Abmessung sich allerdings von der hier gewählten Dimensionierung der Probenkörper unterschied.

Aufbauend auf diesen Ergebnissen werden nun die für die weitere Arbeit relevanten Schlussfolgerungen gezogen, die als Fazit dieses Abschnitts verstanden

⁵Referenzcomputer: Prozessor AMD Athlon 1,2 GHz, Arbeitsspeicher 512 MB, Betriebssystem Debian/GNU Linux 3.1

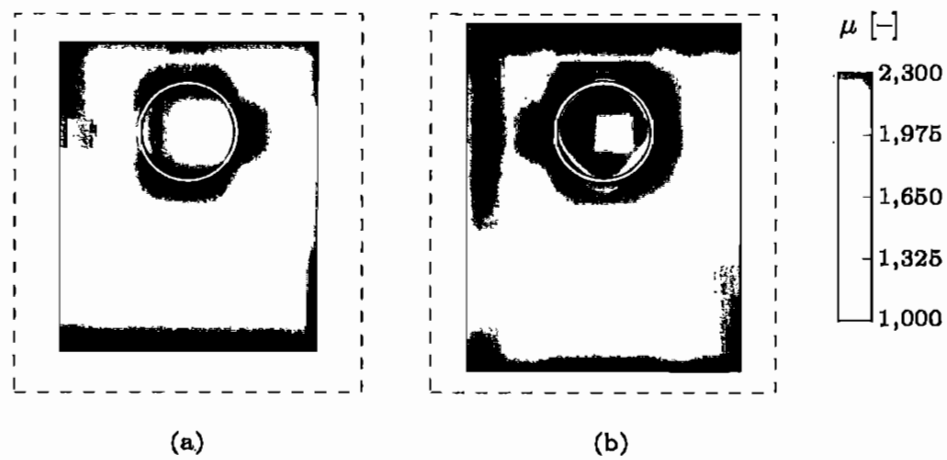


Bild 5.9: Benchmark-Test mit den exakten Daten u_1 : ermittelte, relative Schubmodulverteilungen μ mit (a) dem direkten Verfahren und (b) dem iterativen Ansatz

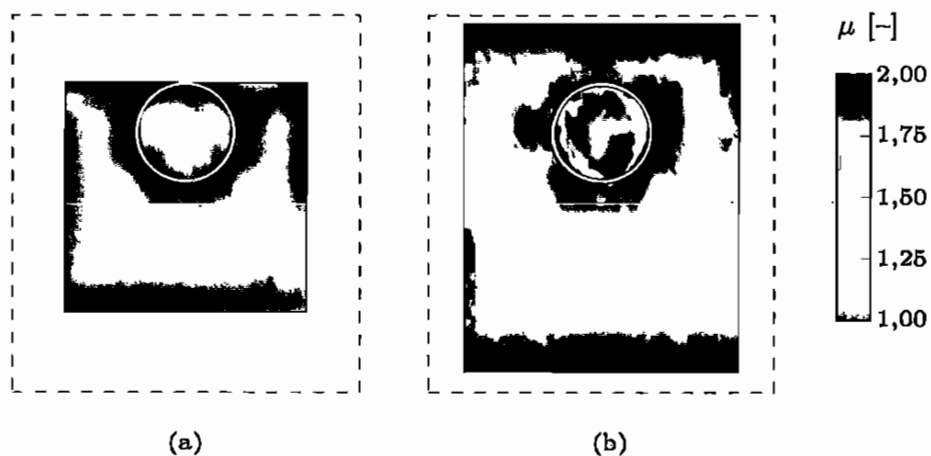


Bild 5.10: Benchmark-Test mit den fehlerbehafteten Daten u_1^g : ermittelte, relative Schubmodulverteilungen μ mit (a) der direkten Methode und (b) dem iterativen Algorithmus

werden können, wobei im Folgenden zur klaren Abgrenzung Teilaspekte separat analysiert werden.

Wahl einer Methodenklasse Durch den in diesem Abschnitt durchgeführten Benchmark-Test lassen sich deutlich die Vor- und Nachteile der jeweiligen Verfahrensgruppe herausstellen, die auch in der Literatur unumstritten sind, vgl. Skovoroda et al. (1995), Kallel & Bertrand (1996) oder Oberai et al. (2003). Während die direkten Ansätze meist auf sehr effiziente Algorithmen führen, sind die iterativen Methoden vergleichsweise zeitintensiv.

Dagegen haben die direkten Methoden den Nachteil, dass stets neben dem Axialverschiebungsfeld u_1^g immer auch mindestens eine Transversalkomponente bekannt sein muss. Da jedoch das Auflösungsvermögen einer Linearsonde in lateraler Richtung deutlich schlechter ist als in Axialrichtung, vgl. Abschnitt 4.1, ist beim Transversalverschiebungsfeld u_2^g stets mit einer minderwertigen Datenqualität bei Messungen zu rechnen. Somit bleiben diese Algorithmen stets auf einen ein- bzw. zweidimensionalen Sonderfall beschränkt, wenn das Schubmodulverhältnis nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ bestimmt werden soll. Auch wenn dieser Aspekt nur für ein spezielles direktes Verfahren nachgewiesen wurde, ist doch im Allgemeinen mit einem solchen Effekt zu rechnen. So weist Skovoroda et al. (1995) darauf hin, dass zur Sicherung der Differenzierbarkeit die axialen Verschiebungen und Verzerrungen durch eine Tiefpassfilterung geglättet werden, um zu gewährleisten, dass die Schubmodulverteilung μ hinreichend glatt ist, vgl. Unterabschnitt 5.1.2. Dieser Schritt ist somit selbst dann erforderlich, wenn nur schwach gestörte Eingangsdaten vorliegen, da diese Glättung allein aufgrund einer ggf. unstetigen Schubmodulverteilung selbst erforderlich wird. Aufgrund dieser Einschränkung erscheint eine Weiterentwicklung dieser Methoden mit dem Ziel einer quantitativen Elastografie nicht sinnvoll.

Neben dieser Beobachtung lassen sich auch für den iterativen Algorithmus aus dem Benchmark-Test wichtige Schlussfolgerungen ziehen, da die Simulation verdeutlicht, dass für den in dieser Arbeit gewählten Versuchsaufbau, vgl. Abschnitt 4.3, die Ermittlung der Schubmodulverteilung μ bei der Annahme eines ebenen Verzerrungszustands möglich ist. Das hierbei mit unverrauschten Daten ermittelte Schubmodulverhältnis von $2,3/1$ weicht mit annähernd 15 % sehr viel deutlicher von dem tatsächlich vorhandenen Wert ab, als die Rekonstruktionsergebnisse in Oberai et al. (2003). Diese Beobachtung ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass in den Arbeiten Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004) bei allen Simulationen die Generierung der Eingangsdaten u_1 und die anschließende Lösung des inversen Problems zur Ermittlung der Schubmodulverteilung μ stets mit denselben Diskretisierungen durchgeführt werden. Durch dieses Vorgehen wird impliziert, dass bei der Lösung des inversen Problems die unbekannte Materialverteilung durch die gewählte Diskretisierung exakt wiedergegeben werden kann. Da dieser Sonderfall aber gerade bei einer realen Messung nicht zu erwarten ist, wird durch dieses Vorgehen eine Betrachtung der Abhängigkeit der Lösung von der gewählten Diskretisierung ausgespart. Im Rahmen dieser Arbeit

wird der Aspekt der Netzabhängigkeit in Abschnitt 6.3 anhand eines Beispiels untersucht.

Das in Zusammenhang mit Oberai et al. (2003) beschriebene Vorgehen, Datengenerierung u^g und anschließende Ermittlung der Schubmodulverteilung μ durch Lösen des inversen Problems mit der gleichen Diskretisierung auszuführen, erklärt die guten Ergebnisse bei Verwendung einer stetigen Schubmodulverteilung in den Arbeiten Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004) bei geringem Datenfehler δ . Der Vorteil bei Verwendung einer stetigen Materialverteilung μ liegt darin begründet, dass neben der klassischen Tikhonov-Phillips-Regularisierung auch andere Regularisierungstechniken ohne Aufwand eingesetzt werden können, vgl. Oberai et al. (2004), der hier auf eine verallgemeinerte Tikhonov-Phillips-Regularisierung zurückgreift, bei der starke Schwankungen im Gradienten der Schubmodulverteilung gedämpft werden. Werden jedoch in Simulationen die Daten u^g unter Verwendung von unstetigen Schubmodulverteilungen generiert und wird anschließend mit dem stetigen Ansatz mit einer ggf. anderen Diskretisierung das inverse Problem gelöst, führt die erzwungene Stetigkeit zu einem teilweise deutlichen Unterschätzen des realen Schubmodulverlaufs. So ergibt sich z. B. für den Benchmark-Test und die fehlerbehafteten Eingangsdaten lediglich ein Schubmodulverhältnis von $\mu_{inc}/\mu_{mat} = 1,8/1$. Muss also von klar definierten Einschlüssen in einer umgebenden Matrix ausgegangen werden, wie das bei den hier durchgeführten Elastografieversuchen mit den in Abschnitt 4.2 beschriebenen Phantomen der Fall ist, so ist für die Rekonstruktion bei der Diskretisierung ein unstetiger Ansatz für den Schubmodul vorzuziehen.

Existenz und Eindeutigkeit der Schubmodulverteilung Wie schon die Hadamardsche Korrektheitsdefinition verdeutlicht, handelt es sich bei den Fragen der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung um zentrale Aspekte bei der Behandlung inverser Probleme nichtlinearer Operatorengleichungen. Denn im Gegensatz zu den linearen Operatorengleichungen ist weder die Existenz noch die Eindeutigkeit einer μ^* -Minimum-Norm-Lösung gesichert, vgl. Abschnitt 3.3, wobei μ^* einer Anfangsschubmodulverteilung entspricht, durch die a priori Informationen in die Lösung einfließen.

Zunächst wird die Existenz einer Lösung betrachtet. Berücksichtigt man die Ausführungen in Abschnitt 3.3, so wird stets das Vorhandensein einer Schubmodulverteilung μ vorausgesetzt, die die nichtlineare Operatorengleichung bei unverrauschten Daten u löst. Also gilt entsprechend der Definition (5.1), dass

$$\mathcal{F}(\mu) = u \tag{5.66}$$

ist. Diese Situation stellt sich aber im Allgemeinen nur bei numerischen Simulationen ein, wenn bei einem diskretisierten Problem zunächst verauschte Daten u^g generiert werden, die dann ihrerseits als Eingangswerte für ein inverses Problem verwendet werden, was mit der gleichen Vernetzung bearbeitet wird. Bei der Auswertung des oben durchgeführten Benchmark-Test oder einer Elastografie-messung ist die Existenz einer solchen Materialverteilung aber nicht gesichert.

Im Weiteren wird jedoch davon ausgegangen, dass für die nichtlineare Operatorengleichung (5.66) zumindest immer eine Materialverteilung μ existiert, die diese Gleichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate löst.

Die Frage der Eindeutigkeit einer Lösung μ kann nicht durch eine allgemeine Betrachtung entsprechend der Erläuterungen in Abschnitt 3.3 beantwortet werden, wie dies bei den linearen Problemstellungen in Abschnitt 3.2 der Fall ist, sondern muss stets anhand der betrachteten Operatorengleichung durchgeführt werden. Bei der Analyse des Operators \mathcal{F} der linearen Elastografie sind hier vorrangig die Arbeiten von Barbone & Bamber (2002) und Barbone & Gokhale (2004) zu nennen, die zur Behandlung dieser Fragestellung ein inkompressibles, linear elastisches Materialverhalten betrachten. Anhand von in lateraler Richtung beliebig geschichteten Materialien μ , vgl. auch Bild 5.2, wird demonstriert, dass sich unabhängig von der Art der Schichtung das gleiche Verschiebungsfeld \mathbf{u} ergibt, wie es sich auch als Lösung des direkten Problems bei einer konstanten Schubmodulverteilung einstellt. Mit Hilfe der in Abschnitt 5.1.2 eingeführten Differentialgleichung entsprechend Gleichung (5.33) wird darauf aufbauend in Barbone & Gokhale (2004) gezeigt, dass sich die Schubmodulverteilung μ abgesehen von einer multiplikativen Konstante $c > 0$ eindeutig bestimmen lässt, falls vier linear unabhängige Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{g(1)}$ bis $\mathbf{u}^{g(4)}$ bekannt sind, die aufgrund von unterschiedlichen Einwirkungskombinationen in der Struktur \mathcal{B} erzeugt worden sind.⁶ Können nicht vier, sondern nur zwei Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{g(1)}$ bis $\mathbf{u}^{g(2)}$ bestimmt werden, so sind lediglich wenige a priori Informationen für die Schubmodulverteilung μ auf dem Rand $\partial\mathcal{B}$ erforderlich, um eine eindeutige Lösung – abgesehen von einem positiven Faktor – zu erhalten.

Im Weiteren wird jedoch von der Umsetzung der von Barbone & Gokhale (2004) propagierten Vorgehensweise abgesehen. Ein Grund für den Verzicht ist, dass die Herleitung auf eine Materialverteilung μ zugeschnitten ist, die sich als Lösung der Differentialgleichung (5.33) ergibt und somit hinreichend glatt ist. Eine solche Verteilung ist aber ebenso wie die Kenntnis des lateralen Verschiebungsfelds \mathbf{u}_2^g , die bei der Herleitung impliziert wird, in einer realen Messsituation nicht zu erwarten, so dass sich die Schlussfolgerungen nicht auf die hier betrachteten Problemstellungen übertragen lassen. Darüber hinaus erscheint die Bestimmung zweier linear unabhängiger Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{g(i)}$ schwierig. Im Rahmen eines Beispiels schlagen Barbone & Gokhale (2004) vor, den betrachteten Körper in einer Messung zu komprimieren und in einer zweiten einer Schubbeanspruchung auszusetzen. Die zweite Beanspruchungsform ist aufgrund der glatten Oberfläche der Phantome in der Praxis jedoch nur schwer zu realisieren. Weiterhin ist dieser Nachweis aufgrund der Wahl der Differentialgleichung (5.33) auf die Betrachtung der linearen Elastografie beschränkt und daher nicht auf die zu entwickelnde, nichtlineare Elastografie anwendbar.

Diesen Feststellungen steht die Erkenntnis gegenüber, dass die lokale Schlecht-

⁶Die hier eingeführten Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{g(i)}$ sind nicht zu verwechseln mit den Verschiebungen $\mathbf{u}^{g,i}$, die in Abschnitt 4.3 bei der Betrachtung unterschiedlicher Lastschritte aufgenommen werden.

gestelltheit bzw. die fehlende Eindeutigkeit lediglich für das in Abschnitt 5.1.1 angegebene Beispiel einer homogenen bzw. in lateraler Richtung geschichteten Schubmodulverteilung μ nachgewiesen wurde, wenn von den Vielfachen $c\mu$ einer Lösung einmal abgesehen wird. Hier aber hätte eine Tikhonov-Phillips-Regularisierung entsprechend Gleichung (5.25) zur Folge, dass aus allen möglichen Materialverteilungen stets die homogene bevorzugt wird und demzufolge eindeutig bestimmt ist. Für eine beliebige Verteilung ist dem Autor der Nachweis der fehlenden Eindeutigkeit aus der Literatur nicht bekannt, so dass im Folgenden davon ausgegangen wird, dass sich durch eine geeignete Regularisierung eine eindeutige Lösung ergibt.

Stabilität der Lösung bei verrauschten Daten Überlegungen zur Stabilität wurden, wie die Frage der Eindeutigkeit, nur lokal in der Nähe einer homogenen Schubmodulverteilung μ untersucht, vgl. Abschnitt 5.1.2. In diesem Fall wäre jedoch ein analoger Schluss, das Ergebnis hinge für alle anderen Verteilungen stabil von den Daten ab, falsch und stünde im Widerspruch zu den Beobachtungen aus den Arbeiten, die in diesem Kapitel präsentiert wurden. Die Instabilität der Problemstellungen $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U)$ bzw. $(\mathcal{F}, D(\mathcal{F}), U_1)$ ist darauf zurückzuführen, dass die Operatoren \mathcal{F} bzw. \mathcal{F} aus den Gleichungen (5.1) und (5.8) eine glättende Wirkung besitzen, da die Bilder des Operators, die Verschiebungen, eine höhere Glattheit besitzen als die zugehörigen Urbilder, die Schubmodulverteilungen, vgl. Abschnitt 3.1 und Hofmann (1999, Kap. 2). Daher sind stets geeignete Stabilisierungstechniken anzuwenden, vgl. Abschnitt 3.3.

Relative Schubmodulverteilung Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich der Fall betrachtet, bei dem eine Struktur \mathcal{B} nur durch inhomogene Randverschiebungen \bar{u} beansprucht wird, während auf den Spannungsrändern $\bar{t} = 0$ gilt. Diese Betrachtung wird gewählt, da es dem Versuchsaufbau der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Elastografiemessungen mit Phantomen entspricht. Ferner kann durch ein solches Modell eine mögliche, medizinische Applikationen beschrieben werden, bei der durch die Ultraschallsonde selbst die äußere Verformung appliziert wird. Als Konsequenz aus diesem Vorgehen folgt allerdings, dass nur eine relative Schubmodulverteilung bestimmt werden kann.

Die lineare Elastografie und insbesondere die iterativen Verfahren sind jedoch nicht generell auf diese Betrachtung beschränkt. So wird bei den Simulationen in der Arbeit von Kallel & Bertrand (1996) das Verschiebungsfeld u in einem Körper \mathcal{B} ausschließlich durch eine Druckspannung induziert, auch wenn die Darstellung der Ergebnisse nur in Form einer relativen Schubmodulverteilung erfolgt. Doyley et al. (2000) stellen eine Beanspruchung durch Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen vergleichend gegenüber und zeigen anhand eines numerischen Beispiels, dass bei Verwendung von Randspannungen die Materialverteilung im Sinne von absoluten Werten rekonstruiert werden kann. Allerdings wird bei dieser Einwirkungsform deutlich, dass die Rauschanteile in der ermittelten Schubmodulverteilung stärker ausgeprägt sind. Daher schließen Doyley et al.

(2000) für praktische Anwendung, zunächst eine relative Materialfunktion mit Hilfe von Verschiebungsrandbedingungen zu ermitteln und anschließend durch Kenntnis des Schubmoduls in einem Teilgebiet der Struktur die Absolutwerte zu bestimmen, vgl. Abschnitt 4.3.

5.1.4 Weitere Ansätze der linearen Elastografie

Neben den bisher analysierten Verfahren werden in diesem Abschnitt die Ansätze der linearen Elastografie betrachtet, die sich der zu Beginn dieses Abschnitts vorgenommenen Einteilung entziehen. Zu diesen Methoden zählen Skovoroda et al. (1999), Yamakawa & Shiina (1999), Nitta & Shiina (2000) und Zhu et al. (2003). Zur Vergleichbarkeit der Ausführungen wird auch in diesem Abschnitt die in dieser Arbeit übliche Notation beibehalten und auf die zu beschreibenden Arbeiten angewandt.

Eine Weiterentwicklung des in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Ansatzes von Skovoroda et al. (1995) stellt die Arbeit Skovoroda et al. (1999) dar. Zum einen wird in diesem Beitrag vorgeschlagen, ein St. Venant-Kirchhoff-Materialmodell bei der Ermittlung der Schubmodulverteilung zu verwenden, zum anderen wird das Rekonstruktionsverfahren selbst modifiziert, um stabilere Lösungen zu erhalten. Während die erstgenannte Neuerung in den Bereich der nichtlinearen Elastografie fällt und daher erst in Abschnitt 5.2 thematisiert wird, erfolgt durch die zweite Änderung ein Übergang zu einem iterativen Prozess. Dieser Schritt wird vollzogen, indem Gleichung (5.30) nicht differenziert, sondern integriert wird, um anschließend durch Elimination des Drucks eine Integralgleichung für den Schubmodul zu erhalten. Da in dieser Gleichung keine Ableitungen zweiter Ordnung der Verzerrungen enthalten sind und die verlässliche, laterale Verschiebungskomponente nur noch einen Beitrag zu den Schubverzerrungen leistet, ist verglichen mit dem Verfahren Skovoroda et al. (1995) mit einer stabileren Lösung μ des Rekonstruktionsprozesses zu rechnen. Zur Ermittlung der Schubmodulverteilung wird die Integralgleichung mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode diskretisiert und anschließend durch Anwendung eines Gradientenverfahrens minimiert. Aufgrund dieser Vorgehensweise ist eine eindeutige Klassifikation, wie sie zu Beginn des Abschnitts 5.1 vorgenommen wurde, nicht möglich, da sowohl Elemente der direkten Verfahren als auch der iterativen Methoden enthalten sind. Aufgrund der Betrachtung einer Differentialgleichung für den Schubmodul ist dieser Algorithmus jedoch eher den direkten Ansätzen zuzuordnen. Die bei dieser Verfahrensklasse aufgezeigten Nachteile bleiben in jedem Fall erhalten. So werden Glattheitsanforderungen an den Schubmodul und die Verzerrungen gestellt, die im Allgemeinen nicht erfüllt sein müssen. Darüber hinaus ist auch bei diesem Algorithmus die Kenntnis der Lateralverschiebung unabdingbare Voraussetzung, so dass bei Annahme eines ebenen Verzerrungszustands das Lateralverschiebungsfeld aus der gemessenen Axialverschiebung berechnet wird. Somit ist auch diese Methode an den ebenen Fall gebunden, falls die Transversalkomponenten des Verschiebungsfelds nicht bestimmt werden können.

Der Ansatz von Yamakawa & Shiina (1999) ist eine Mischung aus einem direkten und einem iterativen Algorithmus, wobei sich die Notwendigkeit der Iteration aus den nicht bekannten Verschiebungskomponenten in Transversalrichtung ergibt. Bei der Methode von Yamakawa & Shiina (1999) muss zunächst das axiale Verzerrungsfeld ε_{11}^g aus der generierten bzw. gemessenen Verschiebungskomponente u_1^g ermittelt werden. Daraufhin wird unter der Annahme eines nahezu inkompressiblen Materialverhaltens zunächst eine Startschubmodulverteilung μ_k , mit $k=0$, geschätzt und anschließend auf der Basis dieser Materialverteilung mit einer Finite-Elemente-Berechnung die linearisierte Spannung σ in der Struktur \mathcal{B} ermittelt. Auf Grundlage dieser Spannung und mit Hilfe der axialen Verzerrung ε_{11}^g wird die Schubmodulverteilung μ_{k+1} aus einer skalaren Gleichung bestimmt, womit ein Iterationsschritt abgeschlossen ist. Der iterative Prozess wird abgebrochen, sobald die Änderung zwischen zwei Schubmodulverteilungen μ_k und μ_{k+1} klein ist.

Aufgrund dieses Aufbaus ist das Verfahren eher den direkten Methoden zuzuordnen, da die Bestimmung der Axialverzerrung ε_{11}^g aus dem entsprechenden Verschiebungsfeld ein wesentlicher Bestandteil des Ansatzes ist. Die dabei getroffenen Differenzierbarkeitsanforderungen an das Verschiebungsfeld \mathbf{u} lassen vermuten, dass auch diese Methode zu einem deutlichen Unterschätzen der Schubmodulverteilung neigt, vgl. Abschnitt 5.1.3. Darüber hinaus räumen Yamakawa & Shiina (1999) selbst ein, dass die Kenntnis und Beschaffenheit der Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen, die der Ansatz erfordert, in der klinischen Anwendung nur in Ausnahmefällen vorliegen.

Über diesen Nachteil des Algorithmus wird von Nitta & Shiina (2000) die Entwicklung eines eigenen Verfahrens motiviert, wobei davon ausgegangen wird, dass alle Verschiebungskomponenten, also auch die transversalen, mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden können, so dass ein Ansatz auf der Grundlage des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} entwickelt werden kann. Die sich ergebende Methode kann als direktes Verfahren für ein dreidimensionales Problem betrachtet werden, und entspricht im Wesentlichen dem Ansatz von Sumi et al. (1995) für ein kompressibles Material. Unter Vernachlässigung volumenhafter Einwirkungen und der Annahme einer quasi-statischen Belastung ergibt sich durch Einsetzen des Materialgesetzes aus Gleichung (2.131) in die Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (2.133) ein lineares Gleichungssystem für den Gradienten der relativen Schubmodulverteilung, vgl. Gleichung (5.53). Nach Lösen des Gleichungssystems in jedem materiellen Punkt \mathcal{M} kann durch eine Integralgleichung entsprechend Gleichung (5.56) die relative Schubmodulverteilung in der Struktur \mathcal{B} berechnet werden. Da jedoch in Nitta & Shiina (2000) nur Simulationen präsentiert werden, bleiben die Autoren den Nachweis der Anwendbarkeit des Algorithmus auf Messergebnisse schuldig.

Der Ansatz von Zhu et al. (2003) ist ebenfalls eng mit den direkten Methoden verwandt, da sich die Schubmodulverteilung μ ohne Iteration direkt aus messbaren Größen bestimmen lässt. Unter der Annahme, dass sich eine betrachtete Struktur durch ein linear elastisches Materialverhalten beschreiben lässt, wird

ein Verfahren auf der Basis einer Finite-Elemente-Analyse entwickelt, wobei zu dessen Umsetzung ein regelmäßiges Netz aus Finiten Elementen erforderlich ist. Durch Differenzbildung zweier Matrixgleichungen aus unterschiedlichen Belastungszuständen kann ein überbestimmtes Gleichungssystem zur Ermittlung der Schubmodulverteilung μ hergeleitet werden. Ist der Spannungsvektor \bar{t} an der Oberseite bekannt, kann eine Untermenge der Gleichungen verwendet werden, um mit Hilfe einer verallgemeinerten Inversen die Schubmodulverteilung direkt aus den Krastrandbedingungen \bar{t} und dem bekannten Verschiebungsfeld u zu berechnen. Da in Zhu et al. (2003) keinerlei Stabilisierungstechniken bei der Matrixinvertierung angewendet werden, ist die Existenz der Inversen nicht gesichert. Darüber hinaus scheint sich der Ansatz sehr sensitiv gegenüber Störungen in den gemessenen Verschiebungen zu verhalten.

Es wird deutlich, dass sich das Ergebnis der Diskussion des letzten Abschnitts auch auf die hier beschriebenen Algorithmen übertragen lässt, da alle Verfahren eng mit den direkten Methoden verwandt sind und somit keine wesentlichen Neuerungen erkennbar werden.

5.2 Nichtlineare Elastografie

Unter nichtlinearer Elastografie, die in der englischsprachigen Literatur häufig als *nonlinear elasticity imaging* bezeichnet wird, werden Ansätze verstanden, die nicht den einschränkenden Annahmen der linearisierten Elastizitätstheorie bei der Materialparameterermittlung unterworfen sind und somit eine Erweiterung der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Verfahren darstellen.

Zur Beschreibung dieses Themengebiets erfolgt in Unterabschnitt 5.2.1 zunächst eine kurze Motivation, die nahe legt, dass die nichtlineare Betrachtung Vorteile bietet, die über eine exaktere Beschreibung der kontinuumsmechanischen Zusammenhänge hinausreicht. Neben einem Beispiel wird hier auch kurz auf Arbeiten eingegangen, die sich mit nichtlinearen Problemstellungen in der Elastografie beschäftigen.

In Abschnitt 5.2.2 erfolgt anschließend die Beschreibung eines neuen Ansatzes, vgl. auch Reichling et al. (2006b) und Reichling et al. (2006a), mit dem bei Annahme eines Neo-Hooke-Materialverhaltens die Schubmodulverteilung einer inhomogenen Struktur bestimmt werden kann. Die dabei eingesetzte Methodik bedient sich der Ergebnisse aus der linearen Elastografie, die in Abschnitt 5.1.3 systematisch zusammengestellt wurden.

5.2.1 Überblick und Motivation

Welche Konsequenzen sich aus der Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens für die Bestimmung der Materialparameter ergeben können, sollen im Folgenden anhand des in Abbildung 5.11(a) dargestellten, einfachen Beispiels aufgezeigt werden. Für diese Struktur können unter der Annahme, dass sich

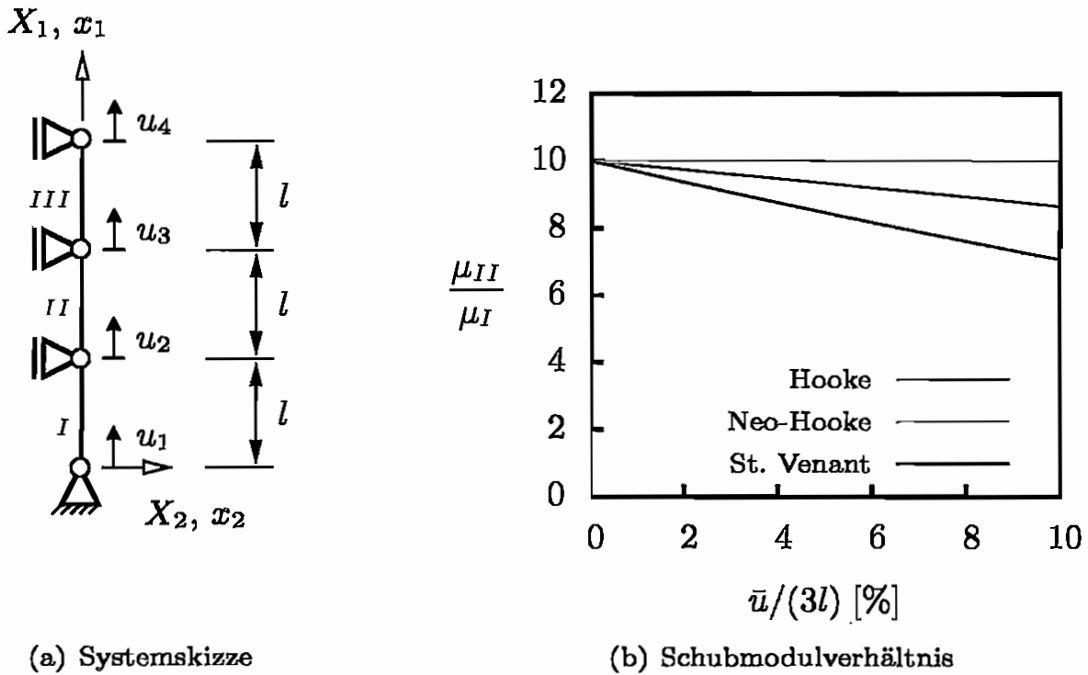


Bild 5.11: Beispiel zur Motivation der nichtlinearen Elastografie

das Materialverhalten der Pendelstützen durch ein inkompressibles Neo-Hooke-Material beschreiben lässt, die Verschiebungen u_2 und u_3 semi-analytisch in Abhängigkeit von der Kopfverschiebung $u_4 = \bar{u}$ bestimmt werden. Die Verschiebung u_1 des Auflagerpunkts ist gleich Null. Für das Verhältnis der Schubmoduln der Stäbe gelte $\mu_{III} = \mu_I$ und $\mu_{II} = 10\mu_I$.

In dem nun folgenden Gedankenexperiment werden die oben genannten Verschiebungen als gemessene Größen betrachtet und von nun an mit u_2^g und u_3^g bezeichnet. Wird für die Ermittlung des Schubmoduls ein Hooke-Material zugrunde gelegt, so lässt sich das Schubmodulverhältnis der Stäbe I und II durch

$$\frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{u_2^g - u_1^g}{u_3^g - u_2^g} \quad (5.67)$$

ausdrücken. Mit der Annahme, dass das Materialverhalten durch ein St. Venant-Kirchhoff Materialmodell beschrieben werden kann, ergibt sich für das Schubmodulverhältnis

$$\frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{\lambda_K^g E_K^g}{\lambda_{II}^g E_{II}^g}, \quad (5.68)$$

wobei λ_K^g und E_K^g die Hauptdehnung in Stabrichtung bzw. die entsprechende Komponente des Greenschen Verzerrungstensors des Stabes K bezeichnen, die aus den „gemessenen“ Größen u_i^g bestimmt werden. Es gilt also

$$\lambda_K^g = \sqrt{2E_K^g + 1}, \quad E_K^g = \varepsilon_K^g + \frac{1}{2}(\varepsilon_K^g)^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_K^g = \frac{u_{K+1}^g - u_K^g}{l}. \quad (5.69)$$

Für ein Neo-Hooke-Material ergibt sich analog

$$\frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{(\lambda_{II}^g)^2}{(\lambda_I^g)^2} \frac{(\lambda_I^g)^3 - 1}{(\lambda_{II}^g)^2 - 1}. \quad (5.70)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.67) bis (5.70) kann nun das Schubmodulverhältnis μ_{II}/μ_I in Abhängigkeit von dem bei der Schubmodulermittlung verwendeten Materialmodell und der Kopfpunktverschiebung \bar{u} verglichen werden, siehe Bild 5.11(b). In diesem Ergebnis überrascht es nicht, dass mit dem Neo-Hooke-Material – unabhängig von den Verschiebung \bar{u} – immer das richtige Schubmodulverhältnis ermittelt wird, da die „gemessenen“ Verschiebungen u_i^g ja gerade mit diesem Modell erzeugt werden. Wesentlich ist hingegen die Erkenntnis, dass sich durch die nicht hinreichend berücksichtigte Nichtlinearität bei dieser einfachen Struktur und bei einer moderaten Kopfpunktverschiebung von $\bar{u}/(3l) = 5\%$ Fehler von 7% bzw. 15% im ermittelten Schubmodulverhältnis ergeben. Außerdem verdeutlicht die Abbildung, dass die Verwendung eines St. Venant-Kirchhoff-Materialmodells, welches wie das Hooke-Material ebenfalls nur in der Nähe der Referenzkonfiguration Gültigkeit besitzt, in dem hier betrachteten Beispiel keine Vorteile bietet, sondern sich das Ergebnis sogar verschlechtert.

Aufgrund dieses Beispiels lässt sich vermuten, dass die lineare Elastografie einen inhärenten Fehler bei der Ermittlung der relativen Schubmodulermittlung enthält, der maßgeblich von der auf eine Struktur aufgebrachten Randverschiebung abhängt. Denkt man jedoch an eine medizinische Anwendung, so erscheinen Werte zwischen 5% bis 10% für ein Verhältnis von aufgebrachter Verschiebung und Objekthöhe nicht außergewöhnlich. Darüber hinaus liegt die Vermutung nahe, dass die Schubmodulermittlung verformungsabhängig ist, da davon ausgegangen werden muss, dass für eine beliebige Struktur mit den dazugehörigen Randbedingungen Nichtlinearitäten mehr oder weniger ausgeprägt auftreten. Aussagen hinsichtlich einer Überlagerung des Modellfehlers mit anderen Fehlereinflüssen können an dieser Stelle nicht gemacht werden. Ebenso lassen sich aus diesem Beispiel keine Vermutungen ableiten, welcher Fehler z. B. durch die Annahme eines Neo-Hooke-Materials gemacht wird, wenn das tatsächlich vorhandene Materialverhalten ein vollkommen anderes ist. Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten PVA-K Phantome ist jedoch für den eingeschränkten Dehnungsbereich von bis zu 15% mit verbesserten Ergebnissen zu rechnen.

Eine ähnliche Argumentation erfolgt durch Erkamp et al. (2004a) und Erkamp et al. (2004b), jedoch beziehen sich die hier getroffenen Aussagen auf eine qualitative Elastografie, vgl. Abschnitt 1.2, die sich auf die Darstellung von Dehnungsbildern beschränkt. Während in Erkamp et al. (2004b) Druckversuche zur Ermittlung eines Materialmodells von Probenkörpern aus Agar und Gelatine durchgeführt werden, wird in Erkamp et al. (2004a) mit numerischen Simulationen und Messungen an Gelatine-Agar-Phantomen nachgewiesen, dass die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte zu einer Verbesserung der Ergebnisse der qualitativen Elastografie führen kann.

Der einzige dem Autor bekannte Ansatz zur Bestimmung der Schubmodulverteilung unter Berücksichtigung großer Deformationen stammt von Skovoroda et al. (1999). Zur Behandlung des inversen Problems wird ein Algorithmus vorgeschlagen, der mit der Begriffsbildung aus Kapitel 5.1 wesentliche Elemente eines direkten Verfahrens besitzt. Diese Methode, auf die in Unterabschnitt 5.1.4 bereits kurz eingegangen wurde, baut unter Annahme eines ebenen Verzerrungszustands auf der Impulsbilanz nach Gleichung (2.50) auf, wobei dynamische und volumenhaft wirkende Beanspruchungen vernachlässigt werden. Als Materialgesetz wird eine inkompressible Variante des in der Gleichung (2.129) angegebenen St. Venant-Kirchhoff-Werkstoffgesetzes verwendet. Wird das Stoffgesetz in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt, ergibt sich eine Differentialgleichung für den Schubmodul μ und den Druck p , aus der die unbekannte Größe p eliminiert wird. Eine anschließende Integration liefert daraufhin die Bestimmungsgleichung für den Schubmodul. Diese enthält, wie in der linearen Elastografie auch, Ableitungen höherer Ordnung des axialen und lateralen Verschiebungsfelds. Auch für den nichtlinearen Ansatz greifen Skovoroda et al. (1999) auf eine Berechnung der lateralen Verschiebungskomponente mittels der Inkompressibilitätsbedingung (2.17) und der gemessenen Axialverschiebung zurück, vgl. Skovoroda et al. (1998). Durch eine Diskretisierung mit der Methode der finiten Differenzen und einem darauf aufgesetzten Optimierungsprozess kann die Schubmodulverteilung in einer Struktur bestimmt werden.

