

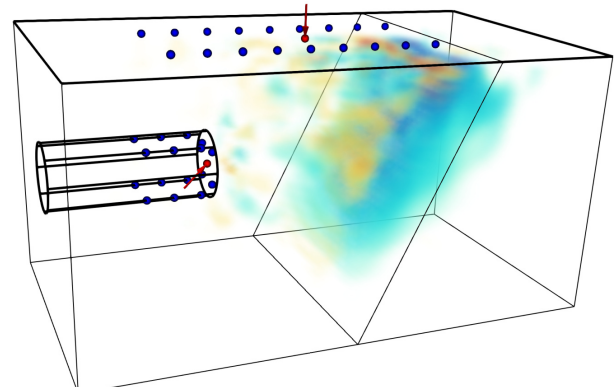
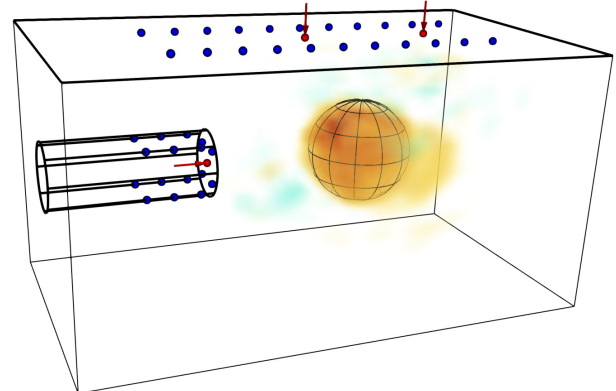
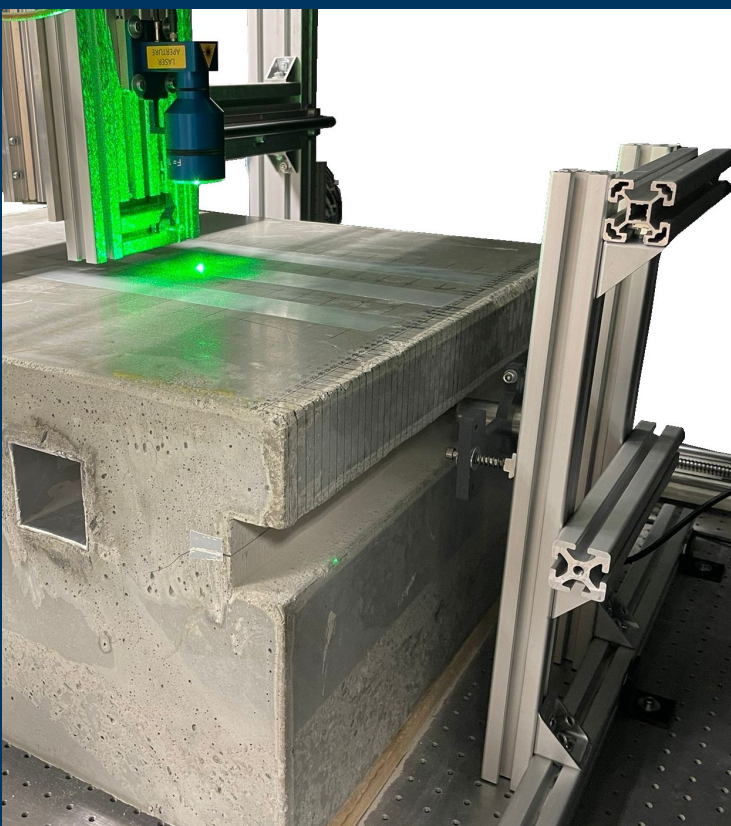
**Sonderforschungsbereich 837**

Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau

# Untersuchung der Full-Waveform-Inversion für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau

Betrachtung eines Frequenzbereichsansatzes mittels synthetischer und experimenteller Daten

Christopher Riedel







# **Untersuchung der Full-Waveform-Inversion für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau**

*Betrachtung eines Frequenzbereichsansatzes  
mittels synthetischer und experimenteller Daten*

Dissertation  
zur  
Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der  
Fakultät für Maschinenbau  
der Ruhr-Universität Bochum

von

**Christopher Riedel**

aus Essen

Bochum 2024

Herausgeber (Publisher):

Institut für Mechanik

— Schriftenreihe —

Ruhr-Universität Bochum

D-44780 Bochum

---

ISBN 978-3-935892-71-1

---

This material is presented to ensure timely dissemination of scholarly and technical work. Copyright and all rights therein are retained by the copyright holders. All persons copying this information are expected to adhere to the terms and constraints invoked by the author's copyright. These works or parts of it may not be used to repost reprint/republish or for creating new collective works for resale or redistribution to servers or lists without the explicit permission of the copyright holder.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2024 Christopher Riedel, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Einreichung der Dissertation (thesis submission):: 25. März 2024

Tag der mündlichen Prüfung (thesis defense): 28. Juni 2024

Erster Gutachter (first referee):

Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Zweiter Gutachter (second referee):

Prof. Dr. Wolfgang Friederich

Vorsitzender (committee chair):

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Weber

„Wissen, was man weiß, und wissen, was man nicht weiß,  
das ist wahres Wissen.“ – Konfuzius

*Meiner Meinung nach ist es wichtiger zu wissen,  
was man nicht weiß, als zu wissen, was man weiß.  
Denn nur so wird man in die Lage versetzt,  
sich fehlendes Wissen aneignen zu können.*



## Danksagung

Die vorliegende Dissertationsschrift ist das Ergebnis meiner Arbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanik – Materialtheorie an der Ruhr-Universität Bochum. Meine Forschung fand im Verbund des Teilprojekts A2 „Entwicklung effektiver Konzepte der Vorerkundung im Tunnelbau mittels akustischer Verfahren“ des Sonderforschungsbereichs 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“ statt. Der Sonderforschungsbereich und somit anteilmäßig auch meine Arbeit wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (SFB837/3-2018) finanziell unterstützt, wofür ich mich herzlich bedanke.

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei meinem Betreuer und Erstgutachter Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat am Lehrstuhl zu arbeiten, mich weiterzuentwickeln und meine Dissertationsschrift zu verfassen. Ich wusste sein Vertrauen, welches er mir in Bezug auf meine Arbeit entgegen gebracht hat sowie die sehr menschliche Art und Weise, wie er den Lehrstuhl geführt hat, sehr zu schätzen. Während verschiedener persönlicher Schicksalsschläge hat er mir immer Rückhalt geboten und Lösungen ermöglicht, welche ich in dem Ausmaß als nicht selbstverständlich ansehe und wofür ich sehr dankbar bin. Prof. Dr. Wolfgang Friederich möchte ich sowohl dafür danken, dass er als Zweitgutachter meine Dissertationsschrift begutachtet hat, als auch für die erfolgreiche Zusammenarbeit in unserem Teilprojekt des Sonderforschungsbereichs, im Rahmen derer er durch seine geophysikalische Expertise, seine kritische Begutachtung von wissenschaftlichen Texten sowie durch seine sehr umgängliche Art eine große Bereicherung darstellte. Prof. Dr.-Ing. Sebastian Weber danke ich für die sehr unkomplizierte Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Des Weiteren möchte ich mich bei Dr.-Ing. Khayal Musayev dafür bedanken, dass ich seine Programmierung sowie die Ergebnisse seiner wissenschaftlichen Arbeit als Ausgangspunkt für meine akademische Reise nutzen durfte. Prof. Dr.-Ing. Matthias Baitsch möchte ich dafür danken, dass wir unsere Ansätze in seine Programmierung der Finite-Elemente-Methode implementieren durften. Insbesondere beim Einrichten der Programmierung auf meinem Computer sowie auf dem Rechencluster war seine Zuarbeit unverzichtbar. Bei mehreren weiteren programmiertechnischen Problemen und Überlegungen stand er mir gerne, häufig im Rahmen einer gemeinsamen Mittagspause, zur Seite.

Die Arbeit im Verbund des Sonderforschungsbereichs hat mir sehr viel Freude bereitet. Daher möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Jörg Sahlmen und Prof. Dr.-Ing. Steffen Freitag bedanken, welche sich auf eine sehr emphatische Art für die Interessen von uns Doktoranden eingesetzt haben. Insbesondere möchte ich mich bei meinen Arbeitskollegen aus meinem Teilprojekt, Dr. Andre Lamert und Dr.-Ing. Maximilian Trapp, für die erfolgreiche, erfrischende und bereichernde Zusammenarbeit bedanken. Vor allem zum Ende des Sonderforschungsbereichs stellten häufig die Videokonferenzen mit Dr.-Ing. Maximilian Trapp die Höhepunkte meines Arbeitstags dar. Des Weiteren möchte ich Prof. Dr.-Ing. Tamara Nestorović für die Zusammenarbeit im gemeinsamen Teilprojekt sowie für die Möglichkeit, den kleinskaligen Versuchsaufbau der Arbeitsgruppe „Mechanik adaptiver Systeme“ der Ruhr-Universität Bochum nutzen zu dürfen, danken. In dem Zusammenhang bedanke ich mich auch bei Herrn Daniel Lehmann und nochmals bei Dr.-Ing.

Maximilian Trapp für die Anleitung und Unterstützung der experimentellen Untersuchungen und Messungen. Dem Team des Beton- und Mörtellabors der „Konstruktionsteilprüfung“ des „Institut für Konstruktiven Ingenieurbau“ der Ruhr-Universität Bochum um Dr.-Ing. Karsten Winkler danke ich für die Beratung und Herstellung meiner „Wunschprobe“.

Während meiner Zeit am Lehrstuhl für Mechanik – Materialtheorie sorgten meine Kolleginnen und Kollegen für eine produktive und angenehme Arbeitsatmosphäre, wo auch immer Raum und Zeit für ein persönliches Gespräch blieb. Insbesondere möchte ich mich bei Dr.-Ing. Dustin Roman Jantos bedanken. Nach der Betreuung meiner Masterarbeit teilten wir uns drei Jahre lang ein Büro und tauschten uns nebenbei kontinuierlich über unsere Forschung und andere alltägliche Dinge aus. Dieser Austausch war in vielerlei Hinsicht eine riesige Unterstützung für mich. Des Weiteren möchte ich Dr.-Ing. Ulrich Hoppe danken, welcher durch sein Organisationsgeschick, sein Engagement und seine Erfahrung für einen reibungslosen Ablauf am Lehrstuhl gesorgt hat und für alle Fragen sowie Sorgen immer ein offenes Ohr hatte. Sein zwischenmenschlicher Umgang mit Studierenden und uns Mitarbeitern hatte für mich einen vorbildlichen Charakter und trug erheblich zu der guten Atmosphäre bei. Ich durfte am Lehrstuhl und an unserem Institut viele weitere tolle Menschen kennenlernen, mit welchen ich hoffentlich noch lange den Kontakt halten kann.

Gerne denke ich an die Zeit zurück, als ich unter Anleitung meiner damaligen Betreuerin Jana Musialak im Labor des Lehrstuhls Mechanik – Kontinuumsmechanik der Ruhr-Universität Bochum Untersuchungen für meine Bachelorarbeit und Arbeiten im Rahmen meiner späteren Tätigkeit als studentische Hilfskraft durchgeführt habe. Die freundschaftliche Zusammenarbeit, für die ich mich herzlich bedanke, hat mir sehr viel Vergnügen bereitet und erstmals mein Interesse geweckt, eine Promotion anzustreben. Prof. Dr.-Ing. Ralf Jänicke möchte ich dafür danken, dass er mich in diesem Interesse bestärkt und mir als studentische Hilfskraft anspruchsvolle Aufgaben in der Lehre zugewiesen hat, welche mir einerseits als Sprungbrett dienten und mich andererseits auch während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter fortlaufend begleitet haben.

Ich möchte mich auch bei meinen ehemaligen Kommilitoninnen und Kommilitonen bedanken, welche sowohl während meines Grundstudiums, als auch während meines Studiums der Vertiefungsrichtung „Angewandte Mechanik“ dafür gesorgt haben, dass die Universität für mich ein heimischer Ort wurde. Viele Freundschaften sind aus dieser Zeit geblieben, für welche ich sehr dankbar bin.

Für mich war auch immer die Unterstützung und Ablenkung durch meine Freunde abseits der Arbeit wichtig. An dieser Stelle will ich Matthias Woort dafür danken, dass er meine Dissertationsschrift, trotz fehlender mathematischer und physikalischer Kenntnisse, gelesen und mir geholfen hat, diese in Bezug auf Grammatik und Rechtschreibung zu verbessern.

Meine Familie und unsere engsten Familienfreunde haben mich stets in meinen Bestrebungen unterstützt und ermutigt. Dabei möchte ich meiner Partnerin Gina danken, welche in den letzten Jahren durch meine Arbeit viele Entbehrungen hinnehmen musste. Zuletzt will ich mich bei meiner Mutter bedanken, welche mich immer bedingungslos unterstützt hat. Obwohl sie mir bei naturwissenschaftlichen Fragestellungen schon früh nicht mehr helfen konnte, schuf sie den nötigen Rahmen, in welchem ich meinen Interessen nachgehen konnte und förderte schon zu meiner Schulzeit das Arbeitsverhalten, welches mir meinen Werdegang und damit diese Dissertationsschrift erst ermöglichte.



## Kurzfassung

Beim maschinellen Tunnelbau ermöglicht das Wissen über die geologische Beschaffenheit des zu durchdringenden Bodens eine Anpassung des Vortriebsprozesses, sodass Schäden aufgrund von unvorhergesehenen geologischen Änderungen reduziert und dadurch Kosten eingespart werden können. Eine zerstörungsfreie Erkundung des Bodens ist beispielsweise durch die Untersuchung von seismischen Wellen möglich, welche sich im Boden ausbreiten, an freien Oberflächen reflektiert und an Grenzflächen von geologischen Änderungen sowohl reflektiert als auch gebrochen werden. Daher enthalten die Seismogramme, welche an mehreren Positionen aufgezeichnet werden, Informationen über die Geologie vor der Ortsbrust, welche es zu extrahieren gilt. Während gängige Migrationsmethoden vornehmlich nur die ersten Wellen, welche von potentielle Störkörper reflektiert wurden, analysieren, werden bei der Verwendung der Full-Waveform-Inversion alle gemessenen Wellenformen für die Erkundung des Bodens eingesetzt. Dazu werden die Unterschiede zwischen den gemessenen Wellenformen und den durch ein synthetisches Bodenmodell approximierten Wellenformen durch eine räumliche Anpassung der Eigenschaften des synthetischen Bodenmodells minimiert. Anhand der räumlichen Änderungen der Eigenschaften des abschließenden Bodenmodells ist eine akkuratere Vorhersage der Störkörper potentiell möglich.

In dieser Arbeit werden synthetische und experimentelle Daten verwendet, um das Potenzial eines gradientenbasierten Ansatzes der Full-Waveform-Inversion für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau konzeptionell zu untersuchen. Für den gewählten Ansatz werden sowohl die Wellenformen im Frequenzbereich approximiert als auch die Unterschiede zwischen den berechneten und den vorgegebenen Wellenformen im Frequenzbereich minimiert. Die unterschiedlichen Inversionsmethoden und -strategien sowie einige Aspekte, welche für den Einsatz im maschinellen Tunnelbau zu berücksichtigen sind, werden erläutert. Anhand von zweidimensionalen und dreidimensionalen synthetischen Tunnelumgebungen wird der Inversionsansatz untersucht und verifiziert. Dabei werden der Einfluss von unterschiedlichen Messanordnungen, von einer Unter- und Überschätzung der wirkenden intrinsischen Dämpfungseffekte sowie die Effizienz der simultanen Approximation der Quellfunktionen während des Inversionsprozesses untersucht. Mit welcher Genauigkeit unterschiedliche Kombinationen von Störkörpern detektiert werden können, wird unter anderem durch einen Blindtest untersucht, bei welchem die zu detektierenden Störungen vor der Inversion nicht bekannt waren. Mittels der Daten eines kleinskaligen Laborexperiments wird der Inversionsansatz auch mit realen Daten validiert. Die untersuchte Probe, in welcher sich ein zu detektierendes Loch befindet, besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit einer oberflächennahen Tunnelumgebung. Weitere Schritte, welche für einen Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau sinnvoll erscheinen, werden abschließend diskutiert.

## Abstract

In mechanized tunneling, damages due to geological changes can be reduced and therefore costs can be saved by adapting the excavation process based on information of the geological condition of the ground. Non-destructive exploration of the ground is possible, for example, by investigating seismic waves that propagate in the ground. They are reflected at free surfaces and are as well reflected as also refracted at interfaces of geological changes. Therefore, the seismic records, which are recorded at several positions, contain information about the geology in front of the tunnel face, which can be extracted. While migration methods that are used today primarily analyze only the first waves which have been reflected by potential disturbances, all measured waveforms are used to explore the ground by using full waveform inversion. In full waveform inversion, the differences between the measured waveforms and the waveforms approximated with a synthetic model of the ground are minimized by spatially adjusting the properties of the synthetic ground model. Based on the spatial changes in the properties of the final ground model, a more accurate prediction of the disturbances may be possible.

In this work, synthetic and experimental data are used to conceptually investigate the potential of a gradient-based full waveform inversion approach for seismic exploration in mechanized tunneling. For the proposed approach, the waveforms are approximated in the frequency domain and the differences between the approximated and the real waveforms are also minimized in the frequency domain. The various inversion methods, strategies and some aspects to be considered for utilization in mechanized tunneling are explained. The inversion approach is investigated and validated using two-dimensional and three-dimensional synthetic tunnel environments. The influence of different measurement setups, an under- and overestimation of the intrinsic damping effects as well as the efficiency of the simultaneous approximation of the source signatures during the inversion process are examined. The accuracy with which different combinations of disturbances can be detected is investigated, among other things, by means of a blind test in which the disturbances to be detected were not known before the inversion. The inversion approach is also validated with real data by using data from a small-scale laboratory experiment. The examined test specimen, in which a hole to be detected is located, has a certain similarity to a tunnel environment located near the earth's surface. Finally, further steps that appear useful for the use of full waveform inversion for exploration in mechanized tunneling are discussed.

## Abbildungsverzeichnis

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1.  | Doppelschild-Tunnelbohrmaschine . . . . .   | 3  |
| 1.2.  | Schematisches Szenario einer seismischen Messung für die Vorauserkundung<br>im maschinellen Tunnelbau . . . . .   | 6  |
| 1.3.  | Schematischer Ablauf der Full-Waveform-Inversion . . . . .  | 10 |
| 2.1.  | Räumliche und zeitliche Verschiebungen . . . . .  | 16 |
| 2.2.  | Ricker- und Toneburst-Signal . . . . .  | 20 |
| 2.3.  | Schematische Darstellung von Kompressionswellen . . . . .   | 21 |
| 2.4.  | Schematische Darstellung von Scherwellen . . . . .  | 22 |
| 2.5.  | Schematische Darstellung von Rayleigh-Wellen . . . . .  | 23 |
| 2.6.  | Schematische Darstellung von Love-Wellen . . . . .  | 24 |
| 2.7.  | Reflexion und Brechung einer Wellenfront an einer Grenzfläche mittels des<br>Huygensschen Prinzips . . . . .  | 27 |
| 2.8.  | Reflexion, Brechung und Konversion von Wellenstrahlen an einer Grenzfläche .  | 29 |
| 2.9.  | Seismische Wellenausbreitung in einer zweidimensionalen Tunnelumgebung .  | 32 |
| 2.10. | Seismogramme zur seismischen Wellenausbreitung in einer zweidimensionalen<br>Tunnelumgebung . . . . .   | 33 |
| 2.11. | Ricker- und Toneburst-Signal im Frequenzbereich . . . . .   | 37 |
| 2.12. | Vergleich von Seismogrammen im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .  | 40 |
| 3.1.  | Schematische Darstellung der Perfectly-Matched-Layer . . . . .  | 50 |
| 3.2.  | Eindimensionale Lagrange-Ansatzfunktionen . . . . .   | 60 |
| 3.3.  | Eindimensionale hierarchische Ansatzfunktionen . . . . .  | 61 |
| 3.4.  | Isoparametrische ebene Referenzelemente . . . . .   | 62 |
| 3.5.  | Moden der hierarchischen Ansatzfunktionen eines Viereckelements . . . . .   | 63 |
| 3.6.  | Moden der hierarchischen Ansatzfunktionen eines Dreieckelements . . . . .   | 65 |
| 3.7.  | Isoparametrisches Referenzelement eines Hexaederelements . . . . .  | 67 |
| 3.8.  | Isoparametrisches Referenzelement eines Prismenelements . . . . .   | 68 |
| 3.9.  | Konformität der Kantenmoden von hierarchischen Ansatzfunktionen . . . . .   | 70 |
| 3.10. | Anpassung des hierarchischen Ansatzgrads . . . . .  | 72 |
| 4.1.  | Vergleich von numerischen und analytischen Greenschen Funktionen für ein<br>zweidimensionales unbegrenztes Gebiet . . . . .                               | 77 |
| 4.2.  | Vergleich von numerischen und analytischen Greenschen Funktionen für ein<br>zweidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie . . . . .           | 78 |
| 4.3.  | Normierte Differenz einer numerischen und analytischen Greenschen Funktion<br>für ein zweidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie . . . . . | 78 |
| 4.4.  | Zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung . . . . .   | 79 |
| 4.5.  | Vergleich von Seismogrammen für Verschiebungen in $x$ -Richtung für eine zwei-<br>dimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung . . . . .                   | 80 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 4.6.  | Vergleich von Seismogrammen für Verschiebungen in $y$ -Richtung für eine zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung . . . . .   | 81  |
| 4.7.  | Normierte Differenz zwischen den Seismogrammen des Frequenzbereichsmodells und den SPEC-FEM2D Seismogrammen für Verschiebungen in $y$ -Richtung . . . . .                              | 81  |
| 4.8.  | Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit homogenen Bodeneigenschaften für 300 Hz und 500 Hz . . . . .   | 82  |
| 4.9.  | Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit einer viereckigen Störung vor dem Tunnel für 500 Hz . . . . .  | 83  |
| 4.10. | Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit homogenen viskoelastischen Bodeneigenschaften für 500 Hz . . . . .   | 84  |
| 4.11. | Vergleich der Greenschen Funktionen für verschiedene Qualitätsfaktoren und Frequenzen für eine zweidimensionale homogene Tunnelumgebung . . . . .                                      | 84  |
| 4.12. | Vergleich von numerischen und analytischen Greenschen Funktionen für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet . . . . .   | 86  |
| 4.13. | Vergleich von numerischen und analytischen Greenschen Funktionen für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie . . . . .   | 87  |
| 4.14. | Normierte Differenz der numerischen und analytischen Greenschen Funktion für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie . . . . .                                   | 88  |
| 4.15. | Dreidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung . . . . .  | 89  |
| 4.16. | Vergleich von Seismogrammen in Bezug auf den Realteil der Greenschen Funktionen in $y$ -Richtung im Frequenzbereich für eine dreidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung . . . . . | 90  |
| 4.17. | Normierte frequenzabhängige Änderung der Summe der Fehlerquadrate der Greenschen Funktionen einer dreidimensionalen oberflächennahen Tunnelumgebung . . . . .                          | 91  |
| 4.18. | Wellenfelder einer dreidimensionalen Tunnelumgebung mit homogenen Bodeneigenschaften für eine Frequenz von 1200 rad/s . . . . .  | 92  |
| 5.1.  | Lokale und globale Minima des Fehlerfunktional . . . . .   | 95  |
| 5.2.  | Diskreter adjungierter Gradient . . . . .  | 100 |
| 5.3.  | Ablaufschema des Liniensuchverfahrens . . . . .  | 107 |
| 5.4.  | Exemplarische Darstellung der Funktionsweise des Liniensuchverfahrens . . . . .  | 108 |
| 5.5.  | Veranschaulichung des Multi-Skalen-Ansatzes . . . . .  | 110 |
| 5.6.  | Schematischer Ablauf der Full-Waveform-Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion . . . . .  | 118 |
| 6.1.  | Referenzmodell einer tiefliegenden und einer oberflächennahen zweidimensionalen Tunnelumgebungen mit drei Störkörpern . . . . .  | 127 |
| 6.2.  | Zwischenergebnisse einer Inversion nach den ersten drei und den ersten elf Frequenzgruppen . . . . .   | 128 |
| 6.3.  | Ergebnisse der Inversion zur Detektion von drei Störkörpern . . . . .  | 130 |
| 6.4.  | Abgleich von rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten entlang von drei Linien . . . . .   | 132 |
| 6.5.  | Änderung des normierten Fehlerfunktional während der Inversion . . . . .   | 133 |
| 6.6.  | Inversionsergebnisse für etablierte Messanordnungen in einer tiefliegenden Tunnelumgebung . . . . .  | 134 |
| 6.7.  | Inversionsergebnisse für etablierte Messanordnungen in einer oberflächennahen Tunnelumgebung . . . . .   | 136 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.8. Ergebnisse der Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion zur Detektion von drei Störkörpern . . . . .   | 140 |
| 6.9. Simultan approximierte Quellfunktion während der Inversion von Verschiebungen einer tiefliegenden Tunnelumgebung . . . . .   | 141 |
| 6.10. Simultan approximierte Quellfunktionen während der Inversion von Verschiebungen einer oberflächennahen Tunnelumgebung . . . . .   | 142 |
| 6.11. Ergebnisse der Inversion zur Detektion von drei Störkörpern unter Berücksichtigung von viskoelastischem Bodenverhalten . . . . .  | 144 |
| 6.12. Ergebnisse der Inversion zur Detektion von drei Störkörpern, für welche die Dämpfung im Inversionsmodell unterschätzt wurde . . . . .   | 147 |
| 6.13. Ergebnisse der Inversion zur Detektion von drei Störkörpern, für welche die Dämpfung im Inversionsmodell überschätzt wurde . . . . .  | 148 |
| 6.14. Messanordnungen und Tunnelumgebung der elastischen Blindtests . . . . .   | 152 |
| 6.15. Vergleich der Referenzseismogramme mit Seismogrammen des Ausgangsmodells für Verschiebungen in $x$ -Richtung . . . . .  | 153 |
| 6.16. Vergleich der Referenzseismogramme mit Seismogrammen des Ausgangsmodells für Verschiebungen in $y$ -Richtung . . . . .  | 153 |
| 6.17. Inversionsergebnisse des ersten Bodenszenarios des elastischen Blindtests . . .   | 155 |
| 6.18. Inversionsergebnisse des zweiten Bodenszenarios des elastischen Blindtests . .  | 158 |
| 6.19. Inversionsergebnisse des dritten Bodenszenarios des elastischen Blindtests . . .  | 160 |
| 6.20. Inversionsergebnisse des vierten Bodenszenarios des elastischen Blindtests . .  | 162 |
| 6.21. Referenzmodell einer Tunnelumgebung mit einem sphärischen Störkörper . . .  | 166 |
| 6.22. Ergebnisse der Inversion zur Detektion eines sphärischen Störkörpers . . . . .  | 168 |
| 6.23. Referenzmodell einer Tunnelumgebung mit einem Schichtwechsel . . . . .  | 170 |
| 6.24. Ergebnisse der Inversion zur Detektion eines Schichtwechsels . . . . .  | 172 |
|   |     |
| 7.1. Versuchsstand . . . . .  | 179 |
| 7.2. Ultraschallwandler . . . . .   | 179 |
| 7.3. Schematischer Messablauf . . . . .   | 180 |
| 7.4. Vergleich der vorgegebenen und der ermittelten Quellfunktion . . . . .   | 181 |
| 7.5. Geometrie der Probe für die synthetischen Voruntersuchungen . . . . .  | 181 |
| 7.6. Vergleich der Wellenformen für zweidimensionale und dreidimensionale Wellenausbreitung in der Probe für die synthetischen Voruntersuchungen . . . . .  | 184 |
| 7.7. Fotos der verwendeten Probe . . . . .  | 185 |
| 7.8. Abmaße der verwendeten Probe und des zweidimensionalen Inversionsmodells   | 186 |
| 7.9. Bestimmung der Wellengeschwindigkeiten der Probe . . . . .   | 187 |
| 7.10. Vergleich von gemessenen und synthetischen Wellenformen . . . . .   | 189 |
| 7.11. Vergleich von gemessenen (nachgeahmte Linienlast durch Superposition) mit synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . .                                      | 190 |
| 7.12. Vergleich von gemessenen (Bleistein-Filter) mit synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . . . .  | 191 |
| 7.13. Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich der gemessenen und synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . . . . | 192 |
| 7.14. Durch die Inversion von gemessenen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . . . .   | 194 |

|   |     |
|---|-----|
| 7.15. Durch die Inversion von synthetischen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . . . .  | 195 |
| 7.16. Änderung der normierten Werte des Fehlerfunktional während der Inversion von gemessenen und synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung . . . . .  | 195 |
| 7.17. Änderung der Summe der Fehlerquadrate für die Bestimmung der Qualitätsfaktoren . . . . .  | 197 |
| 7.18. Vergleich von gemessenen (nachgeahmte Linienlast durch Superposition) mit synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung . . . . .                                  | 198 |
| 7.19. Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich der gemessenen und synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung . . . . . | 199 |
| 7.20. Durch die Inversion von gemessenen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine zweidimensionale Wellenausbreitung unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung . . . . .   | 199 |
| 7.21. Durch die Inversion von synthetischen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine zweidimensionale Wellenausbreitung unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung . . . . .  | 200 |
| 7.22. Abmaße der verwendeten Probe und des dreidimensionalen Inversionsmodells .  | 201 |
| 7.23. Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich der gemessenen und synthetischen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung . . . . .   | 202 |
| 7.24. Durch die Inversion von gemessenen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine dreidimensionale Wellenausbreitung . . . . .   | 202 |
| 7.25. Querschnitt der rekonstruierten räumlichen Änderung der Dichte . . . . .  | 203 |
| 7.26. Durch die Inversion von gemessenen Wellenformen rekonstruierte Dichte der Probe für eine dreidimensionale Wellenausbreitung unter Verwendung der simultanen Approximation der Quellfunktionen . . . . .   | 204 |
| 7.27. Querschnitt der rekonstruierten räumlichen Änderung der Dichte unter Verwendung der simultanen Approximation der Quellfunktionen . . . . .  | 204 |
| 7.28. Änderung der Magnitude der approximierten und Referenzquellfunktion während der Inversion . . . . .   | 205 |

## Tabellenverzeichnis

|  |     |
|--|-----|
| 2.1. Umrechnungsformeln der elastischen Materialkonstanten . . . . .               | 23  |
| 4.1. Positionen der Empfänger an den Tunnelwänden und an der Tunnelfront . . . . . | 89  |
| A.1. Gauß-Legendre-Integrationspunkte . . . . .                                    | 219 |
| A.2. Gauß-Legendre-Integrationspunkte für Dreieckelemente . . . . .                | 220 |



# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Maschinelles Tunnelbau  | 2         |
| 1.2. Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau                                 | 4         |
| 1.3. Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau | 9         |
| <b>2. Grundlagen</b>   | <b>15</b> |
| 2.1. Elastische Wellen   | 15        |
| 2.1.1. Zeitliche und räumliche Darstellung von Wellen                          | 16        |
| 2.1.2. Spannungen und Dehnungen  | 17        |
| 2.1.3. Elastische Wellengleichung  | 19        |
| 2.1.4. Wellenarten   | 21        |
| 2.1.5. Dämpfung von Wellen   | 25        |
| 2.1.6. Akustische Wellengleichung  | 25        |
| 2.1.7. Reflexion und Refraktion von Wellen                                     | 27        |
| 2.1.8. Zweidimensionale Modellierung   | 29        |
| 2.2. Seismische Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung                      | 30        |
| 2.3. Elastische Wellen im Frequenzbereich                                      | 35        |
| 2.3.1. Fourier-Transformation  | 35        |
| 2.3.2. Elastische Wellengleichung im Frequenzbereich                           | 36        |
| 2.3.3. Akustische Wellengleichung im Frequenzbereich                           | 38        |
| 2.3.4. Diskrete Fourier-Transformation   | 38        |
| 2.4. Numerische Modellierung von seismischen Wellen                            | 40        |
| 2.4.1. Numerische Modellierung von seismischen Wellen im Zeitbereich           | 41        |
| 2.4.2. Numerische Modellierung von seismischen Wellen im Frequenzbereich       | 43        |
| 2.4.3. Numerische Verfahren für die Modellierung von seismischen Wellen        | 45        |
| <b>3. Numerische Approximation von zeitharmonischen Wellen</b>                 | <b>49</b> |
| 3.1. Die Methode der gefalteten Perfectly-Matched-Layer                        | 49        |
| 3.2. Finite-Elemente-Methode   | 52        |
| 3.2.1. Finite-Elemente-Diskretisierung   | 53        |
| 3.2.2. Konzept der isoparametrischen Elemente                                  | 56        |
| 3.3. Hierarchische Ansatzfunktionen höherer Ordnung                            | 59        |
| 3.3.1. Eindimensionale Ansatzfunktionen  | 59        |
| 3.3.2. Ansatzfunktionen ebener Elemente  | 62        |
| 3.3.3. Ansatzfunktionen räumlicher Elemente                                    | 66        |
| 3.3.4. Konformität an den Grenzen hierarchischer Elemente höherer Ordnung      | 69        |
| 3.4. Automatische Anpassung des hierarchischen Ansatzgrades                    | 71        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>4. Verifizierung der numerischen Modellierung</b>                                  | <b>75</b>  |
| 4.1. Verifizierung für ein zweidimensionales unendliches Gebiet . . . . .             | 76         |
| 4.2. Verifizierung für eine zweidimensionale Tunnelumgebung . . . . .                 | 79         |
| 4.3. Viskoelastisches Verhalten in einer zweidimensionalen Tunnelumgebung . . . . .   | 83         |
| 4.4. Verifizierung für ein dreidimensionales unendliches Gebiet . . . . .             | 85         |
| 4.5. Verifizierung für eine dreidimensionale Tunnelumgebung . . . . .                 | 88         |
| <b>5. Full-Waveform-Inversion</b>   | <b>93</b>  |
| 5.1. Minima, Uneindeutigkeiten und Optimalitätsbedingungen . . . . .                  | 93         |
| 5.2. Inverse Problemstellung . . . . .  | 95         |
| 5.3. Diskreter adjungierter Gradient . . . . .  | 97         |
| 5.4. Iterative Minimierungsmethoden . . . . .   | 101        |
| 5.4.1. Methode des steilsten Abstiegs . . . . .                                       | 101        |
| 5.4.2. Methode der konjugierten Gradienten . . . . .                                  | 102        |
| 5.4.3. L-BFGS-Methode . . . . .   | 103        |
| 5.5. Liniensuchverfahren . . . . .  | 105        |
| 5.5.1. Quadratische Approximation durch drei Punkte . . . . .                         | 106        |
| 5.6. Inversionsstrategien . . . . .   | 109        |
| 5.6.1. Multi-Skalen-Ansatz . . . . .  | 109        |
| 5.6.2. Regularisierungsmethoden . . . . .   | 111        |
| 5.7. Vergleich der Full-Waveform-Inversion im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .     | 114        |
| 5.8. Simultane Approximation der Quellfunktion . . . . .                              | 116        |
| 5.9. Weitere Aspekte der Full-Waveform-Inversion im maschinellen Tunnelbau . . . . .  | 118        |
| <b>6. Synthetische Inversionen</b>  | <b>125</b> |
| 6.1. Einfluss verschiedener Messanordnungen auf die Inversion . . . . .               | 126        |
| 6.1.1. Vergleich mit etablierten Messanordnungen . . . . .                            | 133        |
| 6.2. Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion . . . . .               | 139        |
| 6.3. Einfluss von Dämpfungseffekten auf die Inversion . . . . .                       | 143        |
| 6.3.1. Einfluss von über- und unterschätzter Dämpfung auf die Inversion . . . . .     | 145        |
| 6.4. Elastischer Blindtest . . . . .  | 150        |
| 6.4.1. Erstes Bodenszenario . . . . .   | 155        |
| 6.4.2. Zweites Bodenszenario . . . . .  | 157        |
| 6.4.3. Drittes Bodenszenario . . . . .  | 159        |
| 6.4.4. Viertes Bodenszenario . . . . .  | 161        |
| 6.4.5. Erkenntnisse des elastischen Blindtests . . . . .                              | 164        |
| 6.5. Inversion nach einem sphärischen Störkörper . . . . .                            | 165        |
| 6.6. Schichtwechsel mit linear verlaufender Grenzschicht . . . . .                    | 169        |
| <b>7. Validierung mittels eines kleinskaligen Laborexperiments</b>                    | <b>175</b> |
| 7.1. Versuchsstand . . . . .  | 178        |
| 7.2. Vorabuntersuchung . . . . .  | 181        |
| 7.3. Messungen und zweidimensionale Inversion . . . . .                               | 185        |
| 7.4. Zweidimensionale Inversion unter Berücksichtigung von Materialdämpfung . . . . . | 196        |
| 7.5. Dreidimensionale Inversion . . . . .   | 200        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>8. Diskussion</b>  | <b>207</b> |
| 8.1. Numerische Approximation von Wellen im Frequenzbereich . . . . .   | 207        |
| 8.2. Einfluss der Messanordnung . . . . .   | 208        |
| 8.3. Interpretation der Inversionsergebnisse . . . . .  | 210        |
| 8.4. Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion . . . . .   | 212        |
| 8.5. Übertragbarkeit der Erkenntnisse der Inversionsergebnisse auf die Anwendung<br>im maschinellen Tunnelbau . . . . . | 212        |
| 8.6. Kombination von unterschiedlichen Vorauserkundungsverfahren . . . . .  | 215        |
| <b>9. Zusammenfassung und Schlussfolgerung</b>  | <b>217</b> |
| <b>A. Anhang</b>  | <b>219</b> |
| A.1. Gauß-Legendre-Integrationspunkte . . . . .   | 219        |
| A.2. Gauß-Legendre-Integrationspunkte für Dreieckelemente . . . . .   | 220        |
| A.3. Verwendete Software und Programmiersprachen . . . . .  | 221        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>223</b> |
| <b>Hinweis auf Vorveröffentlichungen</b>  | <b>235</b> |
| <b>Lebenslauf</b>   | <b>237</b> |



## 1. Einleitung

Seit dem Jahr 2008 lebt mehr als die Hälfte der Erdbevölkerung in Städten. Des Weiteren wird prognostiziert, dass in den nächsten Jahrzehnten die Weltbevölkerung auf ungefähr 10 Milliarden Menschen anwachsen wird. Da sich die Anzahl an Menschen, welche im ländlichen Raum leben, voraussichtlich kaum verändern wird, wird der Urbanisierungsgrad zunehmen. Dadurch werden im Jahr 2050 voraussichtlich 70% der Erdbevölkerung im städtischen Raum leben, während sich die Weltbevölkerung im Vergleich zur Jahrtausendwende verdoppelt haben wird (Broere, 2016).

Durch die zusätzliche Verwendung des unterirdischen Raums könnten bestehende Städte an die fortschreitende Urbanisierung angepasst und neue Städte in einer optimierten Weise geplant werden. Durch die Verlagerung des Verkehrs, von Lagerstätten und von anderen Bauten, wie beispielsweise Parkhäuser oder Einkaufszentren, unter die Erdoberfläche, würde der oberirdische Raum entlastet werden. Dadurch könnte mehr Wohnraum entstehen sowie der Lebensstandard, aufgrund einer niedrigeren Belastung durch Verkehrsabgase oder Verkehrslärm, erhöht werden. Mehr Flächen könnten entsiegelt sowie mehr Grünflächen angelegt werden. Des Weiteren sind unterirdische Bauten sicherer und widerstandsfähiger gegenüber Naturkatastrophen wie beispielsweise Erdbeben (Broere, 2016).

Durch das Bauen von Tunneln können direkte und dadurch effiziente Verkehrswege für Personenkraftwagen, Lastkraftwagen und Schienenverkehr unterirdisch angelegt werden. Tunnel bieten auch im außerstädtischen Bereich viele Vorteile, da einerseits die oberirdische Landschaft nicht bebaut werden muss, wodurch natürliche Lebensräume erhalten sowie Agrarflächen weiterhin uneingeschränkt genutzt werden können. Andererseits können durch Tunnel direkte Verkehrs- und Transportwege erschlossen werden, wodurch längere und somit kostenintensive Umwege, wie beispielsweise Gebirgsüberquerungen, vermieden werden. Beispielsweise wurden und werden mehrere Tunnel für die Unterquerung der Alpen angelegt, wie die unterschiedlichen Gotthard-Tunnel (Gotthard-Scheiteltunnel, Gotthard-Basistunnel, Gotthard-Straßentunnel) oder der Brenner Basistunnel. Durch das Anlegen von Tunneln können auch unterhalb von Flüssen oder Meeren direkte Verbindungen realisiert werden, wodurch weite Umwege oder zusätzliche Schiffsfahrten vermieden und somit Zeit und Kosten eingespart werden können. Der Elbtunnel in Hamburg stellt ein Beispiel für eine Flussunterquerung dar. Ein sehr prominentes Beispiel stellt zudem der Eurotunnel (engl. *Channel Tunnel*) dar, welcher unterhalb eines Meeresarms des Atlantiks, dem Ärmelkanal, verläuft und über Frankreich das europäische Festland mit Großbritannien verbindet. Viele Tunnel werden vornehmlich für den Schienenverkehr angelegt, bei welchem im Vergleich zu den üblichen Kraftwagen weniger Treibhausgase ausgestoßen werden. Somit können Tunnel langfristig zu einer klimafreundlichen Verkehrswende beitragen. Der Ausbau von direkten Transportwegen erhöht zudem die Planungssicherheit, wodurch viele Unternehmen besser wirtschaften können. Der Bau weiterer Tunnel erscheint, aufgrund der Vorteile von Tunneln einerseits und aufgrund des erhöhten Bedarfs an platzsparenden Lösungen in urbanen Regionen andererseits, notwendig.

## 1.1. Maschineller Tunnelbau

Im konventionellen Tunnelbau wird der Tunnel mittels Bohrens, Sprengungen und anderer maschineller Arbeitswerkzeuge vorgetrieben, die nicht einer maschinellen Tunnelbohrmaschine entsprechen. Dabei findet der Ausbau zyklisch statt, sodass nach der Abtragung des Gesteins der Aushub abtransportiert und der neue Tunnelabschnitt befestigt werden müssen. Durch den konventionellen Tunnelbau können unterschiedliche Tunnelprofile erzeugt und auch während des Vortriebs verändert werden. Des Weiteren kann durch den offenen Zugang zur Ortsbrust sehr individuell auf neue Problemstellungen reagiert werden, da sowohl die Vortriebsmethoden als auch das Vorgehen bei der Befestigung der neuen Tunnelwände flexibel angepasst werden können. Während bei längeren Tunnelabschnitten mittlerweile zunehmend maschinelle Tunnelbohrmaschinen eingesetzt werden, wird der konventionelle Tunnelvortrieb weiterhin vorwiegend für kurze Tunnelabschnitte oder für Tunnelabschnitte, die nicht gut zugänglich sind, eingesetzt (ITA, 2009).

Beim maschinellen Tunnelbau werden zylinderförmige Tunnelbohrmaschinen eingesetzt, mit welchen runde Tunnelprofile erzeugt werden. Die Tunnelbohrmaschinen verfügen an der Ortsbrust über ein rundes Schneidrad, auf welchem unterschiedliche Abbauwerkzeuge befestigt sind. Durch eine Rotation des Schneidrads wird das Gestein an der Ortsbrust abgetragen. Das Schneidrad hat einen Durchmesser von bis zu 19 m, wodurch innerhalb der Tunnel auch mehrspurige Fahrbahnen oder Bahnschienen über zwei Ebenen realisiert werden könnten. Vor allem bei nicht standfestem Erdreich werden Tunnelbohrmaschinen verwendet, welche hinter dem Schneidrad einen Schildmantel besitzen, welcher den ausgehobenen Hohlraum vor dem Erdreich und somit auch vor möglichen Ausbrüchen abschirmt sowie vor dem Eindringen von Grundwasser schützt. Durch das Abstützen des Erdreichs werden auch Setzungen an der Erdoberfläche minimiert. Die Ortsbrust kann zusätzlich mechanisch, durch Druckluft, mittels Flüssigkeiten oder durch Erddruck stabilisiert werden, wobei die Methode passend zum Baugrund ausgewählt werden muss. Im hinteren Teil des Schildmantels wird der Ausbau der Tunnelauskleidung mittels vorgefertigter Stahlbetonsegmente durchgeführt. Der Ringspalt, welcher zwischen den Tunnelinnenschalen und dem Boden entsteht, wird mit einem speziellem Mörtel verfüllt. Nach der Installation der einzelnen Segmente der Tunnelinnenschalen kann sich die Tunnelbohrmaschine an diesen über die Vortriebspresen abdrücken und somit den Vortrieb fortsetzen. Bei Doppelschild-Tunnelbohrmaschinen werden für den Vortrieb zusätzlich Hydraulizylinder, welche als Gripper bezeichnet werden, verwendet, welche sich hinter dem ersten Schild mit dem freigelegten Erdreich verspannen. Das Schneidrad wird mit dem ersten Schild teleskopartig vorgetrieben, indem sich die Vortriebspresen über die Gripper am Erdreich abdrücken. Dadurch kann zeitgleich im zweiten Schild der Ausbau der Tunnelringe stattfinden. Nach dem Ausbau der Tunnelchale kann sich die restliche Tunnelbohrmaschine zusammen mit den Grippern über zusätzliche Hydraulizylinder wieder an den Tunnelinnenschalen abdrücken und zum ersten Schild aufschließen. Dieses Vorgehen ermöglicht einen kontinuierlichen Vortrieb, bei dem keine zusätzlichen Stehzeiten für die Installation der Tunnelchalensegmente notwendig sind. Lediglich in nicht standfestem Gestein, wie in geologischen Störzonen, wird sicherheitshalber auf den gesonderten Vortrieb des ersten Tunnelschilds über die Gripper verzichtet, da sich diese an dem vermeintlich degradierten Erdreich, welches der Belastung nicht standhalten könnte, abstützen müssten. Hinter dem Kopf der Tunnelbohrmaschine befindet sich eine sehr lange logistische Einheit, welche beim Vortrieb direkt mitgezogen wird. Der Aushub wird direkt und automatisiert, beispielsweise über Förderbänder oder Rohrleitungen, abtransportiert. In Abbildung 1.1 wird exemplarisch eine Doppelschild-Tunnelbohrmaschine





Abbildung 1.1.: Doppelschild-Tunnelbohrmaschine der *Herrenknecht AG*, welche innerhalb des *Coca Codo Sinclair Hydropower Project* in San Miguel (Ecuador) verwendet wurde und einen Durchmesser von 9.04 m besitzt. Das Bild wird über die Homepage der *Herrenknecht AG* (2023) für die Nutzung in Druck- und Online-Medien zur Verfügung gestellt.

der *Herrenknecht AG* illustriert, bei der sowohl das Schneidrad, als auch beide Tunnelschilde, die Vortriebszylinder sowie ein Teil des Nachläufers der Tunnelbohrmaschine zu erkennen sind. Eine genauere Unterteilung und Beschreibung der unterschiedlichen Typen von Tunnelvortriebsmaschinen wird beispielsweise von Maidl u. a. (2013, Kapitel 1) durchgeführt.

Der maschinelle Tunnelbau verfügt sowohl über Vor- als auch Nachteile gegenüber dem konventionellen Tunnelbau (Maidl u. a., 2013, Kapitel 1). Im Vergleich zum konventionellen Tunnelbau kann beim maschinellen Tunnelbau ein nahezu kontinuierlicher Vortrieb realisiert werden, welcher höhere Vortriebsgeschwindigkeiten und somit eine frühere Fertigstellung ermöglichen kann. Durch die Hohlraumstützung mittels der Tunnelschilde werden Oberflächensetzungen minimiert und damit Bestandsbauten geschützt. Des Weiteren erhöht sich die Arbeitssicherheit der Belegschaft im Tunnel. Der direkte Ausbau mit den vorgefertigten Stahlbetonsegmenten ist qualitativ hochwertig sowie wirtschaftlich. Dahingegen ist das Profil des entstehenden Tunnels auf runde Querschnitte mit einem festgelegten Durchmesser beschränkt. Die Planung des Bauvorhabens ist aufwendiger und spezifisch geschultes Personal ist erforderlich. Der Einsatz von Tunnelbohrmaschinen ist nur für längere Tunnel ökonomisch sinnvoll. Auf geologische Änderungen kann während des Vortriebs weniger flexibel reagiert werden.

Viele bestehende Tunnel wurden mittels des maschinellen Tunnelbaus konstruiert und weitere Tunnel befinden sich aktuell im Bau, wobei immer weitere Rekorde bei der Länge und dem Durchmesser der Tunnel sowie den Vortriebsgeschwindigkeiten aufgestellt werden. Zu den längsten Tunneln, welche mittels maschinellen Tunnelbaus angelegt wurden, zählt beispielsweise der Gotthard-Basistunnel mit einer Gesamtlänge von ungefähr 57 km, welcher als Eisenbahntunnel genutzt wird und durch die Schweizer Alpen verläuft. In seiner Konstruktions-

phase befindet sich der Brenner Basistunnel, welcher vom österreichischen Innsbruck bis zum italienischen Franzensfeste verlaufen und über eine Streckenlänge von ungefähr 55 km verfügen wird, wobei dieser zusammen mit dem bereits bestehenden Inntaltunnel auf eine Gesamtlänge von ungefähr 64 km anwachsen wird.

Viele Erfahrungsberichte zum Bau eines Tunnels sowie Forschungsberichte zu der Auswertung der Daten, welche bei der Konstruktion der Tunnel aufgenommen wurden, werden veröffentlicht, wobei zum maschinellen Tunnelbau auch viel Grundlagenforschung betrieben wird. Dabei werden viele Aspekte untersucht, beispielsweise wie Tunnel geplant werden sollten, wie die logistischen Abläufe während der Konstruktionsphase optimiert werden können und wie der Vortrieb effizienter, sicherer sowie ökonomischer gestaltet werden kann. Des Weiteren ist auch die Optimierung der Tunnelschalensegmente sowie die Untersuchung von fortschrittlichen Methoden für die Erkundung und Charakterisierung des Baugrunds Ziel der Forschung. Dabei ist auch eine ganzheitliche Untersuchung der unterschiedlichen Aspekte des maschinellen Tunnelbaus wichtig, damit Synergien identifiziert und genutzt werden können. Der Sonderforschungsbereich 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“ (Meschke, 2018), in welchem die Untersuchungen dieser Arbeit durchgeführt wurden, beschäftigte sich mit vielen der aufgeführten Aspekte und untersucht zudem wie Interaktionen zwischen den einzelnen Disziplinen den maschinellen Tunnelbau verbessern könnten. Einen Überblick über die gewonnenen Erkenntnisse geben Meschke u. a. (2023). Im Folgenden wird auf die Methoden und die Forschung zur Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau eingegangen.

## 1.2. Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau

Geologische Änderungen des Bodens, wie beispielsweise Schichtwechsel, Klüfte, Einschlüsse, Findlinge, Schlitzwände, Rückstände von anderen Bauten sowie Wasserreservoirs können zu Problemen beim maschinellen Tunnelvortrieb führen. Beispielsweise können durch brüchige Gesteinsformationen die Schneidwerkzeuge auf dem Schneidrad der Tunnelbohrmaschine durch herabfallende Ausbrüche beschädigt sowie das Schneidrad blockiert werden. Durch das Entstehen einer unregelmäßigen Form der Tunnelfront würden die beim Vortrieb wirkenden Kräfte und Momente ungleichmäßig verteilt werden, was zu Schwingungen des Schneidrads und somit zu Beschädigungen der Abbauwerkzeuge führen kann. Der Tunnelausbruch könnte größer als der Durchmesser des Schneidrads werden, was einerseits die Stabilität des Bodens degradieren und gleichzeitig die Setzungen an der Erdoberfläche erhöhen könnte. Des Weiteren könnten auch Wassereintritte entstehen (Gong u. a., 2016). Somit können Änderungen der Geologie vor der Tunnelfront zu generellen Schäden sowie zu Stehzeiten der Tunnelbohrmaschine und somit zu steigenden Kosten führen. Wenn geologische Änderungen im Vorfeld bekannt sind, dann kann der Vortrieb der Tunnelbohrmaschine dahingehend angepasst werden, dass die Auswirkungen der entstehenden Probleme reduziert oder komplett vermieden werden. Gong u. a. (2016) geben einen Überblick, wie mögliche Probleme in unterschiedlichen Böden vermieden werden können. Somit ermöglicht eine frühzeitige Erkennung von geologischen Störungen eine Reduzierung von Schäden, Stehzeiten der Tunnelbohrmaschine und schlussendlich der entstehenden Kosten bei gleichzeitiger Erhöhung der Sicherheit vor Personenschäden und vor Schäden an Bestandsbauten durch die Reduktion von Oberflächensetzungen.

Während der Planung des Tunnels werden im Vorfeld schon Untersuchungen des Bodens durchgeführt und bereits vorhandene Informationen zu dem Baugrund zusammengetragen (ITA, 2015). Mehrere Bohrlöcher werden von der Erdoberfläche aus gebohrt, sodass an einzelnen

Stellen das vertikale Profil des Bodens untersucht werden kann. Mittels der Bohrlöcher kann die Geologie des Bodens für die Detektion von vielen Störkörpern auf der künftigen Tunnelachse nicht ausreichend aufgelöst werden, da die Bohrlöcher nur einen eindimensionalen Einblick in die Beschaffenheit des Bodens ermöglichen, welcher auch nur in orthogonaler Richtung zum Tunnel an einer einzelnen Stelle erfolgt. Des Weiteren ist das Bohren von Bohrlöchern in schwer zugänglichen Bereichen der Oberfläche sowie an Stellen, an denen eine hohe Überlagerung zum Tunnel vorhanden ist, umständlich (Li u. a., 2017). Daher ist die Erkundung des Bodens unmittelbar vor der Tunnelfront erforderlich. Entsprechende Vorauserkundungsbohrungen an der Tunnelfront in Richtung der Tunnelachse sind vor allem im konventionellen Tunnelbau ohne Tunnelschild gut durchführbar, da der direkte Zugang zur Tunnelfront gewährleistet ist. Im maschinellen Tunnelbau sind Vorauserkundungsbohrungen aufgrund des Tunnelschildes und des Schneidrads nur umsetzbar, wenn entsprechende Aussparungen eingeplant wurden. Des Weiteren sind Bohrungen an der Ortsbrust nicht bei jeder Art der Ortsbruststützung möglich. Für Vorauserkundungsbohrungen müsste zudem der Vortrieb pausiert werden, wodurch ein entscheidender Vorteil des maschinellen Vortriebs degradiert würde. Im maschinellen Tunnelbau werden Sondierungsbohrungen vornehmlich über die Decke des Tunnels oder über die Sohle des Tunnels durchgeführt, wodurch sich diese nicht auf der Tunnelachse befinden (Kogler, 2008). Da diese weiterhin auch nur eindimensionale Einblicke liefern, müssen die gewonnenen Informationen für die Bereiche zwischen den Bohrlöchern interpoliert und auf die Tunnelachse extrapoliert werden. Des Weiteren ist die Durchführung der Vorauserkundungsbohrungen zeit- und kostenintensiv (Li u. a., 2017).

Eine weitere Möglichkeit, um die Geologie des Baugrunds zu erkunden, sind Erkundungsstollen, wie sie beispielsweise für den Brenner Basistunnel eingesetzt wurden (Bergmeister u. Reinhold, 2017). Dazu wird ein kleinerer Tunnel oder Stollen vor dem Bau der eigentlichen Tunnelröhren vorgetrieben. Dabei kann der abgetragene Boden gut charakterisiert sowie die Erfahrungen des Vortriebs auf den Aushub der kommenden Tunnelröhren größtenteils übertragen werden. Jedoch sind solche Erkundungsstollen sehr kostenintensiv und rentieren sich nur bei Bauprojekten, bei denen eine komplexe Geologie erwartet wird, oder, wenn diese Stollen während oder nach der Bauphase zusätzlich noch verwendet werden können, wie beispielsweise für die Entwässerung oder für die Instandhaltung der Tunnel. Dennoch könnten durch den Einsatz von Erkundungsstollen Störkörper nicht erfasst werden, welche sich auf der Achse der anderen geplanten Tunnelröhren befinden.

Geophysikalische Methoden, welche den Boden zerstörungsfrei untersuchen, wie das Bodenradar (engl. *Ground Penetrating Radar*) oder Methoden, welche auf die Ausbreitung und Interaktion von seismischen Wellen mit potentiellen Störkörpern basieren, werden zunehmend für die Vorauserkundung eingesetzt. Das Bodenradar stellt eine elektromagnetische Methode dar, welche mit hohen Frequenzen arbeitet und über eine hohe Auflösung verfügt, aber nur eine kurze Reichweite besitzt. Wenn für die elektromagnetischen Eigenschaften hohe Kontraste vorliegen, dann verhalten sich die Methoden, welche die Daten des Bodenradars auswerten, sehr sensitiv. Dadurch eignet sich das Bodenradar vor allem für die Identifikation von Wasserreservoirs sowie von zerklüftetem oder zerbrochenem Gestein (Li u. a., 2017). Die Verfahren, welche auf seismischen Wellen basieren, besitzen eine größere Reichweite und werden in den kommenden Absätzen verstärkt thematisiert. Eine Zusammenführung der Erkenntnisse und Informationen von verschiedenen Ansätzen oder gar deren direkte Kombination stellen eine gute Möglichkeit dar, um Uneindeutigkeiten bei der Charakterisierung des Bodens zu reduzieren und somit die Prognosen über die Beschaffenheit des Bodens vor der Tunnelfront zu verbessern (Li u. a., 2017).

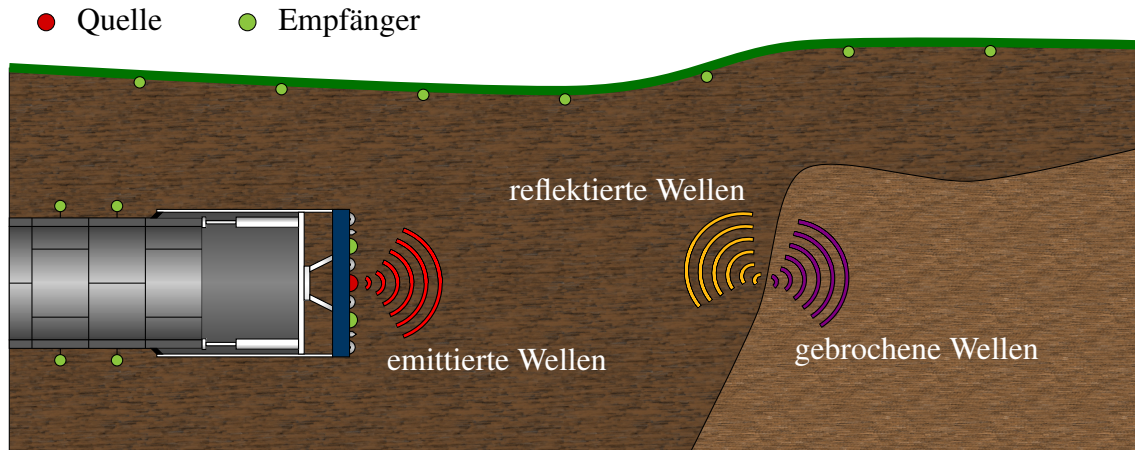


Abbildung 1.2.: Schematisches Szenario einer seismischen Messung für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau. Die Positionen der Quellen und Empfänger sollten einerseits passend zu der Methode gewählt werden, welche für die Auswertung der Seismogramme verwendet wird, und andererseits muss die Installation durchführbar sowie ökonomisch sinnvoll sein.

Innerhalb dieser Arbeit wird eine Methode für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau untersucht, welche die Aufzeichnungen seismischer Wellen auswertet. Seismische Wellen sind elastische Wellen, welche sich zerstörungsfrei im Boden ausbreiten und daher keine Setzungen und auch keine Degradierung der zu untersuchenden Geologie hervorrufen. Für die Vorauserkundung innerhalb einer Tunnelumgebung werden seismische Wellen künstlich mittels Sprengungen oder pneumatischen Schlaghämmern angeregt. Andere Ansätze verwenden hingegen die Wellen, welche durch den Vortriebsprozess angeregt werden. Diese Wellen breiten sich sphärisch im Boden aus, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeiten abhängig von den elastischen Eigenschaften des Bodens sowie davon, ob sich die Wellen über einen Kompressionsmechanismus oder einen Scherungsmechanismus fortbewegen, sind. Diese Raumwellen werden entsprechend als Kompressions- und Scherwellen bezeichnet, wobei sich die Kompressionswellen schneller im Boden ausbreiten. Erreicht eine Welle eine freie Oberfläche, wie die Erdoberfläche oder die Tunnelwände, wird die Welle an dieser Oberfläche reflektiert. Gleichzeitig werden dabei einerseits Oberflächenwellen initiiert, die sich mit unterschiedlichen Mechanismen entlang der Oberfläche ausbreiten, und andererseits wird ein Teil der seismischen Energie der Welle in die jeweilig andere Raumwellenart umgewandelt, welche sich von der Oberfläche ausgehend im Boden ausbreitet. Wenn eine Welle eine innere Grenzfläche zu einem Bereich des Bodens erreicht, welcher über andere Eigenschaften verfügt, dann wird die Welle an dieser Grenzfläche einerseits reflektiert und andererseits gebrochen, wobei auch wieder Umwandlungen zu anderen Wellenarten auftreten können. Die gebrochenen Wellen breiten sich in dem zweiten Medium mit sich unterscheidenden Wellengeschwindigkeiten aus und werden wiederum an weiteren Grenzflächen reflektiert und gebrochen. Auch durch Wasserreservoirs und zerklüfteten Boden wird die Ausbreitung von seismischen Wellen verändert. An unterschiedlichen Positionen können die Verschiebungen, welche die seismischen Wellen verursachen, aufgezeichnet werden, wobei diese Aufzeichnungen als Seismogramme bezeichnet werden. In Abbildung 1.2 wird schematisch dargestellt, wie ein Szenario für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau aussehen kann. Durch die Interaktionen der seismischen Wellen mit potentiellen Störkörpern würden sich in den Seismogrammen andere Wellenformen ergeben als bei einer Wellenausbreitung in einem komplett homogenen Bo-

den, da je nach der Position des Empfängers reflektierte oder gebrochene Wellen zusätzlich aufgezeichnet sowie andere Ausschläge ausbleiben würden. Somit enthalten zwar die Seismogramme Informationen über die geologischen Gegebenheiten vor der Ortsbrust, jedoch können die Seismogramme, aufgrund der reflektierten, gebrochenen und umgewandelten Wellen, eine vergleichsweise hohe Komplexität aufweisen. Über die einzelnen Ausschläge können nicht eindeutig Rückschlüsse auf die Positionen, die räumliche Ausdehnung und die Eigenschaften von Störzonen gezogen werden. Daher untersuchen die etablierten seismischen Vorauserkundungssysteme vorwiegend nur die vergleichsweise gut identifizierbaren ersten reflektierten Raumwellen sowie deren Laufzeiten, wobei größtenteils die Kompressionswellen betrachtet werden. Die eingesetzten Migrationsmethoden ordnen datengesteuert die reflektierten Wellen potentiellen reflektierenden Strukturen auf der Tunnelachse zu. Bei diesen Zuordnungen wird üblicherweise von einer Wellenausbreitung in einem unendlichen Raum ausgegangen, wodurch ignoriert wird, dass mit den Tunnelwänden und der Erdoberfläche freie Oberflächen vorhanden sind, an denen Wellen reflektiert werden. Die verwendbaren Messanordnungen beschränken sich auf den Einsatz von Quellen und Empfängern im Tunnel, was zur Folge hat, dass geologischen Strukturen nur begrenzt räumlich aufgelöst werden können. Dennoch wurden verschiedene seismische Vorauserkundungssysteme erfolgreich im maschinellen Tunnelbau etabliert und kontinuierlich weiterentwickelt.

Das *Tunnel Seismic Prediction System* der *Amberg Technologies AG* wurde 1994 mit seiner ersten Version (*TSP 202*) eingeführt (ITA, 2018). Zwei Fallbeispiele von Tunnelbauprojekten in der Schweiz, bei denen diese Version des TSP Systems eingesetzt wurde, werden von Dickmann u. Sander (1996) beschrieben. Das *Tunnel Seismic Prediction System* wurde in den letzten Jahrzehnten fortschreitend weiterentwickelt. In einer Fallstudie berichten Lu u. a. (2015) von der Durchführung der seismischen Vorauserkundung mittels des *TSP 203* Systems während des Vortriebs des Qiyueshan-Tunnels in China. Dickmann (2014) erläutert die Vorzüge des *TSP 303* Systems, welches dreidimensionale Abbilder des Bodens erstellt und insgesamt eine benutzerfreundlichere Auswertung ermöglicht. Das *TSP 303 Plus* System wurde beispielsweise während des Vortriebs vom Vorauserkundungsstollen des Brenner Basistunnels verwendet, wovon Schwarz u. Schierl (2017) berichten. Beim *TSP 303* werden vier Geophone verwendet, welche die Verschiebungen von allen drei Raumrichtungen aufzeichnen, wodurch die unterschiedlichen Wellenarten voneinander separiert werden können. Jeweils zwei Empfänger pro Seite werden durch die unteren Seitenwände des Tunnels mit einem Abstand von einigen Metern zueinander in Bohrlöchern platziert. Diese befinden sich, beispielsweise mit einem Abstand von 65 m (Schwarz u. Schierl, 2017), vergleichsweise weit von der Ortsbrust entfernt. Mit einem Abstand von mehreren Metern zu den beiden vorderen Empfängern wird eine vergleichsweise hohe Anzahl an Bohrlöchern, beispielsweise 18 Bohrlöcher (Schwarz u. Schierl, 2017), in die Seitenwände des Tunnels eingelassen, in welchen Sprengladungen platziert werden. Die letzten der jeweils 1.5 m voneinander entfernten Bohrlöcher befinden sich wenige Meter vor der Tunnelfront. Dabei wird ein Abstand von mehreren Metern zwischen den Empfängern und den Sprengladungen gewahrt. Die Sprengladungen werden für die seismischen Messungen sequentiell gezündet und erzeugen vornehmlich Raumwellen. Die Anregung weist ein gutes Verhältnis zwischen Signal und Rauschen auf. Durch die hohe Anzahl an Quellen ist die Menge der aufgezeichneten seismischen Daten sehr hoch. Für die Durchführung der Sprengungen und somit der Messungen müssen der Vortrieb und mögliche andere Prozesse, welche seismische Wellen anregen könnten, zeitweise pausiert werden. Je nachdem welches System für die Zündung der Sprengladungen verwendet wird, dauert eine Messkampagne zwischen zehn Minuten und einer Stunde (Schwarz u. Schierl, 2017). Dabei besteht auch die Möglichkeit, die unterschiedlichen Sprengladungen zu verschiedenen Zeitpunkten des Vortriebs zu zünden, wobei sich dadurch ei-



nerseits die Position der Tunnelfront verändert und sich andererseits die Stehzeit auf eine höhere Anzahl an Vortriebspausen aufteilt (Dickmann, 2014). Um die Geologie vor der Ortsbrust kontinuierlich erkunden zu können, führte die *Amberg Technologies AG* das System *TSPwE* (*Tunnel Seismic Prediction while Excavation*) ein, bei welchem nicht nur einzelne sporadische Messungen mit vergleichsweise großen Abständen durchgeführt werden, sondern alle 10–15 m Messungen mit weniger Sprengladungen durchgeführt werden, wobei gleichzeitig kontinuierlich neue Empfänger installiert werden. Dies hat den Vorteil, dass Störkörper, welche zu Beginn weit von der Ortsbrust entfernt waren und nur unmerkliche Ausschläge in den Seismogrammen hervorgerufen haben, bei jeder folgenden Messung für einen neuen Tunnelfortschritt einen zunehmend größeren Einfluss auf die seismischen Daten nehmen können und somit sicherer sowie besser identifiziert werden können (Dickmann u. a., 2019).

Auch mit dem *TSP Impact* System der *Amberg Technologies AG* ist das regelmäßige Durchführen seismischer Messungen möglich. Dabei wird ein pneumatischer Schlaghammer auf einer Konsole hinter dem Schneidrad der Tunnelbohrmaschine mitgeführt und kurz bevor oder nachdem die Zylinder der pneumatischen Pressen, welche für den Vortrieb des vorderen Tunnel Schilds verantwortlich sind, eingezogen werden, gegen das freiliegende Erdreich gedrückt. Innerhalb einzelner Minuten werden mehrere Schläge mit dem pneumatischen Schlaghammer durchgeführt. Durch das Mitführen des Schlaghammers verändern sich die Position der Quelle und somit auch die relativen Entfernungen zwischen möglichen Störkörpern und den Empfängern, welche wieder über Bohrlöcher in die Tunnelwände eingelassen werden, kontinuierlich (Amberg Technologies AG, 2023). Die Anordnung der Quelle und der Empfänger ähnelt dabei der Anordnung des *Integrated Seismic Prediction* Systems der *Herrenknecht AG*. Bei diesem System werden jedoch zwei pneumatische Schlaghämmer als Quellen eingesetzt, welche sich jeweils auch über Lücken in den gegenüberliegenden Seitenwänden des Schilds der Tunnelbohrmaschine gegen das Erdreich pressen. Die Messanker zum Aufnehmen der seismischen Wellen werden auf der linken und der rechten Tunnelwand mit einem Abstand von 10 m ins Gestein eingelassen (ITA, 2018). Der Bericht der *International Tunnelling and Underground Space Association* (ITA, 2018) enthält Fallstudien von dem Einsatz des *Integrated Seismic Prediction* Systems beim Bau eines Tunnels für die Schnellzugverbindung zwischen Tel Aviv und Jerusalem in Israel. Sowohl beim Einsatz des *TSP Impact* Systems als auch bei der Verwendung des *Integrated Seismic Prediction* Systems werden durch die pneumatischen Schlaghämmer Tunneloberflächenwellen angeregt. Entlang des Tunnels breiten sich die Tunneloberflächenwellen bis zur Tunnelfront mit einer niedrigeren Dispersion als Raumwellen aus. An der Tunnelfront findet eine Umwandlung der Tunneloberflächenwellen zu Scherwellen statt, welche sich im Raum vor dem Tunnel ausbreiten. Durch potentielle Störkörper werden Scherwellen zurück in Richtung des Tunnels reflektiert, wo diese wiederum Tunneloberflächenwellen anregen. Diese breiten sich erneut mit einer nur geringen Dispersion entlang des Tunnels aus, wo sie von den Empfängern aufgezeichnet werden. Das Verhältnis zwischen Signal und Rauschen ist für zugehörige Ausschläge in den Seismogrammen, aufgrund der niedrigeren Dispersion entlang des Wellenpfads, wodurch sie gut für die Vorauserkundung genutzt werden können, merklich besser (Jetschny u. a., 2010).

Ein weiterer Ansatz, um seismische Messungen möglichst ohne Stehzeiten begleitend zum Vortrieb durchführen zu können, welcher beispielsweise von Brückl u. a. (2008) untersucht wurde, ist die Verwendung von charakteristischen Erschütterungen des Schneidrads während des Vortriebsprozesses als Anregungen für die seismischen Untersuchungen. Diese Methode wird, wie aus dem Beitrag von Chwatal u. a. (2021) hervorgeht, auch innerhalb von einigen Tunnelbauprojekten eingesetzt.



Während die bisher genannten Systeme im Hartgestein eingesetzt werden, wird von der *Herrenknecht AG* mit dem *Sonic Softground Probing* auch ein System für Lockergestein sowie sandige, kieshaltige, wassergesättigte oder generell weiche Böden angeboten. Das System wird in Kombination mit Tunnelbohrmaschinen verwendet, welche die Ortsbrust mittels Flüssigkeits- oder Erddruck stützen, wobei gleichzeitig der abzutragende Boden mittels einer Bentonitsuspension konditioniert wird. Dadurch wird der Kontakt zwischen dem Boden und dem Schneidrad, auf welchem die Quellen und Empfänger installiert sind, sichergestellt. Durch die Rotation des Schneidrads verändern Quellen und Empfänger in Bezug auf mögliche Störkörper vor der Ortsbrust ihre relative Position. Die Quelle führt Frequenzdurchläufe von 0.5 kHz bis 4 kHz durch. Die reflektierten seismischen Wellen werden von den Empfängern aufgenommen und können über eine Korrelation mit dem verwendeten Anregungssignal isoliert werden. Über Migrationsmethoden können anhand dieser Daten Reflektoren lokalisiert werden. Seismische Messungen können sowohl während des Vortriebs als auch während betriebsbedingter Stehzeiten und somit kontinuierlich erfolgen. Das *Sonic Softground Probing* System dient vor allem zur frühzeitigen Detektion von Störkörpern wie beispielsweise Schlitzwänden, Spundwänden, Findlingen oder vertikaler geologischer Grenzschichten. Dabei können Störkörper detektiert werden, deren Durchmesser 0.5 m überschreitet. Diese Auflösung ist im Vergleich zu den anderen vorgestellten Systemen sehr hoch, welche nur Störkörper identifizieren können, deren Durchmesser sich über mehrere Meter erstreckt. Jedoch kann mit dem *Sonic Softground Probing* System nur ungefähr der Bereich 40 m vor der Tunnelfront effektiv untersucht werden, während beispielsweise bei dem *TSP 303* System eine Reichweite von bis zu 150 m erreicht werden kann (ITA, 2018). Erstmal wurde das *Sonic Softground Probing* System beim Bau der vierten Röhre des Elbtunnels in Hamburg eingesetzt (Kneib u. a., 2000).

### 1.3. Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau

Ein weiteres seismisches Verfahren für die Erkundung von geologischen Strukturen stellt die Full-Waveform-Inversion dar, welche im Vergleich zu Migrationsmethoden alle aufgenommenen Wellenformen berücksichtigt. Dies ermöglicht potentiell die Nutzung aller Informationen, welche die aufgenommenen Seismogramme enthalten. Bei erfolgreichem Einsatz können somit detailliertere Abbilder der geologischen Beschaffenheit des betrachteten Bereichs des Bodens erzeugt werden. Für die Full-Waveform-Inversion wird anhand der bis dahin vorhandenen Informationen zu den geologischen Eigenschaften des Bodens, beispielsweise aus Bohrloch-Untersuchungen, ein anfängliches Bodenmodell generiert. Mit diesem Bodenmodell wird die Ausbreitung der seismischen Wellen mit den jeweilig eingesetzten Quellen approximiert. Der Unterschied zwischen diesen synthetischen und den gemessenen Seismogrammen wird durch Anpassungen des Bodenmodells iterativ minimiert. Das Bodenmodell, mit welchem die gemessenen Wellenformen am besten reproduziert werden können, spiegelt eine Möglichkeit wieder, wie der Boden im untersuchten Bereich beschaffen sein könnte. Der beschriebene schematische Ablauf der Full-Waveform-Inversion wird in Abbildung 1.3 zusätzlich illustriert. Somit stellt die Full-Waveform-Inversion ein Minimierungsproblem dar, bei welchem einerseits sichergestellt werden muss, dass die sich ergebenden Bodenmodelle physikalisch sinnvoll sind. Andererseits muss auch gewährleistet werden, dass aus den vielen lokalen Minima ein Minimum extrahiert werden kann, welches sich möglichst nah an dem globalen Minimum befindet und somit im Idealfall die tatsächliche Geologie ausreichend charakterisieren kann. Der Einsatz von Methoden, welche die seismische Wellenausbreitung physikalisch richtig und mit einer genügenden Ge-

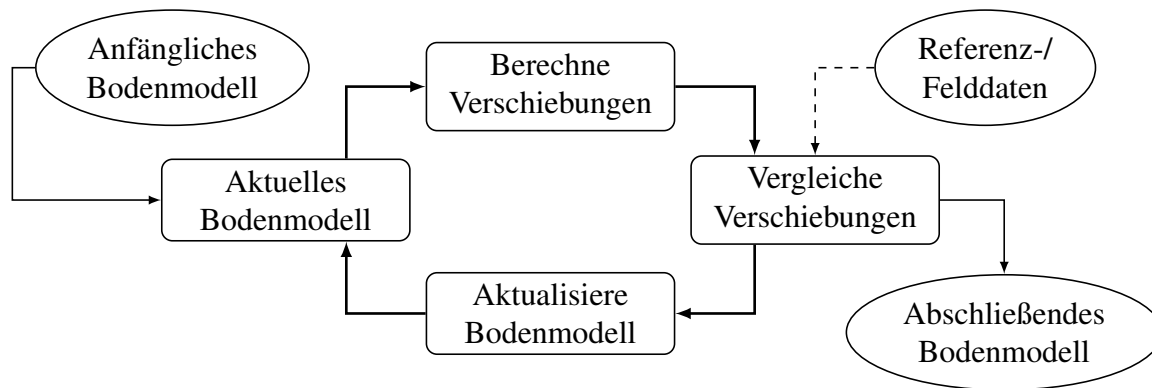


Abbildung 1.3.: Schematischer Ablauf der Full-Waveform-Inversion.

nauigkeit approximieren können, ist für die Minimierung der Unterschiede zwischen den Verschiebungen essentiell. Bei der numerischen Modellierung der seismischen Wellenausbreitung werden die freien Oberflächen, an welchen die Raumwellen reflektiert und Oberflächenwellen eingeleitet werden, mit berücksichtigt, wodurch der Einfluss der Tunnelwände und der Erdoberfläche auf die Wellenausbreitung in einem Tunnel nicht vernachlässigt wird. Im Vergleich zu den gängigen Migrationsmethoden werden bei der Full-Waveform-Inversion alle reflektierten, gebrochenen und umgewandelten Wellenarten für die Rekonstruktion der Bodenbeschaffenheit verwendet. Des Weiteren ist der Einsatz von Quellen und Empfängern an beliebigen Positionen methodisch möglich und für die Vorauserkundung sinnvoll. Beim iterativen Ablauf der Full-Waveform-Inversion muss die seismische Wellenausbreitung sehr häufig approximiert werden. Da die Ausbreitung aller Wellenarten akkurat angenähert werden muss, ist der Berechnungsaufwand einer einzelnen Approximation vergleichsweise hoch. Das Zusammenspiel dieser beiden Punkte führt dazu, dass der Berechnungsaufwand, welcher sich für eine komplette Full-Waveform-Inversion ergibt, deutlich höher als für die gängigen Migrationsmethoden ist. Der vortriebsbegleitende Einsatz der Full-Waveform-Inversion mit dreidimensionalen Bodenmodellen ist heutzutage noch nicht möglich, da die Berechnungen mit den heutigen Rechenkapazitäten zu viel Zeit benötigen würden. Da sich aufgrund des technologischen Fortschritts die möglichen Rechenleistungen erfahrungsgemäß in vergleichsweise kurzer Zeit deutlich steigern, wird der Einsatz der Full-Waveform-Inversion in Zukunft möglich sein. Ob der Einsatz der Full-Waveform-Inversion dann sinnvoll wäre, wie der Inversionsprozess gestaltet werden müsste und welche Vorteile dieser bieten würde, muss im Vorfeld durch entsprechende Grundlagenforschung untersucht werden, damit ein zeitiger Einsatz für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau möglich ist.

Durch die Arbeiten von Backus u. Gilbert (1968) und von Backus u. a. (1970) wurde die Betrachtung einer inversen Problemstellung für die seismische Erkundung des Bodens zunehmend untersucht (Tarantola, 1984b). Dabei war die Arbeit von Backus u. Gilbert (1968) auch schon von großen Einschränkungen aufgrund der damaligen niedrigen Rechenleistungen geprägt. Unter anderem durch Bamberger u. a. (1977) und Bamberger u. a. (1979) wurden eindimensionale seismische inverse Problemstellungen untersucht, wobei der entwickelte Ansatz von Bamberger u. a. (1977) rückblickend als Full-Waveform-Inversion bezeichnet werden kann (Fichtner, 2011, Abschnitt 1.3). Die daraus resultierende Arbeit von Bamberger u. a. (1982) stellt voraussichtlich die erste Anwendung der adjungierten Methode, mit welcher der Gradient eines Funktionals berechnet werden kann, für die seismische Erkundung dar (Fichtner, 2011, Abschnitt 8.1). Der Einsatz der Full-Waveform-Inversion anhand der akustischen Wellengleichung wurde von Tarantola (1984a) untersucht, während Tarantola (1986) zeitnah seine

Betrachtungen für den Einsatz der elastischen Wellengleichung erweiterte. Während die bisher erwähnten Ansätze das inverse Problem im Zeitbereich betrachteten, stellten beispielsweise Pratt u. Worthington (1990) einen Ansatz vor, welcher für die Inversion der vollständigen Wellenformen im Frequenzbereich vereinfachend nur die akustische Wellengleichung betrachtet. Fast zeitgleich untersuchte Pratt (1990) auch, wie die Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich unter Verwendung der elastischen Wellengleichung eingesetzt werden kann. Aufgrund des vergleichsweise hohen Berechnungsaufwands beschränkte sich der Einsatz zunächst nur auf zweidimensionale Problemstellungen. Bei einer Verwendung der akustischen Wellengleichung konnte die Full-Waveform-Inversion für dreidimensionale Anwendungen schon im ersten Jahrzehnt des neuen Jahrtausends eingesetzt werden (Virieux u. Operto, 2009). Seitdem die Full-Waveform-Inversion nicht mehr auf zweidimensionale Problemstellungen beschränkt war, wuchs das Interesse an ihr enorm, was über einen rapiden Anstieg der zugehörigen wissenschaftlichen Veröffentlichungen beobachtet werden konnte (Igel, 2016, Abschnitt 10.5). Mittlerweile sind auch dreidimensionale Inversionen unter Verwendung der elastischen Wellengleichung durchführbar, welche aber mit vergleichsweise langen Berechnungszeiten verbunden sind. Die Zusammenfassung zur Full-Waveform-Inversion von Virieux u. Operto (2009) sowie das Werk von Fichtner (2011) ermöglichen einen Überblick über die Methode und ihre unterschiedlichen Ausprägungen. Die Full-Waveform-Inversion wurde erstmalig auf kontinentaler Skala von Fichtner u. a. (2009) eingesetzt, um die Struktur des oberen Erdmantels in der Region von Australasien zu charakterisieren (Igel, 2016, Abschnitt 10.5). Auch der Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Sichtung und Untersuchung von geeigneten Standorten für die geothermische Erschließung (Schmelzbach u. a., 2016) sowie für die Bewertung von potentiellen Endlagern für radioaktive Abfälle (Bentham u. a., 2018) erscheint aussichtsreich. Um Rückschlüsse ziehen zu können, welches Potential Ansätze der Full-Waveform-Inversion für großskalige Anwendungen haben können, bieten sich kleinskalige Laborexperimente an, im Rahmen derer sowohl die Eigenschaften des zu untersuchenden Objekts als auch die Messanordnung vergleichsweise akkurat eingestellt werden können. Entsprechende Studien wurden beispielsweise von Pratt (1999) sowie von Bretaudeau u. a. (2013) durchgeführt.

Der Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau wurde für unterschiedliche Ansätze schon untersucht. Bharadwaj u. a. (2017) verwenden für ihre Untersuchungen beispielsweise einen Ansatz, bei welchem die Wellenausbreitung sowie die adjungierte Wellenausbreitung, für die Bestimmung des adjungierten Gradienten, im Zeitbereich approximiert werden. Die Bestimmung der adjungierten Quellfunktion, der Quellfunktionenfilter sowie der Faktoren, welche die Verbindung zwischen dem Boden und den einzelnen Empfängern berücksichtigen, erfolgt hingegen im Frequenzbereich. Durch die Anordnung der Quellen und Empfänger entlang einer Durchmesserlinie des Schneidrads kann für diesen Ansatz ein zweidimensionales Bodenmodell verwendet werden. Mit diesem Modell werden die horizontal polarisierten Scherwellen approximiert, deren Verschiebungen für die Inversion verwendet werden. Des Weiteren ermöglicht der Einsatz eines zweidimensionalen Modells, aufgrund des niedrigeren Berechnungsaufwands, eine vortriebsbegleitende Inversion der Wellenformen für unterschiedliche Schnittebenen entlang der Tunnelachse. Für die Untersuchungen wurden einerseits synthetische Referenzseismogramme verwendet und andererseits wurden für die Validierung dieses Ansatzes Messdaten aufgenommen, für welche ein Betonrohr im Boden vergraben wurde, welches mittels der Full-Waveform-Inversion detektiert werden konnte.

In der Studie von Liu u. a. (2022) wurden sowohl synthetische Wellenformen als auch Messdaten invertiert. Letztere wurden während des Vortriebs einer Tunnelbohrmaschine innerhalb

des Yinsong-Wasserversorgungsprojekts in China aufgenommen. Der entwickelte Ansatz der Full-Waveform-Inversion operiert im Zeitbereich, bedient sich der adjungierten Gradientenmethode und verwendet für die Approximation der Wellenausbreitung in einer zweidimensionalen Tunnelumgebung die akustische Wellengleichung, bei deren Nutzung Schereffekte vernachlässigt werden. Neben anderen Methoden wird zur Regularisierung der Inversion nach einigen Iterationsschritten eine Korrektur der rekonstruierten akustischen Wellengeschwindigkeit entlang eindimensionaler Linien durchgeführt, welche parallel zur Tunnelachse verlaufen. Diese Korrekturen sollen fälschliche Änderungen innerhalb von Störkörpern unterdrücken sowie die Umrisse der Störungen besser hervorheben, ohne dabei die Laufzeiten und die Amplituden der akustischen Wellen wesentlich zu verändern, welche mit dem bis dahin rekonstruierten Modell erzeugt wurden. Die Inversionsergebnisse, welche mit Erkenntnissen vom Vortrieb des Tunnels abgeglichen wurden, machen einen vielversprechenden Eindruck.

Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“ wurde im Teilprojekt A2 „Entwicklung effektiver Konzepte der Vorauserkundung im Tunnelbau mittels akustischer Verfahren“ das Potential von vier unterschiedlichen Ansätzen der Full-Waveform-Inversion untersucht:

- Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing (UHSA)
- Unscented Kalman Filter-Controlled Parametric Level-Set-Method (UKF-PaLS-Methode)
- Adjungierte Gradientenmethode (Zeitbereich)
- Adjungierte Gradientenmethode (Frequenzbereich)

Das Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing und die UKF-PaLS-Methode stellen bayessche Ansätze dar, die auf dem Unscented-Kalman-Filter (UKF) (Julier u. Uhlmann, 1997) basieren und keine Gradientenmethoden verwenden. Von Nguyen u. Nestorović (2016) wurde das Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing eingeführt, in welchem der metaheuristische Suchalgorithmus Simulated-Annealing mit dem Unscented-Kalman-Filter zur lokalen Minimierung gekoppelt wurde. Später wurde von Nguyen u. Nestorović (2018) die UKF-PaLS-Methode vorgestellt, welche das Unscented-Kalman-Filter mit der Level-Set-Methode für die Parameterisierung der Eigenschaften des Bodens kombiniert. Die am weitesten fortgeschrittenen Untersuchungen dieser Methoden von Trapp (2022) umfassen die Inversion von synthetischen Messdaten sowie von Messdaten aus kleinskaligen Laborexperimenten. Lambrecht (2015) sowie Lamert u. Friederich (2019) untersuchen das Potential eines gradientenbasierten Ansatzes der Full-Waveform-Inversion, welcher im Zeitbereich arbeitet. Dabei verwenden sie für die Berechnung der Wellenausbreitung und der adjungierten Wellenausbreitung einen von Lambrecht u. a. (2018) entwickelten knotenweisen Ansatz der diskontinuierlichen Galerkin-Methode. Vorwiegend wurden synthetische Referenzdaten untersucht, wobei Lamert (2020) für die Validierung des Inversionsalgorithmus auch Messdaten des kleinskaligen Laborexperiments von Trapp u. a. (2019) verwendet. Der Einsatz eines gradientenbasierten Full-Waveform-Inversion Ansatzes, welcher sowohl die Wellenfelder als auch die adjungierten Wellenfelder im Frequenzbereich approximiert, besitzt sowohl Vorteile als auch Nachteile im Vergleich zu Ansätzen, welche dieselben Operationen im Zeitbereich durchführen. Durch Musayev (2017) wurde ein entsprechender Ansatz, vorwiegend unter Einsatz der akustischen Wellengleichung, für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau untersucht. Durch die Verwendung der akustischen Wellengleichung wurde die Ausbreitung von Scher- sowie Oberflächenwellen vernachlässigt, was für konzeptionelle Untersuchungen pragmatisch ist, aber für die meisten realistischen Anwendungen nicht ausreichend wäre. Die Forschung von Musayev (2017) stellt einen großen Bestandteil der Studie von Riedel u. a. (2021b) dar. Wang u. a. (2021) und Yu u. a. (2021) veröffentlich-

ten kurze Zeit später sehr ähnliche Studien zum Einsatz von im Frequenzbereich operierenden Ansätzen der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im Tunnelbau, welchen die akustische Wellengleichung zu Grunde liegt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Untersuchungen von Musayev (2017) unter der Verwendung der elastischen Wellengleichung fortgeführt. Dazu wird beispielsweise der Einsatz von verschiedenen Messanordnungen anhand von synthetischen Referenzdaten untersucht. Des Weiteren wird der entwickelte Ansatz anhand von Messdaten eines kleinskaligen Laborexperiments validiert. Viele der folgenden Ergebnisse wurden schon in den Arbeiten von Riedel u. a. (2019, 2021a, 2023a,b) und Mahmoudi u. a. (2023) veröffentlicht.

Die Grundlagen zur seismischen Wellenausbreitung im Zeit- und Frequenzbereich, die für die folgenden Untersuchungen notwendig sind, werden in Kapitel 2 erläutert, wobei auch auf die grundlegenden Aspekte der numerischen Modellierung seismischer Wellen eingegangen wird. Der Ansatz der Finite-Elemente-Methode, welcher für die Approximation zeitharmonischer Wellen eingesetzt wird, wird in Kapitel 3 genauer beschrieben. In dem Zusammenhang wird mit der Methode der Perfectly-Matched-Layer auch der Ansatz eingeführt, welcher verwendet wird, damit am Rand des betrachteten Modellbereichs die seismischen Wellen das betrachtete Gebiet verlassen können, indem diese innerhalb einer dünnen Schicht möglichst vollständig gedämpft werden. Um sicherzustellen, dass die numerische Berechnung der Wellenausbreitung physikalisch sinnvolle Ergebnisse produziert, werden in Kapitel 4 einerseits analytische Lösungen der Wellengleichungen sowie andererseits synthetische Referenzlösungen für die Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung für eine Verifizierung verwendet. Der zu untersuchende Frequenzbereichsansatz der Full-Waveform-Inversion wird in Kapitel 5, in Kombination mit den verwendeten Minimierungsmethoden, eingeführt. In Kapitel 6 werden verschiedene Inversionsergebnisse vorgestellt, welche mithilfe von synthetischen Referenzdaten berechnet wurden. Dabei wurden sowohl für zweidimensionale als auch für dreidimensionale Tunnelumgebungen der Einsatz von verschiedenen Anordnungen von seismischen Quellen und Empfängern untersucht. Hervorzuheben sind die Blindtests, bei welchen im Vorfeld zu den Inversionen die geologischen Gegebenheiten vor der Ortsbrust nicht bekannt waren, welche innerhalb der Referenzmodelle verwendet wurden, die für die Erzeugung der synthetischen Referenzseismogramme zum Einsatz kamen. Eine Validierung des untersuchten Inversionsansatzes anhand von realen Daten wird in Kapitel 7 durch das Invertieren von Messdaten eines kleinskaligen Versuchsaufbaus durchgeführt. Eine Diskussion der Untersuchungsergebnisse findet in Kapitel 8 statt. Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit in Kapitel 9 zusammengefasst. Der Anhang A enthält einerseits die Gauß-Legendre-Integrationspunkte in Kombination mit den zugehörigen Gewichtungsfaktoren für die unterschiedlichen Ansatzgrade eines eindimensionalen Elements sowie eines Dreieckelements. Andererseits werden in Abschnitt A.3 auch die Software und Programmiersprachen genannt, welche für die Berechnungen und Auswertungen in dieser Arbeit verwendet wurden.



## 2. Grundlagen

Die Untersuchung der seismischen Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau stellt eine interdisziplinäre Aufgabe dar. Der maschinelle Tunnelbau ist zwar vornehmlich dem Bauingenieurwesen zuzuordnen, jedoch sind die einzelnen Aspekte in verschiedenen weiteren Disziplinen oder Teildisziplinen angesiedelt. Die Charakterisierung des Bodenmaterials ist vornehmlich der Geologie und die Untersuchungen mittels seismischer Wellen der Geophysik zuzuordnen. Gleichzeitig sind die numerischen Ansätze, welche für die Approximation der seismischen Wellenausbreitung eingesetzt werden, auch innerhalb der technischen Mechanik und somit allgemein im Ingenieursbereich gängige Verfahren. Entsprechend wird innerhalb dieses Kapitels ein grober Überblick über einige mechanische, geophysikalische und mathematische Grundlagen gegeben, welche nötig sind, um die Untersuchungen in den folgenden Kapiteln besser verstehen zu können. Des Weiteren werden auch schon einzelne Methoden eingeführt, welche in den folgenden Kapiteln verwendet werden. In Abschnitt 2.1 werden grundlegende Informationen zu Elastizität und elastischen Wellen vermittelt, wobei auch die elastische Wellengleichung eingeführt wird, welche die Grundlage für die Berechnung von seismischen Wellen darstellt. Des Weiteren werden die unterschiedlichen Wellentypen vorgestellt, welche innerhalb einer Tunnelumgebung auftreten und für deren Untersuchung relevant sind. Zudem werden verschiedene Phänomene erläutert, welche bei der Ausbreitung von seismischen Wellen beobachtet werden können, wie geometrische und intrinsische Dämpfung sowie die Reflexion und Refraktion von seismischen Wellen an Oberflächen und Grenzflächen. Die Ausbreitung seismischer Wellen innerhalb einer zweidimensionalen oberflächennahen Tunnelumgebung wird in Abschnitt 2.2 detailliert betrachtet, um zu verdeutlichen, wie durch Störkörper Unterschiede in den Seismogrammen hervorrufen werden, welche wiederum für die Vorauserkundung der Geologie ausgewertet werden sollen. In Abschnitt 2.3 wird die Betrachtung von seismischen Wellen und somit der elastischen Wellengleichung im Frequenzbereich eingeführt, wozu die Fourier-Transformation sowie die diskrete Form der Fourier-Transformation betrachtet werden. Die grundlegenden Aspekte für die numerische Modellierung von seismischen Wellen im Zeit- und im Frequenzbereich werden in Abschnitt 2.4 betrachtet, wobei im Anschluss noch eine kurze Übersicht zu einigen gängigen numerischen Verfahren für die Modellierung von seismischen Wellen gegeben wird.

### 2.1. Elastische Wellen

Die folgenden Ausführungen zu den Grundlagen elastischer Wellen basieren vorwiegend auf den Lehrwerken von Clauser (2016, 2018) und Igel (2016), welche auch für eine ausführlichere Einleitung in die Seismik empfohlen werden. Zeitlich vorübergehende elastische Auslenkungen von Bodenmaterie, welche sich sowohl räumlich als auch zeitlich ausbreiten, werden als seismische Wellen bezeichnet (Clauser, 2018, Seite 10). Elastische Wellen stellen eine übergeordnete Kategorie zu den seismischen Wellen dar, für welche die Auslenkungen von Materie im Allgemeinen betrachtet werden und somit nicht spezifisch die Auslenkungen des Erdbodens.

### 2.1.1. Zeitliche und räumliche Darstellung von Wellen

Anhand von harmonischen Schwingungen können, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, grundlegende Charakteristiken von Wellen erläutert werden. Die Periodendauer  $T$  beschreibt nach welcher Zeit sich eine Welle an einem räumlich festen Ort wiederholt. Der Kehrwert der Periodendauer ergibt die Frequenz  $f$ , welche angibt, wie häufig sich eine Welle innerhalb einer Zeiteinheit wiederholt (zeitliche Periodizität). Innerhalb dieser Arbeit werden Frequenzen immer in Wiederholungen pro Sekunde und somit in Hertz angegeben. Für viele Anwendungen wird die Kreisfrequenz  $\omega$  benötigt, für welche die Periodendauer auf den Umfang des Einheitskreises normiert wird:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{T}. \quad (2.1)$$

Die Kreisfrequenz wird in Radiant pro Sekunde angegeben. Die Wellenlänge  $\Lambda$  beschreibt nach welcher Distanz sich eine Schwingung wiederholt, wenn beispielsweise harmonische Wellen entlang einer räumlichen Linie zu einem festen Zeitpunkt betrachtet werden (vergleiche mit der rechten Seite von Abbildung 2.1). Mithilfe der Phasengeschwindigkeit  $v$ , welche beschreibt wie schnell sich eine Welle für eine einzelne Frequenz fortbewegt, kann die Wellenlänge  $\Lambda$  bestimmt werden:

$$\Lambda = \frac{v}{f} = 2\pi \frac{v}{\omega}. \quad (2.2)$$

Die Phasengeschwindigkeit  $v$  von elastischen Wellen hängt einerseits von den elastischen Eigenschaften des betrachteten Mediums und andererseits von dem Ausbreitungsmechanismus ab. Je nach Medium könnte sich die Phasengeschwindigkeit für die jeweiligen Phasenfrequenzen ändern, wodurch sich eine einzelne Phasengeschwindigkeit von der Gruppengeschwindigkeit unterscheidet, welche die Geschwindigkeit angibt mit der sich eine Gruppen von Wellen ausbreitet. Dabei würde es zu einer normalen Dispersion der Wellen kommen, welche aber in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wird, da die Phasengeschwindigkeiten als konstant angenommen werden.

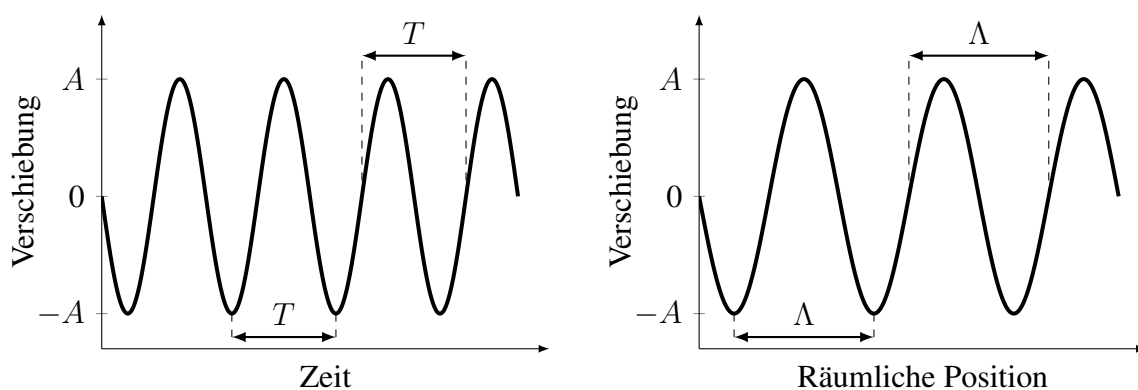


Abbildung 2.1.: Anhand der zeitlichen Veränderung der Verschiebungen an einer räumlichen Position (links) kann das Zeitintervall  $T$  dargestellt werden, wobei  $A$  die Amplitude der harmonischen Auslenkungen darstellt. Die räumliche Veränderung der Verschiebungen zu einem festen Zeitpunkt (rechts) ermöglicht eine Illustration der Wellenlänge  $\Lambda$ . Diese Abbildung wurde einer Abbildung von Clauser (2016) nachempfunden.



### 2.1.2. Spannungen und Dehnungen

Seismische Wellen werden durch das Einbringen von Energie in den Boden angeregt. Dabei kann die Energie einerseits durch ein größeres seismisches Ereignis erzeugt werden, wie die Energie, die bei der Reibung zwischen zwei tektonischen Erdplatten freigesetzt wird. Andererseits besteht auch die Möglichkeit kontrolliert über künstliche Quellen Energie in den Boden einzubringen. Beispiele würden dabei pneumatische Hämmer oder Sprengungen darstellen. Die Verschiebungen  $u_x$ ,  $u_y$  und  $u_z$  die ein Punkt eines Körpers  $\Omega$  in die verschiedenen Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  durch eine Anregung erfährt, sind absolute Größen und sind nicht nur von der Anregung, sondern auch von den Eigenschaften des Körpers, abhängig. Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des betrachteten Körpers und den Verschiebungen wird durch die Betrachtung der Verzerrungen und Spannungen in einem Körper ersichtlicher. Verzerrungen beschreiben die relativen Auslenkungen eines Punktes im Verhältnis zu seiner Umgebung. Aufgrund des Einsatzes von nicht zerstörerischen Wellen werden nur elastische Wellen betrachtet. Gleichzeitig werden nur sehr kleine Verzerrungen hervorgerufen, wodurch die Betrachtung von ausschließlich linearen Verzerrungen als Vereinfachung zulässig ist, sodass der geometrisch nichtlineare Anteil der zugehörigen Taylorreihenentwicklung vernachlässigt wird. Für einen eindimensionalen Stab kann beispielsweise die Dehnung  $\varepsilon$  über dem gesamten Stab durch das Verhältnis zwischen der Längenänderung  $\Delta l$  und der Ausgangslänge  $l_0$  mit  $\varepsilon = \Delta l/l_0$  beschrieben werden. In einem zwei- oder dreidimensionalen Körper treten neben Streckungen und Stauchungen in den Normalenrichtungen ( $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ) auch Scherungen ( $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$ ) auf, welche durch Verschiebungen tangential zu den Normalenrichtungen entstehen. Die linearen Verzerrungen lassen sich aus den örtlichen Änderungen der Verschiebungen ableiten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), & \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mehrdimensionale Verzerrungszustände können durch den Verzerrungstensor zusammengefasst werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T) = \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} \quad (2.4)$$

mit  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$  und  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ .

Da orthonormale Basisvektoren zum Aufspannen der Tensoren und Vektoren verwendet werden, werden diese bei den verwendeten Notationen nicht angegeben. Durch das dyadische Produkt  $\otimes$  wird ein Tensor durch zwei Vektoren aufgespannt, während der Nabla-Operator  $\nabla$  die partiellen örtlichen Ableitungen enthält. Die lokale Belastung von einem Punkt eines Körpers, welche aufgrund einer Verzerrung entsteht, wird durch die innere Spannung beschrieben. Die verschiedenen Spannungskomponenten und somit der Spannungszustand eines Punktes kann für lineare Verzerrungen durch den Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  zusammengefasst werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Der Cauchy Spannungstensor ist aufgrund der Drehimpulsbilanz symmetrisch. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz stellt eine lineare Beziehung zwischen dem Cauchy-Spannungstensor und dem linearen Verzerrungstensor dar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Dabei stellt  $\mathbf{C}$  den vierstufigen Elastizitätstensor dar, während das doppelte Skalarprodukt durch  $(:)$  dargestellt wird. Für die betrachteten infinitesimal kleinen Verzerrungen genügt die Verwendung von linear elastischen Materialmodellen zur Beschreibung des Verhaltens des Bodens. Somit ist der Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  in dieser Arbeit unabhängig von den vorliegenden Verzerrungszuständen. Der Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  ist ein vierstufiger Tensor mit 81 Komponenten. Aufgrund der Symmetrie des Verzerrungs- und Spannungstensors beläuft sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf 36 Komponenten. Über die zweite Ableitung der Formänderungsenergie erschließt sich, dass auch der Elastizitätstensor eine Symmetrie aufweist, wodurch dieser nur noch 21 unabhängige Komponenten für den allgemeinen anisotropen Fall besitzt (Gross u. a., 2018). Für isotropes Material, welches im folgenden angenommen wird, kann der Elastizitätstensor durch zwei unabhängige Komponenten beschrieben werden. Gängige Materialkonstanten für die Beschreibung des Elastizitätstensors stellen beispielsweise die erste Lamé-Konstante  $\lambda$  und die zweite Lamé-Konstante  $\mu$ , welche auch dem Schermodul entspricht, dar. Mittels der Einsteinschen Summenkonvention kann der Elastizitätstensor sehr kompakt dargestellt werden:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}). \quad (2.7)$$

Dabei handelt es sich bei  $\delta_{ij}$  um das Kronecker-Delta, welches den Wert 1 annimmt, wenn beide Indizes gleich sind, und den Wert 0 annimmt, wenn sich die Indizes unterscheiden. Für Anwendungen im Ingenieurbereich werden auch häufig der Elastizitätsmodul  $E$  in Kombination mit der Querkontraktionszahl  $\nu$  verwendet. Während der Elastizitätsmodul die Proportionalitätskonstante zwischen Spannung und Dehnung bei einer uniaxialen Belastung darstellt, beschreibt die Querkontraktionszahl das negative Verhältnis zwischen der Dehnung in Querrichtung und der Dehnung in der Belastungsrichtung. Aufgrund der Symmetrien des Elastizitätstensors  $\mathbf{C}$  kann  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in Gleichung 2.6 vereinfacht durch  $\nabla \otimes \mathbf{u}$  statt durch  $\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}$  ersetzt werden, was durch die Additionen beim doppelten Skalarprodukt zu den selben Ergebnissen führt. Mit der Voigt-Notation  $(\bullet)_{\text{Voigt}}$  können der Spannungs-, Dehnungs- und Elastizitätstensor in Gleichung 2.6, durch eine Reduzierung von redundanten Informationen, vereinfacht dargestellt werden (Voigt, 1910):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{Voigt}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{\text{Voigt}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Voigt}}. \quad (2.8)$$

Auch die Berechnung des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Voigt}}$  kann über die Voigt-Notation vereinfacht dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Voigt}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \mathbf{D}_x \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

wobei  $\mathbf{D}_x$  den zugehörigen Differentialoperator darstellt. Die Voigt-Notation ermöglicht eine einfachere Implementierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung innerhalb von numerischen Lösungsverfahren, wodurch die computergestützten Rechenoperationen schneller durchgeführt werden können und weniger Speicherplatz benötigt wird.

Im Rahmen dieser Arbeit wird anisotropes und poroelastisches Verhalten nicht betrachtet. Des weiteren wird auch kein geschädigtes Bodenmaterial untersucht und auch die Auswirkungen von Klüften werden nicht betrachtet. Eine numerische Modellierung von Klüften wurde von Möller u. Friederich (2019) im Rahmen eines knotenweisen diskontinuierlichen Galerkin Ansatzes implementiert. Lamert (2020) verwendete von dieser Implementierung erzeugte Wellenformen, um zu untersuchen, ob bei der Interpretation der Ergebnisse einer Full-Waveform-Inversion im Zeitbereich eine Unterscheidung zwischen Klüften und Schichtwechseln möglich ist.

### 2.1.3. Elastische Wellengleichung

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz leitet sich der Impulssatz bzw. der Impulserhaltungssatz her, welcher zur elastischen Wellengleichung führt:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.10)$$

wobei  $(\cdot)$  das einfache Skalarprodukt darstellt. Die Dichte an einer räumlichen Position  $\mathbf{x}$  wird durch  $\rho(\mathbf{x})$ , die Beschleunigung, welche die zweite partielle zeitliche Ableitung darstellt, wird durch  $\ddot{\mathbf{u}}$  und der aktuelle Zeitpunkt wird durch  $t$  gekennzeichnet. Die wirkenden äußeren Belastungen werden durch  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  dargestellt und werden innerhalb der angewandten Seismik üblicherweise durch künstliche Quellen eingeleitet. Durch das Lösen von Gleichung 2.10, welche eine hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, kann die Ausbreitung von elastischen Wellen beschrieben werden. An den freien Oberflächen  $\partial\Omega$ , wie beispielsweise der Erdoberfläche und den Tunnelwänden, verschwinden die Schubspannungen sowie die orthogonal zur Oberfläche wirkende Normalspannung:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.11)$$

Bei dieser Randbedingung, bei welcher ein Wert für die Ableitung der gesuchten Größe, der Verschiebung  $\mathbf{u}$ , vorgegeben wird, handelt es sich um eine Neumann-Randbedingung. Die in Gleichung 2.10 wirkenden äußeren Belastungen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , welche sowohl von der räumlichen Position  $\mathbf{x}$  als auch von der Zeit  $t$  abhängig sind, können bei der Anregung durch eine einzelne künstliche Punktquelle auch durch das folgende Produkt dargestellt werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) h(t) \mathbf{d} \quad (2.12)$$

Dabei wird die Belastungsrichtung durch den Einheitsvektor  $\mathbf{d}$  angegeben, während die zeitabhängige Quellfunktion  $h(t)$  den zeitlich veränderlichen Verlauf der Belastung angibt. Die Dirac-Delta-Funktion  $\delta(\bullet)$  stellt einen Einheitsimpuls dar (Clauser, 2018):

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.13)$$

Somit besitzt die Funktion  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$  an der räumlichen Position der Quelle  $\mathbf{x}_s$  eine integrierbare Singularität und besitzt ansonsten den Wert 0. Für die meisten Anwendungen in der Seismologie werden größere seismische Events, wie die Reibung zwischen tektonischen Erdplatten, als

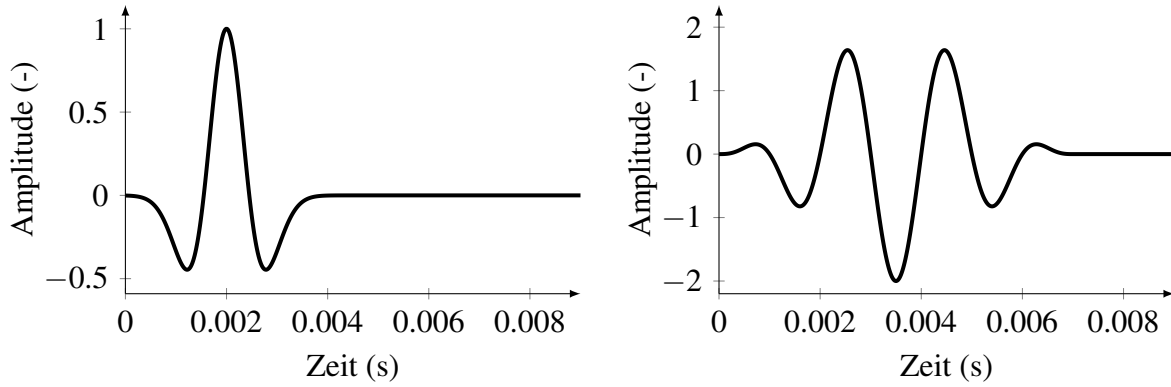


Abbildung 2.2.: Ricker-Signal  $h^R(t)$  mit einer Zentralfrequenz von  $f_R = 500$  Hz sowie einem Zeitversatz von  $t_R = 0.002$  s (links) und Toneburst-Signal  $h^{TB}(t)$  mit einer Zentralfrequenz von  $f_{TB} = 500$  Hz sowie einer Anzahl von  $N_{TB} = 3.5$  Oszillationen (rechts).

Quellen verwendet. Die zugehörigen Scherungen und daraus folgenden Spannungsänderungen können über einen Momententensor  $\mathbf{S}(t)$  näherungsweise dargestellt werden (Fichtner, 2011):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \mathbf{S}(t)). \quad (2.14)$$

Der Momententensor kann auch für die Darstellung von Sprengstoffquellen verwendet werden (Igel, 2016):

$$\mathbf{S}^{\text{expl}}(t) = S_0(t) \mathbf{I} \quad (2.15)$$

Dabei werden durch  $S_0(t)$  der zeitliche Verlauf sowie die Intensität der Sprengung angegeben, während  $\mathbf{I}$  den Einheitsensor darstellt.

Innerhalb dieser Arbeit wird für die Quellfunktion  $h(t)$  einfachheitshalber fast immer ein Ricker-Signal  $h^R(t)$  verwendet (Ricker, 1953), welches die negative zweite zeitliche Ableitung einer Gauß-Funktion darstellt und häufig bei seismischen Untersuchungen eingesetzt wird (Wang, 2015):

$$h^R(t) = (1 - 2\pi^2 f_R^2 (t - t_R)^2) \exp(-\pi^2 f_R^2 (t - t_R)^2). \quad (2.16)$$

Wie auf der linken Seite von Abbildung 2.2 dargestellt wird, stellt das Ricker-Signal ein sehr kompaktes und zeitlich symmetrisches Signal dar, welches vor allem durch seine Spitzenfrequenz  $f_R$  und den zeitlichen Versatz des mittleren Ausschlags  $t_R$  charakterisiert wird. In Kapitel 7 wird des Weiteren auch ein Toneburst-Signal  $h^{TB}(t)$  verwendet:

$$h^{TB}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ s} \\ \sin(2\pi f_{TB} t) (1 - \cos(2\pi f_{TB} t / N_{TB})) & \text{für } 0 \text{ s} \leq t < N_{TB} / f_{TB} , \\ 0 & \text{für } t \geq N_{TB} / f_{TB} \end{cases} \quad (2.17)$$

welches auf der rechten Seite von Abbildung 2.2 illustriert wird und auch schon von Trapp (2022) für Messungen innerhalb eines kleinskaligen Laborexperiments verwendet wurde. Die zugehörige Spitzenfrequenz wird durch  $f_{TB}$  und die Anzahl der verwendeten Oszillationen durch  $N_{TB}$  angegeben. Das Toneburst-Signal besitzt ein schmaleres Frequenzspektrum als das Ricker-Signal, was in Unterabschnitt 2.3.2 durch Abbildung 2.11 genauer betrachtet wird.

Durch die Verwendung der Dirac-Delta-Funktion aus Gleichung 2.13 für die Quellfunktion mit  $h(t) = \delta(t - t_\delta)$  kann die Antwort des betrachteten Mediums auf ein Impulssignal bestimmt werden, wobei  $t_\delta$  den Zeitpunkt kennzeichnet, wann die Impulsbelastung wirken soll. Die sich ergebenden Verschiebungen werden als Greensche Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet und stellen die universale Lösung der elastischen Wellengleichung für das betrachtete Randwertproblem dar. Somit enthalten ausschließlich die Greenschen Funktionen Informationen über den Aufbau und die Eigenschaften des betrachteten Mediums. Für die Bestimmung der Greenschen Funktionen kann Gleichung 2.10 umformuliert werden:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\nabla \otimes \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \delta(t - t_\delta) \mathbf{d}. \quad (2.18)$$

Durch die Faltung der Greenschen Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  mit einem beliebigen Quellsignal  $h(t)$  können die Verschiebungen  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  berechnet werden, welche mit diesem Quellsignal entstanden wären:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = h(t) * \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

Dieser Vorgang wird als Konvolution bezeichnet, während der inverse Prozess als Dekonvolution bezeichnet wird. Durch die Konvolution wird ermöglicht, dass für die synthetisch berechneten Greenschen Funktionen, ohne weiteren numerischen Aufwand, die Verschiebungen für viele unterschiedliche Quellsignale bestimmt werden können. Die Dekonvolution ermöglicht hingegen, dass beispielsweise bekannte überlagernde Störsignale aus aufgezeichneten Seismogrammen entfernt werden können. Auf Konvolution und Dekonvolution wird in Unterabschnitt 2.3.2 erneut eingegangen.

#### 2.1.4. Wellenarten

Innerhalb von Festkörpern treten unterschiedliche Arten von Wellen auf, welche sich durch ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit, ihre Schwingungsbewegung und ihre Polarisation (Schwingungsebene) unterscheiden. Vor allem kann grundlegend zwischen Raum- und Oberflächenwellen unterschieden werden.

##### Raumwellen

Raumwellen breiten sich innerhalb eines Mediums aus und können in zwei Wellenarten unterteilt werden. Die Kompressionswellen, welche in Abbildung 2.3 illustriert sind, breiten sich

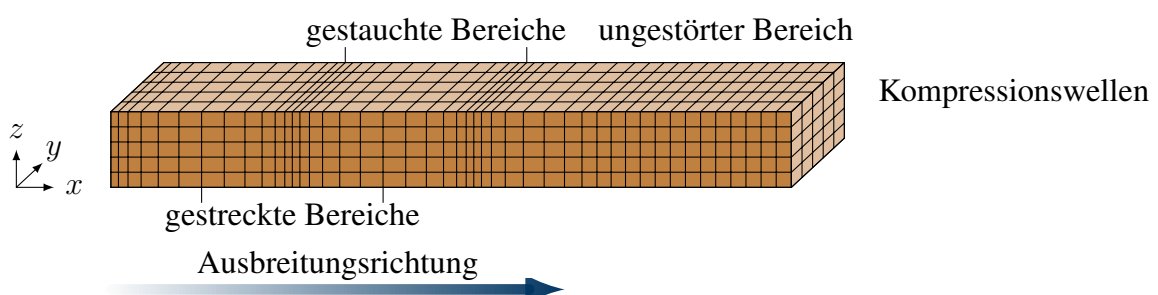


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung von Kompressionswellen.

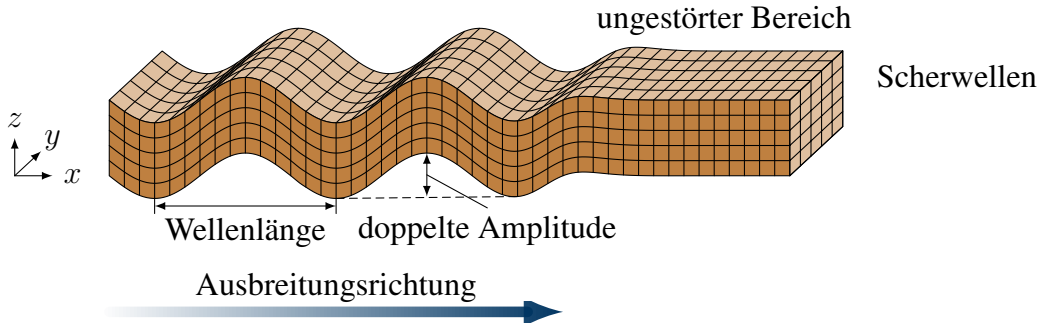


Abbildung 2.4.: Schematische Darstellung von Scherwellen.

durch die Streckung und Stauchung des Bodens aus. Dabei schwingen die Partikel in Richtung der Ausbreitungsrichtung, weswegen sie auch als Longitudinalwellen bezeichnet werden. Würde beispielsweise inmitten eines Mediums mittels einer punktuellen Quelle eine Anregung in eine Raumrichtung erfolgen, dann würden in dieser Richtung Kompressionswellen angeregt werden. Da jedoch durch diese gerichtete Anregung in Festkörpern auch eine Scherung stattfindet, würden gleichzeitig auch Scherwellen orthogonal zur Anregungsrichtung emittiert werden. Durch die Scherwellen werden die Partikel tangential zur Ausbreitungsrichtung der Welle polarisiert, was in Abbildung 2.4 illustriert wird und weswegen die Scherwellen auch als Transversalwellen bezeichnet werden. Aufgrund der unterschiedlichen Ausbreitungsmechanismen breiten sich Kompressionswellen schneller als Scherwellen aus, weswegen sie auch als Primär- oder P-Wellen bezeichnet werden, wobei ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit mit  $v_p$  quantifiziert wird. Scherwellen breiten sich langsamer aus und werden als Sekundär- oder S-Wellen bezeichnet, weswegen ihre Geschwindigkeit mit  $v_s$  bezeichnet wird. Die Wellengeschwindigkeiten sind von der Dichte und den elastischen Eigenschaften des betrachteten Mediums abhängig. Für seismische Betrachtungen empfiehlt sich die Verwendung der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten als elastische Konstanten. Die Formeln zur Umrechnung der Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , des Elastizitätsmoduls  $E$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  und der Dichte  $\rho$  in die Wellengeschwindigkeiten  $v_p$  und  $v_s$  sowie für die umgekehrten Umrechnungen, werden in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Weitere elastische Konstanten, wie der Kompressionsmodul und der Longitudinalmodul, welche teilweise auch für die Beschreibung des elastischen Verhaltens von Kompressionswellen verwendet werden, werden nicht näher betrachtet. Der Elastizitätstensor aus Gleichung 2.7 kann auch in Abhängigkeit von den Wellengeschwindigkeiten dargestellt werden:

$$C_{ijkl} = \rho \left( (v_p^2 - 2v_s^2) \delta_{ij}\delta_{kl} + v_s^2 (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \right). \quad (2.20)$$

Der Elastizitätstensor in Abhängigkeit von den Wellengeschwindigkeiten aus Gleichung 2.20 hat in der Voigt-Notation die Form:

$$\mathbf{C}_{\text{Voigt}} = \rho \begin{pmatrix} v_p^2 & v_p^2 - 2v_s^2 & v_p^2 - 2v_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & v_p^2 & v_p^2 - 2v_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & v_p^2 - 2v_s^2 & v_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_s^2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

|             | $E, \nu$  | $E, \mu$                                      | $\lambda, \mu$                              | $v_p, v_s$   |
|-------------|---|---|---|--|
| $E$ :       | –   | –   | $\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ | $\rho v_s^2 \frac{3v_p^2 - 4v_s^2}{v_p^2 - v_s^2}$ |
| $\nu$ :     | –   | $\frac{E - 2\mu}{2\mu}$                       | $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$          | $\frac{v_p^2 - 2v_s^2}{2(v_p^2 - v_s^2)}$          |
| $\lambda$ : | $\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$                  | $\mu \frac{E - 2\mu}{3\mu - E}$               | –   | $\rho(v_p^2 - 2v_s^2)$                             |
| $\mu$ :     | $\frac{E}{2(1 + \nu)}$                              | –   | –   | $\rho v_s^2$                                       |
| $v_p$ :     | $\sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$ | $\sqrt{\frac{\mu(4\mu - E)}{\rho(3\mu - E)}}$ | $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$        | –  |
| $v_s$ :     | $\sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}$                   | $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$                     | $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$                   | –  |

Tabelle 2.1.: Formeln mit welchen die unterschiedlichen elastischen Materialkonstanten ineinander umgerechnet werden können.

### Oberflächenwellen

Oberflächenwellen breiten sich entlang von freien Oberflächen aus, wobei ihre Amplituden höher ausfallen als die der Raumwellen und mit zunehmender Entfernung von der Oberfläche exponentiell abnehmen. Die Wellengeschwindigkeiten von Oberflächenwellen sind frequenzabhängig (dispersiv), wodurch sich die Komponenten niedriger Frequenzen schneller ausbreiten als die Anteile höherer Frequenzen, was auf die unterschiedlichen Eindringtiefen der Wellen für verschiedene Frequenzen zurückzuführen ist.

Rayleigh-Wellen werden durch Kompressionswellen und vertikal polarisierte Scherwellen angeregt und stellen eine Kombination von longitudinal und tangential polarisierten Wellen dar (vergleiche Abbildung 2.5). Die Bewegung der Partikel findet in elliptischer Form statt, wobei bis zu einer Entfernung von 19% der Wellenlänge der Rayleigh-Welle zur Oberfläche die Polarisierung der Wellen rückwärts gerichtet zu der Ausbreitungsrichtung rotiert (retrograd). In einer

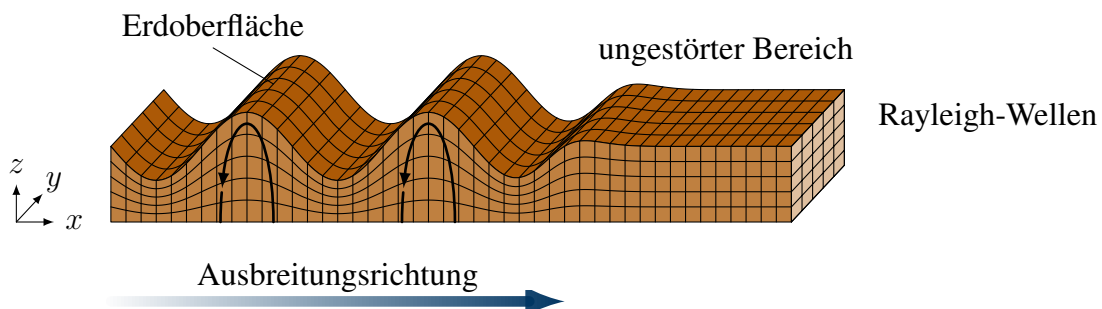


Abbildung 2.5.: Schematische Darstellung von Rayleigh-Wellen.