Wie die Zusammenfassung dieses Algorithmus zeigt, ist der Ansatz abgesehen von der Bestimmungsdifferentialgleichung identisch mit dem Vorgehen für den linearen Fall, vgl. die Beschreibung zu Skovoroda et al. (1999) in Abschnitt 5.1.4, so dass sich die gleichen Nachteile einstellen, wobei hier in erster Linie die fehlende Erweiterbarkeit hin zu einer dreidimensionalen Betrachtung zu nennen ist, solange lediglich die axiale Komponente der Verschiebungen bekannt ist. Darüber hinaus ist aufgrund der Glattheitsanforderungen an den Schubmodul bzw. die Verschiebungen und Verzerrungen mit einem deutlichen Unterschätzen der tatsächlichen Schubmodulverteilung zu rechnen, falls diese den Differenzierbarkeitsanforderungen nicht genügt. Ferner suggeriert das Beispiel aus Bild 5.11, dass für die hier betrachteten Phantome durch den Einsatz eines St. Venant-Kirchhoff-Materials nicht mit einer Verbesserung der Ergebnisse des inversen Problems zu rechnen ist. Jedoch sollte auch unabhängig von dem hier analysierten Beispiel von der Verwendung eines St. Venant-Kirchhoff-Materials abgesehen werden, da es ein Materialgesetz ist, welches auf die Betrachtung kleiner Verzerrungen beschränkt ist, vgl. Abschnitt 2.5 und Stein & Barthold (1996, Kap. 7). Vor allem im Kompressionsbereich offenbart dieses Modell erhebliche Schwächen, da für den Grenzfall eines vollständig zusammengedrückten Körpers die Spannung T nicht gegen $-\infty$ wächst, sondern sich $T = 0$ einstellt, vgl. Wriggers (2001, Kap. 3).

5.2.2 Ein iterativer Ansatz

Im Gegensatz zu der in Abschnitt 5.1 beschriebenen linearen Elastografie wird nun bei der Materialparameterbestimmung die einschränkende Annahme, dass sich eine Struktur mittels der linearisierten Elastizitätstheorie beschreiben lässt, fallen gelassen. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das Neo-Hooke-Materialmodell, welches das Materialverhalten der bei den Elastografiemessungen eingesetzten Phantome aus PVA-K im betrachteten Dehnungsbereich gut beschreibt. Ferner können die nachstehenden Erläuterungen problemlos auf einparametrische Materialmodelle sinngemäß übertragen werden, die linear bzgl. dieses Parameters sind, so z. B. das Materialmodell nach Gleichung (4.7). Da die iterativen Verfahren aus Abschnitt 5.1.1 keinerlei Einschränkungen bzgl. der räumlichen Dimension der Problemstellung unterliegen, erfolgen die Darstellungen in diesem Unterkapitel anhand des allgemeinen, dreidimensionalen Falls.

Alle weiteren Annahmen und Voraussetzungen, die zu Beginn des Abschnitts formuliert wurden, besitzen jedoch auch für diesen Abschnitt weiterhin Gültigkeit. Daher werden auch hier ausschließlich Einwirkungen berücksichtigt, die in Form von inhomogenen Verschiebungsrandbedingungen induziert werden, so dass die Randspannungen $\bar{t} = \mathbf{0}$ und die massenbezogene Beschleunigung $\bar{b} = \mathbf{0}$ sind. Ferner wird angenommen, dass das Material nahezu inkompressibel ist und dass die Querkontraktionszahl ν bekannt und über die Struktur konstant ist.

Der Übergang von der linearen zur nichtlinearen Elastografie entspricht in der Terminologie des Abschnitts 3.1 einer Änderung des Bedingungsgefüges, was durch die Einführung der Operatoren

$$\mathcal{G} : \begin{cases} M \supset D(\mathcal{G}) & \longrightarrow V \\ \mu & \mapsto \varphi \end{cases} \quad (5.71)$$

und

$$\mathcal{G} : \begin{cases} M \supset D(\mathcal{G}) & \longrightarrow V_1 \\ \mu & \mapsto \varphi_1 \end{cases} \quad (5.72)$$

mit $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G})$ verdeutlicht werden soll. Der hier eingeführte Operator \mathcal{G} trägt der in Abschnitt 4.1 ausführlich erläuterten Gegebenheit Rechnung, dass nur die axiale Komponente der Deformation mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden kann. Aus den Definitionen (5.71) und (5.72) geht hervor, dass im nichtlinearen Fall anstatt der Verschiebungen die Deformationen als gemessene Größen betrachtet werden. Diese Modifikation ist aber von untergeordneter Bedeutung, da aufgrund der Festlegung (2.5) und Gleichung (2.13) der Zusammenhang

$$\varphi = \text{id} + u \quad (5.73)$$

gilt, wobei id die Identität im \mathbf{R}^3 bezeichnet.⁷ Daher kann eine deformationsabhängige Formulierung wie in Gleichung (5.71) in eine verschiebungsabhängige

⁷In Gleichung (5.73) kann bei der Deformation φ auf den Index t verzichtet werden, vgl. Fußnote 7 auf Seite 27.

Formulierung überführt werden und umgekehrt. Wird beachtet, dass für diesen Abschnitt $B_0 \subset \mathbf{R}^3$ gilt, können die Definitionen der Menge M und des Definitionsbereichs $D(\mathcal{G})$ anhand der Gleichungen (5.2) bzw. (5.5) analog formuliert werden, während die Menge V durch

$$V := \{\varphi : B_0 \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid \varphi_i \in L^2(B_0)\} \quad (5.74)$$

gegeben ist. Die Menge V hat die angegebene Form, damit auch gemessene und somit verrauschte Daten φ^g in der Operatorenleichung zugelassen sind, die im Allgemeinen weder differenzierbar sein müssen, noch die kinematischen Randbedingungen erfüllen, vgl. Abschnitt 5.1.1. Die Menge V_1 kann analog zu Definition (5.74) erfolgen, jedoch ist zu beachten, dass nur die axiale Komponente der Deformation $\varphi_1 : B_0 \rightarrow \mathbf{R}$ berücksichtigt wird. Durch Einführen einer Projektion \mathcal{P} , die eine Abbildung zwischen den Räumen V und V_1 ist und entsprechend der Gleichung (5.9) definiert wird, kann der Operator \mathcal{G} auch durch $\mathcal{G} := \mathcal{P} \circ \mathcal{G}$ ausgedrückt werden.

Die Operatorenleichungen der Problemstellungen der nichtlinearen Elastografie $(\mathcal{G}, D(\mathcal{G}), V)$ bzw. $(\mathcal{G}, D(\mathcal{G}), V_1)$ folgen direkt aus den Definitionen der Operatoren und es gilt

$$\mathcal{G}(\mu) = \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(\mu) = \varphi_1. \quad (5.75)$$

Im Weiteren habe der Datenfehler der gemessenen Größen φ^g hinsichtlich des Rauschpegels die aus Abschnitt 3.3 und Unterabschnitt 5.1.1 bekannte Eigenschaft

$$\|\varphi - \varphi^g\|_V = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^g\|_U \leq \delta. \quad (5.76)$$

Zur Klassifikation des Problems $(\mathcal{G}, D(\mathcal{G}), V)$ und zur Betrachtung der Eigenschaften des Operators \mathcal{G} kann auf die Ergebnisse aus Unterabschnitt 5.1.1 zurückgegriffen werden. Falls nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, lassen sich die hierbei getroffenen Aussagen auch auf den Operator \mathcal{G} übertragen.

Wie in der linearen Elastografie wird auch in diesem Abschnitt erwartungsgemäß die Nichtlinearität der Abbildung \mathcal{G} festgestellt. Ebenso weist die Untersuchung der Eindeutigkeit Parallelen auf. Da jedoch bei der Betrachtung von finiten Deformationen die mathematischen Zusammenhänge selbst für einfachste Beispiele sehr komplex werden, ist ein analytischer Lösungszugang für Beispiel 5.2 bei kompressiblem Materialverhalten nicht zu erwarten. Daher wird für die Betrachtung der Eindeutigkeit bzw. der lokalen Schlechtgestellttheit ein inkompressibles Werkstoffgesetz angenommen und davon ausgegangen, dass sich die Ergebnisse auf ein nahezu inkompressibles Materialverhalten übertragen lassen. Zur Verdeutlichung dieses Übergangs zur Inkompressibilität wird der zugehörige Operator der direkten Aufgabe mit $\hat{\mathcal{G}}$ bezeichnet.⁸ Mit dieser Annahme und einem zeitlich veränderlichen Beobachter Σ kann die Deformation φ der

⁸Durch den Übergang zu einem inkompressiblen Materialverhalten wird das Bedingungsgefüge verändert. Daher gilt für den Operator $\hat{\mathcal{G}} : M \rightarrow V \times P$ und $\hat{\mathcal{G}}(\mu) = (\varphi, p)$, wobei P den Raum der hydrostatischen Drücke bezeichnet und $p \in P$ ist.

Struktur in Bild 5.2 unabhängig von der Schubmodulverteilung μ_n gemäß den Gleichungen (5.12) und (5.13) zu

$$\varphi(\mathbf{X}) = \left(\frac{h - \bar{u}}{h} X_1 + \bar{u}, \frac{h}{h - \bar{u}} X_2, X_3 \right)^T, \quad \mathbf{X} \in B_0, \quad (5.77)$$

angegeben werden. Mit der Materialverteilung μ_n ändert sich zwar der hydrostatische Druck p in der Struktur \mathcal{B} , da dieser aber in einer Elastografiemessung unbestimmt bleibt, sind zwei Materialverteilungen μ_i und μ_j mit $i \neq j$ nicht zu unterscheiden. Aus diesem Grund können alle Aussagen hinsichtlich Eindeutigkeit und Schlechtgestellttheit aus Unterabschnitt 5.1.1 auf den nichtlinearen Fall übertragen werden. Hierzu zählt auch insbesondere die Aussage, dass sich die lokale Schlechtgestellttheit nur für das in Bild 5.2 dargestellte Beispiel nachweisen lässt. Für eine beliebige Schubmodulverteilungen μ kann Mehrdeutigkeit nur mit Hilfe der Vielfachen $\hat{\mu} = c\mu$ mit $c > 0$ gezeigt werden, vgl. auch Abschnitt 4.3.

Zur Definition eines iterativen Lösungsansatzes wird der Gradient des Operators \mathcal{G} benötigt, der in Form der Gâteaux-Ableitung zur Verfügung gestellt wird. Wie im Fall der linearen Elastografie wird auch hier angenommen, dass die Fréchet-Ableitung existiert, was eine zentrale Voraussetzung für die Lösungsansätze zur Behandlung der inversen Probleme von nichtlinearen Operatorengleichungen in Abschnitt 3.3 darstellt. Für die schwache Ableitung gilt

$$\Delta^\mu \mathcal{G} = \mathcal{G}'(\mu) \cdot \Delta\mu = D_\mu \mathcal{G} \cdot \Delta\mu = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{G}(\mu + \varepsilon \Delta\mu) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (5.78)$$

Da angenommen wird, dass das Materialverhalten nahezu inkompressibel ist, wird zur näheren Bestimmung dieser Ableitung die Variationsformulierung nach Hu-Washizu herangezogen. Werden die Gleichungen (2.109) und (2.117) betrachtet, so ist die Richtungsableitung der Variation $D_\varphi \Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0$ respektive des Schubmoduls μ für einen Gleichgewichtszustand gegeben durch

$$D_\mu (D_\varphi \Pi^{\text{HW}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0) \cdot \Delta\mu = \int_{B_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta}_0 : (D_\mu \mathbf{P} \cdot \Delta\mu) \, dV = 0, \quad (5.79)$$

mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{iso}} + \mathbf{P}_{\text{vol}}$ und für beliebige Testfunktionen $\boldsymbol{\eta}_0$ gemäß Gleichung (2.96). Für den Tensor \mathbf{P} gilt mit der Bezeichnung $\Phi = (\varphi, \Theta, p)$ der Zusammenhang $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mu, \Phi(\mu))$ und unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.116) und (2.122) folgt für dessen Richtungsableitung bzgl. des Materialparameters μ

$$D_\mu \mathbf{P} \cdot \Delta\mu = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{\text{iso}} \Delta\mu + D_\Phi \mathbf{P} \cdot \Delta^\mu \Phi, \quad (5.80)$$

mit

$$\begin{aligned} D_\Phi \mathbf{P} \cdot \Delta^\mu \Phi &= D_\varphi \mathbf{P} \cdot \Delta^\mu \varphi + D_p \mathbf{P} \cdot \Delta^\mu p + D_\Theta \mathbf{P} \cdot \Delta^\mu \Theta \\ &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} : \text{Grad} (\Delta^\mu \varphi) + J \mathbf{F}^{-T} \Delta^\mu p. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.80) und (5.81) in Gleichung (5.79) ergibt sich die Beziehung

$$\int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \left\{ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} : \text{Grad} (\Delta^\mu \varphi) + J \mathbf{F}^{-T} \Delta^\mu p \right\} dV = - \int_{B_0} \text{Grad } \eta_0 : \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{\text{iso}} \Delta \mu \right) dV, \quad (5.82)$$

die eine Bestimmungsgleichung für die Richtungsableitung $\mathcal{G}'(\mu) \cdot \Delta \mu = \Delta^\mu \varphi$ darstellt. Die unbekannte Gâteaux-Ableitung des Drucks p bzgl. des Schubmoduls kann aus den Variationen $D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0$ und $D_\Theta \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0$ berechnet werden. Eingedenk des in Gleichung (4.12) formulierten Zusammenhangs zwischen dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul μ ergibt sich für die entsprechenden schwachen Ableitungen mit Gleichungen (2.112) und (2.114)

$$D_\mu (D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0) \cdot \Delta \mu = \int_{B_0} q_0 (J \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad} (\Delta^\mu \varphi) - \Delta^\mu \Theta) dV = 0 \quad (5.83)$$

und

$$D_\mu (D_\Theta \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0) \cdot \Delta \mu = \int_{B_0} \gamma_0 \left(\frac{1}{\mu} U'_{0s}(\Theta) \Delta \mu + U''_{0s}(\Theta) \Delta^\mu \Theta - \Delta^\mu p \right) dV = 0, \quad (5.84)$$

mit der Funktion $U''_{0s} = U''_{0s}(\Theta)$ gemäß Gleichung (2.121). Eine explizite Berechnung der Richtungsableitung $\mathcal{G}'(\mu) \cdot \Delta \mu$ kann wie im linearen Fall erst nach erfolgter Diskretisierung durchgeführt werden und wird daher in Abschnitt 6.2 angegeben. Die Bestimmung der Gâteaux-Ableitung des Funktionals \mathcal{G} kann nach der Ermittlung der schwachen Ableitung $\Delta^\mu \mathcal{G}$ über die Beziehung

$$\mathcal{G}'(\mu) \cdot \Delta \mu = \mathcal{P}(\mathcal{G}'(\mu) \cdot \Delta \mu) \quad (5.85)$$

erfolgen.

Nach der Analyse der Eigenschaften der Operatoren \mathcal{G} und \mathcal{G} können nun die für eine Implementierung relevanten Gleichungen zusammengestellt werden. Aufgrund der Ausführungen in Abschnitt 5.1.3 wird eine klassische Tikhonov-Regularisierung zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie einem anderen iterativen Verfahren vorgezogen. Durch die Definition des Funktionals

$$\mathfrak{g}(\mu) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}(\varphi - \varphi^g)\|_{V_1}^2 + \frac{t}{2} \|\mu - \mu^*\|_M^2 \quad (5.86)$$

kann über $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mu) \rightarrow \min$, mit $\mu \in D(\mathcal{G}) \subset M$, eine stabile Ersatzaufgabe zur Ermittlung des Materialparameters μ angegeben werden. Dabei wird mit t der

Regularisierungsparameter bezeichnet und über die fest gewählte Schubmodulverteilung μ^* können a priori Informationen in den Lösungsprozess eingebracht werden. Für die Durchführung des in dieser Arbeit verwendeten Minimierungsalgorithmus, der in Abschnitt 6.2 beschrieben wird, ist neben dem Funktional g der Gradient $D_\mu g$ erforderlich, der über die Gâteaux-Ableitung

$$\Delta^\mu g = g'(\mu) \cdot \Delta\mu = D_\mu g \cdot \Delta\mu = \left. \frac{d}{d\varepsilon} g(\mu + \varepsilon \Delta\mu) \right|_{\varepsilon=0} \quad (5.87)$$

bestimmt werden kann. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich hieraus analog zu Gleichung (5.27)

$$g'(\mu) \cdot \Delta\mu = \langle \mathcal{P}(\varphi - \varphi^g), \mathcal{P}(g'(\mu) \cdot \Delta\mu) \rangle_{V_1} + t \langle \mu - \mu^*, \Delta\mu \rangle_M. \quad (5.88)$$

Die hier eingeführten Bezeichnungen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_1} := \|\cdot\|_{V_1}^2$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_M = \|\cdot\|_M^2$ sind die Skalarprodukte der Räume V_1 bzw. M .

Als Parameterwahlkriterium wird das in Abschnitt 3.2 eingeführte Morozovsche Diskrepanzprinzip eingesetzt, wobei der Datenfehler δ entsprechend dem Vorschlag von Oberai et al. (2004) über das Signal-Rausch-Verhältnis $1/\bar{\delta}$ der Messeinrichtung abgeschätzt wird. Somit wird der größte Parameter $t > 0$ gesucht, der die Bedingung

$$\|\mathcal{P}(\varphi - \varphi^g)\|_{V_1} \leq \tau \delta \quad (5.89)$$

erfüllt, mit $\tau > 1$ und $\delta = \bar{\delta} \|\mathcal{P}(\varphi^g - \text{id})\|_{V_1}$.

Eine andere Möglichkeit, eine stabile Ersatzaufgabe zu definieren, stellt das von Engl et al. (2003, Kap. 10) vorgeschlagene, modifizierte Tikhonov-Phillips-Verfahren mit der a priori Parameterwahl $t = \alpha(\delta) = O(\delta^2)$ dar, vgl. auch Abschnitt 3.3. Im Rahmen des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie kann das entsprechende Funktional in der Form

$$g_\varepsilon(\mu) = (\{g_\varepsilon^\varphi(\mu)\}^{\frac{1}{2}} - \delta)^2 + g_\varepsilon^\mu(\mu) \quad (5.90)$$

angegeben werden, mit

$$g_\varepsilon^\varphi(\mu) = \|\mathcal{P}(\varphi - \varphi^g)\|_{V_1}^2 \quad \text{und} \quad g_\varepsilon^\mu(\mu) = t \|\mu - \mu^*\|_M^2. \quad (5.91)$$

Gilt darüber hinaus $(g_\varepsilon^\varphi)^{1/2} \neq 0$, so berechnet sich die Richtungsableitung von g_ε zu

$$g'_\varepsilon(\mu) \cdot \Delta\mu = \left(2 - \delta \{g_\varepsilon^\varphi(\mu)\}^{-\frac{1}{2}}\right) \langle \mathcal{P}(\varphi - \varphi^g), \mathcal{P}(g'(\mu) \cdot \Delta\mu) \rangle_{V_1} + 2t \langle \mu - \mu^*, \Delta\mu \rangle_M. \quad (5.92)$$

Die zuvor formulierte Bedingung $(g_\varepsilon^\varphi)^{1/2} \neq 0$ ist im Rahmen eines Optimierungsprozesses durch ein geeignetes Abbruchkriterium zu realisieren.

6 Numerische Umsetzung und Anwendungen

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die theoretische Herleitung einer neuen Methode zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie durchgeführt wurde, sind die folgenden Abschnitte der Anwendung dieses Verfahrens gewidmet.

Vor diesem Hintergrund erfolgt zunächst die Beschreibung der Diskretisierung des in Abschnitt 5.2 hergeleiteten Ansatzes. Durch den Übergang zu einer endlichdimensionalen Formulierung wird eine computergestützte Behandlung in Form eines iterativen Algorithmus ermöglicht. Da in jedem Iterationsschritt auch die zum inversen Problem korrespondierende direkte Aufgabe gelöst werden muss, wird die Darstellung der Diskretisierung nach direktem und inversen Problem getrennt in den Abschnitten 6.1 und 6.2 durchgeführt.

Nach der Beschreibung der Implementierung wird die Einsetzbarkeit des Verfahrens der nichtlinearen Elastografie anhand von Beispielen demonstriert, was in Abschnitt 6.3 mit Hilfe von numerischen Simulationen und in Abschnitt 6.4 anhand von Messergebnissen aus Elastografiemessungen erfolgt.

6.1 Behandlung des direkten Problems

Die computergestützte Umsetzung des direkten Problems der Elastografie, bei der die äußere Einwirkung quasi-statisch aufgebracht wird, entspricht der numerischen Behandlung des in Abschnitt 2.4 beschriebenen Randwertproblems der Mechanik. Ein wesentlicher Schritt stellt hierbei die Umwandlung der kontinuierlichen Fragestellung in ein endlichdimensionales Problem mit Hilfe eines Diskretisierungsverfahrens dar, wobei schon in Unterabschnitt 5.1.1 angedeutet wurde, dass im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich die Finite-Elemente-Methode bei iterativen Ansätzen zur Lösung des inversen Problems herangezogen wird. Demzufolge wird dieses Verfahren auch für die korrespondierende direkte Aufgabe eingesetzt. Da dieser Abschnitt ausschließlich der Dokumentation der Implementierung dient, werden die Konzepte, die der Finiten-Elemente-Methode zugrunde liegen, nur kurz erläutert. Ausführlichere Darstellungen können u. a. der Fachliteratur Hughes (2000), Wriggers (2001), Bathe (2002), Zienkiewicz & Taylor (2002) und Zienkiewicz & Taylor (2000) entnommen werden.

Bei der numerischen Realisierung des direkten Problems mit der Finiten-Elemente-Methode ist zu beachten, dass das im Folgenden modellierte Neo-Hooke-Materialmodell nahezu inkompressibel ist und somit rein verschiebungsbezogene Elementformulierungen zum so genannten *Locking* neigen. Dieses auch als *Volumenlocking* bezeichnete Phänomen lässt sich auf die in Gleichung (2.17)

bzw. Gleichung (2.127) formulierte Zwangsbedingung für den Fall vollkommener Inkompressibilität zurückführen. Die Einhaltung dieser Bedingung bezieht sich auf den Ausdehnungsmodus eines finiten Elements und führt zu einer nicht gewünschten, erheblichen Versteifung des Biegemodes, vgl. u. a. Wriggers (2001, Kap. 10). Eine Möglichkeit, diesen Effekt zu vermeiden, besteht darin, eine gemischte Finite-Elemente-Formulierung zu verwenden, die speziell auf die Behandlung von inkompressiblen Materialien zugeschnitten ist. Zur Konstruktion dieser gemischten, finiten Elemente existieren nach Wriggers (2001, Kap. 10) mehrere Varianten. Zum einen besteht die Möglichkeit mit der *Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren* die Zwangsbedingung der Volumenkonstanz in der spezifischen Formänderungsenergie W_{0s} zu berücksichtigen. Durch dieses Vorgehen ergeben sich jedoch im Vergleich zu rein verschiebungsbezogenen Elementen zusätzliche Unbekannte in Form des Lagrangeschen Multiplikators p , der im Rahmen des Lösungsprozesses ermittelt werden muss. Darüber hinaus sind zur Bestimmung der unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{u} und des Drucks p bei der Lösung des inkrementellen Gleichungssystems, das sich im Rahmen eines iterativen Prozesses ergibt, spezielle Techniken erforderlich, da die mit der Variation und der Linearisierung des Drucks korrespondierende Submatrix eine Nullmatrix ist. Wird hingegen eine *gestörte Lagrangesche Methode* angewandt, so ergibt sich anstelle der Nullmatrix eine Einheitsmatrix skaliert mit dem Faktor $-1/\varepsilon$, wobei ε als Störungsparameter bezeichnet wird. Durch diese Modifikation können nun für die numerische Behandlung des oben beschriebenen Gleichungssystems Standardgleichungslöser herangezogen werden. Bei einem diskontinuierlichen, elementweisen Ansatz für den Druck p besteht darüber hinaus die Möglichkeit, die unbekanntene Größe p schon auf Elementebene zu eliminieren, wodurch sich eine klassische *Penalty-Formulierung* für die Nebenbedingung der Inkompressibilität ergibt. Die Lösung hängt somit vom Penalty-Parameter $1/\varepsilon$ ab, denn bei großen Werten für den Parameter ε hat die Nebenbedingung eine untergeordnete Bedeutung, während bei kleinen Werten spezielle Lösungsverfahren erforderlich werden, da die modifizierte, tangentialsteifigkeitsmatrix für die linearisierten Verschiebungen ggf. schlecht konditioniert ist. Der im Rahmen dieser Arbeit angewendete Spezialfall einer Penalty-Methode ergibt sich durch das in Abschnitt 2.4 erläuterte Hu-Washizu-Variationsprinzip, bei dem sich der Strafterm aus der spezifischen Formänderungsenergie W_{0s} ergibt, mit dem Kompressionsmodul K der linearisierten Elastizitätstheorie als Penalty-Parameter.

Aus Referenzgründen sei darauf hingewiesen, dass neben der hier dargestellten, gemischten Finite-Elemente-Methode weitere, alternative Verfahren wie die *Unterintegration mit geeigneter Stabilisierung* oder *Formulierungen basierend auf den Enhanced (Assumed) Strain Elementen* existieren, vgl. Wriggers (2001, Kap. 10) und die dort angegebene, weiterführende Literatur. Im Rahmen dieser Arbeit wird nicht weiter auf diese Ansätze eingegangen.

Durch die Diskretisierung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode erfolgt eine Approximation sowohl der Geometrie der Struktur \mathcal{B} als auch der verwendeten Feldgrößen. Für die diskrete Betrachtung wird im Folgenden das so genann-

te *isoparametrische Konzept* herangezogen, bei dem für die geometrischen und physikalischen Größen die gleichen Ansatzfunktionen N_I verwendet werden. Wesentlicher Bestandteil der Diskretisierung ist die Unterteilung des Körpers \mathcal{B} in finite Elemente, vgl. Bild 6.1. Durch diese Partitionierung wird die Struktur mittels einer disjunkten Vereinigung von n_e Teilkörpern \mathcal{B}^e stetig approximiert und es gilt

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}^e, \quad (6.1)$$

wobei durch den Index h im Folgenden der Näherungscharakter einer Größe verdeutlicht wird. Aufgrund der durch Gleichung (6.1) gegebenen Unterteilung können die sich ergebenden, nichtlinearen Gleichungen, die durch die Diskretisierung der in Abschnitt 2.4 beschriebenen Potentialformulierung entstehen, zunächst bezogen auf ein finites Element \mathcal{B}^e angegeben werden. Durch einen sich anschließenden Assemblierungsprozess wird aus diesen Elementgleichungen ein globales, nichtlineares Gleichungssystem generiert, welches unter Anwendung von iterativen Lösungsverfahren numerisch behandelt werden kann. Während die Herleitung der Elementgleichungen und die iterative Lösung des direkten Problems im Vordergrund stehen, wird auf eine Darstellung des Assemblierungsprozesses im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und stattdessen auf die Literatur Hughes (2000, Kap. 1) und Bathe (2002, Kap. 12) verwiesen. Da bei den in Abschnitt 6.3 und 6.4 betrachteten Beispielen weder volumenhafte Einwirkungen noch Oberflächenspannungen auftreten, vgl. auch Abschnitt 4.3, wird auf die Diskretisierung äußerer Beanspruchungen ebenfalls nicht eingegangen.

Die Approximation der Geometrie der Referenzkonfiguration erfolgt durch die näherungsweise Darstellung der Koordinaten \mathbf{X} mit Hilfe der zuvor erwähnten Ansatzfunktionen N_I und den bekannten Elementknotenkoordinaten \mathbf{X}^I , so dass für ein Element mit n Knoten

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{X}_e^h = \mathbf{X}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^n N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I \quad (6.2)$$

gilt. Durch die hier erstmalig verwendete Indizierung $(\cdot)_e^h$ wird angedeutet, dass es sich um eine Approximation der Größe (\cdot) auf Elementebene handelt – im Gegensatz zu der zuvor eingeführten Approximation $(\cdot)^h$ auf Systemebene. Die so genannten natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ beziehen sich auf die Einheitskonfiguration \mathcal{B}_\square , so dass durch Gleichung (6.2) eine isoparametrische Transformation zwischen den Elementkonfigurationen \mathcal{B}_0^e und \mathcal{B}_\square beschrieben wird, die sich auch in der Form

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_\square \mapsto \mathbf{X}_e^h = \mathbf{X}_e^h(\boldsymbol{\xi}) \quad (6.3)$$

angeben lässt, vgl. sowohl Simo & Taylor (1991) als auch Bild 6.1. Eine Zusammenstellung der Eigenschaften dieser Abbildung findet sich in Wriggers (2001,

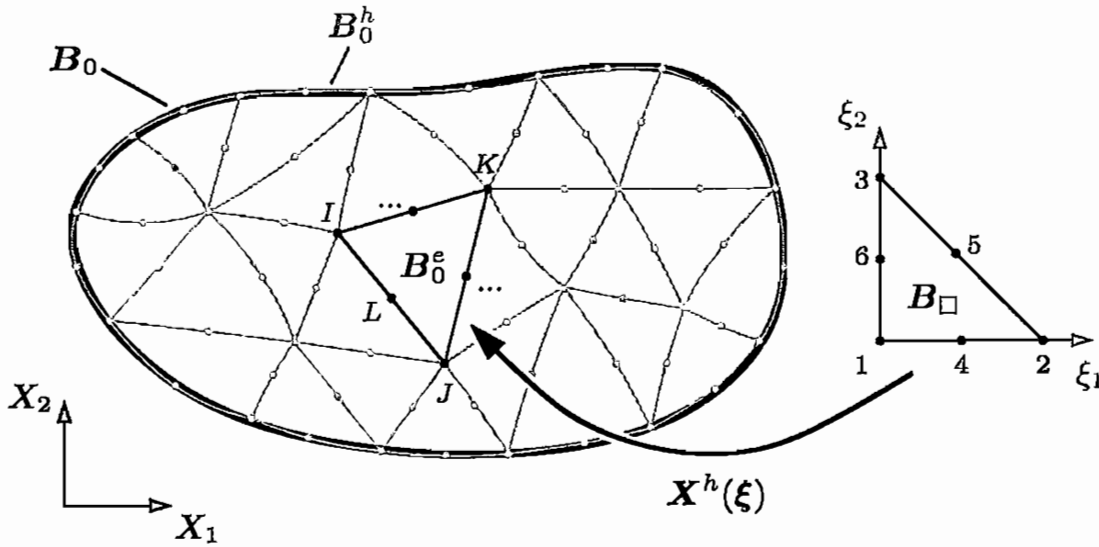


Bild 6.1: Diskretisierung einer Beispielstruktur \mathcal{B} in der Referenzkonfiguration mit sechsknotigen Dreieckselementen, Referenzelement B_{\square} und isoparametrische Abbildung

Kap. 4). Im Sinne des Abschnitts 2.1 kann die Konfiguration B_{\square} als eine Referenzkonfiguration des finiten Elements \mathcal{B}^e neben der Ausgangskonfiguration B_0^e betrachtet werden, die von dem Element \mathcal{B}^e während des Deformationsprozesses ggf. nie eingenommen wird. Jedoch erlaubt die Transformation der Größen in die Konfiguration B_{\square} eine standardisierte, numerische Behandlung der auftretenden Integralgleichungen. Analog zu Gleichung (6.2) können die Koordinaten der Momentankonfiguration über die unbekanntenen Knotenkoordinaten \mathbf{x}^I durch

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_e^h = \mathbf{x}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^n N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^I \tag{6.4}$$

approximiert werden. Gleiches gilt mit $\boldsymbol{\eta}_0 \approx \boldsymbol{\eta}_{0e}^h = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_0^I$ für die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}_0$. Mit Hilfe der Gleichung (6.4) und der Definition des Deformationsgradienten \mathbf{F} gemäß Gleichung (2.11) lässt sich dessen Approximation zu

$$\mathbf{F}_e^h = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}^I \otimes \text{Grad } N_I \tag{6.5}$$

bestimmen, wobei zur Berechnung von $\text{Grad } N_I$ die Kettenregel mit

$$(\text{Grad } N_I)_j = \frac{\partial N_I}{\partial X_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} \tag{6.6}$$

heranzuziehen ist.

Bei einer gemischten Finite-Elemente-Methode werden neben den unbekannt-ten Verschiebungen \mathbf{u}^h bzw. den hier betrachteten Koordinaten der Momentan-konfiguration \mathbf{x}^h weitere Feldvariablen eingeführt. Wird die Drei-Feld-Formu-lierung aus Abschnitt 2.4 aufgegriffen, so sind zusätzlich der Druck p bzw. die Volumendehnung Θ zu berücksichtigen. Die Approximation dieser Feldvariablen kann im Allgemeinen entweder kontinuierlich oder diskontinuierlich und somit elementweise erfolgen, vgl. Zienkiewicz & Taylor (2002, Kap. 11). Da im Falle ei-nes diskontinuierlichen Ansatzes der Druck p und die Volumendehnung Θ schon auf Elementebene aus den Bestimmungsgleichungen eliminiert werden können, wodurch sich der Speicheraufwand zur Lösung der Systemgleichgewichtsbedin-gungen und der Rechenaufwand verringert, wird diese Variante im Folgenden betrachtet. Ferner bietet sich dieses Vorgehen auch im Hinblick auf die Problem-stellung der Elastografie an, da in diesem Fall die Steifigkeitsverteilung zunächst nicht bekannt ist. Werden Körper mit harten Einschlüssen in einer weicheren Materialmatrix untersucht, so ist der Druck p an den Grenzflächen der Materia-lien nicht stetig, was jedoch durch einen kontinuierlichen Ansatz ggf. erzwungen wird und somit einen zusätzlichen Fehler erzeugt.

Im Allgemeinen müssen gemischte finite Elemente – unabhängig von der Wahl eines kontinuierlichen bzw. diskontinuierlichen Ansatzes – zur Gewährleistung der Stabilität der Elementformulierung noch eine zusätzliche Bedingung erfüllen, die als *inf-sup-Bedingung* bzw. *Babuska-Brezzi-Bedingung* bezeichnet und u. a. von Bathe (2002, Kap. 4) hergeleitet wird. Der Nachweis bezieht sich jedoch nur auf den inkompressiblen Fall der linearisierten Elastizitätstheorie und eine reine Verschiebungs-Druck-Formulierung. Bei allgemeinen, nichtlinearen Betrachtun-gen kann sie lediglich sinngemäß für die Tangentialräume bei bekanntem Defor-mationszustand angegeben werden, vgl. Wriggers (2001, Kap. 10). Eine Zusam-menstellung, welche gemischten finiten Elemente die inf-sup-Bedingung in der linearisierten Elastizitätstheorie erfüllen, kann u. a. Bathe (2002, Kap. 4), aber auch Zienkiewicz & Taylor (2002, Kap. 12) entnommen werden.

Die Approximation des Drucks p bzw. der Volumendehnung Θ wird mit Hilfe der Ansatzfunktionen \bar{N}_I durchgeführt, so dass bei n_p Stützstellen

$$p \approx p_e^h = p_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_p} \bar{N}_I(\boldsymbol{\xi}) p^I = \bar{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{p}_e \quad (6.7)$$

und

$$\Theta \approx \Theta_e^h = \Theta_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_p} \bar{N}_I(\boldsymbol{\xi}) \Theta^I = \bar{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Theta}_e \quad (6.8)$$

gilt. Hier wird durch $\bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\xi})$ die Matrix der Ansatzfunktionen \bar{N}_I bezeichnet, \mathbf{p}_e bzw. $\boldsymbol{\Theta}_e$ stellen die Vektoren der Knotenwerte p^I und Θ^I dar. Die zu den Größen p und Θ korrespondierenden Testfunktionen q_0 und γ_0 werden analog durch die Beziehungen $q_0 \approx q_0^h = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q}_{0e}$ und $\gamma_0 \approx \gamma_0^h = \bar{\mathbf{N}} \boldsymbol{\gamma}_{0e}$ näherungsweise

wiedergegeben. Aufgrund der diskontinuierlichen Ansätze kann eine statische Kondensation der in diesem Absatz beschriebenen Größen auf Elementebene erfolgen. Durch Einsetzen der Gleichung (6.8) in die Gleichung (2.112) lässt sich die Volumendehnung Θ_e^h zunächst zu

$$\Theta_e^h = \bar{N} \Theta_e = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} J_e^h \bar{N}^T dV_e \quad (6.9)$$

ermitteln, wobei die Matrix \bar{H} durch die Festlegung

$$\bar{H} = \int_{B_0^e} \bar{N} \otimes \bar{N} dV_e \quad (6.10)$$

definiert wird und $J_e^h = \det F_e^h$ die approximierte Jacobische Funktionaldeterminante bezeichnet. Weiterhin gilt für die Größe p_e^h mit den Gleichungen (2.114) und (6.7), dass

$$p_e^h = \bar{N} p_e = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} U'_{0s}(\Theta_e^h) \bar{N}^T dV_e \quad (6.11)$$

ist, mit $U'_{0s} = U'_{0s}(\Theta_e^h)$ entsprechend Gleichung (2.121). Für die Approximation der Linearisierungen $\Delta \Theta_e^h = \bar{N}(\xi) \Delta \Theta_e$ bzw. $\Delta p_e^h = \bar{N}(\xi) \Delta p_e$ der Volumendehnung und des Drucks wird die zweite Variation des in Gleichung (2.106) definierten Funktionals Π^{HW} herangezogen. Aus den Gleichungen (2.118) und (2.119) folgt mit $U''_{0s} = U''_{0s}(\Theta_e^h)$ – ebenfalls gemäß Gleichung (2.121) – und mit der Bezeichnung $\Delta F_e^h = \sum_{I=1}^n \Delta x^I \otimes \text{Grad } N_I$ nach Gleichung (6.5), dass

$$\Delta \Theta_e^h = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} \bar{N}^T (J_e^h F_e^{h-T} : \Delta F_e^h) dV_e \quad (6.12)$$

und

$$\Delta p_e^h = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} U''_{0s}(\Theta_e^h) \bar{N}^T \Delta \Theta_e^h dV_e. \quad (6.13)$$

Eingedenk der Gleichungen (6.9) bis (6.13) können nun der Vektor der inneren Kräfte \mathbf{r} und die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} auf Elementebene bestimmt werden. Wird durch \mathbf{r}^I der Lastvektor des Knotens I bezeichnet, so kann dieser unter Verwendung von Gleichung (2.117) über die Beziehung

$$\int_{B_0^e} \text{Grad } \eta_0 : P dV_e \approx \sum_{I=1}^n \eta_0^I \cdot \mathbf{r}^I \quad (6.14)$$

durch

$$\mathbf{r}_i^I = \int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_j} P_e^h{}_{ij} J_\square dV_\square \quad (6.15)$$

angegeben werden. In dieser Gleichung wird mit J_\square die Jacobische Determinante der isoparametrischen Abbildung aus Gleichung (6.3) bezeichnet und mit P_e^h die Approximation des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, der sich mit den Gleichungen (2.116) bzw. (2.122) und der Festlegung $C_e^h := F_e^h{}^T F_e^h$ zu

$$P_e^h = p_e^h J_e^h F_e^h{}^{-T} + \mu_e^h J_e^h{}^{-\frac{2}{3}} \left(F_e^h - \frac{1}{3} \text{tr}(C_e^h) F_e^h{}^{-T} \right) \quad (6.16)$$

berechnet. Mit Blick auf das inverse Problem der Elastografie wird im Vorgriff auf Abschnitt 6.2 in dieser Gleichung durch μ_e^h die Approximation der Schubmodulverteilung im Element B^e eingeführt. Der Druck p_e^h kann mit Hilfe der Gleichungen (6.9) und (6.11) bestimmt werden.

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} wird auf Basis der Gleichungen (2.120) und (2.123) bestimmt, wobei sich eine additive Zerlegung von \mathbf{k} in die zwei Summanden $\hat{\mathbf{k}}$ und $\bar{\mathbf{k}}$ anbietet. Für den zu den Knoten I und J korrespondierenden Anteil $\hat{\mathbf{k}}^{IJ}$ der Matrix $\hat{\mathbf{k}}$ folgt mit dem Materialtensor $\mathbb{A} = \partial_F P$ aus

$$\int_{B_0^e} \text{Grad } \eta_0 : \mathbb{A} : \Delta F dV_e \approx \sum_{I,J=1}^n \eta_0^I \cdot \hat{\mathbf{k}}^{IJ} \Delta \mathbf{x}^J, \quad (6.17)$$

dass

$$\hat{\mathbf{k}}_{ij}^{IJ} = \int_{B_\square} (\text{Grad } N_I)_k \mathbb{A}_e^h{}_{ikjl} (\text{Grad } N_J)_l J_\square dV_\square \quad (6.18)$$

ist. Die Approximation \mathbb{A}_e^h ergibt sich analog zu der Spannung P_e^h , indem formal – abgesehen vom Kronecker-Symbol δ_{ij} – alle Größen in Gleichung (2.123) mit der Indizierung $(\cdot)_e^h$ versehen werden. Der Anteil $\bar{\mathbf{k}}^{IJ}$ der Matrix $\bar{\mathbf{k}}$, der sich auf die Knoten I und J bezieht, wird über den Zusammenhang

$$\int_{B_0^e} \text{Grad } \eta_0 : (J F^{-T} \Delta p) dV_e \approx \sum_{I,J=1}^n \eta_0^I \cdot \bar{\mathbf{k}}^{IJ} \Delta \mathbf{x}^J, \quad (6.19)$$

eingeführt. Werden die Festlegungen (6.12) und (6.13) herangezogen, so gilt mit den Gleichungen (6.5) und (6.6)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{ij}^{IJ} = & \left(\int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_k} J_e^h F_e^h{}^{-1} \bar{N}_R J_\square dV_\square \right) \left(H_{RS}^{-1} \int_{B_\square} U_{0s}''(\Theta_e^h) \bar{N}_S \bar{N}_U J_\square dV_\square \right) \\ & \left(H_{UV}^{-1} \int_{B_\square} \bar{N}_V J_e^h F_e^h{}^{-1} \frac{\partial N_J}{\partial X_l} J_\square dV_\square \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

so dass sich die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix mit den Gleichungen (6.18) und (6.20) zu $\mathbf{k}^{IJ} = \hat{\mathbf{k}}^{IJ} + \bar{\mathbf{k}}^{IJ}$ bestimmen lässt.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts bereits angedeutet, führt die Drei-Feld-Formulierung aus Abschnitt 2.4 auf ein Penalty-Verfahren mit dem Kompressionsmodul K als Penalty-Parameter. Wird die Situation $K \rightarrow \infty$ betrachtet, so liefert die Penalty-Methode für die Volumendehnung $\Theta \rightarrow 1$, wodurch die Inkompressibilität des Materials erzwungen wird. Der Fall eines größer werdenden Parameters K zieht jedoch eine zunehmend schlechter werdende Konditionierung der Penalty-Methode nach sich, was sich durch einen Anstieg der Konditionszahl der korrespondierenden Steifigkeitsmatrix äußert. So weisen Simo & Taylor (1991) darauf hin, dass für ein Neo-Hooke-Material bei dem empirisch ermittelten Verhältnis von $K/\mu \approx 1000$ die Bestimmung der Lösung mittels Newton- bzw. Quasi-Newton-Verfahren ggf. Probleme bereiten kann. Daher schlagen Simo & Taylor (1991) vor, die auf dem Potential Π^{HW} gemäß Gleichung (2.106) beruhende Penalty-Methode in ein Augmented-Lagrange-Verfahren zu überführen. Zu diesem Zweck wird das Lagrange Funktional \mathcal{L} durch

$$\mathcal{L}(\varphi, \Theta, p; \lambda^{\mathcal{L}}) = \Pi^{\text{HW}}(\varphi, \Theta, p) + \int_{B_0} \lambda^{\mathcal{L}} h(\Theta) dV \quad (6.21)$$

definiert. Der Lagrange Multiplikator $\lambda^{\mathcal{L}}$ ist ein Element des Funktionenraums $L^2(B_0)$, während die Abbildung $h: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass genau dann $h(\Theta) = 0$ gilt, wenn $\Theta = 1$ ist. Die Minimierung des auf diese Weise konstruierten Funktionals \mathcal{L} kann mit Hilfe des so genannten Uzawa-Algorithmus durchgeführt werden. In diesem Fall wird zunächst für einen fest gewählten Multiplikator $\lambda_n^{\mathcal{L}}$ die Deformation φ ermittelt, die die Funktion Π^{HW} minimiert. Anschließend erfolgt ein Update des Multiplikators $\lambda^{\mathcal{L}}$ durch

$$\lambda_{n+1}^{\mathcal{L}} = \lambda_n^{\mathcal{L}} + K h(\Theta), \quad (6.22)$$

wobei Θ die Volumendehnung bezeichnet, die im n -ten Iterationsschritt bestimmt wurde. Die Variationen von \mathcal{L} und Π^{HW} und deren Linearisierungen unterscheiden sich bei diesem Vorgehen lediglich in den Richtungsableitungen hinsichtlich der Dilatanz Θ . Somit gilt im n -ten Iterationsschritt

$$D_{\varphi} \mathcal{L} \cdot \eta_0 = D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0 \quad \text{und} \quad \Delta(D_{\varphi} \mathcal{L} \cdot \eta_0) = \Delta(D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0), \quad (6.23)$$

sowie

$$D_p \mathcal{L} \cdot q_0 = D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0 \quad \text{und} \quad \Delta(D_p \mathcal{L} \cdot q_0) = \Delta(D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0), \quad (6.24)$$

während

$$D_{\Theta} \mathcal{L} \cdot \gamma_0 = \int_{B_0} \gamma_0 (U'_{0s}(\Theta) + \lambda_n^{\mathcal{L}} h'(\Theta) - p) dV \quad (6.25)$$

und

$$\Delta(D_{\Theta}\mathcal{L} \cdot \gamma_0) = \int_{B_0} \gamma_0 [(U''_{0s}(\Theta) + \lambda_n^{\mathcal{L}} h''(\Theta)) \Delta\Theta - \Delta p] dV \quad (6.26)$$

ist. Der Einfluss des Augmented-Lagrange-Verfahrens lässt sich für den diskreten Fall noch weiter spezifizieren. Bei dieser Methode ist zusätzlich zu der Deformation φ^h , dem Druck p^h und der Volumendehung Θ^h der Lagrangesche Multiplikator $\lambda_n^{\mathcal{L}}$ zu berücksichtigen, der durch den Ansatz $\lambda_n^{\mathcal{L}} \approx (\lambda_n^{\mathcal{L}})_e^h = \sum_{I=1}^{n_p} \bar{N}_I(\xi) (\lambda_n^{\mathcal{L}})^I$ elementweise approximiert wird. Hierdurch folgt mit den Gleichungen (6.11) und (6.13) für den Druck p_e^h und dessen Linearisierung Δp_e^h

$$p_e^h = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} (U'_{0s}(\Theta_e^h) + (\lambda_n^{\mathcal{L}})_e^h h'(\Theta_e^h)) \bar{N}^T dV_e \quad (6.27)$$

und

$$\Delta p_e^h = \bar{N} \bar{H}^{-1} \int_{B_0^e} (U''_{0s}(\Theta_e^h) + (\lambda_n^{\mathcal{L}})_e^h h''(\Theta_e^h)) \bar{N}^T \Delta\Theta_e^h dV_e. \quad (6.28)$$

Die dadurch erforderlich werdenden Änderungen des Vektors der inneren Kräfte \mathbf{r} , der durch die Gleichungen (6.15) und (6.16) definiert ist, folgen direkt aus der Modifikation des Drucks p_e^h von Gleichung (6.11) hin zu Gleichung (6.27). Gleiches gilt für den Anteil $\hat{\mathbf{k}}$ der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} . Um die Änderungen im zweiten Summand $\bar{\mathbf{k}}$ vorzunehmen, die sich zwischen der Penalty-Formulierung und dem Augmented-Lagrange-Ansatz ergeben, ist lediglich der Term $U''_{0s}(\Theta_e^h)$ in Gleichung (6.20) durch $U''_{0s}(\Theta_e^h) + (\lambda_n^{\mathcal{L}})_e^h h''(\Theta_e^h)$ zu ersetzen.

Durch eine Assemblierung der Elementmatrizen ergeben sich unter Berücksichtigung der Verschiebungsrandbedingungen $\bar{\mathbf{u}}^h$ aus den Vektoren der inneren Kräfte \mathbf{r} und den Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{k} das Residuum $[\mathbf{r}]$ und die tangentielle Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{k}]$ auf Systemebene, wobei hier und im Folgenden durch die Kennzeichnung $[\cdot]$ verdeutlicht wird, dass es sich um eine Systemmatrix handelt. Die eingeführten Größen $[\mathbf{r}]$ und $[\mathbf{k}]$ hängen dabei – in Abhängigkeit vom gewählten Verfahren – von der Deformation $\mathbf{x}^h = \varphi(\mathbf{X}^h)$ und ggf. vom Lagrangeschen Multiplikator $(\lambda_n^{\mathcal{L}})^h$ ab. Zur Ermittlung des Vektors der unbekanntenen Knotenkoordinaten des deformierten Zustands $[\mathbf{x}]$, der durch Assemblierung aus den zuvor verwendeten Knotenkoordinaten \mathbf{x}^I hervorgegangen ist, muss somit ein Iterationsverfahren angewendet werden. Während eine Zusammenstellung gängiger Methoden zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen u. a. Wriggers (2001, Kap. 5) und Bathe (2002, Kap. 8) entnommen werden kann, wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich das Newton-Raphson-Verfahren eingesetzt. Hieraus resultiert der in Bild 6.2 dargestellte Algorithmus

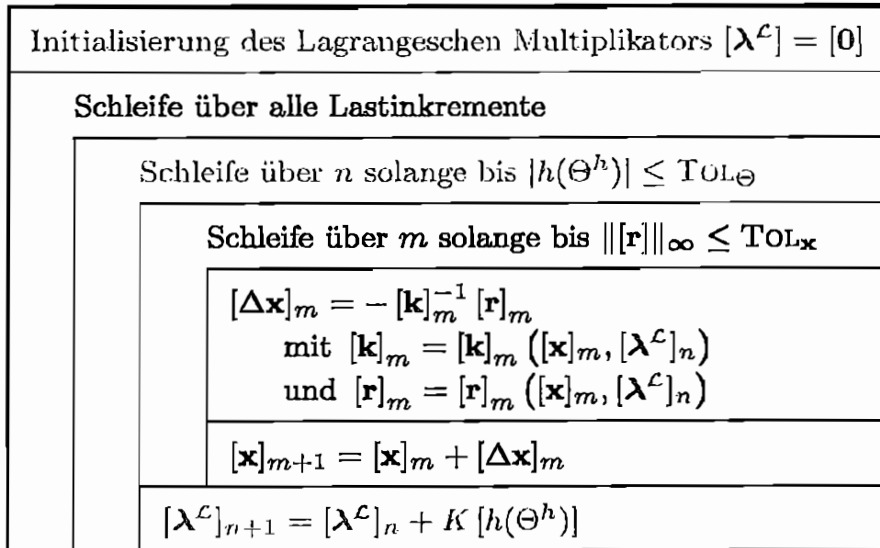


Bild 6.2: Darstellung des Newton-Raphson-Verfahrens (—) und des darüber angeordneten Uzawa-Algorithmus (—)

zur Bestimmung des Vektors $[\mathbf{x}]$. Wird anstelle des Penalty- das Augmented-Lagrange-Verfahren eingesetzt, so ist zusätzlich über den Lagrangeschen Multiplikator $(\lambda_n^{\mathcal{L}})^h$ zu iterieren, der ebenfalls in vektorieller Form $[\lambda^{\mathcal{L}}]_n$ vorliegt. In diesem Fall ist also das Newton-Raphson-Verfahren um eine äußere Iteration über den Multiplikator $[\lambda^{\mathcal{L}}]_n$ zu ergänzen, wodurch sich die geschachtelte Iteration des Uzawa-Algorithmus ergibt, die in Bild 6.2 durch die in grau gehaltenen Passagen verdeutlicht wird. Der in dieser Abbildung verwendete Vektor $[h(\Theta^h)]$ entspricht einer Assemblierung der an den Stützstellen der Funktion $(\lambda_n^{\mathcal{L}})^h$ ausgewerteten Funktion $h = h(\Theta^h)$.

Die computergestützte Behandlung der direkten Aufgabe erfolgt mit einem am Lehrstuhl für Technische Mechanik zusammengestellten, modularen Finite-Elemente-Programm mit dem Arbeitsnamen SQUIRREL. Für das Pre- und Post-processing wird im Rahmen dieser Arbeit die Software GiD 7.7 herangezogen. Mit dem zuvor erwähnten Programm SQUIRREL werden die durch das Preprocessing erzeugten Eingabedateien ausgewertet, die Berechnung und Assemblierung der Elementlastvektoren und der Elementsteifigkeitsmatrizen durchgeführt und die für das Postprocessing benötigten Dateien generiert. Die eigentliche Berechnung, das Lösen der durch die Assemblierung entstandenen, inkrementellen Systemgleichungen $[\mathbf{k}] [\mathbf{x}] = [\mathbf{r}]$, vgl. Bild 6.2, erfolgt in jedem Iterationsschritt mit Hilfe des Programmpakets PARDISO 3.0, welches für die numerischen Behandlung von großen, schwach besetzten Gleichungssystemen konzipiert wurde, vgl. Schenk & Gärtner (2004) und Schenk & Gärtner (2006).

6.2 Lösung des inversen Problems

Aufbauend auf der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Finite-Elemente-Methode kann im Folgenden eine Beschreibung der numerischen Umsetzung zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie erfolgen. Durch die Definition einer stabilen Ersatzaufgabe unter Berücksichtigung des Funktionals g gemäß Gleichung (5.86) entspricht die Ermittlung der approximierten Schubmodulverteilung μ^h der Lösung des Minimierungsproblems

$$\text{minimiere } g^h = g^h(\mu^h) \quad \text{mit } \mu^h \in D^h(\mathcal{G}^h) \subset M^h. \quad (6.29)$$

In dieser Gleichung bezeichnet die Funktion g^h die zu einer gewählten Diskretisierung korrespondierende, diskrete Form des Tikhonov-Funktional g . Aufgrund der Festlegungen bzgl. des Definitionsbereichs $D(\mathcal{G})$, vgl. die Ausführungen in Abschnitt 5.2.2 und die Gleichungen (5.2) und (5.5), die sinngemäß auf das diskrete Pendant $D^h(\mathcal{G}^h)$ übertragen werden können, lässt sich die Problemstellung (6.29) auch in der Form

$$\text{minimiere } g^h = g^h(\mu^h) \quad \text{mit } \mu^h > 1 \quad (6.30)$$

angeben. Da die Behandlung der so entstandenen, restringierten Optimierungsaufgabe zur Ermittlung der Schubmodulverteilung μ^h im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe eines Quasi-Newton-Verfahrens durchgeführt wird, stehen die Bestimmung der Approximation des Funktionals g nach Gleichung (5.86) und die Berechnung des korrespondierenden Gradienten $D_\mu g$ aus Gleichung (5.88) im Mittelpunkt der Ausführungen. Gleiches gilt für das ebenfalls in Unterabschnitt 5.2.2 definierte Funktional g_e und die Richtungsableitung $D_\mu g_e$ gemäß der Gleichungen (5.90) und (5.92).

Die Diskretisierung des inversen Problems und der damit verbundene Übergang der Betrachtung von den in Abschnitt 5.2.2 analysierten Funktionenräumen V_1 und M zu den korrespondierenden endlichdimensionalen Räumen $V_1^h \subset V_1$ und $M^h \subset M$ wird in Hofmann (1999, Kap. 4) und Rieder (2003, Kap. 6) für lineare Operatorengleichungen nach Gleichung (3.3) analysiert. Ein solches Verfahren, welches die entsprechende lineare Operatorengleichung $\mathcal{A}x = y$ in das endlichdimensionale Pendant $\mathcal{A}^h x^h = y^h$ überführt, wird von Rieder (2003, Kap. 6) als *Projektionsverfahren* bezeichnet. Strebt die Minimum-Norm-Lösung x_{mn}^h der endlichdimensionalen Operatorengleichung für eine beliebige rechte Seite y^δ und eine feiner werdende Diskretisierung gegen die Lösung $x_{mn} = \mathcal{A}^\dagger y^\delta$, dann ist das Projektionsverfahren konvergent und es erfolgt schon durch den Diskretisierungsprozess eine Regularisierung. Da jedoch bei den hier betrachteten Elastografiemessungen die Auflösung und damit auch in gewissen Grenzen die endlichdimensionale Approximation des Problems vorgegeben ist, wird die Regularisierung nicht über das Projektionsverfahren gesteuert. Vielmehr wird im Folgenden die schon diskretisierte Fragestellung $(\mathcal{G}^h, M^h, V_1^h)$ als Ausgangsproblem betrachtet und mit den in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Stabilisierungstechniken

regularisiert. Durch dieses Vorgehen, das der Methodik eines numerischen Experiments bei einem zweidimensionalen Randwertproblem in Rieder (2003, Kap. 7) entspricht, fließt eine durch die endlichdimensionale Approximation induzierte Regularisierung zwar unweigerlich mit in den Lösungsprozess ein, wird jedoch nicht gezielt gesteuert.

Die in Abschnitt 6.1 eingeführte Diskretisierung der Struktur \mathcal{B}^h nach Gleichung (6.1) wird bei der Behandlung des inversen Problems der Elastografie im Wesentlichen durch die verwendete Auflösung des Elastografiesystems vorgegeben. Während in Abschnitt 4.3 im Rahmen einer idealisierten Betrachtung angenommen wurde, dass sich die Verschiebung in jedem Materialpunkt \mathcal{M} des Körpers \mathcal{B} bestimmen lässt, liegen bei den durchgeführten Messungen als Ergebnis die Verschiebungen u_1^{gI} bzw. die Koordinaten der Momentankonfiguration x_1^{gI} in Abhängigkeit von diskreten Punkten \mathbf{X}^I vor, die auf einem regelmäßigen Raster angeordnet sind, vgl. Bild 6.3. Dieses Raster der Messergebnisse entsteht bei der HF-Ultraschallelastografie in axialer Richtung durch die Segmentierung des hochfrequenten Echosignals und in lateraler Richtung durch das Auflösungsvermögen der Linearsonde und der daraus resultierenden Anzahl der zur X_1 -Achse parallelen Bildlinien, vgl. Abschnitt 4.1. Wird die B-Bild-Elastografie angewandt, so wird die Rasterung durch die Wahl der Größe $n_1 \times n_2$ eines Blocks b festgelegt, vgl. ebenfalls Abschnitt 4.1 und Bild 6.3. Die Verschiebung eines Blocks b des in der Abbildung dargestellten Beispiels wird mit der Verschiebung des Segmentmittelpunkts gleichgesetzt. Werden nun diese Mittelpunkte bzw. Messpunkte I als Knoten eines Netzes von finiten Elementen \mathcal{B}^e betrachtet, so lässt sich die tatsächlich vorhandene, deformierte Lage x^g mit Hilfe der Messpunkte x^{gI} und der Ansatzfunktionen N^I elementweise durch

$$x^g \approx x_e^{gh} = x_e^{gh}(\xi) = \sum_{I=1}^n N_I(\xi) x^{gI} \quad (6.31)$$

approximieren. Hierbei kann zunächst angenommen werden, dass neben der axialen auch die transversalen Komponenten x_2^{gI} und x_3^{gI} im Knoten I in der Momentankonfiguration vorliegen, wie dies bei numerischen Simulationen ja auch durchaus möglich ist. Ist jedoch – wie bei einer Elastografiemessung – lediglich die axiale Komponente x_1^{gI} bestimmbar, so kann dieser Gegebenheit durch einen geeigneten Projektionsoperator \mathcal{P} Rechnung getragen werden, vgl. Unterabschnitt 5.2.2. Neben den Vorgaben für die Diskretisierung, die sich durch das Elastografiesystem ergeben, existieren jedoch noch weitere Möglichkeiten, auf das Finite-Elemente-Netz Einfluss zu nehmen. So kann durch Vernachlässigen von Messwerten die Auflösung künstlich herabgesetzt werden, um hierdurch den Rechenaufwand zu verringern, vgl. die in Bild 6.3 dargestellten Varianten. Ein anderes Mittel der Einflussnahme auf die Diskretisierung besteht in der Wahl des finiten Elements und der damit einhergehenden Verwendung von unterschiedlichen Ansatzfunktionen N_I , siehe ebenfalls Bild 6.3.

Analog zum direkten Problem kann eingedenk der bisherigen Ausführungen auch beim inversen Problem auf die durch Gleichung (6.1) gegebene Unterteilung

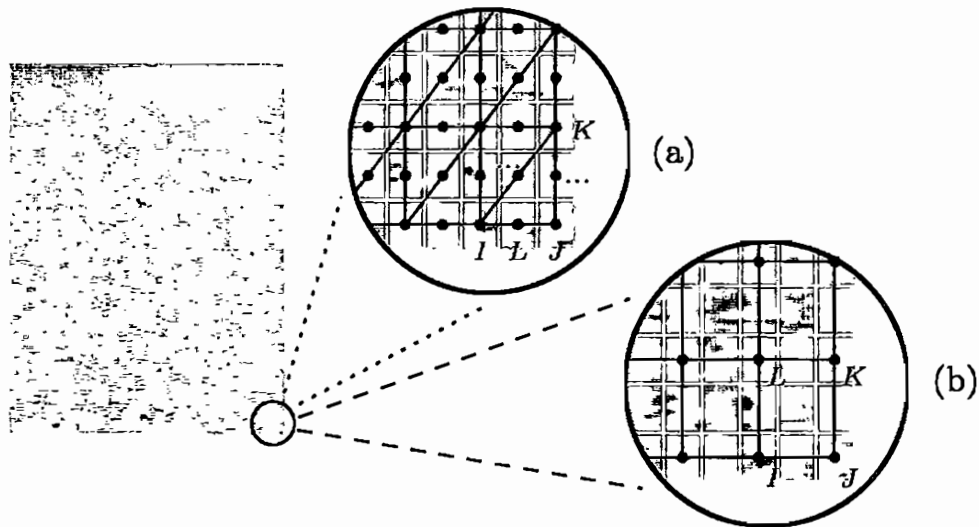


Bild 6.3: Diskrete Messpunkte am Beispiel der B-Bild-Elastografie: das durch die Segementierung in Blöcke entstandene Raster der Ausgangskonfiguration und zwei unterschiedliche Vernetzungsvarianten (a) und (b)

der Struktur \mathcal{B}^h in finite Elemente \mathcal{B}^e zurückgegriffen werden, so dass sich auch in diesem Abschnitt eine Darstellung gegliedert in Element- und Systemebene anbietet. Für einen Teilkörper \mathcal{B}^e lässt sich das Funktional g aus Gleichung (5.86) näherungsweise durch

$$g_e^h(\mu_e^h) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_e^h(\varphi_e^h - \varphi^{gh})\|_{V_1^h}^2 + \frac{t}{2} \|\mu_e^h - \mu_e^{*h}\|_{M_e^h}^2 \quad (6.32)$$

angeben, wobei t den Regularisierungsparameter bezeichnet. Die in dieser Gleichung eingeführten Größen $(\cdot)_e^h$ stellen aus der Diskretisierung hervorgegangene Mengen und Funktionen dar, die in Abschnitt 5.2.2 definiert wurden, so dass die dort vorgenommenen Festlegungen hier sinngemäß übernommen werden können. Die Approximation der Schubmodulverteilung μ_e^h erfolgt mit Hilfe der Ansatzfunktionen \hat{N}_I und Knotenwerten der Schubmodulverteilung μ^I bei n_μ Stützstellen durch

$$\mu \approx \mu_e^h = \mu_e^h(\xi) = \sum_{K=1}^{n_\mu} \hat{N}_K(\xi) \mu^K = \hat{N}(\xi) \mu_e, \quad (6.33)$$

mit μ_e als dem Elementknotenvektor der Schubmodulwerte. Für die fest gewählte Materialverteilung μ_e^{*h} gilt analog $\mu_e^{*h} = \sum_{K=1}^{n_\mu} \hat{N}_K(\xi) \mu^{*K}$. Durch die Projektion $\mathcal{P}_e^h: V_e^h \rightarrow V_1^h$ auf die X_1 -Richtung wird in Gleichung (6.32) lediglich die axiale Komponente der Deformation berücksichtigt, vgl. hierzu auch Abschnitt 5.2.2. Somit lässt sich Gleichung (6.32) durch Anwenden der Norm und

unter Berücksichtigung der Transformation nach Gleichung (6.3) in die Form

$$\mathfrak{g}_e^h(\mu_e^h) = \frac{1}{2} \int_{B_\square} (x_{1e}^h - x_{1e}^{gh})^2 J_\square dV_\square + \frac{t}{2} \int_{B_\square} (\mu_e^h - \mu_{*e}^{*h})^2 J_\square dV_\square, \quad (6.34)$$

überführen. Die hier verwendeten Koordinaten x_{1e}^h und x_{1e}^{gh} ergeben sich aus der Definition der Deformation φ_e^h durch $x_{1e}^h = \varphi_{1e}^h(\mathbf{X}_e^h)$ bzw. $x_{1e}^{gh} = \varphi_{1e}^{gh}(\mathbf{X}_e^h)$ und lassen sich analog zu den durch die Gleichungen (6.4) bzw. (6.31) gegebenen Rechenvorschriften über die entsprechenden Knotenwerte x_1^I bzw. x_1^{gI} ermitteln.

Die Bestimmung der Richtungsableitung von \mathfrak{g}^h hinsichtlich der Schubmodulverteilung μ^h kann anhand der Gleichung (5.88) erfolgen. Wird berücksichtigt, dass $\Delta^{\mu^h} \varphi^h = (\mathfrak{G}^h)'(\mu^h) \cdot \Delta \mu^h$ ist, so gilt für die Richtungsableitung auf Elementebene

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu^h} \mathfrak{g}_e^h &= (\mathfrak{g}_e^h)'(\mu_e^h) \cdot \Delta \mu_e^h = \langle \mathcal{P}_e^h(\varphi_e^h - \varphi_e^{gh}), \mathcal{P}_e^h(\Delta^{\mu^h} \varphi_e^h) \rangle_{V_{1e}^h} \\ &\quad + t \langle \mu_e^h - \mu_{*e}^{*h}, \Delta \mu_e^h \rangle_{M_e^h}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Unter Einbeziehung der Definitionen des durch die Räume V_{1e}^h und M_e^h gegebenen Skalarprodukts gilt für die Richtungsableitung eines beliebigen Elements \mathcal{B}^e

$$\Delta^{\mu^h} \mathfrak{g}_e^h = \int_{B_\square^e} (x_{1e}^h - x_{1e}^{gh})(\Delta^{\mu^h} x_{1e}^h) dV_e + t \int_{B_\square^e} (\mu_e^h - \mu_{*e}^{*h}) \Delta \mu_e^h dV_e, \quad (6.36)$$

wobei $\Delta^{\mu^h} x_{1e}^h$ die Linearisierung der Axialkomponente der Koordinaten der Momentankonfiguration hinsichtlich der approximierten Schubmodulverteilung μ^h bezeichnet. Werden die Diskretisierungen der Koordinate x_{1e}^h bzw. x_{1e}^{gh} gemäß den Gleichungen (6.4) und (6.31) und die Diskretisierung der Schubmodulverteilung nach Gleichung (6.33) berücksichtigt, so kann die Gâteaux-Ableitung auch in die Form

$$\Delta^{\mu^h} \mathfrak{g}_e^h = \sum_{I=1}^n (\mathbf{v}_1^I \mathbf{E}_1^T) (\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}^I) + \sum_{K=1}^{n_\mu} m_K \Delta \mu^K \quad (6.37)$$

überführt werden, mit \mathbf{E}_1 dem Basisvektor der axialen Richtung. In dieser Gleichung bezeichnet $\mathbf{v}^I = \mathbf{v}_1^I \mathbf{E}_1^T$ den zum Knotenwert I korrespondierenden Eintrag in der Matrix \mathbf{v} , für den

$$\mathbf{v}_1^I = \int_{B_\square} (x_{1e}^h - x_{1e}^{gh}) N_I J_\square dV_\square \quad (6.38)$$

gilt, und m_K die K -te Komponente der Matrix \mathbf{m} , die durch

$$m_K = t \int_{B_\square} (\mu_e^h - \mu_{*e}^{*h}) \hat{N}_K J_\square dV_\square \quad (6.39)$$

gegeben ist.

Zur Berechnung der Richtungsableitung $\Delta^{\mu^h} \mathbf{g}_e^h$ bzw. des Gradienten $D_{\mu^h} \mathbf{g}_e^h$ ist abschließend die Bestimmung der Größe $D_{\mu^h} \mathbf{x}^I$ erforderlich, die über die Beziehung $\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}^I = D_{\mu^h} \mathbf{x}^I \cdot \Delta \mu_e^h$ die Änderung der Lage des Knotens I in der Momentankonfiguration bei kleinen Änderungen der Materialverteilung μ_e^h beschreibt. Eingendenk der elementweisen Approximationen p_e^h und Θ_e^h für Druck und Volumendehnung gemäß den Festlegungen (6.7) und (6.8), folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.83) und (5.84)

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu^h} p_e^h &= \bar{N} \Delta^{\mu^h} p_e = \\ &\bar{N} \mathbf{H}^{-1} \int_{B_0^e} \bar{N}^T \left(\frac{1}{\mu_e^h} U'_{0s}(\Theta_e^h) \Delta \mu_e^h + U''_{0s}(\Theta_e^h) \Delta \mu_e^h \Theta_e^h \right) dV_e \end{aligned} \quad (6.40)$$

und

$$\Delta^{\mu^h} \Theta_e^h = \bar{N} \Delta^{\mu^h} \Theta_e = \bar{N} \mathbf{H}^{-1} \int_{B_0^e} \bar{N}^T \left(J_e^h F_e^{h-T} : \text{Grad}(\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}_e^h) \right) dV_e. \quad (6.41)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen und der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}^{IJ} = \hat{\mathbf{k}}^{IJ} + \bar{\mathbf{k}}^{IJ}$ kann nun die Bestimmungsgleichung (5.82) durch die Matrixgleichung

$$\sum_{I,J=1}^n \eta_0^I \cdot \mathbf{k}^{IJ} \Delta^{\mu^h} \mathbf{x}^J = - \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^{n_\mu} \eta_0^I \cdot \mathbf{p}^{IK} \Delta \mu^K \quad (6.42)$$

approximiert werden. Während die zu den Elementknoten I und J korrespondierenden Anteile $\hat{\mathbf{k}}^{IJ}$ bzw. $\bar{\mathbf{k}}^{IJ}$ der Steifigkeitsmatrizen $\hat{\mathbf{k}}$ und $\bar{\mathbf{k}}$ durch die Gleichungen (6.18) und (6.20) bestimmt sind, kann der zum Knoten I und zum Materialfreiheitsgrad K gehörende Teil \mathbf{p}^{IK} der Matrix \mathbf{p} durch die Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} p_i^{IK} &= \left(\int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_j} J_e^h F_e^{h-1} \bar{N}_R J_\square dV_\square \right) \left(H_{RS}^{-1} \int_{B_\square} \bar{N}_S \frac{1}{\mu_e^h} U'_{0s}(\Theta_e^h) \hat{N}_K J_\square dV_\square \right) \\ &\quad + \int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_j} \frac{1}{\mu_e^h} (P_{\text{iso}})_e^h{}_{ij} \hat{N}_K J_\square dV_\square \end{aligned} \quad (6.43)$$

ermittelt werden.

Durch einen Assemblierungsprozess, der dem des direkten Problems entspricht, lassen sich aus den Elementmatrizen \mathbf{v} , \mathbf{m} , $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}} + \bar{\mathbf{k}}$ und \mathbf{p} die Systemmatrizen $[\mathbf{v}]$, $[\mathbf{m}]$, $[\mathbf{k}]$ und $[\mathbf{p}]$ generieren, wodurch eine Berechnung des Funktionals $[\mathbf{g}^h] = \mathbf{g}^h$ und des Gradienten $[D_{\mu^h} \mathbf{g}^h] = D_{\mu^h} \mathbf{g}^h$ auf Systemebene möglich wird. Wie schon in Abschnitt 6.1 wird durch das Klammerpaar $[\cdot]$ angedeutet, dass es sich bei der betrachteten Größe um eine Systemmatrix handelt, so

dass diese Kennzeichnung im Folgenden auch auf das Funktional \mathfrak{g}^h sowie dessen Gradienten und Richtungsableitung übertragen wird.