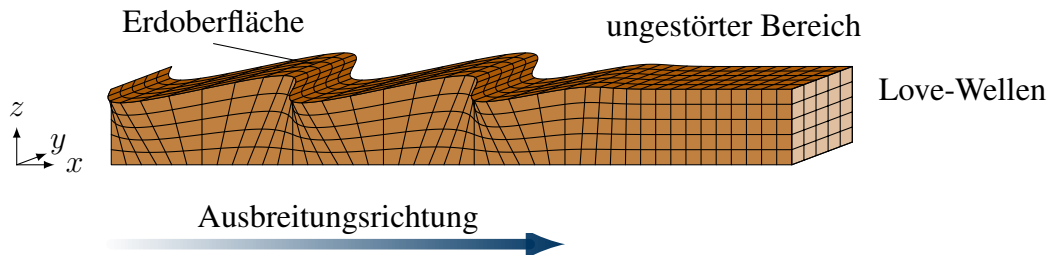


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung von Love-Wellen.

Entfernung zur Oberfläche von genau 19% der Rayleigh-Wellenlänge finden nur Auslenkungen in vertikaler Richtung statt, während in größerer Entfernung zur Oberfläche die Polarisierung der Wellen vorwärts gerichtet zu der Ausbreitungsrichtung rotiert (prograd). Freund (1998) gibt eine recht spezifische Annäherung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Rayleigh-Wellen  $v_r$  in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl  $\nu$  und der Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$  an:

$$v_r = \frac{0.862 + 1.14 \nu}{1 + \nu} v_s. \quad (2.22)$$

Für plausible Querkontraktionszahlen breiten sich die Rayleigh-Wellen mit  $v_r \approx 0.9 v_s$  etwas langsamer als Scherwellen aus.

Love-Wellen entstehen nur an freien Oberflächen, an welchen die Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$  mit zunehmender Entfernung zur Oberfläche zunimmt. Horizontal polarisierte Scherwellen, welche überkritisch an der freien Oberfläche und der unteren Grenzfläche der betrachteten Schicht reflektiert wurden, überlagern und verstärken sich gegenseitig, wodurch eine Oberflächenwelle entsteht, die horizontal polarisiert ist, was in Abbildung 2.6 schematisch illustriert wird. Die Love-Wellen breiten sich mit einer höheren Geschwindigkeit als die Rayleigh-Wellen aus. Für kleine Wellenlängen entspricht die Geschwindigkeit von Love-Wellen der Scherwellengeschwindigkeit der oberen Bodenschicht, während sie für größere Wellenlängen der Scherwellengeschwindigkeit der unteren Schicht entspricht.

### Tunneloberflächenwellen

In einer Tunnelumgebung treten an den freien Oberflächen der Tunnelwände auch Oberflächenwellen auf. Diese Tunneloberflächenwellen werden auch häufig als T- oder TS-Wellen bezeichnet. Aufgrund der Krümmung des Tunnels weisen diese Wellen, je nach Wellenlänge und somit je nach Frequenz, unterschiedliche Charakteristiken auf, was von Jetschny u. a. (2010) genauer untersucht wurde. Um eine Einordnung vornehmen zu können, wann welche Charakteristiken dominieren, kann das Verhältnis zwischen der Wellenlänge der Tunneloberflächenwellen  $\Lambda_T$  und dem Durchmesser  $d$  des Tunnels eingeführt werden:

$$w = \frac{\Lambda_T}{d}. \quad (2.23)$$

Für ein Verhältnis von ungefähr  $w < 0.6$  Verhalten sich die Oberflächenwellen wie Rayleigh-Wellen, da die Krümmung der Oberfläche von den Wellen kaum wahrgenommen wird. Bei einem Verhältnis von ungefähr  $w > 1.2$  verhalten sich die Tunneloberflächenwellen fast wie Scherwellen, da die Wellen orthogonal zur Ausbreitungsrichtung polarisiert sind und sich die zugehörige Wellengeschwindigkeit der Scherwellengeschwindigkeit annähert. In dem ungefähren Bereich von  $0.6 < w < 1.2$  treten beide Wellenarten in einer gemischten Form auf.



### 2.1.5. Dämpfung von Wellen

Die Energiedichte von Wellen nimmt durch die geometrische Ausbreitung der Wellen ab, da sich die selbe Energie über ein zunehmendes Volumen verteilt. Dieses Phänomen wird als geometrische Dämpfung bezeichnet. Raumwellen breiten sich sphärisch aus, weswegen von einer sphärischen Divergenz gesprochen wird. Dabei verteilt sich die kinetische Energie über die kugelförmige Oberfläche der Wellenfronten, wodurch die Energiedichte mit zunehmender Entfernung  $r$  zum Ausgangspunkt mit dem Faktor  $1/r^2$  abnimmt. Oberflächenwellen sind an die freien Oberflächen gebunden. Zwar treten noch Auslenkungen unterhalb der Oberfläche auf, jedoch entfernen sich diese nicht weiter von dieser. Somit breiten sich Oberflächenwellen zylindrisch aus, wobei die Höhe dieser zylindrischen Ausbreitung als konstant angenommen werden kann. Die Energiedichte nimmt mit dem Faktor  $1/r$  ab, da sich die kinetische Energie mit steigendem Abstand  $r$  zum Ausgangspunkt über einen größer werdenden Umfang verteilt. Dies hat zur Folge, dass Oberflächenwellen im Vergleich zu Raumwellen weniger stark bei ihrer Ausbreitung geometrisch gedämpft werden, wodurch sie über größere Amplituden verfügen. Bei Tunneloberflächenwellen hat dies den Vorteil, dass das Verhältnis zwischen den Amplituden und dem Messrauschen sehr gut ist, wodurch mehr Informationen über die Tunneloberflächenwellen gewonnen werden können als über die Raumwellen (Bohlen u. a., 2007). Die Energie der Wellen wird des Weiteren auch durch Streuungen aufgrund der Heterogenität der Böden sowie durch die Aufspaltung der Wellen an Schichtgrenzen in gebrochene und reflektierte Wellen weiter räumlich verteilt und somit abgedämpft.

Ein Verlust von kinetischer Energie, welcher als Absorption bezeichnet wird, kann durch Umwandlung von kinetischer Energie in Wärmeenergie, u.a. aufgrund der Reibung an Korngrenzen, entstehen. Des Weiteren kann Energie auch durch kleinere Schädigungen des Bodens verloren gehen. Um den Energieverlust beschreiben zu können, wird der Qualitätsfaktor  $Q$  eingeführt, welcher das reziproke negative Verhältnis zwischen dem Energieverlust pro Schwingung  $\Delta W$  und dem zugehörigen Höchstwert der Formänderungsenergie  $W$  darstellt (Igel, 2016, Abschnitt 2.3.1):

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta W}{2\pi W}. \quad (2.24)$$

Dabei können die Qualitätsfaktoren in Abhängigkeit von der Frequenz variieren. Höhere Qualitätsfaktoren beschreiben eine geringe Absorption von Energie, während niedrige Qualitätsfaktoren einen höheren Energieverlust beschreiben. Die Dämpfung nimmt mit steigender Frequenz zu, da über die selbe Distanz mehr Schwingungen durchlaufen werden. Da die Absorption von Energie vornehmlich auf die Reibung an Korngrenzen zurückzuführen ist, erfahren Scherwellen aufgrund ihres Ausbreitungsmechanismus eine stärkere Dämpfung als Kompressionswellen, wodurch auch Oberflächenwellen einer ausgeprägteren Dämpfung unterliegen. Für die Beschreibung dieses Dämpfungsverhaltens werden einzelne Qualitätsfaktoren für die unterschiedlichen elastischen Konstanten eingeführt, wie beispielsweise  $Q_p$  und  $Q_s$  für die Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_p$  und die Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$ .

### 2.1.6. Akustische Wellengleichung

Einen Sonderfall von Gleichung 2.10 stellt die akustische Wellengleichung dar, welche für Gase und viele Fluide verwendet werden kann, für deren Schermodul  $\mu \approx 0$  gilt. Durch das Wegfallen

des Schermoduls vereinfacht sich das verallgemeinerte Hookesche Gesetz in Gleichung 2.6 unter Verwendung von Gleichung 2.7 zu:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \underbrace{\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{-p} \mathbf{I}, \quad (2.25)$$

wobei der skalare Druck  $p$  eingeführt werden kann, während  $\mathbf{I}$  den Einheitstensor darstellt. Durch das Einsetzen des rechten Ausdrucks von Gleichung 2.25 in Gleichung 2.10 ergibt sich:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (2.26)$$

Durch die Division durch die Dichte  $\rho$  und die Anwendung des linksseitigen Skalarprodukts mit dem Nabla-Operator  $\nabla$  ergibt sich:

$$-\frac{1}{\lambda} \ddot{p} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right) \quad \text{mit} \quad -\frac{1}{\lambda} \ddot{p} = \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.27)$$

Die zweite zeitliche Ableitung der Verschiebung  $\ddot{\mathbf{u}}$  kann wie dargestellt durch die zweite zeitliche Ableitung des skalaren Drucks  $\ddot{p}$  ersetzt werden. Unter der Annahme, dass sich die Dichte  $\rho$  örtlich langsamer verändert als der skalare Druck  $p$ , kann Gleichung 2.27 durch eine Multiplikation mit der negativen ersten Lamé-Konstante  $\lambda$  vereinfacht werden zu:

$$\ddot{p}(\mathbf{x}, t) - v_p^2(\mathbf{x}) \Delta p(\mathbf{x}, t) = -v_p^2(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.28)$$

Das Skalarprodukt aus zwei Nabla-Operatoren ergibt den Laplace-Operator  $\Delta$ , während der Quotient aus der ersten Lamé-Konstante  $\lambda$  und der Dichte  $\rho$  das Quadrat der Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_p^2$  ergibt, da für den Schermodul  $\mu = 0$  angenommen wird (Fichtner, 2011, Abschnitt 2.3). Bei der Bedingung, dass die Spannung am freien Rand gleich Null ist, wird für die akustische Wellengleichung keine Neumann-Randbedingung, sondern eine Dirichlet-Randbedingung vorgegeben, bei welcher nicht der Wert für die Ableitung der gesuchten Größe, hier der Druck  $p$ , sondern der Wert der Größe selbst vorgegeben wird:

$$p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.29)$$

Gleichung 2.28 beschreibt nur die Ausbreitung von Kompressionswellen, wobei die Kompressionswellen, welche durch eine Reflexion von Scherwellen entstehen würden, nicht berücksichtigt werden. Des Weiteren können auch keine Oberflächenwellen beschrieben werden. Die numerische Berechnung des skalaren Druckfeldes  $p$  der akustischen Wellengleichung benötigt einen geringeren Rechenaufwand als die numerische Berechnung der vektoriellen Verschiebungen der elastischen Wellengleichung, da die Anzahl der Freiheitsgrade deutlich reduziert wird. Da über die akustische Wellengleichung insbesondere Gase und Fluide beschrieben werden können, bietet sich eine Anwendung für die Unterwasserakustik an. Jedoch ist auch ein Einsatz zur Erkundung des Bodens sinnvoll, wenn für Anwendungen nur die ersten Kompressionswellen berücksichtigt werden sollen. Dazu müssen die Scher- und Oberflächenwellen, welche bei der Aufzeichnung eines Seismogramms aufgenommen werden, vernachlässigt werden. Einerseits ist dies über eine Betrachtung der Laufzeiten der Wellen möglich und andererseits gibt es auch Methoden, welche den sich unterscheidenden Frequenzgehalt der Wellen nutzen, um entsprechende Bestandteile der Scher- und Oberflächenwellen aus den Seismogrammen herauszufiltern (Wang u. Ling, 2016). Des Weiteren eignet sich die Verwendung der akustischen Wellengleichung gut für erste Untersuchungen von Konzepten, welche für die Verwendung der elastischen Wellengleichung vorgesehen sind. Tarantola (1984a) hat beispielsweise zuerst das Konzept der Full-Waveform-Inversion für die akustische Wellengleichung eingeführt bevor er das Konzept auf die elastische Wellengleichung ausgeweitet hat (Tarantola, 1986).

### 2.1.7. Reflexion und Refraktion von Wellen

An freien Oberflächen werden elastische Wellen reflektiert, wobei neben der Anregung von Oberflächenwellen die einfallenden Wellen auch umgewandelt werden, sodass beispielsweise durch eine einfallende Kompressionswelle sowohl eine Kompressions- als auch eine Scherwelle reflektiert wird. An Grenzflächen tritt neben einer teilweisen Konversion auch eine Brechung bzw. Refraktion der einfallenden Wellen auf.

Für die weitere Betrachtung des Verhaltens von elastischen Wellen an Grenzflächen sind die Definitionen von Wellenfronten und Wellenstrahlen notwendig. Eine Wellenfront wird durch die Orte innerhalb des Wellenfeldes beschrieben, an welchen sich die Partikel des Mediums zu einem Zeitpunkt im selben Auslenkungszustand befinden (Clauser, 2018). Daher werden die Wellenfronten durch die Tangenten der sich ausbreitenden Welle gekennzeichnet. Wellenstrahlen stellen hingegen die senkrecht zu den Wellenfronten stehenden Trajektorien und somit die Ausbreitungsrichtung dar. Eine Wellenfront wird aufgrund der sphärischen Ausbreitung der Wellen durch mehrere Wellenstrahlen beschrieben. Wellenstrahlen sind eine Hochfrequenznäherung der Wellengleichung (Červený, 2001) und können mathematisch einfacher beschrieben werden.

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt auf einer Wellenfront als Ausgangspunkt für eine neue elementare Kugelwelle betrachtet werden kann (Clauser, 2018). Die Interferenz der Wellenfronten der neuen kugelförmigen Elementarwellen stellt die neue Wellenfront dar. Über das Huygenssche Prinzip kann mithilfe von Abbildung 2.7 beschrieben werden, wie Wellen an Grenzflächen reflektiert und gebrochen werden. Dazu wird im Folgenden ein akustisches Medium betrachtet, wodurch keine Scherwellen sowie keine Umwandlungen von

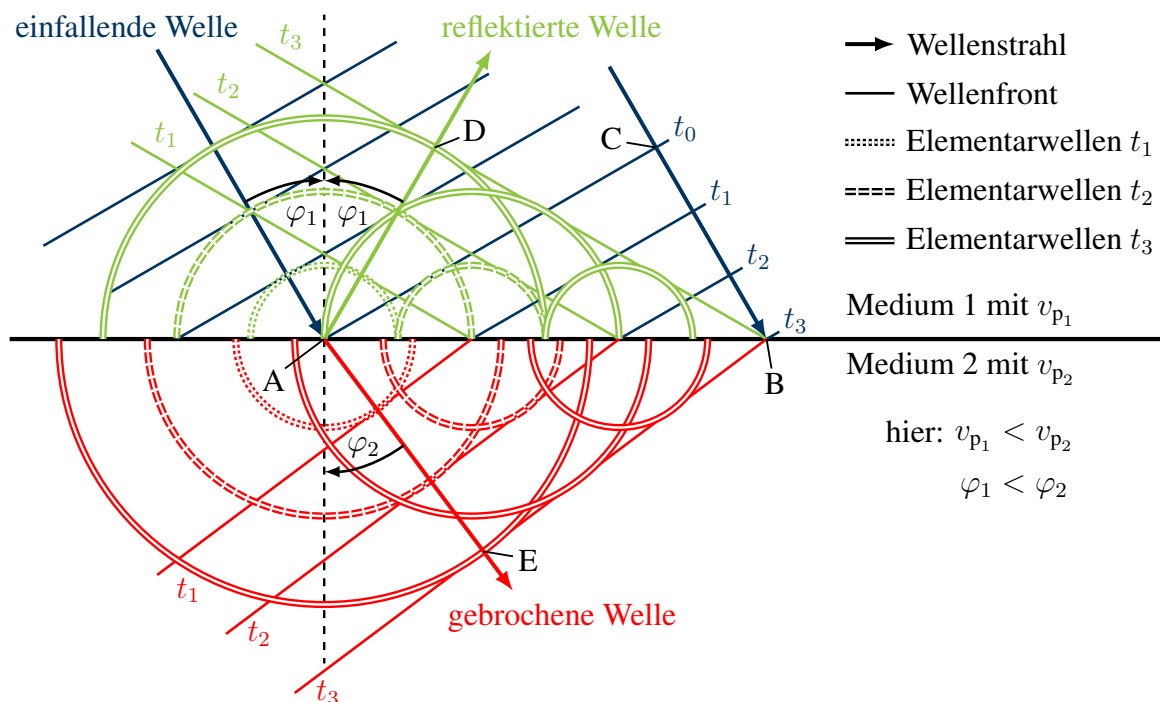


Abbildung 2.7.: Veranschaulichung und Herleitung des Snelliusschen Reflexions- und Brechungsgesetzes an einer Grenzfläche mittels des Huygensschen Prinzips. Diese Abbildung wurde einer Abbildung von Lowrie (2007) nachempfunden.

Kompressions- in Scherwellen und andersherum betrachtet werden müssen. Eine ebene Wellenfront bewegt sich durch das erste Medium mit einer Wellengeschwindigkeit von  $v_{p_1}$  und trifft unter einem Winkel  $\varphi_1$  zum Lot auf die Grenzfläche zum zweiten Medium. Während die einfallende Wellenfront den Punkt A schon zum Zeitpunkt  $t_0$  erreicht, kommt sie erst zum Zeitpunkt  $t_3$  an Punkt B an. An jedem Punkt, an welchem die einfallende Wellenfront auf die Grenzfläche trifft, werden nach dem Huygensschen Prinzip neue sphärische Elementarwellen ausgelöst, wobei in Abbildung 2.7 zur Veranschaulichung nur die Elementarwellen von drei Punkten auf der Geraden  $\overline{AB}$  zu den Zeitpunkten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$  betrachtet werden. Da die Elementarwelle in Punkt A früher ausgelöst wird als in den anderen betrachteten Punkten, hat sich diese früher weiter ausgebreitet. Die Wellengeschwindigkeit  $v_{p_2}$  des zweiten Mediums ist höher als die Wellengeschwindigkeit des ersten Mediums, wodurch sich die neuen Elementarwellen schneller von der Grenzfläche entfernen als im ersten Medium. Durch das Anlegen einer Tangente an die Elementarwellen eines Zeitschritts ergibt sich die Wellenfront des Zeitschritts. Die Wellenstrahlen verlaufen, wie beschrieben, orthogonal zu den Wellenfronten. Die sich ergebenden Winkel der Wellenstrahlen, welche im Punkt A reflektiert und gebrochen werden, lassen sich über geometrische Betrachtungen der Wellenfronten der reflektierten und gebrochenen Wellen zum Zeitpunkt  $t_3$  sowie der Wellenfront der einfallenden Welle zum Zeitpunkt  $t_0$  in Kombination mit den Wellenstrahlen herleiten. Dazu wurden die zugehörigen Schnittpunkte C, D und E zusätzlich gekennzeichnet. Das Dreieck, welches sich aus den Punkten ABC zusammensetzt, besitzt die selbe Form und Größe wie das Dreieck, welches sich aus den Punkten ABD zusammensetzt. Daraus folgt, dass der Winkel des reflektierten Wellenstrahls zum Lot dem Winkel  $\varphi_1$  des einfallenden Wellenstrahls entspricht. Der Winkel zwischen den Geraden  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  sowie zwischen den Geraden  $\overline{AB}$  und  $\overline{BD}$  ist gleich der Einfallswinkel  $\varphi_1$ , während der Winkel zwischen den Geraden  $\overline{AB}$  und  $\overline{BE}$  dem Winkel  $\varphi_2$  entspricht, in welchem der Strahl der einfallenden Welle im zweiten Medium vom Lot weggebrochen wird. Somit können die Strecken  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AD}$  und  $\overline{BE}$  einerseits über eine trigonometrische Betrachtung mittels der Strecke  $\overline{AB}$  und andererseits auch mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_{p_1}$  und  $v_{p_2}$  unter Verwendung der Zeit  $(t_3 - t_0)$ , welche zwischen der Ankunft der einfallenden Wellenfront in Punkt A bei  $t_0$  und in Punkt B bei  $t_3$  vergangen ist, berechnet werden:

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{AB} \sin(\varphi_1) = v_{p_1} (t_3 - t_0) = \overline{AD}, \\ \overline{BE} &= \overline{AB} \sin(\varphi_2) = v_{p_2} (t_3 - t_0).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Durch eine Division der beiden Zeilen von Gleichung 2.30 kann das Snelliussche Brechungsgesetz hergeleitet werden:

$$\frac{\sin(\varphi_1)}{v_{p_1}} = \frac{\sin(\varphi_2)}{v_{p_2}}.\tag{2.31}$$

Die Quotienten aus Gleichung 2.31 bleiben für einen Strahl über seinen kompletten Laufweg hinweg konstant. Wenn das zweite Medium eine höhere Wellengeschwindigkeit aufweist als das erste Medium, dann wird der Strahl der einfallenden Welle vom Lot weggebrochen, während dieser beim umgekehrten Fall zum Lot hin gebrochen wird. Das Snelliussche Brechungsgesetz kann auch äquivalent über das Fermatsche Prinzip hergeleitet werden, nach welchem ein Wellenstrahl dem Weg folgt, für welchen er am wenigsten Zeit benötigt.

Bei der Betrachtung eines elastischen Mediums findet an einer Grenzfläche auch eine Umwandlung von den einfallenden Kompressionswellen in Scherwellen statt, sowohl bei der Reflexion als auch bei der Refraktion. Das Snelliussche Brechungsgesetz bleibt zwar gültig, jedoch unterscheiden sich die Scherwellengeschwindigkeiten einerseits untereinander und andererseits

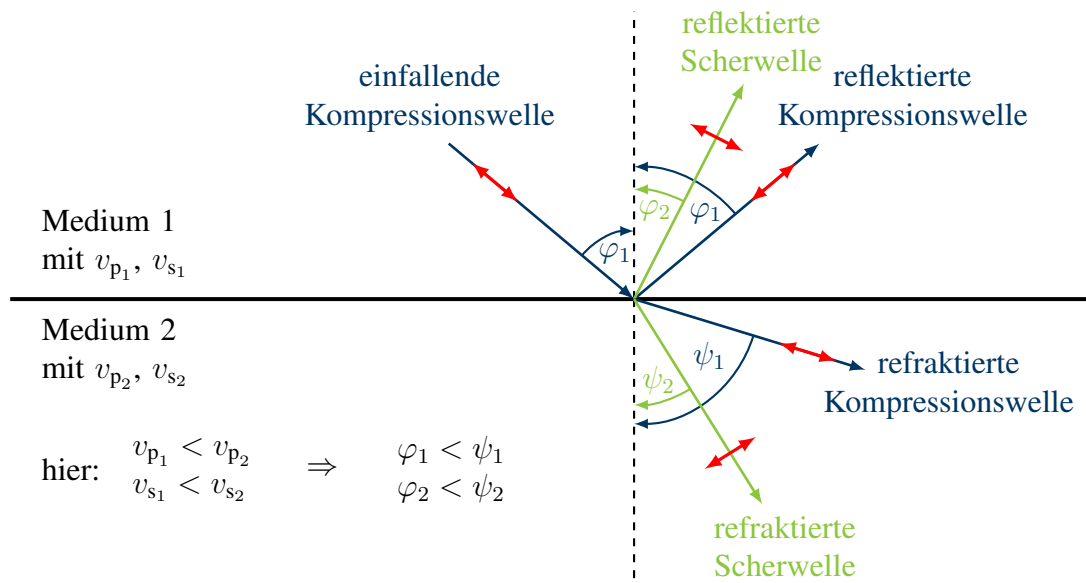


Abbildung 2.8.: Reflexion, Brechung und Konversion von Wellenstrahlen an einer Grenzfläche von zwei elastischen Medien. Diese Abbildung wurde einer Abbildung von Clauser (2016) nachempfunden.

unterscheiden sie sich von den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Kompressionswellen, weswegen die Scherwellen an einer Grenzfläche in anderen Winkeln reflektiert und gebrochen werden. Um dies zu beschreiben kann das Snelliussche Brechungsgesetz aus Gleichung 2.31 verallgemeinert werden:

$$\frac{\sin(\varphi_1)}{v_{p_1}} = \frac{\sin(\varphi_2)}{v_{s_1}} = \frac{\sin(\psi_1)}{v_{p_2}} = \frac{\sin(\psi_2)}{v_{s_2}}, \quad (2.32)$$

wobei die zugehörigen Winkel und Wellenstrahlen in Abbildung 2.8 illustriert werden. Die Quotienten in Gleichung 2.32 bleiben, wie auch schon die Quotienten in Gleichung 2.31, über den gesamten Laufweg eines Wellenstrahls konstant.

### 2.1.8. Zweidimensionale Modellierung

Aufgrund der Geometrie einiger Randwertprobleme können diese auf die Betrachtung eines ebenen Kontinuums reduziert werden. Dabei wird zwischen einem ebenen Spannungszustand (ESZ) und einem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) unterschieden. Beim ebenen Spannungszustand werden üblicherweise ebene, dünnwandige Bauteile betrachtet, welche in ihrer Ebene belastet werden. Die Normalspannung orthogonal zu der Ebene des Bauteils sowie die zugehörigen Schubspannungen sind im Vergleich zu den restlichen Spannungskomponenten sehr klein, weshalb diese näherungsweise vernachlässigt werden können. Bei einem Bauteil, welches sich in der  $x$ - $y$ -Ebene befindet, würde entsprechend näherungsweise  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  gelten. Die Dehnung in orthogonaler Richtung zu der Bauteilebene ( $\varepsilon_{zz}$ ) kann jedoch nicht vernachlässigt werden. Durch diese Erkenntnisse kann die Spannungs-Dehnungs-Beziehung aus Gleichung 2.8 vereinfacht werden. Ein ebener Verzerrungszustand kann hingegen angenommen werden, wenn in der orthogonalen räumlichen Richtung zu einer Ebene sich weder die Geometrie noch die Belastung verändert. Dadurch würde bei der Betrachtung einer  $x$ - $y$ -Ebene  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  gelten. Die Normalspannung in orthogonaler Richtung zu der betrachteten

Ebene ( $\sigma_{zz}$ ) verschwindet zwar nicht, aber könnte durch die anderen beiden Normalspannungen bestimmt werden (Gross u. a., 2018). Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Voigt-Notation aus Gleichung 2.8 könnte somit vereinfacht werden zu:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{Voigt}}^{\text{EVZ}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} v_p^2 & v_p^2 - 2v_s^2 & 0 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & v_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{\text{Voigt}}^{\text{EVZ}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Voigt}}^{\text{EVZ}}. \quad (2.33)$$

Eine Untersuchung von ebenen Randwertproblemen bietet die Vorteile, dass eine numerische Berechnung deutlich schneller durchgeführt werden kann und auch die Auswertung der Ergebnisse übersichtlicher wird. Des Weiteren können zweidimensionale Berechnungen Einblicke in Problemstellungen ermöglichen, wenn für die Berechnungen mit dreidimensionalen Modellen die vorhandenen Rechenkapazitäten zu niedrig sind. Für die Seismik wird bei einer zweidimensionalen Modellierung ein ebener Verzerrungszustand angenommen. Wie schon beschrieben, würde dadurch sowohl eine Symmetrie des Bodens als auch der Belastungen in die dritte Raumrichtung vorausgesetzt. Eine Punktquelle in einem zweidimensionalen Modell würde somit übertragen auf ein dreidimensionales Modell eine Quelle darstellen, welche sich über eine Linie in der symmetrischen Raumrichtung erstreckt. Dadurch breiten sich die angeregten Wellenfronten zylindrisch statt sphärisch aus, was zu einer sich unterscheidenden geometrischen Dispersion führt, da die Energiedichte für sich zylindrisch ausbreitende Wellen mit zunehmender Entfernung  $r$  zur Quelle reziprok und somit um den Faktor  $1/r$  abnimmt. Entsprechend können die Seismogramme, welche mit einem zweidimensionalen Modell berechnet werden, nicht direkt mit synthetischen oder gemessenen Seismogrammen verglichen werden, welche durch eine Anregung über eine Punktquelle in einem dreidimensionalen Gebiet entstanden sind (Igel, 2016, Abschnitt 3.3.1). Eine Möglichkeit, um die Seismogramme eines zweidimensionalen und eines dreidimensionalen Modells annäherungsweise vergleichbar machen zu können, stellt das Bleistein-Filter (Bleistein, 1986) dar, auf welches in Abschnitt 7.2 detaillierter eingegangen wird.

Für zweidimensionale Tunnelmodelle bedeutet die Annahme von Symmetrie in die dritte Raumrichtung, dass statt eines zylindrischen Tunnels ein quaderförmiger Tunnel betrachtet wird, wobei der Tunnelboden und die Tunneldecke eine unendliche Ausdehnung in der dritten Raumrichtung besitzen. Dadurch sind die Bereiche des Erdreichs ober- und unterhalb des Tunnels stärker von einander separiert, da sich keine seismischen Wellen neben dem Tunnel in den jeweils anderen Bereich ausbreiten können und da keine Tunneloberflächenwellen entstehen, welche die Tunnelwände radial umlaufen. Dennoch ist eine Betrachtung von zweidimensionalen Tunnelmodellen sinnvoll, um erste Erkenntnisse zu der Ausbreitung und Inversion von seismischen Wellen zu gewinnen.

## 2.2. Seismische Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung

Innerhalb dieser Arbeit wird der Einfluss der Tunnelbohrmaschine, des eingebrachten Ringspaltmörtels sowie der Tunnelinnenschalen auf die seismische Wellenausbreitung vernachlässigt. Der schalenförmige metallische Aufbau einer Tunnelbohrmaschine sollte nur einen geringen Einfluss auf seismische Wellen haben, da die einzelnen Bestandteile im Vergleich zu dem zu untersuchenden Boden sehr dünn sind. Des Weiteren muss eine feste Verbindung zwischen den Bestandteilen der Tunnelbohrmaschine und dem Boden bestehen, damit die seismischen Wellen an den Grenzflächen übertragen werden können, was jedoch an den meisten Stellen nicht sichergestellt wäre. Daher erscheint die Vernachlässigung des Einflusses der Tunnelbohrmaschine für

die Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit vertretbar, vor allem vor dem Hintergrund, dass das Ziel dieser Arbeit die Untersuchung der generellen Tauglichkeit der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau darstellt. Einfachheitshalber wird in dieser Abhandlung auch nicht die Änderung der Bodeneigenschaften berücksichtigt, welche sich für zunehmende Tiefen durch den zunehmenden Druck ergibt, welcher auf das Gewicht der oberen Bodenschichten zurückzuführen ist. Die in Unterabschnitt 2.1.4 vorgestellten Wellentypen sowie die in Unterabschnitt 2.1.5 und in Unterabschnitt 2.1.7 vorgestellten Phänomene, Prinzipien und Gesetze zur geometrischen Dispersion sowie zur Reflexion und Refraktion von Wellen können bei der Betrachtung der seismischen Wellenausbreitung für ein definiertes Randwertproblem gut identifiziert werden. Um direkt auch einen Einblick zu gewähren, wie sich seismische Wellen in einer Tunnelumgebung verhalten, wird die seismische Wellenausbreitung in Abbildung 2.9 für eine zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung dargestellt, wobei die seismischen Wellen für verschiedene Zeitpunkte von links nach rechts und von oben nach unten illustriert werden. Der Durchmesser des betrachteten Tunnels beträgt 8 m und die Tunnelachse befindet sich 34 m unter der Erdoberfläche. Der Boden verfügt über eine Kompressionswellengeschwindigkeit von  $v_p = 3800$  m/s, eine Scherwellengeschwindigkeit von  $v_s = 2200$  m/s und über eine Dichte von  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup>. Auf der Tunnelachse befindet sich ein quadratischer Störkörper mit den Abmaßen 20 m  $\times$  20 m, dessen vordere Kante sich bei  $x = 70$  m befindet. Der Störkörper verfügt mit  $v_p = 2800$  m/s und  $v_s = 1600$  m/s über degradierte Wellengeschwindigkeiten während die Dichte konstant bleibt. Die Erdoberfläche und die Tunnelwände agieren nach Gleichung 2.11 als reflektierende Oberflächen. An den restlichen Rändern der dargestellten Tunnelumgebung verlassen die seismischen Wellen das dargestellte Gebiet. Intrinsische Dämpfungseffekte wurden bei der dargestellten Wellenausbreitung nicht berücksichtigt. Ein künstliches Signal wird in horizontaler Richtung über eine Quelle in den Boden eingebracht, welche sich in der Mitte der Tunnelfront befindet. Dabei wurde ein Ricker-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 500 Hz verwendet. Exemplarisch werden in Abbildung 2.10 die zugehörigen Seismogramme betrachtet, welche an sechs unterschiedlichen Empfängern aufgezeichnet werden, die sich sowohl an den Tunnelwänden als auch an der Erdoberfläche befinden. Diese Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung werden zusätzlich noch mit den Verschiebungen verglichen, welche sich bei einer Wellenausbreitung in der selben Tunnelumgebung ergeben würden, wenn kein Störkörper vorhanden wäre. Dabei sind die in Abbildung 2.9 dargestellten Zeitpunkte in Abbildung 2.10 durch die horizontalen grauen Linien gekennzeichnet. Die ersten Verschiebungen an den Empfängern, welche sich am Tunnel befinden, sind erwartungsgemäß verhältnismäßig groß. Beim ersten Zeitpunkt in Abbildung 2.9 bei  $t_1 = 0.00658$  s sind die Kompressionswellen zu sehen, welchen direkt die langsameren Scherwellen folgen, die durch die horizontale Quelle indirekt in vertikaler Richtung angeregt werden. Eine Unterscheidung der beiden Wellentypen ist über die roten Pfeile möglich, welche die Richtungen und Beträge der Verschiebungen kennzeichnen. Am Tunnelboden und der Tunneldecke breiten sich zusätzlich Oberflächenwellen aus. Die Kompressionswellen erreichen zum zweiten Zeitpunkt ( $t_2 = 0.00958$  s) die Erdoberfläche, was auch über die Seismogramme des vierten Empfängers gut nachvollzogen werden kann. Anhand des dritten Wellenbilds ( $t_3 = 0.01258$  s) wird sehr gut illustriert, dass die Kompressionswellen an der Erdoberfläche reflektiert werden, wobei gleichzeitig durch die Kompressionswellen auch eine Initiierung von Oberflächenwellen stattfindet. Zeitgleich erreicht die vordere Wellenfront der Kompressionswellen die vordere Seite des Störkörpers. Beim vierten dargestellten Zeitpunkt ( $t_4 = 0.01558$  s) kann beobachtet werden, dass einerseits die Kompressionswellen teilweise an der vorderen Kante des Störkörpers reflektiert wurden, was bei  $x \approx 60$  m gut erkennbar ist, und andererseits, dass sich die Wellen, welche am Materialkontrast nur gebrochen wurden, aufgrund der niedrigeren Wellengeschwindigkeiten des Störkörpers langsamer ausbreiten. Des Weiteren erreichen



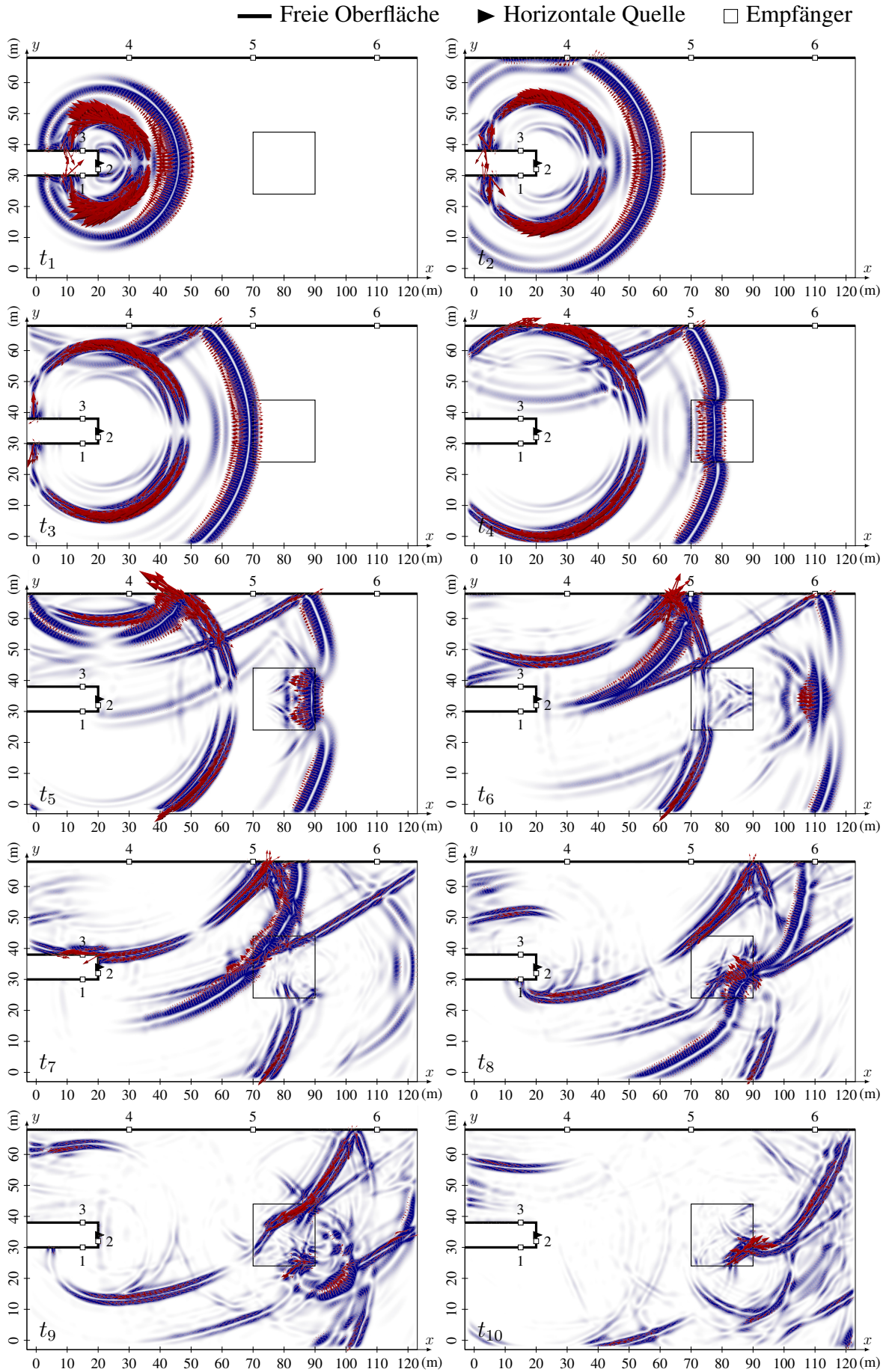


Abbildung 2.9.: Seismische Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung.



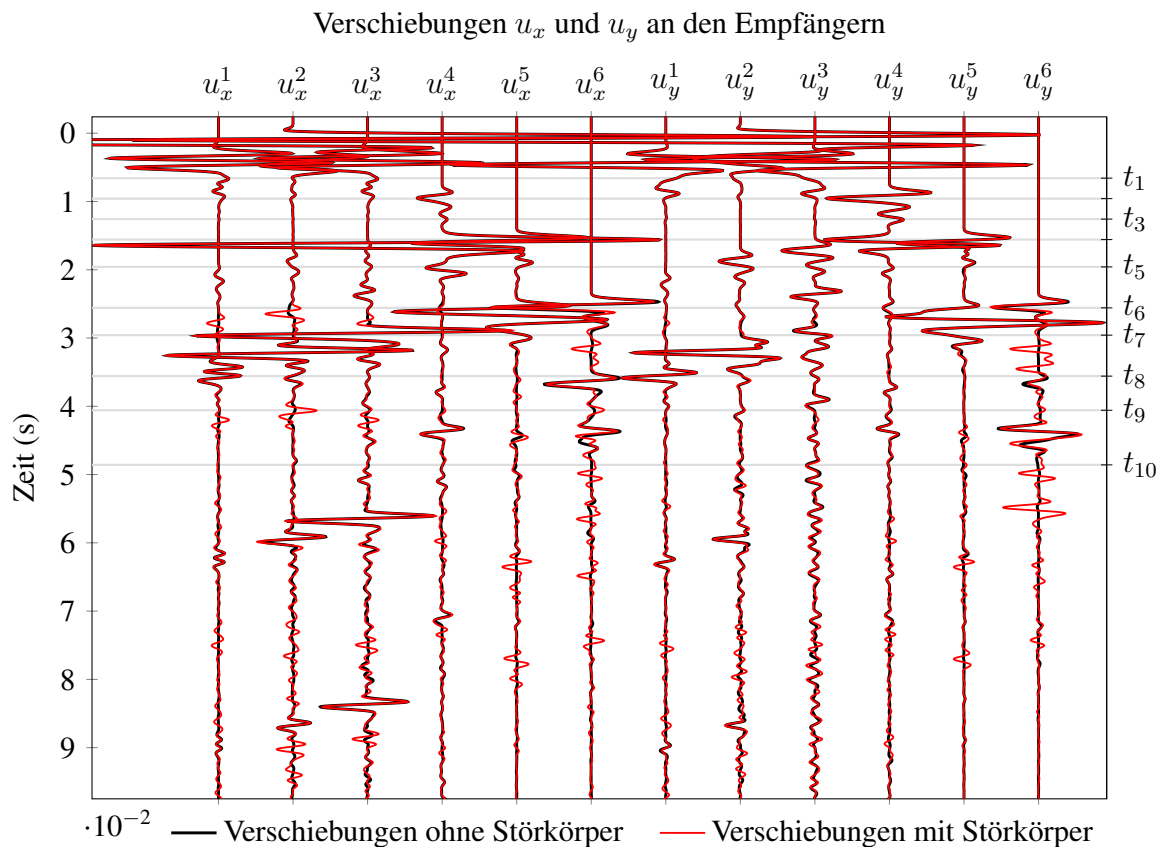


Abbildung 2.10.: Vergleich der Seismogramme  $u_x$  und  $u_y$  für eine seismische Wellenausbreitung in einer oberflächennahen zweidimensionalen Tunnelumgebung, bei welchem in dem einen Szenario ein Störkörper vor der Tunnelfront vorhanden ist und in dem anderen Szenario nicht. Die Ausbreitung der seismischen Wellen wird in Abbildung 2.9 für einzelne Zeitpunkte visualisiert.

die ursprünglich emittierten Scherwellen die Erdoberfläche. Die zugehörigen großen Verschiebungen am vierten Empfänger können insbesondere bei der Verschiebung in  $x$ -Richtung  $u_x^4$  in Abbildung 2.10 leicht identifiziert werden. Zudem wird auch ersichtlich, dass durch die Reflexion der ursprünglich angeregten Kompressionswellen nicht nur Kompressionswellen zurück in den Boden emittiert wurden, sondern auch die Kompressionswellen teilweise in Scherwellen konvertiert wurden, welche sich durch die niedrigere Wellengeschwindigkeit langsamer als die Kompressionswellen im Boden ausbreiten. Die Kompressionswellen, welche an der vorderen Kante des Störkörpers gebrochen wurden, erreichen beim fünften dargestellten Zeitschritt bei  $t_5 = 0.01958$  s die hintere Kante des Störkörpers und werden dort sowohl reflektiert als auch gebrochen. Durch die ursprünglich emittierten Scherwellen wurden an der Erdoberfläche Oberflächenwellen mit sehr hohen Amplituden induziert. Gleichzeitig werden durch die Reflexion der ursprünglich angeregten Scherwellen an der Erdoberfläche Kompressions- und Scherwellen in den Boden abgestrahlt. Zum sechsten dargestellten Zeitschritt ( $t_6 = 0.02558$  s) erreichen die ursprünglich emittierten Scherwellen und die Scherwellen, welche durch die Reflexion der ursprünglich angeregten Kompressionswellen an der Erdoberfläche entstanden sind, den Störkörper. Des Weiteren kann beobachtet werden, wie die ersten Kompressionswellen, welche an der vorderen Kante des Störkörpers reflektiert wurden, an der Tunnelfront ankommen. Die zugehörigen Ausschläge können bei den horizontalen Verschiebungen des zweiten Empfängers  $u_x^2$  in Abbildung 2.10 gut identifiziert werden, da diese die ersten erkennbaren Amplituden sind, die sich von den Amplituden der Seismogramme unterscheiden, bei welchen sich kein

Störkörper vor der Tunnelfront befindet. Zum siebten dargestellten Zeitschritt bei  $t_7 = 0.02958$  s erreichen die Scherwellen, welche durch die Reflexion der ursprünglich emittierten Scherwellen an der Erdoberfläche entstanden sind, die Tunneldecke. Diese initiieren einerseits Oberflächenwellen und erzeugen andererseits reflektierte Wellen, welche sich wieder in Richtung der Erdoberfläche ausbreiten. Die hohen Verschiebungen, welche in  $x$ -Richtung angeregt werden, können über den dritten Empfänger  $u_x^3$  gut identifiziert werden. Zeitgleich erreichen die Kompressionswellen, welche durch die Reflexion der ursprünglich angeregten Scherwellen an der Erdoberfläche entstanden sind, den Störkörper, durch welchen die Wellen reflektiert und gebrochen werden. Zum achten Zeitschritt bei  $t_8 = 0.03558$  s erreichen die Scherwellen, welche durch die Reflexion der ursprünglich emittierten Scherwellen an der Erdoberfläche entstanden sind, die obere linke Ecke des Störkörpers. Verschiedene seismische Wellen, welche durch den Störkörper gebrochen wurden, haben kurz zuvor den sechsten Empfänger erreicht was anhand der Seismogramme  $u_x^6$  und  $u_y^6$  in Abbildung 2.10 durch die zusätzlich entstandenen Amplituden ersichtlich ist. Anhand des neunten Zeitschritts bei  $t_9 = 0.04058$  s kann nachvollzogen werden, wie sich die Wellen, welche sich zuvor innerhalb des Störkörpers ausbreiteten, verhalten, nachdem diese durch den Materialkontrast an der hinteren unteren Ecke des Störkörpers reflektiert und gebrochen wurden. Des Weiteren kommen erneut Kompressionswellen an der Tunnelfront an, welche durch den Störkörper reflektiert wurden, was auch anhand der Verschiebungen  $u_x^2$  in Abbildung 2.10 ersichtlich ist. Der zehnte und letzte dargestellte Zeitschritt gehört zu dem Zeitpunkt  $t_{10} = 0.04858$  s. In dem Bereich unmittelbar vor dem Tunnel treten kaum noch Wellen mit höheren Amplituden auf. Lediglich schwächere Wellen, welche zuvor an verschiedenen Grenzflächen reflektiert wurden, sind zu erahnen. Die Scherwellen, welche durch die Reflexion der ursprünglich angeregten Scherwellen an der Erdoberfläche entstanden sind, nähern sich der unteren Ecke des Störkörpers. Im hinteren Bereich der betrachteten Tunnelumgebung sind viele gebrochene und reflektierte Wellen zu beobachten, für welche kaum noch der vorherige Wellenpfad nachvollzogen werden kann. Diese Wellen führen zu zusätzlichen Ausschlägen in den Seismogrammen  $u_x^6$  und  $u_y^6$  am sechsten Empfänger in Abbildung 2.10, welche bei homogenen Bodeneigenschaften nicht vorhanden wären. Für die Zeit nach dem letzten dargestellten Zeitschritt kann anhand der Seismogramme in Abbildung 2.10 beobachtet werden, wie weitere kleinere Amplituden entstehen, die auf eine Interaktion der seismischen Wellen mit dem Störkörper zurückzuführen sind. Auffällig sind zudem die sich wiederholenden Amplituden der Verschiebungen in  $x$ -Richtung des dritten Empfängers  $u_x^3$ , welche darauf zurückzuführen sind, dass Wellen unablässig zwischen der Erdoberfläche und der Tunneldecke hin und her reflektiert werden. Dieses Phänomen ist auf die Betrachtung einer zweidimensionalen Tunnelumgebung zurückzuführen, bei welcher eine Symmetrie in die dritte Raumrichtung angenommen wird. Daher wird, wie schon in Unterabschnitt 2.1.8 beschrieben, anstelle eines üblichen zylinderförmigen Tunnels implizit ein unendlich breiter quaderförmiger Tunnel betrachtet. Durch die Krümmung eines zylindrischen Tunnels würden die seismischen Wellen einerseits in mehrere Richtungen gestreut und andererseits würde ein Großteil der Wellen sich seitlich vom Tunnel weiter in den umgebenden Boden ausbreiten. Des Weiteren würden auch Tunneloberflächenwellen entstehen, welche sich entlang des Tunnelumfangs ausbreiten würden, wodurch die Bereiche ober- und unterhalb des Tunnels nicht mehr strikt separiert wären. Die Unterschiede der Wellenformen für eine seismische Wellenausbreitung mit und ohne Störkörper sind im Verhältnis zu den Beträgen der ersten Amplituden sehr klein. Zwar kann über die ersten Unterschiede des Seismogramms in  $x$ -Richtung des dritten Empfänger  $u_x^3$  mittels der Laufzeiten der Kompressionswellen die Entfernung von dem ersten Reflektor zur Tunnelfront vergleichsweise simpel abgeschätzt werden, jedoch lassen sich die anderen zusätzlichen Amplituden nicht händisch auf bestimmte geologische Gegebenheiten zurückführen, obwohl diese durch eine erhöhte Interaktion mit dem Störkörper mehr Informationen über diesen enthalten. Bei der Full-Waveform-Inversion,

welche in Abschnitt 1.3 eingeführt wurde und deren zu untersuchender Ansatz in Kapitel 5 genauer vorgestellt wird, werden alle Wellenformen eingesetzt, um die Bodeneigenschaften vor der Tunnelfront schematisch zu rekonstruieren.

## 2.3. Elastische Wellen im Frequenzbereich

Selbst komplizierte Wellenformen können als eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen dargestellt werden. Dabei ermöglicht die Betrachtung von den Amplituden der einzelnen Frequenzen Aufschluss über verschiedene Charakteristiken der Wellenformen. Zudem lassen sich frequenzspezifische Störsignale aus den Messdaten herausfiltern. Die Abspeicherung von Messdaten in ihrer spektralen Form benötigt zudem weniger Speicherplatz. Die numerische Approximation der Wellenausbreitung im Frequenzbereich birgt hingegen zusätzliche Vorzüge (siehe auch Unterabschnitt 2.4.2). Einerseits können Modelle, welche intrinsische Dämpfungseffekte berücksichtigen, einfacher implementiert werden. Zusätzliche Anregungen durch weitere Quellen können im Frequenzbereich mit nur einem niedrigen zusätzlichen Rechenaufwand approximiert werden. Des Weiteren kann die Diskretisierung des betrachteten Randwertproblems für jede Frequenz individuell angepasst werden, wodurch für niedrige Frequenzen weniger Rechenzeit benötigt wird, während für höhere Frequenzen eine optimale Auflösung gewährleistet werden kann. Somit können die Stabilitätsprobleme, welche bei der Approximation von seismischen Wellen im Zeitbereich auftreten können, vermieden werden (Marfurt, 1984).

### 2.3.1. Fourier-Transformation

Um eine zeitabhängige Funktion  $f(t)$  in eine frequenzabhängige Funktion  $F(\omega)$  zu überführen kann die Fourier-Transformation eingesetzt werden (Clauser, 2018):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.34)$$

Dabei stellt  $i$  die imaginäre Einheit dar, welche durch  $i = \sqrt{-1}$  definiert ist. Die komplexe Funktion  $F(\omega)$  setzt sich aus einem reellen Anteil  $\text{Re}(F(\omega))$  und einem imaginären Anteil  $\text{Im}(F(\omega))$  zusammen:

$$F(\omega) = \text{Re}(F(\omega)) + i \text{Im}(F(\omega)), \quad (2.35)$$

wobei sich der Betrag von  $F(\omega)$  und somit das Amplitudenspektrum wie folgt berechnen lässt:

$$|F(\omega)| = \sqrt{(\text{Re}(F(\omega)))^2 + (\text{Im}(F(\omega)))^2}. \quad (2.36)$$

Eine Umwandlung des Frequenzbereichssignals  $F(\omega)$  wieder in das Zeitbereichssignal  $f(t)$  ermöglicht die inverse Fourier-Transformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (2.37)$$

In anderer Fachliteratur unterscheiden sich die Formeln für die Fourier-Transformation von Gleichung 2.34 und Gleichung 2.34. Fichtner (2011) verwendet beispielsweise andere Faktoren vor den Integralen, während Jensen u. a. (2011) das Vorzeichen im Exponenten zwischen

den beiden Transformationen vertauschen. Die Hin- und Rücktransformation bleiben zwar jeweils zueinander konsistent, jedoch können bei Abgleichen oder Operationen im Frequenzbereich Fehler entstehen, wenn den Referenzlösungen oder den anderen Funktionen eine sich unterscheidende Fourier-Transformation zugrunde liegt. Beispielsweise würde bei einer Vertauschung des Vorzeichens des Exponenten bei Hin- und Rücktransformation der imaginäre Anteil von  $F(\omega)$  auch das Vorzeichen wechseln.

### 2.3.2. Elastische Wellengleichung im Frequenzbereich

Durch die Anwendung der Fourier-Transformation auf den zeitabhängigen Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  kann der komplexe Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  hergeleitet werden, welcher von der Kreisfrequenz  $\omega$  abhängt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i \omega t) dt. \quad (2.38)$$

Die Frequenzbereichsform des Beschleunigungsvektors  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  kann mithilfe der inversen Fourier-Transformation hergeleitet werden, indem die doppelte partielle Ableitung nach der Zeit  $t$  ins Integral gezogen wird:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \exp(i \omega t) d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i \omega)^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \exp(i \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \exp(i \omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die elastische Wellengleichung im Frequenzbereich nimmt somit die folgende Form an:

$$-\omega^2 \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) - \nabla \cdot (\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.40)$$

wobei der komplexe Belastungsvektor  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega)$  die Fourier-Transformation von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  darstellt.

Um bei der numerischen Lösung von Gleichung 2.10 im Zeitbereich intrinsische Dämpfungseffekte berücksichtigen zu können, muss umständlich mit Gedächtnisvariablen gearbeitet werden, welche viel Arbeitsspeicher benötigen und zusätzlich den Berechnungsaufwand erhöhen. Im Frequenzbereich genügt hingegen eine Modifikation der elastischen Materialeigenschaften. Innerhalb dieser Arbeit wurden dazu die Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit mittels des Kolsky-Futterman-Modells (Kolsky, 1956; Futterman, 1962) in komplexe Wellengeschwindigkeiten überführt (Virieux u. Operto, 2009; Brossier u. a., 2010a):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_p(\mathbf{x}, \omega) &= v_p(\mathbf{x}) \left( 1 + \frac{|\log(\omega/\omega_r)|}{\pi Q_p} + i \frac{\text{sign}(\omega)}{2Q_p} \right)^{-1}, \\ \tilde{v}_s(\mathbf{x}, \omega) &= v_s(\mathbf{x}) \left( 1 + \frac{|\log(\omega/\omega_r)|}{\pi Q_s} + i \frac{\text{sign}(\omega)}{2Q_s} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Durch  $|\bullet|$  wird die Betragsfunktion, durch  $\log(\bullet)$  der Logarithmus zur Basis 10 sowie durch  $\text{sign}(\bullet)$  die Signum-Funktion dargestellt, welche das Vorzeichen der eingefügten Variable zurückgibt. Die zugehörigen Qualitätsfaktoren  $Q_p$  und  $Q_s$ , welche schon in Unterabschnitt 2.1.5

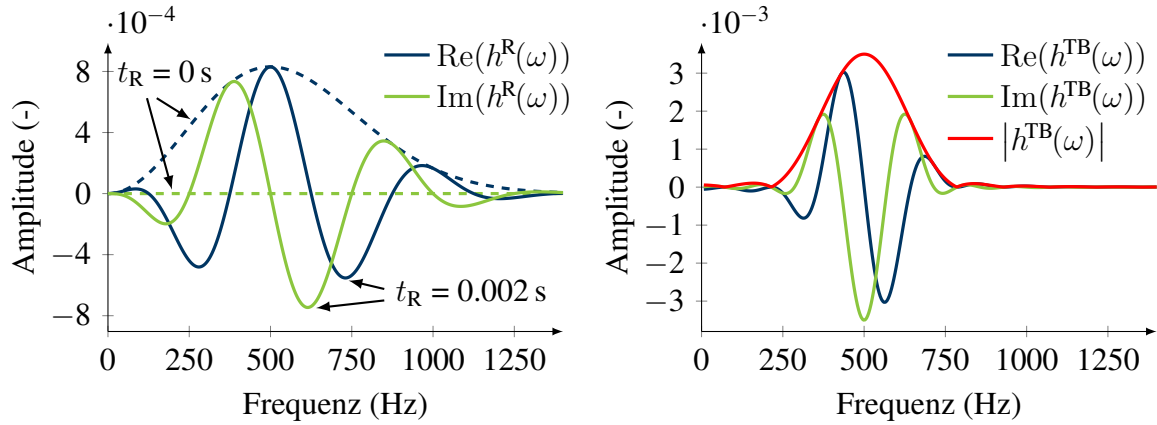


Abbildung 2.11.: Real- und Imaginärteile der Frequenzbereichsdarstellung des Ricker-Signals  $h^R(\omega)$  (links) und des Toneburst-Signals  $h^{TB}(t)$  (rechts) mit jeweils einer Zentralfrequenz von  $f_R = f_{TB} = 500$  Hz. Sowohl ein Ricker-Signal ohne Zeitversatz  $t_R = 0$  s als auch eines mit einem Zeitversatz von  $t_R = 0.002$  s sind dargestellt. Beim Toneburst-Signal wurde eine Anzahl von  $N_{TB} = 3.5$  Oszillationen verwendet.

eingeführt wurden, beschreiben das Dämpfungsverhalten des betrachteten Mediums und sind eigentlich frequenzabhängige Größen. Innerhalb dieser Arbeit wird angenommen, dass die Qualitätsfaktoren über die betrachteten Bereiche näherungsweise konstant sind. Durch die Verwendung von dem Verhältnis der betrachteten Kreisfrequenz  $\omega$  und der Referenzkreisfrequenz  $\omega_r$ , für welche die Qualitätsfaktoren bestimmt wurden, stellen die komplexen Wellengeschwindigkeiten  $\tilde{v}_p$  und  $\tilde{v}_s$  frequenzabhängige Größen dar.

Die einzelnen Bestandteile des Belastungsvektors  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  in Gleichung 2.12 können auch mittels der Fourier-Transformation in ihre Frequenzbereichsform überführt werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) h(\omega) \mathbf{d}. \quad (2.42)$$

Das durch Gleichung 2.16 beschriebene Ricker-Signal  $h^R(t)$  kann im Frequenzbereich folgendermaßen beschrieben werden:

$$h^R(\omega) = \frac{2}{f_R \sqrt{\pi}} \left( \frac{\omega}{2\pi f_R} \right)^2 \exp \left( -i t_R \omega - \left( \frac{\omega}{2\pi f_R} \right)^2 \right). \quad (2.43)$$

Die Frequenzbereichsformen des Ricker- und Toneburst-Signals, welche durch Abbildung 2.2 im Zeitbereich dargestellt wurden, werden in Abbildung 2.11 illustriert. Dabei ist sowohl eine Berücksichtigung der reellen als auch der imaginären Anteile essentiell. Wenn für das Ricker-Signal  $h^R(\omega)$  kein Zeitversatz verwendet wird, verschwindet der imaginäre Anteil, während der reelle Anteil dem Betrag des Ricker-Signals für beliebige Zeitversätze entspricht. Durch Abbildung 2.11 wird gut ersichtlich, dass das Toneburst-Signal, wie schon in Unterabschnitt 2.1.3 angedeutet, ein merklich schmaleres Frequenzspektrum als das Ricker-Signal besitzt.

Auch die Form der elastischen Wellengleichung zur Bestimmung der Greenschen Funktionen aus Gleichung 2.18 kann in ihre Frequenzbereichsform überführt werden. Aufgrund der in Gleichung 2.13 gegebenen Identität für die Integration der Dirac-Delta-Funktion ergibt sich dabei für die Fourier-Transformation von  $\delta(t - t_\delta)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_\delta) \exp(-i \omega t) dt = 1, \quad (2.44)$$

womit sich die folgende Gleichung ergibt:

$$(-\omega^2 \rho(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla) \mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \mathbf{d}. \quad (2.45)$$

Die in Gleichung 2.19 eingeführte Konvolution zweier Funktionen stellt im Frequenzbereich eine einfache Multiplikation dar (Igel, 2016, Abschnitt 2.8):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = h(\omega) \mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.46)$$

weswegen für Konvolutionen und Dekonvolutionen die zeitabhängigen Funktionen zunächst in den Frequenzbereich überführt und dort verrechnet werden. Das Ergebnis wird anschließend zurück in den Zeitbereich transformiert. Innerhalb dieser Arbeit wurden bei numerischen Approximationen der Frequenzbereichsform der elastischen Wellengleichung immer die Greenschen Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega)$  berechnet, da die Konvolution der Greenschen Funktionen mit der Quellfunktion ohne großen Rechenaufwand im Nachgang durchgeführt werden kann.

### 2.3.3. Akustische Wellengleichung im Frequenzbereich

Durch die Fourier-Transformation der akustischen Wellengleichung aus Gleichung 2.28 ergibt sich die folgende Helmholtz-Gleichung (Ajo-Franklin, 2005; Jensen u. a., 2011):

$$\frac{\omega^2}{v_p^2(\mathbf{x})} p(\mathbf{x}, \omega) + \Delta p(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.47)$$

welche auch für die Belastung durch eine Impulsanregung dargestellt werden kann:

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{v_p^2(\mathbf{x})} \right) g(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.48)$$

Dabei stellt  $g(\mathbf{x}, \omega)$  eine skalare Greensche Funktion dar. Durch die Überführung der Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_p$  mittels des Kolsky-Futterman-Modells aus Gleichung 2.41 in eine komplexe Wellengeschwindigkeit  $\tilde{v}_p$  kann beim numerischen Lösen von Gleichung 2.48 auch viskoakustisches Materialverhalten angenähert werden.

Auch die Frequenzbereichsform der akustischen Wellengleichung bietet sich, neben der Modellierung von nicht scherungsfähigen Materialien, für die Verwendung bei ersten Anwendungstests an, da die Berechnung der skalaren Druckverteilung weniger rechenintensiv ist. Entsprechend wurde die akustische Wellengleichung schon für konzeptionelle Untersuchungen für die Anwendung der Full-Waveform-Inversion zur Vorauserkundung im Tunnelbau durch Musayev (2017), Riedel u. a. (2021b), Wang u. a. (2021) und Yu u. a. (2021) eingesetzt.

### 2.3.4. Diskrete Fourier-Transformation

Während die Bestandteile der vorgestellten Wellengleichungen als kontinuierliche Größen betrachtet werden können, liegen in der Seismik die Datensätze in zeitlich diskreter Form vor. Daher muss die diskrete Form der Fourier-Transformation (DFT) für diese Datensätze verwendet werden. Für die kontinuierliche Vorwärts-Transformation aus Gleichung 2.34 ergibt sich die folgende diskrete Form:

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N_t} f(t_0 + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) \Delta t. \quad (2.49)$$

Dabei gibt  $N_t$  mit  $N_t = T_{\text{ges}}/\Delta t$  die Anzahl der Zeitschritte an, wobei  $T_{\text{ges}}$  das betrachtete Zeitintervall,  $\Delta t$  das Zeitinkrement und  $t_0$  den Zeitpunkt des ersten Datenpunkts darstellt. Durch die Skalierung von jedem Summanden mit dem Zeitinkrement  $\Delta t$  wird sichergestellt, dass die Amplituden im Frequenzbereich auch bei einer feineren Auflösung der Zeitskala und somit bei einer steigenden Anzahl an Zeitschritten  $N_t$  für das selbe Zeitintervall  $T_{\text{ges}}$  konstant bleiben. Die Nyquist-Frequenz  $\omega_{\text{Nyq}} = \pi/\Delta t$  gibt an bis zu welcher Frequenz ein Datensatz in seine spektralen Anteile zerlegt werden kann. Dabei wird sichergestellt, dass für die harmonischen Funktionen wenigstens zwei Zeitschritte pro Periode vorliegen. Um die Qualität der aus dem Zeitbereich transformierten Daten im Frequenzbereich zu verbessern und die Annahme der periodischen Fortsetzung der Daten zu unterdrücken, werden einerseits Fensterfunktionen auf die Daten im Zeitbereich angewendet und andererseits werden im Anschluss dem Zeitsignal zusätzlich weitere Nulleinträge hinzugefügt. Üblicherweise wird beim Einsatz einer Fensterfunktion das komplette Signal mit einer Funktion multipliziert, welche die Ränder des Signalintervalls sanft gegen Null konvergieren lässt, damit kein sprunghafter Abfall des Signals auftritt, welcher zu falschen Werten im Frequenzbereich geführt hätte. Unterschiedliche Fensterfunktionen sowie deren Charakteristiken werden beispielsweise von Butz (2009, Kapitel 3) erläutert. Da bei den betrachteten Seismogrammen in dieser Arbeit der Boden zu Beginn einer Messung ruht, sind die ersten Messwerte des Signals üblicherweise gleich Null. Entsprechend werden einfachheitshalber nur die letzten Messwerte der Seismogramme so skaliert, dass diese sanft gegen Null konvergieren. Dazu wurde entweder eine Kosinus- oder eine  $\cos^2$ -Funktion verwendet, wobei diese üblicherweise nur mit den letzten 5% der Messdaten multipliziert wurden. Beim Hinzufügen von Nulleinträgen an das Ende der Daten, dem sogenannten *Zero-Padding*, wird die Qualität der Frequenzbereichslösung zwar durch mehr Einträge verbessert, jedoch wird auch der Rechenaufwand für die Transformation erhöht. Für einen effizienten Einsatz der Fast-Fourier-Transformation sollte die Anzahl der Einträge eines Signals eine Zweierpotenz darstellen.

Durch das numerische Lösen der elastischen Wellengleichung im Frequenzbereich aus Gleichung 2.40 für mehrere Frequenzen können auch für unterschiedliche Positionen die zugehörigen frequenzabhängigen Seismogramme berechnet werden. Um diese Seismogramme mit zeitabhängigen Referenzseismogrammen vergleichen zu können, kann die diskrete Form der inversen Fourier-Transformation eingesetzt werden:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N_\omega}^{N_\omega} F(k\Delta\omega) \exp(i \Delta\omega kt) \Delta\omega. \quad (2.50)$$

Statt auch die negativen Frequenzen, deren Werte für die reellen Anteile achsensymmetrisch und für die imaginären Anteile punktsymmetrisch sind, für die Bildung der Summe zu verwenden, kann Gleichung 2.50 auch einfach mit dem Faktor 2 multipliziert werden:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N_\omega} F(k\Delta\omega) \exp(i \Delta\omega kt) \Delta\omega. \quad (2.51)$$

Um zu veranschaulichen, wie Seismogramme im Frequenzbereich aussehen, wurden exemplarisch die Seismogramme für die Verschiebungen des sechsten Empfängers in  $y$ -Richtung  $u_y^6$  aus Abbildung 2.10 mittels der diskreten Fourier-Transformation in den Frequenzbereich überführt. Die reellen und imaginären Anteile sowie die ursprünglichen Seismogramme aus dem Zeitbereich werden in Abbildung 2.12 für die Szenarien, bei welchen sich ein Störkörper und kein Störkörper vor der Tunnelfront befinden, zusammengestellt. Während im Zeitbereich

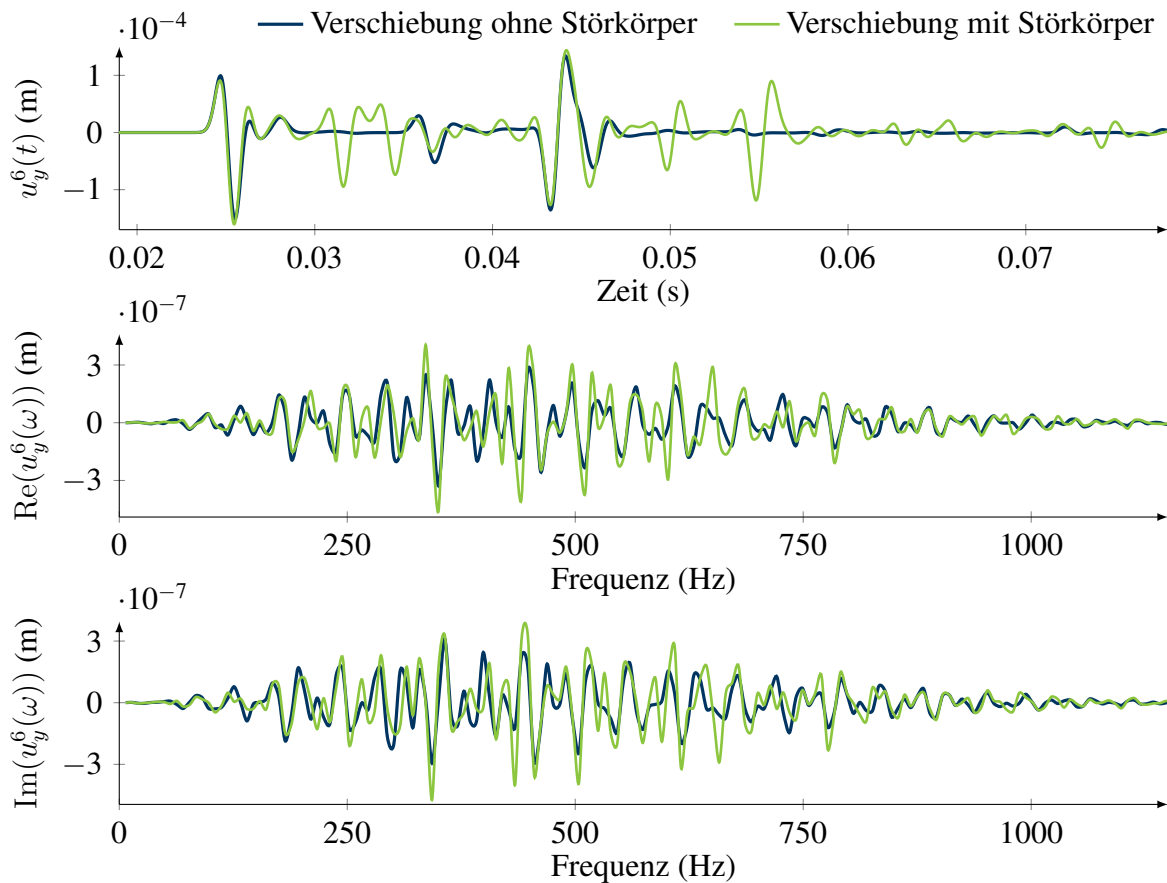


Abbildung 2.12.: Vergleich der Seismogramme in  $y$ -Richtung des sechsten Empfängers  $u_y^6$  aus Abbildung 2.10 im Zeit- und Frequenzbereich für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit und ohne Störkörper vor der Tunnelfront.

die Unterschiede zwischen den Amplituden auf vornehmlich weitere eintreffende Wellen zurückführbar sind, die durch Interaktionen der ursprünglich eingebrachten Wellen mit dem Störkörper initiiert wurden, sind die Unterschiede zwischen den Seismogrammen im Frequenzbereich deutlich weniger illustrativ. Auffällig ist jedoch, dass durch die zusätzlichen Wellenformen, welche in der Zeitbereichsdarstellung des Seismogramms für eine Wellenausbreitung mit Störkörper entstehen, die Amplituden im Frequenzspektrum zunehmen. Aufgrund der schlechteren Interpretierbarkeit der Seismogramme im Frequenzbereich, ist bei der Untersuchung von neuen Randwertproblemen eine Transformation der Seismogramme in den Zeitbereich mittels der diskreten Form der inversen Fourier-Transformation zu empfehlen.

## 2.4. Numerische Modellierung von seismischen Wellen

Für mehrere simple Randwertprobleme wurden zwar schon analytische Lösungen der elastischen Wellengleichung aus Gleichung 2.10 formuliert (Pilant, 1979), jedoch ist dies nicht für komplexe Randwertprobleme mit inhomogenen Eigenschaften des Bodens möglich. Daher werden die zugehörigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung numerisch angenähert. Während im Zeitbereich das Wellenfeld für eine fortschreitende Zeit in die Zukunft extrapoliert wird, werden im Frequenzbereich zeitharmonische Wellen für verschiedene Frequenzen betrachtet. Verschiedene Techniken wurden bereits für die Modellierung seismischer Wellen



eingesetzt, von denen einige in diesem Abschnitt kurz angesprochen werden. Bei allen numerischen Techniken wird das kontinuierlich definierte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  oder  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  durch eine diskrete örtliche Approximation mittels einer begrenzten Anzahl an Koeffizienten  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  angenähert, welche sich in dem  $N$ -dimensionalen Vektor  $\bar{\mathbf{u}}$  zusammenfassen lassen, wobei  $\bar{\mathbf{u}}$  die Koeffizienten für alle Verschiebungsrichtungen enthält. Die Koeffizienten repräsentieren entweder diskrete Werte des Wellenfeldes oder stellen die Koeffizienten von Polynomfunktionen dar, welcher für die Approximation des Wellenfeldes verwendet werden. Wie fein ein Wellenfeld aufgelöst werden muss, hängt vornehmlich von den auftretenden Wellenlängen  $\Lambda$  ab, welche, wie in Gleichung 2.2 dargestellt, von den Wellengeschwindigkeiten des Bodens und den angeregten Frequenzen abhängen. Da Scherwellen eine niedrigere Geschwindigkeit besitzen, sind die Wellenlängen der Scherwellen  $\Lambda_s$  ausschlaggebend für den räumlichen Diskretisierungsgrad. Durch die räumliche Diskretisierung der elastischen Wellengleichung entsteht ein algebraisches System aus Differentialgleichungen, welches immer durch die kanonische Zeitbereichsform:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t) + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t), \quad (2.52)$$

oder die entsprechende Frequenzbereichsform dargestellt werden kann:

$$\mathbf{L}(\omega) \bar{\mathbf{u}}(\omega) = \bar{\mathbf{f}}(\omega) \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}(\omega) := -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}. \quad (2.53)$$

Dabei stellt  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{L}$  die Impedanzmatrix,  $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$  die Koeffizienten für die zweite zeitliche Ableitung der Verschiebungen und  $\bar{\mathbf{f}}$  die diskrete Form der äußeren Belastungen dar, wobei die Massen-, die Steifigkeits- und die Impedanzmatrix üblicherweise dünn besetzt sind (Fichtner, 2011, Kapitel 2).

### 2.4.1. Numerische Modellierung von seismischen Wellen im Zeitbereich

Für viele Methoden im Zeitbereich werden die Massen- und die Steifigkeitsmatrix des gesamten Systems nicht explizit berechnet, da häufig nur die Produkte der Vektoren und Matrizen benötigt werden, welche lokal bestimmt werden können. Für manche numerische Ansätze bietet sich eine Geschwindigkeits-Spannungs- oder Verschiebungs-Spannungs-Formulierung von Gleichung 2.52 an, auf welche an dieser Stelle nicht detaillierter eingegangen wird. Durch die Verwendung einer Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung für die zweite zeitliche Ableitung der Verschiebungskoeffizienten  $\bar{\mathbf{u}}$  kann in Kombination mit Gleichung 2.52 exemplarisch ein explizites Zeitintegrationsschema formuliert werden (Fichtner, 2011, Kapitel 2):

$$\bar{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = 2\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t - \Delta t) + \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}(t)), \quad (2.54)$$

wobei die aktuelle Zeit  $t$  um das Inkrement  $\Delta t$  erhöht wird. Um die Verschiebungen der nächsten Zeitschritte berechnen zu können, muss nur die Massenmatrix einmalig invertiert werden, während die verbleibenden Operationen deutlich weniger rechenintensiv sind. Numerische Verfahren, welche einerseits zu leicht invertierbaren Massenmatrizen führen sowie einen möglichst hohen Grad der Parallelisierung ermöglichen, können generell von niedrigen Berechnungszeiten profitieren. Neben Finite-Differenzen-Verfahren wird vorwiegend das Newmark-Verfahren als Zeitintegrationsverfahren für die Verschiebungs-Formulierung aus Gleichung 2.52 verwendet, während bei der Geschwindigkeits-Spannungs-Formulierung die Leapfrog-Methode am gebräuchlichsten ist. Das Finite-Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung, das Newmark-Verfahren

und die Leapfrog-Methode sind alle explizite Verfahren, da der folgende Zeitschritt nur von den vorherigen Zeitschritten abhängt, wodurch sie gleichzeitig auch nur bedingt stabil sind. Über die CFL-Stabilitätsbedingung (Courant, Friedrichs u. Lewy, 1928) kann das Zeitinkrement  $\Delta t$  beschränkt werden, um numerische Instabilität zu vermeiden. Die CFL-Bedingung besitzt üblicherweise die Form:

$$\Delta t \leq c \frac{h_{\min}}{v_{\max}}, \quad (2.55)$$

wobei  $h_{\min}$  den kleinsten Abstand im Berechnungsgitter repräsentiert, während  $v_{\max}$  die höchste Wellengeschwindigkeit im betrachteten Gebiet darstellt, welche voraussichtlich eine Kompressionswellengeschwindigkeit sein wird. Die Konstante  $c$  ist sowohl von der Methode, welche für die räumliche Diskretisierung verwendet wird, als auch von dem eingesetzten Zeitintegrationsverfahren abhängig. Die CFL-Bedingung stellt dabei eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dar (Igel, 2016). Die vornehmliche Beschränkung auf bedingt stabile Zeitintegrationsverfahren ist einerseits auf deren gute Leistungsfähigkeit zurückzuführen und andererseits resultieren die auftretenden numerischen Fehler häufig aus Ungenauigkeiten, welche durch die räumliche Diskretisierung entstehen (Fichtner, 2011, Kapitel 2).

Die räumliche Diskretisierung muss, wie zuvor schon beschrieben, so fein gewählt werden, dass alle auftretenden Wellenlängen, welche von den Wellengeschwindigkeiten des betrachteten Gebiets und den angeregten Frequenzen abhängen, ausreichend approximiert werden können. Eine feinere Diskretisierung reduziert den kleinsten Abstand des Berechnungsgitters  $h_{\min}$  aus Gleichung 2.55, was gleichzeitig zu einer Reduktion des zulässigen Zeitinkrements  $\Delta t$  führt. Dies hat zur Folge, dass für ein betrachtetes Gebiet der Diskretisierungsgrad mit steigender Anregungsfrequenz erhöht werden muss, was zu einem größeren Differentialgleichungssystem führt, welches aufwändiger zu berechnen ist. Gleichzeitig müssen durch das reduzierte Zeitinkrement  $\Delta t$  mehr Zeitschritte berechnet werden, um das selbe Zeitintervall  $T$  abbilden zu können, wodurch der Berechnungsaufwand weiter steigt. Die Wahl eines soeben ausreichenden Diskretisierungsgrads ist für eine kürzere Berechnungszeit empfehlenswert.

Um die Berechnung der seismischen Wellenausbreitung effizient zu gestalten, wird üblicherweise nicht die ganze Erde numerisch angenähert, sondern nur der Teilabschnitt approximiert, welcher für eine Anwendung von Interesse ist. An den Grenzen dieses approximierten Gebiets entstehen künstliche Ränder, die in der Realität nicht vorhanden wären. Wenn die emittierten Wellen diese Ränder erreichen, entstehen Reflexionen, welche zu unphysikalischen Wellenformen im Berechnungsgebiet führen, die den numerischen Fehler deutlich übersteigen (Fichtner, 2011, Kapitel 6). Bei der Modellierung der seismischen Wellenausbreitung im Zeitbereich können das betrachtete Gebiet und das betrachtete Zeitintervall so gewählt werden, dass die seismischen Wellen, die von den künstlichen Rändern reflektiert werden, nicht innerhalb dieses Zeitintervalls die verwendeten Empfänger erreichen. Jedoch muss auch dazu ein überdimensioniertes Modell verwendet werden, wodurch der Berechnungsaufwand steigt. Um Reflexionen von Wellen an den künstlichen Rändern zu unterdrücken, wurden verschiedene Ansätze von absorbierenden Randbedingungen und absorbierenden Randschichten entwickelt, sodass die Wellenausbreitung eines unendlichen Gebiets imitiert werden kann. Bei absorbierenden Randbedingungen werden die räumlichen und zeitlichen Ableitungen an den künstlichen Rändern vorgegeben. Dabei werden Wellen, welche orthogonal in den jeweiligen künstlichen Rand einfallen, sehr gut absorbiert, während Wellen, welche um einen geneigten Winkel eintreffen, nahezu komplett reflektiert werden. Besonders problematisch sind oberflächennahe Randwertprobleme, bei welchen die Rayleigh-Wellen mit dem unteren Rand interagieren. Zudem kann bei absorbierenden Randbedingungen numerisch instabiles Verhalten auftreten, weshalb

Vorsicht bei der Anwendung geboten ist. Zwar können manche der genannten Probleme durch die Verwendung von absorbierenden Randbedingungen, für welche Ableitungen höherer Ordnung verwendet werden, überwunden werden, jedoch führt dies zumeist zu nicht-lokalen Berechnungsschemas, welche zudem einen sehr hohen Berechnungsaufwand erfordern (Fichtner, 2011, Abschnitt 6.1). Beim Einsatz von absorbierenden Randschichten werden dünne Bereiche an den künstlichen Rändern hinzugefügt. Innerhalb dieser Bereiche werden die Amplituden der eindringenden Wellen schnell, aufgrund einer Modifikation der elastischen Wellengleichung, reduziert. Eine besonders effiziente Technik stellt die Methode der Perfectly-Matched-Layer (PML) dar, bei welcher die eindringenden Wellen innerhalb von besonders dünnen Schichten exponentiell gedämpft werden (Fichtner, 2011, Kapitel 6). Die PML-Methode wurde erstmals von Berenger (1994) eingeführt und wurde von anderen Wissenschaftlern weiterentwickelt bzw. modifiziert. Festa u. a. (2005) formulierten beispielsweise eine gefaltete (engl. *convolutional*) Variation der Methode der Perfectly-Matched-Layer, deren absorbierenden Schichten in dieser Arbeit als C-PMLs bezeichnet werden. Diese C-PMLs besitzen ein besseres absorbierendes Verhalten für Rayleigh-Wellen, welche sich in oberflächennahen Bereichen nahezu parallel zur unteren Grenzschicht des Berechnungsgebiets ausbreiten. Während im Zeitbereich, aufgrund des begrenzten Zeitintervalls, nur wenige Interaktionen der seismischen Wellen mit den künstlichen Rändern auftreten, sind für viele Anwendungen oder zumindest für anfängliche Untersuchungen Techniken, wie die absorbierenden Randbedingungen, welche zu einer merklichen Reduktion der Amplituden führen, ausreichend. Da zudem der Einsatz von PMLs und C-PMLs im Zeitbereich üblicherweise rechenintensiver als die Verwendung von absorbierenden Randbedingungen ist, finden die absorbierenden Randbedingungen, trotz ihrer niedrigeren Effizienz, weiterhin Anwendung.

Die in Unterabschnitt 2.1.5 beschriebene intrinsische Dämpfung kann bei der Modellierung seismischer Wellen im Zeitbereich durch die Einführung von Gedächtnisvariablen realisiert werden. Dadurch müssen neben der elastischen Wellengleichung auch eine modifizierte Form der Spannungs-Dehnungs-Beziehung (vergleiche Gleichung 2.6) sowie die zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen der Gedächtnisvariablen gleichzeitig gelöst werden (Fichtner, 2011, Kapitel 5), was den Berechnungsaufwand zusätzlich erhöht.

#### 2.4.2. Numerische Modellierung von seismischen Wellen im Frequenzbereich

Wie in Gleichung 2.53 veranschaulicht wird, stellt die diskretisierte Form der elastischen Wellengleichung im Frequenzbereich für jede Kreisfrequenz  $\omega$  lediglich ein lineares Gleichungssystem dar. Im Gegensatz zum Zeitbereich muss der Diskretisierungsgrad nur genügen, um die kürzesten Wellenlängen ausreichend approximieren zu können, welche für die betrachtete Kreisfrequenz  $\omega$  auftreten. Daher kann beim selben betrachteten Gebiet für niedrigere Frequenzen eine geringere Diskretisierung als für höhere Frequenzen verwendet werden. Des Weiteren wird im Gegensatz zum Zeitbereich der Berechnungsaufwand bei einer feineren Diskretisierung nicht gleichzeitig durch weitere Faktoren, wie die Reduzierung des Zeitinkrements, erhöht. Die Implementierung von intrinsischer Dämpfung ist zudem durch die Verwendung des Kolsky-Futterman-Modells aus Gleichung 2.41 vergleichsweise einfach. Das lineare Gleichungssystem aus Gleichung 2.53 kann einerseits recht schnell mit iterativen Gleichungslösern gelöst werden. Andererseits bietet sich eine Zerlegung der Impedanzmatrix  $L(\omega)$  in eine linke und eine rechte Dreiecksmatrix mittels eines direkten Gleichungslösers an. Durch diese Faktorisierung können im Folgenden durch simple Matrixmultiplikationen mit einem verschwindend geringen zusätzlichen Berechnungsaufwand für die selbe Kreisfrequenz  $\omega$  weitere Verschiebungskoeff-

fizienten  $\bar{\mathbf{u}}(\omega)$  für andere Belastungskoeffizienten  $\bar{\mathbf{f}}(\omega)$  berechnet werden. Somit bieten sich direkte Gleichungslöser insbesondere für Anwendung an, bei welchen viele Quellen verwendet werden. Das Lösen der Impedanzmatrix von großen dreidimensionalen Randwertproblemen mit einer sehr hohen Anzahl an gesuchten Verschiebungskoeffizienten ist mit einem direkten Gleichungslöser kritisch, da die Algorithmen für die Faktorisierung mittels des Einsatzes von Mehrkernprozessoren mit geteilten Speicherplätzen nicht effizienter werden (Virieux u. Operto, 2009). Für die numerische Modellierung von seismischen Wellen im Frequenzbereich wurde im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich der PARDISO-Solver verwendet (vergleiche Schenk u. Gärtner, 2004). Die Berechnung von zeitabhängigen Seismogrammen mittels der Modellierung von seismischen Wellen im Frequenzbereich durch den anschließenden Einsatz der inversen Fourier-Transformation ist sehr rechenintensiv, da Gleichung 2.53 für ein breites Spektrum an einzelnen Frequenzen gelöst werden muss, wobei der Berechnungsaufwand für höhere Frequenzen aufgrund der höheren Anforderungen an die Diskretisierung zusätzlich steigt. Das häufige Invertieren der Impedanzmatrix  $\mathbf{L}(\omega)$  für verschiedene Kreisfrequenzen in Kombination mit der diskreten inversen Fourier-Transformation ist im Normalfall deutlich aufwändiger als die numerische Berechnung der Wellenausbreitung im Zeitbereich, bei welcher ein Großteil des Rechenaufwands, je nach Methode, lediglich aus einer Vielzahl von Matrix-Vektor-Multiplikationen besteht.

Die Verschiebungskoeffizienten der zeitharmonischen Wellen  $\bar{\mathbf{u}}(\omega)$  für eine Kreisfrequenz  $\omega$  entsprechen einer Modellierung von Wellenformen über eine unendlichen Zeit. Dadurch können einerseits im Frequenzbereich die Amplituden nicht einzelnen spezifischen Wellentypen zugeordnet werden und andererseits können einzelne Zeitfenster von Messdaten, welche durch eine diskrete Fourier-Transformation in den Frequenzbereich überführt wurden, nicht mit den im Frequenzbereich approximierten Verschiebungen verglichen werden. Letzteres ist vor allem bei der Full-Waveform-Inversion von Nachteil, da die Seismogramme ein ausreichend langes Zeitintervall abdecken müssen, um alle wesentlichen Wellen, die in der betrachteten Umgebung auftreten, enthalten zu können. Gerade in der oberflächennahen Seismik würden dadurch teilweise Reflexionen von Strukturen, wie beispielsweise von Gebäuden oder bestehenden Tunnelsystemen im urbanen Raum, mit aufgezeichnet werden, welche bei einer Inversion eines entsprechenden Gebietes zu Problemen führen könnten, wenn diese nicht aus dem Datensatz entfernt werden. Im Zeitbereich hingegen würde die Möglichkeit bestehen einfach nur ein kürzeres Zeitintervall zu betrachten.

Der effiziente Einsatz von absorbierenden Randbedingungen oder Randschichten ist im Frequenzbereich besonders entscheidend, um mit einem begrenzten Gebiet die Wellenausbreitung für eine unbeschränkte Umgebung zu imitieren. Während im Zeitbereich, bei nicht optimal funktionierenden absorbierenden Rändern, nur wenige abgeschwächte Reflexionen der künstlichen Ränder für ein beschränktes Zeitintervall auftreten, würden bei der Modellierung von zeitharmonischen Wellen im Frequenzbereich unendlich viele Reflexionen der seismischen Wellen zwischen den künstlichen Rändern mit modelliert. Lediglich bei der Modellierung von starker intrinsischer Dämpfung würden sich die Wellen, welche an den künstlichen Rändern reflektiert wurden, nicht zurück an die Messpunkte ausbreiten. Um entsprechend große Fehler bei der Approximation von zeitharmonischen Wellen zu vermeiden, müssen die absorbierenden Ränder möglichst effizient gestaltet werden. Für die Modellierung von seismischen Wellen im Frequenzbereich werden in dieser Arbeit C-PMLs verwendet, welche in Abschnitt 3.1 genauer beschrieben werden.

### 2.4.3. Numerische Verfahren für die Modellierung von seismischen Wellen

Ein simples, aber dennoch sehr effizientes Verfahren zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen stellt die Finite-Differenzen-Methode dar, welche das erste numerische Verfahren war, das für die seismologische Forschung eine breite Anwendung fand (Igel, 2016, Kapitel 4). Bei dieser Methode werden die örtlichen partiellen Ableitungen aus Gleichung 2.10 über Differenzenquotienten zwischen einzelnen Punkten angenähert. Für eine akkurate und effiziente Berechnung sollten die Diskretisierungspunkte, von welchen sehr viele benötigt werden, gleichmäßig verteilt sein, was insbesondere bei heterogenen Bodeneigenschaften zu Problemen führt. Um den effektiven Gitterabstand zu reduzieren, ohne dabei die Anzahl an Koeffizienten für die Approximation zu erhöhen, wird häufig ein ineinander versetztes Berechnungsraster (engl. *Staggered Grid*) verwendet. Für dieses Berechnungsraster werden beispielsweise bei der Geschwindigkeits-Spannungs-Formulierung von Gleichung 2.52 die einzelnen Geschwindigkeits- und Spannungskomponenten an unterschiedlichen versetzten Positionen diskretisiert, wodurch ein Finite-Differenzen-Schema vierter Ordnung eingeführt werden kann, ohne dass das zu lösende Gleichungssystem sich vergrößert. Die Implementierung der Neumann-Randbedingungen ist, vor allem durch das ineinander versetzte Berechnungsraster, umständlicher als bei anderen Methoden, weshalb unterschiedliche Methoden für die Implementierung von freien Oberflächen entwickelt wurden (vergleiche Fichtner, 2011, Unterabschnitt 3.2.3). Die Finite-Differenzen-Methode wurde bereits sowohl für Anwendungen der Full-Waveform-Inversion im Zeitbereich (z.B. Igel u. a., 1996) als auch im Frequenzbereich (z.B. Pratt, 1999; Pratt u. Shipp, 1999) erfolgreich eingesetzt.

Eine weiteres Verfahren zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen stellt die Finite-Elemente-Methode dar, welche zuerst in der Festkörpermechanik zum Einsatz kam (Igel, 2016, Kapitel 6). Dazu wird die starke Form der elastischen Wellengleichung aus Gleichung 2.10 oder Gleichung 2.40 in die zugehörige schwache Form überführt, welche eine integrale Formulierung darstellt. Die Überführung der elastischen Wellengleichung von der starken Form in die schwache Form wird in Abschnitt 3.2 detaillierter erläutert. Das betrachtete Gebiet wird entsprechend in sich nicht überlappende Teilgebiete unterteilt, welche die Finiten-Elemente darstellen. Die Elemente können sehr unterschiedliche Formen besitzen, wodurch eine Anpassung an komplexe Geometrien des betrachteten Gebiets möglich ist. Innerhalb dieser Elemente werden die Verschiebungen durch Polynome approximiert, welche, je nach Anforderung, linear oder von höherer Ordnung sein können. Die Kontinuität der Verschiebungen zwischen den einzelnen Elementen muss bei der Finite-Elemente-Methode explizit gewährleistet werden. Das entstehende System für die Berechnung der Koeffizienten der Polynome führt zu Gleichung 2.52 oder Gleichung 2.53. Bei der Herleitung der schwachen Form aus der starken Form der elastischen Wellengleichung wird auch ein Oberflächenintegral extrahiert, welches das Skalarprodukt des Cauchy-Spannungstensors und des Normalenvektors der Oberfläche enthält. Indem dieses Integral einfach gleich Null gesetzt und somit vernachlässigt wird, wird die Neumann-Randbedingung aus Gleichung 2.11 implizit schon erfüllt. Die ursprüngliche Form der Finite-Elemente-Methode wird im Zeitbereich nur selten für die Modellierung von seismischen Wellen eingesetzt, da die sich ergebende Massenmatrix  $M$  des gesamten Systems keine diagonale Form besitzt, weshalb die Invertierung zu einem hohen Berechnungsaufwand führt (Fichtner, 2011, Abschnitt 2.6). Des Weiteren lassen sich die Berechnungsschritte der Finite-Elemente-Methode schlechter parallelisieren als bei Methoden, welche zu einem komplett expliziten Schema für die Zeitintegration führen. Da die diskretisierte Form der elastischen Wellengleichung im Frequenzbereich aus Gleichung 2.53 ein lineares Gleichungssystem darstellt, welches immer gelöst werden muss, stellt die Tatsache, dass die Massenmatrix  $M$  nicht diagonal ist, keinen Nach-

teil dar, da die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  auch keine diagonale Form besitzt. Innerhalb dieser Arbeit wird die Finite-Elemente-Methode in Kombination mit hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung (Szabó u. a., 2004) verwendet, um Gleichung 2.53 zu lösen. Der Grad der Diskretisierung kann dabei sehr einfach für höhere Kreisfrequenzen durch das Hinzufügen von weiteren Ansatzfunktionen erhöht werden. Der genannte Ansatz der Finite-Elemente-Methode wird in Kapitel 3 detaillierter vorgestellt.

Die Spektrale-Elemente-Methode ist die Methode, welche zurzeit am häufigsten für die numerische Approximation von seismischen Wellen verwendet wird (Igel, 2016, Kapitel 7). Das betrachtete Gebiet wird, wie bei der Finite-Elemente-Methode, in einzelne Elemente unterteilt, wodurch erneut auch komplexere Geometrien abgebildet werden können und gleichzeitig werden die Neumann-Randbedingung aus Gleichung 2.11 wieder implizit erfüllt. Bei der in der Seismik am weitesten verbreiteten Variante der Spektrale-Elemente-Methode werden für die Approximation der Verschiebungen innerhalb der Elemente Lagrange-Polynome höherer Ordnung in Kombination mit einem Integrationsschema verwendet, welches die Gauß-Lobatto-Legendre-Punkte verwendet (Fichtner, 2011, Abschnitt 2.6). Durch diese Kombination wird die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , bei einer Verwendung von ausschließlich ebenen Viereckelementen und räumlichen Hexaederelementen, zu einer Diagonalmatrix, deren Invertierung trivial ist. Dadurch können mit einem expliziten Zeitintegrationsschema die Verschiebungskoeffizienten für die folgenden Zeitschritte durch simple Matrix-Vektor-Operationen berechnet werden, ohne dass große lineare Gleichungssysteme gelöst werden müssten (Igel, 2016, Kapitel 7). Des Weiteren ist eine effiziente Parallelisierung des Berechnungsalgorithmus gut möglich. Um die Methode möglichst effizient zu halten, müssen die Elementtypen auf Viereck- und Hexaederelemente beschränkt werden, wodurch die Erstellung eines Berechnungsnetzes essentiell ist, welches ein numerisch stabiles Verhalten in Kombination mit der Verwendung eines möglichst großen Zeitinkrementes sowie gleichzeitig eine Berücksichtigung von allen relevanten geometrischen Details ermöglicht. Für die Spektrale-Elemente-Methode sind sehr leistungsstarke und gleichzeitig frei zugänglichen Codes vorhanden, welche über die Internetseite der *Computational Infrastructure for Geodynamics* (<http://geodynamics.org>) bezogen werden können, welche durch die *US National Science Foundation* über die Zuschüsse *EAR-0949446* und *EAR-1550901* finanziell unterstützt wird. Diese Codes werden in dieser Arbeit für die Modellierung von elastischen Wellen im Zeitbereich verwendet, wobei der *SPECFEM2D* Code für zweidimensionale und der *SPECFEM3D Cartesian* Code für dreidimensionale Randwertprobleme eingesetzt wird (Komatitsch u. Vilotte, 1998; Komatitsch u. Tromp, 2002a,b; Tromp u. a., 2008; Xie u. a., 2014).

Da die Spektrale-Elemente-Methode nur für Viereck- und Hexaederelemente zu einem gut parallelisierbaren Berechnungsschema führt, ist eine Berücksichtigung von komplexen Geometrien kaum möglich, ohne dass dabei der Zeitschritt unverhältnismäßig stark, aufgrund des Einsatzes von verhältnismäßig kleinen Elementen in entsprechenden Bereichen, reduziert werden muss. Um dieses Problem zu adressieren wurde der Einsatz der diskontinuierlichen Galerkin-Methode für die Seismologie untersucht, welche eine Finite-Elemente-Methode darstellt. Der größte Unterschied zur üblichen Finite-Elemente-Methode besteht darin, dass bei der diskontinuierlichen Galerkin-Methode die Elemente nicht über Kontinuitätsbedingungen, sondern durch numerische Flüsse verbunden sind. Die Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Elemente ähneln denen der üblichen Finite-Elemente-Methode, jedoch werden diese für gewöhnlich nicht zu den zugehörigen Systemmatrizen assembliert, da die Elemente lokal betrachtet werden und nur über die numerischen Flüsse mit den angrenzenden Elementen verbunden sind. Dadurch ist der Einsatz von Dreieck- und Tetraederelementen, mit welchen komplexe Struk-

turen besser diskretisiert werden können, mit weniger Nachteilen verbunden. Dabei können die Ansatzgrade der Polynome, welche für die Elemente verwendet werden, erhöht werden, ohne die lokale Natur des Berechnungsschemas zu beeinträchtigen, wodurch eine effiziente Implementierung durch einen hohen Parallelisierungsgrad möglich ist. Die Implementierung der Parallelisierung ist jedoch aufgrund der hohen lokalen Flexibilität der Methode sehr anspruchsvoll. Jedoch ist im Vergleich zu anderen Methoden die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems höher, da die Punkte an den Elementgrenzen doppelt berechnet werden müssen, um die numerischen Flüsse bestimmen zu können. Dieser Effekt verstärkt sich insbesondere, wenn statt ebenen Problemen räumliche Probleme betrachtet werden (Igel, 2016, Kapitel 9). Ein knotenweiser Ansatz der diskontinuierlichen Galerkin-Methode (Lambrecht u. a., 2018) wurde bereits von Lambrecht (2015), Lamert u. Friederich (2019) sowie von Lamert (2020) eingesetzt, um den Einsatz der Full-Waveform-Inversion im Zeitbereich für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau zu untersuchen. Dabei wurden synthetische Daten und Messdaten aus einem kleinskaligen Laborexperiment mittels des adjungierten Gradienten invertiert.

Weitere Verfahren für die numerische Approximation der seismischen Wellenausbreitung, wie die Finite-Volumen-Methode oder die Pseudospektrale-Methode werden hier nicht weiter beleuchtet. Einen guten Überblick über die Methoden sowie eine entsprechende Einführung in die Implementierung der Methoden bietet das Lehrwerk von Igel (2016).





### 3. Numerische Approximation von zeitharmonischen Wellen

Innerhalb dieser Arbeit wird, wie schon in Abschnitt 1.3 angegeben, ein Ansatz der Full-Waveform-Inversion verwendet, welcher im Frequenzbereich operiert. Um diesen effizient gestalten zu können, werden auch die Verschiebungen im Frequenzbereich numerisch approximiert. Die wesentlichen Aspekte für die Modellierung von elastischen Wellen im Frequenzbereich wurden schon in Unterabschnitt 2.4.2 beleuchtet. Für die Modellierung von zeitharmonischen Wellen ist der erfolgreiche Einsatz von absorbierenden Rändern essentiell, um die Wellenausbreitung in einem unendlichen Gebiet anzunähern, obwohl nur ein begrenztes Gebiet für die Berechnung verwendet wird. Für den verwendeten numerischen Einsatz werden mit der Methode der gefalteten Perfectly-Matched-Layer (C-PML) absorbierende Randschichten verwendet, deren Funktionsweise und Implementierung in Abschnitt 3.1 erläutert werden. Wie schon in Unterabschnitt 2.4.3 angegeben wurde, wird für die Approximation der elastischen Wellen die Finite-Elemente-Methode verwendet. Entsprechend werden in Abschnitt 3.2 die Überführung der starken Form der elastischen Wellengleichung in die zugehörige schwache bzw. integrale Form sowie deren Diskretisierung erläutert. Wie schon in Unterabschnitt 2.4.3 angedeutet wurde, wird für die Finite-Elemente-Methode ein Ansatz höherer Ordnung eingesetzt, bei welchem hierarchische Ansatzfunktionen verwendet werden. Die zugehörigen eindimensionalen Ansatzfunktionen werden in Abschnitt 3.3 eingeführt und zudem wird auch erläutert, wie diese für den Einsatz von ebenen Viereck- und Dreieckelementen sowie von räumlichen Hexaeder- und Prismenelementen erweitert werden. Dabei wird auch darauf eingegangen, wie sichergestellt werden kann, dass die Moden, die aus den Ansatzfunktionen entstehen, zueinander konform ausgerichtet sind, um sicherzustellen, dass die Finiten-Elemente an ihren Grenzen sich zueinander konform verhalten. Zuletzt wird in Abschnitt 3.4 vorgestellt, nach welcher Logik der Ansatzgrad der hierarchischen Ansatzfunktionen, in Abhängigkeit von der betrachteten Kreisfrequenz und den vorliegenden Wellengeschwindigkeiten, automatisch für die Berechnungen der Wellenfelder angepasst wird.

#### 3.1. Die Methode der gefalteten Perfectly-Matched-Layer

Wie schon in Abschnitt 2.4 beschrieben wurde, sind absorbierende Randschichten im Vergleich zu absorbierenden Randbedingungen effizienter bei der Unterdrückung von unrealistischen Reflexionen von Wellen an den künstlichen Rändern des betrachteten Gebiets. Die Perfectly-Matched-Layer Methode ist ein besonders effizientes Verfahren der absorbierenden Randschichten, welche erstmals von Berenger (1994) vorgestellt wurde. Um innerhalb der PMLs die einfallenden Wellen zu absorbieren, werden die reellwertigen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  innerhalb der Randschichten durch die komplexwertigen Koordinaten  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  ersetzt. Die Absorption soll dabei durch eine Koordinatendehnung innerhalb der imaginären Ebene ermöglicht werden. Dieses Vorgehen wird im Folgenden exemplarisch für die Koordinate in  $x$ -Richtung genauer betrachtet, wobei dieses Schema auf die anderen Raumrichtungen übertra-

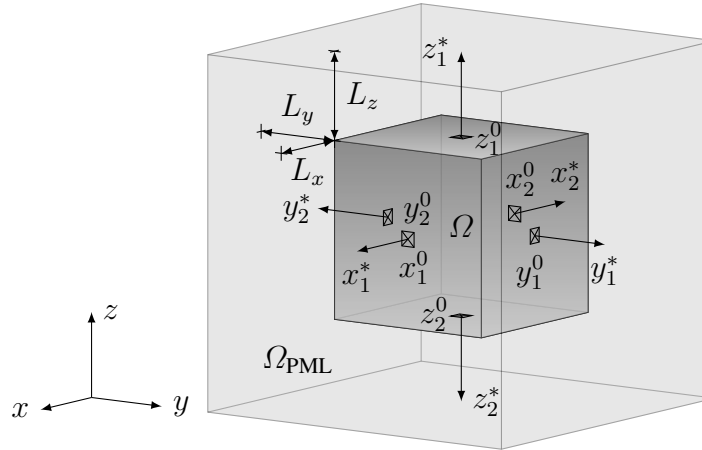


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung eines betrachteten Gebiets  $\Omega$ , welches von PMLs  $\Omega_{\text{PML}}$  mit unterschiedlichen Schichtdicken  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  umschlossen wird. Die lokalen Koordinaten  $x_b^*$ ,  $y_b^*$  und  $z_b^*$  der gegenüberliegenden Ränder  $b$  sind schematisch dargestellt.

gen werden kann:

$$\tilde{x} = x_b^0 + \int_{x_b^0}^x \varepsilon_x(x_b^*(x')) dx' \quad \text{mit} \quad x_b^* = x_b^*(x) = |x - x_b^0| \quad \text{für} \quad b = 1, 2. \quad (3.1)$$

Dabei wird durch  $x_b^*$  die lokale Position innerhalb einer PML-Schicht in Abhängigkeit von der betrachteten Position  $x$  und in Abhängigkeit von der Position der inneren Grenzschicht  $x_b^0$  beschrieben. Über die Variable  $b$  wird angegeben, ob es sich um die PML-Schicht in positiver ( $b = 1$ ) oder in negativer Koordinatenrichtung ( $b = 2$ ) handelt. In Abbildung 3.1 wird exemplarisch ein zu betrachtendes Gebiet  $\Omega$  dargestellt, welches von PML-Schichten  $\Omega_{\text{PML}}$  mit den Abmaßen  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  umgeben ist, wobei sich die Dicken der sich gegenüberliegenden PML-Schichten unterscheiden könnten. Die lokalen Koordinaten  $x_b^*$  sind mit ihren Ausgangslagen  $x_b^0$  auch illustriert. Die Streckfunktion  $\varepsilon_x(x_b^*)$ , welche in Gleichung 3.1 integriert werden muss, beschreibt, wie die Koordinate innerhalb der imaginären Ebene gestreckt wird:

$$\varepsilon_x(x_b^*) = 1 + \frac{\gamma_x(x_b^*)}{i\omega}, \quad (3.2)$$

wobei  $\gamma_x(x_b^*)$  die Dämpfungsfunktion darstellt, welche gleichförmig von dem Wert 0 an der inneren Grenzschicht bei  $x_b^* = 0$  auf einen definierten Wert an der äußeren Grenzschicht bei  $x_b^* = L_x$  anwächst. Somit würde sich für die Streckfunktion am inneren Rand der PML-Schicht  $\varepsilon_x(x_b^* = 0) = 1$  ergeben. Durch diesen fließenden Übergang soll sichergestellt werden, dass möglichst keine Wellen an den Grenzschichten zu den PML-Schichten reflektiert werden. In dieser Arbeit wurde für das Dämpfungsprofil folgende Funktion verwendet:

$$\gamma_x(x_b^*) = c_{\text{PML}} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x_b^*}{2 L_x}\right) \right). \quad (3.3)$$

Dabei stellt die Variable  $c_{\text{PML}}$ , bis zu deren Wert die Dämpfungsfunktion am Ende der PML-Schicht anwächst, einen numerischen Parameter dar, welcher in Abhängigkeit von den Abmaßen und der Diskretisierung der PML-Schichten sowie in Abhängigkeit von den elastischen Eigenschaften, die innerhalb der PML-Schicht verwendet werden, gewählt werden muss. Dabei ist eine möglichst akkurate Bestimmung von  $c_{\text{PML}}$  essentiell, um eine optimale Dämpfung

der Wellen, welche in die PML-Schichten eindringen, zu bewirken. Bei der Verwendung der in Gleichung 3.2 angegebenen Streckfunktion wird in der Literatur häufig von der Standardformulierung der Perfectly-Matched-Layer Methode gesprochen (Fichtner, 2011, Abschnitt 6.3). Diese wurde vor allem für die Absorption von Raumwellen entwickelt, weswegen mit dieser gute Ergebnisse beim numerischen Lösen der akustischen Wellengleichung erzielt werden. Daher wurde die Standardformulierung der Perfectly-Matched-Layer Methode auch von Riedel u. a. (2021b) bei der Untersuchung des Einsatzes der Full-Waveform-Inversion zur Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau verwendet, da für diese Studie als Vereinfachung die akustische Wellengleichung verwendet wurde.

Bei der Verwendung der elastischen Wellengleichung werden für die Approximation der Wellenausbreitung in oberflächennahen Gebieten jedoch häufig flache Berechnungsmodelle verwendet, um die Berechnung effizient gestalten zu können. Dadurch interagieren die entstehenden Rayleigh-Wellen an den freien Oberflächen (z.B. an der Erdoberfläche) mit der unteren PML-Schicht. Da sich die Wellen nahezu parallel zur absorbierenden Schicht bewegen, entsteht eine Interaktion mit der Unterseite des Berechnungsmodells, welche zu fälschlichen Reflexionen von Wellen führt. Um diese Reflexionen zu vermeiden wurde eine Methode mit gefalteten Perfectly-Matched-Layer von Festa u. a. (2005) eingeführt, welche im Vergleich zur Standardformulierung lediglich eine modifizierte Streckfunktion verwendet. Der Streckfunktion wird nur eine Grenzkreisfrequenz  $\omega_c$  im Nenner des zweiten Terms aus Gleichung 3.2 hinzugefügt:

$$\varepsilon_x(x_b^*) = 1 + \frac{\gamma_x(x_b^*)}{\omega_c + i\omega}. \quad (3.4)$$

Durch diese Abänderung verhält sich Gleichung 3.4 wie ein Butterworth-Filter (Festa u. a., 2005), welches die Polstelle der Streckfunktion bei  $1/\omega$  in den imaginären Bereich verschiebt. Wenn das Verhältnis zwischen der Kreisfrequenz und der Grenzkreisfrequenz  $\omega/\omega_c$  steigt, dann nähert sich die Streckfunktion aus Gleichung 3.4 der Formulierung aus Gleichung 3.2 an, während sich bei einem sinkenden Verhältnis die PMLs zunehmend wie das übliche Berechnungsgebiet verhalten, wodurch die sonst auftretenden Fehler bei niedrigen Frequenzen vermieden werden können (Fichtner, 2011, Abschnitt 6.3). Aufgrund der zu betrachtenden Tunnelgeometrien treten selbst bei tiefliegenden Tunnelumgebungen Oberflächenwellen auf, weswegen innerhalb dieser Arbeit nur C-PMLs verwendet werden. Dabei wurden mit  $\omega_c = 0.99\omega$  bei der Modellierung von zeitharmonischen Wellen gute Ergebnisse erzielt.

In Bereichen, in denen sich die PML-Schichten von zwei oder drei Raumrichtungen überlappen, werden für alle betroffenen Richtungen komplexwertige Koordinaten verwendet. Durch das Ersetzen der reellwertigen Koordinaten durch die komplexwertigen Koordinaten verändern sich in der Frequenzbereichsform der elastischen Wellengleichung aus Gleichung 2.40 die räumlichen Ableitungen. Für eine PML-Schicht in  $x$ -Richtung kann die räumliche Ableitung der komplexwertigen Koordinate  $\tilde{x}$  über die Kettenregel bestimmt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Entsprechend müssen der elastischen Wellengleichung, an den passenden Stellen, die Kehrwerte der Streckfunktionen hinzugefügt werden. Bei einer späteren Integration der elastischen Wellengleichung innerhalb einer PML-Schicht über ein Volumen  $V$ , über eine Fläche  $A$  oder über eine Strecke  $S$  mittels der reellwertigen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  müssen die zu integrierenden Terme auch mit der Determinante der Jacobi-Matrix  $\det(\tilde{\mathbf{J}})$  multipliziert werden, um die zugehörige Koordinatentransformation zu berücksichtigen. Über die Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  können

die Ableitungen der reellwertigen Koordinaten  $\mathbf{x}$  über die Ableitungen der komplexwertigen Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  ausgedrückt werden, was im Folgenden für den dreidimensionalen Fall dargestellt wird:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{J}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  beinhaltet somit alle ersten Ableitungen der komplexwertigen Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  nach den reellwertigen Koordinaten  $\mathbf{x}$ . Da die einzelnen Komponenten der komplexwertigen Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  jeweils nur von den entsprechenden Komponenten der reellwertigen Koordinate  $\mathbf{x}$  abhängig sind, stellt die Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  eine Diagonalmatrix dar, deren Determinante entsprechend nur aus dem Produkt der diagonalen Elemente besteht:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\tilde{\mathbf{J}}) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z. \quad (3.7)$$

Auf die Jacobi-Transformation wird in Unterabschnitt 3.2.2 ausführlicher eingegangen. Durch eine Modifikation der Eigenschaften der Medien innerhalb der PML-Schichten können die Streckfunktionen elegant hinzugefügt und zusammengefasst werden. Die Dichte  $\rho$  auf der linken Seite von Gleichung 2.40 kann durch die komplexwertige Dichte  $\tilde{\rho}$  ersetzt werden (Pled u. Desceliers, 2022):

$$\tilde{\rho} = \rho \det(\tilde{\mathbf{J}}) = \rho \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z, \quad (3.8)$$

während der Materialsteifigkeitstensor  $C_{ijkl}$  durch den komplexenwertigen Materialsteifigkeitstensor  $\tilde{C}_{ijkl}$  ersetzt werden kann:

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{\det(\tilde{\mathbf{J}})}{\varepsilon_i \varepsilon_k} C_{ijkl} = \frac{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}{\varepsilon_i \varepsilon_k} \rho \left( (v_p^2 - 2v_s^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + v_s^2 (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \right). \quad (3.9)$$

Der komplexwertige Materialsteifigkeitstensor  $\tilde{C}_{ijkl}$  besitzt zwar weiterhin seine großen Symmetrieeigenschaften  $\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{klij}$ , verliert jedoch gegenüber dem reellwertigen Materialsteifigkeitstensor  $C_{ijkl}$  seine kleineren Symmetrieeigenschaften mit  $\tilde{C}_{ijkl} \neq \tilde{C}_{jikl}$  und  $\tilde{C}_{ijkl} \neq \tilde{C}_{ijlk}$  (Pled u. Desceliers, 2022). Wenn eine Koordinate innerhalb eines betrachteten Bereichs einer Randschicht, welche auch aus sich überschneidenden Randschichten bestehen kann, nicht komplexwertig ist, dann ist der Wert der zugehörigen Steckfunktionen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  oder  $\varepsilon_z$  gleich 1.

Einen sehr detaillierten Überblick über die Methode der Perfectly-Matched-Layer für die Ausbreitung von elastischen Wellen in unbegrenzten Medien und über die neusten Entwicklungen dieser Methoden geben Pleđ u. Desceliers (2022).

### 3.2. Finite-Elemente-Methode

Wie bereits in Unterabschnitt 2.4.3 angegeben wurde, muss für den Einsatz der Finite-Elemente-Methode die starke Form der elastischen Wellengleichung in die schwache Form überführt werden. Dazu wird das Prinzip der virtuellen Arbeit verwendet, wozu Gleichung 2.40 mit der vektoriellen Testfunktion  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  multipliziert und über das Volumen  $V$  des Körpers  $\Omega$  integriert

wird (Zienkiewicz u. a., 2013):

$$\int_{\Omega} -\omega^2 \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dV - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega)) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dV \quad \forall \mathbf{w}(\mathbf{x}). \quad (3.10)$$

Dabei stellt die Testfunktion  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  eine beliebige und differenzierbare Funktion dar. Über die partielle Integration kann der Term des zweiten Integrals aus Gleichung 3.10 umformuliert werden:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega)) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x})) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) : (\nabla \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x})). \quad (3.11)$$

Das Volumenintegral des linken Summanden aus Gleichung 3.11 kann mittels des Integralsatzes von Gauß zu einem Integral über die Oberfläche des Körpers  $\partial\Omega$  umgeformt werden:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x})) \, dV = \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))}_{=0} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dA = 0. \quad (3.12)$$

Das Skalarprodukt des Cauchy-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega)$  und des Normalenvektors  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  verschwindet an einer freien Oberfläche, wodurch sich auch das Ergebnis des Integrals zu 0 ergibt. Somit wird die Neumann-Randbedingung aus Gleichung 2.11 direkt implizit erfüllt, was ein wesentlicher Vorteil im Vergleich zu anderen numerischen Methoden, wie der Finite-Differenzen-Methode, ist. Unter Berücksichtigung von Gleichung 3.11 und Gleichung 3.12 ergibt sich aus Gleichung 3.10 die integrale Form der elastischen Wellengleichung:

$$\int_{\Omega} -\omega^2 \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) : (\nabla \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x})) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, dV \quad \forall \mathbf{w}(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Durch die dargestellten Umformungen wird der Grad der partiellen Differentialgleichung von Grad zwei auf Grad eins reduziert, wodurch nur die ersten räumlichen Ableitungen benötigt werden. Des Weiteren müssen bei dieser Form der elastischen Wellengleichung alle auftretenden Funktionen nur abschnittsweise definiert sein, was das Lösen der Integrale vereinfacht.

### 3.2.1. Finite-Elemente-Diskretisierung

Entsprechend wird der betrachtete Körper  $\Omega$  in  $N_e$  sich nicht überlappende Elemente aufgeteilt (Kuhl, 2005, Abschnitt 3.2):

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega^e \quad \text{mit} \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset \quad \forall i \neq j. \quad (3.14)$$

Dabei wird jedoch die Form des Körpers üblicherweise so gut wie nötig angenähert, wobei eine höhere Anzahl an Elementen  $N_e$  diese Approximation verbessert. Die Grundform eines Finite-Elemente-Netzes wird über einzelne Knoten konstruiert, welche sich an den Schnittpunkten der einzelnen Elementgrenzen befinden. Je nach Ansatz der Finite-Elemente-Methode können auch noch weitere Knotenpunkte eingeführt werden, welche sich nicht an den Elementgrenzen befinden würden. Innerhalb der Elemente werden gesuchte Feldgrößen über die Kombination

von Formfunktionen bzw. Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  und den zugehörigen Koeffizienten  $\bar{\mathbf{u}}^e$  angenähert, wobei aus Gründen der Leserlichkeit die Abhängigkeiten von der Kreisfrequenz  $\omega$  im Folgenden vernachlässigt werden:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^e \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{w}^e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e. \quad (3.16)$$

Dabei können die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  Polynome unterschiedlichsten Grades sein, welche stückweise innerhalb der einzelnen Elemente definiert sind. Bei vielen Ansätzen der Finite-Elemente-Methode stellen die Verschiebungskoeffizienten  $\bar{\mathbf{u}}^e$  eines Elements  $e$  die Knotenverschiebungen des Elements dar, über welche mit den Ansatzfunktionen die Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  innerhalb des betrachteten Elements interpoliert werden. Bei dem verwendeten Ansatz müssen neben den Knotenverschiebungen auch noch zusätzliche Verschiebungskoeffizienten bestimmt werden, welche über entsprechende Ansatzfunktionen verschiedene Kanten- und Flächenmoden annähern.

Um die räumliche Änderung der Eigenschaften eines Körpers zu beschreiben, können diese auch über eine Kombination aus Koeffizienten und Ansatzfunktionen angenähert werden:

$$v_p(\mathbf{x}) \approx v_{p_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_m} m_m N_m^m(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

$$v_s(\mathbf{x}) \approx v_{s_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_m} m_{N_m+m} N_m^m(\mathbf{x}), \quad (3.18)$$

$$\rho(\mathbf{x}) \approx \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_m} m_{(2N_m+m)} N_m^m(\mathbf{x}), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{m} = (v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_{N_m}}, v_{s_1}, v_{s_2}, \dots, v_{s_{N_m}}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_m})^T. \quad (3.20)$$

Die Koeffizienten aller Eigenschaften des diskretisierten Gebiets werden in dem Vektor  $\mathbf{m}$  zusammengefasst, wobei für jede Eigenschaft  $N_m$  Koeffizienten verwendet werden. Dabei können die diskreten Formen der Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_{p_h}$ , der Scherwellengeschwindigkeit  $v_{s_h}$  und der Dichte  $\rho_h$  über Formfunktionen  $N^m(\mathbf{x})$  beschrieben werden, welche aber nicht den Ansatzfunktionen entsprechen müssen, welche für die Approximation der Verschiebungen verwendet werden. Da der Materialsteifigkeitstensor  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  über die Dichte und die Wellengeschwindigkeiten bestimmt werden kann, wird dieser auch über die Koeffizienten der diskretisierten Eigenschaften  $\mathbf{m}$  approximiert:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Innerhalb dieser Arbeit werden die Eigenschaften in den Knoten des Finite-Elemente-Netzes diskretisiert, welche mittels der Ansatzfunktionen linear in die benachbarten Elemente interpoliert werden. Bei anderen Anwendungen werden häufig die Eigenschaften eines Körpers auch als Größen approximiert, welche über die jeweiligen Elemente konstant sind, wodurch abrupte Änderungen der Eigenschaften besser dargestellt werden können.