Die Assemblierung der Funktion $[\mathfrak{g}^h]$, also die Berechnung des Funktionswerts von $[\mathfrak{g}^h]$ an der Stelle μ^h , kann durch eine direkte Summation über alle Elemente erfolgen und es gilt

$$\mathfrak{g}(\mu) \approx \mathfrak{g}^h(\mu^h) = [\mathfrak{g}^h] = \sum_{e=1}^n \mathfrak{g}_e^h(\mu_e^h). \quad (6.44)$$

Die Richtungsableitung $[\Delta^{\mu^h} \mathfrak{g}]$ lässt sich bei der hier durchgeführten, endlich-dimensionalen Betrachtung durch den Gradientenvektor $[D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h]$ in der Form

$$[\Delta^{\mu^h} \mathfrak{g}] = [D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h] [\Delta \mu] \quad (6.45)$$

ausdrücken, wobei $[\Delta \mu]$ einen beliebigen Richtungsvektor bezeichnet. Die Ermittlung des Gradientenvektors $[D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h]$ führt zunächst auf die Berechnung der Sensitivitätsmatrix $[\mathfrak{s}]$, die sich nach einer Assemblierung der Gleichungen (6.42) zum Gleichungssystem

$$[\mathbf{k}] [\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}] = [\mathbf{p}] [\Delta \mu] \quad (6.46)$$

durch die Festlegung

$$[\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}] = [\mathfrak{s}] [\Delta \mu] \quad \text{mit} \quad [\mathfrak{s}] := [\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{p}] \quad (6.47)$$

ergibt. Wird die zur Gleichung (6.37) korrespondierende Systemgleichung herangezogen, folgt hieraus unmittelbar die Berechnungsvorschrift für den Gradientenvektor $[D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h]$ mit

$$[D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h] = [\mathbf{v}] [\mathfrak{s}] + [\mathbf{m}]. \quad (6.48)$$

Eine leichte Modifikation der Gradientenberechnung $[D_{\mu^h} \mathfrak{g}^h]$ ist dann vorzunehmen, wenn anstelle der Penalty-Methode basierend auf dem Funktional Π^{HW} ein Augmented-Lagrange-Verfahren in Kombination mit einem Uzawa-Algorithmus auf Grundlage des Funktionals \mathcal{L} angewendet wird, vgl. Abschnitt 6.1. In diesem Fall folgt zwar aus den Gleichung (6.23) und (6.24)

$$D_{\mu}(D_{\varphi} \mathcal{L} \cdot \eta_0) \cdot \Delta \mu = D_{\mu}(D_{\varphi} \Pi^{\text{HW}} \cdot \eta_0) \cdot \Delta \mu \quad (6.49)$$

und

$$D_{\mu}(D_p \mathcal{L} \cdot q_0) \cdot \Delta \mu = D_{\mu}(D_p \Pi^{\text{HW}} \cdot q_0) \cdot \Delta \mu, \quad (6.50)$$

jedoch gilt unter Berücksichtigung der Gleichung (6.25), dass

$$D_{\mu}(D_{\Theta} \mathcal{L} \cdot \gamma_0) \cdot \Delta \mu = \int_{B_0} \gamma_0 \left\{ (U_{0s}''(\Theta) + \lambda_n^{\mathcal{L}} h''(\Theta)) \Delta^{\mu} \Theta + \frac{1}{\mu} U_{0s}'(\Theta) \Delta \mu - \Delta^{\mu} p \right\} dV = 0 \quad (6.51)$$

ist und sich somit von $D_\mu(D_\Theta \Pi^{\text{HW}} \cdot \gamma_0) \cdot \Delta \mu$ unterscheidet. Für den diskreten Fall kann mit Hilfe dieser Gleichung die Linearisierung des Drucks p_e^h respektive der Schubmodulverteilung μ_e^h auf Elementebene zu

$$\Delta^{\mu^h} p_e^h = \bar{N} H^{-1} \int_{B_0^e} \bar{N}^T \left\{ (U''_{0s}(\Theta_e^h) + \lambda_{ne}^{\mathcal{L}^h} h''(\Theta_e^h)) \Delta^\mu \Theta_e^h + \frac{1}{\mu_e^h} U'_{0s}(\Theta_e^h) \Delta \mu_e^h \right\} dV_e \quad (6.52)$$

bestimmt werden. Ein Vergleich der Gleichungen (6.40) und (6.52) verdeutlicht, dass durch den Übergang vom Penalty- zum Augmented-Lagrange-Verfahren nur die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k} zu modifizieren ist, wobei die Änderung der Modifikation beim direkten Problem entspricht, vgl. Abschnitt 6.1.

Neben der Tikhonov-Phillips-Methode wurde in Unterabschnitt 5.2.2 das von Engl et al. (2003, Kap. 10) vorgeschlagene, modifizierte Tikhonov-Phillips-Verfahren aufgegriffen und durch die Gleichungen (5.90) und (5.92) ein entsprechendes Funktional \mathfrak{g}_e und die korrespondierende Richtungsableitung $\Delta^\mu \mathfrak{g}_e$ eingeführt. Die bisher in diesem Abschnitt zusammengestellten Ergebnisse für die Funktionswert- und Gradientenberechnung hinsichtlich des Funktionals \mathfrak{g}^h lassen sich dabei im Wesentlichen direkt auf die Approximationen \mathfrak{g}_e^h und $D_{\mu^h} \mathfrak{g}_e^h$ übertragen, so dass im Folgenden nur die Unterschiede thematisiert werden. Zur Ermittlung des Funktionswerts $[\mathfrak{g}_e^h]$ ist zunächst eine elementweise Approximation der durch die Gleichung (5.91) gegebenen Abbildungen \mathfrak{g}_e^φ und \mathfrak{g}_e^μ erforderlich. Mit dem Datenfehler δ , vgl. Abschnitt 5.2.2, ergibt sich für die Schubmodulverteilung μ^h unter Berücksichtigung von

$$\mathfrak{g}_{e_e}^{\varphi^h}(\mu_e^h) = \int_{B_\square} (x_{1e}^h - x_{1e}^{gh})^2 J_\square dV_\square \quad (6.53)$$

und

$$\mathfrak{g}_{e_e}^{\mu^h}(\mu_e^h) = t \int_{B_\square} (\mu_e^h - \mu_{e_e}^{*h})^2 J_\square dV_\square \quad (6.54)$$

der Funktionswert

$$\mathfrak{g}_e(\mu) \approx \mathfrak{g}_e^h(\mu^h) = [\mathfrak{g}_e^h] = \left([\mathfrak{g}_e^{\varphi^h}]^{\frac{1}{2}} - \delta \right)^2 + [\mathfrak{g}_e^{\mu^h}], \quad (6.55)$$

wobei

$$[\mathfrak{g}_e^{\varphi^h}] = \sum_{e=1}^n \mathfrak{g}_{e_e}^{\varphi^h}(\mu_e^h) \quad \text{und} \quad [\mathfrak{g}_e^{\mu^h}] = \sum_{e=1}^n \mathfrak{g}_{e_e}^{\mu^h}(\mu_e^h) \quad (6.56)$$

ist. Darüber hinaus zeigt ein Vergleich der Definitionen (5.88) und (5.92), dass sich die Gâteaux-Ableitungen $[\Delta^\mu \mathfrak{g}]$ und $[\Delta^\mu \mathfrak{g}_e]$ formal nur geringfügig durch

skalare Faktoren voneinander unterscheiden. Somit muss für die Berechnung des Gradienten $[D_{\mu^h} \mathbf{g}_e^h]$ lediglich die elementweise Approximation der Richtungsableitung $\Delta^{\mu^h} \mathbf{g}_e^h$ aus Gleichung (6.36) durch

$$\Delta^{\mu^h} \mathbf{g}_e^h = \left(2 - \delta[\mathbf{g}_e^{\varphi^h}]^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{B_0^e} (x_{1e}^h - x_{1e}^{g^h})(\Delta^{\mu^h} x_{1e}^h) dV_e + 2t \int_{B_0^e} (\mu_e^h - \mu_e^{*h}) \Delta \mu_e^h dV_e \quad (6.57)$$

ersetzt werden, während alle weiteren Schritte zur Bestimmung des Gradientenvektors in analoger Weise ausgeführt werden können.

Der Funktionswert $[\mathbf{g}^h]$ bzw. $[\mathbf{g}_e^h]$ und der zugehörige Gradientenvektor $[D_{\mu^h} \mathbf{g}^h]$ bzw. $[D_{\mu^h} \mathbf{g}_e^h]$ können im Folgenden herangezogen werden, um mit Hilfe eines Quasi-Newton-Verfahrens die Optimierungsaufgabe (6.30) zu lösen. Wird mit μ^h eine beliebige und mit μ_k^h die im k -ten Iterationsschritt berechnete Schubmodulverteilung bezeichnet, so kann mit der Festlegung $\Delta \mu_k^h := \mu^h - \mu_k^h$ durch

$$[\mathbf{q}_k(\mu^h)] := [\mathbf{g}_k^h] + [D_{\mu^h} \mathbf{g}_k^h] \Delta \mu_k^h + \frac{1}{2} \Delta \mu_k^h [D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h] \Delta \mu_k^h \quad (6.58)$$

die quadratischen Näherungen der Funktion $[\mathbf{g}^h(\mu^h)]$ eingeführt werden, wobei der Funktionswert $[\mathbf{g}_k^h]$, der Gradient $[D_{\mu^h} \mathbf{g}_k^h]$ und die Hesse-Matrix $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]$ an der Stelle μ_k^h ermittelt werden. Durch eine sukzessive Minimierung der Gleichung (6.58) kann das Optimierungsproblem (6.30) näherungsweise gelöst und eine lokale Minimalstelle des Funktionals \mathbf{g}^h ermittelt werden. Während dazu beim klassischen Newton-Verfahren die Berechnung der Hesse-Matrix $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]$ in jedem Iterationsschritt erforderlich wird, erfolgt bei den Quasi-Newton-Verfahren lediglich eine Approximation der Matrix $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]$ oder direkt eine Näherung der Inversen $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]^{-1}$. Die approximierten Matrizen $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]$ bzw. $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_k^h]^{-1}$ ergeben sich durch so genannte Aufdatierungsformeln, bei denen die Berechnung der jeweiligen Größe im k -ten Iterationsschritt mit Hilfe der zuvor berechneten Matrix $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_{k-1}^h]$ bzw. $[D_{\mu^h}^2 \mathbf{g}_{k-1}^h]^{-1}$ durchgeführt wird. Beispiele für derartige Aktualisierungsregeln sind die Davidon-Fletcher-Powell-Formel und die Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Regel, die im Allgemeinen durch die Bezeichnungen DFP- bzw. BFGS-Formel abgekürzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf die Implementierung des Limited-Memory BFGS-Verfahrens von Byrd et al. (1995) bzw. Zhu et al. (1997) zurückgegriffen, vgl. auch Geiger & Kanzow (1999, Kap. 12). Dieser Algorithmus erlaubt, einfache Randbedingungen zu definieren, über die eine untere Grenze für die Schubmodulverteilung μ^h angegeben werden kann, wie es das restringierte Optimierungsproblem (6.30) fordert. Aufgrund der Eigenschaft, Randbedingungen festlegen zu können, wird die Implementierung von den Autoren auch als L-BFGS-B Algorithmus bezeichnet. In jedem Iterationsschritt wird zunächst mit Hilfe der Methode der projizierten Gradienten ein

verallgemeinerter Cauchy-Punkt μ_c^h berechnet, durch den sich eine Indexmenge $A(\mu_c^h)$ ergibt, die all jene Schubmodulknotenwerte umfasst, die auf einem vorab definierten Rand liegen, vgl. Byrd et al. (1995). Für alle anderen Variablen, die so genannten freien Variablen, wird das zur quadratischen Form $[q_k] = [q_k(\mu^h)]$ aus Gleichung (6.58) gehörende Minimierungsproblem

$$\text{minimiere } [q_k] = [q_k(\mu^h)] \quad \text{mit } \mu^h > 1. \quad (6.59)$$

gelöst, wodurch sich nach Berücksichtigung der Randbedingungen eine vorläufige Iterierte $\bar{\mu}_{k+1}^h$ bzw. eine Suchrichtung $\Delta\mu_k^h$ ergibt. Die Berechnung der Suchrichtung $\Delta\mu_k^h$ kann mittels einer direkten Berechnung, einer iterativen Analyse auf Grundlage der Methode der konjugierten Gradienten oder durch die duale Methode erfolgen, bei der die Randbedingungen über Lagrangesche Multiplikatoren berücksichtigt werden. Ist die Berechnung der Suchrichtung durchgeführt, wird mit einem Linesearch-Algorithmus unter Anwendung der strengen Wolfe-Powell-Schrittweitenstrategie die optimale Schrittweite durch die skalare Größe s_k approximiert, so dass sich die neue Iterierte zu

$$\mu_{k+1}^h = \mu_k^h + s_k \Delta\mu_k^h \quad (6.60)$$

ergibt. Der Linesearch-Algorithmus selbst stellt einen iterativen Vorgang dar, bei dem ggf. mehrfach die Berechnung des Funktionswerts $[g^h(\mu^h)]$ und des Gradienten $[D_{\mu^h} g^h]$ erforderlich wird. Durch eine anschließende Aufdatierung der Größen, die zur Ermittlung der inversen Hesse-Matrix $[D_{\mu^h}^2 g^h]^{-1}$ erforderlich sind, ist ein Iterationsschritt abgeschlossen. Die gesamte Iteration zur Bestimmung der approximierten Schubmodulverteilung μ^h wird durch die Erfüllung einer geeigneten Bedingung abgebrochen. Eine grafische Veranschaulichung des Algorithmus zur Ermittlung der Schubmodulverteilung, die auch die zu Beginn dieses Abschnitts erläuterte Gradientenberechnung und die in Abschnitt 6.1 beschriebene Behandlung des direkten Problems mit einbezieht, ist Bild 6.4 zu entnehmen.

6.3 Numerische Simulationen

Unter einer numerischen Simulation wird in diesem Abschnitt die Anwendung des Algorithmus aus Bild 6.4 verstanden, bei dem als Eingangsgrößen entweder die Axialkomponenten von exakten oder numerisch gestörten Deformationen φ^h bzw. φ^{g^h} verwendet werden. Während sich die exakten Daten φ_1^h ihrerseits als Lösung eines direkten Problems ergeben, vgl. Abschnitt 6.1 und insbesondere Bild 6.2, werden verrauschte Daten $\varphi_1^{g^h}$ aus ungestörten Werten durch Addition eines generierten, weißen Rauschens $\Delta\varphi_1^{\delta^h}$ erzeugt. Somit gilt für gestörte Eingangswerte

$$\varphi_1^{g^h} = \varphi_1^h + \Delta\varphi_1^{\delta^h}, \quad (6.61)$$

Initialisierung der Schubmodulverteilung $\mu_0^h \geq 1$
Initialisierung der Größen des L-BFGS-Algorithmus
Schleife über k solange bis $([g_{k-\delta}^h] - [g_k^h])/[g_{k-\delta}^h] \leq \text{TOLE}_g$
Ermittlung des verallgemeinerten Cauchy-Punkts μ_c
Bestimmung von $\Delta\mu_k^h$ mit Hilfe der Gleichungen (6.58) und (6.59)
Schleife über l solange bis die strenge Wolfe-Powell Regel erfüllt ist
Ermittlung von x^h , vgl. den Algorithmus aus Bild 6.2, mit der Schubmodulverteilung $\mu_{k+1,l}^h = \mu_k^h + s_{k,l} \Delta\mu_k^h$
Berechnung des Funktionswerts $[g_{k+1,l}^h]$ und des Gradienten $[D_{\mu^h} g_{k+1,l}^h]$ für die Gleichgewichtslage x^h
Update der Größen zur Berechnung der L-BFGS Matrix

Bild 6.4: Algorithmus zur Behandlung des inversen Problems der nicht-linearen Elastografie: Ermittlung der unbekannt Schubmodulverteilung μ^h

wobei der Datenfehler die Eigenschaft

$$\|\varphi_1^{g^h} - \varphi_1^h\|_{V_1} = \|u_1^{g^h} - u_1^h\|_{U_1} \leq \bar{\delta} \|u_1^h\|_{U_1} = \delta \quad (6.62)$$

besitzt, mit einem gewählten Signal-Rausch-Verhältnis $1/\bar{\delta}$. Die bei der Bestimmung der Axialkomponente der Deformation φ_1^h bzw. $\varphi_1^{g^h}$ verwendete Schubmodulverteilung μ_w^h wird im Folgenden als *gegebene* oder *wahre Schubmodulverteilung* bezeichnet, die es durch die Lösung des inversen Problems zu ermitteln gilt. Da im Rahmen der Simulationen und Messungen davon ausgegangen wird, dass die wahre Schubmodulverteilung μ_w^h unbekannt ist, wird als Anfangsschubmodulverteilung μ_0^h stets eine konstante Materialverteilung gewählt. Gleiches gilt für die fest gewählte Schubmodulverteilung μ^{*h} . Durch Bild 6.5 wird das Vorgehen zur Ausführung einer numerischen Simulation noch einmal zusammengefasst.

Für alle nachstehenden Beispiele wird ein ebener Verzerrungszustand vorausgesetzt und die Finite-Elemente-Diskretisierung mit Dreieckselementen durchgeführt, bei denen die elementweise Approximation der Verschiebungen u^h bzw. der Koordinaten der Momentankonfiguration x^h mit quadratischen Ansatzfunktionen N_I erfolgt, vgl. Bild 6.1. Eine Zusammenstellung der Ansatzfunktionen N_I ist Wriggers (2001, Kap. 4) zu entnehmen. Dahingegen werden der Druck p_e^h und die Volumendehnung Θ_e^h als elementweise konstant betrachtet, so dass $n_p = 1$ und $\bar{N}_1 = \bar{N} = 1$ gilt, siehe Gleichung (6.7) und (6.8). Auch die Schubmodulverteilung μ_e^h wird stets in jedem Element als konstant angenommen, so dass gemäß

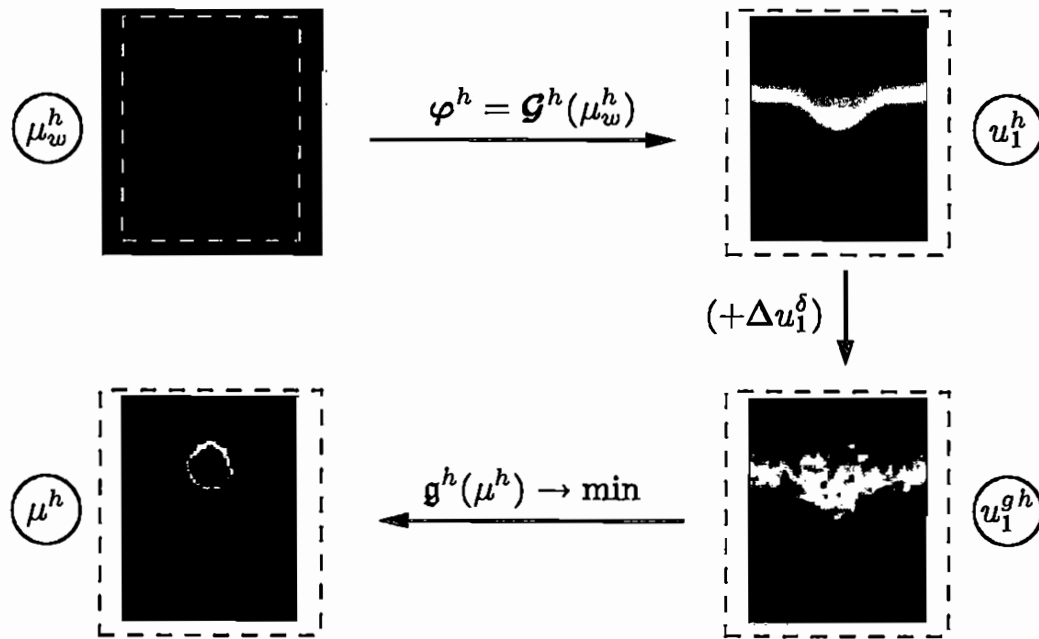


Bild 6.5: Vorgehensweise bei der Durchführung von numerischen Simulationen

Gleichung (6.33) $n_\mu = 1$ und $\hat{N}_1 = \hat{N} = 1$ folgt. Ferner wird für den Fall, dass das direkte Problem entsprechend Abschnitt 6.1 mit dem Augmented-Lagrange-Ansatz gelöst wird, die Funktion h zu $h(\Theta) = \Theta - 1$ gewählt, mit $h'(\Theta) = 1$ und $h''(\Theta) = 0$, vgl. Simo & Taylor (1991). Das so generierte Dreieckselement erfüllt in der linearisierten Elastizitätstheorie bei einer reinen Verschiebungs-Druck-Formulierung die in Abschnitt 6.1 erwähnte inf-sup-Bedingung, vgl. Bathe (2002, Kap. 4), so dass dieses Element auch für eine Anwendung bei endlichen Deformationen sinnvoll erscheint. Werden die zuvor beschriebenen Festlegungen zu den Approximationen herangezogen, lassen sich die Gleichungen (6.9), (6.11), (6.12) und (6.13) weiter vereinfachen. Bezeichnet V_0^e bzw. V^e das Volumen eines Elements \mathcal{B}^e in der Ausgangs- bzw. Momentankonfiguration, so gilt für die Volumendehnung Θ_e^h und deren Linearisierung $\Delta\Theta_e^h$

$$\Theta_e^h = \frac{V^e}{V_0^e} \quad \text{und} \quad \Delta\Theta_e^h = \frac{1}{V_0^e} \int_{\mathcal{B}_0^e} (J_e^h \mathbf{F}_e^{h-T} : \Delta\mathbf{F}_e^h) dV_e, \quad (6.63)$$

während für den Druck p_e^h und dessen Linearisierung Δp_e^h

$$p_e^h = U'_{0s}(\Theta_e^h) \quad \text{und} \quad \Delta p_e^h = U''_{0s}(\Theta_e^h) \Delta\Theta_e^h \quad (6.64)$$

folgt. Hieraus ergeben sich zunächst zwar keine Vereinfachungsmöglichkeiten für den Elementvektor der inneren Kräfte \mathbf{r} und den Anteil $\hat{\mathbf{k}}$ der Elementsteifigkeitsmatrix, jedoch kann der zu den Knoten I und J korrespondierende Teil der

Matrix $\bar{\mathbf{k}}$ aus Gleichung (6.20) zu

$$\bar{k}_{ij}^{IJ} = \frac{U_{0s}''(\Theta_e^h)}{V_e} \left(\int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_k} J_e^h F_e^{h-1} J_\square dV_\square \right) \left(\int_{B_\square} J_e^h F_e^{h-1} \frac{\partial N_J}{\partial X_l} J_\square dV_\square \right) \quad (6.65)$$

angegeben werden. Bei der Anwendung des Augmented-Lagrange-Verfahrens anstelle der Penalty-Methode ist in Gleichung (6.64) lediglich der Term $U_{0s}'(\Theta_e^h)$ durch $U_{0s}'(\Theta_e^h) + (\lambda_n^{\mathcal{L}})_e^h$ zu ersetzen.

Durch die Festlegung auf ein Dreieckselement mit konstanten Ansätzen für den Druck p , die Volumendehnung Θ und ggf. den Lagrangeschen Multiplikator $\lambda^{\mathcal{L}}$ ergeben sich auch einige Vereinfachungen für die in Abschnitt 6.2 angegebenen Größen. So folgt für die Gâteaux-Ableitungen $\Delta^{\mu^h} p_e^h$ und $\Delta^{\mu^h} \Theta_e^h$ aus den Gleichungen (6.40) und (6.41)

$$\Delta^{\mu^h} p_e^h = \frac{p_e^h}{\mu_e^h} \Delta \mu_e^h + U_{0s}''(\Theta_e^h) \Delta^\mu \Theta_e^h \quad (6.66)$$

und

$$\Delta^{\mu^h} \Theta_e^h = \frac{1}{V_0^e} \int_{B_0^e} J_e^h \mathbf{F}_e^{h-T} : \text{Grad}(\Delta^{\mu^h} \mathbf{x}_e^h) dV_e. \quad (6.67)$$

Fließen diese Gleichungen in die Berechnung der Matrix \mathbf{p} aus Gleichung (6.43) ein, so kann der zum Knoten I und dem konstanten Materialfreiheitsgrad μ_e^h des Elements \mathcal{B}^e korrespondierende Anteil dieser Matrix zu

$$p_i^I = \frac{p_e^h}{\mu_e^h} \int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_j} J_e^h F_e^{h-1} J_\square dV_\square + \frac{1}{\mu_e^h} \int_{B_\square} \frac{\partial N_I}{\partial X_j} (P_{\text{iso}})_e^h{}_{ij} J_\square dV_\square \quad (6.68)$$

berechnet werden.

Um die Implementierung der in den Bildern 6.2 und 6.4 dargestellten Algorithmen zu überprüfen, wird zunächst eine einfache Struktur mit der Breite $b = 5,0$ und der Höhe $h = 4,0$ betrachtet, die lediglich aus zwei Elementen \mathcal{B}^1 und \mathcal{B}^2 besteht, vgl. Bild 6.6. Für die Überprüfung des in Abschnitt 6.1 erläuterten direkten Problems wird die in Bild 6.6(a) angegebene Lagerung mit der Einwirkung $\bar{t} = 120,0$ betrachtet und eine konstante Schubmodulverteilung mit $\mu = 333,33$ angenommen. Für den Fall eines inkompressiblen Neo-Hooke-Materials kann mit den Gleichungen (2.85) und (2.86) für die Hauptdehnung λ_1 in \mathbf{X}_1 -Richtung die Bestimmungsgleichung

$$(\lambda_1)^4 - 0,36(\lambda_1)^3 - 1 = 0 \quad (6.69)$$

gefunden werden, die mit $\bar{\lambda}_1 \approx 1,104$ lediglich eine reelle, positive Nullstelle besitzt. Während die Komponente σ_{22} des Cauchyschen Spannungstensors gleich Null ist, ergeben sich die anderen Hauptspannungen mit der Dehnung $\bar{\lambda}_1$ zu

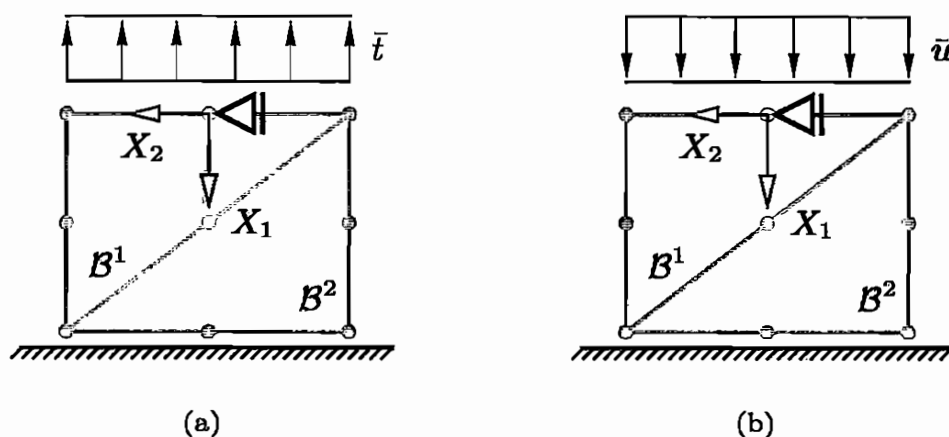


Bild 6.6: Einfache Beispiele zur Überprüfung der Implementierung: (a) direkte Aufgabe und (b) Berechnung des Funktionals g^h und des Gradienten $D_{\mu^h} g^h$

$\sigma_{11} \approx 132,447$ und $\sigma_{33} \approx 59,709$. Wird das Augmented-Lagrange-Verfahren verwendet und das Abbruchkriterium $TOL_{\Theta} = 10^{-8}$ sowie $f_K = K/\mu \approx 49,667$ gesetzt, so ergeben sich als Ergebnisse der numerischen Berechnung die analytischen Resultate. Aufgrund dieser Übereinstimmung und den plausiblen Ergebnissen, die in den folgenden, komplexeren Beispielen erzielt werden, wird im Weiteren davon ausgegangen, dass der Algorithmus aus Bild 6.2 fehlerfrei implementiert wurde.

Zur Kontrolle der Implementierung des Funktionals g^h bzw. des korrespondierenden Gradienten $D_{\mu^h} g^h$, die für die Lösung des inversen Problems benötigt werden, wird das in Bild 6.6(b) dargestellte Beispiel herangezogen. Die Struktur wird in diesem Fall durch eine Randverschiebung \bar{u}^h in X_1 -Richtung mit $\bar{u}^h = 0,4$ beansprucht. Der Schubmodul des Elements B^1 beträgt $\mu_1 = 2666,64$, der von Element B^2 wird zu $\mu_2 = 333,33$ gewählt. Durch Anwenden des Augmented-Lagrange-Verfahrens mit dem im vorangegangenen Beispiel angegebenen Wert für TOL_{Θ} und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,49$ ergeben sich die Koordinaten x_1^g der Momentankonfiguration, die nachfolgend als exakte Eingangsdaten für die Lösung des inversen Problems herangezogen werden. Zur Simulation einer Messsituation wird nun in einem zweiten Schritt angenommen, dass die wahre Schubmodulverteilung nicht bekannt ist, so dass die Schubmodulwerte μ_1 und μ_2 mit $\mu_1 = \mu_2 = 1,0$ initialisiert werden. Da unverrauschte Eingangsdaten x_1^g vorliegen, wird der Regularisierungsparameter $t = 0$ gesetzt.

Zunächst wird die stabile Ersatzaufgabe auf Grundlage des Funktionals g^h aus Gleichung (6.32) betrachtet und hier der erste Iterationsschritt des Minimierungsproblems (6.30) analysiert. Werden die Koordinaten x_1 der verformten La-

ge mit Hilfe der Penalty-Methode und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,49$ bestimmt, liefert die Implementierung auf der Basis einer numerischen Gauß-Integration den Funktionswert $g^{h,0} \approx 0,0670485$. Anschließend werden die Funktionen $x_1^g = x_1^g(\xi)$ und $x_1 = x_1(\xi)$ bzw. die entsprechenden Knotenverschiebungen aufgegriffen und mit Hilfe der Software MATHEMATICA eine analytische Vergleichsrechnung durchgeführt. Der sich dabei ergebende Unterschied zwischen numerisch und analytisch ermitteltem Funktionswert $g^{h,0}$ ist kleiner als 10^{-7} , so dass im Folgenden davon ausgegangen wird, dass der Funktionswert g^h im Allgemeinen durch die Implementierung richtig bestimmt wird. Die Überprüfung der Gradientenberechnung erfolgt durch Ermittlung der Sekantensteigung. Zu diesem Zweck werden durch Finite-Elemente-Analysen die Funktionswerte $g^{h,1}$ bzw. $g^{h,2}$ für die Schubmodule $\mu_1 + \Delta\mu$ und μ_2 bzw. μ_1 und $\mu_2 + \Delta\mu$ bestimmt, mit $\Delta\mu = 10^{-5}$. Mit diesen Werten lässt sich die i -te Komponente des Gradienten $D_{\mu^h} g^h$ durch $(g^{h,i} - g^{h,0})/\Delta\mu$ approximieren. Die sich hierbei einstellenden Abweichungen zwischen Sekantensteigungen und den Einträgen des Gradienten $D_{\mu^h} g^h$ sind kleiner als 0,01 %, so dass auch hier angenommen wird, dass die numerische Gradientenermittlung fehlerfrei umgesetzt ist.

Wird das inverse Problem auf Grundlage des Augmented-Lagrange-Verfahren mit einer Querkontraktionszahl $\nu = 0,49$ und $TOL_{\Theta} = 10^{-8}$ gelöst und somit die Koordinaten x_1 mit Hilfe des Uzawa-Algorithmus aus Bild 6.2 bestimmt, ergibt sich für das Funktional ebenfalls $g^{h,0} \approx 0,0670485$. Hingegen weichen die Komponenten des numerisch bestimmten Gradienten $D_{\mu^h} g^h$ von den korrespondierenden Sekantensteigungen mit 0,6 % sehr viel deutlicher voneinander ab als bei der Penalty-Methode. Diese Beobachtung ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass bei der Ermittlung des Gradienten gemäß Gleichung (6.51) der über den Lagrangeschen Multiplikator λ^c eingebrachte Anteil des Drucks durch die Richtungsableitung eliminiert wird. Somit wird bei der Bestimmung des Gradienten $D_{\mu^h} g^h$ der Druck nur näherungsweise erfasst, wobei die Güte der Approximation von der Querkontraktionszahl ν bestimmt wird. Je näher diese an den Wert $\nu = 0,5$ heranreicht, um so besser wird der Gradient angenähert, jedoch steigt die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix $[k]$ für diesen Fall stark an. Somit muss ein geeigneter Mittelweg für die Wahl der Querkontraktionszahl gefunden werden, der diesem Dualismus Rechnung trägt. Im Rahmen dieser Arbeit zeigte sich, dass für einen Wertebereich von $\nu = 0,45 - 0,49$ sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Die Überprüfung der Implementierung des Funktionals g_e^h und des korrespondierenden Gradienten $D_{\mu^h} g_e^h$, mit deren Hilfe ebenfalls eine stabile Ersatzaufgabe für das inverse Problem definiert werden kann, erfolgt zunächst mit Hilfe der zuvor ermittelten Resultate. Da unverrauschte Eingangsdaten verwendet werden und somit der Rauschpegel $\delta = 0$ ist, muss $g_e^h = 2g^h$ und $D_{\mu^h} g_e^h = 2D_{\mu^h} g^h$ gelten, was sich auch bei einer entsprechenden Überprüfung sowohl für die Penalty-Methode als auch das Augmented-Lagrange-Verfahren einstellt. Um die Berechnung des Funktionals g_e^h und dessen Gradienten weitergehend zu prüfen, wird in einem nächsten Schritt angenommen, dass der Datenfehler den Wert $\delta = 0,001$ besitzt. In diesem Fall wird der Funktionswert $g^{h,0}$ mit Hilfe der Im-

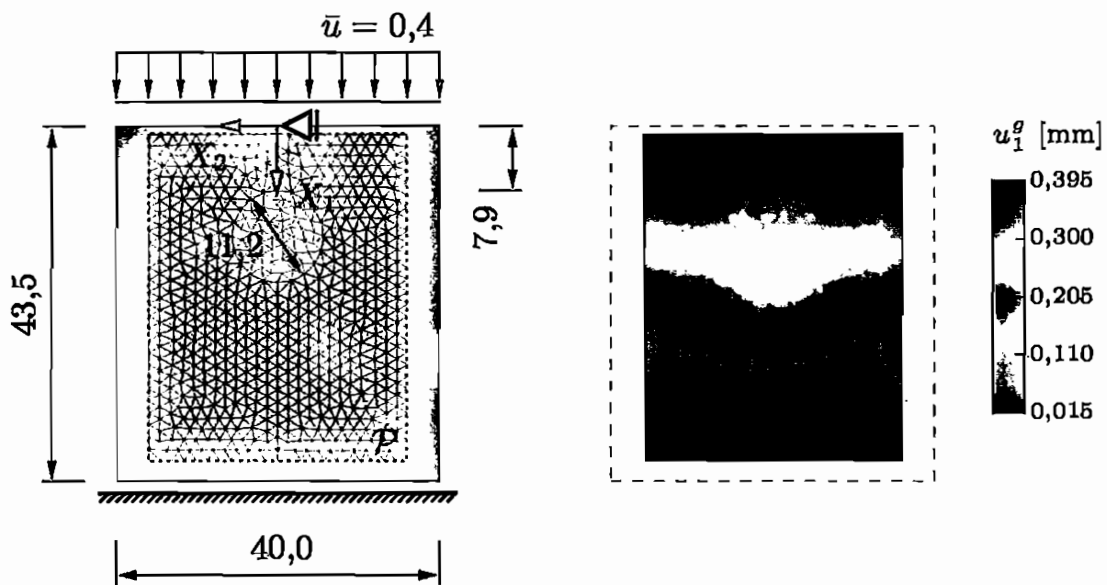


Bild 6.7: Beispielstruktur mit einem harten Einschluss: geometrische Abmessungen und generiertes, axiales Verschiebungsfeld mit einem Rauschanteil von $\bar{\delta} = 0,01$

plementierung zu $g^{h,0} \approx 0,1333657$ bestimmt, wobei die Abweichung zur analytischen Berechnung des Funktionals kleiner als 10^{-7} ausfällt, was einer sehr guten Übereinstimmung entspricht. Die Abweichung der Komponenten des Gradienten von den Sekantensteigungen lässt sich für das Penalty-Verfahren zu 0,13% angeben, wodurch der Fehler ebenfalls in einem annehmbaren Bereich liegt.