Mithilfe des Differentialoperators  $\mathbf{D}_x$  aus Gleichung 2.9 kann die elementweise definierte Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  in Voigt-Notation eingeführt werden, welche die räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen enthält:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Voigt}}^e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{D}_x \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^e \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e, \quad (3.22)$$

$$(\nabla \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}))_{\text{Voigt}}^e \approx \mathbf{D}_x \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e. \quad (3.23)$$

Unter Zuhilfenahme des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes in Voigt-Notation aus Gleichung 2.8 kann dadurch die integrale Form der elastischen Wellengleichung aus Gleichung 3.13 für die einzelnen Elemente durch die folgenden Integrale angenähert werden:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} -\omega^2 \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}) (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^e) (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e) dV \\
& + \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e) \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^e) dV \\
& = \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e) dV \quad \forall \bar{\mathbf{w}}^e.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Da die Koeffizientenvektoren der Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}^e$  und der Testfunktionen  $\bar{\mathbf{w}}^e$  nicht von der räumlichen Position  $\mathbf{x}$  abhängen, können die Integrale aus Gleichung 3.24 vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \left( \int_{\Omega^e} \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{x}) dV \right) \bar{\mathbf{u}}^e + \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV \right) \bar{\mathbf{u}}^e \\
& = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}^e dV \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Der in Klammern gesetzte Ausdruck des ersten Summanden aus Gleichung 3.25 kann zu der Elementmassenmatrix  $\tilde{\mathbf{M}}^e$  und der in Klammern gesetzte Ausdruck des zweiten Summanden kann zu der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  des Elements  $e$  zusammengefasst werden:

$$\tilde{\mathbf{M}}^e = \int_{\Omega^e} \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{x}) dV, \tag{3.26}$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV. \tag{3.27}$$

Diese Elementmatrizen nehmen innerhalb der Elemente  $e$ , welche sich in dem absorbierenden Bereich der PML-Schichten  $\Omega_{\text{PML}}^e$  befinden, durch die Verwendung der komplexwertigen Dichte  $\tilde{\rho}$  aus Gleichung 3.8 und des komplexwertigen Materialsteifigkeitstensors  $\tilde{\mathbf{C}}$  (vergleiche Gleichung 3.9) die folgende Form an:

$$\tilde{\mathbf{M}}^e = \int_{\Omega_{\text{PML}}^e} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \varepsilon_y(\mathbf{x}) \varepsilon_z(\mathbf{x}) \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{x}) dV, \tag{3.28}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \int_{\Omega_{\text{PML}}^e} \frac{\varepsilon_x(\mathbf{x}) \varepsilon_y(\mathbf{x}) \varepsilon_z(\mathbf{x})}{\varepsilon_i(\mathbf{x}) \varepsilon_k(\mathbf{x})} C_{ijkl}(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \frac{\partial N_{lp}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\partial N_{jo}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p dV. \tag{3.29}$$

Durch die Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Elements innerhalb einer PML-Schicht kann der komplexwertige Materialsteifigkeitstensor  $\tilde{\mathbf{C}}$  implementiert werden, welcher, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, nicht mehr über die kleineren Symmetrieeigenschaften des reellwertigen Materialsteifigkeitstensors  $\mathbf{C}$  verfügt. In Gleichung 3.29 werden durch  $\mathbf{e}$  die orthonormalen Basisvektoren des euklidischen Vektorraums dargestellt. Für die verwendeten Indizes gilt  $i, j, k, l = 1, 2$  für zweidimensionale Randwertprobleme und  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  für dreidimensionale Randwertprobleme. Für die

Streckfunktionen nehmen die Indizes die den Zahlen zugehörigen Koordinatenrichtungen ( $x, y, z$ ) an. Die Indizes  $o$  und  $p$  nehmen alle natürlichen Zahlen von 1 bis zur Anzahl der lokalen Freiheitsgrade des Elements an. Die rechte Seite von Gleichung 3.25 kann zum Elementlastvektor  $\bar{\mathbf{f}}^e$  zusammengefasst werden:

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}^e dV. \quad (3.30)$$

Aufgrund der Integrationseigenschaften der Dirac-Delta-Funktion  $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)$  aus Gleichung 2.13, kann beispielsweise der Elementlastvektor  $\bar{\mathbf{f}}^e$  für eine Punktquelle (vergleiche Gleichung 2.12) angegeben werden, ohne dass eine Integration durchgeführt werden muss (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 4.2.4):

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{d}, \quad (3.31)$$

wobei  $\mathbf{d}$  erneut als Einheitsvektor die Richtung der Belastung angibt. Somit findet durch die Auswertung der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  an der Position der Quelle  $\mathbf{x}_s$  eine Annäherung der Impulsquelle statt.

Die Elementmatrizen und die Elementlastvektoren können im Anschluss zu der globalen Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der globalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und dem globalen Lastvektor  $\bar{\mathbf{f}}$  assembliert werden:

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}^e, \quad \bar{\mathbf{f}} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\mathbf{f}}^e, \quad (3.32)$$

wodurch sich aus der integralen Form der elastischen Wellengleichung das lineare Gleichungssystem ergibt, welches schon in Gleichung 2.53 eingeführt wurde:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}. \quad (3.33)$$

Bei der Assemblierung aus Gleichung 3.32 werden die Einträge der lokalen Freiheitsgrade den Einträgen der globalen Freiheitsgrade zugeordnet, wobei die Einträge unterschiedlicher Elemente aufsummiert werden. Die Impedanzmatrix  $\mathbf{L}$  stellt dabei eine dünn besetzte Matrix dar.

### 3.2.2. Konzept der isoparametrischen Elemente

Die Elemente im physikalischen Raum müssen einerseits einer ausreichenden Annäherung der Geometrie des betrachteten Körpers genügen und andererseits gewährleisten, dass Gebiete feiner aufgelöst werden, in welchen ein höherer Verschiebungsgradient erwartet wird. Für die dabei entstehenden Elemente ist eine Bestimmung der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  in Abhängigkeit der physikalischen Koordinaten  $\mathbf{x}$  sehr umständlich. Daher werden isoparametrische Referenzelemente in einem natürlichen Raum mit den natürlichen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  eingeführt. Üblicherweise besitzen die einzelnen Komponenten  $j$  der natürlichen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  entweder den Wertebereich  $\xi_j \in [-1, 1]$  oder  $\xi_j \in [0, 1]$ . Für diese lokalen Koordinaten können die zugehörigen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$  und die Differentialoperatormatrizen  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})$  in einer standardisierten Form definiert werden. Jedoch müssen für einige Berechnungen im natürlichen Raum Größen aus dem physikalischen Raum überführt werden, wie beispielsweise die Position der Quelle  $\mathbf{x}_s$ . Des Weiteren kann die numerische Integration der Elementmatrizen im natürlichen Raum besser durchgeführt werden. Die isoparametrischen Elemente, welche innerhalb dieser Arbeit zum



Einsatz kommen, werden in Abschnitt 3.3 genauer vorgestellt. Im Folgenden werden die Umformungen thematisiert, welche für alle Elemente gleich sind, wobei diese für dreidimensionale Elementtypen vorgestellt werden.

Die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ , welche nur in dem jeweiligen Element definiert sind, werden in Abhängigkeit von den natürlichen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  definiert:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{N}_1(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\xi}) \quad \cdots \quad \mathbf{N}_N(\boldsymbol{\xi})) \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}_i(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} N_i(\boldsymbol{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\boldsymbol{\xi}) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

wobei  $N$  hier die Anzahl aller Moden des Elements, wie beispielsweise Knoten-, Kanten-, Flächen- oder Raummoden, darstellt, welche über die Ansatzfunktionen approximiert werden. Die Strukturierung der Submatrizen  $\mathbf{N}_i$  ermöglicht einerseits die Berechnung vieler Größen über einfache Matrizenoperationen und andererseits werden direkt die Freiheitsgrade in alle Raumrichtungen berücksichtigt. Mithilfe der Ansatzfunktionen können auch über die lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  eines Elements die zugehörigen physikalischen Koordinaten  $\mathbf{x}$  berechnet werden:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^e = (x^{e1}, y^{e1}, z^{e1}, \dots, x^{eN}, y^{eN}, z^{eN})^T, \quad (3.35)$$

wobei  $\mathbf{x}^e$  die physikalischen Koordinaten der Knoten von Element  $e$  sowie die Koeffizienten für die Ansatzfunktionen anderer Moden, welche nicht mit einem Knoten assoziiert sind, darstellt. Die Koeffizienten der Ansatzfunktionen, welche nicht zu einem Knoten gehören, sind innerhalb dieser Arbeit gleich 0. Somit werden nur lineare Abbildungsfunktionen verwendet, was bei der Beschreibung der verwendeten hierarchischen Ansatzfunktionen in Abschnitt 3.3 ersichtlich wird. Die Verschiebungen können auch über die lokalen Ansatzfunktionen approximiert werden:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{u}}^e \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}^e = (u_x^{e1}, u_y^{e1}, u_z^{e1}, \dots, u_x^{eN}, u_y^{eN}, u_z^{eN})^T. \quad (3.36)$$

Das Differenzieren nach den natürlichen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  muss bei Betrachtungen innerhalb des physikalischen Koordinatensystems  $\mathbf{x}$  durch den Einsatz der Kettenregel erfolgen. Die entstehenden Ableitungen können dabei in der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  zusammengetragen werden:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Mithilfe von Gleichung 3.35 können die Einträge von der Jacobi-Matrix berechnet werden:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \mathbf{x}^e, \quad (3.38)$$

wobei Gleichung 3.38 verdeutlicht, wie die einzelnen Zeilen der Jacobi-Matrix berechnet werden. Somit sind für definierte Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$  alle nötigen Größen gegeben, um die Jacobi-Determinante bestimmen zu können. Um den Differentialoperator  $\mathbf{D}_x$  aus Gleichung 2.9

in Abhängigkeit von den natürlichen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  darstellten zu können, werden jedoch die inversen Ableitungen benötigt. Die zugehörigen Kettenregeln werden mittels der inversen Jacobi-Matrix zusammengefasst:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z} & \frac{\partial \xi_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Beim Invertieren der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  aus Gleichung 3.37 muss sichergestellt werden, dass für die Determinante der Jacobi-Matrix  $\det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})) > 0$  gilt. In Kombination mit den Einträgen der inversen Jacobi-Matrix kann mit  $\mathbf{D}_\xi$  das Pendant zu dem Differentialoperator  $\mathbf{D}_x$  definiert werden. Die in Gleichung 3.22 und Gleichung 3.23 eingeführte Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  kann durch den Einsatz des Differentialoperators  $\mathbf{D}_\xi$  für die Anwendung im natürlichen Koordinatensystem  $\boldsymbol{\xi}$  angepasst werden:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\xi}) \quad \cdots \quad \mathbf{B}_N(\boldsymbol{\xi})) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}_\xi \mathbf{N}_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.40)$$

Des Weiteren müssen die Integralgrenzen des betrachteten Elements  $\Omega$  in den natürlichen Raum überführt werden. Dazu muss das infinitesimale Volumen  $dV$  in den natürlichen Raum übertragen werden:

$$dV = dx \, dy \, dz = \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3. \quad (3.41)$$

Darüber hinaus müssen die zugehörigen Grenzen der Integrale an die der natürlichen Koordinaten angepasst werden, welche verallgemeinert durch die jeweilige untere  $\xi_j^u$  und obere Grenze  $\xi_j^o$  dargestellt werden können. Für die Massen- und Steifigkeitsmatrix des Elements  $e$  aus Gleichung 3.26 und Gleichung 3.27 ergibt sich somit:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\xi_3^u}^{\xi_3^o} \int_{\xi_2^u}^{\xi_2^o} \int_{\xi_1^u}^{\xi_1^o} \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\xi_3^u}^{\xi_3^o} \int_{\xi_2^u}^{\xi_2^o} \int_{\xi_1^u}^{\xi_1^o} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3. \quad (3.43)$$

Zuletzt müssen diese Integrale gelöst werden. Dabei kann eine analytische Integration sehr aufwändig sein und für einige Elemente ist eine analytische Lösung der Integrale nicht möglich. Daher wird eine numerische Integration eingesetzt. Bei der Gauß-Quadratur werden alle ortsabhängigen Größen an mehreren Gauß-Punkten  $\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}$ , welche die Integrationspunkte darstellen, ausgewertet, mit einem Gewichtungsfaktor  $w_g^{\text{GP}}$  multipliziert und für alle Gauß-Punkte aufsummiert:

$$\mathbf{M}^e = \sum_{g=1}^{N_{\text{GP}}} w_g^{\text{GP}} \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})) \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K}^e = \sum_{g=1}^{N_{\text{GP}}} w_g^{\text{GP}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})) \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})). \quad (3.45)$$

Für unterschiedliche Elementtypen variiert die Anzahl  $N_{GP}$  und die Position der Gauß-Punkte sowie die zugehörigen Gewichtungsfaktoren. Um eine ausreichend genaue Integration durchführen zu können, muss bei der Verwendung von Polynomen höherer Ordnung für die Ansatzfunktionen auch eine höhere Anzahl an Gauß-Punkten verwendet werden.

### 3.3. Hierarchische Ansatzfunktionen höherer Ordnung

Der Polynomgrad der Ansatzfunktionen  $N(\xi)$  bestimmt grundlegend, wie akkurat Verschiebungen approximiert werden können. Zuerst werden die Ansatzfunktionen eines eindimensionalen Elements in Unterabschnitt 3.3.1 betrachtet, da die Ansatzfunktionen von ebenen und räumlichen Elementen häufig nur eine Kombination dieser Ansatzfunktionen darstellen. Dabei wird auf die Unterschiede zwischen den hierarchischen und den Lagrange-Ansatzfunktionen eingegangen. In Unterabschnitt 3.3.2 wird erläutert, wie die Ansatzfunktionen der ebenen Elementtypen konstruiert werden, während die Konstruktion der Ansatzfunktionen der räumlichen Elementtypen in Unterabschnitt 3.3.3 beschrieben wird. Des Weiteren wird in Unterabschnitt 3.3.4 darauf eingegangen, wie sichergestellt werden kann, dass die Ansatzfunktionen von benachbarten Elementen am Übergang von dem einen zu dem anderen Element zueinander konform sind.

#### 3.3.1. Eindimensionale Ansatzfunktionen

Das zu betrachtende eindimensionale Element besitzt im natürlichen Koordinatensystem  $\xi_1$  den Wertebereich  $\xi_1 \in [-1, 1]$ . Für den Einsatz von ausschließlich linearen Ansatzfunktionen werden an den Enden des Elements Knoten verwendet, an welchen das Element mit anderen Elementen in Verbindung stehen kann. Die linearen Ansatzfunktionen für das vorgestellte isoparametrische Element sind:

$$N_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1), \quad N_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1). \quad (3.46)$$

Die Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.46 nehmen an dem Knoten, zu welchem sie jeweils assoziiert sind, den Wert 1 an, während die jeweils andere Ansatzfunktion an dem Knoten, zu welchem sie nicht gehört, den Wert 0 annimmt. Durch die linearen Ansatzfunktionen wird eine lineare Änderung der Verschiebungen innerhalb eines Elements angenähert, wodurch die Knotenverschiebungen über Gleichung 3.36 in das Element hinein interpoliert werden. Der Ansatzgrad  $p$  der linearen Ansatzfunktionen beträgt  $p = 1$ . Da das kurvige Verhalten von Wellenfeldern nur rudimentär durch abschnittsweise lineare Funktionen approximiert werden kann, sollten mit  $p = 2$  wenigstens auch quadratische Ansatzfunktionen eingesetzt werden. Für viele Anwendungen der Finite-Elemente-Methode ist bei der Verwendung von höheren Ansatzgraden mit  $p \geq 2$  der Einsatz von Lagrange-Ansatzfunktionen gängig, für welche für jede Erhöhung des Ansatzgrads ein Knoten hinzugefügt wird, welcher sich innerhalb des eindimensionalen Elements befindet. Bei ebenen und räumlichen Elementen wäre die Anzahl an zusätzlichen inneren Knoten entsprechend höher. Um alle Bereiche im Element möglichst gleichmäßig annähern zu können, sollten die Abstände zwischen den einzelnen Knoten möglichst gleichmäßig sein. Dadurch verändern sich die Positionen der inneren Knoten bei jeder Erhöhung des Ansatzgrads. Die zugehörigen Ansatzfunktionen können über die Positionen der Knoten berechnet werden,

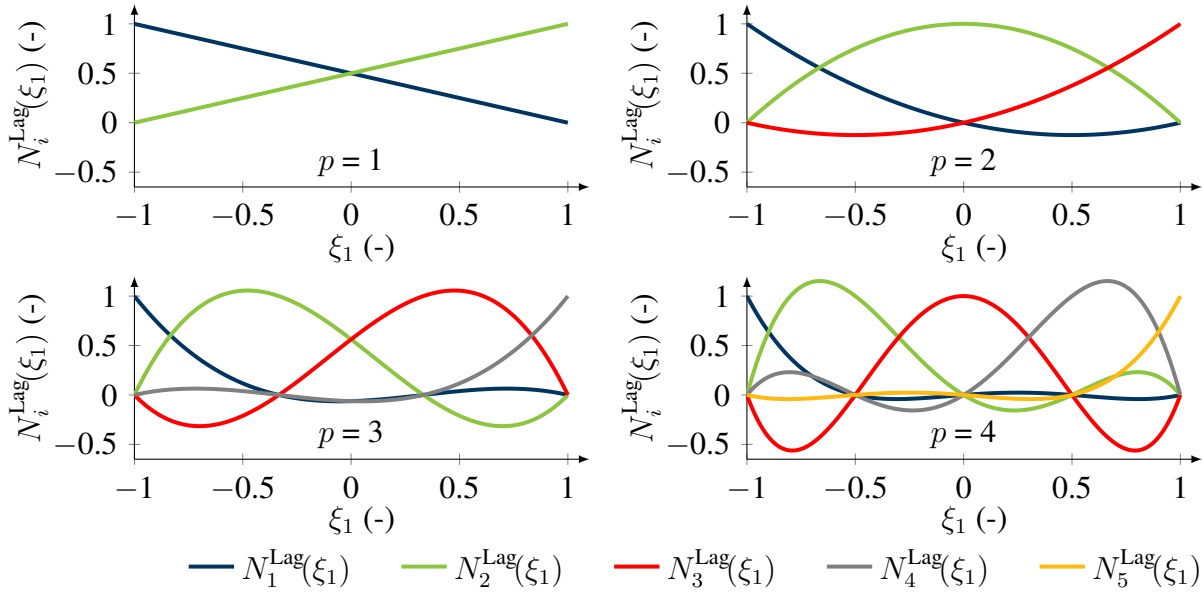


Abbildung 3.2.: Verlauf der Lagrange-Ansatzfunktionen  $N_i^{\text{Lag}}(\xi_1)$  der Ansatzgrade  $p = 1$  bis  $p = 4$  für ein eindimensionales Element mit dem Wertebereich  $\xi_1 \in [-1, 1]$ .

wobei  $\xi_1^j$  die Position des  $j$ -ten Knotens angibt (Szabó u. Babuška, 2011, Abschnitt 2.5):

$$N_i^{\text{Lag}}(\xi_1) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\xi_1 - \xi_1^j}{\xi_1^i - \xi_1^j} \quad \text{mit} \quad N_i^{\text{Lag}}(\xi_1^j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{p+1} N_i^{\text{Lag}}(\xi_1) = 1 \quad (3.47)$$

für  $i, j = 1, 2, \dots, p + 1$ .

Alle entstehenden Ansatzfunktion sind Polynome vom Grad  $p$  und besitzen weiterhin die Interpolationseigenschaften, dass die Ansatzfunktionen am assoziierten Knoten den Wert 1 besitzen und an allen anderen Knotenpositionen den Wert 0 annehmen. Die Lagrange-Ansatzfunktionen für die Ansatzgrade  $p = 1$  bis  $p = 4$  werden in Abbildung 3.2 illustriert. Bei der Berechnung von zeitharmonischen Wellen nehmen die Wellenlängen mit zunehmender Frequenz ab, was sich über Gleichung 2.2 erschließt. Bei einer schrittweisen Erhöhung der Frequenz bei der Approximation der zeitharmonischen Wellen muss dadurch auch die Diskretisierung erhöht werden, um diese kürzeren Wellenlängen ausreichend approximieren zu können. Der Einsatz der Lagrange-Ansatzfunktionen hätte den Nachteil, dass bei einer Erhöhung des Ansatzgrads  $p$  einerseits, durch die Erhöhung der Anzahl der inneren Knoten, ein neues Finite-Elemente-Netz generiert werden muss und andererseits, dass die Ansatzfunktionen erneut berechnet werden müssten sowie die Zuordnung der globalen Freiheitsgrade wiederholt werden müsste. Beim Einsatz von hierarchischen Ansatzfunktionen werden die linearen Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.46 bei einer Erhöhung des Ansatzgrads  $p$  sukzessiv um jeweils ein Polynom vom Grad  $p$  ergänzt. Dabei ist die entstehende Mode nicht zu einer Knotenverschiebung assoziiert, sondern wird über einen Koeffizienten skaliert, welcher durch das Lösen des späteren linearen Gleichungssystems bestimmt werden muss. Die hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung verschwinden an der unteren und oberen Grenze des betrachteten Intervalls, wodurch die Kompatibilität der Verschiebungen an den Knoten einfacher gewährleistet werden kann. Das zugrundeliegende Finite-Elemente-Netz muss entsprechend nicht mit steigendem Ansatzgrad  $p$  angepasst werden, sondern nur neue Ansatzfunktionen und Freiheitsgrade müssen ergänzt werden. Dadurch bietet sich der Einsatz dieser Ansatzfunktionen für die Berechnung von zeitharmonischen Wellenfeldern für sukzessiv steigende Frequenzen an und entsprechend werden die hierarchischen Ansatzfunktionen in der vorliegenden Arbeit verwendet. Die eindimensionalen hierarchischen

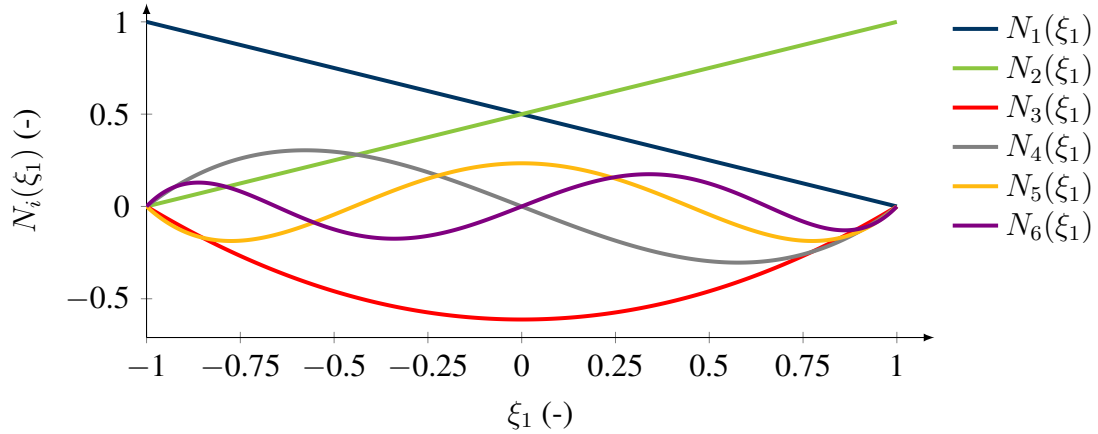


Abbildung 3.3.: Verlauf der linearen Ansatzfunktionen  $N_1(\xi_1)$  und  $N_2(\xi_1)$  sowie der hierarchischen Ansatzfunktionen bis zu einem Ansatzgrad von  $p = 5$  für ein eindimensionales Element mit dem Wertebereich  $\xi_1 \in [-1, 1]$ .

Ansatzfunktionen höherer Ordnung lassen sich über die Legendre-Polynome  $\ell_n(\xi_1)$  berechnen (Szabó u. Babuška, 2011, Abschnitt 2.5):

$$N_i(\xi_1) = \sqrt{\frac{2i-3}{2}} \int_{-1}^{\xi_1} \ell_{i-2}(\xi') d\xi' \quad \text{für } i = 3, 4, \dots, p+1. \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4i-6}} (\ell_{i-1}(\xi_1) - \ell_{i-3}(\xi_1))$$

Die linearen Ansatzfunktionen  $N_1(\xi_1)$  und  $N_2(\xi_1)$  aus Gleichung 3.46 werden zusammen mit den hierarchischen Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.48, bis zu einem Ansatzgrad von  $p = 5$ , in Abbildung 3.3 illustriert. Während die ersten beiden Legendre-Polynome  $\ell_0(\xi_1)$  und  $\ell_1(\xi_1)$  vergleichsweise simpel sind, lassen sich die höheren Legendre-Polynome  $\ell_n(\xi_1)$  über eine Rekursionsformel bestimmen (Szabó u. Babuška, 2011, Anhang A.6):

$$\ell_0(\xi_1) = 1, \quad (3.49)$$

$$\ell_1(\xi_1) = \xi_1, \quad (3.50)$$

$$\ell_n(\xi_1) = \frac{2n-1}{n} \xi_1 \ell_{n-1}(\xi_1) - \frac{n-1}{n} \ell_{n-2}(\xi_1). \quad (3.51)$$

Die Legendre-Polynome  $\ell_n(\xi_1)$  besitzen die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

$$\int_{-1}^1 \ell_i(\xi_1) \ell_j(\xi_1) d\xi_1 = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij}, \quad (3.52)$$

wodurch für die Ansatzfunktionen  $N_i(\xi_1)$  die folgende Eigenschaft gilt:

$$\int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi_1} \frac{dN_j}{d\xi_1} d\xi_1 = \delta_{ij} \quad \text{für } \begin{cases} i \geq 3 & \text{und } j \geq 1 \\ i \geq 1 & \text{und } j \geq 3 \end{cases}. \quad (3.53)$$

Die Orthogonalitätseigenschaft aus Gleichung 3.53 führt dazu, dass die Einträge der einzelnen Polynomgrade innerhalb der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  Submatrizen bilden, wenn alle Freiheitsgrade der Moden eines Polynomgrads global durchnummeriert werden, bevor mit der Nummerierung des jeweils nächsten Polynomgrads begonnen wird (Szabó u. a., 2004).

### 3.3.2. Ansatzfunktionen ebener Elemente

Für ebene Randwertprobleme werden üblicherweise Viereck- oder Dreieckelemente verwendet. Die in dieser Arbeit verwendeten Referenzelemente im natürlichen Raum werden in Abbildung 3.4 dargestellt. Die Knoten sowie die Kanten der Referenzelemente sind logisch durchnummeriert, wobei die Orientierung der Kanten, welche jeweils durch zwei Knoten aufgespannt werden, durch einen Pfeil angegeben wird. Die Freiheitsgrade, welche den Moden an den Elementgrenzen zugeordnet werden, teilen sich die benachbarten Elemente. Um sicherzustellen, dass die Moden der aneinander angrenzenden Elemente zueinander kompatibel sind, können beispielsweise bei den Moden an den Elementkanten die Orientierungen der Kanten mit den Orientierungen der Kanten des Referenzelements verglichen und angepasst werden, worauf in Unterabschnitt 3.3.4 genauer eingegangen wird.

Meistens stellen die Formfunktionen ebener Elemente eine Kombination von zwei eindimensionalen Ansatzfunktionen beider Raumrichtungen dar, wobei diese Kombination durch Multiplikation dieser Ansatzfunktionen erreicht wird. Während der Ansatzgrad der Formfunktionen im eindimensionalen Fall eindeutig angegeben werden kann, können im ebenen und räumlichen Fall unterschiedliche Kombinationen der eindimensionalen Ansatzfunktionen verwendet werden. Ein gängiger Kombinationsraum ist der Trunk-Raum, welcher häufig auch als Serendipity-Raum bezeichnet wird. Bei diesem Raum werden nicht alle Ansatzfunktionen eines Ansatzgrades  $p$  kombiniert, sondern nur diese, für welche die Summe der Ansatzgrade der zu kombinierenden Funktionen kleiner oder gleich  $p$  wären, wobei für die Kantenmoden auch Kombinationen berücksichtigt werden, für welche die Summe der Ansatzgrade beider Funktionen kleiner oder gleich  $p + 1$  ist. Somit würden Flächenmoden einerseits frühestens ab einem Ansatzgrad von  $p = 4$  berücksichtigt und andererseits wäre der Ansatzgrad der einzelnen kombinierten Formfunktionen niedriger als der gewählte globale Ansatzgrad. Des Weiteren ist auch die Verwendung des Tensor-Produkt-Raums sehr gängig, bei welchem alle eindimensionalen Ansatzfunktionen bis zu dem definierten Ansatzgrad  $p$  miteinander kombiniert werden. Somit würden Flächenmoden deutlich früher berücksichtigt. Bei der Verwendung des Tensor-Produkt-Raums entstehen mehr Freiheitsgrade, wodurch zwar die Approximation der zu bestimmenden Feldgrößen präziser wird, jedoch erhöht sich auch der entstehende Berech-

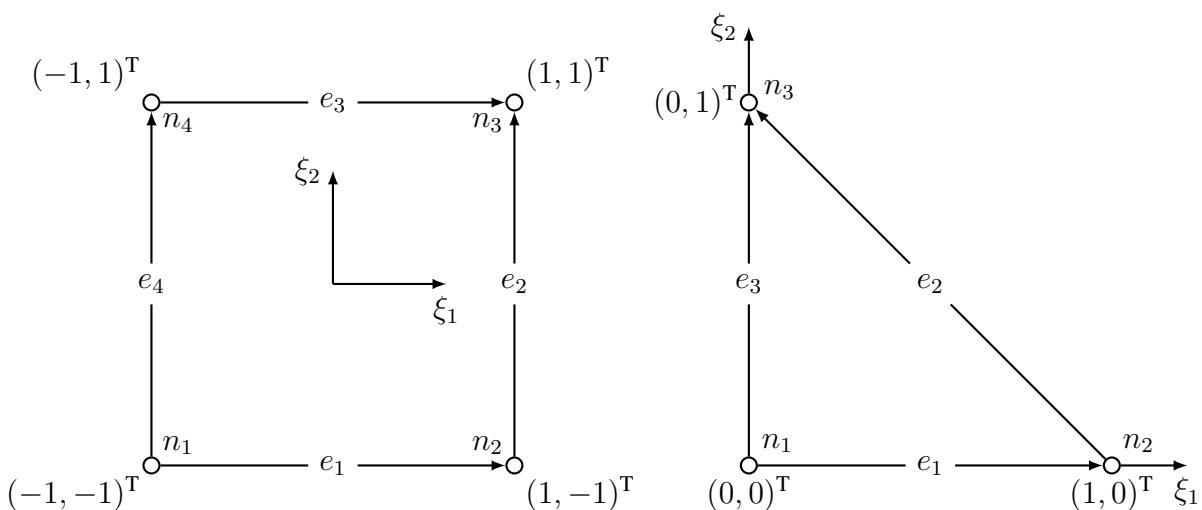


Abbildung 3.4.: Isoparametrisches Referenzelement eines Viereckelements (links) und eines Dreieckelements (rechts).

nungsaufwand (Szabó u. Babuška, 2011, Abschnitt 5.2). Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurde ausschließlich der Tensor-Produkt-Raum verwendet.

Im Folgenden wird die Konstruktion der Ansatzfunktionen von Viereck- und Dreieckelementen einzeln betrachtet.

### Ansatzfunktionen des ebenen Viereckelements

Die Ansatzfunktionen des ebenen Viereckelements aus Abbildung 3.4 (links) werden innerhalb des Raums  $\Omega_{\text{ref}}^V = [-1, 1] \times [-1, 1]$  definiert. Für die Generierung der Ansatzfunktionen des ebenen Viereckelements werden die eindimensionalen Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.46 und Gleichung 3.48 miteinander kombiniert, wobei zwischen den sich ergebenden Knotenmoden  $N_{i,j}^{V,n}(\xi_1, \xi_2)$ , Kantenmoden  $N_{i,j}^{V,e}(\xi_1, \xi_2)$  und Flächenmoden  $N_{i,j}^{V,f}(\xi_1, \xi_2)$  unterschieden werden kann:

$$N_{i,j}^{V,n}(\xi_1, \xi_2) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) \quad \text{für} \quad i, j = 1, 2, \quad (3.54)$$

$$N_{i,j}^{V,e}(\xi_1, \xi_2) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) \quad \text{für} \quad \begin{cases} i = 1, 2 & \text{und} & j = 3, \dots, p \\ j = 1, 2 & \text{und} & i = 3, \dots, p \end{cases}, \quad (3.55)$$

$$N_{i,j}^{V,f}(\xi_1, \xi_2) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) \quad \text{für} \quad i, j = 3, \dots, p. \quad (3.56)$$

Die Knoten- und Kantenmoden werden mithilfe von ein oder zwei linearen Ansatzfunktionen erzeugt. Da die eindimensionalen hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung an den Grenzen ihres Wertebereichs gleich Null werden, stellen die Flächenmoden innere Moden dar. Die unterschiedlichen Moden für die Ansatzgrade von  $p = 1$  bis  $p = 4$  werden in Abbildung 3.5 veranschaulicht, wobei auch die Nummerierung der Ansatzfunktionen für die Zuordnung zu den lokalen Freiheitsgraden schematisch angegeben wird. Da alle Ansatzfunktionen bis zu dem ausgewählten Ansatzgrad verwendet werden, beläuft sich die Anzahl der lokalen Freiheitsgrade eines Elements, bei der Verwendung des Tensor-Produkt-Raums, auf  $(p + 1)^2$ .

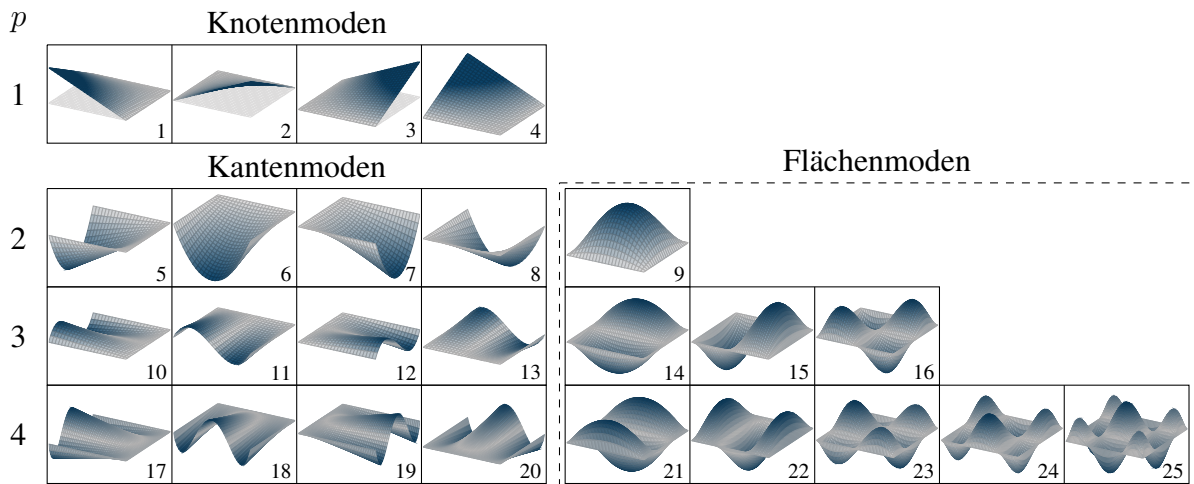


Abbildung 3.5.: Knoten-, Kanten- und Flächenmoden eines ebenen Viereckelements, welche durch die Verwendung von hierarchischen Ansatzfunktionen in Kombination mit dem Tensor-Produkt-Raum ab dem jeweiligen Ansatzgrad  $p$  für die Approximation der Feldgrößen hinzugefügt werden.

Bei der numerischen Integration der Elementmatrizen, welche in Gleichung 3.44 und Gleichung 3.45 gegeben sind, werden die Gauß-Punkte von Viereckelementen über die Kombination der Gauß-Punkte von zwei eindimensionalen Elementen generiert, welche jeweils entlang der beiden natürlichen Raumrichtungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ausgerichtet sind, wobei hier exemplarisch eine Funktion  $f(\xi_1, \xi_2)$  betrachtet wird:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{GP}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{GP}}} w_i w_j f(\xi_1^i, \xi_2^j). \quad (3.57)$$

Dabei werden die zugehörigen Gewichtungsfaktoren  $w_i$  und  $w_j$  miteinander multipliziert und die Werte der Funktion  $f(\xi_1, \xi_2)$  an den Positionen der Gauß-Punkte  $\xi_1^i$  und  $\xi_2^j$  ausgewertet sowie über die Anzahl der Gauß-Punkte  $N_{\text{GP}}$  von beiden Richtungen aufsummiert (Szabó u. Babuška, 2011, Anhang B.1). Die eindimensionalen Gauß-Legendre-Integrationspunkte, welche für unterschiedliche Ansatzgrade empfohlen sowie in dieser Arbeit verwendet werden, sind in Tabelle A.1 in Anhang A bis zu einem Ansatzgrad von  $p = 6$  aufgelistet. Dabei wurde auch berücksichtigt, dass für die Integration der Massenmatrizen  $\mathbf{M}^e$  eine höhere Anzahl an Gauß-Punkten benötigt wird, als bei der Integration der Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^e$ , welche nur die ersten Ableitungen der Ansatzfunktionen enthalten.

### Ansatzfunktionen des ebenen Dreieckelements

Dreieckelemente besitzen den Vorteil, dass mit ihnen auch die Geometrie von komplexeren Strukturen effizient in ein Finite-Elemente-Netz überführt werden kann. Jedoch ist die Qualität der Approximationen niedriger als die Qualität bei der Verwendung von Viereckelementen. Insbesondere bei der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen ist die Qualität vergleichsweise niedrig, weshalb generell wenigstens der Einsatz eines Ansatzgrads von  $p \geq 2$  zu empfehlen ist. Ein mögliches Referenzdreieckelement, welches in dieser Arbeit verwendet wird, ist in Abbildung 3.4 (rechts) dargestellt. Die beiden natürlichen Koordinaten  $\xi_1$  und  $\xi_2$  besitzen einen Wertebereich von  $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ . Beide Koordinaten sind durch eine Nebenbedingung voneinander abhängig, sodass für diese Dreieckelemente die Ansatzfunktionen für den Raum  $\Omega_{\text{ref}}^{\text{D}} = \{(\xi_1, \xi_2) | 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$  definiert werden. Die linearen Ansatzfunktionen eines Dreieckelements, welche die Knotenmoden darstellen, sind:

$$N_1^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1 - \xi_2, \quad N_2^{\text{D},n}(\xi_1) = \xi_1, \quad N_3^{\text{D},n}(\xi_2) = \xi_2. \quad (3.58)$$

Für den Einsatz hierarchischer Ansatzfunktionen höherer Ordnung kann das Dreieckelement auch als ein kollabiertes Viereckelement betrachtet werden. Wie Zaglmayr (2006, Abschnitt 5.2) anschaulich erörtert, ermöglicht diese Betrachtung, in Kombination mit der Verwendung von skalierten Legendre-Polynomen, dass die eindimensionalen hierarchischen Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.48 auch für die Konstruktion der hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung für den Wertebereich des vorgestellten Dreieckelements verwendet werden können.



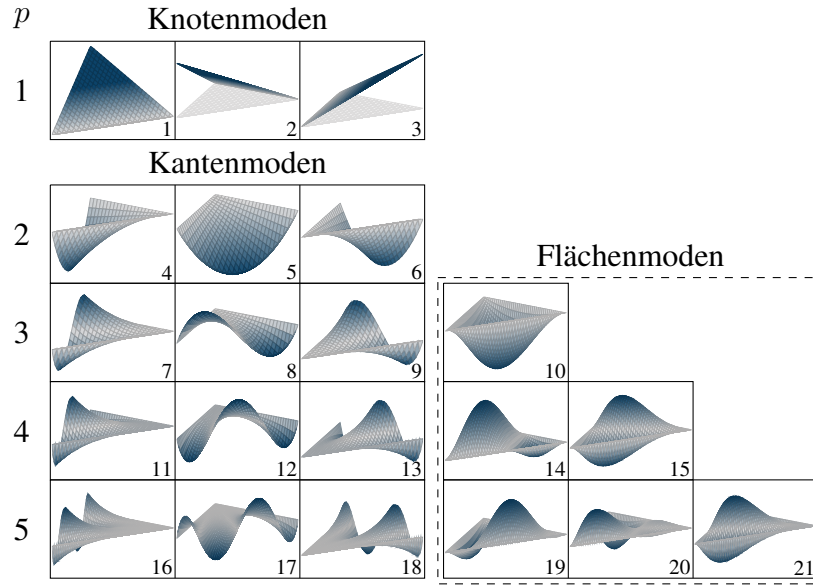


Abbildung 3.6.: Knoten-, Kanten- und Flächenmoden eines ebenen Dreieckelements, welche durch die Verwendung von hierarchischen Ansatzfunktionen in Kombination mit dem Tensor-Produkt-Raum ab dem jeweiligen Ansatzgrad  $p$  für die Approximation der Feldgrößen hinzugefügt werden.

Für die Kantenmoden ergeben sich die folgenden Ansatzfunktionen:

$$N_{i,j}^{\text{D},e} = N_{i+1} \left( \frac{N_r^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) - N_q^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2)}{N_q^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) + N_r^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2)} \right) (N_q^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) + N_r^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2))^i$$

mit  $i = 2, \dots, p$  (3.59)

und  $\{j, q, r\} = \begin{cases} \{1, 1, 2\} & \text{für Kantenmoden von Kante } e_1 \\ \{2, 2, 3\} & \text{für Kantenmoden von Kante } e_2 \\ \{3, 1, 3\} & \text{für Kantenmoden von Kante } e_3 \end{cases}$

Dabei stellt  $q$  den Index des ersten Knotens und  $r$  den Index des zweiten Knotens des betrachteten Linienelements  $e_j$  dar. Der Index  $i$  gibt hingegen den Ansatzgrad  $p$  der entstehenden Mode an. Die Ansatzfunktionen der Flächenmoden können durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$N_{i,j}^{\text{D},f} = N_{i+1} \left( \frac{N_2^{\text{D},n}(\xi_1) - N_1^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2)}{N_1^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) + N_2^{\text{D},n}(\xi_1)} \right) (N_1^{\text{D},n}(\xi_1, \xi_2) + N_2^{\text{D},n}(\xi_1))^i \cdot N_3^{\text{D},n}(\xi_2) \ell_j (2N_3^{\text{D},n}(\xi_2) - 1) \quad (3.60)$$

mit  $i = 2, \dots, p-1$  und  $j = 0, \dots, p-3$  und  $i+j \leq p-1$ ,

wobei die Legendre-Funktionen erneut durch  $\ell_j$  dargestellt werden. Die Ansatzgrade der einzelnen Bestandteile von Gleichung 3.60 werden durch die Indizes  $i$  und  $j$  bestimmt, wobei im Gegensatz zum Viereckelement erst ab dem Ansatzgrad  $p = 3$  Flächenmoden hinzugefügt werden. Die unterschiedlichen Moden, welche für die jeweiligen Ansatzgrade hinzugefügt werden, sind für Dreieckelemente in Abbildung 3.6 bis zum Ansatzgrad  $p = 5$  illustriert. Bei einer Betrachtung von zwei miteinander verbundenen Dreieckelementen wird ersichtlich, dass die selben Moden entstehen würden, welche sich für ein Viereckelement ergeben würden. So würden

beispielsweise die Kantenmoden an dem Übergang der beiden Dreieckelemente zusammen die Flächenmoden generieren, welche bei den Dreieckelementen scheinbar fehlen, wie beispielsweise für  $p = 2$ . Die Anzahl der lokalen Freiheitsgrade lässt sich mit  $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$  für den jeweiligen Ansatzgrad berechnen. Für die numerische Gauß-Legendre-Integration wurden die Gauß-Punkte für Dreieckelemente von Cowper (1973) verwendet, welche symmetrisch innerhalb des Elements angeordnet sind. Über kleinere Tests wurde festgestellt, dass für die meisten Ansatzgrade  $p$  Gauß-Punkte eingesetzt werden sollten, welche laut Cowper (1973) höheren Ansatzgraden zuzuordnen sind. In Tabelle A.2 in Anhang A sind die Gauß-Punkte und Gewichtungsfaktoren zusammengefasst, welche innerhalb dieser Arbeit für die Ansatzgrade  $p = 1$  bis  $p = 5$  für die numerische Integration von Dreieckelementen verwendet werden. Da sich die Integrationsgrenzen der Dreieckelemente von denen der Viereckelemente unterscheiden, ergibt sich für die Integration einer Funktion  $f(\xi_1, \xi_2)$  die folgende Gleichung:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GP}^D} w_i^D f(\xi_1^{D,i}, \xi_2^{D,i}). \quad (3.61)$$

Dabei wird bei den Gauß-Punkten und den Gewichtungsfaktoren für Dreieckelemente zusätzlich der hochgestellte Index D verwendet, um eine Unterscheidung zu den Gauß-Punkten und Gewichtungsfaktoren des eindimensionalen Elements zu ermöglichen.

### 3.3.3. Ansatzfunktionen räumlicher Elemente

Für die Approximation von räumlichen Strukturen werden räumliche Elementtypen verwendet. Dabei sind die vier gängigsten Typen das achteckige Hexaederelement, das sechseckige Prismenelement, das fünfeckige Pyramidenelement sowie das viereckige Tetraederelement. Hexaeder- und Tetraederelemente werden am häufigsten verwendet, da Hexaederelemente, wie die ebenen Viereckelemente, qualitativ hochwertigere Approximationen als die anderen Elementtypen ermöglichen, während mit Tetraederelementen hingegen bei der Diskretisierung beliebige Körperformen sehr gut angenähert werden können. Die Qualität der Approximationen ist bei der Verwendung von Prismen- und Pyramidenelementen höher als beim Einsatz von Tetraederelementen, jedoch bleibt die Qualität gleichzeitig niedriger als bei der Verwendung von Hexaederelementen. Dennoch bieten diese Elementformen mehr Möglichkeiten ein gut konditioniertes Finite-Elemente-Netz zu erzeugen. Innerhalb dieser Arbeit wurden vorwiegend Hexaederelemente verwendet, wobei der zusätzliche Einsatz von Prismenelementen die Diskretisierung des zylindrischen Tunnels maßgeblich vereinfacht hat. Durch die Reduzierung der Kantenlängen, in den Bereichen wo Prismenelemente verwendet wurden, konnte die etwas niedrigere Qualität der Approximationen kompensiert werden. Entsprechend wird im Folgenden auf die hierarchischen Ansatzfunktionen der Hexaeder- und Prismenelemente eingegangen. Wie schon bei den ebenen Elementen in Unterabschnitt 3.3.2 wird auch für räumlichen Elemente der Tensor-Produkt-Raum verwendet.

#### Ansatzfunktionen des räumlichen Hexaederelements

Innerhalb des Raums  $\Omega_{ref}^H = [-1, 1]^3$  werden die Ansatzfunktionen des räumlichen Hexaederelements definiert. In Abbildung 3.7 wird das zugehörige isoparametrische Referenzelement dargestellt, welches innerhalb dieser Arbeit für die Hexaederelemente verwendet wird. Dabei

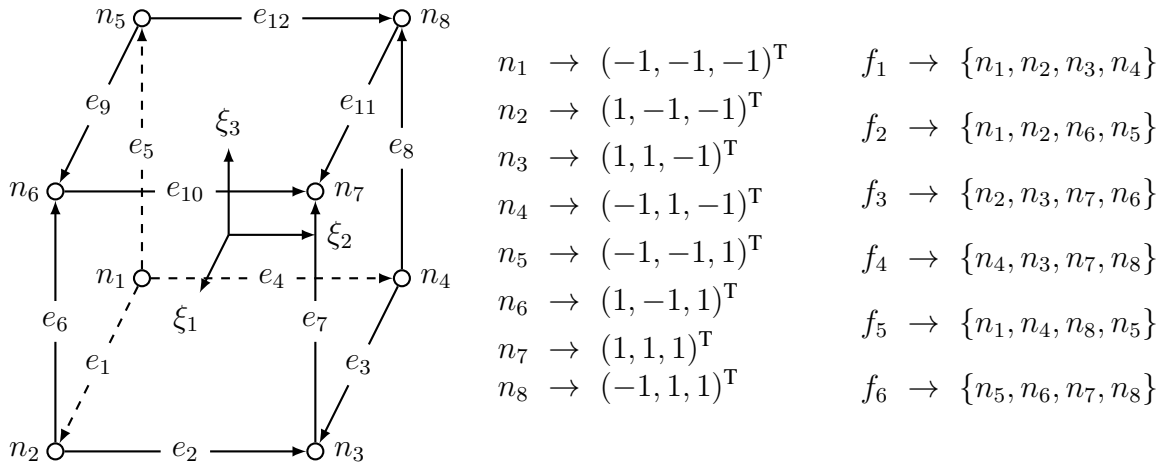


Abbildung 3.7.: Isoparametrisches Referenzelement eines Hexaederelements.

werden die Orientierungen der Kanten über die zugehörigen Pfeile angegeben, während die Orientierung der Flächen über die Reihenfolge der zugeordneten Knoten definiert wird. Für die Ansatzfunktionen des Hexaederelements werden die eindimensionalen Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.46 und Gleichung 3.48 in Abhängigkeit von jeweils einer natürlichen Raumrichtung  $\xi_i$  miteinander multipliziert, wodurch jedes Hexaederelement bei der Verwendung des Tensor-Produkt-Raums  $(p+1)^3$  lokale Freiheitsgrade besitzt. Die sich ergebenden Knotenmoden  $N_{i,j,k}^{H,n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , Kantenmoden  $N_{i,j,k}^{H,e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , Flächenmoden  $N_{i,j,k}^{H,f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  und inneren Moden  $N_{i,j,k}^{H,int}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  des Ansatzgrads  $p$  können durch die folgenden Gleichungen definiert werden (Szabó u. a., 2004):

$$N_{i,j,k}^{H,n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i, j, k = 1, 2, \quad (3.62)$$

$$N_{i,j,k}^{H,e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } \begin{cases} i, j = 1, 2 \text{ und } k = 3, \dots, p+1 \\ i, k = 1, 2 \text{ und } j = 3, \dots, p+1 \\ j, k = 1, 2 \text{ und } i = 3, \dots, p+1 \end{cases}, \quad (3.63)$$

$$N_{i,j,k}^{H,f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } \begin{cases} i = 1, 2 \text{ und } j, k = 3, \dots, p+1 \\ j = 1, 2 \text{ und } i, k = 3, \dots, p+1 \\ k = 1, 2 \text{ und } i, j = 3, \dots, p+1 \end{cases}, \quad (3.64)$$

$$N_{i,j,k}^{H,int}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1) N_j(\xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i, j, k = 3, \dots, p+1. \quad (3.65)$$

Für die numerische Integration einer Funktion  $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  werden, wie schon für die Integration des Viereckelements aus Gleichung 3.57, die Gauß-Legendre-Punkte und Gewichtungsfaktoren eines eindimensionalen Elements aus Tabelle A.1 für die drei Raumrichtungen miteinander kombiniert:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \sum_{i=1}^{N_{GP}} \sum_{j=1}^{N_{GP}} \sum_{k=1}^{N_{GP}} w_i w_j w_k f(\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^k). \quad (3.66)$$

### Ansatzfunktionen des räumlichen Prismenelements

Die Ansatzfunktionen des Prismenelements können durch die Kombination der Ansatzfunktionen eines ebenen Dreieckelements mit den Ansatzfunktionen eines eindimensionalen Elements generiert werden (Zaglmayr, 2006, Unterabschnitt 5.2.5). Somit werden die Ansatzfunktionen des Prismenelements im Raum  $\Omega_{\text{ref}}^{\text{P}} = \Omega_{\text{ref}}^{\text{D}} \times [-1, 1]$  definiert. Die Anzahl der lokalen Freiheitsgrade würde sich, bei der Verwendung des Tensor-Produkt-Raums, auf  $\frac{1}{2}(p+1)^2(p+2)$  belaufen. Das Referenzelement, welches für die Prismenelemente verwendet wird, wird in Abbildung 3.8 illustriert. Zwei der Oberflächen des Prismenelements sind Dreieckflächen, während drei weitere Oberflächen Viereckflächen sind. Die Orientierung der Flächen wird über die Zuordnung der Knoten festgelegt. Die Ansatzfunktionen der Knotenmoden des Prismenelements  $N_{i,k}^{\text{P},\text{n}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ergeben sich aus der Kombination der linearen Ansatzfunktionen des Dreieckelements  $N_i^{\text{D},\text{n}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.58 mit den linearen Ansatzfunktionen des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.46:

$$N_{i,k}^{\text{P},\text{n}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i^{\text{D},\text{n}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und } k = 1, 2. \quad (3.67)$$

Die Ansatzfunktionen der Kantenmoden  $N_{i,j,k}^{\text{P},\text{e}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  verschiedener Ansatzgerade setzen sich einerseits aus den Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die Kantenmoden des Dreieckelements  $N_{i,j}^{\text{D},\text{e}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.59 und den linearen Ansatzfunktionen des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.46 zusammen:

$$N_{i,j,k}^{\text{P},\text{e}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_{i,j}^{\text{D},\text{e}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 2, \dots, p \quad \text{und } j = 1, 2, 3 \\ \text{und } k = 1, 2. \quad (3.68)$$

Die Ansatzfunktionen  $N_{i,k}^{\text{P},\text{e}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , für die Kantenmoden deren Kanten in Richtung der  $\xi_3$ -Koordinate verlaufen, werden andererseits durch die Kombination der linearen Ansatzfunktionen des Dreieckelements  $N_i^{\text{D},\text{n}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.58 und der hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.48 konstruiert:

$$N_{i,k}^{\text{P},\text{e}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i^{\text{D},\text{n}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und } k = 3, \dots, p+1. \quad (3.69)$$

Bei den Ansatzfunktionen für die Flächenmoden muss auch zwischen den dreieckigen und den viereckigen Oberflächen unterschieden werden. Die Ansatzfunktionen der Moden der dreieckigen Oberflächen  $N_{i,j,k}^{\text{P},\text{f}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  entstehen durch die Kombination der Ansatzfunktionen der

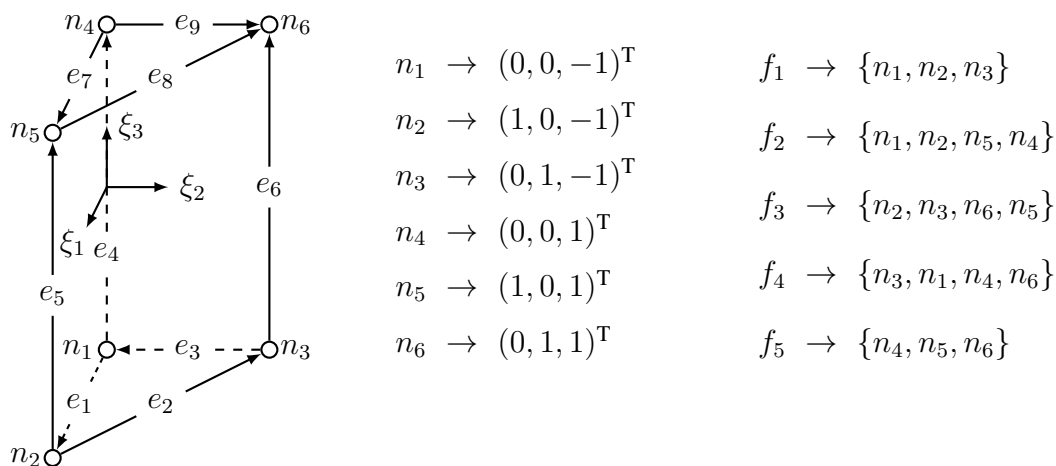


Abbildung 3.8.: Isoparametrisches Referenzelement eines Prismenelements.

Flächenmoden des Dreieckelements  $N_{i,j}^{\text{D,f}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.60 und der linearen Ansatzfunktionen des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.46:

$$N_{i,j,k}^{\text{P,f}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_{i,j}^{\text{D,f}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 2, \dots, p-1 \quad (3.70)$$

und  $j = 0, \dots, p-3$  und  $i+j \leq p-1$  und  $k = 1, 2.$

Die Ansatzfunktionen für die Flächenmoden der viereckigen Oberflächen  $N_{i,j,k}^{\text{P,f}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  lassen sich aus den Ansatzfunktionen der Kantenmoden des Dreieckelements  $N_{i,j}^{\text{D,e}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.59 und den hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.48 konstruieren:

$$N_{i,j,k}^{\text{P,f}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_{i,j}^{\text{D,e}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 2, \dots, p \quad (3.71)$$

und  $j = 1, 2, 3$  und  $k = 3, \dots, p+1.$

Die Ansatzfunktionen der inneren Moden der Prismenelemente  $N_{i,j,k}^{\text{P,int}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ergeben sich aus der Kombination der Ansatzfunktionen der Flächenmoden des Dreieckelements  $N_{i,j}^{\text{D,f}}(\xi_1, \xi_2)$  aus Gleichung 3.60 und der hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung des eindimensionalen Elements  $N_k(\xi_3)$  aus Gleichung 3.48:

$$N_{i,j,k}^{\text{P,int}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_{i,j}^{\text{D,f}}(\xi_1, \xi_2) N_k(\xi_3) \quad \text{für } i = 2, \dots, p-1 \quad (3.72)$$

und  $j = 0, \dots, p-3$  und  $i+j \leq p-1$  und  $k = 3, \dots, p+1.$

Für die Gauß-Legendre-Integration werden die Gauß-Punkte und Gewichtungsfaktoren des Dreieckelements für den jeweiligen Ansatzgrad aus Tabelle A.2 mit den Gauß-Punkten und Gewichtungsfaktoren des eindimensionalen Elements aus Tabelle A.1 kombiniert:

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{GP}}^{\text{D}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{GP}}} w_i^{\text{D}} w_j f(\xi_1^{\text{D},i}, \xi_2^{\text{D},i}, \xi_3^j) \quad (3.73)$$

Aufgrund der sich unterscheidenden Integrationsgrenzen der ersten beiden natürlichen Raumrichtungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  muss, wie schon in Gleichung 3.61, zusätzlich der Faktor  $\frac{1}{2}$  berücksichtigt werden.

### 3.3.4. Konformität an den Grenzen hierarchischer Elemente höherer Ordnung

Bei der Verwendung von Lagrange-Ansatzfunktionen (vergleiche Gleichung 3.47) ist die Kontinuität an den Elementengrenzen stets gewährleistet, da die zu berechnenden Freiheitsgrade ausschließlich globalen Punkten zugeordnet sind. Bei der Verwendung der hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung wird die Kontinuität an den Elementengrenzen nicht implizit gewährleistet. Wenn beispielsweise zwei Viereckelemente an einer Kante verbunden sind und diese Kante beim ersten Element der Kante  $e_1$  des Referenzelements aus Abbildung 3.4 entspricht, während die selbe Kante beim zweiten Element der Kante  $e_2$  des Referenzelements entspricht, dann wird bei der lokalen Betrachtung der Elemente eine entgegengesetzte Orientierung der Kante angenommen. Da bei der Berechnung der Verschiebungen mittels Gleichung 3.35 die lokalen Ansatzfunktionen beider Elemente mit dem selben Koeffizienten multipliziert werden, verhalten sich die Kantenmoden für ungerade Ansatzgrade nicht konform, was in Abbildung 3.9 anschaulich für den Ansatzgrad  $p = 3$  illustriert wird. Dieses Konformitätsproblem kann für alle

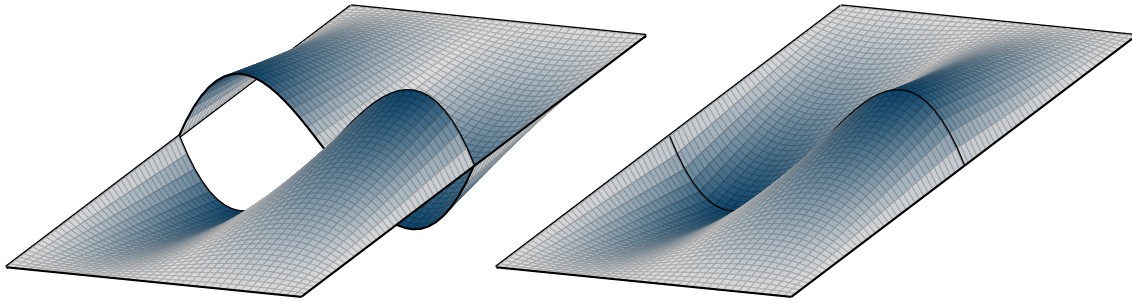


Abbildung 3.9.: Veranschaulichung von nicht konformen (links) und konformen Kantenmoden (rechts) hierarchischer Ansatzfunktionen an den Grenzen von zwei Viereckelementen, wobei der Ansatzgrad der dargestellten Kantenmode  $p = 3$  beträgt.

Kanten und Flächen von allen Elementtypen auftreten. Durch eine Anpassung des Vorzeichens der betroffenen Ansatzfunktionen, kann dieses Problem für die Kantenmoden behoben werden. Bei Flächenmoden kann dieses Problem teilweise durch die Kombination eines Vorzeichenwechsels mit einer Veränderung der Zuordnung der Freiheitsgrade eines Elements behoben werden. Dabei können generell zwei unterschiedliche Strategien unterschieden werden. Einerseits kann die lokale Orientierung einer Kante während der Assemblierung der Systemmatrix (hier der Impedanzmatrix  $\mathbf{L}$ ) durch einen Vorzeichenwechsel der betroffenen Einträge berücksichtigt werden. Andererseits können die Orientierungen der Kanten auf der globalen Ebene vorab definiert werden, sodass diese bei der Berechnung der Elementmatrizen lokal verwendet werden können (Zaglmayr, 2006, Abschnitt 5.2).

Bei der verwendeten Programmierung werden alle Bestandteile des Finite-Elemente-Netzes als eigene Objekte initialisiert, wobei die Objekte von Kanten-, Flächen- und Volumenelementen durch die Zuordnung von Knotenobjekten generiert werden, denen gleichzeitig auch die jeweiligen untergeordneten Objekte zugeordnet sind. Bei dieser Zuordnung werden zwar globale Orientierungen von Kanten, Flächen und Volumenelementen festgelegt, jedoch werden diese nicht mit Hinblick auf die Konformität an den Elementgrenzen optimiert, wie von Zaglmayr (2006, Abschnitt 5.2) gehandhabt. Um die Orientierung der einzelnen Objekte festzustellen, werden die globalen Objekte mit den Referenzelementen aus Abbildung 3.4, Abbildung 3.7 und Abbildung 3.8 verglichen, wobei sich die Nummerierung nur aus der Reihenfolge der Knoten bei der Initialisierung der Elemente ergibt. Nicht konforme Orientierungen der Kanten-, Flächen- und Volumenelemente werden bei der Assemblierung der Systemmatrix angepasst.

### Konformität von Kantenmoden

Da die eindimensionalen Ansatzfunktionen von geraden Ansatzgraden  $p$  achsensymmetrisch sind (vergleiche Abbildung 3.3), wird bei den Kantenmoden, welche mit diesen Ansatzfunktionen konstruiert werden, keine Korrektur bei der Assemblierung benötigt. Für ungerade Ansatzgrade sind die eindimensionalen Ansatzfunktionen hingegen punktsymmetrisch, wodurch bei der Assemblierung für die Freiheitsgrade der zugehörigen Kantenmoden ein Vorzeichenwechsel durchgeführt werden muss, wenn die lokale Orientierung der Kante im Element nicht mit der globalen Orientierung übereinstimmt.

### Konformität von Flächenmoden von Viereckelementen

Die Sicherstellung der Kontinuität zwischen zwei Flächenelementen ist hingegen komplizierter. Bei Viereckelementen gibt es acht unterschiedliche Ausrichtungen, die ein lokales Flächenelement zu dem globalen Flächenelement haben kann. Einerseits kann der Normalenvektor der Fläche in zwei unterschiedliche Richtungen zeigen, wobei die Normale durch die Umlaufrichtung der Knoten definiert wird. Andererseits können für beide Orientierungen des Normalenvektors die Flächen um  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  rotiert sein. Des Weiteren können beide eindimensionalen Ansatzfunktionen, welche für die Konstruktion der Ansatzfunktion der Flächenmode verwendet werden, achsen- oder punktsymmetrisch sein. Das richtige Vertauschen der lokalen Freiheitsgrade im Vorfeld zur Assemblierung in Kombination mit einer gegebenenfalls nötigen Korrektur des Vorzeichens ermöglicht eine Wahrung der Kontinuität an zwei aneinandergrenzenden Viereckelementen. Bei richtiger Anwendung kann dieses Konzept für alle vier-eckigen Flächen zwischen zwei Hexaederelementen, zwei Prismenelementen oder zwischen einem Hexaeder- und einem Prismenelement eingesetzt werden.

### Konformität von Flächenmoden von Dreieckelementen

Bei den Grund- und Deckelflächen von Prismenelementen sowie bei den Flächen von Tetraederelementen sind die Flächen, welche an das nächste Element grenzen, Dreieckelemente. Für die Flächenmoden dieser Dreieckelemente ist die Herstellung von Konformität nicht durch einfache Anpassungen bei der Assemblierung möglich, da die Flächenmoden eines Ansatzgrades bei einer Rotation des Elements nicht den jeweils anderen Moden entsprechen, was in Abbildung 3.6 ersichtlich ist. Für Prismenelemente wurde dieses Problem in dieser Arbeit umgangen, indem bei der Erstellung von dem Finite-Elemente-Netz ein zweidimensionales Netz in die dritte Raumrichtung so ausgeweitet wurde, dass die dreieckigen Grund- und Deckelflächen eine zueinander konforme lokale Orientierung aufweisen. Für Tetraederelemente, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendet werden, wurden beispielsweise durch Ainsworth u. Coyle (2003) komplexe Strategien ersonnen, um Konformität an den Grenzflächen zu gewährleisten, bei denen beispielsweise mit zwei unterschiedlichen Referenzelementen gearbeitet wird. Generell scheint bei der Verwendung von Prismen- und Tetraederelementen der Einsatz einer globalen Definition der Orientierungen von Kanten und Flächen, wie durch Zaglmayr (2006, Abschnitt 5.2) vorgestellt wurde, empfehlenswert, durch welche die lokalen Referenzelemente direkt richtig nach den globalen Orientierungen ausgerichtet werden können.

## 3.4. Automatische Anpassung des hierarchischen Ansatzgrades

Für steigende Frequenzen  $f$  bzw. Kreisfrequenzen  $\omega$  verkleinern sich die Wellenlängen  $\Lambda$ . Um das Wellenfeld weiterhin mit einer ausreichenden Genauigkeit zu bestimmen, muss der Ansatzgrad  $p$  der hierarchischen Ansatzfunktionen erhöht werden. Ein pauschaler Einsatz eines sehr hohen Ansatzgrades stellt sich als unökonomisch heraus, da für niedrige Frequenzen ein unverhältnismäßig hoher Rechenaufwand entstehen würde. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit der Ansatzgrad, wie im Folgenden erläutert, automatisch angepasst. Da die Wellenlängen, wie in Gleichung 2.2 dargelegt, von den Wellengeschwindigkeiten des Bodens abhängen, muss auch bei einer Veränderung der diskretisierten Bodeneigenschaften  $m$  während der Full-Waveform-Inversion der Ansatzgrad angepasst werden. Da die Wellenlängen der Scherwellen kürzer sind

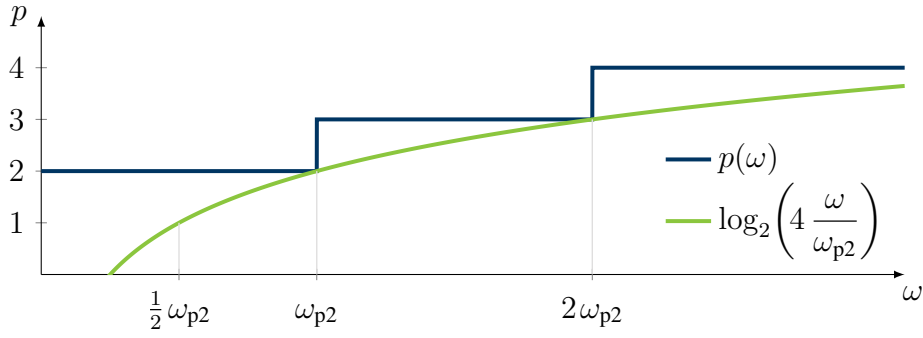


Abbildung 3.10.: Anpassung des hierarchischen Ansatzgrads  $p$  in Abhängigkeit von der verwendeten Kreisfrequenz  $\omega$ . Über die Grenzkreisfrequenz  $\omega_{p2}$ , bis zu welcher die Verwendung des Ansatzgrads  $p = 2$  ausreichend erscheint, werden sowohl die diskretisierten Wellengeschwindigkeiten als auch die Längen der Kanten des Finite-Elemente-Netzes berücksichtigt.

als die Wellenlängen der Kompressionswellen, ist die Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$  für die Berechnung des Ansatzgrads ausschlaggebend. Eine Ausnahme besteht beim Einsatz der akustischen Wellengleichung, für welche dann die Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_p$  für die Berechnung des Ansatzgrades herangezogen wird. Zuerst wird ein Mittelwert der diskretisierten Scherwellengeschwindigkeiten  $\bar{v}_{sh}$  berechnet und in Abhängigkeit von der Differenz der höchsten und niedrigsten Scherwellengeschwindigkeit wird dieser, wie in Gleichung 3.74 dargestellt, sicherheitshalber nach unten, und damit zu niedrigeren Wellenlängen, korrigiert:

$$\bar{v}_{sh} = \frac{\int_{\Omega} v_{sh} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} - 0.1 (v_{sh,max} - v_{sh,min}). \quad (3.74)$$

Für einen Ansatzgrad von  $p = 2$  wurde ausgiebig untersucht, wie viele Elemente zur Diskretisierung einer Wellenlänge eingesetzt werden sollten. Dabei wurde eine Diskretisierung durch fünf Elemente als ausreichend befunden. Mit dieser Erkenntnis kann unter Einsatz von Gleichung 2.2 eine Grenzkreisfrequenz  $\omega_{p2}$  bestimmt werden, bis zu welcher eine Diskretisierung mit dem Ansatzgrad  $p = 2$  ausreicht:

$$\omega_{p2} = \frac{1}{5} 2\pi \frac{\bar{v}_{sh}}{\bar{l}}. \quad (3.75)$$

Dabei stellt  $\bar{l}$  das arithmetische Mittel der Kantenlängen  $l_e^{edge}$  aller  $N_e$  Kanten des verwendeten Finite-Elemente-Netzes dar, wobei zusätzlich ein Sicherheitsfaktor von 1.05 hinzugefügt wird:

$$\bar{l} = 1.05 \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} l_e^{edge}. \quad (3.76)$$

Wenn die Grenzkreisfrequenz  $\omega_{p2}$  überschritten wird, soll der Ansatzgrad auf  $p = 3$  erhöht werden. Für die Grenzkreisfrequenzen der folgenden Ansatzgrade wird jeweils der doppelte Wert der jeweiligen vorherigen Grenzkreisfrequenz verwendet. Somit ergibt sich eine Berechnungsformel für den Ansatzgrad, welche in Gleichung 3.77 dargestellt und deren Verlauf in Abbildung 3.10 illustriert ist:

$$p(\omega) = \max\left(2, \left\lceil \log_2\left(4 \frac{\omega}{\omega_{p2}}\right) \right\rceil\right). \quad (3.77)$$



Dabei stellt der Operator  $\lceil \bullet \rceil$  eine Funktion zum Aufrunden auf die nächste ganze Zahl dar. Um möglichst immer einen stetigen Verlauf des Wellenfelds zu gewährleisten, wird wenigstens ein Ansatzgrad von  $p = 2$  verwendet. Während der Full-Waveform-Inversion wird der Ansatzgrad zum Beginn einer Frequenzgruppe, welche in Abschnitt 5.2 eingeführt werden, neu berechnet, wobei der Ansatzgrad der höchsten Frequenz der aktuellen Frequenzgruppe für alle Frequenzen der Gruppe eingesetzt wird. Wenn die Differenz der längsten und der kürzesten Kantenlänge des Finite-Elemente-Netzes zu groß wird oder die Unterschiede zwischen den räumlich diskretisierten Wellengeschwindigkeiten zu groß werden, empfiehlt sich eine zusätzliche Anpassung des Ansatzgrads.



## 4. Verifizierung der numerischen Modellierung

Für eine erfolgreiche Inversion von Seismogrammen ist es notwendig sicherzustellen, dass durch den in Kapitel 3 vorgestellten Ansatz der Finite-Elemente-Methode physikalisch richtige Wellenfelder berechnet werden, welche einen möglichst geringen numerischen Fehler aufweisen. Dabei muss der Grad der Diskretisierung der Wellenfelder passend zu den zu untersuchenden Frequenzen angepasst werden sowie die Diskretisierung der künstlichen absorbierenden Ränder im Zusammenspiel mit den zugehörigen Parametern bestimmt werden. Für die Bestimmung der Diskretisierung und damit für die Bestimmung des Ansatzgrades müssen neben der Frequenz auch die Bodeneigenschaften des betrachteten Gebiets berücksichtigt werden, wie es schon in Abschnitt 3.4 beschrieben wurde. Auch der numerische Parameter für die Perfectly-Matched-Layers  $c_{\text{PML}}$  muss für jedes Problem individuell angepasst werden.

Für einzelne Randwertprobleme wurden analytische Lösungen der elastischen Wellengleichung gefunden (vergleiche Pilant, 1979). Durch einen Abgleich der numerischen Lösung der elastischen Wellengleichung mit der zugehörigen analytischen Lösung für ein Randwertproblem kann sichergestellt werden, dass das gewählte numerische Verfahren physikalisch sinnvolle Ergebnisse erzeugt, was dann auch auf andere Randwertprobleme, welche über eine vergleichbare Diskretisierung verfügen, übertragen werden kann. Des Weiteren besteht auch die Möglichkeit einen etablierten numerischen Algorithmus, welcher ausreichend verifiziert wurde, für die Generierung einer Referenzlösung für ein komplexeres Randwertproblem einzusetzen.

Eine umfangreiche Verifizierung des verwendeten Ansatzes der Finite-Elemente-Methode für die Lösung der akustischen Wellengleichung wurde von Musayev (2017) sowie von Riedel u. a. (2021b) durchgeführt. Musayev (2017) führte auch erste Verifizierungen für numerische Lösungen der elastischen Wellengleichung durch. Einige der folgenden Verifizierungen wurden auch schon von Riedel u. a. (2023a) veröffentlicht.

In diesem Kapitel wird zunächst eine Verifizierung der numerischen Lösung der elastischen Wellengleichung durch einen Abgleich mit der analytischen Lösung für ein zweidimensionales homogenes unendliches Gebiet in Abschnitt 4.1 durchgeführt, welche auch zur Identifizierung des numerischen Parameters  $c_{\text{PML}}$  eingesetzt wird. In Abschnitt 4.2 findet ein Abgleich mit einzelnen Seismogrammen statt, welche für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mittels des SPECFEM2D Codes berechnet wurden. Des Weiteren wird auch betrachtet wie sich die Wellenfelder im Frequenzbereich für verschiedene Frequenzen und für homogene sowie inhomogene Bodeneigenschaften verändern. Der Einfluss von viskoelastischen Effekten in einer zweidimensionalen Tunnelumgebung wird in Abschnitt 4.3 untersucht. Die Verifizierung des Finite-Elemente-Ansatzes für dreidimensionale Probleme findet in Abschnitt 4.4 durch den Abgleich mit der zugehörigen analytischen Lösung für ein homogenes unbegrenztes Gebiet statt. In Abschnitt 4.5 werden Seismogramme einer dreidimensionalen Tunnelumgebung, welche mittels des SPECFEM3D Cartesian Codes berechnet wurden, im Frequenzbereich mit der zugehörigen Lösung des verwendeten Finite-Elemente-Ansatzes abgeglichen.

#### 4.1. Verifizierung für ein zweidimensionales unendliches Gebiet

Die analytischen Greenschen Funktionen  $g_x^A$  und  $g_y^A$  für ein zweidimensionales unendliches Gebiet mit homogenen Eigenschaften sind unter anderem durch Pilant (1979) gegeben, wobei Min u. a. (2000) eine anschaulichere Darstellungsweise verwenden:

$$\begin{aligned}
 g_x^A(r, \theta, \omega) = & \frac{i}{4\rho v_p^2} \cos(\theta) \sin(\theta) H_0^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_p}\right) \\
 & - \frac{i}{4\rho v_s^2} \cos(\theta) \sin(\theta) H_0^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_s}\right) \\
 & - \frac{i}{2\rho v_p} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r\omega} H_1^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_p}\right) \\
 & + \frac{i}{2\rho v_s} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r\omega} H_1^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_s}\right),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 g_y^A(r, \theta, \omega) = & - \frac{i}{4\rho v_p^2} \cos^2(\theta) H_0^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_p}\right) \\
 & - \frac{i}{4\rho v_s^2} \sin^2(\theta) H_0^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_s}\right) \\
 & + \frac{i}{4\rho v_p} \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{r\omega} H_1^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_p}\right) \\
 & + \frac{i}{4\rho v_s} \frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{r\omega} H_1^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_s}\right).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dabei können der Winkel  $\theta$  und der radiale Abstand  $r$  zwischen der betrachteten Position  $(x, y)$  und der Position der Punktquelle  $(x_s, y_s)$ , welche in positive  $y$ -Richtung wirkt, berechnet werden über:

$$\theta = \arctan\left(\frac{x - x_s}{-(y - y_s)}\right) \quad \text{und} \quad r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}. \tag{4.3}$$

Die Greenschen Funktionen hängen des Weiteren von der betrachteten Kreisfrequenz  $\omega$ , der P-Wellengeschwindigkeit  $v_p$ , der S-Wellengeschwindigkeiten  $v_s$  sowie von der Dichte  $\rho$  ab. Für die Darstellung der analytischen Lösung werden die Hankel-Funktionen  $H$  verwendet, welche lineare Kombinationen von Lösungen der Besselschen Differentialgleichung darstellen ([Williams, 1999, Kapitel 4]). Dabei gibt der untere Index die Ordnung und der obere Index die Gattung der Hankel-Funktion an. Beim Abgleich von Lösungen im Frequenzbereich muss, wie in Unterabschnitt 2.3.1 beschrieben, berücksichtigt werden, wie die zugehörige Form der Fourier-Transformation gewählt wurde. Daher werden in Gleichung 4.1 und Gleichung 4.2 im Vergleich zur analytischen Lösung von Min u. a. (2000) die Hankel-Funktionen der zweiten Gattung statt der ersten Gattung verwendet, welche sich durch das Vorzeichen des imaginären Anteils unterscheiden. Des Weiteren musste die analytische Lösung auch aufgrund der Verwendung eines anderen Koordinatensystems angepasst werden.

Die Verifizierung wird für ein zweidimensionales Gebiet mit den Abmaßen  $106 \text{ m} \times 48 \text{ m}$  im folgenden exemplarisch illustriert. Für die numerische Berechnung des Wellenfeldes verfügt dieses Gebiet an allen Seiten über  $3 \text{ m}$  breite C-PMLs, welche in Abschnitt 3.1 eingeführt wurden. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich an den unteren inneren Grenzen der

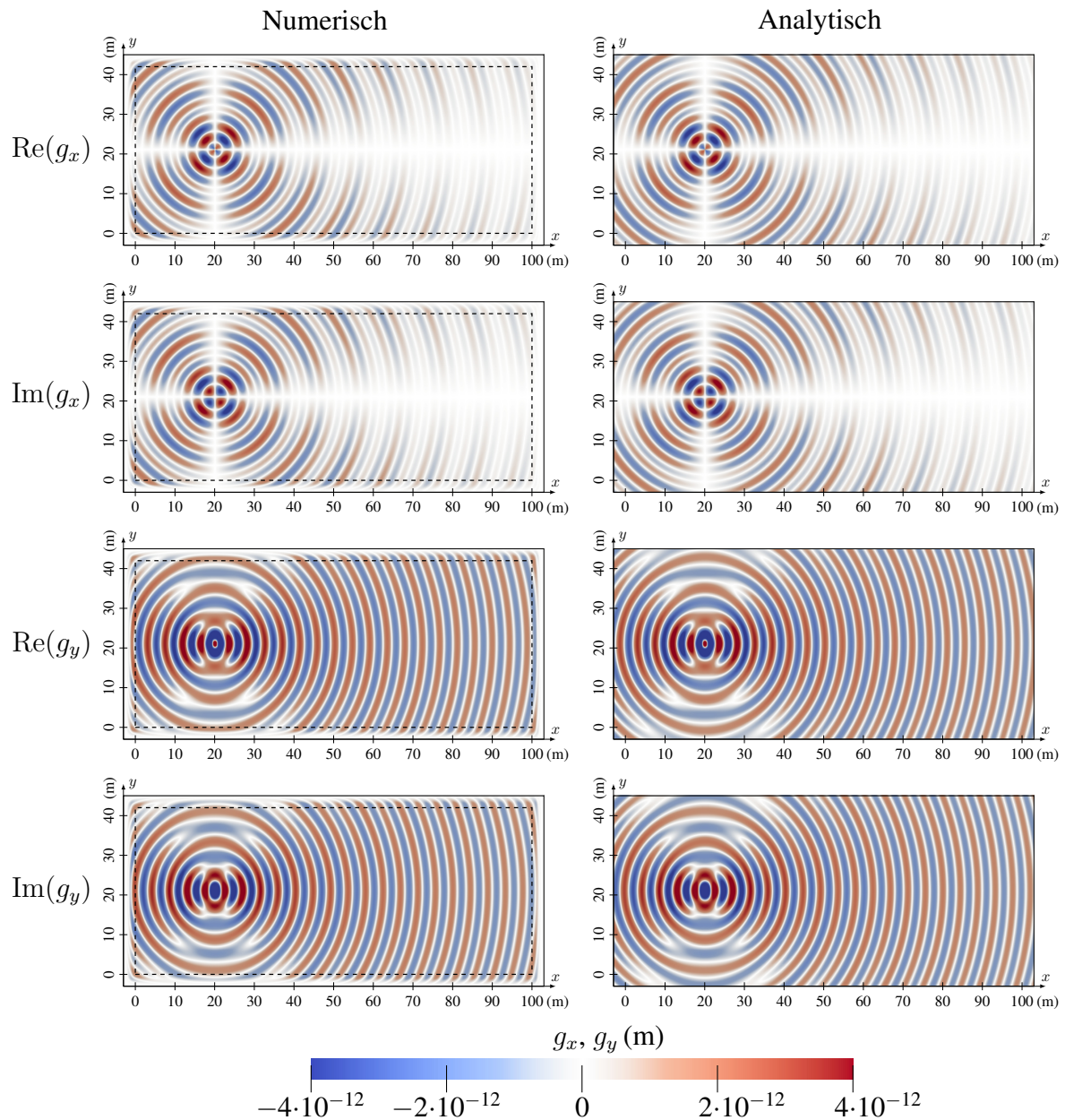


Abbildung 4.1.: Vergleich von den numerisch berechneten (links) und den analytischen Green'schen Funktionen  $g_x$  und  $g_y$  (rechts) für ein zweidimensionales unbegrenztes Gebiet.

PMLs. Das Designgebiet wird durch 5088 Viereckelemente, welche alle die Abmaße  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  besitzen, diskretisiert, wobei die PMLs entsprechend eine Breite von drei Elementen aufweisen. Für die Wellengeschwindigkeiten wurden  $v_p = 3800 \text{ m/s}$  und  $v_s = 2200 \text{ m/s}$  sowie für die Dichte wurde  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$  verwendet. Die in positive  $y$ -Richtung wirkende Punktquelle befindet sich an den Koordinaten  $x_s = 20 \text{ m}$  und  $y_s = 21 \text{ m}$ . In Abbildung 4.1 können die numerischen und analytischen Wellenfelder für eine Frequenz von  $500 \text{ Hz}$  visuell verglichen werden. Dabei wurde einerseits ein Ansatzgrad von  $p = 3$  für die hierarchischen Ansatzfunktionen verwendet sowie andererseits für den numerischen Parameter der PMLs der Wert  $c_{\text{PML}} = 25\,000$  bestimmt. Die inneren Grenzen der PMLs sind gestrichelt dargestellt. Unterschiede zwischen den Wellenfeldern können nur im Bereich der PMLs beobachtet werden, was plausibel ist. Für eine akkuratere Bestimmung der Genauigkeit der numerischen Lösung werden die reellen und imaginären

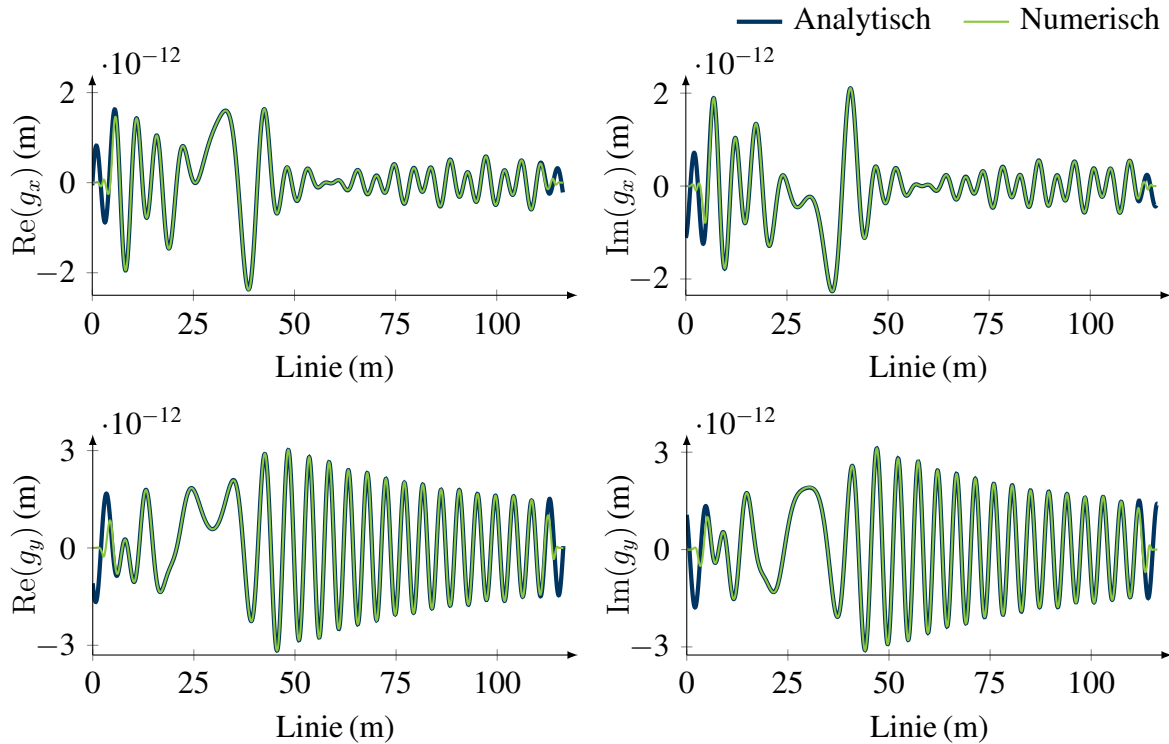


Abbildung 4.2.: Vergleich von den Real- und Imaginärteilen der numerisch berechneten und der analytischen Greenschen Funktionen  $g_x$  und  $g_y$  für ein zweidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie.

Anteile der Greenschen Funktionen entlang einer Linie, welche von  $x = -3$  m und  $y = -3$  m bis  $x = 103$  m und  $y = 45$  m schräg über das Gebiet verläuft, in Abbildung 4.2 verglichen. Dabei schneidet diese Linie nicht die Position der Quelle, bei welcher aufgrund der Singularität ein größerer numerischer Fehler auftreten würde. Die numerischen Greenschen Funktionen weichen entlang der Linie nur im Bereich der PMLs signifikant von den analytischen Werten ab. Da jedoch auch kleine numerische Fehler Einfluss auf den Erfolg der Inversion haben könnten, wird für den Real- und den Imaginärteil der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung der auf den jeweils maximalen Wert des Betrags der zugehörigen analytischen Lösung normierte Betrag der Differenz von numerischer und analytischer Lösung in Abbildung 4.3 betrachtet. Die normierte

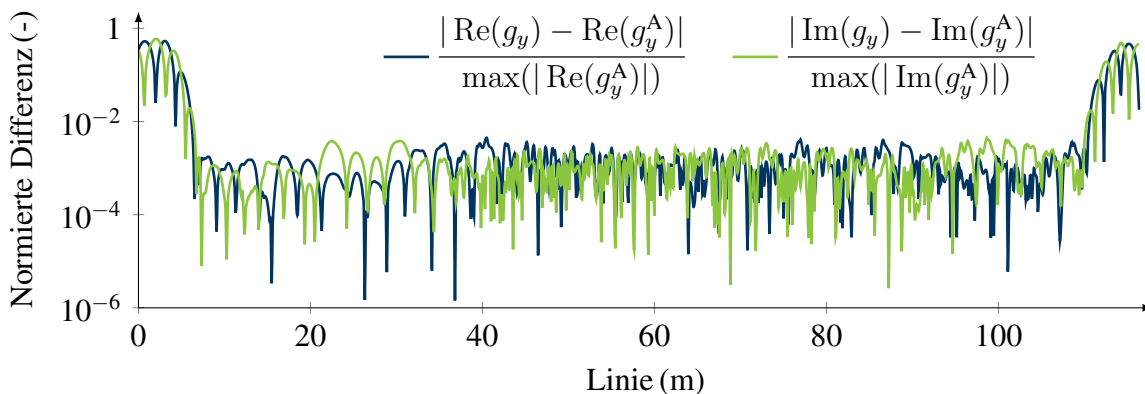


Abbildung 4.3.: Darstellung der normierten Differenz der numerisch berechneten und der analytischen Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung  $g_y$  für ein zweidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie.

Differenz bleibt abseits der absorbierenden Ränder jeweils konstant unter 0.005 und beträgt jeweils im Durchschnitt 0.0012, womit der numerische Fehler vergleichsweise klein ist. Somit ist eine ausreichend physikalisch richtige Lösung der elastischen Wellengleichung bei adäquater Wahl der Diskretisierung und des numerischen Parameters  $c_{PML}$  gewährleistet. Jedoch treten bei diesem Randwertproblem nur Raumwellen auf, weshalb durch diesen Abgleich noch nicht sichergestellt ist, dass der Finite-Elemente-Ansatz einerseits beim Auftreten von Oberflächenwellen mit entsprechenden Reflexionen und Umwandlungen von Wellen an den freien Oberflächen und andererseits auch für flache oberflächennahe Tunnelumgebungen gute Approximationen für die Lösung der elastischen Wellengleichung ermöglicht.

## 4.2. Verifizierung für eine zweidimensionale Tunnelumgebung

Um sicherzustellen, dass der implementierte Ansatz der Finite-Elemente-Methode auch für die Randbedingungen einer oberflächennahen Tunnelumgebung physikalisch sinnvolle Ergebnisse bei der Lösung der Wellengleichung erzeugt, werden Seismogramme für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit dem SPECFEM2D Code berechnet, wofür auch C-PMLs verwendet werden, um Reflexionen von den künstlichen Begrenzungen des Designgebiets zu unterdrücken, und mit Seismogrammen, welche mit dem vorgestellten Frequenzbereichsmodell berechnet wurden, verglichen. Dies bietet die Möglichkeit einerseits die Modellierung von Oberflächenwellen sowie die Modellierung von Reflexionen und Umwandlungen von Wellen an den freien Oberflächen zu verifizieren. Andererseits kann auch die Funktionsfähigkeit der C-PMLs innerhalb eines flachen Berechnungsgebiets überprüft werden. Ein ähnlicher Abgleich wurde schon von Musayev (2017) durchgeführt und wird an dieser Stelle der Vollständigkeit halber mit einer anderen zweidimensionalen Tunnelumgebung durchgeführt.

Für die verwendete Tunnelumgebung wurde das in Abschnitt 4.1 verwendete Modell durch das Entfernen der oberen PML und das Hinzufügen eines Tunnels angepasst. Die genauen Abmaße für das zweidimensionale Tunnelmodell werden in Abbildung 4.4 angegeben. Auch die Bodeneigenschaften wurden mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 3800$  m/s und  $v_s = 2200$  m/s

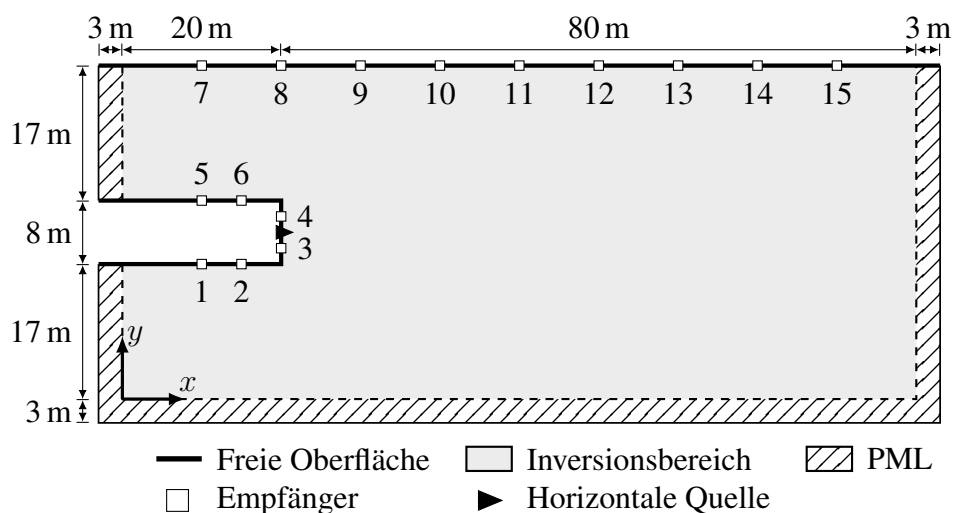


Abbildung 4.4.: Darstellung der zweidimensionalen oberflächennahen Tunnelumgebung, welche für die Verifizierung mittels des SPECFEM2D Codes verwendet wird. Die verwendete Quelle und die betrachteten Empfänger sind gekennzeichnet.

sowie mit der Dichte  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$  wie für das zweidimensionale unendliche Gebiet in Abschnitt 4.1 gewählt. Eine Punktquelle, welche in horizontaler Richtung an der Tunnelfront wirkt, wird verwendet. Diese Quelle emittiert ein Ricker-Signal mit einer Zentralfrequenz von 500 Hz in den Boden. Da kein Zeitversatz verwendet wird, im Gegensatz zu dem in Abbildung 2.2 illustrierten Ricker-Signal, beginnen die Seismogramme bei negativen Zeitwerten. Für das Quellsignal wurde zusätzlich ein Skalierungsfaktor von  $10^6$  verwendet, um einigermaßen realistische Verschiebungen zu berechnen. Für die Verifizierung werden Seismogramme an 15 Empfängern aufgenommen. Dabei werden die Verschiebungen in horizontaler und vertikaler Richtung betrachtet. Die Positionen und Nummerierung der Empfänger sind in Abbildung 4.4 ersichtlich. Da zwei Empfänger verhältnismäßig nah an der Quelle platziert wurden, werden die 3 m vor der Tunnelfront durch 151 Dreieckelemente diskretisiert. Der Einsatz von den Dreieckelementen ermöglicht eine sehr feine Diskretisierung mit 21 Elementen entlang der 8 m hohen Tunnelfront, welche kontinuierlich in die etwas gröbere, aber dafür strukturiertere Diskretisierung der restlichen Tunnelumgebung durch 4562 Viereckelemente, welche die Abmaße  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  besitzen, übergeht. Die Bodeneigenschaften und die Diskretisierung sind vergleichbar mit dem Beispiel aus Abschnitt 4.1, wodurch der numerische Parameter der PMLs mit  $c_{\text{PML}} = 25\,000$  übertragen werden kann. Für die Erzeugung von Seismogrammen im Zeitbereich mittels des vorgestellten Frequenzbereichsmodells wurden die Verschiebungen an den Empfängern für die Kreisfrequenzen  $\omega \in [20, 10\,000] \text{ rad/s}$  in 20-rad/s-Schritten berechnet und mit der diskreten Fourier-Transformation in den Zeitbereich transformiert. Dabei wurde der Ansatzgrad  $p$  mit steigenden Frequenzen, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, erhöht, um eine ausreichende Genauigkeit bei der Berechnung der Wellenfelder zu gewährleisten. Die berechneten Seismogramme werden in Abbildung 4.5 für die Verschiebungen in  $x$ -Richtung  $u_x$  und in Abbildung 4.6 für die Verschiebungen in  $y$ -Richtung  $u_y$  mit den Seismogrammen verglichen, welche mittels des SPECFEM2D Codes berechnet wurden und als Referenz dienen. Die Seismogramme stimmen größtenteils sehr gut überein. Lediglich für die Empfänger fünf bis acht, welche sich an der Tunneldecke und an der Erdoberfläche im Bereich oberhalb des Tunnels befinden, treten auffällige Unterschiede auf. Exemplarisch wird dieser Unterschied durch den Vergleich der normierten Differenz zwischen den Seismogrammen beider numerischer Al-

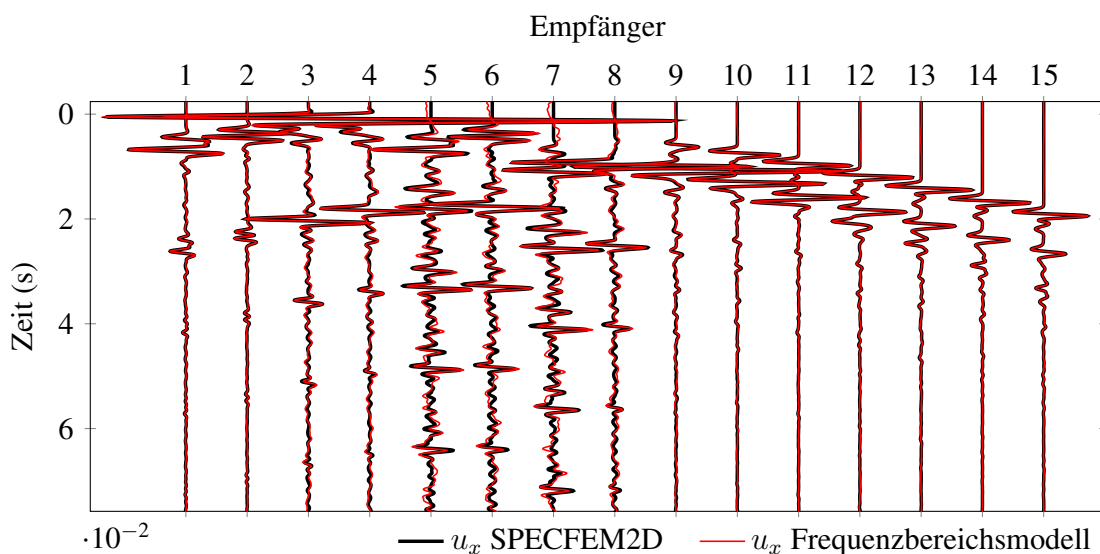


Abbildung 4.5.: Vergleich der Seismogramme für Verschiebungen in  $x$ -Richtung  $u_x$  des Frequenzbereichsmodells mit Seismogrammen, welche mittels des SPECFEM2D Codes erzeugt wurden, für die in Abbildung 4.4 illustrierte Tunnelumgebung.



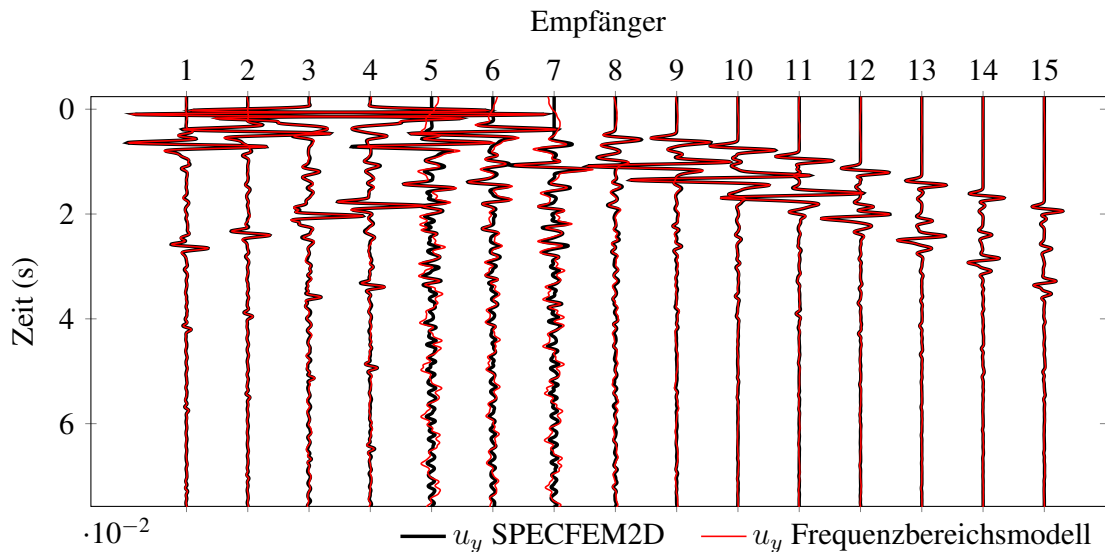


Abbildung 4.6.: Vergleich der Seismogramme für Verschiebungen in  $y$ -Richtung  $u_y$  des Frequenzbereichsmodells mit Seismogrammen, welche mittels des SPECFEM2D Codes erzeugt wurden, für die in Abbildung 4.4 illustrierte Tunnelumgebung.

gorithmen an den Empfängern 5 und 14 für die Verschiebungen in  $y$ -Richtung durch Abbildung 4.7 verdeutlicht. Dabei sind beide Differenzen auf die betragsmäßig maximale Amplitude des verwendeten SPECFEM2D Seismogramms von Empfänger 5 normiert. Der Vergleich der normierten Differenzen verdeutlicht, dass die Unterschiede zwischen den Seismogrammen überproportional groß sind und somit ein unerwünscht großer numerischer Fehler auftritt. Die Ursache dieser Abweichungen lässt sich durch die Kombination aus der Frequenzbereichsform der elastischen Wellengleichung und der zweidimensionalen Tunnelumgebung erklären. Bei der Verwendung eines zweidimensionalen Modells wird eine Symmetrie in die dritte Raumrichtung angenommen. Daher repräsentiert das zweidimensionale Tunnelmodell keinen zylindrischen, sondern, wie schon in Unterabschnitt 2.1.8 beschrieben, einen quaderförmigen Tunnel mit einer unendlichen Ausdehnung in die dritte Raumrichtung. Somit bleiben die seismischen Wellen unterhalb und oberhalb des Tunnels, abgesehen von Oberflächenwellen, die sich entlang der Tunnelfront ausbreiten, und einigen reflektierten Wellen, voneinander getrennt. Daher werden bei oberflächennahen Tunneln seismische Wellen, welche sich im Bereich zwischen Erdober-

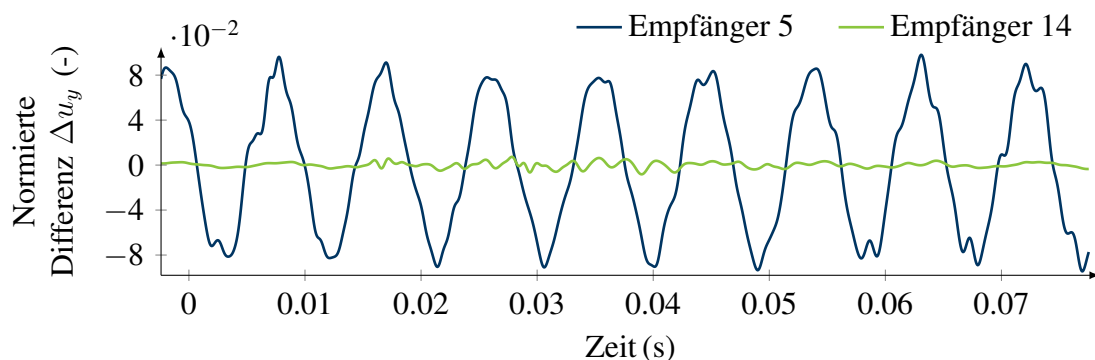


Abbildung 4.7.: Normierte Differenz zwischen den Seismogrammen des Frequenzbereichsmodells und den Seismogrammen, welche mittels des SPECFEM2D Codes erzeugt wurden, für die Verschiebungen in  $y$ -Richtung  $u_y$  an Empfänger 5 und an Empfänger 14.

fläche und Tunneldecke ausbreiten, unendlich oft von der einen zu der anderen Oberfläche reflektiert. Zwar nehmen die Amplituden der Wellen durch geometrische Dispersion und durch gegebenenfalls vorhandene intrinsische Dämpfungseffekte über die Zeit ab, dennoch weichen die Frequenzbereichslösungen leicht ab, da durch die Annahme eines unendlichen Zeitintervalls diese fortlaufenden kleinen Verschiebungen mitberücksichtigt werden. Dennoch kann die Verifizierung des vorgestellten Frequenzbereichsmodells für eine zweidimensionale Tunnelumgebung als erfolgreich betrachtet werden. Bei der späteren Auswertung der Inversionsergebnisse für zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebungen muss jedoch der Einfluss dieser Diskrepanz vor allem bei der Verwendung von Referenzdaten, welche im Zeitbereich vorliegen, berücksichtigt werden. Bei dreidimensionalen Tunnelmodellen sollte dieser Effekt nicht auftreten, da die seismischen Wellen durch die zylindrische Form des Tunnels in ganz unterschiedliche Richtungen reflektiert werden.

Die Wellenfelder für die Frequenzen 300 Hz und 500 Hz sind in Abbildung 4.8 illustriert. Dabei ist gut ersichtlich, wie die Wellenlängen mit steigender Frequenz abnehmen. Entsprechend kann ein Eindruck gewonnen werden, wie der Anspruch an eine feinere Diskretisierung mit steigenden Frequenzen zunimmt. Für die Berechnung der Wellenfelder für die Frequenz 300 Hz wurde für die hierarchischen Ansatzfunktionen ein Ansatzgrad von  $p = 2$  und für die Frequenz 500 Hz ein Ansatzgrad von  $p = 3$  verwendet. Die dargestellten reellen Anteile der Greenschen

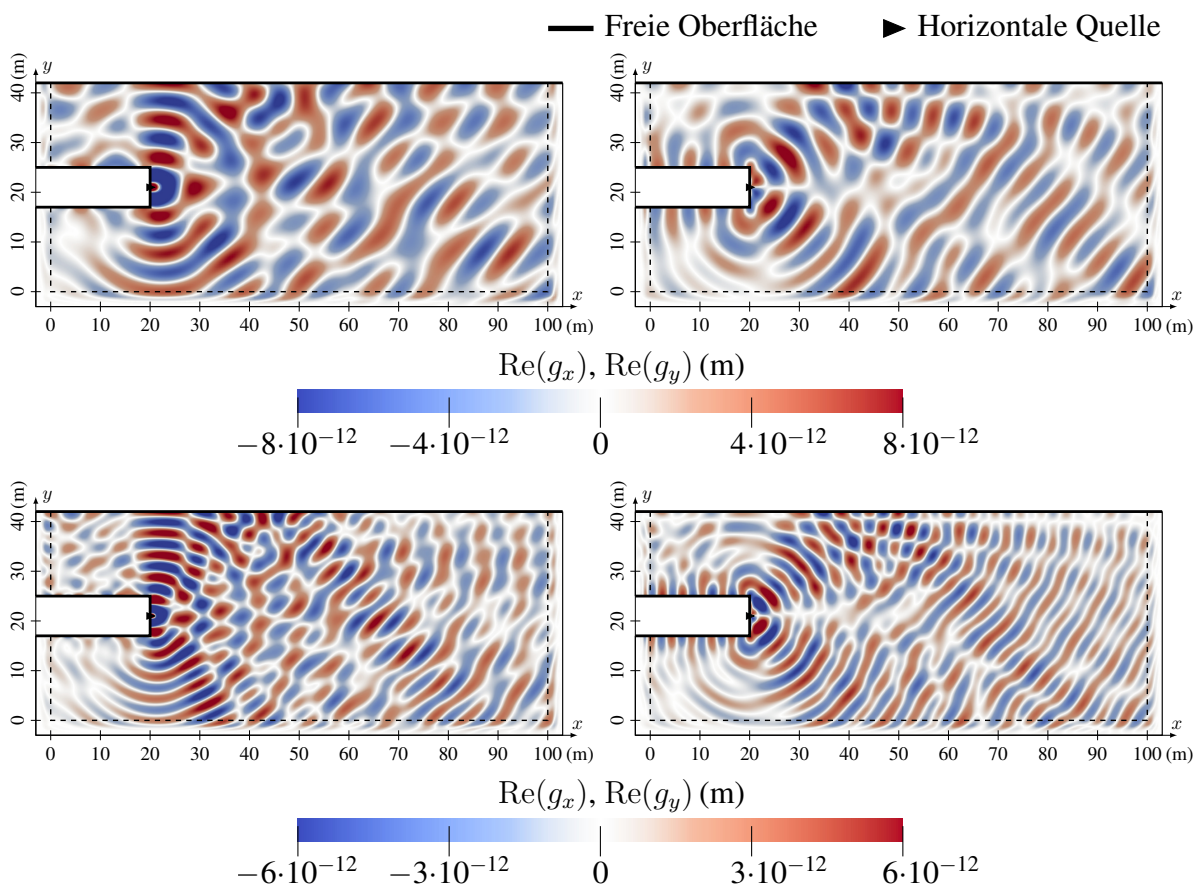


Abbildung 4.8.: Numerisch berechnete Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit homogenen Bodeneigenschaften für eine Frequenz von 300 Hz (oben) und 500 Hz (unten). Der reelle Anteil der Greenschen Funktion in  $x$ -Richtung  $\text{Re}(g_x)$  wird links und der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  wird rechts dargestellt.

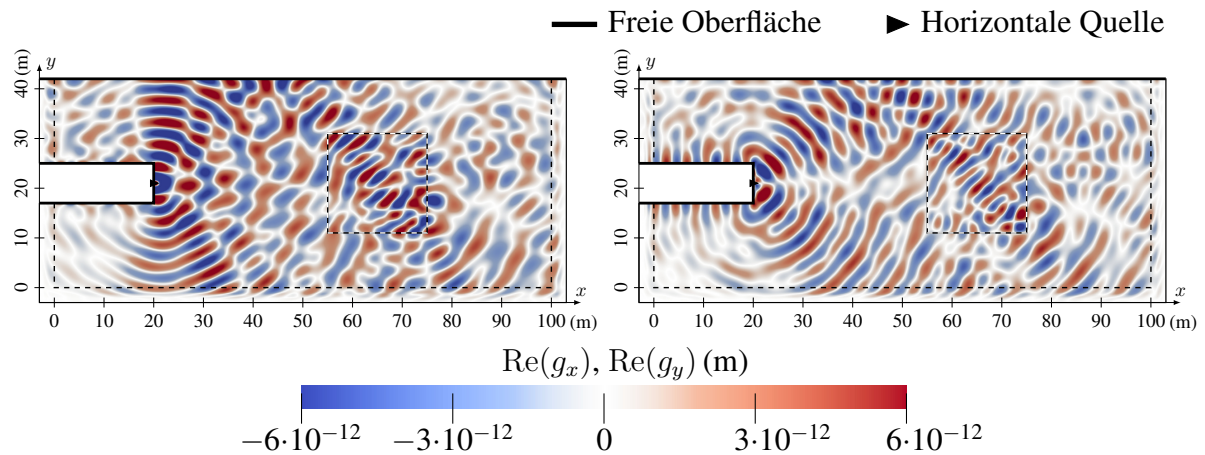


Abbildung 4.9.: Numerisch berechnete Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit einer viereckigen Störung vor der Tunnelfront für eine Frequenz von 500 Hz. Der Realteil der Greenschen Funktion in  $x$ -Richtung  $\text{Re}(g_x)$  wird links und der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  wird rechts dargestellt.

Funktionen  $g_x$  und  $g_y$  sind an der Position der Quelle am höchsten und nehmen aufgrund der geometrischen Dispersion im restlichen Tunnelgebiet ab. Innerhalb der absorbierenden Ränder kann die Abnahme der Greenschen Funktionen beobachtet werden. Eine Separierung des jeweiligen Einflusses von Raum- und Oberflächenwellen ist anhand dieser Wellenfelder, im Gegensatz zur Wellenausbreitung im Zeitbereich, nicht möglich.

Wie sich die Wellenfelder im Frequenzbereich durch die Anwesenheit einer Störung vor der Tunnelfront für eine Frequenz von 500 Hz verändern, kann in Abbildung 4.9 beobachtet werden. Dabei wird eine quadratische Störung, deren Seitenlängen 20 m betragen, betrachtet. Der Mittelpunkt der Störung befindet sich bei  $x = 65$  m und  $y = 21$  m, wodurch sich die vordere Seite der Störung 35 m vor der Tunnelfront befindet. Während die Dichte mit  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup> der Dichte des umgebenden Bodens entspricht, sind die Wellengeschwindigkeiten mit  $v_p = 2700$  m/s und  $v_s = 1600$  m/s niedriger. Die Position und Form der Störung ist in Abbildung 4.9 angedeutet. An der Erdoberfläche und im Boden ist der Einfluss der Störung gut erkennbar, während die Änderungen der Greenschen Funktionen im Bereich des Tunnels kaum sichtbar sind. Besonders auffällig sind in dieser Darstellung die kleineren Wellenlängen innerhalb der Störung. Dennoch wäre eine Interpretation des Wellenfelds ohne den angedeuteten Umriss der Störung deutlich schwieriger und weniger intuitiv als im Zeitbereich.

### 4.3. Viskoelastisches Verhalten in einer zweidimensionalen Tunnelumgebung

Wie schon in Unterabschnitt 2.1.5 beschrieben wurde, treten je nach Beschaffenheit des Untergrunds stärkere oder schwächere intrinsische Dämpfungseffekte auf. Wie sich diese Dämpfung auf die Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung auswirkt bestimmt auch, mit welchem Erfolg eine Inversion durchgeführt werden kann. Einen Einblick, wie sich die Wellenfelder durch Dämpfung verändern, bietet Abbildung 4.10. Für die in Abschnitt 4.2 eingeführte Tunnelumgebung mit homogenen Bodeneigenschaften wurden, durch die Verwendung der Qualitätsfaktoren  $Q_p = 60$  und  $Q_s = 30$  über das in Gleichung 2.41 eingeführte Kolsky-Futterman-Modell, die

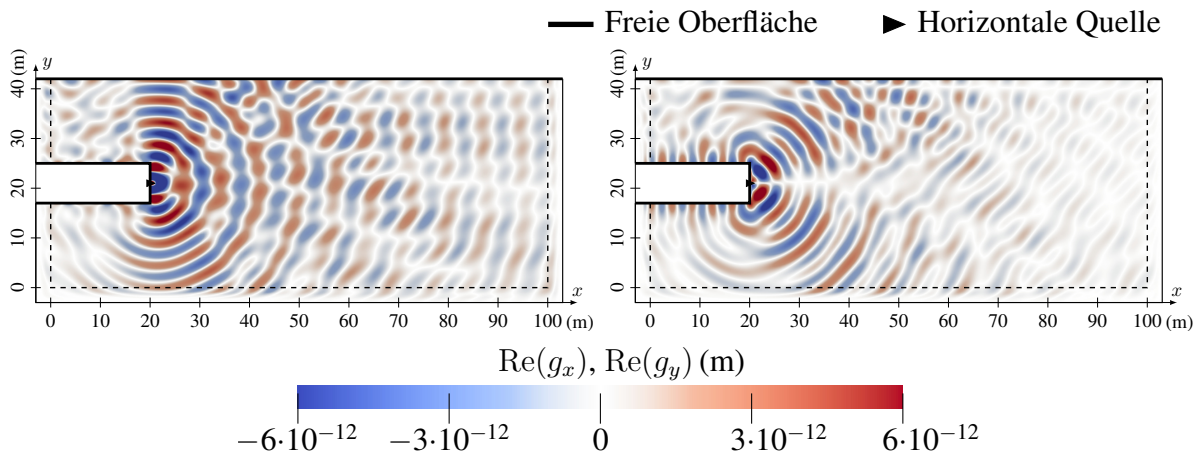


Abbildung 4.10.: Wellenfelder für eine zweidimensionale Tunnelumgebung mit viskoelastischen homogenen Bodeneigenschaften für eine Frequenz von 500 Hz. Für die Qualitätsfaktoren  $Q_p = 60$  und  $Q_s = 30$  werden die reellen Anteile der Greenschen Funktionen  $g_x$  (links) und  $g_y$  (rechts) dargestellt.

Greenschen Funktionen für eine Frequenz von 500 Hz approximiert. Im Vergleich zu den Wellenfeldern in Abbildung 4.8 nehmen die Werte der Greenschen Funktionen mit zunehmender Entfernung zur Punktquelle merklich ab. Des Weiteren verändern sich auch die Wellenformen mit zunehmender Entfernung zur Punktquelle.

Für die genauere Betrachtung des Einflusses verschiedener Qualitätsfaktoren werden die zugehörigen reellen Anteile der Greenschen Funktionen  $g_x$  und  $g_y$  in Abbildung 4.11 für den Empfänger 14 über Frequenzen zwischen 6 Hz und 1100 Hz aufgetragen. Für  $Q_p \rightarrow \infty$  und  $Q_s \rightarrow \infty$  liegt keine Dämpfung vor, während für  $Q_p = 30$  und  $Q_s = 10$  eine vergleichsweise hohe Dämpfung approximiert wird. Mit sinkenden Qualitätsfaktoren steigt der Dämpfungseffekt, wodurch die Amplituden der Greenschen Funktionen mit steigenden Frequenzen und damit sinkenden Wellenlängen stärker abklingen. Zudem gehen zunehmend einzelne Merkmale der Wellenformen der Greenschen Funktionen verloren, was sehr gut anhand der Qualitätsfaktoren  $Q_p = 30$  und  $Q_s = 10$  beobachtet werden kann, für welche bei höheren Frequenzen ein nahezu periodisches Verhalten beobachtet werden kann, ohne dass zusätzliche Amplituden auftreten.

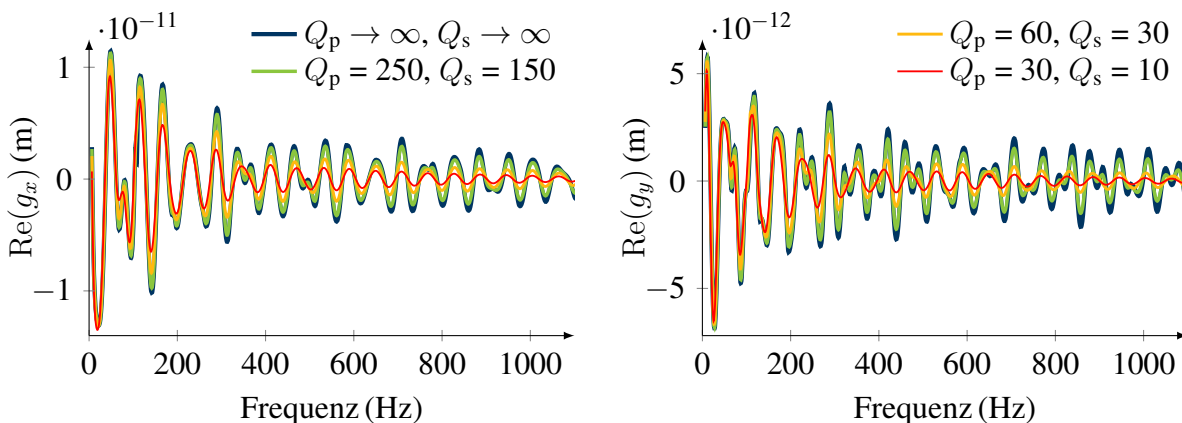


Abbildung 4.11.: Vergleich der numerisch approximierten reellen Anteile der Greenschen Funktionen  $g_x$  und  $g_y$  für verschiedene Qualitätsfaktoren und Frequenzen für Empfänger 14 der zweidimensionalen homogenen Tunnelumgebung.

Mit zunehmender Distanz, welche die Wellen zurücklegen, nehmen die Amplituden aufgrund von geometrischer Dispersion und aufgrund von Dämpfung ab, wodurch die Wellenformen ab einem gewissen Punkt nicht mehr vom Messrauschen realer Messungen unterschieden werden könnten. Mit sinkenden Qualitätsfaktoren wird dieses Phänomen einerseits verstärkt und andererseits gehen zusätzlich für höhere Frequenzen Informationen, welche die Wellenformen enthalten, verloren. Für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion bedeutet dies, dass durch Dämpfungseffekte der Auflösungsgrad der Bodeneigenschaften eingeschränkt wird, da bei höheren Frequenzen, welche zu kürzeren Wellenlängen führen, der Informationsgehalt abnimmt. Je nach Messanordnung nimmt die Auflösung zunächst in den Gebieten ab, in welchen die Wellen, welche die relevanten Informationen transportieren, größere Distanzen überwinden müssen.

#### 4.4. Verifizierung für ein dreidimensionales unendliches Gebiet

Nachdem für zweidimensionale Modelle sowohl der verwendete Ansatz der Finite-Elemente-Methode verifiziert als auch die Ergebnisse der Modellierung von seismischen Wellen für eine zweidimensionale Tunnelumgebung betrachtet wurden, werden im Folgenden die numerischen Lösungen der elastischen Wellengleichung für dreidimensionale Modelle verifiziert. Zu Beginn wird die numerische Lösung mit der analytischen Lösung für ein unbegrenztes Gebiet mit homogenen Eigenschaften, analog zu Abschnitt 4.1, durchgeführt. Eine anschauliche Darstellung der analytischen Greenschen Funktionen  $g_x^A$ ,  $g_y^A$  und  $g_z^A$  kann mithilfe der Veröffentlichung von Gosselin-Cliche u. Giroux (2014), welche diese aus den Ausführungen von Pilant (1979) hergeleitet haben, angegeben werden:

$$g_x^A(r, \omega) = \frac{x_r z_r}{4\pi r^5 \omega^2 \rho} \left[ \left( r^2 \left( \frac{\omega}{v_p} \right)^2 - 3 - 3i r \frac{\omega}{v_p} \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) + \left( 3 + 3i r \frac{\omega}{v_s} - r^2 \left( \frac{\omega}{v_s} \right)^2 \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_s} r\right) \right], \quad (4.4)$$

$$g_y^A(r, \omega) = \frac{y_r z_r}{4\pi r^5 \omega^2 \rho} \left[ \left( r^2 \left( \frac{\omega}{v_p} \right)^2 - 3 - 3i r \frac{\omega}{v_p} \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) + \left( 3 + 3i r \frac{\omega}{v_s} - r^2 \left( \frac{\omega}{v_s} \right)^2 \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_s} r\right) \right], \quad (4.5)$$

$$g_z^A(r, \omega) = \frac{1}{4\pi r^5 \omega^2 \rho} \left[ x_r^2 + y_r^2 - 2z_r^2 \left( \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) - \exp\left(-i \frac{\omega}{v_s} r\right) \right) + \left( z_r^2 r^2 \left( \frac{\omega}{v_p} \right)^2 + i(x_r^2 + y_r^2 - 2z_r^2) r \left( \frac{\omega}{v_p} \right) \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) + \left( (x_r^2 + y_r^2) r^2 \left( \frac{\omega}{v_s} \right)^2 - i(x_r^2 + y_r^2 - 2z_r^2) r \left( \frac{\omega}{v_s} \right) \right) \exp\left(-i \frac{\omega}{v_s} r\right) \right]. \quad (4.6)$$

Dabei wird der Abstand  $r$  zwischen dem betrachteten Punkt  $(x, y, z)$  und der Position der Punktquelle  $(x_s, y_s, z_s)$  sowie die Koordinaten  $(x_r, y_r, z_r)$  des Referenzkoordinatensystems, welches seinen Ursprung an der Position der Punktquelle hat, definiert durch:

$$x_r = x - x_s, \quad y_r = y - y_s, \quad z_r = z - z_s, \quad r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}. \quad (4.7)$$



Für die angegebenen Gleichungen der analytischen Greenschen Funktionen wird eine Punktquelle angenommen, welche in die positive  $z$ -Richtung wirkt.