Nachdem die Funktionale und Gradienten, die zur Definition der stabilen Ersatzaufgaben benötigt werden, quantitativ überprüft worden sind, werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts komplexere Strukturen betrachtet, wobei in diesen Beispielen ausschließlich das Augmented-Lagrange-Verfahren angewendet wird. Falls dabei keine abweichenden Angaben vorgenommen werden, werden diese Simulationen mit den Parametern $TOL_{\Theta} = 10^{-8}$ und $TOL_g = 2 \cdot 10^{-2}$, siehe Bild 6.4, der Anfangsschubmodulverteilung $\mu_0^h = 1$ und der fest gewählten Schubmodulverteilung $\mu^{*h} = 0$ durchgeführt. Darüber hinaus wird angenommen, dass für den jeweils betrachteten Querschnitt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X_3 = 0$ gelte. Weiterhin wird unter Hinweis auf Abschnitt 4.3 in den folgenden Berechnungen nicht davon ausgegangen, dass die Beschreibung der Deformation der Strukturen durch einen zeitlich veränderlichen Betrachter Σ^* erfolgt, wie es bei der Auswertung der Elastografiemessungen üblich ist. Vielmehr werden die Verschiebungen $u_1^{g,h}$ bzw. die axiale Verformung $\varphi_1^{g,h}$ in Abhängigkeit von dem festen Beobachter Σ angegeben, der durch die Koordinaten X_i ($i = 1, 2, 3$) eindeutig bestimmt ist.

Zunächst wird die in Bild 6.7 dargestellte Struktur \mathcal{B} betrachtet, die hinsichtlich der äußeren Abmessungen und der Einschlussgeometrie dem Probenkörper des Benchmark-Tests aus Abschnitt 5.1.3 entspricht. Das Bild zeigt den Querschnitt eines quaderförmigen Körpers, mit einem harten, zylinderförmigen Einschluss, wobei das Verhältnis der Schubmoduln $\mu_{w,inc}^h / \mu_{w,mat}^h = 4/1$ beträgt und angenommen wird, dass beide Materialien nahezu inkompressibel sind und sich durch ein Neo-Hooke-Materialmodell beschreiben lassen. Jedoch wird im Gegensatz zum Benchmark-Test an dieser Stelle keine dreidimensionale Simulation zur Ermittlung der Deformation $\varphi_1^{g,h}$ durchgeführt, sondern lediglich eine Abschätzung des Verschiebungsfelds des Teilkörpers \mathcal{P} vorgenommen, der seinerseits eine Höhe von $h = 40$ mm bzw. eine Breite von $b = 32$ mm besitzt und $a_o = 1$ mm unterhalb der Oberfläche liegt. Da sich dieses Beispiel an einer HF-Ultraschallelastografie-Messung orientieren soll, werden zunächst nur relativ kleine Randverschiebungen \bar{u}^h mit $\bar{u}^h/h = 1\%$ auf den Körper \mathcal{B} aufgebracht. Unter der Annahme, dass die Struktur \mathcal{B} homogen ist, ergibt sich mit einer Randverschiebung von $\bar{u}^h = 0,4$ mm für den oberen Rand des Teilkörpers \mathcal{P} eine Axialverschiebung von $\bar{u}_o^h \approx 0,39$ mm und auf der unteren Berandung von $\bar{u}_u^h \approx 0,02$ mm. Mit diesen Werten wird zunächst unter Verwendung des Modells aus Bild 4.15 das Verschiebungsfeld $u_1^{g,h}$ bzw. die axiale Deformation $\varphi_1^{g,h}$ bestimmt. Die auf diese Weise berechneten Axialverformungen $\varphi_1^{g,h}$ werden dann ihrerseits als Eingangsdaten für das inverse Problem verwendet. Durch dieses Vorgehen wird erreicht, dass in diesem Beispiel Einflüsse, die durch eine vereinfachte Betrachtung der Randbedingungen entstehen, vgl. Abschnitt 4.3 und insbesondere Bild 4.15, zunächst unterdrückt werden. Die für die Berechnung der Deformation $\varphi_1^{g,h}$ verwendete Finite-Elemente-Diskretisierung ist in Bild 6.7 dargestellt und wird auch für die Bestimmung der Schubmodulverteilung μ^h verwendet, so dass eine Betrachtung von Netzabhängigkeiten bei der Lösung dieses Beispiels entfallen kann.

Die im Folgenden verwendeten Verformungen $\varphi_1^{g,h}$ werden entsprechend Gleichung (6.61) für unterschiedliche Rauschpegel $\bar{\delta}$ erzeugt, um die Abhängigkeit der Ergebnisqualität von der Güte der Eingangsdaten zu demonstrieren. Neben dem Rauschanteil $\bar{\delta} = 0,01$, der in Bild 6.7 durch das generierte Verschiebungsfeld dargestellt wird, werden zusätzlich noch die Werte $\bar{\delta} = 0,003$, $\bar{\delta} = 0,03$ und $\bar{\delta} = 0,05$ betrachtet. Die Wahl des Regularisierungsparameters t erfolgt mit Hilfe des Morozovschen Diskrepanzprinzips, wobei die Umsetzung dieses Prinzips gemäß Gleichung (3.20) mit einem Korrekturfaktor von $\tau = 1$ erfolgt. Demnach wird der Parameter t_{k^*} gewählt, der die Bedingung

$$\|\mathcal{G}(\mu_{t_{k^*}}^h) - \varphi_1^{g,h}\|_{V^h} \leq \delta < \|\mathcal{G}(\mu_{t_i}^h) - \varphi_1^{g,h}\|_{V^h}, \quad i = 0, 1, \dots, k^* - 1, \quad (6.70)$$

erfüllt, mit der streng monoton fallenden Nullfolge t_i der Regularisierungsparameter. Werden durch \bar{t}_i und \tilde{t}_i mit $\bar{t}_i = 0,5/10^i$ und $\tilde{t}_i = 0,1/10^i$ zwei Nullfolgen eingeführt, so kann die im Weiteren verwendete Folge der t_i durch

$$t_{2i} = \bar{t}_i \quad \text{und} \quad t_{2i+1} = \tilde{t}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.71)$$

genauer spezifiziert werden.

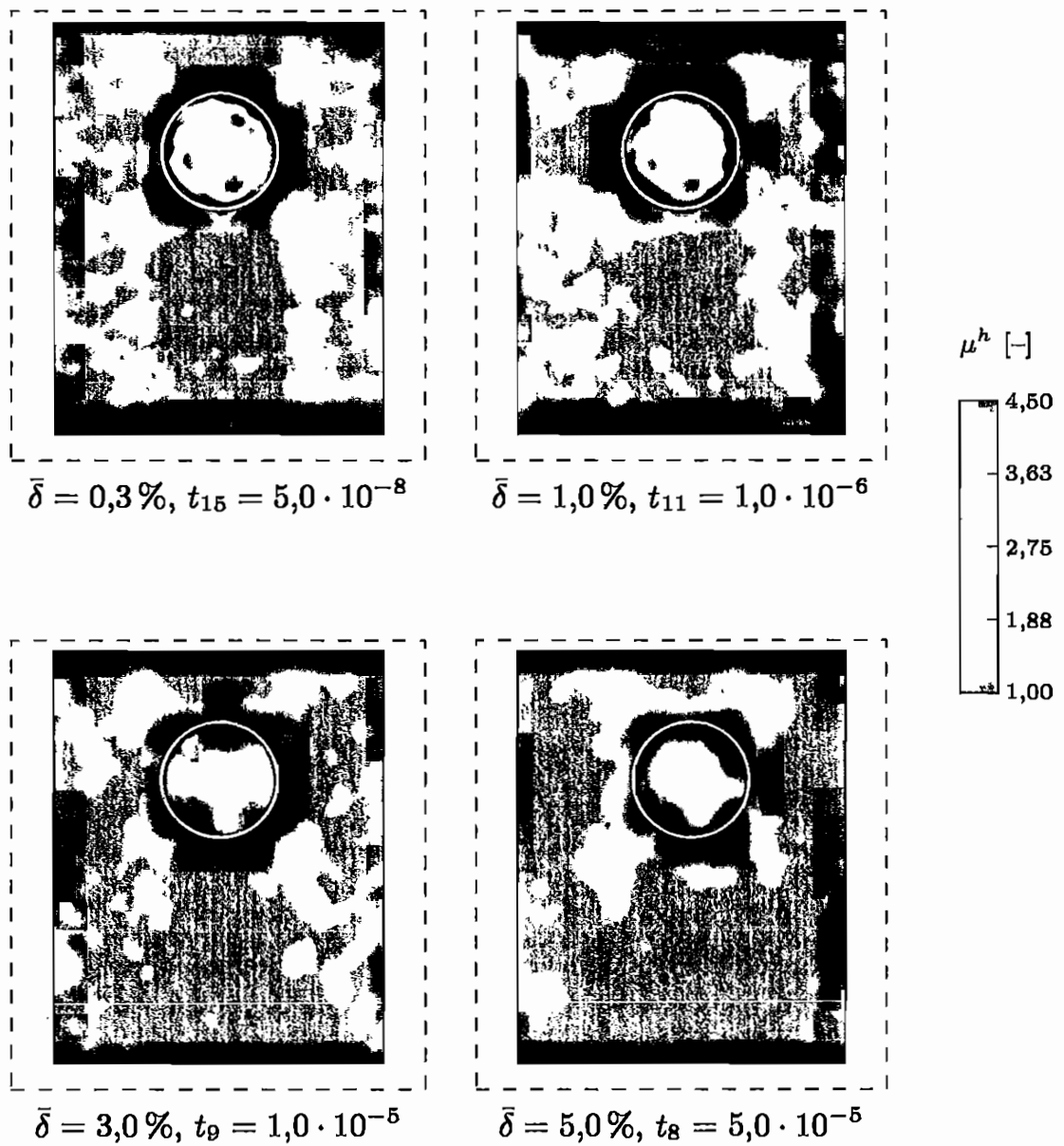


Bild 6.8: Beispielstruktur mit einem harten Einschluss: ermittelte, relative Schubmodulverteilung μ^h für verschiedene Rauschpegel δ

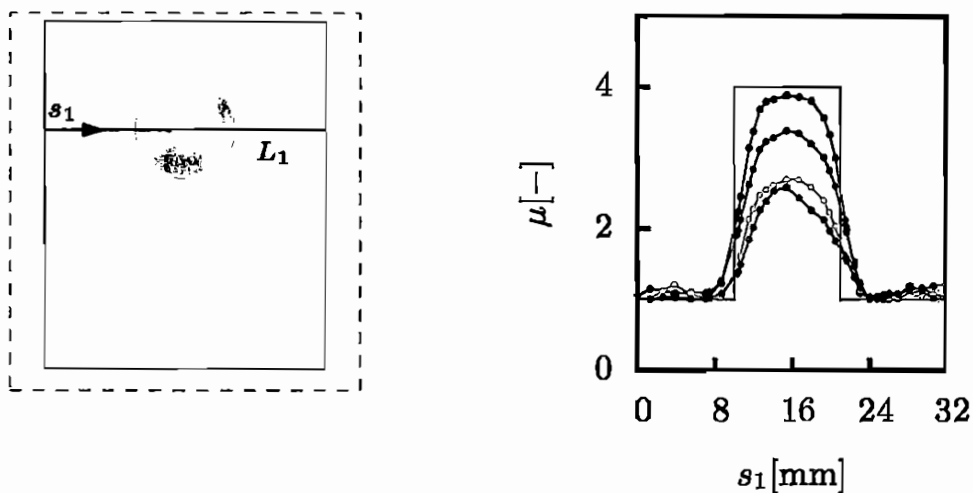


Bild 6.9: Relativer, ermittelter Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_1 :
 exaktes Verhältnis (—), $\delta = 0,3\%$ (—●—), $\delta = 1,0\%$ (—○—), $\delta = 3,0\%$ (—⊙—) und $\delta = 5,0\%$ (—●—)

Die in Abhängigkeit des Rauschpegels $\bar{\delta}$ ermittelte, relative Schubmodulverteilung μ^h wird in Bild 6.8 dargestellt. Zusätzlich ist in der Abbildung jeweils der Regularisierungsparameter $t_{k^*} = t_{k^*}(\bar{\delta})$ angegeben, der die Bedingung (6.70) erfüllt. Wie die Diagramme verdeutlichen, wird die Position des Einschlusses, die in Bild 6.8 durch je einen weißen Kreis gekennzeichnet wird, mit dem Algorithmus aus Bild 6.4 für jeden der hier betrachteten Rauschpegel $\bar{\delta}$ exakt ermittelt, auch wenn dessen Außenkontur für den Fehler $\bar{\delta} = 5\%$ nicht mehr rekonstruiert werden kann. Darüber hinaus wird deutlich, dass mit zunehmendem Rauschpegel das Schubmodulverhältnis von Einschluss und Materialmatrix immer schlechter wiedergegeben werden kann, was auf die glättende Wirkung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung zurückzuführen ist. Der Dämpfungseffekt der Regularisierung nimmt mit steigendem Datenfehler zu, da in diesem Fall aufgrund der Parameterwahl mit dem Morozovschen Diskrepanzprinzip der Regularisierungsparameter t_{k^*} anwächst. Die Abnahme des rekonstruierten Schubmodulverhältnisses wird durch das Liniendiagramm aus Bild 6.9 noch einmal unterstrichen, welches die Schubmodulwerte μ^h entlang des horizontal durch den Einschlussmittelpunkt verlaufenden Pfades L_1 wiedergibt. Insbesondere diese Darstellung verdeutlicht, dass in diesem Beispiel lediglich bei einem Rauschpegel von $\bar{\delta} = 0,3\%$ bzw. $\bar{\delta} = 1,0\%$ von einer quantitativen Rekonstruktion der Schubmodulverteilung gesprochen werden kann.

In einem nächsten Schritt soll die Abhängigkeit der Lösung vom Startwert μ_0^h und der festen Schubmodulverteilung μ^{*h} untersucht werden. Zu diesem Zweck wird die Materialverteilung μ^h für den Rauschpegel $\bar{\delta} = 0,01$ in zwei weiteren Simulationen mit den Anfangswerten $\mu_0^h = 3,0$ und $\mu_0^h = 5,0$ bestimmt,

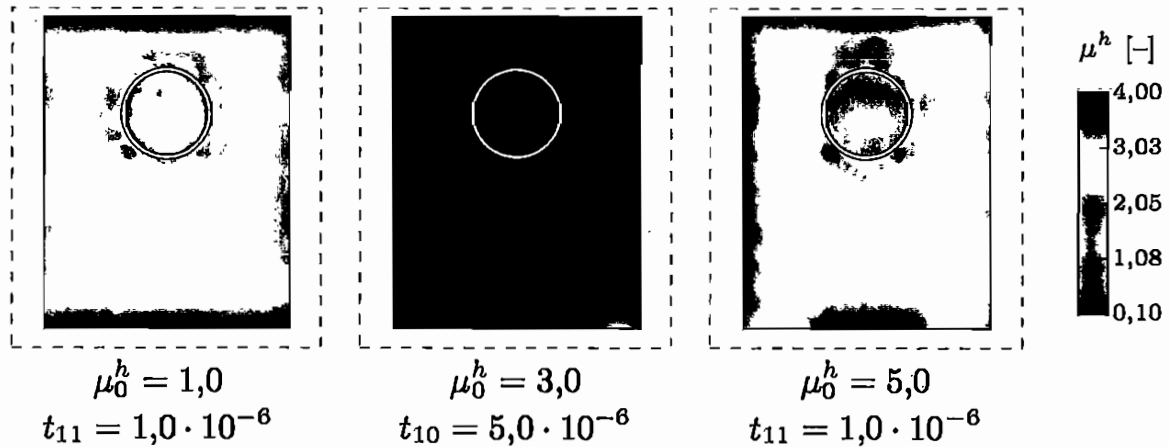


Bild 6.10: Vergleich von skalierten Schubmodulverteilungen μ^h für verschiedene Materialverteilungen μ_0^h und μ^{*h}

während die untere Schranke für die Schubmodulverteilung mit $\mu^h \geq 1$ beibehalten wird, vgl. den Algorithmus aus Bild 6.4. Da bei einer solchen Konstellation die Tikhonov-Phillips-Regularisierung, die bei der Wahl der Schubmodulverteilung $\mu^{*h} = 0$ normkleine Lösungen bevorzugt, die Verteilung auf den unteren Grenzwert herunter drückt, und sich demnach die gleichen Ergebnisse wie bei einem Startwert von $\mu_0^h = 1,0$ einstellen, wird zusätzlich die fest gewählte Schubmodulverteilung $\mu^{*h} = \mu_0^h$ gesetzt. Durch dieses Vorgehen werden die Materialwerte durch den Regularisierungsterm stärker bestraft, die von der Verteilung μ^{*h} abweichen.

Die mit den veränderten Randbedingungen für den Schubmodul erhaltenen Materialverteilungen werden in den Konturdiagrammen in Bild 6.10 dargestellt. Um einen direkten Vergleich zwischen den Ergebnisverteilungen zu ermöglichen, wurden die ermittelten Ergebnisse μ^h mit Hilfe eines Faktors skaliert, der dem Mittelwert der Schubmodulwerte der Materialmatrix entspricht. Wie das Bild 6.10 verdeutlicht, wird das Schubmodulverhältnis für die geänderten Startwerte $\mu_0^h = 3,0$ und $\mu_0^h = 5,0$ deutlich schlechter wiedergegeben als für den Fall $\mu_0^h = 1,0$. Dieser Effekt ist auf eine Art Streifenbildung in der rekonstruierten Schubmodulverteilung zurückzuführen, bei der Bereiche ober- und unterhalb des Einschlusses weicher erscheinen als Gebiete neben dem Einschluss, vgl. Bild 6.10. Dieser Sachverhalt lässt sich durch das Liniendiagramm in Bild 6.11 verdeutlichen, das die neuerlich skalierte Schubmodulverteilungen entlang des vertikalen Pfades L_2 vergleichend gegenüberstellt. Es ist zu erkennen, dass der Algorithmus aus Bild 6.4 das Verhältnis der Schubmoduln in axialer Richtung sehr viel besser abbilden kann als in lateraler Richtung. Die Ursache für dieses richtungsabhängige Verhalten liegt in der Definition des Operators \mathcal{G}^h , vgl. Abschnitt 5.2.2, und der hier betrachteten Einwirkung \bar{u}^h , die im Wesentlichen

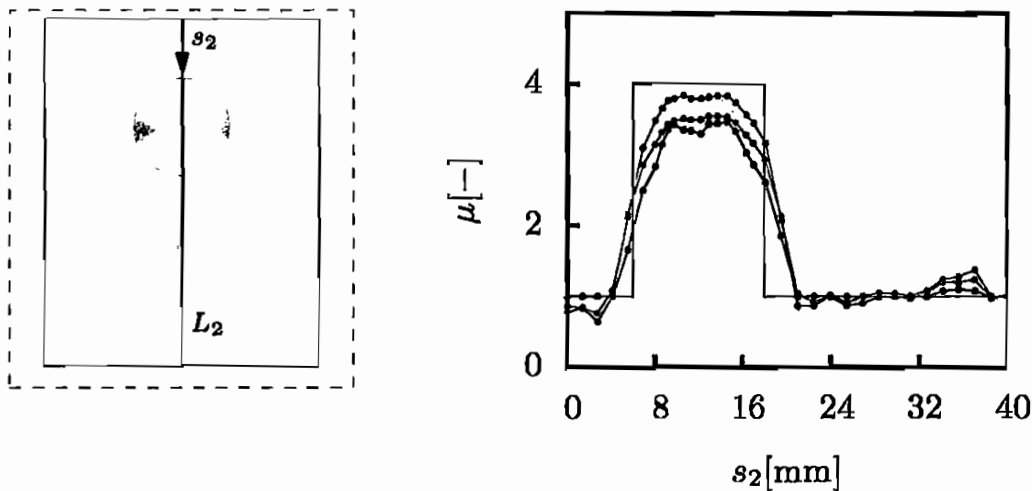


Bild 6.11: Relativer, ermittelter Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_2 :
 exaktes Verhältnis (—), $\mu_0^h = 1,0$ (—●—), $\mu_0^h = 3,0$ (—○—) und
 $\mu_0^h = 5,0$ (—△—)

eine axiale Verformung der Punkte hervorruft. Da aufgrund der Operatorengleichung $\mathcal{G}^h(\mu^h) = \varphi_1^h$, vgl. Gleichung (5.75), lediglich die Axialkomponente der Deformation φ_1^h im Minimierungsalgorithmus berücksichtigt wird, kann der betrachtete Querschnitt gedanklich in drei vertikale Bereiche eingeteilt werden. Im mittleren Segment erzwingt der Einschluss entgegen der Wirkung der Regularisierung eine Veränderung der Schubmodulverteilung μ_0^h hin zur Verteilung μ^h , wodurch das Schubmodulverhältnis der wahren Materialverteilung μ_w^h in diesem Teilbereich sehr gut wiedergegeben werden kann. In den beiden Randstreifen wiederum kann die gegebene Axialdeformation φ_1^h durch eine konstante Materialverteilung abgebildet werden, so dass die Schubmodulwerte in diesem Bereich auf dem Anfangswert μ_0^h verharren, da jede andere konstante Materialverteilung μ^h durch den Regularisierungsterm des Funktionals g^h stärker bestraft wird.

Aus dieser Beobachtung lässt sich für die Ermittlung von harten Einschlüssen in einem weicheren Umgebungsmaterial die Strategie ableiten, dass der Startwert μ_0^h mit $\mu_0^h = 1$ auf den unteren Grenzwert des Definitionsbereichs $D^h(\mathcal{G}^h)$ zu setzen ist und die Materialwerte μ^{*h} des Regularisierungsterms zu $\mu^{*h} \leq \mu_0^h$ gewählt werden. Hierdurch wird erzwungen, dass Materialbereiche ohne Verhärtungen unverändert bleiben, während sich die anderen Bereiche, die Einschlüsse enthalten, in Abhängigkeit des Datenfehlers $\bar{\delta}$ und des Regularisierungsparameters t an die wahre Schubmodulverteilung anpassen. Da die zuvor beschriebene Wahl von μ_0^h und μ^{*h} einer Form der Regularisierung entspricht, die ausgewählte Verteilungen bevorzugt, ist im Allgemeinen nicht zu erwarten, dass eine beliebige Materialverteilung mit dem Algorithmus aus Bild 6.4 ermittelt werden kann. Jedoch ist sowohl für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Elastografie-

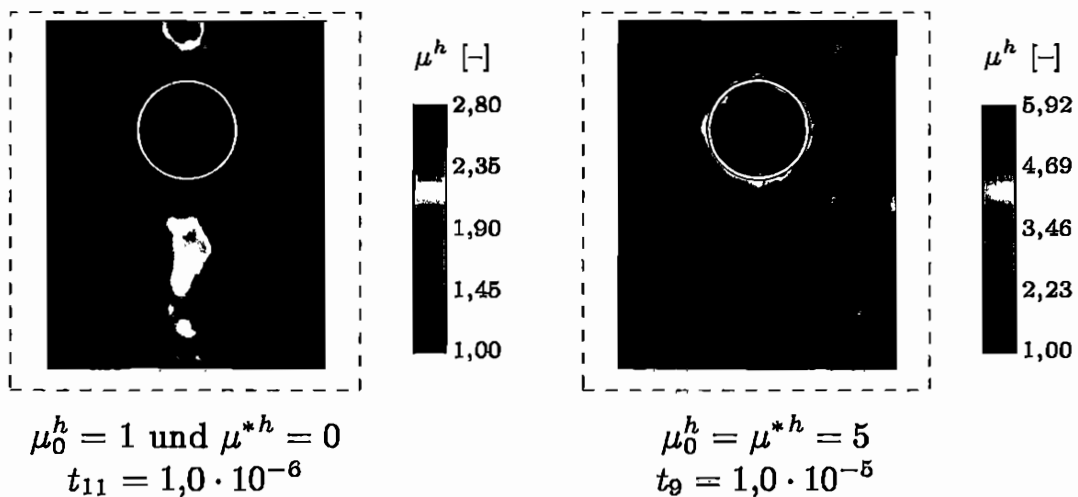


Bild 6.12: Beispielstruktur mit einem weichen Einschluss: ermittelte, relative Schubmodulverteilung μ^h für einen Rauschpegel $\delta = 0,01$ und unterschiedliche Materialverteilungen μ^h und μ^{*h}

versuche als auch für die in Kapitel 1 beschriebenen medizinische Anwendung, bei der lokal begrenzte, harte Einschlüsse in einer überwiegend homogenen Materialmatrix liegen, mit guten Ergebnissen zu rechnen.

Beispiele, bei denen die erläuterte Regularisierungsstrategie nicht zielführend ist, stellen die ebenfalls in dieser Arbeit untersuchten weichen Einschlüsse in einer verhärteten Umgebung dar. Wird erneut die Struktur \mathcal{B} aus Bild 6.8 betrachtet, jedoch in diesem Fall angenommen, dass das Schubmodulverhältnis $\mu_{w,inc}^h / \mu_{w,mat}^h = 1/3$ beträgt, so kann zunächst durch Lösen der direkten Aufgabe die Deformation $\varphi_1^{g,h}$ für die geänderte Verteilung μ_w^h ermittelt werden, wobei in dem hier betrachteten Beispiel ein Rauschpegel von $\bar{\delta} = 0,01$ angenommen wird. Die so generierten Eingangsdaten $\varphi_1^{g,h}$ erlauben anschließend auf der Grundlage des Morozovschen Diskrepanzprinzips die Ermittlung der Materialverteilung μ^h , die in Form von Konturdiagrammen in Bild 6.12 visualisiert wird. Während die im linken Bildteil dargestellte Rekonstruktion mit dem Wertepaar $\mu_0^h = 1$ und $\mu^{*h} = 0$ ermittelt wurde, wurde das Ergebnis auf der rechten Abbildungsseite mit den Verteilungen $\mu_0^h = \mu^{*h} = 5$ erzielt.

Das Resultat verdeutlicht, dass für die Verteilungen $\mu_0^h = 1$ und $\mu^{*h} = 0$ mit keinem sinnvollen Rekonstruktionsergebnis zu rechnen ist. Der Einschluss ist zwar schwach zu erkennen, jedoch weist die umgebende Materialmatrix der Lösung μ^h ebenfalls weiche Bereiche auf, die in der wahren Verteilung μ_w^h nicht existieren. Deutlich zu erkennen ist darüber hinaus die zuvor beschriebene Streifenbildung, die sich durch ein Anpassen des Schubmodulverhältnisses ober-, inner- und unterhalb des Einschlusses auszeichnet, während die Strukturberei-

che neben diesem Streifen in der Nähe des Anfangswerts μ_0 verharren. Deutlich besser ist das Resultat für die Werte $\mu_0^h = \mu^{*h} = 5$, da hier der weiche Zylinder klar zu erkennen ist. Allerdings wirft die berechnete, stark verrauschte Materialverteilung μ^h auch im Hinblick auf die Auswertung der Elastografieversuche die Frage auf, wie in einem solchen Fall sinnvoll das rekonstruierte Schubmodulverhältnis mit der tatsächlich vorhandenen Relation von $\mu_{w,inc}^h / \mu_{w,mat}^h = 1/3$ verglichen werden kann, da eine einfache Gegenüberstellung von Maximal- und Minimalwerten beim Auftreten einzelner Ausreißer dem Ergebnis nicht gerecht wird. Eine quantitative Kontrolle des Schubmodulverhältnisses erfolgt daher im Rahmen dieser Arbeit durch eine einfache Mittelwertbildung der einzelnen Materialwerte μ_e^h der Elemente, jeweils für den Einschluss und das umgebende Material getrennt. Da in diesem Beispiel für das direkte und das inverse Problem die gleiche Finite-Elemente-Vernetzung gewählt wurde, kann das ermittelte Schubmodulverhältnis für dieses Beispiel zu $\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h = 1/1,7$ angegeben werden. Zum Vergleich stellen sich bei der Rekonstruktion des harten Einschlusses für die Rauschpegel von 0,3% bis 5,0% Schubmodulverhältnisse von $\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h = 3,0, 2,6, 2,1$ und $1,8$ ein, so dass sich hieraus die Annahme ableiten lässt, dass sich der Quotient für den Fall harter Einschlüsse durch den Algorithmus aus Bild 6.4 besser wiedergeben lässt. Eine exakte Ermittlung des wahren Schubmodulverhältnisses ist im Übrigen bei komplexeren Strukturen selbst bei unverrauschten Eingangsdaten φ_1 im Allgemeinen nicht möglich. So ergibt sich für das in Bild 6.7 gezeigte Beispiel bei exakten Eingangswerten lediglich ein Verhältnis von $\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h = 3,5$, was einer Abweichung von 12,5% entspricht.

Abschließend wird anhand der Struktur \mathcal{B} aus Bild 6.7 der Einfluss der Tikhonov-Phillips-Regularisierung auf die Lösung μ^h untersucht und das Morozovsche Diskrepanzprinzip überprüft. Vor diesem Hintergrund wird erneut das Beispiel des harten Einschlusses in einer weicheren Matrix aufgegriffen und in Bild 6.13 die Abhängigkeit des Abstands der Lösung μ^h von der wahren Schubmodulverteilung μ_w^h für einen Rauschpegel von $\bar{\delta} = 3,0\%$ visualisiert. Neben dem Diagramm werden die berechneten Schubmodulverteilungen μ^h dargestellt, die sich für den kleinsten und den größten hier betrachteten Parameter t einstellen. Darüber hinaus ist das Resultat μ^h für den mit dem Morozovschen Diskrepanzprinzip ermittelten Wert t_9 in der Abbildung enthalten, wobei für die Konturdiagramme die Farbskalierung des Bildes 6.8 gewählt wurde. Erwartungsgemäß sind die Lösungen μ^h für zu groß gewählte Regularisierungsparameter stark geglättet, während bei zu kleinen Werten für den Parameter t ausgeprägt oszillierende Resultate auftreten, was jeweils zu einem wachsenden Abstand zwischen tatsächlich vorhandener und berechneter Materialverteilung führt. Die mit dem Diskrepanzprinzip ermittelte Verteilung μ^h stellt somit einen Kompromiss zwischen diesen beiden Extremen dar, jedoch führt es bei diesem Beispiel zu einer leichten Überregularisierung, da $t_{k^*} = t_9 \geq t_{opt} = t_{11}$ gilt. Da aber der Unterschied in den Abständen $\|\mu^h - \mu_w^h\|_M$ für die beiden Parameter t_{k^*} und t_{opt} mit 3,0% bezogen auf den optimalen Wert sehr klein ist, wird in dieser wie auch in allen folgenden Simulationen und Messungen auf das Diskrepanzprinzip mit dem Wert $\tau = 1$ als

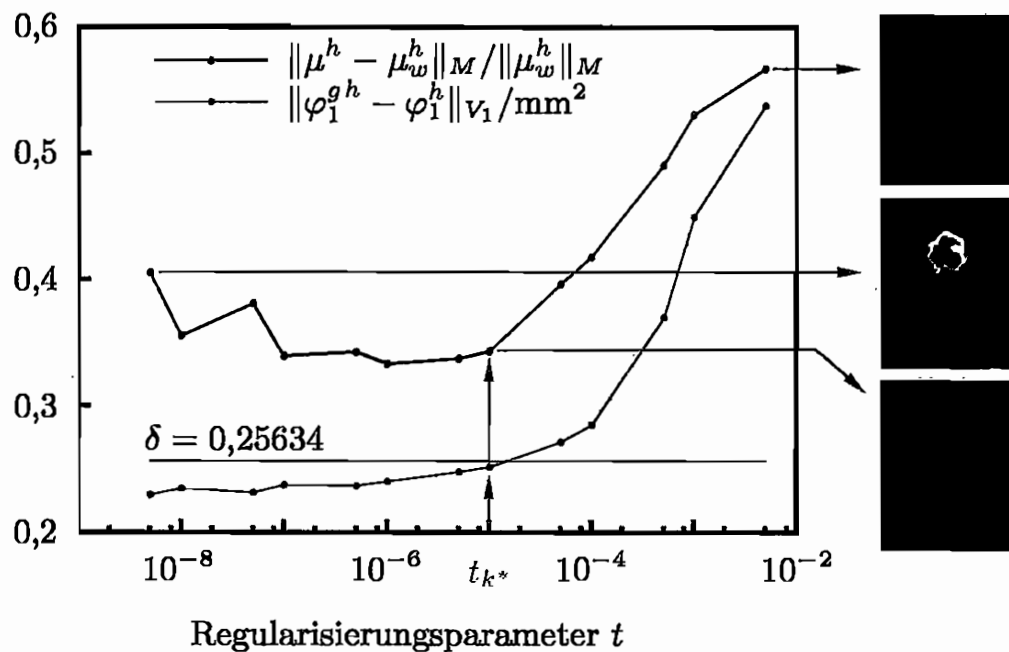


Bild 6.13: Einfluss der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und des Morozovschen Diskrepanzprinzips auf die Lösung μ^h

Parameterwahlkriterium zurückgegriffen. Neben diesen Erkenntnissen wird bei einem Vergleich der Bilder 3.2 und 6.13 deutlich, dass, abgesehen von numerischen Störungen, die Zusammensetzung des Rekonstruktionsfehlers qualitativ dem theoretisch erwarteten Verhalten entspricht.

Während die bisher durchgeführten Simulationen in erster Linie der Vorbereitung der Auswertung von Ultraschallmessergebnissen dienten, wird das nächste Beispiel, dargestellt in Bild 6.14, dazu verwendet, die Eignung des Rekonstruktionsalgorithmus zur Ermittlung der Materialverteilung beim Auftreten großer äußerer Verformungen nachzuweisen. Neben der zehnmal größeren Randverschiebung von $\bar{u}^h = 4,0$ mm unterscheidet sich dieses Modell wesentlich in der Art und der Anzahl der harten Einschlüsse. Die kleine Inhomogenität weist ein Schubmodulverhältnis von $\mu_{w,k,inc}^h / \mu_{w,k,mat}^h = 3/1$ gegenüber dem umgebenden Material auf, während der Quotient des nichtkonvexen, großen Einschlusses den Wert $\mu_{w,g,inc}^h / \mu_{w,g,mat}^h = 5/1$ besitzt. Alle Materialien sind, wie auch in den bisher betrachteten Beispielen, nahezu inkompressibel und lassen sich durch ein Neo-Hooke-Materialgesetz beschreiben.

Darüber hinaus wird dieses Beispiel dazu verwendet, die Netzabhängigkeit der Lösung μ^h , auf die bereits in Abschnitt 5.1.3 eingegangen wurde, näher zu untersuchen. Daher bietet es sich in dieser Simulation an, die zu erzeugenden Eingangsdaten φ_1^{gh} so zu generieren, dass das Finite-Elemente-Netz des direkten und des inversen Problems nicht identisch sind, wodurch sich dieses Modell stärker an dem Benchmark-Test aus Abschnitt 5.1.3 orientiert. Somit wird

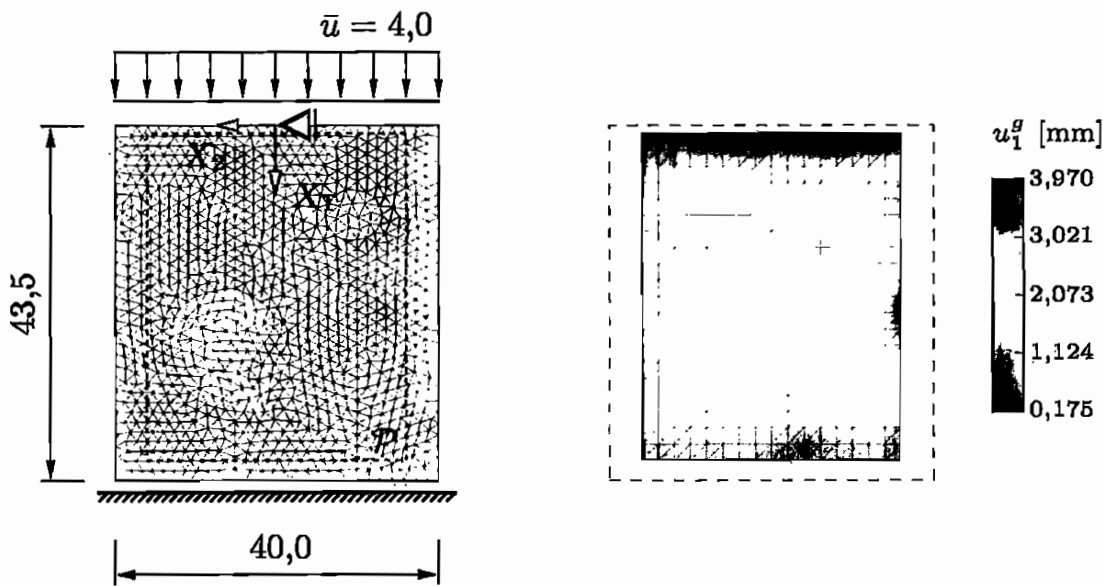


Bild 6.14: Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: geometrische Abmessungen und generiertes, axiales Verschiebungsfeld mit einem Rauschanteil von $\bar{\delta} = 0,01$

zunächst die axiale Komponente der Deformation φ_1^h für die gesamte Struktur \mathcal{B} unter Verwendung des im linken Teil der Abbildung dargestellten, feinen, unregelmäßigen Netzes ermittelt. Anschließend werden in einem iterativen Prozess die Knotenwerte \boldsymbol{x}^J der Momentankonfiguration des regelmäßigen Netzes ermittelt, welches für das inverse Problem verwendet wird. In Anlehnung an die Versuche wird dabei angenommen, dass die Deformation nur in der Teilstruktur \mathcal{P} bekannt ist, die die gleichen Abmessungen besitzt, wie bei den zuvor betrachteten Beispielen. Nachdem alle Knotenwerte \boldsymbol{x}^J ermittelt worden sind, wird ggf. ein weißes Rauschen mit einem Rauschpegel $\bar{\delta}$ zu den Daten addiert, so dass sich ein Axialverschiebungsfeld u_1^h gemäß Bild 6.14 ergibt. In die Darstellung des Verschiebungsfelds ist auch mit 640 Elementen eine der Vernetzungsvarianten integriert, die im Rahmen dieses Beispiels verwendet werden. Neben dieser mittleren Auflösung werden zusätzlich noch Finite-Elemente-Diskretisierungen mit 160 und mit 2560 Elementen betrachtet, wobei die Elementanzahl der feinsten Vernetzung in der Größenordnung des direkten Problems liegt. Da die Elementanzahl gleichbedeutend mit der Anzahl der Materialfreiheitsgrade μ_e^h ist, können diese Begriffe bei den nachfolgenden Betrachtungen synonym verwendet werden. Die mechanischen Randbedingungen des inversen Problems, insbesondere die Verschiebungsrandbedingungen \bar{u}_o^h und \bar{u}_u^h aus Bild 4.15, werden gemäß der in Abschnitt 4.3 erläuterten Vorgehensweise berechnet, die auch für die Elastografieversuche des Folgeabschnitts angewendet wird.

Die Ergebnisse der Schubmodulrekonstruktionen, die unter Anwendung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung entsprechend dem Algorithmus aus Bild 6.4 und mit Hilfe des Morozovschen Diskrepanzprinzips für die unterschiedlichen Diskretisierungen ermittelt wurden, werden durch Bild 6.15 für die Rauschpegel $\bar{\delta} = 0,01$ und $\bar{\delta} = 0,03$ übersichtlich zusammengefasst. In dieser Darstellung wurde bewusst auf eine Markierung der wahren Positionen der Einschlüsse durch eine weiße Umrahmung verzichtet, damit die Ränder der Inhomogenitäten nicht überdeckt werden.

Wie die Konturdiagramme aus Bild 6.15 verdeutlichen, ist mit allen hier betrachteten Vernetzungsvarianten die Detektion des großen Einschlusses möglich. Die dabei erzielten Schubmodulverhältnisse nehmen für jedes Netz mit zunehmendem Rauschpegel ab, was unter Berufung auf die Ergebnisse des ersten Beispiels zu erwarten war. Während mit der höchsten Auflösung und mit Abstrichen auch für die Variante mit 640 Elementen die Außenkontur des Einschlusses sehr gut wiedergegeben werden kann, unabhängig von den hier betrachteten Datenfehlern, ist dies für das grobe Netz nicht mehr möglich. Eine quantitative Rekonstruktion des kleinen Einschlusses liegt bei allen Netzen nur bei einem Rauschpegel von $\bar{\delta} = 0,01$ vor. Aufgrund des geringeren Schubmodulverhältnisses von $\mu_{w,k,inc}^h / \mu_{w,k,mat}^h = 3/1$ ist die Inhomogenität bei einem Datenfehler von $\bar{\delta} = 0,03$ nur schwer zu erfassen. Dieser Eindruck wird bestätigt, wenn die Schubmodulverteilung μ^h entlang des Pfades L_3 betrachtet wird, der von der unteren linken Ecke der Teilstruktur \mathcal{P} aus Bild 6.14 diagonal durch den Querschnitt zur oberen rechten Ecke verläuft. Die hierdurch entstehenden Liniendiagramme für die verschiedenen Datenfehler finden sich in Bild 6.16. Es wird deutlich, dass für beide Rauschpegel die Einschlüsse für die Netze mit 640 und 2560 Materialfreiheitsgraden bestimmbar sind. Dabei kann zwar das feinere Netz die Konturen der Einschlüsse besser nachbilden, jedoch ist hiermit nicht zwingend eine bessere Rekonstruktion des Schubmodulverhältnisses verbunden, vgl. insbesondere den großen Einschluss in den Bildern 6.15 und 6.16 für den Rauschpegel $\bar{\delta} = 0,01$.

Zusätzlich zu den rekonstruierten Einschlüssen sind insbesondere in der Mitte der Unterseite des betrachteten Bereichs \mathcal{P} weitere Versteifungen zu erkennen. Diese Randstörungen, die deutlich über dem Niveau des in der Querschnittsfläche auftretenden Materialrauschens liegen, sind auf die vereinfachenden Annahmen bei der Festlegung der Randbedingungen zurückzuführen, die bei der Behandlung des inversen Problems verwendet werden. Da die Randverschiebungen \bar{u}_u^h und \bar{u}_o^h , die entsprechend Bild 6.4 in jedem Iterationsschritt für die Berechnungen der Deformation $x^h = \mathcal{G}(\mu_{k+1,l}^h)$ verwendet werden, durch Mittelwertbildung der gemessenen Verschiebungen u_1^{gh} bestimmt werden, vgl. Abschnitt 4.3, können einzelne Werte u_1^{gh} mitunter stark von den Größen \bar{u}_o^h bzw. \bar{u}_u^h abweichen. Diese Abweichungen führen ihrerseits zu lokalen Schwankungen in der Steifigkeitsverteilung μ^h im Randbereich. Während aufgrund der Wahl der Verteilungen $\mu_0^h = 1$ und $\mu^{*h} = 0$ der Schubmodul μ^h des umgebenden Materials am Strukturrand in der Nähe des unteren Grenzwerts $\mu^h \geq 1$ liegt und sich demzufolge Aufwei-

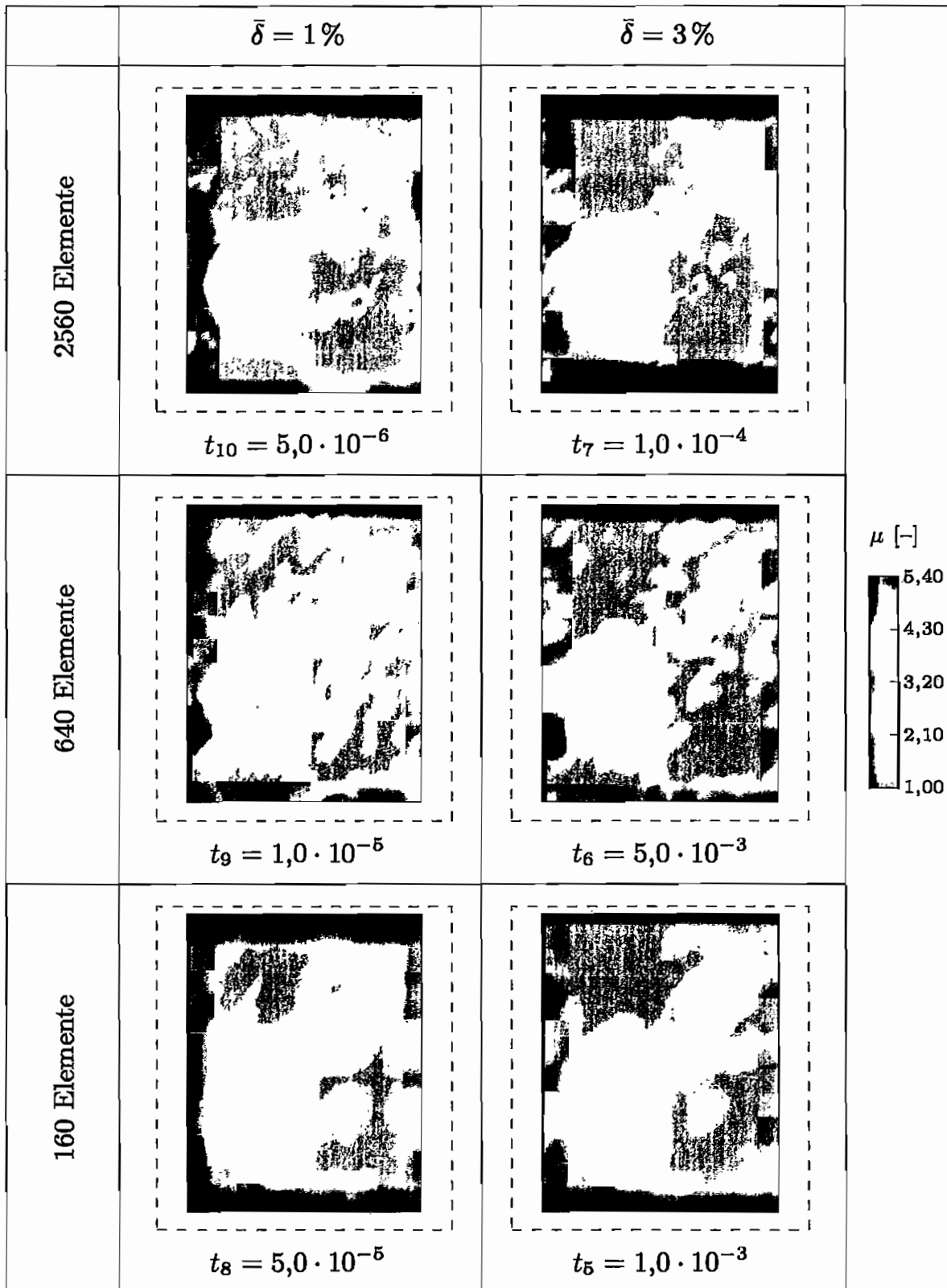


Bild 6.15: Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: ermittelte, relative Schubmodulverteilung μ^h für verschiedenen Vernetzungen und Rauschpegel

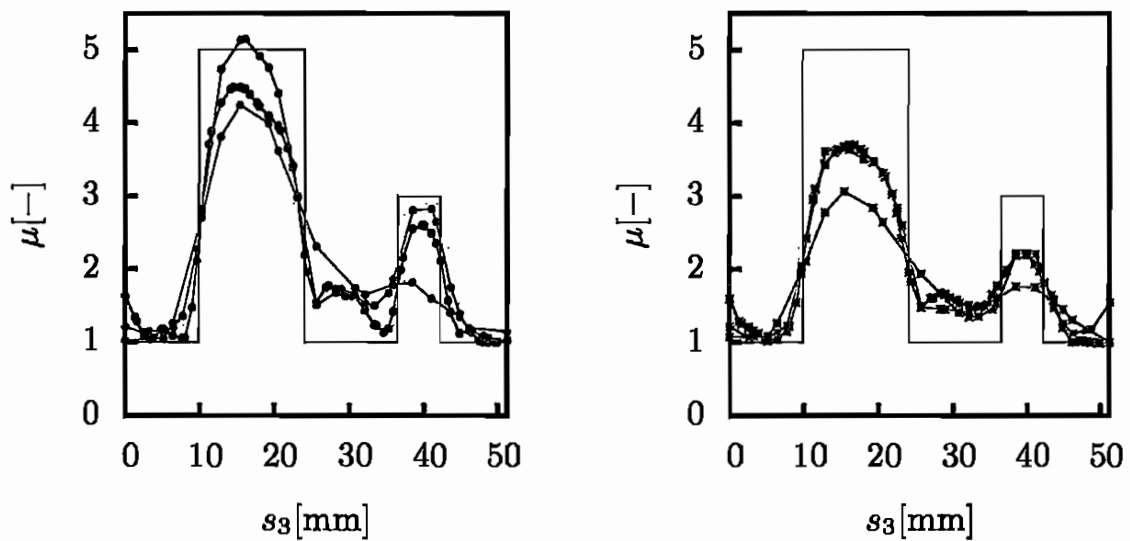


Bild 6.16: Relativer, ermittelter Schubmodul μ^h entlang des Pfades L_3 :
 exaktes Verhältnis (—), Vernetzung mit 160 Elementen (—●—, —*—),
 mit 640 Elementen (—●—, —*—) und mit 2560 Elementen (—●—, —*—)
 für die Rauschpegel $\bar{\delta} = 1\%$ (●) und $\bar{\delta} = 3\%$ (*)

chungen nicht ausprägen können, bilden sich die Versteifungen – nur durch die Regularisierung gedämpft – aus und sind in der rekonstruierten Schubmodulverteilung μ^h sichtbar. Da das durch die Randbedingungen verursachte Rauschen in den Rekonstruktionen im Allgemeinen zur Strukturmitte hin sehr schnell abklingt und somit die Ergebnisqualität nur im geringen Maße beeinträchtigt wird, wird die bisher angewendete Form der Verschiebungsrandbestimmung beibehalten.

Wie dieses Beispiel erkennen lässt, kann der Algorithmus auch zur Ermittlung von Schubmodulverteilungen μ^h herangezogen werden, wenn sich die Diskretisierung der Datengenerierung von der Vernetzung bei der Behandlung des inversen Problems unterscheidet, was eine unabdingbare Voraussetzung für die Auswertung der Ultraschallmessungen darstellt. Da die Resultate im Allgemeinen netzabhängig sind, bietet es sich an, die Rekonstruktion der Materialverteilung mit einer größeren Vernetzung zu beginnen. Die Diskretisierung ist dann so lange sukzessive zu verfeinern, bis sich keine Verbesserung der Rekonstruktionsergebnisse hinsichtlich berechnetem Schubmodulverhältnis und Konturierung der Inhomogenitäten einstellt. Diese Methodik führt zwangsläufig auf die Überlegung, die Netzverfeinerung in den durch Gleichung (6.30) beschriebenen Optimierungsprozess zu integrieren, um durch eine adaptive Finite-Elemente-Diskretisierung nur lokal in den Bereichen eine Netzanpassung vorzunehmen, in denen diese zu einer Resultatsverbesserung führt, so z. B. in den Randbereichen eines Einschlusses. Dieser Aspekt wird noch einmal im Kapitel 7 aufgegriffen.

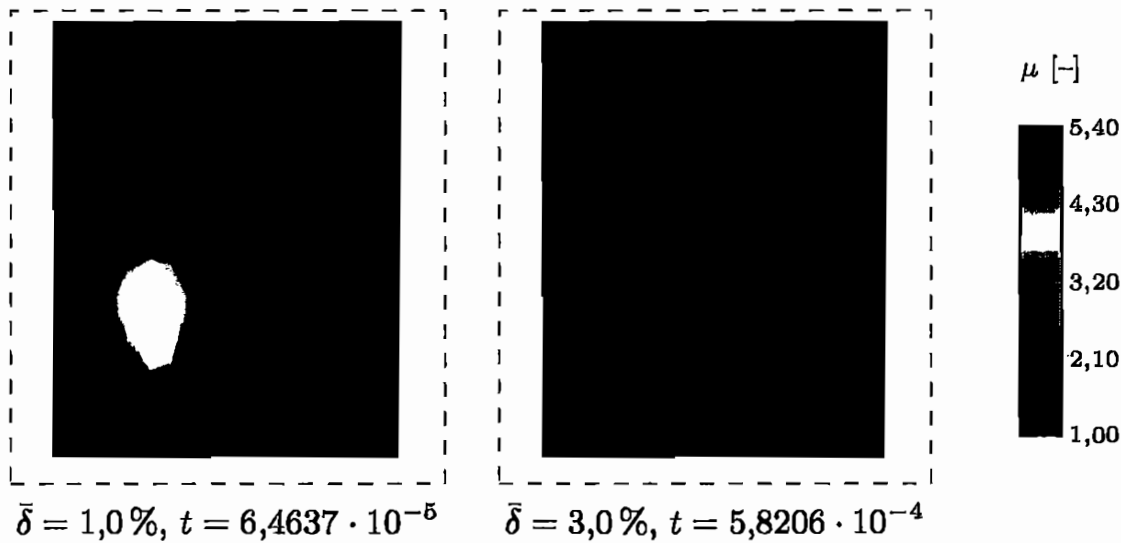


Bild 6.17: Beispielstruktur mit zwei Einschlüssen: ermittelte, relative Schubmodulverteilung μ^h für eine Diskretisierung mit 640 Elementen und unterschiedliche Rauschpegel $\bar{\delta}$

Neben der bisher behandelten Tikhonov-Regularisierung wurde zusätzlich in Abschnitt 5.2.2 eine modifizierte Tikhonov-Regularisierung durch das Funktional g_e eingeführt, die mit der Parameterwahl $t = \alpha(\delta) = O(\delta^2)$ eine Regularisierungsverfahren bildet, vgl. Abschnitt 3.3. Dies bedeutet, dass sich für die Parameterwahl $\alpha(\delta) = O(\delta^2)$ und einen Datenfehler $\delta \rightarrow 0$ die Konvergenz $\mu^h \rightarrow \mu_{mn}^h$ einstellt, falls $\mu_{mn}^h = \mu_w^h$ existiert und eindeutig bestimmt ist. Um die Eignung dieses Regularisierungsverfahrens für die nichtlineare Elastografie nachzuweisen, wird erneut das Zwei-Einschlüsse-Problem aus der Abbildung 6.14 betrachtet und die Schubmodulverteilung μ^h mit dem Algorithmus aus Bild 6.4 ermittelt, wobei in diesem Fall jedoch das Funktional g^h durch g_e^h zu ersetzen ist. Wird als Parameterwahl die empirisch ermittelte Funktion $t = \alpha(\delta) = C\delta^2$ mit $C = 10^{-4}$ verwendet, so ergeben sich die in Bild 6.17 dargestellten Schubmodulverteilungen μ^h . Die Konturdiagramme dieser Abbildung verdeutlichen, dass auch mit dem modifizierten Tikhonov-Verfahren die Einschlüsse bei großen äußeren Randverschiebungen ermittelt werden können und dass die Form der Einschlüsse für einen Rauschpegel von $\bar{\delta} = 1\%$ gut wiedergegeben wird. Jedoch zeigt ein Vergleich dieser Materialverteilungen mit den Ergebnissen aus Bild 6.15, dass die mit dem modifizierten Tikhonov-Verfahren erzielten Resultate deutlich glatter sind, so dass die berechneten Schubmodulverhältnisse bei den hier betrachteten Datenfehlern $\bar{\delta}$ qualitativ schlechter sind als die mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung erzielten Quotienten. Aus diesem Grund wird bei der Auswertung der Elastografiemessungen im nächsten Abschnitt ausschließlich auf letztgenannte Methode zurückgegriffen.

Vergleicht man abschließend die Resultate der Beispiele mit einem und mit zwei Einschlüssen miteinander, so kann als Fazit der numerischen Simulationen festgehalten werden, dass unabhängig von der Größe der äußeren Randverschiebung die Materialverteilung μ^h in einer Struktur bestimmt werden kann, wenn die betrachteten Materialien der Einschlüsse und der Materialmatrix sich durch ein Neo-Hooke-Materialmodell beschreiben lassen. Dabei hängt die Ergebnisqualität, insbesondere das rekonstruierte Schubmodulverhältnis $\mu_{\text{inc}}^h/\mu_{\text{mat}}^h$, stark von der Größe des Datenfehlers δ ab.

6.4 Ergebnisse der Elastografiemessungen

Aufbauend auf den Erkenntnissen der numerischen Simulationen des vorangegangenen Abschnitts werden in diesem Unterkapitel die Messergebnisse der Elastografieversuche ausgewertet. Bei dieser Analyse stehen im Wesentlichen die Fragen im Vordergrund, ob eine Inhomogenität in einer Materialmatrix lokalisiert werden kann und wie gut sich in diesem Fall das wahre Schubmodulverhältnis $\mu_{w,\text{inc}}^h/\mu_{w,\text{mat}}^h$ rekonstruieren lässt. Diese Fragestellungen werden nachstehend getrennt voneinander behandelt, wobei die reine Detektion eines Einschlusses in Anlehnung an die Begrifflichkeit der Elastografie als *qualitative Rekonstruktion* bezeichnet wird, während eine Einbeziehung des Schubmodulverhältnisses *quantitative Rekonstruktion* genannt wird.

Eine getrennte Betrachtung ist deshalb zwingend erforderlich, da der in Unterabschnitt 4.2.1 beschriebene, standardisierte Herstellungsprozess der PVA-K-Phantome aufgrund der identischen Kieselgel-Konzentration im Einschluss und in der Materialmatrix zu einer gleichmäßigen Echogenität der gesamten Probe führt. In diesem Fall ist der Einschluss mit dem Ultraschallgerät gar nicht oder nur sehr schwer zu lokalisieren, so dass eine Überprüfung der Position der Inhomogenität im Allgemeinen nicht möglich ist. Darüber hinaus scheidet eine genaue Kontrolle der Position des Einschlusses über die Geometrie der Probenbehälter aus mehreren Gründen aus. Zum einen ist mit Blick auf den in Unterabschnitt 4.2.1 erläuterten Herstellungsprozess ein Durchhang der zylinderförmigen Einschlüsse in Behältermitte unvermeidlich, zum anderen sind die Probenabmessungen aufgrund von Quellvorgängen fortwährenden Änderungen unterworfen. Neben diesen Unwägbarkeiten kann der Abstand a_0 des Bildbereichs von der Probenoberkante nicht genau quantifiziert werden, siehe Abschnitt 4.3. Daher kann nur ein Vergleich mit einem B-Bild genaueren Aufschluss über die Güte der Detektion liefern, während mit Hilfe der Geometrie der Probenbehälter nur eine grobe Abschätzung vorgenommen werden kann.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.3 werden folgend ausschließlich die Bildbereiche \mathcal{P} betrachtet, für die die verformte Konfiguration in Form der Koordinaten $x_1^{g^h}$ bestimmt wurde. Dabei ergibt sich die axiale Verformung gemäß Gleichung (6.31) aus den als Punktverschiebungen $x_1^{g^I}$ bestimmten Messwerten und den Ansatzfunktionen N , vgl. Abschnitt 6.2 und insbesondere Bild 6.3. Die Größe des Messbereichs \mathcal{P} sowie die Auflösung in axiale und laterale Richtung

Variante	A	B	C
Höhe [mm]	39,95	41,25	35,25
Breite [mm]	32,00	32,00	26,18
axiale Auflösung	53	55	47
laterale Auflösung	55	55	45
Freiheitsgrade μ_e	1404	1458	1112

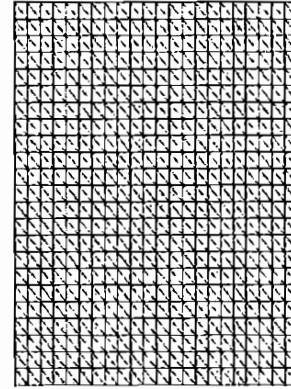


Bild 6.18: Informationen zur Diskretisierung des Bildbereichs \mathcal{P} : HF-Ultraschallelastografie (Variante A und B) sowie B-Bild-Ultraschallelastografie (Variante C), Darstellung der Diskretisierung der Variante C

hängen im Wesentlichen vom gewählten Messverfahren ab und sind in Bild 6.18 dokumentiert. Die dort angegebenen Auflösungen in axiale und laterale Richtung wurden bzgl. des Algorithmus aus Bild 6.4 auf Grundlage von Messreihen ermittelt und gelten somit als optimiert, so dass bei der Rekonstruktion der Schubmodulverteilung μ^h im Folgenden auf eine sukzessive Netzverfeinerung zur Ergebnisverbesserung verzichtet werden kann.

Der Rauschpegel $\bar{\delta}$, der für eine systematische Regularisierung zwingend erforderlich ist, hängt in der Ultraschallelastografie nicht nur vom verwendeten Messsystem und dem gewählten Messverfahren ab, sondern ist über die Materialverteilung auch an den Probenkörper selbst gekoppelt. Daher kann er im Allgemeinen nur durch die Angabe eines Bereichs von 1 % bis 3 % abgeschätzt werden, vgl. Khaled (2007) sowie Oberai et al. (2003) und Oberai et al. (2004). Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Probenkörper erweist sich die Annahme eines Rauschpegels von $\bar{\delta} = 2,0\%$ als sinnvoll. Lediglich das Phantom PD weist bei dieser Annahme und der Verwendung des Morozovschen Diskrepanzprinzips als Parameterwahlkriterium eine starke Überregularisierung auf, so dass in diesem Fall der Rauschpegel auf $\bar{\delta} = 1,5\%$ nach unten korrigiert wird.

Soweit nachstehend keine abweichenden Angaben gemacht werden, erfolgt die Auswertung der Messdaten mit dem gleichen Parametersatz, der auch in den numerischen Simulationen eingesetzt wurde. Zu diesen Werten zählen neben $\text{TOL}_\Theta = 10^{-8}$ zur Beschreibung inkompressiblen Materialverhaltens in erster Linie die Größe $\text{TOL}_g = 2 \cdot 10^{-2}$ sowie die Schubmodulverteilungen $\mu_0^h = 1$ und $\mu^{*h} = 0$, über die das Verhalten des Rekonstruktionsalgorithmus aus Bild 6.4 maßgeblich gesteuert werden kann. Als Parameterwahlkriterium wird wie bereits angedeutet auf das Morozovsche Diskrepanzprinzip gemäß Gleichung (6.70) zurückgegriffen, wobei sich alle Angaben bezüglich der Folge t_i der Regularisierungsparameter auf die Festlegung aus Gleichung (6.71) beziehen.

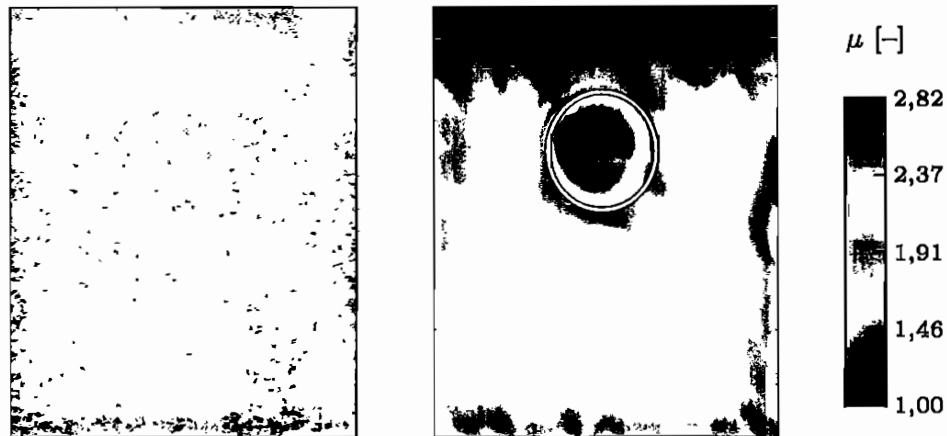


Bild 6.19: Phantom Pa: B-Bild und rekonstruierte Schubmodulverteilung μ^h im Maßstab 1:1, Messung vom 18. März 2007, Messschritt 5/6, Diskretisierung A

In einem ersten Schritt wird zunächst anhand des Phantoms Pa überprüft, ob mit Hilfe der HF-Ultraschallelastografie die Position eines harten Einschlusses richtig bestimmt werden kann. Eingedenk der Überlegungen vom Beginn dieses Abschnitts wurde das Phantom Pa abweichend von dem in Unterabschnitt 4.2.1 beschriebenen Fertigungsprozess hergestellt, da insbesondere die Kieselgelkonzentration von Einschluss und Materialmatrix variiert wurde, um die Inhomogenität im B-Bild sichtbar zu machen, vgl. Abbildung 6.19. Mit Hilfe der so erhaltenen Ultraschallaufnahme kann die Position des Einschlusses zunächst bestimmt und diese anschließend durch einen weißen Kreis in der rekonstruierten Schubmodulverteilung μ^h markiert werden, welche mit der Diskretisierungsvariante A ermittelt wurde, siehe Bild 6.18. Um eine Vergleichbarkeit beider Aufnahmen zu gewährleisten, wurde darauf geachtet, dass sich beide Bilder auf den gleichen Messschritt beziehen, wobei der Messschritt i/j angibt, welche Aufnahmen i und j einer Elastografiemessung zur Verschiebungsfeldberechnung herangezogen werden, vgl. Abschnitt 4.3. Wie aus der Abbildung 6.19 hervorgeht, wird der Einschluss beinahe exakt ermittelt, da unter Bezug auf das in Kapitel 4 eingeführte Koordinatensystem lediglich eine minimale Abweichung des Kreises in positive X_1 - und in negative X_2 -Richtung auszumachen ist. Aufgrund dieses Ergebnisses, welches u. a. auch in Reichling et al. (2005) bestätigt wurde, wird in den folgenden Ausführungen davon ausgegangen, dass auch die Einschlüsse, die im B-Bild nicht sichtbar sind, hinsichtlich ihrer Position genau ermittelt werden, was für die Bestimmung des Schubmodulverhältnisses von entscheidender Bedeutung ist.

Da für eine quantitative Betrachtung der berechneten Schubmodulverteilung noch weitergehende Überlegungen erforderlich sind, werden anhand des Phantoms Pa weitere charakteristische Merkmale der rekonstruierten Schubmodul-

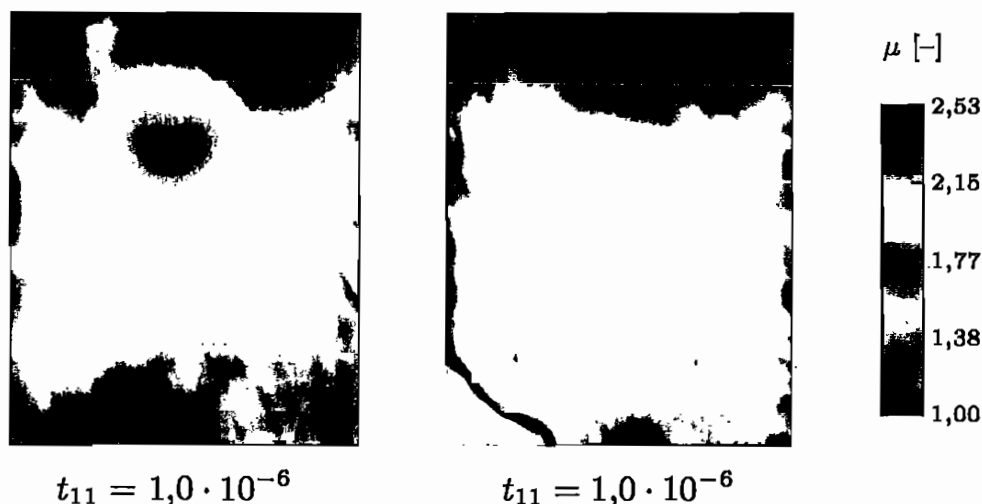


Bild 6.20: Phantom Ph: rekonstruierte Schubmodulverteilungen μ^h bei Messungen aus unterschiedlichen Richtungen, Messungen vom 28. Dez. 2006 und vom 17. Jan. 2007, Messschritte 1/2 bzw. 8/9, jeweils Diskretisierung A

verteilung diskutiert. Dabei fällt zunächst bei der Betrachtung der Materialverteilung μ^h in Bild 6.19 auf, dass die Probe an der Unterseite starke Randstörungen aufweist, die auch schon bei den numerischen Simulationen zu beobachten waren und auf die vereinfachenden Annahmen bei der Definition der Randverschiebungen \bar{u}_o und \bar{u}_u zurückzuführen sind, vgl. Abschnitt 6.3. Neben diesen Störeinflüssen sind zusätzlich Verhärtungen an den Seitenrändern des Bildbereichs zu erkennen, die etwas unterhalb des Einschlusses am stärksten ausgeprägt sind. Dieses Rauschen, welches in den numerischen Simulationen in dieser Form nicht zu identifizieren war, ist bei den nachfolgend betrachteten Phantomen im Allgemeinen noch stärker ausgebildet und kann auf die Messmethode der HF-Elastografie zurückgeführt werden. Aufgrund der Geometrie der Probenkörper und der gewählten mechanischen Randbedingungen sind die lateralen Verschiebungen u_2 in der Mitte des Körpers \mathcal{B} in der Nähe von $X_2 = 0$ über die gesamte Höhe h der Probe ungefähr null und nehmen zu den Seitenrändern hin betragsmäßig zu. Je größer jedoch diese Lateralkomponente ist, um so stärker sind die Rauscheffekte in der Verschiebungsmessung, vgl. Abschnitt 4.1, die sich in diesem Fall als Versteifung in der Materialverteilung äußern.

Auf der Phantomoberseite wiederum liefert die Rekonstruktion der Schubmodulverteilung, dass das Phantom Pa an dieser Stelle deutlich weicher ist als in den übrigen Bereichen der Struktur, vgl. Bild 6.19. Um diesen Effekt genauer zu untersuchen, wird der Probenkörper Ph in die Überlegungen einbezogen und dessen Schubmodulverteilung μ^h zweimal bestimmt, vgl. Bild 6.20. Bei der ersten Elastografiemessung vom 28. Dez. 2006 wurde das Phantom so positioniert, dass sich

der Einschluss auf der Phantomoberseite befindet, während der Probenkörper für die zweite Messung vom 17. Jan. 2007 gedreht wurde. Da für beide Messungen die gleiche Farbskalierung verwendet wird, um die ermittelten Materialverteilungen besser miteinander vergleichen zu können und die Einschlüsse deutlich erkennbar zu machen, werden in der Darstellung alle Werte, die oberhalb des Maximalwerts 2,53 liegen, abgeschnitten und in einem hellgrauen Farbton wiedergegeben. Dieses Vorgehen, was im Folgenden auch bei anderen Rekonstruktionen angewendet wird, hat bei der Darstellung in Bild 6.20 nur Einfluss auf die starke Störung in der linken, untereren Ecke der zweiten Schubmodulverteilung. Es kann festgehalten werden, dass auch bei der Ermittlung der Verteilungen μ^h für den Probenkörper Ph eine Aufweichung in der berechneten Schubmodulverteilung in dem der Linearsonde zugewandten Bereich auftritt. Auch diese Resultate lassen nicht zuletzt aufgrund der jeweils starken Randstörungen auf der Unterseite des Bildbereichs \mathcal{P} keine eindeutige Aussage zu, jedoch legen die betrachteten Rekonstruktionen nahe, dass auch die weichen, sehr homogen wirkenden Strukturregionen im Nahfeld der Linearsonde als eine Form von Störung zu interpretieren sind. Diese These stützt sich dabei auf die Beobachtung, dass die weichen Regionen an der Oberseite bei allen Phantomen auftreten, unabhängig vom Herstellungstag und somit auch vom Fertigungsprozess. Daher kann es sich bei dem weichen Gebiet an der Probenoberseite nicht um einen zufälligen Fehler bei der Fertigung eines Probenkörpers handeln, sondern der Effekt müsste sich über den allgemeinen Herstellungsvorgang begründen lassen. Mit Blick auf den Fertigungsprozess gibt es jedoch keine physikalische Erklärung dafür, dass die Phantome an einer Seite des Quaders weicher sind als an allen anderen Seiten, vgl. hierzu auch die Beschreibung des Vernetzungsvorgangs von PVA-K auf molekularer Ebene in Abschnitt 4.2.1. Wahrscheinlicher für das Auftreten dieses Effekts ist die Begründung, dass die Erfassung des Verschiebungsfelds über die Probenhöhe ungleichmäßig verläuft, so dass Bereiche im Nahfeld der Linearsonde stärker komprimiert erscheinen und somit weicher wirken als Teile der Struktur mit einem größeren Abstand zum Ultraschallwandler.