Ein dreidimensionales Gebiet mit den Abmaßen  $77.5 \text{ m} \times 43.5 \text{ m} \times 43.5 \text{ m}$  wird für die Verifizierung betrachtet. Dieses Gebiet beinhaltet an allen sechs Seiten C-PMLs mit einer Stärke von jeweils  $3.75 \text{ m}$ . Der Ursprung des Koordinatensystems wurde an den unteren äußeren Grenzen der PMLs platziert. Durch insgesamt  $42\,300$  Hexaederelemente wird das betrachtete Gebiet diskretisiert, wobei die PMLs eine Breite von jeweils drei Elementen besitzen. Mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4000 \text{ m/s}$  und  $v_s = 2400 \text{ m/s}$  sowie der Dichte  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  werden etwas andere Bodeneigenschaften verwendet als bei den Verifizierungen für die zweidimensionalen Modelle. Die in positive  $z$ -Richtung wirkende Punktquelle befindet sich bei  $x = 23.75 \text{ m}$ ,  $y = 21.75 \text{ m}$  und  $z = 21.75 \text{ m}$ . Für die Verifizierung wird die Kreisfrequenz  $\omega = 1200 \text{ rad/s}$  be-

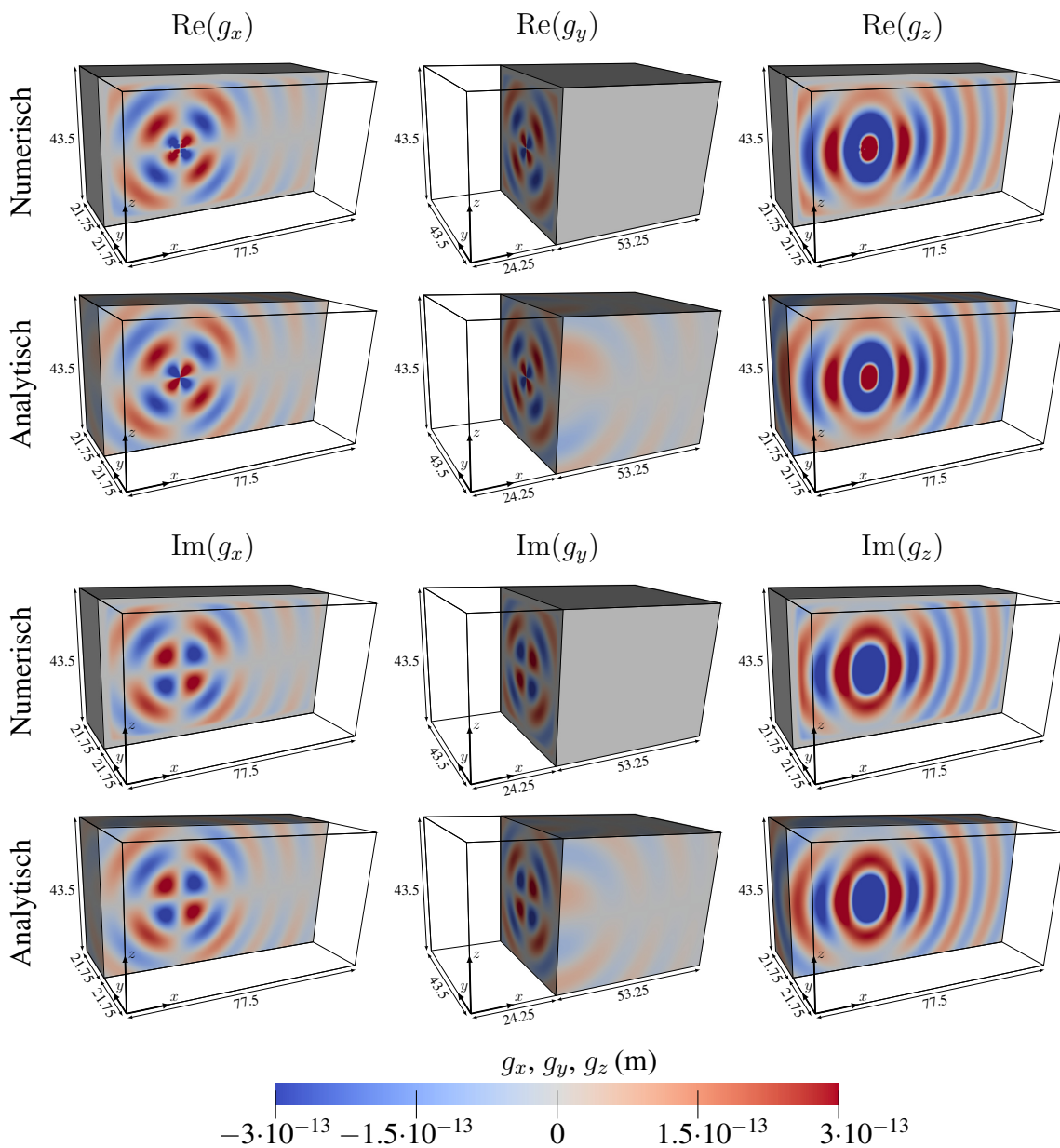


Abbildung 4.12.: Vergleich von den numerisch berechneten und den analytischen Greenschen Funktionen  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_z$  für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet anhand von verschiedenen Schnitten des betrachteten Gebiets.

trachtet, für welche der Ansatzgrad für die hierarchischen Ansatzfunktionen  $p = 2$  verwendet wird. Eine gute Übereinstimmung der numerischen und analytischen Lösung der elastischen Wellengleichung wurde mit der Wahl  $c_{\text{PML}} = 25\,000$  für den numerischen Parameter der PMLs erzielt. Die Schnitte der zugehörigen Wellenfelder werden in Abbildung 4.12 dargestellt. Dabei wurde für die Darstellung der Greenschen Funktionen  $g_x$  und  $g_z$  ein Schnitt entlang der  $x$ - $z$ -Ebene bei  $y = 21.75$  m gewählt, welcher durch die Punktquelle verläuft. Für die Darstellung der Greenschen Funktion  $g_y$  wurde hingegen ein Schnitt entlang der  $y$ - $z$ -Ebene bei  $x \approx 24.25$  m gewählt, welcher knapp neben der Ebene mit der Punktquelle verläuft. Erneut decken sich die numerischen und die analytischen Greenschen Funktionen visuell sehr gut. Innerhalb der absorbierenden Ränder werden die Wellen der numerischen Lösung gedämpft, wodurch der erwartete Unterschied in diesem Bereich entsteht. Für die Betrachtung der Wellenfelder wurden verschiedene Schnitte verwendet, da in der dargestellten  $x$ - $z$ -Ebene die Greenschen Funktionen in  $y$ -Richtung  $g_y$  Null sind und ein Vergleich entsprechend unsinnig wäre. Für eine aussagekräftigere Analyse dieser Ergebnisse werden in Abbildung 4.13 die Greenschen Funktionen entlang einer Linie untersucht, welche vom Ursprung bei  $x = 0$  m,  $y = 0$  m und  $z = 0$  m bis zur gegenüberliegenden Ecke bei  $x = 77.5$  m,  $y = 43.5$  m und  $z = 43.5$  m verläuft. Dabei schneidet diese Linie nicht die Position der Quelle. Erneut sind kaum Abweichungen von den numerischen und analytischen Lösungen zu erkennen. Lediglich in Bereich der PMLs ist der schon

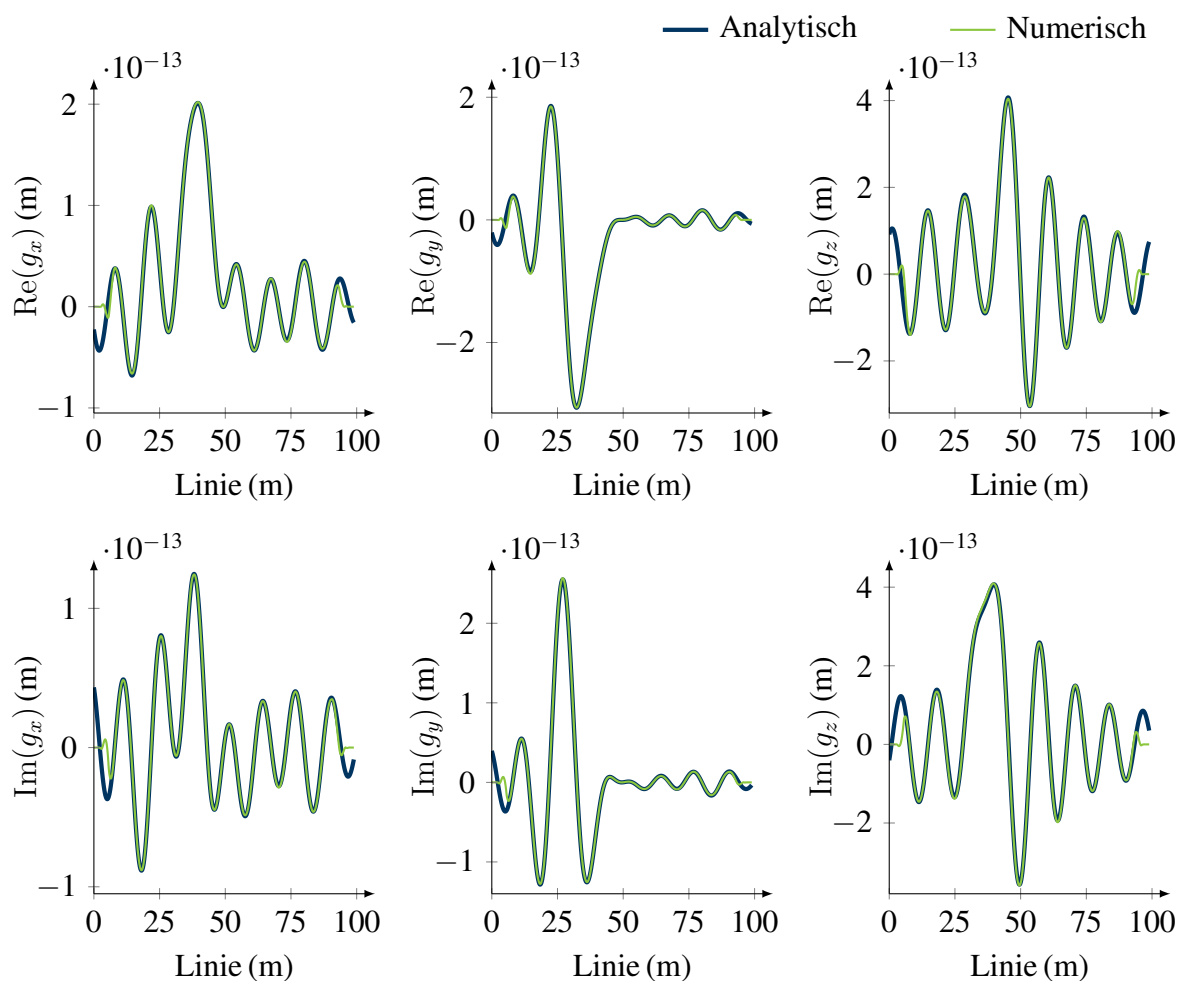


Abbildung 4.13.: Vergleich von den Real- und Imaginärteilen der numerisch berechneten und der analytischen Greenschen Funktionen  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_z$  für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie.

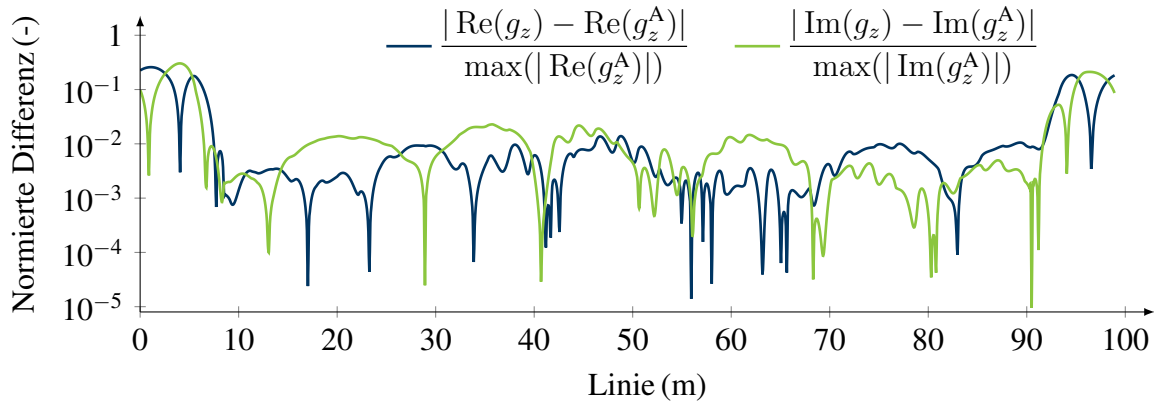


Abbildung 4.14.: Darstellung der normierten Differenz der numerisch berechneten und der analytischen Greenschen Funktion in  $z$ -Richtung  $g_z$  für ein dreidimensionales unbegrenztes Gebiet entlang einer Linie.

festgestellte Unterschied zu erkennen. Bei der Betrachtung der normierten Differenz der Greenschen Funktionen in  $z$ -Richtung in Abbildung 4.14 ist jedoch erkennbar, dass die Abweichungen größer sind als die Abweichungen bei der Verifizierung für das zweidimensionale unbegrenzte Gebiet aus Abschnitt 4.1. Die normierte Differenz von sowohl dem reellen als auch dem imaginären Anteil bleibt außerhalb des Einflussbereichs der PML durchgehend unter 0.0229. Die entsprechende durchschnittliche normierte Differenz vom reellen und imaginären Teil zusammen liegt in diesem Bereich bei 0.0058 und ist somit zwar niedrig, aber mehr als vier Mal so hoch, wie die normierte durchschnittliche Differenz des zweidimensionalen Beispiels aus Abschnitt 4.1. Der erhöhte Unterschied ist auf die etwas größere Diskretisierung des modellierten Gebiets zurückzuführen. Der Grad der Diskretisierung wurde nicht weiter ausgereizt, um den Rechenaufwand zu begrenzen. Dennoch sollte die gewählte Genauigkeit genügen, um Studien über das Potential der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung in maschinellen Tunnelbau durchführen zu können.

#### 4.5. Verifizierung für eine dreidimensionale Tunnelumgebung

Auch für den Einsatz des vorgestellten Ansatzes der Finite-Elemente-Methode für räumliche Randwertprobleme soll sichergestellt werden, dass physikalisch sinnvolle Lösungen der elastischen Wellengleichung für die komplexeren Randbedingungen einer Tunnelumgebung mit einer ausreichenden Genauigkeit berechnet werden können. Zu diesem Zweck wird die in Abbildung 4.15 illustrierte oberflächennahe Tunnelumgebung eingeführt. Die Abmaße entsprechen denen des in Abschnitt 4.4 verwendeten unbegrenzten Gebiets mit den Ausnahmen, dass die in  $z$ -Richtung obere PML entfernt wurde, um die Neumann-Randbedingung für die Erdoberfläche implementieren zu können, und dass ein zylindrischer Tunnel hinzugefügt wurde. Somit belaufen sich die äußeren Abmaße des Modells auf  $43.5 \text{ m} \times 77.5 \text{ m} \times 39.75 \text{ m}$ , wobei bei diesen Angaben die PMLs schon inbegriffen sind. Die freien Oberflächen an den Tunnelwänden, der Ortsbrust und an der Erdoberfläche werden durch kräftigere Linien angedeutet. Der Tunnel hat einen Durchmesser von 10 m und die Mittelachse des Tunnels befindet sich 18 m ( $z = 18 \text{ m}$ ) unter der Erdoberfläche, wodurch sich der höchste Punkte der Tunneldecke bei  $z = 13 \text{ m}$  befindet. Die Ortsbrust befindet sich bei  $y = 23.75 \text{ m}$  und somit besitzt der betrachtete Teil des Tunnels eine Länge von 20 m innerhalb des nicht absorbierenden Bereichs des Modells. Die



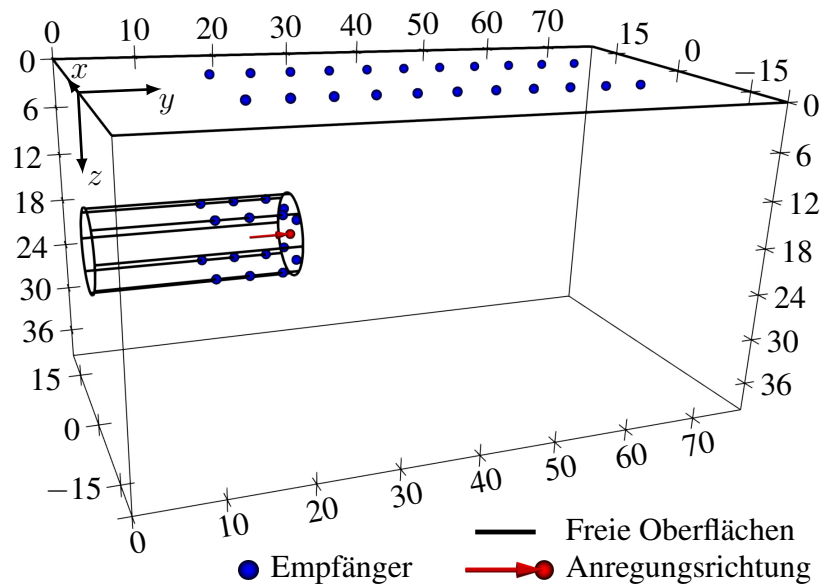


Abbildung 4.15.: Darstellung der dreidimensionalen oberflächennahen Tunnelumgebung, welche für die Verifizierung mittels des SPECFEM3D Cartesian Codes verwendet wird. Die Punktquelle und die Empfänger sind gekennzeichnet.

PMLs, welche sich an allen Seiten außer an der Erdoberfläche befinden, besitzen eine Stärke von 3.75 m. Für das betrachtete Modell werden mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4000$  m/s und  $v_s = 2400$  m/s sowie der Dichte  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> homogene Bodeneigenschaften verwendet. Dieses homogene Bodenmodell wird auch in Abschnitt 6.5 und Abschnitt 6.6 als Ausgangsmodell für die Inversionen verwendet. Die verwendete Punktquelle befindet sich in der Mitte der Ortsbrust bei  $x_s = 0$  m,  $y_s = 23.75$  m,  $z_s = 18$  m und wirkt senkrecht zu der Frontfläche, was auch durch den Pfeil in Abbildung 4.15 gekennzeichnet wird. Die Seismogramme von 38 Empfängern, welche auch in Abbildung 4.15 gekennzeichnet sind, werden für die Verifizierung betrachtet. Vier Empfänger befinden sich auf der Tunnelfront und 12 Empfänger sind gleichmäßig auf den Tunnelwänden verteilt worden. Ihre genauen Positionen können der Tabelle 4.1 entnommen werden. An den Empfängern werden die Verschiebungen in alle drei Raumrichtungen aufgenommen. Die weiteren Empfänger befinden sich an der Erdoberfläche bei  $z = 0$  m. Dabei sind die Empfänger auf zwei in  $y$ -Richtung verlaufenden Linien  $y \in [16.25, 66.25]$  m in Abständen von 5 m angeordnet. Die Empfänger 17–27 befinden sich auf der Höhe  $x = -8$  m, während die Empfänger 28–38 auf der Höhe  $x = 8$  m platziert sind und sich die Nummerierung mit steigender  $y$ -Koordinate erhöht. Eine Kombination aus 35 062 Hexaederelementen und 9158 Prismenelementen mit hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung wurde für die Diskretisierung des Tunnelmodells verwendet. Der Tunnel sowie die Tunnelach-

| Empfänger | $y$ (m) | Radialer Abstand zur Tunnelachse (m) | Winkel in der $x$ - $z$ -Ebene (°) |
|-----------|---------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1–4       | 13.75   | 5                                    | [315, 225, 135, 45]                |
| 5–8       | 17.75   | 5                                    | [315, 225, 135, 45]                |
| 9–12      | 21.75   | 5                                    | [315, 225, 135, 45]                |
| 13–16     | 23.75   | 3.5                                  | [315, 225, 135, 45]                |

Tabelle 4.1.: Positionen der Empfänger an den Tunnelwänden (1–12) und der Empfänger an der Tunnelfront (13–16).

se können akkurat durch die Prismenelemente diskretisiert werden, ohne dass das Verhältniss zwischen den minimalen und maximalen Kantenlängen der Elemente zu groß wird, wodurch gewährleistet wird, dass der Diskretisierungsgrad im ganzen Modell vergleichbar bleibt. Die gleichmäßigen Bereiche der Tunnelumgebung werden durch die Hexaederelemente diskretisiert, welche bevorzugte numerische Eigenschaften aufweisen. Die PMLs besitzen jeweils eine Stärke von drei Elementen. Bei dem in Abschnitt 4.4 durchgeführten Abgleich der analytischen Lösung für ein unendliches Gebiet wurde ein Modell verwendet, welches von den Eigenschaften, Abmaßen und dem Diskretisierungsgrad der verwendeten Tunnelumgebung ähnelt. Dabei wurde ein gutes Dämpfungsverhalten mit dem numerischen PML Parameter  $c_{\text{PML}} = 25\,000$  für eine Kreisfrequenz von  $\omega = 1200$  rad/s erreicht, weswegen dieser auch für die vorgestellte Tunnelumgebung eingesetzt wird.

Für die Verifizierung werden Seismogramme, welche mit dem SPECFEM3D Cartesian Code unter der Verwendung von C-PMLs berechnet wurden, als Referenz verwendet. Dabei wurde ein Ricker-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 300 Hz verwendet, welches über keinen Zeitversatz verfügt. Damit deckt das Quellsignal ungefähr einen Frequenzbereich von 24 Hz bis 796 Hz ab. Wie schon in Abschnitt 4.4 wird durch die Verwendung eines Ansatzgrads von  $p = 2$  für die hierarchischen Ansatzfunktionen der Rechenaufwand für dreidimensionale Probleme

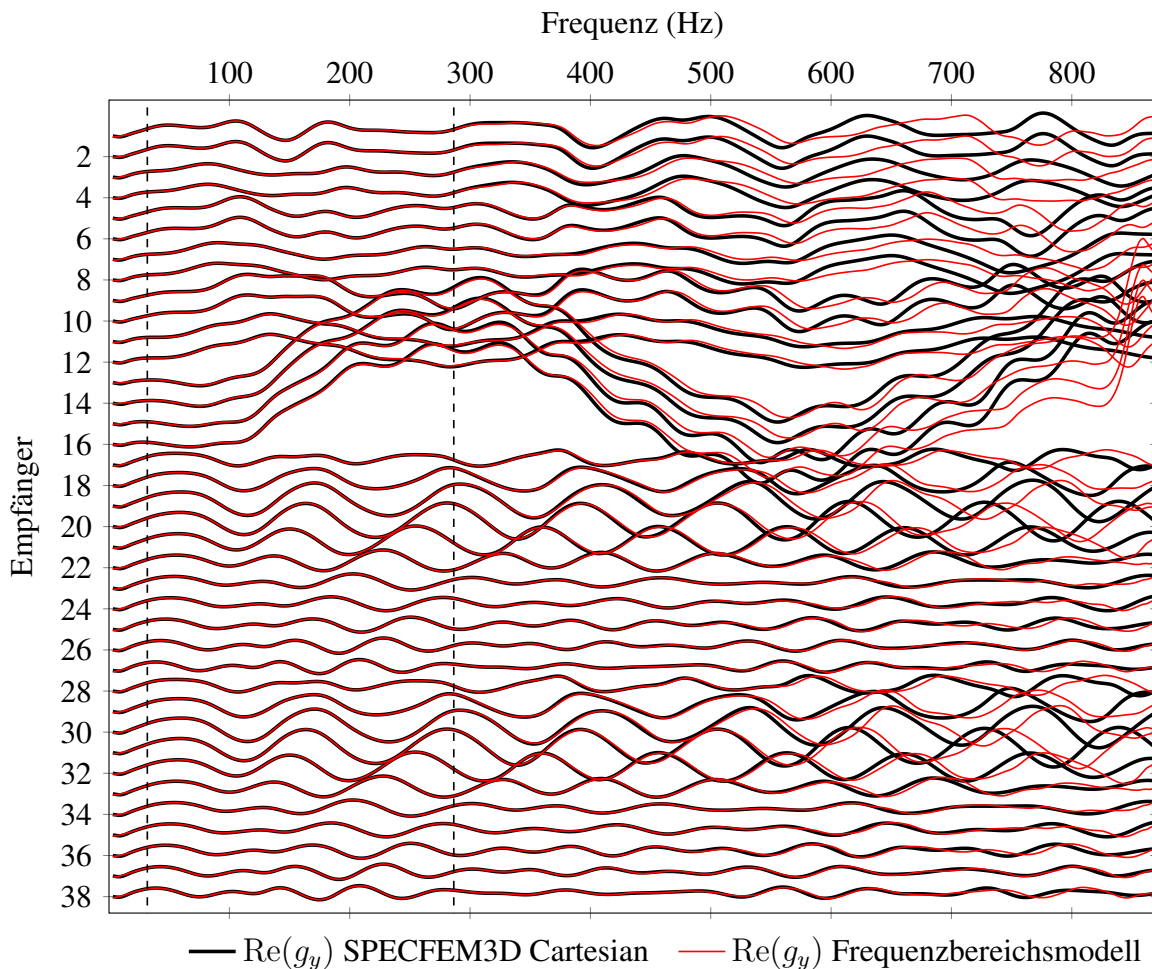


Abbildung 4.16.: Vergleich der Seismogramme in Bezug auf den Realteil der Greenschen Funktionen in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  des Frequenzbereichsmodells mit Seismogrammen, welche mittels des SPECFEM3D Cartesian Codes erzeugt wurden, im Frequenzbereich für die in Abbildung 4.15 illustrierte Tunnelumgebung.

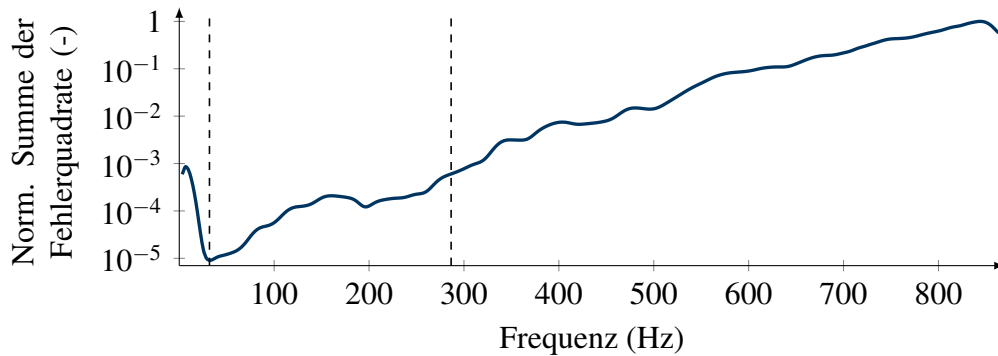


Abbildung 4.17.: Frequenzabhängige Änderung der Summe der Fehlerquadrate der Greenschen Funktionen  $g$ , welche über eine Dekonvolution aus den SPECFEM3D Cartesian Seismogrammen berechnet wurden, und der Greenschen Funktionen, welche mit dem Frequenzbereichsmodell für die dreidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung aus Abbildung 4.15 berechnet wurden. Die Summe der Fehlerquadrate ist auf den maximalen Wert normiert.

begrenzt. Entsprechend muss sichergestellt werden, dass bei der Inversion nur Frequenzen zum Einsatz kommen, für welche der Diskretisierungsgrad noch eine ausreichende Genauigkeit bei der Berechnung der Wellenfelder ermöglicht. Dies hat zur Folge, dass ein Abgleich der Seismogramme im Zeitbereich, aufgrund von zunehmend ungenauen Approximationen der Wellenfelder für höhere Frequenzen, nicht zielführend wäre. Daher wird mit den Referenzseismogramme eine Dekonvolution mit der Quellfunktion durchgeführt und im Anschluss werden die sich ergebenden Greenschen Funktionen  $g$  im Frequenzbereich mit den Approximationen des Frequenzbereichsmodells abgeglichen. Der Vergleich der Realteile der Greenschen Funktionen in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  für alle Empfänger ist in Abbildung 4.16 dargestellt. Eine gute Übereinstimmung der Greenschen Funktionen für niedrige Frequenzen ist gut erkennbar, während sich eine zunehmende Diskrepanz für höhere Frequenzen einstellt. Für eine genauere Betrachtung wird in Abbildung 4.17 die Änderung der Summe der Fehlerquadrate der Greenschen Funktionen  $g$  untersucht, deren Werte auf den maximalen Wert normiert wurden. Für sehr niedrige Frequenzen, welche bei der Berechnung der Referenzseismogramme kaum von der verwendeten Quellfunktion abgedeckt wurden, treten leicht erhöhte Fehlerquadrate auf. Für steigende Frequenzen nimmt die Summe der Fehlerquadrate merklich zu. Für die Inversionen mit einem dreidimensionalen Tunnelmodell in Abschnitt 6.5 und Abschnitt 6.6 werden nur Frequenzen zwischen 31.83 Hz und 286.48 Hz verwendet. Dieser Frequenzbereich ist auch in Abbildung 4.16 und in Abbildung 4.17 strichliert gekennzeichnet. Die Summe der Fehlerquadrate ist innerhalb dieses Bereichs vergleichsweise niedrig. Die Beschränkung auf niedrige Frequenzen wird dazu führen, dass die räumlichen Veränderungen der elastischen Eigenschaften des Bodens nur vergleichsweise grob aufgelöst werden können. Daher werden Beispiele eingesetzt, in welchen größere Störungen auftreten.

Exemplarisch werden in Abbildung 4.18 der reelle Anteil der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  und in  $z$ -Richtung  $\text{Re}(g_z)$  für die vorgestellte Tunnelumgebung dargestellt. Die Wellenfelder wurden für die Kreisfrequenz  $\omega = 1200 \text{ rad/s}$  berechnet und ein Schnitt in der Mitte des Tunnelumgebung bei  $x = 0 \text{ m}$  entlang der  $y$ - $z$ -Ebene wird illustriert. Die Wellenlängen der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung sind größer, da diese durch die Punktquelle in  $z$ -Richtung vornehmlich auf Kompressionswellen zurückzuführen sind. Die Greensche Funktion in  $z$ -Richtung wird vornehmlich von Scherwellen dominiert, wodurch kürze Wellenlängen

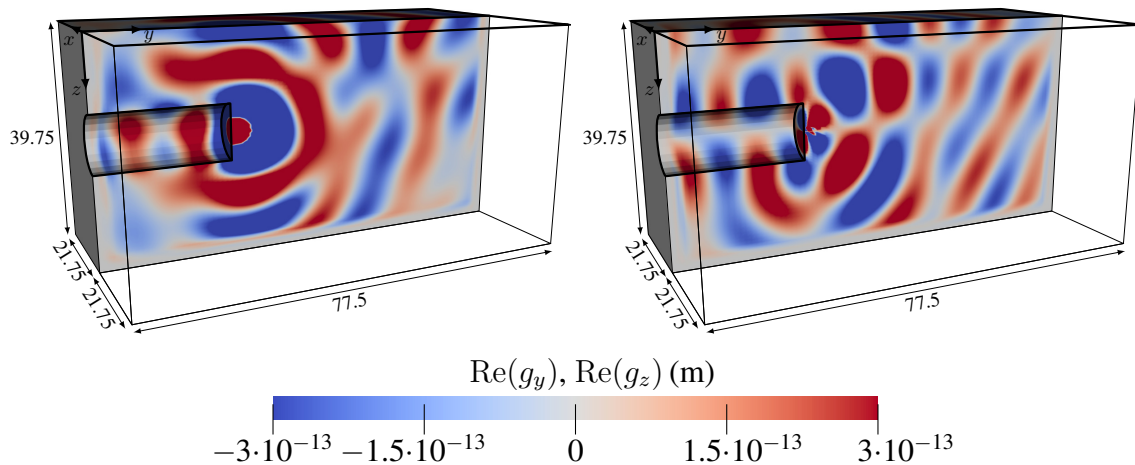


Abbildung 4.18.: Numerisch berechnete Wellenfelder einer dreidimensionalen Tunnelumgebung mit homogenen Bodeneigenschaften für eine Frequenz von 1200 rad/s. Der reelle Anteil der Greenschen Funktion in  $y$ -Richtung  $\text{Re}(g_y)$  wird links und der Greenschen Funktion in  $z$ -Richtung  $\text{Re}(g_z)$  wird rechts dargestellt für einen Schnitt entlang der  $y$ - $z$ -Ebene für  $x = 0$  m.

auftreten. Die zunehmende geometrische Dispersion mit steigender Entfernung zur Punktquelle sowie die rapide Abnahme der Greenschen Funktionen innerhalb der absorbierenden Ränder sind gut erkennbar.

Die Verifizierung des vorgestellten Finite-Elemente-Ansatzes, in Kombination mit C-PMLs als absorbierende Ränder, war erfolgreich. Für zwei- und dreidimensionale unendliche Gebiete konnten die numerischen Approximationen der Wellenfelder genauer untersucht und der numerische Parameter der PMLs für die vorgestellten Modelle bestimmt werden. Der Abgleich mit Seismogrammen für zwei- und dreidimensionale Tunnelumgebungen, welche durch etablierte numerische Algorithmen berechnet wurden, verdeutlichte, dass die berechneten Wellenfelder auch für kompliziertere Randwertprobleme physikalisch sinnvoll sind. Lediglich für das Modell einer zweidimensionalen Tunnelumgebung traten im Bereich zwischen der Tunneldecke und der Erdoberfläche Abweichungen auf. Diese Abweichungen sind zurückzuführen auf die vereinfachte Annahme von Symmetrie in die dritte Raumrichtung und auf die Berechnung einer Lösung für ein unendliches Zeitintervall durch den Frequenzbereichsansatz. Die Interpretation der berechneten Wellenfelder der einzelnen Frequenzen ist jedoch weniger intuitiv als die Wellenausbreitung im Zeitbereich. Viskoelastische Effekte führen mit steigender Frequenz sowie zunehmender Distanz, welche die seismischen Wellen überwinden müssen, zu einer Reduktion des Informationsgehalts, welchen die Wellen enthalten. Dadurch wird die Auflösung der Materialeigenschaften bei einer Rekonstruktion durch die Full-Waveform-Inversion eingeschränkt. Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben wurde, werden in dieser Abhandlung für die seismische Wellenausbreitung weder die Tunnelbohrmaschine, die Tunnelinnenschalen noch der Ringspaltmörtel oder die Änderung der Bodeneigenschaften mit zunehmender Tiefe berücksichtigt. Entsprechend werden die zugehörigen Auswirkungen auf die Full-Waveform-Inversion nicht untersucht.

## 5. Full-Waveform-Inversion

Innerhalb dieser Arbeit wird ein gradientenbasierter Ansatz der Full-Waveform-Inversion für die Anwendung zur seismischen Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau untersucht, für welchen sowohl die Approximation der Wellenformen als auch die Minimierung der Unterschiede zwischen diesen synthetischen und den gegebenen Wellenformen im Frequenzbereich durchgeführt wird. In Abschnitt 5.1 wird auf grundlegende Konzepte bei der Bestimmung von Minima sowie auf die Uneindeutigkeit von inversen Problemen eingegangen. Die Formulierung der inversen Problemstellung im Frequenzbereich wird in Abschnitt 5.2 eingeführt. In Abschnitt 5.3 wird beschrieben, wie der diskrete adjungierte Gradient hergeleitet und für unterschiedliche Eigenschaften berechnet wird. Für die gradientenbasierte Minimierung werden in Abschnitt 5.4 verschiedene iterative Minimierungsmethoden vorgestellt, über welche eine Suchrichtung berechnet werden kann, in welcher nach einem passenderen Bodenmodell gesucht werden soll. In Abschnitt 5.5 wird beschrieben, wie entlang der bestimmten Suchrichtung mittels eines Liniensuchverfahrens effizient ein Modell bestimmt werden kann, das die Unterschiede der synthetischen und der vorgegebenen Seismogramme möglichst stark minimiert. Aufgrund der Uneindeutigkeit des inversen Problems werden für die Full-Waveform-Inversion verschiedene Strategien eingesetzt, um zu vermeiden, dass ein schlechtes lokales oder ein unphysikalisches Minimum bestimmt wird. Die in dieser Arbeit eingesetzten Strategien sowie die Konzepte von weiteren etablierten Strategien werden in Abschnitt 5.6 vorgestellt. In Abschnitt 5.7 wird betrachtet, wie sich der Einsatz der Full-Waveform-Inversion im Zeitbereich von dem Einsatz im Frequenzbereich unterscheidet. Die Bestimmung der effektiven Quellfunktion, mit welcher die Wellen angeregt werden, stellt bei den meisten Anwendungen ein grundlegendes Problem dar. In Abschnitt 5.8 wird beschrieben, wie durch das simultane Approximieren der Quellfunktion während des Inversionsprozesses ohne eine vorherige Bestimmung der Quellfunktion die Full-Waveform-Inversion durchgeführt werden kann. Abschließend werden in Abschnitt 5.9 weitere Aspekte beleuchtet die bei der Verwendung der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau relevant sind.

### 5.1. Minima, Uneindeutigkeiten und Optimalitätsbedingungen

Wie schon in Abschnitt 1.3 beschrieben wurde, wird über die Full-Waveform-Inversion versucht die geologischen Eigenschaften des Bodens zu bestimmen, indem die Unterschiede zwischen den an den Empfängern gemessenen Seismogrammen  $\hat{u}^0$  und den synthetischen Seismogrammen  $\hat{u}(\mathbf{m})$  minimiert werden, wobei letztere mittels des aktuellen Bodenmodells numerisch approximiert werden. Dazu wird der Koeffizientenvektor der diskretisierten Bodeneigenschaften  $\mathbf{m}$  sukzessive angepasst, welcher in Unterabschnitt 3.2.2 eingeführt wurde. Für Ansätze, welche auf den Einsatz von Gradienten basieren, ergibt sich die folgende Gleichung zum Anpassen der Bodeneigenschaften:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k. \quad (5.1)$$

Dabei stellt  $\mathbf{r}_k$  die Richtung dar, in welcher während der Iteration  $k$  nach einem Modell gesucht wird, welches die Unterschiede der Seismogramme besser minimiert. Durch  $\alpha_k$  wird angegeben, wie weit in der Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  das nächste Bodenmodell  $\mathbf{m}_{k+1}$  vom aktuellen Bodenmodell  $\mathbf{m}_k$  entfernt ist. Die Bestimmung der Suchrichtung wird in Abschnitt 5.4 und die Bestimmung der Schrittweite wird in Abschnitt 5.5 ausführlicher behandelt. Für die Quantifizierung der Unterschiede zwischen den Seismogrammen wird ein Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m})$  eingeführt, welches nur implizit von den diskretisierten Bodeneigenschaften  $\mathbf{m}$  abhängt. Für die Bodenmodelle aus Gleichung 5.1 wird gefordert, dass das neue Bodenmodell ein niedrigeres Fehlerfunktional aufweist als das vorherige Bodenmodell:

$$\chi(\mathbf{m}_{k+1}) < \chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.2)$$

Durch diese Vorgehensweise soll möglichst ein Bodenmodell  $\mathbf{m}_{\text{global}}$  bestimmt werden, welches den niedrigsten Wert für das Fehlerfunktional für alle zulässigen Bodenmodelle besitzt:

$$\chi(\mathbf{m}_{\text{global}}) \leq \chi(\mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m}. \quad (5.3)$$

Wenn nur ein einziges Bodenmodell den niedrigsten Wert für das Fehlerfunktional erzeugt, dann wird dieses Modell nicht nur als globales, sondern als striktes globales Minimum bezeichnet:

$$\chi(\mathbf{m}_{\text{global}}) < \chi(\mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m} \neq \mathbf{m}_{\text{global}}. \quad (5.4)$$

Ein lokales Minimum  $\mathbf{m}_{\text{lokal}}$  stellt in diesem Zusammenhang ein Modell dar, dessen Fehlerfunktional einen niedrigeren oder den selben Wert besitzt wie die Bodenmodelle in der näheren Umgebung  $U(\mathbf{m}_{\text{lokal}})$ :

$$\chi(\mathbf{m}_{\text{lokal}}) \leq \chi(\mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m} \in U(\mathbf{m}_{\text{lokal}}). \quad (5.5)$$

Wenn alle anderen Modelle in der näheren Umgebung ausschließlich höhere Werte für das Fehlerfunktional erzeugen, dann wird von einem strikten lokalen Minimum gesprochen:

$$\chi(\mathbf{m}_{\text{lokal}}) < \chi(\mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m} \neq \mathbf{m}_{\text{lokal}} \in U(\mathbf{m}_{\text{lokal}}). \quad (5.6)$$

Die Anzahl an möglichen Bodenmodellen ist bei der Full-Waveform-Inversion sehr hoch. Die nichtlineare Beziehung zwischen den diskretisierten Bodeneigenschaften  $\mathbf{m}$  und den synthetisch berechneten Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{m})$  führt zu vielen lokalen Minima für das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m})$ . Somit ist die Full-Waveform-Inversion als schlecht gestelltes Problem anzusehen. Die meisten Fehlerfunktionale werden so gewählt, dass diese die Auswirkungen des nichtlinearen Zusammenhangs, der durch die Berechnung der Wellenausbreitung entsteht, möglichst abschwächen (Fichtner, 2011, Kapitel 7). Verschiedene lokale und globale Minima sind in Abbildung 5.1 exemplarisch dargestellt.

Gleichzeitig können verschiedenen Bodenmodelle ähnliche Verschiebungen an den Empfängern hervorrufen. Meistens kann nicht zurückgeführt werden, ob die Änderung der einen oder der anderen Bodeneigenschaften zu einer Veränderung der Verschiebungen geführt hat, da die Bodeneigenschaften bei der Berechnung des Elastizitätstensors in Gleichung 2.7 miteinander verrechnet werden. Je nach räumlicher Verteilung der eingesetzten Quellen und Empfänger haben manche Bereiche des Bodenmodells nur geringfügige Auswirkungen auf das Fehlerfunktional, sodass viele Bodenmodelle in Bezug auf das Fehlerfunktional zu gleichwertigen Ergebnissen führen. Das Reflexionsverhalten an beispielsweise Grenzschichten kann auch durch leicht veränderte Bodeneigenschaften angenähert werden. Ein vergleichbarer Materialkontrast würde

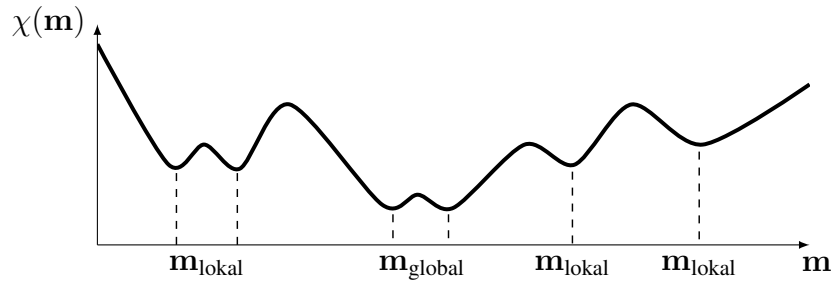


Abbildung 5.1.: Exemplarische Darstellung der Änderung des Fehlerfunktionals  $\chi(\mathbf{m})$  für verschiedene Bodenmodelle  $\mathbf{m}$ . Verschiedene lokale Minima  $\mathbf{m}_{\text{lokal}}$  sowie zwei globale Minima  $\mathbf{m}_{\text{global}}$  sind illustriert, welche auch die Uneindeutigkeit des inversen Problems verdeutlichen.

entstehen, wenn vor einer solchen Grenzschicht sich die Bodeneigenschaften leicht erhöhen/abfallen und dafür die Bodeneigenschaften hinter der Grenzschicht weniger stark abfallen/steigen würden. Die aufgeführten Punkte verdeutlichen die Uneindeutigkeit des inversen Problems. Damit trotz dieser Uneindeutigkeit ein physikalisch sinnvolles Bodenmodell durch die Inversion rekonstruiert wird, werden verschiedene Methoden eingesetzt. Dabei stellen der Multi-Skalen-Ansatz und die Regularisierungsmethoden die gängigsten Strategien dar, welche in Abschnitt 5.6 genauer behandelt werden (Fichtner, 2011, Kapitel 7).

Um Aufschluss zu erlangen, ob das rekonstruierte Bodenmodell ein Minimum  $\mathbf{m}_{\text{min}}$  des Fehlerfunktionals darstellt, können die Optimalitätsbedingungen ausgewertet werden. Dabei fordert die notwendige Bedingung erster Ordnung für ein Minimum, dass der Gradient für ein Minimum verschwindet:

$$\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{\text{min}}) = \mathbf{0}. \quad (5.7)$$

Jedoch kann über diese Bedingung nicht zwischen einem Minimum, Maximum und Sattelpunkt unterschieden werden. Über die notwendige Bedingung zweiter Ordnung kann überprüft werden, ob ein Bodenmodell, welches Gleichung 5.7 erfüllt, ein Minimum ist:

$$\mathbf{m}^T(\nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_{\text{min}}))\mathbf{m} > 0 \quad (5.8)$$

Aus Gleichung 5.8 ergibt sich, dass die Hesse-Matrix  $\nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_{\text{min}})$  positiv definit sein muss. In praktischen Anwendungen wird ein Minimum nur angenähert, wodurch der Gradient üblicherweise zwar sehr klein wird, aber nicht gänzlich verschwindet. Des Weiteren wird die notwendige Bedingung zweiter Ordnung üblicherweise nicht verwendet, da der Aufwand für die Berechnung der Hesse-Matrix überdurchschnittlich hoch ist (Fichtner, 2011, Kapitel 7).

## 5.2. Inverse Problemstellung

Als zu minimierende Zielfunktion wird für das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m})$  vornehmlich die Summe der Fehlerquadrate verwendet. Innerhalb des Zeitbereichs werden entsprechend die Integrale über das Zeitintervall  $T$  des Quadrats der Differenz der mit dem Materialkoeffizientenvektor  $\mathbf{m}$  berechneten synthetischen Verschiebungen  $\hat{u}_{srd}(t; \mathbf{m})$  und der gegebenen Referenzverschiebungen  $\hat{u}_{srd}^0(t)$  berechnet. Diese Fehlerquadrate werden über die Anzahl der Messrichtungen  $N_d$ ,



über die Anzahl der Messpunkte  $N_r$  und über die Anzahl der Anregungen mittels der berücksichtigten Quellen  $N_s$  aufsummiert (Fichtner, 2011, Kapitel 8):

$$\chi^Z(\mathbf{m}) = \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} \int_T (\hat{u}_{srd}(t; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(t))^2 dt. \quad (5.9)$$

Dabei ist das Fehlerfunktional nur implizit von dem Koeffizientenvektor der Materialeigenschaften  $\mathbf{m}$  des aktuell betrachteten Bodenmodells abhängig. Für die Minimierung des Fehlerfunktionals im Frequenzbereich wird innerhalb dieser Arbeit auch die Summe der Fehlerquadrate minimiert. Jedoch werden üblicherweise nicht die Fehlerquadrate aller Frequenzen  $f$  bzw. Kreisfrequenzen  $\omega$  akkumuliert, da für die Berechnung der zeitharmonischen Wellenfelder für jede Kreisfrequenz ein lineares Gleichungssystem gelöst werden müsste. Stattdessen werden nacheinander die Fehlerquadrate von einzelnen Kreisfrequenzen oder von der Summe der Fehlerquadrate mehrerer Kreisfrequenzen minimiert, welche in den Frequenzgruppen  $G_i$  zusammengefasst werden können:

$$G_i = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{iN_f}\} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, N_{fg}. \quad (5.10)$$

Dabei gibt  $N_{fg}$  die Anzahl der Frequenzgruppen an, welche für eine sukzessive Inversion verwendet werden und  $N_f$  ist die Anzahl der Kreisfrequenzen, welche innerhalb der Frequenzgruppe  $i$  verwendet werden. Das Bodenmodell  $\mathbf{m}$ , welches das Fehlerfunktional  $\chi_i(\mathbf{m})$  der aktuellen Frequenzgruppe  $G_i$  minimiert, wird als Ausgangsmodell für die nächste Frequenzgruppe eingesetzt. Durch die Untersuchung von wenigen Frequenzen ist bei der Verwendung der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich der Berechnungsaufwand geringer und der Inversionsprozess schneller als im Zeitbereich, wenn die programmiertechnischen Umsetzungen einen vergleichbaren Standard erfüllen. Des Weiteren kann über die Wahl der Frequenzgruppen die Nichtlinearität der inversen Problemstellung effizient reduziert werden, da ein intuitiver Einsatz eines Multi-Skalen-Ansatzes möglich ist. Beim Multi-Skalen-Ansatz werden zu Beginn niedrige Frequenzen für die Full-Waveform-Inversion verwendet und für die folgenden Frequenzgruppen werden die Frequenzen sukzessiv erhöht, wodurch eine Regularisierung des Inversionsprozesses stattfindet. In Abschnitt 5.6 werden der Multi-Skalen-Ansatz sowie die Wahl der Frequenzgruppen detaillierter behandelt. Das verwendete Fehlerfunktional für die Minimierung der Fehlerquadrate im Frequenzbereich besitzt die Form:

$$\chi_i(\mathbf{m}) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} (\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f)) (\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f))^*. \quad (5.11)$$

Dabei wird mit  $(\bullet)^*$  angezeigt, dass der zugehörige Wert komplex konjugiert wird, während  $\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})$  und  $\hat{u}_{srd}^0(\omega_f)$  die berechneten und gegebenen zeitharmonischen Verschiebungen für die Kreisfrequenz  $\omega_f$ , durch die Anregung mittels der Quelle  $s$ , an dem Empfänger  $r$  in Richtung  $d$  darstellen. Die synthetischen zeitharmonischen Verschiebungen  $\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})$  werden mittels des Verschiebungskoeffizientenvektors  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_s, \omega_f; \mathbf{m})$ , welcher durch die Anregung der Quelle an der Position  $\mathbf{x}_s$  für die Kreisfrequenz  $\omega_f$  und das aktuelle Bodenmodell  $\mathbf{m}$  berechnet wird, approximiert:

$$\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) = \mathbf{d}_d^T \mathbf{N}(\mathbf{x}_r) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_s, \omega_f; \mathbf{m}). \quad (5.12)$$

Dazu werden die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_r)$  aus Gleichung 3.34 an der Position des Empfängers  $\mathbf{x}_r$  ausgewertet. Dabei muss einerseits bestimmt werden in welchem Element sich die Position



$\mathbf{x}_r$  befindet und andererseits muss auch die Position des Empfängers in den natürlichen Koordinaten  $\xi$  ausgedrückt werden. Die jeweilige Richtung, in welcher die Verschiebungen gemessen werden, wird durch den Einheitsvektor  $\mathbf{d}_d$  angegeben. Eine zusätzliche Gewichtung der unterschiedlichen Residuen ist nicht unüblich, aber wird in dieser Arbeit nicht verwendet (Brossier u. a., 2010b). Gleichung 5.11 stellt die  $\ell^2$ -Norm dar, wobei der Einsatz anderer Normen, wie beispielsweise der Betragssummennorm bzw.  $\ell^1$ -Norm, auch möglich ist:

$$\chi_i^{\ell^1}(\mathbf{m}) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} |\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f)|. \quad (5.13)$$

Brossier u. a. (2010b) haben die  $\ell^1$ - und die  $\ell^2$ -Norm sowie zwei weitere Normen, welche Hybride aus der  $\ell^1$ - und der  $\ell^2$ -Norm darstellen, für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion untersucht. Dabei wurden verschiedene Sätze von verrauschten synthetischen Seismogrammen im Frequenzbereich mit den unterschiedlichen Normen, unter Einsatz der adjungierten Gradientenmethode, invertiert. Durch die  $\ell^2$ -Norm werden größere Unterschiede der Seismogramme stärker gewichtet als kleinere Differenzen. Dadurch können zwar die Unterschiede der Seismogramme, welche auf Störkörper zurückzuführen sind, besser genutzt werden, um diese Störkörper zu rekonstruieren. Der Nachteil dieser Norm besteht jedoch darin, dass Differenzen, welche auf Datenrauschen und andere überhöhte Ausschläge zurückzuführen sind, auch einen überproportional großen Einfluss erhalten, wodurch der Erfolg der Inversion gefährdet werden kann. Der Einsatz von mehreren Frequenzen in einer Frequenzgruppe erhöht die Redundanz der enthaltenen Informationen, wodurch der Einfluss von weißem Rauschen auf Inversionen mittels der  $\ell^2$ -Norm reduziert werden kann (Brossier u. a., 2010b). Durch die Verwendung der Betragssummennorm aus Gleichung 5.13 wird der Inversionsprozess zwar robuster, da einzelne Datenausreißer weniger stark gewichtet werden, jedoch sinkt gleichzeitig das Potenzial Störungen detaillierter rekonstruieren zu können. Bei den hybriden Normen müssen üblicherweise Grenzwerte festgelegt werden, welche den Übergang zwischen der  $\ell^1$ - und der  $\ell^2$ -Norm beschreiben. Die Festlegung dieser Grenzwerte erfolgt durch einfaches Ausprobieren, wodurch sich der Rechenaufwand einerseits erhöht und andererseits ist eine Bewertung der Grenzwerte anhand der Inversionsergebnisse für unbekannte Bodenverhältnisse problematisch. Da innerhalb dieser Arbeit größtenteils mit synthetischen Datensätzen gearbeitet wird, für welche kein Messrauschen berücksichtigt werden muss, ist der Einsatz der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gleichung 5.11) naheliegend. Obwohl in Kapitel 7 auch Messdaten aus einem kleinskaligen Laborexperiment verwendet werden, wird trotzdem die  $\ell^2$ -Norm verwendet.

Mögliche Minimierungsmethoden, um das Fehlerfunktional  $\chi_i(\mathbf{m})$  in Kombination mit dem diskreten adjungierten Gradienten (Abschnitt 5.3) einer Frequenzgruppe  $i$  iterativ zu minimieren, werden in Abschnitt 5.4 beschrieben. Für eine bessere Leserlichkeit wird im Folgenden der Index  $i$  des Fehlerfunktionals  $\chi_i(\mathbf{m})$  vernachlässigt, da in der Regel immer das Fehlerfunktional für eine einzelne Frequenzgruppe betrachtet wird.

### 5.3. Diskreter adjungierter Gradient

Die Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  aus Gleichung 5.1, in welcher nach einem Bodenmodell  $\mathbf{m}$  gesucht werden soll, wird mittels der Minimierungsmethoden aus Abschnitt 5.4 berechnet, wobei für diese der Gradientenvektor  $\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m})$  benötigt wird, welcher die Ableitungen des Fehlerfunktionals nach den Koeffizienten der Bodeneigenschaften enthält. Innerhalb dieser Arbeit wird die diskrete adjungierte Methode eingesetzt (Fichtner, 2011, Kapitel 10). Zunächst wird die partielle Ableitung

des Fehlerfunktionals  $\chi(\mathbf{m})$  nach einem einzelnen Koeffizienten  $m_n$  des Koeffizientenvektors  $\mathbf{m}$  der diskretisierten Bodeneigenschaften gebildet. Dabei wird von dem Fehlerfunktional aus Gleichung 5.11 vorerst nur der Anteil einer Kreisfrequenz  $\omega_f$  sowie von diesem Anteil nur der Anteil, welcher durch die Anregung von einer Quelle  $s$  entsteht, betrachtet. Da das Funktional nur implizit über die Verschiebungskoeffizienten  $\bar{\mathbf{u}}$  von den Eigenschaften des Bodens abhängt, wird die Kettenregel eingesetzt:

$$\frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial m_n} = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial m_n} \right), \quad (5.14)$$

wobei nur der reelle Anteil verwendet wird. Für den ersten Faktor aus Gleichung 5.14 ergibt sich bei der Verwendung des Fehlerfunktionals der Fehlerquadrate aus Gleichung 5.11 und der Approximation der synthetischen Verschiebungen  $\hat{u}_{srd}$  an den Empfängern aus Gleichung 5.12 der Ausdruck:

$$\frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} 2 (\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f))^* \mathbf{d}_d^T \mathbf{N}(\mathbf{x}_r). \quad (5.15)$$

Da die einzelnen Ansatzfunktionen von  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_r)$  für alle Freiheitsgrade gleich Null sind, welche nicht den Bereich des Empfängers approximieren, besitzt der entstehende Vektor nur wenige Einträge. Der zweite Faktor aus Gleichung 5.14 kann über die partielle Ableitung der diskretisierten Wellengleichung aus Gleichung 3.33 nach dem Koeffizienten  $m_n$  der Bodeneigenschaften hergeleitet werden:

$$\frac{\partial (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})}{\partial m_n} \bar{\mathbf{u}} + (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial m_n} = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

Somit ergibt sich für die partielle Ableitung der Verschiebungskoeffizienten  $\bar{\mathbf{u}}$  nach dem Koeffizienten  $m_n$  der Bodeneigenschaften der Ausdruck:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial m_n} = - (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \frac{\partial (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})}{\partial m_n} \bar{\mathbf{u}}. \quad (5.17)$$

Durch das Einsetzen von Gleichung 5.17 in Gleichung 5.14 ergibt sich durch das Umordnen der einzelnen Terme die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial m_n} = \operatorname{Re} \left( - (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-T} \frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial (-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})}{\partial m_n} \bar{\mathbf{u}} \right). \quad (5.18)$$

Durch die Einführung des diskreten adjungierten Wellenfeldes  $\mathbf{u}^\dagger$  bzw. von dem Koeffizientenvektor des diskreten adjungierten Wellenfeldes  $\bar{\mathbf{u}}^\dagger$  mit:

$$(-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^T \bar{\mathbf{u}}^\dagger = - \frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial \bar{\mathbf{u}}}, \quad (5.19)$$

muss die Inverse der transponierten Systemmatrix nicht explizit bestimmt werden. Bei der Verwendung eines direkten Gleichungslösers kann die Faktorisierung der Systemmatrix, die schon für die Berechnung des Koeffizientenvektors  $\bar{\mathbf{u}}$  des Wellenfeldes durchgeführt wurde, wiederverwendet werden. Dabei wird die negative partielle Ableitung des Fehlerfunktionals nach dem Verschiebungskoeffizientenvektor als adjungierter Belastungsvektor verwendet. Gleichung 5.18

kann unter Verwendung des Koeffizientenvektors des diskreten adjungierten Wellenfeldes vereinfacht werden:

$$\frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial m_n} = \text{Re} \left( \bar{\mathbf{u}}^\dagger \frac{\partial(-\omega_f^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})}{\partial m_n} \bar{\mathbf{u}} \right). \quad (5.20)$$

Für die Berechnung von Gleichung 5.20 genügt die Betrachtung von wenigen Elementen, innerhalb derer eine Eigenschaft mit dem Koeffizienten  $m_n$  approximiert wird, da die Ableitung der Systemmatrix nach dem Koeffizienten  $m_n$  für die restlichen Einträge verschwinden würde. Über die Ableitungen der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  kann die Ableitung der Systemmatrix gebildet werden. Die Eigenschaften innerhalb der absorbierenden Randschichten werden nicht verändert, um die absorbierenden Eigenschaften nicht zu beeinträchtigen, weshalb für die zugehörigen Koeffizienten auch nicht die Ableitung berechnet werden muss. Da innerhalb dieser Arbeit die Seismogramme nur nach der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit sowie nach der Dichte invertiert werden, welche gleichzeitig für die Beschreibung der Eigenschaften verwendet werden, werden nur die zugehörigen partiellen Ableitungen im Folgenden betrachtet. Die partielle Ableitung der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  nach einem Koeffizienten der Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_{p_n}$  oder der Scherwellengeschwindigkeit  $v_{s_n}$  ist Null, da diese nicht direkt von den Wellengeschwindigkeiten abhängt. Für die partielle Ableitung der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  aus Gleichung 3.32 und Gleichung 3.44 nach einem Koeffizienten der Dichte  $\rho_n$  ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_n} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{N_{GP}} w_g^{\text{GP}} \frac{\partial \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}))}{\partial \rho_n} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})). \quad (5.21)$$

Um die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nach den Koeffizienten der Wellengeschwindigkeiten oder der Dichte partiell abzuleiten, muss lediglich in Gleichung 3.45 der Materialsteifigkeitstensor  $\mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x})$  partiell differenziert werden:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_n} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{N_{GP}} w_g^{\text{GP}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{Voigt}}(\mathbf{m}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}))}{\partial m_n} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g^{\text{GP}})). \quad (5.22)$$

Die Ableitungen des diskreten Steifigkeitstensors  $\mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x})$  nach den unterschiedlichen Koeffizienten der betrachteten Bodeneigenschaften besitzen die Form:

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{p_n}} = 2\rho v_{p_h} \frac{\partial v_{p_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{p_n}} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{s_n}} = 2\rho v_{s_h} \frac{\partial v_{s_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{s_n}} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}), \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial \rho_n} = \frac{\partial \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial \rho_n} ((v_p^2 - 2v_s^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + v_s^2 (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})), \quad (5.25)$$

wobei hier die Darstellung des Materialsteifigkeitstensors aus Gleichung 2.20 verwendet wurde. Eine Darstellung über die Voigt-Notation wäre ebenso möglich. Die partiellen Ableitungen der diskretisierten Wellengeschwindigkeiten  $v_{p_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})$  (Gleichung 3.17) und  $v_{s_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})$  (Gleichung 3.18) sowie der diskretisierten Dichte  $\rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x})$  (Gleichung 3.19) nach den zugehörigen Koeffizienten  $v_{p_n}$ ,  $v_{s_n}$  und  $\rho_n$  ergeben die assoziierte Formfunktion  $N_n^m(\mathbf{x})$ , welche für die Diskretisierung verwendet wurde:

$$\frac{\partial v_{p_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{p_n}} = \frac{\partial v_{s_h}(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial v_{s_n}} = \frac{\partial \rho_h(\mathbf{m}, \mathbf{x})}{\partial \rho_n} = N_n^m(\mathbf{x}). \quad (5.26)$$

Somit können alle Faktoren aus Gleichung 5.20 berechnet werden. Für jeden Eintrag  $n$  des Gradientenvektors  $\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m})$  werden die partiellen Ableitungen des Fehlerfunktionals  $\chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})$  über die Anzahl der verwendeten Quellen  $N_s$  und über die Anzahl der Frequenzen  $N_f$  der aktuellen Frequenzgruppe aufsummiert:

$$(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_n = \frac{1}{V_n} \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\partial \chi_s(\bar{\mathbf{u}}; \omega_f, \mathbf{m})}{\partial m_n}. \quad (5.27)$$

Des Weiteren werden die Einträge des Gradientenvektors auf das Volumen  $V_n$  normiert, welches mit dem zugehörigen Koeffizienten assoziiert wird, damit die Werte unabhängig von der gewählten Diskretisierung sind. Ein vergleichbares Vorgehen ist bei Lamert u. Friederich (2019) bei der Diskretisierung der kontinuierlichen Kerns des Fehlerfunktionals zu beobachten.

Exemplarisch werden in Abbildung 5.2 die Anteile des Gradienten für die Ableitungen nach den Koeffizienten der Kompressionswellengeschwindigkeit  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_p}$ , der Scherwellengeschwindigkeit  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_s}$  und nach den Koeffizienten der Dichte  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{\rho}$  dargestellt. Dazu wird das Gebiet aus Abschnitt 4.1 verwendet, wobei auch die selbe Diskretisierung zum Einsatz kommt. Für das Referenzmodell wurden mit  $v_p = 3800$  m/s und  $v_s = 2200$  m/s für die Wellengeschwindigkeiten sowie mit  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup> für die Dichte auch die selben Bodeneigenschaften verwendet. Für das aktuelle Bodenmodell  $\mathbf{m}$  werden jedoch mit  $v_p = 4000$  m/s und

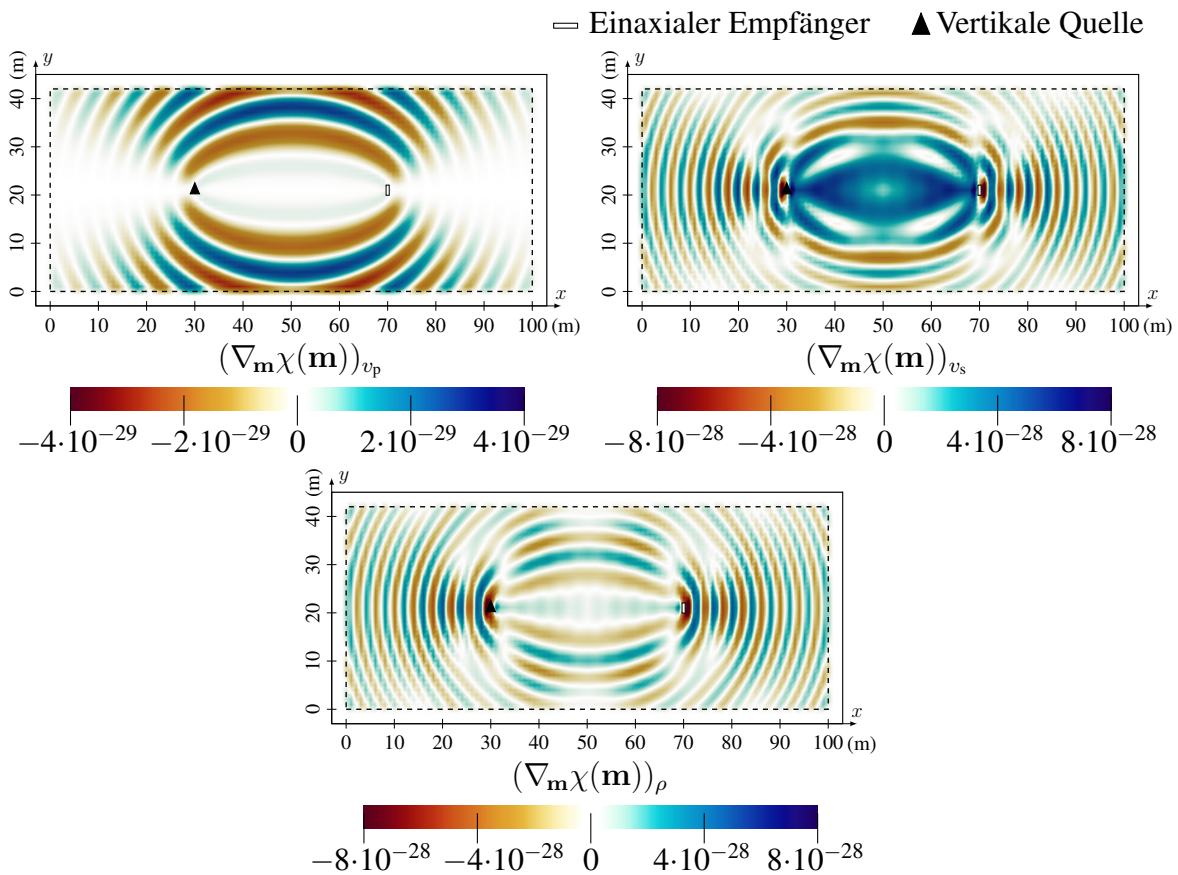


Abbildung 5.2.: Diskreter adjungierter Gradient  $\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m})$  für die Ableitungen nach den Koeffizienten der Kompressionswellengeschwindigkeit  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_p}$  (links oben), für die Ableitungen nach den Koeffizienten der Scherwellengeschwindigkeit  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_s}$  (rechts oben) und für die Ableitungen nach den Koeffizienten der Dichte  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{\rho}$  (unten).

$v_s = 2300$  m/s etwas höhere Wellengeschwindigkeit sowie mit  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> eine etwas höhere Dichte angenommen. Eine Punktquelle wird an der Position  $x_s = 30$  m und  $y_s = 21$  m eingesetzt, während ein einzelner Empfänger an der Position  $x_r = 70$  m und  $y_r = 21$  m verwendet wird. Die Quelle erzeugt eine Anregung in positiver vertikaler Richtung, während der Empfänger nur die Verschiebungen in vertikaler Richtung aufnimmt, wodurch sich die zugehörigen Richtungsvektoren  $\mathbf{d}_s = \mathbf{d}_r = (0 \ 1)^T$  ergeben. Da keine Quellfunktion spezifiziert wird, entsprechen die berechneten Verschiebungen den Greenschen Funktionen. Für den Gradienten aus Abbildung 5.2 wird mit 300 Hz nur eine einzelne Frequenz innerhalb der eingesetzten Frequenzgruppe verwendet. Ein Ansatzgrad von  $p = 2$  wird für die Approximation der Wellenfelder eingesetzt, während die Bodeneigenschaften in den Knoten diskretisiert und mit linearen Ansatzfunktionen innerhalb der Elemente interpoliert werden. Da auch der Gradient mithilfe der linearen Ansatzfunktionen approximiert wird, ist dessen Annäherung weniger kontinuierlich als die Approximation des berechneten Verschiebungsfelds  $\mathbf{u}$  und des diskreten adjungierten Verschiebungsfelds  $\mathbf{u}^\dagger$ . Die räumlichen Oszillationen des Gradienten für die Ableitungen nach der Kompressionswellengeschwindigkeit erstrecken sich über größere Distanzen als die räumlichen Oszillationen des Gradienten für die Ableitungen nach der Scherwellengeschwindigkeit und der Dichte. In den Bereichen, welche sich einerseits zwischen und andererseits unterhalb oder oberhalb der Quelle und dem Empfänger befinden, akkumulieren sich das normale und das adjungierte Wellenfeld aufgrund der symmetrischen Anordnung. In diesen Bereichen entsprechen die Distanzen, über welche sich eine räumliche Oszillation des Gradienten  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_p}$  erstreckt, den Wellenlängen von Kompressionswellen  $\Lambda_p$ , während die Distanzen, über welche sich die räumlichen Oszillationen der Gradienten  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_{v_s}$  und  $(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}))_\rho$  erstrecken, den Wellenlängen von Scherwellen  $\Lambda_s$  entsprechen. In den Bereichen links und rechts der Messanordnung sind die Distanzen der einzelnen räumlichen Oszillationen des Gradienten merklich niedriger.

## 5.4. Iterative Minimierungsmethoden

Verschiedene Methoden wurden entwickelt und bereits erfolgreich eingesetzt, um die Suchrichtungen  $\mathbf{r}$  zu bestimmen, welche mit möglichst wenigen Iterationen die Minimierung der Zielfunktion ermöglichen. Da die Berechnung der Hesse-Matrix, welche beispielsweise beim Einsatz des Newton-Verfahrens verwendet wird, sehr rechenintensiv ist, wurden nur Methoden verwendet, für welche eine explizite Berechnung der Hesse-Matrix nicht notwendig ist. Im Folgenden werden drei Methoden vorgestellt, welche zeitweise bei der Untersuchung des Potentials der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung in Tunneln mit dem vorgestellten Frequenzbereichsansatz zum Einsatz kamen.

### 5.4.1. Methode des steilsten Abstiegs

Für die Methode des steilsten Abstiegs wird der negative Gradient der Zielfunktion als Suchrichtung für die aktuelle Iteration  $k$  verwendet:

$$\mathbf{r}_k = -\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.28)$$

Diese Vorgehensweise ist sehr intuitiv, da das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m}_k)$  in dieser Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  lokal in der Umgebung von dem aktuellen Bodenmodell  $\mathbf{m}_k$  am stärksten abfällt. Für nichtli-

neare Probleme weißt die Methode des steilsten Abstiegs jedoch ein verhältnismäßig schlechtes Konvergenzverhalten zum globalen Minimum auf (Nocedal u. Wright, 2006, Kapitel 2).

#### 5.4.2. Methode der konjugierten Gradienten

Die Methode der konjugierten Gradienten wurde von Hestenes u. Stiefel (1952) für das iterative Lösen von linearen Gleichungssystemen entwickelt, welche die Form

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (5.29)$$

besitzen, wobei  $\mathbf{A}$  eine positiv definite Koeffizientenmatrix darstellt. Zur Bestimmung des Vektors  $\mathbf{c}$  wird eine anfängliche Annäherung  $\mathbf{c}_0$  ausgewählt. Das Residuum, welches sich aus Gleichung 5.29 bei Verwendung von  $\mathbf{c}_0$  ergibt, wird als Gradient verwendet und stellt im ersten Schritt, entsprechend der Methode des steilsten Abstiegs, die erste Suchrichtung  $\mathbf{r}_0$  dar. Mit Hilfe eines exakten Liniensuchverfahrens kann dann über das Pendant von Gleichung 5.1 die nächste Annäherung des Lösungsvektors bestimmt werden. Für die Bestimmung der folgenden Suchrichtungen werden die neuen Residuen angepasst, sodass  $\mathbf{r}_i^T \mathbf{A} \mathbf{r}_j = 0$  mit  $i \neq j$  gilt. Die Suchrichtungen werden dabei zueinander  $\mathbf{A}$ -konjugiert genannt, während die entstehenden Residuen zueinander orthogonal sind. Durch die Orthogonalitätsbedingungen wird eine Konvergenz zur Lösung innerhalb von spätestens  $n$  Schritten erreicht, wobei  $n$  die Dimension des linearen Gleichungssystems darstellt. Somit wird gleichzeitig verhindert, dass der Algorithmus immer wieder in ähnlichen Richtungen und somit zickzackförmig nach dem globalen Minimum sucht. Bei größeren Gleichungssystemen kann das Faktorisieren der Koeffizientenmatrix sehr aufwändig und zeitintensiv sein. Entsprechend birgt das iterative Lösen des linearen Gleichungssystems den Vorteil, dass innerhalb von wenigen Schritten nur durch das Multiplizieren von Vektoren und Matrizen der Vektor  $\mathbf{c}$  bestimmt werden kann (Nocedal u. Wright, 2006, Kapitel 5).

Für das Lösen von nichtlinearen Optimierungsproblemen modifizierten Fletcher u. Reeves (1964) die Methode der konjugierten Gradienten, da für diese Probleme einerseits statt der Residuen die Gradienten der Zielfunktion verwendet werden mussten und andererseits die Verwendung eines exakten Liniensuchverfahrens nicht mehr möglich war. Der entwickelte Ansatz stellte die erste Methoden zum Lösen von größeren nichtlinearen Optimierungsproblemen dar. Der Einsatz dieser Methode und ihrer verschiedenen Abwandlungen ist weitverbreitet (Nocedal u. Wright, 2006, Kapitel 5). Für die erste Suchrichtung  $\mathbf{r}_0$  wird wie bei der Methode des steilsten Abstiegs der negative Gradient des Fehlerfunktionals verwendet:

$$\mathbf{r}_0 = -\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_0). \quad (5.30)$$

Für die folgenden Suchrichtungen  $\mathbf{r}_k$  wird der negative Gradient des Fehlerfunktionals durch das Produkt der vorherigen Suchrichtung  $\mathbf{r}_{k-1}$  und des Faktors  $\beta_k$  angepasst:

$$\mathbf{r}_k = -\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) + \beta_k \mathbf{r}_{k-1}. \quad (5.31)$$

Da die Suchrichtung  $\mathbf{r}_{k-1}$  wiederum von der vorherigen Suchrichtung abhängt, wird  $\mathbf{r}_k$  indirekt auch durch alle vorherigen Suchrichtungen angepasst, wodurch nur die vorherige Suchrichtung berücksichtigt werden muss. Für die Berechnung des Faktors  $\beta_k$  wurden unterschiedliche Ansätze entwickelt, wie der von Hestenes u. Stiefel (1952):

$$\beta_k^{\text{HS}} = \frac{(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k))^T (\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) - \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1}))}{\mathbf{r}_{k-1}^T (\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) - \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1}))}, \quad (5.32)$$

der Ansatz von Fletcher u. Reeves (1964):

$$\beta_k^{\text{FR}} = \frac{(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k))^{\text{T}} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k)}{(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1}))^{\text{T}} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1})}, \quad (5.33)$$

sowie der Ansatz von Polak u. Ribière (1969):

$$\beta_k^{\text{PR}} = \frac{(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k))^{\text{T}} (\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) - \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1}))}{(\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1}))^{\text{T}} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k-1})}. \quad (5.34)$$

Der Ansatz von Polak und Ribière wurde mit dem vorgestellten Ansatz der Full-Waveform-Inversion schon bei Untersuchungen der seismischen Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau durch Riedel u. a. (2021b) eingesetzt, für welche als Vereinfachung die akustische Wellengleichung verwendet wurde. Die Ansätze von Hestenes und Stiefel sowie Fletcher und Reeves wurden auch implementiert, aber wurden, abgesehen von wenigen Vergleichsrechnungen, nicht weiter verwendet.

### 5.4.3. L-BFGS-Methode

Während die Methode des steilsten Abstiegs und die Methode der konjugierten Gradienten Verfahren erster Ordnung darstellen, versprechen Verfahren zweiter Ordnung eine bessere Konvergenz, da diese eine quadratische Approximation der Zielfunktion verwenden. Ein Beispiel für ein Verfahren der zweiten Ordnung stellt das Newton-Verfahren dar (Nocedal u. Wright, 2006, Kapitel 2). Für die Herleitung der Newton-Suchrichtung wird die Taylorreihenentwicklung der Zielfunktion, hier das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m}_{k+1})$ , für den nächsten Punkt  $\mathbf{m}_{k+1}$  in Abhängigkeit des aktuellen Entwicklungspunktes  $\mathbf{m}_k$  betrachtet, wobei die Summanden dritter und höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{m}_{k+1}) &= \chi(\mathbf{m}_k) + (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k)^{\text{T}} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k)^{\text{T}} \nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_k) (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dabei beinhaltet die Hesse-Matrix  $\nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_k)$  die zweiten Ableitungen des Fehlerfunktionals. Durch das Ableiten von Gleichung 5.35 nach dem nächsten Punkt  $\mathbf{m}_{k+1}$  ergibt sich:

$$\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k+1}) = \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k) + \nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_k) (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k). \quad (5.36)$$

Da der Punkt  $\mathbf{m}_{k+1}$  möglichst das Minimum des Fehlerfunktionals darstellen soll, wird unter Verwendung der notwendigen Bedingung für ein Minimum  $\nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_{k+1}) = \mathbf{0}$  gesetzt. Dadurch kann der Punkt  $\mathbf{m}_{k+1}$  durch das Umstellen von Gleichung 5.36 berechnet werden:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - (\nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_k))^{-1} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.37)$$

Durch den Vergleich von Gleichung 5.37 mit Gleichung 5.1 kann der folgende Zusammenhang erschlossen werden:

$$\alpha_k \mathbf{r}_k = - (\nabla_{\mathbf{m}}^2\chi(\mathbf{m}_k))^{-1} \nabla_{\mathbf{m}}\chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.38)$$

Somit müsste für das reine Newton-Verfahren die Schrittweite  $\alpha_k$  nicht zusätzlich bestimmt werden bzw.  $\alpha_k = 1$  könnte verwendet werden. Teilweise wird jedoch trotzdem die Schrittweite

separat bestimmt, wenn die Minimierung des Fehlerfunktionals  $\chi$  nicht zufriedenstellend zu sein scheint (Nocedal u. Wright, 2006, Kapitel 2). Bei komplexen Problemen ist auch für das Newton-Verfahren wichtig, dass der Ausgangspunkt  $\mathbf{m}_k$  sich in der Nähe der Lösung befindet. In diesem Fall weist das Newton-Verfahren üblicherweise eine quadratische Konvergenz auf.

Beim Newton-Verfahren erfordert die Berechnung und Invertierung der Hesse-Matrix einen sehr hohen Rechenaufwand, was einen erheblichen Nachteil darstellt. Quasi-Newton-Verfahren versuchen dieses Problem zu umgehen, indem die Hesse-Matrix über die Gradienten der vorherigen Iterationen approximiert wird. Dabei soll ein superlineares Konvergenzverhalten erreicht werden. Durch das Umformen von Gleichung 5.36 kann die Hesse-Matrix angenähert werden, da die Terme höherer Ordnung schon vernachlässigt wurden:

$$\nabla_{\mathbf{m}}^2 \chi(\mathbf{m}_k)(\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k) = \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_{k+1}) - \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.39)$$

Von der Approximation der Hesse-Matrix, welche im folgenden durch  $\mathbf{H}_k$  beschrieben wird, wird gefordert, dass sie die Sekantengleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{p}_k &= \mathbf{y}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_{k+1}) - \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_k). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Gleichzeitig muss sichergestellt werden, dass wesentliche Eigenschaften der echten Hesse-Matrix, wie Symmetrie, erhalten bleiben. Des Weiteren werden auch verschiedene Anforderungen an den Unterschied der approximierten Hesse-Matrix von zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten gestellt. Da die Inversion der approximierten Hesse-Matrix zusätzlichen Rechen- und Speicheraufwand darstellt, wird in der Regel direkt die inverse Hesse-Matrix  $\mathbf{H}^{-1}$  approximiert. Eines der beliebtesten Quasi-Newton-Verfahren stellt die BFGS-Methode dar, welche nach ihren Erfindern Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannt wurde (Nocedal u. Wright, 2006).

Insbesondere bei Problemen mit vielen Koeffizienten steigt der Speicherbedarf für die approximierte Hesse-Matrix enorm an. Daher wurden Abwandlungen dieser Methoden entwickelt, welche nur einen begrenzten Speicherbedarf (*low memory*) benötigen, indem nur einzelne Vektoren abgespeichert werden müssen, welche die Informationen für die approximierte Hesse-Matrix implizit enthalten. Die Abwandlung der BFGS-Methode, welche für einen reduzierten Speicherbedarf ausgelegt wurde, wird L-BFGS-Methode genannt und verwendet das Krümmungsverhalten der letzten Iterationen, um die Hesse-Matrix zu approximieren. Für die erste Iteration der L-BFGS-Methode wird ein Schritt nach der Methode des steilsten Abstiegs durchgeführt, da bei der ersten Iteration noch keine Informationen von vorherigen Iterationsschritten verwendet werden können:

$$\mathbf{r}_0 = -\nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_0). \quad (5.41)$$

Durch Algorithmus 1 wird veranschaulicht, wie durch die L-BFGS-Methode die weiteren Suchrichtungen  $\mathbf{r}_k$  berechnet werden, welche in Gleichung 5.1 eingesetzt werden müssen. Entsprechend ist im Gegensatz zum ursprünglichen Newton-Verfahren ein Liniensuchverfahren erforderlich, wobei die Suchrichtungen  $\mathbf{r}_k$  durch den Algorithmus so normiert werden, dass für die Schrittweiten  $\alpha_k \approx 1$  gilt. Als anfängliche Hesse-Matrix wurde eine skalierte diagonale Matrix verwendet, welche einfachheitshalber in dem Vektor  $\mathbf{h}^{\text{diag}}$  gespeichert werden kann. Diese Wahl hat sich in der Praxis als effektiv herausgestellt, wobei die anfängliche Hesse-Matrix auch anders gewählt werden kann (Nocedal u. Wright, 2006). Durch  $n$  kann angegeben werden, von wie vielen vorherigen Iterationen maximal das Krümmungsverhalten berücksichtigt



**Algorithmus 1** : L-BFGS-Methode nach Nocedal u. Wright (2006, Kapitel 7)

---

```

1  $\mathbf{h}^{\text{diag}} = \frac{\mathbf{y}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}}{\mathbf{y}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}} (1, \dots, 1)^T$ 
2  $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_k)$ 
3 for  $j = k - 1, k - 2, \dots, k - \min(k, n)$  do
4    $\phi_j = \frac{1}{\mathbf{y}_j^T \mathbf{P}_j}$ 
5    $\gamma_j = \phi_j \mathbf{y}_j^T \mathbf{q}$ 
6    $\mathbf{q} = \mathbf{q} - \gamma_j \mathbf{y}_j$ 
7 end
8  $\mathbf{r}_k = \mathbf{h}^{\text{diag}} \circ \mathbf{q}$ 
9 for  $j = k - \min(k, n), k - \min(k, n) + 1, \dots, k - 1$  do
10   $\psi = \phi_j \mathbf{y}_j^T \mathbf{r}_k$ 
11   $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k + (\gamma_j - \psi) \mathbf{P}_j$ 
12 end
13  $\mathbf{r}_k = -\mathbf{r}_k$ 

```

---

werden soll. Entsprechend müssen auch nur die letzten  $n$  Differenzen der diskretisierten Bodeneigenschaften  $\mathbf{p}$  sowie die letzten  $n$  Differenzen der Gradienten des Fehlerfunktionals  $\mathbf{y}$  gespeichert werden. Der Operator  $\circ$  in der achten Zeile von Algorithmus 1 kennzeichnet dabei das Hadamard-Produkt, bei welchem die Komponenten der Vektoren oder Matrizen, welche die gleichen Dimensionen besitzen müssen, einzeln miteinander multipliziert werden. Nach Gleichung 5.38 entspricht die berechnete Suchrichtung dabei der Approximation:

$$\mathbf{r}_k = -\alpha_k^{-1} \mathbf{H}^{-1} \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_k). \quad (5.42)$$

Der vorgestellte Algorithmus für die L-BFGS-Methode wurde für alle Inversionen eingesetzt, welche in dieser Arbeit vorgestellt werden. Des Weiteren wurde die L-BFGS-Methode bereits von Lamert u. Friederich (2019) in Kombination mit einem Zeitbereichsansatz der Full-Waveform-Inversion verwendet, um das Potential der Full-Waveform-Inversion für die geologische Vorerkundung im maschinellen Tunnelbau zu untersuchen. In dem Zusammenhang wurden auch die Ergebnisse von der Methode des steilsten Abstiegs, der Methode der konjugierten Gradienten und der L-BFGS-Methode für ein schematisches Beispiel miteinander verglichen, wobei die L-BFGS-Methode das Fehlerfunktional am besten minimieren konnte.

## 5.5. Liniensuchverfahren

Das Liniensuchverfahren stellt ein eindimensionales Minimierungsproblem dar, durch welches die Schrittweite  $\alpha_k$  bestimmt werden soll, welche das Fehlerfunktional  $\chi$ , durch eine Veränderung der diskretisierten Bodeneigenschaften  $\mathbf{m}_k$  des Iterationsschritts  $k$ , für die zuvor bestimmte Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  minimiert:

$$\chi(\mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k) = \min_{\alpha > 0} \chi(\mathbf{m}_k + \alpha \mathbf{r}_k). \quad (5.43)$$

Für diese Aufgabe sind sowohl exakte als auch inexakte Liniensuchverfahren vorhanden. Einerseits ist die exakte Bestimmung der optimalen Schrittweite für ein hochgradig nichtlineares

Probleme, wie bei der Full-Waveform-Inversion, in der praktischen Anwendung nicht möglich. Andererseits ist die Bestimmung einer Schrittweite, welche nahezu exakt ist, viel zu rechenintensiv. Entsprechend bieten sich inexakte Liniensuchverfahren an, mit welchen eine Schrittweite bestimmt werden soll, welche die Zielfunktion ausreichend minimiert. Für die inexakten Liniensuchverfahren werden in der Regel Interpolationsmethoden oder Abschnittsmethoden verwendet (Sun u. Yuan, 2006, Kapitel 2). Bei den Interpolationsmethoden wird stellvertretend für die Zielfunktion eine von  $\alpha$  abhängige Funktion  $f(\alpha)$  approximiert, indem über einzelne bekannte Funktionswerte der Zielfunktion und ggf. auch über deren Ableitungen ein quadratisches oder kubisches Polynom angepasst wird. Die Schrittweite  $\bar{\alpha}$ , welche das Polynom minimiert, wird genutzt um das Intervall, welches die verschiedenen Schrittweiten für die Approximation enthält, zu reduzieren und sukzessiv eine möglichst optimale Schrittweite  $\alpha_k$  für den Iterationsschritt  $k$  zu bestimmen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Algorithmus implementiert, welcher eine quadratische Approximation des Fehlerfunktionals  $\chi$  durch drei Berechnungspunkte berechnet (Sun u. Yuan, 2006, Kapitel 2). Andere Algorithmen verwenden für eine quadratische oder kubische Approximation nur zwei Berechnungspunkte, indem zusätzlich die Ableitung der Zielfunktion nach dem jeweiligen gewählten Berechnungspunkt  $\alpha_i$  verwendet wird:

$$\frac{d}{d\alpha_i} \chi(\mathbf{m}_k + \alpha_i \mathbf{r}_k) = \mathbf{r}_k^T \nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}_k + \alpha_i \mathbf{r}_k). \quad (5.44)$$

Zwar wäre bei diesen Algorithmen der Berechnungsaufwand niedriger, da das Fehlerfunktional für die unterschiedlichen Schrittweiten seltener ausgewertet werden muss und somit seltener die Verschiebungen numerisch berechnet werden müssen. Jedoch wurde bei ersten Untersuchungen ein weniger robustes Verhalten dieser Algorithmen für die vorgestellte Anwendung beobachtet.

### 5.5.1. Quadratische Approximation durch drei Punkte

Ein Satz von drei Schrittweiten  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  mit den zugehörigen Werten  $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$  für das Fehlerfunktional muss ausgewählt werden. Zusammen mit der Approximation einer quadratischen Funktion  $f(\alpha)$  ergeben sich die folgenden drei Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = \chi(\mathbf{m}_k + \alpha_1 \mathbf{r}_k) = \chi_1, \\ f(\alpha_2) &= a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c = \chi(\mathbf{m}_k + \alpha_2 \mathbf{r}_k) = \chi_2, \\ f(\alpha_3) &= a\alpha_3^2 + b\alpha_3 + c = \chi(\mathbf{m}_k + \alpha_3 \mathbf{r}_k) = \chi_3. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Durch das Lösen des in Gleichung 5.45 gegebenen linearen Gleichungssystems können die beiden Parameter  $a$  und  $b$  der erstellten quadratischen Gleichung  $f(\alpha)$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a &= - \frac{(\alpha_2 - \alpha_3) \chi_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \chi_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \chi_3}{(\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ b &= \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \chi_1 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \chi_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \chi_3}{(\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_3 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Da ein optimaler Wert für die Schrittweite  $\alpha$  die notwendige Bedingung für ein Minimum erfüllen muss, kann aus der Ableitung der quadratischen Approximation nach der Schrittweite, zusammen mit den errechneten Parametern aus Gleichung 5.46, die optimale Schrittweite  $\bar{\alpha}$  berechnet werden:

$$\bar{\alpha} = - \frac{b}{2a}. \quad (5.47)$$

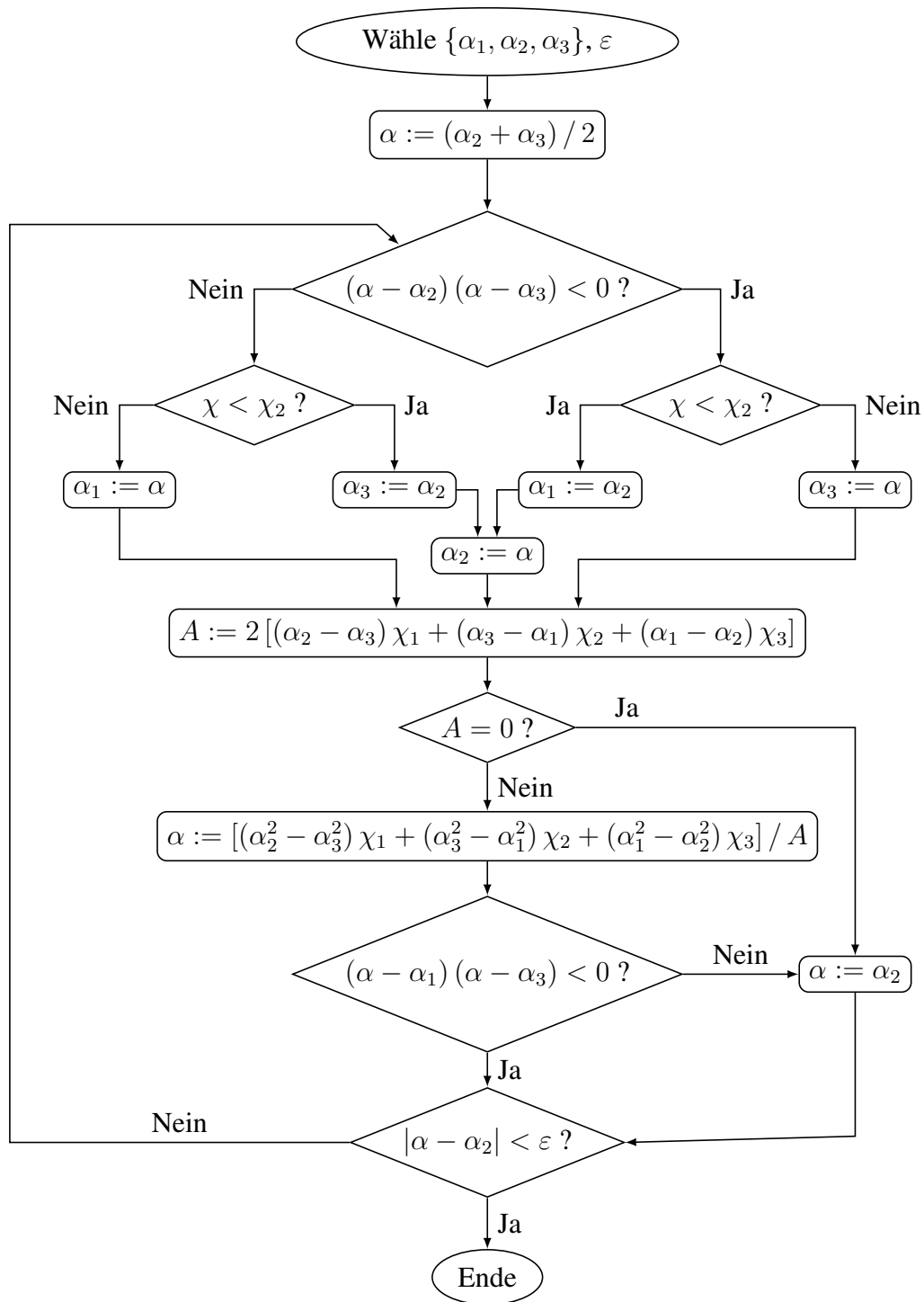


Abbildung 5.3.: Ablaufschema des Liniensuchverfahrens nach Sun u. Yuan (2006, Kapitel 2), welches eine quadratische Approximation durch drei Punkten verwendet.

Da das Fehlerfunktional  $\chi$  jedoch in der Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  voraussichtlich keine quadratische Funktion darstellt, wird die quadratische Approximation iterativ, mit einem angepassten Satz der Schrittweiten  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , wiederholt, bis die Differenz von der mittleren Schrittweite  $\alpha_2$  und der, für die aktuelle Approximation, optimalen Schrittweite  $\bar{\alpha}$  einen festgelegten Grenzwert  $\varepsilon$  unterschreitet. Der verwendete Algorithmus wird durch das Ablaufschema in Abbildung 5.3 genauer erläutert und in Abbildung 5.4 wird exemplarisch dargestellt, wie sich dieses Liniensuchverfahren während der ersten beiden Iterationen verhält.

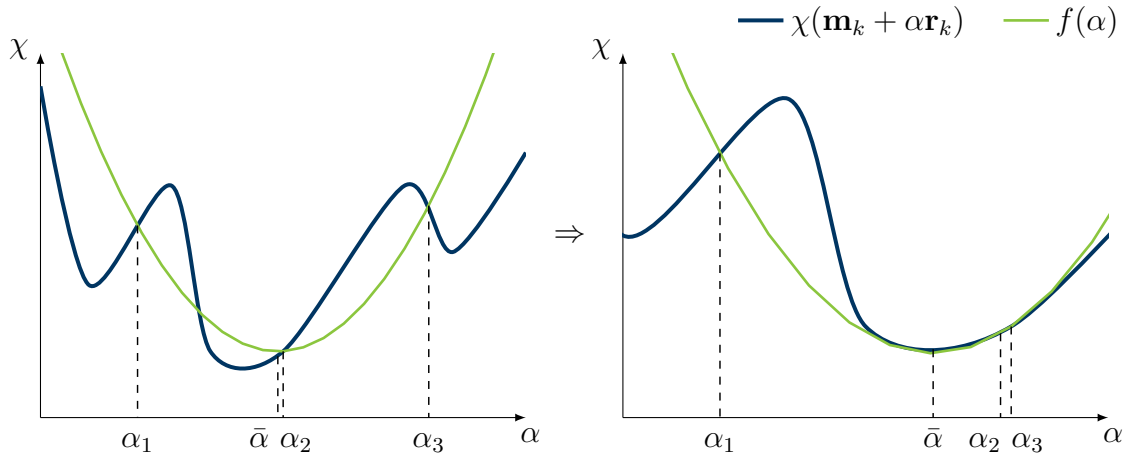


Abbildung 5.4.: Exemplarische Darstellung der Funktionsweise des Liniensuchverfahrens für die zwei ersten Iterationsschritte (von links nach rechts). Das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m}_k + \alpha \mathbf{r}_k)$  wird durch eine quadratische Approximation  $f(\alpha)$  angenähert, welche durch drei Punkte berechnet wird.

Das Liniensuchverfahren erhöht den Berechnungsaufwand der Full-Waveform-Inversion drastisch, da für die Berechnung des Fehlerfunktionals  $\chi$  jeweils alle Wellenfelder für alle Quellen und für alle Frequenzen der aktuellen Frequenzgruppe für die verschiedenen Schrittweiten numerisch berechnet werden müssen. Daher ist eine effiziente Gestaltung des Liniensuchverfahrens und eine geschickte Wahl des Intervalls, in welchem nach einer optimalen Schrittweite gesucht werden soll, erforderlich. Da das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m}_k + \alpha \mathbf{r}_k)$  in Abhängigkeit von der Schrittweite  $\alpha$  üblicherweise für die Full-Waveform-Inversion ein nichtlineares Verhalten aufweist, soll die Minimierung aus Gleichung 5.43 in der näheren Umgebung zum aktuellen Entwicklungspunkt  $\mathbf{m}_k$  durchgeführt werden. Daher wird die anfängliche untere Grenze des Intervalls  $\alpha_1 = 0$  gesetzt, wodurch auch der schon zuvor berechnete Wert des Fehlerfunktionals für die aktuellen Materialkoeffizienten  $\chi(\mathbf{m}_k)$  für die erste Iteration innerhalb des Liniensuchverfahrens wiederverwendet werden kann. Die anfängliche obere Grenze des Intervalls  $\alpha_3$  wird durch eine maximal zulässige Änderung der jeweiligen Bodeneigenschaften begrenzt, um sicherzustellen, dass in der näheren Umgebung des Entwicklungspunktes nach der optimalen Schrittweite gesucht wird. Dabei wird die niedrigste der maximalen Schrittweiten der jeweiligen Bodeneigenschaften verwendet, welche zuvor über die betragsmäßig höchsten Werte der Suchrichtung  $\mathbf{r}_k$  für die verschiedenen Bodeneigenschaften berechnet wurden. Die maximal zulässigen Änderungen der jeweiligen Bodeneigenschaften werden über die Eigenschaften des ursprünglichen Ausgangsmodells skaliert, wobei die zulässigen Änderungen der Bodeneigenschaften für die erste Iteration einer Frequenzgruppe höher gewählt werden als für die zweite Iteration, welche wiederum höher angesetzt werden als für die restlichen Iterationen. Somit sollen größere Änderungen der Bodenkoeffizienten, welche zu Beginn einer Frequenzgruppe zu erwarten sind, ermöglicht und gleichzeitig soll das Intervall des Liniensuchverfahrens für die weiteren Iterationen möglichst reduziert werden, um den Berechnungsaufwand niedrig zu halten. Für die anfängliche mittlere Schrittweite  $\alpha_2$  wird einfachheitshalber die Hälfte der oberen Schrittweite  $\alpha_3$  verwendet. Wenn die optimale Schrittweite, welche durch das in Abbildung 5.3 vorgestellte Ablaufschema berechnet wurde, zu einem höheren Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m}_k + \bar{\alpha} \mathbf{r}_k)$  führt als das Fehlerfunktional für die vorherigen diskretisierten Bodeneigenschaften  $\chi(\mathbf{m}_k)$ , dann werden die Werte des anfänglichen Intervalls der Schrittweiten auf ein Zehntel der ursprünglichen Werte reduziert und die Berechnung wird erneut durchgeführt, sodass noch näher zum aktuellen Entwicklungspunkt nach einer optimalen Schrittweite gesucht wird.

## 5.6. Inversionsstrategien

Wie in Abschnitt 5.1 beschrieben wurde, erschweren die Uneindeutigkeit des inversen Problems und die lokalen Minima die Suche nach einem Bodenmodell, welches das wahre Bodenmodell ausreichend beschreibt. Des Weiteren können einerseits durch verrauschte Referenzdaten sowie aufgrund von vereinfachenden Annahmen, wie der Annahme isotropen Bodenverhaltens und der zu groben Abschätzung des intrinsischen Dämpfungsverhaltens, Unterschiede innerhalb der Seismogramme entstehen, welche bei der Inversion zu ungenauen bis ungenügenden Rekonstruktionen der wahren Bodeneigenschaften führen. Um diese Probleme zu adressieren und den iterativen Inversionsprozess so zu beeinflussen, dass physikalisch sinnvolle und plausible Bodenmodelle resultieren, wurden verschiedene Strategien entwickelt.

### 5.6.1. Multi-Skalen-Ansatz

Durch Gradientenverfahren wird in der näheren Umgebung des aktuellen Entwicklungspunkts nach dem Bodenmodell gesucht, welches das Fehlerfunktional  $\chi(\mathbf{m})$  minimiert. Damit das globale Minimum gefunden werden kann, muss sich das Modell  $\mathbf{m}_0$ , mit welchem der Inversionsprozess begonnen wird, im Einzugsbereich des globalen Minimums befinden. Ansonsten ist die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, dass durch die Inversion ein Bodenmodell rekonstruiert wird, welches ein unzureichendes lokales Minimum des Fehlerfunktionals darstellt. Somit ist einerseits eine Berücksichtigung aller Informationen ratsam, welche die Auswahl eines anfänglichen Bodenmodells ermöglichen, das möglichst nah an das voraussichtlich wahre Bodenmodell heranreicht. Innerhalb dieser Arbeit wird die Full-Waveform-Inversion immer mit einem Bodenmodell begonnen, dessen Eigenschaften im betrachteten Bereich homogen sind. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die verwendeten Eigenschaften, aufgrund der vorausgehenden Charakterisierung des Bodens über beispielsweise Vorauserkundungsbohrungen (vergleiche Abschnitt 1.2), die wahren Eigenschaften des umgebenden Bodens ausreichend beschreiben können. Andererseits kann auch durch den Einsatz eines Multi-Skalen-Ansatzes der Einfluss des gewählten Ausgangsmodells reduziert werden, was in Abbildung 5.5 illustriert wird. Die Komplexität des Fehlerfunktionals und somit die Anzahl an lokalen Minima ist proportional zu den sich ergebenden Wellenlängen. Bei niedrigen Frequenzen entstehen lange Wellenlängen, welche zu einem weniger komplexen Fehlerfunktional führen. Mit steigenden Kreisfrequenzen  $\omega$  reduzieren sich die Wellenlängen und die Komplexität des Fehlerfunktionals nimmt zu. Beim Multi-Skalen-Ansatz werden zu Beginn der Inversion nur Informationen von niedrigen Frequenzen verwendet, da für ein weniger komplexes Fehlerfunktional die Wahrscheinlichkeit größer ist, dass sich das Ausgangsmodell  $\mathbf{m}_0$  im Einzugsbereich des globalen Minimums (grauer Bereich) befindet. Dabei werden für niedrige Frequenzen nur entsprechend grobe Strukturen rekonstruiert. Das Bodenmodell, welches das Inversionsergebniss für niedrige Frequenzen darstellt, beispielsweise  $\mathbf{m}_1$  aus Abbildung 5.5, wird als Ausgangsmodell für die nächsten Inversionsschritte verwendet, bei welchen die eingesetzten Frequenzen erhöht werden. Durch die vorangegangenen Inversionsschritte mit niedrigeren Frequenzen, ist die Wahrscheinlichkeit höher, dass sich das neue Ausgangsmodell im Einzugsbereich des zugehörigen globalen Minimums befindet oder zumindest in dem Einzugsbereich eines besseren lokalen Minimums. Diese Vorgehensweise wird sukzessiv wiederholt, bis sich mit steigenden Frequenzen nach und nach schärfere Konturen rekonstruieren lassen, für welche das zugehörige Bodenmodell ein besseres Minimum darstellt, als bei einer Inversion möglich gewesen wäre, für welche direkt das gesamte Frequenzspektrum verwendet worden wäre (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.1).

Der Multi-Skalen-Ansatz wird verwendet, um vor allem Artefakte in den rekonstruierten Bodeneigenschaften zu vermeiden, welche auf das Cycle-Skipping zurückzuführen sind. Diese Artefakte treten auf, wenn der Inversionsalgorithmus die Bodeneigenschaften so verändert, dass nicht die eigentliche Schwingung, sondern die vorherige oder die folgende Schwingung, des synthetischen Seismogramms auf die zugehörige Schwingung der Referenzdaten angepasst wird. Dies hat zur Folge, dass eine Schwingung, durch die Veränderung der Bodeneigenschaften, fälschlicherweise übersprungen wird, was vornehmlich geschieht, wenn die anfänglich synthetisch berechnete Auslenkung mehr als eine halbe Schwingungsperiode phasenverschoben ist (Virieux u. Operto, 2009). Dieses Phänomen vom Cycle-Skipping tritt insbesondere für hochfrequente Schwingungen auf. Durch die anfängliche Verwendung von niedrigeren Frequenzen für die ersten Inversionsschritte, wird eine Reduktion der ursprünglichen Phasenverschiebungen der Auslenkungen ermöglicht, bevor die kritischen Frequenzen innerhalb der Inversion eingesetzt werden. Bei den meisten Anwendungsgebieten der Full-Waveform-Inversion stellt das Cycle-Skipping-Phänomen eine der größten Herausforderungen dar, weil die Messdaten üblicherweise keine belastbaren Anteile von niedrigen Frequenzen enthalten, wodurch der Einsatz eines Multi-Skalen-Ansatzes möglicherweise nicht erfolgreich wäre (Hu u. a., 2018). In Kapitel 6 werden ausschließlich synthetische Referenzdaten invertiert. Die enthaltenen Informationen von niedrigen Frequenzen sind im Vergleich zu gemessenen Seismogrammen belastbar, weswegen das Cycle-Skipping-Phänomen mittels des Multi-Skalen-Ansatzes abgeschwächt werden kann. Der Anteil an niedrigen Frequenzen, welche für den Multi-Skalen-Ansatz benötigt werden, ist beim

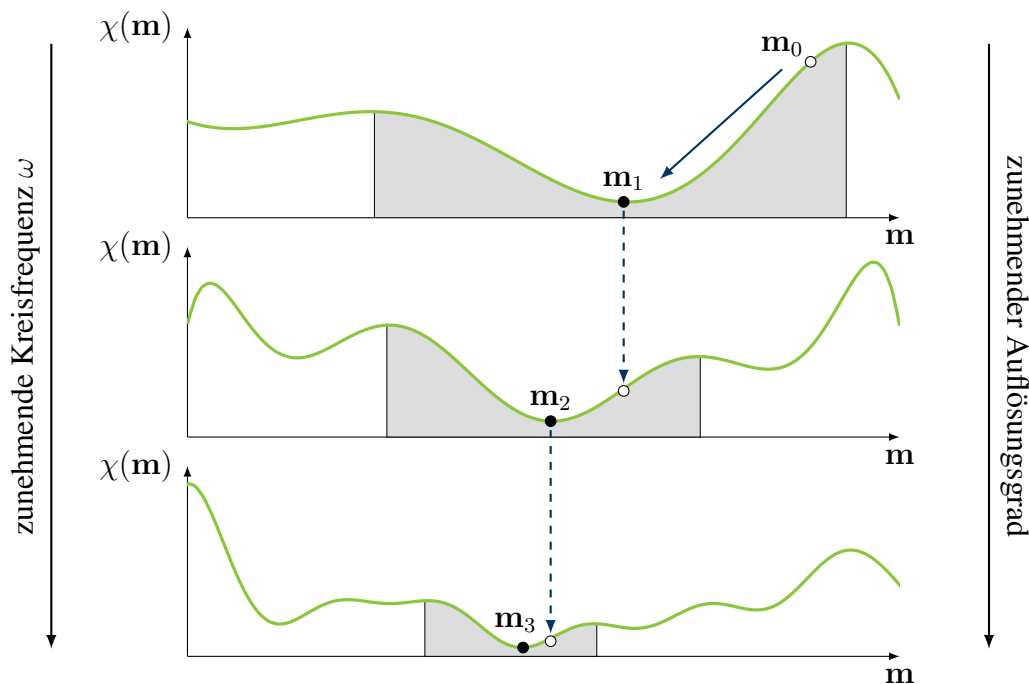


Abbildung 5.5.: Veranschaulichung des Multi-Skalen-Ansatzes, bei welchem das Fehlerfunktional  $\chi(m)$  zuerst für niedrigere Frequenzen und im Folgenden sukzessiv für steigende Frequenzen minimiert wird. Da die Komplexität des Fehlerfunktionals mit steigenden Frequenzen zunimmt, befindet sich das Bodenmodell, welches nach den ersten Inversionsschritten rekonstruiert wurde, voraussichtlich bei der Inversion mit höheren Frequenzen im Einzugsbereich (grauer Bereich) eines besseren Minimums, als bei einer direkten Inversion mit höheren Frequenzen. Diese Abbildung wurde einer Abbildung von Fichtner (2011) nachempfunden.

Einsatz im maschinellen Tunnelbau merklich höher als bei Untersuchungen auf beispielsweise kontinentaler Ebene. Daher könnte das Cycle-Skipping-Problem im maschinellen Tunnelbau eine kleinere Herausforderung als bei anderen Anwendungen darstellen.

Im Zeitbereich ist der Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes durch die Verwendung eines Tiefpass-Filters möglich, für welchen die Grenzfrequenz des Filters von einer niedrigen Frequenz aus schrittweise erhöht wird. Dabei muss das Filter sowohl auf die Referenzdaten als auch auf die synthetischen Seismogramme angewendet werden, wobei alternativ auch die Quellsignale, welche für die numerische Berechnung der Wellenausbreitung verwendet werden, anstatt der synthetischen Seismogramme gefiltert werden können (vergleiche Lamert u. Friederich, 2019). Der Einsatz eines Multi-Skalen-Ansatzes zur Reduzierung der Nichtlinearität des inversen Problems ist bei der Durchführung der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich sehr üblich (Pratt, 1999). Da das Fehlerfunktional, wie in Abschnitt 5.2 erläutert wurde, sukzessiv für unterschiedliche Frequenzgruppen minimiert wird, ist der Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes sehr intuitiv. Somit müssen lediglich für die ersten Frequenzgruppen niedrige Frequenzen ausgewählt werden, während für die folgenden Frequenzgruppen fortschreitend höhere Frequenzen zum Einsatz kommen sollten.

Die Verwendung von mehreren Frequenzen innerhalb einer Frequenzgruppe erhöht die Redundanz der Informationen, wodurch die Uneindeutigkeit des inversen Problems reduziert wird. Insbesondere wenn komplexere Effekte bei der Wellenausbreitung auftreten, wie beispielsweise die Umwandlung von Wellenarten und frequenzabhängige Dämpfungseffekte, ist die Verwendung von mehreren Frequenzen empfehlenswert, um den Inversionsprozess robuster zu gestalten. Bei der Inversion im Frequenzbereich erhöht sich jedoch der Berechnungsaufwand durch jede zusätzliche Frequenz in einer Frequenzgruppe merklich. Zwischen der Höhe des entstehenden Berechnungsaufwands, der Robustheit des Inversionsprozesses sowie der Reduzierung des Einflusses von hochfrequenten Artefakten, welche auf das Cycle-Skipping-Phänomen zurückzuführen sind, muss daher ein pragmatischer Kompromiss gefunden werden (Brossier u. a., 2009).

### 5.6.2. Regularisierungsmethoden

Um zu erreichen, dass das rekonstruierte Bodenmodell ein physikalisch motiviertes Minimum des Fehlerfunktionals darstellt, werden üblicherweise Methoden zur Regularisierung der inversen Problemstellung verwendet. Durch diese Methoden sollen die Bodenmodelle bevorzugt werden, welche vorhandenes Vorwissen und Erfahrungen widerspiegeln, oder die Bodenmodelle, welche die Ergebnisse auf einfache und gleichzeitig relevante Merkmale reduzieren. Dabei soll unter anderem auch eine Überanpassung an die Referenzdaten verhindert werden (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2). Ausgewählte Strategien werden im Folgenden erläutert, wobei nicht alle für die Untersuchungen in dieser Arbeit eingesetzt werden. Eine gute Übersicht zu diesen und weiteren Strategien bietet Fichtner (2011, Unterabschnitt 7.4.2).

#### Regularisierung des Fehlerfunktionals

Eine Erweiterung des Fehlerfunktionals  $\chi(\mathbf{m})$  um einen quadratischen Term wird als Tikhonov-Regularisierung bezeichnet (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2):

$$\chi_{\text{reg}}(\mathbf{m}) = \chi(\mathbf{m}) + \eta \|\mathbf{R}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{ref}})\|_2^2, \quad (5.48)$$

wobei mit  $\|\bullet\|_2^2$  das Quadrat der euklidischen Vektornorm bezeichnet wird. Durch  $\mathbf{m}_{\text{ref}}$  wird der Koeffizientenvektor eines Referenzmodells dargestellt, während mit  $\mathbf{R}$  die Tikhonov-Matrix beschrieben wird. Mittels des Parameters  $\eta$  wird der Einfluss des zusätzlichen Summanden im Verhältnis zu dem Wert des ursprünglichen Fehlerfunktionals festgelegt. Durch das partielle Differenzieren des zusätzlichen Terms muss auch der Gradient erweitert werden. Durch diese Regularisierungsstrategie wird verhindert, dass eine Überanpassung an die Referenzdaten stattfindet, welche auch von Messungenauigkeiten behaftet sein können. Gleichzeitig sollen die rekonstruierten Bodenmodelle vereinfacht werden, indem beispielsweise räumlich alternierende Änderungen der Eigenschaften, welche unter anderem auf die Verwendung der Wellenfelder  $\mathbf{u}$  und der adjungierten Wellenfelder  $\mathbf{u}^\dagger$  bei der Berechnung des Gradienten zurückzuführen sind, unterdrückt werden.

Der Einsatz der Identitätsmatrix als Tikhonov-Matrix  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  wird als Normdämpfung bezeichnet. Dabei werden Bodenmodelle bestraft, deren Eigenschaften sich zunehmend von denen des Referenzmodells unterscheiden. Die Koeffizienten, welche den zusätzlichen Summanden mehr erhöhen, als sie das ursprüngliche Fehlerfunktional minimieren, erhöhen das regularisierte Fehlerfunktional. Durch die Regularisierung nähern sich diese Koeffizienten an die Koeffizienten des Referenzmodells an. Bei dieser Strategie müssen zwei kritische Punkte adressiert werden. Der Skalierungsparameter  $\eta$  beeinflusst den Inversionsprozess signifikant. Ist dieser zu groß, dann ist der Einfluss des zugehörigen Regularisierungssummanden größer als der Einfluss des ursprünglichen Fehlerfunktionals, wodurch eine Optimierung des Bodenmodells mittels der seismischen Messdaten kaum noch stattfindet. Insbesondere bei der Inversion im Frequenzbereich verändert sich das ursprüngliche Fehlerfunktional sprunghaft bei den Wechseln zwischen den Frequenzgruppen, wodurch sich der Einfluss des Regularisierungssummanden bei gleichbleibendem Skalierungsparameter  $\eta$  fortlaufend verändert. Der selbe Effekt ist auch innerhalb der Frequenzgruppen vorhanden, da durch den Minimierungsprozess der Wert des ursprünglichen Fehlerfunktionals sinken sollte. Asnaashari u. a. (2013) passen den Skalierungsparameter  $\eta$  beispielsweise so an, dass sich das Verhältnis des Fehlerfunktionals und des Regularisierungssummanden des Ausgangsmodells zwischen  $10^{-3}$  und  $10^{-2}$  befindet. Ein recht kleines Verhältnis beider Summanden bewirkt, dass insbesondere während der ersten Iterationen vornehmlich das ursprüngliche Fehlerfunktional minimiert wird. Des Weiteren ist die Wahl des Referenzmodells entscheidend, für welches zusätzlich vorhandene Informationen über die Beschaffenheit des Bodens vereinfacht eingebunden werden können. Wobei die Verwendung von Referenzmodellen mit vorwiegend homogenen Eigenschaften bzw. in horizontaler Richtung homogenen Eigenschaften nicht unüblich ist (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2).

Bei der Verwendung einer Differentialoperatormatrix  $\mathbf{D}$  als Tikhonov-Matrix  $\mathbf{R} = \mathbf{D}$ , für welche meistens eine Approximation des Laplace-Operators mittels der Finite-Differenzen-Methode berechnet wird, werden rapide Änderungen der Eigenschaften des Bodenmodells bestraft, weswegen dieses Vorgehen als Ableitungsdämpfung bezeichnet wird. Die räumlichen Änderungen der Eigenschaften der bevorzugten Modelle würden somit vornehmlich glatte beziehungsweise klare Übergänge besitzen (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2).

Die unterschiedlichen Ansätze der Tikhonov-Regularisierung wurden für die Probleme, welche in dieser Arbeit untersucht werden, nicht eingesetzt. Auch andere Erweiterungen des Fehlerfunktionals, um das Inversionsproblem zu regularisieren, sind generell möglich. Jedoch bleibt bei diesen Ansätzen die Gewichtung des Regularisierungsterms ein kritischer Aspekt.



### Regularisierung durch Wahl der Diskretisierung des Bodenmodells

Über die Wahl der Ansatzfunktionen aus Gleichung 3.17, Gleichung 3.18 und Gleichung 3.19, mit welchen über die Koeffizienten  $m$  die Eigenschaften des Bodens räumlich angenähert werden, wird gleichzeitig auch eingeschränkt, wie die Eigenschaften des Bodens rekonstruiert werden können. So können über eine elementweise Diskretisierung der Bodeneigenschaften sprunghafte Änderungen der Eigenschaften rekonstruiert werden, während eine knotenweise Diskretisierung, bei welcher die Eigenschaften mittels linearer Ansatzfunktionen in die jeweiligen Elemente interpoliert werden, keine abrupten räumlichen Änderungen der Eigenschaften im rekonstruierten Bodenmodell zulässt. Jedoch hat eine elementweise Zuordnung der Eigenschaften den Nachteil, dass sprunghafte Änderungen der Bodeneigenschaften nur akkurat rekonstruiert werden können, wenn die Grenzschicht näherungsweise mit den Elementkanten übereinstimmt. Um rapide räumliche Änderungen der Eigenschaften zu unterdrücken, welche nicht mittels der angeregten seismischen Wellen aufgelöst werden können, sollten Ansatzfunktionen verwendet werden, welche der möglichen Auflösung entsprechen (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2). Des Weiteren kann die Komplexität des rekonstruierten Bodenmodells durch eine niedrigere Auflösung begrenzt werden. Für die betrachteten Untersuchungen in dieser Arbeit wird immer eine knotenweise Diskretisierung der Eigenschaften verwendet.

Signifikantere Beispiele für die Regularisierung der Full-Waveform-Inversion durch die Wahl der Diskretisierung bieten die beiden bayesschen Ansätze von Trapp (2022), welche auch hinsichtlich des Einsatzes der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau untersucht wurden (vergleiche Abschnitt 1.3). Beim Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing werden die geometrischen Formen der erwarteten Störungen vorgegeben, sodass durch die Inversion nur die geometrischen Abmaße dieser Formen sowie die materiellen Eigenschaften der Störkörper bestimmt werden müssen, wobei angenommen wird, dass die Eigenschaften innerhalb der Störkörper homogen sind. Dies führt zu einer vergleichsweise sehr niedrigen Anzahl an Koeffizienten, nach welchen die Referenzdaten invertiert werden müssen. Bei der UKF-PaLS-Methode wird eine begrenzte Anzahl von Punkten (engl. *bumps*) in dem zu untersuchenden Gebiet definiert, welche Zentren von radialen Basisfunktionen darstellen. Die radialen Basisfunktionen werden über zwei Parameter gesteuert, wodurch die radiale Größe der Punkte und deren Form verändert wird. Mittels einer Aktivierungsfunktion wird anschließend berechnet, ob einem Element die Eigenschaften des Hintergrundmodells oder die Eigenschaften der möglichen Störkörper zugeordnet werden. Des Weiteren werden die Referenzdaten auch nach den unterschiedlichen materiellen Eigenschaften der Störungen invertiert. Durch die UKF-PaLS-Methode könnten generell auch komplexe geometrischen Formen mehrere Störkörper abgebildet werden, jedoch verwendet Trapp (2022) die vereinfachende Annahme, dass alle Störungen die selben homogenen materiellen Eigenschaften besitzen, wodurch die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten vergleichsweise niedrig ist. Für die Anwendungen von beiden Methoden werden somit Annahmen zu den Störungen getroffen, welche die Anzahl der möglichen Bodenmodelle drastisch reduzieren und somit eine Form der Regularisierung darstellen.

### Regularisierung durch Vorkonditionierung des Gradienten

An den Positionen der Quellen und Empfänger ist der Gradient unverhältnismäßig hoch, wie in Abbildung 5.2 beobachtet werden kann. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass an den Positionen der Quellen im Wellenfeld und an den Positionen der Empfänger in dem adjungierten Wellenfeld, für welches die Empfänger als adjungierte Quellen fungieren, die Belastungen

eingeleitet werden und dadurch jeweils eine Singularität angenähert wird (Pratt u. Worthington, 1990). Des Weiteren ist der Gradient auch an freien Oberflächen höher, da die dort auftretenden Oberflächenwellen über höhere Amplituden verfügen. Diese überproportionalen Erhöhungen des Gradienten haben zur Folge, dass der Rest des zu untersuchenden Gebiets weniger akkurat rekonstruiert werden kann. Jedoch sind sowohl die Stellen, an welchen die Quellen und Empfänger installiert werden, als auch die Bereiche an den freien Oberflächen, wie am Tunnel und an der Erdoberfläche, üblicherweise zugänglich, sodass die Eigenschaften des Bodens dort zumindest abgeschätzt werden können. Um unrealistische Änderungen der Eigenschaften des Bodens in diesen Bereichen zu verhindern, wird der berechnete Gradient konditioniert, bevor er für die Minimierungsmethoden aus Abschnitt 5.4 verwendet wird. Dazu werden die Koeffizienten des Gradienten an allen Diskretisierungspunkten gleich Null gesetzt, welche sich innerhalb eines definierten Radius von einem freien Rand oder von einer Quelle oder einem Empfänger befinden. Zwischen diesen Bereichen und dem restlichen Gebiet wird eine Übergangszone definiert, in welcher die Koeffizienten des Gradienten gleichmäßig von Null auf ihre eigentlichen Werte hoch skaliert werden, damit kein Sprung in der räumlichen Änderung des Gradienten entsteht (vergleiche Lambrecht, 2015). Die Abstände, welche für die Konditionierung des Gradienten verwendet werden, werden für die jeweiligen Randwertprobleme in Kapitel 6 und Kapitel 7 angegeben.

### **Regularisierung durch Begrenzung der Anzahl an Iterationen**

Das Fehlerfunktional wird durch die iterativen Minimierungsmethoden aus Abschnitt 5.4 sukzessiv minimiert, bis die relative Änderung des Fehlerfunktionals einen definierten Grenzwert unterschreitet. Obwohl das Fehlerfunktional nach den ersten Iterationen weniger stark abnimmt, bewirken weitere Iterationen eine weiterhin stetige Minimierung, da im weiteren Verlauf kleinere Unterschiede zwischen den berechneten und den vorgegebenen Wellenformen, welche gegebenenfalls auf Messungenauigkeiten beruhen, überproportional berücksichtigt werden. Dies bewirkt, dass sich der Inversionsprozess in einem lokalen und physikalisch nicht relevanten Minimum festsetzen kann, obwohl der definierte Grenzwert für die Änderung des Fehlerfunktionals noch nicht unterschritten wurde. Indem der Inversionsprozess bzw. die Inversion für eine Frequenzgruppe nach einer definierten Anzahl an Iterationen spätestens beendet wird, kann eine Regularisierung erzielt werden (Fichtner, 2011, Unterabschnitt 7.4.2). Innerhalb dieser Arbeit wurde immer eine maximale Anzahl an Iterationen pro Frequenzgruppe festgelegt.