Nach der Betrachtung der Randbereiche wird nun auf den Verlauf der Schubmodulverteilung μ^h im Innern der Phantome eingegangen. Hier fällt zunächst bei einem Vergleich der Messungen der Phantome Pa und Ph mit den numerischen Simulationen des vorangegangenen Abschnitts auf, dass das Rauschen in den Materialverteilungen μ^h , die aus Ultraschallmessergebnissen ermittelt wurden, wesentlich ausgeprägter ist als bei den Resultaten der numerischen Simulationen. Um ähnliche glatte Ergebnisse wie in den Beispielen des Abschnitts 6.3 zu erzielen, müsste das Parameterwahlkriterium modifiziert werden, indem der Parameter τ deutlich erhöht wird. In diesem Fall würden die Ergebnisse jedoch dahingehend schlechter, dass die Inhomogenität schwieriger zu identifizieren ist, so dass auf eine solche Maßnahme verzichtet wird. Ob sich die in der Materialmatrix auftretenden Schwankungen in der Schubmodulverteilung tatsächlich auf Messstörungen zurückführen lassen oder ob es sich um reale Steifigkeitsschwankungen im Probenkörper handelt, kann im Allgemeinen nicht beantwortet werden und

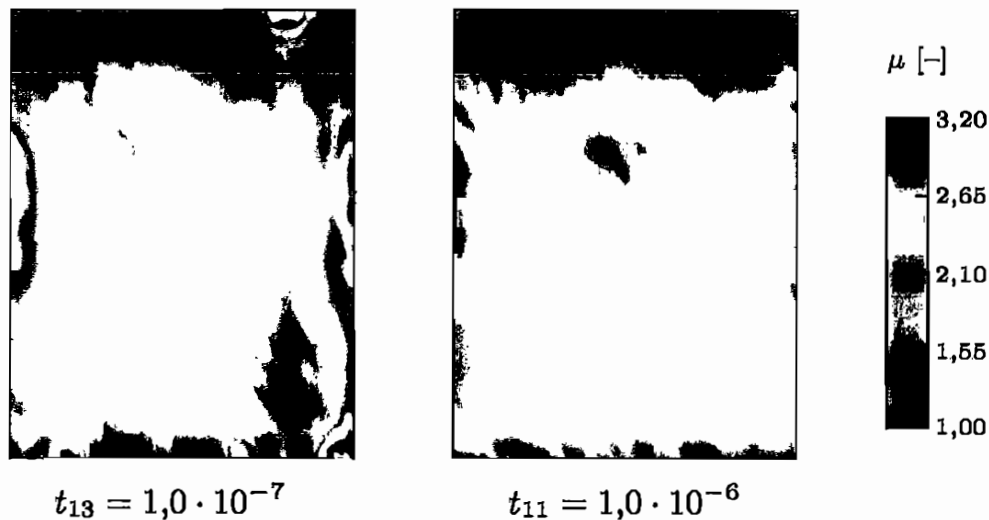


Bild 6.21: Phantom Pc: ermittelte Schubmodulverteilungen μ^h im Maßstab 1:1, Messungen vom 23. und vom 29. Nov. 2006, Messschritte 17/18 bzw. 5/6, jeweils Diskretisierung B

muss im Einzelfall untersucht werden. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Probenkörper legen jedoch die Vermutung nahe, dass die Änderungen der Schubmodulwerte in der Materialmatrix auf Messstörungen zurückzuführen sind. So weist das Phantom Ph im Bild 6.20 in der Messung vom 17. Jan. 2007 eine weiche Strukturregion links oberhalb des Einschlusses auf, die sich in der ersten Ultraschallmessung vom 28. Dez. 2006 rechts unterhalb der Inhomogenität befinden müsste, hier jedoch nicht zu identifizieren ist. Auch für den Probenkörper Pc, dargestellt in Bild 6.21, wurde die Schubmodulverteilung μ^h in zwei voneinander unabhängigen Messungen bestimmt. Während das erste Resultat basierend auf einer Messung vom 23. Nov. 2006 neben dem Einschluss weiche Strukturbereiche aufweist, sind diese bei der Materialverteilung, die auf Grundlage der Verschiebungsfeldmessung vom 29. Nov. 2006 ermittelt wurde, nicht zu erkennen.

Diese erste Analyse der Elastografiemessungen wirft die Frage auf, wie das Schubmodulverhältnis von Einschluss und umgebender Materialmatrix zu bestimmen ist. Da wie zuvor bei der Auswertung der Simulation für Probenkörper mit einem weichen Einschluss ein einfacher Vergleich von Maximal- und Minimalwerten zur Bestimmung des Schubmodulverhältnisses den tatsächlichen Gegebenheiten nicht hinreichend Rechnung trägt, werden auch bei der Berechnung des Quotienten $\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h$ in diesem Abschnitt geeignete Mittelwerte miteinander verglichen. Da die Randbereiche gemäß den vorangegangenen Überlegungen in der Regel starke Störungen aufweisen, bleiben unabhängig von der Diskretisierungsvariante die äußeren zwei Elementreihen bei der Mittelwertbildung unberücksichtigt. Ferner wird der Einschluss anhand der Außenkontur der Inhomogenität in der ermittelten Schubmodulverteilung identifiziert. Die Schub-

modulwerte μ_e^h der Elemente, die innerhalb dieses Bereiches liegen, werden zur Ermittlung der Größe μ_{inc}^h herangezogen, alle anderen zur Berechnung des Mittelwerts μ_{mat}^h . Mit Hilfe dieser Zahlenwerte kann der Quotient μ_{inc}^h/μ_{mat}^h ermittelt und mit dem *wahren Schubmodulverhältnis* $\mu_{w,inc}^h/\mu_{w,mat}^h$ verglichen werden. Als wahres Schubmodulverhältnis wird der Quotient aus den zeitlichen Mittelwerten der Schubmodule der Vergleichsprobenkörper bezeichnet, dessen Ermittlung in Abschnitt 4.2.2 ausführlich dargestellt wurde, vgl. insbesondere Tabelle 4.1.

Während eine Berechnung des Schubmodulverhältnisses für das Phantom Pa aufgrund fehlender Vergleichswerte nicht sinnvoll ist, können die entsprechenden Quotienten der Proben Ph und Pc der Tabelle 6.1 entnommen werden. Es wird deutlich, dass für beide Probenkörper in unterschiedlichen Messungen leicht differierende Ergebnisse erzielt werden. Während für das Phantom Ph Schubmodulverhältnisse von 1,6 und 1,4 ermittelt werden, ist der Unterschied der Werte bei der Probe Pc mit 1,7 und 1,6 etwas geringer. Bezogen auf das jeweilige wahre Verhältnis $\mu_{w,inc}^h/\mu_{w,mat}^h$, welches bei den Probenkörpern bei 2,7 bzw. 3,2 liegt, bedeutet dies Abweichungen von 40 % bis 50 %. Um diesen Fehler bewerten zu können, bietet es sich an, erneut auf die Erfahrungen aus der Simulation zurückzugreifen. In Abschnitt 6.3 wurde für ein Problem mit einem hartem Einschluss das Schubmodulverhältnis für die Rauschpegel $\bar{\delta} = 1\%$ bzw. $\bar{\delta} = 3\%$ durch Mittelwertbildung zu 2,6 bzw. 2,1 bestimmt, während der wahre Wert bei 4,0 lag, wodurch sich Abweichungen von 35 % bis 47,5 % einstellen. Nimmt man diese Fehlerwerte als Anhaltspunkt, stellen die rekonstruierten Schubmodulverhältnisse für die Probenkörper Ph und Pc sehr gute Ergebnisse dar. Vergleicht man darüber hinaus die beiden Probenkörper untereinander, so zeigt sich, dass das rekonstruierte Steifigkeitsverhältnis des Phantoms Pc größer bzw. gleich den Schubmodulverhältnissen der Probe Ph ist, wie dies aufgrund der Vergleichsmessungen auch zu erwarten war.

Im nächsten Schritt wird der in Bild 6.22 dargestellte Probenkörper Pe analysiert. Neben der rekonstruierten Schubmodulverteilung ist in dieser Abbildung das korrespondierende B-Bild dargestellt, welches demonstriert, dass für den Fall gleicher Kieselgel-Konzentrationen und der daraus resultierenden Echogenität von Einschluss und umgebenden Material die Inhomogenität im B-Bild nicht sichtbar ist. Die Tatsache, dass der Einschluss dieses Phantoms nur einem Gefrier-Auftau-Zyklus ausgesetzt und somit noch sehr weich war, bevor er in die Quaderform eingebaut wurde, erklärt den überdurchschnittlich großen Durchgang, der in der rekonstruierten Schubmodulverteilung sichtbar wird. Trotz der starken Randstörungen an den Seiten, die deutlich über dem Steifigkeitsniveau des Einschlusses selbst liegen, ist die Querschnittsfläche des Zylinders gut zu erkennen. Somit kann im Sinne einer quantitativen Rekonstruktion das berechnete Steifigkeitsverhältnis ausgewertet werden, das mit einem Wert von 1,2 eine vergleichsweise geringe Abweichung von 33,3 % vom wahren Wert aufweist. Darüber hinaus liegt der Quotient μ_{inc}^h/μ_{mat}^h deutlich unterhalb der korrespondierenden Größen der Phantome Ph und Pc, wodurch die entsprechenden Relationen der wahren Schubmodulverhältnisse sehr gut abgebildet werden.

Bezeichner	Datum	$\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h$	$\mu_{w,inc}^h / \mu_{w,mat}^h$	Fehler [%]
HF-Ultraschallelastografie				
Pc	23. Nov. 2006	1,7	3,2	46,9
Pc	29. Nov. 2006	1,6	3,2	50,0
Pd	29. Nov. 2006	1,7	2,9	41,4
PD	29. Nov. 2006	1,5; 1,4	2,9	48,3; 51,7
Pe	01. Dez. 2006	1,2	1,8	33,3
Pf	01. Dez. 2006	0,9	0,5	80,0
Ph	28. Dez. 2006	1,6	2,7	40,7
Ph	17. Jan. 2007	1,4	2,7	48,1
PH	28. Dez. 2006	1,7; 1,6	2,7	37,0; 40,0
B-Bild-Ultraschallelastografie				
Pd	29. Nov. 2006	1,6	2,9	44,8

Tabelle 6.1: Vergleich der berechneten und der wahren Schubmodulverhältnisse $\mu_{inc}^h / \mu_{mat}^h$ bzw. $\mu_{w,inc}^h / \mu_{w,mat}^h$

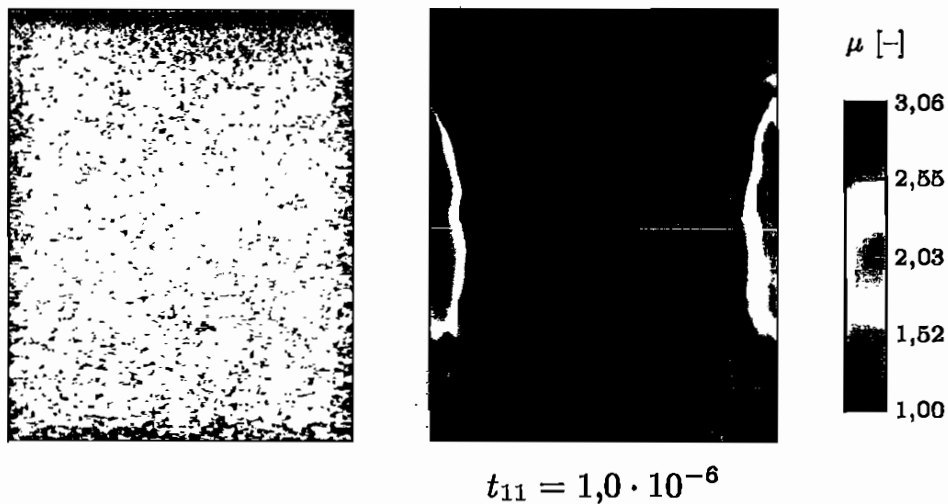


Bild 6.22: Phantom Pe: B-Bild und rekonstruierte Schubmodulverteilung μ^h im Maßstab 1:1, Messung vom 01. Dez. 2006, Messschritt 7/8, Diskretisierung A

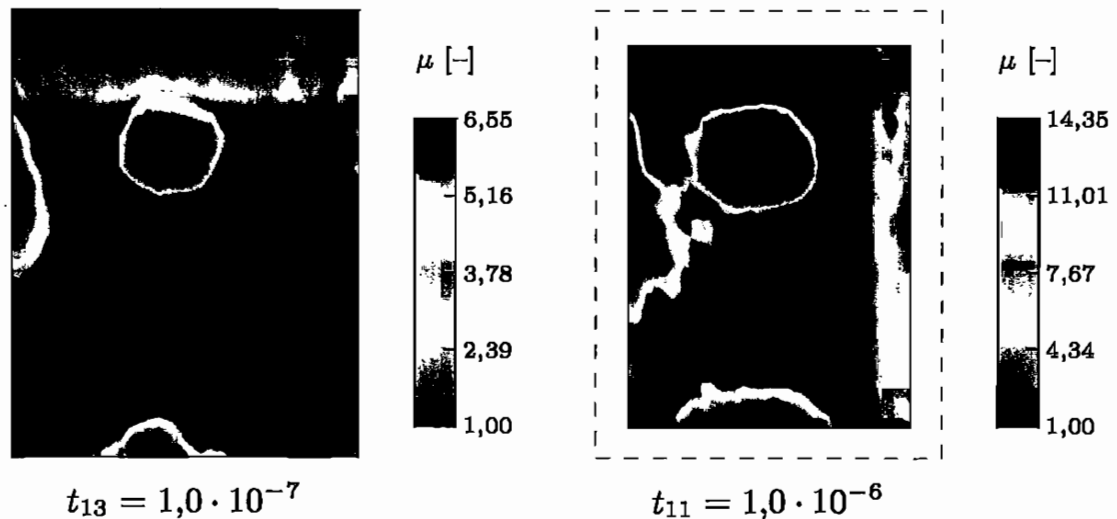


Bild 6.23: Phantom Pd: ermittelte Schubmodulverteilungen μ^h unter Verwendung von HF- und B-Bild-Ultraschallelastografie, Messungen vom 29. Nov. 2006, Messschritt 5/6 bzw. 1/20

Der nächste auszuwertende Probenkörper ist das in Bild 6.23 dargestellte Phantom Pd. Für diese Probe wurde neben einer HF- auch eine B-Bild-Elastografiemessung durchgeführt. Da die Unterschiede der auftretenden Maximalwerte der relativen Schubmodulverteilungen μ^h sehr groß sind, wurde von der Verwendung einer einheitlichen Farbskala abgesehen. Wie die Konturdiagramme der Abbildung 6.23 zeigen, ist in beiden Ergebnissen der Einschluss gut lokalisierbar. Darüber hinaus geht aus den ermittelten Materialverteilungen hervor, dass die auf Grundlage der B-Bild-Elastografie ermittelte Inhomogenität zwar annähernd an der gleichen Position liegt wie der mit der HF-Elastografie ermittelte Einschluss, aber die Querschnittsfläche des Zylinders etwas größer ausfällt. Aufgrund der großen Randverschiebung \bar{u}^h , die bei der B-Bild-Elastografiemessung auf den Probenkörper aufgebracht wurde, vgl. hierzu auch das in der Abbildung 4.16 dargestellte axiale Verschiebungsfeld u_1^g , stellt in diesem Fall die Schubmodulermittlung eine besondere Herausforderung an den Rekonstruktionsalgorithmus dar. Während in den anderen Versuchsauswertung lediglich kleine Verformungen auftreten, auch wenn dies ggf. nur auf die in Abschnitt 4.3 formulierten Annahmen zurückzuführen ist, so treten in diesem Beispiel Verzerrungen auf, die deutlich oberhalb der Grenze von 5 % Dehnung liegen, die – ebenfalls in Abschnitt 4.3 – als Begrenzung des linear-elastischen Bereichs angegeben wurde. Somit kann die Auswertung dieses Versuchs, neben den Simulationen in Abschnitt 6.3, als Ultraschallelastografie unter Berücksichtigung großer Deformationen bezeichnet werden. Die Ergebnisse, die mit beiden Messverfahren hinsichtlich der Schubmodulverhältnisse gewonnen werden, entsprechen den Resultaten, die zuvor mit den Phantomen Ph und Pd ermittelt wurden, und sind in der Tabelle 6.1 enthalten.

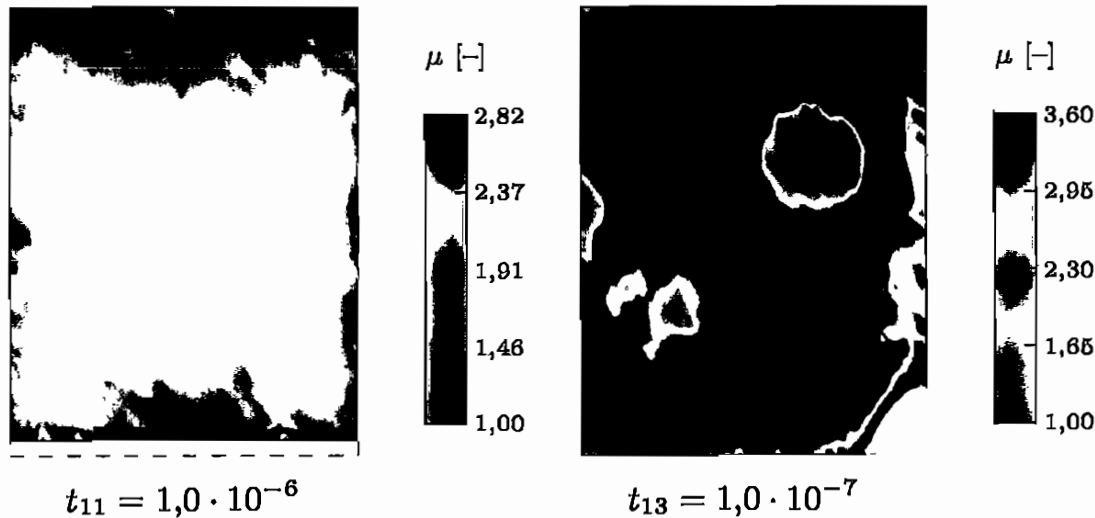


Bild 6.24: Phantom PD und PH: Schubmodulverteilung μ^h von Phantomen mit zwei Einschlüssen im Maßstab 1:1, Messungen vom 29. Nov. 2006 bzw. 28. Dez. 2006, Messschritt 12/13 bzw. 2/3, Diskretisierung A bzw. B

Neben den bisher betrachteten Phantomen mit einem Einschluss werden zusätzlich Proben untersucht, die zwei Inhomogenitäten enthalten, wobei die Zylinder eines Phantoms jeweils auf identische Art und Weise hergestellt wurden und demnach gleiche mechanische Eigenschaften besitzen. Wie die rekonstruierten Schubmodulverteilungen in Bild 6.24 belegen, können auch bei diesen Phantomen die Inhomogenitäten durch den Algorithmus aus Bild 6.4 visualisiert werden. Lediglich der zweite Einschluss des Phantoms PH, der in der unteren Hälfte des Probenkörpers liegt, ist aufgrund starker Rauscheffekte am linken Rand des Bildbereichs weniger gut sichtbar. Eine Auswertung der Schubmodulverhältnisse der Proben PD und Ph zeigt, dass die jeweiligen Einschlüsse eines Phantoms ähnliche Steifigkeitsverhältnisse liefern, vgl. Tabelle 6.1. Neben dieser Übereinstimmung müssen die Phantome PH und Ph sowie PD und Pd zusätzlich gleiche Schubmodulverhältnisse liefern, da sie entsprechend der Namenskonvention aus Abschnitt 4.3 im gleichen Herstellungsprozess gefertigt wurden. Während diese Übereinstimmung für die Proben PH und Ph am 28. Dezember 2006, dem Tag der Messung mit kleinen Abweichungen gegeben ist, liegt für die Phantome PD und Pd eine vergleichsweise große Abweichung vor. Werden anhand der wahren Schubmodulverhältnisse diese beiden Proben mit den anderen verglichen, so kann festgehalten werden, dass beim Phantom PD die wahren Schubmodulverhältnisse deutlich stärker unterschätzt werden als bei den anderen Probenkörpern.

Abgeschlossen wird die in diesem Abschnitt durchgeführte Phantomstudie mit einem Probenkörper, der einen weichen Einschluss enthält. Entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 6.3, werden die Parameter des Algorithmus

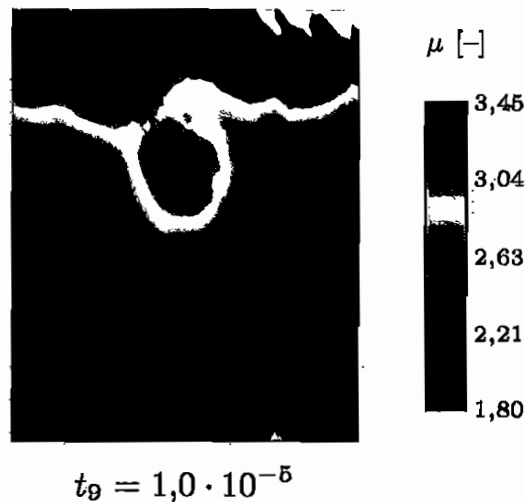


Bild 6.25: Phantom Pf: berechnete Schubmodulverteilung μ^h bei einem Phantom mit weichem Einschluss im Maßstab 1:1, Messung vom 01. Dez. 2006 Messschritt 5/6, Diskretisierung A

zur Lösung des inversen Problems dahingehend modifiziert, dass die Verteilungen $\mu_0^h = \mu^{*h} = 3$ gesetzt werden, während die anderen Steuerparameter, die zu Beginn dieses Abschnitts festgelegt wurden, beizubehalten sind. Die sich aus der Verschiebungsfeldmessung ergebende Materialverteilung μ^h des Phantoms Pf ist in Bild 6.25 dargestellt. In diesem Konturdiagramm ist der Einschluss deutlich zu erkennen, auch wenn aufgrund der weich erscheinenden Region am oberen Bildrand die Inhomogenität nach oben nicht geschlossen wirkt. Wird die Auswertung des Schubmodulverhältnisses aus Tabelle 6.1 herangezogen, so ist deutlich zu erkennen, dass bei dem Phantom Pf keine quantitative Rekonstruktion vorliegt, da die Abweichungen mit 80 % deutlich über dem Niveau der Phantome mit hartem Einschluss liegt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit dem Algorithmus aus Bild 6.4 die Schubmodulverteilung μ^h in Phantomen aus PVA-K ortal aufgelöst bestimmt werden kann und so harte und weiche Einschlüsse lokalisiert werden können. Die dabei erzielten Resultate hinsichtlich des rekonstruierten Schubmodulverhältnisses von Einschluss und Materialmatrix entsprechen den Ergebnissen, die zuvor im Abschnitt 6.3 bei numerischen Simulationen erzielt wurden. Neben den HF-Ultraschallelastografiemessungen, bei denen nur sehr kleine Verformungen auftreten, wurde anhand einer B-Bild-Elastografiemessung der Nachweis erbracht, dass der Algorithmus gemäß Bild 6.4 auch bei großen Verformungen gute Ergebnisse in einer quantitative Rekonstruktion liefert.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Ultraschallelastografie, einem Verfahren, das als objektive Ergänzung zur Palpation in der medizinischen Diagnostik angesehen wird. Vor diesem Hintergrund wurde eine Methode zur Ermittlung der Materialverteilung in weichen, elastischen Körpern entwickelt, welche nicht auf die Betrachtung von kleinen Deformationen beschränkt ist.

Zur Behandlung der Problemstellung wurden zunächst in der Einleitung die medizinischen Hintergründe skizziert und die historische Entwicklung des Messverfahrens der Ultraschallelastografie erläutert. Diese Darstellung mündete in einer für diese Arbeit gültigen Begriffsdefinition, die auch eine notwendige Abgrenzung zu anderen Teilgebieten der Elastografie beinhaltet.

Da der Elastizitäts- bzw. Schubmodul in einer inhomogenen, elastischen Struktur auf direktem Wege nicht orts aufgelöst gemessen werden kann, wurde die Ermittlung der Materialverteilung als inverses Problem interpretiert und geeignete mathematische Hilfsmittel herangezogen. Die für diese spezielle Form der Parameteridentifikation erforderlichen Grundlagen wurden in den Kapiteln 2 und 3 bereitgestellt. Während die Beschreibung der Kontinuumsmechanik auf hyperelastische Materialien zugeschnitten war, wurden bei der Erläuterung der Mathematik der inversen Probleme sowohl lineare als auch nichtlineare Operatorengleichungen betrachtet. Die Analyse linearer Problemstellungen, für die eine weitestgehend abgeschlossene Theorie vorliegt, diente zur Beschreibung der Schlechtgestelltheit inverser Probleme und den hieraus resultierenden Lösungsansätzen, insbesondere den gängigen Stabilisierungstechniken. Diese ließen sich dann auf die nichtlinearen Aufgabenstellungen übertragen, zu denen auch die Ermittlung der Materialverteilung in weichen Körpern mittels Elastografiemessung zählt.

Eine Beschreibung der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente erfolgte in Kapitel 4. Im Vordergrund stand dabei sowohl eine phänomenologische als auch eine kontinuumsmechanische Betrachtung der Elastografieversuche, die ein geeignetes numerisches Modell für die späteren Messauswertungen lieferten. Wie die theoretischen Überlegungen zur Behandlung von inversen Problemen verdeutlichten, waren für eine abschließende Beurteilung der gemessenen Schubmodulverteilung Vergleichsmessungen unentbehrlich. Demzufolge waren eine detaillierte Analyse des verwendeten Probenmaterials PVA-K und die Wahl eines geeigneten hyperelastischen Materialmodells ebenso Bestandteil des Kapitels 4, wie eine Beschreibung der als axiale Druckversuche konzipierten Vergleichsmessungen.

In Kapitel 5 wurden zunächst die in der Literatur vorhandenen Verfahren der

linearen Elastografie klassifiziert und anschließend mit Hilfe der in Kapitel 3 erläuterten Grundlagen analysiert. Aufbauend auf diesen ausführlichen Betrachtungen und einem Benchmark-Test konnte durch eine abschließende Diskussion der Methodengruppen – gegliedert nach zentralen Gesichtspunkten – die Grundlage für eine Weiterentwicklung von der linearen zur nichtlinearen Elastografie geschaffen werden. Der abschließend in Kapitel 5 vorgestellte, neue Ansatz zur Ermittlung der Schubmodulverteilung bei Annahme eines Neo-Hooke-Materials basiert somit einerseits auf den experimentellen Beobachtungen und geht andererseits als Ergebnis aus den zuvor durchgeführten, theoretischen Überlegungen hervor.

Eine Beschreibung der numerischen Umsetzung der entwickelten, stabilen Ersatzaufgaben zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie bildeten den Abschluss der theoretischen Überlegungen in Kapitel 6. Anhand von numerischen Simulationen und durch die Auswertung der Versuchsergebnisse aus Elastografiemessungen wurde abschließend die Leistungsfähigkeit und die Robustheit des zuvor präsentierten Algorithmus nachgewiesen.

Die bei der Entwicklung der neuen Methode erzielten wesentlichen und neuartigen Aspekte lassen sich in folgender Form zusammenfassen:

- Kontinuumsmechanische Analyse des Probenmaterials PVA-K durch eine umfangreiche Messstudie zur Bestimmung elastischer Materialparameter
- Vergleichende Betrachtung bestehender Verfahren der linearen Elastografie durch eine konsequente Einbettung der Methoden in das Konzept der inversen Probleme
- Entwicklung einer stabilen Ersatzaufgabe zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie
- Verwendung des von Engl et al. (2003) vorgeschlagenen, modifizierten Tikhonov-Phillips-Verfahrens im Rahmen der Elastografie
- Durchführung und Auswertung von HF- und B-Bild-Ultraschallelastografiemessungen in Zusammenarbeit mit dem Institut für Hochfrequenztechnik der Ruhr-Universität-Bochum

Als Fazit dieser Arbeit kann festgehalten werden, dass ein robuster und leistungsfähiger Algorithmus zur Behandlung des inversen Problems der nichtlinearen Elastografie entwickelt wurde. Mit Hilfe von numerischen Simulationen konnte an einem Beispiel gezeigt werden, dass die Schubmodulermittlung auch bei großen, äußeren Randverformungen gute Resultate liefert. Darüber hinaus konnte anhand von Messdaten aus Ultraschallversuchen gezeigt werden, dass der Algorithmus zur Ermittlung der Schubmodulverteilung in weichem, elastischem Material herangezogen werden kann.

Im Sinne einer Fortführung dieser Arbeit sind Weiterentwicklungen in unterschiedlicher Form denkbar. Nach Meinung des Verfassers sind an erster Stelle die Durchführung von dreidimensionalen Elastografiemessungen und die Betrachtung von h-adaptiven Vernetzungsstrategien zu nennen. Die Umsetzung von räumlichen Ultraschallmessungen wäre dabei durch den Einsatz eines geeigneten Tracking-Systems zu realisieren, wodurch eine beliebige Struktur schnittflächenweise eingescannt werden kann. Der so ermittelte, dreidimensionale Verschiebungsdatensatz würde die Betrachtung von komplexeren bzw. realistischeren Einschlussstopologien als den in dieser Arbeit verwendeten Zylindereinschlüssen erlauben. Auf diese Weise würde auch die Durchführung von in vitro Elastografiemessungen an tierischem Gewebe möglich, bei dem zuvor durch Injektionen harte Einschlüsse erzeugt werden.

Die Überlegung, h-adaptive Vernetzungsstrategien bei der Behandlung des direkten und des inversen Problems zu verwenden, leitet sich aus der Beobachtung ab, dass optimale Ergebnisse nur durch lokal feiner werdende Vernetzungen zu erzielen sind. Somit erscheint es sinnvoll, die Minimierung des Funktionals der stabilen Ersatzaufgabe nicht nur über die Materialparameter zu steuern, sondern auch die Elementvernetzung einzubeziehen. Auf diese Weise könnte das Netz der Einschlussstopologie angepasst werden und nur in den Bereichen einer Struktur verfeinert werden, in denen es zu einer Ergebnisverbesserung bei der Ermittlung der Schubmodulverteilung führt.

A Tensorrechnung

Fréchet-Ableitungen von Tensoren

Zusammenstellung von Fréchet-Ableitungen des Deformationsgradienten F , des materiellen Rechts-Cauchy-Green-Tensors C und der Jacobischen Funktionaldeterminante $J = \det F$:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial F} \right]_{ijkl} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial F_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\frac{\partial F^{-1}}{\partial F} \right]_{ijkl} = \frac{\partial F_{ij}^{-1}}{\partial F_{kl}} = -F_{ik}^{-1} F_{lj}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$\left[\frac{\partial C}{\partial F} \right]_{ijkl} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial (F_{ri} F_{rj})}{\partial F_{kl}} = \delta_{il} F_{kj} + \delta_{lj} F_{ki} \quad (\text{A.3})$$

$$\left[\frac{\partial(\text{tr } F)}{\partial F} \right]_{ij} = \frac{\partial F_{rr}}{\partial F_{ij}} = \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

$$\left[\frac{\partial(\text{tr } C)}{\partial F} \right]_{ij} = \frac{\partial C_{rr}}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial (F_{sr} F_{sr})}{\partial F_{ij}} = 2 F_{ij} \quad (\text{A.5})$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial F} \right]_{ij} = \frac{\partial(\det F)}{\partial F_{ij}} = J F_{ij}^{-T} \quad (\text{A.6})$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial C} \right]_{ij} = \frac{\partial(\sqrt{\det C})}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} J C_{ij}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Definition verwendeter Operatoren

Gradient eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$:

$$\text{grad } \boldsymbol{v} := \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = v_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \quad (\text{A.8})$$

Divergenz eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$:

$$\text{div } \boldsymbol{v} := \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.9})$$

Gradient eines Tensorfeldes 2. Stufe $\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$:

$$\text{grad } \boldsymbol{T} := \frac{\partial T}{\partial x_k} \otimes \boldsymbol{e}_k = T_{i,j,k} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \quad (\text{A.10})$$

Divergenz eines Tensorfeldes 2. Stufe $\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$:

$$\text{div } \boldsymbol{T} := T_{i,j,j} \boldsymbol{e}_i \quad (\text{A.11})$$

Integralsätze

Gaußscher Integralsatz

$$\int_{\partial B_t} \boldsymbol{T} \boldsymbol{n} \, da = \int_{B_t} \text{div } \boldsymbol{T} \, dv \quad (\text{A.12})$$

Gaußscher Integralsatz für Kreuzprodukte

$$\int_{\partial B_t} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{T} \boldsymbol{n}) \, da = \int_{B_t} (\boldsymbol{r} \times \text{div } \boldsymbol{T} + \text{grad } \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{T}) \, dv \quad (\text{A.13})$$

B Probenkörper aus PVA-K

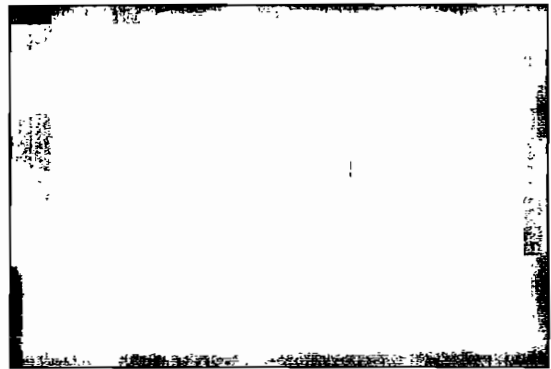
In diesem Kapitel werden die Probenkörper zusammengestellt, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden. Die Bezeichnungen der Phantome werden so gewählt, dass Proben, die im selben Herstellungsprozess gefertigt wurden, die gleichen Buchstaben im Namen führen, z. B. die Phantome Pd und PD. Ein kleiner Buchstabe weist darauf hin, dass ein Objekt nur einen Einschluss enthält, ein großer Buchstabe gibt an, dass sich zwei Einschlüsse im Probenkörper befinden.

Abgesehen von Phantom Pg2 liegt bei allen Ein-Einschluss-Phantomen die Inklusion zentrisch in lateraler Richtung, vgl. Zeichnungen der Probenbehälter in Bild C.3. Sieht man von Phantom Pf ab, besitzen die Einschlüsse bei allen Zwei-Einschluss-Phantomen den gleichen Schubmodul.

Da die Proben einem Quellvorgang während der Lagerung unterworfen sind, können keine genauen Angaben zu den Abmessungen gemacht werden, jedoch entsprechen diese nahezu den Innenmaßen der Phantombehälter, vgl. Anhang C.

Phantom Pc

Herstellungstag	28. Okt. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	5/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
06. Nov. 2006	27,5	8,8
17. Nov. 2006	28,9	9,0
23. Nov. 2006	28,8	8,9
01. Dez. 2006	28,0	9,2
20. Dez. 2006	29,4	9,1



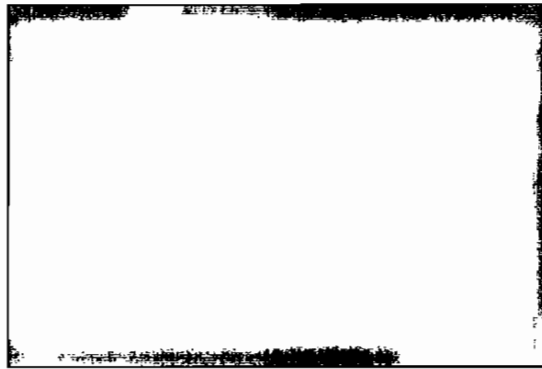
Phantom Pd

Herstellungstag	04. Nov. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	5/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
08. Nov. 2006	27,7	9,3
17. Nov. 2006	27,9	9,5
23. Nov. 2006	28,0	9,5
01. Dez. 2006	27,8	9,8
20. Dez. 2006	27,7	10,2



Phantom PD

Herstellungstag	04. Nov. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	5/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_{e1}	μ_m
08. Nov. 2006	27,7	9,3
17. Nov. 2006	27,9	9,5
23. Nov. 2006	28,0	9,5
01. Dez. 2006	27,8	9,8
20. Dez. 2006	27,7	10,2

**Phantom Pe**

Herstellungstag	09. Nov. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	3/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
17. Nov. 2006	19,5	10,6
23. Nov. 2006	19,2	10,7
01. Dez. 2006	19,3	11,0
20. Dez. 2006	19,2	10,8

**Phantom Pf**

Herstellungstag	18. Nov. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	2/3	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
23. Nov. 2006	9,0	19,1
01. Dez. 2006	9,5	19,9
20. Dez. 2006	10,1	20,1

**Phantom Ph**

Herstellungstag	15. Dez. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	4/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
20. Dez. 2006	24,1	8,5
11. Jan. 2007	24,3	9,1
05. Feb. 2007	24,1	8,9



Phantom PH

Herstellungstag	15. Dez. 2006	
Zyklenzahl z_i/z_m	4/2	
Schubmodul [kPa]		
	μ_i	μ_m
20. Dez. 2006	24,1	8,5
11. Jan. 2007	24,3	9,1
05. Feb. 2007	24,1	8,9



C Probenformen

Im Folgenden werden die verwendeten Probenbehälter aus Aluminium in Form von technischen Zeichnungen zusammengestellt. Dabei erfolgt die Darstellung jeweils in Schnitt und Draufsicht im Maßstab 1 : 2,5.