## **5.7. Vergleich der Full-Waveform-Inversion im Zeit- und Frequenzbereich**

Bei der Anwendung der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich werden selektierte Frequenzen und Frequenzgruppen untersucht, wodurch bei der Inversion Frequenzen vernachlässigt werden können, welche im Vorfeld offensichtlich fehlerbehaftet sind. Durch den intuitiven Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes bei der Verwendung der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich könnte die Nichtlinearität der inversen Problemstellung reduziert werden. Die numerische Berechnung der Verschiebungen stellt im Frequenzbereich eine lineare Operation dar. Für eine effiziente Gestaltung des Inversionsprozesses muss zwar die Systemmatrix faktorisiert werden, jedoch kann die Faktorisierung der Systemmatrix für ein Bodenmodell  $\mathbf{m}$  und eine Kreisfrequenz  $\omega$  für die Berechnung der Wellenfelder für weitere Anregungen von unterschiedlichen Quellen verwendet werden. Diese zusätzlichen Operationen stellen lediglich

simple Matrizenmultiplikationen dar. Des Weiteren kann die Faktorisierung der Systemmatrix auch für die Berechnung des adjungierten Wellenfeldes verwendet werden, wodurch der Berechnungsaufwand im Frequenzbereich vornehmlich nur mit der Anzahl der Frequenzen in einer Frequenzgruppe zunimmt. Somit ist die Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich bei der Verwendung von Messanordnungen mit vielen Quellen in Bezug auf den Berechnungsaufwand der Inversion im Zeitbereich vorzuziehen. Während der Speicherbedarf bei der Faktorisierung der Systemmatrix sehr hoch ist, skaliert der Berechnungsaufwand im Zeitbereich mit dem Diskretisierungsgrad und der Anzahl der zu berechnenden Zeitschritte. Je höher der Diskretisierungsgrad gewählt wird, desto höhere Frequenzen können aufgelöst werden, aber gleichzeitig muss auch das Zeitinkrement reduziert werden, damit die numerische Berechnung stabil bleibt. Je kleiner das Zeitinkrement wird, desto mehr Zeitschritte werden für die Berechnung des selben Zeitintervalls benötigt. Daher stellt die Wahl des Diskretisierungsgrads in Kombination mit der Wahl des Zeitinkrements einen schwierigen Balanceakt dar, um die Berechnungszeit nicht unnötig zu erhöhen. Dieses Dilemma kann bei der Verwendung des Frequenzbereichsansatzes umgangen werden. In anderen Aspekten weist die Inversion im Frequenzbereich Nachteile im Vergleich zu der Inversion im Zeitbereich auf. Wie beim Vergleich von Abbildung 2.9 mit beispielsweise Abbildung 4.9 zu erkennen ist, ist die Ausbreitung von seismischen Wellen im Zeitbereich deutlich anschaulicher und auch die Interaktionen der Wellen mit Störkörpern besser nachvollziehbar. Des Weiteren können die Seismogramme im Zeitbereich, wie in Abbildung 2.12 ersichtlich ist, besser interpretiert werden, da Ankunftszeiten sowie die Charakteristiken der verschiedenen Wellenarten identifiziert werden können. Durch den Vergleich der berechneten und der Referenzseismogramme während der Inversion könnte der Anwender Informationen erlangen, die eine Optimierung der folgenden Iterationsschritte ermöglichen. Zu späteren Ankunftszeiten werden auch seismische Wellen gemessen, welche von Reflektoren reflektiert wurden, die sich nicht im betrachteten Gebiet befinden. Um zu verhindern, dass solche Ausschläge zu unsinnigen Anpassungen des Bodenmodells während der Inversion führen, kann das zu betrachtende Zeitintervall reduziert werden. Bei der Verwendung der Full-Waveform-Inversion im Zeitbereich kann das Zeitintervall für die Berechnung der Wellenausbreitung entsprechend angepasst werden. Bei der Berechnung von zeitharmonischen Wellen werden die Verschiebungen einer Frequenz für ein unendliches Zeitintervall angenähert. Dadurch würden, bei einer Reduzierung des Zeitintervalls der Referenzdaten, Diskrepanzen zwischen den Verschiebungen entstehen, welche darauf beruhen, dass die Wellen, welche auf zeitlich später erfolgende Reflexionen innerhalb des betrachteten Gebiets zurückzuführen sind, in den verkürzten Referenzdaten nicht mehr enthalten wären, wie beispielsweise sich wiederholende Reflexionen der seismischen Wellen zwischen der Erdoberfläche und einem Reflektor. Zwar wären die zugehörigen Amplituden, aufgrund der geometrischen Dispersion, im Vergleich zu den Amplituden der primären Wellenfronten voraussichtlich recht klein, aber könnten dennoch den Erfolg der Inversion gefährden. Des Weiteren kann bei der Verwendung eines Inversionsansatzes in Zeitbereich, durch die Verwendung von ausschließlich den ersten ankommenden Wellenformen zu Beginn der Inversion, die Nichtlinearität der inversen Problemstellung reduziert werden (Virieux u. Operto, 2009). Der Aufwand bei der Berechnung von seismischen Wellen im Zeitbereich ist zwar üblicherweise höher als bei der Berechnung der zeitharmonischen Wellen einer einzelnen Frequenz, insbesondere bei der Verwendung von mehreren Quellen, jedoch beinhalten die zeitdiskreten Seismogramme üblicherweise alle relevanten Frequenzen, wodurch der Informationsgehalt höher ist. Die gleiche Bandbreite an Frequenzen kann im Frequenzbereich nur durch das aufwändige Lösen der linearen Gleichungssysteme von vielen unterschiedlichen Frequenzen betrachtet werden. Dieser Sachverhalt stellt einerseits einen Vorteil für die Inversion im Zeitbereich dar, aber andererseits wird das Inversionsverfahren gleichzeitig anfälliger dafür, dass fälschliche Anpassungen der Bodeneigenschaften auftreten, welche auf den Cycle-

Skipping-Effekt zurückzuführen sind (Vigh u. Starr, 2008). Ob für die Inversion ein Zeit- oder ein Frequenzbereichsansatz verwendet werden sollte, ist jeweils von dem inversen Problem abhängig. In Bezug auf den Einsatz der Full-Waveform-Inversion im maschinellen Tunnelbau muss die Entscheidung vor allem in Abhängigkeit von der verwendeten Messanordnung und somit in Abhängigkeit von dem zugrundeliegenden Messsystem getroffen werden, wobei auch einzelne weitere Aspekte in die Entscheidungsfindung einfließen können.

## 5.8. Simultane Approximation der Quellfunktion

Für Untersuchungen mittels der Full-Waveform-Inversion auf regionaler, kontinentaler und globaler Ebene werden vorwiegend seismische Ereignisse wie beispielsweise Erdbeben als Quellen verwendet, welche ausreichend Energie erzeugen, damit die seismischen Wellen die zu untersuchenden Gebiete komplett durchlaufen können. Da es sich bei Erdbeben und anderen potentiellen Ereignissen um willkürliche Vorgänge handelt, ist eine Lokalisierung und Quantifizierung dieser Geschehnisse nur näherungsweise möglich und stellt weiterhin ein aktives Forschungsgebiet dar (Igel, 2016, Abschnitt 1.2). Der Vorteil bei lokalen seismischen Untersuchungen, wie bei Untersuchungen im maschinellen Tunnelbau, ist, dass für die meisten Anwendungen künstliche seismische Anregungen verwendet werden können. Dabei ist die Lokalisierung der Position der Quelle hinfällig, da diese von den Anwendern vorgegeben wird. Zwar wird die Quellfunktion und die Art der Anregung, wie der Einsatz einer Punktquelle oder einer Sprengstoffquelle (vergleiche Gleichung 2.12, Gleichung 2.14 und Gleichung 2.42), nominell auch vorgegeben, jedoch kann das effektiv emittierte Signal entscheidend davon abweichen. Da die entstehenden Wellenformen maßgeblich von der Anregung abhängen, ist eine gute Annäherung der effektiven Anregung essentiell, um mit einem adäquaten synthetischen Bodenmodell die Wellenformen reproduzieren zu können. Daher ist für den Erfolg der Full-Waveform-Inversion eine ausreichend akkurate Approximation der Anregung entscheidend.

Im weiteren Verlauf wird näherungsweise angenommen, dass zumindest die effektiven Anregungsmechanismen, wie die Richtung einer Punktquelle oder ob eine Sprengstoffquelle verwendet wird, den nominellen Anregungen entsprechen. Dadurch würden nur noch die effektiven Quellfunktionen unbekannte Größen darstellen. Wie in Gleichung 2.19 dargestellt wird, lassen sich die Verschiebungen durch die Konvolution der Greenschen Funktionen mit der Quellfunktion der eingesetzten Quelle darstellen. Im Frequenzbereich stellt die Konvolution, wie in Gleichung 2.46 dargestellt wird, lediglich eine Multiplikation der Greenschen Funktion mit der Quellfunktion dar. Durch die Verwendung dieses Zusammenhangs innerhalb des Fehlerfunktional der Fehlerquadrate aus Gleichung 5.11, für welche die numerisch approximierten Verschiebungen an den Empfängern  $\hat{u}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})$  in die entsprechenden Greenschen Funktionen  $\hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})$  und die Quellfunktion  $h_s(\omega_f)$  der Quelle  $s$  aufgeteilt werden, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\chi_i(\mathbf{m}) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} (h_s(\omega_f) \hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f)) \cdot (h_s(\omega_f) \hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}) - \hat{u}_{srd}^0(\omega_f))^* \quad (5.49)$$

Dabei wird das Fehlerfunktional  $\chi_i(\mathbf{m})$  an dieser Stelle nur für eine Frequenzgruppe betrachtet, weshalb der Index  $i$  bei den Folgenden Betrachtungen vernachlässigt wird. Die Greenschen Funktionen  $\hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})$ , welche an den Positionen der Empfänger ausgewertet werden (vergleiche Gleichung 5.12), lassen sich, wie in Gleichung 2.45 dargestellt wird, ohne die Quellfunktion

$h_s(\omega_f)$  berechnen, da die Art bzw. die Richtung der Anregung als bekannt angenommen wird. Wenn die Wellenausbreitung des wahren Bodenmodells mit der Wellenausbreitung des aktuellen Bodenmodells  $\mathbf{m}$  ausreichend angenähert werden kann, dann würde eine Quellfunktion das Fehlerfunktional aus Gleichung 5.49 umso stärker minimieren, je besser diese die effektive Quellfunktion approximieren kann. Um das Minimum des Fehlerfunktionals in Bezug auf eine Änderung der Quellfunktion für das aktuelle Bodenmodell zu bestimmen, muss das Fehlerfunktional partiell nach der Quellfunktion  $h_s(\omega_f)$  differenziert werden. Der sich ergebende Ausdruck muss gleich Null sein, um die notwendige Bedingung für ein Minimum zu erfüllen:

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{m})}{\partial h_s(\omega_f)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.50)$$

Aus Gleichung 5.50 ergibt sich eine Formel, mit welcher die Quellfunktion für die betrachtete Kreisfrequenz  $\omega_f$  und die zugehörige Quelle  $s$  approximiert werden kann (Pratt, 1999):

$$h_s(\omega_f) = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} (\hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}))^* \hat{u}_{srd}^0(\omega_f)}{\sum_{r=1}^{N_r} \sum_{d=1}^{N_d} (\hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m}))^* \hat{g}_{srd}(\omega_f; \mathbf{m})}. \quad (5.51)$$

Die Greenschen Funktionen, welche für die Approximation der Quellfunktion benötigt werden, können genutzt werden, um über eine Konvolution mit der approximierten Quellfunktion die Verschiebungen zu berechnen, welche für die weiterführende Inversion benötigt werden. Dadurch muss bei dem abwechselnden Anpassen der approximierten Quellfunktion und des Bodenmodells während der Iterationen der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich kein zusätzliches Gleichungssystem gelöst werden, weswegen der zusätzliche Berechnungsaufwand vernachlässigbar gering ist. Da die Approximation der Quellfunktion abhängig von dem aktuellen Bodenmodell ist, wird sie vor jeder Iteration einer Frequenzgruppe neu approximiert. Um dieses Vorgehen schematisch zu veranschaulichen wurde das grobe Schema der Full-Waveform-Inversion aus Abbildung 1.3 für die simultane Approximation der Quellfunktion in Abbildung 5.6 erweitert. Während mit dem aktuellen Bodenmodell über die Iterationen einer Frequenzgruppe zunehmend besser die Wellenformen der Referenzdaten beschrieben werden können, sollte sich auch die Approximation der Quellfunktion der effektiven Quellfunktion annähern. Dadurch wird wiederum die Inversion der Referenzdaten nach den Bodeneigenschaften verbessert. Durch die Abweichungen zwischen der effektiven und der approximierten Quellfunktion werden die vorliegenden Bodeneigenschaften voraussichtlich schlechter rekonstruiert als bei einer Inversion, für welche die effektive Quellfunktion bekannt ist. Die Güte der Approximation ist stark von der Anzahl der verwendeten Empfänger abhängig, da mit mehr redundanten Informationen innerhalb der Referenzdaten eine bessere Annäherung möglich ist (Brossier u. a., 2010b). Wenn das Ausgangsmodell die Eigenschaften des Bodens schon ausreichend gut beschreiben kann, dann besitzt die simultane Approximation der Quellfunktion das Potential, dass eine Inversion ohne Vorkenntnisse zu den Quellfunktionen durchgeführt werden kann. Wenn im Nachgang zur Full-Waveform-Inversion die Quellfunktionen möglichst akkurat angenähert werden sollen, dann können die spektralen Anteile der Quellfunktionen mit dem abschließenden Bodenmodell approximiert werden. Bei dem vorgestellten Vorgehen wird implizit angenommen, dass die Übertragung der seismischen Wellen vom Boden auf einen Empfänger sich für alle Empfänger gleich verhält. Dadurch würde die entsprechende Übertragungsfunktion sowie die Übertragungsfunktion, welche den Einfluss des Kontaktes zwischen einer Quelle und dem Boden beschreibt, implizit bei der Approximation der Quellfunktion mit angenähert werden.

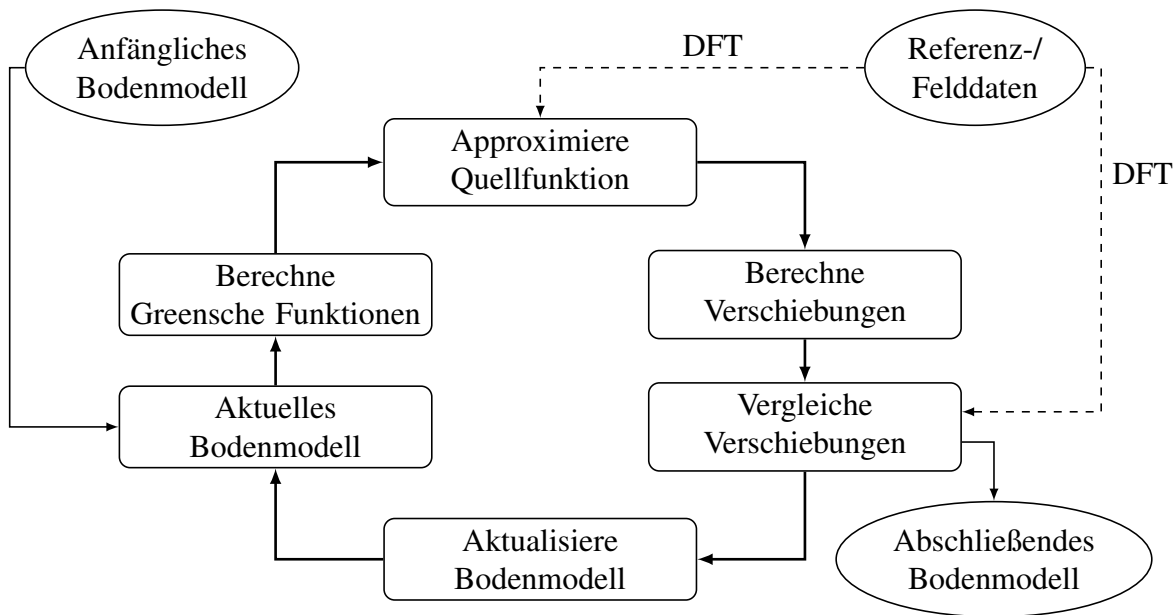


Abbildung 5.6.: Schematischer Ablauf der Full-Waveform-Inversion (mit einem Frequenzbereichsmodell) mit simultaner Approximation der Quellfunktion für jeden Iterationsschritt.

Der Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion während der Full-Waveform-Inversion wurde von Riedel u. a. (2019) für synthetische Referenzdaten einer zweidimensionalen Tunnelumgebung untersucht. Vergleichbare Untersuchungen für eine andere zweidimensionale Tunnelumgebung werden in Abschnitt 6.2 durchgeführt. Des Weiteren wird in Abschnitt 7.5 der Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion auch für die Inversion von Messdaten eines kleinskaligen Laborexperiments untersucht, welche entsprechend auch Messungenauigkeiten enthalten.

## 5.9. Weitere Aspekte der Full-Waveform-Inversion im maschinellen Tunnelbau

Die Wellen, welche durch einen Störkörper reflektiert wurden, enthalten vorwiegend Informationen über den Grenzübergang zwischen dem umgebenden Medium und der Seite des Störkörpers, an welcher die Welle reflektiert wurde. Dahingegen enthalten Wellen, welche an diesem Grenzübergang gebrochen werden und sich durch den Störkörper weiter ausbreiten, mehr Informationen über die Eigenschaften des Störkörpers sowie über dessen weitere Abmaße. Da die Full-Waveform-Inversion in der Lage ist diese Information für die Rekonstruktion der Bodeneigenschaften zu nutzen, ist ein besseres Abbild der Bodenbeschaffenheit mit Messanordnungen möglich, für welche die Anordnung der Quellen und Empfänger eine Aufzeichnung sowohl von Wellen ermöglicht, welche durch Störkörper reflektiert wurden, als auch von Wellen, welche durch Störkörper gebrochen wurden. Die gängigen Verfahren, welche für die seismische Erkundung des Erdreichs vor der Ortsbrust im maschinellen Tunnelbau eingesetzt werden (vergleiche Abschnitt 1.2), verarbeiten vornehmlich nur reflektierte Wellen. Dadurch wurden Messanordnungen etabliert, welche Quellen und Empfänger entweder auf dem Schneidrad oder an den Tunnelwänden einsetzen bzw. Empfänger, welche über die Tunnelwände ins nah gelege-

ne Erdreich eingebracht werden. Würden für die Full-Waveform-Inversion ausschließlich die Messdaten dieser Messanordnungen eingesetzt, welche vornehmlich nur Informationen von reflektierten Wellen entlang der Tunnelachse enthalten, dann wären die Vorteile gegenüber den zugehörigen Vorauserkundungssystemen voraussichtlich sehr gering, vor allem mit Hinblick darauf, dass die zugehörigen Systeme mittlerweile über 20 Jahre fortschreitend weiterentwickelt und für verschiedene Bodenbedingungen optimiert wurden. Lediglich für oberflächennahe Tunnelumgebungen dürfte die Auswertung der Daten mittels der Full-Waveform-Inversion schon merkliche Vorteile bringen, da die Reflexionen der seismischen Wellen an der Erdoberfläche berücksichtigt würden. Eine Ausweitung der Anzahl der Empfänger stellt für einen Algorithmus der Full-Waveform-Inversion prinzipiell kein Problem dar und für den vorgestellten Frequenzbereichsansatz wäre auch eine Erhöhung der Anzahl an Quellen, welche wie die Empfänger beliebig positioniert werden könnten, nur mit einer minimalen Erhöhung des Berechnungsaufwands verbunden. Somit wäre für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion eine Ausweitung der Messanordnung sinnvoll. Dabei muss abgewogen werden, ob die Verbesserung der Inversionsergebnisse den zusätzlichen finanziellen Aufwand, welcher durch eine Erweiterung der Messanordnung entsteht, aufwiegen kann. Einerseits könnten die Stehzeiten der Tunnelbohrmaschine für die Durchführung von Messungen zunehmen, wobei viele Messsysteme heute schon Stehzeiten ausnutzen, die bereits betriebsbedingt vorhanden sind. Des Weiteren kann die Installation von Quellen und Empfängern sehr kostspielig sein, vor allem im Vergleich zu Quellen und Empfängern, die auf der Tunnelbohrmaschine oder auf ihrem Schneidrad angebracht sind. Zudem sind die meisten Positionen, welche für die Installation von Quellen und Empfängern in Bezug auf die Full-Waveform-Inversion ideal wären, häufig nicht zugänglich. Im Folgenden werden Überlegungen zusammengetragen, wie weitere Quellen und Empfänger innerhalb einer Tunnelumgebung eingebracht werden könnten, damit mehr Informationen über mögliche Störkörper in den aufgenommenen Seismogrammen enthalten sind. Dabei sei darauf verwiesen, dass eine Bewertung, ob diese Überlegungen wirklich umsetzbar oder ökonomisch sinnvoll sind, hier nicht erfolgt. Um den Boden im Vorfeld charakterisieren zu können, werden üblicherweise Erkundungsbohrlöcher angelegt (ITA, 2015). Wenn sich ein Bohrloch mit mehreren Metern Abstand vor der Tunnelfront befindet, dann könnten durch eine Positionierung von Quellen oder Empfängern in diesem Bohrloch zusätzlich die Ausschläge von Wellen aufgezeichnet werden, welche auf gebrochene Wellen zurückzuführen sind. Selbst wenn sich die Bohrlöcher schon hinter der Tunnelfront befinden, könnten in ihnen installierte Quellen und Empfänger zu einer besseren räumlichen Auflösung von potenziellen Störkörpern beitragen. Tunnel müssen in kurzen und regelmäßigen Abständen über Notausgänge verfügen, welche der schnellen Evakuierung von Menschen bei Unfällen oder im Brandfall dienen sowie Rettungskräften den Zugang erleichtern (d'Elia u. a., 2011). Die Verbindungen von diesen Notausgängen zur Erdoberfläche könnten frühzeitig geplant und angelegt werden, sodass diese zusätzlich während des Vortriebsprozesses für die Positionierung von Quellen und Empfängern genutzt werden könnten. Ein weiteres Mittel für die Vorauserkundung stellen kleinere Vorausbohrungen dar, welche vor allem innerhalb größerer Tunnelbauprojekte systematisch eingesetzt werden. Grundlegend wird zwischen zerstörerischen Bohrungen, welche verhältnismäßig schnell durchgeführt werden können, und Kernbohrungen unterschieden, bei welchen anhand der extrahierten Kerne auch die mechanischen Eigenschaften des Bodens genauer untersucht werden können (Ziegler, 2008). Im maschinellen Tunnelbau werden diese Vorausbohrungen, welche über einen Durchmesser von einigen Zentimetern verfügen, hinter dem Schneidrad über die Tunneldecke oder die Tunnelsohle eingeleitet, wenn im Schneidrad der Tunnelbohrmaschine keine Öffnung für diese Bohrungen eingeplant wurde, wodurch diese Bohrungen üblicherweise nicht auf der Tunnelachse verlaufen (Kogler, 2008). Wenn die Vorausbohrungen genutzt werden könnten, um seismische Empfänger ins Erdreich vor der Tunnelfront zu platzieren, könnte darüber der Informati-

onsgehalt der seismischen Daten merklich erhöht werden. Dabei stellt voraussichtlich die technische Gestaltung und Installation passender Empfänger eine dominante Hürde dar. Bei manchen Tunnelbauprojekten wird parallel zu der Tunnelachse ein kleinerer Vorauserkundungstunnel oder -stollen angelegt, welcher später auch für Aufgaben wie beispielsweise die Entwässerung des Tunnels oder für Instandhaltungsmaßnahmen verwendet werden kann. Für den Bau des Brenner Basistunnels wurden solche Erkundungstollen eingesetzt und die Erkenntnisse und Vorteile, welche sich für den Bau des Brenner Basistunnels ergaben, werden von Bergmeister u. Reinhold (2017) diskutiert. Solche Erkundungstollen könnten, wenn diese vorhanden sind und weiterhin der Bedarf besteht den restlichen Boden genauer zu untersuchen, auch für eine Ausweitung der Messanordnung genutzt werden. Bei anderen Projekten werden mit einer Tunnelbohrmaschine zwei zueinander parallele Tunnelröhren sequentiell angelegt. Durch das Anlegen der ersten Tunnelröhre könnten zwar schon viele geologische Störungen bekannt sein, aber insbesondere kleinere Störkörper vor der Ortsbrust des zweiten Tunnels könnten durch den Einsatz von Quellen und Empfängern an den Tunnelwänden der ersten Tunnelröhre besser detektiert werden. Für oberflächennahe Tunnel könnten Quellen und Empfänger zusätzlich an der Erdoberfläche positioniert werden. Um großflächig nach passenden Standorten für die geothermische Energiegewinnung zu suchen, werden häufig Vibrationsfahrzeuge als Quellen eingesetzt, während mehrere kompakte Geophone möglichst in Linien angeordnet positioniert werden. Wenn solche mobilen Messsysteme für die seismischen Messungen für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau verwendet werden könnten, würde dies die Flexibilität bei den Messungen erhöhen und die zugehörigen Kosten, im Vergleich zu fest installierten Messkomponenten, senken. Seismische Messungen an der Erdoberfläche könnten sich im städtischen Raum schwierig gestalten, da die Bereiche oberhalb der geplanten Tunneltrasse bebaut sein könnten, sodass diese Bereiche für Messungen nicht ohne Weiteres zugänglich wären. Zudem wäre die Vorbereitung des diskretisierten Bodenmodells, mit welchem die Full-Waveform-Inversion begonnen wird, im urbanen Raum deutlich umständlicher, da möglichst alle bekannten Gebäudefundamente und weitere unterirdische Infrastruktur berücksichtigt werden sollten, damit möglichst nur der zu untersuchende Bereich des Bodens Unterschiede zwischen den gemessenen und den synthetischen Wellenformen verursacht. Eine ausreichende Quantifizierung der seismischen Eigenschaften der einzelnen Strukturen sowie die Beschreibung der genauen Position von freien Oberflächen erscheinen eine aufwendige Aufgabe darzustellen. Da die Full-Waveform-Inversion darauf ausgelegt ist möglichst alle gemessenen Wellenformen durch die Änderung der diskretisierten Bodeneigenschaften zu beschreiben, sollte ihr Potential für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau auch für erweiterte Messanordnungen untersucht werden. In Kapitel 6 wird der Einsatz der Full-Waveform-Inversion für unterschiedliche synthetische Tunnelumgebungen untersucht. Dabei werden die rekonstruierten Bodenmodelle von Inversionen mit unterschiedlichen Messanordnungen verglichen, um deren Vor- und Nachteile zu demonstrieren.

Wenn Kompressionswellen in Richtung des zu untersuchenden Bereichs angeregt werden, dann entstehen zwar auch Scherwellen bei der Reflexion der Wellen an freien Oberflächen sowie durch Brechungen und Reflexionen der Wellen an inneren Grenzflächen, jedoch beschreiben die Informationen der aufgezeichneten Wellenformen vorwiegend die Eigenschaften des zu untersuchenden Gebiets, welche die Ausbreitung der Kompressionswellen beeinflussen. Selbiges gilt für die Anregung von Scherwellen in Richtung des zu untersuchenden Gebiets, was durch die Gradienten in Abbildung 5.2 illustriert werden kann, bei welchen im Bereich zwischen der Quelle und dem Empfänger die Ableitungen nach der Scherwellengeschwindigkeiten hoch sind, während die Ableitungen nach der Kompressionswellengeschwindigkeit verschwinden. Somit kann durch die Anregung der jeweiligen Wellenarten in eine Richtung beeinflusst wer-



den, welche Eigenschaften in dem entsprechenden Bereich besser rekonstruiert werden können. Dieser Zusammenhang sollte bei der Bewertung von Inversionsergebnissen auch berücksichtigt werden.

Wie schon in Unterabschnitt 5.6.1 beschrieben und in Abbildung 5.2 teilweise ersichtlich wird, korreliert die Genauigkeit mit der ein Bodenmodell rekonstruiert werden kann mit den eingesetzten Anregungsfrequenzen, da die angeregten Wellenlängen mit steigender Frequenz kürzer werden, was durch Gleichung 2.2 ersichtlich wird. Daher ist die Wahl des Frequenzspektrums der Quellfunktion unter Berücksichtigung der Wellengeschwindigkeiten des Bodens essentiell. Für den Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes aus Unterabschnitt 5.6.1 sollte die Quellfunktion sowohl niedrige Frequenzen enthalten, womit die größeren Strukturen des Bodens rekonstruiert werden können, als auch höhere Frequenzen, welche auch Informationen über feinere Strukturen des Bodens enthalten können. Des Weiteren muss auch abgeschätzt werden, ab welcher Größe ein Störkörper vor der Tunnelfront den Vortrieb gefährden könnte, wenn der Bohrprozess nicht angepasst würde, damit eine sinnvolle obere Grenze des Frequenzspektrums abgeschätzt werden kann. Die gemessenen Verschiebungen der zu untersuchenden Frequenzen sollten ein gutes Verhältnis zwischen dem eigentlichen Signal und Rauschen besitzen. Häufig ist das effektiv angeregte Frequenzspektrum deutlich schmaler als das Frequenzspektrum der nominellen Quellfunktion. Um dieser Problematik entgegen zu wirken, könnten über unterschiedliche Anregungsfrequenzen Datensätze generiert werden, welche unterschiedliche Frequenzspektren enthalten. Für Inversionen im Frequenzbereich wäre die Verwendung von verschiedenen Datensätzen, für welche verschiedene Anregungsfrequenzen verwendet wurden, für unterschiedliche Frequenzen der Frequenzgruppen unproblematisch zu implementieren und der Berechnungsaufwand würde sich dadurch auch nicht erhöhen. Im Zeitbereich müsste bei einem vergleichbaren Vorgehen entweder im Verlauf der Inversion der Datensatz der Seismogramme gewechselt werden, wodurch im weiteren Verlauf Informationen für niedrige Frequenzen verloren gehen würden, oder die neuen Datensätze müssten als zusätzliche Anregungen hinzugefügt werden. Durch letzteres Vorgehen würde sich die Anzahl der Berechnungen zur numerischen Approximation der seismischen Wellenausbreitung erhöhen, was somit auch signifikant den Berechnungsaufwand der Full-Waveform-Inversion erhöhen würde.

Innerhalb dieser Arbeit werden nur Wellenformen verwendet, welche einem festen Fortschritt des Tunnelvortriebs zuzuordnen sind. Durch Messungen für verschiedene Tunnelfortschritte würden sich die Abstände von reflektierenden Oberflächen, Quellen und Empfängern, welche sich teilweise mit der Tunnelbohrmaschine fortbewegen könnten, sowie den potentiellen Störkörpern verändern, wodurch mehr Informationen über diese Störkörper in den Messdaten enthalten wären. Somit würde die Verwendung von seismischen Messdaten von verschiedenen Tunnelfortschritten voraussichtlich zu besseren Inversionsergebnissen führen. Jedoch würde sich das Randwertproblem für die Berechnung der seismischen Wellenausbreitung durch die Zunahme der reflektierenden Oberflächen des Tunnels beim fortschreitenden Tunnelvortrieb verändern. Zwei mögliche Vorgehensweisen, um die Vorteile des fortschreitenden Tunnels für die Inversion nutzen zu können, werden im Folgenden vorgestellt. Durch eine korrekte Zuordnung der Koeffizienten der Bodeneigenschaften  $m$  und der einzelnen Einträge des zugehörigen Gradienten der Tunnelmodelle der unterschiedlichen Tunnelfortschritte, sollte der Einsatz der Full-Waveform-Inversion auch mit Messdaten von unterschiedlichen Tunnelfortschritten möglich sein, wobei eine erweiterte Vorkonditionierung des Gradienten sinnvoll erscheint. Bei der Inversion im Zeitbereich bedeutet der Einsatz zusätzlicher Quellen ohnehin eine signifikante Erhöhung des Berechnungsaufwands und die Berechnung der Wellenausbreitung in einer Tunnelumgebung mit einem fortgeschrittenen Tunnel, statt mit der selben Tunnelumgebung, würde

den Berechnungsaufwand nicht sonderlich erhöhen. Der Einsatz der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich hat den Vorteil, dass beim Einsatz von mehreren Quellen die Faktorisierung der Impedanzmatrix für alle Quellen wiederverwendet werden kann. Bei der Verwendung von Tunnelmodellen mit unterschiedlichen Fortschritten des Bohrprozesses, könnte dieser Vorteil weniger ausgenutzt werden, da sich unterschiedliche Impedanzmatrizen ergeben. Somit würde sich der Berechnungsaufwand erhöhen, wodurch der Inversionsprozess verlangsamt wird. Die zweite Möglichkeit, um Daten von unterschiedlichen Tunnelfortschritten beim Einsatz der Full-Waveform-Inversion berücksichtigen zu können, wäre die Inversion mit dem Datensatz eines definierten Tunnelfortschritts zu beginnen und diesen nach einigen Inversionsschritten durch den Datensatz der Messung vom nächsten Tunnelfortschritt zu ersetzen. Dabei müssten die bis dahin rekonstruierten diskretisierten Bodeneigenschaften auf das neue Tunnelmodell korrekt übertragen werden, welches im Folgenden verwendet wird. Dieses Vorgehen bietet sich insbesondere an, wenn die Inversionsschritte viel Zeit benötigen und die seismischen Messungen in vergleichsweise kurzen zeitlichen Abständen durchgeführt werden, sodass der Inversionsprozess fortlaufend mit den aktuellen Datensätzen durchgeführt wird. Durch den Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes würden mit den ersten Datensätzen grobe Strukturen rekonstruiert werden und mit den späteren Messungen würden zunehmend mehr Details rekonstruiert werden. Für hohe Frequenzen führen Wellen über die selbe Distanz mehr Schwingungen durch, da die Wellenlängen kürzer werden. Durch die erhöhte Anzahl an Schwingungen geht ein Großteil der seismischen Energie durch intrinsische Dämpfung schon über eine kürzere Distanz verloren. Da sich mögliche Störkörper mit dem fortschreitenden Tunnelvortrieb den Quellen und Empfängern im Tunnel nähern, werden die Anteile von hohen Frequenzen der reflektierten Wellen weniger stark gedämpft im Vergleich zu den vorherigen Messungen. Somit wäre eine bessere Vorhersage der Störkörper als bei einer Inversion mit dem ersten Datensatz möglich. Gleichzeitig wäre diese Vorhersage früher verfügbar, als wenn auf die Inversionsergebnisse gewartet werden müsste, welche ausschließlich durch die Inversion des letzten Datensatzes generiert würden.

Eine Voraussetzung dafür, dass die Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau eingesetzt wird, ist, dass eine Inversion der Wellenformen so schnell durchgeführt werden kann, dass ihre Ergebnisse für die Steuerung des Vortriebs in dem erkundeten Bereich vor der Tunnelfront zeitig vorliegen und somit genutzt werden können. Einerseits wird dies in Zukunft durch den technologischen Fortschritt möglich sein, da die Rechengeschwindigkeiten sich erfahrungsgemäß innerhalb von wenigen Jahren deutlich verbessern, auch wenn sich die Geschwindigkeit dieses technologischen Fortschritts voraussichtlich in Zukunft etwas verlangsamen wird (Shalf, 2020). Andererseits ist auch die Anpassung vom Inversionsalgorithmus sowie die Überprüfung der ausgewählten numerischen Verfahren notwendig, um diesen technologischen Fortschritt auch möglichst effizient ausnutzen zu können. So sollten numerische Verfahren bevorzugt eingesetzt werden, deren Effizienz mit höheren Rechenkapazitäten skalierbar ist. In dem Zusammenhang würden beispielsweise Verfahren zur Berechnung der seismischen Wellenausbreitung verstärkt eingesetzt werden, die einen hohen Parallelisierungsgrad ermöglichen, wobei auch immer Ausschau nach neuen Methoden gehalten werden sollte. Der Inversionsprozess sollte so gestaltet werden, dass Berechnungen, welche zeitgleich durchgeführt werden können, effizient auf verschiedene Prozessoren aufgeteilt werden. In Bezug auf den untersuchten Ansatz der Full-Waveform-Inversion, welcher im Frequenzbereich arbeitet, wäre dies eine parallele Berechnung der Wellenfelder für verschiedene Frequenzen sowie eine parallele Berechnung der Wellenfelder für verschiedene Koeffizienten der Bodeneigenschaften, welche für die quadratische Approximation des Fehlerfunktionalis innerhalb des Liniensuchverfahrens benötigt werden. Eine parallele Berechnung der Impedanzmatrizen der

einzelnen Elemente wurde im Rahmen dieser Arbeit realisiert. Eine parallelisierte Assemblierung der Impedanzmatrix des gesamten Systems wurde nicht durchgeführt, um Fehler aufgrund von parallelem Schreibzugriff zu vermeiden. Diese Fehler würden entstehen, wenn ein Eintrag des selben globalen Freiheitsgrads durch das gleichzeitige Assemblieren von mindestens zwei Elementmatrizen zeitgleich mehrfach bearbeitet würde. Um dieses Speicherzugriffsproblem zu umgehen und dadurch die Assemblierung der Impedanzmatrix zu ermöglichen, kann eine spezielle Nummerierung der Elemente durchgeführt werden, welche verhindert, dass Elemente gleichzeitig assembliert werden, die sich globale Freiheitsgrade teilen (Chien u. Sun, 1989). Des Weiteren bestünde die Möglichkeit das Berechnungsgebiet in kleinere Untergebiete zu unterteilen, um deren partielle Differentialgleichungssysteme auf unterschiedlichen Prozessoren gleichzeitig zu lösen, wobei im Nachgang sichergestellt werden müsste, dass die globale Lösung über die Grenzen der Untergebiete kontinuierlich ist (Mathew, 2008). Statt der Verwendung eines direkten Gleichungslösers, welcher eine Faktorisierung der Systemmatrix durchführt, könnte beim Einsatz von nur wenigen Quellen die Verwendung eines iterativen Gleichungslösers, mit Hinblick auf die Berechnungsgeschwindigkeit, sinnvoll sein, wenn nicht zusätzlich der diskrete adjungierte Gradient berechnet werden muss. Somit würden sich iterative Gleichungslöser für die Auswertung des Fehlerfunktional für unterschiedliche Schrittweiten beim Liniensuchverfahren anbieten. Eine weitere und sinnvolle Möglichkeit die Berechnungszeit der Full-Waveform-Inversion zu reduzieren ist die effizientere Auswahl der Inversionsparameter. Die Anzahl der Frequenzgruppen sowie die Anzahl der einzelnen Frequenzen innerhalb einer Frequenzgruppe in Kombination mit der Anzahl an Iterationen pro Frequenzgruppe beeinflussen dabei vornehmlich den Berechnungsaufwand. Dabei muss jedoch gewährleistet werden, dass die Qualität der Inversionsergebnisse durch eine solche Reduzierung des Berechnungsaufwands nicht degradiert wird.



## 6. Synthetische Inversionen

Der Einsatz der Full-Waveform-Inversion mittels der in Kapitel 5 vorgestellten Methoden in Kombination mit synthetischen Referenzseismogrammen, welche über numerische Approximationen der seismischen Wellenausbreitung generiert wurden, ermöglicht die Untersuchung des Grundkonzepts in Bezug auf dessen Anwendung für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau. Die Verwendung von synthetischen Referenzdaten birgt den Vorteil, dass alle Informationen über die jeweiligen Randwertprobleme vorhanden sind. Somit kann bewertet werden, wie akkurat die Bodeneigenschaften rekonstruiert werden können. Da die Quellfunktionen, die Übertragungsfunktionen zwischen Quelle und Boden sowie Boden und Empfängern bekannt sind und kein Rauschen aufgrund von Messgeräten oder aufgrund von inhomogenen Bodeneigenschaften in den Datensätzen enthalten ist, kann die Qualität der Ergebnisse ausschließlich auf die Messanordnung und die verwendeten Inversionsparameter zurückgeführt werden. Somit können adäquate Inversionsparameter, wie die Frequenzgruppen, besser bestimmt werden. Des Weiteren können die Ergebnisse von verschiedenen Beispielen gut miteinander verglichen werden, was bei sich unterscheidenden Messdaten vornehmlich nicht der Fall wäre. Die Erkenntnisse, welche durch die Inversion von synthetischen Wellenformen erlangt wurden, können dann teilweise für den Einsatz der Inversion mit realen Daten übertragen werden und helfen zudem bei der Planung, wie beispielsweise bei der Wahl der Messanordnung.

Zu Beginn dieses Kapitels wird in Abschnitt 6.1 der Einfluss von verschiedenen Messanordnungen auf die Inversionsergebnisse untersucht. Dazu werden zweidimensionale Tunnelumgebungen betrachtet, welche die selben Störkörper vor der Tunnelfront enthalten. Dabei wird auch zwischen der Vorauserkundung für oberflächennahe und tiefere Tunnel unterschieden. Bei oberflächennahen Tunneln enthalten die aufgenommenen Seismogramme üblicherweise mehr Informationen zur Geologie vor der Ortsbrust, da durch die Reflexionen der seismischen Wellen an der Erdoberfläche mehr Wellen zu den Empfängern gelangen, welche zuvor mit Störkörpern interagiert haben. Das in Abschnitt 5.8 beschriebene Konzept zur simultanen Approximation der Quellfunktionen während einer Inversion wird in Abschnitt 6.2 für die Randwertprobleme aus Abschnitt 6.1 untersucht. In Abschnitt 6.3 werden anhand von zweidimensionalen Tunnelumgebungen der Einfluss von Dämpfungseffekten auf die Inversion einerseits und die möglichen Auswirkungen einer Über- oder Unterschätzung des Dämpfungseffekts andererseits untersucht. Die Wahl der Inversionsparameter vereinfacht sich, wenn das Referenzmodell des Bodens bekannt ist, wodurch sich auch die Interpretation der rekonstruierten Bodeneigenschaften vereinfacht. Für eine realitätsnähere Anwendung der Full-Waveform-Inversion wurden Blindtests durchgeführt, deren Ergebnisse in Abschnitt 6.4 vorgestellt werden. Dabei waren die synthetischen Referenzseismogramme gegeben, aber die zweidimensionalen Referenzmodelle des Bodens waren nicht bekannt. Zweidimensionale Tunnelmodelle ermöglichen eine schnelle und effiziente Untersuchung von Inversionsparametern und Messanordnungen. Deren Erkenntnisse können größtenteils für die Inversion mit dreidimensionalen Tunnelmodellen übertragen werden, welche aufgrund der zusätzlichen Auflösung der Bodeneigenschaften in die dritte Raumrichtung sowie aufgrund der korrekten Darstellung des zylindrischen Tunnels für reale Anwendungen relevanter sind. Daher werden für zwei unterschiedliche Bodenszenarien von dreidimensionalen Tunnelumgebungen Inversionen durchgeführt und deren Ergebnisse untersucht. In

Abschnitt 6.5 soll mit verschiedenen Messanordnungen ein sphärischer Störkörper durch die Full-Waveform-Inversion detektiert werden. Eine linear verlaufende Grenzschicht fungiert in Abschnitt 6.6 als gesuchte Störung, wobei auch für diese der Einfluss von verschiedenen Messanordnungen auf die Inversionsergebnisse untersucht wird.

### 6.1. Einfluss verschiedener Messanordnungen auf die Inversion

Für die Untersuchung verschiedener Messanordnungen anhand von einer zweidimensionalen oberflächennahen Tunnelumgebung wird die Tunnelumgebung aus Abbildung 4.4 verwendet, welche in Abschnitt 4.2 eingeführt wurde. Mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 3800$  m/s und  $v_s = 2200$  m/s sowie mit der Dichte  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup> werden auch die selben Bodeneigenschaften verwendet. Auch die in Abschnitt 4.2 eingeführte Diskretisierung des Modells wird übernommen. Bei der zusätzlichen Betrachtung von tiefliegenden Tunneln wird die Erdoberfläche durch eine 3 m dicke PML-Schicht ausgetauscht. Die Tiefe der PML wird auch durch drei Elemente diskretisiert, wodurch bei dem Modell eines tiefliegenden Tunnels insgesamt 4880 Viereckelemente und 151 Dreieckelemente verwendet werden. Für den numerischen Parameter der PML wird weiterhin  $c_{PML} = 25\,000$  eingesetzt.

Um verschiedene Inversionsergebnisse vergleichen zu können, wird für Abschnitt 6.1, Abschnitt 6.2 und Abschnitt 6.3 das selbe Referenzmodell verwendet, welches in Abbildung 6.1 für eine tiefliegende Tunnelumgebung sowie für eine oberflächennahe Tunnelumgebung dargestellt wird. Dieses beinhaltet drei Störkörper, welche über niedrigere Wellengeschwindigkeiten als der umgebende Boden verfügen. Die genauen Werte der jeweiligen Wellengeschwindigkeiten können Abbildung 6.1 entnommen werden. Die Dichte der Bodenmodelle wird nicht variiert und ist somit konstant. Die Störkörper besitzen unterschiedliche Formen – dreieckig, viereckig und kreisförmig – und befinden sich vor der Ortsbrust in unterschiedlichen Entfernungen und Tiefen. Die Referenzverschiebungen wurden immer zu Beginn einer Frequenzgruppe für die benötigten Frequenzen mit dem in Kapitel 3 vorgestellten und in Kapitel 4 verifizierten Ansatz der Finite-Elemente-Methode, welcher die elastische Wellengleichung im Frequenzbereich löst, berechnet. Dabei wird als Quellfunktion, wie schon in Abschnitt 4.2, ein Ricker-Signal mit einer Zentralfrequenz von 500 Hz verwendet, welches keinen Zeitversatz aufweist. Die beschriebene Quellfunktion wird für die Inversionen in diesem Abschnitt als bekannt angenommen. Die Ergebnisse eines sehr ähnlichen Beispiels wurden auch schon in einem Buchbeitrag von Mahmoudi u. a. (2023) veröffentlicht.

Für die Inversion der Referenzverschiebungen wird der Einfluss von vier unterschiedlichen Messanordnungen untersucht, wobei alle Messanordnungen Abwandlungen von der Messanordnung sind, welche in Abbildung 4.4 vorgestellt wurde. Bei der ersten Messanordnung werden nur die Quelle und die Empfänger um den Tunnel verwendet. Für diese Messanordnung wird zusätzlich auch die Inversion mit der tiefliegenden Tunnelumgebung durchgeführt. Für die zweite Messanordnung wird der ersten Messanordnung nur eine zweite Quelle an der Erdoberfläche bei  $x = 75$  m und  $y = 42$  m hinzugefügt, welche in senkrechter Richtung zur Erdoberfläche wirkt. Die dritte Messanordnung entspricht der Messanordnung aus Abbildung 4.4 und unterscheidet sich somit von der ersten Messanordnung durch die neun zusätzlichen Empfänger an der Erdoberfläche. Die vierte Messanordnung stellt eine Kombination aus der zweiten und dritten Messanordnung dar, bei welcher im Vergleich zur ersten Messanordnung sowohl die zusätzliche Quelle als auch die zusätzlichen Empfänger an der Erdoberfläche hinzugefügt wurden.

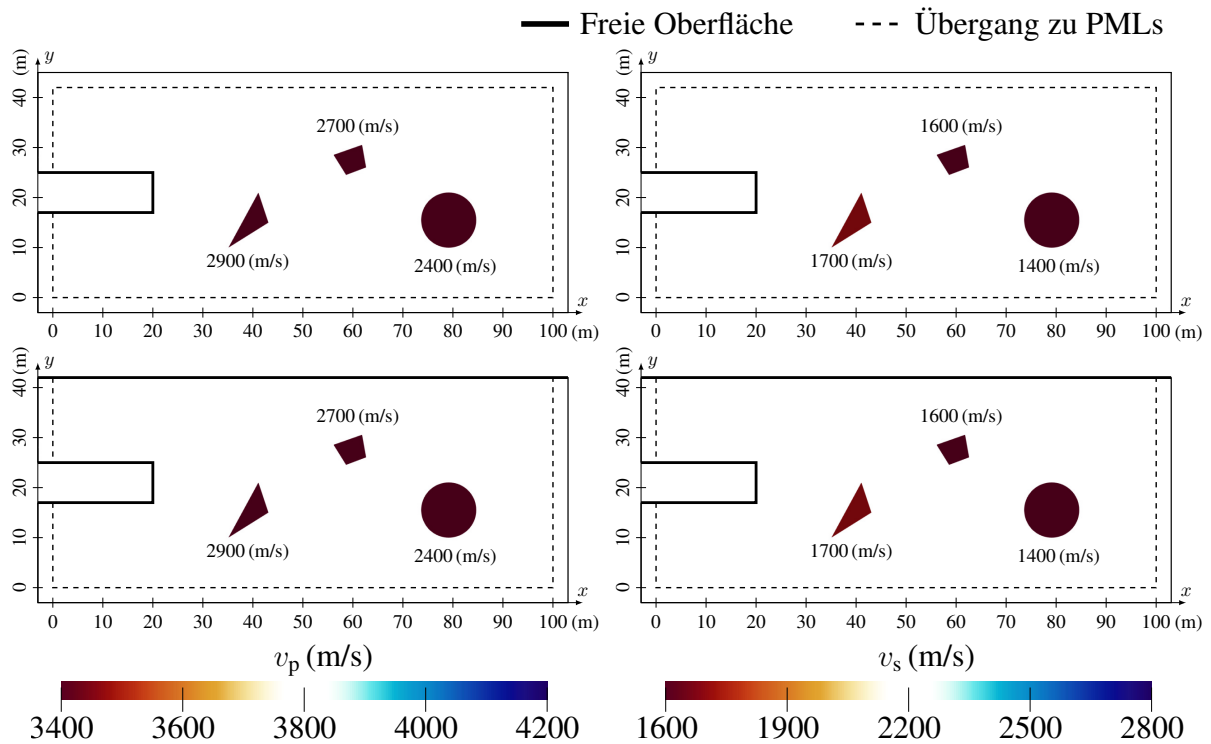


Abbildung 6.1.: Das Referenzmodell der tiefliegenden (oben) und der oberflächennahen Tunnelumgebung (unten) wird dargestellt, welches für die Berechnung der Referenzverschiebungen eingesetzt wird. Das Referenzmodell enthält drei Störkörper, deren Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeiten (rechts) niedriger sind als die Wellengeschwindigkeiten des umgebenden Bodens.

Für die Inversion werden 35 Frequenzgruppen verwendet, welche einen Frequenzbereich von 50 Hz bis 900 Hz abdecken und in Gleichung 6.1 zusammengefasst werden:

$$G = \{ \{50\}, \{75\}, \{40, 100\}, \{55, 125\}, \dots, \{520, 900\} \} \text{ Hz.} \quad (6.1)$$

Die ersten beiden Gruppen beinhalten je nur eine Frequenz, während die restlichen Frequenzgruppen je zwei Frequenzen miteinander kombinieren. Dabei wird die höhere Frequenz immer um 25 Hz erhöht, während die niedrigere Frequenz immer um 15 Hz erhöht wird. Somit entspricht die Wahl der Frequenzgruppen der Strategie des Multi-Skalen-Ansatzes aus Unterabschnitt 5.6.1. Die Anzahl der verwendeten Frequenzgruppen ist vergleichsweise groß, was jedoch in Bezug auf den Berechnungsaufwand bei der Verwendung von zweidimensionalen Modellen noch unproblematisch ist. Die Inversionen mit den dreidimensionalen Modellen in Abschnitt 6.5 und Abschnitt 6.6 demonstrieren, dass auch mit weniger Frequenzgruppen gute Ergebnisse erzielt werden können. Die Inversion für eine Frequenzgruppe wird nach spätestens 12 Iterationen beendet, wenn nicht zuvor das Konvergenzkriterium erreicht wird.

Bei der Berechnung des Wellenfeldes treten an den Quellen und bei der Berechnung des adjungierten Wellenfeldes treten an den Empfängern Singularitäten auf, welche zu überproportional hohen Änderungen des Gradienten führen. Um diesen Effekt zu unterdrücken wird, wie in Abschnitt 5.6.2 beschrieben, eine Vorkonditionierung des Gradienten durchgeführt. Die Koeffizienten des Gradienten werden für die Diskretisierungspunkte gleich Null gesetzt, deren Entfernung zu freien Oberflächen weniger als 1.75 m oder deren Entfernung zu Quellen und Empfängern weniger als 2.5 m beträgt. Um rapide räumliche Sprünge des Gradienten aufgrund

der Vorkonditionierung zu vermeiden, werden die Koeffizienten des Gradienten im unmittelbaren Umfeld kontinuierlich von Null auf ihre eigentlichen Werte erhöht. Dabei erstreckt sich diese Übergangszone an den freien Oberflächen über zusätzliche 1.75 m sowie an den Quellen und Empfängern über zusätzliche 2.5 m. Für die Berechnung der Suchrichtung  $r_k$  wird die L-BFGS-Methode verwendet, welche in Abschnitt 5.4 vorgestellt wurde.

Die Funktionsweise des Multi-Skalen-Ansatzes kann gut durch die in Abbildung 6.2 dargestellten Zwischenergebnisse veranschaulicht werden, für welche die dritte Messanordnung verwendet wurde. Nach den ersten drei Frequenzgruppen, deren höchste Frequenz 100 Hz betrug, sind grobe Umrisse der Störkörper erkennbar, welche insbesondere bei der Betrachtung der rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeit noch deutlich größer als die gesuchten Formen sind. Nach den ersten elf Frequenzgruppen, deren höchste verwendete Frequenz 300 Hz betrug, passen sich rekonstruierten Körper zunehmend den gesuchten Formen an. Des Weiteren nähern sich auch die Wellengeschwindigkeiten denen des Referenzmodells an. Gleichzeitig entstehen kleine Veränderungen der Wellengeschwindigkeiten, welche insbesondere bei der Betrachtung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit beobachtet werden können. Diese Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten scheinen einerseits Fragmente zu sein, welche aus der Berechnung der adjungierten Gradienten durch die normalen und adjungierten Wellenfelder resultieren und scheinbar keinen physikalisch sinnvollen Beitrag zur Interpretation der Ergebnisse leisten. Andererseits können für unterschiedliche Bodeneigenschaften ähnliche Seismogramme gemessen werden. Dies führt zu einer Uneindeutigkeit des inversen Problems und eine der sich ergebenden Auswirkungen kann anhand der rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeit erläutert werden. Unmittelbar vor und hinter dem kreisförmigen Störkörper entstehen Erhöhungen der Kompressionswellengeschwindigkeit, welche nicht den Eigenschaften des Referenzmodells entsprechen. Jedoch erhöht sich durch die Erhöhungen der

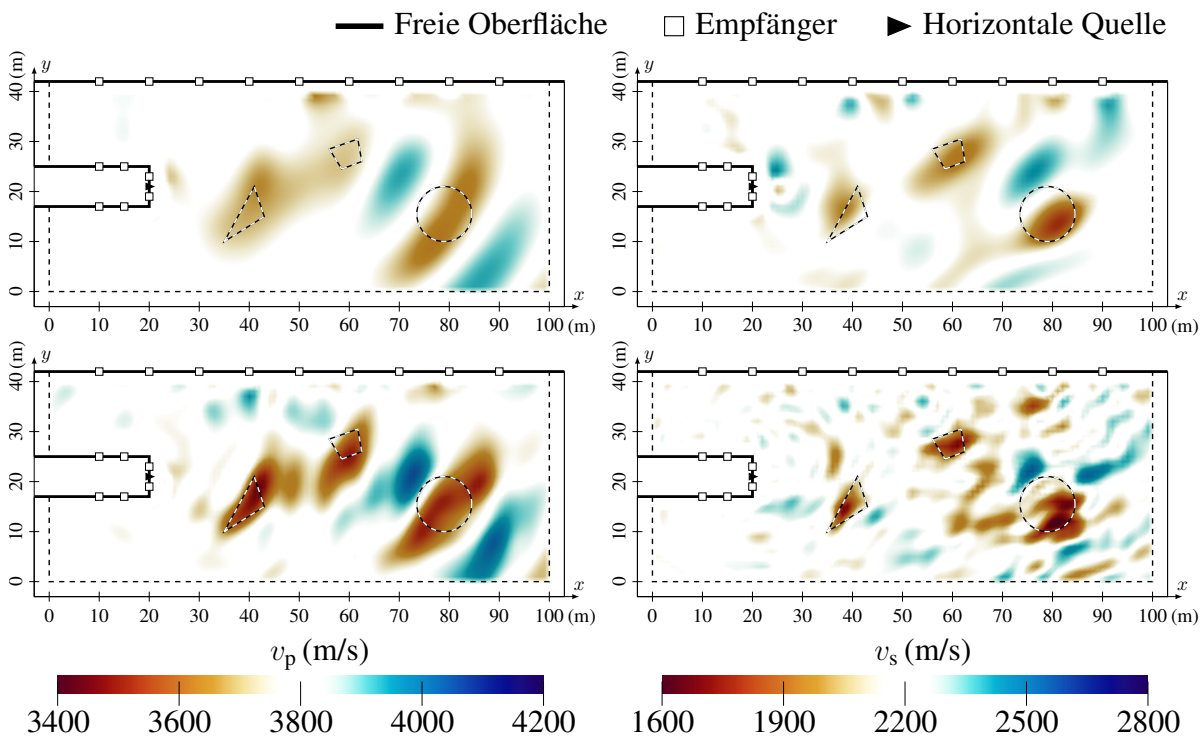


Abbildung 6.2.: Inversionsergebnis nach den ersten drei Frequenzgruppen (oben), deren höchste verwendete Frequenz 100 Hz betrug und Inversionsergebnis nach den ersten elf Frequenzgruppen (unten), deren höchste Frequenz 300 Hz betrug.



Kontrast der Wellengeschwindigkeit an den Grenzen des Störkörpers, wodurch ein Reflexionsverhalten imitiert wird, welches dem des Referenzmodells ähnelt, dessen Störkörper niedrigere Wellengeschwindigkeiten besitzen als die bis dahin rekonstruierten Formen. Daher müssen solche Veränderungen der Wellengeschwindigkeiten bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden.

Die abschließenden Ergebnisse der Inversion, welche sich nach der Minimierung des Fehlerfunktional für alle Frequenzgruppen ergeben, sind in Abbildung 6.3 für die fünf vorgestellten Beispiele zusammengestellt. In der ersten Zeile von Abbildung 6.3 werden die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten für die tiefliegende Tunnelumgebung dargestellt, für welche die erste Messanordnung verwendet wurde, welche nur Quellen und Empfänger am Tunnel berücksichtigt. Über die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit werden die horizontalen Positionen der Störkörper ersichtlich. Jedoch sind die Änderungen der Wellengeschwindigkeit nur für den dreieckigen Störkörper ausreichend ausgeprägt, um mit Gewissheit vorherzusagen, dass sich dort ein Störkörper befindet. Diese Vorhersage wird zusätzlich durch die rekonstruierte Scherwellengeschwindigkeit bestätigt, während keine Anzeichen für die anderen beiden Störkörper über die Scherwellengeschwindigkeit ersichtlich sind. Während die genaue Form und die genauen Abmaße des ersten Störkörpers nicht über die Inversionsergebnisse identifiziert werden können, kann zumindest vorhergesagt werden, dass die Wellengeschwindigkeiten der Störung niedriger als die des umgebenden Bodens sind. Eine akkurate Quantifizierung der elastischen Eigenschaften der Störung ist jedoch nicht möglich.

Der Einsatz der selben Messanordnung führt bei einer oberflächennahen Tunnelumgebung zu besseren Ergebnissen (zweite Zeile von Abbildung 6.3), da mehr Wellen, welche mit den Störkörpern interagiert haben, über eine Reflexion an der Erdoberfläche zurück zu den Empfängern gelangen. Die Position des ersten Störkörpers kann nicht nur in horizontaler, sondern auch in vertikaler Richtung besser vorhergesagt werden. Die Positionen der anderen beiden Störkörper können durch beide Wellengeschwindigkeiten erahnt werden, wobei der viereckige Störkörper besser über die Scherwellengeschwindigkeit und der dritte Störkörper besser über die Kompressionswellengeschwindigkeit erkennbar ist. Die Formen der Störkörper sind weiterhin nicht erkennbar. Jedoch treten vermehrt kurzwellige Fluktuationen auf sowie auffällige Änderungen der Wellengeschwindigkeiten, bei welchen nur vermutet werden kann, dass diese keine weiteren Störkörper sind, da diese Fluktuationen nicht an den selben Positionen innerhalb der räumlichen Verteilung der beiden Wellengeschwindigkeiten auftreten.

Die Verwendung der zusätzlichen Quelle an der Erdoberfläche führt dazu, dass von den Empfängern auch seismische Wellen aufgezeichnet werden, welche von den Störkörpern nur gebrochen wurden. Bei der vorherigen Messanordnung enthielten nur die Wellen Informationen zu den Störungen, welche wenigstens einmal von einer der Störungen reflektiert wurden. Die Inversionsergebnisse der zweiten Messanordnung werden in der dritten Zeile von Abbildung 6.3 dargestellt. Die Position, die Form und die elastischen Eigenschaften des ersten Störkörpers können über die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten sehr gut approximiert werden, lediglich die Kompressionswellengeschwindigkeit wird noch etwas zu hoch angenähert. Die Auswertung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit ermöglicht die Vorhersage der Position und der Größe des viereckigen Störkörpers, wobei über die Kompressionswellengeschwindigkeit nur dessen grobe Position erahnt werden kann. Der dritte Störkörper konnte durch die Inversion nur sehr grob rekonstruiert werden, was darauf zurückzuführen ist, dass die anderen beiden Störungen die Empfänger von den seismischen Wellen, welche vom dritten Störkörper reflektiert werden, abschirmen und somit weniger eindeutige Informationen zum kreisförmigen Störkörper in den seismischen Daten enthalten sind.

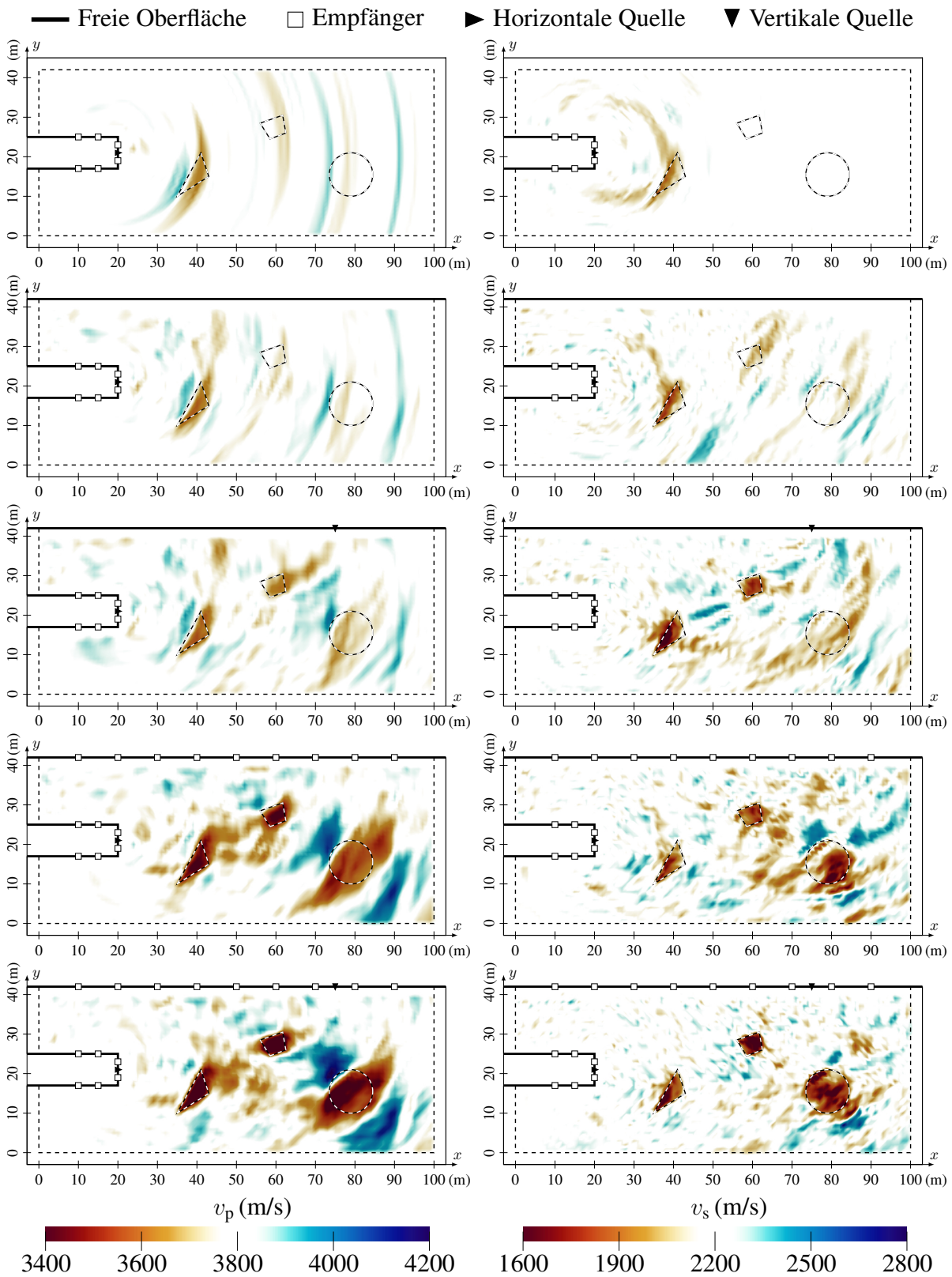


Abbildung 6.3.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen und Tunnelumgebungen berechnet wurden.

Nach der Verwendung aller in Gleichung 6.1 aufgelisteten Frequenzgruppen können die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten für die dritte Messanordnung, welche in der vierten Zeile von Abbildung 6.3 dargestellt werden, die Störkörper etwas genauer approximieren im Vergleich zu den Zwischenergebnissen aus Abbildung 6.2. Zwar gelangen durch den alleinigen Einsatz der Quelle an der Tunnelfront keine seismischen Wellen direkt zu der dritten Störung, da die anderen beiden Störkörper diese abschirmen, jedoch können die Wellen, welche durch die dritte Störung reflektiert werden, direkt durch die Empfänger an der Erdoberfläche aufgezeichnet werden. Somit enthalten die Referenzdaten deutlich mehr Informationen über den kreisförmigen Störkörper. Die Kompressionswellengeschwindigkeit ermöglicht eine genaue Vorhersage der Position und der Form der ersten beiden Störkörper, wobei sich selbst die Kompressionswellengeschwindigkeit merklich dem Referenzmodell annähert. Auch die Kompressionswellengeschwindigkeit des dritten rekonstruierten Störkörpers ist deutlich niedriger im Vergleich zu den vorherigen Ergebnissen. Jedoch kann nur die Position, aber nicht die genaue Form der dritten Störung vorhergesagt werden. Die Scherwellengeschwindigkeit ist zwar an den Positionen der Störkörper, vor allem an der Position des kreisförmigen Störkörpers, merklich reduziert, jedoch können deren Abmaße schwer abgeschätzt werden, da sehr viele Fluktuationen der Scherwellengeschwindigkeit auftreten. Lediglich über die gleichzeitige Interpretation beider Wellengeschwindigkeiten lässt sich die Vermutung aufstellen, dass keine weiteren Änderungen der elastischen Eigenschaften des Bodens auftreten. Dennoch sind diese Ergebnisse als aufschlussreicher zu bewerten als die Ergebnisse, welche mit der zweiten Messanordnung erzielt wurden.

In der fünften Zeile der Abbildung 6.3 werden die Ergebnisse dargestellt, welche mit der vierten Messanordnung erzielt wurden. Durch die Kombination der zusätzlichen Quelle und der Empfänger an der Erdoberfläche kann der hintere Bereich der verwendeten Tunnelumgebung deutlich besser ausgeleuchtet werden. Seismische Wellen, welche direkt von den beiden hinteren Störkörpern reflektiert werden, werden unmittelbar durch die zusätzlichen Empfänger aufgenommen. Dies hat zur Folge, dass einerseits die Positionen und Formen der Störkörper deutlich genauer rekonstruiert werden und andererseits werden im Vergleich zu den Inversionsergebnissen, welche mit der dritten Messanordnung erzielt wurden, die auftretenden Fluktuationen merklich reduziert, was die Interpretation der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten deutlich erleichtert. Für eine bessere Beurteilung der rekonstruierten Eigenschaften des Bodens werden in Abbildung 6.4 die Änderungen der Wellengeschwindigkeiten mit denen des Referenzmodells entlang von drei Linien verglichen, welche vertikal durch das Modell verlaufen und dabei die Positionen der Störkörper schneiden. Die erste Linie befindet sich an der Stelle  $x = 41$  m, während sich die zweite Linie an der Stelle  $x = 60$  m und die dritte Linie sich an der Stelle  $x = 79$  m befindet. Die Scherwellengeschwindigkeit der Störkörper kann besser rekonstruiert werden als die Kompressionswellengeschwindigkeit. Der viereckige Störkörper kann besonders gut beschrieben werden, was auf die Lage des Störkörpers zurückzuführen ist, da sich dieser zwischen den beiden Quellen und nah an den Empfängern befindet, welche an der Erdoberfläche positioniert sind. Bei der Bewertung der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten müssen auch die entstehenden Kontraste mit einbezogen werden, welche durch Erhöhungen der Wellengeschwindigkeiten unmittelbar vor und hinter den Grenzen der Störungen entstehen. Die Kompressionswellengeschwindigkeit des kreisförmigen Störkörpers erscheint bei der Betrachtung von Abbildung 6.4 (rechts oben) vergleichsweise ungenau rekonstruiert worden zu sein, jedoch werden durch die betrachtete Linie nicht die höchsten Anstiege der Kompressionswellengeschwindigkeit geschnitten. Um den Verlauf der Inversion besser bewerten zu können, wird die Veränderung des normierten Fehlerfunktional  $\chi$  während der Iterationen der Inversion in Abbildung 6.5 illustriert. Die Änderung des Fehlerfunktional wurde dabei auf den

Wert des Fehlerfunktional normiert, welcher mit dem Ausgangsmodell und den Frequenzen der ersten Frequenzgruppe berechnet wurde. Die Sprünge in dem dargestellten Verlauf sind auf die Wechsel von einer Frequenzgruppe zur nächsten Frequenzgruppe zurückzuführen. Für die niedrigen Frequenzen der ersten Frequenzgruppen treten niedrigere Werte des Fehlerfunktional auf, da die ersten beiden Frequenzgruppen nur jeweils eine Frequenz enthalten, während bei den folgenden Frequenzgruppen immer der Wert von zwei Frequenzen akkumuliert wird. Des Weiteren orientiert sich der durchschnittliche Wert des Fehlerfunktional an dem Betrag der Quellfunktion der jeweiligen Frequenzen. Somit steigt der durchschnittliche Wert des Fehlerfunktional zu Beginn der Inversion, aber nimmt bei den letzten Iterationen nicht mehr merklich ab, da mit der jeweiligen zweiten Frequenz innerhalb der Frequenzgruppen weiterhin eine Frequenz verwendet wird, welche der Zentralfrequenz von 500 Hz sehr nah ist. Somit ist der durchschnittliche Verlauf des Fehlerfunktional nicht mit dem Verlauf vergleichbar, welchen Lamert u. Friederich (2019) bei der Verwendung der adjungierten Gradientenmethode im Zeitbereich erhielten, bei welchem der durchschnittliche Wert des Fehlerfunktional, aufgrund der Erhöhungen der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters im Rahmen des Multi-Skalen-Ansatzes, anstieg, da mit fortlaufenden Iterationen die Unterschiede eines immer breiter werdenden Frequenzspektrums akkumuliert wurden. Unter Berücksichtigung der logarithmischen Darstellung des Fehlerfunktional in Abbildung 6.5 kann festgestellt werden, dass das Fehlerfunktional innerhalb der Frequenzgruppen sehr erfolgreich mit den verwendeten Methoden minimiert wird.

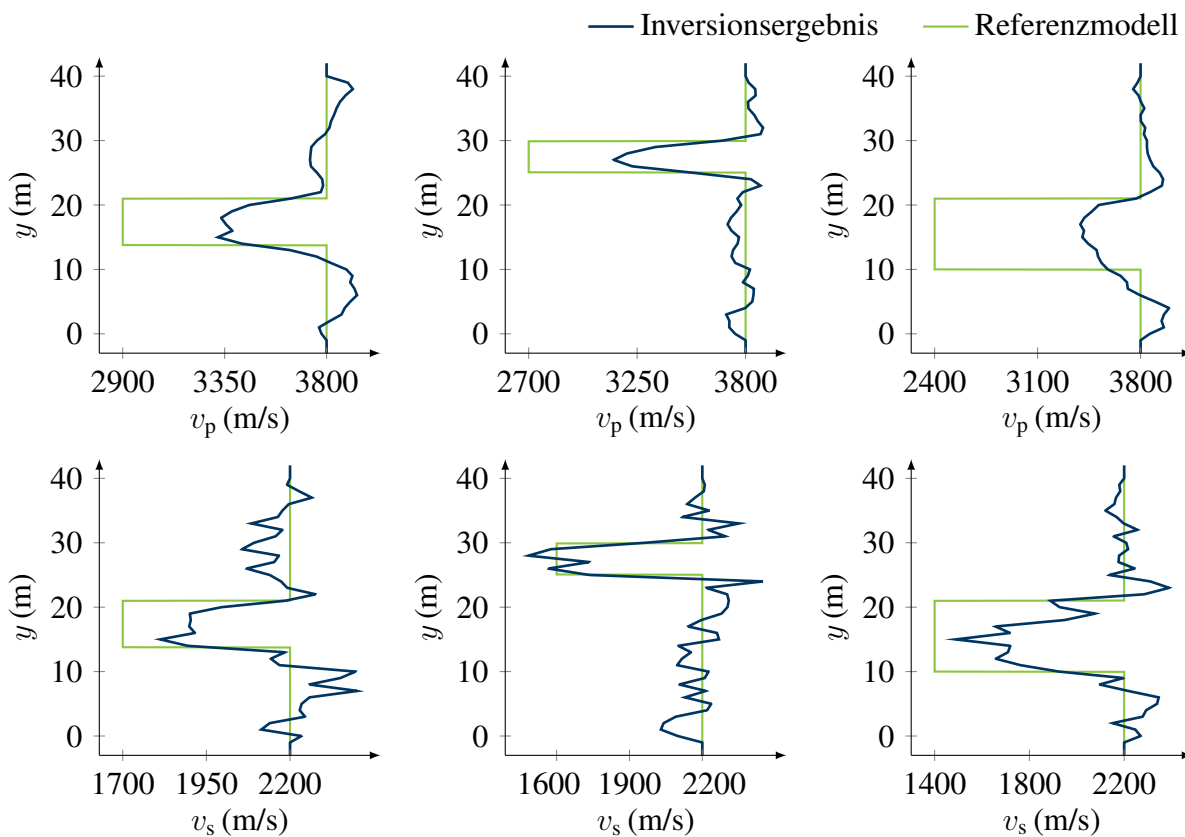


Abbildung 6.4.: Vergleich der Kompressions- (oben) und der Scherwellengeschwindigkeit (unten) des Referenzmodells mit denen, welche mit der vierten Messanordnung rekonstruiert werden konnten (fünfte Zeile von Abbildung 6.3), entlang von drei vertikalen Linien bei  $x = 41$  m,  $x = 60$  m und  $x = 79$  m, welche jeweils einen der Störkörper schneiden.

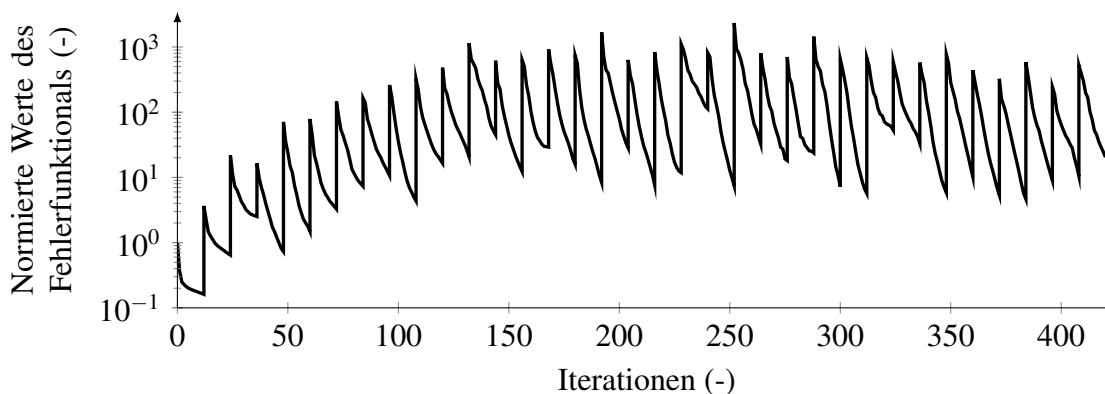


Abbildung 6.5.: Änderung der Werte des normierten Fehlerfunktional während der Inversion der synthetischen Referenzverschiebungen für die vierte Messanordnung und die oberflächennahe Tunnelumgebung (fünfte Zeile von Abbildung 6.3).

Aufgrund der unterschiedlichen Inversionsergebnisse in Abbildung 6.3 kann geschlossen werden, dass der Einsatz von Quellen und Empfängern ausschließlich im Tunnel zwar die Detektion von potentielle Störungen ermöglicht, jedoch keine genaue Bestimmung der Position, Form und der genauen Eigenschaften der Störkörper zulässt. Teilweise könnten Störungen aufgrund von Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten übersehen oder entsprechende Indizien falsch gedeutet werden. Der Einsatz von zusätzlichen Quellen und Empfängern an der Erdoberfläche ermöglicht, dass nicht nur von den Störkörpern reflektierte Wellen, sondern auch gebrochene Wellen, mit einbezogen werden können. Des Weiteren können Störungen besser detektiert und charakterisiert werden, welche einerseits weiter von der Ortsbrust entfernt sind und andererseits sich hinter anderen Störkörpern befinden. Somit ermöglichen weiträumig verteilte zusätzliche Quellen und Empfänger eine signifikante Verbesserung der Inversionsergebnisse.

### 6.1.1. Vergleich mit etablierten Messanordnungen

Bei den vorangegangenen Betrachtungen wurden die Empfänger einfachheitshalber an den Tunneloberflächen direkt angesetzt und die Quelle, welche sich im Tunnel befand, wurde an der Ortsbrust platziert. Bei den Messanordnungen der etablierten Vorauserkundungssysteme wie *Tunnel Seismic Prediction* (Sattel u. a., 1996), *Integrated Seismic Prediction* (ITA, 2018) und *Sonic Softground Probing* (Kneib u. a., 2000), welche auch schon in Abschnitt 1.2 vorgestellt wurden, werden die Quellen und Empfänger anders positioniert. Dabei werden keine Quellen und Empfänger an der Erdoberfläche verwendet. Um einen groben Einblick zu ermöglichen, wie gut die Full-Waveform-Inversion mit den gängigen Messanordnungen operieren könnte, wird im Folgenden die Inversion mit drei Messanordnungen untersucht, welche grob die etablierten Messanordnungen imitieren. Insgesamt sechs Inversionsergebnisse werden untersucht, da sowohl eine tiefliegende als auch eine oberflächennahe Tunnelumgebungen betrachtet wird. Dabei wird erneut das Referenzbodenmodell aus Abbildung 6.1 verwendet, um die Ergebnisse mit denen aus Abbildung 6.3 vergleichen zu können. Gleichzeitig werden auch die selben Inversionsparameter und -methoden verwendet. Die Ergebnisse für die tiefliegende Tunnelumgebung werden in Abbildung 6.6 und die Ergebnisse für die oberflächennahe Tunnelumgebung werden in Abbildung 6.7 zusammengefasst.

Die erste Messanordnung ist an die Messanordnung angelehnt, welche für die ersten Varianten des *Tunnel Seismic Prediction System* verwendet werden, wie beispielsweise das *TSP 303*

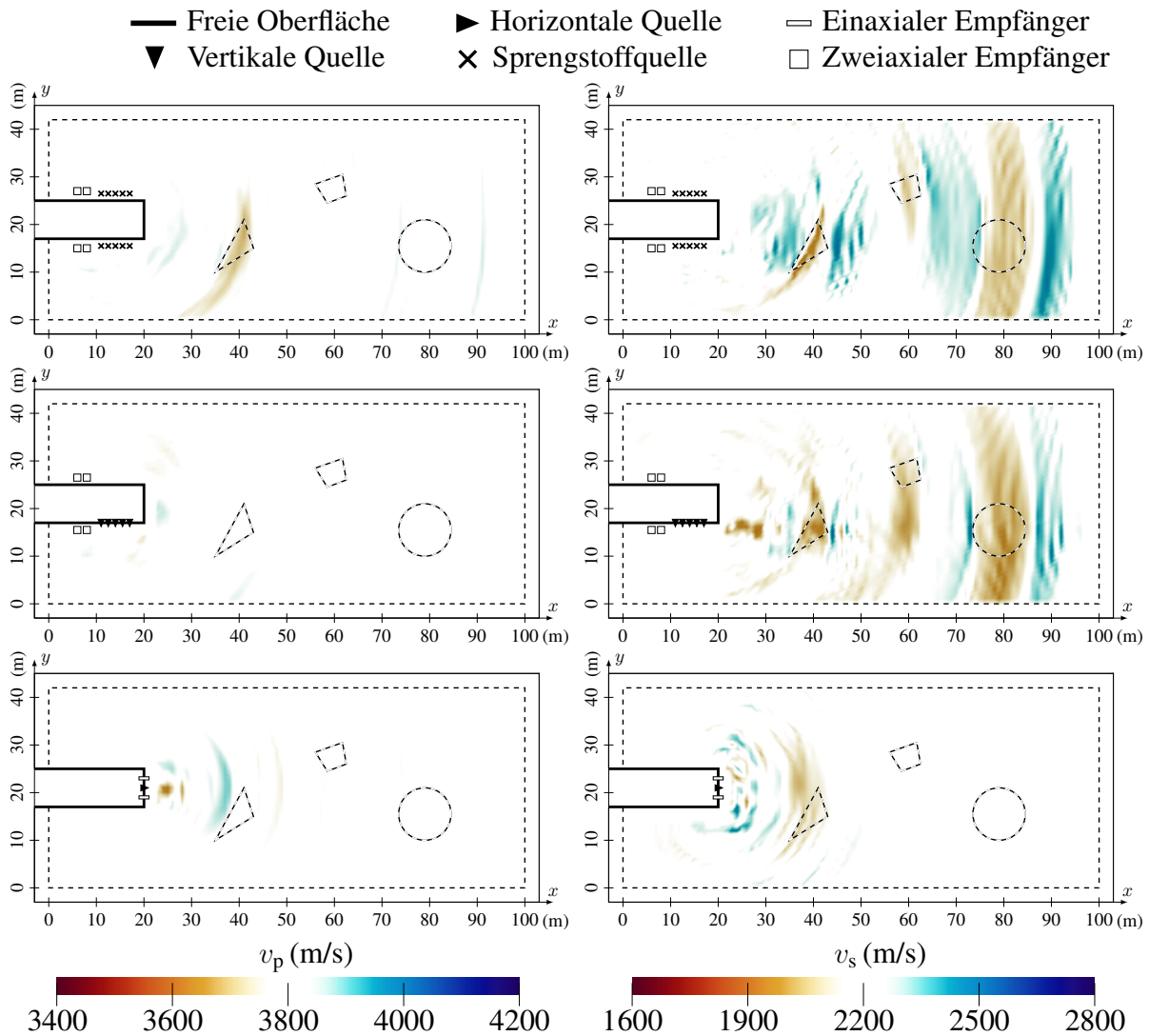


Abbildung 6.6.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen, welche etablierten Messanordnungen nachempfunden wurden, für eine tief liegende zweidimensionale Tunnelumgebung berechnet wurden.

der *Amberg Technologies AG* (Dickmann, 2014; Lu u. a., 2015). Vier Empfänger werden eingesetzt, welche über 2 m tiefe radiale Bohrungen in den Tunnelboden und die Tunneldecke ins Erdreich eingebracht werden. Bei den *TSP*-Systemen werden die Empfänger eigentlich über Bohrungen in den Seitenwänden in den Boden eingeführt, was jedoch für das zweidimensionale Tunnelmodell für die folgenden Untersuchungen abgewandelt wurde. Die Bohrungen selbst werden einfachheitshalber nicht mit modelliert, wobei diese üblicherweise nur einen Durchmesser von 50 mm besitzen. Für die Erzeugung von seismischen Wellen werden seismische Sprengungen verwendet, für welche der Sprengstoff in 1.5 m tiefe Bohrungen eingelassen und sequentiell gezündet wird. Die zugehörigen Löcher werden üblicherweise auch in die seitlichen Tunnelwände gebohrt, jedoch werden beim verwendeten Beispiel die Quellen einfachheitshalber oberhalb der Tunneldecke und unterhalb des Tunnelbodens platziert. Für die vorgestellten synthetischen Beispiele werden insgesamt zehn Sprengungen eingesetzt, während bei dem eigentlichen System ungefähr 24 Sprengungen erfolgen. Die Sprengstoffquellen besitzen untereinander einen Abstand von 1.5 m und befinden sich zwischen den Empfängern und

der Ortsbrust. Der Abstand zwischen den Quellen und den Empfängern sowie zwischen den Empfängern untereinander ist üblicherweise größer. Aufgrund der Symmetrie der tiefliegenden Tunnelumgebungen für eine Rotation um die Tunnelachse, können die gewählten Positionen der Quellen und Empfänger für diese Umgebungen mit einer Anordnung an den seitlichen Tunnelwänden gleichgesetzt werden. Um die Bereiche um die Quellen und Empfänger feiner zu diskretisieren, werden ober- und unterhalb des Tunnels Dreieckelemente verwendet, welche auf der Höhe der Sprengstoffquellen die niedrigsten Seitenlängen aufweisen. Insgesamt werden 4224 Viereckelemente und 2860 Dreieckelemente für die tiefliegende sowie 3906 Viereckelemente und 2860 Dreieckelemente für die oberflächennahe Tunnelumgebung eingesetzt.

Die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten der tiefliegenden Tunnelumgebung (erste Zeile von Abbildung 6.6) ermöglichen die Vorhersage der Position des ersten Störkörpers, da dieser über beide Wellengeschwindigkeiten ersichtlich ist. Des Weiteren kann auch abgeschätzt werden, dass der Störkörper über eine geringere Steifigkeit verfügt. Über die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit können nur noch weitere Schemen erahnt werden, welche aber aufgrund des geringen Unterschieds zu den Eigenschaften des umliegenden Bodens nicht für Interpretationen herangezogen werden sollten. Die horizontalen Positionen der vorderen und hinteren Grenzflächen der beiden hinteren Störkörper sind über die rekonstruierte Scherwellengeschwindigkeit auch ersichtlich. Jedoch entstehen auch Anstiege der Scherwellengeschwindigkeit zwischen den Grenzflächen der unterschiedlichen Störkörper, wodurch zwar der Kontrast an den Grenzflächen erhöht wird, aber gleichzeitig wäre ohne die Kenntnis über die beiden weiteren Störkörper nicht ersichtlich, ob nicht stattdessen Störungen mit höheren elastischen Eigenschaften vorliegen.

Die Ergebnisse der Inversion mit der ersten Messanordnung in einer oberflächennahen Tunnelumgebung werden in der ersten Zeile von Abbildung 6.7 illustriert. Die Form und Position des ersten Störkörpers sowie seine groben elastischen Eigenschaften können durch beide Wellengeschwindigkeiten gut vorhergesagt werden. An den Positionen der anderen beiden Störkörper können nur sehr niedrige Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit festgestellt werden, welche aufgrund der gewählten Farbskala kaum ersichtlich sind und deren Änderungen teilweise niedriger sind als die Änderungen mancher Fluktuationen. Die rekonstruierte räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit ermöglicht die Vorhersage der Positionen, der groben Formen sowie der ungefähren Scherwellengeschwindigkeit der beiden anderen Störkörper.

Die Inversionsergebnisse mit der Messanordnung, welche dem *TSP 303* nachempfunden wurde, ermöglicht eine deutlich bessere Vorhersage der Störungen im Vergleich zu der ersten Messanordnung aus Abbildung 6.3. Insbesondere die rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeiten liefern sehr hilfreiche Abbilder des Bodens. Jedoch enthalten die rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeiten weniger Informationen über die Störkörper, was auf die Positionierung der Quellen und Empfänger zurückzuführen ist. Bei der ersten Messanordnung aus Abbildung 6.3 werden durch die horizontale Punktquelle vornehmlich Kompressionswellen in Richtung der Tunnelachse angeregt. Deren direkte Reflexionen werden zudem auch an der Ortsbrust aufgenommen. Somit enthalten die aufgenommenen seismischen Wellen auch mehr Informationen über die Kompressionswellengeschwindigkeit. Jedoch muss bei diesem Vergleich berücksichtigt werden, dass bei der Messanordnung mit den Sprengstoffquellen eine deutlich höhere Anzahl an Quellen verwendet wurde.

Die zweite Messanordnung ist vornehmlich an das *TSP Impact* angelehnt, welches eine neuere Variante des *Tunnel Seismic Prediction Systems* ist (Amberg Technologies AG, 2023). Je-



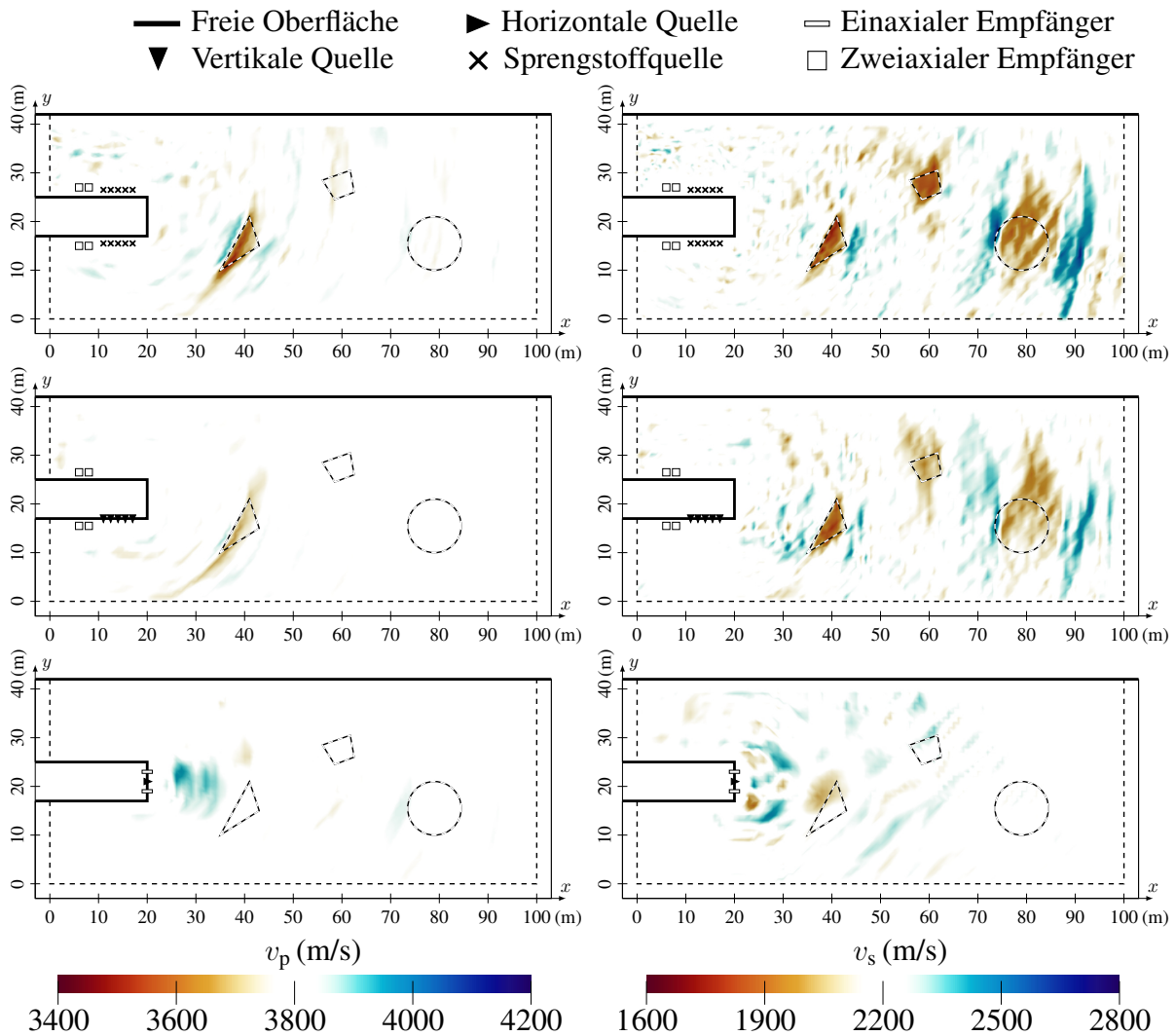


Abbildung 6.7.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen, welche etablierten Messanordnungen nachempfunden wurden, für eine oberflächennahe zweidimensionale Tunnelumgebung berechnet wurden.

doch ähnelt die Messanordnung gleichzeitig dem *Integrated Seismic Prediction System* der *Herrenknecht AG* (ITA, 2018). Bei beiden Systemen, welche schon in Abschnitt 1.2 eingeführt wurden, wird durch pneumatisch betriebene Schlaghämmer ein seismisches Signal in den Boden eingebracht. Diese Anregungen werden für die Approximationen durch gerichtete Punktquellen dargestellt. Für das *TSP Impact* wird der Schlaghammer und für das *Integrated Seismic Prediction System* werden die beiden Schlaghämmer auf einer Konsole hinter dem Schneidrad der Tunnelbohrmaschine mitgeführt. Während des Ausbaus der Tunnelinnenschalen werden die Schlaghämmer gegen die Tunnelwände gepresst und mehrmals werden seismische Wellen in den Boden eingebracht. Somit werden ohne zusätzliche Stehzeiten, wie es bei dem *TSP 303* System der Fall ist, mehrere seismische Messungen durchgeführt, bei welchen sich zusätzlich die Position der Quelle kontinuierliche verändert. Durch diese Messanordnung werden Tunneloberflächenwellen angeregt, welche über eine niedrige Dispersion verfügen. Diese bewegen sich entlang des Tunnels, bis sie an der Tunnelfront in Raumwellen umgewandelt werden. Dabei werden Scherwellen in Richtung der Tunnelachse ausgestrahlt. Die Scherwellen breiten sich



aus und werden aufgrund von geologischen Störungen reflektiert und gebrochen. Reflektierte Scherwellen bewegen sich zurück zum Tunnel und werden an dessen Front zurück zu Tunneloberflächenwellen umgewandelt. Durch die niedrige Dispersion und zusätzlich höhere Energie der Tunneloberflächenwellen, wird das Verhältnis zwischen dem Signal und dem Messrauschen deutlich verbessert (Jetschny u. a., 2010). Da sich bei jeder Messung die Distanz zwischen der Ortsbrust und den möglichen Störungen verändert, würde für die Approximation der seismischen Wellenausbreitung jeweils ein neues Randwertproblem entstehen. Für die zweite Messanordnung wurden einfachheitshalber am Tunnelboden fünf Punktquellen hinter der Tunnelfront verwendet, welche untereinander einen Abstand von 1.5 m besitzen, sodass nicht für jede Quelle die Wellenausbreitung für eine andere Tunnelumgebung approximiert werden muss. Erneut werden vier Empfänger verwendet, welche im Vergleich zum eigentlichen Messsystem wieder näher zueinander positioniert wurden. Die Empfänger, welche eigentlich wieder über Bohrungen durch Tunnelwände ins Erdreich eingebracht würden, werden diesmal nur 1.5 m tief platziert, wie es beim *TSP Impact* üblich ist. Um eine feinere Diskretisierung im Bereich der Quellen und Empfänger zu ermöglichen, wurden die Bereiche 3 m unterhalb des Tunnelbodens und 3 m oberhalb der Tunneldecke mit Dreieckelementen diskretisiert, welche am Tunnel merklich kürzere Kantenlängen besitzen. Die tiefliegende Tunnelumgebung wird durch 4784 Viereckelemente und 634 Dreieckelemente approximiert, während für die oberflächennahe Tunnelumgebung 4466 Viereckelemente und 634 Dreieckelemente verwendet werden.

Das Ergebnis der Inversion für die tiefliegende Tunnelumgebung ist in der zweiten Zeile von Abbildung 6.6 dargestellt. Die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit ermöglicht keine Vorhersagen der geologischen Änderungen des Bodens. Über die Scherwellengeschwindigkeit können, wie bei der dem *TSP 303* System nachempfundenen Messanordnung, die horizontalen Positionen der Störkörper, aber nicht deren vertikale Position, deren Form oder deren genaue Eigenschaften, bestimmt werden. Des Weiteren treten auch ausgeprägte Fluktuationen direkt vor der Ortsbrust auf. Jedoch sind Erhöhungen der Scherwellengeschwindigkeit vor und hinter den Störungen räumlich nicht so stark ausgeprägt, wodurch darauf geschlossen werden kann, dass Störungen mit einer niedrigeren Wellengeschwindigkeit vorliegen.

Die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten der oberflächennahen Tunnelumgebung, welche in der zweiten Zeile von Abbildung 6.7 dargestellt werden, ähneln dem Inversionsergebnis mit der Messanordnung, welche dem *TSP 303* System nachempfunden wurde. Jedoch sind sowohl die Formen als auch die Werte der Wellengeschwindigkeiten weniger stark ausgeprägt.

Dass die zweite Messanordnung etwas schlechtere Prognosen als die erste Messanordnung ermöglicht, ist einerseits auf die geringere Anzahl an Quellen zurückzuführen sowie darauf, dass diese sich nur am Tunnelboden befinden und nicht weiter räumlich verteilt positioniert sind. Über die Sprengstoffquellen werden vermehrt Kompressionswellen in Richtung der Störungen emittiert, wodurch die aufgenommenen Seismogramme auch mehr Informationen zu der zugehörigen Wellengeschwindigkeit enthalten. Der Vergleich mit den Ergebnissen, welche in den ersten beiden Zeilen von Abbildung 6.3 dargestellt werden, verdeutlicht die Erkenntnisse, welche mit der ersten Messanordnung erlangt wurden, dass die Kompressionswellengeschwindigkeiten zwar schlechter, jedoch die Scherwellengeschwindigkeit deutlich besser rekonstruiert werden können.

Mit der dritten Messanordnung soll die Messkonfiguration des *Sonic Softground Probing* Systems der *Herrenknecht AG* nachempfunden werden, welches auch schon in Abschnitt 1.2 beschrieben wurde. Beim *Sonic Softground Probing* System sind die Quellen und Empfänger im Schneidrad integriert. Dabei sind diese mit Stahlplatten verbunden, welche bei den Quellen

zum Schwingen angeregt werden und deren Schwingungen bei den Empfängern aufgenommen werden. Die Stahlplatten sind mit dem Boden in Verbindung und nehmen vornehmlich direkte und reflektierte Kompressionswellen auf. Eine akustische Entkopplung von den Stahlplatten und dem Schneidrad ist dabei wichtig (Kneib u. a., 2000). Für die zu untersuchende Messanordnung werden die selben beiden Empfänger und die selbe Quelle verwendet, welche sich auch bei der Messanordnung aus Abbildung 4.4 an der Tunnelfront befinden. Um die Funktionsweise der Stahlplatten grob nachzuahmen, werden nur die horizontalen Verschiebungen an den Empfängern verwendet. Beim *Sonic Softground Probing* System befinden sich die Quellen üblicherweise nicht auf der Tunnelachse, sondern etwas versetzt, damit sich je nach Rotation des Schneidrads die relativen Positionen der Quellen und Empfänger in Bezug auf die möglichen Störungen der Geologie verändern. Diese Rotation des Schneidrads sowie der übliche Einsatz von Messungen für andere Fortschritte des Tunnelvortriebs werden für die exemplarische Verwendung der Full-Waveform-Inversion nicht berücksichtigt, um die Messanordnung zu vereinfachen. Für die Tunnelmodelle werden die selben Diskretisierungen eingesetzt, welche für die Beispiele aus Abbildung 6.3 verwendet wurden.

Für die beiden rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten der tiefliegenden Tunnelumgebung, welche in der dritten Zeile von Abbildung 6.6 dargestellt werden, treten Fluktuationen kurz vor der Tunnelfront auf. Über die Kompressionswellengeschwindigkeit können Reflektoren an der ungefähren Position der vorderen und hinteren Seite der ersten Störung erahnt werden. Die Scherwellengeschwindigkeit ermöglicht lediglich die Vorhersage der horizontalen Position des ersten Störkörpers und dass dieser voraussichtlich eine niedrige Scherwellengeschwindigkeit besitzt. Genauere Formen sind nicht ersichtlich und auch für die anderen beiden Störkörper sind keine Indizien vorhanden.

Auch bei einer Verwendung der oberflächennahen Tunnelumgebung in Kombination mit dieser dritten Messanordnung entstehen während der Inversion Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten vor der Tunnelfront, was in der dritten Zeile von Abbildung 6.7 beobachtet werden kann. Über die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit können keine Erkenntnisse über die geologischen Veränderungen vor dem Tunnel erlangt werden. Ein Abfall der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit leicht oberhalb der tatsächlichen Position des ersten Störkörpers deutet auf diesen Störkörper hin, jedoch treten auch vermehrt Fluktuationen auf, wodurch eine eindeutige Interpretation nicht durchgeführt werden kann.

Mit der Messanordnung, welche an die Messkonfiguration des *Sonic Softground Probing* Systems angelehnt ist, wurden verhältnismäßig wenig aussagekräftige Bodenmodelle rekonstruiert. Lediglich der erste Störkörper wurde überhaupt durch die Ergebnisse angedeutet und der Einsatz einer oberflächennahen Tunnelumgebung führt zu schlechteren Ergebnissen als die Inversion mit einer tiefliegenden Tunnelumgebung. Da die verwendete Messanordnung eine um vier Empfänger und um eine Aufnahme- und reduzierte Version der Messanordnung aus den ersten beiden Zeilen von Abbildung 6.3 darstellt, sind die schlechteren Inversionsergebnisse nicht verwunderlich. Jedoch muss bei der Bewertung der Messanordnung berücksichtigt werden, dass das *Sonic Softground Probing* System einerseits für die Detektion vertikaler Grenzflächen auf der Höhe der Tunneltrasse entwickelt wurde. Da im verwendeten Referenzmodell jedoch größtenteils Störungen eingesetzt wurden, welche sich nur teilweise auf der Tunneltrasse befinden, stellen diese nicht die geologischen Formationen dar, für welche das *Sonic Softground Probing* System ausgelegt wurde. Andererseits wurde das *Sonic Softground Probing* System für die Vorauserkundung in Lockergestein entwickelt, weshalb ein direkter Vergleich mit den anderen Messanordnungen, deren Systeme für Festgestein entwickelt wurden, nicht komplett angemessen erscheint.

Die Betrachtung der Inversionsergebnisse, welche mit Messanordnungen erzielt wurden, die sich an den Messanordnungen von etablierten Vorauserkundungssystemen orientieren, verdeutlicht, dass die Prognosen der Geologie sich mit zunehmenden Quellen und Empfängern verbessern, vor allem wenn diese weiträumig über das betrachtete Gebiet verteilt sind. Insbesondere Messanordnungen, welche auf dem Prinzip der Umwandlung von Tunneloberflächenwellen an der Tunnelfront zu Scherwellen und der Umwandlung der reflektierter Scherwellen zurück zu Tunneloberflächenwellen beruhen, ermöglichen eine vergleichsweise gute Rekonstruktion der Scherwellengeschwindigkeit.

## 6.2. Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion

Wie schon in Kapitel 5 angedeutet wurde, ist eine Bestimmung oder Abschätzung der Quellfunktion essentiell für die Durchführbarkeit und den Erfolg der Full-Waveform-Inversion. Der in Abschnitt 5.8 vorgestellte Ansatz zur simultanen Approximation der Quellfunktion während der Full-Waveform-Inversion wird im Folgenden für die selben Tunnelszenarien und für die selben Messanordnungen eingesetzt und untersucht, welche in Abbildung 6.3 illustriert werden. Somit ist ein Vergleich mit den Inversionsergebnissen möglich, bei welchen die jeweils wahre Quellfunktion verwendet wurde, wodurch eine Bewertung des Ansatzes ermöglicht wird. Als Referenzquellfunktion für alle Quellen wird weiterhin ein Ricker-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 500 Hz verwendet, für welches einerseits kein Zeitversatz verwendet wird und andererseits ein zusätzlicher Skalierungsfaktor von  $10^6$  eingesetzt wird. Dabei werden auch die selben Frequenzgruppen, welche in Gleichung 6.1 zusammengefasst werden, verwendet. Ebenso werden die übrigen Inversionsparameter identisch gewählt, damit die Ergebnisse später besser verglichen werden können. Die Inversionsergebnisse, für welche die Quellfunktionen simultan für jeden Inversionsschritt approximiert wurden, werden in Abbildung 6.8 illustriert.

Die Änderungen der Wellengeschwindigkeiten sind bei der Verwendung der ersten Messanordnung in einer tiefliegenden Tunnelumgebung (erste Zeile von Abbildung 6.8) durch den Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion schwächer ausgeprägt als bei den Inversionsergebnissen aus Abbildung 6.3. Daher sind die Änderungen, wie beispielsweise die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit auf der Höhe des zweiten und dritten Störkörpers, mit der verwendeten Farbskala schlechter erkennbar und können zudem schlechter von numerischen Fluktuationen unterschieden werden. Das selbe Phänomen ist beim Vergleich der Inversionsergebnisse zu beobachten, für welche die erste und zweite Messanordnung in Kombination mit einer oberflächennahen Tunnelumgebung (zweite und dritte Zeile von Abbildung 6.8) verwendet wurden. Die Inversionsergebnisse, welche bei der Verwendung der dritten und vierten Messanordnung generiert wurden (vierte und fünfte Zeile von Abbildung 6.8), unterscheiden sich nur unwesentlich von den Ergebnissen, welche durch die Inversion mit der wahren Quellfunktion erzielt wurden. Für die Verwendung von wenigen im Tunnel platzierten Empfängern ist, durch den Einsatz der simultan approximierten Quellfunktion anstelle der Referenzquellfunktion, eine leichte Degradierung der Inversionsergebnisse zu erkennen. Bei der Verwendung von vielen weiträumig verteilten Empfängern ist keine offensichtliche Verschlechterung der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten erkennbar. Ob der Einsatz von vielen lokal im Tunnel positionierten Empfängern zu ähnlichen Resultaten führen würde, ist nicht ersichtlich.

Für die Inversion mit der ersten Messanordnung und der tiefliegenden Tunnelumgebung wird die simultan approximierten Quellfunktion  $h^1$  der jeweiligen Iterationsschritte in Abbildung 6.9

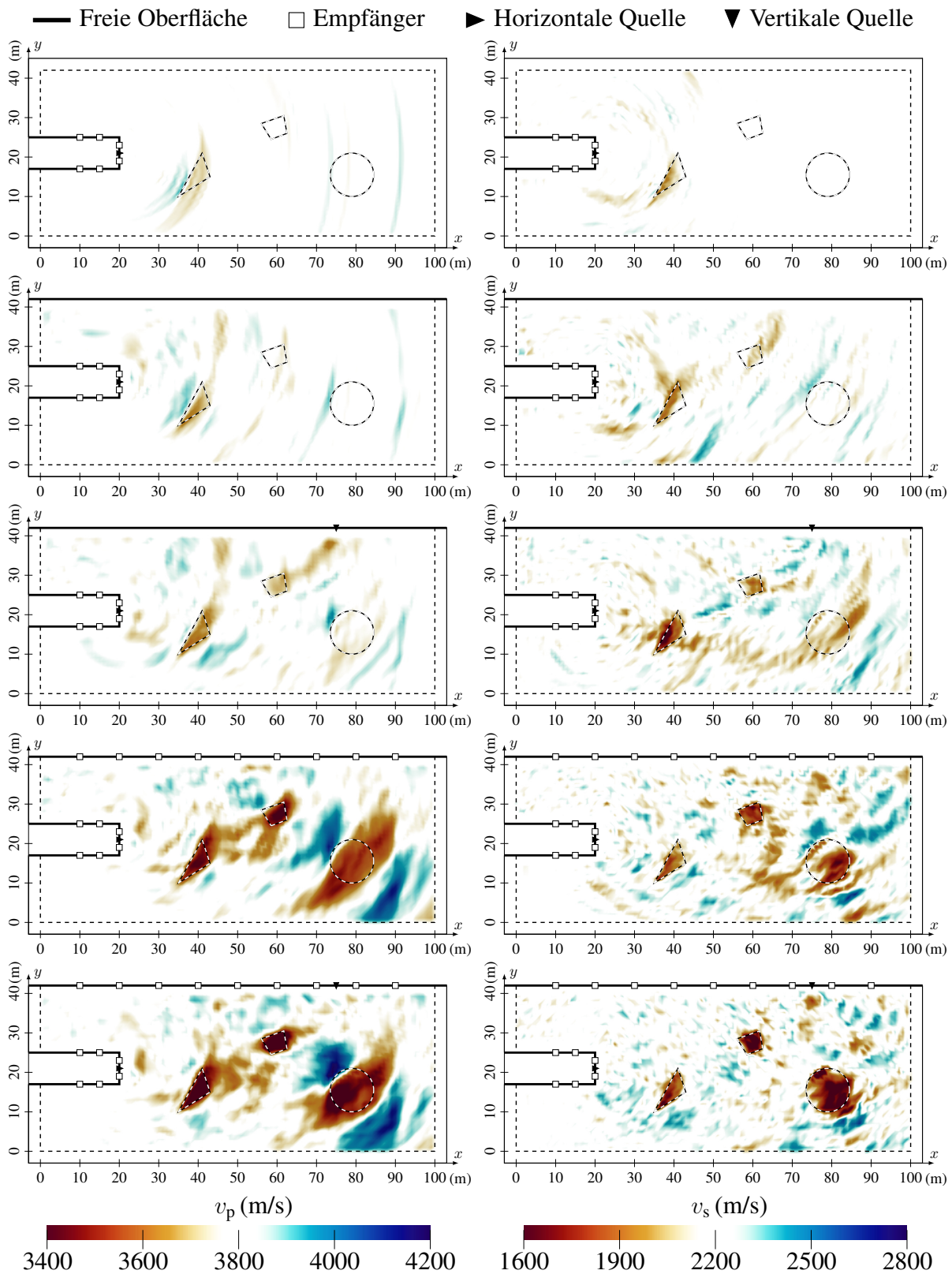


Abbildung 6.8.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen und Tunnelumgebungen berechnet wurden, wobei die Quellfunktionen während der Inversion simultan approximiert wurden.

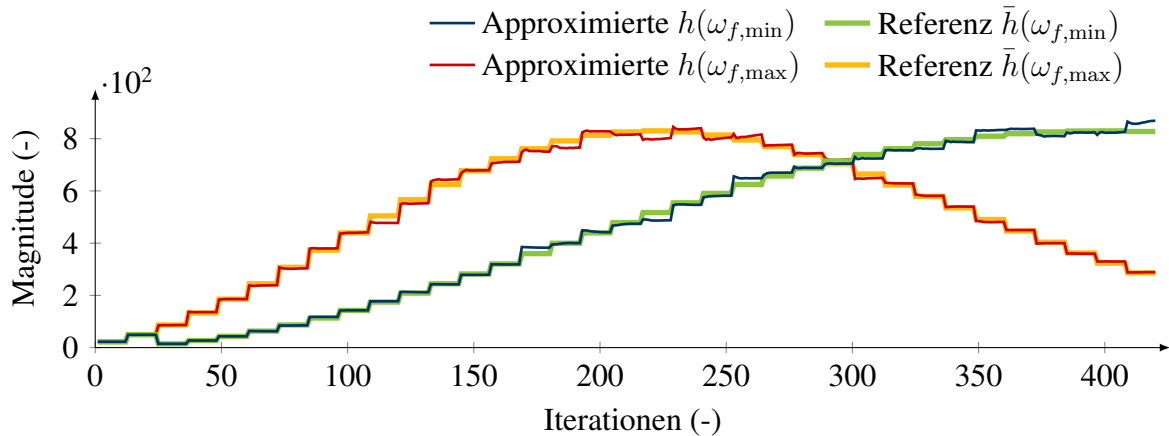


Abbildung 6.9.: Änderung der Magnitude der Quellfunktion  $h^1$ , welche während der Inversion der Referenzverschiebungen einer tiefliegenden Tunnelumgebung simultan approximiert wurde. Die zugehörigen rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten werden in der ersten Zeile von Abbildung 6.8 dargestellt.

mit der Referenzquellfunktion  $\bar{h}^1$  verglichen, um zu untersuchen wie gut die Referenzquellfunktion während der Inversion approximiert werden kann. Sowohl die Approximationen der Quellfunktion für die niedrigere Frequenz  $h^1(\omega_{f,\min})$  als auch für die höhere Frequenz  $h^1(\omega_{f,\max})$  werden für die jeweiligen Frequenzgruppen dargestellt. Anhand des Vergleichs der Magnitude von der approximierten und der Referenzquellfunktion kann festgestellt werden, dass in der Regel schon die erste Approximation innerhalb einer Frequenzgruppe eine gute Annäherung der Quellfunktion darstellt. Die Veränderungen der Approximationen zwischen den einzelnen Iterationen einer Frequenzgruppe sind in der verwendeten Darstellungsweise nur zu erahnen und befinden sich weiterhin in der Nähe des Referenzwerts.

Für die Inversion von Referenzverschiebungen einer oberflächennahen Tunnelumgebung, für welche zwei Quellen und zusätzliche Empfänger an der Erdoberfläche verwendet wurden (fünfte Zeile von Abbildung 6.8), werden die Veränderungen der approximierten Quellfunktion der ersten Quelle  $h^1$ , welche sich an der Tunnelfront befindet, und der approximierten Quellfunktion der zweiten Quelle  $h^2$ , welche an der Erdoberfläche positioniert ist, in Abbildung 6.10 mit den Referenzquellfunktionen  $\bar{h}$  verglichen. Die beiden Referenzquellfunktionen können gut approximiert werden. Für die Quellfunktion der ersten Quelle sind verhältnismäßig große Abweichungen für die Frequenzen zu erkennen, welche sich der Spitzenfrequenz des Ricker-Signals nähern. Die Magnituden der simultan approximierten Quellfunktion der zweiten Quelle sind, im erweiterten Bereich um die Spitzenfrequenz des Ricker-Signals, höher als die Magnituden der Referenzquellfunktion. Da die Frequenzen, welche sich im Bereich um die Spitzenfrequenz des Referenzsignals befinden, im umgebenden Boden Wellenlängen erzeugen, die den Seitenlängen des zweiten Störkörpers entsprechen, wird vermutet, dass die entstehenden Unterschiede der Magnituden auf die unzureichende Approximation der relevanten Eigenfrequenzen des Referenzmodells durch das rekonstruierte Bodenmodell zurückzuführen sind. In Abbildung 6.9 treten diese Abweichungen nicht auf, da die verwendeten Seismogramme fast gar keine Informationen des zweiten Störkörpers enthalten und generell mit dieser Messanordnung vornehmlich nur die vorderen Seiten der Störungen detektiert werden können. Da der imaginäre Anteil des gewählten Ricker-Signals im Frequenzbereich verschwindet, wurden in Abbildung 6.9 und in Abbildung 6.10 nicht die einzelnen spektralen Anteile der simultan approximierten Quellfunktionen mit den Referenzquellfunktionen verglichen, um die Darstellung übersichtlich zu gestalten.

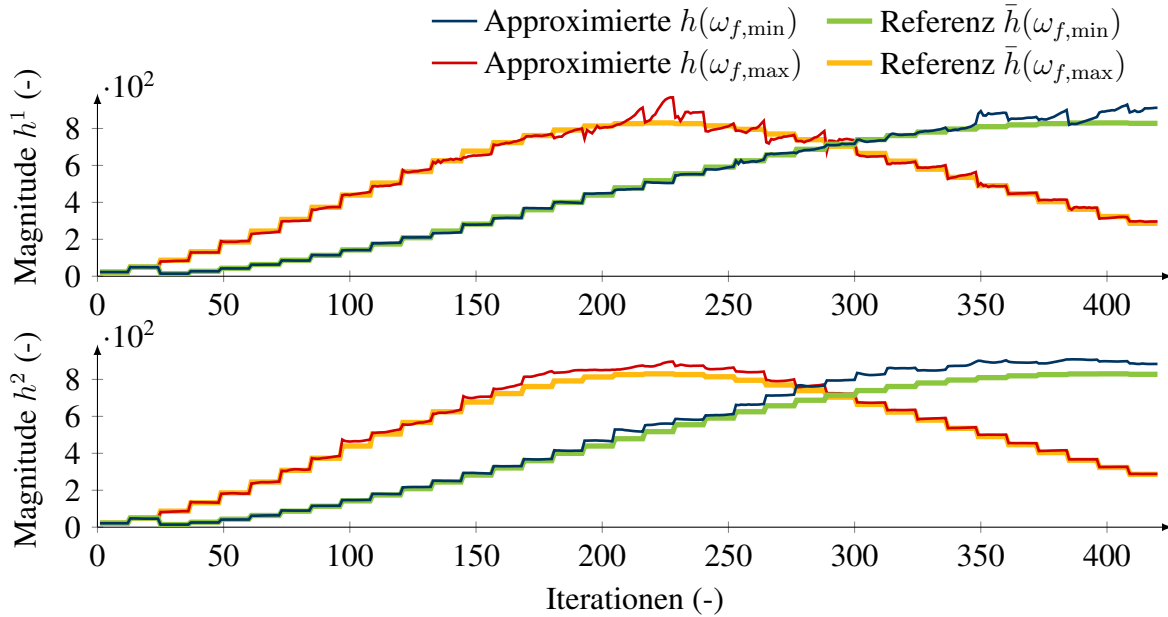


Abbildung 6.10.: Änderung der Magnitude der Quellfunktionen  $h^1$  und  $h^2$ , welche während der Inversion der Referenzverschiebungen einer oberflächennahen Tunnelumgebung simultan approximiert wurden. Die zugehörigen rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten werden in der fünften Zeile von Abbildung 6.8 dargestellt.

Ohne nennenswerten zusätzlichen Berechnungsaufwand konnte das in Abschnitt 5.8 eingeführte Berechnungsschema für die simultane Approximation von Quellfunktionen in den Ablauf der Full-Waveform-Inversion integriert werden. Die Rekonstruktion der Bodeneigenschaften wird bei einer geringen Anzahl an Empfängern, welche alle im Tunnel platziert sind, eingeschränkt, wodurch weniger Informationen von möglichen Störungen erlangt werden können. Für die Inversionen mit Messanordnungen, die mehrere räumlich verteilte Empfänger einsetzen, konnten Modelle des Bodens rekonstruiert werden, welche vergleichbar zu denen waren, die mit den wahren Quellfunktionen rekonstruiert wurden. Da die approximierten Quellfunktionen immer von dem aktuellen Bodenmodell abhängen, werden sie auch davon beeinflusst, wie erfolgreich die Inversion der vorherigen Frequenzgruppen verlief. Somit werden durch einen erfolgreichen Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes sowie die Wahl eines Ausgangsmodells, welches die Eigenschaften des umgebenden Bodens ausreichend beschreibt, die Approximationen der Quellfunktion verbessert. Durch den Einsatz von mehreren Frequenzen innerhalb einer Frequenzgruppe hat eine weniger gute Approximation einer Quellfunktion für eine einzelne Frequenz einen geringen Einfluss auf den Inversionsprozess. Jedoch wird bei dem vorgestellten Ansatz nicht berücksichtigt, dass die angenommene Art der Anregung (gerichtete Punktquelle, Sprengstoffquelle) von der tatsächlichen Anregungsart abweichen könnte. Des Weiteren beruht der vorgestellte Ansatz auf der Annahme, dass die Übertragungsfunktion zwischen dem Boden und einem Empfänger für alle Empfänger die selbe ist, wodurch diese Übertragungsfunktion sowie die Übertragungsfunktion zwischen einer Quelle und dem Boden bei der Approximation der Quellfunktion implizit auch angenähert werden. Abschließend kann zusammengefasst werden, dass mit dem vorgestellten Ansatz eine im Vorfeld stattfindende Identifikation der Quellfunktion nicht zwingend erforderlich ist, wenn ausreichend Informationen zu der Tunnelumgebung und den seismischen Messungen vorhanden sind. Da auch die Bestimmung der effektiven Quellfunktion im Vorfeld zu einer Inversion bei Beispielen, für welche keine synthetischen Referenzdaten verwendet werden, mit hohen Ungenauigkeiten behaftet sein kann, bietet sich der zusätzliche Einsatz der simultanen Bestimmung der Quellfunktion an.

### 6.3. Einfluss von Dämpfungseffekten auf die Inversion

Wie in Abschnitt 4.3 beobachtet werden konnte, wird durch intrinsische Dämpfungseffekte besonders der Informationsgehalt der Seismogramme eingeschränkt, welcher in den höheren Frequenzen enthalten ist. Jedoch werden auch die Amplituden von Wellen gedämpft, welche sich zuvor über eine größere Distanz ausbreiten mussten. Dadurch werden gerade für niedrige Qualitätsfaktoren auch Veränderungen der Anteile der Wellenformen festgestellt, welche niedrigen Frequenzen zugeordnet werden können. Im Folgenden wird zunächst untersucht, wie sich der Einfluss von Dämpfungseffekten auf die Full-Waveform-Inversion auswirkt. Dazu werden die selben Referenzmodelle wie in Abschnitt 6.1 verwendet, deren Wellengeschwindigkeiten in Abbildung 6.1 dargestellt werden. Jedoch wird bei den Berechnungen der Referenzseismogramme das Kolsky-Futterman-Modell aus Gleichung 2.41 eingesetzt, um viskoelastische Wellenausbreitung zu simulieren. Durch die Verwendung der Qualitätsfaktoren  $Q_p = 60$  und  $Q_s = 30$  in Kombination mit der Referenzfrequenz  $f_r = 500$  Hz, welche der Spitzenfrequenz des verwendeten Ricker-Signals entspricht, wird ein Dämpfungsverhalten angenähert, welches einen sichtbaren Einfluss auf den Informationsgehalt der Seismogramme hat, was schon durch Abbildung 4.10 und Abbildung 4.11 in Abschnitt 4.3 verdeutlicht wurde. Für die Inversion werden die selben Tunnelumgebungen und Messanordnungen wie bei den Ergebnissen aus Abbildung 6.3 verwendet, sodass die Ergebnisse miteinander verglichen werden können. Zwar werden auch die selben Wellengeschwindigkeiten für die homogenen Ausgangsmodelle verwendet, jedoch werden die Qualitätsfaktoren des Referenzmodells auch für das Modell verwendet, welches für die Inversion eingesetzt wird. Die Qualitätsfaktoren bleiben während des Inversionsprozesses unverändert. Sowohl die selbe Diskretisierung, als auch die selben Inversionsparameter und somit auch die selben Frequenzgruppen aus Gleichung 6.1 werden eingesetzt. In Abbildung 6.11 werden die zugehörigen Inversionsergebnisse für die unterschiedlichen Messanordnungen verglichen, wobei für die erste Messanordnung erneut zwischen einer Inversion in einer tiefliegenden und einer oberflächennahen Tunnelumgebung unterschieden wird.

Im Vergleich zu den Ergebnissen aus Abbildung 6.3 ergeben sich für die tiefliegende Tunnelumgebung durch die intrinsischen Dämpfungseffekte kaum Unterschiede für die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten, welche in der ersten Zeile von Abbildung 6.11 dargestellt werden. Lediglich die Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit, welche an den Positionen die beiden hinteren Störkörper zu beobachten sind, sind schwächer ausgeprägt.

Bei der Verwendung der ersten Messanordnung in Kombination mit der oberflächennahen Tunnelumgebung (zweite Zeile von Abbildung 6.11) sind die entstehenden Reflektoren an den Positionen der beiden hinteren Störkörper aufgrund der Dämpfung etwas schwächer ausgeprägt, was insbesondere bei der Betrachtung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit auffällt. Gleichzeitig nehmen jedoch die numerischen Fluktuationen in der ganzen Tunnelumgebung ab.

Die Wellengeschwindigkeiten, welche durch den Einsatz der zweiten Messanordnung, bei welcher eine zusätzliche Quelle an der Erdoberfläche verwendet wurde, rekonstruiert werden konnten, werden in der dritten Zeile von Abbildung 6.11 dargestellt. Die Kontraste der Kompressionswellengeschwindigkeit konnten unter Berücksichtigung von viskoelastischem Materialverhalten besser rekonstruiert werden. Die Form des ersten Störkörpers kann durch die Scherwellengeschwindigkeit besser nachempfunden werden, während die Form und der Wert der Scherwellengeschwindigkeit des zweiten Störkörpers etwas schlechter rekonstruiert wurde. Die Rekonstruktion des dritten Störkörpers weist keine grundlegenden Unterschiede auf, außer dass alle Formen merklich glatter dargestellt werden. Dies könnte darauf zurückgeführt werden, dass



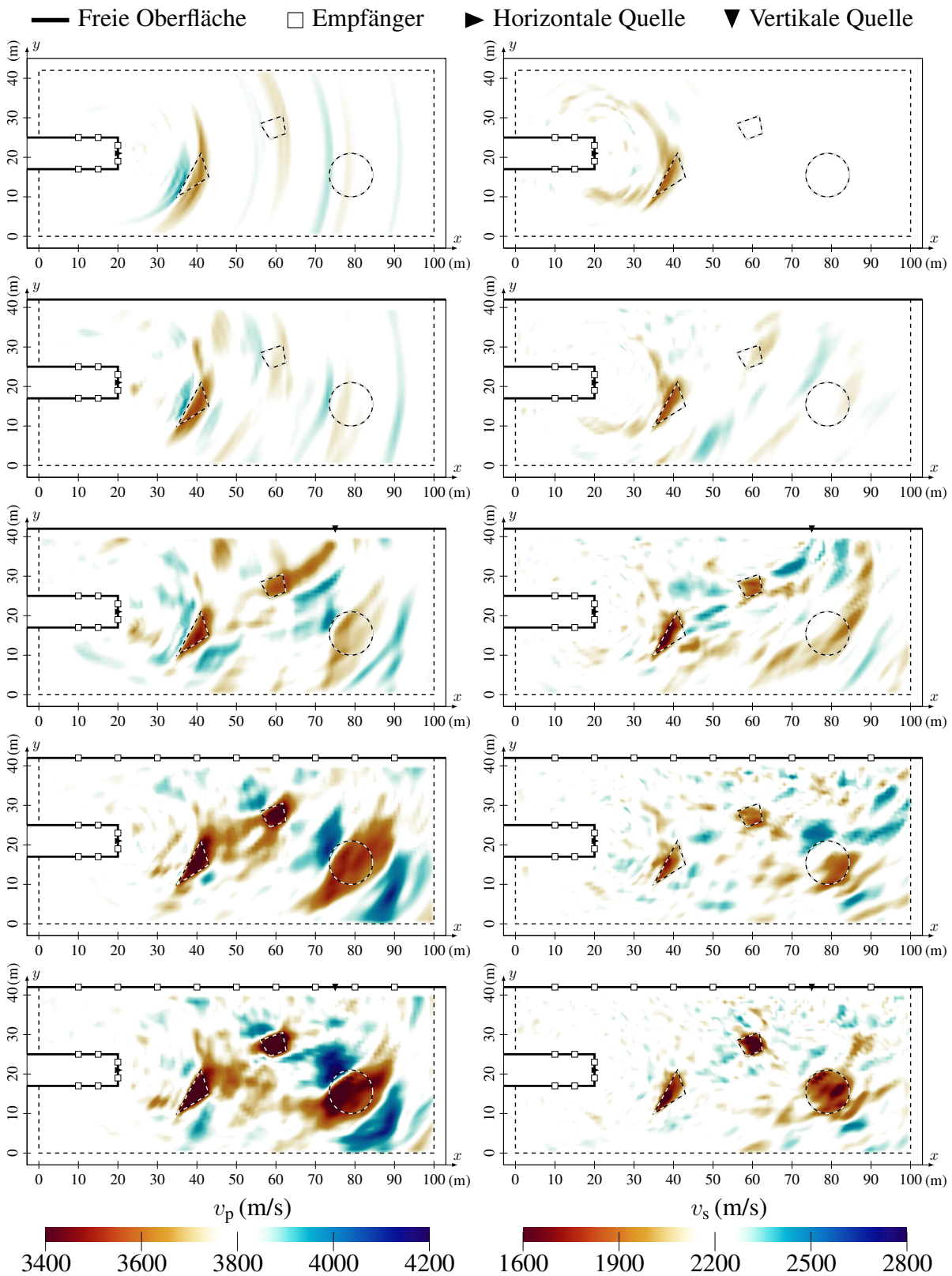


Abbildung 6.11.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen und Tunnelumgebungen berechnet wurden, wobei Dämpfungseffekte bei der Modellierung der Wellenausbreitung berücksichtigt wurden.



auch das zu minimierende Fehlerfunktional bei höheren Frequenzen an Komplexität verliert, da durch die Dämpfung der zugehörige mehrdeutige Informationsgehalt in den Seismogrammen abnimmt.

Die Berücksichtigung von Dämpfungseffekten führt bei den Inversionsergebnissen, welche mit der dritten Messanordnung erzielt wurden (vierte Zeile von Abbildung 6.11), dazu, dass sich die Kompressionswellengeschwindigkeit stärker der Kompressionswellengeschwindigkeit des Referenzmodells annähert. Über die rekonstruierte Scherwellengeschwindigkeit werden Vorhersagen über die Geologie unpräziser, da die Kontraste an den Grenzen der Störkörper schlechter angenähert werden, womit eine Unterscheidung zwischen Störkörpern und numerischen Fluktuationen auch erschwert wird. Die Scherwellen verfügen über kürzere Wellenlängen als die Kompressionswellen und zudem ist der zugehörige Qualitätsfaktor  $Q_s$  niedriger als der Qualitätsfaktor der Kompressionswellen  $Q_p$ . Dies hat zur Folge, dass die Scherwellen mit steigenden Frequenzen stärker gedämpft werden und somit weniger Informationen über die Scherwellengeschwindigkeit in den Seismogrammen enthalten sind. Gleichzeitig werden dadurch die Unterschiede, welche aufgrund der sich unterscheidenden Kompressionswellengeschwindigkeit entstehen, bei der Inversion mehr in den Fokus gerückt, wodurch die Verbesserung der zugehörigen Ergebnisse erklärt werden kann.

Auch bei den Inversionsergebnissen, welche mit der vierten Messanordnung erzielt wurden (fünfte Zeile in Abbildung 6.11), hat sich die Kompressionswellengeschwindigkeit an den Positionen der Störkörper dem Referenzmodell mehr angenähert als durch die Inversion ohne die Berücksichtigung von Dämpfungseffekten. Dabei konnte auch die Form des zweiten Störkörpers besser rekonstruiert werden. Die Scherwellengeschwindigkeit sinkt an den Positionen der Störkörper weniger stark und auch die Formen der Störkörper werden weniger genau rekonstruiert, jedoch nehmen im Gegenzug die numerischen Fluktuationen ab.

Trotz viskoelastischer Bodeneigenschaften konnten für die betrachteten Beispiele weiterhin durch die Full-Waveform-Inversion Abbilder des Bodens erzeugt werden, welche eine vergleichbare Vorhersage der Störkörper ermöglicht. Die Vorhersagen werden nur etwas ungenauer, da die Scherwellengeschwindigkeit, aufgrund der höheren Dämpfung von Scherwellen, weniger akkurat rekonstruiert werden konnte. Jedoch verbesserte sich dadurch zeitgleich die Rekonstruktion der Kompressionswellengeschwindigkeiten, da die zugehörigen Informationen innerhalb der Seismogramme mehr in den Mittelpunkt rücken, was auf die Abnahme des Informationsgehalts über die Scherwellengeschwindigkeit zurückzuführen ist. Andere Konstellationen von Qualitätsfaktoren würden voraussichtlich ähnlich gute Vorhersagen über Störkörper ermöglichen, jedoch würden einzelne Charakteristiken der Inversionsergebnisse anders ausgeprägt sein.

### 6.3.1. Einfluss von über- und unterschätzter Dämpfung auf die Inversion

Die seismischen Wellengeschwindigkeiten des umgebenden Bodens sind häufig über Laufzeitmessungen gut quantifizierbar, wohingegen die Qualitätsfaktoren eher schwierig zu bestimmen sind. Daher muss untersucht werden, welche Auswirkungen ungenau quantifizierte Qualitätsfaktoren auf die Inversion haben. Dazu werden die selben Referenzmodelle verwendet, welche für die in Abbildung 6.11 dargestellten Ergebnisse verwendet wurden und für welche die Qualitätsfaktoren  $Q_p = 60$  und  $Q_s = 30$  eingesetzt wurden. Für die Modelle, welche für die Inversion verwendet werden, wird jedoch einmal mit  $Q_p = 80$  und  $Q_s = 45$  ein schwächeres

Dämpfungsverhalten und in einem zweiten Beispiel mit  $Q_p = 45$  und  $Q_s = 20$  ein stärkeres Dämpfungsverhalten als beim Referenzmodell angenommen. Somit kann untersucht werden, welchen Einfluss eine über- und eine unterschätzte Dämpfung auf die Inversionsergebnisse hat. Eine ähnliche Untersuchung wurde von Lamert u. Friederich (2019) durchgeführt, welche das adjungierte Gradientenverfahren in Kombination mit einem Modell verwendet haben, welches die seismische Wellenausbreitung im Zeitbereich modelliert. Dabei wurde für das Inversionsmodell eine schwächere Dämpfung als beim Referenzmodell angenommen. Unter der Verwendung der akustischen Wellengleichung haben Riedel u. a. (2021b) mittels des vorgestellten Frequenzbereichsmodells bereits eine ähnliche Untersuchung durchgeführt, bei welcher aber zu klären blieb, inwieweit die zugehörigen Erkenntnisse für den Einsatz der elastischen Wellengleichung übertragen werden können.

Da die Dämpfung insbesondere bei höheren Frequenzen zu größeren Unterschieden zwischen den Wellenformen führt, wurden nur die ersten 19 Frequenzgruppen aus Gleichung 6.1 verwendet, da weitere höhere Frequenzen zu einer Verschlechterung der Inversionsergebnisse geführt haben. Die letzte Frequenzgruppe beinhaltet somit die Frequenzen 280 Hz und 500 Hz. Die Ergebnisse, für welche eine niedrigere Dämpfung für das Inversionsmodell eingesetzt wurde, sind in Abbildung 6.12 dargestellt, während in Abbildung 6.13 die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten zusammengefasst werden, für welche eine höhere Dämpfung für das Inversionsmodell verwendet wurde.

Die Inversionsergebnisse, welche für die tiefliegende Tunnelumgebung erzielt wurden, werden in der ersten Zeile von Abbildung 6.12 und Abbildung 6.13 dargestellt. Die Unter- sowie Überschätzung des Dämpfungsverhaltens haben scheinbar für diese Konstellation aus Messanordnung und Tunnelumgebung kaum Auswirkungen auf die rekonstruierten Bodeneigenschaften. Jedoch ist zu beobachten, dass die Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten kurz vor der Tunnelfront zunehmen.

Bei einer Verwendung der ersten Messanordnung in einer oberflächennahen Tunnelumgebung (zweite Zeile von Abbildung 6.12 und Abbildung 6.13) nehmen die Fluktuationen der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten im Bereich vor dem Tunnel sowie zwischen der Tunneldecke und der Erdoberfläche deutlich zu. Sowohl bei einer Verwendung der höheren Qualitätsfaktoren als auch bei der Verwendung der niedrigeren Qualitätsfaktoren kann der erste Störkörper noch gut über die Kompressionswellengeschwindigkeit identifiziert werden, wobei dies für die Scherwellengeschwindigkeit im Vergleich zu den Ergebnissen aus Abbildung 6.11 nicht mehr zutrifft. Prognosen zu den anderen Störkörpern sind nicht mehr möglich, da eine entsprechende Interpretation durch die auftretenden Fluktuationen unterbunden wird. Insbesondere bei einer Überschätzung der intrinsischen Dämpfung (Abbildung 6.13) nehmen die Fluktuationen verstärkt zu und verfügen über eine vergleichsweise kurzweilige räumliche Auflösung.

Im Vergleich zu den Ergebnissen aus Abbildung 6.11 werden bei der Verwendung der zweiten Messanordnung, bei welcher eine zusätzlichen Quelle an der Erdoberfläche verwendet wird, durch eine Unterschätzung der Dämpfung die Formen der Störkörper gröber und die Werte der Wellengeschwindigkeiten ungenauer rekonstruiert, was in der dritten Zeile von Abbildung 6.12 dargestellt wird. Des Weiteren entstehen vor allem über dem Tunnel mehr Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten, welche aber auch die Rekonstruktion der Bodeneigenschaften in der restlichen Tunnelumgebung beeinflussen. Die zugehörigen Inversionsergebnisse für eine Überschätzung der Dämpfungseigenschaften des Bodens werden in der dritten Zeile von Abbildung 6.13 illustriert, für welche die Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten verstärkt zunehmen. Die Indizien für die Störkörper sind in den rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten

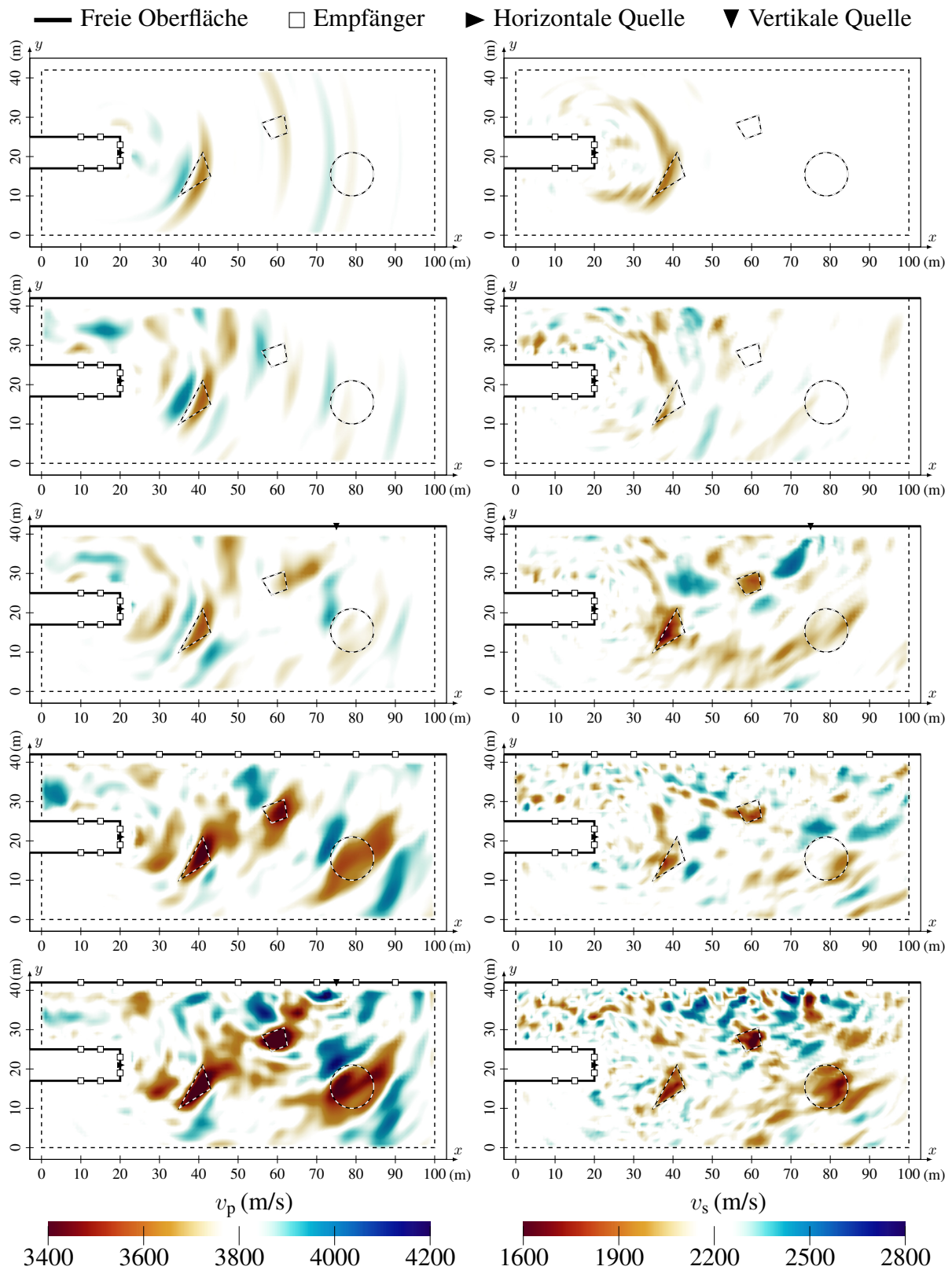


Abbildung 6.12.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen und Tunnelumgebungen berechnet wurden, wobei für das Inversionsmodell mit  $Q_p = 80$  und  $Q_s = 45$  eine niedrigere Dämpfung angenommen wurde als für das Referenzmodell.

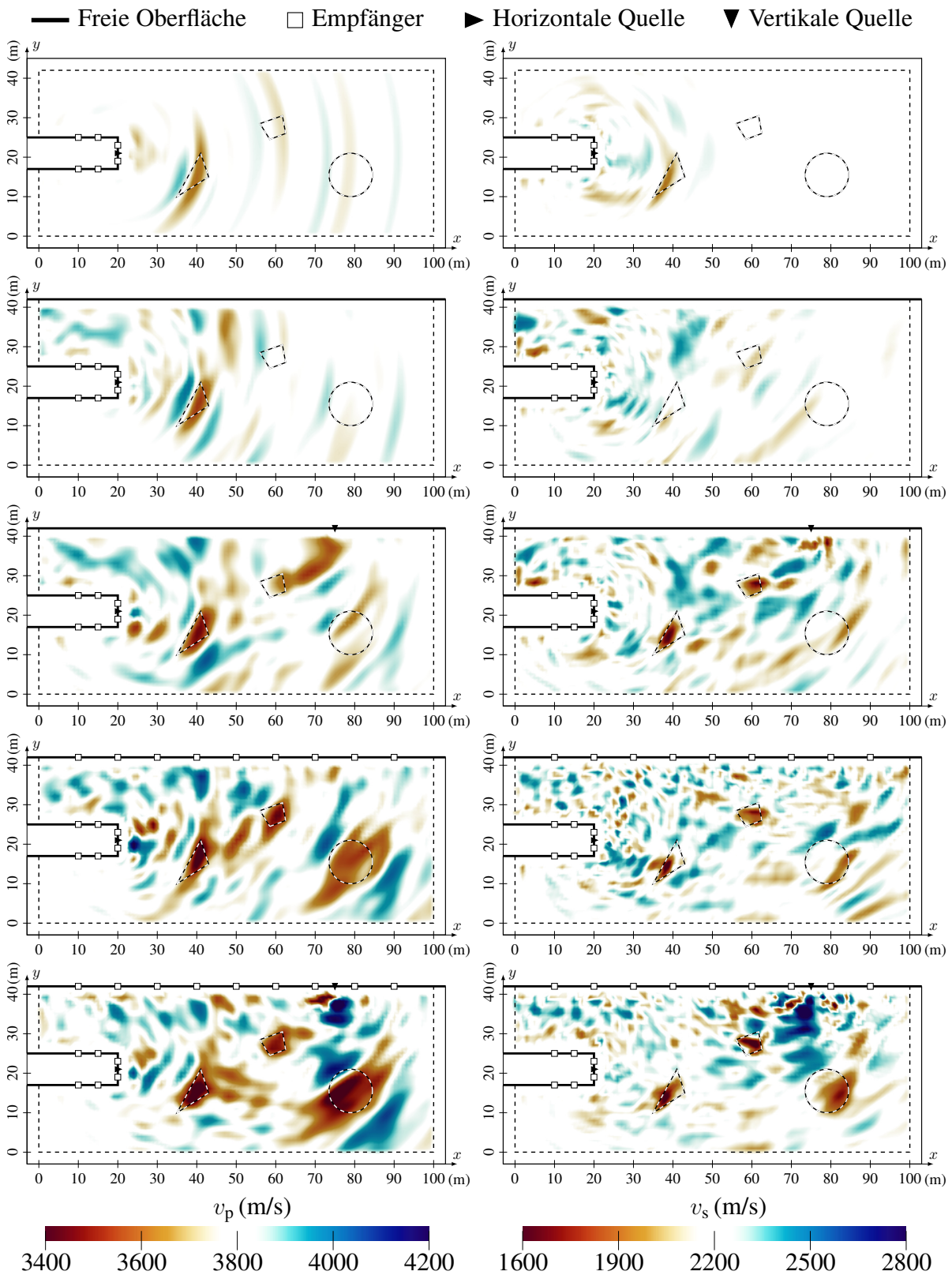


Abbildung 6.13.: Rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von synthetischen Referenzverschiebungen mit verschiedenen Messanordnungen und Tunnelumgebungen berechnet wurden, wobei für das Inversionsmodell mit  $Q_p = 45$  und  $Q_s = 20$  eine höhere Dämpfung angenommen wurde als für das Referenzmodell.

vorhanden, aber ohne das entsprechende Wissen über die Störkörper kann nicht unterschieden werden, welche Änderungen der Wellengeschwindigkeiten auf die gesuchten Störkörper und welche auf die niedrigeren Qualitätsfaktoren zurückzuführen sind.

Die dritte Messanordnung umfasst wieder die Empfänger und die Quelle am Tunnel mit zusätzlichen Empfängern an der Erdoberfläche. Die rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten, welche durch eine Inversion berechnet wurden, bei welcher für das Inversionsmodell ein schwächeres Dämpfungsverhalten als für das Referenzmodell verwendet wurde, werden in der vierten Zeile von Abbildung 6.12 dargestellt. Abgesehen von den zusätzlichen Fluktuationen vor und über dem Tunnel kann die Kompressionswellengeschwindigkeit annähernd so gut rekonstruiert werden wie die Referenzlösung aus Abbildung 6.11, da sich die Störkörper weiterhin gut von der restlichen Geologie absetzen. Mittels der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit werden der Formen und Eigenschaften der Störkörper schlechter als durch die Referenzergebnissen angenähert, wobei sich insbesondere der dritte Störkörper schlechter abzeichnet. Zudem erschweren die zunehmenden Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten die Interpretation der Inversionsergebnisse und somit eine erfolgreiche Vorhersage der Störkörper. Durch eine Inversion, bei welcher durch das Inversionsmodell die intrinsische Dämpfung der seismischen Wellen überschätzt wird, nehmen die Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten bei der Verwendung der dritten Messanordnung deutlich zu. Dadurch ist eine erfolgreiche Interpretation von dem Inversionsergebnis, welches in der vierten Zeile von Abbildung 6.13 dargestellt wird, kaum möglich, obwohl Andeutungen zu den einzelnen Störkörpern vorhanden sind.

Durch die Verwendung der vierten Messanordnung enthalten die Referenzseismogramme einen vergleichsweise hohen Informationsgehalt über die Geologie des Bodens. Unter Verwendung der höheren Qualitätsfaktoren für das Inversionsmodell in Kombination mit dieser Messanordnung werden die Formen und Eigenschaften der drei Störkörper etwas ungenauer rekonstruiert als bei der Verwendung des Inversionsmodells, für welches die Qualitätsfaktoren des Referenzmodells eingesetzt wurden. Innerhalb der räumlichen Änderungen der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten, welche in der fünften Zeile von Abbildung 6.12 dargestellt sind, nehmen die Fluktuationen unterhalb der Erdoberfläche und insbesondere in der Nähe der zweiten Quelle überverhältnismäßig zu. In der fünften Zeile von Abbildung 6.13 werden die rekonstruierten elastischen Bodeneigenschaften dargestellt, welche mit einem Inversionsmodell erzielt wurden, das die Dämpfung der seismischen Wellen im Vergleich zum Referenzmodell überschätzt. Die Störkörper werden etwas schlechter rekonstruiert als bei einer Unterschätzung der Dämpfungseigenschaften des Bodens und insbesondere die Fluktuationen vor der zweiten Quelle besitzen sehr hohe Wellengeschwindigkeiten. Somit wird eine Unterscheidung zwischen Störkörpern und anderen Veränderungen der Wellengeschwindigkeiten erschwert.

Die Ergebnisse der Inversionen werden durch die zusätzliche Modellierung von viskoelastischem Bodenverhalten innerhalb des Referenz- und Inversionsmodells ungenauer. Der Einsatz von Qualitätsfaktoren für das Inversionsmodell, welche von den Qualitätsfaktoren des Referenzmodells abweichen und somit das intrinsische Dämpfungsverhalten des Bodens über- oder unterschätzen, führen zu einer weiteren Degradierung der Inversionsergebnisse. Jedoch besteht je nach Messanordnung weiterhin die Möglichkeit durch die Inversionsergebnisse die Störungen vor der Ortsbrust vorherzusagen. Für ein stärkeres Dämpfungsverhalten werden insbesondere hochfrequente Wellenformen, welche für ein schwächeres Dämpfungsverhalten noch auftreten würden, fast gänzlich gedämpft, was in Abbildung 4.11 nachvollzogen werden kann. Entsprechend ergeben sich durch die Full-Waveform-Inversion mit einem Inversionsmodell, das die intrinsische Dämpfung überschätzt, Änderungen der Wellengeschwindigkeiten, welche Wellenformen in den Seismogramme erzeugen sollen, die den Wellenformen ähneln, die mit dem

Dämpfungsverhalten des Inversionsmodells nicht auf ihre eigentliche Weise approximiert werden können. Wird bei einer Inversion hingegen das Dämpfungsverhalten des Referenzmodells unterschätzt, dann enthalten die Wellenformen des verwendeten Bodenmodells zusätzliche Ausschläge, welche vornehmlich höheren Frequenzen zuzuordnen sind. Durch das Hinzufügen von nicht vorhandenen Reflektoren innerhalb der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten können die Ausschläge und somit der Informationsgehalt in den Seismogrammen durch die Inversion abgeschwächt werden. Die entstehenden Änderungen der Wellengeschwindigkeiten nehmen mit dem Informationsgehalt, der durch eine Messanordnung bereitgestellt werden kann, zu, wodurch gerade bei der Inversion mit der vierten und vermeintlich geeignetsten Messanordnung die meisten Fluktuationen auftreten. Die sich ergebenden Wellengeschwindigkeiten können aufgrund dieser Fluktuationen weniger eindeutig interpretiert werden und die Fluktuationen verhindern während der Inversion zudem, dass sich die Störkörper besser rekonstruieren lassen. Jedoch muss bei dem Vergleich der Inversionsergebnisse, für welche abweichende Qualitätsfaktoren verwendet wurden, mit den Ergebnissen, für welche die selben Qualitätsfaktoren für das Referenzmodell und das Inversionsmodell verwendet wurden, berücksichtigt werden, dass das Fehlerfunktional für weniger Frequenzgruppen minimiert wurde, wodurch das Potential für eine gute räumliche Auflösung der Wellengeschwindigkeiten niedriger war. Eine bevorzugte Verwendung von im Zweifelsfall höheren statt niedrigeren Qualitätsfaktoren erscheint, aufgrund der betrachteten Ergebnisse, empfehlenswert. Jedoch muss berücksichtigt werden, dass der Einfluss der Qualitätsfaktoren auf das Dämpfungsverhalten nicht linear ist und somit das Dämpfungsverhalten durch die niedrigeren Qualitätsfaktoren stärker von dem Dämpfungsverhalten des Referenzmodells abwich. Gerade bei Änderungen von hohen Qualitätsfaktoren ergeben sich kleinere Unterschiede der Wellenformen und eine ungenaue Quantifizierung der Qualitätsfaktoren, oder sogar die gänzliche Vernachlässigung von Dämpfungseigenschaften, sollten zu weniger Problemen bei dem Einsatz der Full-Waveform-Inversion führen. In realen Anwendungen werden die gemessenen Wellenformen im Regelfall skaliert, wodurch viele Effekte, welche bei den betrachteten Inversionsergebnissen auftraten, gegebenenfalls reduziert werden könnten. In Abschnitt 7.4 wird untersucht, wie sich die Berücksichtigung von viskoelastischem Verhalten auf die Inversion von Wellenformen auswirkt, welche im Rahmen eines kleinskaligen Laborexperiments gemessen wurden.

#### 6.4. Elastischer Blindtest

Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“ wurden im Teilprojekt A2 „Entwicklung effektiver Konzepte der Vorauserkundung im Tunnelbau mittels akustischer Verfahren“ verschiedene Blindtests durchgeführt. Bei den Blindtests wurden synthetische Referenzseismogramme für zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebungen bereitgestellt, welche mit dem SPECFEM2D Code berechnet wurden. Die zugehörigen Referenzmodelle enthielten verschiedene Störungen. Die Inversion dieser Referenzseismogramme musste vom Anwender ohne Vorkenntnisse zu den Störungen vor der Ortsbrust durchgeführt werden. Da die unterschiedlichen Inversionsparameter weder vor noch während der Inversion basierend auf entsprechendem Vorwissen angepasst werden können, simulieren diese Blindtest ein Szenario, welches mehr der Realität entspricht. Die Ergebnisse der Blindtests, welche auf dem Einsatz der akustischen Wellengleichung basieren, wurden von Musayev u. a. (2016); Musayev (2017) und Riedel u. a. (2021b) bereits untersucht und veröffentlicht. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Blindtest vorgestellt und untersucht für welche die elastische Wellengleichung eingesetzt wurde. Dazu wurden für vier unterschiedliche geologi-

sche Szenarien die Seismogramme mit vier unterschiedliche Messanordnungen berechnet. Die Inversion der Seismogramme wurde sowohl mit einem Zeitbereichsansatz als auch mit dem vorgestellten Frequenzbereichsansatz zeitgleich durchgeführt. Die Ergebnisse der Inversionen mit dem Zeitbereichsansatz wurden von Lamert (2020) schon veröffentlicht, während Teilergebnisse der hier vorgestellten Inversion mit dem Frequenzbereichsansatz schon durch Riedel u. a. (2023a) veröffentlicht wurden.

Zusätzlich zu den Referenzseismogrammen ist auch die Größe und Lage des bestehenden Tunnels gegeben, welcher eine Höhe von 6 m besitzt und dessen Decke sich 15 m unter der Erdoberfläche befindet. Die Positionen der Quellen und Empfänger der vier Messanordnungen sind auch gegeben und werden in Abbildung 6.14 zusammen mit dem verwendeten zweidimensionalen Tunnelmodell illustriert, wobei die Quellen sequentiell eingesetzt werden. Bei der ersten Messanordnung wurden nur zwei Quellen und drei Empfänger an der Tunnelfront installiert. Eine der Punktquellen regt den Boden in horizontaler Richtung an, während die andere Quelle eine Anregung in vertikaler Richtung verursacht. Dadurch breiten sich im einen Fall Kompressions- und im anderen Fall Scherwellen in horizontaler Richtung im Boden vor der Ortsbrust aus. Im Vergleich zum Einsatz von zwei Quellen, welche in die selbe Richtung wirken, wird somit der Gradient nach den Bodeneigenschaften einerseits in Bezug auf die Kompressionswellengeschwindigkeit, durch die horizontal wirkende Quelle, verbessert, während andererseits eine Verbesserung des Gradienten in Bezug auf die Scherwellengeschwindigkeit, durch die vertikal wirkende Quelle, erfolgt. Die zweite Messanordnung kombiniert je zwei Empfänger an der Tunneldecke und am Tunnelboden mit einer in die horizontale Richtung wirkenden Quelle am Tunnelboden und einer in die vertikale Richtung wirkenden Quelle an der Tunneldecke. Somit arbeitet diese Messanordnung vornehmlich mit Tunneloberflächenwellen. Die dritte Messanordnung stellt mit neun zusätzlichen Empfängern an der Erdoberfläche eine Erweiterung der zweiten Messanordnung dar, wobei die zusätzlichen Empfänger in Abständen von 10 m zueinander angeordnet sind. Die vierte Messanordnung ist eine Erweiterung der ersten Messanordnung, bei welcher die selben Empfänger an der Erdoberfläche hinzugefügt wurden, welche schon bei der dritten Messanordnung hinzugefügt wurden. Des Weiteren wurden auch noch je zwei Empfänger am Boden und an der Decke des Tunnels hinzugefügt. Wie schon bei den Inversionsergebnissen aus Abschnitt 6.1 werden mit den Messanordnungen, welche zusätzliche Empfänger an der Erdoberfläche einsetzen, bessere Ergebnisse erwartet. Als Quellfunktionen wurden Ricker-Signale mit einer Zentralfrequenz von 500 Hz verwendet, welche über keinen Zeitversatz verfügen und im Vorfeld zur Inversion auch bekannt waren. Die Eigenschaften des umgebenden Bodens, welche auch für das homogene Ausgangsmodell für die Inversion verwendet werden, waren mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4000$  m/s und  $v_s = 2400$  m/s sowie mit der Dichte  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> gegeben. Eine Kombination aus Dreieckelementen und Viereckelementen wird, wie schon bei der Verifizierung in Abschnitt 4.2, verwendet. Dabei werden für die erste und vierte Messanordnung 108 Dreieckelemente und 3978 Viereckelement verwendet, wobei die ersten drei Meter vor der Tunnelfront mit den Dreieckelementen feiner diskretisiert werden. Für die zweite und dritte Messanordnung werden die ersten drei Meter unter und über dem Tunnel durch den Einsatz von Dreieckelementen feiner diskretisiert, wobei insgesamt 634 Dreieckelemente und 3876 Viereckelemente zum Einsatz kommen. Dadurch soll verhindert werden, dass aufgrund von numerischen Singularitäten an den Quellen verfälschte Verschiebungen an den Empfängerpositionen berechnet werden, deren Abstand zwischen den Quellen und Empfängern vergleichsweise klein ist. Die C-PMLs besitzen eine Dicke von jeweils 3 m, welche auch jeweils mit drei Viereckelementen diskretisiert wird. Analog zum Vorgehen aus Abschnitt 4.1 wurde mittels eines zweidimensionalen unendlichen Gebiets, welches über die gleichen Bodeneigenschaften und eine vergleichbare Diskretisierung verfügt wie die



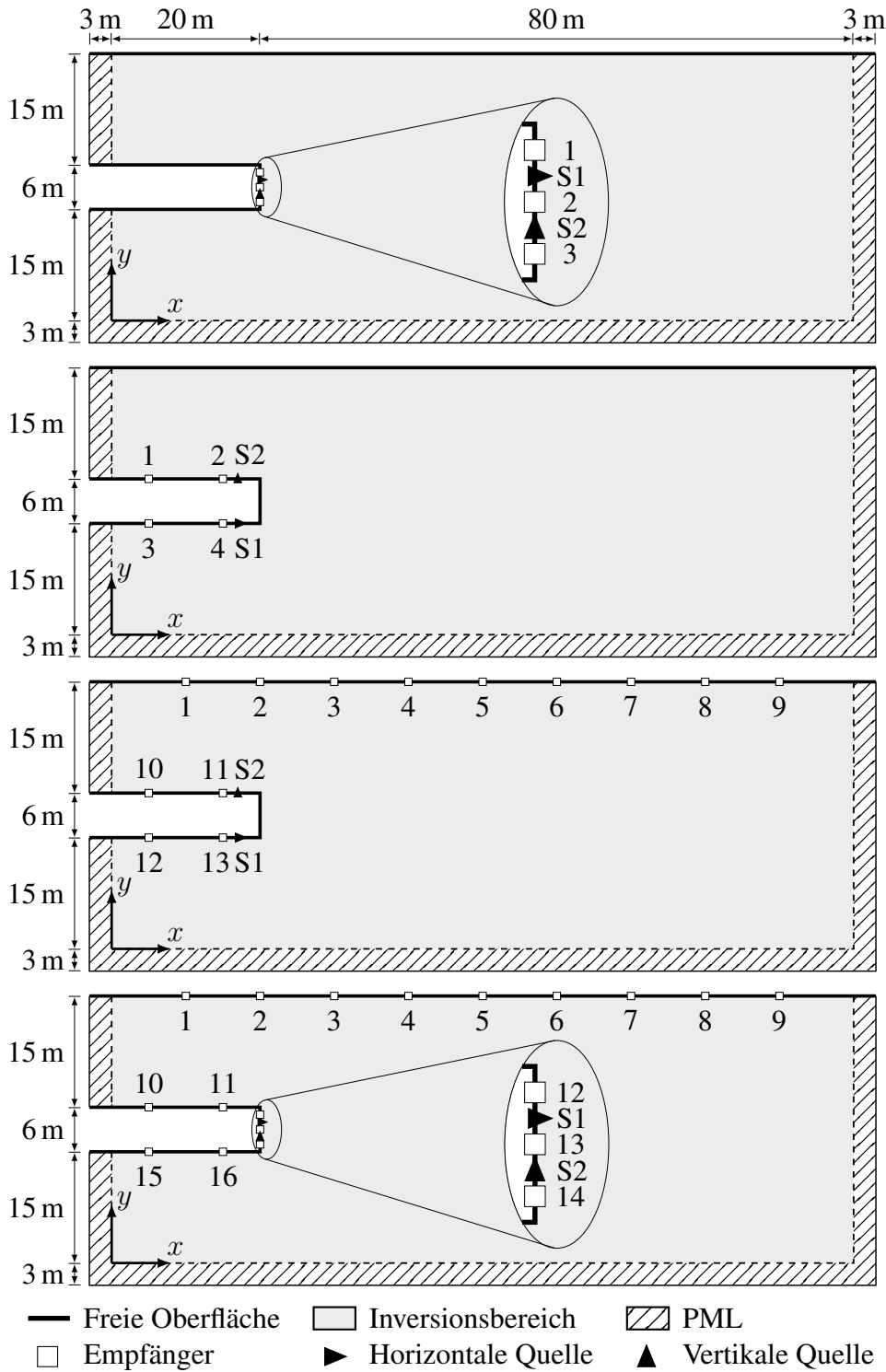


Abbildung 6.14.: Zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebung für die Durchführung des elastischen Blindtests. Die vier unterschiedlichen Messanordnungen werden dargestellt, die für die Inversionen eingesetzt werden.

zuvor beschriebenen Tunnelmodelle, der numerische Parameter der C-PMLs mit  $c_{PML} = 25\,000$  identifiziert.

Die Referenzseismogramme für das erste Bodenszenario für eine Anregung der horizontalen Quelle  $S1$  der vierten Messanordnung werden für die Verschiebungen in  $x$ -Richtung in



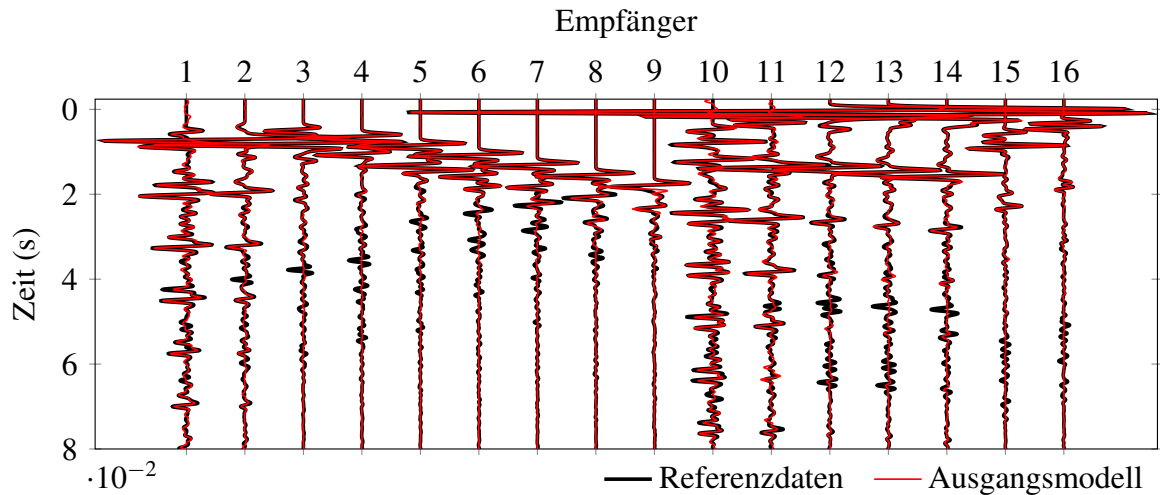


Abbildung 6.15.: Vergleich der Referenzseismogramme des ersten Bodenszenarios und der Seismogramme des homogenen Ausgangsmodells für Verschiebungen in  $x$ -Richtung  $u_x$  für die vierte Messanordnung bei einer Anregung durch die Quelle S1.

Abbildung 6.15 und für die Verschiebungen in  $y$ -Richtung in Abbildung 6.16 mit den Seismogrammen verglichen, welche mittels des homogenen Ausgangsmodells berechnet wurden. Zur Berechnung der Seismogramme mittels des Frequenzbereichsmodells wurde die Frequenzbereichsform der elastischen Wellengleichung für die Kreisfrequenzen  $\omega \in [100, 9000]$  rad/s in 50-rad/s-Schritten gelöst und die Verschiebungen an den Empfängern wurden mittels der inversen diskreten Fourier-Transformation in den Zeitbereich überführt. Bei den Berechnungen wurde der Ansatzgrad  $p$  der hierarchischen Ansatzfunktionen mit steigenden Frequenzen automatisch erhöht. Bei den Seismogrammen der Empfänger, welche sich zwischen Tunneldecke und Erdoberfläche befinden und im Frequenzbereich berechnet wurden, sind insbesondere in den ersten Millisekunden kleinere unphysikalische Auslenkungen zu beobachten. Diese Auslen-

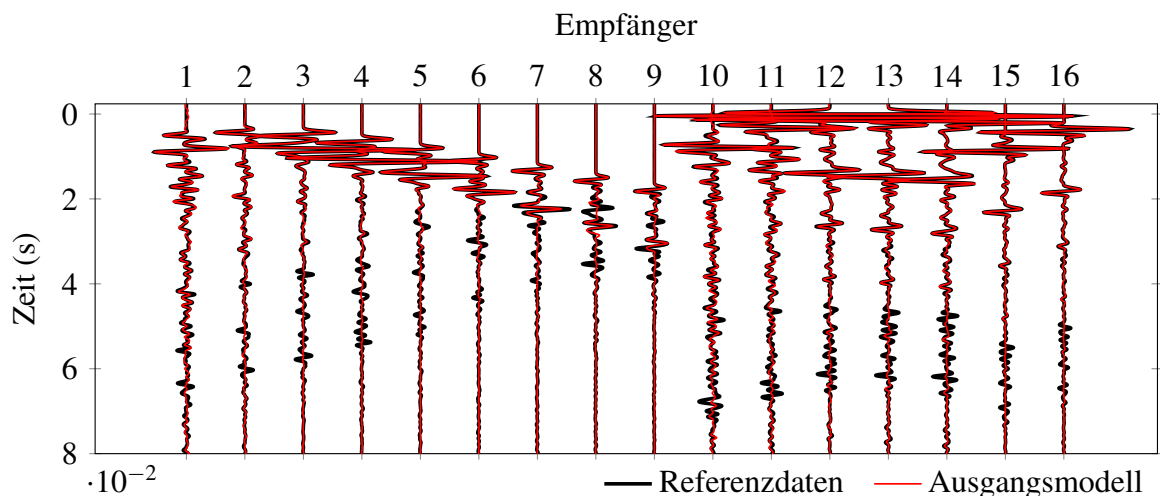


Abbildung 6.16.: Vergleich der Referenzseismogramme des ersten Bodenszenarios und der Seismogramme des homogenen Ausgangsmodells für Verschiebungen in  $y$ -Richtung  $u_y$  für die vierte Messanordnung bei einer Anregung durch die Quelle S1.

kungen sind, wie schon durch die Untersuchungen aus Abschnitt 4.2 festgestellt wurde, auf die Kombination von einer zweidimensionalen Tunnelumgebung mit der Frequenzbereichslösung für eine unendliche Zeit zurückzuführen, für welche die seismischen Wellen unendlich oft zwischen der Tunneldecke und der Erdoberfläche hin und her reflektiert werden. Ansonsten ist eine gute Übereinstimmung bei den jeweils ersten Wellenformen zu beobachten. Die Unterschiede zwischen den Seismogrammen aufgrund der unbekanntenen Störungen sind größtenteils gut ersichtlich. Da sich unterscheidende Amplituden an den Empfängern, welche weiter vom Tunnel entfernt sind, früher auftretend, liegt die Vermutung nahe, dass zumindest die prägnanteren Störungen verhältnismäßig weit von der Tunnelfront entfernt sind. Die Seismogramme, welche sich durch die Anregung mit der vertikalen Quelle ergeben, sowie die Seismogramme, welche sich für die anderen Bodenszenarien und Messanordnungen ergeben, werden im Folgenden nicht zusätzlich dargestellt, um einerseits eine gute Lesbarkeit des Kapitels zu gewährleisten und um andererseits den Fokus auf die Ergebnisse der Inversion der Seismogramme zu legen.

Die Dichte innerhalb der Referenzmodelle wurde konstant bei  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  belassen, was auch bekannt war. Daher wurden die Seismogramme nur nach der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit invertiert. Für alle Bodenszenarien und Messanordnungen wurden die selben 28 Frequenzgruppen verwendet, welche innerhalb von  $G$  zusammengefasst werden:

$$G = \{ \{300\}, \{400\}, \dots, \{1000\}, \\ \{600, 1200\}, \{700, 1400\}, \dots, \{2100, 4200\}, \\ \{1980, 4400\}, \{1860, 4600\}, \dots, \{1620, 5000\} \} \text{ rad/s.} \quad (6.2)$$

Die ersten acht Frequenzgruppen enthalten jeweils nur eine Kreisfrequenz, während die restlichen 20 Frequenzgruppen immer zwei Kreisfrequenzen kombinieren. Die höhere Kreisfrequenz dieser Frequenzgruppen steigt fortlaufend von Gruppe zu Gruppe an. Dadurch genügen die verwendeten Frequenzgruppen dem Multi-Skalen-Ansatz, wodurch die Ergebnisse von Inversionen mit langwelligen Wellenformen als Ausgangspunkt für die Inversionen mit kurzwelligen Wellenformen verwendet werden, um die Konvergenz zu unrealistischen lokalen Minima zu vermeiden. Die jeweils niedrigere Kreisfrequenz in einer Gruppe soll einerseits die langwelligen Informationen in den Inversionsergebnissen bewahren und dadurch andererseits auch eine Überbewertung der Informationen von höheren Kreisfrequenzen verhindern. Wenn das Konvergenzkriterium bei der Inversion für eine Frequenzgruppe nicht erreicht wird, dann wird die Minimierung des Fehlerfunktionals für diese Frequenzgruppe nach 20 Iterationen beendet. Um überproportional hohe Änderungen der Wellengeschwindigkeiten unter anderem aufgrund der Singularitäten an den Quellen und an den Empfängern, welche als adjungierte Quellen fungieren, zu verhindern, wird eine Vorkonditionierung des Gradienten durchgeführt. Dabei werden die Koeffizienten des Gradienten an ihren Diskretisierungspunkten, welche weniger als 2.5 m von Quellen und Empfängern oder 1.75 m von freien Oberflächen entfernt sind, gleich Null gesetzt. An den Diskretisierungspunkten, welche weniger als 5 m von Quellen und Empfängern oder 3.5 m von freien Oberflächen entfernt sind, aber an denen die zugehörigen Koeffizienten des Gradienten nicht gleich Null gesetzt werden, wird eine gleichmäßige Skalierung durchgeführt, um die Koeffizienten gleichmäßig von Null auf ihre eigentlichen Werte ansteigen zu lassen. Der Ansatzgrad  $p$  der hierarchischen Ansatzfunktionen wird zu Beginn jeder Frequenzgruppe automatisch an die aktuellen Wellengeschwindigkeiten des Inversionsmodells in Kombination mit der höchsten Frequenz der Frequenzgruppe, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, angepasst.

## 6.4.1. Erstes Bodenszenario

Die Ergebnisse für die Inversion der Seismogramme des ersten Bodenszenarios werden für die vier vorgestellten Messanordnungen in Abbildung 6.17 zusammengefasst. Das Ergebnis der Inversion mit der ersten Messanordnung liefert nur wenige Erkenntnisse. Änderungen der

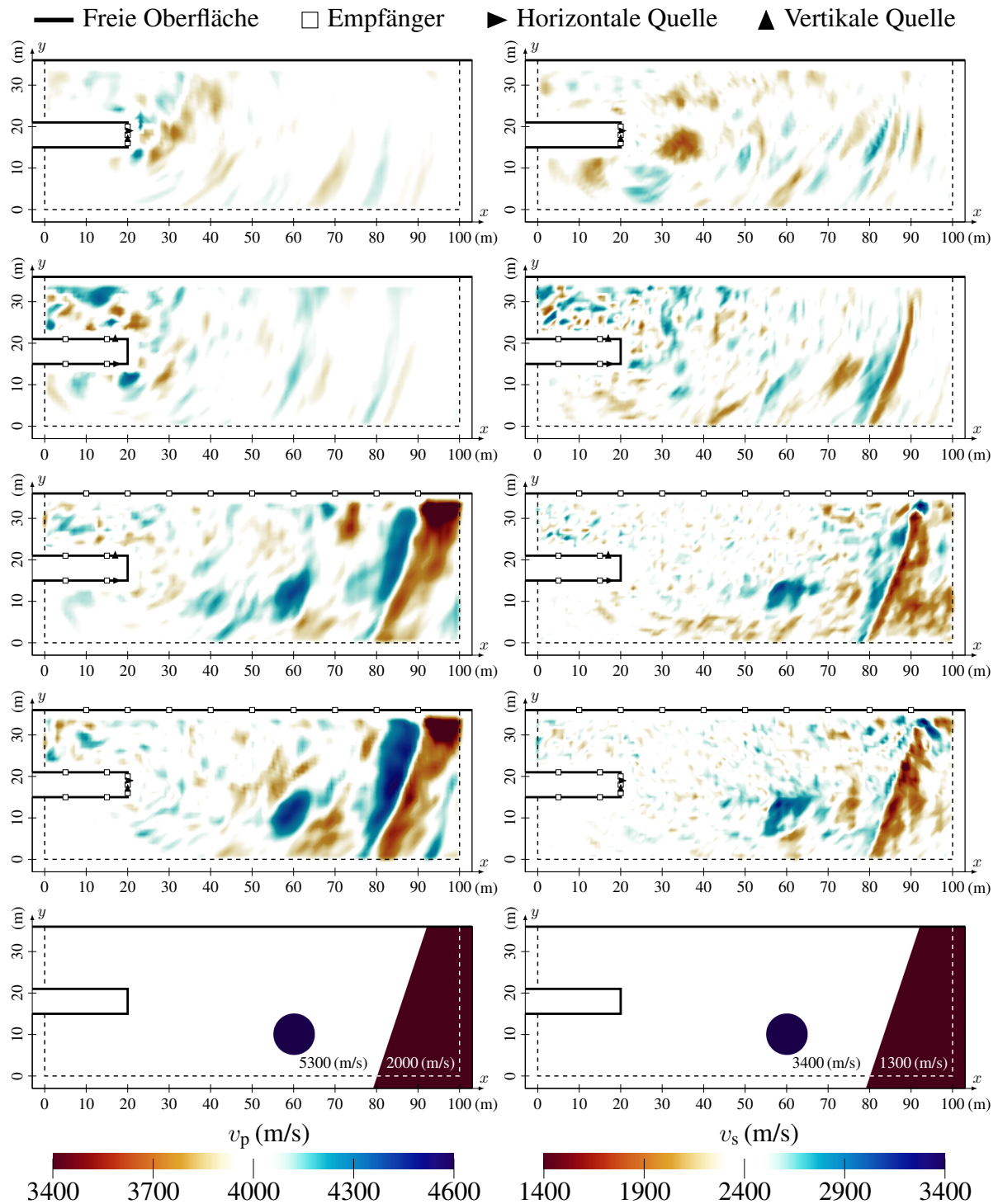


Abbildung 6.17.: Die räumliche Änderung der Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) der Inversionsergebnisse für vier verschiedene Messanordnungen (Zeile 1–4) und des Referenzmodells (Zeile 5) für das erste Bodenszenario des elastischen Blindtests.

Kompressionswellengeschwindigkeit treten insbesondere kurz vor der Tunnelfront auf und sind für eine Deutung kaum brauchbar. Zwei Formen fallen innerhalb der rekonstruierten räumlichen Änderung der Scherwellengeschwindigkeit auf. Einerseits findet vor der Tunnelfront bei  $x \approx 34$  m ein Abfall der Wellengeschwindigkeit statt und andererseits ist im hinteren Bereich des Tunnelmodells ( $x \approx 85$  m) eine wellenförmige Änderung der Wellengeschwindigkeiten entstanden, welche auf eine Grenzfläche hindeuten könnte. Jedoch ist mit diesen Ergebnissen keine verlässliche Vorhersage möglich.

Der Einsatz der zweiten Messanordnung führt zu auffällig ausgeprägten Fluktuationen beider Wellengeschwindigkeiten im Bereich zwischen der Tunneldecke und der Erdoberfläche, welche auf die in Abschnitt 4.2 festgestellte Diskrepanz zwischen den Seismogrammen, welche mit Zeit- und Frequenzbereichsansätzen berechnet wurden, zurückgeführt werden können und daher bei einer Interpretation vernachlässigt werden sollten. Neben weiteren Fluktuationen fällt insbesondere ein rapider Anstieg und Abfall der Scherwellengeschwindigkeit auf, welcher sich von dem inneren Rand der unteren PML bei ( $x = 78.5$  m,  $y = 0$  m) bis fast zur Erdoberfläche bei ( $x = 88.5$  m,  $y = 32$  m) erstreckt. Der maximale Kontrast der Scherwellengeschwindigkeit beläuft sich auf ungefähr 870 m/s. Dieser annähernd linear steigende Verlauf ist auch bei der räumlichen Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit erkennbar, was darauf hindeutet, dass tatsächlich eine Störung vorliegen sollte. Ähnliche Änderungen von Wellengeschwindigkeiten konnten bei den akustischen Blindtest von Musayev (2017) beobachtet werden, welche bei Schichtwechseln auftraten. Der Inversionsalgorithmus rekonstruiert Bodenmodelle, welche ein vergleichbares Reflexionsverhalten hervorrufen. Da jedoch verschiedene geologische Formationen zu ähnlichen Reflexionen und somit zu ähnlichen Seismogrammen führen, besitzen inverse Probleme in der Regel keine eindeutigen Lösungen. Wenn seismische Wellen in eine zweite Bodenschicht eindringen, aber aus dieser nicht zurück zu den Empfängern reflektiert werden, dann enthalten die Seismogramme nur Informationen über den Grenzübergang, aber keine Informationen über die Eigenschaften des Bodens innerhalb der zweiten Bodenschicht. Dies führt zu der Vermutung, dass die festgestellte Störung ein Schichtwechsel ist.

Durch die zusätzlichen Empfänger an der Erdoberfläche verbesserte sich das resultierende Abbild des Bodens mit der dritten Messanordnung merklich. Der zuvor vermutete Schichtwechsel zeichnet sich bei beiden Wellengeschwindigkeiten sehr deutlich ab und dass dieser bis zur Erdoberfläche verläuft wird auch ersichtlich. Des Weiteren hebt sich ein kreisförmiger Anstieg beider Wellengeschwindigkeiten an der Stelle ( $x \approx 60$  m,  $y \approx 11$  m) mit einem ungefähren Radius von 4 m von den auftretenden Fluktuationen ab. Somit können schon zwei Störkörper mit dieser Messanordnung identifiziert werden.

Bei den Ergebnissen, welche mit der vierten Messanordnung erzielt wurden, fällt besonders auf, dass sich die Kompressionswellengeschwindigkeit im Bereich der identifizierten Störungen noch mehr von der Umgebung abhebt, wodurch die Störungen einfacher identifiziert werden können. Die kreisförmige Störung weist einen etwas größeren Radius auf und die Kontraste der Wellengeschwindigkeiten, unter Berücksichtigung der Kontraste, die sich durch die Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit an den Grenzen der Störung ergeben, belaufen sich auf  $\Delta v_p \approx 970$  m/s und  $\Delta v_s \approx 830$  m/s. Die höchsten Kontraste der Wellengeschwindigkeiten an dem voraussichtlichen Schichtwechsel belaufen sich auf  $\Delta v_p \approx -1625$  m/s, kurz unterhalb der Erdoberfläche, und  $\Delta v_s \approx -1110$  m/s, ungefähr an der Stelle ( $x \approx 87$  m,  $y \approx 22.5$  m).

In der fünften Zeile von Abbildung 6.17 wird das Referenzbodenmodell illustriert, welches erst nach den Inversionen enthüllt wurde. Das Referenzmodell beinhaltet eine kreisförmige Störung mit erhöhten Wellengeschwindigkeiten und einen Schichtwechsel, dessen Grenzschicht

linear steigend vom Boden des Modells bis zur Erdoberfläche verläuft. Die zweite Bodenschicht besitzt niedrigere Wellengeschwindigkeiten als der Boden der restlichen Tunnelumgebung. Beide geologischen Änderungen befinden sich am rechten Ende der betrachteten Tunnelumgebung, was die vorherigen Erkenntnisse aus dem Abgleich der Referenzseismogramme mit den Seismogrammen des Ausgangsmodells anhand von Abbildung 6.15 und Abbildung 6.16 bestätigt. Das Inversionsergebnis der ersten Messanordnung erlaubte nur eine sehr vage Vermutung, dass sich am Ort des Schichtwechsels eine Störung befinden könnte, wobei das Vorhandensein weiterer Störungen, welche im Referenzmodell nicht vorhanden sind, mit der selben Wahrscheinlichkeit eingestuft wurde. Die zweite Messanordnung ermöglicht insbesondere durch die Auswertung der räumlichen Änderung der Scherwellengeschwindigkeit die Prognose, dass in einer Entfernung von ca. 62 m zur Tunnelfront ein Schichtwechsel auftritt. Die dritte und vierte Messanordnung ermöglichen eine sehr akkurate Vorhersage der Position und der Form des Schichtwechsel und des kreisförmigen Störkörpers. Der Kontrast der Scherwellengeschwindigkeit an der Grenze des Schichtwechsel konnte sehr akkurat bestimmt werden. Mit der vierten Messanordnung konnte die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit akkurater rekonstruiert werden.

#### **6.4.2. Zweites Bodenszenario**

In Abbildung 6.18 werden die Ergebnisse der Inversion der Seismogramme des zweiten Bodenszenarios zusammengestellt. Bei den Wellengeschwindigkeiten, welche unter Verwendung der ersten Messanordnung rekonstruiert wurden, treten vornehmlich Änderungen in der Nähe des Tunnels auf. Die Kompressionswellengeschwindigkeit ist kurz vor der Tunnelfront erhöht, was jedoch immer nur begrenzt für die Vorauserkundung einbezogen werden sollte. Jedoch fällt die Wellengeschwindigkeit kurz dahinter auch wieder ab, was die Vermutung nahe legt, dass sich im Bereich 10–20 m vor der Tunnelfront die vordere Seite eines Störkörpers befinden könnte. Die räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit bietet erneut ein detaillierteres Bild. Die Prognose, dass sich kurz vor den Tunnel ein Störkörper mit niedrigeren elastischen Eigenschaften befindet, wird bekräftigt und die Vermutung liegt nahe, dass statt einem Störkörper mehrere kleine Störungen vorliegen.

Bei den Ergebnissen der zweiten Messanordnung treten erneut die auffälligen Fluktuationen zwischen der Tunneldecke und der Erdoberfläche auf. Aus der rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeit lassen sich keine Erkenntnisse ableiten, da die Fluktuationen um den Tunnel herum dominieren, wobei im hinteren Bereich des Tunnelmodells wieder keine Änderung auftreten. Viele Reduzierungen der Scherwellengeschwindigkeit sind im Bereich vor dem Tunnel über die ganze Höhe des Modells zu beobachten. Welche von diesen Änderungen einer Störung zuzuordnen sind und welche nur eine durch die Inversion hervorgerufene fälschliche Fluktuation darstellen, ist nicht abschätzbar. Jedoch liegt der Verdacht nahe, dass zumindest irgendeine Störung innerhalb der nächsten 20 m auftreten könnte.

Mit den Ergebnissen, welche durch den Einsatz der dritten Messanordnung erzielt wurden, kann eine verbesserte Prognose der Geologie stattfinden, da zwei Störkörper mit reduzierten Wellengeschwindigkeiten identifiziert werden können. Die Abmaße der Körper werden durch die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit nur sehr grob angedeutet, jedoch lässt die Scherwellengeschwindigkeit die Vermutung zu, dass es sich um einen kreisförmigen und um einen rechteckigen Störkörper handelt.

Der Einsatz der vierten Messanordnung für die Inversion der Seismogramme des zweiten Bodenszenarios führt, im Vergleich zur Verwendung der dritten Messanordnung, vor allem zu merklich niedrigeren Kompressionswellengeschwindigkeiten der potentiellen Störungen, während die Aussagekraft der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit zu ähnlichen Erkenntnissen wie bei der Verwendung der dritten Messanordnung führt.

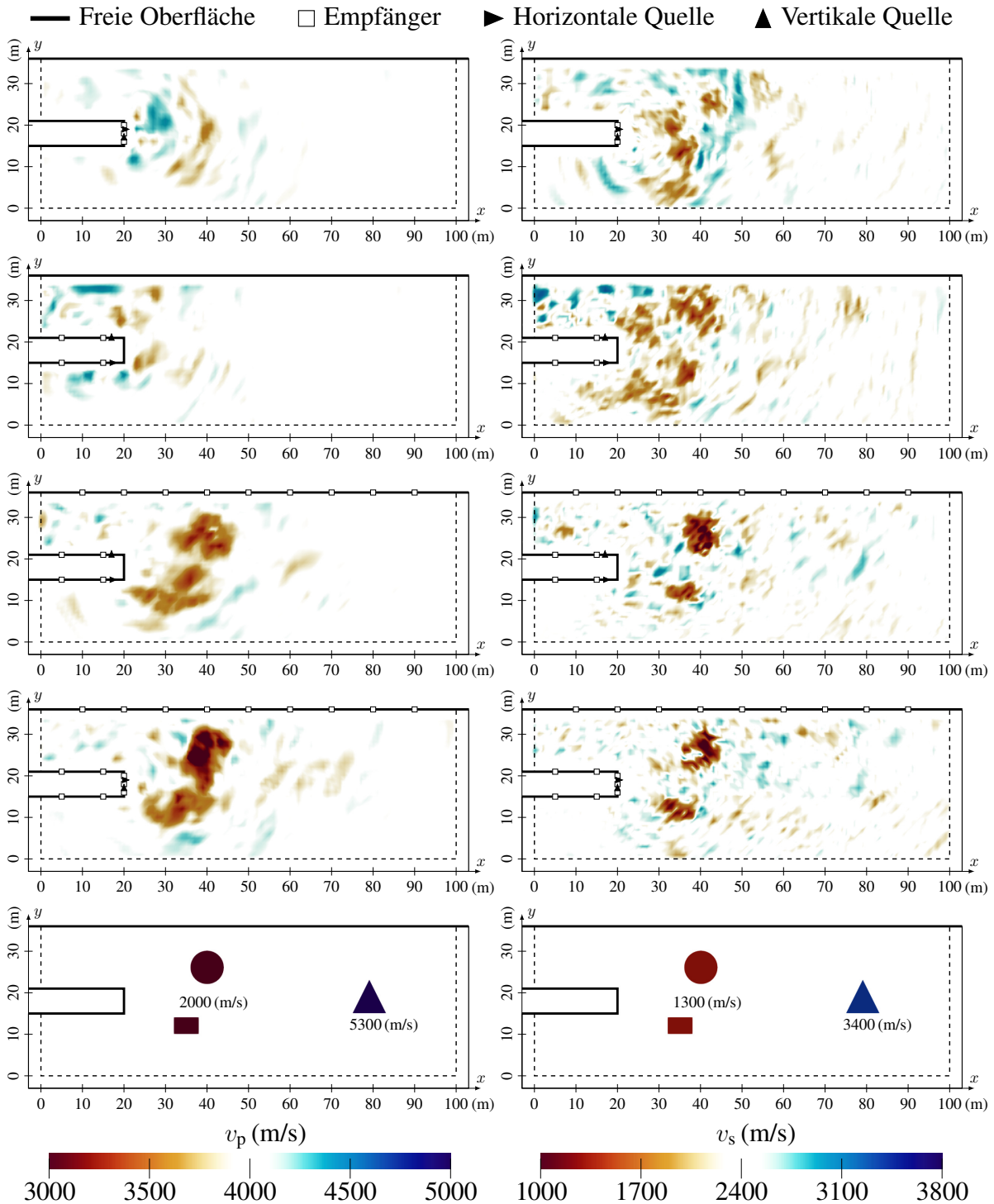


Abbildung 6.18.: Die räumliche Änderung der Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) der Inversionsergebnisse für vier verschiedene Messanordnungen (Zeile 1–4) und des Referenzmodells (Zeile 5) für das zweite Bodenszenario des elastischen Blindtests.

Das Referenzbodenmodell des zweiten Bodenszenarios wird in der fünften Zeile von Abbildung 6.20 dargestellt und beinhaltet einerseits zwei Störkörper mit niedrigeren Wellengeschwindigkeiten als der umgebende Boden, welche sich in einem Bereich innerhalb der ersten 25 m vor dem Tunnel befinden. Andererseits befindet sich in weiterer Entfernung zur Tunnelfront, merklich hinter den anderen beiden Störkörper, ein dritter dreieckiger Störkörper mit höheren elastischen Eigenschaften. Mit allen Messanordnungen war es möglich vorherzusagen, dass sich kurz vor der Tunnelfront wenigstens ein Störkörper befinden sollte. Mit der ersten Messanordnung waren genauere und sicherere Prognosen möglich als mit der zweiten Messanordnung. Der Einsatz der dritten und vierten Messanordnung ermöglichte eine akkurate Bestimmung der Position, Form und Scherwellengeschwindigkeit der ersten beiden Störkörper, während die vierte Messanordnung sogar die Kompressionswellengeschwindigkeit der beiden Störkörper besser vorhersagen konnte. Anzeichen für den dritten Störkörper werden durch die Ergebnisse der ersten beiden Messanordnungen nicht gegeben. Über die Inversionsergebnisse, welche unter Einsatz der dritten und der vierten Messanordnung generiert wurden, kann mittels der räumlichen Verteilung der Scherwellengeschwindigkeit die vordere Kante der dreieckigen Störung erahnt werden. Jedoch liegt die Änderung der Scherwellengeschwindigkeit in der Größenordnung, in welcher sich auch die künstlichen Fluktuationen befinden, wodurch diese Änderung nicht für Prognosen einbezogen werden sollte. Eine Identifizierung des dritten Störkörper war vor allem nicht möglich, da dieser durch die anderen beiden Störkörper größtenteils von direkten Wellen abgeschirmt wird. Das Hinzufügen einer dritten Quelle an der Erdoberfläche, wie in Abschnitt 6.1, würde eine Vorhersage voraussichtlich ermöglichen.

### 6.4.3. Drittes Bodenszenario

Die Übersicht der räumlichen Wellengeschwindigkeitsänderungen, welche durch die Inversion der Seismogramme des dritten Bodenszenarios rekonstruiert wurden, wird in Abbildung 6.19 illustriert. Schon mit der ersten Messanordnung können über die rekonstruierte Änderung der Scherwellengeschwindigkeit zwei kompakte viereckige Störkörper mit einer niedrigeren Scherwellengeschwindigkeit identifiziert werden. Durch die kleinen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit werden die vordere und hintere Kante des ersten Störkörpers bestätigt.

Auch für das dritte Bodenszenario treten bei der Verwendung der zweiten Messanordnung die fälschlichen Fluktuationen zwischen Erdoberfläche und der Decke des Tunnels auf. Zwar wird keiner der Störkörper durch die Kompressionswellengeschwindigkeit angedeutet, jedoch heben sich diese innerhalb der Betrachtung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit noch besser ab als bei der Verwendung der ersten Messanordnung. Gerade bei der Betrachtung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit können noch viele weitere Fluktuationen beobachtet werden. Ob eine dieser Fluktuationen, wie die etwas stärker ausgeprägte Fluktuation unterhalb des zweiten Störkörpers, auch einen weiteren Störkörper darstellen könnte, ist schwer zu beurteilen.

Die Inversionsergebnisse, welche mit der dritten Messanordnung erzielt wurden, ermöglichen die Vorhersage von zwei rechteckigen Störkörpern. Die Position und Form der Störkörper stimmt für beide Wellengeschwindigkeiten sehr gut überein, was insbesondere für die rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeiten der vorherigen Bodenszenarios nicht der Fall war und was die Vorhersage der Störkörper zusätzlich bekräftigt. Des Weiteren stören nur wenige Fluktuationen eine Interpretation der Ergebnisse.



Die Konturen beider Störkörper zeichnen sich durch die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit, welche durch die Inversion der gegebenen Seismogramme der vierten Messanordnung rekonstruiert wurden, besser ab als im Vergleich zu den Ergebnissen, welche mit der dritten Messanordnung erzielt wurden, was insbesondere auf den höheren Abfall der Wellengeschwindigkeit zurückzuführen ist. Auch die Konturen der Störkörper besitzen in

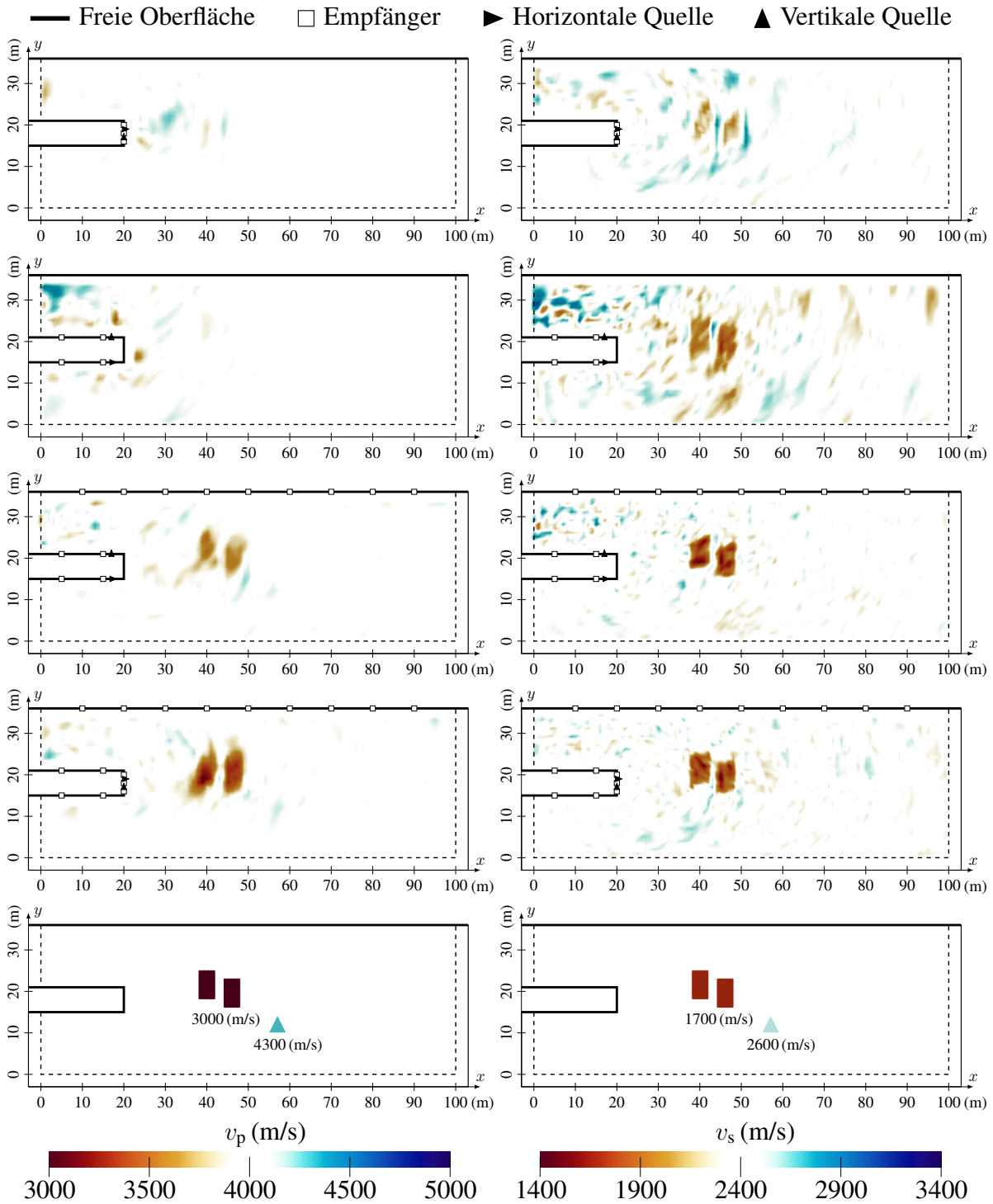


Abbildung 6.19.: Die räumliche Änderung der Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) der Inversionsergebnisse für vier verschiedene Messanordnungen (Zeile 1–4) und des Referenzmodells (Zeile 5) für das dritte Bodenszenario des elastischen Blindtests.



Bezug auf die Scherwellengeschwindigkeit eine eckigere Form. Ansonsten sind keine Indizien für zusätzliche Störkörper ersichtlich.

Die Wellengeschwindigkeiten, welche für das Referenzmodell verwendet wurden, werden in der fünften Zeile von Abbildung 6.20 illustriert. Der untere Bereich von zwei rechteckigen hintereinander platzierten Störkörpern, welche eine niedrigere Steifigkeit aufweisen, befindet sich auf der Höhe der Tunneltrasse, wobei die vordere Front des ersten Störkörper 18 m von der Tunnelfront entfernt ist. Hinter den beiden Störkörpern und gleichzeitig unterhalb der Tunneltrasse befindet sich ein weiterer dreieckiger Störkörper, welcher im Vergleich zu den umgebenden Bodeneigenschaften nur leicht erhöhte Wellengeschwindigkeiten besitzt. Mit allen vier Messanordnungen war eine Detektion der ersten beiden Störkörper möglich, wobei der Informationsgehalt in Bezug auf die Position, Form und die elastischen Eigenschaften der Störkörper stetig zunahm. Insbesondere die vierte Messanordnung ermöglichte eine sehr akkurate Vorhersage. Der dritte Störkörper konnte nicht durch die Inversionsergebnisse bestimmt werden. Zwar könnten in Nachhinein manche Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit, unter Verwendung der dritten und vierten Messanordnung, als Hinweise auf den dritten Störkörper gedeutet werden, jedoch bewegen sich diese Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit in der Größenordnung der auftretenden Fluktuationen. Da der dritte Störkörper einerseits nur eine geringe Änderungen der Wellengeschwindigkeiten aufweist und auch teilweise von den anderen beiden Störungen vor Interaktionen mit seismischen Wellen abgeschirmt wird, kann dieser nicht mit den untersuchten Messanordnungen vorhergesagt werden.

#### 6.4.4. Viertes Bodenszenario

Die Inversionsergebnisse des vierten Bodenszenarios werden in Abbildung 6.20 zusammengestellt. Die Inversion der Seismogramme mit der ersten Messanordnung führt zu vielen Fluktuationen der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten, welche sich vornehmlich direkt vor dem Tunnel befinden. Dieses Mal treten auch für diese Messanordnung vergleichsweise ausgeprägte Fluktuationen zwischen Tunneldecke und Erdoberfläche auf. Die rekonstruierten Änderungen der Wellengeschwindigkeiten erinnern an das zweite Bodenszenario, bei welchem nur ein kleiner Abstand zwischen der Tunnelfront und den ersten Störkörpern vorhanden war. Zwei räumlich sehr kleine Abfälle der Scherwellengeschwindigkeit ermöglichen die vage Vermutung, dass sich etwas oberhalb der Tunneldecke bei  $x \approx 30$  m und  $x \approx 42$  m zwei Störkörper befinden könnten. In der selben Entfernung zur Tunnelfront können auch Abfälle der Kompressionswellengeschwindigkeit beobachtet werden, welche zwar eine andere Entfernung zur Erdoberfläche besitzen, aber als bestätigender Indikator für die Vorhersage von den zuvor erwähnten Störkörpern interpretiert werden könnten. Jedoch kann mit dieser Messanordnung, wie auch schon zuvor beobachtet, nur ein sehr schemenhaftes Abbild des Bodens reproduziert werden, was zu einem hohen Interpretationsbedarf und somit auch zu Spekulationen führt.

Bei der Verwendung der zweiten Messanordnung können bei den Ergebnissen der Inversion wieder hohe Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten zwischen der Erdoberfläche und der Decke des Tunnels beobachtet werden. Die rekonstruierte räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit lässt nur erahnen, dass ein oder zwei Störungen mit niedrigerer Geschwindigkeit sich kurz vor der Tunnelfront befinden könnten, während keine weiteren Hinweise ersichtlich sind. Die räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit des rekonstruierten Bodenmodells weist viele Veränderungen im Bereich  $x \approx 25$ –52 m auf, was die Vermutung bestätigt, dass sich Störungen kurz vor der Tunnelfront befinden. Klare Konturen können

kaum erahnt werden, lediglich oberhalb der Tunneltrasse im Bereich vor dem Tunnel sind etwas stärker ausgeprägt Abfälle der Scherwellengeschwindigkeit erkennbar. Auch mit dieser Messanordnung erinnern die Ergebnisse an die Ergebnisse, welche mit der zweiten Messanordnung bei der Inversion der Seismogramme des zweiten Bodenszenarios berechnet wurden.

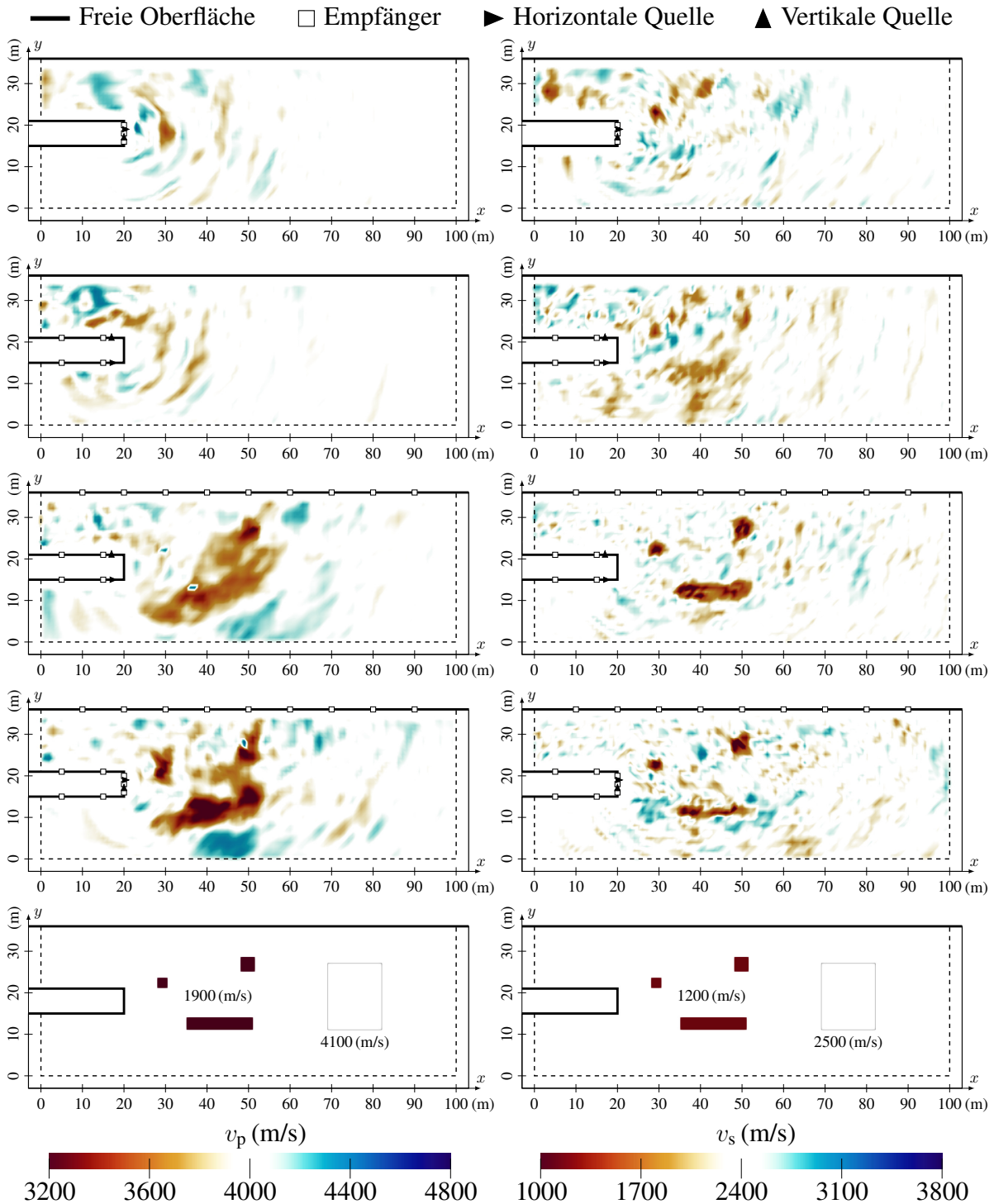


Abbildung 6.20.: Die räumliche Änderung der Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) der Inversionsergebnisse für vier verschiedene Messanordnungen (Zeile 1–4) und des Referenzmodells (Zeile 5) für das vierte Bodenszenario des elastischen Blindtests.

Die Ergebnisse, welche unter Verwendung der dritten Messanordnung generiert wurden, erlauben wieder eine bessere Vorhersage der Bodeneigenschaften. Über die räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit können drei Störkörper identifiziert werden, welche alle eine niedrigere Scherwellengeschwindigkeit aufweisen. Der erste Störkörper scheint kreisförmig oder viereckig zu sein und sich auf der Höhe der Tunneldecke zu befinden, wobei die vordere Seite sich scheinbar ungefähr 7 m vor der Ortsbrust befindet. Im Bereich  $x \approx 50$  m und  $y \approx 27.5$  m kann ein zweiter Störkörper identifiziert werden, welcher im Vergleich zum vorherigen Störkörper etwas größer ist. Die dritte Störung scheint eine rechteckige Form mit den Abmaßen  $18 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  zu besitzen und befindet sich unterhalb der Höhe des Tunnelbodens, wobei die vordere Kante ungefähr 15 m vor der Ortsbrust identifiziert wird. Die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit ermöglicht nur eine grobe Abschätzung der Eigenschaften des Bodenmodells. Jedoch bestärken die Abfälle der rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeit im Bereich des zweiten und dritten Störkörpers die Vermutung, dass sich dort tatsächlich diese Störkörper befinden. An der Position des ersten identifizierten Störkörpers sinkt die Kompressionswellengeschwindigkeit hingegen nicht.

Der Einsatz der vierten Messanordnung scheint erneut zu den vielversprechendsten Ergebnissen zu führen. Alle drei bisher vorhergesagten Störkörper sind über die rekonstruierte Änderung der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit zu identifizieren. Dabei sind die Wellengeschwindigkeiten aller Störkörper niedriger, wodurch sich diese von den auftretenden Fluktuationen besser absetzen. Anhand der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit kann vermutet werden, dass der rechteckige Störkörper nur eine Höhe von ungefähr 3 m besitzt. Des Weiteren kann vermutet werden, dass die Form des zweiten Störkörpers quadratisch ist.

In der fünften Zeile von Abbildung 6.20 wird das Referenzbodenmodell des vierten Bodenszenarios dargestellt. Dieses beinhaltet zwei quadratische Störkörper mit niedrigeren Wellengeschwindigkeiten als der umgebende Boden, welche sich vor der Ortsbrust und oberhalb der Tunneldecke befinden. Der dritte Störkörper besitzt eine rechteckige Form, weist niedrigere elastische Eigenschaften auf und befindet sich auch vor der Ortsbrust, aber unterhalb des Tunnelbodens. Des Weiteren befindet sich hinter diesen drei Störungen noch ein großer rechteckiger Störkörper, dessen Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit nur um jeweils 100 m/s höher sind als die Wellengeschwindigkeiten des umgebenden Bodens. Eine zumindest grobe Vorhersage der quadratischen Störkörper war mit allen vier Messanordnungen möglich. Der rechteckige Störkörper hätte anhand der Inversionsergebnisse, für welche die zweite Messanordnung verwendet wurde, erahnt werden können, jedoch wurden die räumlichen Änderungen der Scherwellengeschwindigkeit in dem betroffenen Bereich aufgrund der niedrigen Änderung behutsamer interpretiert. Der Einsatz der dritten und vierten Messanordnung ermöglicht die Vorhersage der ersten drei Störkörper, wobei mittels der vierten Messanordnung die Position, Form und die Eigenschaften der Störungen noch akkurater bestimmt werden können. Die vierte Störung konnte mit keiner der vier Messanordnungen vorhergesagt werden, wobei die Änderung der Wellengeschwindigkeiten selbst innerhalb des Referenzmodells zu niedrig ist, um diese mit der verwendeten Farbskala in Abbildung 6.20 darstellen zu können. Somit liegen die Wellengeschwindigkeiten deutlich unterhalb der Änderungen, welche durch die fälschlichen Fluktuationen entstehen. Selbst mit anderen Farbskalen würden die Änderungen im betroffenen Bereich eher als Fluktuationen interpretiert werden, welche nicht aussagekräftig sind.

#### 6.4.5. Erkenntnisse des elastischen Blindtests

Obwohl die Referenzseismogramme einen anderen numerischen Fehler enthalten als die Approximationen des verwendeten Ansatzes der Finite-Elemente-Methode, konnten aussagekräftige Abbilder der Änderungen der Bodeneigenschaften generiert werden. Mittels der ersten Messanordnung konnte in der Regel eine bessere Rekonstruktion der Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit erreicht werden als mit der zweiten Messanordnung, wohingegen die zweite Messanordnung aussagekräftigere Ergebnisse mittels der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeiten ermöglichte. Beim Einsatz der zweiten und dritten Messanordnung traten überdurchschnittlich viele Fluktuationen zwischen der Erdoberfläche und der Tunneldecke auf, welche auf die Unterschiede der Verschiebungen in diesem Bereich zurückzuführen sind, welche durch die Kombination eines Frequenzbereichsmodells und der zweidimensionalen Tunnelumgebung entstehen. Bei der Auswertung der Inversionsergebnisse des zweiten und vierten Bodenszenarios konnte beobachtet werden, dass schwer interpretierbare Ergebnisse entstehen, wenn Störungen sich in der Nähe des Tunnels und sich gleichzeitig nicht auf der Tunneltrasse, sondern leicht über oder unter der Tunneltrasse, befinden. Die zusätzlichen Empfänger an der Erdoberfläche, welche bei der dritten und vierten Messanordnung zum Einsatz kamen, ermöglichten sehr genaue Vorhersagen zu fast allen Störkörpern deren elastische Eigenschaften sich merklich von dem umgebenden Boden unterschieden. Lediglich bei der Inversion der Seismogramme des zweiten Bodenszenarios konnte ein markanter Störkörper nicht detektiert werden, da dieser teilweise durch andere Störkörper von seismischen Wellen abgeschirmt wurde. Die vierte Messanordnung ermöglichte die besten Vorhersagen, da Empfänger sowohl an den Tunnelwänden als auch an der Tunnelfront platziert wurden. Des Weiteren erlauben die Quellen an der Ortsbrust eine bessere Auflösung bei der Rekonstruktion der örtlichen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit, da verstärkt direkte Kompressionswellen angeregt und somit die Informationen der zugehörigen Wellenformen bei der Inversion verstärkt ausgewertet werden. Störkörper, welche leicht erhöhte oder degradierte elastische Eigenschaften im Vergleich zu dem umgebenden Boden aufweisen, konnten aufgrund der auftretenden fälschlichen Fluktuationen der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten nicht detektiert werden. Jedoch sollten solche Störungen voraussichtlich nur geringe Auswirkungen auf den Vortriebsprozess haben.

Abschließend kann zusammengefasst werden, dass sich die Prognosen über die geologischen Eigenschaften vor der Ortsbrust generell verbessern, je mehr weitläufig verteilte Quellen und Empfänger verwendet werden. Abhängig von den zu erwartenden Störungen und deren Entfernungen zum Tunnel wären einige Messanordnungen geeigneter als andere. Über zugehörige Risikobewertungen von unterschiedlichen Störkörpertypen könnte eine zusätzliche Empfehlung zu Gunsten einer Messanordnung getroffen werden. Solche Risikobewertungen und somit auch die Wahl der Messanordnung hängt sehr spezifisch vom Baugrund ab. Die Kosten für die jeweiligen Messanordnungen sowie ihre generelle Installationsmöglichkeit beeinflussen die Wahl zusätzlich. Bei der Einordnung der Ergebnisse der Blindtests muss jedoch berücksichtigt werden, dass für die Inversion mit den nahezu idealen synthetischen Seismogrammen der Blindtests ein sehr breites Frequenzspektrum bei der Wahl der Frequenzgruppen verwendet werden konnte. Der verwendete Multi-Skalen-Ansatz konnte somit zu einer guten Konvergenz zu sinnvollen Ergebnissen beitragen. Bei der Verwendung von realen Daten könnte das verfügbare Frequenzspektrum merklich eingeschränkt sein, wodurch die Wahl der Frequenzgruppen deutlich anspruchsvoller würde.

## 6.5. Inversion nach einem sphärischen Störkörper

Durch die Verwendung von vereinfachten zweidimensionalen Tunnelmodellen konnten mit niedrigem Berechnungsaufwand Untersuchungen durchgeführt werden, welche gute Einblicke in den Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau ermöglichten. Des Weiteren konnten vergleichsweise schnell für den Inversionsprozess adäquate Parameter bestimmt werden. Jedoch ist für eine fundierte Bewertung, wie gut das vorgestellte Inversionsverfahren in einer Tunnelumgebung funktioniert, die Untersuchung der Inversion mit dreidimensionalen Modellen einer Tunnelumgebung notwendig. Durch die korrekte Darstellung des zylindrischen Tunnels ist der Bereich oberhalb des Tunnels mit dem Bereich unterhalb des Tunnels über die Tunnelseiten verbunden. Dadurch und aufgrund der Krümmung der Tunnelwände werden die seismischen Wellen nicht unverhältnismäßig oft zwischen Erdoberfläche und Tunneldecke hin und her reflektiert. Durch die Betrachtung der dritten Raumrichtung nimmt die Anzahl der Punkte zu, an welchen die elastischen Eigenschaften diskretisiert werden, wodurch das inverse Problem komplexer wird. Die Anzahl der möglichen Reflektoren, welche zu Änderungen innerhalb der Seismogramme führen können, erhöht sich, wodurch die Lösung des Problem uneindeutiger wird.

In diesem Abschnitt wird die Inversion mit einem dreidimensionalen Tunnelmodell untersucht. Die Ergebnisse des folgenden Beispiels wurden schon innerhalb des Buchbeitrags von Mahmoudi u. a. (2023) veröffentlicht. Die Tunnelumgebung aus Abbildung 4.15 wird verwendet, welche bereits für die Verifizierung der numerischen Approximation der seismischen Wellenausbreitung in Abschnitt 4.5 verwendet wurde. Auch die Bodeneigenschaften  $v_p = 4000$  m/s,  $v_s = 2400$  m/s und  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> wurden übernommen. Die Referenzverschiebungen der einzelnen Frequenzen werden immer zu Beginn der Frequenzgruppen mit dem selben Tunnelmodell berechnet, wobei zusätzlich eine sphärische Störung mit einem Radius von 8 m approximiert wird. Das entsprechende Referenzmodell wird in Abbildung 6.21 illustriert. Der Mittelpunkt der sphärischen Störung befindet sich bei  $x = 0$  m,  $y = 48.75$  m und  $z = 18$  m, womit sich diese auf der Tunnelachse und 25 m vor der Ortsbrust befindet. Die Wellengeschwindigkeiten der Störung sind mit  $v_p = 2800$  m/s und  $v_s = 1700$  m/s niedriger als die des umgebenden Bodens. Die Dichte bleibt in der betrachteten Tunnelumgebung mit  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> konstant. Ein Ricker-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 300 Hz, welches über keinen Zeitversatz verfügt, wird für die jeweiligen Anregungen mittels der unterschiedlichen Quellen verwendet.

Die Inversion wird für zwei unterschiedliche Messanordnungen durchgeführt. Dabei wird mit der ersten Messanordnung untersucht, wie sich eine Verwendung von Quellen und Empfängern nur am Tunnel auf die Inversionsergebnisse auswirkt. Dazu wird eine Quelle an der Tunnelfront bei  $x = 0$  m,  $y = 23.75$  m und  $z = 18$  m platziert, welche orthogonal zur Ortsbrust ein seismisches Signal in den Boden einbringt. Die Empfänger am Tunnel werden wie in Abschnitt 4.5 radial an der Tunnelfront und an den Tunnelwänden platziert. Da die selben Positionen verwendet werden, können diese erneut der Tabelle 4.1 entnommen werden. Diese Messanordnung wird auch für eine tiefe Tunnelumgebung untersucht. Für das zugehörige Modell wurde die in Abbildung 4.15 dargestellte Erdoberfläche durch eine weitere PML-Schicht ausgetauscht, wobei die äußere Grenze der PML sich auf der Höhe befindet, auf welcher sich zuvor die Erdoberfläche befand. Der verwendete Koordinatenursprung besitzt für beide Modelle den selben Abstand zum Tunnel, wodurch sich die Beschreibungen der Positionen der Quelle und der Empfänger sowie der Position des Störkörpers nicht ändern. Beim verwendeten tiefliegenden Tunnelmodell wurden einerseits 3.75 m weniger vom Boden unterhalb des Tunnels betrachtet und andererseits wurde das Tunnelmodell in  $y$ -Richtung an beiden Seiten jeweils um 3.75 m verjüngt, um den

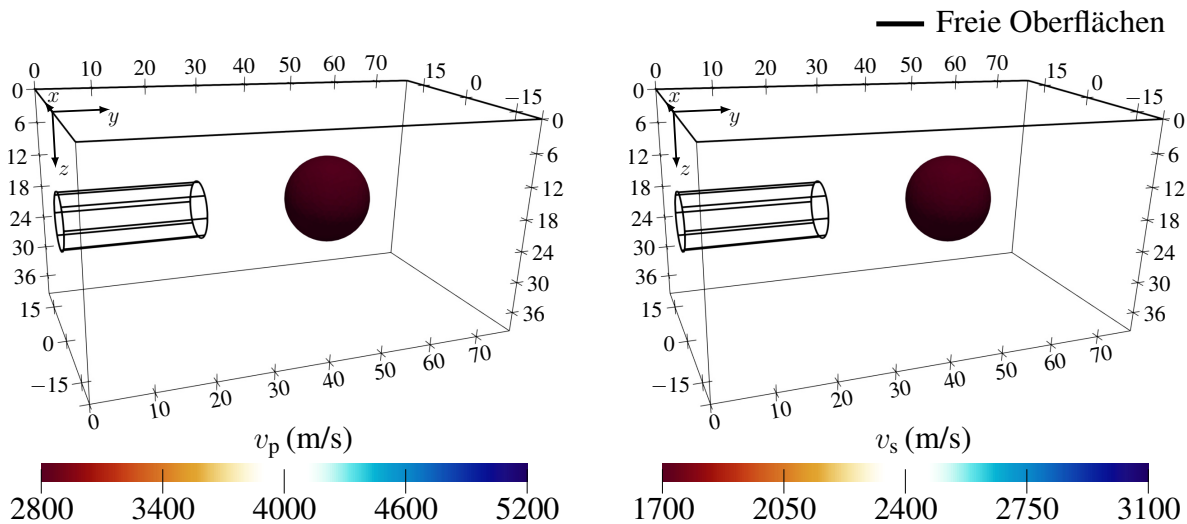


Abbildung 6.21.: Das Referenzmodell der oberflächennahen Tunnelumgebung wird dargestellt, welches für die Berechnung der Referenzverschiebungen durch den vorgestellten Ansatz der Finite-Elemente-Methode im Frequenzbereich eingesetzt wird. Das Referenzmodell enthält einen sphärischen Störkörper, dessen Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) niedriger sind als die Wellengeschwindigkeiten des umgebenden Bodens.

Berechnungsaufwand auf einem annehmbaren Niveau zu halten. Für die zweite Messanordnung werden bei der oberflächennahen Tunnelumgebung zusätzliche Quellen und Empfänger an der Erdoberfläche verwendet. Dabei werden die selben Empfänger, welche in Abbildung 4.15 illustriert und in Abschnitt 4.5 beschrieben werden, verwendet. Die beiden zusätzlichen Quellen befinden sich an der Erdoberfläche ( $z = 0$  m) über der Tunnelachse ( $x = 0$  m) bei  $y = 38.75$  m sowie bei  $y = 58.75$  m und bringen orthogonal zur Erdoberfläche ein seismisches Signal in den Boden ein. Die Quellen werden sequentiell eingesetzt. Bei allen drei Beispielen werden durch die Empfänger die Verschiebungen in alle drei Raumrichtungen aufgenommen, welche auch für die Inversion verwendet werden.

Das Modell der oberflächennahen Tunnelumgebung wird, wie schon in Abschnitt 4.5 beschrieben wurde, durch 35 062 Hexaederelemente und 9158 Prismenelemente diskretisiert, wohingegen für das Modell der tiefliegenden Tunnelumgebung 28 764 Hexaederelemente und 9158 Prismenelemente verwendet werden. Wie auch schon in Kapitel 4 beschrieben wurde, wird bei der Approximation der dreidimensionalen Wellenausbreitung der Ansatzgrad der hierarchischen Ansatzfunktionen für die gewählten Diskretisierungen auf  $p = 2$  beschränkt, um den Berechnungsaufwand zu begrenzen. Die daraus resultierende Verwendung von verhältnismäßig niedrigen Frequenzen bei der Inversion der Referenzverschiebungen wird dazu führen, dass die räumlichen Veränderungen der elastischen Eigenschaften des Bodens vergleichsweise nur grob aufgelöst werden können. Für verhältnismäßig voluminöse Störkörper, wie die verwendete sphärische Störung, sollte eine solche Auflösung genügen.

Für die Inversion werden 13 Frequenzgruppen verwendet, deren Kreisfrequenzen sich in einem Bereich von 200 rad/s bis 1800 rad/s befinden:

$$G = \{ \{200\}, \{300\}, \{400\}, \{500\}, \{600\}, \{700\}, \{800\}, \{900\}, \{1000\}, \{700, 1200\}, \{900, 1400\}, \{1100, 1600\}, \{1300, 1800\} \} \text{ rad/s.} \quad (6.3)$$

Die Frequenzen der Frequenzgruppen können auch in der Einheit Hertz angegeben werden, welche sich entsprechend in einem Bereich von 31.83 Hz bis 286.48 Hz befinden:

$$G \approx \{ \{31.83\}, \{47.75\}, \{63.66\}, \{79.58\}, \{95.49\}, \{111.41\}, \\ \{127.32\}, \{143.24\}, \{159.15\}, \{111.41, 190.99\}, \\ \{143.24, 222.82\}, \{175.07, 254.65\}, \{206.90, 286.48\} \} \text{ Hz.} \quad (6.4)$$

In Abschnitt 4.5 wurde erläutert, weshalb für diese Frequenzen angenommen wird, dass der Ansatzgrad  $p = 2$  für Approximation der seismischen Wellen für die folgenden Untersuchungen ausreichen sollte. Die ersten neun Frequenzgruppen beinhalten jeweils nur eine Frequenz, welche von Gruppe zu Gruppe stetig steigt. Bei den letzten vier Frequenzgruppen wird der jeweils steigenden Frequenz noch eine niedrigere Frequenz zugeordnet. Bis zu zehn Iterationen werden pro Frequenzgruppe durchgeführt, falls das Konvergenzkriterium zuvor nicht erreicht wird.

Der Gradient wird, wie auch schon bei den Inversionen mit einem zweidimensionalen Tunnelmodell, vor seiner Verwendung konditioniert. Die Koeffizienten des Gradienten werden gleich Null gesetzt, deren Diskretisierungspunkte einen Abstand von 3.75 m zu den Quellen und Empfängern oder einen Abstand von 2.5 m zu einer reflektierenden Oberfläche unterschreiten. Um rapide räumliche Sprünge des Gradienten möglichst zu vermeiden, werden die Koeffizienten des Gradienten, deren Diskretisierungspunkte sich in einem Abstand im Bereich von 3.75–7.5 m zu einer Quelle oder einem Empfänger oder in einem Abstand im Bereich von 2.5–5 m zu einer reflektierenden Oberfläche befinden, gleichmäßig von Null bis zu ihrem eigentlichen Wert hoch skaliert. Auch für die Inversion mit einer dreidimensionalen Tunnelumgebung wird die L-BFGS-Methode eingesetzt.

Die Ergebnisse der Inversionen werden in Abbildung 6.22 zusammengestellt, wobei die Position und die Form der Sphäre des Referenzmodells angedeutet werden. Die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit, welche durch die Inversionen mit der ersten Messanordnung rekonstruiert wurde, ist sowohl für den betrachteten Fall einer tiefliegenden als auch für den Fall einer oberflächennahen Tunnelumgebung schwer zu interpretieren. Bei beiden Ergebnissen tritt eine auffällig rapide räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit unmittelbar vor dem Bereich vor der Ortsbrust auf, in welchem der Gradient im Vorfeld konditioniert wird. Die räumlichen Änderungen der Wellengeschwindigkeiten enden zwar unmittelbar vor der vorderen Seite der Sphäre, jedoch wäre der Störkörper anhand dieser Ergebnisse nicht vorhersagbar. Durch eine Vergrößerung der Bereiche, in welchen der Gradient im Vorfeld konditioniert wird, könnten diese Änderungen unterdrückt werden. Jedoch bestünde bei unbekanntem Bodeneigenschaften, wie beim elastischen Blindtest in Abschnitt 6.4, die Gefahr, dass durch eine erweiterte Vorkonditionierung des Gradienten Änderungen der Geologie unmittelbar vor der Ortsbrust nicht detektiert werden können. Bei den rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeiten tritt ein Abfall im Bereich der Sphäre auf. Durch einen Anstieg der Scherwellengeschwindigkeit unmittelbar vor der Position der Sphäre steigt der effektive Kontrast, wodurch eine Vorhersage der vorderen Seite der Sphäre anhand der Inversionsergebnisse möglich wäre. Bei den Ergebnissen der oberflächennahen Tunnelumgebung sinkt die Scherwellengeschwindigkeit im Bereich des sphärischen Störkörpers stärker als beim Modell der tiefliegenden Tunnelumgebung. Des Weiteren beschränken sich die Reduzierungen der Scherwellengeschwindigkeit mehr auf die nähere Umgebung der Sphäre. Somit ermöglichen die seismischen Wellen, welche zusätzlich über die Erdoberfläche zu den Empfängern reflektiert werden, eine verbesserte Vorhersage des Störkörpers.

Der Einsatz der zweiten Messanordnung für die Inversion führt zu räumlichen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit, welche eine grobe Vorhersage der Position und der

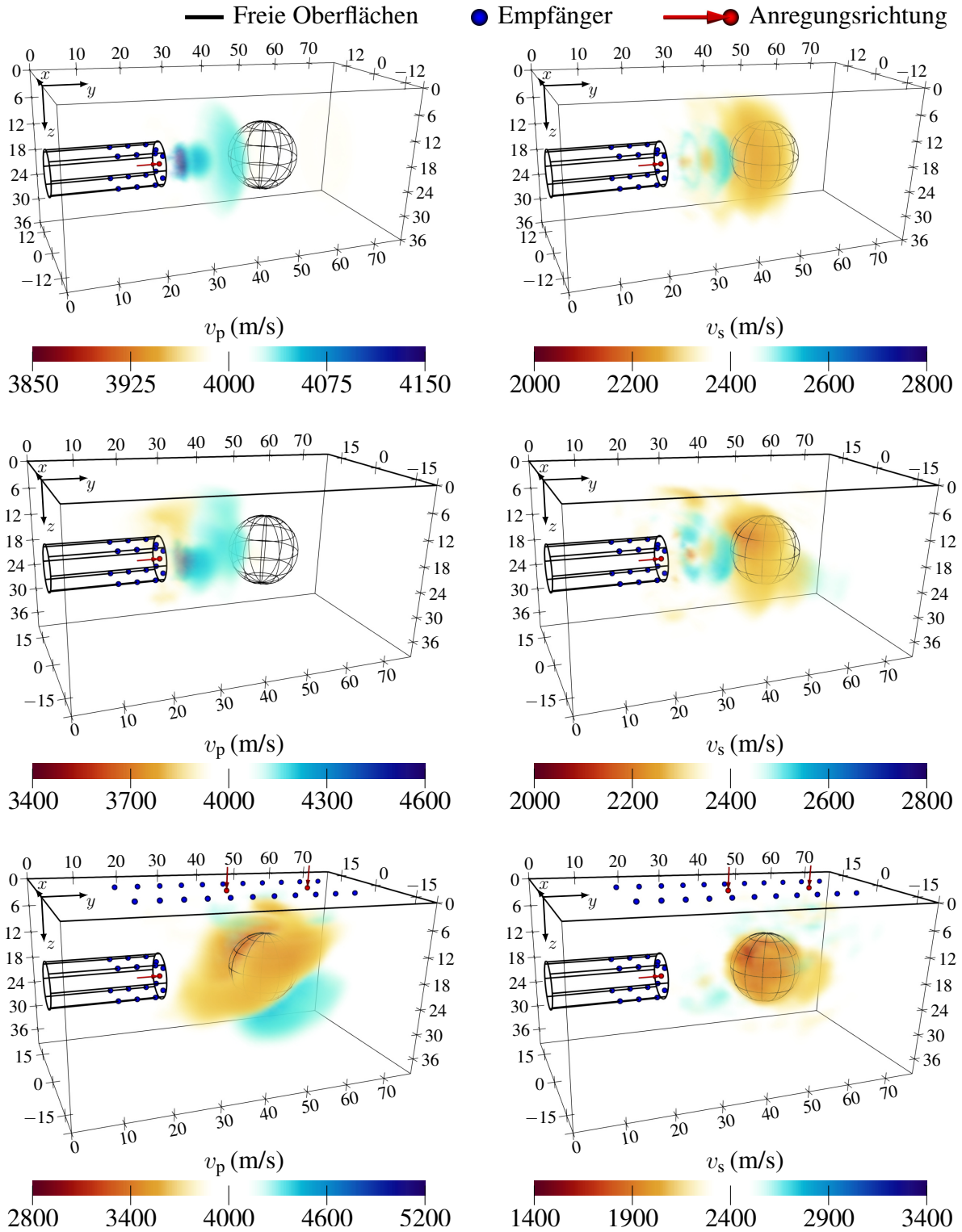


Abbildung 6.22.: Durch die Inversion von synthetischen Seismogrammen rekonstruierte Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts) zur Detektion eines sphärischen Störkörpers. Die Ergebnisse von zwei unterschiedlichen Messanordnungen werden verglichen, wobei die Positionen der Quellen und Empfänger bei den jeweiligen Ergebnissen markiert sind. Für die erste Messanordnung werden zusätzlich die Ergebnisse für die Inversion mit einer Tunnelumgebung, bei welcher sich der Tunnel tief unter der Erdoberfläche befindet (erste Zeile), und einer oberflächennahen Tunnelumgebung (zweite Zeile) verglichen.



ungefähren Größe des sphärischen Störkörpers ermöglichen. Im erweiterten Bereich der Sphäre sinkt die rekonstruierte Kompressionswellengeschwindigkeit signifikant ab. Gleichzeitig tritt an der hinteren unteren Seite der Sphäre ein rapider Anstieg der Kompressionswellengeschwindigkeit auf, welcher die Abmessungen der Sphäre noch besser betont. In Kombination mit der rekonstruierten Änderung der Scherwellengeschwindigkeit ist eine sehr akkurate Vorhersage der sphärischen Störung möglich. Sowohl die Position als auch die Form der Sphäre kann über die räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit einerseits akkurat und durch die geringe Menge an auftretenden Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten auch andererseits eindeutig vorhergesagt werden. Die rekonstruierte Scherwellengeschwindigkeit innerhalb der Sphäre nähert sich der entsprechenden Scherwellengeschwindigkeit des Referenzmodells an. Die gute Rekonstruktion der Form der Sphäre ist auf die weiträumige Verteilung der Quellen und Empfänger zurückzuführen. Die Messanordnung ermöglicht durch die Verteilung der Quellen einerseits, dass von fast allen Oberflächen der Sphäre seismische Wellen reflektiert und gebrochen werden. Andererseits wird durch die weiträumige Verteilung der Empfänger ermöglicht dass viele der Wellen, welche mit dem sphärischen Störkörper interagieren und somit Informationen über diesen enthalten, auch aufgezeichnet und für die Inversion verwendet werden.

Die Inversionsergebnisse, welche mittels des Einsatzes von dreidimensionalen Tunnelmodellen erzielt wurden, sind grundlegend vergleichbar mit den Ergebnissen, welche durch Inversionen mit zweidimensionalen Tunnelmodellen erzielt wurden. Durch die vornehmlich verwendeten großen Wellenlängen wurden die rekonstruierten räumlichen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit nur sehr grob aufgelöst. Die hohen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit vor der Ortsbrust, welche sich unter Verwendung der ersten Messanordnung ergaben, hätten durch den zusätzlichen Einsatz höherer Frequenzen möglicherweise abgebaut werden können. Die dreidimensionale Darstellung der räumlichen Änderung der Wellengeschwindigkeiten erschwert die Interpretation der Ergebnisse. Durch die notwendige Transparenz der Wellengeschwindigkeiten, welche sich nur schwach von den Eigenschaften des umgebenden Bodens unterscheiden, können Grenzflächen schlechter bestimmt werden.

## 6.6. Schichtwechsel mit linear verlaufender Grenzschicht

Im Folgenden wird die Full-Waveform-Inversion für die Inversion von synthetischen Seismogrammen untersucht, welche mit dem SPEC-FEM3D Cartesian Code berechnet wurden und für deren Berechnung ein Schichtwechsel im zugehörigen dreidimensionalen Tunnelmodell vorhanden war. Die Ergebnisse der folgenden Untersuchungen wurden schon von Riedel u. a. (2023a) veröffentlicht. Da die Referenzdaten, welche im Zeitbereich vorliegen, erst mit der diskreten Fourier-Transformation in den Frequenzbereich überführt werden müssen, kommt dieses Beispiel einem realistischen Fallbeispiel etwas näher. Des Weiteren unterscheidet sich der numerische Fehler, welcher bei der Berechnung der Referenzdaten mit der Spektrale-Elemente-Methode entsteht, von dem numerischen Fehler, welcher mit dem vorgestellten Frequenzbereichsansatz der Finite-Elemente-Methode entsteht, wodurch eine Inversion anspruchsvoller wird.

Das selbe Modell einer oberflächennahen Tunnelumgebung, welches in Abschnitt 4.5 für die Verifizierung der Approximation von seismischen Wellen in einer dreidimensionalen Tunnelumgebung verwendet wurde und in Abbildung 4.15 dargestellt wird, wird mit der selben Diskretisierung verwendet. Daher werden mit  $v_p = 4000$  m/s,  $v_s = 2400$  m/s und  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> auch die selben Bodeneigenschaften für die erste Schicht des Bodens, in welcher sich auch der

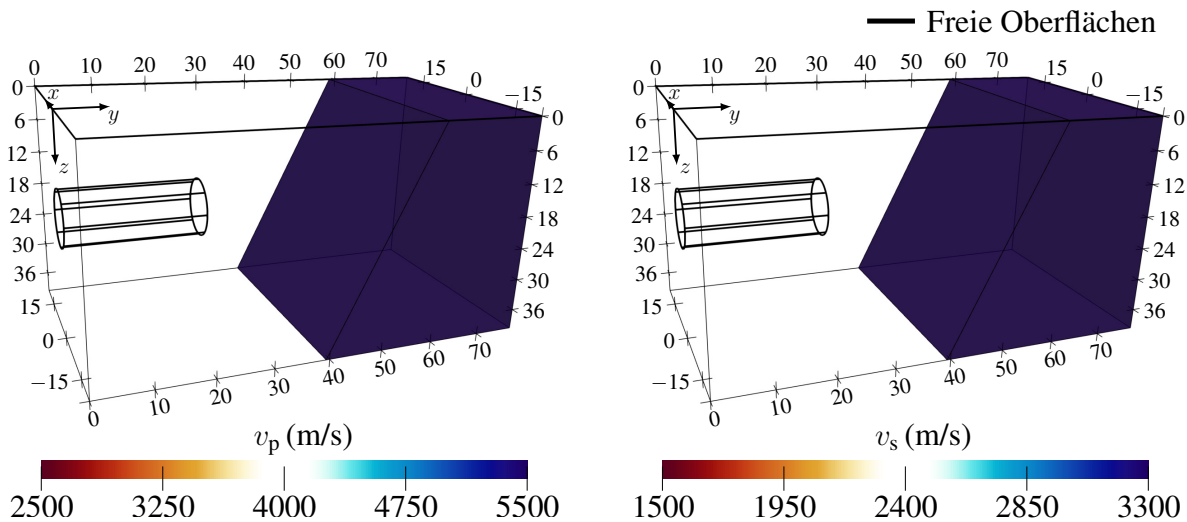


Abbildung 6.23.: Das Referenzmodell für die Berechnung der Referenzseismogramme mittels des SPECFEM3D Cartesian Codes enthält einen Schichtwechsel mit einer linear verlaufenden Grenzschicht, wobei die Kompressions- (links) und die Scherwellengeschwindigkeit (rechts) der zweiten Bodenschicht höher sind als die Wellengeschwindigkeiten der ersten Bodenschicht.

Tunnel befindet, und für das homogene Ausgangsmodell verwendet. Der numerische Parameter der PMLs wird mit  $c_{\text{PML}} = 25\,000$  auch übernommen.

Innerhalb des Referenzmodells befindet sich die Position des Schichtwechsel an der Erdoberfläche bei  $y = 58.75$  m und  $z = 0$  m, wobei der Schichtwechsel eine Symmetrie in Richtung der  $x$ -Koordinate aufweist. Am Boden des Modells, welches für die Berechnungen mit dem SPECFEM3D Cartesian Code verwendet wird, befindet sich die Position des Schichtwechsels bei  $y = 38.75$  m und  $z = 41$  m. Somit beträgt der Winkel zwischen dem Boden des Modells und der Grenzfläche des Schichtwechsels  $64^\circ$ . Die zweite Schicht besitzt mit den Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 5500$  m/s und  $v_s = 3300$  m/s höhere Werte als das Ausgangsmodell. Erneut wird eine konstante Dichte von  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup> verwendet. Das Referenzbodenmodell wird in Abbildung 6.23 illustriert. Drei unterschiedliche Konstellationen von Quellen und Empfängern werden für die Inversion mit der vorgestellten oberflächennahen Tunnelumgebung eingesetzt. Bei der ersten Messanordnung wird eine Quelle verwendet, welche in der Mitte der Tunnelfront seismische Wellen in den Boden emittiert. Dabei ist die Anregungsrichtung der Quelle nicht orthogonal zur Tunnelfront, sondern ist um einen  $45^\circ$ -Winkel geneigt, sodass die Anregungsrichtung schräg in Richtung der Erdoberfläche zeigt. Dadurch breiten sich in Richtung der Tunnelachse sowohl Kompressions- als auch Scherwellen aus. Durch die beiden angeregten Ausbreitungsmechanismen der seismischen Wellen enthalten die generierten Seismogramme ein breiter aufgestelltes Spektrum an Informationen über die beiden zugehörigen Wellengeschwindigkeiten. Wie schon in Abschnitt 4.5 werden vier Empfänger an der Ortsbrust und 12 Empfänger gleichmäßig an den Tunnelwänden positioniert. Die genauen Positionen können erneut aus Tabelle 4.1 entnommen werden. Für die zweite Messanordnung werden zusätzlich noch 18 Empfänger entlang von zwei Linien in  $y$ -Richtung bei  $x = \pm 8$  m an der Erdoberfläche platziert. Die Linien beginnen jeweils bei  $y = 16.25$  m und enden bei  $y = 56.25$  m. Die Abstände zwischen den einzelnen Empfängern, welche sich auf einer Linie befinden, betragen jeweils 5 m. Alle Empfänger befinden sich in der ersten Bodenschicht. Somit werden im Vergleich zu den Empfängern in Abbildung 4.15 vier Empfänger weniger verwendet. Im Vergleich zur zweiten Messanordnung wird bei der dritten Messanordnung nur eine zweite Quelle an der

Erdoberfläche bei  $z = 0$  m über der Tunnelachse bei  $x = 0$  m vor dem Schichtwechsel an der Position  $y = 38.75$  m hinzugefügt, welche senkrecht zur Erdoberfläche seismische Wellen im Boden anregt. Die Positionen der Quellen und Empfänger sowie die Anregungsrichtungen der Quellen sind bei der Darstellung der Inversionsergebnisse in Abbildung 6.24 ersichtlich. An den Empfängern werden die Verschiebungen in alle Raumrichtungen aufgenommen, welche für die Inversion auch verwendet werden. Beide Quellen verwenden ein Ricker-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 300 Hz, welches über keinen Zeitversatz verfügt. Erneut wird, wie schon in Abschnitt 4.5 beschrieben wurde, nur ein Ansatzgrad von  $p = 2$  für die hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung verwendet. Die Beschränkung auf den Einsatz von vergleichsweise niedrigen Frequenzen wird dazu führen, dass die räumliche Veränderung der elastischen Eigenschaften des Bodens erneut nur vergleichsweise grob aufgelöst werden kann. Für eine vergleichsweise große Störung wie den betrachteten Schichtwechsel sollte eine solche Auflösung jedoch ausreichend sein. Erneut werden die in Gleichung 6.4 definierten Frequenzgruppen für die Inversion verwendet, wobei erneut maximal zehn Iterationsschritte pro Frequenzgruppe durchgeführt werden. Die Koeffizienten des Gradienten werden in den selben Bereichen um die Quellen, Empfänger und freien Oberflächen wie für das Beispiel aus Abschnitt 6.5 konditioniert. Die räumlichen Änderungen der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit, welche durch die Inversion der Seismogramme der unterschiedlichen Messanordnungen rekonstruiert wurden, wurden in Abbildung 6.24 zusammengestellt. Die Position des Schichtwechsels wurde zur einfacheren Bewertung der Ergebnisse eingezeichnet.

Die Inversionsergebnisse, welche mit der ersten Messanordnung erzielt wurden, werden in der ersten Zeile von Abbildung 6.24 dargestellt und ermöglichen nur eine vergleichsweise grobe Vorhersage der Geologie, was bei einer Verwendung von Quellen und Empfängern zu erwarten war, die ausschließlich im Tunnel positioniert waren. Die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit enthält vor allem künstliche Fluktuationen im Bereich kurz vor der Ortsbrust, in welchem der Einfluss der Vorkonditionierung des Gradienten nachlässt. Diese Fluktuationen scheinen fälschlicherweise zu hoch zu sein und sollten, aufgrund der bekannten Problematik, für solche Messanordnungen weniger stark bei der Deutung der Ergebnisse berücksichtigt werden. Gleichzeitig können verhältnismäßig kleine Änderung auf der Höhe des gekennzeichneten Schichtwechsels beobachtet werden. Zwar treten bei der räumlichen Änderung der rekonstruierten Scherwellengeschwindigkeit auch viele kleinere Fluktuationen kurz vor der Ortsbrust auf, jedoch ist erkennbar, dass sich diese Fluktuationen im weiteren Verlauf der Tunnelachse zunächst reduzieren. Dahinter kann ein merklicher Abfall gefolgt von einem ebenfalls merklichen Anstieg der Scherwellengeschwindigkeit auf der Höhe des Schichtwechsels beobachtet werden. Diese wellenförmige Änderung der Scherwellengeschwindigkeit führt an der Grenze des Schichtwechsels zu einem Kontrast von 570 m/s, wobei der Kontrast des Referenzmodells 900 m/s beträgt. Somit beträgt die Änderung der Scherwellengeschwindigkeit an dieser Position zwei Drittel von der Änderung, welche im Referenzmodell stattfindet. Zwar kann durch die gemeinsame Betrachtung der beiden rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten vermutet werden, dass die vordere Seite eines Störkörpers sich vor dem Tunnel befindet, jedoch kann keine erste Annahme zu den zugehörigen räumlichen Abmaßen getroffen werden.