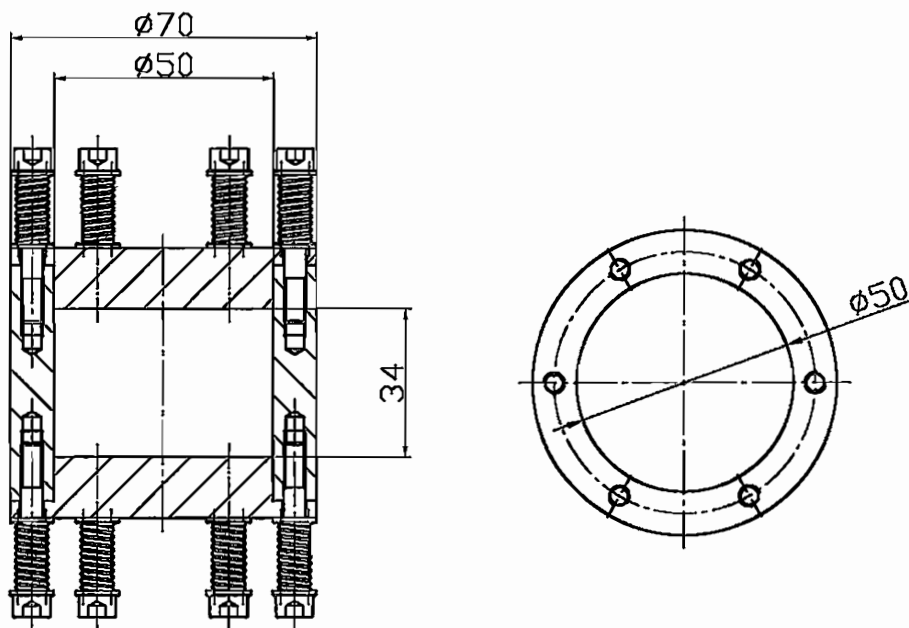


Bild C.1: Zylinderform zur Herstellung der Vergleichsproben

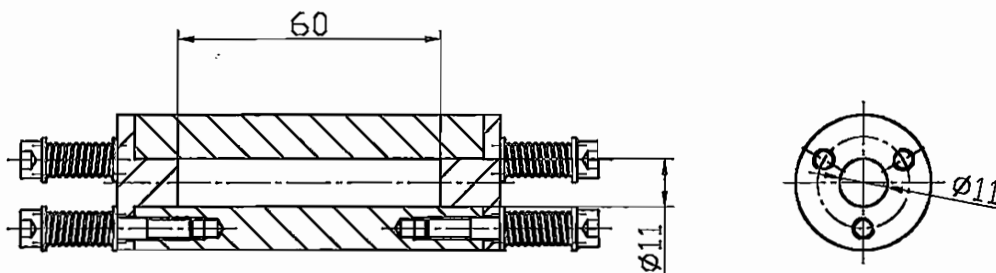


Bild C.2: Zylinderform zur Fertigung von Phantomeinschlüssen

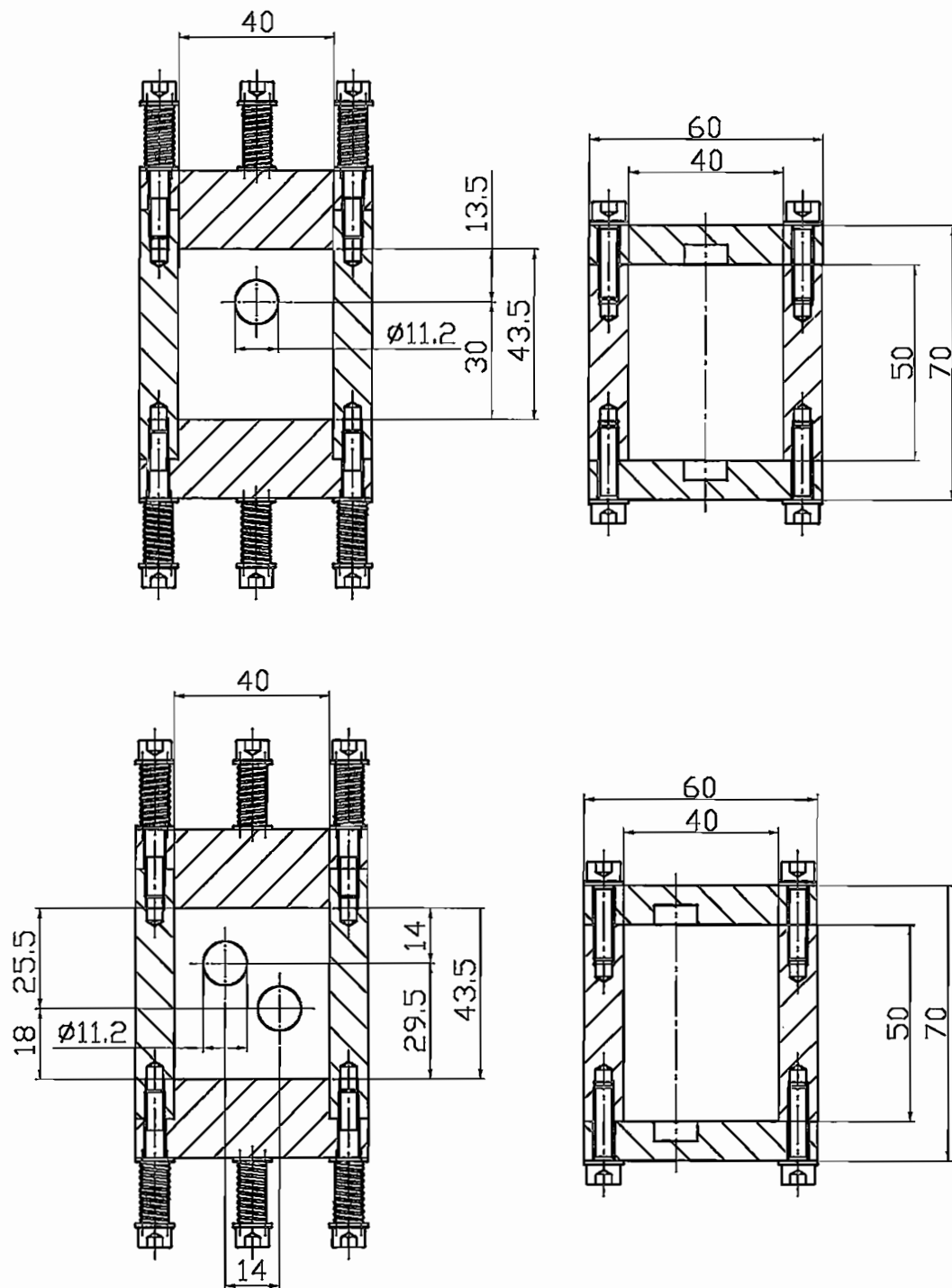


Bild C.3: Quaderformen zur Herstellung der Phantome

Literaturverzeichnis

- ALTENBACH, J. & ALTENBACH, H. (1994): *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, B. G. Teubner Stuttgart 1994.
- ANDING, D. K. (1997): *Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze* 1997, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik.
- ARNOLD, A.: *Identifikation von Materialparametern an homogenen Zylinderproben aus Polyvinylalkohol*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik, 2006.
- BABEL, W. (1996): *Gelatine - ein vielseitiges Biopolymer*, in: *Chemie in unserer Zeit*, Volume 30, 2, 86–95.
- BARBONE, P. E. & BAMBER, J. C. (2002): *Quantitative elasticity imaging: what can and cannot be inferred from strain images*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 47, 12, 2147–2164.
- BARBONE, P. E. & GOKHALE, N. H. (2004): *Elastic modulus imaging: on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions*, in: *Inverse Problems*, Volume 20, 1, 283–296.
- BATHE, K. J. (2002): *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag 2002.
- BEATTY, M. F. (1987): *Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues – with examples*, in: *Applied Mechanics Reviews*, Volume 40, 1699–1734.
- BEDFORD, A. (1985): *Hamilton's principle in continuum mechanics*, Pitman Advanced Pub. Program Boston 1985.
- BISHOP, J., SAMANI, A., SCIARRETTA, J. & PLEWES, D. B. (2000): *Two-dimensional MR elastography with linear inversion reconstruction: methodology and noise analysis*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 45, 8, 2081–2091.
- BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. & MÜHLIG, H. (1997): *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch 1997.

- BYRD, R. H., LU, P. & NOCEDAL, J. (1995): *A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization*, in: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Volume 16, 5, 1190–1208.
- CHRISTENSEN, D. A. (1988): *Ultrasonic Bioinstrumentation*, John Wiley & Sons 1988.
- CHU, K. C. & RUTT, B. K. (1997): *Polyvinyl Alcohol Cryogel: An Ideal Phantom Material for MR Studies of Arterial Flow and Elasticity*, in: Magnetic Resonance in Medicine, Volume 37, 2, 314–319.
- CIARLET, P. (1988): *Mathematical elasticity. Volume I: Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Company Amsterdam 1988.
- DOLL, S. (1998): *Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten* 1998, Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik.
- DOYLEY, M. M., MEANEY, P. M. & BAMBER, J. C. (2000): *Evaluation of an iterative reconstruction method for quantitative elastography*, in: Physics in Medicine and Biology, Volume 45, 6, 1521–1540.
- EHLERS, W. & EIPPER, G. (1998): *The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws*, in: Acta Mechanica, Volume 130, 1-2, 17–27.
- ENGL, H., HANKE, M. & NEUBAUER, A. (2003): *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers 2003.
- ERKAMP, R. Q., EMELIANOV, S. Y., SKOVORODA, A. R. & O'DONNELL, M. (2004a): *Nonlinear Elasticity Imaging: Theory and Phantom Study*, in: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Volume 51, 5, 532–539.
- ERKAMP, R. Q., SKOVORODA, A. R., EMELIANOV, S. Y. & O'DONNELL, M. (2004b): *Measuring the Nonlinear Elastic Properties of Tissue-Like Phantoms*, in: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Volume 51, 4, 410–419.
- GARRA, B. S., CESPEDES, E. I., OPHIR, J., SPRATT, S. R., ZUURBIER, R. A., MAGNANT, C. M. & PENNANEN, M. F. (1997): *Elastography of breast lesions: initial clinical results*, in: Radiology, Volume 202, 79–86.
- GEIGER, C. & KANZOW, C. (1999): *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*, Springer-Verlag Berlin 1999.

- HILTAWSKY, K. M. (2004): *Analyse und Optimierung von Abbildungseigenschaften der Ultraschall-Elastographie 2004*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Hochfrequenztechnik.
- HOFMANN, B. (1999): *Mathematik Inverser Probleme*, B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig 1999.
- HUGHES, T. J. R. (2000): *The Finite Element Method*, Dover Publications 2000.
- JI, L. & McLAUGHLIN, J. (2004): *Recovery of the Lamé parameter μ in biological tissues*, in: *Inverse Problems*, Volume 20, 1, 1–24.
- KALLEL, F. & BERTRAND, M. (1996): *Tissue Elasticity Reconstruction Using Linear Perturbation Method*, in: *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Volume 15, 3, 299–313.
- KAWANISHI, K., KOMATSU, M. & INOUE, T. (1987): *Thermodynamic consideration of the sol-gel transition in polymer solutions*, in: *Polymer*, Volume 28, 6, 980–984.
- KHALED, W. (2007): *Displacement Estimation Analyses for Reconstructive Ultrasound Elastography using Finite-Amplitude Deformations 2007*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Hochfrequenztechnik, in preparation.
- KHALED, W., REICHLING, S., BRUHNS, O. T. & ERMERT, H. (2006): *Ultrasonic strain imaging and reconstructive elastography for biological tissue*, in: *Ultrasonics*, Volume 44, e199–e202.
- KIRSCH, A. (1996): *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag 1996.
- KROUSKOP, T. A., WHEELER, T. M., KALLEL, F., GARRA, B. S. & HALL, T. (1998): *Elastic Moduli of Breast and Prostate Tissues Under Compression*, in: *Ultrasonic Imaging*, Volume 20, 4, 260–274.
- KUTTRUFF, H. (1988): *Physik und Technik des Ultraschalls*, S. Hirzel Verlag Stuttgart 1988.
- LOUIS, A. K. (1989): *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, B. G. Teubner Stuttgart 1989.
- LUBINSKI, M. A., EMELIANOV, S. Y., RAGHAVAN, K. R., YAGLE, A. E., SKOVORODA, A. R. & O'DONNELL, M. (1996): *Lateral Displacement Estimation Using Tissue Incompressibility*, in: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume 43, 247–256.

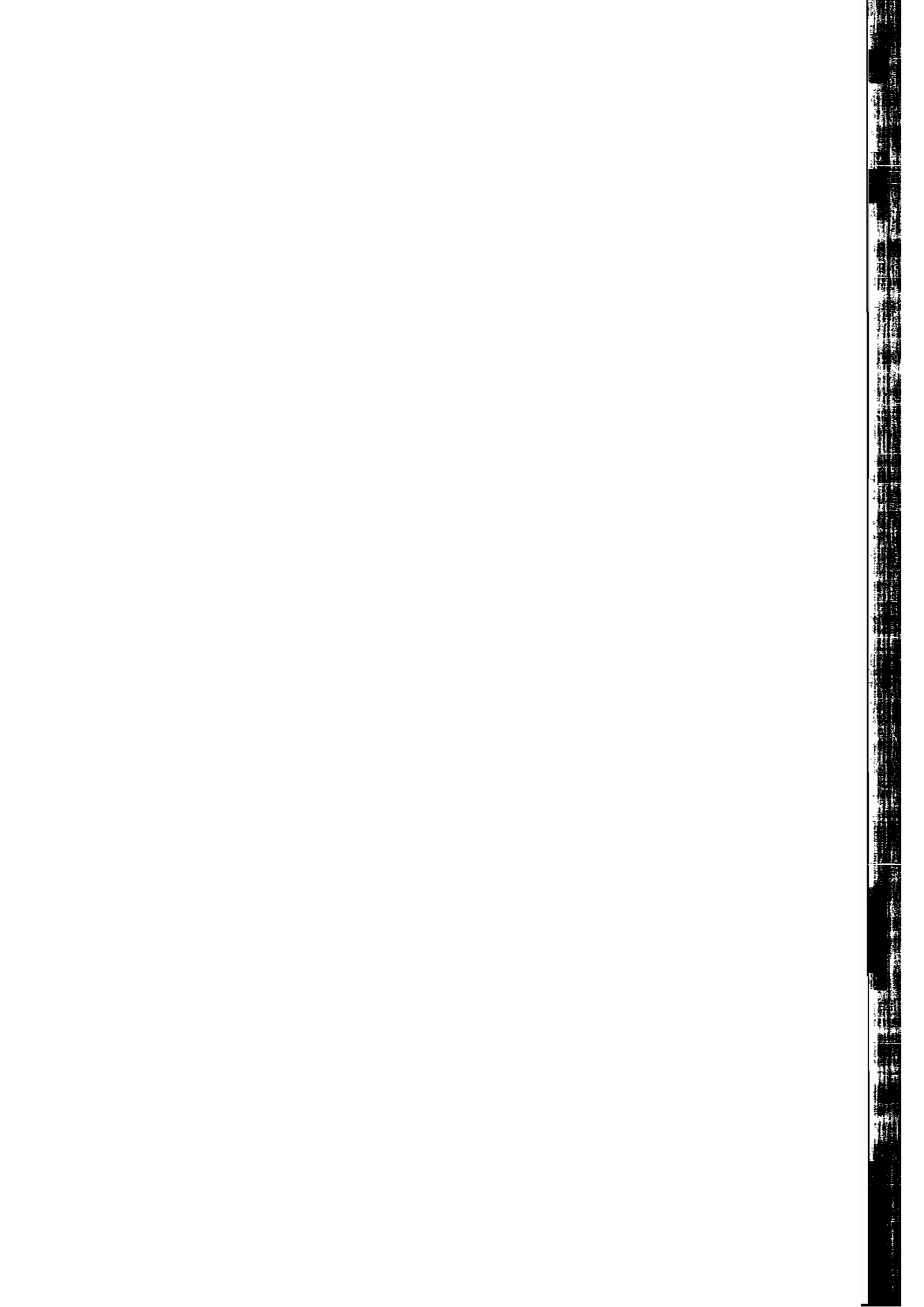
- MAHNKEN, R. & STEIN, E. (1996): *A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method*, in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 136, 225–258.
- MARQUARDT, D. W. (1963): *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Non-linear Parameters*, in: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Volume 11, 2, 431–441.
- MEISTER, E. (1996): *Partielle Differentialgleichungen: eine Einführung für Physiker und Ingenieure in die klassische Theorie*, Akademie Verlag Berlin 1996.
- MIEHE, C. (1994): *Aspects of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity*, in: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 37, 12, 1981–2004.
- NITTA, N. & SHIINA, T. (2000): *A Method of Tissue Elasticity Estimation Based on Three-Dimensional Displacement Vector*, in: *The Japanese Journal of Applied Physics*, Volume 39, 1, 3225–3229.
- OBERAI, A. A., GOKHALE, N. H., DOYLEY, M. M. & BAMBER, J. C. (2004): *Evaluation of the adjoint equation based algorithm for elasticity imaging*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 49, 2955–2974.
- OBERAI, A. A., GOKHALE, N. H. & FEIJÓO, G. R. (2003): *Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method*, in: *Inverse Problems*, Volume 19, 2, 297–313.
- OGDEN, R. W. (1972): *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*, in: *Proceedings of the Royal Society of London (Series A, Mathematical and Physical Sciences)*, 1972, Volume 328, pp. 567–583.
- OGDEN, R. W. (1984): *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover Publications 1984.
- OPHIR, J., ALAM, S. K., GARRA, B. S., KALLEL, F., KONOFAGOU, E. E., KROUSKOP, T., MERRITT, C. R. B., RIGHETTI, R., SOUCHON, R., SRINIVASAN, S. & VARGHESE, T. (2002): *Elastography: Imaging the Elastic Properties of Soft Tissues with Ultrasound*, in: *Journal of Medical Ultrasonics*, Volume 29, 4, 155–171.
- OPHIR, J., CÉSPÉDES, I., PONNEKANTI, H., YAZDI, Y. & LI, X. (1991): *Elastography: A quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues*, in: *Ultrasonic Imaging*, Volume 13, 111–134.

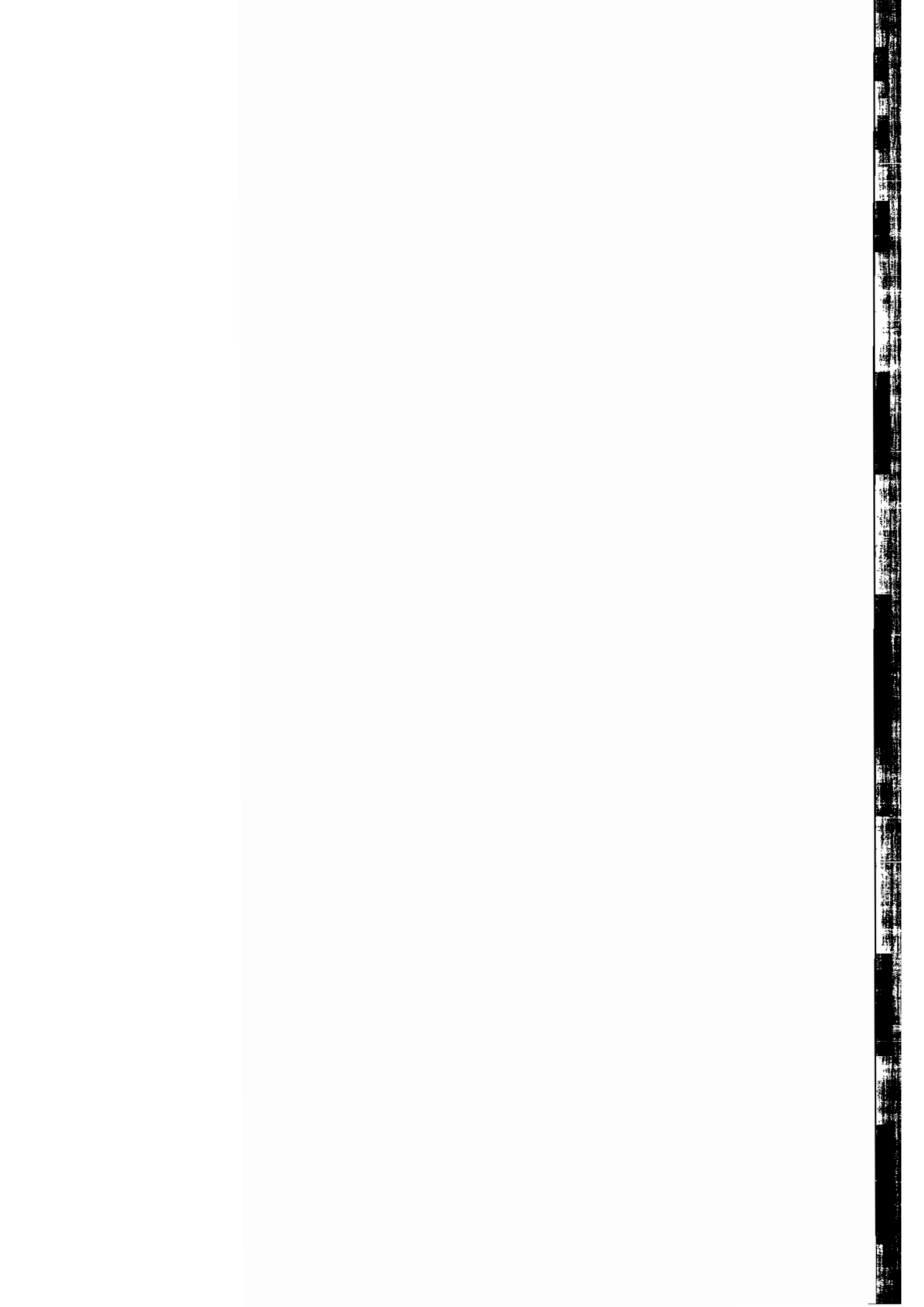
- PEPPAS, N. A. & STAUFFER, S. R. (1991): *Reinforced uncrosslinked poly(vinyl alcohol) gels produced by cyclic freezing-thawing processes: a short review*, in: *Journal of Controlled Release*, Volume 16, 305–310.
- PESAVENTO, A. (1999): *Quantitative Ultraschallbildgebungsverfahren für die Muskeldiagnostik 1999*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Hochfrequenztechnik.
- PESAVENTO, A., LORENZ, A., SIEBERS, S. & ERMERT, H. (2000): *New real-time strain imaging concepts using diagnostic ultrasound*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 45, 1423–1435.
- PLEWES, D. B., BISHOP, J., SAMANI, A. & SCIARRETTA, J. (2000): *Visualization and quantification of breast cancer biomechanical properties with magnetic resonance elastography*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 45, 1591–1610.
- RAGHAVAN, K. R. & YAGLE, A. E. (1994): *Forward and Inverse Problems in Elasticity Imaging of Soft Tissues*, in: *IEEE Transactions on Nuclear Science*, Volume 41, 4, 1639–1648.
- REICHLING, S., KHALED, W., BRUHNS, O. T. & ERMERT, H. (2005): *Shear modulus identification in soft tissue-like materials*, in: *PAMM*, 2005, Volume 5, pp. 511–512.
- REICHLING, S., KHALED, W., BRUHNS, O. T. & ERMERT, H. (2006a): *Elastic Imaging at Finite Deformations*, in: *Proceedings of the Fifth International Conference on the Ultrasonic Measurement and Imaging of Tissue Elasticity*, Snowbird, Utah, USA 2006, p. 128.
- REICHLING, S., KHALED, W., BRUHNS, O. T. & ERMERT, H. (2006b): *Ultrasound elastography in consideration of finite deformations*, in: *Journal of Biomechanics*, 2006, Volume 39, Suppl. 1, p. S450.
- RIEDER, A. (2003): *Keine Probleme mit Inversen Problemen*, Vieweg Verlag Wiesbaden 2003.
- SALEEB, A. F., CHANG, T. Y. P. & ARNOLD, S. M. (1992): *On the development of explicit robust schemes for implementation of a class of hyperelastic models in large-strain analysis of rubbers*, in: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 33, 6, 1237–1249.
- SCHENK, O. & GÄRTNER, K. (2004): *Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO*, in: *Journal of Future Generation Computer Systems*, Volume 20, 3, 475–487.

- SCHENK, O. & GÄRTNER, K. (2006): *On fast factorization pivoting methods for sparse symmetric indefinite systems*, in: *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Volume 23, 158–179.
- SCHERZER, O. (1993): *The Use of Morozov's Discrepancy Principle for Tikhonov Regularization for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems*, in: *Computing*, Volume 51, 45–60.
- SCHERZER, O., ENGL, H. W. & KUNISCH, K. (1993): *Optimal a Posteriori Parameter Choice for Tikhonov Regularization for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems*, in: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Volume 30, 1796–1838.
- SIMO, J. C. & HUGHES, T. J. R. (1998): *Computational Inelasticity*, Volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer-Verlag New York 1998.
- SIMO, J. C. & TAYLOR, R. L. (1991): *Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms*, in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 85, 273–310.
- SIMO, J. C., TAYLOR, R. L. & PISTER, K. S. (1985): *Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity*, in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 51, 177–208.
- SINKUS, R., LORENZEN, J., SCHRADER, D., LORENZEN, M., DARGATZ, M. & HOLZ, D. (2000): *High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection*, in: *Physics in Medicine and Biology*, Volume 45, 1649–1664.
- SKOVORODA, A. R. (2000): *Reconstruction of Elastic Properties of Soft Biological Tissues from Data on Their Deformation under Dynamic Loading*, in: *Biophysics*, Volume 45, 4, 704–710.
- SKOVORODA, A. R., EMELIANOV, S. Y., LUBINSKI, M. A., SARVAZYAN, A. P. & O'DONNELL, M. (1994): *Theoretical Analysis and Verification of Ultrasound Displacement and Strain Imaging*, in: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Volume 41, 3, 302–313.
- SKOVORODA, A. R., EMELIANOV, S. Y. & O'DONNELL, M. (1995): *Tissue Elasticity Reconstruction Based on Ultrasonic Displacement and Strain Images*, in: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Volume 42, 4, 747–765.
- SKOVORODA, A. R., LUBINSKI, M. A., EMELIANOV, S. Y. & O'DONNELL, M. (1998): *Nonlinear Estimation of the Lateral Displacement Using Tissue Incompressibility*, in: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume 45, 2, 491–503.

- SKOVORODA, A. R., LUBINSKI, M. A., EMELIANOV, S. Y. & O'DONNELL, M. (1999): *Reconstructive Elasticity Imaging for Large Deformations*, in: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Volume 46, 3, 523–535.
- STAUFFER, S. R. & PEPPAS, N. A. (1992): *Poly (vinyl alcohol) hydrogels prepared by freezing-thawing cyclic processing*, in: Polymer, Volume 33, 18, 3932–3936.
- STEELE, D. D., CHENEVERT, T. L., SKOVORODA, A. R. & EMELIANOV, S. Y. (2000): *Three-dimensional static displacement stimulated echo NMR elasticity imaging*, in: Physics in Medicine and Biology, Volume 45, 1633–1648.
- STEIN, E. & BARTHOLD, F.-J. (1996): *Elastizitätstheorie*, in: MEHLHORN, G. (Ed.): *Der Ingenieurbau - Grundwissen*, Ernst & Sohn 1996, Volume 4, pp. 165–428.
- SUMI, C. & NAKAYAMA, K. (1998): *A robust numerical solution to reconstruct a globally relativeshear modulus distribution from strain measurements*, in: IEEE Transactions on Medical Imaging, Volume 17, 3, 419–428.
- SUMI, C., SUZUKI, A. & NAKAYAMA, K. (1995): *Estimation of Shear Modulus Distribution in Soft Tissue from Strain Distribution*, in: IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Volume 42, 2, 193–202.
- SURRY, K. J. M., AUSTIN, H. J. B., FENSTER, A. & PETERS, T. M. (2004): *Poly(vinyl alcohol) cryogel phantoms for use in ultrasound and MR imaging*, in: Physics in Medicine and Biology, Volume 49, 24, 5529–5546.
- TRUESDELL, C. & NOLL, W. (2004): *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, 3rd Edition, Springer-Verlag 2004.
- VERONDA, D. R. & WESTMANN, R. A. (1970): *Mechanical characterization of skin - Finite deformations*, in: Journal of Biomechanics, Volume 3, 111–122.
- WASHIZU, K. (1975): *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2 Edition, Pergamon Press 1975.
- WATASE, M. & NISHINARI, K. (1989): *Effect of the degree of saponification on the rheological and thermal properties of poly(vinyl alcohol) gels*, in: Die Makromolekulare Chemie, Volume 190, 155–163.
- WRIGGERS, P. (2001): *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag 2001.
- YAMAKAWA, M. & SHIINA, T. (1999): *Tissue Elasticity Reconstruction Based on 3-Dimensional Finite-Element Model*, in: Japanese Journal of Applied Physics, Volume 38, 1, 3393–3398.

- ZHU, C., BYRD, R. H. & NOCEDAL, J. (1997): *L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization*, in: ACM Transactions on Mathematical Software, Volume 23, 4, 550–560.
- ZHU, Y., HALL, T. J. & JIANG, J. (2003): *A Finite-Element Approach for Young's Modulus Reconstruction*, in: IEEE Transactions on Medical Imaging, Volume 22, 7, 890–901.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (2000): *Solid Mechanics*, Volume 2 of *The Finite Element*, 5 Edition, Butterworth-Heinemann 2000.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (2002): *The Basis*, Volume 1 of *The Finite Element*, 5 Edition, Butterworth-Heinemann 2002.





Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann (Dezember 1976):
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann (Juni 1978):
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings (Januar 1976):
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke (Januar 1976):
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze (Februar 1976):
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer (Januar 1977):
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl (März 1977):
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers (April 1977):
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer (April 1977):
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz (Mai 1977):
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom (Juni 1977):
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig (Juli 1977):
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen

- Nr. 13 Pawel Rafalski (März 1978):
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers (Juli 1978):
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert (August 1979):
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz (Juli 1979):
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl (Dezember 1979):
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kohlberg (Juli 1979):
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes (Januar 1980):
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak (März 1980):
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek (Juni 1980):
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow (Dezember 1980):
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss (Februar 1981):
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann (Februar 1981):
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert (März 1981):
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems

- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz (Juni 1981):
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander (September 1981):
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski (September 1981):
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen (November 1981):
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl (Dezember 1981):
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek (Juni 1982):
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner (Juli 1982):
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu (Dezember 1982):
Variationsprinzip der Thermoplastizität: I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf (Dezember 1982):
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf (März 1983):
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft (Juli 1983):
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu (August 1983):
Variationsprinzip der Thermoplastizität: II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse

- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley (November 1983):
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte (Dezember 1983):
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix (Dezember 1983):
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker (Februar 1984):
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard (Februar 1984):
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel (Dezember 1984):
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik (April 1985):
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp (Juni 1985):
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf (Juli 1985):
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch (August 1985):
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte (Oktober 1985):
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger (Dezember 1985):
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid (Februar 1987):
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier (März 1987):
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski (Juli 1987):
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert (Dezember 1987):
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe (Januar 1988):
Wellenausbreitung in akustischen Medien: Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz (März 1988):
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf (April 1988):
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape (Mai 1988):
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege (Juni 1988):
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua Liu (Juli 1988):
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt (August 1988):
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer (Juli 1988):
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf (Dezember 1988):
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory

- Nr. 63 O. T. Bruhns (Januar 1989):
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert (Juli 1989):
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller (Juni 1989):
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl (Juni 1989):
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis (November 1989):
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker (November 1989):
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck (November 1989):
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan (Dezember 1989):
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz (Dezember 1989):
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf (Dezember 1989):
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld (Januar 1990):
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf (April 1990):
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller (April 1991):
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua

- Nr. 76 Ulfert Rott (April 1991):
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel (Juli 1991):
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns (Dezember 1991):
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller (Mai 1992):
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann (Juli 1992):
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé (Februar 1993):
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus (Mai 1993):
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo (Juni 1993):
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne (Januar 1994):
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert (Januar 1994):
Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kuppungen
- Nr. 88 Jörg Körber (April 1994):
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle

- Nr. 89 Peer Schieße (April 1994):
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff (Juli 1994):
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens (Juli 1994):
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf (November 1994):
Finte elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns (Dezember 1994):
Große plastische Formänderungen – Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen (Dezember 1994):
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung – Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf (Dezember 1994):
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf (Dezember 1994):
Finte Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a. (Februar 1995):
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny (April 1995):
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff (Juli 1995):
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach (Dezember 1995):
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe (Mai 1996):
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie

- Nr. 102 Marcus Otto (Juni 1996):
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath (Juli 1996):
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann (August 1996):
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung
- Nr. 105 Bjarne Fosså (Oktober 1996):
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 Khanh Cha Le (Dezember 1996):
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 Holger Behrens (Januar 1997):
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kuppungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 Johannes Moosheimer (Juli 1997):
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding (Oktober 1997):
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 Stephan Weng (Dezember 1997):
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 Michael Strassberger (Dezember 1997):
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Struktur-schwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker (Dezember 1997):
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 Thomas Nerzak (Dezember 1997):
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 O. T. Bruhns (März 1998):
Große plastische Formänderungen

- Nr. 115 Jan Steinhausen (August 1998):
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 116 Thomas Pandorf (August 1998):
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg (Juni 1999):
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität
- Nr. 118 Michael Märtens (Dezember 1999):
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren
- Nr. 119 Dirk Kamarys (Dezember 1999):
Detektion von Strukturveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse
- Nr. 120 Wolfgang Hiese (Januar 2000):
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten
- Nr. 121 Peter Jaschke (Februar 2000):
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen
- Nr. 122 Stefan Müller (Februar 2000):
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken
- Nr. 123 Dirk Eichel (Juni 2000):
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen
- Nr. 124 Andreas Bürgel (August 2000):
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse
- Nr. 125 Daniela Lürding (März 2001):
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen
- Nr. 126 Thorsten Quent (Mai 2001):
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung

- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba (Mai 2001):
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung
- Nr. 128 Henning Schütte (August 2001):
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen
- Nr. 129 Henner Vogelsang (Dezember 2001):
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen
- Nr. 130 Jörn Mosler (Dezember 2002):
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände
- Nr. 131 Karin Preusch (Mai 2003):
Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode
- Nr. 132 Christoph Müller (August 2003):
Thermodynamic modeling of polycrystalline shape memory alloys at finite strains
- Nr. 133 Martin Heiderich (Juni 2004):
Ein Beitrag zur zerstörungsfreien Schädigungsanalyse
- Nr. 134 Raoul Costamagna (Juli 2004):
Globale Materialbeziehungen für das geklüftete Gebirge
- Nr. 135 Markus Böhl (Januar 2005):
Numerische Simulation von Polymernetzwerken mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode
- Nr. 136 Gregor Kotucha (August 2005):
Regularisierung von Problemen der Topologieoptimierung unter Einbeziehung von Dichtegradienten
- Nr. 137 Michael Steiner (Februar 2006):
Deformations- und Versagensverhalten innendruckbeanspruchter Stahlrohre durch Stoßbelastung
- Nr. 138 Dirk Bergmannshoff (Dezember 2006):
Das Instabilitätsverhalten zug-/scherbeanspruchter Risse bei Variation des Belastungspfades

- Nr. 139 Olaf Schilling (Januar 2007):
Über eine implizite Partikelmethode zur Simulation von Umformprozessen
- Nr. 140 Jörn Mosler (Mai 2007):
On the numerical modeling of localized material failure at finite strains by means of variational mesh adaption and cohesive elements
- Nr. 141 Rainer Fechte-Heinen (Juni 2007):
Mikromechanische Modellierung von Formgedächtnismaterialien
- Nr. 142 Christian Grabe (Juni 2007):
Experimental testing and parameter identification on the multidimensional material behavior of shape memory alloys
- Nr. 143 Markus Peters (Juli 2007):
Modellierung von Rissausbreitung unter Verwendung der p-Version der XFEM mit einer adaptiven Integrationsmethode
- Nr. 144 Claus Oberste-Brandenburg (Juli 2007):
Thermomechanical modeling of shape memory alloys at different length scales
- Nr. 145 Stefan Reichling (Juli 2007):
Das inverse Problem der quantitativen Ultraschallelastografie unter Berücksichtigung großer Deformationen





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 145**

978-3-935892-20-9