Das Hinzufügen von Empfängern an der Erdoberfläche führt zu einer signifikanten Verbesserung der Ergebnisse, welche in der zweiten Zeile von Abbildung 6.24 illustriert werden. Zwar kann eine Erhöhung der rekonstruierten Kompressionswellengeschwindigkeit zwischen der Ortsbrust und der Grenzfläche beobachtet werden, jedoch sind die räumlichen Änderungen der Kompressionswellengeschwindigkeit an der Grenzfläche zwischen den beiden Bodenschichten direkt unterhalb der Erdoberfläche prägnanter. Erneut ermöglichen die räumlichen

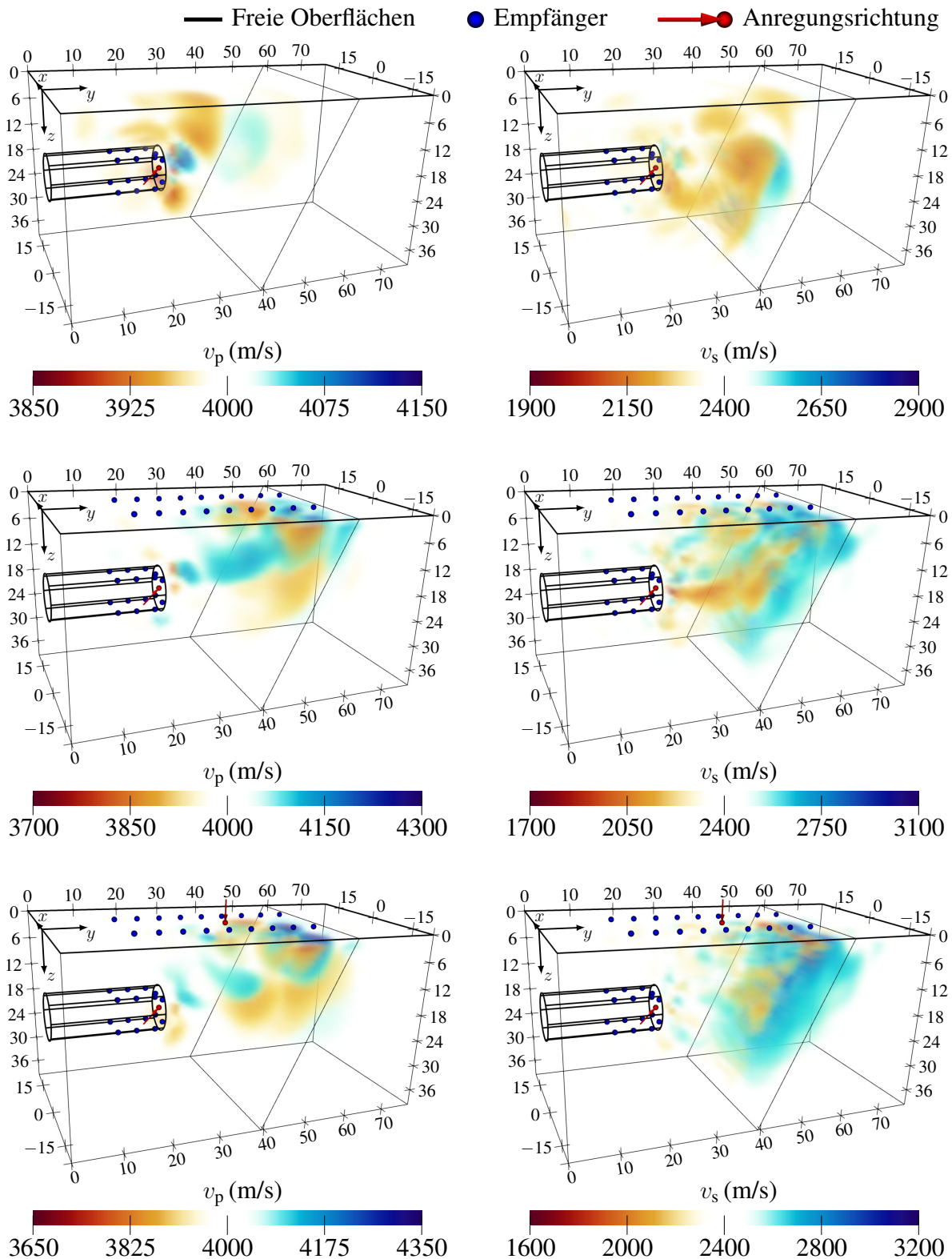


Abbildung 6.24.: Kompressions- (links) und Scherwellengeschwindigkeit (rechts), welche durch die Inversion von Seismogrammen rekonstruiert wurden, die mit dem SPECFEM3D Cartesian Code berechnet wurden. Das Referenzmodell, welches den Referenzseismogrammen zu Grunde liegt, enthält einen Schichtwechsel und wird in Abbildung 6.23 illustriert. Die Inversion wurde mit drei unterschiedlichen Messanordnungen durchgeführt, wobei die Positionen der Quellen und Empfänger für die unterschiedlichen Ergebnisse markiert wurden.

Änderungen der Scherwellengeschwindigkeit eine bessere Vorhersage der geologischen Gegebenheiten. Eine großflächige Erhöhung der Scherwellengeschwindigkeit an der Grenzfläche ist deutlich erkennbar, obwohl erneut zwischen der Ortsbrust und der Grenzfläche viele Fluktuationen, insbesondere auf der Höhe der Tunnelachse, auftreten. Die Vorhersage, dass ein Wechsel zu einer steiferen Bodenschicht mit einem räumlich linearen Verlauf der Grenzschicht bevorsteht, ist anhand der Ergebnisse möglich, obwohl der Kontrast der Wellengeschwindigkeiten an der Grenzfläche weiterhin niedriger ist als der Kontrast, welcher innerhalb des Referenzmodells vorliegt.

Der Einsatz einer zweiten Quelle an der Erdoberfläche, welche sich zwischen der Tunnelfront und der Grenzfläche des Schichtwechsels befindet, führt unterhalb der Quelle zu einer wesentlichen Reduzierung der Fluktuationen von den räumlichen Änderungen beider Wellengeschwindigkeiten, was in der dritten Zeile von Abbildung 6.24 ersichtlich wird. Die rekonstruierte räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit weist insbesondere kurz unterhalb der Erdoberfläche ausgeprägte räumliche Änderungen auf. Der entstehende Kontrast beträgt an dieser Stelle ungefähr 590 m/s. Unter Berücksichtigung der rekonstruierten räumlichen Änderung der Scherwellengeschwindigkeit kann der Schichtwechsel sehr akkurat vorhergesagt werden. Der übliche lokale Abfall der Scherwellengeschwindigkeit vor der Grenzfläche ist merklich schwächer ausgeprägt. Der sich ergebende Kontrast von ungefähr 705 m/s ist dennoch höher als die Kontraste, welche sich mit den anderen Messanordnungen ergeben, und nähert sich auch dem Kontrast an der Grenzfläche des Störkörpers des Referenzmodells am meisten an, da der lokale Anstieg der Scherwellengeschwindigkeit entsprechend hoch ist.

Die Ergebnisse, welche mittels des vorgestellten Ansatzes der Full-Waveform-Inversion für das Beispiel eines Schichtwechsels mit linear verlaufender Grenzfläche erzielt wurden, ermöglichen vielversprechende Vorhersagen über die Beschaffenheit des Bodens vor der Ortsbrust. Durch die Erweiterungen der Messanordnung verbesserten sich die Ergebnisse stetig, was vor allem sehr gut durch den Einsatz der zweiten Quelle demonstriert werden konnte, da die Fluktuationen der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten, durch eine bessere Ausleuchtung des Bereichs vor dem Schichtwechsel, reduziert werden konnten. Des Weiteren entstanden durch die Inversion, wie zuvor schon vermutet, keine überdurchschnittlich hohen Fluktuationen der Wellengeschwindigkeiten zwischen der Erdoberfläche und der Tunneldecke, welche bei den Inversionen mit zweidimensionalen Tunnelmodellen, wie in Abschnitt 6.4, auftraten.



## 7. Validierung mittels eines kleinskaligen Laborexperiments

Während bei der Full-Waveform-Inversion mit synthetischen Seismogrammen auch Frequenzen eingesetzt werden können, welche nur niedrige Ausschläge aufweisen, ist die Inversion mit Messdaten deutlich anspruchsvoller. Das Frequenzspektrum, welches durch die Quellen angeregt wird, könnte deutlich schmäler als die Frequenzspektren der vorgegebenen Quellfunktionen sein, wodurch die Effektivität eines Multi-Skalen-Ansatzes eingeschränkt wäre. Frequenzen mit verhältnismäßig niedrigen Ausschlägen könnten für die Inversion nicht eingesetzt werden, da die Anteile der Ausschläge, welche auf die zu detektierenden Störungen zurückzuführen sind, verhältnismäßig stark durch Messfehler überlagert würden. Des Weiteren kann der Boden sowohl stark inhomogene als auch anisotrope Eigenschaften aufweisen, welche von den vorgestellten Inversionsmodellen nicht berücksichtigt würden. Zudem sind bis zu einem gewissen Detailgrad Ungenauigkeiten bei der Approximation des realen Randwertproblems unausweichlich. Manche Messanordnungen könnten zudem Probleme bereiten, da einzelne Seismogramme kaum Informationen über die Störung enthalten könnten, aber gleichzeitig aufgrund der genannten Messfehler und Ungenauigkeiten den zu minimierenden Wert des Fehlerfunktionalis überproportional erhöhen könnten. Das rekonstruierte Modell des Bodens könnte somit ein lokales Minimum des Fehlerfunktionalis darstellen, welches kaum Informationen zu der Störung in der Tunnelumgebung widerspiegelt. Da gradientenbasierte Verfahren besonders abhängig von dem aktuellen Entwicklungspunkt sind, könnte der Inversionsprozess auch bei kleineren Ungenauigkeiten schon zu unbrauchbaren Ergebnissen führen, wenn das Ausgangsmodell zu stark von den wahren Bodeneigenschaften abweicht. Daher ist eine Validierung des entwickelten Inversionsansatzes mittels realer Daten notwendig, um einschätzen zu können, wie erfolgversprechend und robust die Inversion seismischer Tunneldaten sein könnte.

Seismische Daten, welche für die Vorauserkundung während aktueller Tunnelbauprojekte aufgenommen werden, sind einerseits in der Regel nicht frei zugänglich. Andererseits sind diese Daten nicht mit Hinblick auf den Einsatz eines Ansatzes der Full-Waveform-Inversion erzeugt worden. Die angeregten Frequenzen entsprechen nicht immer dem Frequenzgehalt, welchen die Inversionsverfahren für eine akkurate Auflösung relevanter Störungen benötigen würden und zudem kann die Breite des Frequenzspektrums stark variieren. Viele Informationen über die zu untersuchende Tunnelumgebung, wie beispielsweise der genaue Verlauf der Erdoberfläche und Positionen, Abmaße sowie elastische Eigenschaften von bestehenden Strukturen, wie Gebäude im urbanen Raum, sind den seismischen Datensätzen in der Regel nicht beigelegt, da die etablierten Verfahren (vergleiche Abschnitt 1.2) nur die Trajektorie des Tunnels betrachten. Die verwendeten Messanordnungen beschränken sich darauf, Quellen und Empfänger auf dem Schneidrad und an den Tunnelwänden zu verwenden, wodurch, wie in Kapitel 6 demonstriert wurde, die sich ergebenden Messanordnungen nicht die besten Anordnungen für die Full-Waveform-Inversion sind. Eine umfangreiche Charakterisierung der Ausbreitungsgeschwindigkeit sowohl von Kompressions- als auch von Scherwellen des umgebenden Bodens wird häufig nicht in dem benötigten Umfang durchgeführt, da für die etablierten Verfahren vornehmlich nur die Laufzeiten der ersten Kompressionswellen entscheidend sind. Aufgrund der eingeschränkten Messanordnungen und fehlender Informationen zur Tunnelumgebung, würde sich die Bestimmung der Bodeneigenschaften schwierig gestalten. Der Erfolg des Inversions-

prozesses hängt zudem stark davon ab, dass ein Ausgangsmodell gefunden wird, welches die Ausbreitung seismischer Wellen in der betrachteten Tunnelumgebung ausreichend beschreiben kann. Somit eignen sich die seismische Daten von aktuellen Bauprojekten des maschinellen Tunnelbaus weniger für eine erste Validierung des vorgestellten Inversionsansatzes.

Während die Full-Waveform-Inversion für die Auswertung seismischer Messdaten zur Charakterisierung der Eigenschaften von großskaligen Erdregionen schon häufiger eingesetzt wurde (Fichtner, 2011), kam sie für die genauere Untersuchung von oberflächennahen Bodenverhältnissen seltener zum Einsatz. Beispielsweise setzten Chen u. a. (2017) einen zweidimensionalen gradientenbasierten Inversionsansatz ein, welcher im Frequenzbereich arbeitet, um die Position eines bekannten Tunnels zu ermitteln, dessen obere Grenze der Deckenschicht sich ungefähr nur 1.5 m unterhalb der Erdoberfläche befindet. Das Potential für eine Anwendung eines zweidimensionalen Ansatzes der Full-Waveform-Inversion durch Wang u. a. (2019) sowie eines dreidimensionalen Ansatzes der Full-Waveform-Inversion durch Smith u. a. (2019), welche beide im Zeitbereich arbeiten und die adjungierte Gradientenmethode verwenden, konnte mittels der Detektion eines bestehenden Tunnels, dessen Decke sich ungefähr 9.1 m unter der Erdoberfläche befindet, im Yuma Proving Ground (Arizona, USA) verdeutlicht werden.

Mit Hinblick auf die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau konnten Bharadwaj u. a. (2017) erfolgreich einen Ansatz der Full-Waveform-Inversion, welcher im Zeitbereich zweidimensionale horizontal polarisierte Scherwellen sowie die adjungierte Gradientenmethode verwendet, einsetzen, um in einem künstlich angelegten Untersuchungsbereich ein Betonrohr, welches in einer Tiefe von 6 m unter Ton vergraben war, zu detektieren. Die Quellfunktionen und die Übertragungsfunktionen an den Empfängern wurden im Frequenzbereich sukzessive mit optimiert. Die Messanordnung, welche sich an der Erdoberfläche befand, wurde so gewählt, dass diese vergleichbar mit einer Messanordnung einer Tunnelumgebung ist, wobei ein Vortrieb in vertikaler statt in horizontaler Richtung dafür betrachtet werden musste. Dazu wurde in einem definierten Bereich sukzessiv der Ton wieder abgetragen, um den Fortschritt eines Tunnels nachzuahmen. Für die präsentierten Inversionsergebnisse wurden die Messungen verwendet, bei welchen schon die ersten 2 m des Tons abgetragen waren und das zu detektierende Rohr sich somit 4 m unterhalb der Messoberfläche befand.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung und Validierung von Inversionsverfahren bieten kleinskalige Experimente, wie beispielsweise Pratt (1999) demonstrieren konnte. Diese Experimente haben den Vorteil, dass in einer kleinen, gut kontrollierbaren Umgebung, Phänomene der elastischen Wellenausbreitung untersucht werden können und die gewonnenen Erkenntnisse näherungsweise für Anwendungen auf größeren Skalen übertragen werden können. Wie Bretaudeau u. a. (2011) beschreiben, wurden in den letzten beiden Jahrzehnten für die Messungen bei solchen kleinskaligen Experimenten vorwiegend Laserinterferometer eingesetzt, da somit ein Kopplungseffekt zwischen Probe und Messsystem vermieden werden kann. Bretaudeau u. a. (2013) verwenden Messdaten von einem solchen kleinskaligen Experiment mit Laserinterferometer, um das Potential ihres Ansatzes der Full-Waveform-Inversion für die Erkundung oberflächennaher Erdschichten zu untersuchen. Über einen viskoelastischen Frequenzbereichs-ansatz konnte in der Probe, welche aus Epoxidharz besteht, ein ovalförmiger Einschluss, welcher aus einem anderen Epoxidharz besteht, rekonstruiert werden. Die Probe wurde dabei in eine Raumrichtung symmetrisch ausgelegt, sodass ein zweidimensionales Modell für die Approximation der Wellenausbreitung verwendet werden konnte. Des Weiteren wurde die Probe überdimensioniert, damit die äußeren Ränder des Inversionsmodells, durch das Kürzen der aufgenommenen Wellenformen, durch PMLs ersetzt werden konnten.



Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“ wurde von der Arbeitsgruppe „Mechanik adaptiver Systeme“ (Ruhr-Universität Bochum) ein kleinskaliges Laborexperiment, in welchem ein Laserinterferometer verwendet wird, aufgebaut. Der zugehörige Versuchsstand dient dazu, dass Messdaten zur Untersuchung und Validierung von Ansätzen der Full-Waveform-Inversion, welche zielgerichtet für eine Vorerkundung im maschinellen Tunnelbau entwickelt wurden (vergleiche Abschnitt 1.3), generiert werden können. Mit den folgenden Proben wurden bereits Untersuchungen sowie erfolgreiche Validierungen von verschiedenen Inversionsalgorithmen durchgeführt:

- In einem Aluminium Quader mit den Abmaßen  $200.4 \text{ mm} \times 103 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  sollte eine Bohrung mit einem Durchmesser von 16 mm, welche leicht versetzt zur Probenmitte und parallel zur zweitkürzesten Seite verläuft, detektiert werden. Als Quelle wurde ein Ultraschallwandler verwendet, dessen kreisförmige Kontaktfläche über einen Durchmesser von 28 mm verfügt. Die Verschiebungen wurden an der oberen großen Probenoberfläche aufgenommen. Erfolgreiche Inversionen konnten mit dem Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing (Trapp u. a., 2019), der UKF-PaLS-Methode (Trapp, 2022) und einer adjungierten Gradientenmethode im Zeitbereich (Lamert, 2020) durchgeführt werden.
- In drei Betonplatten mit den Abmaßen  $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$  wurden verschiedene Störungen – Loch mit einem Durchmesser von 30 mm, rechteckiger Einschluss eines modifizierten Betons mit den Abmaßen  $200 \text{ mm} \times 140 \text{ mm}$  und Schichtwechsel zu einem modifizierten Beton – bei der Herstellung integriert, welche mittels einer Inversion durch das Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing (Trapp u. Nestorović, 2020) detektiert werden konnten. An den schmalen Seiten wurden die Proben angeregt und auch die Verschiebungen gemessen.
- In einem Betonblock mit den Abmaßen  $1300 \text{ mm} \times 450 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$  sollte durch die Inversion elastischer Wellenformen ein Schichtwechsel rekonstruiert werden. Die zweite Schicht besteht aus einem modifizierten Beton. Die Überdimensionierung in eine Raumrichtung (1300 mm) ermöglicht den Einsatz eines zweidimensionalen Modells für die Approximation der Wellenausbreitung. Durch einen Schlitz in der Probe soll eine zweidimensionale Tunnelgeometrie näherungsweise imitiert werden. Sowohl mittels Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing als auch durch die UKF-PaLS-Methode konnte erfolgreich eine Inversion mit den aufgenommenen Messdaten durchgeführt werden (Trapp u. Nestorović, 2022).

Bei den Inversionen der Messdaten der aufgezählten Proben wurden alle Ränder der Inversionsmodelle immer Einfachheit halber als reflektierende Ränder approximiert. Bei einer realen Tunnelumgebung würden jedoch die seismischen Wellen, welche die Grenzen des betrachteten Bereichs erreichen, diesen betrachteten Bereich auch verlassen. Wenn die Wellen, welche an den Probengrenzen reflektiert wurden und welche zuvor schon mit der jeweiligen Störung interagiert haben, an den Messpunkten aufgenommen werden, ist der Informationsgehalt in den Datensätzen entsprechend höher. Somit würde eine überdimensionierte Probe, bei welcher die reflektierten Wellen nicht in den Datensätzen auftreten, besser die Anforderungen einer echten Tunnelumgebung imitieren und somit könnten bessere Rückschlüsse auf die Funktionsweise von Ansätzen der Full-Waveform-Inversion in einer Tunnelumgebung gezogen werden.

Des Weiteren stellen die Messanordnungen, für welche alle Ränder als reflektierende Ränder modelliert werden müssten, Probleme für den Einsatz eines Frequenzbereichsmodells dar. Bei den Messungen wird nur ein begrenztes Zeitintervall aufgenommen. Für eine Inversion im Zeit-

bereich wird ein Zeitintervall betrachtet, welches kleiner oder genau so lang ist, wie das angenommene Zeitintervall. Das Modell, welches zur Approximation der Wellenausbreitung im Frequenzbereich verwendet wird, betrachtet hingegen ein unendliches Zeitintervall (vergleiche Gleichung 2.34) und somit auch elastische Wellen, welche zu einem späteren Zeitpunkt an den Messpunkten ankommen würden. Bei einer Verlängerung des gemessenen Zeitintervalls würden verstärkt Dämpfungseffekte auftreten, welche durch eine aufwendige Identifizierung der zugehörigen Qualitätsfaktoren Berücksichtigung bei der Modellierung finden könnten. Jedoch treten auch Energieverluste an den freien Oberflächen sowie der Lagerung auf, welche nicht ausreichend quantifiziert werden könnten. Zusätzlich würden kleinere Ungenauigkeiten bei der Abstrahierung der Probengeometrie durch das Modell mit zunehmender Messzeit zu einer ansteigenden Diskrepanz zwischen den Messdaten und den numerisch approximierten Wellenformen führen.

Um dennoch eine Validierung des vorgestellten Frequenzbereichsansatzes zu realisieren, wurde die Herstellung einer überdimensionierten Probe geplant und durchgeführt. Der verwendete Versuchsstand wird in Abschnitt 7.1 vorgestellt. Für die Planung der Probe waren numerische Voruntersuchungen notwendig, welche in Abschnitt 7.2 erläutert werden. Die hergestellte Probe, die Messungen mit der Probe, die Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Probe, die Aufbereitung der gemessenen Wellenformen sowie die Inversion der Messdaten mittels eines zweidimensionalen Inversionsmodells werden in Abschnitt 7.3 vorgestellt. Der Einfluss, den die Berücksichtigung von Dämpfungseffekten auf eine Inversion mit einem zweidimensionalen Inversionsmodell haben würde, wird in Abschnitt 7.4 untersucht. Mit den Erkenntnissen aus den vorherigen Abschnitten werden in Abschnitt 7.5 die gemessenen Wellenformen mittels eines dreidimensionalen Modells invertiert, wobei auch der Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion während der Inversion für die Messdaten untersucht wird. Einzelne Ergebnisse der folgenden Abschnitte wurden schon von Riedel u. a. (2023b) veröffentlicht.

## 7.1. Versuchsstand

Der verwendete Versuchsstand wird in Abbildung 7.1 dargestellt. Der Aufbau ist dem von Bretaudeau u. a. (2011) in viele Aspekten nachempfunden und wurde schon für mehrere Messungen sowie Inversionen eingesetzt (Trapp u. a., 2019; Trapp u. Nestorović, 2020, 2022; Trapp, 2022; Lamert, 2020).

Die Proben werden auf dem optischen Tisch *M-RS2000-46-8* der Firma *Newport* positioniert, welcher die Einwirkung von Vibrationen aus der Umgebung reduziert. Über einen Computer wird die gewünschte Quellfunktion an den Wellenformgenerator *Keysight 33500* übertragen, welcher das diskrete Signal in ein elektrisches Signal umwandelt. Nachdem das Signal durch den Verstärker *1040L* von der Firma *Electronics & Innovation* verstärkt wurde, wird es an einen Ultraschallwandler gesendet, welcher mit der vorgegebenen Quellfunktion elastische Wellen in die Probe einbringt. Für die folgenden Messungen wurde der Ultraschallwandler *B 0.1NN* von der Firma *GE Measurement & Control Solutions*, welcher in Abbildung 7.2 dargestellt wird, verwendet. Dieser ist für eine nominellen Anregungsfrequenz von 100 kHz ausgelegt. Aufgrund der geringen Kontaktfläche des Ultraschallwandlers, kann für die späteren Approximationen eine Punktquelle angenommen werden. Diese ist vergleichbar mit einer künstlichen Anregung in einer Tunnelumgebung. Über eine Halterung aus Polyvinylchlorid kann der Ultraschallwandler über verbundene Profile des *MB Systembaukastens* der Firma *item* mittels zweier Federn an die Probe angepresst werden. Da der Anpressdruck manuell über die erstellte Halterung auf-

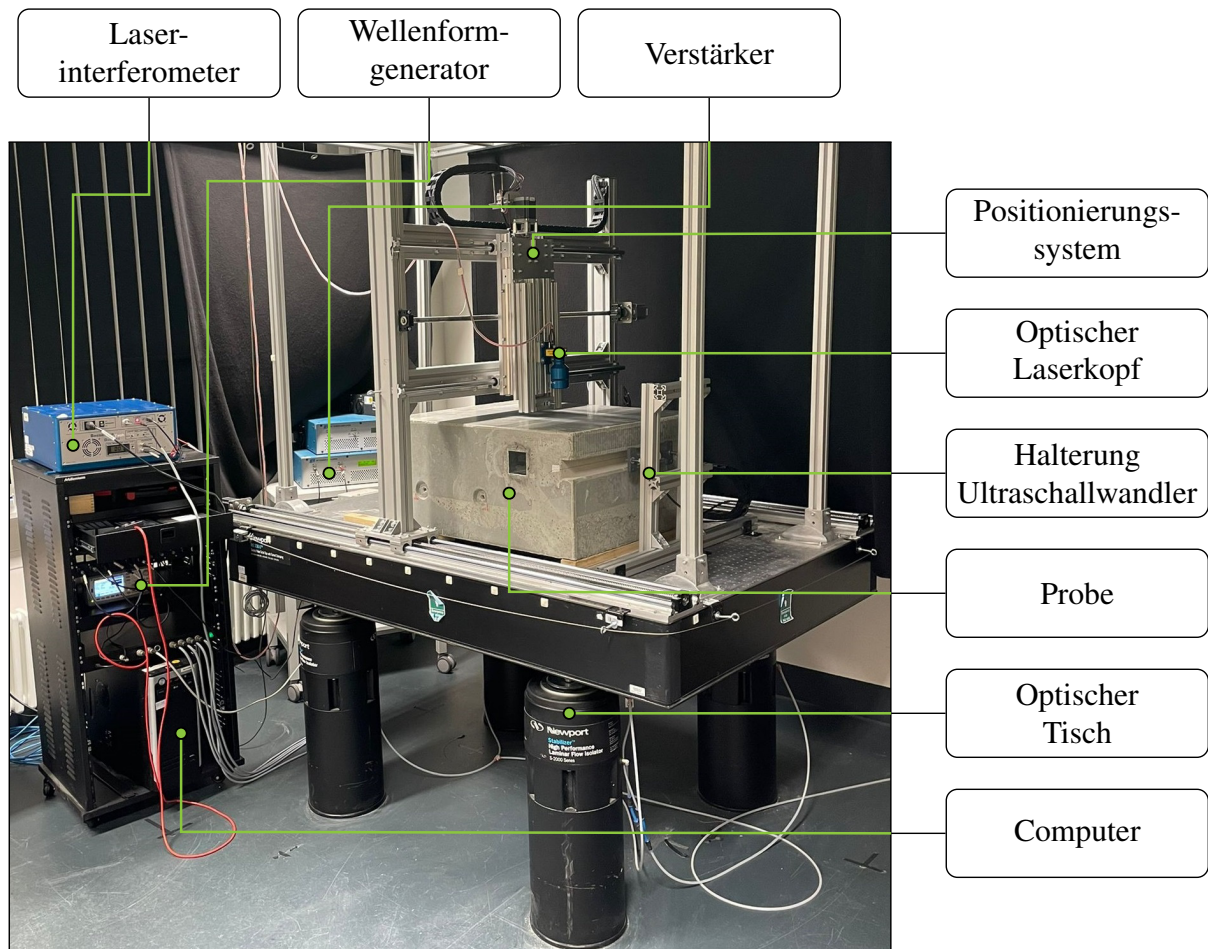


Abbildung 7.1.: Foto des Versuchsstands mit Kennzeichnung der einzelnen Bestandteile.

gebracht und auch nicht gemessen wird, ist dieser für eine neue Ausrichtung des Ultraschallwandlers nicht reproduzierbar. Um die Messungen an der Probenoberfläche durch ein besseres Reflexionsverhalten zu verbessern und die Oberfläche gleichzeitig vor der Intensität des Lasers zu schützen, wird Aluminium-Klebeband an den späteren Messpunkten aufgebracht. Die Verbesserung des gemessenen Signals durch den Einsatz von Blattgold und Aluminium-Klebeband wurde ausführlich von Trapp (2022, Abschnitt 4.3) untersucht. Passend zum Abstand des optischen Laserkopfs zur Probe wird für den optischen Laserkopf eine Linse mit entsprechender Stärke verwendet, um eine möglichst optimale Fokussierung des Laserstrahls zu ermöglichen. Der optische Laserkopf wird über ein Positionierungssystem ausgerichtet, welches über eine Programmierung mit der Software MATLAB (2019) gesteuert werden kann. Das verwendete Laserinterferometer *BNT-QUARTET-500 linear* von der Firma *Bossa Nova Technologies* ermöglicht eine kontaktlose Messung der auftretenden Verschiebungen, wobei es mit einer Abtastrate von 50 kHz bis 50 MHz messen kann. Die gemessenen Verschiebungen werden von



Abbildung 7.2.: Ultraschallwandler *B 0.1NN* der Firma *GE Measurement & Control Solutions*.

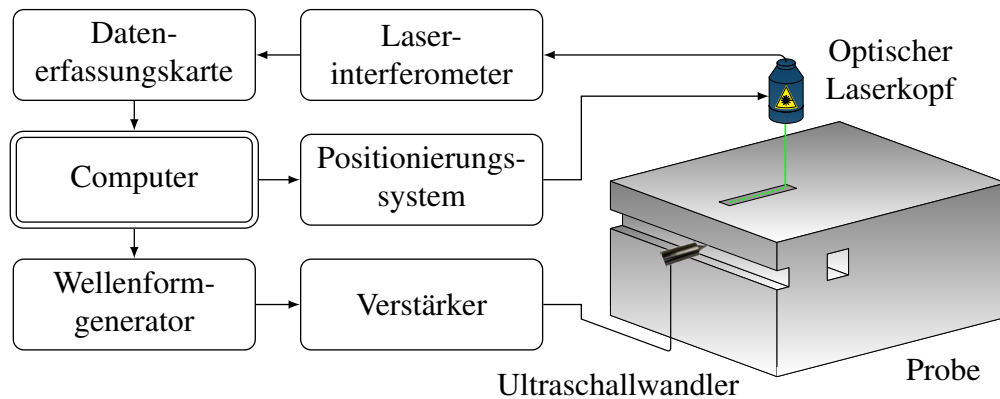


Abbildung 7.3.: Schematischer Messablauf.

der Datenerfassungskarte *PCI-5922* der Firma *National Instruments* verarbeitet und dem verwendeten Computer bereitgestellt. Die Datenerfassungskarte ist auf eine Messrate von 15 MHz begrenzt, welche somit die höchstmögliche Messrate für den ganzen Versuchsaufbau darstellt. Da über das Laserinterferometer immer nur die vertikale Verschiebung an einem Punkt aufgenommen werden kann, wird die Probe sequenziell angeregt, während nacheinander an verschiedenen Punkten die Verschiebungen gemessen werden. Der schematische Messablauf wird vereinfacht in Abbildung 7.3 illustriert.

Für die folgenden Messungen wurde ein Toneburst-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 100 kHz ausgewählt, da sich dieses bei den Untersuchungen von Trapp u. Nestorović (2020, 2022) mit dem selben Ultraschallwandler bewährt hat. In Abschnitt 5.8 wurde schon erläutert, dass sich die vorgegebene Quellfunktion von der effektiv emittierten Quellfunktion voraussichtlich unterscheiden wird. Damit ein Abgleich zwischen gemessenen und approximierten Wellenformen durchgeführt werden kann, muss die effektiv emittierte Quellfunktion möglichst akkurat ermittelt werden. Für diesen Zweck wurde, wie von Trapp u. Nestorović (2020) beschrieben, die Spitze des Ultraschallwandlers gegen die eines zweiten Ultraschallwandlers desselben Modells gepresst und das ausgewählte Toneburst-Signal mit einer Spitzenfrequenz von 100 kHz wurde übertragen. Dabei fungierte der zweite Ultraschallwandler als Aufnehmer. Durch den erzeugten Kontakt zwischen den Ultraschallwandlern sollte die gemessene Quellfunktion vergleichbar mit der Quellfunktion sein, welche später in die Probe eingebracht wird. In Abbildung 7.4 wird die vorgegebene Quellfunktion mit der gemessenen Quellfunktion verglichen. Die ermittelte Quellfunktion verfügt über eine lange Ausschwingphase, welche bei späteren Messungen an der Probe eine Zuordnung der Amplituden der gemessenen Wellenformen zu verschiedenen Wellentypen erschwert, da es zu einer Überlagerung von mehreren Wellen kommen kann. Somit wird das Kürzen der Datensätze, um absorbierende Randbedingungen imitieren zu können, merklich erschwert, vor allem da elastische Wellen, welche nur innerhalb des betrachteten Gebiets reflektiert wurden, möglichst nicht entfernt werden sollen. Das Frequenzspektrum der ermittelten Quellfunktion ist deutlich schmaler als das der vorgegebenen Quellfunktion und der höchste Ausschlag liegt bei ungefähr 90.24 kHz statt bei 100 kHz. Durch das schmale Frequenzspektrum wird die Effizienz einer Regularisierung durch einen Multi-Skalen-Ansatz zudem stark eingeschränkt.

Durch den Einsatz eines dreidimensionalen Modells für die Approximation der Wellenfelder für verschiedene Frequenzen erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems drastisch. Dies führt wiederum zu sehr langen Rechenzeiten vom Inversionsalgorithmus, was eine Bestimmung passender Parameter für die Inversion (Wahl der Frequenzgruppen, Anzahl an Ite-

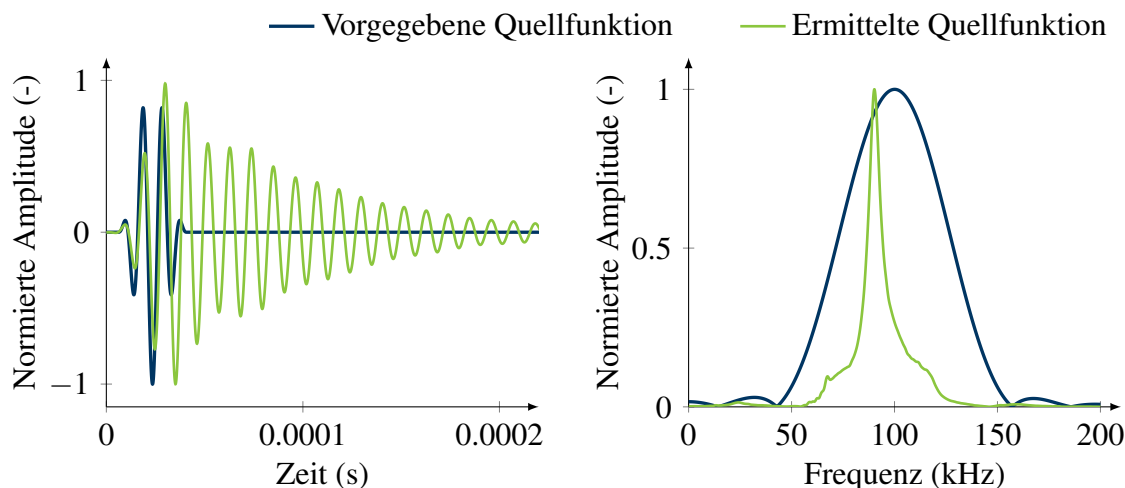


Abbildung 7.4.: Vergleich der vorgegebenen und der ermittelten Quellfunktion im Zeit- (links) und Frequenzbereich (rechts).

rationen pro Frequenzgruppe, Vorkonditionierung des Gradienten, usw.) erheblich verlangsamt und somit erschwert. Mit einem zweidimensionalen Tunnelmodell kann eine Inversion deutlich schneller durchgeführt und somit die zugehörigen Parameter schneller bestimmt werden. Daher soll die Probe so ausgelegt werden, dass zuerst die Inversion mit einem zweidimensionalen Modell untersucht wird. Im Anschluss sollen dann die gewonnenen Erkenntnisse auf die Inversion mit einem dreidimensionalen Modell übertragen werden.

## 7.2. Vorabuntersuchung

Da einerseits die effektive Quellfunktion die Modellierung von absorbierenden Rändern erschwert und andererseits das Laserinterferometer nur Verschiebungen orthogonal zur Oberfläche einer Probe messen kann, wurden synthetische Vorabuntersuchungen durchgeführt, um eine erfolversprechende Probengeometrie und Beschaffenheit der zu erzeugenden Störung wählen zu können.

Eine der letzten Probengeometrien von den Vorabuntersuchungen wird in Abbildung 7.5 dargestellt. Dabei werden die betrachteten Probengeometrien vor allem durch die Abmaße des

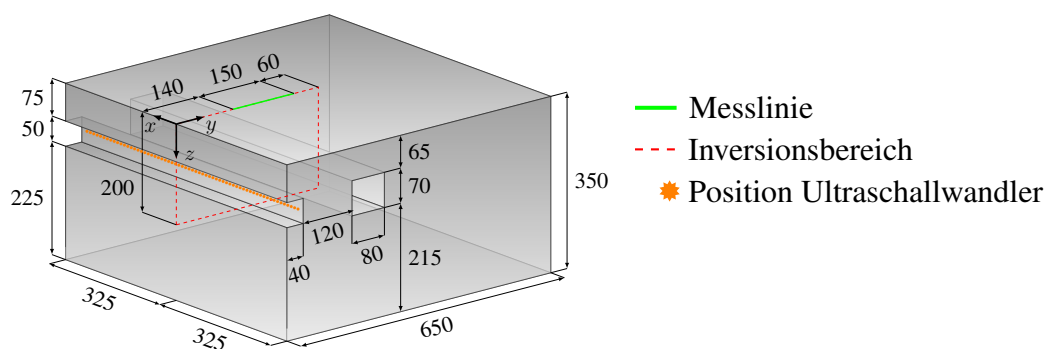


Abbildung 7.5.: Geometrie der Probe, welche für die synthetischen Voruntersuchungen verwendet wurde. Die Abmaße werden in Millimetern angegeben.

optischen Tisches und die maximal einstellbare Höhe des optischen Laserkopfs begrenzt, wobei letztere durch das Positionierungssystem vorgegeben wird. Durch einen durchgezogenen Schlitz soll die Geometrie eines Tunnels nachgeahmt werden. Als Störung wurde ein rechteckiges Loch mit den Abmaßen  $70 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$  betrachtet. Der gewünschte zweidimensionale Inversionsbereich ist rot strichliert dargestellt, wobei der Boden ( $z = 350 \text{ mm}$ ) sowie die hintere Seite ( $y = 650 \text{ mm}$ ) im Inversionsmodell durch absorbierende Ränder ignoriert werden sollen. Entsprechend sind die zugehörigen Abmaße der Probe sowie die Abmessungen in die dritte Raumrichtung überdimensioniert. Für die Vorabuntersuchungen werden für die Probe die Eigenschaften  $v_p = 4700 \text{ m/s}$ ,  $v_s = 2840 \text{ m/s}$  und  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$  angenommen. Der Messbereich ist auf die Probenoberfläche ( $z = 0 \text{ mm}$ ) beschränkt und die Linie, entlang welcher an mehreren Punkten gemessen wird, beginnt erst, wenn der Winkel zwischen dem Kontaktpunkt des Ultraschallwandlers und dem ersten Messpunkt, ausgehend von der Achse des Ultraschallwandlers,  $45^\circ$  unterschreitet, da Bretaudeau u. a. (2011) sowie (Trapp u. a., 2019) festgestellt haben, dass für größere Winkel, aufgrund einer nicht konstanten Richtungsabhängigkeit von Ultraschallwandlern, die numerischen Approximationen nicht die gemessenen Wellenformen nachbilden können. Daher beginnt der  $150 \text{ mm}$  lange Messbereich bei  $y = 140 \text{ mm}$ .

Um die späteren Ergebnisse besser mit einer echten Tunnelumgebung vergleichen zu können, kann ein Skalierungsfaktor  $\kappa$  eingeführt werden (Bretaudeau u. a., 2011). Dieser soll die Dimensionierung innerhalb des kleinskaligen Laborexperiments  $d_{\text{Labor}}$  mit den Dimensionen bei Feldmessungen  $d_{\text{Feld}}$ , welche für Tunnelumgebung typisch wären, über die folgende Beziehung ins Verhältnis setzen:

$$\kappa d_{\text{Labor}} = d_{\text{Feld}}. \quad (7.1)$$

Bei der Auslegung der Probe muss sichergestellt werden, dass eine Störung gewählt wird, welche mit den erzeugten Wellenlängen  $\Lambda$  aufgelöst werden kann, wobei für die Wellenlängen die folgende Beziehung gilt:

$$\kappa \Lambda_{\text{Labor}} = \Lambda_{\text{Feld}}, \quad (7.2)$$

Die Wellenlängen sind einerseits von den Wellengeschwindigkeiten des Probenmaterials und andererseits von den angeregten Frequenzen abhängig. Somit sind die Abmaße der Probe stark von dem schmalen Frequenzspektrum, welches der Ultraschallwandler mit der gewählten Quellfunktion anregt (vergleiche Abbildung 7.4), abhängig. Das Verhältnis zwischen den Frequenzen innerhalb des Experiments  $f_{\text{Labor}}$  und den Frequenzen innerhalb einer Tunnelumgebung  $f_{\text{Feld}}$  lässt sich durch das folgende reziproke Verhältnis beschreiben:

$$\kappa^{-1} f_{\text{Labor}} = f_{\text{Feld}}. \quad (7.3)$$

Da das Verhältnis zwischen den Wellengeschwindigkeiten innerhalb der Probe und denen in einer Tunnelumgebung sehr stark variieren kann, ist eine genaue Quantifizierung des Skalierungsfaktors  $\kappa$  schwierig. Für eine vergleichbare Probe, welche mit demselben Versuchsstand untersucht wurde, haben Trapp u. Nestorović (2022) einen Bereich von  $\kappa \in [100, 500]$  abgeschätzt. Unter der Annahme, dass die Wellengeschwindigkeiten der Probe mit denen des Bodens einer Tunnelumgebung vergleichbar sind, würde bei einem exemplarischen Skalierungsfaktor von  $\kappa = 250$  für die Probengeometrie in Abbildung 7.5 ein Tunneldurchmesser von  $12.5 \text{ m}$ , dessen Tunneldecke  $18.75 \text{ m}$  unter der Erdoberfläche liegt, angenähert werden, womit ein oberflächennaher Tunnel betrachtet würde.

Im Vorfeld wurde auch untersucht, ob statt dem Loch einfach ein Quader aus einem anderen Material mit dem Probenmaterial umschlossen werden soll. Einerseits würde bei dem vorgestellten Messaufbau eine vergleichsweise kleine Änderung der elastischen Eigenschaften nur



zu so kleinen Änderungen in den Wellenformen führen, dass Messfehler und Fehler, welche durch die Transformation der gemessenen Wellenformen zu Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung entstehen und welche durch das notwendige Kürzen der gemessenen Daten entstehen, dominanter wären. Andererseits wäre für die gewählte Probengeometrie eine Herstellung, bei welcher die Geometrie des Störkörpers nach seiner Anfertigung noch nicht komplett getrocknet ist, wie es von Trapp u. Nestorović (2020, 2022) gehandhabt wurde, sehr schwierig zu realisieren, was zu einer besseren Verbindung der Oberflächen geführt hätte. Des Weiteren birgt der Einsatz eines Lochs den Vorteil, dass der Messbereich von vielen Wellen, die vom Boden und der hinteren Fläche der Probe reflektiert würden, abgeschirmt wird. Dies ermöglicht die Betrachtung eines längeren Zeitintervalls bevor die Messdaten gekürzt werden müssen.

Für die Transformation von Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung zu Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung bietet sich das Bleistein-Filter (Bleistein, 1986) oder eine seiner vereinfachten Abwandlungen an, welche häufig als  $\sqrt{t}$ -Filter bezeichnet werden (Pratt, 1999; Bretaudeau u. a., 2013; Trapp u. Nestorović, 2022), bei welchen u.a. die jeweiligen Messungen zur Korrektur der Amplituden mit  $\sqrt{t}$  multipliziert werden. Das Bleistein-Filter wird über einen Abgleich der analytischen Lösung der zweidimensionalen akustischen Wellengleichung im Frequenzbereich für ein unbegrenztes Medium

$$g^{A,2D}(r, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}\left(r \frac{\omega}{v_p}\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad (7.4)$$

und der zugehörigen Lösung der dreidimensionalen akustischen Wellengleichung (vergleiche Unterabschnitt 2.3.3)

$$g^{A,3D}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}, \quad (7.5)$$

hergeleitet. Dabei stellen  $g^{2D}$  und  $g^{3D}$  die Greenschen Funktionen für die skalaren Druckfelder  $p^{2D}$  und  $p^{3D}$  dar. Durch den Index  $s$  werden die räumlichen Koordinaten der Quelle gekennzeichnet. Für eine bessere Vergleichbarkeit der analytischen Lösungen wird die Hankel-Funktion zweiter Gattung und nullter Ordnung  $H_0^{(2)}$  in Gleichung 7.4 durch eine asymptotische Erweiterung, welche für große Werte gilt (Abramowitz u. Stegun, 1964, Abschnitt 9.2), approximiert:

$$g^{A,2D}(r, \omega) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_p}{2\pi\omega r}} \exp\left(-i \frac{\omega}{v_p} r\right) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.6)$$

Durch den Vergleich der skalaren Greenschen Funktionen in Gleichung 7.5 und Gleichung 7.6 kann die Frequenzbereichsformulierung des Bleistein-Filters hergeleitet werden:

$$g^{A,2D}(\omega) \approx \sqrt{2\pi\tilde{r} \frac{v_p}{|\omega|}} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) g^{A,3D}(\omega). \quad (7.7)$$

Dabei stellt  $\tilde{r}$  für homogene Medien den kürzesten Laufweg der Wellen zwischen der Quelle und dem betrachteten Messpunkt dar. Für inhomogene Medien müsste statt des Produkts  $\tilde{r}v_p$  die sich räumlich ändernde Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_p$  über den Laufweg der Wellen integriert werden. Eine anschauliche Herleitung des Bleistein-Filters sowie eine Untersuchung seines Einflusses beim Einsatz der Full-Waveform-Inversion mit zweidimensionalen Inversionsmodellen für die seismische Bohrlochtomografie mittels synthetisch generierter Seismogramme

kann der Abhandlung von Auer u. a. (2013) entnommen werden. Da das Bleistein-Filter auf der akustischen Wellengleichung basiert gelingt ihm die Anpassung der zuerst ankommenden Kompressionswellen sehr gut. Scher- und Oberflächenwellen können in der Regel nicht so optimal transformiert werden. Der Phasenversatz zwischen dreidimensionalen und zweidimensionalen Wellenformen, welcher aufgrund des Unterschieds zwischen einer zylindrischen und sphärischen Wellenausbreitung entsteht, kann hingegen sehr gut korrigiert werden.

Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die Probe mit einer Linienbelastung anzuregen. Aufgrund des Prinzips von de Saint-Venant (siehe Gross u. a., 2021) kann eine Linienlast durch mehrere zeitgleiche einzelne Anregungen realisiert werden. Da nur zwei Ultraschallwandler zur Verfügung stehen, muss eine Linienlast durch eine Überlagerung der Wellenformen, welche durch die Anregungen eines Ultraschallwandlers, welcher sequenziell an verschiedene Positionen auf der zugehörigen Linie eingesetzt wird, nachgeahmt werden. Um dem Prinzip von de Saint-Venant zu genügen, muss beachtet werden, dass die Abstände von den Positionen des Ultraschallwandlers untereinander im Verhältnis zu ihrer Entfernung zu den Messpunkten vergleichsweise klein sind. Des Weiteren haben in dem Zusammenhang auch die angeregten Wellenlängen sowie die Entfernung der einzelnen Positionen des Ultraschallwandlers zur betrachteten Ebene einen Einfluss. Bei der Probe aus Abbildung 7.5 wären nah an den seitlichen Rändern bei  $x = \pm 325$  mm gelegene Anregungspunkt nicht vorteilhaft, da von diesen seitlichen Rändern, welche im Inversionsmodell nicht modelliert werden, Wellen reflektiert würden, welche vergleichsweise frühzeitig innerhalb der Messdaten auftreten würden.

Für die in Abbildung 7.5 dargestellte Probengeometrie werden einerseits die Unterschiede zwischen den Wellenformen einer dreidimensionalen und einer zweidimensionalen Wellenausbreitung durch Abbildung 7.6 (links) illustriert. Andererseits werden auch die Wellenformen mit den Wellenformen einer zweidimensionalen Wellenausbreitung in Abbildung 7.6 (rechts)

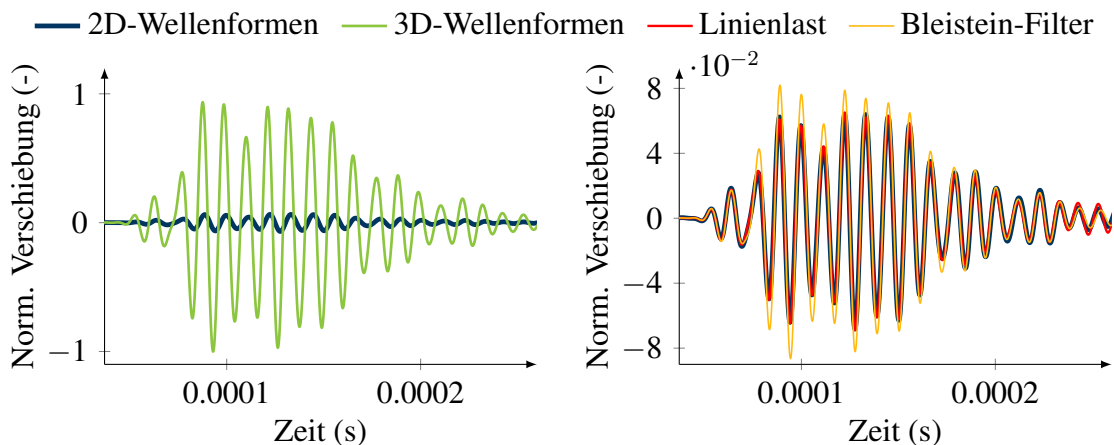


Abbildung 7.6.: Vergleich der synthetischen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung in der in Abbildung 7.5 dargestellten Probe, bei welcher an vier der sechs Ränder der Probe PMLs eingesetzt wurden, mit den Wellenformen, welche mit dem zweidimensionalen Inversionsmodell erzeugt wurden (links). Des Weiteren werden die Wellenformen des zweidimensionalen Inversionsmodells mit den Wellenformen verglichen, welche durch eine Superposition von einzelnen Verschiebungsverläufen, welche für verschiedene Positionen des Ultraschallwandlers berechnet wurden, eine Linienlast nachahmen (rechts). Für den Vergleich werden zusätzlich die durch das Bleistein-Filter transformierten Wellenformen der dreidimensionalen Wellenausbreitung einbezogen.



verglichen, welche mit den beiden vorgestellten Methoden für eine Überführung der Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung in Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung, vorgestellt wurden. Dabei wurde der Messpunkt an der Position  $x = 0$  mm,  $y = 140$  mm und  $z = 0$  mm betrachtet. Die Wellenformen für die zweidimensionale Wellenausbreitung wurden mit dem Frequenzbereichsmodell für den vorgesehenen Inversionsbereich berechnet, für welchen entsprechend C-PMLs als absorbierende Ränder eingesetzt wurden. Für die Approximation der dreidimensionalen Wellenausbreitung im Zeitbereich wurde der SPEC-FEM3D Cartesian Code verwendet, wobei zur besseren Vergleichbarkeit an dem unteren ( $z = 350$  mm), hinteren ( $y = 650$  mm) und den beiden seitlichen Rändern ( $x = \pm 325$  mm) C-PMLs hinzugefügt wurden. Dabei wurde als Quellfunktion dieselbe Quellfunktion verwendet, welche in Abbildung 7.4 bestimmt wurde. Für die Nachahmung einer Linienbelastung wurden die 63 Positionen des Ultraschallwandlers eingesetzt, welche in Abbildung 7.5 gekennzeichnet sind und einen Abstand von 10 mm zueinander aufweisen. Für das betrachtete Probenmodell kann eine Korrektur des Phasenversatzes sowohl durch das Nachahmen einer Linienlast als auch durch den Einsatz des Bleistein-Filters erreicht werden. Die Korrektur der Amplitudenausschläge gelingt mit dem Bleistein-Filter gut für die vorausgehenden ersten Kompressionswellen, jedoch kann eine merklich schlechtere Korrektur für die spätere Überlagerung von Kompressions-, Scher- und Oberflächenwellen beobachtet werden. Die Amplituden können merklich besser mittels der nachgeahmten Linienlast korrigiert werden. Daher wird bei der Gestaltung der Versuchsprobe mitberücksichtigt, dass eine Nachahmung einer Linienlast durch eine Überlagerung von Wellenformen für verschiedene Positionen des Ultraschallwandlers vorzugsweise stattfinden soll.

### 7.3. Messungen und zweidimensionale Inversion

Die gewonnenen Erkenntnisse aus den synthetischen Voruntersuchungen aus Abschnitt 7.2 wurden genutzt um eine adäquate Probe herstellen zu lassen. Mehrere Fotos, welche die Probe aus unterschiedlichen Perspektiven zeigen, sind in der Abbildung 7.7 zusammengestellt. Die Probe wurde mit dem hochfesten Vergussmörtel *C100/115 VI<sup>®</sup>/60HF* der Firma *Pagel* hergestellt, welcher über eine Körnung von 0–6 mm verfügt. Der Einsatz eines Vergussmörtels birgt den Vorteil, dass die Form der Probe, bezüglich des Schlitzes und des Lochs, gut realisiert werden kann. Bei weiteren Voruntersuchungen konnten insbesondere die Wellenformen innerhalb kleiner Proben aus dem hochfesten Vergussmörtel numerisch gut reproduziert werden im Vergleich zu den Wellenformen in Proben aus normalem Vergussmörtel. Daher wurde der genannte Vergussmörtel anschließend auch für die Herstellung der Probe verwendet. Die Nenndichte für den

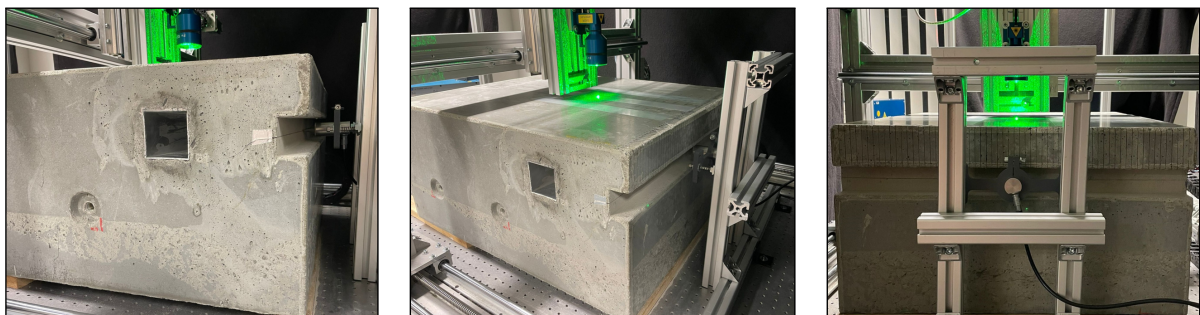


Abbildung 7.7.: Fotos der verwendeten Probe aus verschiedenen Perspektiven.

getrockneten Vergussmörtel beläuft sich auf  $\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$ . Die Dichte der hergestellten Probe wurde über ihr Gewicht nicht kontrolliert. Die Dichte in einem homogenen Medium verhält sich wie ein Skalierungsfaktor der linken Seite der elastischen Wellengleichung (siehe beispielsweise Gleichung 2.40), wenn der Elastizitätstensor in Abhängigkeit von den Wellengeschwindigkeiten, wie in Gleichung 2.20, angegeben wird. Daher ist die genaue Bestimmung der Dichte nicht entscheidend für die spätere Durchführung der Inversion, da mögliche Ungenauigkeiten durch teilweise notwendige Skalierungen der gemessenen Wellenformen ausgeglichen werden. Um das gewünschte Loch in der Probe realisieren zu können, wurde ein Aluminium-Vierkantrohr mit den Abmaßen  $70 \text{ mm} \times 70 \text{ mm}$  und einer Wandstärke von  $2 \text{ mm}$  eingegossen, wobei die Länge des Vierkantrohrs nach dem Guss auf die Breite der Probe gekürzt wurde. Aufgrund der geringen Wandstärke, dem hohen Kontrast zwischen den Eigenschaften der Materialien und der voraussichtlich nicht optimalen Verbindung der Grenzflächen, wird davon ausgegangen, dass sich durch das Belassen des Vierkantrohrs in der Probe das Reflexionsverhalten nur unmerklich verändert und das Vierkantrohr für numerische Approximationen vernachlässigt werden kann. Für ein sicheres Anheben der Probe wurden an zwei gegenüberliegenden Seiten Gewinde für Anker in die Probe eingelassen. Die Gewinde reichen nicht weit in die Probe und sind zudem noch verhältnismäßig weit von dem mittleren Querschnitt der Probe, welcher bei den Messungen und der Inversion im Fokus steht, entfernt. Daher werden die Gewinde bei den folgenden Untersuchungen vernachlässigt. Die Probe wurde auf Holzplatten gelagert, welche keinen großen Effekt auf die Messungen haben sollten, da auch die vom Boden reflektierten Wellen, durch das Kürzen des gemessenen Zeitintervalls, vernachlässigt werden. Um eine sehr glatte Probenoberfläche in dem Bereich herzustellen, an welchem die Messungen durchgeführt werden, wurde die Probe verkehrt herum gegossen. Dennoch wird für die Messungen Aluminium-Klebeband auf die Oberfläche aufgebracht, um die Qualität der Messungen zu erhöhen und um die Oberfläche vor Abnutzungen durch den Laser zu schützen. Dennoch sollte die Güte der Probenoberfläche die Messergebnisse verbessern. Die Abmaße der Probe und des späteren zweidimensionalen Inversionsbereichs werden in Abbildung 7.8 dargestellt. Im Vergleich zu der Probengeometrie, welche für die Voruntersuchungen betrachtet wurde und in Abbildung 7.5 dargestellt wird, wurde vor allem die Tiefe der Probe in  $y$ -Richtung erweitert, um die Zeitspanne zu erhöhen, welche die Kompressionswellen benötigen, um sich zum hinteren Rand der Probe auszubreiten, von diesem reflektiert zu werden und sich zurück zu den Messpunkten auszubreiten.

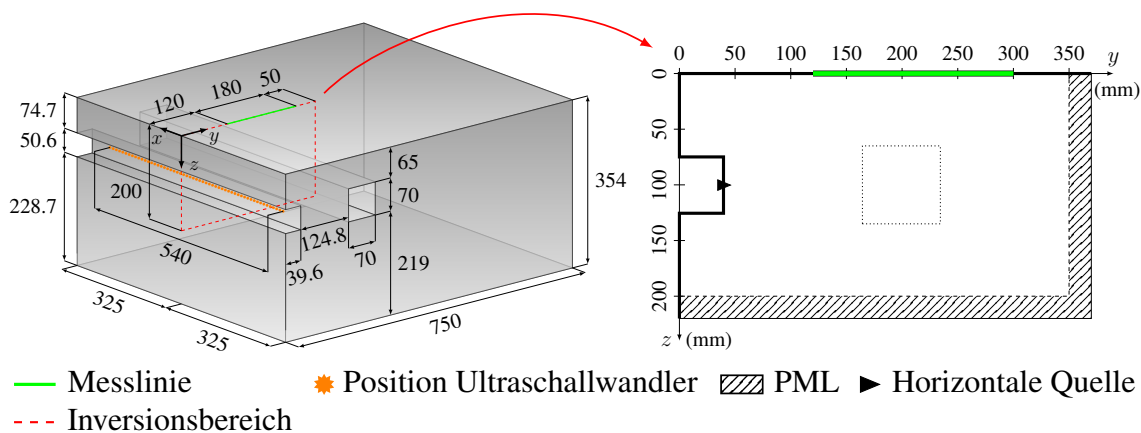
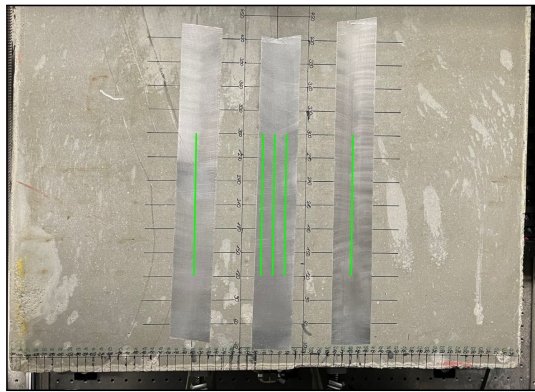


Abbildung 7.8.: Schematische Skizze der verwendeten Probe mit den zugehörigen geometrischen Abmaßen in Millimeter (links). Der zu verwendende Bereich für die zweidimensionale Inversion ist eingezeichnet zusammen mit dem Modell, welches für diese Inversion verwendet wird (rechts).



— Verwendete Linienmessungen

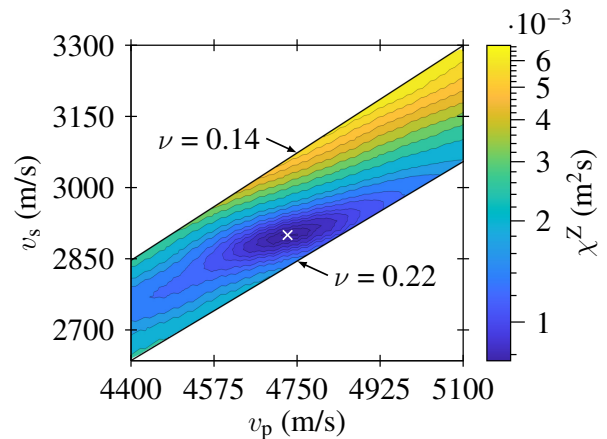


Abbildung 7.9.: Kennzeichnung der verwendeten Messlinien für die Bestimmung der Wellengeschwindigkeiten (links) und die Veränderung des Fehlerfunktional bzw. der Summe der Fehlerquadrate der zeitlich diskreten gemessenen und synthetischen Wellenformen für unterschiedliche Kombinationen von Werten für die Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit (rechts).

Die in der Mitte des Schlitzes gelegenen 55 Positionen des Ultraschallwandlers, welche für die spätere Superposition der Wellenformen verwendet werden, sind in Abbildung 7.8 eingezeichnet und erstrecken sich über einen Abstand von 540 mm mit 10-mm-Abständen untereinander. Die Positionen, welche sehr nahe an den äußeren Seiten gewesen wären, wurden ausgelassen, da die Wellen, welche von diesen Seiten reflektiert würden, kurz nach den direkten Kompressionswellen an den Messpunkten ankommen würden. Der Messbereich wurde auf den Bereich  $y \in [120, 300]$  mm erweitert, um einen größeren Datensatz zur Verfügung zu haben. Bei der Darstellung des zweidimensionalen Inversionsbereichs werden die reflektierenden Oberflächen durch kräftigere Linien gekennzeichnet, während die Bereiche der PMLs schraffiert dargestellt werden. Die Tiefe aller PMLs beträgt 20 mm, welche mit jeweils 4 Elementen diskretisiert wird. Ein Dämpfungsverhalten der absorbierenden Randschichten, welches zu physikalisch sinnvollen Wellenfeldern führt, kann mit dem numerischen Parameter  $c_{\text{PML}} = 3\,000\,000$  erreicht werden. Die Position des Lochs innerhalb der betrachteten Ebene wird mit gepunkteten Linien angedeutet. Das gesamte Inversionsgebiet wird mit 3176 Viereckelementen diskretisiert. Eine automatische Anpassung des Ansatzgrads (siehe Abschnitt 3.4) wird ermöglicht, jedoch genügt für den betrachteten Frequenzbereich ein Ansatzgrad von  $p = 2$ .

Nach der Herstellung der Probe wurde 13 Wochen lang gewartet, bevor die tatsächlichen Messungen durchgeführt wurden, damit die Probe ausreichend trocknen konnte. Jedoch können sich die elastischen Eigenschaften der Probe über einen längeren Zeitraum durch weiteres Austrocknen geringfügig verändern. Daher wurden alle verwendeten Messungen frühzeitig nach den ersten Testmessungen geplant und innerhalb von 13 Tagen durchgeführt. Wie schon in Unterabschnitt 5.6.1 beschrieben wurde, ist für eine erfolgreiche Inversion ein akkurates Ausgangsmodell wichtig. Daher ist eine präzise Identifikation der elastischen Eigenschaften in der Form von der Kompressions- und der Scherwellengeschwindigkeit des Probenmaterials essentiell. Dazu wurde der Ultraschallwandler in der Mitte des Schlitzes ( $x = 0$  mm,  $y = 39.6$  mm,  $z = 100$  mm) platziert, während an der Oberfläche entlang von fünf Linien die Verschiebungen gemessen wurden. Diese Linien werden in Abbildung 7.9 (links) dargestellt. Die äußeren Linien sind symmetrisch zur mittleren Linie ( $x = 0$  mm) angeordnet und besitzen zur mittleren Linie einen Abstand von  $\pm 15$  mm und von  $\pm 100$  mm in  $x$ -Richtung. Der Messbereich  $y \in [120, 300]$  mm wird auch für diese Anwendung verwendet, wobei der Abstand der Mess-

punkte bei allen Messungen 2.5 mm beträgt, wodurch auf jeder Linie 73 Messpunkte verwendet werden. Aufgrund der Variation des Anpressdrucks des Ultraschallwandlers bei einer neuen Anbringung an die Probe, wurde in diesem Schritt nur diese eine Position des Ultraschallwandlers verwendet.

Das Verhältnis zwischen dem Signal und dem zugehörigen Rauschen kann, wie detailliert von Trapp (2022, Abschnitt 4.3.) beschrieben wurde, durch die Berechnung eines Mittelwerts von mehreren einzelnen Messungen für den selben Anregungs- und Messpunkt verbessert werden. Diese vertikale Staplung führt dazu, dass redundante Informationen der einzelnen Messungen hervorgehoben werden und willkürliche Störeffekte an Einfluss verlieren. Des Weiteren wird das spätere Aufbereiten der Daten stark vereinfacht. Für jeden Messpunkt wurde der Mittelwert aus 200 Messungen gebildet, wobei zwischen den zu stapelnden Messungen Pausen von 0.01 s eingehalten wurden, damit die zuvor angeregten Wellen abklingen können. Die Pause zwischen zwei Messpunkten wurde auf 3 s erhöht, um Schwingungen, welche durch das Ausrichten des optischen Laserkopfs über das Positionierungssystem entstehen, zu vermeiden. Pro Messung wurden 8000 Zeitschritte mit einer Abtastrate von 15 MHz aufgenommen, was einem Zeitinkrement von  $6.6667 \cdot 10^{-8}$  s und einem Zeitintervall von  $5.333 \cdot 10^{-4}$  s entspricht. Um den statischen Versatz der Daten, welcher durch das Messsystem entsteht, zu entfernen, wird der Mittelwert der ersten 100 Messwerte der gestapelten Wellenformen eines Messpunkts, für welche die ersten Wellenformen noch nicht aufgezeichnet wurden, von den Ausschlägen des Seismogramms subtrahiert. Nieder- und hochfrequentes Messrauschen wurde mittels eines Butterworth-Bandpassfilters vierter Ordnung entfernt, welches als untere Frequenzgrenze 20 kHz und als obere Frequenzgrenze 150 kHz verwendet.

Die gemessenen Wellenformen, welche entlang der fünf Messlinien aufgenommen wurden, wurden zur Bestimmung der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit der Probe mit einer Datenbank aus synthetischen Wellenformen abgeglichen. Für diese Datenbank wurden für ein synthetisches Modell der Probe, bei welchem das Loch innerhalb der Probe berücksichtigt wurde, die Wellenformen für verschiedene Kombinationen von Werten für die Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit berechnet. Für diese Approximation der Wellenausbreitung im Zeitbereich wurde wieder der SPECFEM3D Cartesian Code verwendet. Dabei wurde für die Kompressionswellengeschwindigkeit der Wertebereich  $v_p \in [4250, 5100]$  m/s sowie für die Scherwellengeschwindigkeit der Wertebereich  $v_s \in [2630, 3290]$  m/s betrachtet, wobei diese Bereiche in 10-m/s-Schritten aufgelöst wurden. Um unrealistische Kombinationen auszuschließen, wurde die Wellenausbreitung nur für Kombinationen berechnet, deren Querkontraktionszahl in dem Bereich  $\nu \in [0.14, 0.22]$  liegt (für die Umrechnung der Wellengeschwindigkeiten zur Querkontraktionszahl  $\nu$  vergleiche Tabelle 2.1). Die identifizierte Quellfunktion aus Abschnitt 7.1, welche in Abbildung 7.4 dargestellt wird, wurde für die numerische Approximation der Wellenformen verwendet. Für jede Kombination der Wellengeschwindigkeiten wurde das Fehlerfunktional der Fehlerquadrate im Zeitbereich  $\chi^2$ , welches in Gleichung 5.9 eingeführt wurde, ausgewertet, wobei nur die ersten  $3 \cdot 10^{-4}$  s der Messungen berücksichtigt wurden. Dabei wurden die synthetischen Wellenformen einer Kombination einheitlich skaliert, indem für die Wellenformen von jedem Messpunkt das Verhältnis der Differenzen des ersten positiven und des ersten negativen Amplitudenausschlags von den gemessenen und numerischen Wellenformen berechnet wurde. Von allen berechneten Verhältnissen wurde der Median als Skalierungsfaktor für alle Messdaten der jeweiligen Kombination verwendet. Des Weiteren wurde auch die Totzeit korrigiert, indem für jeden Messpunkt der Zeitversatz zwischen der ersten Amplitude der synthetischen und gemessenen Wellenformen berechnet und der Median aller Zeitversätze berücksichtigt wurde. Die Werte des Fehlerfunktionals für alle betrachteten Kombinationen von



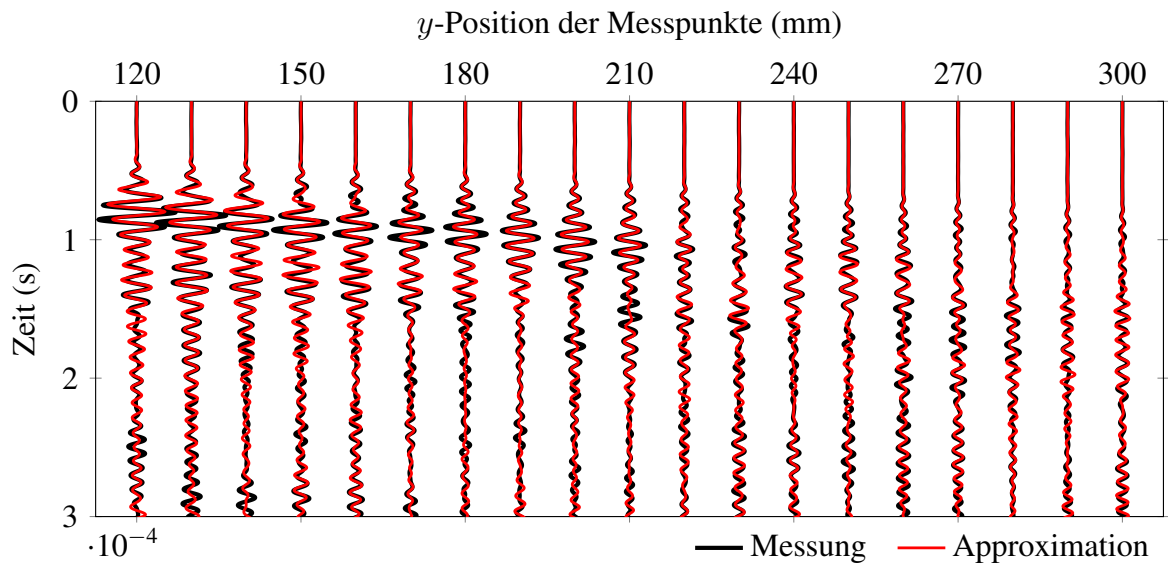


Abbildung 7.10.: Vergleich der gemessenen Wellenformen mit synthetischen Wellenformen, welche mit dem SPEC3D Cartesian Code, unter Berücksichtigung des Lochs in der Probe, berechnet wurden. Dargestellt werden die Wellenformen, welche entlang der mittleren Messlinie bei  $x = 0$  mm an der Oberfläche der Probe gemessen wurden.

Wellengeschwindigkeiten werden in Abbildung 7.9 (rechts) dargestellt. Das Farbschema dieser Abbildung ist logarithmisch aufgetragen. Die Werte des Fehlerfunktional weisen einen stetigen Verlauf und ein eindeutiges Minimum für die Kombination  $v_p = 4730$  m/s und  $v_s = 2900$  m/s auf. Der Vergleich von synthetischen und gemessenen Wellenformen der Messpunkte auf der Linie  $x = 0$  mm in Abbildung 7.10, wobei nur jeder vierte Messpunkt dargestellt wird, lässt für diese Kombination eine sehr gute Übereinstimmung erkennen.

Für die Überführung der Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung in Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung soll, wie schon in Abschnitt 7.2 beschrieben, eine Linienlast durch eine Superposition der Verschiebungen aufgrund von Anregungen des Ultraschallwandlers an verschiedenen Positionen entlang einer Linie nachempfunden werden. Da der Anpressdruck sich für alle Positionen des Ultraschallwandlers unterscheidet, müssen die Wellenformen für jede Position des Ultraschallwandlers skaliert werden, damit diese zu den Wellenformen für die anderen Positionen des Ultraschallwandlers konform sind. Mittels des SPEC3D Cartesian Codes wird dazu die Wellenausbreitung innerhalb der Probe für alle Positionen des Ultraschallwandlers approximiert. Erneut wird für jeden Messpunkt das Verhältnis der Differenzen des ersten positiven und des ersten negativen Amplitudenausschlags von numerischer Approximation und Messung berechnet. Der Median aller Verhältnisse der Messpunkte für eine Position des Ultraschallwandlers wird für die zugehörigen Wellenformen als Skalierungsfaktor verwendet. Somit werden die Messdaten auf die ersten Amplituden der numerisch berechneten Wellenformen skaliert, wodurch gewährleistet wird, dass die gemessenen Wellenformen zueinander konform sind.

Eine Kürzung der Datensätze, um Wellen zu unterdrücken, welche von den Rändern reflektiert wurden, die im Inversionsmodell nicht betrachtet werden, sollte vor der Superposition der Wellenformen stattfinden, damit die betrachteten Zeitintervalle der einzelnen Messpunkte für die Annäherung einer zweidimensionalen Wellenausbreitung länger sein können. Da das Fre-

quenzbereichsmodell, welches für die Inversion verwendet wird, die Verschiebungen für ein unendlich langes Zeitintervall approximiert, werden bessere Ergebnisse erwartet, wenn möglichst alle Wellenformen in den Datensätzen enthalten sind, welche innerhalb des Inversionsgebiets auftreten. Aufgrund des langen Ausschwingverhaltens der Quellfunktion können die genauen Zeitpunkte, ab welchen die reflektierten Wellen auftreten, nicht durch eine visuelle Untersuchung der einzelnen Messdaten bestimmt werden, da sich mehrere Wellenformen überlagern. Zudem wäre dieses Vorgehen bei insgesamt 4015 Datensätzen sehr fehleranfällig und aufwendig. Eine grobe Abschätzung könnte durch eine Laufzeitberechnung der Kompressions- und Scherwellen erreicht werden, jedoch könnte dabei nicht berücksichtigt werden, ob Messpunkte durch das Loch in der Probe von reflektierten Wellen abgeschirmt werden. Durch eine erneute Zuhilfenahme des SPEC-FEM3D Cartesian Codes, können im Zeitbereich die Wellenformen für ein synthetisches Abbild der Probe, für welches zusätzlich PMLs an den zu vernachlässigenden Rändern eingesetzt werden, approximiert werden. Durch einen Vergleich dieser synthetischen Wellenformen mit den Wellenformen, welche schon zuvor für die konforme Skalierung der Wellenformen berechnet wurden, kann über die Einführung eines heuristischen Kriteriums in einer automatisierten Weise bestimmt werden, ab welchem Zeitschritt die Wellenformen einer Messung gekürzt werden sollen. Die einzelnen Messungen werden dabei gekürzt, sobald für einen Zeitschritt der Wert des Fehlerfunktional, welches die Summe der Fehlerquadrate der zugehörigen synthetischen Wellenformen für das Modell mit und dem Modell ohne PMLs beschreibt, größer als das Produkt aus dem Zeitinkrement und dem Quadrat des Betrags der maximalen Amplitude aller Wellenformen für eine Position des Ultraschallwandlers wird. Um bei der Superposition spätere Unstetigkeiten innerhalb der Wellenformen zu vermeiden, werden die betrachteten Zeitintervalle der einzelnen Messungen zusätzlich bis zu den Zeitpunkten gekürzt, ab welchen für die gemessenen Verschiebungen ein Vorzeichenwechsel stattfindet.

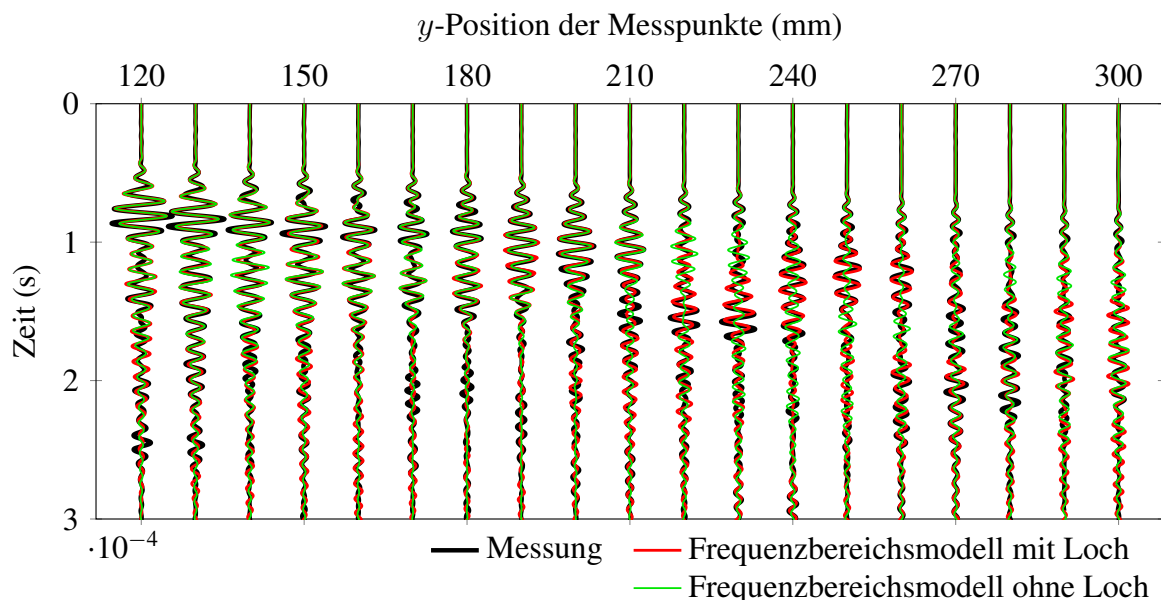


Abbildung 7.11.: Vergleich der Wellenformen, welche durch eine Superposition der gemessenen Wellenformen für verschiedene Positionen des Ultraschallwandlers eine Linienlast bei der Anregung nachahmen, mit synthetischen Wellenformen, welche mit dem zweidimensionalen Frequenzbereichsmodell berechnet wurden. Die synthetischen Wellenformen wurden sowohl mit dem homogenen Modell berechnet, welches bei der Inversion als Ausgangsmodell dient, als auch mit einem Modell, welches das Loch in der Probe berücksichtigt.

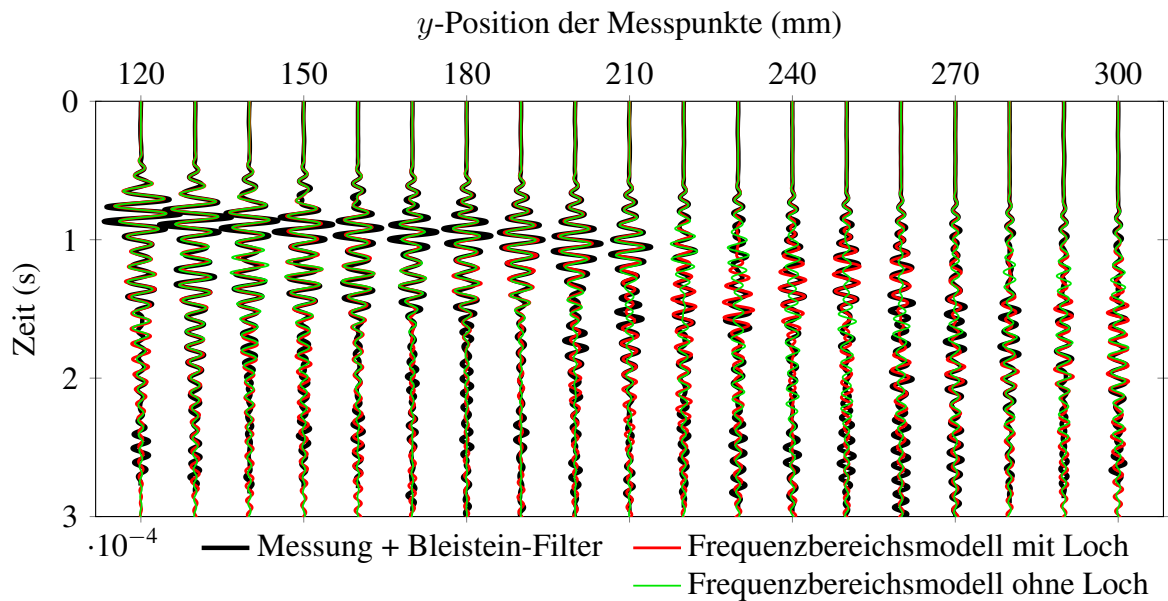


Abbildung 7.12.: Vergleich der gemessenen Wellenformen, welche durch das Bleistein-Filter transformiert wurden, mit synthetischen Wellenformen, welche mit dem zweidimensionalen Frequenzbereichsmodell berechnet wurden. Die synthetischen Wellenformen wurden mit dem homogenen Modell berechnet, welches bei der Inversion als Ausgangsmodell dient, als auch mit einem Modell, bei welchem das Loch in der Probe berücksichtigt wurde.

Die Wellenformen werden vor der Superposition noch mit der Länge des durch die Position des Ultraschallwandlers repräsentierten Linienabschnitts, welche für alle Positionen des Ultraschallwandlers 10 mm beträgt, multipliziert. Nach der Überlagerung der Messdaten unterscheiden sich die betrachteten Zeitintervalle der Wellenformen an unterschiedlichen Messpunkten, da die zugrundeliegenden gemessenen Wellenformen zuvor auf unterschiedliche Zeitintervalle gekürzt wurden.

In Abbildung 7.11 werden die durch die Superposition transformierten Wellenformen mit Wellenformen verglichen, welche mit den zweidimensionalen Frequenzbereichsmodellen des Inversionsgebiets berechnet wurden. Einerseits werden dabei für den Vergleich Wellenformen herangezogen, für welche das Loch in dem zugrundeliegenden Modell berücksichtigt wurde, und andererseits werden Wellenformen betrachtet, welche mit dem für die Inversion vorgesehenen homogenen Ausgangsmodell approximiert wurden. Eine gute Übereinstimmung der gemessenen Wellenformen und der synthetischen Wellenformen, welche mit dem Modell approximiert wurden, welches das Loch in der Probe berücksichtigt, kann beobachtet werden. Des Weiteren ist gut erkennbar, dass die Störung besonders im Bereich  $y \in [210, 260]$  mm zu Veränderungen der gemessenen Amplituden, im Vergleich zu den Wellenformen des Ausgangsmodells, führt.

In Abschnitt 7.2 wurde die Transformation von Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung in Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung durch eine nachgeahmte Linienlast und durch das Bleistein-Filter mittels Wellenformen von einer synthetischen Referenzprobe verglichen. Ein entsprechender Vergleich kann nun auch mit den Messdaten durchgeführt werden. Dazu werden in Abbildung 7.12 die selben synthetischen Wellenformen wie in Abbildung 7.11 mit den Messdaten verglichen, welche sich durch eine Anregung mit dem Ultraschallwandler in der Mitte des Schlitzes ergeben und mittels des Bleistein-Filters aus

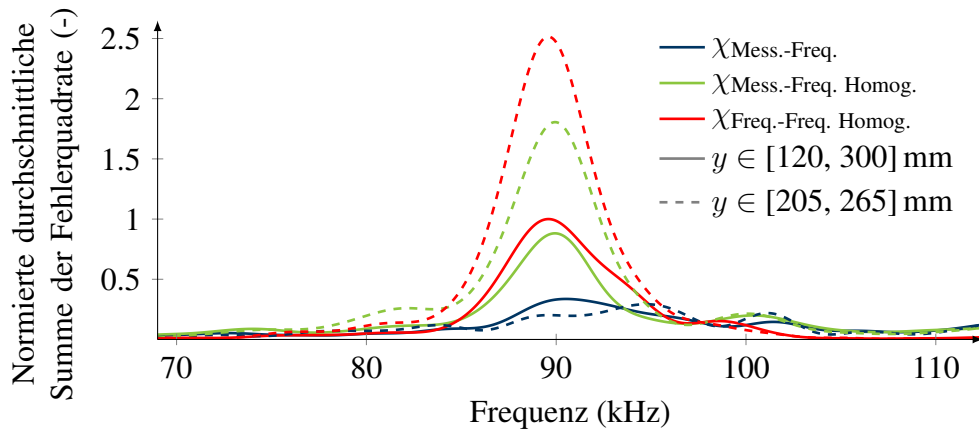


Abbildung 7.13.: Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich zwischen den gemessenen Wellenformen, den synthetischen Wellenformen des zweidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches das Loch enthält, und den synthetischen Wellenformen des zweidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches als homogenes Ausgangsmodell für die Inversion verwendet wird. Die Summen der Fehlerquadrate werden zudem für zwei verschiedene Sätze an Messpunkten dargestellt.

Gleichung 7.7 transformiert wurden. Dabei wurden die bereits skalierten Messdaten eingesetzt. Dass die Wellenformen, welche mittels des Bleistein-Filters transformiert wurden, weniger gut zu den synthetischen Wellenformen passen, ist erkennbar.

Für eine erfolgreiche Inversion ist einerseits eine sorgsame Wahl der Frequenzgruppen wichtig und andererseits kann eine Optimierung der verwendeten Messanordnung nötig sein. Für den betrachteten Datensatz wäre eine Optimierung der Messanordnung nur noch möglich, indem die Anzahl der verwendeten Messpunkte reduziert wird. In Abbildung 7.13 sind über der Frequenz verschiedene Summen der Fehlerquadrate von gemessenen und synthetischen Wellenformen aufgetragen (vergleiche die zugehörigen Wellenformen in Abbildung 7.11). Die Summe der Fehlerquadrate von den gemessenen Wellenformen und den Wellenformen vom synthetischen zweidimensionalen Frequenzbereichsmodell, in welchem das Loch der Probe berücksichtigt wurde, wird durch  $\chi_{\text{Mess.-Freq.}}$ , die Summe der Fehlerquadrate von den gemessenen Wellenformen und denen vom homogenen Ausgangsmodell wird durch  $\chi_{\text{Mess.-Freq. Homog.}}$  und die Summe der Fehlerquadrate von den beiden Sätzen der synthetischen Wellenform wird durch  $\chi_{\text{Freq.-Freq. Homog.}}$  dargestellt. Des Weiteren werden die Verläufe der Summen der Fehlerquadrate verglichen, welche sich ergeben, wenn alle 73 aufgenommenen Messpunkte ( $y \in [120, 300]$  mm) verwendet würden und wenn nur 25 selektierte Messpunkten ( $y \in [205, 265]$  mm) verwendet würden. Um diese Verläufe besser vergleichen zu können, wird die durchschnittliche Summe der Fehlerquadrate pro berücksichtigtem Messpunkt dargestellt. Diese durchschnittlichen Summen der Fehlerquadrate werden auf die maximale durchschnittliche Summe der Fehlerquadrate der beiden synthetischen Wellenformsätze  $\chi_{\text{Freq.-Freq. Homog.}}$ , für welche die Wellenformen von allen Messpunkten ( $y \in [120, 300]$  mm) verwendet wurden, normiert. Das Frequenzspektrum der Summe der Fehlerquadrate ist noch schmaler als das Frequenzspektrum der verwendeten effektiven Quellfunktion, welches in Abbildung 7.4 (rechts) dargestellt wird. Für eine erfolgreiche Inversion wäre eine möglichst kleine Summe der normierten durchschnittlichen Fehlerquadrate der gemessenen und der synthetischen Wellenformen, welche mit dem Modell berechnet wurden, notwendig. Gleichzeitig sollten sich proportional größere Summen der normierten durchschnittlichen Fehlerquadrate der Da-



ten, welche Informationen zur Störung enthalten (gemessene sowie synthetische Daten) und der synthetischen Daten, welche mit dem homogenen Ausgangsmodell approximiert wurden, ergeben. Für Abbildung 7.13 bedeutet dies, dass nur Frequenzen, für welche die Kurven von  $\chi_{\text{Mess.-Freq. Homog.}}$  und  $\chi_{\text{Freq.-Freq. Homog.}}$  merklich über der Kurve von  $\chi_{\text{Mess.-Freq.}}$  verlaufen, für die Inversion in Betracht gezogen werden sollten. Des Weiteren sollten die Messpunkte verwendet werden, für welche im verwendeten Frequenzspektrum die durchschnittlichen Summen der Fehlerquadrate pro Messpunkt von  $\chi_{\text{Mess.-Freq.}}$  sinken und zeitgleich von  $\chi_{\text{Mess.-Freq. Homog.}}$  und  $\chi_{\text{Freq.-Freq. Homog.}}$  steigen. Somit ist der reduzierte Satz an Messpunkten, für welchen nur die Messpunkte im Bereich  $y \in [205, 265]$  mm berücksichtigt wurden, vorzugsweise zu verwenden. Dieser Bereich beginnt kurz hinter der Mitte des Lochs, wodurch keine Wellen aufgenommen werden, die unmittelbar zuvor von der vorderen Seite des Lochs reflektiert wurden. Dadurch ist eine Detektion der vorderen Seite des Lochs voraussichtlich kaum möglich.

Die elf Frequenzgruppen, welche für die Inversion ausgewählt wurden, sind in Gleichung 7.8 zusammengestellt und decken ein Frequenzspektrum von 84.4 kHz bis 90.7 kHz ab:

$$G \approx \{ \{84.4, 85.1\}, \{84.4, 85.9\}, \{85.1, 86.7\}, \{85.9, 87.5\}, \\ \{86.7, 88.3\}, \{87.5, 89.1\}, \{88.3, 89.9\}, \{89.1, 90.7\}, \\ \{87.5, 89.1\}, \{85.9, 87.5\}, \{84.4, 85.9\} \} \text{ kHz.} \quad (7.8)$$

In jeder Frequenzgruppe werden zwei Frequenzen verwendet, um sicherzustellen, dass Messfehler von einer einzelnen Frequenz nicht zu dominant werden können. Während der ersten acht Frequenzgruppen werden die Frequenzen, dem Multi-Skalen-Ansatz folgend (vergleiche Unterabschnitt 5.6.1), erhöht. Bei den letzten drei Frequenzgruppen werden die Frequenzen stetig reduziert, um wieder Informationen von etwas längeren Wellenlängen in die Inversion einfließen zu lassen. Um die Wahrscheinlichkeit zu reduzieren, dass der Inversionsprozess in einem lokalen Minimum hängen bleibt, werden nur bis zu sechs Iterationen pro Frequenzgruppe durchgeführt. Die L-BFGS-Methode wird für die Minimierung verwendet. Eine Vorkonditionierung des Gradienten wird durchgeführt, bei welcher die Koeffizienten des Gradienten gleich Null gesetzt werden, deren Diskretisierungspunkte einen Abstand von 40 mm zu der horizontalen Quelle und den Messpunkten oder einen Abstand von 30 mm zu den freien Oberflächen des Inversionsmodells unterschreiten. Die Koeffizienten des Gradienten, deren Diskretisierungspunkte einen Abstand von 10 mm zu den Bereichen unterschreiten, in welchen der Gradient schon konditioniert wird, werden gleichmäßig über diesen Abstand von Null auf ihre eigentlichen Werte hoch skaliert, damit räumlich sprunghafte Änderungen des Gradienten möglichst vermieden werden. Für die Detektion eines Hohlraums bietet sich die Inversion der Wellenformen nach der Dichte  $\rho$  an, deren Änderung sich nach Gleichung 3.26 auch auf die Massenmatrix  $M$  und nicht nur auf die Steifigkeitsmatrix  $K$  aus Gleichung 3.27 auswirkt, wie es bei einer Änderung der Wellengeschwindigkeiten der Fall wäre. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Elastizitätstensor wie in Gleichung 2.20 durch die Wellengeschwindigkeiten beschrieben wird.

Die räumliche Änderung der Dichte, welche durch die Inversion der gemessenen Wellenformen rekonstruiert werden konnte, wird in Abbildung 7.14 illustriert. Im Bereich der oberen Seite des Lochs tritt ein rapider Abfall gefolgt von einem rapiden Anstieg sowie einem erneuten Abfall der Dichte auf. Der entstehende Kontrast der Dichte führt dazu, dass der obere Bereich ein ähnliches Reflexionsverhalten wie eine freie Oberfläche aufweist, während der untere Bereich des Kontrastes ein Reflexionsverhalten erzeugt, welches dafür sorgt, dass die Messpunkte von Wellen, welche sich unterhalb des Kontrastes ausbreiten, abgeschirmt werden, wie es bei einem vorhandenen Loch auch der Fall wäre. Ansonsten sind nur künstliche Fluktuationen der rekonstruierten Dichte als Fragmente des Wellenfelds und des adjungierten Wellenfelds erkennbar,

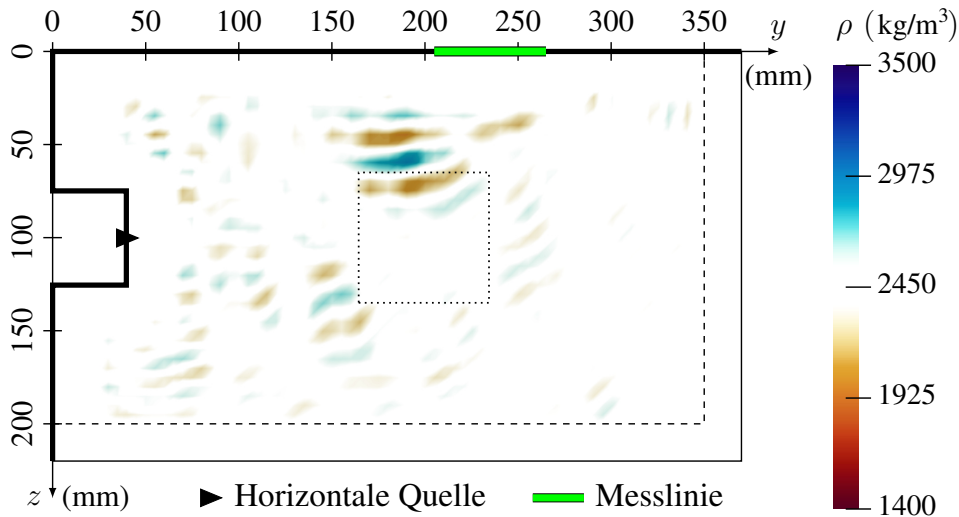


Abbildung 7.14.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung rekonstruiert wurde. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.

welche für eine Vorhersage von Störungen vernachlässigt werden sollten. Auffällig ist jedoch, dass keine zusätzlichen Fluktuationen der rekonstruierten Dichte innerhalb des Bereichs auftreten, in welchem sich das Loch befindet. Aufgrund der Uneindeutigkeit des inversen Problems, wird durch das Verfahren nur eins von mehreren möglichen Bodenmodellen rekonstruiert, welche die aufgenommenen Wellenformen beschreiben können.

Um eine bessere Beurteilung über die Güte des Inversionsergebnisses, welches mit den gemessenen Daten erzielt wurde, treffen zu können, wurde mit den selben Inversionsparametern eine Inversion durchgeführt, bei welcher synthetische Referenzdaten verwendet wurden, für deren Generierung das Loch berücksichtigen wurde. Die räumliche Änderung der rekonstruierten Dichte wird in Abbildung 7.15 dargestellt. Die Änderungen der Dichte an der oberen Seite des Lochs sind etwas stärker ausgeprägt als bei der Inversion mit den Messdaten. Zudem fällt auf, dass die Fluktuationen der rekonstruierten Dichte an der unteren linken Ecke des Lochs etwas markanter sind, während unter und hinter dem Loch diese Fluktuationen deutlich abgenommen haben. Erneut treten innerhalb des Bereichs, in welchem sich das Loch befindet, keine zusätzlichen künstlichen Fluktuationen der rekonstruierten Dichte auf.

Aufgrund der verwendeten Positionen der Quelle und der Messpunkte sowie der Verwendung eines Lochs als Störung, können die anderen Seiten der Störung nicht detektiert werden, da keine Wellen aufgenommen werden, welche zuvor durch diese Seiten reflektiert wurden. Die Messung horizontaler Verschiebungen an der Probenoberfläche und deren Verwendung für die Inversion hätten voraussichtlich das Inversionsergebnis verbessert.

Beim Vergleich der Änderung der Werte des Fehlerfunktional über die einzelnen Iterationen in Abbildung 7.16 fällt einerseits auf, dass die Werte des Fehlerfunktional bei der Inversion mit synthetischen Wellenformen am Ende der Frequenzgruppen erwartungsgemäß immer niedriger als bei der Inversion mit den Messdaten sind, wobei die Werte am Ende der zweiten Frequenzgruppe eine Ausnahme darstellen. Dabei sind die Kurven auf den Wert des Fehlerfunktional zu Beginn der ersten Frequenzgruppe jeweils normiert. Andererseits fällt auch auf, dass obwohl die Amplitude der Quellfunktion für die mittleren Frequenzgruppen steigt und obwohl ein pro-

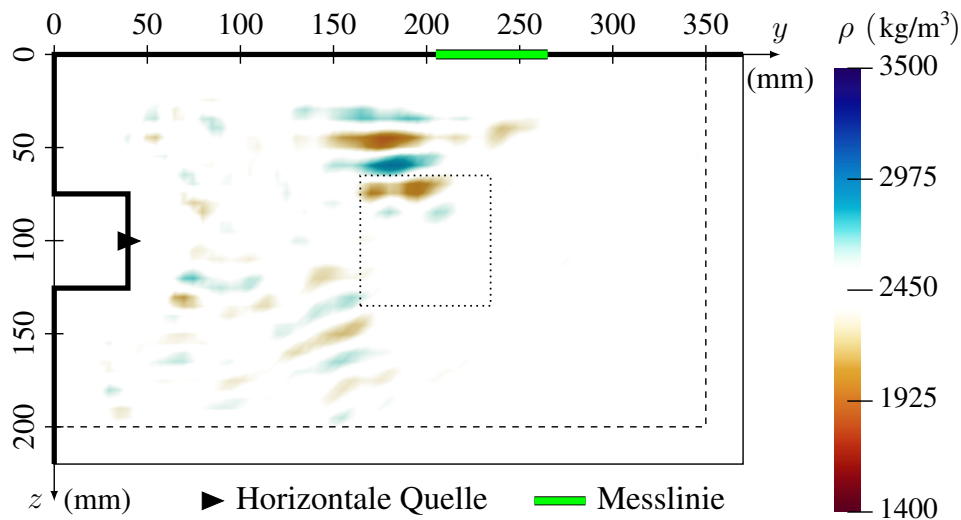


Abbildung 7.15.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion von synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung rekonstruiert wurde. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.

portionales Anwachsen der Werte des Fehlerfunktional für kleinere Wellenlängen zu erwarten wäre, die Werte des Fehlerfunktional sich zu Beginn der Frequenzgruppen verhältnismäßig wenig verändern, was daran liegt, dass das betrachtete Frequenzspektrum vergleichsweise schmal ist.

Für die Inversion mit den synthetischen Referenzdaten wäre natürlich auch eine andere Wahl der Inversionsparameter möglich gewesen, wodurch bessere Inversionsergebnisse erzielt worden wären. Die Anzahl an Iterationen hätte einerseits deutlich erhöht werden und andererseits hätten sowohl niedrigere als auch höhere Frequenzen eingesetzt werden können, da keine weiteren Fehler den Informationsgehalt der Wellenformen überlagern würden. Des Weiteren würden bei synthetischen Referenzdaten zusätzliche Messpunkte die Inversionsergebnisse verbessern.

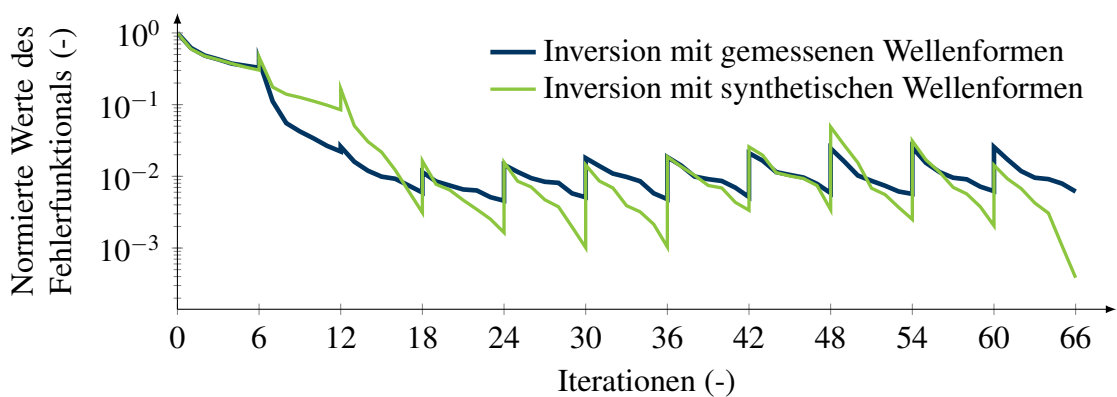


Abbildung 7.16.: Änderung der normierten Werte des Fehlerfunktional während der Inversion von gemessenen und synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung.

## 7.4. Zweidimensionale Inversion unter Berücksichtigung von Materialdämpfung

Für die Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Probe und für die Durchführung der Inversion mit einem zweidimensionalen Modell in Abschnitt 7.3 wurden trotz der Vernachlässigung von anelastischen Effekten aussagekräftige Ergebnisse erzielt. Da voraussichtlich Dämpfungseffekte im verwendeten Material auftreten, ist eine Untersuchung notwendig, ob durch eine Berücksichtigung dieser Effekte die Ergebnisse der Inversion verbessert werden können.

Im ersten Schritt werden die Eigenschaften der Probe erneut über einen Abgleich der gemessenen Wellenformen mit synthetischen Wellenformen, welche mit dem SPEC-FEM3D Cartesian Code generiert wurden, identifiziert. Wie auch schon in Abschnitt 7.3 werden die Datensätze, welche auf der Oberseite der Probe entlang von den fünf Linien, welche auf der linken Seite von Abbildung 7.9 illustriert werden, gemessen wurden, für die Identifizierung verwendet. Dabei werden für die Approximation der Wellenformen, welche wieder in einer Datenbank gesammelt werden, neben der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeit auch die zugehörigen Qualitätsfaktoren  $Q_p$  und  $Q_s$  variiert. Da die Werte der Wellengeschwindigkeiten voraussichtlich in einem ähnlichen Bereich liegen werden, wie bei einer Vernachlässigung der intrinsischen Dämpfung, werden mit  $v_p \in [4630, 4830]$  m/s und  $v_s \in [2860, 2940]$  m/s, welche in 20-m/s-Schritten variiert werden, nur vergleichsweise kleine Wertebereiche untersucht. Für eine erste grobe Abschätzung der Qualitätsfaktoren werden die Bereiche  $Q_p \in [25, 250]$  und  $Q_s \in [25, 250]$  nur in 25er-Schritten variiert. Bei der Verwendung des SPEC-FEM3D Cartesian Codes müssen statt  $Q_p$  und  $Q_s$  die Qualitätsfaktoren für den Kompressionsmodul  $K$  und für den Schermodul  $\mu$  angegeben werden. Entsprechend müssen die ausgewählten Qualitätsfaktoren der Wellengeschwindigkeiten umgerechnet werden:

$$Q_K^{-1} = \frac{Q_p^{-1} - \frac{4}{3} \left( \frac{v_s}{v_p} \right)^2 Q_s^{-1}}{1 - \frac{4}{3} \left( \frac{v_s}{v_p} \right)^2}, \quad Q_\mu = Q_s. \quad (7.9)$$

Dabei ist zu beachten, dass sich die Umrechnungsformel für  $Q_K$  für ein ebenes und ein räumliches Randwertproblem verändert, wie es auch beim Kompressionsmodul  $K$  der Fall ist. In Gleichung 7.9 wird angegeben, wie der Qualitätsfaktor  $Q_K$  für den räumlichen Fall berechnet wird, was sich aus den Betrachtungen von Dahlen u. Jeroen (1998, Abschnitt 9.7) herleiten lässt. Als Referenzkreisfrequenz  $\omega_r$  bzw. als Referenzfrequenz  $f_r$  für die Qualitätsfaktoren wird mit 100 kHz die Nennfrequenz des verwendeten Toneburst-Signals eingesetzt. Die Skalierung der synthetischen Wellenformen anhand der gemessenen Wellenformen sowie die Eliminierung des Zeitversatzes werden wie in Abschnitt 7.3 durchgeführt und erneut werden nur die ersten  $3 \cdot 10^{-4}$  s der Messungen für die Berechnung der Werte des Fehlerfunktionals  $\chi^Z$  berücksichtigt. Die niedrigste Summe der Fehlerquadrate ergibt sich für die Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4730$  m/s und  $v_s = 2900$  m/s, welche auch in Abschnitt 7.3 identifiziert wurden, in Kombination mit den Qualitätsfaktoren  $Q_p = 50$  und  $Q_s = 50$ . Für die Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4730$  m/s und  $v_s = 2900$  m/s wird in Abbildung 7.17 (links) dargestellt, wie sich die Werte des Fehlerfunktionals  $\chi^Z$  für alle Kombinationen der Qualitätsfaktoren verändern. Da die Änderung der Summe der Fehlerquadrate im Bereich des Minimums sehr hoch ist, wird eine weitere Datenbank mit synthetischen Wellenformen erstellt, um diesen Bereich feiner auflösen und die Qualitätsfaktoren genauer bestimmen zu können. Für die neue Datenbank wurden die Qualitätsfaktoren der synthetischen Modelle innerhalb der Wertebereiche  $Q_p \in [30, 70]$  und  $Q_s \in [30, 70]$

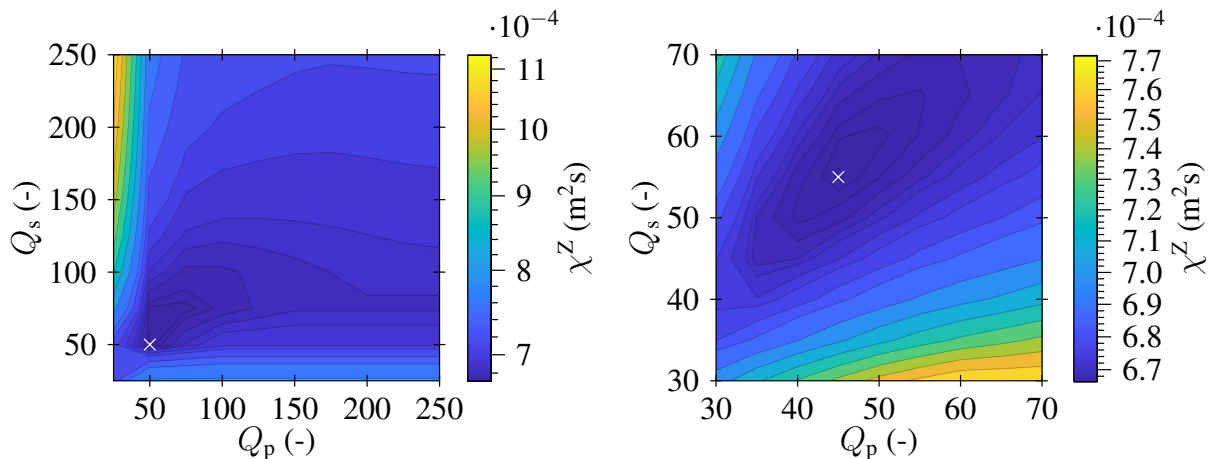


Abbildung 7.17.: Grob (links) und fein (rechts) aufgelöste Veränderung der Summe der Fehlerquadrate der zeitlich diskreten gemessenen und synthetischen Wellenformen für unterschiedliche Kombinationen der Qualitätsfaktoren.

in 5er-Schritten variiert, während für die Wellengeschwindigkeiten mit  $v_p \in [4710, 4750]$  m/s und  $v_s \in [2880, 2920]$  m/s sowie einem Inkrement von 20 m/s nur kleinere Wertebereiche betrachtet wurden. Der niedrigste Wert des Fehlerfunktional ergibt sich erneut für die Wellengeschwindigkeiten  $v_p = 4730$  m/s und  $v_s = 2900$  m/s. Die zugehörige Änderung der Summe der Fehlerquadrate für die kleinschrittige Veränderung der Qualitätsfaktoren wird in Abbildung 7.17 (rechts) dargestellt. Das Minimum des Fehlerfunktional kann den Qualitätsfaktoren  $Q_p = 45$  und  $Q_s = 55$  zugeordnet werden. Die Summe der Fehlerquadrate zwischen den gemessenen und synthetischen Wellenformen wurde durch die Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung um ungefähr 13.15% reduziert. Die berechneten Werte des Fehlerfunktional sind auch mit den Werten aus Abschnitt 7.3 vergleichbar, da für die Bestimmung der Eigenschaften der Probe die synthetischen Wellenformen durch die gemessenen Daten skaliert wurden.

Die gemessenen Wellenformen wurden für jede Position des Ultraschallwandlers wieder durch synthetische Wellenformen skaliert, welche mit dem SPECSEM3D Cartesian Code unter Berücksichtigung der identifizierten Qualitätsfaktoren erzeugt wurden, damit die gemessenen Wellenformen trotz eines unterschiedlichen Anpressdrucks des Ultraschallwandlers zueinander konform sind (vergleiche Seite 189). Durch einen Abgleich der synthetischen Wellenformen, welche mittels eines Modells der Probe ohne PMLs und eines Modells mit zusätzlichen PMLs an den zu vernachlässigenden Seiten erzeugt wurden, werden wieder die Messdaten gekürzt. Dabei wird ein leicht abgewandeltes heuristisches Kriterium verwendet, um den Zeitpunkt zu bestimmen bis zu welchem eine Messung gekürzt werden soll. Die einzelnen Messungen werden gekürzt sobald die Summe der Fehlerquadrate der zugehörigen synthetischen Wellenformen für das Modell mit und dem ohne PMLs größer wird als ein Viertel des Produkts aus dem Zeitinkrement und dem Quadrat des Betrags der maximalen Amplitude aller Wellenformen für eine Position des Ultraschallwandlers. Die Messungen werden zusätzlich bis zum letzten Zeitpunkt gekürzt für welchen ein Vorzeichenwechsel bei den Verschiebungen auftritt, um Unstetigkeiten nach der Superposition der Wellenformen zu vermeiden. Die Wellenformen werden mit der Länge multipliziert, durch welche der Linienabschnitt des Ultraschallwandler repräsentiert wird, welche jeweils 10 mm beträgt. Anschließend werden die Messungen für alle Positionen des Ultraschallwandlers überlagert. In Abbildung 7.18 werden diese Wellenformen mit den Wellenformen abgeglichen, welche mit dem zweidimensionalen Frequenzbereichsmodell, einerseits unter Berücksichtigung des Lochs und andererseits mit dem homogenen Modell, welches

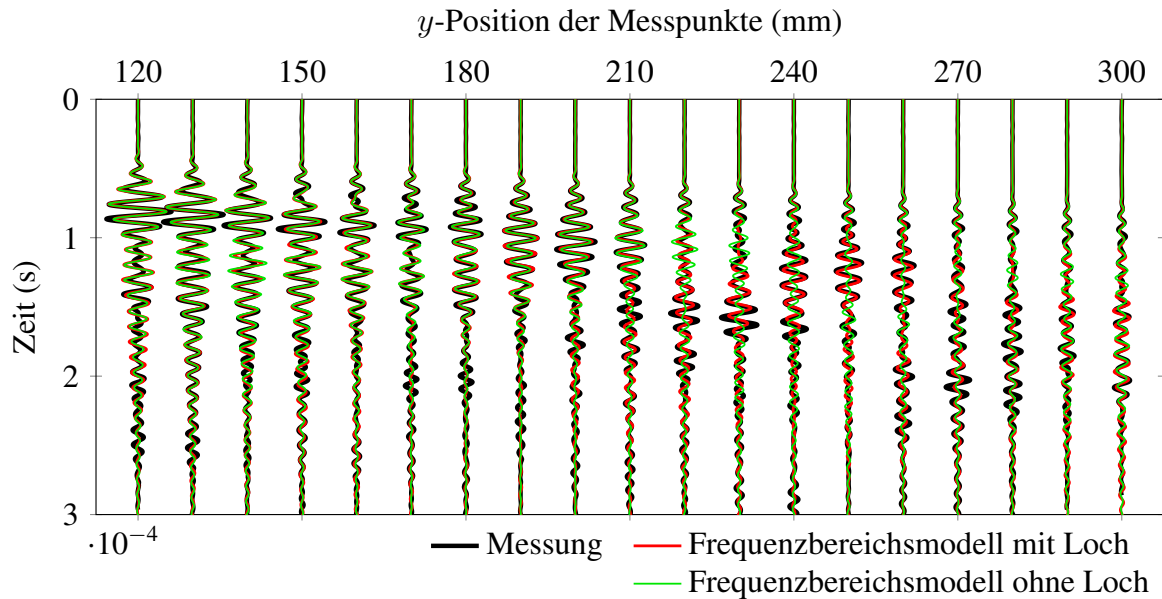


Abbildung 7.18.: Vergleich der Wellenformen, welche durch eine Superposition der gemessenen Wellenformen für verschiedene Positionen des Ultraschallwandlers eine Linienlast bei der Anregung nachahmen, mit synthetischen Wellenformen, welche mit dem zweidimensionalen Frequenzbereichsmodell unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung berechnet wurden. Die synthetischen Wellenformen wurden sowohl mit dem homogenen Modell berechnet, welches bei der Inversion als Ausgangsmodell dient, als auch mit einem Modell, bei welchem das Loch in der Probe berücksichtigt wurde.

als Ausgangsmodell für die Inversion dient, erzeugt wurden. Eine bessere Übereinstimmung der Wellenformen als in Abbildung 7.11 kann beobachtet werden.

Zur Überprüfung, ob die in Abschnitt 7.3 ausgewählten Inversionsparameter auch für eine Inversion unter Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung angemessen sind, werden erneut die normierten durchschnittlichen Summen der Fehlerquadrate im Frequenzbereich in Abbildung 7.19 wie schon in Abbildung 7.13 für verschiedene Messbereiche verglichen. Da die Verläufe und die Änderungen der Summen der Fehlerquadrate für die beiden unterschiedlichen Messbereiche vergleichbar sind, werden die selben Inversionsparameter eingesetzt. Die Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung, welche durch die Superposition der gemessenen Verschiebungen berechnet wurden, werden erneut nach der Dichte  $\rho$  invertiert.

Das Ergebnis der Inversion der Messdaten, bei welcher ein viskoelastisches zweidimensionales Frequenzbereichsmodell verwendet wurde, wird in Abbildung 7.20 dargestellt. Zum Vergleich wurde wieder mit den selben Inversionsparametern eine Inversion mit synthetischen Wellenformen durchgeführt, welche auch unter der Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung erzeugt wurden. In Abbildung 7.21 wird das zugehörige Inversionsergebnis dargestellt. Für die Darstellung der Ergebnisse wird die selbe Farbskala wie bei den Ergebnissen in Abbildung 7.14 und Abbildung 7.15 verwendet, damit die Ergebnisse besser verglichen werden können. Die rapiden Anstiege und Abfälle der rekonstruierten Dichte auf der Höhe der oberen Kante des Lochs verlaufen ähnlich wie bei der Inversion ohne die Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung, aber sind merklich stärker ausgeprägt. Somit ist eine noch eindeutige Detektion der oberen Seite des Lochs möglich, wobei die vorherigen Ergebnisse ohne die Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung schon ausreichend waren. Die Intensität der künstlichen Fluktuationen

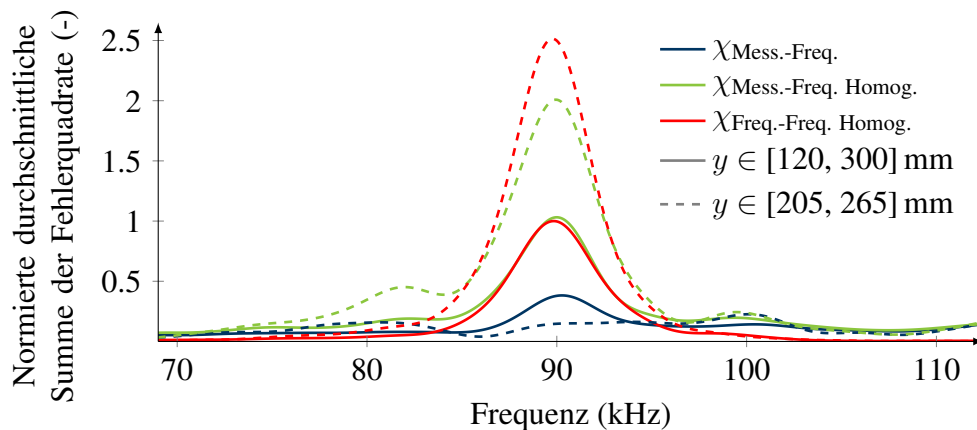


Abbildung 7.19.: Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich zwischen den gemessenen Wellenformen, den synthetischen Wellenformen des zweidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches das Loch enthält, und den synthetischen Wellenformen des zweidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches als homogenes Ausgangsmodell für die Inversion verwendet wird. Beide synthetischen Modelle approximieren intrinsische Dämpfung. Die Summen der Fehlerquadrate werden zudem für zwei verschiedene Sätze an Messpunkten dargestellt.

im Inversionsbereich nimmt hingegen proportional zu. Durch eine proportionale Anpassung der Farbskala an die verstärkten Änderungen der rekonstruierten Dichte auf der Höhe der oberen Seite des Lochs, kann dieser Effekt jedoch für die visuelle Interpretation revidiert werden. Auch bei diesen Ergebnissen fällt auf, dass bei der Inversion der synthetischen Wellenformen weniger künstliche Fluktuationen der rekonstruierten Dichte entstehen und dass die Fluktuationen innerhalb, unter oder hinter dem Loch gar nicht zu sehen sind.

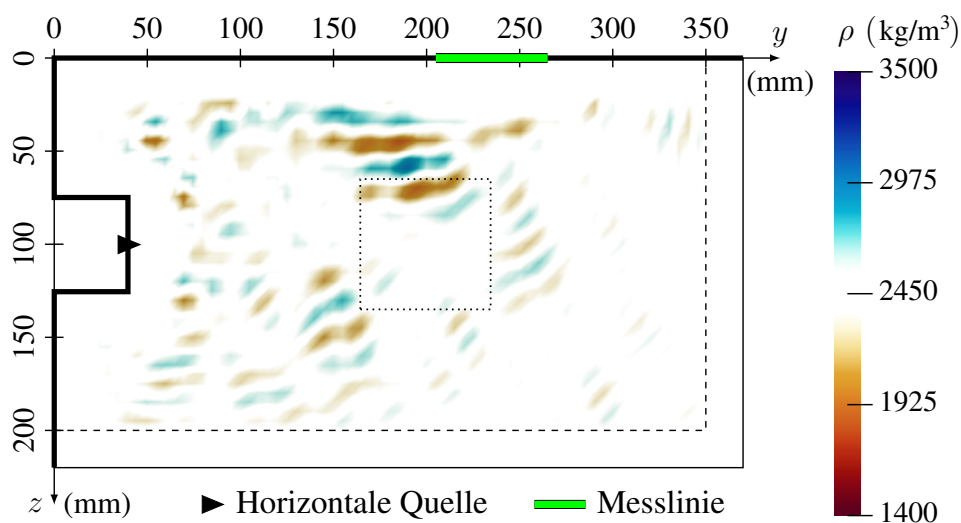


Abbildung 7.20.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung rekonstruiert wurde. Bei der Inversion wurde intrinsische Dämpfung berücksichtigt. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.



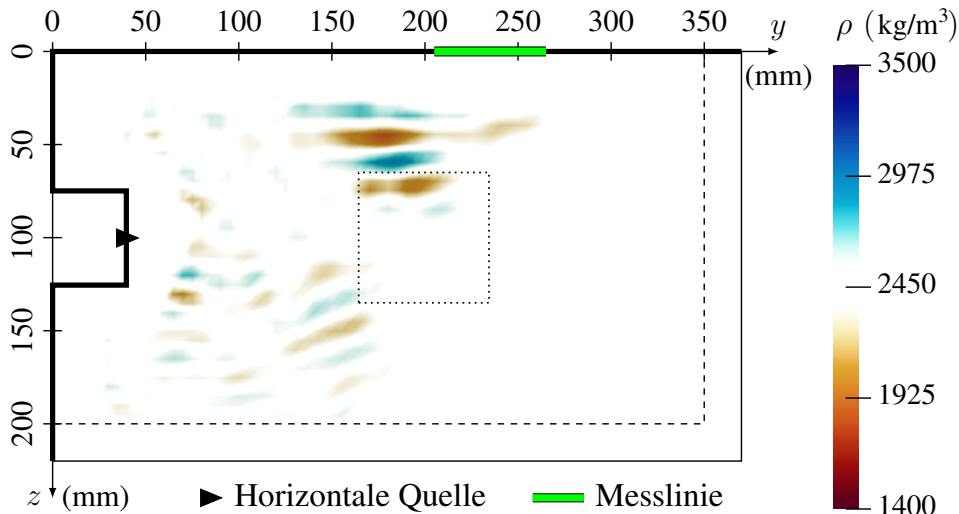


Abbildung 7.21.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion von synthetischen Wellenformen für eine zweidimensionale Wellenausbreitung rekonstruiert wurde. Bei der Inversion wurde intrinsische Dämpfung berücksichtigt. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.

Der Informationsgehalt der Inversionsergebnisse, für welche intrinsische Dämpfung berücksichtigt wurde, ist unwesentlich höher als der Informationsgehalt der Ergebnisse, für welche diese Dämpfungseffekte nicht berücksichtigt wurden. Da die Messpunkte räumlich sehr nah beieinander liegen und nur kurze Zeitintervalle betrachtet werden, wird der Einfluss der intrinsischen Dämpfung in Abschnitt 7.3 durch die stattfindende Skalierung der Wellenformen größtenteils kompensiert. Daher ist die Berücksichtigung von intrinsischen Dämpfungseffekten nur bei der Verwendung von langen Zeitintervallen, bei sehr stark dämpfenden Eigenschaften oder bei größeren Entfernungen zwischen den Messpunkten notwendig, da für die genannten Fälle die Aufbereitung der Wellenformen über eine Skalierung nicht genügen könnte, um intrinsische Dämpfungseffekte auszugleichen.

## 7.5. Dreidimensionale Inversion

Die in Abschnitt 7.3 und Abschnitt 7.4 gewonnenen Erkenntnisse können genutzt werden, um eine Inversion der Messdaten mit einem dreidimensionalen Inversionsmodell durchzuführen. Dazu wird, wie in Abbildung 7.22 dargestellt, ein Inversionsmodell gewählt, welches in  $x$ -Richtung nur eine Breite von 80 mm besitzt. Die Höhe des verwendeten Modells wird auf 165 mm, im Vergleich zu den anderen Inversionsmodellen, reduziert, um den Berechnungsaufwand des dreidimensionalen Modells zu reduzieren. Das Modell verfügt wieder über eine Länge von 350 mm in  $y$ -Richtung. Die zusätzlich eingesetzten C-PMLs haben eine Stärke von ungefähr 16.6 mm, welche durch 3 Elemente diskretisiert wird. Der numerische Parameter für die C-PMLs beträgt, wie für die zweidimensionalen Modellen,  $c_{\text{pml}} = 3\,000\,000$ . Das komplette Inversionsmodell wird durch 43 722 Hexaederelemente diskretisiert. Für den Ansatzgrad der hierarchischen Ansatzfunktionen wird  $p = 2$  gewählt, wobei die gewählte Anzahl an Elementen in Kombination mit den Frequenzen, welche für die Inversion eingesetzt werden, ausreicht, damit der gewählte Ansatzgrad auch Gleichung 3.77 genügt. Die Wellengeschwindigkeiten der



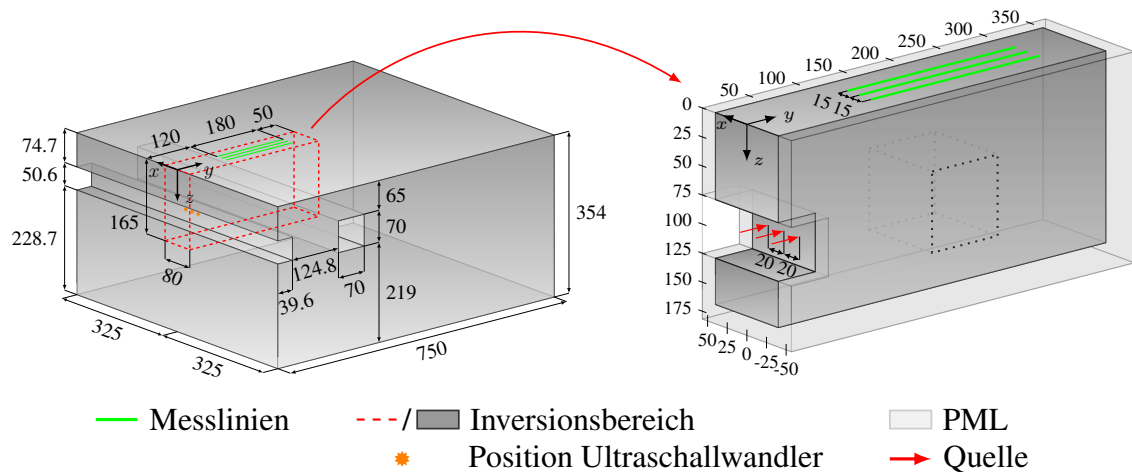


Abbildung 7.22.: Schematische Skizze der verwendeten Probe mit den zugehörigen geometrischen Abmaßen in Millimetern (links). Der zu verwendende Bereich für die dreidimensionale Inversion ist eingezeichnet zusammen mit dem Modell, welches für diese Inversion verwendet wird (rechts).

Probe, welche in Abschnitt 7.3 identifiziert wurden, können für das dreidimensionale Inversionsmodell übernommen werden. Für die Inversion sollen die Messungen verwendet werden, welche auf der Oberfläche der Probe  $z = 0$  mm entlang von drei Linien bei  $x = 0$  mm und  $x = \pm 15$  mm aufgenommen wurden. Die Messdaten, welche durch die Anregungen mit dem Ultraschallwandler an den drei Positionen  $x = 0$  mm und  $x = \pm 20$  mm generiert wurden, werden für die Inversion verwendet. Die aufgenommenen Datensätze für die unterschiedlichen Positionen des Ultraschallwandlers werden auf die ersten Amplituden der synthetischen Wellenformen skaliert (siehe Abschnitt 7.3). Da die Messbereiche räumlich nah beieinander liegen, ist eine Berücksichtigung von Dämpfungseffekten, wie in Abschnitt 7.4 festgestellt wurde, aufgrund der Skalierung nicht notwendig. Um Wellenformen in den Messdaten möglichst zu vermeiden, welche zu Wellen gehören, die zuvor von den nicht betrachteten Rändern der Probe reflektiert wurden, werden die synthetischen Wellenformen von einem Modell der Probe mit PMLs und von einem Modell ohne PMLs verglichen, welche beide mit dem SPECFEM3D Cartesian Code erzeugt und auch schon in Abschnitt 7.3 für den selben Zweck verwendet wurden. Über das selbe heuristische Kriterium, welches auch schon in Abschnitt 7.3 verwendet wurde, werden die Messdaten gekürzt.

Eine Überprüfung, ob die gewählten Inversionsparameter auch für die Inversion mit einem dreidimensionalen Modell geeignet sind, wird durch den Vergleich der normierten Summen der Fehlerquadrate zwischen den Messdaten und den synthetischen Wellenformen im Frequenzbereich in Abbildung 7.23 durchgeführt. Die synthetischen Wellenformen werden dabei mit dem im Frequenzbereich operierenden dreidimensionalen Inversionsmodell generiert, wobei einerseits das homogene Ausgangsmodell eingesetzt und andererseits ein weiteres Modell benutzt wird, welches das zu detektierende Loch enthält. Da die Verläufe der normierten durchschnittlichen Summen der Fehlerquadrate erneut vergleichbar mit den Verläufen aus Abbildung 7.13 sind, werden die selben Inversionsparameter eingesetzt.

Das Ergebnis der Inversion wird in Abbildung 7.24 dargestellt. Besonders ausgeprägte Änderungen der Dichte sind wieder an der oberen Seite des Lochs erkennbar. Für die Darstellung des dreidimensionalen Ergebnisses wird erneut eine transparente Darstellung der Farben verwendet.

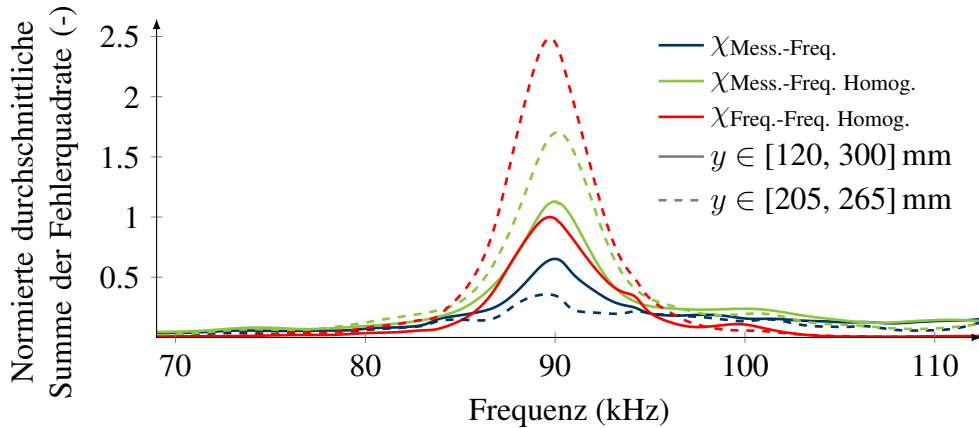


Abbildung 7.23.: Vergleich der normierten durchschnittlichen Summe der Fehlerquadrate im Frequenzbereich zwischen den gemessenen Wellenformen, den synthetischen Wellenformen des dreidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches das Loch enthält, und den synthetischen Wellenformen des dreidimensionalen Frequenzbereichsmodells, welches als homogenes Ausgangsmodell für die Inversion verwendet wird. Die Summen der Fehlerquadrate werden zudem für zwei verschiedene Sätze an Messpunkten dargestellt.

Dadurch kann das Ergebnis, je nach Perspektive, nur grob interpretiert werden. Die Darstellung des Querschnitt von der rekonstruierten Änderung der Dichte bei  $x = 0$  mm in Abbildung 7.25 ermöglicht eine bessere Einordnung des Ergebnisses sowie einen Vergleich mit den Ergebnissen, welche mit den zweidimensionalen Inversionsmodellen erzielt werden konnten. Durch den Einsatz der selben Farbskala, können die Ergebnisse direkt verglichen werden. Im Vergleich zu dem Ergebnis aus Abbildung 7.14 sind die Änderungen der Dichte an der oberen Seite des

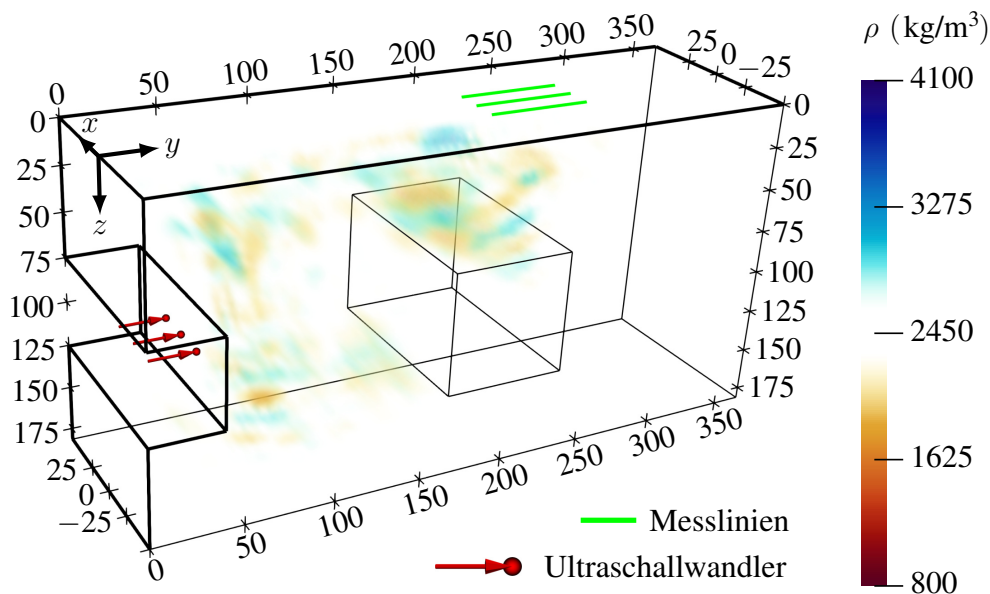


Abbildung 7.24.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung rekonstruiert wurde. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch dünne Linien angedeutet.

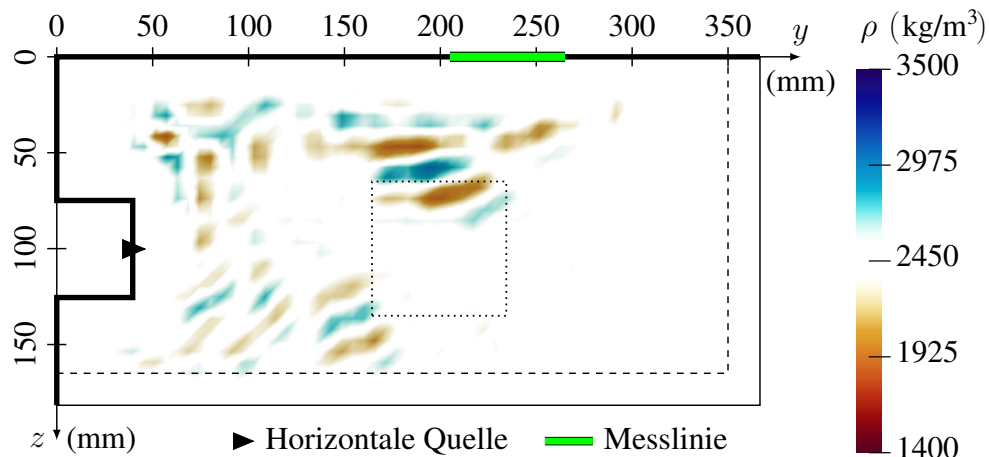


Abbildung 7.25.: Querschnitt bei  $x = 0$  mm der rekonstruierten räumlichen Änderung der Dichte durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.

Lochs stärker ausgeprägt, aber auch mehr und stärker ausgeprägte Fluktuationen treten auf. Auffällig ist, dass keine Fluktuationen hinter, unter oder im Bereich des Lochs entstehen, wie es bei der Inversion der superpositionierten Messdaten der Fall war. Die Ergebnisse ermöglichen wieder die Detektion der oberen Seite des Lochs und damit die Vorhersage einer Störung im Allgemeinen.

Mittels der simultanen Approximation der Quellfunktion, welche in Abschnitt 5.8 vorgestellt und in Abschnitt 6.2 für synthetische Beispiele untersucht wurde, kann eine Inversion mit einem dreidimensionalen Modell durchgeführt werden, für welche weder die in Abbildung 7.4 identifizierte Quellfunktion, noch eine Skalierung der Messdaten auf synthetische Wellenformen benötigt würde. Da die approximierten Quellfunktionen eine zusätzliche Skalierung der Messdaten ersetzen, ist eine Berücksichtigung von Dämpfung, wie in Abschnitt 7.4 festgestellt wurde, nicht nötig. Lediglich für das Kürzen der Messdaten, um die Wellen bei der Inversion nicht zu betrachten, welche zuvor von den Rändern reflektiert wurden, die von dem Inversionsmodell durch den Einsatz von absorbierenden Randschichten vernachlässigt werden, wird ein Abgleich mit synthetischen Wellenformen benötigt. Dabei wird, wie in Abschnitt 7.3 schon beschrieben wurde, beim Einsatz des SPEC-FEM3D Cartesian Codes ein Modell der Probe verwendet, welches alle reflektierenden Seiten berücksichtigt und ein Modell, welches absorbierende Randschichten an den Rändern verwendet, welche vernachlässigt werden sollen. Beide Modelle enthalten das gesuchte Loch. Bei der Verwendung von noch größeren Proben oder in einem sich unendlich ausdehnenden Erdreich, wie in einer Tunnelumgebung, oder wenn ein schärferes Quellsignal verwendet würde, wodurch ein Zuschneiden der Messdaten somit händisch möglich wäre, wäre ein Verzicht auf Vorwissen zur Störung möglich. Unter der Annahme, dass die Wellengeschwindigkeiten der Probe bekannt wären und dass eine Probe mit wirklich unendlich weit entfernten Rändern betrachtet würde, könnten die Messdaten für die Inversion lediglich mittels Bandpass-Filter und Nullpunktverschiebung aufbereitet werden, ohne dass die Position des Lochs bekannt sein müsste. Für die Inversion werden erneut die selben Inversionsparameter verwendet.

Das Ergebnis der Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion wird in Abbildung 7.26 dargestellt, wobei die räumliche Änderung der Dichte im Querschnitt bei  $x = 0$  mm

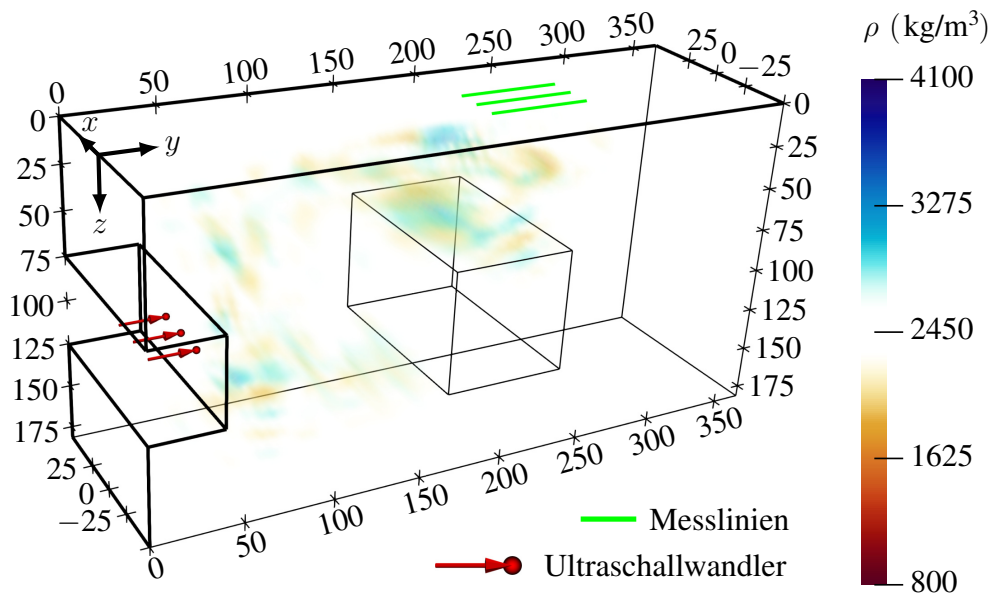


Abbildung 7.26.: Räumliche Änderung der Dichte der Probe, welche durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung unter Verwendung der simultanen Approximation der Quellfunktionen rekonstruiert wurde. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch dünne Linien angedeutet.

in Abbildung 7.27 genauer betrachtet wird. Die räumlich alternierenden Änderungen der rekonstruierten Dichte an der Position der oberen Seite des Lochs können, genauso wie die künstlichen Fluktuationen der rekonstruierten Dichte, erneut beobachtet werden. Jedoch sind bei beiden Beobachtungen die Änderungen der rekonstruierten Dichte proportional zueinander schwächer ausgeprägt als bei den Ergebnissen der Inversion, für welche keine simultane Approximation der Quellfunktion durchgeführt wurde. Kurz unterhalb der Positionen des Ultra-

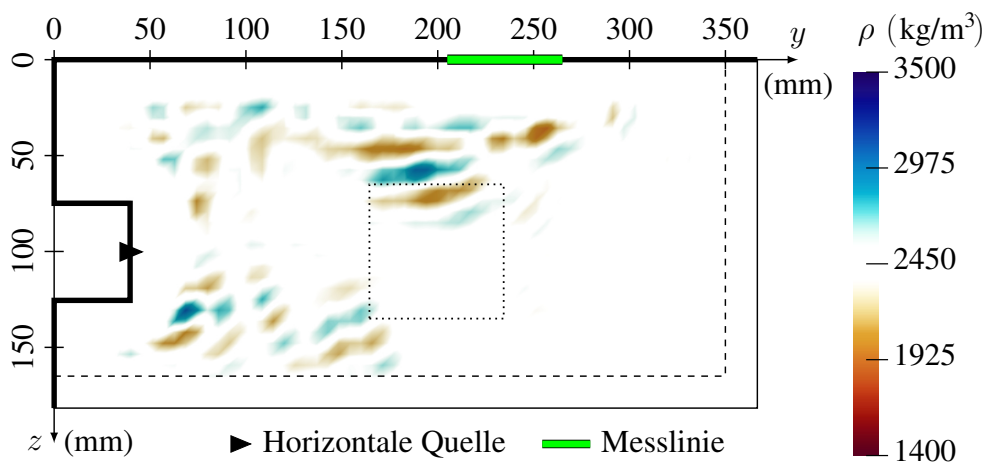


Abbildung 7.27.: Querschnitt bei  $x = 0$  mm der rekonstruierten räumlichen Änderung der Dichte durch die Inversion der gemessenen Wellenformen für eine dreidimensionale Wellenausbreitung unter Verwendung der simultanen Approximation der Quellfunktionen. Die Position des zu detektierenden Lochs wird durch die gepunkteten Linien angedeutet.

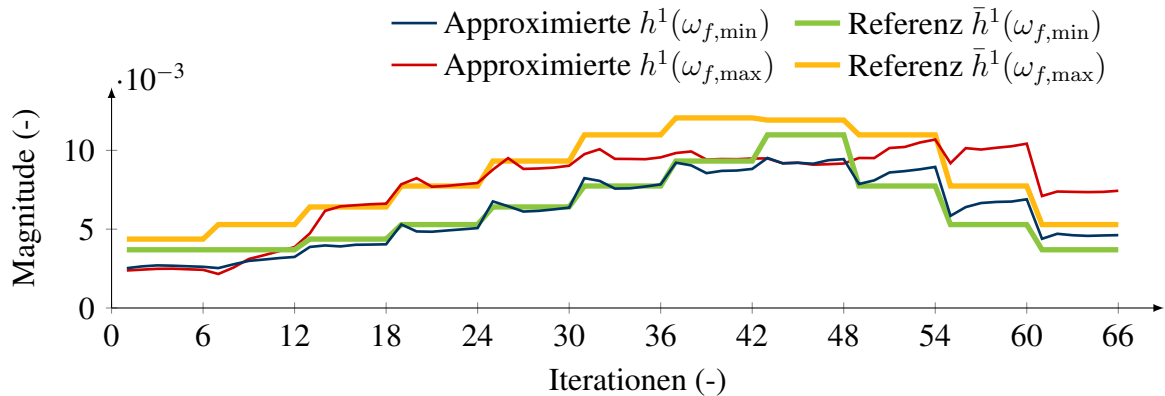


Abbildung 7.28.: Änderung der Magnitude der approximierten  $h^1(\omega)$  und Referenzquellfunktion  $\bar{h}^1(\omega)$  des Ultraschallwandlers bei  $x = 0$  mm während der Iterationen der Inversion. Die Quellfunktionen werden sowohl für die niedrigen  $\omega_{f,\min}$  als auch die hohen Kreisfrequenzen  $\omega_{f,\max}$  der einzelnen Frequenzgruppen dargestellt.

schallwandlers treten wenige Fluktuationen der rekonstruierten Dichte auf, welche sich zwar stärker von der Dichte der restlichen Probe abheben, aber bei der Interpretation der Ergebnisse als vernachlässigbare Rückstände von der simultanen Approximation der Quellfunktionen gewertet werden können. Somit konnte auch die Inversion mit simultaner Approximation der Quellfunktion an Labordaten, für welche die Probe einer tunnelähnlichen Umgebung nachempfunden wurde, validiert werden.

In Abbildung 7.28 wird für die jeweilig niedrigere  $\omega_{f,\min}$  und höhere Kreisfrequenz  $\omega_{f,\max}$  der Frequenzgruppen aus Gleichung 7.8 die Änderung der Magnitude der approximierten Quellfunktion  $h^1(\omega)$  des Ultraschallwandlers bei  $x = 0$  mm über die Iterationen der Inversion dargestellt. Zusätzlich werden die Verläufe mit den Magnituden der zugehörigen Referenzquellfunktion  $\bar{h}^1(\omega)$  verglichen, welche aus dem Produkt von der in Abbildung 7.4 identifizierte effektiven Quellfunktion und dem Skalierungsfaktor, welcher für die Inversion ohne simultane Approximation der Quellfunktion verwendet wurde, besteht. Die approximierten Quellfunktionen sind stark von den Eigenschaften des aktuellen Inversionsmodells abhängig. Da direkt zu Beginn der Inversion, bei welcher ein homogenes Ausgangsmodell verwendet wird, vergleichsweise hohe Frequenzen untersucht werden müssen, konvergieren die Quellfunktionen weniger stark zu den Referenzquellfunktionen. Mit zunehmender Rekonstruktion der oberen Seite des Lochs konvergieren die Quellfunktionen stärker zur Referenzlösung. Durch die weitere Erhöhung der Frequenzen, welche für die Inversion eingesetzt werden, wird allgemein die räumliche Auflösung von Störungen verbessert, jedoch nimmt auch der Anteil der auftretenden künstlichen Fluktuationen zu. Dies hat zur Folge, dass die approximierten Quellfunktionen wieder weniger mit den Referenzquellfunktionen übereinstimmen. Die entstandenen Fluktuationen könnten auch bei späteren Iterationen, für welche auch wieder niedrigere Frequenzen eingesetzt werden könnten, dazu führen, dass höhere Diskrepanzen zwischen den approximierten Quellfunktionen und den Referenzquellfunktionen entstehen. Jedoch muss beachtet werden, dass es sich bei der verwendeten Referenzquellfunktion auch nur um eine Abschätzung für die unbekannte effektive Quellfunktion handelt.

Die Validierung des vorgestellten Inversionsansatzes, welcher das inverse Problem im Frequenzbereich betrachtet, war durch Messdaten vom vorgestellten kleinskaligen Versuchsaufbau möglich. Dabei gelang die Validierung sowohl mit zweidimensionalen als auch mit dreidimen-

sionalen Inversionsmodellen. Zwar führte die Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung bei der Inversion mit einem zweidimensionalen Inversionsmodell zu keiner nennenswerten Verbesserung der Ergebnisse, aber dennoch war diese erfolgreich. Für andere Messanordnungen kann die Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung jedoch notwendig oder vorteilhafter sein. Auch die simultane Approximation der Quellfunktion konnte durch die Inversion mit dem dreidimensionalen Modell mittels der Messdaten validiert werden. Aufgrund der Messanordnung konnte jeweils nur die obere Seite der Störung detektiert werden. Das Laserinterferometer konnte auch nur die zur Oberfläche orthogonalen Verschiebungen messen. Bharadwaj u. a. (2017) verwendeten für ihre Untersuchungen nur horizontale Verschiebungen, während Chen u. a. (2017); Wang u. a. (2019); Smith u. a. (2019) Verschiebungen in mehreren Richtungen aufnahmen und verwendeten. Ein zusätzliche Aufnahme von Verschiebungen in weiteren Richtungen hätte die Inversionsergebnisse voraussichtlich verbessert. Trapp u. Nestorović (2022) konnten bei der Untersuchung einer ähnlichen Probe sehr gute Inversionsergebnisse erzielen, da Vorwissen bzw. Annahmen zur Störung verwendet wurden, um die Anzahl der Unbekannten, nach denen die Messdaten invertiert wurden, stark zu reduzieren. Beim vorgestellten Ansatz der adjungierten Gradientenmethode ist die Anzahl der Koeffizienten, über welche die Bodeneigenschaften diskretisiert werden, sehr hoch und üblicherweise werden diese unabhängig voneinander betrachtet. Der Einsatz weiterer Regularisierungsansätze oder auch schon ein intensiverer Einsatz der schon verwendeten Techniken, wie das Vorkonditionieren des Gradienten, könnten bei einer adäquaten Anwendung zu schärferen Inversionsergebnissen mit weniger künstlichen Fluktuationen führen, was die Interpretation der Ergebnisse erheblich vereinfachen würde.

## 8. Diskussion

Die Untersuchungsergebnisse dieser Arbeit ermöglichen eine Abschätzung, welches Potential die Full-Waveform-Inversion mit einem Frequenzbereichsansatz für die seismische Vorerkundung im maschinellen Tunnelbau haben kann. Anhand unterschiedlicher Schwerpunkte wird sich im Folgenden kritisch mit den vorgestellten Untersuchungsergebnissen und weiteren Aspekten auseinandergesetzt.

### 8.1. Numerische Approximation von Wellen im Frequenzbereich

Mit dem vorgestellten Ansatz der Finite-Elemente-Methode konnten zeitharmonische Wellen akkurat angenähert werden, wie die Verifizierungen mittels analytischer Lösungen für unbegrenzte Gebiete und mittels synthetischer Referenzlösungen für Tunnelumgebungen aus Kapitel 4 verdeutlichen. Lediglich die Approximation der dreidimensionalen Wellenfelder für hohe Frequenzen stellte, aufgrund des vergleichsweise hohen Berechnungsaufwands, eine zu hohe Herausforderung dar, welche aber mit dem Einsatz von Prozessoren mit mehr Arbeitsspeicher und höherer Rechenleistung bewältigt werden kann. Auch ein Abgleich mit den zweidimensionalen Wellenformen des kleinskaligen Laborexperiments war, wie beispielsweise in Abbildung 7.11 ersichtlich wird, erfolgreich. Der Abgleich der Wellenformen, welche im Frequenzbereich approximiert wurden, mit den dreidimensionalen Wellenformen aus dem Laborexperiment konnte indirekt bei der Betrachtung der Summen der Fehlerquadrate im Frequenzbereich in Abbildung 7.23 durchgeführt werden.

Aufgrund der Annahme von Symmetrie in die dritte Raumrichtung für zweidimensionale oberflächennahe Tunnelumgebungen in Kombination mit der Tatsache, dass durch die Approximation der Wellenausbreitung im Frequenzbereich ein unendliches Zeitintervall angenähert wird, werden für zylindrische Tunnel fälschlicherweise sich unendlich wiederholende Reflexionen von seismischen Wellen zwischen der Erdoberfläche und der Tunneldecke angenähert. Durch die Approximation eines unendlichen Zeitintervalls werden auch Wellenformen angenähert, welche nicht innerhalb des Zeitintervalls auftreten, welches von den Messdaten abgedeckt wird. Dadurch unterscheiden sich die zeitharmonischen Verschiebungen an den Empfängern, was Probleme bei der Inversion der Wellenformen zur Folge haben kann. Das Zeitintervall der Messdaten muss hingegen klein genug gewählt werden, um möglichst viele Wellen zu unterdrücken, welche von Reflektoren reflektiert wurden, die sich nicht im betrachteten Gebiet befinden und entsprechend durch eine Inversion der Wellenformen nicht rekonstruiert werden können. Das beschriebene Dilemma kann gegebenenfalls durch weitere Schritte bei der Aufbereitung der Daten der Feldmessungen entschärft werden. Eine ausreichend starke und akkurat approximierende wirkende intrinsische Dämpfung kann das Dilemma hingegen auch lösen. Die Approximation eines unendlichen Zeitintervalls hat des Weiteren zur Folge, dass die approximierten Wellenfelder sehr sensitiv auf den Einsatz der absorbierenden Randschichten an den künstlichen Rändern der betrachteten Modelle reagieren. Entsprechend viel Aufwand sollte betrieben werden, um sicherzustellen, dass die approximierten Wellenfelder nicht grundlegend



durch eine ungenaue Wahl der numerischen Parameter der PML beeinträchtigt werden. Die Verschiebungen in einem gewissen Abstand zu den Quellen können zwar vergleichsweise gut approximiert werden, jedoch werden einerseits an den Positionen der Quellen Singularitäten angenähert und andererseits kann die reale Krafteinleitung an diesen Positionen nicht genau quantifiziert werden. Entsprechend sollten Wellenformen, welche in der unmittelbaren Umgebung zu der eingesetzten Quelle aufgenommen werden, mit Bedacht verwendet werden. Während bei Betrachtungen im Zeitbereich die ersten direkten Wellenformen einerseits durch Anpassungen des betrachteten Zeitintervalls vernachlässigt werden könnten und andererseits durch die Abänderung der synthetischen Wellenformen Unterschiede unterdrückt werden könnten, können die zeitharmonischen Verschiebungen in der Umgebung der Quelle nicht vom Einfluss der lokalen Krafteinleitung befreit werden, da es sich um die zeitlich akkumulierten Verschiebungen der jeweiligen Frequenzen handelt.

Für viele Frequenzen müssen die Wellenfelder approximiert werden, um mittels der Fourier-Transformation die entsprechenden Wellenformen im Zeitbereich annähern zu können, was dadurch mit einem hohen Berechnungsaufwand verbunden ist. Des Weiteren sind zeitharmonische Wellen weniger intuitiv deutbar, was einerseits die Bewertung erschwert, ob die Wellenformen physikalisch sinnvoll sind, und andererseits wird es umständlicher zu überprüfen, ob ein Bodenmodell als Ausgangsmodell für die Full-Waveform-Inversion geeignet wäre. Für die Bestimmung eines geeigneten Ausgangsmodells für die Inversion der gemessenen Wellenformen des kleinskaligen Versuchsaufbaus wurden mit dem SPECFEM3D Cartesian Code synthetische Wellenformen im Zeitbereich approximiert und mit den Messdaten abgeglichen. Entsprechend könnte es auch für die Bestimmung eines Ausgangsmodells bei einer Inversion von seismischen Wellenformen in einer Tunnelumgebung vorteilhaft sein, zusätzlich numerische Ansätze einzusetzen, welche die Wellenausbreitung im Zeitbereich approximieren.

## 8.2. Einfluss der Messanordnung

Während in Kapitel 7 untersucht wurde, für welche Auswahl an Messpunkten sich das Verhältnis zwischen den erwünschten und den unerwünschten Unterschieden, welche sich zwischen verschiedenen synthetischen sowie zwischen synthetischen und gemessenen Wellenformen ergeben, verbessert, wurden in Kapitel 6 viele unterschiedliche Messanordnungen in Kombination mit unterschiedlichen Tunnelumgebungen und in Kombination mit unterschiedlichen Bodenszenarien (vor allem durch die Durchführung der elastischen Blindtests) für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion anhand von synthetischen Referenzseismogrammen untersucht. Grundsätzlich verbessern sich die Prognosen der Bodeneigenschaften mit zunehmender Anzahl an Quellen und Empfängern. Durch eine bessere räumliche Verteilung der Quellen und Empfänger können zudem nicht nur Wellen aufgezeichnet werden, welche von potentiellen Störkörpern reflektiert wurden, sondern auch solche, welche von diesen gebrochen wurden, wodurch sich mehr Informationen über diese Störkörper in den Seismogrammen akkumulieren. Redundante Informationen reduzieren hingegen die Uneindeutigkeit des inversen Problems.

Durch den Einsatz von Quellen und Empfängern ausschließlich im Tunnel ist zwar die Detektion von potentiellen Störkörpern generell möglich, jedoch ist die genaue Bestimmung der jeweiligen Position und Form sowie eine akkurate Vorhersage der jeweiligen Eigenschaften kaum möglich. Da für solche limitierten Messanordnungen vergleichsweise viele Modelle die Referenzwellenformen annähern können, ist das inverse Problem weniger eindeutig und die Fluktuationen der rekonstruierten Eigenschaften nehmen zu, was wiederum die Interpretation der Er-



gebnisse erschwert. Des Weiteren konnte beobachtet werden, dass bei der Verwendung solcher Messanordnungen Störkörper schlechter identifiziert werden konnten, welche sich unmittelbar vor der Ortsbrust befinden. Sowohl zusätzliche Quellen als auch zusätzliche Empfänger an der Erdoberfläche würden bei oberflächennahen Tunnelumgebungen die Vorauserkundung erheblich verbessern. Durch die Berücksichtigung sowohl solcher Wellen, welche von potentiellen Störungen reflektiert wurden, als auch solcher, welche von potentiellen Störungen gebrochen wurden, können die Positionen, Formen und Eigenschaften der Störkörper besser rekonstruiert werden. Des Weiteren können auch Störungen identifiziert werden, welche aufgrund ihrer räumlichen Lage durch andere Störkörper teilweise von den sich ausbreitenden Wellen abgeschirmt werden. Entsprechend kann eine klare Empfehlung ausgesprochen werden, dass für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion die Messanordnung möglichst ausgeweitet werden sollte, da ein flexibles Hinzufügen von Quellen und Empfängern an unterschiedlichen Positionen, im Vergleich zu den üblichen Migrationsmethoden, für die Full-Waveform-Inversion unproblematisch ist. Ansonsten beeinflusst die Richtung, in welche eine Punktquelle wirkt, welche Wellenarten sich in Richtung des zu untersuchenden Gebiets ausbreiten, wobei jene wiederum beeinflussen, welche Eigenschaften akkurater rekonstruiert werden können. Entsprechend würde eine Kombination von Quellen, welche unterschiedliche Wellenarten im Boden vor der Tunnelfront anregen, die Bestimmung der Eigenschaften des Bodens vor der Ortsbrust generell verbessern. Weitere Möglichkeiten, um die Messanordnung zu erweitern, wie beispielsweise das Platzieren von Quellen und Empfängern in Erkundungsbohrlöchern oder Erkundungsstollen, wurden im ersten Absatz von Abschnitt 5.9 bereits diskutiert. Da die Wahl der Messanordnung auch ökonomischen Ansprüchen genügen muss, bedarf es zusätzlicher Forschung begleitend zu Tunnelbauprojekten, ob sich in Kombination mit der Verwendung der Full-Waveform-Inversion zusätzliche Quellen und Empfänger an bisher unkonventionellen Positionen einer Tunnelumgebung rentieren würden. Dabei würden diese Abwägungen auch stark von dem Baugrund und den zugehörigen Risiken beim Tunnelvortrieb abhängen.

Für die Untersuchung, ob die Messanordnungen, welche bisher für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau gängig sind, auch für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion empfehlenswert wären, wurden mit vergleichbaren Messanordnungen die Seismogramme invertiert, welche mit einer synthetischen zweidimensionalen Tunnelumgebung approximiert wurden. Während mit den Messanordnungen, welche sich an den Messanordnungen der Systeme *TSP 303* und *TSP Impact* (beide von der *Amberg Technologies AG*) beziehungsweise *Integrated Seismic Prediction* (*Herrenknecht AG*) orientieren, die räumliche Änderung der Scherwellengeschwindigkeit in Richtung der Tunnelachse gut rekonstruiert werden konnte, konnte die räumliche Änderung der Kompressionswellengeschwindigkeit, im Vergleich zu der exemplarischen Messanordnung, welche unter anderem zu Beginn von Abschnitt 6.1 betrachtet wurde, nur vergleichsweise schlecht rekonstruiert werden. Dabei wurden für die Messanordnungen, welche den Messanordnungen der genannten Systeme nachempfunden wurden, vergleichsweise viele Quellen verwendet, wodurch unter anderem die gute Rekonstruktion der räumlichen Änderung der Scherwellengeschwindigkeit erklärt werden kann. Eine Erweiterung dieser Messanordnungen durch zusätzliche Quellen und Empfänger an der Tunnelfront oder Erdoberfläche würde die Inversionsergebnisse verbessern. Auch die Kombination mit gängigen Messanordnung, wie beispielsweise die Nutzung von charakteristischen Schwingungen des Schneidrads beim Vortrieb als eine Quelle und die Verwendung von pneumatischen Schlaghämmern, welche auf einer Konsole der Tunnelbohrmaschine hinter dem Schneidrad mitgeführt werden, als weitere Quellen, erscheint denkbar.

Die modernen Systeme der seismischen Vorauserkundung setzen auf eine sehr regelmäßige bis kontinuierliche Aufnahme und Auswertung von seismischen Daten. Um einen gerechten Vergleich der gängigen Systeme mit Ansätzen der Full-Waveform-Inversion anstellen zu können, müssten auch die Anwendungen der Full-Waveform-Inversion dahingehend optimiert werden, dass die Datensätze, welche fortschreitend neu aufgenommen werden, effizient eingebunden werden. Ansonsten würde das Potential der Full-Waveform-Inversion, im Vergleich zu den bisherigen Methoden, verzerrt dargestellt. Ideen um kontinuierlich aufgenommene Messdaten effizient für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau mittels der Full-Waveform-Inversion zu verarbeiten wurden schon in Abschnitt 5.9 ausführlich diskutiert.

### 8.3. Interpretation der Inversionsergebnisse

Aufgrund der Uneindeutigkeit des inversen Problems sind viele unterschiedliche Modelle in der Lage die vorgegebenen Wellenformen näherungsweise nachzubilden. Durch die verwendete Diskretisierung der Bodeneigenschaften über die Knoten des verwendeten Finite-Elemente-Netzes können die rekonstruierten Eigenschaften räumliche sehr stark variieren. Dadurch ist die Deutung der rekonstruierten Eigenschaften, um potentielle Störkörper zu identifizieren, üblicherweise zusätzlich auch nicht eindeutig. Die räumlichen Änderungen der rekonstruierten Eigenschaften müssen in Kombination mit der jeweils verwendeten Messanordnung bewertet werden, um abzuwägen, ob einzelne beobachtete Merkmale überhaupt mit der jeweiligen Messanordnung identifizierbar wären. Genauso muss berücksichtigt werden, dass bestimmte Bereiche der betrachteten Gebiete mit bestimmten Messanordnungen weniger gut untersucht werden können und in welchen Bereichen den rekonstruierten Eigenschaften eher vertraut werden darf. Beispielsweise konnte beim zweiten und vierten Bodenszenario des elastischen Blindtests festgestellt werden, dass Störungen, welche sich kurz vor der Tunnelfront befinden, vergleichsweise unpräzise mit den Messanordnungen rekonstruiert werden konnten, welche nur Quellen und Empfänger im Tunnel verwendeten. Mit vielen Messanordnungen können nicht die kompletten Störkörper rekonstruiert werden, sondern nur die Grenzflächen der Störungen, welche Wellen in Richtung der Empfänger reflektieren oder brechen. Des Weiteren wird häufig an den gesuchten Grenzflächen, durch Änderungen der Eigenschaften unmittelbar vor und hinter der Grenzfläche, ein Kontrast der Eigenschaften erzeugt, welcher ein ähnliches Reflexions- und Brechungsverhalten aufweist wie die Grenzfläche der eigentlichen Störungen. Eine Interpretation dieser räumlich alternierenden Änderungen der Eigenschaften als Grenzflächen von Störkörpern kann jedoch auch fehlerhaft sein. Die Deutung der rekonstruierten Eigenschaften wird zudem durch künstliche Fluktuationen der räumlichen Änderung der Eigenschaften erschwert, welche auch schon den Inversionsprozess selbst negativ beeinflussen und bei der Auswertung vernachlässigt werden sollten, wenn ersichtlich wird, dass diese wirklich nicht auf einen Störkörper zurückzuführen sind.

Intrinsische Dämpfungseffekte des Bodens haben zur Folge, dass insbesondere die Informationen, welche durch hochfrequente Verschiebungen transportiert werden, mit zunehmender Strecke, über welche sich die Wellen ausbreiten, vergleichsweise schnell verschwinden. Aufgrund der fehlenden Informationen können mit zunehmender Dämpfung Störungen weniger akkurat rekonstruiert werden. Eine Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung bei der Approximation der Wellenausbreitung ist generell empfehlenswert. Für eine moderate Dämpfung der Wellen in Kombination mit Messanordnungen, durch welche die sich ausbreitenden Wellen in einem räumlich limitierten Bereich gemessen werden, und mit der Betrachtung von einem

ausreichend kurzen Zeitintervall kann die Berücksichtigung von Dämpfung nicht nötig sein, da durch die Skalierung der Referenzwellenformen bestehende Unterschiede ausreichend kompensiert werden könnten. Dieser Fall konnte bei der Inversion der Messdaten des kleinskaligen Versuchsaufbaus unter Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung beobachtet werden. In Unterabschnitt 6.3.1 wurde festgestellt, dass eine Unter- oder Überschätzung der intrinsischen Dämpfung durch das Modell, welches für die Approximationen der Wellenformen für die Inversion der Referenzverschiebungen verwendet wird, zur Folge haben, dass Störkörper schlechter rekonstruiert werden können und zusätzlich, aufgrund zunehmender Fluktuationen der rekonstruierten räumlichen Änderung der Eigenschaften, schlechter anhand der Inversionsergebnisse identifiziert werden können. Entsprechend muss der Anwender der Full-Waveform-Inversion bei der Deutung der Ergebnisse auch diese Ursache für die künstlichen Fluktuationen berücksichtigen. Bei den Beispielen aus Unterabschnitt 6.3.1 wurden die Referenzverschiebungen im Vorfeld nicht mittels der Seismogramme skaliert, welche mittels des Modells hätten berechnet werden können, welches bei der Inversion für die Approximation der zeitharmonischen Wellen verwendet wurde. Entsprechend wurde nicht untersucht, bis zu welchem Grad die Nachteile einer Unter- oder Überschätzung der wirkenden intrinsischen Dämpfung durch eine Skalierung hätten abgeschwächt werden können.

Für die Deutung der rekonstruierten räumlichen Änderung der Eigenschaften des Bodens wäre qualifiziertes Personal nötig, welches weiterhin nur qualifizierte Mutmaßungen über die geologischen Gegebenheiten vor der Ortsbrust anstellen könnte. Die Inversionsergebnisse könnten jedoch durch den Einsatz von weiteren Regularisierungsansätzen (vergleiche Unterabschnitt 5.6.2) vereinfacht werden, um relevante Änderungen der Geologie besser vorhersagen zu können. Jedoch muss vermieden werden, dass durch einen zu intensiven Einsatz dieser Ansätze die Aussagekraft der Ergebnisse und somit deren Verlässlichkeit bei der Detektion von Störungen abnimmt. Beispielsweise könnten bei einer Diskretisierung von potentiellen Störkörpern, wie sie von Trapp (2022) für den Einsatz des Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing verwendet wird, einerseits die Form und die Anzahl der Störkörper nicht ausreichend bestimmt werden, wenn diese im Vorfeld falsch angenommen werden. Bei einer Erweiterung des Fehlerfunktional durch die unterschiedlichen Formen der Tikhonov-Regularisierung würde der Erfolg der Inversion stark von dem angenommenen Referenzmodell sowie von dem Parameter abhängen, welcher die Gewichtung des zusätzlichen Summanden des Fehlerfunktional beschreibt. Bei einer zu starken Gewichtung des Regularisierungssummanden würde der Unterschied zwischen dem Bodenmodell der aktuellen Iteration der Inversion und dem Referenzmodell stärker minimiert als die Unterschiede der Seismogramme, was zur Folge hätte, dass sich das rekonstruierte Bodenmodell zunehmend dem Referenzmodell annähert, was die Gewinnung von neuen Informationen über die Beschaffenheit des Bodens anhand der seismischen Daten verhindern würde. Der Regularisierungsansatz von Liu u. a. (2022) erweckt generell einen vielversprechenden Anschein. Bei diesem sollen fälschliche Änderungen der Eigenschaften innerhalb von Störkörpern unterdrückt und die Umrisse von Störkörpern besser hervorheben werden, ohne dass die Amplituden und Laufzeiten der Wellen, welche sich für das bis dahin rekonstruierte Bodenmodell ergeben, wesentlich verändert werden, indem nach einigen Iterationsschritten entlang eindimensionaler Linien, welche parallel zur Tunnelachse verlaufen, eine Korrektur der rekonstruierten akustischen Wellengeschwindigkeit durchgeführt wird. Generell erscheint die Entwicklung und Verwendung von Regularisierungsmethoden für den Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau sinnvoll und zielführend, welche einerseits dazu führen, dass der Fokus des Inversionsalgorithmus auf für den Vortrieb vornehmlich relevante Störungen gelegt wird, und andererseits, dass diese Störungen durch die Verwendung von pragmatischen Annahmen akkurater und eindeutiger charakterisiert werden können.

#### 8.4. Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion

Sowohl anhand von synthetischen Referenzverschiebungen (Abschnitt 6.2) als auch mittels gemessener Wellenformen des kleinskaligen Laborexperiments (Abschnitt 7.5) wurde der Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion während des Inversionsprozesses untersucht. Im Vergleich zu der Verwendung der wahren bzw. der zuvor bestimmten Quellfunktion konnten mit den rekonstruierten räumlichen Änderungen der Eigenschaften die vorhandenen Störungen nur minimal schlechter bestimmt werden. Entsprechend bietet sich der Einsatz der simultanen Approximation der Quellfunktion für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau an, da der zusätzlich entstehende Berechnungsaufwand bei dem betrachteten Ansatz der Full-Waveform-Inversion, welcher im Frequenzbereich operiert, vernachlässigbar klein ist. Jedoch sind die Approximationen der Quellfunktionen und somit der zugehörige Inversionsprozess stärker davon abhängig, dass das für die Inversion verwendete Ausgangsmodell die groben Eigenschaften des betrachteten Gebiets ausreichend beschreiben kann. Für weiterführende Anwendungen muss berücksichtigt werden, dass bei den vorgestellten Untersuchungen die Übertragungsfunktionen zwischen dem Boden und den jeweiligen Empfängern beziehungsweise bei den Messungen der Verschiebungen an der Probenoberfläche die Übertragungsfunktion an verschiedenen Messpunkten, an welchem mittels des Laserinterferometers gemessen wird, als identisch angenommen wurden, sodass diese Übertragungsfunktion implizit auch approximiert wurde. Aufgrund der Qualität der Probenoberfläche, dem Einsatz des Aluminium-Klebebands sowie der kontaktlosen Messung von Verschiebungen mittels des Laserinterferometers, ist diese Annahme beim betrachteten kleinskaligen Laborexperiment valide. Jedoch können sich die Übertragungsfunktionen an unterschiedlichen Empfängern in einer Tunnelumgebung unterscheiden. Bei den Untersuchungen von Bharadwaj u. a. (2017) wurden hingegen auch zusätzliche zeit- und frequenzunabhängige skalare Faktoren approximiert, welche die Verbindungen der jeweiligen Empfänger mit dem Boden annähern. Des Weiteren wurde bei den Untersuchungen in Abschnitt 6.2 und Abschnitt 7.5 davon ausgegangen, dass der Anregungsmechanismus für die Approximation der zeitharmonischen Wellen korrekt angenommen wird, wie beispielsweise dass der Winkel, unter welchem eine Punktquelle wirkt, ausreichend genau beschrieben wird.

#### 8.5. Übertragbarkeit der Erkenntnisse der Inversionsergebnisse auf die Anwendung im maschinellen Tunnelbau

Anhand der Ergebnisse der Inversion von synthetischen Referenzdaten aus Kapitel 6 konnte der Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau konzeptionell untersucht werden. Dabei konnte der Einfluss unterschiedlicher Messanordnungen, der Unter- oder Überschätzung der wirkenden intrinsischen Dämpfung, der Wahl der Frequenzgruppen, über welche das Fehlerfunktional minimiert werden soll, sowie der Wahl weiterer Inversionsparameter untersucht werden. Dabei wurde auch untersucht, wie gut unterschiedliche Bodenszenarien rekonstruiert werden können. Viele dieser Erkenntnisse sollten grundlegend auf den Einsatz der Full-Waveform-Inversion zur Inversion von realen seismischen Daten eines Tunnelbauprojekts übertragbar sein.

Jedoch birgt die Inversion von realen Daten weitere Herausforderungen, da beispielsweise Messfehler und Messrauschen zu zusätzlichen Unterschieden der Wellenformen führen können.

Des Weiteren könnte der reale Boden über inhomogene Eigenschaften, über schwer quantifizierbare Dämpfungseigenschaften oder über kleinere Einschlüsse, an welchen eine Streuung der seismischen Wellen stattfindet, verfügen. Zudem könnte der Boden ein anisotropes oder poroelastisches Verhalten aufweisen, welches, wie auch die anderen beschriebenen Effekte und Eigenschaften, von dem Modell, welches für die Approximation der zeitharmonischen Wellen verwendet wird, nicht berücksichtigt würde. Kleinere numerische Fehler bei der Approximation der Wellenformen könnten die Unterschiede weiterhin erhöhen. Darüber hinaus entstehen weitere Unterschiede zwischen den Wellenformen aufgrund von geometrischen Vereinfachungen des zu untersuchenden Gebiets bei der Modellbildung sowie durch Ungenauigkeiten bei der Beschreibung der Positionen von Quellen und Empfängern. Dabei könnten sowohl die Wirkungsmechanismen der Quellen, die Quellfunktionen, als auch die Verbindungen der Empfänger mit dem Boden nicht akkurat genug beschrieben werden. Auch der Einfluss der Tunnelbohrmaschine auf die seismische Wellenausbreitung, welcher für die konzeptionellen Untersuchungen, aufgrund der, im Vergleich zu den Abmaßen der Tunnelumgebung, dünnen bis schalenförmigen Struktur der Bestandteile der Tunnelbohrmaschine (z.B. Tunnelschilde und Schneidrad), vernachlässigt wurde, müsste, genauso wie der Einfluss des bereits penetrierten und somit geschädigten Bodens an der Ortsbrust, untersucht werden. Des Weiteren birgt eine ungenaue Identifizierung der Eigenschaften des umgebenden Bodens, welche sich sehr herausfordernd gestalten kann, das Problem, dass ein vergleichsweise schlechtes Ausgangsmodell für die Inversion verwendet würde, was den Erfolg der Inversion gefährden könnte.

Durch die Inversion der Messdaten des kleinskaligen Versuchsaufbaus aus Kapitel 7 konnten einerseits erste Einblicke gewonnen werden, welche Herausforderungen sich bei der Inversion realer Wellenformen ergeben und andererseits, wie robust sich der vorgestellte Ansatz der Full-Waveform-Inversion verhält. Da die Messdaten so zugeschnitten wurden, dass im Vergleich zu einer oberflächennahen Tunnelumgebung nur eine zusätzliche Seite durch eine reflektierende Oberfläche statt durch eine absorbierende Randschicht approximiert werden musste, besteht durchaus eine gewisse Ähnlichkeit zu einer richtigen Tunnelumgebung. Das zu detektierende Loch besaß beim Kürzen der gemessenen Wellenformen den Vorteil, dass die Messpunkte teilweise durch das Loch von Wellen abgeschirmt wurden, welche von den Seiten der Probe reflektiert wurden, welche bei der Inversion durch den Einsatz von absorbierenden Randschichten vernachlässigt wurden. Jedoch konnten keine Wellen aufgenommen werden, welche durch die Störung gebrochen wurden. Dies hat zur Folge, dass die untere und hintere Seite des Lochs nur vergleichsweise schlecht rekonstruiert werden können. Innerhalb einer echten Tunnelumgebung wären die Kontraste der Eigenschaften an den Grenzschichten zu den Störungen weniger stark ausgeprägt und besäßen im Verhältnis zu den Abmaßen der Tunnelumgebung teilweise auch kleinere geometrische Abmaße. Bei der Inversion von echten seismischen Daten einer Tunnelumgebung könnten längere Zeitintervalle betrachtet werden, wodurch mehr Informationen über Störungen verarbeitet würden. Die Messanordnung des Laborexperiments wäre für Messungen in einer Tunnelumgebung untypisch. Zwar wurden mehrere Messpunkte an der Oberfläche der Probe verwendet, jedoch keine im Bereich des Schlitzes und nur die Verschiebungen senkrecht zu der betrachteten Oberfläche wurden gemessen, wohingegen viele Geophone, welche bei seismischen Messungen eingesetzt werden, die Verschiebungen in mehrere Richtungen aufnehmen. Durch den Einsatz der Messdaten des Laborexperiments für die Inversion werden, im Vergleich zu der Verwendung von synthetischen Referenzdaten, auch schon Datenrauschen, Messfehler und Ungenauigkeiten bei der Diskretisierung des betrachteten Gebiets berücksichtigt. Des Weiteren könnten auch weitere Ungenauigkeiten, welche sich auf die Annahmen zurückführen lassen, dass anisotropes und poroelastisches Verhalten vernachlässigt werden können, den Inversionsprozess, wie bei der Verwendung von seismischen Daten ei-

ner Tunnelumgebung, negativ beeinflusst haben. Zudem wird das Probenmaterial auch weniger homogene Eigenschaften besitzen als durch die synthetischen Modelle angenommen wurde. Zusätzlich könnten sich weitere kleinere Risse und Verunreinigungen in der Probe befinden, welche zu Streuungen der Wellen geführt haben könnten. Jedoch könnten sich bei der Inversion von seismischen Daten einer Tunnelbaustelle Herausforderung ergeben, welche bei der Inversion der Messdaten des Experiments nicht auftraten. Umgekehrt könnten Schwierigkeiten, welche bei den Untersuchungen aus Kapitel 7 überwunden werden mussten, bei der Inversion von realen Seismogrammen einer Tunnelumgebung keinen Einfluss haben. Beispielsweise konnte mit dem verwendeten Ultraschallwandler nur ein sehr limitiertes Frequenzspektrum angeregt werden, was für die unterschiedlichen Quellen, welche innerhalb einer Tunnelumgebung eingesetzt würden, nicht der Fall sein muss. Entsprechend könnte dann der Multi-Skalen-Ansatz effizienter eingesetzt und somit bessere Inversionsergebnisse erzielt werden. Manche Vorgehensweisen, um die Qualität der Messdaten zu verbessern, könnten für Messdaten einer realen Tunnelumgebung nicht möglich sein. Beispielsweise wäre es möglich, dass die Anregung durch eine Quelle nicht reproduzierbar ist, was zur Folge hätte, dass eine Verbesserung zwischen dem Signal und dem zugehörigen Rauschen durch die Verwendung des Mittelwerts von mehreren einzelnen Messungen nicht möglich wäre. Jedoch würden gegebenenfalls manche Schritte zur Aufbereitung der Messdaten nicht mehr benötigt, wohingegen andere Verfahren, welche für die Verarbeitung der Daten des Laborexperiments nicht benötigt wurden, Anwendung finden sollten. Die Bestimmung eines Ausgangsmodells, welches die Eigenschaften des umgebenden Bodens ausreichend beschreiben kann, könnte sich mit dem Vorgehen, welches mit den Messdaten des Laborexperiments eingesetzt wurde, entweder einfacher oder herausfordernder gestalten. Einerseits könnten die Seismogramme, für welche sich Wellen über mehrere Meter statt über wenige Zentimeter ausgebreitet haben, bessere Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Bodens ermöglichen. Andererseits würde bei einer schlechteren Identifizierung der effektiven Quellfunktion auch die Identifizierung der Eigenschaften des Bodens erschwert. Zumindest die Aufnahme von Verschiebungen in mehr als eine Richtung wird für die Bestimmung der Wellengeschwindigkeiten des Bodens als vorteilhaft betrachtet. Statt der Verwendung der Summe der Fehlerquadrate als zu minimierende Zielfunktion, könnte der Einsatz eines anderen Fehlerfunktional für die Inversion von seismischen Daten einer Tunnelbaustelle sinnvoll sein sowie die Verwendung zusätzlicher Regularisierungsmethoden, wie es schon in Abschnitt 8.3 beschrieben wurde.

Ab wann eine Vortriebssteuerung im maschinellen Tunnelbau anhand der Ergebnisse von Ansätzen der Full-Waveform-Inversion, welche die seismische Wellenausbreitung für eine dreidimensionale Tunnelumgebung approximieren, erfolgen kann, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Mehrere Vorgehensweisen sind möglich, um die Inversionsalgorithmen effizienter zu gestalten, welche im letzten Absatz von Abschnitt 5.9 beschrieben wurden. Grundlegend ist auch die Frage, ob mehrere Inversionen parallel zum Vortrieb mit kontinuierlich neuen Messdaten durchgeführt werden, was schon in Abschnitt 5.9 als eine mögliche Anwendungsform diskutiert wurde, wodurch die Inversionsergebnisse nicht unmittelbar nach der Messung zur weiteren Steuerung des Vortriebs vorliegen müssten. Selbst wenn die Rechenleistungen, welche für den vortriebsbegleitenden Einsatz der Full-Waveform-Inversion nötig wären, durch neue Technologien zur Verfügung gestellt werden könnten, bliebe die Frage, ob die Anschaffung von entsprechenden Hochleistungsrechnersystemen zu Beginn ökonomisch sinnvoll wäre. Jedoch scheint der Einsatz der Full-Waveform-Inversion für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau in absehbarer Zukunft möglich zu werden.

## 8.6. Kombination von unterschiedlichen Vorauserkundungsverfahren

Wie schon in Abschnitt 5.7 beschrieben wurde, besitzt die Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich insbesondere beim Einsatz von Messanordnungen, welche mehrere Quellen enthalten, Vorteile gegenüber den Ansätzen, welche die Wellenausbreitung und die adjungierte Wellenausbreitung im Zeitbereich approximieren. Jedoch erscheint die Kombination von verschiedenen seismischen und weiteren geophysikalischen Vorauserkundungsverfahren sowie anderen Methoden der Ingenieurwissenschaften für die Vorhersage der Geologie vor der Ortsbrust sinnvoll. Dabei können auch Setzungen des Bodens, sich verändernde Porenwasserdrücke oder weitere Änderungen, welche während des Vortriebsprozesses aufgezeichnet werden, wie die Veränderung der mechanischen Arbeit des Schneidrads, untersucht werden. Wie durch die Übersichtsarbeit von Li u. a. (2017) erläutert wird, gibt es verschiedene Ansätze, um Vorauserkundungsmethoden im Tunnelbau zu kombinieren. Einerseits können die Ergebnisse von unterschiedlichen Methoden, welche auf unterschiedlichen geophysikalischen Prinzipien beruhen, zusammen interpretiert werden. Dies kann auch sequentiell erfolgen, indem beispielsweise das Bodenradar, welches insbesondere Wassereinschlüsse und Risse, welche sich in der Nähe der Ortsbrust befinden, detektieren kann, erst für die Erkundung des Bodens eingesetzt wird, wenn sich Änderungen der geologischen Eigenschaften anhand der Auswertung von beispielsweise seismischen Daten abzeichnen, welche auch Bereiche des Bodens untersuchen können, die sich weiter von der Tunnelfront entfernt befinden. Andererseits besteht auch die Möglichkeit die unterschiedlichen Methoden zu kombinieren. Entweder indem die Ergebnisse der einen Methode genutzt werden, um den Inversionsprozess der anderen Methode zu konditionieren bzw. durch Beschränkungen zu gewährleisten, dass die Ergebnisse der folgenden Methode die Informationen der anderen Datensätze berücksichtigen, wodurch die Uneindeutigkeit des inversen Problems reduziert würde. Oder indem die unterschiedlichen Datensätze durch eine simultane gemeinsame Inversion ausgewertet werden, was, laut Li u. a. (2017), für andere geophysikalische Anwendungsbeispiele zu besseren Ergebnisse geführt hat als die Konditionierung bzw. Beschränkung der Inversionsmethoden durch die Ergebnisse der jeweils anderen Methoden.

Eine Kombination des vorgestellten Ansatzes der Full-Waveform-Inversion im Frequenzbereich mit anderen Vorauserkundungsansätzen wurde schon durch Riedel u. a. (2022), im Rahmen einer Interaktion des Teilprojekts A2 „Entwicklung effektiver Konzepte der Vorauserkundung im Tunnelbau mittels akustischer Verfahren“ und des Teilprojekts C2 „Adaption numerischer Simulationsmodelle für den maschinellen Tunnelvortrieb mittels Systemidentifikation“ des Sonderforschungsbereichs 837 „Interaktionsmodelle für den maschinellen Tunnelbau“, untersucht. Dabei wurden drei Verfahren miteinander verknüpft, indem die Ergebnisse des einen Verfahrens für die Vorkonditionierung des folgenden Verfahrens eingesetzt wurden. Als akademisches Anwendungsbeispiel wurde mittels synthetischer Datensätze untersucht, wie mit einer Kombination der Methoden der Teilprojekte ein kugelförmiger Findling in einer oberflächennahen Tunnelumgebung identifiziert werden kann. In einem ersten Schritt werden mittels eines überwachten Maschinenlernalgorithmus kontinuierlich die Setzungen und Porenwasserdrücke, welche sich während des approximierten Vortriebs eines Tunnels einstellen, analysiert (Mahmoudi u. Hölter, 2021). Durch eine Mustererkennung soll der Maschinenlernalgorithmus potenzielle Störkörper identifizieren. Für eine genaue Charakterisierung der Form und Eigenschaften bedarf es einerseits weiterer Untersuchungen der Methode und andererseits müssten mehr Trainingsdaten generiert und ausgewertet werden, was sehr rechenaufwendig ist. Daher kann nur festgestellt werden, dass sich in einer definierten Entfernung zur Ortsbrust ein Findling befindet, welcher steifer als der umgebende Boden ist. Im zweiten Schritt werden die

Erkenntnisse der Mustererkennung für die Parametrisierung eines Störkörpers für die Anwendung der Full-Waveform-Inversion mittels des Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing (Trapp, 2022) eingesetzt, um den Findling im Folgenden genauer zu charakterisieren. Dazu wurden für den aktuellen Fortschritt des Tunnelausbaus mittels eines knotenweisen Ansatzes der diskontinuierlichen Galerkin-Methode (Lambrecht u. a., 2018) synthetische Seismogramme approximiert, wobei Quellen und Empfänger sowohl im Tunnel als auch an der Erdoberfläche verwendet wurden. Da in diesem Stadium des kombinierten Vorauserkundungsprozesses noch nicht bekannt wäre, dass der Findling die Form einer Kugel besitzt, wurde einfachheitshalber bei der Parametrisierung angenommen, dass der Findling die Form eines Würfels besitzt, welche vergleichsweise simpel mit dem SPECFEM3D Cartesian Code für den Inversionsprozess approximiert werden kann. Durch das Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing können die materiellen Eigenschaften des Findlings sehr akkurat beschrieben werden. Jedoch können, aufgrund der Restriktionen der gewählten Parametrisierung in Bezug auf die Form des Findlings, nur die groben Abmessungen des Findlings angenähert werden. Sowohl bei dem adjungierten Ansatz der Full-Waveform-Inversion von Lamert u. Friederich (2019), welcher das inverse Problem im Zeitbereich betrachtet, als auch beim vorgestellten adjungierten Frequenzbereichsansatz wird die räumliche Änderung der Eigenschaften nur unmerklich durch die verwendete Diskretisierung beschränkt. Dieses Merkmal hat jedoch zur Folge, dass gleichzeitig die Uneindeutigkeit des inversen Problems zunimmt. Durch die Verwendung des abschließenden Bodenmodells der Inversion mittels des Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing als Ausgangsmodell für die Inversion mit einem der adjungierten Ansätze wird bei diesem dritten Schritt wieder eine Konditionierung eingesetzt. Mittels der rekonstruierten Wellengeschwindigkeiten kann prognostiziert werden, dass der Findling an wenigstens zwei Seiten keine ebenen Flächen besitzt, wodurch der Detaillierungsgrad der Vorhersage erhöht wird. Die Ergebnisse der beiden adjungierten Ansätze ermöglichen vergleichbare Vorhersagen über den Findling. Das Bodenmodell, welches durch das Unscented-Hybrid-Simulated-Annealing angenähert werden konnte, würde für eine effiziente Vortriebssteuerung schon genügen. Jedoch bestünde auch die Möglichkeit, dass die Form des Störkörpers noch signifikanter von der angenommenen Form abweichen könnte oder dass sich weitere Störkörper auf der Tunnelachse befinden, welche aufgrund der Parametrisierung nicht identifiziert werden könnten. Somit bietet der zusätzliche Einsatz der adjungierten Ansätze der Full-Waveform-Inversion durchaus Vorteile. Diese Kombination der unterschiedlichen Vorauserkundungsansätze ermöglicht eine präzise Identifikation des Findlings, welche durch den isolierten Einsatz der jeweiligen Methoden nicht möglich gewesen wäre.

Generell sollte für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau auch untersucht werden, welche Potentiale sich durch eine Kombination der unterschiedlichen Erkundungsmethoden ergeben könnten. Insbesondere die zusätzliche Auswertung von Messdaten, welche standardmäßig während des Vortriebs aufgezeichnet werden, birgt den Vorteil, dass keine zusätzlichen Kosten für das Aufnehmen der Daten entstehen.



## 9. Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Ein Frequenzbereichsansatz der Full-Waveform-Inversion wurde für die seismische Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau entwickelt und konzeptionell untersucht. Für die Approximation von zeitharmonischen Wellen wurde ein Ansatz der Finite-Elemente-Methode verwendet, dessen Genauigkeit durch das Hinzufügen von hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung an die Wellenlängen der betrachteten Frequenzen angepasst werden kann. Um eine fortschreitende Ausbreitung von Wellen ins Unendliche an den künstlichen Rändern eines betrachteten Gebiets anzunähern, wurden absorbierende Randschichten verwendet. Dazu wurde die Methode der gefalteten Perfectly-Matched-Layer implementiert und für die jeweiligen Randwertprobleme wurden passende Werte für die zugehörigen numerischen Parameter bestimmt. Die Approximation zeitharmonischer Wellen konnte erfolgreich für zwei- und dreidimensionale Modelle anhand von analytischen Lösungen und synthetischen Referenzdaten verifiziert werden. Die unbekannte räumliche Veränderung der Eigenschaften eines betrachteten Gebiets wird bei der Inversion, durch die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate zwischen den approximierten Verschiebungen eines synthetischen Modells und den gegebenen Verschiebungen im Frequenzbereich, angenähert. Dabei wird das definierte Fehlerfunktional iterativ für verschiedene Frequenzgruppen minimiert, wobei das abschließende Modell der vorherigen Frequenzgruppe als Ausgangsmodell der folgenden Frequenzgruppe verwendet wird. Die Eigenschaften der betrachteten Gebiete werden in den Knoten der Finite-Elemente-Netze diskretisiert und innerhalb der Elemente über die zugehörigen linearen Ansatzfunktionen angenähert. Dadurch können kontinuierliche Übergänge besser nachempfunden werden, während rapide Änderungen der Eigenschaften schlechter rekonstruiert werden können. Aufgrund der hohen Anzahl an Koeffizienten, mit welchen die Eigenschaften diskretisiert werden, ist die Lösung des inversen Problems weniger eindeutig. Die Kombination von unterschiedlichen Minimierungsmethoden und -strategien ermöglichte eine zielgerichtete Gestaltung des Inversionsprozesses. Durch die Verwendung der diskreten adjungierten Gradientenmethode wurde ein deterministischer Ansatz gewählt. Für die Bestimmung der Suchrichtung, in welcher das Fehlerfunktional innerhalb des aktuellen Iterationsschritts minimiert werden soll, wurde mit der L-BFGS-Methode ein Quasi-Newton-Verfahren eingesetzt. Um die Schrittweite in Richtung der bestimmten Suchrichtung schnell und akkurat zu bestimmen, wurde eine quadratische Approximation des Fehlerfunktionals durch drei Punkte verwendet. Das Phänomen des Cycle-Skipping sowie die Nichtlinearität des inversen Problems sollen unter anderem durch die intuitive Verwendung eines Multi-Skalen-Ansatzes reduziert werden. Des Weiteren wird der berechnete Gradient vorab in der Umgebung von reflektierenden Oberflächen sowie von Quellen und Empfängern konditioniert, um einerseits bestehendes Vorwissen zu berücksichtigen sowie andererseits den Einfluss von numerischen Singularitäten auf den Inversionsprozess zu reduzieren. Durch eine Begrenzung der Anzahl an Iterationsschritten pro Frequenzgruppe soll verhindert werden, dass ein Modell rekonstruiert wird, welches einem vergleichsweise schlechtem lokalen Minimum entspricht. Des Weiteren wurde ein Ansatz implementiert, um simultan zum Inversionsprozess die Quellfunktionen approximieren zu können.

Der Ansatz der Full-Waveform-Inversion wurde zuerst mittels synthetischer Referenzdaten für zweidimensionale und dreidimensionale Tunnelumgebungen erfolgreich validiert. Dabei

wurde der Einfluss von verschiedenen Messanordnungen ausgiebig untersucht. Durch die Verwendung von räumlich verteilten Quellen und Empfängern können die Verschiebungen von Wellen gemessen werden, welche zuvor sowohl von einem Störkörper reflektiert als auch gebrochen wurden. Die dadurch zunehmende Menge an Informationen der gegebenen Wellenformen über die Störungen ermöglicht eine bessere Detektion. Allgemein können die Inversionsergebnisse mit einer höheren Anzahl an Quellen und Empfängern verbessert werden. Im Vergleich zu Migrationsmethoden, welche bisher für die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau eingesetzt werden, ist das Hinzufügen von Quellen und Empfängern an unterschiedlichen Positionen bei der Full-Waveform-Inversion problemlos möglich. Die akkurate Berücksichtigung von intrinsischer Dämpfung ist für die Inversion nicht unwesentlich, jedoch könnten die entstehenden Unterschiede der Wellenformen, je nach Messanordnung und Intensität der Dämpfung, durch eine Skalierung der zu invertierenden Wellenformen ausreichend kompensiert werden. Durch die simultane Approximation der Quellfunktion konnten die Eigenschaften der synthetischen Referenzmodelle nur unwesentlich weniger genau rekonstruiert werden, als bei der Verwendung der wahren Quellfunktion. Mittels der Blindtests, bei welchen die Störungen der synthetischen Bodenmodelle, mit welchen die zu invertierenden Seismogramme berechnet wurden, während der Inversion unbekannt waren, konnte neben dem Einfluss der Messanordnung auch untersucht werden, wie gut unterschiedliche Bodenmodelle rekonstruiert werden können. Eine Validierung des vorgestellten Inversionsansatzes mit realen Daten konnte durch die Inversion von Messdaten eines kleinskaligen Versuchsaufbaus realisiert werden. Eine überdimensionierte Probe in Kombination mit dem geschickten Kürzen der gemessenen Wellenformen ermöglichte, dass vier der sechs Probenseiten bei der Inversion durch absorbierende Randschichten ersetzt werden konnten. Zusammen mit einem bestehenden Schlitz in der Probe besitzt diese eine gewisse Ähnlichkeit zu einer oberflächennahen Tunnelumgebung. Die obere Seite eines rechteckigen Lochs innerhalb der Probe konnte sowohl mit einem zweidimensionalen als auch mit einem dreidimensionalen Inversionsmodell identifiziert werden. Eine zusätzliche Inversion mit dem dreidimensionalen Modell der Probe ermöglichte auch, dass die simultane Approximation der Quellfunktion mit realen Daten validiert werden konnte.

Der Einsatz der Full-Waveform-Inversion besitzt das Potential die Vorauserkundung im maschinellen Tunnelbau zu verbessern, da durch die Untersuchung von mehr Wellenformen auch mehr Informationen über die Störungen analysiert werden und Messanordnungen mit räumlich verteilten Quellen und Empfängern eingesetzt werden können. Um sicherzustellen, dass mehr Informationen zu potentiellen Störungen verarbeitet werden als bei der Verwendung von Migrationsmethoden, sollten auch Messanordnungen verwendet werden, welche die Aufnahme von seismischen Daten ermöglichen, welche zusätzliche Informationen zu den Störungen enthalten. Ansätze der Full-Waveform-Inversion, welche die Wellenausbreitung und gegebenenfalls auch die adjungierte Wellenausbreitung im Frequenzbereich approximieren, besitzen gegenüber Zeitbereichsansätzen Vorteile bei der Verwendung von mehreren Quellen und durch den intuitiven Einsatz des Multi-Skalen-Ansatzes kann die Nichtlinearität des inversen Problems reduziert werden. Die Wahl des Ansatzes der Full-Waveform-Inversion sollte neben der Messanordnung auch anhand von weiteren Gegebenheiten erfolgen. Die Untersuchung und Entwicklung von Regularisierungsmethoden, um physikalisch sinnvolle und vereinfachte Bodenmodelle rekonstruieren zu können, erscheint zweckmäßig, da weniger Fehler bei der Interpretation der Ergebnisse entstehen könnten. Strategien, um bei der Full-Waveform-Inversion neue Seismogramme fortlaufend einzubeziehen, müssten untersucht werden, damit die Vorteile einer kontinuierlichen Vorauserkundung genutzt werden können. Eine Kombination der Full-Waveform-Inversion mit anderen Vorauserkundungsmethoden besitzt das Potential die Uneindeutigkeit des inversen Problems zu reduzieren und somit die Detektion von Störkörpern zu verbessern.

## A. Anhang

### A.1. Gauß-Legendre-Integrationspunkte

| $p$ | $\xi_1^i$                    | $w_i$                            |
|-----|------------------------------|----------------------------------|
| 1   | -0.5773502691896257645091488 | 1                                |
|     | 0.5773502691896257645091488  | 1                                |
| 2   | -0.7745966692414833770358531 | 0.555555555555555555555555555556 |
|     | 0                            | 0.888888888888888888888888888889 |
|     | 0.7745966692414833770358531  | 0.555555555555555555555555555556 |
| 3   | -0.8611363115940525752239465 | 0.347854845137453857373064       |
|     | -0.3399810435848562648026658 | 0.652145154862546142626936       |
|     | 0.3399810435848562648026658  | 0.652145154862546142626936       |
|     | 0.8611363115940525752239465  | 0.347854845137453857373064       |
| 4   | -0.9061798459386639927976269 | 0.236926885056189087514264       |
|     | -0.5384693101056830910363144 | 0.478628670499366468041292       |
|     | 0                            | 0.568888888888888888888888888889 |
|     | 0.5384693101056830910363144  | 0.478628670499366468041292       |
|     | 0.9061798459386639927976269  | 0.236926885056189087514264       |
| 5   | -0.9324695142031520278123016 | 0.171324492379170345040296       |
|     | -0.6612093864662645136613996 | 0.360761573048138607569834       |
|     | -0.2386191860831969086305017 | 0.467913934572691047389870       |
|     | 0.2386191860831969086305017  | 0.467913934572691047389870       |
|     | 0.6612093864662645136613996  | 0.360761573048138607569834       |
|     | 0.9324695142031520278123016  | 0.171324492379170345040296       |
| 6   | -0.9491079123427585245261897 | 0.129484966168869693270611       |
|     | -0.7415311855993944398638648 | 0.279705391489276667901468       |
|     | -0.4058451513773971669066064 | 0.381830050505118944950370       |
|     | 0                            | 0.417959183673469387755102       |
|     | 0.4058451513773971669066064  | 0.381830050505118944950370       |
|     | 0.7415311855993944398638648  | 0.279705391489276667901468       |
|     | 0.9491079123427585245261897  | 0.129484966168869693270611       |

Tabelle A.1.: Gauß-Legendre-Integrationspunkte  $\xi_1^i$  und Gewichtungsfaktoren  $w_i$  für verschiedene Ansatzgrade  $p$  der Ansatzfunktionen eines eindimensionalen Elements mit dem Wertebereich  $\xi_1 \in [-1, 1]$  (Szabó u. Babuška, 2011, Anhang B.1).

## A.2. Gauß-Legendre-Integrationspunkte für Dreieckelemente

| $p$ | $\xi_1^{D,i}$  | $\xi_2^{D,i}$   | $w_i^D$  |
|-----|--|---|--|
| 1   | 0.3333333333333333   | 0.3333333333333333  | 1  |
| 2   | 0.6666666666666667<br>0.1666666666666667<br>0.1666666666666667   | 0.1666666666666667<br>0.6666666666666667<br>0.1666666666666667  | 0.3333333333333333<br>0.3333333333333333<br>0.3333333333333333   |
| 3   | 0.816847572980459<br>0.091576213509771<br>0.091576213509771<br>0.108103018168070<br>0.445948490915965<br>0.445948490915965   | 0.091576213509771<br>0.816847572980459<br>0.109951743655322<br>0.445948490915965<br>0.108103018168070<br>0.445948490915965  | 0.109951743655322<br>0.109951743655322<br>0.109951743655322<br>0.223381589678011<br>0.223381589678011<br>0.223381589678011   |
| 4   | 0.124949503233232<br>0.437525248383384<br>0.437525248383384<br>0.797112651860071<br>0.797112651860071<br>0.165409927389841<br>0.165409927389841<br>0.037477420750088<br>0.037477420750088  | 0.437525248383384<br>0.124949503233232<br>0.437525248383384<br>0.165409927389841<br>0.037477420750088<br>0.037477420750088<br>0.797112651860071<br>0.797112651860071<br>0.165409927389841<br>0.165409927389841  | 0.205950504760887<br>0.205950504760887<br>0.205950504760887<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223<br>0.063691414286223   |
| 5   | 0.873821971016996<br>0.063089014491502<br>0.063089014491502<br>0.501426509658179<br>0.249286745170910<br>0.249286745170910<br>0.636502499121399<br>0.636502499121399<br>0.310352451033785<br>0.310352451033785<br>0.053145049844816<br>0.053145049844816 | 0.063089014491502<br>0.873821971016996<br>0.063089014491502<br>0.249286745170910<br>0.501426509658179<br>0.249286745170910<br>0.310352451033785<br>0.053145049844816<br>0.053145049844816<br>0.636502499121399<br>0.636502499121399<br>0.310352451033785<br>0.310352451033785 | 0.050844906370207<br>0.050844906370207<br>0.050844906370207<br>0.116786275726379<br>0.116786275726379<br>0.116786275726379<br>0.082851075618374<br>0.082851075618374<br>0.082851075618374<br>0.082851075618374<br>0.082851075618374<br>0.082851075618374 |

Tabelle A.2.: Gauß-Legendre-Integrationspunkte  $\xi_1^{D,i}$  und  $\xi_2^{D,i}$  sowie die zugehörigen Gewichtungsfaktoren  $w_i^D$  für verschiedene Ansatzgrade  $p$  der Ansatzfunktionen eines Dreieckelements, welche für den Raum  $\Omega_{\text{ref}}^D = \{(\xi_1, \xi_2) | 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$  definiert sind. Die Integrationspunkte und Gewichtungsfaktoren entstammen der Veröffentlichung von Cowper (1973), wobei eine Selektion der Integrationspunkte für die einzelnen Ansatzgrade durchgeführt sowie die Zuordnung zu den Ansatzgraden  $p$  für die vorliegende Anwendung angepasst wurde.

### A.3. Verwendete Software und Programmiersprachen

Die programmiertechnische Umsetzung von dem Ansatz der Finite-Elemente-Methode, welcher in Kapitel 3 vorgestellt wurde, fand mit der Programmiersprache *Java* statt. Dazu wurde eine bestehende Programmierung von Prof. Dr.-Ing. Matthias Baitsch (Hochschule Bochum) verwendet, wobei diese Programmierung für die Verwendung von den zweidimensionalen Dreieckselementen (siehe Abschnitt 3.3.2) sowie den dreidimensionalen Hexaeder- und Prismenelementen (siehe Abschnitt 3.3.3) für den Einsatz von hierarchischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung erweitert werden musste. Dabei war eine der wesentlichen Herausforderungen die Sicherstellung der Konformität der Flächenmoden von aneinandergrenzenden dreidimensionalen Elementen. Die Programmierung greift auch auf weitere Programmpakete zu, um beispielsweise den PARDISO-Solver (Schenk u. Gärtner, 2004) zu verwenden. Neben der Implementierung der Methode der Perfectly-Matched-Layer, wurden auch unterschiedliche Materialmodelle implementiert. Des Weiteren wurde auch der Inversionsalgorithmus in *Java* umgesetzt. Dabei konnten bestehende Strukturen der Programmierung für den Aufbau von dem Algorithmus verwendet werden, wobei die erste Implementierung der Full-Waveform-Inversion in die *Java*-Programmierung von Musayev (2017) als Grundlage für die durchgeführten Erweiterungen und Untersuchungen fungierte. Die Vorteile der bestehenden *Java*-Programmierung für die Umsetzung der Full-Waveform-Inversion sind, dass im Vergleich zu zahlreicher anderer Software (sowohl kommerzielle als auch nichtkommerzielle) ein höheres Maß an Flexibilität gegeben ist und die bestehenden Strukturen eine Erweiterung der Software begünstigen. Dahingegen sind zwei Nachteile, dass es einerseits nur wenige Anwender gibt, wodurch die Möglichkeiten zum anwendungsspezifischen Austausch limitiert sind, und andererseits, dass sich zwar mit *Java* Berechnungsschritte auf einem Prozessor gut parallelisieren lassen, jedoch kein einfach implementierbares Softwarepaket für eine MPI (engl. *Message Passing Interface*) verfügbar ist, womit Berechnungen über mehrere Prozessoren parallelisiert werden könnten.

Um im Zeitbereich die Wellenausbreitung betrachten (vergleiche Abbildung 2.9) sowie um Referenzwellenformen approximieren zu können, wurden der SPECFEM2D und SPECFEM3D Cartesian Code verwendet, welche in Unterabschnitt 2.4.3 bereits eingeführt wurden und auf der Spektrale-Elemente-Methode basieren (Komatitsch u. Vilotte, 1998; Komatitsch u. Tromp, 2002a,b; Tromp u. a., 2008; Xie u. a., 2014).

Die unterschiedlichen Finite-Elemente-Netze, welche für die Berechnungen mit dem vorgestellten Ansatz der Finite-Elemente-Methode und welche für die Approximationen mittels des SPECFEM2D und des SPECFEM3D Cartesian Codes verwendet wurden, wurden mit der Version 3.0.6 der Open-Source-Software *Gmsh* (Geuzaine u. Remacle, 2009) generiert. Jedoch könnten generell auch andere Programme für die Netzgenerierung verwendet werden.

Für die Visualisierung von approximierten zweidimensionalen Wellenfeldern wurde die Open-Source-Software ParaView (2017) verwendet. Dabei wurde für die Darstellung nicht das Finite-Elemente-Netz verwendet, welches für die Berechnungen eingesetzt wurde, da die verwendeten Ansatzfunktionen höherer Ordnung bei ParaView (2017) nicht verfügbar sind. Stattdessen wurden zusätzlich zu den Verschiebungen an den Knoten die berechneten Wellenfelder für eine angemessene Anzahl an Punkten ausgewertet. Die Verschiebungen der Bereiche zwischen den Knoten und den Punkten werden über eine lineare Interpolation der entsprechenden Verschiebungen der Knoten und Punkte angenähert, wozu die Delaunay-Triangulierung, bei welcher über eine Punktmenge ein Netz aus Dreieckselementen erstellt wird, eingesetzt wird. Die Anzahl der zusätzlichen Punkte wurde mit steigendem Ansatzgrad der hierarchischen An-

satzfunktionen auch immer entsprechend erhöht. Da über die Darstellung der Wellenfelder nur eine qualitative Veranschaulichung und keine quantitative Auswertung stattfindet, ist diese Vorgehensweise vertretbar.

Für die Visualisierung der dreidimensionalen Wellenfelder wurde hingegen die grafische Benutzeroberfläche verwendet, welche in der bestehenden *Java*-Programmierung der Finite-Elemente-Methode vorhanden war. Dabei wurden für die Darstellungen auch die selben Ansatzfunktionen verwendet, welche für die Berechnung eingesetzt wurden.

Die zweidimensionale und dreidimensionale räumliche Änderung der Eigenschaften von den betrachteten Tunnelumgebungen und den Inversionsgebieten der Probe des kleinskaligen Laborexperiments wurden mit ParaView (2017) visualisiert, wobei auch die zugehörigen Grafiken in dieser Arbeit mit dieser Software erstellt wurden.

Für die Generierung der Datenbanken, in welchen die Wellenformen gespeichert wurden, welche mit dem SPEC-FEM3D Cartesian Code für unterschiedliche Kombinationen von Wellengeschwindigkeiten und für unterschiedliche Kombinationen von Qualitätsfaktoren für das Modell der Probe approximiert wurden, wurden Skripte mit der Programmiersprache *Python* erstellt. Mit *Python*-Skripten wurden die Datenbanken auch für die Identifizierung der Eigenschaften der Probe ausgewertet. In diesem Zusammenhang fand auch mit *Python*-Skripten eine Aufbereitung der Messdaten (Null-Punkt-Verschiebung, Bandpassfilter, Skalierung und Entfernung des Zeitversatzes) statt.

Für die Steuerung des Positionierungssystems des optischen Laserkopfs, die Steuerung des Ultraschallwandlers sowie für die Aufnahme der Messdaten des kleinskaligen Versuchsaufbaus wurde von der Arbeitsgruppe „Mechanik adaptiver Systeme“ (Ruhr-Universität Bochum) mit der Software MATLAB (2019) eine grafische Benutzeroberfläche erstellt, welche für die Messungen verwendet wurde.

Weitere Skripte für die Vorbereitung und Verarbeitung von Daten wurden überwiegend mit *Java* und MATLAB (2021) erstellt. Die Auswertung der räumlichen Änderung der Eigenschaften entlang einer Linie, wie in Abbildung 6.4, wurde hingegen mit ParaView (2017) durchgeführt.

Das Zeichnen von Graphen sowie das Erstellen von veranschaulichenden Grafiken wurden über das *TikZ*-Paket mit der Open-Source-Software  $\text{\LaTeX}$  realisiert, welche auch für das Verfassen dieser Arbeit verwendet wurde. Beim Zeichnen der Wellenformen musste die teilweise sehr hohe Anzahl an Zeitschritten reduziert werden, was jedoch bei der Veranschaulichung der Wellenformen zu keinen visuell erkennbaren Unterschieden geführt hat. Des Weiteren wurden mit *TikZ* auch die zusätzlich veranschaulichenden Elemente bei den Grafiken der Wellenfelder und der Inversionsergebnisse hinzugefügt, wie beispielsweise die Umrandungen, Koordinatensysteme, Abmaße, Legenden und weitere Beschriftungen. Die farblichen Verläufe zur Darstellung der Änderung der Summe der Fehlerquadrate in Abbildung 7.9 und Abbildung 7.17 wurden mit MATLAB (2021) erstellt, während die Beschriftungen über *TikZ* ergänzt wurden.

Entwicklungsumgebungen für die unterschiedlichen Programmiersprachen und weitere Software wurden verwendet, werden aber nicht genauer benannt, da diese keinen Einfluss auf die erzielten Ergebnisse der Forschungsarbeit und die zugehörige Dokumentation haben sollten.

## Literaturverzeichnis

- [Abramowitz u. Stegun 1964] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards, 1964.
- [Ainsworth u. Coyle 2003] Ainsworth, Mark; Coyle, Joe: Hierarchic finite element bases on unstructured tetrahedral meshes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), Nr. 14, S. 2103–2130.
- [Ajo-Franklin 2005] Ajo-Franklin, Jonathan B.: Frequency-domain Modeling Techniques for the Scalar Wave Equation: An Introduction. In: *Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory* (2005).
- [Amberg Technologies AG 2023] Amberg Technologies AG: *Markteinführung des neuen TSP Impact*. <https://ambergtechnologies.com/de/single/markteinfuehrung-des-neuen-tsp-impact> – [Online: Zugriff am 30.10.2023].
- [Asnaashari u. a. 2013] Asnaashari, Amir; Brossier, Romain; Garambois, Stéphane; Audebert, François; Thore, Pierre; Virieux, Jean: Regularized seismic full waveform inversion with prior model information. In: *Geophysics* 78 (2013), Nr. 2, S. R25–R36.
- [Auer u. a. 2013] Auer, Ludwig; Nuber, André Marc; Greenhalgh, Stewart A.; Maurer, Hansruedi; Marelli, Stefano: A critical appraisal of asymptotic 3D-to-2D data transformation in full-waveform seismic crosshole tomography. In: *Geophysics* 78 (2013), 10, Nr. 6, S. R235–R247.
- [Backus u. Gilbert 1968] Backus, George; Gilbert, Freeman: The Resolving Power of Gross Earth Data. In: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16 (1968), Oktober, Nr. 2, S. 169–205.
- [Backus u. a. 1970] Backus, George; Gilbert, Freeman; Bullard, Edward C.: Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 266 (1970), Nr. 1173, S. 123–192.
- [Bamberger u. a. 1977] Bamberger, A.; Chavent, G.; Lailly, P.: Une application de la théorie du contrôle à un problème inverse de sismique. In: *Annales de Géophysique* 33 (1977), S. 183–200.
- [Bamberger u. a. 1979] Bamberger, A.; Chavent, G.; Lailly, P.: About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations – application to the interpretation of seismic profiles. In: *Applied Mathematics and Optimization* 5 (1979), Nr. 1, S. 1–47.
- [Bamberger u. a. 1982] Bamberger, A.; Chavent, G.; Hemon, Ch.; Lailly, P.: Inversion of normal incidence seismograms. In: *Geophysics* 47 (1982), Nr. 5, S. 757–770.

- [Bentham u. a. 2018] Bentham, Hannah L. M.; Morgan, Joanna V.; Angus, Douglas A.: Investigating the use of 3-D full-waveform inversion to characterize the host rock at a geological disposal site. In: *Geophysical Journal International* 215 (2018), September, Nr. 3, S. 2035–2046.
- [Berenger 1994] Berenger, Jean-Pierre: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), Nr. 2, S. 185–200.
- [Bergmeister u. Reinhold 2017] Bergmeister, Konrad; Reinhold, Chris: Learning and optimization from the exploratory tunnel – Brenner Base Tunnel. In: *Geomechanics and Tunnelling* 10 (2017), Nr. 5, S. 467–476.
- [Bharadwaj u. a. 2017] Bharadwaj, Pawan; Drijkoningen, Guy; Mulder, Wim; Thorbecke, Jan; Neduczka, Boriszlav; Jenneskens, Rob: A shear-wave seismic system using full-waveform inversion to look ahead of a tunnel-boring machine. In: *Near Surface Geophysics* 15 (2017), Nr. 3, S. 210–225.
- [Bleistein 1986] Bleistein, Norman: Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation. In: *Geophysical Prospecting* 34 (1986), Nr. 5, S. 686–703.
- [Bohlen u. a. 2007] Bohlen, Thomas; Lorang, Ulrich; Rabbel, Wolfgang; Müller, Christof; Giese, Rüdiger; Lüth, Stefan; Jetschny, Stefan: Rayleigh-to-shear wave conversion at the tunnel face—From 3D-FD modeling to ahead-of-drill exploration. In: *Geophysics* 72 (2007), Oktober, Nr. 6, S. T67–T79.
- [Bretaudeau u. a. 2011] Bretaudeau, François; Leparoux, Donatienne; Durand, Olivier; Abraham, Odile: Small-scale modeling of onshore seismic experiment: A tool to validate numerical modeling and seismic imaging methods. In: *Geophysics* 76 (2011), November, Nr. 5, S. T101–T112.
- [Bretaudeau u. a. 2013] Bretaudeau, François; Brossier, Romain; Leparoux, Donatienne; Abraham, Odile; Virieux, Jean: 2D elastic full-waveform imaging of the near-surface: application to synthetic and physical modelling data sets. In: *Near Surface Geophysics* 11 (2013), Nr. 3, S. 307–316.
- [Broere 2016] Broere, Wout: Urban underground space: Solving the problems of today’s cities. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 55 (2016), S. 245–248.
- [Brossier u. a. 2009] Brossier, Romain; Operto, Stéphane; Virieux, Jean: Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. In: *Geophysics* 74 (2009), Dezember, Nr. 6, S. WCC105–WCC118.
- [Brossier u. a. 2010a] Brossier, Romain; Etienne, Vincent; Operto, Stéphane; Virieux, Jean: Frequency-Domain Numerical Modelling of Visco-Acoustic Waves Based on Finite-Difference and Finite-Element Discontinuous Galerkin Methods. Kapitel 7, S. 125–158 in: Dissanayake, Don (Hrsg.): *Acoustic Waves*. Rijeka: IntechOpen, 2010.
- [Brossier u. a. 2010b] Brossier, Romain; Operto, Stéphane; Virieux, Jean: Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion? In: *Geophysics* 75 (2010), Nr. 3, S. R37–R46.
- [Brückl u. a. 2008] Brückl, Ewald; Chwatal, Werner; Mertl, Stefan; Radinger, Alexander: Exploration Ahead of a Tunnel Face by TSWD – Tunnel Seismic While Drilling. In: *Geomechanics and Tunnelling* 1 (2008), Nr. 5, S. 460–465.



- [Butz 2009] Butz, Tilman: *Fouriertransformation für Fußgänger*. 6. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2009.
- [Chen u. a. 2017] Chen, Jianxiong; Zelt, Colin A.; Jaiswal, Priyank: Detecting a known near-surface target through application of frequency-dependent travelttime tomography and full-waveform inversion to P- and SH-wave seismic refraction data. In: *Geophysics* 82 (2017), November, Nr. 1, S. R1-R17.
- [Chien u. Sun 1989] Chien, L. S.; Sun, C. T.: Parallel processing techniques for finite element analysis of nonlinear large truss structures. In: *Computers & Structures* 31 (1989), Nr. 6, S. 1023–1029.
- [Chwatal u. a. 2021] Chwatal, Werner; Domenig, Angela; Kostial, Dieter; Rudel, Thomas; Schlögel, Günter; Katzianer, Erhard; Wagner, Hanns: Review of the “Tunnel Seismic While Drilling” measurements during construction of the Koralm Tunnel at section KAT2. In: *Geomechanics and Tunnelling* 14 (2021), Nr. 5, S. 616–625.
- [Clauser 2016] Clauser, Christoph: *Einführung in die Geophysik: Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde*. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [Clauser 2018] Clauser, Christoph: *Grundlagen der angewandten Geophysik – Seismik, Gravimetrie*. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum, 2018.
- [Courant u. a. 1928] Courant, Richard; Friedrichs, Kurt; Lewy, Hans: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), S. 32–74.
- [Cowper 1973] Cowper, G. R.: Gaussian quadrature formulas for triangles. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), Nr. 3, S. 405–408.
- [Dahlen u. Jeroen 1998] Dahlen, Francis Anthony; Tromp, Jeroen: *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, 1998.
- [d’Elia u. a. 2011] d’Elia, Sergio; De Marco, Salvatore; Mongelli, Domenico W.: A methodology for the sizing and positioning of emergency exits in tunnels. In: *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 20 (2011), S. 41–48.
- [Dickmann u. Sander 1996] Dickmann, Thomas; Sander, Bernhard K.: Drivage concurrent tunnel seismic prediction (TSP). In: *Felsbau* 14 (1996), Nr. 6, S. 406–411.
- [Dickmann 2014] Dickmann, Thomas: 3D Tunnel Seismic Prediction: A next generation tool to characterize rock mass condition ahead of the tunnel face. In: *Journal Rock Mechanics & Tunnelling Technology* 20 (2014), S. 35–47.
- [Dickmann u. a. 2019] Dickmann, Thomas; Krueger, D.; Hecht-Méndez, J.: Contribution of continuous geophysical measurements to the success of tunnelling. In: Peila, D. (Hrsg.); Viggiani, G. (Hrsg.); Celestino, T. (Hrsg.): *Tunnels and Underground Cities: Engineering and Innovation Meet Archaeology, Architecture and Art*. London: Taylor & Francis Group, 2019.
- [Festa u. a. 2005] Festa, Gaetano; Delavaud, Elise; Vilotte, Jean-Pierre: Interaction between surface waves and absorbing boundaries for wave propagation in geological basins: 2D numerical simulations. In: *Geophysical Research Letters* 32 (2005), Nr. 20, L20306.

- [Fichtner u. a. 2009] Fichtner, Andreas; Kennett, Brian L. N.; Igel, Heiner; Bunge, Hans-Peter: Full seismic waveform tomography for upper-mantle structure in the Australasian region using adjoint methods. In: *Geophysical Journal International* 179 (2009), Dezember, Nr. 3, S. 1703–1725.
- [Fichtner 2011] Fichtner, Andreas: *Full seismic waveform modelling and inversion*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011.
- [Fletcher u. Reeves 1964] Fletcher, Roger; Reeves, Colin M.: Function minimization by conjugate gradients. In: *The Computer Journal* 7 (1964), Januar, Nr. 2, S. 149–154.
- [Freund 1998] Freund, Lambert B.: *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [Futterman 1962] Futterman, Walter I.: Dispersive body waves. In: *Journal of Geophysical Research (1896-1977)* 67 (1962), Nr. 13, S. 5279–5291.
- [Geuzaine u. Remacle 2009] Geuzaine, Christophe; Remacle, Jean-François: Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), Nr. 11, S. 1309–1331.
- [Gong u. a. 2016] Gong, Qiuming; Yin, Lijun; Ma, Hongsu; Zhao, Jian: TBM tunnelling under adverse geological conditions: An overview. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 57 (2016), S. 4–17 (Tunnel Boring Machines in Difficult Grounds).
- [Gosselin-Cliche u. Giroux 2014] Gosselin-Cliche, Benjamin; Giroux, Bernard: 3D frequency-domain finite-difference viscoelastic-wave modeling using weighted average 27-point operators with optimal coefficients. In: *Geophysics* 79 (2014), Mai, Nr. 3, S. T169–T188.
- [Gross u. a. 2018] Gross, Dietmar; Hauger, Werner; Wriggers, Peter: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 10. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2018.
- [Gross u. a. 2021] Gross, Dietmar; Hauger, Werner; Schröder, Jörg; Wriggers, Peter: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. 14. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.
- [Herrenknecht AG 2023] Herrenknecht AG: *Double Shield TBM for the Coca Codo Sinclair Hydropower Project in San Miguel, Ecuador, Ø 9040 mm*. <https://www.herrenknecht.com/de/presseservice/> – [Online: Zugriff am 24.11.2023].
- [Hestenes u. Stiefel 1952] Hestenes, Magnus R.; Stiefel, Eduard: Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49 (1952), Dezember, Nr. 6, S. 409–436.
- [Hu u. a. 2018] Hu, Wenyi; Chen, Jiefu; Liu, Jianguo; Abubakar, Aria: Retrieving low wavenumber information in FWI: An overview of the cycle-skipping phenomenon and solutions. In: *IEEE Signal Processing Magazine* 35 (2018), Nr. 2, S. 132–141.
- [Igel u. a. 1996] Igel, Heiner; Djikpéssé, Hugues; Tarantola, Albert: Waveform inversion of marine reflection seismograms for P impedance and Poisson's ratio. In: *Geophysical Journal International* 124 (1996), Februar, Nr. 2, S. 363–371.

- [Igel 2016] Igel, Heiner: *Computational Seismology: A Practical Introduction*. 1. Auflage, Oxford University Press, 2016.
- [ITA 2009] International Tunnelling and Underground Space Association – ITA Working Group 19 – Conventional Tunnelling: General Report on Conventional Tunnelling Method. ITA Report 2 (2009).
- [ITA 2015] International Tunnelling and Underground Space Association – ITA Working Group 2 – Research: Strategy for Site Investigation of Tunnelling Projects. ITA Report 15 (2015).
- [ITA 2018] International Tunnelling and Underground Space Association – ITAtech Activity Group – Investigation: Geophysical Ahead Investigation Methods – Seismic Methods. ITAtech Report 10 (2018).
- [Jensen u. a. 2011] Jensen, Finn B.; Kuperman, William A.; Porter, Michael B.; Schmidt, Henrik: *Computational ocean acoustics*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Jetschny u. a. 2010] Jetschny, Stefan; Bohlen, Thomas; De Nil, Denise: On the propagation characteristics of tunnel surface-waves for seismic prediction. In: *Geophysical Prospecting* 58 (2010), Nr. 2, S. 245–256.
- [Julier u. Uhlmann 1997] Julier, Simon J.; Uhlmann, Jeffrey K.: New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: Kadar, Ivan (Hrsg.); International Society for Optics and Photonics (Veranst.): *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*, 3068, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 1997, S. 182–193.
- [Kneib u. a. 2000] Kneib; Kassel; Lorenz: Automatic seismic prediction ahead of the tunnel boring machine. In: *First Break* 18 (2000), Nr. 7, S. 295–302.
- [Kogler 2008] Kogler, Kurt: Technische Möglichkeiten und praktische Erfahrungen für tiefe Erkundungsbohrungen im Tunnelbau. In: *Geomechanics and Tunnelling* 1 (2008), Nr. 5, S. 424–430.
- [Kolsky 1956] Kolsky, H.: LXXI. The propagation of stress pulses in viscoelastic solids. In: *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics* 1 (1956), Nr. 8, S. 693–710.
- [Komatitsch u. Vilotte 1998] Komatitsch, Dimitri; Vilotte, Jean-Pierre: The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 88 (1998), April, Nr. 2, S. 368–392.
- [Komatitsch u. Tromp 2002a] Komatitsch, Dimitri; Tromp, Jeroen: Spectral-element simulations of global seismic wave propagation–I. Validation. In: *Geophysical Journal International* 149 (2002), Mai, Nr. 2, S. 390–412.
- [Komatitsch u. Tromp 2002b] Komatitsch, Dimitri; Tromp, Jeroen: Spectral-element simulations of global seismic wave propagation–II. Three-dimensional models, oceans, rotation and self-gravitation. In: *Geophysical Journal International* 150 (2002), Juli, Nr. 1, S. 303–318.
- [Kuhl 2005] Kuhl, Detlef: *Modellierung und Simulation von Mehrfeldproblemen der Strukturmechanik*, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek, Habilitationsschrift, 2005.

- [Lambrecht 2015] Lambrecht, Lasse: *Forward and inverse modeling of seismic waves for reconnaissance in mechanized tunneling*, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek, Dissertationsschrift, 2015.
- [Lambrecht u. a. 2018] Lambrecht, Lasse; Lamert, Andre; Friederich, Wolfgang; Möller, Thomas; Boxberg, Marc S.: A nodal discontinuous Galerkin approach to 3-D viscoelastic wave propagation in complex geological media. In: *Geophysical Journal International* 212 (2018), November, Nr. 3, S. 1570–1587.
- [Lamert u. Friederich 2019] Lamert, Andre; Friederich, Wolfgang: Full Waveform Inversion for Advance Exploration of Ground Properties in Mechanized Tunneling. In: *International Journal of Civil Engineering* 17 (2019), Januar, Nr. 1, S. 19–32.
- [Lamert 2020] Lamert, Andre: *Tunnel reconnaissance by seismic full waveform inversion*, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek, Dissertationsschrift, 2020.
- [Lamert u. a. 2021] Lamert, Andre; Trapp, Maximilian; Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Hölter, Raoul; Mahmoudi, Elham; Baitsch, Matthias; Friederich, Wolfgang; Nestorović, Tamara; Hackl, Klaus; König, Markus: Advanced Exploration Concepts in Tunnelling; Fortgeschrittene Konzepte für die Vorauserkundung im Tunnelbau. In: *Tunnel* 39 (2021), S. 70–73.
- [Li u. a. 2017] Li, Shuca; Liu, Bin; Xu, Xinji; Nie, Lichao; Liu, Zhengyu; Song, Jie; Sun, Huaifeng; Chen, Lei; Fan, Kerui: An overview of ahead geological prospecting in tunneling. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 63 (2017), S. 69–94.
- [Liu u. a. 2022] Liu, Bin; Gong, Zhifei; Zhang, Fengkai; Xu, Xinji; Zhao, Yang; Chen, Lei: Full-waveform inversion method for tunnel seismic forward prospecting. In: *Geophysical Journal International* 232 (2022), November, Nr. 3, 2186–2204.
- [Lowrie 2007] Lowrie, William: *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press, 2007.
- [Lu u. a. 2015] Lu, Wei; Wu, Jing; Li, Shuca; Xu, Zhenhao; Li, Liping; Zhang, Yanhuan; Zhou, Lun: Application study of the tunnel seismic prediction method in Qiyueshan tunnel. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Material, Mechanical and Manufacturing Engineering*, Atlantis Press, 2015, S. 1725–1729.
- [Mahmoudi u. Hölter 2021] Mahmoudi, Elham; Hölter, Raoul: A model adaptation framework for mechanized tunneling: Subsoil uncertainty consideration from observation to construction. Kapitel 1, S. 1–36 in: Samui, Pijush (Hrsg.); Kumari, Sunita (Hrsg.); Makarov, Vladimir (Hrsg.); Kurup, Pradeep (Hrsg.): *Modeling in Geotechnical Engineering*. Academic Press, 2021.
- [Mahmoudi u. a. 2023] Mahmoudi, Elham; Düllmann, Jan; Heußner, Lukas; Hölter, Raoul; Lamert, Andre; Miro, Shorash; Möller, Thomas; Musayev, Khayal; Riedel, Christopher; Schindler, Steffen; Trapp, Maximilian; Alber, Michael; Baitsch, Matthias; Friederich, Wolfgang; Hackl, Klaus; König, Markus; Mark, Peter; Nestorović, Tamara: Advance Reconnaissance and Optimal Monitoring. Kapitel 2, S. 9–91 in: Meschke, Günther (Hrsg.); Breitenbücher, Rolf (Hrsg.); Freitag, Steffen (Hrsg.); König, Markus (Hrsg.); Thewes, Markus (Hrsg.): *Interaction Modeling in Mechanized Tunneling*. 1. Auflage, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023.

- [Maidl u. a. 2013] Maidl, Bernhard; Herrenknecht, Martin; Maidl, Ulrich; Wehrmeyer, Gerhard: *Maschinelles Tunnelbau im Schildvortrieb*. 2. Auflage, Ernst & Sohn, 2013.
- [Marfurt 1984] Marfurt, Kurt J.: Seismic Modeling: A Frequency-Domain/Finite-Element Approach. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1984*, Society of Exploration Geophysicists, 1984, S. 633–634.
- [Mathew 2008] Mathew, Tarek Poonithara Abraham: *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008 (Lecture Notes in Computational Science and Engineering).
- [MATLAB 2019] MATLAB: *Version 9.7.0.1190202 (R2019b)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2019.
- [MATLAB 2021] MATLAB: *Version 9.10.0.1684407 (R2021a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2021.
- [Meschke 2018] Meschke, Günther: From advance exploration to real time steering of TBMs: A review on pertinent research in the Collaborative Research Center “Interaction Modeling in Mechanized Tunneling”. In: *Underground Space 3* (2018), Nr. 1, S. 1–20.
- [Meschke u. a. 2023] Meschke, Günther (Hrsg.); Breitenbücher, Rolf (Hrsg.); Freitag, Steffen (Hrsg.); König, Markus (Hrsg.); Thewes, Markus (Hrsg.): *Interaction Modeling in Mechanized Tunneling*. 1. Auflage, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023.
- [Min u. a. 2000] Min, Dong-Joo; Shin, Changsoo; Kwon, Byung-Doo; Chung, Seunghwan: Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators. In: *Geophysics* 65 (2000), Januar, Nr. 3, S. 884–895.
- [Möller u. Friederich 2019] Möller, Thomas; Friederich, Wolfgang: Simulation of elastic wave propagation across fractures using a nodal discontinuous Galerkin method—theory, implementation and validation. In: *Geophysical Journal International* 219 (2019), September, Nr. 3, S. 1900–1914.
- [Musayev u. a. 2016] Musayev, Khayal; Lamert, Andre; Hackl, Klaus; Friederich, Wolfgang; Baitsch, Matthias: Predicting the Geological Structure Ahead of a Tunnel Using Full Waveform Inversion - A Blind Test. In: *78th EAGE Conference and Exhibition 2016*, 2016, S. 1–5.
- [Musayev 2017] Musayev, Khayal: *Seismic reconnaissance in a tunnel environment using full waveform inversion*, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek, Dissertationsschrift, 2017.
- [Nguyen u. Nestorović 2016] Nguyen, Luan T.; Nestorović, Tamara: Unscented hybrid simulated annealing for fast inversion of tunnel seismic waves. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 301 (2016), S. 281–299.
- [Nguyen u. Nestorović 2018] Nguyen, Luan T.; Nestorović, Tamara: Reconstructing disturbance zones ahead of the tunnel face by elastic waveform inversion supported by a parametric level-set representation. In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 115 (2018), S. 606–621.

- [Nocedal u. Wright 2006] Nocedal, Jorge; Wright, Stephen: *Numerical optimization*. 2. Auflage, New York: Springer Science & Business Media, 2006 (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering).
- [ParaView 2017] ParaView: *Version 5.4.1-822-g597adef 64-bit*. Clifton Park, New York, USA: Kitware Inc., 2017.
- [Pilant 1979] Pilant, Walter L.: *Elastic waves in the earth*. Netherlands: Elsevier, 1979 (Developments in Solid Earth Geophysics).
- [Pled u. Desceliers 2022] Pled, Florent; Desceliers, Christophe: Review and Recent Developments on the Perfectly Matched Layer (PML) Method for the Numerical Modeling and Simulation of Elastic Wave Propagation in Unbounded Domains. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 29 (2022), Nr. 1, S. 471–518.
- [Polak u. Ribière 1969] Polak, Elijah; Ribière, Gerard: Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. In: *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge* 3 (1969), Nr. R1, S. 35–43.
- [Pratt u. Worthington 1990] Pratt, Robert Gerhard; Worthington, Michael H.: Inverse theory applied to multi-source cross hole tomography. Part 1: Acoustic wave-equation method. In: *Geophysical Prospecting* 38 (1990), Nr. 3, S. 287–310.
- [Pratt 1990] Pratt, Robert Gerhard: Inverse theory applied to multi-source cross hole tomography. Part 2: Elastic wave-equation method. In: *Geophysical Prospecting* 38 (1990), Nr. 3, S. 311–329.
- [Pratt 1999] Pratt, Robert Gerhard: Seismic waveform inversion in the frequency domain; Part 1, Theory and verification in a physical scale model. In: *Geophysics* 64 (1999), 6, Nr. 3, S. 888–901.
- [Pratt u. Shipp 1999] Pratt, Robert Gerhard; Shipp, Richard M.: Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 2: Fault delineation in sediments using crosshole data. In: *Geophysics* 64 (1999), 6, Nr. 3, S. 902–914.
- [Ricker 1953] Ricker, Norman: The form and laws of propagation of seismic wavelets. In: *Geophysics* 18 (1953), Januar, Nr. 1, S. 10–40.
- [Riedel u. a. 2019] Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Hackl, Klaus: Evaluation of source signature during Full Waveform Inversion for seismic reconnaissance in tunneling. In: *PAMM* 19 (2019), Nr. 1, e201900089.
- [Riedel u. a. 2021a] Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Hackl, Klaus: Seismic exploration in tunneling using full waveform inversion with a frequency domain model. In: *PAMM* 20 (2021), Nr. 1, e202000141.
- [Riedel u. a. 2021b] Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Zhu, Hehua; Hackl, Klaus: Acoustic waveform inversion in frequency domain: Application to a tunnel environment. In: *Underground Space* 6 (2021), Nr. 5, S. 560–576.
- [Riedel u. a. 2022] Riedel, Christopher; Mahmoudi, Elham; Trapp, Maximilian; Lamert, Andre; Hölter, Raoul; Zhao, Chenyang; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; König, Markus; Hackl, Klaus; Nestorović, Tamara; Friederich, Wolfgang: A hybrid exploration approach for the

- prediction of geological changes ahead of mechanized tunnel excavation. In: *Journal of Applied Geophysics* 203 (2022), 104684.
- [Riedel u. a. 2023a] Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Hackl, Klaus: Elastic waveform inversion in the frequency domain for an application in mechanized tunneling. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 137 (2023), 105114.
- [Riedel u. a. 2023b] Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Hackl, Klaus: Frequency domain full waveform inversion with small-scale laboratory measurements for reconnaissance in mechanized tunneling. In: *PAMM* 23 (2023), Nr. 1, e202200170.
- [Sattel u. a. 1996] Sattel, Gerd; Sander, B; Amberg, F; Kashiwa, T: Predicting ahead of the face. In: *Tunnels & Tunnelling International* (1996)
- [Schenk u. Gärtner 2004] Schenk, Olaf; Gärtner, Klaus: Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. In: *Future Generation Computer Systems* 20 (2004), Nr. 3, S. 475–487.
- [Schmelzbach u. a. 2016] Schmelzbach, Cédric; Greenhalgh, Stewart; Reiser, Fabienne; Girard, Jean-François; Bretaudeau, François; Capar, Laure; Bitri, Adnand: Advanced seismic processing/imaging techniques and their potential for geothermal exploration. In: *Interpretation* 4 (2016), August, Nr. 4, S. SR1–SR18.
- [Schwarz u. Schierl 2017] Schwarz, Christian; Schierl, Heimo: Integration of reflection seismic data into the documentation during the construction of the Brenner Base Tunnel. In: *Geomechanics and Tunnelling* 10 (2017), Nr. 5, S. 552–560.
- [Shalf 2020] Shalf, John: The future of computing beyond Moore’s Law. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 378 (2020), Nr. 2166, 20190061.
- [Smith u. a. 2019] Smith, James A.; Borisov, Dmitry; Cudney, Harley; Miller, Richard D.; Modrak, Ryan; Moran, Mark; Peterie, Shelby L.; Sloan, Steven D.; Tromp, Jeroen; Wang, Yao: Tunnel detection at Yuma Proving Ground, Arizona, USA – Part 2: 3D full-waveform inversion experiments. In: *Geophysics* 84 (2019), Dezember, Nr. 1, S. B95–B108.
- [Sun u. Yuan 2006] Sun, Wenyu; Yuan, Ya-Xiang: *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*. 1. Auflage, New York: Springer Science+Business Media, 2006.
- [Szabó u. a. 2004] Szabó, Barna; Düster, Alexander; Rank, Ernst: The p-version of the Finite Element Method. Kapitel 5, S. 119–139 in: Stein, Erwin (Hrsg.); de Borst, René (Hrsg.); Hughes, Thomas J.R. (Hrsg.): *Encyclopedia of Computational Mechanics – Volume 1: Fundamentals*. John Wiley & Sons, 2004.
- [Szabó u. Babuška 2011] Szabó, Barna; Babuška, Ivo: *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Tarantola 1984a] Tarantola, Albert: Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. In: *Geophysics* 49 (1984), August, Nr. 8, S. 1259–1266.
- [Tarantola 1984b] Tarantola, Albert: Linearized Inversion of Seismic Reflection Data. In: *Geophysical Prospecting* 32 (1984), April, Nr. 6, S. 998–1015.

- [Tarantola 1986] Tarantola, Albert: A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. In: *Geophysics* 51 (1986), Oktober, Nr. 10, S. 1893–1903.
- [Trapp u. a. 2019] Trapp, Maximilian; Bogoclu, Can; Nestorović, Tamara; Roos, Dirk: Intelligent optimization and machine learning algorithms for structural anomaly detection using seismic signals. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 133 (2019), November, 106250.
- [Trapp u. Nestorović 2020] Trapp, Maximilian; Nestorović, Tamara: Reconstruction of structural anomalies out of seismic measurements by means of a non-deterministic full waveform inversion approach for application in mechanized tunneling. In: *Journal of Applied Geophysics* 182 (2020), 104180.
- [Trapp u. Nestorović 2022] Trapp, Maximilian; Nestorović, Tamara: Non-gradient full waveform inversion approaches for exploration during mechanized tunneling applied to surrogate laboratory measurements. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 120 (2022), 104252.
- [Trapp 2022] Trapp, Maximilian: *Bayesian Full Waveform Inversion for Exploration During Mechanized Tunneling: A Numerical and Experimental Study*, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek, Dissertationsschrift, 2022.
- [Tromp u. a. 2008] Tromp, Jeroen; Komatitsch, Dimitri; Liu, Qinya: Spectral-element and adjoint methods in seismology. In: *Communications in Computational Physics* 3 (2008), Nr. 1, S. 1–32.
- [Červený 2001] Červený, Vlastislav: *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press, 2001.
- [Vigh u. Starr 2008] Vigh, Denes; Starr, E. W.: 3D prestack plane-wave, full-waveform inversion. In: *Geophysics* 73 (2008), Nr. 5, S. VE135–VE144.
- [Virieux u. Operto 2009] Virieux, Jean; Operto, Stéphane: An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. In: *Geophysics* 74 (2009), 11, Nr. 6, S. WCC1–WCC26.
- [Voigt 1910] Voigt, Woldemar: *Lehrbuch der Kristallphysik: (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Leipzig: B. G. Teubner, 1910.
- [Wang u. Ling 2016] Wang, De-Ying; Ling, Yun: Phase-shift-and phase-filtering-based surface-wave suppression method. In: *Applied Geophysics* 13 (2016), Nr. 4, S. 614–620.
- [Wang u. a. 2021] Wang, Kai; Guo, Meiyan; Xiao, Qingxia; Ma, Chuanyi; Zhang, Lingli; Xu, Xinji; Li, Ming; Li, Ningbo: Frequency Domain Full Waveform Inversion Method of Acquiring Rock Wave Velocity in Front of Tunnels. In: *Applied Sciences* 11 (2021), Nr. 14, 6330.
- [Wang 2015] Wang, Yanghua: Frequencies of the Ricker wavelet. In: *Geophysics* 80 (2015), Februar, Nr. 2, S. A31–A37.
- [Wang u. a. 2019] Wang, Yao; Miller, Richard D.; Peterie, Shelby L.; Sloan, Steven D.; Moran, Mark L.; Cudney, Harley H.; Smith, James A.; Borisov, Dmitri; Modrak, Ryan; Tromp, Jeroen: Tunnel detection at Yuma Proving Ground, Arizona, USA – Part 1: 2D full-waveform inversion experiment. In: *Geophysics* 84 (2019), Januar, Nr. 1, S. B95–B105.
- [Williams 1999] Williams, Earl G.: *Fourier Acoustics*. London: Academic Press, 1999.



- [Xie u. a. 2014] Xie, Z.; Komatitsch, D.; Martin, R.; Matzen, R.: Improved forward wave propagation and adjoint-based sensitivity kernel calculations using a numerically stable finite-element PML. In: *Geophysical Journal International* 198 (2014), Nr. 3, S. 1714–1747.
- [Yu u. a. 2021] Yu, Mingyu; Cheng, Fei; Liu, Jiangping; Peng, Daicheng; Tian, Zhijian: Frequency-Domain Full-Waveform Inversion Based on Tunnel Space Seismic Data. In: *Engineering* (2021).
- [Zaglmayr 2006] Zaglmayr, Sabine: *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*, Johannes Kepler University Linz, Dissertationsschrift, 2006.
- [Ziegler 2008] Ziegler, Hans-Jakob: Die Detektionseffizienz von Vorausböhrungen im Tunnelbau. In: *Geomechanics and Tunnelling* 1 (2008), Nr. 5, S. 431–435.
- [Zienkiewicz u. a. 2013] Zienkiewicz, Olgierd C.; Taylor, Robert L.; Zhu, Jianzhong: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7. Auflage, Butterworth-Heinemann, 2013.



## Hinweis auf Vorveröffentlichungen

Nach §11(4) der Promotionsordnung (vom 15.09.2016) der Fakultät für Maschinenbau der Ruhr-Universität Bochum sei darauf hingewiesen, dass Teile dieser Arbeit vorab in englischer Sprache in wissenschaftlichen Fachzeitschriften, Konferenzveröffentlichungen und Buchbeiträgen veröffentlicht wurden. An den Stellen in dieser Arbeit, für welche diese Veröffentlichungen verwendet wurden, wird auf die entsprechenden Veröffentlichungen hingewiesen. Es handelt sich hierbei um die folgenden Veröffentlichungen:

- Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias und Hackl, Klaus: Evaluation of source signature during Full Waveform Inversion for seismic reconnaissance in tunneling. In: *PAMM* 19 (2019), Nr. 1, e201900089.
- Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias und Hackl, Klaus: Seismic exploration in tunneling using full waveform inversion with a frequency domain model. In: *PAMM* 20 (2021), Nr. 1, e202000141.
- Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; Zhu, Hehua und Hackl, Klaus: Acoustic waveform inversion in frequency domain: Application to a tunnel environment. In: *Underground Space* 6 (2021), Nr. 5, S. 560–576.
- Lamert, Andre; Trapp, Maximilian; Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Hölter, Raoul; Mahmoudi, Elham; Baitsch, Matthias; Friederich, Wolfgang; Nestorović, Tamara; Hackl, Klaus; König, Markus: Advanced Exploration Concepts in Tunnelling; Fortgeschrittene Konzepte für die Vorauserkundung im Tunnelbau. In: *Tunnel* 39 (2021), S. 70–73.
- Riedel, Christopher; Mahmoudi, Elham; Trapp, Maximilian; Lamert, Andre; Hölter, Raoul; Zhao, Chenyang; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias; König, Markus; Hackl, Klaus; Nestorović, Tamara und Friederich, Wolfgang: A hybrid exploration approach for the prediction of geological changes ahead of mechanized tunnel excavation. In: *Journal of Applied Geophysics* 203 (2022), 104684.
- Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias und Hackl, Klaus: Elastic waveform inversion in the frequency domain for an application in mechanized tunneling. In: *Tunnelling and Underground Space Technology* 137 (2023), 105114.
- Riedel, Christopher; Musayev, Khayal; Baitsch, Matthias und Hackl, Klaus: Frequency domain full waveform inversion with small-scale laboratory measurements for reconnaissance in mechanized tunneling. In: *PAMM* 23 (2023), Nr. 1, e202200170.
- Mahmoudi, Elham; Düllmann, Jan; Heußner, Lukas; Hölter, Raoul; Lamert, Andre; Miro, Shorash; Möller, Thomas; Musayev, Khayal; Riedel, Christopher; Schindler, Steffen; Trapp, Maximilian; Alber, Michael; Baitsch, Matthias; Friederich, Wolfgang; Hackl, Klaus; König, Markus; Mark, Peter und Nestorović, Tamara: Advance Reconnaissance and Optimal Monitoring. Kapitel 2, S. 9–91 in: Meschke, Günther (Hrsg.); Breitenbücher, Rolf (Hrsg.); Freitag, Steffen (Hrsg.); König, Markus (Hrsg.) und Thewes, Markus (Hrsg.): *Interaction Modeling in Mechanized Tunneling*. 1. Auflage, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023.



## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Christopher Riedel  
Wohnort: Bottrop, Deutschland  
Geburtsdatum: 18. April 1992  
Geburtsort: Essen, Deutschland  
Staatsangehörigkeit: Deutsch

### Beruflicher Werdegang

07/2017 – 12/2023 wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Lehrstuhl für Mechanik – Materialtheorie,  
Ruhr-Universität Bochum, Deutschland

10/2015 – 07/2017 studentische Hilfskraft  
am Lehrstuhl für Mechanik – Kontinuumsmechanik,  
Ruhr-Universität Bochum, Deutschland

09/2014 – 01/2015 vierzehnwöchiges studienorientiertes interdisziplinäres  
Projektpraktikum bei der Siemens AG, Mülheim, Deutschland:  
Abteilung Quality Management in Projects des Bereichs  
Service, Marketing & Implementation

### Universitäre Ausbildung

seit 12/2017 Doktorand an der Fakultät für Maschinenbau,  
Ruhr-Universität Bochum, Deutschland

10/2015 – 07/2017 Master-Studium Maschinenbau,  
Ruhr-Universität Bochum, Deutschland  
Vertiefungsrichtung: Angewandte Mechanik  
Abschluss: Master of Science

10/2011 – 09/2015 Bachelor-Studium Maschinenbau,  
Ruhr-Universität Bochum, Deutschland  
Vertiefungsrichtung: Angewandte Mechanik  
Abschluss: Bachelor of Science

**Schule**

- 08/2008 – 07/2011    Heinrich-Heine-Gymnasium, Bottrop, Deutschland  
Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
- 08/2002 – 07/2008    August-Everding-Realschule, Bottrop, Deutschland  
Abschluss: Fachoberschulreife
- 08/1998 – 07/2002    Paulschule, Bottrop, Deutschland  
Gemeinschaftsgrundschule



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 193**

**ISBN 978-3-935892-71-1**